

N°d'ordre : 2552

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Eric DARRIGRAND

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées

COUPLAGE MÉTHODES MULTIPÔLES - DISCRÉTISATION MICROLOCALE
POUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Soutenue le : 26 Septembre 2002

Après avis des rapporteurs :

M. P. JOLY	Directeur de Recherche - INRIA Rocquencourt
M. J.-C. NÉDÉLEC	Professeur - Ecole Polytechnique

Devant la commission d'examen formée de :

Mme. H. BARUCQ	Maître de Conférence - Université de Pau
Mme. K. MER-NKONGA	Ingénieur-Chercheur - CEA-CESTA
M. Al. BACHELOT	Professeur - Université Bordeaux I
M. A. BENDALI	Professeur - INSA Toulouse
M. B. DESPRÉS	Professeur - Université Paris 6 - Rapporteur
M. B. HANOUZET	Professeur - Université Bordeaux I - Président
M. P. JOLY	Directeur de Recherche - INRIA Rocquencourt
M. J.-C. NÉDÉLEC	Professeur - Ecole Polytechnique

*à mes parents,
à mes grands-parents,*

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au sein du Service Informatique Scientifique du CEA-CESTA, en collaboration avec le laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux. Je tiens en premier lieu à exprimer une vive reconnaissance à mon directeur de thèse, monsieur Alain Bachelot, ainsi qu'à madame Katherine Mer-Nkonga, qui m'ont proposé ce sujet de thèse. Leur disponibilité constante et leur rigueur ont été pour moi d'une aide très précieuse tout au long de ces trois années.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que m'ont fait messieurs Patrick Joly et Jean-Claude Nédélec en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse.

J'exprime aussi mes remerciements à madame Hélène Barucq et messieurs Abderrahmane Bendali, Bruno Després, Bernard Hanouzet pour leur participation à mon jury de thèse.

Je souhaite également remercier les membres du Service Informatique Scientifique du CESTA qui m'ont accueilli pendant trois ans, ainsi que les quelques personnes du laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux que j'ai souvent sollicitées. J'exprime ma gratitude à monsieur Frédéric Gil dont les compétences relatives à I-deas ont été d'un grand secours. Je ne saurais oublier le Service Furtivité contribuant à la cohérence physique de nos travaux de recherche. J'exprime ma reconnaissance à monsieur Claude P. Bianchi qui m'a transmis sa passion de l'Anglais.

Je voudrais aussi saluer toutes les personnes qui m'ont accompagné soit professionnellement, soit amicalement, les thésards et stagiaires, les grenouilles de la section plongée, les beloteurs de la ligne 9, ...

J'ai, enfin, une pensée pour le club équestre qui m'a offert bien du réconfort. J'adresse mes derniers mots de remerciements à ma famille, tout particulièrement à mes parents et mes sœurs pour leur confiance et leur soutien constants tout au long de mes études.

Table des matières

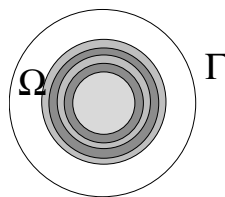
Introduction générale	11
I Accélération de la résolution d'une équation intégrale pour l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet	15
1 Résolution par équation intégrale	17
1.1 Introduction	17
1.2 Formulation intégrale et discrétisation	17
1.3 Motivation des méthodes d'accélération	23
2 Discrétisation microlocale	25
2.1 Méthode d'approximation de la phase	25
2.2 Méthode de discrétisation de la phase	29
3 Méthodes multipôles rapides	31
3.1 Présentation d'une méthode multipôles rapide	31
3.2 Une méthode multipôles à 1 niveau	44
3.3 Une méthode multipôles multi-niveaux	47
4 Idées de couplages	55
4.1 Méthodes multipôles et approximation de la phase	55
4.2 L'intégrale sur la sphère unité : une limitation pour le couplage	66
4.3 Méthodes multipôles et discrétisation de la phase	67
5 Annexe : Calcul des singularités	69
II Accélération de la résolution des équations intégrales de Després pour les problèmes de Helmholtz tridimensionnels	73
6 L'équation intégrale de Després	75

6.1	Introduction	75
6.2	Formulation intégrale de Després	75
6.3	Discrétisation du système intégral	82
6.4	Le calcul des matrices	84
6.5	Résolution du problème discret	85
6.6	Cas du coefficient de réflexion nul	86
7	Application de la nouvelle méthode	89
7.1	Introduction	89
7.2	Discrétisation microlocale	89
7.3	Les outils FMM utilisés	92
7.4	Accélération des calculs par la FMM	95
8	Résultats numériques - Comparaisons - Conclusions	99
8.1	Introduction	99
8.2	Résultats obtenus sur la sphère	100
8.3	Résultats obtenus sur le Cetaf	107
8.4	Résultats obtenus sur la double-sphère	111
8.5	Quelques voies pour les obstacles non convexes	118
9	Annexe : Calcul de la SER	121
9.1	Introduction	121
9.2	Amplitude de diffusion et SER bistatique	121
9.3	Séries de Mie - Cas de la sphère unité	122
III	Accélération de la résolution des équations intégrales de Des- prés pour le problème de Maxwell	125
10	Equations intégrales de Després	127
10.1	Introduction	127
10.2	Formulation intégrale de Després	127
10.3	Diagonalisation par blocs du système	133
10.4	Discrétisation des équations	135
10.5	Résolution du problème discret	136
11	Application de la nouvelle méthode	137
11.1	Introduction	137
11.2	Discrétisation microlocale	137
11.3	Les outils FMM utilisés	138
11.4	Discrétisation microlocale et FMM multi-niveaux	142

12 Résultats numériques	143
12.1 Introduction	143
12.2 Mise en œuvre informatique	143
12.3 Validation numérique et montée en fréquence	145
12.4 Cas d'une géométrie convexe quelconque	148
Conclusion générale	151

Introduction générale

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire rentrent dans le cadre d'une étude menée au CEA-CESTA. Cette étude a pour but d'établir une méthode efficace de résolution des équations de Maxwell en régime harmonique, en domaine extérieur. Ces équations modélisent la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle dans l'espace aérien. Le choix de résolution consiste à considérer une méthode d'équations intégrales. Les formulations intégrales permettent de ramener un problème 3D non borné à un problème "2D" borné. Si nous considérons un observateur en un point x de l'espace autour de l'obstacle, l'écho radar en x est une moyenne des courants électromagnétiques sur la surface de l'obstacle, pondérée par l'interaction entre x et la surface. Ainsi, il suffit de connaître les courants sur la surface obtenus par la résolution des équations intégrales en imposant une condition au bord de l'obstacle. Cependant, dans certaines situations réelles, la complexité de la structure de l'obstacle (couches minces, composants électriques) ne permet pas de considérer une méthode d'équations intégrales avec une condition au bord adaptée. Afin de prendre en considération cette structure complexe de l'obstacle, la stratégie retenue consiste à coupler les équations intégrales à une méthode d'éléments finis de volume à l'intérieur d'un domaine Ω contenant l'obstacle et une enveloppe d'air. Les équations intégrales sont alors définies sur la surface Γ du domaine Ω avec une condition d'absorption sur le bord. Concernant des notions générales sur les diverses approches des problèmes de diffraction en électromagnétisme, nous renvoyons à l'ouvrage [22].



Plus précisément, les applications physiques de ces travaux sont confrontées au problème de montée en fréquence. Au cours de cette thèse, nous nous sommes essentiellement intéressés à des méthodes numériques ayant pour but de réduire les coûts de résolution des équations intégrales. La formulation intégrale considérée dans le cadre de nos travaux est celle introduite par B. Després ([40], [8], [41], [24], [78]). Cette formulation aboutit à un système dont les propriétés permettent de considérer une méthode de résolution itérative basée sur des gradients conjugués et offrant une bonne convergence. Les méthodes itératives ont l'avantage de

permettre une meilleure gestion de la mémoire que les méthodes directes et une réduction du coût de calcul. D'autre part, elles se prêtent bien à différents types de méthodes de réduction des coûts de calcul et de mémoire. De nombreuses méthodes d'accélération des résolutions itératives des équations intégrales ont été développées. Les formulations intégrales de l'électromagnétisme impliquent la considération d'interactions surfaciques par le biais d'un noyau de Green, $G(k, |x - y|) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ où x et y décrivent la surface Γ et k désigne le nombre d'onde du problème. La discrétisation du problème aboutit à un système dont la taille dépend du nombre d'onde, le nombre de degrés de liberté étant proportionnel à k^2 . Nous proposons maintenant une introduction à quelques méthodes établies dans le but de réduire les coûts de résolution des équations intégrales.

Nous commençons cette présentation par la célèbre méthode multipôles rapide. La méthode multipôles rapide, notée FMM, est basée sur une réduction des interactions engendrées par le noyau de Green $G(k, \cdot)$. Par un développement judicieux de ce noyau, avec un regroupement des éléments du maillage éléments-finis dans des boîtes multipolaires, la méthode multipôles réduit les interactions entre mailles à des interactions entre les boîtes multipolaires. Cette considération permet de ne pas conserver la matrice du système et de recalculer les interactions nécessaires à chaque produit matrice-vecteur de la résolution itérative à un coût très réduit. La méthode doit son qualificatif "rapide" à sa complexité numérique; Nous désignons ici par complexité l'ordre des coûts de calcul et de mémoire de l'algorithme numérique correspondant. En effet, la méthode multipôles rapide permet de réduire la complexité de calcul des produits matrice-vecteur de $\mathcal{O}(N^2)$ à $\mathcal{O}(N^{3/2})$ pour la méthode à un niveau et à $\mathcal{O}(N \ln(N))$ pour la version multi-niveaux.

