

N° d'ordre : 2472

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR

par **Emmanuel LE CLÉZIO**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITE : **MECANIQUE**

DIFFRACTION DES ONDES DE LAMB PAR DES FISSURES VERTICALES

Soutenue le : 14 Décembre 2001

Après avis de :

MM. P. CAWLEY, Professeur, Imperial College, Londres **Rapporteurs**
A. WIRGIN, Directeur de Recherche C.N.R.S., Université Aix-Marseille II

Devant la commission d'examen formée de :

MM. D. DESJARDINS, Professeur, Université Bordeaux 1 **Président**
M. CASTAINGS, Maître de Conférences, Université Bordeaux 1 **Rapporteur**
P. CAWLEY, Professeur, Imperial College, Londres **Examineurs**
B. HOSTEN, Directeur de Recherche C.N.R.S., Université Bordeaux 1
M. PREDOI, Maître de Conférences, Université Politehnica, Bucarest
M. ROUSSEAU, Chargée de Recherche C.N.R.S., Université Paris VI
A. WIRGIN, Directeur de Recherche C.N.R.S., Université Aix-Marseille II



Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe Ultrasons-Matériaux du Laboratoire de Mécanique Physique de l'Université Bordeaux 1.

Didier Desjardins, Professeur à l'Université Bordeaux 1, m'a accueilli dans son laboratoire et je tiens à le remercier de m'avoir permis de m'intégrer à la vie du LMP et de l'Université Bordeaux 1.

Je remercie vivement Bernard Hosten pour son accueil au sein du groupe Ultrasons-Matériaux. Je tiens de plus à le remercier d'avoir accepté d'encadrer ma thèse. Avec toujours bonne humeur, il a su me communiquer une partie de son expérience en matière de recherche scientifique.

Michel Castaings, par son encadrement de thèse, a su me faire découvrir l'univers de la recherche. Toujours disponible, il m'a fait partager sa rigueur scientifique et son goût de la perfection. Je le remercie sincèrement pour ces trois années qui m'ont permis de progresser scientifiquement et humainement.

Je tiens à remercier Marc Deschamps et Olivier Poncelet pour les discussions endiablées que nous avons eues. Les nombreux après-midis où nous avons débattu resteront parmi les meilleurs souvenirs de ces trois années. Je les remercie vivement pour leurs précieux conseils.

Je remercie vivement tous les membres du laboratoire dont la bonne humeur a égaillé ces trois années. Ils ont toujours été disponibles pour répondre à mes nombreuses questions, scientifiques ou non. Merci à Christophe Bacon, Christine Biateau, Bertrand Audoin, Marie Touzet, Isabelle Aubert, Monique Puiggali, Olivier Cahuc, Denis Teissandier, Mariano Cid, Yves Couetard, Michel Mesnard.

Je remercie sincèrement Mr. Levron pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée concernant la résolution de problèmes mathématiques épineux. Ses éclaircissements ont été d'un grand secours.

Que Béatrice et Anne-Marie soient remerciées pour leur gentillesse et leur disponibilité.

Je tiens aussi à remercier tous les amis que j'ai découverts au cours de cette thèse. Fred (dit Fredouille la Fripouille), Pascale (dit La Miss) et Manu qui ont formé l'équipe de la première heure. Thieum et Top (notre duo comique), Julien et Alex (les coureurs fous), Marie et Hinde (les pom-pom girls du bureau), Nico et Thomas (mes profs de squash), Frank (ou Monsieur Mauvaise Foi), Guillaume (parti puis revenu), Jean-Pierre (mon motard favori).

Mes plus profonds remerciements sont adressés à mes parents qui, tout en m'accompagnant, m'ont permis de tracer ma route, et à Nikkau, mon petit bonhomme depuis maintenant 22 ans.

Elena, tu m'as supporté (dans tous les sens du terme) tout au long de cette thèse et tu m'as de plus offert le plus beau cadeau du monde : un merveilleux petit lutin. Love.

Merci à tous.



Sommaire

Introduction	1
I. Propagation en milieu sain	8
I.1. Propagation en milieu infini	8
I.1.1 Les vecteurs déplacement et vitesse	8
I.1.2 Le tenseur des déformations	8
I.1.3 Le tenseur des contraintes	9
I.1.4 Relations entre contraintes et déformations : la loi de Hooke	9
I.1.5 Ondes acoustiques	10
I.2. Propagation dans les plaques	11
I.2.1 Équations de Rayleigh-Lamb	11
I.2.2 Résolution numérique des équations de dispersion	13
I.2.3 Modes propagatifs	15
I.2.3.1 Nombres d'onde	16
I.2.3.2 Vitesses de phase	16
I.2.3.3 Vitesses de groupe	17
I.2.4 Modes non propagatifs	18
I.2.5 Modes atténués	19
I.2.6 Numérotation des modes	20
I.2.6.1 Notation	20
I.2.6.2 Suivi des modes	21
I.2.7 Produits fréquence-épaisseur de coupure : équation analytique	24
I.2.8 Champs de vitesse et de contrainte	24
I.2.8.1 Expressions analytiques des champs acoustiques	25
I.2.8.1.1 Champs de vitesse	25
I.2.8.1.2 Champs de contrainte	25
I.2.8.2 Champs de vitesse et de contrainte des modes symétriques	26
I.2.8.2.1 Mode S_0	26
I.2.8.2.2 Mode S_1	28
I.2.8.2.3 Mode S_2	30
I.2.8.3 Champs de vitesse et de contrainte des antisymétriques	32
I.2.8.3.1 Mode A_0	32
I.2.8.3.2 Mode A_1	33
I.3. Conclusion	35
II. Diffraction d'une onde par un défaut	38
II.1. Complétude des modes de Lamb	38
II.2. Énergie et puissance acoustiques	38
II.2.1 Théorème de Poynting et puissance acoustique	38
II.2.2 Normalisation en puissance	39
II.3. Méthode de décomposition modale	42
II.3.1 Développement général de la méthode	42
II.3.2 Réflexion d'un mode de Lamb sur un bord libre	45
II.3.3 Diffraction d'un mode de Lamb par une fissure verticale	47
II.3.3.1 Principe de la méthode	47
II.3.3.2 Application aux différents types de fissures	48
II.3.3.2.1 Fissure interne symétrique par rapport au plan médian	49
II.3.3.2.2 Paire de fissures débouchantes symétriques par rapport au plan médian	50
II.3.3.2.3 Fissure débouchante simple	50
II.4. Conclusion	50
III. Outils de validation	54

III.1. Modélisation par éléments finis	54
III.1.1 Définition de la géométrie et du maillage	54
III.1.2 Définition de l'excitation	54
III.1.3 Définition des paramètres temporels	55
III.1.4 Zones d'observation du maillage	57
III.1.5 Traitement des données	57
III.1.5.1.1 Signaux relevés à travers l'épaisseur de la plaque : champs de déplacement.....	57
III.1.5.1.2 Signaux en surface de plaque : obtention des coefficients de réflexion.....	57
III.1.6 Application à l'étude du bord libre d'une plaque.....	59
III.1.7 Application à la diffraction par une fissure verticale.....	61
III.2. Procédés expérimentaux.....	61
III.2.1 Description des plaques.....	61
III.2.2 Réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre.....	62
III.2.2.1 Réflexion du mode S_0	63
III.2.2.2 Réflexion du mode A_0	64
III.2.3 Diffraction d'une onde de Lamb par des fissures.....	67
III.2.3.1 Émission.....	67
III.2.3.2 Réception et traitements des signaux.....	68
III.3. Conclusion	69
IV. Réflexion sur le bord libre d'une plaque.....	72
IV.1. Mode S_0 incident	72
IV.1.1 Évolution des coefficients de réflexion avec la fréquence	72
IV.1.2 Champs de déplacement sur le bord de la plaque	75
IV.1.3 Cas particulier de la résonance du mode de bout.....	76
IV.1.3.1.1 Intérêt de l'étude	76
IV.1.3.1.2 Modèles numériques	78
IV.1.3.1.2.1 Méthode des travaux réciproques.....	78
IV.1.3.1.3 Résultats	79
IV.1.3.1.3.1 Identification du mode de bout.....	79
IV.1.3.1.3.2 Réflexion du mode S_0 sur le bord libre	81
IV.1.3.1.3.2.1 Résonance des deux premiers modes complexes	81
IV.1.3.1.3.2.2 Rayonnement du mode de bout	82
IV.1.3.1.3.2.3 Déplacements du mode de bout.....	83
IV.1.3.1.3.2.4 Dépendance du mode de bout au coefficient de Poisson	86
IV.1.3.1.4 Conclusion sur la résonance du bord libre d'une plaque.....	87
IV.2. Mode A_0 incident.....	87
IV.2.1 Évolution des coefficients en fonction de la fréquence	87
IV.2.2 Coefficients de réflexion en surface de la plaque	90
IV.2.3 Champs transitoires en surface de la plaque	93
IV.2.4 Champs de déplacement sur le bord de la plaque	94
IV.3. Conclusion	95
V. Diffraction par une fissure verticale.....	98
V.1. Champs de déplacement des modes incidents	98
V.2. Fissures verticales symétriques par rapport au plan médian.....	99
V.2.1 Fissure interne.....	99
V.2.1.1 Coefficients de réflexion et de transmission.....	99
V.2.1.2 Déplacement à travers l'épaisseur.....	100
V.2.2 Paire de fissures débouchantes.....	102
V.2.2.1 Coefficients de réflexion et de transmission.....	102
V.2.2.2 Déplacements à travers l'épaisseur de la plaque	104
V.3. Fissure débouchante dissymétrique	106
V.3.1 Coefficients de réflexion et de transmission.....	106
V.3.1.1 Déplacements à travers l'épaisseur de la plaque	109

V.4. Conclusion	113
<i>Conclusions et perspectives</i>	116
<i>Annexe A Décomposition de Helmholtz et décomposition en ondes planes</i>	120
<i>Annexe B Formes analytiques des coefficients A_T</i>	123
<i>Annexe C Formes analytiques des dérivées des équations de dispersion</i>	125
C.1. Dérivée partielle en fonction de la fréquence.....	125
C.2. Dérivée partielle en fonction de la lenteur	126
<i>Annexe D Formes analytiques des puissances</i>	127
<i>Annexe E Comportement numérique de la méthode de décomposition modale</i>	131
E.1. Influence du nombre de points de discrétisation.....	131
E.2. Influence de la précision des nombres d'ondes.....	133

Introduction

La recherche de défauts dans les matériaux constitue une des préoccupations majeures des industries de pointe comme l'aéronautique, l'aérospatiale ou le domaine automobile. En effet, la mise au point de matériaux dont les caractéristiques mécaniques sont adaptées à une utilisation spécifique nécessite certains procédés de fabrication (laminage à chaud ou à froid des aciers, assemblages de plis dans les structures multicouches) qui risquent de générer des imperfections, dès la conception. De plus, le matériau subit, au cours de sa vie, des contraintes mécaniques ou thermiques qui le fragilisent et peuvent faire apparaître des défauts. Des techniques fiables doivent alors être mises en œuvre pour établir le diagnostic d'un matériau et détecter les inhomogénéités qui pourraient compromettre son utilisation.

Les méthodes de contrôle non destructif (CND) permettent de tester une structure sans provoquer de modification irréversible. Elles représentent donc un enjeu industriel important du point de vue économique puisque les pièces testées peuvent être de nouveau utilisées lorsque aucun défaut n'a été révélé. Certaines méthodes de CND sont basées sur les rayons X, la magnétoscopie, la microscopie ultrasonore ou l'holographie laser, et sont utilisées pour localiser les défauts internes ou de surfaces. Ces techniques sont cependant lourdes à mettre en œuvre et peuvent nécessiter des précautions d'emploi très contraignantes.

La génération d'ultrasons dans les matériaux peut alors apporter une solution à ces problèmes. Il existe en effet des procédés de génération ou de détection d'utilisation aisée et de récents développements dans le domaine des transducteurs ultrasonores à couplage par air permettent de réaliser facilement des contrôles sans contact avec les matériaux. De plus, différents types d'ondes peuvent être choisis selon les applications. Les ondes de volumes, par exemple, permettent de tester des échantillons en profondeur [1]-[7]. Les ondes de surface, étudiées en premier lieu par Lord Rayleigh à la fin du XIX^e siècle, sont appropriées au contrôle des surfaces ou des interfaces entre les matériaux [8]-[13]. Les ondes guidées, comme les modes SH, sont plus indiquées lorsque de grandes structures doivent être contrôlées [14]-[20] et le potentiel des ondes de Lamb à détecter les défauts dans les plaques ou les conduites a largement été démontré par le passé [21]-[34]. Elles permettent en effet de réaliser des inspections rapides, sur site industriel et sont, par exemple, employées dans les industries pétrochimiques lors du contrôle de conduites de gaz ou de pétrole [28], [29]. Les canalisations sont généralement enterrées et s'étendent sur plusieurs centaines de kilomètres et les ondes de Lamb constituent alors un moyen de les tester sur plusieurs dizaines de mètres, sans les déterrer. Ces modes sont aussi utilisés dans la métallurgie pour inspecter de larges plaques [35]. Ils présentent alors l'intérêt majeur de permettre le contrôle, en temps réel, sur une chaîne de fabrication.

Les ondes de Lamb semblent donc être un choix judicieux pour détecter les défauts dans les plaques. De plus, leur énergie est partagée entre plusieurs modes réfléchis et transmis dont la proportion en amplitude dépend des caractéristiques du défaut. Elles permettent donc d'envisager la résolution du problème inverse, c'est-à-dire d'appréhender la géométrie du défaut à partir de mesures acoustiques. Tout d'abord, il est cependant nécessaire de comprendre parfaitement les mécanismes qui interviennent dans la diffraction et de développer des méthodes rapides et efficaces de modélisation du phénomène.

Étude de la réflexion sur le bord de la plaque

Une première étape dans les études de la diffraction des modes de Lamb est la modélisation de leur réflexion par un défaut simple : le bord libre d'une plaque. Ce cas particulier relativement simple doit être traité en premier pour bien poser les méthodes avant de considérer des situations plus complexes. De plus, d'un point de vue pratique, ces recherches sont nécessaires lors du contrôle non destructif de zones proches des bords des plaques. En effet, il peut apparaître des signaux expérimentaux très compliqués qui correspondent à la superposition d'ondes diffractées par un défaut ou par le bord. Cette situation est encore plus critique lorsque le mode incident, utilisé pour tester la plaque, possède, dans son spectre, la fréquence d'une vibration propre du bord de la plaque, appelée « mode de bout ». Cette résonance a été, pour la première fois, mise en évidence en 1956 par Shaw dans une étude théorique des vibrations des disques [36] et Oliver confirme son existence lors d'expériences menées sur un cylindre [37]. En 1960, Gazis et Mindlin modélisent la réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre d'une plaque en considérant la superposition, aux modes incident et réfléchi, de deux ondes atténuées pour satisfaire les conditions aux limites [38]. Cependant, bien que confirmant l'existence de la résonance du bord, leurs résultats ne correspondent pas tout à fait aux mesures expérimentales. Torvik modélise alors le phénomène par la méthode des travaux réciproques [39] et montre que Gazis et Mindlin ne sont pas allés assez loin dans leur décomposition. Predoi a récemment appliqué la même méthode que Torvik à l'étude du mode de bout ou de la transmission et de la réflexion des ondes de Lamb par des soudures [40], [41]. En 1977, Auld utilise une méthode variationnelle pour étudier le mode de bout par une analogie entre les phénomènes acoustiques et des circuits électriques [42]. Gregory et Gladwell appliquent ensuite une méthode intégrale, appelée méthode des projections, à la modélisation de la réflexion de l'onde de Rayleigh sur le bord libre ou fixe d'une plaque [43]. En 1991, Karunasena met en œuvre une méthode de décomposition modale pour décrire un vecteur de force ou de charge en bout d'une plaque multicouche [44]. Il en découle un système numérique qui est ensuite résolu à l'aide d'une méthode variationnelle. L'auteur met aussi en évidence la résonance du bord libre du multicouche. En 1996, la méthode des éléments finis est appliquée, par Cho, au calcul des coefficients de réflexion des modes de Lamb fondamentaux sur le bord libre d'une plaque [45]. Ce modèle est aussi utilisé par Lowe pour mettre en évidence, lors de l'incidence du mode A_0 , la présence de modes non propagatifs sur le bord libre [46]. Enfin, des études ont aussi été menées sur la réflexion d'une onde de Lamb sur le bord fixe d'une plaque [43], [47] ou sur un bord couplé à un fluide [48].

Étude de la diffraction des ondes de Lamb par des fissures

De nombreuses études sur la diffraction des ondes de Lamb par des fissures internes ou débouchantes en surface de la plaque ont aussi été réalisées. Plusieurs publications peuvent être trouvées sur le sujet, mais la plupart des modèles utilisés jusqu'à présent sont basés sur les méthodes des éléments finis (EF), des éléments de frontières (BE – Boundary Elements), des différences finies (DF) ou sur des solutions hybrides incluant une des méthodes précédentes. Guo et Cawley réalisent, par exemple, des simulations par la méthode des éléments finis et des expériences concernant la diffraction des ondes de Lamb par des délaminages dans un composite multicouche [49]. Ils étudient l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission du mode S_0 en fonction de la position du délaminage dans l'épaisseur de la plaque. Dans une étude théorique, Lowe modélise la diffraction des ondes de Lamb, dans des plaques ou des conduites, par des fissures verticales débouchantes. Il compare

les résultats issus d'un code d'éléments finis à des solutions basées sur une analyse statique [50]. Des simulations, par éléments finis, de la réflexion du mode A_0 par des fissures ou des rainures débouchantes sont aussi réalisées par Lowe, Cawley et Kao [51] et les prédictions sont comparées à des mesures expérimentales. Rose étudie, par une méthode basée sur les éléments de frontière, la diffraction des ondes de Lamb [52]. Cette étude est appliquée à une classification des défauts.

En 1991, Datta développe une méthode hybride couplant un code d'éléments finis à un principe de décomposition modale pour étudier la diffraction d'une onde de Lamb par une fissure verticale débouchante en surface de la plaque [53]. Karunasena applique une méthode similaire à la modélisation de la diffraction d'une onde de Lamb par une fissure sur le bord fixe d'une plaque de composite [54]. Wang allie les éléments de frontière à une « matrice T » pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde de Lamb diffractée par une fissure inclinée [55]. Chang utilise un modèle tridimensionnel pour étudier, par la méthode hybride dite « globale locale des éléments finis », la diffraction d'une onde de Lamb par un trou avec ou sans fissure [56]. La région contenant le trou est discrétisée par éléments finis et les champs diffractés sont exprimés sous la forme de modes de Lamb. Beaumont, Garajeu et Wirgin utilisent une méthode hybride couplant un principe de décomposition modale et un code d'éléments finis pour étudier la diffraction d'une onde SH par une fissure [16] et Beaumont couple une méthode de décomposition de domaine aux éléments finis pour résoudre la problème direct et le problème inverse de la diffraction d'une onde par une fissure horizontale dans une plaque [17], [57]. En 2000, Cho couple les éléments finis, une équation élastodynamique intégrale de frontière et un principe de décomposition modale pour modéliser la diffraction des ondes de Lamb par des défauts de surface [58]. La géométrie des défauts varie de la fissure plane et verticale à un défaut semi-circulaire et la sensibilité des ondes de Lamb à la forme du défaut est étudiée.

La diffraction des ondes de Lamb par des rainures qui diffèrent des fissures par leur largeur non nulle a aussi été étudiée. En particulier, Lowe étudie l'évolution des coefficients de réflexion des ondes de Lamb en fonction d'une variation de la hauteur ou de la largeur de l'encoche [51]. Alleyne et Cawley modélisent par éléments finis l'interaction des ondes de Lamb avec des rainures débouchantes dans les plaques [59]. Ils réalisent aussi des mesures expérimentales et étudient, pour plusieurs modes incidents, l'influence de la hauteur ou de l'inclinaison de la rainure sur les coefficients de réflexion et de transmission des ondes de Lamb pour différentes fréquences d'excitations. Des travaux théoriques et expérimentaux sont aussi menés sur la réflexion des ondes guidées dans les conduites et l'étude de l'évolution des coefficients en fonction de la profondeur ou de l'étendue circonférentielle d'une encoche [60], [61].

Bien que ces modèles numériques permettent de prédire les amplitudes des modes de Lamb diffractés, elles sont généralement lourdes et demandent des temps de calcul importants. Elles permettent donc très difficilement de résoudre le problème inverse qui consiste à identifier les caractéristiques d'un défaut à partir de données expérimentales. Dans ce but, des méthodes plus rapides doivent être développées. Les plus intéressantes en termes de temps de calculs conduisent bien sûr à des modèles permettant d'obtenir des solutions analytiques. Eshelby, par exemple, étudie de manière théorique les déplacements d'une inclusion ellipsoïdale dans un solide infini [62]. Auld et Tan ont étudié la diffraction des ondes de Lamb par des paires de rainures ou de fissures normales aux surfaces de plaques isotropes [63]. Leur méthode consiste à établir une analogie entre les phénomènes acoustiques et des systèmes électriques. Ils ont aussi couplé un principe de décomposition modale à une méthode variationnelle pour modéliser la diffraction bi ou tridimensionnelle d'une onde de Lamb par une fissure [64]. En 1979, Auld présente la méthode des paramètres S, dans le cas

général, à l'étude de la diffraction d'une onde de Lamb par un défaut [65]. Ce principe est plus récemment repris par Ditri qui le couple à une approximation quasi-statique pour modéliser la diffraction par une fissure d'une onde guidée dans une conduite [66]. Ces théories présentent l'avantage principal de ne nécessiter que de faibles temps de calculs et conduisent donc à des modélisations très rapides. Cependant, elles utilisent souvent des approximations quasi-statiques qui restreignent leurs applications aux basses fréquences. Des méthodes intégrales peuvent alors être employées pour les fréquences élevées. Rokhlin a, par exemple, utilisé une version modifiée de la technique de Wiener-Hopf pour simuler la réflexion d'un mode de Lamb incident sur une fissure finie [67]-[68]. Cette avancée dans le domaine est cependant limitée à des défauts horizontaux situés dans le plan médian d'une couche élastique. Ceci implique que le mode incident, quelle que soit sa symétrie, ne peut se convertir sur un mode de symétrie différente.

La solution proposée dans le cadre de cette thèse consiste à traiter les problèmes de diffraction d'ondes de Lamb par une analyse modale. Les champs acoustiques sont alors représentés comme une superposition de modes propres de la plaque vérifiant les conditions aux limites imposées par la présence d'un défaut. Cette méthode a déjà été appliquée à l'étude de différents problèmes acoustiques. En particulier, Gregory et Gladwell ont appliqué ce principe à l'étude de la génération d'une onde de Lamb par un piston oscillant [69]. Bries et Leroy ont modélisé la conversion d'une onde de Stoneley à l'extrémité d'une plaque immergée dans un fluide ou sa génération sur une interface liquide-solide [70]-[71]. Beaumont et Wirgin ont résolu le problème direct et le problème inverse de la diffraction d'une onde SH par une fissure horizontale [57] et Wang a utilisé une décomposition modale pour étudier la diffraction d'une onde SH par un cylindre infini encastré dans une plaque [72]. La plaque est divisée en trois régions. Dans la zone centrale contenant le cylindre, les champs acoustiques sont décomposés sur des fonctions de Bessel. Dans les deux autres parties, les ondes de Lamb sont utilisées comme base. Les conditions de continuité des champs aux interfaces entre les régions permettent ensuite de calculer les amplitudes des différentes ondes.

Présentation des différents chapitres

L'objectif principal de ce travail est de modéliser l'interaction des ondes de Lamb avec des fissures verticales dans des plaques. Il s'agit donc de résoudre le problème direct qui consiste à prédire les amplitudes des diverses ondes de Lamb réfléchies ou transmises par un défaut soumis à un mode pur incident. La méthode de décomposition modale mise en œuvre permet de comprendre les différents phénomènes intervenant lors de la diffraction, par exemple la génération de modes non propagatifs et atténués. De plus, son application n'est pas restreinte en fréquence et sa rapidité d'exécution laisse envisager la résolution du problème inverse qui consiste à identifier un défaut à partir des ondes diffractées.

Le premier chapitre de ce document rappelle quelques notions fondamentales de l'acoustique et de la propagation des ondes guidées dans les plaques. En particulier, les solutions réelles, imaginaires et complexes des équations de dispersion des ondes de Lamb sont respectivement reliées aux modes propagatifs, non propagatifs et atténués. Ces différents types d'ondes sont ensuite classés et associés de manière à obtenir des courbes de dispersion tridimensionnelles. Enfin, l'évolution des champs de vitesse et de contrainte des premiers modes symétriques et antisymétriques est présentée pour plusieurs produits fréquence-épaisseur.

Dans le deuxième chapitre, les modes de Lamb sont tout d'abord normalisés en puissance de manière à pouvoir relier l'amplitude d'une onde propagative à la puissance qu'elle transporte le long de la plaque. Le formalisme de la méthode de décomposition modale est ensuite exposé et, par la suite, appliqué à deux cas particuliers : l'étude de la réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre d'une plaque ou de sa diffraction par des fissures verticales, c'est-à-dire perpendiculaires aux surfaces de la plaque et de largeur nulle, cette dernière caractéristique facilitant la mise en œuvre du modèle. Une seule onde sera incidente, mais le principe de superposition peut permettre, par la suite, de modéliser la diffraction de plusieurs ondes incidentes sur un ou plusieurs fissures verticales.

Dans le troisième chapitre sont présentés deux outils qui permettront de valider les prédictions de la méthode de décomposition modale. Dans un premier temps, un code d'éléments finis est exposé. Il permet de modéliser des phénomènes qui ne sont pas observables expérimentalement comme, par exemple, les déplacements des faces d'un défaut. Une deuxième partie présente les différents procédés expérimentaux mis en œuvre pour générer des ondes de Lamb dans les plaques et mesurer les amplitudes des modes diffractés. En particulier, une sonde laser et des transducteurs ultrasonores à couplage par air sont utilisés pour détecter, sans contact, les différentes ondes.

Les quatrième et cinquième chapitres présentent les résultats obtenus par les analyses modales et leur confrontation avec les prédictions numériques du code d'éléments finis ou les mesures expérimentales. Le chapitre IV concerne la réflexion des ondes A_0 et S_0 sur le bord libre d'une plaque [73], [74]. L'évolution des coefficients de réflexion des modes propagatifs est prédite sur une large bande de produits fréquence-épaisseur et plusieurs études mono-fréquentielles sont réalisées permettant, par exemple, de mettre en évidence une résonance du bord libre ou le rôle important des ondes non propagatives dans les phénomènes de diffraction. Les coefficients de réflexion, la décroissance des champs transitoires en surface de la plaque et les déplacements sur le bord sont alors tracés et mesurés expérimentalement.

Dans le chapitre V, la diffraction des ondes A_0 et S_0 par différents types de fissures est exposée [75], [76] : des fissures internes à la plaque et symétriques par rapport à son plan médian, des paires de fissures débouchantes symétriques ou des fissures simples débouchantes sont traitées. Le produit fréquence-épaisseur pour lequel les études sont réalisées est choisi de telle sorte que les ondes A_0 et S_0 soient les seuls modes propagatifs et soient de plus faiblement dispersifs. Les coefficients de diffraction et les déplacements sur les faces des fissures sont alors prédits par la méthode de décomposition modale et comparés à des mesures expérimentales ou aux résultats du code d'éléments finis.

Chapitre I

Propagation en milieu sain

I. Propagation en milieu sain.....	8
I.1. Propagation en milieu infini.....	8
I.1.1 Les vecteurs déplacement et vitesse.....	8
I.1.2 Le tenseur des déformations.....	8
I.1.3 Le tenseur des contraintes.....	9
I.1.4 Relations entre contraintes et déformations : la loi de Hooke.....	9
I.1.5 Ondes acoustiques.....	10
I.2. Propagation dans les plaques.....	11
I.2.1 Équations de Rayleigh-Lamb.....	11
I.2.2 Résolution numérique des équations de dispersion.....	13
I.2.3 Modes propagatifs.....	15
I.2.3.1 Nombres d'onde.....	16
I.2.3.2 Vitesses de phase.....	16
I.2.3.3 Vitesses de groupe.....	17
I.2.4 Modes non propagatifs.....	18
I.2.5 Modes atténués.....	19
I.2.6 Numérotation des modes.....	20
I.2.6.1 Notation.....	20
I.2.6.2 Suivi des modes.....	21
I.2.7 Produits fréquence-épaisseur de coupure : équation analytique.....	24
I.2.8 Champs de vitesse et de contrainte.....	24
I.2.8.1 Expressions analytiques des champs acoustiques.....	25
I.2.8.1.1 Champs de vitesse.....	25
I.2.8.1.2 Champs de contrainte.....	25
I.2.8.2 Champs de vitesse et de contrainte des modes symétriques.....	26
I.2.8.2.1 Mode S_0	26
I.2.8.2.2 Mode S_1	28
I.2.8.2.3 Mode S_2	30
I.2.8.3 Champs de vitesse et de contrainte des antisymétriques.....	32
I.2.8.3.1 Mode A_0	32
I.2.8.3.2 Mode A_1	33
I.3. Conclusion.....	35

I. Propagation en milieu sain

Préalablement à la modélisation de l'interaction des ondes de Lamb avec des défauts, ce premier chapitre présente quelques bases de l'acoustique en milieu sain. Ces connaissances sont, en effet, nécessaires à la compréhension des différents mécanismes qui apparaissent lors de la diffraction. De manière à transposer aisément les méthodes développées, les notations concernant les matériaux anisotropes sont conservées. Cependant, pour un soucis de clarté, les applications qui sont exposées ne concernent qu'un matériau isotrope : l'aluminium. Les constantes d'élasticité qui seront utilisées vérifieront alors les lois d'isotropie.

En premier lieu, les notions de déplacement, vitesse et contrainte sont définies. Elles conduisent à l'écriture de l'équation de propagation des ondes en milieu infini. L'introduction de conditions de contraintes nulles sur deux plans parallèles permet ensuite de modéliser la propagation d'ondes acoustiques dans les plaques libres et de définir les modes propres de ces structures. Les racines réelles, imaginaires et complexes des équations de dispersion sont ensuite présentées. Elles correspondent respectivement à des ondes propagatives, non propagatives et atténuées, au sein de la plaque. Ces diverses solutions sont ensuite reliées entre elles dans un graphe permettant d'obtenir des courbes de dispersion tridimensionnelles. Enfin, l'évolution, en fonction du produit fréquence-épaisseur, des champs de vitesse et de contrainte des premiers modes symétriques et antisymétriques est exposée.

I.1. Propagation en milieu infini

Dans ce paragraphe sont présentées des notions de base concernant la propagation acoustique dans les milieux solides constitués d'un matériau purement élastique. Ainsi, après l'introduction des notions de déplacement, de vitesse, de déformation et de contrainte, les lois de comportements du milieu et les équations en régime dynamique seront présentées. Dans toute la suite du document, les conditions de déformations planes sont appliquées et les modèles exposés sont bidimensionnels.

I.1.1 Les vecteurs déplacement et vitesse

Dans un solide déformable, en état non déformé, la position d'un point M est définie dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ par le vecteur position :

$$\mathbf{OM} = x_1 \cdot \mathbf{x}_1 + x_2 \cdot \mathbf{x}_2. \quad (\text{I.1})$$

Sous l'effet de forces extérieures, le solide se déforme et le point M se déplace en M', et le vecteur déplacement est noté $\mathbf{u}(M) = \mathbf{MM}'$. Le vecteur vitesse, noté \mathbf{v} , correspond à la dérivée temporelle du vecteur \mathbf{u} . Ces deux vecteurs peuvent dépendre des deux coordonnées, x_1 et x_2 , du point considéré.

I.1.2 Le tenseur des déformations

Les déformations internes au solide sont alors représentées par un tenseur d'ordre 2, noté $\bar{\varepsilon}$, et définies par [77] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (\text{I.2})$$

où la notation d'Einstein est utilisée. Cependant, dans le cadre de l'acoustique linéaire, les phénomènes physiques étudiés dans la suite du document ne produisent que de faibles déplacements à l'intérieur des matériaux. De ce fait, les déformations engendrées sont faibles. Le terme du second ordre de l'équation (I.2) est alors négligeable devant les termes du premier ordre. Le tenseur des déformations s'écrit alors :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{I.3})$$

Ce tenseur d'ordre 2 est symétrique. Ses termes non diagonaux sont reliés aux déformations en cisaillement alors que les éléments diagonaux correspondent aux allongements indépendants dans les deux directions :

$$\varepsilon_{ii} dx_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_i, \text{ pour } i=1, 2. \quad (\text{I.4})$$

I.1.3 Le tenseur des contraintes

Lorsque des déformations se produisent dans le solide, elles créent des tensions mécaniques appelées contraintes. Celles-ci tendent à ramener le solide dans son état initial. La figure I.1 représente un élément cubique du solide, dont les faces $\Delta S_k \perp \mathbf{x}_k$ sont orientées selon les axes du repère orthonormé $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. ΔS_k subit par la matière située du côté des x_k croissants une force $\Delta \mathbf{F} = \Delta F_i \cdot \mathbf{x}_i$. La contrainte σ_{ik} est alors définie de la façon suivante :

$$\sigma_{ik} = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F_i}{\Delta S_k} \right). \quad (\text{I.5})$$

Autrement dit, σ_{ik} est la composante selon l'axe \mathbf{x}_i de la force agissant sur la surface perpendiculaire à l'axe \mathbf{x}_k . Les quantités scalaires σ_{ik} forment un tenseur d'ordre 2 appelé tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$. En vertu de l'équilibre des moments des forces exercées sur l'élément de volume, ce tenseur est symétrique. Il ne contient donc que 3 composantes indépendantes permettant de définir l'état de contrainte du matériau.

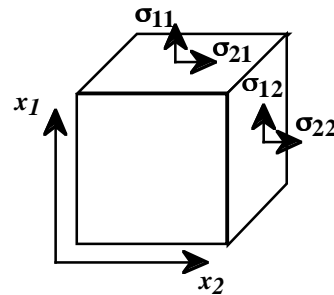


figure I.1 : Contraintes appliquées sur un élément de volume.

I.1.4 Relations entre contraintes et déformations : la loi de Hooke

Dans un milieu solide, les propriétés mécaniques du matériau permettent de relier les champs de contrainte et de déformation par des lois appelées lois de comportement. Dans l'hypothèse des petites déformations, ces relations se linéarisent et conduisent à la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \text{ avec } C_{ijkl} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_{\varepsilon_{kl}=0}. \quad (\text{I.6})$$

Les composantes C_{ijkl} forment le tenseur d'ordre 4 des rigidités élastiques. Il caractérise les propriétés mécaniques du matériau. Comme les tenseurs de déformation et de contrainte, le tenseur des rigidités est symétrique. Il est alors possible d'utiliser des notations contractées et la loi de Hooke devient :

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta \quad , \quad (I.7)$$

avec les correspondances suivantes :

$$(11) \leftrightarrow 1 \qquad (22) \leftrightarrow 2 \qquad (12)=(21) \leftrightarrow 6$$

De plus, dans le cadre des matériaux isotropes considérés dans cette étude, les constantes d'élasticité vérifient :

$$C_{11} = C_{22} \quad \text{et} \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}. \quad (I.8)$$

I.1.5 Ondes acoustiques

En milieu infini, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \mathbf{F} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (I.9)$$

Cette relation est aussi appelée équation de Navier. \mathbf{p} est la quantité de mouvement des particules, \mathbf{F} représente les forces volumiques extérieures et ρ est la masse volumique du matériau. Cette équation résulte de la loi fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\gamma}$. En supposant que les forces de volume appliquées au solide sont nulles, et en introduisant la loi de Hooke dans l'expression (I.9), cette équation devient :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = \rho \ddot{u}_i \quad (I.10)$$

Cette dernière expression constitue l'équation de propagation dans le milieu considéré. Ses solutions peuvent être cherchées sous la forme d'ondes planes, de pulsation $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence, se propageant dans la direction définie par un vecteur unitaire $\mathbf{n}(n_1, n_2)$:

$$u_i(t, \mathbf{x}) = AP_i \cdot e^{i\omega(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V})}. \quad (I.11)$$

\mathbf{x} est le vecteur position, A est l'amplitude des déplacements et P_i , appelée polarisation de l'onde, est la composante du vecteur déplacement des particules. V est la vitesse de phase de l'onde se propageant dans la direction \mathbf{n} . Les différentes dérivées temporelle et spatiale de u_i s'écrivent alors :

$$\ddot{u}_i = -\omega^2 AP_i \cdot e^{i\omega(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V})}, \quad (I.12)$$

et

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_j} = -iAP_i \cdot \frac{\omega n_j}{V} \cdot e^{i\omega(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V})}, \quad (I.13)$$

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = -A P_i \cdot \frac{\omega^2 n_j n_k}{V^2} e^{i\omega(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V})}.$$

Pour déterminer la vitesse de phase V et la polarisation P_i d'une solution de l'équation de propagation, l'expression (I.11) est introduite dans l'équation de propagation (I.10) :

$$\rho \omega^2 P_i e^{i\omega(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V})} = C_{ijkl} \cdot \frac{\omega^2 n_j n_k}{V^2} P_l e^{i\omega(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V})}. \quad (\text{I.14})$$

Cette expression se simplifie

$$\rho V^2 P_i = C_{ijkl} \cdot n_j n_k \cdot P_l, \quad (\text{I.15})$$

Pour devenir l'équation de Christoffel :

$$\rho V^2 P_i = \Gamma_{il} \cdot P_l, \quad (\text{I.16})$$

avec

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} \cdot n_j n_k. \quad (\text{I.17})$$

L'équation de Christoffel montre que la polarisation P_i est un vecteur propre du tenseur Γ_{il} avec comme valeur propre $\gamma = \rho V^2$. En milieu infini isotrope, pour une direction de propagation donnée, il existe donc trois solutions propres de l'équation de propagation. Elles sont :

- Une onde longitudinale dont la polarisation est parallèle à la direction de propagation de l'onde. Cette onde est aussi appelée onde de compression.
- Deux ondes transversales dont les polarisations sont perpendiculaires à la direction de propagation des fronts d'ondes. Elles sont aussi appelées ondes de cisaillement.

Ces trois ondes possèdent des polarisations qui sont orthogonales, et elles peuvent se propager dans la même direction de propagation avec des vitesses différentes. Dans les matériaux anisotropes, ces trois ondes possèdent des polarisations qui ne sont plus parallèles ou orthogonales aux directions de propagation des ondes. Elles sont alors appelées ondes quasi-longitudinales ou quasi-transversales [77].

Dans la suite du document, les problèmes étudiés sont bidimensionnels et il est montré dans l'annexe A que les champs acoustiques se propageant dans le matériau peuvent alors être représentés comme superposition de quatre ondes planes. Le paragraphe suivant montre que cette décomposition conduit aisément à l'obtention des équations de dispersion des modes de Lamb.

I.2. Propagation dans les plaques

I.2.1 Équations de Rayleigh-Lamb

Pour étudier la propagation en milieu fini, certaines conditions aux limites doivent être ajoutées à l'équation de propagation en milieu infini. Par exemple, des conditions de contraintes nulles sur deux plans parallèles sont introduites pour modéliser la propagation des ondes le long d'une plaque placée dans le vide :

$$T(x) = \bar{\sigma} x_I = 0 \text{ pour } x(\pm h/2, x_2). \quad (\text{I.18})$$

Les plans $S_1 = \{(+h/2, x_2)\}$ et $S_2 = \{-h/2, x_2\}$ définissent les surfaces de la plaque d'épaisseur h , (figure I.2).

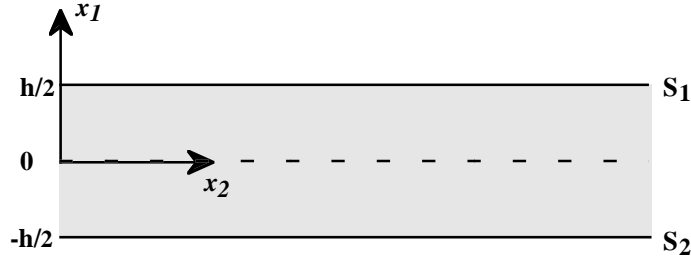


figure I.2 : Plaque d'épaisseur h .

Comme dans un solide infini, les ondes de volume peuvent se propager dans le matériau. Cependant, celles-ci doivent se réfléchir sur les surfaces libres de la plaque (figure I.3). Sous certaines conditions de fréquence et d'épaisseur, les quatre ondes de volume se couplent et donnent naissance à un nouveau type d'ondes : les modes de Lamb [78]-[81]. Ce sont des modes de résonance de l'épaisseur h d'une plaque placée dans le vide, et, comme les ondes de volume, leurs polarisations se situent dans le plan perpendiculaire aux surfaces de la plaque.

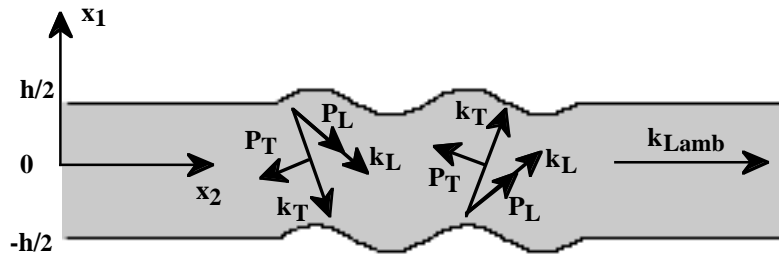


figure I.3 : Décomposition des ondes de Lamb comme superposition d'ondes de volume

Dans une représentation bidimensionnelle, les champs de déplacement au sein de la plaque se mettent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= U_1(x_1) e^{i(\omega t - k_2 x_2)} \\ u_2(x_1, x_2, t) &= U_2(x_1) e^{i(\omega t - k_2 x_2)} \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

k_2 est le nombre d'onde de l'onde de Lamb se propageant dans la direction x_2 . D'après la définition (I.11), il est égal à ω/V_2 , où V_2 est la vitesse de phase de l'onde de Lamb. À partir des champs produits par les différentes ondes partielles, les formes d'ondes de l'onde résultante s'écrivent :

$$U_1(x_1) = -A_{Ld} P_{L1} e^{ik_{L1} x_1} - A_{Td} P_{T1} e^{ik_{T1} x_1} + A_{Lm} P_{L1} e^{-ik_{L1} x_1} + A_{Tm} P_{T1} e^{-ik_{T1} x_1} \quad (\text{I.20})$$

et

$$U_2(x_1) = A_{Ld} P_{L2} e^{ik_{L1} x_1} - A_{Td} P_{T2} e^{ik_{T1} x_1} + A_{Lm} P_{L2} e^{-ik_{L1} x_1} - A_{Tm} P_{T2} e^{-ik_{T1} x_1}, \quad (\text{I.21})$$

où A_{Lj} , A_{Tj} , $i = d, m$ sont respectivement les amplitudes des ondes longitudinales descendante et montante et des ondes transversales descendante et montante ; de même, P_{Lj} , P_{Tj} , $j = 1, 2$,

sont les composantes selon les axes Ox_1 et Ox_2 des différentes polarisations complexes et k_{L1}, k_{T1}, k_2 sont les composantes selon Ox_1 et Ox_2 des vecteurs d'ondes des ondes longitudinales et transversales. Leurs expressions sont données dans l'annexe B. Ces champs sont obtenus en projetant sur les directions 1 et 2 les champs résultants de la superposition des quatre ondes partielles de la figure I.3. Il est à noter que les lois de Snell-Descartes impliquent que $k_{T2} = k_{L2} = k_2$ [77]. Étant donnée la symétrie du problème, les amplitudes des ondes montantes et descendantes doivent satisfaire les relations : $A_{Ld} = A_{Lm}$ ou $A_{Ld} = -A_{Lm}$ (respectivement A_{Td} et A_{Tm}). Ces conditions conduisent à deux familles d'ondes, l'une dont les déplacements dans la direction 1 sont symétriques par rapport au plan médian de la plaque et une autre dont ces déplacements sont antisymétriques.

Les champs de déplacement des ondes symétriques sont :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= -2ie^{i(\omega t - k_2 x_2)} (A_L P_{L1} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} \sin(k_{T1} x_1)) \\ u_2(x_1, x_2, t) &= 2e^{i(\omega t - k_2 x_2)} (A_L P_{L2} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} \cos(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \quad (I.22)$$

Les champs de déplacement des ondes antisymétriques sont :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= 2e^{i(\omega t - k_2 x_2)} (A_L P_{L1} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} \cos(k_{T1} x_1)) \\ u_2(x_1, x_2, t) &= -2ie^{i(\omega t - k_2 x_2)} (A_L P_{L2} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} \sin(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \quad (I.23)$$

Dans les expressions précédentes, le nombre d'onde k_2 du mode de Lamb considéré est inconnu, ainsi que toutes les variables qui en dépendent. Pour le déterminer, les champs de contrainte sont calculés à partir des expressions (I.22) et (I.23), en utilisant la définition des champs de déformation et la loi de Hooke (I.7). Ensuite, les conditions de contraintes nulles sur les interfaces ($\sigma_1 = 0$ et $\sigma_6 = 0$) conduisent à deux équations de dispersion :

Pour les modes symétriques

$$\frac{\tan(k_{T1} h / 2)}{\tan(k_{L1} h / 2)} + \frac{4k_2^2 k_{T1} k_{L1}}{(k_{T1}^2 - k_2^2)^2} = 0, \quad (I.24)$$

et pour les modes antisymétriques

$$\frac{\tan(k_{T1} h / 2)}{\tan(k_{L1} h / 2)} + \frac{(k_{T1}^2 - k_2^2)^2}{4k_2^2 k_{T1} k_{L1}} = 0. \quad (I.25)$$

La résolution de ces équations de dispersion permet d'obtenir les nombres d'ondes k_2 , fonctions du produit fréquence-épaisseur, des modes de Lamb pouvant exister dans la plaque. Elle permet de caractériser parfaitement une onde de Lamb donnée. En effet, comme il est présenté dans les paragraphes suivants, les racines des équations (I.24) et (I.25) sont directement reliées aux vitesses de phase et aux vitesses de groupe des modes de Lamb et peuvent être injectées dans les expressions des champs de déplacement et de contrainte.

I.2.2 Résolution numérique des équations de dispersion

Les résultats de calcul présentés dans ce manuscrit sont, à l'exception des prédictions numériques obtenues par éléments finis, issus d'un logiciel développé au cours du doctorat

pour étudier l'interaction des ondes de Lamb avec des défauts. La résolution des équations de dispersion constitue, entre autres, une étape préliminaire à cette modélisation.

Pour un produit fréquence-épaisseur fh donné, les solutions des relations (I.24) et (I.25) sont recherchées dans le plan complexe. Cependant, les racines complexes des équations de dispersion semblent être confinées dans un domaine du plan complexe (figure I.4). De ce fait, deux types de résolution sont employés :

- a. Les solutions réelles ou imaginaires sont recherchées dans un intervalle (réel ou imaginaire) borné. Celui-ci est discrétisé en un nombre de points n . Les valeurs des expressions (I.24) et (I.25) sont calculées pour chacun de ces points et ne sont conservés que les minima.
- b. La recherche des solutions complexes des équations de dispersion est un peu plus compliquée, et par conséquent, un peu plus coûteuse en temps. En effet, un domaine du plan complexe doit être quadrillé. De manière à diminuer les temps de calculs et à conserver une bonne précision sur les racines calculées, cette région doit être la plus réduite possible. Pour chaque ligne imaginaire, les minima correspondant à la recherche sur la partie réelle sont ensuite conservés.

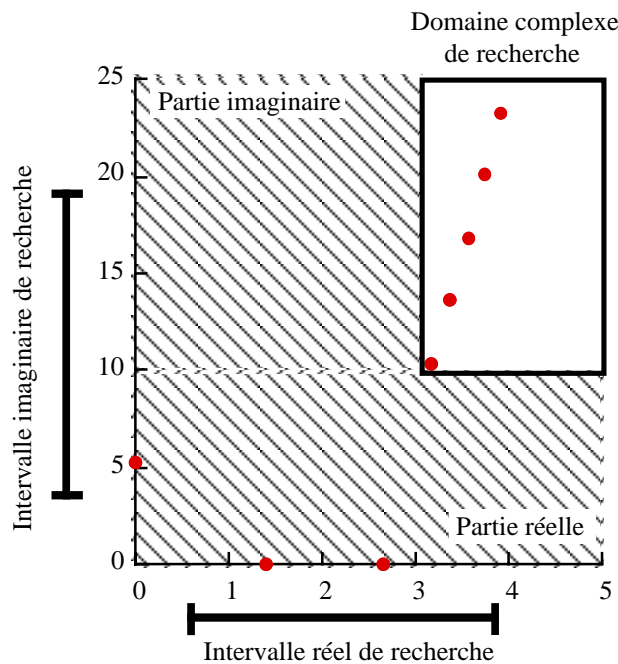


figure I.4 : Domaine de recherche des solutions (●) des équations de dispersion ;
Zone hachurée : Domaine où la recherche est inutile.

Les procédures précédentes permettent d'obtenir un premier ensemble de minima correspondant aux racines réelles, imaginaires ou complexes. Ces résultats sont ensuite améliorés en appliquant le principe de Newton-Raphson [82]. Il permet, non seulement d'augmenter la précision des solutions, mais aussi de supprimer les minima qui ne correspondent pas à de véritables zéros des équations de dispersion. Par la suite, un critère d'élimination permet de ne garder que les solutions optimales.

Les bornes des intervalles de recherche ainsi que les pas de discrétisation doivent être choisis de manière rigoureuse car il est facile de « manquer » un mode. En effet, pour réduire

au maximum les intervalles de recherche, les solutions des équations de dispersion sont calculées sous forme de lenteur de phase $S_2 = k_2/\omega$, où ω est la pulsation. Dans les moyens et hauts produits fréquence-épaisseur, elles sont, en effet, bornées. Cependant, il existe des différences notables entre les valeurs des différentes solutions, en particulier pour les modes non propagatifs et atténués.

Pour obtenir les courbes présentées dans les paragraphes suivants, la résolution des équations de dispersion n'est pas réalisée pour tous les produits fh . Dans un premier temps, une recherche est effectuée pour le produit fréquence-épaisseur maximal. Ensuite, pour diminuer les temps de calculs, une procédure de suivi des modes est mise en place. Elle consiste à extrapoler les solutions à partir des valeurs précédentes en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1 des fonctions $F(S_2, f)$ à deux variables (I.24) et (I.25) :

$$F(S_2, f) = F(S_{2,0}, f_0) + \frac{\partial F}{\partial S_2}(S_{2,0}, f_0) \Delta S_2 + \frac{\partial F}{\partial f}(S_{2,0}, f_0) \Delta f, \quad (\text{I.26})$$

où $(S_2, f) = (S_{2,0}, f_0) + (\Delta S_2, \Delta f)$. $(S_{2,0}, f_0)$ est un couple connu solution de $F=0$. Le pas Δf (positif ou négatif) est imposé, et si on suppose que (S_2, f) doit aussi annuler F , il vient :

$$\Delta S_2 = - \frac{\frac{\partial F}{\partial f}(S_{2,0}, f_0) \Delta f}{\frac{\partial F}{\partial S_2}(S_{2,0}, f_0)}. \quad (\text{I.27})$$

Pour une fréquence $f_0 + \Delta f$, la valeur extrapolée de la lenteur est donc $S_2 = S_{2,0} + \Delta S_2$. Des formes analytiques des dérivées partielles des fonctions F ont été calculées, elles sont exposées dans l'annexe C. Ces expressions permettent d'obtenir rapidement les ΔS_2 recherchés. Les valeurs extrapolées des lenteurs sont ensuite corrigées en appliquant Newton-Raphson pour converger sur les solutions exactes. Il se peut que cette procédure ne converge pas et que le suivi échoue. Pour obtenir quand même des courbes de dispersion complètes, il est réalisé plusieurs recherches mono-fréquences à partir desquelles le suivi est effectué vers des produits fréquence-épaisseur supérieurs ou inférieurs.

Il existe d'autres méthodes de détermination des solutions des équations de dispersion comme, par exemple, celle présentée par Brazier-Smith et Scott qui utilisent le théorème des résidus [83]. Elle n'a pas été implémentée, mais peut s'avérer utile pour diminuer les temps de calculs puisqu'elle permet de déterminer le nombre de solutions existant dans un domaine donné.

Dans les paragraphes suivants sont présentées les différentes solutions de ces équations de dispersion ainsi que les champs acoustiques (vitesse, contrainte) correspondant à certaines solutions.

I.2.3 Modes propagatifs

Les modes de Lamb propagatifs correspondent aux solutions réelles des équations de dispersion (I.24) et (I.25). Les lenteurs de phase connues, il est possible de reconstruire les courbes de dispersion correspondant à l'évolution d'une caractéristique de l'onde (nombre d'onde, vitesse de phase, vitesse de groupe, ...) en fonction du produit fréquence-épaisseur. Sauf indication contraire, les courbes de dispersion présentées dans le document correspondront à des ondes de Lamb existant dans une plaque d'aluminium.

1.2.3.1 Nombres d'onde

Les courbes suivantes donnent l'évolution en fonction du produit fréquence-épaisseur des nombres d'ondes des modes propagatifs dans une plaque d'aluminium : $k_2 = F(f.h)$. D'après les expressions (I.22) et (I.23), elles correspondent à des ondes progressives. En effet, les nombres d'ondes sont positifs, la direction de propagation est donc $+x_2$. Une courbe représente l'évolution, en fonction du produit fréquence-épaisseur, du nombre d'onde d'un mode de Lamb particulier. Il est important de noter que certains modes n'apparaissent qu'à partir d'un certain produit fh , appelée produit fréquence-épaisseur de coupure. En dessous de ce produit, ces ondes n'existent plus en tant que mode propagatif.

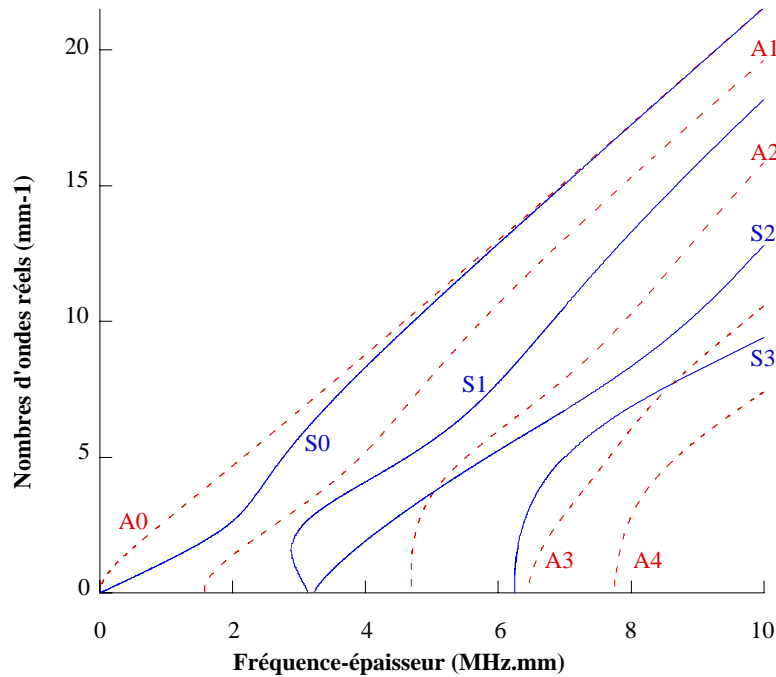


figure I.5 : Nombres d'onde réels des modes de Lamb propagatifs dans une plaque d'aluminium, modes symétriques (—) et modes antisymétriques (---).

1.2.3.2 Vitesses de phase

La vitesse de phase est donnée par :

$$V_2 = \frac{l}{S_2} = \frac{\omega}{k_2}. \quad (I.28)$$

Elle correspond à la vitesse de propagation des fronts d'ondes de fréquence donnée, à l'intérieur d'un paquet d'ondes.

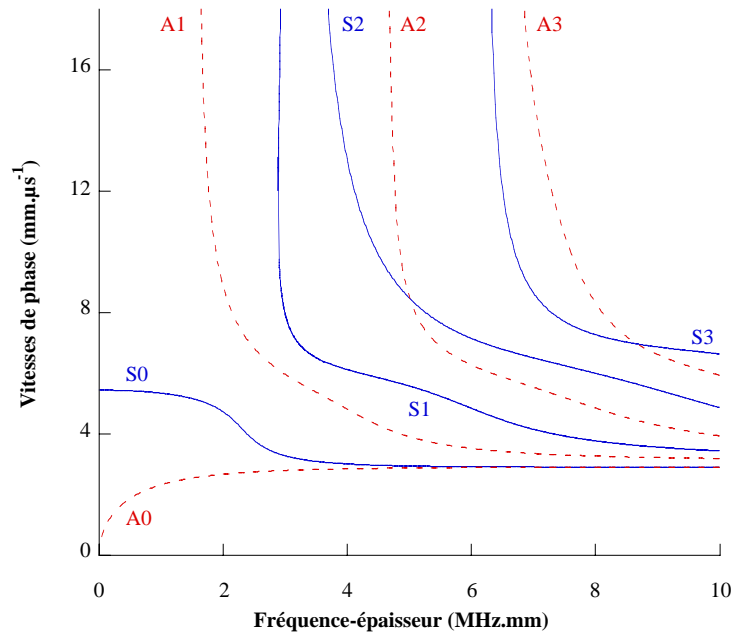


figure I.6 : Vitesses de phase des modes de Lamb propagatifs dans une plaque d'aluminium, modes symétriques (—) et modes antisymétriques (---).

1.2.3.3 Vitesses de groupe

La vitesse de groupe est la vitesse à laquelle se propage, le long de la plaque, un paquet d'ondes de pulsation centrale ω . Elle correspond aussi à la vitesse de propagation de l'énergie transportée par l'onde le long de la plaque. Elle est donnée par la relation :

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_2} \quad (\text{I.29})$$

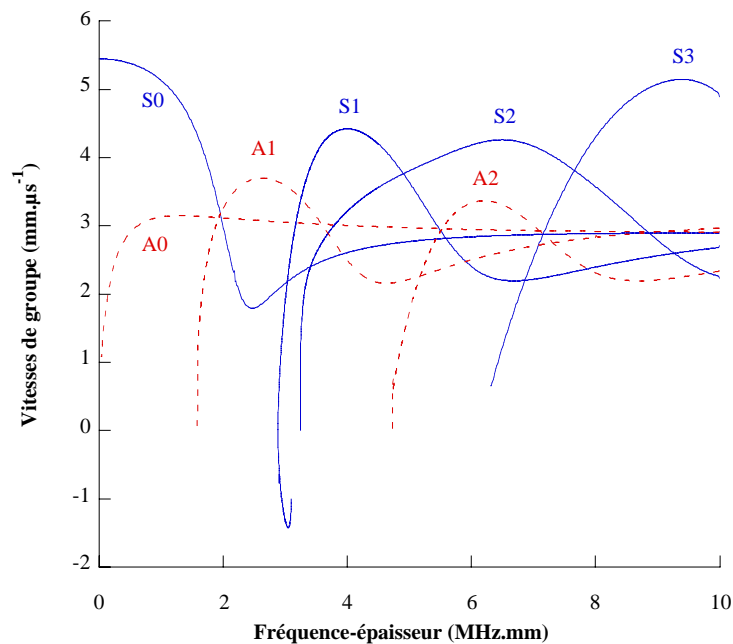


figure I.7 : Vitesses de groupe des modes de Lamb propagatifs dans une plaque d'aluminium, modes symétriques (—) et modes antisymétriques (---).

Lorsque la vitesse de groupe est constante avec le produit fréquence-épaisseur, l'onde est dite non dispersive en amplitude. Le paquet d'onde se propage alors « sans déformation temporelle » le long de la plaque. Au contraire, lorsque l'onde est dispersive, le paquet d'onde se propage en « s'étalant » temporellement. Progressivement, les ondes dont la vitesse de groupe est faible vont être distancées par les ondes plus rapides. Les vitesses de groupes sont, en général, différentes des vitesses de phase, autrement dit, l'énergie transportée par le mode ne se propage pas obligatoirement à la même vitesse que les fronts d'ondes.

