

N°d'ordre : 2516

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Laurent MICHEL

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

ASYMPTOTIQUES SEMI-CLASSIQUES DE L'AMPLITUDE DE DIFFUSION
POUR DES PERTURBATIONS CAPTIVES

Soutenue le : 25 Juin 2002

Après avis de :

MM. N. BURQ, Professeur, Université Paris XI
D. ROBERT, Professeur, Université de Nantes

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

MM. A. BACHELOT, Professeur, Université Bordeaux I
T. COLIN, Professeur, Université Bordeaux I
N. BURQ, Professeur, Université Paris XI
A. GRIGIS, Professeur, Université Paris XII
V. PETKOV, Professeur, Université Bordeaux I
D. ROBERT, Professeur, Université de Nantes
M. WILLIAMS, Professeur, Université de Chapel Hill

Président
Rapporteur
Examineurs

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à V. Petkov qui a encadré mon travail pendant trois ans et m'a fait profiter de son expérience et de ses connaissances mathématiques. Par l'intérêt des sujets proposés et par leur variété il a largement contribué au bon déroulement de cette thèse. Son enthousiasme fut aussi un élément décisif de ma progression.

En second lieu, je tiens à remercier N. Burq et D. Robert d'avoir accepté de juger ce travail ainsi que pour les remarques qu'ils m'ont faites.

Mes remerciements vont aussi à A. Bachelot, T. Colin, A. Grigis et M. Williams pour avoir accepté de participer à mon jury. En particulier, je suis très sensible à la décision de M. Williams d'avoir intégré ce jury au dernier moment.

T. Colin a permis, il y a trois ans, que je vienne travailler au MAB. Je lui suis particulièrement reconnaissant de m'avoir donné la possibilité de travailler dans un environnement aussi favorable que l'IMB.

De manière générale, je tiens à exprimer ma gratitude à toutes les personnes avec lesquelles j'ai pu avoir des discussions mathématiques. Je pense en particulier à V. Bruneau dont la disponibilité est exemplaire et à R. Carles.

La rédaction de ce mémoire doit beaucoup à Franck qui est venu régulièrement à mon secours quand ma maîtrise de \TeX était mise en défaut. Après son départ, la relève a été assurée avec brio par Mohamed qui m'a aussi permis d'enrichir mon vocabulaire de quelques expressions bordelaises.

Je n'oublie pas les nombreuses personnes que j'ai côtoyées pendant ma thèse : David, Ben, Julien, Fabrice,... ainsi que tous les membres de l'équipe de foot. Par leur présence, ils font de l'IMB un lieu de travail plus qu'agréable.

Mes grands-parents, m'ont accueilli et soutenu pendant la première année de ma thèse. Je tiens à leur exprimer ici ma gratitude.

Enfin, je tiens à remercier Charlotte de m'avoir supporté pendant ces trois ans. Sa présence à mes côtés m'a permis de surmonter bien des difficultés. J'espère pouvoir lui apporter le même réconfort dans les trois ans à venir.

Table des matières

1	Préliminaires	17
1.1	Analyse microlocale semiclassique	17
1.1.1	Opérateurs pseudo-différentiels semiclassique : définitions et propriétés générales	17
1.1.2	Lemme d'Egorov dans des espaces de Sobolev à poids	19
1.1.3	Front d'onde semiclassique	26
1.1.4	Composition d'opérateurs Intégraux de Fourier et d'opérateurs pseudo-différentiels	29
1.2	Rappels de théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger	34
1.2.1	Résultats généraux	34
1.2.2	Représentation de la matrice de diffusion.	35
1.2.3	Estimations microlocales de la résolvante dans le cas non-captif	40
1.2.4	Résonances	42
1.3	Étude des trajectoires classiques	44
1.3.1	Rappels de mécanique classique	45
1.3.2	Étude du flot Hamiltonien	46
1.3.3	Une nouvelle hypothèse d'échappement	49
2	Asymptotique de l'amplitude de diffusion en norme L^1 d'énergie	57
2.1	Estimation intégrale de la résolvante	58
2.2	Localisation spatiale	64
2.3	Localisation en temps courts	71
2.3.1	Première localisation	71
2.3.2	Seconde localisation	74
2.4	Méthode de la phase stationnaire	77

TABLE DES MATIÈRES

2.4.1	Approximation du groupe unitaire $e^{ih^{-1}tP(h)}$	77
2.4.2	Fin de la démonstration du Théorème 2.1	78
3	Asymptotique de l'amplitude de diffusion à énergie fixée	81
3.1	Énoncé des principaux résultats	81
3.2	Un exemple de potentiel faiblement captif	86
3.3	Localisation spatiale	91
3.4	Modification du potentiel	98
3.4.1	Estimation de la résolvante dans le cas captif	98
3.4.2	Démonstration du Théorème 3.2	99
3.5	Asymptotique à énergie fixée	102
3.5.1	Localisation en temps courts	102
3.5.2	Seconde localisation	105
3.5.3	Approximation du groupe unitaire et méthode de la phase stationnaire	106
4	Estimation du résidu de l'amplitude de diffusion	109
4.1	Introduction	109
4.2	Prolongement méromorphe de l'amplitude de diffusion	111
4.3	Estimation du résidu	118
4.3.1	Préliminaires	118
4.3.2	Démonstration du Théorème 4.2	120

Introduction

Le cadre général de cette thèse est celui de l'analyse semiclassique. Nous nous intéressons à l'opérateur de Schrödinger semiclassique pour des perturbations du Laplacien qui sont régulières et décroissantes à l'infini. Plus précisément, nous étudions le comportement asymptotique de l'amplitude de diffusion associée à l'opérateur de Schrödinger, quand la constante de Planck h tend vers 0. Le travail que nous allons exposer repose sur les articles [43], [41], [42] et [44]. Avant d'aborder les résultats principaux de cette thèse, nous allons rappeler quelques travaux fondamentaux concernant le problème que nous étudions.

Considérons un opérateur de Schrödinger semiclassique $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x)$ sur \mathbb{R}^n et notons $\sigma_P(x, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$ son symbole. Nous examinons le cas où $V(x)$ est un potentiel appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et le paramètre $h \in]0, 1]$ est destiné à tendre vers 0. Si le potentiel V est borné, l'opérateur $P(h)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec domaine $D(P(h)) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Nous nous intéressons à la théorie de la diffusion pour la paire $(P(h), P_0(h))$ où $P_0(h) = -h^2\Delta$ est le Laplacien libre sur \mathbb{R}^n . Pour des potentiels de courte portée (c'est-à-dire $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\rho}$ pour un certain $\rho > 1$), nous savons (cf. par exemple, Agmon [1] ou Reed-Simon [50] pour des hypothèses minimales), que les opérateurs d'ondes associés à la paire $(P(h), P_0(h))$ sont complets, de sorte que l'opérateur de diffusion $S(h) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est bien défini. De plus, cet opérateur se diagonalise : pour tout $\lambda > 0$, il existe un opérateur unitaire $S(\lambda, h)$ sur $L^2(S^{n-1})$ tel que

$$(\mathcal{F}_h S(h) \mathcal{F}_h^{-1} f)(\sqrt{2\lambda}\omega) = (S(\lambda, h) f(\sqrt{2\lambda} \cdot))(\omega),$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, où \mathcal{F}_h est la transformation de Fourier semiclassique. La matrice de diffusion $T(\lambda, h)$ est définie par la relation $S(\lambda, h) = Id - 2i\pi T(\lambda, h)$ et il est connu [1] que $T(\lambda, h)$ est un opérateur compact sur $L^2(S^{n-1})$.

De plus, l'opérateur $T(\lambda, h)$ a un noyau $T(\theta, \omega, \lambda, h)$, $(\theta, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$ et ce noyau est de classe \mathcal{C}^∞ en dehors de la diagonale $\{\theta = \omega\}$. L'amplitude de diffusion est définie par $f(\theta, \omega, \lambda, h) = c(\lambda, h)T(\theta, \omega, \lambda, h)$, où $c(\lambda, h)$ est une constante explicite. C'est l'étude de cette fonction qui nous occupera dans cette thèse et plus particulièrement, le comportement de $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ quand h tend vers 0.

La question qui se pose naturellement lorsqu'on fait tendre le paramètre semiclassique vers 0 est de savoir si l'amplitude de diffusion possède une limite, dans un

sens convenable.

Les premières réponses à cette question ont été apportées en dimension 1 d'espace. Dans ce cas, la matrice de diffusion est une matrice carré d'ordre deux et il n'y a pas d'ambiguïté possible sur la nature de la convergence recherchée. Il existe une littérature abondante sur le comportement des coefficients de cette matrice. Citons par exemple les travaux de Jeffreys [31] et Fedoryuk [12], qui ont traité le cas de la réflexion au dessus d'une barrière ($V(x) - \lambda < 0$ pour tout x) et celui de la transmission à travers une barrière de potentiel (la fonction $(V(x) - \lambda)$ a un nombre fini de zéros simples). Dans chacun de ces cas, les auteurs ont exhibé une limite pour les coefficients de la matrice de diffusion avec une estimation de la vitesse de convergence de l'ordre de h . Cependant, aucun de ces articles n'aborde le cas où $(V(x) - \lambda)$ possède un zéro double. Cette configuration est plus problématique et il a fallu attendre la fin des années 90 et le développement des méthodes WKB exactes, pour que ce problème soit traité.

Dans [48], Ramond a examiné le cas où le potentiel V possède un unique maximum $V_0 = V(0)$ sur \mathbb{R} . Sous l'hypothèse que ce maximum est non dégénéré ($V''(0) < 0$), Ramond décrit complètement le comportement de la matrice de diffusion quand h tend vers 0, même pour une énergie λ égale à V_0 . Cette approche s'est avérée fructueuse dans des situations proches. Par exemple, Fujiié et Ramond [13] ont mené une étude similaire dans le cas où V possède deux maxima globaux non dégénérés. Ces techniques leur permettent aussi d'étudier d'autres quantités telles que la phase de diffusion [15] et fournissent des renseignements sur le nombre de résonances [13]. Enfin, Fujiié et Ramond utilisent cette approche pour examiner le cas d'un potentiel radial en dimension 3 et donnent une asymptotique des amplitudes partielles dans ce cas [14].

En dimension supérieure ($n > 1$), les premiers résultats sont dûs à Vainberg [63], [64]. Ils concernent le cas d'un potentiel à support compact pour des niveaux d'énergie $\lambda > 0$ tels que $V(x) < \lambda$ sur \mathbb{R}^n . Même dans ce cas, apparemment simple, Vainberg est contraint de faire une hypothèse supplémentaire sur $V(x)$ de nature géométrique. Considérons le système Hamiltonien associé au symbole σ_P :

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_{\xi} \sigma_P(q, p) = p, \\ \dot{p} = -\nabla_x \sigma_P(q, p) = -\nabla_x V(q). \end{cases} \quad (0.1)$$

Vainberg suppose que λ est non-captif : c'est-à-dire que toutes les solutions d'énergie λ du système (0.1) s'échappent pour $t \rightarrow +\infty$ et $t \rightarrow -\infty$. Sous ces hypothèses, θ, ω et λ étant fixés, Vainberg démontre que l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ possède un développement asymptotique quand h tend vers 0. De plus, les coefficients de ce développement s'expriment en fonction de quantités classiques parmi lesquelles nous trouvons l'action associée aux trajectoires de notre Hamiltonien et les indices de Maslov des trajectoires classiques.

L'approche de Vainberg est la suivante. Tout d'abord, il donne un développement asymptotique des solutions sortantes de $-h^2 \Delta \psi + (V(x) - \lambda) \psi = 0$, qui repose sur

l'hypothèse de non-capture et la décroissance de l'énergie locale de ces solutions. Comme le potentiel est à support compact, l'amplitude de diffusion s'exprime de manière simple en fonction de ces solutions sortantes, ce qui lui permet d'obtenir un développement asymptotique de $f(\theta, \omega, \lambda, h)$.

Ce résultat étant acquis, de nombreux auteurs se sont employés à affaiblir les hypothèses de Vainberg. Leurs efforts ont été concentrés dans deux directions : d'une part l'étude de potentiels dont le support n'est pas compact, d'autre part l'affaiblissement de l'hypothèse de non-capture faite sur l'énergie λ .

Comme cela a été mentionné au début de cette introduction il suffit de supposer que le potentiel $V(x)$ est de courte portée pour disposer d'une théorie de la diffusion complète. Il est donc naturel de vouloir étendre les résultats de Vainberg à cette classe de potentiels. Dans cette optique, la première difficulté consistait à prouver l'existence d'un noyau régulier pour la matrice de diffusion dans le cas courte portée. Ce sont Isozaki et Kitada [29], qui ont démontré que ce noyau est une fonction C^∞ en dehors de la diagonale. De plus, par une méthode WKB, ils démontrent dans cet article une formule de représentation pour l'amplitude de diffusion. Grâce à cette formule, la matrice de diffusion s'exprime à l'aide de la résolvante de $P(h)$ et d'opérateurs Intégraux de Fourier construits pour approcher les opérateurs d'ondes. L'article de Isozaki et Kitada permet donc d'écarter simultanément deux difficultés. D'une part, nous avons désormais l'existence et la régularité de l'amplitude de diffusion pour des potentiels de courte portée. D'autre part, nous disposons d'une expression concrète pour examiner le comportement asymptotique de f .

En s'appuyant sur cette formule, Robert et Tamura [53] ont pu analyser l'amplitude de diffusion pour des potentiels de courte portée. En supposant que le niveau d'énergie λ est non-captif, ils obtiennent l'asymptotique de l'amplitude de diffusion quand $h \rightarrow 0$ et généralisent ainsi les travaux de Vainberg.

Le point de la démonstration de [53], où l'hypothèse de non-capture apparaît de manière cruciale, est l'obtention d'une estimation de la résolvante sur l'axe réel. Plus précisément, en notant $L_\alpha^2 = \{f; \langle x \rangle^\alpha f \in L^2\}$, d'après le principe d'absorption limite [1], [27], nous savons que la limite $R(\lambda \pm i0) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} R(\lambda \pm i\mu)$ existe dans l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{L}(L_\alpha^2, L_{-\alpha}^2)$, pour $\alpha > \frac{1}{2}$. Sous l'hypothèse que λ est un niveau d'énergie non-captif, Robert et Tamura [52] ont démontré l'estimation suivante de la résolvante :

$$\|R(\lambda \pm i0)\|_{L_\alpha^2, L_{-\alpha}^2} = \mathcal{O}(h^{-1}), \quad \alpha > \frac{1}{2}. \quad (0.2)$$

Grâce à cette estimation, ils peuvent effectuer des localisations dans l'espace des phases (modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$) et réduisent ainsi leur problème à l'étude du propagateur $e^{ih^{-1}tP(h)}$ quand $h \rightarrow 0$ (le temps t restant borné). La fin de la démonstration se réduit à une application de la méthode de la phase stationnaire.

L'estimation (0.2) a joué un rôle important dans l'analyse des perturbations non-captives. Citons par exemple les travaux de Robert et Tamura sur la section efficace

INTRODUCTION

de diffusion [52], ceux de Gérard, Martinez sur la fonction spectrale [20] et ceux de Gérard, Martinez et Robert sur la phase de diffusion [17]. Notons par ailleurs, que cette estimation a été redémontrée récemment par Burq [8] dans un cadre légèrement différent. Nous renvoyons aussi à [38] pour des résultats dans le cas longue portée et à [60] pour le cas de perturbations à support compact.

Remarquons dès maintenant, que si λ est un niveau d'énergie captif, l'estimation (0.2) n'est plus vraie, ce qui constitue un obstacle majeur à une généralisation immédiate du travail de Robert et Tamura.

Presque simultanément, Yajima [66] a progressé dans l'analyse du cas captif. Pour des potentiels se comportant comme $|x|^{-\frac{n-1}{2}}$ à l'infini, il est parvenu à traiter le cas où certaines trajectoires du flot Hamiltonien peuvent rester bornées quand $t \rightarrow \pm\infty$. Plus précisément, étant donné $\omega \in S^{n-1}$, il suppose seulement que les particules qui s'échappent en $t = -\infty$ avec une vitesse asymptotique colinéaire à ω , s'échappent aussi en $t = +\infty$. Sous ces hypothèses, Yajima obtient la limite de l'amplitude de diffusion quand $h \rightarrow 0$, avec une estimation du reste en norme $L^2(d\theta, L^1(d\lambda))$. Par conséquent, Yajima ne parvient à s'affranchir de l'hypothèse de non-capture qu'au prix d'une double intégration par rapport à l'énergie et par rapport à la direction sortante θ , ce qui nécessite une décroissance plus forte du potentiel $V(x) = \mathcal{O}(|x|^{-\frac{n-1}{2}})$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

Comme le suggère le résultat de Yajima, l'hypothèse de non-capture n'est pas absolument nécessaire pour aborder notre problème. L'hypothèse de non-capture dans une direction, formulée par Yajima, fournit un cadre d'étude plus large qui sera intéressant si nous sommes capables d'estimer la résolvante sur l'axe réel. En effet, contrairement à l'hypothèse de non-capture forte de Robert et Tamura, cette hypothèse n'assure pas une estimation de la résolvante similaire à (0.2). Cependant de récents progrès réalisés dans l'estimation de la résolvante pour des géométries captives permettent d'aborder le problème.

En effet, nous savons depuis les travaux de Tang et Zworski [59, 60] que le comportement de la résolvante sur l'axe réel est relié à la vitesse de convergence (quand $h \rightarrow 0$) des résonances vers l'axe réel. Nous verrons au Chapitre 2, comment de telles considérations combinées avec un théorème de localisation des résonances de Burq [7], nous permettent d'obtenir une estimation intégrale de la résolvante sur l'axe réel de la forme suivante :

$$\int_a^b \|R(\lambda \pm i0)\|_{L_\alpha^2, L_{-\alpha}^2} d\lambda = \mathcal{O}(h^{-\tilde{n}}), \quad \tilde{n} \in \mathbb{N}, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad 0 < a < b < +\infty. \quad (0.3)$$

Notons qu'une telle estimation a été obtenue pour la première fois par Stefanov [57] dans le cas où $P(h) = h^2P$, P désignant une perturbation à support compact du Laplacien.

En nous appuyant sur la méthode de Robert et Tamura, cette estimation valable en toute généralité, nous permettra d'établir une asymptotique de l'amplitude de diffusion avec estimation du reste en norme $L^1(d\lambda)$, ω et θ étant fixés. De cette

manière, nous généralisons les travaux de Yajima de plusieurs points de vue. D'une part, nous obtenons une asymptotique sous une hypothèse de décroissance du potentiel plus faible que celle de [66]. D'autre part, nous n'avons pas besoin d'intégrer par rapport à la variable θ , ce qui constitue aussi une amélioration de [66].

L'étude se complique, si nous recherchons des asymptotiques de f à énergie λ fixée. En effet, si λ est un niveau d'énergie captif, il peut exister des résonances très proches de l'axe réel. Rappelons que les résonances peuvent être vues comme les pôles du prolongement méromorphe de l'amplitude de diffusion à des énergies complexes. Dans [24], Helffer et Sjöstrand ont montré que dans le cas d'un "puits dans une île", il existe des résonances convergeant exponentiellement vite vers l'axe réel. Dans ce cadre, il résulte des travaux de Gérard, Martinez et Robert [20], [17], que la résolvante peut se comporter en $\mathcal{O}(e^{C/h})$. Dans ces conditions, la méthode mise en place par Robert et Tamura, ne fonctionne plus systématiquement, puisqu'elle nécessite une estimation de la résolvante en $\mathcal{O}(h^{-M})$ pour un certain $M \in \mathbb{N}$. Dans la fin du troisième chapitre, nous supposons que le niveau d'énergie λ est *faiblement captif* : c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $P(h)$ n'a pas de résonance dans une bande de taille h^M autour de l'énergie λ . Nous démontrerons alors que pour tout niveau d'énergie faiblement captif, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que nous avons l'estimation suivante :

$$\|R(\lambda \pm i0)\|_{L^2_\alpha, L^2_{-\alpha}} = \mathcal{O}(h^{-M}), \quad \alpha > \frac{1}{2}. \quad (0.4)$$

A partir de cette estimation, nous généraliserons l'asymptotique de Robert et Tamura au cas d'une énergie faiblement captive, pour une direction entrante fixée ω qui vérifie les hypothèses d'échappement adéquates. Nous voyons, en particulier, que des énergies faiblement captives se traitent de la même manière que les énergies non-captives, pourvu que nous regardions l'amplitude de diffusion dans des directions (ω, θ) telles que les trajectoires classiques partant de l'infini avec une vitesse ω s'échappent en $t = +\infty$.

Ceci nous amène à considérer un nouveau type de problème pour lequel il n'y a pas de direction privilégiée. Considérons le cas où V et \tilde{V} sont deux potentiels de courte portée. A quelle condition les amplitudes de diffusion f et \tilde{f} qui leur sont associées, ont elles le même comportement dans la limite semiclassique ?

Plus précisément, pour un niveau d'énergie λ fixé, nous considérons l'ouvert $W = \{x; V(x) < \lambda\}$ et nous supposons que cet ouvert n'est pas l'espace tout entier. Nous notons W_{ext} sa composante connexe non-bornée, $W_{int} = W \setminus W_{ext}$ et nous supposons que $\overline{W_{ext}} \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{W_{int}}$. Nous supposons que le potentiel \tilde{V} vérifie $\tilde{V} = V$ sur W_{ext} . Que pouvons nous dire sur la différence $f - \tilde{f}$ quand $h \rightarrow 0$?

Cette question est motivée par l'étude du cas non-captif. En effet, si nous analysons l'asymptotique de Vainberg-Robert-Tamura, nous constatons que les quantités qui entrent en jeu relèvent de la mécanique classique associée à l'Hamiltonien σ_P . Plus précisément, le comportement asymptotique de f est déterminé par les trajectoires du flot classique qui partent du temps $t = -\infty$ avec une vitesse initiale colinéaire à ω et s'échappent au temps $t = +\infty$ dans la direction θ . Dans le cadre

INTRODUCTION

que nous venons de fixer, de telles trajectoires ne rencontrent pas la région W_{int} où V et \tilde{V} diffèrent, ce qui laisse penser que les comportements respectifs de f et \tilde{f} peuvent différer d'un terme en $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Ce problème a déjà été abordé et les premiers résultats sont dûs à S. Nakamura pour des potentiels vérifiant $|V(x)| \leq C|x|^{-\frac{n+1}{2}}$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. Nakamura aborde successivement le cas d'une énergie faiblement captif (cf. [45]) et le cas où il existe des résonances exponentiellement proches de λ (cf. [46]). Dans ce dernier cas, nous dirons que λ est *fortement captif*.

Dans [45], Nakamura se place dans le cas faiblement captif, en supposant que les résolvantes $R(\lambda \pm i0)$ et $\tilde{R}(\lambda \pm i0)$ associées à V et \tilde{V} satisfont une estimation du type (0.4). Dans ce cas et sous certaines hypothèses, il démontre pour un ensemble générique d'énergies λ , qu'il existe $C, d > 0$ tels que :

$$|f(\theta, \omega, \lambda, h) - \tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h)| \leq Ce^{-d/h} \quad (0.5)$$

uniformément par rapport à $h \in]0, 1]$ et $(\omega, \theta) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$. Dans le Chapitre 3, nous étendons ce résultat au cas d'un potentiel qui décroît comme $|x|^{-\rho}$ à l'infini, avec $\rho > 1$. En utilisant l'estimation (0.4) et des techniques d'analyse microlocale semiclassique, nous montrons que si λ est un niveau d'énergie faiblement captif pour V et \tilde{V} , alors

$$|f(\theta, \omega, \lambda, h) - \tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h)| = \mathcal{O}(h^\infty) \quad (0.6)$$

uniformément par rapport à $h \in]0, 1]$ et $(\omega, \theta) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}$. Cette estimation, valable pour toutes les énergies $\lambda > 0$ et pour une classe plus large de potentiels, constitue bien une amélioration du résultat de Nakamura, même si l'estimation de l'erreur est moins bonne.

Le cas fortement captif est plus compliqué et nous n'abordons pas de manière directe le problème de la modification d'un potentiel quelconque. Cependant, nous pouvons tirer des enseignements des travaux concernant ce sujet. Il apparaît en particulier, que la présence de résonances très près de l'axe réel, peut modifier le comportement semiclassique de l'amplitude de diffusion de sorte que les estimations (0.5) et (0.6) ne sont plus nécessairement valables.

Dans [46], Nakamura donne des résultats dans un cadre général que nous ne détaillerons pas dans cette introduction. Nous signalons seulement qu'il se place dans un cas où il existe des résonances $\lambda_i(h)$ telles que $|\lambda_i(h) - \lambda| \leq Ce^{-d/h}$. Sous certaines hypothèses, il montre que pour $\mu \in \mathbb{C}$ proche de $\lambda_i(h)$ nous avons :

$$\left| f(\theta, \omega, \mu, h) - \tilde{f}(\theta, \omega, \mu, h) - \frac{\Xi_i}{\mu - \lambda_i} \right| \leq Ce^{-d/h} \quad (0.7)$$

avec $|\Xi_i| \leq Ce^{-(d-\epsilon)/h}$, $d > 0, \epsilon > 0$. En particulier, cela peut mettre en défaut l'estimation (0.5).

Si ce résultat suggère que l'estimation (0.5) n'est pas vraie dans le cas fortement captif, a priori, il n'empêche pas l'estimation (0.6) d'être valable. Il a fallu attendre

les travaux de Lahmar-Benbernou [34] et Lahmar-Benbernou-Martinez [35] pour que soient mis en évidence des effets d'ordre h^k , de la présence de résonances. Dans [35], les auteurs considèrent la situation très particulière d'un "puits dans une île" pour lequel le fond du puits se trouve exactement au niveau d'énergie λ considéré. Dans ce cas, Helffer et Sjöstrand [24], ont montré l'existence de résonances (dites résonances de forme) convergeant vers l'axe réel à une vitesse d'ordre $h^k e^{-d/h}$. En utilisant les résultats de [34], Lahmar-Benbernou et Martinez montrent par ailleurs que les résidus associés à de telles résonances sont d'ordre $h^l e^{-d/h}$, la constante d apparaissant dans l'exponentiel étant la même. De cette égalité (que Nakamura avait pressentie dans [46] sans la démontrer), les auteurs déduisent qu'il existe $\alpha \neq 0$ tel que

$$f(\theta, \omega, Re \rho_j, h) - \tilde{f}(\theta, \omega, Re \rho_j, h) = \alpha h^{l-k} + \mathcal{O}(h^{l-k+1}),$$

où $\rho_j(h)$ est une résonance s'approchant exponentiellement vite de l'axe réel. En particulier, l'estimation (0.6) n'est pas valable.

Ce résultat est remarquable à plusieurs titres. Tout d'abord, il montre que pour certaines énergies captives, la présence de résonances près de l'axe réel, peut se lire sur le comportement asymptotique de l'amplitude de diffusion. D'autre part, cela montre dans ce cas très particulier, qu'à des puissances de h près, il peut y avoir une compensation exacte entre le résidu et le pôle de la matrice de diffusion. Néanmoins, le résultat de [35] concerne des potentiels très particuliers pour lesquels nous connaissons la forme exacte des résonances. Il ne fournit pas d'hypothèses générales sous les quelles ce phénomène a lieu.

Très récemment, Stefanov [58] a montré que ce phénomène de compensation se produisait dans un cadre bien plus général. Dans cet article, Stefanov considère le cas où le potentiel V est à support compact et suppose que $z_0(h)$ est une résonance simple et isolée de $P(h)$. Sous ces conditions, pour $(\omega, \theta) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$ et z proche de $z_0(h)$, nous pouvons écrire l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, z, h)$ près de $z_0(h)$ sous la forme

$$f(\theta, \omega, z, h) = \frac{f^{res}(\theta, \omega, h)}{z - z_0(h)} + f^{hol}(\theta, \omega, z, h), \quad (0.8)$$

où $f^{hol}(\theta, \omega, z, h)$ est holomorphe près de $z_0(h)$. De plus, sous des hypothèses génériques, Stefanov, montre que

$$\begin{aligned} |f^{res}(\theta, \omega, h)| &\leq Ch^{-\frac{n-1}{2}} |Im z_0(h)|, \\ |f^{hol}(\theta, \omega, z, h)| &\leq Ch^{-\frac{n-1}{2}}, \end{aligned} \quad (0.9)$$

pour z proche de $z_0(h)$. En particulier, cela prouve que la croissance du résidu est contrôlée par la vitesse de convergence des résonances vers l'axe réel. Cette estimation repose sur deux résultats. Tout d'abord, pour des potentiels $V \in \mathcal{C}_0^\infty$, Stefanov dispose d'une formule de représentation simple pour l'amplitude de diffusion (cf. [47], [58]) qui fait intervenir la résolvante tronquée pour des fonctions de troncatures supportées dans des couronnes. Par ailleurs, Burq a démontré dans [7] (cf. aussi [65])

et [9]), une estimation de la résolvante du type

$$\|1_{R_1 < |x| < R_2} R(\lambda \pm i0) 1_{R_1 < |x| < R_2}\| = \mathcal{O}(h^{-1}), \forall R_2 > R_1 \gg 1. \quad (0.10)$$

Le point clef de son approche réside alors dans le fait que cette estimation peut être utilisée directement dans la formule de représentation de f . Remarquons au passage que cette estimation démontrée dans le cas captif, est le pendant de l'estimation (0.2) dont nous disposons dans le cas non-captif.

L'estimation (0.10) est valable dans un cadre bien plus large que celui de potentiels à supports compacts. En particulier, elle est vraie si $V(x)$ est de longue portée. Par ailleurs, pour des potentiels de longue portée, Gérard et Martinez [19] ont démontré que la représentation d'Isozaki-Kitada pouvait se prolonger à des valeurs complexes de l'énergie λ telles que $|Im\lambda| < \epsilon|Re\lambda|$ et ils ont donné une construction explicite de ce prolongement. Cette construction et l'estimation de Burq sont deux des ingrédients que nous utilisons au Chapitre 4 pour montrer que les estimations (0.9) sont valables pour des potentiels de courte portée.

Nous concluons cette introduction en résumant très brièvement chacun des chapitres de cette thèse.

Chapitre 1 : Nous commençons par des rappels d'analyse microlocale semi-classique (Opérateurs pseudodifférentiels, Front d'onde, Théorème d'Egorov,...). Les résultats de ce Chapitre sont essentiellement connus, mais les énoncés et les démonstrations que l'on trouve dans la littérature ne correspondent pas toujours exactement au cadre de notre analyse. Pour cette raison, nous démontrons les résultats généraux que nous utiliserons par la suite.

Dans un second temps, nous effectuons quelques rappels sur la théorie de la diffusion de l'opérateur de Schrödinger pour des perturbations de courte portée. En particulier, nous rappelons la formule de représentation de Isozaki et Kitada [29] qui sera la base de tout notre travail. Nous rappelons aussi les estimations de la résolvante obtenues par Robert et Tamura [53] dans le cas non-captif. Enfin, nous rappelons la définition de la notion de résonance que nous utilisons ainsi que deux résultats généraux sur la localisation et le nombre de résonances.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à une étude approfondie du flot Hamiltonien associé à notre opérateur. En particulier, nous exhibons des régions de l'espace où le comportement des trajectoires classiques sera connu (régions entrantes et sortantes). Enfin nous introduisons une nouvelle hypothèse d'échappement plus faible que l'hypothèse de non-capture et nous obtenons certains résultats nouveaux concernant cette hypothèse. Ces résultats seront utilisés de manière cruciale dans les Chapitres 2 et 3.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous étudions l'amplitude de diffusion en norme $L^1([\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], d\lambda)$, λ_0 étant un niveau d'énergie quelconque. Le théorème principal donne la limite de l'amplitude de diffusion quand $h \rightarrow 0$ dans la norme précédente, sous l'hypothèse d'échappement précédente.

Nous commençons par démontrer une version du principe du maximum semiclassique qui tient compte de la dépendance par rapport à λ . En nous appuyant sur ce résultat et en nous inspirant des travaux de Stefanov [57], nous démontrons ensuite que la résolvante vérifie l'estimation (0.3).

Par ailleurs, en reprenant la méthode de Robert et Tamura [53], l'estimation précédente nous permet de démontrer des estimations microlocales de la résolvante dans une version intégrale. Ces estimations permettent ensuite d'effectuer une localisation spatiale dans la formule de représentation de l'amplitude de diffusion : les fonctions intervenant dans cette formule étant désormais à support compact.

Ceci nous permet ensuite d'exprimer directement l'amplitude de diffusion en fonction du propagateur $e^{ith^{-1}P(h)}$, pour des temps t appartenant à un intervalle compact. Cette localisation en temps fini repose sur l'étude de la dynamique classique du Chapitre 1. La fin de la démonstration du théorème consiste en une application de la méthode de la phase stationnaire, en suivant scrupuleusement les arguments de Robert et Tamura.

Chapitre 3 : Dans cette partie, nous obtenons des résultats à énergie fixée (par opposition aux résultats du chapitre précédent qui sont obtenus dans une version moyennée). Après une première partie consacrée à des exemples, nous démontrons que la localisation spatiale réalisée par Robert et Tamura dans le cas non-captif est valable aussi dans le cas captif. La démonstration utilise de manière centrale l'estimation (0.10). Il est important de noter que ce résultat est valable pour toutes les énergies (aussi bien faiblement captives que fortement captives).

Dans toute la fin du chapitre, nous nous restreignons au cas où l'énergie λ est faiblement captive.

Nous commençons par regarder le problème de la modification du potentiel. Nous considérons deux potentiels V et \tilde{V} dont les valeurs diffèrent uniquement derrière une barrière de potentiel. En utilisant la notion de front d'onde semiclassique du Chapitre 1, nous démontrons que les amplitudes f et \tilde{f} diffèrent d'un terme d'ordre $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous reprenons la méthode de Robert et Tamura et nous donnons une asymptotique de l'amplitude de diffusion sous notre hypothèse d'échappement.

Chapitre 4 : Ce dernier chapitre est consacré à l'étude du résidu de la matrice de diffusion dans le cas fortement captif. Plus précisément, nous supposons que la matrice de diffusion a un pôle $z_0(h)$ simple et isolé très près de l'axe réel. En suivant des idées de Stefanov, nous traitons le cas d'un potentiel de courte portée. Nous montrons que le résidu associé au pôle $z_0(h)$ est contrôlé de manière linéaire par $|Im z_0(h)|$ et que les estimations (0.9) sont valables pour des potentiels de cette classe. De cette manière, nous montrons que le phénomène de compensation exhibé par Lahmar-Benbernou [35] pour des potentiels de courte portée très particuliers, se généralise à une classe beaucoup plus large de potentiels.

INTRODUCTION

Notre approche repose sur le prolongement méromorphe de l'amplitude de diffusion établi par Gérard et Martinez dans le cas longue portée. En particulier, nous démontrons des estimation exponentielles de f pour des énergies complexes.

Nous concluons l'étude en utilisant à nouveau le principe du maximum semiclassique et l'estimation (0.10). Cette application du principe du maximum semiclassique utilise de manière cruciale la localisation spatiale du Chapitre 3.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Analyse microlocale semiclassique

1.1.1 Opérateurs pseudo-différentiels semiclassique : définitions et propriétés générales

Nous commençons par quelques rappels sur la transformation de Fourier semiclassique. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in]0, 1]$, nous définissons

$$\mathcal{F}(h)f(\xi) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} f(x) dx. \quad (1.1)$$

En fait, $\mathcal{F}(h)f$ s'exprime facilement à l'aide de la transformée de Fourier usuelle, puisque nous avons $\mathcal{F}(h)f(\xi) = h^{-n} \hat{f}(h^{-1}\xi)$. Nous en déduisons immédiatement que $\mathcal{F}(h)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}(h) : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, (2\pi h)^n dx)$ est une isométrie. De plus, nous avons

$$\mathcal{F}(h)^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} f(\xi) dx.$$

Avec cette transformée de Fourier semiclassique, nous définissons des opérateurs pseudo-différentiels semiclassique. La démarche est la même qu'en l'absence du paramètre h : il s'agit de multiplier par des symboles après être passé en Fourier. Nous allons donc commencer par introduire des classes de symboles. Nous considérons des fonctions $a(x, \xi, h)$ de trois variables $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $h \in]0, 1]$.

Définition 1.1 Soient m et u dans \mathbb{R} , $k \in \mathbb{N}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Nous dirons que $a(x, \xi, h)$ appartient à la classe de symbole $A_k^{m,u}(\Omega)$ si la condition suivante est satisfaite : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, $\exists C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

$$\forall (x, \xi) \in \Omega, |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha,\beta} h^k \langle x \rangle^{m-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{u-|\beta|}$$

Soient $a \in A_k^{m,u}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $a(x, hD_x, h)\varphi$ est définie par

$$\begin{aligned} a(x, hD_x, h)\varphi(x) &= \mathcal{F}(h)^{-1} (a(x, \cdot, h)\mathcal{F}(h)\varphi)(x) \\ &= (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}(x-y)\xi} a(x, \xi, h)\varphi(y) dy d\xi. \end{aligned}$$

Nous noterons $A_{+\infty}^{m,u}(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k^{m,u}(\Omega)$ et $A_{-\infty}^{m,u}(\Omega) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k^{m,u}$. De plus, dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, Nous noterons $A_k^{m,u}$ à la place de $A_k^{m,u}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

Proposition 1.1 Soient $a \in A_{k_1}^{m_1, u_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $b \in A_{k_2}^{m_2, u_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, alors

$$a(x, hD_x, h) \circ b(x, hD_x, h) = c(x, hD_x, h),$$

avec $c \in A_{k_1+k_2}^{m_1+m_2, u_1+u_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. De plus $c(x, \xi, h)$ admet le développement asymptotique suivant

$$c(x, \xi, h) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha a(x, \xi, h) \partial_x^\alpha b(x, \xi, h) + R_N(a, b)(x, \xi, h)$$

avec $R_N(a, b) \in A_{k_1+k_2+N}^{m_1+m_2-N, u_1+u_2-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

Pour k et l dans \mathbb{N} , nous considérons l'espace de Sobolev à poids

$$\begin{aligned} H_k^l(\mathbb{R}^n) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall |\alpha| \in \{0, \dots, l\}, \langle x \rangle^k D_x^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n), \langle x \rangle^k f \in H^l(\mathbb{R}^n)\}, \end{aligned}$$

où pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, nous notons $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$. Pour α et β dans \mathbb{N}^n , nous dirons que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_j \leq \beta_j, \forall j = 1, \dots, n$. Ici, $H^l(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev habituel et nous munissons $H_k^l(\mathbb{R}^n)$ de la norme $\|f\|_k^l = \sum_{|\alpha| \leq l} \|\langle x \rangle^k (hD_x)^\alpha f\|_{L^2}$ qui dépend du paramètre semiclassique h . Remarquons, dès

maintenant, que cette norme est équivalente uniformément par rapport à h , à norme $N_k^l(f) = \sum_{|\alpha| \leq l} \|(hD_x)^\alpha \langle x \rangle^k f\|$. De la sorte nous utiliserons indifféremment l'une ou

l'autre de ces deux normes. Il est clair que $H_k^l(\mathbb{R}^n)$ muni de cette norme est un espace de Banach et nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.2 Soient $k, l \in \mathbb{N}$ et $a \in A_r^{m,u}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ avec $m \leq k, u \leq l$, alors $a(x, hD_x, h)$ est continu comme opérateur de $H_k^l(\mathbb{R}^n)$ dans $H_{k-m}^{l-u}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|a(x, hD_x, h)\|_{H_k^l, H_{k-m}^{l-u}} = \mathcal{O}(h^r).$$

Démonstration. Commençons par remarquer que le cas $m = u = 0$ est une conséquence immédiate du théorème classique pour la classe de Hörmander $S_0^{1,0}$, [25]. Donnons nous maintenant m, u, l et k dans \mathbb{N} tels que $m \leq k$, $u \leq l$ et considérons l'opérateur pseudo-différentiel

$$\langle x \rangle^{k-m} \langle hD_x \rangle^{l-u} a(x, hD_x, h) \langle x \rangle^{-k} \langle hD_x \rangle^{-l}.$$

D'après la Proposition 1.1, c'est un opérateur pseudo-différentiel $c(x, hD_x, h)$ avec $c \in A_r^{0,0}$. Nous en déduisons qu'il est continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que nous avons $\|c(x, hD_x, h)\|_{L^2, L^2} = \mathcal{O}(h^r)$. Or,

$$\begin{aligned} \|a(x, hD_x)\|_{H_k^l, H_{k-m}^{l-u}} &= \sup_{f \in H_k^l, f \neq 0} \frac{\|a(x, hD_x, h) f\|_{H_{k-m}^{l-u}}}{\|f\|_{H_k^l}} \\ &= \sup_{f \in L^2, f \neq 0} \frac{\|a(x, hD_x, h) \langle x \rangle^{-k} \langle hD_x \rangle^{-l} f\|_{H_{k-m}^{l-u}}}{\|\langle x \rangle^{-k} \langle hD_x \rangle^{-l} f\|_{H_k^l}} \\ &\leq C \sup_{f \in L^2, f \neq 0} \frac{\|\langle x \rangle^{k-m} \langle hD_x \rangle^{l-u} a(x, hD_x, h) \langle x \rangle^{-k} \langle hD_x \rangle^{-l} f\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \\ &\leq \|c(x, hD_x, h)\|_{L^2, L^2} = \mathcal{O}(h^r). \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. ■

1.1.2 Lemme d'Egorov dans des espaces de Sobolev à poids

Nous allons étudier l'action du propagateur $e^{-ith^{-1}P(h)}$ associé à l'opérateur auto-adjoint $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x)$ avec domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, nous sommes intéressé par l'action de $e^{-ith^{-1}P(h)}$ sur des espaces de Sobolev à poids. Notons $\|\cdot\|$ la norme L^2 , alors nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.3 *Supposons que le potentiel V satisfait $(\mathbf{V})_\rho$ avec $\rho > 1$. Soient $l, k \in \mathbb{N}$ et $f \in H_k^{l+k}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-ith^{-1}P(h)} f \in H_k^l(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\forall |\alpha| \in \{0, \dots, l\}, \quad \|\langle x \rangle^k (hD_x)^\alpha e^{-ith^{-1}P(h)} f\| \leq C \langle t \rangle^{2^{3k+2l}} \sum_{|\beta| \leq l+k} \|\langle x \rangle^k (hD_x)^\beta f\|$$

où C est une constante indépendante de $h \in]0, 1]$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

1) Commençons par démontrer le résultat quand $k = 0$. Nous effectuons un raisonnement par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$.

- Si $l = 0$, le résultat découle du fait que $e^{-ith^{-1}P(h)}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

• Supposons maintenant que la propriété est vraie jusqu'au rang $l \geq 0$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = l + 1$. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que $\alpha_1 \neq 0$, de sorte que $(hD_x)^\alpha = (hD_x)^{\alpha'}(hD_{x_1})$ avec $|\alpha'| = l$. Écrivons

$$(hD_x)^\alpha e^{-ith^{-1}P(h)} f = (hD_x)^{\alpha'} e^{-ith^{-1}P(h)} (hD_{x_1}) f + (hD_x)^{\alpha'} [hD_{x_1}, e^{-ith^{-1}P(h)}] f.$$

Par récurrence, nous savons que

$$\begin{aligned} \|(hD_x)^{\alpha'} e^{-ith^{-1}P(h)} (hD_{x_1}) f\| &\leq C \langle t \rangle^{2l} \sum_{|\beta| \leq l} \|(hD_x)^\beta (hD_{x_1}) f\| \\ &\leq C \langle t \rangle^{2l} \sum_{|\beta| \leq l+1} \|(hD_x)^\beta f\|. \end{aligned}$$

Il reste donc à estimer $\|g\|$ avec $g = (hD_x)^{\alpha'} [hD_{x_1}, e^{-ith^{-1}P(h)}] f$. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} [hD_{x_1}, e^{-ith^{-1}P(h)}] f &= i \int_0^t e^{-i(t-s)h^{-1}P(h)} [D_{x_1}, P(h)] e^{ish^{-1}P(h)} f ds \\ &= i \int_0^t e^{-i(t-s)h^{-1}P(h)} (D_{x_1} V) e^{ish^{-1}P(h)} f ds. \end{aligned}$$

Par suite, nous obtenons

$$\|g\| \leq \int_0^t \|(hD_x)^{\alpha'} e^{-i(t-s)h^{-1}P(h)} (D_{x_1} V) e^{ish^{-1}P(h)} f\| ds$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\|g\| \leq C \langle t \rangle^{2l} \sum_{|\beta'| \leq l} \int_0^t \|(hD_x)^{\beta'} (D_{x_1} V) e^{ish^{-1}P(h)} f\| ds.$$

En appliquant la formule du binôme, cela conduit à

$$\|g\| \leq C \langle t \rangle^{2l} \sum_{|\beta'| \leq l} \sum_{\gamma' \leq \beta'} \int_0^t \binom{\beta'}{\gamma'} \|((hD_x)^{\beta'-\gamma'} D_{x_1} V) (hD_x)^{\gamma'} e^{ish^{-1}P(h)} f\| ds.$$

Par ailleurs, le potentiel V satisfaisant l'hypothèse $(\mathbf{V})_\rho$ avec $\rho > 1$, les fonctions $((hD_x)^{\beta'-\gamma'} D_{x_1} V)$ sont bornées sur \mathbb{R}^n , de sorte que

$$\|g\| \leq C \langle t \rangle^{2l} \sum_{|\gamma'| \leq l} \int_0^t \|(hD_x)^{\gamma'} e^{ish^{-1}P(h)} f\| ds.$$

Nous pouvons donc appliquer une nouvelle fois l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$\|g\| \leq C \langle t \rangle^{2l} \sum_{|\gamma'| \leq l} \int_0^t \langle s \rangle^{2l} \|(hD_x)^{\gamma'} f\| ds \leq \langle t \rangle^{2l+1} \sum_{|\gamma'| \leq l} \|(hD_x)^{\gamma'} f\|.$$

Comme $2^{2l} + 1 \leq 2^{2l+2}$, ceci fournit l'estimation souhaitée et achève la démonstration du cas $k = 0$.

2) Avant de démontrer le passage du rang $k \geq 0$ au rang $k + 1$ dans le cas quelconque, nous allons prouver le résultat dans un cas particulier. Ceci ne sera pas utilisé par la suite mais pourra faciliter la compréhension du cas général.

- Cas $k = 1$ et $l = 0$. Nous devons estimer

$$\langle x \rangle e^{-ith^{-1}P(h)} f = e^{-ith^{-1}P(h)} \langle x \rangle f + [\langle x \rangle, e^{-ith^{-1}P(h)}] f = g_1 + g_2$$

Comme $\langle x \rangle f \in L^2$ alors $\|g_1\| = \|\langle x \rangle f\|$ et il nous reste à estimer g_2 . Pour cela, nous écrivons

$$\begin{aligned} g_2 &= [\langle x \rangle, e^{-ith^{-1}P(h)}] f = -[e^{-ish^{-1}P(h)} \langle x \rangle e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f]_{s=0}^{s=t} \\ &= \frac{-ih}{2} \int_0^t e^{-ish^{-1}P(h)} [\Delta, \langle x \rangle] e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f ds. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $[\Delta, \langle x \rangle] = \Delta(\langle x \rangle) + 2\nabla_x(\langle x \rangle) \cdot \nabla_x$ et nous obtenons

$$\|g_2\| \leq Ch \int_0^t \|\Delta(\langle x \rangle) e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| ds + Ch \int_0^t \|\nabla_x(\langle x \rangle) \cdot \nabla_x e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| ds.$$

Les fonctions $\Delta(\langle x \rangle)$ et $\nabla_x(\langle x \rangle)$ étant bornées, nous obtenons

$$\|g_2\| \leq C\langle t \rangle \|f\| + C \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_0^t \|(hD_x)^\alpha e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| ds.$$

En appliquant le cas $k = 0$ au second terme du membre de droite de cette inégalité, nous trouvons

$$\begin{aligned} \|g_2\| &\leq C\langle t \rangle \|f\| + C \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_0^t \langle s-t \rangle^2 \|(hD_x)^\alpha f\| ds \\ &\leq C\langle t \rangle \|f\| + C\langle t \rangle^{2^2+1} \sum_{|\alpha| \leq 1} \|(hD_x)^\alpha f\| \leq C\langle t \rangle^{2^{2 \times 0 + 3 \times 1}} \sum_{|\alpha| \leq 1} \|(hD_x)^\alpha f\| \end{aligned}$$

et la démonstration est complète dans le cas $k = 1$, $l = 0$.

