

THÈSE

PRÉSENTÉE À

# L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par Sébastien LONNÉ

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

---

**Modélisation de la propagation ultrasonore dans les matériaux  
composites obtenus par le procédé de fabrication RTM  
(Resin Transfer Molding)**

---

Soutenue le 27 Novembre 2003,

après avis de :

M <sup>lle</sup>	Catherine POTEL, Professeur, Université du Maine	Rapporteurs
M.	Jean-Marc CONOIR, Directeur de recherche CNRS, Université du Havre	

devant la commission d'examen formée de :

M.	Bertrand AUDOIN,	Professeur, Université Bordeaux 1
M.	Jean-Marc CONOIR,	Directeur de Recherche CNRS, Université du Havre
M.	Marc DESCHAMPS,	Directeur de Recherche CNRS, Université Bordeaux 1
M.	Alain LHÉMERY,	Ingénieur de Recherche CEA, HDR, Saclay
M <sup>me</sup>	Françoise THÉVENOT,	Ingénieur Dassault-Aviation, Argenteuil
M <sup>lle</sup>	Catherine POTEL,	Professeur, Université du Maine



À Clément, mon grand-père,



Bien des personnes m'ont permis d'accomplir le travail de recherche aboutissant à ce manuscrit.

J'adresse mes remerciements à M. Hervé Trétout pour m'avoir accueilli chez Dassault-Aviation au sein de son équipe du CDE d'Argenteuil, et m'avoir permis de participer à quelques campagnes expérimentales dans un cadre industriel. Je tiens également à remercier Mme Françoise Thévenot qui a encadré avec soin l'ensemble de mes travaux.

J'adresse ensuite mes vifs remerciements à MM. Philippe Benoist et Pierre Calmon pour m'avoir accueilli au CEA/SISC/LSUT et pour m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet de recherche.

Je tiens à remercier chaleureusement et amicalement M. Alain Lhémy pour son encadrement de mes travaux au CEA. Il m'est impossible de décrire en quelques lignes tout ce qu'il m'a apporté durant ces trois dernières années, et je tiens donc à souligner simplement la disponibilité dont il a fait preuve, la confiance qu'il a su me témoigner, et la valeur des discussions que nous avons pu avoir.

Je remercie M. Bertrand Audoin, qui a accepté de tenir le rôle de directeur de thèse à l'université Bordeaux 1, pour m'avoir encouragé tout au long de ce travail. Ses conseils et son expérience scientifique m'ont été particulièrement utiles.

Je tiens à remercier sincèrement Mlle Catherine Potel et M. Jean-Marc Conoir d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je suis très honoré de l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard du travail réalisé.

Je remercie également M. Marc Deschamps d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Mes remerciements vont ensuite à l'ensemble des personnes que j'ai connu au CEA durant cette thèse, et plus particulièrement aux membres du LSUT et du LMUS ainsi qu'à tous mes camarades thésards, qui ont tous contribué à établir des conditions et une ambiance de travail des plus agréables.

Je pense également à Jean-Philippe, Luc, Laurent et Karim, qui ont partagé ma vie de thésard à travers la co-location depuis que je suis arrivé à Paris et ont ainsi facilité mon arrivée dans le Grand Nord. J'espère qu'ils n'en garderont pas de séquelles, mais au contraire une collection de bons souvenirs.

Je souhaite ensuite faire un clin d'œil à mes copains de toujours, en adressant une pensée particulière au club « desgratuits ». Ils se reconnaîtront.

Je terminerais en m'adressant à Pauline, à qui je n'ai pas offert que des moments faciles. Mes pensées amoureuses lui sont consacrées.

Et enfin merci à toute ma famille, merci Anne-Lise, et surtout merci papa, merci maman, c'est à vous que je dois tout ça...

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I - ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b> .....	<b>7</b>
1 LE PHÉNOMÈNE D'ABSORPTION PAR EFFET VISCOÉLASTIQUE.....	8
1.1 <i>Définition et principaux modèles rhéologiques</i> .....	8
1.2 <i>Approche temporelle</i> .....	13
1.3 <i>Approche empirique</i> .....	15
2 LE PHÉNOMÈNE DE DIFFUSION PAR LES FIBRES.....	17
3 CONCLUSION .....	19
<b>CHAPITRE II - MODÉLISATION DE L'ATTÉNUATION ULTRASONORE DANS UN MATÉRIAU COMPOSITE À FIBRES UNIDIRECTIONNELLES</b> .....	<b>21</b>
1 PRÉLIMINAIRE : MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION STATIQUE DANS UN COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL .....	22
1.1 <i>Concept d'homogénéisation</i> .....	22
1.2 <i>Méthode d'homogénéisation</i> .....	23
2 DIFFRACTION D'UNE ONDE S//, P OU S $\perp$ PAR UN CYLINDRE ÉLASTIQUE INFINI .....	24
2.1 <i>Cas scalaire : onde incidente S//</i> .....	26
2.2 <i>Cas vectoriel : onde incidente P ou S<math>\perp</math></i> .....	27
3 CALCUL DE L'ATTÉNUATION TOTALE PAR UN MODÈLE DE DIFFRACTION SIMPLE.....	29
3.1 <i>Équations générales</i> .....	30
3.2 <i>Perte d'énergie par diffusion</i> .....	31
3.3 <i>Perte d'énergie par absorption de la matrice</i> .....	32
3.4 <i>Coefficient d'atténuation total de la couche unidirectionnelle</i> .....	33
3.5 <i>Application au cas d'une onde incidente S//</i> .....	34
3.6 <i>Résultats</i> .....	35
4 CALCUL DE L'ATTÉNUATION TOTALE PAR UN MODÈLE DE DIFFUSION MULTIPLE.....	36
4.1 <i>Présentation du modèle développé</i> .....	37
4.2 <i>Cas scalaire : onde incidente S//</i> .....	39
4.3 <i>Cas vectoriel : ondes incidente P ou S<math>\perp</math></i> .....	43
4.4 <i>Résultats</i> .....	45
5 COMPARAISON DES DIFFÉRENTS MODÈLES THÉORIQUES ÉTUDIÉS .....	48
6 COMPARAISON DU MODÈLE DE YANG ET MAL MODIFIÉ À DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	52
6.1 <i>Cas d'une onde incidente S//</i> .....	52
6.2 <i>Cas d'une onde incidente P ou S<math>\perp</math></i> .....	54
7 CONCLUSION .....	56

<b>CHAPITRE III - HOMOGENÉISATION D'UN PLI.....</b>	<b>57</b>
1 GÉNÉRALITÉS.....	58
2 MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION .....	59
3 APPLICATION À UN PLI CARBONE / ÉPOXY CARACTÉRISTIQUE DES RTM .....	64
4 APPLICATION DE POSTMA À UN EMPILEMENT PARTICULIER .....	67
5 CONCLUSION .....	68
<b>CHAPITRE IV - ÉTUDE DE LA PROPAGATION ULTRASONORE DANS LES PIÈCES PLANES RTM. ....</b>	<b>69</b>
1 PRÉLIMINAIRE : RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES PRÉCÉDENTS CHAPITRES.....	69
2 PROPAGATION ULTRASONORE DANS UN MULTICOUCHE .....	73
2.1 <i>Description d'un modèle géométrique</i> .....	73
2.2 <i>Modèle de propagation mono-dimensionnel</i> .....	75
3 INFLUENCE DES VARIATIONS MICRO-STRUCTURALES D'UN MULTICOUCHE SUR SA FONCTION DE TRANSFERT GLOBALE .....	77
3.1 <i>Influence du nombre de couches</i> .....	77
3.2 <i>Influence de la régularité des épaisseurs des couches</i> .....	81
4 ÉTUDE STATISTIQUE .....	83
4.1 <i>Procédé de tirage aléatoire de configurations multicouches</i> .....	83
4.2 <i>Étude statistique de l'ensemble des fonctions de transfert correspondantes</i> .....	86
5 INTÉGRATION DANS LE LOGICIEL CIVA DES MODÈLES DÉVELOPPÉS .....	93
5.1 <i>Définition d'un composite fibreux à deux phases</i> .....	93
5.1.1 Élasticité .....	93
5.1.2 Atténuation .....	94
5.2 <i>Définition d'un pli composé de différentes couches unidirectionnelles</i> .....	94
5.2.1 Élasticité .....	94
5.2.2 Atténuation .....	94
<b>CONCLUSIONS.....</b>	<b>95</b>
<b>ANNEXE A : HOMOGENÉISATION DANS UNE COUCHE COMPOSITE UNIDIRECTIONNELLE .....</b>	<b>99</b>
<b>ANNEXE B : CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES DES MATÉRIAUX UTILISÉS POUR TOUTES LES APPLICATIONS NUMÉRIQUES. ....</b>	<b>103</b>
<b>ANNEXE C : DIFFRACTION PAR UN CYLINDRE INFINI PLACÉ DANS UNE MATRICE INFINIE .....</b>	<b>105</b>
<b>ANNEXE D : COMPLÉMENTS SUR LE SCHEMA ITÉRATIF DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE DIFFUSION MULTIPLE .....</b>	<b>107</b>
<b>ANNEXE E : DÉMONSTRATION DES RELATIONS RELIANT LES CONTRAINTES AUX POTENTIELS DE DÉPLACEMENT EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES.....</b>	<b>109</b>
<b>ANNEXE F : COEFFICIENTS D'ÉLASTICITÉ D'UN PLI HOMOGENÉISÉ PAR LA MÉTHODE DE POSTMA .....</b>	<b>113</b>
<b>ANNEXE G : MÉTHODE DE THOMSON/HASKELL ET COEFFICIENTS R ET T DANS UN CAS UNIDIMENSIONNEL .....</b>	<b>115</b>
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>	<b>121</b>

# Introduction

Les matériaux composites sont de nos jours de plus en plus utilisés dans l'industrie et sont présents dans des secteurs d'application très variés : bâtiment, transports (spatial, aérien, maritime, routier, ferroviaire), sports et loisirs, mécanique générale, ou encore électricité et électronique.

On dit qu'un matériau est un matériau composite lorsqu'il est constitué de deux ou plusieurs éléments distincts et non miscibles dont les caractéristiques se combinent pour réaliser un matériau ayant des propriétés particulières en réponse à un besoin spécifique.

L'une des grandes familles de matériaux composites regroupe ceux constitués de deux phases : un matériau fibreux, jouant le rôle de renfort, et un matériau résineux, appelé la matrice. C'est à eux que nous allons nous intéresser plus particulièrement dans ce travail. Ces matériaux peuvent par un assemblage judicieux de leurs composants acquérir un ensemble de propriétés mécaniques intéressantes : bonne tenue en fatigue, absence de corrosion, et avant tout une faible masse et une résistance et rigidité spécifiques élevées.

Ces deux dernières propriétés présentent notamment un grand intérêt dans l'industrie aéronautique. En effet, il est évident que les pièces structurales d'un avion, comme les éléments de fuselage ou de voilure, sont d'autant plus performantes qu'elles sont légères et résistantes d'un point de vue mécanique. Ceci peut être obtenu en utilisant une matrice polymérique dont la masse volumique est faible, contenant par exemple des fibres de carbone de faible densité également, mais surtout possédant une résistance mécanique élevée. En disposant ces fibres dans une ou plusieurs directions privilégiées de l'espace, on aboutit à un matériau composite dont la densité reste faible et bénéficiant d'une grande rigidité dans les directions choisies. On peut donc ainsi adapter la tenue mécanique du composite à un besoin industriel bien spécifique.

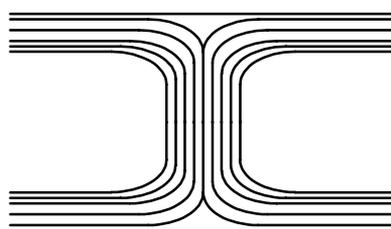
Comme tous les matériaux utilisés dans le milieu industriel, les matériaux composites doivent être caractérisés et contrôlés, afin de répondre à des règles de qualité et de sécurité. Dans le

domaine aéronautique, on fait appel au Contrôle Non Destructif (CND), et notamment au CND par ultrasons. Son principe est d'émettre une onde ultrasonore dans la pièce à contrôler dont la propagation va être influencée par la présence d'éventuels défauts et de mesurer cette onde à l'aide d'un récepteur après sa propagation dans la zone contrôlée. L'interprétation de cette mesure permet alors de détecter la présence de défauts ou non, et de remonter à leur nature et leur dimension.

Chez Dassault Aviation, au Centre de Développement Exploratoire d'Argenteuil, sont développées plusieurs méthodes de CND pour différents matériaux, dont les matériaux composites, obtenus grâce à divers procédés de fabrication. Parmi les procédés de fabrication, le procédé « RTM » (Resin Transfer Molding) est assez particulier. Il conduit à des pièces<sup>1</sup> dont la microstructure est très complexe. Ces pièces sont constituées par un arrangement de plis dans un moule ayant la géométrie souhaitée dans lequel on injecte une résine sous pression. Chaque pli est formé de plusieurs couches de fibres « assemblées » par des fibres de verre, et désorientées les unes par rapport aux autres d'un angle donné. Plusieurs possibilités d'orientations relatives des couches peuvent être envisagées selon les propriétés recherchées :

- fibres unidirectionnelles : on privilégie ainsi une direction de rigidité,
- fibres coplanaires orientées dans des directions particulières, comme par exemple  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$ .

Les différents plis sont cousus entre eux par des fibres de kevlar et sont enfin recouverts d'une poudre d'époxy qui permet, à température élevée, de « pré-polymériser » la structure et ainsi de la rigidifier avant l'injection de la résine dans tout le reste du moule. L'intérêt majeur de ce procédé de fabrication est qu'il permet de réaliser des pièces composites de géométrie aussi complexe qu'on le souhaite. Par exemple, des pièces de renforts d'ailes d'avion dont la forme est représentée sur la Figure 1 sont fabriquées chez Dassault.



*Figure 1 : Pièce de renfort d'aile d'avion, de géométrie complexe, obtenue par le procédé de fabrication RTM.*

---

<sup>1</sup> Par abus de langage, on appellera dans tout le reste de ce document « composite RTM » ou tout simplement « RTM » les pièces composites obtenues par le procédé de fabrication RTM.

De plus le procédé RTM offre la possibilité de construire des pièces de grandes dimensions, et « monobloc ». La pièce représentée sur la Figure 1 peut donc être construite en une seule fois, ce qui serait impossible avec d'autres procédés « classiques » de fabrication des composites.

Les formes géométriques auxquelles nous nous intéressons dans ce travail sont des plaques. En effet, étant donné la complexité de la microstructure des composites RTM et des phénomènes mis en jeu lors de la propagation des ondes ultrasonores en leur sein, nous limiterons notre étude à ce type de pièce. Ces plaques sont constituées de fibres de carbone et de résine époxy. Chaque pli du composite RTM est formé de trois couches unidirectionnelles de carbone contenant environ 65% de fibres, désorientées des angles  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$ , et  $-45^\circ$ . Le premier angle correspond à la couche supérieure de l'empilement. En terme de dimensions, les fibres de carbone ont un diamètre de  $7\ \mu\text{m}$ , et l'épaisseur d'un pli est d'environ  $0,5\ \text{mm}$ . Enfin, l'épaisseur des plaques que nous avons pu voir varie de  $2\ \text{mm}$  à  $30\ \text{mm}$ .

Les étapes de formation du composite RTM peuvent être schématisées comme sur la figure suivante :

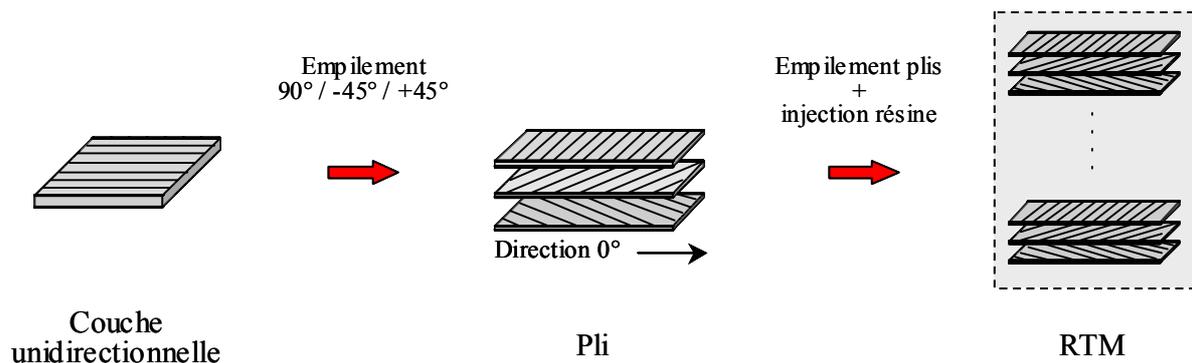


Figure 2 : Schématisation du procédé de fabrication RTM.

Ces différentes étapes induisent un aspect multi-échelles du matériau : couche, pli, multi-plis.

Pour visualiser la microstructure de matériaux RTM, on peut observer des micrographies d'échantillons prélevés en différentes zones de plaques. Par exemple la Figure 3 correspond à une plaque de  $2\ \text{mm}$  d'épaisseur constituée d'un assemblage de quatre plis. Cette micrographie illustre bien l'irrégularité de la microstructure des composites RTM. On peut noter en particulier la présence éventuelle de porosités, résultant de l'injection sous pression de la résine, ou de zones d'amas de résine. Remarquons également la forte densité de fibres dans les plis.

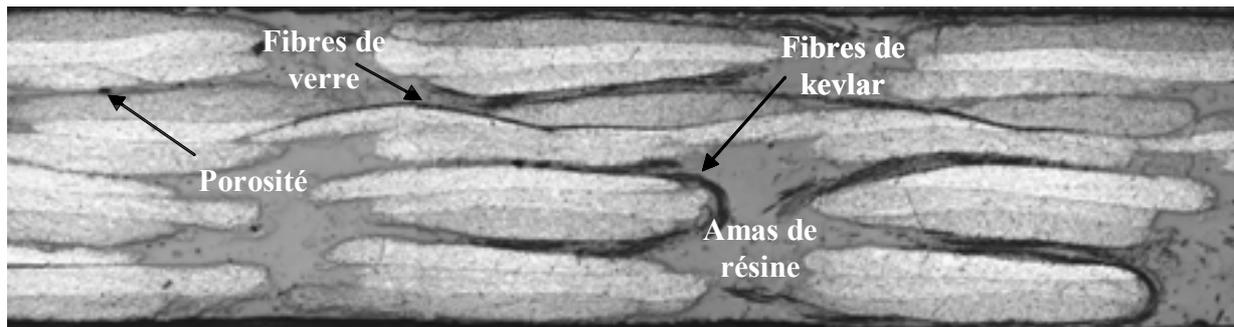


Figure 3 : Micrographie d'une plaque RTM de 2 mm d'épaisseur, constituée de quatre plis (1 pli = 3 couches).

Il y a principalement deux dispositifs expérimentaux mis en place chez Dassault pour contrôler les composites RTM, permettant de réaliser des mesures en réflexion ou des mesures en double transmission (Figure 4).

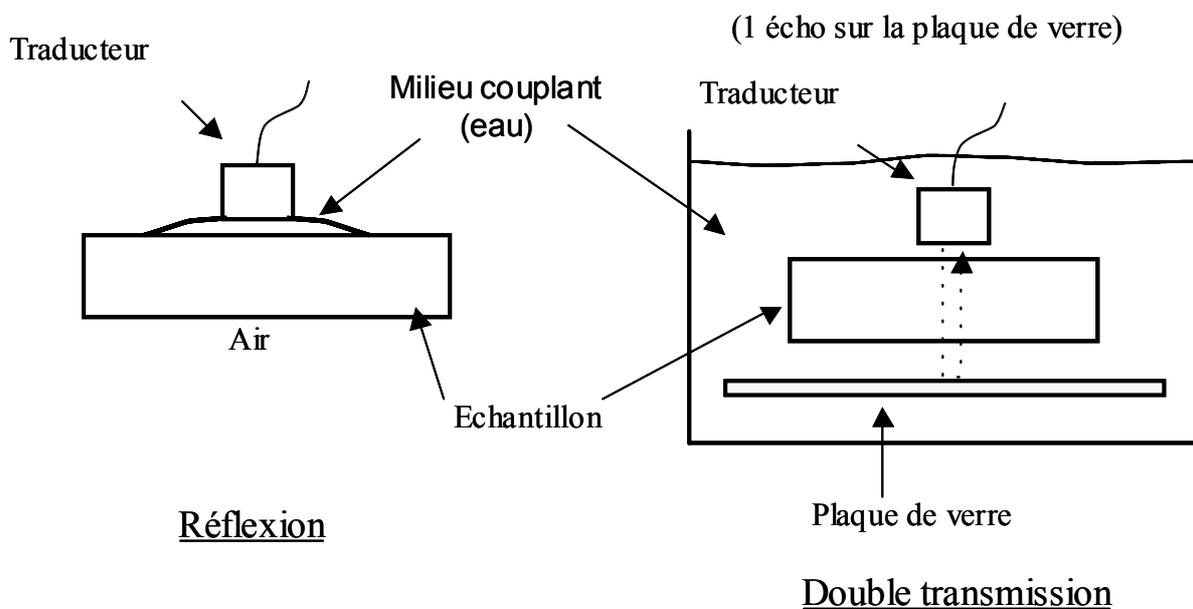


Figure 4 : Dispositifs expérimentaux de contrôle des RTM chez Dassault.

Ces mesures sont effectuées généralement à la fréquence de 5 MHz. On fait un balayage du traducteur sur la pièce et on cherche à évaluer l'atténuation de l'écho revenant du fond de la pièce dans le cas de mesures en réflexion, ou de la plaque de verre dans le cas de mesures en double transmission. On construit pour cela des cartographies C-scans<sup>2</sup> mettant en évidence

<sup>2</sup> Type d'imagerie ultrasonore : lors du balayage spatial de la surface d'une pièce par un traducteur, un signal est détecté en réception pour chaque position du traducteur. Le C-scan représente alors l'amplitude maximale de ce signal pour chaque position du traducteur déplacé en translation suivant deux axes.

selon les pièces contrôlées certaines zones de variations d'atténuation censées signifier la présence de défauts (porosités par exemple). Si on prélève des échantillons sur les plaques contrôlées dans les zones présentant ces variations d'atténuation et qu'on les observe par micrographie, on ne trouve pas forcément de corrélation entre ces variations d'atténuation et la présence de défauts. Autrement dit, on peut retrouver des variations d'atténuation du même ordre dans une zone parfaitement saine ou dans une zone comportant des défauts (en général porosités). Quantitativement, les expériences menées chez Dassault ont mis en évidence des écarts d'amplitude pouvant aller jusqu'à 15 dB entre différentes zones saines d'une même plaque RTM.

L'un des objectifs de cette thèse est d'expliquer ces variations de l'atténuation dans les composites RTM, et ce grâce à la modélisation de la propagation ultrasonore dans les RTM.

Ainsi, des moyens de modélisation spécifiques aux RTM doivent être développés, en s'intéressant à deux aspects : d'une part la modélisation de l'atténuation, et d'autre part la prédiction de la propagation dans des pièces issues de ce procédé de fabrication.

Dans le service d'instrumentation et de simulation pour le contrôle non destructif du CEA Saclay, où j'ai été accueilli pour effectuer ce travail de thèse, est développé un logiciel de CND appelé CIVA, comprenant une partie modélisation de contrôles par ultrasons, elle-même divisée en deux parties : un module pour le calcul de champ, appelé Champ-Sons (Réf. [1, 2]), et un module pour l'interaction du faisceau ultrasonore avec le défaut, appelé Mephisto (Réf. [3]). Champ-Sons permet à l'heure actuelle de simuler le champ ultrasonore dans un grand nombre de pièces aussi bien isotropes qu'anisotropes, homogènes ou hétérogènes, et éventuellement multicouche avec des interfaces planes ou non.

Cette thèse s'inscrit dans ce contexte de développement, et doit permettre de simuler un champ ultrasonore dans un composite RTM, ce qui signifie être capable de prendre en compte les contraintes propres à la simulation de la propagation des ondes élastiques dans ces matériaux. Parmi ces contraintes, il faudra tenir compte de géométries irrégulières, comme nous l'avons vu sur la micrographie présentée sur la Figure 3, ce qui n'est pas le cas en général des modèles utilisés pour les composites « classiques », qui supposent une géométrie régulière et des interfaces parfaitement parallèles. De plus, nous devons prendre en compte l'atténuation, résultant de nombreux phénomènes plus ou moins complexes. En particulier, nous connaissons les phénomènes élémentaires d'atténuation comme la viscoélasticité et la diffusion, auxquels nous serons forcément confrontés dans les RTM puisque ceux-ci sont constitués d'époxy, qui est un matériau viscoélastique, et de fibres de carbone, qui jouent le rôle de diffuseurs. Une étude bibliographique de ces phénomènes sera donc indispensable.

Nous serons alors amenés à développer des modèles physiques rendant compte de ces phénomènes élémentaires, et nous devons déterminer comment les prendre en compte de façon simultanée.

Ainsi, ce document va s'articuler autour des chapitres suivants. Tout d'abord, nous mènerons une étude bibliographique sur les phénomènes mis en jeu lors de la propagation dans les matériaux composites RTM, et notamment sur les différents modèles théoriques permettant de traiter ces phénomènes. Nous devons à l'issue de cette étude établir des choix de modélisation pour mener à bien notre travail, ce qui nous amènera à un deuxième chapitre traitant de la modélisation de l'atténuation dans les composites carbone / époxy unidirectionnels. En effet, nous avons vu dans cette introduction que les étapes du procédé de fabrication d'un RTM induisaient un aspect multi-échelles de ces matériaux. Il est donc naturel de commencer par étudier les couches fibreuses unidirectionnelles, avant de s'intéresser dans un troisième chapitre à l'échelle supérieure qui consiste à étudier un pli (rappelons-le, un pli est un ensemble de couches). Puis, dans le quatrième chapitre nous verrons comment étudier la propagation ultrasonore dans un composite RTM. Nous pourrons enfin conclure sur le travail que nous avons accompli.

# Chapitre I

## Étude bibliographique

Le problème industriel à l'origine de cette thèse nous conduit à l'étude de la modélisation de la propagation ultrasonore dans les matériaux composites RTM. Or la propagation d'ondes élastiques dans de tels matériaux met en jeu un grand nombre de phénomènes physiques. Nous devons donc commencer par identifier ces phénomènes.

Tout d'abord, il existe un certain nombre de phénomènes généralement rencontrés lors du contrôle par ultrasons d'un matériau, qui ne sont pas à proprement parler liés aux propriétés du matériau dans lequel se propagent les ondes. Par exemple, on rencontre un effet lié à l'ouverture (ou diffraction) du traducteur à la fois en émission et en réception : le faisceau borné qui est issu du traducteur est décomposé en une propagation selon différentes directions. Le signal résultant est alors obtenu par un effet de « moyennage » sur les différents trajets. Cependant, nous n'allons pas nous intéresser à ces phénomènes dans ce chapitre bibliographique. En effet, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre d'introduction, l'un des objectifs de cette thèse est de développer des moyens de modélisation spécifiques aux matériaux RTM dans le cadre d'un logiciel de simulation développé au CEA, et pour lequel ces phénomènes sont connus et pris en compte sur le plan de la modélisation. Intéressons-nous donc plus particulièrement aux phénomènes propres à la propagation dans les composites RTM.

On peut noter différents phénomènes physiques directement liés au procédé de fabrication des matériaux RTM. En effet, lorsqu'on injecte la résine sous pression dans le moule, il peut se former à certains endroits de la pièce des bulles de gaz entraînant des zones de porosités. L'atténuation sera alors accentuée dans de telles zones à cause de la diffraction des ondes par

les bulles. Lors de l'injection, il peut se créer également une certaine ondulation des plis accompagnée d'amas de résine (voir Figure 3 du chapitre d'introduction), d'où un aspect hétérogène du milieu de propagation faisant intervenir des coefficients de transmission. De plus, par rapport à une situation où les interfaces sont parfaitement parallèles, les ondulations qui sont couramment constatées peuvent être à l'origine de variations de ces coefficients de transmission et résulter en une apparente modification de l'atténuation. Mais encore une fois, l'ensemble de ces phénomènes peut être pris en compte dans le logiciel de simulation développé au CEA.

Les matériaux RTM auxquels on s'intéresse dans ce travail sont des composites carbone / époxy. Ceux-ci ne diffèrent des composites carbone / époxy classiques que par leur procédé de fabrication, qui rend leur microstructure très complexe. Ainsi, comme tous les composites classiques du même type, ils engendrent une atténuation des ondes élastiques qui s'y propagent, due à l'absorption par effet viscoélastique de la matrice et à la diffraction (diffusion)<sup>3</sup> simple (ou multiple) par les fibres de carbone contenues dans cette matrice. De plus, en raison de la symétrie plus ou moins complexe des différents plis, le milieu de propagation est anisotrope.

Ce chapitre bibliographique va donc être naturellement consacré à l'étude du phénomène d'atténuation dans les matériaux RTM, résultant des phénomènes d'absorption et de diffusion.

## **1 Le phénomène d'absorption par effet viscoélastique**

### ***1.1 Définition et principaux modèles rhéologiques***

Quand un système parfaitement élastique est déformé par l'application d'une force externe, l'énergie dépensée par la force durant la déformation est emmagasinée dans le matériau. Quand la force externe est supprimée, l'énergie accumulée est libérée et le matériau oscille autour de sa position d'équilibre (le système est non amorti).

Dans un matériau parfaitement plastique, toute l'énergie dépensée par la force externe est dissipée et aucune énergie n'est stockée dans le matériau. La suppression de la force externe laisse donc le matériau dans son état déformé (système complètement amorti).

---

<sup>3</sup> Pour éviter toute ambiguïté possible dans le reste de ce document quant à l'emploi des termes diffusion ou diffraction, nous nous efforcerons de suivre la règle suivante : lorsqu'il sera question du phénomène physique en général, nous utiliserons le terme diffusion, mais nous parlerons plutôt de diffraction par un objet (et non diffusion par un objet).

Cependant, les matériaux usuels ne sont ni parfaitement élastiques ni parfaitement plastiques, mais possèdent en partie chacune de ces deux propriétés : ce sont des matériaux viscoélastiques.

La rhéologie théorique s'attache à définir des modèles mathématiques plus ou moins simples rendant compte du comportement des solides sous des sollicitations. Les modèles les plus simples sont des modèles à un seul paramètre :

- solide élastique de Hooke, avec contrainte linéairement proportionnelle à la déformation :

$$\sigma = C \varepsilon, \quad (\text{I.1})$$

où  $\sigma$  est la contrainte uni-axiale,  $\varepsilon$  est la déformation uni-axiale associée, et  $C$  est le module d'élasticité reliant  $\sigma$  et  $\varepsilon$ .

- amortisseur visqueux de Newton, avec contrainte linéairement proportionnelle à la vitesse de déformation :

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (\text{I.2})$$

où  $\eta$  est le coefficient de viscosité reliant contrainte et vitesse de déformation.

Parmi les modèles un peu plus compliqués, rendant mieux compte du comportement des solides réels, on trouve les modèles à deux paramètres :

- le modèle de MAXWELL (Figure I.1), qui associe en série un ressort (élasticité) et un amortisseur à fluide visqueux.

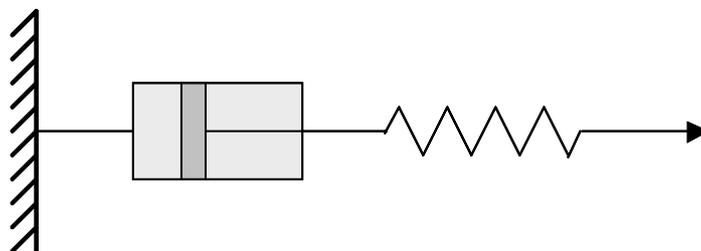


Figure I.1 : Modèle rhéologique de Maxwell.

- le modèle de Kelvin-Voigt, qui permet une représentation complexe de la raideur et de l'amortissement pour une excitation sinusoïdale (Réf. [4]).

C'est ce modèle auquel on s'intéresse plus particulièrement ici car il est fréquemment utilisé dans la littérature pour modéliser la viscoélasticité dans les solides. Il est schématisé par l'association en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur à fluide visqueux (Figure I.2).

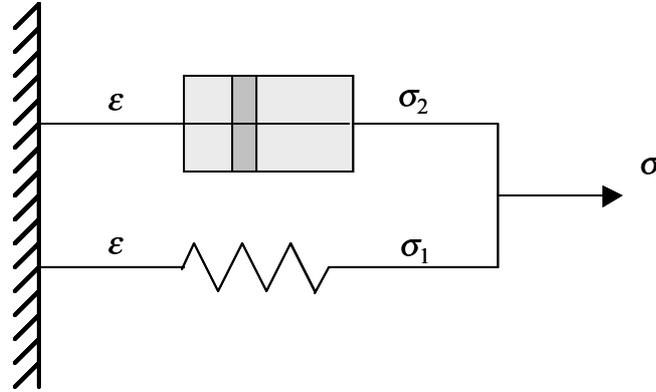


Figure I.2 : Modèle de Kelvin-Voigt.

La contrainte globale de traction uni-axiale appliquée au système ressort / amortisseur visqueux en parallèle est égale à la somme des contraintes de chaque élément :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (\text{I.3})$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes induites respectivement dans le ressort et l'amortisseur (Figure I.2).

On introduit les lois de Hooke (I.1) et de Newton (I.2) ( $\eta$  coefficient de viscosité) dans cette relation et on obtient :

$$\sigma = C\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (\text{I.4})$$

Or dans un modèle de propagation d'onde, les variables de champ (déplacement, déformation, contrainte) sont généralement exprimées comme fonctions harmoniques du temps, soit :

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \sigma = \hat{\sigma} e^{i\omega t}. \quad (\text{I.5})$$

On recherche une relation entre les contraintes et les déformations du type  $\hat{\sigma} = \hat{C}(\omega)\hat{\varepsilon}$ , obtenue en introduisant dans (I.4) les relations (I.5). Le modèle de Kelvin-Voigt est donc caractérisé par la relation suivante dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{C}(\omega) = C + i\omega\eta. \quad (\text{I.6})$$

On définit de même un nombre d'onde complexe  $k^*(\omega)$  tel que  $k^*(\omega) = k - i\alpha$ , où  $k$  est le nombre d'onde,  $\alpha$  est le coefficient d'atténuation, et  $*$  désigne la notation complexe. En

introduisant une solution en onde plane longitudinale dans l'équation d'onde unidimensionnelle (1D), on obtient une équation complexe dont on peut séparer les parties réelles et imaginaires (Réf. [5]) :

$$\begin{cases} C(k^2 - \alpha^2) + 2\alpha k \omega \eta = \rho \omega^2 \\ i((k^2 - \alpha^2)\omega \eta - 2\alpha k C) = 0 \end{cases} \quad (I.7)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du milieu de propagation considéré,  $C$  et  $\eta$  sont le module d'élasticité et le coefficient de viscosité définis précédemment, et  $\omega$  est la pulsation (appelée aussi fréquence angulaire et définie par  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  étant la fréquence).

De façon générale, le comportement mécanique d'un matériau viscoélastique peut être représenté par un tenseur d'élasticité  $\overline{\overline{C}}$  ainsi qu'un tenseur d'amortissement  $\overline{\overline{\eta}}$  (voir par exemple Réf. [5]). Si on considère que la traction uni-axiale est appliquée au système ressort / amortisseur défini sur la Figure I.2 dans la direction arbitraire notée 1, alors les paramètres  $C$  et  $\eta$  correspondent aux coefficients  $C_{11}$  et  $\eta_{11}$  de ces tenseurs respectifs.

L'équation (I.7) conduit alors aux relations (Réf. [5]) :

$$\begin{cases} k^2 - \alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{C_{11} \left( 1 + \left( \frac{\omega \eta_{11}}{C_{11}} \right)^2 \right)} \\ 2\alpha k = \frac{\rho \omega^3 \frac{\eta_{11}}{C_{11}}}{C_{11} \left( 1 + \left( \frac{\omega \eta_{11}}{C_{11}} \right)^2 \right)} \end{cases} \quad (I.8)$$

On peut alors exprimer le coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence, ce qui donne :

$$\alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{2C_{11}} \left( \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{\omega \eta_{11}}{C_{11}} \right)^2 \right)^{1/2}} - \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{\omega \eta_{11}}{C_{11}} \right)^2 \right)} \right) \quad (I.9)$$

Si on suppose que les effets de viscosité sont faibles devant les effets d'élasticité (approximation de faible viscosité), on peut écrire la relation :

$$\left( \frac{\omega \eta_{11}}{C_{11}} \right)^2 \ll 1. \quad (\text{I.10})$$

L'équation (I.9) se simplifie alors, et on a :

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{\eta_{11}}{C_{11}} \frac{1}{V_L} \omega^2, \quad (\text{I.11})$$

où  $V_L$  est la vitesse des ondes longitudinales se propageant dans le milieu, définie par :

$$V_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}. \quad (\text{I.12})$$

L'absorption par effet viscoélastique est alors décrite par une décroissance exponentielle de la forme  $e^{-\alpha(\omega)d}$ ,  $d$  étant la distance de propagation. Ainsi l'approximation (I.10) induit pour le modèle de Kelvin-Voigt une loi d'atténuation proportionnelle au carré de la fréquence.

On peut également chercher l'expression de  $k^2$  en introduisant (I.9) dans (I.8) de façon à obtenir une expression en fonction de la fréquence. En appliquant encore une fois l'approximation de faible viscosité (I.10), on en déduit la relation suivante :

$$k^2 \approx \frac{\rho \omega^2}{C_{11}} \left( 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{\omega \eta_{11}}{C_{11}} \right)^2 \right). \quad (\text{I.13})$$

Ainsi, au premier ordre, le nombre d'onde varie linéairement avec la fréquence ce qui montre que le modèle de Kelvin-Voigt combiné avec l'approximation de faible viscosité (I.10) n'implique pas de dispersion de la vitesse (puisque la vitesse  $V$  est définie par  $V = \omega/k$ , soit au premier ordre  $V = V_L$ ).

Pour terminer ce paragraphe concernant les modèles rhéologiques, notons qu'il existe des modèles encore plus complexes pour représenter la viscoélasticité dans les solides. Par exemple, on trouve dans la référence [6] une analyse théorique de la propagation d'ondes planes harmoniques en milieu multicouche viscoélastique à l'aide du modèle rhéologique de Zener (Figure I.3).

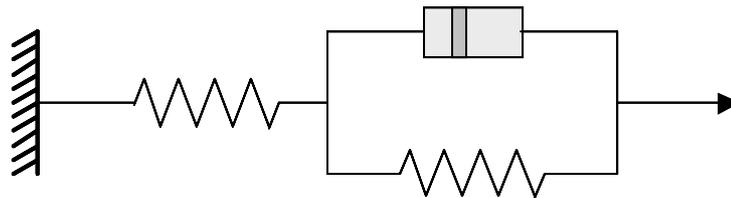


Figure I.3 : Modèle de Zener.

Ce modèle est aussi caractérisé par un module d'élasticité complexe  $C^*$  comme dans le cas du modèle de Kelvin-Voigt, mais il utilise des paramètres différents. On a avec ce modèle :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(C^*) = \frac{\omega^2 + \frac{1}{(\tau_\sigma \tau_\varepsilon)}}{\omega^2 + \frac{1}{\tau_\sigma^2}} C_1 \\ \operatorname{Im}(C^*) = -\frac{\omega \left( \frac{1}{\tau_\sigma} - \frac{1}{\tau_\varepsilon} \right)}{\omega^2 + \frac{1}{\tau_\sigma^2}} C_1 \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

- où :
- $\tau_\varepsilon$  est le temps de relaxation caractéristique de déformation due à l'application d'une contrainte constante.
  - $\tau_\sigma$  est le temps de relaxation de contrainte correspondant à l'application d'une déformation constante.
  - $C_1$  est un module d'élasticité qui est égal au module d'élasticité classique lorsqu'il n'y a pas de viscosité.

En pratique, le modèle de Kelvin-Voigt est le plus souvent utilisé car il fait intervenir moins de paramètres de viscosité que les modèles plus complexes comme celui de Zener. Cependant il a tendance à surestimer l'absorption (réf [7]).

## 1.2 Approche temporelle

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit pour le modèle de Kelvin-Voigt un nombre d'onde complexe  $k^*(\omega) = k - i\alpha$ , dont la partie réelle est le nombre d'onde (relié à la vitesse de phase) et la partie imaginaire est le coefficient d'atténuation. Dans une telle situation, Kramers et Krönig ont établi les relations classiques portant leurs noms (Réf. [8]), qui relient les parties réelles et imaginaires de ce nombre d'onde complexe de manière à respecter la causalité et qui permettent ainsi de trouver l'expression de la dispersion connaissant l'atténuation, ou inversement.

Or, la validité de ces expressions a été mise en doute par Szabo en 1994 (Réf. [9]) pour les matériaux pour lesquels l'atténuation varie selon une loi proportionnelle à une puissance de la fréquence supérieure ou égale à 1. Néanmoins, Waters et al. ont récemment montré (Réf. [10]) que l'on pouvait développer des relations de type Kramers-Krönig dans le domaine fréquentiel valables pour toutes les puissances de la fréquence. De plus, ils ont montré que lorsque cette puissance est égale à 2, et que l'atténuation est donc proportionnelle au carré de la fréquence (cas notamment du modèle rhéologique de Kelvin-Voigt), la

dispersion de la vitesse de phase est rigoureusement nulle. Ce résultat est également démontré dans les travaux de Szabo (Réf. [11]).

Parallèlement à cela, une théorie dans le domaine temporel a été développée par Szabo, fondée sur un traitement mathématique rigoureux utilisant la théorie des distributions (Réf. [9, 12]). Il traite l'exemple de la propagation mono-dimensionnelle dans un fluide, problème pour lequel l'équation d'onde pour la pression s'écrit :

$$\nabla^2 p(z,t) - L_\gamma(t) * p(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{I.15})$$

où  $\nabla^2$  est l'opérateur Laplacien,  $p$  est le champ de pression,  $c_0$  est une vitesse de phase constante,  $z$  représente une coordonnée spatiale et  $t$  est le temps. Le second terme de cette équation est une opération de convolution qui fait apparaître une distribution  $L_\gamma$  que l'on peut interpréter comme une fonction généralisée de dissipation, et qui est définie par :

$$L_\gamma(t) = -2 \, 1_+(t) F^{-1}(\alpha(\omega)). \quad (\text{I.16})$$

Dans cette définition,  $1_+(t)$  est la fonction de Heaviside, et  $F^{-1}(\cdot)$  désigne l'opérateur de transformée de Fourier inverse. On peut ainsi noter que cette fonction de dissipation écrite dans le domaine temporel est reliée simplement au coefficient d'atténuation par une transformée de Fourier inverse. De plus, par l'intermédiaire de la fonction de Heaviside, la causalité est assurée.