Il est intéressant de remarquer que le mode S_1 , dans une certaine bande de produits fh supérieurs à son produit fréquence-épaisseur de coupure, deux valeurs de vitesse de groupe dont l'une est négative. Cette caractéristique sera de nouveau évoquée au paragraphe I.2.6, lors de la numérotation des modes.

I.2.4 Modes non propagatifs

Ces ondes possèdent un nombre d'onde k_2 imaginaire pur, solution des équations de dispersion (I.24) et (I.25). De ce fait, elles restent confinées dans leur zone d'excitation et produisent des déplacements et des contraintes qui s'atténuent en fonction de la distance à cette région. Il est important de noter que, la partie réelle du nombre d'onde étant nulle, aucun terme de phase n'intervient dans les champs de déplacement et de contrainte. Pour être cohérent avec les modes propagatifs préalablement exposés, les nombres d'ondes des modes non propagatifs sont donnés, sur la figure I.8, avec des valeurs négatives. En effet, d'après les expressions (I.22) et (I.23), ces courbes représentent alors des ondes possédant une atténuation dans le sens des x_2 croissants.

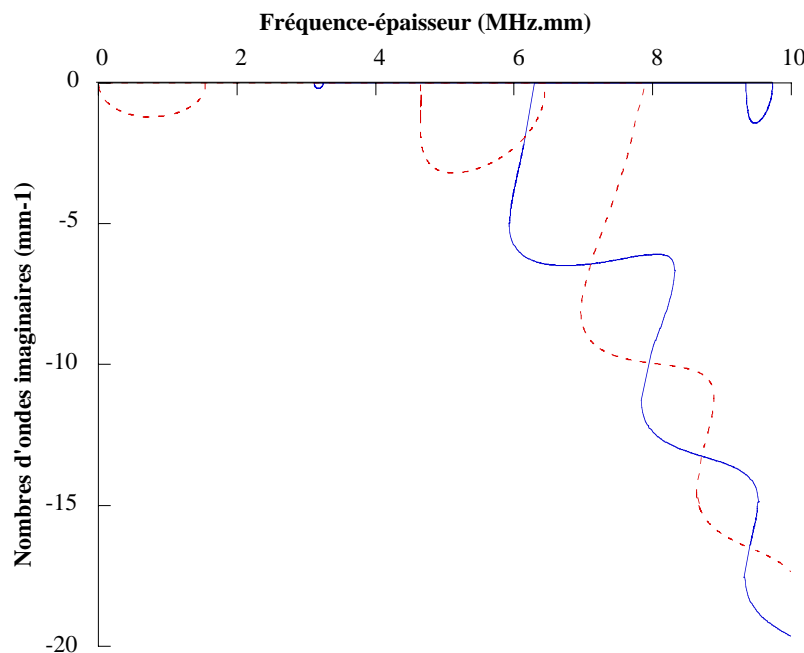


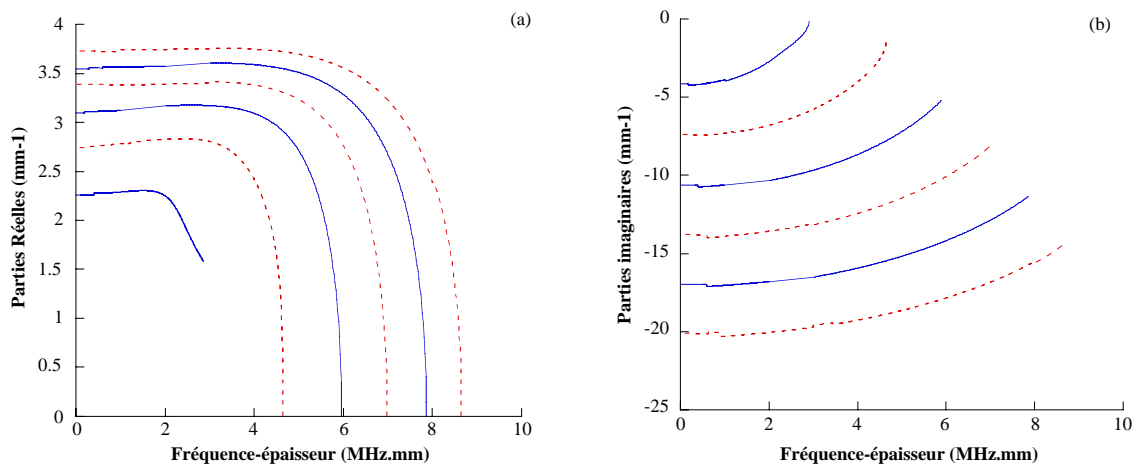
figure I.8 : Nombres d'onde imaginaires des modes de Lamb non propagatifs dans une plaque d'aluminium, modes symétriques (—) et modes antisymétriques (---).

L'observation de ces courbes permet de relever deux particularités. Tout d'abord, il est important de noter que les produits fh pour lesquels les modes non propagatifs coupent l'axe correspondent à certaines valeurs auxquelles les nombres d'ondes des modes propagatifs s'annulent. Autrement dit, il semble que certaines solutions réelles et imaginaires se rejoignent pour ces produits fréquence-épaisseur. Cette remarque sera confirmée dans le

paragraphe I.2.6, lors de la discussion concernant la numérotation des modes de Lamb. Dans un second point, il est maintenant possible de préciser la remarque effectuée au paragraphe I.2.2 concernant la résolution des équations de dispersion. Il avait alors été annoncé que les paramètres de recherche des solutions (les bornes des intervalles et les pas de discrétisation) devaient être choisis de manière précise pour réaliser une résolution complète et ne « manquer » aucun mode. Tout d’abord pour une recherche mono fréquence, la différence existant entre les solutions imaginaires symétriques, au produit fréquence-épaisseur de 9,5 MHz.mm doit être remarquée. Un intervalle de recherche trop petit permet de déterminer avec précision les solutions de faibles k_2 (correspondant à la boucle) mais risque de ne pas conduire à l’identification des k_2 plus importants. Un grand intervalle peut alors être une solution car il permet d’identifier les solutions correspondant « au serpent » . Il nécessite, cependant, un pas de discrétisation fin pour obtenir les solutions de faibles amplitudes. Le temps de calcul est donc plus élevé. Pour une recherche mono fréquence, ces contraintes ne sont cependant pas très importantes, et il est assez aisé de calculer toutes les solutions. Ce n’est pas le cas lors d’une recherche sur toute une bande de produits fréquence-épaisseur pour laquelle il est très difficile d’obtenir, avec les mêmes paramètres de résolution, l’ensemble des solutions. Pour s’en convaincre, il suffit de comparer la petite boucle apparaissant dans la figure I.8 pour un produit fréquence-épaisseur de 3,1 MHz.mm et les branches obtenues pour 10 MHz.mm. Un facteur 100 existe entre les k_2 correspondant aux deux zones. Il est alors nécessaire de diviser le domaine fréquence-épaisseur en plusieurs intervalles de recherche et d’adapter, pour chacun d’entre eux, les paramètres de résolution.

I.2.5 Modes atténués

Ces ondes possèdent un nombre d’onde k_2 complexe, solution des équations de dispersion. Elles ne propagent pas d’énergie et génèrent, comme les modes non propagatifs, un champ acoustique localisé dans une zone proche de leur lieu d’excitation. Cette région est d’autant plus grande que la partie imaginaire de leur nombre d’onde est faible. En effet celle-ci caractérise l’atténuation de l’onde le long de la plaque. La partie réelle du nombre d’onde, quant à elle, correspond à un terme de phase et peut être choisie positive ou négative. De ce fait, deux ensembles de nombres d’ondes complexes sont représentés sur la figure I.9. Ils correspondent tous les deux à des modes atténués d’une plaque d’aluminium. Comme pour les modes non propagatifs, leur partie imaginaire a été choisie négative de telle sorte que leur direction d’atténuation corresponde à l’axe x_2 .



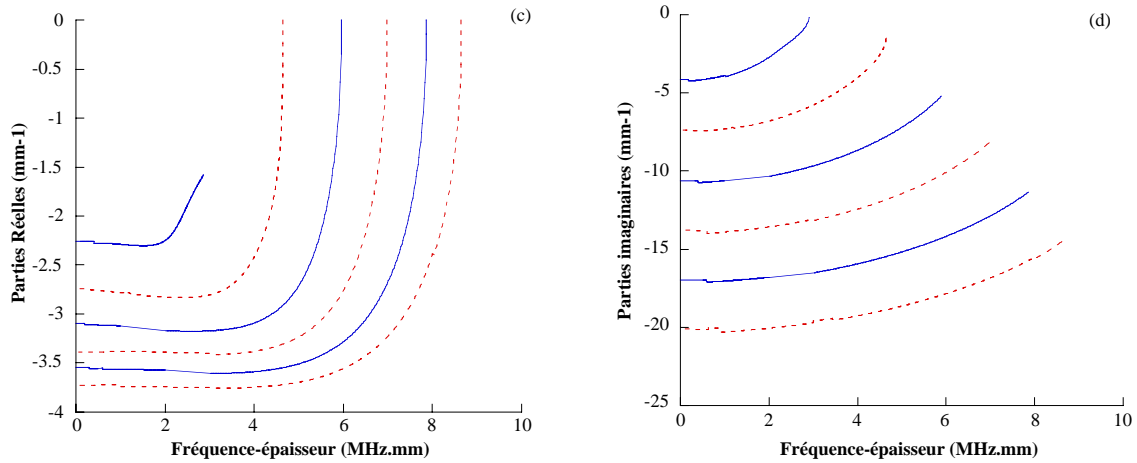


figure I.9 : Nombres d'onde complexes des modes de Lamb atténués dans une plaque d'aluminium, modes symétriques (—) et modes antisymétriques (---)
 (a) parties réelles positives ; (b) parties imaginaires imposant une atténuation selon x_2 .
 (c) parties réelles négatives ; (d) parties imaginaires imposant une atténuation selon x_2 .

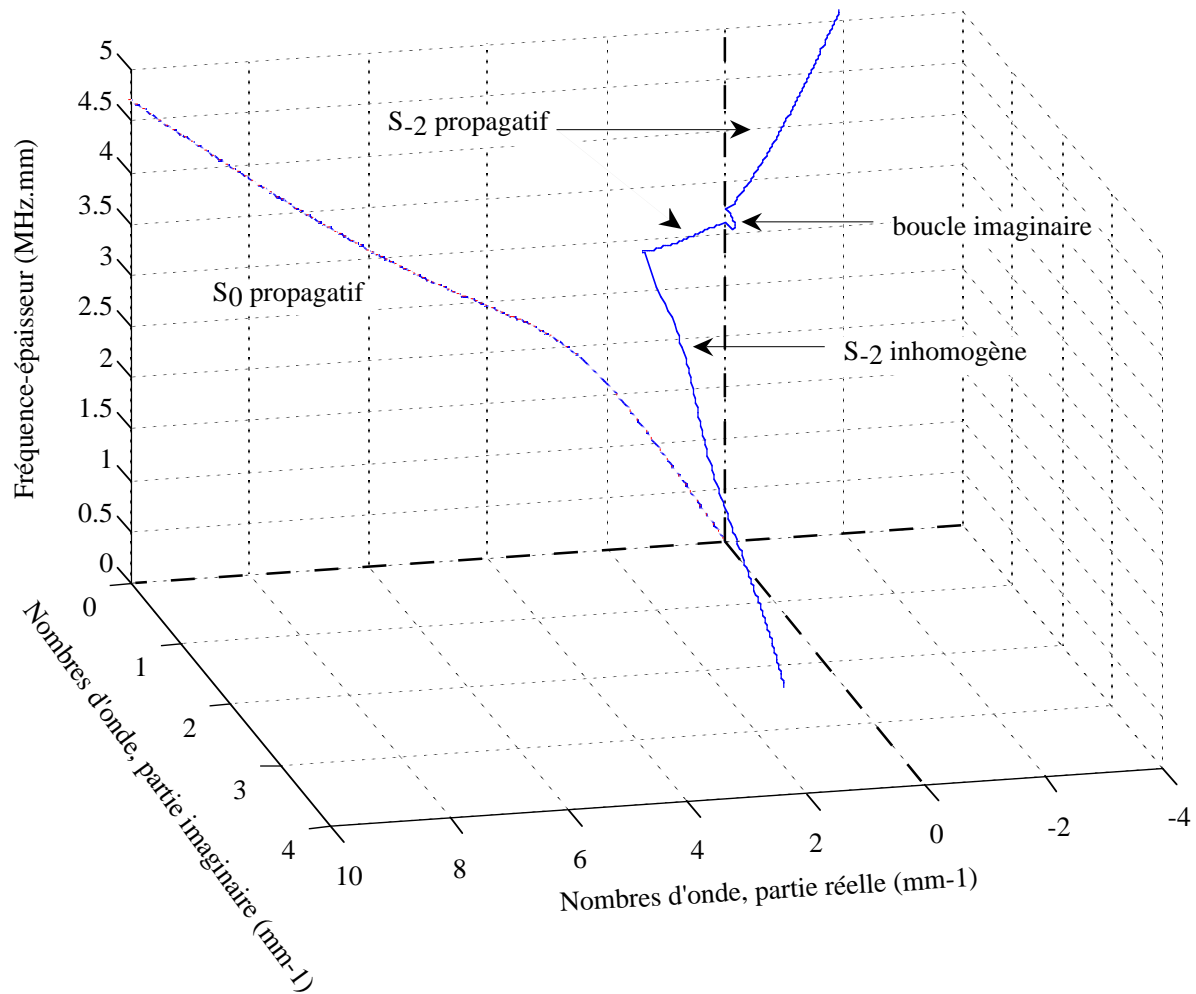
En observant la figure I.9, il semble que les courbes présentées soient incomplètes. En effet, elles s'arrêtent brutalement à partir de certains produits fh , et leurs parties imaginaires semblent être inachevées. Ces résultats doivent alors être comparés aux figures I.4 et I.7 pour se rendre compte que les solutions réelles, imaginaires et complexes sont connectées entre elles. Il est alors possible de ne plus dissocier la nature des solutions en fonction de leur nature mathématique, et de donner un sens physique au terme de *mode* en suivant, dans le plan complexe, une onde donnée de la fréquence nulle aux hautes fréquences. Ces notions sont détaillées dans le paragraphe suivant.

I.2.6 Numérotation des modes

I.2.6.1 Notation

Avant de définir une numérotation des modes de Lamb, il est nécessaire de préciser les notations qui vont être utilisées. Ces notations permettront, non seulement, de repérer le mode étudié, mais aussi de connaître sa direction de propagation ou d'atténuation. Cette distinction est importante car les solutions des équations de dispersions existent par paire correspondant à des nombres d'ondes opposés. Il existe, par exemple, un mode S_0 progressif, propageant de l'énergie dans la direction des x_2 croissants, et un mode S_0 rétrograde, propageant de l'énergie dans la direction des x_2 décroissants. Ces deux ondes doivent être différenciées pour traiter correctement un problème de diffraction et dissocier, par exemple, les ondes réfléchies des ondes transmises. Dans la suite du document, une onde de Lamb sera donc représentée par une lettre capitale (S ou A selon la symétrie du mode) complétée par une lettre en indice. Une lettre minuscule n désignera un mode dont la direction de propagation est quelconque. Par contre, une lettre majuscule N représentera toujours un mode transportant de l'énergie, ou s'atténuant exponentiellement dans la direction des x_2 croissants. Un mode rétrograde sera noté par une lettre majuscule précédée d'un signe moins : $-N$. Cette lettre majuscule peut être remplacée par un numéro dont la signification est donnée au paragraphe suivant.

1.2.6.2 Suivi des modes


 figure 1.10 : Modes de Lamb symétriques S_0 et S_2 dans une plaque d'aluminium.

Suivre les modes consiste tout simplement à relier entre elles les courbes de dispersion des paragraphes précédents. Les points de jonction ne vont plus être vus comme des produits fréquence-épaisseur pour lesquels de nouveaux modes disparaissent ou apparaissent, mais comme des produits pour lesquels les modes changent de nature et deviennent propagatifs, non propagatifs, ou atténués. Ils sont appelés *produits fréquence-épaisseur critiques* et englobent les *produits fréquence-épaisseur de coupure*, pour lesquels les nombres d'ondes des modes s'annulent. En mettant bout à bout les différentes branches réelles, imaginaires et complexes, il est alors possible de suivre un mode de la fréquence nulle, jusqu'aux hautes fréquences. Cependant, pour suivre un mode, il est plus facile de partir des hauts produits fh , où il possède un nombre d'onde réel, et d'effectuer un suivi en faisant décroître le produit fréquence-épaisseur. Il est tout d'abord important de savoir de quel mode il s'agit. Une fois que sa famille est déterminée (symétrique ou antisymétrique), il faut lui associer un numéro, entre zéro et l'infini, défini, au produit fréquence-épaisseur considéré, par l'ordre décroissant des nombres d'ondes réels de cette famille. Il convient de plus de lui adjoindre un signe qui indiquera la direction de propagation de l'onde. Le suivi des modes de Lamb est ensuite réalisé de telle sorte qu'un mode **transporte de l'énergie, ou décroisse exponentiellement, toujours dans la même direction** [65]. Ce critère permet de déterminer, aux produits

fréquence-épaisseur critiques, quelle branche (réelle, imaginaire ou complexe) doit être associée à un mode donné. La figure I.10 présente une vue tridimensionnelle des ondes S_0 et S_{-2} .

Il est maintenant possible d'analyser plus en détail la bande de produits fréquence-épaisseur pour laquelle S_1 est supposé être rétrograde. La figure I.11 indique que, pour les produits compris entre 2,9 et 3,105 MHz.mm, ce mode possède deux nombres d'ondes.

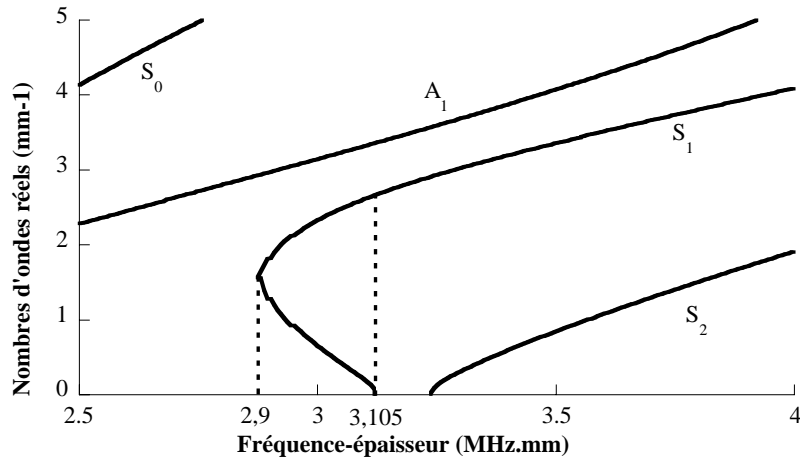


figure I.11 : Bande de produits fréquence-épaisseur pour laquelle S_1 est supposé être rétrograde dans une plaque d'aluminium.

Ce graphe reproduit, en fait, une erreur courante dans la littérature due au fait qu'en général seuls les modes propagatifs sont considérés. Cependant, comme exprimé dans l'ouvrage de Auld [65], il n'est pas concevable qu'une même onde possède, à un produit fh donné, deux nombres d'ondes (et donc deux vitesses de phase et deux vitesses de groupe). En fait, à haut produit fréquence-épaisseur, S_1 possède un nombre d'onde réel positif. Lorsque fh diminue, il apparaît une valeur où l'onde change de nature, c'est un produit fréquence-épaisseur critique de S_1 pour lequel le mode devient atténué. Les racines réelles existant au voisinage du produit fréquence-épaisseur critique et généralement considérées comme étant caractéristiques d'une nature rétrograde du mode S_1 forment en fait une branche réelle du mode S_{-2} qui est une onde propagative rétrograde (figure I.10). La partie qui correspond à la branche auparavant attribuée à S_1 est maintenant associée à une onde dont la direction de propagation et/ou d'atténuation est toujours la même quels que soient les produits fréquence-épaisseur. En effet, à haute fréquence, S_{-2} est une onde propagative rétrograde. Lorsque fh diminue, le nombre d'onde de S_{-2} s'annule une première fois, et le mode devient non propagatif. Comme sa propagation, son atténuation s'effectue dans le sens rétrograde. Le mode redevient ensuite propagatif, lors d'un second produit fréquence-épaisseur de coupure (cette branche était auparavant attribuée à S_1). Enfin, S_{-2} reperd son caractère purement propagatif pour devenir atténué jusqu'à la fréquence nulle.

Cette numérotation des modes permet de lever certaines ambiguïtés concernant les directions de propagation des modes et assure le suivi d'un mode donné, de la fréquence nulle, jusqu'à la fréquence infinie. Il est important de noter que, dans cette représentation, le mode S_1 ne possède pas de produit fréquence-épaisseur de coupure alors que le mode S_{-2} (respectivement S_2) en possède deux.

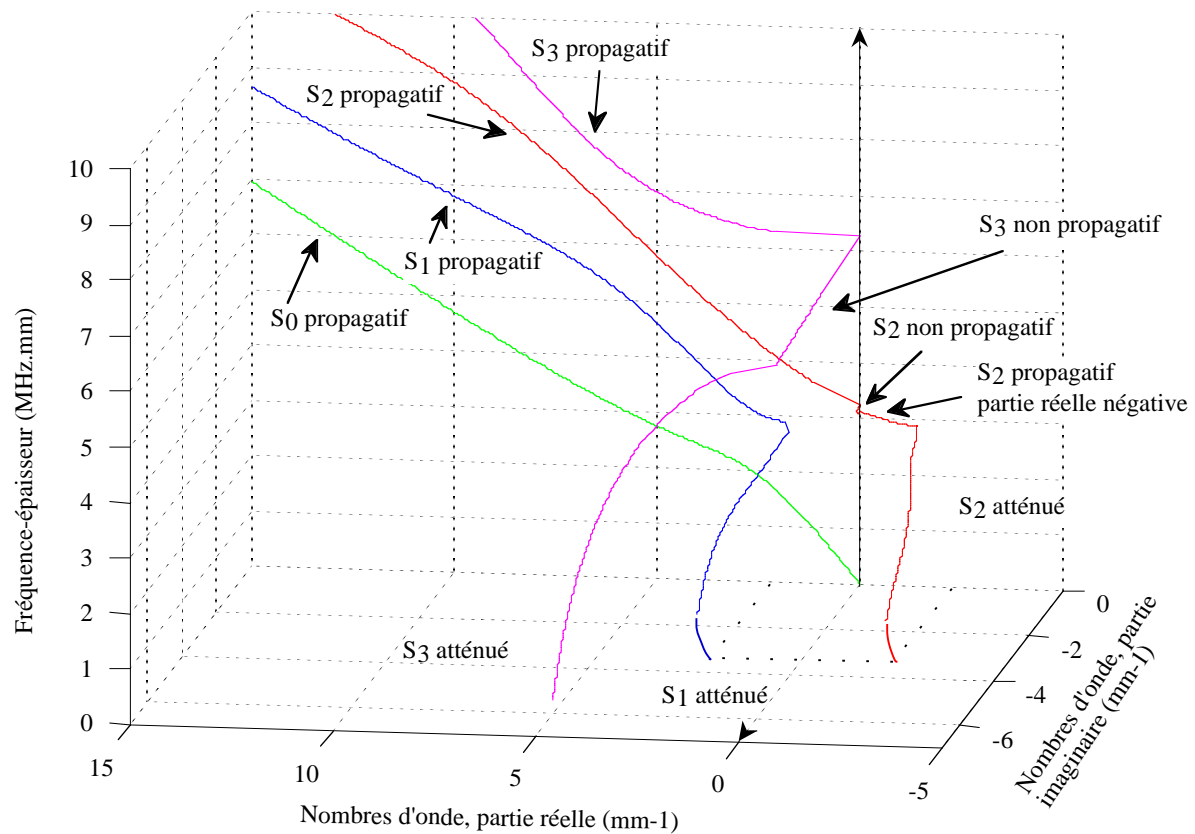


figure I.12 : Modes de Lamb symétriques propagatifs, non propagatifs et atténués, dans une plaque d'aluminium.

La figure I.12 représente les courbes de dispersion des ondes de Lamb symétriques, calculées pour une plaque d'aluminium. Il est alors possible de voir l'évolution de la nature de chaque mode, en fonction du produit fréquence-épaisseur. Il ne sera pas donné de courbe analogue pour les modes antisymétriques. En effet, des ambiguïtés apparaissent lors de l'attribution des branches complexes que le critère de direction de propagation/atténuation ne lève pas. Aucune information supplémentaire n'a été trouvée dans la littérature, et tous les graphes tridimensionnels recensés ne traitent que des ondes symétriques. De ce fait, il n'a pas été possible de reconstituer les modes de Lamb antisymétriques dans l'espace complexe.

Le sujet de ce mémoire ne concernant pas précisément le problème du suivi des modes de Lamb, ce thème ne sera pas développé plus en avant. Il est cependant important de comprendre les différentes natures des modes de Lamb pour aborder les problèmes de diffraction d'ondes par des défauts. Pour obtenir des renseignements plus précis, il est possible de se référer aux travaux de Onoe [84], Mindlin [85][86], Merkulov [87] et Miklowitz [88] dans lesquels une étude complète de ces phénomènes est menée. Meeker et Meitzler reprennent ces travaux de manière synthétique dans l'ouvrage cité en référence [89]. Une étude théorique et expérimentale sur les courbes de dispersion complexes a été menée par Zemanek [90] et, plus récemment, la topologie du spectre des ondes complexes d'une plaque couplée à un fluide a été étudiée [91]. Ce dernier travail permet de comprendre les courbes de dispersion des ondes de Lamb complexes et leur évolution en fonction du couplage entre la plaque et un fluide environnant.

I.2.7 Produits fréquence-épaisseur de coupure : équation analytique

Les produits fréquence-épaisseur critiques et de coupure possèdent des valeurs spécifiques. Onoe [84], Mindlin [86], et Miklowitz [88] indiquent que les produits critiques apparaissent pour les points où la pente des courbes 3D ci-dessus s'annule. Autrement dit, les produits fh critiques sont obtenus lorsque :

$$\frac{\partial f}{\partial \text{Re}(k_2)} = 0, \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial \text{Im}(k_2)} = 0. \quad (\text{I.30})$$

où f est la fréquence et k_2 le nombre d'onde. Les produits fréquence-épaisseur de coupures, qui sont des produits fh critiques, correspondent, quant à eux, aux points de rencontre des courbes de dispersion et de l'axe des fréquences. Ils correspondent aux solutions nulles des équations (I.24) et (I.25). Ils sont donnés par [65] :

$$\begin{aligned} & k_T h = N\pi \quad (N \in 2IN) \\ \text{et} & \\ & k_L h = N\pi \quad (N \in 2IN + 1) \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

pour les modes symétriques, et

$$\begin{aligned} & k_T h = N\pi \quad (N \in 2IN + 1) \\ \text{et} & \\ & k_L h = N\pi \quad (N \in 2IN) \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

pour les modes antisymétriques. k_L et k_T sont respectivement les nombres d'ondes des ondes de volume longitudinale et transversale. Les ensembles $2IN$ et $2IN + 1$ représentent respectivement les entiers pairs et impairs.

Le tableau I.1 ci-dessous présente les valeurs des premières produits fréquence-épaisseur de coupures déterminés pour les modes de Lamb d'une plaque d'aluminium pour laquelle les vitesses longitudinales et transversales sont respectivement $V_L = 6,464 \text{ mm}/\mu\text{s}$ et $V_T = 3,105 \text{ mm}/\mu\text{s}$. Ces données peuvent être comparées avec les courbes de dispersion précédemment exposées.

N	Modes symétriques	Modes antisymétriques
1	fh = 3,232 MHz.mm	fh = 1,552 MHz.mm
2	fh = 3,105 MHz.mm	fh = 6,464 MHz.mm
3	fh = 9,696 MHz.mm	fh = 4,658 MHz.mm
4	fh = 6,210 MHz.mm	fh = 12,928 MHz.mm

tableau I.1 : premiers produits fréquence-épaisseur de coupure (MHz.mm) des modes de Lamb d'une plaque d'aluminium.

I.2.8 Champs de vitesse et de contrainte

Les champs de vitesse et de contrainte de quelques ondes de Lamb symétriques et antisymétriques sont maintenant exposés. Cette étude est très précieuse lors de la modélisation de la diffraction d'une onde puisqu'elle permet de déterminer la sensibilité d'un

mode à un défaut donné [22]-[23] ou de prédire les coefficients de diffraction. De plus, elle permet d'observer, pour un mode donné, leur évolution avec le produit fh . Enfin, l'influence de la nature (réelle, imaginaire, ou complexe) du nombre d'onde est aussi identifiée. En particulier, une attention particulière pourra être portée à l'étude du mode S_2 puisque cette onde possède un nombre d'onde qui est, selon la fréquence, imaginaire, complexe ou réel négatif ou positif.

1.2.8.1 Expressions analytiques des champs acoustiques

En premier lieu, les expressions analytiques permettant de calculer les champs de vitesse et de contrainte des modes de Lamb symétriques et antisymétriques dans une plaque élastique sont rappelées. À partir de ces formes analytiques sont tracés les champs exposés dans le paragraphe suivant.

1.2.8.1.1 Champs de vitesse

Les champs de vitesse des ondes symétriques sont :

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, t) &= 2\omega e^{i(\omega t - k_2 x_2)} (A_L P_{L1} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} \sin(k_{T1} x_1)) \\ v_2(x_1, x_2, t) &= 2i\omega e^{i(\omega t - k_2 x_2)} (A_L P_{L2} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} \cos(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \quad (I.33)$$

Les champs de vitesse des ondes antisymétriques sont :

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, t) &= 2i\omega e^{i(\omega t - k_2 x_2)} (A_L P_{L1} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} \cos(k_{T1} x_1)) \\ v_2(x_1, x_2, t) &= 2\omega e^{i(\omega t - k_2 x_2)} (A_L P_{L2} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} \sin(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \quad (I.34)$$

1.2.8.1.2 Champs de contrainte

Les champs de contrainte des ondes symétriques sont :

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, x_2, t) &= \left\{ \begin{aligned} &-2iC_{11}(A_L P_{L1} k_{L1} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} k_{T1} \cos(k_{T1} x_1)) \\ &-2iC_{12} k_2 (A_L P_{L2} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} \cos(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \right\}, \\ \sigma_2(x_1, x_2, t) &= \left\{ \begin{aligned} &-2iC_{12} (A_L P_{L1} k_{L1} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} k_{T1} \cos(k_{T1} x_1)) \\ &-2iC_{22} k_2 (A_L P_{L2} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} \cos(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \right\}, \\ \sigma_6(x_1, x_2, t) &= \left\{ \begin{aligned} &2C_{66} (-k_2 (A_L P_{L1} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} \sin(k_{T1} x_1))) \\ &-(A_L P_{L2} k_{L1} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} k_{T1} \sin(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (I.35)$$

Les champs de contrainte des ondes antisymétriques sont :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1(x_1, x_2, t) &= \left\{ \begin{aligned} &-2C_{11}(A_L P_{L1} k_{L1} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} k_{T1} \sin(k_{T1} x_1)) \\ &-2C_{12} k_2 (A_L P_{L2} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} \sin(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \right\}, \\
 \sigma_2(x_1, x_2, t) &= \left\{ \begin{aligned} &-2C_{12}(A_L P_{L1} k_{L1} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} k_{T1} \sin(k_{T1} x_1)) \\ &-2C_{22} k_2 (A_L P_{L2} \sin(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} \sin(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \right\}, \\
 \sigma_6(x_1, x_2, t) &= \left\{ \begin{aligned} &C_{66} (-2ik_2 (A_L P_{L1} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T1} \cos(k_{T1} x_1))) \\ &-2i(A_L P_{L2} k_{L1} \cos(k_{L1} x_1) + A_T P_{T2} k_{T1} \cos(k_{T1} x_1)) \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned} \tag{I.36}$$

Dans ces expressions, les coefficients A_L et A_T sont inconnus. Le principe de leur détermination est exposé dans l'annexe B.

1.2.8.2 Champs de vitesse et de contrainte des modes symétriques

Cette section présente les champs de vitesse et de contrainte des trois premiers modes de Lamb symétriques pour différents produits fréquence-épaisseur. L'évolution de l'amplitude des composantes de la vitesse ou de la contrainte à travers l'épaisseur d'une plaque d'épaisseur 8 mm est obtenue, à partir des relations (I.33) à (I.36). Pour les modes propagatifs et non propagatifs, les nombres d'ondes sont réels ou imaginaires purs et les champs calculés sont des combinaisons de fonctions sinusoïdales ou des combinaisons de fonctions hyperboliques. Pour une composante donnée du champ de vitesse ou de contrainte, tous les points dans l'épaisseur de la plaque possèdent donc la même phase. Par soucis de présentation, chaque composante est alors tracée avec une phase supposée nulle et le déphasage par rapport à la composante normale (direction 1) du champ de vitesse est donné. Pour les modes propagatifs, un déphasage supplémentaire résultant de la propagation de l'onde peut être ajouté sous la forme d'un terme multiplicatif égal à $e^{-ik_2 x_2}$. Pour les modes atténués, les nombres d'ondes sont complexes. De ce fait, les champs de vitesse et de contrainte ((I.33)-(I.36)) ne sont plus des combinaisons de fonctions sinusoïdales. À travers l'épaisseur de la plaque, les points ne vibrent alors plus en phase. De ce fait, l'évolution du module de chaque composante est tracée à travers l'épaisseur de la plaque et aucune indication concernant la phase n'est donnée.

Dans les graphes ci-dessous, les champs de vitesse ou de contrainte présentés correspondent à des modes normalisés en puissance. De ce fait, les champs d'une onde à deux produits fréquence-épaisseur différents ou de deux modes différents sont comparables. Il est possible de dire, par exemple, lequel possède la vitesse normale la plus importante en surface de la plaque, ou quel mode génère le plus de contraintes au sein du matériau. Par exemple, pour une même énergie transportée le long de la plaque, la composante normale de la vitesse du mode S_0 est trois fois moins importante, en surface de la plaque, à 1 MHz.mm qu'à 2 MHz.mm (figure I.13). La procédure de normalisation des modes de Lamb sera explicitée dans le chapitre II.

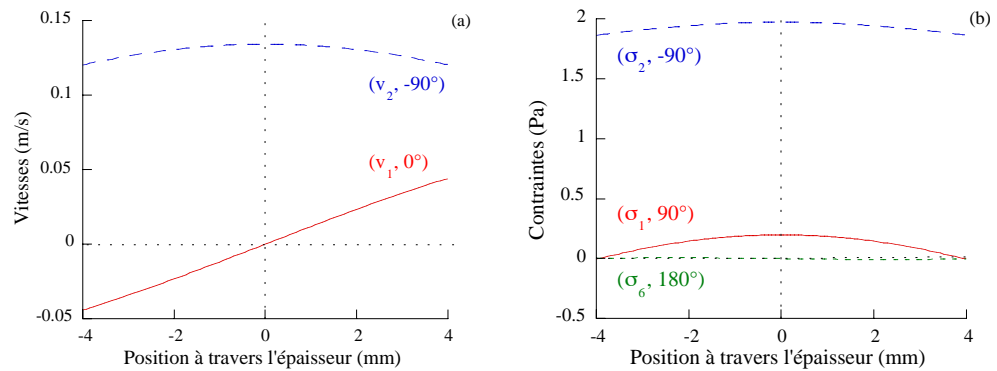
1.2.8.2.1 Mode S_0

Pour toutes les fréquences, le mode S_0 est un mode propagatif. Son nombre d'onde est toujours réel. La composante dans le plan du champ de vitesse est alors déphasée de -90° par

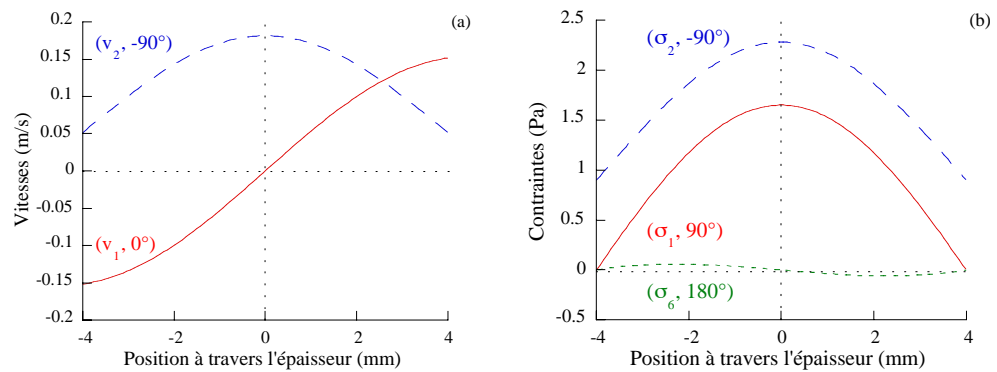
rapport à la composante normale [92]. De même, il est observé que la composante normale du champ de contrainte possède un déphasage de 90° par rapport à la composante normale du champ de vitesse, que la contrainte de compression dans le plan est déphasée, par rapport à la compression normale de -180° et que la contrainte de cisaillement est déphasée de 90° . Ces remarques sont applicables à tous les modes propagatifs.

À bas produit fh , le mode S_0 possède un champ de vitesse et de contrainte dont les composantes principales sont longitudinales (direction 2). Lorsque le produit fréquence-épaisseur augmente, les composantes normales des champs et la contrainte de cisaillement prennent de l'importance et le mode perd sa prédominance longitudinale. Il est cependant important de noter la continuité dans l'évolution des champs acoustiques.

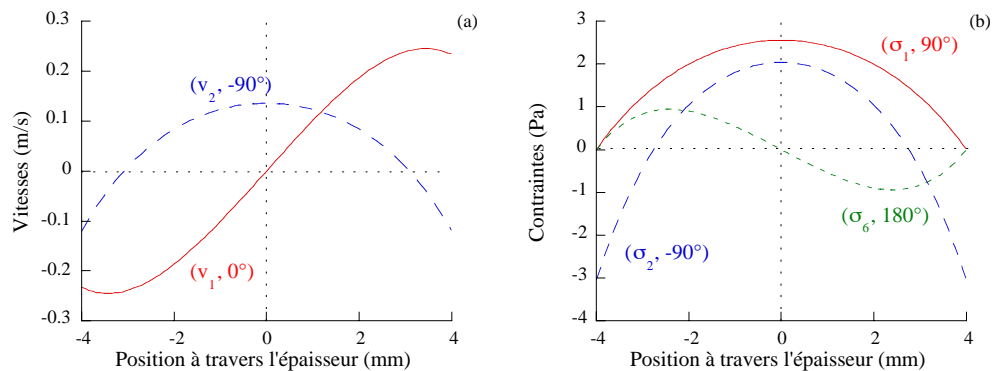
1 MHz.mm



2 MHz.mm



3 MHz.mm



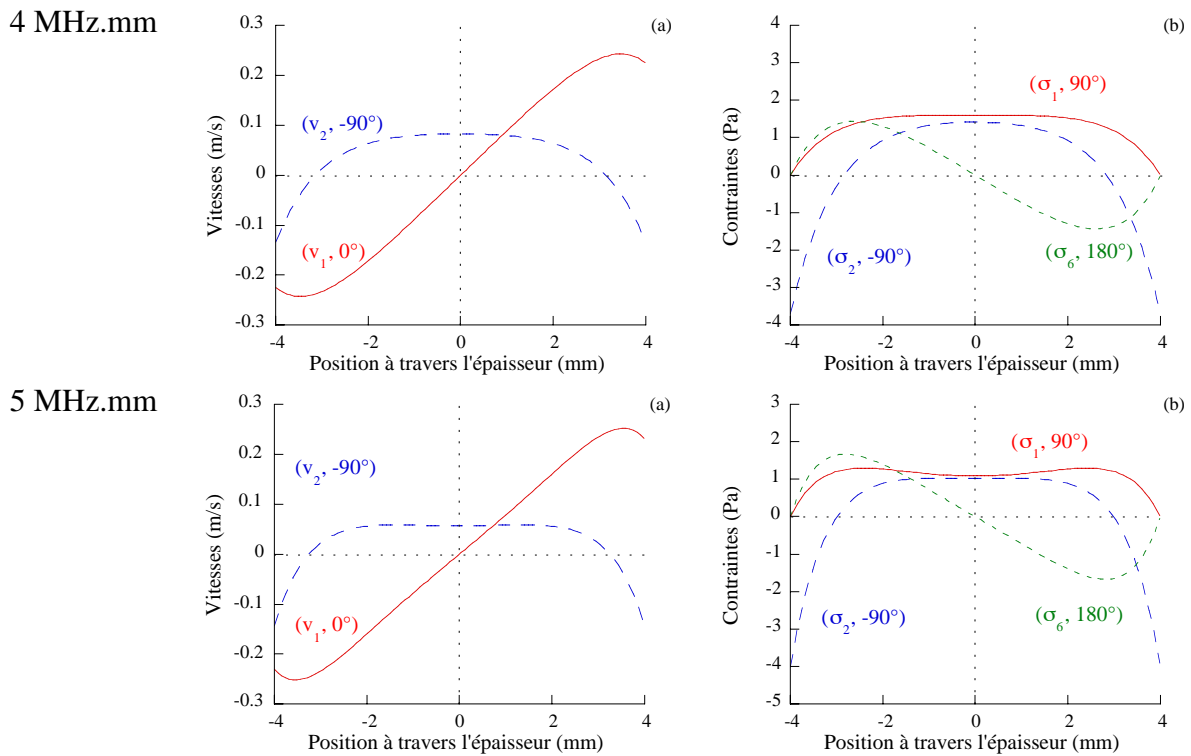


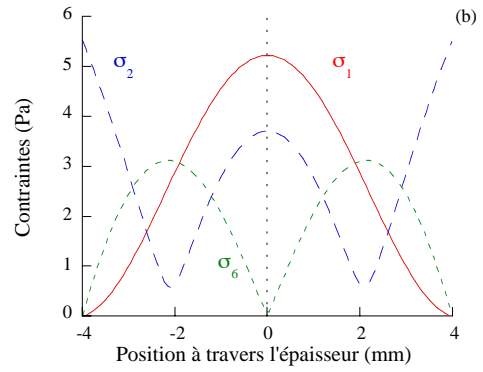
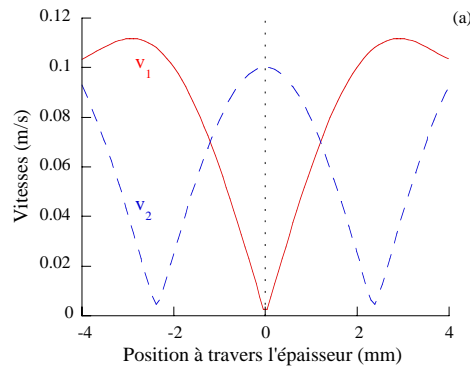
figure I.13 : Évolution avec le produit fréquence-épaisseur des champs
(a) de vitesse et (b) de contrainte du mode S_0 .

I.2.8.2.2 Mode S_1

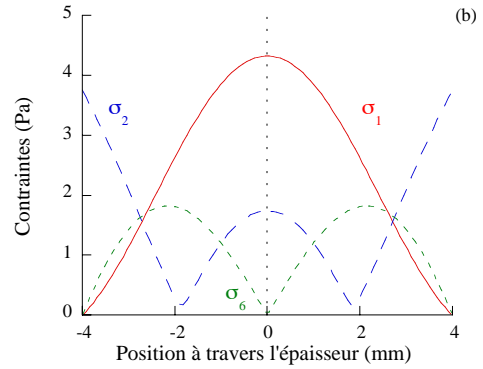
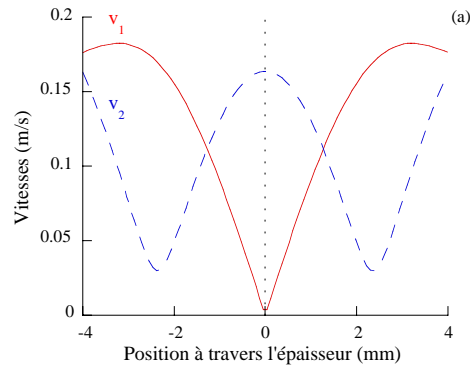
Comme il a été vu dans le paragraphe I.2.6 concernant la numérotation des modes, le mode S_1 n'est propagatif qu'à partir d'un certain produit fh . En dessous de son produit fréquence-épaisseur critique, il est atténué. Les champs de vitesse et de contrainte correspondant aux produits fh de 1 et 2 MHz.mm sont donc les champs d'une onde possédant un nombre d'onde complexe (figure I.14). Bien que les points ne vibrent pas en phase, les modules des différentes composantes évoluent de façon continue avec fh et ne présentent pas de différences notables avec les champs du mode propagatif (à partir de 3 MHz.mm). Le passage par le produit fréquence-épaisseur critique conduit seulement les différentes composantes des champs de vitesse et de contrainte à « s'accorder ». Pour une direction donnée, les points à travers l'épaisseur de la plaque vibrent alors en phase et l'onde devient propagative.

Il est important de noter que, contrairement à S_0 , le mode S_1 possède à toutes les fréquences des champs de vitesse et de contrainte dont les composantes sont du même ordre de grandeur. En particulier, même à bas produit fréquence-épaisseur, sa contrainte de cisaillement n'est jamais négligeable.

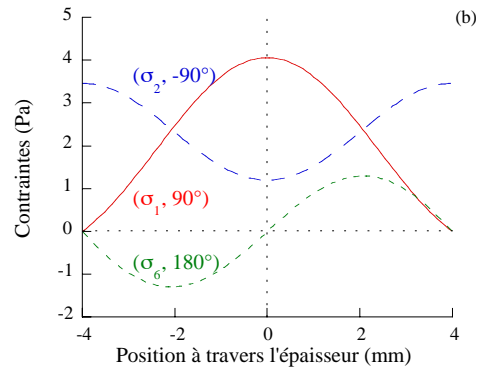
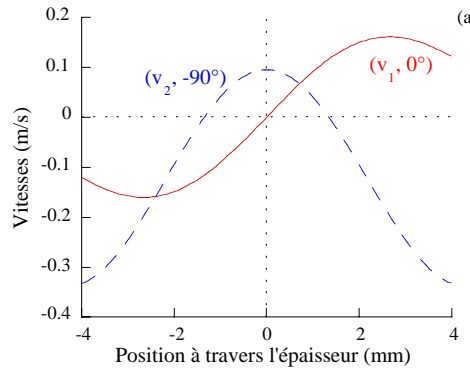
1 MHz.mm



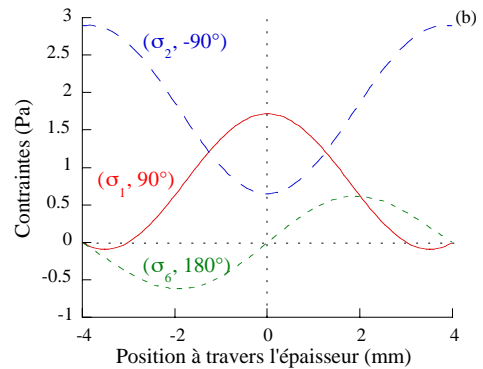
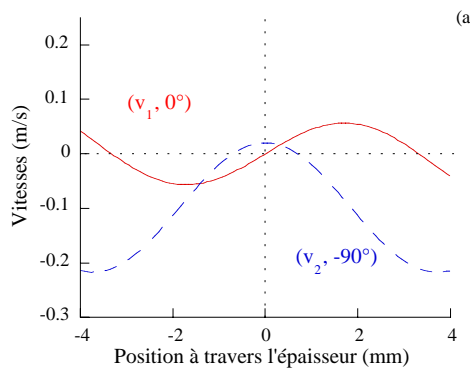
2 MHz.mm



3 MHz.mm



4 MHz.mm



5 MHz.mm

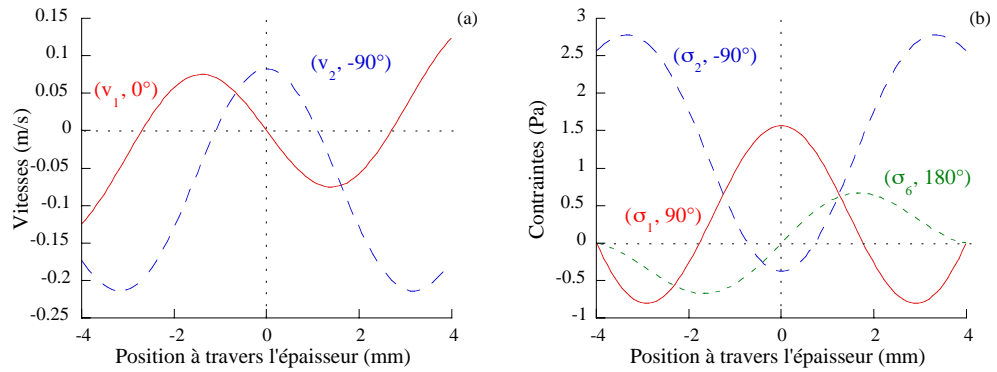
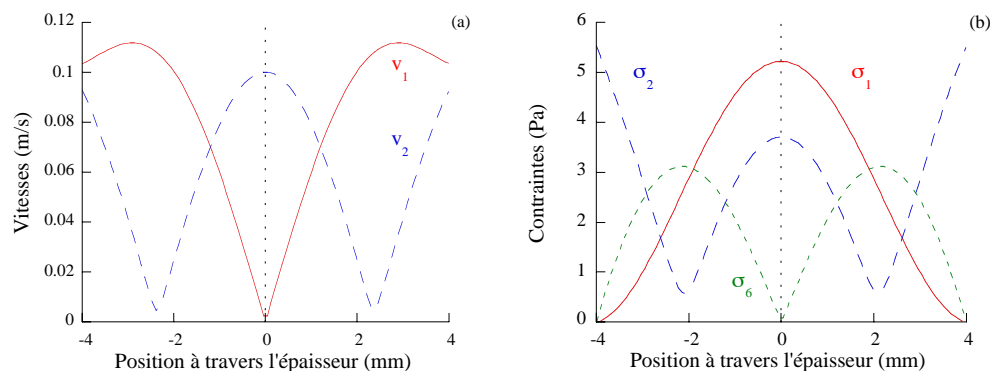


figure 1.14 : Évolution avec le produit fréquence-épaisseur des champs
(a) de vitesse et (b) de contrainte du mode S_1 .

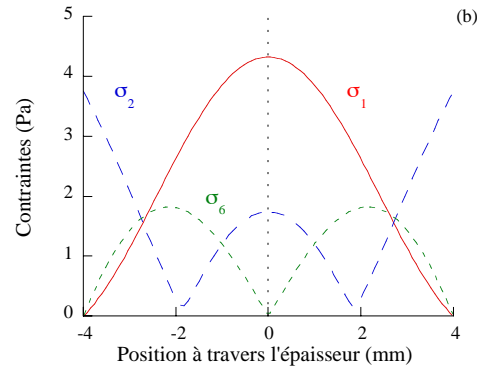
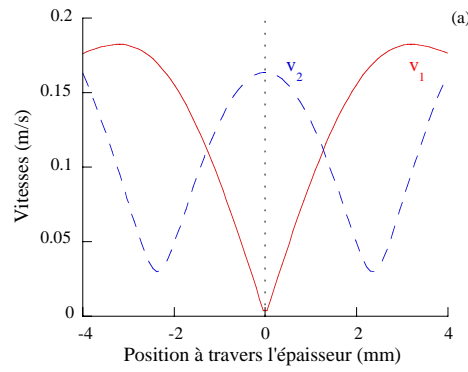
I.2.8.2.3 Mode S_2

Comme il a été vu précédemment, la nature du mode S_2 évolue de façon compliquée avec le produit fréquence-épaisseur. Lorsque fh augmente, il est consécutivement atténué avec une partie réelle de son nombre d'onde qui est négative, propagatif avec un nombre d'onde négatif, non propagatif, puis propagatif avec un nombre d'onde positif. Cependant, comme pour le mode S_1 , l'évolution, avec le produit fréquence-épaisseur, du module des composantes de différents champs acoustiques est continue, et seules les phases indiquent les changements de nature. Il est cependant intéressant de remarquer que les modules des champs de vitesse et de contrainte du mode S_2 à bas produit fh , c'est à dire lorsqu'il est atténué, sont identiques à ceux du mode S_1 . En effet, pour ces produits, les deux modes ont des nombres d'ondes conjugués. Les champs acoustiques correspondants à chacun de ces modes ont donc des modules identiques et, en chacun des points de l'épaisseur de la plaque, seuls les déphasages relatifs entre les composantes des champs de vitesse ou de contrainte diffèrent. Lorsque S_2 est non propagatif (par exemple à 3,15 MHz.mm), les deux composantes du champ de vitesse sont en phase. Cette remarque est vérifiée pour tous les modes non propagatifs et sera confirmée lors de l'étude du mode A_1 .

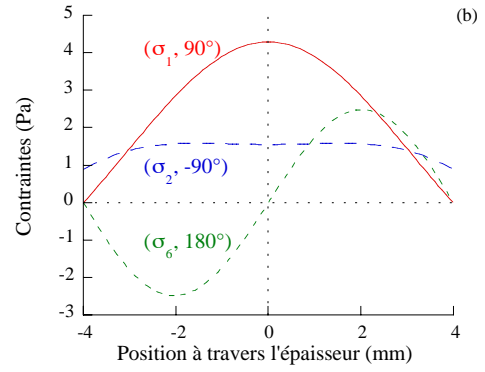
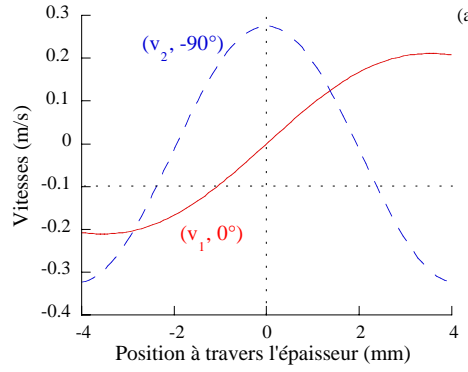
1 MHz.mm



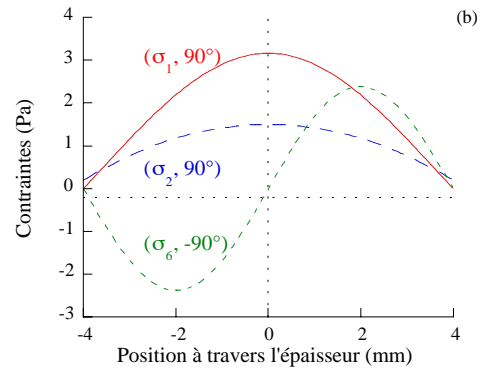
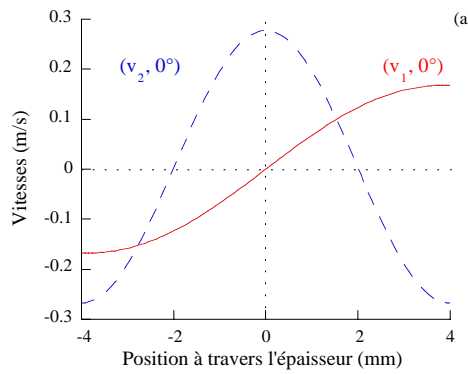
2 MHz.mm



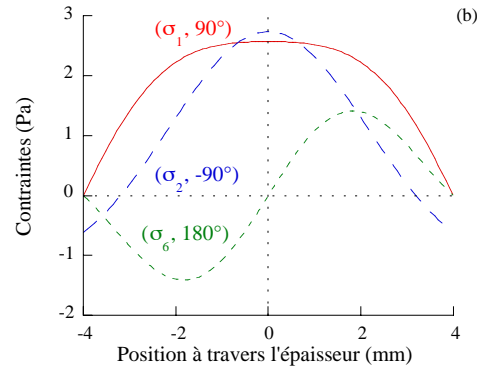
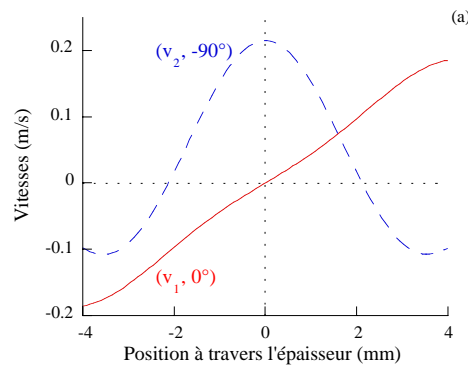
3 MHz.mm



3,15 MHz.mm



4 MHz.mm



5 MHz.mm

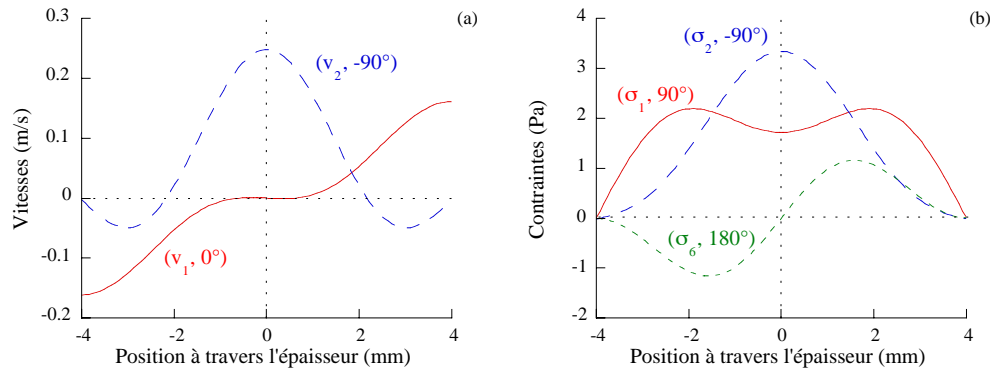


figure I.15 : Évolution avec le produit fréquence-épaisseur des champs (a) de vitesse et (b) de contrainte du mode S_2 .

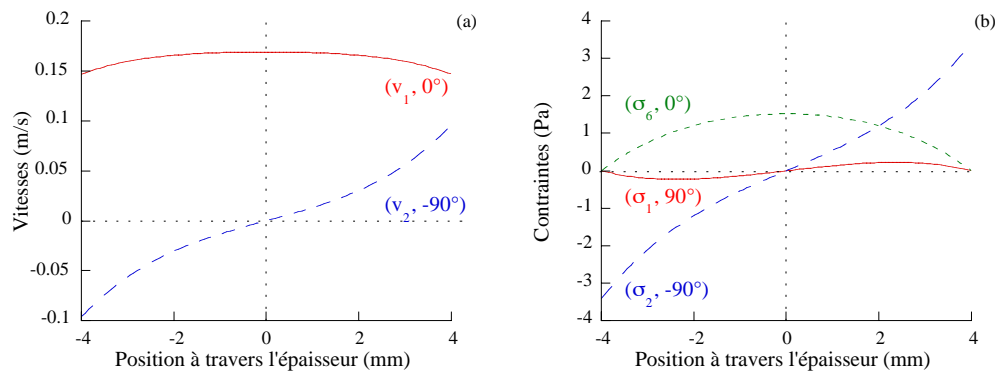
I.2.8.3 Champs de vitesse et de contrainte des antisymétriques

Pour compléter l'étude, les champs de vitesse et de contrainte des deux premiers modes antisymétriques sont maintenant présentés.

