

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR

par Thomas DELAHAY

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE PROBABILISTE DE CALCUL EN
FATIGUE MULTIAXIALE PRENANT EN COMPTE LA RÉPARTITION
VOLUMIQUE DES CONTRAINTES

Soutenue le 8 septembre 2004

Après avis de :

Mme S. DEGALLAIX, Professeur, LML, Ecole Centrale de Lille
M. W. EICHLSEDER, Professeur, Université de Leoben, Autriche

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

MM. D. DESJARDINS, Professeur, LMP, Bordeaux
J. PETIT, Directeur de Recherche C.N.R.S., LMPM-ENSMA, Poitiers
J-L LATAILLADE, Professeur, LAMEFIP-ENSAM, Bordeaux
T. PALIN-LUC, Maître de Conférences, LAMEFIP-ENSAM, Bordeaux
E. DELBOS, Ingénieur, Ratier-Figeac

Président et Rapporteur
Examineur
Directeur de Thèse
Co-directeur
Invité

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire Matériaux Endommagement Fiabilité et Ingénierie des Procédés (LAMEFIP) de l'ENSAM CER de Bordeaux, en partenariat avec la société Ratier-Figeac. Je remercie Monsieur le Professeur Jean-Luc Lataillade, Directeur du laboratoire pour m'avoir permis d'effectuer ce travail dans de bonnes conditions.

Je remercie tout particulièrement Thierry Palin-Luc et Jean-Luc Charles qui m'ont encadré tout au long de l'étude, leur implication, leur motivation et leur professionnalisme m'ont beaucoup aidé dans ce travail. Il me faut aussi remercier Eric Ducasse pour son aide précieuse.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Didier Desjardins, directeur du LMP de Bordeaux d'avoir présidé le jury de thèse.

Madame le Professeur Suzanne Degallaix du LML de l'Ecole Centrale de Lille et Monsieur le Professeur Wilfried Eichlseder de l'Université de Leoben, m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire, je leur exprime ma sincère gratitude.

J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs Jean Petit, Directeur de Recherches C.N.R.S. au LMPM-ENSMA de Poitiers et Eric Delbos, Ingénieur chez Ratier Figeac d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Serge Lasserre et Madame Elisabeth Sellier qui ont participé à la bonne réalisation des investigations expérimentales.

Je voudrais également exprimer ma reconnaissance à Laurent, Mathieu, Marinette, Jean-Marie, Christophe, Francis et Francis pour tous les services rendus au laboratoire.

Enfin un très grand merci à Mathieu, Didier, Ludovic, Jérôme, Nicolas, Zouheir, collègues et amis.

Table des matières

Introduction	7
1 Bibliographie : méthodes déterministes et probabilistes de calcul en fatigue multiaxiale	9
1.1 Critères de fatigue déterministes	9
1.1.1 Généralités et définitions	9
1.1.2 Approche locale : échelle macroscopique	13
1.1.2.1 Critères liés à un plan particulier : Sines, Crossland, Mc-Diarmid	13
1.1.2.2 Critères énergétiques : Ellyin, Garud, Glinka, Macha . . .	16
1.1.3 Approche locale : échelle mésoscopique	22
1.1.3.1 Critère de Dang-Van	24
1.1.3.2 Critère de Papadopoulos	26
1.1.3.3 Critère de Morel	27
1.1.4 Approche volumique	29
1.1.4.1 Le volume le plus contraint $V_{90\%}$	29
1.1.4.2 Critère du volume effectif	31
1.1.4.3 Critère du volume d'influence (LAMEFIP)	32
1.1.4.4 Critère de Morel et Palin-Luc	37
1.1.5 Analyse des critères et confrontation prévisions/expérience	39
1.1.5.1 Analyse des critères	39
1.1.5.2 Confrontation prévisions/expérience	42
1.1.6 Conclusion	49
1.2 Probabilités appliquées à la fatigue	51
1.2.1 Approche contrainte-résistance	51
1.2.2 Approches probabilistes	52
1.2.2.1 Modèle de Weibull	53
1.2.2.2 Probabilité intégrée à la microstructure	55
1.2.2.3 Approche de Bomas	57
1.2.2.4 Approche développée au LMPM-ENSMA de Poitiers . . .	60
1.2.2.5 Modèle probabiliste à deux échelles	62
1.3 Conclusion	63

2	Expérimentation sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V	65
2.1	Présentation de l'alliage Ti-6Al-4V	65
2.1.1	Composition chimique et microstructure	65
2.1.2	Caractéristiques mécaniques monotones	66
2.1.3	Caractéristiques mécaniques cycliques	68
2.2	Eprouvettes utilisées	70
2.2.1	Géométries	70
2.2.2	Etat de surface	71
2.3	Machines d'essai de fatigue utilisées	73
2.3.1	Vibrophore Amsler	73
2.3.1.1	Présentation et principe mécanique	73
2.3.1.2	Critères d'arrêt et détection de fissure	74
2.3.2	Machine de flexion/torsion combinées	75
2.3.2.1	Présentation et principe mécanique	75
2.3.2.2	Principe et précision de l'asservissement	77
2.3.2.3	Détection de fissure	78
2.4	Dépouillement des résultats d'essais et intervalles de confiance	79
2.4.1	Estimation du nombre de cycles $N_{50\%}$ par la méthode des fréquences cumulées	82
2.4.2	Méthode de l'escalier	83
2.5	Essais de fatigue	86
2.5.1	Sollicitations d'amplitude constante	87
2.5.1.1	Traction ($R_\sigma = -1$)	87
2.5.1.2	Torsion ($R_\sigma = -1$)	91
2.5.1.3	Flexion rotative ($R_\sigma = -1$)	94
2.5.1.4	Flexion plane ($R_\sigma = -1$)	97
2.5.1.5	Flexion plane et torsion combinées ($\frac{\sigma_a}{\tau_a} = \sqrt{3}$, $R_\sigma = -1$) en phase	100
2.5.1.6	Flexion plane et torsion combinées ($\frac{\sigma_a}{\tau_a} = \sqrt{3}$, $R_\sigma = -1$) hors phase ($\phi = 90^\circ$)	102
2.5.1.7	Bilan des essais de fatigue à amplitude constante	105
2.5.2	Essais par blocs bas/haut/bas/haut... en flexion plane ($R_\sigma = -1$)	105
2.5.2.1	Objectif	105
2.5.2.2	Conditions d'essais	106
2.5.2.3	Résultats et analyse	107
2.6	Conclusion	111
3	Proposition d'un critère probabiliste de fatigue multiaxiale	113
3.1	Introduction	113
3.2	Paramètre et seuil énergétique	114
3.3	Approche probabiliste et volumique	115

3.4	Identification des paramètres	122
3.4.1	A l'aide des limites d'endurance conventionnelles	122
3.4.2	En tenant compte de l'estimation de l'écart-type expérimental	123
3.5	Effet d'échelle sur la limite de fatigue	125
3.6	Etude de cas sur éprouvettes lisses	128
3.6.1	Torsion	128
3.6.2	Flexion plane	132
3.6.3	Flexion rotative	134
3.6.4	Flexion rotative et torsion combinées	136
3.6.5	Traction et torsion combinées	138
3.6.6	Flexion plane et torsion combinées	139
3.6.7	Traction biaxiale	141
3.7	Confrontations des prévisions de notre proposition aux résultats expérimentaux	143
3.7.1	Identification des paramètres	144
3.7.2	Alliage de titane Ti-6Al-4V	144
3.7.3	Fonte EN-GJS800-2	148
3.7.4	Acier 30NiCrMo16 trempé revenu	151
3.7.5	Acier 35CrMo4 trempé revenu	158
3.7.6	Acier C18 recuit	160
3.8	Prévisions de courbes S-N probabilisées	161
3.9	Conclusion	166
4	Post-processeur orienté objet de calcul en fatigue multiaxiale	169
4.1	Intérêts et enjeux	169
4.2	Conception orienté objet et architecture retenue	170
4.3	L'environnement de développement	172
4.3.1	Le modèle de classes à travers le critère déterministe et volumique du LAMEFIP	172
4.3.1.1	La bibliothèque "Eléments Finis"	172
4.3.1.2	La bibliothèque "Numérique"	172
4.3.1.3	La bibliothèque "Fatigue"	174
4.3.1.4	La bibliothèque "ZéBuLoN"	179
4.3.2	Exemple de programmation d'un critère ponctuel de fatigue multiaxiale : Crossland	180
4.3.2.1	Contexte de développement	180
4.3.2.2	Les données de la classe "Crossland_Criterion"	180
4.3.2.3	Les méthodes	181
4.4	Validation du post-processeur	182
4.4.1	Cylindre de révolution	182
4.4.1.1	2D	182

4.4.1.2	3D	184
4.4.2	Eprouvettes lisses	185
4.4.2.1	Torsion ($R = -1$)	185
4.4.2.2	Flexion plane ($R = -1$)	188
4.4.2.3	Flexion-torsion combinées ($R = -1$)	190
4.5	Bilan et perspectives	193
Conclusion générale et perspectives		195
Références Bibliographiques		198
Notations		209
Annexes		213
	Annexe 1 : Critères de fatigue multiaxiale	215
	Annexe 2 : Comportement en fatigue de l'alliage de titane Ti-6Al-4V	219
	Annexe 3 : Calcul de probabilités de fissuration en flexion plane et torsion combinées	231
	Annexe 4 : Localisation des noeuds critiques	233
Liste des Figures		235
Liste des Tableaux		245

Introduction

La pression économique impose, pour une meilleure rentabilité des constructions et des équipements, une plus grande maîtrise des marges de sécurité. La fatigue représente toujours un mode de ruine fondamental des structures avec la particularité d'être sournois puisque les défaillances sont la conséquence d'une accumulation de l'endommagement dans le temps, souvent sans signe extérieur observable. La plupart des méthodes de calcul de la résistance en fatigue des structures sont déterministes (prévision binaire : fissuration ou non). Elles ne permettent pas de vraiment quantifier le risque de fissuration. Ceci est principalement dû au fait qu'un critère de fatigue n'intègre pas la dispersion des résultats d'essais de fatigue, une approche probabiliste est donc nécessaire. C'est une des raisons pour laquelle les codes de dimensionnement s'orientent actuellement vers des formulations semi-probabilistes.

Les pièces mécaniques industrielles possèdent souvent des géométries complexes et sont généralement sollicitées par des chargements mécaniques multiaxiaux variables dans le temps. La très grande majorité des méthodes de calcul en fatigue est basée sur l'évolution temporelle du tenseur des contraintes (ou des déformations) en un point matériel de la pièce considérée. Ce raisonnement ponctuel ne leur permet pas de prévoir les effets sur la tenue en fatigue - bien connus expérimentalement et parfois extrêmement sévères - des gradients de contraintes et de déformations générés soit par les concentrations de contraintes au voisinage des accidents géométriques (filetages, rainures de clavettes, canelures, congés de raccordement, etc...), soit par le mode de chargement (traction, flexion, torsion, chargements combinés, etc...).

Appliquer un critère de fatigue multiaxiale à une pièce industrielle n'est généralement pas possible de façon analytique, sauf pour quelques critères simples comme celui de Crossland. Dans la plupart des cas, on a recours au calcul numérique, souvent conduit en deux étapes successives : le calcul par éléments finis des champs tensoriels de contraintes et de déformations puis l'application du critère de fatigue sous la forme d'un post-processeur utilisant les résultats de l'étape précédente.

Cette étude, réalisée en collaboration avec RATIER-FIGEAC, a de multiples objectifs. Il s'agit tout d'abord de dresser un panorama non exhaustif des méthodes déterministes et probabilistes de calcul en fatigue présentées dans la littérature et d'en évaluer la qua-

lité. Puis de caractériser le comportement en fatigue multiaxiale à grandes durées de vie de l'alliage de titane Ti-6Al-4V. L'objectif essentiel est de proposer une évolution probabiliste du critère énergétique volumique de fatigue multiaxiale du laboratoire. Enfin, le développement d'un post-processeur de calcul en fatigue permettant l'application de ce critère à des pièces industrielles constitue le dernier objectif.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique des méthodes déterministes et probabilistes de calcul en fatigue multiaxiale à grande durée de vie. Les critères déterministes sont détaillés et classés en deux familles : les approches ponctuelles et celles volumiques. Les prévisions d'une sélection de critères sont confrontées à des résultats d'essais issus de la littérature et obtenus dans le cadre de ce travail afin de juger de leur qualité. Les méthodes probabilistes sont distinguées suivant les approches retenues mais nous verrons qu'elles reprennent toutes le formalisme de Weibull.

Le second chapitre est consacré à la partie expérimentale. L'alliage de titane Ti-6Al-4V est présenté, ses caractéristiques mécaniques sont détaillées ainsi que les conditions expérimentales et les méthodes statistiques utilisées pour dépouiller les résultats obtenus. Ces essais réalisés sous sollicitations simples (traction, torsion, flexion plane et rotative) et sous sollicitations combinées (flexion et torsion combinées en et hors phase) sont détaillés et analysés. Enfin, les résultats d'essais de flexion plane par blocs, visant à mettre en évidence l'existence d'un seuil en contrainte en dessous duquel les cycles ont une influence négligeable sur la durée de vie, sont présentés.

Le chapitre 3 présente une évolution probabiliste du critère de fatigue multiaxiale du LAMEFIP pour les grandes durées de vie. Le formalisme mathématique de Weibull est combiné à l'approche énergétique et volumique du LAMEFIP. Tout en conservant les avantages du critère déterministe, cette proposition permet de calculer une probabilité de fissuration avant une durée de vie fixée selon le niveau de contrainte imposée. A partir d'une courbe S-N expérimentale uniaxiale de référence, le modèle prévoit également toutes les courbes P-S-N, quels que soient les chargements. L'effet d'échelle est également prévu par cette proposition. Les distributions expérimentales des limites de fatigue et les prévisions du modèle sont comparées.

Le post-processeur de calcul en fatigue est présenté au chapitre 4. L'architecture retenue et l'environnement de développement orienté objet sont décrits et illustrés par l'implémentation d'un critère ponctuel et du critère volumique déterministe du LAMEFIP¹. Les validations du post-processeur sur différentes géométries d'éprouvettes et pour différents chargements sont présentées.

Une synthèse de l'étude et des perspectives terminent ce document.

¹La programmation de la version probabiliste n'a pu être réalisée par manque de temps

Chapitre 1

Bibliographie : méthodes déterministes et probabilistes de calcul en fatigue multiaxiale

Cette analyse bibliographique, limitée à la fatigue des métaux, se décompose en trois parties. La première partie est consacrée à la présentation des critères de fatigue déterministes applicables aux grandes durées de vie (au delà d'environ 50000 cycles) pour des chargements d'amplitude constante générant des états de contraintes multiaxiaux sur les métaux. Un regard particulier sera porté sur leurs fondements physiques, sur les hypothèses fondamentales formulées par leurs auteurs et sur leur application (paramètres nécessaires à leur mise en oeuvre). Dans la deuxième partie, les méthodes probabilistes de calcul en fatigue seront détaillées en distinguant les différentes approches.

1.1 Critères de fatigue déterministes

1.1.1 Généralités et définitions

Cette première partie de chapitre est composée de quatre volets. Le premier situe le sujet en définissant ce qu'est un critère de fatigue et les notions incontournables de l'étude. Les deuxième et troisième volets présentent quelques-uns des nombreux critères déterministes rencontrés dans la littérature pour prévoir la tenue en fatigue des métaux selon deux approches distinctes : locale (macroscopique ou mésoscopique) et non locale. Enfin, nous nous attacherons à analyser les critères et à confronter leurs prévisions à des résultats expérimentaux afin de juger de leur qualité.

Depuis les années 1930 et les travaux de Gough et Pollard [GP35], de nombreux auteurs se sont attachés à proposer des critères d'endurance renseignant sur la résistance d'un matériau à un chargement périodique d'amplitude constante (sinus, triangle, trapèze).

Un critère de fatigue est un seuil, défini par un formalisme mathématique pour une durée de vie fixée et un matériau donné, séparant l'état où la pièce est non fissurée de

l'état où elle est fissurée par fatigue. Il s'applique en tout point P de la pièce considérée. Si dans l'espace du critère le point P a pour image un point M sous le seuil, il n'y a pas fissuration par fatigue avant le nombre de cycles considéré. Si l'image de P est au-delà du seuil, il y a fissuration par fatigue.

Un critère met en relation des grandeurs liées au chargement appliqué (composantes du tenseur des contraintes et/ou du tenseur des déformations) et des limites d'endurance (ou limites de fatigue à N cycles). Il peut être représenté par une fonction de fatigue qui s'exprime sous la forme synthétique suivante :

$$F([\Sigma_{ij}(t)]_T, [\varepsilon_{ij}(t)]_T, \sigma_{Trac,-1}^D, \sigma_{Fp,-1}^D, \sigma_{Trac,0}^D, \sigma_{Fp0}^D, \tau_{-1}^D, \dots) \leq 0 \quad (1.1)$$

où $[\Sigma_{ij}(t)]_T$, $[\varepsilon_{ij}(t)]_T$ représentent respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations sur la période T , $\sigma_{Trac,-1}^D$, $\sigma_{Fp,-1}^D$, $\sigma_{Trac,0}^D$, $\sigma_{Fp,0}^D$, τ_{-1}^D les limites d'endurance suivant plusieurs modes de sollicitations (traction alternée symétrique $\sigma_{Trac,-1}^D$, traction répétée σ_0^D , flexion plane répétée $\sigma_{FP,0}^D$, flexion plane alternée symétrique $\sigma_{FP,-1}^D$, torsion alternée symétrique τ_{-1}^D). Ces limites sont des valeurs expérimentales identifiées pour une probabilité de fissuration donnée, généralement 50%.

Un critère de fatigue traduit par la valeur de la fonction F le caractère plus ou moins endommageant du cycle de chargement appliqué. On parle de critère déterministe puisque le résultat est binaire : fissuration ou non fissuration. La plupart des critères de fatigue se représentent dans un plan $(V1, V2)$ où les V_i sont deux variables caractéristiques, selon les auteurs du critère, du phénomène de fissuration par fatigue (figure 1.1). Dans le plan $(V1, V2)$, le domaine de non fissuration selon le critère peut être délimité par une courbe simple : souvent une droite. L'équation de cette droite est le plus souvent identifiée par deux résultats d'essais sous sollicitations simples. Ces résultats correspondent généralement aux valeurs expérimentales médianes (probabilité de fissuration = 50%). L'état contraint cyclique au point P considéré sur la pièce a pour image, dans l'espace $(V1, V2)$ du critère, le point M . Si ce point se situe dans le domaine de sécurité, la pièce résistera à la sollicitation, avec "un coefficient de sécurité $C_S = \frac{OM}{ON}$ ", N représentant l'intersection de la droite OM avec le seuil du critère (figure 1.1). Il existe aujourd'hui plus d'une cinquantaine de critères dans la littérature [Sch03]. L'ensemble non exhaustif des critères retenus dans cette étude bibliographique est réparti en deux familles principales.

La première, dite locale ou ponctuelle, regroupe les critères dont l'application se fait en un point de la pièce en ne considérant que des grandeurs attachées au point considéré. Au sein de cette famille il faut distinguer deux échelles : la première, dite macroscopique, est utilisée par un groupe de critères dont la formulation utilise les contraintes macroscopiques, c'est-à-dire celles utilisées par l'ingénieur. De nombreux critères se placent à cette échelle et peuvent être regroupés selon leurs bases physiques communes. Nous distinguerons :

- les critères liés à une facette matérielle particulière : la facette octaédrale ou les critères recherchant un plan critique particulier,
- les critères énergétiques.

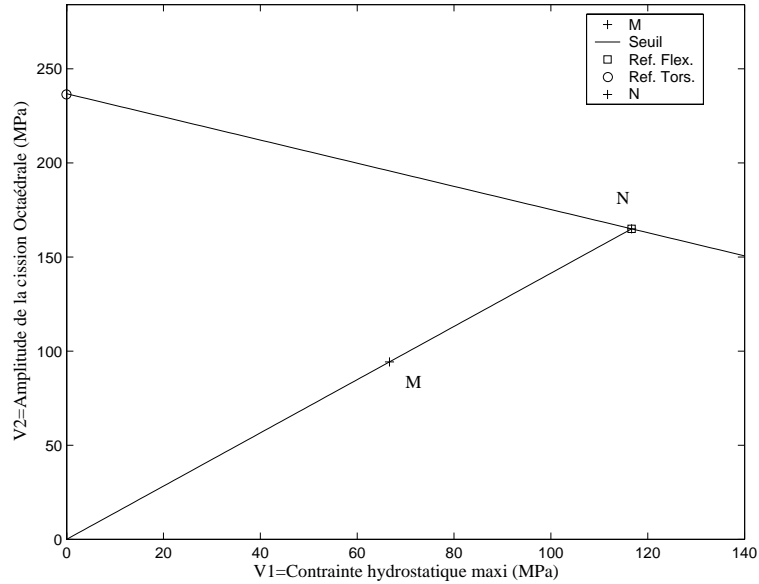


FIG. 1.1 – Principe de représentation plane d'un critère à 2 variables V1 et V2, ici exemple du critère de Crossland (voir paragraphe 1.1.2.1)

L'autre échelle est celle du grain de métal. Elle repose sur une modélisation du comportement de la matière à l'échelle mésoscopique pour prévoir la fissuration en fatigue. Cette approche est qualifiée de mésoscopique bien que le formalisme final des critères concernés utilise des grandeurs macroscopiques (de l'ingénieur) obtenues par changement d'échelle¹.

La deuxième famille regroupe les critères d'approche non locale, dont le formalisme ne considère plus seulement l'état de contrainte et de déformation en un point, mais dans un certain volume de la pièce.

Avant de traiter en détail des différentes approches, quelques termes utilisés par les auteurs des critères utilisant des variables calculées sur un plan critique vont être définis. La figure 1.2 illustre les notations adoptées dans la suite de ce document. La normale \vec{n} au plan critique P_c est définie par les angles θ et ϕ par rapport à un repère fixe lié à la matière. Le vecteur contrainte \vec{S}_n en tout point (O) relativement à la direction \vec{n} se définit suivant la relation (1.2).

$$\vec{S}_n(O) = \underline{\underline{\Sigma}}(O) \cdot \vec{n} \quad (1.2)$$

La composante normale $\vec{\sigma}_n$ du vecteur contrainte \vec{S}_n s'écrit ² :

$$\vec{\sigma}_n = (\vec{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (1.3)$$

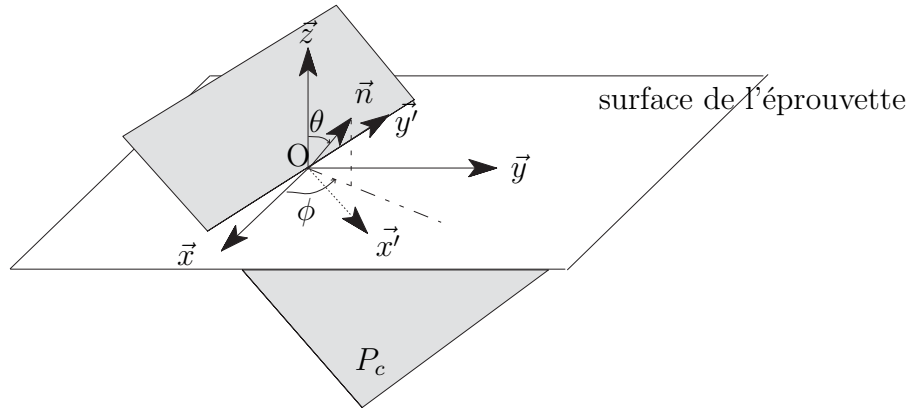
Sur un cycle de chargement (de période T), on définit alors :

- la contrainte normale maximum : $\sigma_n^{max} = \max_{t \in T} (\sigma_n(t))$

¹passage méso-macro

²Comme $\underline{\underline{\Sigma}}$ est un champ il dépend du point, pour simplifier les notations le point considéré sera omis par la suite sauf spécification particulière.

- la contrainte normale minimum : $\sigma_n^{min} = \min_{t \in T} (\sigma_n(t))$
- la contrainte normale moyenne : $\bar{\sigma}_n = \frac{1}{T} \int_T \sigma_n(t) dt$
- l'amplitude de la contrainte normale : $\sigma_{n,a} = \frac{|\sigma_n^{max} - \sigma_n^{min}|}{2}$


 FIG. 1.2 – Orientation du plan critique P_c au point O considéré.

Le vecteur cisaillement \vec{C}_n associé au vecteur contrainte \vec{S}_n est :

$$\vec{C}_n(t) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (1.4)$$

Sur un cycle de chargement, l'extrémité du vecteur cisaillement décrit une courbe fermée (fig. 1.3). L'amplitude C_a du vecteur cisaillement, est le rayon du plus petit cercle circonscrit à ce trajet [Pap01]. Le cisaillement moyen C_m durant ce trajet est la distance au centre de ce cercle (distance OO_1). Avec ces notations on peut également définir la partie alternée du cisaillement à l'instant t , $\vec{C}_a(t) = \vec{C}(t) - \vec{C}_m$ encore appelée partie dynamique du cisaillement.

On appellera cisaillement résolu $\tau(t)$ la projection du vecteur cisaillement $\vec{C}(t)$ sur une droite $\mathcal{L} = O\vec{m}(\psi)$ du plan matériel considéré. $\vec{m}(\psi)$ est le vecteur unitaire orientant la droite \mathcal{L} , faisant un angle ψ avec l'axe Ox' du repère $(0, x', y', z')$ contenu dans le plan P_c .

$$\tau(t) = \vec{C}(t) \cdot \vec{m} \quad (1.5)$$

L'amplitude de la cisaillement résolu agissant sur P_c dans la direction \mathcal{L} est définie par la relation (1.6).

$$\tau_a(\varphi, \theta, \psi) = \frac{1}{2} \left[\max_{t \in T} \tau(\varphi, \theta, \psi, t) - \min_{t \in T} \tau(\varphi, \theta, \psi, t) \right] \quad (1.6)$$

Enfin, rappelons qu'on distingue deux types de trajet de chargement : proportionnel ou non proportionnel. Le trajet de chargement est la courbe décrite dans le repère principal

des contraintes par le point P de coordonnées $(\Sigma_I(t), \Sigma_{II}(t), \Sigma_{III}(t))$ où les $\Sigma_i(t)$ sont les contraintes principales à chaque instant.

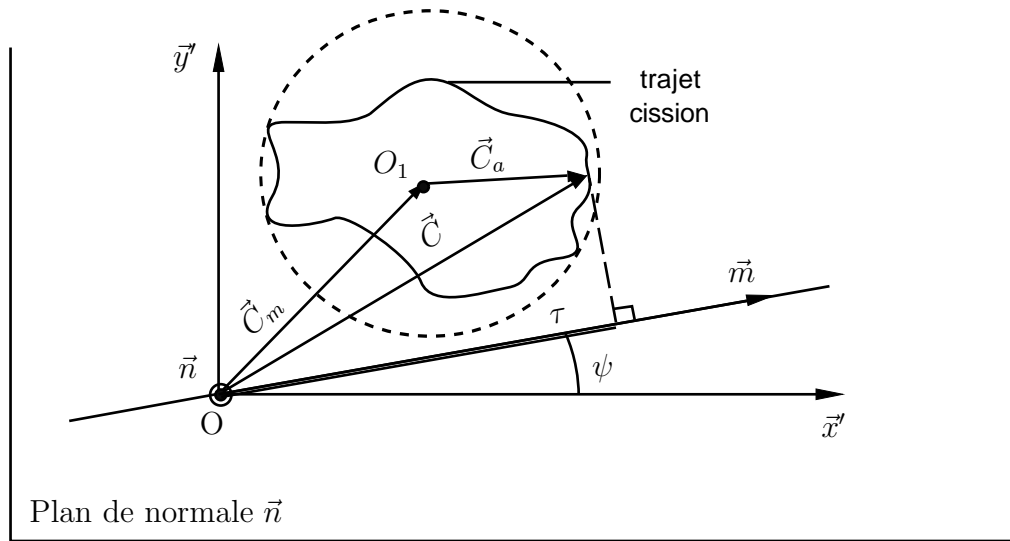


FIG. 1.3 – Définition des termes relatifs à la contrainte de cission

Dans le cas d'un trajet de chargement proportionnel (flexion torsion combinées en phase par exemple), les directions principales restent fixes par rapport à la matière et les contraintes principales varient homothétiquement au cours du temps. Dans l'espace des contraintes principales, le trajet est représenté par un segment de droite. Dans tous les autres cas, le trajet de chargement est non proportionnel³.

1.1.2 Approche locale : échelle macroscopique

Les critères de fatigue empiriques (Annexe 1) corréleront de façon précise un ensemble de résultats expérimentaux obtenus pour des sollicitations multiaxiales particulières (traction ou flexion combinées à la torsion). Mais la particularité de leur formalisme ne leur permet pas, en général, d'être étendu à des sollicitations de nature différente de celles pour lesquelles ils ont été élaborés. Par conséquent, l'utilisation industrielle de ces méthodes de calcul est rarissime. Aucune confrontation des prévisions de ces critères à des résultats d'essais n'est significative hors des cas particuliers pour lesquels leurs auteurs les ont proposés.

1.1.2.1 Critères liés à un plan particulier : Sines, Crossland, McDiarmid

Critères liés à la facette octaédrale : Sines [Sin55], [Sin59] et Crossland [Cro59]

Les auteurs de ces critères supposent que, pour des trajets de chargement proportionnels, le plan d'amorçage d'une fissure de fatigue est le plan octaédral, c'est-à-dire la facette

³Le trajet n'est pas un segment de droite et/ou le repère principal des contraintes tourne par rapport à la matière.

matérielle orientée par la normale \vec{n} également inclinée sur les trois axes du repère principal des contraintes au point considéré. On s'intéresse ci-après aux extensions des critères basés sur la facette octaédrale pour des trajets de chargement non proportionnels.

Formulés respectivement en 1955 et 1959, les critères de Sines [Sin55] et Crossland [Cro59] font appel au second invariant du tenseur déviateur des contraintes $J_2(t)$. Le critère de Crossland a été élaboré à la suite d'une campagne d'essais mettant en évidence l'influence notable d'une contrainte hydrostatique sur la résistance à la fatigue. Crossland propose d'utiliser la contrainte hydrostatique maximale Σ_{Hmax} sur un cycle de chargement. Sines préconise pour sa part la contrainte hydrostatique moyenne Σ_{Hmoy} . Les critères s'écrivent alors :

$$\tau_{oct,a}(M) + \alpha \Sigma_{Hmax}(M) \leq \beta \quad \text{et} \quad \tau_{oct,a}(M) + \gamma \Sigma_{Hmoy}(M) \leq \delta \quad (1.7)$$

avec

$$\Sigma_{Hmax}(M) = \max_{t \in T} (\Sigma_H(M, t)) \quad \text{où} \quad \Sigma_H(M, t) = \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{\Sigma}}(M, t)) \quad (1.8)$$

et $\tau_{oct,a}(M)$ désigne l'amplitude de la cission octaédrale.

$$\tau_{oct,a} = \sqrt{\Delta J_{2a}} \quad \text{avec} \quad \Delta J_{2a} = \max_{t_1} \left[\max_{t_2} [J_{2a}(\Delta \underline{\underline{\Sigma}}(t_1, t_2))] \right] \quad (1.9)$$

où ΔJ_{2a} est la plus grande valeur, obtenue par double maximisation, du deuxième invariant du tenseur "variation des contraintes" entre les instants t_1 et t_2 , $\Delta \underline{\underline{\Sigma}}(t_1, t_2)$. Ce tenseur variation des contraintes représente un état fictif des contraintes, il s'écrit :

$$\Delta \underline{\underline{\Sigma}}(t_1, t_2) = \underline{\underline{\Sigma}}(t_2) - \underline{\underline{\Sigma}}(t_1) \quad (1.10)$$

J_{2a} désigne le second invariant du tenseur déviateur des contraintes alternées symétriques, il s'écrit sous la forme :

$$J_{2a}(M) = \frac{1}{2} \text{trace}(\underline{\underline{S}}a(M) \cdot \underline{\underline{S}}a(M)) \quad (1.11)$$

où $\underline{\underline{S}}a(M)$ représente la partie alternée du tenseur déviateur des contraintes en M si :

$$\Sigma_{ij}(M, t) = \Sigma_{ij,a}(M) \sin(\omega t + \phi_{ij}) + \Sigma_{ij,m}(M) \quad \text{et} \quad \Sigma_{ij,a}(M) = \frac{1}{3} \Sigma_{kk,a}(M) \delta_{ij} + S_{ij,a}(M) \quad (1.12)$$

avec

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad (1.13)$$

Les constantes α , β , γ et δ sont identifiées à partir de limites d'endurance expérimentales. Par exemple, d'après celles en torsion alternée symétrique τ_{-1}^D , flexion répétée $\sigma_{Fp,0}^D$ et en flexion (plane ou rotative) $\sigma_{Fp,r,-1}^D$ sur éprouvettes lisses, on obtient les valeurs suivantes :

$$\alpha = \frac{\tau_{-1}^D - \frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\sqrt{3}}}{\frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{3}} \quad \gamma = \frac{\tau_{-1}^D - \frac{\sigma_{Fp,0}^D}{\sqrt{3}}}{\frac{\sigma_{Fp,0}^D}{3}} \quad (1.14)$$

$$\beta = \delta = \tau_{-1}^D$$

Pour appliquer le critère de Sines, il faut disposer d'un matériau présentant un rapport $\sqrt{3}$ entre ses limites d'endurance en flexion et en torsion. Sans cette condition, le critère n'est pas vérifié en torsion et en traction ou flexion simultanément. Pour rendre compte de l'effet bénéfique sur la tenue en fatigue d'une contrainte hydrostatique négative (constaté expérimentalement par Sines [Sin59] et Crossland [Cro59]), le critère de Crossland n'est applicable que pour $\alpha > 0$ donc lorsque le rapport $\sigma_{Fp,-1}^D/\tau_{-1}^D$ est inférieur à $\sqrt{3}$ c'est-à-dire pour des matériaux ductiles [Mor00]; en revanche ces critères ne sont pas applicables aux matériaux fragiles.

Une évolution du critère de Sines proposés par Kakuno et Kawada [KK79] est présentée en Annexe 1.

Critère lié à une autre facette : Critère de McDiarmid [McD94] Ce critère reprend l'approche de Brown et Miller [BM73] qui distingue deux types de fissures, les fissures de type A qui se propagent le long de la surface et les fissures de type B, progressant vers l'intérieur du matériau (fig. 1.4). Le plan critique est déterminé comme étant le plan où l'amplitude de la cisssion est maximale :

$$P_c : \max_{\vec{n}} [C_a(\vec{n})] \quad (1.15)$$

Le critère s'écrit alors :

$$\frac{C_a(\vec{n}_c)}{\tau_{-1AouB}^D} + \frac{N_{max}(\vec{n}_c)}{R_m} \leq 1 \quad (1.16)$$

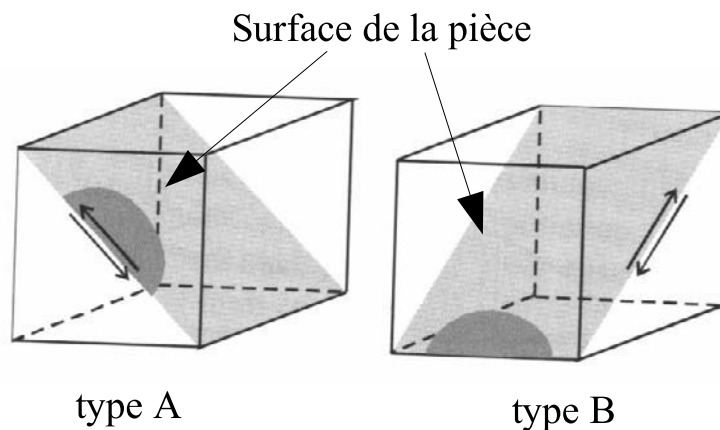


FIG. 1.4 – Les deux types de fissures selon Brown et Miller [BM73]

L'application du critère nécessite la connaissance des limites d'endurance en torsion alternée symétrique $\tau_{-1,A}^D$ et $\tau_{-1,B}^D$ correspondant à la formation de fissures respectivement de type A et B. Le fait d'avoir à distinguer ces deux limites d'endurance en torsion complique l'utilisation pratique de ce critère, une seule limite d'endurance de torsion est souvent connue par matériau. L'auteur précise les limites du domaine d'application de son critère :

$$0,5\tau_{-1}^D \leq C_a(\vec{n}_c) \leq \tau_{-1}^D \quad \text{et} \quad 0 \leq N_{max}(\vec{n}_c) \leq R_m$$

Les critères de Stulen et Cummings [SC54], Findley [Fin59] et Matake [Mat80], utilisant des plans critiques différents sont présentés en Annexe 1.

Synthèse sur les critères liés à une facette particulière Les critères liés à une autre facette que la facette octaédrale déterminent un plan critique (propre à chaque critère) considéré comme le plan d'amorçage de la fissure de fatigue. Lorsque les sollicitations subies par la matière font qu'il n'y a pas unicité du plan critique, la description du phénomène de fatigue sur un seul plan physique ne semble pas suffisante. Ces critères sont simples d'utilisation (puisque alors le matériau reste élastique à l'échelle macroscopique ou se retrouve dans un état élastique adapté). A la fin de ce chapitre, les prévisions du critère de Crossland seront confrontées à des résultats d'essais et comparées à celles de critères issus des autres approches. On pourra ainsi constater la bonne qualité de ses prévisions lors de chargements proportionnels et la piètre qualité de ses prévisions pour des chargements à forte valeur moyenne ou combinés déphasés (trajets de chargements non proportionnels).

1.1.2.2 Critères énergétiques : Ellyin, Garud, Glinka, Macha

Les critères énergétiques peuvent être divisés en trois groupes, dépendant du type de densité volumique d'énergie de déformation considéré par cycle :

- critères basés sur l'énergie élastique,
- critères basés sur l'énergie plastique,
- critères basés sur la somme des énergies élastique et plastique.

Les critères basés sur l'énergie de déformation élastique peuvent être utilisés en fatigue à grand nombre de cycles $N \gtrsim 5 \cdot 10^4$ ou 10^5 cycles alors que les critères basés sur l'énergie de déformation plastique sont plus appropriés en fatigue oligocyclique (faible nombre de cycles, $N \lesssim 10^4$ à $5 \cdot 10^4$ cycles). Les critères basés sur la somme des énergies élastique et plastique peuvent, a priori, s'appliquer aussi bien sur de faibles et grands nombres de cycles.

Critère d'Ellyin [LE84], [EGX91] Ce critère a été élaboré dans le cadre de travaux sur la fatigue oligocyclique avant que son auteur ne propose une extension à la fatigue à grand nombre de cycles. Ellyin postule que l'endommagement est induit par

l'énergie de déformation plastique sur un cycle de chargement. Pour bien comprendre le concept, nous allons dans un premier temps nous intéresser au cas d'un état de contrainte uniaxiale. Ellyin, Kujawsky et Lefebvre [LE84] proposent la construction d'une courbe maîtresse en faisant coïncider les parties supérieures des boucles contrainte-déformation stabilisées (figure 1.5). L'équation de cette courbe, issue de la modélisation classique (de

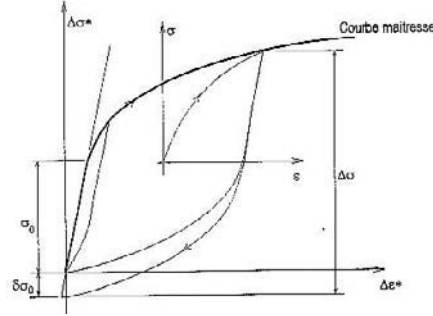


FIG. 1.5 – Construction de la courbe maîtresse

type Ramberg-Osgood) de la courbe de comportement cyclique du matériau, est donnée par :

$$\Delta\varepsilon^* = \frac{\Delta\sigma^*}{E} + 2 \left(\frac{\Delta\sigma^*}{2k^*} \right)^{\frac{1}{n^*}} \quad (1.17)$$

où $\Delta\varepsilon^*$ est l'étendue de variation de déformation plastique ($\Delta\varepsilon^* = \Delta\varepsilon_{max}^* - \Delta\varepsilon_{min}^*$) sur un cycle de sollicitation, $\Delta\sigma^*$ représente l'étendue de variation de contrainte sur un cycle, n^* est un exposant caractérisant le durcissement du matériau dans l'équation de la courbe maîtresse et k^* une constante homogène à un module d'écroûissage. Grâce à la courbe maîtresse, le calcul des énergies mises en jeu devient facile. Une extension de la courbe maîtresse dans le cas de contraintes multiaxiales a été donnée par Golos et Ellyin [EGX91] sous la forme :

$$\Delta\varepsilon_{ij}^* = \frac{(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij}^*}{E} - \frac{\nu}{E}\Delta\sigma_{kk}^*\delta_{ij} + \frac{3(\Delta\sigma_{eq}^*)^{\frac{1-n^*}{n^*}}}{(2k^*)^{\frac{1}{n^*}}}\Delta s_{ij}$$

avec $\Delta\sigma_{eq}^* = \Delta\sigma_{eq} - (\delta\sigma_0)_{eq}$, σ_{eq} est la contrainte équivalente au sens de Von Mises.

Afin de prendre en compte l'effet défavorable des contraintes de tension positives sur la tenue en fatigue, les auteurs proposent de ne considérer que l'énergie de déformation élastique donnée par :

$$\Delta W^{e+} = \frac{1 - 2\nu}{6E} \left((I_1^{max})^2 - (I_1^{min})^2 \right) - \frac{1 + \nu}{E} (J_2^{max} - J_2^{min}) \quad (1.18)$$

avec

$$I_1^{max} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{max} H(\sigma_i^{max}) \quad (1.19)$$

$$J_2^{max} = \sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{max} H(\sigma_i^{max}))^2 - \sum_{i,j=1}^3 (\sigma_i^{max} \sigma_j^{max} H(\sigma_i^{max}) H(\sigma_j^{max})) \quad (1.20)$$

$H(x)$ est la fonction d'Heaviside, telle que :

$$H(x) = 1 \text{ si } x > 0 \text{ et } H(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \quad (1.21)$$

L'énergie de déformation élastique peut s'écrire :

$$\Delta W^{e+} = \int_{cycle} H(\Sigma_i) H(d\varepsilon_i^e) \Sigma_i d\varepsilon_i^e \quad (1.22)$$

où $\Sigma_i (i = 1, 2, 3)$ sont les contraintes principales, ε_i^e est la partie élastique des déformations principales. L'énergie de déformation plastique est donnée par :

$$W^p = \int_{cycle} \Sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \frac{2(1-n^*)(2K^*)^{-\frac{1}{n^*}}}{1+n^*} (\Delta\sigma_{eq}^*)^{\frac{1+n^*}{n^*}} + 2(2K^*)^{\frac{-1}{n^*}} \delta\sigma_{0eq} (\Delta\sigma_{eq}^*)^{\frac{1}{n^*}} \quad (1.23)$$

où

$$\delta\sigma_{0eq}^* = \Delta\sigma_{eq} - 2K^* \left(\frac{\Delta\varepsilon_{eq}^p}{2} \right)^{n^*} \quad (1.24)$$

Le critère lie l'énergie totale de déformation par cycle de chargement au nombre de cycles à fissuration par la relation suivante :

$$\Delta W_t = K.N_f^\alpha + C \quad (1.25)$$

Dans l'équation précédente, K et α sont des constantes du matériau et C représente l'énergie élastique non endommageante, N_f est le nombre de cycles à fissuration, l'énergie totale étant la somme de l'énergie élastique et plastique 1.26.

$$\Delta W_t = \Delta W^e + \Delta W^p \quad (1.26)$$

Le critère de fatigue multiaxiale établi par Ellyin s'écrit donc :

$$\Delta W_t(J_2, I_1^{max}) = K.N_f^\alpha + C \quad (1.27)$$

L'utilisation de ce critère nécessite une courbe-maîtresse et des résultats d'essais uniaxiaux pour déterminer toutes les constantes. L'énergie totale de déformation ΔW_t est ainsi calculée en fonction du nombre de cycles, ce qui aboutit à l'expression d'une courbe seuil délimitant le domaine de fissuration du domaine de non fissuration.

Critère de Garud [Gar81] Garud [Gar81] suppose que l'énergie de déformation plastique est le paramètre d'endommagement influençant la fissuration par fatigue, c'est-à-dire jusqu'au moment où des fissures visibles peuvent être observées. Une théorie incrémentale

de plasticité a été utilisée pour décrire les relations entre les contraintes et déformations sous chargement non proportionnel multiaxial. L'auteur suppose que l'histoire de contrainte ou de déformation sur un cycle de chargement est connu au point matériel considéré. Le critère de Garud s'écrit suivant la relation (1.28)

$$\Delta W_{ij}^p = \int_{cycle} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = AN_f^{-\beta} \quad (1.28)$$

où ΔW_{ij}^p représente la somme des aires de la boucle d'hystérésis des neuf composants de l'état de contrainte, A et β sont des constantes matériau. Considérant l'énergie de déformation plastique, ce critère n'est applicable qu'en fatigue à faible nombre de cycles [MS99].

Critère de Glinka [GSP95] Glinka et al. [GSP95] utilisent deux paramètres énergétiques (élastique et plastique) respectivement associés aux déformations normale et de cisaillement sur le plan critique. Ce plan est celui subissant la déformation de cisaillement maximum pour une description de chargement proportionnel symétrique multiaxial.

Le paramètre énergétique s'écrit suivant la relation (1.29) et peut être défini comme la somme des paramètres énergétiques de déformation normale $\frac{\Delta\sigma\Delta\epsilon}{4}$ et de cisaillement $\frac{\Delta\tau\Delta\gamma}{4}$ sur le plan critique, c'est-à-dire sur le plan de déformation de cisaillement maximum.

$$W^* = \frac{\Delta\sigma}{2} \cdot \frac{\Delta\epsilon}{2} + \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \frac{\Delta\gamma}{2} \quad (1.29)$$

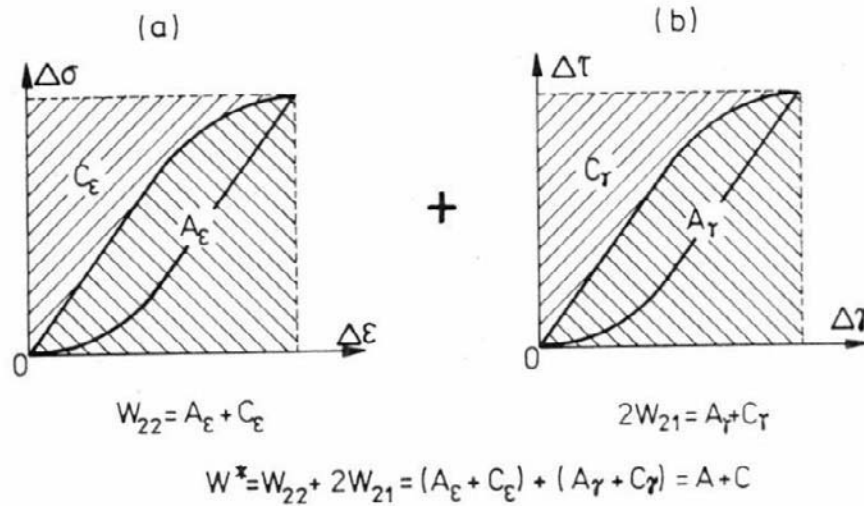
Le critère peut s'écrire sous la forme (1.30).

$$W^* = W_{22} + 2W_{21} \quad (1.30)$$

L'énergie de déformation de cisaillement peut s'écrire :

$$W_{21} = \frac{\Delta\sigma_{21}}{2} \cdot \frac{\Delta\epsilon_{21}}{2} \quad (1.31)$$

Le paramètre W^* , selon Glinka et al. [GSP95], est la somme de l'énergie de déformation spécifique $A (= A_\epsilon + A_\gamma)$ et de l'énergie de déformation complémentaire $C (= C_\epsilon + C_\gamma)$ comme illustré sur la figure 1.7. Considérant que les grains de matière sont endommagés par une énergie de déformation égale au travail spécifique des contraintes sur différents trajets de chargement, le paramètre W^* peut être compris comme la somme d'énergies de déformation spécifiques sur la première demi-période $t \in [0 - T/2]$ et la seconde demi-période $t \in [T/2 - T]$ d'un cycle (fig. 1.7). Afin de prendre en compte l'influence des contraintes moyennes normale et de cisaillement σ_{m22} , σ_{m21} , Glinka et al. [GWP95] ont modifié l'équation (1.30) comme suit :


 FIG. 1.6 – Interprétation graphique du paramètre W^* [MS99].

$$W^* = \frac{\Delta\sigma_{21}}{2} \cdot \frac{\Delta\gamma_{21}}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{\sigma_{max21}}{\tau'_f}} + \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{max22}}{\sigma'_f}} \right] \quad (1.32)$$

$$= 2W_{21} \left[\frac{1}{1 - \frac{\sigma_{max21}}{\tau'_f}} + \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{max22}}{\sigma'_f}} \right] \quad (1.33)$$

où τ'_f et σ'_f sont deux paramètres matériau. La contrainte normale maximum $\sigma_{max22} = |\sigma_{m22} + \Delta\sigma_{22}/2|$ et la contrainte de cisaillement maximum $\sigma_{max21} = |\sigma_{m21} + \Delta\sigma_{21}/2|$ sont également introduites. L'équation (1.32) corrèle de façon satisfaisante des résultats d'essais de traction sur éprouvettes cylindriques en acier SAE 1045 en fatigue à faible nombre de cycles et pour l'alliage de nickel Inconel 718 en fatigue à faible et grand nombre de cycles pour des chargements de traction, torsion et traction-torsion combinées proportionnelles avec contraintes moyennes normales et de cisaillement.

Critère de Macha [MS99] Ce critère, destiné aux grandes durées de vie, a été proposé par Macha en 1999. Il repose sur le paramètre énergie de déformation de cisaillement calculée sur un plan critique : le plan subissant la contrainte de cisaillement maximum. L'auteur suppose que seule l'énergie de déformation de cisaillement, ϕ_f , influence la fissuration par fatigue et non l'énergie de déformation totale, ϕ (égale à la somme des énergies potentielles due au changement de volume, ϕ_v et due au changement de forme ou distortion, ϕ_f) [Mar56], c'est-à-dire (pour un chargement sans valeur moyenne) :

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \sigma_{aij}(t) \epsilon_{aij}(t) = \phi_v(t) + \phi_f(t) = \frac{1}{6} \sigma_{akk}(t) \epsilon_{akk}(t) + \frac{1}{2} s_{aij}(t) e_{aij}(t) \quad (1.34)$$

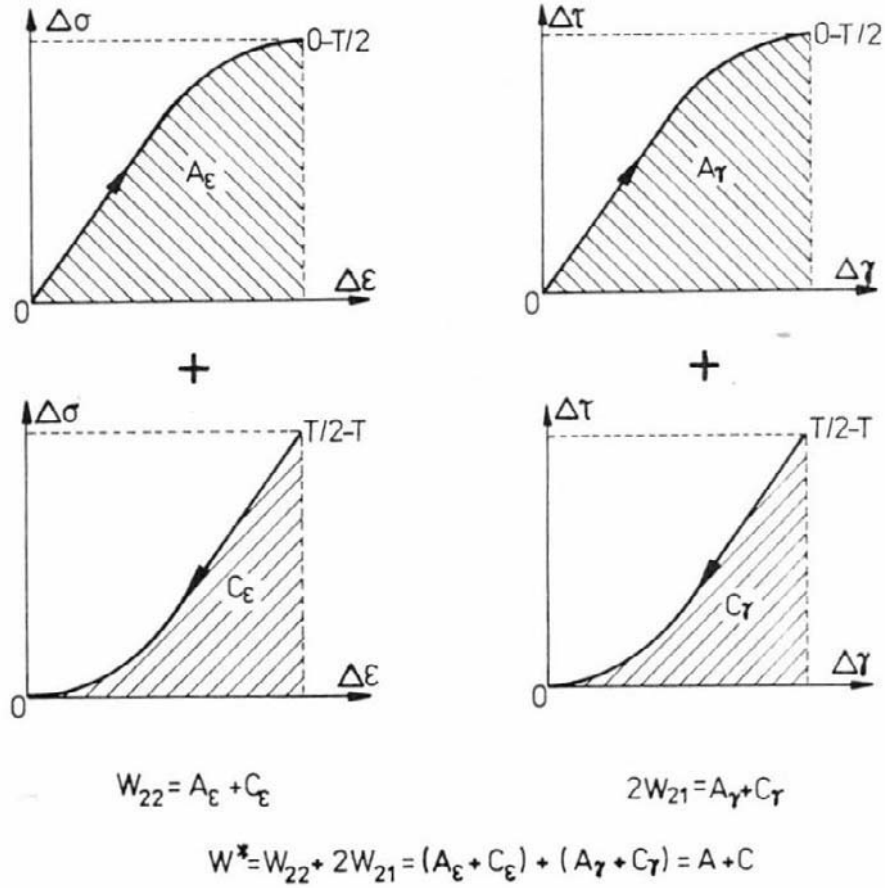


FIG. 1.7 – Interprétation graphique du paramètre W^* comme la somme de la densité d'énergie de déformation sur les deux demi-périodes d'un cycle sur le plan critique [MS99].

où $s_{aij}(t)$ et $e_{aij}(t)$ représentent respectivement les tenseurs des contraintes et déformations déviatoriques alternés (1.35) et (1.36) à chaque instant t .

$$s_{aij} = \sigma_{aij} - \frac{1}{3}\sigma_{akk}\delta_{ij} \quad (1.35)$$

$$e_{aij} = \epsilon_{aij} - \frac{1}{3}\epsilon_{akk}\delta_{ij} \quad (1.36)$$

L'amplitude de la contrainte équivalente de Von Mises est introduite et définie suivant la relation (1.37)

$$\sigma_{aeq,VM} = \left[\sigma_{axx}^2 + \sigma_{ayy}^2 + \sigma_{azz}^2 - \sigma_{axx}\sigma_{ayy} - \sigma_{axx}\sigma_{azz} - \sigma_{ayy}\sigma_{azz} + 3(\sigma_{axy}^2 + \sigma_{axz}^2 + \sigma_{ayz}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.37)$$

Ce critère est utilisé pour les matériaux ductiles sous chargements proportionnels en fatigue à grand nombre de cycles (quand les déformations plastiques peuvent être négligées). Sous un état de contraintes sinusoïdales multiaxiales, la densité volumique d'énergie potentielle de changement de forme ϕ_{sf} (égale au travail de déformation dû au cisaillement $\epsilon_{\eta s}(t)$ dans la direction \vec{S}) est exprimée par la relation (1.38).

$$\begin{aligned}
 \phi_{sf}(t) &= \frac{1}{2}\tau_{\eta s}(t)\epsilon_{\eta s}(t) = \frac{1}{4}\tau_{\eta s}(t)\gamma_{\eta s}(t) = \frac{1}{4}\tau_1(t)\gamma_1(t) \\
 &= \frac{1}{4G}\tau_1^2(t) = \frac{1}{4G}\left[\frac{\sigma_1(t) - \sigma_3(t)}{2}\right]^2 \\
 &= \frac{1}{4G}\left[\frac{(\sigma_{a1} - \sigma_{a3})\sin\omega t}{2}\right]^2
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

La valeur de $\phi_{sf}(t)$ sous un état de contrainte uniaxial, où $\sigma_{eq}(t) = \sigma_{af} \sin\omega t$ (σ_{af} représente la limite de fatigue) est déterminée par la relation (1.39)

$$\phi_{sf}(t) = \frac{1}{4G}\left[\frac{\sigma_{eq}(t)}{2}\right]^2 \tag{1.39}$$

En se basant sur l'hypothèse que, à l'état limite correspondant à la résistance à la fatigue, la valeur maximale d'énergie, $\max_t = \{\phi_{sf}\}$, sous un état de contrainte multiaxial est égale à la valeur maximale d'énergie sous l'état de contrainte uniaxial équivalente, l'auteur peut écrire la relation (1.40).

$$\max_t = \left\{ \frac{1}{4G}\left[\frac{(\sigma_{a1} - \sigma_{a3})\sin\omega t}{2}\right]^2 \right\} = \max_t = \left\{ \frac{1}{4G}\left[\frac{\sigma_{af}\sin\omega t}{2}\right]^2 \right\} \tag{1.40}$$

De cette façon, il obtient le critère de contrainte de cisaillement maximum pouvant aussi s'écrire :

$$\sigma_{a1} - \sigma_{a3} = \sigma_{af} \tag{1.41}$$

L'effet d'une contrainte moyenne peut être estimé en calculant une contrainte moyenne équivalente σ_{meqVM} en reprenant la même démarche que pour le calcul de l'amplitude de contrainte équivalente σ_{aeqVM} (équation (1.37)).

1.1.3 Approche locale : échelle mésoscopique

Une autre approche pour prévoir la tenue en fatigue des métaux polycristallins est l'étude des sollicitations mécaniques subies par un grain de métal. En effet, l'amorçage des fissures de fatigue apparaît tout d'abord à l'échelle d'un grain (ou de quelques grains) ; cette échelle sera appelée "mésoscopique". Même si à l'échelle macroscopique (de l'ingénieur $\simeq 1\text{mm}$ à $0,1\text{mm}$) le matériau reste élastique, certains grains, à l'échelle mésoscopique ($\simeq 1\ \mu\text{m}$ à $100\ \mu\text{m}$), subissent un écoulement plastique conduisant à terme à la création d'une microfissure. A l'échelle du grain, les contraintes et déformations sont difficiles à quantifier, il faut utiliser une méthode de changement d'échelle pour les estimer.

Passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique

Les conditions de passage ont été détaillées par Hill [Hil67] et Mandel [Man71]. Ces auteurs expriment les contraintes à l'échelle mésoscopique de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}}(x) : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\rho}} \quad (1.42)$$

où $\underline{\underline{A}}(x)$ est le tenseur de localisation des contraintes et $\underline{\underline{\rho}}$ le champ des contraintes résiduelles locales. Quelques hypothèses simplificatrices sont nécessaires pour déterminer ces deux grandeurs.

Hypothèses de Lin-Taylor Dans le cas d'un essai à grand nombre de cycles, le comportement macroscopique du matériau reste élastique, seuls quelques grains défavorablement orientés subissent une déformation plastique. Ces grains plastifiés sont noyés dans une matrice élastique.

- La déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ à l'échelle du grain est supposée égale à la déformation totale macroscopique $\underline{\underline{E}}$ (le matériau ou la structure impose au grain plastifié sa déformation macroscopique : $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}}$) et il y a découplage entre déformations élastique et plastique aux deux échelles :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \Rightarrow \underline{\underline{E}}^e + \underline{\underline{E}}^p = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (1.43)$$

- En restant dans le domaine élastique à l'échelle macroscopique (cas de la fatigue à grands nombre de cycles), on peut négliger le terme $\underline{\underline{E}}^p$ devant $\underline{\underline{E}}^e$:

$$\underline{\underline{E}}^e \approx \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (1.44)$$

Le grain et la matrice sont supposés avoir les mêmes caractéristiques élastiques, ce qui permet d'écrire l'égalité entre les tenseurs d'élasticité macroscopiques et microscopiques :

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{l}} \quad (1.45)$$

où $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{l}} \underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{E}}$, on déduit de (1.44) et (1.45) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{L}}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \quad (1.46)$$

en remarquant que $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ est un tenseur déviatorique, on obtient la relation (1.47) reliant les échelles mésoscopique et macroscopique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} - 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (1.47)$$

d'après (1.42), le tenseur des contraintes résiduelles a pour expression :

$$\underline{\underline{\rho}} = -2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (1.48)$$

on peut donc écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\rho}} \quad (1.49)$$

De ces relations on déduit que :

- le tenseur de localisation $\underline{\underline{A}}(x)$ est le tenseur unité d'ordre 4.
- le tenseur des contraintes résiduelles $\underline{\underline{\rho}}$ est un tenseur déviateur.
- D'après (1.47), il apparaît que la contrainte hydrostatique microscopique est égale à la contrainte hydrostatique macroscopique (car $\text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}^p) = 0$).
- Le calcul des contraintes microscopiques revient à évaluer les déformations plastiques microscopiques (détermination du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$).

1.1.3.1 Critère de Dang-Van

Parmi les formulations de cette catégorie, la plus connue est le critère de Dang-Van [DVCF⁺89], [Van73]. Elle est la plus utilisée dans l'industrie malgré de nombreuses lacunes [Dub92], [Ben93], [Mor96], [PLL00]. Nous nous intéressons ici à la dernière formulation de ce critère [DVCF⁺89]. Cette approche mésoscopique de type plan critique s'applique aux matériaux polycristallins sollicités dans le domaine de l'endurance. L'auteur fait l'hypothèse d'un seul système de glissement actif par grain et postule qu'il n'y a pas amorçage de fissure en fatigue en un point si en ce point les contraintes mésoscopiques dans l'état adapté ne violent pas le critère de plasticité suivant :

$$\| \vec{\tau}_n \| - \tau_y \leq 0 \quad (1.50)$$

où τ_y est la cission critique à l'adaptation du matériau et $\vec{\tau}_n$, le vecteur cission sur une facette de normale \vec{n} . En plus de la cission mésoscopique, Dang-Van suppose que l'amorçage d'une fissure de fatigue à la limite d'endurance est fortement influencé par la contrainte hydrostatique mésoscopique σ_H qui est égale à la même quantité macroscopique. Il propose la relation linéaire (1.51) entre l'amplitude τ_a du vecteur cission $\vec{\tau}_n$ nécessitant une double maximisation sur \vec{n} et sur le temps t :

$$\max_t \left\{ \max_{\vec{n}} [\| \tau_a(\vec{n}, t) \| + \alpha \sigma_H(t)] \right\} \leq \beta \quad (1.51)$$

où $\sigma_H(t) = \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{\Sigma}}(t))$.

La cission microscopique $\vec{\tau}_n(t)$ se déduit de la cission macroscopique $\vec{C}(\vec{n}, t)$ par la détermination du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement sur le plan d'une facette orientée par \vec{n} (voir figure 1.8). L'amplitude τ_a représente le rayon de ce cercle. La cission résiduelle $\vec{\tau}_n^*$ peut être représentée par $\vec{\tau}_n^* = \underline{\underline{\rho}}^* \cdot \vec{n}$. Elle est estimée à l'aide du

centre du cercle précédent et permet la détermination de $\vec{\tau}_n(t)$:

$$\vec{\tau}_n(t) = \vec{C}(\vec{n}, t) + \vec{\tau}_n^* \quad (1.52)$$

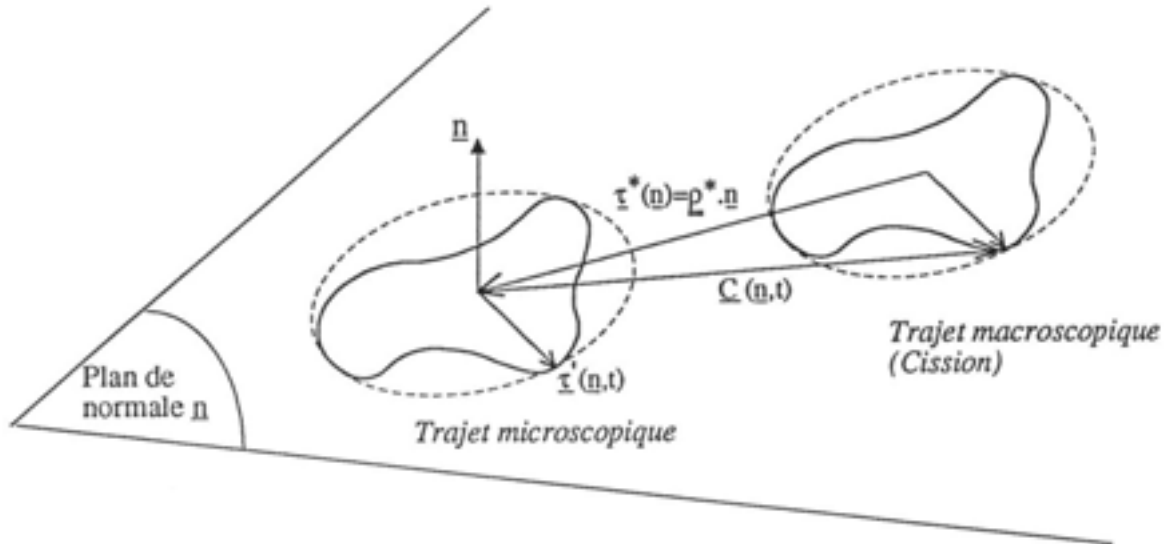


FIG. 1.8 – Représentation du trajet de chargement sur une facette [Mor96].

Les constantes α et β sont identifiées à partir de 2 limites d'endurance expérimentales, par exemple en torsion τ_{-1}^D et en flexion plane $\sigma_{Fp,-1}^D$ alternées symétriques et s'écrivent :

$$\alpha = \frac{\tau_{-1}^D - \frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{2}}{\frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{3}} \quad \text{et} \quad \beta = \tau_{-1}^D \quad (1.53)$$

Le plan critique est déterminé par la recherche du plan où la combinaison de la cission et de la contrainte hydrostatique est maximale sur le cycle.

$$P_c : \max_t \left\{ \max_{\vec{n}} [\| \tau_a(\vec{n}, t) \| + \alpha \sigma_H(t)] \right\} \quad (1.54)$$

Ce critère se différencie des critères traditionnels par le fait qu'il porte sur le chargement au cours d'un cycle. La mise en application de ce critère n'est pas des plus aisées car la construction du cercle circonscrit n'est pas immédiate et la double maximisation sur l'espace et sur le temps peut s'avérer très longue en temps de calcul. Les prévisions du critère de Dang-Van seront confrontées à des résultats d'essais et comparées à celles de critères issus des autres approches. Ce critère est le premier basé sur le changement d'échelle méso/macrosopique, une famille de critères en est dérivée dont les critères de Papadopoulos et Morel présentés ci-après et les critères de Deperrois et Robert présentés en annexe 1.

1.1.3.2 Critère de Papadopoulos

Papadopoulos [Pap94], [Pap01] propose une approche de type plan critique dérivée de celle de Dang-Van. Le critère se compose de deux expressions, respectivement pour les métaux “doux” et “durs”, la distinction s’effectuant selon l’auteur en fonction du rapport des limites d’endurance en traction et en torsion alternées symétriques : $\frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{Trac,-1}^D}$. L’auteur suppose que le matériau est constitué de cristaux parfaits (pas d’hétérogénéité entre les grains) et qu’un seul système de glissement est actif par grain. Pour expliquer le non-amorçage de fissures de fatigue à des niveaux de contrainte inférieurs à la limite d’endurance, il utilise le concept d’adaptation élastique. Il modélise le comportement du cristal selon trois phases distinctes (durcissement, saturation et adoucissement) (figure 1.9), où la déformation plastique accumulée à l’échelle mésoscopique Γ est choisie comme paramètre d’endommagement. τ_s représente la limite d’élasticité du cristal pendant la phase de saturation.

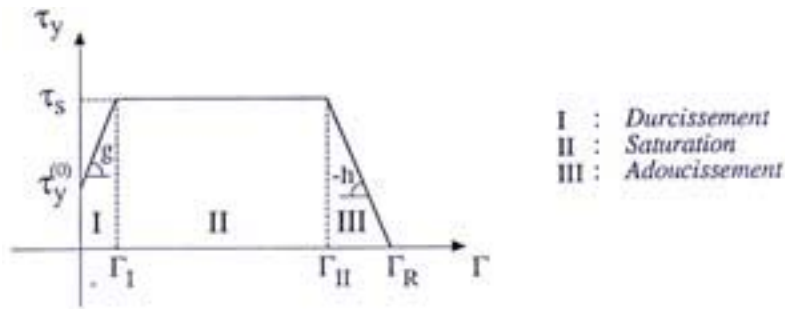


FIG. 1.9 – Modélisation de l’évolution de la limite d’élasticité mésoscopique pour un cristal à trois phases de comportement en fonction de la déformation plastique mésoscopique accumulée Γ .

– cas des métaux “doux” $\left(0,5 < \frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{Trac,-1}^D} < 0,6\right)$

Pour les métaux “doux”, le critère proposé est une combinaison linéaire de la moyenne de l’amplitude de la cission résolue sur toutes les directions d’un plan matériel, T_σ , et de la valeur maximale de la contrainte hydrostatique mésoscopique (égale à la macroscopique) durant un cycle de chargement $\Sigma_{H,max}$:

$$\max_{\varphi,\theta} [T_\sigma(\varphi,\theta)] + \alpha \Sigma_{H,max} \leq \beta \quad (1.55)$$

T_σ est la moyenne quadratique de l’amplitude de la cission résolue selon toutes les directions du plan orienté par $\vec{n}(\varphi,\theta)$:

$$T_\sigma(\varphi,\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \tau_a^2(\theta,\varphi,\psi) d\psi} \quad (1.56)$$

où τ_a représente l’amplitude de la cission résolue macroscopique agissant sur une direction de glissement définie à l’aide d’un angle Ψ sur le plan P . Papadopoulos [Pap94] a établi

l'expression analytique de $T_\sigma(\varphi, \theta)$ dans le cas de sollicitations sinusoïdales synchrones quelconques⁴.

Les constantes α et β sont identifiées à l'aide des limites d'endurance en traction et torsion et ont pour expression :

$$\alpha = \frac{\left(\tau_{-1}^D - \frac{\sigma_{Trac,-1}^D}{2}\right)}{\frac{\sigma_{Trac,-1}^D}{3}} \text{ et } \beta = \tau_{-1} \quad (1.57)$$

– **Cas des métaux “durs”** $\left(0,6 \leq \frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{Trac,-1}^D} < 0,8\right)$

Le critère s'écrit alors :

$$M_\sigma + p\Sigma_{H,max} \leq q \quad (1.58)$$

où M_σ représente la moyenne de l'amplitude de la cission résolue dans tout le volume élémentaire (tous les plans matériels) autour du point considéré. Elle est donné par :

$$M_\sigma(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{5}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_\sigma(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (1.59)$$

Pour un chargement multiaxial sinusoïdal en phase ou hors phase, la mesure M_σ se présente sous la forme d'une expression analytique [Pap94]. Les expressions des constantes p et q , en fonction des limites d'endurance en traction ($R_\sigma = -1$) et en torsion ($R_\sigma = -1$) :

$$p = \frac{\left(\tau_{-1}^D - \frac{\sigma_{Trac,-1}^D}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\sigma_{Trac,-1}^D}{3}} \text{ et } q = \tau_{-1}^D \quad (1.60)$$

1.1.3.3 Critère de Morel

Ce critère récent [Mor96], [Mor98], [Mor00] (1996) reprend l'approche mésoscopique de type plan critique de Papadopoulos pour les matériaux polycristallins [Pap94] et restreint sa proposition aux métaux “doux” (cf. 1.1.3.2). Le critère de Papadopoulos s'écrit dans le cas des métaux “doux” :

$$\max_{\varphi, \theta} [T_\sigma(\varphi, \theta)] + \alpha\Sigma_{H,max} \leq \beta \quad (1.61)$$

Pour plus de clarté, la valeur maximale de T_σ sera notée T_Σ :

$$T_\Sigma = \max_{\theta, \varphi} (T_\sigma(\varphi, \theta)) \quad (1.62)$$

L'auteur suppose, comme Papadopoulos que le matériau est constitué de cristaux parfaits (pas d'hétérogénéité entre les grains), qu'un seul système de glissement est actif et modélise le comportement du cristal selon trois phases distinctes (durcissement, saturation et adoucissement) (figure1.9). τ_s représente la limite d'élasticité du cristal pendant la

⁴de fréquences identiques, en phase ou hors phase, avec ou sans contraintes moyennes.

phase de saturation. L'auteur [Mor00] considère τ_s comme la combinaison de la contrainte hydrostatique moyenne Σ_{Hmoy} , de l'amplitude de la contrainte hydrostatique $\Sigma_{H,a}$ et de l'amplitude de la contrainte de cisaillement C_a (1.63).

$$\tau_s = \frac{-\alpha \Sigma_{Hmoy} + \beta}{\alpha \frac{\Sigma_{H,a}}{C_a} + H} \quad (1.63)$$

où $\alpha = \sqrt{\pi} \left(3 \frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{Trac,-1}^D} - \frac{3}{2} \right)$ et $\beta = \tau_{-1}^D \sqrt{\pi}$. H est un coefficient de déphasage défini par la relation (1.64).

$$H = \frac{T_\Sigma}{C_a} \quad (1.64)$$

Ce coefficient est compris entre $\sqrt{\pi}$ et $\sqrt{2\pi}$. Pour un trajet de chargement proportionnel, H est égal à $\sqrt{\pi}$ et dans le cas particulier d'un trajet de chargement circulaire H atteint la valeur limite : $\sqrt{2\pi}$.

L'auteur suppose que l'amorçage d'une fissure de fatigue se produit lorsque la déformation plastique mésoscopique accumulée Γ atteint un seuil Γ_R propre au matériau. De plus, il considère que seule l'amplitude de la cission résolue macroscopique C_a est active dans le glissement et déduit des différentes phases de comportement du matériau (1.9), l'équation d'une courbe de Wöhler (ou courbe S-N) à l'amorçage (1.65).

$$N_a = p \ln \left(\frac{C_a}{C_a - \tau_s} \right) + q \left(\frac{\tau_s}{C_a - \tau_s} \right) - \frac{r}{C_a} \quad (1.65)$$

où p , q et r sont des paramètres identifiables à l'aide d'une seule courbe de Wöhler expérimentale ([Mor00]) sur éprouvettes lisses (le choix de la courbe n'est pas spécifié), en faisant deux régressions linéaires successives. Pour une durée de vie fixée, l'équation (1.65) devient l'équation du critère et s'écrit :

$$\frac{1}{N_a} \left[p \ln \left(\frac{C_a}{C_a - \tau_s} \right) + q \left(\frac{\tau_s}{C_a - \tau_s} \right) - \frac{r}{C_a} \right] \leq 1 \quad (1.66)$$

Synthèse sur les critères mésoscopiques

L'utilisation des critères mésoscopiques est moins aisée que celles des critères macroscopiques, les calculs sont plus longs et plus complexes. Parmi les différents travaux issus de l'approche mésoscopique, les critères de Papadopoulos et Morel utilisent la déformation plastique accumulée comme variable d'endommagement. Dang Van considère, dans l'espace physique, une seule direction de glissement. Ce qui est différent de Papadopoulos qui se place comme Dang Van dans l'espace physique mais s'attache à considérer toutes les directions de glissement possibles du polycristal considéré⁵. Deperrois opère dans l'espace des déviateurs où il s'intéresse à la moyenne quadratique des deux plus grandes cordes situées dans deux hyperplans perpendiculaires. Dans la suite de ce chapitre, les prévisions des critères de Dang-Van, Papadopoulos et Morel vont être confrontées à des résultats

⁵sur un plan (T_σ) ou dans un élément de volume (M_σ).

d'essais et comparés aux critères issus des autres approches.

1.1.4 Approche volumique

Tous les critères présentés jusqu'ici considèrent uniquement l'état des contraintes en un point. Les gradients de contraintes et de déformations ou plus précisément la répartition volumique des contraintes et déformations ne sont pas pris en compte. Nous nous intéressons maintenant aux critères volumiques proposés pour tenter de remédier à ces défauts.

1.1.4.1 Le volume le plus contraint $V_{90\%}$

Le concept du volume le plus contraint [TEIH03], [SKG97] a été développé à l'origine par Kuguel [Kug61] en 1961. Dans le but d'extrapoler les données en fatigue obtenues sur éprouvettes à des pièces industrielles, Kuguel a considéré les facteurs géométriques comme l'entaille, l'effet d'échelle et de forme et l'influence des différents types de chargement. Le concept de volume maximum contraint de matériau a été discuté, Kuguel proposant le volume où 95% de la contrainte maximum dans l'éprouvette est considéré à cause de la dispersion liée à la fatigue. Pour des éprouvettes sollicitées en flexion plane, Kuguel proposa la relation suivante :

$$\frac{K_f}{K_t} = \left(\frac{V_n}{V_s} \right)^a \quad (1.67)$$

où V_n est le volume dans lequel la contrainte/déformation locale est supérieure ou égale à 95% du maximum (i.e. dans lequel plus de 95% des contraintes/déformations maximum agissent), V_s est le même volume dans une éprouvette lisse et a est un paramètre dépendant du matériau ($a = 0,034$ pour la plupart des aciers et alliages d'aluminium selon Kuguel [Kug61]). Cette équation est dérivée de l'équation empirique obtenue pour différents aciers et alliages d'aluminium respectant la relation entre la résistance à la fatigue nominale et le volume le plus contraint V et qui s'écrit :

$$\sigma_{max} = BV^{-a} \quad (1.68)$$

où $\sigma_{max} = K_t R_e$ et B est un paramètre matériau.

Sonsino [SKG97] combine sous le terme effet d'échelle l'aspect mécanique et statistique de ce phénomène parce qu'il considère que les gradients de contrainte ont une influence décisive sur le volume déformé maximum et par conséquent sur la probabilité de fissuration.

En considérant que les discontinuités du matériau entraînant l'amorçage d'une fissure ne sont pas restreintes à la surface mais comprennent aussi une région sous la surface, le volume de matériau contraint/déformé maximum, appelé $V_{90\%}$, a été défini comme le volume dans lequel la contrainte/déformation locale maximum est supérieure ou égale à 90% du maximum (i.e. dans lequel plus de 90% des contraintes/déformations maximum

agissent).

La connaissance du volume au sein duquel le maximum de contrainte chute de 10% et de la zone d'amorçage de fissure sont requis pour calculer le volume $V_{90\%}$. Pour déterminer la relation entre la déformation locale supportable et le volume $V_{90\%}$, l'état local de contraintes et de déformations multiaxiales de la pièce est exprimé en contrainte équivalente. Pour un matériau ductile et un état de contrainte avec des directions de contraintes principales constantes, la contrainte équivalente de Von Mises est utilisée. Si le matériau est sollicité dans son domaine élastique, la contrainte équivalente est calculée par la relation (1.69).

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (1.69)$$

Dans le cas d'un état de contrainte uniaxial, $\sigma_{eq} = \sigma_1$. A partir d'un grand nombre de résultats d'essais sur l'acier trempé revenu 37Cr4V pour deux diamètres d'éprouvettes différents et pour différents K_t , Sonsino montre que les amplitudes des limites d'endurance peuvent être décrites avec la relation (1.70), relation très proche de celle de Kuguel (1.67).

$$\frac{\sigma_{a,eq,2}}{\sigma_{a,eq,1}} \leq \left(\frac{V_{90\%,1}}{V_{90\%,2}} \right)^{0,05} \quad (1.70)$$

$\sigma_{a,eq,1}$ est l'amplitude de contrainte équivalente de Von Mises correspondant à une limite d'endurance expérimentale (sur une éprouvette entaillée) et $V_{90\%,1}$ est le volume le plus contraint correspondant. $\sigma_{a,eq,2}$ et $V_{90\%,2}$ sont les mêmes paramètres pour l'éprouvette étudiée. Cette relation n'est valide que pour $V_{90\%} \leq 30\text{mm}^3$ car la résistance à la fatigue devient constante pour des volumes supérieurs (fig. 1.10).

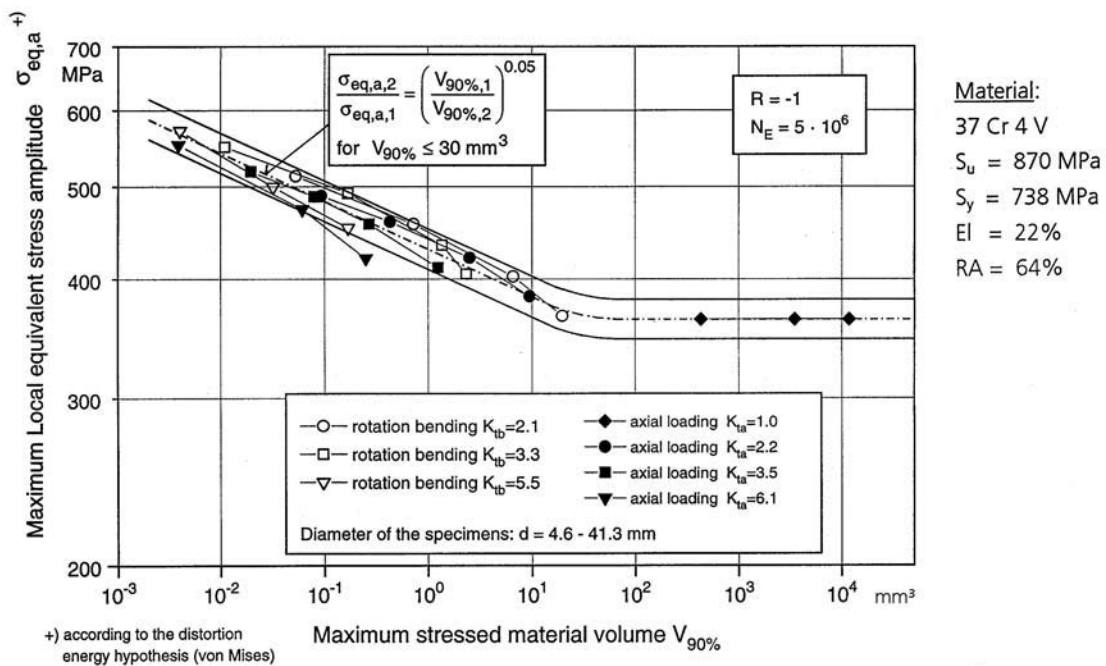


FIG. 1.10 – Relation entre la limite d'endurance considérée comme une amplitude de contrainte équivalente et le volume le plus contraint $V_{90\%}$ d'après [SKG97]

La figure 1.11 illustre les différents concepts de volume et surface les plus contraints.

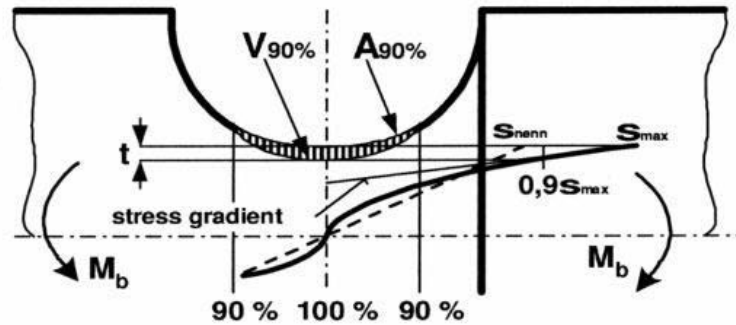


FIG. 1.11 – Illustration des volumes et surfaces les plus contraints dans une entaille [TEIH03]

1.1.4.2 Critère du volume effectif

Cette approche [AGP04], [AP03], [QAK⁺99], [QDA⁺01] est destinée à la prévision de la tenue en fatigue des pièces entaillées. Les auteurs supposent qu'il y a toujours une petite zone plastique en fissuration par fatigue dont la taille est de l'ordre de plusieurs grains. Cette zone est représentée par la distance effective x_{eff} au dessous de la surface de la pièce au niveau de l'entaille (Fig. 1.12).

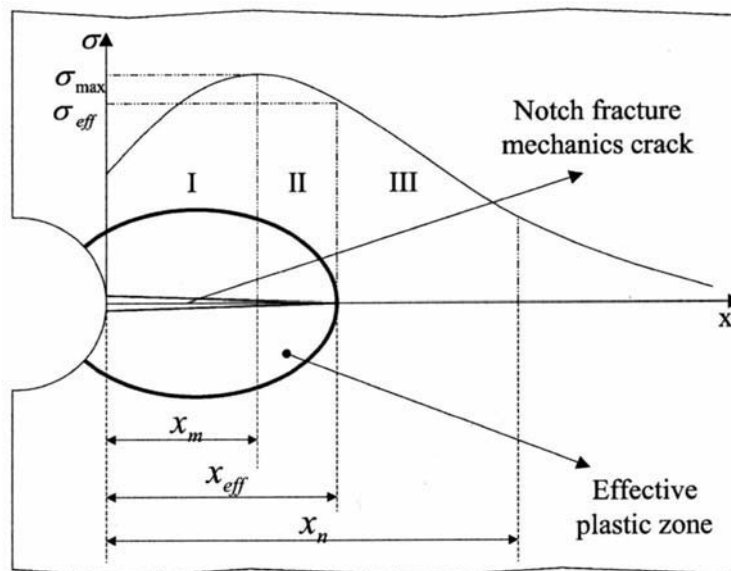


FIG. 1.12 – Zone plastique efficace et fissure d'entaille [AP03]

Le rôle, dans la fissuration par fatigue, de la distribution des contraintes élasto-plastiques réelles et du gradient des contraintes correspondant au niveau de l'entaille sont ainsi pris en compte par l'utilisation de cette distance effective. Pour les auteurs, x_{eff} représente la frontière de relaxation des contraintes (délimite un domaine plastique). Le volume effectif, où le processus d'endommagement par fatigue agit, est limité au niveau

de l'entaille, à un cylindre dont le diamètre est égal à la distance effective définie en deux points :

- c'est la distance entre l'entaille et le point où le gradient de contrainte est supposé négligeable,
- cette distance est supposée plus grande que la zone plastique locale car la limite d'endurance est supposée plus basse que le champ des contraintes.

L'approche volumique a comme base le concept d'intensité du champ de contrainte au voisinage de l'entaille de Yao [YXG94].

$$\sigma_{FI}^N = \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega f(\sigma_{ij}) \phi(\vec{r}) dv \quad (1.71)$$

où Ω représente la zone affectée en fatigue, V_Ω est le volume correspondant à cette zone, $\phi(\vec{r})$ est une fonction de poids, $f(\sigma_{ij})$ est une fonction de contrainte équivalente et σ_{FI}^N est l'intensité de contraintes. A l'aide de la mécanique de la rupture appliquée aux éprouvettes entaillées et en appliquant l'hypothèse de la fonction de poids volumique de Qylafku, la relation (1.72) peut s'écrire :

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{x_{eff}} \int_0^{x_{eff}} \sigma_{yy}(x) (1 - x\chi) dx \quad (1.72)$$

où χ est le gradient de contrainte relatif défini par la relation (1.73).

$$\chi(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d\sigma}{dx} \quad (1.73)$$

Le critère de fatigue s'écrit $\sigma_{eff} \leq \sigma_{eff}^0$, où σ_{eff}^0 est la contrainte effective correspondant à la limite de fatigue sur éprouvette lisse. Selon les auteurs de ce critère, les prévisions de durées de vie basées sur ce modèle sont en bon accord avec les résultats d'essais présentés [AP03].

1.1.4.3 Critère du volume d'influence (LAMEFIP)

La première version du critère du LAMEFIP, développée par Froustey et Lasserre [FLD92] était une approche énergétique ponctuelle permettant de prendre en compte le peu d'influence du déphasage en flexion et torsion combinées sur la résistance à la fatigue à grande durée de vie. Deux paramètres ont été proposés :

- la valeur moyenne sur un cycle de l'énergie potentielle de déformation élastique due au chargement alterné, W_a .
- l'énergie potentielle de déformation élastique due au chargement moyen, W_m .

