

N° d'ordre : 3213

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR

par **Anis Rédha HADJ HENNI**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

VIBRATIONS DE STRUCTURES GENEREES PAR MICRO-ONDES PULSEES : APPLICATION A L'EVALUATION NON-DESTRUCTIVE

Soutenue le : 22 septembre 2006

Après avis de :

M. M. LETHIECQ, Professeur
M. Y. H. BERTHELOT, Professeur

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

M. D. PERREUX, Professeur, Université de Franche-Comté
M. Y. H. BERTHELOT, Professeur, Georgia Institute of Technology
M. M. LETHIECQ, Professeur, Université François Rabelais de Tours
M. C. BACON, Professeur, Université Bordeaux 1
M. B. HOSTEN, Directeur de Recherche C.N.R.S., Université Bordeaux 1

**Président
Examineurs**

À mes parents.
Saha.

Ce travail de thèse a été effectué au sein de l'équipe Ultrasons et Matériaux du Laboratoire de Mécanique Physique de l'Université Bordeaux 1.

Je remercie Monsieur D. Desjardins, Professeur à l'Université Bordeaux 1, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Je tiens à remercier Monsieur M. Lethiecq, Professeur à l'Université François Rabelais de Tours, et Monsieur Y. H. Berthelot, Professeur au Georgia Institute of Technology, pour avoir examiné mon travail.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur D. Perreux, Professeur à l'Université de Franche-Comté, pour avoir présidé le jury de soutenance.

Je remercie vivement Monsieur C. Bacon, Professeur à l'Université Bordeaux 1, et Monsieur B. Hosten, Directeur de Recherche au C.N.R.S., pour avoir encadrés ce travail et pour leurs précieux conseils.

Je tiens aussi à remercier Monsieur M. Deschamps, Directeur de Recherche au C.N.R.S., pour les discussions enrichissantes que l'on a eu.

A la grande équipe du Laboratoire de Mécanique Physique, je tiens à adresser mes sincères remerciements pour les trois années passées ensemble. A Olivier, Christophe, Sacha et Michel pour leurs conseils et les débats que l'on a eu, à Christine pour son aide et son savoir faire, à Béatrice, Sandrine et Kathy pour leur assistance et à tous les membres du laboratoire pour leur sympathie.

Merci aux amis pour leur soutien, leur présence et tous les moments que l'on a passé ensemble : les trois mousquetaires du bureau que sont Mathéo, St. Thomas et Loudo, Marion, Jeremy, Cécile, Guillaume, Mihai, Raynald, Jérôme, Stanislav, François, Nicolai, Marie...et tous les autres.

Enfin, merci à toi Nawel pour ta participation active, ton soutien permanent, et ta patience le long de ces trois années de thèse.

Table des matières

I	Introduction générale	I-1
II	Etude et caractérisation des matériaux piézoélectriques par micro-ondes pulsées	II-1
II.1	Introduction	II-3
II.2	Modèle unidimensionnel	II-4
II.2.1	Equations générales de la piézoélectricité	II-4
II.2.2	Equation du mouvement d'un barreau piézoélectrique	II-5
II.2.2.1	Circuit fermé	II-7
II.2.2.2	Circuit ouvert	II-8
II.2.3	Résolution de l'équation différentielle du mouvement par la méthode des vecteurs d'état	II-8
II.3	Dispositif expérimental	II-11
II.4	Modélisation de la température	II-14
II.5	Résultats et discussion	II-16
II.6	Caractérisation des matériaux piézoélectriques	II-19
II.7	Nature de la génération d'ultrasons par micro-ondes	II-23
II.8	Effet de la pyroélectricité sur la génération acoustique	II-27
II.8.1	Le phénomène pyroélectrique	II-27
II.8.1.1	Circuit fermé	II-30
II.8.1.2	Circuit ouvert	II-30
II.8.2	Pyroélectricité et génération acoustique par micro-ondes	II-31
II.9	Conclusions	II-33
II.10	Bibliographie	II-35
III	Vibration dans le plan des plaques elliptiques minces soumises à un rayonnement de micro-ondes pulsées	III-1
III.1	Introduction	III.3
III.2	Modélisation	III.4
III.2.1	Position du problème et équations d'ondes	III.5
III.2.2	Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques	

elliptiques	III.9
III.2.3 Résolution des équations différentielles dans le cas d'une plaque elliptique trouée d'une ellipse homofocale	III-12
III.2.3.1 Formes des potentiels	III-12
III.2.3.2 Conditions aux limites	III-15
III.2.4 Résolution des équations différentielles pour une plaque elliptique pleine	III-17
III.2.5 Discrétisation et résolution du problème	III-19
III.3 Echantillons testés pour la validation des modèles	III-20
III.4 Validation du modèle théorique et résultats expérimentaux	III-22
III.5 Conclusions	III-30
III.6 Bibliographie	III-32
IV Vibration des plaques circulaires minces soumises à un rayonnement de micro-ondes pulsées	IV-1
IV.1 Introduction	IV-3
IV.2 Modélisation	IV-4
IV.2.1 Formulation du problème et équations d'ondes	IV-4
IV.2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques circulaires	IV-6
IV.2.3 Résolution des équations différentielles dans le cas d'un anneau	IV-7
IV.2.3.1 Forme des potentiels	IV-7
IV.2.3.2 Conditions aux limites	IV-8
IV.2.4 Résolution des équations différentielles dans le cas d'un disque	IV-11
IV.2.5 Calcul numérique des fréquences propres	IV-12
IV.3 Echantillons et modélisation par MEF	IV-14
IV.3.1 Echantillons testés	IV-14
IV.3.2 Maillage des disques et MEF	IV-15
IV.4 Problème direct et validation du modèle	IV-15
IV.5 Problèmes inverses	IV-21
IV.5.1 Caractérisation matérielle	IV-21
IV.5.2 Caractérisation géométrique	IV-27
IV.6 Génération acoustique d'un trou circulaire dans une plaque infinie	IV-30
IV.7 Conclusions	IV-34
IV.7 Bibliographie	IV-37

V Etude de l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques des bétons par la technique de génération acoustique par micro-ondes	V-1
V.1 Introduction	V-3
V.2 Génération acoustique dans les bétons et applicabilité de la méthode d'évaluation	V-3
V.3 Echantillons étudiés et mode opératoire	V-5
V.4 Résultats et interprétations	V-8
V.4.1 Béton A	V-8
V.4.2 Béton B	V-11
V.5 Conclusions	V-14
V.6 Bibliographie	V-15
VI Coclusions et perspectives	VI-1
Annexe A : Modélisation par éléments finis de la génération d'ondes dans un solide par une source d'excitation volumique	A-1
A.1 Hypothèses	A-3
A.2 Mise en équation du problème	A-3
A.3 Le formalisme FEMLAB	A-4
A.3.1 Développement du terme $\nabla \cdot (c \nabla u)$	A-5
A.3.2 Développement du terme $\nabla \cdot \gamma$	A-5
A.3.3 Identification du terme au	A-6
A.3.4 Identification du coefficient c	A-6
A.4 Cas particuliers	A-8
A.4.1 Cas 2,5D	A-8
A.4.2 Cas 2D pour un état plan de déformations	A-9
A.4.3 Cas 2D pour un état plan de contraintes	A-10
Annexe B : Allures et comportements des fonctions de Mathieu angulaires et radiales	B-1

I Introduction générale

Le phénomène de conversion de l'énergie électromagnétique portée par les micro-ondes en énergie mécanique (acoustique) est prouvé depuis les travaux de R. M. White, au début des années soixante, sur la génération acoustique à la surface d'une colonne d'eau soumise à des radiations électromagnétiques. Auparavant, avec la généralisation des radars à la sortie de la seconde guerre mondiale, des témoignages d'opérateurs ont fait état de sensations d'audition au voisinage des émetteurs. Après le scepticisme de la communauté scientifique quant au sérieux de ces témoignages (la santé mentale des radaristes a en effet été remise en cause), des essais sur des cobayes humains ont confirmé la sensation d'audition due aux micro-ondes. L'effet Frey, du nom du neurologue américain Allan Frey qui étudia ce phénomène, est découvert [I-1]-[I-2]. Des études psychologiques, physiologiques et comportementales ont été menées sur des êtres humains et des animaux pour expliquer cet effet. La thèse d'une génération par effet thermique a d'abord été écartée en raison de la fréquence élevée des pulsations émises par les radars puis du fait de la faible intensité des radiations micro-ondes [I-3]. Ce n'est qu'au milieu des années soixante-dix que le mécanisme physique à l'origine de l'audition des «clicks» à proximité des radars a été établi. L'absorption des ondes électromagnétiques impulsionnelles par les tissus internes de l'oreille engendre une augmentation brusque de la température qui, bien que très faible, génère l'onde acoustique audible à l'origine des «clicks».

D'un point de vue microscopique, dans un matériau diélectrique (non-conducteur), la composante électrique des ondes électromagnétiques formant les micro-ondes interagit avec la matière en la polarisant. On distingue deux types de polarisation de la matière : la polarisation électronique des atomes et des ions et la polarisation des molécules. Dans le premier cas, les charges positives et négatives se déplacent par rapport à leurs positions d'équilibre en créant un dipôle dans l'atome ou l'ion. Dans le cas de la polarisation moléculaire, si le matériau présente un centre de symétrie (absence de moment dipolaire), l'application d'un champ électrique extérieur provoque d'une part, comme dans les atomes, une polarisation électronique et, d'autre part, une polarisation dite atomique due à la modification de la position des noyaux à l'intérieur de la molécule. Dans le cas d'un matériau présentant un moment dipolaire permanent (cas, par exemple, des molécules d'eau qui ont une polarisation rémanente), le champ électrique extérieur provoque, outre la polarisation électronique et atomique, une orientation, par interaction, des dipôles dans la direction du champ. Cette polarisation est appelée polarisation d'orientation. Ainsi, quand le champ électrique agissant sur la matière change de sens, la polarisation, qu'elle soit de type électronique ou moléculaire, suit l'orientation du champ électrique d'excitation en provoquant la distorsion de la structure microscopique de la matière. A hautes

fréquences, l'alternance rapide des cycles d'excitation engendre de la friction, provoquant ainsi une élévation de la température dans le matériau irradié. La partie de la puissance électromagnétique qui contribue à l'accroissement de la température est dite puissance absorbée. Enfin, la chaleur se transforme par couplage thermoélastique en énergie mécanique se manifestant sous la forme d'une onde acoustique propagative. D'un point de vue macroscopique, la Figure I-1 résume schématiquement les différentes conversions d'énergie, ainsi que les modèles mathématiques qui leur sont associés, lors de la génération acoustique par micro-ondes pulsées dans les matériaux diélectriques.

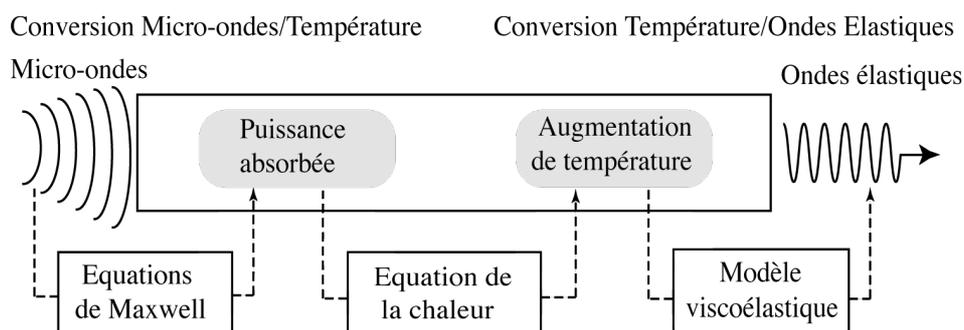


Figure I-1 *Processus de conversion d'énergie lors de la génération acoustique par micro-ondes pulsées dans les matériaux diélectriques*

Les problèmes de génération d'ondes mécaniques et de vibrations dans les structures soumises à une élévation rapide de la température sont étudiés depuis les travaux de M. Lessen [I-4] sur la propagation des ondes thermoélastiques dans les solides, et de B. A. Boley et A. D. Barber [I-5]-[I-7] sur les vibrations en flexion des poutres soumises à des gradients de température. J. E. Michaels [I-8] traita, pour sa part, le cas unidimensionnel en proposant une fonction approchant le profil de température dans le matériau mais qui ne vérifiait pas l'équation de la chaleur. C'est R. M. White [I-9] qui proposa en 1962 une solution satisfaisant l'équation de la chaleur dans le cas des structures unidimensionnelles. Cette résolution fut ensuite détaillée par D. E. Borth et C. A. Cain [I-10] dans le cas de la génération acoustique dans les matériaux irradiés par micro-ondes. Par la suite, la mise en œuvre de la génération acoustique par chauffage rapide des matériaux utilisa principalement la technique de génération par Laser [I-11]-[I-14]. Les études théoriques de la thermoacoustique et les développements qui s'en suivirent se sont donc, pour un grand nombre d'entre eux, imprégnés de la démarche et des contraintes propres à l'utilisation du Laser. Néanmoins, la technique de génération acoustique par micro-ondes, dite M.I.A. (*Microwave Induced Acoustic*), a notamment servi à développer des méthodes d'imagerie médicale des tissus vivants (tomographie, imagerie du cerveau par

génération acoustique) [I-15]-[I-18], à mesurer l'acidité relative du papier [I-19] et à caractériser des solutions aqueuses en chimie [I-20]-[I-21], en se basant, dans chacune des applications, sur le fait que l'absorption des micro-ondes par les milieux irradiés dépendait des propriétés électromagnétiques des composants.

Comparativement à la technique de génération par Laser, les micro-ondes pulsées présentent certaines spécificités. Dans un matériau absorbant les ondes électromagnétiques, la profondeur de pénétration d'un faisceau Laser est généralement faible par rapport à l'épaisseur du matériau irradié et le profil de température associé à cette pénétration peut être considéré comme étant exponentiel. Les ondes ultrasonores ne sont alors générées qu'autour du point d'impact au voisinage de la frontière du matériau. Dans le cas des micro-ondes absorbées par un diélectrique, la profondeur de pénétration est souvent importante et le profil de température associé est linéaire et même, parfois, quasiment uniforme. La génération acoustique par micro-ondes s'effectue donc, en général, de manière volumique. Ce trait caractéristique différencie aussi la technique de génération par micro-ondes des méthodes de génération d'ultrasons par transducteurs hautes fréquences (au contact ou à couplage par air). D'un point de vue acoustique, cette différence est fondamentale car, pour une même structure de taille centimétrique, le phénomène acoustique obtenu par micro-ondes est vibratoire alors qu'il est propagatif quand l'excitation s'effectue au moyen d'un Laser ou d'un transducteur à hautes fréquences. La méthode de génération des vibrations par micro-ondes (*Microwave Induced Vibration*), peut être, par ailleurs, comparée à l'excitation par impact mécanique. Par rapport à cette dernière, la génération par micro-ondes se produit sans contact et permet de forcer la vibration d'une structure à des fréquences choisies afin d'observer les résonances de l'échantillon. De plus, elle offre une reproductibilité expérimentale supérieure à celle obtenue par impact mécanique.

La technique de génération par micro-ondes pulsées est développée au Laboratoire de Mécanique Physique depuis la reproduction prospective des essais expérimentaux portant sur la génération d'ondes acoustiques par micro-ondes dans l'eau, effectués par R. M. White en 1962 [I-9]. Il s'en suivit, par la suite, la modélisation et la validation expérimentale de la génération acoustique dans une barre unidimensionnelle irradiée par micro-ondes pulsées [I-23]. A partir de 1998, le thème de recherche a été poursuivi lors de la thèse d'E. Guilliorit [I-24] qui étudia la génération acoustique dans les structures unidimensionnelles homogènes ou stratifiées. Ce travail a d'abord porté sur l'étude de l'influence du profil de température au sein du milieu absorbant (profils linéaires, exponentiels...) sur la réponse acoustique. Etant donné que les barres unidimensionnelles s'inséraient parfaitement dans les guides d'ondes électromagnétiques utilisés expérimentalement, il a été possible de

modéliser et de valider la conversion de la puissance électromagnétique absorbée par le matériau en énergie thermique. Cette puissance a été calculée à travers les équations de Maxwell en tenant compte de la puissance du générateur de micro-ondes et des propriétés électromagnétiques du milieu absorbant. L'équation de la chaleur a ensuite permis de prédire l'augmentation de température due à la puissance absorbée en fonction des propriétés thermiques du milieu. C'est ici que réside la différence fondamentale avec notre approche. En effet, quand les échantillons sont disposés à l'extérieur du guide d'ondes électromagnétiques, le champ électromagnétique incident devient tridimensionnel et sa modélisation délicate. Dans le présent travail, nous ne nous intéresserons qu'à la partie thermoélastique du processus énergétique global illustré sur la Figure I-1. Cet aspect de la modélisation sera explicité ci-dessous, dans la partie consacrée aux hypothèses de travail.

Comme application de la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées, l'étude des vibrations des barres unidimensionnelles homogènes et multicouches a été réalisée [I-25]-[I-26]. La génération acoustique par micro-ondes dans les matériaux composites stratifiés formés de fibres de carbone moulées dans des matrices de résine époxy, a également fait l'objet d'études qui ont révélé l'importance de l'orientation de la polarisation des ondes électromagnétiques par rapport aux renforts du matériau composite [I-28]-[I-29]. La méthode de génération acoustique par micro-ondes a d'autre part été appliquée à l'évaluation non-destructive des propriétés mécaniques (module de Young complexe) et électromagnétiques (permittivité diélectrique complexe) de matériaux viscoélastiques se présentant sous la forme de barres unidimensionnelles [I-24], [I-29]. Par ailleurs, l'absorption des micro-ondes étant favorisée par la présence d'eau dans les échantillons irradiés, une étude a été menée afin de caractériser l'effet de l'humidité sur la réponse acoustique de barres en bois recomposé en révélant une forte dépendance des propriétés mécaniques et thermoélastiques du matériau vis-à-vis de sa teneur en eau [I-30]. Enfin, dans le but de transférer la technique de génération acoustique par micro-ondes en milieu industriel, une méthode de contrôle non-destructif sans contact de produits alimentaires (des sucettes Chupa Chups[®]) a été mise en oeuvre avec des résultats très concluants. Malheureusement, le transfert technologique n'a pas pu se concrétiser en raison de la fermeture du site de production qui devait accueillir cette technique de contrôle.

Notre étude s'assigne un double objectif. Il s'agit, d'une part, d'étendre le domaine d'application de la génération acoustique par micro-ondes à de nouveaux matériaux, et, d'autre part, de développer de nouvelles méthodes acoustiques d'évaluation non-destructives basées sur la technique d'excitation par micro-ondes pulsées. Dans les

deux cas, le but est de promouvoir cette technique récente au rang des méthodes classiques de contrôle et d'évaluation non-destructifs.

Pour ce faire, nous allierons à la modélisation analytique du comportement vibratoire de structures unidimensionnelles et bidimensionnelles (mouvement de plaques dans leurs plans) une validation expérimentale systématique. Les résolutions des problèmes directs permettront d'effectuer, selon les cas, des études paramétriques ou de proposer des méthodes d'évaluation non-destructives des propriétés mécaniques et géométriques des structures étudiées basée sur leurs réponses vibratoires expérimentales (fréquences propres de vibration, spectres de vitesse...).

Tout au long des développements et des applications qui vont suivre, les matériaux seront supposés être, d'un point de vue mécanique, macroscopiquement homogènes, isotropes et linéairement viscoélastiques. De plus, étant donnée la nature électromagnétique des micro-ondes utilisées pour la génération acoustique, les matériaux considérés seront des diélectriques non-conducteurs permettant la pénétration et l'absorption des ondes électromagnétiques. Par ailleurs, à la lumière de l'objectif assigné plus haut à notre travail, l'effet de l'absorption des radiations électromagnétiques par un matériau ne sera pris en compte que par son aspect thermique à travers un couplage thermoélastique. L'irradiation par micro-ondes pulsées sera donc considérée comme une source de chaleur provoquant, dans le milieu absorbant, une élévation brusque et rapide de la température (dont le modèle sera présenté au chapitre II). Du fait de la durée brève de l'irradiation micro-ondes et de l'uniformité généralement supposée de l'excitation dans les structures étudiées, il sera de plus supposé que la température dans le matériau ne se dissipe pas et qu'il ne se produit aucune conduction thermique. Enfin, étant données les faibles élévations de température, les propriétés mécaniques des matériaux étudiés ne seront pas modifiées au court du temps.

Notre travail s'articulera autour de quatre chapitres. La génération acoustique par micro-ondes dans les matériaux piézoélectriques sera d'abord abordée au chapitre II. La nature physique de la génération acoustique par micro-ondes dans les céramiques piézoélectriques fera l'objet d'une étude afin de déterminer si elle est d'origine électrique, du fait de la composante électrique des ondes électromagnétiques formant les micro-ondes, ou d'origine thermique. Dans ce dernier cas, il s'agira de déterminer si la génération est thermoélastique ou due au phénomène pyroélectrique observé dans les céramiques ferroélectriques qui, soumises à une élévation de la température, font l'objet d'un couplage thermoélectrique. Pour ce faire, un modèle analytique basé sur la méthode des vecteurs d'état sera développé pour la prédiction des réponses vibratoires de barreaux piézoélectriques unidimensionnels simples ou composés. Ce

modèle ainsi que les résultats des mesures expérimentales obtenues par excitation électrique et par micro-ondes permettront de déterminer si la génération est provoquée par des effets piézoélectriques, pyroélectriques ou thermoélastiques, mais également de proposer une méthode d'évaluation des propriétés mécaniques, électriques et électromécaniques des matériaux piézoélectriques basée sur les fréquences propres de vibration des échantillons étudiés.

Les vibrations des plaques minces dans leur plan sous l'effet d'une excitation thermique (due à l'absorption de micro-ondes pulsées) seront étudiées aux troisième et quatrième chapitres pour les cas des plaques elliptiques et circulaires. Au chapitre III, nous commencerons d'abord par une étude prospective des vibrations dans le plan des plaques minces de formes elliptiques qui, d'après notre connaissance, n'ont pas été modélisées analytiquement et dont les vibrations n'ont *a priori* pas été observées expérimentalement. L'équation générale du mouvement sera d'abord établie sous l'hypothèse d'un état plan de contraintes indépendamment du repère considéré. La résolution analytique de cette équation dans un repère cylindrique elliptique, au moyen de séries infinies de produits de fonctions de Mathieu angulaires et radiales, permettra ensuite de mettre en oeuvre un modèle théorique de vibration des plaques minces elliptiques pleines ou trouées. Avant d'être validés expérimentalement, les résultats de ce modèle seront comparés aux solutions du même problème obtenues par la méthode des éléments finis dont le détail de mise en oeuvre est donné à l'annexe A. Cette comparaison servira par ailleurs à valider l'hypothèse d'un état plan de contraintes adoptée pour traiter les vibrations des plaques minces. Enfin, la modélisation mise au point dans ce chapitre servira d'une part à observer l'effet de l'ellipticité sur la réponse vibratoire d'une plaque elliptique pleine et, d'autre part, à étudier au chapitre IV l'influence d'une faible ellipticité sur la vibration des plaques minces pseudo-circulaires.

Le chapitre IV portera sur l'étude des vibrations dans le plan des plaques minces circulaires (pleines ou trouées) dans le but de développer une méthode d'évaluation non-destructive des propriétés mécaniques et géométriques basée sur les réponses vibratoires des plaques circulaires. En se rappelant que, géométriquement, une ellipse converge vers un cercle quand son ellipticité tend vers zéro, les plaques minces circulaires traitées au chapitre IV constituent un cas particulier du cas général des plaques elliptiques étudiées au chapitre III. Toutefois, d'un point de vue calculatoire et numérique, il est plus commode de projeter et de résoudre classiquement l'équation générale du mouvement des plaques minces, posée au chapitre III, dans un repère cylindrique circulaire au moyen de séries infinies de fonctions trigonométriques et de Bessel. La validation du modèle ainsi développé se fera en comparant les résultats des simulations analytiques avec les mesures expérimentales et les résultats obtenus par

la méthode des éléments finis. La résolution complète et précise du problème direct de vibration des plaques minces circulaires permettra ensuite de mettre en oeuvre une méthode simple d'évaluation non-destructive des propriétés mécaniques des matériaux constituant les plaques circulaires. Cette procédure se basera sur les fréquences propres de vibration des plaques ainsi que sur leurs réponses purement radiales obtenues expérimentalement, par la technique de génération acoustique par micro-ondes, et prédites théoriquement par le modèle de vibration des plaques circulaires.

La méthode de caractérisation proposée au chapitre IV servira au cinquième et dernier chapitre à l'étude de l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques des bétons constituant des plaques circulaires. Nous concluons enfin cette étude en mettant en lumière les perspectives de développement possibles de la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées afin d'en faire une méthode d'évaluation et de contrôle non-destructifs des matériaux et des structures.

- [I-1] A. H. Frey. "Human auditory system response to modulated electromagnetic energy." *Journal of Applied Physiology* 17 (4), 689-692 (1962).
- [I-2] A. H. Frey. "Behavioral Biophysics" *Psychological Bulletin* 63(5),322-337 (1965).
- [I-3] C. K. Chou and A. W. Guy, "Auditory perception of radio-frequency electromagnetic fields", *Journal of the Acoustical Society of America* 71, (6), 1321-1334 (1982).
- [I-4] M. Lessen, "Thermoelasticity and thermal shock", *Jour. Mech. Phys. Solids* 5, 57-61 (1956).
- [I-5] B. A. Boley, "The determination of temperature, stresses, and deflections in two-dimensional thermoelastic problems", *Jour. Aeronautical Sciences* 23, 67-75 (1956).
- [I-6] B. A. Boley, "Thermally induced vibrations of beams", *Jour. Aeronautical Sciences* 23, 179-181 (1956).
- [I-7] B. A. Boley and A. D. Barber, "Dynamic response of beams and plates to rapid heating", *Jour. Applied Mechanics, Trans. ASME* 79, 413-416 (1957).
- [I-8] J. E. Michaels, "Thermally induced elastic wave propagation in slender bars", *Proceedings 3rd US National Congress on Applied Mechanics (American Society Mechanical Engineers New York)* 209 (1958).
- [I-9] R. M. White, "Generation of elastic waves by transient surface heating", *Journal of Applied Physics* 34 (12), 3559-3567 (1963).
- [I-10] D. E. Borth and C. A. Cain, "Theoretical analysis of acoustic signal generation in materials irradiated with microwave energy", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-25* (11), 944-954 (1977).
- [I-11] C. Thomsen, H. T. Grahn, H. J. Maris, T. Tauc, "Surface generation and detection of phonons by picosecond light pulses", *Physical Review B* 34 (6), 4129-4138 (1986).
- [I-12] B. Perrin, B. Bonello, J. C. Jeannet and E. Romanet, "Picosecond ultrasonic study of metallic multilayers", *Physica B*, 219&220, 681-683 (1996).
- [I-13] B. Bonello, B. Perrin, E. Romanet and J. C. Jeannet, "Application of the hypersound ultrasonic technique to the study of the elastic and time-resolved thermal properties of materials", *Ultrasonics* 35, 223-231 (1997).
- [I-14] C. Rossignol, J.M. Rampnoux, M. Perton, B. Audoin, and S. Dilhaire, "Generation and detection of shear acoustic waves in metal sub-micrometric films with ultra-short laser pulses", *Physical Review Letters PRL* 94, p. 166106, (2005).

-
- [I-15] J. C. Lin, J. L. Su, Y. Wang, “Microwave-induced thermoelastic pressure wave propagation in the cat brain ” *Bioelectromagnetics*, 9 (2) , 141-147 (1988).
- [I-16] L. V. Wang, X. Zhao, H. Sun and G. Ku, “Microwave-induced acoustic imaging of biological tissues”, *Review of Scientific Instruments* 70 (9), 3744-3748 (1999).
- [I-17] R. A. Kruger, K. K. Kopecky, A. M. Aisen, D.R. Reinecke, G.A. Kruger and W.L. Kiser, “Thermoacoustic CT with radio waves: a medical imaging paradigm”. *Radiology* 211, 275-278 (1999).
- [I-18] R. A. Kruger, D. R. Reinecke and G. A. Kruger, “Thermoacoustic computed tomography”, *Medical Physics* 26 (9), 1832-1837 (1999).
- [I-19] R.S. Pemberton, M. C. Depew and J.K.S. Wan, “A microwave-induced acoustic technique for the monitoring of relative paper acidity: the protective effect of lignin”, *Instrumentation Science and Technology* 24 (3), 219 (1996).
- [I-20] J. K. S. Wan, H. Sauren, J. C. Wren and R.S. Pemberton, “Microwave induced phenomenon : a potential analytical sensor for ionic conducting materials in aqueous and organic media”, *Spec. Lett.* 26 (7), 1231-1240 (1993).
- [I-21] D. H. Jackson, J. Sharp and E. M. Johnston, “A simple microwave induced acoustic liquid analysis system”, *Journal of microwave Power and Electromagnetic Energy* 32 (3), 155-160 (1997).
- [I-22] B. Hosten and P. A. Bernard, “Ultrasonic wave generation by time gated microwaves”, *J. Acoust. Soc. Am.* 70, 1577-1585 (1998).
- [I-23] C. Bacon, B. Hosten and P. A. Bernard, “Acoustic wav generation in viscoelastic rods by time-gated micowaves”, *J. Acoust. Soc. Am.* 106, 195-201 (1999).
- [I-24] E. Guillorrit, “Génération d’ondes acoustiques par micro-ondes impulsionnelles”, *Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1* (2001).
- [I-25] C. Bacon, E. Guillorrit, B. Hosten and D. Chimenti, “Acoustic waves generated by pulsed microwaves in viscoelastic rods: modeling and experimental verification”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 110, No. 3, pp. 1398-1407 (2001).
- [I-26] C. Bacon, B. Hosten and E. Guillorrit, “One dimensional prediction of the acoustic waves generated in a multilayer viscoelastic body by microwave irradiation”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 238, No. 5, pp. 853-867 (2000).
- [I-27] E. Guillorrit, C. Bacon and B. Hosten, “Prediction of the Generation of Acoustic Waves due to the Penetration of Pulsed Microwaves in Multilayer Media”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 112, No. 1, pp. 65-74 (2002).

[I-28] E. Guillorit, B. Hosten, C. Bacon and D. E. Chimenti, “Microwave excitation of ultrasound in graphite-fiber reinforced composite plates”, *Ultrasonics*, Vol. 41, pp. 97-103 (2003).

[I-29] B. Hosten, C. Bacon, “Measurement of complex Young moduli of composite materials by time gated microwaves”, *Rev. of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Plenum Press, New York, Vol.19, No. 1, pp. 1113-1120 (2000).

[I-30] C. Bacon, E. Guillorit and B. Hosten, “An acoustic-microwave method for the study of the mechanical influence of moisture content in materials”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, pp. 268-274 (2003).

II Etude et caractérisation des matériaux piézoélectriques par micro-ondes pulsées

Résumé

Ce chapitre porte sur l'étude de la génération acoustique par micro-ondes pulsées dans les matériaux piézoélectriques. L'excitation des barreaux piézoélectriques électriquement ou par des radiations micro-ondes fait apparaître des fréquences de résonance différentes qui dépendent des conditions électriques aux limites. En «circuit ouvert», les matériaux piézoélectriques subissent un phénomène de rigidification (augmentation du module de Young apparent) causant ainsi la modification de leurs fréquences de résonance par rapport à celles qui sont obtenues en «circuit fermé». Un modèle unidimensionnel pour la prédiction de la réponse dynamique d'un barreau piézoélectrique excité par une source et sous des conditions électriques quelconques est développé et comparé aux résultats expérimentaux. Ce modèle est utilisé dans le cadre d'une méthode d'évaluation non-destructive des propriétés mécaniques, électriques et électromécaniques d'échantillons piézoélectriques et pour montrer l'origine thermoélastique de la génération acoustique dans les céramiques piézoélectriques excitées par des micro-ondes pulsées.

II.1 Introduction	II-3
II.2 Modèle unidimensionnel	II-4
II.2.1 Equations générales de la piézoélectricité	II-4
II.2.2 Equation du mouvement d'un barreau piézoélectrique	II-5
II.2.2.1 Circuit fermé	II-7
II.2.2.2 Circuit ouvert	II-8
II.2.3 Résolution de l'équation différentielle du mouvement par la méthode des vecteurs d'état	II-8
II.3 Dispositif expérimental	II-11
II.4 Modélisation de la température	II-14
II.5 Résultats et discussion	II-16
II.6 Caractérisation des matériaux piézoélectriques	II-19
II.7 Nature de la génération d'ultrasons par micro-ondes	II-23
II.8 Effet de la pyroélectricité sur la génération acoustique	II-27
II.8.1 Le phénomène pyroélectrique	II-27
II.8.1.1 Circuit fermé	II-30
II.8.1.2 Circuit ouvert	II-30
II.8.2 Pyroélectricité et génération acoustique par micro-ondes	II-31
II.9 Conclusions	II-33
II.10 Bibliographie	II-35

II.1 Introduction

Les matériaux piézoélectriques sont largement utilisés dans des applications aussi diverses que l'industrie automobile, l'aéronautique, l'imagerie et le traitement médical, la génération d'ultrasons, etc. Par ailleurs, ces matériaux occupent une place prépondérante dans les techniques du contrôle non-destructif des matériaux et des structures mécaniques par ultrasons. Aujourd'hui, l'évolution des techniques de CND par ultrasons laisse envisager l'excitation à distance de générateurs piézoélectriques incorporés dans les structures à contrôler ou à inspecter.

La génération acoustique et la vibration des matériaux piézoélectriques excités électriquement ont été intensément étudiées par le passé [II-1]-[II-4]. Dans la première partie de ce chapitre, nous nous proposons d'étudier théoriquement et expérimentalement la génération acoustique dans les matériaux piézoélectriques soumis à des radiations micro-ondes pulsées. La présente étude a été amorcée par l'observation de différences entre les fréquences propres d'un même barreau piézoélectrique selon qu'il soit excité par micro-ondes ou électriquement. Afin de quantifier cette variation, et tenant compte des conditions aux limites électriques et mécaniques, un modèle de vibration unidimensionnel sera développé à partir des équations classiques de la piézoélectricité en utilisant la méthode des vecteurs d'état. Le montage expérimental utilisé, dans le cadre de notre travail, pour l'excitation des structures en général, et des matériaux piézoélectriques en particulier, sera ensuite présenté. Ce montage servira à valider la modélisation en comparant les spectres de vitesse expérimentaux aux spectres prédits par le modèle théorique dans le cas de barreaux cylindriques constitués de céramiques piézoélectriques PZT (Titanio-Zirconiate de Plomb). Le couplage du dispositif expérimental avec le modèle théorique permettra, par ailleurs, de caractériser une céramique piézoélectrique de propriétés, *a priori*, inconnues.

La dernière partie du chapitre sera consacrée à la détermination de l'origine physique de la génération acoustique dans les matériaux piézoélectriques excités par micro-ondes. En effet, du fait de la composante électrique des ondes électromagnétiques qui composent les micro-ondes, il est possible de soupçonner une génération électrique dans les matériaux piézoélectriques irradiés par micro-ondes. Cependant, la génération acoustique peut aussi être provoquée par une dilatation thermique due à l'échauffement du matériau du fait de l'absorption des ondes électromagnétiques. On parlera alors de génération thermoélastique. Il est bien connu que la génération acoustique dans les matériaux piézoélectriques par excitation électrique est directement liée à l'orientation de la polarisation du matériau par rapport à

l'orientation du champ électrique d'excitation. Expérimentalement, pour une même orientation du champ électrique, cette dépendance se manifeste par un changement du sens de déplacement initial (à l'instant $t=0$) en fonction de l'orientation de la polarisation matérielle par rapport à l'orientation du champ. Ceci ne serait pas le cas pour une génération purement thermoélastique pour laquelle le sens de déplacement initial ne dépendrait pas de la polarisation de l'éprouvette. Ce comportement est parfaitement observable sur le signal temporel d'une vibration causée par une excitation électrique. Il n'en est pas de même dans le cas d'une excitation par micro-ondes. En effet, le bruit d'émission électromagnétique présent dans le signal temporel de la vibration ne permet pas de visualiser la direction de déplacement initial du point de mesure. Ce test ne permettant pas de déterminer la nature de la génération acoustique par micro-ondes dans les matériaux piézoélectriques, il a été nécessaire d'imaginer une expérience comparative dont le résultat dépend directement et clairement de la nature physique de la génération acoustique. Nous nous baserons donc sur le modèle théorique, développé au début de ce chapitre, et les montages expérimentaux (électrique et «micro-ondes») afin de démontrer que la génération est thermique. Dans ce dernier cas, étant donné que les céramiques piézoélectriques étudiées dans le présent travail sont aussi ferroélectriques, la génération peut être d'origine pyroélectrique ou thermoélastique. Après un bref rappel de l'effet pyroélectrique et des équations qui le modélisent, la nature exacte de la génération par micro-ondes dans les céramiques piézoélectriques sera déterminée.

II.2 Modèle unidimensionnel

Dans ce qui suit, nous développerons à partir des équations de la piézoélectricité et de l'équation d'équilibre dynamique un modèle unidimensionnel capable de prédire les réponses acoustiques de barreaux piézoélectriques simples ou composés. Ce modèle servira entre autres, après validation, à déterminer l'origine physique de la génération acoustique par micro-ondes dans les céramiques piézoélectriques.

II.2.1 Equations générales de la piézoélectricité

En désignant par $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$, \bar{E} et \bar{D} les représentations respectives du tenseur des contraintes, du tenseur des déformations, du vecteur champ électrique et du vecteur déplacement électrique, les équations tridimensionnelles de la piézoélectricité s'écrivent [II-1]-[II-3] :

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = c_{\alpha\beta}^E \varepsilon_\beta - d_{i\beta} c_{\beta\alpha}^E E_i \\ D_i = e_{ij}^\varepsilon E_j + d_{i\beta} c_{\beta\alpha}^E \varepsilon_\alpha \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6 \quad (\text{II-1})$$

avec :

- σ_α composantes du tenseur des contraintes en écriture vectorielle,
- ε_β composantes du tenseur des déformations en écriture vectorielle,
- E_i composantes du champ électrique,
- D_i composantes du déplacement électrique,
- $c_{\alpha\beta}^E$ éléments du tenseur de rigidité à champ électrique constant,
- e_{ij}^ε éléments du tenseur de permittivité à déformation constante,
- e_{ij}^σ éléments du tenseur de permittivité à contrainte constante,
- $d_{i\beta}$ modules piézoélectriques, reliant la variation du champ électrique aux déformations ε_β subies par le solide.

Les exposants E , ε et σ signifient que ces caractéristiques sont respectivement déterminées à champ électrique, à déformation et à contrainte constantes. Le système d'équations (II-1) peut être réécrit, de manière équivalente, comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = s_{\alpha\beta}^E \sigma_\beta + d_{i\alpha} E_i \\ D_i = e_{ij}^\sigma E_j + d_{i\alpha} \sigma_\alpha \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6 \quad (\text{II-2})$$

où $s_{\alpha\beta}^E$ est un élément du tenseur des souplesses à champ électrique constant.

II.2.2 Equation du mouvement d'un barreau piézoélectrique

Il s'agit d'établir et de résoudre l'équation du mouvement d'un barreau unidimensionnel de longueur L (parallèle à zz') constitué d'un matériau piézoélectrique et viscoélastique linéaire, excité par une contrainte source d'origine quelconque (mécanique par impact, électrique, thermique, etc...) en tenant compte des conditions électriques et mécaniques aux limites. Toutes les quantités données ci-dessous sont exprimées dans le domaine fréquentiel par transformation de Fourier des expressions formulées dans le domaine temporel. Toute exception sera explicitement signalée.

En désignant par ω la pulsation (reliée à la fréquence f par $\omega = 2\pi f$) et si l'on suppose un état de contrainte uniaxiale, alors l'équation d'équilibre dynamique est donnée par :

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\rho \omega^2 U_z \quad (\text{II-3})$$

où σ_z et U_z sont respectivement la contrainte et le déplacement parallèles à l'axe zz' , et ρ la masse volumique du matériau.

Sous l'hypothèse de linéarité, la déformation et le déplacement axiaux sont liés par :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (\text{II-4})$$

Soit $\sigma_0(z, t)$ la contrainte extérieure imposée qui est le terme source du phénomène de génération dans la contrainte totale. Cette contrainte prend, dans le domaine temporel, la forme suivante :

$$\sigma_0(z, t) = \sigma_0(z) f(t) \quad (\text{II-5})$$

Dans cette équation, les fonctions $\sigma_0(z)$ et $f(t)$ représentent respectivement la répartition spatiale et l'évolution temporelle de la contrainte source qui peut être d'origine électrique (piézoélectrique) ou thermoélastique. Dans le cas d'une génération piézoélectrique à l'aide d'une excitation électrique impulsionnelle, l'évolution temporelle de $\sigma_0(z, t)$ peut être approchée par un Dirac. Cette hypothèse est rendue possible par le fait que la pulsation électrique utilisée expérimentalement (voir §II.3) est très courte en comparaison aux périodes de vibration des structures étudiées. A l'opposé, dans le cas de la génération acoustique par une impulsion micro-ondes, la forme de la fonction $f(t)$, qui traduit l'évolution temporelle de la température de chauffage dans le matériau, sera celle d'une fonction rampe (voir §II.4). Enfin, il est important de noter, pour la suite de ce travail, que le signe de la contrainte source correspondant à une excitation électrique est directement lié à l'orientation relative du champ électrique par rapport à la polarisation électrique du matériau piézoélectrique. Cette dépendance sera illustrée plus loin et servira à déterminer l'origine de la génération acoustique dans les matériaux piézoélectriques excités par micro-ondes.

Dans le cas unidimensionnel et si l'axe zz' est un axe d'orthotropie mécanique, les relations de comportement (II-1) se simplifient et deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_z = Y_{33}^E \varepsilon_z - d_{33} Y_{33}^E E_z + \sigma_0 \\ D_z = e_{33}^E E_z + d_{33} Y_{33}^E \varepsilon_z \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

Y_{33}^E étant le module complexe de Young du barreau piézoélectrique à champ électrique constant dans la direction longitudinale.

La combinaison des équations (II-3), (II-4) et (II-6) permet d'établir l'équation différentielle du mouvement exprimée en déformation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} + (S\omega)^2 \varepsilon_z - \beta \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} = - \left(\frac{1}{Y_{33}^E + \frac{(d_{33} Y_{33}^E)^2}{e_{33}^\varepsilon}} \right) \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} \quad (\text{II-7})$$

où la lenteur des ondes planes longitudinales dans le matériau S , et le paramètre matériel β sont donnés par :

$$S^2 = \frac{\rho}{Y_{33}^E + \frac{(d_{33} Y_{33}^E)^2}{e_{33}^\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{d_{33} Y_{33}^E}{e_{33}^\varepsilon \left(Y_{33}^E + \frac{(d_{33} Y_{33}^E)^2}{e_{33}^\varepsilon} \right)}$$

En considérant les conditions électriques aux limites, nous distinguons le cas où les électrodes du barreau piézoélectrique sont reliées électriquement, que l'on nommera «circuit fermé», du cas dit en «circuit ouvert» où les électrodes ne sont pas reliées. En «circuit fermé» et en régime permanent, les potentiels électriques aux extrémités du barreau étant égaux, le champ électrique est uniformément nul. En «circuit ouvert», c'est le déplacement électrique qui est uniforme. Ces conditions se traduisent par les relations suivantes [II-6]-[II-8] :

$$\begin{cases} \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 & \text{en «circuit ouvert»} \\ E_z = 0 & \text{en «circuit fermé»} \end{cases} \quad (\text{II-8})$$

On suppose ici que la propagation des ondes électriques se fait à une vitesse très grande par rapport à la vitesse de propagation des ondes mécaniques. La prise en compte des expressions de l'équation (II-8) permet d'écrire l'équation différentielle du mouvement (II-7) en fonction des conditions électriques aux limites.

II.2.2.1 Circuit fermé

Le champ électrique étant nul, il n'existe pas de couplage électromécanique entre le champ électrique et la contrainte mécanique au sein du matériau. Tous calculs étant faits, l'équation différentielle (II-7) devient :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} + (S^E \omega)^2 \varepsilon_z = - \frac{1}{Y_{33}^E} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} \quad (\text{II-9})$$

$S^E = \sqrt{\rho/Y_{33}^E}$ étant la lenteur des ondes acoustiques dans le matériau à champ électrique constant.

II.2.2.2 Circuit ouvert

Le gradient du déplacement électrique est nul et l'équation du mouvement (II-7) devient :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} + (S^D \omega)^2 \varepsilon_z = -\frac{1}{Y_{33}^D} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} \quad (\text{II-10})$$

En «circuit ouvert», l'équation (II-10) met en jeu une rigidité apparente Y_{33}^D différente de celle trouvée en «circuit fermé» [II-1]:

$$Y_{33}^D = Y_{33}^E + \frac{(d_{33} Y_{33}^E)^2}{e_{33}^E} \quad (\text{II-11})$$

Ce module de Young est plus grand que Y_{33}^E et traduit le raidissement du matériau piézoélectrique quand celui-ci est sollicité en «circuit ouvert». Enfin, la lenteur des ondes acoustiques dans le matériau, quand le déplacement électrique est uniforme, sera désignée par $S^D = \sqrt{\rho/Y_{33}^D}$.

II.2.3 Résolution de l'équation différentielle du mouvement par la méthode des vecteurs d'état

Les équations (II-9) et (II-10) ayant des formes semblables, leur résolution sera identique. Appelons S^* et Y^* , respectivement, la lenteur des ondes acoustiques dans le matériau et le module de Young apparent qui dépendent des conditions électriques aux limites imposées au barreau piézoélectrique. L'équation différentielle du mouvement a la forme générale suivante :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} + (S^* \omega)^2 \varepsilon_z = -\frac{1}{Y_{33}^*} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} \quad (\text{II-12})$$

avec,

$$\begin{aligned} S^* &= \sqrt{\rho/Y_{33}^*} \\ Y_{33}^* &= Y_{33}^E \quad \text{en «circuit fermé»,} \\ Y_{33}^* &= Y_{33}^D = Y_{33}^E + \frac{(d_{33} Y_{33}^E)^2}{e_{33}^E} \quad \text{en «circuit ouvert»}. \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation (II-12) s'écrit comme suit :

$$\varepsilon(z, \omega) = P(\omega) e^{-i\omega S^* z} + N(\omega) e^{+i\omega S^* z} + \varepsilon_0(z, \omega) \quad (\text{II-13})$$

où $P(\omega)$ et $N(\omega)$ sont deux fonctions qui dépendent des conditions mécaniques aux extrémités du barreau. La fonction $\varepsilon_0(z, \omega)$ représente la solution particulière de l'équation différentielle (II-12) et dépend du profil de la contrainte source $\sigma_0(z, \omega)$.

L'idée de la méthode des vecteurs d'état [II-5] pour la résolution de l'équation différentielle (II-12) est de relier, au moyen de matrices de transfert, la contrainte et la vitesse entre les deux interfaces $z=0$ et $z=L$. Cette méthode offre la possibilité de déterminer, de proche en proche, les ondes générées dans un échantillon composé de plusieurs barreaux juxtaposés pour un profil de contrainte $\sigma_0(z, \omega)$ quelconque.

Exprimons la vitesse et la contrainte en fonction de $P(\omega)$ et $N(\omega)$. D'après les relations (II-3), (II-6) et (II-13) et indépendamment des conditions électriques aux limites, la vitesse s'écrit comme suit :

$$V(z, \omega) = -\frac{S^* Y_{33}^*}{\rho} P(\omega) e^{-i\omega S^* z} + \frac{S^* Y_{33}^*}{\rho} N(\omega) e^{+i\omega S^* z} - \frac{i Y_{33}^*}{\rho \omega} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} - \frac{i}{\rho \omega} \frac{\partial \sigma_0}{\partial z} \quad (\text{II-14})$$

La contrainte mécanique dépend des conditions électriques aux limites. En «circuit ouvert», et tenant compte de l'uniformité du déplacement électrique, le système d'équations (II-6) permet de calculer le profil du champ électrique et la contrainte mécanique associée :

$$E(z, \omega) = -\frac{d_{33}^E Y_{33}^E}{e_{33}^E} \varepsilon(z, \omega) + A(\omega) \quad (\text{II-15})$$

$$\sigma(z, \omega) = Y_{33}^D \varepsilon(z, \omega) + \sigma_0(z, \omega) - d_{33}^E Y_{33}^E A(\omega) \quad (\text{II-16})$$

où $A = A(\omega)$ est une constante d'intégration qui dépend des conditions électriques aux limites. Cette constante est toujours nulle pour une excitation en «circuit fermé». De plus, A est nul en «circuit ouvert» dans le cas particulier d'un déplacement électrique uniformément nul.

Dans le cas d'un montage en «circuit fermé», l'expression de la contrainte se simplifie et se déduit de la première équation du système (II-6) :

$$\sigma(z, \omega) = Y_{33}^E \varepsilon(z, \omega) + \sigma_0(z, \omega) \quad (\text{II-17})$$

Les expressions (II-16) et (II-17) sont semblables car il suffit d'annuler le terme $A(\omega)$ et de remplacer Y_{33}^D par Y_{33}^E dans l'équation (II-16) pour obtenir l'expression de la contrainte en «circuit fermé». D'après la première équation du système (II-6) et l'expression de la déformation (II-16), la contrainte s'écrit dans le cas général comme suit :

$$\sigma(z, \omega) = Y_{33}^* \left[P(\omega) e^{-i\omega S^* z} + N(\omega) e^{+i\omega S^* z} + \varepsilon_0(z, \omega) \right] + \sigma_0(z, \omega) - d_{33} Y_{33}^E A \quad (\text{II-18})$$

Les expressions (II-14) et (II-18) permettent de calculer les fonctions $P(\omega)$ et $N(\omega)$ en fonction de la vitesse et de la contrainte sur l'interface $z=0$. En écrivant la contrainte et la vitesse sur la face $z=L$ et en remplaçant $P(\omega)$ et $N(\omega)$ par leurs expressions, nous obtenons finalement les vecteurs d'état suivants [II-5]:

$$\begin{bmatrix} \sigma(L, \omega) \\ V(L, \omega) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \sigma(0, \omega) \\ V(0, \omega) \end{bmatrix} + G \quad (\text{II-19})$$

où la matrice P et le vecteur G sont définis par :

$$P = \begin{bmatrix} c & \frac{i\rho}{S^*} s \\ \frac{iS^*}{\rho} s & c \end{bmatrix} \quad (\text{II-20})$$

$$G = \begin{bmatrix} -\bar{\sigma}_0(0)c(L) - \frac{1}{\omega S^*} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_0}{\partial z} \right]_{z=0} s(L) + \bar{\sigma}_0(L) \\ -\frac{iS^*}{\rho} \bar{\sigma}_0(0)s(L) + \frac{i}{\rho\omega} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_0}{\partial z} \right]_{z=0} c(L) - \frac{i}{\rho\omega} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_0}{\partial z} \right]_{z=L} \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

où $c(z) = \cos(\omega S^* z)$, $s(z) = \sin(\omega S^* z)$ et $\bar{\sigma}_0(z)$ dépend du profil d'excitation et des conditions électriques aux limites :

$$\bar{\sigma}_0(z) = Y_{33}^* \varepsilon_0(z) + \sigma_0(z) - d_{33} Y_{33}^E A \quad (\text{II-22})$$

Remarquons que la matrice P est liée à la propagation des ondes acoustiques car elle ne dépend que des propriétés mécaniques du milieu, tandis que le vecteur G , qui fait apparaître le profil spatial de la contrainte source imposée $\sigma_0(z, \omega)$, est lié au phénomène de génération.