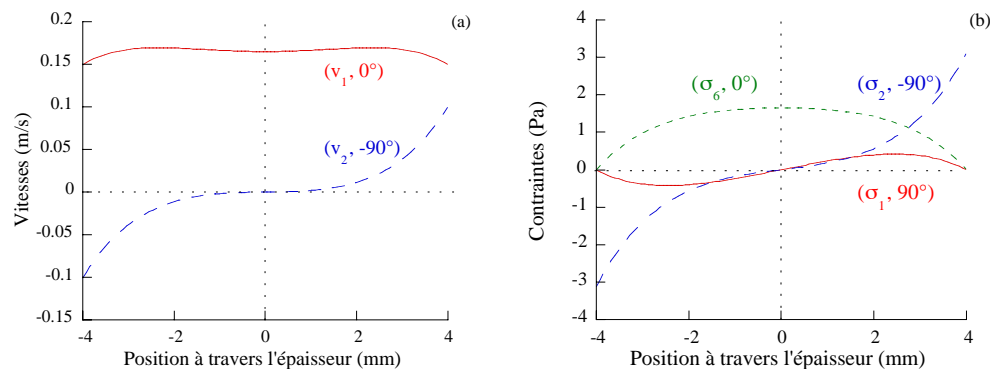
I.2.8.3.1 Mode A_0

Comme S_0 , le mode A_0 est propagatif quel que soit le produit fh . Les déphasages relatifs entre les différentes composantes des champs de vitesse et de contrainte sont donc semblables à ceux exposés lors de l'étude du premier mode symétrique. L'évolution avec le produit fréquence-épaisseur des champs de vitesse et de contrainte est toujours continue et les diverses composantes sont d'amplitudes équivalentes. À bas produit fh seulement, la contrainte de compression normale possède une amplitude faible par rapport aux deux autres composantes du champ de contrainte.

1 MHz.mm



2 MHz.mm



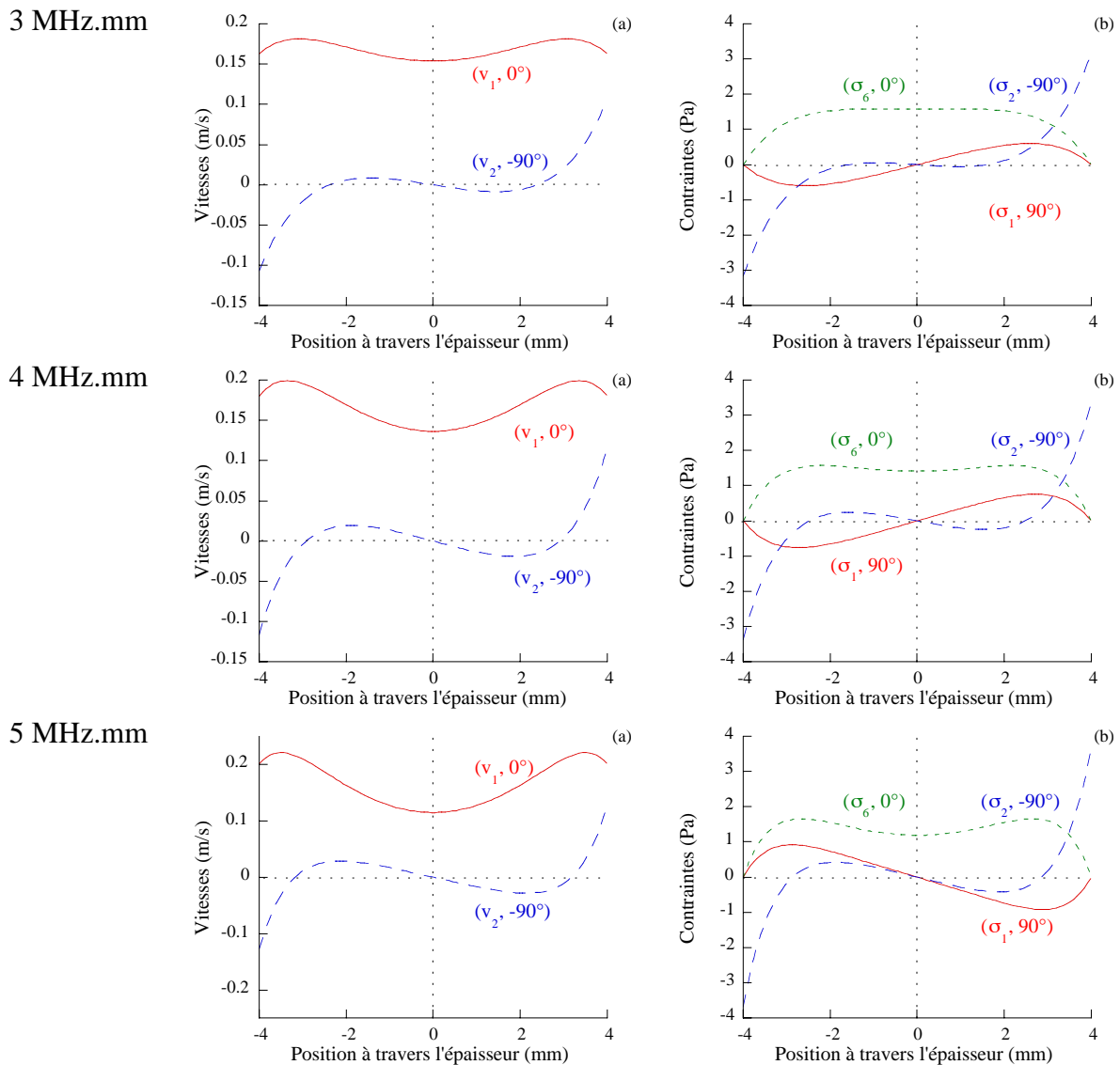
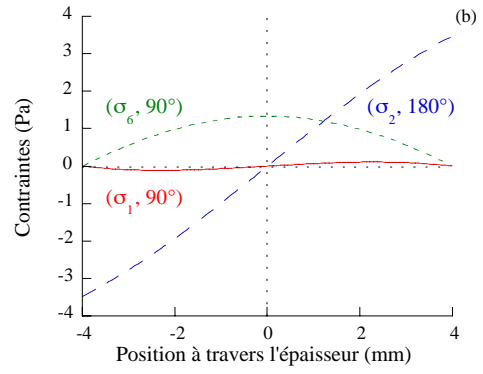
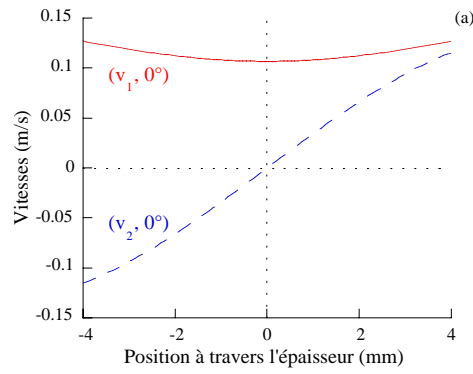


figure I.16 : Évolution avec le produit fréquence-épaisseur des champs
(a) de vitesse et (b) de contrainte du mode A_0 .

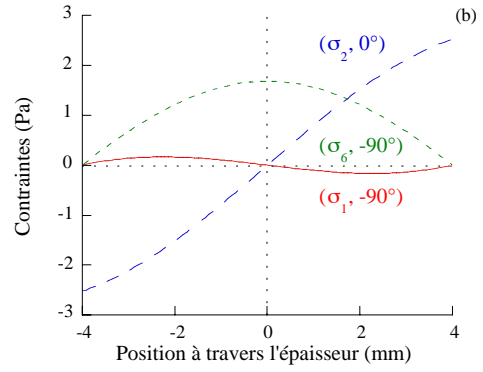
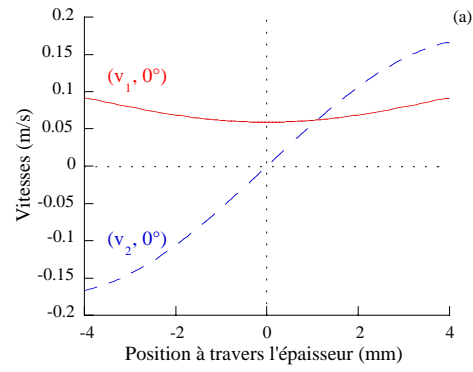
I.2.8.3.2 Mode A_1

À bas produit fréquence-épaisseur, le mode A_1 est non propagatif. Les deux composantes du champ de vitesse sont donc en phase. Par la suite, il devient propagatif avec un déphasage de -90° entre v_1 et v_2 . À bas produit fh , la compression normale est négligeable devant les deux autres composantes. Par contre, la contrainte de cisaillement est importante. Elle est même prédominante au produit fréquence-épaisseur de 1,5 MHz.mm. Par la suite, celle-ci diminue et se concentre dans le centre de la plaque à 4 MHz.mm.

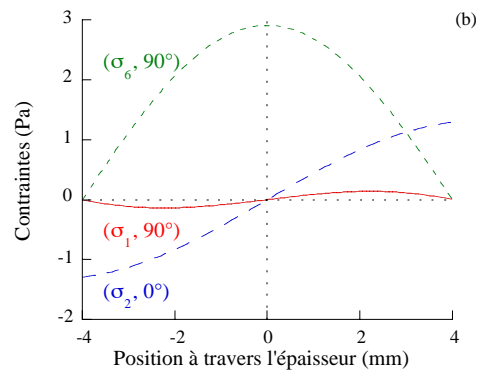
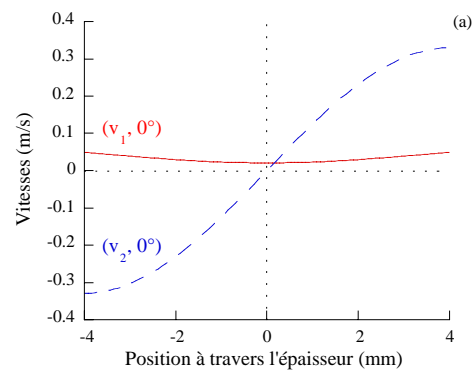
0,5 MHz.mm



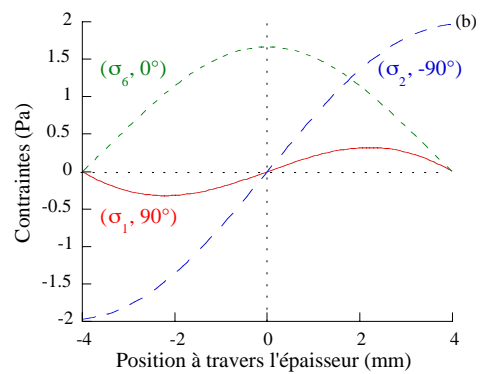
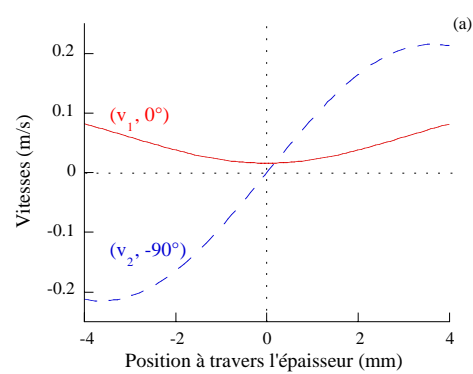
1 MHz.mm



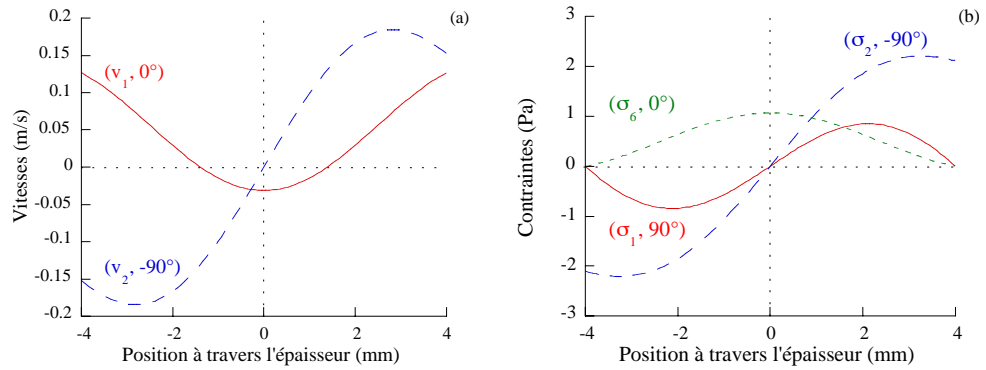
1,5 MHz.mm



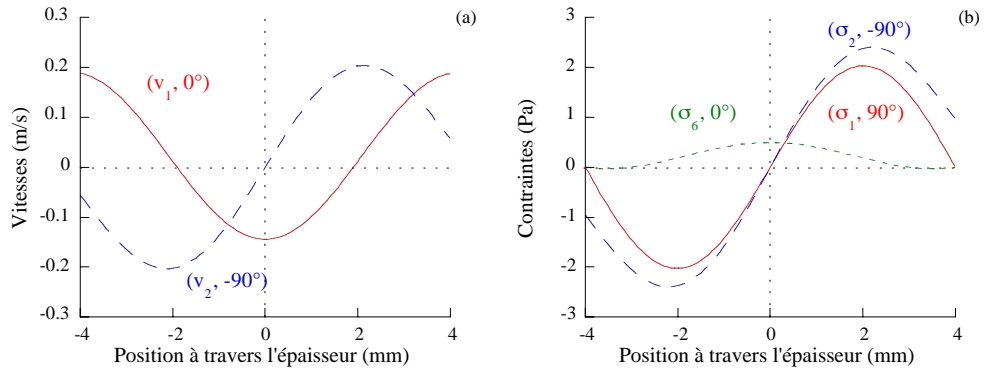
2 MHz.mm



3 MHz.mm



4 MHz.mm



5 MHz.mm

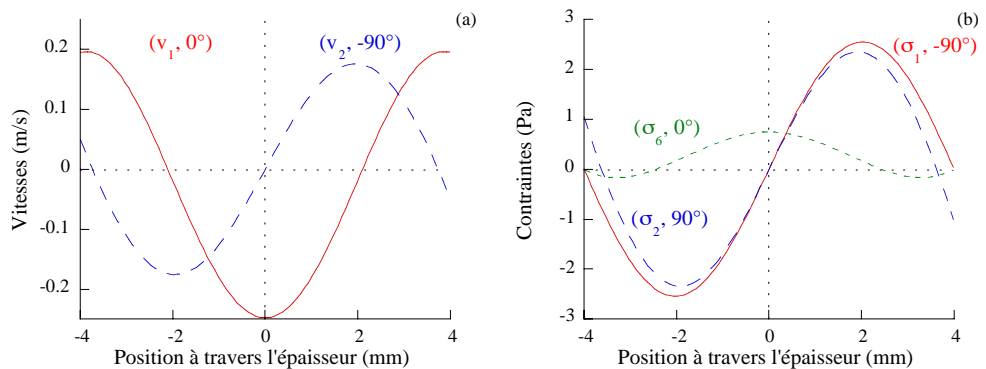


figure I.17 : Évolution avec le produit fréquence-épaisseur des champs (a) de vitesse et (b) de contrainte du mode A_1 .

I.3. Conclusion

Quelques notions fondamentales de la propagation acoustique dans les milieux solides ont tout d'abord été rappelées. L'écriture de conditions de contraintes nulles sur deux plans parallèles a ensuite permis de modéliser la propagation d'ondes dans les plaques placées dans le vide. En particulier, ces ondes ont été classées selon leur nature symétrique ou antisymétrique et les équations de dispersion ont été explicitées pour chacune des familles. La résolution de ces équations, dans le plan complexe, a permis de mettre en évidence trois types de modes de Lamb : les ondes propagatives qui possèdent des nombres d'ondes réels, les ondes non propagatives dont le nombre d'onde est imaginaire et les ondes atténuées correspondant aux nombres d'ondes complexes. Il a alors été possible d'observer que les branches réelles, imaginaires ou complexes, solutions des équations de dispersion, étaient reliées entre elles. Une représentation tridimensionnelle a alors été exposée. Elle permet de suivre l'évolution, avec la fréquence, des caractéristiques des modes de Lamb (par exemple, la vitesse de phase ou le nombre d'onde). En particulier, certains produits fréquence-

épaisseur, appelés critiques, ont été mis en évidence. Ils correspondent aux produits fh pour lesquels un mode donné change de type. L'onde S_2 possède, par exemple, trois produits fh critiques et ce mode est alternativement atténué, propagatif ou non propagatif. Enfin, l'évolution, avec le produit fréquence-épaisseur, des champs de vitesse et de contrainte de certains modes de Lamb a été exposée. Il est ainsi possible d'observer que, pour une onde donnée, ces champs évoluent continûment avec le produit fh . De plus, le type de l'onde est en relation étroite avec la phase des déplacements (ou des contraintes) que génère le mode en différentes positions de l'épaisseur de la plaque.

Quelques perspectives peuvent être données à ce premier chapitre. Il est, tout d'abord, important de noter que pour les bas produits fh , certaines lenteurs de phase des ondes de Lamb divergent. Lors de la résolution des équations de dispersion, il faut alors élargir considérablement les intervalles de recherche. Il semble donc intéressant de résoudre, pour ces produits fréquence-épaisseur, les équations de dispersion sous la forme de nombres d'ondes qui, eux, restent bornés. Ce principe de résolution a déjà été mis en œuvre par Pavlakovic et Lowe [93]-[94] mais, bien qu'elle ne présente qu'une modification très faible de la procédure d'obtention des solutions sous forme de lenteur, cette résolution n'a pas été implémentée puisque les applications numériques effectuées dans cette étude ne le justifiaient pas. Remarquons ensuite que les parties imaginaires des solutions complexes des équations de dispersion semblent former une suite harmonique de la forme $u_n = u_0 + nr$. Ce fait, qui doit tout d'abord être confirmé, pourrait être utilisé pour rechercher de manière encore plus rapide les solutions complexes. En effet, une fois r déterminé (il suffit de deux racines), les parties imaginaires des solutions pourraient être trouvées à partir de la relation ci-dessus et seule une recherche sur les parties réelles devrait être effectuée.

Chapitre II

Diffraction d'une onde par un défaut

II. Diffraction d'une onde par un défaut	38
II.1. Complétude des modes de Lamb.....	38
II.2. Énergie et puissance acoustiques	38
II.2.1 Théorème de Poynting et puissance acoustique	38
II.2.2 Normalisation en puissance	39
II.3. Méthode de décomposition modale.....	42
II.3.1 Développement général de la méthode	42
II.3.2 Réflexion d'un mode de Lamb sur un bord libre	45
II.3.3 Diffraction d'un mode de Lamb par une fissure verticale	47
II.3.3.1 Principe de la méthode	47
II.3.3.2 Application aux différents types de fissures	48
II.3.3.2.1 Fissure interne symétrique par rapport au plan médian	49
II.3.3.2.2 Paire de fissures débouchantes symétriques par rapport au plan médian	50
II.3.3.2.3 Fissure débouchante simple.....	50
II.4. Conclusion.....	50

II. Diffraction d'une onde par un défaut

Dans le chapitre précédent, la famille des ondes de Lamb et leurs différentes caractéristiques en milieu sain ont été présentées. Le problème de diffraction par des inhomogénéités dans les plaques est maintenant traité, de manière théorique, par une analyse modale. Ce principe considère la juxtaposition de toutes les ondes de Lamb sur le défaut pour satisfaire les conditions aux limites. Dans cette décomposition, un champ acoustique n'est pas analysé comme une entité à part entière, mais il est vu comme une superposition d'un nombre infini de modes propres de la structure, chacun possédant son nombre d'onde et son amplitude. Par exemple, cette modélisation ne considère pas que la plaque filtre le champ transitoire dans la région proche du défaut pour ne générer que des ondes propagatives en champ lointain. Elle suppose que toutes les ondes de Lamb (propagatives ou non) sont présentes au niveau du défaut et que la zone transitoire ne correspond qu'à la distance nécessaire aux modes non propagatifs et atténués pour s'atténuer.

II.1. Complétude des modes de Lamb

Préalablement à l'exposition de l'analyse modale, il est nécessaire de s'assurer que l'ensemble des ondes de Lamb est complet, autrement dit, que rien ne manque pour représenter complètement tous les phénomènes acoustiques internes aux plaques. Cette complétude a été démontrée par P. Kirrmann dans un article daté de 1995 [95]. L'auteur décrit tout d'abord les phénomènes acoustiques sous une forme mathématique permettant de réaliser une analyse fonctionnelle. Il définit donc un espace vectoriel correspondant à des ondes possédant une énergie de déformation finie à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui correspond à des composantes de contraintes carré-intégrables et des déformations dont les composantes de gradients sont carré-intégrables. L'auteur introduit ensuite un produit scalaire sur cet espace vectoriel et en déduit une norme. Il définit alors un opérateur linéaire dont les éléments propres correspondent aux ondes de Lamb et dont le domaine de définition est dense dans l'espace vectoriel. Des relations de symétries entre cet opérateur linéaire et son adjoint permettent alors de montrer que l'espace vectoriel considéré est de Hilbert, autrement dit, qu'il est complet. La famille des ondes de Lamb constitue alors une base orthogonale de l'espace sur laquelle il est possible de décomposer tout champ acoustique interne à une plaque. Cependant, pour que cette représentation soit complète, il est nécessaire de considérer l'ensemble des ondes de Lamb dans sa totalité, sans omettre les modes possédant un nombre d'onde imaginaire pur ou complexe. N'importe quel phénomène acoustique interne à une plaque peut alors être représenté comme une superposition de modes de Lamb.

II.2. Énergie et puissance acoustiques

Pour pouvoir comparer les différents modes de Lamb propagatifs, non propagatifs et atténués entre eux, il est maintenant nécessaire de définir un critère permettant une normalisation. Il est basé sur un principe énergétique qui stipule que tous les modes doivent être normalisés en puissance. De ce fait, les termes d'énergie et de puissance acoustique transportée par une onde sont présentés dans les paragraphes suivants.

II.2.1 Théorème de Poynting et puissance acoustique

Le théorème concernant la conservation de l'énergie dans un problème de propagation acoustique est appelé théorème de Poynting. Dans les milieux purement élastiques exempts de

source, il relie le flux de puissance transporté par des ondes à travers la surface entourant un volume V et les variations d'énergie contenue dans ce volume [65]. Ce théorème est déduit des équations de propagation. Pour des champs harmoniques, il s'écrit :

$$\oint_{Surface} \left(\frac{-\mathbf{v}^* \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}}{2} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS + i\omega U = 0, \quad (\text{II.1})$$

où U correspond à l'énergie de déformation et à l'énergie cinétique contenues dans le volume V . Cette formule signifie que les variations d'énergie contenue dans le volume proviennent du flux d'un vecteur à travers sa surface. Celui-ci est appelé vecteur de Poynting acoustique, et est défini par :

$$\mathbf{P} = -\frac{\mathbf{v}^* \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}}{2} \quad (\text{II.2})$$

La direction du vecteur de Poynting correspond à la direction de transport de l'énergie. Sa partie réelle est égale à la valeur moyenne du flux d'énergie traversant, pendant une période temporelle, l'unité de surface perpendiculaire au flux d'énergie [77]. Le flux de puissance dans la direction \mathbf{n} s'écrit donc :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{v}^* \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}}{2} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{II.3})$$

Dans le cas de la propagation d'ondes de Lamb, l'intégrale de cette expression à travers l'épaisseur h d'une plaque correspond à la puissance acoustique transportée le long de la plaque, dans la direction \mathbf{x}_2 , par un mode M de champ $(\mathbf{v}_M, \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_M)$:

$$Puiss = \frac{1}{2} \int_h (-\mathbf{v}_M^* \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_M) \cdot \mathbf{x}_2 \, dx_1, \quad (\text{II.4})$$

C'est un nombre complexe dont la partie réelle correspond à la moyenne temporelle de la puissance transportée, par unité de longueur, par le mode M à travers l'épaisseur de la plaque.

II.2.2 Normalisation en puissance

Les notions énergétiques ci-dessus sont maintenant utilisées pour obtenir une représentation des ondes de Lamb permettant de les comparer aisément entre elles. En effet, les écritures des champs acoustiques données dans le chapitre I ne contiennent aucune information immédiate sur la puissance que transporte un mode au sein de la plaque. Elles ne permettent pas, par exemple, de déterminer quelle onde possède, en surface de la plaque, le déplacement normal le plus important. Lors d'une étude expérimentale, cette indication peut cependant être indispensable puisqu'elle détermine l'onde qui sera la plus aisément générée et/ou détectée. Pour que cette information soit directement accessible, l'écriture des champs acoustiques des ondes de Lamb est alors modifiée de telle sorte que ces modes soient normalisés en puissance [65]. Lors de l'étude de la diffraction des modes de Lamb par des défauts, cet artifice permet, de plus, d'obtenir des coefficients de réflexion et de transmission qui sont directement reliés aux énergies transportées par les différentes ondes diffractées.

Il faut maintenant rappeler que d'après le théorème de Poynting, la moyenne temporelle de la puissance portée par le mode M à travers l'épaisseur de la plaque est donnée par l'expression (II.4). Pour un mode propagatif, cette expression est non nulle. Cependant, les modes de Lamb qui possèdent des nombres d'ondes imaginaires purs ou complexes ne propagent pas d'énergie le long de la plaque et leur puissance est donc nulle. Il est donc impossible de normaliser ces derniers par la puissance qu'ils transportent le long de la plaque. Pour palier à ce problème, la puissance d'un mode M est calculée de la manière suivante :

$$P_M = \frac{1}{4} \int_h (\mathbf{v}_{-M} \cdot \bar{\bar{\sigma}}_M - \mathbf{v}_M \cdot \bar{\bar{\sigma}}_{-M}) \mathbf{x}_2 dx_1. \quad (\text{II.5})$$

Pour les modes propagatifs, cette formule correspond toujours à la puissance transportée par le mode le long de la plaque. En effet, les équations suivantes relient les champs de vitesse et de contrainte des modes propagatifs possédant des nombres d'ondes opposés [65] :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{-M}(x_1) &= -\mathbf{v}_M^*(x_1) \\ \bar{\bar{\sigma}}_{-M}(x_1) &= \bar{\bar{\sigma}}_M^*(x_1) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

où l'étoile représente la conjugaison complexe. Il vient alors :

$$\begin{aligned} P_M &= \frac{1}{4} \int_h (\mathbf{v}_{-M} \cdot \bar{\bar{\sigma}}_M - \mathbf{v}_M \cdot \bar{\bar{\sigma}}_{-M}) \mathbf{x}_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{4} \int_h (-\mathbf{v}_M^* \cdot \bar{\bar{\sigma}}_M - \mathbf{v}_M \cdot \bar{\bar{\sigma}}_M^*) \mathbf{x}_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \int_h (-\mathbf{v}_M^* \cdot \bar{\bar{\sigma}}_M) \mathbf{x}_2 dx_1. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

L'intégrale (II.5) correspond donc bien, pour les modes propagatifs à la puissance qu'ils transportent le long de la plaque, dans la direction \mathbf{x}_2 . De plus, elle est non nulle pour les modes non propagatifs et atténués. Elle permet donc d'effectuer la normalisation désirée. En accord avec la littérature, le terme de puissance est aussi affecté à P_M pour les modes non propagatifs et atténués [65], [66]. De manière à obtenir des calculs exacts et rapides, des formules analytiques des puissances ont été établies, pour les modes de Lamb existant dans une plaque isotrope. Ces expressions ainsi que leur principe d'obtention sont donnés en annexe D.

Les champs de vitesse et de contrainte des modes de Lamb normalisés sont maintenant calculés de la manière suivante :

$$\mathbf{v}_{M \text{ norm}} = \frac{\mathbf{v}_M}{\sqrt{|P_M|}} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\sigma}}_{M \text{ norm}} = \frac{\bar{\bar{\sigma}}_M}{\sqrt{|P_M|}} \quad (\text{II.8})$$

Ainsi, la puissance acoustique transportée par les modes dont les champs sont donnés par (II.8) est de module 1. Dans la suite du document, tous les champs sont normalisés en puissance. De ce fait, pour simplifier les écritures, la normalisation ne sera plus spécifiée et

les champs normalisés sont notés $(\mathbf{v}_M, \bar{\sigma}_M)$. De plus, rappelons que les tracés des champs de vitesse et de contrainte exposés dans le chapitre I correspondent à des modes normalisés en puissance.

Grâce à cette écriture, les champs de vitesse et de contrainte sont comparables d'un point à l'autre des courbes de dispersion. Notons seulement que les champs normalisés dépendent de l'épaisseur de la plaque. En particulier, pour conserver une puissance unitaire, les valeurs que possèdent ces champs, à travers l'épaisseur de la plaque, sont plus importantes pour une plaque de faible épaisseur que dans une plaque de grande épaisseur. Dans toute la suite du document, pour être comparables avec les mesures expérimentales qui seront réalisées, les champs présentés correspondent à une plaque d'aluminium d'épaisseur 8 mm.

La notion d'amplitude attribuée à un mode peut maintenant être définie sans ambiguïté. Elle est maintenant constante à travers l'épaisseur de la plaque et ne peut donc pas être confondue avec la distribution de déplacement (ou de contrainte) qui, elle, varie à travers l'épaisseur de la plaque. Le champ de vitesse du mode M s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, t) = a_M \mathbf{v}_M(x_1) e^{i(\omega t - k_2 x_2)}. \quad (\text{II.9})$$

Amplitude du mode à travers l'épaisseur de la plaque pour une puissance unitaire

Les champs de déplacement, de déformation et de contrainte s'écrivent sous une forme similaire. Dans la suite du document, cette écriture des champs de vitesse, de déplacement et de contrainte est employée. L'amplitude a_M possède maintenant un sens physique puisque son carré correspond, pour les modes propagatifs, à la puissance transportée durant une période, dans la direction x_2 , par le mode à travers l'épaisseur de la plaque. En effet :

$$\frac{1}{2} \text{Re} \int_h (-a_M \mathbf{v}_M)^* \cdot a_M \bar{\sigma}_M \cdot \mathbf{x}_2 dx_1 = |a_M|^2 P_M = |a_M|^2 \text{ car } P_M = 1. \quad (\text{II.10})$$

Deux ondes d'amplitudes 1 et 0,5 transportent donc respectivement des puissances à travers l'épaisseur de la plaque de 1 et 0,25 Watt.m⁻¹.

Il est peut être intéressant ici de devancer notre propos et d'explicitier plus en avant l'apport de cette notion de normalisation dans l'étude de la diffraction d'une onde par une inhomogénéité. Prenons l'exemple du calcul d'un coefficient de réflexion : pour une onde incidente I d'amplitude a_I et une onde diffractée -D d'amplitude b_{-D} , le coefficient de réflexion est donné par :

$$R_{-D} = \frac{b_{-D}}{a_I}. \quad (\text{II.11})$$

Avec une écriture normalisée des champs des ondes de Lamb, ce coefficient est en relation directe avec la puissance transportée par le mode réfléchi et, pour un mode incident d'amplitude unitaire, cette puissance est égale à $|b_{-D}|^2$. De plus, il est possible de calculer aisément les coefficients qui seraient expérimentalement recueillis. En effet, dans de nombreuses situations, les signaux ne peuvent être mesurés qu'en surface de la plaque et dans une direction donnée (normale à ses surfaces, direction 1). En introduisant les valeurs des

déplacements des différentes ondes, dans la direction j et en un point x_I de l'épaisseur, la relation (II.11) devient :

$$R_{-D}^j(x_I) = \frac{b_{-D}}{a_I} * \frac{u_{j-D}(x_I)}{u_{jI}(x_I)}, \text{ pour } j=1,2. \quad (\text{II.12})$$

$R_{-D}^j(h/2)$ est alors le coefficient de réflexion, en surface de la plaque et dans la direction 1, du mode $-D$ et peut être comparé à des mesures expérimentales. Notons que certains auteurs considèrent $R_{-D}^j(x_I)$ comme étant le coefficient de réflexion du mode $-D$. Cette définition est ambiguë puisqu'un mode peut alors avoir un coefficient de réflexion égal à 2 en surface de la plaque, et nul sur le plan médian. Il convient donc de préciser que les coefficients (II.12) dépendent de la direction considérée et de la position à laquelle ils sont calculés.

Remarquons cependant que lorsque le mode réfléchi est identique au mode incident, le rapport des déplacements est alors égal à 1 et le coefficient (II.12) ne dépend ni de la direction ni de la position à travers l'épaisseur de la plaque. La relation suivante est alors obtenue :

$$R_{-I}^j(x_I) = R_{-I} \quad \forall j, \forall x_I. \quad (\text{II.13})$$

II.3. Méthode de décomposition modale

II.3.1 Développement général de la méthode

Dans les paragraphes précédents, il a été rappelé que la famille des ondes de Lamb était complète et qu'elle permet de représenter tous les phénomènes acoustiques existant dans les plaques. De manière à pouvoir être comparés, les modes ont ensuite été normalisés en puissance. Il est maintenant possible de présenter la méthode de décomposition modale qui est développée, dans le cas général, pour modéliser le phénomène de diffraction. Elle sera par la suite appliquée à l'étude de la diffraction d'une onde de Lamb par l'extrémité libre de la plaque ou par des fissures verticales. Cette méthode permet non seulement de calculer les coefficients de réflexion et de transmission des différentes ondes mais aussi de modéliser les déplacements des surfaces de défauts soumis à un mode incident quelconque.

Considérons donc le cas général où un mode de Lamb I est incident sur un défaut quelconque (figure II.1). Sur la surface du défaut, il y a génération d'ondes diffractées propagatives, non propagatives ou atténuées.

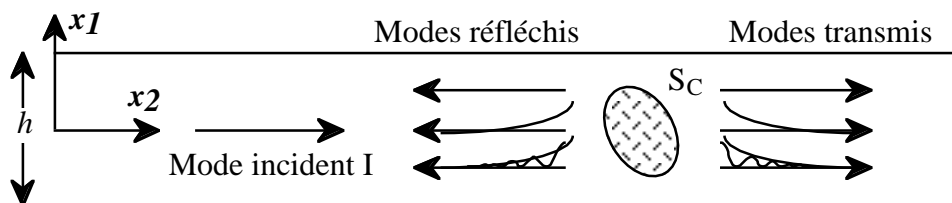


figure II.1 : Diffraction d'une onde de Lamb I sur un défaut quelconque.

Le principe de la méthode consiste à décomposer les champs acoustiques internes à la plaque sur l'ensemble de ces ondes [95]. En particulier, les champs de vitesse et de contrainte s'écrivent :

$$\mathbf{v} = \sum_n b_n \mathbf{v}_n e^{-ik_n x} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma} = \sum_n b_n \bar{\sigma}_n e^{-ik_n x}, \quad (\text{II.14})$$

où \mathbf{k}_n est le vecteur d'onde du mode $n = \pm N$ ($N > 0$) et \mathbf{x} est le vecteur position. Les valeurs des amplitudes complexes b_n des modes n sont imposées par les conditions aux limites sur la surface du défaut. Leur module correspond à la proportion d'amplitude par rapport au mode incident. Pour les modes propagatifs, il est directement relié à l'énergie transportée (voir paragraphe II.2.2). La phase des b_n est, quant à elle, reliée à un déphasage relatif au mode incident. Les champs \mathbf{v}_n et $\bar{\sigma}_n$ correspondent à des modes n qui possèdent des nombres d'ondes réels, imaginaires ou complexes. Il est alors important de remarquer que, si un nombre d'onde complexe est solution des équations de dispersion, son conjugué l'est aussi, et il en est de même pour son opposé. Il existe donc quatre solutions complexes des équations de dispersion :

$$k_n = +k_n' - ik_n'', \quad k_n = +k_n' + ik_n'', \quad k_n = -k_n' - ik_n'' \quad \text{et} \quad k_n = -k_n' + ik_n'' \quad (\text{II.15})$$

où k_n' et k_n'' sont positif, $\forall n$. De même, deux solutions imaginaires coexistent :

$$k_n = -ik_n'' \quad \text{et} \quad k_n = +ik_n'' \quad (\text{II.16})$$

Toutes ces solutions correspondent à des ondes qui s'atténuent dans une direction donnée ($+x_2$ ou $-x_2$). En particulier, certaines d'entre elles possèdent une partie imaginaire qui impose que l'amplitude du mode augmente avec la distance au défaut. Cette caractéristique n'est pas physiquement acceptable et seuls les modes dont les nombres d'ondes impliquent qu'ils s'atténuent en s'éloignant du défaut doivent être conservés. Dans l'étude de la diffraction d'une onde de Lamb présentée sur la figure II.1, les nombres d'ondes correspondant aux modes réfléchis sont alors :

$$\begin{aligned} k_{-N} &= \pm k_{-N}' + ik_{-N}'' \quad \text{pour les modes atténués,} \\ k_{-N} &= +ik_{-N}'' \quad \text{pour les modes non propagatifs et} \\ k_{-N} &= -k_{-N}' \quad \text{pour les modes propagatifs.} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Les nombres d'ondes des modes transmis sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_N &= \pm k_N' - ik_N'' \quad \text{pour les modes atténués,} \\ k_N &= -ik_N'' \quad \text{pour les modes non propagatifs et} \\ k_N &= +k_N' \quad \text{pour les modes propagatifs.} \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Remarquons qu'avec ces notations, $k_{-N} = -k_N$. De plus, il est important de noter que la partie réelle du nombre d'onde ne correspond, pour les modes atténués, qu'à un terme de phase et n'entraîne donc pas de choix physique comme la partie imaginaire. De ce fait, pour chaque solution complexe des équations de dispersion, deux modes atténués réfléchis (respectivement transmis) sont à considérer.

Les conditions aux limites au niveau du défaut permettent ensuite de relier l'ensemble des ondes incidente, réfléchies et transmises. En effet, la coexistence de tous les modes non propagatifs et atténués, de tous les modes propagatifs réfléchis $-N$ et transmis N ainsi que du mode incident I permet de satisfaire les conditions aux limites en tout point de l'épaisseur de la plaque, et en particulier sur la surface du défaut. La continuité des champs de vitesse et de contrainte doit de plus être imposée en tout point extérieur au défaut et, dans le cas de la diffraction des ondes de Lamb par des défauts dont la surface S_c , de normale unitaire z , est libre de contraintes, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_c \cdot z &= 0 & \forall (x_1, x_2) \in S_c, \\ v_c &= \sum_N b_N v_N = a_I v_I + \sum_N b_{-N} v_{-N} & \forall (x_1, x_2) \notin S_c, \\ \bar{\bar{\sigma}}_c &= \begin{cases} \sum_N b_N \sigma_{N1} \\ \sum_N b_N \sigma_{N2} \\ \sum_N b_N \sigma_{N6} \end{cases} = \begin{cases} a_I \sigma_{I1} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N1} \\ a_I \sigma_{I2} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N2} \\ a_I \sigma_{I6} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N6} \end{cases} & \forall (x_1, x_2) \notin S_c, \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

La résolution de ce système conduit à l'obtention des amplitudes complexes b_n , $n = \pm N$, des différents modes diffractés. Leur connaissance permet alors de calculer les champs de déplacement (respectivement, de vitesse et de contrainte) au niveau du défaut en les introduisant dans les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= a_I u_I(x_1, x_2) + \sum_N b_{-N} u_{-N}(x_1, x_2) & \text{pour } x_2 \leq 0 \\ u(x_1, x_2) &= \sum_N b_N u_N(x_1, x_2) & \text{pour } x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

De plus, les plaques considérées dans cette étude sont purement élastiques et les ondes propagatives générées sur les surfaces du défaut conservent leur amplitude tout au long de leur propagation qui n'introduit qu'un terme de phase supplémentaire. Les coefficients de réflexion et de transmission complexes des modes propagatifs sont alors donnés par :

$$R_{-N} = \frac{b_{-N}}{a_I} \quad \text{et} \quad T_N = \frac{b_N}{a_I}. \quad (\text{II.21})$$

Pour une amplitude unité du mode incident, le module au carré de ces coefficients est égal à l'énergie que transporte l'onde diffractée le long de la plaque. Leur phase correspond au déphasage par rapport au mode incident que possèdent les modes diffractés, au droit du défaut, pour satisfaire les conditions aux limites.

Lors de la résolution numérique, les séries infinies de la formule (II.19) sont tronquées de telle sorte que ne soient conservés que les modes propagatifs, les modes non propagatifs et entre une dizaine et une vingtaine de modes atténués selon les cas de calculs. Parmi ces derniers, ceux dont les parties imaginaires des nombres d'ondes sont les plus faibles semblent jouer un rôle important lors de la diffraction d'un mode de Lamb car leurs amplitudes $b_{\pm N}$ sont, en général, du même ordre de grandeur que celles des modes propagatifs. En effet, lorsque les parties imaginaires des nombres d'ondes augmentent, les amplitudes, sur les faces des défauts, des modes correspondants chutent dramatiquement (des rapports de l'ordre de

10^{-3} à 10^{-6} peuvent apparaître). Ces ondes semblent donc moins importantes dans le phénomène de diffraction et ne sont pas conservées dans les sommes (II.19). Cette troncature ne semble pas engendrer d'erreur significative dans la modélisation. L'épaisseur de la plaque est ensuite discrétisée en une dizaine de points auxquels sont imposées les conditions aux limites. Cette double troncature permet d'obtenir un système rectangulaire qui est inversé de manière numérique par la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) qui calcule la meilleure solution au sens des moindres carrés [82]. Un critère énergétique permet ensuite de vérifier les résultats obtenus. L'énergie transportée par les modes réfléchis et transmis doit être la plus proche possible de l'énergie du mode incident supposé d'amplitude unité. D'après la formule (II.10), le facteur :

$$\sum_{\substack{n=\pm N \\ \text{propagatifs}}} |b_n|^2 - 1 \quad (\text{II.22})$$

doit donc être minimisé. Pour un nombre de modes complexes fixé, le nombre de points dans l'épaisseur de la plaque est alors incrémenté de dix à vingt-cinq et, à chaque itération, le système (II.19) est inversé et la somme (II.22) est calculée. Enfin, les amplitudes issues du système permettant d'obtenir le bilan énergétique optimal sont conservées. Les résultats qui seront présentés par la suite correspondent en général à un bilan énergétique égal à 1 avec moins de 5% d'erreur.

Du fait de l'optimisation du nombre de points choisis à travers l'épaisseur de la plaque, le système (II.19) est en général rectangulaire. L'obtention d'un système carré serait préférable puisqu'il permettrait une inversion exacte. Il est cependant difficile d'en obtenir un satisfaisant ou de trouver un critère permettant de l'identifier. En effet, pour chaque point considéré à travers l'épaisseur de la plaque, il existe plusieurs équations. Il est alors nécessaire d'inverser un système rectangulaire pour lequel le nombre de points et le nombre de modes complexes considérés jouent un rôle primordial : lorsque le nombre de points choisis n'est pas suffisant, le système est sous-déterminé et les solutions ne permettent de satisfaire les conditions aux limites qu'aux points de discrétisation. Celles-ci peuvent alors ne pas être vérifiées à travers toute l'épaisseur de la plaque. En particulier, les composantes du champ total de contrainte peuvent avoir des valeurs très élevées sur les surfaces des défauts, en dehors des positions pour lesquelles les conditions aux limites sont imposées. De même, il est possible que les champs de vitesse et de contrainte obtenus ne satisfassent pas les conditions de continuité hors du défaut. Il est alors nécessaire d'augmenter le nombre de points pour converger vers une solution satisfaisant au mieux les conditions aux limites. À partir d'un certain nombre, les amplitudes solutions du système (II.19) conduisent à un champ total à la position du défaut qui converge vers une solution acceptable. En particulier, sur les faces des défauts, le champ total de contrainte est négligeable en regard du champ incident et, en dehors, les champs de vitesse et de contrainte sont continus.

II.3.2 Réflexion d'un mode de Lamb sur un bord libre

La modélisation de la réflexion d'un mode de Lamb sur le bord libre d'une plaque représente le cas le plus simple de diffraction d'une onde de Lamb par un défaut. En effet, la symétrie du bord de la plaque impose qu'aucune conversion de mode n'est possible d'une famille à l'autre (symétrique vers antisymétrique, et réciproquement). Par exemple, pour une onde symétrique incidente, seules des ondes symétriques sont générées au niveau du bord de la plaque. De plus, aucune onde ne peut être générée dans le vide entourant la plaque. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire les ondes transmises dans la modélisation et seuls les

nombre d'ondes correspondant à des modes réfléchis sont considérés. Ils imposent une atténuation correspondant à une perte d'amplitude lorsque les ondes s'éloignent du bord de la plaque. Avec les conventions de la figure II.2, les nombres d'ondes à considérer sont donc :

$$\begin{aligned} k_{-N} &= \pm k'_{-N} + ik''_{-N} \text{ pour les modes complexes, et} \\ k_{-N} &= +ik''_{-N} \text{ pour les modes imaginaires.} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

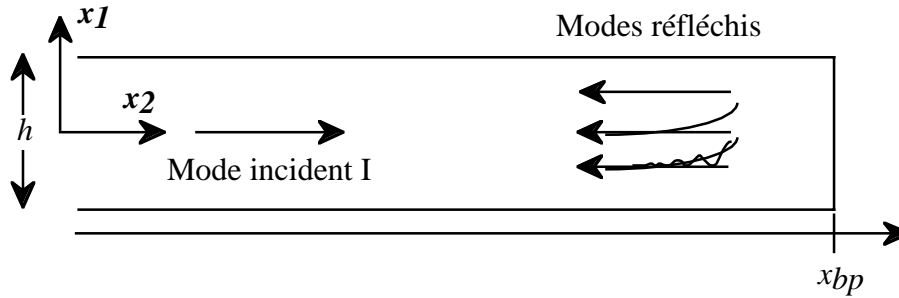


figure II.2 : Réflexion d'une onde de Lamb I sur le bord d'une plaque.

Les conditions de contraintes nulles peuvent maintenant être écrites sur le bord de la plaque de normale x_2 :

$$\bar{\sigma}_c \cdot x_2 = \begin{cases} \sigma_{I2} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N2} \\ \sigma_{I6} + \sum_N b_N \sigma_{-N6} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Les nombres de modes atténués et de points de discrétisation à considérer dans les sommes (II.24) sont ensuite choisis. Ces points sont équi-répartis sur le bord de la plaque et, pour des raisons numériques, une très légère dissymétrie est imposée. Le système numérique suivant doit être alors inversé :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{n2}(x_1, x_{bp}) \\ \sigma_{n6}(x_1, x_{bp}) \end{bmatrix} [b_n] = - \begin{bmatrix} \sigma_{I2}(x_1, x_{bp}) \\ \sigma_{I6}(x_1, x_{bp}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

où x_{bp} est la position du bord de la plaque. Le critère énergétique permettant de vérifier les résultats numériques ne doit tenir compte que de l'énergie transportée par les modes réfléchis et, pour un mode incident d'amplitude unité, le facteur :

$$\sum_{\text{propagatifs}}^N |b_{-N}|^2 - 1 \quad (\text{II.26})$$

doit être minimisé.

Sur un ordinateur de type G4 (Machintosh), trente secondes sont nécessaires pour effectuer un calcul mono-fréquence comprenant la résolution des équations de dispersion, l'écriture et l'inversion des systèmes numériques correspondant aux conditions aux limites, l'optimisation des paramètres de calculs, l'obtention des coefficients de réflexion et le calcul des champs de vitesse sur le bord de la plaque. Pour une recherche dans une large bande de fréquences, la détermination des nombres d'ondes complexes nécessite une adaptation des paramètres de modélisation qui entraîne une augmentation non linéaire du temps de calcul. De ce fait, les courbes qui seront présentées dans le chapitre IV ont demandé entre deux et trois heures de travail. La stabilité de cette méthode a été testée jusqu'à un produit fréquence-

épaisseur de 16 MHz.mm où plus de 10 modes propagatifs coexistent. Le bilan énergétique a toujours été vérifié avec moins de 5% d'erreur. Cependant, pour de telles fréquences, les résultats n'ont pas été confirmés par des mesures expérimentales. Ils semblent quand même très proches de ceux qui sont relevés dans la littérature [39], [41]. L'ensemble des prédictions réalisées par cette méthode et concernant la diffraction des ondes de Lamb par le bord libre de la plaque sera commenté dans le chapitre IV.

II.3.3 Diffraction d'un mode de Lamb par une fissure verticale

II.3.3.1 Principe de la méthode

La diffraction d'une onde de Lamb par différentes fissures verticales est maintenant étudiée. Les trois types de défauts considérés sont des fissures internes symétriques par rapport au plan médian de la plaque (figure II.3.a), des paires symétriques de fissures débouchantes (figure II.3.b) et des fissures simples débouchantes (figure II.3.c). Les deux faces des fissures sont supposées ne pas interférer entre elles, et aucun transfert de déplacement ou de contrainte ne peut se produire à travers la fissure. Cette hypothèse est valide si [67] :

- La largeur de la fissure est faible par rapport à l'épaisseur de la plaque et à la longueur d'onde du mode incident
- La largeur de la fissure est plus grande que le déplacement élastique de ses surfaces.

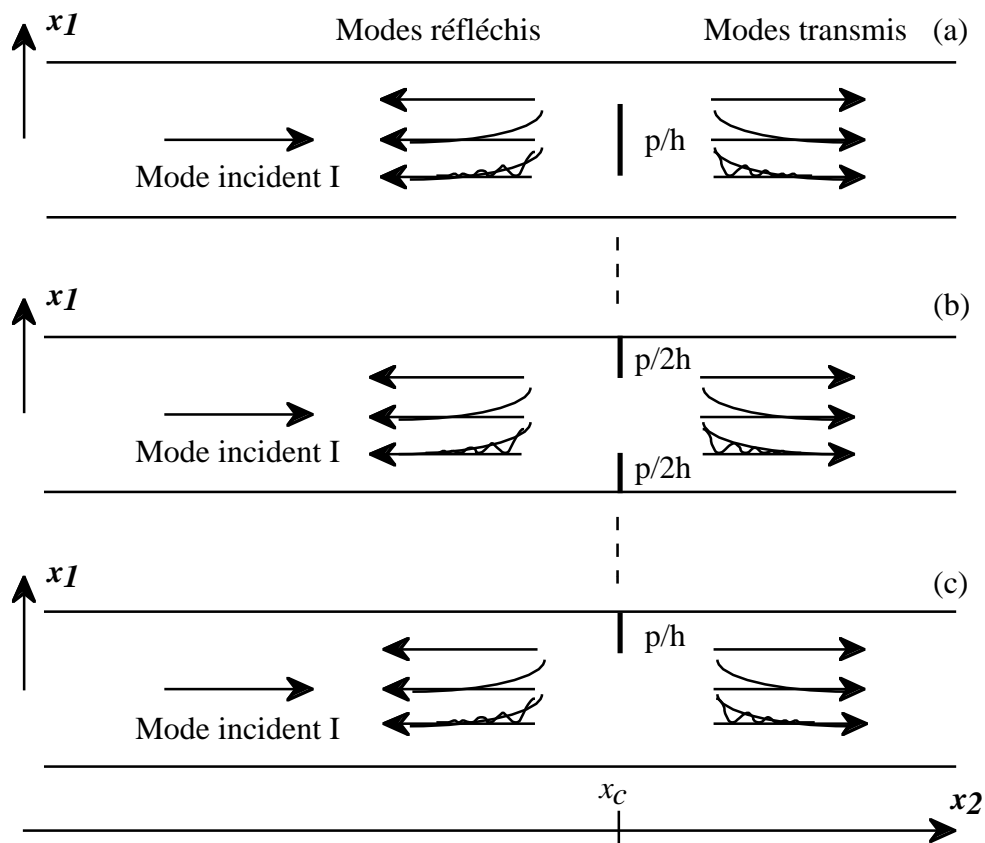


figure II.3 : Diffraction d'une onde de Lamb par (a) une fissure verticale interne symétrique par rapport au plan médian, (b) une paire symétrique de fissures verticales débouchantes, (c) une fissure verticale débouchante.

Les champs de vitesse et de contrainte sont maintenant décomposés sur l'ensemble des modes de la plaque par la formule (II.14). Cependant, contrairement à l'étude de la réflexion sur le bord de la plaque, il est maintenant nécessaire de prendre en compte les ondes transmises. Les conditions aux limites au niveau du défaut permettent ensuite de relier les modes réfléchis aux modes transmis. Sur les surfaces des fissures, les conditions de contraintes nulles doivent être remplies :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_c \cdot \mathbf{x}_2 &= \begin{cases} a_I \sigma_{I2} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N2} \\ a_I \sigma_{I6} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N6} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} & \forall x_I \in S_c, x_2 = x_c^-, \\ \bar{\bar{\sigma}}_c \cdot \mathbf{x}_2 &= \begin{cases} \sum_N b_N \sigma_{N2} \\ \sum_N b_N \sigma_{N6} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} & \forall x_I \in S_c, x_2 = x_c^+, \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

où $x_2 = x_c$ est la position de la fissure. Par contre, la continuité des champs de vitesse et de contrainte doit être vérifiée en dehors des fissures :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_c &= \sum_N b_N \mathbf{v}_N = a_I \mathbf{v}_I + \sum_N b_{-N} \mathbf{v}_{-N} & \forall x_I \notin S_c, x_2 = x_c, \\ \bar{\bar{\sigma}}_c &= \begin{cases} \sum_N b_N \sigma_{N1} \\ \sum_N b_N \sigma_{N2} \\ \sum_N b_N \sigma_{N6} \end{cases} = \begin{cases} a_I \sigma_{I1} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N1} \\ a_I \sigma_{I2} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N2} \\ a_I \sigma_{I6} + \sum_N b_{-N} \sigma_{-N6} \end{cases} & \forall x_I \notin S_c, x_2 = x_c. \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Comme précédemment, la série de modes atténués est tronquée, et seulement dix à vingt modes sont conservés. De plus, entre dix et vingt-cinq points sont considérés à travers l'épaisseur de la plaque, en $x_2 = x_c$. En ces points, selon leur position (sur ou hors de la fissure), les équations des systèmes (II.27) et (II.28) sont appliquées. Le système rectangulaire obtenu est ensuite inversé par la méthode de décomposition en valeurs singulières et le critère énergétique (II.22) est appliqué. À titre d'exemple, trois applications numériques de la méthode de décomposition modale sont exposées en annexe E. Elles permettent de comprendre de fonctionnement numérique de la méthode lorsque le nombre de points à travers l'épaisseur de la plaque est modifié. Dans cette annexe, l'influence de la précision des nombres d'ondes sur les résultats est aussi traitée. Comme lors de l'étude de la réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre d'une plaque, trente secondes sont nécessaires pour effectuer un calcul mono-fréquence comprenant la résolution des équations de dispersion, l'inversion des systèmes, l'optimisation des résultats, l'obtention des coefficients de réflexion et de transmission et le calcul des champs de vitesse sur le bord de la plaque.

II.3.3.2 Application aux différents types de fissures

Les différentes géométries de fissures sont maintenant traitées et les paramètres numériques de chaque modélisation sont exposés. Auparavant, il est nécessaire de rappeler, sur la figure II.4, les champs de vitesse et de contrainte des ondes de Lamb A_0 et S_0 qui sont les deux modes incidents considérés au cours de cette étude. Les champs exposés concernent un produit fréquence-épaisseur de 1,12 MHz.mm qui correspond aux résultats exposés dans le chapitre V. Il se situe en dessous du produit fréquence-épaisseur de coupure de A_1 et du produit fh critique de S_1 et de S_2 . Le nombre de conversion de modes est donc réduit et l'analyse des résultats est plus aisée. De plus, au produit $fh=1,12$ MHz.mm, les modes A_0 et S_0 sont non dispersifs, ce qui facilite la mise en œuvre expérimentale.

L'étude de ces champs de vitesse et de contrainte peut apporter des informations non négligeables pour adapter l'écriture des systèmes numériques à résoudre ainsi que les paramètres de modélisation, en particulier le nombre de points et leur répartition à travers l'épaisseur de la plaque. Il faut tout d'abord remarquer que seules les contraintes de compression σ_2 et de cisaillement σ_6 du mode incident interviennent lors de son interaction avec une fissure verticale et que sa contrainte de compression σ_1 n'a aucun effet. Ensuite, il faut noter que, lorsque la symétrie des défauts impose qu'aucune conversion de modes d'une famille à l'autre n'est possible, les modélisations de la diffraction d'une onde de Lamb par une fissure verticale sont réalisées en ne prenant en compte qu'une des deux familles de modes. Cependant, les calculs ont été testés en utilisant les deux familles et aucun transfert d'énergie d'une famille à l'autre n'a été constaté. Pour minimiser le temps d'exécution et augmenter la stabilité des calculs, il est alors choisi de ne pas incorporer les deux familles dans la modélisation des défauts symétriques par rapport au plan médian de la plaque.

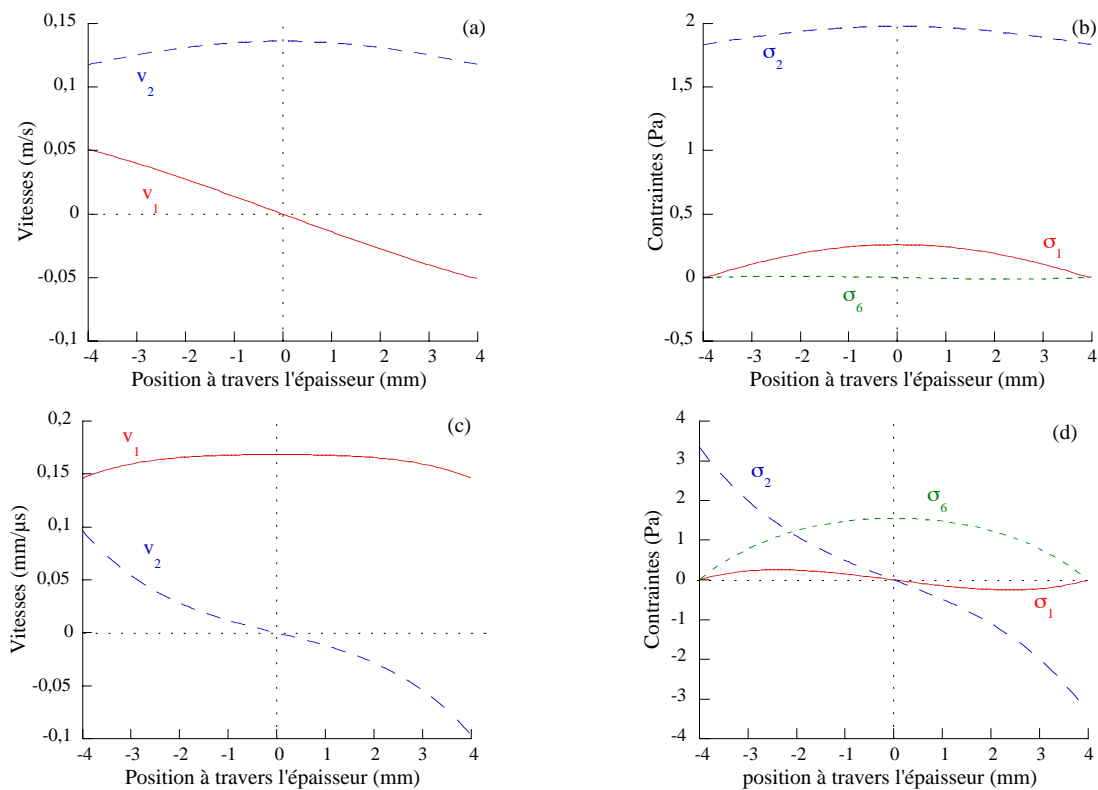


figure II.4 : Champs de vitesse (a et c) et champs de contrainte (b et d) des ondes S_0 (a et b) et A_0 (c et d) au produit fréquence-épaisseur de 1,12 MHz.mm.

II.3.3.2.1 Fissure interne symétrique par rapport au plan médian

Lorsque le mode S_0 est incident au produit $fh=1,12$ MHz.mm, son champ de contrainte étant presque uniforme, les points auxquels sont appliquées les conditions aux limites (II.27) et (II.28) peuvent être répartis de manière uniforme à travers l'épaisseur de la plaque. Cependant, comme pour la modélisation de la réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre d'une plaque, une très légère dissymétrie est imposée pour éviter les divergences numériques.

Lorsque le mode A_0 est incident au même produit fh , la forte variation de la contrainte de compression σ_2 à travers l'épaisseur de la plaque impose un choix judicieux de la répartition des points. Lorsque la dimension de la fissure interne est faible, la contrainte σ_2

du mode A_0 s'annulant sur le plan médian de la plaque, la répartition des points peut rester uniforme. Cependant, lorsque la taille de la fissure augmente, ses bords atteignent des zones où les valeurs de cette contrainte sont importantes. Il est alors intéressant de concentrer les points sur les bords de la fissure pour renforcer la condition de contrainte nulle à ce niveau.