De plus ce critère tient compte de la sensibilité du matériau au degré de triaxialité de l'état contraint. Une évolution de ce critère, développée par Palin-Luc [P196], faisait intervenir comme paramètre d'endommagement la moyenne sur un cycle de chargement de période T de la densité volumique d'énergie de déformation élastique W_a définie en tout point M de la pièce par :

$$W_a(M) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_{ij}(M, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^e(M, t) dt \quad (1.74)$$

Les inconvénients majeurs du critère étaient qu'il s'appliquait uniquement à des sollicitations sinusoïdales alternées symétriques et qu'il était sensible à la forme du cycle de chargement (triangle, sinus, carré). La dernière évolution du critère du LAMEFIP proposée par Banvillet et Palin-Luc [Pl96], [PLL98], [PLL00], [Ban01] tout en conservant l'approche énergétique, a été élaborée de façon à distinguer tous les types de chargements et prendre en compte les gradients de contraintes. Ce critère est basé sur la notion de volume d'influence autour du "point critique" et utilise comme paramètre la densité volumique du travail de déformation fourni par cycle à chaque élément de volume.

Hypothèse d'un seuil de non fissuration

Suite à des essais de fatigue sur éprouvettes lisses en fonte EN-GJS800-2 sous sollicitations de flexion plane et de torsion alternées symétriques, Palin-Luc [Pl96] et Bonnafe [Bon98] observent que des cycles de chargement d'amplitude comprise entre un seuil noté σ^* et la limite d'endurance $\sigma_{Fp,-1}^D$, mélangés à des cycles d'amplitudes supérieures participent à l'endommagement du matériau de manière significative.

Des observations microscopiques de ce matériau, faites par Bouffet et Charlopeau [BC96] et par Motreff et Miermont [MM00] confirment cette hypothèse. De plus, Motreff et Miermont identifient sur une éprouvette à section rectangulaire chargée en flexion plane alternée symétrique des zones géométriques délimitées par le seuil en contrainte σ^* , dans lesquelles il y a apparition de microfissures alors que localement le niveau de contrainte est inférieur à la limite d'endurance du matériau. Palin-Luc [Pl96] et Banvillet [Ban01] supposent que ce seuil délimite un volume d'influence dans la pièce, et que ce volume participe à l'amorçage de fissures de fatigue. Le niveau de contrainte dans ce volume est suffisant pour permettre l'amorçage de microfissures et leur propagation vers une macrofissure.

Etats de contraintes uniaxiaux

Banvillet [Ban01] traduit la limite σ^* par une limite énergétique W_f^* représentant la densité volumique du travail de déformation élastique minimum (seuil) à fournir en un point du matériau pendant un cycle de contrainte alterné symétrique, de période T , pour créer après un grand nombre de cycles ($> 10^4$) un endommagement irréversible dans un volume élémentaire représentatif (VER).

La densité volumique du travail de déformation élastique fourni par cycle en un point M du matériau est définie par (1.75) après adaptation élastique⁶ :

$$W_f(M) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_T < \sigma_{ij}(M, t) \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^e(M, t) > dt \quad (1.75)$$

⁶A l'endurance le matériau est supposé se trouver dans un état élastique adapté [BPLL03, LC88]

où $\dot{\varepsilon}_{ij}^e(M, t)$ sont les composantes du tenseur des vitesses de déformation élastique après adaptation du matériau,

$\sigma_{ij}(M, t)$ désigne les composantes du tenseur des contraintes au point M à l'instant t ,
 le symbole $\langle A \rangle$ signifie $\langle A \rangle = A$ si $A \geq 0$ et $A = 0$ si $A < 0$.

Pour un cycle alterné symétrique de traction-compression, le travail de déformation élastique est illustré sur la figure 1.13.

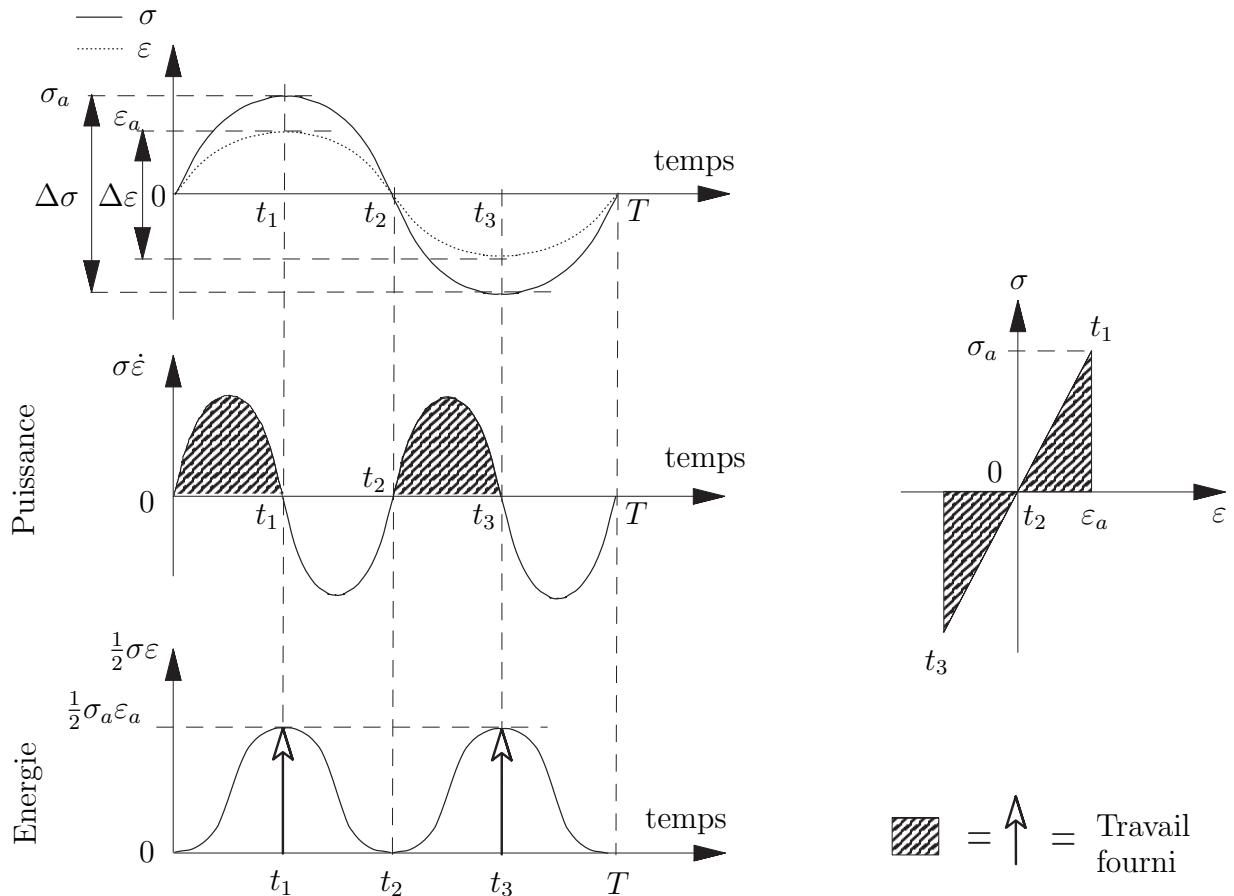


FIG. 1.13 – Illustration du travail et de la puissance de déformation élastique fournis en un point M , au cours d'un cycle de période T . Cas de la traction uniaxiale, d'après [Ban01].

Banvillet [Ban01] reprend la proposition de Palin-luc [Pl96] qui considère que les points potentiellement critiques C_i (où une fissure de fatigue peut s'amorcer) sont les points de la pièce où la densité volumique du travail de déformation élastique fourni W_f présente des maxima locaux. Pour tenir compte de l'effet, sur la limite de fatigue, des zones de la pièce chargées à des amplitudes de contraintes supérieures à σ^* , l'auteur définit un volume d'influence [Pl96], [Ban01], [BPLL03]. Autour de chacun des points critiques C_i , ce volume d'influence $V^*(C_i)$ représente l'ensemble des points de la pièce où le travail fourni est supérieur au travail minimum W_f^* nécessaire à l'apparition d'un endommagement (1.76).

$$V^*(C_i) = \{\text{points } M(x, y, z) \text{ autour du point } C_i \text{ tels que } W_f(M) \geq W_f^*(C_i)\} \quad (1.76)$$

Banvillet définit alors la quantité $\varpi_f(C_i)$ comme la moyenne volumique de la partie du

travail de déformation fourni, considérée comme endommageante (1.77).

$$\varpi_f(C_i) = \frac{1}{V^*(C_i)} \int_{V^*(C_i)} [W_f(M) - W_f^*(C_i)] dv \quad (1.77)$$

Pour des états de contraintes uniaxiaux, à la limite d'endurance, l'auteur postule que la quantité $\varpi_f(C_i)$ est une grandeur intrinsèque au matériau (notée $\varpi_{f_{uniax}}^D$) : elle ne dépend donc pas de la sollicitation (traction, flexion rotative, flexion plane), d'où l'équation (1.78).

$$\varpi_{f_{uniax}}^D = \varpi_{f_{Trac}}^D = \varpi_{f_{Fl,R}}^D = \varpi_{f_{Fp}}^D \quad (1.78)$$

Les valeurs de σ^* , W_f^* et $\varpi_{f_{uniax}}^D$ peuvent être déduites à partir de cette équation et des limites d'endurance conventionnelles sur éprouvettes lisses, elles s'expriment par :

$$\sigma^* = \sqrt{2 \cdot (\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{Fr,-1}^D)^2} \quad (1.79)$$

$$W_f^* = \frac{2 \cdot (\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{Fr,-1}^D)^2}{E} \quad (1.80)$$

$$\varpi_{f_{uniax}}^D = \frac{(\sigma_{Fr,-1}^D)^2 - (\sigma_{Trac,-1}^D)^2}{4E} \quad (1.81)$$

où $\sigma_{Fr,-1}^D$, $\sigma_{Trac,-1}^D$ désignent respectivement la limite d'endurance en flexion rotative ($R_\sigma = -1$) et celle en traction ($R_\sigma = -1$).

Etats de contraintes multiaxiaux

Banvillet définit, en un point M de la pièce, le degré de triaxialité $dT(M)$ comme le rapport du travail fourni responsable du changement de volume d'un élément de matière $W_f^v(M)$ sur le travail total fourni $W_f(M)$. Cette quantité varie entre 0 (état de torsion pur) et 1 (état triaxial pur).

$$dT(M) = \frac{W_f^v(M)}{W_f(M)} \quad (1.82)$$

Comme proposé par Froustey et Lasserre [Fro87], l'auteur relie la densité volumique du travail de déformation élastique fourni $W_f(C_i)_{soll}$ pour une sollicitation quelconque à celle d'une sollicitation de torsion $W_f(C_i)_{tors}$ lorsque le matériau est chargé à sa limite d'endurance (1.83).

$$W_f^D(C_i)_{soll} = F(dT(C_i)_{soll}, \beta) \cdot W_f^D(C_i)_{tors} \quad (1.83)$$

La fonction empirique F dépend du paramètre matériau β , qui caractérise la sensibilité du matériau à la triaxialité des contraintes. Elle est donnée par :

$$F(dT(C_i), \beta) = \frac{1}{1 - dT(C_i)} \left[1 - \frac{1}{\beta} \ln [1 + dT(C_i)(e^\beta - 1)] \right] \quad (1.84)$$

Le seuil W_{fsoll}^* est supposé varier également en fonction de dT selon F :

$$W_{fsoll}^* = F(dT(C_i)_{soll}, \beta) \cdot W_{ftors} = W_{funiax}^*(C_i) \frac{F(dT_{soll}(C_i), \beta)}{F(dT_{uniax}, \beta)} \quad (1.85)$$

Le volume d'influence V^* est ainsi défini autour de chaque point critique C_i par la relation (1.86) quel que soit l'état de contraintes.

$$V^*(C_i) = \{\text{points } M(x, y, z) \text{ autour du point } C_i \text{ tels que } W_{fsoll}(M) \geq W_{fsoll}^*(C_i)\} \quad (1.86)$$

En supposant que l'ensemble des points du volume d'influence joue un rôle significatif dans l'amorçage d'une fissure de fatigue au point critique C_i (puisque ces points sont sollicités à un niveau de chargement suffisant pour être micro endommagés), la moyenne volumique du travail endommageant fourni dans le volume d'influence s'écrit :

$$\varpi_f(C_i) = \frac{1}{V^*(C_i)} \int \int \int_{V^*(C_i)} [W_f(M) - W_f^*(C_i)] dv \quad (1.87)$$

Le critère proposé par Banvillet s'exprime alors par la relation (1.88) pour une durée de vie fixée.

$$\varpi_f(C_i) < \varpi_f^D(C_i) \quad (1.88)$$

où $\varpi_f^D(C_i)$ est la valeur limite admissible de $\varpi_f(C_i)$. Cette valeur est calculée quel que soit le chargement d'après la relation (1.89) pour tenir compte de la triaxialité des contraintes au point critique.

$$\varpi_f^D(C_i) = \frac{F(dT_{soll}(C_i), \beta)}{F(dT_{uniax}, \beta)} \varpi_{funiax}^D \quad (1.89)$$

L'application de ce critère dans le cadre d'une utilisation en bureau d'étude est schématisée figure 1.14.

La proposition de Banvillet conserve les avantages de la proposition développée par Palin-Luc [P196] :

- différencier les types de chargements (traction, flexion plane et flexion rotative) ce qu'aucun des autres critères ponctuels ou locaux présentés ne peut faire,
- prendre en compte l'effet de la distribution volumique des contraintes et des déformations (gradient) sur la résistance à la fatigue.

De plus, la valeur de W_f ne dépend pas de la forme du cycle de sollicitation sous chargement uniaxial (triangle, sinus, carré) contrairement à la quantité W_a . Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux en fatigue [Ban01].

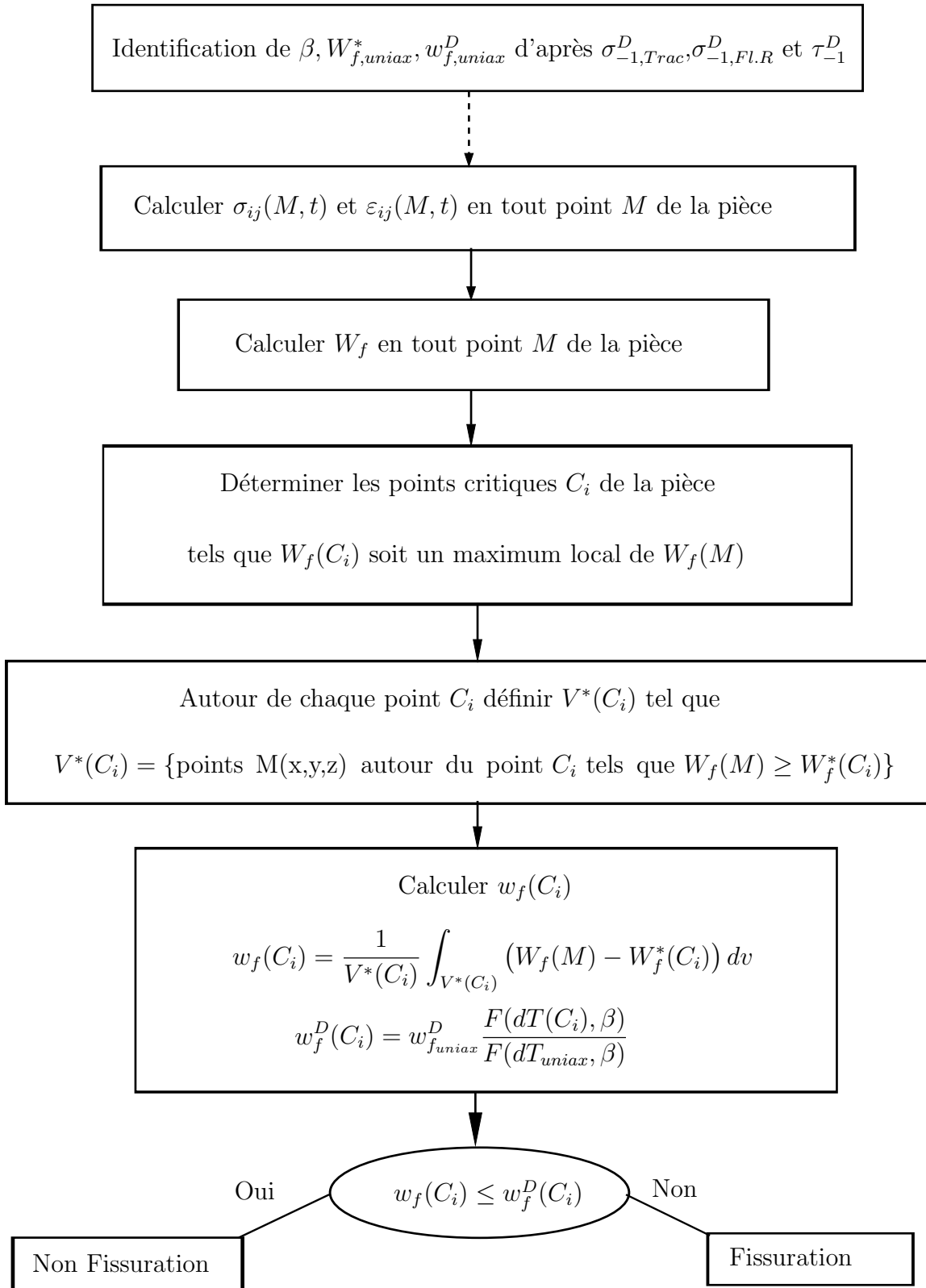


FIG. 1.14 – Organigramme d'application du critère volumique du Lamefip d'après [Ban01].

1.1.4.4 Critère de Morel et Palin-Luc

Le critère développé par Palin-Luc et Morel [MPI02] reprend l'approche non locale proposée par Palin-Luc [PLL00], [PLL98] et la combine au critère mésoscopique de Pa-

padopoulos [Pap94], [Pap01]. Deux grandeurs moyennes sont utilisées. T_σ est la moyenne quadratique de l'amplitude de la cission résolue selon toutes les directions du plan orienté par $\vec{n}(\varphi, \theta)$:

$$T_\sigma(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \tau_a^2(\theta, \varphi, \psi) d\psi} \quad (1.90)$$

et M_σ représente la moyenne de l'amplitude de la cission résolue dans tout le volume élémentaire (tous les plans matériels) autour du point Q considéré :

$$M_\sigma(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{5}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_\sigma(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (1.91)$$

τ_a est l'amplitude de la cission résolue macroscopique agissant sur une direction de glissement définie à l'aide d'un angle Ψ sur le plan P . Pour chacune des deux approches, une contrainte équivalente est définie, σ_{eqt} (eq. 1.92) et σ_{eqm} (eq. 1.93).

$$\sigma_{eqt} = \max_{\varphi, \theta} [T_\sigma(\varphi, \theta)] + p_t \Sigma_{Hmax} \quad (1.92)$$

$$\sigma_{eqm} = M_\sigma + p_m \Sigma_{Hmax} \quad (1.93)$$

Les auteurs introduisent une valeur seuil, notée σ_{eq}^* , représentant une limite sous laquelle aucun endommagement par fatigue ne peut se produire. Ce seuil est très proche dans l'idée du seuil en contrainte σ^* introduit par Palin-Luc et Lasserre [PLL98]. Autour de chaque point critique C_i (où σ_{eq} admet un maximum local), un volume influençant la fissuration par fatigue $V^*(C_i)$ est défini par la relation (1.94).

$$V^*(C_i) = \{\text{points } M(x, y, z) \text{ autour du point } C_i \text{ tels que } \sigma_{eq}(M) \geq \sigma_{eq}^*\} \quad (1.94)$$

Deux critères sont alors définis, un en T_σ (approche de type plan critique) et l'autre en M_σ (approche globale sur tous les plans matériels du volume élémentaire) :

$$\frac{1}{V^*} \int \int_{V^*} \int (\max_{\varphi, \theta} [T_\sigma(\varphi, \theta)] + p_t \Sigma_{Hmax}). dv \leq q_t \quad (1.95)$$

et

$$\frac{1}{V^*} \int \int_{V^*} \int (M_\sigma + p_m \Sigma_{Hmax}). dv \leq q_m \quad (1.96)$$

Chaque modèle nécessite l'identification de 3 paramètres, p_t , σ_{eqt}^* et q_t (respectivement p_m , σ_{eqm}^* et q_m), trois limites d'endurance sont donc nécessaires, les auteurs choisissent les limites en traction ($R_\sigma = -1$), torsion ($R_\sigma = -1$) et flexion rotative ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses. Cette identification s'effectue de façon analytique en écrivant les critères pour les trois limites choisies. Pour l'approche en T_σ , les coefficients s'écrivent :

$$p_t = 3 \frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{Fr, -1}^D} - \frac{3}{2}, \quad q_t = \frac{\tau_{-1}^D \sigma_{Trac, -1}^D}{\sigma_{Fr, -1}^D} \quad (1.97)$$

$$\sigma_{eqt}^* = \frac{\tau_{-1}^D \sigma_{Trac,-1}^D}{\sigma_{Fr,-1}^D} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{Fr,-1}^D}{\sigma_{Trac,-1}^D} \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_{Trac,-1}^D}{\sigma_{Fr,-1}^D} + 1 \right)^2 - 4} - 1 \right] \quad (1.98)$$

Les comparaisons entre les prévisions des deux critères à des résultats d'essais sur la fonte à graphite sphéroïdal EN-GJS800-2, l'acier C18 recuit, l'acier 35CrMo4 trempé revenu et l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu sur éprouvettes lisses donnent de très bons résultats [MP102].

1.1.5 Analyse des critères et confrontation prévisions/expérience

1.1.5.1 Analyse des critères

Avant d'analyser les critères, quelques constatations expérimentales en fatigue doivent être rappelées. Sines [Sin59] puis Crossland [Cro59] ont constaté une influence non négligeable de la contrainte hydrostatique moyenne sur la limite d'endurance des matériaux ([Sin59]). Sines [Sin59] a observé sur de nombreux aciers, aluminium, cuivres et bronzes qu'un chargement moyen de torsion a une influence négligeable lorsque le cisaillement maximum reste inférieur à 80% de la limite d'élasticité en torsion du matériau (figure 1.15).

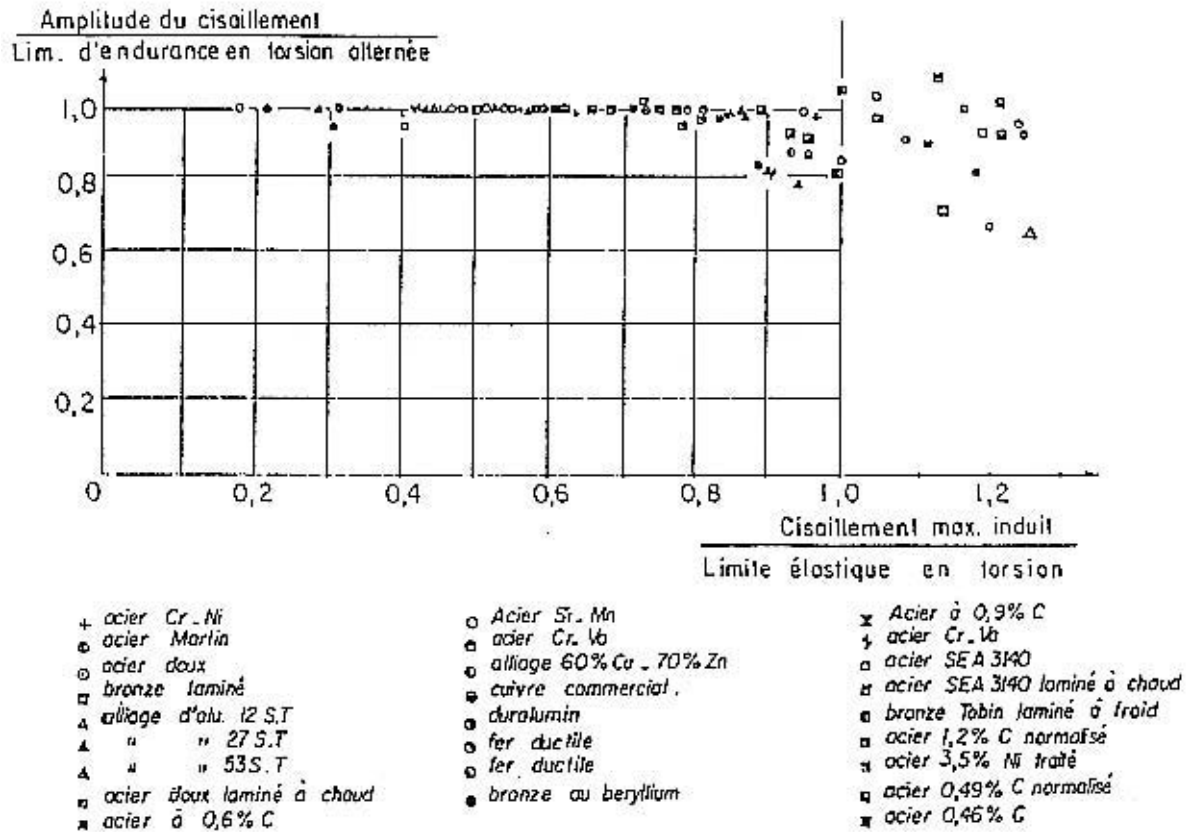


FIG. 1.15 – Influence du cisaillement maximum sur la limite d'endurance en torsion [Sin59].

Mais si $\tau_{max}^D / \tau_y > 0,8$, l'amplitude du cisaillement admissible diminue (figure 1.15).

Smith [Smi42] remarque sur de nombreux matériaux métalliques (ductiles et fragiles) que cette influence est loin d'être négligeable (fig. 1.16) : lorsque $\tau_m/\tau_y = 0.8$, $\tau_a^D = 0.7 \times \tau_{-1}^D$.

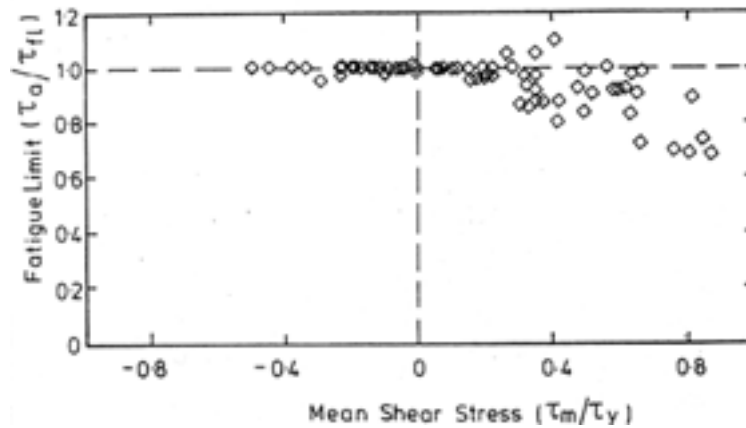


FIG. 1.16 – Influence du cisaillement moyen sur la limite d'endurance en torsion, d'après Smith [Smi42].

La figure 1.16, souvent rencontrée dans la littérature, est à considérer avec précaution car elle montre que le sens du cisaillement a une influence sur la limite de fatigue ; alors que le signe du cisaillement n'a pas de signification physique, une symétrie des résultats devrait être observée. Davoli [DBF⁺03] a retraité les résultats de Smith en les complétant avec d'autres résultats d'essais, la représentation qu'il propose est cohérente (fig. 1.17).

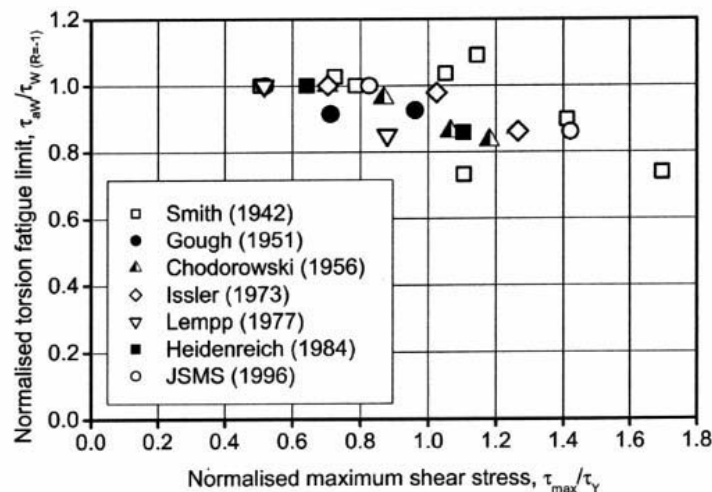


FIG. 1.17 – Influence du cisaillement moyen sur la limite d'endurance en torsion.

En flexion et torsion combinées, une influence négligeable du déphasage des contraintes de flexion et de torsion sur la limite d'endurance a été démontrée notamment par Froustey [Fro87]. De nombreuses études bibliographiques ont été menées, notamment par Papadopoulos [PDG⁺97], [Pap99] qui a réalisé une analyse théorique critique de la plupart des formulations, par Robert [Rob92], Fogue [FRB95] et Weber [WLJJ01] qui ont testé la

qualité des prévisions de certains critères comparées à un ensemble important de résultats expérimentaux. On peut aussi citer les analyses de Dubar [Dub92], Galtier [Gal93], Bennebach [Ben93]. Dans un souci de synthèse, le tableau 1.1 regroupe les sensibilités des critères à quelques caractéristiques observées expérimentalement et reconnues dans la littérature.

Critères	Non influence de ϕ entre σ et τ	Sensible à Σ_{Hmoy}	Non influence de τ_{moy}	distinction des sollicitations mécaniques (trac, flex pl, rot)
Crossland	Non	Oui	Oui	Non
Dang-Van	Non	Oui	Oui	Non
Papadopoulos	Oui	Oui	Oui	Non
Morel	Non (*)	Oui	Oui	Non
LAMEFIP	Oui	Oui	Oui (**)	Oui

TAB. 1.1 – Sensibilité des critères aux constatations expérimentales.

(*) Analytiquement, pour le critère de Morel, il y a une influence du déphasage entre traction (ou flexion) et torsion mais numériquement cette influence est faible et en accord avec les résultats d'essais compte-tenu des dispersions [Ban01].

(**) Négligeable si $\tau_{max}^D < 0,8\tau_y$ mais influence si $\tau_{max} \geq 0,8\tau_y$ ce qui est cohérent avec Smith [Smi42] et Sines [Sin59].

Papadopoulos [PDG⁺97], [Pap99] s'est intéressé à la prévision par les critères de l'effet d'un déphasage entre des sollicitations de flexion et torsion combinées à l'aide de confrontations prévision/expérience. Il montre que les critères de Dang-Van, Crossland et Sines sont sensibles à ce déphasage ce qui est contredit par l'expérience pour les grandes durées de vie [Fro87]. Son critère, par contre, n'y est pas sensible, comme celui du LAMEFIP d'ailleurs.

Fogue [FRB95] et Weber [WLJJ01] ont cherché à distinguer les critères suivant le trajet de chargement (proportionnel ou non proportionnel). Pour les trajets proportionnels, les prévisions des critères sont assez satisfaisantes avec des degrés de performance variables. Ce sont les trajets de chargement non proportionnels les plus discriminants, l'évolution des directions principales au cours du temps doit être prise en compte, un ensemble de plans d'amorçage possibles étant activés. Les auteurs constatent que pour des trajets non proportionnels, aucun des critères testés (dont Crossland, Sines, Papadopoulos, Dang-Van) n'est réellement satisfaisant. Pour des trajets proportionnels, tous les critères sont globalement assez performants.

D'autre part, pour une application en bureau d'études, le nombre de paramètres à identifier est un paramètre important (tab 1.2), il rend aussi souvent compte de la complexité des méthodes.

Critères	Données nécessaires
Crossland	σ_{Trac-1}^D ou $\sigma_{FP,-1}^D$, τ_{-1}^D
Dang-Van	σ_{Trac-1}^D ou $\sigma_{FP,-1}^D$, τ_{-1}^D
Papadopoulos	σ_{Trac-1}^D ou $\sigma_{FP,-1}^D$, τ_{-1}^D
Morel	1 courbe S-N + σ_{Trac-1}^D ou $\sigma_{FP,-1}^D$, τ_{-1}^D
LAMEFIP	σ_{Trac-1}^D , $\sigma_{FR,-1}^D$, τ_{-1}^D

TAB. 1.2 – Données nécessaires à l'identification des paramètres des critères.

1.1.5.2 Confrontation prévisions/expérience

Nous évaluons ci-après la qualité des prévisions des critères multiaxiaux de Dang-Van, Papadopoulos, Crossland, Morel et du LAMEFIP en les confrontant à des résultats d'essais de fatigue sur des éprouvettes lisses. Les critères choisis sont issus des différentes approches. Afin de juger objectivement la qualité des prévisions des critères, l'Erreur Relative de Prévision définie par (1.99) a été calculée d'après la limite d'endurance expérimentale $\sigma_{a,exp}^D$ et la valeur calculée par chaque critère.

$$ERP(\%) = \frac{\sigma_{a,exp}^D - \sigma_{a,calcul}^D}{\sigma_{a,exp}^D} \quad (1.99)$$

Cette erreur relative est calculée pour une contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ fixée, pour un rapport de chargement $k_\sigma = \frac{\sigma_a}{\tau_a}$ fixé et les contraintes moyennes fixées dans le cas d'états de contraintes multiaxiaux.

- si $ERP \geq 0$, les prévisions sont conservatives et se placent dans le domaine de la sécurité (la limite d'endurance calculée est inférieure à la réalité expérimentale),
- si $ERP < 0$, les prévisions sont non conservatives et se placent dans le domaine de l'insécurité. Il est alors dangereux d'utiliser le critère en bureau d'étude.

Trois matériaux ont été considérés :

- **La fonte EN-GJS800-2** [P196], ses caractéristiques mécaniques statiques et cycliques sont respectivement regroupées dans le tableau 1.3.
- **L'acier 30NiCrMo16** [Gal93] trempé revenu, le tableau 1.4 présente ses caractéristiques mécaniques statiques et cycliques.
- **L'acier C18** [P196] recuit, le tableau 1.5 regroupe ses caractéristiques mécaniques statiques.

Les limites d'endurance expérimentales de ces différents matériaux sont inscrites dans le tableau 1.6 d'après les thèses de Froustey [Fro87], Dubar [Dub92], Galtier [Gal93] et Palin-Luc [P196].

Module d'Young, E (MPa)	164900
Coefficient de Poisson, ν	0,275
Limite d'élasticité à 0.02%, $R_{p0.02}$ (MPa)	320
Limite d'élasticité à 0.2%, $R_{p0.2}$ (MPa)	462
Résistance maximal en traction, R_m (MPa)	795
Allongement total après rupture, A (%)	9
Limite d'élasticité cyclique, E' (MPa)	164900
Module plastique d'écrouissage cyclique, K' (MPa)	1 121
Exposant d'écrouissage cyclique n'	0.144

TAB. 1.3 – Caractéristiques mécaniques de la fonte EN-GJS800-2 en traction d'après [Ban01].

Module d'Young, E (MPa)	200000
Coefficient de Poisson, ν	0,29
Limite d'élasticité à 0.02%, $R_{p0.02}$ (MPa)	895
Limite d'élasticité à 0.2%, $R_{p0.2}$ (MPa)	1080
Résistance maximal en traction, R_m (MPa)	1200
Dureté Vickers HV	406
Limite d'élasticité cyclique, E' (MPa)	240000
Module plastique d'écrouissage cyclique, K' (MPa)	1 035
Exposant d'écrouissage cyclique n'	0.0422

TAB. 1.4 – Caractéristiques mécaniques de l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu.

E (MPa)	ν	$R_{p0.02}$ (MPa)	$R_{p0.02}$ (MPa)	R_m (MPa)	A (%)
210000	0,3	350	520	1530	24

TAB. 1.5 – Caractéristiques mécaniques statiques de l'acier C18 recuit.

Les limites d'endurance en flexion plane ($R_\sigma=-1$) et torsion ($R_\sigma=-1$) pour les trois matériaux ont été déterminées par les auteurs (avec au moins 15 éprouvettes par type de chargement) en utilisant la méthode de l'escalier (voir chapitre suivant) pour une durée de vie de 10^6 cycles, sur des éprouvettes lisses ($k_t(\text{flex}) = 1.07$ et $k_t(\text{tors}) = 1.05$) cylindriques de révolution (diamètre utile de 12 mm pour la fonte EN-GJS800-2 et 10 mm pour l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu et l'acier C18 recuit). La limite d'endurance en traction de l'acier 30NiCrMo16 provient d'essais réalisés par Galtier [Gal93] à 10^7 cycles (éprouvettes avec $k_t(\text{trac}) = 1,05$, $\emptyset = 7.98$ mm).

Nota : Dans les paragraphes suivants, toutes les contraintes sont des contraintes locales élastoplastiques calculées par éléments finis.

Matériau	$\sigma_{trac,-1}^D$ (MPa)	$\sigma_{Fp-cyl,-1}^D$ (MPa)	$\sigma_{Fr,-1}^D$ (MPa)	τ_{-1}^D (MPa)
Fonte EN-GJS800-2	245	294	280	220
Acier 30NiCrMo16 trempé revenu	560	690	658	428
Acier C18 recuit	273	332	310	186

TAB. 1.6 – Limites d’endurance expérimentales (sur éprouvettes lisses cylindriques de révolution, $R_\sigma=-1$) à 10^6 cycles, sauf pour l’acier 30NiCrMo16 : 10^7 cycles.

Traction

Pour tous les critères, excepté celui du LAMEFIP, les limites d’endurance utilisées pour identifier les paramètres sont les limites en traction ($R_\sigma = -1$) et en torsion ($R_\sigma = -1$). Pour les essais de traction à 10^7 cycles sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu, les erreurs relatives de prévision des critères sélectionnés : Dang Van (DV), Papadopoulos (Pa), Crossland (Cr), Morel (Mo) et LAMEFIP (Lam) sont présentées dans le tableau 1.7 et illustrées sur la figure 1.18.

n°	σ_a^D (MPa)	$\bar{\sigma}^D$ (MPa)	ERP_{Lam} (%)	ERP_{DV} (%)	ERP_{Pa} (%)	ERP_{Cr} (%)	ERP_{Mo} (%)
1	235	745	10.2	-28.5	-60.8	-60.8	-29.3
2	251	704	11.1	-26.3	-54.6	-51	-26.7
3	527	222	2.3	8.3	4	27.9	7.8

TAB. 1.7 – Résultats d’essais de traction sur des éprouvettes lisses ($k_t(trac)=1,05$) en acier 30NiCrMo16 trempé revenu à 10^7 cycles et ERP (%) des critères étudiés.

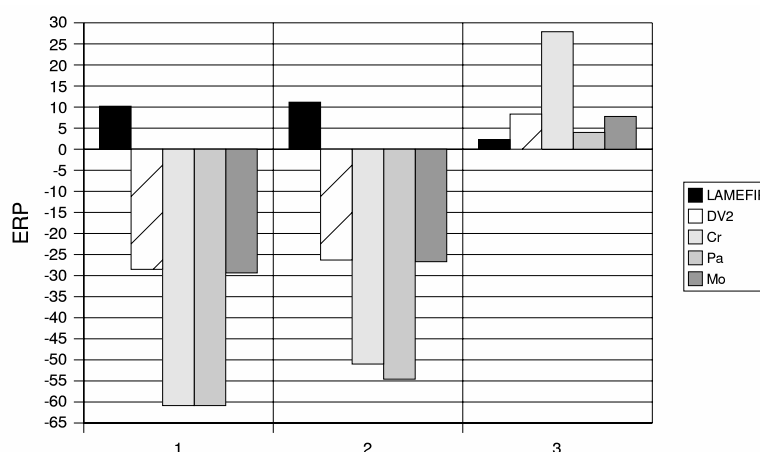


FIG. 1.18 – Erreur Relative de Prévision (ERP en %) des critères étudiés pour les essais de traction sur des éprouvettes lisses ($k_t(trac)=1,05$) en acier 30NiCrMo16 trempé revenu.

σ_a^D et $\bar{\sigma}^D$ sont respectivement les valeurs expérimentales de l’amplitude et de la moyenne de la contrainte axiale, à la limite d’endurance. Les erreurs relatives de pré-

vision hors de l'intervalle $[-20\%; +20\%]$ sont notées en gras dans les tableaux. Sur ces trois essais, il apparaît que les prévisions du critère du LAMEFIP sont meilleures que les prévisions des quatre autres (avec des erreurs relatives inférieures ou proches de 10%). De plus, les prévisions du critère du LAMEFIP sont conservatives dans les trois cas de chargement. Pour un fort chargement moyen, les critères de Papadopoulos et de Crossland atteignent -60% d'Erreur Relative de Prédiction, leur utilisation est donc à proscrire dans ce cas là.

Flexion plane

Les confrontations des résultats d'essais de flexion plane réalisés à 10^6 cycles par Froustey [Fro87] sur des éprouvettes lisses ($K_t(flex) = 1,06$, $\emptyset = 7.76$ mm) en acier 30NiCrMo16 trempé revenu, avec les prévisions des critères sélectionnés sont présentées dans le tableau 1.8 et illustrées sur la figure 1.19. Pour tous les critères, excepté celui

n°	matériau	σ_a	$\bar{\sigma}$	ERP_{Lam}	ERP_{DV}	ERP_{Pa}	ERP_{Cr}	ERP_{Mo}
4	30NiCrMo16	558	428	-4	-8.8	-18.3	-18.3	-9.3
5	30NiCrMo16	575	375	-7.3	-7.3	-15.7	-15.5	-8
6	30NiCrMo16	627	273	-6.5	-1.6	-7	-7	-2.1
7	30NiCrMo16	679	156	-3.8	3	0	0	2.2
8	EN-GJS800-2	184	225	-10.3	-19	-25	-32	-12.5

TAB. 1.8 – Limites d'endurance expérimentales à 10^6 cycles en flexion plane sur éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu. Erreurs Relatives de Prédiction des différents critères (en %).

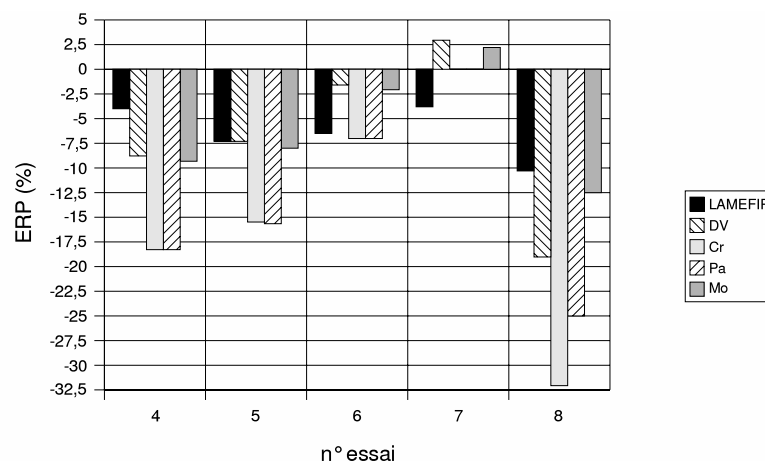


FIG. 1.19 – Comparaison des Erreurs Relatives de Prédiction des critères étudiés pour les essais de flexion plane sur des éprouvettes lisses ($k_t(flex)=1,06$) en acier 30NiCrMo16 trempé revenu [Fro87].

du LAMEFIP⁷, les limites d'endurance utilisées pour identifier les paramètres sont les

⁷La limite d'endurance en flexion plane est prédite par ce critère

limites en flexion plane et en torsion. Tous les critères testés fournissent des prévisions globalement bonnes, mis à part pour l'essai n°8 (fort chargement moyen). Ces prévisions sont non conservatives pour tous les critères. Les prévisions du critère du LAMEFIP sont meilleures que les celles des autres pour les essais 4, 5, 8 avec des erreurs dans tous les cas comprises entre 0 et $\simeq -10\%$. Les critères testés sont donc bien adaptés à des trajets de chargement proportionnels.

Flexion plane et torsion combinées

Les résultats d'essais de flexion plane et torsion combinées proviennent de la thèse de Dubar [Dub92] pour l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu et de la thèse de Palin-Luc [Pl96] pour l'acier C18 recuit et la fonte EN-GJS800-2. Tous les essais ont été réalisés à 10^6 cycles. Le tableau 1.9 rassemble les conditions d'essais et les Erreurs Relatives de Prévision des différents critères évalués. Dans ce tableau, les Erreurs Relatives de Prévision hors de l'intervalle $[-20\%; +20\%]$ sont surlignées en gras. On remarque que les méthodes de Dang Van et de Crossland sont hors de cet intervalle à 6 reprises pour des chargements déphasés (trajet non proportionnel). Les essais n°21 et 30 sont inscrits en italique car les conditions de chargement génèrent une contrainte équivalente de Von Mises qui dépasse largement la résistance maximum en traction R_m . Ils sont donc à considérer avec précaution. Pour améliorer la lisibilité, nous avons représenté l'illustration des différentes confrontations, sur la figure 1.20, en deux diagrammes : le diagramme 1.20-a représente les *ERP* pour l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu (essais n° 9 à 30), le diagramme 1.20 est relative à l'acier C18 recuit et à la fonte EN-GJS800-2 (essais n°31 à 36)⁸.

Ces diagrammes mettent en évidence que sur l'ensemble de ces essais les critères de Morel, Papadopoulos et du LAMEFIP donnent les meilleures prévisions : elles ne sortent jamais de l'intervalle $[-20\%; +20\%]$. Sur les 27 essais de flexion plane et torsion combinées testés les propositions de Morel et Papadopoulos ont 5 prévisions en dehors de l'intervalle d'erreur $[-10\%; +10\%]$. Pour la proposition du LAMEFIP, 8 prévisions dépassent $\pm 10\%$, mais sont inférieures à $\pm 20\%$ d'erreur relative. D'une manière générale, les prévisions de tous les critères sont assez souvent non conservatives ce qui poserait un problème dans le cadre d'une utilisation en bureau d'études.

⁸Les notations de l'acier 30NiCrMo16 et de la fonte EN-GJS800-2 ont été respectivement abrégées dans ce tableau en 30NCD16 et GS800.

n°	matériau	σ_a	$\bar{\sigma}$	τ_a	$\bar{\tau}$	ϕ	ERP <i>lam</i>	ERP <i>DV</i>	ERP <i>Pa</i>	ERP <i>Cr</i>	ERP <i>Mo</i>
9	30NCD16	519	0	291	0	0	-8.1	5.4	2.7	2.7	4.8
10	30NCD16	514	0	288	0	90	-9.1	-36.4	1.7	-34.2	-7.6
11	30NCD16	451	294	250	191	0	-3.3	-0.4	-9.3	-9.3	-1.1
12	30NCD16	462	294	258	191	90	-0.4	-39.6	-6.3	-45	-10.2
13	30NCD16	474	294	265	0	45	-8.4	-3.4	-3.6	-11.6	-2.3
14	30NCD16	464	294	259	0	60	-10.8	-13.1	-5.8	-21.1	-8.2
15	30NCD16	554	287	135	0	45	-11.9	-9.4	-12.1	-15.9	-9.4
16	30NCD16	474	0	265	0	90	-18.6	-48.1	-6.7	-45.6	-16.9
17	30NCD16	220	199	368	0	90	-4.5	-6.8	-4.1	-10	0
18	30NCD16	470	299	261	0	90	-9.1	-37.4	-4.7	-42.5	-8.3
19	30NCD16	527	287	129	0	90	-17.6	-20.5	-17.8	-27.1	-15.6
20	30NCD16	433	472	240	0	90	2.8	-41.6	-11.8	-51.7	-11.3
21	<i>30NCD16</i>	<i>418</i>	<i>622</i>	<i>234</i>	0	90	16.7	-38.5	-13.4	-54.8	-9.3
22	30NCD16	0	299	396	0	0	-7.6	1	-4.8	-4.8	0.5
23	30NCD16	0	486	411	0	0	-3.6	10	1	1	9.5
24	30NCD16	0	655	364	0	0	-17	4.1	-9.9	-9.9	3.6
25	30NCD16	482	0	268	0	0	-16.8	-2.7	-5.2	-5.2	-2.3
26	30NCD16	207	299	350	0	0	-10.1	-1	-9.7	-9.7	-1.5
27	30NCD16	474	294	265	0	0	-8.4	4.8	-3.6	-3.6	4.2
28	30NCD16	584	281	142	0	0	-6.7	0	-6.3	-6.5	-0.7
29	30NCD16	447	473	252	0	0	6.5	4.9	-7.4	-7.4	4.5
30	<i>30NCD16</i>	<i>425</i>	<i>635</i>	<i>223</i>	0	0	17.9	1.9	-14.6	-14.6	1.4
31	C18	246	0	138	0	0	-1.2	6.9	6.9	4.1	13.4
32	C18	264	0	148	0	90	5.7	-23.1	1.9	-25.4	8.7
33	C18	246	0	138	0	45	-1.2	1.2	0	-4.1	6.9
34	GS800	199	0	147	0	0	-9.5	3	0.5	0	6.
35	GS800	245	0	142	0	90	0.8	-22	8.9	-19.6	5.3
36	GS800	228	0	132	0	0	-6.6	4.8	2.2	2.2	7.6

TAB. 1.9 – Limites d’endurance expérimentales à 10^6 cycles en flexion plane et torsion combinées sur des éprouvettes lisses en acier 30NCD16 trempé revenu, C18 recuit et en fonte EN-GJS800-2. Erreurs Relatives de Prévision (en %) des différents critères étudiés.

Flexion rotative et torsion combinées

Deux essais à 10^6 cycles en flexion rotative et torsion combinées sur éprouvettes lisses cylindriques de révolution, ont été réalisés par Froustey [Fro87] et repris par Dubar [Dub92]. Pour ces essais, les limites d’endurance utilisées pour calculer les paramètres des critères de Dang Van, Papadopoulos, Crossland et Morel sont les limites en flexion plane ($R_\sigma = -1$) et en torsion ($R_\tau = -1$).

Le tableau 1.10 rassemble les conditions expérimentales de chargement (contraintes en MPa) et les Erreurs Relatives de Prévision des critères.

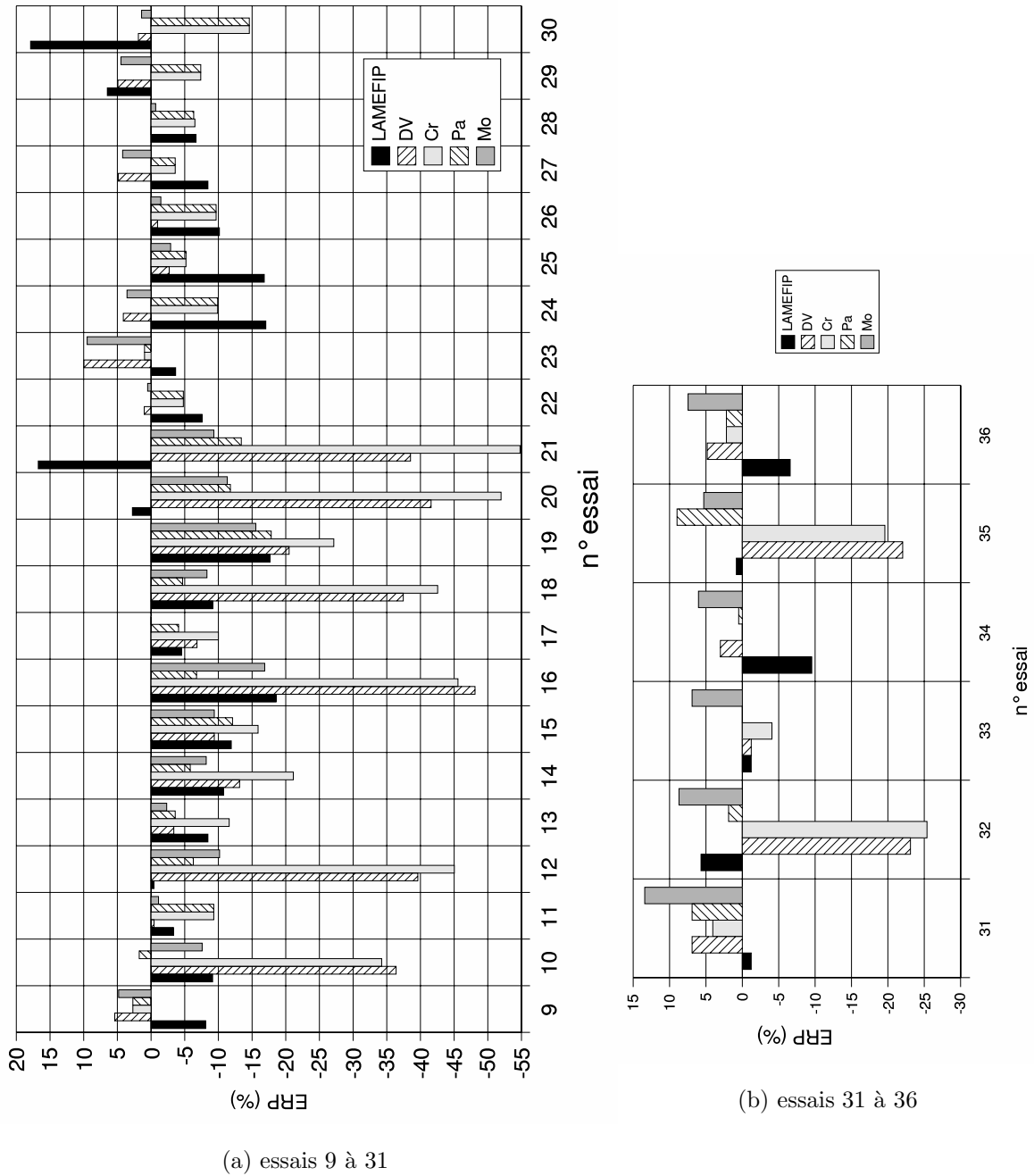


FIG. 1.20 – Erreur Relative de Prédiction (ERP en %) des critères étudiés pour les essais de flexion plane et de torsion combinées sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu.

N°	Matériau	σ_a	$\bar{\sigma}$	τ_a	$\bar{\tau}$	ϕ	ERP_{lam}	ERP_{DV}	ERP_{Pa}	ERP_{Cr}	ERP_{Mo}
37	30NiCrMo16	337	0	328	0	0	-8	-4.8	-8.3	-8.3	-5.3
38	30NiCrMo16	482	0	234	0	0	-9.1	-8.9	-11.4	-11.4	-9.5

TAB. 1.10 – Limites d’endurance expérimentales à 10^6 cycles en flexion rotative et torsion combinées sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu à 10^6 cycles. Erreurs Relatives de Prévion (%) des critères étudiés.

La figure 1.21 montre que toutes les prédictions sont non conservatives mais de bonne qualité ($|ERP| < 12\%$) pour ces essais. Les prévisions des propositions du LAMEFIP, de Dang Van et de Morel sont correctes pour ces 2 essais.



FIG. 1.21 – Erreurs Relatives de Prévion des critères étudiés pour les essais de flexion rotative et torsion combinées réalisées sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu.

1.1.6 Conclusion

Après une description d’un certain nombre de critères de fatigue, nous avons confronté les prévisions de cinq d’entre eux à des résultats d’essais de fatigue. Cette confrontation et l’exploitation des études bibliographiques existantes permettent de distinguer deux critères : les critères du LAMEFIP et Morel. En effet, ce sont les critères offrant les meilleurs prévisions pour les trajets de chargement aussi bien proportionnels que non proportionnels. Les autres présentent souvent des erreurs relatives nettement supérieures à 10%. De plus, ces derniers sont non conservatifs ce qui rend leur utilisation dangereuse pour les bureaux d’études. Mais le critère du LAMEFIP, le seul avec une approche volumique testé, est apte à prévoir les effets, sur la limite de fatigue, des différents types de chargement (traction, flexion rotative, flexion plane) et à prendre en compte la répartition volumique des contraintes. Les essais sous chargements combinés déphasés montrent clairement les insuffisances des critères de Dang Van et de Crossland.

De plus, pour les critères ponctuels, les prévisions peuvent varier de façon importante selon la limite d'endurance uniaxiale utilisée pour identifier les paramètres (traction $\sigma_{Trac,-1}^D$ ou flexion plane $\sigma_{FP,-1}^D$; avec la limite en torsion). Par exemple, pour un chargement de traction, utiliser la limite de flexion plane peut faire varier la prévision de plus de 75%. Dans un cas industriel, il est souvent très délicat de savoir si on identifie d'après la limite en traction ou flexion compte-tenu de la pièce. Les critères ponctuels ne distinguent pas les sollicitations générant un état de contrainte uniaxial (traction, flexion plane, flexion rotative) bien que les limites d'endurance expérimentales soient différentes (jusqu'à 20 à 30% entre traction et flexion plane).

Un critère de fatigue déterministe ne permet pas de vraiment quantifier le risque de fissuration, puisque sa réponse est binaire (fissuration : oui/non avant un nombre de cycles fixé). La suite de ce chapitre présente différentes approches probabilistes permettant de mieux quantifier ce risque.

1.2 Probabilités appliquées à la fatigue

S'il est un point qui, dans un premier temps, dérouté un peu l'expérimentateur débutant dans des essais de fatigue, c'est bien la dispersion des résultats qu'il observe. Ceci peut lui faire dire que cette dispersion est l'une des caractéristiques principales du phénomène de fatigue. Un critère de fatigue déterministe ne tient pas compte de cette dispersion, il se contente de fournir une réponse binaire à la question : "la pièce va-t-elle se fissurer avant un nombre de cycles fixé?" Pour palier cet inconvénient majeur, différentes approches probabilistes sont maintenant présentées.

1.2.1 Approche contrainte-résistance

La théorie de la contrainte et de la résistance consiste à déterminer la probabilité pour que la résistance R , à la contrainte appliquée à la pièce étudiée, soit supérieure aux contraintes, σ_i effectivement appliquées pendant toute la mission considérée [ML74]. Cette situation est schématisée figure 1.22. La variabilité naturelle de chacun des paramètres R et

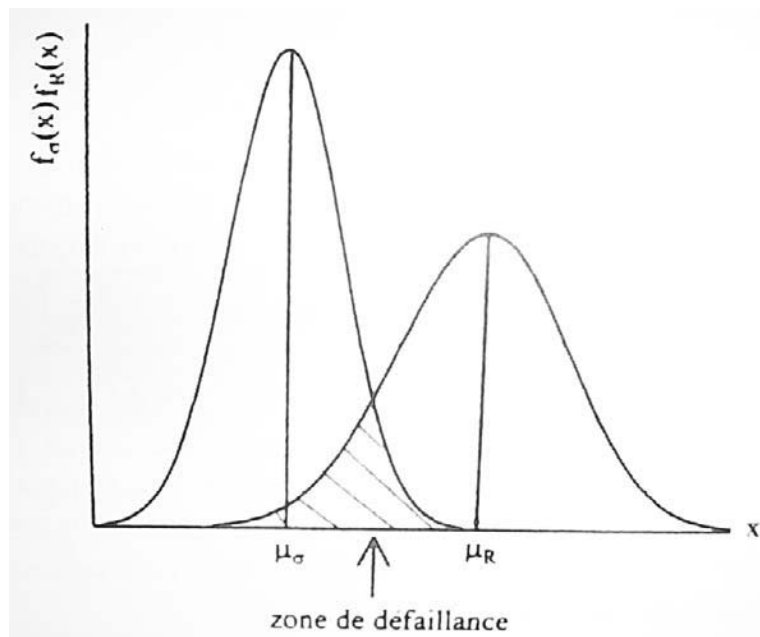


FIG. 1.22 – densités de probabilité de R et σ d'après [ML74]

σ étant représentée par une densité de probabilité, il peut y avoir recouvrement de ces deux courbes; ce recouvrement représente la zone où des défaillances peuvent apparaître (fig. 1.22). Des situations critiques pour lesquelles la contrainte appliquée dépasse la résistance et entraîne la défaillance de la structure peuvent ainsi exister. La probabilité de défaillance (ou de fissuration P_f si la fissuration constitue le critère de défaillance) est donnée par la relation (1.100).

$$P_f = Prob(\sigma > R) \text{ ou } P_f = Prob\left(\frac{\sigma}{R} > 1\right) \quad (1.100)$$

Le calcul de la probabilité de défaillance nécessite [Fou97a] :

- un modèle mécanique qui traduit la réponse de la structure vis à vis d'un scénario de défaillance (loi de comportement, écoulement plastique, propagation d'un défaut, etc. . .) : il s'agit du modèle de sollicitation,
- un critère de résistance ou d'état limite, qui fixe le seuil au delà duquel il y a défaillance (limite de fatigue du matériau, critère de fatigue, seuil de propagation de fissures, . . .) : il s'agit du modèle de résistance qui doit traduire au mieux le phénomène physique considéré.
- la connaissance de la variabilité des paramètres (considérés comme des variables aléatoires) intervenant dans le dimensionnement de la structure.

Si la contrainte et la résistance peuvent être décrits par une loi normale, le calcul de la probabilité de défaillance P_f est le suivant [Fou97a] :

$$P_f = Prob(\sigma > R) = \phi(-\beta) \quad (1.101)$$

avec

$$\beta = \frac{m_\sigma - m_R}{\sqrt{s_R^2 + s_\sigma^2}} \quad (1.102)$$

où ϕ représente la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite, β l'indice de fiabilité, m_σ , m_R les médianes des lois normales décrivant respectivement la contrainte et la résistance; s_σ et s_R sont les écart-types associés. Dans tous les autres cas, différentes méthodes de calcul permettent d'estimer la probabilité de défaillance dont :

- la méthode analytique [Fou97b] permettant le calcul direct de la probabilité de défaillance P_f à partir de l'équation (1.100). Cela nécessite la connaissance de la densité de probabilité du rapport $\frac{\sigma}{R}$; mais ceci est souvent difficile a priori. Pour contourner cette difficulté, des méthodes de calcul approchées sont souvent utilisées.
- la méthode de calcul approché de Monte-Carlo [SP69]. A partir de tirages aléatoires, la méthode de Monte-Carlo consiste à simuler un très grand nombre de fois la résistance et la contrainte puis à les comparer et à compter le nombre d'événements de défaillance obtenus ($\sigma > R$). Si n est le nombre de simulations, on admet que la fréquence d'événements de défaillance tend vers la probabilité de défaillance lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$P_f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{nombre des événements } (\sigma > R)}{\text{nombre total des événements simulés}} \quad (1.103)$$

Une telle procédure présente l'intérêt de la simplicité, à condition de savoir simuler correctement une variable aléatoire ayant une loi de probabilité donnée. Mais la vitesse de convergence de cette méthode est très lente (elle est proportionnelle à \sqrt{n} [SP69]).

1.2.2 Approches probabilistes

Les méthodes probabilistes précédentes peuvent masquer les phénomènes physiques mis en jeu dans le processus de ruine par fatigue. Les approches probabilistes maintenant

présentées se proposent de prendre en compte les défauts présents dans le matériau.

1.2.2.1 Modèle de Weibull

Le modèle de Weibull [Fre68], [Wei39a], [Wei39b] a été développé pour les matériaux fragiles notamment pour des sollicitations de torsion et de flexion rotative. Le but de ce modèle était d'établir une relation entre la probabilité de fissuration, la contrainte appliquée et le nombre de cycles :

$$f(P_F, \sigma, N_f) = 0 \quad (1.104)$$

où P_F représente la probabilité cumulée de fissuration (comprise entre 0 et 1), σ est la contrainte appliquée et N_f , le nombre de cycles à fissuration. La loi proposée par Weibull est empirique et ne correspond qu'à l'analyse d'une banque de données importante concernant les matériaux fragiles. Elle repose sur les hypothèses du concept du maillon le plus faible développé par Weibull. Ce modèle suppose que la rupture d'un élément de la structure conduit à la ruine instantanée de toute la structure. L'élément le moins résistant est responsable de la ruine de l'ensemble de la structure étudiée comme "le maillon le moins résistant d'une chaîne tendue". Cette théorie repose sur quelques hypothèses fondamentales :

- La structure est considérée comme une juxtaposition d'éléments parfaitement indépendants du point de vue de leur ruine.
- La rupture de l'élément le plus faible entraîne la ruine de la structure toute entière.
- L'interaction entre les maillons faibles ("défauts") est négligée. Cette hypothèse est vérifiée dans la plupart des cas pratiques si la distance moyenne entre les défauts est suffisamment grande par rapport à la taille des défauts.

Weibull considère donc l'éprouvette comme si elle était composée de nombreuses petites unités de même volume élémentaire représentatif V_{er} , chacune possédant une contrainte à fissuration intrinsèque, σ_0 , laquelle pouvant être différente pour chaque unité, et une probabilité de fissuration $P_{F0}(\sigma_0)$. Ces contraintes forment une série de "maillons faibles". La figure (1.23) illustre le concept du maillon le plus faible et le parallèle entre une chaîne tendue et une structure :

- Une chaîne tendue dont les maillons ont une contrainte seuil variable est représentée (fig. 1.1a)
- Chaque maillon possède une probabilité de fissuration différente (fig. 1.1b)
- La structure comporte de nombreux défauts (maillons) de probabilités de fissuration différentes (fig. 1.1c).

En fait, le modèle de Weibull implique que la rupture complète se produit quand l'augmentation de charge fait dépasser à n'importe quel élément de volume de l'éprouvette sa valeur limite de contrainte à rupture. Cette approche a été appelée préalablement la théorie du pire défaut de Weibull [Ros97].

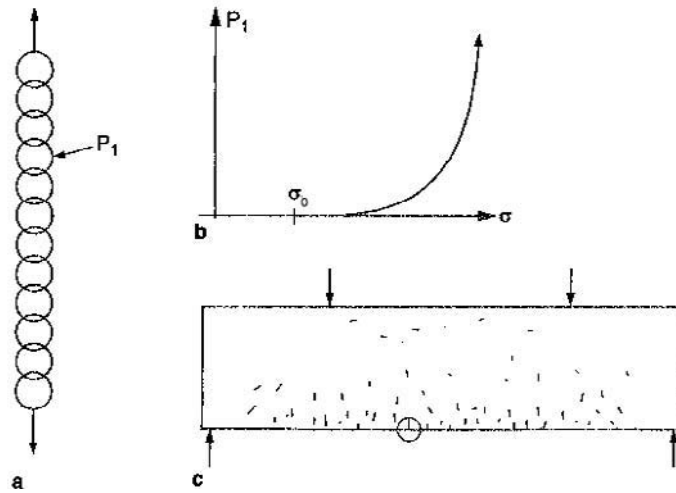


FIG. 1.23 – Représentation du concept du maillon le plus faible.

La théorie statistique de l'effet d'échelle [Baz99] a rendu possible la formulation du concept du maillon le plus faible pour une chaîne. L'analyse d'un grand nombre de résultats expérimentaux a permis à Weibull de conclure que la queue de la distribution des valeurs de contraintes pour de très faibles probabilités ne pouvait être représentée par aucune des distributions déjà connues. Il a introduit ce qui allait devenir la distribution de Weibull, laquelle prévoit la probabilité de fissuration d'un petit élément de matière comme une loi puissance de la différence de contrainte par rapport à un seuil (qui peut être nul). Freudenthal [Fre68] a, par la suite, offert une justification théorique au moyen d'une distribution de défauts microscopiques.

Pour une structure de volume total V , la théorie du maillon le plus faible permet d'écrire la probabilité de survie de la structure en fonction des probabilités de fissuration des volumes élémentaires représentatifs :

$$P_S(V) = \prod_i P_S(V_{er,i}) = 1 - \exp\left[-\sum_i \varphi_i V_{er,i}\right] \quad (1.105)$$

où φ_i caractérise la probabilité de survie du volume $V_{er,i}$, cette fonction est explicitée par la suite. La théorie du maillon le plus faible impose une condition d'indépendance, en effet, pour deux volumes disjoints, V_1 et V_2 , la probabilité de survie des 2 volumes est le produit des probabilités de survie de chaque volume si V_1 et V_2 n'interagissent pas :

$$P_S(V_1 + V_2) = P_S(V_1) \cdot P_S(V_2) \quad (1.106)$$

En faisant tendre les volumes élémentaires représentatifs vers 0, le modèle du maillon le plus faible conduit à la distribution (1.107) pour décrire la rupture d'une chaîne dont les maillons ont des contraintes seuil aléatoirement distribuées [Baz99] :

$$P_F(V) = 1 - \exp\left\{-\int \int \int_V \varphi(x, y, z) dV\right\} \quad (1.107)$$

L'équation (1.107) représente la probabilité de fissuration d'une structure dont la ruine intervient dès qu'une fissure macroscopique est amorcée suite à une microfissure (ou des défauts) quelque part dans la structure. $\varphi(x, y, z)$ est la fonction donnant la concentration spatiale de probabilité de fissuration du matériau en fonction de la contrainte σ ($= V_{er}^{-1} \times$ probabilité de fissuration du volume représentatif V_{er}) introduite par Weibull [Fre68].

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{V_{er}} \left\langle \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_u} \right\rangle^m \quad (1.108)$$

où m représente le module de Weibull, c'est un paramètre de forme donnant une idée de l'étalement des contraintes par rapport à l'étendue des probabilités cumulées de rupture, habituellement sa valeur est comprise entre 5 et 50, σ_u est un paramètre d'échelle, σ_0 le seuil en contrainte en dessous duquel la densité de probabilité de fissuration est nulle et $\langle \rangle$ est le symbole de Mac Cauley. La loi de Weibull à trois paramètres [SP69] peut donc s'écrire sous la forme :

$$P_F(V) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{V_o} \int \int \int_V \left\langle \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_u} \right\rangle^m dV \right] \quad (1.109)$$

Pour fortement simplifier les calculs, la contrainte seuil σ_0 est souvent considérée nulle ce qui donne la loi de Weibull dite à deux paramètres :

$$P_F(V) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{V_o} \int \int \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_u} \right)^m dV \right] \quad (1.110)$$

1.2.2.2 Probabilité intégrée à la microstructure

La microstructure de tout métal présente des défauts d'élaboration (inclusions, porosités, lacunes, etc...). Pour Chantier [Cha00], [CBBH99a], [CBBH99b] qui reprend les travaux menés par Y. Agha dans l'équipe de F. Hild [HM92], [Agh96], il convient d'introduire l'existence de ces défauts dans l'étude de la durée de vie d'une pièce sollicitée en fatigue. Le modèle est alors probabiliste par le caractère aléatoire de la taille des défauts et de leur répartition spatiale dans le matériau [HM92], [Agh96], [ABBH98]. La figure 1.24 montre un défaut, ici un nodule de graphite, dans une éprouvette en fonte à graphite sphéroïdal.

Les hypothèses suivantes sont formulées par les auteurs :

- Les défauts initiaux sont des cavités de forme sphérique (retassures) ou des inclusions sphériques fragiles avec des contraintes de cohésion faibles (nodules). Elles sont assimilées à des fissures préexistantes de taille $2a$ distribuées de façon aléatoire.
- Les défauts n'interagissent pas entre eux.
- La propagation d'une fissure de fatigue mésoscopique se fait perpendiculairement à la contrainte principale maximale σ_{max} .
- Un seul paramètre a décrit la géométrie de la fissure, car l'auteur considère qu'il n'y

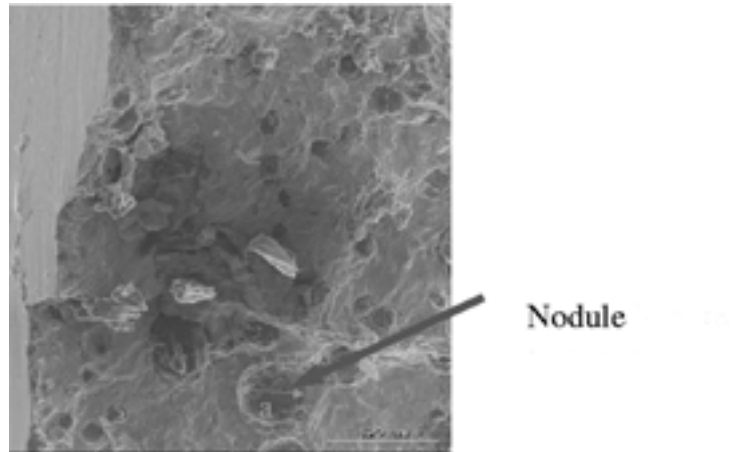


FIG. 1.24 – Micrographie d'un faciès de rupture d'une éprouvette en fonte GS.

a pas de changement de morphologie significatif de la fissure pendant la microfissuration.

- Le facteur d'intensité de contrainte associé s'écrit $K = Y\sigma_{eq}\sqrt{a}$ où le paramètre adimensionnel Y caractérise la géométrie de la fissure [Mur81] et σ_{eq} désigne une contrainte équivalente.
- Tous les défauts existent avant le cyclage en fatigue de l'éprouvette ou de la pièce, aucune génération de défaut ne peut se produire pendant l'histoire de chargement.

Des observations microscopiques sur une fonte GS ont conduit l'auteur à introduire la fonction de densité de probabilité f_0 pour décrire la distribution des tailles de défaut [ABBH98] :

$$f_0(a) = \frac{a^\alpha (a_M - a)^\beta}{B_{\alpha\beta} a_M^{\alpha+\beta+1}} \text{ avec } B_{\alpha\beta} = \int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta du \quad (1.111)$$

où α et β sont des paramètres ajustables de la fonction bêta, $B_{\alpha\beta}$ est la fonction eulérienne de première espèce encore appelée bêta [Agh96] et a_M désigne la taille maximale de défaut ($0 \leq a \leq a_M$). Un volume élémentaire V_0 contenant les défauts représentés par la distribution initiale f_0 est considéré. D'une manière générale, la probabilité de fissuration recherchée correspond à la probabilité de trouver des défauts dont la taille est supérieure à une taille critique dépendant du type de sollicitation. Sous chargement monotone, soit pour un nombre de cycles nul, l'expression de la probabilité de fissuration dépend de la distribution initiale de la taille des défauts et de la taille du plus petit défaut critique :

$$P_{F0} = \int_{a_c}^{+\infty} f_0(a) da \text{ avec } a_c = \left(\frac{K_c}{Y\sigma_{max}} \right)^2 \quad (1.112)$$

Sous chargement cyclique, la densité initiale f_0 évolue avec le nombre de cycles à rupture N pour devenir f_N . La probabilité de rupture P_{F0} dépend alors de f_N . Il s'agit alors de la probabilité de trouver des défauts de taille supérieure à a_c au bout de N cycles :

$$P_{F0} = \int_{a_c}^{+\infty} f_N(a) da \text{ avec } a_c = \left(\frac{K_c}{Y\sigma_{max}} \right)^2 \quad (1.113)$$

En supposant qu'aucun défaut n'est généré au cours de l'histoire de chargement, la probabilité de trouver un défaut de taille égale à a_N au bout de N cycles est la même que celle de trouver une taille de défaut initial a_0 . En introduisant la taille initiale de défaut a_{c0} qui deviendra critique après N cycles de chargement, P_{F0} devient :

$$P_{F0} = \int_{a_{c0}}^{+\infty} f_0(a) da \quad (1.114)$$

Pour l'auteur, augmenter le nombre de cycles à rupture N_f conduit à "activer" plus de petits défauts. Ceux ci deviennent alors critiques pour la survie de la structure. Ainsi, plus le nombre de cycles considéré augmente, plus la taille critique a_{c0} se réduit. Le matériau est supposé obéir à la théorie du maillon le plus faible. La probabilité de rupture P_F d'une structure complexe Ω de volume V est donc liée à P_{F0} par la relation (1.115).

$$P_F = 1 - \exp \left[\frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \ln(1 - P_{F0}) dV \right] \quad (1.115)$$

Cette équation peut être employée dans le cas des matériaux à comportement fragile ou quasi-fragile [Agh96]. Pour des chargements uniaxiaux (traction-traction ou traction-compression) cette expression devient :

$$P_F = 1 - (1 - P_{F0})^{\frac{V}{V_0}} \quad (1.116)$$

Un post-processeur a été développé pour évaluer la fiabilité des pièces soumises à des chargements cycliques en intégrant leur volume, l'hétérogénéité des contraintes et la distribution de la taille des défauts [CBBH99b]. Ce programme permet de prévoir les probabilités de rupture locales et la probabilité de rupture globale d'une structure. Il est, pour le moment, réservé aux états de contraintes uniaxiaux [CBBH99b].

1.2.2.3 Approche de Bomas

Basée également sur la théorie du maillon le plus faible, l'approche de Bomas [Bom99], [Bom00], [BLM99], [BMS97] cherche à établir une relation entre la distribution de la taille des défauts et la probabilité de fissuration. L'auteur distingue l'amorçage de fissure à la surface de la pièce et l'amorçage de fissure dans le volume de matière. Il considère que les effets, sur la tenue en fatigue, des défauts en surface et dans la matière sont différents et doivent être traités séparément. Dans un premier temps intéressons-nous à l'amorçage de fissure dans le volume.

En considérant un volume de référence V_0 , l'auteur exprime la probabilité d'endurance⁹ de ce volume de référence comme une fonction de l'amplitude de contrainte équivalente :

$$P_E = 2 - \left(\frac{\sigma_{a,eq}}{\sigma_{Trac,V_0}^D} \right)^m \quad (1.117)$$

⁹Équivalente à la probabilité de survie

où σ_{Trac,V_0}^D est la limite d'endurance pour un chargement en traction-compression du volume de référence V_0 . Ce dernier est alors divisé en éléments de volume dV ayant la probabilité suivante d'endurance dérivée de l'équation (1.117) à l'aide des règles de calcul de probabilité :

$$P_E(dV) = 2^{-\left(\frac{dV}{V_0}\right) \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{Trac,V_0}^D}\right)^m} \quad (1.118)$$

L'auteur reprend les hypothèses du concept du maillon le plus faible. La probabilité d'endurance du volume total peut être calculée par le produit des probabilités de tous les éléments de volume, ce qui se traduit par une intégration dans l'exposant. L'auteur postule que la probabilité totale d'endurance prenant en compte l'amorçage de fissure à la surface (notée A) et dans le volume (notée V) est le produit des probabilités d'endurance pour la surface et le volume (1.119). Ceci suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux types d'amorçage et que les deux probabilités sont indépendantes.

$$P_E(A + V) = P_E(A) \cdot P_E(V) \quad (1.119)$$

L'auteur utilise ensuite une version simplifiée du critère de Dang-Van afin de définir une amplitude de contrainte équivalente qui sera introduite dans les probabilités d'endurance définies précédemment. Il reprend l'hypothèse de non interaction entre les deux types d'amorçage. Pour l'amorçage de fissures dans le volume, le critère s'écrit :

$$\tau_{a,max} + \alpha_V \Sigma_{Hmax} = \beta_V \quad (1.120)$$

où $\tau_{a,max}$ est le maximum de l'amplitude de cission macroscopique et $\Sigma_{H,max}$ est la contrainte hydrostatique maximum sur le cycle de chargement. Bomas définit alors l'amplitude de contrainte équivalente par la relation :

$$\sigma_{a,eq,V} = \frac{\tau_{a,max} + \alpha_V \Sigma_{Hmax}}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha_V}{3}} \quad (1.121)$$

Pour l'amorçage en surface, le critère prend la forme suivante :

$$\tau_{a,max} + \alpha_A \Sigma_{Hmax} = \beta_A \quad (1.122)$$

Dans ce cas, l'amplitude de contrainte équivalente définie par l'auteur s'écrit :

$$\sigma_{a,eq,S} = 2(\tau_{a,max} + \alpha_A \Sigma_{Hmax}) \quad (1.123)$$

Les probabilités d'endurance sont alors :

$$P_E(A) = 2^{-\left(\frac{1}{A_0}\right) \int \int_A \left(\frac{(\tau_{a,max} + \alpha_A \Sigma_{Hmax})}{\tau_{A_0}}\right)^m dA} \quad (1.124)$$

$$P_E(V) = 2^{-\left(\frac{1}{V_0}\right)} \int \int \int_V \left(\frac{(\tau_{a,max} + \alpha_V \Sigma_{Hmax})}{\tau_{V_0}} \right)^m dV \quad (1.125)$$

où τ_{A_0} et τ_{V_0} représentent respectivement les limites d'endurance en torsion pure alternée correspondant à la surface de référence A_0 et au volume de référence V_0 . L'auteur propose la condition suivante pour la limite de fatigue avec une probabilité de fissuration $P_E = 0.5$:

$$\left(\frac{1}{A_0}\right) \int \left(\frac{(\tau_{a,max} + \alpha_{APmax})}{\tau_{A_0}} \right)^m dA + \left(\frac{1}{V_0}\right) \int \left(\frac{(\tau_{a,max} + \alpha_{VPmax})}{\tau_{V_0}} \right)^m dV = 1 \quad (1.126)$$

Des essais de fatigue sur éprouvettes cylindriques lisses et entaillées en acier à roulements SAE 52100 (DIN 100Cr6) présentant une dureté de 745 HV et dont les propriétés mécaniques usuelles sont reportées dans le tableau 1.11, ont été réalisés par Bomas afin de déterminer les limites de fatigue en flexion rotative ($R = -1$), traction-compression ($R = -1$), traction répétée ($R = 0, 1$) et torsion alternée ($R = -1$) à 5.10^6 cycles.

E (MPa)	$Re_{0,2}$ (MPa)	R_m (MPa)	ν
199000	2100	2600	0,27

TAB. 1.11 – Propriétés mécaniques usuelles de l'acier à roulements SAE 52100 (DIN 100Cr6) [BLM99]

La confrontation entre les limites de fatigue calculées et les limites de fatigue expérimentales est illustrée sur la figure 1.25. Les prévisions sont de bonne qualité pour ce matériau.

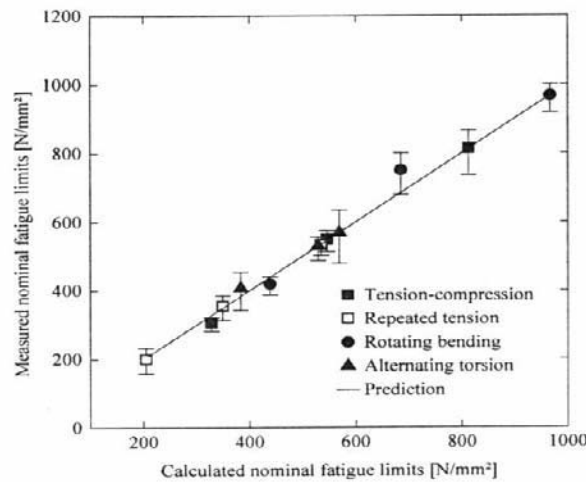


FIG. 1.25 – Confrontation entre les limites de fatigue calculées et expérimentales d'après [BLM99]

1.2.2.4 Approche développée au LMPM-ENSMA de Poitiers

Par une approche statistique de type Weibull, Flacelière [Fla01] propose une extension du critère de fatigue non local déterministe développé par Palin-Luc et Morel [MPLF01], [MPI02] permettant de quantifier les dispersions observées lors des différents essais de fatigue et l'aspect probabiliste de l'amorçage de fissure. L'outil de base utilisé est la théorie de Weibull présentée précédemment.

Approche volumique

Flacelière rapproche la forme de la loi de Weibull à 3 paramètres et les critères déterministes (1.95) et (1.96) pour proposer l'expression d'un critère probabiliste s'écrivant sous la forme :

$$P_F = 1 - \exp \left[-\frac{1}{V_0} \cdot \int_V \left(\frac{\langle \sigma_{eq} - \sigma_{eq}^* \rangle}{\sigma_u} \right)^m dv \right] \quad (1.127)$$

avec σ_{eq} dépendant du critère choisi :

$$\sigma_{eqt} = \max_{\varphi, \theta} [T_\sigma(\varphi, \theta)] + p_t \Sigma_{Hmax} \quad (1.128)$$

$$\sigma_{eqm} = M_\sigma + p_m \Sigma_{Hmax} \quad (1.129)$$

Pour caractériser complètement le modèle, il faut identifier 4 paramètres matériaux :

- σ_u : la contrainte de Weibull,
- m : la pente de Weibull,
- σ_{eq}^* : la contrainte équivalente seuil de non endommagement (en dessous de laquelle la probabilité de fissuration est nulle)
- p : la sensibilité du matériau à la contrainte hydrostatique.

Les paramètres sont identifiés à l'aide des limites d'endurance du matériau ($P_f = 0, 5$) pour différents types d'essais (traction-compression, torsion, flexion rotative, flexion plane) sur des éprouvettes plates en flexion plane et cylindriques de révolution pour les autres chargement. L'auteur a identifié les paramètres de Weibull pour plusieurs matériaux :

- la fonte EN-GJS800-2
- la fonte GS52
- l'acier 30NiCrMo16
- l'acier C18
- l'acier 35CrMo4

Les calculs prédictifs sont en bon accord avec les résultats expérimentaux médians ($P_f = 0, 5$). Mais les dispersions prévues sont alternativement trop ou pas assez dispersées. Ceci pourrait être dû à la non prise en compte des dispersions liées aux limites d'endurance expérimentales utilisées comme référence.

Approche surfacique

Les fissures de fatigue s'amorcent généralement à la surface des pièces¹⁰. Pourtant, le précédent modèle ne distingue pas surface et volume, Flacelière [FMN03] propose une nouvelle approche considérant uniquement la surface des pièces et non plus leur volume. Toujours basée sur la théorie du maillon le plus faible, la probabilité de fissuration est donnée par la relation (1.130).

$$P_F(\sigma_{eqS}) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{S_0} \cdot \int_S \left(\frac{\sigma_{eqS}}{\sigma_u} \right)^m dS \right] \quad (1.130)$$

où S représente l'aire de la surface libre de la pièce et S_0 une surface de référence. Cette approche uniquement surfacique ne peut prendre en compte l'effet sur la tenue en fatigue du gradient des contraintes, elle ne différencie donc pas les chargements. Afin de prédire des limites d'endurance différentes en traction et flexion rotative, l'auteur introduit dans la formulation du critère, comme Papadopoulos l'a proposé en 1996[PP96], un gradient normalisé de la contrainte hydrostatique G . La nouvelle expression de la contrainte équivalente σ_{eqS} est donnée par la relation (1.131).

$$\sigma_{eqS} = M_\sigma + p \left(1 - \beta \left\langle \frac{G}{\Sigma_{H,max}} \right\rangle^n \right) \Sigma_{H,max} \quad (1.131)$$

avec

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial \Sigma_{H,max}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma_{H,max}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Sigma_{H,max}}{\partial z} \right)^2} \quad (1.132)$$

où $(P; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère cartésien fixe lié à la pièce au point critique P considéré, situé en surface.

Ce critère fait intervenir 5 paramètres : m , p , $S_0\sigma_0^m$, β et n . Dans un premier temps, l'auteur suppose $n = 1$. L'identification des paramètres n'est pas présentée d'une façon claire, l'auteur proposant d'utiliser les distributions d'endurance de fatigue en torsion, en traction et flexion rotative. Ce critère a été appliqué à l'acier C36 et la comparaison entre la distribution expérimentale en torsion et les prévisions des modèles surfaciques et volumiques rend compte d'un faible écart entre prévision et expérience. Les deux modèles fournissent les mêmes prévisions. Les deux modèles ont également été appliqués à la fonte GS52 dont les limites d'endurance en traction et flexion rotative sont identiques, ce qui est rare. Le modèle surfacique donne des prévisions proches des données expérimentales pour la flexion rotative ; au contraire du modèle volumique présentant environ 25% d'erreur sur la prévision de la médiane.

¹⁰Lieu où les contraintes sont souvent maximales (flexion, torsion) et où l'état de surface influence l'amorçage de fissure.