Il est possible de généraliser la résolution pour une barre composée de n segments piézoélectriques juxtaposés. En écrivant de proche en proche la continuité des contraintes et des vitesses aux interfaces de deux segments consécutifs et d'après la relation(II-19), il apparaît :

$$\begin{bmatrix} \sigma(z_j, \omega) \\ V(z_j, \omega) \end{bmatrix} = S^{(j)} \begin{bmatrix} \sigma(0, \omega) \\ V(0, \omega) \end{bmatrix} + T^{(j)}, \quad j \geq 2 \quad (\text{II-23})$$

La matrice $S^{(j)}$ et le vecteur $T^{(j)}$ étant définis par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} S^{(j)} = P^{(j-1)}S^{(j-1)} & j > 2, & S^{(2)} = P^{(1)} \\ T^{(j)} = P^{(j-1)}T^{(j-1)} + G^{(j-1)} & j > 2, & T^{(2)} = G^{(1)} \end{cases} \quad (\text{II-24})$$

Afin d'obtenir le spectre de la vitesse de déplacement de l'interface $z = L$ d'un barreau simple, il est nécessaire de tenir compte des conditions mécaniques aux limites. Etant donné que les faces du barreau sont libres, les conditions aux limites de contraintes nulles s'écrivent:

$$\sigma(z = 0) = \sigma(z = L) = 0 \quad (\text{II-25})$$

Des équations (II-19) et (II-25), on tire la vitesse à l'extrémité $z = L$ du barreau :

$$V(L) = \frac{-P_{22}(L)G_1(L) + P_{12}(L)G_2(L)}{P_{12}(L)} \quad (\text{II-26})$$

Dans le cas particulier d'une excitation uniforme, le gradient de la contrainte source dans l'équation (II-12) est nul. La solution particulière $\varepsilon_0(z)$ est alors nulle et la vitesse à l'extrémité $z = L$ s'écrit :

$$V(L) = \frac{S^* \bar{\sigma}_0 (1 - \cos(\omega S^* L))}{i\rho \sin(\omega S^* L)} \quad (\text{II-27})$$

Remarquons que, selon qu'il s'agisse d'un montage en «circuit ouvert» ou en «circuit fermé», l'équation (II-27) donne deux fréquences de résonance f_r différentes:

$$f_r^D = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y_{33}^D}{\rho}} \quad \text{et} \quad f_r^E = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y_{33}^E}{\rho}} \quad (\text{II-28})$$

Il est à noter que la connaissance des fréquences propres d'un simple barreau ne permet pas de déterminer la nature de la génération acoustique par micro-ondes dans les matériaux piézoélectriques. En effet, les fréquences de résonance d'un barreau simple (ainsi que sa rigidité apparente) ne dépendent que des conditions électriques aux limites. Néanmoins, la comparaison des réponses mécaniques déterminées expérimentalement avec les valeurs théoriques données par les relations (II-27) et (II-28) servira à valider le modèle.

II.3 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental mis en œuvre pour l'étude de la génération acoustique par micro-ondes pulsées dans les matériaux est présenté dans ce qui suit. Le montage

expérimental étant le même pour toutes les structures étudiées dans le présent travail, nous ne le présenterons que dans cette section. Néanmoins, des précisions de mise en œuvre seront apportées pour chaque structure spécifique étudiée.

Pour l'étude des matériaux piézoélectriques, le montage expérimental permet de choisir entre une excitation par micro-ondes pulsées et une excitation électrique. Dans le dispositif expérimental schématisé sur la Figure II-1, les ondes électromagnétiques sont produites par un magnétron à la fréquence de 9,41 GHz avec une puissance crête de 5,5 kW. Ce générateur offre la possibilité d'envoyer des salves composées d'impulsions chacune d'une durée égale à $1 \mu\text{s}$. Etant donné que le nombre n d'impulsions et la fréquence de répétition f_{rep} au sein d'une salve (voir la Figure II-2) sont contrôlés à l'aide d'un générateur de fonctions (Agilent 33120 A), il est possible d'exciter l'échantillon de manière impulsionnelle ou par des salves d'impulsions, avec une fréquence de répétition f_{rep} pouvant aller jusqu'à 400 kHz, afin d'observer les résonances particulières des structures irradiées.

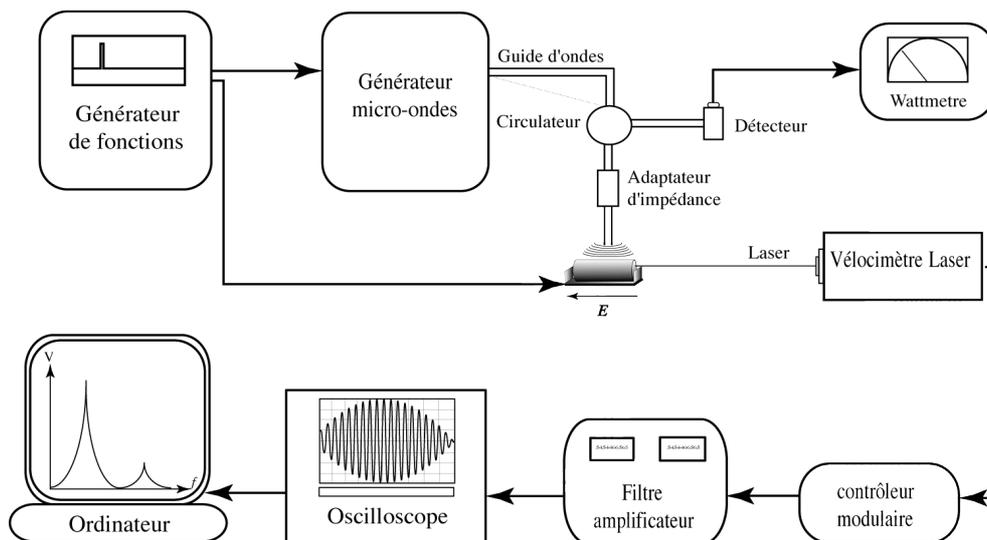


Figure II-1 *Dispositif expérimental de génération et d'acquisition d'ultrasons dans les barreaux de PZT par excitation électrique et par micro-ondes*

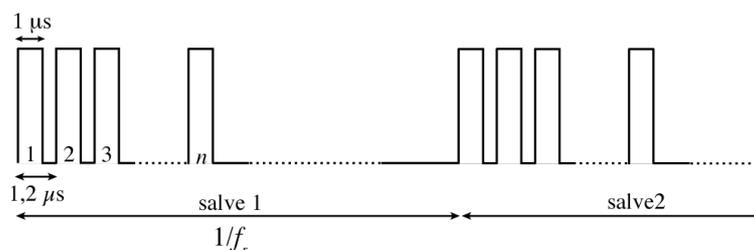


Figure II-2 *Paramètres de contrôle du générateur de micro-ondes*

En sortie du générateur et selon la géométrie de la structure à tester, les micro-ondes peuvent se propager à l'intérieur d'un guide d'onde métallique rectangulaire ou circulaire. Le guide d'ondes rectangulaire (WR 90), de dimensions internes $23 \times 10 \text{ mm}^2$, permet uniquement la propagation du mode fondamental TE_{10} (le champ électrique est alors parallèle aux petits cotés du guide d'onde). Le guide d'ondes circulaire a, quant à lui, un diamètre intérieur égal à 25 mm et permet la propagation du mode fondamental TE_{11} . Les longueurs d'ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes, dans l'air et dans les matériaux polymériques étudiés dans le cadre de ce travail sont centimétriques. Pour le mode fondamental TE_{10} , la longueur d'onde est, par exemple, égale à 4,41 cm dans le guide d'ondes rectangulaire rempli d'air, à environ 2 cm dans le guide d'ondes rempli de PVC et égale à 3,19 cm en dehors du guide d'ondes en propagation libre. D'autre part, afin d'obtenir un maximum de puissance sur l'échantillon, un adaptateur d'impédance est ajusté de manière à minimiser le taux d'ondes stationnaires (TOS) mesuré par un wattmètre. Précisons enfin que dans le cas des matériaux piézoélectriques, nous utiliserons le guide d'ondes rectangulaire qui permet d'irradier quasi-uniformément les barreaux piézoélectriques unidimensionnels.

L'excitation électrique des matériaux piézoélectriques est, quant à elle, assurée par deux électrodes reliées au générateur de fonctions (Agilent 33120 A) et fixées sur un support isolant (Figure II-1). De même que pour une excitation par micro-ondes, il est ici possible d'exciter l'échantillon par des impulsions brèves ($1 \mu\text{s}$) par rapport aux périodes que l'on mesure (de l'ordre de $10 \mu\text{s}$), ou par des salves à fréquence de répétition contrôlée. Le montage permet d'exciter l'échantillon (par micro-ondes ou électriquement) en «circuit ouvert» et en «circuit fermé», respectivement, en empêchant et en assurant le contact des électrodes avec les extrémités métallisées du barreau piézoélectrique.

La vitesse particulière à l'extrémité de l'échantillon est mesurée à l'aide d'un vélocimètre Laser (Polytec OFV 353) relié à un contrôleur modulaire (Polytec OFV 3001) qui permet d'atteindre une sensibilité de 5 mm/s/V si la bande passante est limitée à 250 kHz. Le signal est ensuite transmis à un filtre amplificateur (Electronic instrument 3627) et à la console d'acquisition, composée d'un oscilloscope (LeCroy 9450 A) et d'un ordinateur, afin de traiter les signaux acquis et de leur appliquer une transformée de Fourier rapide pour obtenir les réponses spectrales des échantillons.

II.4 Modélisation de la température

La modélisation de la température qui va suivre sera utilisée dans tous les modèles qui font intervenir la température comme terme source dans la génération acoustique par micro-ondes pulsées. Nous ne nous intéressons ici qu'au profil temporel de l'accroissement de température pour calculer sa transformée de Fourier qui intervient dans les modèles analytiques et numériques exprimés dans le domaine fréquentiel.

Dans le cas d'une excitation thermique impulsionnelle, on suppose que, durant l'impulsion, la température a une évolution temporelle croissante pendant une durée τ avant d'atteindre une température constante T_0 . Si la durée de l'impulsion est assez courte, nous pouvons négliger les effets de dissipation et de conduction thermiques. L'augmentation de la température peut alors être supposée linéaire par morceaux et ayant la forme suivante :

$$\Delta T(t) = r(t)T_0 \quad \text{avec} \quad r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{\tau} & 0 < t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

où T_0 est la température maximale atteinte et qui peut avoir une distribution spatiale quelconque.

La transformée de Fourier $\Delta T(\omega)$ de $\Delta T(t)$ (où ω représente la pulsation) a théoriquement une composante infinie à la fréquence nulle. Il est donc préférable de rechercher la transformée de Fourier de la dérivée temporelle $\Delta \dot{T}(t)$ de $\Delta T(t)$ et d'exploiter le fait que $\Delta \dot{T}(\omega) = i\omega \Delta T(\omega)$. En notant par $H(t)$ la distribution d'Heaviside et partant de la forme (II-29) de $\Delta T(t)$, la dérivée temporelle de la température s'exprime alors comme suit :

$$\Delta \dot{T}(t) = \frac{T_0}{\tau} [H(t) - H(t - \tau)] \quad (\text{II-30})$$

La transformée de Fourier de la vitesse de chauffage s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{T}(\omega) &= \frac{T_0}{\tau} \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} - e^{-i\omega\tau} \left(\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \right) \right] \\ &= \frac{T_0}{\tau} \left[\pi \delta(\omega) (1 - e^{-i\omega\tau}) + \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega\tau}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II-31})$$

Or la distribution de Dirac $\delta(\omega)$ est nulle partout sauf en ω , d'où :

$$\Delta \dot{T}(\omega) = \frac{T_0}{i\omega\tau} (1 - e^{-i\omega\tau}) \quad \text{si} \quad \omega \neq 0 \quad (\text{II-32})$$

il en découle donc :

$$\Delta T(\omega) = -\frac{T_0}{\omega^2 \tau} (1 - e^{-i\omega\tau}) \quad \text{si } \omega \neq 0 \quad (\text{II-33})$$

Ceci est vrai pour une seule impulsion brève de durée τ . Dans la perspective d'utiliser des salves, nous pouvons étendre ce résultat au cas de plusieurs impulsions successives espacées d'un temps de répétition κ . La Figure II-3 représente la vitesse de variation de la température $\Delta \dot{T}(t)$.

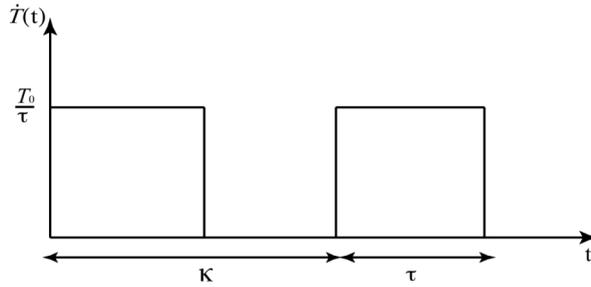


Figure II-3 Profil temporel de la vitesse d'augmentation de la température d'excitation lors d'une salve d'impulsions

La vitesse de variation de la température due à N impulsions est la somme des N distributions d'Heaviside décalées de leurs retards respectifs :

$$\Delta \dot{T}(t) = \frac{T_0}{\tau} \sum_{n=1}^N H[t - (n-1)\kappa] - H[t - (n-1)\kappa - \tau] \quad (\text{II-34})$$

On montre alors que la transformée de Fourier de $\dot{T}(t)$ est :

$$\Delta \dot{T}(\omega) = \frac{T_0}{i\omega\tau} (1 - e^{-i\omega\tau}) \sum_{n=1}^N e^{-i\omega(n-1)\kappa} \quad (\text{II-35})$$

La transformée de Fourier de l'accroissement de température $T(\omega)$, dû à une salve de N impulsions, est donné par :

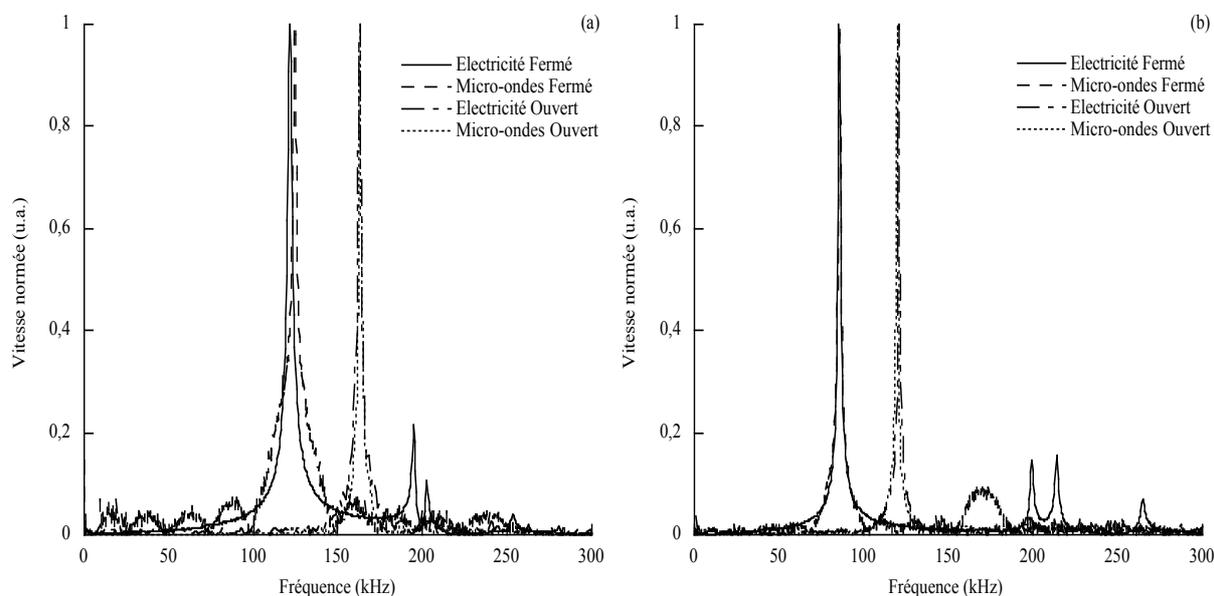
$$\Delta T(\omega) = -\frac{T_0}{\omega^2 \tau} (1 - e^{-i\omega\tau}) \sum_{n=1}^N e^{-i\omega(n-1)\kappa} \quad \text{avec } \omega \neq 0 \quad (\text{II-36})$$

Dans toute la suite de ce travail, les expressions (II-33) et (II-36) serviront, selon les besoins du calcul, à la modélisation de l'accroissement de la température dû aux radiations micro-ondes absorbées par les structures étudiées.

II.5 Résultats et discussion

Nous exposons dans ce qui suit les résultats expérimentaux obtenus sur des barreaux de céramique piézoélectrique PZT (titano-zirconate de plomb) excités électriquement et par micro-ondes pulsées. Nous commencerons d'abord par comparer les spectres obtenus par excitation électrique et par micro-ondes en «circuit fermé» et en «circuit ouvert», puis nous les comparerons aux résultats du modèle acoustique précédemment développé.

L'étude a porté sur deux barreaux cylindriques circulaires de longueurs 10 mm et 15 mm (de diamètre égal à 10 mm) et sur deux barreaux parallélépipédiques de longueurs 20 mm et 25 mm (dont les sections droites sont carrées et de dimensions latérales égales à 10 mm).



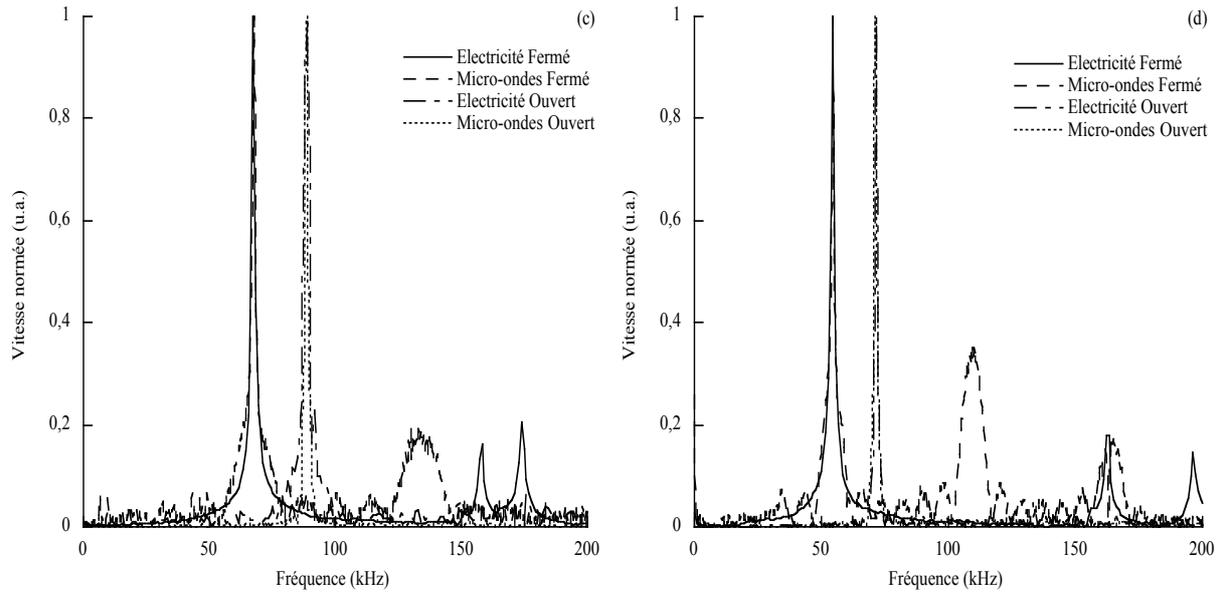


Figure II-4 Comparaison des spectres de vitesse expérimentaux pour différents barreaux excités électriquement et par micro-ondes en «circuit fermé» et en «circuit ouvert» (a) 10 mm, (b) 15 mm, (c) 20 mm et (d) 25 mm

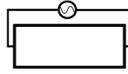
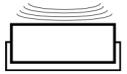
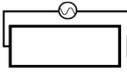
Longueur des barreaux				
10 mm	122	124	163	163
15 mm	86	86	120	120
20 mm	67	67	89	89
25 mm	55	55	72	71

Tableau II-1 Fréquences de résonance expérimentales (kHz) des barreaux piézoélectriques excités électriquement et par micro-ondes en «circuit fermé» et en «circuit ouvert»

Les spectres expérimentaux de la Figure II-4, obtenus en excitant les barreaux piézoélectriques électriquement et par micro-ondes, présentent les mêmes fréquences de résonances fondamentales (données dans le Tableau II-1) selon que les barreaux sont en «circuit fermé» ou en «circuit ouvert». La variation des fréquences de résonance observée entre les montages en «circuit fermé» et en «circuit ouvert» traduit un changement du module de Young apparent en fonction des conditions électriques aux limites des barreaux. En «circuit fermé», du fait de l'égalité des potentiels sur les électrodes des barreaux, le champ électrique dans le matériau est nul et il n'existe pas de couplage électromécanique. Le module de Young apparent est alors égal à Y_{33}^E .

En «circuit ouvert», quand les électrodes ne sont pas reliées, le déplacement électrique au sein du matériau est empêché et le matériau piézoélectrique subit une rigidification [II-3],[II-8]. D'après le modèle développé précédemment (II-11), le module de Young apparent Y_{33}^D augmente d'une quantité égale à $(d_{33}Y_{33}^E)^2/e_{33}^\varepsilon$ par rapport à Y_{33}^E . Les résultats du Tableau II-1 montrent une bonne adéquation entre les fréquences de résonance mesurées indépendamment du mode d'excitation (électrique ou électromagnétique). Pour les mêmes conditions électriques aux limites, les légères différences entre les fréquences données dans le Tableau II-1 sont dues à la variation des conditions d'appui des échantillons car la fixation d'un barreau entre des électrodes modifie légèrement ses conditions aux limites mécaniques.

L'expression (II-27) de la vitesse de déplacement à l'extrémité d'un barreau piézoélectrique fournit le spectre de la vitesse en «circuit fermé» et en «circuit ouvert» en modifiant la valeur de la longueur pour tenir compte de la variation du module de Young apparent en fonction des conditions électriques aux limites du barreau. D'après le modèle, nous pouvons constater que la différence entre les fréquences de résonance obtenues expérimentalement dans le cas d'une excitation «micro-ondes» ou dans le cas d'une excitation électrique n'est pas due au phénomène de génération mais uniquement aux conditions aux limites électriques. Afin de le montrer expérimentalement, il suffit d'ouvrir le circuit dans le cas d'une excitation électrique (le matériau piézoélectrique est alors excité par un champ électrique) et de fermer le circuit dans le cas d'une excitation «micro-ondes» (Figure II-5). Les résultats du Tableau II-1 montrent que, pour les mêmes conditions électriques aux limites, la fréquence de résonance est indépendante du mode d'excitation. Les différences constatées expérimentalement concernant les fréquences propres de vibration pour les différents cas traités sont donc bien prédites par le modèle.



Figure II-5 *Excitation électrique en «circuit ouvert» et excitation par micro-ondes en «circuit fermé» pour montrer la dépendance de la fréquence de résonance par rapport aux conditions électriques aux limites*

Afin de valider le modèle de vibration des barres piézoélectriques, il est nécessaire d'évaluer les caractéristiques mécaniques, électriques et piézoélectriques des barreaux testés. Dans ce qui suit, nous présentons une méthode d'évaluation des caractéristiques physiques des barreaux piézoélectriques à partir d'essais de résonance en «circuit fermé» et en «circuit ouvert». Nous validerons les caractéristiques

obtenues sur les barreaux parallélépipédiques en les comparant aux données du fabricant avant d'appliquer la méthode à la caractérisation des barreaux à section circulaire dont les propriétés sont inconnues.

II.6 Caractérisation des matériaux piézoélectriques

La connaissance des fréquences de résonance d'un barreau piézoélectrique en «circuit fermé» et en «circuit ouvert», de sa permittivité diélectrique à contrainte constante et de sa densité va permettre de déterminer ses caractéristiques mécaniques et piézoélectriques. Dans ce qui suit, nous nous proposons de caractériser un matériau piézoélectrique dont les propriétés sont fournies par le fabricant [II-10]. La méthode de caractérisation, inspirée des méthodes classiques d'évaluation des matériaux piézoélectriques [II-7]-[II-9], est présentée ci-dessous.

Les échantillons sont des barreaux parallélépipédiques de PZ21 (FERROPERM Piezoceramics [II-10]) polarisés selon leurs axes. Des équations couplées de la piézoélectricité et du modèle 1D développé précédemment, nous disposons des relations suivantes :

$$Y_{33}^E = 4\rho L^2 (f_r^E)^2 \quad (\text{II-37})$$

$$Y_{33}^D = 4\rho L^2 (f_r^D)^2 \quad (\text{II-38})$$

La permittivité diélectrique e_{ij}^ε est obtenue en déformation constante soit en rigidifiant les liaisons, soit en excitant le matériau à haute fréquence [II-8]. La permittivité e_{ij}^σ , mesurée pour un solide libre de toute contrainte et qui correspond à une excitation électrique statique ou à basse fréquence [II-8], est usuelle et plus simple à mesurer que la permittivité à déformation constante.

Afin de relier e_{ij}^ε et e_{ij}^σ , reportons la contrainte de l'équation (II-1) dans l'expression du déplacement électrique de l'équation (II-2). Il apparaît alors :

$$D_i = (e_{ij}^\sigma - d_{j\alpha} d_{j\beta} c_{\beta\alpha}^E) E_j + d_{i\alpha} c_{\alpha\beta}^E \varepsilon_\beta \quad (\text{II-39})$$

En identifiant cette expression avec le déplacement électrique de l'équation (II-1) et en tenant compte des indices muets, on obtient :

$$e_{33}^\varepsilon = e_{33}^\sigma - d_{33}^2 Y_{33}^E \quad (\text{II-40})$$

D'autre part, nous savons que :

$$Y_{33}^D = Y_{33}^E + \frac{(d_{33} Y_{33}^E)^2}{e_{33}^\varepsilon} \quad (\text{II-41})$$

Les relations (II-37) et (II-38) fournissent les modules de Young Y_{33}^E et Y_{33}^D des barreaux de PZT, respectivement, en «circuit fermé» et en «circuit ouvert». La relation (II-40) permet d'obtenir la permittivité diélectrique du matériau en déformation constante à partir de la connaissance de la permittivité e_{33}^σ et du module piézoélectrique d_{33} qui s'obtient de la combinaison des équations (II-40) et (II-41) :

$$d_{33} = \left(\frac{Y_{33}^D - Y_{33}^E}{Y_{33}^E Y_{33}^D} e_{33}^\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II-42})$$

Enfin, il est intéressant de calculer le coefficient de couplage k_{33} qui représente, pour un matériau piézoélectrique, le taux de restitution de l'énergie électrique en énergie mécanique ou vice-versa. On définit le coefficient de couplage comme suit :

$$k_{33} = \left(1 - \frac{Y_{33}^E}{Y_{33}^D} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II-43})$$

Les mesures sont effectuées sur quatre barreaux élancés (de longueurs égales à 25mm, 35 mm, 40 mm et 45 mm) afin de valider la méthode de caractérisation à partir du modèle et des équations donnés ci-dessus. Les données utilisées pour les calculs sont la densité et la permittivité à contrainte constante, respectivement égales à 7800 kg/m^3 et $e_{33}^\sigma = 3980 e_0$ (avec $e_0 = 8.85 \text{ pF/m}$ la permittivité du vide).

	Y_{33}^E (GPa)	Y_{33}^D (GPa)	d_{33} (pC/N)	e_{33}^ε	k_{33}
25 mm	58	99	500	2334 e_0	0,64
35 mm	58	98	493	2378 e_0	0,63
40 mm	58	100	501	2330 e_0	0,64
45 mm	58	99	502	2331 e_0	0,64
Moyenne	58	99	499	2343 e_0	0,64
Fabricant	$55,6 \pm 1,4$	$107,0 \pm 2,7$	552 ± 28	$(1980 \pm 198) e_0$	$0,69 \pm 0,03$

Tableau II-2 *Calcul des propriétés mécaniques, électriques et électromécaniques des barreaux piézoélectriques parallélépipédiques Pz21*

Le Tableau II-2 montre l'uniformité des propriétés calculées pour les différents barreaux de Pz21 testés indépendamment de leurs longueurs. Ces propriétés sont en adéquation avec les données du fabricant avec toute fois un écart par rapport aux moyennes et aux intervalles de confiance évalués statistiquement. Enfin, le comportement mécanique du matériau piézoélectrique étant viscoélastique, le module

de Young complexe a une partie imaginaire évaluée à 1% de la partie réelle donnée dans le Tableau II-2.

L'évaluation des propriétés étant possible avec la méthode proposée ci-dessus, nous l'avons utilisée pour caractériser les barreaux piézoélectriques à section circulaire dont les propriétés étaient jusque-là inconnues (Tableau II-3).

	Y_{33}^E (GPa)	Y_{33}^D (GPa)	d_{33} (pC/N)	e_{33}^e	k_{33}
25 mm	53	86	489	1800 e_0	0,61
30 mm	54	87	494	1850 e_0	0,61
Moyenne	53,5	86,5	492	1825 e_0	0,61

Tableau II-3 *Calcul des propriétés mécaniques, électriques et électromécaniques des barreaux piézoélectriques à section circulaire*

Les spectres de vitesse pour une excitation électrique en «circuit fermé» et en «circuit ouvert» représentés sur la Figure II-6, et dont les fréquences de résonance sont résumées dans le Tableau II-4, montrent que le modèle analytique développé à partir des équations couplées de la piézoélectricité traduit bien le phénomène de vibration des barreaux piézoélectriques élancés. En effet, quand le rapport longueur sur diamètre est au moins égal à 1,5, le barreau peut être assimilé à une barre unidimensionnelle. Les spectres expérimentaux et théoriques de la Figure II-6 (a) ne se superposent pas car le barreau de 10 mm ne vérifie pas la condition d'élancement pour que le comportement de celui-ci soit approché par le modèle 1D qui ignore les phénomènes tridimensionnels qui interviennent durant sa vibration. Hormis cette restriction, à la lumière de la comparaison entre les réponses théoriques et expérimentales, il apparaît donc que le modèle analytique développé précédemment est valide quelles que soient les conditions électriques aux limites des barreaux modélisés.

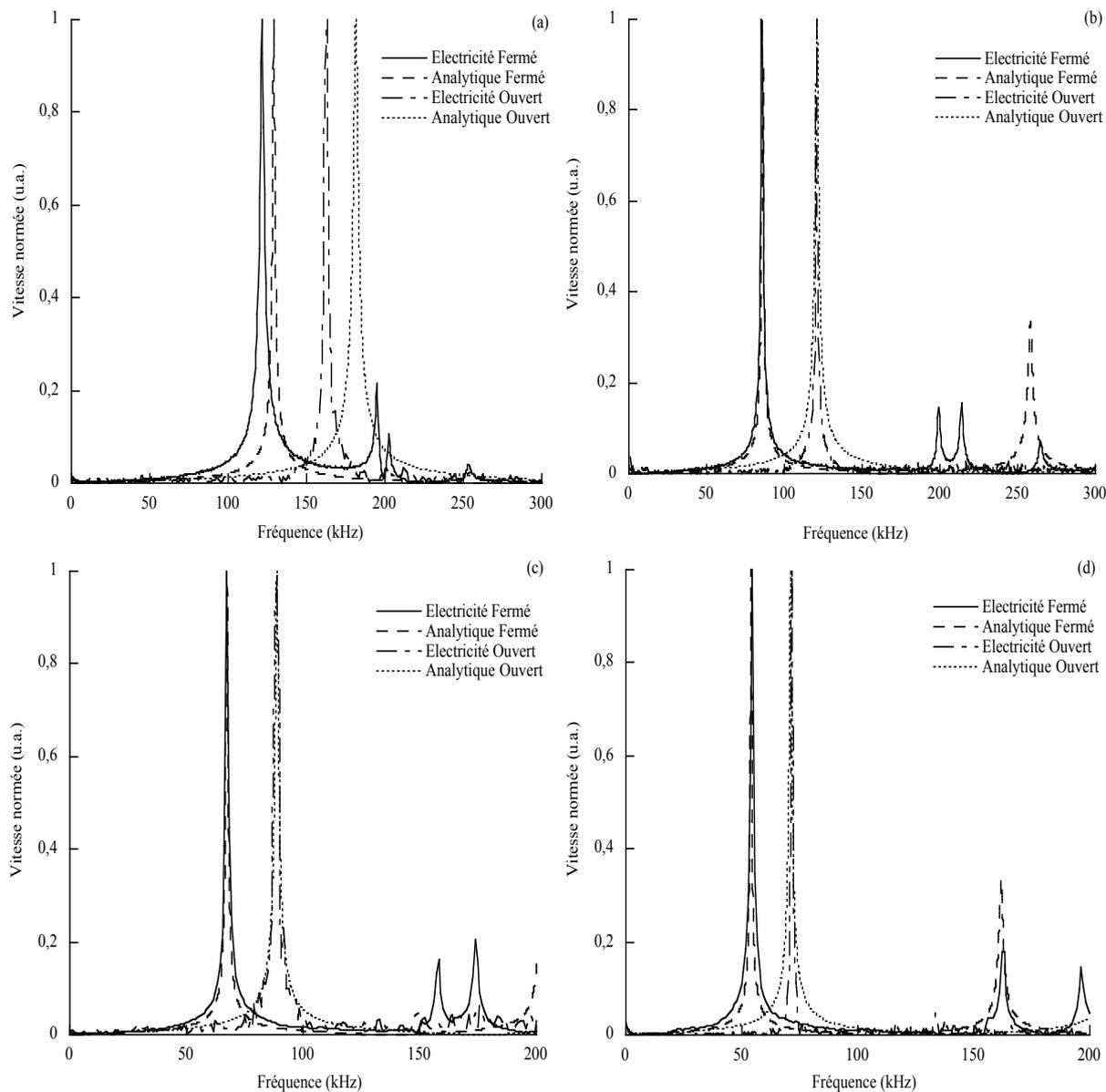


Figure II-6 *Comparaison des spectres de vitesse expérimentaux et théoriques des barreaux à sections circulaires (a,b) et parallélépipédiques (c,d) pour une excitation électrique en «circuit fermé» et en «circuit ouvert» : (a) 10 mm, (b) 15 mm, (c) 20 mm et (d) 25 mm*

Remarquons enfin que les spectres de la Figure II-4 et de la Figure II-6 font apparaître des fréquences différentes de celles du mode fondamental 1D (appelé aussi « mode piston »). Elles correspondent, selon le cas, aux harmoniques du mode fondamental ou éventuellement à des modes de vibration 3D (de type flexion, torsion, etc...) qui n'entrent pas dans le cadre de cette étude.

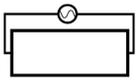
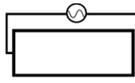
Longueur des barreaux				
	Expérimental	Théorique	Expérimental	Théorique
10 mm	122	129	163	182
15 mm	86	86	120	121
20 mm	67	67	89	89
25 mm	55	54	72	71

Tableau II-4 *Fréquences de résonance expérimentales et théoriques en kHz des barreaux piézoélectriques excités électriquement en «circuit fermé» et en «circuit ouvert»*

II.7 Nature de la génération d'ultrasons par micro-ondes

Dans l'expression du spectre de la vitesse (II-27), intervient la lenteur qui diffère selon qu'il s'agisse d'un montage en «circuit fermé» ou en «circuit ouvert». Nous obtenons alors des fréquences de résonance différentes mais indépendantes de la nature de la génération. En effet, pour les mêmes conditions électriques aux limites d'un barreau piézoélectrique, les fréquences de résonance obtenues par une excitation électrique et par micro-ondes sont identiques. Se pose alors la question de savoir si la génération par micro-ondes est d'origine thermoélastique ou piézoélectrique (du fait de la composante électrique des ondes électromagnétiques qui forment les micro-ondes). Il est donc nécessaire de mettre au point un essai pour lequel la mesure effectuée est fortement dépendante du mode de génération.

La réponse est apportée par l'étude théorique puis expérimentale de la vibration d'un barreau piézoélectrique, de longueur $2L$, composé à partir du collage de deux barreaux de longueurs L , nommés (1) et (2), excités électriquement et par micro-ondes (en «circuit ouvert») et dont les polarisations relatives varient. Nous allons montrer, dans le cas où la génération est électrique, que la fréquence de résonance du barreau ainsi constitué dépend des sens de polarisation relatifs des barreaux constitutifs. Nous exploiterons ce fait pour mettre en évidence l'origine de la génération d'ultrasons dans les matériaux piézoélectriques excités par micro-ondes.



Figure II-7 *Représentation du barreau composé, excité électriquement et par micro-ondes, dans deux configurations expérimentales : (a) et (c) mêmes polarisations, (b) et (d) polarisations opposées*

Supposons que l'intensité de la contrainte source $\sigma_0(z, \omega)$, d'origine piézoélectrique, est uniforme (de même amplitude absolue) sur la longueur du barreau. Nous distinguons alors le cas où les polarisations des barreaux constitutifs sont orientées dans le même sens (cas (a) et (c) sur la Figure II-7) du cas où les deux polarisations sont opposées (cas (b) et (d)). Pour une orientation donnée du champ électrique d'excitation, la contrainte d'excitation impulsionnelle dépendra de l'orientation relative des polarisations :

$$\begin{cases} \sigma_0^{(1)} = \sigma_0^{(2)} = \sigma_0 & \text{mêmes polarisations} \\ \sigma_0^{(1)} = -\sigma_0^{(2)} = \sigma_0 & \text{polarisations opposées} \end{cases} \quad (\text{II-44})$$

où $\sigma_0^{(1)}$ et $\sigma_0^{(2)}$ sont les contraintes sources qui agissent, respectivement, dans les barreaux (1) et (2). Dans les deux cas, la réponse théorique du barreau composé est donnée par l'application des équations (II-23) et (II-24) de la méthode des vecteurs d'état. Dans le Tableau II-5 sont donnés les expressions théoriques de la vitesse aux trois interfaces (0, L et $2L$) d'un barreau composé excité par une impulsion électrique uniforme en «circuit ouvert» en fonction des orientations relatives des polarisations de ses deux barreaux constitutifs. Les diagrammes de Lagrange correspondant à ces deux configurations sont donnés sur la Figure II-8.

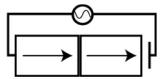
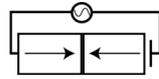
Interface dans le barreau composé		
$V(z=0)$	$-\frac{S^D}{i\rho} \frac{1-c(2L)}{s(2l)} \sigma_0$	$-\frac{S^D}{i\rho} \frac{2c(L)-c(2L)-1}{s(2l)} \sigma_0$
$V(z=L)$	0	$+\frac{S^D}{i\rho} \frac{2c(L)-c(2L)-1}{s(2l)} \sigma_0$
$V(z=2L)$	$+\frac{S^D}{i\rho} \frac{1-c(2L)}{s(2l)} \sigma_0$	$-\frac{S^D}{i\rho} \frac{2c(L)-c(2L)-1}{s(2l)} \sigma_0$

Tableau II-5 *Expressions des vitesses de déplacement sur les trois interfaces d'un barreau composé selon l'orientation relative des polarisations électriques de ses barreaux constitutifs*

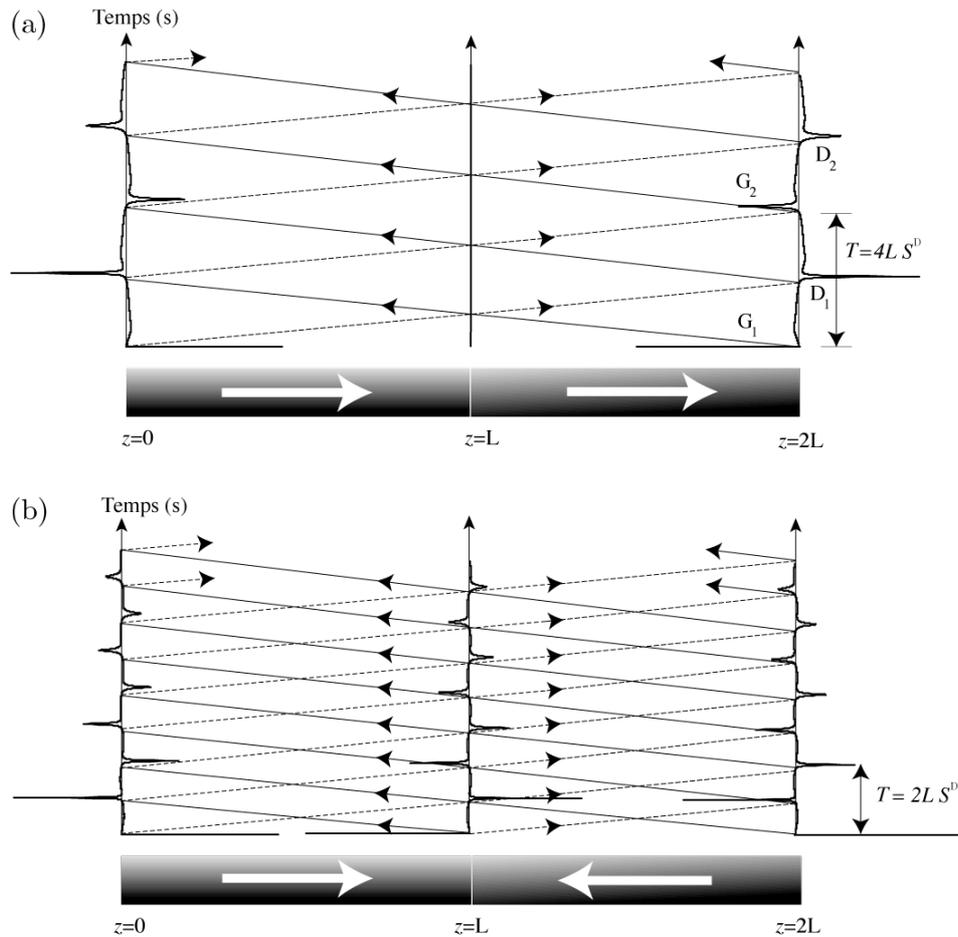


Figure II-8 *Diagramme de Lagrange dans un barreau composé de deux barreaux piézoélectriques ayant : (a) les mêmes polarisations et (b) des polarisations opposées*

Les expressions des vitesses données dans le Tableau II-5 montrent que la réponse d'un barreau piézoélectrique composé à une excitation électrique dépend de l'orientation relative des polarisations des barreaux qui le composent. En effet, dans le cas où les polarisations des barreaux constitutifs sont orientées identiquement, la Figure II-8 (a) montre que la génération acoustique ne se produit qu'aux interfaces libres. Ces dernières vibrent symétriquement tandis que l'interface centrale ne subit aucun déplacement. La fréquence propre de vibration observée est alors égale à $1/4LS^D$. D'autre part la Figure II-8 (b) montre que dans le cas d'un barreau composé dont les polarisations sont opposées, la génération acoustique et, par la suite, la vibration se fait sur les trois interfaces de telle sorte que les deux barreaux vibrent de manière anti-symétrique. La fréquence propre que l'on observe dans ce cas, égale à $1/2LS^D$, est deux fois plus importante que celle du premier cas. La fréquence de résonance d'un barreau composé de deux barreaux piézoélectriques dépend donc de l'orientation relative des polarisations. Par conséquent, si la génération acoustique par micro-ondes dans les barreaux piézoélectriques est d'origine piézoélectrique, elle

devra être sensible à l'orientation relative des polarisations. Si cela n'est pas le cas, alors la génération par micro-ondes est d'origine thermoélastique.

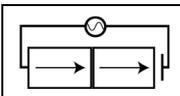
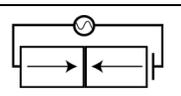
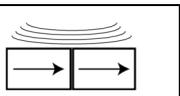
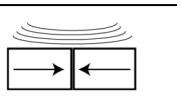
				
Génération piézoélectrique	f_r	$2f_r$	f_r	$2f_r$
Génération thermoélastique	X		f_r	f_r
Fréquences de résonance expérimentales (kHz)	56	117	56	58

Tableau II-6 *Fréquences de résonance théoriques (supposées) et expérimentales du barreau composé excité électriquement et par micro-ondes pour deux orientations relatives des polarisations*

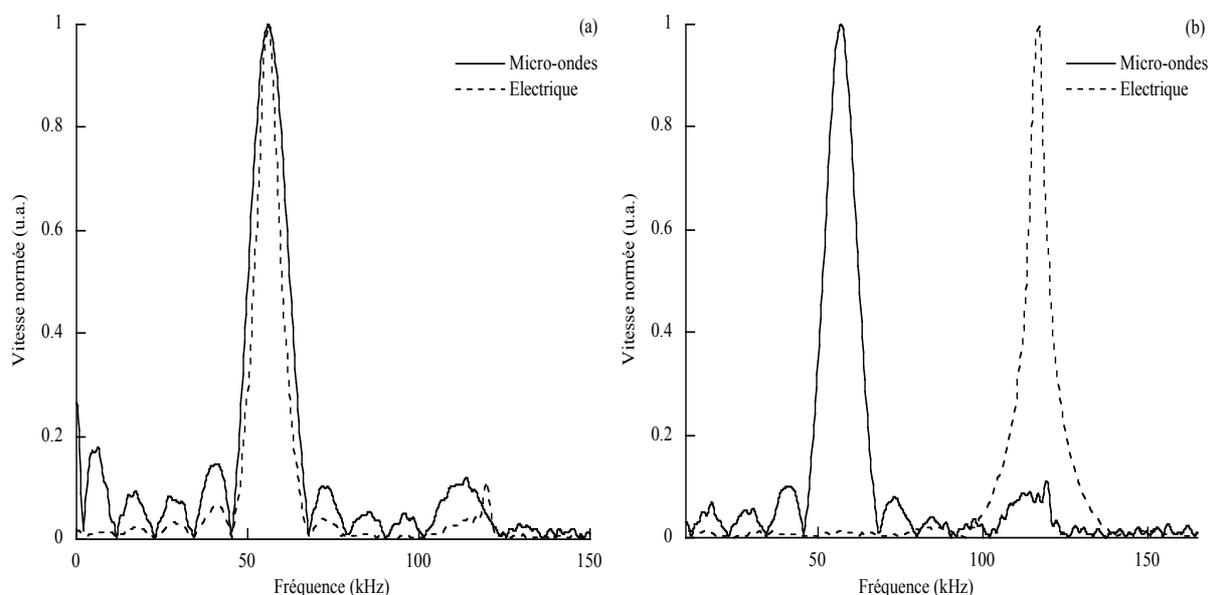


Figure II-9 *Spectres expérimentaux obtenus pour le barreau composé par excitation électrique et par « micro-ondes » pour deux états de polarisations relatives : (a) mêmes polarisations, (b) polarisations opposées.*

La démarche expérimentale consiste à exciter un barreau (composé de deux barreaux de Pz21 à sections circulaires identiques, de longueur 15 mm et liés par un couplant) électriquement et par micro-ondes selon les configurations (c) et (d) de la Figure II-7. Le Tableau II-6 résume les fréquences théoriques correspondantes à chaque mode de génération supposé, et donne les fréquences expérimentales obtenues pour le barreau composé étudié et dont les spectres de résonance sont donnés sur la Figure II-9.

Comme prévu théoriquement dans le cas d'une excitation électrique à distance du barreau piézoélectrique composé, la fréquence de résonance est sensible à l'orientation relative des polarisations des barreaux constitutifs. En effet, quand les deux polarisations sont identiquement orientées, la fréquence de résonance du barreau composé est de 56 kHz, alors que pour une orientation des polarisations en sens opposé, la fréquence de résonance est portée à 117 kHz. La première fréquence est celle de la résonance d'un barreau d'une longueur totale de 30 mm et correspond, à une erreur expérimentale près, à la moitié de la fréquence de résonance des barreaux de 15 mm qui la composent. Les écarts que l'on observe entre les résultats expérimentaux et les calculs théoriques sont probablement dues à la non-uniformité du champ d'excitation sur la longueur des barreaux et ce pour les deux modes de génération électrique et par micro-ondes.

Les fréquences de résonance obtenues par excitation micro-ondes ne dépendent pas des orientations relatives des polarisations. En effet, les fréquences de résonance sont presque identiques quand les deux barreaux constitutifs ont des polarisations de mêmes sens ou de sens opposés. La génération par micro-ondes étant indépendante de la polarisation du barreau piézoélectrique irradié, elle est donc d'origine thermique. Étant donnée la nature ferroélectrique des céramiques PZT testées, nous pouvons soupçonner une génération acoustique de nature pyroélectrique ou/et thermoélastique. En effet, une variation de température dans ce type de matériaux peut se traduire par un effet thermoélastique et/ou pyroélectrique. L'objectif du développement qui va suivre est de déterminer la part de la pyroélectricité des céramiques ferroélectriques (PZT) dans la génération acoustique provoquée par une élévation de température due à l'absorption de micro-ondes et, par là même, de déterminer l'effet prépondérant parmi la thermoélasticité et la pyroélectricité.

II.8 Effet de la pyroélectricité sur la génération acoustique

II.8.1 Le phénomène pyroélectrique

La pyroélectricité est le résultat d'un couplage entre l'énergie thermique et l'énergie électrique d'un matériau. Ce phénomène est retrouvé à l'état naturel dans dix classes cristallines piézoélectriques (parmi les 20 qui existent) qui présentent la propriété de se polariser spontanément selon des directions privilégiées quand elles sont soumises à une variation de température. De plus, si le matériau pyroélectrique présente une polarisation rémanente P_r , il est alors dit ferroélectrique. Ceci est notamment le cas des céramiques ferroélectriques qui acquièrent une polarisation rémanente suite à leur

exposition à un champ électrique de forte intensité sous une température élevée. La Figure II-10 résume les relations qui existent dans un matériau pyroélectrique entre ses comportements thermiques, électriques et mécaniques [II-11].

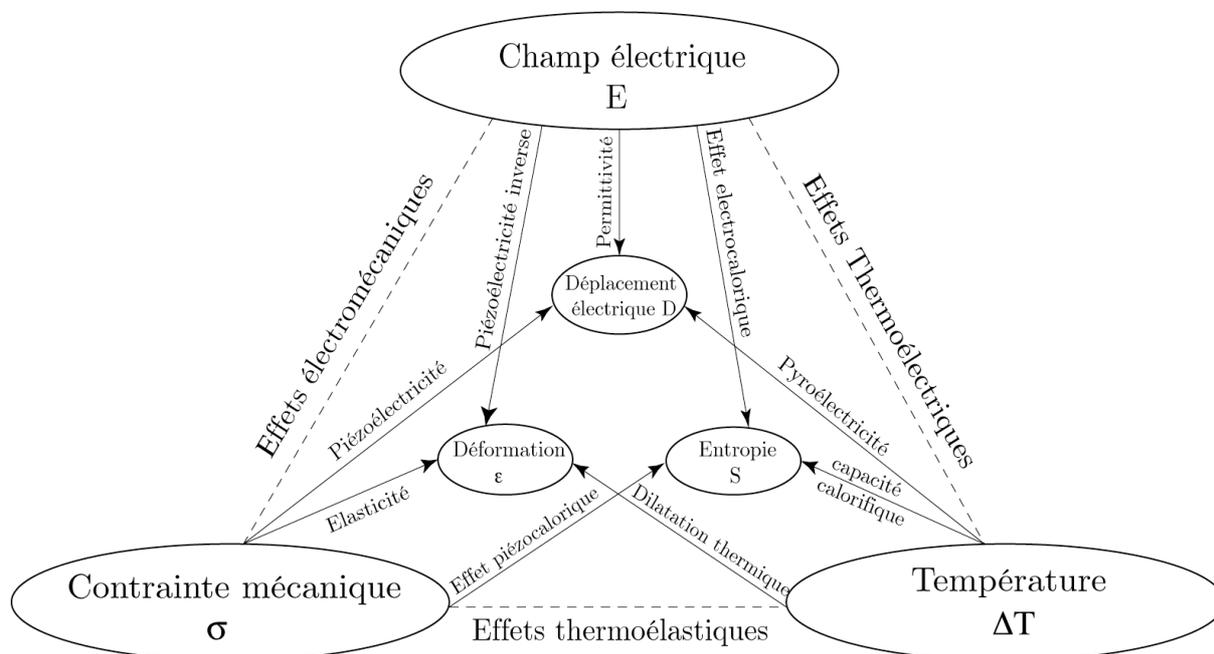


Figure II-10 Relations entre les propriétés thermiques, électriques et mécaniques d'une céramique ferroélectrique [II-11]

L'effet pyroélectrique dans un matériau se manifeste par le changement du module de la polarisation induit par une variation de température. Cet effet est caractérisé par le coefficient pyroélectrique p qui traduit la variation de la polarisation P (qu'elle soit spontanée ou rémanente) en fonction de la température :

$$p = \frac{dP}{dT} \quad (\text{II-45})$$

Si les électrodes du composant pyroélectrique ont une surface d'aire A , alors la charge électrique ΔQ qui s'y dépose en «circuit ouvert» quand la température croît de ΔT est égale à :

$$\Delta Q = A p \Delta T \quad (\text{II-46})$$

Dans le cas d'un composant en «circuit fermé» le courant électrique induit par la variation de température est donné par :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = A \frac{dP}{dT} \frac{dT}{dt} = A p \frac{dT}{dt} \quad (\text{II-47})$$

En «circuit ouvert», la charge électrique déposée sur les électrodes d'un barreau pyroélectrique soumis à une variation de température ΔT est liée au champ de déplacement électrique perpendiculaire aux faces des électrodes. Dans le cas général, le déplacement électrique s'exprime comme suit :

$$D(E) = e_0 E + P(E) \quad (\text{II-48})$$

où e_0 est la permittivité diélectrique du vide, E le champ électrique dans le matériau et $P(E)$ la polarisation qui est fonction du champ électrique. Etant donné que la partie due à la polarisation est beaucoup plus grande et qu'elle seule peut dépendre de la température, alors le champ de déplacement électrique peut être considéré comme étant égal à la polarisation [II-12]. En désignant par 3 la direction de polarisation du matériau pyroélectrique et par e_{33} sa permittivité diélectrique, la polarisation électrique peut être approchée au premier ordre à partir de la polarisation rémanente comme suit [II-12]:

$$D(E) = P_3(E) \cong P_{r,3} + e_{33} E_3 \quad (\text{II-49})$$

Le champ de déplacement électrique induit par une variation de température ΔT peut alors être calculé de la manière suivante :

$$\Delta D_3 = \frac{\partial P_3(E)}{\partial T} \Delta T \cong \frac{\partial P_{r,3}}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial e_{33}}{\partial T} E_3 \Delta T = p \Delta T + \frac{\partial e_{33}}{\partial T} E_3 \Delta T \quad (\text{II-50})$$

Le premier terme de cette relation traduit l'effet pyroélectrique direct car il met en jeu la polarisation rémanente P_r et le coefficient de pyroélectricité p . La pyroélectricité due au second terme, qui est le terme de correction de P_r , est dite pyroélectricité induite. Dans le cas présent, étant donnés les faibles variations de température dans les matériaux irradiés par micro-ondes et la linéarité des propriétés électriques et mécaniques des matériaux étudiés, il est possible de négliger l'effet de la pyroélectricité induite.