- Nous donnons maintenant la démonstration dans le cas général. Supposons que la propriété est vraie au rang k et soit f une fonction de H_{k+1}^{l+k+1} , avec l dans \mathbb{N} . Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq l$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{k+1} (hD_x)^\alpha e^{-ith^{-1}P(h)} f &= (hD_x)^\alpha \langle x \rangle^{k+1} e^{-ith^{-1}P(h)} f \\ &\quad + [\langle x \rangle^{k+1}, (hD_x)^\alpha] e^{-ith^{-1}P(h)} f \\ &= (hD_x)^\alpha e^{-ith^{-1}P(h)} \langle x \rangle^{k+1} f + (hD_x)^\alpha [\langle x \rangle^{k+1}, e^{-ith^{-1}P(h)}] f \\ &\quad + [\langle x \rangle^{k+1}, (hD_x)^\alpha] e^{-ith^{-1}P(h)} f. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Un calcul immédiat nous fournit l'égalité suivante

$$[\langle x \rangle^{k+1}, (hD_x)^\alpha] = - \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (hD_x)^\beta \langle x \rangle^{k+1} (hD_x)^{\alpha-\beta}. \quad (1.3)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} [\langle x \rangle^{k+1}, e^{-ith^{-1}P(h)}]f &= -[e^{-ish^{-1}P(h)} \langle x \rangle^{k+1} e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f]_{s=0}^{s=t} \\ &= \frac{-ih}{2} \int_0^t e^{-ish^{-1}P(h)} [\Delta, \langle x \rangle^{k+1}] e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f ds, \end{aligned} \quad (1.4)$$

car $[P(h), \langle x \rangle^{k+1}] = [-h^2\Delta + V(x), \langle x \rangle^{k+1}] = -h^2[\Delta, \langle x \rangle^{k+1}]$. En combinant les équations (1.2), (1.3) et (1.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{k+1} (hD_x)^\alpha e^{-ith^{-1}P(h)} f &= (hD_x)^\alpha e^{-ith^{-1}P(h)} \langle x \rangle^{k+1} f \\ &\quad - \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (hD_x)^\beta \langle x \rangle^{k+1} (hD_x)^{\alpha-\beta} e^{-ith^{-1}P(h)} f \\ &\quad - ih(hD_x)^\alpha \int_0^t e^{-ish^{-1}P(h)} [\Delta, \langle x \rangle^{k+1}] e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f ds \\ &= I + II + III. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Commençons par estimer le terme I . Par hypothèse, $\langle x \rangle^{k+1} f \in H_0^{l+k+1}$ et nous pouvons appliquer le cas $k = 0$ pour obtenir

$$\|I\| = \| (hD_x)^\alpha e^{-ith^{-1}P(h)} \langle x \rangle^{k+1} f \| \leq C \langle t \rangle^{22l} \sum_{|\beta| \leq l} \| (hD_x)^\beta \langle x \rangle^{k+1} f \|$$

En utilisant l'équivalence des normes $\|\cdot\|_{H_k^l}$ et N_k^l , nous obtenons

$$\|I\| \leq C \langle t \rangle^{22l} \sum_{|\beta| \leq l} \| \langle x \rangle^{k+1} (hD_x)^\beta f \|. \quad (1.6)$$

Passons maintenant à l'étude du terme II . Pour tout $|\beta| \neq 0$, nous savons que

$$|(hD_x)^\beta \langle x \rangle^{k+1}| \leq C \langle x \rangle^{k+1-|\beta|} \leq C \langle x \rangle^k$$

et nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|II\| &= \left\| \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (hD_x)^\beta \langle x \rangle^{k+1} (hD_x)^{\alpha-\beta} e^{-ith^{-1}P(h)} f \right\| \\ &\leq C \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} \| \langle x \rangle^k (hD_x)^{\alpha-\beta} e^{-ith^{-1}P(h)} f \|. \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\|\langle x \rangle^k (hD_x)^{\alpha-\beta} e^{-ith^{-1}P(h)} f\| \leq C \langle t \rangle^{2l+3k} \sum_{|\gamma| \leq l+k} \|\langle x \rangle^k (hD_x)^\gamma f\|. \quad (1.7)$$

Pour achever la démonstration, il suffit donc d'estimer le terme *III*. Calculons le commutateur $[\partial_{x_j}^2, \langle x \rangle^{k+1}] = \partial_{x_j}^2(\langle x \rangle^{k+1}) + 2\partial_{x_j}(\langle x \rangle^{k+1})\partial_{x_j}$. Nous déduisons du cas $k = 0$ que

$$\begin{aligned} & \|ih(hD_x)^\alpha e^{-ish^{-1}P(h)} [\Delta, \langle x \rangle^{k+1}] e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| \\ & \leq h \langle s \rangle^{2l} \sum_{|\gamma| \leq l} \|(hD_x)^\gamma [\Delta, \langle x \rangle^{k+1}] e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| \\ & \leq h \langle s \rangle^{2l} \sum_{|\gamma| \leq l} \|(hD_x)^\gamma \Delta(\langle x \rangle^{k+1}) e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| \\ & \quad + 2 \langle s \rangle^{2l} \sum_{|\gamma| \leq l} \sum_{j=1}^n \|(hD_x)^\gamma \partial_{x_j}(\langle x \rangle^{k+1})(hD_{x_j}) e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\|. \end{aligned}$$

Notons J_1 le premier terme du membre de droite de cette inégalité et J_2 le second. Pour $\gamma \in \mathbb{N}^n$, nous avons

$$|\partial_x^\gamma(\langle x \rangle^{k+1})| \leq C \langle x \rangle^{k+1-|\gamma|} \leq C \langle x \rangle^{k+1},$$

donc

$$\begin{aligned} & \|(hD_x)^\gamma \Delta(\langle x \rangle^{k+1}) e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| \leq \\ & \quad \sum_{\beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \|((hD_x)^\beta \Delta)(\langle x \rangle^{k+1})(hD_x)^{\gamma-\beta} e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| \\ & \leq C \sum_{\beta \leq \gamma} \|\langle x \rangle^{k+1-(|\beta|+2)} (hD_x)^{\gamma-\beta} e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\|. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$J_1 \leq Ch \langle s \rangle^{2l} \langle s-t \rangle^{2l+3(k-1)} \sum_{|\beta| \leq l+k-1} \|\langle x \rangle^{k-1} (hD_x)^\beta f\|. \quad (1.8)$$

De la même manière, pour tout $j = 1, \dots, n$, nous avons

$$\begin{aligned} & \|(hD_x)^\gamma \partial_{x_j}(\langle x \rangle^{k+1}) hD_{x_j} e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| \leq \sum_{\beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \|((hD_x)^\beta \partial_{x_j})(\langle x \rangle^{k+1}) \\ & \quad (hD_x)^{\gamma-\beta} hD_{x_j} e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| \\ & \leq C \sum_{\beta \leq \gamma} \|\langle x \rangle^{k-|\beta|} (hD_x)^{\gamma-\beta} hD_{x_j} e^{i(s-t)h^{-1}P(h)} f\| \\ & \leq C \langle s-t \rangle^{2(l+1)+3k} \sum_{|\beta| \leq l+k+1} \|\langle x \rangle^k (hD_x)^\beta f\| \end{aligned}$$

et il suit immédiatement que

$$J_2 \leq C \langle s \rangle^{2l} \langle s - t \rangle^{2^{2l+1}+3k} \sum_{|\beta| \leq l+k+1} \| \langle x \rangle^k (hD_x)^\beta f \|. \quad (1.9)$$

En combinant (1.8) et (1.9) nous obtenons

$$\begin{aligned} \|III\| &\leq C \int_0^t \langle s \rangle^{2l} \left(\langle s - t \rangle^{2^{2l+3(k-1)}} + \langle s - t \rangle^{2^{2l+3(k+1)-1}} \right) ds \times \\ &\quad \times \sum_{|\beta| \leq l+k+1} \| \langle x \rangle^k (hD_x)^\beta f \| \\ &\leq C \langle t \rangle^{2^{2l+3(k+1)}} \sum_{|\beta| \leq l+k+1} \| \langle x \rangle^k (hD_x)^\beta f \|. \end{aligned}$$

Enfin, en réunissant cette estimation et les équations (1.6), (1.7), nous obtenons

$$\| \langle x \rangle^{k+1} (hD_x)^\alpha e^{-ith^{-1}P(h)} f \| \leq C \langle t \rangle^{2^{2l+3(k+1)}} \sum_{|\beta| \leq l+k+1} \| \langle x \rangle^{k+1} (hD_x)^\beta f \|^2$$

et la proposition est démontrée. \blacksquare

Nous sommes maintenant en mesure de prouver un lemme d'Egorov dans des espaces à poids. Il existe de nombreux travaux sur le Lemme d'Egorov. Dans le cadre classique, nous renvoyons aux livres [22], [61] et [62]. Dans le cadre semiclassique, D. Robert [51] démontre un Lemme d'Egorov, mais son résultat ne donne pas d'estimation dans les espaces à poids que nous considérons. Enfin, signalons que Bouzouina et Robert [5] ont étudié la propagation d'observables quantiques en temps longs.

Notons Φ_t le flot associé au champ de vecteur Hamiltonien

$$H_P(x, \xi) = \begin{pmatrix} \partial_\xi \sigma_P \\ -\partial_x \sigma_P \end{pmatrix} (x, \xi),$$

où $\sigma_P(x, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$.

Lemme 1.1 *Soient $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $p \in A_k^{m,u}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $(m, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Supposons que pour $t \geq 0$, $p(x, \xi)$ s'annule sur $\Phi_t(\text{supp}(\omega))$. Alors nous avons l'estimation suivante*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \| p(x, hD_x) e^{-ith^{-1}P(h)} \omega(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} = \mathcal{O}(h^\infty),$$

où $\| A \|_{\alpha, \beta}$ désigne la norme d'opérateur borné $A : L_\alpha^2 \rightarrow L_\beta^2$.

Démonstration. D'après la Proposition 1.1, la démonstration se réduit au cas $\alpha = 0$. En effet,

$$\| p(x, hD_x) e^{-ith^{-1}P(h)} \omega(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} = \| \tilde{p}(x, hD_x) e^{-ith^{-1}P(h)} \tilde{\omega}(x, hD_x) \|_{0,0}$$

avec

$$\tilde{p}(x, hD_x) = \langle x \rangle^\alpha p(x, hD_x) \in A_u^{m+\alpha}$$

et

$$\tilde{\omega}(x, hD_x) = \omega(x, hD_x) \langle x \rangle^\alpha = \tilde{\omega}_N(x, hD_x) + h^N \rho_N(x, hD_x),$$

où $\tilde{\omega}_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \tilde{\omega}_N \subset \text{supp } \omega$ et $\rho_N \in A_0^{-N, -N}$. Pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, les Propositions 1.3 et 1.2 nous fournissent l'estimation suivante

$$\|\tilde{p}(x, hD_x) e^{-ith^{-1}P(h)} \rho_N(x, hD_x)\|_{0,0} = \mathcal{O}(1).$$

Par la suite, nous supposons donc $\alpha = 0$. D'après le calcul développé dans le Chapitre 11 de [11], nous savons que

$$e^{-ith^{-1}P(h)} \omega(x, hD_x) e^{ith^{-1}P(h)} = \omega_N(x, hD_x) + h^N R_{N,t}$$

avec $\omega_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\text{supp}(\omega_N) \subset \Phi_t(\text{supp}(\omega))$ et

$$R_{N,t} = \int_0^t e^{i(t-\tau)h^{-1}P(h)} r_N(x, hD_x) e^{-i(t-\tau)h^{-1}P(h)} d\tau,$$

où $r_N \in A_0^{-N, -N}$. Par suite, nous avons

$$\begin{aligned} \|p(x, hD_x) e^{-ith^{-1}P(h)} \omega(x, hD_x)\|_{0,0} &= \|p(x, hD_x) e^{-ith^{-1}P(h)} \omega(x, hD_x) e^{-ith^{-1}P(h)}\|_{0,0} \\ &\leq \|p(x, hD_x) \omega_N(x, hD_x)\|_{0,0} + h^N \|p(x, hD_x) R_{N,t}\|_{0,0}. \end{aligned}$$

Comme $\text{supp}(p) \cap \text{supp}(\omega_N) = \emptyset$, alors

$$\|p(x, hD_x) \omega_N(x, hD_x)\|_{0,0} = \mathcal{O}(h^\infty)$$

et il reste à montrer que $\|p(x, hD_x) R_{N,t}\|_{0,0} = \mathcal{O}(1)$. Partons de l'inégalité suivante,

$$\begin{aligned} \|p(x, hD_x) e^{i(t-\tau)h^{-1}P(h)} r_N(x, hD_x)\|_{0,0} &\leq \|p(x, hD_x)\|_{H_u^m, L^2} \times \\ &\quad \times \|e^{i(t-\tau)h^{-1}P(h)}\|_{H_u^{m+u}, H_u^m} \|r_N(x, hD_x)\|_{L^2, H_u^{m+u}}. \end{aligned}$$

De la Proposition 1.3, nous déduisons $\|e^{i(t-\tau)h^{-1}P(h)}\|_{H_u^{m+u}, H_u^m} \leq C \langle t-\tau \rangle^m$. De plus, $p \in A_k^{m,u}$ et $r_N \in A_0^{-N, -N}$, donc $\|p(x, hD_x)\|_{H_u^m, L^2} = \mathcal{O}(1)$ et $\|r_N(x, hD_x)\|_{L^2, H_u^{m+u}} = \mathcal{O}(h^k)$. En réunissant les trois dernières estimations, nous obtenons

$$\|p(x, hD_x) e^{i(t-\tau)h^{-1}P(h)} r_N(x, hD_x) e^{-i(t-\tau)h^{-1}P(h)}\|_{0,0} \leq C \langle t-\tau \rangle^m$$

et en intégrant nous concluons que $\|R_{N,t}\|_{0,0} = \mathcal{O}(1)$. Ceci achève la démonstration du lemme 1.1. ■

1.1.3 Front d'onde semiclassique

Le but de cette section est de rappeler brièvement la notion de front d'onde semiclassique utilisée dans la démonstration du Théorème 3.2. Il existe plusieurs notions de front d'onde semiclassique (cf. par exemple [30], [16], [39]). Nous commençons par rappeler la définition que nous utilisons.

Définition 1.2 Notons $\mathcal{D}'_{sc}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions $u(x, h)$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\mathcal{F}_h(\chi u)(\xi, h)| \leq C_N h^{-N} \langle \xi \rangle^N,$$

où $\mathcal{F}_h(u)$ est la transformée de Fourier semiclassique de u définie par la formule (1.1).

Pour $a \in A_k^{m,u} = A_k^{m,u}(\mathbb{R}^n)$, notons $Op_h(a)$ l'opérateur $a(x, hD_x, h)$ et $\mathcal{L}_k^{m,u} = Op_h(A_k^{m,u})$. Nous dirons qu'un voisinage Γ de $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est conique si $\forall \xi \in \Gamma, \forall \lambda > 0, \lambda \xi \in \Gamma$.

Définition 1.3 Soient $P = p(x, hD_x, h)$ dans $\mathcal{L}_k^{m,u}$, $m, u \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et soit (x_0, ξ_0) dans $T^*(\mathbb{R}^n)$. Nous dirons que P est elliptique en (x_0, ξ_0) s'il existe un voisinage V_0 de x_0 , un voisinage conique Γ_0 de ξ_0 et une constante $c > 0$ tels que

$$\forall (x, \xi) \in V_0 \times \Gamma_0, \forall h \in]0, 1], |p(x, \xi, h)| \geq C h^{-k} \langle \xi \rangle^m.$$

Nous posons $\text{Car}^{sc}(P) = \{(x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^n); P \text{ est elliptique en } (x_0, \xi_0)\}$.

Définition 1.4 Soient $u \in \mathcal{D}'_{sc}(\mathbb{R}^n)$ et $(x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$. Nous dirons que (x_0, ξ_0) n'appartient pas à $WF^{sc}(u)$ s'il existe un voisinage V_0 de x_0 et un voisinage conique Γ_0 de ξ_0 tels que pour tout $\rho \in C_0^\infty(V_0)$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \Gamma_0, \forall h \in]0, 1], |\mathcal{F}_h(\rho u)(\xi, h)| \leq C_N h^N \langle \xi \rangle^{-N}. \quad (1.10)$$

Comme pour le front d'onde classique, nous avons les propositions suivantes.

Proposition 1.4 *i) Soit $u(x, h) \in \mathcal{D}'_{sc}(\mathbb{R}^n)$ et supposons que $WF^{sc}(u) = \emptyset$. Alors quels que soient $k, m \in \mathbb{N}$; $u \in h^k H_{loc}^m(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire*

$$\forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \exists C > 0, \forall 0 < h \leq 1, \|\chi u(\cdot, h)\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq Ch^k.$$

ii) Soient $u(x, h) \in \mathcal{D}'_{sc}(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors

$$WF^{sc}(\chi u) \subset T^*(\text{supp}(\chi)) \cap WF^{sc}(u).$$

Démonstration. Commençons par la démonstration de i). Soit $(x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$, alors $(x_0, \xi_0) \notin WF^{sc}(u)$ et il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\chi(x_0) = 1$ et un voisinage conique U_{ξ_0} de ξ_0 , tels que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \xi \in U_{\xi_0}, |\mathcal{F}_h(\chi u)(\xi, h)| \leq C_N h^N \langle \xi \rangle^{-N},$$

où C est une constante positive. De plus, $\text{supp}(\chi) \times S^{n-1}$ étant compact, nous en déduisons facilement qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \xi \neq 0, |\mathcal{F}_h(\chi u)(\xi, h)| \leq C_N h^N \langle \xi \rangle^{-N}. \quad (1.11)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\chi u(\cdot, h)\|_{H^m} &= \|\langle D_x \rangle^m(\chi u)\|_{L^2} = \|\mathcal{F}_h(\langle D_x \rangle^m(\chi u))\|_{L^2} \\ &= \|\langle h^{-1}\xi \rangle^m \mathcal{F}_h(\chi u)\|_{L^2} \end{aligned}$$

De l'équation (1.11), nous déduisons

$$|\langle h^{-1}\xi \rangle^m \mathcal{F}_h(\chi u)(\xi)| \leq C_N h^{N-m} \langle \xi \rangle^{m-N},$$

donc pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, $\|\chi u(\cdot, h)\|_{H^m} \leq C_N h^{m-N}$, ce qui achève de démontrer i).

Démontrons maintenant ii). Soit $(x_0, \xi_0) \in T^*(\text{supp } \chi)^c \cup WF^{sc}(u)^c$. Nous supposons d'abord que $(x_0, \xi_0) \in T^*(\text{supp } \chi)^c$, c'est à dire $x_0 \notin \text{supp } \chi$. Nous pouvons donc trouver un voisinage V_0 de x_0 tel que $V_0 \cap \text{supp } \chi = \emptyset$. Par suite, quel que soit $\rho \in C_0^\infty(V_0)$, nous avons $\mathcal{F}_h(\rho \chi u)(\xi) = 0$ et nous en déduisons que $(x_0, \xi_0) \notin WF^{sc}(\chi u)$. Supposons maintenant que $(x_0, \xi_0) \in WF^{sc}(u)^c$, de sorte qu'il existe un voisinage V_0 de x_0 et un voisinage conique Γ_0 de ξ_0 tels que pour tout $\rho \in C_0^\infty(V_0)$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'estimation (1.10) est satisfaite. Or, si $\rho \in C_0^\infty(V_0)$, alors $\rho \chi \in C_0^\infty(V_0)$ donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall \xi \in \Gamma_0, |\mathcal{F}_h(\rho \chi u)(\xi, h)| \leq C_N h^N \langle \xi \rangle^{-N}.$$

Nous en déduisons que $(x_0, \xi_0) \notin WF^{sc}(\chi u)$, ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 1.5 *Soit $u(x, h) \in \mathcal{D}'_{sc}(\mathbb{R}^n)$ et supposons qu'il existe un compact K indépendant de h tel que $\text{supp } u(\cdot, h) \subset K$. Alors*

$$WF^{sc}(u) \subset T^*(K).$$

De plus, si $P \in L_k^{m,u}$ nous avons

$$WF^{sc}(Pu) \subset WF^{sc}(u) \subset WF^{sc}(Pu) \cup \text{Car}^{sc}(P). \quad (1.12)$$

Démonstration. L'inclusion $WF^{sc}(u) \subset T^*(K)$ est une conséquence immédiate du ii) de la Proposition 1.4.

Les inclusions (1.12) se montrent comme dans le cas du front d'onde classique. Nous donnons ici une démonstration dans le cas où P est un opérateur différentiel $P(x, hD_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(hD_x)^\alpha$, inspirée de [3].

Soit $(x_0, \xi_0) \notin WF^{sc}(u)$, alors il existe un voisinage V_0 de x_0 et un voisinage conique Γ_0 de ξ_0 tels que pour tout $\rho \in C_0^\infty(V_0)$, l'estimation (1.10) est satisfaite. Soient $\chi \in C_0^\infty(V_0)$ et $\rho \in C_0^\infty(V_0)$ telle que $\rho = 1$ sur $\text{supp } \chi$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(\chi Pu)(\xi) &= \mathcal{F}_h(\chi P(\rho u))(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} \chi(x) a_\alpha(x) (hD_x)^\alpha (\rho u)(x) dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} \rho_\alpha(x) \xi^\alpha u(x) dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{F}_h(\rho_\alpha u)(\xi) \xi^\alpha, \end{aligned}$$

où $\rho_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \rho_\alpha \subset \text{supp } \rho$. nous avons donc

$$\forall N, \forall \alpha, |\mathcal{F}_h(\rho_\alpha u)(\xi)| \leq C_N h^N \langle \xi \rangle^{-N},$$

ce qui achève de démontrer que $WF^{sc}(Pu) \subset WF^{sc}(u)$.

Prenons maintenant $(x_0, \xi_0) \in (WF^{sc}(Pu))^c \cap (\text{Car}^{sc}(P))^c$. Soient V_0 un voisinage de x_0 et Γ_0 un voisinage conique de ξ_0 tels que pour tout $\rho \in C_0^\infty(V_0)$, (1.10) est satisfaite pour Pu . Soit $\varphi \in C_0^\infty(V_0)$, alors

$$\mathcal{F}_h(\varphi u)(\xi) = (2\pi h)^{-n} \langle u, \varphi e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} \rangle.$$

Notons $Q(x, hD_x) = {}^t P(x, hD_x)$, nous cherchons ψ telle que

$$\varphi = e^{-ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} Q(x, hD_x) (\psi e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle}).$$

En notant $p(x, \xi)$ le symbole de P , nous avons

$$e^{-ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} Q(x, hD_x) (\psi e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle}) = p(x, \xi) \psi + hQ_{m-1} \psi + \dots + h^{m-1} Q_0 \psi,$$

avec $Q_j \psi = Q_j(\xi, D_x) \psi = \sum_{|\alpha|=j} \xi^\alpha A_j(x, D_x) \psi$ où $A_j(x, \eta)$ est un polynôme homogène en η de degré $m - j$. Comme P est elliptique en (x_0, ξ_0) , alors $p(x, \xi) \neq 0, \forall (x, \xi) \in V_0 \times \Gamma_0$ et pour $N \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons poser

$$\psi_N(x, \xi) = \frac{1}{p(x, \xi)} (\varphi(x) + a_1(x, \xi) + \dots + a_N(x, \xi)),$$

avec $a_0 = \varphi$ et $\forall 1 \leq k \leq N, a_k + hQ_{m-1}(h) \left(\frac{a_{k-1}}{p}\right) + \dots + h^k Q_{m-k}(h) \left(\frac{a_0}{p}\right) = 0$. Dans la définition précédente, nous avons posé $Q_j = 0, \forall j < 0$. Par construction, nous avons donc

$$e^{-ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} Q(x, hD_x) (\psi_N e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle}) = \varphi(x) + r_N(x, \xi, h),$$

avec $r_N \in A_N^{-N, -N}$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(\varphi u)(\xi) &= (2\pi h)^{-n} \langle Pu, \psi_N e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} \rangle - \langle u, r_N e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} \rangle \\ &= \mathcal{F}_h(\psi_N Pu)(\xi) - \langle u, r_N e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} \rangle. \end{aligned}$$

Comme $r_N \in A_N^{-N, -N}$ et $u \in D'_{sc}$, alors il existe $k \geq 0$ tel que

$$|\langle u, r_N e^{ih^{-1}\langle x, \xi \rangle} \rangle| = \mathcal{O}(h^{N-k} \langle \xi \rangle^{-N+k}). \quad (1.13)$$

De plus, $\text{supp } \psi_N \subset U_0$, donc pour $\xi \in \Gamma_0$,

$$|\mathcal{F}_h(\psi_N Pu)(\xi)| = \mathcal{O}(h^N \langle \xi \rangle^{-N}). \quad (1.14)$$

En réunissant les équations (1.13) et (1.14), N pouvant être pris aussi grand que nous le souhaitons, nous obtenons le résultat annoncé. \blacksquare

1.1.4 Composition d'opérateurs Intégraux de Fourier et d'opérateurs pseudo-différentiels

Dans cette partie, nous prenons $\varphi(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ une phase réelle telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\varphi(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle x \rangle^{1-\nu-|\alpha|} \quad (1.15)$$

pour un certain $\nu > 0$. Donnons nous aussi des symboles $a(x, \xi) \in A_0^{p, +\infty} = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} A_0^{p, l}$, $p \in \mathbb{R}$ et $\omega(x, \xi) \in A_0^{q, +\infty}$, $q \in \mathbb{R}$. L'opérateur $I_h(\varphi, a)$ est défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$I_h(\varphi, a)(u)(x) = (2\pi h)^{-n} \int \int e^{ih^{-1}(\varphi(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle)} a(x, \xi) u(y) dy d\xi, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.16)$$

L'hypothèse (1.15) entraîne que $I_h(\varphi, a)$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même. Le lemme suivant donne un développement asymptotique de l'opérateur $\omega(x, hD_x)I_h(\varphi, a)$. Ce résultat est essentiellement connu et pour le confort du lecteur, nous rappelons ici la démonstration donnée par J. M. Bouclet dans un cadre un peu plus général (cf. [4], Proposition A.2).

Lemme 1.2 *Sous les hypothèses précédentes, $\omega(x, hD_x)I_h(\varphi, a)$ est un opérateur Intégral de Fourier $I_h(\varphi, \omega \diamond a)$ avec la même phase $\varphi(x, \xi)$ et un symbole $\omega \diamond a(x, \xi) = e^{-ih^{-1}\varphi(x, \xi)} \omega(x, hD_x)(e^{ih^{-1}\varphi(x, \xi)} a(x, \xi))$. De plus, $\omega \diamond a(x, \xi)$ admet un développement asymptotique*

$$\omega \diamond a(x, \xi) = \sum_{0 \leq j < N} h^j (\omega \diamond a)_j(x, \xi) + h^N r_N(x, \xi, h)$$

qui satisfait les propriétés suivantes.

i) Les symboles $(\omega \diamond a)_j(x, \xi)$ sont des combinaisons linéaires des

$$\partial_\eta^\beta \omega(x, \partial_x \varphi(x, \xi)) \partial_x^{\beta-\alpha} a(x, \xi) \partial_x^{\alpha_1} \varphi(x, \xi) \dots \partial_x^{\alpha_k} \varphi(x, \xi),$$

où $|\beta| \leq 2j$, $|\alpha_l| \geq 2$, $\forall l$.

ii) Il existe une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaisant $\lim_{N \rightarrow +\infty} f(N) = +\infty$ telle que le reste $r_N(x, \xi, h)$ appartient à $A_0^{-f(N), +\infty}$ uniformément par rapport à h .

Démonstration. D'après le théorème de Fubini, $\omega(x, hD_x)I_h(\varphi, a)$ est un opérateur Intégral de Fourier $I_h(\varphi, \omega \diamond a)$ avec phase $\varphi(x, \xi)$ et symbole

$$\omega \diamond a(x, \xi) = e^{-ih^{-1}\varphi(x, \xi)} \omega(x, hD_x)(e^{ih^{-1}\varphi(x, \xi)} a(x, \xi)).$$

Notre but est d'établir un développement asymptotique de $\omega \diamond a(x, \xi)$ et d'estimer le reste. Posons $\phi(x, y, \xi) = \varphi(y, \xi) - \varphi(x, \xi) + \langle x - y, \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle$ et effectuons le changement de variable $\eta \mapsto \eta + \nabla_x \varphi(x, \xi)$, le symbole $\omega \diamond a(x, \xi)$ s'exprime de la manière suivante

$$\begin{aligned} \omega \diamond a(x, \xi) &= (2\pi h)^{-n} \int \int e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta - \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle} e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)} \omega(x, \eta) a(y, \xi) dy d\xi \\ &= (2\pi h)^{-n} \int \int e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle} e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)} \omega(x, \eta + \nabla_x \varphi(x, \xi)) a(y, \xi) dy d\xi. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Nous utilisons la formule de Taylor pour écrire

$$\omega(x, \eta + \nabla_x \varphi(x, \xi)) = \sum_{|\beta| < N} \frac{1}{\beta!} \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi)) \eta^\beta + \sum_{|\beta|=N} r_N(h, \beta, x, \xi, \eta),$$

avec $r_N(h, \beta, x, \xi, \eta) = \frac{N}{\beta!} \eta^\beta \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi) + t\eta) dt$. A l'aide de cette formule et de (1.17), nous obtenons $\omega \diamond a(x, \xi) = (\omega \diamond_N a)(x, \xi) + r_N(x, \xi, h)$ avec

$$\begin{aligned} (\omega \diamond_N a)(x, \xi) &= (2\pi h)^{-n} \sum_{|\beta| < N} \int \int \frac{1}{\beta!} e^{ih^{-1}(\langle x-y, \eta \rangle + \phi(x, y, \xi))} \times \\ &\quad \times \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi)) \eta^\beta d\eta dy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_N(x, \xi, h) &= \sum_{|\beta|=N} \frac{N}{\beta!} \eta^\beta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 (1-t)^{N-1} e^{ih^{-1}(\langle x-y, \eta \rangle + \phi(x, y, \xi))} \times \\ &\quad \times \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi) + t\eta) a(y, \xi) dt dy d\eta \end{aligned} \quad (1.18)$$

Première étape : En partant de $\eta^\beta e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle} = (ih\partial_y)^\beta (e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle})$ et en intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (\omega \diamond_N a)(x, \xi) &= \sum_{|\beta| < N} \frac{(2\pi h)^{-n}}{\beta!} \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi)) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle} \times \\
 &\quad \times (ih\partial_y)^\beta (a(y, \eta) e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)}) dy d\eta \\
 &= \sum_{|\beta| < N} \frac{1}{\beta!} \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi)) (ih)^{|\beta|} [\partial_y^\beta (a(y, \xi) e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)})]_{y=x}, \\
 &= \sum_{|\beta| < N} \frac{1}{\beta!} (ih)^{|\beta|} \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi)) \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \partial_x^{\beta_1} a(x, \xi) \partial_y^{\beta_2} (e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)})_{y=x}.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

De plus, une récurrence immédiate montre que

$$\partial_y^{\beta_2} (e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)}) = \sum_{j=1}^{|\beta_2|} \sum_{\beta_{21} + \dots + \beta_{2j} = \beta_2} C(\beta_{21}, \dots, \beta_{2j}) h^{-j} e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)} \partial_y^{\beta_{21}} \phi \dots \partial_y^{\beta_{2j}} \phi$$

et en utilisant le fait que $\phi(\cdot, x, \xi)$ s'annule au second ordre en $y = x$, nous obtenons la formule suivante

$$[\partial_y^{\beta_2} (e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)})]_{y=x} = \sum_{j=1}^{|\beta_2|/2} \sum_{\beta_{21} + \dots + \beta_{2j} = \beta_2} C(\beta_{21}, \dots, \beta_{2j}) h^{-j} (\partial_y^{\beta_{21}} \phi \dots \partial_y^{\beta_{2j}} \phi)(x, \xi).$$

Cette équation combinée avec (1.19) conduit à

$$\begin{aligned}
 \omega \diamond_N a(x, \xi) &= \sum_{|\beta_1| + |\beta_2| < N} \partial_\eta^{\beta_1 + \beta_2} \left(\sum_{j=1}^{|\beta_2|/2} h^{N-j} \sum_{\beta_{21} + \dots + \beta_{2j} = \beta_2} C(\beta_{21}, \dots, \beta_{2j}) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \omega(x, \nabla_x \varphi) \partial_x^{\beta_{21}} \phi \dots \partial_x^{\beta_{2j}} \phi \partial_x a(x, \xi) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} h^k \sum_{\substack{2(N-k) \leq |\beta_2| < N \\ |\beta_1| < N - |\beta_2|}} \sum_{\beta_{21} + \dots + \beta_{2j} = \beta_2} C(\beta_{21}, \dots, \beta_{2j}) \times \\
 &\quad \times \omega(x, \nabla_x \varphi) \partial_x^{\beta_{21}} \phi \dots \partial_x^{\beta_{2j}} \phi \partial_x a(x, \xi)
 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de i).

Seconde étape : Nous allons maintenant démontrer ii). Nous devrions établir des estimations de $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_N$, mais par soucis de concision, nous étudierons seulement r_N . En intégrant par parties, nous pouvons facilement montrer que

$$\begin{aligned}
 r_N(h, x, \xi) &= (ih)^N \sum_{|\beta_1| + |\beta_2| = N} \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(2\pi h)^{-n}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle} \langle \eta \rangle^{-2M} \times \\
 &\quad \times \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi) + t\eta) (1 - h^2 \Delta_y)^M [\partial_y^{\beta_1} (e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)}) \partial_y^{\beta_2} a(y, \xi)] dy d\eta dt.
 \end{aligned}$$

Soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\chi_0 = 1$ dans $B(0, 1)$, $\chi_0 = 0$ hors de $B(0, 2)$. Nous utilisons la partition de l'unité

$$\begin{aligned} 1 &= (1 - \chi_0(x - y)) + \chi_0(x - y)(1 - \chi_0(\frac{x - y}{\sqrt{h}})) + \chi_0(x - y)\chi_0(\frac{x - y}{\sqrt{h}}) \\ &= \chi_1(x, y) + \chi_2(x, y) + \chi_3(x, y). \end{aligned}$$

A l'aide de cette identité, nous écrivons la formule précédente sous la forme :

$$r_N(h, x, \xi) = \sum_{j=1}^3 r_{N,j}(h, x, \xi),$$

où

$$\begin{aligned} r_{N,j}(h, x, \xi) &= (ih)^N \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=N} \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_j(x, y) e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle} \times \\ &\times \partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi) + t\eta) \langle \eta \rangle^{-2M} (1 - h^2 \Delta_y)^M [\partial_y^{\beta_1} (e^{ih^{-1}\phi(x,y,\xi)}) \partial_y^{\beta_2} a(y, \xi)] dy d\eta dt. \end{aligned}$$

Commençons par traiter le terme associé à χ_1 . Comme $0 \notin \text{supp}(1 - \chi_0)$ nous pouvons écrire $\chi_1(x, y) e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle} = \chi_1(x, y) |x - y|^{-2r} h^{2r} \Delta_\eta^r (e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle})$, $\forall r$ et intégrer par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} r_{N,1}(h, x, \xi) &= (ih)^{N+2M} \sum_{\substack{|\beta_1|+|\beta_2|=N \\ |\alpha_1|+|\alpha_2|=2M}} \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} C_{\alpha_1, \alpha_2} h^{2r} |x - y|^{-2r} \times \\ &\times \chi_1(x, y) e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle} \Delta_\eta^r [\partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi) + t\eta) \langle \eta \rangle^{-2M}] \times \\ &\times \partial_y^{\alpha_2 + \beta_2} (e^{ih^{-1}\phi(x,y,\xi)}) \partial_y^{\alpha_1 + \beta_1} a(y, \xi) dy d\eta dt. \end{aligned}$$

De plus, nous montrons sans difficulté que

$$\forall L \in \mathbb{N}, |\partial_y^{\alpha_2 + \beta_2} (e^{ih^{-1}\phi(x,y,\xi)}) \partial_y^{\alpha_1 + \beta_1} a(y, \xi)| \leq C_L \langle y \rangle^{-2M - N + 2} \langle \xi \rangle^{-L}$$

et par construction $\Delta_\eta^r [\partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi) + t\eta) \langle \eta \rangle^{-2M}] \leq C \langle \eta \rangle^{-2M}$. De ces estimations, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |r_{N,1}(h, x, \xi)| &\leq \frac{h^{2r+2-n}}{(2\pi)^n \langle \xi \rangle^L} \times \\ &\times \sum_{\substack{|\beta_1|+|\beta_2|=N \\ |\alpha_1|+|\alpha_2|=2M}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_1(x, y)}{\langle x - y \rangle^{-r}} \langle \eta \rangle^{-2M} \langle y \rangle^{-2M - N + 2} dy d\eta \end{aligned}$$

et si nous utilisons la majoration $\langle x - y \rangle^{-r} \leq C \langle x \rangle^{-r} \langle y \rangle^{|r|}$, nous obtenons

$$|r_{N,1}(h, x, \xi)| \leq C_{N,M} \frac{h^{2r+2}}{\langle x \rangle^r \langle \xi \rangle^L} (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta \rangle^{-2M} \langle y \rangle^{r-2M-N+2} dy d\eta$$

Ainsi, en choisissant M assez grand, nous nous assurons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle y \rangle^{r-2M-N+2} \langle \eta \rangle^{-2M} dy d\eta < +\infty$$

et le premier terme satisfait l'estimation souhaitée.

Occupons nous maintenant du terme associé à χ_2 et remarquons que chaque $(x, y) \in \text{supp } \chi_2$ satisfait $2 \geq |x - y| \geq \sqrt{h}$. En travaillant comme dans le cas de $r_{N,1}$ nous aboutissons

$$\begin{aligned} r_{N,2}(h, x, \xi) &= (ih)^{N+2M} \sum_{\substack{|\beta_1|+|\beta_2|=N \\ |\alpha_1|+|\alpha_2|=2M}} \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} C_{\alpha_1, \alpha_2} h^{2r} |x - y|^{-2r} \\ &\quad \times \chi_2(x, y) e^{ih^{-1}\langle x-y, \eta \rangle} \Delta_\eta^r [\partial_\eta^\beta \omega(x, \nabla_x \varphi(x, \xi) + t\eta) \times \langle \eta \rangle^{-2M}] \times \\ &\quad \times [\partial_y^{\alpha_2 + \beta_2} (e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)}) \partial_y^{\alpha_1 + \beta_1} a(y, \xi)] dy d\eta dt \end{aligned}$$

et avec les estimations utilisées dans le cas de $r_{N,1}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} |r_{N,2}(h, x, \xi)| &\leq C \frac{h^{2r+2-n}}{(2\pi)^n} \langle \xi \rangle^{-L} \sum_{\substack{|\beta_1|+|\beta_2|=N \\ |\alpha_1|+|\alpha_2|=2M}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_2(x, y)}{|x - y|^{2r}} \langle \eta \rangle^{-2M} \\ &\quad \langle y \rangle^{-2M-N+2} dy d\eta. \end{aligned}$$

Une fois de plus, nous écrivons $\langle y \rangle^{-M} \leq C \langle x - y \rangle \langle x \rangle^{-M}$ et nous utilisons le fait que $\sqrt{h} \leq |x - y| \leq 2$ sur $\text{supp}(\chi_2)$ pour trouver

$$\chi_2(x, y) |x - y|^{-2r} \langle y \rangle^{-2M-N+2} \leq h^{-r} \langle x \rangle^{-M} \langle y \rangle^{-M-N+2}$$

et

$$|r_{N,2}(h, x, \xi)| \leq C_{N, M} \frac{h^{r+2-n}}{(2\pi)^n} \langle \xi \rangle^{-L} \langle x \rangle^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta \rangle^{-2M} \langle y \rangle^{-M-N+2} dy d\eta.$$

Comme la dernière intégrale est finie pour M et N assez grands, le terme $r_{N,2}$ satisfait les bonnes estimations et il reste à traiter le terme $r_{N,3}$.

La démonstration est basée sur l'estimation suivante (cf. [4]),

$$|\partial_y^{\beta_1} (e^{ih^{-1}\phi(x, y, \xi)})| \leq Ch^{-\frac{|\beta_1|}{2}} \langle x \rangle^{-|\beta_1|}, \quad \forall (x, y) \in \text{supp}(\chi_3).$$

Notons $N^* = N + 2M$ et supposons $|\beta_1| + |\beta_2| = N$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 2M$ ainsi que $|\gamma_1| = |\alpha_1| + |\beta_1| \geq \frac{3}{4}N^*$, nous avons

$$\begin{aligned} |\partial_y^{\alpha_1 + \beta_1} (e^{ih^{-1}\phi}) \partial_y^{\alpha_2 + \beta_2} a(y, \xi)| &\leq Ch^{-\frac{|\alpha_1| + |\beta_1|}{2}} \langle x \rangle^{-|\alpha_1| - |\beta_1|} \langle y \rangle^{-|\alpha_2| - |\beta_2|} \\ &\leq h^{-\frac{N^*}{2}} \langle x \rangle^{-|\gamma_1|} \langle y \rangle^{-N^* + |\gamma_1|} \\ &\leq Ch^{-\frac{N^*}{2}} \langle x \rangle^{-\frac{|\gamma_1|}{2}} \langle x - y \rangle^{\frac{|\gamma_1|}{2}} \langle y \rangle^{-\frac{|\gamma_1|}{2}} \langle y \rangle^{-N^* + |\gamma_1|}. \end{aligned}$$

De plus, $\langle x - y \rangle$ étant borné sur $\text{supp}(\chi_3)$, nous obtenons

$$|\partial_y^{\alpha_1 + \beta_1} (e^{ih^{-1}\phi}) \partial_y^{\alpha_2 + \beta_2} a(y, \xi)| \leq Ch^{-\frac{N^*}{2}} \langle x \rangle^{-\frac{3N^*}{8}} \langle y \rangle^{-\frac{N^*}{2}}.$$

Dans le cas où $|\gamma_2| = |\alpha_2| + |\beta_2| \geq \frac{3}{4}N^*$, nous établissons de la même manière

$$|\partial_y^{\alpha_1 + \beta_1} (e^{ih^{-1}\phi}) \partial_y^{\alpha_2 + \beta_2} a(y, \xi)| \leq Ch^{-\frac{N^*}{2}} \langle x \rangle^{-\frac{N^*}{2}} \langle y \rangle^{-\frac{3N^*}{8}}.$$

Enfin, si $|\gamma_1| \leq \frac{3N^*}{4}$ et $|\gamma_2| \leq \frac{3N^*}{4}$ alors $|\gamma_1| \geq \frac{N^*}{4}$ et nous obtenons directement

$$|\partial_y^{\alpha_1 + \beta_1} (e^{ih^{-1}\phi}) \partial_y^{\alpha_2 + \beta_2} a(y, \xi)| \leq Ch^{-\frac{N^*}{2}} \langle x \rangle^{-\frac{N^*}{4}} \langle y \rangle^{-\frac{N^*}{4}}. \quad (1.20)$$

Ainsi nous pouvons conclure que (1.20) est satisfaite pour chaque α_i, β_j . Avec cette estimation, il est évident que

$$|r_{N,3}(h, x, \xi)| \leq \frac{h^{\frac{N^*}{2} - n}}{(2\pi)^n} \langle \xi \rangle^{-L} \langle x \rangle^{-\frac{N^*}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta \rangle^{-2M} \langle y \rangle^{-\frac{N^*}{4}} dy d\eta,$$

ce qui achève la démonstration. ■

1.2 Rappels de théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger

Dans cette partie, nous rappelons quelques résultats de la théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger. Nous nous attarderons sur les différentes formules de représentation de la matrice de diffusion et nous essaierons de mettre en évidence la différence entre le cas d'un potentiel de courte portée avec $\rho > \frac{n+1}{2}$ et le cas de courte portée avec seulement $\rho > 1$.

1.2.1 Résultats généraux

Considérons l'opérateur de Schrödinger semiclassique $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V$, sur \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $0 < h \leq 1$. Nous supposons qu'il existe $\rho > 1$ tel que $V(x)$ satisfait la condition suivante :

Hypothèse (V) $_\rho$: V est une fonction C^∞ à valeurs réelles telle que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\rho - |\alpha|}.$$

L'opérateur $P(h)$ avec domaine $D(P(h)) = H^2(\mathbb{R}^n)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}_+^*$, les opérateurs d'ondes sont

$$W^\pm(I, h) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{ih^{-1}tP(h)} e^{-ih^{-1}tP_0(h)} E_{P_0}(I),$$

où E_{P_0} est le projecteur spectral associé à $P_0(h)$. D'après [1], nous savons que ces opérateurs existent et qu'ils sont complets. Nous pouvons donc définir l'opérateur de diffusion $S(I, h) = W^+(I, h)^*W^-(I, h)$. Cet opérateur se diagonalise à l'aide de la transformée de Fourier en un opérateur unitaire

$$S(\lambda, h) : L^2(S^{n-1}) \longrightarrow L^2(S^{n-1}),$$

appelé matrice de diffusion. Nous introduisons ensuite l'opérateur $T(\lambda, h)$ défini par $S(\lambda, h) = Id - 2i\pi T(\lambda, h)$. Il est connu (cf. [1], [32] et [33]) que $T(\lambda, h)$ est un opérateur compact. Si $\rho > \frac{n+1}{2}$, c'est même un opérateur de Hilbert-Schmidt et nous notons $T(\theta, \omega, \lambda, h)$ son noyau. De plus, d'après [29], sous l'hypothèse $\rho > 1$, $T(\lambda, h)$ est un opérateur intégral et son noyau $T(\theta, \omega, \lambda, h)$ est C^∞ par rapport à la variable $(\theta, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}$. Avec ces notations, l'amplitude de diffusion est donnée par

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = c(\lambda, h)T(\theta, \omega, \lambda, h),$$

avec

$$c(\lambda, h) = -2\pi(2\lambda)^{-\frac{n-1}{4}}(2\pi h)^{\frac{n-1}{2}}e^{-i\frac{(n-3)\pi}{4}}.$$

Nous verrons plus loin que le comportement de l'amplitude de diffusion est intimement lié au comportement de la résolvante de l'opérateur $P(h)$. Nous ne menons pas une étude détaillée dans cette partie, nous nous contentons de rappeler la définition et le principe d'absorption limite.

Comme $P(h)$ est auto-adjoint, alors $R(z) = (P(h) - z)^{-1}$ est bien définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De plus $h \in]0, 1]$ étant fixé, nous savons (cf. [1]) que

$$R(\lambda \pm i0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} R(\lambda \pm i\epsilon)$$

existe dans l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{L}(L_\alpha^2, H_{-\alpha}^2)$ à condition que $\alpha > \frac{1}{2}$.

1.2.2 Représentation de la matrice de diffusion.

Notons $\psi_0(x, \lambda, \omega, h)$ la fonction propre généralisée de $P_0(h) = -h^2\Delta$:

$$\psi_0(x, \lambda, \omega, h) = \exp(ih^{-1}\sqrt{2\lambda}\langle x, \omega \rangle).$$

Si le potentiel V satisfait $(V)_\rho$ avec $\rho > \frac{n+1}{2}$, alors la fonction $V(x)\psi_0(x, \lambda, \omega, h)$ appartient à $L_\alpha^2(\mathbb{R}^n)$, quel que soit $\alpha < \rho - \frac{n}{2}$ (notons au passage que $\rho - \frac{n}{2} > \frac{1}{2}$). Par suite, la fonction propre généralisée $\psi_+(x, \lambda, \omega, h)$ de $P(h)$ est donnée par

$$\psi_+ = \psi_0 - R(\lambda + i0)V\psi_0 \tag{1.21}$$

et le noyau $T(\theta, \omega, \lambda, h)$ a l'expression suivante

$$T(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \langle V\psi_+(\cdot, \lambda, \omega, h), \psi_0(\cdot, \lambda, \theta, h) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.22}$$

avec

$$c_0(\lambda, h) = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} (2\lambda)^{\frac{n-2}{4}}.$$

D'autre part, l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$, est définie par l'asymptotique suivante

$$\psi_+(r\theta, \lambda, \omega, h) = \psi_0(r\theta, \lambda, \omega, h) + f(\theta, \omega, \lambda, h) r^{-\frac{n-1}{2}} e^{ih^{-1}\sqrt{2\lambda}r} + \mathcal{O}(r^{-\frac{n-1}{2}}),$$

lorsque $r \rightarrow +\infty$ et nous vérifions aisément que $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ définie de cette manière, satisfait $f(\theta, \omega, \lambda, h) = c(\lambda, h)T(\theta, \omega, \lambda, h)$, comme cela est annoncé dans la partie précédente.