1.2.2.5 Modèle probabiliste à deux échelles

Dans sa version déterministe, ce modèle à deux échelles [DCC⁺03] [HDFB03] repose sur une approche mésoscopique proche de celle de Morel. Il repose sur l'idée qu'en fatigue à grand nombre de cycles, l'endommagement est lié à un phénomène de plasticité localisée à l'échelle du grain. Le modèle considère deux phases. La première, l'inclusion, représente l'ensemble des grains dans lesquels la micro-plasticité se développe ; la seconde, la matrice, représente les autres grains à comportement supposé purement élastique. L'inclusion a un comportement élasto-plastique avec une limite d'élasticité σ_y^μ inférieure à la limite d'élasticité du matériau à l'échelle macroscopique. Ce modèle est couplé à un critère énergétique en supposant l'existence pour le matériau d'une énergie dissipée critique. En faisant l'hypothèse que cette énergie est constante par cycle, l'auteur détermine le nombre de cycles à fissuration N_f par la relation (1.133).

$$N_f = \frac{A}{(\Delta\Sigma - \sigma_y^\mu)\sigma_y^\mu} \quad (1.133)$$

où $\Delta\Sigma$ est l'amplitude de la contrainte, A est un paramètre dépendant du matériau.

Le modèle présenté par Doudard suppose que l'aspect probabiliste est lié à la limite d'élasticité mésoscopique. L'auteur définit le volume élémentaire représentatif actif, comme le VER dont la limite d'élasticité initiale a été dépassée. Il fait l'hypothèse que le nombre de VER actifs suit un processus point-Poissonien d'intensité $\lambda(\Sigma)$:

$$\lambda(\Sigma) = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\Sigma}{\sigma_0} \right)^m \quad (1.134)$$

où $V_0(\sigma_0)^m$ est le paramètre d'échelle de Weibull et V_0 représente le volume de référence, m désignant le module de Weibull. Le nombre de sites actifs sous la contrainte Σ , noté n_a et la probabilité P d'avoir k sites actifs dans le volume V_0 sont donnés respectivement par les relations (1.135) et (1.136).

$$n_a = \lambda(\Sigma)V_0 \quad (1.135)$$

$$P_k(V_0) = \frac{(-\lambda(\Sigma)V_0)^k}{k!} \exp(-\lambda(\Sigma)V_0) \quad (1.136)$$

L'auteur postule que la probabilité de fissuration P_{F0} d'un volume V_0 sous un chargement d'amplitude $\Delta\Sigma$ est équivalente à la probabilité d'avoir au moins un site actif dans V_0 ce qui peut se traduire par la relation (1.137)

$$P_{F0} = P_{k \geq 1}(V_0) = 1 - P_{k=0}(V_0) = 1 - \exp(-\lambda V_0) \quad (1.137)$$

En remplaçant λ par sa définition dans l'équation (1.137), la loi de probabilité de Weibull

à deux paramètres est retrouvée :

$$P_{F0} = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\Sigma}{\sigma_0} \right)^m \right) \quad (1.138)$$

Pour une structure de volume total V , l'auteur reprend l'hypothèse du maillon le plus faible ce qui lui permet d'écrire :

$$P_F = 1 - \exp \left(- \frac{1}{V_0} \int_V \left(\frac{\Sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \right) = 1 - \exp \left(- \frac{V H_m}{V_0} \left(\frac{\Sigma_F}{\sigma_0} \right)^m \right) \quad (1.139)$$

où $H_m = \frac{1}{V_0} \int_V \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_F} \right)^m dV$ représente le facteur d'hétérogénéité des contraintes et $\Sigma_F = \max_t(\Sigma)$. Pour calculer la probabilité de fissuration, l'auteur détermine la limite d'élasticité mésoscopique associée à la durée de vie en inversant l'équation (1.133), et considère la contrainte macroscopique Σ égale à cette limite :

$$\sigma_y^\mu = \frac{\Delta \Sigma}{2} + \sqrt{\frac{\Delta \Sigma^2}{4} - \frac{A}{N}} = \Sigma \quad (1.140)$$

La probabilité de fissuration de la structure de volume V est alors donnée par la relation (1.141).

$$P_F = 1 - \exp \left(- \frac{V H_m}{V_0} \left(\frac{\Sigma_F}{\sigma_0} \right)^m \right) \quad (1.141)$$

L'identification des paramètres s'effectue à partir de deux courbes expérimentales : la courbe S-N du matériau obtenue et la courbe d'échauffement obtenue à partir d'essais d'échauffement, ce qui rend très difficile l'identification pour d'autres matériaux. Ce modèle permet de prévoir la courbe de Wöhler à 50% et la dispersion par l'intermédiaire des courbes à 10% et 90%.

1.3 Conclusion

L'analyse bibliographique nous a permis d'aborder deux thèmes :

- les critères de fatigue déterministes à grande durée de vie applicables sous des chargements d'amplitude constante générant des états de contraintes multiaxiaux.
- les méthodes de calcul probabilistes en fatigue.

Un panorama non exhaustif des critères de fatigue déterministes à grande durée de vie a été dressé dans la première partie de ce chapitre, en distinguant deux types d'approches : macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle de l'ingénieur, et mésoscopique c'est-à-dire à l'échelle du grain de métal. Puis les prévisions d'une sélection de critères issus des deux approches ont été comparées à des résultats d'essais de fatigue sur des éprouvettes lisses. Le critère du LAMEFIP, le seul critère avec une approche volumique testé est apte à prévoir les effets, sur la limite de fatigue, des différents types de chargement (traction, flexion rotative, flexion plane) et à prendre en compte la répartition volumique des contraintes.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée aux différentes approches probabilistes permettant de quantifier le risque de fissuration en fatigue. Deux types d'approches ont été dégagés :

- l'approche usuelle contrainte-résistance qui consiste à déterminer la probabilité pour que la résistance à la contrainte de la pièce étudiée soit supérieure aux contraintes effectivement appliquées pendant toute la mission considérée.
- l'approche "défauts" dont l'idée est de prendre en compte l'existence des défauts au sein du matériau dans l'étude de la durée de vie d'une pièce.

D'une manière générale, les approches prenant en compte les défauts du matériau décrivent de façon satisfaisante cette dispersion. Bomas et Flacelière proposent des approches couplées volumique et surfacique afin de distinguer l'amorçage de fissure en surface de la pièce et dans le volume de matière. Chantier propose d'intégrer des distributions de taille de défauts et Doudard suppose que l'aspect probabiliste est lié à la limite d'élasticité mésoscopique.

Chapitre 2

Expérimentation sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V

Ce chapitre présente le matériau étudié, les conditions expérimentales relatives aux essais effectués au LAMEFIP sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V fourni par la société Ratier-Figeac et les résultats d'essais.

2.1 Présentation de l'alliage Ti-6Al-4V

L'alliage de titane Ti-6Al-4V testé est fourni sous forme de barres de diamètre 25 mm à la société Ratier-Figeac par la société Timet. Ces barres sont laminées à chaud puis subissent une trempe à l'air. Ce traitement se compose d'un maintien en température à 730°C pendant une heure puis d'un refroidissement à l'air. Nous présentons ci-après les caractéristiques spécifiques à l'alliage étudié. Une revue bibliographique des alliages de titane est présentée en Annexe 2.

2.1.1 Composition chimique et microstructure

La composition chimique de l'alliage de titane Ti-6Al-4V étudié est donnée dans le tableau 2.1.

Eléments	Ti	Al	V	C	O	N	Fe
% massique min.	Base	6,31	4,06	-	-	0,005	-
% massique max.	Base	6,42	4,07	0,01	0,18	0,0055	0,18

TAB. 2.1 – Composition chimique de l'alliage de titane Ti-6Al-4V (en pourcentage massique) d'après la société Timet

Après polissages successifs d'un échantillon d'alliage au papier abrasif jusqu'au grade 4000, suivis d'un polissage à la pâte diamantée jusqu'à la granulométrie 1 μm et une attaque au réactif de Kroll (2% d'acide fluorhydrique, 3% d'acide nitrique), des micrographies obtenue aux microscopes optique (figure 2.1) et électronique à balayage (figure

2.2) révèlent une microstructure équiaxe fine $\alpha + \beta$ traitée dans le domaine $\alpha + \beta$. Ce type de microstructure possède une meilleure tenue en fatigue qu'une structure lamellaire [Mai99]. On observe dans le sens longitudinal que le matériau est texturé ce qui est très probablement dû au laminage.

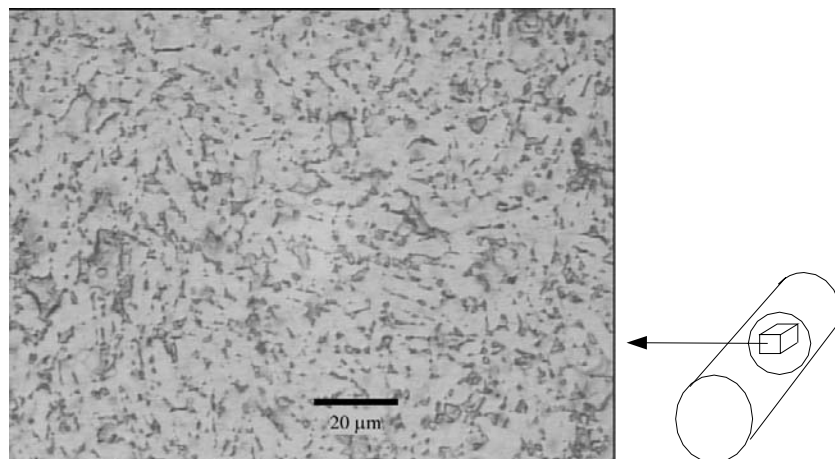


FIG. 2.1 – Microstructure de l'alliage de titane Ti-6Al-4V, après attaque au réactif de Kroll (microscope optique)

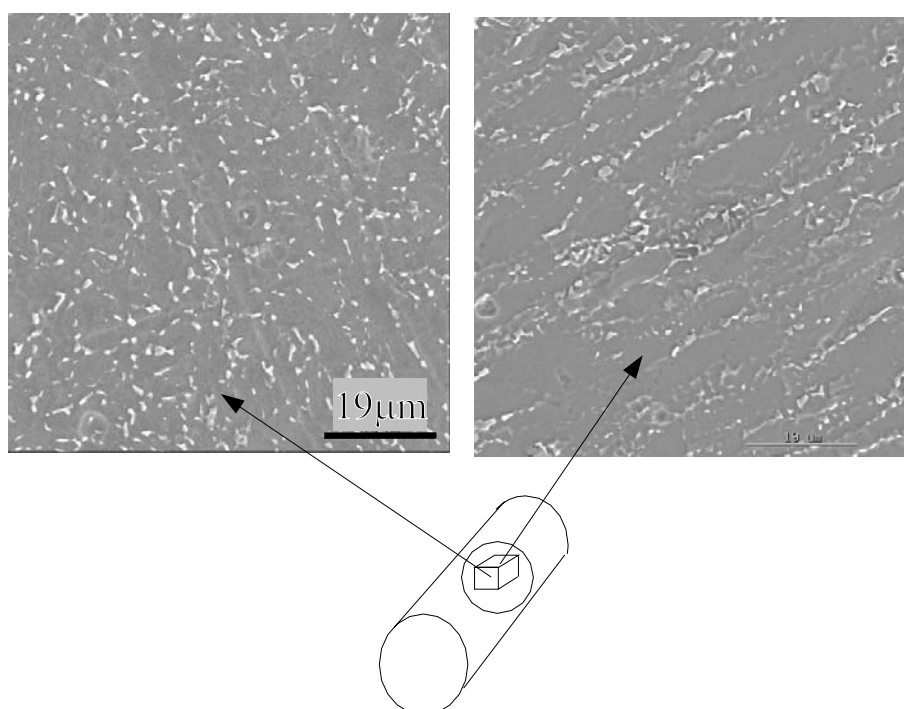


FIG. 2.2 – Microstructure du Ti-6Al-4V (microscope à balayage)

2.1.2 Caractéristiques mécaniques monotones

Les caractéristiques mécaniques en traction monotone à température ambiante de l'alliage de titane Ti-6Al-4V sont rassemblées dans le tableau 2.2. Les grandeurs ont été

déterminées d'après deux essais réalisés au LAMEFIP sur une machine d'essais servo-hydraulique Instron 8500 (capacité ± 100 kN) sur deux éprouvettes lisses cylindriques de révolution de diamètre utile 8 mm dont la géométrie est représentée figure 2.6 (paragraphe 2.2.1). Ces essais ont été réalisés conformément à la norme NF A 03-151. La vitesse de chargement est fixée à 10 MPa/s, ce qui correspond à une vitesse de déplacement de 0,01 mm/s. Ces caractéristiques sont comparées à titre informatif à celles données par le fournisseur dans la fiche produit (société Timet).

	LAMEFIP	Timet
Module d'Young, E (MPa)	110000	-
Coefficient de Poisson, ν	0,3	-
Limite d'élasticité à 0.02%, $R_{p0.02}$ (MPa)	920	862
Limite d'élasticité à 0.2%, $R_{p0.2}$ (MPa)	980	-
Résistance maximale en traction, R_m (MPa)	1090	-
Résistance ultime en traction, R_u (MPa)	1100	931 <. < 1190
Allongement total après rupture, A (%)	18	10

TAB. 2.2 – Caractéristiques mécaniques de l'alliage de titane Ti-6Al-4V

La courbe d'érouissage monotone contrainte vraie-déformation vraie est représentée sur la figure 2.3.

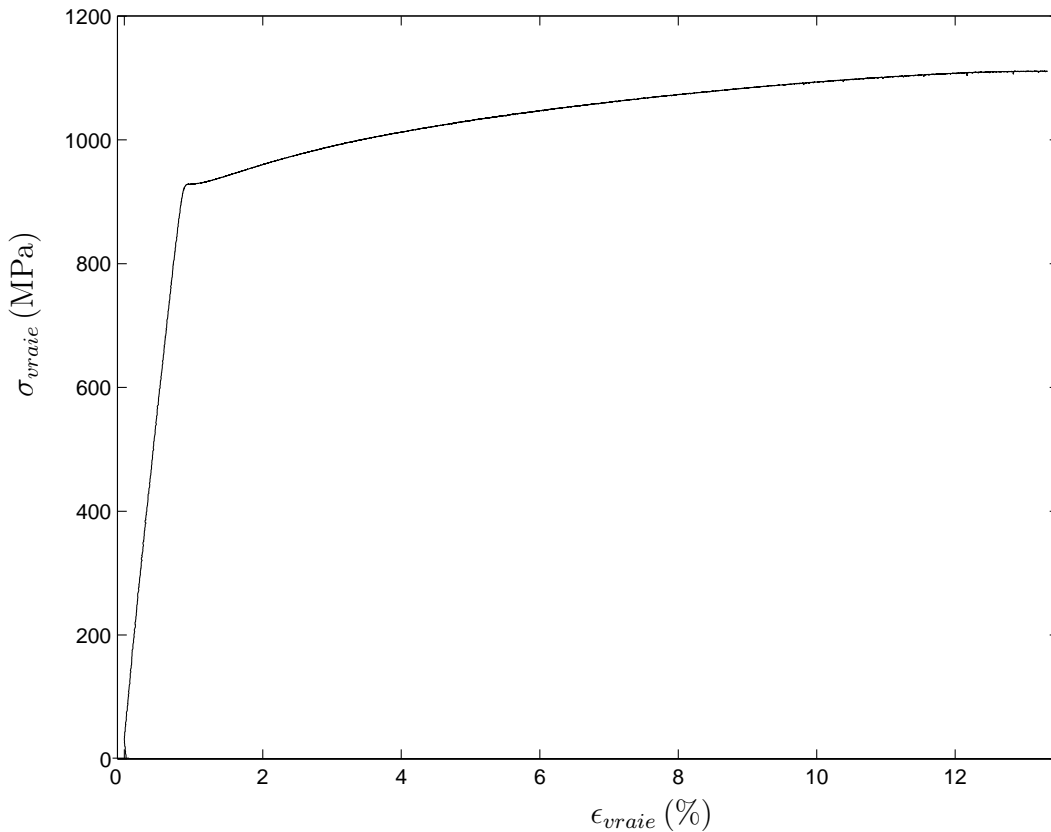


FIG. 2.3 – Courbe d'érouissage monotone en contrainte vraie-déformation vraie de l'alliage de titane Ti-6Al-4V

Deux extensomètres ont été utilisés lors de ces essais, un extensomètre classique à lames et un extensomètre laser. L'extensomètre à lames a une capacité de $\pm 2,5$ mm pour une longueur de référence de 12,5 mm. Un démontage de cet extensomètre a été nécessaire avant rupture de l'éprouvette afin de ne pas l'endommager du fait de l'allongement important de ce matériau. L'extensomètre laser mesurant la distance entre deux cibles collées (longueur de référence : 32 mm) sur l'éprouvette a permis l'acquisition de l'allongement jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette.

La dureté Brinell moyenne des deux lots de cet alliage est $HB_{30} = 319$, cette donnée est fournie par Ratier-Figeac. L'examen au microscope électronique à balayage (fig. 2.4) du faciès de rupture d'une éprouvette rompue en traction monotone quasi-statique confirme le caractère ductile de la rupture. La forme en cône et plans à 45° par rapport à l'axe de l'éprouvette sont visibles. La présence de cupules se produisant après une déformation plastique importante ([BFGT92]) est nette.

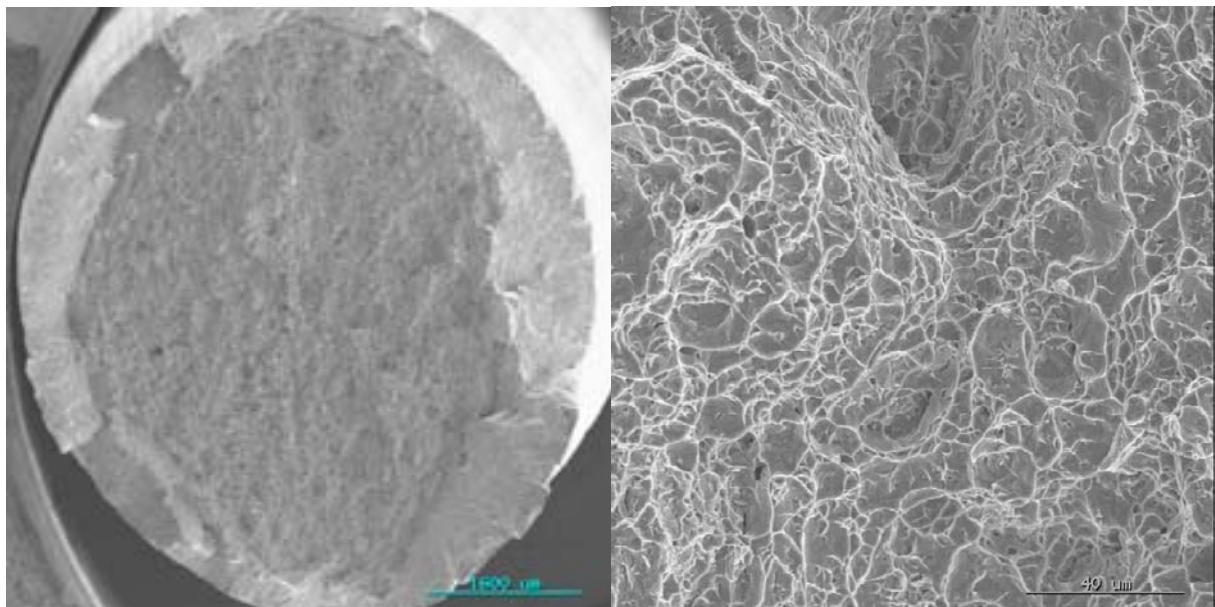


FIG. 2.4 – Faciès de rupture d'une éprouvette chargée en traction monotone quasi-statique (éprouvette n° QS2)

2.1.3 Caractéristiques mécaniques cycliques

Afin de caractériser le comportement cyclique de l'alliage Ti-6Al-4V, des essais de fatigue oligocyclique ont été réalisés au LAMEFIP en traction-compression alternée symétrique sur une machine servo-hydraulique INSTRON 8500. Les éprouvettes testées sont illustrées figure 2.7 (voir paragraphe 2.2.1), elles comportent une partie cylindrique de révolution calibrée de diamètre 7,98 mm. Tous les essais ont été réalisés à déformation totale imposée, $R_\epsilon = \frac{\epsilon_{min}}{\epsilon_{max}} = -1$, à la fréquence de 0,1 Hz sous cycles sinusoïdaux.

Les courbes contrainte-déformation obtenues expérimentalement (fig 2.5) mettent en évidence un adoucissement cyclique important (> 200 MPa). On peut en outre noter une

dissymétrie entre le comportement en traction et celui en compression, la contrainte de compression étant inférieure de quelques dizaines de MPa, en valeur absolue, à celle en traction. Ces deux phénomènes (adoucissement et dissymétrie traction-compression) ont déjà été constatés par Le Biavant [BG00], sur le même type d'alliage.

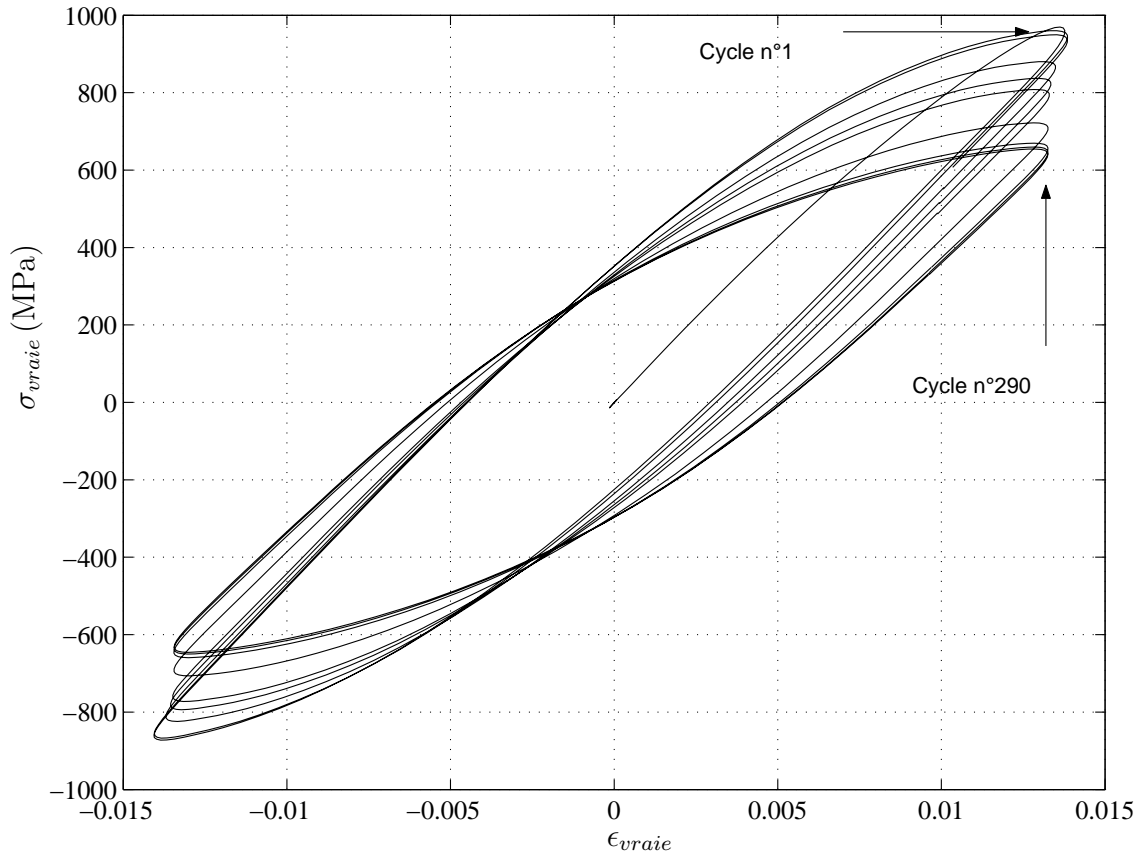


FIG. 2.5 – Courbe contrainte-déformation vraies expérimentales obtenues lors d'un essai de traction-compression cyclique, à déformation imposée, avec une déformation maximale de 1,3% ($R_\epsilon = \frac{\epsilon_{min}}{\epsilon_{max}} = -1$)

Il apparaît également un dépassement de la déformation imposée sur les premiers cycles, ceci vient de l'asservissement dépassant légèrement la consigne dans les premiers cycles. Des essais à différentes déformations imposées auraient du être réalisés pour identifier le comportement cyclique du matériau; par manque de temps ils n'ont pu être effectués. L'hypothèse est alors faite que les amplitudes des sollicitations alternées symétriques des essais de fatigue ne dépassent pas la limite d'élasticité cyclique du matériau. Le calcul de la contrainte équivalente de Von Mises σ_{eqVM} pour les différents niveaux de chargement atteints dans les essais de fatigue ($\sigma_{eqVM} = 828$ MPa en flexion-torsion combinées pour des durées de vie visées de 10^5 cycles) ne dépasse jamais la limite d'élasticité monotone à 0.02%, $R_{p0.02} = 920$ MPa.

2.2 Epreuves utilisées

Deux lots d'éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V ont été fournies par Ratier-Figeac au LAMEFIP. Le premier lot de 100 éprouvettes a été usiné par la société SEIV Aquitaine à partir de barres fournies par la société Ratier Figeac. Ces éprouvettes ont été numérotées de 1 à 100 suivi du numéro du lot : I. Ainsi l'éprouvette N°13-I désigne l'éprouvette 13 du lot I. Le deuxième lot (100 éprouvettes) a été usiné par une autre société sous traitante de Ratier-Figeac, les éprouvettes ont été repérées avec le même type de numérotation. Les éprouvettes utilisées pour les essais de traction quasi-statique et d'érouissage cyclique proviennent d'une même barre de Ti-6Al-4V du lot I.

2.2.1 Géométries

Essais de traction quasi-statique

Les essais de traction quasi-statique ont été réalisés sur des éprouvettes lisses cylindriques de révolution dont la géométrie est représentée figure 2.6.

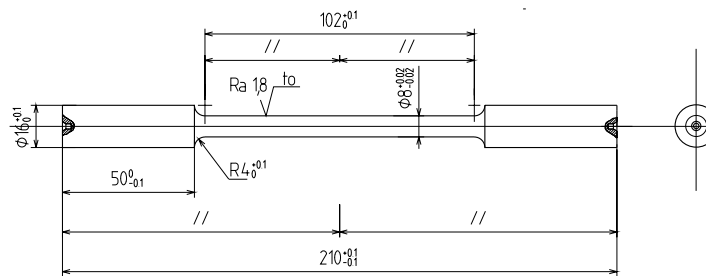


FIG. 2.6 – Géométrie des éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V utilisées pour les essais de traction quasi-statique.

Essais d'érouissage cyclique

Les essais d'érouissage cycliques ont été effectués sur des éprouvettes lisses cylindriques de révolution avec une partie calibrée de longueur réduite afin d'éviter les risques de flambement. La géométrie est représentée figure 2.7.

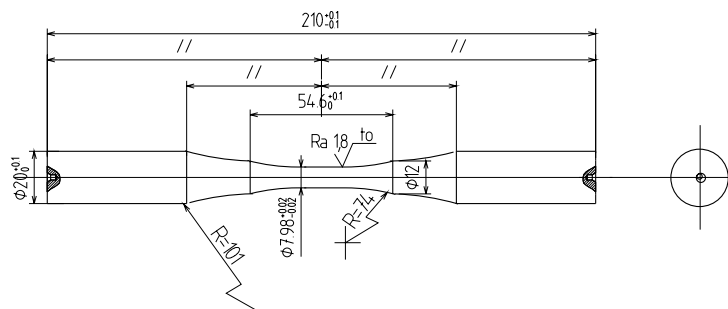


FIG. 2.7 – Géométrie des éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V utilisées pour les essais d'érouissage cyclique.

Essais de fatigue à grande durée de vie

Les essais de fatigue présentés dans ce chapitre ont été réalisés au LAMEFIP sur des éprouvettes qualifiées de “lisses” étant donné leur faible coefficient théorique de concentration de contraintes, k_t [Pet74]. La figure 2.8 représente la géométrie des 175 éprouvettes utilisées pour les essais de flexion rotative, torsion et pour les essais combinés de flexion plane et torsion.

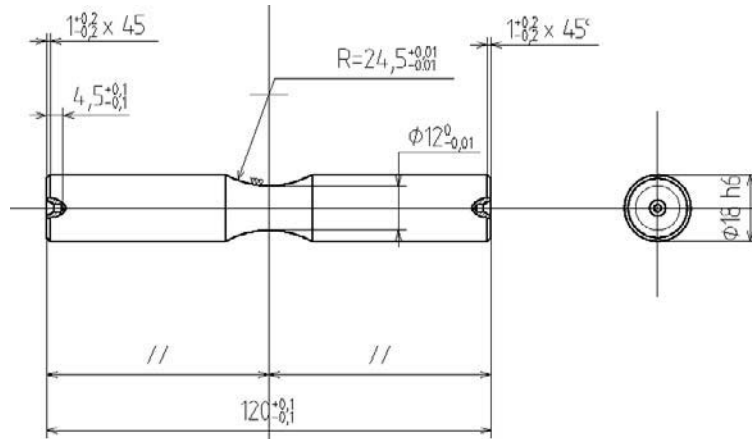


FIG. 2.8 – Géométrie des éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V utilisées pour les essais de flexion, torsion et flexion-torsion combinées ($k_t(\text{flexion}) = 1.07$ et $k_t(\text{torsion}) = 1.04$).

Les 25 éprouvettes “lisses utilisées” pour les essais de traction ont une géométrie particulière définie par la figure 2.9.

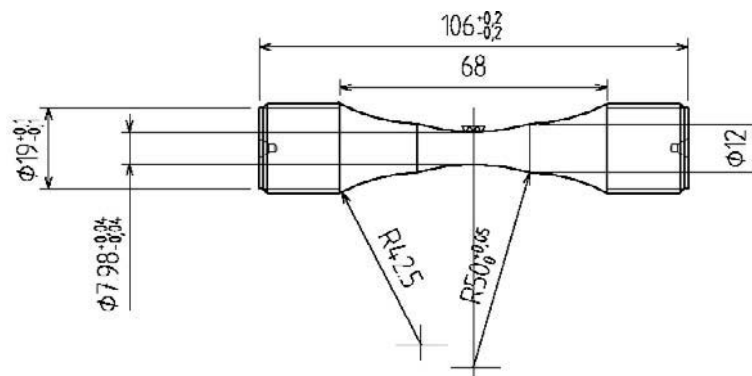


FIG. 2.9 – Géométrie des éprouvettes en Ti-6Al-4V utilisées pour les essais de fatigue en traction ($k_t(\text{traction}) = 1.05$).

2.2.2 Etat de surface

L’alliage de titane Ti-6Al-4V ne se rectifie pas dans l’industrie à cause des risques d’échauffement localisé qui peuvent entraîner une baisse notable des caractéristiques mécaniques du matériau (phénomène appelé “brûlure”). C’est pourquoi la société Ratier-Figeac a choisi de travailler sur des éprouvettes possédant un état de surface industriel

(rencontré sur certaines pièces).

L'état de surface des éprouvettes de flexion-torsion a été contrôlé au LAMEFIP sur 10 éprouvettes de chaque lot tirées au hasard. Les mesures ont été réalisées avec un rugosimètre Rotary Talysurf, équipé d'un palpeur de type aiguille (pyramide de rayon au sommet de $25 \mu\text{m}$), sans filtrage mécanique. Le dépouillement des enregistrements a été fait conformément à la norme NF EN ISO 4287 [AFN98]. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 2.3. La valeur du paramètre R_t (amplitude totale du profil mesurée sur toute la longueur d'évaluation) est considérée comme équivalente pour les 2 lots de matière (lot I : $R_t = 7,22$; lot II : $R_t = 7,6$). Par contre, la valeur du paramètre R_a , représentant la moyenne arithmétique des surfaces comprises entre le profil et la ligne moyenne sur la longueur de mesure, est très différente entre les deux lots (lot I : $R_a = 0,71$; lot II : $R_a = 0,27$). Il en est de même pour la valeur de R_{max} .

lot	Ti-6Al-4V-I	Ti-6Al-4V-II
R_a moyen (μm)	0,71	0,27
R_t moyen (μm)	7,22	7,6
R_{max} moyen (μm)	4,39	2
Ecart-type $s(R_a)$ (μm)	0,02	0,05
Ecart-type $s(R_t)$ (μm)	0,74	0,94
Ecart-type $s(R_{max})$ (μm)	0,45	0,22

TAB. 2.3 – Résultats des mesures d'état de surface sur 10 éprouvettes "lisses" de chaque lot de flexion-torsion en alliage de titane Ti-6Al-4V (longueur palpée 6 mm, cut-off = 0,25 mm).

Les profils de rugosité sont illustrés par les figures 2.10 et 2.11, ils mettent en évidence un défaut de surface particulier sur les éprouvettes du lot II, expliquant la différence de R_a entre les 2 lots. Le lot I présente des stries d'usinage assez marquées mais l'état de surface est le même sur la circonférence du tore. Le défaut du lot II se localise en fond de tore mais seulement par endroits de la circonférence du tore. Les deux lots présentent donc des états de surface différents, ce qui va rendre difficile (voire impossible) la comparaison des résultats d'essais de fatigue.

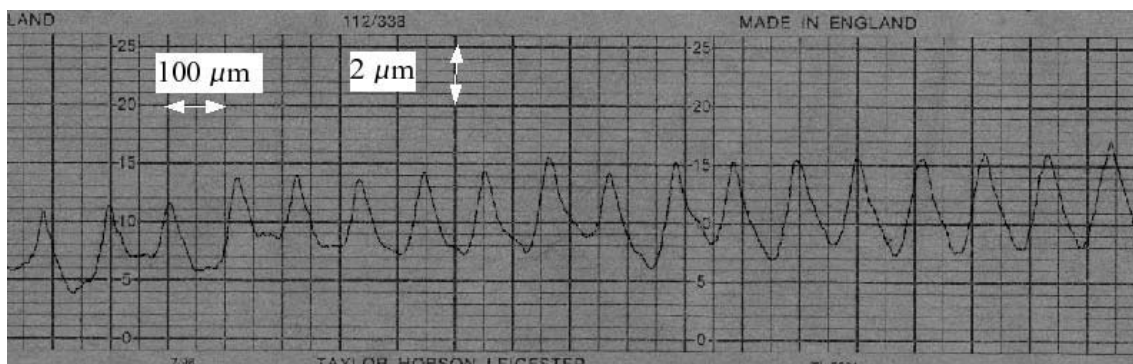


FIG. 2.10 – Etat de surface caractéristique du lot 1 (épreuve n°48-I)

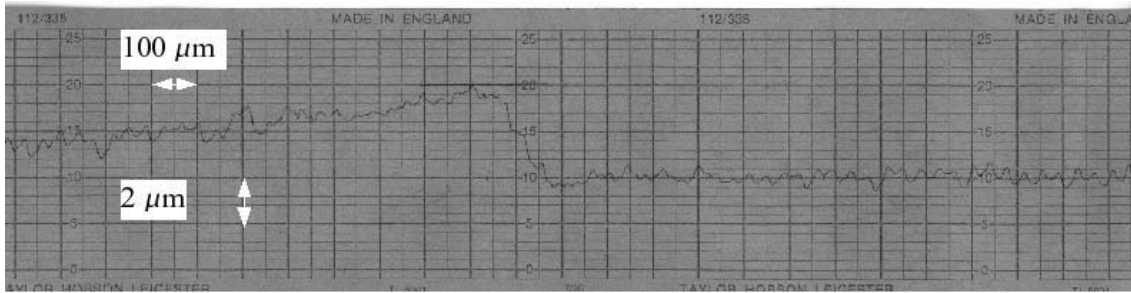


FIG. 2.11 – Etat de surface caractéristique du lot 2 (éprouvette n°1-II)

2.3 Machines d'essai de fatigue utilisées

2.3.1 Vibrophore Amsler

2.3.1.1 Présentation et principe mécanique

Il s'agit d'une machine électromagnétique à résonance, asservie en force (fig. 2.12). L'asservissement (numérique sur la machine du laboratoire) s'effectue sur l'amplitude et sur la valeur moyenne de la force, mesurée à l'aide d'un dynamomètre d'une capacité de 100 kN crête à crête (il est possible d'utiliser si nécessaire un autre dynamomètre d'une capacité de 20kN crête à crête).



FIG. 2.12 – Vibrophore Amsler

La figure 2.13 présente schématiquement le dispositif d'essai. Son principe de fonction-

nement est simple. Un système mécanique composé d'une chaîne d'éléments constituée de deux masses (m_1 et m_2), de l'éprouvette (de raideur k_1), d'un dynamomètre de grande raideur (k_2) par rapport à l'éprouvette et d'un ressort de faible raideur (k_3) par rapport à l'éprouvette et à k_2 est mis en résonance par excitation électromagnétique.

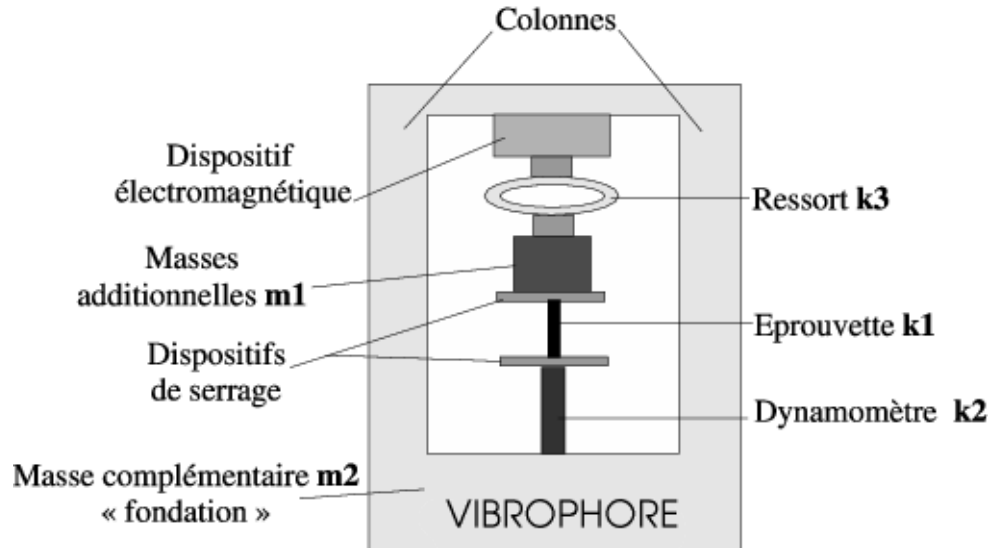


FIG. 2.13 – Schéma de principe mécanique du vibrophore.

La fréquence de fonctionnement dépend des raideurs de l'éprouvette, du dynamomètre, du ressort mais également des masses additionnelles. La raideur k_3 du ressort est faible devant la raideur équivalente, notée k , aux raideurs en série du dynamomètre k_2 et de l'éprouvette k_1 . La masse m_2 de la fondation est environ 100 fois plus importante que celle des masses additionnelles m_1 . La fréquence de fonctionnement f du système est exprimée par l'équation (2.1), équation pouvant être simplifiée compte-tenu du rapport $m_1/m_2 \ll 1$ et $k \gg k_3$ (2.2).

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k + k_3}{\frac{m_1}{1 + m_1/m_2}}} \text{ avec : } k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \quad (2.1)$$

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad (2.2)$$

La fréquence de fonctionnement est comprise entre 60 et 300 Hz suivant les utilisations (raideur de l'éprouvette et masses additionnelles). Ces fréquences élevées permettent des essais à longue durée de vie ($> 10^6$ cycles) dans des temps raisonnables. Dans le cadre de nos essais, la fréquence est environ de 125 Hz.

2.3.1.2 Critères d'arrêt et détection de fissure

L'arrêt d'un essai survient lorsque l'un des trois critères programmables est atteint. Indépendant les uns des autres, ces critères restent actifs simultanément tout au long de l'essai :

- *Arrêt sur dérive d'amplitude ou de valeur moyenne de la force* : consiste à arrêter l'essai lorsque l'amplitude ou la valeur moyenne de la force mesurée dépassent une valeur seuil définie avant le début de l'essai. Ce critère stoppe l'essai lorsque les variations de force sont trop importantes. Pour nos essais, nous avons choisi 500 daN comme valeur de dérive sur l'amplitude. La cause des dérives est généralement un endommagement diffus de l'éprouvette rendant le système d'asservissement inefficace.
- *Arrêt sur compteur de cycles* : l'essai est arrêté lorsque le nombre de cycles programmé est atteint ($2 \cdot 10^6$ cycles pour nos essais).
- *Arrêt sur dérive de fréquence* : l'apparition d'une microfissure modifie la raideur de l'éprouvette, donc la fréquence de fonctionnement du système. En contrôlant la dérive de la fréquence, on peut choisir la taille de fissure détectée. Une dérive de 0,6 Hz a été choisie (pour une fréquence d'essais de 125 Hz environ). Ce qui correspond à des fissures de taille $\simeq 1$ à 2 mm pour les éprouvettes utilisées (diamètre utile = 7,98 mm).

2.3.2 Machine de flexion/torsion combinées

2.3.2.1 Présentation et principe mécanique

Les essais de flexion plane, torsion, flexion plane et torsion combinées ont été réalisés à l'aide d'une machine servo-hydraulique conçue et réalisée au LAMEFIP [PLL94] (fig. 2.14).

Cette machine peut appliquer à l'éprouvette testée une sollicitation de flexion, qui peut être de la flexion plane ou de la flexion rotative, et simultanément ou non une sollicitation de torsion. Son architecture mécanique est schématisée par la figure 2.15.

L'ensemble mécanique est conçu autour d'une poutre centrale formée par l'éprouvette (1) liée complètement à deux pièces tubulaires (2) et (2') instrumentées par des capteurs de moments dans deux plans perpendiculaires (jauges de déformations). Cette poutre est encastree à ses extrémités dans deux voiles souples composés de tôles minces (3) et (3'). Ces liaisons par voiles déformables constituent des rotules sans jeux vis-à-vis de la flexion et des encastremements vis-à-vis de la torsion. Les efforts de flexion $F_A(t)$ et $F_B(t)$ sont appliqués à la poutre centrale par l'intermédiaire des tôles souples (5) et (5'). Le moment de torsion est généré par un effort $F_T(t)$ appliqué à la pièce (4) guidée en rotation par rapport au bâti par deux roulements à contacts obliques précontraints. La poutre centrale (1+2+2') est sollicitée en flexion pure (sans effort tranchant).

L'originalité de cette machine réside dans l'application des moments de flexion. Elle utilise le principe mécanique des "champs tournants" (fig. 2.16). Lors de l'application des efforts, l'éprouvette reste fixe par rapport au bâti de la machine. Les deux efforts $F_A(t)$ et $F_B(t)$ sont imposés dans deux plans perpendiculaires par deux vérins servo-hydrauliques.



FIG. 2.14 – Machine de flexion et torsion combinées du LAMEFIP.

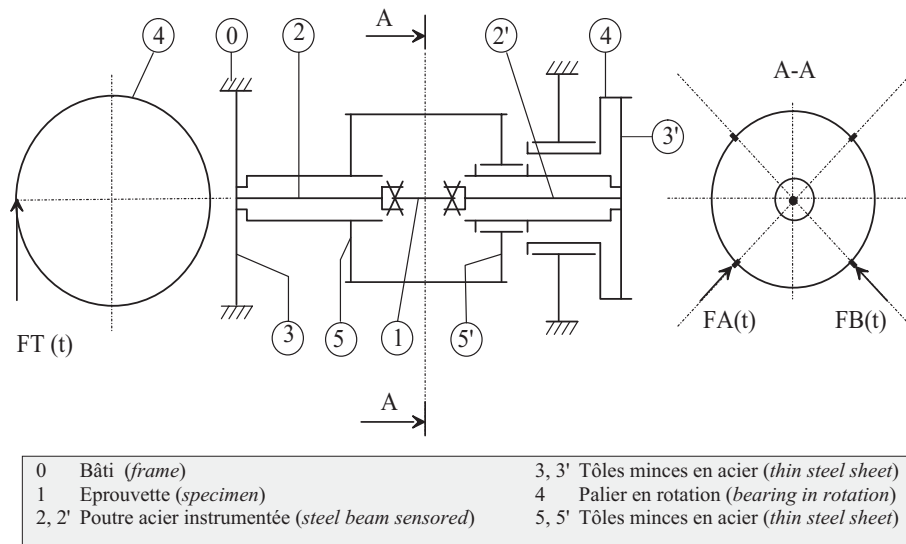


FIG. 2.15 – Schéma du principe mécanique de la machine de flexion et torsion combinées.

Ainsi,

- lorsque les vérins sont en phase à fréquence identique (ou lorsque 1 seul vérin est actif l'autre étant asservi à 0 N.m), la sollicitation résultante est de la flexion plane,

- lorsque les moments générés par les vérins sont déphasés de 90° et à même fréquence, la sollicitation engendrée est de la flexion rotative, celle-ci peut être symétrique ou dissymétrique (les moments ont même valeur moyenne non nulle).

La machine peut réaliser des essais monotones, des essais sinusoïdaux et pseudo-aléatoires asservis. Les principales spécifications techniques de la machine de flexion-torsion du LA-MEFIP sont regroupées dans [P196].

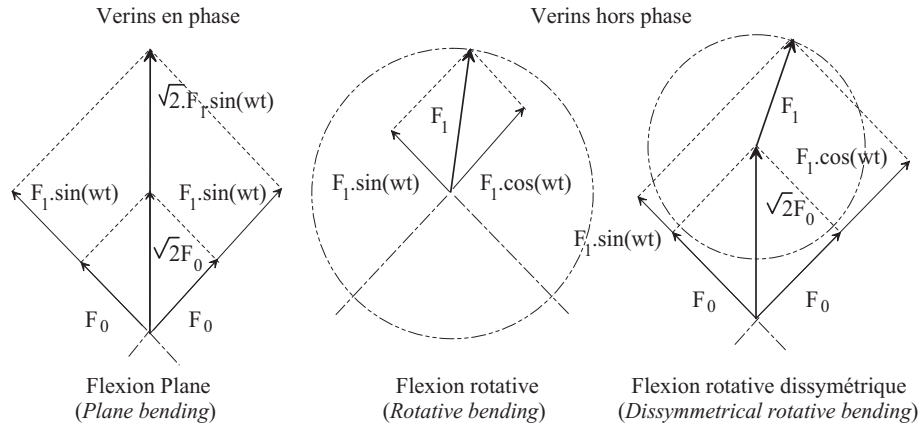


FIG. 2.16 – Composition des efforts de flexion, principe des champs tournants.

2.3.2.2 Principe et précision de l'asservissement

Le pilotage de chaque vérin est réalisé par deux boucles d'asservissement imbriquées représentées figure 2.17 [P196].

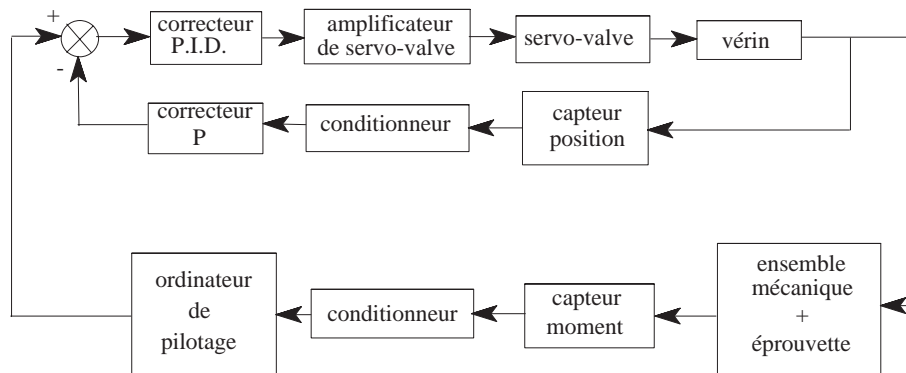


FIG. 2.17 – Principe de l'asservissement d'un vérin.

Une première boucle analogique relative à la position de la tige du vérin est incluse dans une boucle numérique pilotée par un micro-ordinateur. Pour chaque vérin, le logiciel de pilotage considère que le système à asservir est l'ensemble mécanique complet : [hydraulique + mécanique + sa boucle analogique]. Avec ce système les vérins ne sont jamais en boucle ouverte ce qui permet un montage et démontage de l'éprouvette sans danger

pour l'opérateur. Un logiciel de pilotage développé par la société "Alliance Automation" [Aut94] permet une interface homme-machine conviviale.

L'utilisateur a le choix entre deux gammes de capteurs : ± 90 N.m ou ± 165 N.m. Pour les essais sinusoïdaux, l'amplitude, la valeur moyenne et le déphasage de chacun des moments sont asservis.

Correction d'inertie

Les moments sont mesurés et asservis au niveau des capteurs inclus dans les deux demi-poutres 2 et 2' (fig. 2.15). Or, les masses (mors d'amarrage) mises en mouvement entre les capteurs et le milieu de l'éprouvette (fig. 2.15) entraînent des effets inertiels dont il faut tenir compte. En faisant l'hypothèse qu'il n'y a ni variation de masse, ni perte de raideur au cours de l'essai de l'ensemble mécanique situé entre les capteurs de moment et la zone utile de l'éprouvette, une correction du signal de commande permet l'asservissement des moments réellement appliqués à l'éprouvette au cours de l'essai. Pour les chargements cycliques, la correction à apporter (qui dépend de la fréquence) est un facteur d'amplitude identifié par un étalonnage dynamique à l'aide d'une éprouvette instrumentée (jauges de déformation). Dans le cadre des essais sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V, cette correction sur le moment réellement appliqué s'écrit :

$$M_{f,machine} = 0,645.M_{f,reel} \quad (2.3)$$

Lorsque les sollicitations sont sinusoïdales, la précision sur l'amplitude et la valeur moyenne des moments asservis est meilleure que ± 1 % de la pleine échelle des capteurs. La précision sur le déphasage est de ± 1 degré. L'asservissement des séquences aléatoires (chargements enregistrés sur pièce réelle en service) est d'une précision meilleure que $\pm 3\%$ de la pleine échelle des capteurs.

2.3.2.3 Détection de fissure

Les essais de fatigue en endurance ou en endurance limitée s'effectuant à chargement imposé (ou force), les grandeurs contrôlées sont les déplacements. La fissure est détectée en contrôlant la perte de raideur de l'éprouvette en temps réel. Le seuil de perte de raideur engendrant l'arrêt de l'essai est fixé par l'utilisateur avant de débiter un essai. Pour les essais présentés dans ce document, le seuil de perte de raideur a été fixé à 10 %. A chaque arrêt de la machine, une observation à la loupe binoculaire permet, si besoin, de confirmer l'existence de la fissure et d'en évaluer la taille en surface. Pour l'alliage de titane Ti-6Al-4V, ce seuil de perte de raideur génère des fissures d'environ 2 à 3 millimètres pour les éprouvettes utilisées (diamètre utile = 12mm).

2.4 Dépouillement des résultats d'essais et intervalles de confiance

La dispersion des résultats d'essais de fatigue est considérée à la fois comme un fait d'expérience et comme un fait physique. La détermination expérimentale des caractéristiques en fatigue d'un matériau (limites de fatigue, durées de vie) est conditionnée par la dispersion inhérente au phénomène de fatigue. Il est alors nécessaire de mettre en oeuvre des méthodes statistiques qui permettent soit d'estimer la limite de fatigue à N cycles avec son écart-type, soit de tracer la courbe de Wohler médiane (50% de probabilité de fissuration). La dispersion observée en fatigue peut avoir plusieurs origines physiques :

- internes au matériau : nature hétérogène de sa structure , il ne peut être parfait, il y a forcément des défauts (inclusions, nodules, retassures...),
- liées à la fabrication des pièces ou des éprouvettes (différences d'état de surface, tolérances dimensionnelles, etc. . .)
- liées aux conditions d'essais (centrage des éprouvettes sur la machine, réglage de la charge, fréquence des cycles, échauffement de l'éprouvette, effet d'environnement, etc. . .).

Courbe de Wöhler

Elle représente la relation observée expérimentalement entre la durée de vie N , reportée conventionnellement en abscisse (échelle logarithmique) et l'amplitude de contrainte S_a reportée en ordonnée (échelle linéaire ou logarithmique) pour une contrainte moyenne donnée ou un rapport $R_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ constant fixé. On définit généralement la courbe de Wohler (ou courbe S-N) par la relation entre la contrainte et la durée de vie médiane, correspondant à un probabilité de rupture de 50% (figure 2.18).

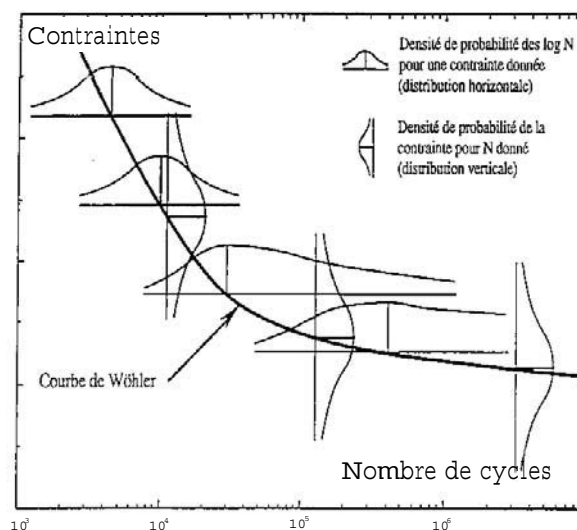


FIG. 2.18 – Densité de probabilité selon les durées de vie, d'après [AFN91]

Distribution des contraintes et des nombres de cycles

Il est couramment admis et vérifié expérimentalement [Bas60] que :

- pour un nombre de cycles donné, la distribution de la contrainte peut être décrite par une distribution normale dans les domaines de l'endurance limitée (entre $\approx 5.10^4$ et 10^6 cycles) et de l'endurance illimitée (au delà de 10^6 cycles). Ainsi, les courbes d'isoprobabilités sont symétriques par rapport à la courbe médiane (figure 2.19).

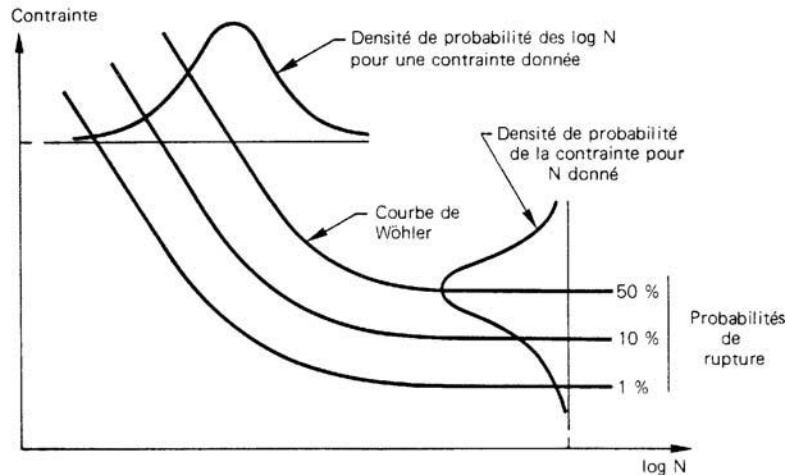


FIG. 2.19 – Courbes d'isoprobabilité de rupture, d'après [AFN91]

- pour une contrainte donnée, la distribution du logarithme des nombres de cycles ($\log N$) est normale dans le domaine de l'endurance limitée et s'écarte progressivement de la distribution normale au fur et à mesure que l'on tend vers l'endurance illimitée. La distribution $\frac{1}{N}$ suit une distribution lognormale en endurance illimitée.

Rappelons quelques caractéristiques remarquables de la loi normale [Gra92]. La loi normale ou loi de Laplace-Gauss est une des distributions que l'on rencontre le plus souvent en pratique. C'est, en effet, la loi qui s'applique à une variable statistique qui résulte d'un grand nombre de causes indépendantes, dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante. La loi normale est la loi d'une variable X continue, variant de $-\infty$ à $+\infty$, dont la densité de probabilité $f(x)$ est :

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2s^2}\right) \quad (2.4)$$

où x est la variable appliquée, la loi normale est caractérisée par les deux paramètres :

- μ : moyenne de x (confondue avec la médiane puisque cette distribution est symétrique).
- s : écart-type caractérisant la dispersion des résultats autour de la moyenne.

La courbe représentative de $f(x)$ est la courbe en cloche symétrique par rapport à $x = \mu$. La fonction de répartition de cette distribution, qui représente la probabilité que la variable

aléatoire X ait une valeur inférieure à x , a pour expression :

$$F(x) = P\{X < x\} = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x - \mu(N))^2}{2s^2}\right) dx \quad (2.5)$$

L'ensemble des données expérimentales constitue un ensemble de n valeurs $x_i(N) = \log N_i$ (i variant de 1 à n). Les estimateurs $\bar{\mu}$ et \bar{s} respectivement de la moyenne et l'écart-type sont définis par (2.6) pour un échantillon de n individus de la variable aléatoire X .

$$\bar{\mu}(N) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(N)}{n} \text{ et } \bar{s}(N) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i(N) - \mu(N))^2}{n-1}} \quad (2.6)$$

En considérant que l'écart-type est constant et donc indépendant du nombre de cycles [Bas60], les courbes d'isoprobabilité se déduisent les unes des autres par translation, d'où la symétrie observée [Lie82]. L'expression de la probabilité de rupture fait apparaître la fonction de Laplace-Gauss réduite ne dépendant que de la borne supérieure de l'intégrale. Pour que P soit constant il faut que $\frac{(x - \mu(N))}{s} = u_p$ le soit aussi : u_p est obtenu à l'aide de tables statistiques. La généralisation de ce modèle au diagramme P-S-N permet de rendre compte des relations entre ces trois variables interdépendantes (P,S,N). On aboutit à différentes expressions de la courbe médiane : formules de Wöhler, de Basquin, de Stromeyer, de Palmgren, de Corson, de Weibull ou encore de Bastenaire [BFGT92]. Le Tableau 2.4 présente quelques formulations de la courbe S-N médiane. A titre d'exemple, le modèle de Bastenaire est présenté plus en détail.

Auteur	Année	Formulation
Wöhler	1860	$\ln N = a + b.S$
Basquin	1914	$\ln N = a + b. \ln S$
Stromeyer	1924	$\ln N = a + b. \ln(S - E)$
Palmgren	1924	$\ln(N + B) = a - b. \ln(S - E)$
Corson	1955	$N = \frac{A}{S-E} \exp[-C.(S - E)]$
Bastenaire	1974	$N = \frac{A}{S-E} \cdot \exp\left[-\left(\frac{S-E}{B}\right)^c\right]$

TAB. 2.4 – Quelques modélisations de la courbe S-N médiane.

Modèle de Bastenaire [Bas71]

En 1974, Bastenaire propose l'équation (2.7) d'après une étude approfondie sur divers aciers (plusieurs milliers d'éprouvettes testées).

$$N = \frac{A}{S - E} \cdot \exp\left[-\left(\frac{S - E}{B}\right)^c\right] \quad (2.7)$$

Dans cette équation,

- S est la contrainte.

- E est la limite d'endurance du matériau considéré (asymptote de la courbe S-N médiane).
- A, B et C désignent des paramètres dépendant du matériau, de la sollicitation et des éprouvettes : A est le paramètre positionnant la courbe le long de l'axe des cycles, B est le paramètre d'échelle, il a la dimension d'une contrainte et C est le paramètre de forme, c'est un nombre sans dimension.

La formulation proposée par Bastenaire rend compte de toute la courbe de Wohler aussi bien pour la fatigue oligocyclique que pour l'endurance. Bastenaire et l'IRSID ont développé une méthode d'ajustement statistique des paramètres de cette équation qui permet de prendre en compte toutes les éprouvettes essayées, y compris celles non fissurées dans les essais selon la méthode de l'escalier (voir 2.4.2) par exemple. Cette méthode d'ajustement statistique fait l'objet du logiciel ESOPE [Tec95].

Les avantages de cette méthode sont :

- une description complète de la dispersion, qu'elle soit exprimée en contrainte ou en nombre de cycles,
- une mise en équation des courbes d'équiprobabilité de rupture (ou de fissuration selon le critère d'arrêt expérimental) et la connaissance des courbes limites représentant l'incertitude liée à leur estimation.

2.4.1 Estimation du nombre de cycles $N_{50\%}$ par la méthode des fréquences cumulées

Cette méthode est utilisée pour déterminer des points de la courbe S-N dans le domaine de l'endurance limitée où le nombre de cycles à fissuration suit une loi log-normale [BFGT92]. Une estimation du nombre de cycles à fissuration $N_{50\%}$ (probabilité de fissuration de 50%) est fournie ainsi qu'une estimation de la dispersion à partir d'une série d'essais effectués à la même contrainte σ_i (figure 2.20)

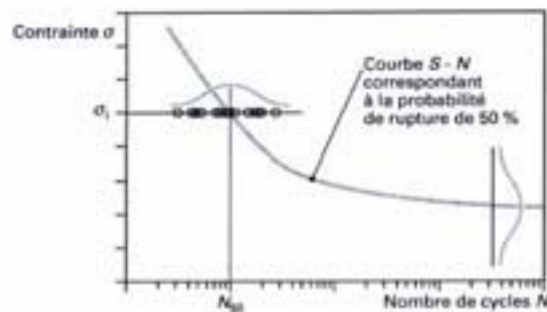


FIG. 2.20 – Estimation du nombre de cycles $N_{50\%}$ et de la dispersion dans le domaine de l'endurance limitée

La méthode repose sur la propriété suivante : la distribution des logarithmes des nombres de cycles à rupture pour un niveau de contrainte donné est normale, ce qui est

observé en général dans le domaine de l'endurance limitée. L'appréciation de la normalité se fait graphiquement mais peut aussi se faire à l'aide de tests statistiques (Shapiro-Wilk ou Kolmogorov-Smirnov par exemple) [SP69]. Dans un système de coordonnées gauss-arithmétiques (échelle gaussienne des ordonnées et arithmétique des abscisses), on reporte les points représentatifs des durées de vie (exprimées en $\log N$) et des proportions d'éprouvettes rompues (exprimées en fréquences) (figure 2.21). Les points expérimentaux sont parfaitement alignés, si la distribution de $\log N$ est normale. La droite (dite de Henry) qui corrèle le mieux les points expérimentaux dans ce diagramme permet de connaître la durée de vie médiane $N_{50\%}$ et l'écart-type de la distribution log-normale des durées de vie. Un minimum de 10 éprouvettes est recommandé.

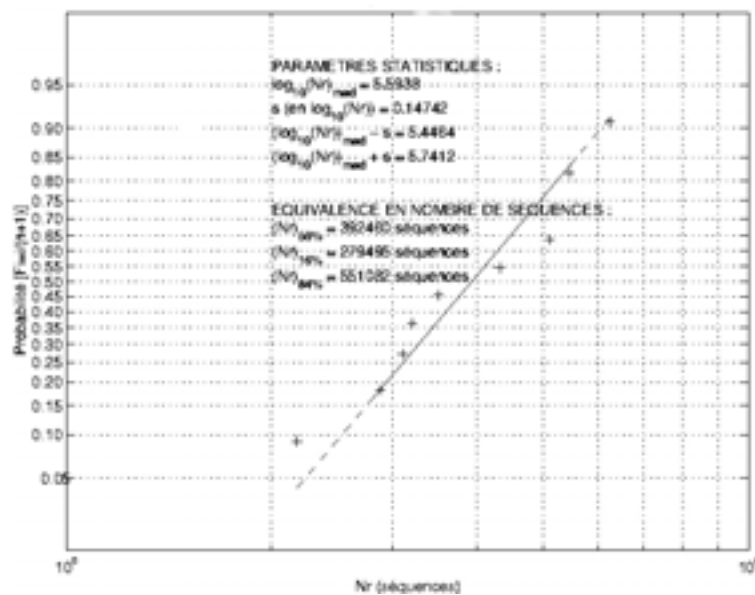


FIG. 2.21 – Exemple de droite de Henry

2.4.2 Méthode de l'escalier

Le principe de cette méthode et son exécution sont détaillés dans la norme AFNOR NF A 03-405 [AFN91], [DM48]. Cette méthode permet l'estimation expérimentale de la résistance à la fatigue à N_r cycles (endurance) et de son écart-type. Pour un nombre de cycles maximal N choisi à l'avance (censure), un échelonnement des niveaux de contraintes espacés selon une progression arithmétique est défini. Le pas d'échelonnement d doit être de l'ordre de grandeur de l'écart-type. On cherche à encadrer la limite d'endurance par une succession de rupture et de non ruptures (ou fissuration et non fissuration).

Le déroulement de l'essai est le suivant : la première pièce est testée à un niveau de contrainte aussi proche que possible de la limite d'endurance présumée. Si cette éprouvette se rompt avant le nombre de cycles maximal choisi, la suivante est essayée au niveau immédiatement inférieur ; dans le cas contraire, elle est essayée au niveau immédiatement

supérieur. L'essai est poursuivi ainsi jusqu'à épuisement des éprouvettes. La limite d'endurance et l'écart-type sont calculés à l'aide des équations (2.8) et (2.9) de Dixon et Mood [DM48] :

$$\sigma_D = \sigma_0 + d\left(\frac{A}{N} \pm \frac{1}{2}\right) \quad (2.8)$$

$$s = 1,62d \cdot \left(\frac{NB - A^2}{N^2} + 0,029\right) \quad (2.9)$$

où σ_0 est le niveau de contrainte le plus faible utilisé au cours de l'essai,

- d est le pas d'échelonnement entre deux niveaux de contrainte successifs,
- i est l'indice du niveau de contrainte, $i = 0$ pour le niveau σ_0 ,
- N est le nombre des éventualités (ruptures ou non ruptures) les moins fréquentes pour l'ensemble des séquences d'essais.

$$N = \sum_{i=1}^k n_i; \quad A = \sum_{i=1}^k i \cdot n_i; \quad B = \sum_{i=1}^k i^2 \cdot n_i$$

Si le pas d a été correctement choisi (il est souhaitable d'utiliser un pas de l'ordre de grandeur de l'écart-type estimé de la limite d'endurance). Pour un nombre d'éprouvettes raisonnables (15 à 20), la méthode de l'escalier conduit à une bonne précision sur la moyenne σ_D et à une estimation très approchée de l'écart-type s . C'est la méthode la plus couramment employée dans l'industrie pour déterminer la limite d'endurance. Il existe également la méthode de l'escalier court (nécessitant moins de 10 éprouvettes) [BFGT92] dont la procédure expérimentale est la même que celle de l'escalier classique. En revanche, la méthode d'estimation de la valeur de la limite d'endurance est différente, elle est donnée par la relation (2.10).

$$\sigma_D = \sigma_f + K \cdot d \quad (2.10)$$

où σ_f représente la dernière valeur de contrainte essayée et K est un coefficient fonction de la séquence d'essais (fissurée, non fissurée) après le premier changement de réponse. Pour un nombre d'éprouvettes restreint, cette méthode donne une bonne approximation de la limite d'endurance [BFGT92] mais ne permet pas d'estimer l'écart-type.

Nous nous intéressons maintenant à l'estimation **des intervalles de confiance** de la médiane et de l'écart-type, associés à la méthode de l'escalier "classique" (pas l'escalier court).

Intervalle de confiance sur la médiane

Un minimum de 15 éprouvettes est nécessaire pour estimer correctement la dispersion autour de cette valeur [BFGT92]. La précision de l'estimation de la moyenne (confondue avec la médiane puisque Dixon et Mood supposent que la distribution normale décrit correctement la répartition des contraintes pour une durée de vie fixée N_r en endurance, i.e. $N_r \gtrsim 10^6$ cycles) croît en fonction de la racine carrée du nombre N de résultats

expérimentaux utilisés pour son calcul¹.

L'intervalle de confiance d'un paramètre est l'ensemble des valeurs de ce paramètre telles que la valeur estimée (pour un estimateur) appartienne à l'intervalle d'acceptation pour un risque d'erreur α fixé.

Selon Dixon et Mood [DM48], l'erreur sur la moyenne est donnée par :

$$\epsilon_m = \frac{G\sigma}{\sqrt{N}} \quad (2.11)$$

où σ est l'écart-type de la limite d'endurance, et G un facteur dépendant du rapport $\frac{d}{\sigma}$, pouvant être pris en première approximation égal à 1 [DM48], [Bas71]. En pratique, l'écart-type est toujours inconnu, Dixon et Mood en proposent l'estimation suivante :

$$s = 1,62 d. \left(\frac{NB - A^2}{N^2} + 0,029 \right) \quad \text{si} \quad \frac{NB - A^2}{N^2} > 0,3 \quad (2.12)$$

Nota : si l'inéquation n'est pas vérifiée, l'estimation s n'est pas valable.

On en déduit alors l'estimation $\hat{\epsilon}_s$ de l'erreur ϵ_m :

$$\hat{\epsilon}_m = \frac{Gs}{\sqrt{N}} \quad (2.13)$$

L'intervalle de confiance sur la moyenne de σ_D pour un risque α fixé peut alors être estimé par la relation (2.14) :

$$\sigma_D \in [m - h_\alpha \hat{\epsilon}_m; m + h_\alpha \hat{\epsilon}_m] \quad (2.14)$$

où h_α suit la loi de Student à $(N - 1)$ degrés de liberté.

Intervalle de confiance sur l'écart-type

L'erreur ϵ_s sur l'écart-type σ est donnée par :

$$\epsilon_s = \frac{H\sigma}{\sqrt{N}} \quad (2.15)$$

où H est un facteur dépendant aussi du rapport $\frac{d}{\sigma}$ [DM48]. L'estimation $\hat{\epsilon}_s$ de ϵ_s s'écrit alors :

$$\hat{\epsilon}_s = \frac{Hs}{\sqrt{N}} \quad (2.16)$$

D'où une estimation de l'intervalle de confiance sur l'écart-type de σ_D pour un risque α fixé.

$$\sigma \in [s - h_\alpha \hat{\epsilon}_s; s + h_\alpha \hat{\epsilon}_s] \quad (2.17)$$

¹nombre d'événements (rupture ou non rupture) le plus faible rencontré dans l'escalier

Exemple d'application

Considérons l'exemple des essais de torsion sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V où la méthode de l'escalier a été utilisée pour déterminer la limite d'endurance à 2.10^6 cycles sur 16 éprouvettes "lisses" ($K_t(\text{torsion}) = 1,04$) cylindriques de diamètre 12 mm. Les valeurs sont présentées dans le tableau 2.5.

Durée de vie visée	nombre de ruptures	nombre de non ruptures	d (MPa)	τ_0 (MPa)	τ_{-1}^D (MPa)	s (MPa)
2.10^6	9	7	15	380	411	28

TAB. 2.5 – Détermination des limites d'endurance en torsion par la méthode de l'escalier.

Le nombre de degrés de liberté est de 6 (7-1). D'après (2.13),

$$\hat{\epsilon}_m = \frac{Gs}{\sqrt{N}}$$

où $N = 7$ et G dépend du rapport $\frac{d}{s} = 0,54$ et d'après [DM48] $G \simeq 0,93$.

$$\hat{\epsilon}_m = \frac{0,93 \times 28}{\sqrt{7}} = 9,84 \text{ MPa}$$

L'intervalle de confiance à 95% ($h_\alpha = 2,447$ pour $\alpha = 0.05$ et $N - 1 = 6$ degrés de liberté d'après les tables de la loi de Student associé à la moyenne estimée est donc 411 ± 24 MPa. De plus,

$$\hat{\epsilon}_s = \frac{Hs}{\sqrt{N}} \quad (2.18)$$

avec $H = 1,7$ pour $\frac{d}{s} = 0,54$, $\hat{\epsilon}_s = 18$ MPa.

De la même façon on estime l'intervalle de confiance à 95% associé à l'écart-type estimé : $27,5 \pm 44$ MPa.

Cet exemple montre que l'estimation de l'écart-type est peu fiable dans ce cas : l'intervalle de confiance sur l'écart-type est très large, le nombre d'éprouvettes n'étant pas suffisant pour donner un résultat significatif.

2.5 Essais de fatigue

Cette partie présente les essais de fatigue réalisés sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V. Plusieurs types d'essais ont été réalisés avec 25 éprouvettes lisses pour chacun d'eux afin de déterminer les courbes (S-N) suivantes entre 10^5 et 2.10^6 cycles. Pour les sollicitations simples, quatre chargements ont été testés :

- Traction alternée symétrique ($R_\sigma = -1$)
- Torsion alternée symétrique ($R_\tau = -1$)

- Flexion rotative alternée symétrique ($R_\sigma = -1$)
- Flexion plane alternée symétrique ($R_\sigma = -1$)

Concernant les sollicitations combinées, des essais de flexion plane et torsion combinées ($\frac{\sigma_a}{\tau_a} = \sqrt{3}$, $R_\sigma = -1$) en phase ($\phi = 0^\circ$) et hors phase ($\phi = 90^\circ$) ont été réalisés. La forme du cycle pour chaque essai est sinusoïdale. Tous les essais ont été effectués à température ambiante ($\simeq 20^\circ\text{C}$) et à l'air libre.

Dans un deuxième temps, des essais par blocs en flexion plane ($R_\sigma = -1$) à 2 niveaux bas/haut répétés alternativement jusqu'à fissuration ont été effectués sur 40 éprouvettes afin de déterminer expérimentalement si le concept de seuil en contrainte σ^* mis en évidence pour la fonte GS61 [Ban01], [Pl96] pouvait être utilisé pour l'alliage Ti-6Al-4V.

2.5.1 Sollicitations d'amplitude constante

Toutes les séries d'essais de fatigue sous chargement d'amplitude constante ont été réalisées sur 25 éprouvettes réparties de la façon suivante :

- 14 à 16 éprouvettes pour déterminer la limite d'endurance à 2.10^6 cycles par la méthode de l'escalier,
- 7 à 10 éprouvettes pour la détermination de la limite de fatigue à 2.10^5 cycles par la méthode de l'escalier,
- le reste des éprouvettes a été sollicité à des niveaux de contrainte plus élevés conduisant à des durées de vie voisines de 10^5 cycles.

L'ensemble des résultats d'essais obtenus sur les 25 éprouvettes testées pour chaque chargement a été dépouillé à l'aide du logiciel ESOPE [Tec95] afin d'identifier les constantes A, B, C et E de l'équation de Bastenaire et les constantes A et B de l'équation de Basquin pour modéliser les courbes S-N associées.

2.5.1.1 Traction ($R_\sigma = -1$)

Les essais de traction alternée symétrique ($R_\sigma = -1$) ont été réalisés à force imposée sur un vibrophore Amsler à une fréquence voisine de 125 Hz. Les limites de fatigue médianes et les écarts-types estimés identifiés par la méthode de l'escalier sont regroupées dans le tableau 2.6.

Durée de vie visée (cycles)	nbre de rupture	nbre de non rupture	d (MPa)	σ_0 (MPa)	σ_{-1}^D (MPa)	s (MPa)
2.10^5	4	4	50	600	638	18
2.10^6	8	6	50	550	583	non estimable

TAB. 2.6 – Détermination des limites de fatigue par la méthode de l'escalier en traction ($R_\sigma = -1$).

avec les notations suivantes : d représente le pas en contrainte choisi pour appliquer la méthode de l'escalier, σ_0 est le plus faible niveau de contrainte utilisé dans l'escalier,

σ_{-1}^D la limite d'endurance médiane estimée et s une estimation de l'écart-type. Le pas de 50 MPa a été imposé par la précision du capteur de 100 kN afin d'avoir des résultats significatifs.

Les courbes S-N du matériau en endurance de 10^5 à 2.10^6 cycles modélisées par la formulation de Bastenaire (équation (2.19)) et Basquin (2.20), ainsi que l'ensemble des résultats expérimentaux sont représentés sur la figure 2.22.

$$N = \frac{A}{S - E} \cdot \exp \left[- \left(\frac{S - E}{B} \right)^c \right] \quad (2.19)$$

$$\ln(N) = A \ln(S) + B \quad (2.20)$$

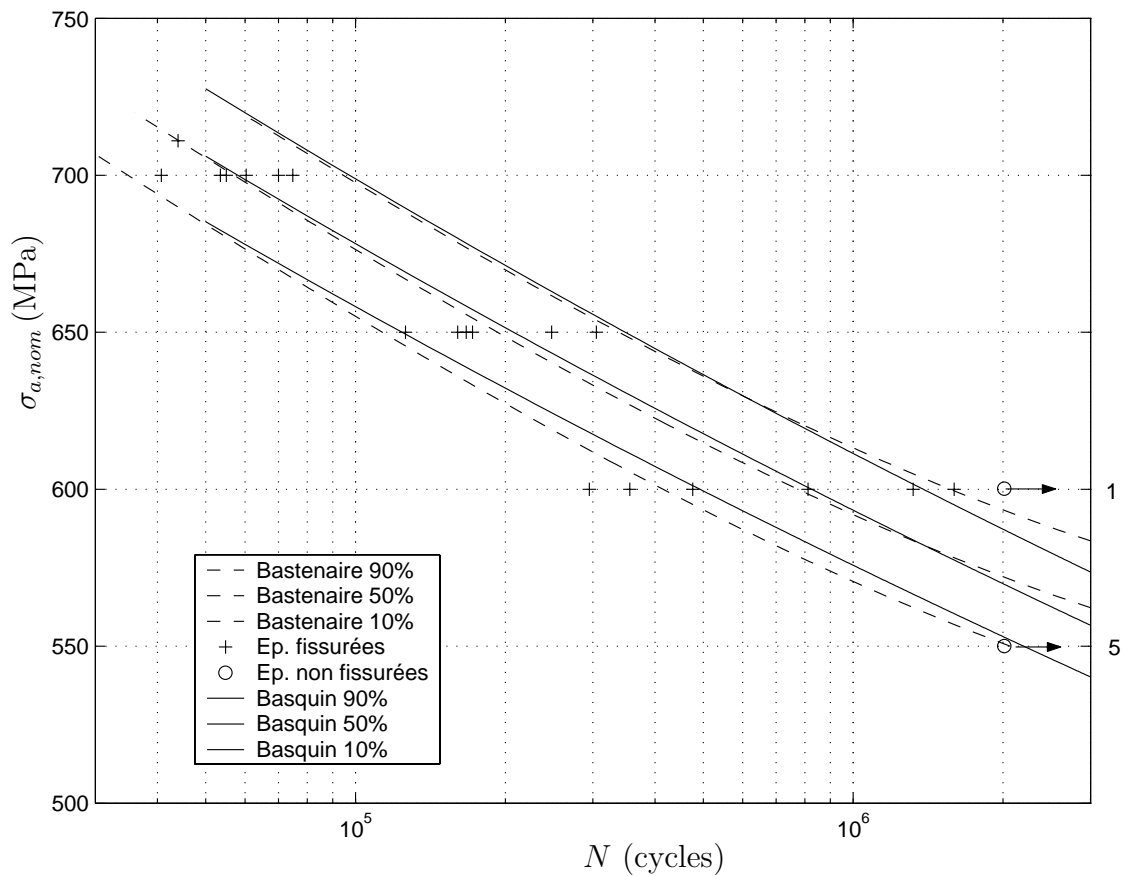


FIG. 2.22 – Courbe S-N en traction ($R_\sigma = -1$) d'éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V suivant les modèles de Bastenaire et de Basquin.

La limite de fatigue à 2.10^6 cycles calculée par le modèle de Bastenaire est de 572 MPa, par le modèle de Basquin elle est de 569 MPa ce qui est assez proche de la valeur obtenue par la méthode de l'escalier (583 MPa). L'écart-type en contrainte estimé a une valeur de 16,6 MPa. Cette valeur représentant moins de 3% de la limite de fatigue sous estime probablement la dispersion expérimentale. Malheureusement l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane n'a pu être estimé par la méthode de Dixon et Mood, l'estimateur de l'écart-type n'ayant pu être calculé. 6 éprouvettes testées à une amplitude de contrainte

de 700 MPa permettent de tracer une droite de Henry (fig. 2.23) pour une durée de vie visée de 10^5 cycles.

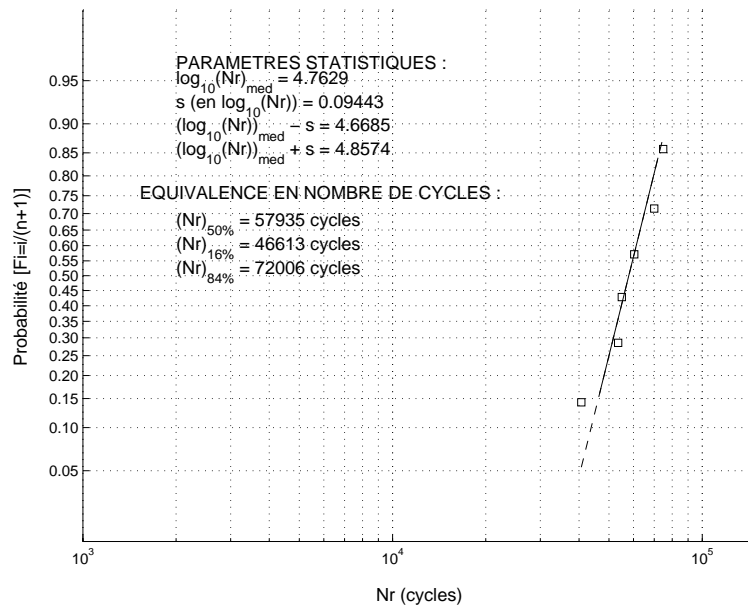


FIG. 2.23 – Droite de Henry en traction ($R = -1$) sur éprouvette lisse en Ti-6Al-4V pour $\sigma_a = 700$ MPa.

Les points sont alignés, l'hypothèse de distribution log-normale du nombre de cycles à rupture, pour un effort donné, est vérifiée. L'orientation des fissures macroscopiques a été repérée par observation au microscope électronique à balayage (fig. 2.24 et 2.25).

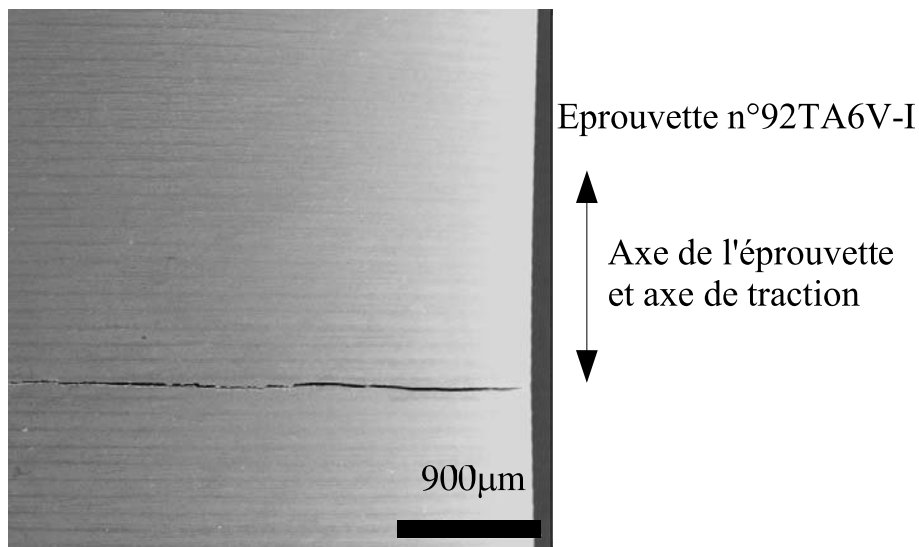


FIG. 2.24 – Orientation de la fissure macroscopique sur la surface de l'éprouvette n°92TA6V-I sollicitée en traction ($R_\sigma = -1$), $\sigma_a = 650$ MPa, $N_r = 166900$ cycles.

Contrairement aux matériaux fragiles où le plan d'amorçage est supposé identique au plan de propagation, il faut distinguer ces deux plans pour les matériaux ductiles. Il

est difficile de définir le plan d'amorçage, le plan de propagation est perpendiculaire à la contrainte normale maximum. Cette orientation a été observée par Bache et al. [BE92] sur l'alliage de titane Ti-6Al-5Zr pour un chargement de traction.

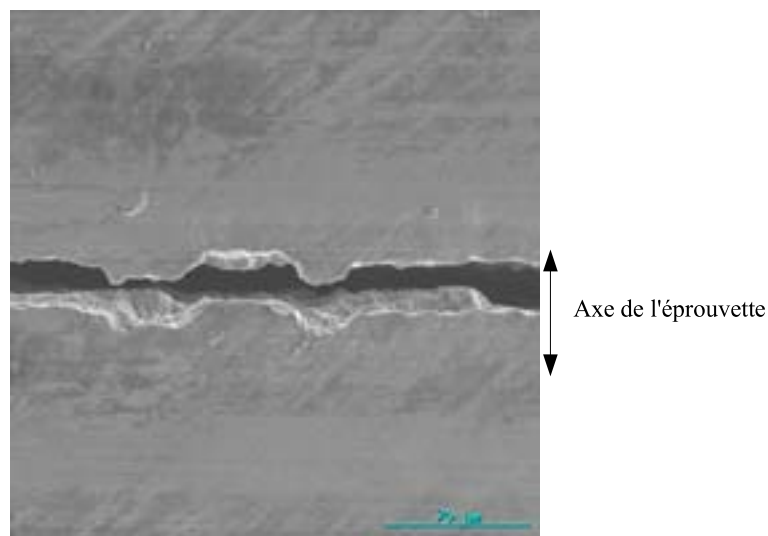


FIG. 2.25 – Zoom sur la fissure macroscopique à la surface de l'éprouvette n°92TA6V-I sollicitée en traction

Un examen minutieux du faciès de rupture a été réalisé au microscope électronique à balayage après fragilisation de l'éprouvette à l'azote liquide et rupture par choc (ouverture de la fissure en flexion). Il est difficile de localiser très précisément la zone de l'amorçage de fissure. La microstructure très fine ne présentant pas de défaut interne notable, la fissure s'amorce en surface (fig. 2.26). La fissure a une taille de 2 mm dans la profondeur de l'éprouvette. L'état de surface avec la présence de stries d'usinage a certainement un effet sur l'amorçage.

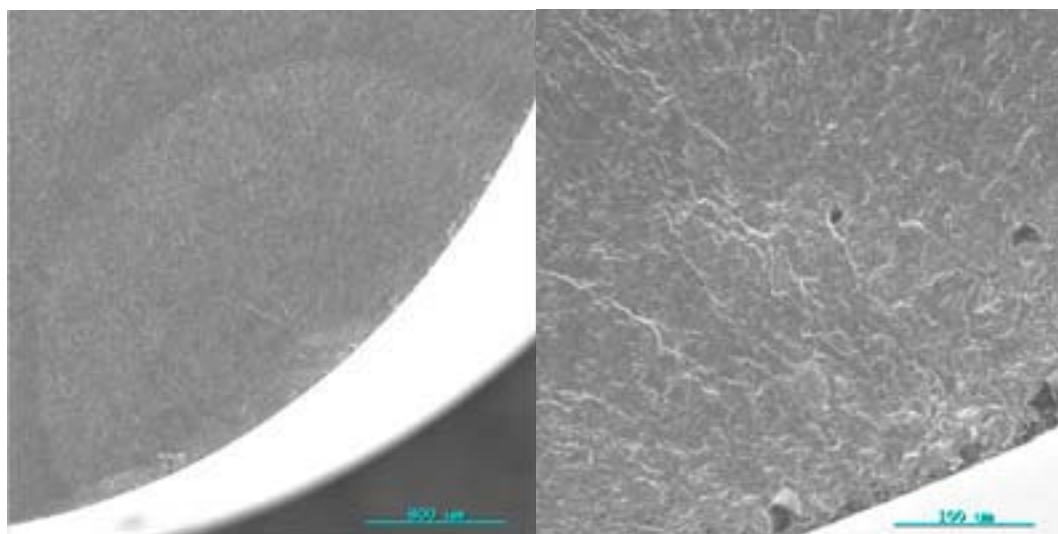


FIG. 2.26 – Faciès de rupture de l'éprouvette n°92TA6V-I cassée par choc après fragilisation à l'azote liquide

2.5.1.2 Torsion ($R_\sigma = -1$)

Les limites de fatigue médianes et les écarts-types estimés identifiés par la méthode de l'escalier sont regroupées dans la tableau (2.7).