Nous pouvons à présent introduire dans la loi de comportement des matériaux piézoélectriques (II-1) l'effet thermoélastique et pyroélectrique [II-13]:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = c_{\alpha\beta}^E \varepsilon_\beta - d_{i\beta} c_{\beta\alpha}^E E_i - c_{\alpha\beta}^E \alpha_\beta^E \Delta T \\ D_i = e_{ij}^\varepsilon E_j + d_{i\beta} c_{\beta\alpha}^E \varepsilon_\alpha - p_i^\varepsilon \Delta T \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6 \quad (\text{II-51})$$

où α_β^E et p_i^ε sont les éléments respectifs du tenseur de dilatation thermique et du vecteur de coefficient pyroélectrique. Les autres notations sont les mêmes que ceux

qui sont définis dans l'équation (II-1). Dans le cas unidimensionnel, l'équation (II-51) se simplifie et devient :

$$\begin{cases} \sigma_z = Y_{33}^E \varepsilon_z - d_{33} Y_{33}^E E_z - Y_{33}^E \alpha_3^E \Delta T \\ D_z = e_{33}^E E_z + d_{33} Y_{33}^E \varepsilon_z - p_3^E \Delta T \end{cases} \quad (\text{II-52})$$

Comme en piézoélectricité seule, la réponse d'un barreau pyroélectrique dépend des conditions électriques aux limites sur ses électrodes. En effet, les conditions électriques (II-8) s'appliquent selon qu'il s'agisse d'un montage en «circuit fermé» ou en «circuit ouvert».

II.8.1.1 Circuit fermé

En «circuit fermé», le champ électrique étant nul, il n'existe pas de couplage électromécanique. L'effet de la pyroélectricité sur la réponse mécanique du matériau soumis à une variation de température ΔT n'est donc pas visible. L'équation du mouvement fait apparaître le terme source thermoélastique de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} + (S^E \omega)^2 \varepsilon_z = \alpha_3^E \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} \quad (\text{II-53})$$

II.8.1.2 Circuit ouvert

Dans le cas du «circuit ouvert», le déplacement électrique est uniforme. La prise en compte de cette condition dans les équations (II-52) et leur combinaison avec l'équation d'équilibre (II-3) permet d'obtenir l'équation du mouvement d'un barreau pyroélectrique soumis à une variation de température ΔT :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} + (S^D \omega)^2 \varepsilon_z = \left[\frac{d_{33}}{e_{33}^\sigma} p_3^\varepsilon + \frac{e_{33}^\varepsilon}{e_{33}^\sigma} \alpha_3^E \right] \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} \quad (\text{II-54})$$

Dans cette équation, la permittivité à contrainte constante e_{33}^σ est donnée par l'expression (II-40). Il apparaît donc clairement que l'effet de la pyroélectricité sur la réponse mécanique d'un barreau en «circuit ouvert» intervient sur le coefficient de dilatation thermique. En effet, ce dernier est modifié d'une quantité égale à $d_{33} p_3^\varepsilon / e_{33}^\sigma$ par rapport au coefficient de dilatation thermique lié à l'effet thermoélastique dans un matériau piézoélectrique en «circuit ouvert» et égal à $e_{33}^\varepsilon \alpha_3^E / e_{33}^\sigma$ (voir les équations (II-10) et (II-57)).

Il est par ailleurs intéressant de noter que la lenteur des ondes acoustiques dans un barreau pyroélectrique en «circuit ouvert» n'est pas modifiée par la pyroélectricité du matériau. Par conséquent, les fréquences propres de vibration d'un barreau

pyroélectrique sont totalement prédites par le modèle précédemment développé (II-28). L'exploitation de la vibration d'un barreau unique soumis à une élévation de température provoquée par l'absorption de radiations micro-ondes, ne permet donc pas de déterminer lequel des effets thermoélastique ou pyroélectrique est prépondérant dans le processus de génération acoustique.

II.8.2 Pyroélectricité et génération acoustique par micro-ondes

Par analogie avec le raisonnement qui a servi à déterminer l'origine thermique de la génération acoustique dans les matériaux piézoélectriques soumis à des radiations micro-ondes, la vibration d'un barreau composé de deux barreaux en céramique ferroélectrique (PZT) servira à déterminer l'effet de la pyroélectricité sur la génération acoustique par micro-ondes.

Les équations (II-49) et (II-51) montrent que l'orientation du champ électrique résultant d'une variation de température est liée à la direction de la polarisation rémanente du matériau qui, pour de petites variations de la température, ne change pas de sens. Pour un barreau composé et excité en «circuit ouvert» par des radiations micro-ondes, deux orientation relatives des polarisations sont possibles (voir les configurations (c) et (d) de la Figure II-7). Supposons donc que la génération acoustique par effet pyroélectrique est prépondérante dans le barreau composé. Pour des polarisations rémanentes orientées selon la même direction, configuration (c), les deux barreaux constitutifs subissent la même contrainte source donnée par :

$$\sigma_0^{(1)} = \sigma_0^{(2)} = \sigma_0 = -Y_{33}^E \left(\frac{d_{33}}{e_{33}^\sigma} p_3^\varepsilon + \frac{e_{33}^\varepsilon}{e_{33}^\sigma} \alpha_3^E \right) \Delta T \quad (\text{II-55})$$

Dans ces conditions, comme pour l'hypothèse de génération piézoélectrique formulée au §II.7, la génération acoustique s'effectue aux interfaces libres du barreau de manière symétrique selon le schéma de génération représenté sur la Figure II-8 (a).

Par ailleurs, dans le cas où les barreaux constitutifs présentent des polarisation rémanentes opposées, selon la configuration (d) de la Figure II-7, les contraintes sources dans les deux barreaux sont différentes. En effet tenant compte des remarques précédentes, les contraintes $\sigma_0^{(1)}$ et $\sigma_0^{(2)}$ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(1)} &= -Y_{33}^E \left(+ \frac{d_{33}}{e_{33}^\sigma} p_3^\varepsilon + \frac{e_{33}^\varepsilon}{e_{33}^\sigma} \alpha_3^E \right) \Delta T \\ \sigma_0^{(2)} &= -Y_{33}^E \left(- \frac{d_{33}}{e_{33}^\sigma} p_3^\varepsilon + \frac{e_{33}^\varepsilon}{e_{33}^\sigma} \alpha_3^E \right) \Delta T \end{aligned} \quad (\text{II-56})$$

Les intensités des contraintes d'excitation étant différentes dans les deux barreaux, la symétrie de génération propre au cas de barreaux identiquement orientés n'est plus observable. Le mode de génération dans ce cas est comparable à la génération dans un barreau piézoélectrique composé de deux barreaux dont les polarisations sont opposées. Comme représenté par le digramme de Lagrange sur la Figure II-8 (b), l'interface centrale du barreau subit un mouvement qui modifie la fréquence propre du barreau composé. Par conséquent, si la part de la génération acoustique par micro-ondes due à la pyroélectricité était importante, nous aurions dû observer dans le Tableau II-6 une forte dépendance de la fréquence propre principale du barreau composé testé expérimentalement par rapport à l'orientation des polarisations des barreaux constitutifs. Or, les différences observées dans le Tableau II-6 entre les prédictions théoriques des fréquences propres et les mesures dans les deux configurations testées (polarisations de même sens et opposées, pour les modes d'excitation électrique et par micro-ondes), sont dues au fait que l'excitation par micro-ondes n'est pas parfaitement uniforme ce qui engendre une faible génération à l'interface centrale du barreau composé. Dans le cas présent, il est donc possible de conclure que la pyroélectricité a un effet négligeable sur la réponse acoustique des barreaux de céramique ferroélectrique excités par micro-ondes pulsées. Physiquement, les micro-ondes perturbent les polarisations des domaines présents dans la céramique piézoélectrique, à la fréquence de 9,41 GHz, en engendrant leurs mouvements. En raison de la friction microscopique qui se produit dans la céramique, la température du matériau croît et, par dilatation thermique, des ondes acoustiques sont générées aux interfaces de l'éprouvette. Le terme source thermoélastique dans l'équation différentielle générale régissant le mouvement d'un barreau de céramique piézoélectrique dépend, tout de même, des conditions électriques aux limites. En supposant une élévation de température $\Delta T(z, \omega)$ sur la longueur du barreau, il apparaît dans l'équation générale (II-12), selon qu'il s'agisse d'un montage en «circuit fermé» ou en «circuit ouvert», les seconds membres suivants :

$$\begin{cases} \alpha_3 \frac{\partial^2 \Delta T(z, \omega)}{\partial z^2} & \text{en «circuit fermé»} \\ \frac{Y_{33}^E}{Y_{33}^D} \alpha_3 \frac{\partial^2 \Delta T(z, \omega)}{\partial z^2} = \frac{e_{33}^e}{e_{33}^\sigma} \alpha_3 \frac{\partial^2 \Delta T(z, \omega)}{\partial z^2} & \text{en «circuit ouvert»} \end{cases} \quad (\text{II-57})$$

où α_3 est le coefficient de dilatation thermique du matériau piézoélectrique dans la direction longitudinale.

II.9 Conclusions

Partant des équations générales de la piézoélectricité, un modèle unidimensionnel, utilisant la méthode des vecteurs d'état, a été développé pour la prédiction de la génération acoustique dans les barreaux piézoélectriques soumis à une source d'excitation quelconque. La modélisation a prédit une dépendance de la rigidité apparente des matériaux piézoélectriques vis-à-vis des conditions électriques imposées aux limites des structures modélisées. Le dispositif expérimental mis en place, et qui permet d'exciter des échantillons électriquement ou par des radiations micro-ondes, a confirmé la dépendance de la rigidité et, par suite, de la vibration des structures piézoélectriques vis-à-vis des conditions aux limites électriques indépendamment du mode de génération utilisé.

Le modèle unidimensionnel a servi à développer une procédure de caractérisation des propriétés mécaniques et piézoélectriques de barreaux en PZT. Cette procédure a été validée sur le cas de barreaux dont les propriétés sont fournies par le fabricant, et a ensuite servi à caractériser une céramique piézoélectrique de propriétés *a priori* inconnues. La connaissance de ces propriétés a permis de valider le modèle de génération acoustique dans les barreaux élancés en comparant les réponses théoriques et expérimentales.

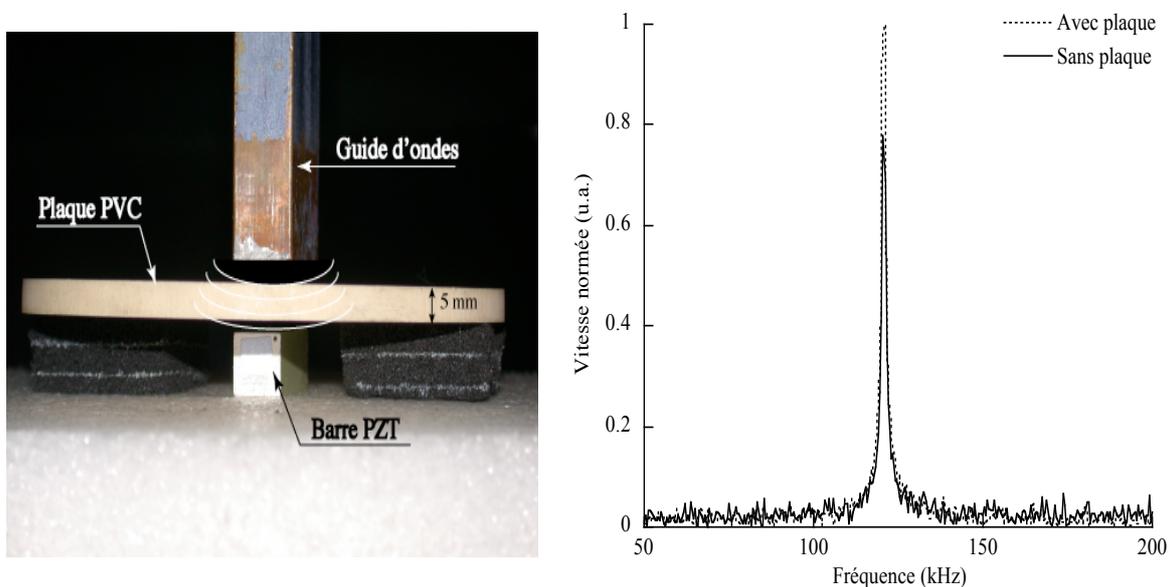


Figure II-11 *Comparaison des spectres de vitesse d'un barreau piézoélectrique obtenus par excitation micro-ondes au travers d'une plaque en PVC et sans obstacle*

L'utilisation de la modélisation par la méthode des vecteurs d'état et du dispositif expérimental a permis de mettre au point un essai simple qui met en évidence la nature thermoélastique de la génération d'ondes acoustiques dans les matériaux piézoélectriques irradiés par micro-ondes. L'absorption des micro-ondes par le matériau piézoélectrique excite les dipôles qui constituent sa microstructure. Il s'en suit, par frottement interne, une augmentation rapide de la température et, par dilatation thermique, la génération et la propagation d'une onde mécanique.

Enfin, la Figure II-11 montre les réponses spectrales d'un barreau piézoélectrique excité par micro-ondes pulsées dans deux configurations. Dans le premier cas, les ondes électromagnétiques se propagent librement dans l'air pour ensuite être absorbées par le barreau. Dans la seconde configuration, les ondes micro-ondes traversent une plaque en PVC avant d'atteindre le composant à exciter. La comparaison des réponses expérimentales montre, malgré une légère chute d'amplitude entre les deux réponses, qu'il est possible d'exciter des composants piézoélectriques via des matériaux qui ne font que partiellement écran aux ondes électromagnétiques. Il est donc tout à fait possible d'envisager l'utilisation de la technique de génération par micro-ondes pour exciter à distance des composants piézoélectriques enfouis dans des structures, dans le but de générer des ultrasons pour le contrôle et/ou l'inspection non-destructifs des structures. Cette technique pourrait par exemple être appliquée à l'inspection en temps réel des structures des radomes d'avions qui disposent de radars générant des micro-ondes et qui peuvent contenir des composants piézoélectriques à leur surface ou immergés. Enfin, la présente étude concerne aussi les transducteurs piézoélectriques soumis à des champs micro-ondes intenses. En effet, si l'on veut simuler leur comportement mécanique, il est important de savoir qu'une génération acoustique peut être provoquée par des effets thermoélastiques.

II.10 Bibliographie

- [II-1] B. Jaffe, W. Cook, H. Jaffe, “Piezoelectric ceramics”. London : Academic Press, 1971.
- [II-2] H.F. Tiersten, “Linear piezoelectric plate vibrations”, Plenum, New York, 1969.
- [II-3] B.A. Auld, “Acoustic fields and waves in solids”, volume 1 (2nd Edit.), Krieger, Malabar, Florida, 1990.
- [II-4] B.A. Auld, “Wave propagation and resonance in piezoelectric materials”, Journal of Acoustical Society of America, Vol. 70, No. 6, pp. 1577-1585, 1981.
- [II-5] O. Guillon, “Caractérisation électromécanique et modélisation de céramiques ferroélectriques de type PZT”, PHD thesis, Université de Franche-Comté, 2003.
- [II-6] D. Royer et E. Dieulesaint, “Ondes élastiques dans les solides” (Tome 1), Masson, Paris, 1996.
- [II-7] T. Fett and D. Munz, “Measurement of Young’s moduli for lead zirconate titanate (PZT) ceramics”, Journal of Testing and Evaluation, JTEVA, Vol. 28, No. 1, January 2000, pp. 27-35.
- [II-8] T.L. Jordan, Z. Ounaies, Piezoelectric Ceramics Characterization, NASA/ICASE Report, NASA/CR-2001-211225, ICASE Report No. 2001-28, 2001.
- [II-9] IEEE Standard on Piezoelectricity, ANSI/IEEE Std 176-1978.
- [II-10] FERROPERM Piezoceramics – Piezoelectric material guide (Website: www.ferroperm-piezo.com).
- [II-11] E. Boucher, “Elaboration et caractérisation de céramiques PZT bi-substitués et modélisation non-linéaire de leur comportement en contrainte et en champ électrique”, thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (2004).
- [II-12] P. Muralt, “Pyroelectricity”, Encyclopedia of Condensed Matter Physics, 2005, pp. 441-448.

[II-13] J.Y. Li, “The effective pyroelectric and thermal expansion coefficients of ferroelectric ceramics”, *Mechanics of Materials* 36, 2004, pp. 949-958.

[II-14] A.R. Hadj Henni, C. Bacon and B. Hosten, “Acoustic generation in piezoelectric materials by microwave excitation”, *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 118, No. 4, pp. 2281–2288, (2005).

III Vibration dans le plan des plaques elliptiques minces soumises à un rayonnement de micro-ondes pulsées

Résumé

La technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées est ici appliquée à l'étude de la vibration dans le plan de plaques elliptiques pleines et trouées. Un modèle théorique semi-analytique est développé pour prédire le champ de déplacement plan dans des plaques elliptiques minces soumises à une élévation brusque et uniforme de la température. Le matériau constituant les plaques est considéré comme étant isotrope viscoélastique. Les équations d'ondes qui gouvernent les potentiels de déplacement de Helmholtz sont résolues analytiquement dans un système cylindrique de coordonnées elliptiques au moyen de séries infinies de fonctions de Mathieu angulaires et radiales. Le champ de déplacement est enfin obtenu en tenant compte des conditions mécaniques aux limites des plaques étudiées. La comparaison des réponses théoriques des plaques elliptiques pleines ou trouées avec les résultats expérimentaux permet de valider le modèle développé et, enfin, de l'appliquer à l'étude paramétrique de l'influence de la géométrie sur la vibration des plaques elliptiques pleines.

III.1 Introduction	III-3
III.2 Modélisation	III-4
III.2.1 Position du problème et équations d'ondes	III-5
III.2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques elliptiques	III-9
III.2.3 Résolution des équations différentielles dans le cas d'une plaque elliptique trouée d'une ellipse homofocale	III-12
III.2.3.1 Formes des potentiels	III-12
III.2.3.2 Conditions aux limites	III-15
III.2.4 Résolution des équations différentielles pour une plaque elliptique pleine	III-17
III.2.5 Discrétisation et résolution du problème	III-19
III.3 Echantillons testés pour la validation des modèles	III-20
III.4 Validation du modèle théorique et résultats expérimentaux	III-22
III.5 Conclusions	III-30
III.6 Bibliographie	III-31

III.1 Introduction

Depuis les travaux de Mathieu [III-1] au 19^{ème} siècle sur la vibration des membranes elliptiques, un grand nombre de recherches ont porté sur les problèmes de vibration et de propagation acoustique dans les structures elliptiques. En effet, de nombreux problèmes mettant en jeu des champs scalaires gouvernés par l'équation différentielle des ondes dans des repères elliptiques ont été traités dans la littérature [III-2]-[III-3]. Le cas de la vibration latérale des plaques elliptiques (déplacement hors du plan de la plaque sous différentes conditions aux limites) a été modélisé analytiquement en résolvant les équations de Mathieu [III-4]-[III-6] ou numériquement en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz [III-7]. Par ailleurs, les problèmes de propagation et de diffraction des ondes élastiques dans et par les cylindres elliptiques infinis ont été abordés depuis les travaux de Barakat [III-8] et Wong et al. [III-9]. Contrairement aux problèmes énumérés ci-dessus, le problème de vibration des plaques elliptiques dans leur plan n'a, à notre connaissance, pas été abordé dans la littérature.

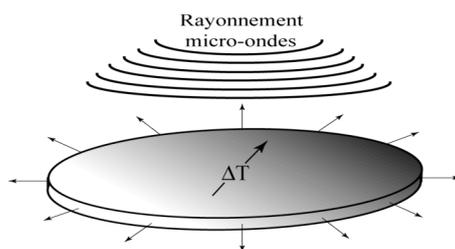


Figure III-1 *Principe de la génération acoustique dans les plaques irradiées par micro-ondes*

L'objectif du présent chapitre est d'étudier théoriquement et expérimentalement la vibration dans le plan des plaques elliptiques excitées par des radiations uniformes de micro-ondes pulsées [III-10]. Un modèle semi-analytique sera développé pour prédire les vibrations des plaques minces elliptiques, pleines ou trouées d'ellipses homofocales, soumises à une élévation rapide et uniforme de la température. Nous ne nous intéresserons pas au phénomène de conversion de l'énergie électromagnétique en énergie thermique et supposerons donc que l'évolution de l'augmentation de la température dans le matériau est connue. Etant donnée la géométrie elliptique des plaques étudiées, nous adopterons un système cylindrique de coordonnées elliptiques [III-11]-[III-12] afin de formuler et de résoudre le problème de vibration posé. Le comportement mécanique des plaques sera modélisé sous l'hypothèse d'un état plan de contraintes. Cette hypothèse sera justifiée par la convergence de la réponse d'une plaque tridimensionnelle, modélisée par la méthode des éléments finis, vers celle d'une plaque mince vibrant sous l'hypothèse des contraintes planes. Le matériau

constituant la plaque étant considéré isotrope et viscoélastique, l'équation aux déplacements de Navier que l'on obtient, adaptée aux cas des plaques [III-12]-[III-14], sera résolue en appliquant au champ de déplacement une décomposition de Helmholtz en potentiels. Les solutions des équations d'ondes obtenues par cette décomposition seront écrites, dans le système de coordonnées elliptiques, comme des séries infinies de produits de fonctions de Mathieu ordinaires (angulaires) et modifiées (radiales) [III-16]-[III-17]. L'utilisation des fonctions de Mathieu n'étant pas répandue, elles seront brièvement présentées au cours des développements théoriques. En tenant compte des conditions mécaniques aux limites et en appliquant une discrétisation angulaire aux frontières des plaques étudiées, le problème sera réduit à la résolution d'un système linéaire d'équations algébriques. La comparaison des réponses analytiques avec les résultats expérimentaux et numériques (MEF) permettra de valider, sous certaines conditions, la modélisation des vibrations des plaques minces elliptiques. Le modèle semi-analytique servira ensuite à étudier l'effet de l'ellipticité d'une plaque pleine sur quelques-unes de ses fréquences propres. Cette étude paramétrique servira notamment à dégager, en fin de chapitre, les applications possibles du présent travail. Enfin, l'extension du modèle au cas des cylindres elliptiques infinis, modélisés mécaniquement sous l'hypothèse d'un état plan de déformations, sera abordée lors des développements théoriques.

III.2 Modélisation

Le matériau étant supposé viscoélastique linéaire, sa loi de comportement mécanique, exprimée dans le domaine temporel, fait appel à des produits de convolution qui se transforment en produit simple dans le domaine fréquentiel. Dans la suite de ce travail, les quantités seront exprimées dans le domaine fréquentiel par transformation de Fourier des quantités exprimées dans le domaine temporel. Toute exception sera explicitement mentionnée. De plus, par soucis de simplification des écritures, la pulsation angulaire ω , dont dépendent tous les champs scalaires et vectoriels exprimés dans le domaine fréquentiel, n'apparaît pas explicitement dans les expressions du développement théorique. D'autre part, avant d'être projetée dans le système de coordonnées elliptiques, l'équation du mouvement (équation de Navier adaptée au cas des plaques minces) sera d'abord établie en écriture tensorielle car elle servira aussi, dans le chapitre IV, à modéliser la vibration dans le plan des plaques minces circulaires.

III.2.1 Position du problème et équations d'ondes

L'objectif du développement qui va suivre est de modéliser la vibration dans le plan d'une plaque mince elliptique pleine ou trouée d'une ellipse homofocale, soumise à l'effet d'une augmentation rapide et uniforme de la température au sein du matériau la constituant. L'étude des vibrations se fera à travers la détermination du champ de déplacement dans le plan de la plaque modélisée.

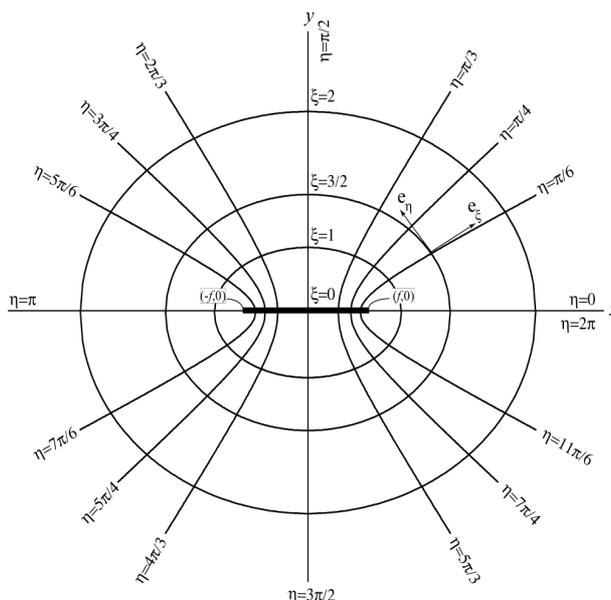


Figure III-2 *Système de coordonnées cylindrique elliptique*

En raison de la géométrie des plaques étudiées, un repère cylindrique elliptique orthogonal est adopté (voir Figure III-2). Un point quelconque du disque est repéré, dans le repère $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_z)$, par l'intersection de l'ellipse de coordonnée ξ , désignant la position radiale, de l'hyperbole de coordonnée η , désignant la position angulaire et perpendiculaire en tout point aux ellipses qu'elle traverse, et enfin de la droite de coordonnée z . Ces coordonnées sont liées aux coordonnées cartésiennes x , y et z par les relations suivantes [III-11] :

$$x = f \cosh \xi \cos \eta, \quad y = f \sinh \xi \sin \eta \quad \text{et} \quad z = z \quad (\text{III-1})$$

où $2f$ est la distance interfocale identique pour toutes les ellipses et les hyperboles définies dans un même repère $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_z)$. Les dimensions caractéristiques a et b d'une hyperbole ou d'une ellipse quelconque dans le repère $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_z)$ sont liées à la demi-distance interfocale par la relation $f^2 = a^2 - b^2$ (dans le cas d'une ellipse, a et b correspondent respectivement au petit demi-axe et au grand demi-axe de l'ellipse). L'excentricité d'une ellipse, qui caractérise son ellipticité, est définie comme étant le rapport de la distance focale et de la dimension du grand demi-axe de l'ellipse

$e = f/a$ (le cas limite d'un cercle est donc caractérisé par une excentricité nulle). Enfin, les facteurs d'échelle du système de coordonnées elliptiques sont donnés par [III-11] :

$$h_1^2 = h_2^2 = h^2 = f^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) \text{ et } h_3^2 = 1 \quad (\text{III-2})$$

Le champ de déplacement particulière d'un point matériel dans une plaque elliptique quelconque (pleine ou trouée) a, dans le repère cylindrique elliptique, la forme vectorielle suivante :

$$\left(U_\xi(\xi, \eta) \quad U_\eta(\xi, \eta) \quad U_z(\xi, \eta, z) \right)^T \quad (\text{III-3})$$

Étant donné que la plaque mince vibre dans son plan, il est possible d'adopter l'hypothèse d'un état plan de contraintes ($\sigma_{zz} = 0$) et, par suite, de ne s'intéresser qu'aux composantes du déplacement contenues dans le plan de vibration de la plaque. Cette hypothèse sera justifiée au §III.4 en s'appuyant sur des simulations tridimensionnelles par la méthode des éléments finis et en tenant compte de la faible atténuation de la température dans l'épaisseur des plaques testées expérimentalement. L'objectif de la modélisation étant de calculer le champ de déplacement \vec{U} dans le plan de la plaque, il est possible de définir ce dernier comme suit :

$$\vec{U} = \left(U_\xi(\xi, \eta) \quad U_\eta(\xi, \eta) \right)^T \quad (\text{III-4})$$

Sous l'hypothèse des contraintes planes, il est à noter que la composante transverse U_z du champ de déplacement, donné dans l'équation (III-3), existe du fait de l'effet Poisson et de l'expansion thermique du matériau. Ce déplacement, qui n'apparaît pas dans les développements à venir, est pris en compte dans le calcul des coefficients matériels de l'équation (III-5) [III-13].

Afin d'établir l'équation du mouvement d'une plaque mince sous l'hypothèse d'un état plan de contraintes, il est nécessaire d'écrire la loi de comportement du matériau constituant la plaque. Le matériau est supposé être viscoélastique linéaire et soumis, dans le cas général, à une brusque élévation de la température $\Delta T(\xi, \eta)$ répartie de manière symétrique par rapport à l'axe $\eta = 0$. La condition restrictive sur l'uniformité de l'excitation thermique sera justifiée et explicitée plus loin. Sous l'hypothèse d'un état plan de contraintes, les contraintes dans le plan ($\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$) de la plaque s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi} = Q_{11}\varepsilon_{\xi\xi} + Q_{12}\varepsilon_{\eta\eta} - B_1\Delta T(\xi, \eta) \\ \sigma_{\eta\eta} = Q_{12}\varepsilon_{\xi\xi} + Q_{22}\varepsilon_{\eta\eta} - B_2\Delta T(\xi, \eta) \\ \sigma_{\xi\theta} = 2Q_{66}\varepsilon_{\xi\theta} \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Les coefficients Q_{ij} de la matrice de rigidité réduite et les constantes B_i sont définis par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad B_1 = B_2 = \frac{E}{1-\nu}\alpha \quad (\text{III-6})$$

où E , ν et α désignent respectivement le module de Young complexe, le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique du matériau. Les coefficients Q_{ij} et B_i sont calculés en tenant compte de l'hypothèse d'un état plan de contraintes qui impose à la composante σ_{zz} de la matrice des contraintes d'être nulle.

De plus, sous l'hypothèse d'isotropie, le matériau obéit à la loi de comportement suivante :

$$\bar{\sigma} = Q_{12}(\text{div}\bar{U})\bar{I} + (Q_{11} - Q_{12})\bar{\varepsilon} - B_1\Delta T(\xi, \eta)\bar{I} \quad (\text{III-7})$$

où $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ sont respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations donnés par :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\eta\eta} \end{pmatrix} \quad (\text{III-8})$$

$$2\bar{\varepsilon} = \overline{\text{grad}\bar{U}} + (\overline{\text{grad}\bar{U}})^T \quad (\text{III-9})$$

Il est intéressant de noter que pour la résolution du problème de vibration d'un cylindre elliptique infini et excité de manière uniforme selon son axe z , l'hypothèse d'un état plan de contraintes est remplacée par l'hypothèse d'un état plan de déformations [III-12]-[III-14]. L'équation (III-5) gardera la même forme car il suffira de remplacer les coefficients Q_{ij} , donnés en (III-6), par les coefficients associés C_{ij} du tenseur de rigidité complexe $[C]$. La méthode de résolution du problème de vibration des plaques elliptiques qui va suivre pourra être utilisée pour la modélisation de la vibration des cylindres elliptiques pleins ou creux en changeant uniquement les coefficients matériels de l'équation (III-5).

La combinaison de la loi de comportement (III-7), de la relation cinématique (III-9) et de l'équation d'équilibre local,

$$\overline{\text{div}\sigma} = -\rho\omega^2\bar{U} \quad (\text{III-10})$$

donne l'équation différentielle aux déplacements de Navier adaptée au cas des plaques minces :

$$\frac{Q_{11} - Q_{12}}{2} \Delta \bar{U} + \frac{Q_{11} + Q_{12}}{2} \overline{grad}(div \bar{U}) + \rho \omega^2 \bar{U} = B_1 \overline{grad}(\Delta T(\omega, \xi, \eta)) \quad (\text{III-11})$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme équivalente suivante :

$$Q_{11} \overline{grad}(div \bar{U}) - \frac{Q_{11} - Q_{12}}{2} \overline{rot}(\overline{rot} \bar{U}) + \rho \omega^2 \bar{U} = B_1 \overline{grad}(\Delta T(\omega, \xi, \eta)) \quad (\text{III-12})$$

L'équation différentielle (III-12) n'est pas homogène car elle possède un second membre constitué du gradient de l'augmentation de température dans le matériau. La résolution complète du problème nécessite donc la connaissance du champ de température. Or, celle-ci reste difficile à modéliser car l'augmentation de la température dépend directement du profil spatial de l'excitation micro-ondes utilisée expérimentalement. Par conséquent, dans la suite du développement, il ne sera question que d'une augmentation uniforme de la température ($\Delta T(\xi, \eta) = \Delta T$) au sein du matériau pour la détermination du champ de déplacement dans le plan de la plaque. Le gradient de la fonction $\Delta T(\xi, \eta)$ est alors nul et l'équation (III-12) devient homogène et analytiquement soluble :

$$Q_{11} \overline{grad}(div \bar{U}) - \frac{Q_{11} - Q_{12}}{2} \overline{rot}(\overline{rot} \bar{U}) + \rho \omega^2 \bar{U} = 0 \quad (\text{III-13})$$

Le champ de déplacement, solution de l'équation différentielle homogène de Navier (III-13), peut subir une décomposition de Helmholtz en potentiels scalaire $\varphi(\xi, \eta)$ et vectoriel $\overline{\psi}(\xi, \eta)$ comme suit [III-12], [III-14] :

$$\bar{U} = \overline{grad} \varphi(\xi, \eta) + \overline{rot} \overline{\psi}(\xi, \eta) \quad (\text{III-14})$$

Le mouvement étant indépendant de la coordonnée z (vibration d'une plaque uniformément sollicitée dans le plan $(\overline{e}_\xi, \overline{e}_\eta)$) et tenant compte de l'action de l'opérateur rotationnel (\overline{rot}) sur les vecteurs, nous pouvons poser :

$$\overline{\psi} = \left(0 \quad 0 \quad \psi(\xi, \eta) \right)^T \quad (\text{III-15})$$

La contribution du potentiel vectoriel au déplacement dans le plan de la plaque aura alors, en coordonnées elliptiques, la forme suivante :

$$\overline{rot} \overline{\psi} = \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad 0 \right)^T \quad (\text{III-16})$$

Par ailleurs, en tenant compte de l'expression (III-15) du potentiel vectoriel et de l'action de l'opérateur Laplacien (∇^2) sur les vecteurs, il apparaît que :

$$\nabla^2 \vec{\psi} = (0 \quad 0 \quad \nabla^2 \psi(\xi, \eta))^T \quad (\text{III-17})$$

Les potentiels de la décomposition de Helmholtz du déplacement vérifient les équations d'ondes suivantes :

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + k_L^2 \varphi = 0 \\ \nabla^2 \vec{\psi} + k_T^2 \vec{\psi} = 0 \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

où $k_L = \frac{\omega}{c_L}$, $k_T = \frac{\omega}{c_T}$ et $c_L^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$, $c_T^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$ sont respectivement, les nombres d'ondes longitudinal et transversal et les vitesses de propagation longitudinale et transversale des ondes acoustiques dans le matériau constituant la plaque.

Enfin, le champ de déplacement (III-14) s'écrit en coordonnées elliptiques comme suit [III-13]:

$$\begin{cases} U_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \\ U_\eta(\xi, \eta) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \end{cases} \quad (\text{III-19})$$

Les équations différentielles de Helmholtz (III-18) sont solubles dans le système de coordonnées elliptiques par la technique de séparation des variables [III-12], [III-14].

III.2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques elliptiques

Les potentiels scalaire φ et vectoriel $\vec{\psi}$ sont des fonctions des variables spatiales ξ et η . En coordonnées elliptiques, l'opérateur de Laplace s'écrit :

$$\nabla^2 = \frac{1}{f^2(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (\text{III-20})$$

Dans le système de coordonnées elliptiques, les équations de Helmholtz (III-18) deviennent donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^2(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) + k_L^2 \varphi &= 0 \\ \frac{1}{f^2(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) + k_T^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

L'équation de Helmholtz étant séparable dans le système de coordonnées orthogonales elliptiques [III-12] [III-16]-[III-17], il est possible d'appliquer la technique de séparation des variables aux fonctions $\varphi(\xi, \eta)$ et $\psi(\xi, \eta)$ en écrivant :

$$\begin{cases} \varphi(\xi, \eta) = \varphi_\xi(\xi) \varphi_\eta(\eta) \\ \psi(\xi, \eta) = \psi_\xi(\xi) \psi_\eta(\eta) \end{cases} \quad (\text{III-22})$$

où $\varphi_\xi(\xi)$ et $\psi_\xi(\xi)$ sont les parties radiales des potentiels φ et ψ qui ne dépendent que de la variable ξ . Les fonctions $\varphi_\eta(\eta)$ et $\psi_\eta(\eta)$ sont les parties angulaires des potentiels φ et ψ qui ne sont fonction que de la variable géométrique η .

La réécriture des équations d'ondes (III-21) en faisant apparaître les fonctions $\varphi_\xi(\xi)$, $\varphi_\eta(\eta)$, $\psi_\xi(\xi)$ et $\psi_\eta(\eta)$, et la division respective des équations obtenues par les produits $(\varphi_\xi \varphi_\eta)$ et $(\psi_\xi \psi_\eta)$ permet d'obtenir :

$$\left(\frac{1}{\varphi_\xi} \frac{\partial^2 \varphi_\xi}{\partial \xi^2} + f^2 k_L^2 \sinh^2 \xi \right) + \left(\frac{1}{\varphi_\eta} \frac{\partial^2 \varphi_\eta}{\partial \eta^2} + f^2 k_L^2 \sin^2 \eta \right) = 0 \quad (\text{III-23})$$

$$\left(\frac{1}{\psi_\xi} \frac{\partial^2 \psi_\xi}{\partial \xi^2} + f^2 k_T^2 \sinh^2 \xi \right) + \left(\frac{1}{\psi_\eta} \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial \eta^2} + f^2 k_T^2 \sin^2 \eta \right) = 0 \quad (\text{III-24})$$

Les membres de l'équation (III-23) dépendent de variables spatiales différentes, il existe alors une constante c_φ telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_\xi}{\partial \xi^2} - (c_\varphi - f^2 k_L^2 \sinh^2 \xi) \varphi_\xi = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_\eta}{\partial \eta^2} + (c_\varphi + f^2 k_L^2 \sin^2 \eta) \varphi_\eta = 0 \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

En appelant c_ψ la constante de séparation associé au potentiel $\psi(\xi, \eta)$, et en se rappelant les relations analytiques suivantes,

$$\sinh^2 \xi = \frac{1}{2}(\cosh(2\xi) - 1) \quad \text{et} \quad \sin^2 \eta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\eta)) \quad (\text{III-26})$$

il est alors possible de réécrire les équations différentielles qui régissent les potentiels scalaire et vectoriel comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_\xi}{\partial \xi^2} - \left((c_\varphi + \frac{1}{2} f^2 k_L^2) - \frac{1}{2} f^2 k_L^2 \cosh(2\xi) \right) \varphi_\xi = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_\eta}{\partial \eta^2} + \left((c_\varphi + \frac{1}{2} f^2 k_L^2) - \frac{1}{2} f^2 k_L^2 \cos(2\eta) \right) \varphi_\eta = 0 \end{cases} \quad (\text{III-27})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_\xi}{\partial \xi^2} - \left((c_\psi + \frac{1}{2} f^2 k_T^2) - \frac{1}{2} f^2 k_T^2 \cosh(2\xi) \right) \psi_\xi = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial \eta^2} + \left((c_\psi + \frac{1}{2} f^2 k_T^2) - \frac{1}{2} f^2 k_T^2 \cos(2\eta) \right) \psi_\eta = 0 \end{cases} \quad (\text{III-28})$$

En définissant les quantités suivantes,

$$\alpha_L = c_\varphi + \frac{1}{2} f^2 k_L^2, \quad \alpha_T = c_\psi + \frac{1}{2} f^2 k_T^2, \quad q_L = \frac{1}{4} f^2 k_L^2 \quad \text{et} \quad q_T = \frac{1}{4} f^2 k_T^2 \quad (\text{III-29})$$

les équations (III-27) et (III-28) se simplifient pour devenir,

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_\eta}{d\eta^2} + [\alpha_L - 2q_L \cos(2\eta)] \varphi_\eta = 0 \\ \frac{d^2 \varphi_\xi}{d\xi^2} - [\alpha_L - 2q_L \cosh(2\xi)] \varphi_\xi = 0 \end{cases} \quad (\text{III-30})$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_\eta}{d\eta^2} + [\alpha_T - 2q_T \cos(2\eta)] \psi_\eta = 0 \\ \frac{d^2 \psi_\xi}{d\xi^2} - [\alpha_T - 2q_T \cosh(2\xi)] \psi_\xi = 0 \end{cases} \quad (\text{III-31})$$

Les équations différentielles en η dans les systèmes (III-30) et (III-31) sont appelées équations de Mathieu angulaires (ou ordinaires), et les équations en ξ sont dites équations de Mathieu radiales (ou modifiées) [III-16]-[III-17]. Les solutions de ces équations sont, respectivement, les fonctions de Mathieu angulaires (ou ordinaires) et les fonctions de Mathieu radiales (ou modifiées). Le potentiel $\varphi(\xi, \eta)$ est le produit des fonctions de Mathieu radiale et angulaire solutions des équations (III-30) paramétrés par les mêmes valeurs de α_L et q_L . Il en est de même pour le potentiel $\psi(\xi, \eta)$ qui est le produit des solutions des équations du système (III-31).

Etant donné que la plaque elliptique modélisée est bornée et tenant compte des conditions physiques de la vibration, les parties angulaires des potentiels ne peuvent être que périodiques. Les valeurs de α_L et α_T qui satisfont à cette condition de périodicité sont dites *valeurs caractéristiques* des fonctions de Mathieu [III-16]-[III-17]. Elles constituent des ensembles infinis présentant, d'après l'ordre n de la valeur caractéristique, la propriété de rangement suivante :

$$\alpha_{L_0} < \alpha_{L_1} < \alpha_{L_2} < \dots \text{ et } \alpha_{T_0} < \alpha_{T_1} < \alpha_{T_2} < \dots \quad (\text{III-32})$$

De plus, les valeurs caractéristiques dépendent de la symétrie des fonctions de Mathieu angulaires qui dépend, à son tour, de la physique du problème à traiter. Ainsi, pour des fonctions de Mathieu angulaires symétriques par rapport à l'axe $\eta = 0$ (fonctions paires), les valeurs caractéristiques seront notées α_{L_n} ou α_{T_n} ($n = 0, 1, 2, \dots$). Dans le cas contraire où la physique du problème impose que les fonctions de Mathieu angulaires soient antisymétriques par rapport à $\eta = 0$ (fonctions impaires) les valeurs caractéristiques deviennent β_{L_n} ou β_{T_n} ($n = 1, 2, 3, \dots$). Remarquons enfin que les solutions fondamentales, d'ordre $n = 0$, sont obligatoirement paires et donc symétriques par rapport à l'axe $\eta = 0$.

III.2.3 Résolution des équations différentielles dans le cas d'une plaque elliptique trouée d'une ellipse homofocale

III.2.3.1 Formes des potentiels

Le problème de vibration d'une plaque elliptique trouée d'une ellipse homofocale, dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta)$ sont respectivement ξ_2 et ξ_1 , est résolu dans cette partie. Les hypothèses émises précédemment sur la répartition spatiale uniforme de l'excitation micro-ondes et sur la viscoélasticité du matériau isotrope constituant la plaque sont toujours valables. De plus, la plaque est supposée libre de toute contrainte sur ses frontières intérieure et extérieure.

Dans toute la suite du développement, les fonctions de Mathieu angulaires seront désignées selon les notations utilisées par Stratton [III-17] et Morse et Feshbach [III-12]-[III-15]. $Se_n(q, \eta)$ et $So_n(q, \eta)$ désigneront les fonctions de Mathieu angulaires de première espèce, respectivement paires et impaires d'ordre n , alors que $Fe_n(q, \eta)$ et $Fo_n(q, \eta)$ désigneront les fonctions de Mathieu angulaires de seconde espèce respectivement paires et impaires. Les fonctions de Mathieu radiales de première espèce paires et impaires d'ordre n seront, selon les notations de Stratton [III-17], respectivement désignées par $Je_n(q, \xi)$ et $Jo_n(q, \xi)$. Les notations $Ne_n(q, \xi)$ et $No_n(q, \xi)$

représenteront les fonctions de Mathieu radiales de seconde espèce, respectivement paires et impaires. Les valeurs caractéristiques α_n ($n=0,1,2,\dots$) et β_n ($n=1,2,3,\dots$) seront respectivement associées aux fonctions paires et impaires. Toutes ces notations sont résumées dans le Tableau III-1. Enfin, les fonctions de Mathieu ont été calculées en utilisant un code basé sur les algorithmes de Zhang et Jin [III-18]. Les allures des fonctions de Mathieu radiales et angulaires en fonction des différents paramètres n et q sont données dans l'annexe B.

	Fonctions de Mathieu angulaires		Fonctions de Mathieu radiales	
	Paire	Impaire	Paire	Impaire
Première espèce	$Se_n(q, \eta)$	$So_n(q, \eta)$	$Je_n(q, \xi)$	$Jo_n(q, \xi)$
Seconde espèce	$Fe_n(q, \eta)$	$Fo_n(q, \eta)$	$Ne_n(q, \xi)$	$No_n(q, \xi)$

Tableau III-1 *Notations utilisées pour les fonctions de Mathieu angulaires et radiales de première et de seconde espèce selon la parité considérée*

Les solutions des équations de Helmholtz (III-18) sont les produits des parties angulaires et radiales des potentiels. Ainsi, le potentiel irrotationnel $\varphi(\xi, \eta)$ est le produit des fonctions $\varphi_n(\eta)$ et $\varphi_\xi(\xi)$ solutions générales des équations de Mathieu respectivement angulaires et radiales (III-30). Le potentiel scalaire $\varphi_n(\xi, \eta)$ d'ordre n s'écrira, dans le cas le plus général et selon la parité de la fonction, comme le produit de deux compositions linéaires de fonctions de Mathieu angulaires et radiales, de première et de seconde espèce. Du fait que le nombre de valeurs caractéristiques α_n et β_n est infini, il existe une infinité de solutions pour les équations (III-30). A la lumière de ces commentaires et des conventions précédentes, le potentiel scalaire $\varphi_n(\xi, \eta)$ s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi_n(\xi, \eta) &= [A_n^J Je_n(q_L, \xi) + A_n^N Ne_n(q_L, \xi)] [A_n^S Se_n(q_L, \eta) + A_n^F Fe_n(q_L, \eta)] \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \varphi_n(\xi, \eta) &= [B_n^J Jo_n(q_L, \xi) + B_n^N No_n(q_L, \xi)] [B_n^S So_n(q_L, \eta) + B_n^F Fo_n(q_L, \eta)] \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{III-33})$$

Le potentiel scalaire étant relié à la physique du problème de vibration d'une plaque elliptique, il doit être périodique en η (de période π ou 2π , selon que n est pair ou impair). Etant donné que les fonctions de Mathieu angulaires de seconde espèce Fe_n et Fo_n sont apériodiques, ils ne seront pas pris en compte dans l'expression générale de $\varphi_n(\xi, \eta)$. Les solutions des équations de Mathieu angulaires ne sont donc que de première espèce. D'autre part, la présence du trou elliptique dans la plaque constitue une discontinuité matérielle. Par conséquent, les solutions des équations de Mathieu

modifiées seront constituées des fonctions de Mathieu radiales de première et de seconde espèce [III-12].

En appliquant un raisonnement identique au potentiel vectoriel, solution de l'équation (III-31), et en composant linéairement les potentiels d'ordre différent afin de former les expressions générales des potentiels $\varphi(\xi, \eta)$ et $\psi(\xi, \eta)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \varphi(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{A}_n J e_n(q_L, \xi) + \bar{B}_n N e_n(q_L, \xi) \right) S e_n(q_L, \eta) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{C}_n J o_n(q_L, \xi) + \bar{D}_n N o_n(q_L, \xi) \right) S o_n(q_L, \eta) \\
 \psi(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{A}_n J e_n(q_T, \xi) + \bar{B}_n N e_n(q_T, \xi) \right) S e_n(q_T, \eta) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{C}_n J o_n(q_T, \xi) + \bar{D}_n N o_n(q_T, \xi) \right) S o_n(q_T, \eta)
 \end{aligned} \tag{III-34}$$

Les constantes \bar{A}_n , \bar{B}_n , \bar{C}_n , \bar{D}_n , $\bar{\bar{A}}_n$, $\bar{\bar{B}}_n$, $\bar{\bar{C}}_n$ et $\bar{\bar{D}}_n$ des séries infinies en (III-34) dépendent des conditions aux limites du problème.