Dans le cas général $\rho > 1$, nous ne pouvons pas définir $T(\theta, \omega, \lambda, h)$ comme précédemment. Remarquons, par exemple que $R(\lambda + i0)V\psi_0$ est bien définie si et seulement si $V\psi_0$ appartient à L^2_α pour un certain $\alpha > \frac{1}{2}$. Dans notre cas, cela revient à supposer $(\mathbf{V})_\rho$ avec $\rho > \frac{n+1}{2}$. Ainsi la première étape dans l'étude de l'amplitude de diffusion, est l'obtention d'une formule de représentation pour $T(\theta, \omega, \lambda, h)$ dans le cas $1 < \rho \leq \frac{n+1}{2}$. Une telle formule a été obtenue dans [29] et a été utilisée dans [53] pour prouver un développement asymptotique de l'amplitude de diffusion dans le cas non-captif, avec $\rho > 1$. Nous allons maintenant rappeler cette représentation et nous commençons par quelques notations.

Nous utilisons les classes de symboles $A_k^{m,u}$ définies précédemment. En particulier, nous rappelons que $a \in A_k^{m,-\infty}(\Omega)$ si et seulement si $\forall L > 1, \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n, \exists C > 0, \forall(x, \xi) \in \Omega,$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \leq Ch^k \langle x \rangle^{m-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{-L}.$$

Nous utilisons aussi les régions entrantes et sortantes de l'espace des phases définies par

$$\Gamma_\pm(R, d, \sigma) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x| > R, d^{-1} < |\xi| < d, \pm \cos(x, \xi) > \pm\sigma\}$$

pour $R > 1, d > 1$ et $\sigma \in]-1, 1[$, où $\cos(x, \xi) = \frac{\langle x, \xi \rangle}{|x||\xi|}$. Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, nous définissons $\mathcal{F}_0(\lambda, h) : L^2_\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(S^{n-1})$, par

$$(\mathcal{F}_0(\lambda, h)f)(\omega) = c_0(\lambda, h) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ih^{-1}\sqrt{2\lambda}\langle x, \omega \rangle} f(x) dx, \lambda > 0.$$

Soit $f \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\gamma > \frac{1}{2}$, supposons que f a un support compact $[c, d]$ par rapport à l'énergie, c'est à dire $\mathcal{F}_0(\lambda, h)f = 0$ si $\lambda \notin [c, d]$. L'idée de Isozaki et Kitada est d'approcher l'opérateur $e^{-ih^{-1}tP(h)}W_\pm(h)f$, $\pm t > 0$, par $I_h(a_\pm, \Phi_\pm)e^{ih^{-1}tP_0(h)}f$, où les $I_h(a_\pm, \Phi_\pm)$ sont des opérateurs Intégraux de Fourier avec symboles a_\pm et phases $\Phi_{\pm a}$. Formellement, en notant

$$I_h(a_\pm, \Phi_{\pm a})(f)(x) = (2\pi h)^{-n} \int \int e^{ih^{-1}(\Phi_{\pm a}(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle)} a_\pm(x, \xi) f(y) dy d\xi, \quad (1.23)$$

la phase $\Phi_{\pm a}$ doit être solution de l'équation eikonale

$$\frac{1}{2}|\nabla_x \Phi_{\pm a}(x, \xi)|^2 + V(x) = \frac{1}{2}|\xi|^2$$

et les symboles a_{\pm} satisfont les équations de transport

$$\left(-\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x) - \frac{1}{2}|\xi|^2\right)(a_{\pm}e^{ih^{-1}\Phi_{\pm a}}) \sim 0. \quad (1.24)$$

Soient $R_0 \gg 1$, $1 < d_4 < d_3 < d_2 < d_1 < d_0$, $0 < \sigma_2^- < \sigma_1^- < \sigma_0^- < \sigma_0^+ < \sigma_1^+ < \sigma_2^+ < 1$ et notons $\tau_j^{\pm} = -\sigma_j^{\mp}$ pour $j = 0, 1, 2$, de sorte que nous avons aussi $-1 < \tau_2^- < \tau_1^- < \tau_0^- < \tau_0^+ < \tau_1^+ < \tau_2^+ < 0$.

D'après la Proposition 2.4 de [28], nous pouvons trouver une fonction C^{∞} à valeurs réelles, $\Phi_{\pm a}$ ayant les propriétés suivantes :

- ($\varphi 1$) $\Phi_{\pm a}(x, \xi)$ est solution de l'équation eikonale $\frac{1}{2}|\nabla_x \Phi_{\pm a}(x, \xi)|^2 + V(x) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ dans $\Gamma_{\pm}(R_0, d_0, \tau_0^{\pm})$.
- ($\varphi 2$) $\Phi_{\pm a}(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle$ appartient à $A_0^{\epsilon, 0}$ pour tout $\epsilon > 0$.
- ($\varphi 3$) Pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|\frac{\partial^2 \Phi_{\pm a}}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) - \delta_{jk}| < \epsilon(R_0)$, δ_{jk} étant le symbole de Kronecker et $\epsilon(R_0)$ pouvant être choisi aussi petit que voulu en prenant R_0 assez grand.

Cette phase étant construite, nous cherchons a_{\pm} sous la forme

$$a_{\pm}(x, \xi, h) = \sum_{j \geq 0} a_{\pm j}(x, \xi)h^j.$$

En remplaçant a_{\pm} par cette expression dans (1.24) et en identifiant suivant les puissances de h , nous obtenons les équations de transport suivantes

$$\begin{cases} \langle \nabla_x \Phi_{\pm a}, \nabla_x a_{\pm 0} \rangle + \frac{1}{2}\Delta_x \Phi_{\pm a} a_{\pm 0} = 0 \\ \langle \nabla_x \Phi_{\pm a}, \nabla_x a_{\pm j} \rangle + \frac{1}{2}\Delta_x \Phi_{\pm a} a_{\pm j} = \frac{i}{2}\Delta_x a_{\pm j-1}, \quad j \geq 1 \end{cases} \quad (1.25)$$

avec les conditions à l'infini

$$a_{\pm 0} \rightarrow 1 \text{ et } a_{\pm j} \rightarrow 0, \quad j \geq 1 \text{ quand } |x| \rightarrow 0. \quad (1.26)$$

Ces équations se résolvent par la méthode des caractéristiques (cf. [28], [29], [53]) et nous obtenons des symboles $a_{\pm j}$ vérifiant les propriétés suivantes (s0) $a_{\pm j}$ appartient à $A_0^{-j, -\infty}$. (s1) $\text{supp}(a_{\pm j}) \subset \Gamma_{\pm}(3R_0, d_1, \tau_1^{\pm})$. (s2) $a_{\pm j}$ est solution de l'équation (1.25) avec (1.26) dans $\Gamma_{\pm}(4R_0, d_2, \tau_2^{\pm})$. (s3) $a_{\pm j}$ satisfait l'équation (1.25) dans $\Gamma_{\pm}(4R_0, d_1, \tau_2^{\pm})$. Fixons maintenant un entier N assez grand (à choisir par la suite) et posons

$$a_{\pm}(x, \xi, h) = \sum_{j=0}^N a_{\pm j}(x, \xi)h^j \in A_0^{0, -\infty}.$$

Alors, l'opérateur $J_{\pm a}(h) = I_h(a_{\pm}, \Phi_{\pm a})$ est bien défini et l'opérateur $K_{\pm a}$, donné par $K_{\pm a} = P(h)J_{\pm a} - J_{\pm a}P_0(h)$, est aussi un opérateur Intégral de Fourier. En fait, $K_{\pm a} = I_h(k_{\pm a}, \Phi_{\pm a})$ avec

$$k_{\pm a} = e^{-ih^{-1}\Phi_{\pm a}} \left(-\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x) - \frac{1}{2}|\xi|^2 \right) (e^{ih^{-1}\Phi_{\pm a}} a_{\pm}). \quad (1.27)$$

Par construction, le symbole $k_{\pm a}$ vérifie les propriétés suivantes :

- (k0) $k_{\pm a} \in A_1^{-1, -\infty}$.
- (k1) $\text{supp}(k_{\pm a}) \subset \Gamma_{\pm}(3R_0, d_1, \tau_1^{\pm})$.
- (k2) $k_{\pm a} \in A_{N+2}^{-(N+2), -\infty}(\Gamma_{\pm}(4R_0, d_1, \tau_2^{\pm}))$.

De manière identique, nous définissons l'opérateur $J_{\pm b} = I_h(b_{\pm}, \Phi_{\pm})$ associé à la région $\Gamma_{\pm}(5R_0, d_3, \sigma_1^{\pm})$. Nous définissons d'abord des fonctions phases $\Phi_{\pm b} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ vérifiant $(\varphi 1)$ dans $\Gamma_{\pm}(R_0, d_0, \sigma_0^{\pm})$, $(\varphi 2)$ et $(\varphi 3)$. Ensuite, nous définissons un symbole

$$b_{\pm}(x, \xi, h) = \sum_{j=0}^N b_{\pm j}(x, \xi) h^j$$

satisfaisant (s0), (s1) pour la région $\Gamma_{\pm}(5R_0, d_3, \sigma_1^{\pm})$, (s2) pour $\Gamma_{\pm}(6R_0, d_4, \sigma_2^{\pm})$ et (s3) pour $\Gamma_{\pm}(6R_0, d_3, \sigma_2^{\pm})$. En reprenant les mêmes arguments que ci-dessus, nous définissons $K_{\pm b}(h) = P(h)J_{\pm b}(h) - J_{\pm b}(h)P_0(h) = I_h(k_{\pm b}, \Phi_{\pm b})$, avec

$$k_{\pm b} = e^{-ih^{-1}\Phi_{\pm b}} \left(-\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x) - \frac{1}{2}|\xi|^2 \right) (e^{ih^{-1}\Phi_{\pm b}} b_{\pm}). \quad (1.28)$$

Ainsi, le symbole $k_{\pm b}$ satisfait les hypothèses (k0), (k1) pour $\Gamma_{\pm}(5R_0, d_3, \sigma_1^{\pm})$ et (k2) pour $\Gamma_{\pm}(6R_0, d_3, \sigma_2^{\pm})$. Maintenant que cette construction est achevée, nous pouvons donner la formule de Isozaki et Kitada.

Proposition 1.6 (Isozaki-Kitada [29]). *Pour $\lambda \in]\frac{d_4^{-2}}{2}, \frac{d_4^2}{2}[$, nous avons*

$$T(\lambda, h) = T_1(\lambda, h) - T_2(\lambda, h),$$

avec

$$T_1(\lambda, h) = \mathcal{F}_0(\lambda, h)(J_{+a}^*(h) + J_{-a}^*(h))(K_{+b}(h) + K_{-b}(h))\mathcal{F}_0^*(\lambda, h) \quad (1.29)$$

et

$$T_2(\lambda, h) = \mathcal{F}_0(\lambda, h)(K_{+a}^*(h) + K_{-a}^*(h))R(\lambda + i0)(K_{+b}(h) + K_{-b}(h))\mathcal{F}_0^*(\lambda, h). \quad (1.30)$$

Remarque 1.1 *Cette construction est valable quels que soient les symboles a_{\pm} et b_{\pm} construits suivant le processus précédent. En particulier nous sommes libres du choix de l'entier N à partir duquel nous tronquons les séries définissant a_{\pm} et b_{\pm} . Dans la suite, nous pourrions donc choisir N aussi grand que nous le voulons.*

Nous pouvons immédiatement écrire $T_1(\lambda, h)$ sous la forme $T_1(\lambda, h) = (T_{+1}^+ + T_{+1}^- + T_{-1}^+ + T_{-1}^-)(\lambda, h)$, avec

$$T_{\pm 1}^+(\lambda, h) = \mathcal{F}_0(\lambda, h) J_{+a}^*(h) K_{\pm b}(h) \mathcal{F}_0^*(\lambda, h),$$

$$T_{\pm 1}^-(\lambda, h) = \mathcal{F}_0(\lambda, h) J_{-a}^*(h) K_{\pm b}(h) \mathcal{F}_0^*(\lambda, h).$$

Notons $T_{\pm 1}^\pm(\theta, \omega, \lambda, h)$ le noyau de $T_{\pm 1}^\pm(\lambda, h)$. Il est facile de démontrer que

$$T_{\pm 1}^\pm(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \int e^{ih^{-1}\psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega)} k_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) \bar{a}_\pm(x, \sqrt{2\lambda\theta}) dx, \quad (1.31)$$

où $\psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega) = \Phi_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) - \Phi_{\pm a}(x, \sqrt{2\lambda\theta})$. De manière générale, nous avons

$$\begin{aligned} |\nabla_x \psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega)| &\geq \sqrt{2\lambda} |\theta - \omega| - |\nabla_x \Phi_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) - \sqrt{2\lambda\omega}| \\ &\quad - |\nabla_x \Phi_{\pm a}(x, \sqrt{2\lambda\theta}) - \sqrt{2\lambda\theta}| \end{aligned}$$

Plaçons nous maintenant dans le cas où $\theta \neq \omega$. Comme $\Phi_{\pm b}$ et $\Phi_{\pm a}$ vérifient $(\varphi 2)$, nous pouvons supposer que R_0 est assez grand pour que

$$|\nabla_x \Phi_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) - \sqrt{2\lambda\omega}| + |\nabla_x \Phi_{\pm a}(x, \sqrt{2\lambda\theta}) - \sqrt{2\lambda\theta}| < \frac{|\theta - \omega|}{2}$$

quel que soit $x \in \text{supp}(k_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) \bar{a}_\pm(x, \sqrt{2\lambda\theta}))$. Par suite, dans l'intégrale (1.31),

$$|\nabla_x \psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega)| \geq \frac{|\theta - \omega|}{2} > 0$$

et nous pouvons écrire

$$e^{ih^{-1}\psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega)} = \frac{1}{|\nabla_x \psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega)|} (hD_x)(e^{ih^{-1}\psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega)}).$$

En intégrant par parties autant de fois que nécessaire, nous obtenons

$$T_{\pm 1}(\theta, \omega, \lambda, h) = \mathcal{O}(h^\infty),$$

cette estimation étant uniforme par rapport à $\lambda \in K$, pour tout compact K de \mathbb{R}_+^* . De manière identique, nous pouvons écrire $T_2(\lambda, h) = (T_{+2}^+ + T_{+2}^- + T_{-2}^+ + T_{-2}^-)(\lambda, h)$, avec

$$T_{\pm 2}^+(\lambda, h) = \mathcal{F}_0(\lambda, h) K_{+a}^*(h) R(\lambda + i0) K_{\pm b}(h) \mathcal{F}_0^*(\lambda, h),$$

$$T_{\pm 2}^-(\lambda, h) = \mathcal{F}_0(\lambda, h) K_{-a}^*(h) R(\lambda + i0) K_{\pm b}(h) \mathcal{F}_0^*(\lambda, h).$$

Notons $T_{\pm 2}^\pm(\theta, \omega, \lambda, h)$, le noyau de $T_{\pm 2}^\pm(\lambda, h)$, alors nous avons

$$\begin{aligned} T_{2, \pm}^\pm(\theta, \omega, \lambda, h) &= c_0(\lambda, h)^2 \langle R(\lambda + i0) k_{\pm b}(\cdot, \sqrt{2\lambda\omega}) e^{ih^{-1}\Phi_{\pm b}(\cdot, \sqrt{2\lambda\omega})}, \\ &\quad k_{\pm a}(\cdot, \sqrt{2\lambda\theta}) e^{ih^{-1}\Phi_{\pm a}(\cdot, \sqrt{2\lambda\theta})} \rangle. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Nous achevons cette section par une courte comparaison entre cette formule et la formule (1.22) valable dans le cas d'un potentiel $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\theta \neq \omega$ et si V a un support compact, nous pouvons intégrer par parties dans (1.22) autant de fois que nécessaire, pour obtenir

$$T(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \langle R(\lambda + i0) V e^{ih^{-1}\sqrt{2\lambda}\langle \cdot, \omega \rangle}, V e^{ih^{-1}\sqrt{2\lambda}\langle \cdot, \theta \rangle} \rangle_{L^2} + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (1.33)$$

Les formules (1.32) et (1.33) sont très similaires, $k_{\pm b}$ et k_{+a} jouant le rôle de V et Φ_{\pm} jouant le rôle de la phase plane $\langle x, \xi \rangle$. Une des différences principales, est que dans le second cas, $R(\lambda + i0)$ agit sur une fonction à support compact $V e^{ih^{-1}\langle \cdot, \omega \rangle}$. Par conséquent, sous une hypothèse d'échappement de certaines trajectoires, il est possible d'approcher $R(\lambda + i0) V e^{ih^{-1}\langle \cdot, \omega \rangle}$ par

$$ih^{-1} \int_0^T e^{-ih^{-1}t(P(h)-\lambda)} V e^{ih^{-1}\langle \cdot, \omega \rangle} dt$$

pour $T > 0$ assez grand. Ainsi, nous pouvons remplacer la résolvante par un terme contenant uniquement le propagateur $e^{-ih^{-1}tP(h)}$ qui est plus facile à examiner. Ceci ne peut pas être fait immédiatement dans la formule (1.32) même dans le cas non captif. La raison est que pour tout $T > 0$, il peut exister des particules classiques partant d'un point $(x, \xi) \in \text{supp}(k_{\pm b})$ au temps $t = 0$ qui passent au dessus de $\text{supp}(k_{+a})$ au temps $t = T$. C'est pourquoi, dans la formule (1.32), nous voudrions localiser dans des régions bornées. Plus précisément, nous cherchons des fonctions $g_{\pm b}$ et $g_{\pm a}$ à supports compacts, telles que

$$T_{2,\pm}^\pm(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \langle R(\lambda + i0) g_{\pm b} e^{ih^{-1}\Phi_{\pm b}}, g_{\pm a} e^{ih^{-1}\Phi_{\pm a}} \rangle + \mathcal{O}(h^\infty).$$

1.2.3 Estimations microlocales de la résolvante dans le cas non-captif

Dans cette partie, nous rappelons des résultats établis par Robert et Tamura dans [52] et [53]. Soit $\hat{P}(h) = -h^2\Delta + \hat{V}(x)$ une perturbation de courte portée du Laplacien (i.e. $\hat{V} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfait $(V)_\rho$ avec $\rho > 1$) et soit $\lambda > 0$ un niveau d'énergie **non captif** pour le potentiel \hat{V} . Alors, nous avons les lemmes suivants.

Lemme 1.3 *Soit $a(x, \xi)$ un polynôme de degré $p \leq 2$ et soit $\alpha > \frac{1}{2}$. Alors, nous avons l'estimation de la résolvante suivante :*

$$\|a(x, hD_x) \hat{R}(\lambda \pm i0)\|_{\alpha, -\alpha} = \mathcal{O}(h^{-1}).$$

Démonstration. Nous rappelons la démonstration donnée dans [6]. Comme λ est non-captif pour V , il est bien connu (cf. [52], [18]), que

$$\forall \alpha > \frac{1}{2}, \|\hat{R}(\lambda \pm i0)\|_{\alpha, -\alpha} = \mathcal{O}(h^{-1}), \quad (1.34)$$

et nous devons estimer $\|\langle x \rangle^{-\alpha} A(x, hD_x) \hat{R}(\lambda + i0) \langle x \rangle^{-\alpha}\|_{L^2, L^2}$. Pour cela, introduisons l'opérateur elliptique $\hat{P}(h) + i$ et écrivons

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^{-\alpha} A(x, hD_x) \hat{R}(\lambda + i0) \langle x \rangle^{-\alpha} \\ &= \langle x \rangle^{-\alpha} A(x, hD_x) (\hat{P}(h) + i)^{-1} \langle x \rangle^\alpha \times \\ & \quad \times \langle x \rangle^{-\alpha} (\hat{P}(h) + i) \hat{R}(\lambda + i0) \langle x \rangle^{-\alpha} \\ &= \langle x \rangle^{-\alpha} A(x, hD_x) (\hat{P}(h) + i)^{-1} \langle x \rangle^\alpha \times \\ & \quad \times \left[\langle x \rangle^{-2\alpha} + (i + \lambda) \langle x \rangle^{-\alpha} \hat{R}(\lambda + i0) \langle x \rangle^{-\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|a(x, hD_x) \hat{R}(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} &\leq \|\langle x \rangle^{-\alpha} a(x, hD_x) (\hat{P}(h) + i)^{-1} \langle x \rangle^\alpha\|_{0,0} \times \\ &\quad \times \left(\|\langle x \rangle^{-2\alpha}\|_{0,0} + \sqrt{1 + \lambda^2} \|\langle x \rangle^{-\alpha} \hat{R}(\lambda + i0) \langle x \rangle^{-\alpha}\|_{0,0} \right) \\ &\leq \|\langle x \rangle^{-\alpha} a(x, hD_x) (P(h) + i)^{-1} \langle x \rangle^\alpha\|_{0,0} (1 + Ch^{-1}). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'ellipticité de $\hat{P}(h) + i$ et le calcul fonctionnel développé dans [11] nous obtenons $\|\langle x \rangle^{-\alpha} a(x, hD_x) (P(h) + i)^{-1} \langle x \rangle^\alpha\|_{0,0} = \mathcal{O}(1)$ ce qui achève la démonstration. \blacksquare

Lemme 1.4 *Soit $\omega_\pm \in A_0^{0, -\infty}$ tel que $\text{supp}(\omega_\pm) \subset \Gamma_\pm(R, d, \sigma_\pm)$. Alors pour tout $\alpha > 1$, nous avons les assertions suivantes :*

i)

$$\|\hat{R}(\lambda \pm i0) \omega_\pm(x, hD_x)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} = \mathcal{O}(h^{-1}), \quad \forall \delta > 1.$$

ii) *Si $\sigma_+ > \sigma_-$, alors*

$$\|\omega_\mp(x, hD_x) \hat{R}(\lambda \pm i0) \omega_\pm(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha} = \mathcal{O}(h^\infty).$$

iii) *Si $\omega \in A_0^{0, m}$, $m \in \mathbb{R}$ et $\text{supp}(\omega) \subset \{|x| < \tilde{R}\}$, $0 < \tilde{R} < R$, alors*

$$\|\omega(x, hD_x) \hat{R}(\lambda \pm i0) \omega_\pm(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha} = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Démonstration. Ce lemme est le même que celui utilisé par Robert et Tamura dans [53], à l'exception de iii) où nous donnons une estimation pour $\omega \in A_0^{0, m}$, $\forall m$, au lieu de $\omega \in A_0^{0, -\infty}$, mais la démonstration fonctionne avec les mêmes arguments. Il suffit d'utiliser l'effet régularisant et pondérant de $\omega_\pm(x, hD_x)$ afin de neutraliser $\omega(x, hD_x)$. Nous laissons les détails au lecteur. \blacksquare

Le lemme suivant est central dans l'analyse menée dans [53]. Remarquons que l'entier N qui apparaît dans l'énoncé est celui que nous avons fixé au moment où nous avons défini les symboles a_\pm et b_\pm . Cet entier pourra être choisi arbitrairement grand par la suite (cf. Remarque 1.1).

Lemme 1.5 (Robert-Tamura [53], Lemma 2.1) *Sous les mêmes hypothèses que dans le Lemme précédent et pour $\alpha > \frac{n}{2}$, les assertions suivantes sont vraies :*

- i) $\| K_{\pm a}^*(h)\hat{R}(\lambda + i0)K_{+b}(h) \|_{-\alpha,\alpha} = O(h^{\frac{N}{2}}),$
- ii) $\| K_{-a}^*(h)\hat{R}(\lambda + i0)K_{-b}(h) \|_{-\alpha,\alpha} = O(h^{\frac{N}{2}}),$
- iii) $\| K_{+a}^*(h)\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_b)K_{-b}(h) \|_{-\alpha,\alpha} = O(h^{\frac{N}{2}}),$
- iv) $\| ((1 - \chi_a)K_{+a})^*(h)\hat{R}(\lambda + i0)\chi_b K_{-b}(h) \|_{-\alpha,\alpha} = O(h^{\frac{N}{2}}).$

Démonstration. La démonstration est une conséquence du Lemme 1.4. En effet, les opérateurs Intégraux de Fourier, $K_{\pm b}$ et K_{+a} , localisent dans des régions entrantes et sortantes modulo des termes d'erreurs d'ordre $\mathcal{O}(h^\infty)$. Plus précisément, ces régions sont telles que si ces opérateurs étaient des pseudo-différentiels, nous pourrions appliquer directement le Lemme précédent. Nous nous ramérons à ce cas en utilisant les résultats de composition entre opérateurs Fourier Intégraux et pseudo-différentiels décrits au Lemme 1.2.

1.2.4 Résonances

Nous terminons cette section consacrée à des résultats généraux sur l'opérateur de Schrödinger par quelques rappels sur la notion de résonance. Si le support du potentiel V est compact, la manière la plus rapide pour introduire la notion de résonance est de les voir comme les pôles de la matrice de diffusion. Cette vision a été introduite par Lax et Phillips [37] qui démontrent en dimension impaire, que la matrice de diffusion possède de un prolongement analytique qui est holomorphe dans le demi-plan supérieur et méromorphe dans le demi-plan inférieur.

Un autre moyen de définir les résonances est l'emploi de distorsions analytiques. Cette méthode initiée par Aguilar et Combes [2] puis Hunziker [26], consiste à construire un opérateur non autoadjoint à partir de $P(h)$ dont les valeurs propres seront les résonances de $P(h)$. L'avantage évident de cette méthode par rapport à la première est qu'elle est constructive, puisque les résonances seront exactement les valeurs propres d'un opérateur étroitement relié à $P(h)$. Cette méthode a été généralisée par Hunziker [26] puis par Sjöstrand-Zworski [56] pour des potentiels à supports compacts et enfin par Sjöstrand [54, 55] pour des potentiels de courte portée. C'est cette dernière formulation que nous allons rappeler brièvement à présent. Pour plus de détails nous renvoyons par exemple à [56], [54], [55].

Tout d'abord, nous avons besoin de faire une hypothèse d'holomorphie à l'infini sur le potentiel V :

Hypothèse (Hol) $_\infty$: Nous supposons qu'il existe $\mu_0 \in [0, \pi[$ et $R > 0$ tels que le potentiel V a un prolongement analytique au domaine

$$D_{R,\mu_0} = \{x \in \mathbb{C}^n, |x| > R, |Im x| \leq \tan(\mu_0)|Re x|\}$$

et

$$\exists \beta > 0, \exists C > 0, \forall x \in D_{R, \mu_0}, |V(x)| \leq C|x|^{-\beta}.$$

Nous allons maintenant construire l'opérateur dilaté. Pour $\mu_0 > 0$ suffisamment petit, $\epsilon_0 > 0$ et $0 < \mu < \mu_0$, il existe $f_\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ qui est injective pour chaque μ et satisfait les propriétés suivantes :

- i) $f_\mu(t) = t$ pour $0 \leq t \leq 7R_0$,
- ii) $0 \leq \arg f_\mu(t) \leq \mu$ et $\partial_t f_\mu(t) \neq 0, \forall t \geq 0$
- iii) $\arg(f_\mu(t)) \leq \arg(\partial_t f_\mu(t)) \leq \arg(f_\mu(t)) + \epsilon_0$
- iv) $\arg f_\mu(t) = e^{i\mu}t$, pour $t \geq 8R_0$

Notons maintenant κ_μ l'application définie par

$$\kappa_\mu : \mathbb{R}^n \ni x = t\omega \longmapsto f_\mu(t)\omega, \quad t = |x|$$

et définissons $\Gamma_\mu = \kappa_\mu(\mathbb{R}^n)$ et $U_\mu : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Gamma_\mu)$ par $U_\mu \varphi(x) = J_\mu(x)\varphi(\kappa_\mu(x))$, où $J_\mu(x)$ est le Jacobien associé à la transformation κ_μ . Nous définissons alors l'opérateur modifié par

$$P_\mu(h) = U_\mu P(h) U_\mu^{-1}. \tag{1.35}$$

Ceci définit un opérateur non-borné et non-autoadjoint sur $L^2(\Gamma_\mu)$ dont le domaine est $\mathcal{D}_\mu = H^2(\Gamma_\mu)$. De plus, en utilisant la théorie de Fredholm analytique, il est possible de démontrer que le spectre de l'opérateur $P_\mu(h)$ est constitué de la droite $e^{-2i\mu}[0, +\infty[$ et de valeurs propres isolées λ vérifiant $-2\mu < \arg \lambda \leq 0$.

Définition 1.5 *Nous dirons que $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $-2\mu < \arg(\lambda) \leq 0$ est une résonance de $P(h)$ si λ appartient au spectre de P_μ .*

Avec cette définition, Sjöstrand et Zworski [56], démontrent le résultat suivant.

Lemme 1.6 *La résolvante $(P(h) - z)^{-1} : L^2_{comp}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, définie à priori pour $\text{Im } z > 0$, peut être prolongé méromorphiquement à travers $]0, +\infty[$ au complémentaire dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ de l'ensemble des résonances.*

Par ailleurs, ce résultat peut être étendu au cas de potentiels de courte portée (cf. [55]). Nous en déduisons que près de l'axe réel, les résonances de $P(h)$ coïncident avec les pôles de la résolvante tronquée $\chi R(z)\chi$, quelle que soit la fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Signalons aussi qu'il existe une définition microlocale des résonances due à Helffer et Sjöstrand [24]. Cette théorie a été récemment simplifiée par Lahmar-Benbernou et Martinez [36], [38]. Pour l'équivalence entre toutes ces définitions, nous renvoyons au travail de Helffer et Martinez [23]. Dans toute la suite, nous noterons $\text{Res}(P(h))$ l'ensemble des résonances de $P(h)$.

La Définition 1.5 permet d'obtenir des résultats fondamentaux sur la répartition et la localisation des résonances. Commençons par rappeler une majoration du nombre de résonances dans une boîte de taille 1, autour de l'axe réel. Le résultat suivant est une conséquence de la formule de trace de Sjöstrand (cf. [54] et [55]).

Théorème 1.1 *Quels que soient $0 < E_m < E_M < +\infty$, il existe des constantes $\epsilon_0, \tilde{n}, h_0 > 0$ et $C(E_m, E_M, \epsilon_0) > 0$ telles que pour tout $0 < h < h_0$,*

$$\text{Card}(Res(P(h)) \cap ([E_m, E_M] + i[0, \epsilon_0])) \leq C(E_m, E_M, \epsilon_0)h^{-\tilde{n}} \quad (1.36)$$

Le résultat suivant concerne la vitesse de convergence des résonances vers l'axe réel. Pour des niveaux d'énergie non-captifs, nous savons (cf. [38] pour des hypothèses minimales) qu'il existe une bande de taille $h \log \frac{1}{h}$ libre de résonances. Dans le cas captif, la situation est différente. Nous savons par exemple (cf. [24]) que pour le cas d'un *puits dans une île*, il existe des résonances convergeant exponentiellement vite vers l'axe réel. Récemment, N. Burq a montré qu'une telle vitesse de convergence était maximale. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.2 (Burq, [7]) *Quels que soient $0 < E_m < E_M < +\infty$, il existe des constantes $C, d, h_0 > 0$ telles que pour tout $0 < h < h_0$, l'opérateur $P(h)$ n'a pas de résonance dans l'ensemble*

$$\left\{ z \in \mathbb{C}; \text{dist}(z, [E_m, E_M]) \leq Ce^{-d/h} \right\}.$$

Remarque 1.2 *Ce résultat a été généralisé récemment par Vodev [65] et Cardoso-Vodev [9] au cas d'un opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne.*

1.3 Étude des trajectoires classiques

Dans cette partie, nous nous consacrons à l'étude du système Hamiltonien associé au symbole de l'opérateur $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$. Plus précisément, le symbole de cet opérateur est $\sigma_P(x, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$ et le système Hamiltonien associé s'écrit

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_{\xi}\sigma_P(q, p) = p, \\ \dot{p} = -\nabla_x\sigma_P(q, p) = -\nabla_x V(q). \end{cases} \quad (1.37)$$

Dans un premier temps, nous effectuons quelques rappels de mécanique classique et nous introduisons des notions que nous utiliserons dans les parties 2 et 3. Nous étudions ensuite le flot Hamiltonien plus en détails. Par exemple, nous montrons que pour des conditions initiales appartenant à certaines régions de l'espace des phases, les trajectoires classiques s'échappent quand $t \rightarrow \pm\infty$. Ceci n'est pas acquis d'avance et le comportement en temps grand des trajectoires classiques conditionne l'étude de l'amplitude de diffusion dans la limite semiclassique. Ainsi l'hypothèse la plus couramment utilisée est l'hypothèse de non-capture des trajectoires classiques formulée par Robert et Tamura [53], que nous énonçons maintenant.

Définition 1.6 (NC) Nous dirons qu'une énergie $\lambda > 0$ est non-captive pour le symbole σ_P si pour tout $R > 0$ assez grand, il existe $T = T(R)$ tel que $|q(t, x, \xi)| > R$ pour $|t| > T$ quand $|x| < R$ et $\sigma_P(x, \xi) = \lambda$.

1.3.1 Rappels de mécanique classique

Nous commençons par rappeler quelques résultats de mécanique classique et pour plus de détails, nous renvoyons aux livres [10] et [49]. Soit $(p(t), q(t))$ une solution du système (1.37) et supposons que $|q(t)| \rightarrow +\infty$ quand $|t| \rightarrow \pm\infty$. Alors, il existe $(r_{\pm}, v_{\pm}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |q(t) - v_{\pm}t - r_{\pm}| + |p(t) - v_{\pm}| = 0.$$

Réciproquement, étant données une vitesse asymptotique ξ et une position asymptotique x en $t = -\infty$, il existe une unique solution de (1.37) ayant pour asymptote la trajectoire libre $(\xi, \xi t + x)$. Plus précisément, nous déduisons du Théorème 2.6.2 de [10], la proposition suivante.

Proposition 1.7 Supposons que l'hypothèse $(\mathbf{V})_{\rho}$ est satisfaite pour un certain $\rho > 1$, alors pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, il existe une unique solution $(p_{inf}(\cdot, x, \xi), q_{inf}(\cdot, x, \xi))$ du système (1.37) telle que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} |p_{inf}(t, x, \xi) - \xi| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} |q_{inf}(t, x, \xi) - \xi t - x| = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

De plus, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \\ (x, \xi) &\longmapsto (p_{inf}(\cdot, x, \xi), q_{inf}(\cdot, x, \xi)) \end{aligned}$$

est continue.

Dans ce chapitre et les deux suivants, nous considérons $\omega \in S^{n-1}$ fixé et nous notons Λ_{ω} le plan orthogonal à ω passant par 0. Comme ω est fixé, nous pouvons supposer que $\omega = (0, \dots, 0, 1)$ et nous pouvons écrire les coordonnées dans Λ_{ω} sous la forme $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Nous utiliserons aussi la notation $\hat{z} = (z, 0)$ pour $z \in \Lambda_{\omega}$. Avec ces notations, nous pouvons poser

$$(q_{\infty}(t, z, \lambda, \omega), p_{\infty}(t, z, \lambda, \omega)) = (q_{inf}(t, \hat{z}, \sqrt{2\lambda}\omega), p_{inf}(t, \hat{z}, \sqrt{2\lambda}\omega)).$$

Ainsi définie, (q_{∞}, p_{∞}) est l'unique solution de (1.37) telle que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} |p_{\infty}(t, z, \lambda, \omega) - \sqrt{2\lambda}\omega| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} |q_{\infty}(t, z, \lambda, \omega) - \sqrt{2\lambda}\omega t - z| = 0, \end{cases} \quad (1.39)$$

A l'aide de ces solutions, nous allons pouvoir formuler une hypothèse d'échappement pour le flot Hamiltonien. Dans la section suivante, nous formulons cette hypothèse et nous en tirons des conséquences géométriques nécessaires à la formulation de nos principaux résultats.

1.3.2 Étude du flot Hamiltonien

Commençons par introduire deux ensembles. Quels que soient $\lambda > 0$ et $\epsilon \geq 0$, nous posons

$$\Sigma_{\lambda,\epsilon} = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x) \in [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \right\}.$$

En particulier, $\Sigma_{\lambda,0}$ est la surface d'énergie λ . Pour tout $W \subset S^{n-1}$, nous définissons aussi

$$\Sigma_{\lambda,\epsilon}(W) = \left\{ (x, \xi) \in \Sigma_{\lambda,\epsilon}; \frac{\xi}{|\xi|} \in \overline{W} \right\}.$$

Lemme 1.7 *Considérons $d > 1$, $\sigma \geq 0$ et supposons que $[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \subset]\frac{d-2}{2}, \frac{d^2}{2}[$. Alors il existe $R_0 > 0$ tel que*

$$\forall R > R_0, \forall t > 0, \Phi_t(\Sigma_{\lambda_0,\epsilon} \cap \Gamma_+(R, d, \sigma)) \subset \Gamma_+(R, d, \sigma).$$

Démonstration. En notant $\Phi_t(x, \xi) = (q(t), p(t))$ et en suivant le Lemme 1 de [6], nous obtenons

$$\begin{cases} (|q|^2)' = 2\langle q, \partial_\xi \sigma_P(q, p) \rangle, \\ \langle q, \partial_\xi \sigma_P(q, p) \rangle' = \{\sigma_P, \langle x, \partial_\xi \sigma_P \rangle\}(q, p), \end{cases} \quad (1.40)$$

où $\{.,.\}$ désigne le crochet de Poisson usuel; c'est à dire $\{u, v\}(x, \xi) = \partial_\xi u \partial_x v - \partial_x u \partial_\xi v$. Par définition de σ_P , nous en déduisons

$$\langle q, \partial_\xi \sigma_P(q, p) \rangle' = 2\lambda + (\{\sigma_P, \langle x, \partial_\xi \sigma_P \rangle\}(q, p) - 2\sigma_P(q, p)).$$

Posons $\mu = \epsilon\lambda$, un calcul élémentaire donne

$$\{\sigma_P, \langle x, \partial_\xi \sigma_P \rangle\}(x, \xi) - 2\sigma_P(x, \xi) = -\langle x, \nabla_x V(x) \rangle - V(x)$$

de sorte qu'il existe $R_0 > 0$ tel que

$$\forall |x| > R > R_0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\{\sigma_P, \langle x, \partial_\xi \sigma_P \rangle\}(x, \xi) - 2\sigma_P(x, \xi)| < 2\mu.$$

Donnons nous $(x, \xi) \in \Gamma_+(R, d, \sigma)$ et $R > R_0$ tels que $\sigma_P(x, \xi) = \lambda$ et notons $[T_m, T_M]$ le plus grand intervalle contenant 0 tel que pour $t \in [T_m, T_M]$ nous ayons

$$|\{\sigma_P, \langle x, \partial_\xi \sigma_P \rangle\}(q(t, x, \xi), p(t, x, \xi)) - 2\sigma_P(q(t, x, \xi), p(t, x, \xi))| < 2\mu.$$

Pour $|x| > R$, il est clair que $T_M > 0$ et nous avons

$$\forall t \in [0, T_M], \langle q, \partial_\xi \sigma_P(q, p) \rangle' \geq 2(\lambda - \mu).$$

Par suite,

$$\forall t \in [0, T_M], \langle q, \partial_\xi \sigma_P(q, p) \rangle \geq \langle x, \xi \rangle + 2(\lambda - \mu)t \quad (1.41)$$

et en intégrant une fois de plus, nous obtenons

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T_M], |q(t)|^2 &\geq |x|^2 + 2\langle x, \xi \rangle t + 2(\lambda - \mu)t^2 \geq |x|^2 + 2\sigma|\xi||x|t + 2(\lambda - \mu)t^2 \\ &\geq |x|^2 + 2(\lambda - \mu)t^2 \end{aligned}$$

Nous déduisons de la dernière inégalité que $T_M = +\infty$ et donc

$$\forall t > 0, |q(t, x, \xi)|^2 \geq |x|^2 + 2(\lambda - \mu)t^2. \quad (1.42)$$

En particulier, il vient $\forall t > 0, |q(t, x, \xi)| > R$ et nous tirons directement de (1.41), l'inégalité suivante

$$\forall t > 0, \langle q(t), p(t) \rangle \geq \sigma|x||\xi| + 2(\lambda - \mu) \geq \sigma|x||\xi|,$$

ce qui conduit à $\cos(q(t), p(t)) > \sigma$, pour $t > 0$. Enfin, l'égalité

$$\forall t > 0, \frac{1}{2}|p(t)|^2 + V(q(t)) = \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \subset]\frac{d-2}{2}, \frac{d^2}{2}[,$$

combinée avec $|V(x)| \leq C < x >^{-1}$ et $|q(t)| \geq R > R_0$, R_0 assez grand, donne

$$\forall t > 0, |p(t)| \in]d^{-1}, d[,$$

ce qui achève de démontrer que $\Phi_t(x, \xi) \in \Gamma_+(R, d, \sigma)$. ■

Remarque 1.3 De la démonstration précédente (en particulier de (1.42)), nous déduisons que pour $\sigma \geq 0$, $\frac{d-2}{2} > \lambda_0 > \frac{d^2}{2} > 0$, R_0 assez grand et $\epsilon > 0$ assez petit, nous avons

$$\forall (x, \xi) \in \Gamma_+(R, d, \sigma) \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}, \lim_{t \rightarrow +\infty} |q(t, x, \xi)| = +\infty \quad (1.43)$$

En travaillant un peu plus, les arguments développés dans la démonstration précédente, nous permettent aussi de démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 1.1 Soient $\lambda_0 \in]\frac{d-2}{2}, \frac{d^2}{2}[$, $0 < \sigma < 1$ et $0 < \epsilon < \min(\frac{1}{2}, \frac{1-\sigma^2}{1+2\sigma^2})\lambda_0$. Alors il existe $R_1 > 0$ tel que pour $t > 0$ et $(x, \xi) \in \Gamma_+(R_1, d, -\sigma) \cap \sigma_P^{-1}([\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon])$, nous avons

$$|q(t, x, \xi)|^2 \geq |x|^2 - \sigma|x||\xi|t + 2(\lambda_0 - 2\epsilon)t^2.$$

Démonstration. Par hypothèse, $\epsilon < \lambda_0 \frac{1-\sigma^2}{1+2\sigma^2}$, de sorte qu'on peut fixer $\mu > 0$ tel que

$$\mu < \min(\epsilon, \lambda_0(1 - \sigma^2) - \epsilon(1 + 2\sigma^2)). \quad (1.44)$$

Comme dans le lemme précédent, nous choisissons R_0 de sorte que

$$\forall |x| > R_0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\{\sigma_P, \langle x, \partial_\xi \sigma_P \rangle\}(x, \xi) - 2\sigma_P(x, \xi)| < 2\mu.$$

Nous prenons ensuite $R > R_0$ et nous posons $R_1 = NR$, où N est choisi suffisamment grand pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites

$$\begin{cases} \mu(1 - \frac{1}{N^2}) < \lambda_0(1 - \sigma^2 - \frac{1}{N^2}) - \epsilon(1 + 2\sigma^2 - \frac{1}{N^2}), \\ |x| \geq NR_0 \implies |V(x)| \leq \epsilon. \end{cases} \quad (1.45)$$

Pour $(x, \xi) \in \Gamma_+(R_1, d, -\sigma) \cap \Sigma_{\lambda, \epsilon}$, notons $]T_m, T_M[$ le plus grand intervalle contenant 0 tel que

$$|\{\sigma_P, \langle x, \partial_\xi \sigma_P \rangle\}(q(t, x, \xi), p(t, x, \xi)) - 2\sigma_P(q(t, x, \xi), p(t, x, \xi))| < 2\mu.$$

De la même manière que dans le Lemme 1.7, nous avons

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T_M], |q(t, x, \xi)|^2 &\geq |x|^2 + 2\langle x, \xi \rangle t + 2(\lambda - \mu)t^2 \\ &\geq |x|^2 - 2\sigma|x||\xi|t + 2(\lambda - \mu)t^2, \end{aligned}$$

dont nous déduisons $|q(t, x, \xi)| > R$, $\forall t \in [0, T_M[$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $t \in [0, T_M[$ tel que $|q(t, x, \xi)| = R$. Alors t est solution de l'équation du second degré suivante

$$2(\lambda - \mu)t^2 - 2\sigma|x||\xi|t + |x|^2 - R^2 = 0$$

dont le discriminant Δ vaut

$$\Delta = 4\sigma^2|x|^2|\xi|^2 - 8(\lambda - \mu)(|x|^2 - R^2) = 8|x|^2 \left(\frac{1}{2}|\xi|^2\sigma^2 - (\lambda - \mu)\left(1 - \frac{R^2}{|x|^2}\right) \right).$$

Comme $|x| \geq NR$ nous avons $|V(x)| \leq \epsilon$, ce qui implique $\frac{1}{2}|\xi|^2 \leq \lambda_0 + 2\epsilon$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta &\leq 8|x|^2 \left((\lambda_0 + 2\epsilon)\sigma^2 - (\lambda_0 - \epsilon - \mu)\left(1 - \frac{1}{N^2}\right) \right) \\ &\leq 8|x|^2 \left(\mu\left(1 - \frac{1}{N^2}\right) + \lambda_0\left(\sigma^2 - 1 + \frac{1}{N^2}\right) + \epsilon\left(2\sigma^2 + 1 - \frac{1}{N^2}\right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (1.45), il est évident que $\Delta < 0$ ce qui achève de montrer que $|q(t, x, \xi)| > R$, $\forall t \in [0, T_M[$. Supposons par l'absurde que $T_M < +\infty$, alors $|q(T_M)| \geq R > R_0$ et ceci mène à l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, T_M + \delta[, |\{\sigma_P, \langle x, \partial_\xi \sigma_P \rangle\}(q(t, x, \xi), p(t, x, \xi)) - 2\sigma_P(q(t, x, \xi), p(t, x, \xi))| < 2\epsilon$$

ce qui contredit la définition de T_M . ■

1.3.3 Une nouvelle hypothèse d'échappement

Étant donnés $\lambda_0 > 0$ et $\omega \in S^{n-1}$, nous allons remplacer la condition **(NC)** par la condition plus faible suivante.

Hypothèse $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ Quel que soit $z \in \Lambda_\omega$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |q_\infty(t, z, \lambda_0, \omega)| = +\infty$.

Autrement dit, nous demandons que toutes les particules d'énergie λ_0 partant de $t = -\infty$ avec une vitesse colinéaire à ω s'échappent en $t = +\infty$. Avant d'aller, plus loin nous allons démontrer que l'ensemble des couples (λ_0, ω) satisfaisant $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ est ouvert dans $\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1}$.

Proposition 1.8 *Supposons que l'hypothèse $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ est satisfaite, alors il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage W de ω dans S^{n-1} tels que*

$$\forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \forall \omega' \in W, \forall z \in \Lambda_{\omega'}, \lim_{t \rightarrow +\infty} |q_\infty(t, z, \lambda, \omega')| = +\infty.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants.

Lemme 1.8 *Supposons que $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ est vérifiée, alors pour tout $R > 0$, il existe $\epsilon > 0$ et W voisinage de ω dans S^{n-1} tels que*

$$\forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \forall \omega' \in W, \forall z \in B_{\Lambda_\omega}(0, R), \lim_{t \rightarrow +\infty} |q_\infty(t, z, \lambda, \omega')| = +\infty,$$

où $B_{\Lambda_\omega}(0, R)$ désigne la boule de rayon R dans l'hyperplan Λ_ω .