Durée de vie visée (cycles)	nbre de rupture	nbre de non rupture	d (MPa)	τ_0 (MPa)	τ_{-1}^D (MPa)	s (MPa)
$2 \cdot 10^5$	4	3	15	425	431	3
$2 \cdot 10^6$	9	7	15	380	411	28

TAB. 2.7 – Détermination des limites de fatigue en torsion par la méthode de l'escalier.

De plus, à l'aide de 6 éprouvettes une droite de Henry (méthode des fréquences cumulées [BFGT92]) est tracée pour une durée de vie voisine de 10^5 cycles. Cette droite est représentée sur la figure 2.27. L'hypothèse de distribution log-normale du nombre de cycles à rupture, pour un effort donné, est vérifiée.

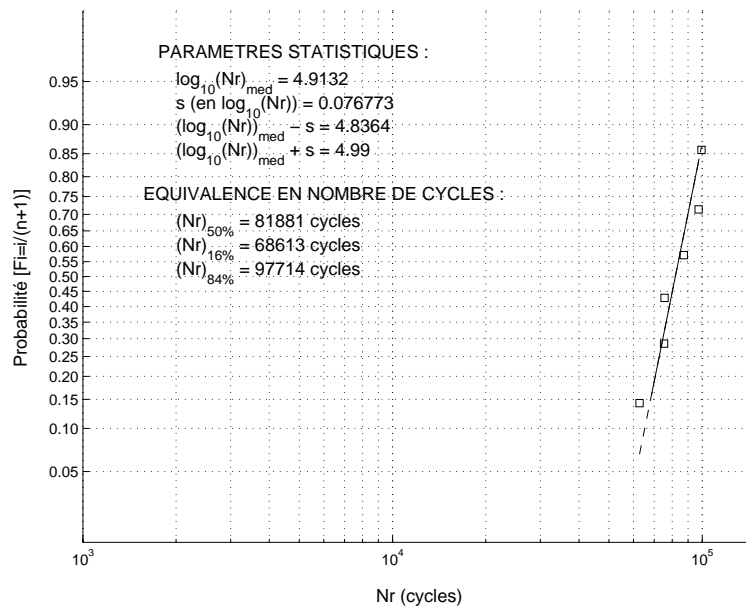


FIG. 2.27 – Droite de Henry en torsion ($R = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V pour $\tau_a = 440$ MPa.

Les courbes S-N en torsion ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses modélisées par la formulation de Bastenaire et Basquin ainsi que les résultats d'essais sont représentés sur la figure 2.28. Les modélisations de la courbe S-N par le modèle de Bastenaire et Basquin conduisent respectivement à des limites de fatigue médiane à $2 \cdot 10^6$ cycles de 412 MPa et 405 MPa ce qui est très proche de la valeur obtenue par la méthode de l'escalier (411 MPa). La courbe S-N permet de se rendre compte de la dispersion assez importante des résultats d'essais de torsion pour cet alliage, phénomène déjà mis en évidence par l'estimation de l'écart-type par la méthode de l'escalier.

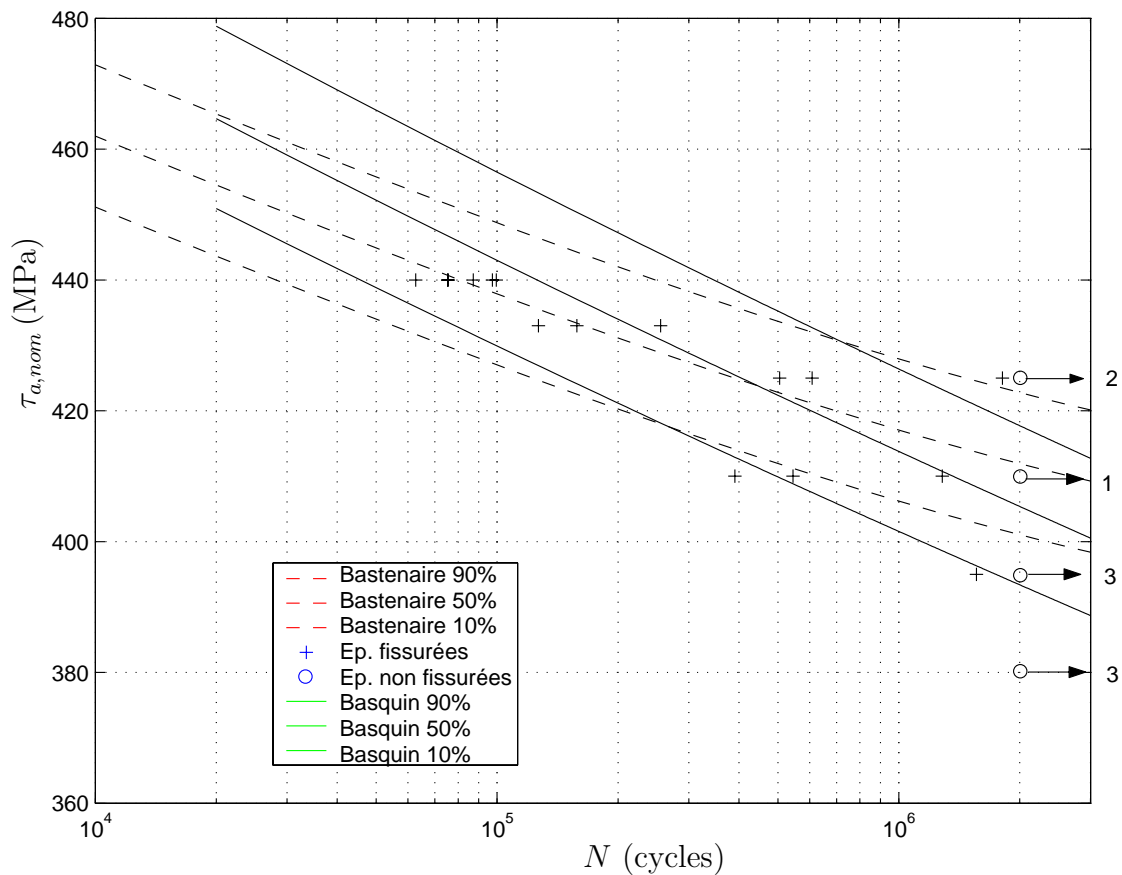


FIG. 2.28 – Courbes S-N en torsion ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V suivant les modèles de Bastenaire et de Basquin

Par contre, l'estimation de l'écart-type en contrainte par le modèle de Bastenaire conduit à une valeur de 8,5 MPa, ce qui paraît très faible au vu du nuage de points expérimentaux. Une valeur plus proche, de l'ordre du pas choisi (15 MPa), ou de l'ordre de celui estimé par la méthode de l'escalier (28 MPa), semble plus réaliste. L'intervalle de confiance à 95% associé à la limite d'endurance est estimable, on obtient : $\tau_{-1}^D \in [411 \pm 24 \text{MPa}]$. L'orientation des fissures macroscopiques a été repérée par observation au microscope électronique à balayage sur toutes les éprouvettes sollicitées en torsion, les fissures présentent des orientations semblables à celle illustrée par la figure 2.29. Il est difficile de déterminer le plan d'amorçage. La fissure se propage dans le plan de cisaillement maximum le long de l'axe longitudinal de l'éprouvette.

En torsion, le cisaillement est maximum sur le plan le long de l'axe longitudinal de l'éprouvette mais également sur le plan perpendiculaire (parallèle aux stries d'usinage). Il aurait été possible que l'état de surface joue un rôle dans l'orientation des fissures mais toutes les fissures sont systématiquement orientées dans le plan le long de l'axe longitudinal. L'orientation des grains due au laminage, constatée lors de l'étude de la microstructure de l'alliage (paragraphe 2.1.1), a certainement favorisé la propagation dans l'axe longitudinal. Kocanda [KKT01] a observé que les fissures se propageaient dans les deux directions de la contrainte de cisaillement maximum sur un alliage ($\alpha + \beta$) Ti-6Al-

3Mo-2Cr dont les caractéristiques sont assez proches du Ti-6Al-4V.

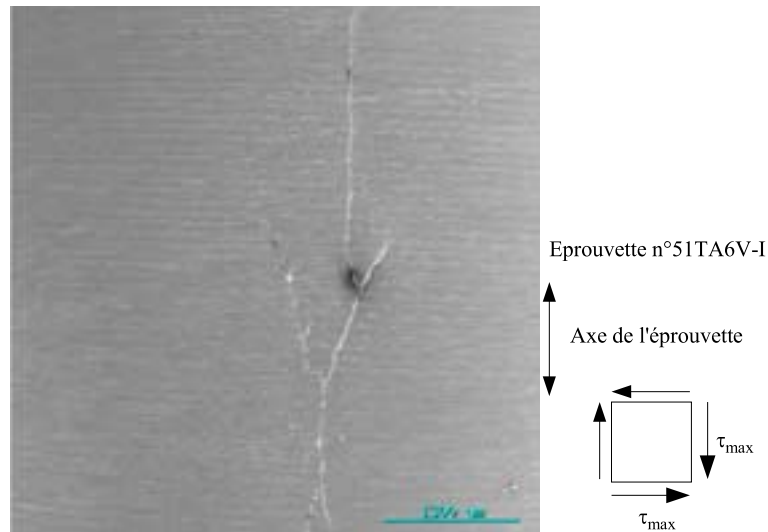


FIG. 2.29 – Orientation de la fissure macroscopique à la surface d'une éprouvette après essai de torsion ($R_\sigma = -1$)

La rupture par choc après fragilisation à l'azote liquide s'étant avéré irréalisable du fait de l'orientation de la fissure macroscopique, les éprouvettes ont dû être tronçonnées, fraisées puis ouvertes à l'aide d'un burin et d'un marteau comme cela est illustré sur la figure 2.30.



FIG. 2.30 – Méthode d'ouverture des éprouvettes sollicitées en torsion ($R_\sigma = -1$)

La macrofissure ainsi mise à jour est représentée sur la figure 2.31. La taille de la macrofissure de fatigue est importante : 18 mm dans le sens longitudinal et entre 3 et 4 mm de profondeur. Cette éprouvette a subi 1560784 cycles à $\tau_a = 395$ MPa. La fissure se propageant dans le sens longitudinal de l'éprouvette, la perte de raideur en torsion est moins rapide que pour une fissure transversale ; ce qui peut expliquer sa taille importante.

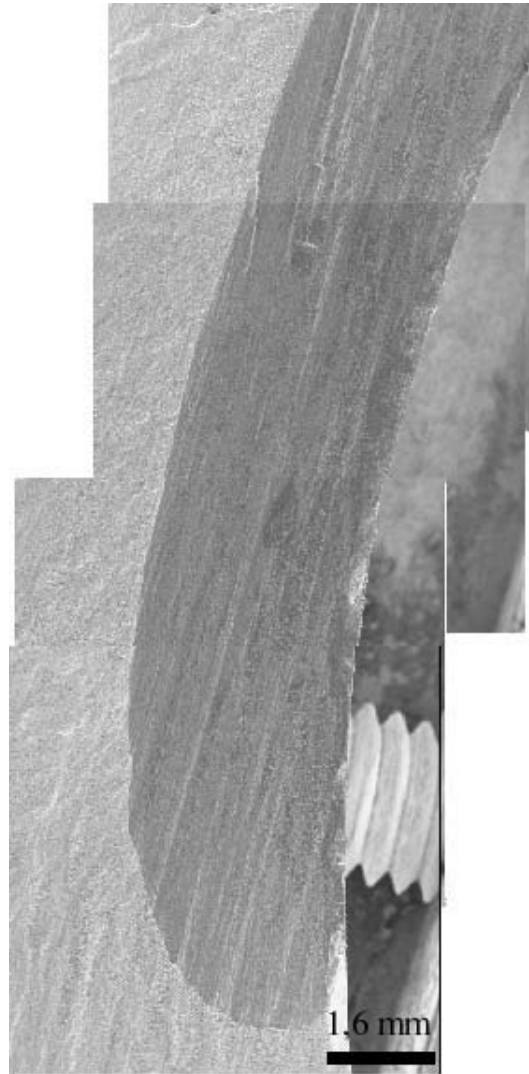


FIG. 2.31 – Photographie MEB du faciès de rupture d'une éprouvette lisse en Ti-6Al-4V après essai de torsion ($R_\sigma = -1$) (éprouvette n°66Ti-6Al-4V-I)

2.5.1.3 Flexion rotative ($R_\sigma = -1$)

Les essais de flexion rotative ont été réalisés sur la machine de flexion-torsion du laboratoire (voir 2.3.2). Le tableau 2.8 regroupe les limites de fatigue estimées par la méthode de l'escalier.

Durée de vie visée (cycles)	nbre de rupture	nbre de non rupture	d (MPa)	σ_0 (MPa)	σ_{-1}^D (MPa)	s (MPa)
$2 \cdot 10^5$	5	6	25	600	648	non estimable
$2 \cdot 10^6$	7	8	25	550	602	34,2

TAB. 2.8 – Limites de fatigue expérimentales obtenues en flexion rotative ($R_\sigma = -1$) par la méthode de l'escalier sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V.

L'estimation de l'écart-type est de 34 MPa ce qui traduit une dispersion assez importante, l'intervalle de confiance à 95% sur la médiane a pu être estimée : $\sigma_{-1,FR}^D \in$

[602 ± 27MPa]. Cette dispersion est illustrée par le tracé des courbes S-N et du nuage de points expérimentaux (figure 2.32).

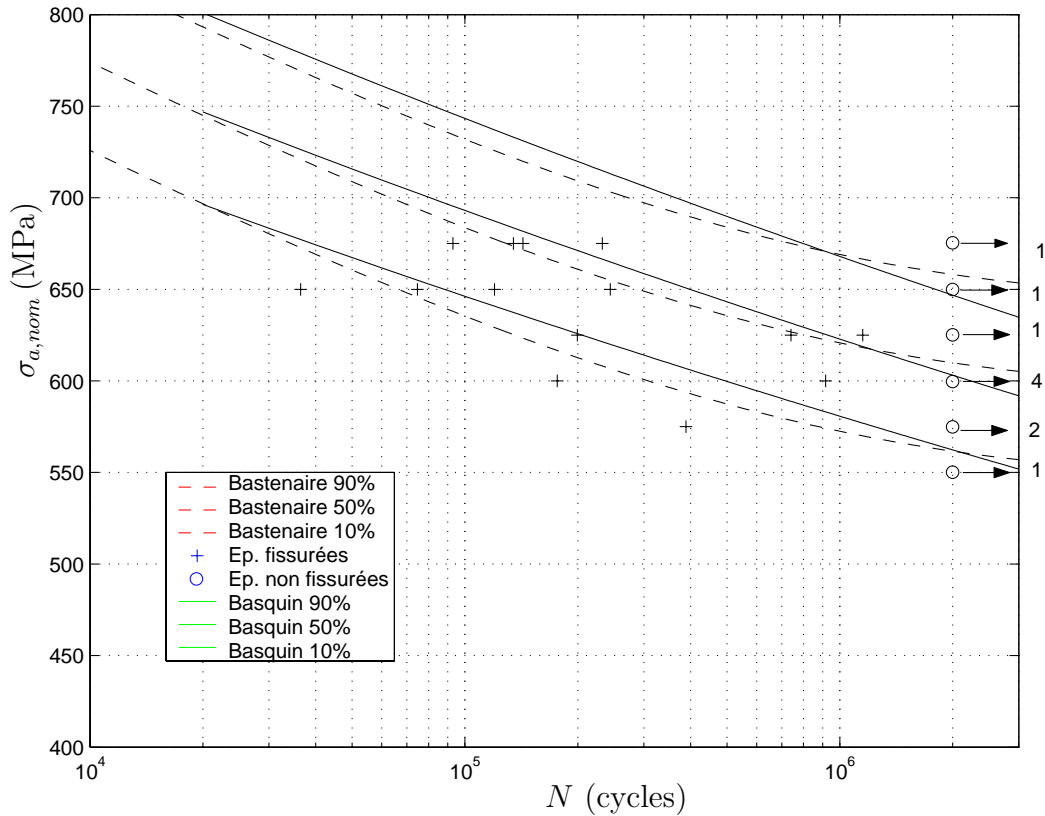


FIG. 2.32 – Courbes S-N en flexion rotative ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V. Résultats expérimentaux et modèles de bastenaire et de Basquin.

L'orientation des fissures macroscopiques est illustrée par les figures 2.33 et 2.34.

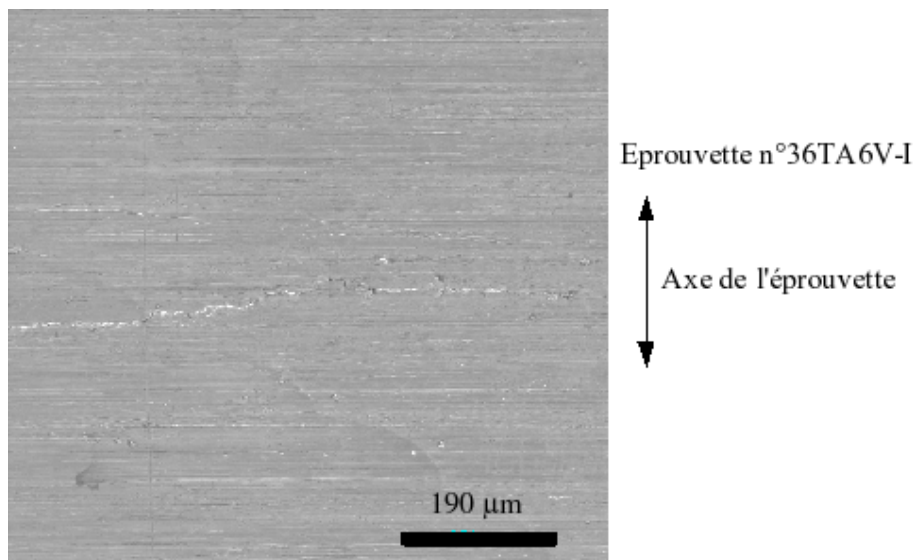


FIG. 2.33 – Orientation de la fissure macroscopique sur la surface d'une éprouvette après essai de flexion rotative ($R_\sigma = -1$).

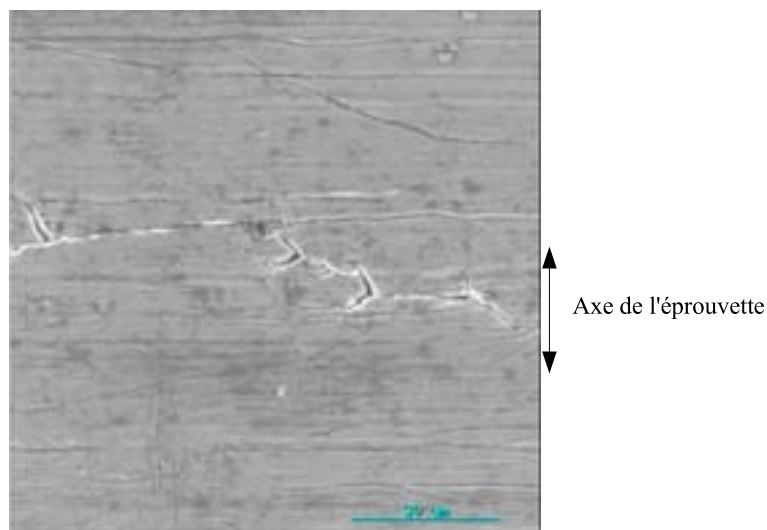


FIG. 2.34 – Zoom sur une partie de la fissure macroscopique sur la surface d'une éprouvette après essai de flexion rotative ($R_\sigma = -1$).

La fissure se propage dans le plan perpendiculaire à la contrainte normale maximum. Le plan d'amorçage est difficilement définissable ; le zoom sur la fissure montre des orientations de microfissures assez aléatoires (de 15° à 60° par rapport à l'axe longitudinal de l'éprouvette). Ce zoom montre que la fissure se propage par endroits sur les stries d'usinage, l'effet de l'état de surface est donc ici certainement prépondérant.

L'examen du faciès de rupture de l'éprouvette 36Ti-6Al-4V-I (fig. 2.35) montre l'existence de deux zones distinctes dans la macrofissure de fatigue, la zone très sombre présente un grand nombre de microfissures et de stries comme le montre le zoom (fig. 2.36) dans cette partie de la fissure. Haritos et al. [HNL99] ont mis en évidence des stries de même allure pour le même type d'alliage pour des rapports de charge élevés. La déformation plastique par cisaillement est à l'origine du mécanisme de formation de ces stries [BFGT92].

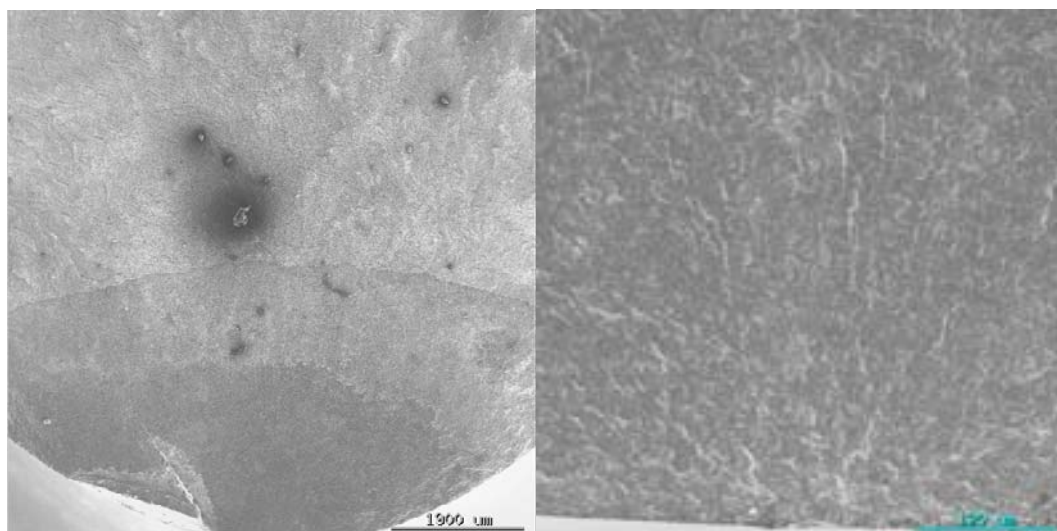


FIG. 2.35 – Faciès de rupture de l'éprouvette n°36-TA6V-I ($\sigma_a = 675$ MPa, $N_r = 142796$ cycles).

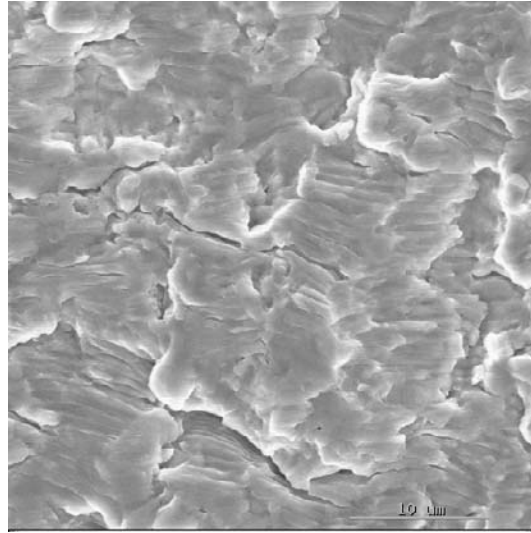


FIG. 2.36 – Zoom dans la macrofissure de fatigue de l'éprouvette n°36Ti-6Al-4V-I, ($\sigma_a = 675$ MPa, $N_r = 142796$ cycles).

2.5.1.4 Flexion plane ($R_\sigma = -1$)

Les essais de flexion plane alternée symétrique ($R_\sigma = -1$) ont été réalisés sur 24 éprouvettes du second lot dont l'état de surface présente un défaut en fond de tore (voir paragraphe 2.2.2). Les limites de fatigue médianes et les écarts-types estimés identifiées par la méthode de l'escalier sont regroupées dans la tableau 2.9.

Durée de vie visée (cycles)	nbre de rupture	nbre de non rupture	d (MPa)	σ_0 (MPa)	σ_{-1}^D (MPa)	s (MPa)
2.10^5	5	6	25	600	678	Estim. imp.
2.10^6	7	8	25	550	652	Estim. imp.

TAB. 2.9 – Détermination des limites de fatigue par la méthode de l'escalier.

Les écarts-types ne sont malheureusement pas estimables, ce qui ne nous permet pas d'estimer l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane. Les courbes S-N en flexion plane ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses modélisées par les formulations de Bastenaire et Basquin ainsi que les résultats d'essais sont représentés sur la figure 2.37. La forte dispersion des résultats n'est pas estimable à l'aide de la méthode de l'escalier. Les limites de fatigue médianes à 2.10^6 cycles estimées par les modèles de Bastenaire et de Basquin valent respectivement 655 MPa et 654 MPa, valeurs très proches de la limite estimée par la méthode de l'escalier (652 MPa). L'orientation des fissures macroscopiques est illustrée par la figure (2.38). Un zoom sur la fissure (fig. 2.39) montre qu'il est difficile de déterminer avec précision le plan d'amorçage. Le plan de propagation est perpendiculaire à la contrainte normale maximum, comme constaté par Kocanda [KKT01] sur l'alliage Ti-6Al-3Mo-2Cr. L'examen du faciès de rupture (fig 2.38 et 2.39) a pas permis de localiser un amorçage en surface. La fissure s'enfonce d'environ 3 mm dans l'éprouvette.

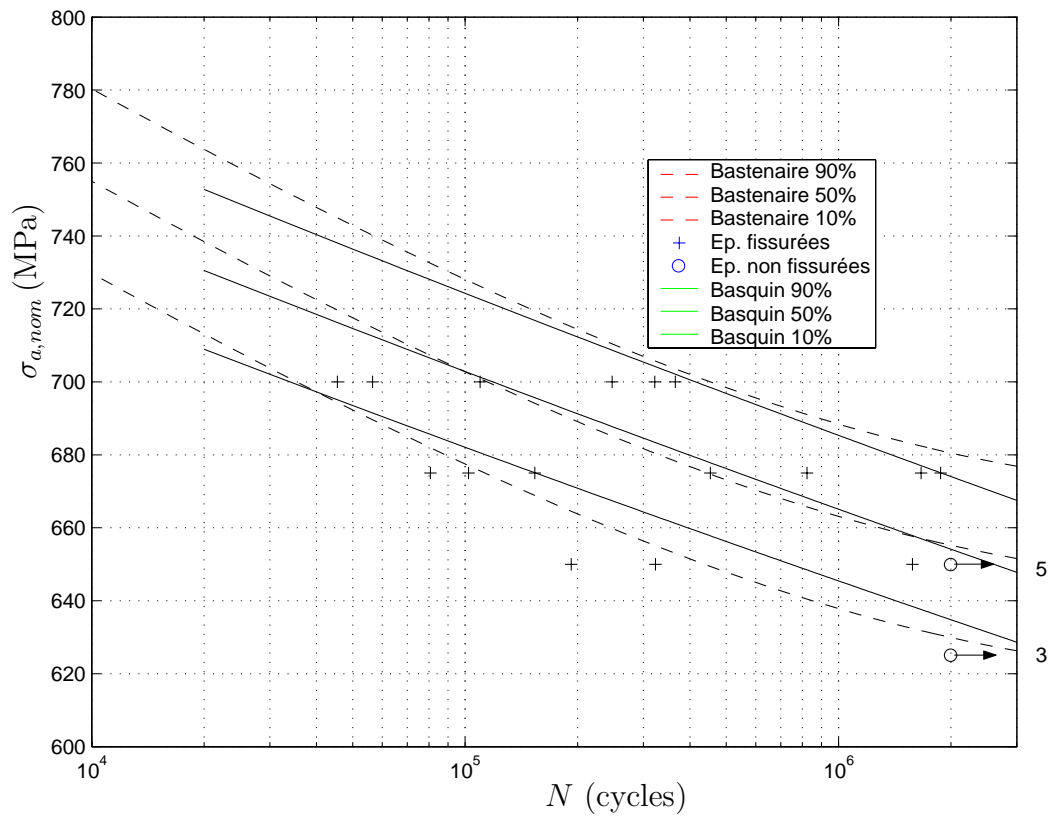


FIG. 2.37 – Courbes SN en flexion plane ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V. Résultats d’essais et modèles de bastenaire et de Basquin.

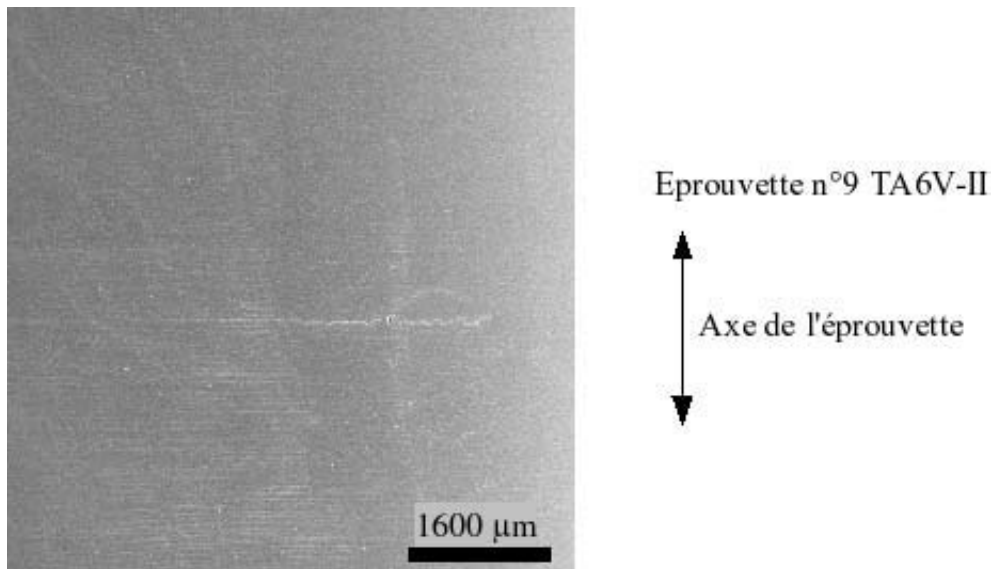


FIG. 2.38 – Orientation de la fissure macroscopique sur la surface d’une éprouvette après essai de flexion plane ($R_\sigma = -1$) ($\sigma_a = 700$ MPa, $N_r = 365300$ cycles).

La figure 2.41 montre la transition entre la fissure de fatigue (zone sombre) et le “matériau sain”. La fissure se caractérise par la présence d’une grande densité de microfissures et de stries.

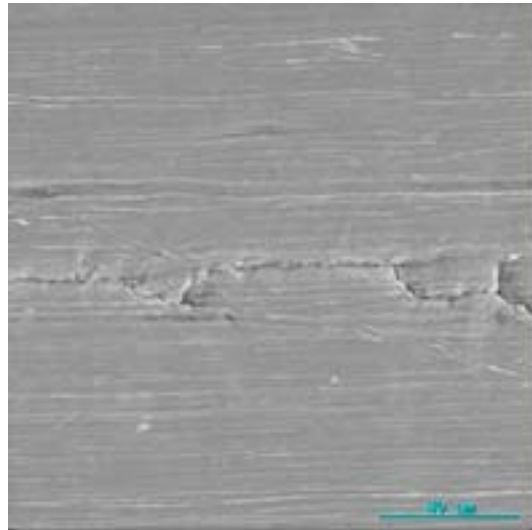


FIG. 2.39 – Zoom sur une partie de la fissure macroscopique à la surface d’une éprouvette après essai de flexion plane ($R_\sigma = -1$)(éprouvette n°36Ti-6Al-4V-I sollicitée à $\sigma_a = 700$ MPa, $N_r = 365300$ cycles).

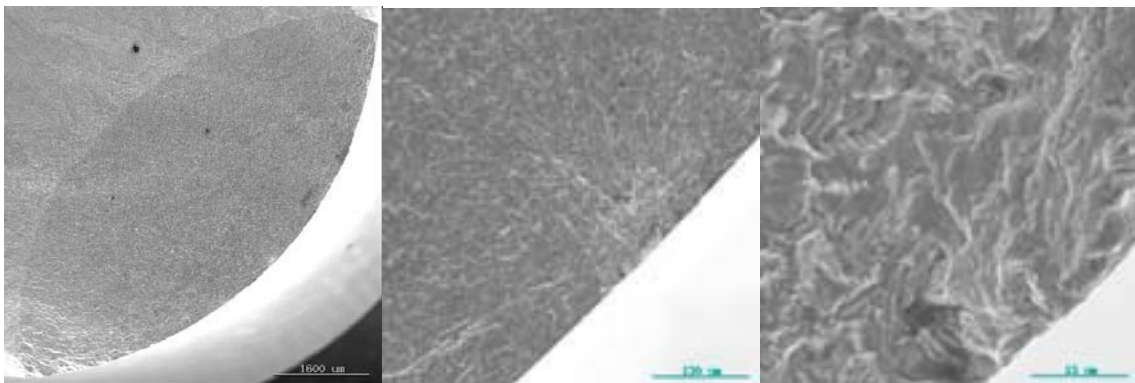


FIG. 2.40 – Faciès de rupture de l’éprouvette n°9-TA6V-II sollicitée à $\sigma_a = 700$ MPa, $N_r = 365300$ cycles.

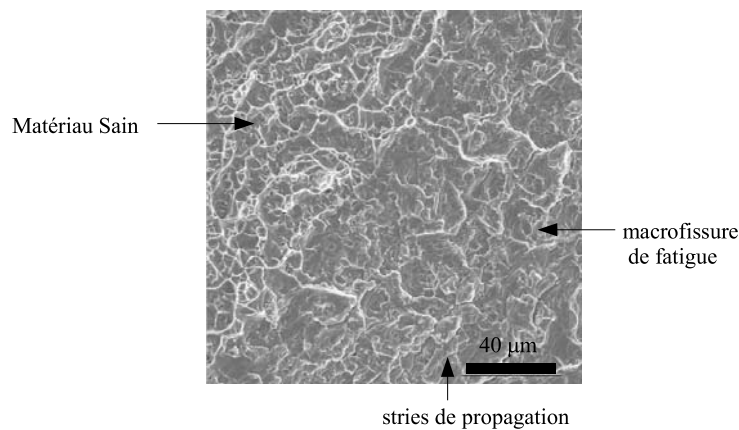


FIG. 2.41 – Faciès de rupture de l’éprouvette n°9-TA6V-II sollicitée à $\sigma_a = 700$ MPa, $N_r = 365300$ cycles.

2.5.1.5 Flexion plane et torsion combinées ($\frac{\sigma_a}{\tau_a} = \sqrt{3}$, $R_\sigma = -1$) en phase

Les essais ont été réalisés sur 24 éprouvettes du premier lot de matière. Le tableau 2.10 regroupe les limites de fatigue estimées par la méthode de l'escalier.

Durée de vie visée (cycles)	nbre de rupture	nbre de non rupture	d sur τ (MPa)	τ_0 (MPa)	τ_{-1}^D (MPa)	s (sur τ_{-1}^D) (MPa)	σ_{-1}^D (MPa)
2.10^5	4	3	15	295	308	Estim. imp.	533
2.10^6	6	9	15	220	255	45	442

TAB. 2.10 – Détermination des limites de fatigue par la méthode de l'escalier.

L'intervalle de confiance à 95% associé à la limite d'endurance médiane à 2.10^6 cycles est : $\sigma_{-1, Fp+Tors, \phi=0}^D \in [442 \pm 70 \text{MPa}]$, il traduit l'importante dispersion liée à cet essai.

Les courbes S-N sur éprouvettes lisses modélisées par les formulations de Bastenaire et Basquin ainsi que les résultats d'essais sont représentés sur la figure 2.42.

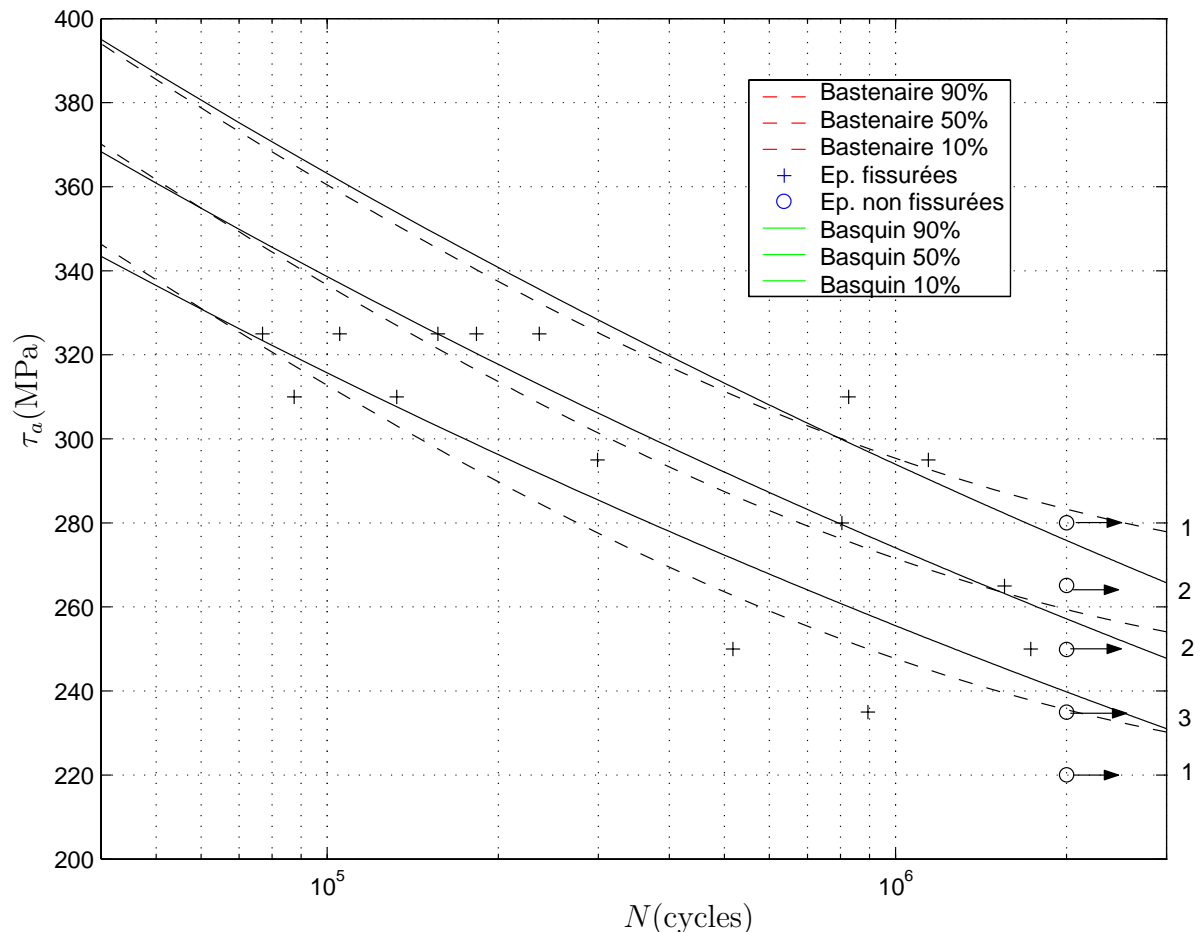


FIG. 2.42 – Courbes S-N en flexion plane et torsion combinées en phase ($\tau_a/\sigma_a = \sqrt{3}$, $R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses. Résultats d'essais et modèles de bastenaire et de Basquin.

L'orientation des fissures de fatigue macroscopiques a été repérée par observation au microscope électronique à balayage (fig. 2.43 et 2.44).

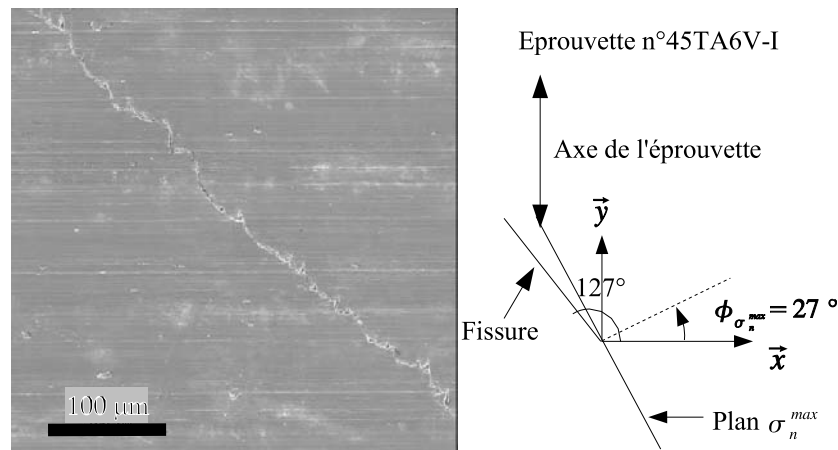


FIG. 2.43 – Orientation de la fissure macroscopique à la surface de l'éprouvette n°45-TA6V-I après essai de flexion-torsion combinées en phase ($\sigma_a = 547$ MPa, $\tau_a = 307$ MPa, $N_r = 299040$ cycles).

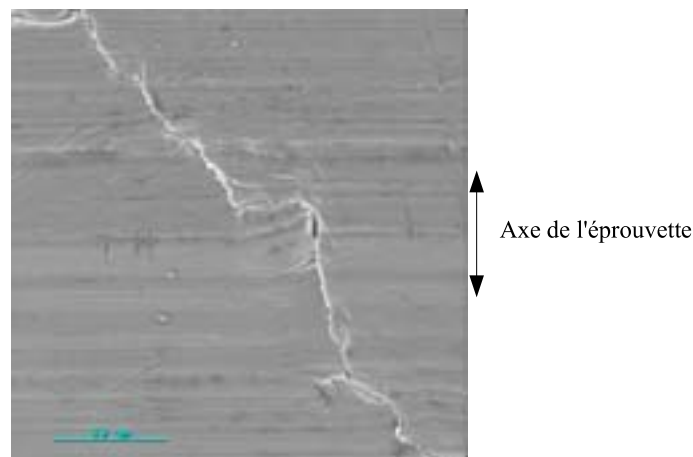


FIG. 2.44 – Zoom sur la fissure macroscopique à la surface de l'éprouvette.

Le plan d'amorçage est toujours difficile à définir précisément. Les observations ayant été réalisées à la surface des éprouvettes, si le plan de propagation est repéré par les deux angles (θ , ϕ) comme illustré sur la figure 2.45, seule l'estimation de l'angle ϕ a pu être effectuée dans de bonnes conditions. Pour cet essai, le plan de contrainte normale maximum est tel que l'angle $\phi_{\sigma_n^{max}}$ vaut 27° . L'angle du plan de propagation est de 127° (fig. 2.43). Le plan de propagation est pratiquement confondu avec le plan de contrainte normale maximum (fig. 2.43). L'examen du faciès de rupture au microscope électronique à balayage (fig. 2.46) après fragilisation de l'éprouvette à l'azote liquide montre un amorçage en surface.

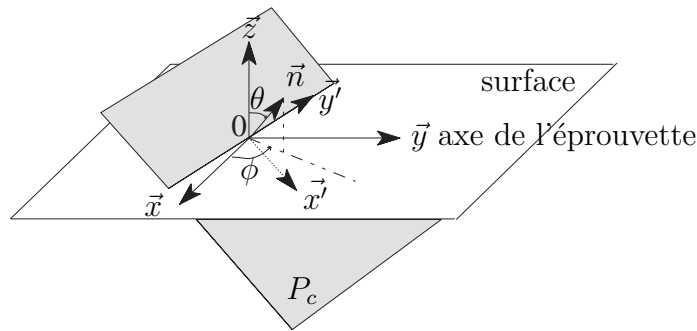


FIG. 2.45 – Repérage du plan de propagation P_c au point O considéré. $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à l'éprouvette avec $O\vec{y}$ son axe longitudinal.

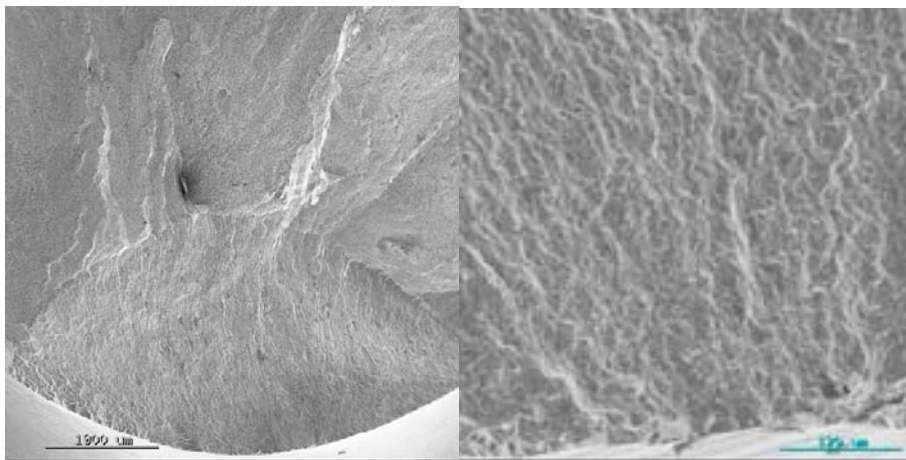


FIG. 2.46 – Faciès de rupture de l'éprouvette n°45-TA6V-I sollicitée en flexion-torsion combinées en phase ($\sigma_a = 547$ MPa, $\tau_a = 307$ MPa, $N_r = 299040$ cycles).

2.5.1.6 Flexion plane et torsion combinées ($\frac{\sigma_a}{\tau_a} = \sqrt{3}$, $R_\sigma = -1$) hors phase ($\phi = 90^\circ$)

Les essais de flexion plane et torsion combinées alternée symétrique ($\frac{\sigma_a}{\tau_a} = \sqrt{3}$, $R_\sigma = -1$) hors phase ($\phi = 90^\circ$) ont été réalisés sur 25 éprouvettes du deuxième lot dont l'état de surface présente un défaut en fond de tore. Les limites de fatigue médianes et les écarts-types estimés identifiés par la méthode de l'escalier sont regroupés dans le tableau 2.11.

Durée de vie visée (cycles)	nbre de rupture	nbre de non rupture	d sur τ (MPa)	τ_0 (MPa)	τ_{-1}^D (MPa)	s (sur τ_{-1}^D) (MPa)	σ_{-1}^D (MPa)
$2 \cdot 10^5$	9	8	15	325	338	Estim. imp.	586
$2 \cdot 10^6$	9	9	15	295	328	17	567

TAB. 2.11 – Détermination des limites de fatigue par la méthode de l'escalier.

L'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane est : $\sigma_{-1, Fp+Tors, \phi=90}^D \in [567 \pm 30 \text{ MPa}]$.

Les courbes S-N ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses modélisées par les formulations de Bastenaire et Basquin ainsi que les résultats d'essais sont représentés sur la figure 2.47.

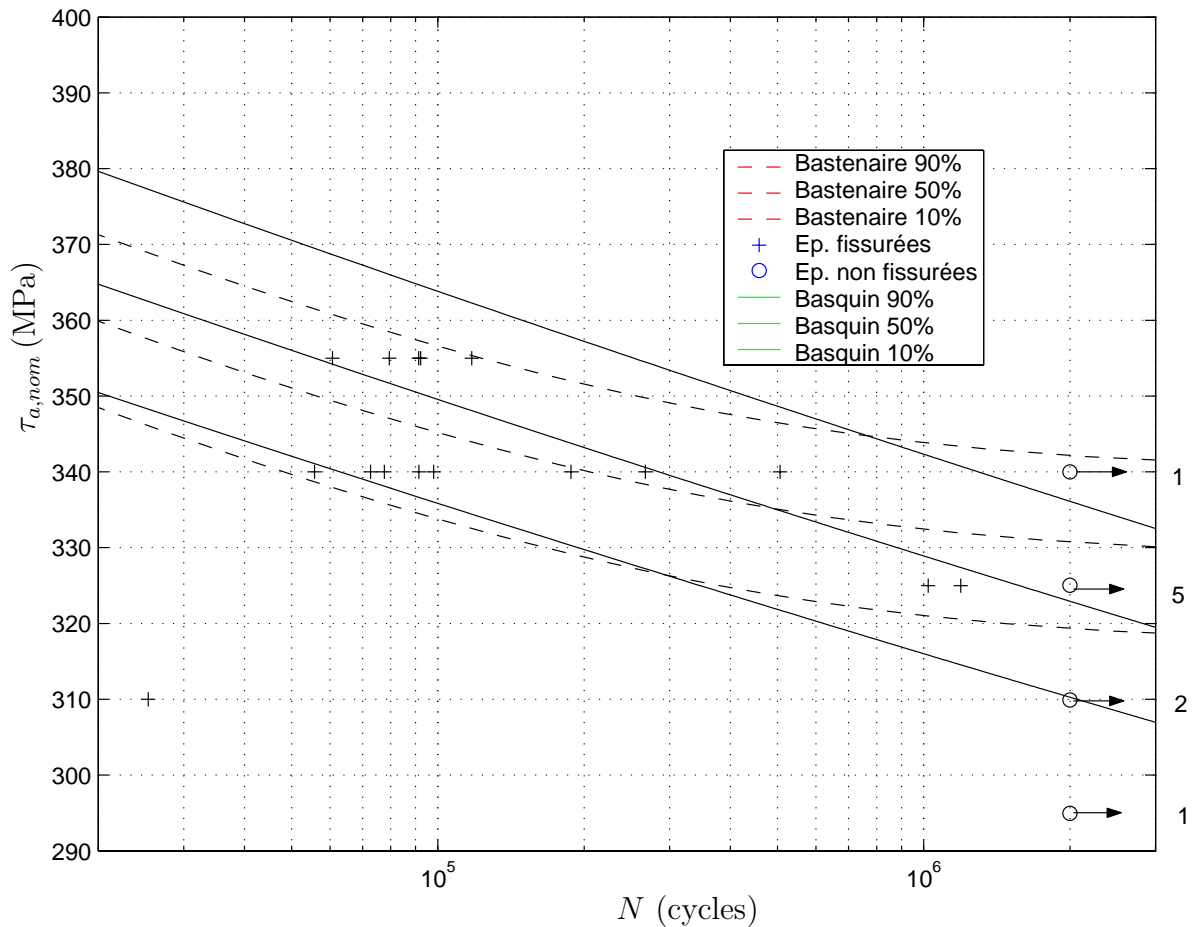


FIG. 2.47 – Courbes S-N en flexion plane et torsion combinées hors phase ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses. Résultats d'essais et modèles de Bastenaire et de Basquin.

L'éprouvette ayant fissuré à 25000 cycles sous une amplitude $\tau_a = 310$ MPa ne sera pas intégrée au dépouillement. Les figures 2.48 et 2.49 illustrent l'orientation des fissures macroscopiques, repérée par observation au microscope électronique à balayage. Il est très difficile de déterminer le plan d'amorçage. Sur une période de chargement, la contrainte normale est maximum quand $\phi_{\sigma_n^{max}} = -90^\circ$. L'angle ϕ pour le plan de propagation est de 17° (fig. 2.48). Le plan de propagation est assez proche du plan de contrainte normale maximum mais sur la figure 2.49, il apparaît que la fissure se propage alternativement sur le plan de contrainte normale maximum et de cisaillement maximum (plan à 45° du plan de contrainte normale). L'examen du faciès (fig. 2.50) après rupture ne permet pas de conclure à un amorçage en surface. La fissure a une taille d'environ 4 mm dans le rayon de l'éprouvette.

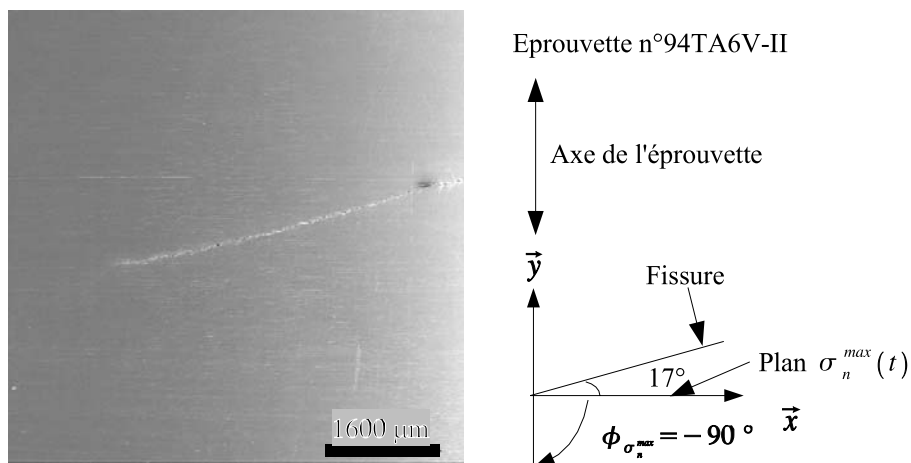


FIG. 2.48 – Orientation de la fissure macroscopique à la surface de l'éprouvette n°94-TA6V-II après essai de flexion-torsion combinées hors phase ($\sigma_a = 589$ MPa, $\tau_a = 340$ MPa, $N_r = 72696$ cycles).

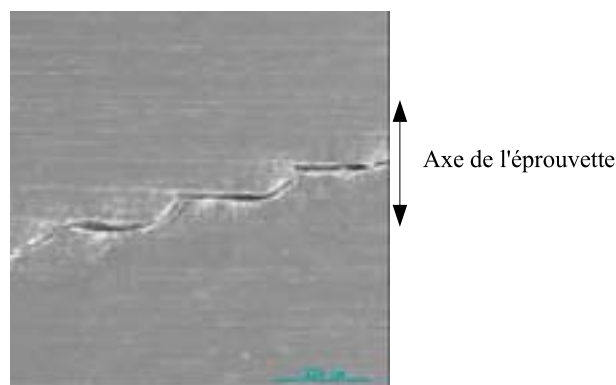


FIG. 2.49 – Orientation de la fissure macroscopique à la surface d'une éprouvette après essai de flexion et torsion combinées hors phase.

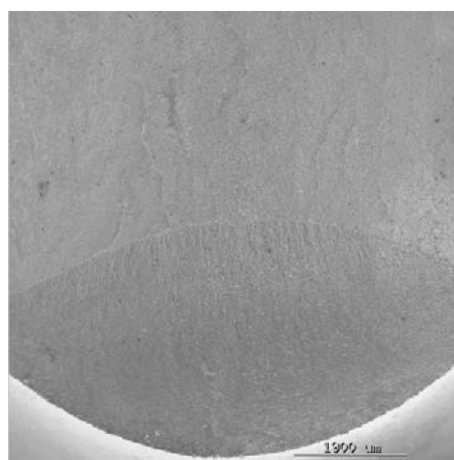


FIG. 2.50 – Faciès de rupture la surface de l'éprouvette n°94-TA6V-II après essai de flexion-torsion combinées hors phase ($\sigma_a = 589$ MPa, $\tau_a = 340$ MPa, $N_r = 72696$ cycles).

2.5.1.7 Bilan des essais de fatigue à amplitude constante

Les essais à amplitude constante n'ont pas permis de définir les plans d'amorçage de fissures de fatigue. Les fissures se propagent perpendiculairement à la contrainte normale maximum en traction, flexion plane, flexion rotative et flexion-torsion combinées en phase. En torsion, c'est curieusement le plan de cisaillement maximum qui semble gouverner la propagation. Les fissures amorcent en surface des éprouvettes, l'état de surface semble tenir un rôle prépondérant.

Les essais en flexion et torsion combinées en phase ont été effectués sur des éprouvettes provenant du premier lot et ceux hors phase sur des éprouvettes du lot n°2. Les états de surface de ces lots sont très différents (voir paragraphe 2.2.2). L'effet du déphasage sur la limite d'endurance en flexion et torsion combinées est donc difficilement discutable (la limite d'endurance pour les essais déphasés est, dans ces conditions, supérieure de 70 MPa à celle sous chargements en phase).

2.5.2 Essais par blocs bas/haut/bas/haut... en flexion plane ($R_\sigma = -1$)

2.5.2.1 Objectif

Le but principal de ces essais est de déterminer expérimentalement si le concept de seuil en contrainte σ^* mis en évidence par Palin-Luc [Bon98], [P196] sur la fonte GS peut être utilisé pour l'alliage Ti-6Al-4V. Pour des sollicitations alternées symétriques de flexion plane et de torsion, il a été montré sur des éprouvette en fonte GS que des cycles d'amplitude de contrainte comprise entre σ^* et σ_{-1}^D , mélangés à des cycles d'amplitude supérieure à σ_{-1}^D , participent à l'endommagement de ce matériau de manière significative. Pour illustrer ce seuil, la figure 2.51 présente l'influence de l'amplitude de contrainte des blocs bas sur la durée de vie lors d'essais de flexion plane à deux blocs (bas/haut/etc...) répétés alternativement jusqu'à fissuration. Comme nous l'avons vu au premier chapitre, le critère énergétique volumique du LAMEFIP permet d'identifier ce seuil à l'aide des limites d'endurance en traction et flexion rotative alternées symétriques (3.2).

$$\sigma^* = \sqrt{2 \cdot (\sigma_{-1,Trac}^D)^2 - (\sigma_{-1,FR}^D)^2} \quad (2.21)$$

En supposant que cette relation soit valable pour l'alliage de titane Ti-6AL-4V, compte-tenu des limites d'endurance estimées à 583 MPa en traction ($R_\sigma = -1$) et 602 MPa en flexion rotative ($R_\sigma = -1$), ce seuil a une valeur estimée de 563 MPa. En tenant compte des intervalles de confiance à 95% estimés sur les médianes, nous constatons que la valeur du seuil est comprise dans l'intervalle : $\sigma^* \in [500, 600]$ MPa, ce qui est relativement large.

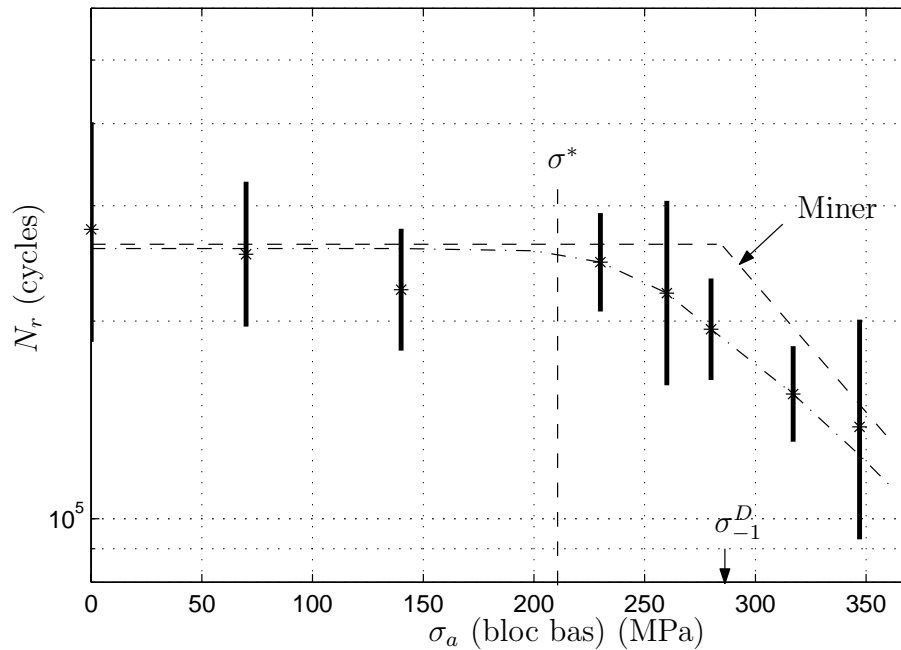


FIG. 2.51 – Influence de l’amplitude de contrainte des blocs bas sur la durée de vie pour des essais de flexion plane à deux blocs (bas/haut/etc...) répétées alternativement jusqu’à fissuration [Bon98] sur éprouvettes en fonte GS (les lignes verticales représentent ± 1 écart type).

2.5.2.2 Conditions d’essais

Ces essais de flexion plane alternée symétrique par blocs sont constitués de deux types de blocs de 5000 cycles : deux niveaux d’amplitude $\Delta\sigma_1/2$ et $\Delta\sigma_2/2$, appliqués alternativement jusqu’à fissuration. Ces essais sont illustrés par la figure 2.52, le trajet de chargement est proportionnel. Le nombre de cycles à chaque transition d’un bloc à l’autre (moins de 100 cycles) est négligeable par rapport au nombre de cycles d’un bloc. Ces essais sont réalisés sur des éprouvettes du deuxième lot de matière dont l’état de surface présente un défaut en fond de tore.

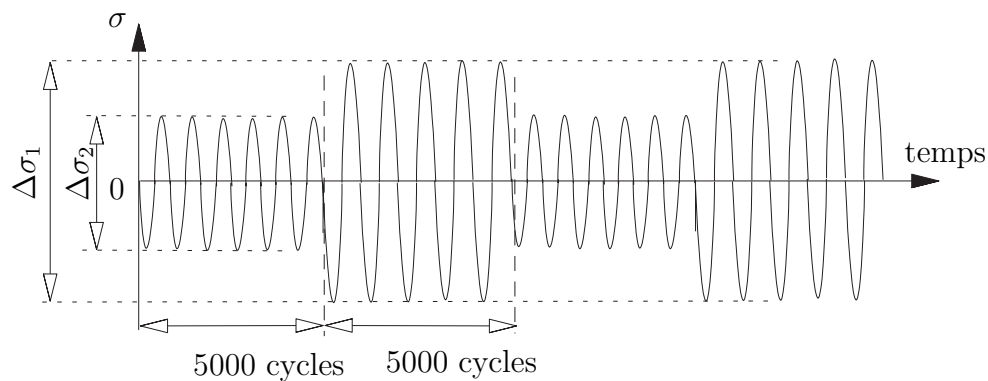


FIG. 2.52 – Chargements par blocs répétés à 2 niveaux ($R_\sigma = -1$)

2.5.2.3 Résultats et analyse

Le niveau du bloc haut reste le même, quatre niveaux différents pour le bloc bas $\Delta\sigma_2/2$ ont été choisis de façon à encadrer la valeur théorique estimée de la contrainte seuil (563 MPa, prévue par le critère énergétique du LAMEFIP). Le niveau haut a été choisi pour avoir une durée de vie d'environ 10^5 cycles sous cette contrainte seule (amplitude constante). Les résultats sont présentés dans le tableau 2.12.

N° série d'essai	$\frac{1}{2}\Delta\sigma_1$ (MPa)	$\frac{1}{2}\Delta\sigma_2$ (MPa)	$N_{r50\%}$ (cycles)	$N_{r16\%}$ (cycles)	$N_{r84\%}$ (cycles)	nbre épr.
d'après courbe S-N	700	700	108522	47063	250240	8
8-Ti-6Al-4V-II	652	700	122161	67973	219549	7
9-Ti-6Al-4V-II	400	700	115181	92941	142741	8
10-Ti-6Al-4V-II	563	700	112642	58776	215874	8
11-Ti-6Al-4V-II	200	700	129214	77229	216189	8
d'après courbe S-N (*)	0	700	217044	94126	500480	8

TAB. 2.12 – Conditions de chargement et résultats d'essais par blocs bas/haut ($R_\sigma = -1$)

(*) Si les blocs d'amplitude inférieure à la limite d'endurance n'intervenaient pas dans le processus d'endommagement, la durée de l'essai serait double de la durée de vie sous le niveau $\sigma_a = 700$ MPa seul. Les durées de vie en fonction de l'amplitude du bloc bas sont présentées sur la figure 2.53.

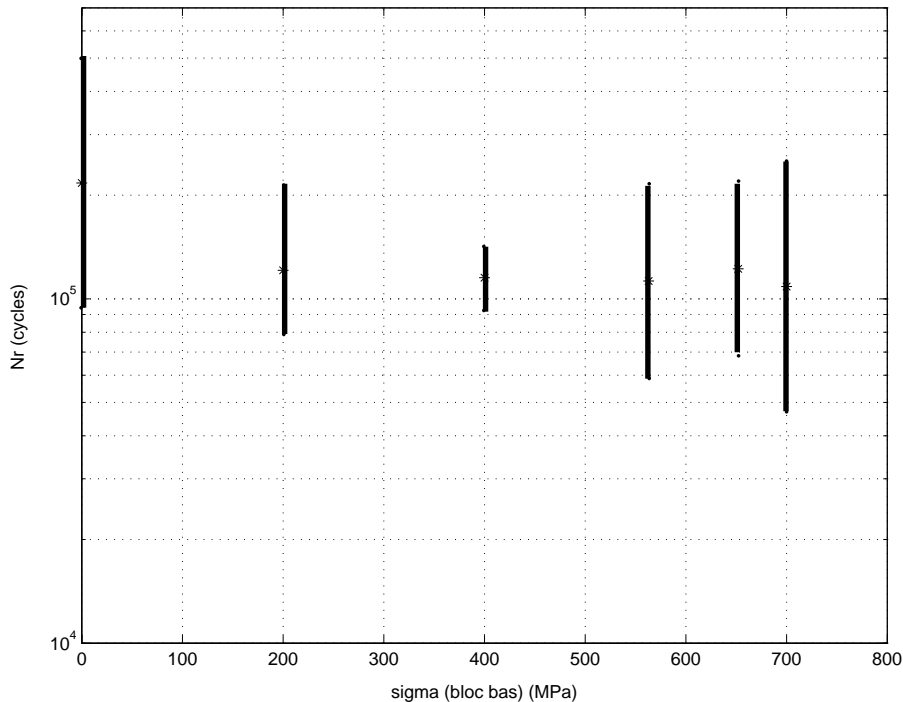


FIG. 2.53 – Essais sous chargement à 2 blocs appliqués alternativement jusqu'à fissuration. Durées de vie en fonction de l'amplitude du bloc bas, pour des blocs haut d'amplitude identique de 700 MPa (les bandes noires représentent plus ou moins un écart-type)

La figure 2.53 montre que les durées de vie n'évoluent pas clairement en fonction de l'amplitude de contrainte du bloc bas. Il est donc difficile de dire que les blocs d'amplitude inférieure ou égale à la limite d'endurance participent à l'évolution de l'endommagement. Pour dégager une tendance plus nette il faudrait, à première vue, augmenter le nombre d'éprouvettes par série.

Cependant, comme ces essais ont été réalisés sur le second lot d'éprouvettes présentant un défaut d'état de surface en fond de tore, des essais complémentaires d'amplitude constante $\sigma_a = 700$ MPa ont été réalisés (série 6B-Ti-6AL-4V) : ainsi 14 éprouvettes ont été testées à ce niveau de contrainte. La méthode des fréquences cumulées permet de mettre en évidence deux populations d'éprouvettes (figure 2.54). Des examens au microscope électronique à balayage confirment l'existence de ces deux populations d'éprouvettes fissurées (fig. 2.55). Un examen des fissures macroscopiques sur toutes les éprouvettes pré-

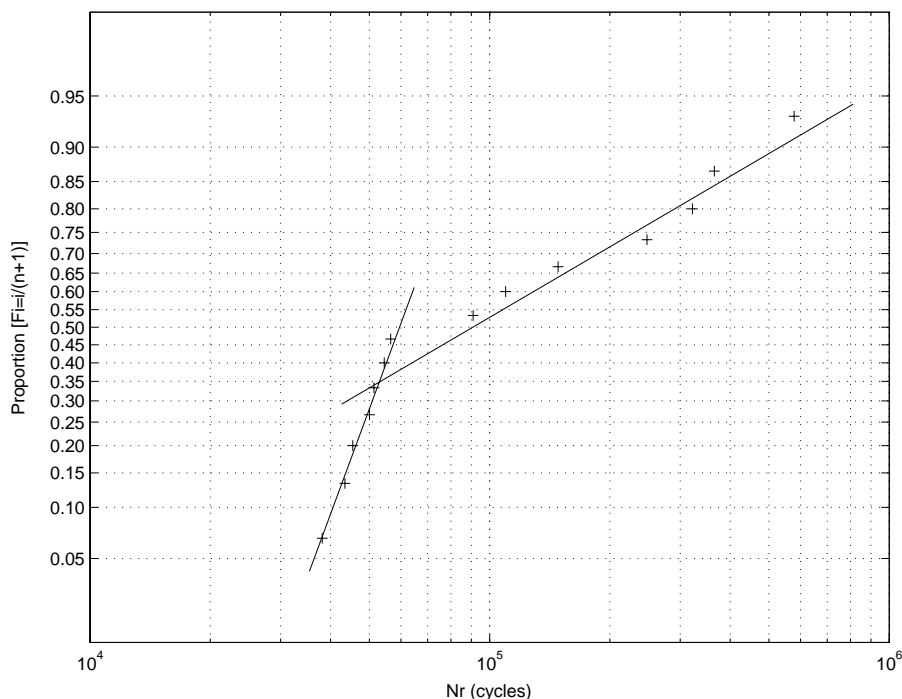


FIG. 2.54 – Droites de Henry en flexion plane ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V pour $\sigma_a = 700$ MPa.

sentant une durée de vie largement supérieure à 10^5 cycles montre que ces éprouvettes ont fissuré hors du fond de tore. A l'inverse, celles présentant de faibles durées de vie ont systématiquement amorcé en fond de tore, où se trouve le défaut d'usinage révélé lors du contrôle de l'état de surface (paragraphe 2.2.2 fig. 2.56). De plus, la méthode des fréquences cumulées appliquée à la série 11-Ti-6Al-4V (8 éprouvettes) révèle que la durée de vie à fissuration d'une éprouvette dépasse largement 10^5 cycles ($\approx 4 \cdot 10^5$ cycles, fig. 2.57). L'observation de la fissure confirme un amorçage hors fond de tore, cette éprouvette fait donc partie de la deuxième population d'éprouvettes (sans défaut d'état de surface). Il est donc impossible sans séparer ces deux populations d'éprouvettes de confirmer ou infirmer l'existence d'un seuil en contrainte σ^* pour l'alliage Ti-6Al-4V, puisque les durées

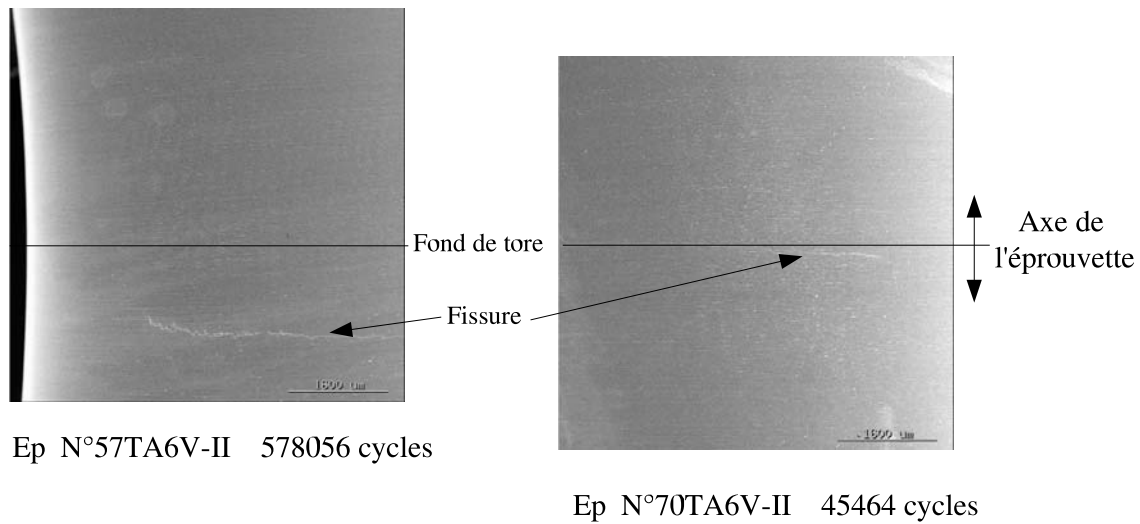


FIG. 2.55 – Fissures de fatigue macroscopiques en flexion plane ($R_\sigma = -1$) sur 2 éprouvettes de lot 2.

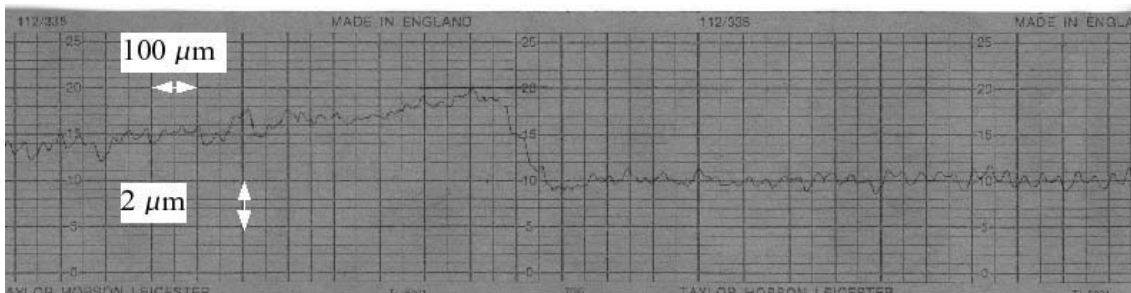


FIG. 2.56 – Etat de surface caractéristique du lot 2 (éprouvette n°1-II)

de vie sont perturbées par la présence du défaut d'usinage sur lequel s'amorce de temps en temps la fissure. Un tri des éprouvettes de chaque série a été effectué en supprimant les éprouvettes de la deuxième population c'est-à-dire ayant fissuré hors fond de tore (ce qui revient à ne conserver que les éprouvettes ne dépassant pas largement 10^5 cycles). En ne considérant que cette seule population, il apparaît une nette influence de l'amplitude des blocs bas (fig. 2.58). A partir d'une amplitude de contrainte du bloc bas voisine de 450 MPa, les durées de vie diminuent de façon significative. La valeur de σ^* estimée par notre modèle est de 563 MPa. L'existence d'un seuil se confirme en ne considérant qu'une population d'éprouvettes. Il aurait fallu dépouiller sur la deuxième population mais leur nombre par série (1 à 2) ne nous le permet pas. Il faudra à l'avenir valider ce seuil en augmentant le nombre d'éprouvettes par série et en s'assurant de la qualité de l'état de surface.

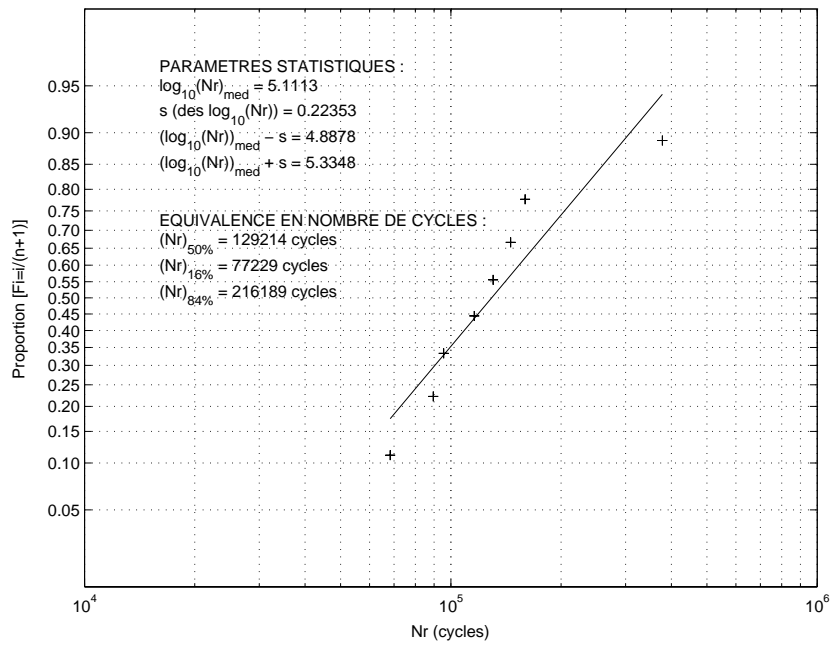


FIG. 2.57 – Droite de Henry sur les 8 éprouvettes de la série 11-Ti-6Al-4V-II correspondant à un bloc bas $\sigma_a = 200 \text{ MPa}$

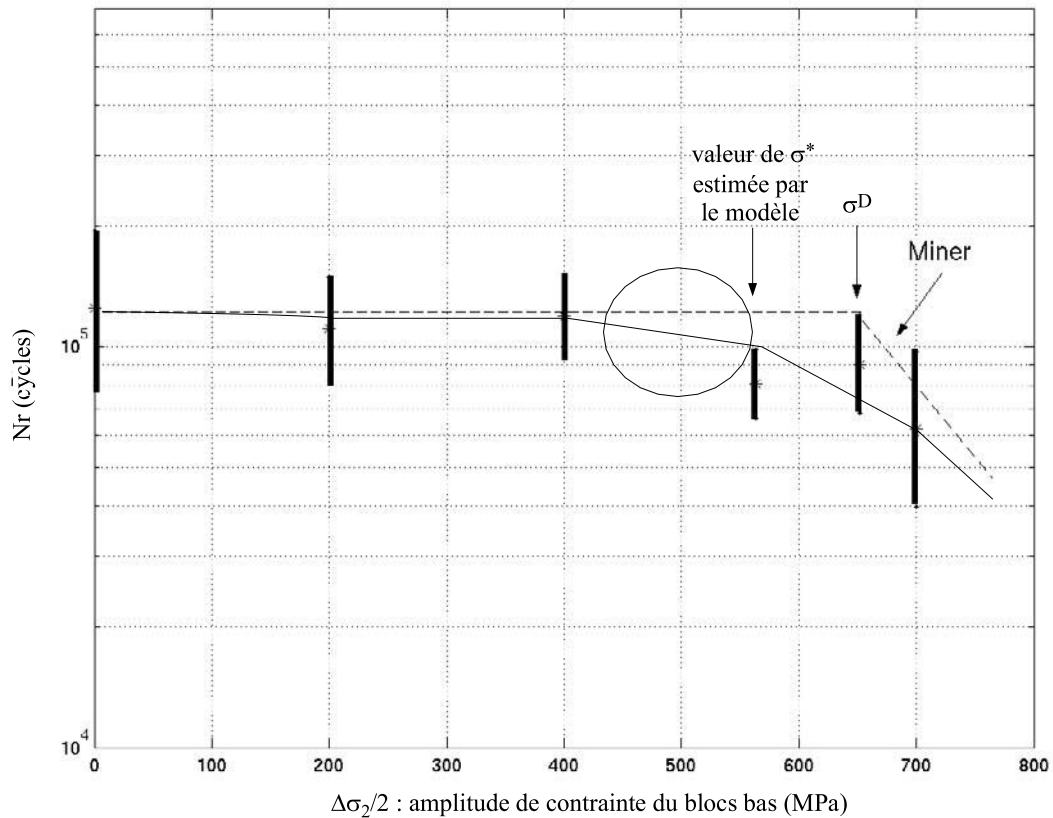


FIG. 2.58 – Essais sous chargement à 2 blocs appliqués alternativement jusqu'à fissuration en ne conservant que les éprouvettes ayant fissuré en fond de tore. Durées de vie en fonction de l'amplitude du bloc bas, pour des blocs haut d'amplitude identique de 700 MPa (les bandes noires représentent plus ou moins un écart-type).

2.6 Conclusion

Après avoir déterminé les caractéristiques mécaniques conventionnelles de l'alliage de titane Ti-6Al-4V, son comportement en fatigue a été étudié pour des sollicitations simples et combinées. Une dispersion importante des résultats est observée, la méthode de l'escalier s'avère insuffisante pour la décrire correctement compte-tenu du nombre relativement limité d'éprouvettes testées par configuration (25). La microstructure très fine de cet alliage et l'absence de défaut interne de taille significative pourraient laisser supposer que la limite de fatigue soit peu dispersée. Pourtant, les résultats d'essais montrent une dispersion significative, peut-être liée à l'état de surface. L'amorçage se localise systématiquement en surface des éprouvettes, l'état de surface jouant un rôle important, comme nous l'avons vu sur les éprouvettes du lot II.

Les essais par blocs ont été perturbés par l'état de surface des éprouvettes provenant du deuxième lot. La présence de défauts d'usinage a généré deux populations d'éprouvettes, ce qui a considérablement gêné l'exploitation des résultats. Néanmoins, après le tri des éprouvettes, l'existence d'un seuil en contrainte σ^* se confirme pour l'alliage de titane Ti-6Al-4V. Des cycles d'amplitude de contrainte comprise entre σ^* et σ_{-1}^D , mélangés à des cycles d'amplitude supérieure à σ_{-1}^D , participent à l'endommagement du matériau de manière significative. Il faudrait à l'avenir conforter ces résultats en augmentant le nombre d'éprouvettes par série et en s'assurant de la qualité de l'état de surface.

Chapitre 3

Proposition d'un critère probabiliste de fatigue multiaxiale

Comme précédemment, nous supposons dans ce chapitre que le matériau est continu et homogène à l'échelle du volume élémentaire représentatif afin de pouvoir appliquer les hypothèses classiques de la mécanique des milieux continus. Le matériau sera également supposé isotrope.

3.1 Introduction

Ce chapitre présente, sur la base des travaux antérieurs du laboratoire [Pl96], [Ban01], [BPLL03] un critère probabiliste de fatigue multiaxiale applicable en endurance et endurance limitée (au delà d'environ 10^5 cycles) pour prévoir la résistance à la fatigue des métaux sous tout chargement cyclique d'amplitude constante. Afin de prendre en compte (de façon indirecte) les défauts internes au matériau et la dispersion des résultats d'essais de fatigue, nous proposons de combiner le modèle de Weibull, qui intègre à la fois les notions de seuil et de volume, au critère volumique et énergétique du LAMEFIP.

Cette proposition concerne tous les chargements cycliques d'amplitude constante créant des états de contraintes uniaxiaux ou multiaxiaux en phase ou hors phase.

Elle s'inscrit dans le cadre des approches énergétiques, dont un large panel est présenté par Macha et Sonsino [MS99]. Elle reprend également la notion de volume d'influence afin de prendre en compte "l'effet de voisinage" [PLL98], [SKG97], donc de la répartition spatiale des contraintes et des déformations.

Dans la première partie de ce chapitre l'approche probabiliste de Weibull est combinée au critère énergétique et volumique de fatigue du LAMEFIP (déterministe). Puis l'application du critère probabiliste est présentée pour des chargements particuliers. Enfin, la qualité des prévisions de notre proposition est évaluée par comparaison aux résultats des essais réalisés dans le cadre de cette étude et à des résultats d'essais de la littérature.

Cette proposition repose sur la dernière évolution du critère du LAMEFIP proposée

par Banvillet [Ban01] [BPLL03]. Ce critère basé sur le travail de déformation élastique fourni au matériau à chaque cycle prend en compte de manière intrinsèque le chargement moyen, sans utiliser de paramètres ou données expérimentales supplémentaires. Il est fondé sur l'hypothèse qu'une partie du travail de déformation élastique (après adaptation élastique, nécessaire pour atteindre les grandes durées de vies) fourni au cours d'un cycle de chargement participe à l'amorçage d'une fissure de fatigue. La partie supposée endommageante est définie à l'aide d'un seuil énergétique, intrinsèque au matériau. Inspiré des travaux de Palin-Luc [Pl96], l'approche volumique permet par exemple de différencier des chargements simples de traction, flexion plane et flexion rotative. Pour des états de contraintes uniaxiaux, le critère est indépendant de la forme du cycle de chargement, conformément aux résultats expérimentaux. De plus, il prévoit la non influence du déphasage en flexion-torsion combinées ; l'effet, sur la limite d'endurance, d'un chargement moyen de flexion ou de torsion, pour des sollicitations combinées de flexion-torsion (ou de traction-torsion) est également correctement prévu¹.

3.2 Paramètre et seuil énergétique

Le paramètre énergétique considéré pour prévoir l'amorçage d'une fissure de fatigue est la densité volumique du travail de déformation fourni à chaque volume élémentaire, W_f .

$$W_f(M) = \sum_{i,j} \int_T \langle \sigma_{ij}(M, t) \cdot \dot{\epsilon}_{ij}(M, t) \rangle dt \quad (3.1)$$

Ceci repose sur l'hypothèse que dans un volume élémentaire, un micro endommagement ne peut s'amorcer et croître de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique sans apporter un travail de déformation à cet élément de volume. En fatigue à grand nombre de cycles, W_f est calculé avec les déformations élastiques macroscopiques après adaptation cyclique du matériau (supposée atteinte [LC88]). En endurance illimitée et en endurance limitée ($N > 50000$ cycles), les contraintes sont assez basses pour considérer que le matériau reste élastique à l'échelle macroscopique. W_f est relié à la déformation plastique mésoscopique. Palin-Luc et Morel [MPLF01] ont montré (pour tous les chargements de laboratoire excepté en traction biaxiale hors phase) que le travail de déformation fourni sur un cycle de contrainte sinusoïdal par la partie déviatrice du tenseur des contraintes permet d'estimer la borne supérieure de la déformation plastique accumulée dans les grains de métal à l'échelle mésoscopique.

Des essais de fatigue sur éprouvettes lisses en fonte EN-GJS800-2 [BPLL03], [PLL98], [PLL00] et en alliage de titane Ti-6Al-4V sous sollicitations de flexion plane alternée symétrique à 2 blocs (bas/haut) répétés alternativement jusqu'à fissuration montrent qu'une limite σ^* peut être définie en dessous de la limite d'endurance conventionnelle σ^D . Pour

¹Nette influence d'une contrainte moyenne de flexion, influence négligeable d'une contrainte moyenne de torsion (cisaillement) tant que le matériau n'est pas sollicité au delà d'environ 80% de sa limite d'élasticité [Ban01] [BPLL03].

une amplitude de contrainte du bloc haut fixée, les blocs bas affectent la durée de vie dès que leur amplitude est supérieure à ce seuil σ^* . Des cycles d'amplitude de contrainte comprise entre σ^* et σ^D , mélangés à des cycles d'amplitude supérieure à σ^D participent à l'endommagement. Morel et Palin-luc [MP102] supposent que ce seuil décrit la contrainte au dessus de laquelle des microfissures apparaissent dans le matériau, celles-ci étant dues à trop de déformations mésoscopiques accumulées dans les grains défavorablement orientés. Ce seuil est la valeur de contrainte au delà de laquelle des microfissures peuvent se propager jusqu'à une barrière microstructurale. D'une façon indirecte, l'effet de la microstructure sur la limite de fatigue est pris en compte par ce seuil σ^* . A l'échelle mésoscopique σ^* est une limite d'apparition d'endommagement. Palin-Luc et Banvillet ont montré que ce seuil peut être estimé à partir de deux limites d'endurance ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses : traction et flexion rotative.

$$\sigma^* = \sqrt{2(\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{FlR,-1}^D)^2} \quad (3.2)$$

Il faut cependant noter une lacune du critère déterministe du LAMEFIP dans sa version actuelle : il ne distingue pas les contraintes normales moyennes positives ou négatives. Or, il est couramment admis en fatigue des métaux, qu'une contrainte normale moyenne négative (compression) améliore la résistance à la fatigue (effet par exemple des contraintes résiduelles négatives), au contraire d'une contrainte moyenne normale positive (traction) qui fait chuter la tenue en fatigue.