D'autres méthodes basées sur l'accélération des produits matrice-vecteur, comme la FMM, ont été établies :

- La méthode dite "Panel Clustering" décrite par S.A. Sauter ([73]) est basée sur un regroupement judicieux des degrés de liberté et un développement du noyau de Green, à la façon de la FMM.
- D'autres auteurs préfèrent s'intéresser aux transformées de Fourier rapide pour accélérer les produits matrice-vecteur. La nouvelle idée de O.P. Bruno et L.A. Kunyansky ([16], [15]) semble prometteuse. Celle de A. Besselov ([10]) peut être plus efficace que la FMM pour des géométries particulières.

Nous pouvons aussi considérer des méthodes qui agissent directement sur la matrice, en réduisant la taille du système ou en creusant la matrice :

- La méthode de discrétisation microlocale introduite par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou dans le cas d'obstacles convexes ([2], [90]) est basée sur une estimation de la phase de l'inconnue. Cette approximation de la phase permet d'introduire une nouvelle inconnue moins oscillante. La discrétisation de l'inconnue se fait alors avec un nombre de degrés de liberté de l'ordre de $k^{2/3}$ au lieu de k^2 . Cependant cette méthode nécessite toujours une discrétisation fine des intégrales définissant le système, ce qui limite le gain au niveau du

temps de calcul.

- A. de La Bourdonnaye et M. Tolentino ([39], [82]) ont établi une autre méthode de discrétisation microlocale basée sur une discrétisation de la phase de l'inconnue suivant les directions de la sphère unité. Si cette version n'impose pas la condition de convexité, elle s'avère beaucoup plus délicate à gérer.
- Les bases d'ondelettes constituent aussi une voie envisagée pour réduire les coûts de résolution des équations intégrales. W.C. Chew et al ([85]) et V. Rokhlin et al ([11], [4]) se sont intéressés aux méthodes d'ondelettes qui, par un choix judicieux des fonctions de base, permettent de creuser la matrice. Cependant, la complexité des algorithmes induits par ces méthodes est selon l'étude de W.C. Chew ([85]) de l'ordre de cN^2 , $c < 1$ où N est le nombre de degrés de liberté. Cette complexité leur a valu d'être dépréciées par rapport aux FMM de complexité en N^p , $p < 2$. Une étude plus récente de W.L. Golik ([47], [48]) aboutit à un algorithme performant à partir des travaux de I. Daubechies ([35]).
- F.X. Canning a également décrit une méthode permettant de creuser la matrice à partir d'un choix judicieux des fonctions de base et des fonctions test. Il s'agit de la méthode dite IML (impedance matrix localization) décrite dans les papiers [17] et [18].

Ces différentes idées de minimisation des coûts de résolution présentent des avantages différents parfois complémentaires, ainsi que des limitations variées. Il semble désormais pertinent d'envisager des couplages de ces idées. Par exemple, J. Tausch ([80]) étudie un couplage d'une méthode d'ondelettes avec une méthode multipôles rapide. Nous proposons dans ce mémoire de thèse une idée de couplage d'une méthode de discrétisation microlocale avec une méthode multipôles rapide.

Ce mémoire de thèse se compose de trois parties.

La première partie a pour but de familiariser le lecteur avec les différents outils mathématiques et numériques utilisés pour nos travaux. Nous proposons dans cette partie une présentation des méthodes de discrétisation microlocale et des méthodes multipôles rapides dans un cadre simplifié. A cet effet, nous nous plaçons dans le cas de l'équation de Helmholtz avec condition au bord de Dirichlet, résolue par formulation intégrale avec un potentiel de simple couche. Toujours dans ce cadre simplifié, nous étudions des couplages des méthodes de discrétisation microlocale avec une méthode multipôles. Dans le cas de la méthode de discrétisation microlocale décrite par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou, il s'agit tout d'abord de considérer l'estimation de la phase de la discrétisation microlocale afin de réduire le nombre de degrés de liberté. Ensuite, nous utilisons la FMM pour accélérer les calculs liés à la discrétisation fine des intégrales. Nous faisons aussi l'étude de la complexité du nouvel algorithme selon que l'on utilise une méthode multipôles à un niveau ou multi-niveaux.

Dans la deuxième partie, le couplage proposé précédemment fait l'objet d'une validation numérique avec une méthode multipôles à un niveau. Cette validation est effectuée dans le cadre de l'équation de Helmholtz tridimensionnelle résolue selon la formulation intégrale de B. Després et a fait l'objet d'une soumission au journal *Journal of Computational Physics* ([29]). Nous réécrivons tout d'abord la formulation intégrale en nous inspirant des travaux

de N. Bartoli et F. Collino ([8]) dans le cas bidimensionnel. L'application de la discrétisation microlocale dans cette nouvelle configuration nécessite quelques précisions. Les conditions au bord de Neumann et de Robin engendrent des estimations d'erreur différentes. Les nouvelles fonctions de base associées à une discrétisation éléments-finis \mathbb{P}_1 sont également présentées.

D'autre part, la formulation de B. Després sépare le noyau de Green $G(k, |x - y|) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ en un terme régulier $G_i(k, |x - y|) = \frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|}$ et un terme singulier $G_r(k, |x - y|) = \frac{\cos(k|x-y|)}{4\pi|x-y|}$. Nous spécifions alors les développements de G_r et G_i utilisés pour l'application

de la FMM. Ensuite, une étude numérique détaillée du couplage discrétisation microlocale et FMM à 1 niveau est proposée dans le cadre de la sphère. Ce couplage permet une résolution basée sur un maillage avec une longueur moyenne d'arête jusqu'à deux longueurs d'onde. Les cas du Cetaf, objet fourni par Dassault-Aviation, et de la double-sphère fortement non convexe, nous donnent un comportement de la nouvelle méthode pour des obstacles non convexes.

Nous étudions dans la troisième partie, une application du couplage discrétisation microlocale et FMM multi-niveaux à la résolution numérique des équations intégrales de Maxwell. Nous rappelons tout d'abord la formulation intégrale de B. Després en nous inspirant de l'article [24]. L'application de la nouvelle méthode aux équations de Maxwell nécessite quelques adaptations. La discrétisation basée sur une méthode éléments-finis Raviart-Thomas fait intervenir des fonctions de base vectorielles qui amplifient le lien entre les deux maillages de la discrétisation microlocale. D'autre part cette application d'une version multi-niveaux de la FMM à la discrétisation microlocale nécessite une adaptation de la FMM dans le choix des niveaux considérés. Nous rappelons cette particularité déjà évoquée dans la première partie. Les résultats numériques bien que moins spectaculaires que pour l'équation de Helmholtz, sont tout de même très intéressants. Nous envisageons aussi le cas d'objets convexes moins classiques.

Première partie

**Accélération de la résolution d'une
équation intégrale pour l'équation de
Helmholtz avec condition de Dirichlet**

Chapitre 1

Résolution par équation intégrale

1.1 Introduction

Notre travail consiste à envisager de nouvelles accélérations pour la résolution de l'équation intégrale liée au problème extérieur de Helmholtz avec condition de Dirichlet. Ce chapitre a pour but de poser le problème et de donner les motivations d'une accélération de sa résolution. Dans la section 1.2, nous rappelons succinctement l'équation intégrale obtenue à partir de l'équation de Helmholtz. Ensuite, nous proposons une discrétisation du problème ainsi obtenu et des résultats sur les estimations d'erreurs. Pour une étude plus précise, nous renvoyons aux travaux de J.-C. Nédélec et de J. Giroire ([66], [67], [46]). La discrétisation de l'équation intégrale aboutit à un système linéaire dont la résolution devient vite très coûteuse. La section 1.3 présente alors différentes méthodes d'accélération de la résolution.

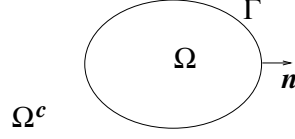
1.2 Formulation intégrale et discrétisation

1.2.1 Résolution de l'équation de Helmholtz en se ramenant à une équation intégrale

La recherche de solutions périodiques en temps pour l'équation des ondes acoustiques en présence d'un obstacle se ramène à l'équation de Helmholtz :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & \text{dans } \Omega^c, \\ u|_{\Gamma} = u^{inc}, & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r^2}\right), & r \longrightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1.1)$$

où Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^3 , de frontière Γ et $\Omega^c = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. u^{inc} est l'onde incidente. La dernière condition correspond à la condition de radiation de Sommerfeld ou condition d'onde sortante.



Pour une étude plus précise de l'équation des ondes acoustiques, nous renvoyons aux cours de J.-C. Nédélec ([66] ou [67]).

Nous orientons la normale à Γ vers l'extérieur de Ω , en posant alors :

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} /_{int\Omega} - \frac{\partial u}{\partial n} /_{ext\Omega} . \quad (1.2)$$

Nous considérons le cas où $-k^2$ n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur pour le Laplacien. Ainsi, la solution de (1.1) est donné par un potentiel de simple couche,

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(k, |x - y|) q(y) d\gamma(y) , \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 . \quad (1.3)$$

q est la densité de charge sur Γ et G la fonction de Green associée à l'équation de Helmholtz :

$$G(k, r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} .$$

Le potentiel de simple couche (1.3) est continu au passage de Γ , la frontière de l'obstacle. La charge q vérifie alors la relation suivante :

$$\int_{\Gamma} G(k, |x - y|) q(y) d\gamma(y) = u^{inc}(x) , \quad x \in \Gamma . \quad (1.4)$$

Notons \mathcal{S} l'opérateur intégral défini par :

$$(\mathcal{S}q)(x) = \int_{\Gamma} G(k, |x - y|) q(y) d\gamma(y) , \quad x \in \Gamma . \quad (1.5)$$

Lorsque $-k^2$ n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur pour le Laplacien , l'opérateur \mathcal{S} est un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$.