L'équation (III-19) donne le champ de déplacement en fonction des potentiels scalaire et vectoriel. Il en découle les composantes suivantes du vecteur déplacement $\bar{U}(\xi, \eta)$:

$$\left\{ \begin{aligned}
 U_{\xi}(\xi, \eta) &= \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{A}_n J e'_n(q_L, \xi) + \bar{B}_n N e'_n(q_L, \xi) \right) S e_n(q_L, \eta) \\
 &+ \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{\bar{A}}_n J e'_n(q_T, \xi) + \bar{\bar{B}}_n N e'_n(q_T, \xi) \right) S e'_n(q_T, \eta) \\
 &+ \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{C}_n J o'_n(q_L, \xi) + \bar{D}_n N o'_n(q_L, \xi) \right) S o_n(q_L, \eta) \\
 &+ \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{\bar{C}}_n J o'_n(q_T, \xi) + \bar{\bar{D}}_n N o'_n(q_T, \xi) \right) S o'_n(q_T, \eta) \\
 U_{\eta}(\xi, \eta) &= \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{A}_n J e_n(q_L, \xi) + \bar{B}_n N e_n(q_L, \xi) \right) S e'_n(q_L, \eta) \\
 &- \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{\bar{A}}_n J e'_n(q_T, \xi) + \bar{\bar{B}}_n N e'_n(q_T, \xi) \right) S e_n(q_T, \eta) \\
 &+ \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{C}_n J o_n(q_T, \xi) + \bar{D}_n N o_n(q_T, \xi) \right) S o'_n(q_T, \eta) \\
 &- \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{\bar{C}}_n J o'_n(q_T, \xi) + \bar{\bar{D}}_n N o'_n(q_T, \xi) \right) S o_n(q_T, \eta)
 \end{aligned} \right. \tag{III-35}$$

Le champ de déplacement (III-35) peut être simplifié en tenant compte des conditions physiques du mouvement vibratoire de la plaque elliptique soumise à une excitation axisymétrique. En effet, la composante radiale du déplacement $U_{\xi}(\xi, \eta)$ est

symétrique par rapport à l'axe $\eta = 0$ et c'est, par conséquent, une fonction paire de la variable η . La composante angulaire du déplacement $U_\eta(\xi, \eta)$ est, quant à elle, antisymétrique par rapport à l'axe $\eta = 0$ et impaire par rapport à la variable η . Ces conditions sont résumées comme suit :

$$\begin{cases} U_\xi(\xi, \eta) = U_\xi(\xi, -\eta) \\ U_\eta(\xi, \eta) = -U_\eta(\xi, -\eta) \end{cases} \quad (\text{III-36})$$

La prise en compte des conditions (III-36) annule les coefficients \bar{A}_n , \bar{B}_n , \bar{C}_n et \bar{D}_n . Autrement dit, le potentiel scalaire $\varphi(\xi, \eta)$ et le potentiel vectoriel $\bar{\psi}(\xi, \eta)$ sont respectivement des fonctions paires et impaires de la variable angulaire η . Le champ de déplacement dans la plaque se simplifie et devient :

$$\begin{cases} U_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n J e'_n(q_L, \xi) + B_n N e'_n(q_L, \xi)) S e_n(q_L, \eta) \\ \quad + \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n J o_n(q_T, \xi) + D_n N o_n(q_T, \xi)) S o'_n(q_T, \eta) \\ U_\eta(\xi, \eta) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n J e_n(q_L, \xi) + B_n N e_n(q_L, \xi)) S e'_n(q_L, \eta) \\ \quad - \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n J o'_n(q_T, \xi) + D_n N o'_n(q_T, \xi)) S o_n(q_T, \eta) \end{cases} \quad (\text{III-37})$$

Afin de simplifier l'écriture, les coefficients non nuls dans les séries de l'expression (III-37) ont été remplacés par A_n , B_n , C_n et D_n . Il reste maintenant à déterminer ces derniers en tenant compte des conditions aux limites du problème.

III.2.3.2 Conditions aux limites

La plaque elliptique étant libre de toute contrainte aux frontières, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_i = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i \sigma_{\xi\xi} \\ (-1)^i \sigma_{\eta\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } \xi = \xi_i \quad (i = 1, 2) \quad (\text{III-38})$$

où \vec{n}_i est le vecteur sortant normal à la frontière i .

Les composantes du tenseur des contraintes sont liées aux déformations par l'équation (III-5). Tous calcul fait, les conditions aux limites s'écrivent en fonction des déformations comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi\xi} + \nu\varepsilon_{\eta\eta} = (1+\nu)\alpha\Delta T \\ \varepsilon_{\xi\eta} = 0 \end{cases} \quad \text{en } \xi = \xi_i \quad (i=1,2) \quad (\text{III-39})$$

Le développement de la relation cinématique (III-9) dans le système de coordonnées elliptiques fournit les expressions des composantes du tenseur des déformations en fonction des composantes du champ de déplacement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} U_\eta \right), \quad \varepsilon_{\eta\eta} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \xi} U_\xi \right), \\ \varepsilon_{\xi\eta} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \eta} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \xi} U_\eta + \frac{\partial U_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} U_\xi \right) \end{aligned} \quad (\text{III-40})$$

Le système d'équations (III-39) s'écrit alors en fonction des déplacements de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta} U_\eta + \frac{\nu}{h} \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} + \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} U_\xi = (1+\nu)\alpha\Delta T \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \eta} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \xi} U_\eta + \frac{\partial U_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} U_\xi = 0 \end{cases}, \quad \xi = \xi_i \quad (i=1,2) \quad (\text{III-41})$$

Tenant compte des expressions des composantes du champ de déplacement (données par l'équation (III-37)) dans le système d'équations (III-41), il apparaît le système d'équations suivant valable sur les deux frontières du domaine ξ_1 et ξ_2 :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^J(q_L, \xi, \eta) A_n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n^N(q_L, \xi, \eta) B_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^J(q_T, \xi, \eta) C_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^N(q_T, \xi, \eta) D_n = (1+\nu)\alpha\Delta T \\ \sum_{n=0}^{\infty} h_n^J(q_L, \xi, \eta) A_n + \sum_{n=0}^{\infty} h_n^N(q_L, \xi, \eta) B_n + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^J(q_T, \xi, \eta) C_n + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^N(q_T, \xi, \eta) D_n = 0 \end{cases} \quad (\text{III-42})$$

Les différentes fonctions qui apparaissent dans le système d'équations (III-42), données ci-dessous, sont définies pour simplifier l'écriture du système. Ces fonctions dépendent de la géométrie de la plaque trouée et des propriétés du matériau qui la constitue. La résolution du problème de vibration d'une plaque elliptique trouée est donc ramenée à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires (III-42) exprimé sur les frontières intérieure et extérieure ξ_1 et ξ_2 .

$$f_n^J(q_L, \xi, \eta) = -\frac{(1-\nu)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \xi} J_e'(q_L, \xi) S_e(q_L, \eta) + \frac{(1-\nu)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \eta} J_e(q_L, \xi) S_e'(q_L, \eta) \\ + \frac{1}{h^2} \left((1-\nu) \alpha_{L_n} - 2q_L (\cosh 2\xi - \nu \cos 2\eta) \right) J_e(q_L, \xi) S_e(q_L, \eta), \quad n = 0, \infty$$

$$f_n^N(q_L, \xi, \eta) = -\frac{(1-\nu)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \xi} N_e'(q_L, \xi) S_e(q_L, \eta) + \frac{(1-\nu)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \eta} N_e(q_L, \xi) S_e'(q_L, \eta) \\ + \frac{1}{h^2} \left((1-\nu) \alpha_{L_n} - 2q_L (\cosh 2\xi - \nu \cos 2\eta) \right) N_e(q_L, \xi) S_e(q_L, \eta), \quad n = 0, \infty$$

$$g_n^J(q_T, \xi, \eta) = -\frac{(1-\nu)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \xi} J_o'(q_T, \xi) S_o(q_T, \eta) - \frac{(1-\nu)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \eta} J_o(q_T, \xi) S_o'(q_T, \eta) \\ + \frac{(1-\nu)}{h^2} J_o'(q_T, \xi) S_o'(q_T, \eta), \quad n = 1, \infty$$

$$g_n^N(q_T, \xi, \eta) = -\frac{(1-\nu)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \xi} N_o'(q_T, \xi) S_o(q_T, \eta) - \frac{(1-\nu)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \eta} N_o(q_T, \xi) S_o'(q_T, \eta) \\ + \frac{(1-\nu)}{h^2} N_o'(q_T, \xi) S_o'(q_T, \eta), \quad n = 1, \infty$$

$$h_n^J(q_L, \xi, \eta) = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta} J_e'(q_L, \xi) S_e(q_L, \eta) - \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} J_e(q_L, \xi) S_e'(q_L, \eta) \\ + \frac{1}{h} J_e'(q_L, \xi) S_e'(q_L, \eta), \quad n = 0, \infty$$

$$h_n^N(q_L, \xi, \eta) = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta} N_e'(q_L, \xi) S_e(q_L, \eta) - \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} N_e(q_L, \xi) S_e'(q_L, \eta) \\ + \frac{1}{h} N_e'(q_L, \xi) S_e'(q_L, \eta), \quad n = 0, \infty$$

$$l_n^J(q_T, \xi, \eta) = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta} J_o'(q_T, \xi) S_o(q_T, \eta) + \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} J_o(q_T, \xi) S_o'(q_T, \eta) \\ - \frac{1}{h} \left(\beta_{T_n} - q_T (\cos 2\eta + \cosh 2\xi) \right) J_o(q_T, \xi) S_o(q_T, \eta), \quad n = 1, \infty$$

$$l_n^N(q_T, \xi, \eta) = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta} N_o'(q_T, \xi) S_o(q_T, \eta) + \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} N_o(q_T, \xi) S_o'(q_T, \eta) \\ - \frac{1}{h} \left(\beta_{T_n} - q_T (\cos 2\eta + \cosh 2\xi) \right) N_o(q_T, \xi) S_o(q_T, \eta), \quad n = 1, \infty$$

III.2.4 Résolution des équations différentielles pour une plaque elliptique pleine

La plaque elliptique est ici pleine et de frontière extérieure ξ_0 . Les fonctions de Mathieu de second ordre N_e et N_o ne sont utilisées que dans les problèmes qui

présentent des discontinuités [III-2]-[III-12]. Les formes des potentiels scalaire et vectoriel (III-34) se simplifient pour devenir :

$$\begin{cases} \varphi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n J e_n(q_L, \xi) S e_n(q_L, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n J o_n(q_L, \xi) S o_n(q_L, \eta) \\ \psi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\bar{A}}_n J e_n(q_T, \xi) S e_n(q_T, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{C}}_n J o_n(q_T, \xi) S o_n(q_T, \eta) \end{cases} \quad (\text{III-43})$$

La prise en compte de la condition physique (III-36) de symétrie du déplacement radial et d'antisymétrie du déplacement angulaire par rapport à l'axe $\eta = 0$ (en raison de l'axisymétrie de l'excitation), fait apparaître que les coefficients \bar{C}_n et $\bar{\bar{A}}_n$ sont nulles. Les expressions des composantes du champ de déplacement sont déduites du déplacement dans le cas d'une plaque trouée en annulant les coefficients B_n et D_n dans l'expression (III-37) :

$$\begin{cases} U_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} A_n J e'_n(q_L, \xi) S e_n(q_L, \eta) + \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} C_n J o_n(q_T, \xi) S o'_n(q_T, \eta) \\ U_\eta(\xi, \eta) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} A_n J e_n(q_L, \xi) S e'_n(q_L, \eta) - \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} C_n J o'_n(q_T, \xi) S o_n(q_T, \eta) \end{cases} \quad (\text{III-44})$$

Il ne reste enfin qu'à déterminer les coefficients inconnus A_n et C_n en tenant compte des conditions aux limites du problème. La plaque elliptique pleine est libre de toute contrainte sur sa frontière ξ_0 . Cette condition s'exprime à partir du système d'équations (III-42), donné dans le cas d'une plaque trouée, en annulant les coefficients B_n et D_n . Après simplification, les conditions à la frontière d'une plaque pleine soumise à un champ de température uniforme s'écrivent en fonction des inconnues A_n et C_n comme suit :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^J(q_L, \xi, \eta) A_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^J(q_T, \xi, \eta) C_n = (1 + \nu) \alpha \Delta T \\ \sum_{n=0}^{\infty} h_n^J(q_L, \xi, \eta) A_n + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^J(q_T, \xi, \eta) C_n = 0 \end{cases}, \quad \xi = \xi_0 \quad (\text{III-45})$$

La résolution du problème de vibration dans le plan d'une plaque elliptique se fera par la recherche des coefficients des séries infinies qui décrivent le champ de déplacement particulière en résolvant les systèmes d'équations algébriques et linéaires (III-42) pour les plaques trouées et (III-45) pour les plaques pleines.

III.2.5 Discrétisation et résolution du problème

La recherche du champ de déplacement dans les plaques elliptiques (pleines ou trouées) se fera uniquement sous l'hypothèse d'une excitation micro-ondes uniforme. Dans le cas contraire (pour un champ d'excitation quelconque) la résolution aurait pu porter sur la recherche des fréquences des modes propres de vibration des plaques, mais cette démarche se heurte à des problèmes d'instabilités numériques qui nécessitent d'adapter les outils numériques de résolution. Dans ce qui suit, la discrétisation des frontières des plaques elliptiques trouées et la résolution du système d'équations (III-42) seront discutées.

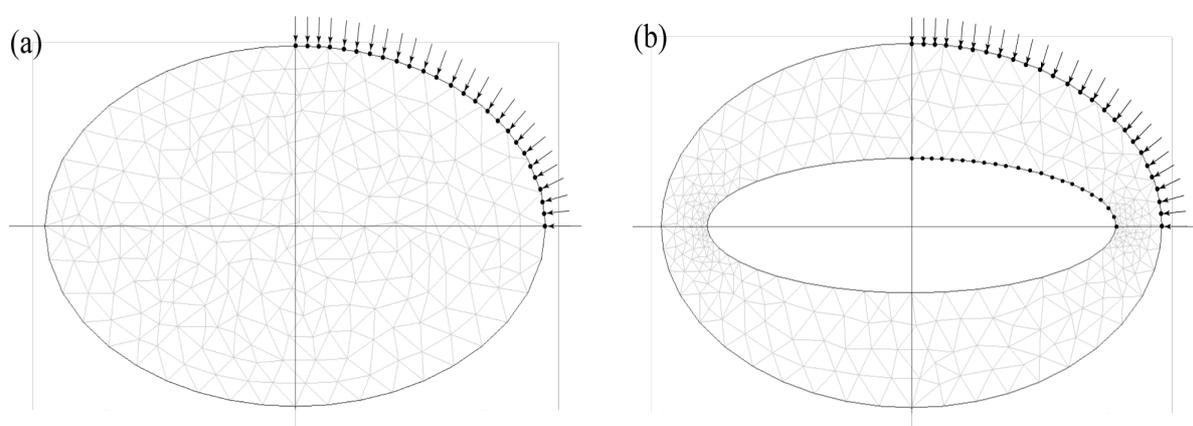


Figure III-3 Représentation de la discrétisation des frontières elliptiques et du maillage par éléments finis (a) d'une plaque pleine et (b) d'une plaque trouée, excitées uniformément

Du fait de la dépendance angulaire du champ de déplacement dans les plaques elliptiques et afin de résoudre le problème d'une manière globale, les frontières de la plaque trouée sont discrétisées en $2N$ points (N points sur chaque frontière, voir la Figure III-3 (b)) où le système d'équations (III-42) est vérifié. Le nombre d'équations du système global obtenu est égal à $4N$ et, si l'objectif est de résoudre un système d'équations carré, les séries infinies du système (III-42) sont tronquées à l'ordre N . Le système d'équations de Cramer suivant est alors obtenu :

$$[M(\xi_1, \xi_2, \eta_i, \omega, q_L, q_T)](A) = (b) \quad (\text{III-46})$$

où $M(\xi_1, \xi_2, \eta_i, \omega, q_L, q_T)$ est une matrice carrée ($2N \times 2N$) composée des fonctions $f_n^J, f_n^Y, g_n^J, g_n^Y, h_n^J, h_n^Y, l_n^J$ et l_n^Y évaluées sur les frontières aux différents points de discrétisation, (A) est un vecteur de dimension $4N$, composé des coefficients inconnus A_n, B_n, C_n et D_n , (b) est le vecteur second membre de dimension $4N$, contenant les

termes de l'excitation thermique, et i est l'indice du point de calcul de la discrétisation géométrique qui varie de 1 à N sur chacune des frontières.

Remarquons que du fait de l'axisymétrie de l'excitation thermique théorique et de la génération acoustique, il est suffisant de modéliser les vibrations du quart des plaques étudiées. La discrétisation angulaire des frontières ne concerne alors qu'un quart de la plaque modélisée et le temps de calcul nécessaire à la résolution se voit divisé par quatre. S'agissant des plaques pleines, la démarche reste identique. Dans ce cas, le quart de la frontière ξ_0 est discrétisé en N points, voir la Figure III-3 (a). Le nombre d'équations du système obtenu est alors égal à $2N$ (le nombre d'inconnues est donc égal à $2N$) et, si l'on veut obtenir un système d'équations carré, les séries infinies sont tronquées au N ème terme.

La résolution numérique du système d'équations précédent permet d'obtenir les coefficients inconnus et de calculer le champ de déplacement dans la plaque elliptique trouée, donné par l'expression (III-37). Etant donné la taille que la matrice M peut avoir et afin d'améliorer la qualité de la résolution numérique du système (III-46) dans le cas des plaques pleines et trouées, nous utiliserons une méthode de pseudo-inversion basée sur la méthode des moindres carrés (Moore-Penrose [III-22]). Cette méthode revient à surdimensionner le système (III-46) en discrétisant chaque frontière de la plaque par un nombre de points N_{points} supérieur à l'ordre de troncature des séries de Mathieu N_{max} . Cette procédure, qui améliore grandement la qualité de la résolution numérique particulièrement dans le cas des plaques trouées, pourrait ultérieurement être améliorée ou même remplacée par une méthode mieux adaptée et plus rapide.

III.3 Echantillons testés pour la validation des modèles

Les plaques elliptiques testées expérimentalement ont été fabriquées à base de résine d'époxy chargée de graphite. En effet, composé principalement de carbone, le graphite favorise l'absorption des micro-ondes et par suite l'augmentation de la température afin de maximiser l'amplitude des vibrations des échantillons.

Le matériau ainsi fabriqué est viscoélastique car il atténue les ondes mécaniques qui s'y propagent. La partie imaginaire du module de Young complexe (qui traduit la viscosité du matériau) a été déterminée par un essai de résonance sur une barre constituée du même matériau en utilisant un modèle 1D pour résoudre problème inverse [III-19]. La partie réelle du module de Young ainsi que le coefficient de Poisson ont été déterminés par la méthode de caractérisation par essais de résonance

sur un disque circulaire [III-20] constitué du même matériau (voir le chapitre IV). Les valeurs obtenues pour le module de Young et le coefficient de Poisson sont $E = (3,65 + 0,10i)$ GPa et $\nu = 0,39$ avec des précisions relatives respectivement égales à 2,0% et 2,5%. La densité mesurée du matériau est égale à 1140 kg/m^3 .

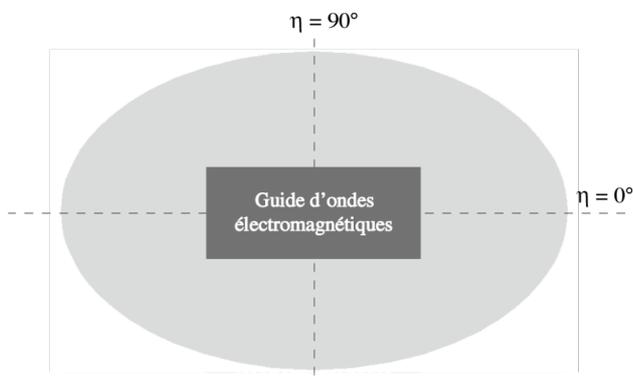


Figure III-4 *Disposition du guide d'ondes électromagnétiques par rapport aux plaques elliptiques testées et points de mesures des vitesses expérimentales (a) $\eta = 0^\circ$ et (b) $\eta = 90^\circ$*

Les quatre plaques elliptiques conçues pour les besoins de la validation du modèle théorique sont de deux types. Deux d'entre elles sont pleines et deux autres sont trouées d'ellipses homofocales par rapport aux frontières extérieures. Les noms, les dimensions géométriques (demi-axes a et b des frontières extérieures et intérieures) ainsi que les excentricités extérieures des quatre plaques sont donnés dans le Tableau III-2. Par ailleurs, la génération acoustique par micro-ondes a été effectuée en se servant du guide d'ondes rectangulaire (voir §II.3) qui assure un «arrosage» électromagnétique *a priori* plus proche d'une ellipse comparativement à celui du guide d'ondes circulaire (Figure III-4).

	Nom	a_{ext} (mm)	b_{ext} (mm)	a_{int} (mm)	b_{int} (mm)	$e_{ext} = f/a_{ext}$
Plaques pleines	EP ₁	31,5	20,0	-	-	77,3 %
	EP ₂	38,0	30,0	-	-	61,4 %
Plaques trouées	ET ₁	31,5	30,0	14,0	10,3	30,5 %
	ET ₂	38,0	36,0	20,0	15,9	32,0 %

Tableau III-2 *Dimensions géométriques des plaques elliptiques pleines et trouées testées expérimentalement*

III.4 Validation du modèle théorique et résultats expérimentaux

Avant de valider le modèle de vibration des plaques elliptiques par comparaison des réponses obtenues analytiquement et expérimentalement, nous allons d'abord justifier l'hypothèse des contraintes planes qui régit le comportement des plaques minces se déformant dans le plan. La validation de cette hypothèse se fera sur le cas d'une plaque mince circulaire excitée uniformément par une élévation brusque de la température. Ce choix est motivé par le fait qu'il est possible dans ce cas de générer un mode de vibration purement radial plus facile à visualiser et à traiter que la vibration d'une plaque elliptique uniformément excitée. Etant donné qu'un disque est le cas limite d'une ellipse dont l'excentricité tend vers 0, le modèle des plaques elliptiques fournit le même résultat que le modèle des disques développé au chapitre IV. La Figure III-5 montre la superposition parfaite des spectres de vitesse purement radiale calculés par les deux modèles sur la frontière d'un disque plein de rayon 31,5 mm et ayant les propriétés matérielles données au paragraphe III.3.

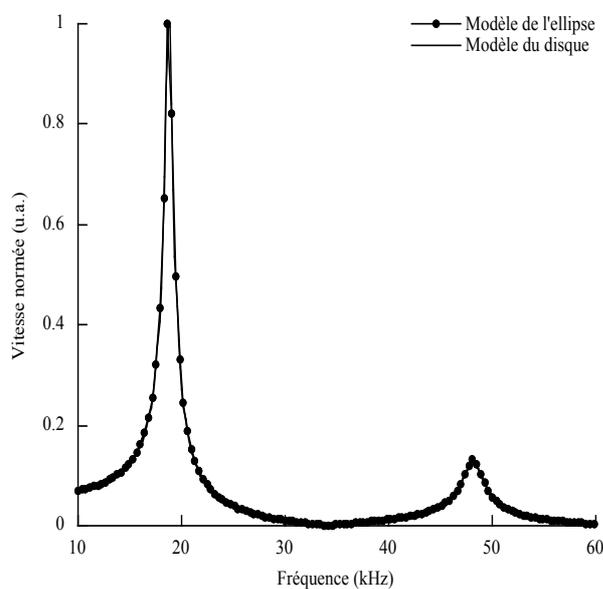


Figure III-5 Comparaison des spectres de vitesse radiale dans un disque, obtenus par le modèle des plaques elliptiques (excentricité nulle) et par le modèle des plaques circulaires

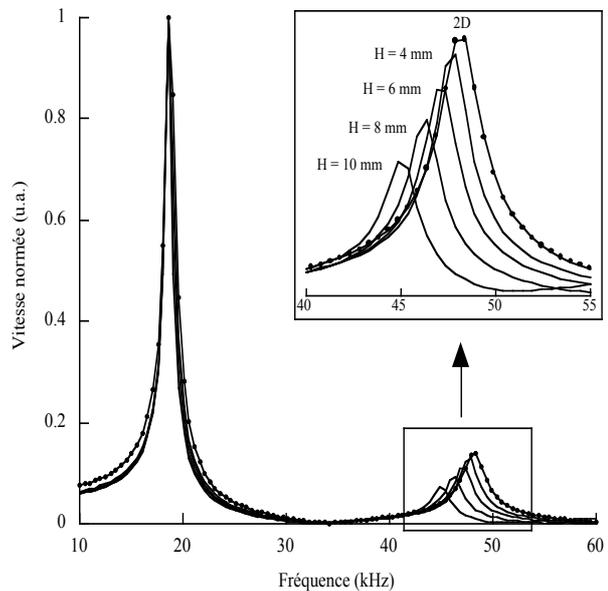


Figure III-6 Superposition des spectres de vitesse radiale calculés analytiquement et par la MEF pour différentes hauteurs du cylindre

La réponse radiale en 2D d'un disque plein (calculée par le modèle elliptique sous l'hypothèse des contraintes planes) est comparée à une série de spectres de vitesse

radiale obtenus par simulation numérique 3D, par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel FEMLAB® [III-23] (voir annexe A), de la vibration de cylindres circulaires, constitués du même matériau, dont le rayon est égal à 31,5 mm et la hauteur est décroissante. Le volume de chaque cylindre a été maillé par des éléments triangulaires 3D (linéaires de type Lagrange) au nombre de 912 (4887 degrés de liberté) pour H=10 mm, et au nombre de 5541 (29463 degrés de liberté) pour H=4 mm.

La Figure III-6 montre la superposition des spectres de vitesse radiale obtenus analytiquement et numériquement. Il apparaît clairement que quand la hauteur des cylindres circulaires diminue, leurs réponses tendent vers celle d'une plaque mince circulaire régit par un état plan de contrainte. D'un point de vue théorique, l'hypothèse des contraintes planes est donc adaptée à la modélisation de la vibration des plaques minces dans leurs plans. Expérimentalement, l'épaisseur des plaques testées n'excédant pas 3 mm, l'erreur d'approximation due à l'hypothèse d'un état plan de contraintes est inférieure à l'erreur de mesure des fréquences propres que l'on commet. D'autre part, en tenant compte de la nature polymérique de la résine testée et en adoptant un modèle de décroissance linéaire de la température due à l'absorption électromagnétique [III-21], la variation de la température dans l'épaisseur de la plaque n'excède pas 0,5 %. L'atténuation de la température dans l'épaisseur des plaques est donc négligeable et ne devrait pas affecter leur vibration dans le plan.

La validité de l'hypothèse d'un état plan de contraintes étant établie, la comparaison des réponses numériques et des mesures expérimentales avec les résultats théoriques va permettre de valider les modèles de génération acoustique dans les plaques elliptiques pleines et trouées précédemment développés. La durée de l'impulsion micro-ondes étant très courte (impulsion de 1 μ s ou salve d'impulsion d'une durée égale à 3 μ s, voir §II.3), son contenu fréquentiel est quasi-uniforme sur une large gamme de fréquence. Ceci permet d'exciter expérimentalement un large ensemble de modes propres de vibration. Il en sera de même pour les spectres de réponse théoriques (numériques et analytiques) qui, obtenus sous l'effet d'une excitation thermique très courte, représentent les réponses impulsionnelles des plaques elliptiques modélisées. Enfin, la comparaison des résultats portera sur les spectres de vitesse de déplacement particulaire calculés à partir du champ de déplacement comme suit :

$$\vec{U}(\xi, \eta) = i\omega\bar{U}(\xi, \eta) \quad (\text{III-47})$$

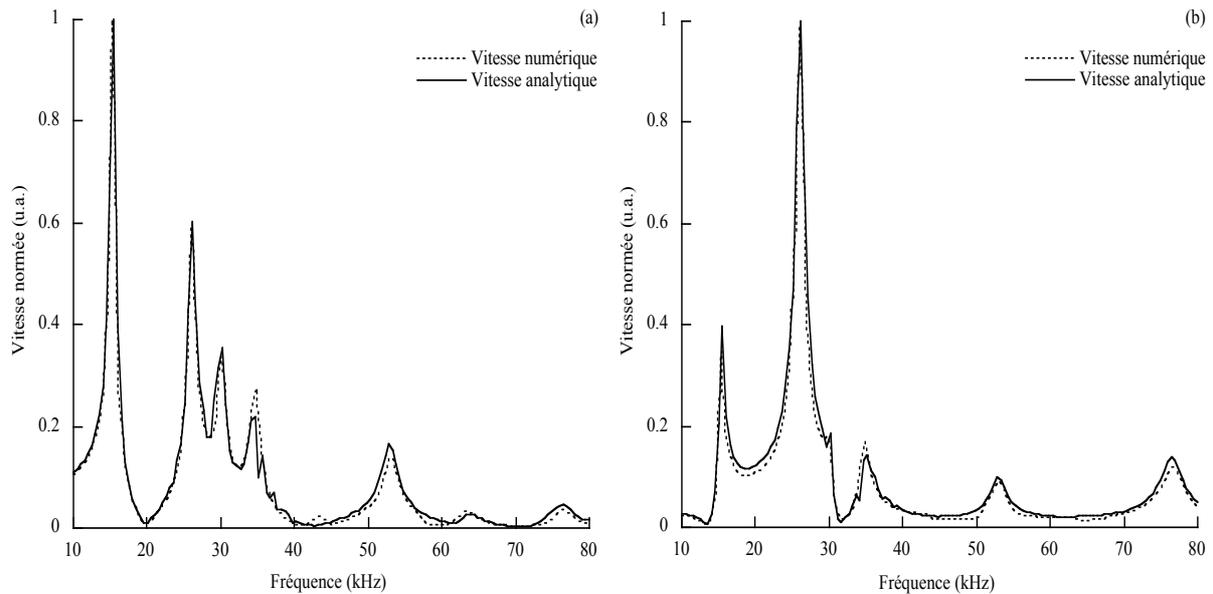


Figure III-7 *Comparaison des spectres de vitesse numériques (MEF) et théoriques de la plaque pleine EP_1 aux positions angulaires (a) $\eta = 0^\circ$ et (b) $\eta = 90^\circ$*

Nous allons d'abord confronter le modèle théorique à la simulation par éléments finis de la vibration de la plaque EP_1 . Le calcul semi-analytique a été effectué en retenant $N_{max} = 20$ termes dans les séries de Mathieu qui interviennent dans l'expression du champ de déplacement et en discrétisant la frontière extérieure en $N_{points} = 27$ points. Numériquement, le domaine de la plaque a été maillé par 378 éléments triangulaires, linéaires et bidimensionnels de type Lagrange pour un nombre de degrés de liberté égal à 1594. La Figure III-7 montre la superposition des spectres de vitesse numérique et analytique aux positions $\eta = 0^\circ$ et $\eta = 90^\circ$ sur la frontière de la plaque EP_1 . Il apparaît clairement que les modélisations semi-analytique et numérique fournissent les mêmes solutions à l'équation du mouvement (III-13) d'une plaque elliptique avec des précisions tout à fait comparables.

La Figure III-8 montre la superposition des spectres de vitesse de déplacement normés expérimentaux et théoriques (avec $N_{max} = 20$ et $N_{points} = 27$) aux positions $\eta = 0^\circ$ et $\eta = 90^\circ$ sur la frontière de la plaque EP_1 . De même, la Figure III-9 montre les spectres de vitesse expérimentaux et théoriques (avec $N_{max} = 18$ et $N_{points} = 22$) aux positions $\eta = 0^\circ$ et $\eta = 90^\circ$ sur la frontière de la plaque EP_2 .

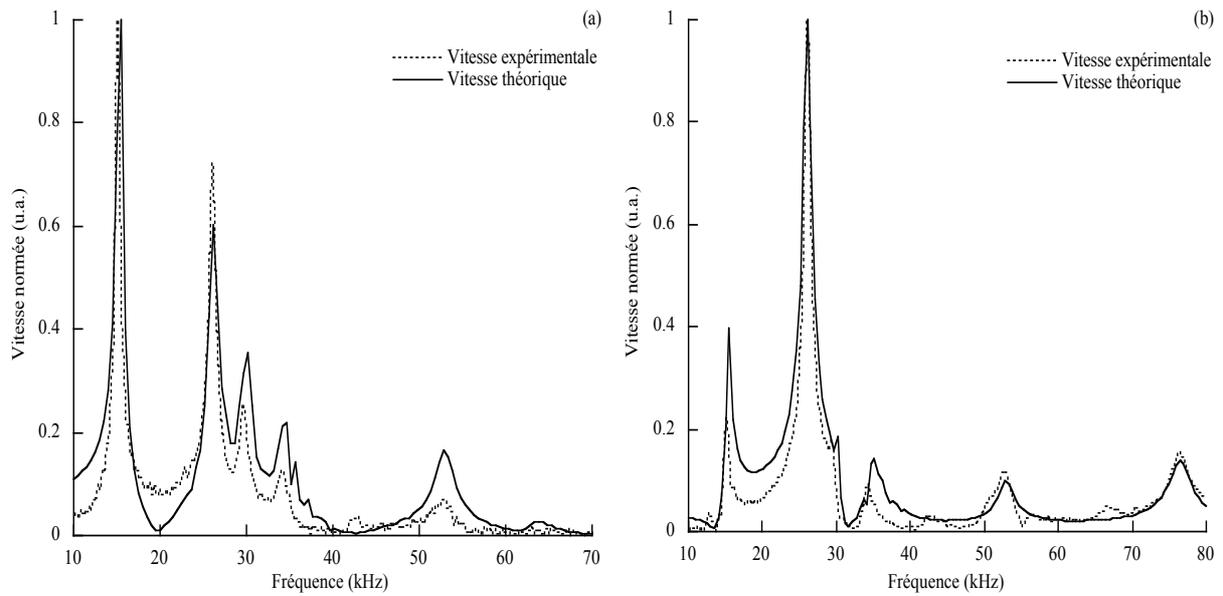


Figure III-8 *Comparaison des spectres de vitesse expérimentaux et théoriques de la plaque pleine EP_1 aux positions angulaires (a) $\eta = 0^\circ$ et (b) $\eta = 90^\circ$*

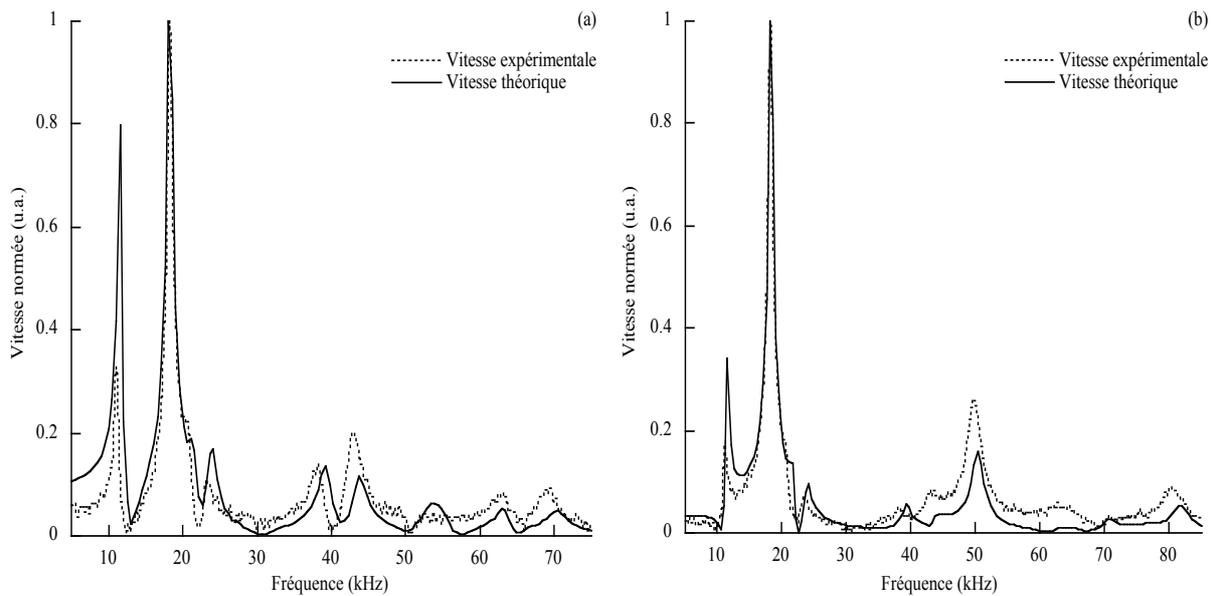


Figure III-9 *Comparaison des spectres de vitesse expérimentaux et théoriques de la plaque pleine EP_2 aux positions angulaires (a) $\eta = 0^\circ$ et (b) $\eta = 90^\circ$*

La superposition des spectres de vitesse théoriques et expérimentaux sur la Figure III-8 et la Figure III-9 montre la bonne corrélation entre la réponse prédite par le modèle et celle qui est obtenue expérimentalement. Il est donc possible d'affirmer que le modèle théorique prédisant la génération acoustique dans les plaques elliptiques pleines est validé, et ce malgré les fortes excentricités des plaques modélisées (données

dans le Tableau III-2 pour les plaques EP_1 et EP_2 et respectivement égales à 77.3 % et 61.4 %).

Toutefois, l'étude des spectres de la Figure III-8 et la Figure III-9 met en lumière des différences en amplitude et en fréquences entre les réponses théoriques et expérimentales. Les différences en amplitude que l'on observe sont expliquées par le fait que la distribution réelle du champ électromagnétique à la sortie du guide d'ondes rectangulaire utilisé (voir §II.3) est axisymétrique plutôt qu'uniforme. Ceci a pour conséquence de produire une élévation de température non-uniforme dans la plaque et d'exciter ses modes propres de vibration avec des intensités différentes de celles qui sont prédites par le modèle théorique. De plus, le bruit résiduel contenu dans le signal expérimental introduit une imprécision sur les amplitudes des vitesses de déplacement mesurées.

D'autre part, les écarts que l'on observe entre les fréquences propres théoriques et expérimentales des plaques EP_1 et EP_2 , données dans le Tableau III-3, sont dus à deux raisons principales. La première est liée à l'erreur de troncature commise sur les séries infinies de fonctions de Mathieu qui décrivent le champ de vitesse. La seconde source d'imprécision est l'effet des conditions d'appui des plaques étudiées sur les fréquences propres à hautes fréquences. En effet, quand la longueur d'onde d'un mode propre de vibration est petite, la vibration de la plaque devient sensible aux frottements de contact avec son support d'appui. Ceci a pour effet de modifier les fréquences propres expérimentales situées à hautes fréquences par rapport à ceux qui sont prévus théoriquement.

Plaque EP_1			Plaque EP_2		
Expérimental	Théorique	MEF	Expérimental	Théorique	MEF
15,1	15,5	15,5	11,2	11,5	11,4
26,1	26,1	26,1	18,2	18,1	18,2
29,6	30,1	30,2	21,0	21,6	21,4
34,3	34,2	34,7	23,3	23,8	23,8
52,9	52,8	53,0	37,9	39,0	39,0
63,0	63,8	63,4	43,0	43,8	43,8
76,3	76,5	73,6	49,7	50,3	50,6
-	-	-	63,0	63,5	64,0
-	-	-	69,0	70,5	70,2
-	-	-	80,1	81,5	81,7

Tableau III-3 *Comparaison des fréquences propres (en kHz) mesurées expérimentalement et calculées analytiquement et numériquement (MEF) pour les plaques pleines elliptiques EP_1 et EP_2*

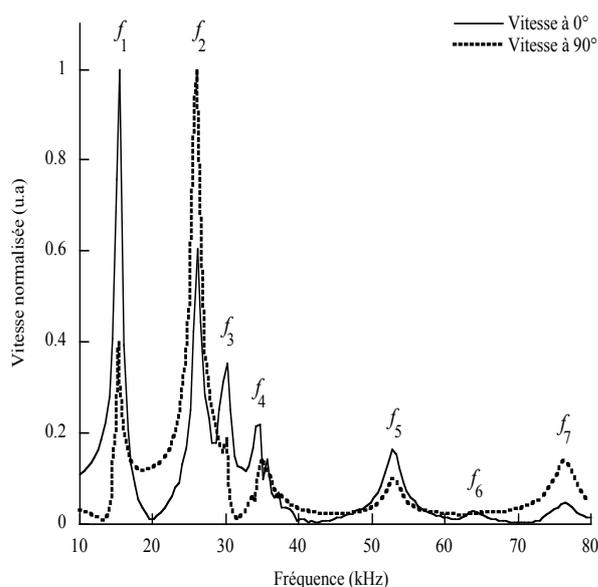


Figure III-10 Identification des fréquences propres de la plaque EP_1 sur les spectres de vitesse aux positions $\eta=0^\circ$ et (b) $\eta=90^\circ$

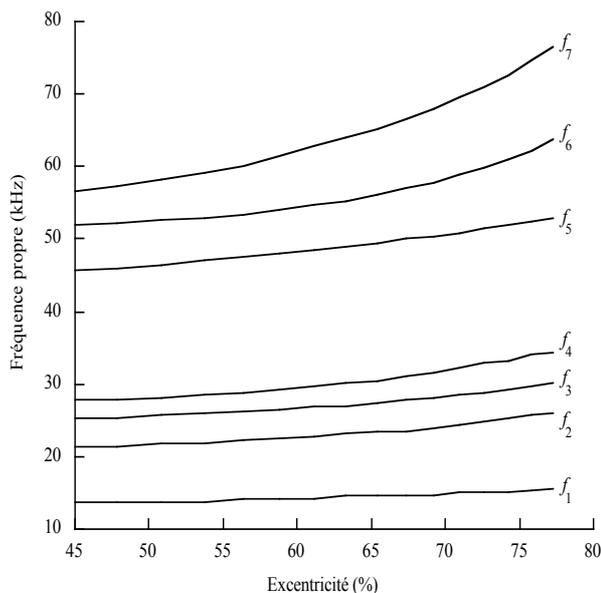


Figure III-11 Evolution des fréquences propres de la plaque EP_1 en fonction de l'excentricité de la frontière extérieure

L'évolution des fréquences propres f_i ($i=1,\dots,7$) de la plaque EP_1 , désignées sur la Figure III-10, en fonction de l'excentricité de la frontière extérieure de la plaque est donnée sur la Figure III-11.

L'observation des allures des graphes représentés sur la Figure III-11 montre que les fréquences propres situées dans les hautes fréquences sont plus sensibles à l'ellipticité de la plaque que les fréquences propres plus petites. Dans l'optique de caractériser la géométrie d'une plaque elliptique à partir de ses fréquences propres, il serait donc plus judicieux d'utiliser les hautes fréquences plus sensibles à la géométrie. Du point de vue expérimental, la mesure des hautes fréquences propres est possible sous la condition d'assurer un bon compromis entre la durée de l'excitation (afin de s'approcher au maximum d'une impulsion brève) et la puissance du générateur de micro-ondes (une forte intensité de l'excitation engendre en effet une réponse avec un grand rapport signal sur bruit).

Enfin, les allures des déformées associées aux fréquences propres f_i ($i=1,\dots,7$) de la plaque EP_1 sont données sur la Figure III-12 (superposées à la forme de la plaque au repos).

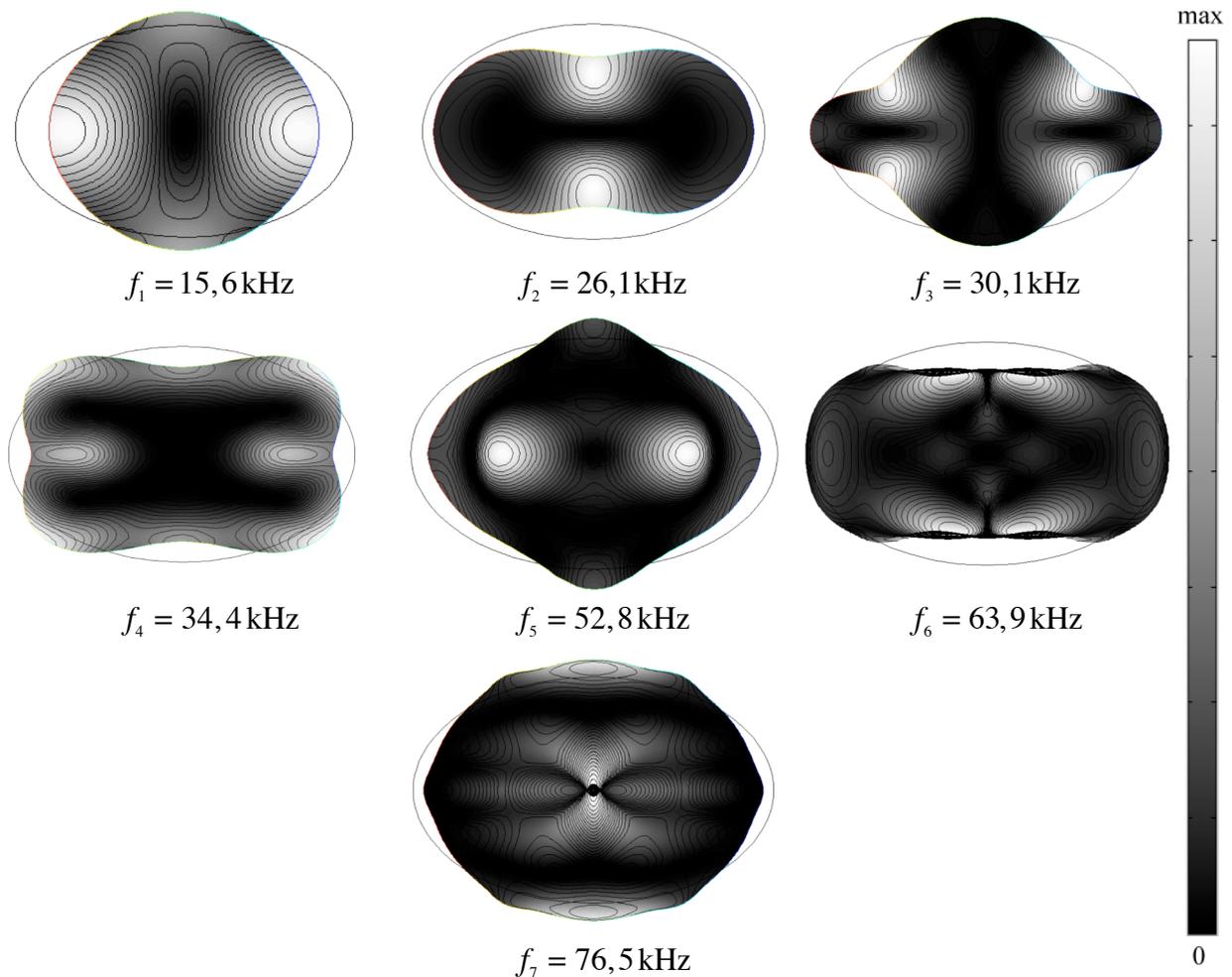


Figure III-12 Représentation en amplitude de la vitesse de déplacement des modes propres de résonance de la plaque EP_1 obtenus théoriquement pour une excitation thermique uniforme

Par ailleurs, et comparativement au cas d'une plaque pleine, la discrétisation de deux frontières dans les plaques elliptiques trouées (afin d'exprimer les conditions aux limites du problème) multiplie par deux la taille du système d'équations (III-46) à résoudre. Etant donné que l'inversion des grandes matrices pleines est numériquement délicate, les coefficients des séries infinies de l'expression (III-37) du champ de déplacement dans les plaques trouées ne sont pas calculés avec une bonne précision. L'utilisation de l'algorithme de pseudo-inversion au sens des moindres carrés (Moore-Penrose [III-22]) a permis d'augmenter la précision de calcul des coefficients dans le cas des plaques elliptiques pleines mais n'a pas suffi à améliorer les calculs dans le cas des plaques trouées (Figure III-13 et Figure III-14). D'autre part, nous pouvons remarquer que les réponses théoriques et expérimentales de la plaque ET_1 sont mieux corrélées que ceux de la plaque ET_2 . Ceci est dû au fait que la méthode de résolution numérique du système d'équations (III-37) est fortement sensible à l'excentricité de la frontière extérieure de la plaque e_{ext} . En effet, malgré le fait que les plaques ET_1 et

ET_2 aient des excentricités extérieures proches (respectivement égales à 30,5 % et 32,0 %), ce faible écart suffit à rendre la résolution numérique moins précise dans le cas de la plaque ET_2 . De plus, plus l'excentricité est élevée (plus la courbure des frontières est importante), plus le nombre de termes dans les séries de fonctions de Mathieu nécessaire pour approcher avec précision le champ de déplacement réel est grand. Ceci a alors pour effet d'accroître la taille du système d'équations à résoudre et de rendre l'inversion matricielle imprécise. Cette instabilité numérique croissante avec l'excentricité de la plaque a été par ailleurs vérifiée sur une série de plaques elliptiques de dimensions différentes.

Néanmoins, à la lumière des considérations expérimentales et numériques précédentes, la comparaison des spectres théoriques et expérimentaux sur la Figure III-13 et la Figure III-14, nous permet de conclure que le modèle théorique correspondant aux plaques elliptiques trouées est validé.

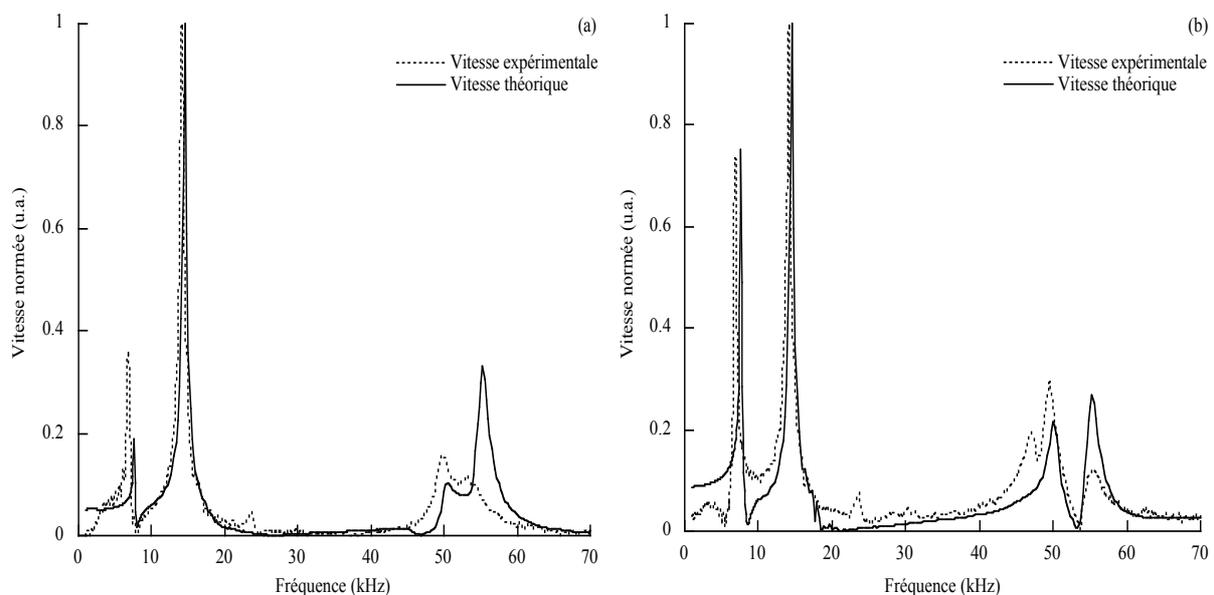


Figure III-13 *Comparaison des spectres de vitesse expérimentaux et théoriques de la plaque trouée ET_1 aux positions angulaires (a) $\eta = 0^\circ$ et (b) $\eta = 90^\circ$ sur la frontière extérieure*

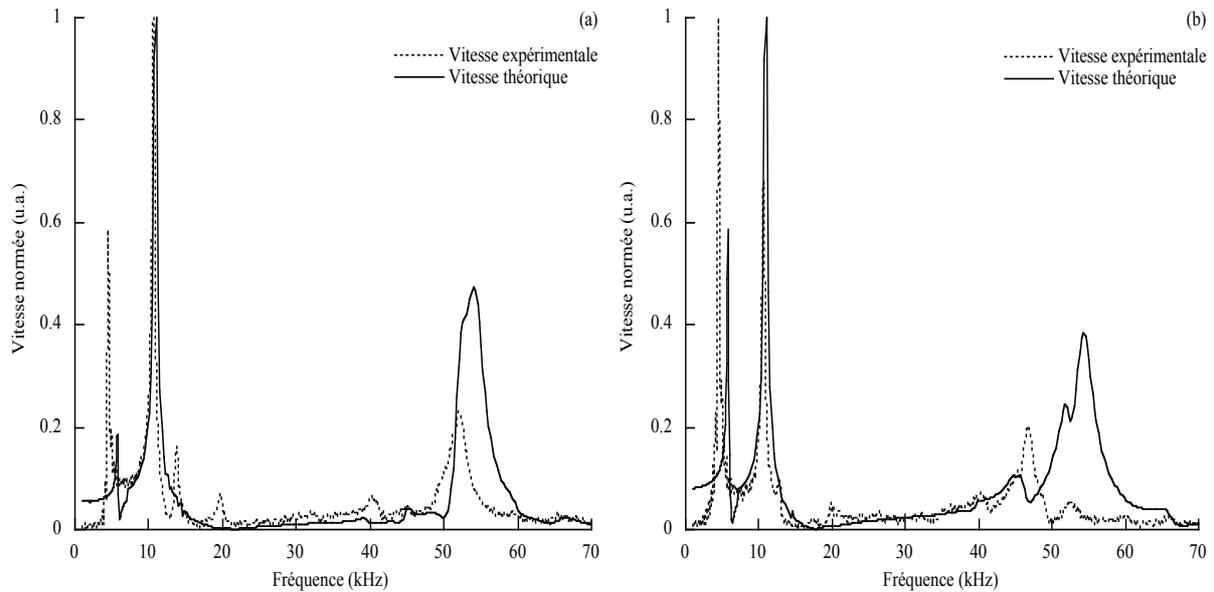


Figure III-14 *Comparaison des spectres de vitesse expérimentaux et théoriques de la plaque trouée ET_2 aux positions angulaires (a) $\eta=0^\circ$ et (b) $\eta=90^\circ$ sur la frontière extérieure*

III.5 Conclusions

La vibration libre dans le plan des plaques elliptiques minces a été étudiée en utilisant la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées. Un modèle bi-dimensionnel prédisant la réponse des plaques elliptiques pleines ou trouées a été développé en résolvant les équations de Helmholtz dans un système de coordonnées elliptiques au moyen de séries de fonctions de Mathieu à coefficients indéterminés. La prise en compte des conditions aux limites mécaniques de vibration des plaques étudiées a permis de ramener le problème à celui de la résolution d'un système linéaire d'équations algébriques pour calculer les coefficients des séries de fonctions de Mathieu.