3.3 Approche probabiliste et volumique

L'approche probabiliste considérée est le concept du maillon le plus faible appliqué à un volume de matière. Ce modèle a été proposé par Weibull [Wei39a], [Wei39b] pour décrire la dispersion de la résistance à la traction quasi-statique des matériaux fragiles. Etendu à la fatigue par Freudenthal [Fre68], ce modèle a récemment été utilisé par Bomas [BLM99], [BMS97], Hild [HM92], [HDFB03], Chantier [CBBH99a], [Cha00] et Flacelière [Fla01], [FMN03]. Cette théorie repose sur les hypothèses suivantes :

- La structure est considérée comme une chaîne tendue de maillons parfaitement indépendants du point de vue de la ruine.
- La rupture de l'élément le plus faible entraîne la ruine de la structure entière.
- L'interaction entre les maillons faibles (défauts) est négligée, hypothèse vérifiée dans la plupart des cas pratiques, la distance moyenne entre les défauts étant suffisamment grande par rapport aux dimensions des défauts.

Pour une structure de volume total V , la théorie du maillon le plus faible permet d'écrire la probabilité de survie de la structure en fonction des probabilités de survie des volumes élémentaires représentatifs $V_{er,i}$ de la structure :

$$P_S(V) = \prod_i P_S(V_{er,i}) \quad (3.3)$$

La théorie du maillon le plus faible suppose que les probabilités de survie de deux volumes élémentaires disjoints, $V_{er,1}$ et $V_{er,2}$ sont indépendantes, la probabilité de survie des 2 volumes est égale au produit des probabilités de survie de chaque volume :

$$P_S(V_{er,1} + V_{er,2}) = P_S(V_{er,1}) \cdot P_S(V_{er,2}) \quad (3.4)$$

En faisant tendre les volumes élémentaires représentatifs vers 0, le modèle du maillon le plus faible conduit à la distribution (3.5) pour décrire la rupture d'une chaîne dont les maillons ont des contraintes seuil aléatoirement distribuées [Baz99] :

$$P_F(V) = 1 - \exp\left[-\sum_i \varphi_i V_{er,i}\right] = 1 - \exp\left\{-\int \int \int_V \varphi(x, y, z) dV\right\} \quad (3.5)$$

où φ_i caractérise la probabilité de fissuration du volume élémentaire $V_{er,i}$. $\varphi(x, y, z)$ est la fonction donnant la concentration spatiale de probabilité de fissuration du matériau en fonction de la contrainte σ ($= V_{er}^{-1} \times$ probabilité de fissuration du volume représentatif V_{er}) introduite par Weibull [Fre68] (3.6). $P_F(V)$ représente la probabilité de fissuration (ou de ruine) d'une structure de volume total V pour laquelle on considère que l'amorçage d'une fissure macroscopique représente la ruine. Expérimentalement en fatigue à grand nombre de cycles on considère que l'apparition d'une fissure engendrant une perte de raideur de l'éprouvette ou de la pièce (de quelque %) équivaut à la ruine².

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{V_{er}} \left\langle \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_u} \right\rangle^m \quad (3.6)$$

Ainsi, la probabilité de fissuration de la structure de volume V sous la contrainte σ , définie par Weibull (3.7) peut s'écrire sous la forme :

$$P_F(\sigma, V) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{V_0} \int \int \int_V \left\langle \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_u} \right\rangle^m dV\right] \quad (3.7)$$

La relation (3.7) peut aussi s'écrire :

$$P_F(\sigma, V) = 1 - \exp\left[-\int \int \int_V \frac{\langle \sigma - \sigma_0 \rangle^m}{V_0 \sigma_u^m} dV\right] \quad (3.8)$$

où σ_0 est le seuil en contrainte en dessous duquel la probabilité de rupture est nulle, σ_u est un paramètre d'échelle, m est la pente de Weibull et V_0 représente le volume élémentaire. Le modèle de Weibull est issu de l'analyse d'une importante banque de données concernant les matériaux fragiles. C'est avant tout le formalisme mathématique de ce modèle, intégrant à la fois une approche volumique et la notion de seuil en dessous duquel aucun endommagement notable n'est observé, qui nous a semblé voisin de l'idée du critère du LAMEFIP. L'approche énergétique et volumique repose sur les hypothèses et concepts

²La propagation de microfissure n'est pas prise en compte

suivants :

- l'amorçage d'une fissure de fatigue peut être prévue par le travail de déformation fourni par cycle, W_f (dans l'état adapté).
- il existe un seuil W_f^* au-dessus duquel le travail de déformation élastique W_f est suffisant pour participer à l'endommagement en créant des microfissures ou en aidant ces microfissures à passer à une échelle macroscopique détectable lors d'un essai de fatigue (perte de raideur de quelques %).

Ainsi l'endommagement en fatigue se produit si $W_f \geq W_f^*$, ce qui a lieu au sein du volume d'influence V^* .

Une fonction de la densité du travail de déformation fourni, $g(W_f)$, pouvant se mettre sous la forme (3.9) est alors introduite par analogie à la relation proposée par Weibull.

$$g(W_f) = \left(\frac{\langle W_f - W_f^* \rangle}{W_u} \right)^m \quad (3.9)$$

La probabilité de fissuration d'une structure V s'écrit suivant la relation (3.10).

$$P_f(\Sigma_{ij}(x, y, z, t), \epsilon_{ij}(x, y, z, t), V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{1}{V_0} \left(\frac{\langle W_f(x, y, z) - W_f^* \rangle}{W_u} \right)^m dV \right] \quad (3.10)$$

ou encore en simplifiant l'écriture de P_f ,

$$P_f(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\langle W_f - W_f^* \rangle^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.11)$$

où $\varphi_u = V_0 W_u^m$ est un paramètre d'échelle. Comme Banvillet et al., nous supposons que le seuil W_f^* est un paramètre matériau, mais il ne dépend plus du point comme cela était le cas jusqu'à présent. Ce seuil ne subira donc plus la correction liée à la triaxialité des contraintes. L'état de contrainte uniaxial est choisi comme référence pour identifier ce seuil (3.12).

$$W_f^* = \frac{(\sigma^*)^2}{E} = \frac{2(\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{FlR,-1}^D)^2}{E} \quad (3.12)$$

L'identification de la grandeur σ^* est obtenue à partir des limites d'endurance pour des sollicitations de traction et de flexion rotative sur éprouvettes lisses. Ces limites sont supposées suivre des distributions normales pour un nombre de cycles donné [Bas60].

Dans un premier temps, nous choisissons de définir ce seuil comme déterministe mais nous pourrions supposer ultérieurement que ce paramètre suit aussi une certaine distribution (ce seuil pourrait être lié aux populations de défauts du matériau). Pour tout état de contrainte multiaxial en M autour de C_i , on définit alors la densité volumique du travail de déformation élastique fourni équivalente (à un état de contrainte uniaxial) par :

$$W_{f,eq,soll}(M) = W_f(M) \cdot \frac{F(dT_{uniax}, \beta)}{F(dT_{soll}(M), \beta)} \quad (3.13)$$

La fonction F reste la même que celle définie par Banvillet (voir chapitre 1), elle dépend du paramètre matériau β et du degré de triaxialité dT au point M (3.14).

$$F(dT(M), \beta) = \frac{1}{1 - dT(M)} \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \ln [1 + dT(M) \cdot (e^\beta - 1)] \right\} \quad (3.14)$$

Le degré de triaxialité est défini comme le rapport du travail de changement de volume (ou sphérique) fourni sur le travail total fourni (3.15) :

$$dT(M) = \frac{W_f^v(M)}{W_f(M)} \quad (3.15)$$

avec

$$W_f^v(M) = \frac{1}{3} \int_T \langle \text{trace} \sigma_{ij}(M) \cdot \text{trace} \dot{\epsilon}_{ij}(M) \rangle dt \quad (3.16)$$

Le degré de triaxialité est dépendant du point M . Son expression pour les différents chargements sera donnée lors de l'étude de cas sur éprouvettes lisses. Pour un état de contraintes uniaxial, $dT_{uniax} = \frac{1 - 2\nu}{3}$. Le volume d'influence V^* est dorénavant défini en tout point par la relation (3.17). Par analogie avec la proposition faite par Banvillet et Palin-Luc, nous considérons que les points potentiellement critiques C_i (où une fissure de fatigue peut s'amorcer) sont les points de la pièce où la densité volumique de travail de déformation élastique fourni W_f présente des maxima locaux. Autour de chaque point potentiellement critique (vis à vis du risque d'amorçage de fissure) C_i , le volume d'influence peut être représenté comme un maillon faible. Un point potentiellement critique étant défini par un maximum local de $W_f(M)$ supérieur au seuil W_f^* .

$$V^* = \{ \text{points } M(x, y, z) \text{ autour du point } C_i \text{ tels que } W_{feq, soll}(M) \geq W_f^* \} \quad (3.17)$$

La probabilité de fissuration de la structure de volume total V est alors donnée par la relation (3.18).

$$P_f(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\langle W_{feq, soll} - W_f^* \rangle^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.18)$$

ou en intégrant sur le volume d'influence :

$$P_f(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_{V^*} \frac{(W_{feq, soll} - W_f^*)^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.19)$$

Il faut distinguer plusieurs formes possibles du volume d'influence :

- un unique point critique est présent. La représentation schématique unidimensionnelle est alors donnée sur la figure (3.1) ainsi que la relation entre le volume d'influence et la théorie du maillon le plus faible. Un seul volume d'influence est généré.

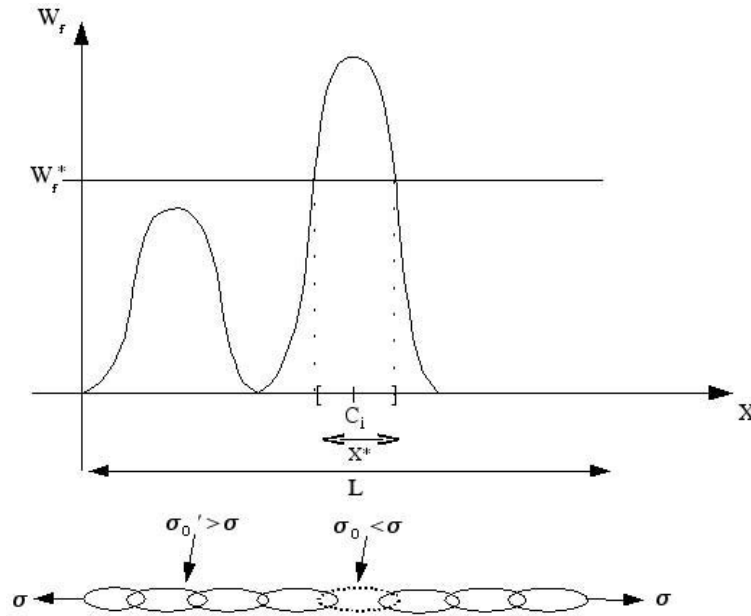


FIG. 3.1 – Illustration du concept de volume d'influence et sa relation avec la théorie du maillon le plus faible (pour une structure unidimensionnelle de longueur L).

- plusieurs points critiques génèrent des volumes d'influence disjoints (fig. 3.2). Les degrés de triaxialité des noeuds critiques sont différents. La probabilité de fissuration

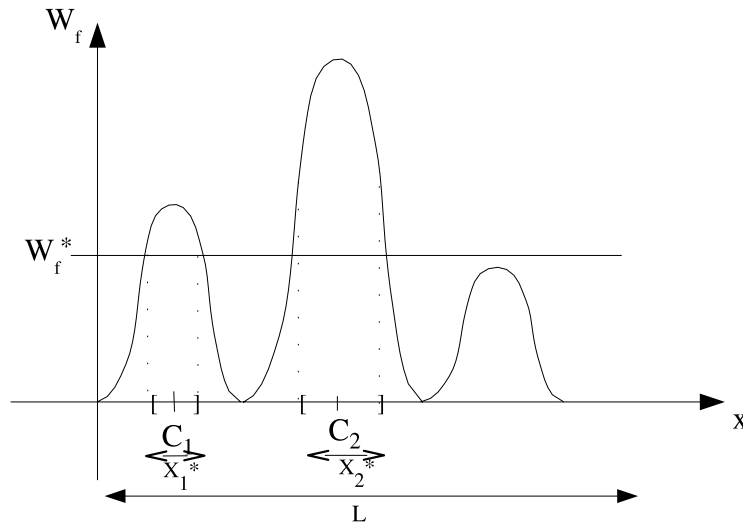


FIG. 3.2 – Volumes d'influence pour 2 points critiques générant des volumes disjoints.

est calculée en sommant les volumes :

$$P_f(V) = 1 - \exp \left[- \sum_i \left(\int \int \int_{V_i^*} \frac{(W_{feq,i}(f(dT_i)) - W_f^*)^m}{\varphi_u} dV \right) \right] \quad (3.20)$$

- plusieurs points critiques génèrent des volumes d'influence à intersection non nulle, c'est-à-dire un seul volume (fig. 3.3). Par hypothèse, le calcul du volume d'influence sera effectué en choisissant le point critique présentant le degré de triaxialité maximum : $dT(C_{i,max}) = \sup_i [dT(C_i)]$. Le calcul de la probabilité de fissuration s'effectue simplement sur le volume.

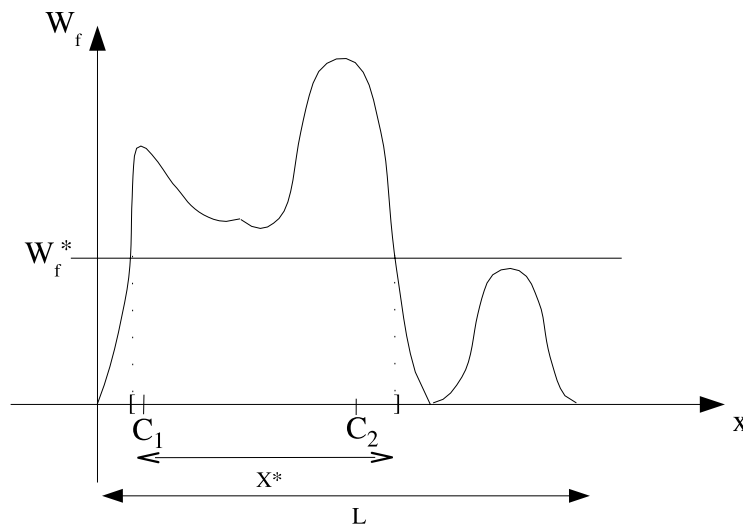


FIG. 3.3 – Volume d'influence pour 2 points critiques générant un seul volume.

Traction

A chaque instant d'un cycle de chargement, la répartition des contraintes sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution est uniforme. Si $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère orthonormé direct associé à l'éprouvette d'axe longitudinal \vec{z} , le tenseur des contraintes en tout point M s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{\sigma} + \sigma_a \sin(\omega t)] \end{pmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad (3.21)$$

Le travail de déformation élastique fourni en un point M de la section droite, au cours d'un cycle de chargement de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, se calcule à l'aide de la relation (3.22).

$$W_f(M) = \int_T \langle \sigma_{ij}(M, t) \frac{d\varepsilon_{ij}^e(M, t)}{dt} \rangle dt \quad (3.22)$$

Compte-tenu de (3.21), $W_f(M)$ s'écrit sous la forme (3.23).

$$W_f(M) = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} = \frac{\sigma_{min}^2 + \sigma_{max}^2}{2E} \text{ si } \sigma_a \geq |\bar{\sigma}| \Leftrightarrow R_\sigma \leq 0 \\ \frac{2\bar{\sigma}\sigma_a}{E} = \frac{|\sigma_{min}^2 - \sigma_{max}^2|}{2E} \text{ si } \sigma_a \leq |\bar{\sigma}| \Leftrightarrow R_\sigma \geq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

où E représente le module d'Young du matériau. L'état de contrainte est uniaxial, l'expression de $W_{f,eq,tract}$ est donc la même que $W_{f,tract}$. La probabilité de fissuration définie par la relation (3.18) donne, pour la traction, les relations (3.24) et (3.25) selon la valeur

de R_σ .

$$\text{Si } R_\sigma \leq 0, P_{f,\sigma_a \geq |\bar{\sigma}|}(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\left\langle \frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} - W_f^* \right\rangle^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.24)$$

$$\text{Si } R_\sigma \geq 0, P_{f,\sigma_a \leq |\bar{\sigma}|}(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\left\langle \frac{2\bar{\sigma}\sigma_a}{E} - W_f^* \right\rangle^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.25)$$

La répartition des contraintes étant uniforme dans tout le volume de l'éprouvette lors d'un chargement de traction sur une éprouvette parfaitement lisse, le volume d'intégration est la totalité du volume de l'éprouvette ($V^* = V$) si $\sigma \geq \sigma^*$. La probabilité de fissuration prend les formes (3.26) ou (3.27).

$$\text{Si } R_\sigma \leq 0, P_{f,\sigma_a \geq |\bar{\sigma}|}(V) = 1 - \exp \left[-V \frac{\left(\frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} - W_f^* \right)^m}{\varphi_u} \right] \quad (3.26)$$

$$\text{Si } R_\sigma \geq 0, P_{f,\sigma_a \leq |\bar{\sigma}|}(V) = 1 - \exp \left[-V \frac{\left(\frac{2\bar{\sigma}\sigma_a}{E} - W_f^* \right)^m}{\varphi_u} \right] \quad (3.27)$$

Nota : le volume V^* est nul si $\sigma < \sigma^*$; alors nécessairement $P_f = 0$.

Pour $R_\sigma = -1$, en se plaçant à une probabilité de fissuration P_f de 50%, la contrainte σ_a est égale à la limite d'endurance conventionnelle, on peut donc écrire :

$$\sigma_a = \sigma_{Trac,-1}^D \quad (3.28)$$

La relation (3.26) devient donc :

$$\ln 2 = \int \int \int_V \frac{\left\langle \frac{(\sigma_{Trac,-1}^D)^2}{E} - W_f^* \right\rangle^m}{\varphi_u} dV \quad (3.29)$$

φ_u ne dépend pas du volume, il peut être sorti de l'intégrale. L'égalité (3.29) prend alors la forme :

$$(\ln 2)\varphi_u = V \left(\frac{(\sigma_{Trac,-1}^D)^2}{E} - W_f^* \right)^m \quad (3.30)$$

Cette équation nous servira par la suite à identifier les paramètres m et W_u .

3.4 Identification des paramètres

Pour calculer la probabilité de fissuration d'une structure de volume V , il faut identifier les paramètres m et φ_u (donc W_u), les autres paramètres sont supposés déterministes. σ^* et W_f^* sont reliés aux limites d'endurance conventionnelles (i.e. pour $P_f = 0,5$) alternées symétriques de traction, $\sigma_{-1,Trac}^D$ et flexion rotative, $\sigma_{-1,FR}^D$ et β à celles de torsion, τ_{-1}^D . Une première méthode d'identification est proposée, basée sur les limites d'endurance conventionnelles. Cela suppose que la dispersion peut être estimée à l'aide de ces seules limites d'endurance, nous montrerons que dans le cas de certains matériaux dispersant peu (fontes, certains aciers), cette méthode donne de bons résultats. Pour des matériaux présentant une dispersion importante (l'alliage de titane Ti-6Al-4V), cette méthode sous estime largement la dispersion, il était donc nécessaire de proposer une méthode intégrant une estimation de la dispersion expérimentale.

3.4.1 A l'aide des limites d'endurance conventionnelles

Nous considérons ici des limites d'endurance (asymptote de courbes S-N sur des éprouvettes lisses). Les probabilités de fissuration sont écrites pour deux états de contraintes différents ($R_\sigma = -1$) : traction et torsion. Pour des probabilités identiques $P_f = 0,5$, les contraintes admissibles tendent vers les limites d'endurance ; il est possible d'écrire $P_{f,trac}(V) = P_{f,tors}(V) = 0,5$, ce qui peut se mettre sous la forme (3.31).

$$\int \int \int_{V_{trac}^*} \frac{(W_{feq,trac}(\sigma_{-1,Trac}^D) - W_f^*)^m}{\varphi_u} dV = \int \int \int_{V_{tors}^*} \frac{(W_{feq,tors}(\tau_{-1}^D) - W_f^*)^m}{\varphi_u} dV \quad (3.31)$$

En simplifiant par φ_u , la variable m peut alors être estimée. La résolution de cette équation nécessite l'utilisation d'une méthode numérique dichotomique développée avec le logiciel Mathematica. Le détail de ces équations sera donné dans l'étude de cas présentée ci après. Le paramètre m étant identifié, il est reporté dans l'équation de traction (3.32), qui pour une probabilité donnée suffit à identifier φ_u (et W_u si nécessaire, mais inutile en pratique puisque $\varphi_u = V_0 W_u^m$).

$$P_f(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_{V_{trac}^*} \frac{(W_{feq,trac} - W_f^*)^m}{\varphi_u} dV \right] = 0,5 \quad (3.32)$$

Le paramètre φ_u est donc identifié à l'aide de la limite d'endurance de traction ($R_\sigma = -1$) choisie comme référence et du volume de l'éprouvette correspondant :

$$\frac{\varphi_u}{V_{ref}} = \frac{(\sigma_{a,ref}^{D^2} - \sigma^{*2})^m}{\ln 2 E^m} \quad (3.33)$$

Cette méthode se limite aux matériaux présentant une faible dispersion expérimentale. En effet, dans le cas de l'alliage de titane Ti-6Al-4V, le modèle dont l'identification a

été effectuée avec cette méthode sous estime très fortement la dispersion expérimentale (figure 3.4). Il apparaît nécessaire de tenir compte des estimations expérimentales des écarts-types qui traduisent bien la nature dispersée ou non de la résistance à la fatigue du matériau.

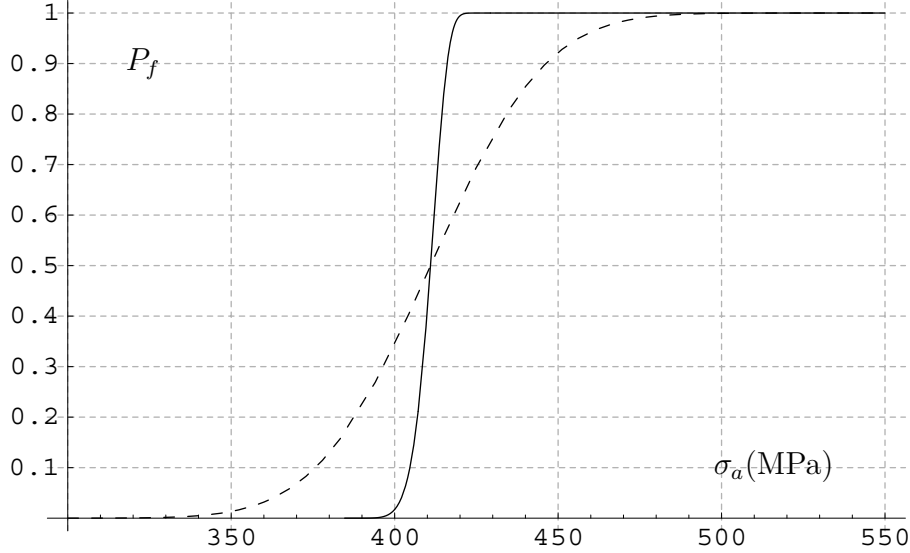


FIG. 3.4 – Probabilités de fissuration prévue par le modèle selon la 1ère méthode d'identification (trait plein) et expérimentale (trait pointillé) en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V chargées en torsion

3.4.2 En tenant compte de l'estimation de l'écart-type expérimental

Depuis les travaux de Bastenaire [Bas60], il est couramment admis en fatigue des métaux que pour un nombre de cycles donné, la distribution de la contrainte est normale. A notre connaissance, cette hypothèse n'a pas été remise en cause dans la littérature. Or, d'une manière générale, la fonction de répartition de cette distribution qui représente la probabilité que la variable aléatoire X ait une valeur inférieure à x a pour expression :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp - \left[\frac{(u - \bar{\sigma})^2}{2\delta^2} \right] du \quad (3.34)$$

Cette fonction de répartition est représentée sur la figure (3.5). Pour cette fonction, médiane (valeur pour $P_f = 0,5$) et moyenne sont confondues. La moyenne est notée $\bar{\sigma}$ et δ représente l'écart-type. Les points d'inflexion sont à $\pm\delta$ de part et d'autre de $\bar{\sigma}$. La pente en $\bar{\sigma}$, représentée par le paramètre P sur la figure (3.5) et symbolisée par le segment de droite, est fonction de l'estimateur $\hat{\delta}$ de l'écart-type :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\delta}} \quad (3.35)$$

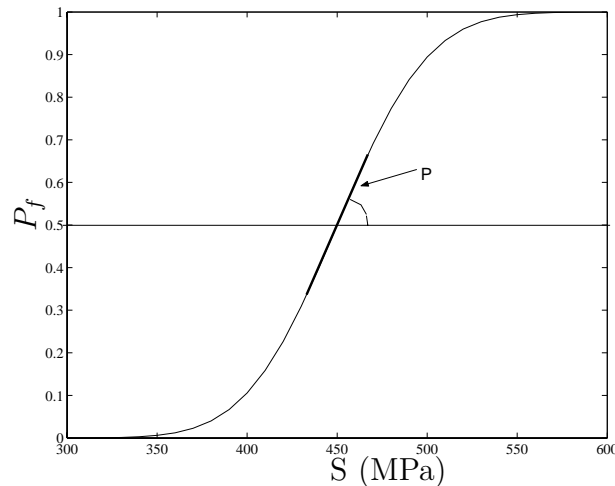


FIG. 3.5 – Exemple de fonction de répartition d'une distribution normale

La probabilité de fissuration avant $2 \cdot 10^6$ cycles sous le niveau de contraintes s peut s'exprimer d'une manière générale suivant la relation (3.36).

$$P_f(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp - \left[\frac{(u - \bar{\sigma})^2}{2\delta^2} \right] du \quad (3.36)$$

Sa dérivée par rapport à s peut s'écrire :

$$\frac{\partial P_f(s)}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp - \left[\frac{(s - \bar{\sigma})^2}{2\delta^2} \right] \quad (3.37)$$

Les paramètres à identifier sont m et φ_u . D'une manière générale, la probabilité de fissuration P_f est fonction de la géométrie de l'éprouvette, de m , de φ_u et de la contrainte appliquée σ . De la même façon on peut dire que σ est fonction de P_f , de la géométrie, de m et φ_u .

La limite d'endurance σ^D se définit comme une fonction de la contrainte pour une probabilité de fissuration P_f de 0,5 ce qui peut s'écrire $\sigma^D = \bar{\sigma}(0,5; \text{géométrie}; m; W_u)$. L'écart-type δ peut lui s'exprimer comme une fonction de la dérivée de $\bar{\sigma}$ par rapport à la probabilité de fissuration suivant la relation (3.38).

$$\delta = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P_f} (0,5; \text{géométrie}; m; W_u) \quad (3.38)$$

Ainsi, le rapport écart-type sur contrainte $\frac{\delta}{s}$ vaut :

$$\frac{\delta}{s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P_f} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial \ln \bar{\sigma}}{\partial P_f} \quad (3.39)$$

En traction alternée symétrique pour une amplitude de contrainte appliquée σ , la

probabilité de fissuration s'écrit suivant la relation (3.40).

$$P_f = 1 - \exp \left[-\frac{V}{\varphi_u} \left(\frac{\sigma^2}{E} - W_f^* \right)^m \right] \quad (3.40)$$

En inversant la relation précédente, on obtient la contrainte σ en fonction des autres paramètres :

$$\sigma = \sqrt{E \left[W_f^* + \left(-\frac{\varphi_u \ln(1 - P_f)}{V} \right)^{\frac{1}{m}} \right]} \quad (3.41)$$

En dérivant par rapport à P_f le logarithme de σ , on obtient le ratio $\frac{\delta}{\sigma}$ (3.42).

$$\frac{\partial \ln \sigma}{\partial P_f} = \frac{\frac{\varphi_u}{V(1-P_f)} \frac{1}{m} \left[-\frac{\varphi_u}{V} \ln(1 - P_f) \right]^{\frac{1-m}{m}}}{W_f^* + \left[-\frac{\varphi_u}{V} \ln(1 - P_f) \right]^{\frac{1}{m}}} = \frac{\delta}{\sigma} \quad (3.42)$$

Pour $P_f = 0,5$, cette relation peut se mettre sous la forme (3.43)

$$\frac{\delta}{\sigma_{trac}^D} = \frac{\frac{2\varphi_u}{m \ln 2} \left[-\frac{\varphi_u \ln 2}{V} \right]^{\frac{1}{m}}}{W_f^* + \left[-\frac{\varphi_u \ln 2}{V} \right]^{\frac{1}{m}}} \quad (3.43)$$

D'après (3.40), à la limite d'endurance conventionnelle (i.e. pour une probabilité de fissuration P_f de 0,5), la limite de fatigue vérifie l'équation (3.44).

$$W_f^* = \frac{(\sigma_{trac}^D)^2}{E} - \left(-\frac{\varphi_u \ln 2}{V} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3.44)$$

En remplaçant dans l'expression (3.43) W_f^* par sa définition (3.44) on obtient :

$$\frac{\delta}{\sigma_{trac}^D} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{m \ln 2} \left(1 - \frac{(\sigma^*)^2}{(\sigma_{trac}^D)^2} \right) \quad (3.45)$$

Le coefficient m peut alors être écrit en fonction des paramètres : δ , σ_{trac}^D et σ^* .

$$m = \frac{\sigma_{trac}^D \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\ln 2 \cdot \delta} \left(1 - \frac{(\sigma^*)^2}{(\sigma_{trac}^D)^2} \right) \quad (3.46)$$

Le paramètre W_u est alors identifié comme au paragraphe 3.4.1.

3.5 Effet d'échelle sur la limite de fatigue

L'effet d'échelle ne peut être négligé en fatigue et a été l'objet de nombreuses études dans la littérature [TEIH03], [PP96], [Moo45], [Mas55], [Baz99]. Sonsino a mis en évidence l'effet de la taille du volume le plus contraint $V_{90\%}$ (cf. chapitre 1) sur un acier 37Cr4V

([SKG97], fig. 3.6) . Ce volume peut être rapproché du volume d'influence V^* .

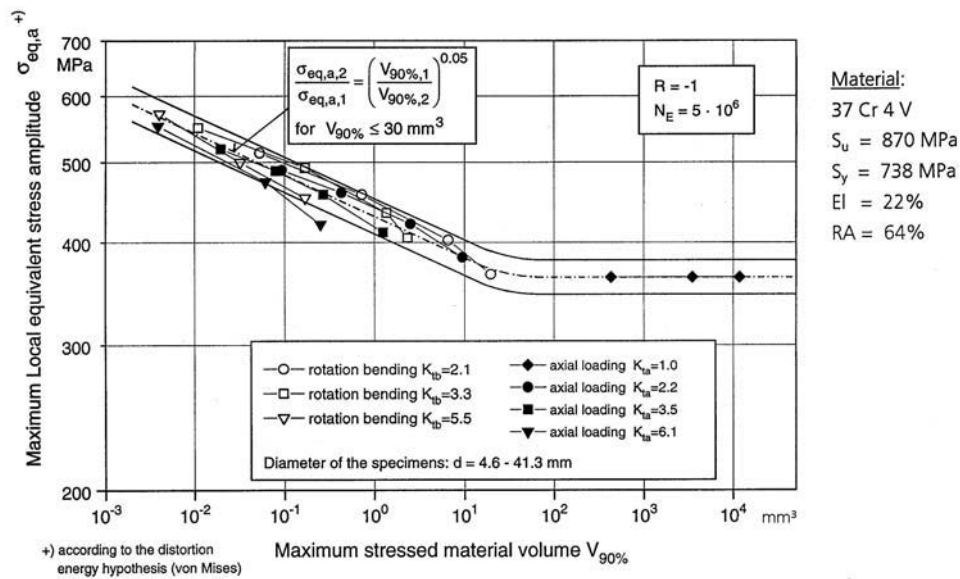


FIG. 3.6 – Effet de la taille du volume le plus contraint $V_{90\%}$ sur la contrainte équivalente pour des éprouvettes en acier 37Cr4V [SKG97].

Le critère probabiliste proposé prévoit un effet d'échelle sur la limite de fatigue. En traction alternée symétrique sans chargement moyen, la probabilité de fissuration peut s'écrire sous la forme simplifiée (3.47).

$$P_f(\sigma_a, V) = 1 - \exp \left[-\frac{V}{\varphi_u} \left\langle \frac{\sigma_a^2}{E} - W_f^* \right\rangle^m \right] \quad (3.47)$$

En considérant deux éprouvettes de volumes différents V_{ref} et V , où V_{ref} est le volume de l'éprouvette choisie comme référence, l'application de l'équation (3.47) permet d'écrire, pour une même probabilité de fissuration, l'évolution du rapport des limites d'endurance en traction ($R_\sigma = -1$) respectivement $\sigma_{a,ref}^D$ et σ_a^D selon l'équation (3.48). Le volume V^* est lié au volume total de l'éprouvette, une augmentation du volume total de l'éprouvette se traduit forcément par une augmentation du volume d'influence (toutes choses égales par ailleurs³), ce qui est évident en traction où lorsque $\sigma > \sigma^*$ on a $V^* = V$.

$$\frac{\sigma_a^D}{\sigma_{a,ref}^D} = \sqrt{\left[\left(\frac{V_{ref}}{V} \right)^{\frac{1}{m}} (\sigma_{a,ref}^{D2} - \sigma^{*2}) + \sigma^{*2} \right]} \frac{1}{\sigma_{a,ref}^D} \quad (3.48)$$

En appliquant cette relation aux résultats d'essais en traction alternée symétrique sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V, nous pouvons tracer l'évolution du rapport des limites d'endurance en traction ($R_\sigma = -1$) respectivement σ_a^D et $\sigma_{a,ref}^D$ en fonction du rapport des volumes des éprouvettes (figure 3.7). La référence est choisie égale à la limite d'endurance en traction ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses de diamètre utile 7,98 mm ($\sigma_{a,ref}^D = 583\text{MPa}$).

³contraintes maximales en surface.

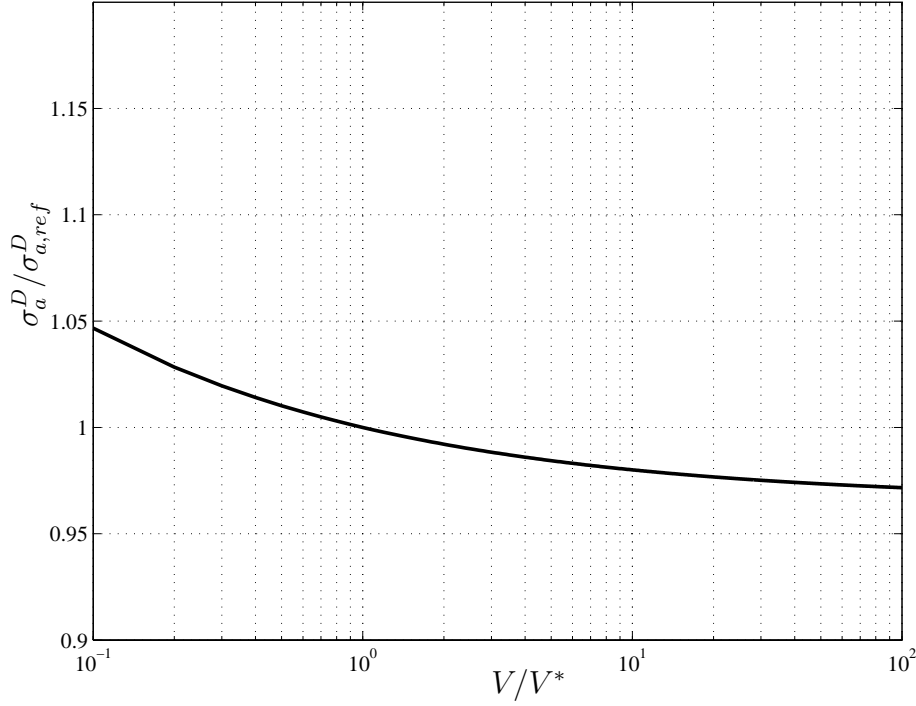


FIG. 3.7 – Prédiction de l'effet d'échelle sur la limite d'endurance en traction ($R_\sigma = -1$) d'éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V.

La courbe de la figure 3.7 présente l'existence d'une asymptote horizontale pour $\sigma_a^D / \sigma_{a,ref}^D \simeq 0,97$ ce qui est équivalent au rapport $\sigma^* / \sigma_{a,ref}^D$ ($\sigma^* = 563$ MPa).

Pour les autres chargements, il n'est pas possible d'exprimer de façon analytique la contrainte en fonction des autres paramètres. Par exemple en torsion alternée symétrique, pour mettre en évidence l'effet d'échelle, nous considérons deux éprouvettes de volumes respectifs V et V_{ref} (différents). L'éprouvette choisie comme référence est une éprouvette lisse de diamètre utile 12 mm chargée à la limite d'endurance. Pour des probabilités de fissuration identiques, la relation liant les limites d'endurance respectives τ^D et τ_{ref}^D aux volumes des éprouvettes est :

$$\frac{V}{V_{ref}} = \left(\frac{\tau^D}{\tau_{ref}^D} \right)^4 \left(\frac{(\tau_{ref}^D)^2 2F(dT_{uniax}, \beta)(1 + \nu) - (\sigma^*)^2}{(\tau^D)^2 F(dT_{uniax}, \beta)(1 + \nu) - (\sigma^*)^2} \right)^{m+2} \quad (3.49)$$

En fixant τ_{ref}^D à 411 MPa, l'évolution de τ^D / τ_{ref}^D en fonction de V / V_{ref} peut être représentée (fig. 3.8).

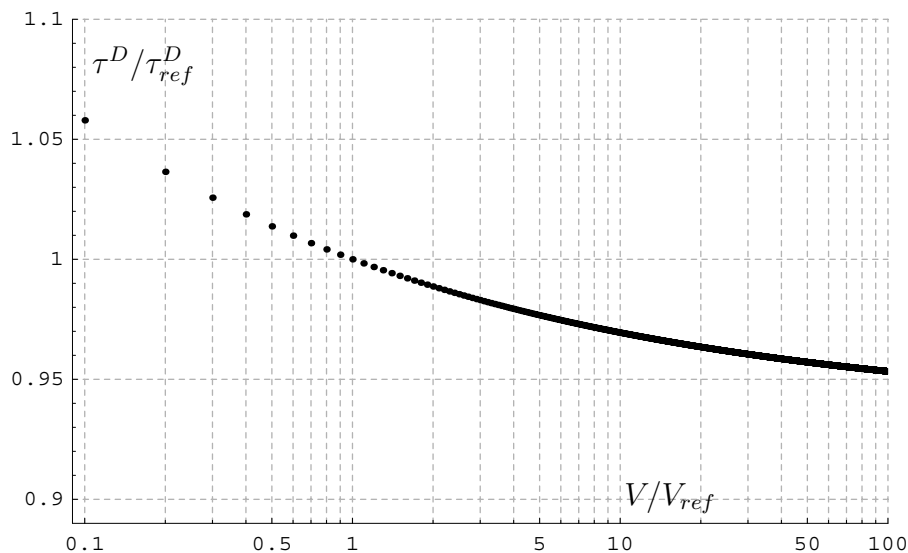


FIG. 3.8 – Prédiction de l'effet d'échelle sur la limite d'endurance en torsion ($R_\sigma = -1$) pour $\tau_{ref}^D = 411$ MPa.

3.6 Etude de cas sur éprouvettes lisses

Dans ce paragraphe nous ne traiterons que le cas d'éprouvettes "lisses" c'est-à-dire dont le coefficient théorique de concentration de contraintes est faible, par exemple pour les éprouvettes utilisées pour les essais de flexion et de torsion $k_t(flex) = 1,07$; $k_t(tors) = 1,05$. Les chargements seront sinusoïdaux synchrones (même fréquence) en phase ou hors phase, avec ou sans valeur moyenne.

3.6.1 Torsion

Pour un chargement de torsion sur éprouvette lisse cylindrique de révolution de rayon R , le tenseur des contraintes en un point $M(r, \theta, z)$ d'une section droite est donné par l'équation (3.50) en coordonnées cylindriques, où \vec{z} est l'axe longitudinal de l'éprouvette, et r représente le rayon courant du point $M(r, \theta, z)$.

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{\tau} + \tau_a \sin(\omega t)] \frac{r}{R} \\ 0 & [\bar{\tau} + \tau_a \sin(\omega t)] \frac{r}{R} & 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z}} \quad (3.50)$$

La densité volumique du travail de déformation élastique fourni en un point M de l'éprouvette $W_f(M)$ est :

$$W_{fTors}(M) = \frac{2(1+\nu)}{E} [\bar{\tau}^2 + \tau_a^2] \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (3.51)$$

Au paragraphe (1.2.2) nous avons défini la densité volumique du travail de déformation

élastique fourni équivalente (à un état uniaxial). Compte tenu du degré de triaxialité des contraintes (3.13), cette densité est ici donnée par la relation (3.52) avec $dT(M) = 0 \forall M$, puisqu'en torsion pure : trace ($\underline{\underline{\Sigma}}(M, t)$) = 0 $\forall t$.

$$W_{f_{eq,tors}}(M) = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{[\bar{\tau}^2 + \tau_a^2] F(dT_{uniax}, \beta)}{F(dT(M), \beta)} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (3.52)$$

d'où, $F(dT(M) = 0, \beta) = 1, \forall M$ ce qui permet d'écrire le travail de déformation sous la forme (3.53).

$$W_{f_{eq,tors}}(M) = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot F(dT_{uniax}, \beta) \left(\frac{r}{R}\right)^2 [\bar{\tau}^2 + \tau_a^2] \quad (3.53)$$

Nous avons vu au paragraphe précédent que la probabilité de fissuration cumulée pouvait s'écrire suivant la relation (3.18).

$$P_{f,tors}(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\langle W_{f_{eq,tors}}(x, y, z) - W_f^* \rangle^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.54)$$

En remplaçant $W_{f_{eq,tors}}$ par son expression (3.53), on obtient :

$$P_{f,tors}(V) = 1 - \exp \left[- \frac{1}{\varphi_u} \int \int \int_V \left\langle \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot [\bar{\tau}^2 + \tau_a^2] F(dT_{uniax}, \beta) \left(\frac{r}{R}\right)^2 - W_f^* \right\rangle^m dV \right] \quad (3.55)$$

Pour simplifier l'écriture des équations à venir, nous posons :

$$\frac{2(1+\nu)}{E} \cdot F(dT_{uniax}, \beta) = C \quad (3.56)$$

L'éprouvette étant supposée parfaitement lisse, le problème 3D peut se ramener à un problème 2D, la répartition de W_f est la même quelle que soit la section droite de l'éprouvette. Le domaine d'intégration devient la surface S^* , illustrée par la figure (3.9). Les points critiques sont situés à la circonférence de l'éprouvette.

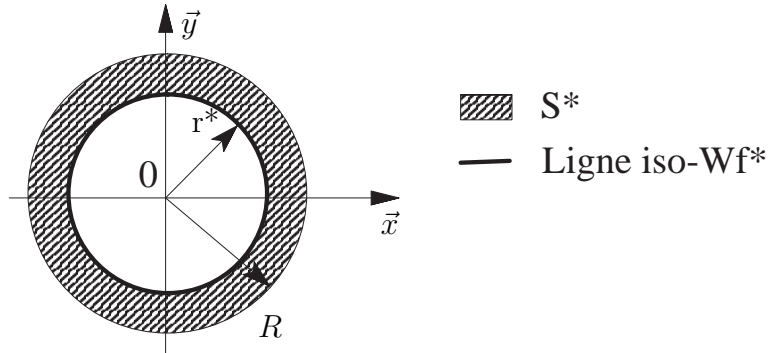


FIG. 3.9 – Représentation de S^* sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en torsion.

La relation (3.55) prend la forme ci-après où L désigne la longueur utile de l'éprouvette.

La surface S^* est définie par la relation (3.58).

$$P_{f,tors}(V) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{\varphi_u} \int \int_{S^*} \left(C \cdot [\bar{\tau}^2 + \tau_a^2] \left(\frac{r}{R} \right)^2 - W_f^* \right)^m \cdot L dS \right] \quad (3.57)$$

$$S^* = \pi(R^2 - r^{*2}) = \pi R^2 \left(1 - \left(\frac{r^*}{R} \right)^2 \right) \quad (3.58)$$

Or le rayon r^* , délimitant la surface S^* , est solution de l'équation (3.59), obtenue en écrivant $W_{f,eq,tors} = W_f^*$.

$$\left(\frac{r^*}{R} \right)^2 = \left[\frac{2 \cdot (\sigma_{trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{Fl.R,-1}^D)^2}{2(1+\nu) [\bar{\tau}^2 + \tau_a^2] F(dT_{uniax}, \beta)} \right] \quad (3.59)$$

Il est également possible de définir le seuil τ^* :

$$\tau^* = \frac{\sigma^*}{\sqrt{2(1+\nu)F(dT_{uniax}, \beta)}} \quad (3.60)$$

En appliquant la définition de S^* dans l'équation (3.57), il vient :

$$P_{f,tors}(V) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{\varphi_u} \int_{r^*}^R \left\langle C [\bar{\tau}^2 + \tau_a^2] \left(\frac{r}{R} \right)^2 - W_f^* \right\rangle^m \cdot 2\pi \cdot L r dr \right] \quad (3.61)$$

Or,

$$\int (Ar^2 - B)^m r dr = \frac{(Ar^2 - B)^{m+1}}{2A(m+1)} \quad (3.62)$$

L'équation (3.61) peut donc s'écrire sous la forme (3.63).

$$P_{f,tors}(V) = 1 - \exp \left[-\frac{2\pi L}{\varphi_u} \left[\frac{R^2}{2C \cdot (m+1)} \left(C \cdot [\bar{\tau}^2 + \tau_a^2] \left(\frac{r}{R} \right)^2 - W_f^* \right)^{m+1} \right]_{r^*}^R \right] \quad (3.63)$$

La valeur du rapport $\frac{r^*}{R}$ est définie par (3.59), ce qui permet d'écrire la probabilité de fissuration de l'éprouvette de volume V sous un chargement de torsion avec valeur moyenne suivant la relation (3.64).

$$P_{f,tors}(V) = 1 - \exp \left\{ \frac{V_{Tors}^* E}{2(\tau_a^2 + \bar{\tau}^2) F(dT_{uniax}, \beta) (1+\nu) (m+1) \varphi_u} \left(\frac{2(\tau_a^2 + \bar{\tau}^2) F(dT_{uniax}, \beta) (1+\nu)}{E} - W_f^* \right)^{m+1} \right\} \quad (3.64)$$

Le volume d'influence V^* peut s'écrire selon (3.65).

$$V_{Tors}^* = \pi L R^2 \left(1 - \left(\frac{r^*}{R} \right)^2 \right) = \pi L R^2 \left(1 - \frac{2 \cdot (\sigma_{trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{Fl.R,-1}^D)^2}{2(\tau_a^2 + \bar{\tau}^2) F(dT_{uniax}, \beta) (1+\nu)} \right) \quad (3.65)$$

Afin de juger de l'influence d'un chargement moyen de torsion sur la probabilité de fissuration, différents rapports de charge ont été considérés (fig 3.10) pour l'alliage de titane Ti-6Al-4V. Pour $\tau_{moy} = 150$ MPa, $\tau_{max}(P_f = 0,5) = 560$ MPa ce qui est égal à la limite d'élasticité en torsion généralement donnée dans la littérature pour l'alliage ($\tau_e \simeq 560$ MPa = $R_{p0,2}/\sqrt{3}$ ⁴). Un chargement moyen de 150 MPa fait évoluer la limite de fatigue de 7%. Notre proposition est donc en accord avec les constatations de Sines [Sin59] sur matériaux ductiles : un chargement moyen de torsion a une influence négligeable sur la limite d'endurance en torsion si le cisaillement maximum ne dépasse pas 80% de la limite d'élasticité en torsion $\tau_y = R_{p0,2}/\sqrt{3}$.

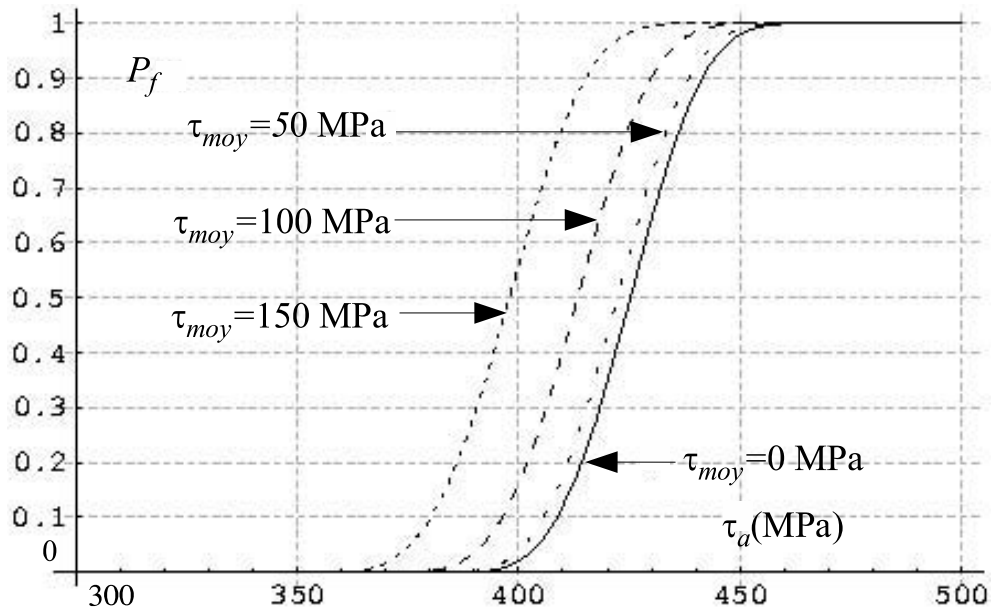


FIG. 3.10 – Influence d'un chargement moyen de torsion sur la limite de fatigue d'éprouvettes lisses ($k_t(tors) = 1,05$) en alliage de titane Ti-6Al-4V.

De plus, on remarque sur la figure 3.11 qu'au delà de la limite d'élasticité, notre proposition est sensible à l'effet du cisaillement moyen, ce qui est également en accord avec Smith [Smi42].

⁴En prenant le critère de Von Mises comme critère de plasticité.

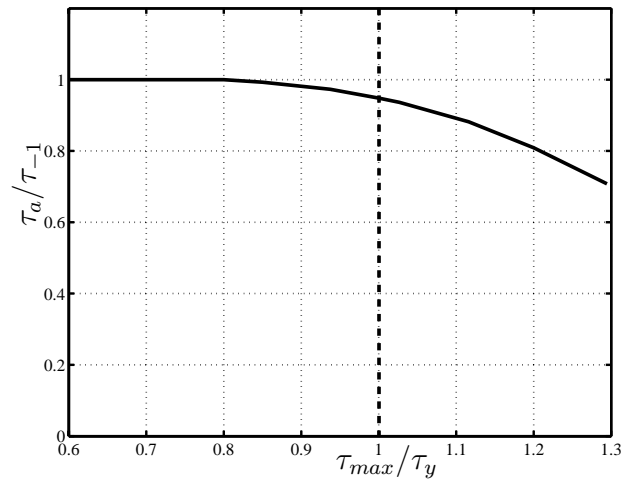


FIG. 3.11 – Influence du cisaillement maximum sur le seuil de notre proposition en torsion sur éprouvettes lisses ($k_t(tors) = 1,05$) en alliage de titane Ti-6Al-4V.

3.6.2 Flexion plane

Pour une éprouvette lisse cylindrique de révolution chargée en flexion plane (4 appuis), le tenseur des contraintes s'exprime en un point $M(x, y)$ d'une section droite (dans la zone à moment constant) sous la forme (3.66) :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\bar{\sigma} + \sigma_a \sin(\omega t)\} \frac{y}{R} \end{pmatrix}_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} \quad (3.66)$$

où y représente la distance du point M par rapport à la fibre neutre et R désigne le rayon de l'éprouvette (figure 3.12).

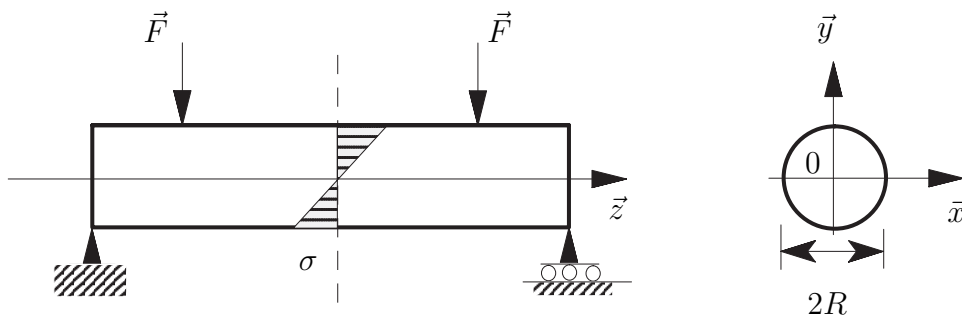


FIG. 3.12 – Sollicitation de flexion plane 4 appuis sur éprouvette lisse cylindrique de révolution.

Le travail de déformation élastique, fourni au cours d'un cycle de chargement, en un point $M(x, y)$ quelconque de la section droite est donné par (3.67) et (3.68).

$$W_{f_{eq, Fp}}(M) = \frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} \left(\frac{y}{R} \right)^2 \text{ si } \sigma_a \geq \bar{\sigma} \quad (3.67)$$

$$W_{f_{eq, Fp}}(M) = \frac{2\bar{\sigma}\sigma_a^2}{E} \left(\frac{y}{R} \right)^2 \text{ si } \sigma_a \leq \bar{\sigma} \quad (3.68)$$

Comme précédemment, l'éprouvette de longueur L étant supposée parfaitement lisse le problème 3D se ramène à un problème 2D. Le seuil où $W_{f_{eq, Fp}} = W_f^*$ prend la forme (3.69).

$$\sigma^{*2} = \bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2 \left(\frac{y^*}{R} \right)^2 \quad (3.69)$$

On posera par la suite $y^* = R \sin \alpha^*$. La surface $S^*(C_i)$ située autour des points les plus sollicités C_i (2 points potentiellement critiques) illustrée par la figure 3.13 est définie par l'équation (3.70), où $\alpha^* = \arcsin \left(\frac{y^*}{R} \right) = \arcsin \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}} \right)$.

$$S^*(C_i) = \left(\pi - \frac{2y^* \cos(\alpha^*)}{R} - 2\alpha^* \right) \frac{R^2}{2} = (\pi - 2 \sin(2\alpha^*) - 2\alpha^*) \frac{R^2}{2} \quad (3.70)$$

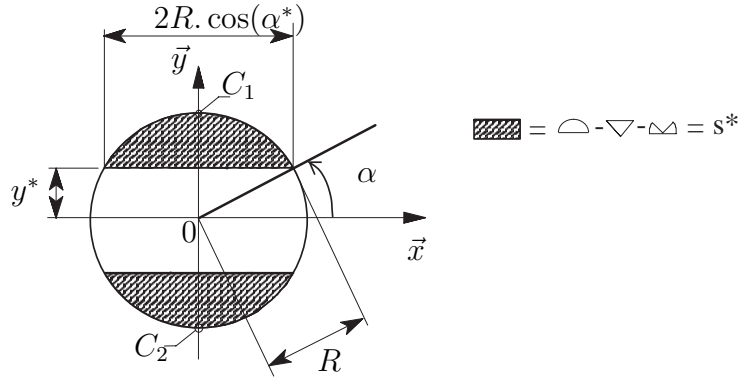


FIG. 3.13 – Surfaces d'influence $S^*(C_1)$ et $S^*(C_2)$ pour une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion plane 4 appuis (2 points critiques C_1 et C_2).

La probabilité de fissuration P_f s'écrit :

$$P_{f, Fp}(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\langle W_{f_{eq, Fp}}(M) - W_{f_{uniax}}^* \rangle^m}{\varphi_u} dv \right] \quad (3.71)$$

En posant $r = tR$, donc $dr = Rdt$, on obtient :

$$P_{f, Fp}(V) = 1 - \exp \left[-L \int \int_{V^*} \frac{\left(\frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} t^2 \sin^2 \theta - W_{f_{uniax}}^* \right)^m}{\varphi_u} R^2 t dt d\alpha \right] \quad (3.72)$$

Pour calculer la probabilité de fissuration, il convient dans un premier temps de définir le domaine d'intégration. La figure 3.13 montre que par symétrie une intégration sur $4 \times \frac{1}{4}$ de la surface totale S^* est possible. Le domaine d'intégration est donc $0 < t < 1$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. La probabilité de fissuration de l'éprouvette entière s'écrit donc :

$$P_{f, Fp}(V) = 1 - \exp \left[-4 \frac{S}{\pi} L \int_{\alpha^*}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{r^*}{R}}^1 \frac{t \left(\left(\frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} \right) t^2 \sin^2 \theta - W_{funiax}^* \right)^m}{\varphi_u} dt d\alpha \right] \quad (3.73)$$

En se plaçant au niveau du seuil W_{funiax}^* , le rapport $\frac{r^*}{R}$ peut être explicitée par (3.74).

$$\frac{r^*}{R} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{(\sigma^*)^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}} \quad (3.74)$$

Une résolution numérique de cette équation est nécessaire avec les conditions suivantes : $m > 0$, $\frac{\sigma^*}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}} > 0$ (ce qui est évident) et $\frac{\sigma^{*2}}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2} < 1$, sinon le volume d'influence est nul et $P_f = 0$.

3.6.3 Flexion rotative

Pour un chargement de flexion rotative symétrique (4 appuis) ou dissymétrique (c'est-à-dire avec un chargement moyen de flexion plane) sur une éprouvette lisse cylindrique de révolution, de rayon R , le tenseur des contraintes s'exprime en un point M d'une section droite (dans la zone à moment constant) par :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \frac{y}{R} + \sigma_a \sin(\omega t) \frac{r}{R} \end{pmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad (3.75)$$

où r est le rayon du point courant M par rapport à l'axe longitudinal \vec{z} de l'éprouvette.

La répartition de $W_{feq, Frd}(M)$ sur une section droite de l'éprouvette est définie par la relation (3.76).

$$W_{feq, Frd}(M) = \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \frac{\sigma_a^2}{E} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (3.76)$$

En se plaçant à un niveau de chargement équivalent au seuil : $W_{feq, Frd} = W_f^* \iff$

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{E} \left(\frac{y^*}{R} \right)^2 + \frac{\sigma_a^2}{E} \left(\frac{r^*}{R} \right)^2 = \frac{\sigma^{*2}}{E} \quad (3.77)$$

La surface S^* est décrite par une ellipse sur la section droite de l'éprouvette, illustrée

par la Figure 3.14. Le demi petit axe b^* et le demi grand axe a^* de cette ellipse sont définis⁵ par les équations (3.78) et (3.79). Comme pour la flexion plane sur éprouvette cylindrique de révolution, il y a 2 points critiques si $\bar{\sigma} \neq 0$.

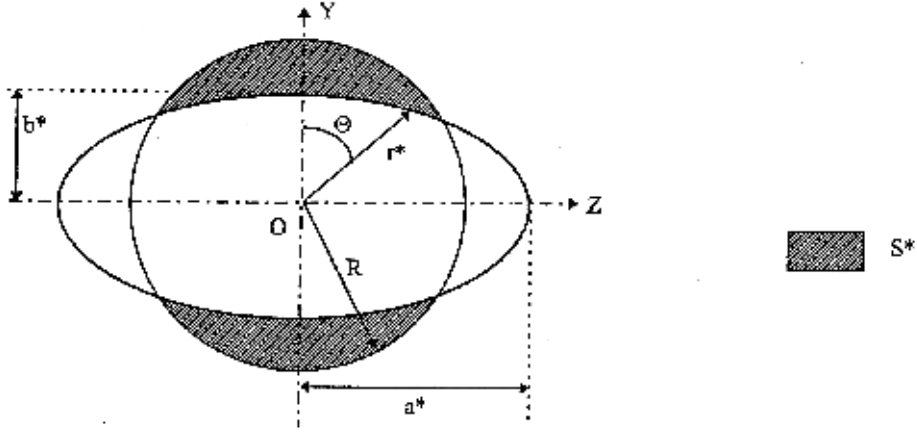


FIG. 3.14 – Surface S^* sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion rotative avec un chargement moyen de flexion plane (4 appuis).

$$\left(\frac{b^*}{R}\right)^2 = \frac{2 \cdot (\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{Fl.R,-1}^D)^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2} \quad (3.78)$$

$$\left(\frac{a^*}{R}\right)^2 = \frac{2 \cdot (\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{Fl.R,-1}^D)^2}{\sigma_a^2} \quad (3.79)$$

Deux cas peuvent se produire :

- soit $a^* > R$,

- soit $a^* \leq R$.

Dans le cas particulier où $\bar{\sigma} = 0$, on retrouve $a^* = b^* = r^*$, $\left(\frac{r^*}{R}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a^*}{\sigma_a}\right)^2$, tous les points situés sur la circonférence de l'éprouvette sont potentiellement critiques. La surface S^* s'écrit simplement $S^* = \pi(R^2 - r^{*2})$ d'où la probabilité de fissuration :

$$P_{feq,Frp}(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\left\langle \frac{\bar{\sigma}^2}{E} \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \frac{\sigma_a^2}{E} \left(\frac{r}{R}\right)^2 - W_f^* \right\rangle^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.80)$$

Ce calcul nécessite une résolution numérique.

⁵Ils s'identifient en posant $y^* = r^* \cos(\theta)$ (on obtient : b^* quand $\theta = 0^\circ$, et a^* quand $\theta = \pi/2$)

3.6.4 Flexion rotative et torsion combinées

Pour un chargement de flexion rotative symétrique⁶ et de torsion avec valeur moyenne combinées sur une éprouvette lisse cylindrique de révolution de rayon R , le tenseur des contraintes en un point M d'une section droite est donné par l'équation (3.81).

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{\tau} + \tau_a \sin(\omega t + \phi)] \frac{r}{R} \\ 0 & [\bar{\tau} + \tau_a \sin(\omega t + \phi)] \frac{r}{R} & \sigma_a \sin(\omega t) \frac{r}{R} \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z} \quad (3.81)$$

ϕ représente le déphasage entre la contrainte axiale σ_{zz} et le cisaillement τ ; r est le rayon courant du point M par rapport à l'axe de l'éprouvette.

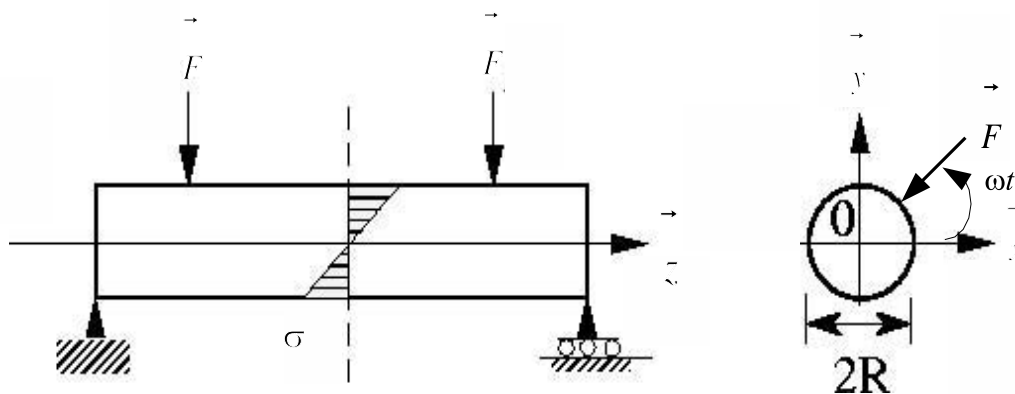


FIG. 3.15 – Eprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion rotative-torsion.

La répartition de $W_{f_{eq, Fr+To}}(M)$ sur une section droite de l'éprouvette est donnée par la relation (3.82).

$$W_{f_{eq, Fr+To}}(M) = \left[\frac{\sigma_a^2}{E} + 2(1 + \nu) \frac{\bar{\tau}^2 + \tau_a^2}{E} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{F(dT_{uniax}, \beta)}{F(dT_{Fr+To}(C_i), \beta)} \quad (3.82)$$

Dans ce cas de chargement les points critiques C_i sont situés sur toute la circonférence de l'éprouvette. Le travail de changement de volume W_f^v fourni au point C_i est :

$$W_{f_{Fr+To}}^v(C_i) = \frac{1 - 2\nu}{3E} (\sigma_a^2) \quad (3.83)$$

Le degré de triaxialité dT_{Fr+To} au point critique C_i s'écrit sous la forme (3.84).

⁶i.e. sans valeur moyenne

$$dT_{Fr+To}(C_i) = \frac{W_{f_{Fr+To}}^v(C_i)}{W_{f_{Fr+To}}(C_i)} = \frac{1-2\nu}{3} \left\{ \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + 2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)} \right\} \quad (3.84)$$

Le rayon r^* délimitant la ligne iso- $W_{f_{eq,Fr+To}}^*$, illustré sur la figure 3.16, est obtenu en écrivant $W_{f_{eq,Fr+To}} = W_f^*$. Il est solution de l'équation (3.85).

$$\left(\frac{r^*}{R}\right)^2 = \frac{2 \cdot (\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{Fl.R-1}^D)^2}{2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2) + \sigma_a^2} \frac{F(dT_{uniax}, \beta)}{F(dT_{Fr+To}(C_i), \beta)} \quad (3.85)$$

Pour simplifier l'expression des équations nous posons $G(dT_{soll}(C_i)) = \frac{F(dT_{uniax}, \beta)}{F(dT_{soll}(C_i), \beta)}$.

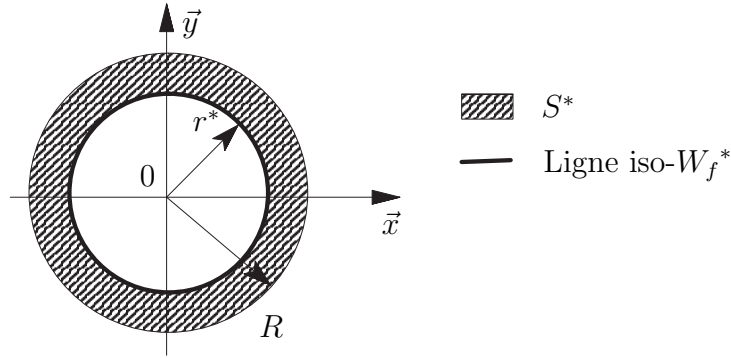


FIG. 3.16 – Surface d'influence $S^*(C_i)$ sur la section droite d'une éprouvette chargée en flexion rotative symétrique et torsion combinées.

Le calcul de la probabilité de fissuration s'effectue en suivant la même démarche que pour un chargement de torsion, en effet le paramètre $W_{f_{eq,uniax}}$ est fonction du rapport $\frac{r}{R}$.

$$P(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\langle W_{f_{eq,FR+To}}(M) - W_{f_{uniax}}^* \rangle^m}{\varphi_u} dv \right] \quad (3.86)$$

$$P_f(V) = 1 - \exp \left\{ - \frac{V_{Fr+To}^* E}{(m+1) [\sigma_a^2 + 2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)] G(dT_{FR+To}(C_i)) \varphi_u} \left(\frac{\sigma_a^2 + 2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2) G(dT_{FR+To}(C_i))}{E} - W_{f_{uniax}}^* \right)^{m+1} \right\} \quad (3.87)$$

où

$$V_{Trac+To}^* = \pi L (R^2 - r^{*2}) = \pi LR \left(1 - \frac{\sigma^{*2}}{\sigma_a^2 + 2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2) G(dT_{FR+To}(C_i))} \right) \quad (3.88)$$

3.6.5 Traction et torsion combinées

Le tenseur des contraintes en un point M de la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution de rayon R chargée en traction et torsion combinées, est donné par l'équation (3.89).

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{\tau} + \tau_a \sin(\omega t + \phi)] \frac{r}{R} \\ 0 & [\bar{\tau} + \tau_a \sin(\omega t + \phi)] \frac{r}{R} & \bar{\sigma} + \sigma_a \sin(\omega t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z} \quad (3.89)$$

ϕ représente le déphasage entre la contrainte normale σ_{zz} et le cisaillement τ ; r est le rayon courant du point M .

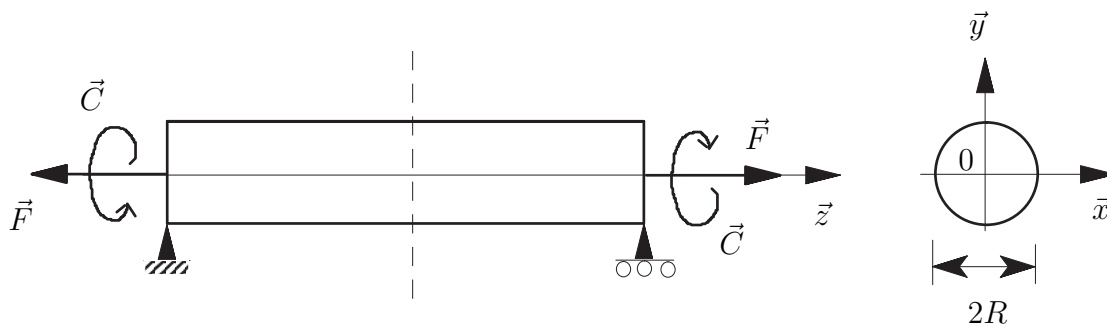


FIG. 3.17 – Epreuve lisse cylindrique de révolution sollicitée en traction-torsion.

La répartition de $W_{f_{eq,Trac+To}}(M)$ sur une section droite de l'éprouvette est donnée par les relations (3.90) et (3.91).

$$W_{f_{eq,Trac+To}, R_\sigma \geq 0}(M) = \left[\frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} + \frac{\bar{\tau}^2 + \tau_a^2}{E} 2(1 + \nu) \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{F (dT_{uniax}, \beta)}{F (dT_{Trac+To}(C_i), \beta)} \text{ si } R_\sigma < 0 \quad (3.90)$$

$$W_{f_{eq,Trac+To}, R_\sigma < 0}(M) = \left[\frac{2\bar{\sigma}\sigma_a}{E} + \frac{\bar{\tau}^2 + \tau_a^2}{E} 2(1 + \nu) \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{F (dT_{uniax}, \beta)}{F (dT_{Trac+To}(C_i), \beta)} \text{ si } R_\sigma \geq 0 \quad (3.91)$$

Les points critiques C_i sont situés sur la circonférence de l'éprouvette. D'après (3.16) le travail de changement de volume W_f^v fourni au point critique C_i est :

$$W_{f_{Trac+To}}^v(C_i) = \frac{1 - 2\nu}{3E} (\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2) \text{ si } R_\sigma \leq 0 \quad (3.92)$$

$$W_{f_{Trac+To}}^v(C_i) = \frac{1 - 2\nu}{3E} (2\bar{\sigma}\sigma_a) \text{ si } R_\sigma \geq 0 \quad (3.93)$$

Le degré de triaxialité $dT_{Trac+To}$ au point critique C_i s'écrit sous la forme (3.94).

$$dT_{Trac+To}(C_i) = \frac{W_{fTrac+To}^v(C_i)}{W_{fTrac+To}(C_i)} = \frac{1-2\nu}{3} \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2 + 2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)} \right\} \text{ si } R_\sigma \leq 0 \quad (3.94)$$

Le rayon r^* délimitant la surface S^* , illustré sur la Figure 3.18, est obtenu en écrivant $W_{feq,Trac+To} = W_f^*$. Il est solution de l'équation (3.95).

$$\left(\frac{r^*}{R}\right)^2 = \left[\frac{2 \cdot (\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{FLR-1}^D)^2}{2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)} \right] - \frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)} G(dT_{Trac+To}(C_i)) \quad (3.95)$$

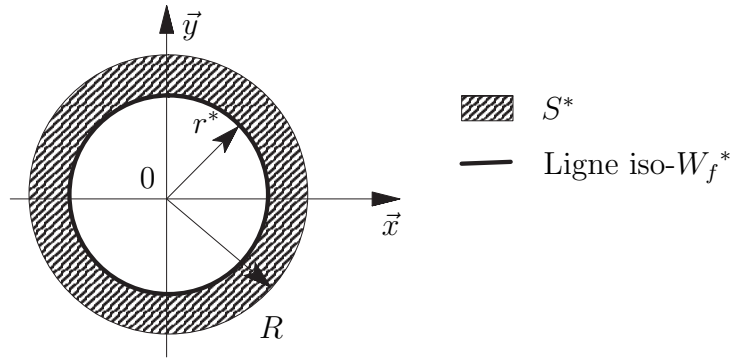


FIG. 3.18 – Surface d'influence $S^*(C_i)$ et ligne iso- $W_{fTrac+To}^*$ sur une section droite d'une éprouvette chargée en traction-torsion.

Le calcul de la probabilité de fissuration en traction torsion combinées s'effectue avec la même démarche qu'en flexion rotative et torsion combinées ou torsion seule, on obtient :

$$P_{fTrac+To}(V) = 1 - \exp \left\{ \frac{V_{Trac+To}^* E}{(m+1) [\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2 + 2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)] G(dT_{Trac+To}(C_i)) \varphi_u} \left(\frac{[\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2 + 2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)] G(dT_{Trac+To}(C_i))}{E} - W_f^* \right)^{m+1} \right\} \quad (3.96)$$

3.6.6 Flexion plane et torsion combinées

Pour un chargement de flexion plane (4 appuis) et de torsion combinées sur une éprouvette lisse cylindrique de révolution de rayon R , le tenseur des contraintes en un point M d'une section droite (dans la zone à moment constant) est donné par :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{\tau} + \tau_a \sin(\omega t + \phi)] \frac{r}{R} \\ 0 & [\bar{\tau} + \tau_a \sin(\omega t + \phi)] \frac{r}{R} & [\bar{\sigma} + \sigma_a \sin(\omega t)] \frac{y}{R} \end{pmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad (3.97)$$

La répartition de $W_{f_{eq, Fp+To}}(M)$ sur une section droite de l'éprouvette est décrite par la relation (3.98).

$$W_{f_{eq, Fp+To}}(M) = \left[\frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \frac{\bar{\tau}^2 + \tau_a^2}{E} 2(1 + \nu) \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{F(dT_{uniax}, \beta)}{F(dT_{FP+T}(C_i), \beta)} \quad (3.98)$$

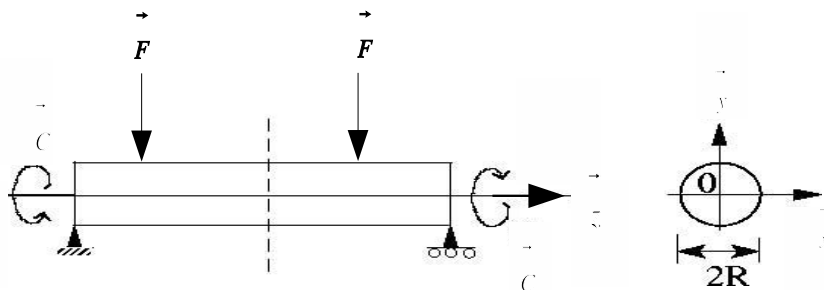


FIG. 3.19 – Eprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion-torsion.

Au point critique C_i , l'expression du travail de déformation élastique fourni, responsable du changement de volume, W_f^v , est identique à celle correspondant au chargement de traction-torsion combinées.

$$W_{f_{FP+To}}^v(C_i) = \frac{1 - 2\nu}{3E} (\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2) \quad (3.99)$$

L'expression du degré de triaxialité dT au point critique C_i est également identique à celle calculée en traction-torsion combinées (3.100).

$$dT_{FP+T}(C_i) = \frac{W_{f_{FP+To}}^v(C_i)}{W_{f_{FP+To}}(C_i)} = \frac{1 - 2\nu}{3} \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2 + 2(1 + \nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)} \right\} \quad (3.100)$$

La surface S^* est décrite par une ellipse sur la section droite de l'éprouvette (fig 3.20).

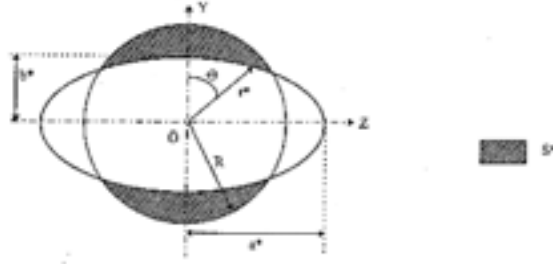


FIG. 3.20 – Surface S^* sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion plane (4 appuis) et torsion combinées.

Le demi grand axe a^* et le demi petit axe b^* de cette ellipse sont définis par les équations (3.101) et (3.102).

$$\left(\frac{a^*}{R}\right)^2 = \frac{\sigma^{*2}}{2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)G(dT_{FP+To}(C_i))} \quad (3.101)$$

$$\left(\frac{b^*}{R}\right)^2 = \frac{\sigma^{*2}}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2 + 2(1+\nu)(\bar{\tau}^2 + \tau_a^2)G(dT_{FP+To}(C_i))} \quad (3.102)$$

En posant $t = \frac{r}{R}$, la probabilité de fissuration s'écrit :

$$P_{f,FP+T}(V) = 1 - \exp \left[-\frac{4SL}{\pi \varphi_u} \int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}} \int_{t^*}^1 t (G(dT_{FP+To}(C_i)) \left(\frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} \sin^2 \theta + \frac{\bar{\tau}^2 + \tau_a^2}{E} 2(1+\nu) \right) t^2 - W_f^*)^m dt d\theta \right] \quad (3.103)$$

Une résolution numérique est nécessaire.

3.6.7 Traction biaxiale

Pour des essais de traction biaxiale, il est courant d'utiliser soit des éprouvettes tubulaires minces, soit des éprouvettes cruciformes minces dans la zone utile. On peut considérer l'état des contraintes homogène dans l'épaisseur de l'éprouvette. Le tenseur des contraintes en un point M est fourni par l'équation (3.104).

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 + \sigma_{1,a} \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_2 + \sigma_{2,a} \sin(\omega t + \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad (3.104)$$

La répartition de $W_f(M)$ sur une section droite de l'éprouvette est définie par la relation (3.105).

$$W_{f_{Trac\ biax}}(M) = \int_T \langle \sigma_2(t) \left(\frac{\dot{\sigma}_2(t)}{E} - \nu \dot{\sigma}_1(t) \right) \rangle dt + \int_T \langle \sigma_1(t) \left(\frac{\dot{\sigma}_1(t)}{E} - \nu \dot{\sigma}_2(t) \right) \rangle dt \quad (3.105)$$

Le calcul complet étant très lourd, nous ne traiterons que le cas où $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}_2$ sont nuls. En posant $\lambda = \sigma_{2a}/\sigma_{1a}$, le travail de déformation fourni équivalent en un point M de la pièce $W_{f_{Trac\ biax}}(M)$ s'écrit alors :

$$W_{f_{eq,Trac\ biax}}(M) = \frac{\sigma_{1a}^2}{2E} [1 - \cos(2\theta_1) + \lambda^2 (1 - \cos(2\theta_2 + 2\phi))] G(dT_{Trac\ biax}(C_i)) + \lambda \nu (\cos(2\theta_1 + \phi) + \cos(2\theta_2 + \phi) - 2 \cos(\phi) + 2(\theta_1 + \pi - \theta_2 - \phi) \sin(\phi)) G(dT_{Trac\ biax}(C_i)) \quad (3.106)$$

avec

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} - \frac{1}{\nu \lambda \sin(\phi)} \right) + \pi \quad \text{et} \quad \theta_2 = \arctan \left(\frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} - \frac{\nu}{\lambda \sin(\phi)} \right) + \pi \quad (3.107)$$

Ainsi pour $\phi = 0^\circ$ la grandeur $W_{f_{eq,Trac\ biax}}$ est :

$$W_{f_{eq,Trac\ biax}} = \frac{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 - 2\nu\sigma_{1a}\sigma_{2a}}{E} G(dT_{Trac\ biax}(C_i)) \quad (3.108)$$

Et pour $\phi = 180^\circ$ la grandeur $W_{f_{eq,Trac\ biax}}(M)$ est :

$$W_{f_{eq,Trac\ biax}} = \frac{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + 2\nu\sigma_{1a}\sigma_{2a}}{E} G(dT_{Trac\ biax}(C_i)) \quad (3.109)$$

Le travail de déformation élastique fourni, responsable du changement de volume, W_f^v est :

$$W_{f_{Trac\ biax}}^v(C_i) = \frac{1 - 2\nu}{3E} (\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + 2\nu\sigma_{1a}\sigma_{2a} \cos \phi) \quad (3.110)$$

Le degré de triaxialité $dT_{Trac\ biax}$ au point critique C_i est donné par la relation (3.111).

$$dT_{Trac\ biax}(C_i) = \frac{W_{f_{Trac\ biax}}^v(C_i)}{W_{f_{Trac\ biax}}(C_i)} = \frac{1 - 2\nu}{3E} \left\{ \frac{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + 2\nu\sigma_{1a}\sigma_{2a} \cos \phi}{W_{f_{Trac\ biax}}(C_i)} \right\} \quad (3.111)$$

Nous supposons que la répartition des contraintes est homogène sur la section, la “surface d’influence” est toute la section droite. L’expression de la probabilité de fissuration peut alors se mettre sous la forme :

$$P_{f,Tracbiax}(V) = 1 - \exp \left[-V \frac{(W_{feq,Tracbiax} - W_f^*)^m}{\varphi_u} \right] \quad (3.112)$$

3.7 Confrontations des prévisions de notre proposition aux résultats expérimentaux

Afin d’apprécier objectivement la qualité des prévisions de notre proposition probabiliste, ses prévisions ont été comparées aux résultats d’essais de fatigue obtenus sur cinq matériaux : l’alliage de titane Ti-6Al-4V, la fonte à graphite sphéroïdal EN-GJS800-2, l’acier C18 recuit, l’acier 35CrMo4 trempé revenu et l’acier 30NiCrMo16 trempé revenu . Pour chaque essai l’erreur relative de prévision, *ERP*, définie par l’équation (3.113), a été calculée, comme cela a été fait au premier chapitre. L’*ERP* est calculée par rapport à la limite d’endurance médiane estimée d’après les résultats d’essais (méthode de l’escalier).

$$ERP(\%) = \frac{\sigma_{a,exp}^D - \sigma_{a,calcul}^D}{\sigma_{a,exp}^D} \quad (3.113)$$

Cette erreur relative est calculée pour une contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ fixée dans le cas des essais uniaxiaux, ou pour un couple (rapport de chargement $(k_\sigma = \frac{\sigma_a}{\tau_a}$, contraintes moyennes) fixé pour les états de contraintes multiaxiaux.

Si l’*ERP* est positive ou nulle, les prévisions sont conservatives et se placent dans le domaine de la sécurité. Au contraire, si l’*ERP* est négative, les prévisions sont non conservatives (domaine d’insécurité), l’utilisation du critère en bureau d’étude est alors dangereuse.

Lorsque cela était possible, nous avons également comparé les estimations expérimentales des distributions de limite d’endurance et les distributions prédites par la proposition. L’estimateur expérimental de l’écart-type n’étant pas toujours calculable par la méthode de l’escalier, nous avons parfois été amené à utiliser l’estimation de l’écart-type issu de l’ajustement statistique du modèle de courbe S-N de Bastenaire proposé par le logiciel ESOPE [Tec95]. L’intervalle de confiance sur la médiane issu de la méthode de l’escalier (voir second chapitre) a également été déterminé mais seulement quand l’estimation de l’écart-type issu de la méthode de l’escalier était estimable. L’intervalle de confiance à $\alpha\%$ (95% par exemple) sur la médiane se définit comme suit :

en supposant $x_{méd} \in [a; b]$, on accepte un risque de $1 - \alpha$ ($1 - 0,95 = 0,05$ par exemple) de rejeter cette hypothèse alors qu’elle est vraie. Ainsi plus le risque d’erreur accepté est faible, plus l’intervalle de confiance est grand.

Nous choisissons de tracer les probabilités de fissuration définies par notre modèle (données par la relation (3.114)) pour les différents cas de chargements et de les comparer aux probabilités de fissuration cumulées expérimentales, c'est-à-dire obéissant à une loi normale caractérisée par une moyenne (la limite d'endurance conventionnelle) et un écart-type (voir chapitre 2).

$$P_f(W_{feq,soll}(x, y, z), V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\langle W_{feq,soll}(x, y, z) - W_f^* \rangle^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.114)$$

3.7.1 Identification des paramètres

Les cinq matériaux utilisés pour la confrontation prévisions/expérience sont la fonte à graphite sphéroïdal EN-GJS800-2, l'acier C18 recuit, l'acier 35CrMo4 trempé revenu, l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu et l'alliage de titane Ti-6Al-4V recuit. Les paramètres m , W_u et φ_u ainsi que les constantes matériau utilisées sont regroupés dans le tableau (3.1).

Matériau	m	W_u (MJ/m ³)	φ_u (MJ/m ³) ^{m}	W_f^* (MJ/m ³)	σ^* (MPa)	β
Fonte EN-GJS800-2	3,144	0,125	$1,067 \cdot 10^{16}$	0,252	204	3,09
Acier 30NiCrMo16	2,776	0,681	$1,55 \cdot 10^{16}$	0,971	441	0,963
Acier 35CrMo4	5,356	0,140	$2,775 \cdot 10^{17}$	1,426	534	1,33
Acier C18	3,239	0,115	$2,473 \cdot 10^{16}$	0,252	230	-1,456
Alliage Ti-6Al-4V	2,61	0,235	$1,115 \cdot 10^{14}$	2,88	563	1,79

TAB. 3.1 – Valeurs, pour les matériaux testés, des paramètres du modèle proposé.

La méthode d'identification des paramètres du modèle proposé utilisant l'estimateur de l'écart-type expérimental a été utilisée pour l'alliage de titane Ti-6Al-4V car la méthode basée sur les seules limites d'endurance ne fournissait pas de résultats satisfaisants. Cette méthode est limitée aux métaux présentant une dispersion importante.

3.7.2 Alliage de titane Ti-6Al-4V

Les résultats de ces essais réalisés à $2 \cdot 10^6$ cycles (censure de l'escalier) au cours de la présente étude sont rappelés dans le tableau 3.2.

Les estimateurs des écarts-types présentés avec le caractère (*) sont issus du logiciel ESOPE car ils sont inestimables par la méthode de l'escalier. Nous avons distingué les sollicitations en fonction de la possibilité d'estimer un intervalle de confiance. Ainsi en traction alternée symétrique et en flexion alternée symétrique les écarts-types estimés proviennent du logiciel ESOPE lors du tracé de la courbe S-N modélisée par le modèle de Bastenaire. Il n'est donc pas possible d'estimer l'intervalle de confiance associé issu de la méthode de l'escalier de Dixon et Mood.

N°	Sollicitations	σ_a (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	τ_a (MPa)	$\bar{\tau}$ (MPa)	s sur σ_a (MPa)	ϕ (°)	Nb épr.	ERP <i>pro</i> (%)
	Traction	583	0	-	-	17*	-	16	-
	Flex. Rotative	602	0	-	-	34	-	25	-3,5
	Torsion	-	-	411	0	27	-	25	-3,4
	Flex. Pl.	652	0	-	-	20*	-	25	-1,8
1	Flex pl+Tors	442	0	255	0	47	0	15	-14,2
2	Flex pl+Tors	567	0	328	0	17	90	18	10,9

TAB. 3.2 – Résultats d'essais de fatigue sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V. Erreur relative de Prévion (en %) de notre proposition.

La figure 3.21 présente les probabilités de fissuration expérimentale et prévues par notre modèle pour ces deux sollicitations. Contrairement aux prévisions de notre modèle identifié avec les seules limites d'endurance, la prévision en flexion plane est en bon accord avec l'expérience et la dispersion est aussi estimée de façon satisfaisante. En traction, la dispersion prévue semble nettement sous estimée, ceci venant probablement du fait que l'estimation de l'écart-type expérimental issu d'ESOPE n'est pas très représentatif de la réalité expérimentale (moins de 3% de la limite d'endurance médiane, ce qui semble trop faible pour être réaliste).