II.3.3.2.2 Paire de fissures débouchantes symétriques par rapport au plan médian

La géométrie de ces fissures va entraîner certaines modifications concernant la répartition à travers l'épaisseur de la plaque des points auxquels les conditions aux limites sont imposées. Comme précédemment, les contraintes du mode S_0 n'imposent aucune condition particulière sur l'emplacement de ces points. Le mode A_0 cependant nécessite de les concentrer au niveau des faces des fissures et de réduire leur nombre dans la partie saine. En effet, la contrainte σ_2 du mode incident est maximale au niveau des surfaces de la plaque. C'est précisément à cet endroit que les deux parties de la fissure se situent et que les contraintes nulles doivent être appliquées. Il faut donc renforcer le poids numérique de ces conditions pour respecter la forte discontinuité physique. Dans le cas contraire, les contraintes calculées ne sont pas nulles sur les faces du défaut. Il faut cependant faire attention à ne pas négliger les conditions de continuité imposées dans la partie saine du centre de la plaque sous peine que le bilan énergétique ne soit plus satisfaisant.

II.3.3.2.3 Fissure débouchante simple

Lorsque le mode S_0 est incident sur une fissure débouchante simple, un nombre de points proportionnel à la taille de la fissure est réparti de manière uniforme sur ses faces. Lorsque A_0 est incident, la nature non symétrique de la fissure et l'augmentation de la contrainte de compression σ_2 du mode sur les bords de la plaque nécessitent d'adapter la répartition des points à travers l'épaisseur de la plaque. Pour les fissures dont la taille ne dépasse pas la moitié de l'épaisseur de la plaque, ce nombre de points sur les faces du défaut est proportionnel à sa taille et leur répartition suit une loi en $x_l^{2/3}$, où x_l représente la position le long de la fissure. Ceci permet de concentrer les points près de la surface de la plaque sans imposer de trop fortes ruptures dans leur distribution. Pour les fissures de plus grande taille, il est difficile de définir une configuration générale. La disposition et le nombre de points, ainsi que le nombre de modes atténués doivent être adaptés à chaque situation. La méthode semble atteindre ici ses limites et il sera nécessaire par la suite de déterminer un critère fiable concernant le choix des différents paramètres de modélisation.

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre, le théorème de Poynting acoustique a tout d'abord été exposé et la puissance transportée par une onde de Lamb propagative le long de la plaque a été définie. Cette notion a ensuite été étendue aux ondes non propagatives et atténuées de telle sorte que les modes de Lamb puissent être normalisés en puissance. Cette nouvelle écriture permet de comparer les champs de vitesse et de contrainte de deux modes différents ou d'un même mode à plusieurs produits fh . Il est alors possible, par exemple, de déterminer quelle onde possède, en surface de la plaque, le déplacement normal le plus important. Lors d'une étude expérimentale, cette indication peut être utile puisqu'elle détermine l'onde qui sera la plus aisément générée et/ou détectée. De plus, la normalisation en puissance des ondes de Lamb permet de relier aisément l'amplitude d'un mode propagatif donné à l'énergie qu'il transporte le long de la plaque.

Dans un second temps, un formalisme général de la méthode de décomposition modale a été exposé et a ensuite été appliqué à l'étude de la réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre d'une plaque ou de sa diffraction par une fissure verticale. La méthode conduit à des calculs rapides des coefficients de diffraction, et permet donc d'envisager, dans des études ultérieures, la résolution du problème inverse. Elle considère la superposition de tous les modes (propagatifs, non propagatifs et atténués) sur les faces du défaut pour satisfaire les conditions aux limites. Lors de sa mise en pratique, elle nécessite d'optimiser les paramètres de calculs (nombre de points de discrétisation, distribution de ces points sur et en dehors du défaut et nombres de modes atténués) pour conditionner au mieux un système numérique représentant les conditions aux limites. Son inversion permet ensuite d'obtenir les amplitudes des différentes ondes réfléchies ou transmises par la fissure. Il est alors possible de déterminer les champs de déplacement et de contrainte des faces de la fissure et les coefficients de réflexion ou de transmission des différentes ondes. Les résultats obtenus sont ensuite contrôlés par un bilan énergétique. Les limites de la méthode proviennent, pour l'instant, du fait que ce critère ne semble pas infaillible. En effet, lorsque les paramètres de la modélisation ne sont pas adéquats, le système peut converger vers une solution triviale correspondant, par exemple, à une transmission intégrale du mode incident. Le bilan énergétique est alors rigoureusement égal à 1 et aucune erreur n'est détectée. Il semble alors nécessaire, dans des études ultérieures, de définir un ou plusieurs critères permettant de contrôler parfaitement la validité des résultats. En particulier, le tracé des champs totaux de déplacement et de contrainte, dans le plan contenant le défaut, a déjà permis de renforcer le contrôle des solutions. Ce critère pourrait alors être automatisé pour apporter une information non négligeable sur la qualité de la modélisation.

Chapitre III

Outils de validation

III. Outils de validation	54
III.1. Modélisation par éléments finis	54
III.1.1 Définition de la géométrie et du maillage	54
III.1.2 Définition de l'excitation	54
III.1.3 Définition des paramètres temporels	55
III.1.4 Zones d'observation du maillage	57
III.1.5 Traitement des données	57
III.1.5.1.1 Signaux relevés à travers l'épaisseur de la plaque : champs de déplacement.....	57
III.1.5.1.2 Signaux en surface de plaque : obtention des coefficients de réflexion.....	57
III.1.6 Application à l'étude du bord libre d'une plaque.....	59
III.1.7 Application à la diffraction par une fissure verticale	61
III.2. Procédés expérimentaux	61
III.2.1 Description des plaques.....	61
III.2.2 Réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre.....	62
III.2.2.1 Réflexion du mode S_0	63
III.2.2.2 Réflexion du mode A_0	64
III.2.3 Diffraction d'une onde de Lamb par des fissures.....	67
III.2.3.1 Émission.....	67
III.2.3.2 Réception et traitements des signaux.....	68
III.3. Conclusion	69

III. Outils de validation

Dans cette section sont exposés les deux outils de validation qui permettront d’obtenir des résultats auxquels seront confrontées, dans les chapitres IV et V, les prédictions de la méthode de décomposition modale. Dans un premier temps, l’utilisation d’un logiciel basé sur le principe des éléments finis est présentée [96]. Ce programme d’analyse numérique a pour but de prédire la réponse dynamique d’une structure élastique (plaque, cylindre ou assemblage complexe) à une excitation spatio-temporelle. De ce fait, il inclut une routine explicite de différence centrale pour fournir une solution dépendant du temps. De plus, il est possible de faire évoluer les caractéristiques du signal temporel d’excitation, c’est-à-dire, sa fréquence centrale, le nombre de cycles, son enveloppe, et son amplitude. Cet outil a déjà été utilisé de nombreuses fois, avec succès, pour modéliser la propagation d’ondes de Lamb dans des plaques ou des cylindres élastiques (mono ou multicouches) et leur interaction avec divers défauts [28], [29], [46], [49]-[51], [59]-[61], [97], [98]. Il constitue donc un élément de comparaison fiable et est appliqué, ici, à la modélisation de la diffraction des ondes de Lamb par l’extrémité libre d’une plaque ou par des fissures verticales. La deuxième partie de ce chapitre concerne la présentation des procédés expérimentaux mis en œuvre pour générer des ondes de Lamb et les détecter après interaction avec les divers défauts traités dans cette étude. La confrontation des résultats du code d’éléments finis et/ou des mesures expérimentales aux prédictions de la méthode de décomposition modale permettra, par la suite, de démontrer les performances et de préciser les limites de validité de cette dernière.

III.1. Modélisation par éléments finis

III.1.1 Définition de la géométrie et du maillage

Les plaques sont représentées par un domaine rectangulaire, et sont supposées infinies dans la direction x_3 (figure III.1). Le modèle est donc bi-dimensionnel et inclut les conditions de déformations planes. La région est ensuite maillée par des éléments, carrés ou rectangulaires, de type « membrane » et possédant quatre nœuds. Pour assurer la stabilité des calculs et leur convergence vers une solution physiquement acceptable, la plus grande dimension de l’élément ne doit pas dépasser le septième de la plus petite longueur d’onde [59]. En effet, la distance entre deux nœuds consécutifs est alors suffisamment faible pour discrétiser correctement la longueur d’onde du mode le plus lent.

Puisqu’elles sont de largeur infinitésimale, les fissures sont modélisées par des déconnexions de nœuds qui déterminent leur hauteur et leur position. Chaque nœud donne alors naissance à deux nœuds de même position d’équilibre. De plus, leurs déplacements sont indépendants. Autrement dit, il n’existe pas de transfert de contrainte ou de déplacement entre les deux nœuds. Ces hypothèses sont identiques à celles qui sont utilisées dans les modélisations par la méthode de décomposition modale.

III.1.2 Définition de l’excitation

L’excitation temporelle peut ensuite être appliquée à n’importe quel point du maillage, sous la forme de déplacement ou de force. Dans les modélisations qui seront exposées dans les chapitres IV et V, deux types d’excitation ont été employés :

1. Lors de la modélisation de la vibration résonante du bord de la plaque, pour simuler un impact quasi ponctuel, une force est appliquée près du bord de la plaque dans la direction x_I (figure III.1.a). Trois nœuds, disposés symétriquement par rapport au plan médian, sont excités. De manière à localiser la vibration, le contenu fréquentiel de la force est tout d'abord large. Ensuite, un spectre d'excitation étroit et centré sur la fréquence de résonance permet d'amplifier le phénomène.
2. Lors de la génération d'une onde de Lamb dans la plaque, l'excitation consiste à imposer, dans les deux directions, à une extrémité de la plaque et à travers toute son épaisseur, le champ de déplacement du mode au produit fréquence-épaisseur désiré. L'épaisseur de la plaque est alors excitée dans un de ses modes propres (figure III.1.b et c).

III.1.3 Définition des paramètres temporels

Les conditions initiales étant choisies au temps $t_0=0$, la réponse de la plaque, au temps $t_I = t_0 + \Delta t$, est ensuite modélisée en calculant de façon explicite les déplacements de chaque point du maillage. Autrement dit, une équation approchée de l'équation du mouvement au temps t_I est résolue. Elle est obtenue à partir des solutions existant au temps t_0 . Pour des raisons de convergence numérique, le pas temporel Δt doit être inférieur au temps nécessaire à l'onde la plus rapide (onde de volume de type longitudinal) pour passer d'un nœud à un autre. La valeur du pas temporel est donnée par la relation empirique :

$$\Delta t = 0,8 \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{V_L}, \quad (\text{III.1})$$

où Δx et Δy sont les dimensions des éléments du maillage, et V_L est la vitesse de l'onde longitudinale. Les déplacements des différents nœuds sont alors calculés pendant la durée $T = n * \Delta t$ de l'étude définie en fonction des vitesses de groupes (V_{gr}) des différentes ondes présentes dans la bande fréquentielle de l'excitation, de la distance de propagation L , du nombre N de cycles et de la fréquence centrale f_0 de l'excitation :

$$T = n\Delta t \geq \frac{L}{\min(V_{gr})} + \frac{N}{f_0}, \quad (\text{III.2})$$

Cette relation signifie que T doit être suffisamment grand pour permettre à l'onde générée de se propager sur la distance souhaitée. De plus, la plaque étant de longueur finie, T est choisi suffisamment court pour éviter toute réflexion indésirable provenant des bords de la plaque et pouvant gêner l'interprétation.

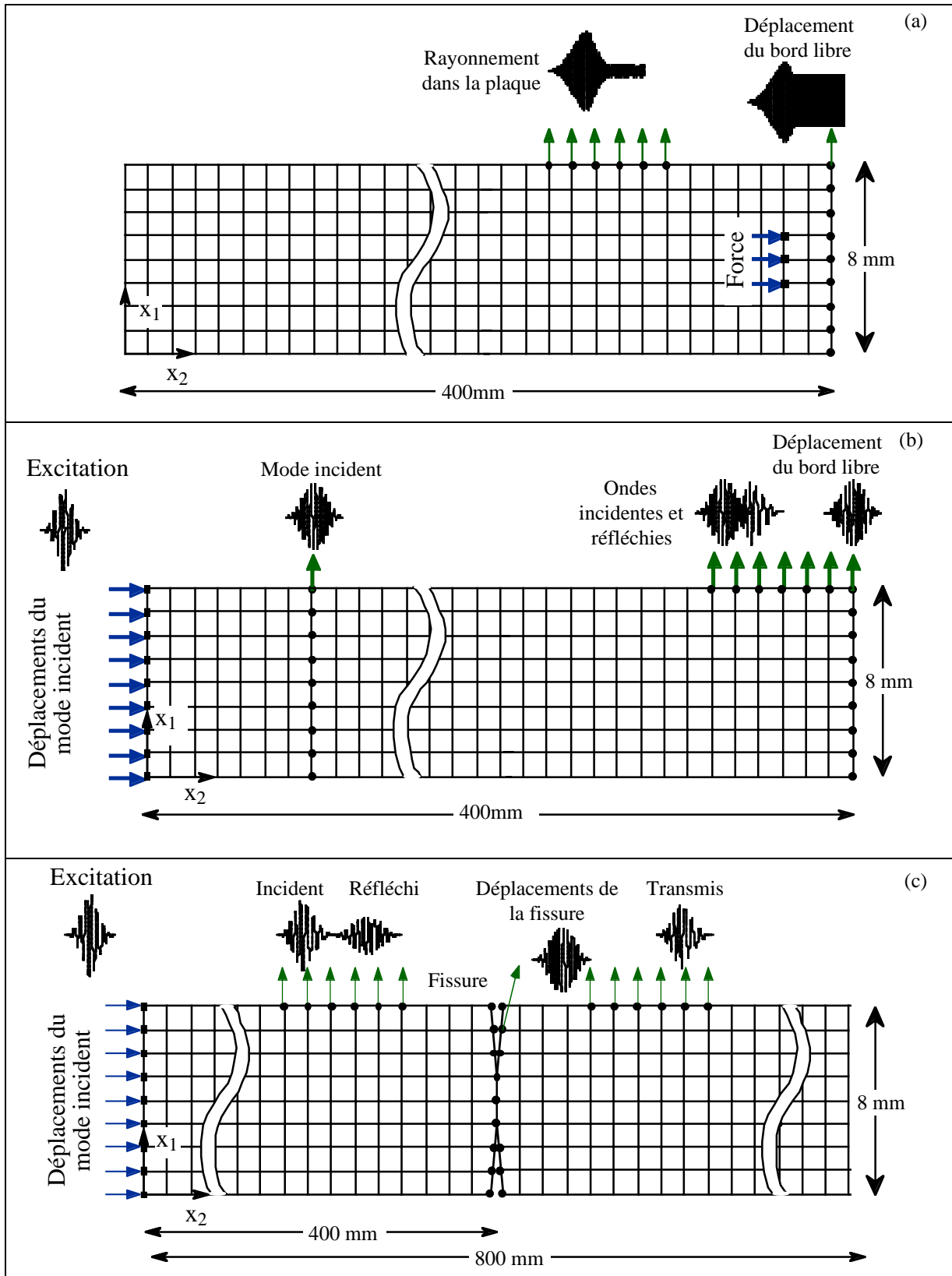


figure III.1 : Maillage 2D d'une plaque d'épaisseur 8 mm et de longueur 400 ou 800 mm
 (a) Excitation par une force de la résonance du bord ; (b) Génération d'une onde de Lamb et interaction avec le bord de la plaque ; (c) Génération d'une onde de Lamb et interaction avec des fissures verticales (■) nœuds d'application de l'excitation ; (●) nœuds contrôlés.

III.1.4 Zones d'observation du maillage

Au cours du temps T , des déplacements dans les deux directions sont calculés en tous les points du maillage. Il est ainsi possible d'obtenir une forme temporelle de la réponse de la plaque en une position quelconque. Dans les modélisations qui seront exposées dans les chapitres IV et V, sont contrôlés :

- Des nœuds à travers l'épaisseur de la plaque, dans une région relativement proche de l'excitation. Les signaux prédits en ces nœuds permettent de vérifier la pureté de l'onde incidente (figure III.1.b).
- Des nœuds sur les surfaces des défauts (bord de la plaque ou fissures) pour obtenir leurs champs de déplacement à des fréquences spécifiques (figure III.1.a, b et c).
- Des nœuds en surface de la plaque, à gauche du bord de la plaque ou de part et d'autre de la fissure. Comme il sera expliqué par la suite, les signaux calculés sont ensuite traités pour extraire les amplitudes et les nombres d'ondes des différents modes incidents ou diffractés (figure III.1.a, b et c).

III.1.5 Traitement des données

De manière à comparer les résultats issus du code d'éléments finis (et des expériences dont le principe sera donné par la suite) à ceux de la méthode de décomposition modale, il a été choisi de transformer les données temporelles en des données fréquentielles. En effet, il est assez aisé de réaliser une seule transformation de Fourier sur des signaux temporels. Cependant, pour obtenir ce type de signaux par la méthode de décomposition modale, il serait nécessaire d'effectuer des modélisations pour toutes les fréquences présentes dans le spectre, de sommer les résultats obtenus pour toutes ces fréquences et d'effectuer enfin une transformée de Fourier inverse. Cette dernière mise en œuvre étant assez lourde n'a donc pas été retenue.

III.1.5.1.1 Signaux relevés à travers l'épaisseur de la plaque : champs de déplacement

En ces nœuds, seul le champ de déplacement doit être extrait. De plus, il est, en général, possible d'isoler un seul paquet d'ondes correspondant, selon les cas, au mode incident ou à la superposition, sur les faces du défaut, du mode incident et de tous les modes diffractés. Une transformée de Fourier simple est alors appliquée à chacune de ces formes d'ondes permettant ainsi d'obtenir l'évolution de l'amplitude du signal en fonction de la fréquence. La variation du champ total de déplacement, à travers l'épaisseur de la plaque, est ensuite obtenue en comparant, à une fréquence donnée, les amplitudes correspondant aux nœuds contrôlés du maillage.

III.1.5.1.2 Signaux en surface de plaque : obtention des coefficients de réflexion

Les signaux prédits en surface de la plaque sont utilisés pour identifier les ondes présentes et pour calculer leurs amplitudes. Les traitements suivants conduisent, en particulier, à l'obtention des coefficients de réflexion ou de transmission des différents modes.

- Lorsque aucune conversion de modes n'est possible (défaut symétrique par rapport au plan médian et bas produit fh), les amplitudes sont obtenues à partir de signaux prédits

en deux nœuds situés à gauche et à droite des défauts (pour le bord de la plaque, un seul nœud situé à gauche). Une fenêtre temporelle $w(t)$ est appliquée pour sélectionner les formes d'ondes $s_i(t)$, $s_r(t)$ ou $s_t(t)$ correspondant respectivement aux modes incident, réfléchi ou transmis. Cette fenêtre rectangulaire dont les bords sont arrondis est aussi grande que possible de manière à ne pas altérer l'estimation des amplitudes. L'évolution en fonction de la fréquence des coefficients de réflexion (R) et de transmission (T), pour la direction j , est alors obtenue en divisant le spectre de fréquence des ondes correspondantes :

$$R^j(h/2, x_2, f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (s_r(t) \times w(t)) e^{-i2\pi ft} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} (s_i(t) \times w(t)) e^{-i2\pi ft} dt}$$

(III.3)

et

$$T^j(h/2, x_2, f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (s_t(t) \times w(t)) e^{-i2\pi ft} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} (s_i(t) \times w(t)) e^{-i2\pi ft} dt}$$

Lors de l'étude du bord de la plaque, seul le coefficient de réflexion est calculé.

- Si le défaut n'est pas symétrique (fissure débouchante simple) ou si le produit fh est élevé, des conversions de modes impliquent que plusieurs ondes sont réfléchies ou transmises, quel que soit le mode incident. Puisque la plaque est de longueur finie, les points contrôlés ne peuvent pas être toujours suffisamment éloignés du défaut (fissure ou bord de plaque) pour que ces modes soient séparés dans le domaine temporel. À titre d'exemple, la figure III.2.a présente les signaux temporels calculés par le code d'éléments finis en différentes positions de la surface de la plaque lors de la réflexion de A_0 sur une fissure simple débouchante de hauteur égale à 50% de l'épaisseur de la plaque. Sur ce graphe, deux paquets d'ondes de vitesses différentes peuvent être identifiés. Le premier correspond au mode incident et le deuxième aux ondes réfléchies qui ne peuvent être ni identifiées, ni dissociées. Une fenêtre temporelle ne peut donc pas être appliquée pour isoler les différentes ondes diffractées et la formule (III.3) ne permet plus de calculer les coefficients de diffraction.

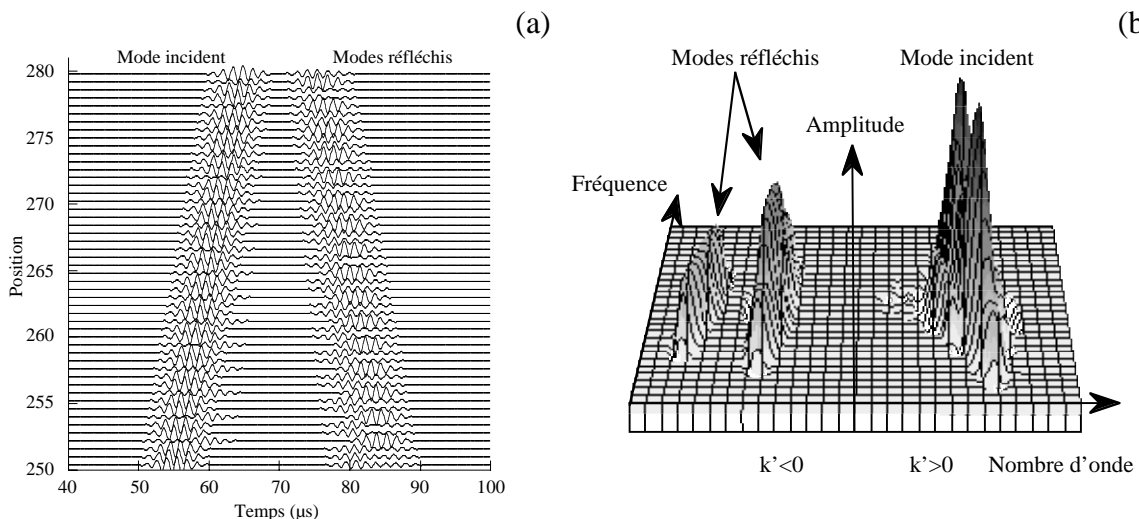


figure III.2 : Double transformée de Fourier :

(a) signaux temporels relevés en surface d'une plaque d'aluminium lors de la réflexion du mode A_0 sur une fissure simple débouchante de hauteur égale à 50% de l'épaisseur de la plaque ; (b) Graphe nombre d'onde – fréquence obtenu en appliquant une 2DFFT sur les signaux (a).

Une double transformée de Fourier est alors appliquée sur chacun des ensembles des signaux $s(x_1=h/2, x_2, t)$ obtenus en contrôlant les nœuds de la surface de la plaque, à gauche et à droite de la fissure (seulement à gauche pour le bord de la plaque). La distance totale de contrôle définit la résolution en nombres d'ondes et la distance entre deux nœuds successifs doit respecter le critère de Shanon.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(h/2, x_2, t) e^{-i2\pi ft} e^{ik_2 x_2} dt dx_2. \quad (\text{III.4})$$

La formule (III.4) transforme les données qui dépendent de la position le long de la plaque et du temps en un diagramme où les nombres d'ondes dépendent de la fréquence [99]. Par exemple, la figure III.2.b, issue de la double transformée appliquée aux signaux de la figure III.2.a, montre que trois lobes peuvent être identifiés. Le premier correspond à des nombres d'ondes positifs. Il est donc associé au mode incident I . Les deux autres possèdent des nombres d'ondes négatifs et correspondent donc à des ondes réfléchies $n=-N$. Il est, de plus, possible de tracer, dans la bande de fréquences de l'excitation, la variation des vitesses de phase ou des amplitudes pour les différents modes. Ces données peuvent être comparées aux courbes de dispersion pour identifier la nature des modes présents dans les signaux diffractés et les coefficients de réflexion et de transmission en surface de la plaque, dans la direction j , sont calculés à partir des amplitudes des différents modes en utilisant les relations suivantes :

$$R_{-N}^j(h/2, k_2, f) = \frac{S_r^j(k_{-N}, f)}{S_i^j(k_I, f)} \quad \text{et} \quad T_N^j(h/2, k_2, f) = \frac{S_t^j(k_N, f)}{S_i^j(k_I, f)} \quad (\text{III.5})$$

où $S_i^j(k_I, f)$, $S_r^j(k_{-N}, f)$ et $S_t^j(k_N, f)$ représentent la variation, avec la fréquence, des amplitudes en surface de plaque, dans la direction j , des modes incident, réfléchi et transmis, respectivement. Elles sont issues des doubles transformées de Fourier.

III.1.6 Application à l'étude du bord libre d'une plaque

Plusieurs modélisations ont été effectuées pour étudier le bord libre d'une plaque d'aluminium de 8 mm d'épaisseur, et de 400 mm de long. Dans tous les cas, elle est maillée par 3200 éléments carrés de 1 mm de côté. Deux séries de 9 points séparés de 1 mm, à travers l'épaisseur de la plaque, sont contrôlées. La première est proche de la zone d'excitation de la plaque et les déplacements calculés, dans les deux directions x_1 et x_2 , sont comparés à ceux du mode incident pour en vérifier la pureté. La seconde série de nœuds est située sur le bord et les signaux calculés, en ces nœuds, selon x_1 et x_2 , sont traités pour obtenir les déplacements du bord à différents produits fréquence-épaisseur (voir paragraphe III.1.5.1.1). Une série de 100 nœuds disposés tous les 1 mm, de $x_2=300$ à 400 mm, en surface de la plaque est aussi contrôlée. Cette zone est située juste à gauche du bord de la plaque (figure III.1.a et b). Les déplacements calculés, en ces nœuds, dans les deux directions sont ensuite traités pour obtenir les coefficients de réflexion des ondes diffractées (voir paragraphe III.1.5.1.2).

Dans un premier temps, la résonance du bord de la plaque, appelée « mode de bout », est analysée. Cette vibration symétrique par rapport au plan médian de la plaque est observée pour un seul produit fréquence-épaisseur situé en dessous de la fréquence critique de S_1

(figure III.3). Comme expliquée dans le paragraphe III.1.2, elle est excitée soit en appliquant une force sur le bord de la plaque, soit lors de la réflexion sur celui-ci du mode S_0 .

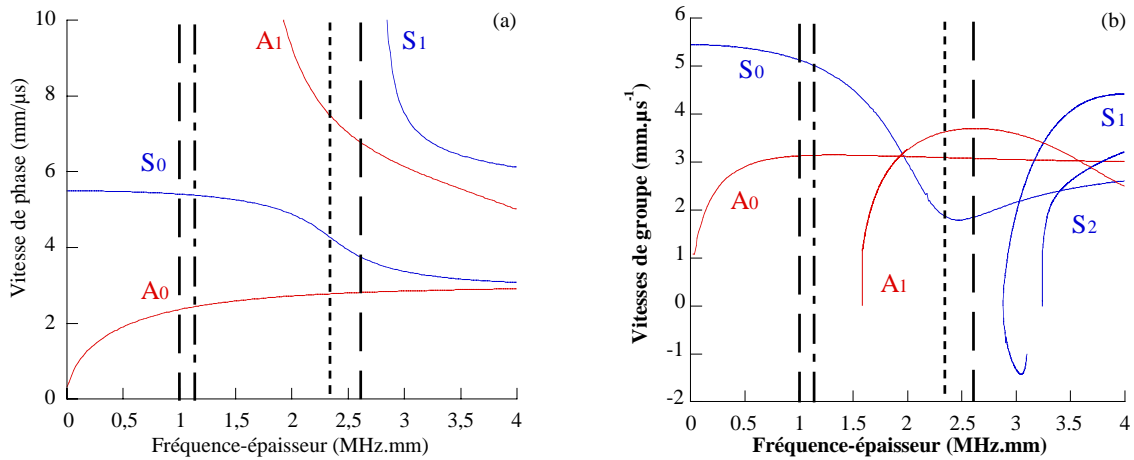


figure III.3 : Courbes de dispersion des ondes de Lamb dans une plaque d'aluminium.

(a) Vitesses de phase ; (b) Vitesses de groupe.

(- - -) indique le produit fh de la résonance du bord libre de la plaque

(— —) indique les deux produits fh pour lesquels le mode A_0 sera considéré comme incident sur le bord libre

(— - —) indique le produit fh considéré lors de la diffraction de A_0 ou de S_0 par les fissures verticales

La réflexion du mode A_0 est aussi modélisée (figure III.1.b) pour un produit fh (2,696 MHz.mm) supérieur au produit fréquence-épaisseur de coupure du mode A_1 (figure III.3). Dans cette région fréquentielle, les deux modes A_0 et A_1 sont propagatifs et faiblement dispersifs. Cette caractéristique facilite les modélisations puisque les paquets d'ondes restent compacts dans le temps. Les caractéristiques des différentes modélisations réalisées dans ce document sont rappelées dans le tableau ci-dessous.

	Excitation	Produit fh (MHz.mm)	Nombres de cycles
Bord libre de la plaque	A_0	2,696	20
	Force symétrique à large bande fréquentielle	2,16	5
	Force symétrique à bande fréquentielle étroite ou incidence de S_0	2,32	20
Fissures verticales	A_0 ou S_0	1,12	10

tableau III.1 : Paramètres d'excitation lors de la modélisation par le logiciel d'éléments finis de la résonance du bord libre ou de la diffraction de A_0 ou S_0 par le bord ou par des fissures.

III.1.7 Application à la diffraction par une fissure verticale

Le produit fréquence-épaisseur correspondant à l'étude de la diffraction des ondes de Lamb avec des fissures verticales, est choisi égal à 1,12 MHz.mm. Il permet de générer les ondes A_0 et S_0 dans des bandes fréquentielles où elles sont peu dispersives. Ce fait permet de diminuer les temps de calculs par le code d'éléments finis puisque les paquets d'ondes générés dans la plaque restent compacts dans le temps. De plus, les fréquences excitées sont situées en dessous des premières fréquences critiques des modes d'ordres supérieurs. Les modes A_0 et S_0 sont alors les seules ondes propagatives ce qui facilite l'analyse des coefficients de diffraction. Les plaques sont modélisées par une région bi-dimensionnelle de 8 mm de haut dans la direction x_1 (épaisseur de la plaque) et de 800 mm de long dans la direction x_2 (longueur de la plaque). Cette région est maillée par 6400 éléments carrés de 1 mm de côté. Les fissures sont perpendiculaires aux surfaces de la plaque et sont situées à la position $x_2=400$ mm le long de la plaque (figure III.1.c). Comme précisé dans le paragraphe III.1.2.2, l'excitation est appliquée en imposant, sur le bord gauche de la plaque, le champ de déplacement du mode incident à la fréquence centrale désirée. En chacun des points du bord, l'excitation temporelle est une salve de 10 cycles centrée sur la fréquence de 0,14 MHz.mm (produit fréquence-épaisseur de 1,12 MHz.mm) et multipliée par une fenêtre de Hanning.

Deux séries de 9 points séparés de 1 mm sont contrôlées, à travers l'épaisseur de la plaque, à la position des fissures (à $x_2 = 400$ mm). La première série est constituée des nœuds de droite des éléments situés juste à gauche de la fissure et la seconde est composée des nœuds de gauche des éléments situés juste à droite de la fissure. Les signaux calculés, en ces nœuds, dans les deux directions x_1 et x_2 , sont ensuite traités pour obtenir les déplacements au produit fréquence-épaisseur de 1,12 MHz.mm (voir paragraphe III.1.5.1.1). De plus, deux séries de 26 nœuds sont contrôlées tous les 4 mm sur l'une des surfaces de la plaque le long de lignes localisées à gauche (de $x_2 = 250$ à 350 mm), et à droite (de $x_2 = 450$ à 550 mm) de la fissure. Les déplacements calculés, dans les deux directions, sont ensuite traités pour obtenir les coefficients de réflexion et de transmission des ondes diffractées (voir paragraphe III.1.5.1.2).

III.2. Procédés expérimentaux

III.2.1 Description des plaques

Trois plaques d'aluminium carrées de côté 400 mm et d'épaisseur 8 mm ont été utilisées. Dans chaque plaque, trois défauts ont été usinés. La première contient des paires de rainures débouchantes symétriques par rapport au plan médian (figure III.4.a). Leurs hauteurs respectives p sont 25 %, 50 % et 75 % de l'épaisseur de la plaque. Les deux dernières plaques possèdent des rainures simples de hauteur relative p/h égale à 12,5 %, 25 % et 37,5 % pour la première, et 50 %, 62,5 % et 75 % pour la seconde (figure III.4.b). Pour des raisons de fabrication, ces défauts possèdent une largeur $w=0,7$ mm et ne sont donc pas des fissures. Cependant, les expériences sont réalisées au produit fréquence-épaisseur de 1,12 MHz.mm pour lequel les longueurs d'ondes λ des modes A_0 et S_0 sont respectivement de 17 mm et 38 mm, soit des rapports $\lambda/w \approx 24$ pour A_0 et $\lambda/w \approx 53$ pour S_0 . La largeur des rainures semble donc négligeable devant les longueurs d'ondes des modes incidents et ces défauts sont jugés satisfaisants pour que les mesures réalisées puissent être comparées aux prédictions concernant la diffraction des ondes de Lamb par des fissures. Cette hypothèse sera discutée dans le chapitre V concernant l'analyse des résultats. Les défauts sont situés à 250 mm du

bord gauche de la plaque (figure III.4). Cette position dissymétrique des rainures permet de conserver, à leur gauche, une grande région dans laquelle peuvent être placés deux transducteurs nécessaires à la génération du mode incident et à la détection des modes réfléchis. Dans chaque plaque a été conservée une zone sans défaut. Elle permet d'obtenir un signal de référence. De plus, les bords de la plaque étant rectifiés, cette zone saine a été utilisée pour étudier la réflexion d'un mode de Lamb sur le bord libre d'une plaque.

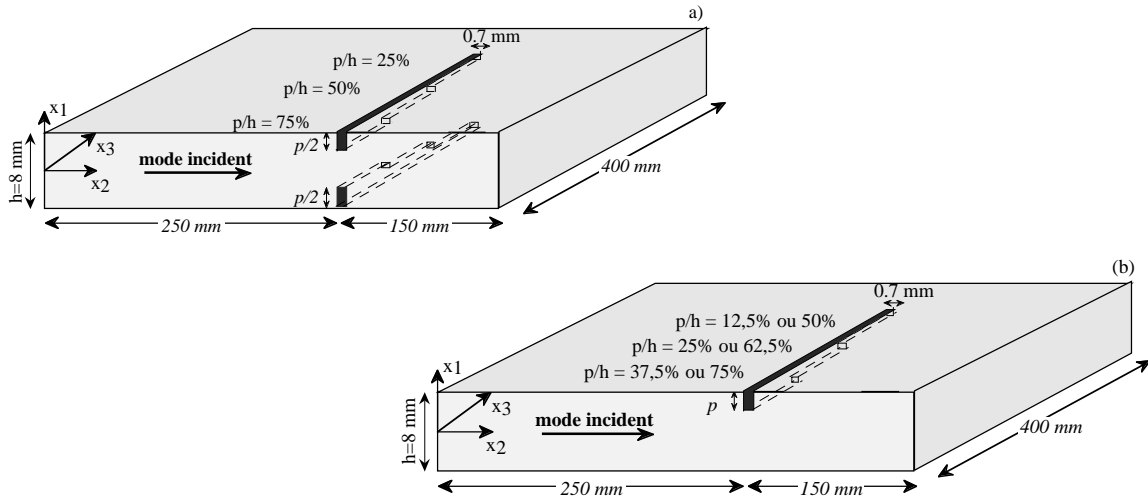


figure III.4 : Plaques d'aluminium de 8 mm d'épaisseur.

(a) des paires de rainures débouchantes symétriques par rapport au plan médian, de hauteur relative p/h égale à 25 %, 50 % et 75 % respectivement. (b) des rainures simples de hauteur relative 12,5 %, 25 %, 37,5 %, 50 %, 62,5 % et 75 %.

Les vitesses des ondes de volume longitudinale et transversale se propageant dans le matériau ont été mesurées par une méthode ultrasonore à immersion conventionnelle. Elles ont permis de calculer les valeurs moyennes des caractéristiques mécaniques de la plaque présentées dans le tableau III.2. Elles sont utilisées comme données d'entrée pour les calculs réalisés par le code d'éléments finis ou la méthode de décomposition modale.

c_L	c_T	E	ν	Densité	$C_{11}=C_{22}$	C_{66}
$6,31 \pm 0,05$	$3,19 \pm 0,02$	71.8 ± 0.2	0.33 ± 0.01	$2,66 \pm 0,01$	106 ± 4	27 ± 0.3

tableau III.2 : Vitesses des ondes de volume longitudinale et transversale ($mm/\mu s$), module d'Young (GPa), coefficient de Poisson, densité et constantes de rigidité (GPa) de la plaque d'aluminium testée.

III.2.2 Réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre

Remarquons tout d'abord que toutes les expériences qui seront explicitées ci-dessous concernent des plaques qui sont placées dans l'air et non dans le vide comme dans les différentes simulations. Cependant, le rapport des impédances acoustiques de l'air et de l'aluminium est de l'ordre de 10^{-5} . Ceci signifie que l'air exerce donc une très faible action sur les surfaces de la plaque et que celles-ci peuvent être considérées, du point de vue acoustique, comme libres de contraintes. De même, le faible couplage existant entre les plaques et leurs supports (constitués d'une plaque de liège) permet de supposer que leur face inférieure est libre de contraintes.

III.2.2.1 Réflexion du mode S_0

Lors de l'étude de la réflexion du mode S_0 sur le bord libre, le transducteur ultrasonore utilisé pour générer le mode incident dans la plaque d'aluminium est un capteur piézoélectrique de 35 mm de diamètre, type IMASONIC 1433 A101. Il possède une bande passante centrée sur 250 kHz et étendue de 120 à 380 kHz, à -15 dB. Pour l'étude de la résonance du bord libre de la plaque, appelée « mode de bout », le signal d'excitation est une salve de 20 cycles centrée sur 290 kHz. Ce transducteur permet donc d'exciter la plaque dans une bande de fréquence contenant la fréquence de résonance du bord. La figure III.5 montre qu'il est placé sur le côté droit de la plaque, sa face active étant en contact avec le bord. Le couplage est réalisé à l'aide de gel et la zone centrale du transducteur agit comme un piston sur le bord de la plaque. Il applique une force uniforme permettant de générer le mode S_0 . Cependant, pour minimiser tant que possible la production du mode A_0 non désiré, le transducteur est positionné symétriquement par rapport au plan médian de la plaque.

Le récepteur est une source laser POLYTEC OFV 353 associée à un vibromètre POLYTEC OFV 3001. Il permet de réaliser des mesures sans contact des vitesses en tout point de la structure. Pour recueillir les signaux correspondant aux ondes présentes sur le bord de la plaque, le faisceau laser est directement focalisé sur le bord. La plaque d'aluminium est, en effet, suffisamment réfléchissante pour que le rapport signal à bruit, supérieur à dix, ne nécessite que peu de prises de moyenne. Sur ces signaux, une transformée de Fourier est appliquée. Elle permet de sélectionner les amplitudes des déplacements du bord de la plaque, à la fréquence désirée. Pour recueillir les déplacements normaux à la surface supérieure de la plaque, un miroir réfléchissant est utilisé. Il est incliné à 45°. Le faisceau laser devient donc orthogonal à la surface de la plaque, s'y réfléchit et, par le miroir, est renvoyé au vibromètre. Le miroir est ensuite déplacé, le long de la plaque, grâce à une table en translation motorisée. Pour chaque position, un signal temporel est visualisé sur l'oscilloscope et acquis. Comme pour le bord de la plaque, très peu de prises de moyenne sont nécessaires puisque le rapport signal à bruit est supérieur à 10. Deux séries de mesures ont été réalisées. Dans un premier temps, pour observer la décroissance du champ transitoire, des signaux ont été mesurés près du bord de la plaque. Une transformée de Fourier simple est ensuite appliquée pour relever, au produit fréquence-épaisseur désiré, l'amplitude du déplacement. Pour mesurer les amplitudes des ondes propagatives réfléchies, neuf signaux sont ensuite acquis et une double transformée de Fourier est appliquée pour convertir les signaux temporels capturés aux différentes positions du récepteur, du domaine espace-temps dans le domaine nombres d'ondes-fréquences. Le diagramme nombres d'ondes-fréquences ainsi obtenu est ensuite utilisé pour calculer les vitesses de phase et/ou les amplitudes du mode S_0 incident et du mode S_0 réfléchi en fonction de la fréquence, dans la bande correspondant au signal d'entrée.

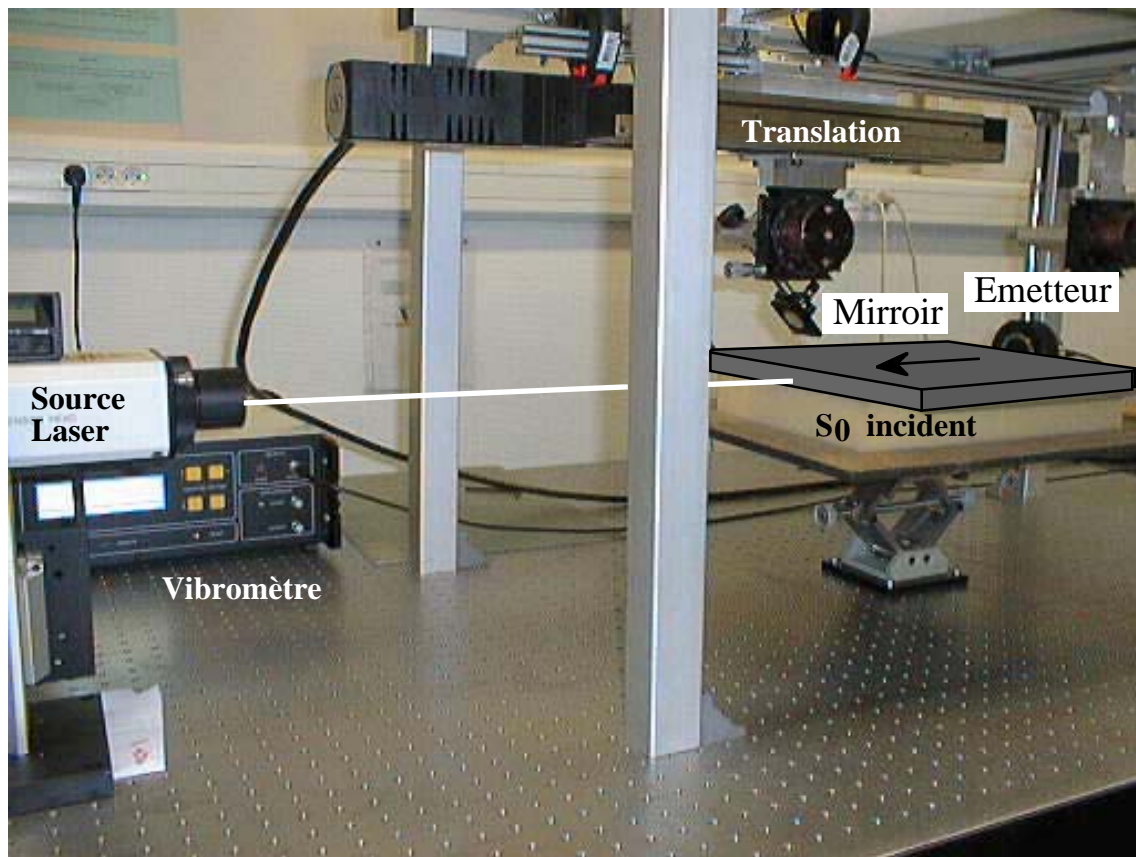


figure III.5 : Dispositif expérimental permettant de générer S_0 dans la plaque d'aluminium et de détecter les signaux présents sur le bord libre.

III.2.2.2 Réflexion du mode A_0

Lors de l'étude de la réflexion du mode A_0 sur le bord libre, le transducteur ultrasonore permettant de générer le mode incident est identique à celui utilisé pour le mode S_0 . Cependant, A_0 est plus sensible à une excitation en surface qu'en bout de plaque. Comme le montre la figure III.6, le transducteur piézoélectrique est donc couplé à la surface de la plaque par l'intermédiaire d'une cuve à eau. Il est ensuite orienté à l'angle de coïncidence défini par la relation de Snell-Descartes :

$$\theta_m = \sin^{-1}\left(\frac{V_c}{V_m}\right), \quad (\text{III.6})$$

où V_c est la vitesse de phase des ondes longitudinales se propageant dans l'eau et V_m est la vitesse de phase du mode de Lamb m dans la plaque. θ_m définit donc l'orientation du transducteur nécessaire pour générer le mode m . Ce mode d'excitation ne perturbe en rien la propagation de l'onde générée puisque une grande partie de la plaque est libre de contrainte (à part la zone d'excitation). A_0 se propage donc dans une plaque libre.

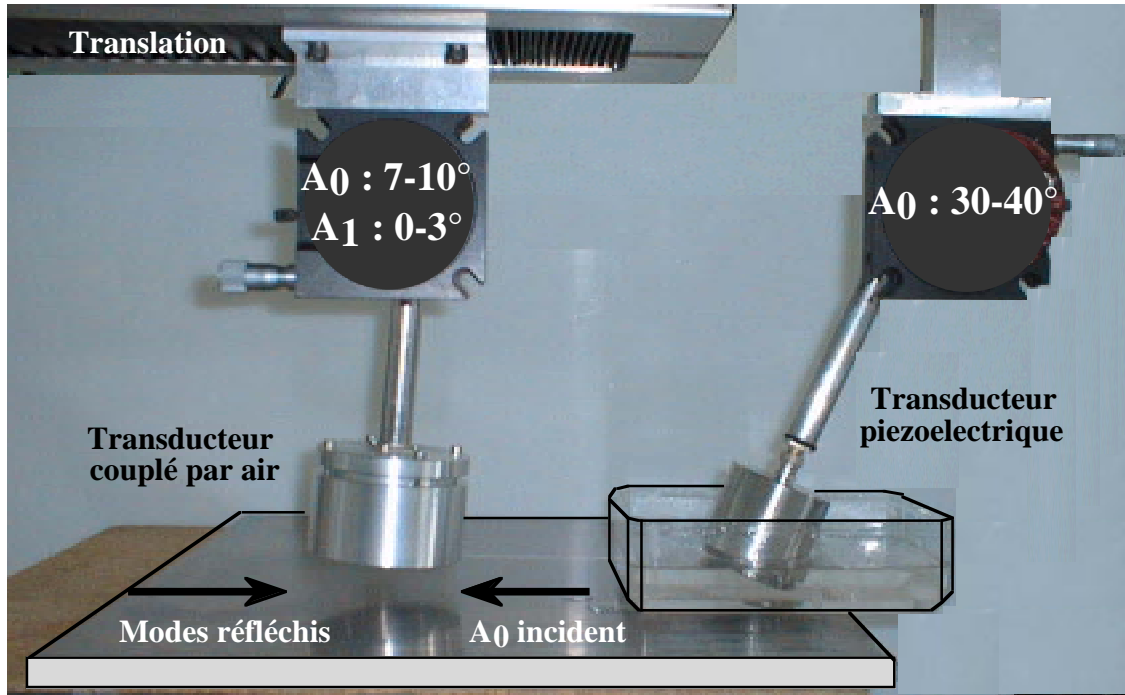


figure III.6 : Dispositif expérimental permettant de générer A_0 dans la plaque d'aluminium et de détecter les signaux réfléchis par le bord libre.

Le récepteur est un transducteur circulaire couplé par air dont le diamètre est de 50 mm et la bande de fréquences centrée sur 200 kHz avec une bande passante à -15 dB de 50 à 400 kHz [100]. Ce transducteur possède de fortes qualités pour le contrôle non destructif de matériaux puisqu'il permet de détecter des ultrasons dans l'air, sans contact avec la structure à tester. Comme pour un transducteur piézoélectrique, il est nécessaire de l'orienter angulairement pour détecter correctement les différents modes. Son utilisation est cependant plus aisée puisqu'il ne nécessite aucun artifice de couplage (cuve à eau ou gel). Son orientation peut alors être facilement adaptée à la détection de modes dont les angles de rayonnement diffèrent. De même, sa translation n'est pas limitée, contrairement au transducteur piézoélectrique dont la taille de la cuve à eau réduit les déplacements. Enfin, lors de sa translation, son couplage à la plaque ne varie pas. De plus, sa sensibilité est supérieure à celle de la source laser puisqu'il intègre le rayonnement de toute une zone correspondant à sa surface (figure III.7). Enfin, ce transducteur est très directif et l'angle d'orientation est un paramètre critique. En effet, une faible erreur entraîne une chute importante d'amplitude des signaux recueillis. Un réglage minutieux est donc nécessaire pour la mesure des amplitudes des différentes ondes.

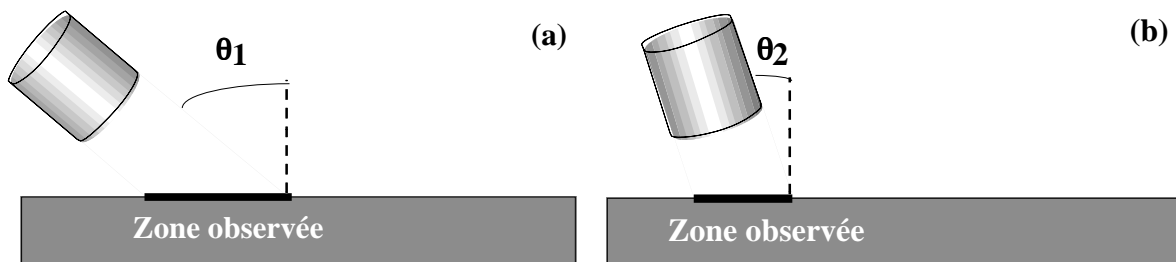


figure III.7 : Zones d'observation de la plaque en fonction de l'orientation du transducteur. (a) grand angle, large région d'observation ; (b) petit angle, petite région d'observation.

Cependant, lorsque les amplitudes de plusieurs modes doivent être relevées, les différentes orientations des transducteurs impliquent certaines corrections. En effet, le transducteur étant de taille finie, son orientation définit des zones d'observation plus ou moins grandes en surface de la plaque (figure III.7.a et b). Pour deux angles d'orientation θ_1 et θ_2 , les zones $Z_i, i=1,2$, inspectées sont respectivement :

$$Z_i = \frac{S}{\cos(\theta_i)}, i=1,2, \quad (\text{III.7})$$

où S représente la surface du transducteur. Pour comparer les amplitudes mesurées, a_1 et a_2 , de deux modes, d'angles de coïncidence θ_1 et θ_2 , se propageant dans la plaque, il est alors nécessaire de les corriger par le rapport des cosinus. Si l'onde 1 est prise comme référence, l'amplitude corrigée du mode 2 est :

$$A_2 = a_2 \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)}. \quad (\text{III.8})$$

Néanmoins, dans les expériences qui sont menées, la réflexion du mode A_0 est étudiée dans une bande de produits fréquence-épaisseur allant de 0,5 MHz.mm à 2,5 MHz.mm. Ce domaine est divisé deux sous-parties et seuls les modes A_0 ou A_1 sont détectés. Les caractéristiques de l'excitation et de réception sont données dans le tableau ci-dessous.

Domaine de produits fh (MHz.mm)	Excitation	$\theta_{A_0}^E$ dans l'eau	$\theta_{A_0}^R$ dans l'air	$\theta_{A_1}^R$ dans l'air
[0,5 - 1,5]	impulsion	40°	8°	-
[1,5 - 2,5]	5 cycles centrés sur 300 kHz	33°	7°	3°

tableau III.3 : Type d'excitation, angle d'émission $\theta_{A_0}^E$ de A_0 dans l'eau et angles de réception $\theta_{A_0}^R$ et $\theta_{A_1}^R$ dans l'air des modes A_0 et A_1

La correction maximale à appliquer aux amplitudes mesurées est alors de 1 %. En effet, $\cos(8^\circ)/\cos(3^\circ) \approx 0,99$. Cette correction est bien inférieure à la précision des mesures et ne sera donc pas effectuée. Par contre, pour des mesures précises des amplitudes de ces modes, le récepteur est déplacé, à l'aide d'une table motorisée, dans la direction x_2 sur 40 mm avec un pas de 5 mm. Pour chaque position, un signal temporel correspondant aux modes incidents ou réfléchis A_0 ou A_1 , selon l'orientation du transducteur, est visualisé sur un oscilloscope numérique et capturé. Une double transformée de Fourier est ensuite appliquée sur chaque série de 9 signaux. De la même façon que pour l'exploitation des résultats du code d'éléments finis, le diagramme nombres d'ondes–fréquences est utilisé pour déterminer les amplitudes des ondes incidentes et réfléchies.

La sonde laser a aussi été utilisée pour mesurer les déplacements du bord libre lorsque A_0 est incident au produit fh de 1 MHz.mm. Comme sur la figure III.5, le faisceau laser est focalisé sur le bord de la plaque sur lequel il est réfléchi vers le vibromètre. Plusieurs signaux sont ainsi mesurés à différentes positions à travers l'épaisseur de la plaque. De plus, le déplacement, en surface de la plaque et dans la direction normale, a aussi été mesuré en un point proche du bord. Le miroir est alors utilisé et le faisceau laser est incident sur la plaque

dans une direction normale à ses surfaces. Une transformée de Fourier simple est ensuite appliquée à chacun de ces signaux pour sélectionner, au produit fréquence-épaisseur de 1 MHz.mm, l'amplitude correspondant au déplacement.

III.2.3 Diffraction d'une onde de Lamb par des fissures

III.2.3.1 Émission

Comme précédemment, le transducteur ultrasonore utilisé pour générer les modes A_0 ou S_0 est le capteur piézoélectrique de 35 mm de diamètre, type IMASONIC 1433 A101. Le signal d'excitation est une salve de 5 cycles, à 140 kHz de telle sorte que le produit fréquence épaisseur corresponde à celui des modélisations numériques (1,12 MHz.mm). Puisque la plaque est plus courte que celle modélisée par le code d'éléments finis, des salves de 5 cycles doivent être utilisées pour éviter des recouvrements de signaux correspondant aux ondes diffractées deux fois par les rainures du fait de réflexions sur les bords des plaques. Ceci n'a pas d'influence sur la propagation des ondes A_0 ou S_0 puisqu'elles sont toutes les deux non dispersives dans la bande de fréquence-épaisseur concernée.

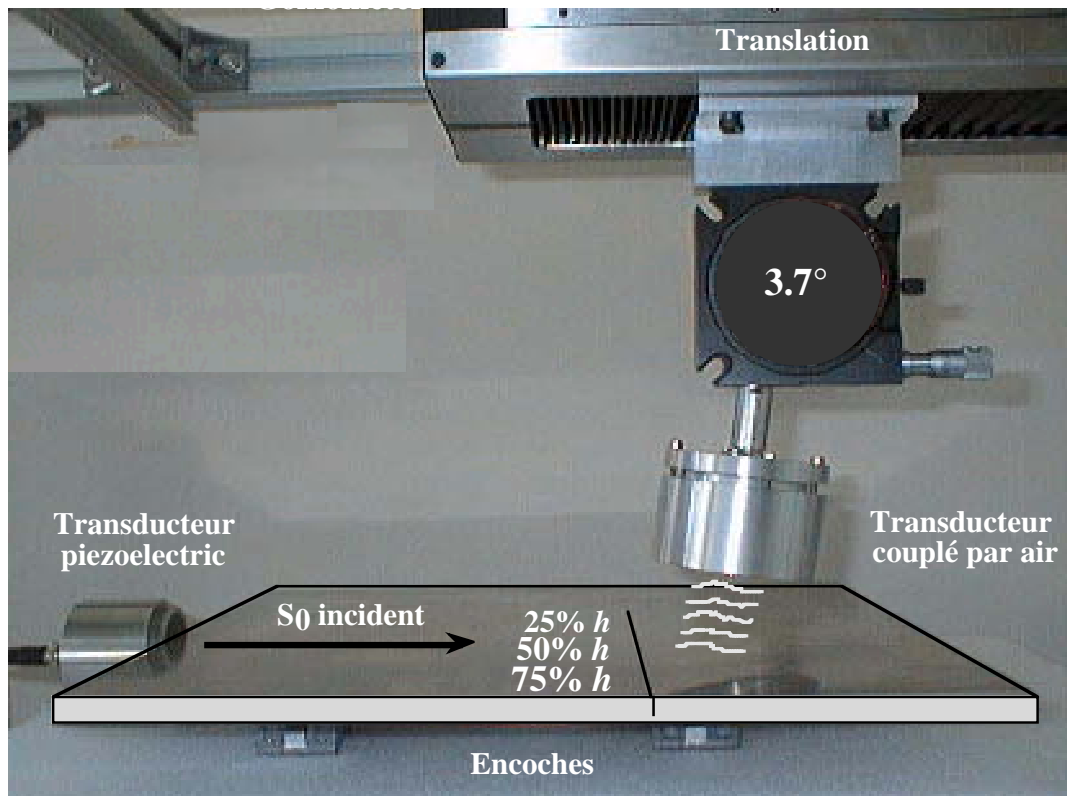


figure III.8 : Excitation du mode S_0 dans une plaque d'aluminium et réception des signaux transmis à travers les rainures.

Pour générer le mode S_0 , le transducteur est placé, comme dans le paragraphe III.2.2.1, sur le bord de la plaque, sa face active en contact avec le bord de la plaque et couplée avec du gel (figure III.8). Pour l'excitation du mode A_0 , par contre, le transducteur est connecté à l'une des surfaces de la plaque par des doigts de plexiglass de 100 mm de long, de section rectangulaire de 10 mm de haut et de 3 mm de large (figure III.9). Trois doigts sont couplés à la plaque par du gel et sont séparés par une distance de 17 mm qui correspond à la longueur d'onde du mode A_0 , au produit fréquence-épaisseur désiré. Ce procédé génère deux modes A_0 de chaque côté du transducteur interdigital (IDT). Une onde se propage vers les rainures alors que la seconde est excitée vers le bord de la plaque. Les trois doigts sont positionnés à une distance optimale du bord de telle sorte que le mode réfléchi A_0 par le bord de la plaque forme une interférence constructive avec celui se propageant directement vers les rainures. De ce fait, un seul paquet d'ondes correspondant au mode A_0 pur est incident. Ce procédé est équivalent à utiliser un transducteur IDT à six doigts et à supprimer le bord indésirable de la plaque. Il présente de plus l'avantage de faciliter, par rapport à la cuve à eau, la génération d'une onde pure dans la plaque.