La comparaison des réponses théoriques et expérimentales a permis de valider la modélisation des vibrations des plaques elliptiques pleines ou trouées. Toutefois, cette comparaison a mis en lumière des difficultés numériques liées à l'excentricité des frontières elliptiques des plaques. Une des perspectives possibles de la présente étude est d'explorer de nouveaux algorithmes d'inversion matricielle et/ou d'optimisation linéaire afin d'améliorer la précision de la résolution numérique du problème. La modélisation de la génération par micro-ondes pulsées développée ici permet de prédire certaines des fréquences propres de vibration de la plaque mais aussi le champ de déplacement avec une bonne précision. Expérimentalement, la technique de

génération par micro-ondes offre la possibilité d'exciter quasi-uniformément les plaques avec une très bonne reproductibilité. Cependant, il a été montré que le guide d'ondes électromagnétiques doit être adapté à la géométrie des plaques irradiées afin de maximiser le rapport signal sur bruit.

L'étude de la variation des fréquences propres des plaques elliptiques pleines en fonction de leur excentricité, présentée plus haut, permet d'envisager l'association de la modélisation précédente et de la technique de génération par micro-ondes pour la caractérisation non-destructive des plaques elliptiques. Ceci pourrait être intéressant dans la mesure où la résolution semi-analytique dans le cas des plaques moyennement excentrées est plus rapide que les méthodes purement numériques comme la méthode des éléments finis. De plus, un prolongement intéressant du présent travail serait d'étudier la génération acoustique des trous elliptiques contenus dans des plaques infinies par une analyse asymptotique du modèle développé ci-dessus. Par ailleurs, comme il sera fait au chapitre IV, le modèle peut servir à l'étude de l'effet d'une faible ellipticité sur la vibration dans le plan d'une plaque mince supposée circulaire.

L'association du modèle semi-analytique et de la technique de génération par micro-ondes pourrait constituer une méthode de caractérisation et/ou de contrôle non destructifs des cylindres infinis. En effet, comme il a été montré précédemment, moyennant des changements de coefficients dans l'équation différentielle du mouvement des plaques elliptiques, le modèle de la vibration des plaques pleines et trouées peut facilement être adapté au cas des cylindres elliptiques pleins ou creux. En bioacoustique, par exemple, cette extension pourrait servir à modéliser la réponse acoustique de l'os humain (qui peut être approché par un tube elliptique creux) soumis à un rayonnement longitudinalement uniforme de micro-ondes pulsées.

Enfin, le cas des plaques minces circulaires, traitées au chapitre IV, peut être considéré comme un cas particulier d'une plaque elliptique ayant une excentricité nulle. Cependant, nous allons montrer qu'il est intéressant d'effectuer une nouvelle modélisation analytique de la réponse d'une plaque circulaire en utilisant naturellement un repère cylindrique circulaire. Nous verrons en effet dans ce cas que la résolution fait appel aux fonctions de Bessel plus communément utilisées que les fonctions de Mathieu.

III.6 Bibliographie

[III-1] E. Mathieu, "Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 13 (1868), pp. 137-203.

-
- [III-2] J. C. Gutiérrez-Vega, S. Chávez-Cerda and R. M. Rodríguez-Dagnino, “Free oscillations in an elliptic membrane,” *Revista Mexicana de Física*. 45, No.6 (1999), pp. 613-622.
- [III-3] K. Hong and J. Kim, “Natural mode analysis of hollow and annular elliptical cylindrical cavities”, *Journal of Sound and Vibration* 183, No. 2 (1995), pp. 327-351.
- [III-4] W. R. Callahan, “Flexural Vibrations of Elliptical Plates When Transverse Shear and Rotary Inertia are Considered”, *Journal of Acoustical Society of America* 36, Issue 5 (1964), pp. 823-829.
- [III-5] W. R. Callahan, “Frequency Equations for the Normal Modes of Vibration for an Elliptical Ring, Including Transverse Shear and Rotary Inertia ”, *Journal of Acoustical Society of America* 37, Issue 3 (1965), pp. 480-485.
- [III-6] K. Sato, “Free Flexural Vibrations of an Elliptical Plate with Simply Supported Edge”, *Journal of Acoustical Society of America* 52, Issue 3B (1972), pp. 919-922.
- [III-7] A.W. Leissa, “Vibration of a simply-supported elliptical plate”, *Journal of Sound and Vibration* 6, No. 1 (1967), pp. 145-148.
- [III-8] R. Barakat, “Diffraction of Plane Waves by an Elliptic Cylinder”, *Journal of Sound and Vibration* 35, Issue 12 (1963), pp. 1990-1996.
- [III-9] P. K. Wong, J. Miklowitz, and R. A. Scott, “Propagation of Harmonic Flexural Waves in an Infinite Elastic Rod of Elliptical Cross Section”, *Journal of Acoustical Society of America* 40, Issue 2 (1966), pp. 393-398.
- [III-10] A. R. Hadj Henni and C. Bacon, “In-plane vibration of thin elliptic plates submitted to uniforme pulsed microwave irradiations”. *Journal of Sound and Vibration* (Accepté pour publication).
- [III-11] M. R. Spiegel, “Mathematical Handbook of Formulas and Tables”, McGraw-Hill Inc., New York, 1974.
-

- [III-12] P.M. Morse and H. Feshbach, “Methods of Theoretical Physics”, Vol. 1, 2, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [III-13] C. Bacon et J. Pouyet, “Mécanique des solides déformables”, Hermes Science (2000)
- [III-14] J. D. Achenbach, “Wave propagation in elastic solids”, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [III-15] Julio C. Gutiérrez-Vega, R. M. Rodríguez-Dagnino, M. A. Meneses-Nava, and S. Chávez-Cerda, “Mathieu functions, a visual approach,” Am. J. Phys. 71 (2003), pp. 233-242.
- [III-16] M. Abramowitz, I. A. Stegun, “Handbook of Mathematical Functions – with formulas, graphs and mathematical tables”, Dover publications, INC., New York, 1965.
- [III-17] J. C. Gutiérrez-Vega, S. Chávez-Cerda, “Theory and numerical analysis of the Mathieu functions”, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey NL, Mexico, 2003.
- [III-18] S. Zhang and J. M. Jin, “Computation of Special Functions”, John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [III-19] B. Hosten, C. Bacon, “Measurement of complex Young moduli of composite materials by time gated microwaves”, Rev. of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Plenum Press, New York, Vol.19, No. 1, pp. 1113-1120 (2000).
- [III-20] A. R. Hadj Henni, C. Bacon and B. Hosten, “In-plane vibration of thin circular structures submitted to pulsed microwave irradiations”. J. Acoust. Soc. Am. Vol. 119, No. 6, pp. 3782–3792, (2006).
- [III-21] C. Bacon, B. Hosten and P. A. Bernard, “Acoustic wave generation in viscoelastic rods by time-gated microwaves” Journal of Acoustical Society of America 106 (1999), pp. 195-201.

[III-22] Matlab[®] User's Guide, Mathworks, Inc., <http://www.mathworks.com>.

[III-23] Femlab[®] 2.2 Reference Manual, by COMSOL AB (2001).

IV Vibration des plaques circulaires minces soumises à un rayonnement de micro-ondes pulsées

Résumé

Le présent chapitre est consacré à l'étude de la vibration dans le plan de plaques circulaires minces soumises à des radiations de micro-ondes pulsées. L'objectif est de développer une méthode de caractérisation non-destructive des plaques minces. La génération acoustique par micro-ondes dans les plaques circulaires dépend de la répartition spatiale du champ électromagnétique dans l'échantillon. Ainsi, si la radiation est axisymétrique, il ne sera généré que le mode purement radial. A l'opposé, si l'excitation est décentrée par rapport au centre de la plaque, le champ de déplacement résultant dépendra de la dimension angulaire. Par conséquent, il est possible de choisir d'utiliser différentes fréquences propres pour la caractérisation de la géométrie et des propriétés des matériaux qui constituent les plaques circulaires pleines ou trouées. A cette fin, un modèle semi-analytique est développé pour la prédiction des fréquences propres de vibration des disques et anneaux. Les équations d'onde sont résolues en tenant compte de la dépendance angulaire de la solution afin d'estimer le maximum de fréquences propres. Ce modèle est validé en comparant ses résultats avec ceux d'un calcul par éléments finis et les mesures expérimentales. La validation permet enfin d'associer le modèle à la technique de génération par micro-ondes pour la caractérisation géométrique et mécanique des plaques minces circulaires.

IV.1	Introduction	IV-3
IV.2	Modélisation	IV-4
IV.2.1	Formulation du problème et équations d'ondes	IV-4
IV.2.2	Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques circulaires	IV-6
IV.2.3	Résolution des équations différentielles dans le cas d'un anneau	IV-7
IV.2.3.1	Forme des potentiels	IV-7
IV.2.3.2	Conditions aux limites	IV-8
IV.2.4	Résolution des équations différentielles dans le cas d'un disque	IV-11
IV.2.5	Calcul numérique des fréquences propres	IV-12
IV.3	Echantillons et modélisation par MEF	IV-14
IV.3.1	Echantillons testés	IV-14
IV.3.2	Maillage des disques et MEF	IV-15
IV.4	Problème direct et validation du modèle	IV-15
IV.5	Problèmes inverses	IV-21
IV.5.1	Caractérisation matérielle	IV-21
IV.5.2	Caractérisation géométrique	IV-27
IV.6	Génération acoustique d'un trou circulaire dans une plaque infinie	IV-30
IV.7	Conclusions	IV-34
IV.8	Bibliographie	IV-37

IV.1 Introduction

La vibration des structures circulaires a été intensément étudiée depuis les travaux précurseurs de Pochhammer [IV-1] et Chree [IV-2], au 19^{ème} siècle, sur la propagation acoustique dans les cylindres infinis. De nombreux auteurs à l'instar de Lamb [IV-3], Carrington [IV-4] et Rayleigh [IV-5], ont étudié, sous différentes conditions aux limites [IV-6], la vibration transverse des plaques circulaires minces généralement excitées par impact. D'autres travaux ont porté sur la vibration et la génération acoustique [IV-7] des plaques épaisses utilisant la théorie des plaques qui leur est associée [IV-8] [IV-9]. La vibration des plaques circulaires minces dans leur plan, qui a fait l'objet de peu de travaux, a été principalement abordée théoriquement par analyse modale, sans validation expérimentale [IV-10]-[IV-16], ou en comparant la modélisation analytique avec des simulations par éléments finis [IV-17]. La vibration purement radiale des plaques circulaires a été testée expérimentalement sur des plaques piézoélectriques excitées électriquement [IV-11], ou en insérant des transducteurs piézoélectriques aux centres des plaques étudiées [IV-12]. Comparée à l'excitation par impact, la génération acoustique par micro-ondes se produit sans contact et permet de forcer la vibration d'une structure à des fréquences choisies afin d'observer les résonances de l'échantillon. Dans le cas des plaques minces circulaires, la technique de génération par micro-ondes permet de choisir d'exciter le mode de vibration purement radial ou des modes de distorsion (faisant intervenir une dépendance angulaire) en assurant, respectivement, une irradiation axisymétrique ou décentrée par rapport au centre de la plaque. Contrairement aux techniques par impact, cette méthode permet aussi d'assurer une très bonne reproductibilité expérimentale.

Dans ce chapitre, la vibration des plaques circulaires minces dans leur plan sera étudiée théoriquement et expérimentalement en utilisant la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées [IV-13]. Cette méthode sera appliquée à la résolution des problèmes directs et inverses de la vibration des disques et des anneaux, dont la forme circulaire est souvent rencontrée dans l'industrie, dans le but d'en faire une technique de contrôle ou d'évaluation non destructifs (CND/END).

Pour ce faire, comme pour le cas des plaques elliptiques étudiées au chapitre III, nous adopterons l'hypothèse d'un état plan de contraintes afin d'établir la loi de comportement du matériau viscoélastique constituant les plaques. Après décomposition du champ de déplacement en potentiels [IV-14]-[IV-15], les équations d'ondes obtenues seront résolues, au moyen de séries infinies de fonctions trigonométriques et de Bessel [IV-16]-[IV-17], en tenant compte des conditions de

contraintes nulles sur les frontières. Le modèle théorique ainsi construit sera validé en comparant les fréquences propres et les spectres de vitesse de plaques confectionnées pour les besoins de l'étude aux mesures expérimentales et aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis. Par ailleurs, le modèle semi-analytique développé au chapitre III pour l'étude de la vibration des plaques minces elliptiques servira à étudier l'effet d'une faible ellipticité sur la réponse vibratoire radiale d'un disque. Enfin, comme application de la méthode classique de caractérisation des structures à partir des fréquences propres de celles-ci [IV-8], [IV-19]-[IV-20], il sera montré que la combinaison du modèle et de la génération acoustique par micro-ondes pulsées permet de résoudre les problèmes inverses de caractérisation matérielle et géométrique des plaques circulaires. Il sera, d'autre part, montré comment la démarche développée pour le cas des plaques peut être étendue au cas des cylindres circulaires pleins ou tubulaires en vue d'applications ultérieures.

IV.2 Modélisation

IV.2.1 Formulation du problème et équations d'ondes

Nous nous proposons d'étudier la vibration des plaques minces circulaires pleines ou trouées soumises à des radiations de micro-ondes pulsées. Le modèle servira à déterminer les fréquences propres de résonance et/ou le champ de déplacement au sein des plaques quand ceci est possible. La démarche adoptée pour modéliser la génération acoustique dans les plaques circulaires est très semblable à celle qui a été mise en œuvre au chapitre III pour l'étude des plaques minces elliptiques. En effet, comme précédemment (§III.2.1), le champ de déplacement est réduit à ses composantes contenues dans le plan de la plaque. De plus, le matériau constituant la plaque est supposé isotrope et viscoélastique linéaire à coefficients matériels complexes afin de tenir compte de l'atténuation des ondes mécaniques. Par conséquent, et sauf mention contraire, toutes les quantités qui apparaîtront dans la suite du développement seront exprimées dans le domaine fréquentiel par transformation de Fourier des quantités exprimées dans le domaine temporel. D'autre part, comme précédemment, l'action des micro-ondes sur les plaques circulaires sera modélisée par un accroissement brusque de la température dans le matériau constituant la plaque. Par ailleurs, du fait de la faible épaisseur des plaques testées expérimentalement et de la faible atténuation de la température dans leur épaisseur (voir §III.4), nous supposerons, comme pour les plaques elliptiques, un état plan de contraintes.

Etant donnée la symétrie de révolution des structures étudiées, les différents champs seront exprimés dans un repère cylindrique circulaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. L'hypothèse d'un état plan de contraintes permet de ne considérer que les composantes du champ de déplacement contenues dans le plan de la plaque $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Le champ de déplacement dans le plan a donc la forme vectorielle suivante :

$$\vec{U} = (U_r(r, \theta) \ U_\theta(r, \theta))^T \quad (\text{IV-1})$$

Le matériau est soumis à une élévation brusque de la température $\Delta T(r, \theta)$ supposée symétrique par rapport à l'axe $\theta = 0$ du plan de la plaque. Tout calcul fait et sous l'hypothèse d'un état plan de contraintes, les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = Q_{11}\varepsilon_{rr} + Q_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - B_1\Delta T(r, \theta) \\ \sigma_{\theta\theta} = Q_{12}\varepsilon_{rr} + Q_{22}\varepsilon_{\theta\theta} - B_2\Delta T(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta} = 2Q_{66}\varepsilon_{r\theta} \end{cases} \quad (\text{IV-2})$$

où les coefficients matériels Q_{ij} et B_i sont définis dans l'équation (II.6)

Etant données les hypothèses citées plus haut, l'équation différentielle du mouvement régissant la vibration d'une plaque mince circulaire est, d'un point de vue tensoriel, identique à l'équation (II.12) qui régit le champ de déplacement dans une plaque elliptique. La résolution du problème de vibration des plaques circulaires dépend donc de la répartition spatiale de l'augmentation de la température qui est elle-même liée à la répartition du champ d'excitation micro-ondes. Considérant la nature de cette excitation et la difficulté de prédire sa répartition spatiale, la recherche du champ de déplacement dans une plaque ne sera envisagée que pour une excitation uniforme. Dans ce cas, le gradient de l'augmentation de la température est nul et l'équation différentielle du mouvement devient homogène et analytiquement soluble :

$$Q_{11}\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{U}) - \frac{Q_{11} - Q_{12}}{2}\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{U}) + \rho\omega^2\vec{U} = \vec{0} \quad (\text{IV-3})$$

A contrario, la recherche des modes propres de résonance des plaques n'impose pas la connaissance du profil de l'excitation. En effet, il suffira de résoudre l'équation homogène (IV-3) en se rappelant que les fréquences propres de la plaque modélisée sont contenues dans la solution homogène. Les détails de cette approche seront abordés au §IV.2.5.

De la même façon que pour les plaques elliptiques, le champ de déplacement dans les plaques circulaires peut être décomposé, au sens de Helmholtz, en deux parties dérivant respectivement d'un potentiel scalaire $\varphi(r, \theta)$ et d'un potentiel vectoriel

$\vec{\psi}(r, \theta)$. Etant donné que le champ de déplacement considéré est plan, le potentiel vectoriel n'a qu'une seule composante non nulle suivant l'axe zz' (voir les équations (II.15) et (II.16)). Les potentiels scalaire et vectoriel de Helmholtz vérifient les équations d'onde (II.18) et sont solubles dans le système de coordonnées cylindriques par la technique de séparation des variables [IV-14] [IV-15]. Enfin, l'équation (II.14), adaptée au cas du système de coordonnées circulaires, permet d'écrire le champ de déplacement dans les plaques en fonction des potentiels :

$$\begin{cases} U_r(r, \theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ U_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

Dans ce qui suit, la méthode de résolution de l'équation homogène (IV-3) est présentée en tenant compte de la dépendance angulaire de la solution dans le but d'évaluer un nombre maximum de fréquences propres des disques et des anneaux modélisés. Le calcul du champ de déplacement théorique ne sera effectué que pour le mode de vibration purement radial afin de visualiser et de comparer les spectres théoriques et expérimentaux.

IV.2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques circulaires

Les potentiels scalaire et vectoriel sont des fonctions des deux variables spatiales (r, θ) . Les équations de Helmholtz deviennent, dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k_L^2 \varphi &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_T^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-5})$$

L'équation de Helmholtz étant séparable dans ce système de coordonnées, nous pouvons appliquer la technique de séparation des variables aux fonctions φ et ψ en écrivant :

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = \varphi_r(r) \varphi_\theta(\theta) \\ \psi(r, \theta) = \psi_r(r) \psi_\theta(\theta) \end{cases} \quad (\text{IV-6})$$

où $\varphi_r(r)$ et $\psi_r(r)$ sont les parties radiales des potentiels φ et ψ qui ne dépendent que de la variable r . Les fonctions $\varphi_\theta(\theta)$ et $\psi_\theta(\theta)$ sont, quant à elles, les parties angulaires des potentiels φ et ψ . Les équations (IV-5) deviennent :

$$\frac{r^2}{\varphi_r} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial r^2} + \frac{r}{\varphi_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + k_L^2 r^2 = -\frac{1}{\varphi_\theta} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \quad (\text{IV-7})$$

$$\frac{r^2}{\psi_r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{r}{\psi_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + k_T^2 r^2 = -\frac{1}{\psi_\theta} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} \quad (\text{IV-8})$$

Les équations (IV-7) et (IV-8) présentent des membres dépendant de variables spatiales différentes. Par conséquent, chaque membre est égal à une constante de séparation n^2 donnant ainsi les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + n^2 \varphi_\theta = 0 \\ r^2 \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + ((rk_L)^2 - n^2) \varphi_r = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} + n^2 \psi_\theta = 0 \\ r^2 \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + ((rk_T)^2 - n^2) \psi_r = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-9})$$

Les équations différentielles angulaires dans (IV-9) n'ont de solutions périodiques que si, et seulement si, n^2 est entier. Les équations différentielles en r correspondent à des équations de Bessel d'ordre n et de variables (rk_L) ou (rk_T) .

IV.2.3 Résolution des équations différentielles dans le cas d'un anneau

IV.2.3.1 Forme des potentiels

La plaque circulaire, de rayon extérieur R_2 , est trouée au centre d'un trou circulaire de rayon R_1 . Compte tenu du fait que l'anneau contient une discontinuité, les solutions des équations différentielles de Bessel seront de première et de seconde espèce [IV-14] [IV-15]. Les potentiels scalaire et vectoriel d'ordre n sont les produits des solutions angulaires et radiales des équations différentielles (IV-9) :

$$\begin{aligned} \varphi_n(r, \theta) &= [A_n^\varphi J_n(k_L r) + B_n^\varphi Y_n(k_L r)] [C_n^\varphi \cos(n\theta) + D_n^\varphi \sin(n\theta)] \\ \psi_n(r, \theta) &= [A_n^\psi J_n(k_L r) + B_n^\psi Y_n(k_L r)] [C_n^\psi \cos(n\theta) + D_n^\psi \sin(n\theta)] \end{aligned} \quad (\text{IV-10})$$

où les parties sinusoïdales sont solutions des équations différentielles angulaires et où les fonctions $J_n()$ et $Y_n()$ sont, respectivement, les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce d'ordre n , solutions des équations radiales de l'équation (IV-9).

En tenant compte de l'ensemble des solutions d'ordres différents, les solutions générales des équations d'ondes (IV-5) sont données par les séries infinies suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^\varphi J_n(k_L r) + B_n^\varphi Y_n(k_L r)] [C_n^\varphi \cos(n\theta) + D_n^\varphi \sin(n\theta)] \\ \psi(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\psi J_n(k_L r) + B_n^\psi Y_n(k_L r)] [C_n^\psi \cos(n\theta) + D_n^\psi \sin(n\theta)]\end{aligned}\quad (\text{IV-11})$$

Par ailleurs, l'hypothèse de symétrie spatiale de l'excitation par rapport à l'axe $\theta = 0$ impose aux composantes du champ de déplacement de vérifier les relations suivantes :

$$\begin{cases} U_r(r, \theta) = U_r(r, -\theta) \\ U_\theta(r, \theta) = -U_\theta(r, -\theta) \end{cases} \quad \forall (r, \theta) \in [R_1, R_2] \times [0, 2\pi], \quad (\text{IV-12})$$

Les relations (IV-4) permettent d'écrire le champ de déplacement à partir des potentiels donnés en (IV-11). Le développement des relations (IV-12), pour tout entier n , fait finalement apparaître que :

$$D_n^\varphi = 0 \quad \text{et} \quad C_n^\psi = 0 \quad (\text{IV-13})$$

En renommant les coefficients non nuls des séries (IV-11) par A_n , B_n , C_n et D_n , les potentiels scalaire et vectoriel deviennent :

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(k_L r) + B_n Y_n(k_L r)] \cos(n\theta) \\ \psi(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [C_n J_n(k_r r) + D_n Y_n(k_r r)] \sin(n\theta)\end{aligned}\quad (\text{IV-14})$$

Remarquons que le potentiel scalaire, qui est la partie irrotationnelle du déplacement, est une fonction paire par rapport à la variable angulaire et que le potentiel vectoriel, représentant la part rotationnelle du mouvement, est une fonction impaire de θ .

IV.2.3.2 Conditions aux limites

Les inconnues du problème sont les coefficients A_n , B_n , C_n et D_n . Ils sont déterminés à partir des conditions aux limites de contraintes mécaniques nulles sur les frontières intérieures et extérieures de l'anneau. A partir de l'équation (IV-4) et tenant compte des relations de récurrence entre les fonctions de Bessel et leurs dérivées [IV-21] [IV-22], le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}
 U_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_L r) - k_L J_{n+1}(k_L r) \right) + B_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_L r) - k_L Y_{n+1}(k_L r) \right) \right] \cos(n\theta) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \frac{n}{r} J_n(k_T r) + D_n \frac{n}{r} Y_n(k_T r) \right] \cos(n\theta) \\
 U_\theta &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \frac{n}{r} J_n(k_L r) + B_n \frac{n}{r} Y_n(k_L r) \right] \sin(n\theta) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_T r) - k_T J_{n+1}(k_T r) \right) + D_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_T r) - k_T Y_{n+1}(k_T r) \right) \right] \sin(n\theta)
 \end{aligned} \tag{IV-15}$$

Le disque étant libre de toute contrainte sur ses frontières, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_i = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i \sigma_{rr} \\ (-1)^i \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } r = R_i \quad (i = 1, 2) \tag{IV-16}$$

\vec{n}_i étant le vecteur normal à la frontière i orienté vers l'extérieur.

Les contraintes étant liées aux déformations par l'équation (IV-2), il est possible d'écrire les conditions aux limites (IV-16) en terme de déformations,

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} = (1 + \nu) \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad \text{en } r = R_i \quad (i = 1, 2) \tag{IV-17}$$

D'autre part, les composantes du tenseur des déformations, donné par la relation cinématique (II.9), s'expriment comme suit :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \tag{IV-18}$$

Tout calcul fait, les relations (IV-15), (IV-17) et (IV-18) permettent d'obtenir, en R_i ($i = 1, 2$), le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^J(k_L R_i, \theta) A_n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n^Y(k_L R_i, \theta) B_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^J(k_T R_i, \theta) C_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^Y(k_T R_i, \theta) D_n = (1 + \nu) \alpha \Delta T \\ \sum_{n=0}^{\infty} h_n^J(k_L R_i, \theta) A_n + \sum_{n=0}^{\infty} h_n^Y(k_L R_i, \theta) B_n + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^J(k_T R_i, \theta) C_n + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^Y(k_T R_i, \theta) D_n = 0 \end{cases} \tag{IV-19}$$

avec,

$$\begin{aligned}
 f_n^J(k_L r, \theta) &= \left[\frac{n(n-1)(1-\nu)}{r^2} J_n(k_L r) - \frac{(2n+1+\nu)k_L}{r} J_{n+1}(k_L r) + k_L^2 J_{n+2}(k_L r) \right] \cos(n\theta), \quad n = 0, \infty \\
 f_n^Y(k_L r, \theta) &= \left[\frac{n(n-1)(1-\nu)}{r^2} Y_n(k_L r) - \frac{(2n+1+\nu)k_L}{r} Y_{n+1}(k_L r) + k_L^2 Y_{n+2}(k_L r) \right] \cos(n\theta), \quad n = 0, \infty
 \end{aligned}$$

$$g_n^J(k_T r, \theta) = \left[\frac{n(n-1)(1-\nu)}{r^2} J_n(k_T r_2) - \frac{n(1-\nu)k_T}{r} J_{n+1}(k_T r) \right] \cos(n\theta), \quad n = 0, \infty$$

$$g_n^Y(k_T r, \theta) = \left[\frac{n(n-1)(1-\nu)}{r^2} Y_n(k_T r_2) - \frac{n(1-\nu)k_T}{r} Y_{n+1}(k_T r) \right] \cos(n\theta), \quad n = 0, \infty$$

$$h_n^J(k_L r, \theta) = \left[-\frac{n(n-1)}{r^2} J_n(k_L r) + \frac{nk_L}{r} J_{n+1}(k_L r) \right] \sin(n\theta), \quad n = 1, \infty$$

$$h_n^Y(k_L r, \theta) = \left[-\frac{n(n-1)}{r^2} Y_n(k_L r) + \frac{nk_L}{r} Y_{n+1}(k_L r) \right] \sin(n\theta), \quad n = 1, \infty$$

$$l_n^J(k_T r, \theta) = \left[-\frac{n(n-1)}{r^2} J_n(k_T r) + \frac{nk_T}{r} J_{n+1}(k_T r) - \frac{k_T^2}{2} J_{n+2}(k_T r) \right] \sin(n\theta), \quad n = 1, \infty$$

$$l_n^Y(k_T r, \theta) = \left[-\frac{n(n-1)}{r^2} Y_n(k_T r) + \frac{nk_T}{r} Y_{n+1}(k_T r) - \frac{k_T^2}{2} Y_{n+2}(k_T r) \right] \sin(n\theta), \quad n = 1, \infty$$

La solution analytique du problème de vibration d'un anneau soumis à une élévation de température uniforme peut être résolu de manière exacte. La génération uniforme a pour effet de rendre le mouvement du disque purement radial et indépendant de θ . Cette vibration correspond au mode fondamental associé à l'indice $n=0$. La composante U_θ du déplacement, donnée en (IV-15), s'annule et les seules inconnues restantes, A_0 et B_0 , sont déterminées à partir du système (IV-19) qui se réduit à un système de deux équations algébriques. Compte tenu des relations de récurrence entre les fonctions de Bessel [IV-22], le champ de déplacement radial dans un anneau s'écrit:

$$U_r(r) = \frac{2(1+\nu) \alpha \Delta T(\omega)}{[Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)]} \left([Y(R_1) - Y(R_2)] J_1(k_L r) - [J(R_1) - J(R_2)] Y_1(k_L r) \right) \quad (\text{IV-20})$$

où les fonctions $J(r)$ et $Y(r)$ sont définies par :

$$J(r) = k_L J_0(k_L r) + \frac{2\nu}{r} J_1(k_L r) - k_L J_2(k_L r) \quad (\text{IV-21})$$

$$Y(r) = k_L Y_0(k_L r) + \frac{2\nu}{r} Y_1(k_L r) - k_L Y_2(k_L r) \quad (\text{IV-22})$$

IV.2.4 Résolution des équations différentielles dans le cas d'un disque

Le disque (de rayon R_0) étant plein, le déplacement au centre est fini et, par conséquent, les solutions des équations différentielles de Bessel ne peuvent être que de première espèce [IV-14] [IV-15]. De même que dans le cas de l'anneau, en tenant compte du fait que le disque est excité symétriquement par rapport à l'axe $\theta = 0$, les conditions physiques (IV-12) sur les composantes du champ de déplacement dans le disque doivent être vérifiées. Les potentiels scalaire et vectoriel peuvent donc être déduits des expressions (IV-14) en annulant les coefficients B_n et D_n . Les potentiels s'écrivent alors comme les sommes infinies suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(k_L r) \cos(n\theta) \\ \psi(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_n(k_T r) \sin(n\theta)\end{aligned}\tag{IV-23}$$

De même, le champ de déplacement dans le disque se déduit de l'expression (IV-15) en annulant les coefficients B_n et D_n ,

$$\begin{aligned}U_r &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_L r) - k_L J_{n+1}(k_L r) \right) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n}{r} J_n(k_T r) \cos(n\theta) \\ U_\theta &= -\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{n}{r} J_n(k_L r) \sin(n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_T r) - k_T J_{n+1}(k_T r) \right) \sin(n\theta)\end{aligned}\tag{IV-24}$$

où les coefficients A_n et C_n sont déterminés à partir des conditions aux limites du problème. Ces dernières sont adaptées à partir des relations (IV-19) au cas du disque et deviennent :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^J(k_L R_0, \theta) A_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^J(k_T R_0, \theta) C_n = (1 + \nu) \alpha \Delta T(R_0, \theta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} h_n^J(k_L R_0, \theta) A_n + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^J(k_T R_0, \theta) C_n = 0 \end{cases}.\tag{IV-25}$$

Enfin, comme pour le cas d'un anneau, le problème de la vibration d'un disque soumis à une élévation de température uniformément répartie sur son volume est résolu analytiquement. Du fait de l'uniformité de l'excitation, le champ de déplacement est purement radial (mode fondamental). Mathématiquement, le champ de déplacement est obtenu à partir des expressions (IV-24) pour $n = 0$. La composante angulaire du déplacement est alors nulle et les coefficients inconnus se réduisent au seul coefficient A_0 calculé à partir du système (IV-25) qui se simplifie, à

son tour, en une équation algébrique. Le champ de déplacement radial dans un disque s'écrit finalement comme suit :

$$U_r(r) = \frac{2(1+\nu)\alpha\Delta T(\omega)}{\left[k_L J_0(k_L R_0) + \frac{2\nu}{R_0} J_1(k_L R_0) - k_L J_2(k_L R_0) \right]} J_1(k_L r) \quad (\text{IV-26})$$

IV.2.5 Calcul numérique des fréquences propres

Le calcul du champ de déplacement dans les plaques minces circulaires soumises à une excitation thermique uniforme est possible à partir des équations (IV-20) et (IV-26). Toutefois, le champ thermique associé à une radiation micro-ondes quelconque est a priori inconnu. Le choix a été donc fait de calculer, dans le cas général, les fréquences des modes propres de vibration des plaques et de n'évaluer les champs de déplacements que dans le cas d'une excitation uniforme. Dans ce qui suit, la procédure de discrétisation et de recherche des fréquences propres est présentée en détail pour le cas d'un anneau. La méthode reste la même dans le cas d'un disque avec, toutefois, une seule frontière de discrétisation, voir la Figure IV-1 (a). Cette procédure est semblable à celle qui a été mise en œuvre pour la recherche des coefficients inconnus des séries de fonctions de Mathieu qui définissent le champ de déplacement dans une plaque elliptique (§III.2.5).

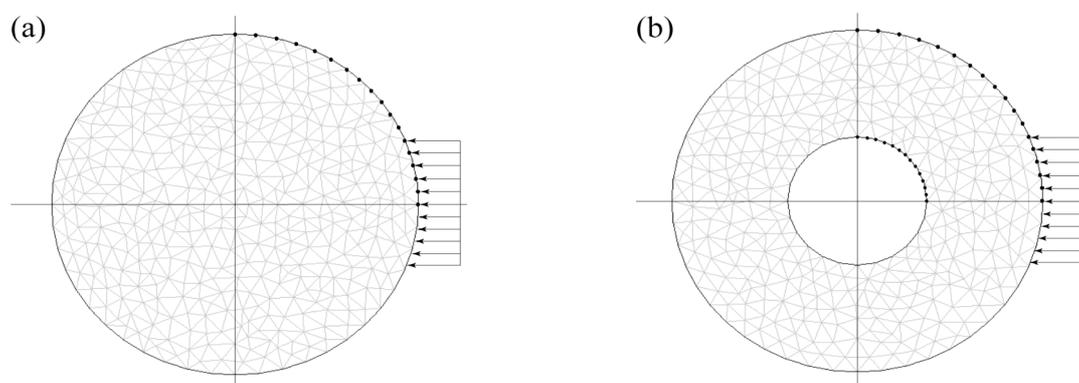


Figure IV-1 Représentation de la discrétisation des frontières et du maillage du volume (MEF), (a) d'un disque et (b) d'un anneau, excités localement de manière thermique

Etant donnée la symétrie de l'excitation par rapport à l'axe $\theta = 0$ et afin d'optimiser le coût du calcul numérique, la discrétisation ne porte que sur un quart de l'anneau. Les frontières de l'anneau sont discrétisées en $2N$ points (N points pour chaque frontière) où le système d'équations (IV-19) est vérifié, voir la Figure IV-1 (b). Le nombre d'équations du système est alors égal à $4N$ et, si l'on désire obtenir un

système d'équations carré, les séries infinies sont tronquées à la Nième inconnue. Le système discrétisé a finalement la forme suivante :

$$[M(R_1, R_2, \theta_i, \omega)](A) = (b) \quad (\text{IV-27})$$

où i est l'indice du point de la discrétisation géométrique qui varie de 1 à N , $[M(R_1, R_2, \theta_i, \omega)]$ est une matrice carrée ($4N \times 4N$) composée des fonctions f_n , g_n , h_n et l_n données dans l'équation (IV-19) et évaluées en chaque point, (A) est un vecteur de dimension $4N$ composé des coefficients inconnus A_n , B_n , C_n et D_n , et (b) est le vecteur second membre de dimension $4N$ et composé des termes de l'excitation thermique.

Le vecteur second membre de l'équation (IV-27) est indéterminé car le champ d'excitation est inconnu. Toutefois, les fréquences propres de la plaque pourraient être déterminées à partir du système d'équations homogène associé au système (IV-27), en se rappelant que ce système homogène n'admet des solutions que si, et seulement si, le déterminant de la matrice $[M(R_1, R_2, \theta_i, \omega)]$ est nul. La recherche numérique des racines du déterminant,

$$\det[M(R_1, R_2, \theta_i, \omega_k)] = 0, \quad k = 1, \dots, \infty \quad (\text{IV-28})$$

fournit, en théorie, les pulsations propres de vibration de l'anneau.

En pratique, en raison de la taille de la matrice et des variations d'échelles de grandeur qu'elle contient, il apparaît que la matrice M est mal conditionnée et que la résolution de l'équation (IV-28) est numériquement instable. Afin de contourner cette difficulté, la recherche des fréquences propres est effectuée par la résolution du système d'équations (IV-27) en imposant, au quart de cercle modélisé, une excitation non uniforme *fictive*. Etant donné que cette excitation n'a pas de sens physique, le champ de déplacement associé est, lui aussi, *fictif*. Cette démarche a pour seul but d'exciter et de percevoir, en plus des modes purement radiaux, les différents modes propres des plaques circulaires. Il suffit alors de calculer le champ de déplacement *fictif* sur une certaine gamme de fréquences afin d'établir le spectre de la réponse impulsionnelle et d'en extraire les fréquences propres qui apparaissent sous forme de pics de résonance.

Enfin, afin d'améliorer la qualité numérique de la solution et comme pour le cas des plaques elliptiques (voir §III.2.5), nous utiliserons la procédure de pseudo-inversion basée sur la méthode des moindres carrés (Moore-Penrose [IV-23]) pour la résolution de l'équation (IV-27).

IV.3 Echantillons et modélisation par MEF

IV.3.1 Echantillons testés

Quatre plaques circulaires ont été fabriquées à base de résine époxy chargée de graphite. Les noms, les propriétés géométriques et les densités des anneaux et des disques confectionnés sont donnés dans le Tableau IV-1.

	Rayon extérieur (mm)	Rayon intérieur (mm)	Densité (kg/m ³)
Disque Di ₁	31,5	-	1150
Disque Di ₂	40,0	-	1250
Anneau An ₁	31,5	10,0	1150
Anneau An ₂	40,0	15,0	1150

Tableau IV-1 Propriétés géométriques et densités des disques et anneaux fabriqués

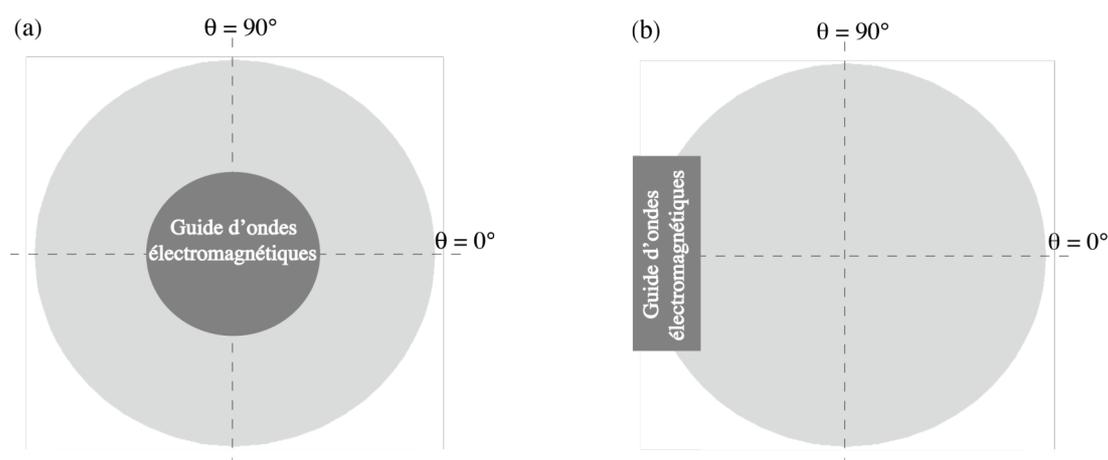


Figure IV-2 Disposition des guides d'ondes électromagnétiques par rapport aux plaques circulaires testées expérimentalement pour la génération du mode propre (a) radial (f_r) et (b) des modes propres de distorsion

Le matériau ainsi fabriqué est viscoélastique. Afin de prendre en compte l'aspect dissipatif de la propagation, nous adoptons un module de Young complexe où la partie imaginaire traduit la viscoélasticité du matériau. Un essai de résonance par micro-ondes sur une barre (fabriquée à partir de la résine époxy de densité 1150 kg/m³) combiné à un modèle de vibration unidimensionnel [IV-18] a permis d'évaluer le module de Young du disque Di₁ à $E = (3,11 + 0,10i)$ GPa avec une précision, sur la partie réelle, égale à $\pm 0,05$ GPa. Cette méthode ne permet pas de déterminer le coefficient de Poisson. Néanmoins, et afin de valider les modèles théoriques, le coefficient de Poisson est pris égal à sa valeur estimée à $\nu = 0,39$ par la méthode de

caractérisation développée plus loin. Enfin, comme représenté sur la Figure IV-2, les micro-ondes se propagent à l'intérieur du guide d'ondes circulaire pour générer le mode propre de vibration purement radial, ou dans le guide d'ondes électromagnétiques rectangulaire pour exciter les différents modes propres de distorsion dans le plan de la plaque circulaire (voir le §II.3 pour les propriétés géométriques des guides d'ondes électromagnétiques).

IV.3.2 Maillage des disques et MEF

La résolution semi-analytique du problème de vibration d'une plaque circulaire nécessite la discrétisation d'un quart de ses frontières intérieure et extérieure en un certain nombre de points. La Figure IV-1 montre la discrétisation des frontières ainsi que la répartition de l'excitation thermique non uniforme utilisée pour générer les différents modes de résonance des plaques. Sachant que le nombre de points de discrétisation augmente avec la gamme de fréquences à explorer, les disques et les anneaux ont été discrétisés, respectivement, avec au maximum 16 et 32 points (16 sur chaque frontière). En discrétisant une gamme de fréquences donnée, le calcul du champ de déplacement a été effectué pour chaque fréquence afin d'établir le spectre en déplacement ou en vitesse associé à une excitation thermique choisie (uniforme ou excentrée). Enfin, afin de percevoir le maximum de modes propres, les spectres ont été établis en différents endroits de la frontière extérieure des plaques.

La modélisation de la vibration des disques par la méthode des éléments finis a été réalisée à l'aide du logiciel d'éléments finis FEMLAB® [IV-24] (voir annexe A). Le matériau a été considéré comme étant viscoélastique et les plaques, représentées sur la Figure IV-1, ont été maillées par des éléments triangulaires, linéaires, de type Lagrange. Les disques et les anneaux ont été respectivement discrétisés par 610 éléments (2530 degrés de liberté pour 330 noeuds) et 560 éléments (2400 degrés de liberté pour 320 noeuds). L'évaluation des fréquences propres par éléments finis a été réalisée en utilisant le module «étude modale bidimensionnelle» du logiciel FEMLAB®.

IV.4 Problème direct et validation du modèle

Les modèles développés ci-dessus vont d'abord être validés en comparant les résultats théoriques aux résultats expérimentaux et à ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Ces modèles seront ensuite exploités pour l'évaluation non-destructive des propriétés mécaniques et géométriques des plaques circulaires.

Le Tableau IV-2 et le Tableau IV-3 donnent respectivement les fréquences propres de résonance des disques et des anneaux obtenues expérimentalement par micro-ondes pulsées (voir la Figure IV-2), par les modèles semi-analytiques et par la simulation des vibrations par la méthode des éléments finis. Ces fréquences correspondent aux différents modes propres de vibration des plaques. Les fréquences du mode purement radial, indiquées en gras dans les tableaux, peuvent être identifiées à partir des spectres calculés à l'aide des relations (IV-26) (IV-20) respectivement pour les disques et les anneaux. Il existe, dans tous les cas, une bonne corrélation entre les fréquences expérimentales et celles qui sont obtenues par les modèles théoriques. Les différences que l'on observe entre les fréquences théoriques et expérimentales sont expliquées par différentes raisons. Du point de vue du modèle semi-analytique, la troncature des séries infinies qui expriment les champs de déplacements est une source d'erreur pour l'évaluation des fréquences propres. En effet, plus la gamme de fréquence à explorer est grande, plus il est nécessaire de prendre en compte un grand nombre de termes dans les séries qui expriment le champ de déplacement. Il est aussi à noter qu'une discrétisation pas assez fine du domaine fréquentiel à explorer constitue une source supplémentaire d'imprécision.

Disque Di_1			Disque Di_2		
Expérimental (kHz)	Analytique (kHz)	MEF (kHz)	Expérimental (kHz)	Analytique (kHz)	MEF (kHz)
11,9	11,8	11,8	9,8	9,9	9,9
14,1	14,1	14,1	11,5	11,6	11,8
19,3	19,3	19,4	15,7	15,5	15,5
22,1	21,9	21,9	19,7	19,9	19,8
24,2	23,7	23,9	23,8	24,3	24,8
29,0	28,9	29,9	26,0	26,3	26,2
31,7	31,8	31,8	28,9	29,2	29,4
35,4	35,2	35,3	32,5	32,9	32,1
39,3	39,6	38,8	38,1	38,8	38,8
46,4	46,5	46,4	40,3	40,3	40,3
49,1	49,5	49,7	44,0	44,6	44,3
57,3	57,4	57,8	46,6	46,9	47,0
63,1	63,3	63,1	51,5	51,5	51,4
67,0	66,7	66,8	55,4	55,1	55,0
78,4	78,8	78,2	63,4	63,9	64,3

Tableau IV-2 *Fréquences propres de vibration des disques obtenues expérimentalement (par micro-ondes), par le modèle semi-analytique et par la méthode des éléments finis. Les fréquences en gras correspondent au mode propre radial.*

Anneau An ₁			Anneau An ₂		
Expérimental (kHz)	Analytique (kHz)	MEF (kHz)	Expérimental (kHz)	Analytique (kHz)	MEF (kHz)
7,6	7,8	7,7	5,4	5,4	5,5
14,4	14,5	14,4	10,7	10,7	10,7
16,1	16,5	16,2	11,7	11,9	11,9
21,2	21,6	21,3	17,1	17,2	17,7
23,2	23,9	23,5	22,7	23,4	23,4
29,1	29,8	29,6	27,4	28,2	28,1
34,9	35,2	35,4	29,6	29,8	31,8
38,1	38,1	38,4	34,9	34,8	35,3
40,3	40,8	40,4	36,0	36,7	36,4
42,2	42,6	42,7	38,1	38,4	38,5
46,2	45,8	45,8	44,7	45,2	44,9
57,7	57,1	56,9	53,2	53,3	53,1
66,6	67,8	66,7	-	-	-

Tableau IV-3 *Fréquences propres de vibration des anneaux obtenues expérimentalement (par micro-ondes), par le modèle semi-analytique et par la méthode des éléments finis. Les fréquences en gras correspondent au mode propre radial.*

Expérimentalement, les écarts en fréquence peuvent être liés aux effets de support des échantillons testés. En effet, plus la fréquence propre est élevée plus celle-ci devient sensible aux conditions de contact avec le support utilisé durant la mesure (voir §III.4). Enfin, il est à noter que les fréquences propres évaluées par la méthode des éléments finis sont très proches des résultats obtenus par les modèles développés dans le présent chapitre. Ces modèles présentent donc l'avantage d'être aussi précis que la méthode des éléments finis pour un coût de calcul inférieur.

Il intéressant de porter la validation sur les spectres de vitesse radiale obtenus pour une excitation axisymétrique. La Figure IV-3 et la Figure IV-4 représentent les spectres de vitesse radiale expérimentaux et théoriques obtenus sur les frontières des disques et des anneaux. L'expression du champ de vitesse radiale est obtenue par dérivation, dans l'espace fréquentiel, du déplacement radial obtenu analytiquement, selon le cas considéré, à partir des équations (IV-26) ou (IV-20). L'excitation micro-ondes, et par suite la génération, est ici axisymétrique et impulsionnelle afin de mettre en évidence les fréquences propres radiales expérimentales.

Les spectres (a) et (b) de la Figure IV-3 montrent la bonne corrélation entre les spectres de vitesses analytique et expérimentale obtenus pour les disques Di_1 et Di_2 . Les fréquences propres qui correspondent aux modes radiaux, données en gras dans le Tableau IV-2, sont obtenus expérimentalement avec une bonne précision jusqu'aux troisièmes fréquences de résonance.

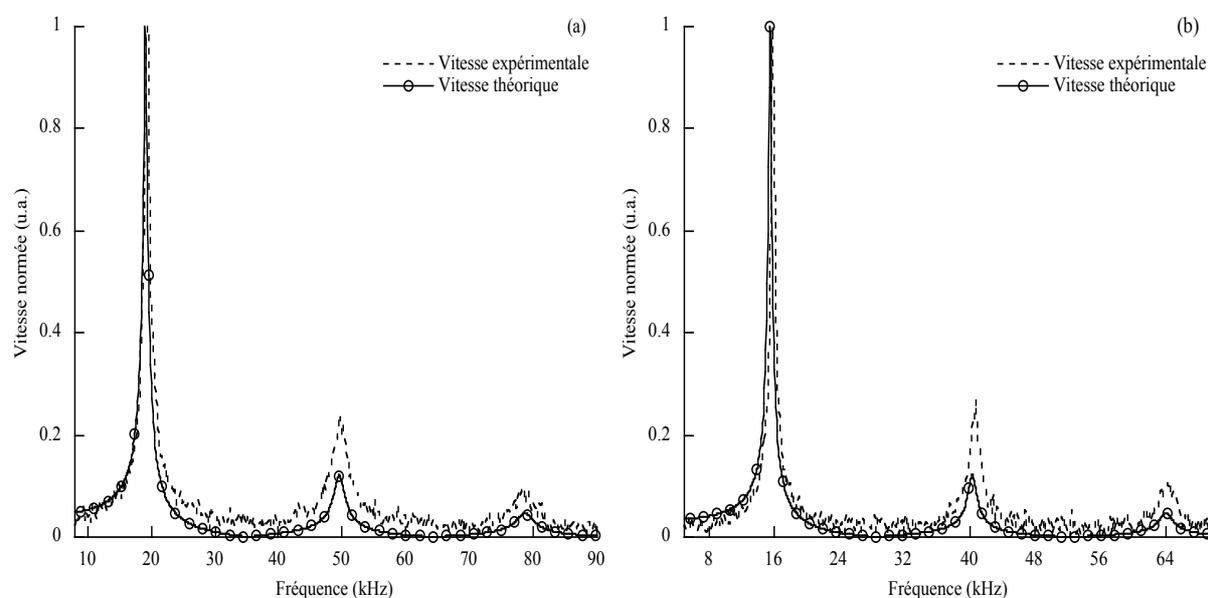


Figure IV-3 Spectres des vitesses radiales théoriques et expérimentales des disques excités par micro-ondes. (a) Di_1 , (b) Di_2

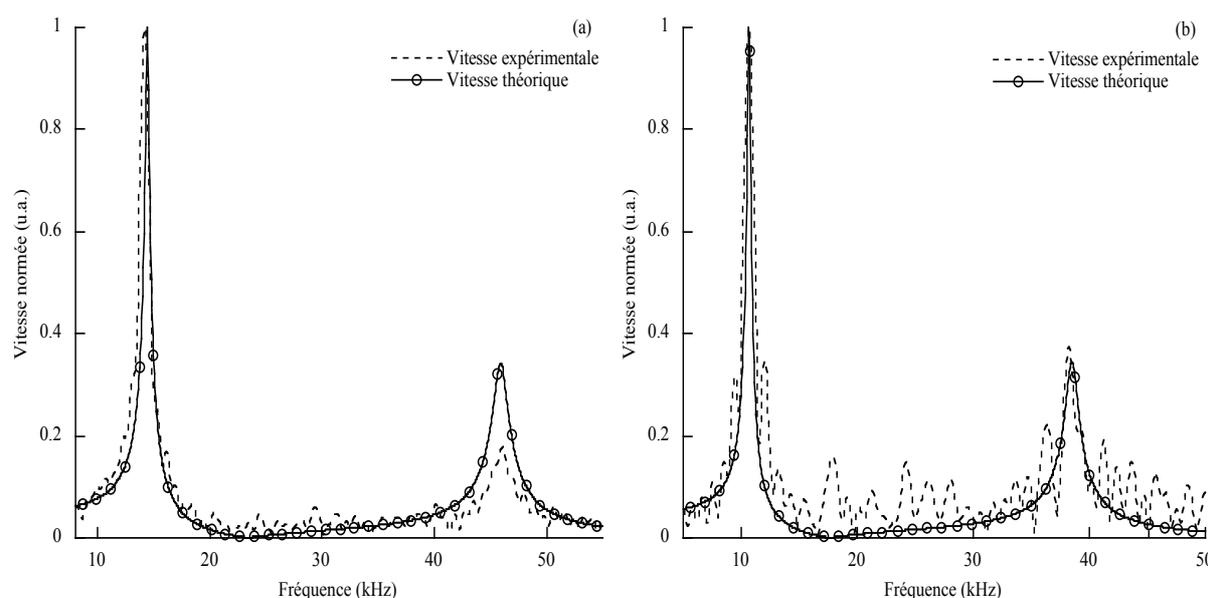


Figure IV-4 Spectres des vitesses radiales théoriques et expérimentales des anneaux excités par micro-ondes. (a) An_1 , (b) An_2

Les amplitudes relatives des vitesses analytiques et expérimentales ne coïncident pas parfaitement en raison de l'imprécision sur la répartition réelle de la température atteinte par le matériau lors du chauffage par micro-ondes. De plus, du fait de la dimension du guide d'ondes électromagnétiques circulaire utilisé (voir le §II.3) par rapport aux dimensions des disques, l'excitation expérimentale est axisymétrique

plutôt qu'uniforme. D'autre part, le bruit contenu dans le signal expérimental induit une imprécision sur les amplitudes mesurées expérimentalement.