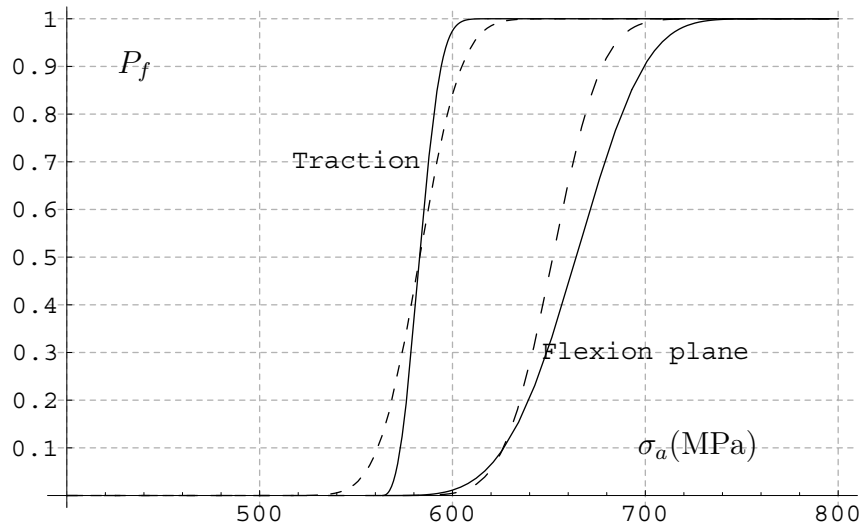


FIG. 3.21 – Probabilités de fissuration prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) sur éprouvettes lisses cylindriques de révolution en alliage de titane Ti-6Al-4V sous chargements alternés symétriques de traction et flexion plane.

En torsion et flexion rotative alternées symétriques, les intervalles de confiance à 95% associés à la limite d'endurance médiane expérimentale sont estimables :

$$\tau \in [411 \pm 24\text{MPa}] \text{ et } \sigma_{FR} \in [602 \pm 27\text{MPa}] \quad (3.115)$$

La figure 3.22 illustre les probabilités de fissuration expérimentale et prévue par notre

modèle pour ces deux sollicitations avec les intervalles de confiance associés aux médianes.

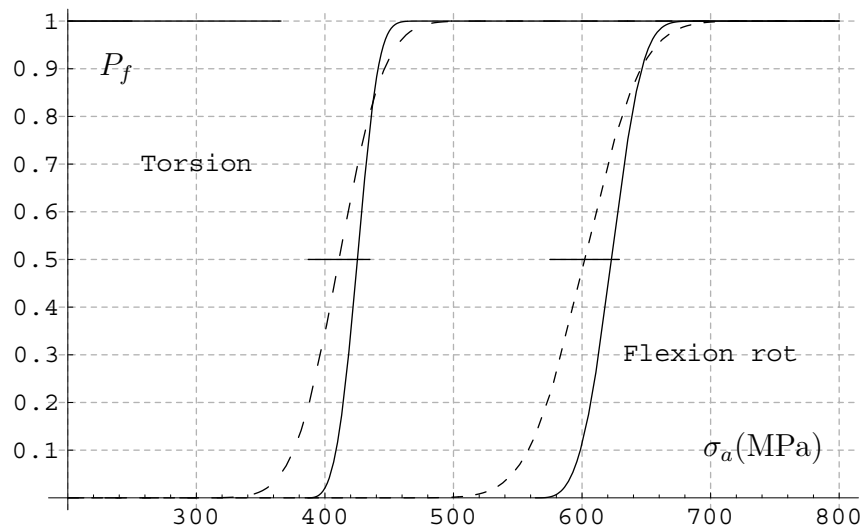


FIG. 3.22 – Probabilités de fissuration prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) sur éprouvettes lisse cylindriques de révolution en l’alliage de titane Ti-6Al-4V sous sollicitations de torsion alternée symétrique et flexion rotative alternée symétrique et illustrations des intervalles de confiance à 95% associés à la limite d’endurance médiane.

Les prévisions du modèle se situent dans les intervalles de confiance et les dispersions prévues sont proches des dispersions expérimentales. Pour des sollicitations simples, notre modèle distingue les cas de chargement et respecte la hiérarchie des limites d’endurance conventionnelles ($\tau_{-1}^D < \sigma_{trac,-1}^D < \sigma_{Fr,-1}^D < \sigma_{Fp-cyl,-1}^D$).

Pour les chargements combinés, les prévisions de notre proposition sont convenables par rapport aux résultats expérimentaux. Ainsi, en flexion plane et torsion combinées en phase ($R_\sigma = \sqrt{3}$), l’intervalle de confiance à 95% associé à la limite d’endurance médiane est : $\sigma_{Fp+Tors,\phi=0^\circ} \in [442 \pm 70\text{MPa}]$ ce qui traduit bien la dispersion liée à cet alliage [Mai99]. La figure 3.23 illustre les probabilités de fissuration expérimentale et les prévisions de notre modèle pour cet essai combiné ainsi que l’intervalle de confiance associé. Bien que la prévision soit non conservative, elle se place dans l’intervalle de confiance ce qui est très satisfaisant même si l’importante dispersion expérimentale n’est pas très correctement prévue. De la même façon, la figure 3.24 illustre les probabilités de fissuration expérimentale et prévue par notre modèle pour le même type d’essai déphasé de 90° ainsi que l’intervalle de confiance à 95% associé : $\sigma_{Fp+Tors,\phi=90^\circ} \in [567 \pm 30\text{MPa}]$. Le modèle traduit de façon très convenable la dispersion expérimentale, il est conservatif mais ses prévisions sont hors de l’intervalle de confiance ($ERP = -14\%$). Ceci s’explique par le fait que ces essais ont été réalisés avec le deuxième lot de matière dont l’état de surface est très différent du premier lot ce qui rend les comparaisons très délicates (peu représentatives de la réalité). Les prévisions de la proposition sont insensibles au déphasage entre les sollicitations de flexion et torsion combinées comme cela est généralement admis expérimentalement pour les grandes durées de vie.

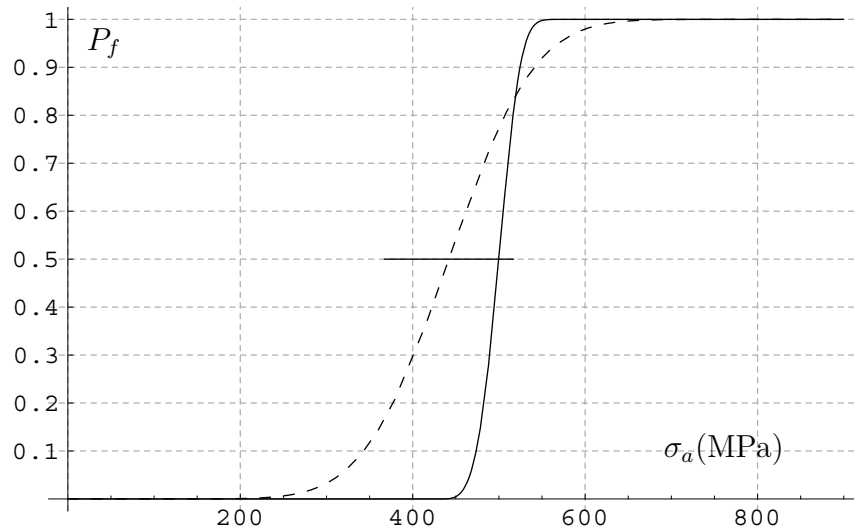


FIG. 3.23 – Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V chargées en flexion plane et torsion combinées en phase ($R_\sigma = \sqrt{3}$) avec illustration de l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane expérimentale.

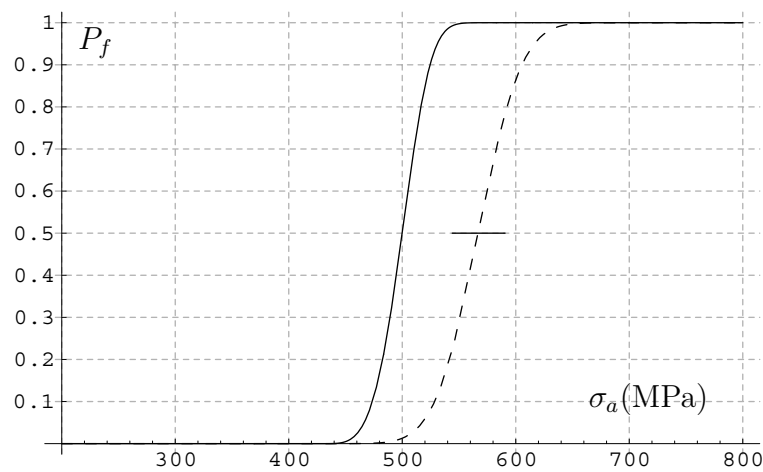


FIG. 3.24 – Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V sous chargement de flexion et torsion combinées hors phase ($\phi = 90^\circ$), $k_\sigma = \sqrt{3}$, avec illustration de l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane.

La figure 3.25 illustre les Erreurs Relatives de Prédiction de notre proposition et celles des critères déterministes choisis au chapitre 1. Sur l'essai n°1 ($\phi = 0^\circ$), notre proposition donne la meilleure prédiction. Concernant l'essai n°2 ($\phi = 90^\circ$), les bonnes prévisions des autres critères sont assez surprenantes du fait que cet essai ait été réalisé avec le deuxième lot de matière.

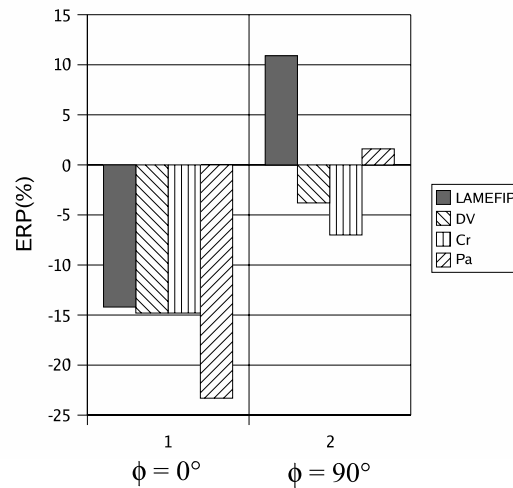


FIG. 3.25 – Erreur relative de prévision (ERP en %) des critères sur les essais de flexion plane et torsion combinées ($R_\sigma = -1$), $k_\sigma = \sqrt{3}$ sur des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V.

3.7.3 Fonte EN-GJS800-2

Les caractéristiques mécaniques en traction monotone quasi-statique de la fonte EN-GJS800-2 sont regroupées dans le tableau 3.3.

E (MPa)	ν	$R_{e0,02}$ (MPa)	$R_{e0,2}$ (MPa)	R_m (MPa)	A (%)
164900	0,275	320	462	795	9

TAB. 3.3 – Caractéristiques mécaniques statiques de la fonte EN-GJS800-2 [Ban01].

Les limites d'endurance expérimentales sont inscrites dans le tableau 3.4 d'après les thèses de Palin-Luc [Pl96], Bennebach [Ben93] et Banvillet [Ban01].

N°	Sollicitations	σ_a (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	τ_a (MPa)	$\bar{\tau}$ (MPa)	s sur σ_a (MPa)	ϕ (°)	Nb épr.	ERP <i>pro</i> (%)
	Traction	245	0	-	-	6	-	16	-
	Flex. Rotative	294	0	-	-	13	-	25	-
	Torsion	-	-	220	0	3,2*	-	25	-
	Flex. Pl.	280	0	-	-	11	-	25	-6,4
3	Flex. Pl.	185	225	-	-	-	-	25	-18,5
4	Flex. Pl.+Tors.	199	0	147	0	4,5*	0	25	-8,5
5	Flex. Pl.+Tors.	245	0	142	0	8*	90	25	1,2
6	Flex. Pl.+Tors.	228	0	132	0	11*	0	25	-6,1

TAB. 3.4 – Résultats d'essais sur la fonte EN-GJS800-2. Erreur Relative de Prévision (en %) de notre proposition.

Les limites d'endurance en flexion plane ($R_\sigma = -1$) et torsion ($R_\sigma = -1$) ont été déterminées par les auteurs (avec au moins 15 éprouvettes par type de chargement) en utilisant la méthode de l'escalier pour une durée de vie de 10^6 cycles (censure), sur des éprouvettes lisses ($k_t(\text{flex}) = 1.07$ et $k_t(\text{tors}) = 1.05$) cylindriques de révolution (diamètre utile⁷ de 12 mm). La figure 3.26 représente les probabilités de fissuration prévues par notre modèle et expérimentales pour les sollicitations simples sans valeur moyenne. L'intervalle de confiance à 95% associé à la limite d'endurance médiane expérimentale pour l'essai de flexion plane : $\sigma_{FP} \in [294 \pm 6\text{MPa}]$ est également représenté sur cette figure. En flexion plane, la limite d'endurance médiane prévue par notre proposition se situe hors de l'intervalle de confiance à 95%. Malgré cela, notre modèle distingue les cas de chargement et respecte la hiérarchie des limites d'endurance. On peut toutefois noter que les estimations expérimentales des écarts-types sont faibles. D'une manière générale, on considère qu'un écart-type inférieur à 10% de la valeur de la limite d'endurance est probablement sous estimé et non représentatif de la dispersion réelle. Ceci peut expliquer l'écart séparant la courbes prévue de la courbe basée sur les valeurs de la médiane et de l'écart-type estimés expérimentalement.

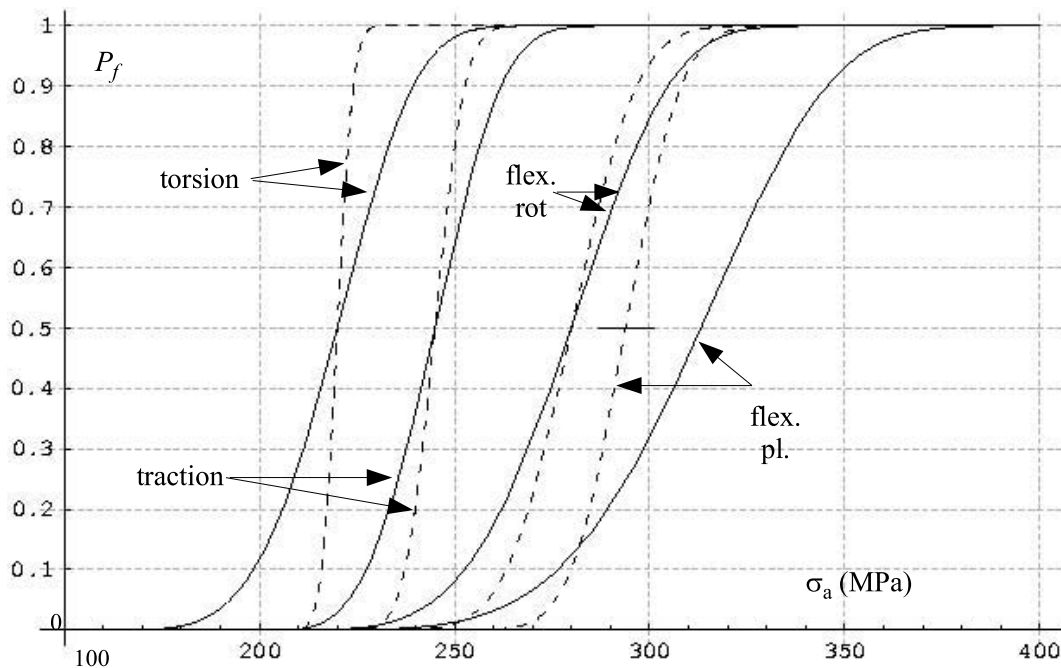


FIG. 3.26 – Probabilités prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) pour des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en fonte EN-GJS800-2 sous sollicitations simples ($R_\sigma = -1$) et illustrations de l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane en flexion plane.

Pour les essais combinés, les estimateurs des écarts-types expérimentaux mentionnés n'ont pu être estimés à l'aide de la méthode de l'escalier. Afin de pouvoir juger la qualité de notre méthode nous avons utilisé les écarts-types estimés par le logiciel ESOPE avec le

⁷diamètre à fond de tore

modèle de courbes S-N de Bastenaire. La représentation des intervalles de confiance n'est par contre pas possible sans l'écart-type issu de la méthode de l'escalier⁸.

Les figures 3.27 et 3.28 illustrent les probabilités de fissuration estimées d'après les résultats expérimentaux prévues par notre modèle en flexion plane et torsion combinées en phase et hors phase ($\phi = 90^\circ$).

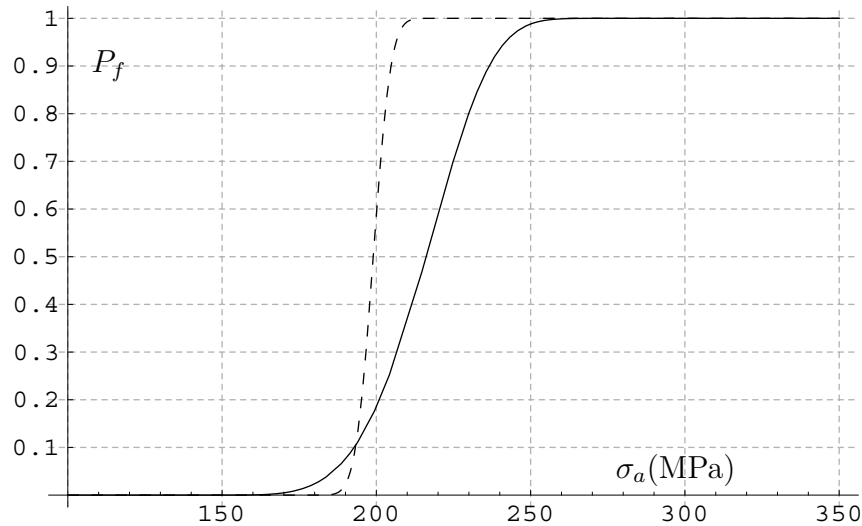


FIG. 3.27 – Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte en flexion et torsion combinées en phase (essai n°4), $k_\sigma = 1,35$ sur éprouvettes cylindriques de révolution en fonte EN-GJS800-2

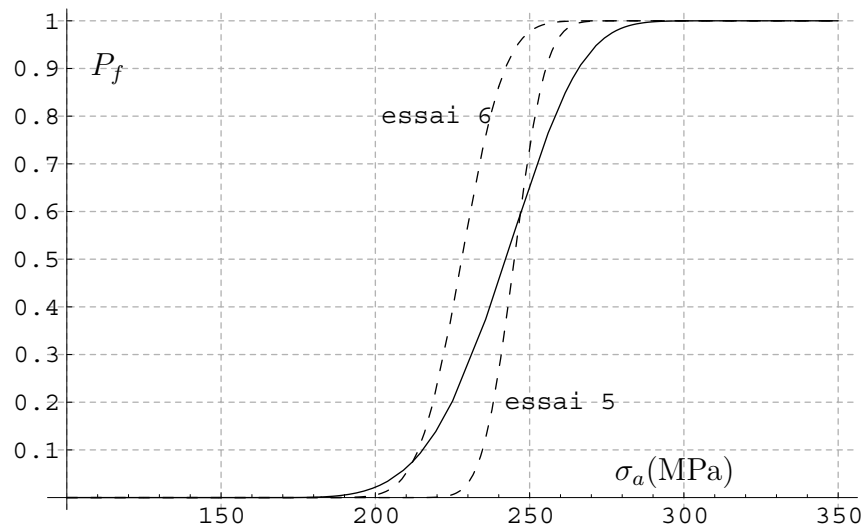


FIG. 3.28 – Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte en flexion et torsion combinées en et hors phase ($\phi = 90^\circ$), $R_\sigma = -1$, $k_\sigma = \sqrt{3}$ pour des éprouvettes lisses en fonte EN-GJS800-2 (trait plein : prévisions, pointillés fins : essai 5 hors phase, essai 6 en phase).

⁸L'estimation de l'intervalle de confiance sur la médiane issue de la méthode de l'escalier est impossible sans l'estimateur de l'écart-type.

Sur la figure 3.28 sont présentées les probabilités des essais présentant le même rapport de charge $k_\sigma = \sqrt{3}$ mais présentant des déphasages différents (0-90°). Nous noterons que notre proposition n'est pas sensible au déphasage en flexion plane et torsion combinées, ce qui est confirmé par l'expérience [Fro87].

Hormis une dispersion surestimée par le modèle (même constat que pour les sollicitation simples), les prévisions sont en bon accord avec les résultats d'essais combinés, les Erreurs Relatives de Prévisions sur les valeurs médianes ne dépassant pas 10%. La comparaison avec les ERP des critères déterministes est représentée sur la figure 3.29 et montre la bonne qualité des prévisions de notre proposition (une seule prévision supérieure à 15%).

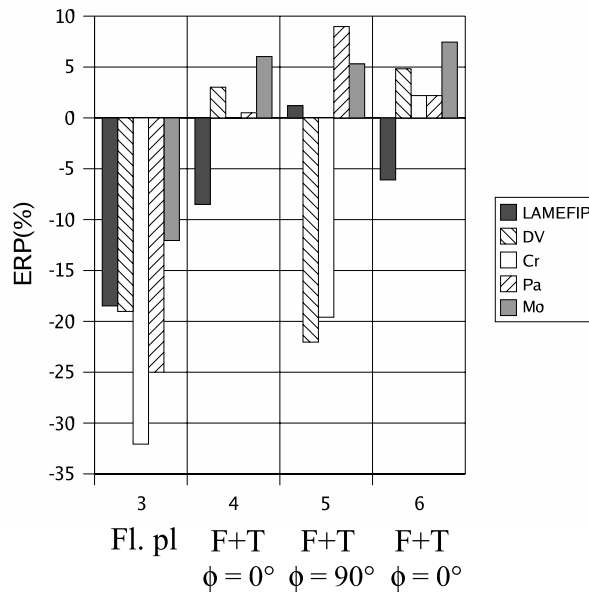


FIG. 3.29 – Erreur Relative de Prévision (ERP en %) des critères pour les quatre essais sur des éprouvettes lisses en fonte EN-GJS800-2.

3.7.4 Acier 30NiCrMo16 trempé revenu

Le tableau 3.5 présente les caractéristiques mécaniques de l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu en traction monotone quasi-statique.

E (MPa)	ν	$R_{e0.02}$ (MPa)	$R_{e0.2}$ (MPa)	Rm (MPa)	HV
200000	0,29	895	1080	1200	406

TAB. 3.5 – Caractéristiques mécaniques statiques de l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu [Fro87].

Les résultats des essais de fatigue sont rappelés dans les tableaux 3.6 et 3.7. Les conditions de ces essais ont été précisées au chapitre 1. La figure 3.30 représente les

probabilités de fissuration prévues par notre modèle et les estimations expérimentales pour les sollicitations simples sans valeur moyenne.

N°	Sollicitations	σ_a (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	τ_a (MPa)	$\bar{\tau}$ (MPa)	s sur σ_a (MPa)	ϕ (°)	ERP <i>pro</i> (%)
	Traction	560	0	-	-	19	-	-
	Flex. Rotative	658	0	-	-	13	-	-
	Torsion	-	-	428	0	14*	-	-
	Flex. Pl.	690	0	-	-	63	-	-9,3
7	Traction	235	745	-	-	54	-	10,2
8	Traction	251	704	-	-	-	-	11,1
9	Traction	527	222	-	-	35	-	2,3
10	Flex. Pl.	558	428	-	-	24	-	-11,2
11	Flex. Pl..	575	375	-	-	-	0	-8,5
12	Flex. Pl.	627	273	-	-	-	90	1,2
13	Flex. Pl.	679	156	-	-	-	0	-6,1

TAB. 3.6 – Résultats d'essais de fatigue sous sollicitations simples sur des éprouvettes en acier 30NiCrMo16. Erreur relative de Prévision (en %) de notre proposition.

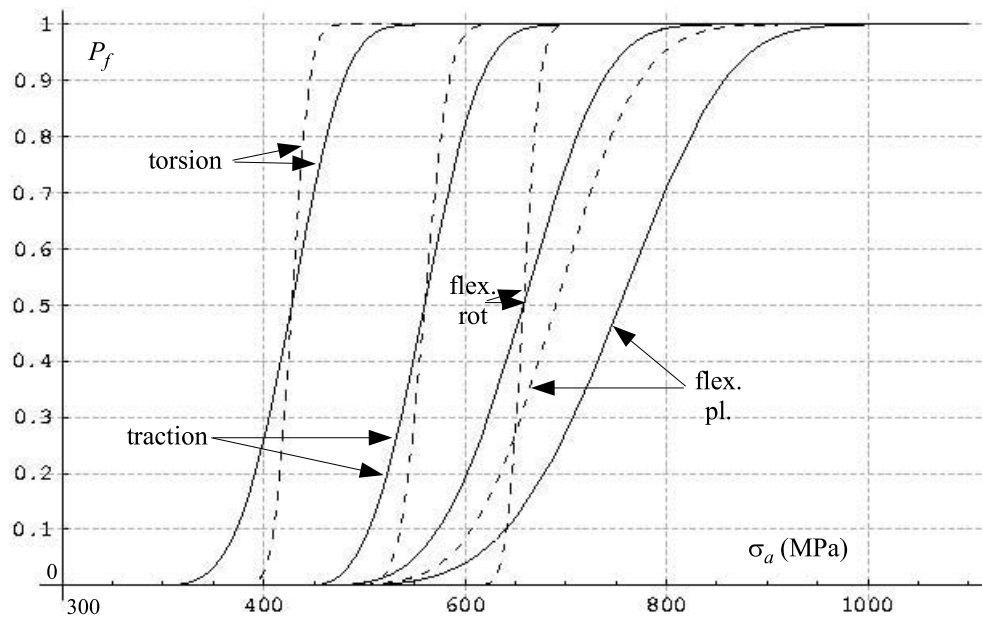


FIG. 3.30 – Probabilités de fissuration prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) sur des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en acier 30NiCrMo16 sous sollicitations simples.

L'intervalle de confiance à 95% associé à la limite d'endurance médiane en flexion plane n'a pas été estimé en flexion plane car l'estimateur de l'écart-type expérimental a été calculé à partir de lots de matière différents, ce qui nous a semblé peu significatif. Comme pour les essais sur la fonte EN-GJS800-2, les écarts-types expérimentaux semblent très largement sous estimés (environ 2% de la limite d'endurance médiane en flexion

rotative). Par contre, pour les essais de traction alternée symétrique avec valeur moyenne, ces intervalles à 95% ont pu être estimés : pour l'essai n°7, $\sigma_m = 745\text{MPa}$: $\sigma_{Trac,n^{\circ}7} \in [235 \pm 79\text{MPa}]$ et pour l'essai n°9 $\sigma_m = 222\text{MPa}$, $\sigma_{Trac,n^{\circ}9} \in [527 \pm 56\text{MPa}]$.

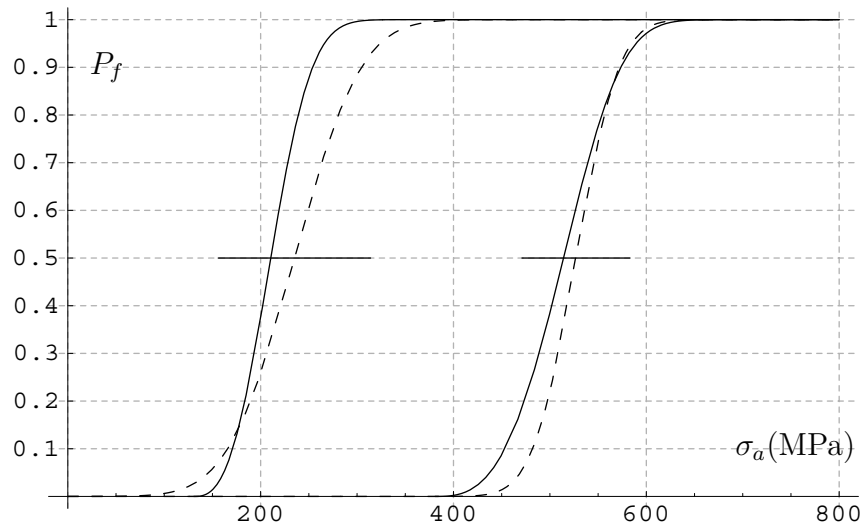


FIG. 3.31 – P_f prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) pour des chargements de traction avec valeur moyenne (essais n°7, $\sigma_m = 745\text{MPa}$ et n°9, $\sigma_m = 222\text{MPa}$) pour l'acier 30NiCrMo16 sur éprouvettes lisses cylindriques de révolution.

Les écarts-types proches de la réalité expérimentale (10% de la limite d'endurance) donnent des intervalles qui semblent représentatifs. Les prévisions du modèle sont dans les intervalles de confiance à 95%, de même les dispersions sont très bien estimées. Les prévisions concernant la flexion plane avec valeur moyenne sont correctes. Pour l'essai n°10 $\sigma_m = 428\text{MPa}$, l'intervalle de confiance associé à 95% a pu être estimé : $\sigma_{FP,n^{\circ}10} \in [558 \pm 25\text{MPa}]$.

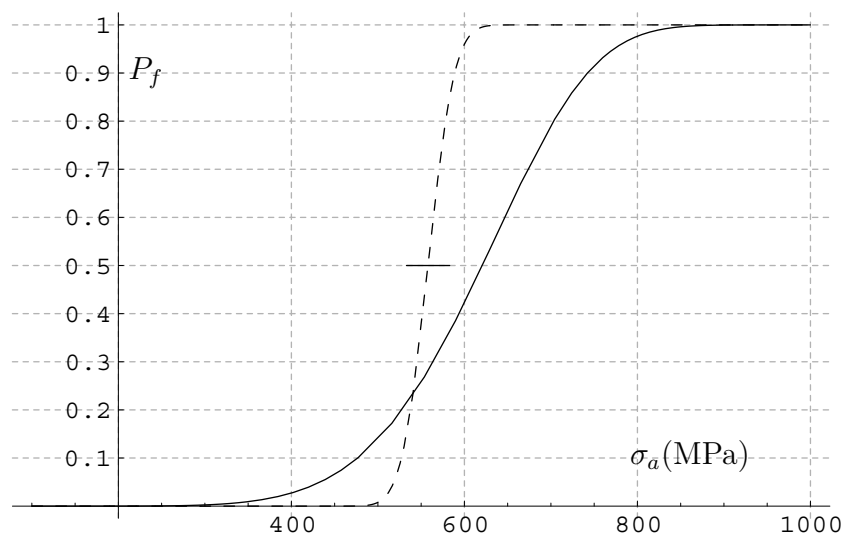


FIG. 3.32 – P_f prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) en flexion plane avec valeur moyenne (essai n°10) pour l'acier 30NiCrMo16 sur éprouvettes lisse cylindriques de révolution

La comparaison de l'ERP de notre proposition avec celles des critères déterministes pour ces essais de sollicitations simples est présentée sur la figure 3.33. Pour les essais de traction (n°7, 8 et 9), les prévisions du modèle proposé sont conservatives et bien meilleures que les critères déterministes. En flexion plane les prévisions bien que non conservatives sont de bonne qualité.

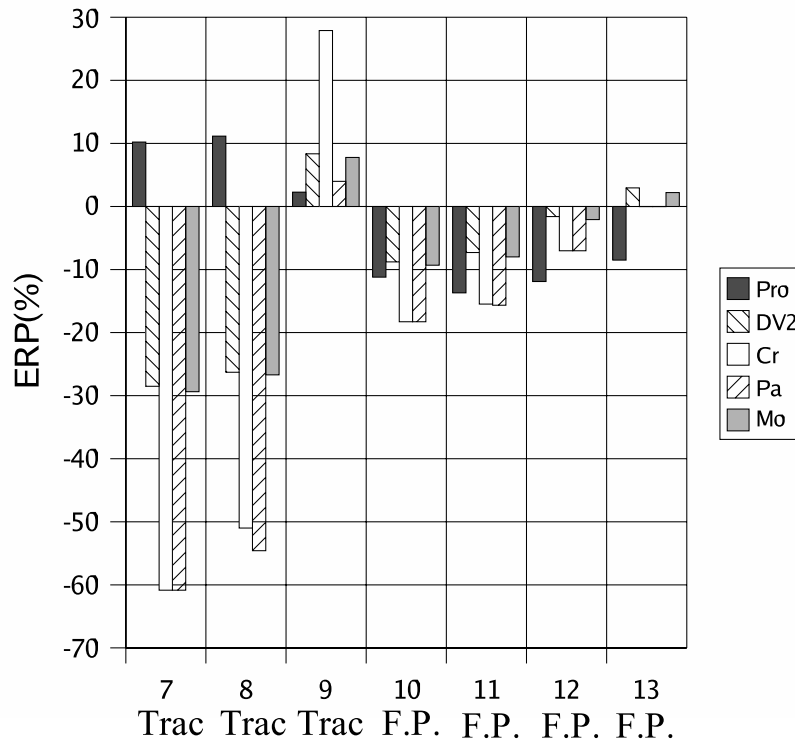


FIG. 3.33 – Erreur Relative de Prédiction (ERP en %) des critères pour les 7 essais en sollicitations simples sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16.

Intéressons nous maintenant aux chargements combinés pour cet acier. Les résultats d'essais de flexion plane et torsion combinées sont rassemblés dans le tableau 3.7. Malheureusement, pour ces essais, le nombre d'éprouvettes utilisées pour l'estimation de la limite d'endurance par la méthode de l'escalier était faible, en moyenne 10 à 11 et au mieux 15. L'estimation expérimentale de l'écart-type n'a donc été possible que sur quelques essais. La valeur absolue de l'ERP de notre proposition n'est supérieure à 20% qu'à deux reprises. Pour l'essai n°23 ($R_\sigma = 1,80$, $\phi = 90^\circ$), l'intervalle de confiance à 95% associé à la moyenne estimée est : $\sigma_{FP+tors,n^{\circ}23}^D \in [470 \pm 20\text{MPa}]$. La figure 3.34 représente les probabilités de fissuration expérimentale et prévue par notre modèle en fonction de la contrainte de flexion appliquée pour cet essai combiné.

N°	Sollicitations	σ_a (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	τ_a (MPa)	$\bar{\tau}$ (MPa)	s (MPa)	ϕ (°)	ERP <i>pro</i> (%)
14	Flex. Pl.+Tors.	519	0	291	0	-	0	-6,2
15	Flex. Pl.+Tors.	514	0	288	0	-	90	-7,1
16	Fex. Pl.+Tors.	451	294	250	191	-	0	-0,9
17	Flex. Pl.+Tors.	462	294	258	191	-	90	2,2
18	Flex. Pl.+Tors.	474	294	265	0	50	45	-7,6
19	Flex. Pl.+Tors.	464	294	259	0	-	60	-9,9
20	Flex. Pl.+Tors.	554	287	135	0	-	45	-16,8
21	Flex. Pl.+Tors.	474	0	265	0	-	90	-16,2
22	Fex. Pl.+Tors.	220	199	368	0	-	90	-8,6
23	Flex. Pl.+Tors.	470	299	261	0	19	90	-8,5
24	Flex. Pl.+Tors.	527	287	129	0	-	90	-22,8
25	Flex. Pl.+Tors.	433	472	240	0	-	90	8
26	Flex. Pl.+Tors.	0	299	396	0	-	0	0,5
27	Fex. Pl.+Tors.	0	486	411	0	-	0	-15,5
28	Flex. Pl.+Tors.	0	655	364	0	-	0	35,1
29	Flex. Pl.+Tors.	482	0	268	0	-	0	-14,9
30	Flex. Pl.+Tors.	207	299	350	0	-	0	-9,2
31	Flex. Pl.+Tors.	474	294	265	0	12	0	-7,6
32	Flex. Pl.+Tors.	584	281	142	0	34	0	-11,3
33	Flex. Pl.+Tors.	447	473	252	0	-	0	8
34	Flex. Rot.+Tors.	337	0	328	0	-	0	-11
35	Flex. Rot.+Tors.	482	0	234	0	-	0	-15

TAB. 3.7 – Résultats d'essais sous sollicitations combinées sur des éprouvettes en acier 30NiCrMo16. Erreur relative de Prédiction (en %) de notre proposition.

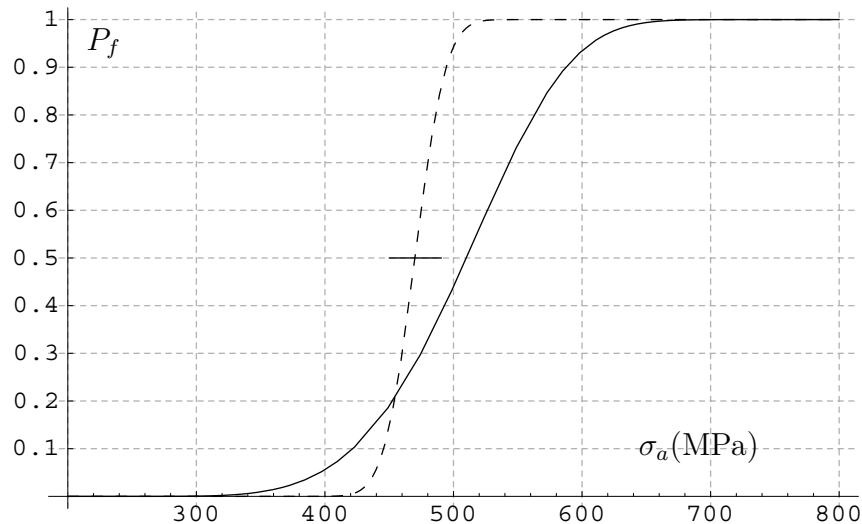


FIG. 3.34 – Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en acier 30NiCrMo16 chargées en flexion plane et torsion combinées hors phase (essai n°23, $R_\sigma = 1,80$, $\phi = 90^\circ$)

Notre prédiction est hors de l'intervalle de confiance mais cet intervalle semble sous

estimé (écart-type de 19 MPa largement inférieur à 10% de la limite d'endurance). On retrouve la même tendance pour l'essai n°32 ($R_\sigma = 4, 1, \phi = 0^\circ$) (figure 3.35) pour lequel l'estimation de l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane est $\sigma_{FP+tors,n^\circ 32}^D \in [584 \pm 35\text{MPa}]$.

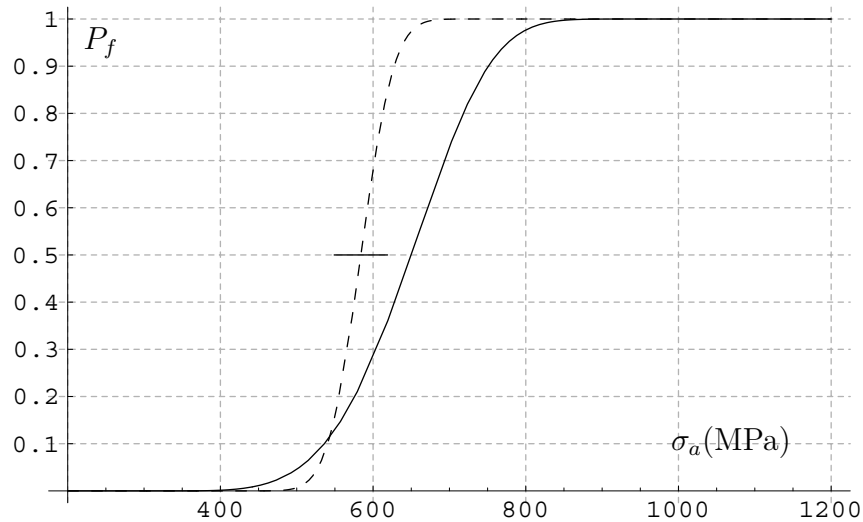


FIG. 3.35 – Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en acier 30NiCrMo16 sollicitées en flexion et torsion combinées en phase (essai n°32 $R_\sigma = 4, 1, \phi = 0^\circ$).

Par contre, pour l'essai n°18 ($R_\sigma = 1, 79, \phi = 45^\circ$) la figure 3.36 montre que notre prévision est dans l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane estimée : $\sigma_{FP+tors,n^\circ 18}^D \in [474 \pm 50\text{MPa}]$.

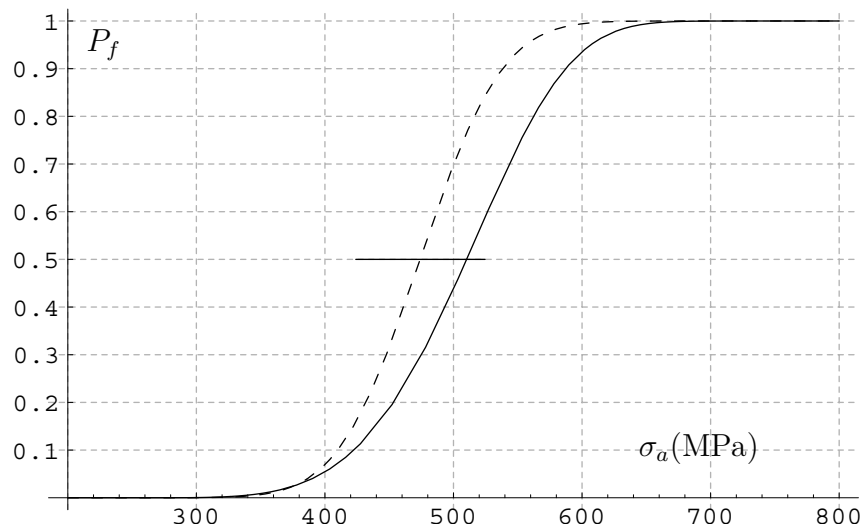


FIG. 3.36 – Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en acier 30NiCrMo16 sollicitées en flexion plane et torsion combinées en phase (essai n°18, $R_\sigma = 1, 79, \phi = 45^\circ$).

Les Erreurs Relatives de Prévision de notre proposition sont comparées à celles des

critères déterministes sur la figure 3.37. Hormis deux prévisions dépassant 20%, notre proposition se place bien.

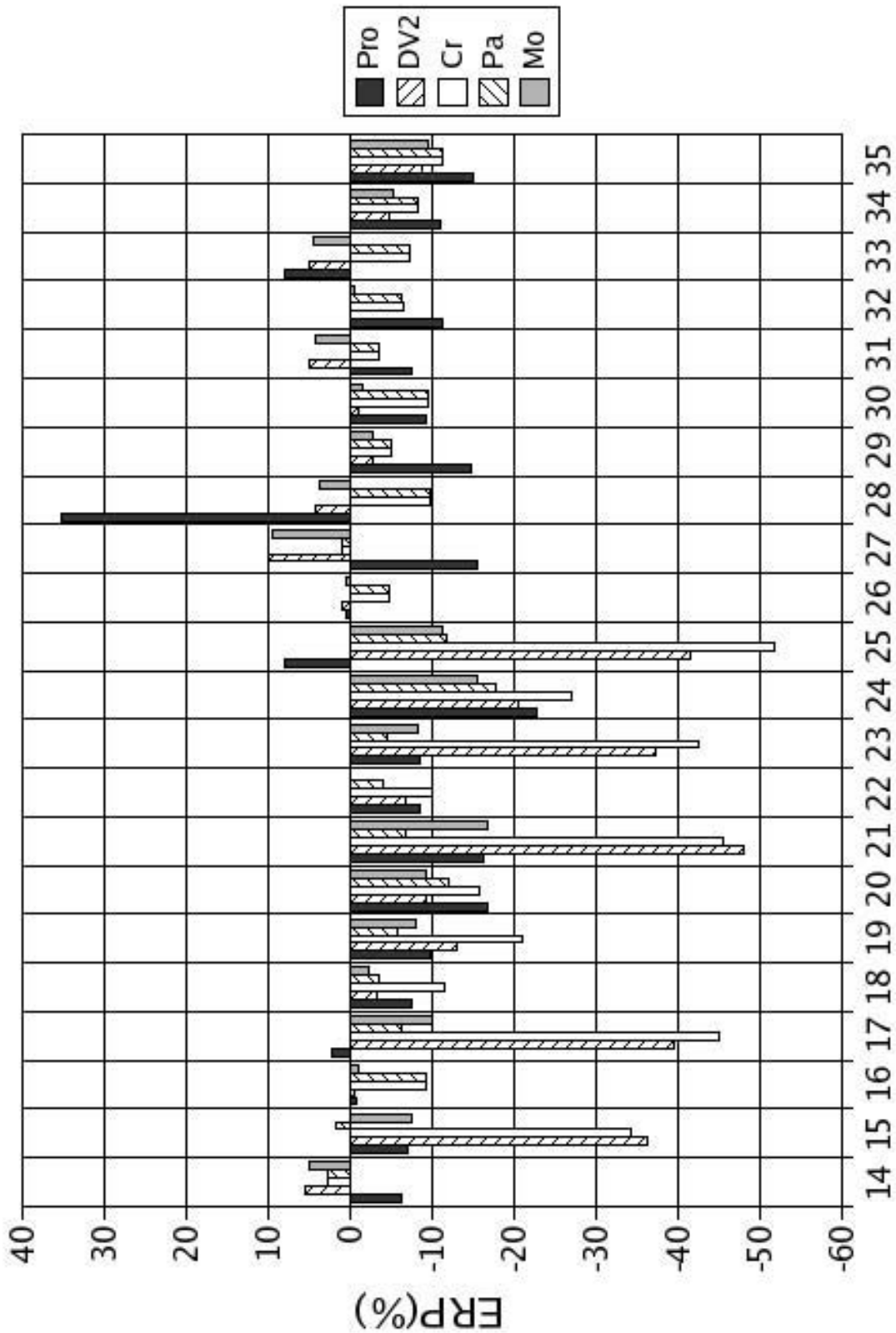


FIG. 3.37 – Erreur Relative de Prévision (ERP en %) des critères pour les 21 essais de sollicitations combinées sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16.

3.7.5 Acier 35CrMo4 trempé revenu

L'acier 35CrMo4 a été austénitisé à 850°C pendant 35 minutes, trempé à l'huile et revenu à 550°C pendant 2 heures. Les caractéristiques mécaniques en traction monotone quasi-statique de ce matériau ainsi traité sont rassemblées dans le tableau 3.8.

E (MPa)	ν	$R_{e0,2}$ (MPa)	$R_{e0,02}$ (MPa)	R_m (MPa)	A (%)	HRC
200000	0,3	1019	1015	1123	13	40

TAB. 3.8 – Caractéristiques mécaniques statiques de l'acier 35CrMo4 trempé revenu [P196].

Les résultats d'essais sont donnés dans le tableau 3.9 avec l'erreur relative de prévision pour l'essai de flexion plane. Chaque limite d'endurance a été obtenue par la méthode de l'escalier. Les éprouvettes utilisées en traction, flexion rotative et flexion plane avaient un diamètre de 7,98 mm en fond de tore et de 12 mm pour celles de torsion. Nous ne disposons pas de résultats d'essais sur ce matériau en sollicitations combinées.

N°	Sollicitations	σ_a (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	τ_a (MPa)	$\bar{\tau}$ (MPa)	s sur σ_a (MPa)	Nb épr.	ERP <i>pro1</i> (%)	ERP <i>pro2</i> (%)
36	Traction	558	0	-	-	16	35	-	-
37	Flex. Rot.	581	0	-	-	23	37	-	-2,1
38	Torsion	-	-	384	0	-	35	-	-7,8
39	Flex. Pl.	620	0	-	-	20	37	3,1	-1,1

TAB. 3.9 – Résultats d'essais sur éprouvettes lisses en acier 35CrMo4 trempé revenu. Erreur relative de Prévision (en %) de notre proposition issue de chaque méthode d'identification.

Les deux méthodes d'identification des paramètres du modèle ont été utilisées, l' ERP calculée avec la méthode basée sur les seules limites d'endurance est notée *pro1* celle avec l'estimateur de l'écart-type *pro2*. L'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane estimée pour l'essai de flexion plane est : $\sigma_{FP} \in [620 \pm 10]$ MPa. Cet intervalle est relativement étroit pour un écart-type estimé de 20 MPa. La figure 3.38 représente la probabilité de fissuration expérimentale (pointillés) et prévue (trait plein) par notre modèle en fonction de la contrainte normale appliquée.

Nous pouvons constater que notre proposition sous estime la dispersion expérimentale et de plus la prévision en flexion plane n'est pas dans l'intervalle de confiance à 95% malgré la très faible erreur relative de prévision (ERP *pro1* dans le tableau 3.9) de 3%. C'est pourquoi il nous a semblé nécessaire d'intégrer l'écart-type expérimental dans l'identification du modèle pour ce matériau.

Ainsi, à l'aide de la limite d'endurance en traction alternée symétrique $\sigma_{Trac}^D = 558$ MPa et de l'écart-type estimé $s_{Trac} = 16$ MPa nous obtenons les paramètres $m = 3,38$ et $W_u = 0,146$ MJ/m³. Cette identification nous permet de comparer les prévisions de

notre modèle aux résultats de torsion, flexion rotative et flexion plane (ERP pro2 dans le tableau 3.9).

Les prévisions de la torsion et de la flexion rotative sont alors de bonne qualité et de plus, la prévision pour la flexion plane est de meilleure qualité par cette méthode. Estimer l'intervalle de confiance à 0,95 sur la limite en flexion rotative devient maintenant nécessaire : $\sigma_{FR} \in [620 \pm 11\text{MPa}]$. La figure 3.39 montre la très bonne qualité des prévisions de notre modèle aussi bien sur la valeur médiane ($P_f = 0,5$) que sur la dispersion.

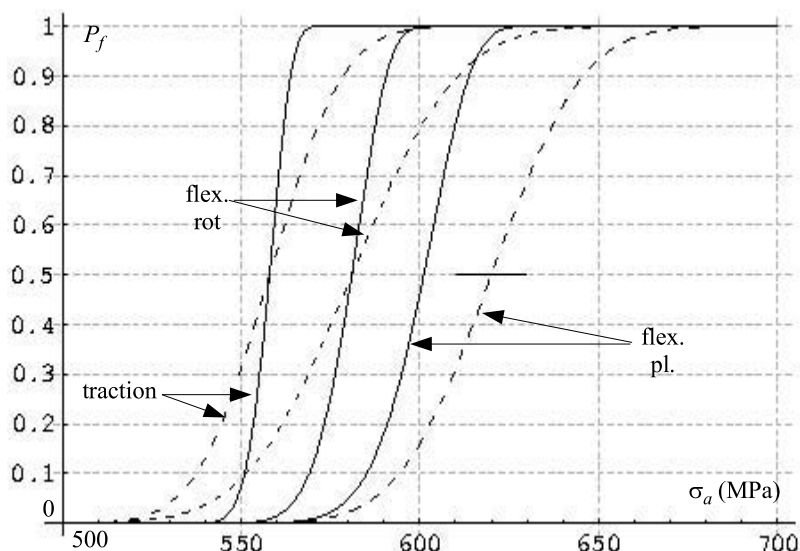


FIG. 3.38 – Probabilités de fissuration prévues par le modèle identifié avec les seules limites d'endurance (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) pour l'acier 35CrMo4 trempé revenu sur éprouvettes lisse cylindriques de révolution sollicitées en traction, flexion rotative et flexion plane.

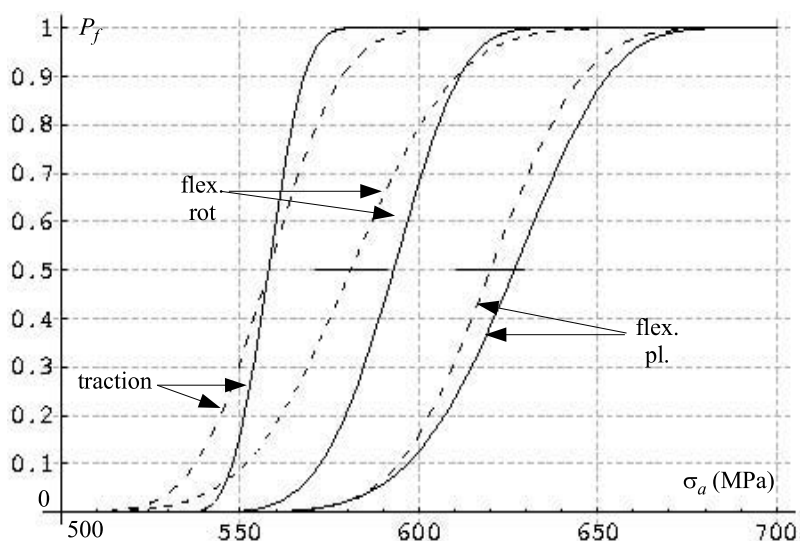


FIG. 3.39 – Probabilités de fissuration prévues par le modèle identifié avec l'estimateur de l'écart-type (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) pour des éprouvettes lisse cylindriques de révolution en acier 35CrMo4 trempé revenu.

3.7.6 Acier C18 recuit

Les caractéristiques mécaniques de l'acier C18 recuit en traction monotone quasi-statique sont rassemblées dans le tableau 3.10.

E (GPa)	ν	$R_{e0,2}$ (MPa)	R_m (MPa)	R_u (MPa)	A (%)
210	0,3	350	520	1520	24

TAB. 3.10 – Caractéristiques mécaniques statiques de l'acier C18 recuit [P196].

Les résultats d'essais sur l'acier C18 recuit proviennent de la thèse de Palin-Luc [P196]. Les éprouvettes utilisées sont des éprouvettes lisses ($k_t(flex) = 1,07$ et $k_t(tors) = 1,04$) cylindriques de révolution de diamètre 10 mm. Tous les essais ont été réalisés à 10^6 cycles. Chaque limite d'endurance a été déterminée par la méthode de l'escalier en utilisant une dizaine d'éprouvettes. Les éprouvettes de traction avaient un diamètre de 7,98 mm (même géométrie que pour les essais de traction sur le Ti-6Al-4V de la présente étude), les éprouvettes utilisées pour les autres sollicitations avaient toutes la même géométrie avec un diamètre de 10 mm en fond de tore. Le tableau 3.11 rassemble les conditions d'essais et les erreurs relatives de prévision de notre proposition.

L'identification des paramètres a été faite avec la technique basée sur les limites d'endurance.

N°	Sollicitations	σ_a (MPa)	$\bar{\sigma}$ (MPa)	τ_a (MPa)	$\bar{\tau}$ (MPa)	s (MPa)	ϕ (°)	Nb épr.	ERP <i>pro</i> (%)
	Traction	273	0	-	-	-	-	16	-
	Flex. Rotative	310	0	-	-	-	-	25	-
	Torsion	-	-	186	0	-	-	25	-
40	Flex. Pl.	332	0	-	-	-	-	25	-3,9
41	Flex pl+Tors	246	0	138	0	-	0	10	0
42	Flex pl+Tors	246	0	138	0	-	45	10	0
43	Flex pl+Tors	264	0	148	0	16	90	12	6,8

TAB. 3.11 – Résultats d'essais sur l'acier C18. Erreur relative de Prévision (en %) de notre proposition.

Les prévisions de la méthode proposée conduisent à des erreurs relatives nettement inférieures à 10% en valeur absolue. L'intervalle de confiance n'est estimable que dans le cas où l'écart-type expérimental a pu être estimé. Pour l'essai n°43, $R_\sigma = 1,78$, $\phi = 90^\circ$, l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane estimée est : $\sigma_{FP+Tor}^D \in [264 \pm 17\text{MPa}]$. La figure 3.40 représente les probabilités de fissuration expérimentale et prévue par notre modèle en fonction de la contrainte de flexion appliquée pour cet essai combiné.

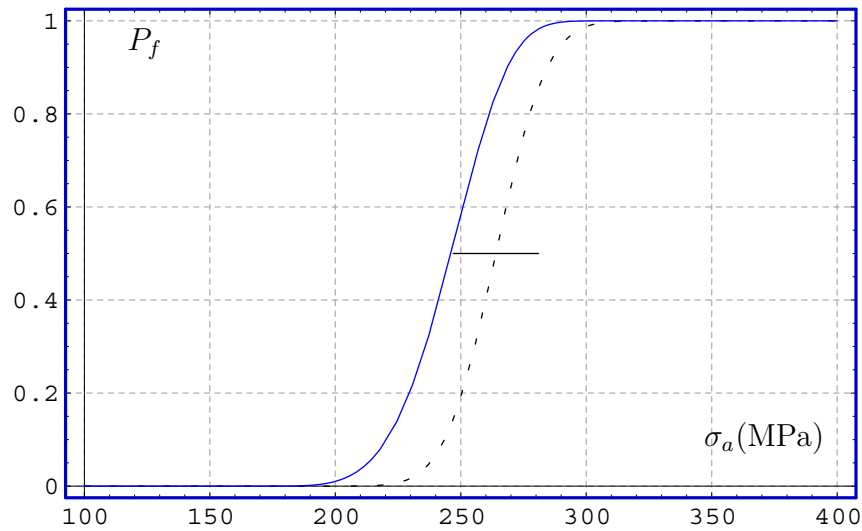


FIG. 3.40 – Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour l'acier C18 en flexion et torsion combinées hors phase ($\phi = 90^\circ$), $R_\sigma = -1$, $k_\sigma =$ pour des éprouvettes lisses (trait plein : prévisions, pointillés fins : distribution expérimentale) avec l'intervalle de confiance associé.

Les prévisions de notre proposition se situent à la limite inférieure de l'intervalle de confiance à 95%, ce qui est satisfaisant. De plus la dispersion prévue est très proche de la dispersion expérimentale.

3.8 Prévisions de courbes S-N probabilisées

Palin-Luc [P196] et Banvillet [Ban01] ont montré que le critère déterministe volumique pouvait être appliqué en endurance limitée au delà d'environ 80000 cycles et qu'il était possible de prévoir les courbes S-N (pour $P_f = 0,5$) correspondant à chaque type de chargement dans ce domaine (endurance limitée et endurance). Ces prévisions sont possibles à partir d'une courbe de Wöhler expérimentale médiane (50% de probabilité de fissuration) quelconque prise comme référence. A l'aide du modèle probabiliste, les courbes P-S-N peuvent être prévues pour n'importe quelle probabilité de fissuration. Pour un chargement et une géométrie quelconque donnés, la probabilité de fissuration est définie comme une fonction du travail de déformation fourni équivalent dépendant du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(x, y, z)$, du nombre de cycles N et de la géométrie de l'éprouvette.

$$P_f = 1 - f(W_{feq, soll}(\underline{\sigma}(x, y, z), N), \text{géométrie}) \Leftrightarrow h_1(P_f, W_{feq, soll}(\underline{\sigma}(x, y, z), N), \text{géométrie}) = 0 \quad (3.116)$$

La dispersion de la limite de fatigue (pour N fixé) est prévue par le modèle ; nous faisons l'hypothèse que cette dispersion est la même quel que soit le nombre de cycles dans le domaine de l'endurance et de l'endurance limitée, hypothèse déjà faite par Bastenaire [Bas60].

Il faut choisir un état de contrainte uniaxial de référence sur éprouvette. Par exemple,

en flexion rotative ($R_\sigma = -1$), la probabilité de fissuration avant N cycles pour cet état de contraintes s'écrit suivant la relation (3.117).

$$P_{f,FR,ref}(V) = 1 - \exp \left[- \int \int \int_V \frac{\langle W_{feq,FR}(\underline{\sigma}(x, y, z), N) - W_f^* \rangle^m}{\varphi_u} dV \right] \quad (3.117)$$

ou

$$h_2(P_f, W_{feq,FR}(\underline{\sigma}(x, y, z), N), \text{géom. réf}) = 0 \quad (3.118)$$

Connaissant la courbe expérimentale S-N de référence pour ce chargement, pour cette géométrie d'éprouvette et pour une probabilité de fissuration fixée (en pratique, $P_f = 0,5$), l'amplitude de contrainte peut être décrite comme une fonction du nombre de cycles N sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma_{ref}}} = f(P_f = 0,5; N; \text{géom. réf}) \quad (3.119)$$

En posant $P_{f,FR} = 0,5$ et $P_{f,Trac} = 0,5$, il vient :

$$h_1(W_{feq,soll}(\underline{\sigma}, N), \text{géom.}) = h_2(W_{feq,FR}(\underline{\underline{\sigma_{ref}}}(N), \text{géom. réf})) \quad (3.120)$$

Le travail de déformation fourni équivalent pour la sollicitation considérée $W_{feq,soll}$ peut s'exprimer en fonction du nombre de cycles, il est fonction du champ du tenseur des contraintes pour un rapport de charge R_σ constant, un déphasage et un rapport d'amplitudes de contraintes fixés ($k_\sigma = \frac{\sigma_a}{\tau_a}$ en flexion et torsion combinées par exemple).

$$W_{feq,soll}(N, P_f = 0,5) = g \left(P_f = 0,5, W_{feq,FR}(\underline{\underline{\sigma_{ref}}}(N, x, y, z), \text{géométrie, géom. réf}) \right) \quad (3.121)$$

Les contraintes correspondantes sont déduites de ce travail de déformation et la courbe P=0,5-S-N peut être tracée. Les courbes d'isoprobabilités sont ensuite déduites en estimant la limite de fatigue selon la durée de vie pour les probabilités souhaitées à l'aide de la relation (3.116).

Illustration en traction de la prévision des courbes P-S-N

Notre méthode permet de prévoir la probabilité de fissuration avant N cycles fixés (en endurance, 10^6 à 10^7 cycles selon la référence expérimentale choisie). Pour un chargement de traction ($R_\sigma = -1$), cette probabilité de fissuration s'écrit :

$$P_{f,Trac}(N) = 1 - \exp \left[- \frac{V_{trac}^*}{\varphi_u} \left(\frac{\sigma_{a,Trac}^2}{E} - W_f^* \right)^m \right] \quad (3.122)$$

ou en exprimant la contrainte en fonction de la probabilité de fissuration :

$$\sigma_{a,Trac}(N, P_f) = \sqrt{E \left[W_f^* + \left(- \frac{\varphi_u \ln(1 - P_f)}{V_{Trac}^*} \right)^{\frac{1}{m}} \right]} \quad (3.123)$$

La dispersion est prévue par le modèle, nous faisons l'hypothèse que cette dispersion est la même quel que soit le nombre de cycles dans le domaine de l'endurance limitée et de l'endurance, hypothèse déjà faite par Bastenaire [Bas60].

La courbe S-N expérimentale choisie comme référence est la courbe médiane ($P_f = 0,5$) décrite, par exemple, par un modèle linéaire pour un chargement de flexion rotative ($R_\sigma = -1$) :

$$\sigma_{a,ref,0.5}(N) = \frac{A}{N} + \sigma^D \quad (3.124)$$

avec $A = 10785$ kilo-cycles-MPa et $\sigma^D = 592$ MPa pour le Ti-6Al-4V (par exemple). Le travail de déformation fourni au cours d'un cycle de chargement à la surface de l'éprouvette s'écrit :

$$W_{feq,FR} = \frac{\sigma_{a,FR}^2}{E} \quad (3.125)$$

A l'endurance, pour un nombre de cycles N fixé de l'ordre de 10^6 à 10^7 cycles (asymptote de la courbe S-N), la probabilité de fissuration correspondante s'écrit :

$$P_{f,FR} = 1 - \exp \left[- \frac{V_{FR}^* E}{\varphi_u (\sigma_{a,FR})^2 (m+1)} \left(\frac{(\sigma_{a,FR})^2}{E} - W_f^* \right)^{m+1} \right] \quad (3.126)$$

En posant $P_{f,FR} = 0,5$ et $P_{f,Trac} = 0,5$, il vient :

$$V_{trac}^* \left(\frac{\sigma_{a,Trac}^2}{E} - W_f^* \right)^m = \frac{V_{FR}^* E}{\sigma_{a,ref,0.5}(N)^2 (m+1)} \left(\frac{\sigma_{a,ref,0.5}(N)^2}{E} - W_f^* \right)^{m+1} \quad (3.127)$$

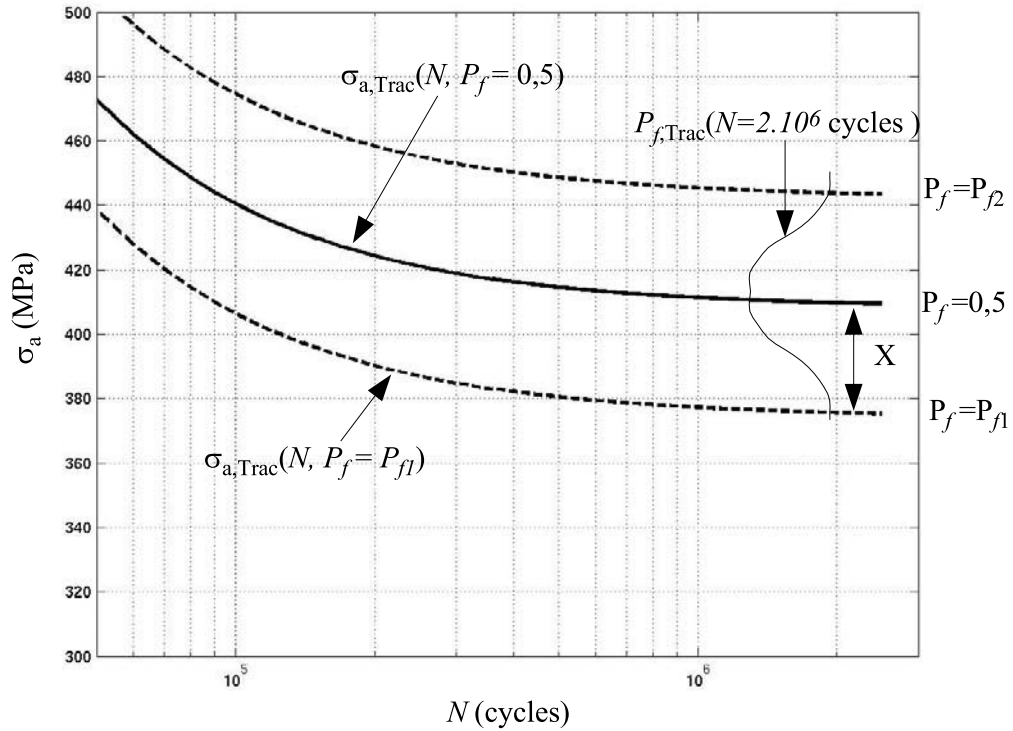
La limite de fatigue en traction avant N cycles pour $P_f = 0,5$ peut alors s'exprimer de façon analytique suivant la relation (3.128).

$$\sigma_{a,Trac}^2(N, P_f = 0,5) = E \left[\left\{ \left[\frac{V_{FR}^* E}{V_{Trac}^* (1+m) \sigma_{a,ref,0.5}(N)^2} \right] \left[\frac{\sigma_{a,ref,0.5}(N)^2}{E} - W_f^* \right]^{m+1} \right\}^{\frac{1}{m}} + W_f^* \right] \quad (3.128)$$

où $V_{trac}^* = V_{trac} = \pi L R^2$ et $V_{FR}^* = \pi L R^2 \left(1 - \frac{(\sigma^*)^2}{\sigma_{a,ref}^2} \right)$, en supposant que la contrainte est toujours supérieure au seuil : $\sigma > \sigma^*$ sinon la probabilité de fissuration est nulle. En remplaçant les volumes d'influence par leur définition et en simplifiant l'équation (3.128), la contrainte prend la forme :

$$\sigma_{a,Trac}(N, P_f = 0,5) = \sqrt[3]{ \left[\frac{V_{FR} (1 - (\sigma^*/\sigma_{a,ref,0.5}(N))^2)}{V_{Trac} (1+m) \sigma_{a,ref,0.5}(N)^2} \right]^{\frac{1}{m}} [\sigma_{a,ref,0.5}(N)^2 - \sigma^{*2}]^{\frac{m+1}{m}} + \sigma^{*2} } \quad (3.129)$$

Les courbes d'isoprobabilités sont déduites de 3.123 comme illustré sur la figure 3.41.


 FIG. 3.41 – Illustration de la prévision des courbes P-S-N en traction ($R_\sigma = -1$)

Une translation en contrainte X de la courbe S-N d'équation $\sigma_{a,Trac}(N, P_f = 0,5)$ est effectuée en posant :

$$X = \sigma_{a,Trac}(N = 2.10^6, P_f = 0,5) - \sigma_{a,Trac}(N = 2.10^6, P_f = P_{f1}) \quad (3.130)$$

Pour une probabilité P_f et un nombre de cycles N fixés, la courbe P-S-N peut s'écrire :

$$\sigma_{a,Trac}(N, P_f) = \sigma_{a,Trac}(N, P_f = 0,5) - X \quad (3.131)$$

Les courbes P-S-N en traction prévues par le modèle et expérimentales (estimées à l'aide du logiciel ESOPE) sont représentées sur la figure 3.42. Les prévisions sont en bon accord avec les résultats expérimentaux même si les prévisions sont conservatives. L'erreur relative de prévision par rapport à la limite d'endurance estimée par ESOPE à 2.10^6 cycles est de 4%.

Pour les autres chargements et notamment en torsion alternée symétrique ($R_\sigma = -1$), il n'est pas possible d'écrire de façon analytique l'amplitude de cisaillement, τ_a , en fonction du nombre de cycles, N , comme dans le cas de la traction. Ces deux quantités sont liées

par l'équation (3.132).

$$\frac{V_{Tors}^*(\tau_a)E}{2\tau_a^2 F(dT_{uniax})(1+\nu)} \left[\frac{2\tau_a^2 F(dT_{uniax})(1+\nu)}{E} - W_f^* \right]^{m+1} = \frac{V_{FR}^*(\sigma_{a,ref,0.5}(N))E}{\sigma_{a,ref,0.5}^2(N)} \left[\frac{\sigma_{a,ref,0.5}^2}{E} - W_f^* \right]^{m+1} \quad (3.132)$$

Avec $V_{Tors}^*(\tau) = \pi LR^2 \left(1 - \frac{(\tau^*)^2}{2(1+\nu)\tau^2} \right)$ et $\tau^* = \frac{\sigma^*}{\sqrt{2(1+\nu)F(dT_{uniax}; \beta)}}$. La résolution numérique de cette équation permet de tracer l'évolution de l'amplitude du cisaillement en fonction du nombre de cycles comme représentée sur la figure 3.43. Les courbes prévues encadrent de façon satisfaisante les résultats d'essais. L'erreur relative de prévision par rapport à la limite d'endurance estimée par ESOPE à 2.10^6 cycles est de 5%. Le même type de résolution permet de tracer les courbes P-S-N en flexion plane (fig 3.44).

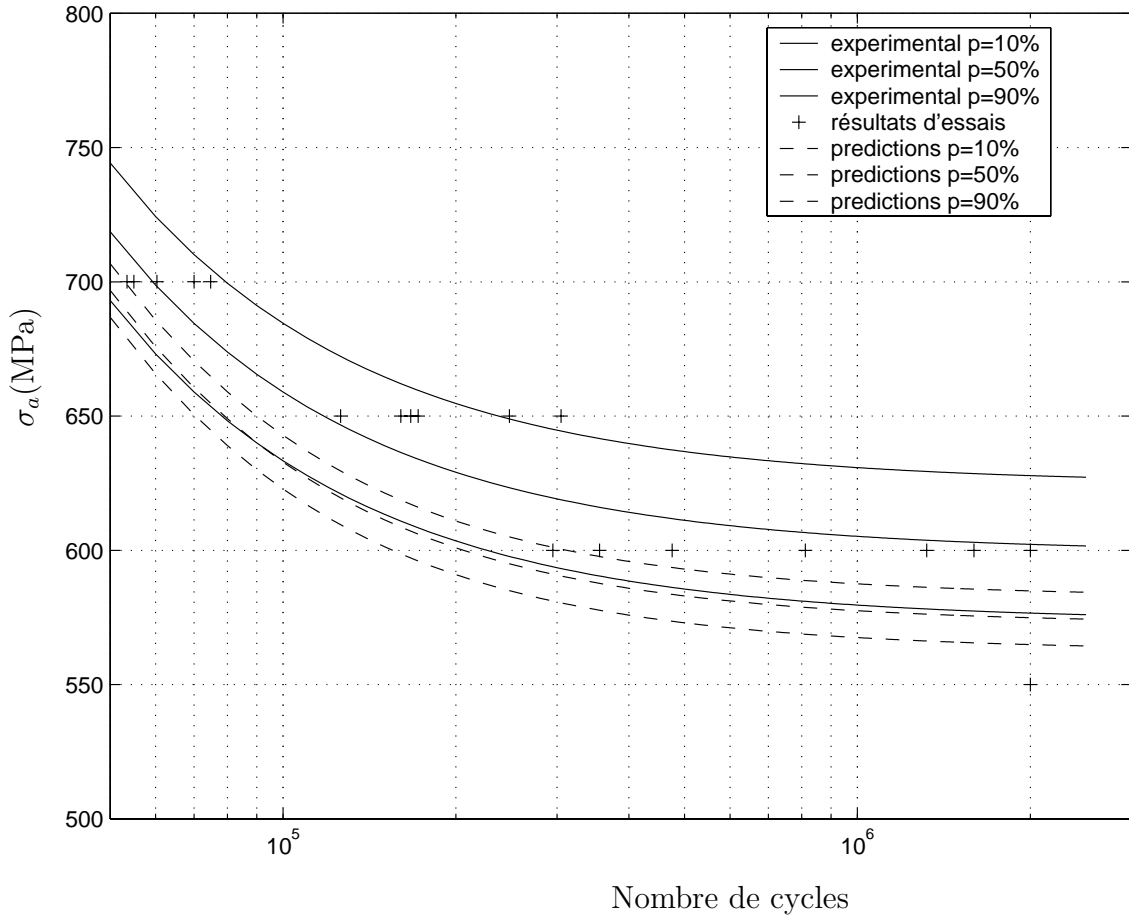


FIG. 3.42 – Courbes S-N prévues et expérimentales pour $P_f = 10\%$, 50% et 90% en traction alternée symétrique sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V.

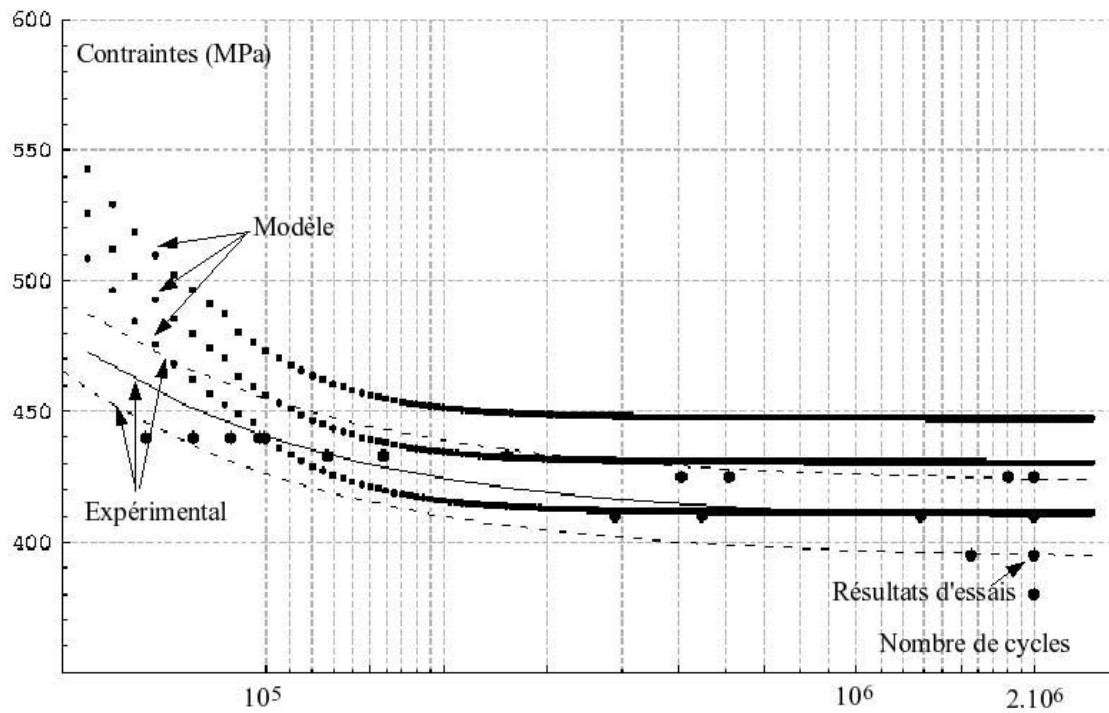


FIG. 3.43 – Courbes S-N prévues et expérimentales à 10%, 50% et 90% en torsion alternée symétrique sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V.

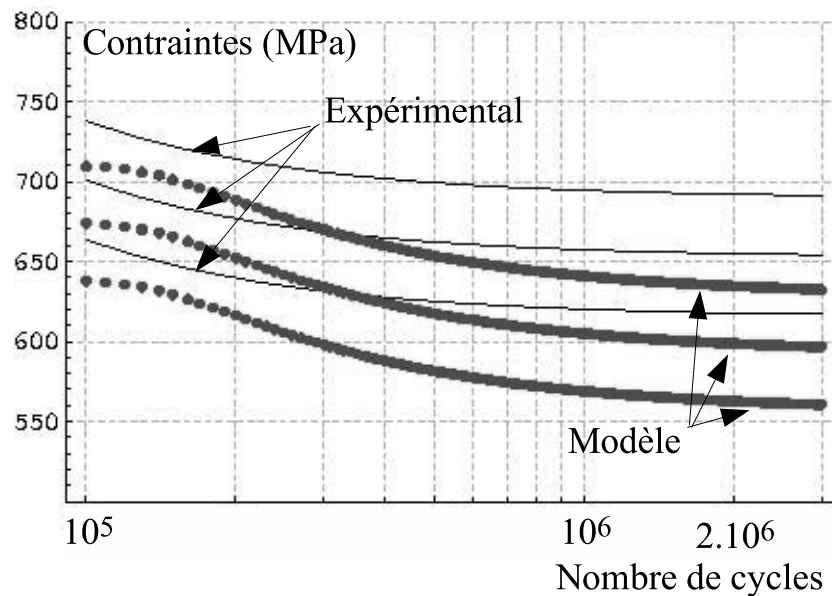


FIG. 3.44 – Courbes S-N prévues et expérimentales à 10%, 50% et 90% en flexion plane alternée symétrique sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouveau critère probabiliste de fatigue à grande durée de vie a été présenté. Ce critère est basé sur l'approche énergétique et volumique du LAMEFIP,

combinée au formalisme mathématique de Weibull. Cette proposition permet de décrire la dispersion de la résistance à la fatigue de différents matériaux alors qu'un critère déterministe classique ne fournit qu'une réponse binaire. Les estimateurs des écarts-types expérimentaux sont intégrés dans l'identification des paramètres, la réalité expérimentale est ainsi mieux décrite. La dispersion prévue par le modèle est liée aux estimateurs des écarts-types expérimentaux. Le modèle distingue les chargements et prévoit de plus l'effet d'échelle. Les résultats d'essais sont présentés, avec l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane, dès que l'estimation est possible, ce qui permet de mieux juger la validité de ces résultats (la prise en compte des intervalles de confiance est assez rare dans la littérature ce qui est regrettable). Le critère s'applique au domaine de l'endurance limitée et a été validé sur des résultats d'essais. Les prévisions du modèle proposé sont en bon accord avec l'expérience et sont bien souvent meilleures que les prévisions des critères ponctuels déterministes. Notre proposition permet aussi de prévoir les courbes P-S-N à partir d'une seule courbe S-N expérimentale. Cette proposition conserve les avantages de la précédente formulation du critère du LAMEFIP à savoir :

- Le chargement moyen est pris en compte de manière intrinsèque sans utiliser de paramètres ou données expérimentales supplémentaires.
- Les chargements uniaxiaux de traction, flexion plane et flexion rotative (solicitations générant le même état de contrainte au point considéré) sont différenciés grâce à l'approche volumique utilisée. Le critère est donc sensible à la distribution volumique des contraintes et des déformations dans la pièce.
- La résistance à la fatigue prévue par le critère dépend du matériau : les matériaux sont distingués selon leur sensibilité à la triaxialité des contraintes.

Toutefois, il nous faut signaler certaines limitations et insuffisances :

- L'impossibilité d'intégrer l'écart-type expérimental dans l'identification des paramètres pour les matériaux présentant une faible dispersion peut sembler problématique. Mais dans la plupart des cas l'estimation de la dispersion issue de l'identification à l'aide des seules limites d'endurance permet de décrire la dispersion de façon tout à fait satisfaisante.
- Considérer le seuil σ^* comme un paramètre déterministe est sans doute assez peu réaliste, il faudrait décrire ce paramètre de façon probabiliste et le rapprocher des distributions de populations de défauts présents dans le matériau.
- L'effet bénéfique, sur la résistance à la fatigue, d'une contrainte normale négative n'est pas prévu.
- Une étude de sensibilité des résultats de la méthode aux paramètres σ^* et β permettrait peut-être d'expliquer le non conservatisme ("relatif" car faible) de certains résultats.

Chapitre 4

Post-processeur orienté objet de calcul en fatigue multiaxiale

Préambule

Le travail de programmation pour implémenter les concepts mécaniques présentés a été réalisé en parallèle par M. Jean-Luc Charles, maître de conférences co-encadrant de cette étude, possédant une expérience industrielle en conception orienté-objet et en programmation C++.

4.1 Intérêts et enjeux

Appliquer un critère de fatigue multiaxiale à une pièce industrielle n'est généralement pas possible de façon analytique. Dans la plupart des cas, un calcul numérique, souvent conduit en deux étapes successives, est nécessaire :

1. calcul par éléments finis des champs tensoriels de contraintes et de déformations (en tous les noeuds et points d'intégration du maillage).
2. application du critère de fatigue sous la forme d'un post-traitement utilisant les résultats de l'étape précédente.

Une première version de programme de calcul en langage Fortran a été développée au LAMEFIP par Palin-Luc [PLLB98]. Une version orientée objet de programme de calcul [CDPLD01] du critère de fatigue énergétique et volumique du laboratoire (limité aux chargements sinusoïdaux d'amplitude constante) a ensuite été implémentée (version de Palin-Luc [P196]). Cette version constitue la base d'un travail évolutif.

La programmation orienté objet de critère de fatigue est un travail conduit au LAMEFIP qui déborde du thème de la présente étude, mais qui s'appuie dessus pour extraire les concepts mécaniques qui sous-tendent les classes et pour valider les développements. La nouvelle version utilisant la proposition de Banvillet [BPLL03, Ban01] a été développée dans le cadre de ce travail de thèse. Outre la possibilité de prévoir la résistance à la fatigue multiaxiale d'une pièce à géométrie complexe avec un critère de fatigue prenant

en compte les distributions volumiques de contraintes et de déformations, l'autre objectif est de finaliser la conception et la mise en oeuvre d'un environnement de développement orienté objet dont les grandes lignes peuvent être résumées comme suit :

- Interfaçage modulaire du programme en entrée/sortie avec des codes industriels de calcul par éléments finis (ZéBuLoN, ANSYS, IDEAS, ...)
- Conception et implémentation d'une bibliothèque de classes permettant de manipuler des objets informatiques directement liés aux phénomènes physiques et à l'analyse des problèmes mécaniques abordés (tenseurs de contraintes et de déformations, éléments finis...)
- Validation du choix d'une bibliothèque de classes pour la résolution des problèmes numériques.

Dans le cadre de ce travail et par manque de temps, les développements envisagés sont limités à la version déterministe du critère volumique du LAMEFIP.

4.2 Conception orienté objet et architecture retenue

L'objectif est de développer un environnement de programmation orienté objet (atelier de développement) capable d'offrir un catalogue de classes utiles au mécanicien pour résoudre des problèmes de calcul en fatigue sur des pièces mécaniques. Le choix de l'orienté objet résulte de la confrontation de plusieurs années d'expérience de programmation au LAMEFIP :

- l'expérience de la difficulté de construire un environnement logiciel pérenne au fil des années et des successions d'étudiants et de stagiaires chercheurs, lorsque cet environnement n'est constitué que de 'bouts' de programmes (Fortran, Pascal, C) complètement dissociés d'un effort de conception ;
- l'expérience de la capacité de la conception orienté objet à fournir un niveau de modélisation permettant de manipuler les abstractions de la mécanique (tenseur des contraintes, modèle de loi de comportement du matériau, maillage, fonctions d'interpolation) ;
- l'expérience de la capacité des langages orientés objet (dans notre cas, le C++) à supporter le développement incrémental, la ré-utilisation, et la modularité.

L'étape de conception de l'environnement orienté objet a été menée le plus complètement possible, en ayant présent à l'esprit que c'est le prix à payer pour garantir la pérennité et la qualité d'un projet orienté objet¹.

Les principaux constituants du développement de ce environnement sont :

1. Une conception conforme à la méthodologie UML (Unified Modelling Language) [BRJ03].

¹Remercions ici MM. Jean-Luc Charles, F. Dau et T. Palin-Luc ayant participé aux réunions de travail ayant permis de définir les classes.

2. Une bibliothèque de classes liées aux éléments finis : il s'agit d'un ensemble de classes originales permettant d'implémenter les concepts du calcul par éléments finis.
3. Une bibliothèque de classes dédiées à l'interfaçage avec des logiciels de calcul par éléments finis (ZéBuLoN dans l'immédiat, et au besoin Ansys, Ideas, Castem, ...).
4. Une bibliothèque de classes dédiées aux calculs en fatigue (critère volumique du LAMEFIP, critères ponctuels : Crossland, Dang Van, ...).
5. Une bibliothèque de classes de calcul numérique (principalement du calcul matriciel), fournies pour le projet Blitz++ (disponible en code source sur Internet²).

Le logiciel de calcul en fatigue est prévu pour être interfacé avec un code de calcul éléments finis qui fournit comme résultats les tenseurs des contraintes et des déformations en différents points de la structures étudiée (noeuds des éléments, points d'intégration³ des éléments). Comme illustrée sur la figure 4.1, une interface permet de traiter les résultats générés par le code de calcul par éléments finis. L'architecture du programme permet de dérouler un calcul selon l'ordonnancement suivant :

1. Récupération des données d'un calcul par éléments finis grâce à une interface d'entrées/sorties. Actuellement le programme possède une interface d'entrées/sorties avec le code de calcul ZéBuLoN (code de calcul développé au Centre des Matériaux de l'école des Mines de Paris). Les interfaces d'entrées/sorties sont des modules indépendants, il est possible d'envisager de construire d'autres interfaces en fonction des besoins (codes Ansys, Ideas, Castem. . .).
2. Une fois les données du calcul éléments finis lues, le programme instancie tous les objets (noeuds, éléments finis, maillage, champs tensoriels des contraintes, des déformations. . .) permettant de construire un environnement identique à celui obtenu à la fin du calcul par éléments finis.
3. Le critère de fatigue peut alors être appliqué en utilisant les classes spécifiques.
4. Le résultat est renvoyé au code ZéBuLoN (ou autre code éléments finis) sous la forme d'un fichier contenant les résultats spécifiques à cette phase de calcul.

Le post-processeur nécessite deux fichiers spécifiques contenant des paramètres utiles au calcul et les limites de fatigue du matériau. Pour un calcul élastique, le nombre de pas de temps à considérer pour la discrétisation du cycle de chargement est mentionné dans le fichier "paramètre calcul". Pour un calcul élastoplastique, les numéros des cartes de résultat de début et de fin du cycle de chargement stabilisé sont indiqués dans ce même fichier⁴.

²<http://www.oonumerics.org/blitz>

³La technique d'intégration utilisée dans ZéBuLoN est la méthode de gauss.

⁴Le modèle de calcul élastoplastique n'a pu être testé dans le cadre de ce travail par manque de temps.