Démonstration. Fixons $R > 0$. Par définition de Γ_+ et en utilisant la Remarque 1.3, nous pouvons choisir $R_0 > 0$, $0 < \frac{d^2}{2} < \lambda_0$, $\sigma > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ assez petit, tels que

$$\forall (x, \xi) \in \Gamma_+(R_0, d, \sigma) \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon_0}, \lim_{t \rightarrow +\infty} |q(t, x, \xi)| = +\infty. \quad (1.46)$$

Par suite, il suffit de trouver $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $T > 0$ et un voisinage W de ω dans S^{n-1} tels que

$$\forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \forall \omega' \in W, \forall z \in B_{\Lambda_\omega}(0, R), (q_\infty, p_\infty)(T, z, \lambda, \omega') \in \Gamma_+(R_0, d, \sigma).$$

D'après $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$, nous savons que pour tout $z \in B_{\Lambda_\omega}(0, R)$, il existe $T(z) > 0$ tel que $(q_\infty, p_\infty)(T(z), z, \lambda_0, \omega) \in \Gamma_+(R_0, d, \sigma)$. Pour tout $z \in B_{\Lambda_\omega}(0, R)$, nous déduisons de la Proposition 1.7, qu'il existe $0 < \epsilon(z) < \lambda_0$, $r(z) > 0$ et $W(z)$ voisinage de ω dans la sphère tels que

$$\begin{aligned} \forall z' \in B_{\Lambda_\omega}(z, r(z)), \forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon(z), \lambda_0 + \epsilon(z)], \forall \omega' \in W(z), \\ (q_\infty, p_\infty)(T(z), z', \lambda, \omega') \in \Gamma_+(R_0, d, \sigma). \end{aligned}$$

Par ailleurs, quand z décrit $B_{\Lambda_\omega}(0, R)$, les boules $B_{\Lambda_\omega}(z, r(z))$ forment évidemment un recouvrement de $\overline{B_{\Lambda_\omega}}(0, R)$ qui est compact. Nous pouvons donc en extraire un recouvrement fini : il existe $z_1, \dots, z_N \in B_{\Lambda_\omega}(0, R)$ et $r_1, \dots, r_N > 0$ tels que

$$\overline{B_{\Lambda_\omega}}(0, R) \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\Lambda_\omega}(z_i, r_i).$$

En posant $T_0 = \max\{T(z_i), i = 1, \dots, N\}$, $\epsilon = \min\{\epsilon(z_i), i = 1, \dots, N\}$ et $W = \bigcap_{i=1, \dots, N} W(z_i)$, nous déduisons de la Proposition 1.7 que

$$\forall z \in B_{\Lambda_\omega}(0, R), \forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \forall \omega' \in W, (q_\infty, p_\infty)(T_0, z, \lambda, \omega') \in \Gamma_+(R_0, d, \sigma).$$

En utilisant (1.46), nous obtenons donc le résultat annoncé. \blacksquare

Il est clair que le Lemme 1.8 permet de démontrer la Proposition 1.8 pour des positions asymptotiques z appartenant à n'importe quel compact. Il faut donc contrôler ce qui se passe à l'infini. C'est ce que nous faisons dans le lemme suivant.

Lemme 1.9 *Il existe $R > 0$, $\epsilon > 0$ et W voisinage de ω dans S^{n-1} tels que*

$$\forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \forall \omega' \in W, \forall z \in \Lambda_\omega \cap \{|z| \geq R\}, \lim_{t \rightarrow +\infty} |q_\infty(t, z, \lambda, \omega')| = +\infty.$$

Démonstration. La démonstration se décompose en deux étapes. Dans la première étape, nous établissons le résultat dans le cas où le potentiel considéré est à support compact. La seconde étape consiste à étendre ce résultat par densité.

Première étape. Supposons que $V \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donnons nous $\epsilon \in]0, \lambda_0[$ et $R_0 > 0$ tel que $\text{supp } V \subset B(0, R_0)$. Nous pouvons aussi choisir un voisinage W de ω dans S^{n-1} tel que

$$\forall \omega' \in W, \forall z \in \Lambda_\omega, \langle \omega', \frac{z}{|z|} \rangle < \frac{1}{8(\lambda_0 + \epsilon)}. \quad (1.47)$$

Prenons $R = 2R_0$ et posons

$$T = \sup \{t \in \mathbb{R} \mid \forall \omega' \in W, \forall |z| \geq R, \forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], |q_\infty(t, z, \lambda, \omega')| > R_0\}.$$

Par définition de q_∞ , nous savons que $T > -\infty$ et notre but est de démontrer que $T = +\infty$. De plus, comme $\text{supp } V \subset B(0, R_0)$, nous avons

$$\forall \omega' \in W, \forall |z| \geq R, \forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \forall t < T, q_\infty(t, z, \lambda, \omega') = \sqrt{2\lambda}\omega't + z.$$

Supposons par l'absurde que $T < +\infty$, alors il existe $(z, \lambda, \omega') \in \Lambda_\omega \times [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \times W$ tel que $|q_\infty(T, z, \lambda, \omega')| = R_0$. Par ailleurs, pour tout $t < T$, nous avons

$$|q_\infty(t, z, \lambda, \omega')|^2 - R_0^2 = 2\lambda t^2 + 4\sqrt{2\lambda}\langle \omega', z \rangle t + |z|^2 - R_0^2,$$

de sorte que $t = T$ est solution de l'équation

$$2\lambda t^2 + 4\sqrt{2\lambda}\langle \omega', z \rangle t + |z|^2 - R_0^2 = 0.$$

Or, le discriminant de cette équation vaut

$$\Delta = 32\lambda\langle\omega', z\rangle^2 - 8\lambda(|z|^2 - R_0^2).$$

Par hypothèse, nous avons $R_0^2 \leq |z|^2/2$, donc

$$\Delta \leq 4\lambda|z|^2(8\langle\omega', \frac{z}{|z|}\rangle - 1).$$

En utilisant l'équation (1.47), nous en déduisons que $\Delta < 0$, ce qui est absurde. Finalement, pour tout $\epsilon \in]0, \lambda_0[$, nous avons montré que si $V \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\text{supp } V \subset B(0, R)$, alors il existe W voisinage de ω dans la sphère tel que

$$\forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \forall \omega' \in W, \forall |z| \geq 2R, \forall t \in \mathbb{R}, q_\infty(t, z, \lambda, \omega') = \sqrt{2\lambda}\omega't + z.$$

Seconde étape. Nous supposons maintenant que le potentiel V satisfait $(\mathbf{V})_\rho$, pour un certain $\rho > 1$. Alors pour tout $1 < \rho' < \rho$, nous pouvons construire $\tilde{V} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{W} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$\begin{cases} V = \tilde{V} + \tilde{W}, \text{ supp } \tilde{V} \subset B(0, R) \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, |\partial_\alpha \tilde{W}(x)| \leq C R^{\rho' - \rho} \langle x \rangle^{-\rho' - |\alpha|}. \end{cases}$$

Pour $\lambda > 0$, $\omega \in S^{n-1}$ et $z \in \Lambda_\omega$, notons $(\tilde{p}_\infty, \tilde{q}_\infty)(\cdot, z, \lambda, \omega)$ la solution de

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_\infty = \tilde{p}_\infty, \\ \dot{\tilde{p}}_\infty = -\nabla_x \tilde{V}(\tilde{q}_\infty) \end{cases}$$

telle que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} |\tilde{p}_\infty(t) - \sqrt{2\lambda}\omega| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} |\tilde{q}_\infty(t) - \sqrt{2\lambda}\omega t - z| = 0. \end{cases}$$

D'après les résultats de la première étape, nous savons que pour $\epsilon \in]0, \lambda_0[$ fixé, il existe W voisinage de ω dans S^{n-1} tel que $(\tilde{p}_\infty, \tilde{q}_\infty)$ vérifie

$$\forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \forall \omega' \in W, \forall |z| \geq 2R, \forall t \in \mathbb{R}, \tilde{q}_\infty(t, z, \lambda, \omega') = \sqrt{2\lambda}\omega't + z.$$

En particulier, la particule \tilde{q}_∞ s'échappe en $t = +\infty$. Nous allons donc montrer que la particule q_∞ qui nous intéresse, reste relativement proche de \tilde{q}_∞ , ce qui nous permettra de conclure. Pour cela, considérons

$$T = \sup\{t \in \mathbb{R}; |q_\infty(t, z, \lambda, \omega') - \tilde{q}_\infty(t, z, \lambda, \omega')| < 1 + \frac{1}{2}\tilde{q}_\infty(t, z, \lambda, \omega')\},$$

où $\omega' \in W$, $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ et $z \in \Lambda_\omega$ tel que $|z| \geq 4R$ sont fixés préalablement.

Par définition, $T > -\infty$ et pour tout $t < T$, nous avons

$$\begin{aligned} |(q_\infty - \tilde{q}_\infty)(t)| &\leq \int_{-\infty}^t |(p_\infty - \tilde{p}_\infty)(s)| ds \leq \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s |\nabla_x V(q_\infty(\sigma)) - \nabla_x \tilde{V}(\tilde{q}_\infty(\sigma))| d\sigma ds \\ &\leq \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s |\nabla_x \tilde{V}(q_\infty(\sigma)) - \nabla_x \tilde{V}(\tilde{q}_\infty(\sigma))| d\sigma ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s |\nabla_x V(q_\infty(\sigma)) - \nabla_x \tilde{V}(q_\infty(\sigma))| d\sigma ds \end{aligned}$$

Remarquons que pour $\sigma < T$, quitte à réduire l'ouvert W , nous avons $|\tilde{q}_\infty(\sigma)| \geq 2R$. Par suite, nous obtenons $\nabla_x \tilde{V}(\tilde{q}_\infty(\sigma)) = 0$ et

$$|q_\infty(\sigma)| \geq |\tilde{q}_\infty(\sigma)| - |q_\infty(\sigma) - \tilde{q}_\infty(\sigma)| \geq \frac{1}{2}|\tilde{q}_\infty(\sigma)| - 1 \geq R,$$

de sorte que nous avons aussi $\nabla_x \tilde{V}(q_\infty(\sigma)) = 0$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} |q_\infty(t) - \tilde{q}_\infty(t)| &\leq \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s |\nabla_x V(q_\infty(\sigma)) - \nabla_x \tilde{V}(q_\infty(\sigma))| d\sigma ds \\ &\leq \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s |\nabla_x \tilde{W}(q_\infty(\sigma))| d\sigma ds \leq C R^{\rho' - \rho} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \langle q_\infty(\sigma) \rangle^{-\rho' - 1} d\sigma ds \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que pour $\sigma < T$, $|q_\infty(\sigma)| \geq \frac{1}{2}|\tilde{q}_\infty(\sigma)| \geq \frac{\sqrt{2\lambda}}{2}|\sigma|$. Nous en déduisons

$$|q_\infty(t) - \tilde{q}_\infty(t)| \leq C \langle \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \rangle^{-\rho' - 1} R^{\rho' - \rho} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \langle \sigma \rangle^{-\rho' - 1} d\sigma ds$$

Pour $\rho' > 1$, un simple calcul montre que $\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \langle \sigma \rangle^{-\rho' - 1} d\sigma ds \leq C \langle t \rangle$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par suite, il vient

$$\forall t < T, |q_\infty(t) - \tilde{q}_\infty(t)| \leq C \langle \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \rangle^{-\rho' - 1} R^{\rho' - \rho} \langle t \rangle$$

Comme $\rho' < \rho$, en prenant R assez grand, nous obtenons

$$\forall t < T, |q_\infty(t) - \tilde{q}_\infty(t)| \leq \frac{1}{2}|\tilde{q}_\infty(t)|,$$

ce qui contredit la définition de T et achève la démonstration. \blacksquare

Considérons (q_∞, p_∞) définie précédemment, prenons $\lambda_0 > 0$ et supposons que (H_{ω, λ_0}) est satisfaite. D'après la Proposition 1.8, nous savons que si λ est proche de λ_0 , nous avons encore $\lim_{t \rightarrow +\infty} |q_\infty(t, z, \lambda, \omega)| = +\infty$. Par conséquent, il existe $\xi_\infty(z, \lambda) \in S^{n-1}$ et $r_\infty(z, \lambda) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} |p_\infty(t, z, \lambda, \omega) - \sqrt{2\lambda} \xi_\infty(z, \lambda)| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} |q_\infty(t, z, \lambda, \omega) - \sqrt{2\lambda} \xi_\infty(z, \lambda) t - r_\infty(z, \lambda)| = 0. \end{cases} \quad (1.48)$$

De plus, il est facile de montrer que $\Lambda_\omega \ni z \rightarrow \xi_\infty(z, \lambda) \in S^{n-1}$ est C^∞ (cf. [49]), de sorte que nous pouvons définir

$$\hat{\sigma}(z, \lambda) = |\det(\xi_\infty, \partial_{z_1} \xi_\infty, \dots, \partial_{z_n} \xi_\infty)|. \quad (1.49)$$

Définition 1.7 Nous dirons que $\theta \in S^{n-1}$ est régulier pour (λ, ω) , si $\theta \neq \omega$ et $\forall z \in \Lambda_\omega, \xi_\infty(z, \lambda) = \theta \implies \hat{\sigma}(z, \lambda) \neq 0$.

Remarque 1.4 Si θ est régulier pour (λ, ω) , alors il existe un ensemble fini $\{z^1, \dots, z^l\}$ inclus dans Λ_ω tel que $\xi_\infty(z, \lambda) = \theta \implies z \in \{z^1, \dots, z^l\}$.

En effet, d'après le théorème des fonctions implicites, l'ensemble $\Xi_{\lambda, \theta} = \{z \in \Lambda_\omega : \xi_\infty(z, \lambda) = \theta\}$ est discret de sorte qu'il suffit donc de montrer que $\Xi_{\lambda, \theta}$ est borné. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, nous avons vu dans la démonstration du Lemme 1.9, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $|z|$ assez grand nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}, q_\infty(t, z, \lambda) \geq C(t + |z|)$$

et par un calcul similaire à ceux effectués dans la démonstration du Lemme 1.9 nous obtenons l'inégalité $\lim_{t \rightarrow +\infty} |p_\infty(t, z, \lambda) - \omega| \leq C < z >^{-1}$. Comme $\theta \neq \omega$, alors pour $|z|$ assez grand, ceci conduit à $\xi_\infty(z, \lambda) \neq \theta$, ce qui est absurde.

Nous allons maintenant montrer que pour λ proche de λ_0 , le nombre l ne dépend pas de λ et qu'il existe des fonctions régulières $z_1(\lambda), \dots, z_l(\lambda)$ telles que $\xi_\infty(z, \lambda) = \theta \implies z \in \{z^1(\lambda), \dots, z^l(\lambda)\}$. Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.9 Soient $\lambda_0 > 0$ et $(\omega, \theta) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$ fixés. Supposons que $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ est vérifiée et que θ est régulier pour (λ_0, ω) . Alors il existe $\epsilon > 0$, un voisinage ouvert U de θ et des fonctions $z^j \in C^\infty(] \lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[\times U, \Lambda_\omega)$, $j = 1, \dots, l$ tels que

- 1) $\forall \lambda \in] \lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[, \forall \theta' \in U$, θ' est régulier pour (λ, ω) .
- 2) $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $\forall \lambda \in] \lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[$, $z^j(\lambda, \cdot)$ est un difféomorphisme de U sur son image $U_j(\lambda)$ et $U_i(\lambda) \cap U_j(\lambda) = \emptyset$, pour $i \neq j$.
- 3) $\forall \theta' \in U$, $\forall \lambda \in] \lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[$, $\forall z \in \Lambda_\omega$,

$$\xi_\infty(z, \lambda) = \theta' \iff \exists j \in \{1, \dots, l\}, z \in U_j(\lambda), \text{ et } z = z^j(\lambda, \theta')$$

Démonstration. D'après la Remarque 1.4, il existe z_1^0, \dots, z_l^0 appartenant à Λ_ω tels que $\xi_\infty(z_j^0, \lambda_0) = \theta$. Considérons

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \Lambda_\omega &\longrightarrow \mathbb{R} \times S^{n-1}, \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, \xi_\infty(z, \lambda)), \end{aligned}$$

et supposons que θ est régulier pour (λ_0, ω) . Par définition, l'application $D_{(\lambda_0, z_j^0)} \Phi$ est inversible quel que soit $j \in \{1, \dots, l\}$. Nous pouvons donc appliquer le théorème d'inversion locale pour trouver $\epsilon > 0$, un voisinage ouvert U de θ dans S^{n-1} et des ouverts disjoints \tilde{U}_j contenant (λ_0, z_j^0) tels que :

$$\forall j \in \{1, \dots, l\}, \Phi|_{\tilde{U}_j} \text{ est un difféomorphisme de } \tilde{U}_j \text{ sur }] \lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[\times U.$$

Notons $\pi_x : \mathbb{R} \times \Lambda_\omega \longrightarrow \Lambda_\omega$, la projection canonique et posons $U_j = \pi_x(\tilde{U}_j)$. Pour $\epsilon > 0$ et U assez petits, nous pouvons supposer que

$$\forall (\lambda, \theta') \in]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[\times U, \xi_\infty(z, \lambda) = \theta' \implies z \in \bigcup_{j=1}^l U_j.$$

Dans le cas contraire, nous pourrions trouver des suites $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\begin{aligned} \lambda_k &\in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda_0, \\ \theta_k &\in S^{n-1} \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = \theta, \\ y_k &\notin \bigcup_{j=1}^l U_j, \xi_\infty(y_k, \lambda_k) = \theta_k. \end{aligned}$$

Comme dans la Remarque 1.4, nous concluons que $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est borné. Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que (y_k) converge vers $y \notin \bigcup_{j=1}^l U_j$. Ceci implique immédiatement que $\xi_\infty(y, \lambda) = \theta$ avec $y \notin \{z_j^0, j = 1, \dots, l\}$, ce qui est absurde. Nous avons donc montré 3).

Définissons maintenant $z_j = \pi_x \circ \Phi_{|U_j}^{-1}$. Ces fonctions sont clairement de classe C^∞ et pour λ appartenant à $] \lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[$, $z_j(\lambda, \cdot)$ est un difféomorphisme de U sur son image. Pour $\epsilon > 0$ et U assez petits, nous pouvons supposer en outre que

$\forall (\lambda, \mu) \in]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[^2$, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, l\}^2$ avec $i \neq j$, $z_i(\lambda, U) \cap z_j(\mu, U) = \emptyset$ ce qui démontre 2).

Soient $\lambda \in]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[$ et $\theta' \in U$. Considérons $z \in \Lambda_\omega$ tel que $\xi_\infty(z, \lambda) = \theta'$. Pour ϵ et U assez petits, z est proche d'un des points z_j^0 et comme $\hat{\sigma}(\lambda_0, z_j^0) \neq 0$, par continuité nous obtenons $\hat{\sigma}(\lambda, z) \neq 0$, de sorte que θ' est régulier pour (λ, ω) . ■

Avant d'aller plus loin, nous avons besoin de reformuler l'hypothèse $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ à l'aide du lemme suivant.

Lemme 1.10 *La condition $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ est satisfaite si et seulement s'il existe $R > 0$, $\epsilon > 0$ et un voisinage W de ω dans S^{n-1} tels que*

$$\forall (x, \xi) \in \Sigma_{\lambda, \epsilon}(W) \cap \{|x| > R\}, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} |q(t, x, \xi)| = +\infty. \quad (1.50)$$

Démonstration. Commençons par supposer (1.50) et fixons un niveau d'énergie $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$. Soit V un ouvert de S^{n-1} tel que $\omega \in V \Subset W$ et soient $\omega' \in V$ et $z \in \mathbb{R}^n$. Par définition, il existe $T_0 > 0$ tel que

$$\forall t \leq -T_0, p_\infty(t, z, \lambda, \omega') \in W.$$

Il suit, en prenant T_0 assez grand et en appliquant (1.50) que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} |q(s, q_\infty(t, z, \lambda, \omega'), p_\infty(t, z, \lambda, \omega'))| = +\infty.$$

Nous savons, par ailleurs que

$$q(s, q_\infty(t, z, \lambda, \omega'), p_\infty(t, z, \lambda, \omega')) = q_\infty(t + s, z, \lambda, \omega'),$$

de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |q_\infty(t, z, \lambda, \omega')| = +\infty.$$

Réciproquement, supposons que $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ est satisfaite et qu'il existe une suite (x_n, ω_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} |\omega_n| = \omega \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, q(\cdot, x_n, \omega_n) \text{ est borné sur } \mathbb{R}^+.$$

D'après le Corollaire 1.1, nous pouvons supposer qu'il existe $\sigma > 0$ tel que $(x_n, \omega_n) \in \Gamma_-(R, d, -\sigma)$ et nous affirmons qu'il suffit d'établir l'assertion suivante

$$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \forall (x_0, \xi_0) \in \Gamma_-(R, d, -\sigma), \forall t < 0, |p(t, x_0, \xi_0) - \xi_0| < \epsilon. \quad (1.51)$$

En effet, si (1.51) est vérifiée, alors pour n assez grand et $t < 0$, nous avons $|p(t, x_n, \omega_n) - \omega| < 2\epsilon$. En choisissant ϵ assez petit, nous pouvons supposer que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t, x_n, \omega_n) = \omega' \in W.$$

Nous en déduisons que $(q, p)(\cdot, x_n, \omega_n) = (q_\infty, p_\infty)(\cdot, z, \omega')$, avec $\omega' \in W$ et d'après (1.50), nous obtenons $\lim_{t \rightarrow +\infty} |q(t, x_n, \omega_n)| = +\infty$, ce qui est absurde. Pour établir (1.51), nous observons d'abord que

$$|p(t) - \xi_0| \leq \int_0^t |\nabla_x V(q(s))| ds \leq \int_0^t \langle q(s) \rangle^{-1-\rho} ds.$$

D'après la démonstration du Lemme 1.7, nous avons $q(s) \geq x_0^2 + \lambda s^2$, donc

$$|p(t) - \xi_0| \leq C \int_0^{-\infty} (1 + x_0^2 + \lambda s^2)^{-\frac{1+\rho}{2}} ds \leq C \langle x_0 \rangle^{-\rho} \leq \epsilon$$

pour $|x_0| > R$ assez grand et la démonstration du Lemme 1.10 est achevée. \blacksquare

Lemme 1.11 *Supposons que $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ est satisfaite et donnons nous $\lambda_0 \in]d^{-1}, d[$. Alors, il existe $R_0 > 0$ assez grand, $\epsilon > 0$ assez petit et W voisinage de ω dans S^{n-1} , tels que pour tout $R > 0$ il existe $T_0(R) > 0$ vérifiant*

$$\forall t > T_0(R), \Phi_t(\{5R_0 < |x| < 6R_0\} \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}(W)) \subset \Gamma_+(R, d, 0).$$

Démonstration. De l'hypothèse $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$, nous déduisons l'existence de $R_0 > 0$, $\epsilon > 0$ et d'un voisinage W de ω dans S^{n-1} tels que

$$\forall (x, \xi) \in \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; |x| > R_0\} \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}(W), \lim_{t \rightarrow \pm\infty} |q(t, x, \xi)| = +\infty.$$

Il suit, en notant $\mathcal{C}(R_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 5R_0 < |x| < 6R_0\}$ que pour tous $R_1 > 0$ et pour tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{C}(R_0) \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}(W)$

$$\exists T(x, \xi) > 0 \text{ tel que } \forall t > T(x, \xi), \Phi_t(x, \xi) \in \Gamma_+(R_1, d, 0).$$

D'après la dépendance continue des solutions d'une équation différentielle par rapport à un paramètre sur tout intervalle de temps compact, nous pouvons dire que

$$\forall R_1 > 0, \forall (x, \xi) \in T^*\mathcal{C}(R_0) \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}(W), \exists r(x, \xi) > 0, \exists T(x, \xi) > 0$$

$$\text{tels que } \forall (y, \eta) \in B_{R^{2n}}((x, \xi), r(x, \xi)), \Phi_{T(x, \xi)}(y, \eta) \in \Gamma_+(R_1, d, 0).$$

En faisant appel au Lemme 1.7, nous pouvons choisir $R_1 > 0$ tel que

$$\forall t > 0, \forall (x, \xi) \in \Gamma_+(R_1, d, 0), \Phi_t(x, \xi) \in \Gamma_+(R_1, d, 0).$$

Nous en déduisons que pour tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{C}(R_0) \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}(W)$, il existe $r(x, \xi) > 0$ et $T(x, \xi) > 0$ tels que

$$\forall (y, \eta) \in B((x, \xi), r(x, \xi)), \forall t > T(x, \xi), \Phi_t(y, \eta) \in \Gamma_+(R_1, d, 0).$$

Les boules $B((x, \xi), r(x, \xi))$ recouvrent le compact $T^*\mathcal{C}(R_0) \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}(\overline{W})$, de sorte que nous pouvons extraire un recouvrement fini

$$T^*\mathcal{C}(R_0) \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}(\overline{W}) \subset \bigcup_{j=1}^q B((x_j, \xi_j), r_j).$$

Nous posons $T_0 = \max_{j=1, \dots, q} (T(x_j))$, de sorte que pour $R_1 > R$ nous avons

$$\forall (x, \xi) \in T^*\mathcal{C}(R_0) \cap \Sigma_{\lambda_0, \epsilon}(W), \forall t > T_0, \Phi_t(x, \xi) \in \Gamma_+(R_1, d, 0) \subset \Gamma_+(R, d, 0)$$

ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 2

Asymptotique de l'amplitude de diffusion en norme L^1 d'énergie

Dans ce chapitre, nous allons établir une asymptotique de l'amplitude de diffusion dans une version intégrale. Pour ω et θ fixés dans S^{n-1} et pour λ satisfaisant l'hypothèse (NC), Robert and Tamura ont obtenu pour f une asymptotique

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = \sum_{j=1}^l \hat{\sigma}(z^j(\lambda), \lambda)^{-\frac{1}{2}} e^{ih^{-1}S_j - i\mu_j \frac{\pi}{2}} + O(h),$$

où $\hat{\sigma}$, z_j , S_j et μ_j seront définis plus tard. D'autre part, Yajima [66] a obtenu un résultat similaire sans l'hypothèse de non-capture, mais dans une forme moyennée. Plus précisément, sous des hypothèses spécifiées dans [66] (en particulier il suppose $(V)_\rho$ avec $\rho > \max(1, \frac{n-1}{2})$), il a établi pour ω et θ_0 fixés, l'estimation

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \int_U \left| f(\theta, \omega, \lambda, h) - \sum_{j=1}^l \hat{\sigma}(z^j(\lambda), \lambda)^{-\frac{1}{2}} e^{ih^{-1}S_j - i\mu_j \frac{\pi}{2}} \right|^2 d\theta d\lambda = O(h),$$

où $\epsilon > 0$ est choisi assez petit et U est un voisinage bien choisi de θ_0 dans S^{n-1} .

Notre but est de généraliser les résultats de Robert et Tamura pour des perturbations captives et d'obtenir une asymptotique

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \left| f(\theta, \omega, \lambda, h) - \sum_{j=1}^l \hat{\sigma}(z^j(\lambda), \lambda)^{-\frac{1}{2}} e^{ih^{-1}S_j - i\mu_j \frac{\pi}{2}} \right| d\lambda = O(h),$$

où l'on intègre seulement par rapport à λ tandis que ω et θ sont fixés.

Théorème 2.1 Soient $\omega \in S^{n-1}$ et $\lambda_0 \in]\frac{d-2}{2}, \frac{d^2}{2}[$. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

- 1) Il existe $\rho > 1$ tel que $(\mathbf{V})_\rho$ est satisfaite.

- 2) Le potentiel V satisfait $(\mathbf{Hol})_\infty$.
 3) L'hypothèse $(\mathbf{H}_{\omega, \lambda_0})$ est satisfaite.
 4) θ est régulier pour (λ_0, ω) .

Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} |f(\theta, \omega, \lambda, h) - \sum_{j=1}^l \hat{\sigma}(z^j(\lambda), \lambda)^{-\frac{1}{2}} e^{ih^{-1}S_j(\lambda) - i\mu_j \frac{\pi}{2}}| d\lambda = O(h),$$

où

$$S_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} |p_\infty(t, z^j(\lambda), \lambda, \omega)|^2 - V(q_\infty(t, z^j(\lambda), \lambda, \omega)) - \lambda \right) dt - \langle r_\infty(z^j(\lambda), \lambda, \sqrt{2\lambda}\theta) \rangle \quad (2.1)$$

et $\mu_j \in \mathbb{Z}$ est l'indice de Maslov de la trajectoire $(q_\infty(t, z^j(\lambda), \lambda, \omega), p_\infty(t, z^j(\lambda), \lambda, \omega))$ sur la variété Lagrangienne

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = q_\infty(t, z, \lambda, \omega), \xi = p_\infty(t, z, \lambda, \omega), z \in \Lambda_\omega, t \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque 2.1 Si le potentiel V est à support compact, les hypothèses 1) et 2) sont trivialement satisfaites.

Exemple. Il existe des potentiels satisfaisant nos hypothèses et qui ne satisfont pas l'hypothèse (\mathbf{NC}) . Nous détaillons au Chapitre 3, un exemple de potentiel satisfaisant ces hypothèses et dont les résonances convergent vers l'axe réel à une vitesse de l'ordre $\mathcal{O}(h^{-M})$. Une autre classe d'exemples est donnée par le cas d'un puits dans une île. Plus précisément, introduisons $W_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) < \lambda\}$, alors W_λ a une unique composante connexe non-bornée que nous noterons W_{ext} . Nous supposons que le flot est non-captif au dessus de W_{ext} , c'est à dire que

$$\forall (x, \xi) \in W_{ext} \times \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} |q(t, x, \xi)| = +\infty.$$

Si la composante connexe bornée de W_λ est non-vide, alors il existe des trajectoires classiques bornées de sorte que (\mathbf{NC}) n'est pas vérifiée.

2.1 Estimation intégrale de la résolvante

Dans cette partie, nous proposons de démontrer une estimation polynômiale de la résolvante en norme $L^1(d\lambda)$. Dans tout ce qui suit, $\epsilon > 0$ sera suffisamment petit pour que $[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \subset]\frac{d-2}{2}, \frac{d^2}{2}[$. Le résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 2.2 Soient $\lambda_0 > 0$ une énergie quelconque et $\alpha > \frac{1}{2}$. Alors il existe $\epsilon > 0$, $\tilde{n} \in \mathbb{R}$ et $h_0 > 0$ tels que

$$\forall 0 < h < h_0, \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \| R(\lambda \pm i0) \|_{\alpha, -\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{-\tilde{n}}). \quad (2.2)$$

D'après le travail de V. Bruneau et V. Petkov [6], nous savons qu'il suffit de démontrer une estimation semblable pour la résolvante tronquée $\chi R(\lambda \pm i0)\chi$, pour des fonctions $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ bien choisies. En effet, nous avons la proposition suivante (cf. [6]).

Proposition 2.1 Soit $d > 0$. Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\chi = 1$ sur $B(0, \rho)$ et pour $h \in]0, 1]$ assez petit, nous avons

$$\forall \alpha > \frac{1}{2}, \| R(z) \|_{\alpha, -\alpha} \leq Ch^{-2} (1 + \| \chi R(z)\chi \|),$$

uniformément par rapport à $z \in \mathcal{B}_\pm = \{z \in \mathbb{C} : (Re z, \pm Im z) \in]d^{-1}, d[\times]0, 1]\}$.

L'étude de la dépendance de la résolvante tronquée par rapport à h , est étroitement liée à l'étude des résonances de l'opérateur $P(h)$ près de l'axe réel. D'après le Théorème 1.2, il existe une bande de taille $e^{-C/h}$ autour de l'axe réel dans laquelle il n'y a pas de résonance. A priori, cette localisation des résonances permet juste d'obtenir une estimation de la résolvante en $\mathcal{O}(e^{C/h})$. Cependant une intégration par rapport à λ permet d'établir une estimation en $\mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$. Ce résultat est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.2 Supposons que les hypothèses $(\mathbf{V})_\rho$ et $(\mathbf{Hol})_\infty$ sont satisfaites. Alors, il existe $\tilde{n} \geq n$ et $\epsilon > 0$ tels que pour $h \in]0, 1]$ assez petit et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nous avons

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \| \chi R(\lambda \pm i0)\chi \| d\lambda = \mathcal{O}(h^{-\tilde{n}}). \quad (2.3)$$

Démonstration du Théorème 2.2. C'est une conséquence immédiate des Propositions 2.1 et 2.2. ■

Il nous reste à démontrer la Proposition (2.2). La démonstration repose sur le principe du maximum semiclassique de Tang et Zworski [59] et sur les outils utilisés par Stefanov [57], dans le cas où $P(h) = h^2 P$, où P est une perturbation à support compact du Laplacien. Avant de démontrer cette proposition, nous introduisons quelques notations. Pour $\lambda > 0$ et $h \in]0, 1]$, posons

$$d(\lambda, h) = \min(h, \text{dist}(\lambda, \text{Res}(P(h)))) \text{ et } d(h) = \inf_{[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]} d(\cdot, h),$$

où $\epsilon > 0$ sera fixé plus tard. Nous déduisons du Théorème 1.2, qu'il existe des constantes $C, d, h_0 > 0$ telles que

$$\forall 0 < h < h_0, \forall \lambda \in]\frac{d-2}{2}, \frac{d^2}{2}[, d(\lambda, h) \geq Ce^{-d/h}. \quad (2.4)$$

De plus, pour $h > 0$ assez petit, $h \geq Ce^{-Ch^{-1}}$, de sorte qu'il existe $h_0 > 0$ tel que

$$\forall 0 < h < h_0, d(h) \geq Ce^{-d/h}. \quad (2.5)$$

Fixons $\delta > 0$ et donnons nous $n^* \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^* \geq n$ (nous préciserons la valeur de n^* plus tard). Posons $S(\lambda, h) = h^{3n^*+3\delta}d(\lambda, h)$ ainsi que $\omega(\lambda, h) = d(\lambda, h)h^\delta$. Nous déduisons directement des définitions et de l'estimation (2.4) qu'il existe $d' > 0$ tel que

$$e^{-d'/h} \leq S(\lambda, h) \leq h^{3n^*+3\delta+1} \text{ et } e^{-d'/h} \leq \omega(\lambda, h) \leq h^{\delta+1} \quad (2.6)$$

Avec ces définitions, nous avons le lemme suivant, qui sera central pour démontrer la Proposition 2.2.

Lemme 2.1 *Considérons une famille de fonctions $(F(\cdot, h))_{h \in]0,1]}$ telle que pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, $F(\cdot, h)$ est holomorphe sur*

$$\Omega(\lambda, h) = [\lambda - 5\omega(\lambda, h), \lambda + 5\omega(\lambda, h)] + i[-S(\lambda, h)h^{-2n^*-\delta}, S(\lambda, h)].$$

Supposons, de plus, qu'il existe $A > 0$ tel que F vérifie les estimations suivantes.

$$|F(z, h)| \leq A \exp(Ah^{-n^* \log \frac{1}{h}}) \text{ dans } \Omega(\lambda, h), \quad (2.7)$$

$$|F(z, h)| \leq \frac{C}{|Im(z)|} \text{ dans } \Omega(\lambda, h) \cap \{Im(z) > 0\}. \quad (2.8)$$

Alors, il existe une constante $C > 0$, indépendante de $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, telle que

$$\forall h \ll 1, \forall z \in \tilde{\Omega}(\lambda, h), |F(z, h)| \leq \frac{C}{S(\lambda, h)}, \quad (2.9)$$

où

$$\tilde{\Omega}(\lambda, h) = [\lambda - \omega(\lambda, h), \lambda + \omega(\lambda, h)] + i[-S(\lambda, h), S(\lambda, h)].$$

Démonstration. C'est une répétition de la démonstration de [59] avec un contrôle par rapport à λ . Posons $\alpha = \alpha(\lambda, h) = S(\lambda, h)h^{-2n^*-\delta}$ et

$$f(z, \lambda, h) = (\pi\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{\lambda-3\omega}^{\lambda+3\omega} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{\alpha^2}\right) dx,$$

où $\omega = \omega(\lambda, h)$. Un calcul immédiat fournit les égalités suivantes que nous utiliserons par la suite.

$$S(\lambda, h) = h^{3n^*+2\delta}\omega(\lambda, h) \text{ et } \alpha(\lambda, h) = h^{n^*+\delta}\omega(\lambda, h). \quad (2.10)$$

La fonction $f(\cdot, \lambda, h)$ est analytique sur $\Omega(\lambda, h)$ et, comme dans [59], il est clair que pour $h \in]0, 1]$ assez petit, nous avons

$$|f(z, \lambda, h)| \leq e \text{ sur } \Omega(\lambda, h), \quad (2.11)$$

et

$$|f(z, \lambda, h)| \geq \frac{1}{2} \text{ pour } z \in [\lambda - \omega(\lambda, h), \lambda + \omega(\lambda, h)] + i[-\alpha(\lambda, h), S(\lambda, h)]. \quad (2.12)$$

De plus, il existe une constante $C > 0$, indépendante de $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, telle que

$$\forall z \in \Omega(\lambda, h) \cap \{|Re(z) - \lambda| \geq 4\omega(\lambda, h)\}, |f(z, \lambda, h)| \leq Ce^{-h^{-2n^* - \delta}}. \quad (2.13)$$

Démontrons maintenant cette estimation. Soit $z = u + iv \in \Omega(\lambda, h) \cap \{|Re(z) - \lambda| \geq 4\omega(\lambda, h)\}$, alors

$$\begin{aligned} |f(z, \lambda, h)| &\leq (\pi\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{v^2}{\alpha^2}} \int_{\lambda-3\omega}^{\lambda+3\omega} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{\alpha^2}\right) dx \\ &\leq (\pi\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{v^2}{\alpha^2}} \int_{\lambda-3\omega}^{\lambda+3\omega} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right) dx \leq 6\pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega}{\alpha} e^{\frac{v^2}{\alpha^2}} e^{-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, $e^{\frac{v^2}{\alpha^2}} \leq e$, de sorte qu'en utilisant (2.10), nous obtenons

$$|f(z, \lambda, h)| \leq 6\pi^{-\frac{1}{2}} e h^{-n^* - \delta} e^{-h^{-2n^* - 2\delta}} \leq Ce^{-h^{-2n^* - \delta}},$$

ce qui achève de démontrer (2.13). Nous définissons maintenant

$$G(z, \lambda, h) = e^{-iz\sigma} f(z, \lambda, h) F(z, h),$$

où

$$\sigma = \sigma(\lambda, h) = \frac{\log(S(\lambda, h) A e^{Ah^{-n^*} \log(\frac{1}{h})})}{S(\lambda, h) h^{-n^* - \delta}}.$$

Nous voyons facilement qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall h \ll 1, \forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], |\sigma(\lambda, h) S(\lambda, h)| \leq C. \quad (2.14)$$

En effet,

$$\sigma(\lambda, h) S(\lambda, h) = h^{n^* + \delta} \log\left(S(\lambda, h) A e^{Ah^{-n^*} \log(\frac{1}{h})}\right).$$

En utilisant (2.6), nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \log\left(S(\lambda, h) A e^{Ah^{-n^*} \log(\frac{1}{h})}\right) &\leq \log\left(A h^{3n^* + 3\delta + 1} e^{Ah^{-n^* - \frac{\delta}{2}}}\right) \\ &\leq \log(A h^{3n^* + 3\delta + 1}) + Ah^{-n^* - \frac{\delta}{2}} \leq Ch^{-n^* - \delta}, \end{aligned}$$

qui nous fournit directement (2.14). A présent, nous allons démontrer qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de λ et h , telle que $|G(z, \lambda, h)| \leq \frac{C}{S(\lambda, h)}$, $\forall z \in \Omega(\lambda, h)$. Comme $G(\cdot, \lambda, h)$ est holomorphe dans $\Omega(\lambda, h)$, nous pouvons appliquer le principe du maximum, de sorte qu'il suffit d'obtenir cette estimation sur la frontière de $\Omega(\lambda, h)$. Jusqu'à la fin de la démonstration, C désignera une constante strictement positive dont la valeur pourra changer d'une ligne à l'autre.

- 1) Sur la partie du bord $[\lambda - 5\omega(\lambda, h), \lambda + 5\omega(\lambda, h)] - iS(\lambda, h)h^{-2n^*-\delta}$, d'après (2.7), (2.11) et la définition de σ , nous avons

$$\begin{aligned} |G(z, \lambda, h)| &\leq \exp\left(-\sigma S(\lambda, h)h^{-2n^*-\delta}\right) eA \exp\left(Ah^{-n^*} \log \frac{1}{h}\right) \\ &\leq \exp\left(-h^{-n^*} \log(S(\lambda, h)Ae^{Ah^{-n^*} \log(\frac{1}{h})})\right) eA \exp\left(Ah^{-n^*} \log \frac{1}{h}\right) \\ &\leq \frac{1}{AS(\lambda, h)} \exp\left(-Ah^{-n^*} \log \frac{1}{h}\right) eA \exp\left(Ah^{-n^*} \log \frac{1}{h}\right) \leq \frac{e}{S(\lambda, h)}, \end{aligned}$$

puisque $h^{-n^*} > 1$ et $\log(S(\lambda, h)Ae^{Ah^{-n^*} \log(\frac{1}{h})}) > 0$.

- 2) Sur la partie du bord $[\lambda - 5\omega(\lambda, h), \lambda + 5\omega(\lambda, h)] + iS(\lambda, h)$, nous déduisons de (2.8), (2.11) et (2.14) l'inégalité

$$|G(z, \lambda, h)| \leq e^{\sigma S(\lambda, h)} \frac{eC}{S(\lambda, h)} \leq \frac{e^{C+1}}{S(\lambda, h)}.$$

- 3) Sur les segments $\lambda \pm 5\omega(\lambda, h) + i[-S(\lambda, h)h^{-2n^*-\delta}, S(\lambda, h)]$, les estimations (2.7) et (2.13) donnent

$$\begin{aligned} |G(z, \lambda, h)| &\leq \sup_{x \in [-S(\lambda, h)h^{-2n^*-\delta}, S(\lambda, h)]} (e^{x\sigma}) C e^{-h^{-2n^*-\delta}} A \exp(Ah^{-n^*} \log \frac{1}{h}), \\ &\leq e^{S(\lambda, h)\sigma} e^{-h^{-n^*}} \leq e^C e^{-h^{-n^*}} \leq \frac{e^C}{S(\lambda, h)}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue grâce à l'estimation (2.6).

Finalement, $|G(z, \lambda, h)| \leq \frac{C}{S(\lambda, h)}$ sur $\partial\Omega(\lambda, h)$, de sorte que cette estimation est vérifiée aussi sur $\Omega(\lambda, h)$ et sur $\tilde{\Omega}(\lambda, h) \subset \Omega(\lambda, h)$. D'autre part, pour $z \in \tilde{\Omega}(\lambda, h)$, d'après (2.12) et (2.14), nous avons

$$\begin{aligned} |G(z, \lambda, h)| &\geq \frac{1}{2} |F(z, \lambda, h)| \inf_{x \in [-S(\lambda, h), S(\lambda, h)]} (e^{x\sigma}) \\ &\geq \frac{1}{2} |F(z, \lambda, h)| e^{-\sigma S(\lambda, h)} \geq \frac{1}{2} |F(z, \lambda, h)| e^{-C} \geq \frac{C'}{2} |F(z, \lambda, h)|. \end{aligned}$$

Pour $z \in \tilde{\Omega}(\lambda, h)$, nous avons donc l'encadrement suivant

$$\frac{C'}{2} |F(z, \lambda, h)| \leq |G(z, \lambda, h)| \leq \frac{C}{S(\lambda, h)}.$$

Nous en déduisons la majoration de $|F(z, \lambda, h)|$ annoncée. ■

Démonstration de la Proposition 2.2. Nous appliquons le lemme précédent à la famille de fonctions $F(z, h) = \|R_\chi(z, h)\| \equiv \|\chi R(z, h)\chi\|_{0,0}$ avec $n^* = n + 1$.

Par construction, $F(\cdot, h)$ est holomorphe dans chaque $\Omega(\lambda, h)$, $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$. De plus, il est connu que $R_\chi(z, h)$ satisfait $\|R_\chi(z, h)\| \leq \frac{1}{|Im(z)|}$ dans le demi-plan supérieur. Par suite, il suffit de vérifier (2.7). Le potentiel V satisfaisant l'hypothèse $(\mathbf{V})_\rho$, nous pouvons appliquer le lemme suivant.

Lemme 2.2 (Tang-Zworski [59]). *Soit U un voisinage compact de λ_0 dans $\{z \in \mathbb{C}; Re(z) > 0\}$ et soit $g(h) \ll 1$. Alors, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour $h < h_0$ nous avons*

$$\|R_\chi(z, h)\| \leq C e^{Ch^{-n} \log \frac{1}{g(h)}}, \text{ pour tout } z \in U \setminus \bigcup_{\xi \in Res(P(h))} B(\xi, g(h)). \quad (2.15)$$

Posons $g(h) = \frac{d(h)}{2}$ et remarquons que pour $h \in]0, 1]$ assez petit, nous avons

$$\Omega(\lambda, h) \cap \left(\bigcup_{\xi \in Res(P(h))} B(\xi, g(h)) \right) = \emptyset.$$

Par suite, en appliquant le lemme précédent, pour $h > 0$ assez petit, nous obtenons

$$\forall z \in \Omega(\lambda, h), \|R_\chi(z, h)\| \leq C e^{Ch^{-n} \log \frac{2}{d(h)}}.$$

Rappelons qu'il existe $C, d > 0$ tels que $d(h) \geq C e^{-d/h}$. Cette inégalité et l'estimation $\|R_\chi(z, h)\| \leq C e^{Ch^{-n} \log \frac{2}{d(h)}}$ donnent

$$\forall z \in \Omega(\lambda, h), \|R_\chi(z, h)\| \leq C e^{Ch^{-n-1}} \leq C e^{Ch^{-n^*} \log \frac{1}{h}}.$$

Par conséquent, nous sommes en mesure d'appliquer le Lemme 2.1 à chaque $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, pour obtenir

$$\|R_\chi(z, h)\| \leq \frac{C}{S(\lambda, h)}, \forall z \in \tilde{\Omega}(\lambda, h).$$

En particulier, pour $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ et $\beta \in [-S(\lambda, h), S(\lambda, h)]$, nous avons $\|R_\chi(\lambda + i\beta, h)\| \leq \frac{C}{S(\lambda, h)}$. En faisant tendre β vers zéro par valeurs positives puis négatives, l'inégalité précédente devient

$$\forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \|R_\chi(\lambda \pm i0, h)\| \leq \frac{C}{S(\lambda, h)}. \quad (2.16)$$

En intégrant cette estimation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \|R_\chi(\lambda \pm i0, h)\| d\lambda &\leq \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \frac{C}{S(\lambda, h)} d\lambda \leq \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \frac{Ch^{-3n^* - 3\delta}}{d(\lambda, h)} d\lambda, \\ &\leq Ch^{-3n^* - 3\delta} \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \left(h^{-1} + \sum_{\xi \in K} \frac{1}{|\lambda - \xi|} \right) d\lambda, \end{aligned}$$

où $K = \text{Res}(P(h)) \cap ([\lambda_0 - 2\epsilon, \lambda_0 + 2\epsilon] + i[-\epsilon^2, \epsilon^2])$. En effet, par définition de $d(\lambda, h)$, il est évident que

$$\frac{1}{d(\lambda, h)} \leq \max \left(h^{-1}, \sum_{\xi \in K} \frac{1}{|\lambda - \xi|}, \sup_{\xi \in L} \frac{1}{|\lambda - \xi|} \right),$$

où $L = \text{Res}(P(h)) \setminus K$. Par ailleurs, pour $\xi \in L$ et $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, nous avons $|\lambda - \xi| \geq \epsilon^2$. En prenant $0 < h < \epsilon^2$, nous avons donc

$$\frac{1}{d(\lambda, h)} \leq \max \left(h^{-1}, \sum_{\xi \in K} \frac{1}{|\lambda - \xi|} \right) \leq h^{-1} + \sum_{\xi \in K} \frac{1}{|\lambda - \xi|}.$$

Remarquons que K est un ensemble fini et que, d'après le Théorème 1.1,

$$\text{card}(K) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_0}{h}\right)^n\right).$$

De plus, pour $\xi = \alpha + i\beta \in K$ et $\epsilon^2 > \beta > 0$ proches de 0, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \frac{1}{|\lambda - \xi|} d\lambda &= \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \frac{1}{\sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}} d\lambda = \int_{\frac{\lambda_0 - \epsilon - \alpha}{\beta}}^{\frac{\lambda_0 + \epsilon - \alpha}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} d\lambda \\ &\leq \int_{-\frac{3\epsilon}{\beta}}^{\frac{3\epsilon}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} d\lambda = 2 \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} d\lambda + \int_1^{\frac{3\epsilon}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} d\lambda \right) \\ &\leq 2 + 2 \log\left(\frac{3\epsilon}{\beta}\right) \leq 3 \log\left(\frac{3\epsilon}{\beta}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, pour $\xi \in K$ nous avons $|\text{Im}(\xi)| \geq Ae^{-Ah^{-1}}$. Par suite,

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \frac{1}{|\lambda - \xi|} d\lambda \leq 3 \log\left(\frac{3\epsilon}{A} e^{Ah^{-1}}\right) \leq Ch^{-1},$$

donc, en utilisant l'égalité $n^* = n + 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \|R_\chi(\lambda \pm i0, h)\| d\lambda &\leq Ch^{-3n^* - 3\delta} \left(\frac{\lambda_0}{h}\right)^n (h^{-1} + h^{-1}) \\ &\leq Ch^{-4n - 3\delta - 4} \end{aligned}$$

et la démonstration est complète. ■

2.2 Localisation spatiale

Dans cette partie, nous commençons par démontrer une version intégrale du Lemme 1.4 en utilisant l'estimation intégrale de la résolvante démontrée dans la partie précédente.