Les spectres de la Figure IV-4 montrent qu'il existe une bonne correspondance entre les réponses impulsionnelles théoriques et expérimentales des anneaux An_1 et An_2 en mode propre de déformation radiale. Toutefois, il est remarquable que le spectre expérimental de l'anneau An_2 est fortement bruité. Ceci s'explique par le fait que le diamètre du trou intérieur de la plaque An_2 est plus grand que le diamètre du guide d'ondes électromagnétique circulaire utilisé (voir Tableau IV-1 et §II.3). La zone d'excitation n'étant pas assez large, le faible déplacement qui en résulte s'approche de l'ordre de grandeur de la précision du dispositif expérimental et le signal qui lui est associé devient très bruité.

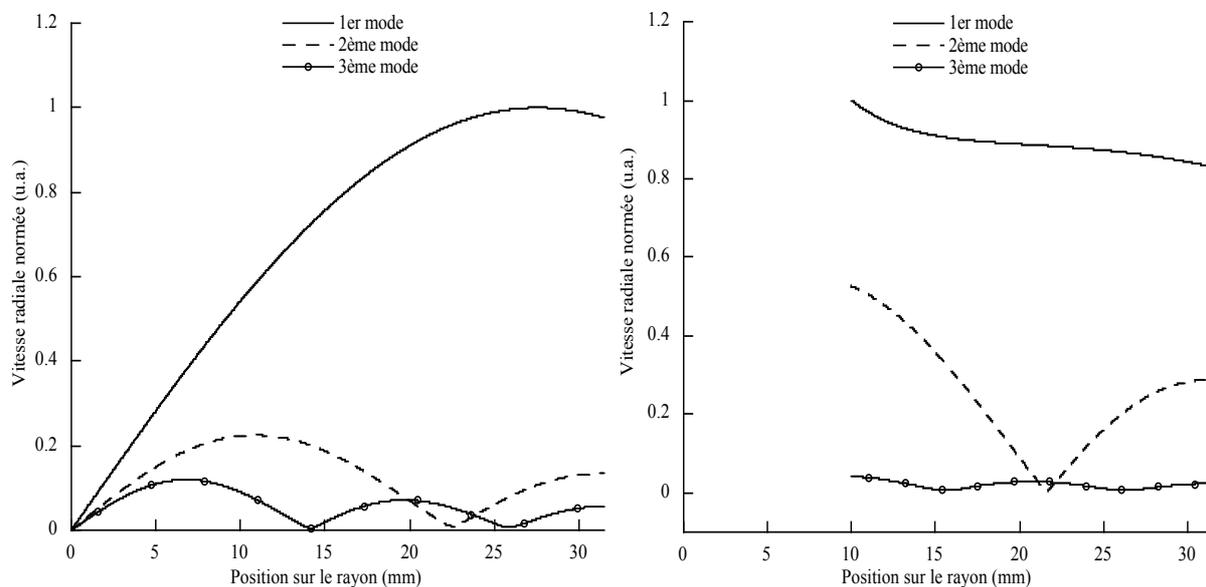


Figure IV-5 *Champs de vitesse correspondants aux trois premiers modes radiaux du disque* Di_1 Figure IV-6 *Champs de vitesse correspondants aux trois premiers modes radiaux de l'anneau* An_1

La Figure IV-5 et la Figure IV-6 montrent les allures des champs de vitesse radiale établis par les modèles théoriques, respectivement, dans le disque Di_1 et l'anneau An_1 , et cela pour les trois premières fréquences propres radiales (données dans les Tableau IV-2 et Tableau IV-3 en gras). Il est bien vérifié que le nombre de ventres présents dans l'allure de chaque champ de vitesse (liés à la longueur d'onde acoustique) est égal à l'ordre de la fréquence propre associée au mode radial représenté.

Avant d'aborder la résolution des problèmes inverses, le modèle semi-analytique mis en œuvre pour l'étude de la vibration des plaques elliptiques au chapitre III va servir

à étudier l'effet d'une faible ellipticité sur les fréquences propres du mode radial d'un disque. La Figure IV-7 montre la superposition des réponses en vitesse à une même excitation thermique brève et uniforme du disque Di_t (dont l'excentricité est nulle) et d'une plaque elliptique constituée du même matériau et ayant une excentricité de 39%. Pour rappel, l'excentricité caractérise l'ellipticité d'une ellipse et est définie comme étant le rapport de la distance focale et de la dimension du grand demi-axe de l'ellipse (voir §III.2.1). Dans ce dernier cas, la réponse a été calculée à partir de l'expression du champ de déplacement donné dans l'équation (III.44).

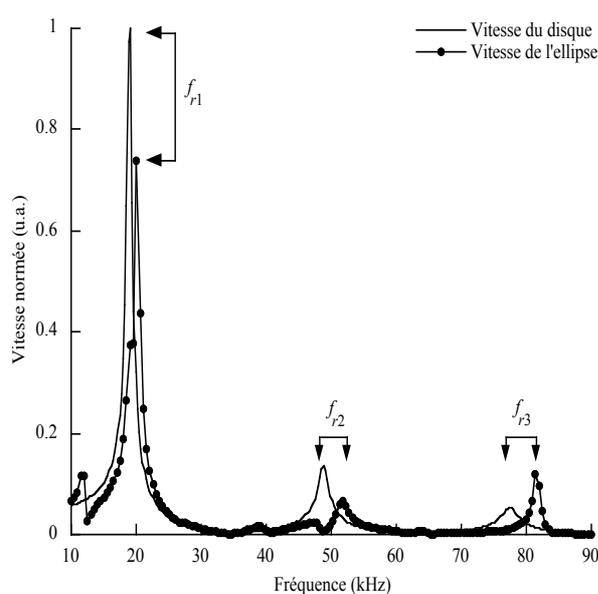


Figure IV-7 Superposition des spectres de vitesse du disque Di_t (a) parfaitement circulaire et (b) avec 39% d'excentricité

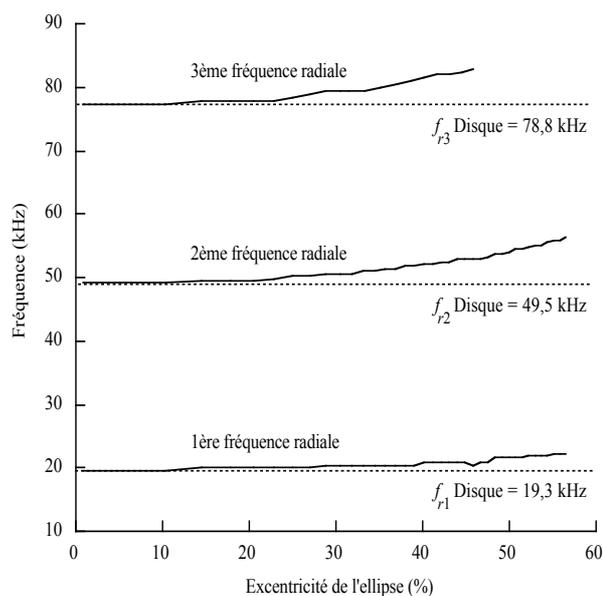


Figure IV-8 Evolution des trois premières fréquences propres du mode radial en fonction de l'ellipticité du disque Di_t

L'ellipticité a pour effets d'augmenter les fréquences propres du mode radial, de modifier les amplitudes relatives des pics (l'énergie se répartit donc différemment) et de faire apparaître d'autres modes propres liés à la géométrie de la frontière elliptique de la plaque. Une faible ellipticité dans un disque modifie donc sa réponse vibratoire. Il est possible d'observer l'évolution des trois premières fréquences propres du mode radial en fonction de l'excentricité de la frontière de la plaque en partant du cas parfaitement circulaire, en gardant le grand demi-axe égal à 31,5 mm et en faisant varier le petit demi-axe. Les courbes qui représentent ces évolutions sont données sur la Figure IV-8. Il est remarquable que jusqu'à une excentricité de 10% (qui correspond à un petit demi-axe égal à 31,35 mm), les fréquences propres radiales sont très peu sensibles à l'ellipticité de la plaque. Au-delà de la valeur de 10%, l'ellipticité fait croître l'ensemble des fréquences et plus particulièrement la seconde et troisième

fréquence. La méthode de génération acoustique par micro-ondes et les modèles développés pour les disques et les plaques elliptiques pourraient donc servir à caractériser l'ellipticité des plaques «pseudo-circulaires» au-delà de 10% d'excentricité en se basant, de préférence, sur les fréquences propres élevées. Cette procédure pourrait se montrer particulièrement intéressante pour la caractérisation des faibles ellipticités dans les structures cylindriques à sections droites quasi-circulaires.

IV.5 Problèmes inverses

Dans ce qui suit, nous présenterons la méthode de caractérisation mécanique et géométrique des plaques circulaires qui combine la technique de génération acoustique par micro-ondes aux modèles théoriques précédemment validés. La caractérisation matérielle sera effectuée sur des disques alors que l'évaluation de la géométrie portera sur les disques et les anneaux. N'ayant accès qu'aux fréquences propres de vibration des plaques circulaires et sachant qu'elles dépendent des propriétés géométriques et mécaniques, nous utiliserons cette information pour la résolution des problèmes inverses en précisant le choix des fréquences utilisées dans chaque cas.

IV.5.1 Caractérisation matérielle

Afin d'évaluer la partie réelle du module de Young E' et le coefficient de Poisson ν du matériau isotrope constituant un disque, nous choisirons d'abord d'utiliser les fréquences propres du mode purement radial pour résoudre le problème inverse. Partant des trois premières fréquences propres expérimentales du mode radial, connaissant le rayon du disque ainsi que sa densité, l'objectif est de déterminer les propriétés mécaniques E' et ν qui font coïncider les fréquences propres radiales théoriques aux valeurs mesurées expérimentalement.

La Figure IV-9 montre, pour le disque D_{i_1} , les couples de coefficients de Poisson et de modules de Young qui font coïncider la première fréquence propre radiale théorique et les rapports théoriques de la deuxième et de la troisième fréquence à la première fréquence propre (f_{r2}/f_{r1} et f_{r3}/f_{r1}), respectivement, avec les valeurs expérimentales qui leur sont associées 19,3 kHz, 2,54 et 4,06 (valeurs extraites du Tableau IV-2). Les zones grisées sur la Figure IV-9 représentent les intervalles d'erreurs obtenues en tenant compte des dispersions des mesures constatées expérimentalement.

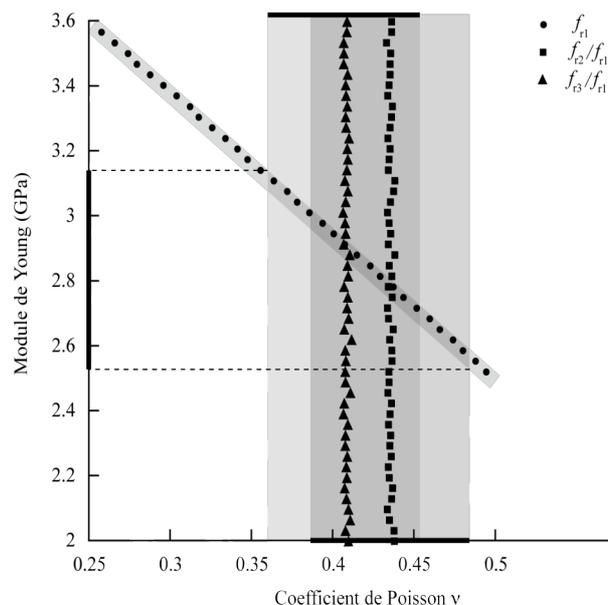


Figure IV-9 Ensemble des coefficients de Poisson et modules de Young vérifiant $f_{r1} = 19,3$ kHz , $f_{r2} / f_{r1} = 2,54$ et $f_{r3} / f_{r1} = 4,06$ pour le disque Di_1 avec les intervalles de précision associés

Remarquons que l'utilisation combinée de la première fréquence propre et de l'un des rapports f_{r2}/f_{r1} ou f_{r3}/f_{r1} fournit des valeurs différentes pour le module de Young et le coefficient de Poisson. Cette différence peut être dû à la dispersion du matériau testé mais aussi à l'imprécision de la méthode comme le montrent les zones grisées sur la figure représentative des intervalles de précision. Afin de vérifier ce dernier point et connaissant les précisions sur les fréquences propres mesurées, il a été possible de calculer les valeurs maximales et minimales que peuvent prendre les quantités f_{r1} , f_{r2}/f_{r1} et f_{r3}/f_{r1} à partir de la dispersion expérimentale des fréquences mesurées, et de déterminer par simulation les intervalles de variation des constantes matérielles qui leur correspondent. Les résultats de ces simulations, représentés sur la Figure IV-9, montrent que la précision sur le coefficient de Poisson est de $\pm 11,5\%$ alors que celle du module de Young est de $\pm 8,0\%$. La Figure IV-9 montre aussi que la courbe associée à la première fréquence propre radiale est peu sensible à la précision sur f_{r1} (égale à $\pm 0,05$ kHz), alors que les courbes associées aux rapports des fréquences sont très sensibles à la précision sur les fréquences f_{r2} et f_{r3} (respectivement égales à $\pm 0,40$ kHz et $\pm 0,75$ kHz). L'utilisation des fréquences propres radiales ne permet donc pas de déterminer avec précision les constantes du matériau isotrope constituant un disque.

Etant donné que le modèle développé précédemment permet d'évaluer différentes fréquences propres, nous pouvons choisir de combiner la première fréquence du mode radial et une fréquence liée à un mode de distorsion dans le plan pour la résolution du

problème inverse. Notre choix s'est porté sur la fréquence f_o donnée dans le Tableau IV-2 et représentée sur les spectres de vitesse expérimentale de la Figure IV-10 (14,1 kHz) et de la Figure IV-11 (11,5 kHz) respectivement associés aux disques Di_1 et Di_2 . Cette fréquence présente les avantages d'être associée à un mode expérimentalement facile à générer (en effet, il suffit de positionner le guide d'ondes sur le bord du disque à l'opposé du point de mesure, voir la Figure IV-2 (b)), et d'être numériquement facile à identifier sur un spectre théorique (la fréquence f_o se situe au voisinage de la première fréquence radiale f_r).

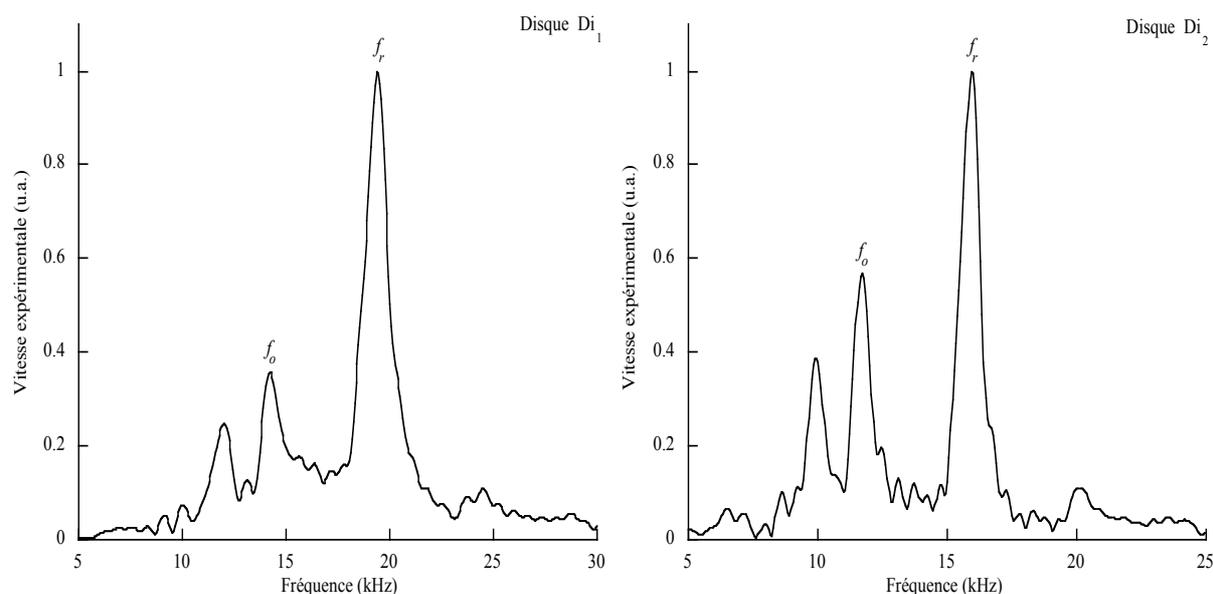


Figure IV-10 *Spectre de vitesse expérimentale du disque Di_1 pour une excitation décentrée* Figure IV-11 *Spectre de vitesse expérimentale du disque Di_2 pour une excitation décentrée*

La même procédure de caractérisation mise en oeuvre précédemment, de manière infructueuse, est appliquée cette fois-ci en utilisant les valeurs expérimentales de la première fréquence radiale f_r et du rapport des fréquences f_o/f_r . De plus, connaissant les précisions sur f_o et f_r , qui sont de $\pm 0,05$ kHz, il est possible de déterminer les valeurs maximales et minimales que peuvent prendre les quantités f_r et f_o/f_r . Les résultats des simulations pour les disques Di_1 et Di_2 sont représentés sur la Figure IV-12 et la Figure IV-13. Les zones en gris sur ces deux figures représentent les couples de solutions (E', ν) contenues dans les intervalles de précision des quantités f_r et f_o/f_r .

L'intersection des intervalles correspondant à f_r et f_o/f_r sur la Figure IV-12 et la Figure IV-13 donne les domaines de précision du module de Young et du coefficient de Poisson (représentés en gras sur les axes E' et ν). Les valeurs moyennes des

constantes matérielles des disques Di_1 et Di_2 ainsi que les précisions qui leur sont associées sont données dans le Tableau IV-4. Les erreurs relatives moyennes commises sur le module de Young et le coefficient de Poisson sont cette fois-ci respectivement égales à 2,2 % et 2,6 %. L'utilisation combinée des fréquences f_r et f_o permet donc d'évaluer le module de Young et le coefficient de Poisson avec une bonne précision.

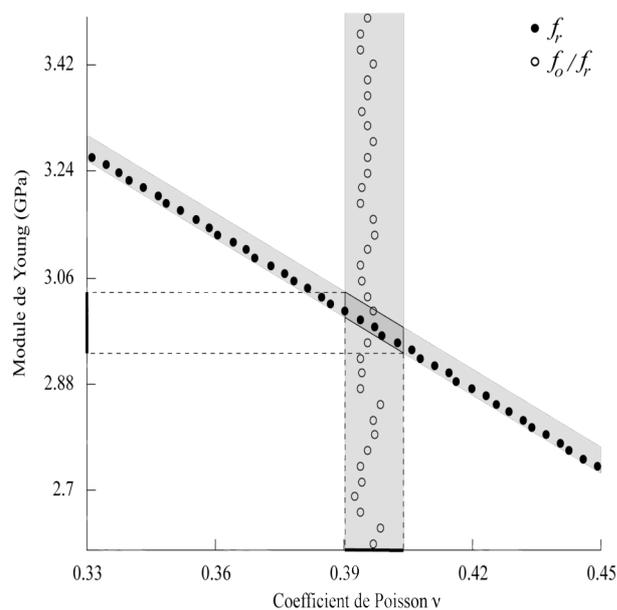


Figure IV-12 Ensemble des coefficients de Poisson et modules de Young vérifiant $f_r = 19,3\text{kHz}$ et $f_o / f_r = 0,73$ pour le disque Di_1

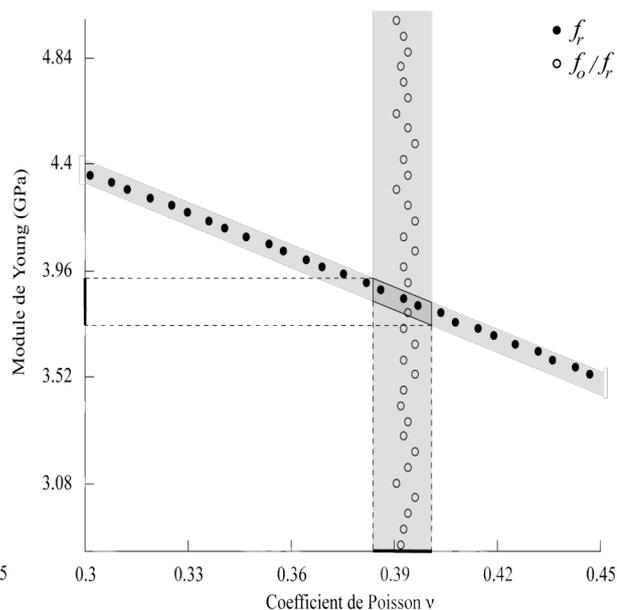


Figure IV-13 Ensemble des coefficients de Poisson et modules de Young vérifiant $f_r = 15,7\text{kHz}$ et $f_o / f_r = 0,73$ pour le disque Di_2

Disque	Di_1	Di_2
Module de Young E' (GPa)	$3,00 \pm 0,05$	$3,90 \pm 0,10$
Coefficient de Poisson ν	$0,40 \pm 0,01$	$0,39 \pm 0,01$

Tableau IV-4 Valeurs du module de Young et du coefficient de Poisson des matériaux constituant les disques Di_1 et Di_2

La Figure IV-12 et la Figure IV-13 laissent penser que le rapport f_o/f_r est indépendant du module de Young et de la géométrie du disque et qu'il est uniquement lié à la valeur du coefficient de Poisson puisque pour ces deux disques, matériellement et géométriquement très différents, ce rapport est identique. Afin de vérifier cette constatation, la variation du rapport f_o/f_r en fonction du coefficient de Poisson a été étudiée dans trois cas différents. Dans les deux premiers cas, le rayon du disque est fixé à 31,5 mm tandis que le matériau a successivement les propriétés du matériau 1 ($\rho = 1150\text{kg/m}^3$, $E' = 3,0\text{GPa}$) et celles du matériau 2

($\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $E' = 69,0 \text{ GPa}$). Dans le troisième cas, le disque est constitué du matériau 1 et a un rayon égal à 50,0 mm.

La Figure IV-14 montre la superposition parfaite des courbes de variation du rapport f_o/f_r en fonction de ν dans les trois cas précités. Le rapport des fréquences f_r et f_o ne dépend donc que du coefficient de Poisson ν indépendamment de la géométrie et du reste des propriétés mécaniques. L'identification expérimentale des fréquences f_r et f_o et l'utilisation de la courbe de la Figure IV-14 pourraient donc servir à déterminer directement le coefficient de Poisson d'un matériau *a priori* inconnu constituant un disque de rayon quelconque.

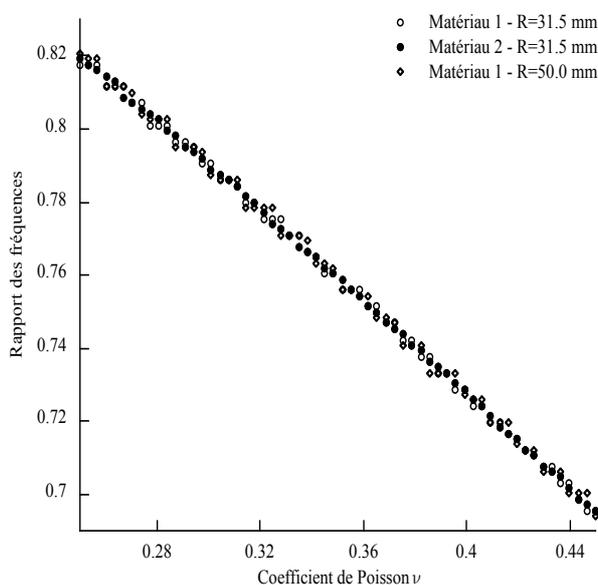


Figure IV-14 Comparaison de la variation du rapport de fréquences f_o/f_r en fonction de coefficient de Poisson pour des matériaux et des géométries différents

Par ailleurs, comme il a été supposé précédemment, l'atténuation des ondes mécaniques dans les matériaux isotropes utilisés dans cette étude est caractérisée par la partie imaginaire du module de Young E'' . Cette dernière peut être déterminée à partir de la valeur du facteur de qualité Q_{exp} mesuré sur le spectre de réponse impulsionnelle du premier mode propre radial (Figure IV-15). Le facteur de qualité, expérimental ou théorique, est défini par :

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f} \quad (\text{IV-29})$$

où f_r est la fréquence propre radiale fondamentale et Δf l'écart entre les fréquences associées au deux points d'intersection du spectre avec la droite correspondant à la mi-hauteur du spectre (voir Figure IV-15).

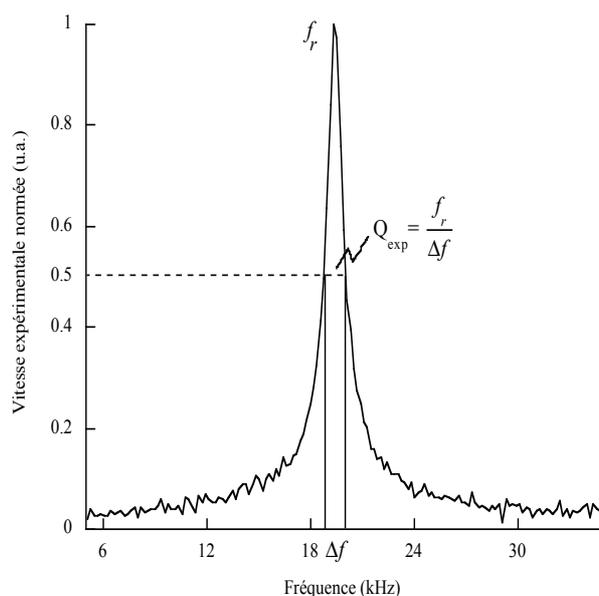


Figure IV-15 Définition du facteur de qualité pour le calcul de la partie imaginaire du module de Young E''

Connaissant la partie réelle du module de Young et le coefficient de Poisson du matériau à caractériser, la procédure d'évaluation de E'' consiste à faire coïncider, par une méthode de dichotomie, le facteur de qualité théorique Q_{the} , calculé à partir du spectre théorique (IV-26), avec le facteur de qualité expérimental Q_{exp} mesuré sur le spectre de vitesse purement radiale.

Disque	Di_1	Di_2
$\tan \delta$ (%)	$3,6 \pm 0,6$	$2,2 \pm 0,8$
Partie imaginaire E'' (GPa)	$0,11 \pm 0,02$	$0,09 \pm 0,03$

Tableau IV-5 Valeurs de $\tan \delta$ et de la partie imaginaire du module de Young E'' des matériaux constituant les disques Di_1 et Di_2

Les valeurs de la tangente de perte $\tan \delta$ (rapport de la partie imaginaire et de la partie réelle du module de Young) et de E'' obtenues par cette procédure pour les matériaux constituant les disques Di_1 et Di_2 ainsi que les précisions qui leur sont associées sont donnés dans le Tableau IV-5. Précisons enfin que l'erreur ($\Delta(\tan \delta)$) commise sur la valeur de $\tan \delta$ a été évaluée, par dérivation numérique, à partir des erreurs absolues commises sur E' , ν et Q via la formule suivante :

$$\Delta(\tan \delta) = \frac{\partial(\tan \delta)}{\partial E'} \Delta E' + \frac{\partial(\tan \delta)}{\partial(\nu)} \Delta \nu + \frac{\partial(\tan \delta)}{\partial Q} \Delta Q \quad (\text{IV-30})$$

IV.5.2 Caractérisation géométrique

Les fréquences propres de résonance serviront dans cette partie à caractériser la géométrie des disques et des anneaux. La procédure développée ci-dessous pourrait être adaptée au cas des cylindres pleins et tubulaires afin de contrôler leur géométrie interne inaccessible par une mesure directe.

La Figure IV-16 représente les variations des trois premières fréquences de résonance radiales d'un disque en fonction de son rayon et pour un matériau donné. Remarquons que les variations des fréquences propres en fonction du rayon du disque sont des fonctions bijectives suffisamment sensibles à la géométrie. Connaissant le matériau constitutif du disque, la combinaison des essais par micro-ondes centrées, permettant d'extraire les fréquences propres radiales, et du modèle (IV-26), qui permet de construire les courbes de la Figure IV-16, peut donc servir à caractériser géométriquement un disque.

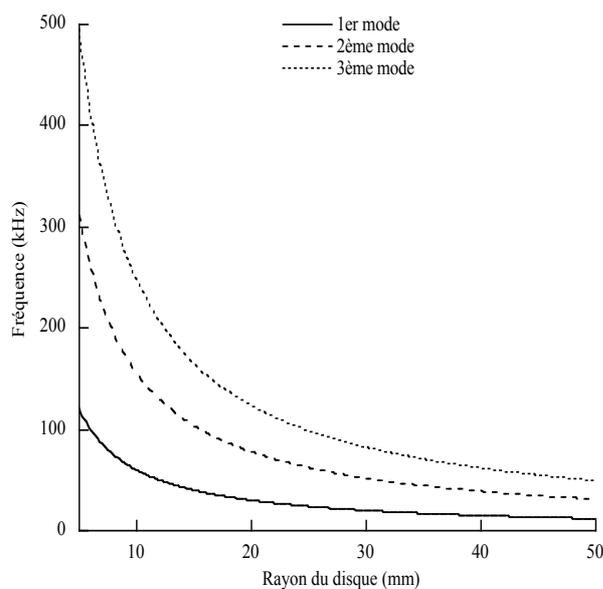


Figure IV-16 Variations des trois premières fréquences propres du mode radial d'un disque en fonction de son rayon

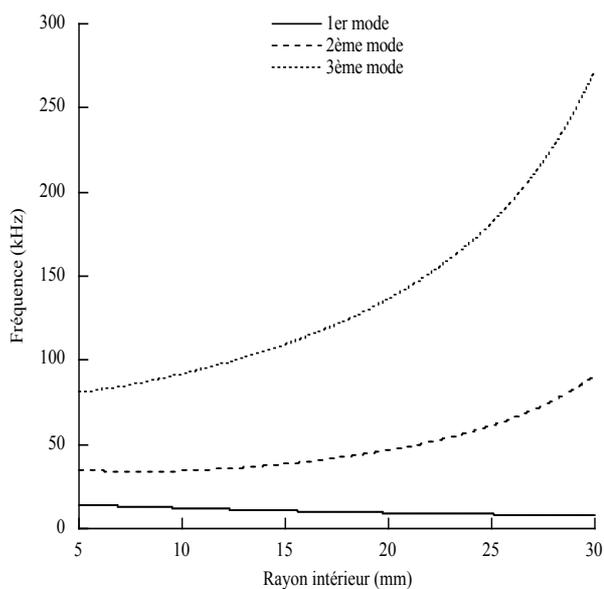


Figure IV-17 Variations des trois premières fréquences propres du mode radial d'un anneau en fonction de son rayon intérieur

La Figure IV-17 représente la variation des trois premières fréquences propres du mode radial de l'anneau An_2 en fonction de son rayon intérieur (le rayon extérieur étant gardé constant). L'allure décroissante de la première fréquence propre du mode radial laisse penser qu'elle est liée à la rigidité globale du disque. En effet, le retrait de la matière du disque rend ce dernier moins rigide par rapport aux déformations dans son plan. A l'inverse, la Figure IV-17 montre que les seconde et troisième

fréquences propres du mode purement radial croissent quand la dimension du trou augmente. Ces deux fréquences sont donc liées à l'épaisseur, décroissante, de l'anneau formé par le trou circulaire.

Toutes ces observations permettent d'envisager la caractérisation géométrique d'un anneau. Connaissant les deux premières fréquences de résonance expérimentales du mode de vibration radial de l'anneau An_1 (14,4 kHz et 46,2 kHz), il est possible de déterminer ses dimensions internes et externes (problème inverse géométrique). La Figure IV-18 montre tous les couples qui, parmi deux ensembles de dimensions intérieures et extérieures de l'anneau, produisent des fréquences propres égales aux deux premières fréquences propres du mode radial obtenues expérimentalement. Le point d'intersection des deux iso-courbes de la Figure IV-18, désigné par le point 1 et associé à l'anneau 1 de la Figure IV-19, désigne les dimensions réelles de l'anneau An_1 ($R_1 = 10,0\text{mm}$ et $R_2 = 31,5\text{mm}$). En choisissant un autre point sur l'une des deux iso-courbes (point 2 associé à l'anneau 2), la comparaison des spectres de vitesse radiale des anneaux (1) et (2) sur la Figure IV-19, montre que si l'une des fréquences propres est identique pour les deux disques, les autres fréquences ne coïncident pas. Les solutions du problème inverse de caractérisation géométrique sont donc uniquement les dimensions désignées par le point d'intersection (1).

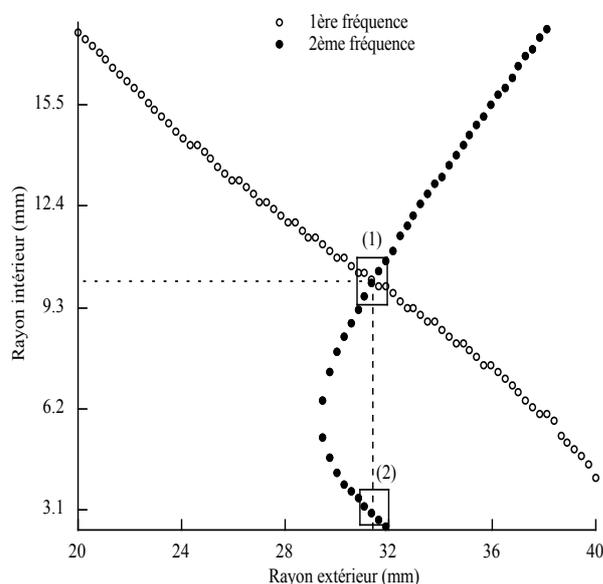


Figure IV-18 Ensemble des rayons intérieur et extérieur vérifiant $f_{r1} = 14,4\text{kHz}$ et $f_{r2} = 46,2\text{kHz}$

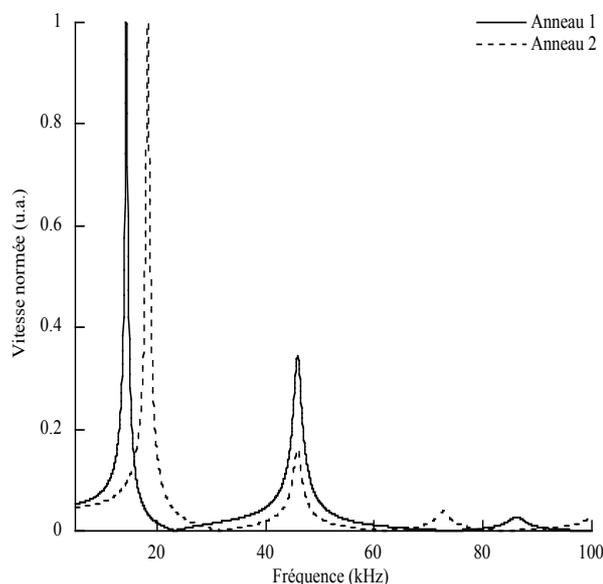


Figure IV-19 Comparaison des spectres de vitesse radiale de l'anneau solution (1) (An_1) et de l'anneau (2) ($R_1 = 3,1\text{mm}$ et $R_2 = 31,5\text{mm}$)

La même procédure de caractérisation géométrique est appliquée à l'anneau An_2 . La Figure IV-20 représente les courbes iso-fréquences qui correspondent aux deux premières fréquences propres expérimentales du mode radial (respectivement, 10,7 kHz et 38,1 kHz). De plus, la courbe iso-fréquence associée à la troisième fréquence propre est représentée afin d'observer l'utilité de celle-ci dans la caractérisation géométrique des anneaux. La troisième fréquence n'étant pas accessible expérimentalement, la valeur théorique issue du modèle précédemment validé, égale à 74,5 kHz, est utilisée. Le point d'intersection des courbes de la Figure IV-20, désigné par l'anneau (1), représente la solution du problème inverse car il désigne des rayons intérieur et extérieur respectivement égaux à 15,0 mm et 40,0 mm. La courbe iso-fréquence de la troisième fréquence propre se confond avec la courbe associée à la seconde fréquence propre à partir du point (1).

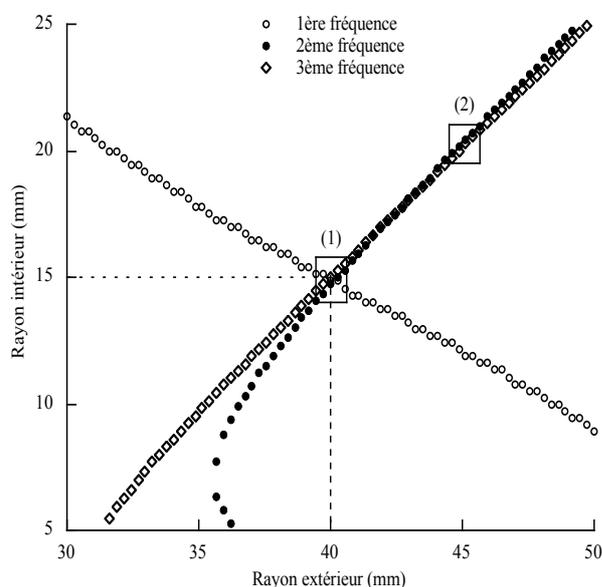


Figure IV-20 Ensemble des rayons intérieur et extérieur vérifiant $f_{r1} = 10,7 \text{ kHz}$, $f_{r2} = 38,1 \text{ kHz}$ et $f_{r3} = 74,5 \text{ kHz}$

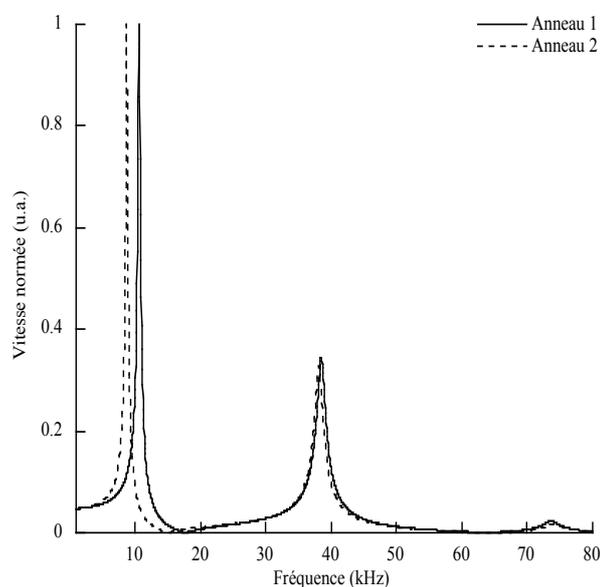


Figure IV-21 Comparaison des spectres de vitesse radiale de l'anneau solution (1) An_2 ($R_1 = 15,0 \text{ mm}$ et $R_2 = 40,0 \text{ mm}$) et de l'anneau (2) ($R_1 = 20,15 \text{ mm}$ et $R_2 = 45,0 \text{ mm}$)

Sur la Figure IV-21, le tracé des spectres de vitesse associés à l'anneau solution (1) et à l'anneau (2) ($R_1 = 20,15 \text{ mm}$ et $R_2 = 45,0 \text{ mm}$) montre que la seconde et la troisième fréquences propres coïncident parfaitement mais que la première fréquence est décalée par rapport à celle de la solution. L'utilité de la troisième fréquence propre est donc limitée du fait de la difficulté d'y accéder expérimentalement et de la confusion des solutions qu'elle désigne avec ceux de la seconde fréquence radiale. Nous pouvons conclure que l'utilisation simultanée de la génération d'ondes radiales par micro-ondes dans les anneaux et du modèle (IV-20) permet de caractériser la géométrie des

anneaux. Par ailleurs, cette procédure pourrait aussi utiliser des fréquences propres de modes non-radiaux, en particulier si des contraintes technologiques ne permettent pas d'exciter les structures circulaires radialement.

Enfin, les procédures de caractérisation développées ci-dessus peuvent, *a priori*, s'adapter aux cas des cylindres circulaires. En effet, les modèles théoriques peuvent facilement s'adapter à l'hypothèse des déformations planes propres aux cylindres. De plus, il est tout à fait possible de concevoir des guides d'ondes électromagnétiques élancés et parallèles aux génératrices des cylindres à étudier, afin de se ramener à l'hypothèse d'un état plan de déformations. La démarche, une fois adaptée, permettrait de mesurer ou de contrôler les propriétés du matériau constituant le cylindre ainsi que les dimensions intérieures des cylindres creux, inaccessibles par une mesure directe.

IV.6 Génération acoustique d'un trou circulaire dans une plaque infinie

La technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées pourrait être appliquée au contrôle non-destructif des structures. Afin de le vérifier, le modèle mis en œuvre précédemment pour l'étude des vibrations des plaques circulaires trouées uniformément excitées servira à modéliser la génération d'un trou circulaire dans une plaque infinie. Le passage du cas de la plaque bornée au cas infini se fait par une étude asymptotique du modèle (IV-20).

Soit une plaque infinie constituée d'un matériau isotrope viscoélastique et contenant un trou circulaire de rayon R_1 . Nous nous proposons ici de modéliser la génération acoustique du trou dans la plaque si celle-ci est excitée par une élévation de température brusque et uniforme. Etant donné que l'excitation est uniforme, le déplacement dans la plaque ne peut être que radial (indépendant de la position angulaire dans un repère circulaire donné).

Partant de l'expression (IV-20) du champ de déplacement dans un anneau soumis à une élévation uniforme de la température et en faisant tendre la dimension extérieure R_2 vers l'infini, il apparaît l'expression suivante du champ de déplacement radial dans la plaque :

$$U_r(r) = 2(1 + \nu)\alpha \Delta T(\omega) \left(\frac{1}{J(R_1) - iY(R_1)} J_1(k_L r) + \frac{1}{Y(R_1) + iJ(R_1)} Y_1(k_L r) \right) \quad (\text{IV-31})$$

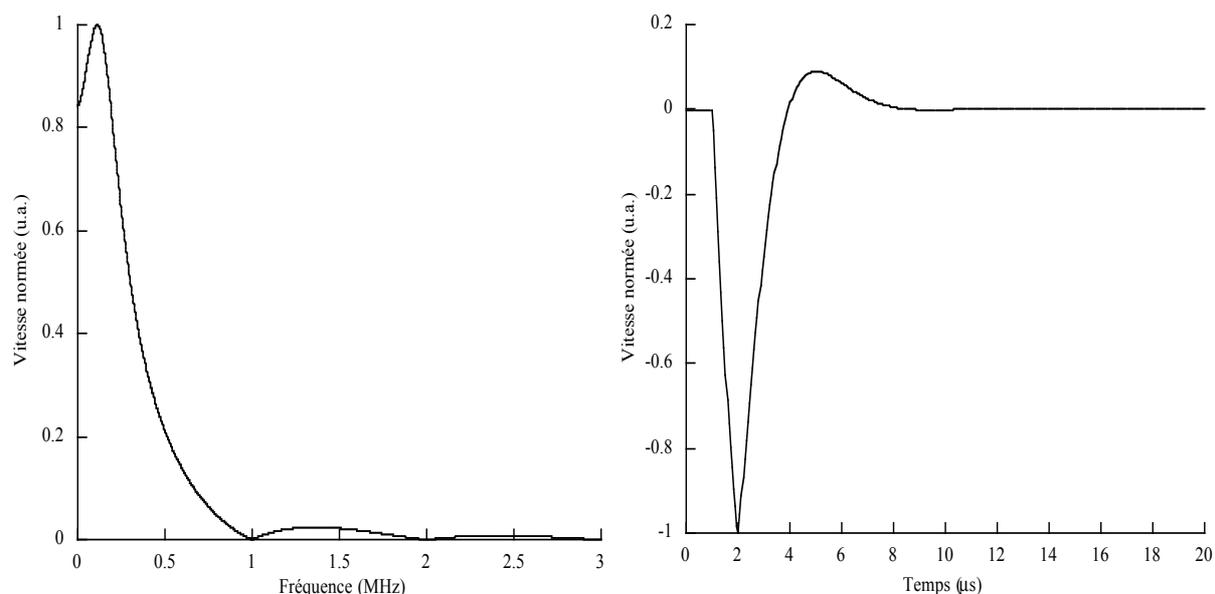


Figure IV-22 Réponse spectrale et temporelle en vitesse d'un trou de 1 mm de rayon noyé dans une plaque infinie et soumise à une brève excitation thermique uniforme

Soit une plaque infinie constituée d'un matériau de densité 1150 kg/m^3 , dont le module de Young est égal à $E = (3,1 + 0,1i) \text{ GPa}$ et de coefficient de Poisson égal à $\nu = 0,39$. Supposons de plus que la plaque comporte un trou circulaire de rayon $R_1 = 1 \text{ mm}$. Si la structure est soumise à une élévation de température d'une durée de $1 \mu\text{s}$, à partir de l'instant $t = 1 \mu\text{s}$, alors la frontière du trou subit un déplacement. L'équation (IV-31) a servi à calculer le spectre de vitesse, donné sur la Figure IV-22, associé au déplacement de la frontière du trou ($r = R_1$). La transformation de Fourier inverse de la réponse spectrale permet de déduire la réponse temporelle du trou représentée sur la Figure IV-22. Après le déplacement forcé durant la durée du chauffage, la frontière du trou effectue une brève oscillation, d'une durée de $10 \mu\text{s}$ environ, avant que le mouvement soit totalement amorti.

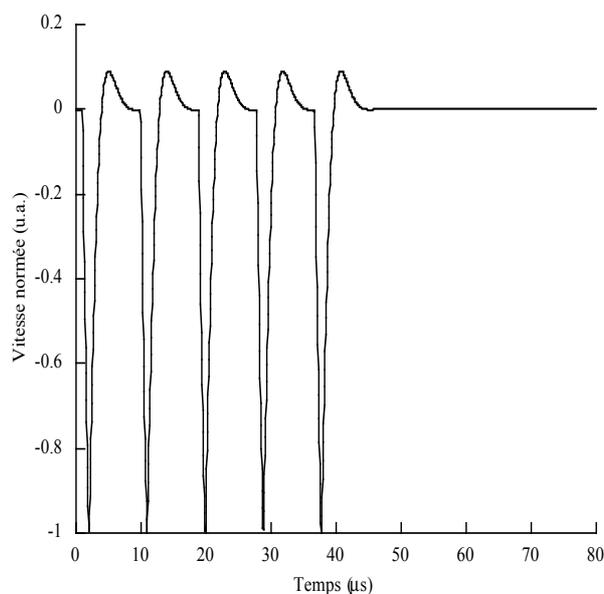


Figure IV-23 Réponse temporelle en vitesse d'un trou de 1 mm de rayon noyé dans une plaque infinie et soumise à des excitations thermiques répétées à une fréquence de 110 kHz

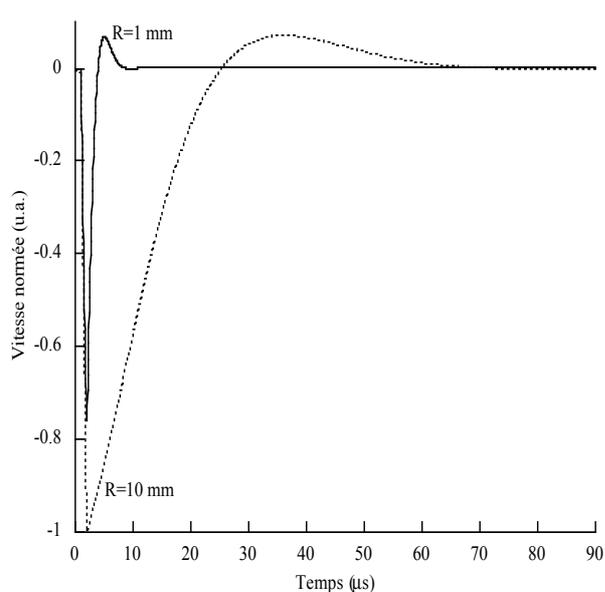


Figure IV-24 Réponse temporelle en vitesse d'un trou contenu dans une plaque infinie et soumise à une excitation thermique uniforme

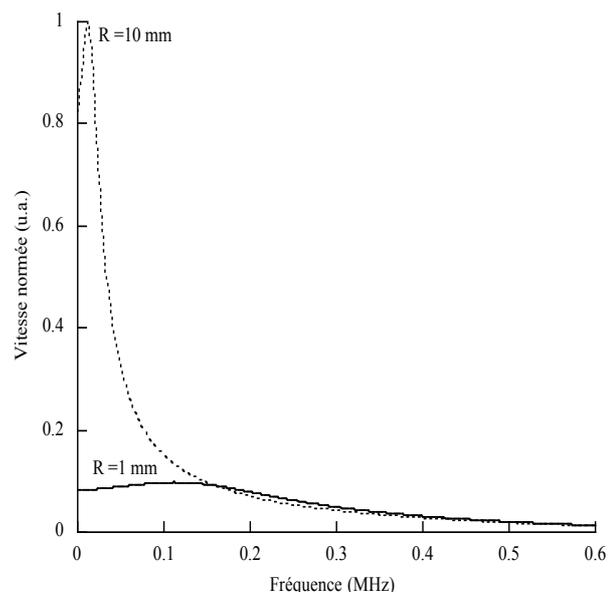


Figure IV-25 Réponse spectrale d'un trou contenu dans une plaque infinie et soumise à une excitation thermique uniforme

Malgré la présence d'une fréquence principale (définie ici comme étant la fréquence pour laquelle la composante spectrale prend une valeur maximale) dans le spectre de vitesse du trou égale à 110 kHz, l'absence d'oscillations prononcées et durables dans le signal temporel représenté sur la Figure IV-22 laisse penser qu'il n'est pas possible de mettre en résonance un trou plongé dans une plaque infinie. En effet, l'excitation répétée du trou à l'aide de cinq sollicitations thermiques à la fréquence de 110 kHz

provoque la réponse temporelle représentée sur la Figure IV-23. Les oscillations représentées sur cette figure correspondent aux différentes excitations thermiques que subit le trou. Par conséquent, la mise en résonance d'un trou dans une plaque infinie est impossible. Il est cependant intéressant d'observer l'effet de la géométrie sur la réponse acoustique d'un trou à une brève excitation thermique. La Figure IV-24 montre la superposition des réponses temporelles de deux trous de rayons respectivement égaux à 1 mm et 10 mm. A la comparaison de ces deux réponses, il apparaît que la durée de la réponse en vitesse (temps pendant lequel la frontière du trou est mobile) du grand trou est beaucoup plus grande que celle du trou de taille réduite. Cette observation est vérifiée sur la Figure IV-25 qui représente la superposition des spectres associés aux réponses temporelles des deux trous. La fréquence principale qui apparaît dans les spectres correspond donc à la durée de la réponse qui est elle-même liée à la dimension du trou.