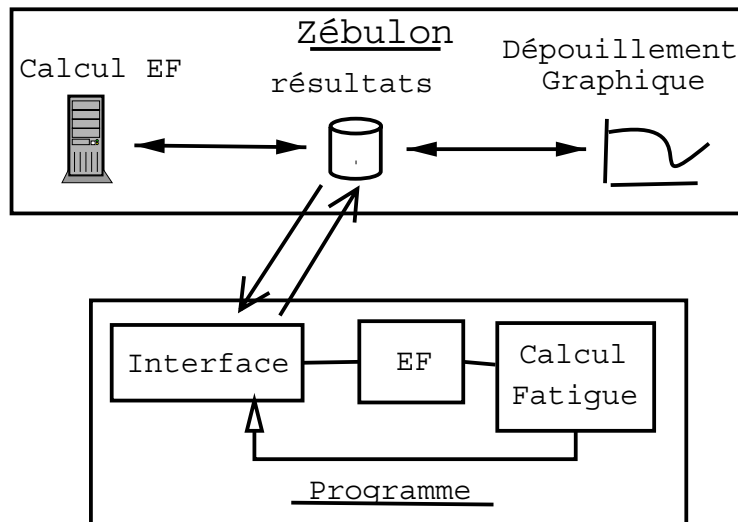


FIG. 4.1 – Architecture du programme de calcul.

4.3 L’environnement de développement

L’environnement de développement réalisé permet de programmer “facilement” de nouveaux critères, avec l’avantage de la présence des différentes classes qui autorisent un développement plus proche des préoccupations du mécanicien.

4.3.1 Le modèle de classes à travers le critère déterministe et volumique du LAMEFIP

Différentes bibliothèques de classes vont être utilisées, chacune représente un élément déterminant dans la conception du programme. Nous détaillerons dans ce document uniquement la bibliothèque “Fatigue”.

4.3.1.1 La bibliothèque “Eléments Finis”

Il s’agit d’un ensemble de classes originales permettant d’implémenter les concepts du calcul par éléments finis, illustré sur la figure 4.2. Les principales notations graphiques UML utilisées sont décrites sur la figure 4.3. Le concept physique des champs (fonctions de l’espace) scalaires, vectoriels et tensoriels est modélisé par des classes ad hoc, de même que les concepts de champs dynamiques (dépendant du temps) scalaires, vectoriels et tensoriels.

4.3.1.2 La bibliothèque “Numérique”

Une bibliothèque de classes de calcul numérique (principalement du calcul matriciel) est aussi nécessaire, ce sont les classes de la bibliothèque Blitz++. Cette bibliothèque per-

met entre autre le stockage matriciel avec allocation de mémoire dynamique. L'inversion d'une matrice est un exemple de calcul effectué par ces classes.⁵

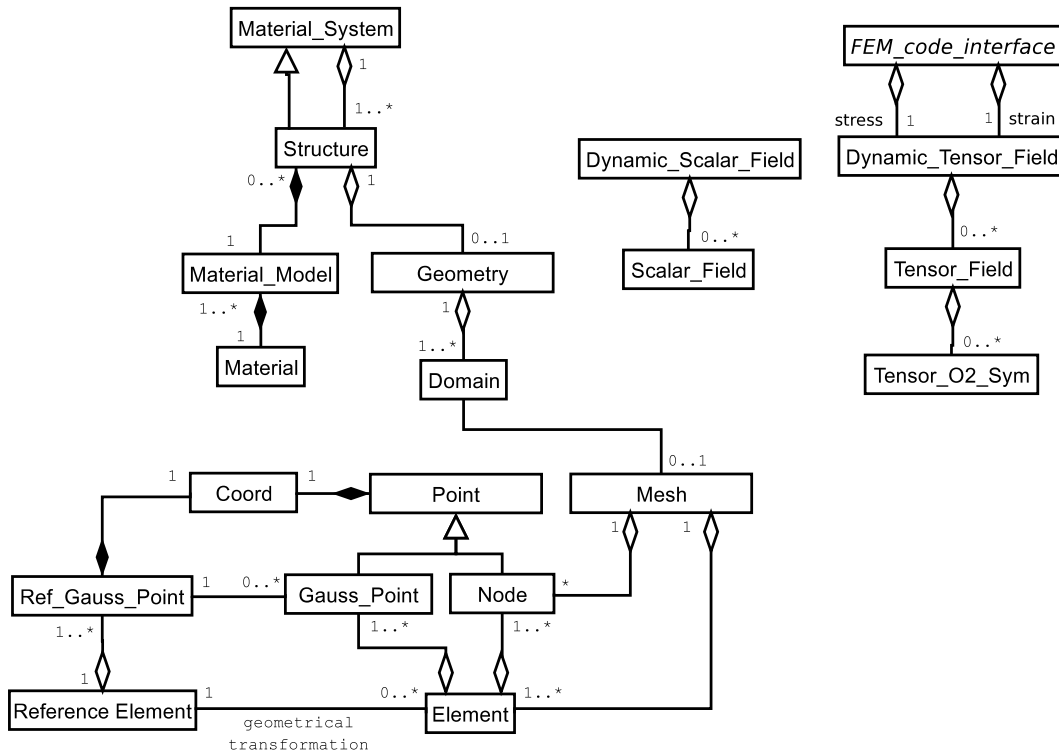
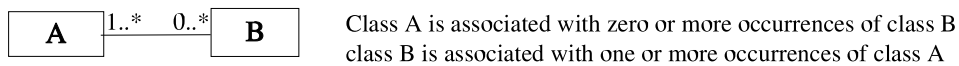
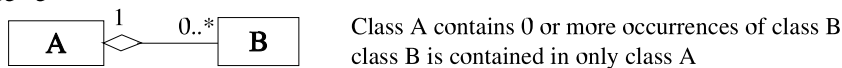


FIG. 4.2 – Diagramme de classes “Eléments Finis”.

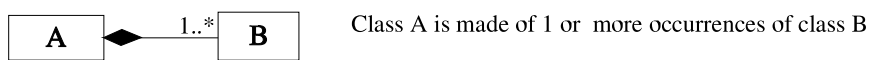
Association : structural relation between two classes



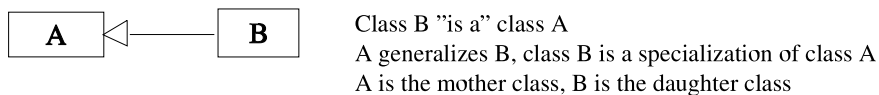
Aggregation : one class contains others



Composition : one class is “made of” others



Generalization : one class is derived from another



Dependence : one class depends on another



Association-class : the association between two classes A and B gives rise to another class C

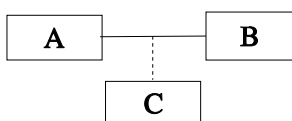


FIG. 4.3 – Notations graphiques UML.

⁵<http://www.oonumerics.org/blitz>

4.3.1.3 La bibliothèque “Fatigue”

Cette bibliothèque regroupe les classes dédiées aux calculs en fatigue (critère volumique du LAMEFIP, critères ponctuels : Crossland, Dang Van, ...). Une illustration du modèle de classes utilisé est présentée sur la figure (4.4). Nous présentons maintenant les principales classes de cette bibliothèque.

La classe de base abstraite⁶ **Fatigue_Criterion** possède un lien de cardinalité 1..n avec la classe structure : un calcul de fatigue peut être mené sur une ou plusieurs structures d’un système matériel. Chaque occurrence d’une relation est associée à une occurrence de la classe **Crack_Node_List**, qui contient la liste des noeuds fissurés.

La classe **Fatigue_Criterion** possède des méthodes virtuelles pures qui définissent le “contrat” à remplir par toute classe dérivée destinée à implémenter un critère de fatigue . Elle se dérive en deux classes abstraites qui fournissent les prototypes pour les critères de fatigue ponctuels (Dang Van, Crossland,...) ou volumiques (critère du LAMEFIP_Wa⁷, LAMEFIP_Wf⁸, ...).

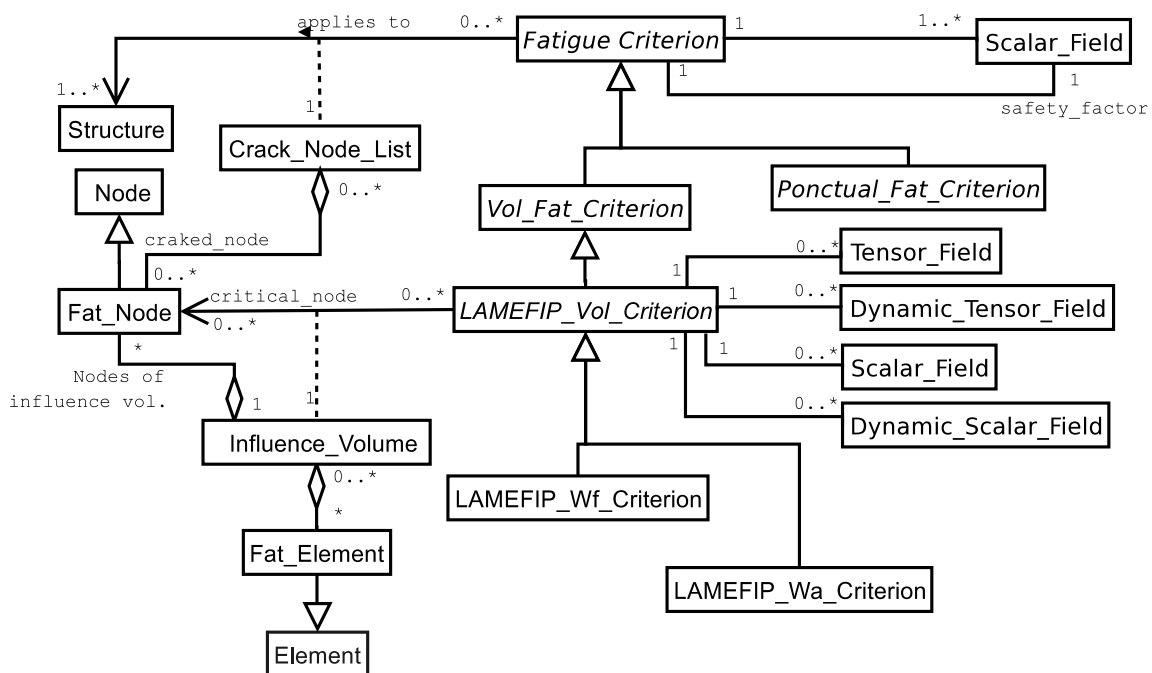


FIG. 4.4 – Modèle de classes “Fatigue”.

Classe Crossland_criterion : Cette classe (figure 4.4) dérive de la classe **Fatigue_Criterion**.

Le critère de Crossland a été implémenté dans le post-processeur dans sa version intrinsèque faisant intervenir le tenseur variation des contraintes (voir chapitre 1). En se servant des classes de la bibliothèque “Fatigue” et donc en donnant un aspect “mécanique” à la

⁶une classe abstraite contient des méthodes virtuelles pures et sert uniquement de modèle, elle ne peut pas être instanciée : seules les classes dérivées donnent l’implémentation des méthodes virtuelles.

⁷Ancienne formulation limitée aux chargements alternés symétriques [PLL98]

⁸Formulation en travail fourni [BPLL03]

programmation (par exemple manipulation de tenseurs et non de tableaux), cette implémentation peut être effectuée par un utilisateur connaissant seulement les bases de la programmation C++.

Classe LAMEFIP_Vol_Criterion (Critère Volumique LAMEFIP) : Cette classe de base donne la modélisation du critère volumique du LAMEFIP. Ce critère détermine dans la structure étudiée 0 ou n noeuds potentiellement critiques, encore appelés noeuds “fatigables” (Classe **Fat_Node**). A chaque occurrence d’une relation entre le critère volumique et un noeud critique correspond un volume d’influence (d’une instance de la classe **Influence_Volume**). C’est donc la classe LAMEFIP_Vol_Criterion qui construit les volumes d’influence correspondant aux différents noeuds potentiellement critiques trouvés. La localisation des noeuds critiques et la construction des volumes d’influence correspondants sont présentées ci-après.

Localisation des noeuds critiques Les noeuds de la structure étudiés qui sont potentiellement critiques vis-à-vis de l’amorçage d’une fissure de fatigue C_i sont ceux où W_f (densité volumique du travail de déformation élastique fourni) admet un maximum local, tels que $W_f(C_i) \geq W_f^*(C_i)$. L’algorithme permettant cette localisation pour chaque noeud du maillage est présenté en Annexe 4.

La comparaison des travaux fournis entre les noeuds utilise un seuil ϵ , défini par la relation (4.1)

$$\frac{W_f(N_i)}{W_f(N_j)} > 1 + \epsilon \quad (4.1)$$

afin d’éviter les erreurs liées à la précision numérique. Ce seuil ϵ a été fixé à 10^{-3} .

construction du volume d’influence La construction du volume d’influence autour d’un noeud critique est illustrée en 2D sur la figure 4.5 (dans le programme la construction se fait en 3D si le problème éléments finis est 3D).

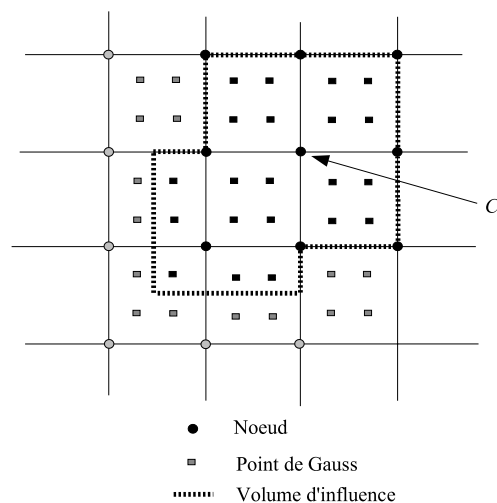


FIG. 4.5 – Volume d’influence (illustré en 2D) autour d’un noeud potentiellement critique.

L'algorithme correspondant est présenté figure 4.6. Les éléments contenant le noeud

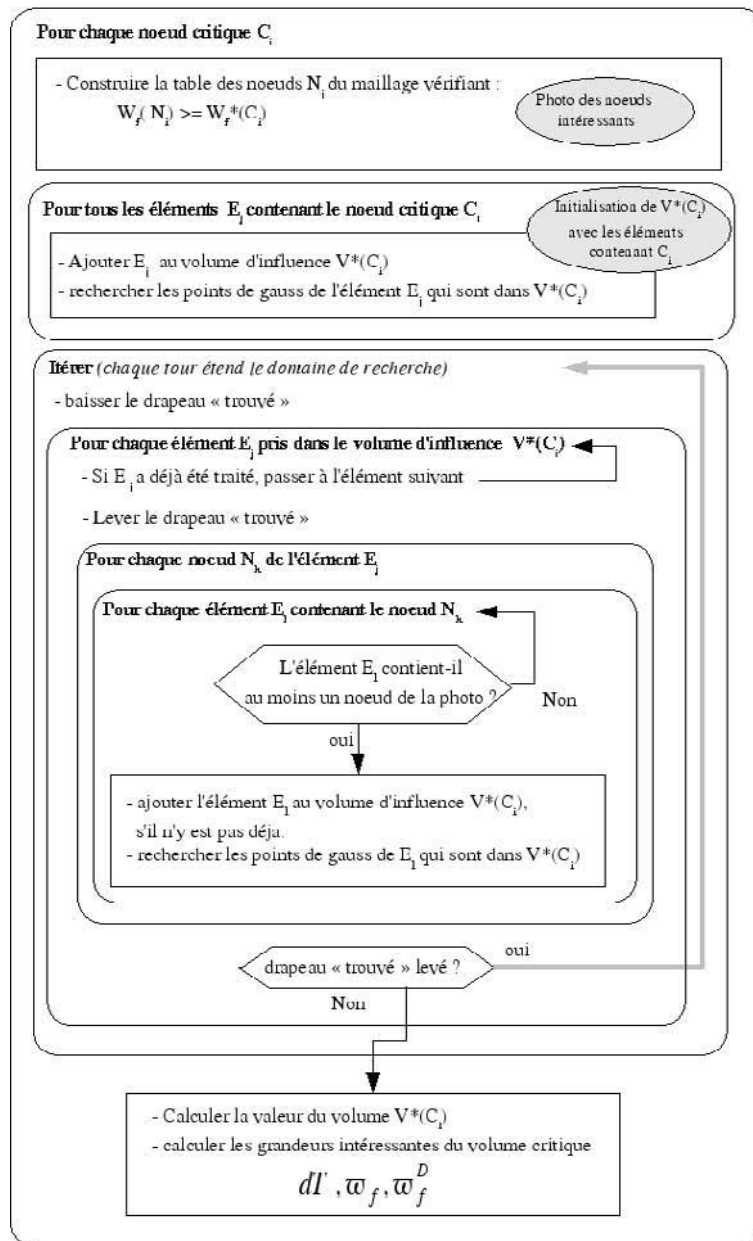


FIG. 4.6 – Algorithme de construction des volumes d'influence.

critique forment ce que l'on peut appeler le volume "germe". Puis de façon itérative, ce volume est étendu aux éléments voisins si ceux-ci présentent des noeuds ou des points de Gauss dépassant la valeur seuil $W_f^*(C_i)$. Un volume d'influence peut ainsi contenir des éléments partiellement critiques, avec seulement certains noeuds et points de Gauss critiques. Ce concept peut poser problème dans le cas de volumes d'influence particuliers comme par exemple quand le volume est très localisé et ne contient que quelques éléments.

Pour être significatif, nous faisons l'hypothèse⁹ que le volume d'influence doit contenir au moins 20 éléments. Ainsi dans le cas d'un volume d'influence très localisé, l'utilisateur devra affiner son maillage dans la zone critique après avoir réalisé un premier

⁹validée par des tests numériques sur différents maillage 2D et 3D.

calcul. Le phénomène mécanique n'en sera que mieux décrit, cette hypothèse semble aller dans le sens habituel d'une démarche de calculs par éléments finis où il faut s'assurer de la convergence du maillage utilisé. Même en affinant très fortement le maillage, il peut arriver que les éléments partiellement critiques aient un rôle non négligeable dans le volume d'influence et donc dans le calcul du critère. Comme dans le cas d'un chargement de torsion sur éprouvette lisse qui générerait un volume d'influence en couronne mince. Pour juger de l'influence des éléments partiellement critiques dans les résultats du critère, trois types de calculs du volume d'influence ont été implémentés :

1. seuls les éléments totalement critiques sont intégrés dans le volume d'influence,
2. les éléments totalement critiques et les éléments partiellement critiques composent le volume (méthode initiale),
3. les éléments partiellement critiques sont intégrés comme totalement critiques et ajoutés.

Ces trois méthodes de calcul du volume d'influence sont illustrées par la figure 4.7. Elles permettent de définir des limites inter et intra éléments.

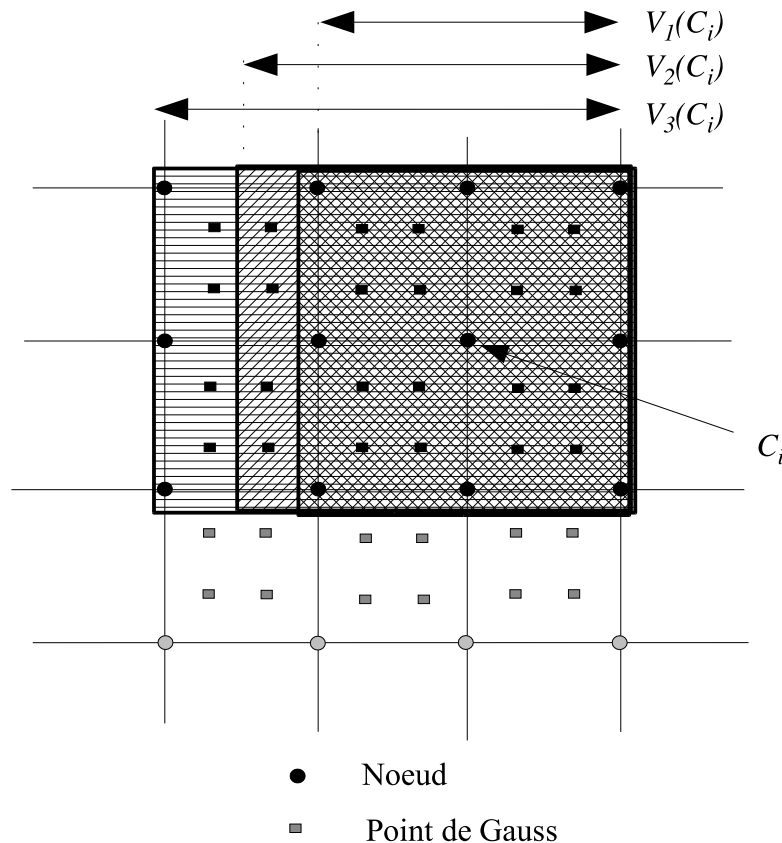


FIG. 4.7 – Illustrations des méthodes de calcul du volume d'influence.

Ainsi la méthode initiale est encadrée ($V_1(C_i) < V_2(C_i) < V_3(C_i)$) et quand suffisamment d'éléments sont contenus dans le volume d'influence, les résultats issus de ces trois méthodes convergent vers la même valeur. Si $V_1 \gg V_3$ ou si $V_1 \ll V_3$, il doit être évident pour l'utilisateur que le maillage de la zone critique n'est pas de bonne qualité.

Pour chaque couple (noeud critique C_i , volume d'influence $V(C_i)$) trouvé, la classe **LAMEFIP_VolCriterion** demande au volume d'influence considéré le calcul des variables ϖ_f et ϖ_f^D qui permettent de calculer le ratio¹⁰ $\sqrt{\frac{\varpi_f}{\varpi_f^D}}$. Si ce ratio est supérieur à 1, il y a fissuration, dans le cas contraire il n'y a pas fissuration.

Classe Influence_Volume (Volume d'Influence) : Pour le critère de fatigue volumique du LAMEFIP, on définit un volume d'influence $V^*(C_i)$ autour de chacun des noeuds critiques C_i , qui est constitué des noeuds M de la structure satisfaisant l'inéquation : $W_f(M) \geq W_f^*(C_i)$.

Dans le programme, un volume d'influence sait :

- donner le noeud critique qui le contrôle ;
- donner le critère auquel il correspond ;
- calculer la valeur de son volume V^* ;
- donner le nombre de noeuds et d'éléments qui le constituent ;
- calculer les grandeurs du critère permettant de savoir si il y a fissuration au noeud potentiellement critique ou non (ϖ_f et ϖ_f^D , fissuration si $\varpi_f > \varpi_f^D$).

Classe Fat_Node (Noeud fatiguable) La classe Fat_Node dérive de la classe Node. Elle traduit le concept de “noeud fatiguable”, utile pour les critères de résistance en fatigue qui peuvent ainsi lister des noeuds critiques (cas du critère volumique LAMEFIP), ou encore les noeuds où peuvent se produire des fissurations.

Un Noeud_Fatiguable peut être :

- critique, pour une ou plusieurs occurrences du critère volumique du LAMEFIP (classe LAMEFIP_VolCriterion) ;
- fissuré, pour un ou plusieurs critères de fatigue donnés (classe Fatigue_Criterion).

Un Fat_Node fissuré appartient à une **Crack_Node_List** (liste de noeuds fissurés), un Fat_Node critique représente un noeud critique au sens du critère volumique du LAMEFIP.

Un Fat_Node critique contrôle un volume d'influence et peut aussi :

- donner le nombre de volumes d'influence auxquels il appartient,
- retourner par son rang un des volumes d'influence dont il fait partie,
- entrer dans un nouveau volume d'influence contrôlé par un autre noeud critique,
- dire si il est critique,
- dire si il est fissuré.

Classe Crack_Node_List (Liste Noeuds fissurés) C'est la classe qui représente le résultat du critère de fatigue appliqué à une structure : elle contient les “noeuds fatigables” fissurés. Une Crack_Node_list sait dire si elle est vide, et sait donner la structure et le critère auxquels elle correspond. Elle peut :

- retourner le nombre de noeuds qu'elle contient ;

¹⁰La racine carrée est utilisée pour avoir un ratio variant comme un rapport de contraintes σ/σ^D .

- ajouter un noeud à sa liste ;
- dire si un noeud donné est dans sa liste ;
- retourner un noeud par son rang.

4.3.1.4 La bibliothèque “ZéBuLoN”

Cette bibliothèque regroupe les classes utiles à l’interfaçage du post-processeur avec le code de calcul par éléments finis utilisé : ZéBuLoN. La principale classe de la bibliothèque “ZéBuLoN” est la **Classe FEM_code_ZEBULON**. Elle représente l’interface avec le code élément fini ZéBuLoN. On y trouve la définition de méthodes déclarées virtuelles pures dans la classe de base FEM_code_interface :

1. `read()` : lecture des fichiers qui contiennent les paramètres matériaux, la géométrie du maillage, la liste des variables (tenseurs des contraintes, des déformations) aux noeuds et aux points de Gauss.
2. `write()` : écriture des fichiers de post-traitement qui contiennent la description des variables calculées et leurs valeurs aux noeuds et aux points de Gauss qui seront post-traités graphiquement par ZéBuLoN :

La liste des champs scalaires écrite dans les fichiers de sortie est :

- $W_f(M)$ et $W_f^*(M)$,
- $dT(M)$: le degré de triaxialité des contraintes,
- $Lwfrank(M)$: donne 0 si le noeud n’est pas critique ou sinon le rang du volume d’influence dont le noeud dépend,
- $Lwfcrit(M)$: indique si le noeud est critique (1 si le noeud est critique, 0 sinon),
- $Lwfcrack(M)$: indique si le noeud est fissuré (1 si le noeud est fissuré, 0 sinon).

Les éléments finis de référence utilisés par le code ZéBuLoN implémentés dans la bibliothèque Zebulon permettent d’accéder aux noeuds, points de Gauss, fonctions d’interpolation, calcul du déterminant de la matrice Jacobienne, ... Les principaux élément utilisés sont :

- élément quadratique 3D “c3d20” brique à 20 noeuds, 27 points de Gauss :

classe **RefElemZeb_HEXA-QUAD** ;

- élément quadratique 3D “c3d15” pyramide à 15 noeuds, 18 points de Gauss :

classe **RefElemZeb_PENTA-QUAD** ;

- élément quadratique 2D “cax8” quadrangle à 8 noeuds, 9 points de Gauss :

classe **RefElemZeb_QUAD-QUAD** ;

- élément quadratique 3D “c3d4” quadrangle à 4 noeuds, 1 point de Gauss :

classe **RefElemZeb_TETRA-LIN**.

4.3.2 Exemple de programmation d'un critère ponctuel de fatigue multiaxiale : Crossland

4.3.2.1 Contexte de développement

Les tenseurs des contraintes et des déformation : La bibliothèque `lib_ZEB` fournit toutes les classes permettant de récupérer les champs tensoriels des contraintes et des déformations.

L'héritage de la classe `Fatigue_Criterion` : En tant que critère ponctuel de fatigue la nouvelle classe à implémenter **`Crossland_Criterion`** dérive de la classe **`Ponctual_Fatigue_Criterion`** qui dérive elle-même de la classe abstraite **`Fatigue_Criterion`**.

La classe **`Fatigue_Criterion`** fournit :

- une liste de méthodes virtuelles pures qui devront obligatoirement être implémentées au niveau des classes dérivées :

`compute()`-> effectue le calcul du critère

`print()`-

> affiche à l'écran des résultats intermédiaires de calcul

`variable_name(int i)`-> retourne le libellé de l'ième variable
calculée par le critère

`variable_list()`-> retourne la liste des libellés des variables
calculées par le critère

- des données et des méthodes générales utiles à un critère ponctuel .

4.3.2.2 Les données de la classe “`Crossland_Criterion`”

Pour implémenter le critère Crossland, nous sommes amenés à manipuler différentes variables :

- l'amplitude du champ tensoriel des contraintes (résultat du calcul ZéBuLoN) ;
- le champ scalaire cission octaédrale maximum $\tau_{oct,max}(M)$,
- le champ scalaire pression hydrostatique maximum $P_{max}(M)$,
- le résultat du critère sous la forme d'un scalaire calculé en tout point : le champ scalaire `coefficient_sécurité(M)`.
- les constantes dépendant des limites de fatigue du matériau $\alpha = \frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{Trac,Fr,-1}^D} - \frac{1}{\sqrt{3}}$
et $\beta = \tau_{-1}^D$
- la limite de fatigue choisie par l'utilisateur entre $\sigma_{trac,-1}^D$, $\sigma_{Fp,-1}^D$ et $\sigma_{Fr,-1}^D$ et ajoutée à la limite en torsion τ_{-1}^D pour estimer les constantes α et β .

Le champ tensoriel des contraintes est représenté par un objet de la classe **`Tensor_Field`**, et le champ dynamique tensoriel des contraintes sur tout un cycle par un objet de la classe **`Dynamic_Tensor_Field`**, ce qui donne les déclarations suivantes, extraites de l'interface de la classe **`Fatigue_Criterion`** :

```

...
Tensor_Field initial_stress ;
...
Dynamic_Tensor_Field inst_stress_tensor ;
...

```

Les champs scalaires calculés sont représentés par des objets de la classe **Scalar_Field** :

```

...
Scalar_Field max_hydrostatic_stress ;
Scalar_Field intrinsic_octaedral_shear ;
Scalar_Field security_coefficient ;
....

```

Les limites de fatigue choisies comme référence et les constantes matériau sont représentées par des variables privées (éventuellement calculées par des méthodes privées ad-hoc) :

```

double fatig_limit ;
double A_coeff ;
double B_coeff ;

```

L'écriture des résultats nécessite de renseigner des variables qui contiennent les libellés des données à écrire. Ces libellés sont représentées par 2 variables privées :

- un tableau de libellés : 3 libellés pour les variables cission octaédrale, pression hydrostatique et coefficient_sécurité
- une variable contenant la concaténation des 3 libellés séparés par des blancs

```

String variable_tab[3] ;
String variable_list ;

```

4.3.2.3 Les méthodes

Le constructeur : Le constructeur de la classe **Fatigue_Criterion** prend en charge :

- l'allocation dynamique des champs scalaires (en fonction du nombre total d'objets Points créés).
- l'initialisation des libellés des données à écrire dans le fichier résultat ZéBuLoN,

```

variable_tab[0]=String("TauOctMax") ;
variable_tab[1]=String("PHydroMax") ;
variable_tab[2]=String("Cs") ;

```

implémentation de la méthode Compute() : L'implémentation des calculs suit une démarche logique, en distinguant les grandes étapes qui font chacune l'objet d'une méthode. L'organigramme d'application du critère est représenté sur la figure 4.8. En fin de calcul on dispose alors du champ scalaire "coefficient de sécurité" calculé en tous

noeuds et points de Gauss, permettant de montrer une carte des zones fissurées au sens de ce critère.

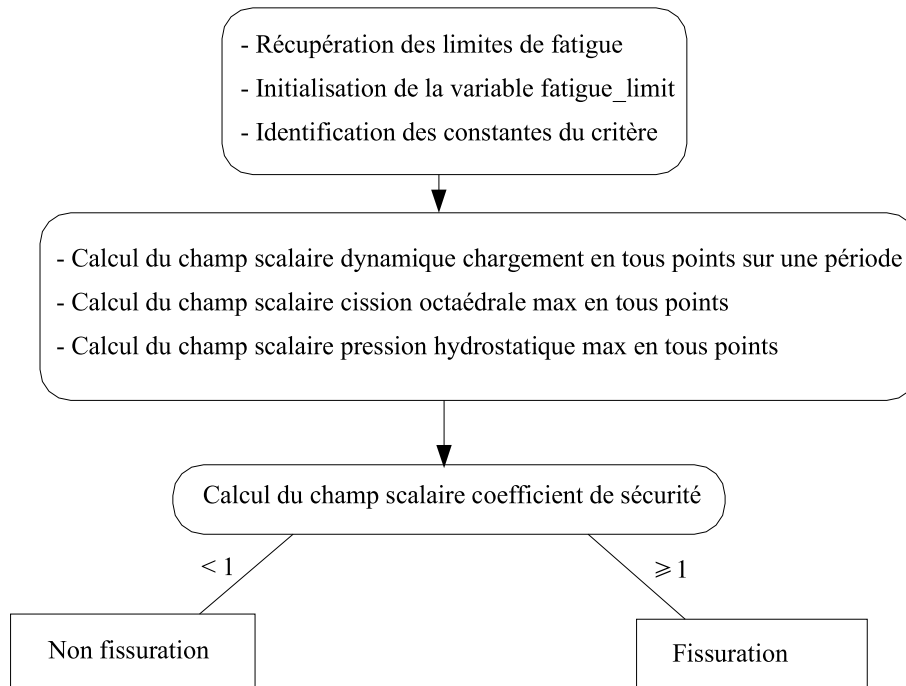


FIG. 4.8 – Organigramme d'application du critère de Crossland

4.4 Validation du post-processeur

La version actuelle du post-processeur est implémentée de façon à ce que l'utilisateur puisse choisir parmi les critères programmés : LAMEFIP- W_a ¹¹, LAMEFIP- W_f ¹² et Crossland. La version en W_a reste accessible afin de pouvoir comparer les résultats des deux versions. Des tests sur des cylindres de révolution à 2 et 3 dimensions à géométrie parfaite ont tout d'abord été effectués afin de pouvoir comparer à des solutions analytiques. Dans un deuxième temps, les tests se sont portés sur des géométries réelles (c'est-à-dire toriques) d'éprouvettes 2D et 3D en distinguant les chargements, en référence à des résultats d'essais de fatigue.

4.4.1 Cylindre de révolution

4.4.1.1 2D

A l'aide d'éléments axisymétriques, il est possible de modéliser en deux dimensions un problème de traction simple sur un cylindre de révolution.

¹¹ Ancienne formulation limitée aux chargements alternés symétriques [PLL98]

¹² Formulation en travail fourni [BPLL03]

Traction

Pour une sollicitation de traction alternée symétrique sur un cylindre de révolution représenté sur la figure 4.9, la localisation des noeuds critiques, les valeurs des variables pour différents niveaux de charge et la prévision du critère ont été validés pour deux matériaux (fonte EN-GJS800-2 et acier 30NiCrMo16). La limite d'endurance de référence (traction $R_\sigma = -1$) est retrouvée, ainsi que les autres variables, les variables sont correctement calculées. Quatre cas de chargement ont été testés :

- $\sigma < \sigma^*$, aucun noeud n'est critique.
- entre σ^* et σ^D , tous les noeuds sont critiques mais aucun n'est fissuré.
- $\sigma = \sigma^D$, tous les noeuds sont fissurés et le critère $(\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_f^D}})$ vaut 1.
- $\sigma > \sigma^D$, tous les noeuds sont fissurés.

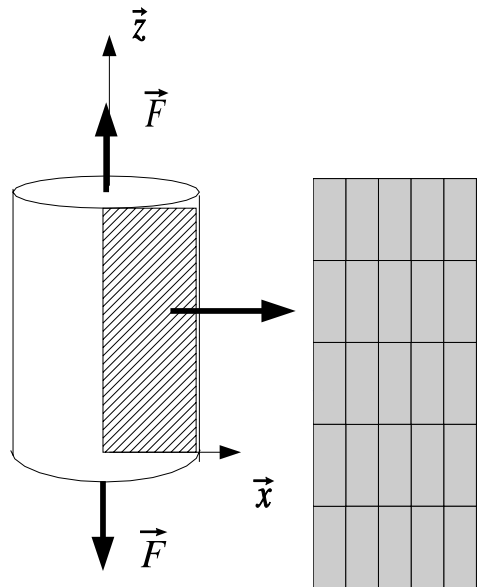


FIG. 4.9 – Plan méridien d'un cylindre de révolution maillé en 2D.

Le fichier résultat généré par le post-processeur pour un noeud lors du chargement à la limite d'endurance est représenté sur la figure 4.10. Le nombre d'éléments composant le volume d'influence est indiqué (ici 25 éléments). En traction sur un cylindre parfait, le volume d'influence est soit nul, soit égal au volume d'éprouvette.

Les trois colonnes de résultats correspondent respectivement aux calculs :

- sans prendre en compte les éléments partiellement critiques,
- avec les éléments partiellement critiques,
- comptant les éléments partiellement critiques comme totalement critiques.

Ces trois calculs donnent un encadrement qui permet d'apprécier la sensibilité du calcul à la présence d'éléments partiellement critiques (c'est-à-dire si le volume d'influence est maillé de façon assez fine).


```

*** critical node : <1> ***
25 Element(s) : <1> <2> <6> <7> <3> <8> <11> <12> <13> <4> <9>
<14> <16> <17> <18> <19> <5> <10> <15> <20> <21> <22> <23> <24> <25>
Rank   Ci      W*(Ci)                                dT(Ci)
0      1      9.521373e-01                          1.400000e-01

                                Without_Partially_      Standard      Partially_Critical_
                                Crit_Element        Element        Element_Forced_Full

v*      1.000000e+01                      1.000000e+01      1.000000e+01
pi      5.814155e-01                      5.814155e-01      5.814155e-01
piD     5.851176e-01                      5.851176e-01      5.851176e-01
Sqrt(pi/piD) 9.968314e-01                      9.968314e-01      9.968314e-01
Crack   1                                1                    1
    
```

FIG. 4.10 – Fichier résultat du post-processeur en un noeud de l'éprouvette pour un chargement à la limite d'endurance.

4.4.1.2 3D

Traction

Les mêmes cas de chargement ont été effectués sur un cylindre parfait en traction alternée symétrique et conduisent à des résultats similaires à ceux obtenus en 2D.

Torsion

En torsion alternée symétrique, la contrainte de cisaillement évoluant suivant le rayon, le volume d'influence n'est plus binaire comme dans le cas de la traction. Le cisaillement est appliqué par la rotation de tous les noeuds de la face $y = 0$, les noeuds de l'autre face étant bloqués dans les trois directions afin de simuler l'encastrement.

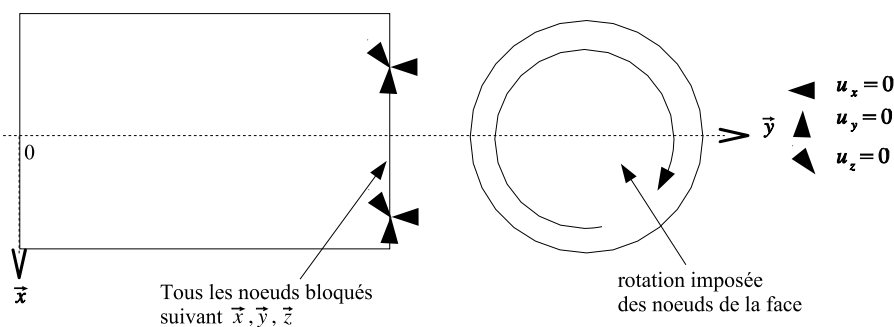


FIG. 4.11 – Conditions aux limites pour un chargement de torsion.

Quatre cas de chargement ont été testés :

- $\tau_{max} < \tau^*$, aucun noeud n'est critique.
- entre τ^* et τ^D , les noeuds de la couronne sont critiques mais aucun n'est fissuré.
- $\tau_{max} = \tau^D$, seuls les noeuds de la surface sont fissurés et le critère $(\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_f^D}})$ vaut 1.
- $\tau_{max} > \tau^D$, tous les noeuds où le cisaillement dépasse la limite d'endurance sont fissurés.

Lors du chargement à la limite d'endurance ($\tau_{max} = \tau^D$), seuls les noeuds à la surface du cylindre présentent un cisaillement équivalent à la limite d'endurance, il est normal que ces noeuds soient fissurés. Le volume d'influence est représenté sur la figure 4.12.

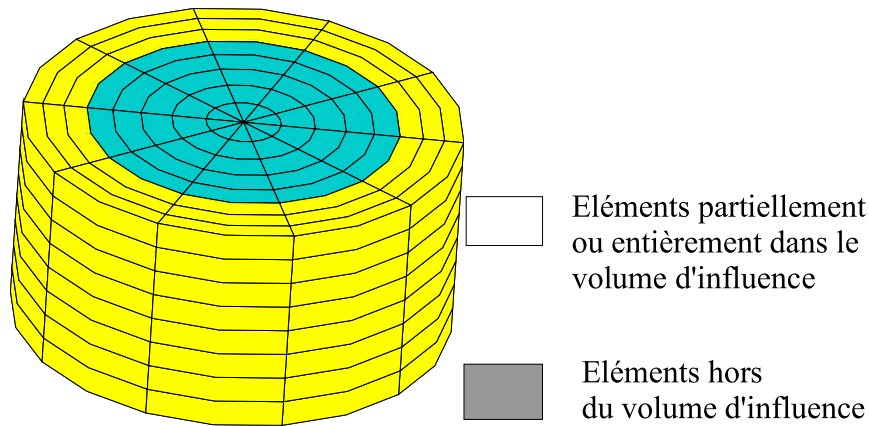


FIG. 4.12 – Illustration du positionnement des noeuds critiques pour un chargement de torsion sur un cylindre parfait.

4.4.2 Epruvettes lisses

Les éprouvettes lisses maillées ont la même géométrie que les éprouvettes utilisées lors des essais de fatigue (voir figure 2.8 au chapitre 2).

4.4.2.1 Torsion ($R = -1$)

Pour des chargements simples de flexion plane ou de torsion, la modélisation d'une demi éprouvette est suffisante compte-tenu des symétries. La géométrie et le maillage de l'éprouvette sont représentés sur la figure 4.13.

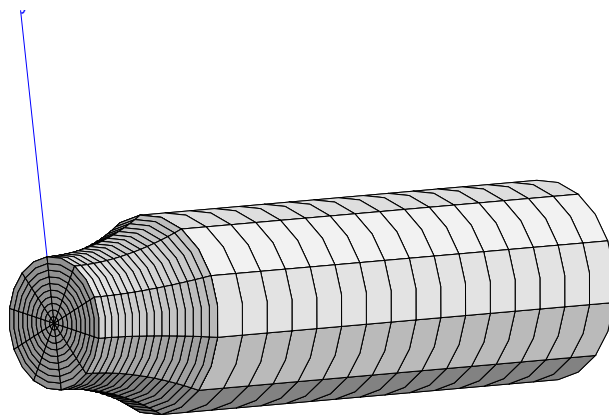


FIG. 4.13 – Maillage de la demi éprouvette utilisée pour les essais de torsion présentant un coefficient théorique de concentration de contraintes $K_t = 1,05$ en torsion.

Les conditions aux limites sont détaillées sur la figure 4.14. Le couple de torsion est mo-

délimité par une rotation de tous les noeuds de la face extérieure côté queue de l'éprouvette, les noeuds de la face côté tore sont bloqués afin de simuler l'encastrement.

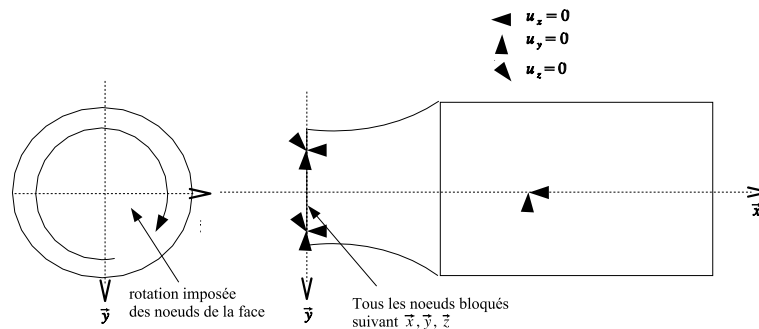


FIG. 4.14 – Conditions aux limites pour un chargement de torsion.

Pour un chargement correspondant à la limite d'endurance en fond de tore ($\tau_a^D = 428\text{MPa}$) pour l'acier NiCrMo16, le volume d'influence est représenté sur la figure 4.15. Les noeuds critiques sont bien localisés à la surface du tore.

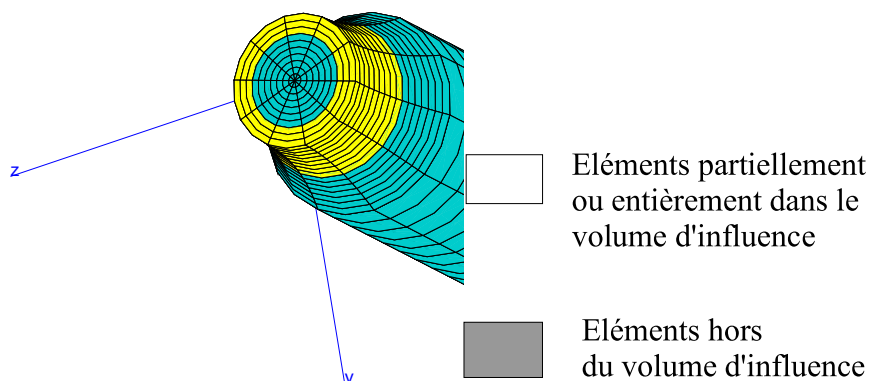


FIG. 4.15 – Volume d'influence pour un chargement à la limite de fatigue en fond de tore.

Les calculs effectués par le post-processeur sous estiment un peu la limite d'endurance. En effet, le ratio $\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_f^D}}$ prévu par le critère devrait être égal à 1 pour tous les noeuds critiques mais ce n'est pas le cas dans les résultats "standards" (figure 4.16), $\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_f^D}} = 0,83$. En supprimant les éléments partiellement critiques du calcul des variables, ce ratio se rapproche de 1 (on obtient 0,98). Le calcul du volume d'influence serait donc largement tributaire de la façon dont sont gérés les éléments partiellement critiques.

```
*****
*CRITICAL NODE Ci=80 : Rank=0, W*(Ci)=1.039e+00, dT(Ci)=0.00e+00
*****
210 Element(s) :
```

	Without_Partially _Crit_Elem	Standard	Partially_Critical _Elem_Forced_Full
V*	1.622274e+02	2.625528e+02	3.363975e+02
pi	6.182194e-01	4.361689e-01	3.197163e-01
piD	6.387232e-01	6.387232e-01	6.387232e-01
Sqrt(pi/piD)	9.838184e-01	8.263633e-01	7.074994e-01
Cracked	0	0	0

FIG. 4.16 – Résultats du post-processeur pour un chargement de torsion à la limite de fatigue.

Pour approfondir ce point, plusieurs maillages ont été testés afin de mieux quantifier l'importance des éléments partiellement critiques dans le volume d'influence. Un maillage plus fin avec un pas progressif vers la surface du rayon (12 éléments) (figure 4.17) avec les mêmes conditions de chargement et conditions aux limites montre qu'augmenter le nombre d'éléments dans le volume d'influence ne fait pas forcément converger les résultats (fig. 4.18).

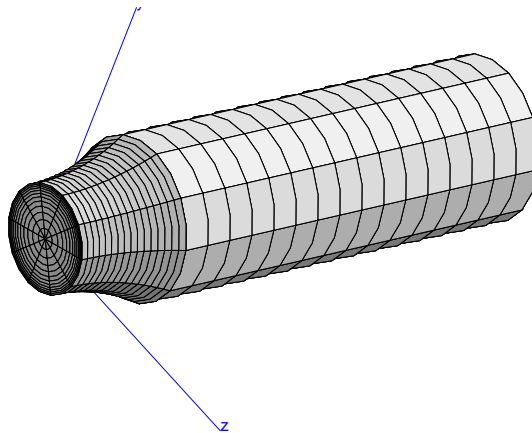


FIG. 4.17 – Maillage affiné de la demie éprouvette de torsion.

Les résultats pour les différents maillages sont regroupés dans le tableau 4.1.

```
*****
*CRITICAL NODE Ci=3864 : Rank=2, W*(Ci) =1.039e+00, dT(Ci)=1.1e-19
*****
500 Element(s)
```

	Without_Partially _Crit_Elem	Standard	Partially_Critical _Elem_Forced_Full
V*	2.181711e+02	2.541394e+02	3.187345e+02
pi	4.768878e-01	4.170056e-01	3.174103e-01
piD	6.387232e-01	6.387232e-01	6.387232e-01
Sqrt(pi/piD)	8.640757e-01	8.080060e-01	7.049433e-01
Cracked	0	0	0

FIG. 4.18 – Résultats du post-processeur pour un chargement de torsion à la limite de fatigue.

Maillage	Normal	Fin
Nb éléments total	3200	3600
Nb noeuds total	13366	25062
τ_{max} (MPa)	428	428,8
Nb éléments dans V^*	210	500
V^* (mm ³)sans E.P.C.	162	223
V^* (mm ³) standard	266	268
V^* (mm ³) E.P.C. forcés	350	345
$\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_D}}$ sans E.P.C.	0,99	0,90
$\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_D}}$ standard	0,83	0,81
$\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_D}}$ E.P.C. forcés	0,69	0,71

TAB. 4.1 – Résultats du post-processeur en torsion pour différents maillages sur éprouvettes lisses. E.P.C. : Eléments Partiellement Critiques.

4.4.2.2 Flexion plane (R = -1)

Sur les mêmes demie éprouvettes est alors appliquée une sollicitation de flexion plane, les conditions aux limites sont représentées sur la figure 4.19. Au noeud situé à l'extrémité de l'éprouvette sur sa fibre neutre, est appliqué un effort ponctuel dans la direction \vec{y} de manière à générer le moment de flexion imposé.

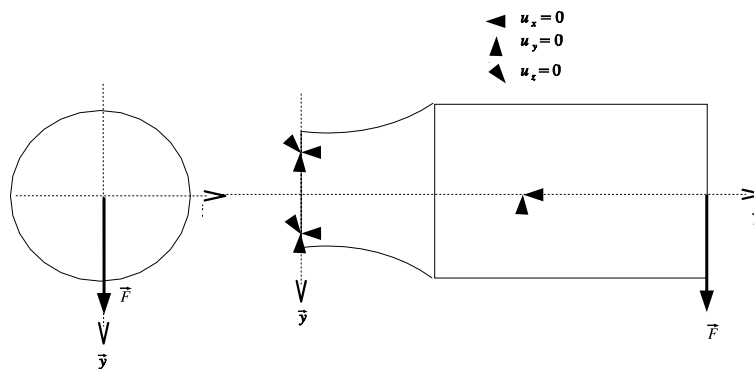


FIG. 4.19 – Conditions aux limites pour un chargement de flexion plane.

Le volume d'influence (fig. 4.20) est bien défini autour des deux points critiques (fig. 4.21) caractéristiques de l'état de flexion plane. Les mêmes maillages que pour la torsion ont été testés en flexion plane. L'ensemble des résultats est regroupé dans le tableau 4.2. La limite d'endurance expérimentale sur ce matériau est de 690 MPa, l'application analytique du critère prévoit une limite à 721 MPa soit une erreur relative de prévision de -4,5%. Il apparaît que le post-processeur dans sa version standard sous estime la limite d'endurance. Contrairement au chargement de torsion, l'application du critère sans les éléments partiellement critiques surévalue la limite d'endurance. L'encadrement de la limite de fatigue est tout de même satisfaisant.

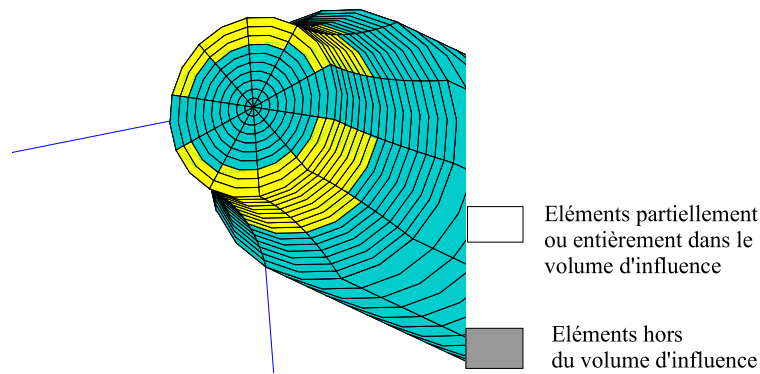


FIG. 4.20 – Volume d'influence en flexion plane.

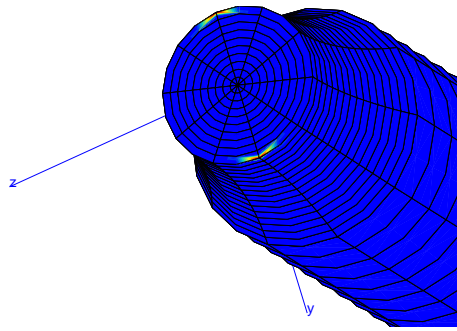


FIG. 4.21 – Localisation des noeuds critiques (en clair).

	Normal	Fin
Nb éléments total	3200	3600
Nb noeuds total	13366	25062
σ_{max} (MPa)	691	692
Nb éléments dans V^*	70	160
V^* (mm ³) sans E.P.C.	13,4	18
V^* (mm ³) standard	52,8	52,8
V^* (mm ³) E.P.C. forcés	113	103
$\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_f^D}}$ sans E.P.C.	1,14	1,10
$\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_f^D}}$ standard	0,808	0,810

TAB. 4.2 – Résultats du post-processeur pour un chargement de flexion plane sur éprouvettes lisses.

Afin d'améliorer l'encadrement, en affinant le calcul du volume d'influence, un nouveau maillage est testé, avec un pas régulier d'éléments sur le rayon (10 éléments) et la section est divisée angulairement en 20 éléments.

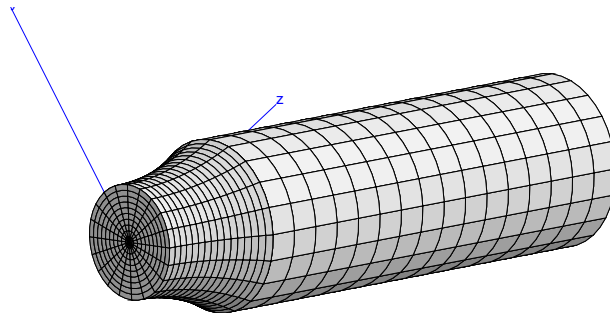


FIG. 4.22 – Nouveau maillage fin de la demie éprouvette pour un chargement de flexion plane.

Les 3 maillages testés sont rappelés sur la figure 4.23.

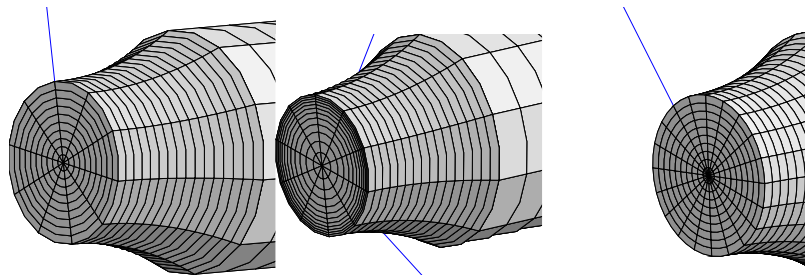


FIG. 4.23 – Les différents maillages de la demie éprouvette pour un chargement de flexion plane.

Le post-processeur donne les résultats suivants : $\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_f^D}}$ sans E.P.C. = 1,0, $\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_f^D}}$ standard = 0,8, l'encadrement est donc meilleur, le raffinement du maillage au niveau des noeuds critiques fait donc converger les résultats vers la valeur expérimentale.

4.4.2.3 Flexion-torsion combinées ($R = -1$)

Pour les chargements combinés, l'éprouvette entière a dû être modélisée. Le maillage de l'éprouvette est représenté sur la figure 4.24, il contient 27 123 degrés de liberté et 2 184 éléments quadratiques.

Les conditions aux limites pour modéliser un chargement de flexion plane et de torsion combinées sont représentées sur la figure 4.25, conformément à [Ban01]. Aux noeuds (4) et (4'), situés aux extrémités de l'éprouvette sur sa fibre neutre, des efforts ponctuels sont appliqués dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) et les noeuds (3) et (3') sont bloqués suivant la direction \vec{x} , afin de modéliser le moment de flexion imposé pendant l'essai. Le couple de torsion est appliqué sur les sections droites extrémités de l'éprouvette (contenant 4 et 4'), en imposant des efforts distribués aux noeuds, proportionnellement à leur distance de la fibre neutre.

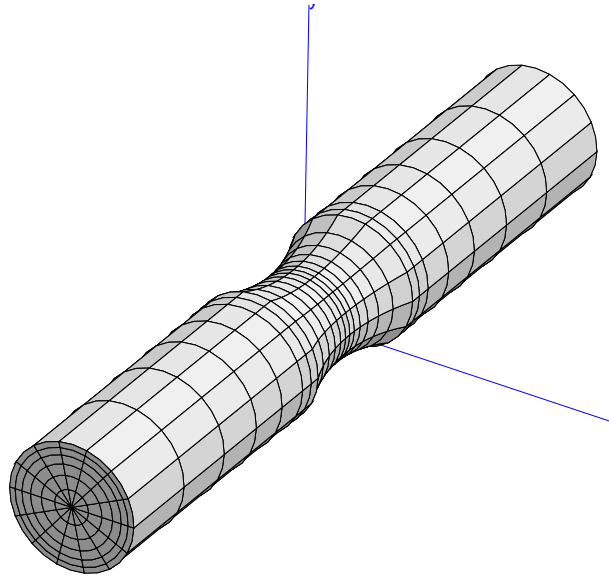


FIG. 4.24 – Maillage de l'éprouvette lisse utilisée pour modéliser les essais de flexion-torsion combinées.

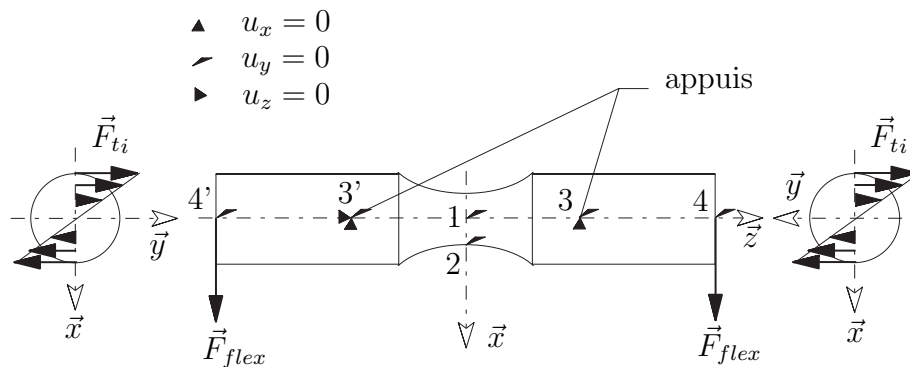


FIG. 4.25 – Conditions aux limites pour modéliser des chargements de flexion plane et de torsion combinées.

Les noeuds (1), (3), (3'), (4) et (4') situés sur la fibre neutre ont leur degré de liberté en translation suivant la direction \vec{y} bloqué pour empêcher tout mouvement de corps rigide en rotation autour de \vec{x} . Le noeud (3') est bloqué suivant la direction \vec{z} afin d'éviter les mouvements de corps rigide en translation suivant cet axe. Le noeud (2) est bloqué suivant la direction \vec{y} évitant ainsi des rotations éventuelles de corps rigide autour de l'axe \vec{z} . Compte-tenu de la symétrie du chargement cette dernière condition n'est pas indispensable, sa non influence sur les résultats de calcul a été vérifiée.

A titre d'exemple on s'intéresse à la fonte EN-GJS800-2. Le chargement ($R_\sigma = -1$) appliqué ici présente un rapport de contrainte $\sigma_a/\tau_a = 1,35$; en fond de tore l'amplitude de contrainte est $\sigma_a = 199$ MPa ce qui correspond à la limite d'endurance à 10^6 cycles estimée par la méthode de l'escalier [P196]. Dans ce cas, le volume d'influence est représenté en surface sur la figure 4.26.

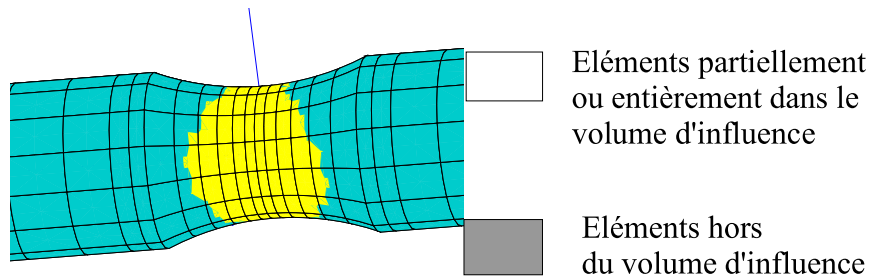


FIG. 4.26 – Représentation du volume d'influence en surface de l'éprouvette.

Ce volume est composé d'éléments partiellement et totalement critiques. Il est bien défini autour des deux points critiques présentant des maximums de travail de déformation fourni (fig. 4.27).

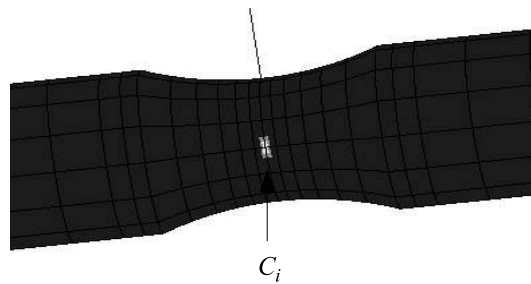


FIG. 4.27 – Positionnement des noeuds critiques.

Dans la profondeur au niveau du fond de tore (en suivant le rayon), ce volume a une profondeur de 1,5 mm (figure 4.28). La variable de sortie "LwfRank" donne le rang du volume d'influence auquel le noeud considéré M appartient et 0 si ce noeud n'est pas contenu dans le volume d'influence. Cette variable prend la valeur 2 car pour ce chargement il y a deux volumes d'influence. Pour ce chargement à la limite d'endurance en fond de tore, le post-processeur donne les résultats suivants : $\sqrt{\frac{\varpi_f}{\varpi_p}}$ sans élément partiellement critique = 1,02 et $\sqrt{\frac{\varpi_f}{\varpi_p}}$ standard = 0,73. Le chargement est donc bien prévu à la limite de la fissuration par fatigue.

Ces résultats sont très encourageants, car l'application analytique du critère (calculs sur éprouvettes cylindriques de révolution sans tore) donne 10% d'erreur par rapport au résultat d'essai. Il faudra affiner le maillage en fond de tore afin de faire converger les résultats standard et sans élément partiellement critique et approfondir l'effet de la discrétisation du volume d'influence sur le résultat numérique.

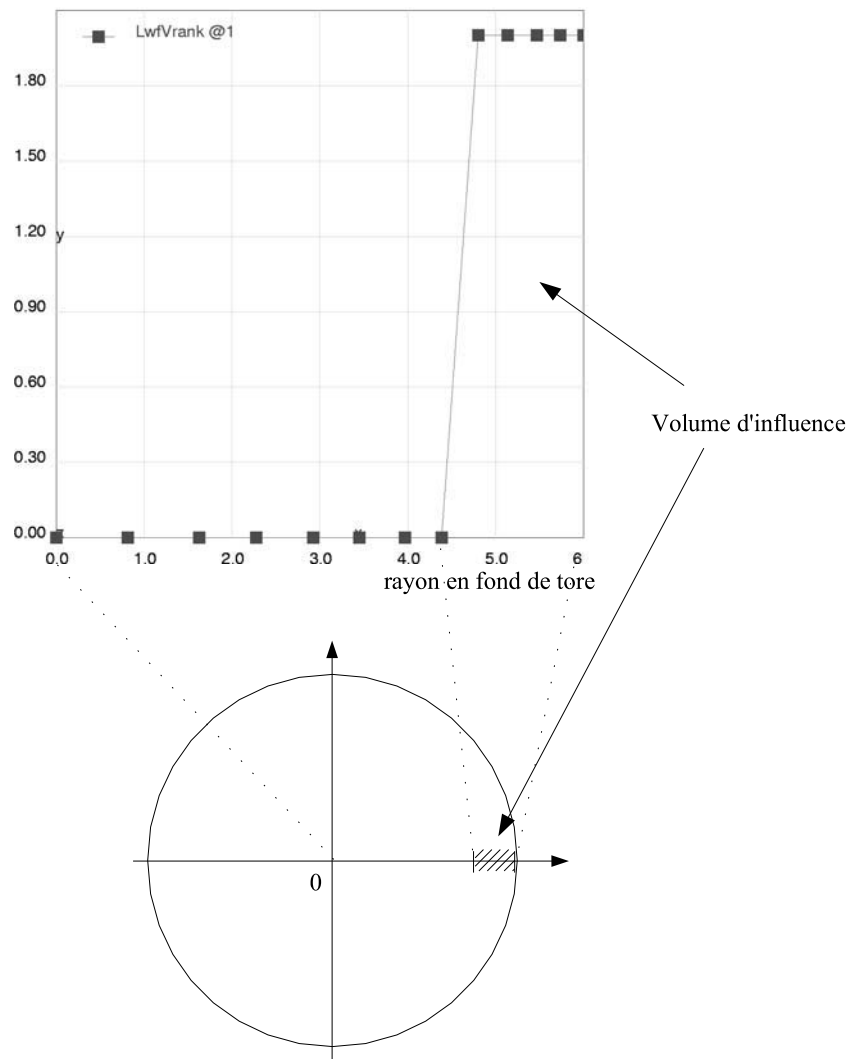


FIG. 4.28 – Représentation du volume d'influence dans la profondeur du tore pour un chargement de flexion plane et torsion combinés.

4.5 Bilan et perspectives

Un post-processeur de calcul en fatigue a été développé afin d'étudier la résistance à la fatigue de pièces réelles. Le critère déterministe énergétique et volumique du LAMEFIP a été appliqué à des éprouvettes d'essais. Dans l'état actuel du développement du post-processeur, son application se limite à des calculs élastiques. Le post-processeur localise les points critiques pour tout type de chargement, simple ou combiné. Le post-processeur encadre de manière satisfaisante les limites de fatigue expérimentales obtenues sur les éprouvettes maillées.

L'application du post-processeur à des éprouvettes entaillées puis à des pièces réelles nécessite des calculs élastoplastiques, prochaine étape de l'implémentation.

Conclusion générale et Perspectives

Cette étude a porté sur quatre axes :

- les méthodes déterministes et probabilistes de calcul en fatigue à grande durée de vie,
- le comportement en fatigue de l’alliage de titane Ti-6Al-4V,
- l’évolution probabiliste du critère énergétique et volumique de fatigue multiaxiale du laboratoire pour les grandes durées de vie,
- le développement d’un post-processeur de calcul en fatigue multiaxiale.

Le panorama des critères de fatigue déterministes à grande durée de vie illustre le nombre important de critères dans la littérature. Deux approches ont été distinguées : ponctuelles et volumiques. L’approche volumique permet de prévoir les effets, sur la limite de fatigue, des différents types de chargement (traction, flexion rotative, flexion plane) et de prendre en compte la répartition spatiale des contraintes dans la pièce. Bien que ne prenant pas en compte la répartition des contraintes, l’approche ponctuelle a l’avantage d’être plus facilement applicable. Les approches probabilistes permettent de quantifier le risque de fissuration par fatigue en prévoyant une probabilité de fissuration avant un nombre de cycles fixé en intégrant la dispersion expérimentale. D’une manière générale, les approches prenant en compte les défauts du matériau décrivent de façon satisfaisante cette dispersion. Bomas et Flacelière proposent des approches couplées à la fois volumique et surfacique afin de distinguer l’amorçage de fissure en surface de la pièce et dans le volume de matière sollicité. Chantier propose d’intégrer des distributions de taille de défauts et Doudard suppose que l’aspect probabiliste est lié à la distribution de la limite d’élasticité mésoscopique.

Le comportement en fatigue de l’alliage de titane Ti-6Al-4V a été caractérisé, pour des sollicitations simples (traction, torsion, flexion plane et rotative) et combinées (flexion/torsion en et hors phase). L’importante dispersion des résultats d’essais met en évidence la nécessité d’un outil fiable pour mieux la prévoir. Les essais de fatigue sous sollicitations de flexion plane alternée symétrique à deux blocs (bas/haut) répétés alternativement jusqu’à fissuration montrent que des blocs inférieurs à la limite d’endurance du matériau participent de façon significative à l’évolution de l’endommagement s’ils sont mélangés à des blocs d’amplitude supérieure à cette limite. L’existence d’un seuil en dessous duquel les cycles ont une influence négligeable sur la durée de vie a ainsi été confirmé. Il conviendra

cependant de valider ce seuil par des essais complémentaires sur des éprouvettes présentant un état de surface parfaitement maîtrisé.

Un modèle probabiliste appliqué à la fatigue multiaxiale à grand nombre de cycles sous chargement d'amplitude constante a été proposé. Il est basé sur l'approche énergétique et volumique du LAMEFIP, combiné au formalisme mathématique de Weibull. En conservant les avantages de la formulation déterministe, cette proposition permet d'estimer une probabilité de fissuration de la structure avant une durée de vie fixée selon le niveau de contrainte imposé. Les paramètres de ce modèle sont identifiés à partir de trois limites d'endurance conventionnelles et de l'estimateur de l'écart-type. Cette formulation décrit la dispersion de la résistance à la fatigue pour différents matériaux alors qu'un critère déterministe ne fournit qu'une réponse binaire. La dispersion prévue par le modèle est identifiée à partir d'un estimateur de l'écart-type expérimental de la limite d'endurance en traction. Le modèle distingue les chargements et prévoit l'effet d'échelle. Le critère s'applique au domaine de l'endurance limitée et a été validé sur des résultats d'essais. Notre proposition permet de prévoir correctement les courbes P-S-N à partir d'une seule courbe S-N expérimentale de référence. Les résultats d'essais sont présentés avec l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane, dès que l'estimation est possible, ce qui permet de mieux juger la validité de ces résultats. La prise en compte des intervalles de confiance est assez rare dans la littérature, ce qui est regrettable. Les prévisions du critère proposé sont en bon accord avec l'expérience. Elles sont bien souvent meilleures que celles des critères ponctuels déterministes.

Le développement du post-processeur permet d'appliquer le critère déterministe du LAMEFIP à des éprouvettes entières. Les noeuds critiques sont correctement localisés en fonction du chargement appliqué. Le post-processeur propose un encadrement des prévisions en fonction de la méthode de calcul du volume d'influence, ce qui permet de mieux juger de l'influence du maillage sur les résultats. Les prévisions encadrent de façon satisfaisante les résultats d'essais. Après des validations sur des géométries d'éprouvettes d'essais de fatigue pour des calculs élastiques, le post-processeur va permettre de comparer les prévisions du critère du LAMEFIP avec des résultats d'essais de fatigue sur des éprouvettes entaillées. Des tests sur pièces réelles sont également prévus. L'implémentation de l'évolution probabiliste doit également intervenir prochainement.

Une approche surfacique pourra être envisagée et combinée à l'approche volumique. Le critère probabiliste distingue les métaux en fonction de leur sensibilité au degré de triaxialité des contraintes de façon identique à la formulation déterministe, c'est-à-dire à l'aide d'une fonction empirique. De nouveaux travaux seront nécessaires afin de justifier physiquement cette fonction. Le seuil énergétique devra être décrit de façon probabiliste et rapproché des distributions de défauts (éventuels) présents dans le matériau. Il se-

rait également important de déterminer dans quelle mesure ce seuil est indépendant du chargement moyen. Cette étude devrait permettre de proposer sur une méthode de prévision de durée de vie prenant en compte la répartition volumique des contraintes et des déformations dans les pièces.

Bibliographie

- [ABBH98] H. Yaacoub Agha, A.-S. Béranger, R. Billardon, and F. Hild. High-cycle fatigue behaviour of spheroidal graphite cast iron. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 21 :287–296, 1998.
- [AFN91] AFNOR. *A 03-405 : Produits Métalliques-Essais de fatigue-Le traitement statistiques des données*. 1991.
- [AFN98] AFNOR. *NF EN ISO 4287 : Spécification géométrique des produits (GPS) - État de surface : méthode du profil - Termes, définitions et paramètres d'état de surface*. 1998.
- [Agh96] H. Yaacoub Agha. *Tolérance aux défauts initiaux : application à une fonte G.S. en fatigue*. PhD thesis, E.N.S. de Cachan, 1996.
- [AGP04] H. Adib, J. Gilbert, and G. Pluvinage. Fatigue life prediction for welded spots by volumetric method. *Int. J. Fatigue*, 26 :81–94, 2004.
- [AHDA83] A. Atrens, W. Hollelner, T.W. Duering, and J.E. Allison. Subsurface crack initiation in high cycle fatigue in Ti-6AL-4V. *Scripta Metall*, 17 :601–606, 1983.
- [ALNM73] J. Auvinet, G. Leleu, G. Notton, and G. Marquier. Caractéristiques mécaniques et de fatigue des alliages TA6V et TA6V2. *Mémoires scientifiques rev. Métallurg.*, (11), 1973.
- [AP03] H. Adib and G. Pluvinage. Theoretical and numerical aspects of the volumetric approach for fatigue life prediction in notched components. *Int. J. Fatigue*, 25 :67–76, 2003.
- [Aut94] Alliance Automation. *Logiciel de pilotage de machine d'essais*. Talence, France, 1994.
- [Ban01] A. Banvillet. *Prévision de la durée de vie en fatigue multiaxiale sous spectre de chargement réel : vers des essais accélérés*. PhD thesis, ENSAM CER de Bordeaux, 2001.
- [Bas60] F. Bastenaire. *Etude statistique et physique de la dispersion des résistances et des durées à la fatigue*. PhD thesis, Université de Paris, 1960.
- [Bas71] F. Bastenaire. Aspects probabilistes et statistiques de la rupture par fatigue. *Revue Française de Mécanique*, (37) :25–36, 1971.

- [Baz99] Z.P. Bazant. Size effect on structural strength : a review. *Applied Mechanics*, (69) :703–725, 1999.
- [BC96] D. Bouffet and J.P. Charlopeau. Fatigue et microstructure d’une fonte GS. Technical report, P.F.E. RENAULT / ENSAM-LAMEFIP, 1996.
- [BE92] M. R. Bache and W.J. Evans. Tension and torsion fatigue testing of a near-alpha titanium alloy. *Int. J. Fatigue*, 14 :331–337, 1992.
- [Ben93] M. Bennebach. *Fatigue multiaxiale d’une fonte GS, influence de l’entaille et d’un traitement thermique*. PhD thesis, ENSAM CER de Bordeaux, 1993.
- [BFGT92] A. Brand, J.F. Flavenot, R. Grégoire, and C. Tournier. *Données technologiques sur la fatigue*. Publications du CETIM, 1992.
- [BG00] K. Le Biavant-Guerrier. *Etude de l’amorçage de fissures de fatigue dans le Ti-6AL-4V*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2000.
- [BGS72] D.K. Benson, J.C. Grosskreuz, and G.G. Shaw. Mechanisms of fatigue in mill-annealed Ti-6AL-4V at room temperature and 600°F. *Metallurgical transactions*, 3, 1972.
- [BLM99] H. Bomas, T. Linkewitz, and P. Mayr. Application of a weakest-link concept to the fatigue limit of the bearing steel SAE 52100 in a bainitic condition. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 22 :733–741, 1999.
- [BM73] M.W. Brown and K.J. Miller. A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions. In *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, volume 187, pages 745–756, 1973.
- [BMS97] H. Bomas, P. Mayr, and M. Schleicher. Calculation method for the fatigue limit of part of case hardened steels. *Materials Science and Engineering*, pages 393–396, 1997.
- [Bom99] H. Bomas. Inclusion size distribution and endurance limit of a hard steel. *Extremes 2 :2*, pages 149–164, 1999.
- [Bom00] H. Bomas. The weakest-link concept - a probabilistic approach to the fatigue limit of components. In *Materials week 2000*, 2000.
- [Bon98] A. Bonnafe. Validation d’une limite de non propagation de fissure inférieure à la limite d’endurance conventionnelle d’une fonte GS. Master’s thesis, ENSAM CER de Bordeaux, 1998.
- [BPLL03] A. Banvillet, T. Palin-Luc, and S. Lasserre. A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion. *Int. J. Fatigue*, 26(8) :755–769, August 2003.
- [BRJ03] G. Booch, J. Rumbaugh, and I. Jacobson. *Le guide de l’utilisateur UML*. Eyrolles, 2003.
- [CBBH99a] I. Chantier, V. Bobet, R. Billardon, and F. Hild. A probabilistic approach to predict the very high-cycle fatigue behaviour of spheroidal graphite cast iron structures. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol.23 :173–180, 1999.

- [CBBH99b] I. Chantier, V. Bobet, R. Billardon, and F. Hild. Une approche probabiliste pour la prévision de la durée de vie en fatigue de structures en fonte GS. In SF2M, editor, *18ème journées de printemps : dimensionnement en fatigue des structures*, Paris, 1999. Commission de fatigue des matériaux.
- [CDPLD01] J.L. Charles, T. Delahay, T. Palin-Luc, and F. Dau. EEFO : un environnement éléments finis orienté objet. Technical report, interne LAMEFIP-ENSAM, mars 2001.
- [CH76] C. Chaussin and G. Hilly. *Métallurgie-Tome 1 : Alliages Métalliques*. Dunod, Paris, 1976.
- [Cha00] I. Chantier. *Tolérance aux défauts initiaux et effets de surface : dimensionnement à la fatigue de pièces de fonderie*. PhD thesis, ENS de Cachan, novembre 2000.
- [Cro59] B. Crossland. Effect of large hydrostatic pressure on the torsional fatigue strength of an alloy steel. In *International Conference on Fatigue of Metals London*, pages 138–149, London, 1959.
- [DBF⁺03] P. Davoli, A. Bernasconi, M. Filippini, S. Foletti, and I.V. Papadopoulos. Independence of the torsional fatigue limit upon a mean shear stress. *Int. J. Fatigue*, 23 :471–480, 2003.
- [DBM89] J.M. Dorlot, J.P. Bailon, and J. Masounave. *Des Matériaux*. 1989.
- [DCC⁺03] C. Doudard, S. Calloch, P. Cugy, A. Galtier, and F. Hild. Analyse de l’effet d’une pré-déformation sur la tenue à la fatigue à grand nombre de cycles. In *Fatigue et procédés de fabrication*, 2003.
- [Dep91] A. Deperrois. *Sur le calcul de limites d’endurance des aciers*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, Paris, juin 1991.
- [DM48] W.J. Dixon and A.M. Mood. A method for obtaining and analyzing sensitivity data. *Journal of American Statistical Association*, 43 :109–126, 1948.
- [DM95] X. Demulsant and J. Mendez. Microstructural effects on small fatigue crack initiation and growth in Ti-6Al-4V alloys. *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, 18 :1483–1497, 1995.
- [Dub92] L. Dubar. *Fatigue multiaxiale des aciers, passage de l’endurance à l’endurance limitée, prise en compte des accidents géométriques*. PhD thesis, ENSAM CER de Bordeaux, 1992.
- [DVCF⁺89] K. Dang-Van, G. Cailletaud, J.F. Flavenot, L. Douaron, and H.P. Lieurade. Criterion for high-cycle failure under multiaxial loading. In M. Brown and K. Miller, editors, *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, pages 459–478, Sheffield, 1989.ESIS.
- [EGX91] F. Ellyin, K. Golos, and Z. Xia. In-phase and out-of-phase multiaxial fatigue. *Transaction of ASME*, 113 :112–118, 1991.

- [Fin59] W.N. Findley. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 81, 1959.
- [Fla01] L. Flacelière. *Prise en compte de défauts matériaux sur l'endurance par un critère non local*. Rapport de DEA, LMPM-ENSMA de Poitiers, 2001.
- [FLD92] C. Froustey, S. Lasserre, and L. Dubar. Essais de fatigue multiaxiaux et par blocs, validation d'un critère pour les matériaux métalliques. In L. Castex, G. Pluvinage, and L. Vincent, editors, *Mat-Tec 92*, pages 79–85. Institute for Industrial Technology Transfer, 1992.
- [FMN03] L. Flacelière, F. Morel, and Y. Nadot. Approche probabiliste en fatigue multiaxiale polycyclique : application aux défauts de fonderie. In *Fatigue et procédés de fabrication*. SF2M, 2003. Journées de printemps.
- [Fou97a] C. Fournier. Dimensionnement probabiliste des structures : application au dimensionnement de réservoirs. *Rev. Française Mécanique*, (1) :35–42, 1997.
- [Fou97b] C. Fournier. *Fiabilité et mécanique : dimensionnement probabiliste des structures : application aux enceintes sous pression*. PhD thesis, Université de Clermont II, France, 17 Juillet 1997. 161 p.
- [FRB95] M. Fogue, J.L. Robert, and J. Bahuaud. Contribution à l'analyse de critères de fatigue multiaxiaux périodiques. *Mécanique Industrielle et Matériaux*, 48(3) :136–140, septembre 1995.
- [Fre68] A.M. Freudenthal. Statistical approach to brittle materials. In H. Liebowitz, editor, *Fracture*, volume 2, pages 591–619, New-York, 1968. Academic Press.
- [Fro87] C. Froustey. *Fatigue multiaxiale en endurance de l'acier 30 NCD 16*. PhD thesis, ENSAM CER de Bordeaux, France, Septembre 1987.
- [Gal93] A. Galtier. *Contribution à l'étude de l'endommagement des aciers sous sollicitations uni ou multiaxiales*. PhD thesis, ENSAM CER de Bordeaux, 1993.
- [Gar81] Y. Garud. A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings. *Trans. of the ASME*, 103 :118–125, 1981.
- [GP35] H.J. Gough and H.V. Pollard. The strength of metals under combined alternating stresses. In *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers*, volume 131, pages 1–103, London, November 1935.
- [GPG51] H.J. Gough, H.V. Pollard, and W.J. Glenshaw. *Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stresses*. Aeronaut. research council reports and memoranda, 1951. 141 p.
- [Gra92] B. Grais. *Méthodes statistiques*. Ed. Dunod, 1992. (401 p).
- [GSP95] G. Glinka, G. Shen, and A. Plumtree. A multiaxial fatigue strain energy density parameter related to the critical fracture plane. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 18(1) :37–46, 1995.

- [GWP95] G Glinka, G. Wang, and A. Plumtree. Mean stress effects in multiaxial fatigue. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 18 :755–764, 1995.
- [HDFB03] F. Hild, C. Denaoual, P. Forquin, and X. Brajer. On the probabilistic-deterministic transition involved in a fragmentation process of brittle materials. *Computers and Structures*, 81 :1241–1253, 2003.
- [Her86] J.P. Herteman. Les relations entre structures et propriétés de fatigue des alliages de titane. *Matériaux et Techniques*, Sept 1986.
- [Hil67] R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metals composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 1967.
- [HM92] F. Hild and D. Marquis. A statistical approach to the rupture of brittle materials. *Eur. J. Mechanics, A/Solids*, 11 :753–765, 1992.
- [HNL99] G.K. Haritos, T. Nicholas, and D.B. Lanning. Notch size effects in HCF behavior of Ti-6Al-4V. *Int. J. Fatigue*, 21 :643–652, 1999.
- [KK79] H. Kakuno and Y. Kawada. A new criterion of fatigue strength of a round bar subjected to combined static and repeated bending and torsion. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 1979.
- [KKT01] D. Kocanda, S. Kocanda, and H. Tomaszek. Experimental analysis and modelling of short and long fatigue crack growth in a titanium alloy notched member. pages 105–124, 2001.
- [Kug61] R. Kuguel. A relation between theoretical stress concentration factor and fatigue notch factor deduced from the concept of highly stressed volume. In *ASTM 61*, pages 732–748, 1961.
- [LC88] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1988. 544 p.
- [LE84] D. Lefebvre and F. Ellyin. Cyclic response and inelastic strain energy in low cycle fatigue. *Int. J. Fatigue*, 6 :9–15, 1984.
- [Lee85] S.B. Lee. A criterion for fully reversed out-of-phase torsion and bending. In K.J. Miller and M.W. Brown Eds, editors, *Multiaxial Fatigue, ASTM STP 853*, pages 553–568, Philadelphia, 1985. American Society for Testing and Materials.
- [Leg93] L. Legendre. *Etude de l'influence de la microstructure sur l'endommagement en fatigue oligocyclique d'alliages de Titane TA6V*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1993.
- [Lie82] H.P. Lieurade. *La pratique des essais de fatigue*. Pyc edition, 1982. Commission Fatigue des Métaux de la SF2M.
- [LK71] J.J. Lucas and P.P. Konieczny. Relationship between alpha grain size and crack initiation fatigue strength in Ti-6Al-4V. *Metallurgical transactions*, 2 :911–922, 1971.

- [Mai99] S. Mailly. *Effets de la température et de l'environnement sur la résistance à la fatigue d'alliages de Titane*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1999.
- [Man71] J. Mandel. Plasticité classique et viscoplasticité. In *Courses and lectures of CISM*, number 97, New-York, 1971. Springer-Verlag Publishers.
- [Mar56] J. Marin. Interpretation of fatigue strengths for combined stresses. In *Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals*, pages 184–194, London, 1956. Institution of Mechanical Engineers.
- [Mas55] C. Massonnet. Contribution expérimentale à l'étude de l'effet de l'échelle et des entailles. *Revue Universelle des Mines*, (9) :203–222, 1955.
- [Mat80] T. Mataka. Fatigue strength of notched specimen under combined stress. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 23(179) :623–629, 1980.
- [McD94] D.L. McDiarmid. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue for design and life prediction. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol.17(No.12) :1475–1484, 1994.
- [ML74] C. Marcovici and J.C. Ligeron. *Utilisation des techniques de fiabilité en mécanique*. Technique et documentation, Paris, 1974.
- [MM00] A. Motreff and W. Miermont. Endommagement d'une fonte à graphite sphéroïdale en fatigue à grande durée de vie dans des zones avec gradients de contraintes. Technical report, P.F.E. RENAULT / ENSAM-LAMEFIP, 2000.
- [MMN99] R.J. Morrissey, D.L. McDowell, and T. Nicholas. Frequency and stress ratio effect in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V. *Int. J. Fatigue*, 21 :679–685, 1999.
- [Moo45] H.F. Moore. A study of size effect and notch sensitivity in fatigue tests of steel. In *ASTM 45*, pages 507–531, 1945.
- [Mor96] F. Morel. *Fatigue multiaxiale sous chargement d'amplitude variable*. PhD thesis, ENSMA de Poitiers, 1996.
- [Mor98] F. Morel. A fatigue life prediction method based on a mesoscopic approach in constant amplitude multiaxial loading. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 21 :241–256, 1998.
- [Mor00] F. Morel. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading. *Int. J. Fatigue*, 22 :101–119, 2000.
- [MP102] F. Morel and T. Palin-luc. A non-local theory applied to high cycle multiaxial fatigue. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 25(7) :649–665, 2002.
- [MPLF01] F. Morel, T. Palin-Luc, and C. Froustey. Comparative study and link between mesoscopic and energetic approaches in high cycle multiaxial fatigue. *Int. J. Fatigue*, 23(4) :317–327, 2001.
- [MS99] E. Macha and C.M. Sonsino. Energy criteria of multiaxial fatigue failure. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 22 :1053–1070, 1999.