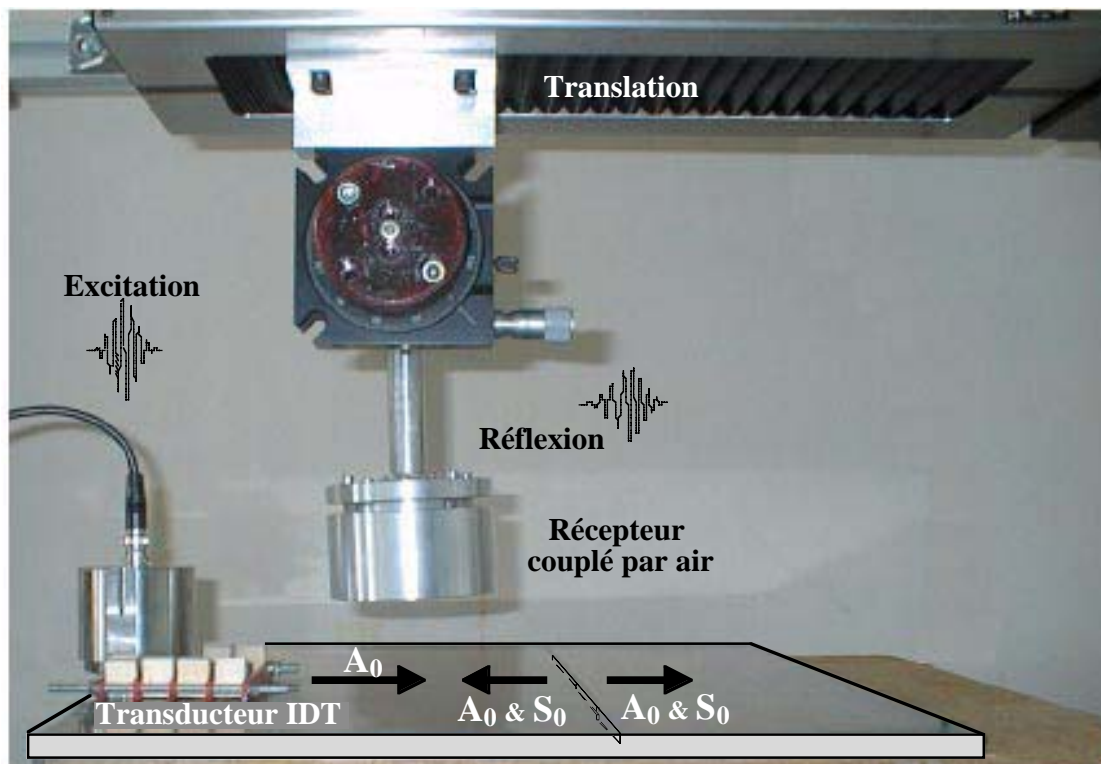


figure III.9 : Excitation du mode A_0 dans une plaque d'aluminium et réception des signaux réfléchis par les rainures.

III.2.3.2 Réception et traitements des signaux

Le récepteur est le même transducteur à couplage à air que précédemment. Son orientation angulaire est de $\pm 3,7^\circ$ ou $\pm 8,2^\circ$, selon que les modes inspectés soient A_0 ou S_0 . Pour des mesures précises des amplitudes de ces modes, le récepteur est déplacé, à l'aide d'une table motorisée, dans la direction x_2 sur 40 mm avec un pas de 5 mm. Pour chaque position, un signal temporel correspondant au mode incident, réfléchi ou transmis A_0 ou S_0 selon l'orientation du transducteur est visualisé sur un oscilloscope numérique et capturé. De manière à s'affranchir de l'ouverture angulaire des champs acoustiques et du rayonnement des

ondes de Lamb dans le milieu environnant (l'air), les mesures ont été réalisées de telle sorte que le mode incident, les modes réfléchis et les modes transmis se soient tous propagés, en moyenne, sur une même distance. Une double transformée de Fourier est ensuite appliquée sur chaque série de 9 signaux. De la même façon que pour l'exploitation des résultats du code d'éléments finis, le diagramme nombres d'ondes – fréquences obtenu est utilisé pour déterminer les amplitudes des ondes incidentes, réfléchies et transmises.

III.3. Conclusion

Dans ce chapitre ont été présentés un code d'éléments finis et plusieurs dispositifs expérimentaux qui permettront, par la suite, de confirmer ou d'infirmer les prédictions numériques issues de la méthode de décomposition modale. Le logiciel d'éléments finis permet tout d'abord de modéliser des situations difficilement réalisables expérimentalement. En particulier, il délivre des informations qui ne sont pas physiquement accessibles. Par exemple, il permet, lors de l'étude de la diffraction des ondes de Lamb par des fissures, de contrôler des nœuds, à travers l'épaisseur de la plaque. Il est ainsi possible de calculer les champs de déplacement générés par le mode incident, sur une fissure. Ce logiciel permet enfin de calculer les coefficients de diffraction qui seront par la suite comparés aux résultats de la méthode de décomposition modale.

Les mesures expérimentales constituent, bien évidemment, le procédé de validation absolu. Elles permettent, en cas de désaccord, de réfuter complètement une théorie. Par contre, lorsqu'elles correspondent aux modélisations, elles confirment que la méthode employée est valide. Les dispositifs expérimentaux mis en œuvre permettent, dans cette étude, de générer, dans une plaque d'aluminium d'épaisseur 8 mm, le mode A_0 ou S_0 à différents produits fréquence-épaisseur. Pour détecter, sans contact, l'onde incidente ou les divers modes diffractés, deux technologies ont été employées. Des transducteurs ultrasonores à couplage par air ont tout d'abord été utilisés pour effectuer des mesures précises d'amplitude des ondes. Elles permettront ensuite de calculer les coefficients de diffraction des modes de Lamb. De plus, lorsque des mesures ponctuelles ont été nécessaires, une sonde laser a été employée. Elle permet, en particulier, de relever des déplacements sur le bord ou de mesurer la décroissance, en surface de la plaque, du champ transitoire constitué des ondes non propagatives et atténuées. Toutes ces données expérimentales sont confrontées, dans les chapitres suivants aux prédictions du code d'éléments finis et de la méthode de décomposition modale.

Chapitre IV

Réflexion sur le bord libre d'une plaque

IV. Réflexion sur le bord libre d'une plaque	72
IV.1. Mode S_0 incident	72
IV.1.1 Évolution des coefficients de réflexion avec la fréquence	72
IV.1.2 Champs de déplacement sur le bord de la plaque	75
IV.1.3 Cas particulier de la résonance du mode de bout	76
IV.1.3.1.1 Intérêt de l'étude	76
IV.1.3.1.2 Modèles numériques	78
IV.1.3.1.2.1 Méthode des travaux réciproques	78
IV.1.3.1.3 Résultats	79
IV.1.3.1.3.1 Identification du mode de bout	79
IV.1.3.1.3.2 Réflexion du mode S_0 sur le bord libre	81
IV.1.3.1.3.2.1 Résonance des deux premiers modes complexes	81
IV.1.3.1.3.2.2 Rayonnement du mode de bout	82
IV.1.3.1.3.2.3 Déplacements du mode de bout	83
IV.1.3.1.3.2.4 Dépendance du mode de bout au coefficient de Poisson	86
IV.1.3.1.4 Conclusion sur la résonance du bord libre d'une plaque	87
IV.2. Mode A_0 incident	87
IV.2.1 Évolution des coefficients en fonction de la fréquence	87
IV.2.2 Coefficients de réflexion en surface de la plaque	90
IV.2.3 Champs transitoires en surface de la plaque	93
IV.2.4 Champs de déplacement sur le bord de la plaque	94
IV.3. Conclusion	95

IV. Réflexion sur le bord libre d'une plaque

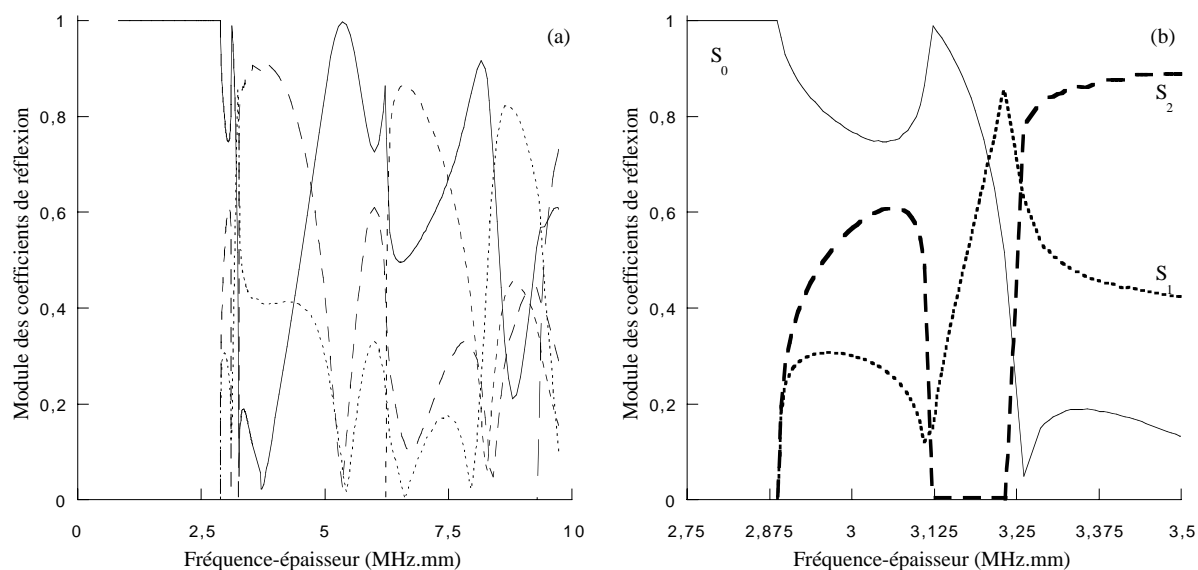
Ce chapitre présente les résultats obtenus lors de la modélisation de la réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre d'une plaque d'aluminium. Cette étude est un cas particulier de la modélisation de la diffraction par des fissures verticales puisque le bord peut être considéré comme étant une fissure de 100% de l'épaisseur de plaque. Les prédictions réalisées par la méthode de décomposition modale sont comparées aux calculs effectués par le code d'éléments finis. Dans certains cas, ces résultats sont aussi confrontés à des mesures expérimentales.

Le mode incident sur le bord de la plaque est soit A_0 soit S_0 . L'évolution, avec le produit fréquence-épaisseur, des modules et des phases des coefficients de réflexion est tout d'abord présentée. Elle permet d'observer, sur une large bande de produits fh , les diverses conversions de modes qui se produisent. Pour chaque mode, un cas particulier est ensuite analysé. Tout d'abord, la résonance du bord libre de la plaque est étudiée lors de l'incidence du premier mode symétrique sur le bord. Deux fréquences particulières permettent ensuite de mettre en évidence, lorsque est A_0 incident, l'importance des modes non propagatifs et atténués dans les phénomènes de diffraction.

IV.1. Mode S_0 incident

IV.1.1 Évolution des coefficients de réflexion avec la fréquence

La figure IV.1.a présente l'évolution, avec le produit fréquence-épaisseur, des modules des coefficients de réflexion calculés, par la méthode de décomposition modale, lorsque S_0 se réfléchit sur le bord libre d'une plaque d'aluminium. Celle-ci a ensuite été divisée en trois graphes (figure IV.1.b, c, d) pour obtenir une lecture plus aisée des détails. De part la géométrie du bord de la plaque (symétrique par rapport au plan médian), aucune conversion sur les modes antisymétriques ne peut intervenir. Cependant, dans la bande de produits fréquence-épaisseur allant de 0 à 10 MHz.mm, plusieurs modes symétriques propagatifs peuvent coexister dans la plaque (jusqu'à 5 modes). Dans ce cas, l'énergie du mode incident S_0 se répartit entre tous les modes symétriques, propagatifs. L'énergie de ces différents modes réfléchis peut être obtenue à partir des courbes suivantes en élevant les coefficients de réflexion au carré.



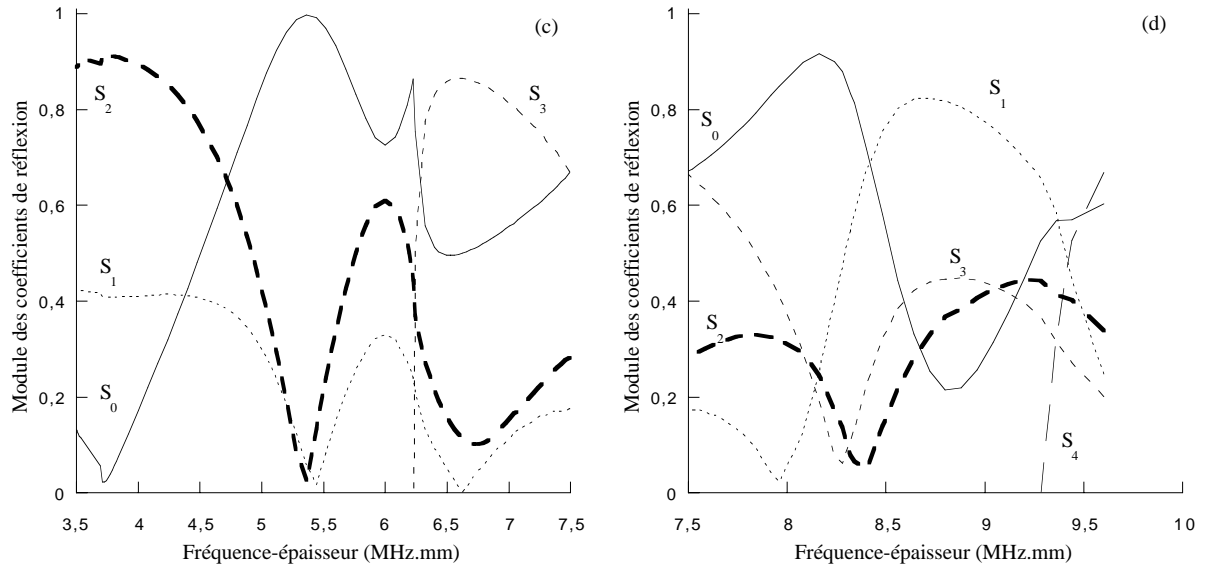


figure IV.1. – Modules des coefficients de réflexion des ondes de Lamb symétriques lorsque S_0 est incident sur le bord d'une plaque d'aluminium ; (a) Large bande de fréquences, (b) 2,75-3,5 MHz.mm, (c) 3,5-7,5 MHz.mm, (d) 7,5-9,75 MHz.mm

La figure IV.2.a présente l'évolution des phases des coefficients de réflexion calculés lorsque S_0 se réfléchit sur le bord libre d'une plaque d'aluminium. Comme pour les modules, elle a été divisée en trois graphes (figure IV.2.b, c, d) pour obtenir une lecture plus facile des détails. Il est important de noter que, comme énoncé dans le chapitre II, ces graphes correspondent aux phases φ_n des amplitudes que possèdent les modes de Lamb propagatifs, sur le bord de la plaque, relativement au mode I pour lequel $a_r=1$:

$$b_n = |b_n| e^{i\varphi_n} \quad (\text{IV.1})$$

Si elles doivent être confrontées à des mesures expérimentales, il est nécessaire de leur ajouter, par exemple, les phases relatives aux écritures des champs de déplacement et celle introduite par la propagation de l'onde. En effet, le champ de déplacement de l'onde n , à une distance x_2 du bord de la plaque, s'écrit :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = |b_n| e^{i\varphi_n} \mathbf{u}_n(x_1) e^{-ik_n x_2}. \quad (\text{IV.2})$$

Sa composante, dans la direction j , possède pour phase :

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_{un}^j - k_n x_2, \quad (\text{IV.3})$$

où φ_{un}^j représente la phase de la composante, dans la direction j , du champ de déplacement normalisé.

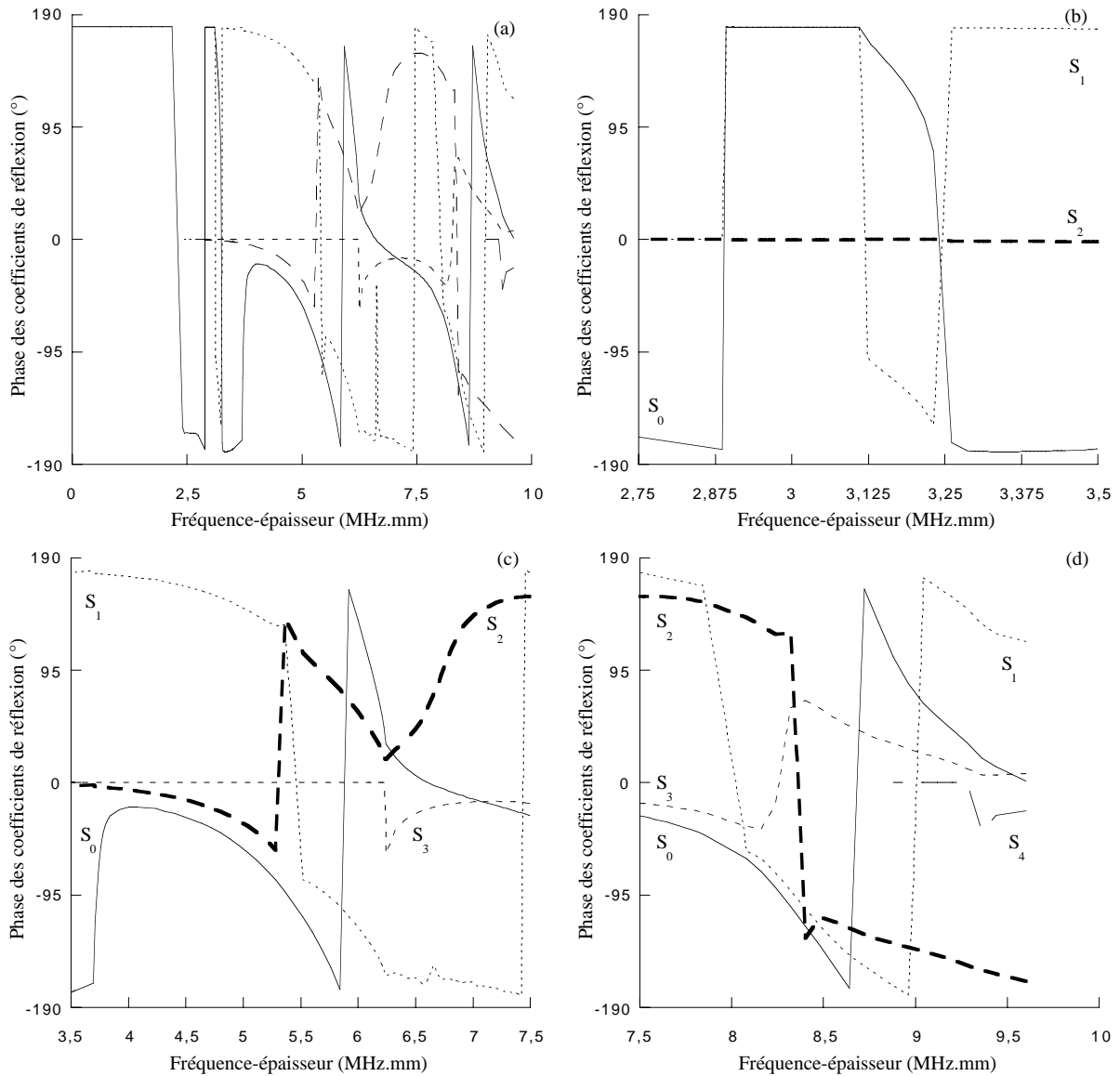


figure IV.2. – Phase des coefficients de réflexion des ondes de Lamb symétriques lorsque S_0 est incident sur le bord d'une plaque d'aluminium ; (a) Large bande de fréquences, (b) 2,75-3,5 MHz.mm, (c) 3,5-7,5 MHz.mm, (d) 7,5-9,75 MHz.mm

Il est tout d'abord intéressant d'analyser avec précision la figure IV.1.b. En dessous de la fréquence critique de S_1 (2,87 MHz.mm), aucune conversion de mode n'existe et S_0 est le seul mode propagatif. Il se réfléchit donc sur lui-même et conserve son amplitude initiale. Cependant, pour satisfaire la condition de contrainte nulle sur le bord de la plaque, l'onde réfléchie possède un déphasage de 180° par rapport au mode incident (figure IV.2.b). Rappelons qu'à basse fréquence le mode S_0 possède un champ de contrainte dont la composante de cisaillement σ_6 est négligeable. Les relations (II.6) montrent alors que la superposition des deux modes propagatifs incident et réfléchi suffit à satisfaire les conditions de contraintes nulles. Les modes atténués possèdent alors des amplitudes négligeables sur le bord de la plaque.

Entre 2,9 et 3,105 MHz.mm, S_1 et S_2 sont propagatifs, et l'énergie du mode incident se répartit alors sur S_0 , S_1 et S_2 . Il faut cependant noter que dans cette bande de produits fh , le mode S_2 possède un nombre d'onde négatif. Ce fait, évoqué au Chapitre I lors de la numérotation des modes, prend ici une importance particulière. En effet, il est impossible de

modéliser correctement le phénomène de réflexion si le signe du nombre d'onde de S_2 n'est pas convenablement choisi. Dans ce cas, le bilan énergétique est désastreux et les contraintes sur le bord de la plaque ne peuvent pas être annulées. La numérotation des ondes de Lamb exposée au Chapitre I apporte donc, en plus d'une classification des modes, des informations fondamentales sur leur direction de propagation ou d'atténuation.

Entre 3,105 et 3,232 MHz.mm, le mode S_2 possède un nombre d'onde imaginaire pur. Il ne transporte donc pas d'énergie dans cette gamme de fréquences. Remarquons en particulier que les deux fréquences de coupures de S_2 imposent un caractère particulier à la réflexion de S_0 sur le bord libre de la plaque. En effet, le coefficient de réflexion est égal à 1 et 0 pour les produits de 3,105 et 3,232 MHz.mm respectivement.

La figure IV.1.c montre qu'à partir de 4 MHz.mm l'amplitude du mode S_0 croît fortement et celui-ci est réfléchi avec une amplitude égale à 1 au produit fréquence-épaisseur de 5,4 MHz.mm. La figure IV.1.d complète l'évolution des divers coefficients jusqu'au produit fréquence-épaisseur de 10 MHz.mm pour lequel le nombre de modes propagatifs est élevé.

L'analyse de ces courbes permet de choisir des produits fréquence-épaisseur adaptés au contrôle de la géométrie du bord de la plaque. Par exemple, une forte amplitude du mode S_0 entre 3,5 et 4 MHz.mm, ou la présence des ondes S_1 ou S_2 à 5,4 MHz.mm peuvent indiquer que le bord de la plaque n'est pas droit ou qu'un défaut est présent. En dessous de la fréquence critique du mode S_1 , un coefficient de réflexion de S_0 inférieur à 1 peut aussi être un indicateur de non conformité du bord.

La phase des différents modes réfléchis peut aussi porter des informations sur le bord de la plaque. Tout d'abord, jusque au produit fréquence-épaisseur de 3,75 MHz.mm, la phase du mode S_0 est égale à 180° , sauf dans la bande de fréquence où S_2 possède un nombre d'onde imaginaire. Par la suite, son évolution est monotone en fonction de la fréquence (au déroulement de la phase près). De même la phase des autres modes possède un comportement monotone dans certaines bandes de fréquences et peut donc servir de contrôle sur la nature du bord de la plaque.

IV.1.2 Champs de déplacement sur le bord de la plaque

La figure IV.3 expose différents champs de déplacement produits sur le bord libre d'une plaque d'aluminium de 8 mm d'épaisseur lorsque S_0 est incident. Quatre cas particuliers sont traités. Tout d'abord, la figure IV.3.a concerne le produit fréquence-épaisseur de 1,12 MHz.mm pour lequel S_0 est le seul mode symétrique propagatif. Comme il a déjà été vu précédemment, à cette fréquence, S_0 possède un champ de contrainte dont la composante σ_2 est pratiquement uniforme à travers l'épaisseur de la plaque et la composante de cisaillement σ_6 est négligeable. De ce fait, le mode S_0 incident et le mode S_0 réfléchi (avec une amplitude égale à -1) suffisent à satisfaire les contraintes nulles sur le bord de la plaque. Rappelons que les relations (II.6) qui relient les champs des modes progressifs et rétrogrades confirment ce résultat. Le champ de déplacement qui existe sur le bord de la plaque possède alors une forme particulière. En effet, les composantes normales (u_1) des champs des modes incident et réfléchi s'annulent alors que les composantes dans le plan (u_2) s'ajoutent. Le bord de la plaque ne possède donc aucun déplacement dans la direction 1 mais son déplacement dans la direction 2 est égal au double de celui du mode incident. Cette réflexion s'apparente donc à celle d'une onde de volume de compression sur une interface solide-vide.

Les trois figures suivantes doivent être analysées ensembles. En effet, la figure IV.3.b présente le champ de déplacement sur bord de la plaque lorsque S_0 , S_1 et S_2 sont propagatifs. Cependant, au produit fréquence-épaisseur de 3 MHz.mm, S_2 possède un nombre d'onde négatif. Les champs exposés sur la figure IV.3.c concernent un produit fréquence-épaisseur

légèrement supérieur pour lequel S_2 est non propagatif. Enfin, la figure IV.3.d présente les déplacements sur le bord libre de la plaque lorsque S_2 est propagatif avec un nombre d'onde positif. Ces trois produits fréquence-épaisseur sont proches et, bien que les coefficients de réflexion évoluent fortement dans cette bande de fréquences, les champs de déplacement sur le bord de la plaque ne sont que peu perturbés. La nature (propagative, non propagative ou atténuée) du mode S_2 ne semble pas influencer fortement sur le déplacement du bord.

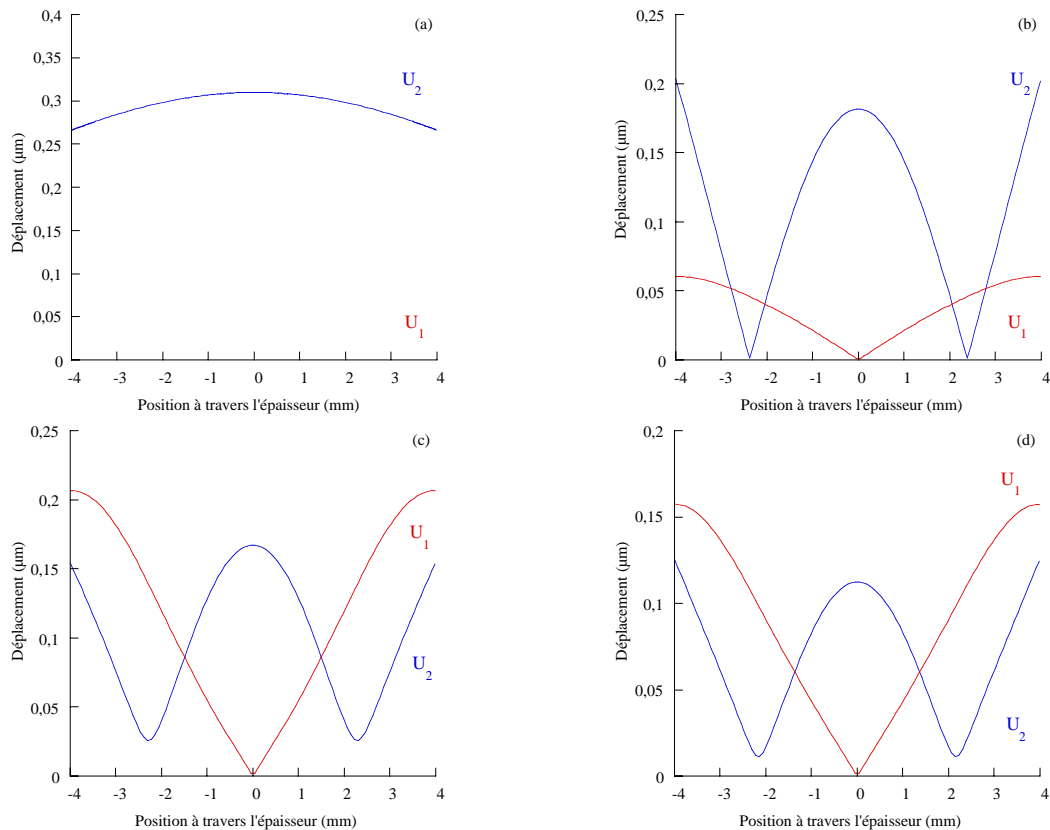


figure IV.3. – Champs de déplacement total sur le bord de la plaque ;
 Réflexion de S_0 à (a) 1,12 MHz.mm, (b) 3 MHz.mm,
 (c) 3,2 MHz.mm, (d) 3,5 MHz.mm.

IV.1.3 Cas particulier de la résonance du mode de bout

IV.1.3.1.1 Intérêt de l'étude

Il a été vu que la réflexion d'un mode de Lamb sur le bord libre d'une plaque peut être un phénomène compliqué. Lors du contrôle non destructif d'une plaque par ondes de Lamb, il peut alors être difficile de détecter des défauts proches des bords de la plaque. En effet, la complexité des signaux recueillis rend leur analyse très complexe. Cette situation est encore plus critique si le mode incident, utilisé pour tester la plaque, possède, dans sa bande fréquentielle, la fréquence correspondant à une vibration propre symétrique du bord de la plaque, appelée « mode de bout ». Ce phénomène de résonance implique que le bord rayonne, pendant une très longue durée, une onde dans la plaque. Ce phénomène peut donc entraîner des superpositions de signaux qui peuvent gêner l'identification, ou masquer la présence de défauts au sein de la plaque.

Plusieurs études ont déjà été publiées sur le sujet. Dans une étude expérimentale et théorique de la vibration de disques de barium-titanate, Shaw identifie une fréquence pour laquelle cette vibration devient résonante et le maximum de déplacement est situé sur son bord [36]. Une observation expérimentale du mode de bout pour un cylindre piezoélectrique de 5,8 m de long est présentée dans la référence [37]. La résonance du bord a été mesurée grâce à un transducteur barium-titanate au contact, localisé en des points de la surface du cylindre, près d'une des extrémités qui était excitée à l'aide d'un transducteur similaire. L'auteur indique qu'une petite partie de l'énergie incidente reste à l'extrémité, près de la source, à la fréquence de résonance, et qu'elle rayonne graduellement dans le cylindre, sous la forme du premier mode symétrique propagatif. Dans une investigation théorique [38], Gazis et Mindlin étudient le mode de bout lorsque le mode de Lamb S_0 est incident sur le bord libre d'une plaque. Un principe proche de la décomposition modale a été employé puisque deux modes de Lamb de nombres d'ondes complexes ont été ajoutés aux modes incident et réfléchi S_0 pour satisfaire la condition de contraintes nulles, pour une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du mode S_1 . Les amplitudes des différents modes présents dans la plaque ont été prédites pour un coefficient de Poisson $\nu = 0,31$. Ces résultats indiquent une augmentation brutale de l'amplitude des modes non propagatifs, jusqu'à 8 fois l'amplitude du mode incident, pour la fréquence normalisée $\Omega = 2,064$, où Ω est égale à $\omega h / 2c_T$. ω , h , et c_T sont respectivement la pulsation, l'épaisseur de la plaque et la vitesse de l'onde de cisaillement dans le matériau. Le fait que la résonance se manifeste par un maximum fini des amplitudes des modes non propagatifs est interprété comme un couplage entre la vibration du bord et le mode incident S_0 . Dans une étude, basée sur le principe des travaux réciproques entre les différents modes de Lamb (de nature propagative ou non), Torvik montre que l'étude précédente est, en fait, incomplète et que la valeur de la fréquence de résonance est légèrement supérieure $\Omega = 2,3458$ [39]. Dans leur décomposition modale, Gazis et Mindlin n'ont pas utilisé suffisamment de modes non propagatifs et atténués et les résultats obtenus ne correspondent pas aux mesures expérimentales. Dans une autre étude, le même phénomène a été modélisé grâce à une méthode variationnelle [42]. Pour ce cas, la fréquence normalisée de résonance, Ω , a été trouvée être égale à 2.3295. Enfin, la méthode des projections est utilisée dans la référence [43] pour calculer les amplitudes de cinquante modes présents sur le bord d'une plaque possédant un coefficient de Poisson de $\nu = 0,25$. L'amplitude du second mode atténué est alors 3150 fois supérieure à celle du mode incident, pour une fréquence de résonance égale à $\Omega = 2,2522$.

L'étude suivante a été menée lors d'une collaboration entre le LMP et le Département de Mécanique de l'Université Polytechnique de Bucarest (Roumanie) qui s'est concrétisée par la venue à Bordeaux de Mihai Valentin Predoi au cours du mois de février 2001. Le mode de bout y est modélisé à l'aide de trois méthodes différentes : la méthode des travaux réciproques, utilisée par Predoi [41] et déjà appliquée à cette étude par Torvik [39], la méthode de décomposition modale exposée au chapitre II, et le code d'éléments finis présenté au chapitre III. De plus, des mesures effectuées à l'aide d'une sonde laser ont été réalisées et comparées aux prédictions numériques. Cette étude a constitué une étape préliminaire importante pour les méthodes des travaux réciproques et de décomposition modale, très prometteuses pour la modélisation de problèmes complexes, linéaire, bi-dimensionnels de diffraction de modes de Lamb dans les plaques élastiques.

Puisque le mode de bout possède un comportement symétrique par rapport au plan médian de la plaque, il est tout d'abord choisi de l'exciter par une force locale symétrique appliquée au bord de la plaque. Cette première étude permet de déterminer le produit fréquence-épaisseur de la résonance et d'identifier le rayonnement du mode de bout dans la plaque. Dans un second temps, la vibration est excitée lors de l'incidence d'un mode de Lamb

symétrique sur le bord libre de la plaque. Cette onde doit cependant posséder, dans sa bande fréquentielle, la fréquence de résonance du bord de la plaque. Ce produit fréquence-épaisseur correspond, sur les courbes de dispersion des modes de Lamb présentées sur la figure III.3, au mode S_0 en dessous de la fréquence critique du mode S_1 . Le mode S_0 est donc privilégié pour générer la résonance du bord de plaque. Les amplitudes et les phases du mode S_0 réfléchi et des deux premiers modes complexes S_1 et S_2 sont calculées pour comprendre le phénomène résonant. La distribution des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque, à la fréquence de résonance, ainsi que sa décroissance en temps sont aussi prédites. De plus, le rayonnement du bord dans la plaque et l'évolution des déplacements à partir du bord jusque dans la plaque sont aussi étudiés. Enfin, la variation de la fréquence et de l'amplitude de la résonance en fonction du coefficient de Poisson a été calculée. Les résultats des différentes méthodes numériques sont comparés entre-eux, et confrontés aux expériences.

IV.1.3.1.2 Modèles numériques

IV.1.3.1.2.1 Méthode des travaux réciproques

La méthode des travaux réciproques est utilisée pour étudier l'interaction de S_0 avec le bord libre d'une plaque. Les formules et les résultats rappelés dans ce paragraphe proviennent de la participation de Predoi à ce travail [40]. Le mode symétrique S_0 incident est supposé posséder une amplitude unité. Il se propage dans une plaque homogène élastique, d'épaisseur h , vers le bord libre. Ce mode produit un champ de contrainte incident sur le bord de la plaque :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{S_0} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{S_0 2}(0, x_2, t) \\ \sigma_{S_0 6}(0, x_2, t) \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} \sigma_{S_0 2}(x_2) \\ \sigma_{S_0 6}(x_2) \end{bmatrix}^{(0)} e^{i\omega t} \quad (\text{IV.4})$$

Comme cette méthode ne considère que les ondes monochromatiques, le terme harmonique en fonction du temps est omis par la suite. Les conditions de bord libre imposent des contraintes nulles en tous les points du bord de la plaque. Pour satisfaire ces conditions, le champ de contrainte réfléchi est décomposé en une série de modes de Lamb possédant des amplitudes R_{-N} sur le bord de la plaque. Les contraintes sur le bord libre peuvent donc être exprimées de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{S_0 2} \\ \sigma_{S_0 6} \end{bmatrix}_I + \sum_{n=-N} R_n \begin{bmatrix} \sigma_{n 2} \\ \sigma_{n 6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Les vecteurs contrainte dans (IV.5) sont maintenant conjugués, multipliés par les vecteurs déplacement du mode de Lamb d'ordre $-M$, et intégrés sur l'épaisseur de la plaque, en suivant la procédure présentée en [39] :

$$- \int_{-h/2}^{h/2} (U_{-M 1} \sigma_{S_0 6}^* + U_{-M 2} \sigma_{S_0 2}^*) dx_1 = \sum_{n=-N} R_n \int_{-h/2}^{h/2} (U_{-M 1} \sigma_{n 6}^* + U_{-M 2} \sigma_{n 2}^*) dx_1 \quad (\text{IV.6})$$

L'intégrale dans le membre de droite de (IV.6) peut être considérée comme le travail réciproque entre les modes de Lamb d'ordre n et $-M$, alors que l'intégrale dans le membre de gauche est le travail réciproque entre le mode incident et le mode d'ordre $-M$. Comme dans la

méthode de décomposition modale, pour des raisons numériques, la somme infinie dans (IV.6) doit être tronquée à un nombre de mode complexes compris 10 et 14, plus les modes propagatifs et non propagatifs. Néanmoins, l'augmentation du nombre de termes dans la série n'améliore pas le bilan énergétique de la modélisation. Pour plus amples détails concernant la méthode des travaux réciproque, il est conseillé de se référer aux travaux de Predoi [40]-[41].

IV.1.3.1.3 Résultats

IV.1.3.1.3.1 Identification du mode de bout

Pour localiser la fréquence de résonance du mode de bout, le code d'éléments finis est tout d'abord utilisé pour appliquer une force uniforme, dans la direction parallèle aux surfaces de la plaque, en trois points du bord gauche de la plaque. Ces points sont centrés par rapport au plan médian. Pour exciter une large bande de produits fréquence-épaisseur, le signal d'excitation contient une salve de 5 cycles enveloppée dans une fenêtre de Hanning. La fréquence centrale du signal est 270 kHz, avec une bande passante de 200 à 340 kHz à -20 dB. Des points sont contrôlés dans les deux directions x_1 et x_2 , en des nœuds situés tout le long du bord excité. Les signaux recueillis montrent que la distribution de déplacements n'est pas uniforme.

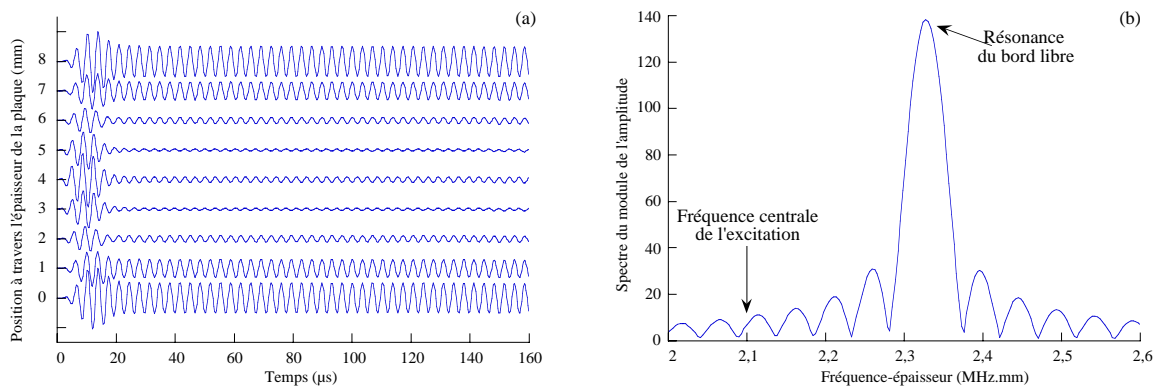
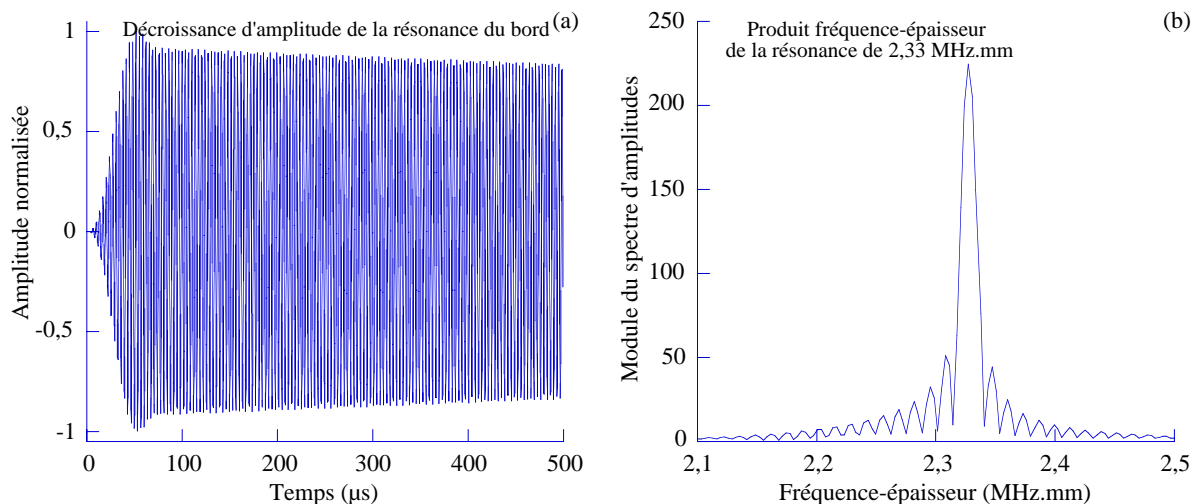


figure IV.4. - Réponse de la plaque à une force excitatrice de 5 cycles de fréquence centrale 270 kHz, appliquée au milieu du bord de plaque ; (a) formes temporelles des déplacements dans la direction x_2 le long du bord et (b) module du spectre d'un signal en (a).

La figure IV.4 montre ces résultats pour la direction x_2 seulement car des données similaires ont été obtenues pour la direction x_1 . Il est alors clair que le bord de la plaque vibre, en premier lieu, selon la forme temporelle de la force d'excitation. Ensuite, il possède un comportement résonant puisque ses déplacements semblent être permanents, et ne posséder qu'une seule fréquence. Une transformée de Fourier appliquée à une de ces formes d'ondes montre que, bien que l'excitation soit étendue en fréquence et centrée sur 270 kHz, le bord oscille à une fréquence proche de 291 kHz, correspondant à un produit fréquence-épaisseur de 2,33 MHz.mm et à une fréquence normalisée $\Omega=2,30$. À titre d'exemple, la figure IV.4.b présente le spectre fréquentiel du déplacement dans la direction x_2 en un des coins du bord de la plaque. Un second calcul semblable au premier est ensuite effectué. Les différences avec le cas précédent sont le nombre de cycles dans le signal d'excitation, sa fréquence centrale, le domaine temporel augmenté pour vérifier si l'oscillation du bord est permanente ou non, et la longueur de la plaque qui est doublée (800 mm au lieu de 400 mm) pour éviter les réflexions sur le bord situé à droite. Le signal d'excitation est une salve de 20 cycles centrée sur 290 kHz, donc plus étroite en fréquence et plus proche de la fréquence de résonance. Cette

excitation est donc plus favorable à la génération du mode de bout. Une forme temporelle du déplacement normal (direction x_1) d'un des coins du bord est représenté sur la figure IV.5.a. Ce résultat indique clairement que la résonance du bout n'est pas permanente puisque son amplitude décroît avec le temps. De l'énergie est donc rayonnée dans la plaque. La figure IV.5.b représente le spectre fréquentiel de cette forme d'onde, confirmant que le produit fréquence-épaisseur de la résonance est 2,33 MHz.mm, soit $\Omega=2,30$.

De façon à confirmer le rayonnement d'énergie du bord dans la plaque, une série de 51 points est contrôlée en surface de la plaque, de la position $x_2 = 300$ mm à $x_2 = 400$ mm du bord de plaque excité. Les signaux temporels, comme celui présenté sur la figure IV.5.c, sont prédits dans les deux directions x_1 et x_2 . Ils montrent que les déplacements produits par l'excitation se propagent le long de la plaque et qu'ils sont suivis par une traîne mono-fréquentielle qui correspond au rayonnement du bord. La série de points contrôlés permet d'effectuer une double transformée de Fourier. Les vitesses de phase en fonction de la fréquence peuvent ainsi être comparées aux courbes de dispersion théoriques obtenues à partir des équations de dispersion (équations (I.23) et (I.24)). Une fenêtre temporelle est utilisée pour différencier le premier paquet d'ondes de la traîne et les traiter séparément. La figure IV.5.d montre que le premier paquet correspond à la propagation du mode S_0 , comme espéré puisque l'excitation est symétrique par rapport au plan médian de la plaque. Les croix, sur la figure, montrent que le mode S_0 est généré dans la bande de fréquences [2,2-2,48] MHz. Sur le même graphe, le cercle plein correspond au résultat obtenu en appliquant une double transformée de Fourier au signal temporel de la traîne. Ce seul point montre que la traîne correspond à la propagation du mode S_0 au seul produit fréquence-épaisseur de 2,33 MHz.mm ($\Omega=2,30$) qui est précisément celui de la résonance du bord de la plaque. De plus, pour confirmer que ce produit fréquence-épaisseur isolé correspond au mode S_0 , le rapport des amplitudes des déplacements produits par la traîne, dans les directions x_1 et x_2 , est calculé. Ce rapport est égal à celui obtenu pour le champ de déplacement du mode S_0 . La décroissance de l'amplitude de la résonance du bord libre de la plaque peut maintenant être reliée, de manière sûre, à un rayonnement d'énergie du bord libre dans la plaque, sous la forme du mode de Lamb S_0 au produit fh spécifique égal à 2,33 MHz.mm.



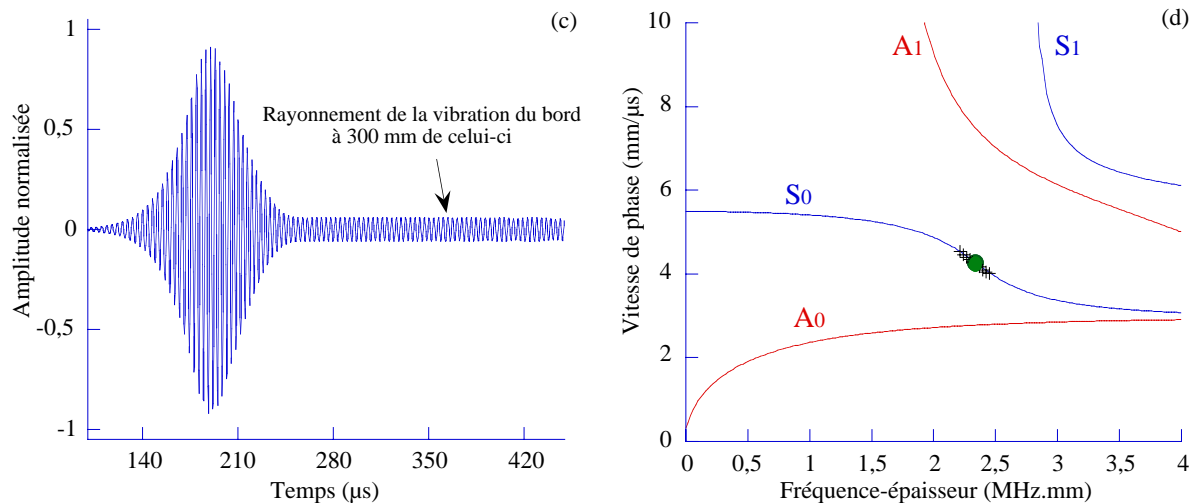


figure IV.5. - Réponse de la plaque à une force excitatrice de 20 cycles de fréquence centrale 290 kHz, appliquée au centre du bord de plaque ; (a) Forme d'onde correspondant au déplacement normal en un des coins, (b) Spectre de (a) ; (c) Forme d'onde correspondant au déplacement normal sur la surface de la plaque, à 300 mm du bord. ; (d) Vitesse de phase du premier paquet d'ondes (+ + +), et de la traîne seule (●), plus courbes de dispersion analytiques (—).

IV.1.3.1.3.2 Réflexion du mode S_0 sur le bord libre

IV.1.3.1.3.2.1 Résonance des deux premiers modes complexes

La vibration du bord de la plaque est maintenant étudiée lorsque le mode S_0 est incident sur le bord libre de la plaque. Aux produits fréquence-épaisseur proches de la fréquence de résonance du bord libre, le mode S_0 est le seul mode de Lamb symétrique propagatif. Cependant, sa réflexion sur le bord génère des modes de Lamb possédant des nombres d'ondes imaginaires et complexes, et des amplitudes complexes qui permettent de satisfaire les conditions de contraintes nulles [38], [39], [74], [41]. La méthode des travaux réciproques et la méthode de décomposition modale montrent, sur la figure IV.6, que la résonance du bord libre est liée à une augmentation d'amplitude et un changement de phase des modes de Lamb atténués S_1 et S_2 au produit fréquence-épaisseur spécifique. En effet, bien que le mode S_0 réfléchi conserve l'amplitude du mode incident, la figure IV.6.a montre que les amplitudes, égales, des modes S_1 et S_2 croissent jusqu'à atteindre 204 fois l'amplitude du mode S_0 incident. Il est important de noter que, pour être en accord avec la littérature, ces amplitudes correspondent à une écriture non normalisée en puissance des champs acoustiques des modes de Lamb. Si la normalisation en puissance avait été appliquée, le facteur d'amplitude aurait été de l'ordre de 20. La figure IV.6.b montre que le mode S_0 réfléchi possède une différence de phase avec le mode incident de π , 0, et $-\pi$, respectivement avant, à, et après la résonance. Les modes de Lamb S_1 et S_2 subissent un changement de phase de $-\pi$ de part et d'autre de la résonance.

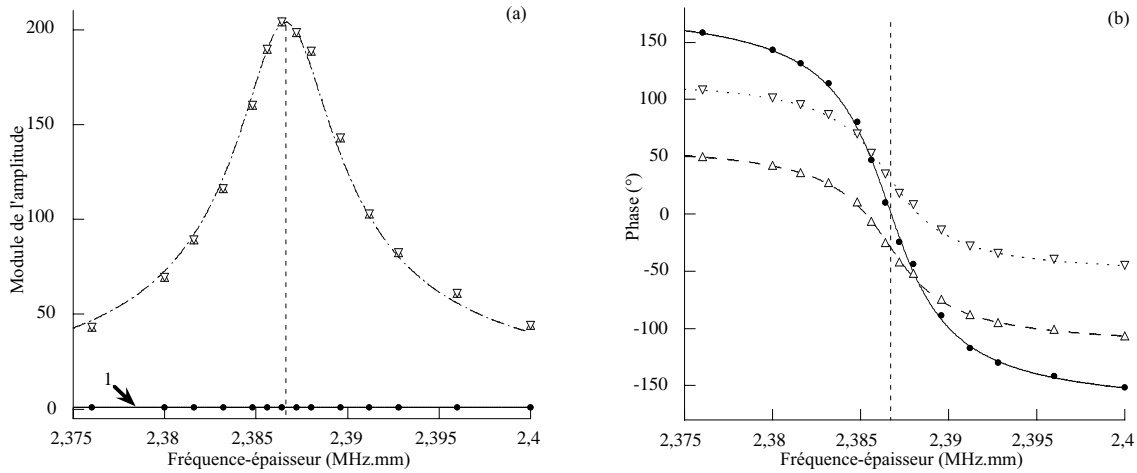


figure IV.6. - Prédications de la méthode des travaux réciproques (lignes) et de la méthode de décomposition modale (points) pour les modes réfléchis S_0 (—, ●●●), S_1 (- - -, $\Delta\Delta\Delta$), et S_2 (... ; $\nabla\nabla\nabla$) ; (a) Module des amplitudes ; (b) Phases.

IV.1.3.1.3.2.2 Rayonnement du mode de bout

La réflexion du mode S_0 sur le bord libre de la plaque est maintenant simulée à l'aide du code d'éléments finis. Ce mode de Lamb est généré en appliquant, sur le bord gauche de la plaque, une distribution de déplacements, dans les deux directions x_1 et x_2 , à travers toute l'épaisseur. Cette distribution possède précisément la forme des déplacements du mode S_0 , à une fréquence très proche de celle du mode de bout. Une salve d'excitation temporelle de 20 cycles, centrée sur la fréquence 290 kHz, avec une bande passante à -20 dB de 260 à 320 kHz, est appliquée en chacun des points du bord gauche de la plaque, permettant ainsi de générer le mode S_0 . Comme expliqué au chapitre III, une série de 100 nœuds disposés tous les 1 mm, de $x_2=300$ à 400 mm, en surface de la plaque est contrôlée, et une double transformée de Fourier est appliquée pour calculer, en fonction de la fréquence, les vitesses de phases des différents modes présents. Ces données sont ensuite comparées aux courbes de dispersion. Les deux ondes incidente et réfléchi par le bord droit de la plaque sont identifiées comme étant, respectivement, le mode S_0 pur, progressif et rétrograde.

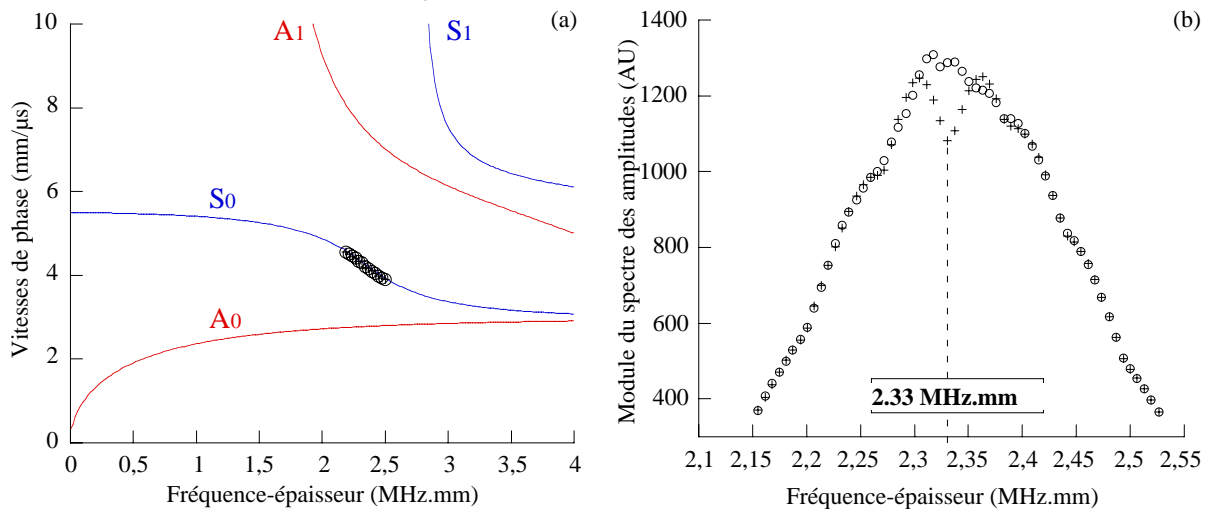


figure IV.7. - Prédications du code d'éléments finis pour les modes S_0 incident (ooo) et réfléchi (+++). (a) Vitesses de phase ; (b) Module du spectre d'amplitudes à 200 mm du bord.

La figure IV.7.a montre que la vitesse de phase de ces deux modes est en très bon accord avec les courbes de dispersion. La double transformée de Fourier calcule aussi les amplitudes de ces deux ondes dans la bande de fréquences de l'excitation. La figure IV.7.b montre que, contrairement à la méthode des travaux réciproques et à la méthode de décomposition modale, le mode réfléchi possède exactement l'amplitude du mode incident, sauf à la fréquence correspondant à la résonance du bord libre. La perte d'amplitude du mode réfléchi, prêt du produit fréquence-épaisseur du mode de bout, vient du fait que le temps de calcul est trop court pour que le rayonnement du bord de la plaque soit complet, aux points considérés. En effet, l'échelle temporelle est limitée pour éviter les réflexions sur le bord gauche de la plaque. La réflexion du mode S_0 sur le bord droit de la plaque est modélisée complètement, mais pas le rayonnement du mode de bout. Ce fait est confirmé par la figure IV.5.a ou la figure IV.8.a qui montre le déplacement, calculé par éléments finis, du bord lorsque S_0 se réfléchit. La figure IV.8.b confirme que le mode S_0 incident sur un bord libre de plaque a excité sa résonance puisque le produit fréquence-épaisseur de la traîne correspond à celui de la vibration du bord libre.

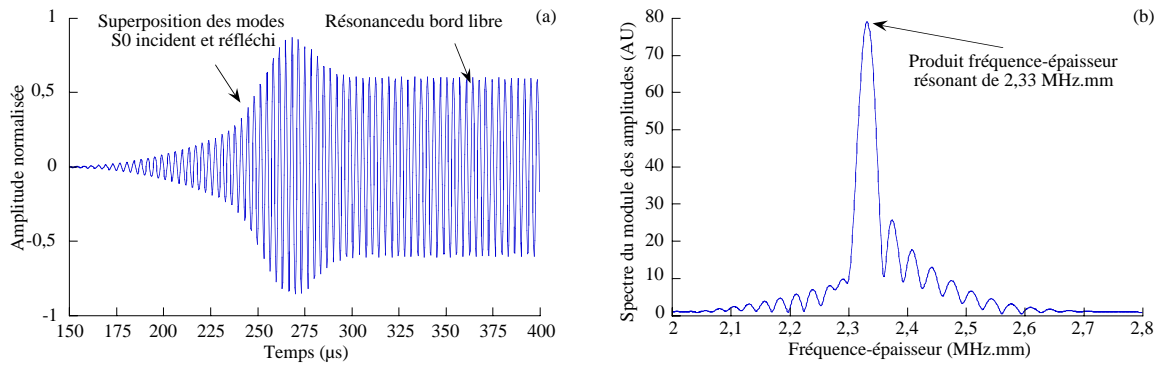


figure IV.8. - Déplacement normal (direction \mathbf{x}_1) en un point d'un des coins du côté droit de la plaque excité par le mode S_0 ; (a) Forme d'onde et (b) Spectre.

IV.1.3.1.3.2.3 Déplacements du mode de bout

Les méthodes précédentes permettent aussi de calculer les champs de déplacement sur le bord libre de la plaque. En particulier, les méthodes des travaux réciproques et de décomposition modale considèrent que le champ de déplacement sur le bord libre est la superposition des champs de déplacement de tous les modes de Lamb possédant des nombres d'ondes réels, imaginaires, ou complexes.

La figure IV.9 compare les prédictions, du modèle d'éléments finis et de la méthode de décomposition modale, des deux composantes du déplacement à travers l'épaisseur, sur le bord de la plaque, à sa fréquence de résonance. Le déplacement u_2 mesuré expérimentalement, en bout de plaque, par la sonde laser est aussi exposé sur cette figure. Ces données expérimentales représentent l'amplitude du spectre fréquentiel de la vibration du bord, à la fréquence de résonance. Un très bon accord existe entre les prédictions numériques et les expériences. La figure IV.10 présente les maxima de déplacement, calculés par la méthode des travaux réciproques, en tous les points d'un maillage 2D du bord de la plaque. Sur ce graphe, la nature évanescence de la vibration du bord est clairement visible.

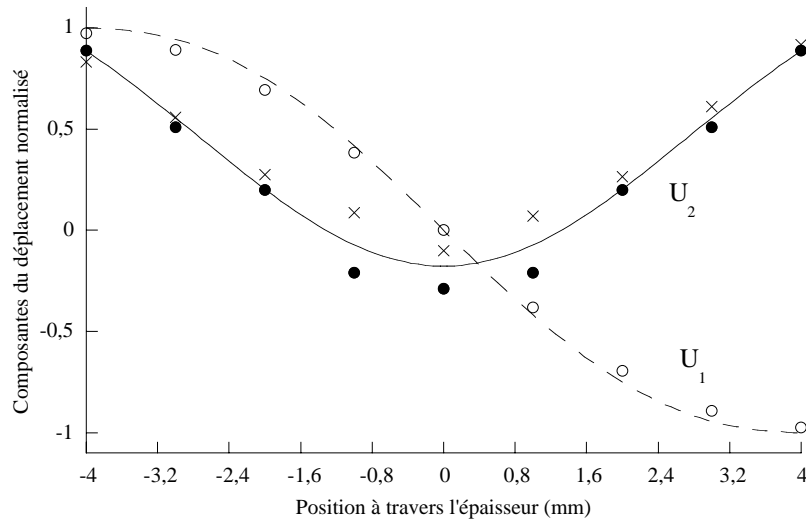


figure IV.9. - Déplacement normalisé total sur le bord droit de la plaque, à travers son épaisseur, dans les directions \mathbf{x}_1 (normal), et \mathbf{x}_2 (dans le plan), à la fréquence de résonance ; Prédiction éléments finis (cercles), décomposition modale (lignes), et expériences (croix).