Lemme 2.3 *Supposons que les hypothèses $(\mathbf{V})_\rho$ et $(\mathbf{Hol})_\infty$ sont satisfaites. Soit $\omega_\pm \in A_0^{0,+\infty}$ tel que $\text{supp}(\omega_\pm) \subset \Gamma_\pm(R, d, \sigma_\pm)$. Alors pour $\alpha > 1$ et $\epsilon > 0$ assez petit, les assertions suivantes sont vérifiées.*

i)

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| R(\lambda \pm i0)\omega_\pm(x, hD_x) \|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{-1}), \quad \forall \delta > 1.$$

ii) Si $\sigma_+ > \sigma_-$, alors

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| \omega_\mp(x, hD_x)R(\lambda \pm i0)\omega_\pm(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^\infty).$$

iii) Si $\omega \in A_0^{0,-\infty}$ et $\text{supp}(\omega) \subset \{|x| < \frac{9}{10}R\}$, alors

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| \omega(x, hD_x)R(\lambda \pm i0)\omega_\pm(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Démonstration. Nous traitons seulement le cas de ω_+ , puisque l'analyse de ω_- est parfaitement identique. Nous utilisons la construction de Robert et Tamura [53] pour approcher $R(\lambda + i0)\omega_+(x, hD_x)$. Notons

$$U(t, h) = e^{-ih^{-1}tP(h)}\omega_+(x, hD_x).$$

Alors, il existe $\omega_N \in A_0^{-N, +\infty}$, $U_N(t, h) \in \mathcal{L}(L_{-\alpha+\delta}^2, L_{-\alpha}^2)$ et $R_N(t, h) \in \mathcal{L}(L_{-\alpha+\delta}^2, L_\alpha^2)$ tels que

$$U(t, h) = U_N(t, h) + h^N e^{-ih^{-1}tP(h)}\omega_N(x, hD_x) + ih^{-1} \int_0^t e^{-ih^{-1}(t-s)P(h)} R_N(s, h) ds,$$

avec

$$\forall \delta > 1, \| U_N(t, h) \|_{-\alpha+\delta, -\alpha} = \mathcal{O}(\langle t \rangle^{-\delta}), \quad (2.17)$$

$$\forall \delta > 1, \| R_N(t, h) \|_{-\alpha+\delta, \alpha} = \mathcal{O}(h^N \langle t \rangle^{-\delta}), \quad (2.18)$$

$$\omega_N \in A_0^{-N, +\infty}. \quad (2.19)$$

Nous en déduisons

$$R(\lambda + i0)\omega_+(x, hD_x) = ih^{-1} \lim_{\mu \rightarrow 0, \mu > 0} \int_0^{+\infty} e^{ih^{-1}t(\lambda+i\mu)} U(t, h) dt = \sum_{k=1}^3 Q_k(\lambda, h), \quad (2.20)$$

où

$$Q_1 = ih^{-1} \lim_{\mu \rightarrow 0, \mu > 0} \int_0^{+\infty} e^{ih^{-1}t(\lambda+i\mu)} U_N(t, h) dt,$$

$$Q_2 = h^N R(\lambda + i0)\omega_N(x, hD_x),$$

$$Q_3 = ih^{-1} \lim_{\mu \rightarrow 0, \mu > 0} \int_0^{+\infty} e^{ih^{-1}s(\lambda+i\mu)} R(\lambda + i0)R_N(s, h) ds.$$

Démonstration de i). En partant de l'équation (2.20), nous obtenons

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda + i0)\omega_+(x, hD_x)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda \leq \sum_{k=1}^3 \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|Q_k(\lambda, h)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda.$$

Comme $\delta > 1$, nous déduisons de (2.17) que nous pouvons passer à la limite dans $\|Q_1\|_{-\alpha+\delta, -\alpha}$ quand $\mu \rightarrow 0$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|Q_1\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda &\leq h^{-1} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \int_0^{+\infty} \|U_N(t, h)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} dt d\lambda \\ &\leq Ch^{-1} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \int_0^{+\infty} \langle t \rangle^{-\delta} dt d\lambda \leq 2C'\epsilon h^{-1}. \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|Q_1(\lambda, h)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{-1}).$$

De plus, $\omega_N \in A_0^{-N, +\infty}$, de sorte que pour $N \geq 2\alpha - \delta$ nous avons $\|\omega_N(x, hD_x)\|_{-\alpha+\delta, \alpha} \leq C$. En prenant $N \geq \max(2\alpha - \delta, \tilde{n} - 1)$, nous obtenons grâce au Théorème 2.2 :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|Q_2\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda &\leq h^N \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} \|\omega_N(x, hD_x)\|_{-\alpha+\delta, \alpha} d\lambda \\ &\leq Ch^N \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} d\lambda \leq Ch^{N-\tilde{n}} \leq Ch^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'estimation

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|Q_2(\lambda, h)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{-1}).$$

Enfin, nous pouvons aussi passer à la limite quand $\mu \rightarrow 0$ dans l'expression de Q_3 et nous avons les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|Q_3(\lambda, h)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda &\leq h^{-1} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \int_0^{+\infty} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} \|R_N(s, h)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} ds d\lambda \\ &\leq Ch^{-1} \int_0^{+\infty} h^N \langle s \rangle^{-\delta} ds \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} d\lambda \leq Ch^{N-\tilde{n}-1}. \end{aligned}$$

En supposant par ailleurs $N \geq \tilde{n}$, nous obtenons

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|Q_3(\lambda, h)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{-1}),$$

ce qui achève la démonstration de i).

Démonstration de ii). Commençons par estimer

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|\omega_-(x, hD_x)R(\lambda + i0)\omega_+(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha} d\lambda \\ \leq \sum_{k=1}^3 \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|\omega_-(x, hD_x)Q_k(\lambda, h)\|_{-\alpha+\delta, -\alpha} d\lambda. \end{aligned}$$

Nous partons de $\omega_-(x, hD_x)Q_2 = h^N \omega_-(x, hD_x)R(\lambda + i0)\omega_N(x, hD_x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|\omega_-(x, hD_x)Q_2\|_{-\alpha, \alpha} d\lambda \\ \leq h^N \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|\omega_-(x, hD_x)R(\lambda + i0)\|_{\alpha+\delta, \alpha} \|\omega_N(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha+\delta} d\lambda \\ \leq h^N \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda - i0)\omega_-^*(x, hD_x)\|_{-\alpha, -\alpha-\delta} \|\omega_N(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha+\delta} d\lambda. \end{aligned}$$

En supposant $N \geq 2\alpha + \delta$, nous obtenons $\|\omega_N(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha+\delta} = \mathcal{O}(1)$ et

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|\omega_-(x, hD_x)Q_2\|_{-\alpha, \alpha} d\lambda \\ \leq Ch^N \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda - i0)\omega_-^*(x, hD_x)\|_{-\alpha, -\alpha-\delta} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De plus, ω_-^* a un développement asymptotique de la forme

$$\omega_-^* = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{\omega}_-,$$

dont nous déduisons $\omega_-^* = \tilde{\omega}_{-l} + \omega_{-l}$, avec $\text{supp}(\tilde{\omega}_{-l}) \subset \text{supp}(\omega_-)$ et $\omega_{-l} \in A_l^{-l, +\infty}$, $l \in \mathbb{N}$. Par suite, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|R(\lambda - i0)\omega_-^*(x, hD_x)\|_{-\alpha, -\alpha-\delta} \leq \|R(\lambda - i0)\tilde{\omega}_{-l}(x, hD_x)\|_{-\alpha, -\alpha-\delta} \\ + \|R(\lambda - i0)\omega_{-l}(x, hD_x)\|_{-\alpha, -\alpha-\delta}. \end{aligned}$$

D'après i), pour tout l assez grand, nous avons

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda - i0)\tilde{\omega}_{-l}(x, hD_x)\|_{-\alpha, -\alpha-\delta} d\lambda \leq Ch^{-1}. \quad (2.22)$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| R(\lambda - i0)\omega_{-l}(x, hD_x) \|_{-\alpha, -\alpha-\delta} d\lambda \\
 & \leq \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| R(\lambda - i0) \|_{\alpha+\delta, -\alpha-\delta} d\lambda \| \omega_{-l}(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha+\delta} \\
 & \leq Ch^{-\tilde{n}} \| \omega_{-l}(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha+\delta}.
 \end{aligned}$$

Pour $l \geq 2\alpha + \delta$ nous avons $\| \omega_{-l}(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha+\delta} \leq Ch^l$, de sorte qu'en prenant $l \geq \tilde{n} - 1$, nous obtenons l'estimation suivante

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| R(\lambda - i0)\omega_{-l}(x, hD_x) \|_{-\alpha, -\alpha-\delta} d\lambda = \mathcal{O}(h^{-1}). \quad (2.23)$$

Des équations (2.22) et (2.23), nous déduisons

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| R(\lambda - i0)\omega_{-}^*(x, hD_x) \|_{-\alpha, -\alpha-\delta} d\lambda = \mathcal{O}(h^{-1}). \quad (2.24)$$

Il nous suffit alors de combiner les estimations (2.24) et (2.21), pour aboutir à

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| \omega_{-}(x, hD_x)Q_2(\lambda, h) \|_{-\alpha, -\alpha-\delta} d\lambda = \mathcal{O}(h^{N-1}). \quad (2.25)$$

Nous allons maintenant étudier $\| \omega_{-}(x, hD_x)Q_3 \|_{-\alpha, \alpha}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| \omega_{-}(x, hD_x)Q_3 \|_{-\alpha, \alpha} d\lambda \\
 & \leq h^{-1} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \int_0^\infty e^{-\mu th^{-1}} \| \omega_{-}(x, hD_x)R(\lambda + i0)R_N(t, h) \|_{-\alpha, \alpha} dt d\lambda \\
 & \leq h^{-1} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| R(\lambda - i0)\omega_{-}^*(x, hD_x) \|_{-\alpha, -\alpha-\delta} d\lambda \times \\
 & \quad \times \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-\mu th^{-1}} \| R_N(t, h) \|_{-\alpha, \alpha+\delta} dt.
 \end{aligned}$$

D'après (2.18) et (2.24), nous avons

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| \omega_{-}(x, hD_x)Q_3 \|_{-\alpha, \alpha} d\lambda \leq h^{-1}Ch^{-1} \int_0^\infty h^N \langle t \rangle^{-\delta} dt,$$

et pour $\delta > 1$, il vient

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \| \omega_{-}(x, hD_x)Q_3 \|_{-\alpha, \alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{N-2}). \quad (2.26)$$

Enfin, il nous reste à estimer $\| \omega_-(x, hD_x)Q_1(\lambda, h) \|_{-\alpha, \alpha}$. Partons de

$$\begin{aligned}
 & \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \| \omega_-(x, hD_x)Q_1(\lambda, h) \|_{-\alpha, \alpha} d\lambda \\
 & \leq Ch^{-1} \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \left\| \int_0^{+\infty} e^{ih^{-1}t(\lambda + i\mu)} \omega_-(x, hD_x)U_N(t, h) dt \right\|_{-\alpha, \alpha} d\lambda \\
 & \leq Ch^{-1} \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\mu th^{-1}} \| \omega_-(x, hD_x)U_N(t, h) \|_{-\alpha, \alpha} dt d\lambda \\
 & \leq 2\epsilon Ch^{-1} \int_0^{+\infty} \| \omega_-(x, hD_x)U_N(t, h) \|_{-\alpha, \alpha} dt.
 \end{aligned}$$

D'après la démonstration du Lemme 2.1 [53], nous savons que

$$\int_0^{+\infty} \| \omega_-(x, hD_x)U_N(t, h) \|_{-\alpha, \alpha} dt = \mathcal{O}(h^\infty)$$

ce qui donne

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \| \omega_-(x, hD_x)Q_1 \|_{-\alpha, \alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^\infty). \quad (2.27)$$

Finalement, en regroupant les estimations (2.25), (2.26) et (2.27), nous établissons

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \| \omega_-(x, hD_x)R(\lambda + i0)\omega_+(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{N-2}).$$

Comme N peut être choisi arbitrairement grand (cf. Remarque 1.1), la démonstration de ii) est complète. La preuve de iii) est identique, et nous la laissons au lecteur. ■

Nous revenons maintenant à l'étude de l'amplitude de diffusion. D'après les résultats rappelés au Chapitre 1 (cf. Proposition 1.6), l'amplitude de diffusion s'écrit

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = c(\lambda, h)T_2(\theta, \omega, \lambda, h) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

où $T_2(\theta, \omega, \lambda, h)$ est le noyau de l'opérateur

$$T_2(\lambda, h) = \mathcal{F}_0(\lambda, h)(K_{+a}^*(h) + K_{-a}^*(h))R(\lambda + i0, h)(K_{+b}(h) + K_{-b}(h))\mathcal{F}_0^*(\lambda, h).$$

Plus précisément, nous avons vu au Chapitre 1 que

$$T_2(\theta, \omega, \lambda, h) = (T_{+2}^+ + T_{+2}^- + T_{-2}^+ + T_{-2}^-)(\theta, \omega, (\lambda, h))$$

où les $T_{\pm 2}^\pm$ sont définis par la formule (1.32). Prenons $\chi(\cdot, R) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ pour $|x| \leq R$ et $\chi = 0$ pour $|x| \geq R + 1$, et posons

$$\chi_a(x) = \chi(x, 20R_0), \quad \chi_b(x) = \chi(x, 10R_0),$$

où R_0 a été introduit dans la construction de Isozaki-Kitada du Chapitre 1 et sera fixé par la suite. De la même manière que le Lemme 1.4 entraîne le Lemme 1.5, le Lemme 2.3 nous permet de démontrer le Lemme suivant. Notons préalablement que dans l'énoncé ci-dessous, l'entier N est celui qui a été fixé lors de la construction des symboles a_{\pm} et b_{\pm} . D'après la Remarque 1.1, nous pourrions prendre N aussi grand que nécessaire.

Lemme 2.4 *Supposons que les hypothèses $(\mathbf{V})_{\rho}$ et $(\mathbf{Hol})_{\infty}$ sont satisfaites. Alors, pour $\alpha > \frac{n}{2}$, nous avons les assertions suivantes.*

- i) $\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|K_{\pm a}^*(h)R(\lambda+i0)K_{\pm b}(h)\|_{-\alpha,\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{2}}),$
- ii) $\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|K_{-a}^*(h)R(\lambda+i0)K_{-b}(h)\|_{-\alpha,\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{2}}),$
- iii) $\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|K_{+a}^*(h)R(\lambda+i0)(1-\chi_b)K_{-b}(h)\|_{-\alpha,\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{2}}),$
- iv) $\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|((1-\chi_a)K_{+a})^*(h)R(\lambda+i0)\chi_b K_{-b}(h)\|_{-\alpha,\alpha} d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{2}}).$

Nous déduisons immédiatement des point i) et ii) du Lemme 2.4 que

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |T_{+2}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h)| d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{3}})$$

et

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |T_{-2}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h)| d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{3}})$$

et nous en déduisons que

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |T_2(\theta, \omega, \lambda, h) - T_{-2}^-(\theta, \omega, \lambda, h)| d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{3}}), \quad (2.28)$$

Notons $\Phi_{+a}(x) = \Phi_{+a}(x, \sqrt{2\lambda}\theta)$ et $\Phi_{-b}(x) = \Phi_{-b}(x, \sqrt{2\lambda}\omega)$. De l'estimation (2.28), et des points iii) et iv) du Lemme 2.4, nous déduisons l'approximation suivante de l'amplitude de diffusion

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |T_2(\theta, \omega, \lambda, h) - T_2'(\theta, \omega, \lambda, h)| d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{3}}),$$

où

$$T_2'(\theta, \omega, \lambda, h) = \langle R(\lambda+i0)(1-\chi_b)k_{-b}(\cdot, \sqrt{2\lambda}\omega)e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, \\ (1-\chi_a)k_{+a}(\cdot, \sqrt{2\lambda}\theta)e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle.$$

En utilisant les formules (1.27) et (1.28), nous obtenons

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |f(\theta, \omega, \lambda, h) - c_1(\lambda, h)G_0(\theta, \omega, \lambda, h)|d\lambda = \mathcal{O}(h^{\frac{N}{3}}) \quad (2.29)$$

avec

$$G_0(\theta, \omega, \lambda, h) = \langle R(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \quad (2.30)$$

$$c_1(\lambda, h) = 2\pi(2\lambda)^{(n-3)/4}(2\pi h)^{-(n+1)/2}e^{-i\frac{(n-3)\pi}{4}} \quad (2.31)$$

et

$$g_{-b} = e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}[\chi_b, P_0(h)] \left(b_-(\cdot, \sqrt{2\lambda}\omega)e^{ih^{-1}\Phi_{-b}} \right), \quad (2.32)$$

$$g_{+a} = e^{ih^{-1}\Phi_{+a}}[\chi_a, P_0(h)] \left(a_+(\cdot, \sqrt{2\lambda}\theta)e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \right). \quad (2.33)$$

2.3 Localisation en temps courts

Nous commençons par rappeler la formule suivante :

$$R(\lambda + i0) = ih^{-1} \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} e^{-ih^{-1}tP(h)} dt + e^{ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) e^{-ih^{-1}TP(h)}. \quad (2.34)$$

Noter but est de montrer que le terme de reste $e^{ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) e^{-ih^{-1}TP(h)}$ est de l'ordre $O(h^\infty)$. Pour cela, nous allons prouver que pour $T > 0$ assez grand, nous avons

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \langle R(\lambda + i0) e^{-ih^{-1}TP(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle d\lambda = O(h^N). \quad (2.35)$$

La démonstration est basée sur une application judicieuse du Lemme d'Egorov dans des espaces à poids. C'est la raison pour laquelle nous avons eu besoin d'étudier le flot Hamiltonien au Chapitre 1.

2.3.1 Première localisation

Nous allons démontrer maintenant, l'approximation de la résolvante que nous venons d'évoquer. Le résultat exact est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 2.3 *Il existe $\epsilon > 0$ et $T_0 > 0$ tels que $\forall T > T_0$, nous avons*

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \left| \langle R(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle - \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} F(t, \theta, \omega, h) dt \right| d\lambda = O(h^N),$$

$$\text{où } F(t, \theta, \omega, h) = \langle e^{-ith^{-1}P(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle.$$

Démonstration. Posons

$$U = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, x \in \mathcal{C}(R_0), \frac{1}{2}|\xi|^2 \in [\lambda_0 - 2\epsilon, \lambda_0 + 2\epsilon], \frac{\xi}{|\xi|} \in W \right\}$$

où $\mathcal{C}(R_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; 5R_0 < |x| < 6R_0\}$ (cf. Lemme 1.11). Donnons nous un symbole $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tel que $\omega = 1$ sur U et $\omega = 0$ dans le complémentaire d'un voisinage V de \bar{U} . En posant $\omega_b = \chi_b \omega$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle R(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle &= \langle R(\lambda + i0)\omega_b(x, hD_x)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &\quad + \langle R(\lambda + i0)(1 - \omega_b)(x, hD_x)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &= I(\lambda, h) + J(\lambda, h). \end{aligned}$$

Or, nous avons

$$(1 - \omega_b)(x, hD_x)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}} = \sum_{|\alpha| \leq M} h^{|\alpha|}(1 - \omega_b)^{(\alpha)}(x, \nabla_x \Phi_{-b})g_\alpha(x) + R_M(x),$$

avec $\text{supp}(g_\alpha) \subset \text{supp}(g_{-b})$ et $|R_M(x)| \leq h^M \langle x \rangle^{-M}$. D'autre part, Φ_{-b} vérifiant $(\varphi 2)$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que

$$|x| \geq R_0 \implies \forall \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], \frac{\nabla_x \Phi_{-b}}{|\nabla_x \Phi_{-b}|}(x, \sqrt{2\lambda}\omega) \in W.$$

Dans ces conditions, il est facile de démontrer que $\forall x \in \mathcal{C}(R_0)$, $(x, \nabla_x \Phi_{-b}) \in U$. De plus, nous savons que $\text{supp}(g_{-b}) \subset C(R_0)$ et par conséquent,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, (1 - \omega)^{(\alpha)}(x, \nabla_x \Phi_{-b}(x))g_\alpha(x) = 0.$$

Par définition, nous savons que pour M assez grand, $\|R_M\|_{L_\alpha^2} = O(h^M)$ uniformément par rapport à λ . Par suite,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} |J(\lambda, h)| d\lambda &= \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} |\langle R(\lambda + i0)(1 - \omega_b)(x, hD_x)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle| d\lambda \\ &= \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} |\langle R(\lambda + i0)R_M, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle| d\lambda \\ &\leq \|R_M\|_{L_\alpha^2} \|g_{+a}\|_{L_\alpha^2} \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} d\lambda \leq Ch^{M-\tilde{n}}. \end{aligned}$$

Comme nous pouvons prendre M aussi grand que souhaité, nous en déduisons

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} |J(\lambda, h)| d\lambda = O(h^\infty).$$

Il nous reste à estimer le terme $I(\lambda, h)$. Dans cette optique, nous écrivons

$$\begin{aligned} I(\lambda, h) &= \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} \langle e^{-ih^{-1}tP(h)}\omega_b(x, hD_x)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle dt \\ &\quad + \langle e^{-ih^{-1}T\lambda}R(\lambda + i0)e^{-ih^{-1}TP(h)}\omega_b(x, hD_x)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &= I_1(\lambda, T, h) + I_2(\lambda, T, h). \end{aligned}$$

De l'estimation $|(1 - \omega_b)(x, hD_x)(g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}})| \leq C_M h^M \langle x \rangle^{-M}$, quel que soit M , nous déduisons

$$I_1(\lambda, T, h) = \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} \langle e^{-ih^{-1}tP(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle dt + O(h^\infty),$$

où $O(h^\infty)$ est indépendant de λ appartenant à tout compact. Il en découle que

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \left| I_1(\lambda, T, h) - \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} \langle e^{-ih^{-1}tP(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle dt \right| d\lambda = O(h^\infty)$$

et la démonstration se réduit à établir $\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |I_2(\lambda, T, h)| d\lambda = O(h^N)$.

Pour cela, nous prenons $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\beta(x, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Gamma_+(R, d, 0), \\ 0 & \text{sur } \Gamma_+(R, d, -\sigma)^c \end{cases}$$

et nous décomposons I_2 de la manière suivante

$$\begin{aligned} I_2(\lambda, T, h) &= \\ &\langle e^{-ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) \beta(x, hD_x) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &+ \langle e^{-ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) (1 - \beta)(x, hD_x) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &= I_{+2}(\lambda, T, h) + I_{-2}(\lambda, T, h). \end{aligned}$$

En prenant $R \geq 20R_0 + 1$, nous déduisons du Lemme 2.3 que

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|\chi_a R(\lambda + i0) \beta(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha} d\lambda = O(h^\infty).$$

De plus, en appliquant le Lemme 1.3, nous obtenons

$$\|e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) (g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}})\|_{L_\alpha^2} = \mathcal{O}(1)$$

uniformément par rapport à λ . Il vient alors,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |I_{+2}(\lambda, T, h)| d\lambda &\leq \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|\chi_a R(\lambda + i0) \beta(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha} d\lambda \times \\ &\times \sup_{\lambda \in [\lambda_0-\epsilon, \lambda_0+\epsilon]} \|e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) (g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}})\|_{L_\alpha^2} \times \|g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}}\|_{L_\alpha^2} \\ &\leq C_N h^N, \quad \forall N. \end{aligned}$$

Par suite, la démonstration sera complète si nous parvenons à estimer $I_{-2}(\lambda, T, h)$ convenablement. D'après le Théorème 2.2, nous avons l'estimation suivante

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} d\lambda = O(h^{-\tilde{n}}).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |I_{-2}(\lambda)| d\lambda &\leq \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} \|g_{+a}\|_{L^2_\alpha} \times \\
 &\quad \times \|(1 - \beta)(x, hD_x)e^{-ih^{-1}TP(h)}\omega_b(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha} \|g_{-b}\|_{L^2_{-\alpha}} d\lambda \\
 &\leq C \|(1 - \beta)(x, hD_x)e^{-ih^{-1}TP(h)}\omega_b(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha} \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} d\lambda \\
 &\leq Ch^{-\tilde{n}} \|(1 - \beta)(x, hD_x)e^{-ih^{-1}TP(h)}\omega_b(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha}.
 \end{aligned}$$

Il nous suffit donc, de démontrer que

$$\|(1 - \beta)(x, hD_x)e^{-ih^{-1}TP(h)}\omega_b(x, hD_x)\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^\infty). \quad (2.36)$$

D'après la construction de ω et en appliquant le Lemme 1.11, nous savons qu'il existe $T_0 > 0$ tel que

$$\forall T > T_0, \forall (x, \xi) \in \text{supp}(\omega_b), \Phi_T(x, \xi) \in \Gamma_+(R, d, 0).$$

Par conséquent,

$$\forall T > T_0, \forall (x, \xi) \in \text{supp}(\omega_b), (1 - \beta)(\Phi_T(x, \xi)) = 0.$$

Pour $T > T_0$, nous pouvons donc appliquer le Lemme 1.1 avec $p = 1 - \beta$ et $\omega = \omega_b$ pour obtenir directement (2.36). \blacksquare

Comme conséquence immédiate de la proposition précédente et de la formule (2.34), nous avons l'approximation suivante

$$\int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} \left| G_0(\theta, \omega, \lambda, h) - ih^{-1} \int_0^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} F(t, \theta, \omega, h) dt \right| d\lambda = O(h^\infty)$$

avec

$$F(t, \theta, \omega, h) = \langle e^{ih^{-1}tP(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle.$$

2.3.2 Seconde localisation

Dans cette partie, nous suivons exactement la même construction que celle de [53], en faisant attention aux dépendances possible par rapport à λ . Nous introduisons

$$Z_j(\lambda) = \{z \in \Lambda_\omega; |z - z_j(\lambda)| < \epsilon\}, \quad 1 \leq j \leq l,$$

pour $\epsilon > 0$ assez petit et nous posons

$$Y_j = \{y \in \text{supp}(g_{-b}); y = q_\infty(s, z_j(\lambda), \lambda, \omega), \quad s < 0, \quad \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]\},$$

où $z_j(\lambda) = z_j(\lambda, \theta)$ est donné par la Proposition 1.9. Pour R_0 assez grand, nous pouvons trouver $S_1 > S_0 \gg 1$ tels que $Y_j \subset \Pi_{-j}$ avec

$$\Pi_{-j} = \{y : y = q_\infty(s, z, \lambda, \omega), -S_1 < s < -S_0, \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], z \in Z_j(\lambda)\}.$$

Posons

$$\Sigma_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \cos(x, \omega) < \sigma_1^-\}$$

et

$$\Sigma_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq R_1 \text{ et } \cos(x, \theta) > \tau_1^+\}$$

avec $R_1 > 0$. Pour R_1 assez grand, indépendant de R_0 et pour $y \in \Sigma_-$, $x \in \Sigma_+$ nous avons

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y))| = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} |q(t, x, \nabla_x \Phi_{+a}(x))| = +\infty. \quad (2.37)$$

D'après la théorie de Hamilton-Jacobi (cf. [40], Proposition 3.8) nous savons que

$$\begin{cases} p(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y)) = \nabla_x \Phi_{-b}(q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y))) \\ p(t, x, \nabla_x \Phi_{+a}(x)) = \nabla_x \Phi_{+a}(q(t, x, \nabla_x \Phi_{+a}(x))) \end{cases} \quad (2.38)$$

et par construction des phases Φ_\pm nous savons aussi que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \nabla_x \Phi_{-b}(z) = \sqrt{2\lambda}\omega \text{ et } \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \nabla_x \Phi_{+a}(z) = \sqrt{2\lambda}\theta. \quad (2.39)$$

Il suit, en réunissant les équations (2.37), (2.38) et (2.39) que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y)) = \sqrt{2\lambda}\omega \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t, x, \nabla_x \Phi_{+a}(x)) = \sqrt{2\lambda}\theta.$$

Pour $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, posons

$$\mathcal{E}_\lambda = \left\{ y \in \Sigma_- \mid \exists t \in \mathbb{R}, \exists x \in \Sigma_+; \Phi_t(y, \nabla_x \Phi_{-b}(y, \sqrt{2\lambda}\omega)) = (x, \nabla_x \Phi_{+a}(x, \sqrt{2\lambda}\theta)) \right\}$$

Par définition de (q_∞, p_∞) , il est alors évident que l'ensemble $\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]} \mathcal{E}_\lambda$

est inclus dans $\bigcup_{j=1}^l \{q_\infty(s, z_j(\lambda), \lambda, \omega), \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon], s \leq S'_0\}$ pour un certain

$S'_0 \in \mathbb{R}$. Nous définissons maintenant $\mathcal{F} = \bigcup_{\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]} \mathcal{F}_\lambda$, avec

$$\mathcal{F}_\lambda = \left\{ y \in \text{supp}(g_{-b}) \mid \exists t \in \mathbb{R}, \exists x \in \text{supp}(g_{+a}); \right. \\ \left. \Phi_t(y, \nabla_x \Phi_{-b}(y, \sqrt{2\lambda}\omega)) = (x, \nabla_x \Phi_{+a}(x, \sqrt{2\lambda}\theta)) \right\}.$$

Comme $\bigcup_{j=1}^l \{q_\infty(s, z_j(\lambda), \lambda, \omega), -S_0 \leq s \leq S'_0\}$ est un ensemble compact et

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{E} \cap \text{supp}(g_{-b}) \subset \mathcal{E} \cap \{|x| \geq 5R_0\},$$

en choisissant R_0 assez grand, nous obtenons

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^l \left\{ q_\infty(s, z_j(\lambda), \lambda, \omega), s < -S_0, \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \right\}.$$

De plus, \mathcal{F} est borné, de sorte que pour S_1 assez grand, nous obtenons

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^l \left\{ q_\infty(s, z_j(\lambda), \lambda, \omega), -S_1 < s < -S_0, \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \right\}.$$

D'autre part, nous pouvons construire des fonctions $\pi_{-j} \in C_0^\infty(\Pi_{-j})$, telles que $0 \leq \pi_{-j} \leq 1$ et $\pi_{-j} = 1$ sur Y_j . D'après la discussion précédente, il est clair que pour $\epsilon > 0$ assez petit, les ensembles compacts

$$K_{\lambda_0} = \left\{ (y, \nabla_x \Phi_{-b}(y, \sqrt{2\lambda\omega})), y \in \text{supp}(g_{-b}) \cap \text{supp}\left(1 - \sum_{j=1}^l \pi_{-j}\right), \right. \\ \left. \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \right\}$$

et

$$F_{\lambda_0} = \left\{ \Phi_{-t}(x, \nabla_x \Phi_{+a}(x, \sqrt{2\lambda\theta})), x \in \text{supp}(g_{+a}), t \in [0, T_0], \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \right\}$$

sont disjoints. En effet, nous avons clairement l'identité

$$K_{\lambda_0} \cap F_{\lambda_0} \subset T^*(\mathcal{F} \cap \text{supp}\left(1 - \sum_{j=1}^l \pi_{-j}\right)) = \emptyset.$$

Par suite, le Lemme 1.1, donne l'estimation

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \left| G_0(\theta, \omega, \lambda, h) - ih^{-1} \sum_{j=1}^l \int_0^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} F_{-j}(t, \theta, \omega, h) dt \right| d\lambda = O(h^\infty)$$

avec

$$F_{-j}(t, \theta, \omega, h) = \langle e^{ih^{-1}tP(h)} \pi_{-j} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle.$$

De manière analogue, nous définissons

$$X_j = \{x \in \text{supp}(g_{+a}); x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y)), y \in Y_j, t > 0, \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]\}$$

et il existe $T_0 > T_1 \gg 1$ tels que $X_j \subset \Pi_{+j}$ avec

$$\Pi_{+j} = \{x; x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y)), y \in \Pi_{-j}, T_1 < t < T_0, \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]\}.$$

Nous pouvons aussi construire des fonctions $\pi_{+j} \in C_0^\infty(\Pi_{+j})$, telles que $0 \leq \pi_{+j} \leq 1$ et $\pi_{+j} = 1$ sur X_j . En répétant les arguments précédents, nous obtenons

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \left| G_0(\theta, \omega, \lambda, h) - ih^{-1} \sum_{j=1}^l \int_{T_1}^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} F_j(t, \theta, \omega, h) dt \right| d\lambda = O(h^\infty) \quad (2.40)$$

avec

$$F_j(t, \theta, \omega, h) = \langle e^{ih^{-1}tP(h)} \pi_{-j} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, \pi_{+j} g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle. \quad (2.41)$$

2.4 Méthode de la phase stationnaire

2.4.1 Approximation du groupe unitaire $e^{ih^{-1}tP(h)}$

Pour notre analyse, nous avons besoin d'une approximation de

$$\psi_j(t, x, h) = e^{ih^{-1}tP(h)} \pi_{-j} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, \quad x \in \Pi_{+j}, \quad T_1 < t < T_0.$$

Pour le confort du lecteur, nous rappelons maintenant des résultats démontrés dans [53]. Le lemme suivant est une conséquence du fait que θ est régulier par rapport à (λ, ω) .

Lemme 2.5 *Le point $x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y)) \in \Pi_{+j}$, avec $y \in \Pi_{-j}$, est non-focal, c'est à dire*

$$D(t, y) = \det\left(\frac{\partial}{\partial y} q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y))\right) \neq 0, \quad T_1 < t < T_0.$$

D'après (2.32), nous pouvons écrire g_{-b} sous la forme

$$g_{-b}(x, \lambda, h) = ihg_{0b}(x, \lambda) + h^2 g_b(x, \lambda, h),$$

où $\text{supp}(g_b) \subset \text{supp}(\chi_b)$ et

$$g_{0b}(x, \lambda) = \langle \nabla_x \Phi_{-b}(x, \sqrt{2\lambda}\omega), \nabla \chi_b(x) \rangle b_{-0}(x, \sqrt{2\lambda}\omega) \quad (2.42)$$

Parallèlement, (2.33) conduit à

$$g_{+a}(x, \lambda, h) = ihg_{0a}(x, \lambda) + h^2 g_a(x, \lambda, h)$$

avec $\text{supp}(g_a) \subset \text{supp}(\chi_a)$ et

$$g_{0a}(x, \lambda) = \langle \nabla_x \Phi_{+a}(x, \sqrt{2\lambda}\theta), \nabla \chi_a(x) \rangle a_{+0}(x, \sqrt{2\lambda}\theta). \quad (2.43)$$

Du Lemme 2.5 nous déduisons la représentation suivante de $\psi_j(t, x, \lambda, h)$, $T_1 < t < T_0$, $x \in \Pi_{+j}$, qui est uniforme par rapport à $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ (cf. [40], sect.12) :

$$\psi_j(t, x, \lambda, h) = e^{ih^{-1}S_j(t,y,\lambda) - i\mu_j \frac{\pi}{2}} |D(t, y)|^{-\frac{1}{2}} ih\pi_{-j}(y)g_{0b}(y, \lambda) + O(h), \quad (2.44)$$

pour $x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y))$, $y \in \Pi_{-j}$. Ici S_j est l'action le long de la trajectoire joignant les points x et y , c'est à dire

$$S_j(t, y, \lambda) = \Phi_{-b}(y, \sqrt{2\lambda}\omega) + \int_0^t \left(\frac{1}{2} |p(\tau, y, \nabla_x \Phi_{-b})|^2 - V(q(\tau, y, \nabla_x \Phi_{-b})) \right) d\tau, \quad (2.45)$$

et $\mu_j \in \mathbb{Z}$ est l'indice de Maslov de cette trajectoire sur la variété Lagrangienne

$$\left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; x = q_\infty(t, z, \lambda, \omega), \xi = p_\infty(t, z, \lambda, \omega), z \in \Lambda_\omega, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarquons que μ_j est localement constant, de sorte que pour $\epsilon > 0$ assez petit, μ_j est indépendant de $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$. Nous insérons maintenant (2.44) dans (2.41) et après un changement de variable $x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}) \rightarrow y$ dans (2.40), nous obtenons

$$F_j(t, \theta, \omega, \lambda, h) = h^2 \int e^{ih^{-1}\phi_j(t,y) - i\mu_j \frac{\pi}{2}} M_j(t, y) |D(t, y)|^{\frac{1}{2}} dy + O(h^3), \quad (2.46)$$

où

$$\phi_j(t, y, \lambda) = S_j(t, y, \lambda) - \Phi_{+a}(q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}), \sqrt{2\lambda}\theta)$$

et

$$M_j(t, y, \lambda) = \pi_{-j}(y)g_{0b}(y, \lambda)\pi_{+j}(q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}))g_{0a}(q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}), \lambda).$$

Ainsi la démonstration du Théorème 2.1 se réduit à l'étude du comportement asymptotique de l'intégrale

$$L_j(t, \theta, \omega, \lambda, h) = h^2 \int e^{ih^{-1}\phi_j(t,y) - i\mu_j \frac{\pi}{2}} M_j(t, y) |D(t, y)|^{\frac{1}{2}} dy.$$

2.4.2 Fin de la démonstration du Théorème 2.1

Nous allons étudier le comportement asymptotique de l'intégrale

$$N_j(\theta, \omega, \lambda, h) = \int_{T_1}^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} L_j(t, \theta, \omega, \lambda, h) dt, \quad 1 \leq j \leq l.$$

Comme la direction θ est régulière pour (λ_0, ω) , alors pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ nous pouvons effectuer le changement de variables suivant

$$(z, s) \in Z_j \times]-S_1, -S_0[\longrightarrow y = q_\infty(s, z, \lambda, \omega) \in \Pi_{-j}.$$

Nous obtenons

$$N_j = h^2 \int_{T_1}^{T_0} \int_{-S_1}^{-S_0} e^{ih^{-1}t\lambda - i\mu_j \frac{\pi}{2}} I_j(t, s, \theta, \omega, \lambda, h) ds dt,$$

avec

$$\begin{aligned} I_j(t, s, \theta, \omega, \lambda, h) &= \int e^{ih^{-1}\Phi_j(t, s, z)} f_j(t, s, z) |D_\infty(t+s, z)|^{\frac{1}{2}} |D_\infty(s, z)|^{\frac{1}{2}} dz, \\ \Phi_j(t, s, z, \lambda) &= S_j(t, q_\infty(s, z, \lambda, \omega), \lambda) - \Phi_{+a}(q_\infty(t+s, z, \lambda, \omega), \sqrt{2\lambda}\theta), \\ f_j(t, s, z, \lambda) &= \pi_{-j}(q_\infty(s, z, \lambda, \omega)) g_{0b}(q_\infty(s, z, \lambda, \omega), \lambda) \times \\ &\quad \times \pi_{+j}(q_\infty(t+s, z, \lambda, \omega)) g_{0a}(q_\infty(t+s, z, \lambda, \omega), \lambda). \end{aligned}$$

Nous appliquons maintenant, la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale I_j . Comme dans [53], pour (t, s, λ) fixé, $z_j(\lambda)$ est le seul point stationnaire pour la phase $\Phi_j(t, s, \lambda, z)$. Nous nous référons au Théorème 7.7.6 de [25] pour un énoncé précis de la méthode de la phase stationnaire dépendant d'un paramètre. Nous appliquons ce théorème à chaque $(z_j(\lambda_0), \lambda_0)$ et nous utilisons le lemme suivant, dont la démonstration est donnée dans [53].

Lemme 2.6 *Quel que soit $j = 1, \dots, N$, nous avons*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2}\right)(z_j(\lambda)) = n - 1, \\ 2) \quad & \left| \det\left(\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2}\right)(z_j(\lambda)) \right| = (2\lambda)^{\frac{n-2}{2}} \hat{\sigma}_j(z_j(\lambda), \lambda) D_\infty(t+s, z_j(\lambda)) E_0(t, s), \\ & \text{où } E_0(t, s) = \exp\left(\int_{t+s}^{\infty} \Delta_x \Phi_{+a}(q_\infty(\tau, z_j(\lambda), \lambda, \omega), \sqrt{2\lambda}\theta) d\tau\right). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \left| I_j(t, s, \theta, \omega, \lambda, h) - c_3(\lambda, h) e^{ih^{-1}(S_j - t\lambda)} \chi_0(t, s) \right| d\lambda = O(h),$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_0} \int_{-S_1}^{-S_0} \chi_0(t, s) dt ds &= -1, \text{ et } c_3(\lambda, h) = (2\lambda)^{-\frac{n-3}{4}} (2\pi h)^{\frac{n-1}{2}} e^{i(n-1)\frac{\pi}{4}}, \\ \int_{\lambda_0 - \epsilon}^{\lambda_0 + \epsilon} \left| N_j(\theta, \omega, \lambda, h) - c_2(\lambda, h) e^{ih^{-1}S_j - i\mu_j \frac{\pi}{2}} \hat{\sigma}_j(z_j(\lambda), \lambda)^{-\frac{1}{2}} \right| d\lambda &= O(h) \end{aligned}$$

et

$$c_2(\lambda, h) = -(2\lambda)^{-\frac{n-3}{4}} (2\pi h)^{\frac{n-1}{2}} h^2 e^{i(n-1)\frac{\pi}{4}}.$$

Cette égalité combinée avec (2.35) et (2.40), achève la démonstration du Théorème 2.1.

Chapitre 3

Asymptotique de l'amplitude de diffusion à énergie fixée

3.1 Énoncé des principaux résultats

Dans ce chapitre, nous allons étudier le comportement asymptotique quand $h \rightarrow 0$, de l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$. Le cadre est toujours celui d'un opérateur de Schrödinger associé à un potentiel de courte portée, mais nous nous intéressons ici au cas où l'énergie $\lambda > 0$ est fixée (par opposition au chapitre précédent où l'on intégrait par rapport à λ). Nous nous intéressons à trois problèmes différents que nous énonçons brièvement de la manière suivante.

Problème (I). Pouvons nous donner une estimation de $|f(\theta, \omega, \lambda, h)|$ en fonction de $h \in]0, 1]$, les paramètres θ, ω et λ étant fixés ?

Problème (II). Que se passe-t-il si nous modifions le potentiel V ? De quelle manière le comportement semiclassique de l'amplitude $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ change-t-il quand nous modifions le potentiel V , dans une région convenable ?

Problème (III). L'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ a-t-elle un développement asymptotique quand h tend vers 0 ?

Le problème (III) a été traité par Vainberg [63], [64], pour des potentiels $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et des énergies $\lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}^n} V(x)$, ce qui implique en particulier que λ est non-captif. Comme nous l'avons déjà évoqué, Robert et Tamura, dans [53], ont étendu ce résultat au cas où le potentiel V n'a pas nécessairement un support compact. Le cadre de leur résultat est celui d'un potentiel de courte portée, d'une énergie $\lambda > 0$ non-captive (mais pas nécessairement $\lambda > \sup(V)$) et de directions θ, ω fixées de sorte que $\theta \neq \omega$. Sous ces hypothèses, leur travail apporte évidemment une réponse au problème (I). L'amplitude $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ ayant une limite quand h tend vers 0, elle est nécessairement bornée pour h au voisinage de 0. De plus, les coefficients intervenant dans la formulation de cette limite, ne font intervenir les valeurs du

potentiel $V(x)$ sur $\{x : V(x) \leq \lambda\}$. Il suit que si nous modifions le potentiel V dans une région contenue dans $\{x : V(x) > \lambda\}$, l'amplitude de diffusion reste inchangée modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, ce qui donne une réponse au problème (II).

Dans le cas captif, les choses se compliquent et il n'y a pas de résultat répondant à ces questions dans un cadre aussi général. Commençons par mentionner deux résultats en rapport avec problème (II). S. Nakamura a étudié dans [45] le cas de deux potentiels de courte portée V et \tilde{V} , satisfaisant $(\mathbf{V})_\rho$ avec $\rho > \frac{n+1}{2}$, tels que $V = \tilde{V}$ sur la composante connexe non bornée de $\{x : V(x) < \lambda + \epsilon\}$. En supposant de plus, que l'énergie λ est faiblement captive pour chacun des potentiels, c'est à dire $\|(P(h) - (\lambda + i0))^{-1}\|_{\alpha, -\alpha} = \mathcal{O}(h^{-M})$ pour $M \in \mathbb{R}$ et $\alpha > \frac{1}{2}$, il a montré que

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) - \tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h) = \mathcal{O}(e^{-d/h}),$$

pour un certain $d > 0$.

Par ailleurs, A. Lahmar-Benbernou et A. Martinez ont examiné dans [35], le cas d'un "puits dans une île", où l'existence de résonances convergeant exponentiellement vite vers l'axe réel rend impossible toute estimation polynômiale de la résolvante. Dans ce cas, que nous détaillerons plus tard, leur potentiel modifié est non-captif pour λ et il est identiquement égal à V sur la composante connexe non-bornée de $\{x : V(x) < \lambda + \epsilon\}$. Sous ces conditions, ils montrent que

$$\tilde{f}(\theta, \omega, \lambda_j, h) - f(\theta, \omega, \lambda_j, h) = \alpha h^k$$

pour certains $\alpha \neq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et λ_j convergeant vers λ .

Concernant le problème (III), l'une des principales difficultés est l'obtention d'une estimation de la résolvante et en particulier, le fait que pour certain niveaux d'énergie captifs, la résolvante $\|R(\lambda \pm i0)\|_{\alpha, -\alpha}$ peut se comporter comme $e^{C/h}$ quand h tend vers 0. Par ailleurs, une des principales différences entre le cas courte-portée et le cas où V a un support compact, se manifeste dans la forme prise par $f(\theta, \omega, \lambda, h)$. Si V appartient à C_0^∞ , nous avons une formule de représentation qui ne fait intervenir que la résolvante tronquée. Plus précisément, nous avons

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = c_n h^{-n} \lambda^{\frac{n-2}{2}} \langle [h^2 \Delta, \chi_1] R(\lambda + i0) [h^2 \Delta, \chi_2] \chi_3 e^{ih^{-1} \langle \cdot, \omega \rangle}, \chi_3 e^{ih^{-1} \langle \cdot, \theta \rangle} \rangle_{L^2}, \quad (3.1)$$

où χ_j , $j = 1, 2, 3$ appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, vérifie $\chi_{j+1} = 1$ sur $\text{supp } \chi_j$ et $\chi_1 = 1$ sur une boule centrée en zéro aussi grande que nous le voulons (cf. [47]). Dans le cas courte portée, cette formule n'est plus valable et de la même manière qu'au Chapitre 2, nous utilisons la formule de représentation de Isozaki et Kitada (cf. Chapitre 1, Section 1.2.2 pour plus de détails). En particulier, dans cette formule, la résolvante s'applique seulement à des fonctions L_α^2 . L'approche dans [53] est basée sur une localisation, à l'intérieur de la formule de représentation, conduisant à une formule approchée ne mettant en jeu que la résolvante tronquée.