Ainsi, q est définie comme étant l'unique solution de l'équation intégrale,

$$\mathcal{S}q = u^{inc} . \quad (1.6)$$

En désignant par $\langle ., . \rangle$ la dualité entre les espaces $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$, nous avons la formulation variationnelle suivante :

Etant donné $u^{inc} \in H^{1/2}(\Gamma)$, trouver $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que

$$\langle q', \mathcal{S}q \rangle = \langle q', u^{inc} \rangle , \quad \forall q' \in H^{-1/2}(\Gamma) . \quad (1.7)$$

1.2.2 Résolution de l'équation intégrale par une méthode variationnelle d'éléments finis

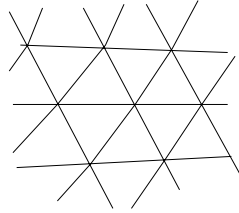
Nous utilisons une méthode d'éléments finis pour résoudre le problème (1.7) sous sa forme variationnelle. Nous considérons une surface Γ_h , approximation polynômiale par morceaux de degré l de la surface Γ . Nous définissons des sous-espaces de dimension finie de l'espace de Hilbert $H^{-1/2}(\Gamma_h)$, que nous noterons V_h et que nous considérerons inclus dans $L^2(\Gamma_h)$. Etant donné la régularité des éléments de V_h , le problème (1.7) est approché par le problème suivant :

Trouver un élément q_h dans l'espace V_h tel que :

$$\int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} q_h(x) q'_h(y) G(k, |x - y|) d\gamma(x) d\gamma(y) = \int_{\Gamma_h} u_h^{inc}(y) q'_h(y) d\gamma(y) \quad , \quad \forall q'_h \in V_h . \quad (1.8)$$

La quantité u_h^{inc} est une approximation de la donnée u^{inc} dans $H^{1/2}(\Gamma_h)$.

Nous considérons une décomposition éléments finis de la surface Γ_h que nous noterons \mathcal{T}_h et dont deux éléments quelconques, des triangles courbes, ont, soit une intersection vide, soit un sommet commun, soit une arête commune. Nous noterons N le nombre d'éléments.



Nous nous plaçons dans le cas où V_h est l'espace des fonctions constantes sur chaque élément, de dimension N , et dont une base est $\{\varphi_i ; i = 1, N\}$ définie par :

$$\varphi_{i/T_j} = \delta_{ij} \quad , \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\} \quad ,$$

où $\{T_j ; j = 1, N\} = \mathcal{T}_h$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Dans ce cas, l'espace V_h est inclus dans l'espace $L^2(\Gamma_h)$, et le problème approché (1.8) s'écrit de la façon suivante :

Trouver un élément $q_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j$ dans l'espace V_h tel que : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_i(y)} G(k, |x - y|) d\gamma(x) d\gamma(y) = \int_{\Gamma_h} u_h^{inc}(y) \overline{\varphi_i(y)} d\gamma(y) \quad , \quad (1.9)$$

c'est-à-dire :

Trouver un N -uplet α tel que $\forall i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{T_i} \int_{T_j} G(k, |x - y|) d\gamma(x) d\gamma(y) = \int_{T_i} u_h^{inc}(y) d\gamma(y) , \quad (1.10)$$

ce qui équivaut à la résolution en X du système suivant :

$$AX = B , \quad (1.11)$$

où A est une matrice symétrique connue de taille $N \times N$, B un vecteur connu, et X l'inconnue du problème, définis par :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\} \quad \begin{cases} A_{ij} = \int_{T_i} \int_{T_j} G(k, |x - y|) d\gamma(x) d\gamma(y) , \\ B_i = \int_{T_i} u_h^{inc}(y) d\gamma(y) , \\ X_j = \alpha_j . \end{cases} \quad (1.12)$$

Il reste ainsi à résoudre un système linéaire.

1.2.3 Traitement des intégrales

Le problème consiste à discrétiser l'expression

$$A_{ij} = \int_{T_i} \int_{T_j} G(k, |x - y|) d\gamma(x) d\gamma(y) , \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\} . \quad (1.13)$$

Nous décidons d'approcher les intégrales en se ramenant au triangle de référence en dimension 2, et en appliquant une quadrature de Gauss. Pour cela nous devons tout d'abord introduire quelques notations.

Dans le triangle de référence, $T_0 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, considérons l'ensemble des points de Gauss $\{x_\beta , \beta = 1, \dots, nbg\} \subset \mathbb{R}^2$ et l'ensemble des poids de Gauss associés $\{\omega_\beta , \beta = 1, \dots, nbg\}$, où nbg est le nombre de points de Gauss.

Pour chaque triangle courbe $T_i, i \in \{1, \dots, N\}$, on désignera par $mes(T_i)$ l'aire de T_i , et par $T_i^{(j)}$ le $j^{\text{ième}}$ sommet de T_i . De même le $j^{\text{ième}}$ sommet de T_0 sera dénoté $T_0^{(j)}$.

Notons F_i l'application polynômiale de degré l qui transforme le triangle de référence T_0 en T_i , avec entre autres :

$$\begin{aligned} F_i(T_0^{(j)}) &= T_i^{(j)} , \quad \forall j \in \{1, \dots, 3\} , \\ T_0^{(1)} &= (0, 0) , \quad T_0^{(2)} = (1, 0) , \quad T_0^{(3)} = (0, 1) . \end{aligned}$$

Dans la pratique, on prend $l = 1$. Les cas $l \geq 2$ sont trop compliqués à mettre en œuvre numériquement. Dans la suite de ce paragraphe, on se place alors dans le cas où $l = 1$.

On obtient, tous calculs faits, l'approximation suivante pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$:

$$A_{ij} \approx \sum_{\beta, \beta'=1}^{nbg} 4 \text{mes}(T_i) \text{mes}(T_j) \omega_\beta \omega_{\beta'} G(k, |F_i(x_\beta) - F_j(x_{\beta'})|) , \quad \text{si } T_i \cap T_j = \emptyset . \quad (1.14)$$

Pour $l = 1$, on peut écrire $F_i(x_\beta)$ de façon plus explicite. F_i est l'application affine vérifiant $F_i(T_0^{(j)}) = T_i^{(j)}$, $\forall j \in \{1, \dots, 3\}$. Ainsi, pour tout $x_\beta = (x_\beta(1), x_\beta(2)) \in T_0$, on a :

$$F_i(x_\beta) = x_\beta(1) T_i^{(2)} + x_\beta(2) T_i^{(3)} + (1 - x_\beta(1) - x_\beta(2)) T_i^{(1)} .$$

Nous noterons $x_{i\beta}$ ce dernier point.

Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, nous approchons l'intégrale par la méthode de traitement des singularités établie par J. Gay du CEA/CESTA, utilisée entre autres par V. Lange dans [56], V. Lubet dans [60] ou encore A. Lecompte dans [57] et rappelée en annexe. Nous noterons $JG(T_i, T_j)$ cette approximation.

Dans le cas $l = 1$, le problème (1.11)-(1.12) est donc approché par le système suivant :

$$A_h X = B_h , \quad (1.15)$$

où A_h et B_h sont définis par : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_h)_{ij} = \sum_{\beta, \beta'=1}^{nbg} 4 \text{mes}(T_i) \text{mes}(T_j) \omega_\beta \omega_{\beta'} G(k, |x_{i\beta} - x_{j\beta'}|) , \quad \text{si } T_i \cap T_j = \emptyset , \\ \quad \quad \quad = JG(T_i, T_j) , \quad \quad \quad \text{si } T_i \cap T_j \neq \emptyset , \\ (B_h)_i = \sum_{\beta=1}^{nbg} 2 \text{mes}(T_i) \omega_\beta u_h^{inc}(x_{i\beta}) . \end{array} \right. \quad (1.16)$$

1.2.4 Estimations d'erreurs liées à la méthode des éléments finis

Soient q la solution du problème (1.6) et q_h celle obtenue par la résolution du problème (1.15)-(1.16). Soit u (respectivement u_h) la fonction définie sur \mathbb{R}^3 à partir de q (respectivement q_h) par la relation (1.3).

En désignant par h , le plus grand des diamètres des éléments de \mathcal{T}_h , et par π la projection orthogonale de Γ_h sur Γ , nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$\|q - \pi(q_h)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \left[\|u^{inc} - u_h^{inc}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + h^{m+\frac{3}{2}} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^{l+\frac{1}{2}} \|q\|_{L^2(\Gamma)} \right]. \quad (1.17)$$

m désigne le degré des polynômes de l'approximation éléments-finis et l le degré d'approximation de la surface. Il en découle une estimation sur $L^2(\Gamma)$ (cf [46]) :

$$\|q - \pi(q_h)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \|u^{inc} - u_h^{inc}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + h^{m+1} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^l \|q\|_{L^2(\Gamma)} \right]. \quad (1.18)$$

q est une inconnue intermédiaire permettant de calculer u . Pour obtenir les estimations sur u , nous avons besoin des estimations suivantes :

Si $s \in [1, m+2]$,

$$\|q - \pi(q_h)\|_{H^{-s}(\Gamma)} \leq C \left[h^{s-\frac{1}{2}} \|u^{inc} - u_h^{inc}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u^{inc} - u_h^{inc}\|_{H^{-s+1}(\Gamma)} + h^{m+1+s} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^{l+1} \|q\|_{L^2(\Gamma)} \right]. \quad (1.19)$$

Si $s \in [0, 1]$, pour h suffisamment petit,

$$\|q - \pi(q_h)\|_{H^{-s}(\Gamma)} \leq C \left[h^{s-\frac{1}{2}} \|u^{inc} - u_h^{inc}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + h^{s-1} \|u^{inc} - u_h^{inc}\|_{L^2(\Gamma)} + h^{m+1+s} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^{l+s} \|q\|_{L^2(\Gamma)} \right]. \quad (1.20)$$

Ces estimations nous conduisent aux résultats suivants sur u (cf [46]) :

$\forall \delta > 0$, h assez petit, nous avons pour $y \in \Omega^c$ vérifiant $d(y, \Gamma) \geq \delta$,

$$|u(y) - u_h(y)| \leq C e_s(y, \Gamma) \left[h^{s-\frac{1}{2}} \|u^{inc} - u_h^{inc}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u^{inc} - u_h^{inc}\|_{H^{-s+1}(\Gamma)} + h^{m+s+1} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^{l+1} \|q\|_{L^2(\Gamma)} \right], \quad (1.21)$$

où $s \in [0, m+2]$ et $e_s(y, \Gamma) = \sum_{j=1}^{[s]+2} \frac{1}{d^j(y, \Gamma)}$.