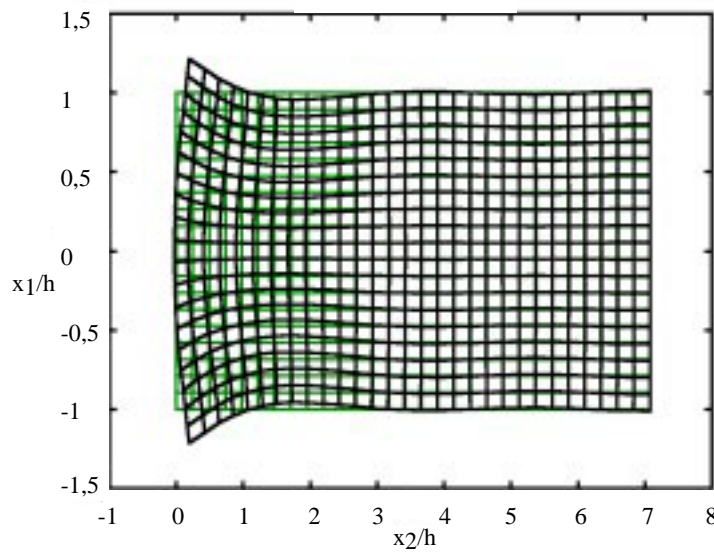


figure IV.10. - Maillage 2D des déplacements près du bord libre de la plaque
gris : plaque au repos ; noir : maximum de déplacement produits par le mode de bout.

La décroissance de l'amplitude du champ de déplacement total (tous les modes), normal aux surfaces de la plaque, a aussi été calculé par la méthode des éléments finis et par les méthodes des travaux virtuels et de décomposition modale. De plus, des mesures expérimentales ont été réalisées sur la plaque d'aluminium. Le déplacement normal à la plaque a été mesuré par la source laser, en utilisant un miroir translaté parallèlement aux surfaces de la plaque (figure III.5). À titre d'exemples, la figure IV.11 expose deux signaux non moyennés mesurés par la sonde laser. La figure IV.11.a montre le déplacement normal (direction \mathbf{x}_1) mesuré en surface de la plaque à 200 mm du transducteur émetteur. Les deux modes S_0 incident et réfléchi sont clairement séparés en deux paquets d'ondes. Le second

paquet est assez étendu à cause de la dispersion du mode S_0 dans la bande de fréquences correspondant à l'étude (figure III.3). La figure IV.11.c représente le déplacement normal (direction x_1) mesuré à 10 mm du bord de la plaque. Ces résultats expérimentaux sont comparés aux formes d'ondes prédites par la méthode des éléments finis (figure IV.11.b et figure IV.11.c), en imposant les mêmes conditions de génération et de détection. Un très bon accord est obtenu entre les formes d'ondes mesurées et calculées.

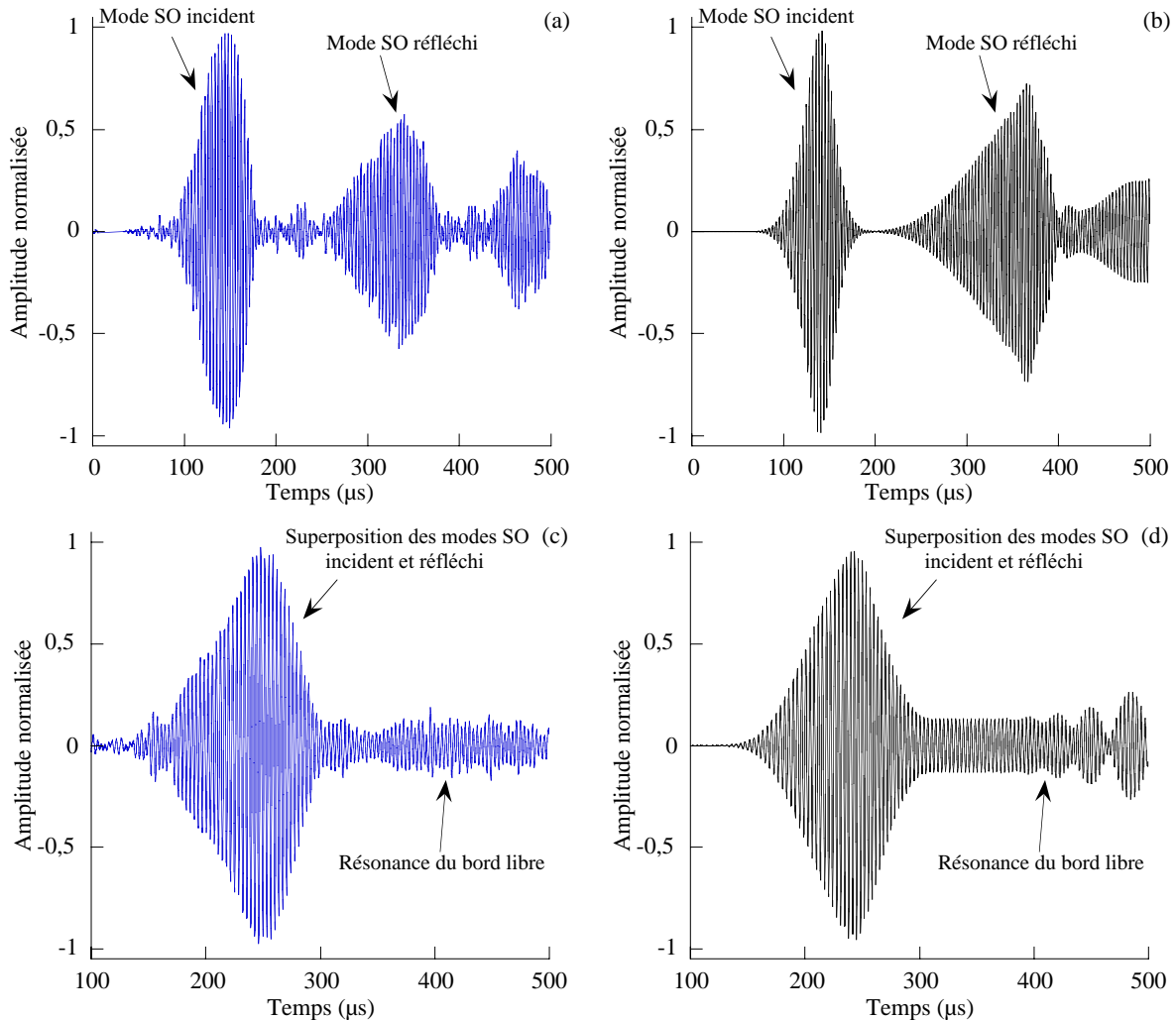


figure IV.11. - Formes d'ondes expérimentales (a et c) et prédites (b et d) des déplacements normaux (direction x_1) sur la surface de la plaque en des positions situées (a et c) à 200 mm de l'émetteur ou (b et d) à 10 mm du bord de la plaque.

Les signaux ci-dessus sont ensuite traités et comparés aux prédictions numériques pour déterminer la décroissance du déplacement à partir du bord de la plaque. La figure IV.12.a montre le bon accord entre les calculs réalisés par éléments finis et les mesures. Sur la figure IV.12.b, les méthodes des travaux virtuels et de décomposition modale donnent des prédictions identiques. Cependant, des différences existent entre le premier et le second ensemble de résultats. Cela est dû au fait que les formes d'ondes prédites par le code d'éléments finis et mesurées par la sonde laser sont inévitablement tronquées en temps (figure IV.11). De ce fait, le rayonnement du bord de la plaque n'est pas totalement pris en compte. Par contre, les méthodes des travaux réciproques et de décomposition modale effectuent des calculs mono-fréquentiels et modélisent complètement le phénomène de rayonnement.

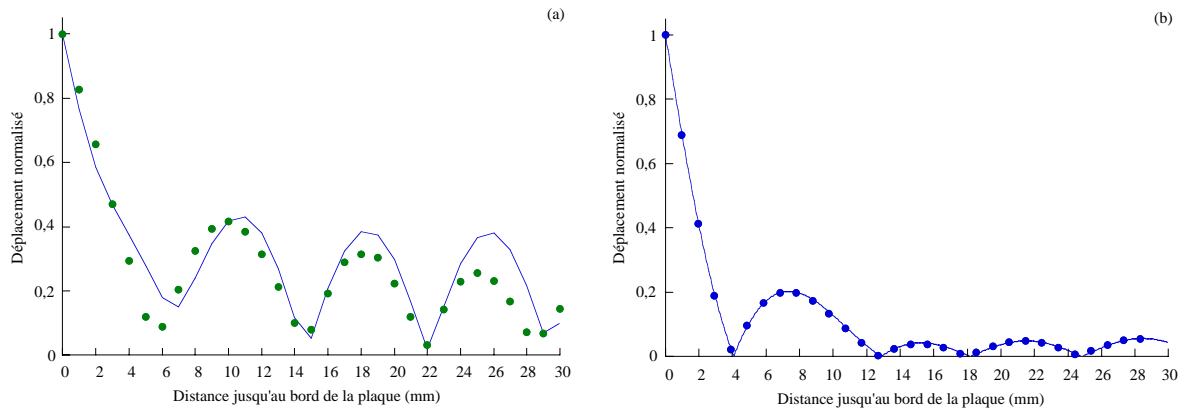


figure IV.12. - Variation du déplacement normal (u_1) du champ total à partir du bord résonant de la plaque ; (a) résultats expérimentaux (●●●), prédictions EF (—); (b) méthode de décomposition modale (—) et modèle des travaux réciproques (●●●)

IV.1.3.1.3.2.4 Dépendance du mode de bout au coefficient de Poisson

Enfin, la méthode des travaux réciproques est utilisée pour étudier l'influence du coefficient de Poisson ν sur la résonance du bord libre. Pour comparer les résultats aux études existant dans la littérature [38]-[43], le calcul de l'amplitude des deux premiers modes complexes S_1 et S_2 , et de la fréquence de résonance du bord est réalisé pour un coefficient $\nu=0.25$. En accord avec ces résultats [43], les amplitudes maximales sont de 3160 pour $\Omega=2.25$. Puis, les modules des amplitudes sont calculés pour différentes valeurs de ν allant de 0,21 à 0,37. Ces résultats montrent que, dans tous les cas, S_1 et S_2 sont d'amplitude égale. La figure IV.13.a montre qu'elles décroissent d'une façon drastique lorsque ν augmente. De plus, la figure IV.13.b montre que la fréquence normalisée du mode de bout Ω est linéairement dépendante de ν . Bien qu'aucun travail présentant la variation des propriétés du mode de bout en fonction du coefficient de Poisson n'ait été trouvé dans la littérature, ces résultats sont en très bon accord avec ceux trouvés pour un ν fixé.

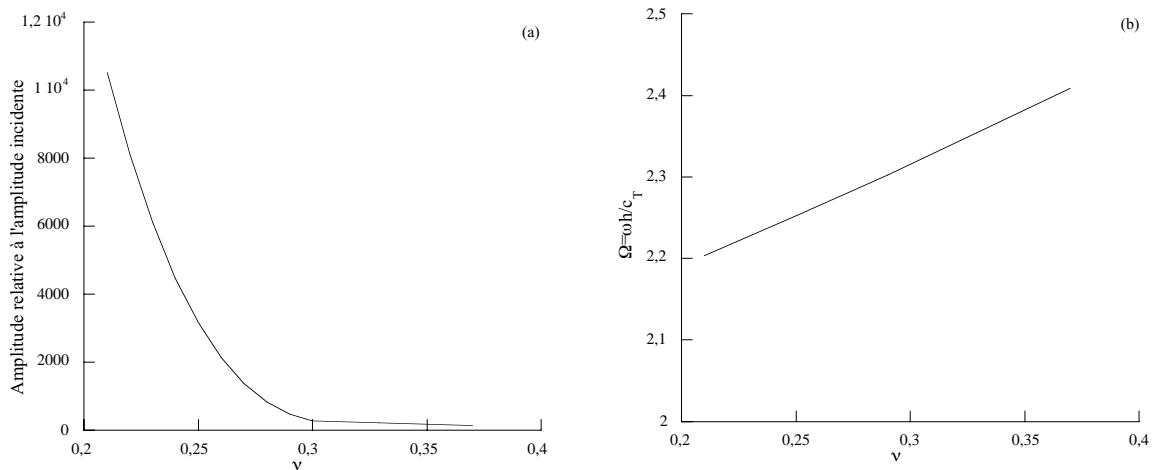


figure IV.13. - Variation de la résonance du bord avec le coefficient de Poisson de la plaque ; (a) Modules égaux des amplitudes des modes complexes S_1 et S_2 ; (b) Fréquence normalisée de la résonance.

IV.1.3.1.4 Conclusion sur la résonance du bord libre d'une plaque

Le mode de bout est une vibration symétrique du bord libre d'une plaque excitée de façon symétrique par rapport à son plan médian. Ce comportement résonant du bord n'a été trouvé qu'à un seul produit fréquence-épaisseur. Dans cette section, le code d'éléments finis, la méthode des travaux réciproques et la méthode de décomposition modale ont été utilisés pour obtenir une meilleure compréhension de la vibration du bord libre. Relativement aux publications trouvées dans la littérature, c'est la première fois que la méthode de décomposition modale et un code d'éléments finis sont utilisés conjointement pour étudier le mode de bout. De plus, des expériences ont été réalisées à l'aide d'une source laser et ont été comparées aux prédictions numériques. La décroissance en amplitude du mode de bout a été clairement identifiée comme un rayonnement du bord dans la plaque, sous la forme du premier mode symétrique S_0 . L'amplitude de cette résonance a été reliée aux amplitudes des deux premiers modes complexes S_1 et S_2 . De plus, un changement de phase a été observé, près du produit fréquence-épaisseur de la résonance, pour les trois modes S_0 , S_1 , et S_2 . Les champs de déplacement le long du bord de la plaque, et loin de celui-ci, ont aussi été calculés et mesurés. Enfin, la dépendance de la fréquence et de l'amplitude de la résonance du bout en fonction du coefficient de Poisson a été étudiée. Ces résultats démontrent la nature spatialement et temporellement transitoire du mode de bout. L'ensemble de ces travaux est soumis à publication [74]. Le bon accord entre les prédictions numériques et les mesures expérimentales indique clairement que les méthodes présentées dans cette section sont des outils très prometteurs pour des applications futures de contrôles non destructifs, puisqu'elles sont beaucoup plus rapides que les modèles classiques d'éléments finis (entre 10 et 100 fois plus rapides, selon les calculs effectués dans cette section).

IV.2. Mode A_0 incident

IV.2.1 Évolution des coefficients en fonction de la fréquence

La figure IV.14.a présente l'évolution avec le produit fréquence-épaisseur des modules des coefficients de réflexion calculés lorsque A_0 est incident sur le bord libre d'une plaque d'aluminium. Celle-ci a ensuite été divisée en trois graphes (figure IV.14.b, c, d) pour obtenir une lecture plus aisée des détails. Comme lorsque S_0 est incident sur le bord libre de la plaque, la symétrie du bord implique qu'aucune conversion de mode sur les ondes symétriques n'est possible. Cependant, dans la bande de produits fréquence-épaisseur allant de 1,55 à 10 MHz.mm, plusieurs modes antisymétriques propagatifs peuvent coexister dans la plaque (jusqu'à 5 modes). Des conversions de modes se produisent donc et l'énergie du mode incident A_0 est répartie entre tous les modes antisymétriques propagatifs. La figure IV.15.a présente l'évolution des phases des coefficients de réflexion calculés lorsque A_0 se réfléchit sur le bord libre de la plaque d'aluminium. Elle a aussi été divisée en trois graphes (figure IV.15.b, c, d) pour obtenir une lecture plus facile des détails. Comme exposé dans le paragraphe IV.1.1, lors de leur confrontation à des mesures expérimentales, il est nécessaire de leur ajouter les phases relatives aux écritures des champs de vitesse et aux distances de propagation.

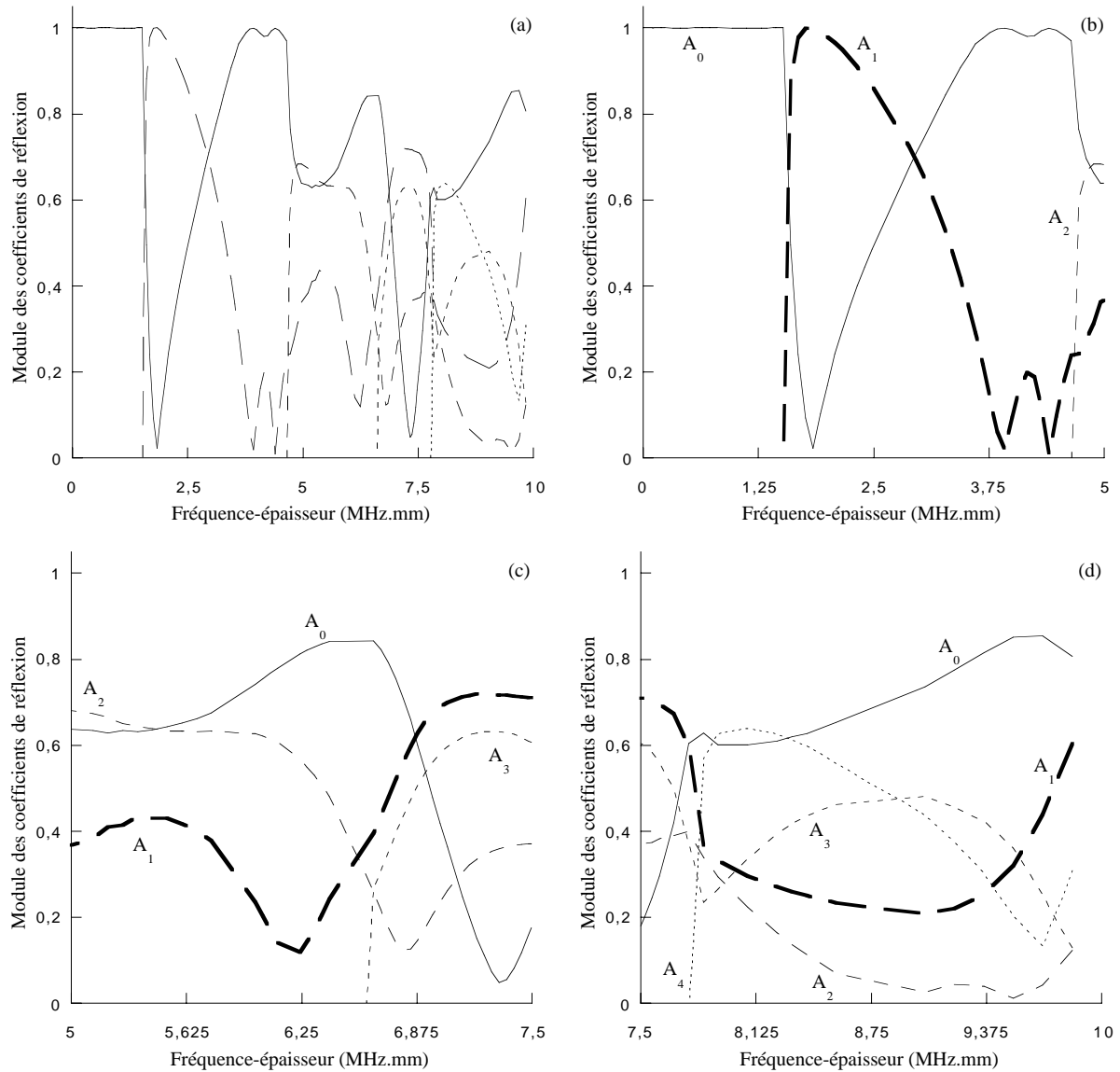


figure IV.14. – Modules des coefficients de réflexion des ondes de Lamb antisymétriques lorsque A_0 est incident sur le bord d'une plaque d'aluminium ;
 (a) Large bande de fréquences, (b) 0-5 MHz.mm, (c) 5-7,5 MHz.mm, (d) 7,5-10 MHz.mm

Pour un produit fréquence-épaisseur inférieur à 1,55 MHz.mm, le mode A_0 est la seule onde antisymétrique propagative. Il se réfléchit donc sur lui même avec une amplitude égale à 1. Cependant, contrairement à la réflexion du mode S_0 sur le bord libre de la plaque, ces deux ondes propagatives incidente et réfléchi ne suffisent pas à annuler les contraintes sur le bord libre et le mode A_1 , non propagatif à ces produits fh , possède alors une amplitude importante. Ce fait sera confirmé dans les paragraphes suivants. La présence d'ondes autres que les modes incident et réfléchi entraîne que la phase du mode A_0 réfléchi n'est plus égale à 180° comme pour S_0 mais tend vers une valeur limite de -90° pour les faibles valeurs de fh . Au-dessus de la fréquence de coupure de A_1 , les deux ondes propagatives A_0 et A_1 sont réfléchies par le bord de la plaque. Cependant, pour un produit fréquence-épaisseur de 1,85 MHz.mm, le mode A_0 incident se convertit entièrement sur le mode A_1 et A_0 n'est absolument pas généré sur le bord de la plaque. Ce phénomène s'inverse complètement pour deux produits fréquence-épaisseur plus élevés (3,92 et 4,4 MHz.mm) où A_0 est la seule onde

propagative générée sur le bord de la plaque. A_1 possède alors une amplitude nulle. Entre 5 et 6 MHz.mm, les modes propagatifs A_0 et A_2 réfléchis possèdent des amplitudes presque constantes alors que A_1 est à son maximum pour un produit fréquence-épaisseur de 5,4 MHz.mm. Au-dessus de 6,5 MHz.mm, la présence de quatre modes propagatifs au minimum et la forte variation des coefficients de réflexion risquent de rendre difficile l'analyse d'éventuels signaux expérimentaux. Tant que possible, il est donc conseillé de contrôler la qualité du bord de la plaque à bas produits fréquence-épaisseur.

À bas produit fh , le déphase du mode A_0 réfléchi par rapport à l'onde incidente tend vers -90° . Par la suite, son évolution est assez monotone (au déroulement de la phase près) et elle pourrait donc servir d'indicateur de la présence d'un défaut, dans un cadre expérimental. Les phases des autres modes varient plus fortement en fonction de la fréquence. Par là même, elles ne constituent *a priori* pas des indicateurs fiables pour le contrôle du bord de la plaque.

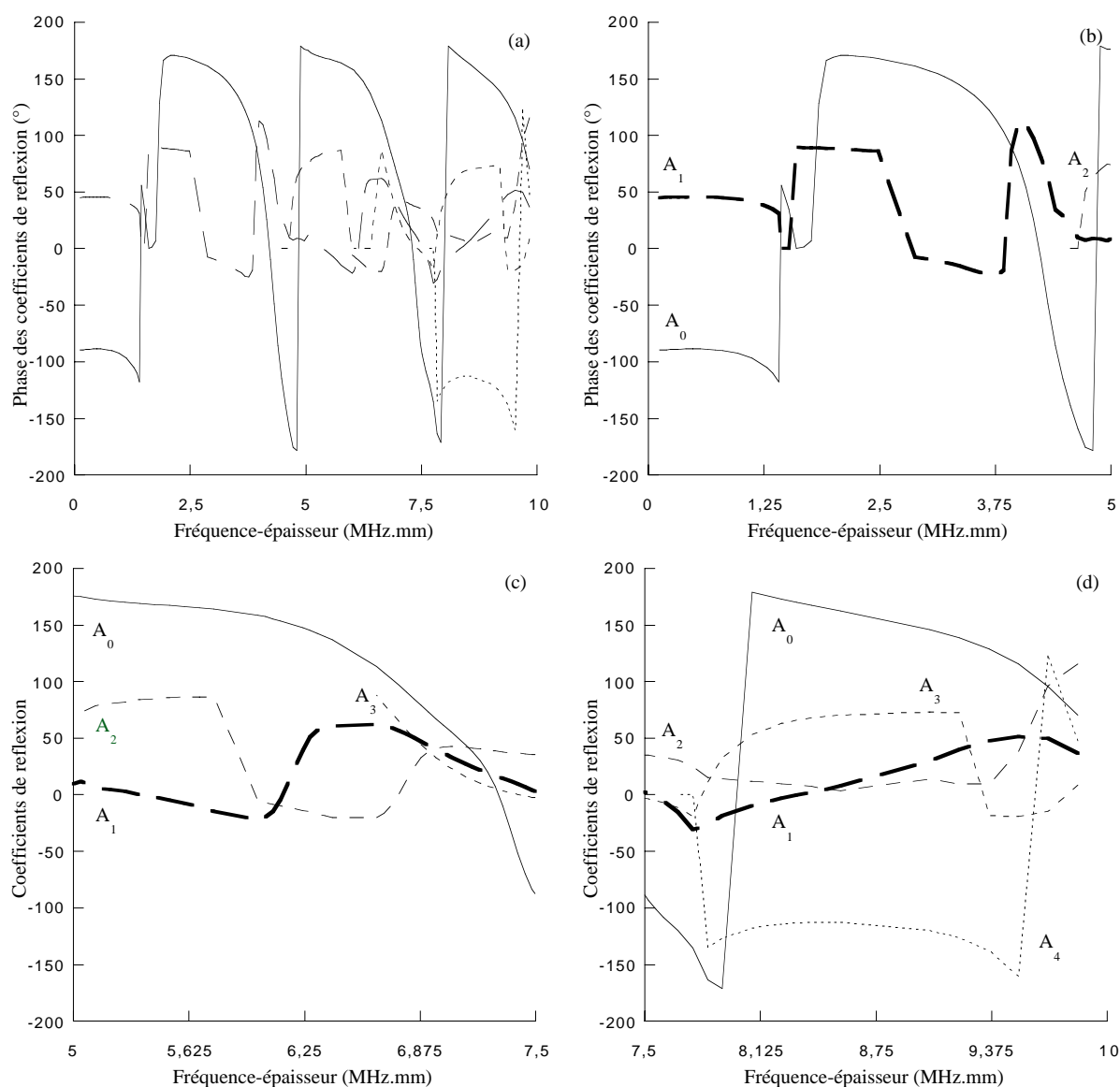


figure IV.15. – Phase des coefficients de réflexion des ondes de Lamb antisymétriques lorsque A_0 est incident sur le bord d'une plaque d'aluminium ;
 (a) Large bande de fréquences, (b) 0-5 MHz.mm, (c) 5-7,5 MHz.mm, (d) 7,5-10 MHz.mm

IV.2.2 Coefficients de réflexion en surface de la plaque

Illustrons maintenant la remarque effectuée au paragraphe II.2.2 concernant les coefficients de réflexion dans une direction et à une position données. Rappelons, en effet, qu'il est nécessaire de corriger les résultats ci-dessus pour les comparer à des mesures expérimentales qui sont réalisées en surface de la plaque dans la direction normale, par exemple avec la sonde laser ou le transducteur à couplage par air présentés au chapitre III. Le rapport des amplitudes, en surface de la plaque, des modes réfléchis à celle du mode incident doit alors être introduit. En ne considérant que la direction normale :

$$R_{-D}^I(h/2) = b_{-D} * \frac{u_{-D I}(h/2)}{u_{I I}(h/2)}. \quad (IV.7)$$

R_{-D}^I est le coefficient de réflexion dans la direction 1 (normal) à la surface de la plaque du mode réfléchi $-D$. b_{-D} est le coefficient de réflexion, pour une onde incident d'amplitude unité, du mode réfléchi $-D$ (chapitre II), $u_{I -D}(h/2)$ et $u_{I I}(h/2)$ sont les valeurs, en surface de la plaque, des déplacements normaux des modes $-D$ et I (incident) respectivement. Le coefficient obtenu prend donc en compte l'amplitude du mode réfléchi et le déplacement normal que celui-ci possède en surface de la plaque relativement au mode incident. Pour l'obtenir, le processus suivant doit donc être appliqué :

1. Tout d'abord, l'amplitude sur le bord de la plaque des différents modes réfléchis (propagatifs ou non) doit être calculée. Sur la figure IV.16, les amplitudes du mode A_1 non propagatif et des deux premières ondes atténuées ont été conservées.

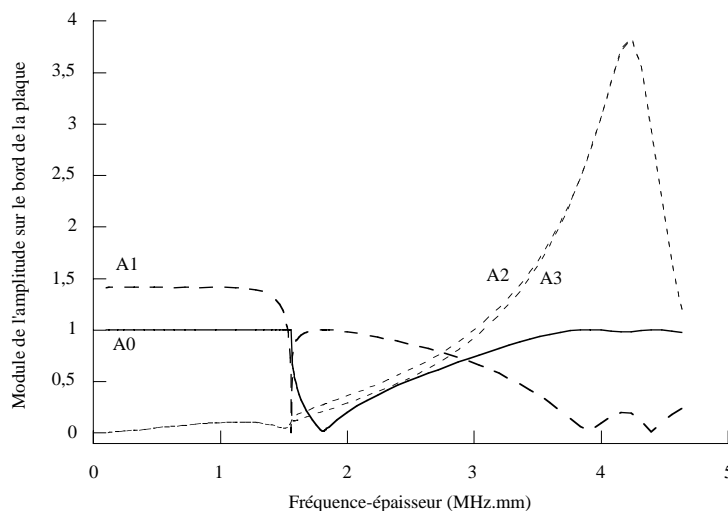


figure IV.16. – Module de l'amplitude sur le bord de la plaque des quatre premières ondes de Lamb lorsque A_0 est incident sur le bord libre d'une plaque d'aluminium.

La comparaison de ce graphe avec la figure IV.14.a montre que les deux courbes correspondant à A_0 sont identiques. Il en est de même pour les deux portions de courbes correspondant à A_1 lorsque celui-ci est propagatif. En effet, il a été vu que les modes propagatifs conservent, en champ lointain,

l'amplitude (à la phase près) qu'ils possèdent sur le bord de la plaque. Par contre, les ondes non propagatives et atténuées n'existent plus à partir d'une certaine distance du bord. Il est cependant possible de vérifier qu'à basse fréquence, le mode A_1 possède une amplitude proche de $\sqrt{2}$ sur le bord de la plaque et que les ondes atténuées ont des amplitudes négligeables (entre 0 et 0,1) mais ne deviennent dominants que lorsque A_1 est propagatif.

2. Pour obtenir les coefficients de réflexion en surface de la plaque dans la direction x_1 , il est ensuite nécessaire de calculer les rapports entre des déplacements normaux en surface des différentes ondes normalisées en puissance et celui du mode incident. Ces rapports sont présentés sur la figure IV.17.

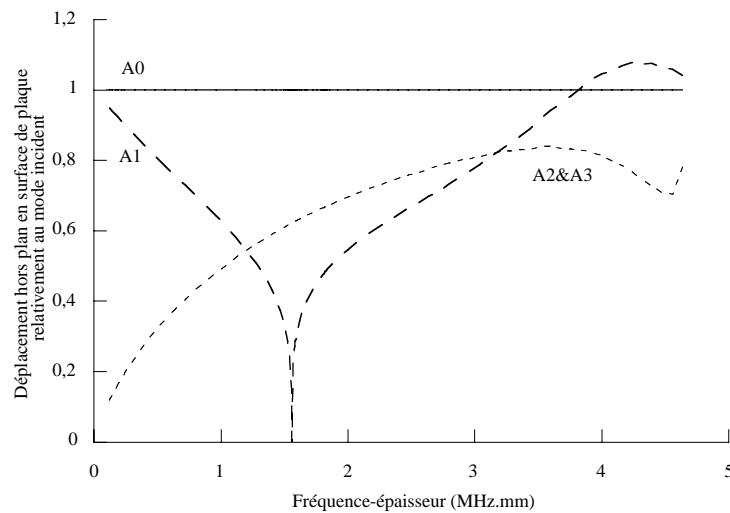


figure IV.17. – Déplacements normaux, en surface plaque, relativement au mode incident A_0 .

Ces rapports ne prennent pas en compte l'amplitude des différents modes sur le bord libre. Ils indiquent juste les déplacements normaux relatifs en surface de la plaque qu'auraient les différents modes normalisés en puissance. La fréquence de coupure du mode A_1 est nettement visible. En effet, pour 1,55 MHz.mm, A_1 possède un nombre d'onde nul et n'entraîne donc aucun déplacement. De plus, les modes atténués A_2 et A_3 possèdent des nombres d'ondes conjugués et provoquent des déplacements identiques. Seul le déphasage entre les deux composantes du champ de déplacement diffère d'une onde à l'autre.

3. Pour chaque mode, les courbes de la figure IV.16 et de la figure IV.17 sont maintenant multipliées entre elles. Cette dernière opération permet d'obtenir les déplacements normaux engendrés, sur le bord et en surface de la plaque, par les différentes ondes générées lorsque le mode A_0 est incident sur le bord de la plaque. Ils sont présentés sur la figure IV.18. Ce graphe peut maintenant être directement relié à des grandeurs physiques mesurables. En effet, ces courbes indiquent, par exemple, qu'au produit fréquence-épaisseur de 0,775 MHz.mm, en surface de la plaque dans la direction normale, les déplacements engendrés sur le bord de la plaque par les modes A_0 et A_1 sont identiques. Par contre, à 1,85 MHz.mm, bien que A_1 soit généré avec toute

l'énergie du mode A_0 , son amplitude, en surface de la plaque et suivant x_1 , est deux fois plus faible que celle de l'onde incidente.

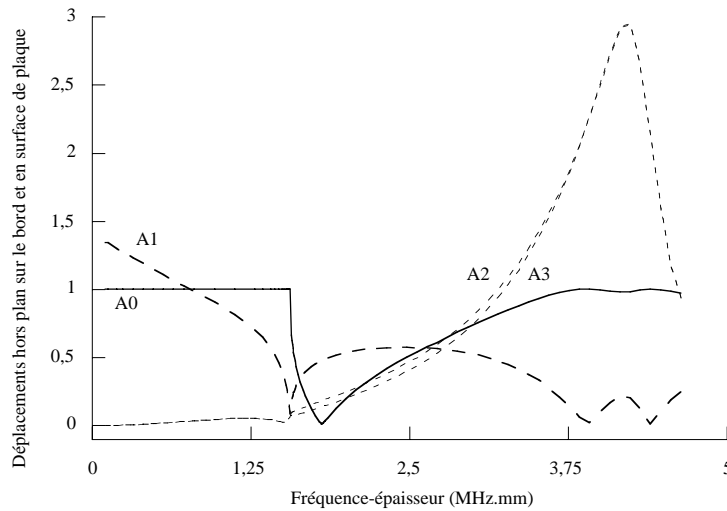


figure IV.18. – Modules des déplacements normaux, sur le bord et en surface plaque, des ondes présentes lorsque A_0 est incident par le bord libre d'une plaque d'aluminium.

- À partir de ces courbes, il est maintenant possible de connaître, en champ lointain, les amplitudes du déplacement normal en surface de plaque que possèdent les ondes propagatives. Il s'agit des coefficients exprimés dans la relation (II.12). Ils correspondent aux portions de courbes de la figure IV.18 pour lesquelles les modes sont propagatifs. Dans cette figure, seules les ondes A_0 et A_1 sont concernées. La figure IV.19 présente donc les coefficients de réflexion du déplacement normal en surface de la plaque des modes A_0 et A_1 lorsque A_0 est incident sur le bord libre d'une plaque d'aluminium. Les résultats de la modélisation par la méthode de décomposition modale sont confrontés aux mesures expérimentales exposées au chapitre III (figure III.6). L'influence des ondes non propagatives n'est pas visible puisque les mesures ont été réalisées loin du bord de la plaque. Un bon accord entre les prédictions numériques et les mesures expérimentales peut être observé [73].

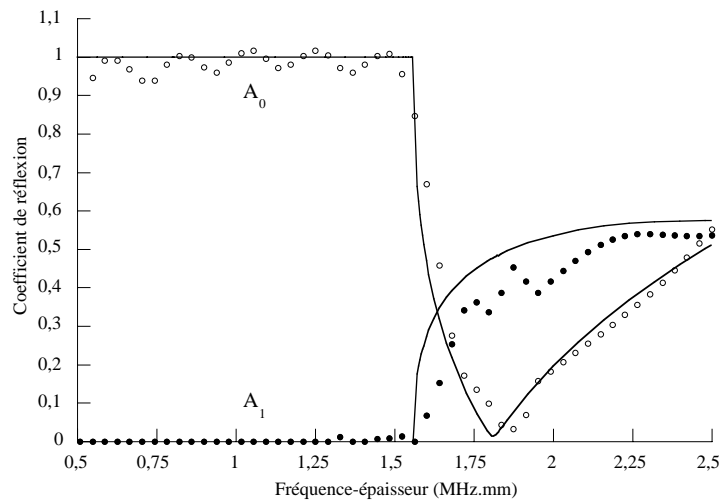


figure IV.19. – Coefficients de réflexion des déplacements normaux en surface de la plaque d'aluminium lorsque A_0 est incident sur le bord libre.

(—) Méthode de décomposition modale ; Mesures expérimentales A_0 (○), A_1 (●).

IV.2.3 Champs transitoires en surface de la plaque

Le champ transitoire et la décroissance des déplacements en surface de la plaque des modes non propagatifs et atténués peuvent aussi être calculés. En effet, si l'origine de l'axe x_2 est imposée sur le bord de la plaque, le champ total de déplacement sur le bord de la plaque s'écrit :

$$\mathbf{u}(x_I, 0) = a_I \mathbf{u}_I(x_I, 0) + \sum_N b_{-N} \mathbf{u}_{-N}(x_I, 0). \quad (\text{IV.8})$$

Ce champ peut alors être calculé en surface de la plaque, pour $x_I = h/2$, et les termes de phase liés à la propagation sont ensuite introduits. Ils entraînent, pour les modes non propagatifs et atténués, une perte d'amplitude en fonction de la distance par rapport au bord de la plaque :

$$\mathbf{u}(h/2, x_2) = a_I \mathbf{u}_I(h/2) e^{-ik_I x_2} + \sum_{-N} b_{-N} \mathbf{u}_{-N}(h/2) e^{-ik_{-N} x_2}. \quad (\text{IV.9})$$

La figure IV.20 présente la décroissance du champ de déplacement des modes non propagatifs et atténués en surface de la plaque lorsque A_0 est incident sur le bord de la plaque au produit fréquence-épaisseur de 1 MHz.mm. Par rapport à la relation (IV.9), les champs de déplacement des modes A_0 incident et réfléchi ont été supprimés de façon à ne conserver que les déplacements des modes qui ne se propagent pas le long de la plaque.

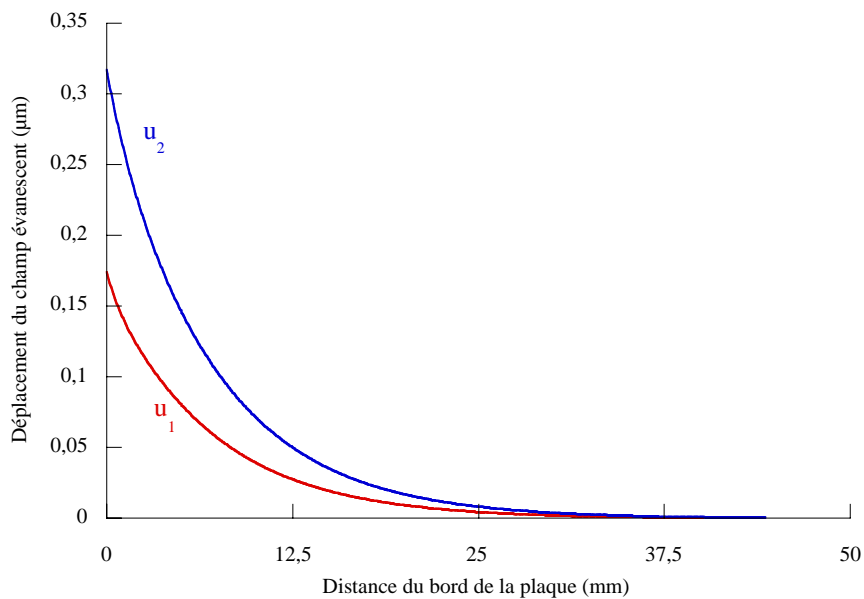


figure IV.20. – Décroissance du champ transitoire de déplacement en surface de la plaque, en fonction de la distance par rapport au bord.

La décroissance est alors clairement visible, et à partir de 30 mm du bord de la plaque le déplacement dû aux modes non propagatifs et atténués est négligeable par rapport au champ de déplacement sur le bord. Il est aussi intéressant de remarquer que le déplacement dans la direction x_2 est plus important que le déplacement normal (direction x_I). En effet, comme il a déjà été vu, l'onde non propagative prédominante, à ce produit fréquence-épaisseur, est le mode A_1 . Celui-ci génère un champ de déplacement dans la direction x_2 en surface de la plaque qui est de l'ordre du double de son déplacement normal (voir chapitre II). C'est

exactement le rapport qui est observé sur la figure IV.20. Ce fait confirme bien que A_1 est prédominant.

IV.2.4 Champs de déplacement sur le bord de la plaque

La figure IV.21.a présente les champs de déplacement total sur le bord libre de la plaque d'aluminium d'épaisseur 8 mm lorsque A_0 est incident au produit fréquence-épaisseur de 1 MHz.mm. Le mode A_0 est alors la seule onde propagative, et A_1 possède un nombre d'onde imaginaire pur. Les prédictions numériques de la méthode de décomposition modale sont comparées à des mesures expérimentales réalisées par la source laser (paragraphe III.2.2.2, figure III.5). Celle-ci permet de relever le champ de déplacement dans la direction 2 (dans le plan) sur le bord de la plaque. De plus, le déplacement normal en surface de la plaque, tout près du bord, a aussi été mesuré. Un très bon accord entre ces mesures et les prédictions numériques peut être observé. En particulier, le rapport, en surface de la plaque, des champs de déplacement dans les deux directions est confirmé. Les champs de déplacement engendrés par les modes non propagatifs et atténués ont de plus été tracés. Ils sont obtenus à partir de la relation (IV.8), en omettant les déplacements engendrés par le mode incident et le ou les modes propagatifs réfléchis. Ce champ transitoire possède une amplitude importante relativement au champ total sur le bord de la plaque. Il est de plus intéressant de noter que le champ engendré par les modes qui ne se propagent pas correspond en fait à celui du mode A_1 non propagatif (voir chapitre I, figure I.17). Ce fait confirme une fois de plus que le mode A_1 joue un rôle important lors de la réflexion à basse fréquence de A_0 sur le bord libre de la plaque.

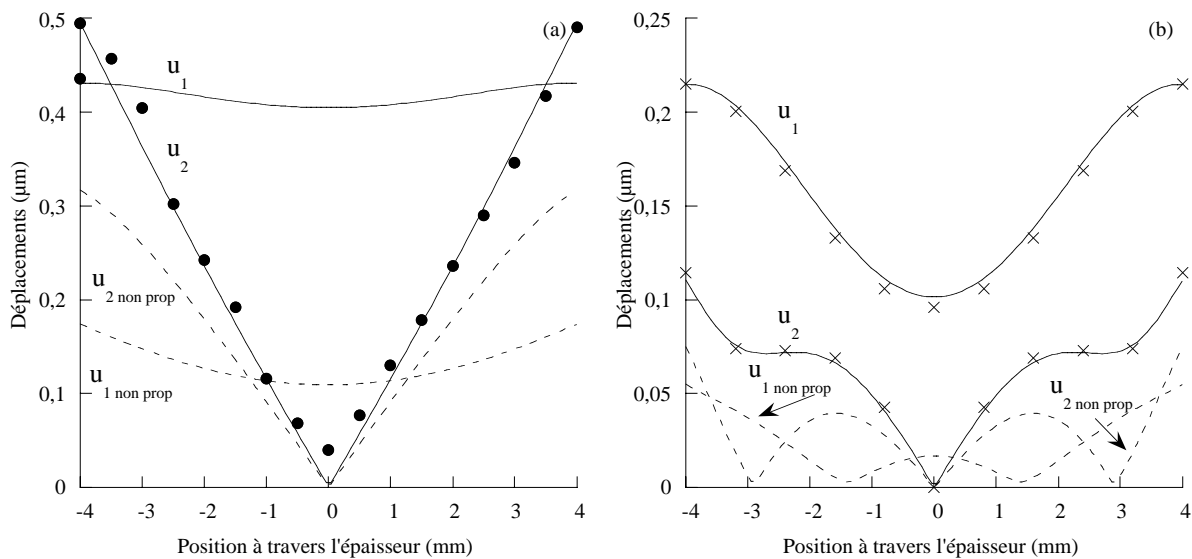


figure IV.21. – Champs de déplacement sur le bord de la plaque ;
Réflexion de A_0 à (a) 1 MHz.mm, (b) 2.969 MHz.mm.

Décomposition modale (—), éléments finis (xxx), mesures (●●●)

(- - -) Champs de déplacements des ondes non propagatives et atténués sur le bord.

La figure IV.21.b présente les déplacements présents sur le bord de la plaque lorsque le mode A_0 s'y réfléchit à une fréquence pour laquelle A_1 est aussi propagatif. Il n'a pas été possible expérimentalement de générer le mode incident seul. En effet, les modes A_0 et S_0 possèdent des angles de coïncidence dans l'air ou dans l'eau qui diffèrent d'au plus 5° . De plus, les déplacements normaux des trois ondes propagatives sont non négligeables en surface

de la plaque. Il est alors très difficile de n'en exciter qu'une par un transducteur orienté en angle qui applique une force normale en surface. Il a donc été choisi de modéliser la réflexion du mode A_0 par le code d'éléments finis. Le champ exact de l'onde incidente est appliquée à l'un des bords de la plaque et, une double transformée de Fourier permet de confirmer la pureté du mode incident. Le produit fréquence-épaisseur a , de plus, été imposé de telle sorte que A_1 soit non dispersif. Les paquets d'ondes restent donc compacts et la modélisation est facilitée. Un très bon accord entre les prédictions issus des deux méthodes peut être observé sur la figure IV.21.b. Il est, de plus, intéressant de noter que les modes atténués engendrent un champ de déplacement (prédictions de la méthode de décomposition modale) d'amplitude nettement moins importante qu'à basse fréquence. Ce champ est cependant nécessaire pour satisfaire la condition de la contrainte nulle sur le bord de la plaque.

IV.3. Conclusion

Dans ce chapitre ont été présentés divers résultats concernant la réflexion d'une onde de Lamb (A_0 ou S_0) sur le bord libre d'une plaque d'aluminium. Cette première étude permet tout d'abord de tester la méthode de décomposition modale dans des cas relativement simples. De plus, elle apporte des informations non négligeables qui pourront servir, lors du contrôle non destructif d'une plaque, à identifier des défauts proches du bord. Les résultats exposés ont montré que cette méthode permet de modéliser correctement la réflexion des ondes de Lamb sur le bord libre d'une plaque puisque ses prédictions ont été confrontées avec succès aux calculs numériques du code d'éléments finis ou à des mesures expérimentales.

Dans un premier temps, la réflexion de l'onde fondamentale symétrique a été étudiée dans une bande de produits fréquence-épaisseur allant de 0 à 10 MHz.mm. Ces résultats montrent la complexité du phénomène, surtout à haut produit fh , où plusieurs modes propagatifs coexistent dans la plaque. De plus, ils permettent d'identifier des bandes fréquentielles dans lesquelles il serait possible d'effectuer un contrôle de la qualité du bord de la plaque.

Une étude théorique et expérimentale du mode de bout a ensuite été réalisée. Cette vibration résonante du bord libre possède un comportement symétrique par rapport au plan médian de la plaque. Elle a donc tout d'abord été localisée en fréquence en appliquant, sur le bord, une force symétrique à large contenu fréquentiel. Ensuite, une excitation centrée sur la fréquence de résonance a permis d'amplifier le phénomène. Il a alors été mis en évidence que le bord rayonnait de l'énergie dans la plaque sous la forme du mode S_0 . Il a donc été choisi, dans une seconde phase, d'étudier la réflexion du mode symétrique S_0 lorsqu'il est incident sur le bord libre, dans une bande de produits fh contenant celui du mode de bout. La résonance a alors été mise en relation avec une augmentation de l'amplitude des ondes atténuées S_1 et S_2 , sur le bord. De plus, les ondes symétriques réfléchies S_0 , S_1 et S_2 subissent un changement de phase autour du produit fh de la résonance. Les déplacements sur le bord libre de la plaque et en surface de la plaque ont été prédits et mesurés. Ces résultats mettent clairement en évidence le fort déplacement du bord et la décroissance du champ transitoire constitué des ondes non propagatives et atténuées. Enfin, une étude théorique de la sensibilité de la résonance au coefficient de Poisson a été réalisée. L'ensemble de ces résultats montre que le mode de bout possède des attributs (par exemple, le produit fh ou l'amplitude) qui dépendent fortement des propriétés mécaniques de la plaque ou de son épaisseur. Il pourrait alors permettre le contrôle de ces caractéristiques.

Dans une seconde partie, les coefficients de réflexion des ondes antisymétriques ont été étudiés lorsque A_0 est incident sur le bord libre dans une bande de produits fréquence-épaisseur allant de 0 à 10 MHz.mm. Comme précédemment, le nombre important de modes

propagatifs entraîne, à haut produit fréquence-épaisseur, une forte évolution des coefficients de réflexion. Une étude complète de la réflexion de A_0 sur le bord libre de la plaque a ensuite été réalisée pour un produit fh inférieur à la fréquence de coupure de A_1 . En particulier, les déplacements sur le bord ont été prédits et mesurés et la décroissance avec la distance du champ en surface de la plaque a été calculée. Ces données ont permis de mettre en évidence que les ondes principalement générées sur le bord de la plaque étaient A_0 et A_1 . Ce dernier mode joue un rôle prépondérant dans la réflexion à bas produit fh du mode fondamental antisymétrique.

Chapitre V

Diffraction par une fissure verticale

<i>V. Diffraction par une fissure verticale</i>	98
V.1. Champs de déplacement des modes incidents	98
V.2. Fissures verticales symétriques par rapport au plan médian	99
V.2.1 Fissure interne.....	99
V.2.1.1 Coefficients de réflexion et de transmission.....	99
V.2.1.2 Déplacement à travers l'épaisseur.....	100
V.2.2 Paire de fissures débouchantes.....	102
V.2.2.1 Coefficients de réflexion et de transmission.....	102
V.2.2.2 Déplacements à travers l'épaisseur de la plaque	104
V.3. Fissure débouchante dissymétrique	106
V.3.1 Coefficients de réflexion et de transmission.....	106
V.3.1.1 Déplacements à travers l'épaisseur de la plaque	109
V.4. Conclusion	113

V. Diffraction par une fissure verticale

Dans ce chapitre sont présentés les résultats concernant l'interaction des ondes antisymétrique (A_0) et symétrique (S_0) de premier ordre avec des fissures verticales dans les plaques d'aluminium. Trois types de défauts sont considérés : (a) une fissure interne symétrique par rapport au plan médian de la plaque, (b) une paire de fissures débouchantes symétriques par rapport au plan médian de la plaque et (c) une fissure simple débouchant (figure II.3). Cette section présente systématiquement le module et la phase des coefficients de réflexion et de transmission pour les trois types de défauts, pour les modes incidents A_0 ou S_0 , en fonction de la hauteur relative p/h des fissures. Pour pouvoir être comparés, dans le cas de fissures débouchantes, à des mesures expérimentales, ces coefficients sont calculés pour une direction donnée, en surface de la plaque (chapitre II, équation (II.12)). Pour plus de lisibilité, dans les études où aucune conversion de mode n'est présente (défauts symétriques par rapport au plan médian), ils seront notés R et T respectivement. Le bilan énergétique des différentes modélisations est aussi exposé et les modules de la distribution des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque sur les côtés gauche et droit des fissures sont tracés dans les diverses situations. Pour chacun des graphes, sauf ceux concernant la phase, les résultats obtenus par la méthode de décomposition modale sont comparés aux prédictions du code d'éléments finis. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été exposés au cours d'un congrès [75] et sont actuellement soumis à publication [76].

V.1. Champs de déplacement des modes incidents

Avant de présenter les diverses prédictions concernant la diffraction des modes A_0 et S_0 par des fissures verticales, les champs de déplacement des deux ondes incidentes sont rappelés par la figure V.1. Les échelles de ces graphes ont été volontairement imposées de telle sorte qu'il soit possible de les comparer aux résultats des paragraphes suivants. Ils concernent des champs normalisés en puissance pour des ondes se propageant une plaque d'aluminium d'épaisseur 8 mm à la fréquence de 0,14 MHz, soit un produit fréquence-épaisseur de 1,12 MHz.mm. Ce produit fh est inférieur à la fréquence critique de S_1 et S_2 et à la fréquence de coupure de A_1 . Le nombre de conversion de modes est donc réduit et l'analyse des résultats est plus aisée. De plus, au produit $fh=1,12$ MHz.mm, les modes A_0 et S_0 sont faiblement dispersifs (figure III.3), ce qui facilite la mise en œuvre expérimentale.

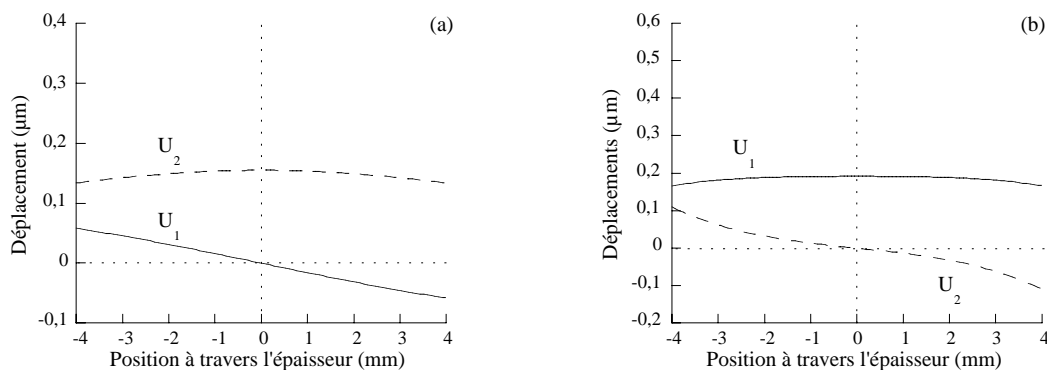


figure V.1 : Déplacements de S_0 (a) et A_0 (b) normalisés en puissance pour une fréquence de 0,14 MHz dans une plaque de 8 mm d'épaisseur.

Il est important ici de rappeler que la sensibilité d'un mode dépend du niveau de contrainte, fonction du produit fréquence-épaisseur, qu'il génère à la position du défaut [22], [23]. De plus, en fonction de la taille du défaut, de son orientation et de sa position, certaines

composantes du tenseur des contraintes doivent être prises en compte. Pour une fissure verticale, par exemple, seules les contraintes σ_6 et σ_2 doivent s'annuler sur les surfaces du défaut.

V.2. Fissures verticales symétriques par rapport au plan médian

V.2.1 Fissure interne

Ce paragraphe présente l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission, lors de la diffraction, au produit fréquence-épaisseur de 1,12 MHz.mm, des modes A_0 ou S_0 par une fissure verticale interne à la plaque. Pour chaque onde incidente, les champs de déplacement à la position des défauts sont aussi exposés.

V.2.1.1 Coefficients de réflexion et de transmission

La figure V.2 et la figure V.3 présentent le module et la phase des coefficients de réflexion et de transmission, en fonction de la hauteur de la fissure, pour les modes incidents S_0 et A_0 respectivement. Les prédictions de la méthode de décomposition modale sont comparées aux calculs du code d'éléments finis. Un très bon accord entre les deux ensembles de résultats peut être observé. De plus, dans tous les cas, le bilan énergétique est égal à 1 avec moins de 2 % d'erreur pour les modélisations concernant le mode S_0 incident et avec moins de 3 % d'erreur lorsque A_0 est incident.

Comme attendu, lorsque la hauteur de la fissure est nulle, les coefficients de réflexion et de transmission sont respectivement égaux à 0 et 1, quel que soit le mode incident. Lorsque la hauteur de la fissure est 100 % de l'épaisseur de la plaque, les modules des coefficients de réflexion et de transmission sont égaux à 1 et 0 respectivement. Leur phase est alors égale à -90° ou -180° selon que A_0 ou S_0 est incident. Pour la méthode de décomposition modale, ces résultats ont été obtenus en modélisant des fissures dont la hauteur est égale à l'épaisseur de la plaque, et non en utilisant les résultats issus de l'étude de la réflexion sur le bord d'une plaque. Ces cas limites permettent donc de tester la méthode et leur cohérence avec les résultats présentés au chapitre IV confirme que le principe de décomposition modale est correctement appliqué pour modéliser la diffraction des ondes de Lamb par une fissure interne.

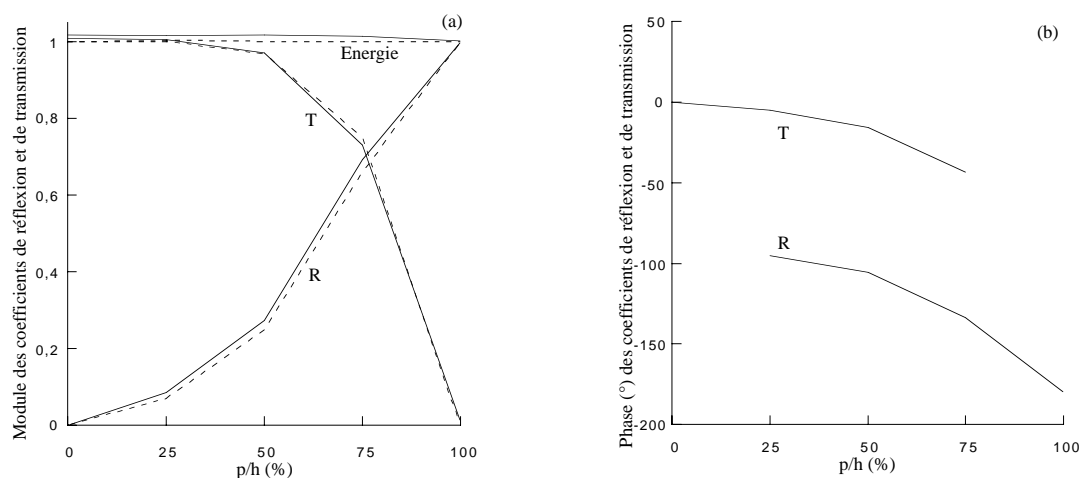


figure V.2 : Coefficients de réflexion R et de transmission T lorsque S_0 est incident, au produit $fh=1,12$ MHz.mm, par une fissure interne symétrique par rapport au plan médian.
(a) Modules ; (b) Phases. Éléments finis (---), décomposition modale (—).

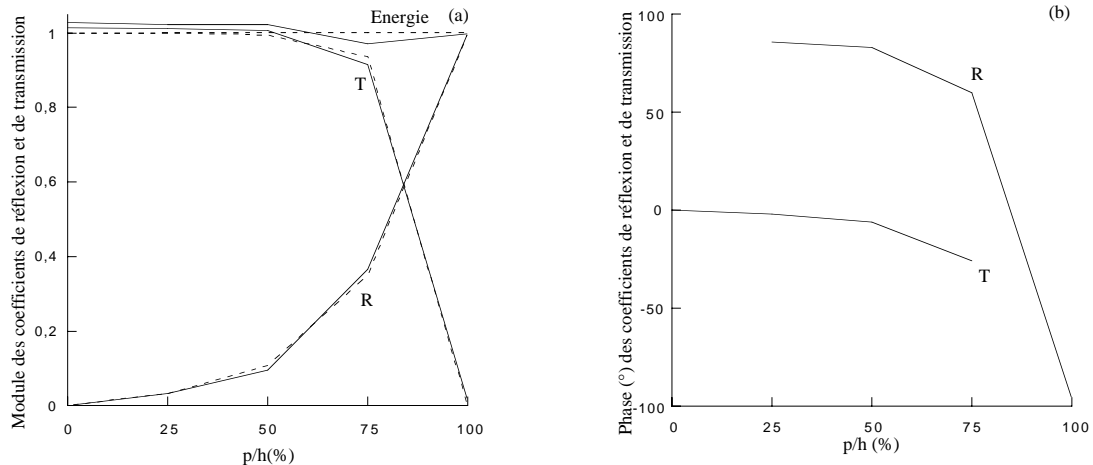


figure V.3 : Coefficients de réflexion R et de transmission T lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, par une fissure interne symétrique par rapport au plan médian. (a) Modules ; (b) Phases. Éléments finis (---), décomposition modale (—).