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = c_n h^{-n} \lambda^{\frac{n-2}{2}} \langle R(\lambda + i0) g_{-b} e^{ih^{-1} \Phi_{-}(\cdot, \omega)}, g_{+a} e^{ih^{-1} \Phi_{+}(\cdot, \theta)} \rangle + \mathcal{O}(h^\infty) \quad (3.2)$$

Dans le cas non-captif, cette localisation s'effectue, en utilisant l'estimation suivante

$$\|R(\lambda \pm i0)\|_{\alpha, -\alpha} = O(h^{-1}), \quad \alpha > \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Dans le cas général, cette estimation n'est pas nécessairement vraie et la méthode ne fonctionne plus aussi simplement. Dans un travail récent, Burq [7] (cf. aussi [65] et [9]) a donné une estimation polynômiale de la résolvante tronquée,

$$\|\chi_1(x)R(\lambda + i0)\chi_2(x)\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{-1}), \quad (3.4)$$

où $\text{supp } \chi_i \subset \{x : R_1 < |x| < R_2\}$, $i = 1, 2$ et $0 < R_1 < R_2$ sont suffisamment grands. En utilisant cette majoration, nous démontrons dans ce chapitre, que pour des perturbations de courte portée quelconques, l'amplitude de diffusion peut s'écrire sous la forme (3.2). Cette formule de représentation est l'étape principale dans notre analyse des deux problèmes que nous étudions. Combinée à l'estimation (3.4) elle nous permet d'aborder le problème (I) et en particulier, de montrer que dans le cas général, l'amplitude de diffusion est bornée par un $\mathcal{O}(h^{-\frac{n-1}{2}})$ en dehors de la diagonale $\{\theta = \omega\}$. Concernant, le problème (II), cette localisation nous permet d'étendre les résultats de Nakamura au cas où nous supposons uniquement $\rho > 1$. Elle nous permettra aussi d'étendre l'asymptotique de Robert et Tamura, aux cas de potentiels faiblement captifs et d'aborder ainsi le problème (III). Enfin, notons que cette formule sera le point clef des résultats démontrés au Chapitre 4.

Pour ω et θ fixés dans $S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}$ et pour $\lambda > 0$ satisfaisant la condition de non-capture, Robert et Tamura ont obtenu pour f une asymptotique

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = \sum_{j=1}^l \hat{\sigma}(z^j)^{-\frac{1}{2}} e^{ih^{-1}S_j - i\mu_j \frac{\pi}{2}} + O(h), \quad (3.5)$$

où $\hat{\sigma}$, z^j , S_j et μ_j seront précisés par la suite. En particulier, il est évident que dans le cas non-captif, l'amplitude de diffusion est bornée par $\mathcal{O}(1)$ en dehors de la diagonale. Ceci n'est pas nécessairement vrai dans le cas captif, où $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ pourrait exploser à cause de résonances convergeant exponentiellement vite vers l'axe réel. Comme nous l'avons déjà dit, une des conséquences de l'hypothèse de non-capture est l'estimation (3.3) qui est directement reliée au fait que pour des perturbations non-captives, il n'y a pas de résonance dans une zone de la forme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < a < \text{Re}(z) < b, 0 \leq \text{Im}(z) \leq N h \log\left(\frac{1}{h}\right) \right\}, \quad \forall N, 0 < h < h_N.$$

Dans le cas captif, la résolvante n'est pas nécessairement analytique dans la région ci-dessus. De plus, dans de nombreux cas, il y a des résonances (c'est à dire des pôles de l'amplitude de diffusion) dans des bandes de taille $e^{-d/h}$. Dans le cas d'un pôle simple de la résolvante et pour des potentiels à support compact, Stefanov [58], a donné une estimation du résidu de l'amplitude de diffusion. Nous décrirons en détails ce résultat au Chapitre 4, mais nous pouvons déjà mentionner que cette estimation

fournit une borne en $\mathcal{O}(h^{-\frac{n-1}{2}})$ pour l'amplitude de diffusion quelle que soit la nature de l'énergie. La démonstration de cette estimation dans le cas où $V \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, est basée sur l'estimation (3.4) appliquée à la formule (3.1) étendue au plan complexe. En effet la formule (3.1) met en jeu uniquement la résolvante tronquée, avec des fonctions de troncature supportées dans des couronnes éloignées de l'origine, de sorte qu'il est possible d'utiliser (3.4). Dans le cas où V n'a pas nécessairement un support compact, la formule (3.1) n'est plus valable, mais en invoquant la formule de représentation (3.2), nous sommes capables d'établir une majoration similaire sur l'axe réel.

Théorème 3.1 *Fixons un compact $K \subset \mathbb{R}_+^*$ et supposons que le potentiel V satisfait $(\mathbf{V})_\rho$, pour un certain $\rho > 1$ ainsi que (\mathbf{Hol}_∞) . Dans ces conditions, nous avons :*

$$\forall(\omega, \theta) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}, \exists C > 0, \forall \lambda \in K, |f(\theta, \omega, \lambda, h)| \leq Ch^{-\frac{n-1}{2}}. \quad (3.6)$$

Pour des énergies captives particulières, il est possible d'exhiber des phénomènes nouveaux. Par exemple, Lahmar-Benbernou et Martinez [35], ont montré dans un cas particulier, comment l'existence de résonances convergeant exponentiellement vite vers l'axe réel conduit à un comportement différent de l'amplitude de diffusion. Plus précisément, il considèrent le cas où le potentiel $V(x)$ est un "puits dans un île", c'est à dire qu'il existe $\lambda_0 > 0$, un ouvert connexe borné $\ddot{O} \subset \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \ddot{O}$ tels que

- i) $V(x_0) = \lambda_0$ et $V''(x_0) > 0$,
- ii) $V > \lambda_0$ sur $\ddot{O} \setminus \{x_0\}$ et $V < \lambda_0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\ddot{O}}$,
- iii) λ_0 est non-captive pour V en dehors de \ddot{O} .

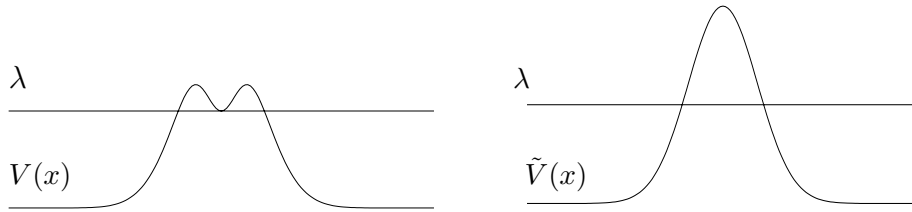


FIG. 3.1: Un "puits dans une île" transformé en un potentiel non-captif.

La condition iii) signifie juste que toute particule d'énergie λ partant d'un point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \ddot{O}$ s'échappe en $t = \pm\infty$. Partant de V , ils construisent un potentiel non-captif \tilde{V} égal à V sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\ddot{O}}$ (cf. Fig 1) et ils prouvent que pour des directions

$\theta, \omega \in S^{n-1}$ convenables, il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que :

$$f(\theta, \omega, \operatorname{Re}(\rho_j), h) - \tilde{f}(\theta, \omega, \operatorname{Re}(\rho_j), h) = \alpha h^{\frac{n+1}{2}} + O(h^{\frac{n+2}{2}}),$$

où $\rho_j = \rho_j(h)$ est une résonance convergeant vers λ_0 et \tilde{f} est l'amplitude de diffusion associée à \tilde{V} .

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous donnons un cadre général dans lequel un tel phénomène ne peut pas se produire. En effet, nous allons montrer que si nous modifions le potentiel V dans une région convenable (essentiellement de la même manière que Lahmar-Benbernou et Martinez), alors l'amplitude de diffusion est inchangée modulo des termes d'ordre $O(h^\infty)$. Ceci est vrai même pour des potentiels captifs V , pourvu qu'il existe une zone de taille h^M autour de l'axe réel qui soit libre de résonances. Plus précisément, introduisons l'ouvert

$$W_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) < \lambda\}.$$

Comme $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = 0$, cet ensemble a une unique composante connexe non bornée, notée W_{ext} . Notons $W_{int} = W_\lambda \setminus W_{ext}$ et soit F un ensemble compact tel que $W_{int} \subset F \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{W_{ext}}$. Nous supposons que $\tilde{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est un potentiel de classe C^∞ tel que $V = \tilde{V}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus F$. Remarquons qu'à priori, rien ne nous assure que l'ensemble F est non vide. Il se trouve juste, que dans le cas où $F = \emptyset$, le résultat que nous allons énoncer est trivial, puisque $V = \tilde{V}$. Nous noterons $\tilde{P}(h) = -h^2\Delta + \tilde{V}(x)$ l'opérateur de Schrödinger associé et $\tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h)$ l'amplitude de diffusion associée à $\tilde{P}(h)$. Le théorème suivant compare $\tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h)$ avec $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ dans le cas où nous supposons seulement $\rho > 1$.

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions suivantes sont réalisées :*

- i) $(\mathbf{V})_\rho$ avec $\rho > 1$.
- ii) (\mathbf{Hol}_∞) .
- iii) Il existe $\epsilon > 0$, $C > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\left(\operatorname{Res}(\tilde{P}(h)) \cup \operatorname{Res}(P(h)) \right) \cap ([\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] + i[0, Ch^M]) = \emptyset.$$

Alors, pour tout $(\theta, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}$ nous avons

$$\tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h) = f(\theta, \omega, \lambda, h) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Remarque 3.1 *D'après le travail de Lahmar-Benbernou et Martinez [35], il est évident que l'hypothèse iii) est nécessaire. Si nous faisons uniquement une hypothèse sur les résonances de $\tilde{P}(h)$ (et non sur $\operatorname{Res}(P(h))$ et $\operatorname{Res}(\tilde{P}(h))$ simultanément), le résultat du Théorème 3.2 n'est plus vrai.*

Les deux théorèmes précédent ne donnent pas la limite de $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ lorsque h tend vers 0. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous démontrerons que l'amplitude de diffusion pour certain potentiels captifs, a une limite similaire à celle donnée par (3.5). Ceci est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 3.3 *Soient $\omega \in S^{n-1}$ et $\lambda > 0$. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- 1) $(V)_\rho$ avec $\rho > 1$.
- 2) $(\mathbf{Hol})_\infty$.
- 3) L'hypothèse $(H_{\omega, \lambda})$ est satisfaite, c'est-à-dire :

$$\forall z \in \Lambda_\omega, \lim_{t \rightarrow +\infty} |q_\infty(t, z, \lambda, \omega)| = +\infty.$$

- 4) θ est régulier pour ω .
- 5) Il existe $\epsilon > 0$, $C > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\text{Res}(P(h)) \cap ([\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] + i[0, Ch^M]) = \emptyset.$$

Alors, nous avons l'asymptotique suivante

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = \sum_{j=1}^l \hat{\sigma}(z^j)^{-\frac{1}{2}} e^{ih^{-1}S_j - i\mu_j \frac{\pi}{2}} + \mathcal{O}(h),$$

où

$$S_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} |p_\infty(t, z^j, \omega)|^2 - V(q_\infty(t, z^j, \omega)) - \lambda \right) dt - \langle r_\infty(z^j), \sqrt{2\lambda}\theta \rangle \quad (3.7)$$

et $\mu_j \in \mathbb{Z}$ est l'indice de Maslov de la trajectoire $(q_\infty(t, z^j, \omega), p_\infty(t, z^j, \omega))$ sur la variété Lagrangienne

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = q_\infty(t, z, \omega), \xi = p_\infty(t, z, \omega), z \in \Lambda_\omega, t \in \mathbb{R}\}.$$

3.2 Un exemple de potentiel faiblement captif

Nous donnons maintenant des exemples de potentiels faiblement captifs. Notre principal outil pour exhiber de tels potentiels est un résultat de C. Gérard et J. Sjöstrand [21]. Soit $P = p(x, hD_x)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques hors d'un compact fixe et $\lambda > 0$ une énergie fixée. Nous notons $\Phi_t = e^{tH_p}$ le flot associé au champ Hamiltonien

$$H_p(x, \xi) = \begin{pmatrix} \partial_{\xi'} p \\ \partial_{\xi''} p \\ -\partial_{x'} p \\ -\partial_{x''} p \end{pmatrix} (x, \xi)$$

et pour $\epsilon_0 > 0$ assez petit nous posons

$$K_{\epsilon_0}(\lambda) = \{(x, \xi) \in p^{-1}([\lambda - \epsilon_0, \lambda + \epsilon_0]); \Phi_t(x, \xi) \text{ est borné sur } \mathbb{R}\}.$$

Pour $|\mu - \lambda| \leq \epsilon_0$, nous notons aussi $K(\mu) = K_{\epsilon_0}(\lambda) \cap p^{-1}(\{\mu\})$. Les hypothèses de [21] sont les suivantes

- (H₀) Dans un voisinage ouvert Ω de K dans $T^*(\mathbb{R}^n)$, il existe une sous variété Σ , fermée symplectique de classe C^1 qui contient $K(\lambda)$ et telle que le champ Hamiltonien H_p est tangent à Σ en tout point. De plus, nous supposons qu'il existe deux sous-fibrés vectoriels $N_{+, \varrho}$ et $N_{-, \varrho}$ de $T^*(\mathbb{R}^n)$ de classe C^0 tels que :
- (H₁) $T_\varrho \Sigma^\sigma = N_{+, \varrho} \oplus N_{-, \varrho}$, où $T_\varrho \Sigma^\sigma$ désigne orthogonal de $T_\varrho \Sigma$ pour la forme symplectique σ .
- (H₂) Pour $\varrho \in K(\lambda)$, $N_{\pm, \varrho}$ est invariant par les applications $D_\varrho \Phi_t$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- (H₃) Si nous choisissons des normes sur $N_{+, \varrho}$ et $N_{-, \varrho}$, dépendant continûment de ϱ , il existe $C_0 > 1$ et $T_0 > 0$ tels que $\|D_\varrho \Phi_{\mp T_0}(v_\pm)\| \leq C_0^{-1} \|v_\pm\|$, $\forall v_\pm \in N_{\pm, \varrho}$.

Le résultat de Gérard et Sjöstrand est alors le suivant :

Théorème 3.4 *Supposons que le symbole p satisfait les hypothèses (H_{*i*}), $i = 0, \dots, 3$, alors il existe $\epsilon > 0$ et $d_0 > 0$ tels que P n'a pas de résonance dans $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] + i[0, d_0 h]$, pour $0 < h < \epsilon$.*

Nous allons appliquer ce résultat à l'opérateur de Schrödinger. Nous considérons le cas où $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$, c'est-à-dire $P(h) = -h^2 \Delta + V(x)$. Fixons un entier $d \in \{1, \dots, n-1\}$ et notons $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x'')$ avec $x' = (x_1, \dots, x_d)$ et $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_n)$. De même, nous noterons $\xi = (\xi', \xi'') \in \mathbb{R}^n$. Donnons nous aussi une fonction décroissante $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\rho(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$ et $\rho(t) = 0$ pour $t \in [2, +\infty[$. Nous posons

$$V(x) = \rho(|x|^2) \left(2 + \sum_{j=1}^d x_j^2 - \sum_{j=d+1}^n x_j^2 \right).$$

Contrôle des résonances. Le champ Hamiltonien H_p s'écrit

$$H_p(x, \xi) = 2 \begin{pmatrix} \xi' \\ \xi'' \\ -x' (\rho(|x|^2) + \rho'(|x|^2)(2 + |x'|^2 - |x''|^2)) \\ x'' (\rho(|x|^2) - \rho'(|x|^2)(2 + |x'|^2 - |x''|^2)) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Donnons nous une énergie $2 < \lambda < 2 + \frac{1}{2} \sup V$. Sous ces conditions, nous allons montrer que pour $0 < \epsilon_0 < \min(\lambda - 2, 2 + d - \lambda)$, nous avons

$$K_{\epsilon_0}(\lambda) \subset \{x'' = \xi'' = 0\} \cap p^{-1}([\lambda - \epsilon_0, \lambda + \epsilon_0]).$$

Pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n$, nous notons

$$(X(t), \Xi(t))(x, \xi) = (X'(t), X''(t), \Xi'(t), \Xi''(t))(x, \xi) = \Phi_t(x, \xi),$$

de sorte que nous avons

$$\dot{X}' = 2\Xi', \quad \dot{X}'' = 2\Xi'', \quad \dot{\Xi}' = -\nabla_{x'} V(X), \quad \dot{\Xi}'' = -\nabla_{x''} V(X).$$

Soit $(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ tel que $(x'', \xi'') \neq (0, 0)$. Nous allons montrer que $(X(t), \Xi(t))$ n'est pas borné sur \mathbb{R} . Dans toute la suite, nous supposons que $|x|^2 < 2$, le flot étant trivial à l'extérieur de cette boule.

Premier cas : $x'' \neq 0$. Dans ces conditions, il existe $j \in \{d+1, \dots, n\}$ tel que $x_j \neq 0$. De plus X_j est solution de

$$\dot{X}_j = \Xi_j, \quad \dot{\Xi}_j = 2X_j(\rho(|X|) - \rho'(|X|)(2 + |X'|^2 - |X''|^2)).$$

Nous traitons le cas où $X_j(0) = x_j > 0$ et $\Xi_j(0) = \xi_j \geq 0$. Comme $|x|^2 < 2$, alors $2 + |x'|^2 - |x''|^2 > 0$. De plus, ρ étant positive et strictement décroissante sur $[0, 2[$, alors

$$\dot{\Xi}_j(0) = 2x_j (\rho(|x|) - \rho'(|x|)(2 + |x'|^2 - |x''|^2)) > 0.$$

Par suite il existe $t_0 > 0$ tel que $X_j(t_0) > 0$ et $\Xi_j(t_0) > 0$. Un simple argument de connexité montre que $\dot{\Xi}_j(t) > 0, \forall t \geq t_0$ et il s'en suit que

$$\forall t \geq t_0, \quad X_j(t) \geq \Xi_j(t_0)(t - t_0) + X_j(t_0).$$

En particulier, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |X(t)| = +\infty$. De la même manière, nous montrons que si $\pm x_j \xi_j \geq 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |X(t)| = +\infty$.

Second cas : $x'' = 0$ et $\xi'' \neq 0$. Il existe $j \in \{d+1, \dots, n\}$ tel que $\xi_j \neq 0$. Supposons par exemple, que $\xi_j > 0$. Comme $\dot{X}_j = \Xi_j$, alors il existe $t_0 > 0$ tel que $X_j(t_0) > 0$ et $\Xi_j(t_0) > 0$ et nous concluons comme dans le cas précédent. Si $\xi_j < 0$, nous argumentons de la même manière pour des temps $t < 0$.

En conclusion, nous avons établi que $K(\lambda) \subset \Sigma := \{(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n); (x'', \xi'') = (0, 0)\}$. Nous allons maintenant montrer successivement que Σ vérifie les hypothèses $(H_j), j = 0, \dots, 3$.

Pour $\varrho \in \Sigma$, nous avons $T_\varrho \Sigma = \Sigma$ et la formule (3.8) montre clairement que $H_p(\varrho)$ est tangent à Σ . Nous en déduisons que l'hypothèse (H_0) est vérifiée. La forme symplectique σ sur $T^*(\mathbb{R}^n)$ est donnée par $\sigma((x, \xi), (y, \eta)) = \langle x, \eta \rangle - \langle y, \xi \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n . Un calcul élémentaire montre que pour tout $\varrho \in \Sigma$, $T_\varrho \Sigma^\sigma = \{(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n); (x', \xi') = (0, 0)\}$. Notons $(e_{x,1}, \dots, e_{x,n}, e_{\xi,1}, \dots, e_{\xi,n})$ la base canonique de \mathbb{R}^{2n} , nous décomposons $T_\varrho \Sigma^\sigma$ de la manière suivante

$$T_\varrho \Sigma^\sigma = N_{+, \varrho} \oplus N_{-, \varrho} \text{ avec } N_{\pm, \varrho} = \text{Vect}\{f_{\pm, d+1}, \dots, f_{\pm, n}\} \text{ où } f_{\pm, j} = e_{x, j} \pm e_{\xi, j}.$$

D'après la formule (3.8), le flot Hamiltonien s'écrit dans la boule $B(0, \sqrt{2})$

$$\Phi_t(x, \xi) = \begin{pmatrix} x' \cos t + \xi' \sin t \\ x'' \operatorname{ch} t + \xi'' \operatorname{sh} t \\ -x' \sin t + \xi' \cos t \\ x'' \operatorname{sh} t + \xi'' \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

d'où, en notant I_k la matrice identité d'ordre k :

$$D_{(x, \xi)} \Phi_t = \begin{pmatrix} \cos t I_d & 0 & \sin t I_d & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t I_{n-d} & 0 & \operatorname{sh} t I_{n-d} \\ -\sin t I_d & 0 & \cos t I_d & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} t I_{n-d} & 0 & \operatorname{ch} t I_{n-d} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour $j \in \{d+1, \dots, n\}$, nous avons $D_{(x, \xi)} \Phi_t f_{\pm, j} = (\operatorname{ch} t \pm \operatorname{sh} t) f_{\pm, j} = e^{\pm t} f_{\pm, j}$, donc $N_{\pm, \varrho}$ est invariant par $D_{\varrho} \Phi_t$ pour $\varrho \in K_0$ et $|t|$ assez petit. Notons $T = \sup\{t > 0; D_{\varrho} \Phi_t(N_{\pm, \varrho}) \subset N_{\pm, \varrho}\}$ et supposons par l'absurde que $T < +\infty$. Donnons nous $\varrho \in K_0$ et $X \in N_{+, \varrho}$, alors pour tout $t > 0$ nous avons

$$D_{\varrho} \Phi_{T+t}(X) = D_{\Phi_T(\varrho)} \Phi_t \circ D_{\varrho} \Phi_T(X) = D_{\varrho'} \Phi_t(Y),$$

avec $\varrho' = \Phi_T(\varrho) \in K_0$ et $Y = D_{\varrho} \Phi_T(X) \in N_{+, \varrho}$. Nous en déduisons que pour $t > 0$ assez petit, $D_{\varrho} \Phi_{T+t}(X) \in K_0$, ce qui est absurde. Par conséquent, les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées.

De plus, pour tout $v_{\pm} \in N_{\pm, \varrho}$, nous savons que $\|D_{(x, \xi)} \Phi_t v_{\pm}\| = e^{\pm t} \|v_{\pm}\|$. Donc la propriété (H_3) est vérifiée pour tout $C_0 > 1$ et $T_0 = \ln C_0$.

Trajectoires captées. Nous allons maintenant exhiber des trajectoires captées pour le potentiel V et l'énergie λ , ainsi que des familles de trajectoires qui mettent un temps arbitrairement long à échapper.

Prenons pour position initiale $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ tel que $|x| < 1 < \lambda$. Nous demandons aussi que $x'' \leq 0$, c'est à dire $x_j \leq 0, \forall j \in \{d+1, \dots, n\}$. Donnons nous une vitesse initiale $\xi = (\xi', \xi'') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $\xi'' = -x''$ et $|\xi'|^2 + |x'|^2 = \lambda$. L'énergie de la particule partant de (x, ξ) au temps $t = 0$ est donc $p(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x) = |\xi'|^2 + |\xi''|^2 + |x'|^2 - |x''|^2 = |\xi'|^2 + |x'|^2 = \lambda$. De plus, d'après la formule (3.9), nous avons

$$\Phi_t(x, \xi) = \begin{pmatrix} x' \cos t + \xi' \sin t \\ x'' (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) \\ -x' \sin t + \xi' \cos t \\ x'' (\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos t + \xi' \sin t \\ x'' e^{-t} \\ -x' \sin t + \xi' \cos t \\ -x'' e^{-t} \end{pmatrix}$$

Si en plus, nous choisissons $x'' = 0$, la formule précédente montre l'existence de trajectoires d'énergie λ qui sont bornées. Réciproquement, s'il existe $j \in \{d+1, \dots, n\}$ tel que $x_j < 0$, alors la particule s'échappe pour des temps négatifs ($\lim_{t \rightarrow -\infty} |X(t)| =$

$+\infty$) et reste bornée pour des temps positifs (la composante sur \mathbb{R}^d oscille et la composante sur \mathbb{R}^{n-d} tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$). A présent, nous considérons le cas où $p(x, \xi) = \lambda$ avec $x'' < 0$ et $\xi'' = -ax''$ avec $a > 1$. Alors $X''(t) = x''(cht - a sh t)$ et

$$X''(t) = 0 \iff t = \frac{1}{2} \ln \frac{a+1}{a-1}.$$

La composante X'' de la particule s'annule donc pour $t = t_a = \frac{1}{2} \ln \frac{a+1}{a-1}$ et a cet instant, nous avons $\Xi''(t_a) = -2x''\sqrt{a^2-1}$. La particule n'est donc pas captée, mais le temps mis pour arriver au plan $x'' = 0$ peut être arbitrairement grand puisque $\lim_{a \rightarrow 1, a > 1} \ln \frac{a+1}{a-1} = +\infty$.

Trajectoires non-captées. Nous avons besoin de préciser un peu la forme de la fonction de troncature ρ . En plus des hypothèses précédentes, nous supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\rho(1+\delta) = 1-\delta$, $\rho(2-\delta) = \delta$ et $\forall t \in]1+\delta, 2-\delta[$, $\rho(t) = 2-t$. Ces hypothèses ne sont pas nécessaires mais elles facilitent grandement les calculs. Pour $2 < \lambda < 2 + \frac{1}{2} \sup V$, nous définissons les ensembles

$$\Sigma_\lambda = \{(x, \xi) \in p^{-1}(\{\lambda\}) : |x| \geq 2d \text{ et } \xi'' = 0\},$$

$$\mathcal{E}_\lambda^\pm = \{(x, \xi) \in p^{-1}([\lambda - \epsilon_0, \lambda + \epsilon_0]); \Phi_t(x, \xi) \text{ est borné sur } \mathbb{R}^\pm\}$$

et nous allons montrer que $\Sigma_\lambda \cap \mathcal{E}_\lambda = \emptyset$, où $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda^+ \cup \mathcal{E}_\lambda^-$. Pour cela, donnons nous $(x, \xi) = (x', x'', \xi', \xi'') \in \mathcal{E}_\lambda$.

Premier cas : $x'' \neq 0$. Nous traitons le cas où il existe $j \in \{d+1, \dots, n\}$ tel que $x_j > 0$. Nous avons $\ddot{\Xi}_j = -\partial_{x_j} V(X)$ avec

$$-\partial_{x_j} V(x) = x_j (\rho(|x|^2) - \rho'(|x|^2)(2 + |x'|^2 - |x''|^2)) > 0$$

pour $x_j > 0$. Il est facile d'en déduire que $X_j(t) > x_j$ et $\Xi_j(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\dot{\Xi}_j(0) > 0$, il existe $t_0 > 0$ tel que $\Xi_j(t_0) > 0$ et $\Xi_j(-t_0) < 0$. Il suit que

$$X_j(t) > x_j + \Xi_j(t_0)t, \quad \forall t > t_0 \text{ et } X_j(t) < x_j - \Xi_j(-t_0)t, \quad \forall t < -t_0$$

donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |X(t)| = +\infty$.

Second cas : $x'' = 0$. Alors $(X''(t), \Xi''(t)) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et il faut montrer que $X'(t)$ n'est pas borné sur \mathbb{R} . Comme $|x| \geq 2d$, alors $x'' \neq 0$ et quitte à changer le sens du temps, nous pouvons nous ramener au cas où il existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tel que $x_j < -2$ et $\xi_j > 0$. En utilisant le fait que $V(x) = 0$ pour $x_j < -2$, nous montrons que $\Xi_j(t) = \xi_j$, $\forall t \leq 0$ et $X_j(t) = x_j + \xi_j t$, $\forall t \leq 0$, donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} |X_j(t)| = +\infty$.

Il reste à prouver que la particule s'échappe aussi en $t = +\infty$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $X_j(t_0) < 0$ et $\Xi_j(t_0) < 0$. Nous prenons $2 < \lambda < \min(2+d, (1-\epsilon)(3+\delta))$ et nous supposons par l'absurde que $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $\forall t \geq 0$, $\Xi_j(t) \geq 0$. Alors $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Xi_j(t) = 0$. Comme $V(X(t)) \leq \lambda$, alors pour $t \geq T$ assez grand nous obtenons

$$\sqrt{1+\delta} < |X'(t)| < \sqrt{2-\delta}.$$

Nous pouvons donc, utiliser la forme explicite de ρ dans $[1 + \delta, 2 - \delta]$ pour écrire

$$\begin{aligned}\dot{\Xi}_j(t) &= -\partial_{x_j} V(X(t)) = 2X_j(t) (\rho'(|X'(t)|^2)(2 + |X'(t)|^2) + 2\rho(|X'(t)|^2)) \\ &= 2X_j(t) (-2 - |X'(t)|^2 + 2(2 - |X'(t)|^2)) = -2X_j(t) (3|X'(t)|^2 - 2x).\end{aligned}$$

Comme $X_j(t) < 0$ et $|X'(t)|^2 > 1 + \delta$, $\forall t \geq T$, alors $\dot{\Xi}_j(t) > -2X_j(t)(1 + 3\delta)$. De plus, $\sqrt{1 + \delta} < |X'(t)| < \sqrt{2 - \delta}$ donc il existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\frac{\sqrt{1 + \delta}}{d} < -X_j(t) < \frac{\sqrt{2 - \delta}}{d}$, $\forall t \geq T$. Nous en tirons $\dot{\Xi}_j(t) > 2\frac{\sqrt{1 + \delta}}{d}(3 + \delta)$ pour tout $t \geq T$, ce qui est absurde.

Finalement, nous avons démontré que le potentiel V que nous avons construit satisfait $(\mathbf{V})_\rho$, $(\mathbf{Hol})_\infty$ et que pour tout $\lambda > 2$ suffisamment petit, il existe des trajectoires d'énergie λ qui sont captées. Par ailleurs, pour $\lambda > 2$ proche de 2, les derniers calculs ont montré que V satisfaisait l'hypothèse $(H_{\omega, \lambda})$ pour tout $\omega \in S^{n-1} \cap \{\xi'' = 0\}$.

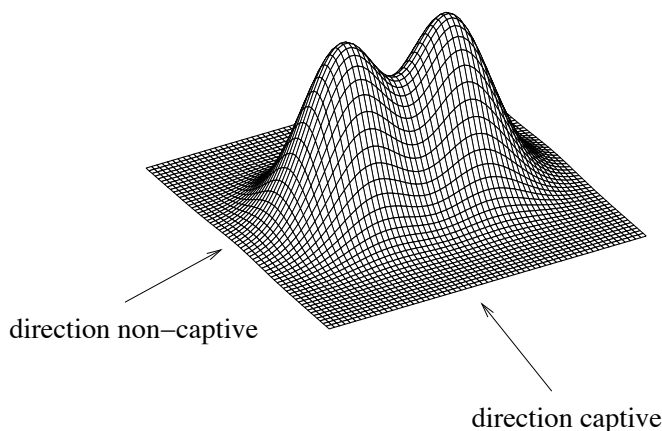


FIG. 3.2: Un potentiel captif vérifiant les hypothèses de Gérard et Sjöstrand.

3.3 Localisation spatiale

Les résultats de cette section, sont établis sans hypothèse sur la distribution des résonances de l'opérateur $P(h)$. Notre principal outil est le résultat suivant dû à Burq.

Théorème 3.5 (*Burq [7], Théorème 4*) *Supposons que les hypothèses $(\mathbf{V})_\rho$ et $(\mathbf{Hol})_\infty$ sont satisfaites et fixons un compact $K \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors, il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout $R_2 > R_1$, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que*

$$\forall \lambda \in K, \forall 0 < h \leq h_0, \|\mathbf{1}_{R_1 \leq |x| \leq R_2} R(\lambda \pm i0) \mathbf{1}_{R_1 \leq |x| \leq R_2}\| \leq Ch^{-1}. \quad (3.10)$$

Remarque 3.2 *Ce résultat a été généralisé récemment par Vodev [65] et Cardoso-Vodev [9] au cas d'un opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne. En particulier, l'estimation (3.10) est valable sans l'hypothèse d'analyticité $(\mathbf{Hol})_\infty$. Dans [9], les auteurs montrent aussi que (3.10) reste vraie si l'on remplace les fonctions de troncature $\mathbf{1}_{R_1 \leq |x| \leq R_2}$ par $\langle x \rangle^{-\alpha} \mathbf{1}_{|x| > R_1}$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$.*

Donnons nous maintenant une fonction de troncature $\chi(\cdot, R, R') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ pour $|x| \leq R$ et $\chi = 0$ pour $|x| \geq R'$. Notons $\chi(x, R) = \chi(x, R, R+1)$, alors Bruneau et Petkov [6] ont démontré le lemme suivant.

Lemme 3.1 *Sous l'hypothèse $(V)_\rho$, $\rho > 1$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $R \geq \rho_0$, le niveau d'énergie λ est non-captif pour l'opérateur modifié*

$$\hat{P}(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + (1 - \chi(x, R))V(x).$$

Posons $\chi_a(x) = \chi(x, 20R_0)$ et $\chi_b(x) = \chi(x, 10R_0)$. En utilisant le Lemme 3.1 et le Théorème 3.5, nous sommes en mesure de démontrer la proposition suivante, qui est une version captive du Lemme 1.5.

Proposition 3.1 *Supposons que V est un potentiel vérifiant $(\mathbf{V})_\rho$, $\rho > 1$ et $(\mathbf{Hol})_\infty$. Alors pour $\alpha > \frac{n}{2}$ nous avons les estimations suivantes :*

- i) $\|K_{\pm a}^*(h)R(\lambda + i0)K_{+b}(h)\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}})$,
- ii) $\|K_{-a}^*(h)R(\lambda + i0)K_{-b}(h)\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}})$,
- iii) $\|K_{+a}^*(h)R(\lambda + i0)(1 - \chi_b)K_{-b}(h)\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}})$,
- iv) $\|((1 - \chi_a)K_{+a})^*(h)R(\lambda + i0)\chi_b K_{-b}(h)\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}})$.

Comme précédemment, N est donné par la construction des symboles a_\pm, b_\pm et peut être choisi arbitrairement grand.

Démonstration. Commençons par remarquer que si l'énergie λ était non-captive, cette proposition serait exactement le Lemme 1.5. Nous allons d'ailleurs utiliser abondamment ce Lemme dans la démonstration.

Prenons $R_0 \gg \rho_0$, où ρ_0 est donné par le Lemme 3.1. Soient $\chi_1(x) = \chi(x, R_0, 2R_0)$, $\chi_2(x) = \chi(x, 2R_0, \frac{5}{2}R_0)$ et $\chi_3(x) = \chi(x, \frac{5}{2}R_0, \frac{11}{4}R_0)$. En utilisant le fait que $\hat{P}(h)(1 - \chi_1) = P(h)(1 - \chi_1)$, nous obtenons facilement l'identité suivante.

$$R(z)(1 - \chi_2) = (1 - \chi_1)\hat{R}(z)(1 - \chi_2) + R(z)[P_0(h), \chi_1]\hat{R}(z)(1 - \chi_2),$$

où $\hat{R}(z) = (\hat{P}(h) - z)^{-1}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Par suite, en invoquant le principe d'absorption limite, nous obtenons

$$\begin{aligned} R(\lambda + i0)(1 - \chi_2) &= (1 - \chi_1)\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2) \\ &\quad + R(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_1]\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

De manière identique, nous avons

$$R(\lambda - i0)(1 - \chi_3) = (1 - \chi_2)\hat{R}(\lambda - i0)(1 - \chi_3) + R(\lambda - i0)[P_0(h), \chi_2]\hat{R}(\lambda - i0)(1 - \chi_3)$$

et par adjonction, nous obtenons

$$\begin{aligned} (1 - \chi_3)R(\lambda + i0) &= (1 - \chi_3)\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2) \\ &\quad + (1 - \chi_3)\hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^* R(\lambda + i0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

En multipliant (3.11) par $(1 - \chi_3)$ et en utilisant (3.12) dans le membre de droite de l'équation obtenue, nous trouvons

$$\begin{aligned} (1 - \chi_3)R(\lambda + i0)(1 - \chi_2) &= (1 - \chi_3)\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2)[P_0(h), \chi_1]\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2) \\ &\quad + (1 - \chi_3)\hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^* R(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_1]\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2) \\ &\quad + (1 - \chi_3)(1 - \chi_1)\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2). \end{aligned}$$

Rappelons que $\chi_2 = 1$ sur $\text{supp}(\chi_1)$ et $\chi_3 = 1$ sur $\text{supp}(\chi_1)$, de sorte que l'équation ci-dessus se simplifie pour donner

$$\begin{aligned} (1 - \chi_3)R(\lambda + i0)(1 - \chi_2) &= (1 - \chi_3)\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2) \\ &\quad + (1 - \chi_3)\hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^* R(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_1]\hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

que nous utiliserons fréquemment par la suite .

Démonstration de i). Rappelons d'abord, que $\text{supp}(k_{+a}) \subset \Gamma_+(3R_0, d_1, \tau_1^\pm)$ et $\text{supp}(\chi_3) \subset \{|x| \geq \frac{11}{4}R_0\}$, de sorte que $(1 - \chi_3)K_{\pm a} = K_{\pm a}$. De même, $(1 - \chi_2)K_{\pm b} = K_{\pm b}$ et nous pouvons multiplier (3.13) par $K_{\pm a}^*$ et K_{+b} pour obtenir

$$\begin{aligned} K_{\pm a}^* R(\lambda + i0)K_{+b} &= K_{\pm a}^* \hat{R}(\lambda + i0)K_{+b} \\ &\quad + K_{\pm a}^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^* R(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_1]\hat{R}(\lambda + i0)K_{+b}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.1, λ est non-captif pour le potentiel \hat{V} et nous pouvons appliquer le i) du Lemme 1.5 pour obtenir

$$\|K_{\pm a}^* \hat{R}(\lambda + i0)K_{+b}\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}}).$$

Par suite, il suffit d'estimer le second terme du membre de droite de l'équation précédente. Prenons ψ_1 et ψ_2 dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que $\psi_1 = 1$ sur $\{x : R_0 < |x| < 2R_0\}$,

$\psi_1 = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{x : \frac{R_0}{2} < |x| < 3R_0\}$, $\psi_2 = 1$ sur $\{x : 2R_0 < |x| < \frac{5}{2}R_0\}$ et $\psi_2 = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{x : R_0 < |x| < 3R_0\}$. Il est clair que

$$[P_0(h), \chi_j] = \psi_j [P_0(h), \chi_j], \quad \forall j = 1, 2,$$

de sorte que nous devons estimer

$$K_{\pm a}^* \hat{R}(\lambda + i0) [P_0(h), \chi_2]^* \psi_2 R(\lambda + i0) \psi_1 [P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0) K_{+b}.$$

D'après le Théorème 3.5, nous savons que $\|\psi_2 R(\lambda + i0) \psi_1\| = O(h^{-1})$ et par construction de χ_1 et χ_2 , nous pouvons appliquer les résultats du Lemme 1.5 pour obtenir

$$\begin{aligned} \|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0) K_{+b}\|_{-\alpha, \alpha} &= O(h^\infty) \\ \|[P_0(h), \chi_2] \hat{R}(\lambda - i0) K_{\pm a}\|_{\alpha, \alpha} &= O(h^{-1}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

En utilisant ces estimations, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|K_{\pm a}^* R(\lambda + i0) K_{+b}\|_{-\alpha, \alpha} &\leq \|K_{\pm a}^* \hat{R}(\lambda + i0) [P_0(h), \chi_2]^*\|_{\alpha, \alpha} \|\psi_2 R(\lambda + i0) \psi_1\|_{\alpha, \alpha} \\ &\quad \times \|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0) K_{+b}\|_{-\alpha, \alpha} + O(h^{\frac{N}{2}}) \\ &\leq C \|[P_0(h), \chi_2] \hat{R}(\lambda - i0) K_{\pm a}\|_{\alpha, \alpha} \|\psi_2 R(\lambda + i0) \psi_1\|_{\alpha, \alpha} \\ &\quad \times \|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0) K_{+b}\|_{-\alpha, \alpha} + O(h^{\frac{N}{2}}) \\ &\leq Ch^{-1} \times Ch^{-1} \times Ch^\infty + Ch^{\frac{N}{2}} \leq Ch^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Démonstration de ii). Par passage à l'adjoint, il s'agit de montrer que

$$\|K_{-b}^*(h) R(\lambda - i0) K_{-a}(h)\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}}).$$

La démonstration est identique à la preuve de i) et nous la laissons au lecteur.

Démonstration de iii). Notre but est d'estimer l'opérateur

$$K_{+a}^*(h) R(\lambda + i0) (1 - \chi_b) K_{-b}(h)$$

et comme dans le cas précédent, nous utilisons l'identité (3.13) ainsi que le fait que $(1 - \chi_3) K_{+a} = K_{+a}$ et $(1 - \chi_2) K_{-b} = K_{-b}$ pour écrire

$$\begin{aligned} K_{+a}^* R(\lambda + i0) (1 - \chi_b) K_{-b} &= K_{+a}^* \hat{R}(\lambda + i0) (1 - \chi_b) K_{-b} \\ &\quad + K_{+a}^* \hat{R}(\lambda + i0) [P_0(h), \chi_2]^* R(\lambda + i0) [P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0) (1 - \chi_b) K_{-b}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, λ étant non-captif pour \hat{V} , nous déduisons du ii) du Lemme 1.5 que

$$\|K_{+a}^* \hat{R}(\lambda + i0) (1 - \chi_b) K_{-b}\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}})$$

et il nous reste à estimer

$$K_{+a}^* \hat{R}(\lambda + i0) [P_0(h), \chi_2]^* R(\lambda + i0) [P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0) (1 - \chi_b) K_{-b}.$$

Nous utilisons, à présent, les fonctions ψ_1 et ψ_2 définies précédemment, de sorte que la démonstration se réduit à l'analyse de

$$\begin{aligned} I(h) &= \|K_{+a}^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^* \psi_2 R(\lambda + i0) \psi_1 \times \\ &\quad \times [P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_b) K_{-b}\|_{-\alpha, \alpha} \\ &\leq \|K_{+a}^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^*\|_{\alpha, \alpha} \|\psi_2 R(\lambda + i0) \psi_1\|_{\alpha, \alpha} \times \\ &\quad \times \|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_b) K_{-b}\|_{-\alpha, \alpha}. \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que

$$\|\psi_2 R(\lambda + i0) \psi_1\| = O(h^{-1}) \text{ et } \|K_{+a}^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^*\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{-1}).$$

Par conséquent

$$I(h) \leq Ch^{-2} \|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_b) K_{-b}\|_{-\alpha, \alpha}$$

et il suffit de contrôler $\|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_b) K_{-b}\|_{-\alpha, \alpha}$. Donnons nous $\sigma_3^- \in]0, \sigma_2^-[$ et introduisons une fonction $\omega \in A_0^{0, +\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ telle que $w(x, \xi) = 1$ pour $(x, \xi) \in \Gamma_-(10R_0, d_3, \sigma_3^-)$ et $\text{supp}(\omega) \subset \Gamma_-(10R_0, d_3, \sigma_2^-)$. A l'aide de cette fonction, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} [P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_b) K_{-b} &= [P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0) \omega(x, hD_x) \tilde{K}_{-b} \\ &\quad + [P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)(1 - \omega(x, hD_x)) \tilde{K}_{-b}, \end{aligned}$$

où $\tilde{K}_{-b} = (1 - \chi_b) K_{-b}$ est l'opérateur Intégral de Fourier ayant Φ_{-b} pour phase et $\tilde{k}_{-b}(x, \xi) = (1 - \chi_b(x)) k_{-b}(x, \xi)$ pour symbole. D'après la définition de k_{-b} , il est évident que $\text{supp}(\tilde{k}_{-b}) \subset \Gamma_-(10R_0, d_3, \sigma_1^-)$ et

$$h^{-(N+2)} \tilde{k}_{-b} \in A_\infty^{-(N+2)}(\Gamma_-(10R_0, d_3, \sigma_2^-)). \quad (3.15)$$

En s'appuyant sur le fait que l'opérateur $\omega(x, hD_x)$ localise exactement dans la région $\Gamma_-(10R_0, d_3, \sigma_2^-)$ et en utilisant le Lemme 1.2, nous obtenons

$$\|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0) \omega(x, hD_x) \tilde{K}_{-b}\|_{\alpha, -\alpha} = O(h^N).$$

D'autre part, $\text{supp}(1 - \omega) \cap \text{supp}(k_{-b}) \subset \Gamma_+(10R_0, d_3, \sigma_3^-)$, de sorte que le Lemme 1.4 donne

$$\|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)(1 - \omega(x, hD_x)) \tilde{K}_{-b}\|_{\alpha, -\alpha} = O(h^\infty)$$

ce qui achève la démonstration de iii).

Démonstration de iv). Elle est similaire à la démonstration de iii) et nous ne faisons que l'esquisser. Rappelons que nous voulons estimer

$$((1 - \chi_a) K_{+a}(h))^* R(\lambda + i0) \chi_b K_{-b}(h).$$

En prenant à nouveau en compte l'identité (3.13), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} ((1-\chi_a)K_{+a})^* R(\lambda + i0)\chi_b K_{-b} &= ((1-\chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)\chi_b K_{-b} \\ &+ ((1-\chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^* R(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)\chi_b K_{-b}. \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois le Lemme 1.5, nous obtenons

$$\|((1-\chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)\chi_b K_{-b}\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}})$$

et il reste à majorer

$$I(h) = \|((1-\chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^* R(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)\chi_b K_{-b}\|_{-\alpha, \alpha}.$$

Une nouvelle fois, nous avons recours aux fonctions ψ_1 et ψ_2 , pour écrire

$$\begin{aligned} I(h) \leq \|((1-\chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^*\|_{-\alpha, \alpha} \|\psi_1 \hat{R}(\lambda + i0)\psi_2\|_{-\alpha, -\alpha} \times \\ \times \|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)\chi_b K_{-b}\|_{-\alpha, -\alpha}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nous savons que $\|\psi_1 \hat{R}(\lambda + i0)\psi_2\|_{-\alpha, -\alpha} = O(h^{-1})$ et d'après Lemme 1.4, nous obtenons (comme dans la démonstration de iii)) que

$$\|[P_0(h), \chi_1] \hat{R}(\lambda + i0)\chi_b K_{-b}\|_{-\alpha, -\alpha} = O(h^{-1}).$$

Par suite, nous avons l'estimation

$$I(h) \leq Ch^{-2} \|((1-\chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^*\|_{-\alpha, \alpha}. \quad (3.17)$$

D'autre part,

$$\|((1-\chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^*\|_{-\alpha, \alpha} = \|[P_0(h), \chi_2] \hat{R}(\lambda - i0)(1-\chi_a)K_{+a}\|_{-\alpha, \alpha}.$$

Donnons nous maintenant $\tau_3^+ \in]\tau_2^+, 0[$ et un symbole $\omega(x, \xi) \in A_0^{0, -\infty}$ tel que $\omega = 1$ sur $\Gamma_+(4R_0, d_1, \tau_3^+)$ et $\text{supp}(\omega) \subset \Gamma_+(4R_0, d_1, \tau_2^+)$, alors

$$\begin{aligned} \|((1-\chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^*\|_{-\alpha, \alpha} \leq \\ \|[P_0(h), \chi_2] \hat{R}(\lambda - i0)(1-\chi_a)\omega(x, hD_x)K_{+a}\|_{-\alpha, \alpha} \\ + \|[P_0(h), \chi_2] \hat{R}(\lambda - i0)(1-\chi_a)(1-\omega(x, hD_x))K_{+a}\|_{-\alpha, \alpha} \end{aligned}$$

Comme $\text{supp}((1-\chi_a)(1-\omega)) \cap \text{supp}(k_{+a}) \subset \Gamma_-(10R_0, d_1, \tau_3^+)$, le Lemme 1.4 donne

$$\|[P_0(h), \chi_2] \hat{R}(\lambda - i0)(1-\chi_a)(1-\omega(x, hD_x))K_{+a}\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^\infty).$$

De plus, par construction, $k_{+a} \in A_{N+2}^{-N-2, +\infty}$ sur $\text{supp}(1-\chi_a)\omega$, donc

$$\|[P_0(h), \chi_2] \hat{R}(\lambda - i0)(1-\chi_a)\omega(x, hD_x)K_{+a}\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^N)$$

et nous avons démontré que

$$\|((1 - \chi_a)K_{+a})^* \hat{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_2]^*\|_{-\alpha, \alpha} = O(h^{\frac{N}{2}}).$$

Cette estimation combinée avec (3.17) montre que $I(h) = O(h^\infty)$, ce qui achève la démonstration. ■

Comme au Chapitre 2 et jusqu'à la fin du Chapitre 3, nous noterons $\Phi_{+a}(x) = \Phi_{+a}(x, \sqrt{2\lambda}\theta)$ et $\Phi_{-b}(x) = \Phi_{-b}(x, \sqrt{2\lambda}\omega)$. Comme cela a été annoncé à la suite de la Proposition 1.6, pour $\theta \neq \omega$, une série d'intégrations par parties montre que $T_{\pm 1}(\theta, \omega, \lambda, h) = \mathcal{O}(h^\infty)$. Comme au Chapitre 2, en utilisant le Lemme précédent et en effectuant un calcul assez simple, nous obtenons donc

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) = c_1(\lambda, h)G_0(\theta, \omega, \lambda, h) + O(h^{\frac{N}{3}}), \quad (3.18)$$

avec

$$G_0(\theta, \omega, \lambda, h) = \langle R(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle, \quad (3.19)$$

$$c_1(\lambda, h) = 2\pi(2\lambda)^{(n-3)/4}(2\pi h)^{-(n+1)/2}e^{-i\frac{(n-3)\pi}{4}} \quad (3.20)$$

et

$$g_{-b} = e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}[\chi_b, P_0(h)] \left(b_-(\cdot, \sqrt{2\lambda}\omega)e^{ih^{-1}\Phi_{-b}} \right), \quad (3.21)$$

$$g_{+a} = e^{ih^{-1}\Phi_{+a}}[\chi_a, P_0(h)] \left(a_+(\cdot, \sqrt{2\lambda}\theta)e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \right). \quad (3.22)$$

Remarquons que g_{-b} et g_{+a} ont un support compact inclus dans des couronnes. Par suite, modulo des termes d'erreurs d'ordre $O(h^\infty)$, nous avons établi une formule de représentation de l'amplitude de diffusion, ne faisant appel à la résolvante tronquée que pour des troncatures supportées dans des couronnes. De plus, en prenant R_0 suffisamment grand, nous pouvons supposer que ces couronnes sont aussi lointaine de l'origine que nous le désirons. Dés lors, il est relativement facile de démontrer le Théorème 3.1.