Cette étude aboutit au choix $h \sim \frac{1}{k}$ et donc $N \sim k^2$.

1.3 Motivation des méthodes d'accélération

La résolution du système linéaire (1.15)-(1.16) présenté dans le paragraphe 1.2.3, se fait soit par une méthode d'inversion directe très coûteuse, soit par l'utilisation d'une méthode itérative qui nécessite à chaque itération la réalisation d'un produit matrice-vecteur dont la matrice est A_h . Ces produits nécessitent a priori d'avoir en mémoire la matrice pleine A_h , de taille $N \times N$. La complexité du coût de calcul, des produits matrice-vecteur est $\mathcal{O}(N^2)$. La complexité d'une méthode directe est $\mathcal{O}(N^3)$ et celle d'une méthode itérative est $\mathcal{O}(N^2 N_{iter})$ où N_{iter} est le nombre d'itérations requis par la résolution. Nous avons choisi de nous intéresser aux méthodes itératives.

Le nombre d'inconnues, N , peut devenir grand si une précision importante est souhaitée. De plus, l'évaluation de h établie dans le paragraphe 1.2.4 aboutit au lien $N \sim k^2$. D'autre part, k est proportionnel à la fréquence qui croît sensiblement pour certaines applications physiques. Il devient donc impossible de stocker la matrice A_h pour N grand. Il nous faut alors a priori la recalculer pour chaque produit. Les méthodes présentées dans les chapitres suivants consistent alors à accélérer le calcul des produits matrice-vecteur $A_h \cdot Y$ pour Y vecteur donné, par réduction de la taille du système (1.11)-(1.12), en creusant la matrice, ou par diminution du nombre d'interactions.

Dans le cas d'un obstacle convexe et d'une onde incidente plane, une première méthode consiste à approcher la phase de l'inconnue selon les théories géométrique et physique de la diffraction. Cette approximation a pour conséquence de réduire les oscillations de l'inconnue \tilde{q} du nouveau problème. Ceci nous permet alors de considérer une discrétisation numérique avec un nombre de degrés de liberté N_d d'un ordre nettement inférieur par rapport à la fréquence k . En effet, dans le cas standard $N_d \sim k^2$, alors qu'après approximation de la phase, $N_d \sim k^{2/3}$. Cependant, l'approximation de la surface Γ de l'obstacle nécessite un maillage plus fin avec un nombre de mailles en k^2 afin d'avoir une évaluation des différentes fonctions sur Γ avec une précision suffisante. Ainsi, l'évaluation de la matrice du système, de taille $k^{2/3} \times k^{2/3}$, s'effectue avec un coût de calcul de l'ordre de $k^2 \times k^2$. Les auteurs de cette méthode, T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou ([1], [2], [90]) proposent alors une accélération de la construction de la matrice basée sur la théorie de la phase stationnaire.

La méthode de discrétisation microlocale proposée par A. de La Bourdonnaye et M. Tolentino (cf. [38], [37], [36], [39], [82]) est basée sur la même idée de séparation de l'amplitude et de la phase. Pour traiter des cas plus généraux que précédemment, ils proposent d'écrire la phase comme une combinaison de phases d'ondes planes. Ils obtiennent un problème où le nombre de degrés de liberté N_d est en k^2 , la discrétisation de l'espace des directions d'ondes planes se faisant avec k points, ainsi que celle de l'obstacle. L'accélération du produit matrice-vecteur est assurée par application de la théorie de la phase stationnaire qui permet de creuser la matrice.

Les méthodes multipôles rapides reposent sur une autre idée. Il s'agit de développer les calculs du produit $A_h \cdot Y$ et d'effectuer un regroupement judicieux des termes de manière à réduire la complexité en approchant les interactions lointaines. D'un point de vue géométrique, le calcul des interactions lointaines est considérablement accéléré en regroupant convenablement les éléments de la triangulation \mathcal{T}_h . Le choix du regroupement permet de définir deux méthodes. Si le regroupement est uniforme, on parle d'une méthode à un niveau qui aboutit à un algorithme en $\mathcal{O}(N^{3/2})$. Ce regroupement peut être choisi en fonction de l'éloignement des interactions. Dans ce cas, on parle d'une méthode multi-niveaux qui aboutit à un algorithme en $\mathcal{O}(N \ln^2 N)$. Cette méthode introduite par V. Rokhlin ([23]) a été étendue par W.C. Chew ([76]), J. Rahola ([68]), E. Darve ([30]) et bien d'autres auteurs ([44], [65], ...).

Chapitre 2

Discrétisation microlocale

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé la nécessité d'accélérer la résolution du système lié à la discrétisation de l'équation intégrale pour le problème extérieur de Helmholtz. Nous donnons ici une description de deux méthodes d'accélération dites de discrétisation microlocale. La première, introduite par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou est basée sur une évaluation de la phase de l'inconnue. La seconde, proposée par A. de La Bourdonnaye et M. Tolentino est basée sur une discrétisation de la phase de l'inconnue.

2.1 Méthode d'approximation de la phase

Cette méthode est présentée par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou ([1], [2], [90]) sous les conditions suivantes :

- * Ω est un ouvert borné régulier **convexe** de \mathbb{R}^3 ,
- * u^{inc} est une onde incidente **plane**.

Sous ces conditions, l'idée consiste à exprimer l'inconnue q_h du problème (1.11)-(1.12) en introduisant une approximation de la phase. Cette idée réunit deux notions, celle des méthodes d'éléments finis et celle des méthodes asymptotiques. Ceci implique la considération des concepts de développements asymptotiques de la phase de l'inconnue, introduits par les théories géométriques et physiques de la diffraction (voir par exemple le livre [12] de D. Bouche et F. Molinet). L'inconnue s'écrit $q_h = Q_h e^{i\phi_h}$ où Q et ϕ désignent respectivement l'amplitude et la phase de l'inconnue. Un développement asymptotique de la phase est donné par $\widetilde{\phi}_h = k\phi_0 + \mathcal{O}(k^{1/3})$ ([62], [81], [6]). Une approximation de la phase au premier degré est donc $\widetilde{\phi}_h = k\phi_0$. Quand l'obstacle est convexe et l'onde incidente plane, de la forme $u^{inc}(x) = e^{ik\xi \cdot x}$, ϕ_0 est définie par $\phi_0(x) = \xi \cdot x$. En désignant par \widetilde{q}_h la nouvelle inconnue telle que $q_h = \widetilde{q}_h e^{ik\phi_0}$, on a $\widetilde{q}_h = Q_h e^{i(\phi_h - \phi_0)}$. On note de même $q = \widetilde{q} e^{ik\phi_0}$ la solution de l'équation intégrale (1.6). Ce changement d'inconnue vérifie la propriété suivante :

$$\|q\|_{H^s(\Gamma)} = \mathcal{O}(k^{1+s}), \quad \|\widetilde{q}\|_{H^s(\Gamma)} = \mathcal{O}(k^{1+\frac{s}{3}}).$$

En reprenant l'estimation d'erreur (1.18), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \| q - \pi(q_h) \|_{L^2(\Gamma)} &\leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \| u^{inc} - u_h^{inc} \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \right. \\ &\quad \left. h^{m+1}k^{m+2} + h^l k \right] , \\ &= C \left[f_h(u^{inc}) + k(hk)^{m+1} + kh^l \right] , \end{aligned} \quad (2.1)$$

où π est la projection orthogonale de Γ_h sur Γ et h la longueur maximale des arêtes de Γ_h . L'erreur relative est donc estimée par :

$$\frac{\| q - \pi(q_h) \|_{L^2(\Gamma)}}{\| q \|_{L^2(\Gamma)}} \leq C \left[k^{-1} f_h(u^{inc}) + (hk)^{m+1} + h^l \right] . \quad (2.2)$$

Cependant, l'estimation d'erreur par rapport à \tilde{q} s'écrit (cf. [90]) :

$$\begin{aligned} \| \tilde{q} - \pi(\tilde{q}_h) \|_{L^2(\Gamma)} &\leq C \left[\tilde{f}_h(u^{inc}) + h^l \| u_h^{inc} \|_{L^2(\Gamma)} \right. \\ &\quad \left. h^{m+1} \| \tilde{q} \|_{H^{m+1}(\Gamma)} + kh^l \| \tilde{q} \|_{L^2(\Gamma)} \right] . \end{aligned} \quad (2.3)$$

D'autre part,

$$\frac{\tilde{f}_h(u^{inc})}{\| \tilde{q} \|_{L^2(\Gamma)}} + h^l \frac{\| u_h^{inc} \|_{L^2(\Gamma)}}{\| \tilde{q} \|_{L^2(\Gamma)}} \leq C(h^m + h^l) ,$$

On en déduit alors l'estimation suivante :

$$\frac{\| \tilde{q} - \pi(\tilde{q}_h) \|_{L^2(\Gamma)}}{\| \tilde{q} \|_{L^2(\Gamma)}} \leq C \left[h^m + h^l + (hk^{\frac{1}{3}})^{m+1} + kh^l \right] . \quad (2.4)$$