Cependant dans notre cadre d'étude, il n'est pas possible de tenir compte d'une nouvelle loi de propagation telle que celle de l'équation (I.15) généralisée au cas des ondes élastiques et en dimension 3, qui supposerait de modifier l'algorithme de calcul de champ développé au CEA. Dans l'algorithme programmé à partir du modèle développé par N. Gengembre, on calcule des réponses impulsionnelles sous l'hypothèse simplificatrice que la vitesse de propagation est indépendante de la fréquence. Certaines adaptations de cet algorithme pourraient si besoin être envisagées, en effectuant par exemple des calculs par plages de fréquence. En revanche, on peut remarquer que l'opération de convolution apparaissant dans (I.15) peut être menée *a posteriori* car elle n'intègre pas d'effets locaux qui se traduiraient par un opérateur faisant intervenir des dérivations partielles. Autrement dit, le filtrage apparaissant comme une convolution avec une réponse impulsionnelle d'atténuation peut être fait sur le résultat du calcul mené en supposant qu'il n'y a pas d'atténuation. Ceci est un résultat très intéressant, qui permet de dire que l'on peut mener les calculs de propagation sans se préoccuper de l'atténuation, puis effectuer *a posteriori* un filtrage temporel des résultats obtenus par une réponse impulsionnelle d'atténuation donnée par l'équation (I.16).

Pour résumer, nous avons vu que non seulement la causalité est effectivement respectée pour toutes les puissances lorsque l'atténuation suit une loi puissance de la fréquence, mais aussi que la dispersion de la vitesse de phase est nulle pour les lois en puissances paires (conclusions tirées des travaux de Waters (Réf. [10]), et Szabo (Réf. [11])).

Pour terminer ce paragraphe sur l'approche temporelle de la prise en compte de l'atténuation par effet viscoélastique, notons que la causalité du modèle de Kelvin-Voigt est également montrée de façon rigoureuse dans les travaux de Duren et al. (Réf. [13]) pour le cas de la propagation unidimensionnelle dans un milieu isotrope. De plus les auteurs donnent dans cet article l'expression de la réponse impulsionnelle du système, ou plus exactement de la réponse à une fonction « marche » (la réponse impulsionnelle est égale à la dérivée temporelle de la réponse à une fonction « marche »). L'avantage d'une telle expression est qu'elle n'a aucune dépendance fréquentielle, elle ne dépend que de  $z$ ,  $t$ , et des constantes associées à la loi de comportement du modèle de Kelvin-Voigt. Ainsi, la solution générale de l'équation d'onde considérée peut être déterminée sans passer par une analyse du comportement fréquentiel du milieu.

Les résultats bibliographiques obtenus dans les deux paragraphes précédents montrent que l'atténuation par effet viscoélastique peut être modélisée par une loi proportionnelle au carré de la fréquence, obtenue à partir du modèle rhéologique de Kelvin-Voigt et d'une approximation de faible viscosité. De plus, nous avons vu que ce modèle d'atténuation respecte la causalité et conduit à une dispersion nulle de la vitesse de phase.

### ***1.3 Approche empirique***

L'un des objectifs de cette thèse est de prendre en compte l'atténuation par effet viscoélastique dans des plaques carbone / époxy pour une gamme de fréquences ultrasonores allant de 1 MHz à environ 10 MHz. Si l'on se réfère aux résultats des précédents paragraphes, l'atténuation dans un milieu viscoélastique peut être modélisée par une loi proportionnelle au carré de la fréquence. Toutefois, avant de conclure sur ce point, on se propose d'étudier quelques résultats d'études expérimentales sur l'atténuation dans ces matériaux, afin d'établir si cette théorie permettant de modéliser l'atténuation par effet visqueux est effectivement utilisée dans la pratique, en particulier dans l'époxy.

Pour déterminer la loi d'atténuation d'un matériau donné, on peut aborder le problème de façon empirique plutôt que d'appliquer un modèle rhéologique connu. Le principe est très simple. Il consiste à réaliser des mesures de l'atténuation d'un échantillon pour différentes

fréquences, puis à interpoler les résultats expérimentaux obtenus par une loi fréquentielle adaptée.

Parmi les auteurs ayant effectué de telles études, Kinra et al. (Réf. [14]) ont mesuré l'atténuation d'ondes longitudinales dans la résine époxy pure. Ces résultats ont été récemment complétés par Biwa et al. pour les ondes transversales (Réf. [15]). L'ensemble de ces mesures met en évidence un comportement linéaire avec la fréquence de l'atténuation dans l'époxy. Ce résultat, classique pour les polymères solides, avait déjà été observé par Rokhlin et al. (Réf. [16]), qui ont également mis en évidence dans cette référence une dispersion très faible de la vitesse de phase dans l'époxy.

Dans la pratique, on peut représenter l'atténuation par effet viscoélastique dans l'époxy par l'intermédiaire de coefficients de Lamé complexes  $\lambda^*$  et  $\mu^*$  (Réf. [17]), donnés par (I.17) :

$$\begin{cases} \lambda^* + 2\mu^* = \rho \left( \frac{2\pi f}{k_L} \right)^2 = \rho c_L^2 \left( 1 + i \frac{c_L \alpha_L}{2\pi f} \right)^{-2} \\ \mu^* = \rho \left( \frac{2\pi f}{k_T} \right)^2 = \rho c_T^2 \left( 1 + i \frac{c_T \alpha_T}{2\pi f} \right)^{-2} \end{cases}, \quad (I.17)$$

où  $k_L$  et  $k_T$  sont les nombres d'ondes des ondes longitudinales et transversales dans l'époxy,  $c_L$  et  $c_T$  sont leurs célérités, et  $\alpha_L$  et  $\alpha_T$  leurs coefficients d'atténuation.

Les observations expérimentales de Kinra et al., et Rokhlin et al. référencées ci-dessus, conduisent à un comportement de la vitesse de phase ( $c_L$ ,  $c_T$ ) indépendant de la fréquence et un comportement de l'atténuation ( $\alpha_L$ ,  $\alpha_T$ ) proportionnel à la fréquence. En reportant ces observations dans les équations (I.17) il apparaît que les coefficients de Lamé décrivant le comportement viscoélastique de l'époxy, sont indépendants de la fréquence. Comme cela est noté par Rokhlin et al. (Réf. [16]), ce dernier résultat apparaît donc en contradiction avec le résultat théorique prédit par les modèles rhéologiques, à savoir une loi d'atténuation proportionnelle au carré de la fréquence. Rokhlin et al. interprètent cette incohérence de la théorie rhéologique par le fait que les phénomènes physiques complexes intervenant à l'échelle moléculaire à l'origine de l'atténuation, sont insuffisamment compris.

Ainsi, le choix de modélisation que nous ferons pour la suite de notre travail afin de représenter le comportement viscoélastique de la résine époxy pure sera celui, pragmatique, suggéré par les études expérimentales précisément réalisées dans le domaine fréquentiel nous concernant (1-10MHz). On prendra comme dans la Réf. [17] les valeurs suivantes en GPa :  $\lambda_{\text{epoxy}} = 4,45 - 0,027 i$  et  $\mu_{\text{epoxy}} = 1,58 - 0,128 i$ .

Si on considère maintenant des plaques carbone / époxy et non plus d'époxy pure, on peut se référer à des résultats expérimentaux d'atténuation effectués par Deschamps et Hosten (Réf. [18]). Dans cet article, les auteurs ont reporté les résultats expérimentaux de mesures d'atténuation sur un échantillon carbone / époxy unidirectionnel pour différentes fréquences et ont ainsi montré que sur une plage de 1 MHz à 8 MHz environ, cette atténuation est linéaire avec la fréquence. Nous reviendrons sur ce résultat dans le chapitre II de la thèse.

Intéressons-nous maintenant à la modélisation du phénomène de diffusion par les fibres.

## 2 Le phénomène de diffusion par les fibres

La présence de fibres est de plus en plus fréquente dans les matériaux actuels car elles permettent d'accroître la résistance mécanique d'un matériau. Le contrôle par ultrasons de telles pièces nécessite donc la compréhension des phénomènes d'interaction entre les ultrasons et les différentes inhomogénéités contenues dans la pièce à contrôler. La diffusion des ondes par les fibres contenues dans un matériau composite a donc fait l'objet de nombreuses études. Pour de tels matériaux, la dispersion et l'atténuation sont dues essentiellement à la présence de fibres dans la matrice et à la viscoélasticité de celle-ci, alors que d'autres phénomènes comme la diffusion thermique entre fibre et matrice (pour les composites à matrice métallique) sont très peu influents. Après s'être intéressés à la viscoélasticité dans le premier paragraphe de ce chapitre, on se propose maintenant d'explorer la littérature scientifique afin d'étudier plus précisément le phénomène de diffusion par les fibres.

On trouve deux méthodes principales dans la littérature permettant de traiter le phénomène de diffusion, consistant à tenir compte ou non des interactions entre les différentes fibres.

En effet, avant de s'intéresser aux interactions entre les fibres, il faut savoir résoudre le problème général de la diffraction d'une onde par un objet cylindrique, c'est-à-dire le problème de diffraction simple par une fibre. On peut à ce sujet citer les travaux de Hinder (Réf. [19]). Dans cet article, on peut trouver l'expression exacte du champ diffracté par un cylindre élastique de section circulaire et de longueur infinie placé dans un milieu élastique infini, dû à une onde incidente soit longitudinale, soit transversale d'amplitude unitaire. Ces expressions sont obtenues analytiquement par inversion des équations exprimant les conditions limites. L'auteur montre qu'un modèle de propagation en milieu composite qui ne prend en compte que les ondes longitudinales diffractées et qui néglige ainsi les conversions de modes aux interfaces et le couplage des modes n'est pas correct en général. De plus, les

expressions obtenues permettent de traiter différents cas bien connus dans la littérature, en changeant simplement les conditions aux limites du problème (cylindre élastique, fluide, ...). Cela permet donc de tester ces expressions.

Cette approche a également été exploitée par Biwa, qui a mis à point un modèle d'atténuation dans les composites basé sur cette approche de diffraction simple (Réf. [15, 20]). Le principe de ce modèle est de déterminer l'atténuation due à la diffusion en calculant un coefficient de diffraction des ondes par un élément diffractant faisant intervenir la section efficace de diffusion de cet élément (« scattering cross section » dans la terminologie anglo-saxonne). Dans notre cadre d'étude, les éléments diffractant sont de géométrie cylindrique (fibres). Ce coefficient est calculé en considérant une seule fibre dans une matrice infinie, puis en faisant une multiplication par le nombre de fibres par unité de volume. Théoriquement, ce modèle est destiné à modéliser l'atténuation dans les composites dont la fraction volumique de fibres n'est pas très élevée. Néanmoins, nous n'avons pas vraiment trouvé dans la littérature de critère précis de limitation à ce modèle. Nous étudierons donc ce modèle en détail dans le chapitre II afin de le tester pour des fractions volumiques de fibres élevées, telles que celles que l'on rencontre dans les RTM.

La seconde approche permettant de modéliser le phénomène de diffusion dans les composites est plus complexe, et consiste cette fois à tenir compte des interactions multiples entre les diffuseurs (les fibres dans notre cas). Le problème de propagation des ondes avec diffusion multiple dans un milieu contenant une distribution aléatoire d'objets a été étudié dans la littérature depuis environ un demi-siècle. De nombreux auteurs ont travaillé sur ce sujet, et nous allons donc présenter de façon synthétique les principaux modèles existant.

On peut classer les travaux numériques et analytiques menés sur l'atténuation et la dispersion dans les composites fibreux en différentes catégories (Réf. [21]). Tout d'abord, une première approche est celle consistant à considérer qu'un matériau composite est constitué d'une distribution périodique de fibres dans une matrice, et ainsi étudier son comportement dynamique en utilisant des techniques d'homogénéisation. L'inconvénient de cette approche est de restreindre l'étude à un ensemble de matériaux dont les dimensions micro-structurales sont largement inférieures à la longueur d'onde utilisée, et aux matériaux de régularité micro-structurale parfaite.

Dans une seconde catégorie, on peut parler de travaux basés sur la théorie probabiliste de diffusion multiple de Foldy (Réf. [22]) ou sur les approximations quasi-cristallines de Lax (Réf. [23]) et de Waterman et Truell (Réf. [24]). Foldy (Réf. [22]), et Waterman et Truell (Réf. [24]) ont développé des procédures statistiques pour estimer les propriétés dynamiques

des ondes. Dans ces méthodes, on considère que les objets diffractant sont isolés, et celles-ci ne peuvent donc être utilisées avec précision que lorsque l'interaction mutuelle entre ces différents objets est négligeable. Cette approche du phénomène de diffusion multiple a notamment été réutilisée par Bose et Mal (Réf. [25, 26]), Varadan et al. (Réf. [27, 28, 29]), ou encore Kim et al. (Réf. [30]). Le point commun à tous ces travaux est que la dispersion et l'atténuation font intervenir un nombre d'onde complexe dépendant de la fréquence, exprimé selon la concentration de fibres et l'amplitude diffractée correspondant à la diffraction par une seule fibre. Cependant ces travaux restent généralement limités à des matériaux possédant de faibles concentrations de fibres.

Une autre catégorie comprend des travaux fournissant des relations entre la dispersion et l'atténuation (qu'elle soit due à la viscoélasticité ou à la diffraction) à travers les relations de Kramers-Krönig, que nous avons déjà évoquées dans le paragraphe précédent. Les auteurs dont les travaux sont représentatifs de cette catégorie sont Beltzer et Brauner (Réf. [31, 32]), Hosten (Réf. [33]), ou encore Weaver et Pao (Réf. [34]). Mais en fait, d'après Beltzer et Brauner (Réf. [31]), ces expressions sont qualitativement assez proches de celles fournies par Foldy (Réf. [22]) et Waterman et Truell (Réf. [24]).

Enfin dans une dernière catégorie, on peut regrouper les travaux qui étudient la dispersion et l'atténuation selon le détail de la microstructure du composite considéré. Ces théories font appel à des méthodes dites « auto-consistantes » (c'est-à-dire « self-consistent methods » dans la terminologie anglo-saxonne). Dans cette catégorie, les principaux travaux sont ceux de Huang et Rokhlin (Réf. [35]), Kim (Réf. [36]), et Yang et Mal (Réf. [37, 38]). Parmi ces auteurs, nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux travaux de Yang et Mal, car ils se sont effectivement intéressés à la prédiction de l'atténuation dans des matériaux composites carbone / époxy contrairement aux autres auteurs cités. Leur modèle est basé sur la théorie de diffusion multiple de Waterman et Truell, qu'ils ont modifiée de façon à étendre le domaine de validité de leur modèle à une gamme de composites dont la concentration volumique de fibres peut varier de 0 à 1. Nous ne souhaitons pas entrer plus dans les détails théoriques de ce modèle dans ce chapitre bibliographique, car le prochain chapitre est en partie destiné à l'étude de la modélisation du phénomène de diffusion par le modèle de Yang et Mal, que nous devons modifier de manière à pouvoir tenir compte de la viscoélasticité de la matrice.

### **3 Conclusion**

La propagation des ondes dans les composites fibreux a fait l'objet de nombreuses études théoriques. Cependant on ne peut pas encore vraiment distinguer, parmi toutes les théories

proposées, une théorie capable de prédire avec précision le comportement dynamique de ces matériaux en raison des difficultés à simuler les phénomènes de diffusion multiple. *A fortiori*, il n'existe pas de modèle permettant de prendre en compte de façon simultanée les phénomènes de diffusion multiple et d'absorption par effet viscoélastique auxquels nous sommes confrontés lors de l'étude de la propagation ultrasonore dans les composites carbone / époxy. D'autre part, on constate à travers la littérature qu'il existe relativement peu de résultats expérimentaux, notamment sur la mesure de l'atténuation dans les composites carbone / époxy. Ceux-ci permettraient d'évaluer la précision des différentes méthodes proposées et ainsi de les valider ou pas.

Après l'étude bibliographique que nous avons menée, il s'avère impossible de choisir de manière certaine un modèle représentatif de l'atténuation dans un milieu absorbant à la fois visqueux et à forte densité de fibres, tel que celui constitutif de la couche unidirectionnelle élémentaire des RTM. En particulier, nous ne savons toujours pas s'il est nécessaire de tenir compte du phénomène de diffusion multiple ou non. En effet, l'approximation de diffraction simple n'est *a priori* pas valable compte tenu de la haute fraction volumique de fibres. Toutefois, dans les matériaux composites à matrice viscoélastique, l'atténuation des ondes résulte des phénomènes de diffusion et d'absorption, comme nous l'avons déjà vu, et aux fréquences ultrasonores, on considère généralement que le phénomène visqueux est prépondérant face au phénomène de diffusion. Afin de trancher de manière définitive sur le choix de modélisation à adopter, nous avons décidé de poursuivre ce travail en étudiant deux modèles théoriques, basés soit sur l'approximation de diffraction simple, soit sur la diffusion multiple.

Ainsi, dans le prochain chapitre, on va porter notre attention sur les travaux de Biwa (Réf. [15, 20]) et de Yang et Mal ([37, 38]), et étudier les deux types de modélisation (diffraction simple et diffusion multiple). Nous serons également confrontés au problème de la prise en compte simultanée des deux principaux phénomènes élémentaires d'atténuation mis en jeu dans les composites carbone / époxy (absorption et diffusion). En effet, dans le cadre du modèle de diffraction simple de Biwa, ces deux phénomènes sont simplement superposés, comme nous le verrons dans le prochain chapitre. En revanche, le modèle de Yang et Mal ne prend pas en compte la viscoélasticité. Nous devons donc apporter les modifications qui s'imposent afin de coupler ces deux phénomènes. Nous pourrions alors comparer les deux modèles.

## **Chapitre II**

# **Modélisation de l'atténuation ultrasonore dans un matériau composite à fibres unidirectionnelles**

Dans ce chapitre, on va s'attacher à modéliser l'atténuation d'ondes ultrasonores se propageant dans un matériau composite à fibres unidirectionnelles. Comme nous l'avons vu à travers l'étude bibliographique, cette atténuation est essentiellement due à deux phénomènes physiques, la diffusion et la viscoélasticité, qui doivent être pris en compte simultanément lors de la modélisation. Pour cela, nous disposons de différents modèles théoriques, évoqués dans le chapitre précédent, qui permettent au moyen d'approximations plus ou moins fortes, de rendre compte de ces phénomènes. Ce chapitre est consacré à la description de deux modèles : le modèle de Biwa (Réf. [20]), basé sur l'approximation de diffraction simple, et le modèle de diffusion multiple que nous avons développé, en s'inspirant des travaux de Yang et Mal (Réf. [38]). Ces modèles seront ensuite utilisés pour effectuer des simulations numériques d'atténuation sur une couche composite représentative d'une couche élémentaire constitutive des plis présents dans les matériaux RTM, c'est-à-dire une couche carbone / époxy. Puis, afin de déterminer lequel sera le plus adapté à modéliser l'atténuation dans ces matériaux, on confrontera les résultats théoriques à des résultats expérimentaux. Les valeurs des caractéristiques mécaniques du carbone et de l'époxy que nous avons utilisées pour les applications numériques sont données en Annexe B.

Mais avant tout, intéressons-nous dans un paragraphe préliminaire au moyen de définir les coefficients d'élasticité d'une couche composite à fibres unidirectionnelles par une méthode d'homogénéisation statique à partir des caractéristiques des constituants.

# 1 Préliminaire : méthode d'homogénéisation statique dans un composite unidirectionnel

## 1.1 Concept d'homogénéisation

À une échelle suffisamment fine tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux dits homogènes (échelle des atomes et des molécules). Si les matériaux usuels de l'ingénieur devaient être caractérisés à cette échelle d'observation, la tâche serait insurmontable. Pour contourner cette difficulté, l'ingénieur introduit l'hypothèse de continuité de la matière. Le concept d'homogénéisation se déduit alors de cette hypothèse. Un milieu homogène est un milieu caractérisé par des propriétés identiques en tout point. Le caractère hétérogène intervient alors chaque fois que les propriétés physiques ou mécaniques du matériau sont des fonctions du point, pouvant varier de manière continue ou discontinue. Dans le cas des composites, ces variations sont discontinues, et apparaissent aux interfaces de passages entre les différentes phases, chacune d'elles étant supposée homogène.

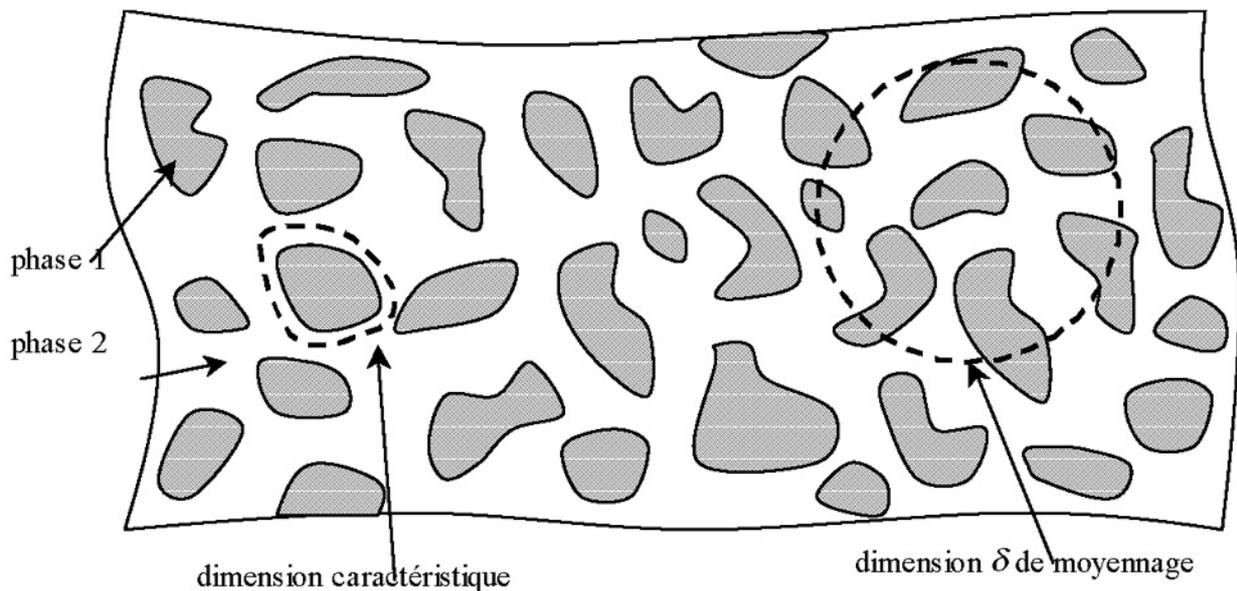


Figure II.1 : Description d'un milieu hétérogène à deux phases.

Dans le cas d'une phase 1 dispersée dans une phase 2 (Figure II.1), il existe généralement une dimension caractéristique de l'hétérogénéité. Par exemple, pour un composite à fibres, cette dimension peut être la dimension moyenne entre les fibres ou bien leur diamètre. Cette dimension est en fait une description idéalisée d'une répartition statistique au sein du matériau hétérogène réel. D'autre part, il existe généralement une échelle de dimension  $\delta$  à laquelle les

propriétés du matériau peuvent être moyennées avec une bonne approximation. Ceci signifie que dans ce cas, les propriétés mesurées sur un échantillon de dimension  $\delta$  sont indépendantes de l'endroit du matériau où a été prélevé l'échantillon. Dans le cadre d'un tel concept, le matériau peut alors être considéré comme étant effectivement homogène, et les problèmes de calculs des structures peuvent être résolus en considérant les propriétés moyennées mesurées à l'échelle  $\delta$ . Dans le cas où il existe une telle échelle (intermédiaire entre l'échelle microscopique – celle des constituants – et l'échelle de la structure), on considère que l'on peut homogénéiser le matériau.

Notons que l'alternative à ce concept serait de tenir compte de chaque région homogène, en analysant la continuité des contraintes et des déplacements au passage de chaque interface. Si une telle approche est concevable dans son principe, elle est encore inaccessible aujourd'hui dans la pratique compte tenu du nombre élevé d'interfaces à considérer.

## ***1.2 Méthode d'homogénéisation***

Les matériaux composites que l'on considère dans ce travail sont formés de deux phases, qui sont les fibres de carbone et la matrice époxy. Les fibres de carbone sont anisotropes (de symétrie hexagonale) et purement élastiques, et la matrice époxy est isotrope et viscoélastique. Cette viscoélasticité implique des caractéristiques mécaniques complexes de l'époxy qui dépendent de la fréquence, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. Ainsi, les propriétés mécaniques du composite lui-même vont être complexes et dépendre de la fréquence. La partie réelle de ces propriétés est liée à l'élasticité du matériau alors que la partie imaginaire est représentative de l'atténuation. Les prochains paragraphes vont être consacrés à la définition de cette partie imaginaire.

Si on s'intéresse à la limite basse fréquence du comportement de ces matériaux, on peut, en utilisant une méthode d'homogénéisation dite statique, calculer les parties réelles des coefficients d'élasticité du composite. Il existe différentes techniques permettant d'effectuer ce calcul, notamment celles basées sur des lois de mélange des constituants. Nous avons utilisé l'une d'entre elles (Réf. [39]), qui consiste à définir les modules d'élasticité du composite à partir des caractéristiques des constituants, pondérées par des coefficients bien choisis. Nous allons voir ici une simple application numérique, mais on peut se reporter à l'Annexe A pour obtenir les informations nécessaires sur cette méthode.

Les paramètres requis pour appliquer le calcul d'homogénéisation sont résumés ci-dessous, et leurs valeurs numériques sont données en Annexe B :

- les masses volumiques : matrice  $\rho_m$ , et fibre  $\rho_f$
- les coefficients de Lamé pour la matrice :  $\lambda_m$  et  $\mu_m$
- les modules d'Young pour les fibres, respectivement dans le sens axial (le long des fibres), et dans le sens transverse :  $E_{fL}$  et  $E_{fT}$
- les coefficients de Poisson pour les fibres, respectivement dans le sens axial (le long des fibres), et dans le sens transverse :  $\nu_{fL}$  et  $\nu_{fT}$
- les modules de cisaillement pour les fibres, respectivement dans le sens axial (le long des fibres), et dans le sens transverse :  $\mu_{fL}$  et  $\mu_{fT}$
- le rayon des fibres  $a$
- la fraction volumique de fibres  $V_f$ .

À l'aide de ces paramètres ainsi que des relations définies dans l'Annexe A, on obtient les valeurs des cinq coefficients indépendants permettant de décrire le comportement mécanique d'une couche unidirectionnelle carbone / époxy, dont la symétrie cristalline est isotrope transverse. La matrice d'élasticité correspondante est donnée par (valeurs en GPa) :

$$C_{couche} = \begin{pmatrix} 155.17 & 5.34 & 5.34 & 0 & 0 & 0 \\ 5.34 & 13.22 & 6.98 & 0 & 0 & 0 \\ 5.34 & 6.98 & 13.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.77 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1})$$

La matrice précédente est celle d'une couche dont les fibres sont alignées selon la direction principale 1, c'est-à-dire que cette direction correspond par exemple à la direction  $0^\circ$  pour les fibres. Il suffit ensuite d'effectuer de simples rotations de cette matrice pour obtenir l'expression correspondante dans le système de coordonnées souhaité. Par exemple, si on considère que l'axe des fibres correspond à la direction principale 3, il suffit d'appliquer une rotation de  $90^\circ$  autour de l'axe 2 à la matrice (II.1). Nous serons amenés par la suite à utiliser ce genre de rotations lors de la détermination des matrices d'élasticité des différentes couches formant un pli. Ceci fera l'objet du chapitre III.

## 2 Diffraction d'une onde S//, P ou S $\perp$ par un cylindre élastique infini

Avant de s'intéresser à un modèle d'atténuation en particulier, étudions pour commencer le phénomène de diffraction d'une onde par un cylindre élastique anisotrope infini contenu dans un milieu viscoélastique isotrope infini. Les propriétés de ce dernier, appelé milieu matriciel,

seront repérées par l'indice  $1$ , alors que celles de la fibre seront repérées par l'indice  $2$ . On considère le problème schématisé sur la Figure II.2.

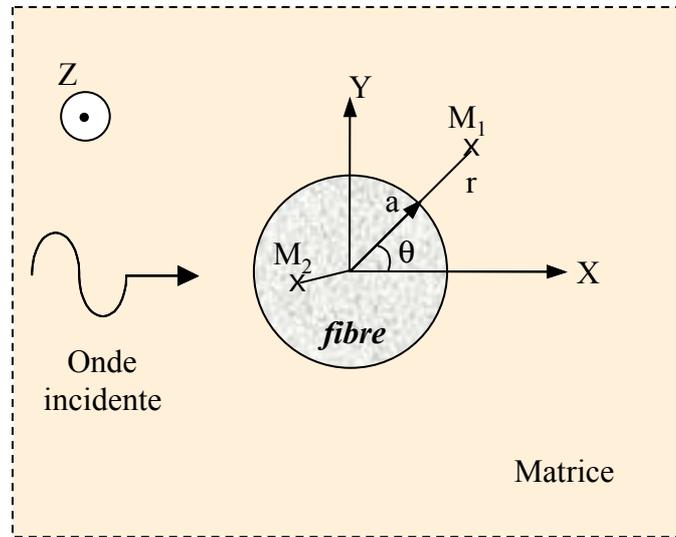


Figure II.2 : Diffraction d'une onde par un cylindre infini.

Le problème de diffusion est traité de façon différente selon la nature de l'onde incidente. Dans tout ce travail, on s'intéresse à des directions de propagation perpendiculaires à l'axe des fibres. Ainsi, les trois types de polarités susceptibles de nous intéresser sont les polarités S//, P et S $\perp$  ; elles sont représentées sur la Figure II.3.

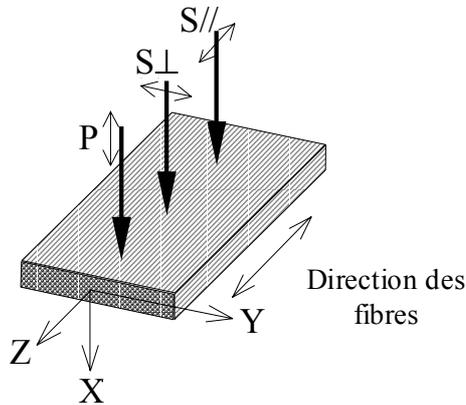


Figure II.3 : Définition des polarités S//, P et S $\perp$ .

Si l'onde incidente est de type S// (transversale polarisée parallèlement à l'axe du cylindre), il n'y a pas de conversion de mode lors de la diffraction par le cylindre. L'onde diffusée est de même polarité que l'onde incidente et le problème se traite de façon scalaire. En revanche si l'onde incidente est de type P (longitudinale) ou S $\perp$  (transversale polarisée perpendiculairement à l'axe du cylindre) des conversions de modes interviennent et le problème devient vectoriel. Il y a un couplage entre les deux modes P et S $\perp$ .

## 2.1 Cas scalaire : onde incidente S//

Supposons que l'onde incidente soit une onde plane monochromatique de polarisation S//, de la forme  $\exp[i(k_1 X - \omega t)]$ , où  $k_1$  est le nombre d'onde incident des ondes SH dans la matrice. Celui-ci est complexe car le milieu matriciel est considéré comme viscoélastique. En effet, comme nous l'avons vu au cours de l'étude bibliographique, nous pouvons décrire un matériau viscoélastique (en particulier l'époxy) en utilisant des paramètres mécaniques complexes. Les paramètres que nous utiliserons pour décrire l'époxy sont détaillés dans l'Annexe B, et supposent un comportement linéaire de l'atténuation avec la fréquence (voir étude bibliographique). Par la suite, de manière à alléger les équations, nous abandonnerons le terme  $\exp(i\omega t)$ , facteur commun à toutes les expressions écrites.

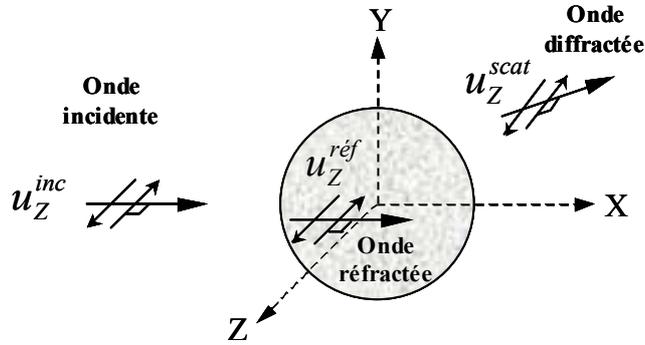


Figure II.4 : Diffraction d'une onde S// par un cylindre infini.

Le champ de déplacement total en un point du milieu matriciel n'a de composante que dans la direction parallèle aux fibres (direction Z ici), et s'écrit sous la forme (Réf. [25]) :

$$u_Z^{scat} = e^{ik_1 X} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in\theta} . \quad (\text{II.2})$$

De même, on écrit le champ de déplacement à l'intérieur de la fibre sous la forme :

$$u_Z^{ref} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n J_n(k_2 r) e^{in\theta} . \quad (\text{II.3})$$

Dans les deux expressions (II.2) et (II.3),  $J_n$  représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ , et  $H_n^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre  $n$ .

Dans l'équation (II.2), le premier terme correspond à l'onde incidente, et peut également être décomposé en utilisant les fonctions de Bessel. On a alors en utilisant les coordonnées cylindriques définies sur la Figure II.2 :

$$\begin{aligned}
 e^{ik_1 X} &= e^{ik_1 r \cos \theta} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_1 r) e^{in\theta} .
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

Les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  intervenant dans les expressions ci-dessus sont les amplitudes respectives des ondes diffractées et réfractées, l'onde incidente étant considérée d'amplitude unitaire. Pour déterminer ces amplitudes, il suffit d'écrire les équations de continuité en déplacement et contrainte à la surface de la fibre cylindrique. On aboutit alors au système à deux équations suivant :

$$\begin{pmatrix} H_n^{(1)}(k_1 a) & -J_n(k_2 a) \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial a} [H_n^{(1)}(k_1 a)] & -\frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_2 a)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^n J_n(k_1 a) \\ -i^n \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_1 a)] \end{pmatrix} . \tag{II.5}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les ondes cherchées, et en particulier l'onde diffractée. Les expressions des solutions  $A_n$  et  $B_n$  peuvent être obtenues analytiquement ; elles sont données en Annexe C. Précisons que la notation  $\partial/\partial a$  utilisée dans l'écriture du système (II.5) est couramment utilisée et désigne la valeur en  $r = a$  de la dérivée partielle de la fonction considérée par rapport à la variable  $r$ . Intéressons-nous maintenant au cas vectoriel de l'onde incidente P ou S $\perp$ .

## 2.2 Cas vectoriel : onde incidente P ou S $\perp$

Supposons que l'onde incidente soit une onde plane monochromatique P ou S $\perp$ . La décomposition de Helmholtz du champ de déplacement total en un point du milieu s'écrit sous la forme :

$$\bar{u} = \overline{grad} \Phi + \overline{rot} (\Psi e_z^-), \tag{II.6}$$

où  $\overline{grad}$  est le gradient,  $\overline{rot}$  est le rotationnel, et  $\Phi$  et  $\Psi$  sont les potentiels scalaire et vectoriel des composantes longitudinales et transversales des ondes.

L'écriture de ces potentiels diffère selon le milieu que l'on considère (fibres ou matrice). Ainsi en un point  $M_1$  de la matrice, nous avons les expressions suivantes (en omettant toujours le terme  $\exp(i\omega t)$ ) :

$$\begin{cases} \Phi = e^{ih_1 X} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n^{(1)}(h_1 r) e^{in\theta} \\ \Psi = e^{ik_1 X} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in\theta} \end{cases} , \tag{II.7}$$

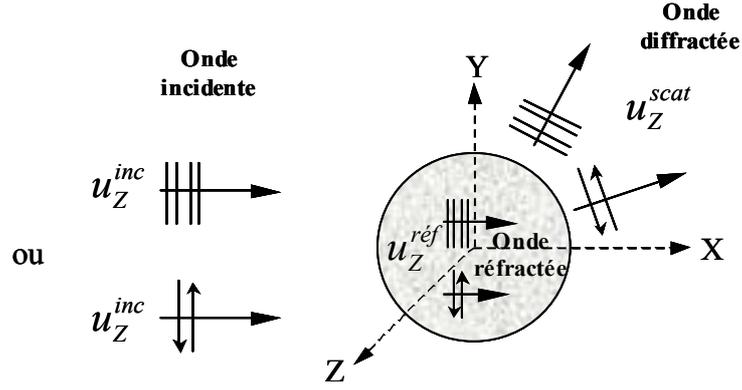


Figure II.5 : Diffraction d'une onde P ou S $\perp$  par un cylindre infini.

avec  $h_1$  et  $k_1$  nombres d'ondes des ondes P et S $\perp$  dans la matrice (toujours complexes puisque la matrice est viscoélastique) et  $H_n^{(1)}$  fonction de Hankel de première espèce et d'ordre  $n$ .

Comme dans le cas S//, le premier terme de chacun des potentiels correspond à l'onde incidente, et on peut alors réécrire ces potentiels sous la forme :

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(h_1 r) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n^{(1)}(h_1 r) e^{in\theta} \\ \Psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_1 r) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in\theta} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Si on considère maintenant un point  $M_2$  dans la fibre, qui est anisotrope, la décomposition du champ de déplacement sous forme de potentiels n'a *a priori* plus de sens. Toutefois, il est important de noter que dans le problème de diffraction que l'on considère ici, on se place dans un plan perpendiculaire à l'axe de la fibre, c'est-à-dire un plan qui est isotrope. Ainsi, la notion de potentiel a bien un sens dans ce cas. On peut donc écrire les potentiels  $\Phi$  et  $\Psi$  dans la fibre de la même façon que nous l'avons fait dans le milieu matriciel, et on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n J_n(h_2 r) e^{in\theta} \\ \Psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n J_n(k_2 r) e^{in\theta} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Les coefficients  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  sont les amplitudes des ondes cherchées, et peuvent être obtenues en écrivant les conditions de continuité en déplacement et contraintes à la surface du cylindre ( $r = a$ ). Pour cela, nous devons d'abord exprimer ces champs dans chaque milieu (matrice et fibre) à partir des potentiels correspondants donnés par (II.8) et (II.9). On utilise

pour cela les relations (II.10), démontrées en Annexe E, qui relient les potentiels aux déplacements et aux contraintes en coordonnées cylindriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ \sigma_{rr} = -\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - k^2 \Phi + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \sigma_{r\theta} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + k^2 \Psi \end{array} \right. \quad (\text{II.10})$$

Les conditions de continuité des déplacements et contraintes à la surface du cylindre aboutissent à un système de quatre équations dont les inconnues sont les amplitudes des ondes cherchées. Ce système est présenté en Annexe C, car son écriture est un peu fastidieuse et ne présente pas d'intérêt particulier pour la compréhension du problème.

À ce stade, nous savons exprimer les ondes diffractées par un cylindre élastique unique dans un milieu matriciel infini. Remarquons également à ce niveau que le phénomène d'absorption dû à la nature viscoélastique de la matrice est implicitement pris en compte dans les équations par l'utilisation de paramètres complexes de propagation dans la matrice. Nous reviendrons sur ce point dans les prochains paragraphes. Pour aller plus loin dans la modélisation nous devons maintenant déduire de ce calcul classique de diffraction le coefficient d'atténuation total lié à la propagation d'une onde dans une couche composite à fibres unidirectionnelles, et considérer par conséquent l'ensemble des fibres présentes dans la matrice.

### 3 Calcul de l'atténuation totale par un modèle de diffraction simple

L'atténuation totale dans une couche à fibres unidirectionnelles et matrice viscoélastique peut être déterminée en utilisant l'approximation de diffraction simple, qui consiste à négliger les interactions multiples entre les diffuseurs présents dans le milieu. D'après les résultats de l'étude bibliographique menée dans le premier chapitre, c'est le modèle de Biwa (Réf. [20]) que nous avons choisi afin de calculer l'atténuation totale de la couche dans le cadre de cette approximation. En effet, ce modèle tient compte en plus de la diffraction simple de la viscoélasticité du milieu matriciel.

### 3.1 Équations générales

On considère une onde plane monochromatique se propageant dans la direction  $X$  incidente sur un milieu composite composée d'une matrice époxy (isotrope, viscoélastique) contenant des fibres de carbone (anisotropes). Dans notre cadre d'étude, ces inclusions seront considérées parfaitement élastiques (et donc non absorbantes), mais le modèle théorique proposé par Biwa permet de traiter le cas plus général d'inclusions viscoélastiques, et de tenir compte ainsi de l'absorption propre de celles-ci. De plus, on considère que les inclusions sont toutes identiques (par leur forme et leurs propriétés) et réparties de façon aléatoire dans le milieu. On peut schématiser le problème comme sur la Figure II.6. En l'absence d'inclusions, l'onde incidente se propageant dans la matrice est décrite de la façon suivante :

$$\vec{u}_i^{inc} = \text{Re} \left[ \vec{u}_i \exp \{ i(k_1 X - \omega t) \} \right], \quad (\text{II.11})$$

où  $k_1$  est le nombre d'onde complexe des ondes se propageant dans la matrice et  $\omega$  est la fréquence angulaire. Cette expression du champ incident ne dépend pas de la nature de l'onde et  $k_1$  peut ainsi être le nombre d'onde des ondes  $S//$ ,  $P$  ou  $S\perp$  selon l'onde incidente qui est considérée.

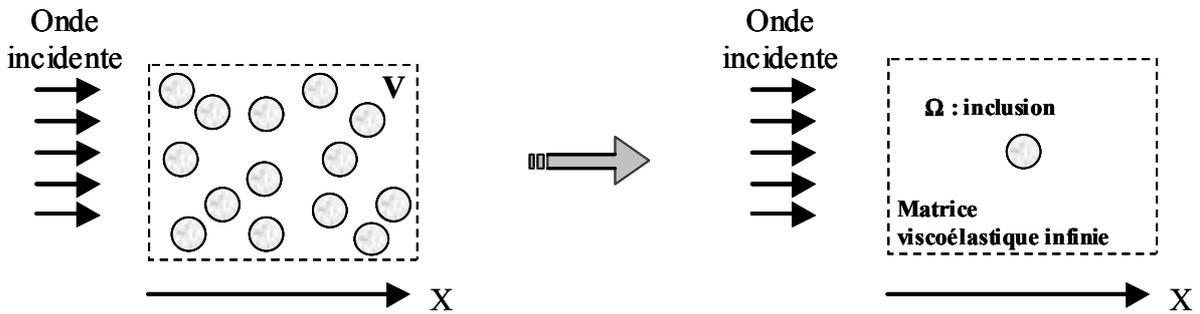


Figure II.6 : schématisation du problème de diffraction simple.

Si on se donne une direction de propagation définie par le vecteur directeur  $\vec{\beta}_i$ , le nombre d'onde complexe  $k_1$  et le vecteur polarisation  $\vec{u}_i$  associé sont déterminés par l'équation de Christoffel (voir Réf. [5]). On en déduit une vitesse complexe  $V_1$  d'un mode particulier de cette onde plane, qui est donnée par :

$$V_1^2 = \frac{\omega^2}{k_1^2}. \quad (\text{II.12})$$

La densité de flux énergétique de cette onde plane moyennée sur une période  $T$  s'écrit :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{P}_i^{inc} \cdot \vec{\beta}_i dt. \quad (\text{II.13})$$

Dans cette expression,  $\vec{P}_i^{inc} = -\sigma_{ij}^{inc} \vec{u}_j^{inc}$  est le vecteur densité de flux énergétique associé à l'onde incidente. Comme la matrice est viscoélastique, la densité d'énergie  $\langle e \rangle$  ci-dessus décroît de manière exponentielle de la façon suivante :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \rho_1 \omega |\vec{u}|^2 \operatorname{Re}(k_1 V_1^2) \exp(-2\alpha_1 \bar{\beta}_i \cdot \vec{x}_i), \quad (\text{II.14})$$

où  $\alpha_1 = \operatorname{Im}[k_1]$  est le coefficient d'atténuation du milieu matriciel viscoélastique.