Démonstration du Théorème 3.1 En vertu des équations (3.18) et (3.20), la démonstration consiste à établir que $|G_0(\theta, \omega, \lambda, h)| = \mathcal{O}(h)$. Choisissons $R_1 \gg 1$ suffisamment grand pour que (3.10) soit satisfaite pour tout $R_2 > R_1$ et supposons que $R_0 > R_1$. Alors $g_{-b} = 1_{\{R_0 < |x| < 30R_0\}}g_{-b}$, $g_{+a} = 1_{\{R_0 < |x| < 30R_0\}}g_{+a}$ et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |G_0(\theta, \omega, \lambda, h)| &\leq \|g_{+a}\|_{L^2} \|g_{-b} 1_{\{R_0 < |x| < 30R_0\}} R(\lambda + i0) 1_{\{R_0 < |x| < 30R_0\}} g_{-b}\| \|g_{-b}\|_{L^2} \\ &\leq Ch^{-1} \|g_{-b}\|_{L^2} \|g_{+a}\|_{L^2}, \end{aligned}$$

où la dernière estimation provient évidemment du Théorème 3.5. Nous utilisons alors, les formules (3.21) et (3.22) pour calculer $\|g_{-b}\|_{L^2}$ et $\|g_{+a}\|_{L^2}$. En utilisant le fait que $\Delta\chi_b$ et $\nabla\chi_b$ ont des supports compacts, il est clair que $\|g_{-b}\|_{L^2} = \mathcal{O}(h)$ et $\|g_{+a}\|_{L^2} = \mathcal{O}(h)$. Par suite, nous obtenons $|G_0(\theta, \omega, \lambda, h)| = \mathcal{O}(h)$, ce qui achève la démonstration. ■

3.4 Modification du potentiel

Pour la démonstration du Théorème 3.2 (ainsi que pour celle du Théorème 3.3), comme dans [53], nous avons besoin d'une estimation de la résolvante sur l'axe réel. Nous commençons donc par démontrer une estimation polynômiale de la résolvante sous certaines hypothèses.

3.4.1 Estimation de la résolvante dans le cas captif

Comme dans le Chapitre 2, nous avons besoin d'une estimation de la résolvante en $\mathcal{O}(h^{-M})$. La proposition suivante donne un cadre dans lequel une telle estimation est vérifiée.

Proposition 3.2 *Supposons que le potentiel V satisfait (\mathbf{Hol}_∞) ainsi que l'hypothèse 5) du Théorème 3.3. Dans ces conditions, il existe $\tilde{n} \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\|R(\lambda \pm i0)\|_{\alpha, -\alpha} = \mathcal{O}(h^{-\tilde{n}}), \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Comme dans le Chapitre 2, nous déduisons de la Proposition 2.1, qu'il suffit de montrer une telle estimation pour la résolvante tronquée. Plus précisément, nous allons démontrer que

$$\forall \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|R_\chi(\lambda \pm i0)\| = \mathcal{O}(h^{-\tilde{n}}).$$

Sans surprise, nous allons utiliser le principe du maximum semiclassical à la fonction $F(z, h) = R_\chi(z, h)$. Plus précisément, le Lemme suivant est une version allégée du Lemme 2.1, qui est suffisant pour notre démonstration.

Lemme 3.2 (Tang-Zworski [59]) *Soit $F(\cdot, h)$ une famille de fonctions telles que $F(\cdot, h)$ est holomorphe dans $\Omega(h) = [\lambda - 5h^{q+\delta}, \lambda + 5h^{q+\delta}] + i[-h^{q+\frac{n}{2}+2\delta}, h^{q+\frac{3n}{2}+3\delta}]$ pour certains $q, \delta > 0$ et supposons que F satisfait les estimations suivantes*

$$|F(z, h)| \leq A \exp(Ah^{-\frac{n}{2}} \log \frac{1}{h}) \quad \text{dans } \Omega(h), \quad (3.23)$$

$$|F(z, h)| \leq \frac{C}{|\operatorname{Im}(z)|} \quad \text{dans } \Omega(h) \cap \{\operatorname{Im}(z) > 0\}. \quad (3.24)$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall h \ll 1, \quad \forall z \in \tilde{\Omega}(h), \quad |F(z, h)| \leq Ch^{-q-\frac{3n}{2}-3\delta}, \quad (3.25)$$

où $\tilde{\Omega}(h) = [\lambda - h^{q+\delta}, \lambda + h^{q+\delta}] + i[-h^{q+\frac{3n}{2}+3\delta}, h^{q+\frac{3n}{2}+3\delta}]$.

Prenons $\delta > 0$ et considérons $q = M > 0$, où M est donné par l'hypothèse 5) du Théorème 3.3. L'estimation (3.24) est trivialement satisfaite. Pour établir (3.23),

nous appliquons le Lemme 2.2 avec $g(h) = \frac{1}{2}h^q$ de sorte qu'il nous suffit de démontrer que

$$\Omega(h) \cap \left(\bigcup_{\lambda_j \in \text{Res}(P(h))} B(\lambda_j, g(h)) \right) = \emptyset.$$

Pour $\xi \in \Omega(h)$ et $\lambda_j \in \text{Res}(P(h))$, d'après l'hypothèse 5) du Théorème 3.3 nous avons

$$|\xi - \lambda_j| \geq |\lambda - \lambda_j| - |\xi - \lambda| \geq h^q - h^{q+\delta} > \frac{1}{2}h^q = g(h)$$

ce qui achève la démonstration. \blacksquare

Nous allons maintenant donner des estimations microlocales de la résolvante. Le lemme suivant est le pendant du Lemme 1.4 dans le cas captif. Remarquons que ce Lemme ne nécessite pas de faire des hypothèses sur les résonances.

Lemme 3.3 *Supposons que les hypothèses $(\mathbf{V})_\rho$, $\rho > 1$ et $(\mathbf{Hol})_\infty$ sont vérifiées. Alors, il existe $R'_1 > 0$ tel que pour tout $R_\pm > R'_1$ et pour tout $\omega_\pm \in A_0^{0,-\infty}$ vérifiant $\text{supp}(\omega_\pm) \subset \Gamma_\pm(R_\pm, d, \sigma_\pm)$ nous avons les estimations suivantes pour $\alpha > 1$:*

i) *Si $\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\text{supp}(\rho) \subset \{|x| \geq R'_1\}$ alors*

$$\| \rho(x)R(\lambda \pm i0)\omega_\pm(x, hD_x) \|_{-\alpha+\delta, -\alpha} = O(h^{-1}), \quad \forall \delta > 1.$$

ii) *Si $\sigma_+ > \sigma_-$, alors*

$$\| \omega_-(x, hD_x)^* R(\lambda + i0)\omega_+(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} = O(h^\infty).$$

iii) *Si $\omega \in A_m^0$, $m \in \mathbb{R}$ et $\text{supp}(\omega) \subset \{\tilde{R}_1 < |x| < \tilde{R}_2\}$ avec $R'_1 < \tilde{R}_1$ et $\tilde{R}_2 < R_\pm$, alors*

$$\| \omega(x, hD_x)^* R(\lambda \pm i0)\omega_\pm(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} = O(h^\infty).$$

Remarque 3.3 *Par passage à l'adjoint, nous déduisons immédiatement du ii) que sous les mêmes hypothèses, nous avons*

$$\| \omega_+(x, hD_x)^* R(\lambda - i0)\omega_-(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} = O(h^\infty).$$

La démonstration du Lemme 3.3, basée sur l'estimation de la résolvante dans des couronnes, est très proche de la preuve de la Proposition 3.1 et nous la laissons au lecteur.

3.4.2 Démonstration du Théorème 3.2

Nous commençons par donner une formule de représentation pour $\tilde{T}(\lambda, h)$, où de manière évidente \tilde{T} est défini par $\tilde{S}(\lambda, h) = Id - 2i\pi\tilde{T}(\lambda, h)$. D'après la Proposition

1.6, nous savons qu'il existe des phases $\tilde{\Phi}_{\pm a}(x, \xi)$, $\tilde{\Phi}_{\pm b}(x, \xi)$ et des symboles \tilde{a}_{\pm} , \tilde{b}_{\pm} tels que

$$\tilde{T}(\lambda, h) = \tilde{T}_1(\lambda, h) - \tilde{T}_2(\lambda, h)$$

avec

$$\tilde{T}_1(\lambda, h) = F_0(\lambda, h)(J_{+\tilde{a}}^*(h) + J_{-\tilde{a}}^*(h))(K_{+\tilde{b}}(h) + K_{-\tilde{b}}(h))F_0^*(\lambda, h)$$

et

$$\tilde{T}_2(\lambda, h) = F_0(\lambda, h)(K_{+\tilde{a}}^*(h) + K_{-\tilde{a}}^*(h))\tilde{R}(\lambda + i0, h)(K_{+\tilde{b}}(h) + K_{-\tilde{b}}(h))F_0^*(\lambda, h).$$

Par ailleurs, en prenant R_0 assez grand, la démonstration de Isozaki et Kitada [28], montre clairement que les phases $\tilde{\Phi}_{\pm a}$, $\tilde{\Phi}_{\pm b}$ et les symboles \tilde{a}_{\pm} , \tilde{b}_{\pm} dépendent seulement des valeurs du potentiel \tilde{V} en dehors d'un compact choisi aussi grand que nous le désirons. Comme $V = \tilde{V}$ dans $\mathbb{R}^n \setminus F$, nous pouvons prendre $\tilde{\Phi}_{\pm a} = \Phi_{\pm a}$, $\tilde{\Phi}_{\pm b} = \Phi_{\pm b}$, $\tilde{a}_{\pm} = a_{\pm}$ et $\tilde{b}_{\pm} = b_{\pm}$. D'autre part, un argument identique à celui employé pour négliger la contribution de T_1 , montre que le noyau de $\tilde{T}_1(\lambda, h)$ satisfait $\tilde{T}_1(\theta, \omega, \lambda, h) = O(h^\infty)$ pour tous $\theta \neq \omega$. Enfin, nous pouvons réaliser exactement la même localisation pour \tilde{T}_2 que celle que nous avons effectuée pour T_2 dans la Proposition 3.1. De cette manière, nous obtenons

$$\tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h) = c_1(\lambda, h)\tilde{G}_0(\theta, \omega, \lambda, h) + O(h^{\frac{N}{3}}) \quad (3.26)$$

avec

$$\tilde{G}_0(\theta, \omega, \lambda, h) = \langle \tilde{R}(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle, \quad (3.27)$$

où g_{-b} et g_{+a} sont données par les formules (3.21) et (3.22).

Donnons nous, à présent $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que $1_F \prec \chi_1 \prec \chi_2 \prec 1_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{W_{ext}}}$, c'est à dire $\chi_1(x) = 1$ pour $x \in F$, $\chi_2(x) = 1$ pour $x \in \text{supp}(\chi_1)$ et $\chi_2(x) = 0$ pour $x \in \overline{W_{ext}}$. Avec cette construction, nous avons

$$\tilde{P}(h)(1 - \chi_1) = (-h^2\Delta + \tilde{V})(1 - \chi_1) = (-h^2\Delta + V)(1 - \chi_1) = P(h)(1 - \chi_1)$$

et en travaillant comme dans la section précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\lambda + i0)(1 - \chi_2) &= (1 - \chi_1)R(\lambda + i0)(1 - \chi_2) \\ &\quad + \tilde{R}(\lambda + i0)[P_0(h), \chi_1]R(\lambda + i0)(1 - \chi_2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Cette identité combinée avec (3.18) et (3.26) donne

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h) - f(\theta, \omega, \lambda, h) &= \\ c_1(\lambda, h)\langle R(\lambda + i0)[\tilde{P}(h), \chi_1]\tilde{R}(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Rappelons que $\text{supp}(g_{-b}) \subset \{10R_0 < |x| < 10R_0 + 1\}$ où R_0 peut être choisi aussi grand qu'il le faut. En particulier, nous pouvons supposer que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{W_{ext}} \subset \{|x| < R_0\}$

et prendre $\psi_1 \in C_0^\infty(\{|x| < 5R_0\})$ telle que $\psi_1 = 1$ sur $\{|x| < 4R_0\}$. De la sorte, nous obtenons facilement

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h) - f(\theta, \omega, \lambda, h) = \\ c_1(\lambda, h) \langle R(\lambda + i0)\psi_1[P_0(h), \chi_1] \tilde{R}(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a}e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle. \end{aligned}$$

Dans l'égalité ci-dessus, nous avons utilisé le fait que V et χ_1 commutent, de sorte que $[\tilde{P}(h), \chi_1] = [P(h), \chi_1] = [P_0(h), \chi_1]$. Notons $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \tilde{R}(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}$ et remarquons, que du fait de l'hypothèse iii), $\tilde{\mathcal{V}}_0$ appartient à l'ensemble des distributions $D'_{sc}(\mathbb{R}^n)$ tempérées pour le paramètre h , qui a été défini au Chapitre 1. En effet, nous pouvons appliquer les résultats de la section précédente à $\tilde{V}(x)$ et nous obtenons $\|\tilde{R}(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} = \mathcal{O}(h^{-M})$. La notion de front d'onde semiclassique WF^{sc} introduite au Chapitre 1, va nous permettre de contrôler $\tilde{\mathcal{V}}_0$. Insistons sur le fait que si nous n'avions pas fait d'hypothèse sur les résonances de $\tilde{P}(h)$, alors $\tilde{\mathcal{V}}_0$ ne serait pas nécessairement dans $D'_{sc}(\mathbb{R}^n)$ et nous ne pourrions pas utiliser la notion de front d'onde semiclassique. Ceci étant dit, nous pouvons reprendre la démonstration. Par définition, nous avons

$$(\tilde{P}(h) - \lambda)\tilde{\mathcal{V}}_0 = g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}.$$

En appliquant la Proposition 1.5, nous en déduisons que

$$WF^{sc}(\tilde{\mathcal{V}}_0) \subset WF^{sc}(g_{-b}) \cup Char^{sc}(\tilde{P}(h) - \lambda)$$

et à nouveau, en vertu de la Proposition 1.5, nous obtenons

$$WF^{sc}(\tilde{\mathcal{V}}_0) \subset T^*(\text{supp}(g_{-b})) \cup Char^{sc}(\tilde{P}(h) - \lambda).$$

Par construction, nous savons que $\text{supp}(g_{-b}) \subset \{4R_0 < |x| < 5R_0\}$ et $Char^{sc}(\tilde{P}(h)) \subset T^*(\overline{W_{ext}} \cup F)$. Par suite,

$$WF^{sc}(\tilde{\mathcal{V}}_0) \subset T^*(\overline{W_{ext}} \cup F).$$

De plus, par construction, $[P_0(h), \chi_1]$ est un opérateur différentiel dont les coefficients sont supportés dans $\mathbb{R}^n \setminus (\overline{W_{ext}} \cup F)$. Or, par hypothèse $\mathbb{R}^n \setminus (\overline{W_{ext}} \cup F) \neq \emptyset$, de sorte qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $[P_0(h), \chi_1] = \psi[P_0(h), \chi_1]$ et $\text{supp}(\psi) \cap (\overline{W_{ext}} \cup F) = \emptyset$. Nous déduisons maintenant du ii) de la Proposition 1.4 que

$$WF^{sc}([P_0(h), \chi_1]\tilde{\mathcal{V}}_0) = \emptyset$$

et avec le i) de la Proposition 1.4 nous obtenons

$$\|[P_0(h), \chi_1]\tilde{R}(\lambda + i0)g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}\| = \mathcal{O}(h^\infty). \quad (3.30)$$

D'autre part, en combinant l'hypothèse iii) et la Proposition 3.2 nous obtenons

$$\|g_{+a}R(\lambda + i0)\psi_1\| = \mathcal{O}(h^{-M}). \quad (3.31)$$

En réunissant les équations (3.29), (3.30) et (3.31) nous parvenons enfin à

$$f(\theta, \omega, \lambda, h) - \tilde{f}(\theta, \omega, \lambda, h) = \mathcal{O}(h^\infty),$$

ce qui achève la démonstration. ■

3.5 Asymptotique à énergie fixée

3.5.1 Localisation en temps courts

Partons de la formule (3.18) ; nous voudrions remplacer $R(\lambda + i0)$ par l'expression suivante.

$$R(\lambda + i0) = ih^{-1} \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} e^{-ih^{-1}tP(h)} dt + e^{ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) e^{-ih^{-1}TP(h)}. \quad (3.32)$$

Comme précédemment, notre but est de montrer que pour $T > 0$ assez grand, nous avons

$$\langle R(\lambda + i0) e^{-ih^{-1}TP(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle = O(h^N). \quad (3.33)$$

Comme dans le Chapitre 2 et dans [53], la démonstration repose sur le Lemme d'Egorov et nous avons besoin d'étudier le flot Hamiltonien $\Phi_t(x, \xi) = (q(t, x, \xi), p(t, x, \xi))$ associé à $\sigma_P(x, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$. Cette analyse est essentiellement la même que celle du Chapitre 2 et nous ne faisons qu'en rappeler les étapes principales. Rappelons que nous avons défini au Chapitre 1

$$\Sigma_{\lambda,0} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x) = \lambda\}$$

et pour toute partie W de S^{n-1} ,

$$\Sigma_{\lambda,0}(W) = \{(x, \xi) \in \Sigma_{\lambda,0}; \frac{\xi}{|\xi|} \in \overline{W}\}.$$

Lemme 3.4 *Soient $d > 1$, $\sigma \geq 0$ et $\lambda \in]\frac{d-2}{2}, \frac{d^2}{2}[$. Alors, il existe $R_0 > 0$ tel que*

$$\forall R > R_0, \forall (x, \eta) \in \Gamma_+(R, d, \sigma) \cap \Sigma_{\lambda,0}, \forall t > 0, \Phi_t(x, \eta) \in \Gamma_+(R, d, 0).$$

Lemme 3.5 *Soit $\lambda \in]\frac{d-2}{2}, \frac{d^2}{2}[$ et supposons que $(\mathbf{H}_{\omega,\lambda})$ est vérifiée. Alors, il existe $R_0 > 0$ assez grand, ainsi qu'un voisinage W de ω , tels que pour tout $R > 0$ il existe $T_0(R) > 0$ satisfaisant*

$$\forall (x, \xi) \in \Sigma_{\lambda,0}(W), 5R_0 < |x| < 6R_0 \implies \forall t > T_0(R), \Phi_t(x, \xi) \in \Gamma_+(R, d, 0).$$

Les démonstrations de ces deux lemmes sont identiques respectivement à celle du Lemme 1.7 et à celle du Lemme 1.10, les problèmes associés au contrôle en λ en moins. En utilisant les Lemmes 3.5, 1.3 et 1.1, nous sommes en mesure de démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.3 *Il existe $T_0 > 0$ tel que $\forall T > T_0$, nous avons*

$$\langle R(\lambda + i0) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle = \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} F(t, \theta, \omega, h) dt + O(h^N)$$

avec $F(t, \theta, \omega, h) = \langle e^{-ith^{-1}P(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle$.

Démonstration. Introduisons un symbole $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tel que $\omega = 1$ sur $U = \Sigma_{\lambda,0}(W) \cap (C(R_0) \times \mathbb{R}^n)$ et $\omega = 0$ dans le complémentaire d'un voisinage ouvert V de U . En posant $\omega_b = \chi_b \omega$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle R(\lambda + i0) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle &= \langle R(\lambda + i0) \omega_b(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &\quad + \langle R(\lambda + i0) (1 - \omega_b)(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &= I(h) + J(h). \end{aligned}$$

De plus, il est clair que

$$(1 - \omega_b)(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}} = \sum_{|\alpha| \leq M} h^{|\alpha|} (1 - \omega_b)^{(\alpha)}(x, \nabla_x \Phi_{-b}) g_\alpha(x) + h^M R_M(x)$$

avec $\text{supp}(g_\alpha) \subset \text{supp}(g_{-b})$, and $|R_M(x)| \leq C \langle x \rangle^{-M}$ uniformément par rapport à h . Par définition de Φ_{-b} et en particulier d'après la propriété ($\varphi 2$) (cf. Chap. 1, Sect. 1.2.2), nous pouvons supposer que $\forall |x| \geq R_0$, $\frac{\nabla_x \Phi_{-b}}{|\nabla_x \Phi_{-b}|} \in W$ et nous obtenons $\forall x \in \mathcal{C}(R_0)$, $(x, \nabla_x \Phi_{-b}) \in U$. D'autre part, $\text{supp}(g_{-b}) \subset \mathcal{C}(R_0)$ et par conséquent

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, g_\alpha(x) (1 - \omega)^{(\alpha)}(x, \nabla_x \Phi_{-b}) = 0.$$

de plus, pour $M > 0$ suffisamment grand, nous avons $\| R_M \|_{L_\alpha^2} = \mathcal{O}(1)$. Cette estimation combinée à la Proposition 3.2 conduit à

$$\begin{aligned} |J(h)| &= |\langle R(\lambda + i0) (1 - \omega_b)(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle| \\ &= h^M |\langle R(\lambda + i0) R_M, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle| \\ &\leq h^M \|R_M\|_{L_\alpha^2} \|g_{+a}\|_{L_\alpha^2} \|R(\lambda + i0)\|_{\alpha, -\alpha} \leq Ch^{M-\tilde{n}}. \end{aligned}$$

Comme nous pouvons prendre M aussi grand que nous le désirons, nous obtenons $J(\lambda, h) = \mathcal{O}(h^\infty)$ et il nous reste à traiter $I(h)$. Dans cette optique, nous écrivons

$$\begin{aligned} I(h) &= \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} \langle e^{-ih^{-1}tP(h)} \omega_b(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle dt \\ &\quad + \langle e^{-ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &= I_1(T, h) + I_2(T, h). \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $|(1 - \omega_b)(x, hD_x) (g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}})| \leq C_M h^M \langle x \rangle^{-M}$ quel que soit M , nous obtenons

$$I_1(T, h) = \int_0^T e^{ih^{-1}t\lambda} \langle e^{-ih^{-1}tP(h)} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle dt + \mathcal{O}(h^\infty),$$

de sorte qu'il nous suffit de montrer que $I_2(T, h) = O(h^N)$. Donnons nous $\beta \in C^\infty$ tel que

$$\beta(x, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Gamma_+(R, d, 0), \\ 0 & \text{dans } \Gamma_+(R, d, -\sigma)^c \end{cases}$$

et décomposons I_2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I_2(T, h) &= \\ &\langle e^{-ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) \beta(x, hD_x) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &+ \langle e^{-ih^{-1}T\lambda} R(\lambda + i0) (1 - \beta)(x, hD_x) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle \\ &= I_{+2}(T, h) + I_{-2}(T, h). \end{aligned}$$

Nous commençons par contrôler $I_{+2}(T, h)$ sans faire appel à la proposition 3.2. En choisissant $R \geq 20R_0 + 1 > \max(\rho_0, R_1)$, où ρ_0 est donné par le Lemme 3.1, R_1 par la Proposition 3.5 et en tenant compte du Lemme 3.3 nous obtenons

$$\| \chi_a R(\lambda + i0) \beta(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} = O(h^\infty).$$

De plus, nous déduisons du Lemme 1.3 que

$$\| e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) (g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}) \|_{L_\alpha^2} = O(1).$$

Il suit donc,

$$\begin{aligned} |I_{+2}(T, h)| &\leq \| \chi_a R(\lambda + i0) \beta(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} \times \\ &\quad \times \| e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) (g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}) \|_{L_\alpha^2} \times \| g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \|_{L_\alpha^2} \\ &\leq C_N h^N, \quad \forall N. \end{aligned}$$

Il reste à estimer $I_{-2}(\lambda, T, h)$. Rappelons que nous avons l'estimation

$$\| R(\lambda + i0) \|_{\alpha, -\alpha} = O(h^{-\tilde{n}}).$$

De plus,

$$\begin{aligned} |I_{-2}(\lambda)| &\leq \| R(\lambda + i0) \|_{\alpha, -\alpha} \| g_{+a} \|_{L_\alpha^2} \| (1 - \beta)(x, hD_x) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} \times \\ &\quad \times \| g_{-b} \|_{L_{-\alpha}^2} \\ &\leq C \| (1 - \beta)(x, hD_x) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} \| R(\lambda + i0) \|_{\alpha, -\alpha} \\ &\leq C h^{-\tilde{n}} \| (1 - \beta)(x, hD_x) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} \end{aligned}$$

et il suffit de montrer que

$$\| (1 - \beta)(x, hD_x) e^{-ih^{-1}TP(h)} \omega_b(x, hD_x) \|_{-\alpha, \alpha} = O(h^\infty). \quad (3.34)$$

Par construction de ω et d'après le Lemme 3.5 nous savons qu'il existe $T_0 > 0$ tel que

$$\forall T > T_0, \quad \forall (x, \xi) \in \text{supp}(\omega_b), \quad \Phi_T(x, \xi) \in \Gamma_+(R, d, 0).$$

Donc

$$\forall T > T_0, \forall (x, \xi) \in \text{supp}(\omega_b), \beta(\Phi_T(x, \xi)) = 1,$$

et pour tout $T > T_0$, le Lemme 1.1 implique (3.34). \blacksquare

De la même manière qu'au Chapitre 2, nous déduisons des formules (3.32), (3.19) et de la Proposition 3.3 que G_0 s'écrit sous la forme suivante

$$G_0(\theta, \omega, \lambda, h) = ih^{-1} \int_0^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} F(t, \theta, \omega, h) dt + O(h^\infty), \quad (3.35)$$

où $F(t, \theta, \omega, h)$ est définie dans la Proposition 3.3.

3.5.2 Seconde localisation

Dans cette partie, nous reprenons exactement la construction de [53]. Nous ne détaillons donc pas les démonstrations des résultats que nous énonçons. Introduisons

$$Z_j = \{z \in \Lambda_\omega : |z - z_j| < \epsilon\}, \quad 1 \leq j \leq l,$$

pour $\epsilon > 0$ assez petit et posons

$$Y_j = \{y \in \text{supp}(g_{-b}) : y = q_\infty(s, z_j), s < 0\}.$$

Pour R_0 assez grand, nous pouvons trouver $S_1 > S_0 \gg 1$ tels que

$$Y_j \subset \Pi_{-j} = \{y : y = q_\infty(s, z), -S_1 < s < -S_0, z \in Z_j\}.$$

Soit π_{-j} une fonction appartenant à $C_0^\infty(\Pi_{-j})$ telle que $0 \leq \pi_{-j} \leq 1$ et $\pi_{-j} = 1$ sur Y_j . Dans [53], en utilisant la théorie de Hamilton-Jacobi et le Lemme 1.1, il est démontré que

$$G_0(\theta, \omega, \lambda, h) = ih^{-1} \sum_{j=1}^l \int_0^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} F_{-j}(t, \theta, \omega, h) dt + O(h^\infty)$$

avec

$$F_{-j}(t, \theta, \omega, h) = \langle e^{ih^{-1}tP(h)} \pi_{-j} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle.$$

De la même manière, nous définissons

$$X_j = \{x \in \text{supp}(g_{+a}) : x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y)), y \in Y_j, t > 0\}$$

et il existe $T_0 > T_1 \gg 1$ tels que

$$X_j \subset \Pi_{+j} = \{x : x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y)), y \in \Pi_{-j}, T_1 < t < T_0\}.$$

Par suite, nous pouvons construire $\pi_{+j} \in C_0^\infty(\Pi_{+j})$, telle que $0 \leq \pi_{+j} \leq 1$ et $\pi_{+j} = 1$ sur X_j . En répétant les arguments précédents, nous obtenons

$$G_0(\theta, \omega, \lambda, h) = ih^{-1} \sum_{j=1}^l \int_{T_1}^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} F_j(t, \theta, \omega, h) dt + O(h^\infty) \quad (3.36)$$

avec

$$F_j(t, \theta, \omega, h) = \langle e^{ih^{-1}tP(h)} \pi_{-j} g_{-b} e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, \pi_{+j} g_{+a} e^{ih^{-1}\Phi_{+a}} \rangle. \quad (3.37)$$

3.5.3 Approximation du groupe unitaire et méthode de la phase stationnaire

Dans cette partie, nous rappelons sans changement, la démonstration donnée dans [53], en donnant uniquement les étapes majeures. En premier lieu, nous construisons une approximation de

$$\psi_j(t, x, h) = e^{ih^{-1}tP(h)}\pi_{-j}g_{-b}e^{ih^{-1}\Phi_{-b}}, \quad x \in \Pi_{+j}, \quad T_1 < t < T_0.$$

Le lemme suivant est central dans cette construction, ainsi que dans l'application finale de la méthode de la phase stationnaire

Lemme 3.6 *Quel que soit $y \in \Pi_{-j}$, le point $x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y)) \in \Pi_{+j}$ est non focal, c'est à dire*

$$D(t, y) = \det\left(\frac{\partial}{\partial y}q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y))\right) \neq 0, \quad T_1 < t < T_0.$$

Du Lemme 3.6, nous déduisons la formule de représentation approchée suivante pour $\psi_j(t, x, h)$, $T_1 < t < T_0$, $x \in \Pi_{+j}$ (cf. [40], sect. 12) :

$$\psi_j(t, x, \lambda, h) = e^{ih^{-1}S_j(t, y) - i\mu_j \frac{\pi}{2}} |D(t, y)|^{-\frac{1}{2}} ih\pi_{-j}(y)g_{0b}(y) + O(h), \quad (3.38)$$

pour $x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}(y))$, $y \in \Pi_{-j}$. Ici, S_j est l'action le long des trajectoires joignant les points x et y , c'est à dire

$$S_j(t, y) = \Phi_{-b}(y) + \int_0^t \left(\frac{1}{2} |p(\tau, y, \nabla_x \Phi_{-b})|^2 - V(q(\tau, y, \nabla_x \Phi_{-b})) \right) d\tau, \quad (3.39)$$

$\mu_j \in \mathbb{Z}$ est l'indice de Maslov de cette trajectoire et $g_{0a}, g_{0b} \in C_0^\infty$ dépendent de g_{+a} et g_{-b} . Nous insérons (3.38) dans (3.37) de sorte qu'après le changement de variable $x = q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}) \rightarrow y$ dans (3.36), nous obtenons

$$G_0(\theta, \omega, \lambda, h) = ih \sum_{j=1}^l \int_{T_1}^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}\phi_j(t, y) - i\mu_j \frac{\pi}{2}} M_j(t, y) |D(t, y)|^{\frac{1}{2}} dy dt + O(h^2) \quad (3.40)$$

où

$$\phi_j(t, y) = S_j(t, y) - \Phi_{+a}(q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}), \sqrt{2\lambda}\theta)$$

et

$$M_j(t, y) = \pi_{-j}(y)g_{0b}(y)\pi_{+j}(q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b}))g_{0a}(q(t, y, \nabla_x \Phi_{-b})).$$

Ainsi, la démonstration du Théorème 3.3 se réduit à l'étude du comportement asymptotique de l'intégrale

$$N_j(\theta, \omega, h) = \int_{T_1}^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}\phi_j(t, y) - i\mu_j \frac{\pi}{2}} M_j(t, y) |D(t, y)|^{\frac{1}{2}} dy dt, \quad 1 \leq j \leq l.$$

La direction θ étant régulière pour ω , nous pouvons effectuer le changement de variable

$$(z, s) \in Z_j \times]-S_1, -S_0[\longrightarrow y = q_\infty(s, z) \in \Pi_{-j}.$$

Nous obtenons

$$N_j(\theta, \omega, h) = h^2 \int_{T_1}^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda - i\mu_j \frac{\pi}{2}} \int_{-S_1}^{-S_0} I_j(t, s, \theta, \omega, h) ds dt,$$

avec

$$\begin{aligned} I_j(t, s, \theta, \omega, h) &= \int_{Z_j} e^{ih^{-1}\Phi_j(t, s, z)} f_j(t, s, z) |D_\infty(t + s, z)|^{\frac{1}{2}} |D_\infty(s, z)|^{\frac{1}{2}} dz, \\ \Phi_j(t, s, z) &= S_j(t, q_\infty(s, z)) - \Phi_{+a}(q_\infty(t + s, z), \sqrt{2\lambda\theta}), \\ f_j(t, s, z) &= \pi_{-j}(q_\infty(s, z)) g_{0b}(q_\infty(s, z)) \pi_{+j}(q_\infty(t + s, z)) g_{0a}(q_\infty(t + s, z)). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale I_j , comme dans [53], pour (t, s) fixé, le seul point stationnaire de la phase $\Phi_j(t, s, z)$ est z^j . Nous renvoyons au Théorème 7.7.6 de [25] pour un énoncé et une démonstration précis de la méthode de la phases stationnaire dépendant d'un paramètre. Nous appliquons ce théorème à chaque z^j et nous utilisons le Lemme suivant.

Lemme 3.7 *Pour tout $j = 1, \dots, N$, nous avons*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2}\right)(z^j) = n - 1, \\ 2) \quad & |\det\left(\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2}\right)(z^j)| = (2\lambda)^{\frac{n-2}{2}} \hat{\sigma}_j(z^j) D_\infty(t + s, z^j) E_0(t, s), \\ & \text{où } E_0(t, s) = \exp\left(\int_{t+s}^{\infty} \Delta_x \Phi_{+a}(q_\infty(\tau, z^j, \lambda), \sqrt{2\lambda\theta}) d\tau\right). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons comme dans [53]

$$N_j(\theta, \omega, h) = c_2(\lambda, h) e^{ih^{-1}S_j - i\mu_j \frac{\pi}{2}} \hat{\sigma}_j(z^j)^{-\frac{1}{2}} + O(h),$$

avec

$$c_2(\lambda, h) = -(2\lambda)^{-\frac{n-3}{4}} (2\pi h)^{\frac{n-1}{2}} h^2 e^{i(n-1)\frac{\pi}{4}}.$$

Cette égalité, combinée avec (3.18) et (3.36) complète la démonstration du Théorème 3.3.

Chapitre 4

Estimation du résidu de l'amplitude de diffusion

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les résidus de l'amplitude de diffusion dans le cas où il peut y avoir des résonances exponentiellement près de l'axe réel. Au chapitre précédent, nous avons mentionné les travaux de Lahmar-Benbernou-Martinez [35]. Dans cet article, les auteurs démontrent dans un cadre très particulier qu'il peut y avoir compensation entre le résidu de la matrice de diffusion et le pôle qui lui est associé. Plus récemment, ce phénomène a été étudié par Stefanov [58], dans le cas de perturbations à support compact du Laplacien. Dans cet article, Stefanov considère le cas où $z_0(h)$ est une résonance simple et isolée de $P(h)$, qui vérifie $|Im z_0(h)| \leq Ch^{\frac{3n+5}{2}}$. Dans ces conditions, pour $(\omega, \theta) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$ et z proche de $z_0(h)$, nous pouvons écrire l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, z, h)$ sous la forme

$$f(\theta, \omega, z, h) = \frac{f^{res}(\theta, \omega, h)}{z - z_0(h)} + f^{hol}(\theta, \omega, z, h), \quad (4.1)$$

où $f^{hol}(\theta, \omega, z, h)$ est holomorphe près de $z_0(h)$. Sous des hypothèses génériques, Stefanov a montré que

$$|f^{res}(\theta, \omega, h)| \leq Ch^{-\frac{n-1}{2}} |Im z_0(h)| \text{ et } |f^{hol}(\theta, \omega, z, h)| \leq Ch^{-\frac{n-1}{2}},$$

pour z proche de $z_0(h)$. Dans ce chapitre, nous allons montrer que ces estimations restent vraies dans le cas de perturbations de courte portée.

Nous allons maintenant, énoncer nos résultats plus précisément. Nous avons vu dans les précédents chapitres que l'amplitude de diffusion possédait une formule explicite donnée par la Proposition 1.6. En partant de cette formule, Gérard et Martinez [19], ont prolongé l'amplitude de diffusion à un voisinage conique de l'axe réel pour des perturbations de longue-portée. Comme conséquence immédiate de

leur construction, nous avons le Théorème suivant (cf. [19] Théorème 1.1) dont nous rappellerons les étapes de démonstration.

Théorème 4.1 *Supposons que les hypothèses $(\mathbf{V})_\rho$, $\rho > 1$ et $(\mathbf{Hol})_\infty$ sont satisfaites et fixons ω et θ dans S^{n-1} avec $\theta \neq \omega$. Alors, pour $\epsilon >$ assez petit et d_2 comme précédemment, la fonction $\lambda \mapsto f(\theta, \omega, \lambda, h)$ a un prolongement méromorphe à l'ouvert*

$$\Lambda_{d_2, \epsilon} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; |Im \lambda| \leq \epsilon \langle Re \lambda \rangle, \frac{d_2^{-2}}{2} \leq |Re \lambda| \leq \frac{d_2^2}{2} \right\}, \quad (4.2)$$

pour tout $h \in]0, 1]$.

Nous verrons par la suite comment la construction de Gérard et Martinez permet d'obtenir des estimations en fonction du paramètre h , de l'amplitude de diffusion dans ce voisinage.

Avant d'énoncer le résultat principal de ce chapitre, nous devons préciser la notion de résonance simple de $P(h)$. Sous l'hypothèse $(\mathbf{Hol})_\infty$, nous avons défini les résonances de $P(h)$ par complex scaling (cf. Définition 1.5). Par ailleurs, en se restreignant au voisinage $\Lambda_{d_2, \epsilon}$, les résonances définies de cette manière coïncident avec les pôles de l'amplitude de diffusion et les multiplicités de ces pôles sont les mêmes. Par suite, nous dirons qu'une résonance est simple, si c'est un pôle simple de l'amplitude de diffusion. Il suit que si $z_0(h)$ est une résonance simple, au voisinage de $z_0(h)$, nous pouvons écrire $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ sous la forme (4.1).

Théorème 4.2 *Supposons que le potentiel V satisfait les hypothèses $(\mathbf{V})_\rho$ avec $\rho > 1$ et $(\mathbf{Hol})_\infty$. Fixons $0 < E_1 < E_2$ et soit $z_0(h)$ une résonance simple de $P(h)$ telle que $0 < -Im z_0(h) < h^{\frac{3n+5}{2}}$, $E_1 \leq Re z_0(h) \leq E_2$. Nous supposons aussi que $z_0(h)$ est la seule résonance dans l'ensemble*

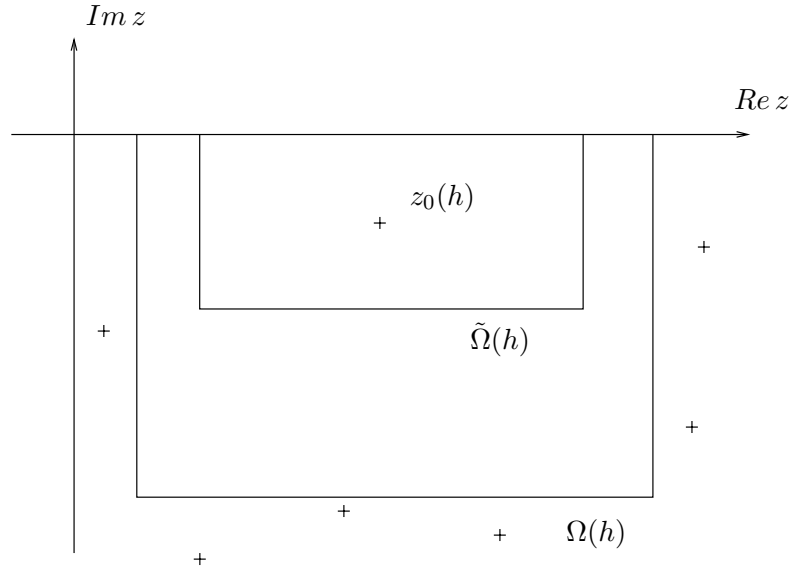
$$\Omega(h) = \left\{ z \in \mathbb{C}; |Re z - Re z_0(h)| \leq h^{-\frac{3n+4}{2}} |Im z_0(h)|, \right. \\ \left. 0 \leq -Im z \leq h^{-n-2} |Im z_0(h)| \right\}.$$

Soient $(\theta, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$ avec $\theta \neq \omega$. Alors, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $0 < h < h_0$, nous avons

$$|f^{res}(\theta, \omega, h)| \leq Ch^{-\frac{n-1}{2}} |Im z_0(h)| \text{ et } |f^{hol}(\theta, \omega, z, h)| \leq Ch^{-\frac{n-1}{2}}, \forall z \in \tilde{\Omega}(h),$$

où

$$\tilde{\Omega}(h) = \left\{ z \in \mathbb{C}; |Re z - Re z_0(h)| \leq \frac{3}{20} h^{-\frac{3n+4}{2}} |Im z_0(h)|, \right. \\ \left. 0 \leq -Im z \leq 2 |Im z_0(h)| \right\}.$$



Mentionnons deux différences entre ce résultat et le Théorème 1 de [58]. Tout d'abord, notre théorème porte sur des potentiels de courte portée et constitue en cela une amélioration du résultat de Stefanov. La seconde différence concerne les directions ω et θ . Dans [58], ces directions peuvent être égales, tandis que dans la démonstration de notre théorème ainsi que dans celle du Théorème 4.1, nous avons besoin de supposer $\omega \neq \theta$. Comme cela est expliqué dans [19], cette hypothèse est nécessaire pour démontrer que l'amplitude de diffusion se prolonge comme fonction de la variable λ , les directions θ et ω étant fixées et différentes.

Nous allons maintenant rappeler comment Gérard et Martinez [19] établissent le Théorème 4.1. Nous montrerons aussi quelles estimations nous pouvons déduire de la forme explicite de leur prolongement.

4.2 Prolongement méromorphe de l'amplitude de diffusion

Le point de départ de l'analyse de Gérard et Martinez est la formule de Isozaki-Kitada. Plus précisément, la première étape consiste à prolonger analytiquement, les symboles construits par Isozaki et Kitada, à un voisinage conique de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{C}^{2n} . Pour $R > 0$ assez grand, $d > 0$, $\epsilon > 0$ et $\sigma \in]0, 1[$, nous considérerons des ouverts de \mathbb{C}^{2n} de la forme suivante :

$$\Gamma^\pm(R, d, \epsilon, \sigma) = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n}; |Re x| > R, d^{-1} < |Re \xi| < d, \right. \\ \left. \pm \cos(Re x, Re \xi) \geq \pm \sigma, |Im x| \leq \epsilon \langle Re x \rangle, |Im \xi| \leq \epsilon \langle Re \xi \rangle \right\}.$$

Remarquons que ces ouverts peuvent s'écrire plus simplement à l'aide des ensembles $\Gamma^\pm(R, d, \sigma)$ introduits au Chapitre 1. En effet, nous avons

$$\Gamma^\pm(R, d, \epsilon, \sigma) = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n}; (Re x, Re \xi) \in \Gamma^\pm(R, d, \sigma), \right. \\ \left. |Im x| \leq \epsilon \langle Re x \rangle, |Im \xi| \leq \epsilon \langle Re \xi \rangle \right\}.$$

En utilisant les Propositions 2.1 et 3.1 de [19], il est facile de montrer que les phases $\Phi_{\pm a}$, $\Phi_{\pm b}$ ainsi que les symboles a_\pm et b_\pm peuvent être construits de sorte que les propositions suivantes soient vérifiées.

Proposition 4.1 *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R_0 > 0$ tel que les fonctions phases $\Phi_{\pm a}$ (respect. $\Phi_{\pm b}$) ont un prolongement holomorphe à $\Gamma^\pm(R_0, d_0, \epsilon, \tau_0^\pm)$ (respect. $\Gamma^\pm(R_0, d_0, \epsilon, \sigma_0^\pm)$) et satisfont*

$$(\nabla_x \Phi_\pm(x, \xi))^2 + V(x) = \xi^2,$$

$$\Phi_\pm(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle = \mathcal{O}(\langle x \rangle + \langle \xi \rangle)^{1-\rho} \langle \xi \rangle^{-1}$$

uniformément dans $\Gamma^\pm(R_0, d_0, \epsilon, \tau_0^\pm)$ (respect. $\Gamma^\pm(R_0, d_0, \epsilon, \sigma_0^\pm)$).

Proposition 4.2 *Pour $R_0 > 0$ suffisamment grand et $\epsilon > 0$ assez petit, il existe $\alpha > 0$ tel que le symbole a_\pm possède un prolongement \mathcal{C}^∞ à $\Gamma^\pm(3R_0, d_1, \epsilon, \tau_1^\pm)$ qui est holomorphe dans $\Gamma^\pm(4R_0, d_2, \epsilon, \tau_2^\pm)$. De plus, $a_\pm(x, \xi, h)$ est borné uniformément par rapport à $h \in]0, 1]$, $(x, \xi) \in \Gamma^\pm(3R_0, d_1, \epsilon, \tau_1^\pm)$ et nous avons les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} a_\pm(x, \xi, h) &= 1 + \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-\rho}), \\ k_{\pm a}(x, \xi, h) &= \mathcal{O}(e^{-\alpha \langle x \rangle \langle \xi \rangle / h}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

uniformément par rapport à $h \in]0, 1]$ et $(x, \xi) \in \Gamma^\pm(4R_0, d_2, \epsilon, \tau_2^\pm)$. De manière identique, les résultats précédents sont vrais pour le symbole b_\pm et les domaines $\Gamma^\pm(5R_0, d_3, \epsilon, \sigma_1^\pm)$, $\Gamma^\pm(6R_0, d_4, \epsilon, \sigma_2^\pm)$ respectivement.