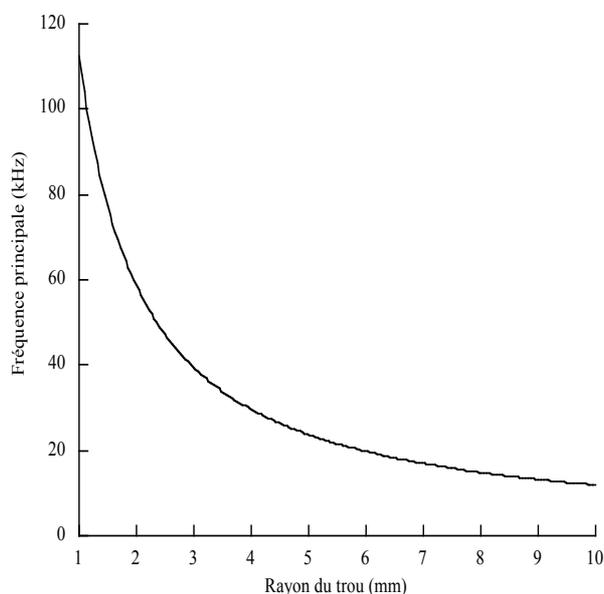


Figure IV-26 *Variation de la fréquence principale en fonction du rayon d'un trou dans une plaque infinie*

La Figure IV-26 met en lumière la forte sensibilité de la fréquence principale du spectre de réponse, définie plus haut sur la Figure IV-22, par rapport à la dimension du trou circulaire dans la plaque. Cette dépendance laisse envisager de futurs développements de la méthode de génération acoustique par micro-ondes pour l'identification et la caractérisation des défauts circulaires dans les plaques. La présente application théorique et prospective nécessite toutefois une validation expérimentale avant d'être adaptée à des cas concrets de contrôle non-destructif afin de tenir compte de la non-uniformité de la génération acoustique et des éventuelles réflexions d'ondes acoustiques sur les parois des structures bornées inspectées. Il est

enfin possible d'étendre l'étude de la génération acoustique d'un trou au cas d'une bulle sphérique immergée dans un milieu infini excité thermiquement de manière uniforme. Ce développement permettrait d'envisager l'application de la technique de génération par micro-ondes pulsées au contrôle des structures tridimensionnelles.

IV.7 Conclusions

La vibration des plaques circulaires, constituées d'un matériau isotrope et viscoélastique linéaire, soumises à un rayonnement de micro-ondes pulsées a été étudiée au cours de ce travail. Des modèles analytiques et semi-analytiques ont été développés pour le calcul respectif du champ de déplacement radial et des fréquences propres de vibration des plaques minces circulaires selon qu'il s'agisse d'une excitation micro-ondes axisymétrique ou dissymétrique. La comparaison des spectres de vitesse radiale et des fréquences propres calculés par les modèles avec ceux qui ont été obtenus numériquement, par la méthode des éléments finis, et expérimentalement a permis de valider la modélisation. D'un point de vue expérimental, il a été montré que l'utilisation de l'excitation micro-ondes permet d'accéder à une riche gamme de fréquences propres des plaques circulaires (pleines ou trouées). Ces fréquences, calculées avec une bonne précision par le modèle semi-analytique, peuvent être identifiées théoriquement en se référant aux fréquences propres du mode radial obtenues par une excitation axisymétrique.

Il a été montré que l'association de la technique de génération acoustique par micro-ondes aux modèles développés pouvait servir à résoudre les problèmes inverses de caractérisation mécanique et géométrique des disques et des anneaux de manière non-destructive et sans contact. La caractérisation mécanique nécessite toutefois un choix judicieux des fréquences à exploiter afin d'obtenir une solution unique et précise au problème inverse. La possibilité qu'offre la technique de génération par micro-ondes d'exciter, de manière pure, le mode radial de vibration dans les disques est très importante dans l'identification des fréquences associées à ce mode propre. Cette identification sert de plus à repérer précisément les fréquences associées à des modes propres de distorsion dans le plan de la plaque. D'autre part, il est apparu, durant la résolution du problème de caractérisation des matériaux isotropes, que le rapport des fréquences choisies dans la présente étude ne dépendait que du coefficient de Poisson, indépendamment de la géométrie et de la rigidité du matériau. L'explication théorique de cette observation nécessite un futur travail d'investigation. Par ailleurs, dans le chapitre suivant, nous appliquerons la méthode d'évaluation des propriétés

mécaniques développée ici à l'étude de l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques des bétons.

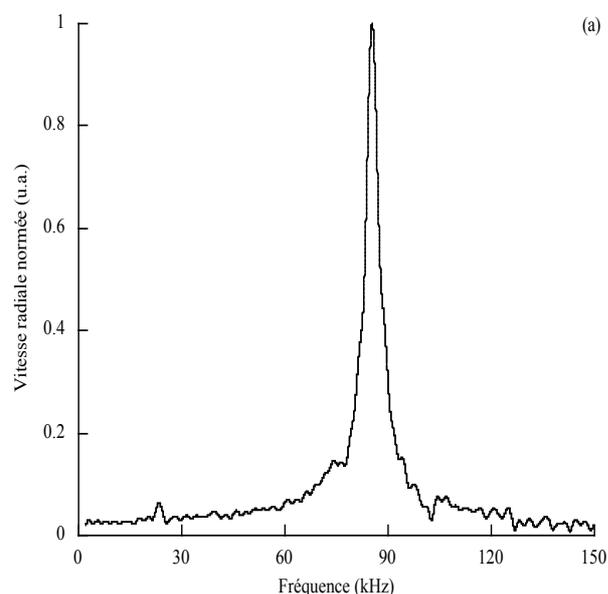


Figure IV-27 *Spectre expérimental de vitesse radiale à la résonance du cylindre en PVC*

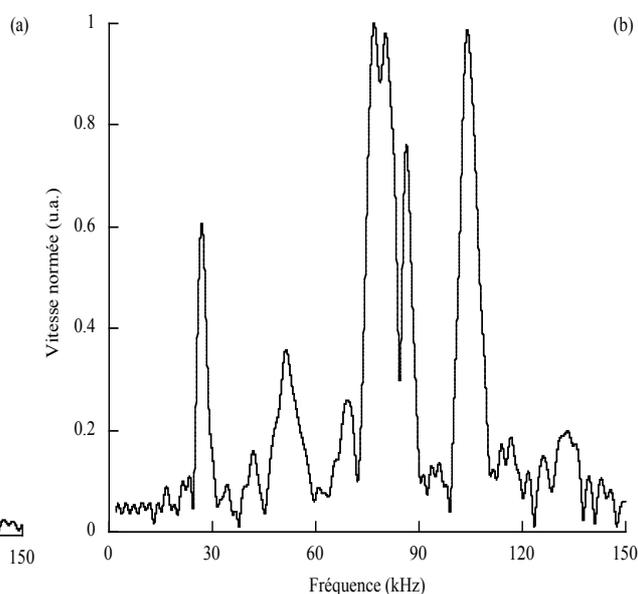


Figure IV-28 *Spectre expérimental de vitesse du cylindre en PVC pour une excitation impulsionnelle par micro-ondes*

La technique d'évaluation non-destructive développée dans le présent travail pourrait prendre tout son intérêt en l'appliquant aux cylindres circulaires et, en particulier, creux. En effet, comme il a été mentionné plus haut, la résolution des problèmes direct et inverse développée pour le cas des plaques est facilement transposable au cas des cylindres circulaires infinis. Expérimentalement, il a été possible de générer la vibration d'un cylindre peu élancé ($R = 10,0\text{mm}$ et $H = 30,0\text{mm}$) par micro-ondes pulsées en utilisant le guide d'onde rectangulaire et en orientant son grand côté parallèlement à la génératrice du cylindre testé. La Figure IV-27 et la Figure IV-28 montrent respectivement le spectre de résonance du cylindre en mode propre radial et sa réponse à une excitation micro-ondes impulsionnelle. La géométrie du cylindre testé expérimentalement ne permet pas de supposer un état plan de déformation dans l'optique de modéliser son comportement à l'aide du modèle développé ci-dessus (à condition d'adapter la modélisation). Néanmoins, l'intérêt de cet essai expérimental réside dans le fait qu'il montre la faisabilité de l'excitation d'une structure cylindrique, ici circulaire, à l'aide de la technique de génération acoustique par micro-ondes de manière thermoélastique. L'association de la méthode d'excitation par micro-ondes au modèle adapté aux cylindres circulaires pourrait constituer un procédé de contrôle ou d'évaluation non-destructifs (CND, END) des dimensions intérieures et des propriétés matérielles des cylindres tubulaires très présents dans

l'industrie. Enfin, à la lumière des développements précédents, il est possible d'envisager l'extension de la méthode de caractérisation basée sur les fréquences propres des plaques minces circulaires au cas des matériaux anisotropes dans le plan de vibration. Cette extension nécessite la généralisation du modèle théorique au cas des matériaux anisotropes. Une telle évolution ouvrirait à la méthode de caractérisation mécanique des matériaux par micro-ondes pulsées la voie à une large gamme d'applications industrielles.

IV.8 Bibliographie

- [IV-1] L. Pochhammer, "Ueber die fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiscylinder," J. Reine Angewandte Math. 81, 324-336 (1876).
- [IV-2] C. Chree, "Longitudinal vibrations of a circular bar," Q. J. Math. 21, 287-298 (1886).
- [IV-3] H. Lamb, Proc. Roy. Soc. (London) 98, 205 (1921).
- [IV-4] H. Carrington, « The frequencies of vibration of flat circular plates fixed at the circumference », Philosophical Magazine 50, 1261-1264, (1925).
- [IV-5] Lord Rayleigh, "Theory of Sound", Vol. I, Dover Publications, New-York (1945).
- [IV-6] T. Wah, "Vibration of Circular Plates", J. Acoust. Soc. Am. 34, Issue 3, 275-281 (1962).
- [IV-7] H. Lee and R. Singh, "Acoustic radiation from out-of-plane modes of an annular disk using thin and thick plate theories" Journal of Sound and Vibration 282, Issues 1-2, 313-339 (2005).
- [IV-8] G. Martineck, "The determination of poisson's ratio and the dynamic modulus of elasticity from the frequencies of natural vibration in thick circular plates" , Journal of Sound and Vibration 2, Issue 2, 116-127 (1965).
- [IV-9] S. N. Rasband, "Resonant vibrations of free cylinders and disks", J. Acoust. Soc. Am. 57, Issue 4, pp. 899-905 (1975).
- [IV-10] G. Ambati, J. F. W. Bell and J. C. K. Sharp, "In-plane vibrations of annular rings" Journal of Sound and Vibration 47, Issue 3, 415-432 (1976).
- [IV-11] E. A. G. Shaw, "On the Resonant Vibrations of Thick Barium Titanate Disks" J. Acoust. Soc. Am. 28, 38-50 (1956).
- [IV-12] D. S. Moseley, "Contribution to the Theory of Radial Extensional Vibrations

in Thin Disks” J. Acoust. Soc. Am. 32, 991-995 (1960).

[IV-13] A.R. Hadj Henni, C. Bacon and B. Hosten, “In-plane vibration of thin circular structures submitted to pulsed microwave irradiations”, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 119, No. 6, pp. 3782–3792, (2006).

[IV-14] J. D. Achenbach, “Wave propagation in elastic solids”, North-Holland, Amsterdam (1973).

[IV-15] P.M. Morse and H. Feshbach, “Methods of Theoretical Physics”, Vol. 1, 2, McGraw-Hill, New York (1953).

[IV-16] S. S. H. Chen and T. M. Liu, “Extensional vibration of thin plates of various shapes” J. Acoust. Soc. Am. 58, 828-831 (1975).

[IV-17] N. H. Farag and J. Pan, “Modal characteristics of in-plane vibration of circular plates clamped at the outer edge” J. Acoust. Soc. Am. 113, 1935-1946 (2003).

[IV-18] B. Hosten, C. Bacon, “Measurement of complex Young moduli of composite materials by time gated microwaves”, Rev. of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Plenum Press, New York, Vol.19, No. 1, pp. 1113-1120 (2000).

[IV-19] H. Batard and G. Quentin, “Acoustical resonances of solid elastic cylinders: Parametric study and introduction to the inverse problem” J. Acoust. Soc. Am. 91, 581-590 (1992).

[IV-20] P. Heyliger, A. Jilani, H. Ledbetter, R. G. Leisure, and C.-L. Wang “Elastic constants of isotropic cylinders using resonant ultrasound” J. Acoust. Soc. Am. 94, 1482-1487 (1993).

[IV-21] M. Abramowitz, I. A. Stegun, “Handbook of Mathematical Functions – with formulas, graphs and mathematical tables”, Dover publications, INC., New York (1965).

[IV-22] M. R. Spiegel, “Mathematical Handbook of Formulas and Tables”, McGraw-Hill Inc., New York (1974).

[IV-23] Matlab[®] User's Guide, Mathworks, Inc., <http://www.mathworks.com>.

[IV-24] Femlab[®] 2.2 Reference Manual, by COMSOL AB (2001).

V Étude de l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques des bétons par la technique de génération acoustique par micro-ondes

Résumé

L'objectif de ce chapitre est d'étudier, par la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées, l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques des bétons. La méthode de caractérisation mise en œuvre au chapitre IV, basée sur les fréquences propres et les spectres de vitesse radiale expérimentaux et théoriques des plaques circulaires minces, sert ici à déterminer l'évolution du coefficient de Poisson et des parties réelle et imaginaire du module de Young en fonction de la teneur en eau de disques en béton. La forte dépendance des propriétés mécaniques vis-à-vis de l'humidité des échantillons testés est mise en lumière et interprétée.

V.1	Introduction	V-3
V.2	Génération acoustique dans les bétons et applicabilité de la méthode d'évaluation	V-3
V.3	Echantillons étudiés et mode opératoire	V-5
V.4	Résultats et interprétations	V-8
V.4.1	Béton A	V-8
V.4.2	Béton B	V-11
V.5	Conclusions	V-14
V.6	Bibliographie	V-15

V.1 Introduction

Les fréquences propres de vibration d'une structure donnée dépendent de sa géométrie et des propriétés mécaniques des matériaux qui la composent. Par ailleurs, de par son mode de fabrication et sa composition, il est bien connu que le béton présente des porosités qui permettent à l'eau de l'infiltrer. La connaissance de l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques des bétons ainsi que son évaluation, sont donc deux aspects importants pour la conception de ce matériau de construction et pour sa bonne tenue durant sa durée de vie [V-1]. Etant données les variations que subissent les propriétés matérielles sous l'effet de l'humidité, les fréquences propres de résonance doivent aussi présenter une dépendance vis-à-vis de la teneur en eau. La présente étude utilise cette dépendance dans le but d'étudier, au moyen de la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées dans les matériaux, l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques du béton. La méthode de caractérisation développée au chapitre IV, qui se base sur les fréquences propres de vibration des disques, est ici appliquée à des échantillons en béton sous forme de plaques circulaires minces. La démarche adoptée pour l'étude de l'influence de l'humidité sur les propriétés du béton allie expérimentation et théorie. Les évolutions de la fréquence propre f_r du mode propre radial et de la fréquence f_o du mode de distorsion dans le plan (défini au chapitre IV) sont mesurées en fonction de la teneur en eau du matériau afin de résoudre, séquentiellement, les problèmes inverses associés de caractérisation. Cette résolution (voir §IV.5) fournit le module de Young réel, le coefficient de Poisson et la partie imaginaire du module de Young liée à l'atténuation du béton. L'applicabilité de la méthode de caractérisation sur des échantillons en béton sera d'abord abordée en vérifiant, d'une part, la possibilité de générer par micro-ondes des vibrations dans les bétons et, d'autre part, la validité de l'hypothèse d'un état plan de contraintes pour les échantillons étudiés. Enfin, après le mode opératoire, les mesures expérimentales et les résultats de la caractérisation seront présentés, commentés et interprétés dans le cas des deux disques en béton étudiés expérimentalement.

V.2 Génération acoustique dans les bétons et applicabilité de la méthode d'évaluation

Une étude expérimentale préliminaire a d'abord été effectuée afin de vérifier la possibilité de générer des vibrations acoustiques dans des disques en béton à l'aide de la technique d'excitation par micro-ondes pulsées. Le test a porté sur un disque en

béton, de propriétés mécaniques *a priori* inconnues, dont les grandes dimensions permettaient d'utiliser un accéléromètre au contact pour mesurer sa réponse vibratoire. La réponse du disque n'étant pas affectée par la présence de l'accéléromètre (sa masse n'est que de 0,65g), les mesures ne sont pas altérées par l'appareil de mesure. Le spectre de vitesse obtenu pour une excitation brève et centrée au centre du disque en béton testé est donné sur la Figure V-1. De même le spectre de réponse du disque à une excitation décentrée est représenté sur la Figure V-2. De ces deux spectres expérimentaux, il apparaît clairement qu'il est possible de générer par micro-ondes la vibration d'un disque en béton. De même que pour les plaques circulaires traitées au chapitre IV, il est possible d'exciter le mode de vibration purement radial, de fréquence f_r sur la Figure V-1, en positionnant le guide d'ondes électromagnétiques au centre du disque. La Figure V-2 montre d'autre part que le mode de vibration en distorsion dans le plan, identifié par sa fréquence propre f_o , apparaît clairement sur le spectre de réponse de l'échantillon (en effet, quand la source d'excitation est placée en face du point de mesure, la fréquence f_o apparaît juste avant la fréquence du mode purement radial).

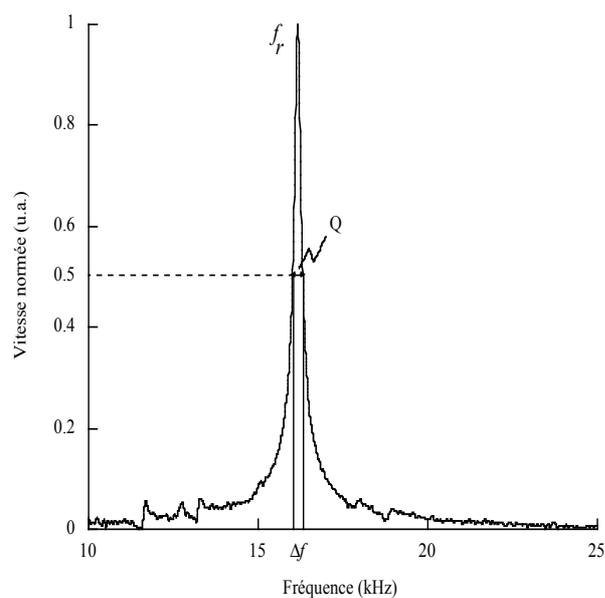


Figure V-1 *Spectre de vitesse expérimental obtenu en centrant la source micro-ondes (mode purement radial)*

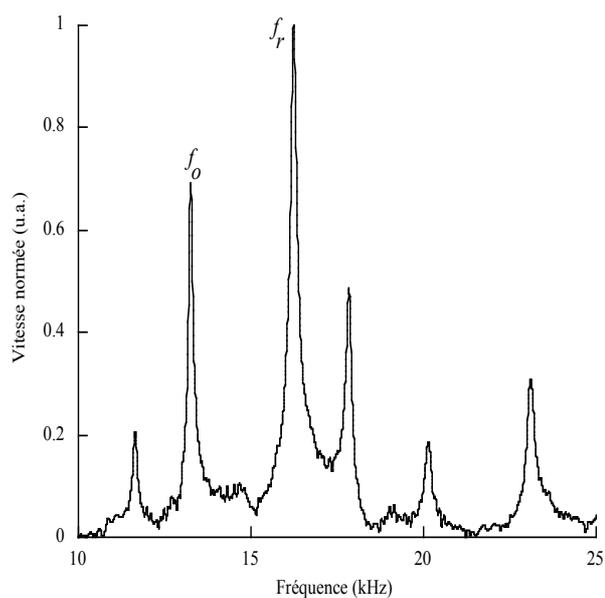


Figure V-2 *Spectre de vitesse expérimental obtenu en décentrant la source micro-ondes (fréquences f_r et f_o)*

Expérimentalement, l'utilisation de la technique de génération par micro-ondes pour l'étude des vibrations des disques en bétons est donc possible. Néanmoins, avant d'envisager la résolution du problème inverse d'évaluation, il est nécessaire de vérifier l'applicabilité du modèle de prédiction des vibrations des disques minces développés au chapitre IV. D'un point de vue macroscopique et tenant compte des longueurs

d'ondes acoustiques dans les disques vibrants, le béton peut être vu comme étant homogène et isotrope. De plus, étant donnés les faibles déplacements dans le béton durant la vibration, nous ferons l'hypothèse des petites déformations et considérerons le matériau comme étant viscoélastique linéaire. Enfin, du fait que les diamètres des disques en béton testés sont beaucoup plus grands que leurs épaisseurs, voir §V.3, l'hypothèse d'un état plan de contraintes est tout à fait applicable pour la modélisation de la vibration dans le plan des disques en béton testés.

V.3 Echantillons étudiés et mode opératoire

Les deux disques en béton étudiés, dénommés Béton A et Béton B et dont les photographies respectives sont données sur la Figure V-3 et la Figure V-4, proviennent du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes. Les deux disques sont constitués de bétons de natures différentes mais dont les matériaux constitutifs ainsi que leurs dosages sont inconnus. Toutefois, l'observation visuelle des échantillons révèle que le disque Béton B est *a priori* plus poreux que l'échantillon Béton A (cette observation sera confirmée dans la suite de l'étude, voir §V.4)



Figure V-3 Photographie du disque constitué du Béton A

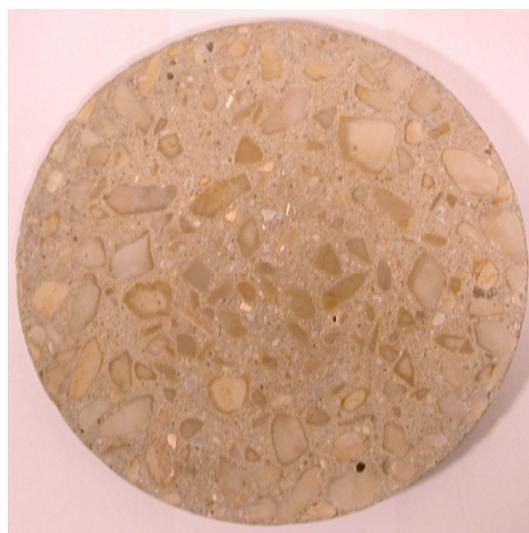


Figure V-4 Photographie du disque constitué du Béton B

Afin d'atteindre rapidement l'état de saturation en eau dans les bétons étudiés, les échantillons ont été immergés dans de l'eau contenue dans une cloche étanche qui a été mise sous vide à l'aide d'une pompe à air. L'air contenu dans les bétons étant ainsi extrait, l'eau a pu rapidement réoccuper les porosités présentes dans les disques. A la stabilisation des masses des échantillons A et B (saturation en eau atteinte au

bout de 72 heures d'immersion), la procédure de séchage (accéléré au sein d'une étuve à des températures allant de 60°C à 100°C) et de mesure séquentielle des fréquences propres des disques a pu débuter.

Les caractéristiques géométriques ainsi que les masses sèches et à saturation des deux échantillons sont données dans le Tableau V-1. Il est à noter, pour la justification de l'hypothèse d'un état plan de contraintes, que les rapports entre les diamètres et les épaisseurs des disques en béton sont ici au moins égaux à 12 alors qu'ils sont égaux à environ 10 dans le cas des disques en résine époxy étudiés au chapitre IV.

Béton	Rayon	Epaisseur	Masse sèche	Masse à saturation
Béton A	73,8 mm	11,4 mm	443,3 g	461,0 g
Béton B	79,8 mm	13,4 mm	593,5 g	633,1 g

Tableau V-1 *Dimensions et masses sèches et à saturation des disques A et B*

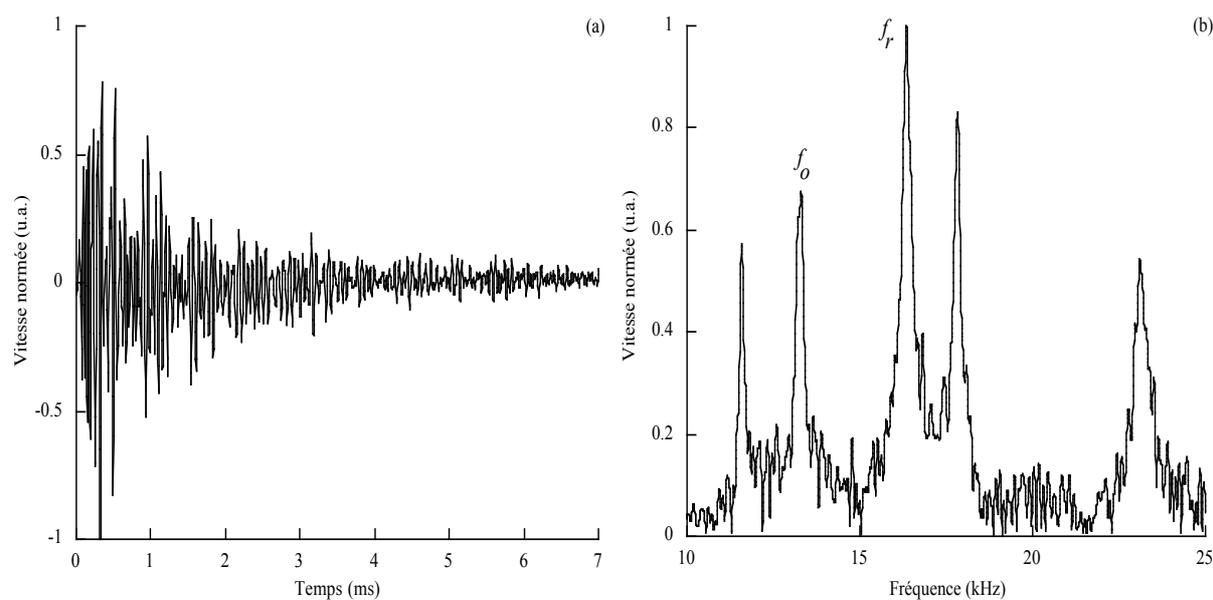


Figure V-5 *Vitesse de déplacement sur la frontière d'un disque en béton mesurée par Laser (sans contact) (a) réponse impulsionnelle temporelle, (b) réponse impulsionnelle spectrale*

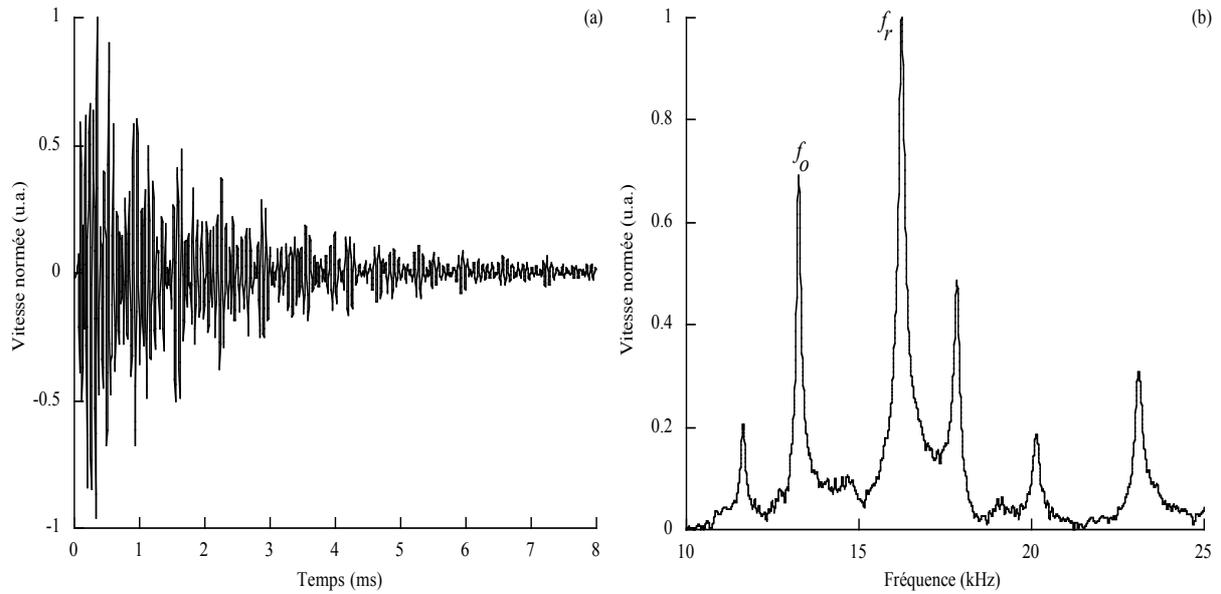


Figure V-6 *Vitesse de déplacement sur la frontière d'un disque en béton mesurée par un accéléromètre (au contact) (a) réponse impulsionnelle temporelle, (b) réponse impulsionnelle spectrale*

Le dispositif expérimental utilisé dans le cadre de cette étude (voir §II.3) permet de choisir entre une mesure des déplacements (ou des vitesses) par laser, en vélocimétrie sans contact, ou à l'aide d'un accéléromètre au contact. La comparaison des réponses expérimentales temporelles et spectrales de la vitesse mesurée par Laser et à l'aide de l'accéléromètre, données respectivement sur les figures Figure V-5 et Figure V-6, montre clairement que les mesures au contact sont moins bruitées que les mesures effectuées par Laser interférométrique. Par ailleurs, afin d'obtenir par les deux méthodes de mesure un rapport signal sur bruit comparable, le nombre d'acquisitions nécessaires est 1000 fois plus important pour une mesure par Laser qu'en utilisant l'accéléromètre. Le gain potentiel en précision et la diminution du temps d'acquisition en utilisant l'accéléromètre ont motivé l'utilisation des deux méthodes de mesure afin de les comparer. Les vibrations du disque A ont été mesurées expérimentalement par Laser sans contact alors que pour le disque B les mesures ont été effectuées à l'aide de l'accéléromètre au contact.

Avant de présenter les résultats des mesures et les solutions des problèmes inverses, rappelons que l'évaluation de la partie réelle du module de Young et du coefficient de Poisson d'un matériau donné consiste à rechercher le couple (E', ν) qui fait coïncider les valeurs théoriques de f_r et f_o/f_r (voir §IV.5) avec leurs valeurs expérimentales respectives (représentées sur la Figure V-1 et la Figure V-2) [V-2]. D'autre part, l'atténuation des ondes mécaniques dans le matériau est déterminée en recherchant la valeur de la partie imaginaire du module de Young E'' qui fait coïncider le facteur de

qualité théorique Q_{the} (obtenu à partir du spectre théorique) avec le facteur de qualité expérimental Q calculé sur le spectre de vitesse purement radiale de la manière suivante (voir Figure V-1):

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f} \quad (V-1)$$

V.4 Résultats et interprétations

V.4.1 Béton A

La Figure V-7 et la Figure V-8 représentent les évolutions de la fréquence f_r du mode propre radial et du rapport des fréquences f_o/f_r en fonction de la teneur en eau massique du Béton A. La variation de la teneur en eau de 0% à 4,2% provoque une augmentation de 14,0% de la fréquence f_r et une diminution de 3,2% du rapport f_o/f_r . Ces variations sont mesurables expérimentalement et permettent d'envisager l'étude de la variation des coefficients mécaniques en fonction de l'humidité des bétons en résolvant, pour chaque point de mesure, le problème inverse de caractérisation par la méthode développée au §IV.5 du chapitre précédent.

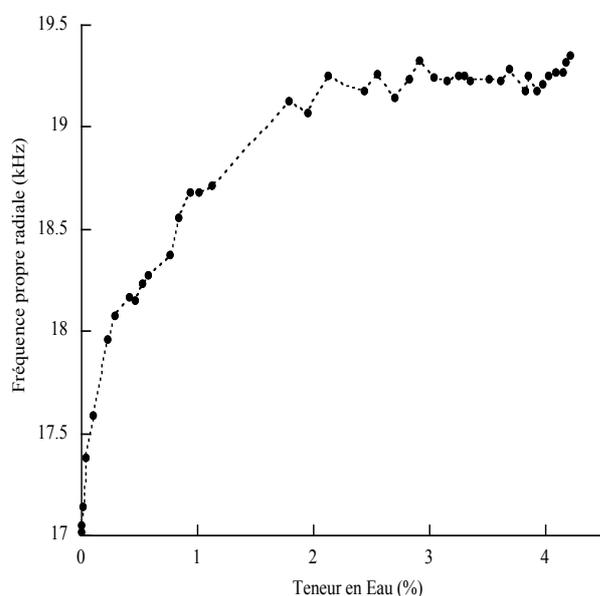


Figure V-7 Variation de la fréquence propre du mode radial en fonction de la teneur en eau massique du Béton A

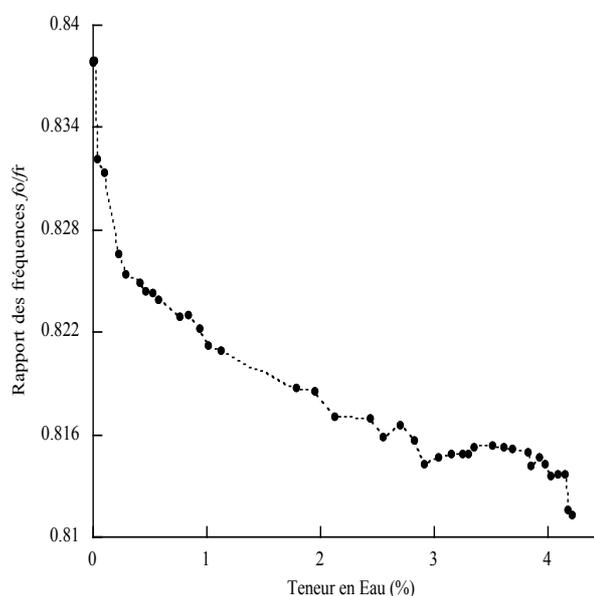


Figure V-8 Variation du rapport des fréquences en fonction de la teneur en eau massique du Béton A

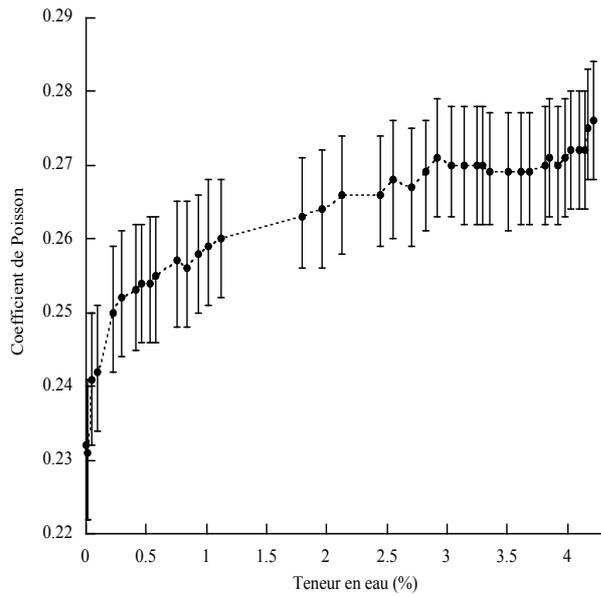


Figure V-9 Variation du coefficient de Poisson du Béton A en fonction de la teneur en eau massique

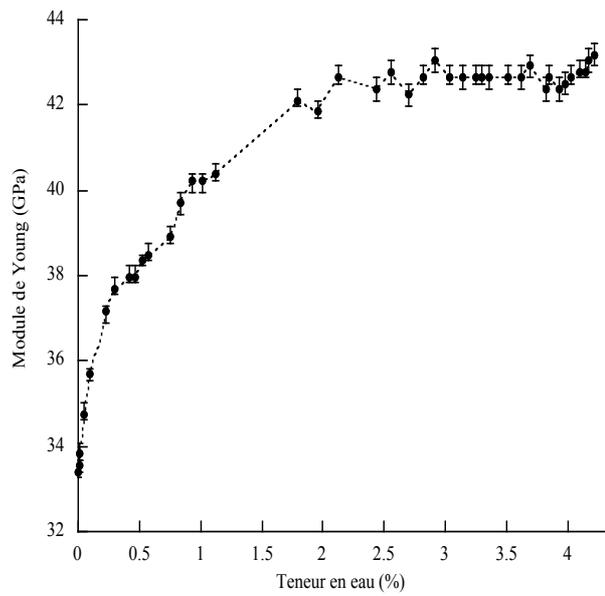


Figure V-10 Variation de la partie réelle du module de Young du Béton A en fonction de la teneur en eau massique

La Figure V-9 montre la variation croissante du coefficient de Poisson en fonction de la teneur en eau du Béton A. Le coefficient de Poisson commence par croître rapidement avec l'humidité du béton quand celle-ci est faible avant de se stabiliser au voisinage de l'état de saturation en eau. L'augmentation globale du coefficient de Poisson entre les deux états extrêmes (sec et saturé) est de 20,1%. Par ailleurs, compte tenu de l'erreur expérimentale commise sur les fréquences de résonance (égale à $\pm 0,10$ kHz), l'erreur relative commise sur le coefficient de Poisson, égale au maximum à 4,3% ($\pm 0,01$ en erreur absolue), est satisfaisante.

Le calcul de la partie réelle du module de Young E' pour chaque état d'humidité a permis de tracer la courbe de la Figure V-10. Cette courbe met en évidence la forte augmentation du module de Young, égale à 29,0%, entre l'état sec et saturé du béton. Tenant compte de l'imprécision sur les fréquences mesurées et sur le coefficient de Poisson, l'erreur relative maximale qui affecte les rigidités calculées n'est que de 0,8% (0,27 GPa en erreur absolue). Par ailleurs, la décroissance de la rigidité apparente en fonction de l'humidité du béton que l'on observe ici est cohérente avec des études faites à l'aide de techniques ultrasonores [V-3].

L'augmentation de la rigidité apparente du béton (module de Young et coefficient de Poisson) avec la teneur en eau est expliquée par le fait que l'eau présente dans les porosités contribue à la transmission des efforts et des déformations au squelette solide. La présence de l'eau a pour conséquence d'augmenter la vitesse de propagation des ondes élastiques dans le béton (traduite par l'augmentation du module de Young)

et, en supposant que le fluide est incompressible, d'accroître la déformation latérale du matériau par rapport à une direction de sollicitation donnée (accroissement du coefficient de Poisson). Il est intéressant de noter que dans un matériau comme le bois, du fait de la constitution fibreuse de sa microstructure, l'humidité a pour effet de diminuer la rigidité apparente du matériau [V-4].

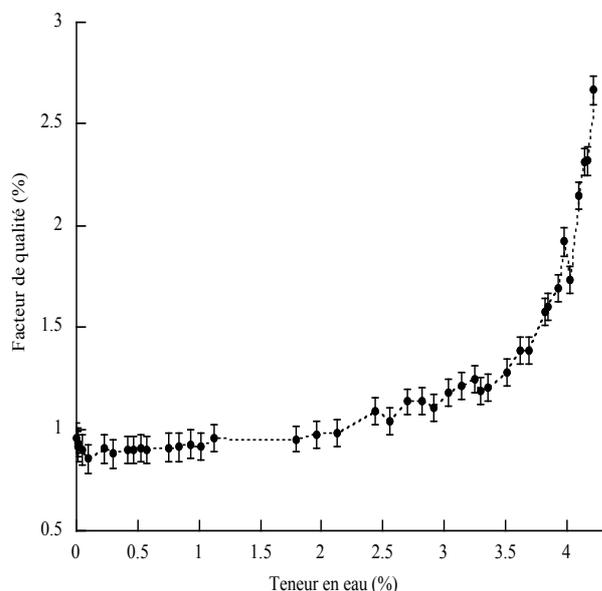


Figure V-11 *Variation du facteur de qualité du Béton A en fonction de la teneur en eau massique*

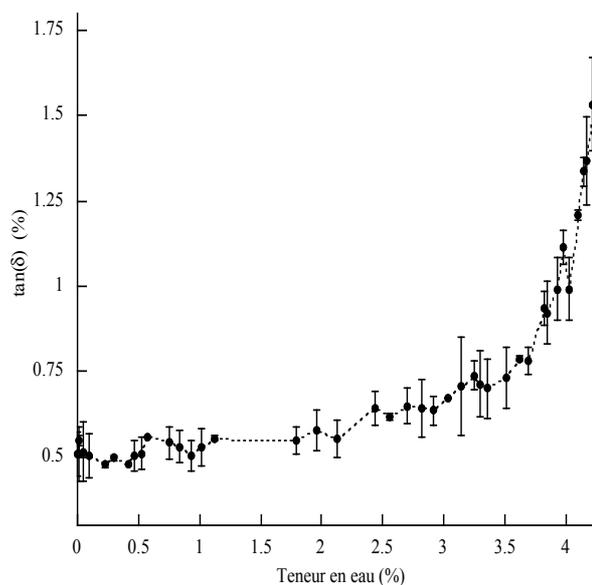


Figure V-12 *Variation de l'atténuation du Béton A en fonction de la teneur en eau massique*

Enfin, la Figure V-12 représente la variation de la tangente de perte, donnée par l'équation (V-2), en fonction de l'humidité du béton. Cette courbe a été directement déduite de la courbe de la Figure V-11 qui corrèle le coefficient de qualité des spectres de vitesse radiale à la teneur en eau du matériau.

$$\tan(\delta) = \frac{E''}{E'} \quad (\text{V-2})$$

L'augmentation globale de 200% de la tangente de perte du Béton A que l'on constate sur la Figure V-12 (avec une erreur relative moyenne égale à 8%) est associée à une augmentation de 290% de la partie imaginaire du module de Young. Plus les porosités sont saturées en eau, plus l'atténuation globale des ondes mécaniques dans le matériau augmente. En effet, l'impédance de l'eau étant plus importante que celle de l'air, les porosités saturées en eau contribuent de façon plus importante à l'augmentation de l'atténuation globale du matériau que dans le cas de porosités non-saturées.

V.4.2 Béton B

Les mesures de la fréquence propre radiale f_r et du rapport des fréquences f_o/f_r en fonction de la teneur en eau du béton B sont respectivement données sur la Figure V-13 et la Figure V-14. Il est remarquable que la teneur en eau qu'atteint le Béton B à la saturation (6,6%) est plus élevée que pour le Béton A. Ceci confirme donc l'observation visuelle selon laquelle l'échantillon B paraissait plus poreux (§V.3).

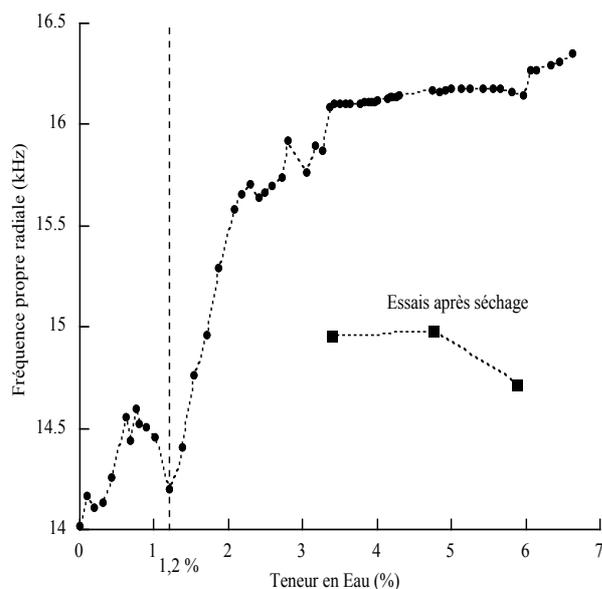


Figure V-13 Variation de la fréquence propre du mode radial en fonction de la teneur en eau du Béton B et mesures après séchage

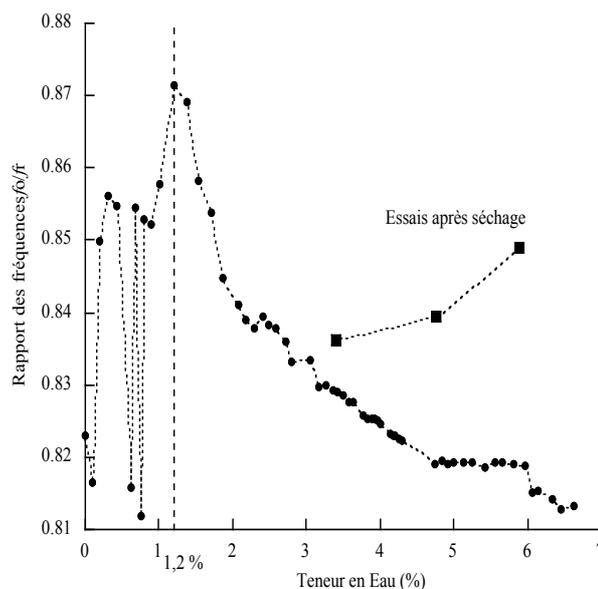


Figure V-14 Variation du rapport des fréquences en fonction de la teneur en eau du Béton B et mesures après séchage

Les allures de ces graphes sont analogues à ceux qui ont été obtenus dans le cas du Béton A mais à partir 1,2% de teneur en eau, les mesures deviennent moins régulières et précises. En effet, la courbe Figure V-13 représentative de l'évolution de la fréquence f_r présente un lobe entre 0% et 1,2% de teneur en eau. Quant aux rapports des fréquences f_o/f_r , il apparaît entre 0% et 1,2% des fluctuations de l'ordre de grandeur de l'évolution globale du rapport entre les états sec et saturé. Cette instabilité trouve son explication dans le mode opératoire choisi pour mener l'étude expérimentale. Les mesures ont été effectuées à partir d'un état saturé (teneur en eau maximale sur les graphes) et, dans le but d'accélérer le processus expérimental, le séchage des échantillons a été forcé à l'aide d'une étuve au fur et à mesure que la vitesse d'évaporation de l'eau diminuait. En effet, après l'évacuation de l'eau contenue au voisinage de la surface, l'évaporation naturelle de celle qui est contenue dans le cœur de l'échantillon est plus lente. L'exposition à de fortes températures (jusqu'à 100°C) durant des heures a pu provoquer des contraintes internes

importantes qui, à leurs tours, ont pu engendrer des microfissures au sein du matériau. Afin de vérifier cette hypothèse, l'échantillon a été immergé une seconde fois afin de le recharger en eau jusqu'à une teneur de 6%, puis les mêmes mesures de fréquences que précédemment ont été effectuées pour trois teneurs en eau. Les résultats de ces mesures effectuées «après séchage» et représentées sur la Figure V-13 et la Figure V-14, ne coïncident pas avec les mesures préalablement faites. Ceci conforte l'hypothèse d'endommagement du Béton B du fait de son exposition à de fortes températures. Le béton étant un matériau hétérogène (contenant des agrégats et un liant), une température élevée provoque de forts gradients de déplacement et, par suite, des contraintes internes élevées qui conduisent finalement à la fissuration du milieu.

Contrairement au Béton A, le Béton B, de part sa composition physico-chimique, n'a pas résisté à la température. Le séchage du béton en vue d'évaluer l'évolution des ses propriétés en fonction de l'humidité nécessite donc de limiter la température maximale que le matériau atteint. Néanmoins, vu que l'effet de la température sur la microstructure du Béton B ne se manifeste qu'à 1,2% de teneur en eau, il a été tout de même possible d'évaluer correctement les propriétés mécaniques du béton en se basant sur les données expérimentales «saines» obtenues avant d'atteindre la limite de 1,2% d'humidité. Les résultats des calculs obtenus au-delà de cette limite ne seront donnés que pour observer l'effet de l'endommagement sur la dépendance des propriétés mécaniques vis-à-vis de l'humidité dans les bétons.

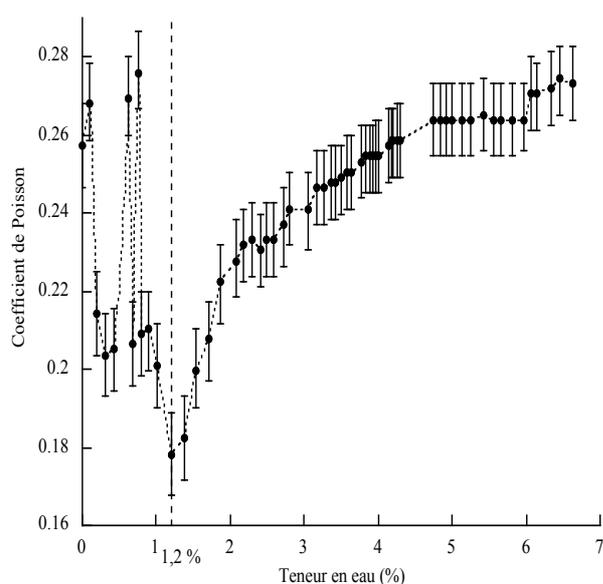


Figure V-15 Variation du coefficient de Poisson du Béton B en fonction de la teneur en eau massique

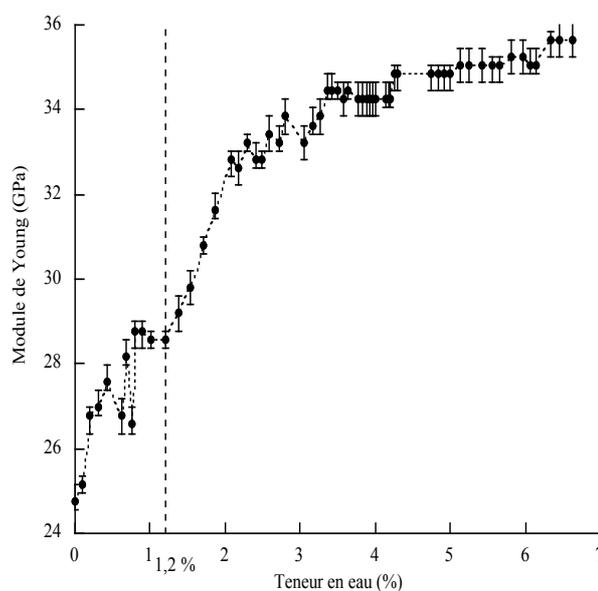


Figure V-16 Variation de la partie réelle du module de Young du Béton B en fonction de la teneur en eau massique

Les graphes représentant la variation du coefficient de Poisson et du module de Young en fonction de l'humidité du Béton B sont respectivement donnés sur la Figure V-15 et la Figure V-16. La variation des propriétés E' et ν en fonction de l'humidité du Béton B sont comparables aux allures obtenues dans le cas du Béton A et représentées sur la Figure V-9 et la Figure V-10. Entre 1,2% et 6,6% de teneur en eau massique, le coefficient de Poisson et le module de Young du Béton B croissent respectivement de 50% et 22%. Toutefois, l'effet de la microfissuration est visible sur le comportement de chacune des deux propriétés mécaniques à partir de 1,2% de teneur en eau. Comme pour le Béton A, l'augmentation du module de Young reflète l'accroissement de la rigidité apparente du fait de la présence d'eau dans les porosités. Par ailleurs, la forte augmentation du coefficient de poisson pourrait s'expliquer par la porosité élevée du Béton A. En effet, la présence d'eau dans les porosités du béton tend à répartir de manière plus importante les contraintes internes dans le matériau, à augmenter les déformations latérales de celui-ci et, par suite, d'accroître le coefficient de Poisson global. Remarquons enfin que les erreurs relatives commises sur le coefficient de Poisson et le module de Young du Béton B, respectivement égales à 3,9% et 1%, sont très proches des erreurs commises dans le cas du Béton A. Ceci montre donc la reproductibilité de l'erreur expérimentale commise durant l'évaluation des propriétés mécaniques par la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées.