En présence d'inclusions, la perte d'énergie au cours de la propagation n'est en général pas due exclusivement à la viscoélasticité de la matrice, mais également à la diffraction par ces inclusions et éventuellement leur absorption intrinsèque.

Si on se donne un élément de volume représentatif  $V$  de dimensions macroscopiques  $dx_1$ ,  $dx_2$  et  $dx_3$  (volume  $|V| = dx_1 dx_2 dx_3$ ) suffisamment grandes par rapport à l'échelle de longueur de la microstructure, la décroissance de flux énergétique sur  $V$  (différence entre énergies entrante et sortante) est égale au taux de perte d'énergie sur  $V$  ce qui s'écrit (Réf. [20]) :

$$-\frac{d\langle e \rangle}{dx_1} |V| = (\langle I^{scat} \rangle + \langle I^{abs} \rangle + \langle I^{mat} \rangle) |V|, \quad (\text{II.15})$$

où  $\langle I^{scat} \rangle$  est le taux de perte par diffraction sur les inclusions,  $\langle I^{abs} \rangle$  le taux d'absorption par les fibres, et  $\langle I^{mat} \rangle$  le taux d'absorption par la matrice, respectivement par unité de volume. Ainsi, le taux de décroissance spatiale d'énergie est donné par la relation :

$$\frac{d\langle e \rangle}{dx_1} = -(\langle I^{scat} \rangle + \langle I^{abs} \rangle + \langle I^{mat} \rangle). \quad (\text{II.16})$$

Comme nous l'avons signalé au début de ce paragraphe, on considère dans tout ce travail des inclusions supposées parfaitement élastiques. On peut donc négliger le terme lié à l'absorption par l'inclusion  $\langle I^{abs} \rangle$ . En revanche nous devons évaluer les autres quantités, mais celles-ci sont extrêmement difficiles à déterminer de façon exacte. C'est précisément à ce niveau qu'intervient l'approximation de diffraction simple, qui consiste à considérer une inclusion isolée dans un milieu matriciel infini.

### 3.2 Perte d'énergie par diffusion

Pour évaluer le terme  $\langle I^{scat} \rangle$ , on détermine tout d'abord la densité de flux d'énergie correspondant au rapport entre le taux d'énergie diffusée par une inclusion unique et la densité de flux énergétique de l'onde incidente sur cette inclusion. On définit pour cela une

densité énergétique de référence par la valeur de  $\langle e \rangle$  définie dans l'expression (II.14) à l'origine des axes de coordonnées, qui est prise au centre de gravité de l'inclusion. Ainsi, pour  $x_i = 0$ , on note cette densité  $\langle e \rangle_0$ , et on a :

$$\langle I^{scat} \rangle_1 = \gamma^{scat} \langle e \rangle_0, \quad (\text{II.17})$$

où  $\gamma^{scat}$  est la section efficace de diffusion (« scattering cross section » dans la terminologie anglo-saxonne), qui est homogène à une surface, et qui représente le rapport entre l'énergie diffractée par l'inclusion dans toutes les directions de l'espace, et l'intensité de l'onde incidente. L'indice  $_1$  signifie que l'on considère une seule fibre. Le calcul de ce terme, qui dépend de la nature de l'onde incidente, sera effectué dans le paragraphe 3.5 de ce chapitre pour le cas particulier des ondes S// (le plus simple).

Pour prendre en compte l'ensemble des inclusions présentes dans le composite, on considère dans le cadre de l'approximation par diffraction simple que les énergies diffusées par chaque fibre s'ajoutent. On note alors  $n_0$  le nombre de fibres par unité de surface et dans ce cas la perte d'énergie par diffusion s'écrit finalement :

$$\langle I^{scat} \rangle = n_0 \langle I^{scat} \rangle_1 = n_0 \gamma^{scat} \langle e \rangle_0. \quad (\text{II.18})$$

Cette approximation reste valable pour des milieux pour lesquels la concentration de fibres n'est pas trop grande. L'étude d'un modèle prenant en compte les interactions entre les diffuseurs sera faite dans le paragraphe 4, et on pourra alors comparer les deux types de modélisation notamment pour des fractions volumiques de fibres élevées.

### 3.3 Perte d'énergie par absorption de la matrice

Les détails de calcul permettant d'évaluer ce terme ne sont pas présentés ici ; on peut se reporter à l'article publié par Biwa (réf [20]) pour obtenir les explications nécessaires. Il montre que le terme  $\langle I^{mat} \rangle$  peut être évalué par la formule :

$$\langle I^{mat} \rangle = 2\alpha_1 (1-\phi) \langle e \rangle_0, \quad (\text{II.19})$$

où  $\phi$  est la fraction volumique de fibres dans la couche composite ;  $\alpha_1$  et  $\langle e \rangle_0$  ont déjà été définis plus haut.

Ainsi, cette dissipation d'énergie n'est autre que l'absorption d'énergie de la matrice viscoélastique pondérée par la fraction volumique effectivement occupée par cette matrice. En effet, pour le cas extrême où la fraction volumique de fibres est nulle, on retrouve bien

l'absorption correspondant à la matrice seule. Pour l'autre cas extrême où la fraction volumique de fibres tend vers un (c'est-à-dire qu'il n'y a presque plus de matrice), on obtient une dissipation d'énergie nulle. C'est un résultat auquel on pouvait s'attendre de façon intuitive.

*Remarque* : mathématiquement, la fraction volumique de fibres est comprise entre les valeurs zéro et un. Cependant physiquement, on peut noter que la valeur un ne sera bien sûr jamais atteinte. En effet, la répartition la plus compacte possible de cylindres (fibres) dans un volume (problème identique à celui de l'empilement de disques dans un plan), correspond à un arrangement hexagonal centré. Dans ce cas, la fraction volumique théorique occupée par les éléments est de  $\pi/2\sqrt{3}$  soit environ égale à 0,9. Cette valeur sera donc la limite maximale possible de la fraction volumique  $\phi$  de fibres.

Voyons maintenant comment déterminer le coefficient d'atténuation total de la couche.

### 3.4 Coefficient d'atténuation total de la couche unidirectionnelle

Si on reporte les différents résultats obtenus ci-dessus dans l'équation (II.16), et en identifiant les termes  $\langle e \rangle$  et  $\langle e \rangle_0$  du côté droit de l'équation, on obtient l'expression :

$$\frac{d\langle e \rangle}{dx_1} = -2 \left( \alpha_1 (1-\phi) + \frac{1}{2} n_0 \gamma^{scat} \right) \langle e \rangle. \quad (\text{II.20})$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient l'expression suivante :

$$\langle e \rangle(x_1) \propto \exp \left\{ -2 \left[ \alpha_1 (1-\phi) + \frac{1}{2} n_0 \gamma^{scat} \right] x_1 \right\}. \quad (\text{II.21})$$

Étant donné que la densité d'énergie est une fonction quadratique de l'amplitude de déplacement, le coefficient d'atténuation total du composite est alors obtenu par la formule finale suivante :

$$\alpha = (1-\phi)\alpha_1 + \frac{1}{2} n_0 \gamma^{scat}. \quad (\text{II.22})$$

L'atténuation globale est donc obtenue d'une manière très simple. Elle résulte de la superposition des deux phénomènes physiques élémentaires d'atténuation, chacun pondéré par des coefficients relatifs à la proportion de chaque phase (matrice et inclusion) présente dans le composite.

Pour effectuer le calcul de l'atténuation dans un composite particulier et illustrer ce modèle, nous devons maintenant calculer la section efficace de diffusion  $\gamma^{scat}$ . Ce terme dépend de la nature de l'onde incidente qui est considérée. Intéressons-nous par exemple au cas le plus simple, le cas scalaire, d'une onde incidente de polarisation S// (voir Figure II.4).

### 3.5 Application au cas d'une onde incidente S//

Pour calculer le coefficient d'atténuation total des ondes S// dans le composite il faut déterminer la section efficace de diffusion  $\gamma^{scat}$  des ondes S// définie dans l'équation (II.17). Pour cela, il faut utiliser les résultats obtenus dans le paragraphe 2.1 de ce chapitre, et en particulier les coefficients  $A_n$  représentant les amplitudes des ondes diffractées, obtenues par la résolution du système linéaire (II.5). De plus, il est nécessaire de connaître l'expression du flux énergétique diffracté par une seule fibre, soit  $\langle I^{scat} \rangle_1$ , qui est donné par la relation :

$$\langle I^{scat} \rangle_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\Gamma} \vec{P}_i^{scat} \cdot \vec{n}_i dS dt, \quad (II.23)$$

où  $\Gamma$  représente la frontière de l'élément diffuseur (la fibre),  $\vec{P}_i^{scat}$  est le vecteur densité de flux associé à l'onde diffractée, et  $\vec{n}_i$  est la normale unitaire sortante à la frontière  $\Gamma$ . On peut noter que l'intégration surfacique apparaissant dans l'équation (II.23) peut être effectuée en considérant n'importe quelle surface autour de l'inclusion lorsque le milieu matriciel est purement élastique. Il est par exemple très courant dans ce cas d'effectuer cette intégration sur une surface située à une distance très éloignée de l'inclusion, et d'approcher alors les champs concernés par leurs approximations à l'infini (forme asymptotique). En revanche, selon Beltzer et Brauner, (Réf. [40]), ceci est impossible lorsque le milieu matriciel est viscoélastique car l'absorption par effet visqueux est à l'origine d'une décroissance d'amplitude des ondes avec la distance de propagation. L'intégration doit donc être faite dans ce cas sur la frontière de la fibre.

On s'intéresse à un comportement en régime de Rayleigh, c'est-à-dire pour des longueurs d'onde supposées grandes par rapport au diamètre des inclusions. Ce régime est caractérisé par un produit  $ka$  faible ( $k$  est le nombre d'onde et  $a$  est le rayon des fibres). Dans ces conditions, on peut alors faire des développements limités des fonctions de Bessel au voisinage de zéro, et on peut montrer que seuls les coefficients  $A_0$  et  $A_1$  interviennent, les autres étant quasi-nuls. De plus, comme la matrice considérée est viscoélastique, les coefficients  $k_1$  et  $\mu_1$  qui apparaissent dans ces coefficients sont complexes, et l'expression du terme  $\gamma^{scat}$  est beaucoup plus complexe que dans le cas d'une matrice élastique. On va donc utiliser une autre approximation, qui est une approximation « faible viscosité ». Celle-ci

consiste à considérer que la partie imaginaire du nombre d'onde  $k_1$  est négligeable devant sa partie réelle. Ceci s'écrit de la façon suivante :

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} + i\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_1 c_1}{\omega} \ll 1. \quad (\text{II.24})$$

Biwa donne alors en utilisant l'ensemble de ces approximations une expression pour la section efficace de diffusion dans le cas d'une onde S// :

$$\begin{aligned} \gamma^{scat} = & \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)^2 \left[ \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} (1 + 2\gamma) \theta_{kl} \right\} |k_1 a|^3 - \frac{4}{\pi} \theta_{kl} |k_1 a|^3 \ln \frac{|k_1 a|}{2} \right] + \\ & \frac{\pi^2}{4} \left| \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right|^2 \left[ \frac{8}{\pi} \theta_{kl} |k_1 a| + 2 |k_1 a|^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Dans cette expression,  $\gamma = 0.57721\dots$  est le nombre d'Euler, et  $\theta_{kl}$  est l'argument du nombre d'onde complexe  $k_1$ , c'est-à-dire  $\theta_{kl} = \tan^{-1}(\alpha_1 c_1 / \omega)$ , et compte tenu de l'approximation de faible viscosité (II.24), on a  $\theta_{kl} \cong \alpha_1 c_1 / \omega$ .

Avec l'expression (II.25), on peut maintenant calculer le coefficient d'atténuation global des ondes S// dans une couche composite carbone / époxy en utilisant la formule (II.22).

### 3.6 Résultats

Pour illustrer le modèle de diffraction simple, on peut tracer par exemple dans le cas des ondes S// le coefficient d'atténuation en dB/mm en fonction de la fréquence en MHz (Figure II.7-a). On remarque alors que le comportement de cette atténuation pour les fréquences inférieures à 10 MHz n'est pas très clair sur cette Figure. Nous avons alors représenté sur la Figure (II.7-b) l'atténuation relative de ces ondes dans la couche composite par rapport à celle dans le milieu matriciel en fonction de la fréquence normalisée adimensionnée égale à  $\text{Re}(k_1) * a$ . Si on trace ceci pour différentes concentrations de fibres on obtient les graphes de la Figure II.7.

La Figure II.7-b montre qu'il existe une valeur de la fréquence normalisée égale à 0,119 pour laquelle, quelle que soit la fraction volumique de fibres, l'atténuation des ondes S// dans le composite est égale à l'atténuation des ondes S// dans l'époxy pure.

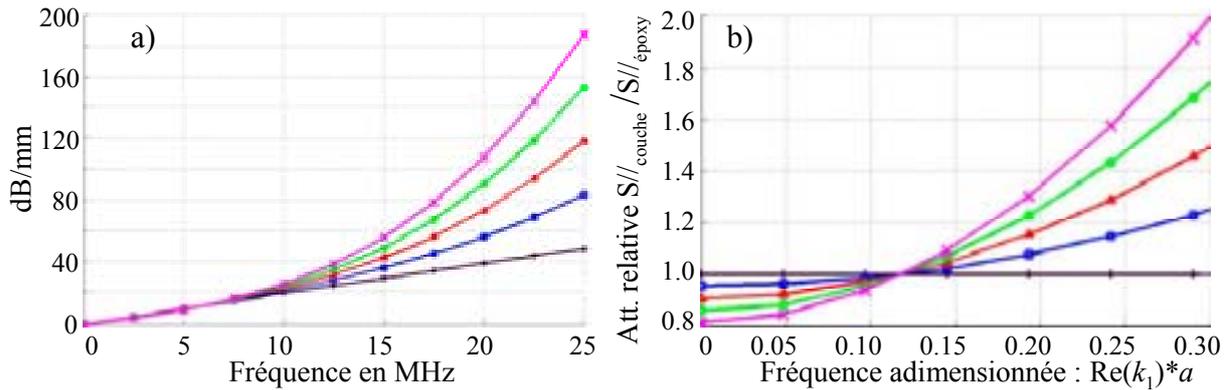


Figure II.7 : Atténuation des ondes  $S//$  pour différents taux de fibres ; (a) atténuation dans la couche en dB/mm et (b) atténuation dans la couche ramenée à celle dans l'époxy pure (valeur adimensionnée). 0% (+), 20% (□), 40% (△), 60% (○) et 80% (×).

En dessous de cette valeur, l'atténuation dans le composite est inférieure à celle dans l'époxy pure, et inversement, au-delà de la valeur 0,119, l'atténuation dans le composite est supérieure à celle dans l'époxy pure. Si on se place dans les conditions correspondant à notre cadre d'étude, c'est-à-dire pour un rayon de fibres de  $3,5 \mu\text{m}$  et une fréquence de 5 MHz, on obtient une fréquence normalisée environ égale à 0,097. Nous sommes donc dans le domaine pour lequel l'atténuation dans le composite est inférieure à celle dans la matrice seule.

Le modèle d'atténuation basé sur l'hypothèse de diffraction simple permet donc de calculer l'atténuation totale d'une couche composite unidirectionnelle de manière relativement simple en superposant les deux phénomènes élémentaires d'atténuation qui sont la viscosité et la diffusion. Cependant, ce modèle est théoriquement limité pour prédire correctement l'atténuation pour des concentrations élevées de fibres. Cela n'est *a priori* pas surprenant puisque les interactions entre les diffuseurs sont de moins en moins négligeables lorsque leur concentration augmente. En revanche nous devons quantifier l'erreur faite par un tel modèle aux concentrations de fibres qui nous intéressent, soit aux alentours de 65%, en comparant ce modèle à un autre modèle théorique prenant en compte les interactions multiples entre diffuseurs.

## 4 Calcul de l'atténuation totale par un modèle de diffusion multiple

Le modèle que nous avons choisi à l'issue de l'étude bibliographique pour étudier la diffusion multiple dans une couche composite carbone / époxy suppose un milieu non plus à deux phases mais à trois phases. Il s'agit du modèle de Yang et Mal (Réf. [37, 38]), combiné à la

théorie classique de diffusion multiple de Waterman et Truell (Réf. [24]). Nous avons en outre modifié ce modèle, qui traite à l'origine de diffusion multiple en milieu matriciel purement élastique, pour prendre en compte la viscoélasticité de ce milieu matriciel, et pouvoir ainsi étudier les deux phénomènes élémentaires d'atténuation simultanément. C'est ce que nous allons voir dans ce paragraphe.

#### 4.1 Présentation du modèle développé

Les propriétés dynamiques d'un composite fibreux unidirectionnel peuvent être déterminées en étudiant la propagation d'ondes élastiques de volume dans ce matériau. Dans notre cadre d'étude, ces matériaux sont également viscoélastiques ; les ondes qui s'y propagent sont donc soumises au phénomène de diffusion multiple, mais aussi au phénomène d'absorption par effet viscoélastique, comme nous l'avons déjà vu. Ceci se traduit généralement par une vitesse de phase et une atténuation dépendant de la fréquence. La réponse dynamique globale du milieu peut être simplement représentée par l'intermédiaire d'un nombre d'onde complexe équivalent, noté de façon générale  $\langle k^* \rangle$  (la notation  $\langle \ \rangle$  correspond à une grandeur relative au milieu homogène équivalent), décrivant la propagation d'une onde dans un matériau équivalent à un matériau homogène ayant des propriétés dites « effectives ». On a alors :

$$\langle k^* \rangle = \frac{\omega}{V(\omega)} + i\alpha(\omega), \quad (\text{II.26})$$

où  $V(\omega)$  et  $\alpha(\omega)$  représentent respectivement la vitesse de phase et le coefficient d'atténuation des ondes « moyennées ». Les effets de dispersion et de dissipation deviennent d'autant plus importants que le diamètre des fibres est comparable à la longueur d'onde des ondes présentes dans le composite. Outre le nombre d'onde, le milieu effectif a également une masse volumique effective résultant des masses volumiques respectives des différentes phases. Si on note  $\phi$  la fraction volumique de fibres, cette masse volumique est donnée par la relation :

$$\langle \rho \rangle = (1 - \phi) \rho_m + \phi \rho_f. \quad (\text{II.27})$$

La représentation du milieu composite par un milieu à trois phases est schématisée sur la Figure II.8. Les trois phases sont représentées par des cylindres concentriques. Le premier cylindre, au centre du modèle, représente une fibre de carbone, de rayon  $a$ . Le deuxième correspond à la résine époxy pure, de rayon  $b$ .

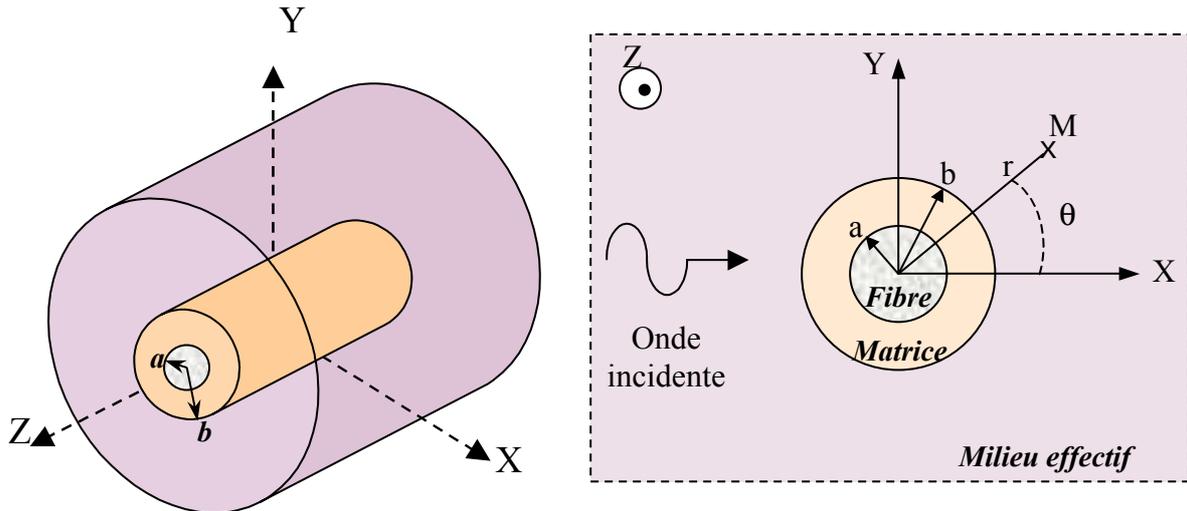


Figure II.8 : Représentations 3D et 2D du modèle à trois phases.

Ce rayon est relié à celui de la fibre et à la concentration de fibres par la relation suivante :

$$b = \frac{a}{\sqrt{\phi}}. \quad (2.28)$$

Enfin le troisième, englobant les deux autres, est un milieu dit effectif ou moyenné, et dont les propriétés résultent d'une homogénéisation dynamique entre la matrice et les différentes fibres. Ce modèle est schématisé sur la Figure II.8.

Le développement original que nous avons apporté au modèle de Yang et Mal, a consisté à introduire dans le calcul le caractère visqueux de la matrice en utilisant tout simplement des paramètres mécaniques complexes pour décrire l'époxy. Cette atténuation visqueuse est donc implicitement « couplée » aux équations de la théorie de la diffusion multiple. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 4.2 de ce chapitre, lorsque nous décrirons plus en détail le modèle que nous avons développé.

Le principe du modèle de Yang et Mal est le suivant. On s'intéresse au phénomène de diffraction « local » par une seule fibre, en exprimant les champs de déplacements et contraintes dans chaque phase décrite sur la Figure II.8 tout en prenant en compte de façon implicite l'ensemble des diffuseurs et leurs interactions multiples par l'intermédiaire du milieu effectif. Puis, on écrit la continuité de ces champs aux interfaces. La différence avec le cas que nous avons déjà étudié au paragraphe 2 de ce chapitre est que le modèle comporte maintenant trois milieux, dont un inconnu, et deux interfaces : fibre / matrice et matrice / milieu effectif. Le système des équations de continuité n'a donc plus le même nombre d'équations. Nous aurons quatre ou huit équations selon la nature de l'onde incidente. De plus, ces équations de continuité ne nous suffisent pas pour déterminer complètement le problème car outre les amplitudes inconnues des ondes réfractées et diffractées, l'onde

incidente, qui se propage dans le milieu effectif, est également une inconnue. Pour remédier à cela, on introduit les équations de la théorie de diffusion multiple de Waterman et Truell, qu'il est nécessaire d'adapter au cas du modèle de géométrie cylindrique à trois phases. Toute la difficulté du modèle consiste ensuite à calculer les propriétés effectives de ce milieu. Voyons donc plus en détail comment obtenir ces propriétés pour les différentes polarités des ondes incidentes qui nous intéressent.

*Remarque* : pour simplifier l'écriture des équations on notera à partir de ce point toutes les propriétés relatives au milieu effectif en abandonnant la notation  $\langle . \rangle$ , et on supprimera également l'étoile \* qui signifie que le paramètre est complexe. Ainsi,  $\langle k^* \rangle$  sera simplement noté  $k$ .

## 4.2 Cas scalaire : onde incidente S//

L'onde incidente considérée est ici de polarité S//, et se propage dans le milieu effectif. On cherche à déterminer le nombre d'onde effectif complexe  $k$ , et le module de cisaillement  $\mu$ , complexe également. L'onde incidente s'écrit sous la forme :

$$e^{ikX} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}, \quad (\text{II.29})$$

où  $J_n$  représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ .

Le problème de diffraction de cette onde par une fibre, schématisé sur la Figure II.9, comprend quatre ondes réfractées ou diffractées.

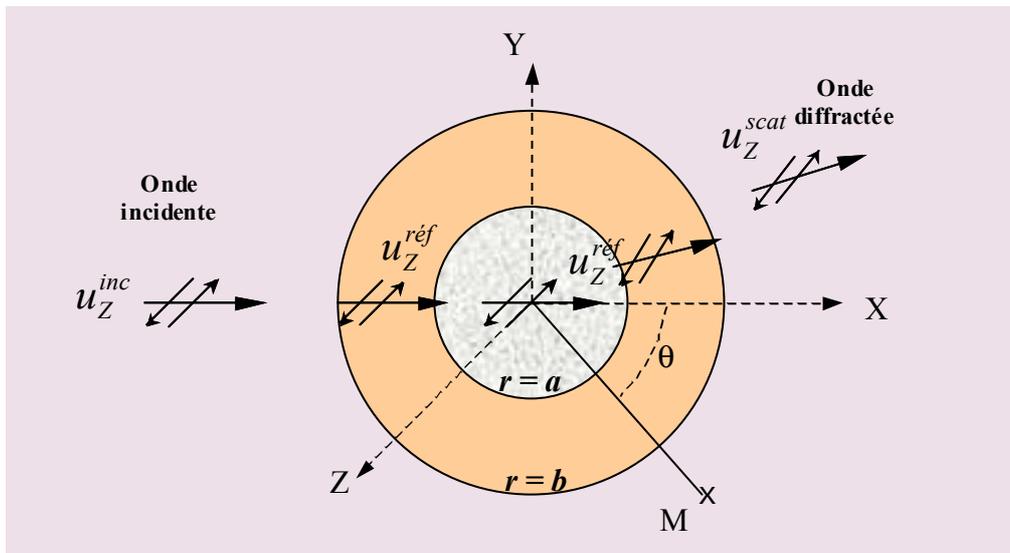


Figure II.9 : Diffraction d'une onde S// dans le cas d'un modèle à trois phases.

Exprimons les champs de déplacement dans chaque milieu du modèle. Ce champ, pour une onde S// n'a de composante que dans la direction Z. Nous avons donc :

$$\begin{cases} u_Z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} , & r > b \\ u_Z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H_n^{(2)}(k_1 r) e^{in\theta} , & a < r < b \\ u_Z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n J_n(k_2 r) e^{in\theta} , & r < a \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

où  $H_n^{(2)}$  est la fonction de Hankel de 2<sup>ème</sup> espèce d'ordre  $n$ , qui est simplement le conjugué de la fonction de Hankel de 1<sup>ère</sup> espèce d'ordre  $n$ . Notons que les coefficients  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  sont en général complexes, et sont déterminés par le système formé par les équations de continuité en déplacements et contraintes en  $r = a$  et  $r = b$ .

Ce système est donné par l'équation (II.31) et, comme nous l'avons évoqué plus haut, on ne peut pas le résoudre sans équation supplémentaire car il y a plus d'inconnues (cinq) que d'équations (quatre). On utilise donc une autre équation, qui est une équation de diffusion basée sur la théorie de la diffusion multiple de Waterman et Truell (Réf. [24]).

$$\begin{pmatrix} 0 & H_n^{(1)}(k_1 a) & H_n^{(2)}(k_1 a) & -J_n(k_2 a) \\ -H_n^{(1)}(k_1 b) & H_n^{(1)}(k_1 b) & H_n^{(2)}(k_1 b) & 0 \\ 0 & \mu_1 \frac{\partial}{\partial a} [H_n^{(1)}(k_1 a)] & \mu_1 \frac{\partial}{\partial a} [H_n^{(2)}(k_1 a)] & -\mu_2 \frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_2 a)] \\ -\mu \frac{\partial}{\partial b} [H_n^{(1)}(kb)] & \mu_1 \frac{\partial}{\partial b} [H_n^{(1)}(k_1 b)] & \mu_1 \frac{\partial}{\partial b} [H_n^{(2)}(k_1 b)] & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i^n J_n(kb) \\ 0 \\ i^n \mu \frac{\partial}{\partial b} [J_n(kb)] \end{pmatrix} \quad (\text{II.31})$$

Cette équation supplémentaire est basée sous l'approximation suivante. Étant donnée une distribution aléatoire de diffuseurs sphériques dans un milieu élastique infini, on peut assimiler ce milieu complexe à un milieu homogène dont le vecteur d'onde effectif  $k$  est complexe et défini à partir du nombre de diffuseurs par unité de volume ainsi que

l'approximation champ lointain du champ diffracté par un diffuseur unique. Selon Waterman et Truell, ceci conduit donc dans le cas de diffuseurs sphériques à la relation (II.32) :

$$\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 = \left[1 + \frac{2\pi n_0 f_s(0)}{k_1^2}\right]^2 - \left[\frac{2\pi n_0 f_s(\pi)}{k_1^2}\right]^2, \quad (\text{II.32})$$

où les fonctions  $f_s(0)$  et  $f_s(\pi)$  sont définies par les relations (II.33) suivantes, dans lesquelles les termes  $B_n$  sont des coefficients obtenus à partir des équations de continuité du problème de diffraction considéré.

$$f_s(0) = \frac{1}{ik} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) B_n \quad \text{et} \quad f_s(\pi) = \frac{1}{ik} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n+1) B_n. \quad (\text{II.33})$$

Dans le cas de diffuseurs à géométries cylindriques, les relations (II.32) et (II.33) ne sont plus valables. Yang et Mal (Réf. [38]) ont alors repris la théorie de Waterman et Truell appliquée à ce cas particulier de géométrie et ont obtenu les relations suivantes :

$$\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 = \left[1 - \frac{2in_0 f(0)}{k_1^2}\right]^2 - \left[\frac{2in_0 f(\pi)}{k_1^2}\right]^2, \quad (\text{II.34})$$

avec  $n_0$  le nombre de diffuseurs par unité de surface, et  $f(0)$  et  $f(\pi)$  les amplitudes de diffraction par un diffuseur unique respectivement dans la direction de propagation et en sens inverse définies à partir des coefficients  $A_n$ , solutions de (II.31), par :

$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n A_n \quad \text{et} \quad f(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n A_n. \quad (\text{II.35})$$

La théorie de Waterman et Truell s'appuie sur la description du milieu schématisée sur la Figure II.10, c'est-à-dire un milieu à deux phases, et est valide à condition que les interactions entre les diffuseurs soient faibles, c'est-à-dire pour des milieux à faible concentration de diffuseurs. Ceci ne s'applique donc pas à notre cadre d'étude. En revanche, en adaptant cette théorie au modèle à trois phases, on obtient une nouvelle relation pour le vecteur d'onde effectif qui selon Yang et Mal est correcte même pour des concentrations élevées de diffuseurs.

D'après eux, cette nouvelle relation est simplement obtenue en remplaçant  $k_1$  par  $k$  dans l'équation (II.34). On a alors :

$$1 = \left[1 - \frac{2in_0 f(0)}{k^2}\right]^2 - \left[\frac{2in_0 f(\pi)}{k^2}\right]^2. \quad (\text{II.36})$$

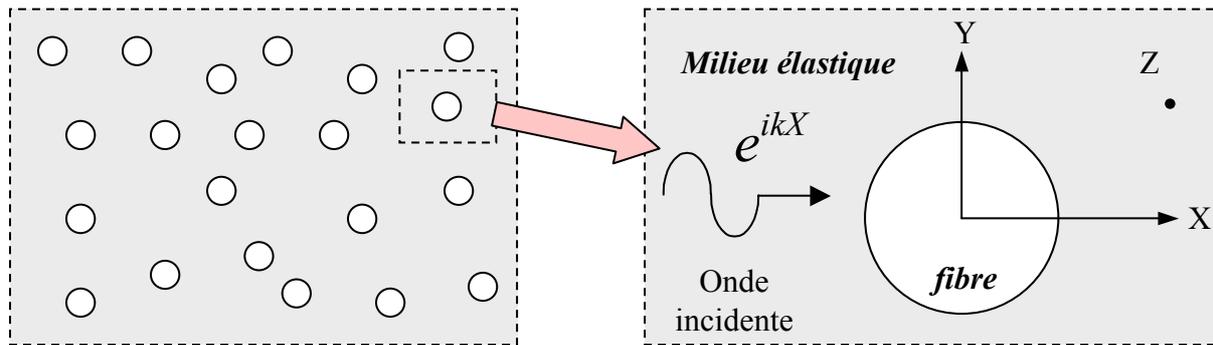


Figure II.10 : schéma du problème de diffusion dans la théorie de Waterman et Truell.

Il est important d'insister ici sur l'intérêt de la description géométrique du milieu à trois phases car cela est un point essentiel du modèle. Étant donné que l'on s'intéresse à des phénomènes élémentaires d'atténuation (absorption et diffusion), une description très précise de ces phénomènes à l'échelle microscopique s'impose. Ainsi, le fait de considérer ces trois phases permet de conserver la nature des interfaces entre chaque fibre et la matrice, tout en faisant une homogénéisation du milieu.

La théorie de Waterman et Truell est formulée pour un milieu matriciel élastique dont les propriétés mécaniques sont traduites par des quantités réelles. Or comme nous le savons, la matrice époxy est viscoélastique, et il est possible de décrire son comportement par des paramètres mécaniques complexes, ce que nous avons déjà fait dans le modèle de Biwa utilisant l'approximation de diffraction simple. De façon naturelle, nous nous sommes donc proposés d'introduire des coefficients mécaniques complexes représentant l'époxy dans les équations de Waterman et Truell, ainsi que dans les équations de continuité du modèle de Yang et Mal. D'un point de vue mathématique, cette modification n'affecte en rien le fondement des développements théoriques de ces modèles, qui sont en effet déjà employés avec des quantités complexes décrivant le milieu effectif. En revanche d'un point de vue physique, cela permet de coupler la théorie de diffusion multiple développée par Yang et Mal dans le cadre de la théorie de Waterman et Truell, avec le phénomène d'absorption inhérent au milieu matriciel. Ceci constitue un des points majeurs de cette thèse.

L'équation (II.36) est donc l'équation supplémentaire qui va permettre de résoudre le système des équations de continuité (II.31). Remarquons que cette équation est une équation implicite puisque les termes  $f(0)$  et  $f(\pi)$  dépendent tous deux de  $k$  par l'intermédiaire des coefficients  $A_n$  solutions de (II.31). Elle est donc résolue par un procédé itératif en parallèle avec la résolution du système (II.31), méthode que nous ne détaillerons pas ici. On peut se reporter aux articles de Yang et Mal (Réf. [37, 38]) pour plus de précisions sur cette résolution, ou encore à l'Annexe D de cette thèse.

Après avoir effectué cette résolution pour différentes fréquences, on connaît le nombre d'onde effectif de la couche composite. La partie réelle de ce nombre d'onde permet d'obtenir la vitesse de phase en fonction de la fréquence, et sa partie imaginaire nous donne directement le coefficient d'atténuation des ondes S// en fonction de la fréquence. En outre, cette atténuation prend en compte l'atténuation due à l'absorption de la matrice et également le phénomène de diffusion multiple. Intéressons-nous maintenant au cas vectoriel des ondes P et S $\perp$ .

### 4.3 Cas vectoriel : ondes incidente P ou S $\perp$

On considère maintenant une onde incidente de polarité P ou S $\perp$ . Elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} e^{ihX} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(hr) e^{in\theta} & \text{pour l'onde de polarité P} \\ e^{ikX} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta} & \text{pour l'onde de polarité SV} \end{cases}, \quad (\text{II.37})$$

où  $h$  représente le vecteur d'onde des ondes P dans le milieu effectif et  $k$  celui des ondes S $\perp$  dans le milieu effectif également. La Figure II.11 illustre le problème de la diffraction de ces ondes par une fibre dans le cadre du modèle à trois phases, et présente les différentes ondes mises en jeu.

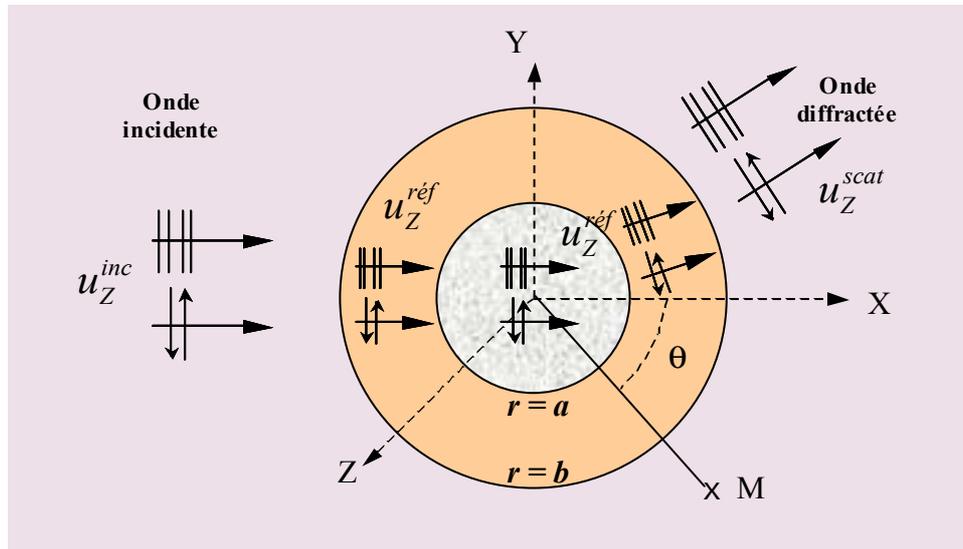


Figure II.11 : Diffraction d'une onde P ou S $\perp$  dans le cas d'un modèle à trois phases.

De la même manière que dans le paragraphe 2.2, on décompose le champ de déplacement en utilisant les potentiels des composantes longitudinales et transversales des différentes ondes, soit :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi + \overrightarrow{\text{rot}} (\Psi \vec{e}_z). \quad (\text{II.38})$$

Les potentiels s'écrivent de manière différente selon les zones considérées (fibre, matrice, milieu effectif). On a :

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(hr) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n^{(1)}(hr) e^{in\theta} \\ \Psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \end{cases}, \quad r > b \quad (\text{II.39})$$

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H_n^{(1)}(h_1 r) e^{in\theta} + D_n H_n^{(2)}(h_1 r) e^{in\theta} \\ \Psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in\theta} + F_n H_n^{(2)}(k_1 r) e^{in\theta} \end{cases}, \quad a < r < b \quad (\text{II.40})$$

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_n J_n(h_2 r) e^{in\theta} \\ \Psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_n J_n(k_2 r) e^{in\theta} \end{cases}, \quad r < a \quad (\text{II.41})$$

Encore une fois, l'écriture des conditions de continuité aux interfaces  $r = a$  et  $r = b$  aboutit à un système de huit équations (deux déplacements et deux contraintes à chaque interface) permettant de déterminer les coefficients  $A_n \dots M_n$ . Mais, comme dans le cas S//, ce système est indéterminé car nous avons deux inconnues supplémentaires qui sont les nombres d'ondes effectifs des ondes P et S $\perp$ . On a donc recours à la théorie de Waterman et Truell modifiée de la même manière que pour le cas S//, ce qui nous donne les deux équations de diffusion multiple suivantes :

$$\begin{cases} 1 = \left[ 1 - \frac{2in_0 f_1(0)}{h^2} \right]^2 - \left[ \frac{2in_0 f_1(\pi)}{h^2} \right]^2 \\ 1 = \left[ 1 - \frac{2in_0 f_2(0)}{k^2} \right]^2 - \left[ \frac{2in_0 f_2(\pi)}{k^2} \right]^2 \end{cases}, \quad (\text{II.42})$$

avec

$$\begin{cases} f_1(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n A_n & \text{et} & f_1(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n A_n \\ f_2(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n B_n & \text{et} & f_2(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n B_n \end{cases}. \quad (\text{II.43})$$

Le principe de résolution est le même que pour le cas  $S//$ , et on obtient ainsi les nombres d'ondes  $h$  et  $k$ , et par leurs parties imaginaires, les coefficients d'atténuation des ondes P et  $S_{\perp}$  en fonction de la fréquence. Les paramètres utilisés pour caractériser la matrice viscoélastique sont à nouveau complexes, comme dans le cas  $S//$ .

#### 4.4 Résultats

On peut appliquer le modèle de diffusion multiple pour prédire l'atténuation des ondes  $S//$ , P et  $S_{\perp}$  dans une couche unidirectionnelle carbone / époxy, soit en fonction de la fréquence, soit en fonction de la fraction volumique de fibres contenue dans la couche. Par exemple, la Figure II.12-a représente l'atténuation des ondes  $S//$ , P et  $S_{\perp}$  pour une couche carbone / époxy contenant 65 % de fibres, comme c'est le cas dans les couches constitutives du RTM.

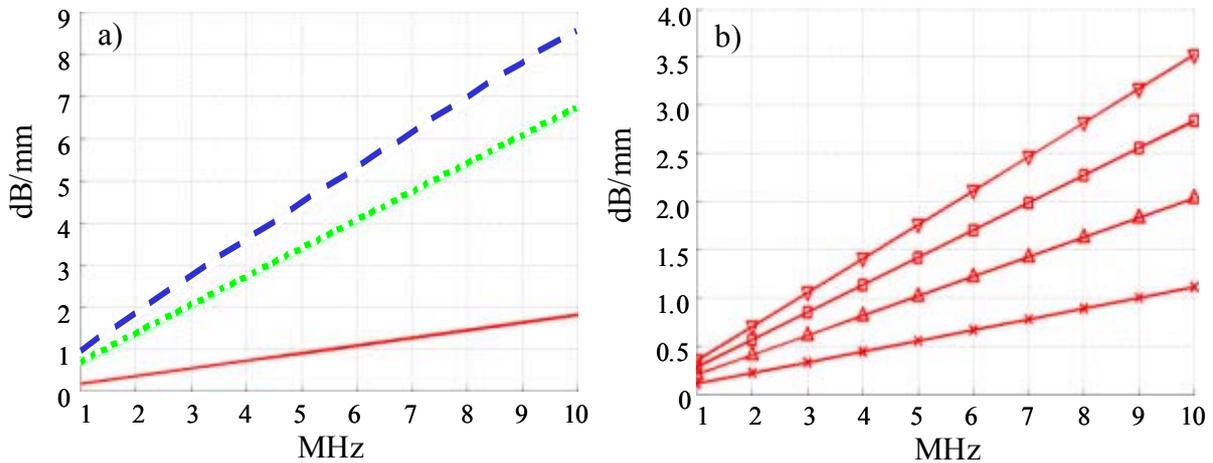


Figure II.12 : Calculs d'atténuation par le modèle de diffusion multiple selon la fréquence  
 a) ondes  $S_{\perp}$  (.....), P (—),  $S//$  (- - -) pour 65 % de fibres  
 b) ondes P pour différents taux de fibres : 20% (▽), 40% (□), 60% (△), 80% (×).

À la fréquence 5 MHz, on constate par exemple que l'atténuation des ondes  $S//$  est d'environ 4,4 dB/mm et que celle des ondes P est de l'ordre de 0,9 dB/mm, soit environ cinq fois moindre.

Nous avons étudié également l'atténuation en fonction de la fréquence pour chaque type d'onde et pour plusieurs valeurs de la fraction volumique de fibres. Le résultat montre que quelle que soit cette fraction volumique et quel que soit le type d'onde, la dépendance fréquentielle de l'atténuation (dans une couche carbone / époxy unidirectionnelle) est linéaire. La Figure II.12-b illustre ce résultat pour les ondes P. Ce comportement, qui était difficilement prévisible étant donné la complexité du phénomène d'atténuation, rejoint les observations expérimentales de Rokhlin (Réf. [16]) ou encore Deschamps et Hosten

(Réf. [18]), que nous avons mentionnées dans le chapitre bibliographique. De plus, ce comportement permet une représentation originale (Figure II.13). On peut en effet interpoler les courbes linéaires d'atténuation de chaque onde pour une fraction volumique de fibre donnée et ainsi associer un coefficient directeur noté  $\alpha_0$  à chaque fraction volumique. Pour connaître l'évolution de l'atténuation des ondes S//, P ou S $\perp$  selon la fréquence dans une couche unidirectionnelle carbone / époxy, il suffit alors d'appliquer la loi :

$$\alpha(\phi, f) = \alpha_0(\phi) f, \quad (\text{II.44})$$

où  $\phi$  est la fraction volumique de fibres. La Figure II.13 montre par exemple l'allure de ces courbes  $\alpha_0(\phi)$  pour les ondes P et S $\perp$ .