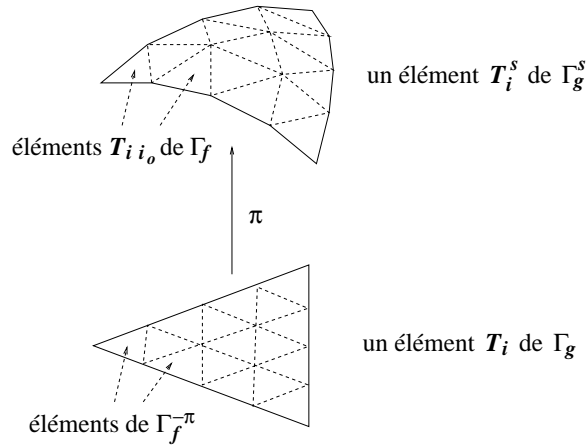
Comme dans la section 1.2, afin de borner l'erreur relative (2.2) indépendamment de la fréquence, il suffit de prendre $h \sim k^{-1}$. De même, pour borner l'erreur relative (2.4), nous pourrions prendre $h \sim k^{-1/3}$. Cependant, pour que le terme en kh^l se comporte comme celui en $k^{1/3}h$, nous devrions alors considérer une approximation Γ_h de la surface Γ de degré $l = 3$. Ce choix s'avère trop difficile à mettre en œuvre numériquement. La solution proposée par les auteurs de la méthode consiste à considérer deux maillages. En effet, le terme en kh^l est lié à l'approximation géométrique, alors que le terme en $hk^{1/3}$ provient de la discrétisation de l'inconnue. Pour définir l'inconnue, nous considérons donc un maillage grossier Γ_{h_g} noté Γ_g . Nous considérons aussi un maillage fin Γ_{h_f} noté Γ_f pour l'évaluation des fonctions intervenant dans le problème. h_f et h_g désigneront respectivement les longueurs maximales des arêtes des maillages Γ_f et Γ_g . Ces deux maillages permettent d'établir une nouvelle méthode de type éléments-finis basée sur le maillage grossier Γ_g pour la définition de l'inconnue et utilisant le maillage fin Γ_f pour la discrétisation des intégrales. La nouvelle estimation d'erreur est donnée par :

$$\frac{\| \tilde{q} - \pi(\tilde{q}_h) \|_{L^2(\Gamma)}}{\| \tilde{q} \|_{L^2(\Gamma)}} \leq C \left[h_g^m + h_g^{-1} h_f^{l+1} + (h_g k^{\frac{1}{3}})^{m+1} + kh_g^{-1} h_f^{l+1} \right] . \quad (2.5)$$

Γ_g est associé à la discrétisation de l'inconnue par le biais de termes h_g^m . Les termes h_f^l confirment la contribution de Γ_f dans l'approximation de la surface. Ces nouvelles estimations nous permettent de considérer $l = 1$ en nous imposant le choix suivant :

$$h_g \sim k^{-1/3} \quad \text{et} \quad h_f \sim k^{-1}$$

Introduisons maintenant quelques notations concernant les différents maillages. l'inconnue est définie à partir du maillage grossier Γ_g , avec un nombre d'éléments $N_g \sim k^{2/3}$. Γ_f désigne le maillage fin qui approche la surface Γ de l'obstacle, pour la discrétisation des intégrales, avec un nombre d'éléments $N_f \sim k^2$. En pratique, Γ_f devra être un raffinement de Γ_g : En se donnant Γ_g , nous considérons d'abord $\Gamma_f^{-\pi}$ un raffinement de Γ_g . Ensuite, Γ_f est obtenu par projection de $\Gamma_f^{-\pi}$ sur la surface Γ de l'obstacle. Par la suite, nous désignerons alors par π la projection orthogonale des triangles plans de Γ_g vers ceux de Γ_f . π vérifie : $\Gamma_f = \pi(\Gamma_g^{-\pi})$. Nous définissons aussi Γ_g^s , la projection de Γ_g sur Γ_f par π . Γ_g^s suit la surface comme Γ_f le fait. Comme le suggère la figure suivante, les éléments de Γ_g^s ne sont pas plans :



Notons \mathcal{N}_i le nombre d'éléments de Γ_f contenus dans le $i^{\text{ième}}$ élément de Γ_g^s . La numérotation des éléments de Γ_f se fait alors par l'intermédiaire de Γ_g^s : T_{i_0} désignera le $(i_0)^{\text{ième}}$ élément de Γ_f contenu dans le $i^{\text{ième}}$ élément de Γ_g^s .

Le nouvel espace discret est défini ainsi :

$$\tilde{V}_h(\Gamma_g^s) = \{ \tilde{q}_h / \tilde{q}_h = \tilde{q} \circ \pi^{-1}, \tilde{q}_{/T_j} \in \mathbb{P}_1(T_j) \},$$

où $(T_j)_j$ décrit l'ensemble des éléments de Γ_g . Définissons maintenant les fonctions de base associées à cette nouvelle discrétisation de l'inconnue. Nous noterons φ_i la fonction de base classique associée à l'élément T_i du maillage éléments-finis Γ_g . Introduisons aussi les fonctions $(\tilde{\varphi}_i)$ définies par $\tilde{\varphi}_i = \mathcal{J}_i(\varphi_i \circ \pi^{-1})e^{2k\phi_0}$. Les fonctions $(\varphi_i \circ \pi^{-1})$, $i = 1, \dots, N_g$ correspondent

aux fonctions de base associées au nouvel espace $\tilde{V}_h(\Gamma_g^s)$. \mathcal{J}_i correspond au jacobien associé à la transformation π localement à T_i , pour tout i_0 dans $\{1, \dots, N_i\}$, sur T_{i_0} : $\mathcal{J}_i(x) = \mathcal{J}_{i_0} = \frac{\text{mes}(\pi^{-1}(T_{i_0}))}{\text{mes}(T_{i_0})}$. L'inconnue est définie ainsi :

$$\forall x \in \Gamma_f, \quad q_h(x) = \tilde{q}_h(x) e^{ik\phi_0(x)} = \sum_{i=1}^{N_g} \tilde{q}_i \tilde{\varphi}_i(x).$$

En prenant les fonctions test $(\tilde{\varphi}_i)_i$, le problème (1.9) se réécrit :

Trouver un élément $q_h = \sum_{j=1}^{N_g} \tilde{q}_j \tilde{\varphi}_j$ tel que : $\forall i \in \{1, \dots, N_g\}$,

$$\int_{\Gamma_f} \int_{\Gamma_f} \sum_{j=1}^{N_g} \tilde{q}_j \tilde{\varphi}_j(x) \overline{\tilde{\varphi}_i(y)} G(k, |x-y|) d\gamma(x) d\gamma(y) = \int_{\Gamma_f} u_h^{inc}(y) \overline{\tilde{\varphi}_i(y)} d\gamma(y), \quad (2.6)$$

c'est à dire :

Trouver un N_g -uplet \tilde{q} dans l'espace \mathbb{C}^{N_g} tel que : $\forall i \in \{1, \dots, N_g\}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_f} \int_{\Gamma_f} \sum_{j=1}^{N_g} \tilde{q}_j e^{ik\phi_0(x)} \mathcal{J}_j(x) \varphi_j \circ \pi^{-1}(x) e^{-ik\phi_0(y)} \overline{\mathcal{J}_i(y)} \overline{\varphi_i \circ \pi^{-1}(y)} G(k, |x-y|) d\gamma(x) d\gamma(y) \\ & = \int_{\Gamma_f} u_h^{inc}(y) e^{-ik\phi_0(y)} \overline{\mathcal{J}_i(y)} \overline{\varphi_i \circ \pi^{-1}(y)} d\gamma(y). \end{aligned} \quad (2.7)$$

En reprenant les fonctions de base $\varphi_{i/T_j} = \delta_{ij}$, comme pour le système (1.11)-(1.12) établi dans la section 1.2, avec $l = 1$, nous aboutissons au système suivant :

$$AX = B, \quad (2.8)$$

où A , B et X sont définis par : $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ij} = \sum_{j_0=1}^{N_j} \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{T_{i_0}} \int_{T_{j_0}} \mathcal{J}_{i_0} \mathcal{J}_{j_0} e^{ik\phi_0(x)} G(k, |x-y|) e^{-ik\phi_0(y)} d\gamma(x) d\gamma(y), \\ B_i = \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{T_{i_0}} \mathcal{J}_{i_0} e^{-ik\phi_0(y)} u_h^{inc}(y) d\gamma(y), \\ X_j = \tilde{q}_j. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Le système ainsi obtenu est bien de taille $k^{2/3} \times k^{2/3} \ll k^2 \times k^2$. Cependant pour résoudre ce problème, il faut précalculer la matrice A . Mais cette première étape nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de k^4 . La solution proposée par les auteurs de la méthode consiste à utiliser la théorie de la phase stationnaire qui permet de réduire cette dernière complexité à k^2 d'un point de vue théorique. En pratique, si cette solution paraît très efficace en dimension deux, elle engendre, dans le cas de la dimension trois, des difficultés numériques non résolues. Pour plus de précision sur cette étape nous renvoyons aux travaux de B. Zhou ([90]). La théorie de la phase stationnaire est présentée dans les ouvrages suivants : [20], [52], [70], [77].

2.2 Méthode de discrétisation de la phase

Cette méthode présentée par A. de La Bourdonnaye et M. Tolentino ([38], [37], [36], [39], [82]) s'applique dans des conditions plus générales que la méthode présentée par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou :

- * Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^3 , sans condition de convexité,
- * u^{inc} est une onde incidente quelconque.