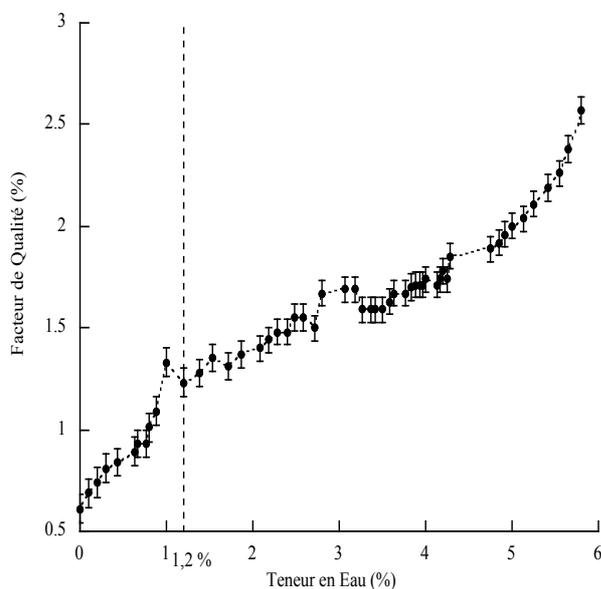


Figure V-17 Variation du facteur de qualité du Béton B en fonction de la teneur en eau massique

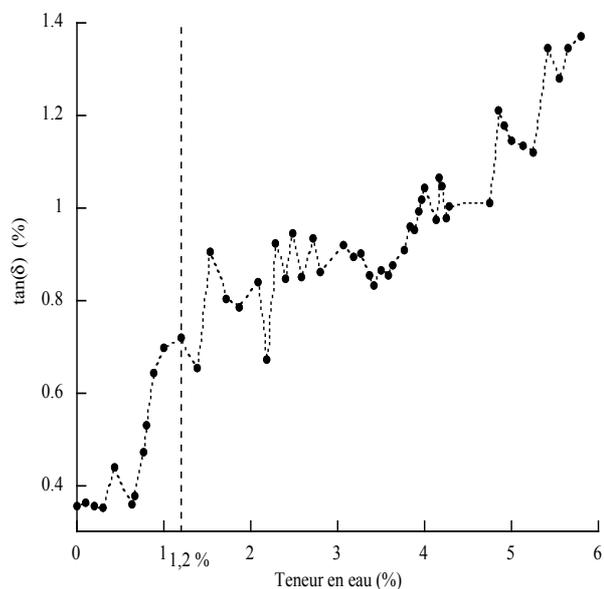


Figure V-18 Variation du module tangent du Béton B en fonction de la teneur en eau massique

En se basant sur le facteur de qualité mesuré expérimentalement sur les spectres de vitesse radiale (dont la variation en fonction de la teneur en eau du béton est représentée sur la Figure V-17), il a été possible d'évaluer la variation de la partie imaginaire du module de Young en fonction de l'humidité du matériau. L'effet de l'endommagement du béton est là aussi visible sur l'allure du facteur de qualité par une discontinuité brusque du graphique de la Figure V-17 au voisinage de 1,2% de teneur en eau. La variation décroissante de la tangente de perte $\tan(\delta)$ en fonction de la teneur en eau du Béton B, représentée sur la Figure V-18, est semblable à celle que l'on observe dans le cas du Béton A. Néanmoins, il apparaît sur la Figure V-18 que l'évaluation de l'atténuation du Béton B est assez imprécise (les intervalles d'erreurs correspondants n'ont donc pas été calculés). Cette imprécision est certainement due aux erreurs commises sur E' et ν cumulées à celles qui sont faites sur le facteur de qualité, à la nature fortement poreuse du Béton B (l'atténuation se comporte alors de manière irrégulière en fonction de la teneur en eau) et, potentiellement, à sa constitution physico-chimique. Il est tout de même intéressant de noter que l'atténuation du béton augmente avec l'humidité pour les mêmes raisons que celles qui ont été avancées dans le cas du Béton A. Enfin, il est remarquable que l'utilisation de l'accéléromètre au contact des échantillons en béton étudiés a permis d'obtenir des valeurs cohérentes et aussi précises que ceux qui ont été obtenus pour le Béton A (à partir de mesures effectuées par Laser). Les deux méthodes sont donc équivalentes avec, toutefois, un gain en temps d'acquisition et en précision en utilisant l'accéléromètre.

V.5 Conclusions

La technique de génération acoustique par micro-ondes couplée à la méthode de caractérisation basée sur les fréquences propres et la réponse radiale des plaques minces circulaires ont permis d'étudier et de quantifier l'effet de l'humidité sur les propriétés mécaniques des bétons. Il a été constaté que l'infiltration de l'eau dans un béton augmente significativement son coefficient de Poisson et sa rigidité apparente. D'autre part il a été montré que l'humidité tend à augmenter l'atténuation des ondes dans le béton. La méthode de caractérisation des disques en béton présente les avantages d'être globalement précise et d'avoir, sous certaines conditions, une erreur d'évaluation reproductible d'un échantillon à un autre.

La présente étude a par ailleurs permis de mettre en lumière des spécificités propres aux bétons. En effet, du fait de sa nature hétérogène, le béton est fortement vulnérable aux températures élevées et il est important de limiter la température

d'exposition de l'échantillon afin d'éviter de l'endommager. Par ailleurs, il a été constaté que l'évaluation de l'atténuation acoustique dans un béton, en se basant sur le facteur de qualité du spectre de vitesse radiale, est dépendante de la nature physico-chimique de l'échantillon ainsi que de sa porosité. Ce dernier point nécessiterait donc une étude complémentaire plus globale.

Dans la suite, il serait intéressant de comparer les caractéristiques mesurées à des fréquences d'environ 15 kHz à celles que l'on obtiendrait par des essais statiques à l'aide de dispositifs d'essais classiques. Dans ce dernier cas, il est en effet possible d'obtenir des valeurs et des évolutions des propriétés mécaniques du béton en fonction de sa teneur en eau différentes de celles que l'on observe dans la présente étude.

V.6 Bibliographie

[V-1] J. Berriman, P. Purnell, D. A. Hutchins, A. Neild, "Humidity and aggregate content correction factors for air-coupled ultrasonic evaluation of concrete", *Ultrasonics* 43, pp. 211–217 (2005).

[V-2] A. R. Hadj Henni, C. Bacon and B. Hosten, "In-plane vibration of thin circular structures submitted to pulsed microwave irradiations". *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 119, No. 6, pp. 3782–3792, (2006).

[V-3] E. Ohdaira, N. Masuzawa, "Water content and its effect on ultrasound propagation in concrete—the possibility of NDE", *Ultrasonics* 38, 546–552 (2000).

[V-4] C. Bacon, E. Guilliorit and B. Hosten, "An acoustic-microwave method for the study of the mechanical influence of moisture content in materials", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, pp. 268-274 (2003).

VI Conclusions et perspectives

La technique de génération acoustique dans les matériaux et les structures par micro-ondes pulsées a servi à l'étude de différents problèmes dans le but de faire de cette méthode originale un procédé d'évaluation et/ou de contrôle non-destructifs. La compréhension des phénomènes acoustiques générés dans les structures étudiées par des radiations de micro-ondes pulsées a nécessité de développer des modèles analytiques capables de prédire les réponses acoustiques de ces structures. Etant donnée la longueur d'onde électromagnétique centimétrique des radiations micro-ondes et leur absorption volumique par les matériaux étudiés, les comportements acoustiques observés expérimentalement et modélisés théoriquement ont été, tout au long de cette étude, de type vibratoire. Une autre spécificité de l'excitation micro-ondes, telle que mise en oeuvre dans le montage expérimental actuel, est la répartition spatiale inconnue du champ électromagnétique en dehors des guides d'ondes électromagnétiques utilisés. Ces particularités ont orienté le travail de modélisation théorique afin de traduire correctement les comportements vibratoires des structures étudiées et de permettre la validation expérimentale. Dans tous les modèles développés, la prise en compte de l'excitation micro-ondes s'est donc faite via un terme source thermique intervenant dans les équations différentielles du mouvement en y assurant un couplage thermoélastique. Par ailleurs, le développement de modèles analytiques s'est accompagné par la mise en oeuvre d'une modélisation des vibrations par la méthode des éléments finis. Cette modélisation numérique a servi d'une part comme «expérimentation numérique» permettant de valider préalablement la modélisation analytique avant la fabrication des échantillons et la validation expérimentale proprement dite et, d'autre part, à comparer la précision et la vitesse de calcul des résolutions numériques et analytiques. Expérimentalement, par rapport aux techniques vibratoires classiques (par impact mécanique ou exciteur électro-dynamique), la génération par micro-ondes présente l'avantage d'être très reproductible et sans contact. De plus, elle permet d'exciter des modes purs difficiles à exciter de façon isolée avec les autres techniques. Dans le cas des disques, par exemple, nous avons montré qu'il est possible et facile d'exciter uniquement les modes purement radiaux.

L'application de la méthode de génération acoustique par micro-ondes à l'évaluation non-destructive a porté sur la caractérisation des propriétés mécaniques de matériaux diélectriques de type piézoélectriques ou viscoélastiques isotropes, et sur la caractérisation géométrique de structures planes finies de type plaques pleines ou trouées.

La modélisation de la vibration de barreaux unidimensionnels de céramique piézoélectrique PZT sous l'effet d'une excitation électrique ou thermique par la méthode des vecteurs d'état, combinée aux résultats de l'étude expérimentale réalisée

à l'aide du générateur de micro-ondes et d'un générateur de tensions, a permis d'établir la nature thermoélastique de la génération par micro-ondes pulsées dans les céramiques piézoélectriques. En effet, il a été montré, par un raisonnement alliant modélisation et expérimentation, que la composante électrique du champ électromagnétique qui compose les micro-ondes n'est pas à l'origine de la génération acoustique dans les céramiques piézoélectriques. De plus, un raisonnement identique a servi à montrer que l'effet pyroélectrique, susceptible d'apparaître dans une céramique ferroélectrique sous l'effet d'un réchauffement, n'intervient pas dans le phénomène de génération acoustique par micro-ondes dans les céramiques testées expérimentalement. Par ailleurs, en se basant sur les fréquences propres de résonance des barreaux piézoélectriques prédites par le modèle sous différentes conditions électriques aux limites, il a été possible de procéder à l'évaluation des propriétés mécaniques, électromécaniques et électriques de céramiques PZT de manière précise et en adéquation avec les données fournies par les fabricants des composants piézoélectriques. Cette méthode de caractérisation pourrait d'ailleurs s'étendre au cas des plaques piézoélectriques se déformant dans le plan en exploitant le modèle analytique mis en oeuvre pour l'étude des plaques minces circulaires.

L'approche qui consiste à évaluer les propriétés mécaniques et/ou électro-mécaniques des matériaux de structures unidimensionnelles en se basant sur leurs fréquences propres de vibration a par la suite été étendue aux cas des plaques minces bidimensionnelles constituées de matériaux isotropes, homogènes et viscoélastiques. Pour ce faire, les vibrations dans le plan de plaques minces de formes circulaires et elliptiques (pleines ou trouées) soumises à une excitation thermoélastique ont été modélisées.

En supposant un état plan de contraintes, l'équation différentielle de Navier qui régit le mouvement des plaques minces dans leurs plans a été établie en écriture tensorielle. Cette équation a ensuite été projetée sur des repères cylindriques elliptiques et circulaires afin de modéliser les vibrations dans le plan de plaques minces elliptiques et circulaires. Dans les deux cas, la décomposition de Helmholtz du champ de déplacement en parties dérivant de potentiels a permis d'obtenir les équations d'ondes des potentiels et, selon qu'il s'agisse d'une plaque elliptique ou circulaire, de les résoudre au moyen de séries infinies de fonctions de Mathieu radiales et angulaires ou de fonctions trigonométriques et de Bessel. Bien que les plaques circulaires puissent être considérées comme des cas particuliers de plaques elliptiques ayant une excentricité nulle, il a été choisi d'effectuer une modélisation spécifique pour les plaques circulaires. En effet, les solutions analytiques dans ce cas font intervenir les fonctions trigonométriques et de Bessel plus communément utilisées que les fonctions de Mathieu propres au cas des ellipses. En supposant un champ d'excitation uniforme

et en tenant compte des conditions mécaniques aux limites des plaques modélisées, les champs de déplacement dans les plaques elliptiques et circulaires ont été calculés et validés par comparaison avec les mesures expérimentales obtenues sur des plaques en résine époxy excitées par micro-ondes pulsées. Dans le cas des plaques circulaires, il a été de plus possible de prédire analytiquement, et de manière satisfaisante, un ensemble important de fréquences propres de vibration. Toutefois, des problèmes numériques se sont posés pour la prédiction précise du champ de déplacement dans les plaques elliptiques trouées soumises à une excitation thermoélastique uniforme et pour le calcul complet des fréquences propres de vibration des plaques elliptiques pleines ou trouées (algorithme d'inversion matricielle non adapté à des matrices de tailles importantes et mal conditionnées). Le contournement de ces difficultés nécessite d'adapter la méthode de résolution numérique en utilisant une procédure d'inversion matricielle plus performante ou en se servant d'algorithmes d'optimisation adaptés à l'inversion matricielle exprimée au sens des moindres carrés.

Les mesures expérimentales et les calculs théoriques des fréquences propres de vibration des plaques minces circulaires, ainsi que de leurs réponses en mode de vibration purement radial, ont servi à la résolution du problème inverse d'évaluation des caractéristiques mécaniques des matériaux. Une méthode de caractérisation a ainsi été mise en oeuvre permettant d'évaluer la rigidité d'un matériau isotrope, à travers son module de Young et son coefficient de Poisson, mais aussi l'atténuation des ondes mécaniques qui s'y propagent. Cette méthode de caractérisation a par la suite permis l'étude de l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques des bétons en révélant une forte dépendance des caractéristiques de ces derniers par rapport à la teneur en eau du matériau. Contrairement aux méthodes de caractérisation par ondes ultrasonores propagatives, cette procédure présente l'avantage de permettre la caractérisation des matériaux non-conducteurs sur des gammes de fréquences basses et peut donc être considérée comme étant complémentaire des méthodes ultrasonores à hautes fréquences.

La modélisation des vibrations des plaques elliptiques a été exploitée pour l'étude de l'influence d'une faible ellipticité dans disque un plein pseudo-circulaire sur sa réponse vibratoire. D'un point de vue géométrique, une méthode basée sur les fréquences propres du mode de vibration purement radial a été proposée pour l'évaluation des dimensions des plaques circulaires trouées. L'application de la même procédure au cas des plaques elliptiques trouées est envisageable à condition d'adapter les méthodes de résolution numérique utilisées pour la résolution du problème direct et de pouvoir identifier les fréquences propres associées à des mêmes modes durant la procédure de caractérisation.

Contrairement à la caractérisation mécanique des matériaux constituant les plaques, la méthode d'évaluation des caractéristiques géométriques des plaques circulaires et elliptiques présentée ici n'est, *a priori*, pas utile car il est généralement possible d'effectuer ces mesures avec des moyens plus traditionnels. Néanmoins, le développement de méthodes de caractérisation mécanique et géométrique des plaques par des essais de résonances produites par micro-ondes pulsées ouvre la voie à la caractérisation des structures cylindriques, circulaires ou elliptiques, «infinies». En effet, il a été montré que les modèles développés pour les cas des plaques minces peuvent facilement être adaptés aux cas des cylindres «infinis» vibrants sous l'hypothèse d'un état plan de déformations. Ceci nécessiterait toutefois d'adapter le montage expérimental en concevant des guides d'ondes électromagnétiques capables d'irradier uniformément, avec une intensité suffisamment grande, la génératrice d'un cylindre afin de se ramener en pratique à un état quasi-plan de déformations. Ce développement pourrait par exemple servir en bioacoustique à la caractérisation *in vivo* des os humains étant donné que ceux-ci, pour certains d'entre eux, peuvent géométriquement être approchés par des cylindres creux de sections droites pseudo-circulaires.

Les perspectives de développement de la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées vers une méthode d'évaluation et/ou de contrôle non-destructifs des matériaux et des structures portent sur la mise en oeuvre de nouveaux modèles analytiques et sur le développement du dispositif expérimental.

Un développement théorique possible avec le dispositif expérimental utilisé dans le cadre de ce travail est la modélisation analytique de la vibration dans le plan de plaques minces rectangulaires constituées d'abord d'un matériau isotrope (en reprenant les grandes lignes de la modélisation des plaques circulaires et elliptiques) puis d'un matériau anisotrope. Dans ce dernier cas, la solution de l'équation différentielle du mouvement, adaptée au cas d'un matériau anisotrope, pourrait aussi prendre la forme d'une combinaison de séries infinies de fonctions à coefficients inconnus. Le développement d'un tel modèle associé à la technique de génération par micro-ondes pulsées ouvrirait la voie à la caractérisation mécanique des matériaux anisotropes constituant des plaques minces en se basant sur leurs fréquences propres de vibration. Par ailleurs, il est possible d'imaginer l'extension des modèles analytiques de vibration des plaques minces mono-couches au cas des plaques multicouches. Dans ce cas de figure, il est nécessaire de tenir compte, au niveau de la formulation du problème et de la modélisation, de la vibration hors plan de la plaque du fait de la variation des propriétés mécaniques, thermiques et électromagnétiques des matériaux constituant la plaque multicouche suivant son épaisseur.

D'un point de vue expérimental, en plus de l'adaptation, évoquée plus haut, du guide d'ondes électromagnétiques pour l'excitation des cylindres «infinis» et étant données les gammes de fréquence explorées tout au long de notre travail, il serait intéressant de remplacer la mesure par Laser interférométrique par un microphone ultrasensible. Cette évolution nécessite toutefois une étude préalable afin de s'assurer du gain en sensibilité et, par suite, en précision des mesures expérimentales. Enfin, un développement intéressant est susceptible d'être apporté à la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées si ces dernières pouvaient être focalisées sur les structures étudiées. En médecine, la focalisation des micro-ondes est déjà mise en oeuvre pour le traitement thérapeutique des tumeurs par destruction thermique des cellules cancéreuses. La focalisation permet en effet de canaliser l'énergie électromagnétique sur une zone spatiale réduite de l'ordre de grandeur de la longueur de l'onde électromagnétique dans le milieu de propagation. A la fréquence de génération des micro-ondes de 9,41 GHz utilisée dans le cadre de notre travail, la longueur d'onde électromagnétique est centimétrique. Par conséquent, dans le cas des structures de taille centimétrique, la concentration de l'énergie thermique due à l'absorption des micro-ondes focalisées permettrait d'une part d'accroître l'intensité de la réponse acoustique des structures irradiées et, d'autre part, de rendre possible la modélisation du champ électromagnétique bidimensionnel irradiant les structures. En effet, la connaissance du champ électromagnétique rendrait la modélisation bidimensionnelle du couplage thermo-électromagnétique réalisable et permettrait ainsi d'affiner la modélisation de la vibration des structures étudiées (pour ce faire, une modélisation basée sur l'utilisation des fonctions de Green n'est pas à exclure). S'agissant enfin des structures de tailles importantes (de l'ordre du mètre) par rapport aux dimensions de la zone de focalisation, la source micro-ondes deviendrait dans ce cas ce que la technique de génération d'ultrasons par Laser est pour les structures millimétriques. Cette évolution serait possible à condition que les matériaux des structures irradiées permettent la pénétration et l'absorption des ondes électromagnétiques et que l'intensité de l'énergie absorbée soit suffisante pour générer des ondes acoustiques dans le milieu irradié. Le phénomène acoustique que l'on traiterait dans ce cas ne serait plus vibratoire mais propagatif. Cette double fonction permettrait à la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées de constituer une alternative complémentaire et intéressante aux méthodes de contrôle et d'évaluation non-destructifs existantes dans l'industrie.

A : Modélisation par éléments finis de la génération d'ondes dans un solide par une source d'excitation volumique

Résumé

La modélisation par la méthode des éléments finis de la génération d'ondes mécaniques dans un solide par une excitation volumique est exposée dans cette annexe. Cette modélisation numérique utilise le code d'éléments finis FEMLAB qui intègre toutes les fonctions du logiciel MATLAB pour le développement des modèles et leurs résolutions. Nous commencerons par poser, dans le domaine fréquentiel, l'équation aux dérivées partielles qui régit la réponse en déplacement du solide avant d'identifier les coefficients de cette même équation formulée dans la syntaxe propre au code FEMLAB pour les cas des solides tridimensionnels et bidimensionnels (en particulier, le cas des plaques minces).

A.1 Hypothèses	A-3
A.2 Mise en équation du problème	A-3
A.3 Le formalisme FEMLAB	A-4
A.3.1 Développement du terme $\nabla \cdot (c \nabla u)$	A-5
A.3.2 Développement du terme $\nabla \cdot \gamma$	A-6
A.3.3 Identification du terme au	A-6
A.3.4 Identification du coefficient c	A-6
A.4 Cas particuliers	A-8
A.4.1 Cas 2,5D	A-8
A.4.2 Cas 2D pour un état plan de déformations	A-9
A.4.3 Cas 2D pour un état plan de contraintes	A-10

A.1 Hypothèses

Dans l'optique de modéliser la génération acoustique dans le cas le plus général, le matériau est supposé être viscoélastique linéaire et anisotrope. Les cas particuliers des matériaux à symétrie matérielle (orthotropes et isotropes) peuvent être traités par les modèles ci-dessous en adaptant les coefficients matériels dans chacun des cas. Du fait de la viscosité du matériau et de l'avantage de formuler et de résoudre le problème dans le domaine fréquentiel, toutes les quantités exprimées dans les développements qui suivent sont les transformées de Fourier des quantités exprimées dans le domaine temporel. Par ailleurs, nous supposons que les solides étudiés subissent des sollicitations d'origine thermique. Dans tous les cas, nous ferons l'hypothèse que les caractéristiques mécaniques ne sont pas modifiées par l'intensité des contraintes générées, ni par la température du matériau.

A.2 Mise en équation du problème

L'équation d'équilibre dynamique s'écrit, dans le domaine fréquentiel et pour un problème tridimensionnel, comme suit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A-1})$$

où ρ est la densité du matériau, ω la pulsation liée à la fréquence ν par $\omega = 2\pi\nu$, σ_{ij} les composantes de la contrainte mécanique et u_i la composante du déplacement suivant \vec{e}_i (ces derniers étant les vecteurs de la base orthonormée liée au repère choisi).

La loi de comportement du matériau, supposée linéaire, s'exprime par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - g_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - g_{ij} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{A-2})$$

où C_{ijkl} est le tenseur de rigidité viscoélastique complexe, ε_{kl} les composantes du tenseur de déformation et g_{ij} les composantes du tenseur des contraintes d'excitation volumique.

Dans le cas d'une excitation d'origine thermique, la contrainte g_{ij} prend la forme suivante :

$$g_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl} \theta(x) \quad (\text{A-3})$$

où $\theta(x)$ et α_{kl} désignent, respectivement, le champ d'accroissement de la température dans le matériau et le tenseur des coefficients de dilatation thermique. Dans le cas particulier d'un matériau orthotrope et si le repère géométrique est formé par les axes d'orthotropie, alors le tenseur α_{kl} est tel que :

$$\alpha_{kl} = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{A-4})$$

où α_k est le coefficient de dilatation linéaire dans la direction \vec{e}_k . La forme matricielle associée à ce tenseur n'aura donc des éléments non nuls que sur sa diagonale principale.

La combinaison des équations (A-1) et (A-2) permet de tirer l'équation en déplacement du solide :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{A-5})$$

En désignant par \vec{n} le vecteur unitaire sortant et normal à la frontière du domaine et par \vec{T} le vecteur contrainte agissant sur cette même frontière, les conditions aux limites de la structure s'écrivent :

$$\vec{T} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad \text{ou} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j = (C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - g_{ij}) n_j \quad (\text{A-6})$$

A.3 Le formalisme FEMLAB

Cette partie concerne l'identification des termes de l'équation différentielle du mouvement (A-5) avec les termes correspondant de l'équation différentielle écrite selon la syntaxe du code FEMLAB. L'équation aux dérivées partielles (A-5) doit, selon le formalisme FEMLAB, avoir la forme suivante :

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{a} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A-7})$$

L'identification des coefficients \mathbf{c} , $\boldsymbol{\gamma}$ et \mathbf{a} passe par le développement des trois termes de l'équation (A-5). Dans le cas général d'un problème tridimensionnel, étant donné

que le vecteur déplacement \mathbf{u} possède trois composantes (u_1, u_2, u_3) , l'équation différentielle comportera trois composantes scalaires en projection sur chacun des trois axes.

A.3.1 Développement du terme $\nabla \cdot (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u})$

Dans ce terme, \mathbf{c} est une matrice 3×3 composée de neuf sous-matrices \mathbf{c}_{ij} (de dimension 3×3). Ces sous-matrices ont pour éléments c_{ijkl} (qui ne sont pas à confondre avec les composantes C_{ijkl}). Enfin, $\nabla \mathbf{u}$ est un vecteur de trois vecteurs à trois éléments. Selon ce formalisme, il apparaît alors :

$$\mathbf{c} \nabla \mathbf{u} = \mathbf{c} \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \\ \nabla u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{1j} \nabla u_j \\ \mathbf{c}_{2j} \nabla u_j \\ \mathbf{c}_{3j} \nabla u_j \end{pmatrix} = c_{ij} \nabla u_j \bar{e}_i = (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u})_i \bar{e}_i \quad \text{avec} \quad \nabla \mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

D'où l'on tire :

$$(\mathbf{c} \nabla \mathbf{u})_i = c_{ij} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_3} \end{pmatrix} = [c_{ij}] \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \bar{e}_k = c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \bar{e}_k \quad \text{avec} \quad [c_{ij}] = \begin{pmatrix} c_{ij11} & c_{ij12} & c_{ij13} \\ c_{ij21} & c_{ij22} & c_{ij23} \\ c_{ij31} & c_{ij32} & c_{ij33} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons enfin le terme recherché ;

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{e}_m \cdot c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \bar{e}_k = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} = c_{ikjl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad (\text{A-8})$$

En toute rigueur, il n'est pas possible d'identifier tous les termes c_{ijkl} en comparant les équations (A-8) et (A-5) car certains termes ne sont pas indépendants :

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} \quad (\text{A-9})$$

A.3.2 Développement du terme $\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}$

Le vecteur de vecteurs $\boldsymbol{\gamma}$ a la forme suivante :

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{ou encore} \quad \gamma_i = \gamma_{ij} \bar{\boldsymbol{e}}_j$$

D'où l'on tire :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \gamma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma})_i = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A-10})$$

La comparaison des équations (A-5) et (A-7) révèle qu'il est possible d'identifier à une constante près les termes γ_{ij} . Il apparaît alors :

$$\gamma_{ij} = g_{ij} \quad (\text{A-11})$$

A.3.3 Identification du terme $\boldsymbol{a} \boldsymbol{u}$

Le système d'équation (A-5) nous permet d'identifier directement la matrice \boldsymbol{a} de l'équation (A-7) dans le formalisme FEMLAB. Il s'agit en fait de la matrice de masse de l'équation différentielle du mouvement :

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\rho\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A-12})$$

A.3.4 Identification du coefficient c

Selon le formalisme FEMLAB, le vecteur contrainte sur le contour du domaine est donné par :

$$\vec{T} = \vec{n} \cdot [\mathbf{c} \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}] \quad (\text{A-13})$$

La composante de \vec{T} selon \vec{e}_i est :

$$\begin{aligned} T_i &= n_p \vec{e}_p \cdot (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma})_i = n_p \vec{e}_p \cdot (c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \vec{e}_k - \gamma_{ik} \vec{e}_k) \\ &= n_p c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \delta_{pk} - n_p \gamma_{ik} \delta_{pk} = n_k c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} - \gamma_{ik} n_k \end{aligned}$$

Il est possible d'inverser les indices k et j dans l'expression précédente. Il apparaît alors :

$$T_i = (c_{ikjl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \gamma_{ij}) n_j \quad (\text{A-14})$$

La comparaison des équations (A-14) et (A-6) permet d'identifier les termes c_{ikjl} . On obtient :

$$c_{ikjl} = C_{ijkl} \quad (\text{A-15})$$

Autrement dit, les matrices \mathbf{c}_{ij} sont obtenues par simple inversion indicielle des composants du tenseur de rigidité \mathbf{C} . De plus, on vérifie bien que l'équation (A-7) du formalisme FEMLAB est compatible avec l'équation du mouvement (A-5).

En utilisant la notation contractée classique du tenseur de rigidité afin d'obtenir la matrice de rigidité $\mathbf{C}_{\alpha\beta}$, et tenant compte de la relation (A-15), les expressions des matrices \mathbf{c}_{ij} recherchées sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{11} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{51} & C_{56} & C_{55} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{12} &= \begin{pmatrix} C_{16} & C_{12} & C_{14} \\ C_{66} & C_{62} & C_{64} \\ C_{56} & C_{52} & C_{54} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{13} &= \begin{pmatrix} C_{15} & C_{14} & C_{13} \\ C_{65} & C_{64} & C_{63} \\ C_{55} & C_{54} & C_{53} \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_{21} &= \begin{pmatrix} C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{21} & C_{26} & C_{25} \\ C_{41} & C_{46} & C_{45} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{22} &= \begin{pmatrix} C_{66} & C_{62} & C_{64} \\ C_{26} & C_{22} & C_{24} \\ C_{46} & C_{42} & C_{44} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{23} &= \begin{pmatrix} C_{65} & C_{64} & C_{63} \\ C_{25} & C_{24} & C_{23} \\ C_{45} & C_{44} & C_{43} \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_{31} &= \begin{pmatrix} C_{51} & C_{56} & C_{55} \\ C_{41} & C_{46} & C_{45} \\ C_{31} & C_{36} & C_{35} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{32} &= \begin{pmatrix} C_{56} & C_{52} & C_{54} \\ C_{46} & C_{42} & C_{44} \\ C_{36} & C_{32} & C_{34} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{33} &= \begin{pmatrix} C_{55} & C_{54} & C_{53} \\ C_{45} & C_{44} & C_{43} \\ C_{35} & C_{34} & C_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

A.4 Cas particuliers

Nous allons à présent spécifier quelques cas particuliers (souvent rencontrés en pratique) qui se déduisent du cas général tridimensionnel. Dans chacun des cas, le but est d'identifier les coefficients de l'équation aux dérivées partielles selon la syntaxe du code FEMLAB.

A.4.1 Cas 2,5D

Dans cette partie, le terme «2,5D» désigne le cas où la géométrie peut être discrétisée de façon bidimensionnelle mais où l'on s'intéresse aux trois composantes (u_1, u_2, u_3) du champ de déplacement. Il est supposé dans ce cas que le problème est invariant suivant la direction (\vec{e}_3) perpendiculaire au plan bidimensionnel discrétisé.

Ce problème correspond bien à un cas particulier du cas général tridimensionnel avec la condition d'invariance suivant la direction \vec{e}_3 :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{A-17})$$

L'identification des termes recherchés est effectuée en posant $i, k = 1, 2, 3$ et $j, l = 1, 2$ dans l'équation du mouvement (A-5). La relation (A-15) reste identique mais le coefficient \mathbf{c} de l'équation (A-7) devient une matrice 3×3 composée de sous-matrices 2×2 . Par analogie au résultat (A-16) il apparaît :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{11} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{16} \\ C_{61} & C_{66} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{12} &= \begin{pmatrix} C_{16} & C_{12} \\ C_{66} & C_{62} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{13} &= \begin{pmatrix} C_{15} & C_{14} \\ C_{65} & C_{64} \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_{21} &= \begin{pmatrix} C_{61} & C_{66} \\ C_{21} & C_{26} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{22} &= \begin{pmatrix} C_{66} & C_{62} \\ C_{26} & C_{22} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{23} &= \begin{pmatrix} C_{65} & C_{64} \\ C_{25} & C_{24} \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_{31} &= \begin{pmatrix} C_{51} & C_{56} \\ C_{41} & C_{46} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{32} &= \begin{pmatrix} C_{56} & C_{52} \\ C_{46} & C_{42} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{33} &= \begin{pmatrix} C_{55} & C_{54} \\ C_{45} & C_{44} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

Pour le coefficient $\boldsymbol{\gamma}$, le même raisonnement nous montre que $\boldsymbol{\gamma}$ est un vecteur à trois composé de trois sous-vecteurs (2×1) :

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \end{pmatrix} \quad (\text{A-19})$$

Enfin, le coefficient \mathbf{a} reste une matrice 3×3 identique à celle de l'équation (A-12).

A.4.2 Cas 2D pour un état plan de déformations

Dans le cas d'un état plan de déformations, la composante u_3 étant uniforme, les composantes u_1 et u_2 ne doivent dépendre que des variables spatiales x_1 et x_2 . Ceci correspond donc à un cas particulier du cas précédent (2,5D) avec, en plus, la condition suivante :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_l} = 0 \quad (l = 1, 2, 3) \quad (\text{A-20})$$

Etant donné que l'on ne s'intéresse qu'aux composantes u_1 et u_2 du déplacement, l'indice i est tel que $i=1,2$. Comme précédemment, en partant de l'équation (A-5) avec cette fois-ci $i=1,2$ et $j,k,l=1,2$, il est possible d'identifier les termes de l'équation (A-7) dans le cas d'un état plan de déformations.

D'après la relation (A-14), le coefficient \mathbf{c} devient une matrice 2×2 dont chaque composante est une matrice 2×2 . D'après le résultat (A-15), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{11} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{16} \\ C_{61} & C_{66} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{12} &= \begin{pmatrix} C_{16} & C_{12} \\ C_{66} & C_{62} \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_{21} &= \begin{pmatrix} C_{61} & C_{66} \\ C_{21} & C_{26} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{22} &= \begin{pmatrix} C_{66} & C_{62} \\ C_{26} & C_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

De la même manière, le coefficient $\boldsymbol{\gamma}$ devient :

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A-22})$$

Le coefficient \mathbf{a} devient une matrice 2×2 telle que :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\rho\omega^2 & 0 \\ 0 & -\rho\omega^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A-23})$$

A.4.3 Cas 2D pour un état plan de contraintes

La plaque est considérée comme étant mince et de normale \vec{e}_3 . L'état plan de contraintes impose aux composantes σ_{13} , σ_{23} et σ_{33} du tenseur des contraintes qu'elles soient nulles. Cette condition entraîne, comme nous le verrons, une modification des coefficients de l'équation du mouvement (A-7) selon la syntaxe du code FEMLAB. La condition sur les contraintes σ_{i3} s'écrit :

$$\sigma_{i3} = C_{i3kl}\epsilon_{kl} - g_{i3} = 0 \quad (i,k,l=1,2,3) \quad (\text{A-24})$$

En développant cette expression afin d'isoler la composante ϵ_{33} du tenseur de déformations $\boldsymbol{\epsilon}$, il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= \sum_{k,l=1,2} C_{i3kl}\epsilon_{kl} + \sum_{l=1,2} C_{i33l}\epsilon_{3l} + C_{i333}\epsilon_{33} + \sum_{k=1,2} C_{i3k3}\epsilon_{k3} - g_{i3} \\ &= \sum_{k,l=1,2} C_{i3kl}\epsilon_{kl} + 2 \sum_{l=1,2} C_{i33l}\epsilon_{3l} + C_{i333}\epsilon_{33} - g_{i3} = 0 \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{C_{i333}}(g_{i3} - \sum_{k,l=1,2} C_{i3kl}\epsilon_{kl} - 2 \sum_{l=1,2} C_{i33l}\epsilon_{3l})$$

Supposons que le matériau possède un plan de symétrie matérielle (matériau monoclinique) dont la normale est le vecteur unitaire \vec{e}_3 . La matrice de souplesse ayant la même forme que la matrice de rigidité, on montre que $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0$. L'expression de ϵ_{33} devient alors :

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{C_{i333}}(g_{i3} - \sum_{k,l=1,2} C_{i3kl}\epsilon_{kl}) \quad \text{et, en particulier,} \quad \epsilon_{33} = \frac{1}{C_{3333}}(g_{33} - \sum_{k,l=1,2} C_{33kl}\epsilon_{kl})$$

D'après l'équation (A-2), la composante σ_{ij} du tenseur des contraintes a pour expression générale $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - g_{ij}$ avec $(i,j,k,l=1,2,3)$. En tenant compte des conditions particulières propres à l'état plan de contraintes, il apparaît:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - g_{ij} \quad (i, j = 1, 2 \text{ et } k, l = 1, 2, 3) \\
 &= \sum_{k, l=1, 2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{C_{ij33}}{C_{3333}} (g_{33} - \sum_{k, l=1, 2} C_{33kl} \varepsilon_{kl}) - g_{ij} \\
 &= \sum_{k, l=1, 2} [C_{ijkl} - \frac{C_{ij33} C_{33kl}}{C_{3333}}] \varepsilon_{kl} - [g_{ij} - \frac{C_{ij33}}{C_{3333}} g_{33}]
 \end{aligned}$$

Dans le cas d'une excitation thermique du solide, l'expression de g_{ij} est donnée par l'équation (A-3). La composante σ_{ij} de la matrice des contraintes devient :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k, l=1, 2} [C_{ijkl} - \frac{C_{ij33} C_{33kl}}{C_{3333}}] \varepsilon_{kl} - [C_{ijkl} - \frac{C_{ij33} C_{33kl}}{C_{3333}}] \alpha_{kl} \theta \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{A-25})$$

En définissant le tenseur Q d'ordre 4 de la manière suivante :

$$Q_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{C_{ij33} C_{33kl}}{C_{3333}} \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{A-26})$$

l'expression (A-29) de la contrainte devient :

$$\sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl} - Q_{ijkl} \alpha_{kl} \theta \quad (i, j, k, l = 1, 2) \quad (\text{A-27})$$

Au coefficient Q_{ijkl} prêt, qui est propre à l'état plan de contraintes, l'expression (A-27) est identique à celle de l'équation (A-2).

Afin de définir les coefficients du code FEMLAB, il suffit donc de remplacer dans l'équation (A-15) les éléments du tenseur C par les éléments correspondants du tenseur Q . Dans le cas d'un état plan de contraintes, les éléments du tenseur \mathbf{c} propre au code FEMLAB sont donnés par :

$$c_{ijkl} = Q_{ijkl} \quad (i, j, k, l = 1, 2) \quad (\text{A-28})$$

Le coefficient \mathbf{c} est donc une matrice 2×2 formée de sous-matrice 2×2 définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}_{11} &= \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{16} \\ Q_{61} & Q_{66} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{12} &= \begin{pmatrix} Q_{16} & Q_{12} \\ Q_{66} & Q_{62} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{c}_{21} &= \begin{pmatrix} Q_{61} & Q_{66} \\ Q_{21} & Q_{26} \end{pmatrix} & \mathbf{c}_{22} &= \begin{pmatrix} Q_{66} & Q_{62} \\ Q_{26} & Q_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

Le coefficient $\boldsymbol{\gamma}$ est lui aussi modifié. Sous l'hypothèse d'une excitation d'origine thermique, en posant pour G_{ij} , qui est la part de la contrainte due à l'excitation thermique pour un état plan de contraintes, la forme suivante:

$$G_{ij} = Q_{ijkl} \alpha_{kl} \theta \quad (\text{A-30})$$

on obtient finalement pour $\boldsymbol{\gamma}$ l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \gamma_1 = \begin{pmatrix} G_{11} \\ G_{12} \end{pmatrix} \text{ et } \gamma_2 = \begin{pmatrix} G_{21} \\ G_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A-31})$$

Enfin, la matrice \mathbf{a} est une matrice 2×2 telle que :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\rho\omega^2 & 0 \\ 0 & -\rho\omega^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A-32})$$

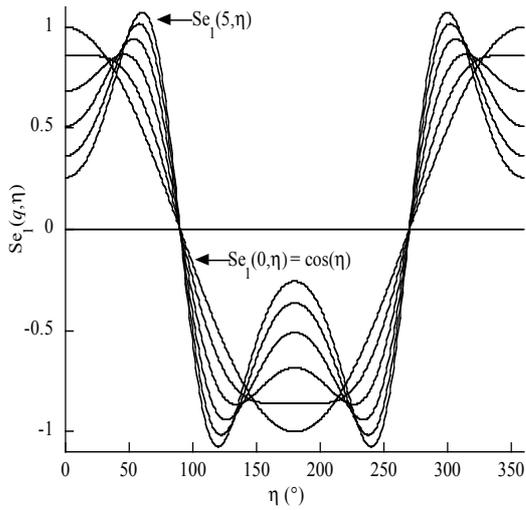
B : Allures et comportements des fonctions de Mathieu angulaires et radiales

Résumé

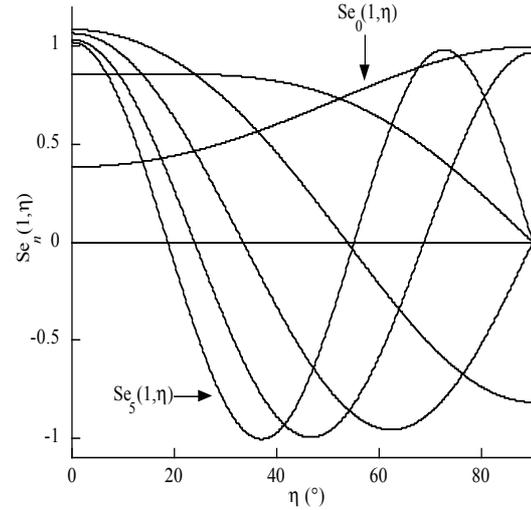
Dans cette annexe, les fonctions de Mathieu angulaires (de première espèce) et radiales (de première et de seconde espèce) paires et impaires sont représentées afin de les visualiser. La représentation graphique de chaque fonction s'effectuera en faisant varier l'ordre n et le paramètre q afin d'observer leurs influences sur le comportement des fonctions de Mathieu.

	Fonctions de Mathieu angulaires		Fonctions de Mathieu radiales	
	Paires	Impaires	Paires	Impaires
Première espèce	$Se_n(q, \eta)$	$So_n(q, \eta)$	$Je_n(q, \xi)$	$Jo_n(q, \xi)$
Seconde espèce	$Fe_n(q, \eta)$	$Fo_n(q, \eta)$	$Ne_n(q, \xi)$	$No_n(q, \xi)$

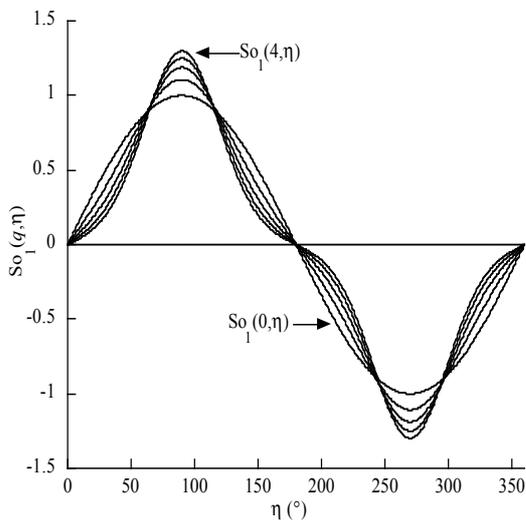
Tableau B-1 Notations utilisées pour les fonctions de Mathieu angulaires et radiales de première et de seconde espèce selon la parité considérée



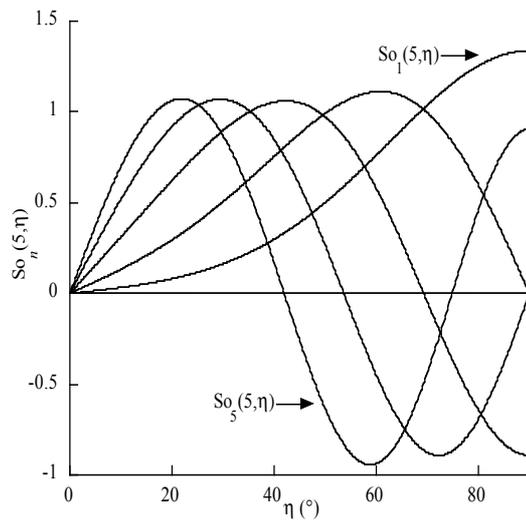
$$Se_n(q, \eta) \quad n = 1, \quad q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$



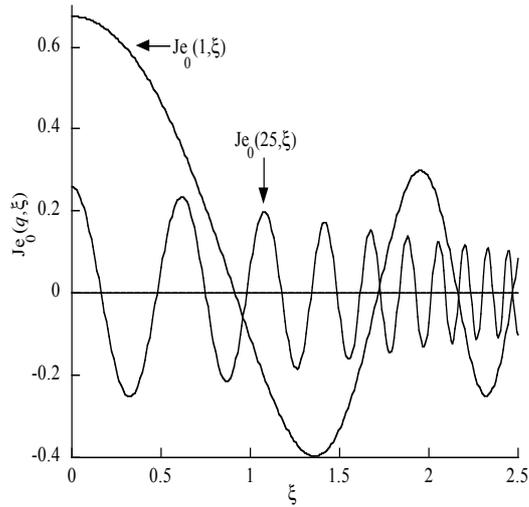
$$Se_n(q, \eta) \quad n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad q = 1$$



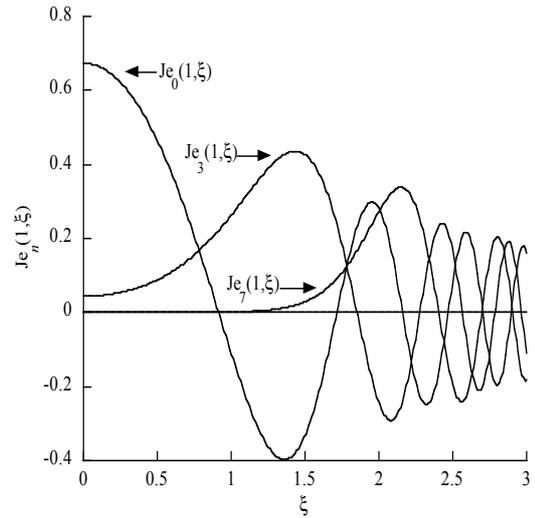
$$So_n(q, \eta) \quad n = 1, \quad q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$



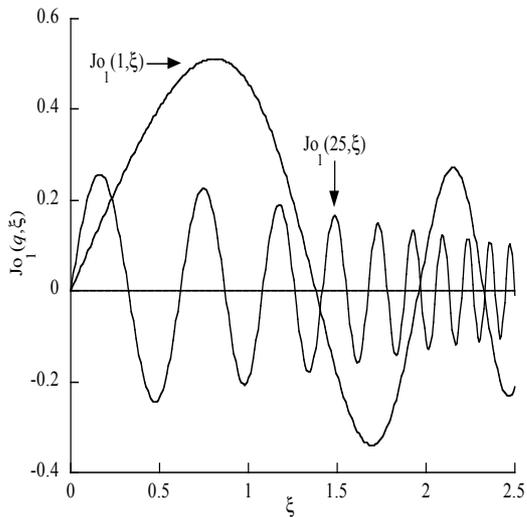
$$So_n(q, \eta) \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad q = 5$$



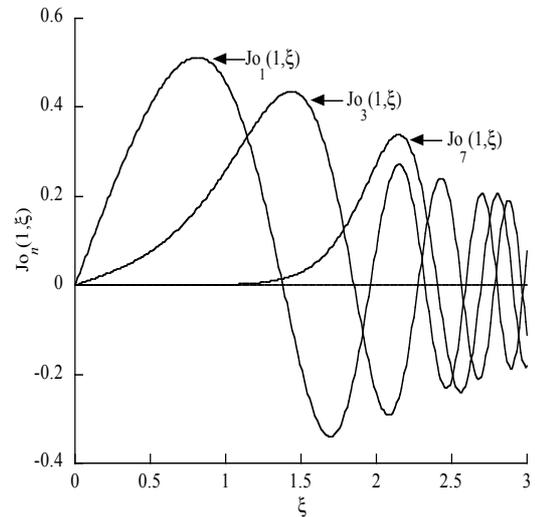
$Je_n(q, \xi) \quad n = 0, \quad q \in \{1, 25\}$



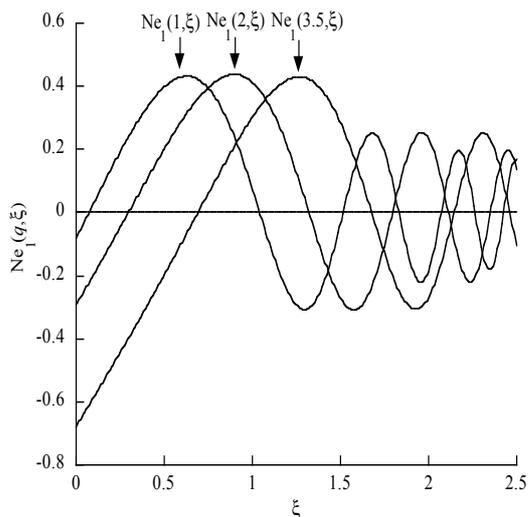
$Je_n(q, \xi) \quad n \in \{0, 3, 7\}, \quad q = 1$



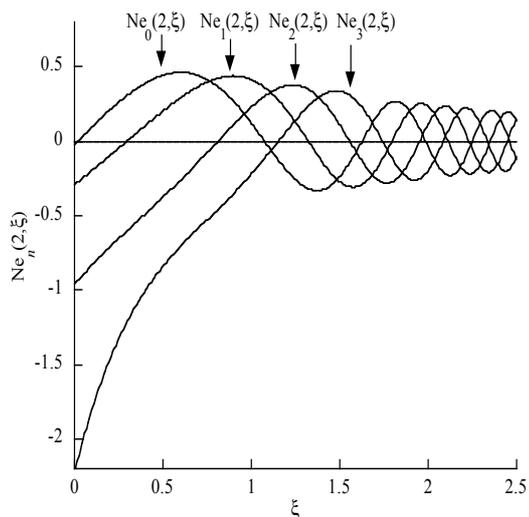
$Jo_n(q, \xi) \quad n = 1, \quad q \in \{1, 25\}$



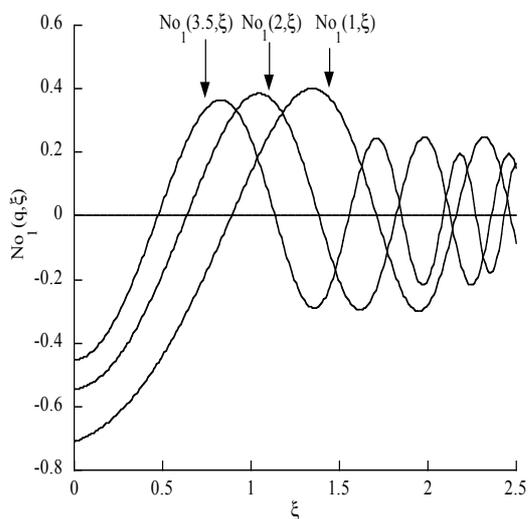
$Jo_n(q, \xi) \quad n \in \{1, 3, 7\}, \quad q = 1$



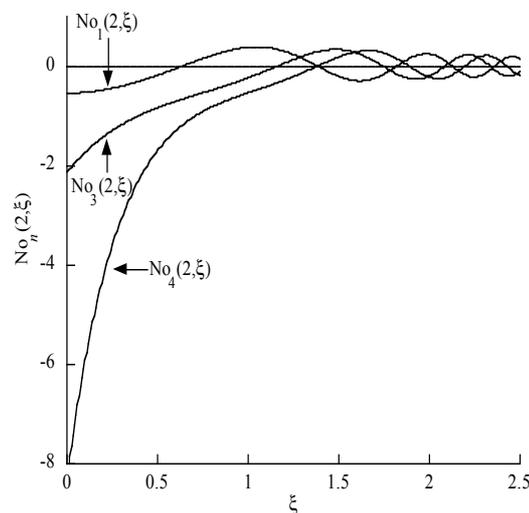
$Ne_n(q, \xi) \quad n = 1, \quad q \in \{1, 2, 3.5\}$



$Ne_n(q, \xi) \quad n \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad q = 2$



$No_n(q, \xi) \quad n = 1, \quad q \in \{1, 2, 3.5\}$



$No_n(q, \xi) \quad n \in \{1, 3, 4\}, \quad q = 2$