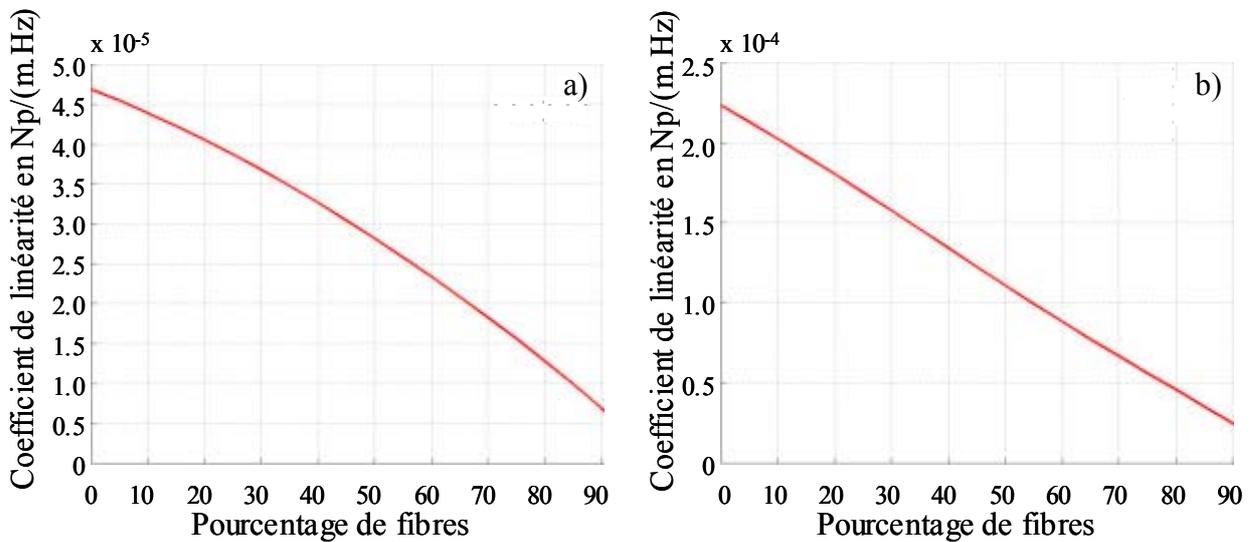


Figure II.13 : Coefficient de linéarité de l'atténuation a) des ondes P, et b) des ondes S $\perp$  selon le pourcentage de fibres.

On peut synthétiser l'ensemble de ces résultats sur un même graphique en utilisant une représentation du coefficient d'atténuation en trois dimensions. Par exemple, dans le cas des ondes longitudinales P, la Figure II.14 illustre le coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence et de la fraction volumique de fibres. La courbe tracée dans le plan P1 constitue la loi d'atténuation en fonction de la fraction volumique de fibres à la fréquence particulière 5 MHz, et les courbes tracées dans les plans P2 et P3 correspondent respectivement aux lois d'atténuations en fonction de la fréquence de l'époxy pure, et d'une couche composite comprenant 65 % de fibres de carbone.

Les résultats d'atténuation que nous venons de présenter sont obtenus en utilisant la partie imaginaire des nombres d'ondes effectifs calculés par le modèle prenant en compte la diffusion multiple que nous avons développé à partir de la théorie de Yang et Mal. On le nommera désormais modèle de Yang et Mal modifié. Si on s'intéresse à la partie réelle de ces

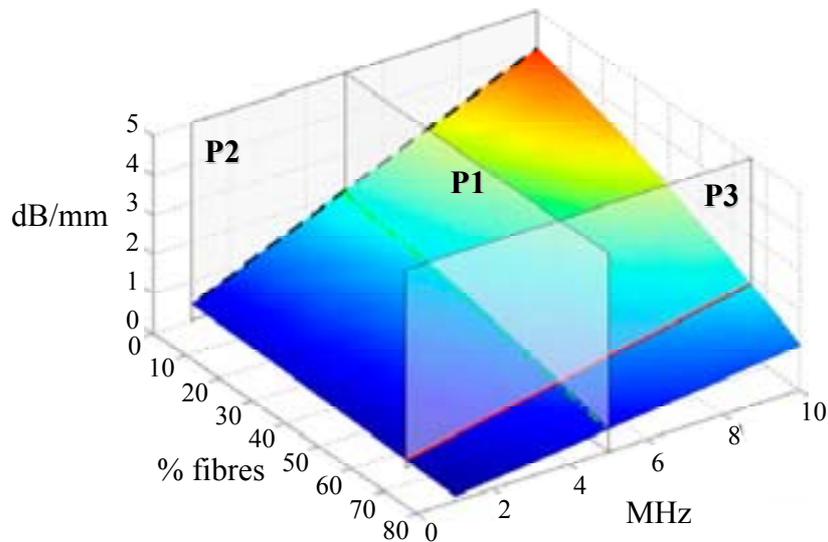


Figure II.14 : Coefficient d'atténuation des ondes P selon la fréquence et la fraction volumique de fibres.

nombre d'ondes, nous pouvons calculer la vitesse de phase des ondes S//, P ou S $\perp$  en fonction de la fréquence. Le résultat concernant les ondes P dans une couche contenant 65 % de fibres est donné sur la Figure II.15.

Ce résultat nous permet de constater que la vitesse de phase des ondes P varie très peu avec la fréquence, puisqu'on observe sur la Figure II.15 une dispersion de seulement quelques dixièmes de mètres par seconde, soit de l'ordre de 1/10000. Pour la suite de notre travail, on considèrera donc que la dispersion de la vitesse de phase est nulle (suffisamment faible pour être négligeable).

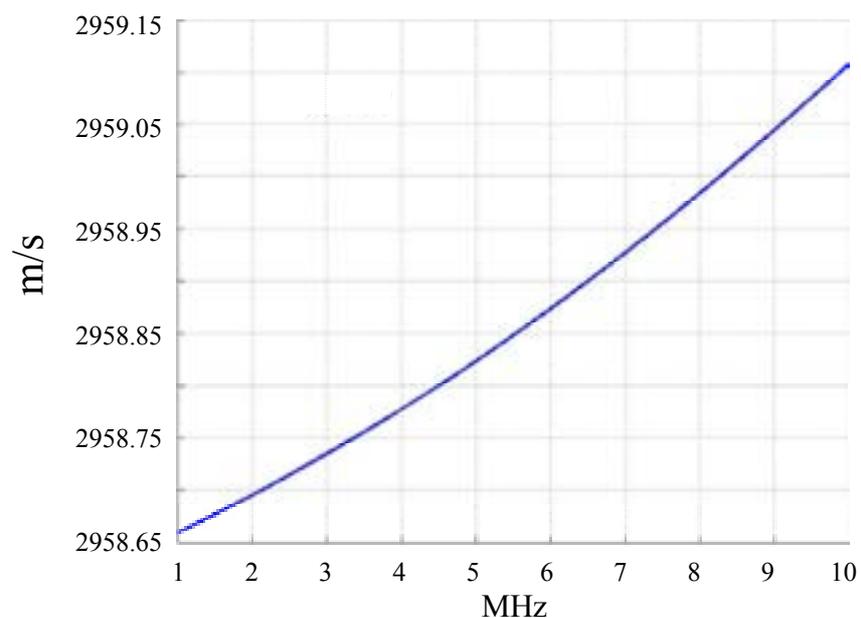


Figure II.15 : Vitesse de phase des ondes P selon la fréquence.

*Remarque* : ce modèle nous permet de réaliser une homogénéisation « dynamique » des constantes de propagation relatives aux ondes S//, P et S $\perp$ , et ainsi de remonter à certains coefficients de rigidité. Par exemple, à l'aide de la vitesse de phase des ondes P que nous venons de représenter, on peut directement remonter à la partie réelle du coefficient de rigidité dans la direction perpendiculaire à l'axe des fibres de la couche unidirectionnelle. Si on considère que les fibres sont alignées dans la direction 1, le plan (2,3) est alors un plan isotrope et on a  $C_{22} = C_{33} = 13,28$  GPa. Or, dans le cas d'une homogénéisation statique (voir paragraphe 1.2 de ce chapitre), nous avons trouvé pour ces coefficients une valeur de 13,22 GPa. De même, à partir de la vitesse de phase des ondes S// et S $\perp$ , on peut remonter aux coefficients  $C_{44}$  et  $C_{66}$ . On obtient  $C_{44} = 3,18$  GPa et  $C_{66} = 5,79$  GPa alors que les valeurs statiques étaient respectivement de 3,12 GPa et 5,77 GPa. L'écart entre l'homogénéisation statique et le résultat obtenu par l'homogénéisation dynamique est donc d'environ 0,5 % sur  $C_{22}$  et  $C_{33}$ , 1,8 % sur  $C_{44}$ , et enfin 0,3 % sur  $C_{66}$ . Ceci permet de vérifier la pertinence de l'homogénéisation réalisée dans le cadre du modèle de diffusion multiple : elle conduit à une description très satisfaisante du comportement élastique de la couche unidirectionnelle. Nous devons maintenant comparer les résultats d'atténuation obtenus par les modèles de diffraction simple et de diffusion multiple.

## 5 Comparaison des différents modèles théoriques étudiés

Nous avons étudié dans le paragraphe 3 de ce chapitre le modèle de Biwa, et mis au point dans le paragraphe 4 le modèle que nous appelons Yang et Mal modifié. Ces modèles permettent de calculer l'atténuation totale d'une couche unidirectionnelle carbone / époxy soit par superposition des phénomènes de viscosité et de diffraction simple, soit par couplage du phénomène visqueux avec celui de diffusion multiple. Nous devons maintenant comparer ces deux méthodes afin de déterminer la plus pertinente quant à notre cadre d'étude.

*Remarque* : en plus de ces deux modèles, on trace également sur les graphes le résultat d'atténuation obtenu sous l'approximation de diffraction simple mais en considérant « tous » les termes  $A_n$  (voir paragraphe 3.5). En effet, dans le calcul du terme de diffraction simple par un cylindre unique, les approximations faites par Biwa conduisent à utiliser seulement les termes  $A_0$  et  $A_1$ . Mais on peut aussi considérer tous les termes (numériquement, on ne peut bien sûr prendre en compte qu'un nombre fini de valeurs ; pour nos applications numériques nous avons pris  $n = 100$ , ce qui revient alors à considérer les termes  $A_0 - A_{100}$ ).

Pour le cas des ondes S// par exemple, nous pouvons superposer sur un même graphe les coefficients d'atténuation en fonction de la fréquence pour différents taux de fibres.

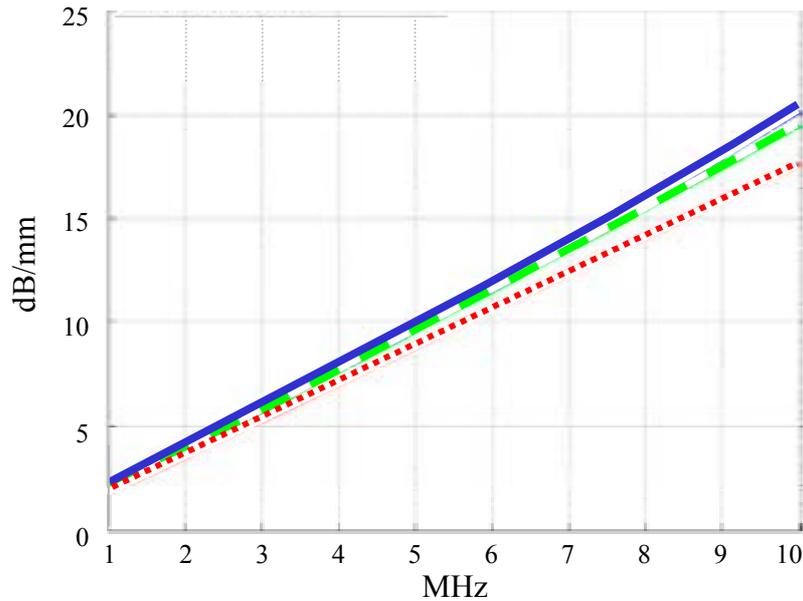


Figure II.16 : Comparaison modèle de Biwa / modèle de Yang et Mal modifié dans le cas des ondes S// et d'un composite unidirectionnel constitué de 10 % de fibres : (—) Biwa avec  $A_0$  et  $A_1$  uniquement, (- - -) Biwa avec les coefficients  $A_0$  à  $A_{100}$  et (· · · ·) Yang et Mal modifié.

Tout d'abord, prenons un taux de fibres assez faible, par exemple 10%. La Figure II.16 montre les résultats d'atténuation obtenus par les différents modèles. Pour un tel taux de fibres, nous pouvons constater que les prédictions du coefficient d'atténuation obtenues avec les différents modèles sont très proches. En effet, le modèle prenant en compte la diffusion multiple prédit une atténuation des ondes S// légèrement inférieure à celle calculée par le modèle de Biwa. Cet écart est de l'ordre de 0,7 dB/mm à la fréquence 5 MHz. On peut également vérifier sur la Figure II.16 que l'approximation du modèle de Biwa consistant à ne pas prendre en compte l'ensemble des coefficients  $A_n$  dans le calcul du coefficient de diffraction est largement justifiée sur la gamme de fréquences de 1 MHz à 10 MHz. L'ensemble de ces observations nous permet de constater que les deux types de modélisations conduisent quasiment à la même loi d'atténuation en fonction de la fréquence, ce qui est logique pour un taux de fibres aussi faible pour lequel les interactions entre les diffuseurs sont peu nombreuses.

On considère maintenant un pourcentage de fibres dans la couche unidirectionnelle de 65 %, qui est le taux réel des couches contenues dans les RTM.

La Figure II.17 illustre à nouveau les prédictions d'atténuation des ondes S// pour chaque modèle considéré. Cette fois, l'écart entre les coefficients d'atténuation obtenus par les modèles de Biwa et de Yang et Mal modifié est de 4,8 dB/mm à la fréquence 5 MHz. Le modèle de Biwa conduit donc à une surestimation importante de l'atténuation. Nous avons également effectué le calcul d'atténuation par ce dernier modèle en considérant l'ensemble des termes de  $A_0$  à  $A_{100}$  (pas seulement les deux premiers).

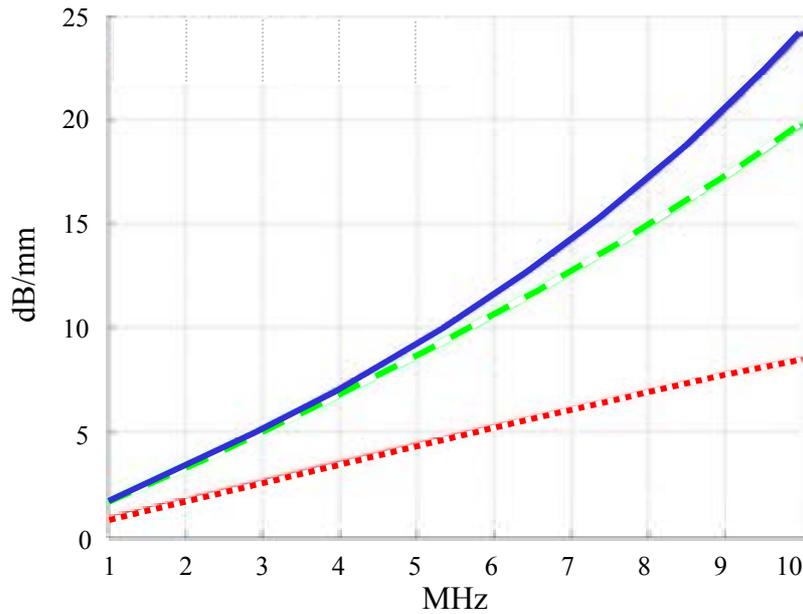


Figure II.17 : Comparaison modèle de Biwa / modèle de Yang et Mal modifié dans le cas des ondes S// et d'un composite unidirectionnel constitué de 65 % de fibres : (—) Biwa avec  $A_0$  et  $A_1$  uniquement, (---) Biwa avec les coefficients  $A_0$  à  $A_{100}$  et (· · · ·) Yang et Mal modifié.

Ceci permet d'améliorer légèrement le comportement à haute fréquence de la loi d'atténuation calculée, et illustre le fait que l'approximation consistant à ne garder que les deux premiers coefficients  $A_0$  et  $A_1$  est une approximation basse fréquence.

La surestimation de l'atténuation dans le cas de l'approximation par diffraction simple du modèle de Biwa peut être surprenante dans un premier temps, mais cela peut s'expliquer par le fait que la directivité du phénomène de diffusion implique une rétro-diffusion croissante avec l'augmentation de la fréquence. Pour illustrer cet effet, nous avons représenté par exemple sur la Figure II.18 l'évolution avec la fréquence des termes  $f_1(0)$  et  $f_1(\pi)$  définis par les relations (II.43). Ces termes sont, rappelons-le, reliés à l'amplitude des ondes longitudinales diffractées par une fibre dans le sens de la propagation et en sens inverse. On constate bien sur la Figure II.18 cette augmentation importante de la rétro-diffusion par rapport à la diffusion dans le sens de propagation lorsque la fréquence augmente.

Dans le cas de la diffraction simple, ce phénomène entraîne donc une perte d'énergie dans le sens de la propagation d'autant plus grande pour les hautes fréquences. En revanche dans le cas de la diffusion multiple, cette énergie rétro-diffusée n'est que partiellement perdue puisqu'une partie est susceptible d'aller interagir avec les fibres voisines, qui vont donc chacune apporter une contribution énergétique supplémentaire dans le sens de la propagation.

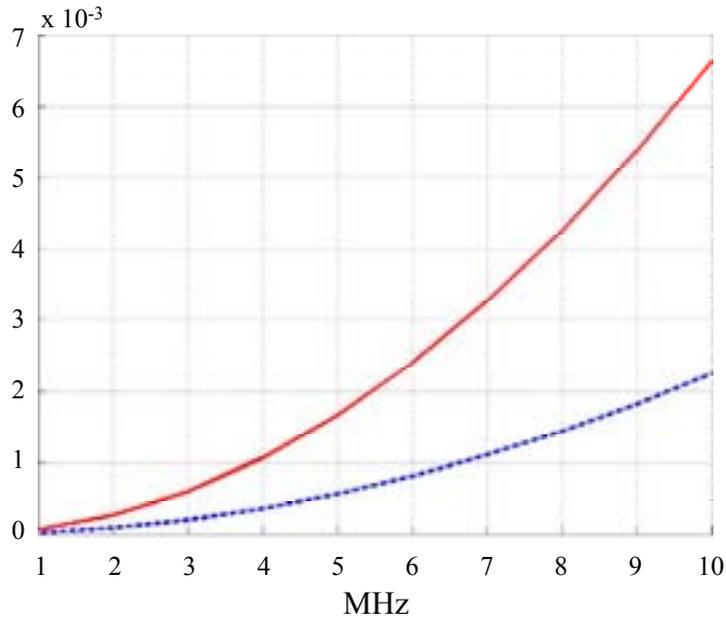


Figure II.18 : variations selon la fréquence des termes (---)  $f_1(0)$  et (—)  $f_1(\pi)$ .

Or celle-ci n'est pas du tout prise en compte par le modèle de diffraction simple, ce qui explique que celui-ci a tendance à surestimer l'atténuation par rapport au modèle prenant en compte la diffusion multiple. Le schéma présenté sur la Figure II.19 permet d'illustrer cette explication.

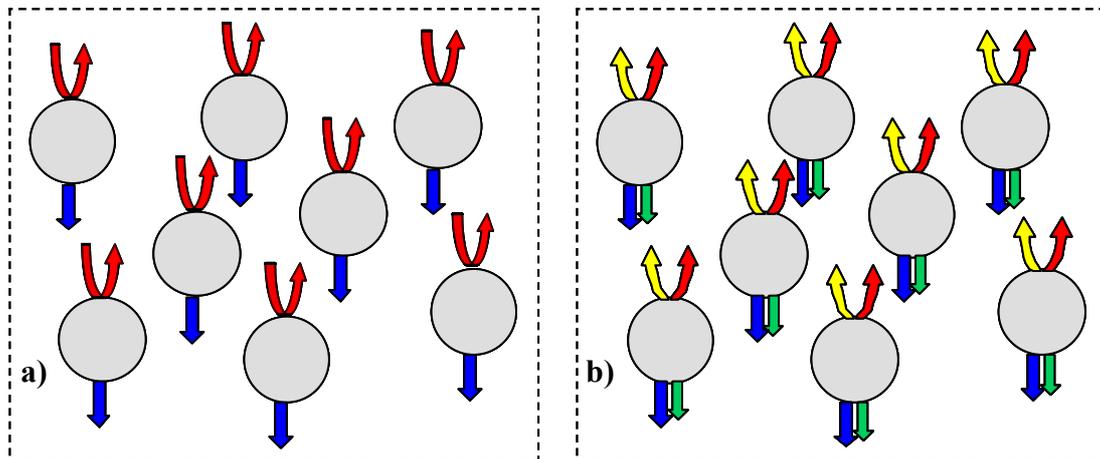


Figure II.19 : Schématisation des énergies quantitativement transmises et rétro-diffusées lors de la diffraction par une fibre dans les cas de a) diffraction simple et b) diffusion multiple.

En conclusion de la comparaison des modèles de Biwa et de Yang et Mal modifié, il apparaît clairement que la prise en compte dans la modélisation du phénomène de diffusion multiple conduit à une prédiction d'atténuation nettement différente de celle obtenue en faisant

l'approximation de diffraction simple, principalement pour des couches composites à fortes densités de fibres (cas notamment des RTM). Intuitivement, nous pensons alors que c'est le modèle de diffusion multiple qui conduit au meilleur résultat puisqu'il est *a priori* plus rigoureux quant à ses hypothèses par rapport à la réalité physique du phénomène de diffusion, mais ceci reste à prouver.

Ainsi, avant de conclure sur le choix de modélisation de l'atténuation dans une couche composite carbone / époxy unidirectionnelle que nous adopterons pour la suite de ce travail, intéressons-nous à la confrontation des prédictions d'atténuation obtenues par le modèle de Yang et Mal modifié avec des résultats expérimentaux.

## **6 Comparaison du modèle de Yang et Mal modifié à des résultats expérimentaux**

Dans les précédents paragraphes de ce chapitre II, nous avons modélisé les phénomènes élémentaires d'atténuation dans une couche unidirectionnelle carbone / époxy, c'est-à-dire la viscoélasticité et la diffusion. Nous avons vu que la prise en compte de la diffusion multiple était indispensable, et nous avons montré comment prendre en compte ces phénomènes de façon simultanée. Cela nous a permis d'effectuer des simulations d'atténuation dans des couches composites, pour différents taux de fibres. Il est maintenant indispensable de valider ces calculs par comparaison à des résultats expérimentaux.

### **6.1 Cas d'une onde incidente $S//$**

Dans le cas simple d'une onde incidente  $S//$ , Biwa a comparé différents modèles théoriques prenant en compte la diffusion multiple (l'absorption par effet viscoélastique étant bien sûr toujours considérée de façon simultanée). Il a pu également réaliser des mesures d'atténuation sur des échantillons carbone / époxy unidirectionnels avec différents taux de fibres (voir Réf. [41]). Toutefois, les concentrations de ces échantillons sont très peu différentes les unes des autres (comprises approximativement entre 50 % et 60 %) car il est très difficile d'obtenir expérimentalement des concentrations variées de fibres. Tous ces résultats sont rassemblés sur la Figure II.20.

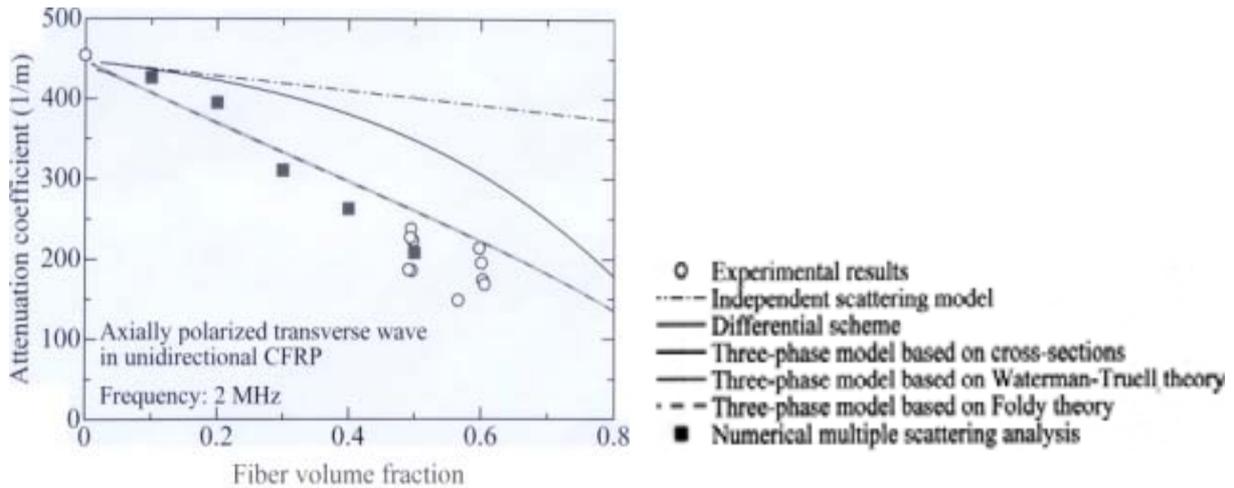


Figure II.20 : Comparaison de modèles théoriques d'atténuation et de mesures d'atténuations dans le cas d'ondes  $S//$  à la fréquence 2 MHz, selon la fraction volumique de fibres.

Les résultats expérimentaux sont représentés par des cercles blancs. Les carrés gris représentent le coefficient d'atténuation des ondes  $S//$  calculé par un modèle purement numérique, ce qui conduit bien entendu à des résultats très proches des résultats expérimentaux. Puis, Biwa a représenté sur ce graphique les résultats du modèle de diffraction simple présenté au paragraphe 3 de ce chapitre, ainsi que ceux obtenus par un schéma différentiel dont les détails théoriques peuvent être obtenus dans la référence (Réf. [41]). Mais ces deux modèles donnent un coefficient d'atténuation relativement éloigné des résultats expérimentaux.

En revanche, on peut observer sur ce graphe une bonne correspondance entre les résultats expérimentaux et les prédictions d'atténuation obtenues par les modèles à trois phases basés sur différentes théories, qui conduisent tous trois à des résultats parfaitement similaires (courbes superposées). En particulier, le modèle basé sur la théorie de diffusion multiple de Waterman et Truell correspond au modèle de Yang et Mal modifié appliqué aux ondes  $S//$  que nous avons décrit dans le paragraphe 4 de ce chapitre.

Nos prédictions d'atténuation obtenues dans le cas d'ondes  $S//$  à la fréquence de 2 MHz en fonction de la fraction volumique de fibres sont présentées sur la Figure II.21. Nous avons également représenté sur cette figure les résultats expérimentaux d'atténuation des ondes  $SH$  à la fréquence 2 MHz effectués par Biwa. On retrouve bien sûr le même résultat que Biwa (voir Figure II.20).

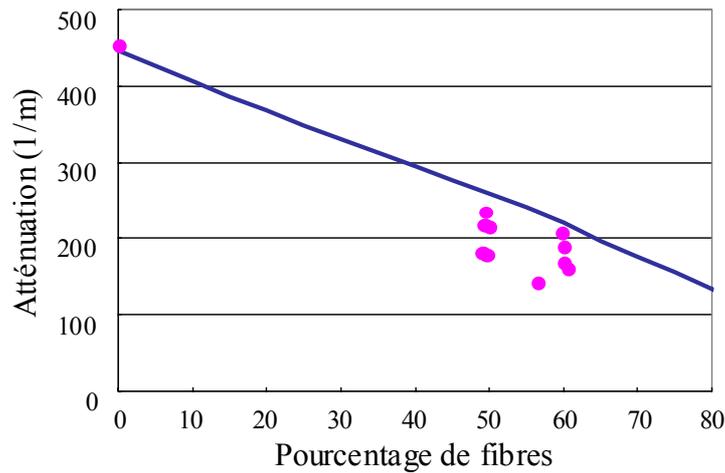


Figure II.21 : Atténuation des ondes  $S//$  par le modèle de Yang Mal modifié à la fréquence 2 MHz en fonction de la fraction volumique de fibres.

— Prédictions      ● Mesures

Intéressons-nous maintenant au cas des ondes P et  $S\perp$ .

## 6.2 Cas d'une onde incidente P ou $S\perp$

Dans le cas d'une onde incidente P ou  $S\perp$ , Biwa a pu obtenir expérimentalement des mesures d'atténuation (Réf. [41]) sur les mêmes échantillons que ceux du paragraphe précédent.

De notre côté, le modèle de Yang et Mal modifié que nous avons développé dans ce cas vectoriel nous permet de réaliser des simulations d'atténuation à différentes fréquences en fonction de la fraction volumique de fibres, dans les cas d'ondes P et  $S\perp$ . On peut donc comparer ces prédictions avec les résultats expérimentaux de Biwa. Cette confrontation est intéressante puisqu'elle n'avait pas encore pu être faite avant cette thèse. En effet, Biwa ne disposait pas d'un modèle capable de prédire l'atténuation par couplage entre la viscoélasticité et la diffusion multiple dans le cas vectoriel des ondes P et  $S\perp$ .

La Figure II.22 présente les résultats de ces comparaisons pour les fréquences 3 MHz, 5 MHz, et 7 MHz dans le cas des ondes P, et la Figure II.23 montre les même types de comparaisons dans le cas des ondes  $S\perp$  pour les fréquences 2 MHz et 3 MHz.

Tous ces résultats montrent donc que nous avons un très bon accord entre les résultats numériques obtenus par le modèle de Yang et Mal modifié et les résultats expérimentaux effectués par Biwa. Notre modèle est donc tout à fait satisfaisant.

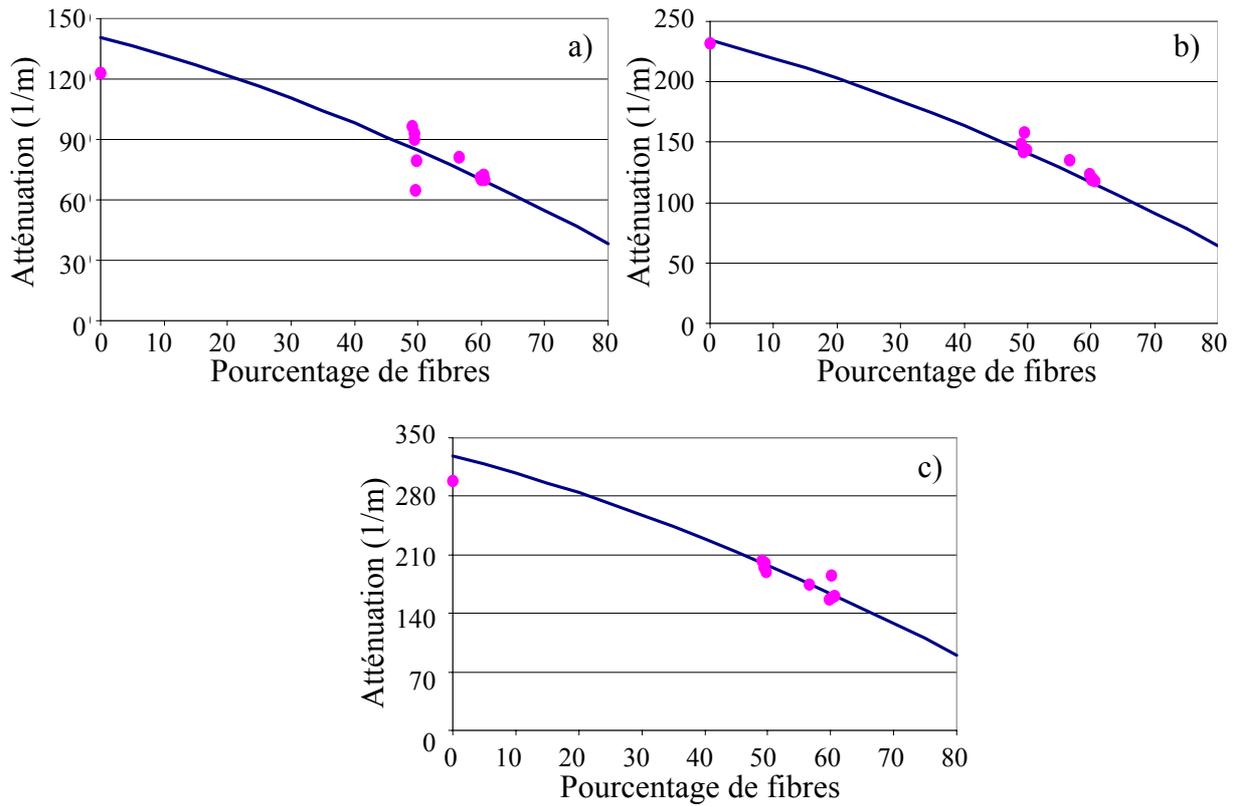


Figure II.22 : Comparaison prédictions / mesures de l'atténuation des ondes P à différentes fréquences : a) 3MHz, b) 5MHz et c) 7MHz.

— Prédictions      ● Mesures

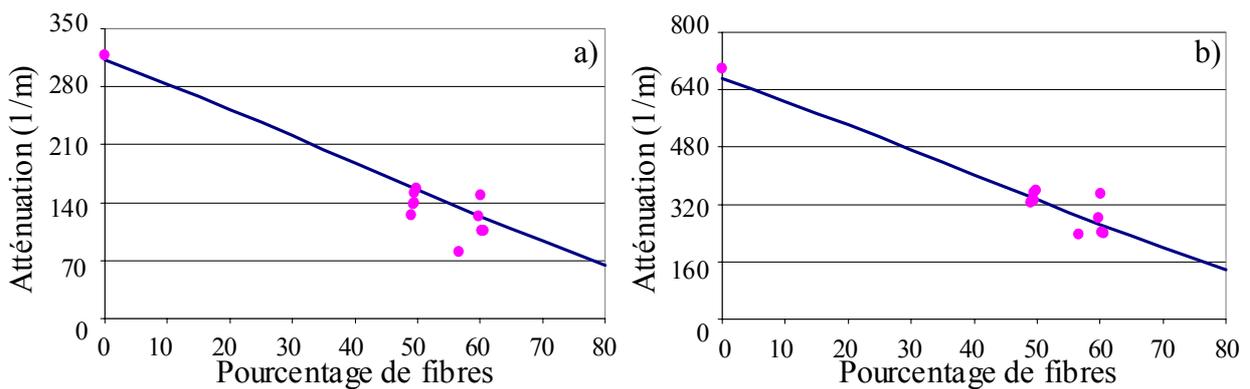


Figure II.23 : Comparaison prédictions / mesures de l'atténuation des ondes S<sub>⊥</sub> à différentes fréquences : a) 2MHz et b) 3MHz.

— Prédictions      ● Mesures

## **7 Conclusion**

Dans ce deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation de l'atténuation dans une couche composite carbone / époxy à fibres unidirectionnelles. Pour cela, nous avons étudié différents modèles capables de rendre compte des deux phénomènes élémentaires d'atténuation qui sont la viscoélasticité et la diffusion.

Nous avons montré que pour prédire l'atténuation dans un tel matériau, le phénomène de diffusion multiple doit être pris en compte. Une modélisation du phénomène de diffusion par l'approximation de diffraction simple conduit à une surestimation importante de l'atténuation pour des concentrations de fibres élevées. Or dans les couches des matériaux RTM, les concentrations de fibres sont effectivement très élevées. La prise en compte des interactions multiples est donc indispensable.

Pour cela, nous avons développé un modèle, que nous avons appelé modèle de Yang et Mal modifié, basé sur la description du milieu composite unidirectionnel par un milieu à trois phases et couplé à la théorie de diffusion multiple de Waterman et Truell. La modification apportée à ce modèle est la prise en compte de la viscosité de façon couplée à la diffusion multiple.

Nous avons ensuite pu valider ce modèle par comparaison à des résultats expérimentaux.

Les calculs que nous avons faits à l'aide de ce modèle ont révélé, pour les caractéristiques des fibres et de la matrice utilisées dans les pièces RTM objet de notre étude, un comportement de l'atténuation linéaire avec la fréquence, ainsi qu'une vitesse de phase non dispersive (indépendante de la fréquence).

Enfin, il est important de noter que le modèle que nous avons décrit n'est pas spécifique aux composites carbone / époxy, même si nous l'avons uniquement utilisé dans ce cas là. Il est tout à fait possible d'appliquer ce modèle à d'autres composites fibreux à deux phases. On peut en outre imaginer appliquer ce modèle à des fibres ayant des propriétés viscoélastiques.

## Chapitre III

### Homogénéisation d'un pli

Les développements du chapitre II nous ont permis de définir le comportement d'une couche composite carbone / époxy unidirectionnelle de la façon suivante. En s'intéressant aux parties réelles des constantes de propagation complexes des ondes se propageant dans de telles couches, nous avons montré que la vitesse de phase de ces différentes ondes est indépendante de la fréquence. Ceci permet donc de définir cette vitesse de phase par sa valeur basse fréquence (valeur statique). Il est alors possible de déterminer l'ensemble des constantes d'élasticité de la couche (cinq valeurs indépendantes dans le cas de symétrie hexagonale) par une méthode d'homogénéisation statique, c'est-à-dire en faisant l'approximation de contraintes et de déformations statiques, à partir des caractéristiques élastiques de chaque constituant. C'est ce que nous avons fait dans le premier paragraphe du chapitre II. En revanche, les couches carbone / époxy ont un comportement atténuant, et les coefficients d'atténuation des différentes ondes propagées sont dépendants de la fréquence, et doivent être calculés de façon dynamique. Le modèle de Yang et Mal modifié que nous avons développé nous a permis de calculer les coefficients d'atténuation d'ondes se propageant dans la direction normale aux fibres contenues dans la couche, et ainsi de remonter à certaines parties imaginaires des coefficients de rigidité et non à la matrice d'élasticité complète. Ainsi, la détermination du comportement mécanique de la couche a été faite en décomposant le problème en deux étapes : une étape statique pour déterminer l'ensemble des parties réelles des coefficients d'élasticité de cette couche, et une étape dynamique permettant de déterminer les coefficients d'atténuation d'ondes  $S//$ ,  $P$  et  $S\perp$  dans la direction normale aux fibres.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le procédé de fabrication RTM implique un aspect multi-échelles du composite : couche, pli, multi-plis. Ainsi, après s'être intéressé à la couche, nous devons étudier le moyen de caractériser un pli du RTM, c'est-à-dire rappelons-le, un assemblage de trois couches désorientées les unes par rapport aux autres d'un angle donné.

La caractérisation complète (totalité des coefficients de la matrice de rigidité) d'un pli du composite RTM, c'est-à-dire un empilement de couches, de façon dynamique n'est pas

possible dans notre cas. En effet, ces coefficients sont complexes, et leur partie imaginaire représentative de l'atténuation ne peut être obtenue à l'aide du modèle de Yang et Mal modifié que pour la direction orthogonale aux fibres. Toutefois, étant donné la configuration de contrôle qui nous intéresse (ondes longitudinales en incidence normale, noté  $L0^\circ$  dans la suite), nous pouvons nous passer de cette caractérisation dynamique complète d'un pli RTM et décomposer le problème de la même façon que pour une couche unidirectionnelle en un problème élastique complet et rigoureux, et un calcul d'atténuation dans la direction normale au pli considéré. Nous justifierons ceci dans le prochain chapitre. En revanche, pour le problème élastique, nous allons utiliser une méthode classique d'homogénéisation en statique, qui nous permet de déterminer de façon rigoureuse les parties réelles de tous les coefficients nécessaires pour décrire le comportement du pli.

Dans ce chapitre, nous allons donc décrire la méthode d'homogénéisation utilisée pour calculer les parties réelles des constantes d'élasticité du pli à partir de celles d'une couche. Après avoir décrit cette méthode, nous l'appliquerons aux matériaux faisant l'objet de notre étude. Précisons que ce chapitre n'apporte aucune nouveauté d'un point de vue de la modélisation par rapport à la littérature, mais il décrit plus une application à notre cas d'étude de modèles existants. Il constitue une étape importante de ce travail avant de pouvoir s'intéresser à la propagation ultrasonore à l'échelle multi-plis du RTM.

## **1 Généralités**

Dans les composites dits « classiques » (c'est-à-dire possédant des interfaces parallèles), il est courant de réaliser une homogénéisation au sein des plis (empilements de couches) permettant de considérer ceux-ci comme des couches homogènes. Par exemple dans les multicouches périodiques, on considère que le multicouche est composé d'une succession de « motifs » identiques, qui sont chacun constitués d'un empilement de couches diverses. Dans le cas où ces motifs sont constitués par un empilement de couches unidirectionnelles désorientées, formant ainsi un pli au sens où nous l'avons défini, le principe d'homogénéisation d'un pli permet alors de réduire considérablement le nombre d'interfaces à prendre en compte au cours de la propagation.

Dans les RTM, nous allons donc tout naturellement homogénéiser chaque pli de la même manière, afin de pouvoir considérer ces plis comme des couches homogènes. Il est cependant nécessaire de prendre quelques précautions afin de s'assurer que les plis contenus dans les RTM vérifient bien les conditions de validité du principe d'homogénéisation.

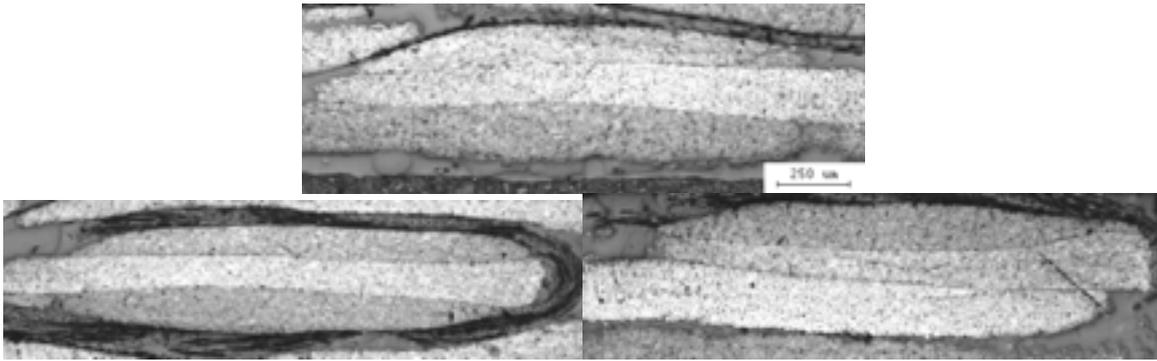


Figure III.1 : Exemples de micrographies de plis RTM.