- [Mur81] Y. Murakami. *Stress Intensity Factors Handbook*. 1981.
- [NB76] D.F. Neal and P.A. Blenkinsop. Internal fatigue origins in alpha-beta titaniums alloys. *Acta Metallurgica*, 24 :59–63, 1976.
- [NK41] T. Nishihara and M. Kawamoto. The strength of metals under combined alternating bending and torsion. In *Memoirs of the College of Engineering*, volume 10, pages 177–201. Kyoto Imperial University, 1941.
- [Pap94] I.V. Papadopoulos. A new criterion of fatigue strength for out-of-phase bending and torsion of hard metals. *Int. J. Fatigue*, 16(6) :377–384, 1994.
- [Pap99] I. Papadopoulos. A selective review of high-cycle fatigue criteria with application in out-of-phase bending and torsion. *Engineering Against Fatigue*, pages 399–406, 1999.
- [Pap01] I.V. Papadopoulos. Long life fatigue under multiaxial loading. *Int. J. Fatigue*, 23 :839–849, 2001.
- [PDG⁺97] I. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini, and A. Bernasconi. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *Int. J. Fatigue*, 19(3) :219–235, 1997.
- [Pet74] R. Peterson. *Stress concentration factors*. Wiley interscience, New-York, 1974.
- [PGL80] M. Peters, A. Gysler, and G. Lutjering. *Titanium'80 science and technology*, chapter Influence of microstructure on the fatigue behavior of Ti-6Al-4V, pages 1777–1786. 1980.
- [P196] T. Palin-luc. *Fatigue multiaxiale d'une fonte GS sous sollicitations combinées d'amplitude variable*. PhD thesis, ENSAM CER de Bordeaux, 1996.
- [PLL94] T. Palin-Luc and S. Lasserre. Multiaxial fatigue testing machine under variable amplitude loading of bending and torsion. In J.F. Silva Gomes et al., editor, *Recent Advances in Experimental Mechanics*, Rotterdam, 1994. A.A. Balkema.
- [PLL98] T. Palin-Luc and S. Lasserre. An energy based criterion for high cycle multiaxial fatigue. *Eur. J. Mechanics, A/Solids*, 17(2) :237–251, 1998.
- [PLL00] T. Palin-Luc and S. Lasserre. Prise en compte des concentrations de contraintes par un critère énergétique de tenue en fatigue. *Rev. Française Mécanique*, 2000-1 :41–48, 2000.
- [PLLB98] T. Palin-Luc, S. Lasserre, and J.-Y. Bérard. A volumic approach in high cycle fatigue to predict the fatigue strength of notched components. In G. Marquis and J. Solin, editors, *Fatigue Design 98*, pages 73–84, 1998.
- [PP96] I.V. Papadopoulos and V. P. Panoskaltis. Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(4) :513–528, 1996.

- [QAK⁺99] G. Qilafku, Z. Azari, N. Kadi, M. Gjonaj, and G. Pluinage. Application of a new model proposal for fatigue life prediction on notches and key-seats. *Int. J. Fatigue*, 21 :753–760, 1999.
- [QDA⁺01] G. Qilafku, N. Kadi J. Dobranski, Z. Azari, M. Gjonaj, and G. Pluinage. Fatigue of specimens subjected to combined loading. role of hydrostatic pressure. *Int. J. Fatigue*, 23 :689–701, 2001.
- [RDB⁺99] R.O. Ritchie, D.L. Davidson, B.L. Boyce, J.P. Campbell, and O. Roder. High cycle fatigue of Ti-6Al-4V. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 22 :621–631, 1999.
- [RK96] B. Rezaig and J.R. Klepaczko. Etude bibliographique sur l’alliage de titane TA6V, sensibilité à la vitesse et chargement dynamique. Technical report, Université de Metz, 1996.
- [Rob92] J.L. Robert. *Contribution à l’étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, janvier 1992.
- [Ros97] H.P. Rossmannith. *Fracture research in retrospect*, chapter The struggle for recognition of engineering fracture mechanics, pages 37–93. A.A Balkema, Rotterdam, 1997.
- [SC54] F.B. Stulen and H.N. Cummings. A failure criterion for multiaxial fatigue stresses. In *American Society for Testing and Materials*, volume 54, Philadelphia, 1954.
- [Sch03] J. Schijve. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *Int. J. Fatigue*, 23(8) :679–702, 2003.
- [SE76] R.K. Steele and A.J. Mc Evily. The high cycle fatigue behaviour of TA6V. *Engng. Frac. Mech.*, 8 :31, 1976.
- [Sin55] G. Sines. Failure of materials under combined repeated stresses with superimposed static stress. Technical report, NACA Technical Note 3495, Washington, 1955.
- [Sin59] G. Sines. *Behavior of metals under complex static and alternating stresses*, pages 145–169. Mc Graw-Hill, New-York, 1959.
- [SKG97] C.M. Sonsino, H. Kaufmann, and V. Grubisic. Transferability of material data for the example of a randomly loaded forged truck stub axle. In *SAE Tech. Paper Series*, number 970708, pages 1–22, Detroit, February 1997.
- [SKS89] M. Sugano, S. Kanno, and T. Satake. Fatigue behaviour of titanium in vacuum. *Acta Metallurgica*, 37(7), 1989.
- [Smi42] J. Smith. The effects of range of stress on fatigue strength of metals. *Engineering Experiment Station*, 39(26) :1–52, 1942.

-
- [SP69] M. Schwob and G. Peyrache. *Traité de fiabilité*. Ed. Masson et Cie, 1969. 426 p.
- [Sér70] M. Séraphin. Le titane et ses alliages. *Science et profession*, 1970.
- [Tec95] TechLab. Logiciel ESOPE : Estimation statistique par ordinateur des paramètres de l'endurance, 1995.
- [TEIH03] G. Toplack, W. Eichlseder, G. Istan, and L. Heinz. Influence of size and type of loading on S/N curve. In *New trends in fatigue and fracture II*, Hammamet, Tunisia, 2003.
- [Van73] K. Dang Van. Sur la résistance à la fatigue des métaux. In *Sciences et techniques de l'Armement*, number 47, pages 641–722. 1973.
- [WCKR99] B. Weber, A. Carmet, B. Kenmeugne, and J. L. Robert. On a global stress based approach for fatigue assessment under multiaxial random loading. *Engineering against fatigue*, pages 407–414, 1999.
- [Wei39a] W. Weibull. The phenomenom of rupture in solids. *Proc. Royal Swedish Inst. Eng. Res.*, (153) :1–55, 1939.
- [Wei39b] W. Weibull. A statistical theory of the strength of material. *Roy. Swed. Inst. Eng. Res.*, (151), 1939.
- [WLJJ01] B. Weber, F. Labesse-Jied, and J.L.Robert. Comparison of multiaxial high cycle fatigue criteria and their application to fatigue design of structures. In *Sixth International Conference on Biaxial and Multiaxial Fatigue and Fracture*, Lisboa, juin 2001. ESIS.
- [YXG94] X. Yao, K. Xia, and Y. Gu. On the fatigue notch factor kf. *Int. J. Fatigue*, 17(4) :245–251, 1994.

Notations

$A(\%)$	Allongement après rupture en traction monotone
A, B, C, E	Paramètres statistiques liés aux modèles de courbe S-N
a	Taille d'un défaut modélisé comme une fissure
C_i	Point critique de la pièce, où W_f admet un maximum local
C_a	Amplitude de la contrainte de cisaillement sur un plan matériel
$dT(M)$	Degré de triaxialité des contraintes
E	Module d'Young
$ERP(\%)$	Erreur relative de prévision en %
$F(dT, \beta)$	Fonction empirique dépendant du degré de triaxialité et du paramètre β
$\sigma_{Fp,0}^D$	Limite d'endurance en flexion plane répétée
$\sigma_{Fp,-1}^D$	Limite d'endurance en flexion plane alternée symétrique
$\sigma_{Fr,-1}^D$	Limite d'endurance en flexion rotative symétrique
G	Module de cisaillement
I_1	Premier invariant du tenseur des contraintes
J_2	Deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes
k^*	Module d'écrouissage de la courbe de Ramberg-Osgood (chgt cyclique)
M_σ	Moyenne de l'amplitude de la cission résolue dans le volume élémentaire
m	penne de Weibull
N_r	Nombre de cycles à l'amorçage
N_{max}	Contrainte normale maximale
P_f	Probabilité de défaillance ou de fissuration
R_σ	Rapport de chargement ($\sigma_{min}/\sigma_{max}$).
R_m	Résistance maximale à la traction monotone
$R_{p0.2}$	Limite d'élasticité à 0.2 % de déformation plastique

$R_{p0.02}$	Limite d'élasticité à 0.02 % de déformation plastique
s	Ecart-type de la distribution
\bar{s}	Estimateur de l'écart-type
$S^*(C_i)$	Surface d'influence au point critique C_i
T	Période
$V^*(C_i)$	Volume d'influence autour du point critique C_i
$W_a(M)$	Densité volumique d'énergie élastique moyenne sur T , en M
$W_f(M)$	Densité volumique de travail de déformation (état adapté) fourni à un élément de volume en M
$W_{f_{Fp+To}}(M)$	Valeur de W_f en flexion plane et torsion combinées
$W_f^D(M)$	Valeur de W_f à la limite d'endurance
$W_f^v(M)$	Partie de W_f responsable du changement de volume
$W_{f_{Trac+To}}(M)$	Valeur de W_f en traction et torsion combinées
$W_{f_{Fr}}(M)$	Valeur de W_f en flexion rotative (dissymétrique)
$W_{f_{Trac\ biax}}(M)$	Valeur de W_f en traction biaxiale
$W_{f_{eq,soll}}$	Densité volumique du travail de déformation fourni (état adapté) équivalent à un état de contrainte uniaxiale
W_u	Densité de travail de déformation élastique de Weibull
W_a^*	Seuil de non endommagement relatif à W_a
W_f^*	Seuil de non endommagement associé à W_f
X	Variable aléatoire
$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t)$	Tenseur des contraintes au point M à l'instant t
Σ_a	amplitude de la contrainte de flexion
Σ_{Hmax}	contrainte hydrostatique maximale
ϕ	déphasage entre les contraintes de flexion et de torsion sous sollicitations combinées
μ	Espérance mathématique (ou moyenne) d'une distribution
$\bar{\mu}$	Estimateur de la moyenne
$w_{f_{uniax}}^D$	Valeur seuil à la limite d'endurance de w_f , pour un état de contrainte uniaxial

$w_f(C_i)$	Moyenne volumique dans V^* de $[W_f(M) - W_f^*(C_i)]$ autour de C_i
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Paramètres matériaux des critères de fatigue en endurance
φ	Densité volumique de probabilité
φ_u	Paramètre d'échelle
ε_{ij}^p	Composantes du tenseur des déformations plastiques
$\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}$	Composantes du tenseur des déformations élastiques
ρ	Rapport de déformation
σ_a	Amplitude de contrainte
σ_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Contraintes principales
$\bar{\sigma}$	Valeur moyenne de la contrainte
ν, ν_e	Coefficient de Poisson (en élasticité)
σ_H	Contrainte hydrostatique mésoscopique
σ_n	Contrainte normale à un plan de normale \underline{n}
σ_u	Contrainte de Weibull
ε_n	Déformation normale à un plan de normale \underline{n}
σ_E	Contrainte élastique équivalente
$\Delta\sigma$	Etendue de contrainte
$\Delta\varepsilon^t$	Etendue de déformation totale
$\Delta\varepsilon^e$	Etendue de déformation élastique
$\Delta\varepsilon^p$	Etendue de déformation plastique
ΔW_t	Densité volumique d'énergie mécanique totale de déformation
ΔW^e	Densité volumique d'énergie de déformation élastique
ΔW^p	Densité volumique d'énergie de déformation plastique
$\tau_{oct,a}$	Amplitude de la cission octaédrale
$\tau_{oct,m}$	Valeur moyenne de la cission octaédrale
τ_a	Amplitude de la contrainte de cisaillement
$\underline{\tau}$	Cission microscopique
$\sigma_{-1}^D, \sigma_{Trac,-1}^D$	Limite d'endurance en traction alternée symétrique
$\sigma_{Trac,0}^D$	Limite d'endurance en traction répétée
τ_{-1}^D	Limite d'endurance en torsion alternée symétrique
τ_y	Limite d'élasticité en cisaillement du cristal

Annexes

Annexe 1 : Critères de fatigue multiaxiale

Approche locale : échelle macroscopique

Critères empiriques : Gough et Pollard, Soon Book Lee, Nishihara et Kawamoto

Critère de Gough et Pollard [GP35], [GPG51] A partir de nombreux essais de flexion-torsion combinées alternées symétriques sur différents aciers et deux fontes, Gough et Pollard ont déduit une relation empirique qui corrélait au mieux leurs résultats expérimentaux. Ils distinguent les matériaux ductiles des matériaux fragiles en proposant deux formulations décrivant des courbes de résistance à la fatigue dans le diagramme $(\sigma_a - \tau_a)$ pour une durée de vie donnée.

– matériaux ductiles :

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{Fp,-1}^D} \right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}^D} \right)^2 \leq 1 \quad (4.2)$$

où σ_a et τ_a sont respectivement les amplitudes des contraintes de flexion et de torsion, $\sigma_{Fp,-1}^D$ et τ_{-1}^D désignent les limites de fatigue respectivement en flexion plane et en torsion alternée symétriques. L'équation 4.2 est l'équation d'une ellipse.

– matériaux fragiles :

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}^D} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{Fp,-1}^D} \right)^2 + \left(2 - \frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D} \right) \frac{\sigma_a}{\sigma_{Fp,-1}^D} \leq 1 \quad (4.3)$$

Cette équation est un arc elliptique. Les deux formulations coïncident pour $\sigma_{Fp,-1}^D/\tau_{-1}^D = 2$.

Critère de Soon Book Lee [Lee85] De nombreux auteurs se sont inspirés du travail de Gough et Pollard. Ainsi Soon Book Lee a étendu le critère précédent aux chargements de flexion-torsion combinées hors phase, sans chargement moyen pour des matériaux ductiles. Il introduit un exposant α dépendant du déphasage ϕ entre les deux sollicitations.

$$\alpha = 2(1 + \beta \sin \phi) \quad (4.4)$$

où β est une constante liée au matériau. Le critère est donné par la relation suivante :

$$\Sigma_a \left[1 + \left(\frac{\tau_a \sigma_{Fp,-1}^D}{\sigma_a \tau_{-1}^D} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 \quad (4.5)$$

Ce critère est dépendant du déphasage ϕ alors qu'expérimentalement en endurance l'effet du déphasage est considéré comme négligeable [Fro87].

Critère de Nishihara et Kawamoto [NK41] Nishihara et Kawamoto proposent deux modèles issus de leurs constatations expérimentales dépendant de la valeur du ratio des limites de fatigue $\frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D}$ ce qui revient une nouvelle fois à distinguer les matériaux ductiles ($\frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D} \geq \sqrt{3}$) des matériaux fragiles ($\frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D} \leq \sqrt{3}$) [BFGT92].

Ces modèles s'écrivent :

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{Fp,-1}^D}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}^D}\right)^2 \leq 1 \text{ si } \frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D} \geq \sqrt{3} \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}^D}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D}\right)^2\right] \frac{\sigma_a}{\sigma_{Fp,-1}^D} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D}\right)^2 - 1\right] \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{Fp,-1}^D}\right)^2 \leq 1 \text{ si } \frac{\sigma_{Fp,-1}^D}{\tau_{-1}^D} \leq \sqrt{3} \quad (4.7)$$

Critères liés à un plan particulier

Critère de Kakuno et Kawada [KK79] Etabli en 1979, ce critère modifie le critère de Sines afin qu'il corrèle au mieux les résultats expérimentaux. Pour cela, les auteurs introduisent une variable supplémentaire, l'amplitude de la contrainte hydrostatique Σ_{Ha} :

$$\tau_{oct,a} + \alpha \Sigma_{Hmoy} + \gamma \Sigma_{Ha} \leq \beta \quad (4.8)$$

Les trois constantes peuvent être identifiées par des essais en torsion et flexion alternées symétriques (τ_{-1}, f_{-1}) et en flexion répétée (f_0) sur des éprouvettes lisses :

$$\alpha = 3\tau_{-1} \left(\frac{2}{f_0} - \frac{1}{f_{-1}}\right)$$

$$\beta = 3\frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3}$$

$$\gamma = \tau_{-1}$$

Le domaine d'application du critère, imposé par les conditions $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, est défini par : $\frac{f_{-1}}{f_0} > \frac{1}{2}$ et $\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} > \sqrt{3}$ (cas des matériaux ductiles [Mor96]).

Critères de Stulen et Cummings [SC54], Findley [Fin59] et Mataka [Mat80] Ces trois critères proposent la même formulation mais différent par le choix du plan critique :

$$C_a(\underline{n}_c) + \alpha N_{max}(\underline{n}_c) \leq \beta \quad (4.9)$$

où $C_a(\underline{n}_c)$ est l'amplitude de la contrainte de cisaillement sur le plan critique P_c de normale \underline{n}_c , $N_{max}(\underline{n}_c)$ la contrainte normale maximale à ce plan. Pour la détermination du plan critique, les auteurs proposent les variantes suivantes :

– Stulen et Cummings :

$$P_c : \max_{\underline{n}} \left[\frac{C_a(\underline{n}_c)}{\beta - \alpha N_{max}(\underline{n})} \right] \quad (4.10)$$

– Findley :

$$P_c : \max_{\underline{n}} [C_a(\underline{n})] \quad (4.11)$$

– Matake :

$$P_c : \max_{\underline{n}} [\| C(\underline{n}, t) \|] \quad (4.12)$$

où $\| C(\underline{n}, t) \|$ est le module de la cission sur le plan critique.

Approche locale : échelle mésoscopique

Critère de Deperrois [Dep91] Les approches de Dang-Van et Papadopoulos reposent sur l'hypothèse d'un seul système de glissement actif par grain, ce qui n'est a priori pas nécessairement le cas pour des sollicitations multiaxiales déphasées. Fort de ce constat, Deperrois a souhaité proposer un critère équivalent aux critères de Dang-Van et Papadopoulos dans le cas de trajets radiaux et plus performant dans le cas de trajets complexes.

On se place dans l'espace du déviateur des contraintes, le trajet de chargement projeté dans cet espace décrit une courbe fermée Ψ (figure 4.29). Soit \underline{D} la plus grande corde inscrite dans la courbe Ψ et soit H l'hyperplan orthogonal à ce vecteur \underline{D} . La projection de la courbe Ψ sur le sous-espace H est une courbe fermée Ψ' . La plus grande corde inscrite dans cette courbe est notée \underline{D}' et $A(\Psi)$ représente la mesure de la courbe Ψ définie par :

$$A(\Psi) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\| \underline{D} \|^2 + \| \underline{D}' \|^2} \quad (4.13)$$

Le critère est une combinaison de $A(\Psi)$ et de la contrainte hydrostatique maximale Σ_{Hmax} :

$$A(\Psi) + \alpha \Sigma_{Hmax} \leq \beta \quad (4.14)$$

L'identification des constantes se fait à partir des limites d'endurance en torsion alternée et en flexion rotative sur éprouvettes lisses :

$$\alpha = \frac{\tau_{-1}^D - \frac{\sigma_{Fr,-1}^D}{3}}{\frac{\sigma_{Fr,-1}^D}{\sqrt{3}}} \quad \text{et} \quad \beta = \tau_{-1}^D$$

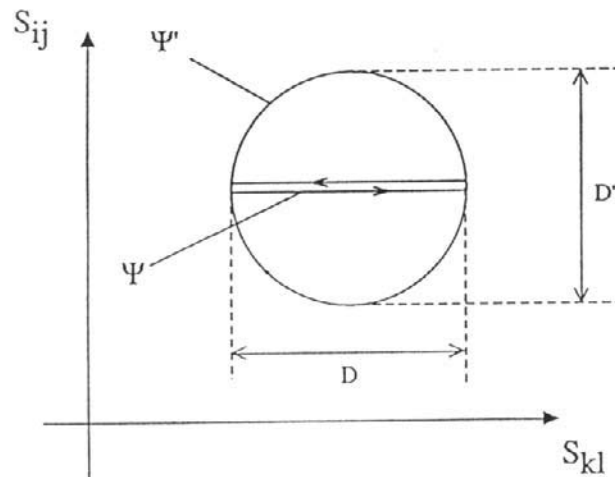


FIG. 4.29 – Définition des deux cordes D et D'

Critère de Robert [Rob92] [WCKR99] Le critère de Robert a été établi en 1992 [Rob92] et a subi depuis plusieurs évolutions. Les derniers travaux sur ce critère ont été réalisés par Weber [WCKR99]. Il dissocie les influences respectives des parties moyenne et alternée des contraintes normales sur chaque facette de normale \underline{n} et les combine avec la partie alternée de la contrainte tangentielle. A chaque facette de normale \underline{n} , l'auteur définit un indicateur d'endommagement :

$$E(\underline{n}, t) = \|\underline{\tau}(\underline{n}, t)\| + \alpha N_a(\underline{n}, t) + \beta N_m(\underline{n}, t) \quad (4.15)$$

La recherche du plan physique critique passe par la double maximisation de l'indicateur d'endommagement :

$$E_{max} = \frac{\max_{\underline{n}} \{\max_t [E(\underline{n}, t)]\}}{\theta} \quad (4.16)$$

Le critère comporte trois constantes α , β , θ dépendant de trois limites de fatigue sur éprouvettes lisses : traction alternée symétrique σ_{-1} , traction répétée σ_0 , torsion alternée symétrique τ_{-1} .

$$\alpha = \frac{\frac{2\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1}{\sqrt{\frac{2\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{2\tau_{-1}}{\sigma_{-1}}\right)}}, \quad \beta = \tau_{-1} \sqrt{\alpha^2 + 1} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2\theta}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{8\theta} - \alpha \quad (4.17)$$

Le domaine d'application du critère est défini par : $\frac{1}{2} < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < 1$ et $\frac{1}{2} < \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} < 1$. Un gros inconvénient de ce critère est qu'il nécessite trois limites d'endurance, dont celle de traction répétée ($R_\sigma = 0$).

Annexe 2 : Comportement en fatigue de l'alliage de titane Ti-6Al-4V

Présentation générale des alliages de titane [CH76], [DBM89], [RK96], [Sér70]

Le titane¹³ a été découvert en 1790 par W. Grégor. Ce n'est que vers 1950 que l'on a pu assister à son utilisation industrielle restée difficile jusqu'alors à cause des difficultés de sa métallurgie extractive. Le titane et ses alliages ont connu durant la seconde moitié du XXème siècle un développement très rapide en raison d'un certain nombre de caractères spécifiques parmi lesquels on peut citer :

- une faible masse volumique voisine de 4500 kg/m³, intermédiaire entre celles des alliages légers (autour de 3000 kg/m³) et celle des aciers (autour de 7800 kg/m³).
- une bonne résistance mécanique, associée à de bonnes propriétés de fatigue et de résistance à l'effet d'entaille.
- une résistance à la corrosion intéressante, dans une gamme de milieux assez vaste en particulier pour les industries du chlore.
- de bonnes propriétés cryogéniques pour certains d'entre eux.
- l'amagnétisme.

Ces caractéristiques remarquables font que le titane et ses alliages sont devenus des matériaux essentiels pour les industries aéronautiques et spatiales. Cependant, les applications dans les secteurs de la chimie, de l'électro-chimie, l'électronique et la mécanique deviennent de plus en plus importantes.

Généralités sur le titane

Le titane présente des caractéristiques mécaniques nettement supérieures à celles du fer qui peuvent encore être améliorées dans certains alliages. La résistance élastique spécifique à la traction, c'est-à-dire le rapport R/ρ (limite d'élasticité en traction/masse volumique) atteint une valeur maximale (de l'ordre de 0,34) pour certains alliages de titane ; le ratio est nettement supérieur à celui des autres métaux (figure 4.30). Son module d'Young vaut environ 110 GPa et son coefficient de Poisson ν est de l'ordre 0,3. Le titane se présente sous deux structures cristallines avec transformation réversible vers une température de 882°C :

- le titane α , stable jusqu'à 882°C, cristallise dans le système hexagonal compact,
- le titane β , plus léger que le titane α , est stable de 882°C jusqu'au point de fusion (1660°C) et cristallise dans le système cubique centré.

La transformation allotropique $\beta \Leftrightarrow \alpha$ se fait par transformation martensitique, ce phénomène a une très grande influence sur les microstructures du titane et de ses alliages. L'addition d'un élément d'alliage fait apparaître un domaine $\beta + \alpha$. Les éléments dits al-

¹³Ti dans la classification périodique des éléments

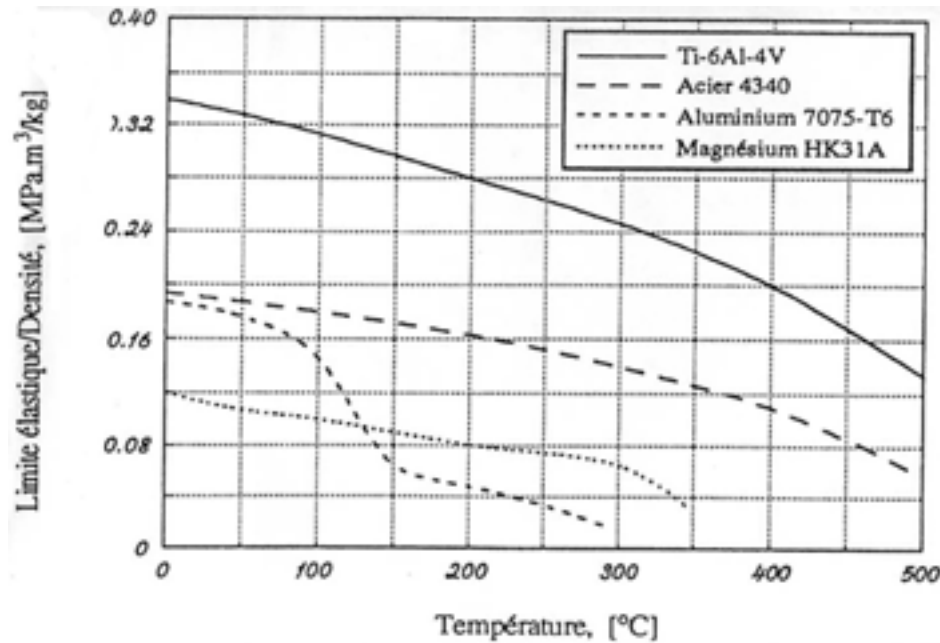


FIG. 4.30 – Comparaison des limites d'élasticité spécifiques pour quelques matériaux, d'après [DBM89].

phagènes (Aluminium et éléments en solution d'insertion O, C, N) élargissent le domaine α et élèvent la température de transformation $\alpha \Rightarrow \beta$. Les éléments dits bêtagènes (Vanadium, Fer, Chrome...) accroissent le domaine β et abaissent le point de transformation.

Les alliages industriels de titane sont classés selon leur structure à température ambiante, en alliages α , α - β et β (figure 4.31). Des alliages un peu à part sont les aluminures de titane, nous y reviendrons plus en détail par la suite.

Les différents types d'alliage

Alliages α : Ils sont stables sous contrainte à chaud jusque vers 500-550°C, résistants et tenaces dans le domaine des températures cryogéniques, généralement plus résistants à l'oxydation que les deux autres alliages (β et α - β). Les alliages α résistent bien au fluage (jusqu'à 650°C). Par contre, ils sont difficiles à déformer à froid et ne répondent pas, ou faiblement, aux traitements thermiques; ils sont généralement utilisés à l'état recuit ou "stabilisé".

Alliages β : Ils se prêtent bien à la déformation à température ambiante mais, du fait de leur structure cubique centrée, présentent une transition ductile-fragile vers -60°C. Leur structure β devenant instable à 350°C, ces alliages sont difficilement utilisables à chaud.

Alliages α - β : Ces alliages biphasés sont les plus utilisés dans l'industrie aéronautique. Ils acquièrent après traitements thermiques des propriétés mécaniques élevées, ce

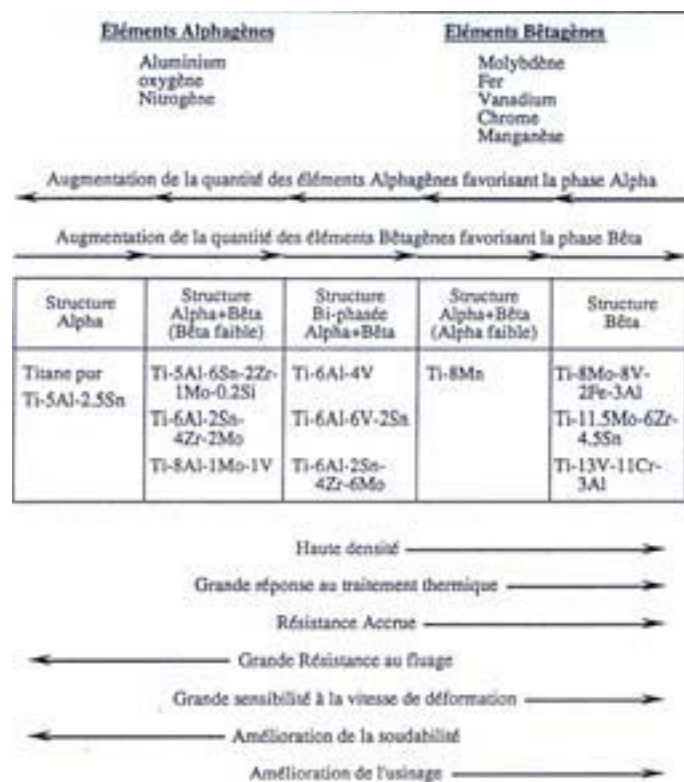


FIG. 4.31 – Effets des éléments d'alliage du titane sur la microstructure, caractéristiques physiques et mécaniques des alliages obtenus [CH76].

qui ne les empêchent pas de conserver une bonne ductilité. Ils sont stables sous contraintes à chaud jusqu'à 450 à 500°C.

Aluminures de Titane : Ces alliages particuliers sont actuellement en plein développement et font l'objet de vastes programmes de recherche. Ils sont à base de Titane et d'Aluminium : TiAl, Ti₃Al. Ces alliages sont beaucoup plus légers et résistants à plus haute température que les alliages de titane courants. A chaud, ces alliages présentent une bonne résistance à la traction et à l'oxydation. Ils sont par contre fragiles et difficiles à mettre en oeuvre à température ambiante, ce qui freine relativement leur expansion.

Les propriétés mécaniques de quelques alliages de titane sont présentées dans le tableau 4.3.

L'alliage de titane Ti-6Al-4V

Composition chimique, propriétés mécaniques et traitements thermiques du Ti-6Al-4V

L'alliage de titane Ti-6Al-4V (6% d'Aluminium et 4% de Vanadium) que nous allons étudié dans le cadre de ce travail, est certainement l'alliage de titane le plus couramment employé. Il représente environ 50% de la production mondiale totale d'alliages de titane et offre une excellente combinaison entre résistance mécanique et ténacité [DBM89]. Il est

Type d'alliage de titane	Désignation	Traitement thermique	$R_{0,2}$ (MPa)	R_m (MPa)	A(%)
α	99,2% Ti	Recuit	450	525	25
α	Ti-5Al-2,5Sn	Recuit	800	900	20
super α	Ti-8Al-1Mo-1V	Trempé-Revenu	950	1000	15
$\alpha + \beta$	Ti-6Al-4V	Recuit	950	1000	15
		Trempé-Revenu	1120	1200	10
$\alpha + \beta$	Ti-6Al-6V-2Sn	Recuit	1000	1100	14
		Trempé-Revenu	1200	1300	10
β	Ti-13V-11Cr-3Al	Trempé-Revenu	1200	1250	8

TAB. 4.3 – Propriétés mécaniques en traction monotone quasi-statique de quelques alliages de titane après traitement thermique [DBM89].

notamment utilisé dans les domaines aéronautique et aérospatial pour la fabrication de récipients sous pression, d'éléments de structure, d'aubes de turbines et de compresseurs. Toutefois cet alliage a une température d'utilisation limitée à environ 400°C dans les turbomachines [Mai99]. Sa composition chimique typique est donnée dans le tableau 4.4. Les

Eléments	Ti	Al	V	C	Fe
% massique min.	Base	5,5	3,5	-	-
% massique max.	Base	6,75	4,5	4,5	0,30

TAB. 4.4 – Composition chimique typique de l'alliage de titane Ti-6Al-4V [DBM89]

propriétés mécaniques conventionnelles en traction monotone de l'alliage sont regroupées dans le tableau 4.5. Un exemple de microstructure de l'alliage Ti-6Al-4V, présentée figure

E GPa	ν	$R_{0,2}$ MPa	R_m MPa	A %	H Hv
110	0,3	850	1000	15	349

TAB. 4.5 – Propriétés mécaniques conventionnelles du Ti-6Al-4V d'après [BG00]

4.32, est composée de 50% de nodules α primaires formés au cours du forgeage dans le domaine $\alpha + \beta$ et de 50% de grains biphasés constitués de lamelles de phases α secondaires dans une matrice β . La microstructure est fortement dépendante du mode d'élaboration de l'alliage. La figure 4.33 représente le diagramme de phase du Ti-6Al-4V.

Comportement cyclique

Les alliages de Titane ont un fort effet mémoire dû à leur faible aptitude au glissement dévié [SE76]. De ce fait, les structures de dislocations contenues et le comportement associé sous certaines conditions cycliques sont totalement dépendants du trajet de chargement.

Legendre [Leg93] a mis en évidence à 20°C et 300°C, sur quatre nuances de Ti-6Al-4V (2 bi-modales et 2 globulaires), un adoucissement pour les fortes amplitudes

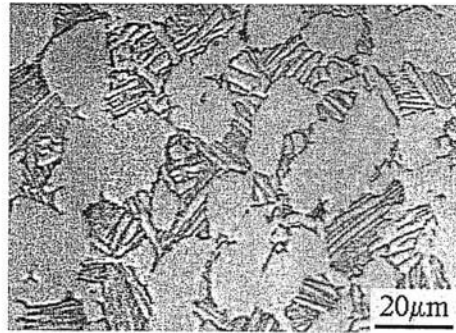


FIG. 4.32 – Exemple de microstructure du Ti-6Al-4V [BG00]

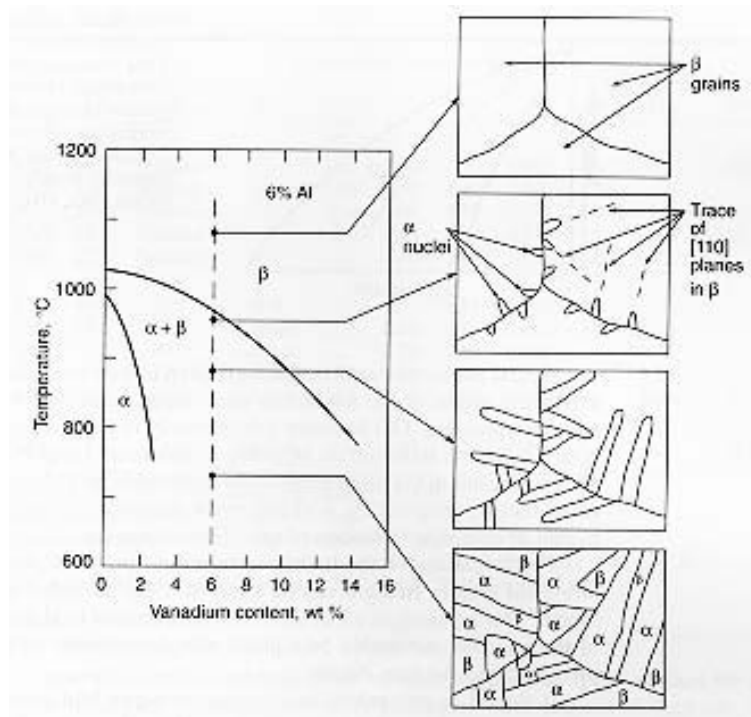


FIG. 4.33 – Diagramme de phase de l'alliage Ti-6Al-4V d'après [RK96]

de déformation et une stabilité des contraintes à plus faibles niveaux de sollicitations. Les courbes contraintes-déformations (figure 4.34) obtenues par Le Biavant [BG00] en traction-compression confirment cet adoucissement cyclique. Cet auteur fait remarquer la dissymétrie entre le comportement en traction et celui en compression ; la contrainte de compression étant inférieure de quelques dizaines de MPa, en valeur absolue, à celle obtenue en traction.

Traitements thermiques du Ti-6Al-4V

Voici quelques uns des traitements thermiques les plus souvent appliqués au Ti-6Al-4V d'après la littérature.

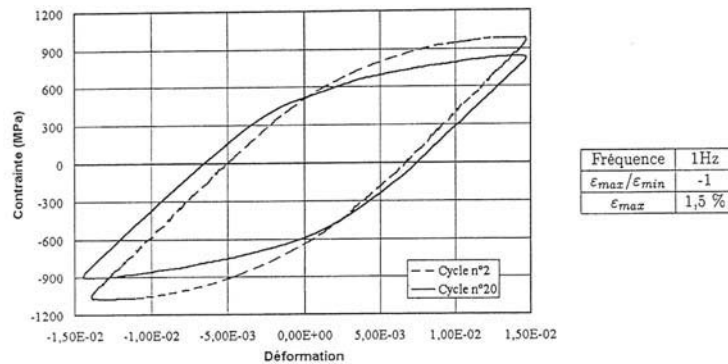


FIG. 4.34 – Courbes contraintes-déformation expérimentales obtenues au cours d'un essai de traction-compression cyclique à déformation imposée.

Le recuit classique : Pour obtenir un alliage “tendre” dans de relativement bonnes conditions d'usinabilité, l'alliage est chauffé à 730°C, dans un niveau bas de la région biphasée $\alpha+\beta$ (fig. 4.33), maintenu à cette température pendant 4h, puis refroidi lentement dans le four jusqu'à 25°C. Ce traitement produit une microstructure à cristaux β globuleux dans une matrice α .

Le double recuit : Ce traitement consiste à chauffer l'alliage à 955°C pendant 10 mn, suivi d'un refroidissement à l'air. Il est ensuite réchauffé à 675°C pendant 4h et enfin refroidi à l'air.

La mise en solution, trempe + revenu : Ce traitement consiste en un échauffement à 955°C pendant 10 mn suivi d'une **trempe rapide dans l'eau**, puis un maintien pendant 4h à une température comprise entre 540 et 675°C suivi cette fois d'un refroidissement à l'air. Ce traitement permet d'améliorer de 20 à 30% la résistance mécanique de l'alliage.

La morphologie (forme/position) des différentes phases changent selon le traitement thermique appliqué. La comparaison des propriétés mécaniques en traction monotone, obtenues après chacun des trois traitements thermiques précédents est présentée dans le tableau 4.6. D'une manière générale, on obtient les meilleures propriétés mécaniques des alliages de titane alpha-bêta en effectuant une mise en solution dans le domaine biphasé puis une trempe à l'eau et un revenu de quelques heures à une température comprise entre 500 et 700°C.

Résistance à la fatigue du Ti-6Al-4V

Les alliages de titane présentent une bonne tenue intrinsèque en fatigue, du moins si on la compare à celle d'autres matériaux à hautes résistances spécifiques tels que les aciers martensitiques ou les alliages d'aluminium. Mais cette résistance à la fatigue est

Traitement thermique	Limite élastique (MPa)	Résistance à la traction (MPa)	Allongement à rupture (%)
Recuit	945	1069	10
Double recuit	917	965	18
Trempe + revenu	1103	1151	13

TAB. 4.6 – Propriétés mécaniques en traction monotone quasi-statique du Ti-6Al-4V obtenues après divers traitements thermiques [RK96].

susceptible de varier dans de larges proportions selon la microstructure du produit et plus particulièrement selon sa mise en oeuvre thermomécanique [Her86].

Fatigue oligocyclique : Dans ce domaine, les mécanismes d'amorçages de fissures semblent associés à l'apparition de bandes de glissement dans la phase α comme l'ont constaté Demulsant et Mendez [DM95]. La présence de l'aluminium explique cette localisation du cisaillement qui peut conduire à l'amorçage de fissures de fatigue de façon précoce à 3% de la durée de vie selon Benson [BGS72].

Mailly [Mai99] montre, en analysant les courbes de Wöhler établies pour deux types de microstructures (lamellaire et équiaxe) et pour deux finesses de grain α (fine et grossière) (figure 4.35) selon les microstructures suivantes :

- lamellaire fine
- lamellaire grossière
- équiaxe fine
- équiaxe grossière

que la structure équiaxe dans tous les cas possède une meilleure tenue en fatigue oligocyclique que la structure lamellaire .

Fatigue à grand nombre de cycles : Pour les grandes durées de vie, un des sites préférentiels d'amorçage de fissures est l'interface entre les phases α et β [BGS72]. D'après Benson [BGS72], le mécanisme mis en jeu est une décohésion interfaciale sans localisation du glissement au voisinage de l'interface. Ce type d'amorçage se produit quel que soit l'état de surface de l'éprouvette, qu'elle ait subi un polissage mécanique ou électrolytique.

Un autre type de mécanisme d'amorçage, l'amorçage interne , a été observé par Neal et Blenkinsop [NB76] sur un alliage Ti-6Al-4V équiaxe. Les zones d'amorçage correspondent à des facettes dans des nodules ou des paquets de nodules. Ce mécanisme s'explique selon les auteurs par la localisation du glissement induite par la présence de l'aluminium parmi les éléments d'alliage.

Lucas et Konieczny [LK71] ont montré qu'abaisser la taille des grains alpha augmente la tenue en fatigue du Ti-6Al-4V aussi bien pour des éprouvettes lisses que pour des éprouvettes entaillées.

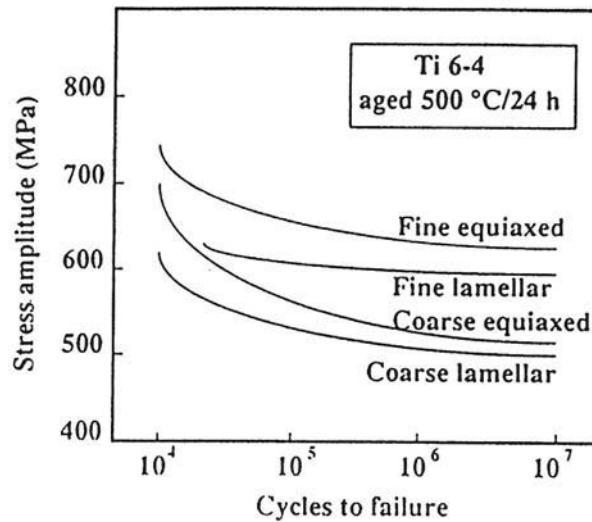


FIG. 4.35 – Influence de la microstructure et de la taille de grains α sur le comportement en fatigue oligocyclique du Ti-6Al-4V [Mai99].

Pour les alliages dont la microstructure est équiaxe, on observe les mêmes effets que pour les alliages α et surtout quasi- α concernant le rôle de la taille de grain, l'aluminium et l'oxygène favorisant la localisation de la déformation. Dans le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles, les alliages α montrent un retard au niveau de l'amorçage des fissures car les discontinuités de surface dues aux glissements (agissant comme des sites d'amorçage) sont retardés au niveau de leur formation [Mai99].

Atrens et al. [AHDA83] ont montré qu'un **changement dans les mécanismes d'amorçage des fissures de fatigue** apparaît pour des **durées de vie supérieures à 10^7 cycles** et que la limite de fatigue apparente (conventionnelle classique pour durées de vie "infinies") souvent vues dans l'intervalle compris entre 10^6 et 10^7 cycles chute au delà 10^7 cycles. L'extrapolation de cette limite d'endurance pour des durées de vie supérieures n'est pas possible. Il n'est même pas sûr qu'une limite de fatigue "vraie" pour le Ti-6Al-4V au delà 10^7 ou 10^8 cycles existe. L'existence d'un tel comportement a été attribué à un changement du mécanisme d'amorçage de fissures. Pour des durées de vie inférieures à 10^7 cycles, l'amorçage de fissures se produit généralement à la surface de l'éprouvette, alors que pour des durées de vie supérieures à 10^7 cycles les fissures apparaissent au dessous de la surface.

– Influence de l'environnement

Les essais sous vide se traduisent par des durées de vie plus longues que dans l'air mais ceci pour un niveau de vide suffisamment poussé. Sugano et al. [SKS89] montrent que les effets d'environnement apparaissent pour des pressions de 10^{-2} Pa. Certains auteurs expliquent ce phénomène par le fait que le glissement est plus homogène sous vide et plus réversible ce qui limite l'effet d'entaille le long des bandes de glissement responsables de l'amorçage dans l'air.

Peters et al. [PGL80] présentent une étude sur le Ti-6Al-4V où la microstructure bimodale sous vide a un comportement moins bon que celui de microstructures équiaxes (fines ou plus grossières). En revanche, dans l'air son comportement devient meilleur que les autres microstructures.

– **Influence de la fréquence de chargement**

Ritchie et al. [RDB⁺99] montrent que la propagation de fissures de fatigue est indépendante de la fréquence de chargement pour des fréquences comprises entre 50 et 1500 Hz, contrairement aux aciers pour lesquels la tenue en fatigue est influencée par la fréquence de sollicitation au delà d'environ 200 Hz. Morrissey et al. [MMN99] ont constaté qu'une haute fréquence de chargement (1800 Hz) induisait une meilleure résistance à la fatigue. Ils ont constaté cet effet pour des rapports de charge faibles, ce qui n'est plus vrai pour des rapports supérieurs à 0,8. De plus, pour de forts rapports de charge, donc pour de forts chargements moyens, le mode de rupture du Ti-6Al-4V devient largement ductile, sans amorçage simple et sites de propagation de fissure apparents.

– **Influence de l'entaille**

Haritos et al. [HNL99] ont étudié deux types de Ti-6Al-4V, en barre et en plaque. Les éprouvettes étaient cylindriques avec un coefficient théorique de concentration de contraintes, K_t , égal à 2,78. Les auteurs ont montré que l'effet d'entaille est influencé par le mode de production (barre ou plaque) et par la microstructure du Ti-6Al-4V. Alors que le Ti-6Al-4V sous forme de barre présente un effet d'entaille clairement définie pour les différentes tailles d'entaille testées, le Ti-6Al-4V en plaque n'a pas un effet d'entaille similaire. De plus, comme pour la plupart des métaux, ils ont constaté qu'un simple paramètre ne peut suffire pour caractériser l'effet d'entaille, il convient de s'intéresser au rayon d'entaille, au champ de contrainte local et à la plasticité en fond d'entaille comme. Le facteur d'entaille en fatigue K_f défini par la relation 4.18 est fortement influencé par le rapport de charge appliqué.

$$K_f = \frac{\sigma_{lisse}^D}{\sigma_{entaille}^D} \quad (4.18)$$

– **Résultats d'essais de fatigue pour des sollicitations simples [ALNM73]**

Les essais présentés ci-après ont été réalisés au CEAT de Toulouse sous sollicitations uniaxiales (traction et flexion rotative). Les éprouvettes proviennent de deux lots de barres de diamètre 30 mm. Les limites de fatigue à $3 \cdot 10^7$ cycles ont été déterminées par la méthode de l'escalier. Les résultats ci-après indiquent les nombres de cycles à rupture en fonction de l'amplitude de contrainte σ_a pour deux contraintes moyennes $\sigma_m = 0$ et $\sigma_m = 0,5R_m$ et 3 coefficients théoriques de concentration de contraintes en traction $K_t = 1,035 - 1,7 - 3,3$. Les auteurs précisent que ces résultats ont été obtenus sur un nombre élevés d'échantillons (sans le préciser) et peuvent par conséquent être considérés comme très significatifs. Deux cas de traitements thermiques ont été considérés : état recuit et état trempé-revenu.

a/ Etat recuit : Les résultats des essais en traction-compression sur vibrophore sont reportés dans le tableau 4.7. Les éprouvettes sont de section circulaire de profil toroïdal

classique. En flexion rotative, des essais ont été réalisés sur des éprouvettes en Ti-6Al-4V (dont les auteurs ne fournissent pas la géométrie) sur une machine de type Moore¹⁴; les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 4.8.

	Contrainte moyenne	à 10 ⁴ cycles	à 10 ⁵ cycles	à 10 ⁶	à 3.10 ⁷ cycles
$K_t=1,035$	$\sigma_m = 0$	780	640	555	555
	$\sigma_m = 0,5R_m$	520	470	400	215
$K_t = 1,7$	$\sigma_m = 0$	480	360	340	340
	$\sigma_m = 0,5R_m$	350	240	180	118
$K_t = 3,3$	$\sigma_m = 0$	300	220	170	130
	$\sigma_m = 0,5R_m$	160	90	60	55

TAB. 4.7 – Résultats des essais de fatigue en traction-compression sur vibrophore [ALNM73]. Contrainte admissible σ_a (en MPa).

Nombre de cycles	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	3.10 ⁷
Contrainte admissible σ_a (en MPa)	860	640	580	565

TAB. 4.8 – Résultats d'essais de fatigue en flexion rotative sur une machine de type Moore selon [ALNM73].

b/ Etat trempé revenu : Les essais de traction-compression pour cet état sont alternés symétriques ($\sigma_m = 0$) et ont été réalisés sur des éprouvettes de coefficient théorique de concentration de contrainte : 1,035. Le tableau 4.9 regroupe les résultats de ces essais.

	Contrainte admissible σ_a (en MPa)	à 10 ⁴ cycles	à 10 ⁵ cycles	à 10 ⁶	à 3.10 ⁷ cycles
$K_t = 1,035$	$\sigma_m = 0$	850	640	590	590

TAB. 4.9 – Résultats des essais de fatigue en traction-compression sur vibrophore [ALNM73].

En flexion rotative seule l'amplitude de contrainte σ_a à 10⁸ cycles a été déterminée (limite d'endurance) pour l'état trempé revenu : $\sigma_a = 600$ MPa à 10⁸ cycles. En comparant les résultats, il apparaît que l'état trempé revenu a un meilleur comportement en fatigue que l'état recuit.

– **Orientation des fissures de fatigue macroscopiques sous sollicitations simples**

Pour un chargement de traction, Bache et al. [BE92] ont montré sur l'alliage IMI685 (Ti-6Al-5Zr-0,5Mo-0,2Si) que l'orientation de la fissure macroscopique est perpendiculaire au plan de contraintes principales maximum.

¹⁴un des premiers systèmes permettant d'obtenir de la flexion rotative

Pour des chargements de torsion alternée symétrique et flexion plane alternée symétrique, Kocanda [KKT01] s'est intéressé à l'alliage $(\alpha + \beta)$ Ti-6Al-3Mo-2Cr dont les caractéristiques sont assez proches du Ti-6Al-4V. En torsion, les fissures observées s'amorcent à l'interface entre les phases α et β et dans les grains α . En surface, les fissures se propagent dans les deux directions de cisaillement maximum. En flexion plane, les fissures s'amorcent à la fois à l'interface entre les phases α et β et dans les grains α . La direction de la fissure macroscopique est perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette c'est-à-dire perpendiculaire au plan supportant la contrainte normale maximum.

Annexe 3 : Calcul de probabilités de fissuration en flexion plane et torsion combinées

La probabilité de fissuration s'écrit :

$$P_{f,FP+T}(V) = 1 - \exp \left[-\frac{4 SL}{\pi \varphi_u} \int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}} \int_{t^*}^1 t (G(dT_{FP+To}(C_i)) \left(\frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{E} \sin^2 \theta + \frac{\bar{\tau}^2 + \tau_a^2}{E} 2(1 + \nu) \right) t^2 - W_f^* \right)^m dt d\theta \right] \quad (4.19)$$

La surface S^* est illustrée par la figure 4.36.

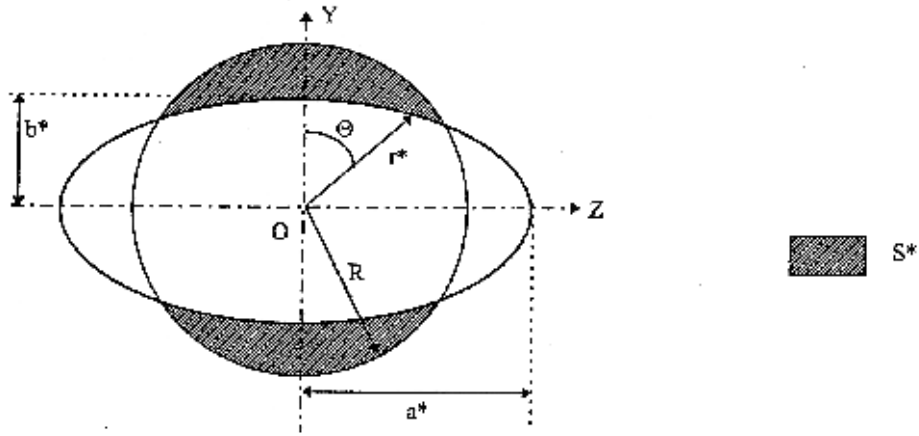


FIG. 4.36 – Surface S^* sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion plane (4 appuis) et torsion combinées.

Il faut distinguer plusieurs cas d'intégration :

1. L'ellipse est nulle, l'intégration se fait alors pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
2. Une partie de la section est concernée. L'intégration se fait de : $\theta_{min} < \theta < \frac{\pi}{2}$ avec $\theta_{min} = \arcsin \left[\sqrt{\frac{EW_f^*}{(\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2)GdT} - \frac{2(1+\nu)\frac{\bar{\tau}^2 + \tau_a^2}{E}}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}} \right]$. Or, la racine carrée impose que $\frac{EW_f^*}{(\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2)GdT} > 2(1 + \nu) \frac{\bar{\tau}^2 + \tau_a^2}{E\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}$. De plus on sait que $W_f^* = \frac{2(\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{FR,-1}^D)^2}{E}$, une condition de calcul de cette intégrale peut donc s'écrire

$$2(\sigma_{Trac,-1}^D)^2 - (\sigma_{FR,-1}^D)^2 > 2(1 + \nu) (\bar{\tau}^2 + \tau_a^2) G(dT_{FP+To}(C_i)) \quad (4.20)$$

3. L'ellipse englobe complètement la section, ce qui veut dire que $W_f^* > W_f \forall M$, la probabilité de fissuration est nulle.

Annexe 4 : Localisation des noeuds critiques

L'algorithme permettant cette localisation pour chaque noeud du maillage est présenté sur la figure 4.37.

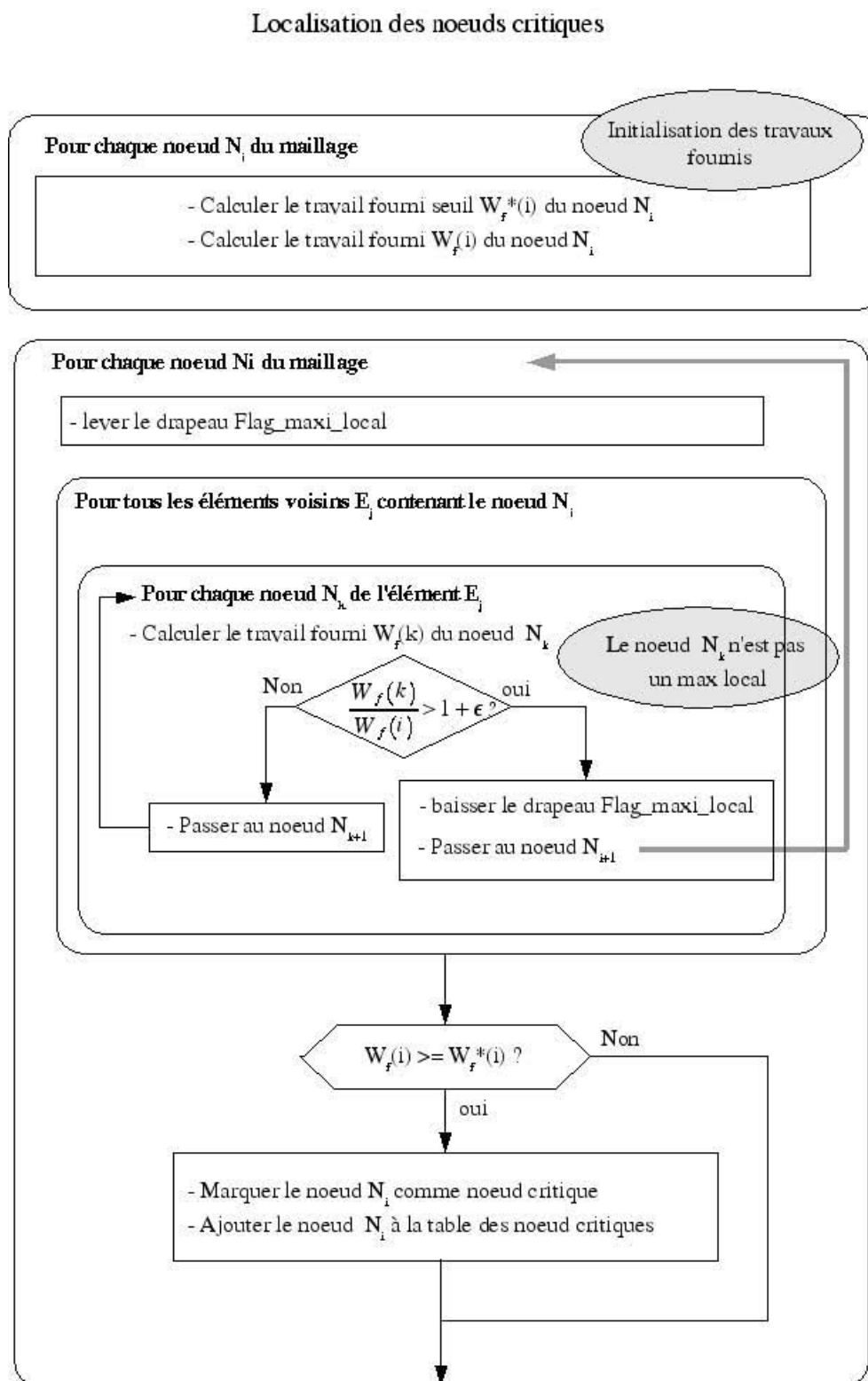


FIG. 4.37 – Représentation de l'algorithme de localisation des noeuds critiques.

Table des figures

1.1	Principe de représentation plane d'un critère à 2 variables V_1 et V_2 , ici exemple du critère de Crossland (voir paragraphe 1.1.2.1)	11
1.2	Orientation du plan critique P_c au point O considéré.	12
1.3	Définition des termes relatifs à la contrainte de cission	13
1.4	Les deux types de fissures selon Brown et Miller [BM73]	15
1.5	Construction de la courbe maîtresse	17
1.6	Interprétation graphique du paramètre W^* [MS99].	20
1.7	Interprétation graphique du paramètre W^* comme la somme de la densité d'énergie de déformation sur les deux demi-périodes d'un cycle sur le plan critique [MS99].	21
1.8	Représentation du trajet de chargement sur une facette [Mor96].	25
1.9	Modélisation de l'évolution de la limite d'élasticité mésoscopique pour un cristal à trois phases de comportement en fonction de la déformation plastique mésoscopique accumulée Γ	26
1.10	Relation entre la limite d'endurance considérée comme une amplitude de contrainte équivalente et le volume le plus contraint $V_{90\%}$ d'après [SKG97] .	30
1.11	Illustration des volumes et surfaces les plus contraints dans une entaille [TEIH03]	31
1.12	Zone plastique efficace et fissure d'entaille [AP03]	31
1.13	Illustration du travail et de la puissance de déformation élastique fournis en un point M , au cours d'un cycle de période T . Cas de la traction uniaxiale, d'après [Ban01].	34
1.14	Organigramme d'application du critère volumique du Lamefip d'après [Ban01].	37
1.15	Influence du cisaillement maximum sur la limite d'endurance en torsion [Sin59].	39
1.16	Influence du cisaillement moyen sur la limite d'endurance en torsion, d'après Smith [Smi42].	40
1.17	Influence du cisaillement moyen sur la limite d'endurance en torsion.	40
1.18	Erreur Relative de Prévision (ERP en %) des critères étudiés pour les essais de traction sur des éprouvettes lisses ($k_t(trac)=1,05$) en acier 30NiCrMo16 trempé revenu.	44

1.19	Comparaison des Erreurs Relatives de Prévision des critères étudiés pour les essais de flexion plane sur des éprouvettes lisses ($k_t(flex)=1,06$) en acier 30NiCrMo16 trempé revenu [Fro87].	45
1.20	Erreur Relative de Prévision (ERP en %) des critères étudiés pour les essais de flexion plane et de torsion combinées sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu.	48
1.21	Erreurs Relatives de Prévision des critères étudiés pour les essais de flexion rotative et torsion combinées réalisées sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu.	49
1.22	densités de probabilité de R et σ d'après [ML74]	51
1.23	Représentation du concept du maillon le plus faible.	54
1.24	Micrographie d'un faciès de rupture d'une éprouvette en fonte GS.	56
1.25	Confrontation entre les limites de fatigue calculées et expérimentales d'après [BLM99]	59
2.1	Microstructure de l'alliage de titane Ti-6Al-4V, après attaque au réactif de Kroll (microscope optique)	66
2.2	Microstructure du Ti-6Al-4V (microscope à balayage)	66
2.3	Courbe d'érouissage montone en contrainte vraie-déformation vraie de l'alliage de titane Ti-6Al-4V	67
2.4	Faciès de rupture d'une éprouvette chargée en traction monotone quasi-statique (éprouvette n° QS2)	68
2.5	Courbe contrainte-déformation vraies expérimentales obtenues lors d'un essai de traction-compression cyclique, à déformation imposée, avec une déformation maximale de 1,3% ($R_\epsilon = \frac{\epsilon_{min}}{\epsilon_{max}} = -1$)	69
2.6	Géométrie des éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V utilisées pour les essais de traction quasi-statique.	70
2.7	Géométrie des éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V utilisées pour les essais d'érouissage cyclique.	70
2.8	Géométrie des éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V utilisées pour les essais de flexion, torsion et flexion-torsion combinées ($k_t(flexion) = 1.07$ et $k_t(torsion) = 1.04$).	71
2.9	Géométrie des éprouvettes en Ti-6Al-4V utilisées pour les essais de fatigue en traction ($k_t(traction) = 1.05$).	71
2.10	Etat de surface caractéristique du lot 1 (éprouvette n°48-I)	72
2.11	Etat de surface caractéristique du lot 2 (éprouvette n°1-II)	73
2.12	Vibrophore Amsler	73
2.13	Schéma de principe mécanique du vibrophore.	74
2.14	Machine de flexion et torsion combinées du LAMEFIP.	76
2.15	Schéma du principe mécanique de la machine de flexion et torsion combinées.	76
2.16	Composition des efforts de flexion, principe des champs tournants.	77

2.17	Principe de l'asservissement d'un vérin.	77
2.18	Densité de probabilité selon les durées de vie, d'après [AFN91]	79
2.19	Courbes d'isoprobabilité de rupture, d'après [AFN91]	80
2.20	Estimation du nombre de cycles $N_{50\%}$ et de la dispersion dans le domaine de l'endurance limitée	82
2.21	Exemple de droite de Henry	83
2.22	Courbe S-N en traction ($R_\sigma = -1$) d'éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V sui- vant les modèles de Bastenaire et de Basquin.	88
2.23	Droite de Henry en traction ($R = -1$) sur éprouvette lisse en Ti-6Al-4V pour $\sigma_a = 700$ MPa.	89
2.24	Orientation de la fissure macroscopique sur la surface de l'éprouvette n°92TA6V- I sollicitée en traction ($R_\sigma = -1$), $\sigma_a = 650$ MPa, $N_r = 166900$ cycles.	89
2.25	Zoom sur la fissure macroscopique à la surface de l'éprouvette n°92TA6V-I sollicitée en traction	90
2.26	Faciès de rupture de l'éprouvette n°92TA6V-I cassée par choc après fragi- lisation à l'azote liquide	90
2.27	Droite de Henry en torsion ($R = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V pour $\tau_a = 440$ MPa.	91
2.28	Courbes S-N en torsion ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V suivant les modèles de Bastenaire et de Basquin	92
2.29	Orientation de la fissure macroscopique à la surface d'une éprouvette après essai de torsion ($R_\sigma = -1$)	93
2.30	Méthode d'ouverture des éprouvettes sollicitées en torsion ($R_\sigma = -1$)	93
2.31	Photographie MEB du faciès de rupture d'une éprouvette lisse en Ti-6Al- 4V après essai de torsion ($R_\sigma = -1$) (éprouvette n°66Ti-6Al-4V-I)	94
2.32	Courbes S-N en flexion rotative ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti- 6Al-4V. Résultats expérimentaux et modèles de bastenaire et de Basquin.	95
2.33	Orientation de la fissure macroscopique sur la surface d'une éprouvette après essai de flexion rotative ($R_\sigma = -1$).	95
2.34	Zoom sur une partie de la fissure macroscopique sur la surface d'une éprou- vette après essai de flexion rotative ($R_\sigma = -1$).	96
2.35	Faciès de rupture de l'éprouvette n°36-TA6V-I ($\sigma_a = 675$ MPa, $N_r =$ 142796 cycles).	96
2.36	Zoom dans la macrofissure de fatigue de l'éprouvette n°36Ti-6Al-4V-I, ($\sigma_a =$ 675 MPa, $N_r = 142796$ cycles).	97
2.37	Courbes SN en flexion plane ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V. Résultats d'essais et modèles de bastenaire et de Basquin.	98
2.38	Orientation de la fissure macroscopique sur la surface d'une éprouvette après essai de flexion plane ($R_\sigma = -1$) ($\sigma_a = 700$ MPa, $N_r = 365300$ cycles).	98

2.39	Zoom sur une partie de la fissure macroscopique à la surface d'une éprouvette après essai de flexion plane ($R_\sigma = -1$)(éprouvette n°36Ti-6Al-4V-I sollicitée à $\sigma_a = 700$ MPa, $N_r = 365300$ cycles).	99
2.40	Faciès de rupture de l'éprouvette n°9-TA6V-II sollicitée à $\sigma_a = 700$ MPa, $N_r = 365300$ cycles.	99
2.41	Faciès de rupture de l'éprouvette n°9-TA6V-II sollicitée à $\sigma_a = 700$ MPa, $N_r = 365300$ cycles.	99
2.42	Courbes S-N en flexion plane et torsion combinées en phase ($\tau_a/\sigma_a = \sqrt{3}$, $R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses. Résultats d'essais et modèles de Bastenaire et de Basquin.	100
2.43	Orientation de la fissure macroscopique à la surface de l'éprouvette n°45-TA6V-I après essai de flexion-torsion combinées en phase ($\sigma_a = 547$ MPa, $\tau_a = 307$ MPa, $N_r = 299040$ cycles).	101
2.44	Zoom sur la fissure macroscopique à la surface de l'éprouvette.	101
2.45	Repérage du plan de propagation P_c au point O considéré. ($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à l'éprouvette avec $O\vec{y}$ son axe longitudinal.	102
2.46	Faciès de rupture de l'éprouvette n°45-TA6V-I sollicitée en flexion-torsion combinées en phase ($\sigma_a = 547$ MPa, $\tau_a = 307$ MPa, $N_r = 299040$ cycles).	102
2.47	Courbes S-N en flexion plane et torsion combinées hors phase ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses. Résultats d'essais et modèles de Bastenaire et de Basquin.	103
2.48	Orientation de la fissure macroscopique à la surface de l'éprouvette n°94-TA6V-II après essai de flexion-torsion combinées hors phase ($\sigma_a = 589$ MPa, $\tau_a = 340$ MPa, $N_r = 72696$ cycles).	104
2.49	Orientation de la fissure macroscopique à la surface d'une éprouvette après essai de flexion et torsion combinées hors phase.	104
2.50	Faciès de rupture la surface de l'éprouvette n°94-TA6V-II après essai de flexion-torsion combinées hors phase ($\sigma_a = 589$ MPa, $\tau_a = 340$ MPa, $N_r = 72696$ cycles).	104
2.51	Influence de l'amplitude de contrainte des blocs bas sur la durée de vie pour des essais de flexion plane à deux blocs (bas/haut/etc...) répétés alternativement jusqu'à fissuration [Bon98] sur éprouvettes en fonte GS (les lignes verticales représentent ± 1 écart type).	106
2.52	Chargements par blocs répétés à 2 niveaux ($R_\sigma = -1$)	106
2.53	Essais sous chargement à 2 blocs appliqués alternativement jusqu'à fissuration. Durées de vie en fonction de l'amplitude du bloc bas, pour des blocs haut d'amplitude identique de 700 MPa (les bandes noires représentent plus ou moins un écart-type)	107
2.54	Droites de Henry en flexion plane ($R_\sigma = -1$) sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V pour $\sigma_a = 700$ MPa.	108

2.55	Fissures de fatigue macroscopiques en flexion plane ($R_\sigma = -1$) sur 2 éprouvettes de lot 2.	109
2.56	Etat de surface caractéristique du lot 2 (éprouvette n°1-II)	109
2.57	Droite de Henry sur les 8 éprouvettes de la série 11-Ti-6Al-4V-II correspondant à un bloc bas $\sigma_a = 200$ MPa	110
2.58	Essais sous chargement à 2 blocs appliqués alternativement jusqu'à fissuration en ne conservant que les éprouvettes ayant fissuré en fond de tore. Durées de vie en fonction de l'amplitude du bloc bas, pour des blocs haut d'amplitude identique de 700 MPa (les bandes noires représentent plus ou moins un écart-type).	110
3.1	Illustration du concept de volume d'influence et sa relation avec la théorie du maillon le plus faible (pour une structure unidimensionnelle de longueur L).	119
3.2	Volumes d'influence pour 2 points critiques générant des volumes disjoints.	119
3.3	Volume d'influence pour 2 points critiques générant un seul volume.	120
3.4	Probabilités de fissuration prévue par le modèle selon la 1ère méthode d'identification (trait plein) et expérimentale (trait pointillé) en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V chargées en torsion	123
3.5	Exemple de fonction de répartition d'une distribution normale	124
3.6	Effet de la taille du volume le plus contraint $V_{90\%}$ sur la contrainte équivalente pour des éprouvettes en acier 37Cr4V [SKG97].	126
3.7	Prévision de l'effet d'échelle sur la limite d'endurance en traction ($R_\sigma = -1$) d'éprouvettes en alliage de titane Ti-6Al-4V.	127
3.8	Prévision de l'effet d'échelle sur la limite d'endurance en torsion ($R_\sigma = -1$) pour $\tau_{ref}^D = 411$ MPa.	128
3.9	Représentation de S^* sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en torsion.	129
3.10	Influence d'un chargement moyen de torsion sur la limite de fatigue d'éprouvettes lisses ($k_t(tors) = 1,05$) en alliage de titane Ti-6Al-4V.	131
3.11	Influence du cisaillement maximum sur le seuil de notre proposition en torsion sur éprouvettes lisses ($k_t(tors) = 1,05$) en alliage de titane Ti-6Al-4V.	132
3.12	Sollicitation de flexion plane 4 appuis sur éprouvette lisse cylindrique de révolution.	132
3.13	Surfaces d'influence $S^*(C_1)$ et $S^*(C_2)$ pour une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion plane 4 appuis (2 points critiques C_1 et C_2).	133

3.14	Surface S^* sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion rotative avec un chargement moyen de flexion plane (4 appuis).	135
3.15	Éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion rotative-torsion.	136
3.16	Surface d'influence $S^*(C_i)$ sur la section droite d'une éprouvette chargée en flexion rotative symétrique et torsion combinées.	137
3.17	Éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en traction-torsion. . .	138
3.18	Surface d'influence $S^*(C_i)$ et ligne iso- $W_{f_{Trac+To}}^*$ sur une section droite d'une éprouvette chargée en traction-torsion.	139
3.19	Éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion-torsion. . . .	140
3.20	Surface S^* sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion plane (4 appuis) et torsion combinées.	141
3.21	Probabilités de fissuration prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) sur éprouvettes lisses cylindriques de révolution en alliage de titane Ti-6Al-4V sous chargements alternés symétriques de traction et flexion plane.	145
3.22	Probabilités de fissuration prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) sur éprouvettes lisse cylindriques de révolution en l'alliage de titane Ti-6Al-4V sous sollicitations de torsion alternée symétrique et flexion rotative alternée symétrique et illustrations des intervalles de confiance à 95% associés à la limite d'endurance médiane.	146
3.23	Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V chargées en flexion plane et torsion combinées en phase ($R_\sigma = \sqrt{3}$) avec illustration de l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane expérimentale.	147
3.24	Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V sous chargement de flexion et torsion combinées hors phase ($\phi = 90^\circ$), $k_\sigma = \sqrt{3}$, avec illustration de l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane.	147
3.25	Erreur relative de prévision (ERP en %) des critères sur les essais de flexion plane et torsion combinées ($R_\sigma = -1$), $k_\sigma = \sqrt{3}$ sur des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V.	148
3.26	Probabilités prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) pour des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en fonte EN-GJS800-2 sous sollicitations simples ($R_\sigma = -1$) et illustrations de l'intervalle de confiance à 95% associé à la médiane en flexion plane.	149
3.27	Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte en flexion et torsion combinées en phase (essai n°4), $k_\sigma = 1,35$ sur éprouvettes cylindriques de révolution en fonte EN-GJS800-2	150

3.28	Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte en flexion et torsion combinées en et hors phase ($\phi = 90^\circ$), $R_\sigma = -1$, $k_\sigma = \sqrt{3}$ pour des éprouvettes lisses en fonte EN-GJS800-2 (trait plein : prévisions, pointillés fins : essai 5 hors phase, essai 6 en phase).	150
3.29	Erreur Relative de Prévision (ERP en %) des critères pour les quatre essais sur des éprouvettes lisses en fonte EN-GJS800-2.	151
3.30	Probabilités de fissuration prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) sur des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en acier 30NiCrMo16 sous sollicitations simples.	152
3.31	P_f prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) pour des chargements de traction avec valeur moyenne (essais n°7, $\sigma_m = 745\text{MPa}$ et n°9, $\sigma_m = 222\text{MPa}$) pour l'acier 30NiCrMo16 sur éprouvettes lisses cylindriques de révolution.	153
3.32	P_f prévues par le modèle (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) en flexion plane avec valeur moyenne (essai n°10) pour l'acier 30NiCrMo16 sur éprouvettes lisse cylindriques de révolution	153
3.33	Erreur Relative de Prévision (ERP en %) des critères pour les 7 essais en sollicitations simples sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16. . . .	154
3.34	Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en acier 30NiCrMo16 chargées en flexion plane et torsion combinées hors phase (essai n°23, $R_\sigma = 1,80$, $\phi = 90^\circ$)	155
3.35	Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en acier 30NiCrMo16 sollicitées en flexion et torsion combinées en phase (essai n°32 $R_\sigma = 4,1$, $\phi = 0^\circ$) . . .	156
3.36	Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour des éprouvettes lisses cylindriques de révolution en acier 30NiCrMo16 sollicitées en flexion plane et torsion combinées en phase (essai n°18, $R_\sigma = 1,79$, $\phi = 45^\circ$).	156
3.37	Erreur Relative de Prévision (ERP en %) des critères pour les 21 essais de sollicitations combinées sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16. . .	157
3.38	Probabilités de fissuration prévues par le modèle identifié avec les seules limites d'endurance (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) pour l'acier 35CrMo4 trempé revenu sur éprouvettes lisse cylindriques de révolution sollicitées en traction, flexion rotative et flexion plane.	159
3.39	Probabilités de fissuration prévues par le modèle identifié avec l'estimateur de l'écart-type (trait plein) et expérimentales (trait pointillé) pour des éprouvettes lisse cylindriques de révolution en acier 35CrMo4 trempé revenu.159	159

3.40	Probabilités de fissuration en fonction de l'amplitude de contrainte pour l'acier C18 en flexion et torsion combinées hors phase ($\phi = 90^\circ$), $R_\sigma = -1$, $k_\sigma =$ pour des éprouvettes lisses (trait plein : prévisions, pointillés fins : distribution expérimentale) avec l'intervalle de confiance associé.	161
3.41	Illustration de la prévision des courbes P-S-N en traction ($R_\sigma = -1$)	164
3.42	Courbes S-N prévues et expérimentales pour $P_f = 10\%$, 50% et 90% en traction alternée symétrique sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V.	165
3.43	Courbes S-N prévues et expérimentales à 10% , 50% et 90% en torsion alternée symétrique sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V.	166
3.44	Courbes S-N prévues et expérimentales à 10% , 50% et 90% en flexion plane alternée symétrique sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V.	166
4.1	Architecture du programme de calcul.	172
4.2	Diagramme de classes "Eléments Finis".	173
4.3	Notations graphiques UML.	173
4.4	Modèle de classes "Fatigue".	174
4.5	Volume d'influence (illustré en 2D) autour d'un noeud potentiellement critique.	175
4.6	Algorithme de construction des volumes d'influence.	176
4.7	Illustrations des méthodes de calcul du volume d'influence.	177
4.8	Organigramme d'application du critère de Crossland	182
4.9	Plan méridien d'un cylindre de révolution maillé en 2D.	183
4.10	Fichier résultat du post-processeur en un noeud de l'éprouvette pour un chargement à la limite d'endurance.	184
4.11	Conditions aux limites pour un chargement de torsion.	184
4.12	Illustration du positionnement des noeuds critiques pour un chargement de torsion sur un cylindre parfait.	185
4.13	Maillage de la demie éprouvette utilisée pour les essais de torsion présentant un coefficient théorique de concentration de contraintes $K_t = 1,05$ en torsion.	185
4.14	Conditions aux limites pour un chargement de torsion.	186
4.15	Volume d'influence pour un chargement à la limite de fatigue en fond de tore.	186
4.16	Résultats du post-processeur pour un chargement de torsion à la limite de fatigue.	187
4.17	Maillage affiné de la demie éprouvette de torsion.	187
4.18	Résultats du post-processeur pour un chargement de torsion à la limite de fatigue.	187
4.19	Conditions aux limites pour un chargement de flexion plane.	188
4.20	Volume d'influence en flexion plane.	189
4.21	Localisation des noeuds critiques (en clair).	189

4.22	Nouveau maillage fin de la demie éprouvette pour un chargement de flexion plane.	190
4.23	Les différents maillages de la demie éprouvette pour un chargement de flexion plane.	190
4.24	Maillage de l'éprouvette lisse utilisée pour modéliser les essais de flexion-torsion combinées.	191
4.25	Conditions aux limites pour modéliser des chargements de flexion plane et de torsion combinées.	191
4.26	Représentation du volume d'influence en surface de l'éprouvette.	192
4.27	Positionnement des noeuds critiques.	192
4.28	Représentation du volume d'influence dans la profondeur du tore pour un chargement de flexion plane et torsion combinés.	193
4.29	Définition des deux cordes D et D'	218
4.30	Comparaison des limites d'élasticité spécifiques pour quelques matériaux, d'après [DBM89].	220
4.31	Effets des éléments d'alliage du titane sur la microstructure, caractéristiques physiques et mécaniques des alliages obtenus [CH76].	221
4.32	Exemple de microstructure du Ti-6Al-4V [BG00]	223
4.33	Diagramme de phase de l'alliage Ti-6Al-4V d'après [RK96]	223
4.34	Courbes contraintes-déformation expérimentales obtenues au cours d'un essai de traction-compression cyclique à déformation imposée.	224
4.35	Influence de la microstructure et de la taille de grains α sur le comportement en fatigue oligocyclique du Ti-6Al-4V [Mai99].	226
4.36	Surface S^* sur la section droite d'une éprouvette lisse cylindrique de révolution sollicitée en flexion plane (4 appuis) et torsion combinées.	231
4.37	Représentation de l'algorithme de localisation des noeuds critiques.	233

Liste des tableaux

1.1	Sensibilité des critères aux constatations expérimentales.	41
1.2	Données nécessaires à l'identification des paramètres des critères.	42
1.3	Caractéristiques mécaniques de la fonte EN-GJS800-2 en traction d'après [Ban01].	43
1.4	Caractéristiques mécaniques de l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu.	43
1.5	Caractéristiques mécaniques statiques de l'acier C18 recuit.	43
1.6	Limites d'endurance expérimentales (sur éprouvettes lisses cylindriques de révolution, $R_\sigma=-1$) à 10^6 cycles, sauf pour l'acier 30NiCrMo16 : 10^7 cycles.	44
1.7	Résultats d'essais de traction sur des éprouvettes lisses ($k_t(trac)=1,05$) en acier 30NiCrMo16 trempé revenu à 10^7 cycles et ERP (%) des critères étudiés.	44
1.8	Limites d'endurance expérimentales à 10^6 cycles en flexion plane sur éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu. Erreurs Relatives de Prédiction des différents critères (en %).	45
1.9	Limites d'endurance expérimentales à 10^6 cycles en flexion plane et torsion combinées sur des éprouvettes lisses en acier 30NCD16 trempé revenu, C18 recuit et en fonte EN-GJS800-2. Erreurs Relatives de Prédiction (en %) des différents critères étudiés.	47
1.10	Limites d'endurance expérimentales à 10^6 cycles en flexion rotative et torsion combinées sur des éprouvettes lisses en acier 30NiCrMo16 trempé revenu à 10^6 cycles. Erreurs Relatives de Prédiction (%) des critères étudiés.	49
1.11	Propriétés mécaniques usuelles de l'acier à roulements SAE 52100 (DIN 100Cr6) [BLM99]	59
2.1	Composition chimique de l'alliage de titane Ti-6Al-4V (en pourcentage massique) d'après la société Timet	65
2.2	Caractéristiques mécaniques de l'alliage de titane Ti-6Al-4V	67
2.3	Résultats des mesures d'état de surface sur 10 éprouvettes "lisses" de chaque lot de flexion-torsion en alliage de titane Ti-6Al-4V (longueur palpée 6 mm, cut-off = 0,25 mm).	72
2.4	Quelques modélisations de la courbe S-N médiane.	81
2.5	Détermination des limites d'endurance en torsion par la méthode de l'escalier.	86

2.6	Détermination des limites de fatigue par la méthode de l'escalier en traction ($R_\sigma = -1$).	87
2.7	Détermination des limites de fatigue en torsion par la méthode de l'escalier.	91
2.8	Limites de fatigue expérimentales obtenues en flexion rotative ($R_\sigma = -1$) par la méthode de l'escalier sur éprouvettes lisses en Ti-6Al-4V.	94
2.9	Détermination des limites de fatigue par la méthode de l'escalier.	97
2.10	Détermination des limites de fatigue par la méthode de l'escalier.	100
2.11	Détermination des limites de fatigue par la méthode de l'escalier.	102
2.12	Conditions de chargement et résultats d'essais par blocs bas/haut ($R_\sigma = -1$)	107
3.1	Valeurs, pour les matériaux testés, des paramètres du modèle proposé.	144
3.2	Résultats d'essais de fatigue sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V. Erreur relative de Prévision (en %) de notre proposition.	145
3.3	Caractéristiques mécaniques statiques de la fonte EN-GJS800-2 [Ban01].	148
3.4	Résultats d'essais sur la fonte EN-GJS800-2. Erreur Relative de Prévision (en %) de notre proposition.	148
3.5	Caractéristiques mécaniques statiques de l'acier 30NiCrMo16 trempé revenu [Fro87].	151
3.6	Résultats d'essais de fatigue sous sollicitations simples sur des éprouvettes en acier 30NiCrMo16. Erreur relative de Prévision (en %) de notre proposition.	152
3.7	Résultats d'essais sous sollicitations combinées sur des éprouvettes en acier 30NiCrMo16. Erreur relative de Prévision (en %) de notre proposition.	155
3.8	Caractéristiques mécaniques statiques de l'acier 35CrMo4 trempé revenu [P196].	158
3.9	Résultats d'essais sur éprouvettes lisses en acier 35CrMo4 trempé revenu. Erreur relative de Prévision (en %) de notre proposition issue de chaque méthode d'identification.	158
3.10	Caractéristiques mécaniques statiques de l'acier C18 recuit [P196].	160
3.11	Résultats d'essais sur l'acier C18. Erreur relative de Prévision (en %) de notre proposition.	160
4.1	Résultats du post-processeur en torsion pour différents maillages sur éprouvettes lisses. E.P.C. : Eléments Partiellement Critiques.	188
4.2	Résultats du post-processeur pour un chargement de flexion plane sur éprouvettes lisses.	189
4.3	Propriétés mécaniques en traction monotone quasi-statique de quelques alliages de titane après traitement thermique [DBM89].	222
4.4	Composition chimique typique de l'alliage de titane Ti-6Al-4V [DBM89]	222
4.5	Propriétés mécaniques conventionnelles du Ti-6Al-4V d'après [BG00]	222

4.6	Propriétés mécaniques en traction monotone quasi-statique du Ti-6Al-4V obtenues après divers traitements thermiques [RK96].	225
4.7	Résultats des essais de fatigue en traction-compression sur vibrophore [ALNM73]. Contrainte admissible σ_a (en MPa).	228
4.8	Résultats d'essais de fatigue en flexion rotative sur une machine de type Moore selon [ALNM73].	228
4.9	Résultats des essais de fatigue en traction-compression sur vibrophore [ALNM73].	228

Résumé :

Cette étude concerne le développement d'une méthode de calcul probabiliste de la résistance des structures à la fatigue multiaxiale à grand nombre de cycles. Un panorama des méthodes déterministes et probabilistes est présenté, les prévisions d'une sélection de critères sont confrontées à des résultats d'essais afin de juger de leur qualité. Des essais de fatigue à amplitude constante sous sollicitations simples et combinées ont été réalisés sur des éprouvettes lisses en alliage de titane Ti-6Al-4V. Des essais de fatigue en flexion plane alternée symétrique à deux blocs (bas/haut) répétés alternativement jusqu'à fissuration ont permis de confirmer l'existence d'un seuil en contrainte en dessous duquel les cycles ont une influence négligeable sur la durée de vie de cet alliage. Un modèle probabiliste appliqué à la fatigue multiaxiale à grand nombre de cycles sous chargement d'amplitude constante est proposé en combinant l'approche énergétique et volumique du LAMEFIP au formalisme de Weibull. Tout en conservant les avantages de la formulation déterministe (prise en compte de la répartition volumique des contraintes et des déformations et distinction de tous les cas de chargement), cette proposition prévoit une probabilité de fissuration de la structure avant une durée de vie fixée selon le niveau de contrainte. Le modèle prévoit aussi l'effet d'échelle et permet d'estimer la dispersion de la résistance à la fatigue. Les prévisions du modèle proposé sont en bon accord avec l'expérience (sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V, la fonte à graphite sphéroïdal EN-GJS800-2 et les aciers C18 recuit, 35CrMo4 trempé revenu, 30NiCrMo16 trempé revenu). Cette proposition permet de prévoir correctement les courbes P-S-N à partir d'une seule courbe S-N expérimentale. Le développement d'un post-processeur orienté objet de calcul en fatigue multiaxiale permet d'appliquer le critère déterministe du LAMEFIP à des éprouvettes entières.

Mots-clés :

Fatigue multiaxiale, Energie, Weibull, Critère, Probabilité, Volume, Courbe P-S-N, Post-processeur

Abstract :

This study deals with the development of a probabilistic calculation method of the high cycle multiaxial fatigue strength of structures. Many deterministic and probabilistic fatigue calculation methods are reviewed, the predictions of a selection of criteria are compared with experimental results to quantify their quality. Fully reversed fatigue tests were carried out under simple and combined loadings on smooth specimens made of Ti-6Al-4V titanium alloy. Plane bending tests with two types of blocks (low/high) showed the existence of a threshold stress below which the cycles have no significant influence on the fatigue life of this alloy. A probabilistic model in high cycle multiaxial fatigue is proposed. This is based on the volumetric and energy based approach of the LAMEFIP and combined with the Weibull's formalism. Keeping the advantages of the volumetric criterion (the load type is well considered and the stress-strain gradient effect is taken into account), this proposal predicts the failure probability of a structure under a stress level and before a given number of cycles. The model is also able to predict the size effect and estimates the scatter of the fatigue strength. The model predictions are in good agreement with experiments (tests on the Ti-6Al-4V titanium alloy, the spheroidal graphite cast iron EN-GJS800-2 and the steels C18, 35CrMo4, 30NiCrMo16). From an experimental S-N curve, all the P-S-N curves can be predicted. The development of an object-oriented development environment is used to apply the volumetric and deterministic criterion of the LAMEFIP on whole specimens.

Keywords :

Multiaxial fatigue, Energy, Weibull, Criterion, Probability, Volume, P-S-N curve, Post-processor