La méthode de discrétisation microlocale qu'ils proposent consiste à prendre des fonctions de base de la forme $x \mapsto e^{ik\xi_{i_0} \cdot x} \varphi_i(x)$, $i_0 = 1, \dots, N_0$, $i = 1, \dots, N$. Cette méthode consiste à approcher l'inconnue par une combinaison linéaire d'ondes planes de directions ξ_{i_0} , $i_0 = 1, \dots, N_0$.

L'étude des estimations d'erreurs sur la discrétisation de la phase les amène à choisir $N \sim k$ ainsi que $N_0 \sim k$ (cf. [36], [82]).

Le problème (1.9) se réécrit alors :

Trouver un élément $q_h = \sum_{j=1}^N \sum_{j_0=1}^{N_0} \tilde{q}_{j j_0} e^{ik\xi_{i_0} \cdot \gamma} \varphi_j$ tel que : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\forall i_0 \in \{1, \dots, N_0\}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \sum_{j=1}^N \sum_{j_0=1}^{N_0} \tilde{q}_{j j_0} e^{ik\xi_{j_0} \cdot x} \varphi_j(x) e^{-ik\xi_{i_0} \cdot y} \overline{\varphi_i(y)} G(k, |x - y|) d\gamma(x) d\gamma(y) \\ &= \int_{\Gamma_h} u_h^{inc}(y) e^{-ik\xi_{i_0} \cdot y} \overline{\varphi_i(y)} d\gamma(y), \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pour une discrétisation éléments finis classique, ceci nous amène au système

$$AX = B, \tag{2.11}$$

où A , B et X sont définis par : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$, $\forall i_0, j_0 \in \{1, \dots, N_0\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{(i i_0)(j j_0)} = \int_{T_i} \int_{T_j} e^{ik\xi_{j_0} \cdot x} G(k, |x - y|) e^{-ik\xi_{i_0} \cdot y} d\gamma(x) d\gamma(y) , \\ B_{i i_0} = \int_{T_i} u_h^{inc}(y) e^{-ik\xi_{i_0} \cdot y} d\gamma(y) , \\ X_{j j_0} = \tilde{q}_{j j_0} . \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Ce système est de taille $k^2 \times k^2$. La complexité d'une résolution classique de ce système, $\mathcal{O}(k^4)$, est donc la même que celle obtenue pour la résolution de l'équation intégrale classique. La différence provient des fonctions exponentielles du type $x \mapsto e^{ik\xi_{i_0} \cdot x}$ grâce auxquelles la théorie de la phase stationnaire permet de creuser la matrice et donc de réduire la complexité à $\mathcal{O}(k^2)$. Cependant la matrice ainsi générée est assez mal conditionnée et nécessite l'établissement d'un bon préconditionneur. Pour la résolution numérique, en ce qui concerne la discrétisation des intégrales, les auteurs de cette méthode ne présentent pas d'estimations d'erreur, mais signalent la nécessité d'un important nombre de points de discrétisation par triangle. D'autre part les résultats obtenus présentent une précision assez limitée ([82]). Après la considération de la méthode introduite par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou, il paraît naturel de penser que la considération d'une discrétisation éléments finis basée sur un double maillage pourrait également être plus adaptée dans le cadre de la méthode de A. de La Bourdonnaye et M. Tolentino.

Chapitre 3

Méthodes multipôles rapides

Ce chapitre est consacré à une description de la méthode multipôles rapide désignée par le sigle FMM pour Fast Multipole Method, appliquée à l'équation de Helmholtz, en 3 dimensions.

Les méthodes multipôles rapides interviennent dans certaines résolutions itératives des systèmes linéaires de grande taille. L'opération la plus coûteuse dans une méthode itérative est le produit matrice-vecteur dont la matrice est celle du système résolu. On appelle donc *méthode rapide* une méthode permettant de stocker et d'effectuer des produits matrice-vecteur avec un stockage mémoire et un coût CPU strictement inférieurs à N^2 , coût d'une résolution classique.

Par convention, on entendra par Fast Multipole Method (FMM), l'algorithme de résolution rapide développé par V. Rokhlin, revu, amélioré et adapté à des cas plus complexes par d'autres auteurs (W.C. Chew, E. Darve, ...). Cet algorithme étant assez complexe, nous présentons au début de ce chapitre un cas simplifié d'application des méthodes multipôles en dimension 1. Ce cas permet d'exposer la plupart des aspects essentiels de la FMM tout en restant suffisamment élémentaire pour être aisément accessible.

3.1 Présentation d'une méthode multipôles rapide

3.1.1 Historique

Historiquement, les méthodes multipôles ont été introduites pour le problème à N-corps de l'astronomie. Elles ont été ensuite étendues au problème des équations de Laplace résolues par des méthodes intégrales (V. Rokhlin et L. Greengard dans [49], [50] et [21]). Le cas des équations de Helmholtz a été abordé par V. Rokhlin dans le cas 2D dans l'article [71] puis en 3D dans [72]. Ces algorithmes conduisent à une complexité en $\mathcal{O}(N^{3/2})$ pour la méthode à 1 niveau, qui a été améliorée par R.L. Wagner et W.C. Chew dans [84] en utilisant le concept de propagation de rayons. La complexité est alors réduite à $\mathcal{O}(N^{4/3})$. La version multi-niveaux a été mise au point en 2D dans [59] et étendu au cas tridimensionnel dans [75] par l'équipe de

W.C. Chew. En France, E. Darve a présenté la FMM multi-niveaux dans le cadre des équations de Helmholtz/Maxwell ([30], [32] et [33]). En s’inspirant des travaux de Rokhlin effectués dans le cadre de l’équation de Helmholtz ([23], [71], [72]), il aboutit à un algorithme d’une complexité en $\mathcal{O}(N \ln N)$. Pour des détails précis concernant les estimations d’erreurs, nous renvoyons le lecteur à l’article de E. Darve [32]. De même, concernant une étude numérique de la méthode, nous renvoyons à l’article [33]. Compte tenu des intérêts de cette méthode, de nouvelles applications sont envisagées notamment pour la résolution des équations de Maxwell en régime temporel ([45], [54]) ou les problèmes inverses en scattering ([13]), mais aussi dans d’autres domaines d’application de l’analyse numérique tels que la dynamique moléculaire ([74]) ou les intégrales multidimensionnelles ([58]). Dans le cadre de la méthode multipôles en elle-même, des travaux de recherche actuellement en cours concernent la parallélisation de la méthode ([79], [42]) ou encore, le développement du noyau de Green pour parer le problème dit “des basses fréquences”. Ce problème apparaît lorsque le maillage présente des raffinements locaux à cause de détails géométriques de petite taille devant la longueur d’onde ([21], [53], [34]).

3.1.2 Un cas simple en dimension 1

Nous donnons ici une présentation élémentaire d’application de la FMM inspirée de celle de E. Darve ([31]). Cette présentation permet d’introduire simplement le principe et les notions fondamentales de la méthode. Pour cela, on se donne un ensemble de N points $x_i \in \mathbb{R}$ répartis de manière quasi uniforme dans $[0; 1]$.

Introduisons tout d’abord **la notion de découplage** : Considérons une expression $f(x_i, x_j)$. Supposons que cette expression puisse être approchée par un produit $g(x_i).h(x_j)$. Etudions le coût de calcul des expressions $\sum_{j=1}^N f(x_i, x_j).Y_j$, $i = 1, \dots, N$, où Y est un vecteur donné de \mathbb{R}^N . Pour chacun des N points x_i , nous avons à effectuer une somme sur j qui nécessite $\mathcal{O}(N)$ opérations. Il en résulte la complexité $\mathcal{O}(N^2)$. Etudions maintenant le coût de calcul de l’approximation $\sum_{j=1}^N g(x_i).h(x_j).Y_j$. Ceci peut se réécrire $g(x_i). \sum_{j=1}^N h(x_j).Y_j$. On peut donc effectuer le calcul en deux étapes. Tout d’abord, on évalue, indépendamment de i , l’expression $h_Y = \sum_{j=1}^N h(x_j).Y_j$ en $\mathcal{O}(N)$ opérations. Ensuite, il suffit d’effectuer pour chaque i le produit $g(x_i).h_Y$. Il en résulte un algorithme de complexité $\mathcal{O}(N)$.

On définit désormais la matrice \mathcal{M} par

$$\mathcal{M}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_j} & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.1)$$

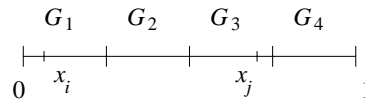
Nous proposons donc d'accélérer le produit matrice-vecteur $\mathcal{M}.Y$, où Y est un vecteur donné. Considérons un point x_i . Il s'agit d'accélérer le calcul de l'expression

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{x_i - x_j} \cdot Y_j .$$

Le point x_i est nommé “**point observateur**” alors que l'appellation “**points sources**” est réservée aux points x_j . L'idée clef de la méthode est **la séparation des variables** i et j , le découplage des points x_i et x_j . Pour cela, nous utilisons, d'une part, **un regroupement** des points, et d'autre part, le développement suivant :

$$\frac{1}{1 - \rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n , \quad \rho \in] - 1; 1[. \quad (3.2)$$

Pour regrouper les points, nous considérons ici la partition de $[0; 1]$ suivante : $G_1 = \left[0; \frac{1}{4}\right]$, $G_2 = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, $G_3 = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, $G_4 = \left[\frac{3}{4}; 1\right]$. Notons C_k le centre du groupe G_k , $k \in \{1, \dots, 4\}$.