Pour justifier que l'on peut réaliser une telle homogénéisation sur les RTM, observons des exemples de micrographies réalisées sur des plaques (Figure III.1). On peut noter sur ces micrographies que les interfaces au sein d'un pli entre les différentes couches sont quasi-parallèles. On est donc dans une configuration semblable à celle des composites « classiques ». D'autre part l'épaisseur de chaque couche est environ égale au tiers de la longueur d'onde utilisée. En effet, dans les RTM carbone / époxy, la vitesse des ondes longitudinales se situe généralement aux alentours de 3000 m/s (en incidence normale par rapport aux fibres). Pour une fréquence de 5 MHz, c'est-à-dire la fréquence centrale de contrôle des RTM chez Dassault, la longueur d'onde correspondant est donc de l'ordre de 0,6 mm. Or, comme on peut le voir sur la Figure III.1, l'épaisseur d'une couche dans les RTM est légèrement inférieure à 0,2 mm. Ainsi, nous sommes dans le domaine de validité de l'homogénéisation.

Les plis des RTM sont formés de trois couches anisotropes. Pour chacune d'elles, nous avons vu dans le premier paragraphe du chapitre II comment exprimer les coefficients d'élasticité à partir des propriétés mécaniques des constituants. On connaît donc l'expression de la matrice d'élasticité à coefficients réels pour chaque couche, dont le comportement est isotrope transverse.

Insistons encore une fois sur le fait que nous allons restreindre la caractérisation d'un pli au calcul rigoureux de ses propriétés élastiques, c'est-à-dire les parties réelles de la matrice de rigidité. Pour cela, nous avons utilisé une méthode basée sur la méthode connue de Postma (Réf.[42]) pour les empilements de couches isotropes, adaptée au cas de couches anisotropes.

## 2 Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation que nous allons utiliser est basée sur la méthode de Postma (Réf. [42]), qui est valable dans le cas de couches isotropes. Cette méthode a été adaptée par N. Gengembre (Réf. [43]) au cas d'empilement de couches anisotropes.

On considère un empilement de couches parallèles anisotropes (Figure III.2) que l'on souhaite assimiler à un milieu anisotrope homogène. Ce dernier est décrit par sa masse volumique, notée  $\langle \rho \rangle$ , et ses constantes d'élasticité  $\langle C_{ijkl} \rangle$ . La notation  $\langle \rangle$  désigne une quantité représentative du milieu homogène équivalent. On définit par  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  les proportions respectives de chacune des couches en désignant par l'indice 1 la couche supérieure de l'empilement. Ces proportions sont telles que leur somme est égale à un :

$$\sum_{i=1}^3 d_i = 1. \quad (\text{III.1})$$

L'objectif de la méthode est alors d'évaluer la masse volumique et les coefficients du tenseur d'élasticité représentatifs de l'empilement, en fonction des proportions et des propriétés mécaniques de chacune des couches.

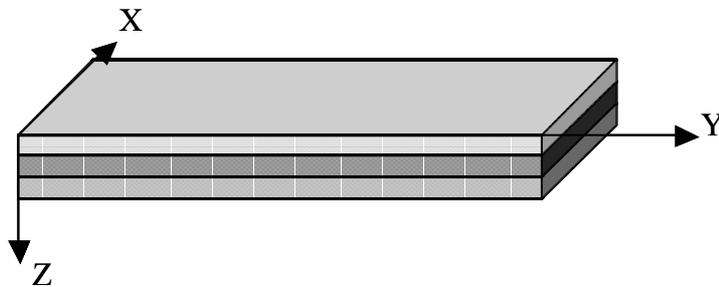


Figure III.2 : Exemple de pli composite (3 couches).

La méthode s'appuie sur une hypothèse de départ primordiale qui suppose que le matériau homogénéisé que l'on cherche à obtenir possède les propriétés mécaniques d'un matériau orthotrope. Par définition, un matériau est orthotrope si son comportement est symétrique par rapport à deux plans orthogonaux, ce qui implique une symétrie par rapport à un troisième plan orthogonal aux deux premiers. Les intersections de ces trois plans sont appelées axes principaux d'orthotropie. Cette symétrie est généralement celle des plis composites constitués d'un assemblage de couches unidirectionnelles désorientées par pas de  $45^\circ$ .

Les plis des RTM que nous devons étudier sont tous constitués de trois couches carbone / époxy unidirectionnelles identiques, respectivement désorientées autour d'un axe Z (voir Figure III.2). Les angles respectifs de désorientations de ces couches sont de  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  (le premier angle est celui de la couche supérieure). Ces couches sont anisotropes et leur comportement mécanique est celui d'un matériau à symétrie hexagonale.

Pour assurer une symétrie globale orthotrope avec pour plans principaux de symétrie les plans (X, Y), (X, Z), et (Y, Z) (voir Figure III.2), les couches 2 et 3 doivent obligatoirement avoir des proportions égales. Ceci implique :

$$d_2 = d_3. \quad (\text{III.2})$$

De plus, étant donné que toutes les couches sont constituées du même matériau (de masse volumique  $\rho$ ), la masse volumique globale est  $\langle \rho \rangle = \rho$ .

Comme on suppose que les constantes d'élasticité recherchées sont celles d'un matériau orthotrope, il y a neuf composantes indépendantes à identifier.

Le principe de la méthode de Postma est d'écrire une loi de Hooke globale sous la forme :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl} \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (\text{III.3})$$

où  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  et  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  sont les composantes des tenseurs des contraintes et de déformations moyennées sur tout le volume. Dans la suite on notera  $\sigma_{ij}^{(n)}$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(n)}$  et  $C_{ijkl}^{(n)}$  les contraintes, déformations et constantes d'élasticité de la couche  $n$  ; la valeur  $n = 1$  correspond à la couche d'orientation de fibres à  $90^\circ$ ,  $n = 2$  à  $+45^\circ$ , et  $n = 3$  à  $-45^\circ$ .

Pour obtenir les coefficients recherchés, on va supposer que l'on applique successivement différentes contraintes sur les faces externes du matériau multicouche. Les conditions de continuité aux interfaces (adhérence parfaite entre les couches) impliquent alors les relations suivantes pour les déformations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(1)} &= \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(3)} = \langle \varepsilon_{11} \rangle \\ \varepsilon_{22}^{(1)} &= \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{22}^{(3)} = \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle &= d_1 \varepsilon_{33}^{(1)} + d_2 \varepsilon_{33}^{(2)} + d_3 \varepsilon_{33}^{(3)} \end{aligned} \quad , \quad (\text{III.4})$$

et pour les contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)} &= \sigma_{33}^{(2)} = \sigma_{33}^{(3)} = \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \sigma_{11} \rangle &= d_1 \sigma_{11}^{(1)} + d_2 \sigma_{11}^{(2)} + d_3 \sigma_{11}^{(3)} \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= d_1 \sigma_{22}^{(1)} + d_2 \sigma_{22}^{(2)} + d_3 \sigma_{22}^{(3)} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Dans un premier temps, on applique des contraintes normales sur les trois faces du multicouche (toutes les contraintes de cisaillement étant nulles). L'ensemble de ces équations ainsi que les lois de Hooke « locales » de chacune des couches permettent d'écrire les contraintes moyennes en fonction des déplacements moyens, et d'en déduire certaines constantes d'élasticité effectives par identification dans les équations (III.3).

Par exemple, appliquons la contrainte moyenne  $\langle \sigma_{11} \rangle$  sur le multicouche. L'écriture des lois de Hooke locales dans chaque couche donne les expressions :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(1)} = C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \varepsilon_{22}^{(1)} + C_{13}^{(1)} \varepsilon_{33}^{(1)} \\ \sigma_{11}^{(2)} = C_{11}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \varepsilon_{22}^{(2)} + C_{13}^{(2)} \varepsilon_{33}^{(2)} + C_{16}^{(2)} \varepsilon_{12}^{(2)} \\ \sigma_{11}^{(3)} = C_{11}^{(3)} \varepsilon_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \varepsilon_{22}^{(3)} + C_{13}^{(3)} \varepsilon_{33}^{(3)} + C_{16}^{(3)} \varepsilon_{12}^{(3)} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Dans les relations (III.6), on peut noter la présence du coefficient  $C_{16}$ , qui n'est pas nul pour les couches d'orientations de fibres à  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  alors qu'il l'est pour la couche  $90^\circ$ . En utilisant (III.4), ces relations de Hooke locales se simplifient et ne font plus apparaître les déformations locales  $\varepsilon_{11}^{(n)}$  et  $\varepsilon_{22}^{(n)}$ . On en déduit donc les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(1)} = C_{11}^{(1)} \langle \varepsilon_{11} \rangle + C_{12}^{(1)} \langle \varepsilon_{22} \rangle + C_{13}^{(1)} \varepsilon_{33}^{(1)} \\ \sigma_{11}^{(2)} = C_{11}^{(2)} \langle \varepsilon_{11} \rangle + C_{12}^{(2)} \langle \varepsilon_{22} \rangle + C_{13}^{(2)} \varepsilon_{33}^{(2)} + C_{16}^{(2)} \varepsilon_{12}^{(2)} \\ \sigma_{11}^{(3)} = C_{11}^{(3)} \langle \varepsilon_{11} \rangle + C_{12}^{(3)} \langle \varepsilon_{22} \rangle + C_{13}^{(3)} \varepsilon_{33}^{(3)} + C_{16}^{(3)} \varepsilon_{12}^{(3)} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

D'après (III.5), nous avons la relation :

$$\langle \sigma_{11} \rangle = d_1 \sigma_{11}^{(1)} + d_2 \sigma_{11}^{(2)} + d_3 \sigma_{11}^{(3)}. \quad (\text{III.8})$$

Or nous cherchons à obtenir une relation de Hooke globale du type (III.3), qui s'écrit pour la contrainte  $\langle \sigma_{11} \rangle$  cherchée :

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \langle C_{11} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle C_{12} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle C_{13} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (\text{III.9})$$

En remplaçant (III.7) dans (III.8), on obtient alors une expression qui se rapproche de l'expression cherchée (III.9), à l'exception des termes  $\varepsilon_{12}^{(n)}$  et  $\varepsilon_{33}^{(n)}$ , que nous devons exprimer en fonction des déformations globales. Pour cela, il faut écrire les lois de Hooke locales dans les couches 2 et 3 relatives aux contraintes  $\sigma_{12}^{(2)}$  et  $\sigma_{12}^{(3)}$ , qui par hypothèse sont nulles puisque l'on a supposé que toutes les contraintes de cisaillement étaient nulles. Le développement de ces contraintes permet d'aboutir aux expressions :

$$\begin{cases} \varepsilon_{12}^{(2)} = \frac{-1}{2C_{66}^{(2)}} (C_{16}^{(2)} \langle \varepsilon_{11} \rangle + C_{16}^{(2)} \langle \varepsilon_{22} \rangle) \\ \varepsilon_{12}^{(3)} = \frac{-1}{2C_{66}^{(3)}} (C_{16}^{(3)} \langle \varepsilon_{11} \rangle + C_{16}^{(3)} \langle \varepsilon_{22} \rangle) \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

De plus, il faut développer la contrainte  $\langle \sigma_{33} \rangle$  avec la loi de Hooke dans chacune des couches et on obtient trois équations toutes égales du fait de (III.5). Ces équations permettent d'écrire le système de trois équations suivant :

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ C_{33}^{(1)} & -C_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & C_{33}^{(2)} & -C_{33}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(2)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{33} \rangle \\ (C_{13}^{(2)} - C_{13}^{(1)}) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{11} \rangle + (C_{23}^{(2)} - C_{23}^{(1)}) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \rangle \\ (C_{13}^{(3)} - C_{13}^{(2)}) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{11} \rangle + (C_{23}^{(3)} - C_{23}^{(2)}) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{III.11})$$

Les inconnues du système (III.11) sont les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(n)}$ , qui peuvent alors être exprimées en fonction des déformations moyennes. En remplaçant finalement (III.7), (III.10) et les solutions de (III.11) dans l'équation (III.8) on obtient une expression qui peut être identifiée à (III.9) et qui permet d'aboutir aux constantes d'élasticité homogénéisées  $\langle C_{11} \rangle$ ,  $\langle C_{12} \rangle$  et  $\langle C_{13} \rangle$ .

Pour obtenir les constantes  $\langle C_{22} \rangle$ ,  $\langle C_{23} \rangle$  et  $\langle C_{33} \rangle$ , on répète la même procédure en imposant successivement les contraintes moyennes  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{22} \rangle$  et  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{33} \rangle$ .

Les autres constantes effectives à déterminer sont relatives à des cisaillements. On en obtient donc la formulation en appliquant successivement aux faces externes du multicouche les contraintes  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{23} \rangle$ ,  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{13} \rangle$  et  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{12} \rangle$ .

Par exemple, si on applique  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{23} \rangle$  toutes les autres contraintes étant nulles, cette contrainte est constante dans tout le matériau et vaut donc  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{23} \rangle$ . Par définition de la déformation de cisaillement et compte-tenu de la continuité du déplacement aux interfaces on a aussi :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{23} \rangle = d_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(1)} + d_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(2)} + d_3 \boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(3)}. \quad (\text{III.12})$$

On exprime alors les lois de Hooke locales et on en déduit la constante effective  $\langle C_{44} \rangle$ . On répète la même procédure avec les autres contraintes de cisaillement pour obtenir les deux dernières constantes d'élasticité effectives.

Dans le cas particulier de l'empilement qui est considéré ici, c'est-à-dire trois couches unidirectionnelles désorientées des angles  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  autour de l'axe Z, l'expression de toutes les constantes d'élasticité moyennes obtenues par la méthode de Postma sont données dans l'Annexe F par les relations F.1 et F.2. Appliquons maintenant ces relations.

### 3 Application à un pli carbone / époxy caractéristique des RTM

Soit un empilement comme celui représenté sur la Figure III.3, formé par trois couches carbone / époxy d'épaisseurs égales désorientées des angles  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  par rapport à l'axe Z.

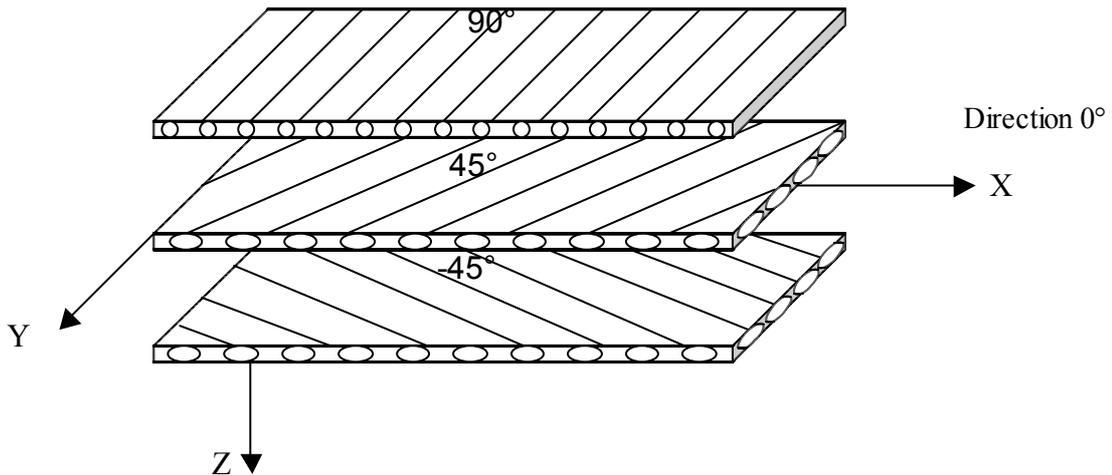


Figure III.3 : schématisation 3D d'un pli du RTM.

Les caractéristiques réelles de la couche unidirectionnelle à  $0^\circ$  que l'on considère (couche de référence à partir de laquelle sont définies les autres couches) sont celles calculées dans le premier paragraphe du chapitre II. Elles s'écrivent sous la forme suivante :

$$C_{couche} = \begin{pmatrix} 155.17 & 5.34 & 5.34 & 0 & 0 & 0 \\ 5.34 & 13.22 & 6.98 & 0 & 0 & 0 \\ 5.34 & 6.98 & 13.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.77 \end{pmatrix} \text{ (GPa)}. \quad \text{(III.13)}$$

À partir de cette matrice, on calcule les matrices correspondant aux orientations respectives  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  par de simples rotations autour de l'axe Z, puis on peut effectuer le calcul d'homogénéisation du pli représenté Figure III.3 par la méthode décrite ci-dessus.

Les coefficients de la matrice orthotrope de rigidité du pli homogénéisé sont :

$$C_{pli} = \begin{pmatrix} 16.79 & 6.5 & 6.43 & 0 & 0 & 0 \\ 6.5 & 64.12 & 5.89 & 0 & 0 & 0 \\ 6.43 & 5.89 & 13.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.68 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.76 \end{pmatrix} \text{(GPa)}. \quad (\text{III.14})$$

Pour illustrer de façon moins abstraite ces calculs de constantes d'élasticité, on peut représenter différentes courbes de lenteurs à la fois pour la couche unidirectionnelle et pour le pli.

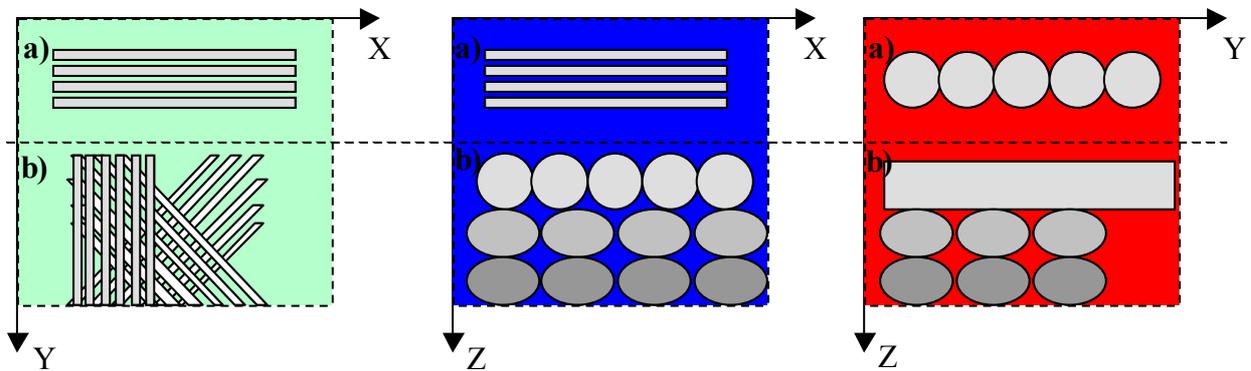


Figure III.4 : schématisation des vues 2D a) dans une couche unidirectionnelle ou b) dans un pli, dans les différents plans orthogonaux (X représente la direction  $0^\circ$  des fibres).

Les Figures III.5-a, III.5-b et III.5-c représentent les courbes de lenteurs de la couche unidirectionnelle dont les fibres sont orientées à  $0^\circ$ , dans les trois plans orthogonaux (X,Y), (X,Z) et (Y,Z) (voir schéma Figure III.4) ; les Figures III.6-a, III.6-b, et III.6-c représentent les courbes de lenteurs du pli dans les mêmes plans. L'interprétation de ces courbes conduit aux quelques remarques suivantes.

Tout d'abord, pour une couche unidirectionnelle, la symétrie est isotrope transverse. Cela se traduit sur la matrice d'élasticité (III.13) par des constantes égales dans les directions Y et Z. Si on regarde la courbe des lenteurs pour la couche unidirectionnelle dans le plan (Y, Z), on observe des cercles, ce qui signifie bien que ce plan se conduit comme un plan isotrope. En ce qui concerne le pli, la courbe des lenteurs dans le même plan montre que l'on a perdu l'isotropie, résultat logique compte tenu de l'empilement des différentes orientations de fibres dans le pli.

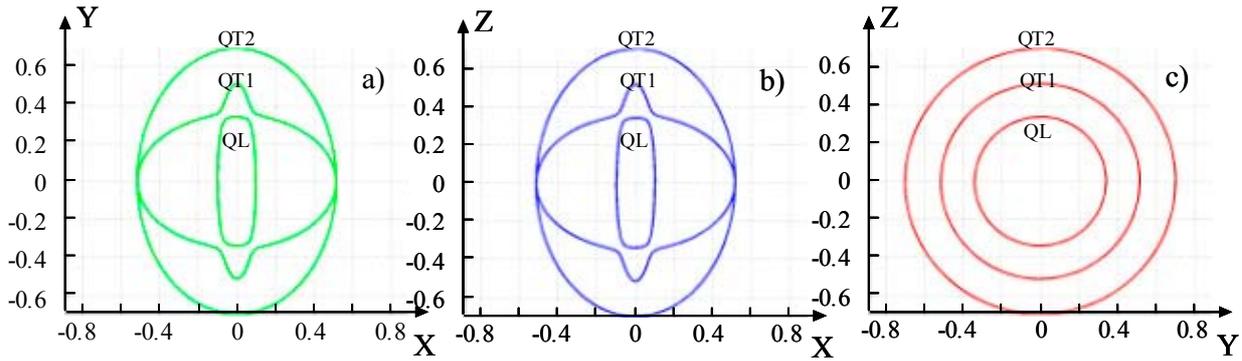


Figure III.5 : Courbes des lenteurs d'une couche unidirectionnelle  $0^\circ$  dans les différents plans (voir Figure III.4).

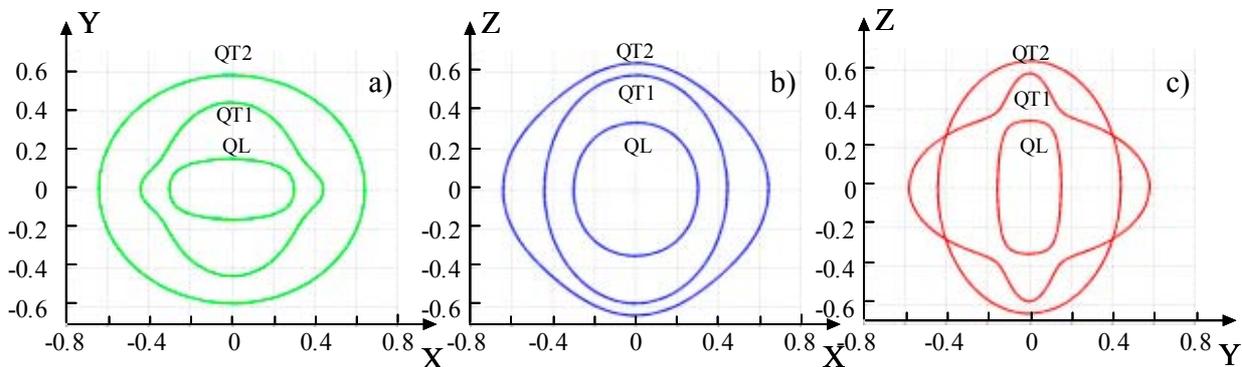


Figure III.6 : Courbes des lenteurs d'un pli dans les différents plans (voir Figure III.4).

Intéressons-nous ensuite au plan  $(X, Z)$ . Ce plan est totalement anisotrope pour la couche unidirectionnelle mais en revanche, il est quasi isotrope pour le pli. Ceci se comprend aisément lorsque l'on schématise l'organisation des fibres dans ce plan pour la couche et pour le pli (Figure III.4).

La matrice (III.14) correspondant à un pli du RTM présente une rigidité plus importante dans la direction  $Y$  que dans les autres directions, ce qui est logique puisque la direction  $X$ , qui correspond à la direction de référence  $0^\circ$  d'alignement des fibres, n'a pas été prise en compte dans les trois couches formant le pli. Les fibres sont donc maintenant essentiellement alignées dans la direction  $90^\circ$ , qui est la direction  $Y$ . Ceci implique que la vitesse des ondes  $QL$  qui se propagent dans le pli est plus importante dans cette direction. En d'autres termes, la lenteur des ondes  $QL$  est plus faible dans cette direction que dans les autres directions, ce qui se vérifie bien sur les courbes de lenteurs du pli dans les plans  $(X, Y)$  et  $(Y, Z)$  (Figures III.6-a et III.6-c).

On peut de la même façon établir une correspondance entre les valeurs données par les matrices des matériaux, les différentes courbes de lenteurs, et la manière dont sont placées les

fibres dans le matériau considéré. Cela permet au passage de vérifier la cohérence des valeurs obtenues par l'homogénéisation de Postma.

Ainsi cette homogénéisation permet d'assimiler un pli d'un RTM à une couche homogène.

Intéressons-nous maintenant à un autre type d'empilement, constitué d'un nombre de couches plus important.

## 4 Application de Postma à un empilement particulier

Les développements théoriques que nous avons menés dans le paragraphe 2 de ce chapitre afin d'obtenir les expressions des coefficients d'élasticité d'un matériau formé par un empilement de couches, sont appliqués au cas précis d'empilement à trois couches d'épaisseurs égales, mais la méthode de Postma est beaucoup plus générale que cela et peut être adaptée à un nombre quelconque de couches.

Ainsi, nous nous sommes intéressés à un empilement particulier de quatre couches, constitué des trois couches carbonées époxy unidirectionnelles et d'une couche de résine époxy pure. Les proportions respectives de chacune de ces couches sont telles que la couche d'époxy représente environ 7% de l'épaisseur totale des quatre couches, et que les trois couches carbone / époxy sont en proportions identiques. Le fait de rajouter une telle couche ne perturbe en rien les hypothèses de la méthode de Postma puisque c'est une couche isotrope, qui ne change donc pas la symétrie de l'empilement global. En adaptant les développements du paragraphe 2 à quatre couches, on obtient alors les parties réelles des coefficients de rigidité d'un tel empilement. La matrice d'élasticité devient :

$$C_{4\text{ couches}} = \begin{pmatrix} 16.14 & 6.33 & 6.21 & 0 & 0 & 0 \\ 6.33 & 60.27 & 5.72 & 0 & 0 & 0 \\ 6.21 & 5.72 & 12.59 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.12 \end{pmatrix} \text{(GPa)}. \quad (\text{III.15})$$

On peut à nouveau tracer les courbes de lenteurs correspondant à ce matériau dans les mêmes plans de symétrie que ceux présentés sur les Figures III.5 et III.6. Ces courbes sont tracées sur la Figure III.7 et sont très peu différentes des courbes obtenues dans le cas de l'empilement

particulier à trois couches du paragraphe 3. Ceci est tout à fait logique puisque nous avons simplement ajouté une couche isotrope de résine époxy pure de fine épaisseur par rapport aux trois autres couches carbone / époxy, ce qui a modifié très légèrement la matrice d'élasticité (voir les matrices (III.14) et (III.15)).

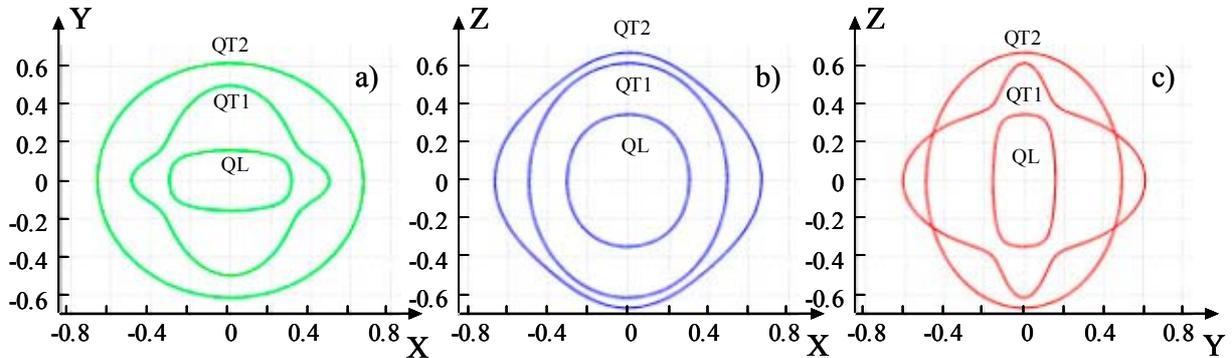


Figure III.7 : Courbes des lenteurs d'un matériau constitué d'un pli RTM empilé avec une couche de résine pure et homogénéisé par la méthode de Postma.

Dans le prochain chapitre, nous aurons l'occasion de réutiliser le matériau homogénéisé résultant de cet empilement particulier de 3 couches carbone / époxy et d'une couche d'époxy pure, à partir duquel nous allons modéliser les plaques RTM.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué une méthode classique d'homogénéisation statique, qui nous permet désormais de considérer un pli du RTM comme un matériau homogène dont les propriétés purement élastiques sont données par la matrice (III.14). Nous avons également vu que la méthode d'homogénéisation utilisée est extensible à un nombre de couches quelconque et nous avons ainsi déterminé la matrice de rigidité d'un matériau constitué d'un pli RTM empilé avec une couche isotrope de résine époxy pure. L'étape suivante est maintenant d'utiliser ces résultats afin d'étudier la propagation dans une structure RTM complète.

## **Chapitre IV**

# **Étude de la propagation ultrasonore dans les pièces planes RTM**

Dans ce dernier chapitre, on va s'intéresser à la structure complète d'un composite RTM, et étudier la propagation d'ondes ultrasonores au sein de cette structure.

Un RTM peut être représenté par un matériau multicouche, ou plus exactement multi-plis, dont la microstructure est généralement assez imparfaite (ondulations de plis plus ou moins fortes, épaisseurs plus ou moins régulières, etc...) en raison du procédé de fabrication qui a été détaillé dans l'introduction.

Les particularités de ce procédé de fabrication impliquent une immense diversité microstructurale des pièces planes réalisées. Les micrographies de différentes plaques illustrent cette diversité et montrent qu'il n'existe pas deux pièces parfaitement semblables. En revanche, l'observation de ces micrographies constitue un point de départ pour la définition plus ou moins complexe d'un modèle géométrique représentatif d'une pièce plane RTM.

Mais avant de s'intéresser à la modélisation géométrique et à la propagation ultrasonore dans de telles pièces, on se propose dans un paragraphe préliminaire de revenir sur les différents résultats obtenus dans les précédents chapitres et de les compléter.

### **1 Préliminaire : rappels et compléments sur les précédents chapitres**

Le procédé de fabrication de pièces planes RTM conduit, comme nous avons pu le remarquer, à des matériaux composites dont la microstructure est très complexe et assez irrégulière. Nous avons pu constater que ce procédé de fabrication induit un aspect multi-échelles de ces matériaux, et notre travail a alors été décomposé relativement à ces différentes échelles.

De façon générale, le phénomène d'atténuation d'une onde peut être représenté mathématiquement par des propriétés mécaniques complexes du milieu dans lequel elle se propage. La partie réelle des coefficients mécaniques décrivant le comportement du matériau est liée à son élasticité, et la partie imaginaire est représentative de l'atténuation. Ainsi, l'étude de la propagation ultrasonore dans une plaque RTM nécessite la connaissance de ces parties réelles et imaginaires.

Une plaque RTM est constituée d'un empilement de plis composites, chacun formé de couches carbone / époxy unidirectionnelles. De façon naturelle, nous nous sommes donc tout d'abord intéressés à l'étude d'une couche unidirectionnelle. La description du comportement mécanique d'une telle couche a été décomposé en un problème classique d'élasticité statique d'une part, et un problème dynamique d'autre part. Pour le premier problème, statique, une méthode d'homogénéisation a été utilisée, permettant de définir une matrice d'élasticité représentative de la couche (voir le premier paragraphe du chapitre I). Puis en ce qui concerne le problème dynamique, nous avons développé un modèle (voir paragraphe 4 du chapitre II), qui permet de déterminer l'atténuation des ondes  $S//$ ,  $P$  ou  $S\perp$  dans la couche unidirectionnelle considérée, dans la direction orthogonale aux fibres uniquement. Ce calcul d'atténuation prend en compte les principaux phénomènes élémentaires qui sont l'absorption par effet viscoélastique (par la matrice) et la diffusion multiple (par les fibres). En revanche, notre modèle ne permet pas de déterminer l'atténuation dans les autres directions de la couche.

Après avoir étudié une couche, on s'est ensuite intéressés à un pli. En suivant le même raisonnement consistant à dissocier le problème purement élastique du problème d'atténuation, nous avons à nouveau utilisé une méthode d'homogénéisation statique afin d'assimiler un pli (composé dans notre cas de trois couches unidirectionnelles identiques mais désorientées les unes par rapport aux autres) à un matériau homogène. L'application de cette méthode nous a permis de définir une matrice d'élasticité représentative du pli, décrit ainsi comme un matériau anisotrope de classe orthotrope. En revanche, comme pour la couche, il n'est possible dans ces conditions de définir le coefficient d'atténuation d'un pli que dans la direction orthogonale aux interfaces. Ce coefficient est d'ailleurs le même pour un pli que pour une couche car les désorientations successives de chaque couche constitutive du pli correspondent à des rotations autour de l'axe orthogonal aux interfaces.

Après avoir caractérisé un pli RTM, on peut étudier la propagation d'ondes ultrasonores dans tout type de matériau RTM plan. En effet, ceux-ci peuvent être vus comme des matériaux multicouches plus ou moins complexes, chacun formé par un empilement spécifique de plis.

Mais avant de nous concentrer sur ce problème, il est nécessaire de s'assurer que la caractérisation d'un pli telle que nous l'avons faite est suffisante pour mener à bien cette étude. En effet, cette caractérisation est complète d'un point de vue élastique, mais pas en ce qui concerne l'atténuation.

Comme cela a été précisé dans le chapitre d'introduction générale, le contrôle par ultrasons de plaques RTM est effectué chez Dassault dans une configuration  $L0^\circ$ , c'est-à-dire à l'aide d'ondes longitudinales en incidence normale sur la plaque considérée. Le logiciel de simulation qui est développé au CEA permet de simuler un tel contrôle dans une pièce hétérogène et anisotrope, sans prendre en compte l'atténuation dans cette pièce. Toutefois, intéressons-nous à une telle simulation, même si elle ne tient pas compte de l'atténuation.

Afin de considérer une pièce possédant les principales caractéristiques géométriques d'une pièce plane RTM, on utilise un logiciel de CAO. La pièce ainsi définie est schématisée par son profil bidimensionnel sur la figure IV.1. Il s'agit d'un multicouche à 9 couches dont l'épaisseur totale est de 2mm. La définition de cette pièce a été faite d'après l'observation d'une micrographie d'une plaque RTM réelle de même épaisseur. Elle est constituée d'un empilement de quatre plis espacés par des couches de résine époxy pure (nous reviendrons sur la définition géométrique d'un RTM dans les prochains paragraphes). De plus, les interfaces séparant les plis et les couches de résine pure sont des interfaces ondulées, comme cela est le cas en réalité. Le transducteur utilisé pour la simulation possède les mêmes caractéristiques que les transducteurs utilisés chez Dassault pour le contrôle des RTM : c'est un transducteur plan à pastille circulaire de diamètre 12,7 mm (1/2 pouce) et dont la fréquence centrale est 5 MHz.

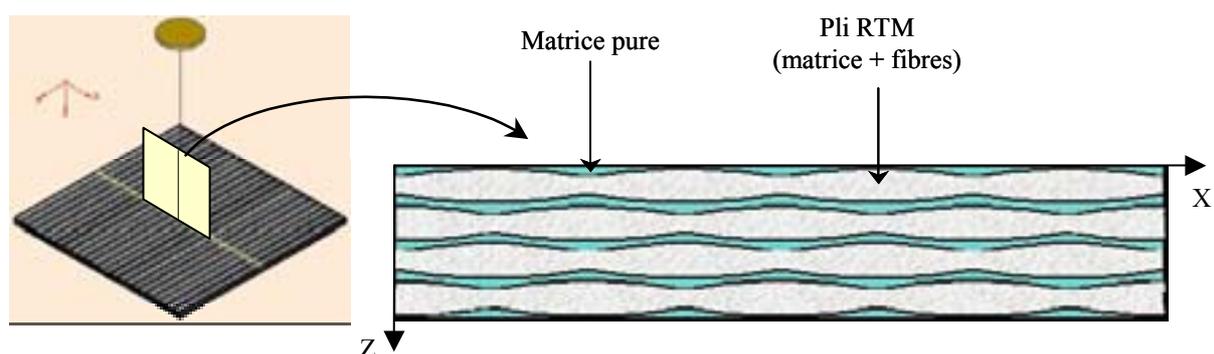


Figure IV.1 : Schématisation d'une configuration de contrôle par ultrasons  $L0^\circ$  sur une plaque RTM de 2 mm d'épaisseur et vue en coupe de la plaque.

Enfin, la simulation effectuée correspond à un contrôle en immersion, avec une hauteur d'eau de 58 mm. Cette configuration est schématisée sur la Figure IV.1.

Le résultat de la simulation permet de représenter la propagation aller-retour dans la pièce de façon dynamique et visualiser ainsi les fronts d'ondes propagés en fonction du temps (Figure IV.2).

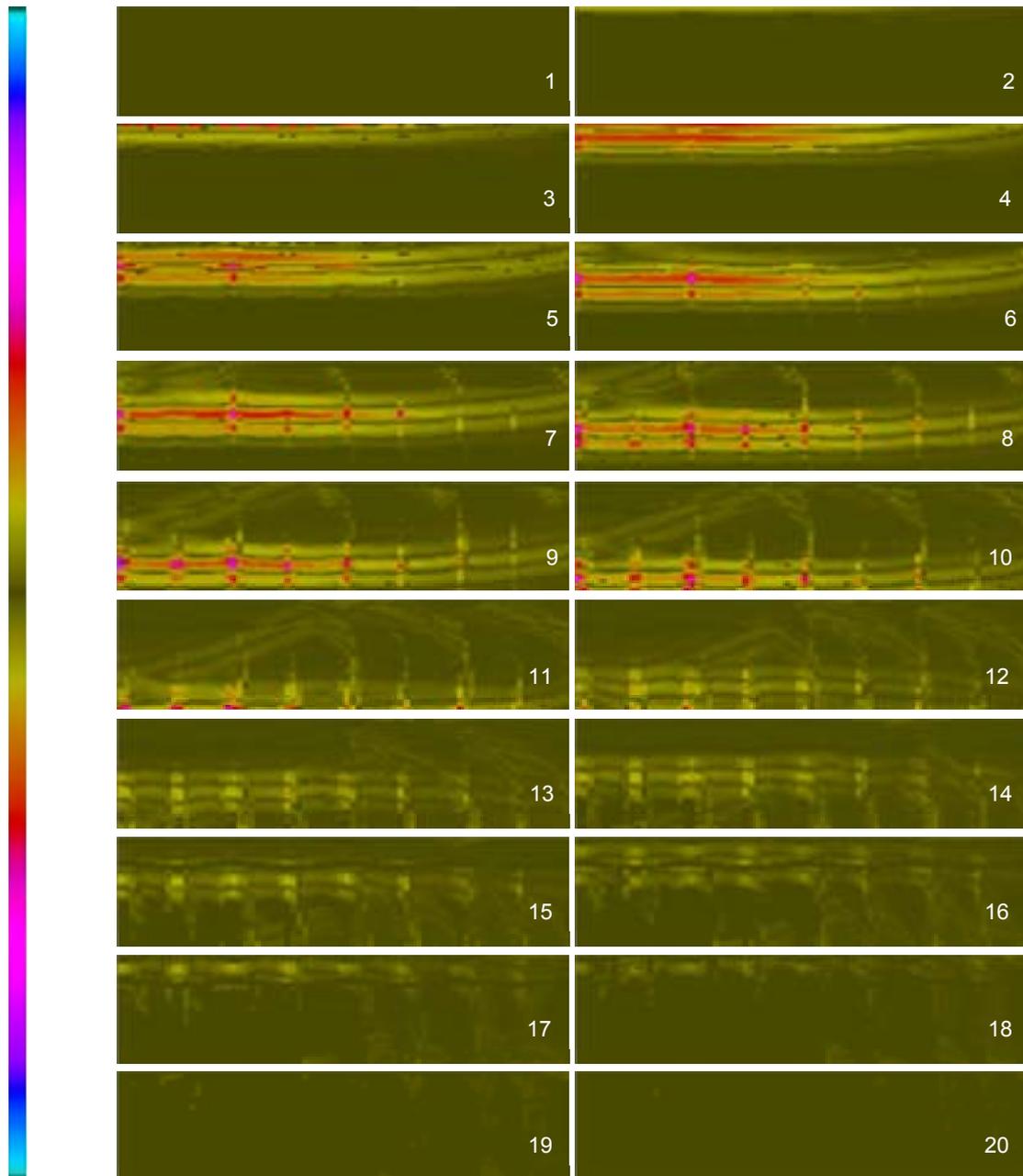


Figure IV.2 : Propagation dynamique en configuration  $L0^\circ$  dans une pièce plane CAO modélisant une plaque RTM. Instantanés (environ toutes les  $0,067\mu s$ ) du module du déplacement particulière (de 1 à 20 par temps croissant).

On peut constater que les fronts d'ondes réfléchis sur le fond de la pièce qui vont ainsi revenir sur le traducteur sont des fronts plans. Ainsi, on peut s'appuyer sur ce résultat pour noter que l'essentiel de l'énergie ultrasonore réfléchi sur le fond de la pièce lors du contrôle et qui va

être interceptée par le traducteur en réception, arrive de façon normale à l'axe de ce traducteur. Ce calcul nous montre donc qu'un calcul rigoureux de propagation, prenant en compte l'atténuation des ondes ultrasonores, nécessite une définition précise de cette atténuation dans la direction orthogonale aux interfaces de la pièce. Or le modèle de Yang et Mal modifié que nous avons développé dans le chapitre II permet justement cette définition.

On se propose donc maintenant d'étudier la propagation ultrasonore dans les plaques RTM, que l'on peut modéliser à l'aide de multicouches.

## 2 Propagation ultrasonore dans un multicouche

### 2.1 Description d'un modèle géométrique

Afin d'établir un modèle multi-plis « parfait » de référence représentatif d'une plaque RTM, nous avons choisi un exemple de micrographie (Figure IV.3) d'une plaque dont la structure est assez « régulière » (relativement aux matériaux RTM).



Figure IV.3 : Micrographie d'une plaque RTM de microstructure régulière.

La micrographie présentée sur la Figure IV.3 correspond à une plaque RTM d'épaisseur 2 mm, constituée d'un empilement de quatre plis, chacun étant formé de trois couches unidirectionnelles carbone / époxy. Si on considère une direction  $0^\circ$  donnée par la direction X représentée sur la Figure IV.3, les trois couches unidirectionnelles sont respectivement désorientées des angles  $+90^\circ$ ,  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  autour de l'axe Z, le premier angle étant celui de la couche supérieure.

À partir de cette micrographie, nous avons convenu de modéliser cette plaque RTM par un multicouche dont les interfaces sont toutes parallèles et d'épaisseurs variables. Le modèle

choisi (Figure IV.4) est composé de neuf couches, dont cinq couches de résine époxy pure, isotrope et viscoélastique, alternées avec quatre couches composites carbone / époxy orthotropes et absorbantes. Chacune de ces couches composites représente un pli RTM, tel que nous l'avons défini. Ceux-ci sont donc vus comme des couches homogènes, et les parties réelles de leurs constantes d'élasticité sont égales aux coefficients de la matrice de rigidité (III.14) calculée au chapitre III.



Figure IV.4 : Modèle multicouche « parfait » d'un RTM, formé d'une alternance de couches de résine pure et de plis (couches  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$ ).

Outre leur comportement purement élastique, on peut définir dans ces plis un coefficient d'atténuation pour chaque type d'onde ( $S//$ ,  $P$  ou  $S\perp$ ) dans la direction  $Z$  orthogonale à la surface supérieure du multicouche. Pour cela, on utilise le modèle de « Yang et Mal modifié » que nous avons mis en œuvre dans le chapitre II, permettant de prendre en compte les phénomènes élémentaires d'atténuation (diffusion multiple et absorption) au sein d'une couche unidirectionnelle, et on en déduit directement le coefficient d'atténuation de chaque type d'onde au sein d'un pli dans la direction  $Z$ . En effet, la direction  $Z$  est une direction invariante quant à toute désorientation des couches. Ainsi, l'atténuation dans cette direction est la même pour les trois couches formant le pli, et le coefficient d'atténuation de chaque type d'onde est donc le même pour le pli que pour une couche.