Le mode A_0 semble être légèrement moins sensible que le mode S_0 à ce type de fissures. En effet, le coefficient de réflexion de A_0 est inférieur à 0,2 pour des hauteurs (p) de fissures allant jusqu'à 60 % de l'épaisseur h de la plaque. En comparaison, le coefficient de réflexion de S_0 devient supérieur à 0,2 dès que p/h est plus grand que 40 %. Cette caractéristique vient du fait que A_0 et S_0 possèdent des distributions de contraintes différentes à travers l'épaisseur de la plaque. L'utilisation de S_0 est préférable à celle de A_0 si des fissures verticales proches du plan médian de la plaque doivent être détectées. De plus, le module de son coefficient de réflexion varie de façon monotone de 0 à 1 avec le rapport hauteur de la fissure/épaisseur de la plaque. Ce mode pourrait donc être utilisé pour dimensionner des fissures internes. La phase du coefficient de réflexion de S_0 varie aussi de façon monotone en fonction du rapport p/h et pourrait donc aussi être un bon indicateur de la taille de la fissure.

V.2.1.2 Déplacement à travers l'épaisseur

La figure V.4 et la figure V.5 présentent le module de la distribution de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque des deux côtés des fissures internes, lorsque S_0 et A_0 sont respectivement incidents. Les graphes (a), (b), (c) et (d) correspondent aux valeurs de p/h égales à 25, 50, 75 et 100 % respectivement.

La figure V.4 montre que le mode S_0 produit toujours, à travers l'épaisseur de la plaque, des déplacements normaux (U_1) identiques de chaque côté de la fissure. En effet, puisque le mode S_0 incident possède une contrainte de cisaillement négligeable à travers l'épaisseur de la plaque, et puisque la continuité des contraintes est exigée hors de la fissure, la contrainte de cisaillement doit donc être nulle dans toute la plaque. La répartition de modes, même inégale, de chaque côté de la fissure ne peut donc pas produire de déplacements normaux différents, quelle que soit la valeur de p/h . Pour les faibles valeurs du rapport p/h , ce déplacement normal est pratiquement le même que celui du mode incident dans une plaque saine (figure V.1). Cependant, il augmente légèrement avec p/h . Les composantes de déplacement dans le plan (U_2) sont différentes de chaque côté de la fissure puisque la contrainte de compression dans le plan (σ_2) est forte et que la répartition des modes est différente de chaque côté. Il est intéressant de remarquer que, conformément aux résultats du chapitre IV, dans le cas du mode S_0 incident le déplacement normal est nul et le déplacement

dans le plan est doublé lorsque la hauteur de la fissure est égale à 100 % de l'épaisseur de la plaque.

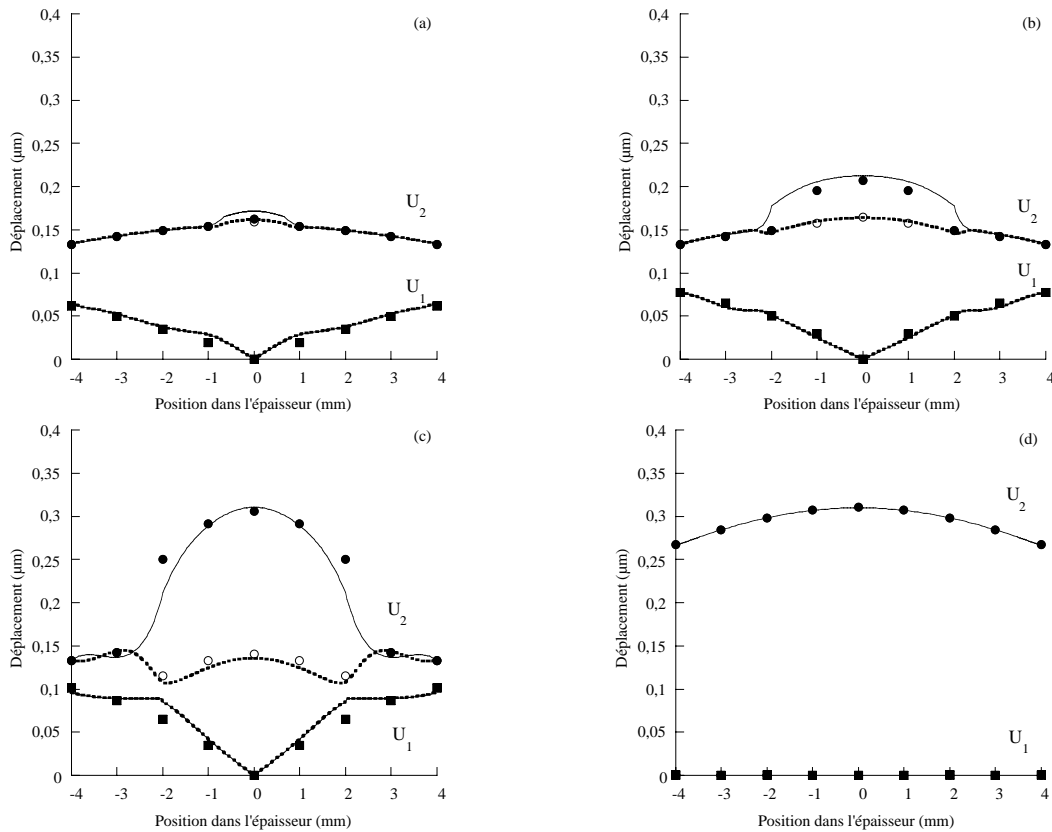


figure V.4 : Champs de déplacement au niveau du défaut lorsque S_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, par une fissure interne symétrique par rapport au plan médian.

(a) $p/h = 25 \%$ (b) $p/h = 50 \%$ (c) $p/h = 75 \%$ (d) $p/h = 100 \%$.

Éléments finis : Déplacements normaux (carrés) et dans le plan (cercles)
des faces gauche (plein) et droite (vide) de la fissure.

Décomposition modale : Déplacements des faces gauche (—) et droite (- - -).

La figure V.5 montre que le mode A_0 incident produit, à travers l'épaisseur, des déplacements dans le plan (U_2) identiques de chaque côté de la fissure interne pour des valeurs de p/h allant jusqu'à 50 %. Pour $p/h=75 \%$, les deux surfaces de la fissure possèdent des déplacements dans le plan (U_2) différents, comme le confirme de code d'éléments finis. Ce phénomène vient du fait que la différence entre les déplacements dans le plan est essentiellement liée à la contrainte de compression dans le plan (σ_2) qui possède, pour le mode A_0 , des valeurs négligeables près du plan médian de la plaque et qui augmente de façon significative près des surfaces de la plaque. De ce fait, la différence entre les déplacements dans le plan (U_2) des faces de la fissure sera grande dès que la contrainte de compression σ_2 produite par les ondes de Lamb sera élevée à l'emplacement de la fissure. De la même façon, les déplacements normaux (U_1) sont différents des deux côtés des fissures internes pour toutes les valeurs de p/h (sauf pour $p/h=0$ ou 100 % qui sont des cas particuliers). En effet, la composante de cisaillement (σ_6) de la contrainte possède une amplitude significative à n'importe quelle position à travers l'épaisseur de la plaque, sauf près des surfaces. La répartition inégale de modes des deux côtés de la fissure implique donc des déplacements normaux différents, même pour les petites fissures.

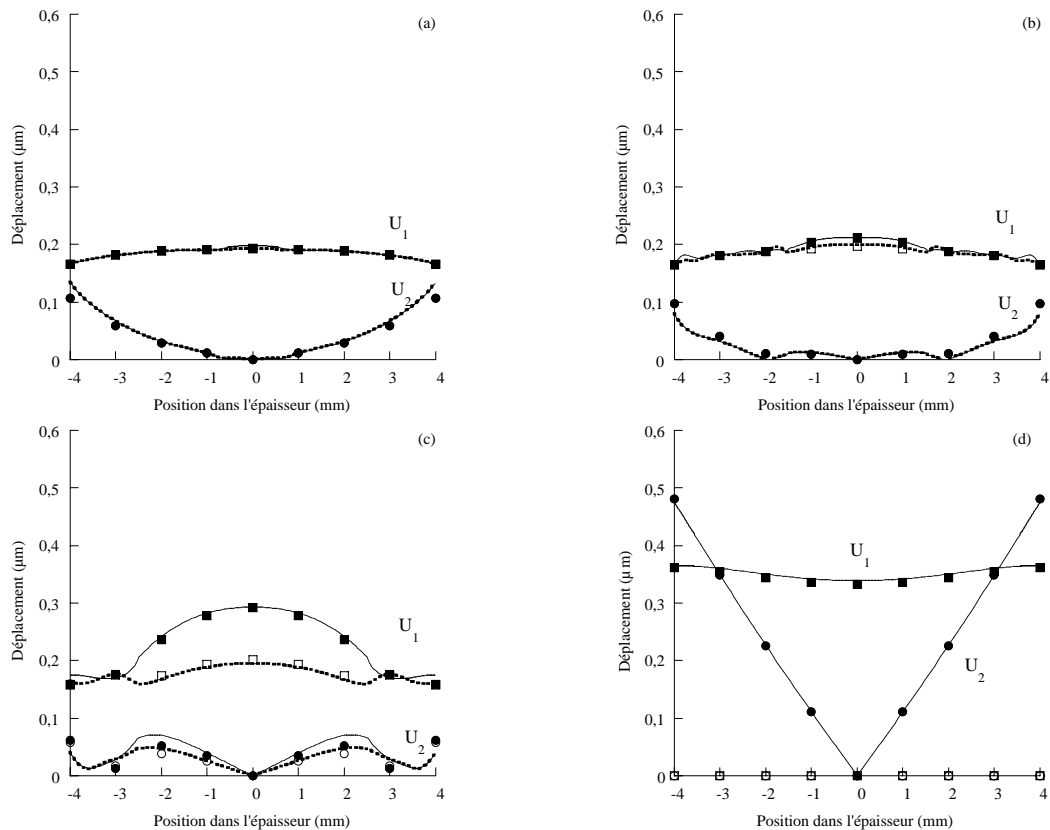


figure V.5 : Champs de déplacement au niveau du défaut lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, par une fissure interne symétrique par rapport au plan médian.

(a) $p/h = 25 \%$ (b) $p/h = 50 \%$ (c) $p/h = 75 \%$ (d) $p/h = 100 \%$.

Éléments finis : Déplacements normaux (carrés) et dans le plan (cercles)
des faces gauche (plein) et droite (vide) de la fissure.

Décomposition modale : Déplacements des faces gauche (—) et droite (- - -).

Ces résultats montrent qu'un mode A_0 ou S_0 incident engendre, au produit fréquence-épaisseur de $1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, un comportement respectivement de glissement ou d'ouverture des faces de la fissure qui devient de plus en plus important lorsque p/h augmente. Une bonne corrélation est obtenue entre les prédictions de la méthode de décomposition modale et du code d'éléments finis, aussi bien pour les coefficients de diffraction que pour les déplacements à travers l'épaisseur de la plaque de chaque côté de la fissure interne.

V.2.2 Paire de fissures débouchantes

Ce paragraphe présente l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission, lors de la diffraction, au produit fréquence-épaisseur de $1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, des modes A_0 ou S_0 par des paires de fissures verticales débouchantes en surface de la plaque (figure II.3.b). Pour chaque onde incidente, les champs de déplacement à la position des défauts sont aussi exposés.

V.2.2.1 Coefficients de réflexion et de transmission

La figure V.6 et la figure V.7 présentent les modules et les phases des coefficients de réflexion et de transmission, en fonction de la hauteur des défauts, pour les modes S_0 ou A_0 incidents. Les prédictions de la méthode de décomposition modale sont comparées aux

calculs du code d'éléments finis. Un très bon accord entre les deux ensembles de résultats peut être observé. Remarquons de plus que, dans les cas les plus défavorables, le bilan énergétique est égal à 1 avec 4,8 % d'erreur (prédictions du code d'éléments finis pour une fissure de 50 % lorsque S_0 est incident) ou avec 4,1 % d'erreur (prédictions de la méthode de décomposition modale pour une fissure de 75 % lorsque A_0 est incident).

Pour les valeurs de p/h inférieures à 75 %, le mode A_0 semble être plus sensible que le mode S_0 à ce type de défauts. En effet, les contraintes de cisaillement σ_6 et de compression σ_2 de A_0 sont plus élevées que celles de S_0 , près des surfaces de la plaque. De ce fait, l'onde antisymétrique est plus sensible à des défauts de surface que l'onde symétrique. Pour p/h supérieur à 75 %, les coefficients de réflexion et de transmission de A_0 et S_0 sont similaires. Par conséquent, l'utilisation de A_0 est préférable à celle de S_0 si des paires de fissures débouchantes symétriques doivent être détectées. Le module de ses coefficients de réflexion varie de façon monotone avec le rapport hauteur de la fissure/épaisseur de la plaque et il pourrait donc servir au dimensionnement des fissures. Les phases des coefficients de réflexion et de transmission sont aussi porteuses d'informations sur la taille des défauts puisqu'elles varient linéairement avec des valeurs de p/h comprises entre 25 et 75 %.

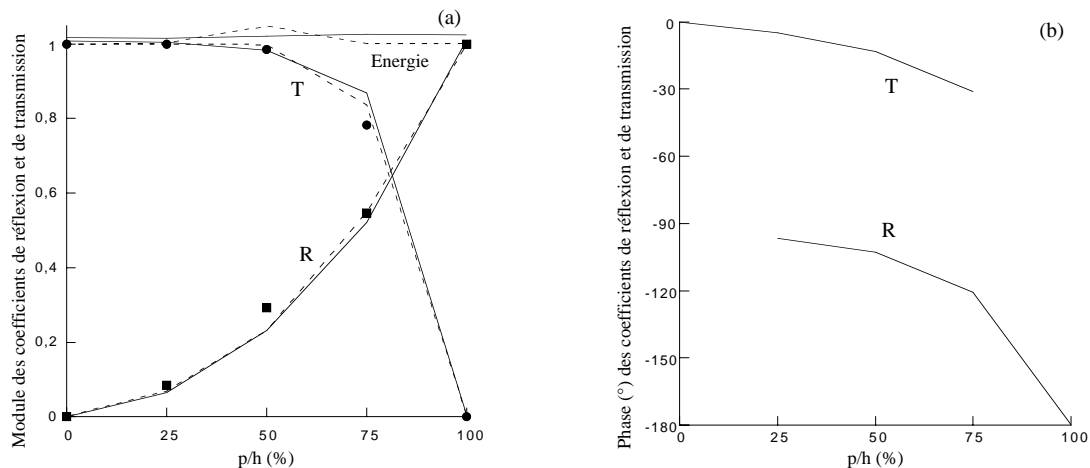


figure V.6 : Coefficients de diffraction lorsque S_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz.mm}$, par une paire de fissures débouchantes symétriques par rapport au plan médian.

(a) Modules (b) Phases ;
 éléments finis (---), décomposition modale (—),
 coefficient de réflexion (■■■) et de transmission (●●●) mesurés.

Les prédictions numériques sont en très bon accord avec les coefficients de réflexion et de transmission expérimentaux, sauf dans le cas où A_0 est incident sur une paire de fissure dont la hauteur relative est 75 % (voir figure V.7.a). La faible valeur du coefficient de réflexion mesuré pour A_0 est reproductible avec 15 % d'erreur, signifiant donc que la valeur expérimentale est correcte. Il a alors été supposé que l'écart observé entre les modélisations et les mesures provenait du fait que les défauts usinés n'étaient pas des fissures mais possédaient une largeur de 0,7 mm (figure III.4.a). De ce fait, des calculs supplémentaires ont été menés à l'aide du code d'éléments finis modélisant des paires de rainures de 0,7 mm de large à la place des fissures. Ceci a été réalisé en redéfinissant le maillage de la plaque dans la direction parallèle à la plaque, de telle sorte que les éléments soient hauts de 1 mm et larges de 0,7 mm. Ensuite, des éléments sont retirés du maillage pour simuler les rainures. La même excitation que celle utilisée pour les fissures a été appliquée pour générer les modes A_0 ou S_0 , et les données ont été traitées de la même façon que précédemment.

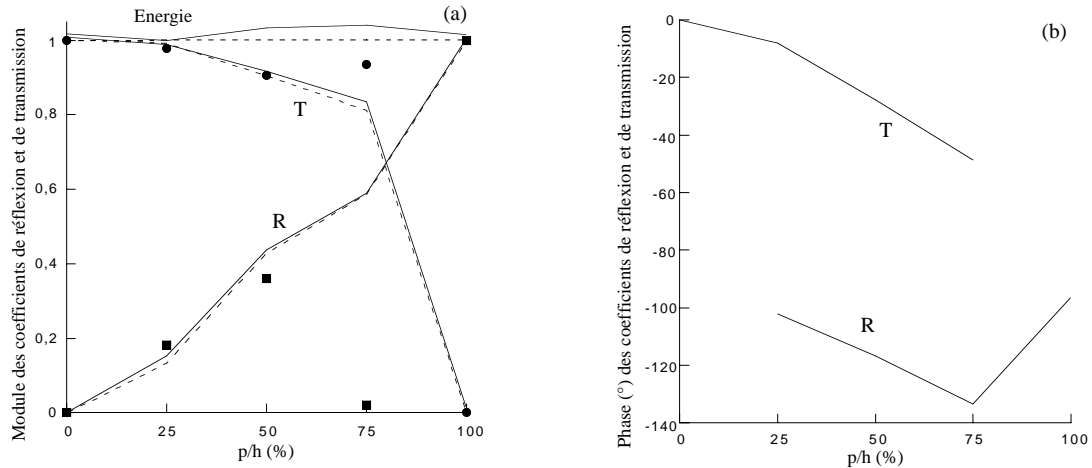


figure V.7 : Coefficients de diffraction lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz.mm}$, par une paire de fissures débouchantes symétriques par rapport au plan médian.

(a) Modules (b) Phases ;
 éléments finis (---), décomposition modale (—),
 coefficient de réflexion (■■■) et de transmission (●●●) mesurés.

Lorsque A_0 est incident sur une paire de rainures de hauteur relative 75 %, les coefficients de réflexion et de transmission ont été trouvés égaux à 0,24 et 0,97. Ces valeurs sont nettement plus proches des mesures expérimentales que les résultats numériques obtenus lors de la modélisation de la diffraction par une paire de fissures. De plus, un mauvais usinage de ce défaut a été observé à l'aide d'un microscope optique. En effet, l'une des deux rainures de la paire est environ 20 % plus large et 15 % plus profonde que l'autre rainure. Cette non symétrie des deux rainures peut donc expliquer les différences entre les coefficients de réflexion et de transmission mesurés et prédits lorsque les rainures sont modélisées. Les résultats par éléments finis obtenus pour les autres paires de rainures et lorsque S_0 est incident confirment que l'hypothèse de fissure introduit dans la méthode de décomposition modale est satisfaisante. La longueur d'onde de A_0 , relativement petite (deux fois plus petite que celle de S_0 au produit fréquence-épaisseur considéré), et la large dimension de la paire de rainures de 75 % de hauteur relative peuvent justifier le fait que l'hypothèse de fissure n'est pas valide dans ce cas particulier. La méthode de décomposition modale est actuellement développée pour modéliser les défauts de type « rainure ».

V.2.2.2 Déplacements à travers l'épaisseur de la plaque

La figure V.8 et la figure V.9 présentent les modules des distributions de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque et de chaque côté des paires de fissures débouchantes, lorsque les modes S_0 et A_0 sont respectivement incidents. Les graphes (a), (b), (c) et (d) correspondent respectivement aux valeurs de p/h égales à 25, 50, 75 et 100 %.

La figure V.8 montre que le mode S_0 produit à travers l'épaisseur de la plaque des déplacements normaux (U_1) qui sont toujours identiques de chaque côté des fissures puisque sa contrainte de cisaillement (σ_6) est négligeable. Les composantes de déplacement dans le plan (U_2) sont différentes de chaque côté des fissures impliquant un comportement d'ouverture des fissures qui devient assez important lorsque la hauteur relative p/h augmente. Cet effet est causé par la forte contrainte de compression (σ_2) du mode S_0 .

La figure V.9 montre que le mode A_0 produit à travers l'épaisseur de la plaque des déplacements dans le plan (U_2) différents de chaque côté des fissures, quelle que soit leur hauteur relative p/h . Comme il a déjà été expliqué, cela vient de la forte amplitude de la contrainte (σ_2) produite par le mode antisymétrique au voisinage des surfaces de la plaque, et par la répartition inégale de modes de chaque côté des fissures. Les déplacements normaux (U_1) de chaque face des fissures sont identiques pour $p/h = 25\%$, du fait de la faible valeur de la contrainte de cisaillement (σ_6) produite par le mode antisymétrique près des surfaces de la plaque. Cependant, pour des valeurs de p/h supérieures à 25% , les faces des fissures possèdent des déplacements normaux qui sont significativement différents puisque le mode antisymétrique a une contrainte de cisaillement qui augmente vers le centre de la plaque.

Ces résultats indiquent que le mode A_0 incident génère, au produit fréquence-épaisseur de $1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, un mouvement de glissement et d'ouverture des faces des fissures alors que le mode S_0 incident n'engendre qu'un comportement d'ouverture. Ces conséquences sont plus importantes lorsque p/h augmente. Une bonne corrélation est obtenue entre les résultats de la méthode de décomposition modale et les prédictions du code d'éléments finis pour les coefficients de diffraction et les distributions de déplacements à travers l'épaisseur de la plaque de chaque côté des fissures.

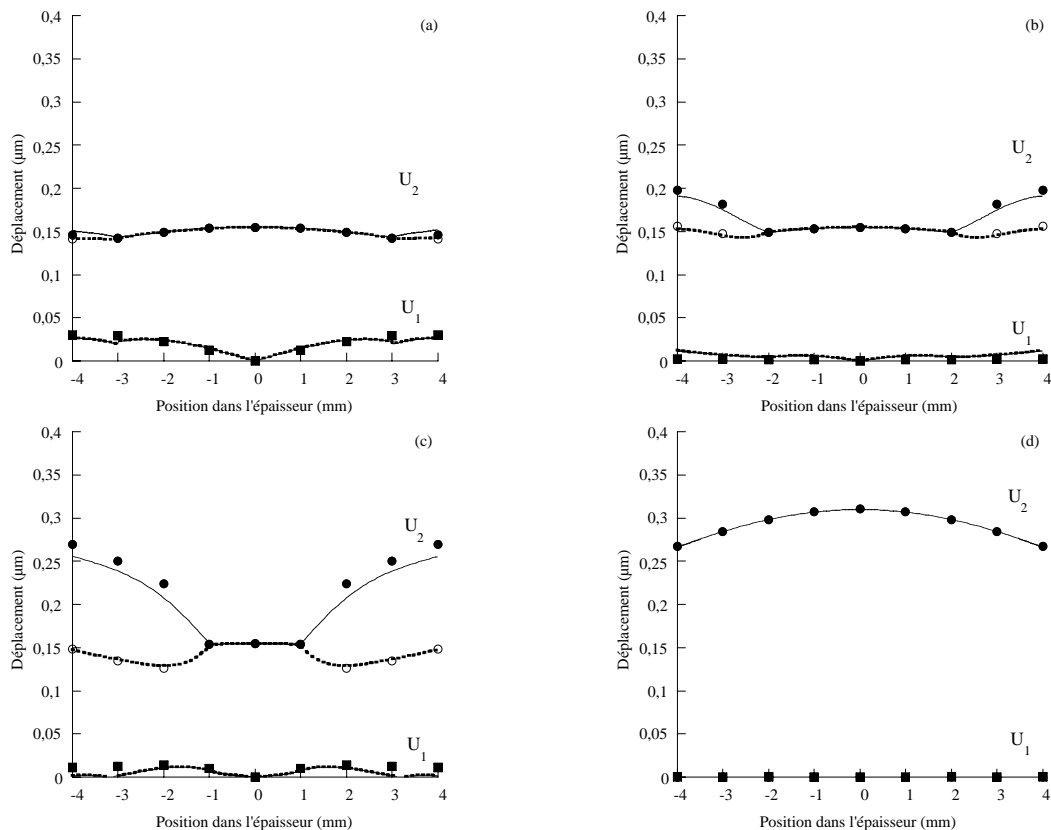


figure V.8 : Champs de déplacement au niveau du défaut lorsque S_0 est incident, au produit $fh=1,12\text{MHz}\cdot\text{mm}$, par une paire de fissures débouchantes symétriques par rapport au plan médian. (a) $p/h = 25\%$ (b) $p/h = 50\%$ (c) $p/h = 75\%$ (d) $p/h = 100\%$.

Éléments finis : Déplacements normaux (carrés) et dans le plan (cercles) des faces gauche (plein) et droite (vide) de la fissure.

Décomposition modale : Déplacements des faces gauche (—) et droite (- - -).

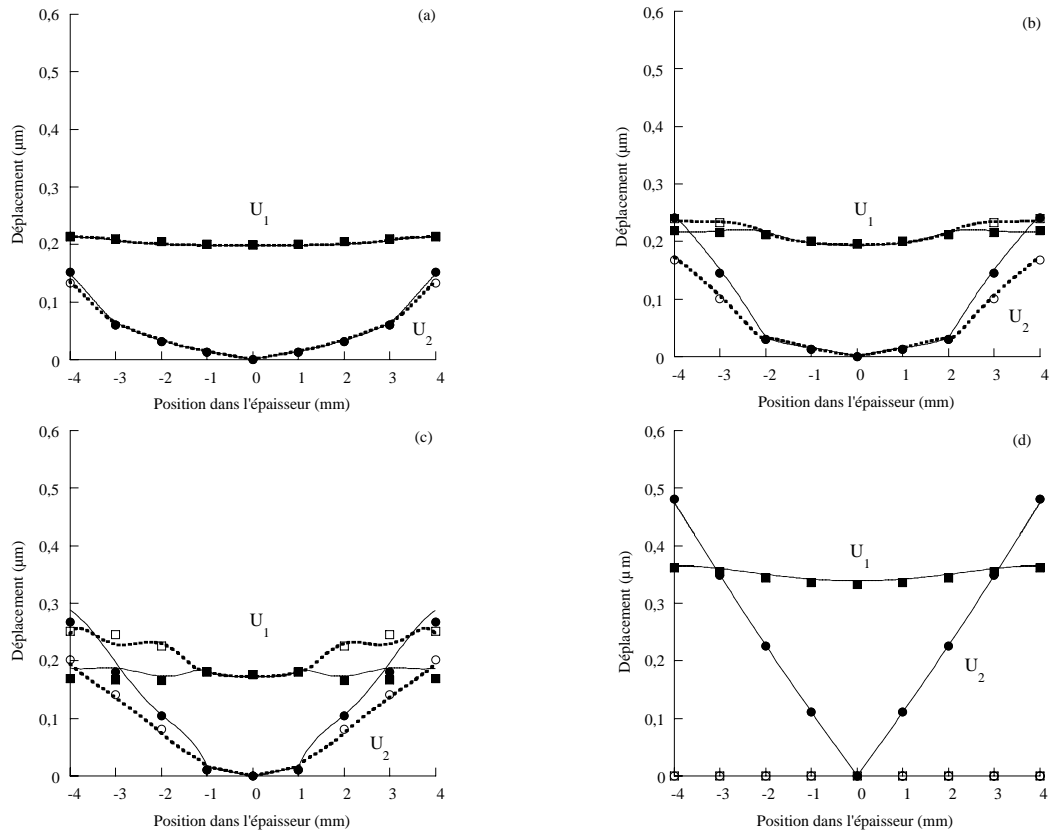


figure V.9 : Champs de déplacement au niveau du défaut lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, par des paires de fissures débouchantes symétriques par rapport au plan médian. (a) $p/h = 25\%$ (b) $p/h = 50\%$ (c) $p/h = 75\%$ (d) $p/h = 100\%$.

Éléments finis : Déplacements normaux (carrés) et dans le plan (cercles) des faces gauche (plein) et droite (vide) de la fissure.

Décomposition modale : Déplacements des faces gauche (—) et droite (- - -).

V.3. Fissure débouchante dissymétrique

Ce paragraphe présente l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission, lors de la diffraction, au produit fréquence-épaisseur de $1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, des modes A_0 et S_0 par des fissures verticales débouchantes en surface de la plaque (figure II.3.c). La différence avec les cas précédents est que ce type de défaut n'est plus symétrique par rapport au plan médian de la plaque. De ce fait, des conversions de modes vont apparaître. Cela signifie que le mode A_0 ou S_0 incident se réfléchit et est transmis sous la forme de deux modes diffractés A_0 et S_0 . Pour chaque onde incidente, les coefficients de diffraction dans les deux directions du repère sont alors présentés (équation (II.12)). De plus, les champs de déplacement à la position des défauts sont aussi exposés.

V.3.1 Coefficients de réflexion et de transmission

La figure V.10 et la figure V.11 présentent les modules et les phases des coefficients de réflexion et de transmission, en fonction de la hauteur des défauts, pour les modes S_0 ou A_0 incidents sur une fissure simple débouchant (figure II.3.c). Les prédictions de la méthode de décomposition modale sont comparées aux calculs du code d'éléments finis. Un bon accord entre les deux ensembles de résultats peut être remarqué. Le seul écart relatif important

(27 %) est observé lors de la modélisation de la diffraction de A_0 par une fissure de 62,5 % de l'épaisseur de la plaque. Il concerne le coefficient de réflexion de A_0 . Cependant, les bilans énergétiques issus des calculs de la méthode de décomposition modale ou du code d'éléments finis sont respectivement égaux à 2,7 et 4,6 %. Ils sont donc tous les deux inférieurs à 5 % et restent satisfaisants.

Remarquons de plus que, dans les cas les plus défavorables, le bilan énergétique est égal à 1 avec 5,4 % d'erreur (prédictions du code d'éléments finis pour une fissure de 75 % lorsque S_0 est incident) ou avec 8 % d'erreur (prédictions de la méthode de décomposition modale pour une fissure de 75 % lorsque A_0 est incident). Il sera vu par la suite que la modélisation de la diffraction de A_0 par une grande fissure débouchante dissymétrique constitue un cas limite de la méthode de décomposition modale. Les déplacements prédits sur les surfaces de la fissure et le bilan énergétique ne sont alors pas aussi satisfaisants que dans les autres modélisations. Cependant, ce dernier reste toujours égal à 1 avec moins de 10 % d'erreur.

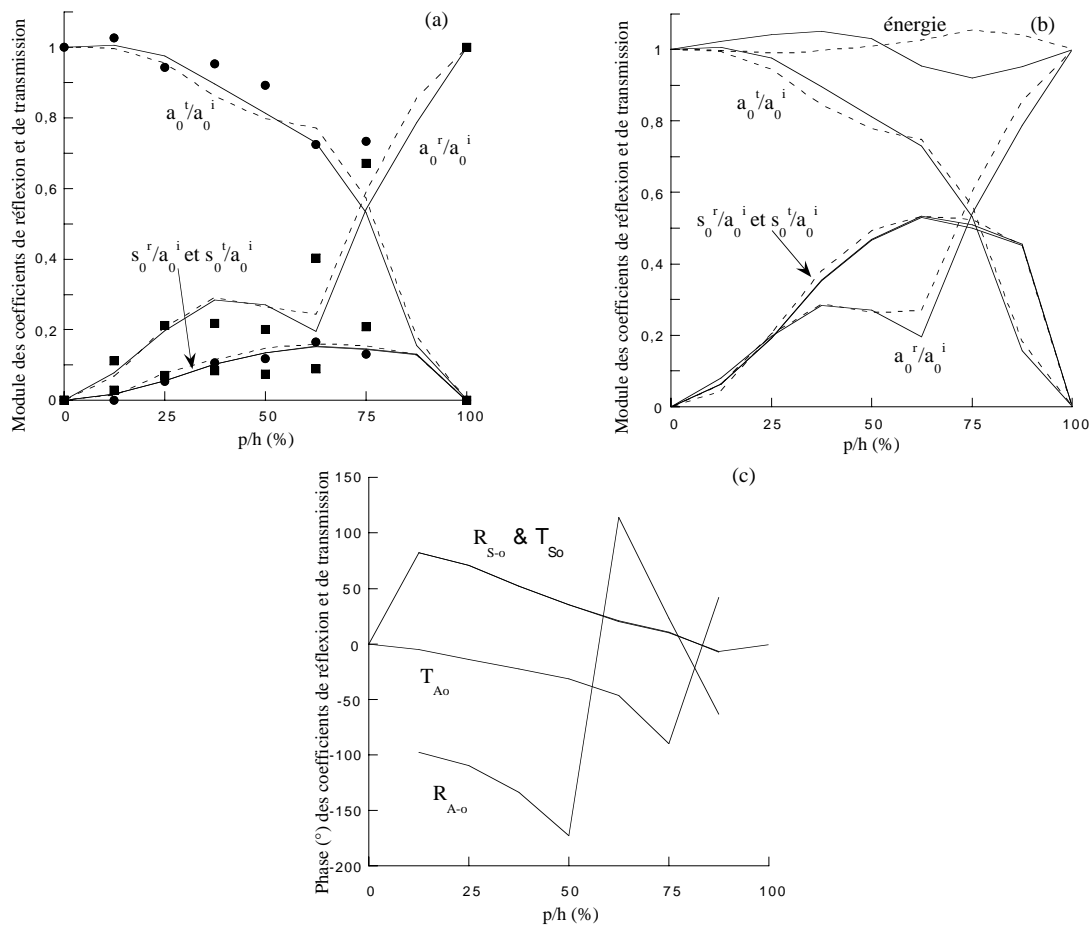


figure V.10 : Coefficients de réflexion et de transmission lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, sur une fissure débouchante non symétrique par rapport au plan médian.

(a) Modules dans la direction x_1 , (b) Modules dans la direction x_2 , (c) Phase

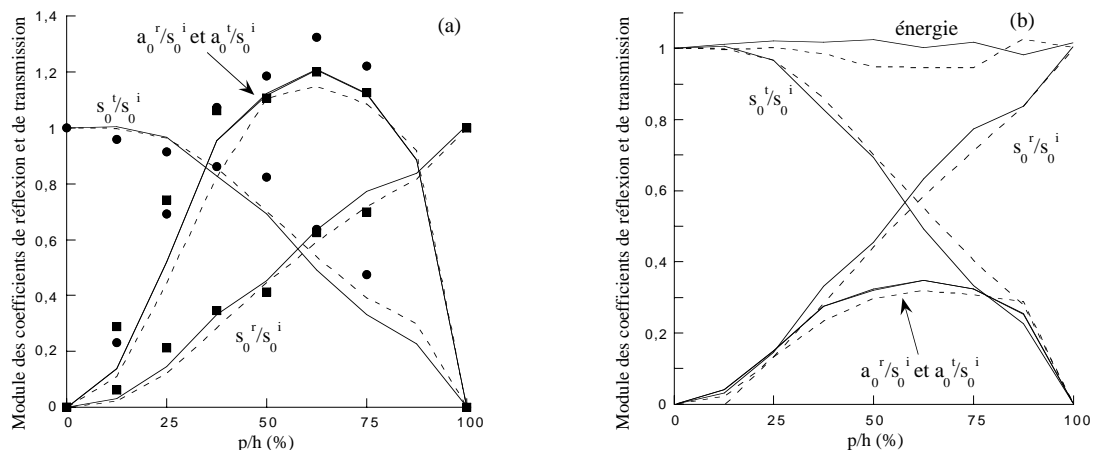
Éléments finis (---), décomposition modale (—),
coefficient de réflexion (■) et de transmission (●) mesurés.

La figure V.10 montre que le coefficient de transmission de A_0 décroît de façon monotone lorsque le rapport hauteur de la fissure/épaisseur de la plaque augmente. Le mode A_0 transmis à travers la fissure pourrait donc servir, dans le cadre d'un problème inverse, à

dimensionner les fissures débouchantes. Ce n'est pas le cas pour le mode A_0 réfléchi puisque son amplitude croît pour des valeurs de p/h comprises entre 0 et 35 %, décroît entre 35 et 60 %, puis croît à nouveau de 60 à 100 %. Ce comportement non monotone démontre que le mode A_0 réfléchi n'est pas un bon indicateur de la taille du défaut.

Au produit fréquence-épaisseur considéré, les modes S_0 réfléchis et transmis possèdent la même amplitude (relativement à celle du mode incident). Ce résultat intéressant montre que les fissures débouchantes simples, sous l'effet de la sollicitation du mode A_0 incident, génèrent, dans les deux directions x_2 et $-x_2$, le mode S_0 avec la même amplitude. Il doit être noté cependant que le rapport de l'amplitude du mode diffracté S_0 à celle du mode A_0 incident dépend de la direction d'observation x_1 (figure V.10.a) ou x_2 (figure V.10.b). Ce rapport est plus important dans la direction x_2 que dans la direction x_1 car, au produit fh de 1,12 MHz.mm, S_0 produit en surface de la plaque plus de déplacements dans le plan (u_2) que A_0 . Les coefficients de réflexion et de transmission croissent de manière monotone pour des valeurs de p/h comprises entre 0 et 60 % et décroissent pour des valeurs supérieures. Par lui-même, le mode S_0 produit par conversion lorsque A_0 est incident n'est donc pas suffisant pour dimensionner la hauteur de la fissure. Cependant, l'existence d'un mode diffracté S_0 lorsque A_0 est incident indique que le défaut n'est pas symétrique par rapport au plan médian de la plaque. De plus, l'ensemble des coefficients de réflexion et de transmission des diverses ondes diffractées A_0 et S_0 possède des valeurs uniques. La connaissance de ces coefficients est donc suffisante pour dimensionner les fissures. Les coefficients de réflexion et de transmission expérimentaux ont été obtenus en mesurant les déplacements normaux (dans la direction 1) sur l'une des surfaces de la plaque, comme décrit sur la figure III.9. La figure V.10 montre une très bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les prédictions numériques.

Comme le montre la figure V.11, des conclusions très similaires peuvent être tirées lorsque le mode S_0 est incident sur des fissures simples débouchantes. Dans ce cas, les coefficients de réflexion et de transmission du mode S_0 varient de façon monotone avec le rapport hauteur du défaut/épaisseur de la plaque, signifiant donc qu'ils sont à eux seuls de très bons indicateurs de la taille des fissures débouchantes simples. De plus, la présence d'un mode diffracté A_0 signifie que la fissure n'est pas symétrique par rapport au plan médian de la plaque. Il est intéressant de noter que le rapport de l'amplitude de A_0 diffracté à celle de S_0 incident est supérieur à l'unité pour la direction x_1 puisque A_0 produit plus de déplacement normal en surface de la plaque que S_0 . Un bon accord entre les résultats expérimentaux et les prédictions numériques est aussi observé.



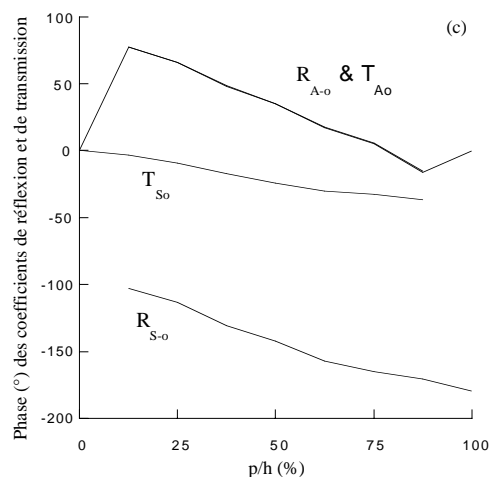


figure V.11 : Coefficients de réflexion et de transmission lorsque S_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, sur une fissure débouchante non symétrique par rapport au plan médian.

(a) Modules dans la direction x_1 , (b) Modules dans la direction x_2 , (c) Phase

Éléments finis (---), décomposition modale (—),
coefficient de réflexion (■) et de transmission (●) mesurés.

Les phases des ondes réfléchies et transmises lorsque S_0 ou A_0 est incident pourraient aussi permettre de dimensionner les fissures. En effet, elles varient de façon monotone (au déroulement près). Remarquons cependant que, lorsque A_0 est incident, la phase de l'onde A_0 transmise par une fissure 87,5 % de l'épaisseur de la plaque ne semble pas logique. En effet, une augmentation est prédite alors que, dans la majorité des cas, la phase de A_0 transmis décroît avec la hauteur de la fissure. L'erreur calculée, pour cette fissure, sur le bilan énergétique et les déplacements prédits sur les faces du défaut (voir paragraphe suivant) confirment qu'une réserve doit être mise sur la valeur de cette phase.

V.3.1.1 Déplacements à travers l'épaisseur de la plaque

Les figures V.12 et V.13 présentent les modules des distributions de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque et de chaque côté des fissures débouchantes, lorsque les modes A_0 et S_0 sont respectivement incidents. Les graphes (a), (b), (c), (d), (e) et (f) correspondent respectivement aux valeurs de p/h égales à 12,5, 25, 37,5, 50, 62,5 et 75 %.

La figure V.12 montre que le mode incident S_0 produit principalement un comportement d'ouverture de la fissure. En effet, les composantes dans le plan (U_2) des déplacements sont différentes sur les deux faces du défaut d'après la répartition inégale de modes de forte contrainte de compression (σ_2). L'ouverture de la fissure croît alors avec la taille de celle-ci. De plus, les déplacements normaux (U_1) sont identiques de chaque côté de la fissure débouchante, quelle que soit sa hauteur relative. Cela vient encore du fait que le mode symétrique possède une contrainte de cisaillement (σ_6) négligeable. Puisque la continuité des contraintes est exigée hors de la fissure, la contrainte de cisaillement doit donc être nulle dans toute la plaque et la répartition de modes, même inégale, de chaque côté de la fissure ne peut donc par produire de différences dans les déplacements normaux des deux faces. Notons que, contrairement à la diffraction de S_0 par une paire de fissures débouchantes, le déplacement normal (U_1) ne tend pas vers zéro lorsque la taille de la fissure augmente. Il semble, en effet, que celui-ci ait même tendance à croître avec p pour les petites fissures et qu'il se stabilise dès que la taille de la fissure est supérieure à 50 % de l'épaisseur de la plaque.

Remarquons que, dans certaines prédictions de la méthode de décomposition modale, les déplacements ne sont pas continus en tout point extérieur aux faces des défauts, en particulier pour les tailles de fissures supérieures à 37,5 %. De même, il se peut que le champ de déplacement calculé indique une hauteur de fissure légèrement supérieure à la taille modélisée (par exemple sur la figure V.12.e). Les déplacements prédits sont cependant issus des calculs conduisant au meilleur bilan énergétique. Ils correspondent alors aux champs satisfaisant au mieux les conditions aux limites imposées.

La figure V.13 montre que le mode A_0 incident produit principalement un comportement de glissement des deux faces de la fissure. En effet, les déplacements normaux diffèrent de chaque côté des fissures pour n'importe quelle taille relative p/h (sauf pour $p/h = 12,5$ % où ces différences ne sont pas visibles dans la direction x_1). Comme expliqué pour les fissures débouchantes symétriques, cela est dû à la répartition inégale de modes antisymétriques qui possèdent des contraintes de cisaillement (σ_6) non négligeables à l'emplacement des fissures. Ce comportement de glissement croît avec la taille de la fissure. Les composantes dans le plan (U_2) des déplacements varient aussi des deux côtés des fissures mais leur différence n'augmente pas de manière aussi importante que pour la direction x_1 .

Un très bon accord est aussi obtenu, dans la majorité des cas, entre les prédictions de la méthode de décomposition modale et les calculs du code d'éléments finis. Cependant, des différences peuvent être observées lorsque A_0 est incident sur les fissures de 62,5 et 75 % de hauteur relative. Ces grandes tailles de fissures représentent une des limites de la méthode de décomposition modale. Il est, en effet, difficile de trouver un nombre optimal de points à travers l'épaisseur de la plaque et de modes complexes à introduire dans le système (II.27)-(II.28) de telle sorte que les conditions de contraintes nulles sur les grandes faces des défauts soient vérifiées en même temps que les conditions de continuité des champs de vitesse et de contrainte dans les petites régions saines. Un compromis a donc été trouvé permettant de calculer correctement les coefficients de diffraction, le système pourrait cependant être encore mieux conditionné pour obtenir des champs de déplacement plus satisfaisants. Remarquons enfin que, lorsque A_0 est incident sur une fissure débouchante de hauteur égale à 75 % de l'épaisseur de la plaque, le code d'éléments finis prédit que les faces gauche et droite de la fissure se croisent dans la direction x_2 . Ce résultat surprenant est en fait possible puisque qu'il est supposé que la largeur de la fissure est plus grande que le déplacement élastique de ses surfaces (paragraphe III.1.1). Une des faces peut donc avoir, dans la direction x_2 , un déplacement supérieur à l'autre sans pour autant interférer avec elle. Les réserves émises sur les résultats issus de la méthode de décomposition modale, dans ce cas particulier, ne permettent cependant pas de confirmer ce phénomène.

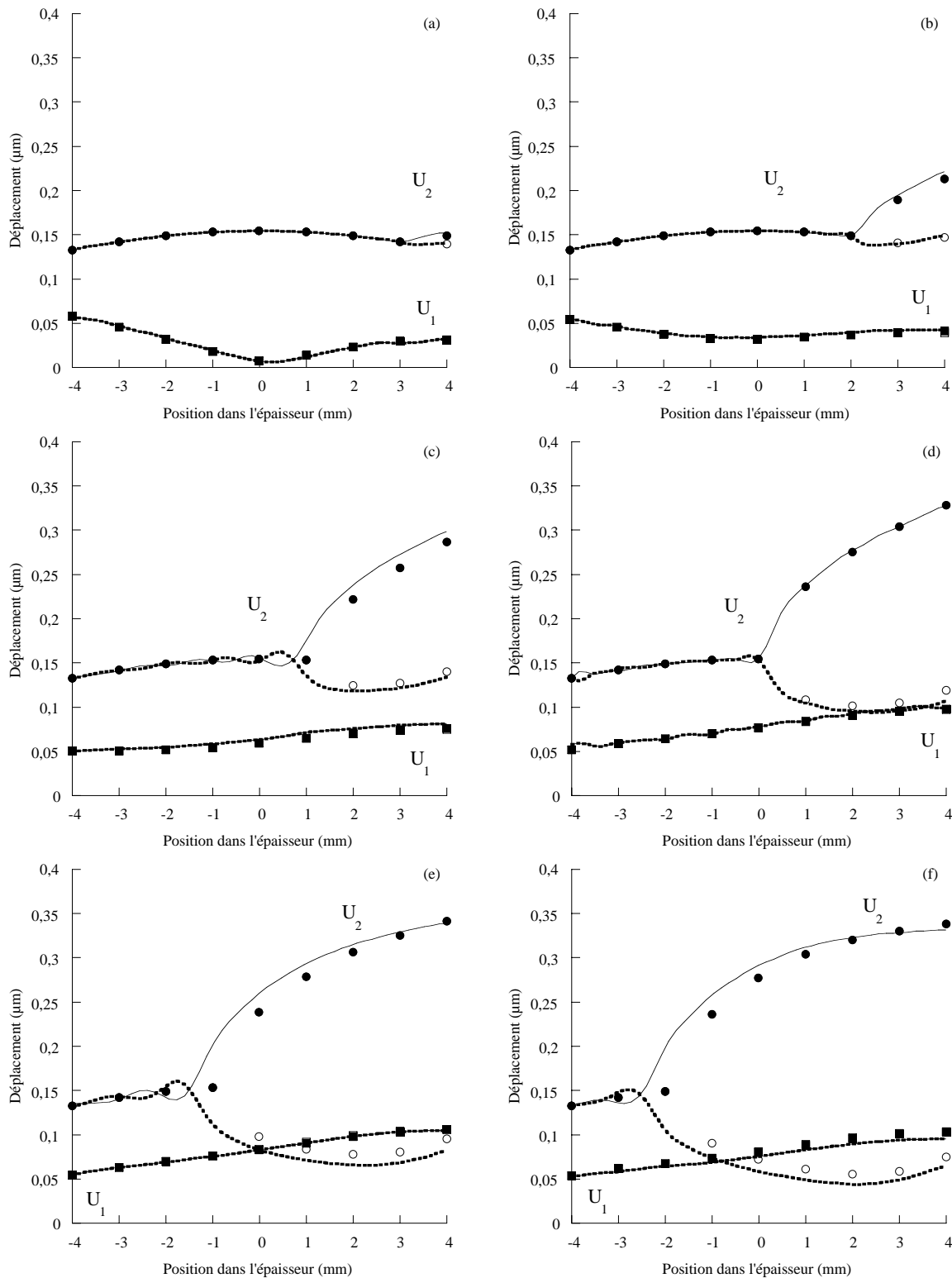


figure V.12 : Champs de déplacement au niveau du défaut lorsque S_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, sur une fissure débouchante non symétrique par rapport au plan médian.
 (a) $p/h=12,5\%$ (b) $p/h=25\%$ (c) $p/h=37,5\%$ (d) $p/h=50\%$ (e) $p/h=62,5\%$ (f) $p/h=75\%$
 Éléments finis : carrés (direction 1) ou cercles (direction 2) ; Décomposition modale : traits
 Face gauche (● ou ■, —) et face droite (○ ou □, - -) de la fissure.

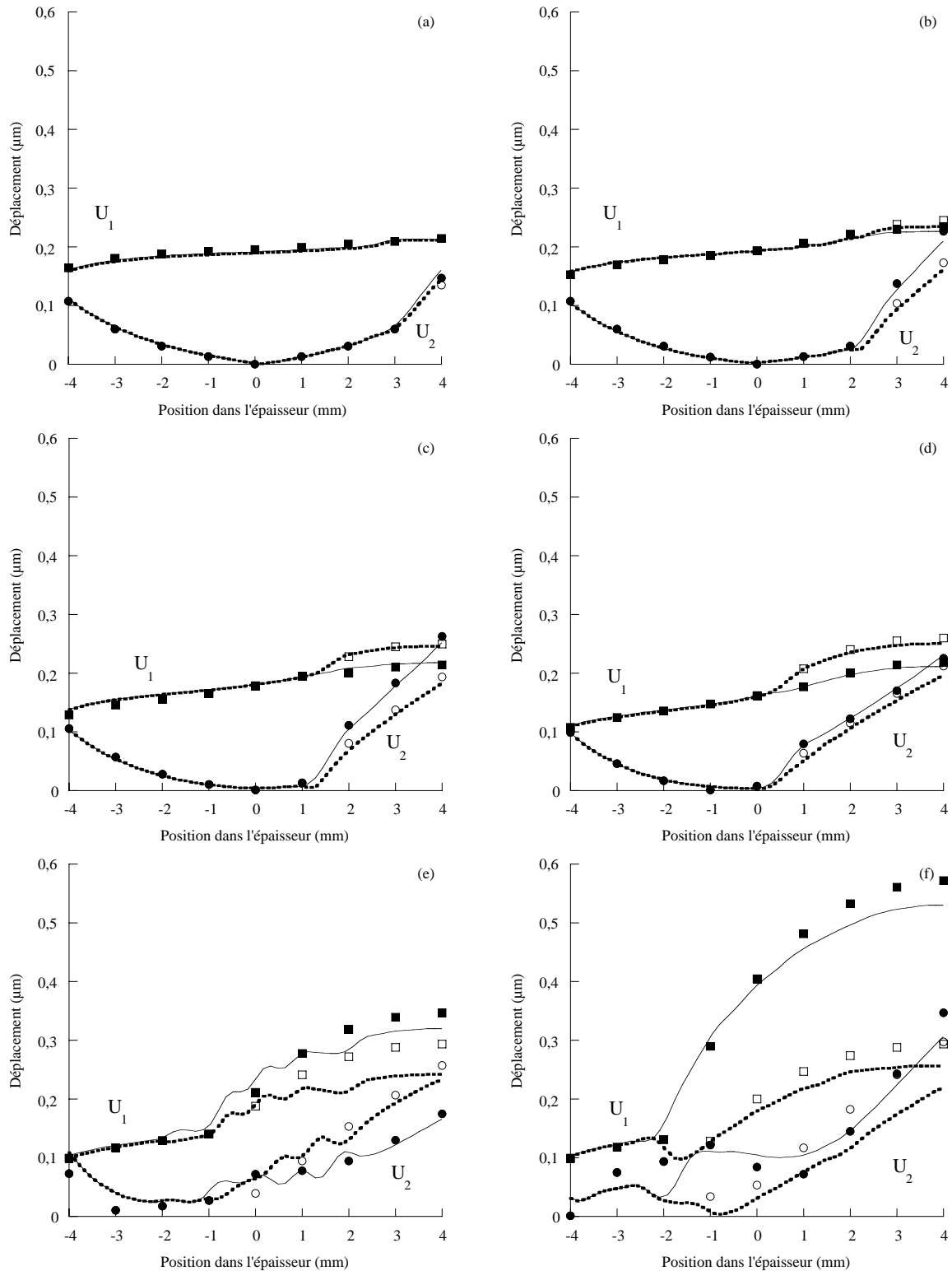


figure V.13 : Champs de déplacement au niveau du défaut lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, sur une fissure débouchante non symétrique par rapport au plan médian. (a) $p/h=12,5 \%$ (b) $p/h=25 \%$ (c) $p/h=37,5 \%$ (d) $p/h=50 \%$ (e) $p/h=62,5 \%$ (f) $p/h=75 \%$ Éléments finis : carrés (direction 1) ou cercles (direction 2) ; Décomposition modale : traits Face gauche (● ou ■, —) et face droite (○ ou □, - -) de la fissure.

V.4. Conclusion

Ce chapitre a présenté la diffraction, à la fréquence de 0,14 MHz, des modes A_0 et S_0 par une fissure verticale dans une plaque d'aluminium d'épaisseur 8 mm. Dans un premier temps, des défauts symétriques par rapport au plan médian de la plaque ont été modélisés. Ils ont permis de tester la méthode de décomposition modale dans des configurations où aucune conversion de modes n'était possible. Les coefficients de réflexion et de transmission ainsi que les champs de déplacement sur les faces des fissures ont été prédits et confrontés avec succès aux prédictions du code d'éléments finis ou à des mesures. Il a ainsi été mis en évidence que le mode symétrique génère une ouverture de la fissure alors que A_0 impose principalement un comportement de cisaillement. De plus, les résultats obtenus montrent que l'évolution, avec la hauteur des fissures, des coefficients de diffraction permet d'envisager la résolution du problème inverse qui consiste à identifier les caractéristiques et en particulier les dimensions d'un défaut à partir de données expérimentales.

Dans une seconde partie, la diffraction des ondes A_0 et S_0 par des fissures verticales débouchantes a été étudiée. La nature dissymétrique du défaut impose alors des conversions de modes, quelle que soit l'onde incidente. Cette caractéristique pourra être utilisée lors de mesures expérimentales pour révéler une dissymétrie de la fissure. En particulier, il peut être choisi de générer S_0 dans la plaque et de contrôler la présence de A_0 puisque, dans cette configuration, les coefficients de diffraction, dans la direction normale (x_I), du mode A_0 peuvent être supérieurs à 1 (figure V.11.a). Le mode antisymétrique est alors aisément détectable. Il a ensuite été observé que, pour le produit fh considéré (1,12 MHz.mm), les ondes de symétrie opposée à celle de l'onde incidente étaient générées de manière équivalente de chaque côté du défaut. Enfin, comme pour les défauts symétriques, le mode incident S_0 génère un comportement d'ouverture alors que A_0 crée un glissement des faces de la fissure.

Les résultats exposés dans ce chapitre ont montré que la méthode de décomposition modale pouvait être appliquée à l'étude de la diffraction des ondes de Lamb par des fissures et que les conversions de modes susceptibles d'exister étaient correctement modélisées. En effet, ses prédictions ont été confrontées avec succès, dans la majorité des cas, aux calculs numériques du code d'éléments finis ou à des mesures expérimentales. De plus, ces résultats sont très proches de ceux trouvés dans la littérature [53]. Cependant, des réserves peuvent être mises sur les modélisations concernant la diffraction de A_0 par les fissures de hauteur relative 62,5 et 75 %. Ces grandes tailles de fissures représentent en effet une des limites de la méthode de décomposition modale car il est difficile de conditionner parfaitement le système numérique correspondant aux conditions aux limites à l'emplacement de la fissure. Des instabilités numériques apparaissent alors et les déplacements calculés, sur faces des défauts, présentent des différences avec les résultats issus du logiciel d'éléments finis. Ce problème, qui devra être réglé par la suite, ne met cependant pas complètement en défaut la méthode puisqu'elle converge toujours vers des coefficients de diffraction en accord avec les prédictions du code d'éléments finis et les mesures expérimentales. De plus, le bilan énergétique reste satisfaisant puisqu'il est égal à 1 avec moins de 10 % d'erreur.

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

Dans ce document, les modes de Lamb ont été définis par de leur nombre d'onde obtenus à partir des lenteurs de phase racines réelle, imaginaire ou complexe des équations de dispersion découlant des conditions de contraintes nulles en surface d'une plaque. Des courbes de dispersion dans le plan complexe ont ensuite été construites et les trois types de solutions ont respectivement été reliés à une nature propagative, non propagative ou atténuée d'un mode. Pour pouvoir être comparées, les ondes de Lamb ont alors été normalisées en puissance. Cette écriture est très utile lors de l'étude de la diffraction d'une onde par un défaut puisqu'elle permet, de plus, de relier l'amplitude d'un mode propagatif à la puissance qu'il transporte le long de la plaque.

Une méthode, basée sur un principe de décomposition modale, a ensuite été présentée dans une forme générale. Elle considère, sur les surfaces d'un défaut, la superposition de tous les modes (quelle que soit leur nature) pour satisfaire les conditions aux limites. Puisque la famille des ondes de Lamb forme une base complète [95], ce modèle permet de représenter tout champ acoustique pouvant exister dans les plaques, et, en particulier, les champs transitoires générés lors de la diffraction d'un mode. La méthode développée est appliquée à la résolution du problème direct qui consiste à prédire les coefficients de diffraction des différents modes lorsqu'une onde est incidente sur un défaut donné. Elle permet, de plus, de prédire les champs de déplacement et de contrainte en tout point de la plaque et en particulier sur les faces des défauts. Cette méthode de décomposition modale a alors été appliquée à l'étude de deux cas particuliers : la réflexion d'une onde de Lamb sur le bord libre d'une plaque ou sa diffraction par des fissures verticales dans les plaques.

Deux outils de validation des résultats de la méthode de décomposition modale ont ensuite été exposés. Le premier est un logiciel basé sur la méthode des éléments finis. Outre les coefficients de diffraction, il permet aussi de modéliser des situations difficilement réalisables du point de vue expérimental, en particulier le contrôle des déplacements sur les surfaces des défauts. Ces résultats peuvent alors être comparés aux prédictions de la méthode de décomposition modale. Plusieurs procédés expérimentaux ont aussi été mis au point pour confirmer les prédictions numériques. Deux systèmes de détection sans contact des ondes diffractées ont été présentés. Des transducteurs ultrasonores à couplage par air ont été utilisés pour effectuer des relevés précis des amplitudes des différents modes et, lorsqu'il a été nécessaire de réaliser des mesures ponctuelles, une sonde laser a été employée. Elle permet, en particulier, de contrôler les déplacements du bord libre de la plaque ou d'observer la décroissance des champs transitoires.

Des prédictions de la méthode de décomposition modale concernant la diffraction des ondes de Lamb par des défauts verticaux, dans une plaque d'aluminium d'épaisseur 8 mm, ont ensuite été présentées et confrontées aux résultats du logiciel d'éléments finis ou à des mesures expérimentales. Quatre types de défauts ont été étudiés. Tout d'abord, la modélisation de la réflexion d'une onde sur le bord libre de la plaque a permis de valider, dans un cas simple, le formalisme de décomposition modale. Le calcul de l'évolution, avec la fréquence, des coefficients de réflexion des modes de Lamb sur le bord libre a permis de vérifier la stabilité de la méthode jusqu'à un produit fréquence-épaisseur de 10 MHz.mm où au moins cinq ondes propagatives coexistent. De plus, plusieurs études mono-fréquentielles ont été menées permettant, d'une part, d'identifier la résonance du bord libre de la plaque, et

d'autre part, de mettre en évidence le rôle fondamental des ondes non propagatives et atténuées dans le phénomène de diffraction. Cette étude présente enfin un intérêt industriel puisqu'elle devrait permettre de contrôler la qualité du bord ou de lever toute ambiguïté concernant la détection de défauts proches de celui-ci.