Si on considère, par exemple, $x_i \in G_1$ et $x_j \in G_3 \cup G_4$. Nous pouvons réécrire \mathcal{M}_{ij} à l'aide de (3.2) :

$$\frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{C_1 - x_j - (C_1 - x_i)} = \frac{1}{C_1 - x_j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C_1 - x_i}{C_1 - x_j} \right)^n . \quad (3.3)$$

Nous avons dans ce cas $|C_1 - x_i| \leq \frac{|C_1 - x_j|}{2}$. Ainsi si on se donne une tolérance $\epsilon > 0$, il existe un nombre L_ϵ de l'ordre de $\frac{-\ln(\epsilon)}{\ln(2)}$, tel que

$$\left| \frac{1}{x_i - x_j} - \sum_{n=0}^{L_\epsilon} \frac{(C_1 - x_i)^n}{(C_1 - x_j)^{n+1}} \right| \leq \epsilon \frac{1}{|x_i - x_j|} .$$

On en déduit l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} \mathcal{M}_{ij} \cdot Y_j &= \sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot Y_j , \\
&\approx \sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} \sum_{n=0}^{L_\epsilon} \frac{(C_1 - x_i)^n}{(C_1 - x_j)^{n+1}} \cdot Y_j , \\
&= \sum_{n=0}^{L_\epsilon} (C_1 - x_i)^n \sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} \frac{Y_j}{(C_1 - x_j)^{n+1}} .
\end{aligned}$$

La relation (3.3) ne peut pas s'écrire pour $x_j \in G_1 \cup G_2$. En effet dans ce cas, la condition de convergence $|C_1 - x_i| < |C_1 - x_j|$ n'est pas assurée. Ainsi, la FMM oblige de distinguer les **interactions proches** (x_i et x_j appartiennent à des groupes proches que l'on dira **voisins**) des **interactions lointaines** (x_i et x_j appartiennent à des groupes lointains que l'on dira **non voisins**). La FMM consiste alors à accélérer le calcul des interactions lointaines, celui des interactions proches restant inchangé. L'expression $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{x_i - x_j} \cdot Y_j$ est approchée par la somme

des deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
* \text{ interactions proches : } &\sum_{\substack{j/ \\ j \neq i}} \frac{1}{x_j \in G_1 \cup G_2} \cdot Y_j \\
* \text{ interactions lointaines : } &\sum_{n=0}^{L_\epsilon} (C_1 - x_i)^n \sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} \frac{Y_j}{(C_1 - x_j)^{n+1}} .
\end{aligned}$$

Etudions le gain obtenu en approchant les interactions lointaines selon la FMM. On vérifie facilement que le calcul classique s'effectue avec une complexité en $\mathcal{O}(N^2)$. Le calcul selon la FMM s'effectue en 2 étapes. Tout d'abord, pour chaque groupe G_k , pour chaque $n \in \{1, \dots, L_\epsilon\}$ on calcule l'expression

$$S_k^n = \sum_{j/x_j \in G_{far}(k)} \frac{Y_j}{(C_k - x_j)^{n+1}} ,$$

où $G_{far}(k)$ est la réunion des groupes non voisins avec G_k . Cette expression ne dépend pas de la variable i . Elle est la contribution lointaine commune à tous les points observateurs x_i du groupe G_k . Cette première étape a la complexité $\mathcal{O}(K.N.\ln(\epsilon^{-1}))$, où K désigne le nombre de groupe (ici $K = 4$). Ensuite, il suffit d'effectuer, pour chaque groupe G_k , pour chaque point x_i de G_k , le calcul

$$\sum_{n=0}^{L_\epsilon} (C_k - x_i)^n \cdot S_k^n .$$

Cette étape nécessite $\mathcal{O}(N \cdot \ln(\epsilon^{-1}))$ opérations. La complexité du calcul approché des interactions lointaines est donc $\mathcal{O}(K \cdot N \cdot \ln(\epsilon^{-1}))$.

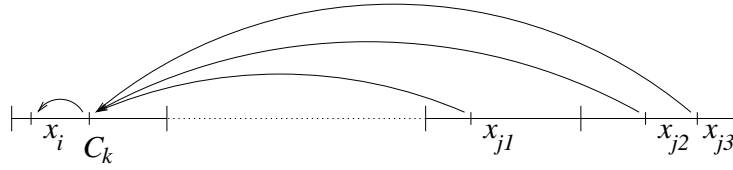
Remarques :

* La précision ϵ désirée est choisie de telle sorte que l'erreur multipolaire globale E_{mp} soit du même ordre que E_{ef} celle commise par l'approximation éléments-finis. Le lien entre ϵ et E_{mp} est tel que $\ln(\epsilon^{-1}) \propto \ln(E_{mp}^{-1})$. En reprenant le paragraphe 1.2.4, nous obtenons le lien $\ln(E_{ef}^{-1}) \propto \ln N$. Ainsi, ϵ vérifie l'estimation $\ln(\epsilon^{-1}) \sim \ln N$.

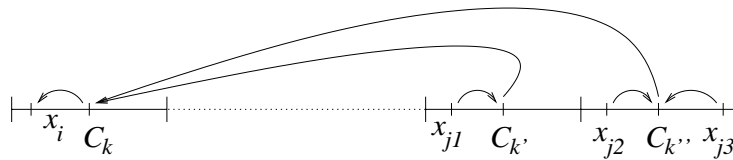
* Le choix du nombre de groupes ne se fait pas au hasard. Le coût de calcul des interactions proches est lié au nombre de points par groupe. Ainsi, le choix du nombre de groupes se fait de façon à équilibrer les interactions lointaines en $\mathcal{O}(K \cdot N \cdot \ln(\epsilon^{-1}))$ et les interactions proches en $\mathcal{O}(N^2/K)$. Ainsi, K est choisi de l'ordre de $N^{1/2}$.

* La complexité de cette méthode est donc $\mathcal{O}(N^{3/2} \cdot \ln N)$ au lieu de $\mathcal{O}(N^2)$ dans le cas classique.

* De façon imagée, la première étape peut être vue comme un transfert d'information des points sources x_j vers le centre C_k du groupe observateur considéré. La deuxième serait alors un transfert du centre C_k vers le point observateur considéré x_i .



* Pour le découplage, nous avons considéré le centre C_k du groupe observateur. Dans d'autres situations, comme on le verra plus loin, nous pouvons découpler également les points C_k et x_j en introduisant le centre des groupes sources. Ceci permet de réduire encore la complexité. Les différentes étapes sont alors données par la figure suivante :



* Si la taille des groupes est uniforme, on parle d'une méthode à un niveau. Mais le regroupement peut être choisi en fonction de l'éloignement par rapport au point observateur considéré. On parle alors d'une méthode multi-niveaux.



3.1.3 Principe de la méthode 3 D

Une formulation intégrale classique de l'équation de Helmholtz, aboutit au système (1.15), $A_h X = B_h$.

Nous rappelons que A_h est définie par : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (A_h)_{ij} = \sum_{\beta, \beta'=1}^{nbg} 4 \text{mes}(T_i) \text{mes}(T_j) \omega_\beta \omega_{\beta'} G(k, |x_{i\beta} - x_{j\beta'}|) & \text{si } T_i \cap T_j = \emptyset \text{ ,} \\ = JG(T_i, T_j) & \text{si } T_i \cap T_j \neq \emptyset \text{ .} \end{array} \right.$$

Ici, $JG(.,.)$ désigne l'approximation numérique des intégrales introduite au paragraphe 1.2.3, dans le cadre des singularités.

Une résolution itérative de ce système nécessite une complexité en $\mathcal{O}(N^2)$, avec $N \sim k^2$. Cette complexité provient des produits matrice-vecteur intervenant dans la résolution et dont la matrice est A_h . La FMM consiste alors à accélérer les produits matrice-vecteur de matrice A_h . Le principe de la méthode consiste à découpler les points $x_{i\beta}$ et $x_{j\beta'}$ de la surface Γ_h , à partir d'un développement du noyau de Green $G(k, |x_{i\beta} - x_{j\beta'}|)$, et d'un regroupement judicieux des points de Γ_h .

Pour simplifier l'étude de la méthode, nous nous plaçons dans le cas où $nbg = 1$. La matrice A_h se réécrit alors : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$,

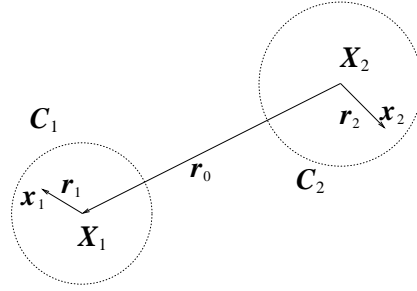
$$\left\{ \begin{array}{ll} (A_h)_{ij} = 4 \text{mes}(T_i) \text{mes}(T_j) G(k, |x_i - x_j|) & \text{si } T_i \cap T_j = \emptyset \text{ ,} \\ = JG(T_i, T_j) & \text{si } T_i \cap T_j \neq \emptyset \text{ .} \end{array} \right.$$

Cette restriction ne change en rien l'étude de la complexité de la FMM.

Considérons deux points x_1 et x_2 de Γ_h . Notons X_1 et X_2 les centres de deux groupes C_1 et C_2 contenant respectivement x_1 et x_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 . Les rayons des groupes sont définis par : $R_m = \max\{|x - X_m|, x \in C_m\}$.

Posons $r_1 = x_1 - X_1$, $r_2 = x_2 - X_2$, $r_0 = X_1 - X_2$ et $r = r_1 - r_2$.

Alors $x_1 - x_2 = x_1 - X_1 + X_1 - X_2 + X_2 - x_2 = r_0 + r$.