Le problème auquel nous sommes maintenant confrontés est celui de l'étude de la propagation ultrasonore dans un matériau multicouche. Parmi les méthodes permettant de traiter ce problème, on peut citer les travaux de Potel (Réf. [44]), qui a développé un formalisme très général permettant de traiter la propagation dans un milieu stratifié composé de couches anisotropes d'épaisseurs quelconques. Ce formalisme est basé sur la méthode des matrices de transfert initialement développée par Thomson (Réf. [45]) et Haskell (Réf. [46]). Notre étude

de la propagation ultrasonore va se limiter à des ondes en incidence normale sur des multicouches dont le nombre total de couches est limité à neuf au maximum (faible). C'est pourquoi nous avons décidé de nous intéresser à une propagation mono-dimensionnelle, pour laquelle les développements théoriques de cette méthode des matrices de transfert sont assez simples. Le prochain paragraphe est consacré au principe de cette méthode.

## 2.2 Modèle de propagation mono-dimensionnel

On considère le multicouche de la Figure IV.4 immergé, et on s'intéresse à la transmission d'une onde plane longitudinale en incidence normale depuis ce milieu fluide dans le matériau.

La méthode utilisée ici pour décrire la propagation unidimensionnelle est donc la méthode de Thomson-Haskell (voir Réf. [45, 46]). Son principe est d'établir une matrice de propagation pour chaque couche, décrivant la propagation entre les faces supérieures et inférieures de cette couche, puis d'écrire les conditions de continuité à chacune des interfaces du multicouche. Ceci nous permet alors de relier la première et la dernière interface par une matrice de transfert globale, qui est simplement le produit des matrices de transfert de chacune des couches. Il ne reste alors qu'à établir les expressions des coefficients de réflexion et de transmission.

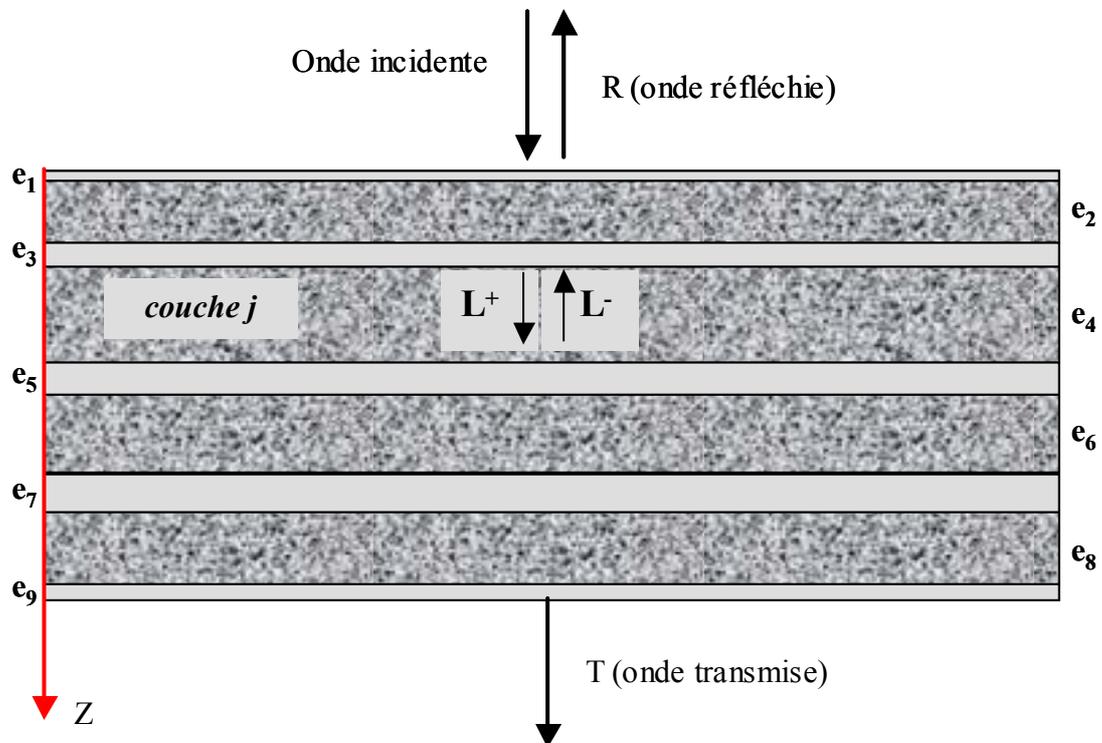


Figure IV.5 : Schématisation du modèle de propagation unidimensionnelle dans le multicouche choisi.

Il est important de noter que dans cette méthode, toutes les réflexions internes mises en jeu entre les différentes interfaces du multicouche sont prises en compte.

De plus, on définit l'atténuation dans le multicouche dans la direction orthogonale aux interfaces de la façon suivante : d'une part on prend en compte l'atténuation visqueuse dans les couches de résine pure (dans la direction orthogonale aux interfaces) par l'intermédiaire de constantes de propagation complexes, et d'autre part dans les couches correspondant aux plis on tient compte simultanément de l'atténuation visqueuse et de la diffusion multiple par les fibres en utilisant le modèle de Yang et Mal modifié (voir chapitre III).

Enfin, on se donne la possibilité de modifier très simplement un certain nombre de paramètres, comme l'épaisseur des différentes couches, la fraction volumique de fibres contenues dans les plis et le nombre de couches.

Nous n'allons pas décrire ici de façon plus détaillée les développements théoriques permettant d'aboutir aux expressions des coefficients de réflexion et de transmission du multicouche. En effet, ces développements sont très classiques, et nous préférons nous concentrer ici sur les résultats obtenus et leur interprétation. Cependant, les expressions de ces coefficients et tous les détails nécessaires à leur établissement dans notre cadre d'étude (limité au cas de la propagation mono-dimensionnelle dans un multicouche comme celui schématisé sur la Figure IV.4) sont donnés dans l'Annexe G.

L'un des objectifs de notre travail, tel que nous l'avons défini dans le chapitre d'introduction, est d'expliquer à l'aide de la modélisation de la propagation ultrasonore dans les RTM les fluctuations d'atténuation observées expérimentalement sur des plaques. Dans un premier temps, à l'aide du modèle multicouche présenté sur la Figure IV.4, nous allons donc essayer de reproduire de telles variations, qui peuvent être, expérimentalement, de l'ordre de 15 dB.

Intuitivement, on peut supposer que ces variations sont liées à des variations micro-structurales du RTM, ou plus exactement à des variations géométriques de sa microstructure. On espère donc pouvoir reproduire des variations d'atténuation à partir d'un modèle très simplifié comme celui que nous venons de décrire et à l'aide du modèle de propagation mono-dimensionnel présenté ci-dessus. On peut par exemple étudier l'influence de la variation du nombre de couches ou de la régularité de leurs épaisseurs respectives sur la fonction de transfert globale du multicouche.

### 3 Influence des variations micro-structurales d'un multicouche sur sa fonction de transfert globale

On se propose dans cette partie d'appliquer le modèle de propagation présenté au paragraphe précédent et détaillé dans l'Annexe G à quelques multicouches particuliers dérivés du multicouche décrit sur la Figure IV.4. Le choix des différents multicouches que nous allons considérer est fait de façon à illustrer l'effet de variations géométriques sur le calcul du coefficient de transmission, et ainsi à obtenir des informations sur le comportement de l'atténuation dans le multicouche en réponse à ces variations structurelles.

#### 3.1 Influence du nombre de couches

Le premier point que l'on se propose d'étudier est l'influence du nombre de couches sur le coefficient de transmission global du multicouche. Pour cela, il est nécessaire de définir un premier multicouche qui constituera une configuration géométrique de référence. Celui-ci correspond au cas pour lequel les épaisseurs des couches sont régulières, c'est-à-dire que toutes les couches d'époxy pure ont la même épaisseur, et tous les plis sont d'épaisseurs égales. Si on se réfère à la Figure IV.5, on peut résumer cette situation par les relations :

$$\begin{cases} e_1 = e_3 = e_5 = e_7 = e_9 \\ e_2 = e_4 = e_6 = e_8 \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

*Remarque* : on considèrera toujours que l'épaisseur totale du multicouche est constante, soit :

$$\sum_{i=1}^9 e_i = c^{te}. \quad (\text{IV.2})$$

On peut commencer par comparer à cette situation de référence un matériau de même épaisseur (soit 2 mm), mais constitué d'une simple couche homogène. En effet, il est possible d'homogénéiser le multicouche de référence par la méthode de Postma décrite dans le chapitre III, et dans ce cas de le décrire par une couche homogène. La couche résultant de cette homogénéisation est alors décrite d'un point de vue élastique par la matrice (III.15) calculée dans le paragraphe 4 du chapitre III.

Après avoir calculé les fonctions de transfert d'une telle couche homogène et du multicouche de référence, on peut tracer les courbes de la Figure IV.6 illustrant cette comparaison. Ceci montre qu'une telle homogénéisation du multicouche n'a un sens qu'à très basse fréquence. Notons que la périodicité de la fonction de transfert de la couche homogène (courbe en traits interrompus) correspond à des résonances de cette même couche. L'écart fréquentiel entre les

résonances est égal à environ 0,75 MHz, ce qui correspond à l'inverse du temps de propagation aller-retour dans la plaque. On retrouve d'ailleurs cette périodicité sur la fonction de transfert du multicouche de référence, qui a la même épaisseur que la couche homogène considérée. On trouve également sur cette même fonction de transfert une autre résonance avec un écart fréquentiel d'environ 3 MHz correspondant à l'inverse du temps de parcours aller-retour dans l'épaisseur d'un pli.

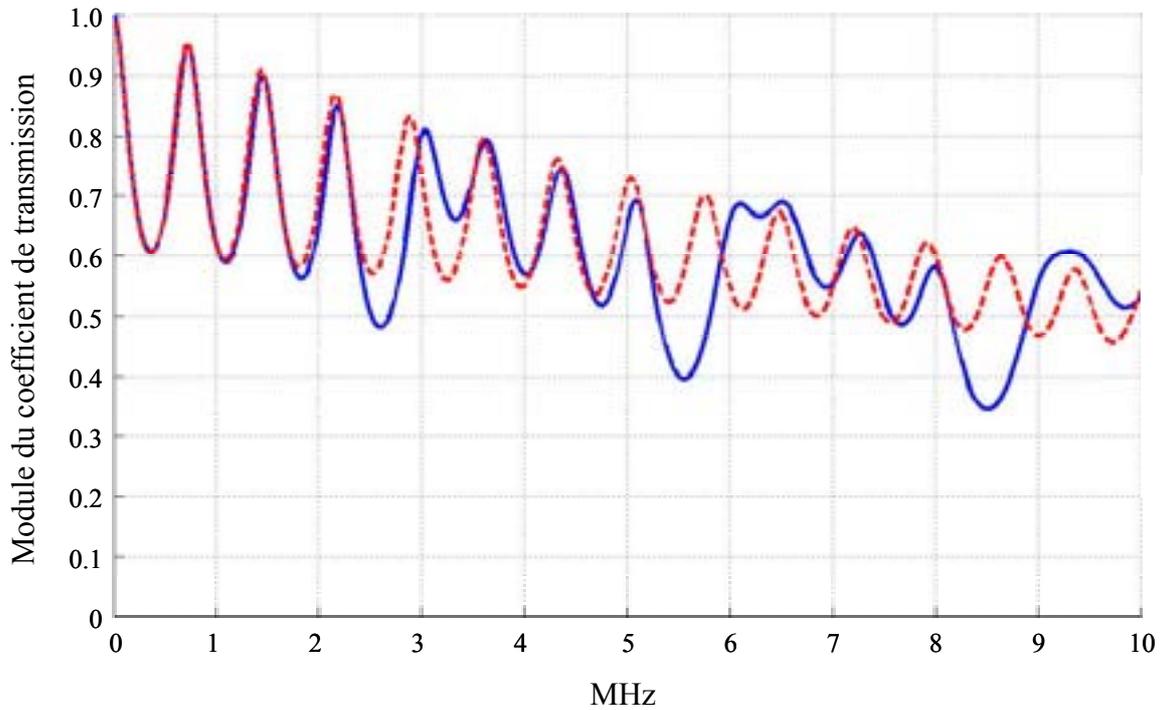


Figure IV.6 : Comparaison du module des coefficients de transmission : (—) multicouche de référence et (---) couche homogène.

Considérons maintenant une autre configuration extrêmement simplifiée par rapport au multicouche de référence et déduite de (IV.1). Cette seconde configuration est obtenue en additionnant respectivement les épaisseurs des couches de résine pure ou des plis entre elles.

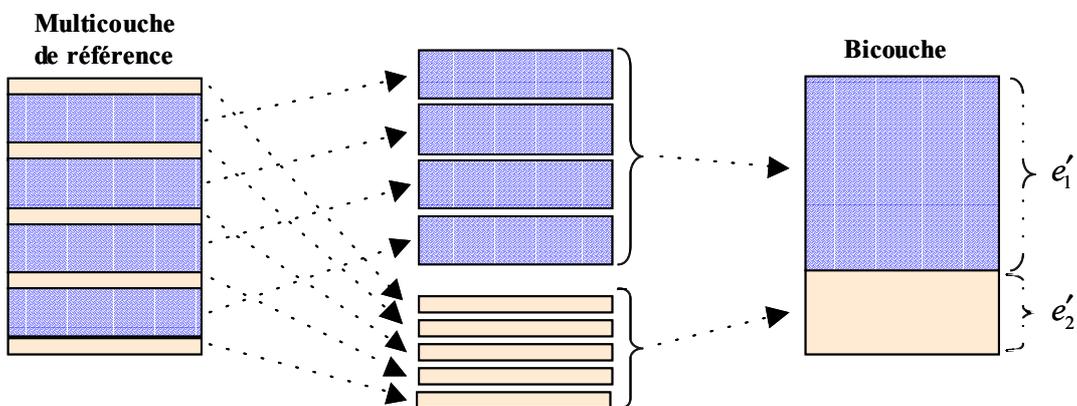


Figure IV.7 : Construction d'un modèle bicouche à partir du multicouche de référence.

On obtient alors un matériau bicouche (au lieu de neuf couches), formé d'une couche correspondant à un pli RTM, et d'une couche de résine pure. Ceci est schématisé par la Figure IV.7 et se traduit par les relations (IV.3) :

$$\begin{cases} e'_1 = e_2 + e_4 + e_6 + e_8 \\ e'_2 = e_1 + e_3 + e_5 + e_7 + e_9 \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

La Figure IV.8 illustre la comparaison des coefficients de transmission en fonction de la fréquence obtenus d'une part avec cette situation extrêmement simplifiée du nombre de couches, et d'autre part avec le multicouche de référence. Pour les applications numériques faites par la suite, on considère les épaisseurs suivantes :  $e_2 = e_4 = e_6 = e_8 = 0,458$  mm et  $e_1 = e_3 = e_5 = e_7 = e_9 = 0,0336$  mm. Rappelons également que l'épaisseur totale est de 2 mm. Enfin, la fraction volumique de fibres dans les couches correspondant aux plis est de 0,65 comme cela est le cas dans les RTM réels.

Cette comparaison met à nouveau en évidence l'importance du nombre de couches prises en compte dans le modèle. En effet, nous voyons sur la figure IV.8 que l'allure générale du module du coefficient de transmission selon la fréquence est nettement modifiée par le passage de neuf couches à deux couches. En particulier, la diminution du nombre de couches entraîne la disparition de certaines résonances correspondant approximativement à des trajets aller-retour dans les plis élémentaires.

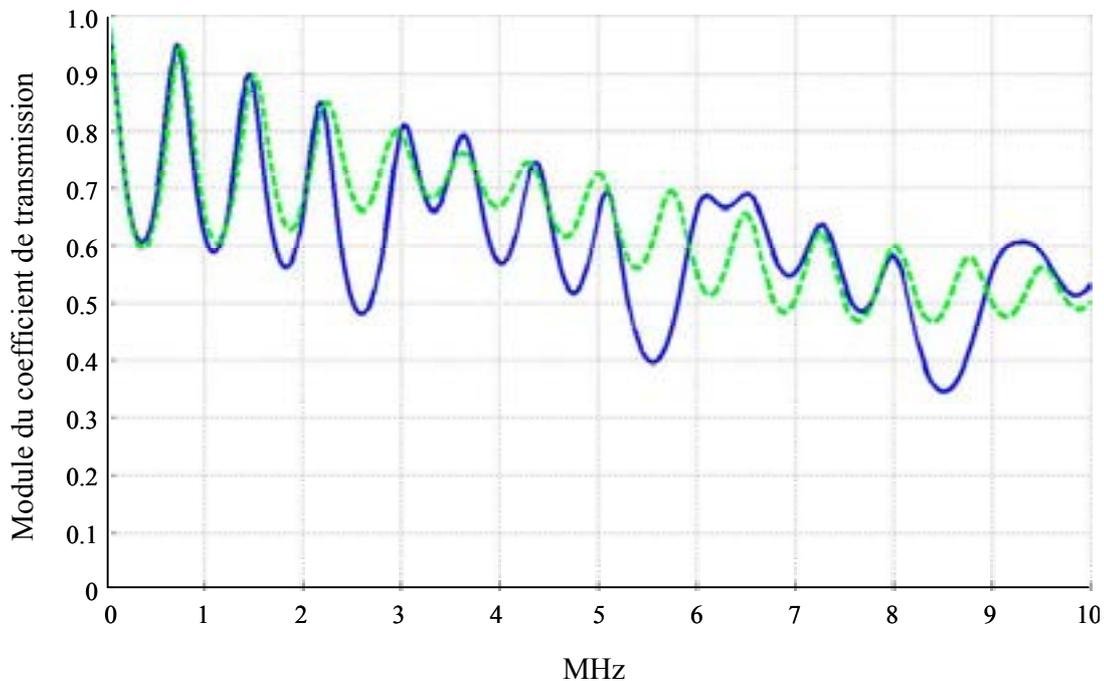


Figure IV.8 : Comparaison du module des coefficients de transmission : (—) multicouche de référence et (---) bicouche.

Le matériau bicouche que nous venons de définir n'a *a priori* pas beaucoup d'intérêt pour cette étude. Pourtant, la probabilité d'observer une telle situation sur une micrographie réelle de plaque de RTM n'est pas nulle.

Une autre configuration très simplifiée du multicouche et beaucoup plus probable que la précédente est d'assimiler cette fois le multicouche à un tricouche « sandwich », représentant un pli RTM entouré de part et d'autre par une couche de résine pure.

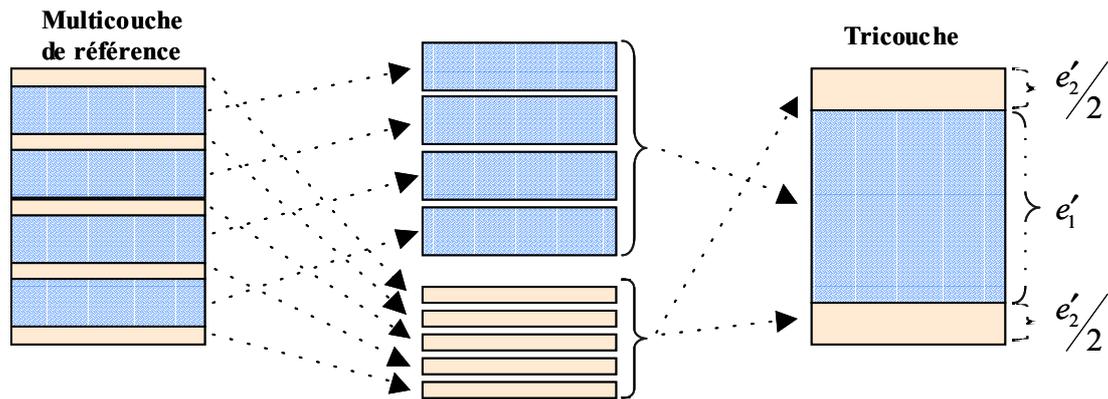


Figure IV.9 : Construction d'un modèle tricouche à partir du multicouche de référence.

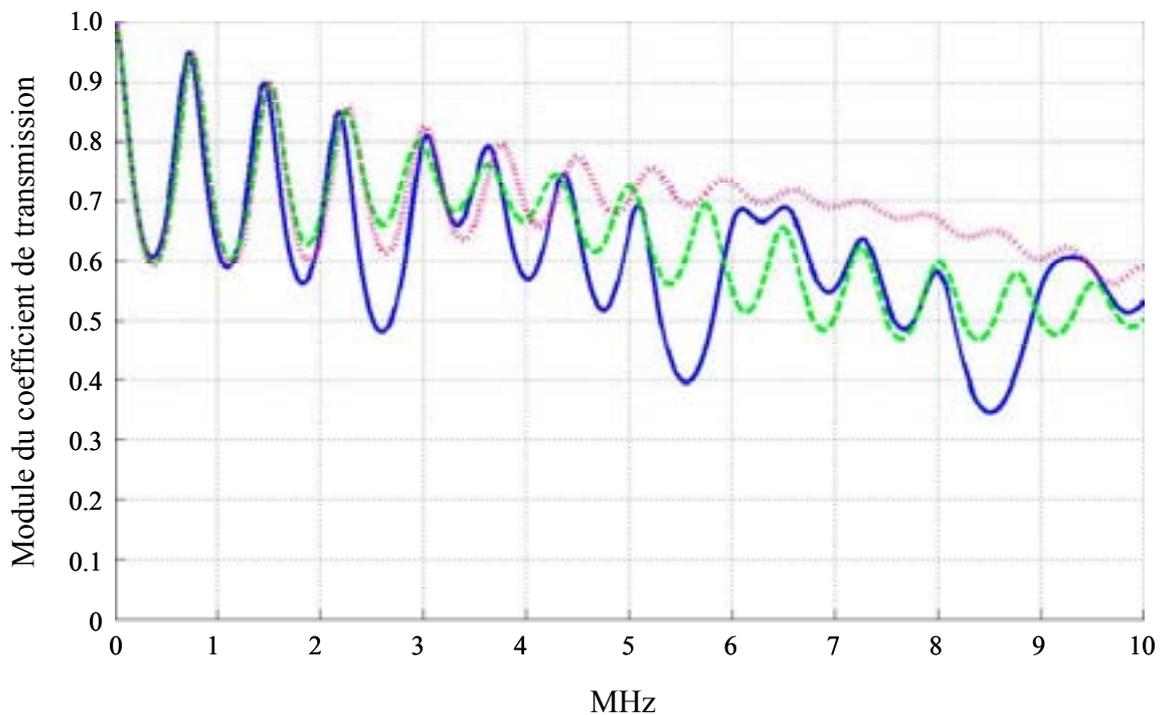


Figure IV.10 : Comparaison du module des coefficients de transmission : (—) multicouche de référence, (---) bicouche et (· · ·) tricouche.

Cette situation est caractérisée par les épaisseurs présentées sur la Figure IV.9. La fonction de transfert obtenue dans une telle situation est comparée à celles obtenues dans la situation de

référence (IV.1) et dans le cas du bicouche (IV.3). Le résultat apparaît sur la Figure IV.10 ; il permet à nouveau d'illustrer l'influence du nombre de couches prises en compte dans le modèle, ce qui constitue une première source de fluctuations possibles sur le coefficient de transmission du multicouche, et donc sur le coefficient d'atténuation global.

### 3.2 Influence de la régularité des épaisseurs des couches

Après s'être intéressé à l'influence du nombre de couches, on peut étudier un autre aspect géométrique caractéristique de la structure des RTM. Il s'agit de la régularité de l'épaisseur des différentes couches. Ainsi, en considérant toujours notre configuration de référence (relations (IV.1)) définie par un multicouche à épaisseurs de couches régulières, on fait varier arbitrairement les épaisseurs de certaines couches (en considérant toujours l'épaisseur globale du multicouche comme une constante). On obtient un modèle, qui est schématisé sur la Figure IV.11. Le multicouche irrégulier ainsi défini possède donc des plis d'épaisseurs supérieures et inférieures au pli de référence, dont la fraction volumique de fibres  $\phi$  définie dans le chapitre II est toujours égale à 0,65.

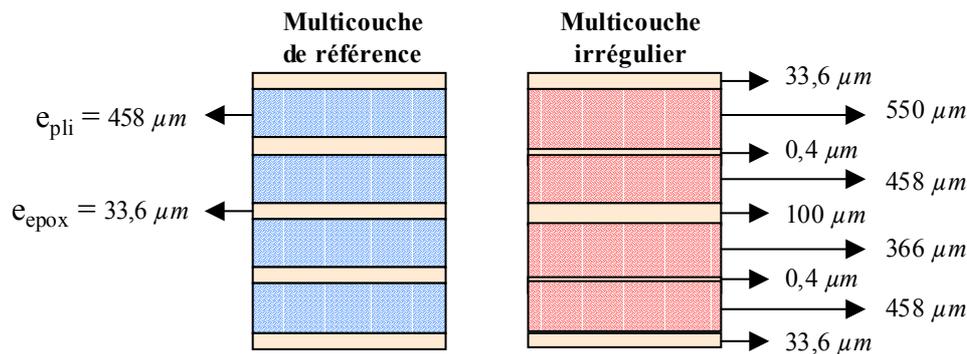


Figure IV.11 : Multicouche de référence et multicouche irrégulier.

Or on peut considérer que lorsque l'épaisseur d'un pli varie, la fraction volumique de fibres est modifiée. Prenons par exemple un pli dont l'épaisseur est diminuée : sa fraction volumique de fibres a alors tendance à augmenter. Inversement, si l'épaisseur d'un pli augmente, sa fraction volumique de fibres va avoir tendance à diminuer. Or cette variation de fraction volumique de fibres a une influence sur le coefficient d'atténuation propre d'un pli, puisque nous avons vu dans le chapitre III que le coefficient d'atténuation était non seulement dépendant de la fréquence, mais également de la fraction volumique de fibres. Ainsi, il semble nécessaire de prendre en compte cette variation de fraction volumique avec la variation d'épaisseur d'un pli dans le calcul du coefficient de transmission du multicouche. Quantitativement, on se propose de prendre en compte dans un premier temps une variation de fraction volumique de fibres inversement proportionnelle à la variation d'épaisseur du pli.

Les fonctions de transfert obtenues avec les multicouches de référence et irrégulier sont comparées sur la Figure IV.12. La courbe en traits interrompus correspond au multicouche de référence, et les courbes en trait continu et en pointillés correspondent au multicouche irrégulier.

Parmi ces deux dernières courbes, celle en trait continu est obtenue en prenant en compte la variation de fraction volumique de fibres avec la variation d'épaisseur des plis, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, et l'autre est obtenue sans tenir compte de cette variation.

La comparaison des fonctions de transfert du multicouche de référence et du multicouche irrégulier montre que la régularité des épaisseurs des couches est encore une source de fluctuations du coefficient de transmission, et donc de l'atténuation du multicouche. En revanche, les courbes en trait continu et pointillés sont assez peu différentes. Ceci indique que la variation de fraction volumique de fibres dans un pli de façon inversement proportionnelle à la variation d'épaisseur a un effet négligeable sur le coefficient de transmission du multicouche considéré. Or, dans la réalité, les variations d'épaisseurs des plis contenus dans les RTM induisent des variations de fraction volumique de fibres qui sont certainement plus faibles que celles que nous avons imposées. Ainsi, la répercussion de cette variation sur le calcul du coefficient de transmission est vraisemblablement moindre que celle que nous avons mise en évidence sur la Figure IV.12. Ainsi, par la suite, nous considérerons ces variations comme négligeables, et nous ne les prendrons plus en compte dans nos calculs.

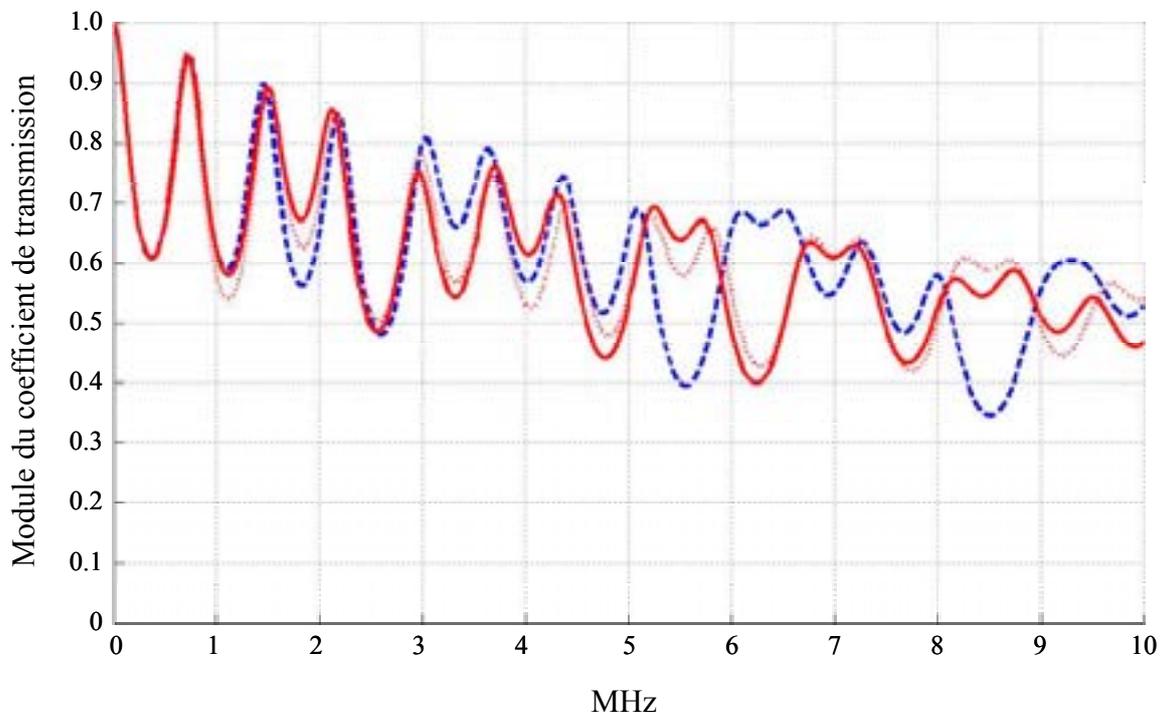


Figure IV.12 : Comparaison du module des coefficients de transmission : (---) multicouche de référence et multicouche à épaisseurs non régulières (—) avec prise en compte de la variation de fraction volumique de fibres, (•••) sans prise en compte cette variation.

Dans ce paragraphe ainsi que le précédent, nous avons montré l'influence de certains effets géométriques comme le nombre de couches ou encore la régularité de leurs épaisseurs sur le coefficient d'atténuation global d'un multicouche constitué d'alternance de résine époxy pure et de plis carbone / époxy, ceci en utilisant un modèle de propagation mono-dimensionnelle.

Nous avons pu ainsi reproduire des fluctuations d'atténuation du multicouche simplement à l'aide d'effets géométriques sur la structure de quelques multicouches particuliers. Cependant, étant donnée la diversité micro-structurale que l'on peut observer sur une même plaque, il faudrait pouvoir reproduire de tels calculs sur un très grand nombre de configurations multicouches. On pourrait alors tenter de quantifier ces variations d'atténuation en donnant par exemple des plages de variations possibles. Pour cela, nous avons décidé de réaliser une étude statistique sur un nombre important de géométries multicouches. C'est ce que nous allons voir dans le prochain paragraphe.

## 4 Étude statistique

Le principe de cette étude consiste à définir un nombre  $N$  de configurations multicouches du type du modèle représenté sur la Figure IV.4, chacune de ces configurations étant obtenue en définissant de façon aléatoire les épaisseurs des différentes couches. Puis, l'objectif est de calculer une fonction de transfert pour ces  $N$  géométries différentes. Ceci est un moyen de généraliser les calculs que nous avons faits dans le paragraphe précédent.

Intéressons-nous tout d'abord au procédé de définition aléatoire des différents multicouches.

### 4.1 Procédé de tirage aléatoire de configurations multicouches

On suppose que l'on a une structure multicouche comme celle représentée sur la Figure IV.4, d'épaisseur globale constante. Celle-ci est définie par neuf couches, et donc neuf épaisseurs. L'idée est alors de faire un tirage aléatoire de valeurs pour chacune de ces épaisseurs, tout en assurant que l'épaisseur globale du modèle reste constante, et tout en respectant certaines plages de valeurs relatives aux couches de résine pure ou aux plis carbone / époxy.

Par un tel procédé, on espère être capable de prendre en compte un maximum de configurations géométriques potentiellement observables sur des micrographies de plaques RTM réelles. De plus, en jouant sur la définition des bornes des plages de variations imposées pour les différentes couches, on peut orienter le type de plaque RTM que l'on souhaite

représenter. On peut par exemple définir deux familles de multicouches selon les plages imposées. On désigne ces familles d'une part par « interfaces quasi-parallèles » et d'autre part « interfaces ondulées ». Le tableau 1 indique les plages d'épaisseurs pour ces deux familles.

	Couches d'époxy (épaisseurs en mm)	Plis carbone / époxy (épaisseurs en mm)
Interfaces quasi-parallèles	$0 < e < 0,05$	$0,40 < e < 0,55$
Interfaces ondulées	$0 < e < 0,20$	$0,30 < e < 0,60$

Tableau 1 : Intervalles de valeurs choisis pour les épaisseurs des différentes couches.

Dans le cas des RTM, nous nous sommes appuyés sur les micrographies d'une plaque de 2 mm d'épaisseur pour déterminer les intervalles les plus représentatifs de la diversité micro-structurale. Ces intervalles correspondent à la famille « interfaces ondulées ».

Nous avons imposé ces valeurs pour chaque famille d'intervalles, et réalisé un tirage aléatoire sur 500 multicouches.

Afin de visualiser les résultats obtenus, nous avons tracé des graphes représentant sur un axe horizontal l'indice  $n$  ( $n$  compris entre 1 et  $N$ ) du multicouche considéré, et sur un axe vertical les épaisseurs cumulées des neuf couches obtenues. Les Figures IV.13 et IV.14 montrent respectivement ce type de représentation graphique pour  $N = 100$  multicouches aléatoires appartenant à chaque famille « interfaces quasi-parallèles » et « interfaces ondulées ».

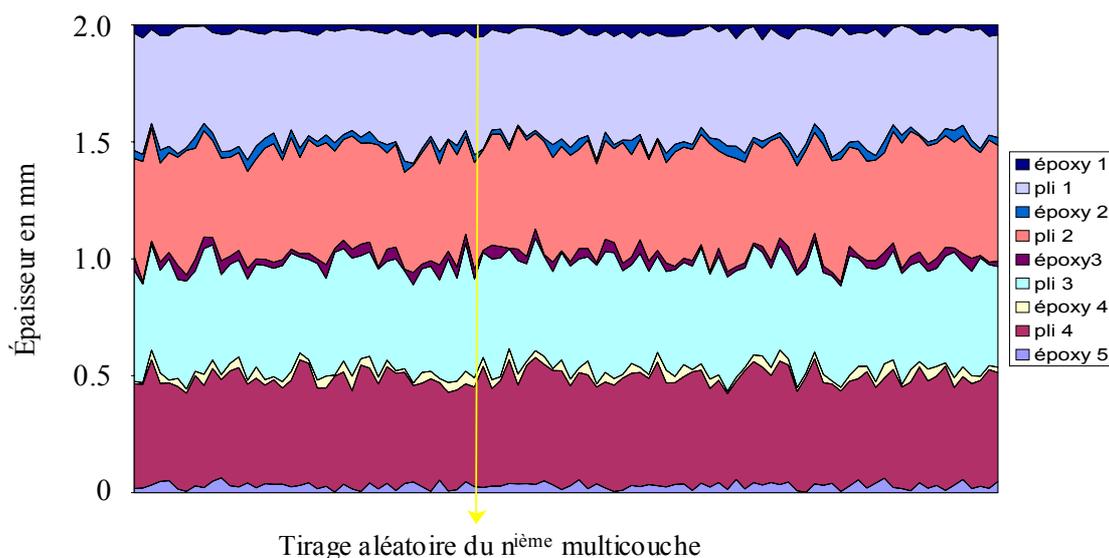


Figure IV.13 : Exemple de 100 multicouches de famille « interfaces quasi-parallèles » définis aléatoirement.

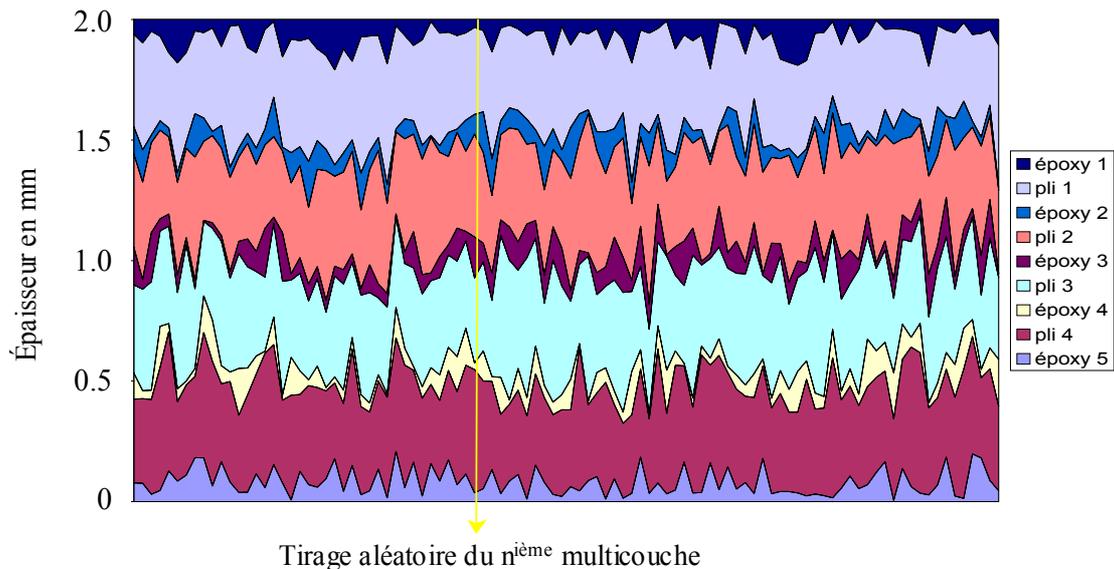


Figure IV.14 : Exemple de 100 multicouches de famille « interfaces ondulées » définies aléatoirement.

La famille qui nous intéresse dans le cadre des RTM est la famille « interfaces ondulées ». En effet, comme nous l'avons déjà précisé, les bornes des intervalles d'épaisseurs qui la caractérisent ont été mesurées sur une micrographie réelle de plaque RTM. On peut justifier la pertinence de ces bornes en évaluant, pour chaque multicouche générée par le procédé aléatoire, la proportion volumique de résine entre les plis par rapport au volume total de ce multicouche. En calculant la moyenne de toutes ces proportions, on trouve que la proportion volumique moyenne de résine pure entre les plis présente sur l'ensemble des multicouches obtenus est d'environ 24 %. Or parmi les données connues des plaques RTM réelles, on sait que cette valeur est d'environ 22,6 %. Ainsi, les plages d'épaisseurs que nous nous sommes fixées pour représenter les RTM sont tout à fait pertinentes.

Dans la suite de cette étude, c'est donc avec les intervalles d'épaisseurs correspondant à cette famille interface « ondulées » que nous travaillerons. Nous avons simplement introduit l'autre famille pour illustrer l'importance de la définition des plages d'épaisseurs.

Un autre type de représentation intéressant de ces données aléatoires est un histogramme, qui indique la fréquence des valeurs comprises dans certaines plages d'épaisseurs. Par exemple, pour la famille « interfaces ondulées » qui nous intéresse plus particulièrement, on peut représenter la fréquence des épaisseurs contenues dans des tranches prédéfinies de la façon suivante : tranches de 0,01 mm entre les épaisseurs 0 à 0,20 mm (couches de résine pure), et de 0,015 mm entre 0,30 et 0,60 mm (plis). La Figure IV.15 illustre ces résultats.

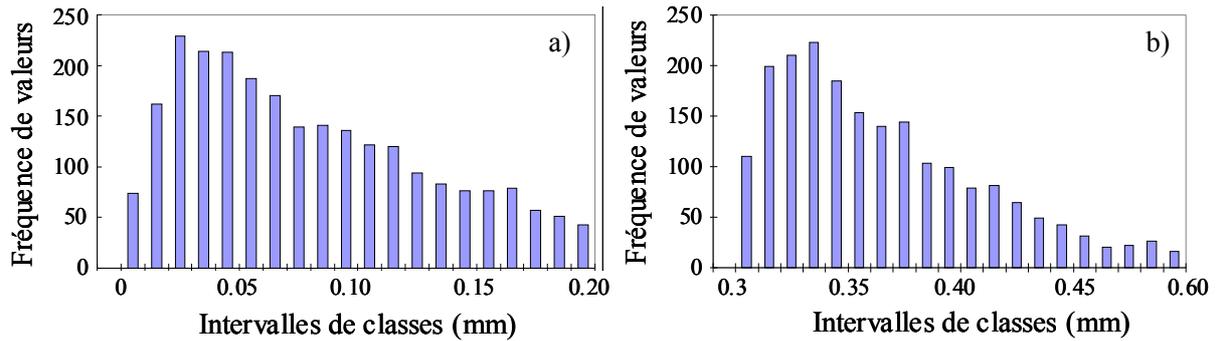


Figure IV.15 : Histogramme de répartition des épaisseurs aléatoires pour a) les couches époxy et b) les plis.

Ces histogrammes permettent de constater que le procédé de tirage aléatoire a généré un maximum de couches d'époxy et de plis dont les épaisseurs respectives sont d'environ 0,03 mm et 0,36 mm.

En conclusion de ce paragraphe, on peut noter que le procédé aléatoire que nous avons défini, permettant de définir un nombre  $N$  de multicouches à interfaces parallèles et à épaisseurs de couches variables, nous a permis de reconstruire un pseudo multicouche de géométrie imparfaite et irrégulière.

## 4.2 Étude statistique de l'ensemble des fonctions de transfert correspondantes

Pour chacun des multicouches définis aléatoirement dans le paragraphe précédent, on peut calculer une fonction de transfert à l'aide du modèle de propagation présenté dans le paragraphe 2.2. La première idée de l'étude statistique est alors de définir des bornes maximale et minimale à partir des  $N$  fonctions de transfert obtenues, et en déduire les fluctuations d'amplitudes maximales qu'il est possible d'observer à partir des  $N$  multicouches considérés.

Observons les résultats obtenus à partir de 500 multicouches de la famille « interfaces ondulées » (voir tableau 1). On peut représenter sur un graphique en trois dimensions la valeur du module du coefficient de transmission en fonction de la fréquence pour chacun des  $N$  multicouches considérés. L'axe vertical représente la valeur du module du coefficient de transmission, et les axes des abscisses et des ordonnées correspondent respectivement à la fréquence et à l'indice  $n$  du multicouche.