Avant toute chose, remarquons que dans la proposition précédente, $k_{\pm a}$ et $k_{\pm b}$ sont définis comme au Chapitre 1 par

$$k_{\pm a}(x, \xi, h) = e^{-ih^{-1}\Phi_{\pm a}(x, \xi)} \left(P(h) - \frac{1}{2}\xi^2 \right) (e^{ih^{-1}\Phi_{\pm a}(x, \xi)} a_\pm(x, \xi, h)),$$

$$k_{\pm b}(x, \xi, h) = e^{-ih^{-1}\Phi_{\pm b}(x, \xi)} \left(P(h) - \frac{1}{2}\xi^2 \right) (e^{ih^{-1}\Phi_{\pm b}(x, \xi)} b_\pm(x, \xi, h)),$$

pour (x, ξ) appartenant respectivement à $\Gamma^\pm(3R_0, d_1, \epsilon, \tau_1^\pm)$ et $\Gamma^\pm(5R_0, d_3, \epsilon, \sigma_1^\pm)$. Nous allons tirer profit de ces deux propositions pour prolonger l'amplitude de diffusion. La démonstration que nous allons donner est essentiellement celle de [19]. Etant donné que nous avons besoin de contrôler les estimations par rapport à h ,

nous reprenons les arguments en détails. D'après la Proposition 1.6, nous pouvons écrire l'amplitude de diffusion sous la forme

$$S(\lambda, h) = c(\lambda, h) (T_1(\lambda, h) - T_2(\lambda, h)),$$

où T_1 et T_2 sont définis respectivement par (1.29) et (1.30) avec des phases $\Phi_{\pm a}$, $\Phi_{\pm b}$ et des symboles a_{\pm} , b_{\pm} , $k_{\pm a}$, $k_{\pm b}$ vérifiant les Propositions 4.1 et 4.2. De plus, pour $\lambda > 0$, leurs noyaux $T_1(\theta, \omega, \lambda, h)$ et $T_2(\theta, \omega, \lambda, h)$ s'écrivent sous la forme

$$T_1(\theta, \omega, \lambda, h) = (T_{+1}^+ + T_{+1}^- + T_{-1}^+ + T_{-1}^-)(\theta, \omega, \lambda, h),$$

$$T_2(\theta, \omega, \lambda, h) = (T_{+2}^+ + T_{+2}^- + T_{-2}^+ + T_{-2}^-)(\theta, \omega, \lambda, h),$$

où $T_{\pm 1}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h)$ est défini par (1.31) et $T_{\pm 2}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h)$ est défini par (1.32). Pour le confort du lecteur, nous rappelons maintenant ces formules. En notant $\psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega) = \Phi_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) - \Phi_{\pm a}(x, \sqrt{2\lambda\theta})$, nous avons

$$T_{\pm 1}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \int e^{ih^{-1}\psi_{\pm b}^{\pm a}(x, \theta, \omega)} k_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) \bar{a}_{\pm}(x, \sqrt{2\lambda\theta}) dx,$$

$$T_{2, \pm}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \langle R(\lambda + i0) k_{\pm b}(\cdot, \sqrt{2\lambda\omega}) e^{ih^{-1}\Phi_{\pm b}(\cdot, \sqrt{2\lambda\omega})}, \\ k_{\pm a}(\cdot, \sqrt{2\lambda\theta}) e^{ih^{-1}\Phi_{\pm a}(\cdot, \sqrt{2\lambda\theta})} \rangle.$$

Après avoir choisi la détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, la fonction $c_0(\lambda, h)$ est analytique par rapport à λ dans le demi-plan $\{Re \lambda > 0\}$. Par conséquent, pour prolonger $f(\theta, \omega, \lambda, h)$, il suffit de prolonger $T_{\pm 1}^{\pm}$ et $T_{\pm 2}^{\pm}$. Comme cela peut être vu dans les formules ci dessus, nous pouvons raisonnablement espérer prolonger $T_{\pm 1}^{\pm}$ analytiquement, en utilisant les prolongements analytiques des symboles qui entrent en jeu. Par contre, pour prolonger T_2 , il semble essentiel de prolonger d'abord la résolvante à des énergies complexes. Les symboles $k_{\pm b}$ et $k_{\pm a}$ n'étant pas à support compact, il n'y a pas de prolongement méromorphe immédiat de la fonction $k_{\pm a} R(\lambda + i0) k_{\pm b} e^{ih^{-1}\Phi_{\pm}}$. Pour cette raison, nous sommes obligés de modifier la résolvante avant de la prolonger.

Plus précisément, nous allons utiliser les opérateurs dilatés $P_{\mu}(h)$ définis au Chapitre 1 par (1.35). D'après la Définition 1.5, la résolvante $(P_{\mu} - \lambda)^{-1}$ a un prolongement méromorphe à $\{\lambda; |Im \lambda| \leq \tan(\mu)|Re \lambda|\}$ dont les pôles sont exactement les résonances de $P(h)$. De plus, en utilisant l'estimation (4.3) pour k_{+a} et son homologue pour $k_{\pm b}$ ainsi que les propriétés de la phase Φ_{\pm} , il est facile de montrer qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que

$$U_{\mu}(e^{ih^{-1}\Phi_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega})} k_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega})) = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_1 \langle x \rangle / h}) \quad (4.4)$$

uniformément par rapport à $|x| \geq 6R_0$, $\omega \in S^{n-1}$, $h \in]0, 1]$ et $|Im \lambda| \leq \tan(\mu)|Re \lambda|$. De même, si nous notons $U_{-\mu}$ l'opérateur associé à la déformation conjuguée \bar{f}_{μ} , alors quels que soient $|x| \geq 4R_0$, $\omega \in S^{n-1}$, $h \in]0, 1]$ et $|Im \lambda| \leq \tan(\mu)|Re \lambda|$, nous avons

$$U_{-\mu}(e^{ih^{-1}\Phi_{\pm a}(x, \sqrt{2\lambda\theta})} k_{\pm a}(x, \sqrt{2\lambda\theta})) = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_2 \langle x \rangle / h}), \quad (4.5)$$

où ϵ_2 est une constante strictement positive. Par ailleurs, nous avons

$$T_{\pm 2}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \langle R_{\mu}(\lambda, h) U_{\mu}(k_{\pm b}(\cdot, \sqrt{2\lambda\omega})) e^{ih^{-1}\Phi_{\pm b}(\cdot, \sqrt{2\lambda\omega})}, \\ U_{-\mu}(k_{\pm a}(\cdot, \sqrt{2\lambda\theta})) e^{ih^{-1}\Phi_{\pm a}(\cdot, \sqrt{2\lambda\theta})} \rangle \quad (4.6)$$

pour $\lambda > 0$, où $R_{\mu}(\lambda, h) = (P_{\mu}(h) - \lambda)^{-1}$ est la résolvante de l'opérateur modifié. Par définition des résonances, pour $\mu > 0$ fixé, nous savons que $R_{\mu}(\lambda, h) : L^2(\Gamma_{\mu}) \rightarrow L^2(\Gamma_{\mu})$ est analytique dans la région $\{0 < \text{Im } \lambda < \tan(\mu) \text{Re } \lambda\}$, méromorphe dans le secteur $e^{-i[0, \mu]}]0, +\infty[$ et que les pôles de R_{μ} sont exactement les résonances de $P(h)$. Par suite, l'expression (4.6) garde un sens pour des énergies λ telles que $|\text{Im } \lambda| \leq \tan(\mu) |\text{Re } \lambda|$. Ceci définit un prolongement méromorphe de $T_2(\theta, \omega, \lambda, h)$ à $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\text{Im } \lambda| < \tan(\mu) |\text{Re } \lambda|\}$ dont les pôles sont exactement les résonances de $P(h)$.

L'étape suivante consiste à prolonger T_1 (c'est à dire les $T_{\pm 1}^{\pm}$) et c'est paradoxalement la partie la plus technique. C'est pour effectuer ce prolongement, que nous sommes obligés de faire des hypothèses sur θ et ω . A partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre les directions ω et θ sont fixées dans S^{n-1} et nous supposons que $\omega \neq \theta$. De plus, dans la construction de Gérard-Martinez, nous pouvons choisir les paramètres σ_2^{\pm} suffisamment proches de 1 et $\delta > 0$ assez petit pour que l'inégalité suivante soit vérifiée.

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \cos(y, \omega) \geq \sigma_2^- - \delta \implies \frac{\langle y, \omega - \theta \rangle}{|y|} \geq 2\alpha > 0. \quad (4.7)$$

Nous utiliserons cette propriété à la fin de la démonstration, mais pour le moment, nous rappelons simplement que pour $\lambda > 0$, $T_{\pm 1}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h)$ est donné par

$$T_{\pm 1}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \int e^{ih^{-1}(\sqrt{2\lambda}(\omega - \theta, x) + r(x, \lambda))} k_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) \bar{a}_{\pm}(x, \sqrt{2\lambda\theta}) dx,$$

où $r(x, \lambda) = r_{\pm a}^{\pm b}(x, \lambda) = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{1-\rho} \langle \sqrt{\lambda} \rangle^{1-\rho})$. En suivant la démonstration de [19], nous décomposons $T_{\pm 1}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h)$ en la somme de deux termes

$$T_{\pm 1}^{\pm}(\theta, \omega, \lambda, h) = f_1(\theta, \omega, \lambda, h) + f_2(\theta, \omega, \lambda, h),$$

où f_1 est défini par

$$f_1(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \int_{|x| \leq 6R_0} e^{ih^{-1}(\sqrt{2\lambda}(\omega - \theta, x) + r(x, \lambda))} \times \\ \times k_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda\omega}) \bar{a}_{\pm}(x, \sqrt{2\lambda\theta}) dx. \quad (4.8)$$

D'après les Propositions 4.1 et 4.2, il est évident que les fonctions

$$(r, \rho) \mapsto k_{\pm b}(rx, \rho\omega) \bar{a}_{\pm}(rx, \rho\theta)$$

sont holomorphes par rapport à $r \in \{|r| \geq 5R_0\} \cap \{|\text{Im } r| \leq \epsilon \langle \text{Re } r \rangle\}$ et $\rho \in \{d_2^{-1} \leq |\rho| \leq d_2\} \cap \{|\text{Im } \rho| \leq \epsilon \langle \text{Re } \rho \rangle\}$. Par suite, f_1 a un prolongement holomorphe à l'ensemble

$$\Lambda_{d_2, \epsilon} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\text{Im } \lambda| \leq \epsilon \langle \text{Re } \lambda \rangle, \frac{d_2^{-2}}{2} \leq |\lambda| \leq \frac{d_2^2}{2}\}.$$

De plus, pour $\lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}$, nous avons $\frac{d_2}{\sqrt{2\lambda}} \geq 1$ et nous pouvons écrire $f_2 = f_3 + f_4$ avec

$$f_3(\theta, \omega, \lambda, h) = c_0(\lambda, h)^2 \int_{6R_0 \leq |x| \leq \frac{7R_0 d_2}{\sqrt{2\lambda}}} e^{ih^{-1}(\sqrt{2\lambda}\langle \omega - \theta, x \rangle + r(x, \lambda))} k_{\pm b}(x, \sqrt{2\lambda}\omega) \bar{a}_{\pm}(x, \sqrt{2\lambda}\theta) dx.$$

Après changement de variable, nous obtenons

$$f_3(\theta, \omega, \lambda, h) = \frac{c_0(\lambda, h)^2}{\lambda^{n/2}} \int_{6R_0\sqrt{2\lambda} \leq |y| \leq 7R_0 d_2} e^{ih^{-1}((\omega - \theta, y) + r(y/\sqrt{2\lambda}, \lambda))} \times k_{\pm b}\left(\frac{y}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{2\lambda}\omega\right) \bar{a}_{\pm}\left(\frac{y}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{2\lambda}\theta\right) dy. \quad (4.9)$$

Comme dans le cas de f_1 , étant donné que l'intégration a lieu sur un compact, cette expression a un prolongement holomorphe au domaine $\Lambda_{d_2, \epsilon}$ et il reste à examiner

$$f_4(\theta, \omega, \lambda, h) = \frac{c_0(\lambda, h)^2}{\lambda^{n/2}} \int_{|y| \geq 7R_0 d_2} e^{ih^{-1}((\omega - \theta, y) + r(y/\sqrt{2\lambda}, \lambda))} \times k_{\pm b}\left(\frac{y}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{2\lambda}\omega\right) \bar{a}_{\pm}\left(\frac{y}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{2\lambda}\theta\right) dy. \quad (4.10)$$

Dans ce but, donnons nous σ_3^{\pm} tels que $0 < \sigma_2^- - \delta < \sigma_3^- < \sigma_2^- < \sigma_2^+ < \sigma_3^+ < 1$, où δ est donné par (4.7). Nous introduisons une fonction de troncature χ_{ω} telle que

$$\text{supp } \chi_{\omega} \subset \{|y| \geq 7R_0 d_2, \cos(y, \omega) \in [\sigma_3^-, \sigma_3^+]\}$$

et

$$\chi_{\omega} = 1 \text{ on } \{|y| \geq 8R_0 d_2, \cos(y, \omega) \in [\sigma_2^-, \sigma_2^+]\}.$$

Nous définissons aussi

$$u(y, \lambda, \theta, \omega, h) = e^{ih^{-1}r(y/\sqrt{2\lambda}, \lambda)} k_{\pm b}\left(\frac{y}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{2\lambda}\omega\right) \bar{a}_{\pm}\left(\frac{y}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{2\lambda}\theta\right)$$

et nous décomposons f_4 en $f_4 = f_5 + f_6$, avec

$$f_5(\theta, \omega, \lambda, h) = \frac{c_0(\lambda, h)^2}{\lambda^{n/2}} \int (1 - \chi_{\omega})(y) e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} u(y, \lambda, \theta, \omega, h) dy \quad (4.11)$$

et

$$f_6(\theta, \omega, \lambda, h) = \frac{c_0(\lambda, h)^2}{\lambda^{n/2}} \int \chi_{\omega}(y) e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} u(y, \lambda, \theta, \omega, h) dy. \quad (4.12)$$

En utilisant le fait que $k_{\pm b}(x, \xi) = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_2 \langle x, \xi \rangle / h})$ pour $\cos(\text{Re } x, \text{Re } \xi) \notin [\sigma_2^-, \sigma_2^+]$, nous vérifions facilement que pour $\epsilon_3, \epsilon > 0$ assez petits, $\lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}$ et $y \in \text{supp}(1 - \chi_{\omega})$, nous avons $k_{\pm b}\left(\frac{y}{\sqrt{2\lambda}}, \sqrt{2\lambda}\omega\right) = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_3 \langle y, \omega \rangle / h})$. De plus, nous déduisons immédiatement de cette inégalité que f_5 se prolonge holomorphiquement à $\Lambda_{d_2, \epsilon}$ et que nous avons l'estimation

$$\forall \lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}, |f_5(\theta, \omega, \lambda, h)| \leq Ch^{-n-1}. \quad (4.13)$$

Le prolongement de f_6 s'effectue à l'aide d'un changement de contour d'intégration dans la formule (4.12). Soit χ_0 une fonction de classe C^∞ telle que $\text{supp } \chi_0 \subset \{|y| \geq 9R_0d_2\}$ et $\chi_0 = 1$ sur $\{|y| \geq 10R_0d_2\}$. Pour $\epsilon > 0$, le nouveau chemin d'intégration sera

$$L_{\epsilon, \chi_0} = \{(1 + i\epsilon\chi_0(|y|))y, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Nous allons démontrer maintenant que nous pouvons effectuer ce changement de chemin d'intégration. Pour $\lambda > 0$, nous avons $f_6(\theta, \omega, \lambda, h) = \frac{c_0(\lambda, h)^2}{\lambda^{n/2}} \lim_{\eta \rightarrow 0} g_{6, \eta}(\theta, \omega, \lambda, h)$ avec

$$g_{6, \eta}(\theta, \omega, \lambda, h) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta y^2} e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} \chi_\omega(y) u(y, \lambda, \theta, \omega, h) dy.$$

Par ailleurs, pour $\eta > 0$ fixé, nous avons

$$g_{6, \eta}(\theta, \omega, \lambda, h) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|y| \leq R} e^{-\eta y^2} e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} \chi_\omega(y) u(y, \lambda, \theta, \omega, h) dy.$$

Comme $y \mapsto e^{-\eta y^2}$ est holomorphe, nous pouvons appliquer la formule de Cauchy, pour obtenir $g_{6, \eta}(\theta, \omega, \lambda, h) = \lim_{R \rightarrow +\infty} (h_{6, \eta, R} + k_{6, \eta, R})(\theta, \omega, \lambda, h)$ avec

$$h_{6, \eta, R}(\theta, \omega, \lambda, h) = \int_{L_{\epsilon, \chi_0} \cap \{|y| \leq R\}} e^{-\eta y^2} e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} \chi_\omega(y) u(y, \lambda, \theta, \omega, h) dy$$

et

$$k_{6, \eta, R}(\theta, \omega, \lambda, h) = \int_0^1 (i\epsilon R)^{n-1} \int_{S^{n-1}} e^{-\eta(1+i\epsilon\rho)^2 R^2} e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, R(1+i\epsilon\rho)\omega_y \rangle} \times \\ \times \chi_\omega(R\omega_y) u(R\omega_y, \lambda, \theta, \omega, h) d\omega_y d\rho.$$

Nous en déduisons

$$|k_{6, \eta, R}(\theta, \omega, \lambda, h)| \leq C\epsilon \int_0^1 \int_{S^{n-1}} R^{n-1} e^{-\eta(1-\epsilon^2)R^2} e^{\epsilon h^{-1}|\omega - \theta|R} d\omega_y d\rho$$

et pourvu que $0 < \epsilon < 1$, nous avons $\lim_{R \rightarrow +\infty} k_{6, \eta, R}(\theta, \omega, \lambda, h) = 0$. Par suite, nous obtenons pour $\lambda > 0$,

$$g_{6, \eta}(\theta, \omega, \lambda, h) = \int_{L_{\epsilon, \chi_0}} e^{-\eta y^2} e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} \chi_\omega(y) u(y, \lambda, \theta, \omega, h) dy$$

puis en faisant tendre η vers 0,

$$f_6(\theta, \omega, \lambda, h) = \frac{c_0(\lambda, h)^2}{\lambda^{n/2}} \int_{L_{\epsilon, \chi_0}} \chi(y, \omega) e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} u(y, \lambda, \theta, \omega, h) dy. \quad (4.14)$$

A priori, cette formule est valable pour $\lambda > 0$, ce qui achève de justifier le changement de chemin d'intégration. De plus, en utilisant (4.7), il est clair que pour tout $y \in$

$\text{supp } \chi_\omega$, nous avons $\langle y, \omega - \theta \rangle \geq 2\alpha|y|$. Par suite, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit et $y \in L_{\epsilon, \chi_0}$, nous avons $\text{Im}\langle y, \omega - \theta \rangle \geq \alpha|y|$ ce qui entraîne

$$\left| e^{ih^{-1}\langle y, \omega - \theta \rangle} \right| \leq e^{-\alpha|y|/h}.$$

D'autre part, un calcul immédiat montre que

$$|u(y, \lambda, \theta, \omega, h)| \leq C e^{Ch^{-1}\langle y \rangle^{1-\rho}}$$

uniformément par rapport à $y \in L_{\epsilon, \chi_0}$ et $\lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}$. Comme $\rho > 0$, alors l'application

$$y \mapsto \chi_\omega(y) e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} u(y, \lambda, \theta, \omega, h)$$

est dominée par une fonction L^1 indépendante de λ . Par ailleurs, pour tout $y \in L_{\epsilon, \chi_0}$,

$$\Lambda_{d_2, \epsilon} \ni \lambda \mapsto \chi_\omega(y) e^{ih^{-1}\langle \omega - \theta, y \rangle} u(y, \lambda, \theta, \omega, h)$$

est une fonction holomorphe, de sorte que les conditions sont réunies pour appliquer le Théorème d'holomorphicité sous le signe intégral. Nous en déduisons que l'intégrale du second membre de (4.14) définit une fonction holomorphe par rapport à $\lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}$, ce qui permet donc de prolonger f_6 à $\Lambda_{d_2, \epsilon}$.

De cette manière, nous avons prolongé les noyaux $T_{\pm 1}^\pm(\theta, \omega, \lambda, h)$ aux domaines $\Lambda_{d_2, \epsilon}$, pour $\epsilon > 0$ assez petit. De plus, nous avons la décomposition suivante

$$T_{\pm 1}^\pm(\theta, \omega, \lambda, h) = (f_1 + f_3 + f_5 + f_6)(\theta, \omega, \lambda, h) \quad (4.15)$$

où les $f_j, j = 1, 3, 5, 6$ sont données par (4.8), (4.9), (4.11) et (4.14) respectivement. Ceci achève de démontrer le Théorème 4.1. Par ailleurs, ces formules permettent d'obtenir des bornes pour $T_{\pm 1}^\pm$ valables pour des énergies complexes.

Proposition 4.3 *Soient ω et θ des directions fixes de S^{n-1} avec $\theta \neq \omega$. Alors, il existe $\epsilon_0, h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $\lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}$, nous avons*

$$\forall 0 < h < h_0, |T_{\pm 1}^\pm(\theta, \omega, \lambda, h)| \leq Ch^{-n} e^{Ch^{-1}}.$$

Démonstration. Nous venons de démontrer que $T_{\pm 1}^\pm = f_1 + f_3 + f_5 + f_6$, de sorte que nous devons estimer chaque f_j . Nous commençons par traiter le cas de f_1 . Pour $\lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}$, nous déduisons de l'équation (4.8), que

$$\begin{aligned} |f_1(\theta, \omega, \lambda, h)| &\leq Ch^{-n} \sup_{|y| \leq 6R_0} |k_{\pm b}(y, \sqrt{2\lambda}\omega) \bar{a}(y, \sqrt{2\lambda}\theta)| \times \\ &\quad \times \int_{|x| \leq 6R_0} e^{h^{-1}((\text{Im}(\sqrt{2\lambda}))|\omega - \theta||x| - |r_\pm(x, \lambda)|)} dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

En utilisant le fait que $r_\pm(x, \lambda) = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{1-\rho} \langle \sqrt{\lambda} \rangle^{1-\rho})$, nous obtenons pour R_0 suffisamment grand

$$\forall \lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}, |f_1(\theta, \omega, \lambda, h)| \leq Ch^{-n} e^{C/h}. \quad (4.17)$$

Le cas de f_3 est similaire puisque le domaine d'intégration est encore borné. Des arguments identiques montrent que

$$\forall \lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}, |f_3(\theta, \omega, \lambda, h)| \leq Ch^{-n} e^{C/h}. \quad (4.18)$$

L'estimation de f_5 a été déjà obtenue et nous utilisons la formule (4.14) pour contrôler f_6 . Par définition de χ_ω , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left| \chi_\omega(y) e^{ih^{-1}\langle y, \omega - \theta \rangle} \right| \leq e^{-\alpha|y|/h}.$$

De plus, pour R_0 assez grand, $|u(y, \lambda, \theta, \omega, h)| \leq e^{\frac{\alpha}{2}|y|/h}$ et nous obtenons

$$\forall \lambda \in \Lambda_{d_2, \epsilon}, |f_6(\theta, \omega, \lambda, h)| \leq Ch^{-n} \int e^{-\alpha|y|/2h} dy \leq Ch^{-1}. \quad (4.19)$$

En combinant les équations (4.17), (4.18), (4.13) et (4.19) nous obtenons le résultat annoncé. ■

4.3 Estimation du résidu

Cette partie est consacrée à la démonstration du Théorème 4.2. Comme dans [58], la démonstration est basée sur le principe du maximum semiclassical [59, 60]. Avant de commencer la démonstration proprement dite, nous allons rappeler ce principe. En guise de préparation à l'application de ce résultat, nous démontrerons aussi une estimation de la résolvante modifiée.

4.3.1 Préliminaires

Nous avons déjà rappelé une forme modifiée du principe du maximum semiclassical au Chapitre 2 et nous allons en énoncer une nouvelle à présent. L'énoncé suivant est une conséquence immédiate du Lemme 1 de Stefanov [57].

Lemme 4.1 *Pour $0 < h < 1$, soient $0 < a(h) \leq b(h)$. Supposons que $F(z, h)$ est une fonction holomorphe en la variable z définie dans un voisinage de*

$$\Omega_0(h) = [a(h) - 5\omega(h), b(h) + 5\omega(h)] + i[-S(h)h^{-n-\epsilon}, 0],$$

où $0 < S(h) \leq \omega(h)h^{\frac{3n}{2}+2\epsilon}$, $\epsilon > 0$ et $\omega(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Supposons que $F(z, h)$ satisfait

$$|F(z, h)| \leq A \exp(Ah^{-n-1} \ln(1/h)) \text{ sur } \Omega_0(h), \quad (4.20)$$

$$|F(z, h)| \leq M(h) \text{ sur } [a(h) - \omega(h), b(h) + \omega(h)] \quad (4.21)$$

avec $M(h) \rightarrow +\infty$ quand $h \rightarrow 0$. Alors, il existe $h_0 > 0$ tel que

$$|F(z, h)| \leq 2e^3 M(h), \quad \forall z \in \tilde{\Omega}_0(h) := [a(h) - \omega(h), b(h) + \omega(h)] + i[-S(h), 0]$$

pour $0 < h < h_0$.

Remarquons que ce résultat n'est pas exactement le Lemme 1 de [57], puisque dans le résultat ci-dessus, l'hypothèse $|F(z, h)| \leq M(h)$ est faite sur l'axe réel. Néanmoins, il est très facile de voir que la démonstration donnée dans [57] est encore valable dans cette configuration. Nous laissons ce travail au lecteur.

Par ailleurs, avant de démontrer le Théorème 4.2, nous avons besoin de contrôler la norme de la résolvante de l'opérateur modifiée $(P_\mu(h) - z)^{-1}$ près du pôle $z_0(h)$. Ceci est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses du Théorème 4.2, nous pouvons trouver $\mu_0 > 0$, $h_0 > 0$ suffisamment petits et $C > 0$ tels que pour tous $0 < \mu < \mu_0$, $0 < h < h_0$ et $z \in \frac{3}{4}\Omega(h)$ nous avons*

$$\left\| \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} (P_\mu(h) - z)^{-1} \right\|_{L^2(\Gamma_\mu), L^2(\Gamma_\mu)} \leq C e^{Ch^{-n-1}}, \quad (4.22)$$

où $\frac{3}{4}\Omega(h)$ est le domaine

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\Omega(h) = \{z \in \mathbb{C}; |Re z - Re z_0(h)| \leq \frac{3}{4}h^{-\frac{3n+4}{2}} |Im z_0(h)|, \\ 0 \leq -Im z \leq \frac{3}{4}h^{-n-2} |Im z_0(h)|\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Démonstration. La démonstration repose sur les estimations établies par Tang et Zworski dans la démonstration du Lemme 1 de [59]. Le résultat que nous utilisons est le suivant :

$$\|(P_\mu(h) - z)^{-1}\|_{L^2(\Gamma_\mu), L^2(\Gamma_\mu)} \leq C e^{Ch^{-n} \log \frac{1}{g(h)}}, \quad \forall z \in \Omega(h) \setminus \bigcup_{z_j \in Res(P(h))} D(z_j, g(h)), \quad (4.24)$$

où g est une fonction quelconque vérifiant $0 < g(h) \ll 1$. Posons maintenant,

$$G_\mu(z, h) = \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} (P_\mu(h) - z)^{-1}.$$

Comme $z_0(h)$ est une résonance simple et isolée dans $\Omega(h)$, alors $G_\mu(\cdot, h)$ est holomorphe dans $\Omega(h)$. De ce fait, en utilisant le principe du maximum, il suffit de montrer que l'inégalité (4.22) a lieu sur le bord $\partial \frac{3}{4}\Omega(h)$. Dans ce but, nous posons $g(h) = e^{-d/h} \ll 1$ avec $d > 0$ bien choisi. Plus précisément, d'après le Théorème 1.2, nous pouvons choisir $d > 0$ de sorte que $|Im z_0(h)| \geq e^{-d/h}$. Avec ce choix pour $g(h)$ il est facile de démontrer que toutes les résonances sont à une distance plus grande que $g(h)$ de la frontière $\partial \frac{3}{4}\Omega(h)$. En effet, par définition de $\Omega(h)$,

$$dist(z_0(h), \partial \frac{3}{4}\Omega(h)) \geq \frac{3}{4}h^{-n-2} |Im z_0(h)| \geq \frac{3}{4}h^{-n-2} e^{-d/h} \geq g(h)$$

et il reste à montrer que ceci es vrai pour les autres résonances. Or, $z_0(h)$ est la seule résonance dans $\Omega(h)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \forall z \in \text{Res}(P(h)) \setminus \{z_0(h)\}, \text{dist}(z, \frac{3}{4}\Omega(h)) &\geq \text{dist}(\frac{3}{4}\Omega(h), \mathbb{C} \setminus \Omega(h)) \\ &\geq \frac{1}{4}h^{-n-2}|Im z_0(h)| \geq g(h) \end{aligned}$$

et ceci achève de montrer que la distance entre la frontière $\frac{3}{4}\Omega(h)$ et l'ensemble des résonances est supérieure à $g(h)$. Par suite, nous pouvons appliquer l'estimation (4.24) à tout point z du bord $\partial\frac{3}{4}\Omega(h)$ pour obtenir

$$\forall z \in \partial\frac{3}{4}\Omega(h), \|G_\mu(z, h)\|_{L^2(\Gamma_\mu), L^2(\Gamma_\mu)} \leq Ce^{Ch^{-n-1}}$$

ce qui achève la démonstration. ■

4.3.2 Démonstration du Théorème 4.2

La démonstration consiste à appliquer le Lemme 4.1 à une fonction convenablement choisie. Commençons par fixer $0 < E_1 < E_2$ et $\omega, \theta \in S^{n-1}$ tels que $\omega \neq \theta$. Nous supposons que $z_0(h)$ est une résonance simple de $P(h)$, telle que $0 < -Im z_0(h) < h^{\frac{3n+5}{2}}$, $E_1 \leq Re z_0(h) \leq E_2$. Nous supposons aussi que $z_0(h)$ est la seule résonance dans

$$\begin{aligned} \Omega(h) = \{z \in \mathbb{C}; |Re z - Re z_0(h)| \leq h^{-\frac{3n+4}{2}}|Im z_0(h)|, \\ 0 \leq -Im z \leq h^{-n-2}|Im z_0(h)|\}. \end{aligned}$$

Posons $a(h) = b(h) = Re z_0(h)$, $\omega(h) = \frac{3}{20}h^{-\frac{3n+4}{2}}|Im z_0(h)|$ et $S(h) = h^{-1}|Im z_0(h)|$. Alors $\Omega(h)$ peut s'écrire sous la forme

$$\Omega(h) = [a(h) - 5\omega(h), b(h) + 5\omega(h)] + i[-S(h)h^{-n-1}, 0].$$

De plus, $0 < S(h) \leq \omega(h)h^{\frac{3n}{2}+2\epsilon}$ avec $\epsilon = \frac{1}{2}$ et en utilisant le fait que $0 < |Im z_0(h)| < h^{\frac{3n+5}{2}}$, il est évident que $\omega(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Pour z dans $\Omega(h)$, nous posons

$$F(z, h) = \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} f(\theta, \omega, z, h).$$

Comme $z_0(h)$ est la seule résonance de $P(h)$ dans le domaine $\Omega(h)$ et que le pôle $z_0(h)$ est simple, nous sommes assurés que $F(z, h)$ est une fonction holomorphe en la variable z dans $\Omega(h)$. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous voulons appliquer le Lemme 4.1 à la fonction $F(z, h)$. Nous venons de vérifier que le domaine $\Omega(h)$ satisfait les hypothèses de ce lemme, de sorte qu'il nous reste uniquement à montrer que $F(\cdot, h)$ vérifie les estimations (4.20) et (4.21) avec $M(h) = h^{-\frac{n-1}{2}}$.

Démonstration de l'estimation (4.21) La démonstration repose sur la localisation spatiale que nous avons réalisée au chapitre précédent. Commençons par remarquer que pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons

$$\left| \frac{\lambda - z_0(h)}{\lambda - \bar{z}_0(h)} \right| = 1 \text{ et } |F(\lambda, h)| = |f(\theta, \omega, \lambda, h)|.$$

Or, d'après le Théorème 3.1, nous savons que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$|f(\theta, \omega, \lambda, h)| = \mathcal{O}(h^{-\frac{n-1}{2}}),$$

uniformément par rapport à $\lambda \in K$. Par suite $|F(\lambda, h)| = \mathcal{O}(h^{-\frac{n-1}{2}})$ sur K , ce qui termine de démontrer (4.21).

Démonstration de l'estimation (4.20) En premier lieu, choisissons $h_0 > 0$ tel que pour tout $0 < h < h_0$, $\Omega(h) \subset \Lambda_{d_2, \epsilon}$, où $\Lambda_{d_2, \epsilon}$ est défini par (4.2). Jusqu'à la fin de la démonstration, nous supposons $0 < h < h_0$. Pour $z \in \Omega(h)$ nous avons la décomposition

$$F(z, h) = \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} T_1(\theta, \omega, z, h) + \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} T_2(\theta, \omega, z, h).$$

Nous allons majorer successivement chaque terme du membre de droite de cette équation. Commençons par le terme $F_2(z, h) = \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} T_2(\theta, \omega, z, h)$. En utilisant (4.4), (4.5) et (4.6), il est clair que

$$|F_2(z, h)| \leq C \left\| \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} (P_\mu(h) - z)^{-1} \right\|_{L^2(\Gamma_\mu), L^2(\Gamma_\mu)}$$

pour $z \in \Omega(h)$. Comme $\tilde{\Omega}(h) \subset \frac{3}{4}\Omega(h)$, nous déduisons du Lemme 4.2 que

$$\forall z \in \tilde{\Omega}(h), |F_2(z, h)| \leq C e^{Ch^{-n-1}}. \quad (4.25)$$

Occupons nous maintenant du terme $F_1(z, h) = \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} T_1(\theta, \omega, z, h)$. Pour $z \in \Omega(h)$, nous avons $\left| \frac{z - z_0(h)}{z - \bar{z}_0(h)} \right| \leq 1$ et nous pouvons appliquer la Proposition 4.3 pour obtenir

$$\forall z \in \Omega(h), |F_1(z, h)| \leq |T_1(\theta, \omega, z, h)| \leq Ch^{-n} e^{C/h} \leq C e^{Ch^{-n-1}}$$

Cette estimation combinée avec (4.25) achève de démontrer (4.20).

Fin de la démonstration du Théorème. Les estimations (4.21) et (4.20) étant satisfaites pour notre choix de $F(\cdot, h)$, le Lemme 4.1 nous donne

$$|F(z, h)| \leq Ch^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \forall z \in \tilde{\Omega}(h) \quad (4.26)$$

avec

$$\tilde{\Omega}(h) = \left\{ z \in \mathbb{C}; |Re z - Re z_0(h)| \leq \frac{3}{20} h^{-\frac{3n+4}{2}} |Im z_0(h)|, \right. \\ \left. 0 \leq -Im z \leq 2 |Im z_0(h)| \right\}.$$

Nous écrivons ensuite,

$$f(\theta, \omega, z, h) = \frac{f^{res}(\theta, \omega, h)}{z - z_0(h)} + f^{hol}(\theta, \omega, z, h),$$

où $f^{hol}(\theta, \omega, z, h)$ est holomorphe par rapport à $z \in \Omega(h)$. Ainsi, nous obtenons immédiatement

$$f^{res}(\theta, \omega, h) = 2F(z_0(h), h)Im z_0(h),$$

et

$$f^{hol}(\theta, \omega, z, h) = \frac{z - \bar{z}_0(h)}{z - z_0(h)} F(z, h) - \frac{f^{res}(\theta, \omega, h)}{z - z_0(h)}.$$

En utilisant (4.26), il vient

$$|f^{res}(\theta, \omega, h)| \leq Ch^{-\frac{n-1}{2}} |Im z_0(h)|, \forall z \in \tilde{\Omega}(h).$$

De plus un calcul simple fournit l'identité suivante

$$f^{hol}(\theta, \omega, z, h) = F(z_0(h), h) + \frac{z - \bar{z}_0(h)}{z - z_0(h)} (F(z, h) - F(z_0(h), h)).$$

Or, $\frac{z - \bar{z}_0(h)}{z - z_0(h)}$ est borné sur $\partial\tilde{\Omega}(h)$ indépendamment de $h \in]0, 1]$. Nous déduisons alors de (4.26) et de la formule de Cauchy, que

$$|f^{hol}(\theta, \omega, z, h)| \leq Ch^{-\frac{n-1}{2}}, \forall z \in \tilde{\Omega}(h)$$

et la démonstration du Théorème 4.2 est complète. ■

Bibliographie

- [1] S. Agmon. *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser., **2**, 1975, pp. 151–218.
- [2] J. Aguilar et J. M. Combes. *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians*. Comm. Math. Phys., **22**, 1971, pp. 269–279.
- [3] S. Alinhac et P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Paris, Meudon, Savoirs Actuels, InterEditions, Editions du CNRS, 1991.
- [4] J-M. Bouclet. *Distributions Spéctrales pour des Opérateurs perturbés*. Thèse Univ. Nantes, 2000.
- [5] A. Bouzouina et D. Robert. *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observable*. Duke Math. J., **111**, n2, 2002, pp. 222–252.
- [6] V. Bruneau et V. Petkov. *Semiclassical resolvent estimates for trapping perturbations*. Comm. Math. Phys., **213**, n2, 2000, pp. 413–432.
- [7] N. Burq. *Lower bounds for shape resonances widths of long range Schrödinger operators*. Amer. J. Math., à paraître.
- [8] N. Burq. *Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries*. Int. Math. Res. Not., no5, 2002, pp. 221–241.
- [9] F. Cardoso et G. Vodev. *Uniform estimates of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume Riemannian manifolds. II*. Ann. Henri Poincaré, à paraître, 2002.
- [10] J. Dereziński et C. Gérard. *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems*. Berlin, Springer-Verlag, 1997.
- [11] M. Dimassi et J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
- [12] M. V. Fedoryuk. *One-dimensional scattering in the quasiclassical approximation*. Differential Equations 1, 1965, pp. 483–495.
- [13] S. Fujiié et T. Ramond. *Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **69**, n1, 1998, pp. 31–82.
- [14] S. Fujiié et T. Ramond. *Exact WKB analysis and the Langer modification with application to barrier top resonances*. In : *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear or non-linear* (Kyoto, 1998), pp. 9, 15–31. Kyoto Univ. Press, Kyoto, 2000.

BIBLIOGRAPHIE

- [15] S. Fujiié et T. Ramond. *Semiclassical behavior of the scattering phase near a critical value of the potential*. Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, no1212, 2001, pp. 18–31. Integral representations and twisted cohomology in the theory of differential equations (Japanese) (Kyoto, 2001).
- [16] C. Gérard. *Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*. Mém. Soc. Math. France (N.S.), no31, 1988, p. 146.
- [17] C. Gérard, Martinez A., et D. Robert. *Breit-Wigner formulas for the scattering phase and the total scattering cross-section in the semi-classical limit*. Comm. Math. Phys., **121**, n2, 1989, pp. 323–336.
- [18] C. Gérard et A. Martinez. *Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **306**, n3, 1988, pp. 121–123.
- [19] C. Gérard et A. Martinez. *Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **51**, n1, 1989, pp. 81–110.
- [20] C. Gérard et A. Martinez. *Semiclassical asymptotics for the spectral function of long-range Schrödinger operators*. J. Funct. Anal., **84**, n1, 1989, pp. 226–254.
- [21] C. Gérard et J. Sjöstrand. *Resonances en limite semiclassique et exposants de Lyapunov*. Comm. Math. Phys., **116**, n2, 1988, pp. 193–213.
- [22] A. Grigis et J. Sjöstrand. *Microlocal analysis for differential operators*. Cambridge, Cambridge University Press, 1994, iv+151p. An introduction.
- [23] B. Helffer et A. Martinez. *Comparaison entre les diverses notions de résonances*. Helv. Phys. Acta, **60**, n8, 1987, pp. 992–1003.
- [24] B. Helffer et J. Sjöstrand. *Résonances en limite semi-classique*. Mém. Soc. Math. France (N.S.), no24-25, 1986, pp. iv+228.
- [25] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*. Berlin, Springer-Verlag, 1983. Distribution Theory and Fourier analysis.
- [26] W. Hunziker. *Distortion analyticity and molecular resonance curves*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **45**, n4, 1986, pp. 339–358.
- [27] T. Ikebe et Y. Saitō. *Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operator*. J. Math. Kyoto Univ., **12**, 1972, pp. 513–542.
- [28] H. Isozaki et H. Kitada. *Modified wave operators with time-independent modifiers*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **32**, n1, 1985, pp. 77–104.
- [29] H. Isozaki et H. Kitada. *Scattering matrices for two-body Schrödinger operators*. Sci. Papers College Arts Sci. Univ Tokyo, **35**, n1, 1985, pp. 81–107.
- [30] V. Ivrii. *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*. Berlin, Springer-Verlag, 1998.
- [31] H. Jeffreys. *On the use of asymptotic approximations of Green's type when the coefficient has zeros*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **52**, 1956, pp. 61–66.

-
- [32] S. T. Kuroda. *Scattering theory for differential operators. I. Operator theory.* J. Math. Soc. Japan, **25**, 1973, pp. 75–104.
- [33] S. T. Kuroda. *Scattering theory for differential operators. II. Self-adjoint elliptic operators.* J. Math. Soc. Japan, **25**, 1973, pp. 222–234.
- [34] A. Lahmar-Benbernou. *Estimation des résidus de la matrice de diffusion associés à des résonances de forme. I.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **71**, n 3, 1999, pp. 303–338.
- [35] A. Lahmar-Benbernou et A. Martinez. *Semiclassical asymptotics of the residues of the scattering matrix for shape resonances.* Asymptot. Anal., **20**, n1, 1999, pp. 13–38.
- [36] A. Lahmar-Benbernou et A. Martinez. *On Helffer-Sjöstrand theory of resonances.* preprint Univ. Bologna, 2001.
- [37] P. D. Lax et R. S. Phillips. *Scattering theory.* New York, Academic Press, 1967.
- [38] A. Martinez. *Resonance Free Domains for Non-Analytic Potentials.* Preprint, Univ. di Bologna, 2001.
- [39] A. Martinez. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis.* New York, Springer-Verlag, 2002.
- [40] V. P. Maslov et M. V. Fedoryuk. *Semi-classical approximation in quantum mechanics.* Reidel Publishing company, 1981.
- [41] L. Michel. *Semi-classical limit of the scattering amplitude for trapping perturbations.* Asympt. Anal., à paraître.
- [42] L. Michel. *Semi-classical behavior of the scattering amplitude for trapping perturbations at fixed energy.* Preprint Univ. Bordeaux 1, 2001.
- [43] L. Michel. *Comportement asymptotique de l'amplitude de diffusion pour des perturbations captives.* C. R. Acad. Sci., Paris, **334**, 2002, pp. 655–660.
- [44] L. Michel. *Semi-classical estimate of the residue of the scattering amplitude for short range potentials.* Preprint Univ. Bordeaux 1, 2002.
- [45] S. Nakamura. *Scattering theory for the shape resonance model. I. Nonresonant energies.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **50**, n2, 1989, pp. 115–131.
- [46] S. Nakamura. *Scattering theory for the shape resonance model. II. Resonance scattering.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **50**, n2, 1989, pp. 133–142.
- [47] V. Petkov et M. Zworski. *Semi-classical estimates on the scattering determinant.* Ann. Henri Poincaré, **2**, n4, 2001, pp. 675–711.
- [48] T. Ramond. *Semiclassical study of quantum scattering on the line.* Comm. Math. Phys., **177**, n1, 1996, pp. 221–254.
- [49] M. Reed et B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV.* New York, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1978. Analysis of operators.

BIBLIOGRAPHIE

- [50] M. Reed et B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. III*. New York, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1979. Scattering theory.
- [51] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*. Boston, MA, Birkhäuser Boston Inc., 1987, x+329p.
- [52] D. Robert et H. Tamura. *Semiclassical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-sections*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **46**, n 4, 1987, pp. 415–442.
- [53] D. Robert et H. Tamura. *Asymptotic behavior of scattering amplitudes in semi-classical and low energy limits*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **39**, n1, 1989, pp. 155–192.
- [54] J. Sjöstrand. *A trace formula and review of some estimates for resonances*. In : Microlocal analysis and spectral theory (Lucca, 1996), pp. 377–437. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1997.
- [55] J. Sjöstrand. *Resonances for bottles and trace formulae*. Math. Nachr., **221**, 2001, pp. 95–149.
- [56] J. Sjöstrand et M. Zworski. *Complex scaling and the distribution of scattering poles*. J. Amer. Math. Soc., **4**, n4, 1991, pp. 729–769.
- [57] P. Stefanov. *Resonance expansions and Rayleigh waves*. Math. Res. Lett., **8**, n 1-2, 2001, pp. 107–124.
- [58] P. Stefanov. *Estimates on the residue of the scattering amplitude*. Preprint Purdue University, 2002.
- [59] S-H. Tang et M. Zworski. *From quasimodes to resonances*. Math. Res. Lett., **5**, n3, 1998, pp. 261–272.
- [60] S-H. Tang et M. Zworski. *Resonance expansions of scattered waves*. Comm. Pure Appl. Math., **53**, n10, 2000, pp. 1305–1334.
- [61] M. E. Taylor. *Pseudodifferential operators*. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1981.
- [62] F. Trèves. *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 2*. New York, Plenum Press, 1980. Fourier integral operators, The University Series in Mathematics.
- [63] B. R. Vaĭnberg. *Quasiclassical approximation in stationary scattering problems*. Funct. Anal. Appl., **11**, n4, 1977, pp. 247, 257.
- [64] B. R. Vaĭnberg. *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*. New York, Gordon & Breach Science Publishers, 1989. Translated from the Russian by E. Primrose.
- [65] G. Vodev. *Uniform estimates of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume Riemannian manifolds with cusps*. Preprint Univ. Nantes, 2001.
- [66] K. Yajima. *The quasiclassical limit of scattering amplitude. L^2 -approach for short range potentials*. Japan. J. Math. (N.S.), **13**, n1, 1987, pp. 77–126.

In this thesis, we study the scattering amplitude associated to the semi-classical Schrödinger operator, for short-range perturbations. In particular, we want to describe the behavior of the scattering amplitude when the semi-classical parameter h goes to 0. This problem is closely related with the nature of the trajectories of the Hamiltonian associated to our operator. In the case where every trajectory with energy λ leaves any compact set, we say that λ is non-trapping. For such energies, Robert and Tamura obtained an asymptotics of the scattering amplitude. The aim of this thesis, is to study the case of trapping energies.

In the first chapter, we recall some wellknown facts about semi-classical pseudo-differential calculus, resonances and Isozaki-Kitada's formula. We give also a detailed study of the Hamiltonian flow.

In the second chapter we prove an asymptotics of the scattering amplitude in the L^1 norm with respect to λ . This result holds under an escape condition for the incoming direction, which is less constraining than the non-trapping assumption.

In the third chapter, we obtain some results for fixed energy. For general non-trapping energy levels, we prove that the scattering amplitude is bounded polynomially with respect to h^{-1} . Under the additional hypothesis that there is no resonances exponentially close to the real axis, we obtain two results. First, we show that if we modify the potential in a suitable domain, the scattering amplitude is changed by a term of order $\mathcal{O}(h^\infty)$. Moreover, under the escape assumption introduced in Chapter 2, we give an asymptotics of the scattering amplitude.

The last chapter is devoted to the study of the residues of the scattering amplitude. Using the results of Chapter 3, we give a bound of the residue depending on h and the imaginary part of the associated resonance. This result is a generalization of recent works of Stefanov for compactly supported perturbations.

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions l'amplitude de diffusion associée à l'opérateur de Schrödinger semiclassique pour des potentiels de courte portée. En particulier, nous cherchons à décrire le comportement de l'amplitude de diffusion quand le paramètre semiclassique h tend vers 0. Une telle étude est étroitement liée avec la nature des trajectoires du système Hamiltonien associé à notre opérateur. Dans le cas où toutes les trajectoires d'énergie λ fixée s'échappent quand le temps t tend vers $\pm\infty$, on dit que λ est non-captif. Pour de telles énergies, Robert et Tamura ont obtenu une asymptotique de l'amplitude de diffusion. Le but de cette thèse est d'étudier le cas d'énergies captives.

Dans le premier chapitre, nous rappelons des résultats connus sur le calcul pseudodifférentiel semiclassique, les résonances et la formule de représentation de Isozaki-Kitada. Nous y menons aussi une étude détaillée du flot Hamiltonien.

Dans le second chapitre nous donnons une asymptotique de l'amplitude de diffusion en norme L^1 d'énergie. Ce résultat est valable sous une hypothèse d'échappement dans la direction entrante, beaucoup plus faible que l'hypothèse de non-capture.

Dans le troisième chapitre, nous obtenons des résultats à énergie fixée. Pour des énergies captives quelconques, nous démontrons que l'amplitude de diffusion est bornée polynômialement par rapport à h^{-1} . Sous l'hypothèse supplémentaire qu'il n'y a pas de résonances exponentiellement proches de l'axe réel, nous obtenons deux résultats. Tout d'abord, nous démontrons que si nous modifions le potentiel dans une région convenable, la perturbation de l'amplitude de diffusion est d'ordre $\mathcal{O}(h^\infty)$. De plus, sous l'hypothèse d'échappement du Chapitre 2, nous démontrons une asymptotique de l'amplitude de diffusion.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des résidus de l'amplitude de diffusion pour des potentiels de courte portée. À l'aide des résultats du Chapitre 3, nous donnons une borne du résidu en fonction de h et de la partie imaginaire de la résonance associée. Ce résultat généralise des travaux récents de Stefanov pour des perturbations à support compact.

Mots-clés : Analyse semiclassique, amplitude de diffusion, équation de Schrödinger, énergies captives, résonances, résolvante.