Dans un second temps, la réflexion et la transmission des modes A_0 et S_0 , à la fréquence de 0,14 MHz, par des fissures verticales ont été modélisées. Les défauts sont soit internes soit débouchants en surface d'une plaque d'aluminium d'épaisseur 8 mm. Certains d'entre eux sont de plus non symétriques et entraînent donc des conversions de modes lors du phénomène de diffraction. L'évolution, avec la taille des différentes fissures, des coefficients de diffraction a été prédite. De plus, pour toutes ces études, les champs de déplacement présents sur les surfaces des défauts ont été calculés. Il a alors été mis en évidence que S_0 génère, à basse fréquence, un mouvement d'ouverture des fissures alors que A_0 implique en plus un comportement de cisaillement. Une discussion a été menée concernant l'évolution des coefficients de diffraction des différents modes, en fonction de la taille des fissures, montrant que certaines ondes pourraient permettre de dimensionner les fissures verticales, lors de contrôles non destructifs de plaques.

Les modélisations ci-dessus ont été confrontées avec succès aux prédictions du logiciel d'éléments finis, et aux mesures expérimentales. Elles ont montré que la méthode de décomposition modale pouvait être appliquée à l'étude de la diffraction d'ondes de Lamb par des défauts verticaux dans les plaques et que les conversions de modes susceptibles d'exister étaient correctement modélisées. De plus, les temps de calculs, environ cent fois plus courts que ceux du code d'éléments finis, montrent que cette méthode laisse envisager la résolution du problème inverse et qu'elle constitue donc un outil prometteur pour les applications de contrôle non destructif.

Lors de l'étude de la diffraction du mode A_0 par de grandes fissures dissymétriques, certaines limites de la méthode sont apparues. En effet, il semble difficile de conditionner parfaitement le système correspondant aux conditions aux limites à l'emplacement de la fissure. Des instabilités numériques apparaissent alors et les champs de déplacement calculés sur les surfaces des fissures présentent des différences avec les prédictions du logiciel d'éléments finis. La méthode de décomposition modale n'est cependant pas complètement mise en défaut puisque les calculs convergent toujours vers des coefficients de diffraction en accord avec les prédictions du code d'éléments finis et les mesures expérimentales. De plus, le bilan énergétique reste toujours satisfaisant puisqu'il est égal à 1 avec moins de 10 % d'erreur.

Les perspectives à ce travail sont nombreuses. Dans un premier temps, rappelons qu'il peut être intéressant, lors de la résolution des équations de dispersion sur une large bande de produits fréquence-épaisseur, de diviser l'étude en deux parties. Pour les bas produits fh , les solutions pourraient être calculées sous la forme de nombres d'ondes. En effet, ceux-ci restent bornés et permettent de restreindre les domaines de recherche. Pour les mêmes raisons, à hauts produits fh , une recherche de solutions, sous la forme de lenteurs de phase, peut être conservée. Enfin, lors de la détermination de solutions complexes, il serait intéressant de confirmer que les parties imaginaires de ces racines forment une suite harmonique. Cette caractéristique physique pourrait alors être exploitée pour améliorer la résolution des équations de dispersion.

Le test de validité des coefficients de diffraction pourrait aussi être renforcé. Pour l'instant, il est en effet basé essentiellement sur un bilan énergétique. À lui seul, ce critère

n'est cependant pas infaillible puisqu'il ne permet pas d'éliminer des solutions triviales comme, par exemple, la transmission totale du mode incident à travers une fissure. Un test de continuité, en dehors des défauts, des champs de déplacement et de contrainte est alors effectué. Ce contrôle pourrait cependant être automatisé pour apporter systématiquement une information sur la qualité de la modélisation. De plus, un principe fiable de conditionnement du système numérique représentant les conditions aux limites doit être trouvé. Il devrait permettre, entre autres, de supprimer les instabilités remarquées lors de la modélisation de la diffraction du mode A_0 par de grandes fissures dissymétriques.

Il sera ensuite important d'appliquer la méthode de décomposition modale à la modélisation de la diffraction des ondes de Lamb par des fissures verticales présentes dans les plaques multicouches constituées de matériaux anisotropes ou viscoélastiques. En effet, des modèles de propagation d'ondes en milieu sain existent pour ces matériaux et, bien qu'elle n'ait pas encore été développée dans ces cas, la méthode de décomposition modale a été présentée sous une forme générale et devrait pouvoir être appliquée avec succès à ces études. Ces extensions du modèle laissent envisager de nombreuses applications dans le contrôle non destructif, en particulier dans le secteur des matériaux composites.

Différents types de défauts pourraient ensuite être étudiés. Les fissures verticales ayant été traitées, il semble naturel de modéliser la diffraction des ondes de Lamb par des fissures horizontales. Ce projet, actuellement en cours de réalisation, permet d'envisager l'étude de la qualité des interfaces dans les matériaux multicouches ou peut être appliqué à la détection de délaminages dans les matériaux composites. L'étape suivante consiste alors à étudier les rainures verticales. Elles présentent, en effet, des similitudes avec les fissures verticales ou horizontales puisqu'elles possèdent une hauteur et une étendue non nulle dans le sens de la plaque. Pour ces études, il est envisagé de diviser la structure en plusieurs plaques d'épaisseurs différentes et de résoudre, pour chacune d'entre elles, l'équation de dispersion. Lors de l'incidence d'une onde donnée, les conditions de continuité des champs acoustiques présents dans les différentes plaques devraient permettre de prédire les amplitudes des modes de Lamb diffractés par le défaut.

Pour les défauts inclinés ou de géométrie non plane comme, par exemple, un trou circulaire dans une plaque, les conditions aux limites doivent tenir compte des déphasages des modes le long des inhomogénéités. Il peut aussi être intéressant de diviser la plaque en diverses régions et de décomposer les champs présents sur des bases appropriées [57]. En particulier, des repères cylindriques ou sphériques peuvent être employés [72].

À beaucoup plus long terme, la diffraction des ondes de Lamb pourrait aussi être modélisée dans les trois dimensions en prenant en compte, par exemple, les propriétés d'anisotropie des matériaux.

Enfin, pour des études mono-fréquences, la résolution du problème inverse pourrait être rapidement envisagée dans le cas des fissures verticales dans les plaques. Par contre, dans le cas de bandes de fréquences assez larges, il sera auparavant nécessaire d'optimiser les procédures de résolution et de suivi des modes en fréquence. De manière équivalente, il peut être intéressant de rechercher une procédure de suivi des coefficients de diffraction qui permettrait de les extrapoler, d'une fréquence à l'autre, minimisant ainsi les temps de calcul.

Annexes

Annexe A

Décomposition de Helmholtz et décomposition en ondes planes

Cette annexe montre que la décomposition de Helmholtz du champ de déplacement, solution de l'équation de propagation, permet de le décrire comme superposition de quatre champs produits par des ondes planes.

Comme énoncé dans le chapitre I, l'équation du mouvement s'écrit :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Pour un problème bidimensionnel, le vecteur déplacement \mathbf{u} , solution de (A.1), peut être complètement défini dans le plan (x_1, x_2) et exprimé en fonction d'un potentiel scalaire φ et d'un potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$, par la relation [80] :

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} \text{ avec } \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Cette écriture est appelée décomposition de Helmholtz. L'introduction de \mathbf{u} dans (A.1) permet d'établir les équations suivantes [80] :

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.4})$$

qui associent φ et $\boldsymbol{\psi}$ aux ondes longitudinales et transversales, respectivement. Si les phénomènes acoustiques étudiés sont supposés monochromatiques, φ et $\boldsymbol{\psi}$ s'écrivent :

$$\varphi(x_1, x_2, t) = \hat{\varphi}(x_1, x_2) e^{i\omega t} \quad (\text{A.5})$$

$$\boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, t) = \hat{\boldsymbol{\psi}}(x_1, x_2) e^{i\omega t}. \quad (\text{A.6})$$

Dans la suite, le terme $e^{i\omega t}$ sera omis et les équations (A.3) et (A.4) deviennent :

$$\nabla^2 \hat{\varphi} + k_L^2 \hat{\varphi} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla^2 \hat{\boldsymbol{\psi}} + k_T^2 \hat{\boldsymbol{\psi}} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Une transformée de Fourier spatiale sur la variable x_2 conduit ensuite à :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_1^2} + (k_L^2 - k_2^2) \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x_1^2} + (k_T^2 - k_2^2) \tilde{\psi} = 0. \quad (\text{A.10})$$

où $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ représentent les transformées de Fourier spatiales en x_2 de $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$:

$$\tilde{\varphi}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(x_1, x_2) e^{ik_2 x_2} dx_2 \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{\psi}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(x_1, x_2) e^{ik_2 x_2} dx_2. \quad (\text{A.12})$$

Les solutions générales des équations (A.9) et (A.10) sont respectivement

$$\tilde{\varphi}(x_1) = a_1(k_2, \omega) e^{-i\sqrt{(k_L^2 - k_2^2)}x_1} + a_2(k_2, \omega) e^{i\sqrt{(k_L^2 - k_2^2)}x_1}. \quad (\text{A.13})$$

et

$$\tilde{\psi}(x_1) = b_1(k_2, \omega) e^{-i\sqrt{(k_T^2 - k_2^2)}x_1} + b_2(k_2, \omega) e^{i\sqrt{(k_T^2 - k_2^2)}x_1}. \quad (\text{A.14})$$

où a_i et b_i sont des constantes arbitraires indépendantes de x_1 . $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ représentent des champs d'ondes planes selon x_1 où le signe - ou + devant le radical (dans les exponentielles) détermine le sens de propagation ou d'atténuation, respectivement vers les x_1 croissants et les x_1 décroissants. En milieu infini, ces ondes doivent posséder une atténuation au cours de la propagation de telle sorte que leur amplitude reste bornée à l'infini. Cependant, dans le cas d'une plaque, le milieu est borné selon x_1 et les quatre solutions ci-dessus sont conservées. Il sera montré par la suite que les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes a_i et b_i .

En appliquant une transformée de Fourier inverse sur (A.13) et (A.14), il découle que les potentiels φ et ψ sont donnés, pour une valeur de k_2 et une valeur de ω , par :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, t; k_2, \omega) &= \left(a_1(k_2, \omega) e^{-i\sqrt{(k_L^2 - k_2^2)}x_1} + a_2(k_2, \omega) e^{i\sqrt{(k_L^2 - k_2^2)}x_1} \right) e^{i(\omega t - k_2 x_2)} \\ \psi(x_1, x_2, t; k_2, \omega) &= \left(b_1(k_2, \omega) e^{-i\sqrt{(k_T^2 - k_2^2)}x_1} + b_2(k_2, \omega) e^{i\sqrt{(k_T^2 - k_2^2)}x_1} \right) e^{i(\omega t - k_2 x_2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Les expressions des potentiels scalaires et des potentiels vecteurs ont donc été obtenues. Il est maintenant possible d'appliquer la formule (A.2) de manière à calculer \mathbf{u} . Pour un problème bi-dimensionnel, les composantes u_1 et u_2 du champ de déplacement s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ u_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

En introduisant les expressions (A.15) dans les relations (A.16), le champ de déplacement devient :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \left(-ik_{L1}a_1e^{-ik_{L1}x_1} + ik_{L1}a_2e^{ik_{L1}x_1} - ik_2 \left(b_1e^{-ik_{T1}x_1} + b_2e^{ik_{T1}x_1} \right) \right) e^{i(\omega t - k_2x_2)} \\
 u_2 &= \left(-ik_2 \left(a_1e^{-ik_{L1}x_1} + a_2e^{ik_{L1}x_1} \right) - ik_{T1}b_1e^{-ik_{T1}x_1} + ik_{T1}b_2e^{ik_{T1}x_1} \right) e^{i(\omega t - k_2x_2)}.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

D'après les expressions de P_{L1} , P_{T1} , P_{L2} et P_{T2} données en annexe B, il peut se réécrire :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -i \left(k_L P_{L1} a_1 e^{-ik_{L1}x_1} - k_L P_{L1} a_2 e^{ik_{L1}x_1} - k_T P_{T1} \left(b_1 e^{-ik_{T1}x_1} + b_2 e^{ik_{T1}x_1} \right) \right) e^{i(\omega t - k_2x_2)} \\
 u_2 &= -i \left(k_L P_{L2} \left(a_1 e^{-ik_{L1}x_1} + a_2 e^{ik_{L1}x_1} \right) + k_T P_{T2} b_1 e^{-ik_{T1}x_1} - k_T P_{T2} b_2 e^{ik_{T1}x_1} \right) e^{i(\omega t - k_2x_2)}.
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Puisque a_i et b_i sont des constantes arbitraires, il est possible de réécrire (A.18) sous la forme :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 u_1 &= \left(A_{Lm} P_{L1} e^{-ik_{L1}x_1} - P_{L1} A_{Ld} e^{ik_{L1}x_1} - P_{T1} A_{Td} e^{-ik_{T1}x_1} - P_{T1} A_{Tm} e^{ik_{T1}x_1} \right) e^{i(\omega t - k_2x_2)} \\
 u_2 &= \left(P_{L2} A_{Lm} e^{-ik_{L1}x_1} + P_{L2} A_{Ld} e^{ik_{L1}x_1} + P_{T2} A_{Tm} e^{-ik_{T1}x_1} - P_{T2} A_{Td} e^{ik_{T1}x_1} \right) e^{i(\omega t - k_2x_2)}.
 \end{aligned}
 } \tag{A.19}$$

Ces expressions sont identiques à celles qui sont utilisées dans le chapitre I (relations (I.19) à (I.21)) et correspondent à une décomposition en ondes planes (deux ondes montantes et deux ondes descendantes) d'un champ quelconque en milieu infini. L'introduction des conditions aux limites

$$\begin{aligned}
 \sigma_I(\pm h/2) &= 0 \\
 \sigma_O(\pm h/2) &= 0
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

en surface de la plaque libre permet ensuite d'obtenir, comme montré dans le chapitre I, les expressions des constantes A_{Li} et A_{Ti} ($i=m,d$) ainsi que les équations de dispersion des modes de Lamb.

Annexe B

Formes analytiques des coefficients A_T

Dans les expressions des champs de vitesse (I.33)-(I.34) et de contrainte (I.35)-(I.36), les coefficients A_L et A_T sont inconnus. Cependant, les conditions de contraintes nulles en surface de la plaque permettent de déterminer des formes analytiques de ces coefficients. En particulier, la condition portant sur la contrainte de cisaillement donne, pour une valeur unitaire de A_L :

Pour les modes symétriques, le coefficient A_T est donné par :

$$A_T = - \frac{(k_2 P_{L1} + P_{L2} S_{L1} \omega) \sin(\omega S_{L1} h/2)}{(k_2 P_{T1} + P_{T2} S_{T1} \omega) \sin(\omega S_{T1} h/2)} \quad (B.21)$$

Pour les modes antisymétriques, le coefficient A_T est donné par :

$$A_T = - \frac{(k_2 P_{L1} + P_{L2} S_{L1} \omega) \cos(\omega S_{L1} h/2)}{(k_2 P_{T1} + P_{T2} S_{T1} \omega) \cos(\omega S_{T1} h/2)} \quad (B.22)$$

où

$k_{L1} = \sqrt{k_L^2 - k_2^2}$	$P_{L1} = \frac{k_{L1}}{k_L}$	$P_{L2} = \frac{k_2}{k_L}$
$k_{T1} = \sqrt{k_T^2 - k_2^2}$	$P_{T1} = -\frac{k_2}{k_T}$	$P_{T2} = \frac{k_{T1}}{k_T}$

tableau B.1 : formes analytiques des composantes, dans les directions 1 ou 2, des polarisations et des nombres d'ondes des ondes longitudinales et transversales d'un matériau isotrope.

Annexe C Formes analytiques des dérivées des équations de dispersion

La présente annexe expose les formes analytiques des dérivées partielles des équations de dispersion F_{sym} et F_{anti} des ondes de Lamb. Ces formules servent à réaliser un suivi rapide des modes de Lamb lors de la résolution des équations de dispersion.

C.1. Dérivée partielle en fonction de la fréquence

Pour résoudre les équations de dispersion, les relations (I.24) et (I.25) sont considérées comme étant des fonctions de deux variables : la fréquence f et la lenteur de phase S_2 . Elles s'écrivent alors :

Pour les modes symétriques

$$F_{sym}(f, S_2) = \frac{\tan(2\pi f \sqrt{S_T^2 - S_2^2} h/2)}{\tan(2\pi f \sqrt{S_L^2 - S_2^2} h/2)} + \frac{4S_2^2 \sqrt{S_T^2 - S_2^2} \sqrt{S_L^2 - S_2^2}}{(S_T^2 - 2S_2^2)^2}, \quad (C.1)$$

et pour les modes antisymétriques

$$F_{anti}(f, S_2) = \frac{\tan(2\pi f \sqrt{S_T^2 - S_2^2} h/2)}{\tan(2\pi f \sqrt{S_L^2 - S_2^2} h/2)} + \frac{(S_T^2 - 2S_2^2)^2}{4S_2^2 \sqrt{S_T^2 - S_2^2} \sqrt{S_L^2 - S_2^2}}. \quad (C.2)$$

où S_L et S_T sont les lenteurs des ondes longitudinales et transversales. Les formes analytiques des dérivées partielles en fonction de la fréquence des équations de dispersions des ondes symétriques (C.1) et antisymétriques (C.2) sont données alors par les relations suivantes.

La dérivée partielle, en fonction de la fréquence, de l'équation de dispersion des ondes symétriques est :

$$\frac{\partial F_{sym}(f, S_2)}{\partial f} = -4\pi b h S_2^2 S_{L1} S_{T1}^2 - \pi d h (S_T^2 - 2S_2^2)^2 S_{L1} \quad (C.3)$$

La dérivée partielle, en fonction de la fréquence, de l'équation de dispersion des ondes antisymétriques est :

$$\frac{\partial F_{anti}(f, S_2)}{\partial f} = 4\pi b a^2 h S_2^2 S_{L1} S_{T1}^2 + \pi d c^2 h (S_T^2 - 2S_2^2)^2 S_{L1}. \quad (C.4)$$

où

$$S_{T1} = \sqrt{S_T^2 - S_2^2} \quad \text{et} \quad S_{L1} = \sqrt{S_L^2 - S_2^2} \quad (C.5)$$

et

$$\begin{aligned} a &= \tan(\omega S_{T1} h/2), \\ b &= (1 + \tan(\omega S_{T1} h/2)^2) / \tan(\omega S_{T1} h/2)^2, \\ c &= \tan(\omega S_{L1} h/2), \\ d &= (1 + \tan(\omega S_{L1} h/2)^2) / \tan(\omega S_{L1} h/2)^2. \end{aligned} \quad (C.6)$$

C.2. Dérivée partielle en fonction de la lenteur

En conservant les définitions (C.6) des paramètres a, b, c et d, les formes analytiques des dérivées partielles en fonction des lenteurs des équations de dispersions des ondes symétriques et antisymétriques sont données par les relations suivantes.

La dérivée partielle, en fonction de la lenteur, de l'équation de dispersion des ondes symétriques est :

$$\frac{\partial F_{sym}(f, S_2)}{\partial S_2} = \frac{(8S_2 S_{LI} S_{TI} - 4S_2^3 (S_{TI}/S_{LI} + S_{LI}/S_{TI}))}{a} + 2S_2^3 S_{LI} b \omega h + \frac{S_{TI}^4 S_2 \omega h}{2S_{LI}} - \frac{8S_2 S_{TI}^2}{c^2} . \quad (C.7)$$

La dérivée partielle, en fonction de la lenteur, de l'équation de dispersion des ondes antisymétriques est :

$$\frac{\partial F_{anti}(f, S_2)}{\partial S_2} = 4a (2S_2 S_{LI} S_{TI} - S_2^3 (S_{TI}/S_{LI} + S_{LI}/S_{TI})) - 2ba^2 \omega h S_2^3 S_{LI} - 8c S_2 S_{TI}^2 - dc^2 \frac{\omega h S_{TI}^4 S_2}{2S_{LI}} . \quad (C.8)$$

Annexe D

Formes analytiques des puissances

Avant de calculer les formes analytiques des puissances des ondes de Lamb, il est nécessaire de rappeler que la formule intégrale de la puissance est donnée par :

$$P_M = \frac{1}{4} \int_h (v_M \cdot \bar{\sigma}_{-M} - v_{-M} \cdot \bar{\sigma}_M) x_2 dx_1. \quad (D.1)$$

Les différentes variables (nombres d'ondes et polarisations) présentes dans les champs de vitesse (I.33)-(I.34) et de contrainte (I.35)-(I.36) doivent ensuite être exprimées pour les modes progressifs et rétrogrades. Elles sont présentées dans le tableau D.1.

Mode progressif M	Mode régressif -M
$k_{L1M} = \sqrt{k_L^2 - k_{2M}^2}$	$k_{L1-M} = k_{L1M}$
$k_{T1M} = \sqrt{k_T^2 - k_{2M}^2}$	$k_{T1-M} = k_{T1M}$
$P_{L1M} = \frac{k_{L1M}}{k_L}$	$P_{L1-M} = P_{L1M}$
$P_{T1M} = -\frac{k_{2M}}{k_T}$	$P_{T1-M} = -P_{T1M}$
$P_{L2M} = \frac{k_{2M}}{k_L}$	$P_{L2-M} = -P_{L2M}$
$P_{T2M} = \frac{k_{T1M}}{k_T}$	$P_{T2-M} = P_{T2M}$

tableau D.1 : Nombres d'ondes et polarisations intervenant dans l'écriture des champs de vitesse et de contrainte pour les modes progressifs et rétrogrades.

Les paramètres ci-dessus sont introduits dans les relations (I.33) - (I.36) de manière à obtenir les expressions analytiques des champs de vitesse et de contrainte des ondes rétrogrades. Les produits de la définition (D.1) sont ensuite calculés. Les termes résultants ne sont alors que des multiplications de fonctions sinusoïdales entre elles. Lors du calcul de l'intégrale, il suffit donc d'utiliser les formules suivantes :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \cos(kx_1)^2 dx_1 = \frac{\cos(kh/2)\sin(kh/2)}{k} + \frac{h}{2}. \quad (D.2)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \cos(k_{L1}x_1)\cos(k_{T1}x_1)dx_1 = \frac{\sin((k_{T1}-k_{L1})h/2)k_{L1} + \sin((k_{T1}-k_{L1})h/2)k_{T1}}{(k_{T1}-k_{L1})(k_{T1}+k_{L1})} + \frac{-\sin((k_{T1}+k_{L1})h/2)k_{L1} + \sin((k_{T1}+k_{L1})h/2)k_{T1}}{(k_{T1}-k_{L1})(k_{T1}+k_{L1})} \quad (D.3)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sin(kx_1)^2 dx_1 = \frac{-\cos(kh/2)\sin(kh/2)}{k} + \frac{h}{2}. \quad (D.4)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sin(k_{L1}x_1)\sin(k_{T1}x_1)dx_1 = \frac{\sin((k_{T1}-k_{L1})h/2)k_{L1} + \sin((k_{T1}-k_{L1})h/2)k_{T1}}{(k_{T1}-k_{L1})(k_{T1}+k_{L1})} + \frac{\sin((k_{T1}+k_{L1})h/2)k_{L1} - \sin((k_{T1}+k_{L1})h/2)k_{T1}}{(k_{T1}-k_{L1})(k_{T1}+k_{L1})} \quad (D.5)$$

Elles conduisent aux formes analytiques de la puissance d'un mode de Lamb M (propagatif, non propagatif ou atténué) symétrique :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{-h}^h (\mathbf{v}_{-M} \cdot \bar{\bar{\sigma}}_M - \mathbf{v}_M \cdot \bar{\bar{\sigma}}_{-M}) \mathbf{x}_2 dx_1 = \omega. \\ & (\\ & (C_{66}(P_{L1}P_{L2}k_{L1} + P_{L1}^2k_2) - C_{11}P_{L2}^2k_2 - C_{12}P_{L1}P_{L2}k_{L1}) \frac{\sin(k_{L1}h)}{k_{L1}} \\ & + A_T^2(C_{66}(P_{T1}P_{T2}k_{T1} + P_{T1}^2k_2) - C_{11}P_{T2}^2k_2 - C_{12}P_{T1}P_{T2}k_{T1}) \frac{\sin(k_{T1}h)}{k_{T1}} \\ & - h * (C_{11}P_{L2}^2k_2 + C_{12}P_{L1}P_{L2}k_{L1} + C_{66}(P_{L1}P_{L2}k_{L1} + P_{L1}^2k_2) + \\ & A_T^2(C_{11}P_{T2}^2k_2 + C_{12}P_{T1}P_{T2}k_{T1} + C_{66}(P_{T1}P_{T2}k_{T1} + P_{T1}^2k_2))) \\ & - (2 C_{11}P_{L2}P_{T2}k_2 + C_{12}(P_{L2}P_{T1}k_{T1} + P_{L1}P_{T2}k_{L1}) + \\ & C_{66}(P_{L1}P_{T2}k_{T1} + P_{L2}P_{T1}k_{L1} + 2P_{L1}P_{T1}k_2)) * 2A_T \frac{\sin((k_{T1}-k_{L1})h/2)}{(k_{T1}-k_{L1})} \\ & - (2C_{11}P_{L2}P_{T2}k_2 + C_{12}(P_{L2}P_{T1}k_{T1} + P_{L1}P_{T2}k_{L1}) - \\ & C_{66}(P_{L1}P_{T2}k_{T1} + P_{L2}P_{T1}k_{L1} + 2P_{L1}P_{T1}k_2)) * 2A_T \frac{\sin((k_{L1}+k_{T1})h/2)}{(k_{T1}+k_{L1})} \\ &), \end{aligned} \quad (D.6)$$

ou antisymétrique :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \int_h (\mathbf{v}_{-M} \cdot \bar{\bar{\sigma}}_M - \mathbf{v}_M \cdot \bar{\bar{\sigma}}_{-M}) \mathbf{x}_2 dx_1 = \omega. \\
 & (\\
 & (C_{11}P_{L2}^2k_2 + C_{12}P_{L1}P_{L2}k_{L1} - C_{66}(P_{L1}P_{L2}k_{L1} + P_{L1}^2k_2)) \frac{\sin(k_{L1}h)}{k_{L1}} \\
 & + A_T^2(C_{11}P_{T2}^2k_2 + C_{12}P_{T1}P_{T2}k_{T1} - C_{66}(P_{T1}P_{T2}k_{T1} + P_{T1}^2k_2)) \frac{\sin(k_{T1}h)}{k_{T1}} \\
 & - h * (C_{11}P_{L2}^2k_2 + C_{12}P_{L1}P_{L2}k_{L1} + C_{66}(P_{L1}P_{L2}k_{L1} + P_{L1}^2k_2) + \\
 & A_T^2(C_{11}P_{T2}^2k_2 + C_{12}P_{T1}P_{T2}k_{T1} + C_{66}(P_{T1}P_{T2}k_{T1} + P_{T1}^2k_2))) \\
 & - (2 C_{11}P_{L2}P_{T2}k_2 + C_{12}(P_{L2}P_{T1}k_{T1} + P_{L1}P_{T2}k_{L1}) + \\
 & C_{66}(P_{L1}P_{T2}k_{T1} + P_{L2}P_{T1}k_{L1} + 2P_{L1}P_{T1}k_2)) * 2A_T \frac{\sin((k_{T1} - k_{L1})h/2)}{(k_{T1} - k_{L1})} \\
 & + (2C_{11}P_{L2}P_{T2}k_2 + C_{12}(P_{L2}P_{T1}k_{T1} + P_{L1}P_{T2}k_{L1}) - \\
 & C_{66}(P_{L1}P_{T2}k_{T1} + P_{L2}P_{T1}k_{L1} + 2P_{L1}P_{T1}k_2)) * 2A_T \frac{\sin((k_{L1} + k_{T1})h/2)}{(k_{L1} + k_{T1})} \\
 &).
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Rappelons que les expressions ci-dessus ne sont valides que pour les matériaux isotropes. Cependant, le principe d'obtention des formes analytiques de la puissance est aisément transposable à l'étude des matériaux anisotropes. Seules les expressions des polarisations et des nombres d'ondes des ondes de volume sont à modifier.

Annexe E

Comportement numérique de la méthode de décomposition modale

E.1. Influence du nombre de points de discrétisation

La figure E.1 présente les déplacements et les contraintes (de compression dans la direction 2 et de cisaillement) calculés, par la méthode de décomposition modale, à la position de la fissure de hauteur relative égale à 50% lorsque celle-ci est excitée par A_0 au produit fréquence épaisseur de 1,12 MHz.mm. 25 points de discrétisation à travers l'épaisseur de la plaque et respectivement 23 et 22 modes antisymétriques et symétriques ont été nécessaires pour obtenir ces résultats. Le bilan énergétique correspondant est égal à $1,03 \text{ Watt.m}^{-1}$ et permet donc de les retenir comme valides. Il est important de remarquer que les déplacements et les contraintes sont continus dans la zone saine du matériau et que les contraintes peuvent être considérées comme négligeables sur les surfaces de la fissure. La méthode de décomposition modale permet de plus de modéliser, en accord avec la littérature, l'augmentation de contrainte à la jonction de ces faces. Celle-ci s'étend cependant ici sur la partie libre de contrainte et ne correspond donc pas à un phénomène physique. Il semble pourtant que ce résultat ne soit pas un problème fondamental pour la méthode de décomposition modale puisque les coefficients de diffraction et les champs de déplacement calculés sont en très bon accord avec les différents résultats issus des procédés de validation présentés dans le chapitre III.

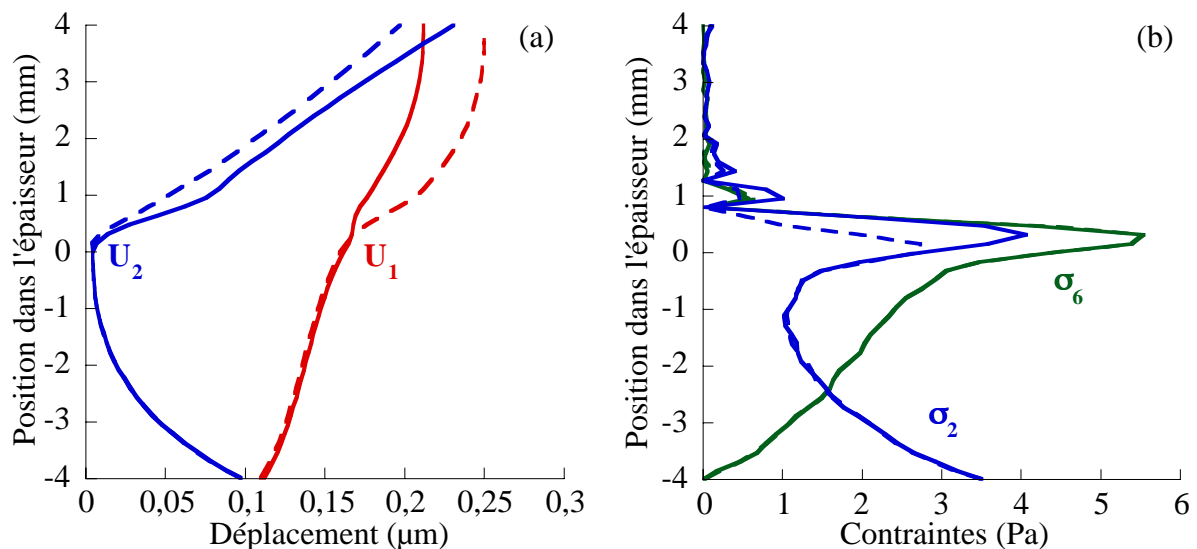


figure E.1 : (a) Déplacements et (b) contraintes de compression dans la direction 2 et de cisaillement lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz.mm}$, sur une fissure débouchante de hauteur relative égale à $p/h=50 \%$. 25 points de discrétisation à travers l'épaisseur de la plaque et respectivement 23 et 22 modes antisymétriques et symétriques.

La figure E.2 présente les résultats issus d'une modélisation similaire lorsque cette fois-ci, seulement 12 points de discrétisation ont été considérés à travers l'épaisseur de la plaque. Le bilan énergétique est alors égal à $0,76 \text{ Watt.m}^{-1}$ (soit 24% d'erreur) et permet donc de rejeter ces résultats. Il est de plus important de remarquer que les déplacements et les

contraintes ne sont plus continus en dehors de la fissure et que les composantes 2 et 6 de la contrainte ne sont plus négligeables sur ses faces.

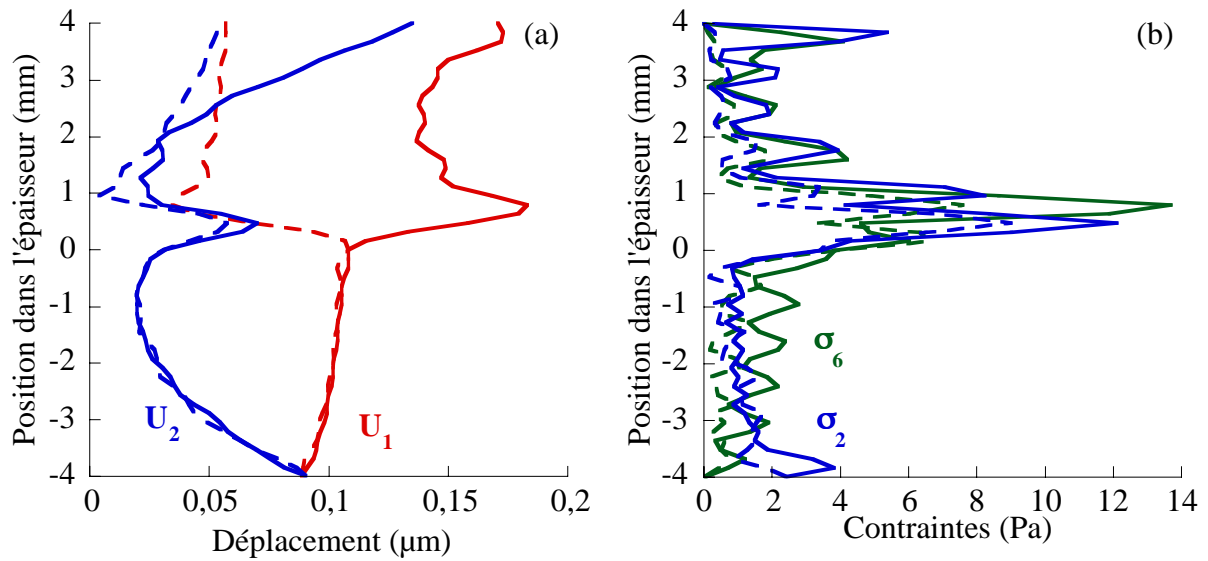


figure E.2 : (a) Déplacements et (b) contraintes de compression dans la direction 2 et de cisaillement lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, sur une fissure débouchante de hauteur relative égale à $p/h=50 \%$. 12 points de discrétisation à travers l'épaisseur de la plaque et respectivement 23 et 22 modes antisymétriques et symétriques..

La figure E.3 présente les résultats issus d'une modélisation similaire lorsque cette fois-ci, 45 points de discrétisation ont été considérés à travers l'épaisseur de la plaque. Le bilan énergétique est alors égal à $0,91 \text{ Watt}\cdot\text{m}^{-1}$ (soit 9% d'erreur) et permet donc de rejeter ces résultats. Comme précédemment, les déplacements et les contraintes ne sont plus continus en dehors des faces de la fissure et les composantes 2 et 6 de la contrainte ne sont plus négligeables sur celles-ci.

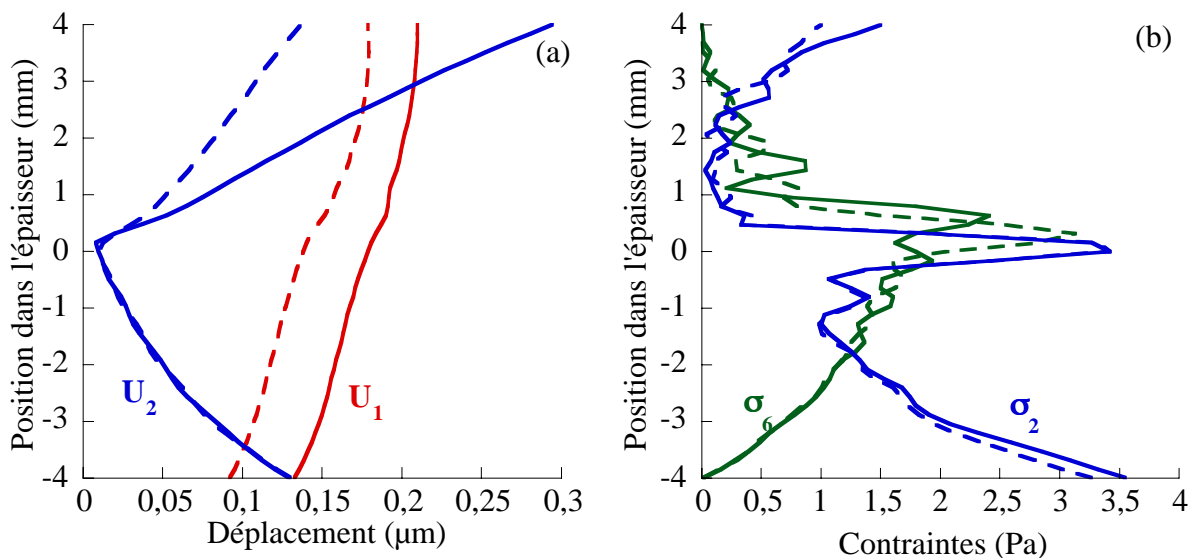


figure E.3 : (a) Déplacements et (b) contraintes de compression dans la direction 2 et de cisaillement lorsque A_0 est incident, au produit $fh=1,12 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$, sur une fissure débouchante de hauteur relative égale à $p/h=50 \%$. 45 points de discrétisation à travers l'épaisseur de la plaque et respectivement 23 et 22 modes antisymétriques et symétriques..

E.2. Influence de la précision des nombres d'ondes

Le paragraphe suivant illustre l'influence de la précision des nombres d'ondes sur les résultats de la méthode de décomposition modale.

Une erreur de 10 % sur l'ensemble des nombres d'ondes solutions des équations de dispersion a été introduite volontairement avant l'écriture et la résolution du système correspondant aux conditions aux limites à la position d'une fissure débouchante simple de hauteur relative $p/h=50\%$ (voir figure E.1). L'erreur résultante sur les coefficients de diffraction des modes A_0 et S_0 varie entre 6,5 % (pour le coefficient de transmission de A_0) et 17 % (pour le coefficient de réflexion de S_0). De plus, l'erreur entre les champs de déplacement issus des deux modélisations (sans et avec les erreurs sur les nombres d'ondes) peut aller jusqu'à 27 %.

Au cours de la mise en œuvre de la méthode de décomposition modale, les racines des équations de dispersion ont donc été recherchées avec une précision maximale, soit 16 décimales. Cette précision semble suffisante pour assurer une bonne précision aux calculs.

Bibliographie

- [1] A. K. Mal, "Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack," *Int. J. Engng Sci.* **8**, 381-388 (1970).
- [2] P. Calmon, A. Lhemery, I. Lecoœur-Taïbi *et al.*, "Models for the computation of ultrasonic fields and their interaction with defects in realistic NDT configurations," *Nuclear Engineering and Design* **180**, 271-283 (1998).
- [3] L. Goglio et M. Rossetto, "Ultrasonic testing of adhesive bonds of thin metal sheets," *NDT&E International* **32**, 323-331 (1999).
- [4] Huy Dong Bui, Andrei Constantinescu, et Hubert Maignre, "Diffraction acoustique inverse de fissure plane : solution explicite pour un solide borné," *C. R. Acad. Sci. Paris* **327** (Série II b), 971-976 (1999).
- [5] K. Imielinska, M. Castaings, J. Haras, E. Le Clézio, B. Hosten, "Impact damage development in carbon fibre reinforced composites by means of air-coupled ultrasonic C-scans and X-radiography," présenté à *Achievements in mechanical and materials engineering*, 2000.
- [6] A. S. Eriksson, J. Mattsson, et A. J. Niklasson, "Modelling of ultrasonic crack detection in anisotropic materials," *NDT&E International* **33**, 441-451 (2000).
- [7] B. Chassignole, D. Villard, G. Nguyen Van Chi *et al.*, "Ultrasonic propagation in austenitic stainless steel welds. Approximate model and numerical methods and comparison with experiments," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **19.A**, 153-160 (2000).
- [8] Lord Rayleigh, "On the Free Vibrations of an Infinite Plate of Homogeneous Isotropic Matter," *Proc. Roy Soc.*, 224-234 (1889).
- [9] A. J. Testa et C. P. Burger, "Rayleigh spectroscopy for characterizing surface cracks," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **1**, 557-564 (1982).
- [10] S. W. Liu, S. K. Datta, et T. H. Ju, "Transient scattering of Rayleigh-Lamb waves by a surface-breaking crack : a comparison of numerical simulation and experiment," *Journal of Nondestructive Evaluation* **10** (3), 111-126 (1991).
- [11] L. Buttin, A. Lhémy, et P. Calmon, "A model for predicting effects of surface wave propagation on the echo response from planar cracks," *Ultrasonics* **36**, 133-140 (1998).
- [12] C. Pecorari, "Scattering of a Rayleigh wave by a surface-breaking crack with faces in partial contact," *Wave Motion* **33**, 259-270 (2001).
- [13] D. A. Cook et Y. H. Berthelot, "Detection of small surface-breaking fatigue cracks in steel using scattering of Rayleigh waves," *NDT&E International* **34**, 483-492 (2001).

- [14] S. K. Datta, C. M. Fortunko, et R. B. King, "Sizing of surface cracks in a plate using SH waves," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **1**, 227-231 (1982).
- [15] John J. Ditri, "Some results on the scattering of guided elastic SH waves from material and geometric waveguide discontinuities," *J. Acoust. Soc. Am.* **100** (5), 3078-3087 (1996).
- [16] F. Beaumont, M. Garajeu, et A. Wirgin, "Scattering of SH-waves by a discontinuity in the material properties and/or by a crack in an infinite plate," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **18**, 63-70 (1999).
- [17] F. Beaumont, "Prédiction du mouvement 2D d'une plaque épaisse fissurée et caractérisation de la fissure par inversion de la réponse à une sollicitation périodique," Thèse de l'Université Aix-Marseille II, juin 2000.
- [18] P. Wilcox, M. Lowe, et P. Cawley, "Lamb and SH wave transducer arrays for the inspection of large areas of thick plates," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **19.A**, 1049-1056 (2000).
- [19] J. L. Rose, John J. Ditri, A. Pilarski *et al.*, "A guided wave inspection technique for nuclear steam generator tubing," *NDT&E International* **27** (6), 307-310 (1994).
- [20] J.L. Rose, S.P. Pelts, et J.L. Li, "Defect characterization using SH guided waves," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **20** (A), 142-148 (2000).
- [21] K. S. Tan, N. Guo, B.S. Wong *et al.*, "Comparison of Lamb waves and pulse echo in detection of near-surface defects in laminate plates," *NDT&E International* **28** (4), 215-223 (1985).
- [22] John J. Ditri, J. L. Rose, et G. Chen, "Mode selection criteria for defect detection optimization using Lamb waves," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **11**, 2109-2115 (1992).
- [23] K. Maslov et T. Kundu, "Selection of Lamb modes for detecting internal defects in composite laminates," *Ultrasonics* **35**, 141-150 (1997).
- [24] V. Dayal et V. K. Kinra, "Lamb waves in an anisotropic plate. II. Nondestructive evaluation of matrix cracks in fiber-reinforced composites," *J. Acoust. Soc. Am.* **89** (1), 1590-1598 (1991).
- [25] D. Alleyne et P. Cawley, "Optimization of Lamb wave inspection techniques," *NDT&E International* **25** (1), 11-22 (1992).
- [26] N. Guo et P. Cawley, "Lamb wave reflection for the quick Nondestructive Evaluation of large composite laminates," *Material Evaluation* , 401-411 (1994).

- [27] M. Castaings et P. Cawley, "The generation, propagation, and detection of Lamb waves in plates using air-coupled ultrasonic transducers," *J. Acoust. Soc. Am.* **100** (5), 3070-3077 (1996).
- [28] D. Alleyne, P. Cawley, A. M. Lank *et al.*, "The Lamb wave inspection of chemical plant pipework," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **16**, 1269-1276 (1997).
- [29] M. Lowe, D. Alleyne, and P. Calley, "Mode conversion of guided waves by defects in pipes," *Review of Progress in Quantitative NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **16**, 1261-1276 (1997).
- [30] T. Ghosh, T. Kundu, et P. Karpur, "Efficient use of Lamb modes for detecting defects in large plates," *Ultrasonics* **36**, 791-801 (1998).
- [31] W. Yang et T. Kundu, "Guided waves in multilayered anisotropic plates and its use in internal defect detection," *ASCE J. of Eng. Mechanics* **124**, 311-318 (1998).
- [32] M. D. Gilchrist, "Attenuation of ultrasonic Rayleigh-Lamb waves by small horizontal defects in thin aluminium plates," *International journal of Mechanical Sciences* **41**, 581-594 (1999).
- [33] C. Eisenhardt, L. J. Jacobs, et J. Qu, "Experimental Lamb wave spectra of cracked plates," *AIP Conference Proceedings* **509.A**, 343-349 (2000).
- [34] N. Bourasseau, E. Moulin, C. Delebarre *et al.*, "Radome health monitoring with Lamb waves: experimental approach," *NDT&E International* **33** (6), 393-400 (2000).
- [35] E. Le Clézio, M. Castaings, and B. Hosten, "Modélisation de l'interaction des ondes de Lamb avec des défauts dans les tôles d'acier," *Rapport d'activité final LMP-Sollac/Irsid* (1999).
- [36] E. A. G. Shaw, "On the resonant vibrations of thick barium tittanate disks," *J. Acoust. Soc. Am.* **28** (1), 38-50 (1956).
- [37] Jack Oliver, "Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band short-duration pulse technique," *J. Acoust. Soc. Am.* **29** (2), 189-194 (1957).
- [38] D.C. Gazis et R. D. Mindlin, "Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semi-infinite plate," *Journal of Applied Mechanics* **27**, 541-547 (1960).
- [39] P. J. Torvik, "Reflection of wave train in semi-infinite plates," *J. Acoust. Soc. Am.* **41** (2), 346-353 (1967).
- [40] Mihai Valentin Predoi et Martine Rousseau, "Réflexion et transmission d'un mode de Lamb au niveau d'une soudure entre deux plaques," *Actes du 5e Congrès Français d'Acoustique*, 173-176 (2000).
- [41] V. Predoi, "Contribution au contrôle non destructif par ultrasons de structures planes

- soudées. Aspects théoriques et expérimentaux,” Thèse de doctorat, Université Paris 6, février 1998.
- [42] B. A. Auld et E. M. Tsao, “A variational analysis of edge resonance in a semi-infinite plate,” *IEEE Transactions on sonics and ultrasonics* **24** (5), 317-326 (1977).
- [43] R. D. Gregory et I. Gladwell, “The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate,” *Journal of Elasticity* **13**, 185-206 (1983).
- [44] W. Karunasena, A. H. Shah, et S. K. Datta, “Reflection of plain strain waves at the free edge of a laminated composite plate,” *Int. J. Solids Structures* **27** (8), 949-964 (1991).
- [45] Younho Cho et J. L. Rose, “A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves,” *J. Acoust. Soc. Am.* **99** (4), 2097-2109 (1996).
- [46] M. Lowe et O. Diligent, “Reflection of the fundamental Lamb modes from the ends of plates,” *Review of Progress in Quantitive NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **20**, 89-96 (2001).
- [47] W. Karunasena, K. M. Liew, et S. Kitipornchai, “Reflection of plate waves at the fixed edge of a composite plate,” *J. Acoust. Soc. Am.* **98** (1), 644-651 (1995).
- [48] M. Ech-Cherif El-Kettani, P. Pareige, et F. Luppé, “Conversion de modes de Lamb à l'extrémité d'une plaque immergée,” *Journal de Physique IV* **4**, 873-876 (1994).
- [49] N. Guo et P. Cawley, “The interaction of Lamb waves with delaminations in composite laminates,” *J. Acoust. Soc. Am.* **94** (4), 2240-2245 (1993).
- [50] M. Lowe, “Characteristics of the reflection of Lamb waves from defects in plates and pipes,” *Review of Progress in Quantitive NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **17**, 113-120 (1998).
- [51] M. Lowe, P. Cawley, J.-Y. Kao *et al.*, “Prediction and measurement of the reflection of the fundamental anti-symmetric Lamb wave from cracks and notches,” *Review of Progress in Quantitive NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York, 193-200 (2000).
- [52] J. L. Rose, W. Zhu, et Y. cho, “Boundary element modelling for guided wave reflection and transmission factor analyses in defect classification,” *Proc. IEEE Ultrason. Symp.* **1**, 885-888 (1998).
- [53] S. K. Datta, Y. Al Nassar, et A. H. Shah, “Lamb wave scattering by a surface-breaking crack in a plate,” *Review of Progress in Quantitive NDE*, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **10** (A), 97-104 (1991).
- [54] W. M. Karunasena, K. M. Liew, et S. Kitipornchain, “Hybrid analysis of Lamb wave reflection by a crack at the fixed edge of a composite plate,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **125**, 221-233 (1995).

- [55] L. Wang et J. Shen, "Scattering of elastic waves by a crack in a isotropic plate," *Ultrasonics* **35**, 451-457 (1997).
- [56] Z. Chang et A. Mal, "Scattering of Lamb waves from a rivet hole with edge cracks," *Mechanics of Materials* **31**, 197-204 (1999).
- [57] F. Beaumont and A. Wirgin, "Determination of the size and location of a discontinuity in a waveguide by inversion of measured scattered wavfields," *C. R. Acad. Sci., Paris* **328** (II b), 367-372 (2000).
- [58] Younho Cho et J. L. Rose, "An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic guided wave interactions with a surface breaking defect," *International Journal of Solids and Structures* **37**, 4103-4124 (2000).
- [59] D. Alleyne et P. Cawley, "The Interaction of Lamb Waves with Defect," *IEEE Trans Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency control* **39**, 381-397 (1992).
- [60] D. Alleyne, M. Lowe, et P. Cawley, "The reflection of guided waves from circumferential notches in pipes," *Journal of Applied Mechanics* **65**, 635-641 (1998).
- [61] M. Lowe, D. Alleyne, et P. Cawley, "The mode conversion of a guided wave by a part-circumferential notch in a pipe," *Journal of Applied Mechanics* **65**, 649-656 (1998).
- [62] J. D. Eshelby, "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems," *Proceedings of the Royal Society* **241** (25), 376-396 (1957).
- [63] B. A. Auld et M. Tan, "Symmetrical Lamb wave scattering at a symmetrical pair of thin slots," *Ultrasonics Symp. Proc.* , 61-66 (1977).
- [64] M. Tan et B. A. Auld, "Normal mode variational method for two- and three-dimensional acoustic scattering in a isotropic plate," *Ultrasonics Symp. Proc.* , 857-861 (1980).
- [65] B. A. Auld, *Acoustic fields and waves in solids, Vol. 2* (R. E Krieger Publ. Cie, Malabar, Florida, 1990).
- [66] John J. Ditri, "Utilization of guided elastic waves for the characterization of circumferential cracks in hollow cylinders," *J. Acoust. Soc. Am.* **96** (6), 3769-3775 (1994).
- [67] S. Rokhlin, "Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer," *J. Acoust. Soc. Am.* **67** (4), 1157-1165 (1980).
- [68] S. Rokhlin, "Resonance phenomena of Lamb waves scattering by a finite crack in a solid layer," *J. Acoust. Soc. Am.* **69** (4), 922-928 (1981).
- [69] R. D. Gregory et I. Gladwell, "The generation of waves in a semi-infinite plate by a

- smooth oscillating piston,” *Journal of Applied Mechanics* **51**, 787-791 (1984).
- [70] R. Bries, O. Leroy, et G.N. Shkerdin, “Conversion of a Stoneley wave at the extremity of a fluid loaded plate,” *J. Acoust. Soc. Am.* **101** (3), 1347-1357 (1997).
- [71] R. Bries, O. Leroy, et G.N. Shkerdin, “Mode theory as a framework for the investigation of the generation of a Stoneley wave at a liquid-solid interface,” *J. Acoust. Soc. Am.* **95** (4), 1953-1966 (1994).
- [72] X. M. Wang, C. F. Ying, et M. X. Li, “Scattering of antiplane shear waves by a circular cylinder in a traction free plate,” *J. Acoust. Soc. Am.* **108** (3), 913-923 (2000).
- [73] E. Le Clézio, M. Castaings, et B. Hosten, “Réflexion d'ondes de Lamb à l'extrémité de plaque : solution analytique et mesures,” *Actes du 5e Congrès Français d'Acoustique*, 177-180 (2000).
- [74] Emmanuel Le Clézio, Mihai Valentin Predoi, Michel Castaings *et al.*, “Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode,” soumis à *Ultrasonics* (2001).
- [75] E. Le Clézio, M. Castaings, et B. Hosten, “The interaction of the S0 Lamb mode with vertical cracks in an aluminium plate,” *Actes du Congrès UI 2001 (Delft (Holland))* (2001).
- [76] M. Castaings, E. LeClezio, and B. Hosten, “Modal decomposition method for modelling the interaction of Lamb waves with cracks,” soumis à publication au *J. Acoust. Soc. Am.* .
- [77] E. Dieulesaint et D. Royer, *Ondes élastiques dans les solides* (Masson et Cie., 1974).
- [78] Horace Lamb, “On the flexure of an elastic plate,” *Proceedings of the London Mathematical Society* **21**, 70-90 (1889).
- [79] Horace Lamb, “On waves in an elastic plate,” *Proc. Roy. Soc. of London A* **93**, 114-128 (1917).
- [80] J. D. Achenbach, *Wave propagation in elastic solids* (North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1973).
- [81] B. A. Auld, *Acoustic fields and waves in solids, Vol. 1* (R. E Krieger Publ. Cie, Malabar, Florida, 1990).
- [82] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling *et al.*, *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. (1997).
- [83] P. R. Brazier-Smith et J.F.M. Scott, “On the determination of the roots of dispersion equations by use of winding number integrals,” *Journal of Sound and Vibration* **145** (3), 503-510 (1991).

- [84] M. Onoe, "Contour vibrations of thin rectangular plates," J. Acoust. Soc. Am. **30** (12), 1159-1162 (1958).
- [85] R. D. Mindlin, "Mathematical theory of vibrations of elastic plates," Proc. Ann. Symp. Frequency Control, 11th U.S. Army Signal Eng. Labs , 1-40 (1958).
- [86] R. D. Mindlin, "Waves and vibrations in isotropic, elastic plates," Proc. Symp. Naval Structural Mech. **1**, 199-232 (1960).
- [87] L.G. Merkulov, S. I. Rokhlin, et O. P. zobnin, "Calculation of the spectrum of wave numbers from Lamb waves in a plate," Soviet Journal of non destructive testing , 369-373 (1970).
- [88] Julius Miklowitz, *The theory of elastic waves and waveguides*, 2nd ed. (North-Holland Publishing Company, 1980).
- [89] T. R. Meeker et A. H. Meitzler, "Guided wave propagation," in *Physical Acoustics - Principles and Methods*, edited by Warren P. Mason (Academic Press, New York & London, 1964), Vol. I - Part A, pp. 121-129.
- [90] J. Zemanek, "An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder," J. Acoust. Soc. Am. **51**, 265-283 (1972).
- [91] S. Rokhlin, D. E. Chimenti, et A. H. Nayfeh, "On the topology of the complex wave spectrum in a fluid-coupled elastic layer," J. Acoust. Soc. Am. **85** (3), 1074-1080 (1989).
- [92] I. A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves - Physical theory and applications* (Plenum Press, New York, 1967).
- [93] B. Pavlakovic, M. Lowe, D. Alleyne *et al.*, "Disperse: a general purpose program for creating dispersion curves," Review of Progress in Quantitive NDE, DO Thompson and DE Chimenti (eds), Plenum Press, New York **16** (A), 185-19 (1997).
- [94] M. Lowe, "Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium," Ph D Thesis, Imperial College, London, 1992.
- [95] Pius Kirrmann, "On the completeness of Lamb Waves," Journal of Elasticity **37**, 39-69 (1995).
- [96] D.Hitchings, *FE77 user manual*. Dpt. Aeronautics, Imperial College int. rep., 1995.
- [97] M. Lowe, R. E. Challis, et C. W. Chan, "The transmission of Lamb waves across adhesively bonded lap joints," J. Acoust. Soc. Am. **107** (3), 1333-1345 (2000).
- [98] M. Castaings, R.S.C. Monkhouse, M.J.S. Lowe *et al.*, "The performance of flexible interdigital PVDF Lamb wave transducers," Acta Acustica **85** (6), 842-849 (1999).
- [99] D. Alleyne et P. Cawley, "A two-dimensional Fourier transform method for the

- measurement of propagating multimode signals,” *J. Acoust. Soc. Am.* **89** (3), 1159-1168 (1991).
- [100] M. Castaings et B. Hosten, “ Air-coupled measurement of plane wave,ultrasonic plate transmission for characterising anisotropic, viscoelastic materials,” *Ultrasonics* **38**, 781-786 (2000).

Diffraction des ondes de Lamb par des fissures verticales

L'interaction des ondes de Lamb avec des fissures verticales dans des plaques est modélisée par une méthode de décomposition modale.

Une première étape de cette analyse concerne la résolution, dans le plan complexe, des équations de dispersion des ondes de Lamb, l'identification et la classification de ces modes propres. Il est ensuite rappelé que ces ondes forment une base complète, celle-ci pouvant être orthonormalisée. La méthode de décomposition modale stipule alors que tout champ acoustique interne à la plaque peut être décomposé sur la base des modes de Lamb. Pour l'appliquer à la modélisation de la diffraction d'une onde, les conditions aux limites au niveau du défaut sont explicitées. Elles conduisent à la mise en forme d'un système linéaire dont la résolution permet de déterminer les coefficients de diffraction complexes des ondes propagatives ainsi que les déplacements en tout point de la plaque.

Deux études principales ont été effectuées : l'interaction d'un mode de Lamb avec le bord libre de la plaque et la diffraction des ondes de Lamb par des fissures verticales. Un dispositif expérimental a été mis au point pour générer et détecter les ondes sans contact, à l'aide de transducteurs à couplage par air ou d'une sonde laser. Le bon accord entre les mesures expérimentales, des résultats numériques issus d'un code d'éléments finis et les prédictions de la méthode de décomposition modale montre que cette méthode peut être un outil performant pour le contrôle non destructif de plaques.

Mots clés

Décomposition modale, ondes de Lamb, ultrasons, diffraction, fissure.

Lamb wave diffraction by vertical cracks

A modal decomposition method is developed to model the interaction of Lamb waves with vertical cracks in plates.

The first step of the analysis deals with the resolution, in the complex space, of the Lamb wave dispersion equations, the identification and the classification of these eigenmodes. It is then reminded that they form a basis that can be orthonormalised. The modal decomposition method then states that any acoustic field inside the plate can be represented as a superposition of Lamb waves. To apply this principle to the study of Lamb wave diffraction, the boundary conditions at the defect are expressed. They lead to a system of linear equations the resolution of which allows the complex diffraction coefficients of the propagative waves or the displacement fields at any location inside the plate to be calculated.

Two main studies have been carried out: the interaction of a Lamb waves with the free edge of a plate and their diffraction by vertical cracks. An experimental setup has been realised to generate and detect waves without contact using air-coupled transducers or a laser probe. The good correlation between experimental data, finite element simulations and the modal decomposition method predictions prove that this method can be an efficient tool for non-destructive testing of plates.

Key words

Modal decomposition, Lamb waves, ultrasonics, scattering, crack.