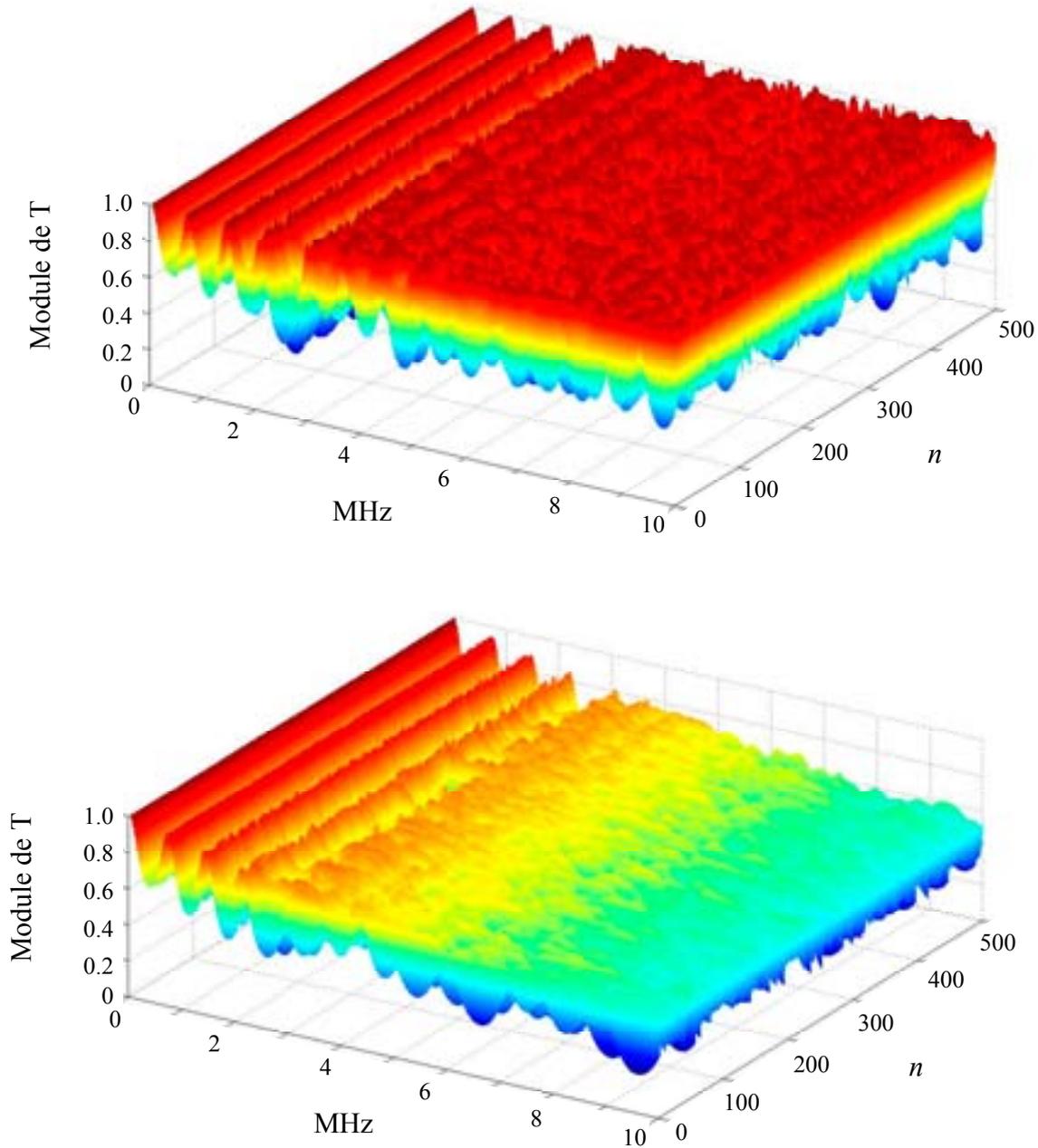


Figure IV.16 : Module du coefficient de transmission en fonction de la fréquence et du multicouche considéré, sans atténuation (haut), et avec atténuation (bas).

La Figure (IV.16) présente de tels résultats selon que l'atténuation dans le multicouche est prise en compte ou non. Dans ces deux cas, excepté à basse fréquence où la fonction de transfert est dominée par l'épaisseur de la plaque, on peut noter des fluctuations non négligeables du module du coefficient de transmission suivant la répartition en épaisseur des couches internes. Cependant, ces fluctuations aux plus hautes fréquences apparaissent plus limitées dans le cas où l'atténuation est prise en compte. L'évaluation quantitative des variations de la fonction de transfert d'un multicouche à l'autre nécessite donc la prise en compte de l'atténuation.

À partir de l'ensemble de ces fonctions de transfert, on peut effectuer différents traitements, et en particulier extraire des bornes supérieures et inférieures, notées  $T_{\max}(f)$  et  $T_{\min}(f)$ , définies pour chaque fréquence par les valeurs maximales et minimales de l'ensemble des modules des coefficients de transmission des  $N$  multicouches, et correspondant à la transmission à travers la plaque immergée, .

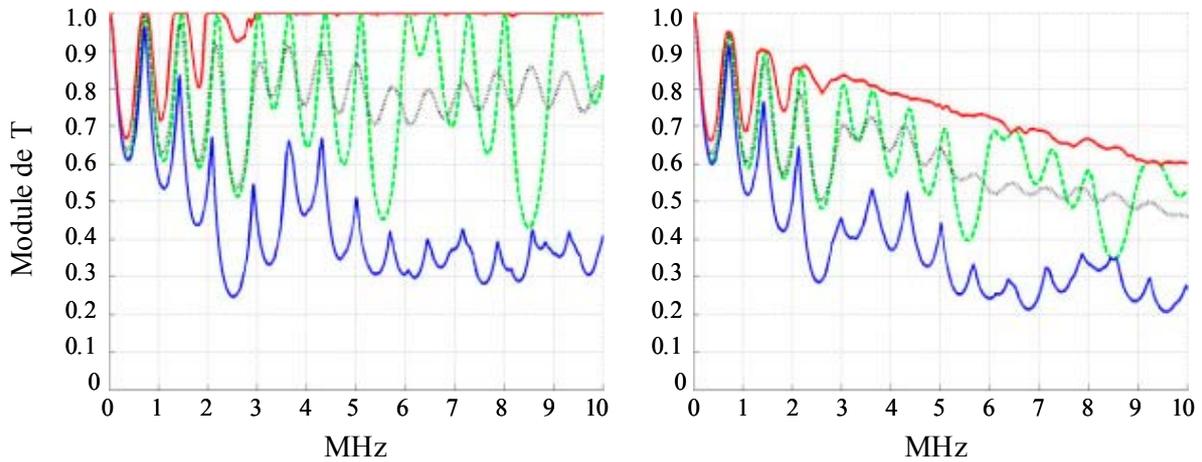


Figure IV.17 : Fonctions de transfert sans prise en compte de l'atténuation (gauche) et avec prise en compte de l'atténuation (droite) : (—) Bornes supérieure et inférieure, (.....) moyenne sur l'ensemble des multicouches et (- - -) multicouche de référence.

La Figure IV.17 montre par exemple l'allure de la fonction de transfert selon la fréquence du multicouche de référence (IV.1) défini dans le paragraphe 3.1 de ce chapitre, mais aussi les bornes inférieures et supérieures de toutes les fonctions de transfert des  $N$  multicouches aléatoires, ainsi que leur moyenne (calculée en faisant la moyenne des modules de l'ensemble des coefficients de transmission des  $N$  multicouches). Ces figures permettent de visualiser les variations d'amplitudes maximales qu'il est possible d'obtenir si on considère les  $N$  multicouches aléatoires que nous avons définis. D'autre part, comme nous l'avons déjà noté sur la Figure IV.16, nous pouvons voir que le calcul qui ne tient pas compte de l'atténuation conduit à une surestimation de ces variations.

On peut quantifier l'écart existant entre les bornes supérieures et inférieures que nous avons construites. En effet, en mesurant cet écart pour chaque fréquence, on peut en déduire l'écart d'amplitude selon la fréquence entre ces bornes inférieures et supérieures. Si on considère une propagation aller et retour dans les multicouches considérés (correspondant à une expérience d'émission / réception impliquant une double transmission à travers une plaque immergée), cet écart peut être traduit en dB pour chaque fréquence à l'aide de la relation :

$$\Delta_{\text{amplitude}}(dB) = 20 \log_{10} \left[ \frac{T_{\max}(f)}{T_{\min}(f)} \right]^2. \quad (IV.4)$$

En appliquant cette formule, on trouve l'écart maximum en dB en fonction de la fréquence qu'il est possible d'obtenir si l'on considère toutes les configurations multicouches aléatoires. La Figure IV.18 représente cet écart en fonction de la fréquence dans les cas où l'atténuation dans le multicouche est prise en compte ou non .

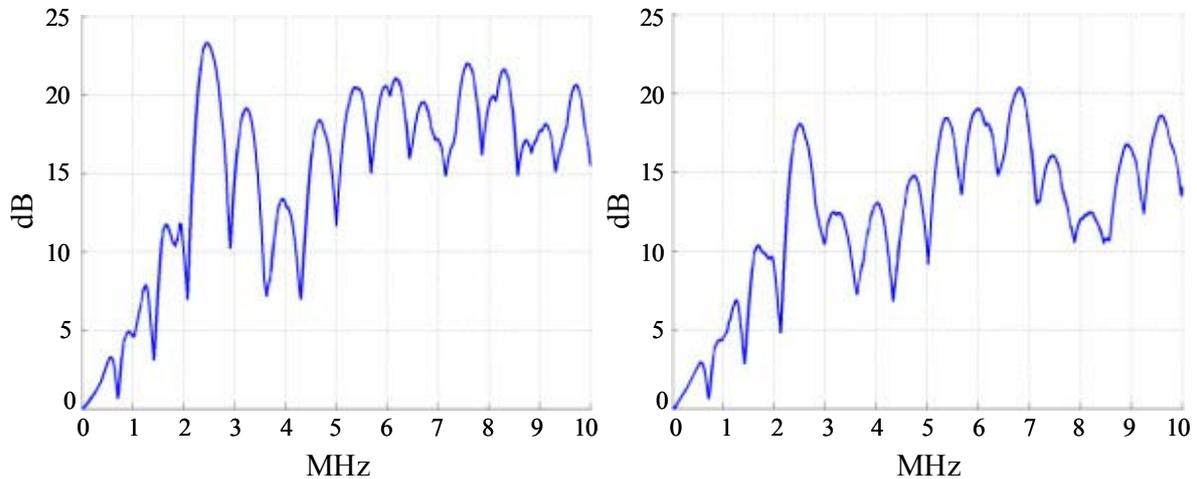


Figure IV.18 : Fluctuations d'amplitude en dB entre les bornes supérieures et inférieures des fonctions de transfert des  $N$  multicouches, pour une propagation aller et retour dans des multicouches de 2 mm d'épaisseur, sans atténuation (gauche) et avec atténuation (droite).

On peut remarquer par exemple qu'à la fréquence 5 MHz, qui est la fréquence centrale de contrôle des RTM chez Dassault, on obtient un écart de 12 dB environ entre les niveaux d'amplitude « min » et « max » (correspondant aux bornes supérieures et inférieures définies précédemment) lorsque l'atténuation n'est pas prise en compte, et de 10 dB lorsqu'elle est prise en compte. Cela signifie que ces variations d'amplitude sont essentiellement dues aux effets géométriques, c'est-à-dire les variations d'épaisseurs des différentes couches. Ce résultat est logique car, pour un multicouche donné, la seule cause de fluctuations possibles de la fonction de transfert, et donc de l'atténuation de celui-ci, sont justement ces variations géométriques. En effet, l'atténuation de chaque milieu constituant le multicouche est un paramètre fixe propre à ce milieu.

Si l'on considère non plus une fréquence particulière mais plutôt un intervalle de fréquences, on peut calculer la moyenne des écarts maximums en dB qu'il est possible d'observer sur ce domaine fréquentiel. Si on se place par exemple sur la bande de fréquence allant de 3 à 7 MHz (voir figure IV.19), on trouve que l'écart moyen (toujours entre les bornes supérieures et inférieures que nous avons définies) dans le cas où l'atténuation est prise en compte est d'environ 14,4 dB.

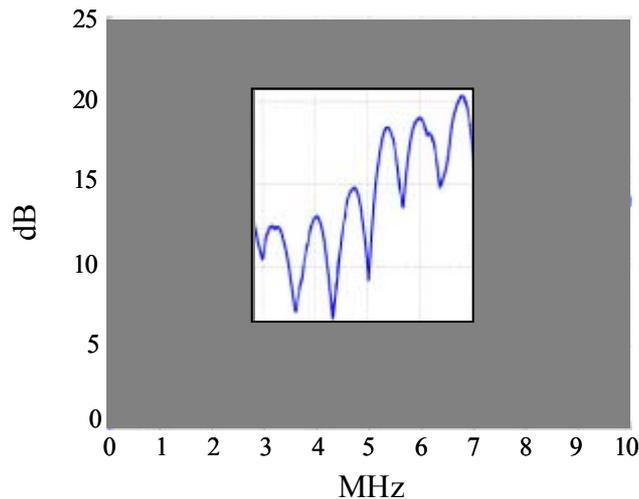


Figure IV.19 : Fluctuations d'amplitude en dB entre les bornes supérieures et inférieures des fonctions de transfert des  $N$  multicouches, pour une propagation aller et retour dans des multicouches de 2 mm d'épaisseur avec prise en compte de l'atténuation.

Or les mesures d'atténuation réalisées chez Dassault sur des plaques RTM conduisent à des fluctuations d'amplitudes de l'ordre de 15 dB selon la zone inspectée. Ainsi, avec le modèle de propagation mono-dimensionnelle et l'étude statistique que nous venons de mener, nous avons pu reproduire des écarts d'amplitude très voisins de ceux obtenus expérimentalement.

On peut approfondir cette étude statistique en utilisant un autre moyen de représentation des données. En effet, le procédé de génération aléatoire que nous avons mis au point nous a permis de définir un nombre  $N$  de multicouches différents, caractérisés par des couches d'épaisseurs variables, et ainsi obtenir une fonction de transfert par multicouche (voir Figure IV.16).

Pour obtenir les résultats représentés sur la Figure IV.18, nous avons défini des bornes supérieures et inférieures à ces  $N$  fonctions de transfert. Mais on peut aussi s'intéresser à la comparaison de chacune de ces fonctions avec celle obtenue à partir du multicouche de référence (c'est-à-dire (IV.1)), et ainsi calculer pour chaque fréquence et pour chaque multicouche l'écart en dB par rapport à cette situation. La représentation graphique en trois dimensions de ces résultats est présentée sur la Figure IV.20. L'axe vertical représente la valeur du module du coefficient de transmission, et les axes des abscisses et des ordonnées représentent respectivement la fréquence et l'indice du multicouche.

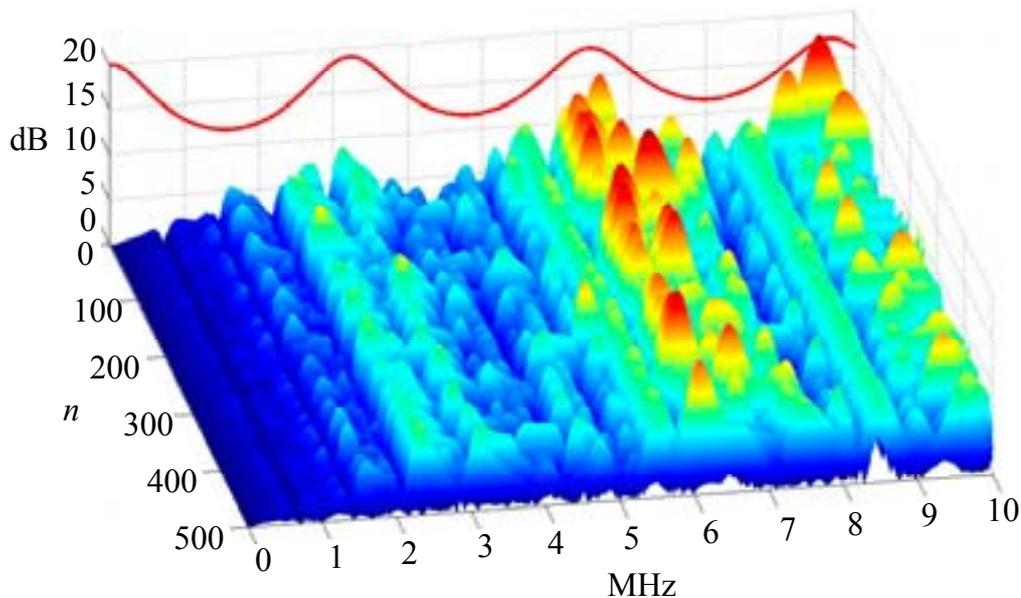


Figure IV.20 : Écarts absolus en dB entre les fonctions de transfert de chaque multicouche et le multicouche de référence en prenant en compte l'atténuation, et allure de la fonction de transfert d'un pli de référence.

La Figure IV.20 met en évidence des bandes de fréquences (2.5-3.5 MHz, 5.5-8 MHz, et 9-10 MHz) dans lesquelles sont situés les écarts maximums en dB obtenus à partir des  $N$  multicouches aléatoires. Afin de relier ceci à des phénomènes probables de résonances de couches, nous avons également représenté sur la Figure IV.20 l'allure<sup>4</sup> de la fonction de transfert d'un pli du multicouche de référence (courbe en trait continu) obtenue en considérant une plaque constituée de ce pli uniquement. Nous pouvons alors remarquer que les bandes de fréquences que nous avons mentionnées ci-dessus correspondent aux résonances successives d'un pli du multicouche de référence.

Pour terminer cette étude statistique, on peut effectuer un dernier type de représentation graphique des différentes données obtenues. On peut regrouper, pour chaque fréquence, les fluctuations d'amplitude par rapport au multicouche régulier obtenues avec les  $N$  multicouches (voir Figure IV.20) en différentes classes d'amplitudes. Par exemple si on se fixe des tranches de 1 dB, on va rechercher, toujours pour chaque fréquence, la proportion de multicouches contribuant à chacune de ces classes. La Figure IV.21 illustre ce dernier point.

<sup>4</sup> Pour une représentation graphique plus lisible, nous avons modifié l'amplitude de la fonction de transfert du pli de référence (qui est normalement comprise entre 0 et 1). C'est pour cela que l'on parle ici d'allure de cette fonction, l'important étant de pouvoir situer ses maxima et minima selon la fréquence.

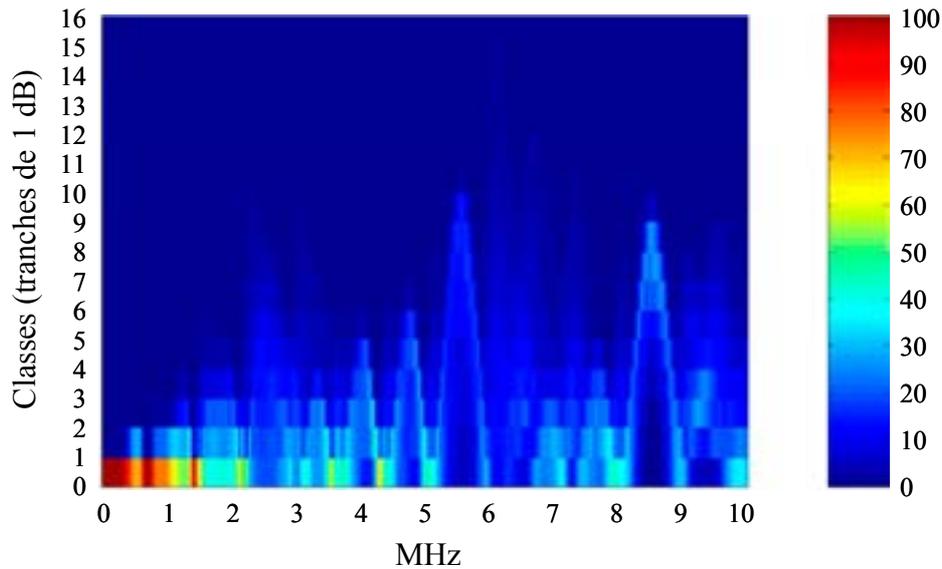


Figure IV.21 : Répartition par classe d'amplitude des écarts absolus en dB induits par les  $N$  multicouches par rapport au multicouche de référence, pour la famille de multicouches « interfaces ondulées ».

Ce type de représentation est intéressant car il est directement lié à la régularité des épaisseurs des multicouches considérés. En effet, si l'on effectue la même représentation graphique pour la famille de multicouches « quasi-parallèles » que nous avons introduite précédemment (voir tableau 1), on obtient la Figure (IV.22).

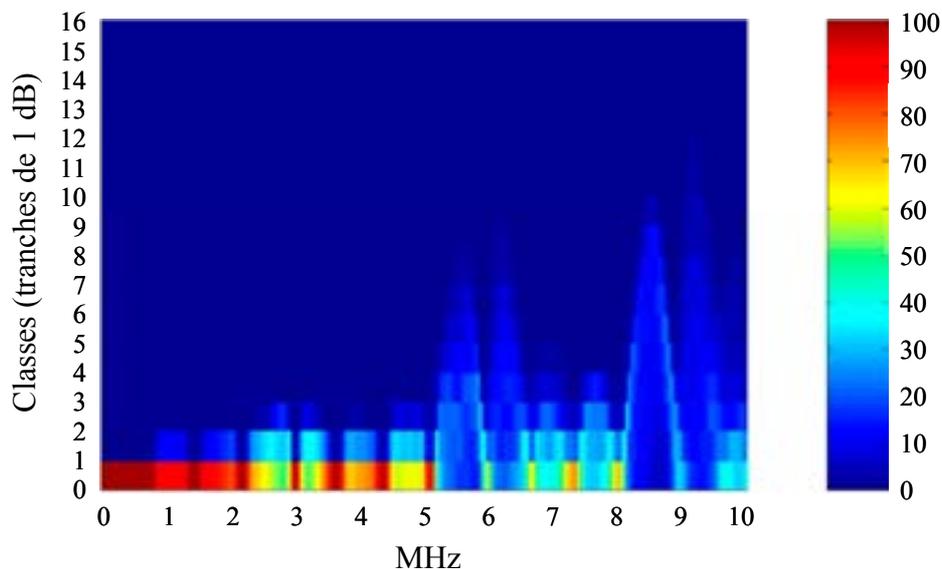


Figure IV.22 : Répartition par classe d'amplitude des écarts absolus en dB induits par les  $N$  multicouches par rapport au multicouche de référence, pour la famille de multicouches « interfaces quasi-parallèles ».

Nous pouvons donc constater que pour cette dernière famille, la répartition des écarts d'amplitude par rapport au multicouche de référence par tranche de 1 dB est beaucoup moins « dispersée » que dans le cas précédent. En particulier pour les fréquences inférieures à 5 MHz, on observe peu de différences par rapport au multicouche de référence puisque sur l'ensemble des multicouches considérés, l'écart maximum à ces fréquences est de 3 dB.

## **5 Intégration dans le logiciel CIVA des modèles développés**

L'ensemble des modèles présentés dans ce document et ayant permis de produire les résultats et répondre aux questions posées par le sujet de cette thèse a été initialement développé dans l'environnement de programmation MatLab. Ces modèles, une fois validés, ont ensuite été implémentés au sein des modules de simulation ultrasonore du logiciel CIVA, développé au CEA.

Un de ces modules (voir Réf. [1, 2]) permet de prédire le champ rayonné par un transducteur ultrasonore dans des pièces de géométries tridimensionnelles, constituées de milieux hétérogènes (homogènes par morceaux) ayant des propriétés anisotropes.

La définition d'un calcul de champ dans une pièce commence naturellement par la définition de cette pièce, qui comprend deux aspects : géométrie de la pièce, et description du ou des matériaux qui la constituent.

Les modèles développés dans cette étude offrent la possibilité de définition de nouveaux milieux homogènes dans CIVA, reposant sur la détermination d'une matrice d'élasticité (symétrie cristalline et coefficients d'élasticité indépendants), et sur le calcul d'une loi d'atténuation en fonction de la fréquence pour chaque type d'onde. Les milieux ainsi définis sont automatiquement pris en compte dans les modules de simulation du CND par ultrasons de CIVA.

### ***5.1 Définition d'un composite fibreux à deux phases***

#### **5.1.1 Élasticité**

Afin d'obtenir l'ensemble des coefficients d'élasticité indépendants, on utilise la méthode d'homogénéisation statique présentée dans le paragraphe 1.2 du chapitre II. Les données

d'entrée nécessaires au calcul sont les caractéristiques d'élasticité de chaque phase, les proportions (volumiques) de ces phases, ainsi que leur masse volumique. La matrice est supposée isotrope tandis que la fibre possède une symétrie isotrope transverse. Le matériau résultant possède lui aussi cette dernière symétrie. L'axe de symétrie du milieu obtenu peut ensuite être orienté de façon arbitraire par rapport aux coordonnées de la pièce. Enfin, la masse volumique globale du composite est calculée par la formule (II.27).

### **5.1.2 Atténuation**

La détermination de la loi d'atténuation en fonction de la fréquence fait appel au modèle développé dans le paragraphe 4 du chapitre II, couplant les phénomènes d'absorption visqueuse et de diffusion multiple. Les lois d'atténuation calculées (une par type d'onde) sont ensuite interpolées par un polynôme (puissances entières de la fréquence). Les données d'entrée du calcul sont à nouveau les mêmes que celles nécessaires au calcul de l'élasticité, complétées par les parties imaginaires des constantes d'élasticité des deux phases.

## **5.2 Définition d'un pli composé de différentes couches unidirectionnelles**

### **5.2.1 Élasticité**

Les coefficients élastiques d'un pli sont calculés à l'aide de la méthode classique d'homogénéisation de Postma présentée dans le chapitre III. Les données d'entrée de ce calcul sont les caractéristiques élastiques des différentes couches formant le pli, elles-mêmes calculées selon la méthode décrite dans le paragraphe 5.1.1 de ce chapitre. Chacune de ces couches est définie comme isotrope transverse, et le matériau résultant de l'homogénéisation possède une symétrie orthotrope.

### **5.2.2 Atténuation**

La loi d'atténuation définie pour un pli est identique à celle calculée pour une couche unidirectionnelle (voir paragraphe 5.1.2) à condition que les fibres contenues dans toutes les couches soient contenues dans des plans parallèles aux interfaces. Ceci est donc vrai lorsque les différentes couches sont désorientées les unes par rapport aux autres par une rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe des fibres, ce qui est généralement le cas dans les plis composites.

# Conclusions

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse s'inscrit dans le domaine du contrôle non destructif des matériaux par ultrasons. La spécificité du sujet qui nous a été proposé provient des matériaux auxquels on s'est intéressé, c'est-à-dire les matériaux composites carbone / époxy obtenus par le procédé de fabrication RTM.

Expérimentalement, le contrôle de ces matériaux est rendu difficile par le fait que l'atténuation des ultrasons y est forte et présente des variations importantes sans relation évidente avec la microstructure. Pour que puisse être envisagé le développement de méthodes de contrôles ultrasonores pour ces matériaux, il est apparu nécessaire de développer des moyens de simulation spécifiques à ces matériaux afin de mieux comprendre les phénomènes physiques à l'origine de l'atténuation et de ses variations.

## **Principaux résultats obtenus**

L'observation de la microstructure de plaques RTM réelles nous a conduit à mener cette étude en considérant les différentes échelles de cette structure composite : la couche à fibres unidirectionnelles, le pli composé de trois couches désorientées, et enfin la plaque constituée de plusieurs plis généralement séparés par des couches de résine pure.

L'étude de l'atténuation dans une couche unidirectionnelle nous a amené à développer un modèle général prenant en compte les phénomènes élémentaires de diffusion multiple et d'atténuation par effet viscoélastique, ainsi que leur couplage. Ces phénomènes apparaissent en effet conjointement dans le cas des fortes densités de fibres de carbone dans une matrice époxy, qui sont les constituants élémentaires de ces couches dans le cas du matériau objet de notre étude. Pour ces mêmes matériaux, les prédictions d'atténuation du modèle ont été comparées avec succès avec des résultats expérimentaux, et ont ainsi pu être validées dans le domaine de fréquences [1-10] MHz du CND, pour trois polarisations différentes relativement à la direction des fibres, et pour différentes fractions volumiques. Dans tous ces cas, l'atténuation dépend linéairement de la fréquence et la dispersion de la vitesse de phase est négligeable.

Le modèle d'atténuation développé peut s'appliquer à tout type de matériaux composites fibreux, quelle que soit la fraction volumique de fibres. Il est limité cependant au cas d'ondes se propageant dans la direction perpendiculaire à celle des fibres.

Notons que les résultats précédents de linéarité de l'atténuation en fonction de la fréquence et de la non dispersion de la vitesse de phase ne sont pas des présupposées au modèle mais des résultats spécifiques obtenus dans le cas particulier des composites carbone / époxy. Pour d'autres composites fibreux, l'atténuation et la vitesse de phase peuvent varier de façon quelconque avec la fréquence.

L'étude de la propagation des ultrasons à l'échelle d'un pli a consisté à généraliser les phénomènes décrits précédemment au niveau d'une couche. L'utilisation d'une méthode classique d'homogénéisation appliquée à un empilement de couches carbone / époxy nous a alors permis de représenter un pli caractéristique d'un matériau RTM par une matrice d'élasticité de symétrie orthotrope, et un coefficient d'atténuation pour les différentes ondes se propageant orthogonalement aux fibres.

Une plaque RTM étant constituée d'un assemblage de plis généralement séparés par des couches de résine pure, on a modélisé une telle plaque par un matériau multicouche très simple dont les couches sont parallèles. Les micrographies de plaques RTM réelles observées mettent en évidence d'importantes variations des épaisseurs des différentes couches selon la zone de la plaque considérée. Pour rendre compte de ces variations, différentes configurations multicouches ont été étudiées. Chaque configuration est caractérisée par un jeu de neuf épaisseurs correspondant aux différentes couches. Un procédé de tirage aléatoire de ces épaisseurs a été mis au point pour modéliser les caractéristiques géométriques variables, typiques des plaques RTM. Puis, les  $N$  fonctions de transfert des  $N$  multicouches, calculées à l'aide d'un modèle de propagation mono-dimensionnel, ont été comparées. Un traitement statistique de ces fonctions a permis de prédire des variations d'atténuation corroborant celles observées expérimentalement. Cette étude statistique nous a donc permis d'expliquer que la variabilité des épaisseurs des différentes couches formant une plaque RTM est à l'origine de ces fortes variations. En outre, la prise en compte des différents phénomènes d'atténuation selon les couches traversées s'est avérée indispensable à la prédiction quantitative des niveaux d'atténuation et de leur variation.

### **Perspectives d'applications**

Les différents modèles développés, dont la validité a été démontrée dans le cas de matériaux RTM, ont été intégrés dans le logiciel de simulation CIVA développé au CEA. Au sein de ce

logiciel, la complexité géométrique de la structure interne de ces matériaux peut en effet être prise en compte à l'aide d'un logiciel de CAO.

Des prolongements de cette étude peuvent donc être entrepris, notamment sur le plan de la simulation complète d'un contrôle depuis l'émission jusqu'à la réception, impliquant la propagation dans une plaque RTM. De telles études sont en effet indispensables, par exemple pour mettre au point et optimiser les paramètres des méthodes de CND par ultrasons dans un contexte industriel.

Le caractère générique des outils mis au point rend possible de telles études pour d'autres matériaux composites fibreux, dès lors que les preuves expérimentales de validité des modèles proposés ont été apportées pour ces matériaux.

### **Perspectives de développements théoriques**

Le procédé RTM est utilisé dans l'industrie aéronautique pour fabriquer non seulement des pièces de géométrie plane, mais aussi de géométries plus complexes. La propagation des ultrasons dans de telles pièces ne se fait pas nécessairement perpendiculairement à l'axe des fibres. La prédiction de l'atténuation dans ces directions implique donc de nouveaux développements théoriques, pouvant se ramener au calcul généralisé de la section efficace de diffusion pour un problème tri-dimensionnel.

De façon générale, l'approche suivie pour développer le modèle d'atténuation couplant diffusion multiple et viscoélasticité doit pouvoir être également suivie dans le cas d'autres géométries de diffuseurs élémentaires.

---

# Annexe A : Homogénéisation dans une couche composite unidirectionnelle

Dans cette Annexe, nous donnons le principe de la méthode d'homogénéisation dans une couche composite unidirectionnelle. Il s'agit de réaliser une homogénéisation statique des propriétés purement élastiques de la couche, à partir des propriétés élastiques de ses constituants (matrice et fibre).

En utilisant le concept d'homogénéisation que nous avons introduit au début du chapitre II, nous allons nous attacher dans cette Annexe à exprimer les propriétés mécaniques homogénéisées d'un composite unidirectionnel. Celles-ci sont déterminées sur un élément de volume représentatif du matériau, noté  $V$ , de dimension  $\delta$ . Si on impose des conditions de continuité de contraintes et de déformations à la frontière de cet élément de volume, les composantes du tenseur des contraintes moyen sur  $V$  sont définies par :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{V} \int_V \sigma_i(x_k) dV \quad i=1,\dots,6, \quad (\text{A.1})$$

et les composantes du tenseur des déformations moyen par :

$$\bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_j(x_k) dV \quad j=1,\dots,6. \quad (\text{A.2})$$

La matrice de rigidité du matériau est alors déterminée par la relation :

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\varepsilon}_j \quad i, j=1,\dots,6. \quad (\text{A.3})$$

Ainsi, pour déterminer les propriétés homogénéisées d'un matériau hétérogène, il est nécessaire de calculer la contrainte et la déformation moyennes sur le volume représentatif à l'aide de (A.1) et (A.2), puis d'en déduire les constantes de rigidité avec la relation (A.3). Mais si ce problème apparaît simple à résoudre dans son principe, il est en fait particulièrement complexe dans la pratique car il faut connaître les solutions exactes des champs de contrainte et déformation en chaque point du matériau, ce qui n'est possible que dans le cas de modèles géométriques simples. C'est dans ce cadre d'étude que nous allons nous placer, puisque les fibres contenues dans les composites unidirectionnels que nous considérons sont assimilées à des cylindres infinis.

Un composite unidirectionnel est constitué de fibres parallèles disposées dans une matrice. Ce type de matériau représente la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude. La cellule élémentaire est supposée être en première

approximation une fibre entourée d'un cylindre de matrice. Les axes de coordonnées choisis sont représentés sur la Figure A.1. Le composite est considéré comme isotrope transverse : il est isotrope dans le plan normal à la direction 1, et les directions transverses 2 et 3 sont équivalentes.

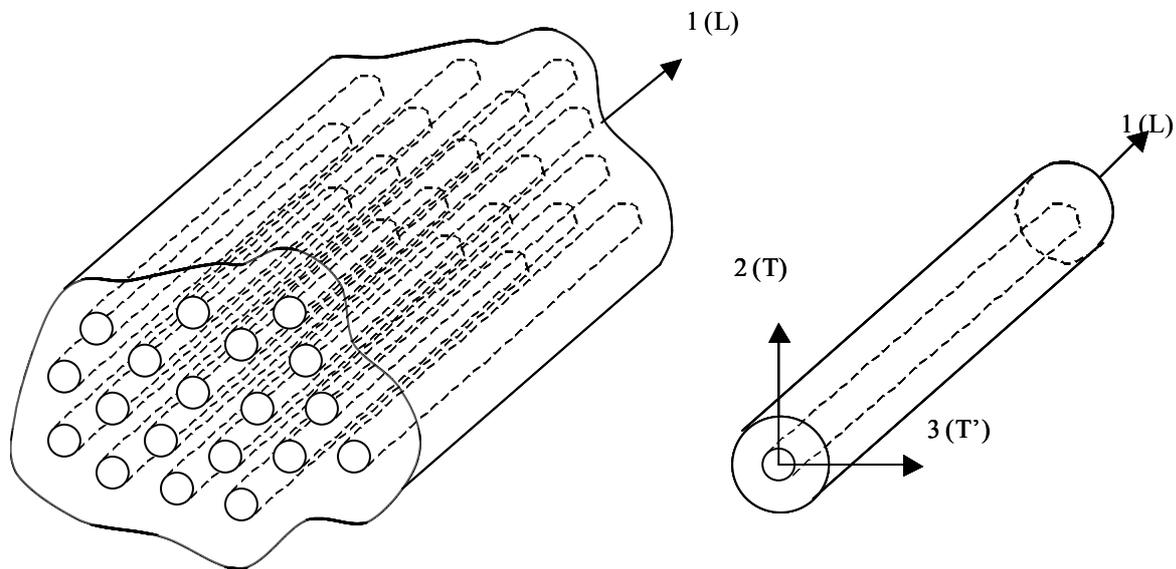


Figure A.1 : Composite unidirectionnel.

Notre but est de déterminer les cinq constantes élastiques indépendantes permettant de déterminer totalement la matrice de rigidité du matériau (A.4) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Pour cela, nous devons chercher des solutions exactes aux champs de contraintes et déformations, comme nous l'avons signalé plus haut. Mais avant de chercher ces solutions, il est nécessaire d'introduire des coefficients mécaniques appelés modules de l'ingénieur.

Les modules de l'ingénieur sont respectivement les modules d'Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement. Ces modules sont mesurés dans des essais simples tels que traction uni-axiale ou de cisaillement. Ils correspondent donc à une utilisation usuelle plus

pratique que les constantes de rigidité. On peut exprimer ces modules en fonctions des coefficients de la matrice d'élasticité en appliquant simplement différents états de contraintes au composite unidirectionnel.

Ainsi, en appliquant successivement les états de contraintes correspondant à une traction longitudinale puis transversale, un cisaillement longitudinal puis transversal, et enfin une compression hydrostatique latérale sans déformation longitudinale, on obtient les expressions des différents modules suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_L = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \\ E_T = C_{22} + \frac{C_{12}^2 (C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \\ \nu_L = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \\ \mu_L = C_{66} \\ \mu_T = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \\ K_T = \frac{C_{22} + C_{23}}{2} \end{array} \right. \quad (A.5)$$

Parmi tous ces modules, il y en a seulement cinq qui sont totalement indépendants. Pour la détermination des cinq constantes d'élasticité suffisantes pour définir la matrice de rigidité isotrope transverse du composite unidirectionnel, on inverse les relations (A.5) et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = E_L + 4\nu_L^2 K_T \\ C_{12} = 2K_T \nu_L \\ C_{22} = K_T + \mu_T \\ C_{23} = K_T - \mu_T \\ C_{66} = \mu_L \end{array} \right. \quad (A.6)$$

Pour pouvoir calculer ces coefficients, il ne nous reste plus qu'à exprimer les modules de l'ingénieur  $E_L$ ,  $\nu_L$ ,  $\mu_L$ ,  $\mu_T$ , et  $K_T$  en fonction des caractéristiques mécaniques de chaque constituant du composite unidirectionnel, c'est-à-dire dans notre cadre d'étude la matrice époxy et les fibres de carbone. Les valeurs numériques de ces caractéristiques sont données dans l'Annexe B.

Nous n'allons pas détailler dans cette Annexe les développements permettant d'aboutir aux expressions des modules de l'ingénieur en fonction des caractéristiques de l'époxy et du

carbone ; on peut se reporter à l'article de Datta (Réf. [39]) pour obtenir les informations nécessaires. En revanche, nous avons rassemblé ces expressions, qui s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_L = E_m (1 - V_f) + E_{fL} V_f + \frac{4V_f (1 - V_f) (v_{fL} - v_m)^2}{(1 - V_f)/K_{fT} + V_f/K_m + 1/\mu_m} \\ v_{LT} = v_{fL} V_f + v_m (1 - V_f) + \frac{V_f (1 - V_f) (v_{fL} - v_m) (1/K_m - 1/K_{fT})}{(1 - V_f)/K_{fT} + V_f/K_m + 1/\mu_m} \\ \mu_L = \mu_m \left( \frac{\mu_{fL} (1 + V_f) + \mu_m (1 - V_f)}{\mu_{fL} (1 - V_f) + \mu_m (1 + V_f)} \right) \\ \mu_T = \mu_m \left( 1 + \left( \frac{2V_f (\mu_{fT} - \mu_m) (K_m + \mu_m)}{2\mu_m (K_m + \mu_m) + (1 - V_f) (K_m + 2\mu_m) (\mu_{fT} - \mu_m)} \right) \right) \\ K_T = K_m + (K_m + \mu_m) \frac{V_f (K_{fT} - K_m)}{(1 - V_f) K_{fT} + V_f K_m + \mu_m} \end{array} \right. \quad (A.7)$$

Ainsi, les relations (A.7) et (A.6) permettent finalement de calculer la matrice (A.4).

# Annexe B : Caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés pour toutes les applications numériques

Dans cette Annexe, nous avons effectué un bilan des caractéristiques mécaniques relatives à l'époxy et au carbone que nous avons utilisées. Toutes les applications numériques des modèles ont été faites à partir de ces valeurs.

Tout d'abord, l'époxy est un matériau isotrope et viscoélastique, qui peut être simplement décrit par les caractéristiques suivantes :

- Masse volumique (en kg/m<sup>3</sup>) :  $\rho_m = 1230$
- Coefficients de Lamé (en GPa) :  $\lambda_m = 4.45 - 0.027 i$   
 $\mu_m = 1.58 - 0.128 i$

Puis, les caractéristiques du carbone sont celles d'un matériau isotrope transverse. L'indice L signifie dans le sens des fibres, et l'indice T signifie dans le sens orthogonal aux fibres. On a alors :

- Masse volumique (en kg/m<sup>3</sup>) :  $\rho_f = 1670$
- Modules d'Young (en GPa) :  $E_{fL} = 232$   
 $E_{fT} = 13.4$
- Coefficients de Poisson :  $\nu_{fL} = 0.215$   
 $\nu_{fT} = 0.33$
- Modules de cisaillement (en GPa) :  $\mu_{fL} = 24$   
 $\mu_{fT} = 5.02$
- Module de Compressibilité (en GPa) :  $k_f = 13.13$
- Module de Compression latérale (en GPa) :  $K_{fT} = 14.8$

Enfin, dans les matériaux composites auxquels nous nous sommes intéressés, le diamètre des fibres de carbone est de  $a = 7\mu\text{m}$ , et la concentration de fibres dans une couche unidirectionnelle est  $V_f = 65\%$ .

---

## Annexe C : Diffraction par un cylindre infini placé dans une matrice infinie

Au début du chapitre II, nous avons étudié le problème de la diffraction d'une onde par un cylindre élastique infini contenu dans un milieu matriciel infini. Pour cela, nous avons dû écrire les équations de continuité en déplacement et en contraintes à la frontière du cylindre. Ces équations de continuité forment un système, qui est différent selon la polarisation de l'onde incidente. Ainsi, nous avons rassemblé ces systèmes de continuité dans cette Annexe, et donné lorsque cela est possible leurs solutions analytiques.

Cas de l'onde incidente S// : cas scalaire

Le système de continuité s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} H_n^{(1)}(k_1 a) & -J_n(k_2 a) \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial a} [H_n^{(1)}(k_1 a)] & -\frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_2 a)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^n J_n(k_1 a) \\ -i^n \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_1 a)] \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Ainsi, dans le cas S//, les solutions du système de continuité peuvent être facilement obtenues de façon analytique, et elles s'écrivent :

$$\begin{cases} A_n = -i^n \frac{\left( \mu_1 \frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_1 a)] J_n(k_2 a) - \mu_2 J_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_2 a)] \right)}{\left( \mu_1 \frac{\partial}{\partial a} [H_n^{(1)}(k_1 a)] J_n(k_2 a) - \mu_2 H_n^{(1)}(k_1 a) \frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_2 a)] \right)} \\ B_n = -i^n \frac{\mu_1 \left( \frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_1 a)] H_n^{(1)}(k_1 a) - J_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial a} [H_n^{(1)}(k_1 a)] \right)}{\mu_2 \left( \mu_1 \frac{\partial}{\partial a} [H_n^{(1)}(k_1 a)] J_n(k_2 a) - \mu_2 H_n^{(1)}(k_1 a) \frac{\partial}{\partial a} [J_n(k_2 a)] \right)} \end{cases}. \quad (\text{C.2})$$

Cas des ondes incidentes P ou S⊥ : cas vectoriel

$$M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix} = S, \quad (\text{C.3})$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} H_n^{(1)'}(h_1 a) & \frac{in}{a} H_n^{(1)}(k_1 a) \\ \frac{in}{a} H_n^{(1)}(h_1 a) & -H_n^{(1)'}(k_1 a) \\ -\frac{2}{a} H_n^{(1)'}(h_1 a) + \left( \frac{2n^2}{a^2} - k_1^2 \right) H_n^{(1)}(h_1 a) & \frac{2in}{a} \left( H_n^{(1)'}(k_1 a) - \frac{1}{a} H_n^{(1)}(k_1 a) \right) \\ \frac{2in}{a} \left( H_n^{(1)'}(h_1 a) - \frac{1}{a} H_n^{(1)}(h_1 a) \right) & \frac{2}{a} H_n^{(1)'}(k_1 a) - \left( \frac{2n^2}{a^2} - k_1^2 \right) H_n^{(1)}(k_1 a) \\ -J_n'(h_2 a) & -\frac{in}{a} J_n(k_2 a) \\ -\frac{in}{a} J_n(h_2 a) & J_n'(k_2 a) \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{2}{a} J_n'(h_2 a) - \left( \frac{2n^2}{a^2} - k_2^2 \right) J_n(h_2 a) \right) & -\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{2in}{a} \left( J_n'(k_2 a) - \frac{1}{a} J_n(k_2 a) \right) \\ -\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{2in}{a} \left( J_n'(h_2 a) - \frac{1}{a} J_n(h_2 a) \right) & -\frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{2}{a} J_n'(k_2 a) - \left( \frac{2n^2}{a^2} - k_2^2 \right) J_n(k_2 a) \right) \end{pmatrix}$$

et

$$S = \begin{pmatrix} -i^n \left( J_n'(h_1 a) + \frac{in}{a} J_n(k_1 a) \right) \\ -i^n \left( \frac{in}{a} J_n(h_1 a) - J_n'(k_1 a) \right) \\ -i^n \left( \frac{-2}{a} J_n'(h_1 a) + \left( \frac{2n^2}{a^2} - k_1^2 \right) J_n(h_1 a) + \frac{2in}{a} \left( J_n'(k_1 a) - \frac{1}{a} J_n(k_1 a) \right) \right) \\ -i^n \left( \frac{2in}{a} \left( J_n'(h_1 a) - \frac{1}{a} J_n(h_1 a) \right) + \frac{2}{a} J_n'(k_1 a) - \left( \frac{2n^2}{a^2} - k_1^2 \right) J_n(k_1 a) \right) \end{pmatrix}$$

## Annexe D : Compléments sur le schéma itératif de résolution du problème de diffusion multiple

Dans le cas des ondes S//, l'équation donnée par la théorie de diffusion multiple de Waterman et Truell adaptée à la géométrie cylindrique est la suivante :

$$\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 = \left[1 - \frac{2in_0 f(0)}{k_1^2}\right]^2 - \left[\frac{2in_0 f(\pi)}{k_1^2}\right]^2, \quad (\text{D.1})$$

$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n A_n \quad \text{et} \quad f(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n A_n. \quad (\text{D.2})$$

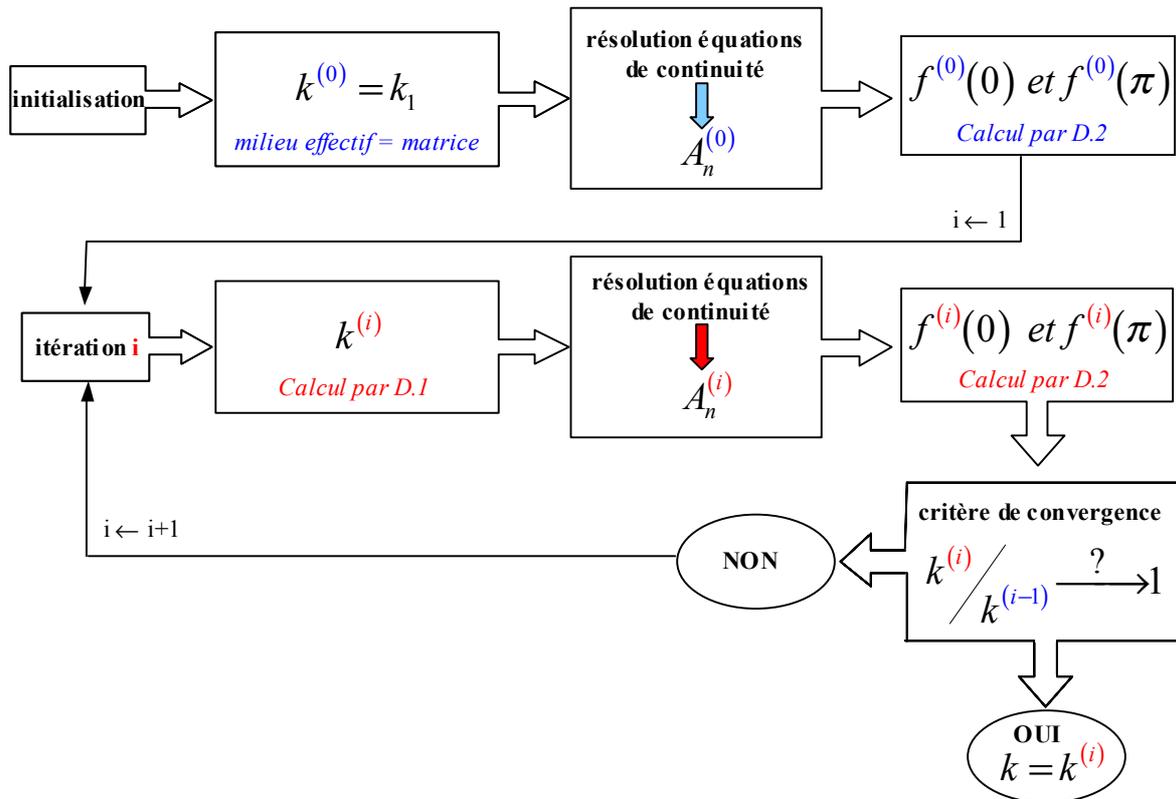
On peut se référer au chapitre II de la thèse afin de connaître la signification de chaque terme. Notons simplement que les coefficients  $A_n$  sont les inconnues du système de continuité en déplacements / contraintes aux interfaces du milieu à trois phases (fibre / matrice et matrice / milieu effectif). Lorsqu'on applique cette théorie de Waterman et Truell au modèle à trois phases (voir chapitre II également), l'équation (D.1) est modifiée et on obtient l'équation suivante :

$$1 = \left[1 - \frac{2in_0 f(0)}{k^2}\right]^2 - \left[\frac{2in_0 f(\pi)}{k^2}\right]^2. \quad (\text{D.3})$$

Cette équation (D.3) est une équation implicite, qui est résolue par un schéma itératif. Rappelons que le modèle à trois phases est constitué de trois cylindres concentriques. Le cylindre central représente une fibre. Il est entouré d'un cylindre représentant la matrice, et enfin le cylindre englobant les deux autres correspond au milieu effectif.

La méthode de résolution itérative est schématisée par le diagramme suivant. On peut noter que le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence de la méthode est d'environ dix.

Dans le cas des ondes P et S $\perp$ , le principe de résolution est strictement identique.



# Annexe E : Démonstration des relations reliant les contraintes aux potentiels de déplacement en coordonnées cylindriques

Dans cette Annexe, on se propose de démontrer les expressions (II.10) du chapitre II donnant les contraintes normales et tangentielles en coordonnées cylindriques.

Tout d'abord, rappelons la définition des coordonnées cylindriques (Figure E.1).

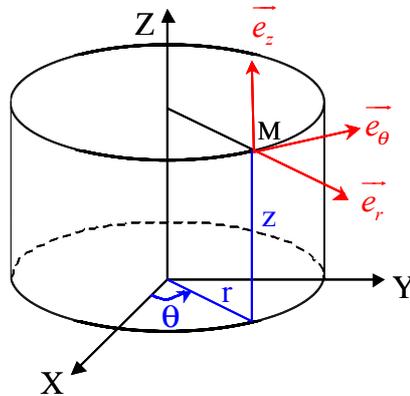


Figure E.1: Repère de coordonnées cylindriques.

Ensuite, on rappelle la décomposition de Helmholtz du champ de déplacement :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi + \overrightarrow{\text{rot}}(\Psi \vec{e}_z). \quad (\text{E.1})$$

À partir de là, on peut exprimer le champ de déplacement en fonction des potentiels  $\Phi$  et  $\Psi$  en coordonnées cylindriques par les relations :

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

On ne s'intéresse pas à la composante selon la direction  $Z$ . Le champ de déformations se déduit alors directement des relations (E.2), et on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} \\ 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad (E.3)$$

Nous devons alors en déduire les expressions des contraintes radiales et tangentielles. En utilisant la loi de Hooke et en notant par  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé du milieu dans lequel on se trouve, ces contraintes ont pour expression :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + 2\mu \varepsilon_{rr} \\ \sigma_{r\theta} = 2\mu \varepsilon_{r\theta} \end{cases} \quad (E.4)$$

En remplaçant (E.3) dans (E.4) on obtient alors :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad (E.5)$$

Or d'après leur définition, les potentiels  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifient l'équation de Helmholtz, ce qui donne les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \Phi + h^2 \Phi = 0 \\ \Delta \Psi + k^2 \Psi = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta \Phi = -h^2 \Phi \\ \Delta \Psi = -k^2 \Psi \end{cases} \quad (E.6)$$

où  $h$  et  $k$  sont respectivement les nombres d'ondes des ondes longitudinales et transversales, et  $\Delta$  est le l'opérateur Laplacien, qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2} \quad (E.7)$$

En utilisant (E.6) et (E.7), on peut écrire les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - h^2 \Phi \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - k^2 \Psi \end{cases} \quad (E.8)$$

On peut maintenant reporter les équations (E.8) dans (E.5), et on obtient une nouvelle expression pour les contraintes cherchées :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{rr}}{\mu} = -\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} h^2 \Phi + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{\mu} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + k^2 \Psi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad (E.9)$$

Pour terminer la démonstration, il nous suffit simplement d'écrire le rapport  $\frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu}$ , sous une autre forme. En effet, on a :

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} = \frac{\rho V_L^2}{\rho V_T^2} = \frac{k^2}{h^2}. \quad (E.10)$$

Finalement, en reportant (E.10) dans (E.9), on obtient les relations (E.11), qui sont bien équivalentes aux expressions (II.10) que nous cherchions à démontrer :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{rr}}{\mu} = -\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - k^2 \Phi + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{\mu} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + k^2 \Psi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad (E.11)$$

---

# Annexe F : coefficients d'élasticité d'un pli homogénéisé par la méthode de Postma

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle C_{11} \rangle &= d_1 C_{11}^{(1)} + d_2 \left( C_{11}^{(2)} - \frac{(C_{16}^{(2)})^2}{C_{66}^{(2)}} \right) + d_3 \left( C_{11}^{(3)} - \frac{(C_{16}^{(3)})^2}{C_{66}^{(3)}} \right) \\
 \langle C_{12} \rangle &= d_1 C_{12}^{(1)} + d_2 \left( C_{12}^{(2)} - \frac{(C_{16}^{(2)})^2}{C_{66}^{(2)}} \right) + d_3 \left( C_{12}^{(3)} - \frac{(C_{16}^{(3)})^2}{C_{66}^{(3)}} \right) \\
 \langle C_{13} \rangle &= \frac{d_1 C_{13}^{(1)} C_{33}^{(2)} C_{33}^{(3)} + d_2 C_{13}^{(2)} C_{33}^{(1)} C_{33}^{(3)} + d_3 C_{13}^{(3)} C_{33}^{(1)} C_{33}^{(2)}}{d_1 C_{33}^{(2)} C_{33}^{(3)} + d_2 C_{33}^{(1)} C_{33}^{(3)} + d_3 C_{33}^{(1)} C_{33}^{(2)}} \\
 \langle C_{22} \rangle &= d_1 C_{22}^{(1)} + d_2 \left( C_{22}^{(2)} - \frac{(C_{16}^{(2)})^2}{C_{66}^{(2)}} \right) + d_3 \left( C_{22}^{(3)} - \frac{(C_{16}^{(3)})^2}{C_{66}^{(3)}} \right) \\
 \langle C_{23} \rangle &= \frac{d_1 C_{23}^{(1)} C_{33}^{(2)} C_{33}^{(3)} + d_2 C_{23}^{(2)} C_{33}^{(1)} C_{33}^{(3)} + d_3 C_{23}^{(3)} C_{33}^{(1)} C_{33}^{(2)}}{d_1 C_{33}^{(2)} C_{33}^{(3)} + d_2 C_{33}^{(1)} C_{33}^{(3)} + d_3 C_{33}^{(1)} C_{33}^{(2)}} \\
 \langle C_{33} \rangle &= \frac{d_1 C_{33}^{(1)} C_{33}^{(2)} C_{33}^{(3)} + d_2 C_{33}^{(2)} C_{33}^{(1)} C_{33}^{(3)} + d_3 C_{33}^{(3)} C_{33}^{(1)} C_{33}^{(2)}}{d_1 C_{33}^{(2)} C_{33}^{(3)} + d_2 C_{33}^{(1)} C_{33}^{(3)} + d_3 C_{33}^{(1)} C_{33}^{(2)}} \\
 \frac{1}{\langle C_{44} \rangle} &= \frac{d_1}{C_{44}^{(1)}} + \frac{d_2}{\left( C_{44}^{(2)} - \frac{(C_{45}^{(2)})^2}{C_{55}^{(2)}} \right)} + \frac{d_3}{\left( C_{44}^{(3)} - \frac{(C_{45}^{(3)})^2}{C_{55}^{(3)}} \right)} \\
 \frac{1}{\langle C_{55} \rangle} &= \frac{d_1}{C_{55}^{(1)}} + \frac{d_2}{\left( C_{55}^{(2)} - \frac{(C_{45}^{(2)})^2}{C_{44}^{(2)}} \right)} + \frac{d_3}{\left( C_{55}^{(3)} - \frac{(C_{45}^{(3)})^2}{C_{44}^{(3)}} \right)} \\
 \frac{1}{\langle C_{66} \rangle} &= \frac{d_1}{C_{66}^{(1)}} + \frac{d_2}{\left( C_{66}^{(2)} - (C_{16}^{(2)})^2 \left( \frac{1}{a_2} + \frac{(a_2 - b_2)^2}{a_2 (a_2 c_2 - b_2^2)} \right) \right)} + \frac{d_3}{\left( C_{66}^{(3)} - (C_{16}^{(3)})^2 \left( \frac{1}{a_3} + \frac{(a_3 - b_3)^2}{a_3 (a_3 c_3 - b_3^2)} \right) \right)}
 \end{aligned} \right. \quad (F.1)$$

---

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = C_{11}^{(i)} - \frac{(C_{13}^{(i)})^2}{C_{33}^{(i)}} \\ b_i = C_{12}^{(i)} - \frac{C_{13}^{(i)} C_{23}^{(i)}}{C_{33}^{(i)}} \\ c_i = C_{22}^{(i)} - \frac{(C_{23}^{(i)})^2}{C_{33}^{(i)}} \end{array} \right. \quad \text{avec } i = 2, 3 \quad (\text{F.2})$$

## Annexe G : Méthode de Thomson/Haskell et coefficients R et T dans un cas unidimensionnel

On considère le multicouche à 9 couches suivant (Figure G.1), que nous avons présenté dans le chapitre IV.

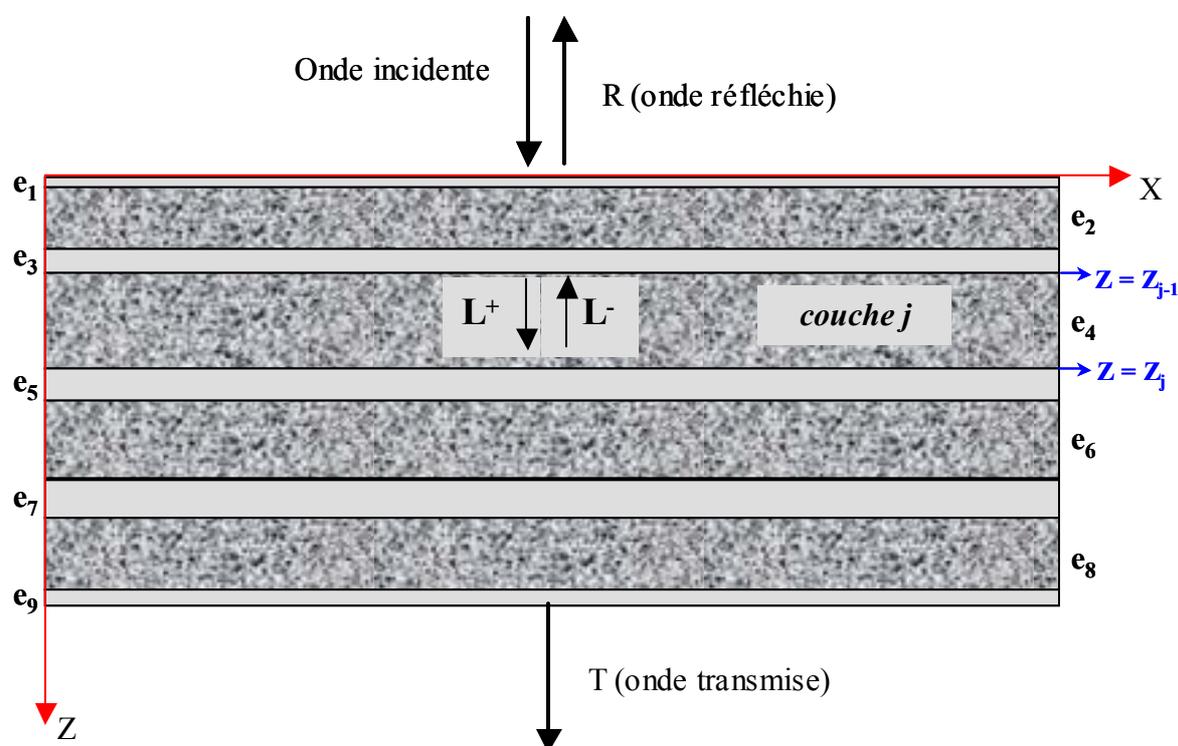


Figure G.1 : Problème de propagation unidimensionnel dans un multicouche.

Soit une onde plane longitudinale de fréquence  $f$  en incidence normale sur la face supérieure de ce multicouche. Cette onde se propage dans un milieu fluide (eau). Notre objectif est de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission du multicouche, et pour cela nous allons utiliser un modèle de propagation *unidimensionnelle* basé sur la méthode des matrices de transfert (méthode de Thomson – Haskell, Réf. [45, 46]) dont le principe est le suivant.

On se place dans le repère orthornomé direct  $(O, X, Y, Z)$  tel que le plan  $(X, Y)$  coïncide avec le plan formé par la plaque multicouche. L'axe  $Z$  est donc perpendiculaire aux faces de la plaque. Si l'onde dans le milieu avait un angle d'incidence sur le multicouche, on aurait par

conversion de modes à chaque interface du multicouche, deux ou trois ondes planes générées, selon que le plan de propagation coïncide ou non avec le plan principal du matériau. Mais du fait que l'on se place en incidence normale, on ne considère qu'une onde plane longitudinale générée à chaque interface du multicouche. De plus pour tenir compte des réflexions multiples de cette onde entre les différences interfaces, on considère une seconde onde plane longitudinale par couche, dont le sens de propagation est opposé à celui de l'onde générée par conversion de mode. En clair, nous avons deux ondes à considérer dans chaque couche : une onde longitudinale dite « descendante » notée  $L^+$  (se propageant selon les  $Z$  positifs et de façon normale à l'interface), et une onde longitudinale dite « montante » notée  $L^-$  (opposée à la première).

Ainsi, dans chaque couche, on va voir un champ de déplacement  $\vec{U}$  qui est la somme des déplacements engendrés par le passage de chacune des ondes longitudinales. Comme nous sommes en incidence normale, ce champ de déplacement a pour composantes :  $\vec{U}(0,0,u_z)$ . La contrainte normale exercée à chaque instant  $t$  sur un élément de surface de la couche est définie par les composantes  $(0,0,\sigma_{zz})$ . Si on regroupe les deux vecteurs déplacement et contrainte en un seul et même vecteur, on obtient ce que l'on appelle le vecteur déplacement / contrainte pour la couche  $j$  considérée. On note ce vecteur  $S_j = [u_z, \sigma_{zz}]_j^t$  ( $t$  représente ici le symbole de transposition).

La méthode de Thomson - Haskell consiste dans un premier temps à calculer une matrice de transfert  $A_j$  pour chaque couche, ce qui permet de relier les vecteurs déplacement / contrainte de chacune des interfaces. Puis, on construit une matrice de transfert globale pour le multicouche obtenue simplement par multiplication des matrices de transfert de chaque couche. Ainsi, on peut relier le vecteur déplacement / contrainte de la dernière interface à celui de la première interface. Appliquons ceci à notre multicouche.

Considérons une couche quelconque (couche  $j$ , voir Figure G.1). Dans cette couche, le champ de déplacements résulte des composantes suivant  $Z$  des deux ondes longitudinales montante et descendante. Il est donc donné par la composante notée  $u_z^j$ , soit par la relation :

$$\begin{aligned} u_z^j &= u_{z,L^+}^j + u_{z,L^-}^j \\ &= \left( A_{L^+}^j P_{z,L^+}^j e^{-ik_{z,L}^j(Z-Z_j)} + A_{L^-}^j P_{z,L^-}^j e^{ik_{z,L}^j(Z-Z_j)} \right) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Puis on exprime la composante de la contrainte normale  $\sigma_{zz}^j$  :

$$\sigma_{zz}^j = -ik_{z,L}^j C_{33}^j \left( A_{L^+}^j P_{z,L^+}^j e^{-ik_{z,L}^j(Z-Z_j)} - A_{L^-}^j P_{z,L^-}^j e^{ik_{z,L}^j(Z-Z_j)} \right) e^{i\omega t} \quad (\text{G.2})$$

Les notations utilisées sont les suivantes :

- $A_{Z,L^+}^j P_{Z,L^+}^j$  et  $A_{Z,L^-}^j P_{Z,L^-}^j$  amplitudes des ondes montantes et descendantes de la couche  $j$ .
- $P_{Z,L^+}^j$  et  $P_{Z,L^-}^j$  composantes selon  $Z$  des vecteurs polarisation des ondes montantes et descendantes de la couche  $j$ .
- $k_{Z,L}^j$  composante selon  $Z$  du vecteur d'onde de l'onde longitudinale descendante. Celle de l'onde longitudinale montante est simplement l'opposée.
- $C_{33}^j$  est un coefficient de la matrice d'élasticité de la couche  $j$  (isotrope ou anisotrope).

On pose maintenant  $P = e^{-ik_{Z,L}^j(Z-Z_{j-1})}$  et on peut écrire le vecteur déplacement / contrainte de la couche  $j$  sous la forme matricielle suivante :

$$S_j = E_j P_j(Z) V_j, \quad (\text{G.3})$$

avec :

$$E_j = \begin{pmatrix} P_{Z,L^+}^j & P_{Z,L^-}^j \\ -ik_{Z,L}^j C_{22}^j P_{Z,L^+}^j & ik_{Z,L}^j C_{33}^j P_{Z,L^+}^j \end{pmatrix}, \quad P_j(Z) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_j = \begin{pmatrix} A_{L^+}^j \\ A_{L^-}^j \end{pmatrix}. \quad (\text{G.4})$$

Remarque : nous avons omis le terme  $e^{i\omega t}$  car celui-ci se simplifie ensuite lorsque l'on exprime les conditions de continuité aux interfaces.

On peut encore simplifier cette expression en explicitant les composantes selon  $Z$  des polarisations des ondes et en notant  $k_{Z,L}^j = k_j$ . En effet, on a :

$$\begin{cases} P_{Z,L^+}^j = k_j \\ P_{Z,L^-}^j = -k_j \end{cases}. \quad (\text{G.5})$$

Les expressions (G.4) se réécrivent alors sous la forme :

$$E_j = \begin{pmatrix} k_j & -k_j \\ -ik_j^2 C_{33}^j & ik_j^2 C_{33}^j \end{pmatrix}, \quad P_j(Z) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_j = \begin{pmatrix} A_{L^+}^j \\ A_{L^-}^j \end{pmatrix}. \quad (\text{G.6})$$

On peut remarquer que seule la matrice  $P_j$  dépend de la variable  $Z$ . C'est une matrice qui décrit la propagation dans la couche considérée. La matrice  $E_j$ , elle, dépend des propriétés mécaniques du milieu de propagation. Enfin, le vecteur  $V_j$  est un vecteur composé, à un coefficient près, des amplitudes des deux ondes montante et descendante présentes dans la couche  $j$ .

Nous devons chercher maintenant à relier les vecteurs déplacement / contrainte de la première et de la dernière interface. Pour cela, il suffit d'écrire la continuité de ces vecteurs à chaque

interface (N+1). La première interface est désignée par l'indice 0, et la dernière par l'indice N. Ces conditions de continuité sont les suivantes, en commençant par la dernière interface :

- continuité l'interface N :

$$S_{N+1}|_{z=Z_N} = S_N|_{z=Z_N} = E_N P_N (Z_N) V_N .$$

- continuité à l'interface N-1 :

$$S_N|_{z=Z_{N-1}} = S_{N-1}|_{z=Z_{N-1}} \quad \text{soit} \quad E_N P_N (Z_{N-1}) V_N = E_{N-1} P_{N-1} (Z_{N-1}) V_{N-1} .$$

Or en  $Z = Z_{N-1}$ , la matrice  $P_N$  est égale à la matrice identité, donc on en déduit :

$$V_N = E_N^{-1} E_{N-1} P_{N-1} (Z_{N-1}) V_{N-1} .$$

- continuité à l'interface  $j$  :

$$S_{j+1}|_{z=Z_j} = S_j|_{z=Z_j} \quad \text{soit} \quad E_{j+1} P_{j+1} (Z_j) V_{j+1} = E_j P_j (Z_j) V_j .$$

Or en  $Z = Z_j$ , la matrice  $P_{j+1}$  est égale à la matrice identité, donc on en déduit :

$$V_{j+1} = E_{j+1}^{-1} E_j P_j (Z_j) V_j .$$

- continuité à la première interface :

$$S_1|_{z=Z_0} = S_0|_{z=Z_0} \quad \text{soit} \quad E_1 P_1 (Z_0) V_1 = S_0|_{z=Z_0} ,$$

d'où 
$$V_1 = E_1^{-1} S_0|_{z=Z_0} .$$

Finalement, en reprenant toutes ces relations, on obtient :

$$S_{N+1}|_{z=Z_N} = E_N P_N (Z_N) E_N^{-1} \dots E_j P_j (Z_j) E_j^{-1} \dots E_1 P_1 (Z_1) E_1^{-1} S_0|_{z=Z_0} .$$

On introduit alors la définition de la matrice de transfert de la couche  $j$  :

$$A_j = E_j P_j (Z_j) E_j^{-1} . \quad (\text{G.7})$$

Finalement, on peut donc relier le vecteur déplacement / contrainte de la dernière interface à celui de la première interface par un simple produit des matrices de transfert des différentes couches :

$$S_{N+1}|_{z=Z_N} = A_N A_{N-1} \dots A_j \dots A_2 A_1 S_0|_{z=Z_0} . \quad (\text{G.8})$$

De façon analytique, on peut écrire l'expression de la matrice de transfert d'une couche, puisqu'il suffit d'inverser la matrice  $E_j$  et de calculer le produit  $E_j P_j(Z_j) E_j^{-1}$ . Cette matrice est la suivante :

$$A_j = \begin{pmatrix} \frac{P + P^{-1}}{2} & -\frac{(P - P^{-1})}{2i C_{33}^j k_j} \\ \frac{(P - P^{-1}) C_{33}^j k_j}{2i} & \frac{P + P^{-1}}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.9})$$

Si on note  $M$  la matrice de transfert globale du multicouche, on a :

$$M = \prod_j A_j. \quad (\text{G.10})$$

Comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, notre objectif est de calculer les coefficients de réflexion et de transmission du multicouche en immersion. Nous allons donc voir maintenant comment obtenir ces coefficients.

Pour commencer, il est nécessaire de définir les expressions des vecteurs déplacement / contrainte dans le milieu fluide, qui est de l'eau dans notre cas. Nous savons que dans un fluide on peut relier la pression au champ de déplacement par la relation suivante :

$$\overline{\text{grad}} P = \rho_{\text{eau}} \omega^2 \vec{U}_{\text{fluide}} \quad \text{soit} \quad u_{z, \text{fluide}} = \frac{1}{\rho_{\text{fluide}} \omega^2} \frac{\partial P}{\partial Z}. \quad (\text{G.11})$$

Sur la face supérieure du multicouche (côté de l'onde incidente), la pression est donnée par :

$$P_{\text{sup}} = P_i e^{i\omega t} \left( e^{-ik_Z^{\text{fluide}} Z} + \text{Re} e^{ik_Z^{\text{fluide}} Z} \right). \quad (\text{G.12})$$

De même, à la face inférieure du multicouche, on a :

$$P_{\text{inf}} = T P_i e^{i\omega t} e^{-ik_Z^{\text{fluide}} (Z - Z_N)}. \quad (\text{G.13})$$

On peut alors déduire des relations (G.11), (G.12) et (G.13) l'expression des déplacements normaux dans le fluide aux interfaces du multicouche :

$$\begin{cases} (u_Z)_{Z=0} = \frac{-ik_Z^{\text{fluide}}}{\rho_{\text{eau}} \omega^2} (1 - R) P_i e^{i\omega t} \\ (u_Z)_{Z=Z_N} = \frac{-ik_Z^{\text{fluide}}}{\rho_{\text{eau}} \omega^2} T P_i e^{i\omega t} \end{cases}. \quad (\text{G.14})$$

Connaissant ces déplacements normaux, on peut écrire les contraintes normales aux interfaces dans le fluide :

$$\begin{cases} \sigma_{ZZ}^{\text{sup}} = -P_{\text{sup}}(Z=0) = -(1+R) \\ \sigma_{ZZ}^{\text{inf}} = -P_{\text{inf}}(Z=Z_N) = -T \end{cases} \quad (\text{G.15})$$

Ainsi, l'équation de continuité (G.8) peut être réécrite en utilisant les formules (G.14) et (G.15), et on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{-ik_Z^{\text{fluide}}}{\rho_{\text{fluide}}\omega^2} T \\ -T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-ik_Z^{\text{fluide}}}{\rho_{\text{fluide}}\omega^2} (1-R) \\ -(1+R) \end{pmatrix}. \quad (\text{G.16})$$

Les inconnues du système (G.16) sont les coefficients de réflexion et de transmission du multicouche que nous cherchons à déterminer. Ces solutions peuvent être obtenues analytiquement.

En posant  $a = \frac{-ik_Z^{\text{fluide}}}{\rho_{\text{fluide}}\omega^2}$ , on obtient :

$$\begin{cases} R = \frac{(a^2 M_{21} - a M_{11}) - (M_{12} - a M_{22})}{(a^2 M_{21} - a M_{11}) + (M_{12} - a M_{22})} \\ T = 2a \frac{(M_{12} M_{21}) - M_{11} M_{22}}{(a^2 M_{21} - a M_{11}) + (M_{12} - a M_{22})} \end{cases} \quad (\text{G.17})$$

*Remarque* : nous ne nous sommes jamais préoccupés dans les développements effectués dans cette Annexe de la « nature » des vecteurs d'onde considérés. Précisons donc que ces vecteurs d'onde peuvent être indifféremment réels ou complexes. On pourra alors appliquer sans problème ces développements à notre cadre d'étude.

# Références bibliographiques

- [1] Gengembre N. and Lhémercy A. (2000).  
"Pencil method in elastodynamics. Application to ultrasonic field computation." Ultrasonics **38**: 495-499.
- [2] Gengembre N. (1999).  
Modélisation du champ ultrasonore rayonné dans un solide anisotrope et hétérogène par un transducteur immergé, Université Paris 7.
- [3] Lhémercy A., Calmon P., Lecoœur-Taïbi I., Raillon R. and Paradis L. (2000).  
"Modeling tools for ultrasonic inspection of welds." NDT & E International **33**: 499-513.
- [4] Rose J. L. (1999).  
Ultrasonic Waves in Solid Media.
- [5] Auld B. A. (1990).  
Acoustic fields and waves in solids. New York, Wiley-Interscience publication.
- [6] Naciri T., Navi P. and Granacher O. (1990).  
"On harmonic wave propagation in multilayered viscoelastic media." Int. J. Mech. Sci. **32**: 225-231.
- [7] Chen G. (1996).  
"Comparison of 2D numerical viscoelastic waveform modeling with ultrasonic physical modeling." Geophysics **61**: 862-871.
- [8] Ward M. (1971).  
Mechanical properties of polymers. New York, Wiley-Interscience publication.
- [9] Szabo T. L. (1994).  
"Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law." J. Acoust. Soc. Am. **96**: 491-500.
- [10] Waters K. R., Hughes M. S., Mobley J., Brandenburger G. H. and Miller J. G. (2000).  
"On the applicability of Kramers-Krönig relations for ultrasonic attenuation obeying a frequency power law." J. Acoust. Soc. Am. **108**: 556-563.
- [11] Szabo T. L. and Wu J. (2000).  
"A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media." J. Acoust. Soc. Am. **107**: 2437 - 2446.
- [12] Szabo T. L. (1995).  
"Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law." J. Acoust. Soc. Am. **97**: 14-24.
- [13] Duren E. and Heestand R. L. (1995).  
"General solutions and causality for a Voigt medium." Geophysics **60**: 252-261.
- [14] Kinra V. K., Petraitis M. S. and Datta S. K. (1980).  
"Ultrasonic wave propagation in a random particulate composite." Int. J. Solids Struct. **16**: 301-312.

- 
- [15] Biwa S., Watanabe Y. and Ohno N. (2001).  
"Modelling of ultrasonic attenuation in unidirectional fiber-reinforced plastics." *Nondestructive Characterization of Materials* **10**: 223-230.
- [16] Rokhlin S., Lewis D. K., Graff K. F. and Adler L. (1986).  
"Real-time study of frequency dependence of attenuation and velocity of ultrasonic waves during the curing reaction of epoxy resin." *J. Acoust. Soc. Am.* **79**: 1786-1793.
- [17] Biwa S., Idekoba S. and Ohno N. (2002).  
"Wave attenuation in particulate polymer composites: independent scattering / absorption analysis and comparison to measurements." *Mechanics of Materials* **34**: 671-682.
- [18] Deschamps M. and Hosten B. (1992).  
"The effects of viscoelasticity on the reflection and transmission of ultrasonic waves by an orthotropic plate." *J. Acoust. Soc. Am.* **91**: 2007-2015.
- [19] Hinders M. K. (1993).  
"Elastic-Wave Scattering from an Elastic Cylinder." *Il Nuovo Cimento* **108B**: 285-301.
- [20] Biwa S. (2001).  
"Independent scattering and wave attenuation in viscoelastic composites." *Mechanics of Materials* **33**: 635-647.
- [21] Verbis J. T., Kattis S. E., Tsinopoulos S. V. and Polyzos D. (2001).  
"Wave dispersion and attenuation in fiber composites." *Computational Mechanics* **27**: 244-252.
- [22] Foldy L. L. (1945).  
"The multiple scattering of waves. I. General Theory of Isotropic Scattering by Randomly Distributed Scatterers." *Phys. Rev.* **67**: 107-119.
- [23] Lax M. (1951).  
"Multiple scattering of waves." *Review of Modern Physics* **23**: 287-310.
- [24] Waterman P. C. and Truell R. (1961).  
"Multiple scattering of waves." *J. Math. Phys.* **2**: 512-537.
- [25] Bose S. K. and Mal A. K. (1973).  
"Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite." *Int. J. Solids Struct.* **9**: 1075-1085.
- [26] Bose S. K. and Mal A. K. (1974).  
"Elastic waves in a fiber-reinforced composite." *J. Mech. Phys. Solids* **22**: 217-229.
- [27] Varadan V. K., Varadan V. V. and Pao Y.-H. (1978).  
"Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. I. SH waves." *J. Acoust. Soc. Am.* **63**: 1310-1319.
- [28] Varadan V. K., Varadan V. V. and Ma Y. (1985).  
"Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. II. Pair-correlated cylinders." *J. Acoust. Soc. Am.* **78**: 1874-1878.
- [29] Varadan V. K., Ma Y. and Varadan V. V. (1986).  
"Multiple scattering of compressional and shear waves by fiber-reinforced composite materials." *J. Acoust. Soc. Am.* **80**: 333-339.
-

- [30] Kim J. Y., Ih J. G. and Lee B. H. (1994).  
"Dispersive wave propagation in a viscoelastic matrix reinforced by elastic fibers." J. Acoust. Soc. Am. **95**: 1213-1222.
- [31] Beltzer A. I. and Brauner N. (1985).  
"SH waves of an arbitrary frequency in random fibrous composites via the Kramers-Krönig relations." J. Mech. Phys. Solids **33**: 471-487.
- [32] Beltzer A. I. and Brauner N. (1987).  
"The dynamic response of random composites by a causal differential method." Mechanics of Materials **6**: 337-345.
- [33] Hosten B. (1998).  
"Heterogeneous structure of modes and Kramers - Krönig relationship in anisotropic viscoelastic materials." J. Acoust. Soc. Am. **104**: 1382 - 1388.
- [34] Weaver R. L. and Pao Y. H. (1981).  
"Dispersion relations for linear wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media." J. Math. Phys. **22**: 1909-1918.
- [35] Huang W. and Rokhlin S. I. (1995).  
"Frequency dependences of ultrasonic wave velocity and attenuation in fiber composites. Theory and experiments." Review of Progress in QNDE, **14**: 1233-1240.
- [36] Kim J. Y. (1996).  
"Dynamic self-consistent analysis for elastic wave propagation in fiber reinforced composites." J. Acoust. Soc. Am. **100**: 2002-2010.
- [37] Yang R. B. and Mal A. K. (1993).  
"Phase velocity and attenuation of SH waves in a fiber-reinforced composite." Review of Progress in QNDE, **12**: 155-162.
- [38] Yang R. B. and Mal A. K. (1994).  
"Multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite." J. Mech. Phys. Solids **45**: 1945-1968.
- [39] Datta S. K., Ledbetter H. M. and Kriz R. D. (1984).  
"Calculated elastic constants of composites containing anisotropic fibers." Int. J. Solids Struct. **20**: 429-438.
- [40] Beltzer A. I. (1989).  
"The effective dynamic response of random composites and polycrystals - A survey of the causal approach." Wave Motion **11**: 211-229.
- [41] Biwa S., Watanabe Y. and Ohno N. (2003).  
"Analysis of wave attenuation in unidirectional viscoelastic composites by a differential scheme." Composites Science and Technology **63**: 237-247.
- [42] Postma G. W. (1955).  
"Wave propagation in a stratified medium." Geophysics **20**: 780-806.
- [43] Gengembre N. (2001).  
"Étude en modélisation pour le contrôle ultrasonore de pièces en composite épais." Rapport interne CEA (DECS/STA/LSUT/01-RT4020).

- [44] Potel C. and de Belleval J. F. (1993).  
"Propagation in an anisotropic periodically multilayered medium." J. Acoust. Soc. Am. **93**: 2669-2677.
- [45] Thomson W. T. (1950).  
"Transmission of elastic waves through a stratified solid medium." Journal of Applied Physics **21**: 89-93.
- [46] Haskell N. A. (1953).  
"The dispersion of surface waves on multi-layered media." Bulletin of the American Seismological Society **43**: 17-34.



# **Modélisation de la propagation ultrasonore dans les matériaux composites obtenus par le procédé de fabrication RTM (Resin Transfer Molding).**

## **Résumé :**

*Le procédé de fabrication des matériaux composites RTM (Resin Transfer Molding) est utilisé pour produire des pièces de géométrie complexe. Lors du contrôle ultrasonore de ces pièces, une mesure d'atténuation est effectuée pour caractériser le taux de porosité éventuel (défaut possible dans ces matériaux). Cependant, une grande variabilité d'atténuation est observée y compris pour des pièces saines de géométrie plane. L'objectif de notre travail est d'expliquer ce fait en développant un modèle de propagation et d'atténuation des ondes ultrasonores dans ces pièces dont la microstructure complexe présente un aspect multi-échelles. Un modèle original a été développé pour prédire l'atténuation à l'échelle élémentaire d'une couche unidirectionnelle de fibres de carbone dans une matrice d'époxy, couplant les phénomènes de diffusion multiple par les fibres et d'absorption par effet viscoélastique. Il a été validé expérimentalement et est applicable à tous les composites fibreux à deux phases, quelle qu'en soit la concentration de fibres. À l'échelle supérieure d'un pli constitué de plusieurs couches élémentaires de différentes orientations, une homogénéisation suffit à prédire le comportement anisotrope des ondes ultrasonores et leur atténuation. Une plaque réelle est constituée d'un ensemble de plis séparés de couches de résines pures, l'épaisseur des différents plis et couches étant fortement variable. Une étude statistique a été menée pour prédire l'influence de ces variations géométriques sur la transmission des ultrasons modélisée suivant un formalisme dérivé de la méthode de Thomson-Haskell. La variabilité d'atténuation ultrasonore observée en pratique est quantitativement reproduite et expliquée par l'irrégularité géométrique de la micro-structure.*

**Mots clefs :** contrôle non-destructif, composite, ultrasons, atténuation, modèles théoriques, diffusion multiple, viscoélasticité.

# **Modeling of ultrasonic wave propagation in composite materials obtained by the Resin Transfer Molding Process.**

## **Abstract :**

*The Resin Transfer Molding process for manufacturing composite materials is used to produce parts of complex shape. During the ultrasonic examination of such parts, attenuation is measured to characterize possible porosity content (a potential defect in this material). However, strong variation of attenuation is observed including on sound plates. The present study aims at explaining this by developing a model for ultrasonic propagation and attenuation in such parts which complex micro-structure exhibits a multiple-scale aspect. An original model has been developed to predict attenuation at the elementary scale of an unidirectional layer of Carbon fibers in an epoxy matrix. It couples multiple-scattering by fibers and viscoelastic losses phenomena. It has been experimentally validated and applies to arbitrary two-phase fiber reinforced composites whatever the fiber volume fraction. At the upper scale of a ply made of several elementary layers of various orientations, the anisotropic behavior of ultrasonic waves and their attenuation are obtained by a homogenization procedure. An actual plate is made of several plies separated by pure resin layers. Plies and layers thicknesses are highly variable. A statistical study has been conducted to evaluate the influence of these geometrical variations on the ultrasonic transmission predicted by a model derived from Thomson-Haskell formalism. Ultrasonic attenuation variability practically observed is quantitatively reproduced and explained as resulting from the geometrical irregularity of the microstructure.*

**Keywords :** nondestructive testing, composite, ultrasonic, attenuation, theoretical models, multiple-scattering, viscoelasticity.