Le théorème d'addition de Gegenbauer donne un développement du noyau de Green à l'aide des fonctions sphériques de Bessel et de Hankel ([3]) :

$$\begin{aligned}
 G(k, |x_1 - x_2|) &= \frac{e^{ik|x_1 - x_2|}}{4\pi|x_1 - x_2|} = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(k|r_0 + r|) \\
 &= \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) h_l^{(1)}(k|r_0|) j_l(k|r|) P_l(\cos(r, r_0)) ,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $h_l^{(1)}$ et j_l sont respectivement les fonctions sphériques de Hankel et de Bessel de degré l . P_l est le polynôme de Legendre de même degré. La convergence de la série ainsi considérée est assurée si et seulement si r et r_0 vérifient la relation $|r| < |r_0|$. Cette contrainte oblige de distinguer les couples de boîtes voisines des couples de boîtes non voisines, comme pour le cas présenté en dimension 1. La relation (3.4) est une première étape du découplage de (r_0, r) . La relation suivante confirme ce découplage et permet aussi celui de (r_1, r_2) ([28]) :

$$\begin{aligned}
 j_l(k|r|) P_l(\cos(r, r_0)) &= \frac{i^l}{4\pi} \int_{S^2} P_l(\cos(s, r_0)) e^{ik\langle s, r \rangle} ds \\
 &= \frac{i^l}{4\pi} \int_{S^2} P_l(\cos(s, r_0)) e^{ik\langle s, r_1 \rangle} e^{-ik\langle s, r_2 \rangle} ds ,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

où S^2 est la sphère unité de \mathbb{R}^3 et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

L'algorithme multipolaire consiste alors à tronquer la série sur l et à discrétiser l'intégrale sur la sphère unité S^2 . Par troncature nous avons l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}
 G(k, |x_1 - x_2|) &\sim \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\langle s, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}(s) e^{-ik\langle s, r_2 \rangle} ds , \\
 \text{où } \mathcal{T}_{L, r_0}(s) &= \sum_{l=0}^L (2l + 1) i^l h_l^{(1)}(k|r_0|) P_l(\cos(s, r_0)) .
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

\mathcal{T}_{L,r_0} est appelée fonction de transfert. Cette fonction correspond au transfert du centre X_2 du groupe C_2 vers le centre X_1 du groupe C_1 .

La discrétisation de la sphère unité aboutit à l'approximation multipolaire :

$$\boxed{G(\mathbf{k}, |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \sim \frac{i\mathbf{k}}{(4\pi)^2} \sum_p \omega_p e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{s}_p, \mathbf{r}_1 \rangle} \mathcal{T}_{L,r_0}(\mathbf{s}_p) e^{-i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{s}_p, \mathbf{r}_2 \rangle} .} \quad (3.7)$$

Le découplage de (x_1, x_2) ainsi réalisé, cette approximation est la clef du gain obtenu par la FMM.

Choix de la troncature L

Le choix du paramètre L se fait en fonction de l'erreur d'approximation désirée. Il s'agit en fait de contrôler la quantité suivante :

$$\left| \frac{i\mathbf{k}}{4\pi} \sum_{l=L+1}^{\infty} (2l+1) h_l^{(1)}(k|r_0|) j_l(k|r|) P_l(\cos(r, r_0)) \right| .$$

Considérons dans un premier temps le comportement des fonctions de Hankel $h_l^{(1)}$ et de Bessel j_l en fonction de l . La fonction de Bessel est une fonction réelle. La fonction de Hankel est complexe et définie par $h_l^{(1)} = j_l + iy_l$, où y_l est une fonction réelle. Pour $x, x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, $l \mapsto j_l(x)$ converge très rapidement vers 0. Asymptotiquement, on a

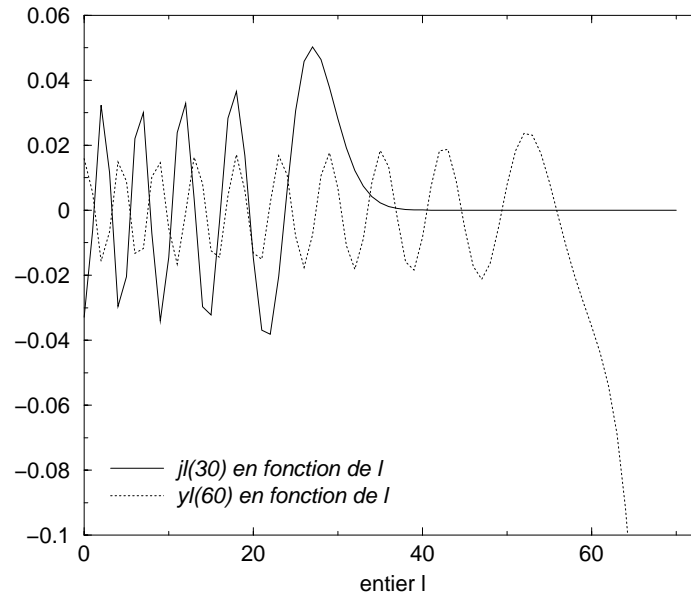
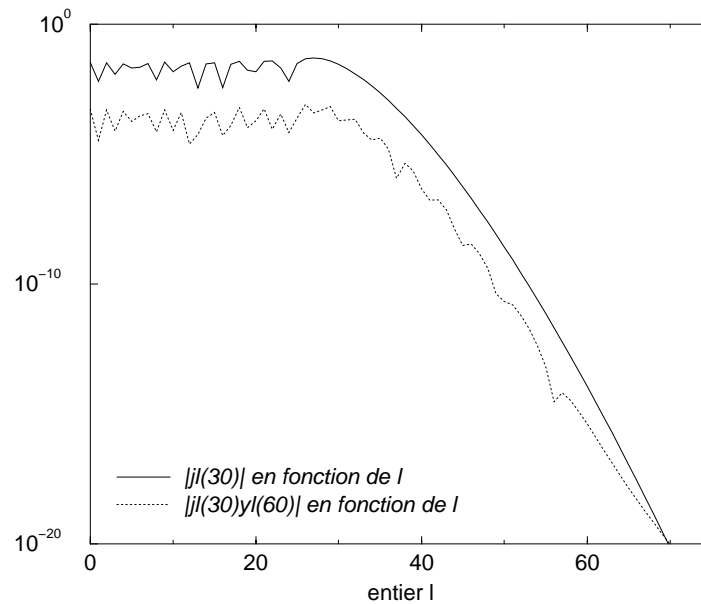
$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)(2l-1)\dots 3.1} \left(1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots \right) .$$

A l'inverse, $l \mapsto h_l^{(1)}(x_0)$ diverge comme

$$y_l(x_0) \sim -\frac{(2l-1)\dots 3.1}{x_0^{l+1}} \left(1 - \frac{x_0^2}{2(1-2l)} + \dots \right) .$$

Le comportement du produit est donc donné par

$$(2l+1)j_l(x)y_l(x_0) \sim \frac{1}{x_0} \left(\frac{x}{x_0} \right)^l .$$

Variations de $j_l(30)$ et $y_l(60)$ Variations de $|j_l(30)|$ et $|j_l(30)y_l(60)|$ 

$l \mapsto j_l(x)$ converge très rapidement vers 0 à partir de $l \geq x$. Inversement, $l \mapsto y_l(x_0)$ diverge très vite lorsque l devient plus grand que x_0 . Avec la condition $x < x_0$, le comportement

de décroissance rapide de $j_l(x)$ intervenant avant la divergence de $y_l(x_0)$, la convergence vers 0 du produit $j_l(x)y_l(x_0)$ a lieu dès que l devient plus grand que x . Cette convergence aboutit au résultat suivant : Pour tout ϵ , il existe L tel que

$$\left| \sum_{l=L+1}^{\infty} (2l+1) h_l^{(1)}(k|r_0|) j_l(k|r|) P_l(\cos(r, r_0)) \right| \leq \epsilon . \quad (3.8)$$

Une étude récente de E. Darve ([32], [33], [31]) aboutit à la formule semi-empirique suivante :

$$\mathbf{L} = \mathbf{k}|\mathbf{r}| + \mathbf{C} \ln(\pi + \mathbf{k}|\mathbf{r}|) \quad (3.9)$$

où C est une constante liée logarithmiquement au contrôle ϵ désiré ($C \sim \ln(\epsilon^{-1})$). Asymptotiquement $L \sim k|r|$. D'autre part, pour des raisons numériques indiquées lors de la présentation de la version continue de la méthode multi-niveaux, nous ne pouvons prendre $L \geq k|r_0|$. Ainsi, par la suite, pour les études de complexité, nous considérerons toujours $L \approx k|r|$. Une récente étude de W.C. Chew [55] a aboutit à une nouvelle formule empirique plus fiable pour des valeurs relativement grandes de $k|r|$:

$$\mathbf{L} = \mathbf{k}|\mathbf{r}| + \mathbf{C}(\mathbf{k}|\mathbf{r}|)^{1/3} . \quad (3.10)$$

Q. Carayol et F. Collino proposent de nouvelles estimations d'erreur basées sur des techniques précises (cf. [19]). Ces nouvelles estimations permettent de mieux comprendre comment doivent être choisis le paramètre de troncature L ainsi que le nombre de points de l'intégration sur la sphère unité.

Discrétisation de l'intégrale sur la sphère unité

En fait, le problème de la discrétisation de l'intégrale sur la sphère unité se ramène à trouver des points de quadrature s_p et des poids ω_p qui intègrent exactement les harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \phi)$. On rappelle que

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} .$$

On choisit des points s_p de la forme (θ_j, ϕ_i) , $0 \leq i < I$ et $0 \leq j < J$. On considère qu'il a été établi une bijection entre $\{s_p, p = 1, \dots, IJ - 1\}$ et $\{(\theta_j, \phi_i), i = 1, \dots, I - 1, j = 1, \dots, J - 1\}$. Notons gl_j les points de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$ et GL_j les poids associés. Définissons θ_j sur $[0, \pi]$ par $gl_j = \cos \theta_j$ et ϕ_i par $\phi_i = 2\pi \frac{i}{I}$ avec les poids associés $\frac{2\pi}{I}$. En prenant $I = 2L + 1$ et $J = L + 1$, nous obtenons une formule d'intégration exacte pour toutes les harmoniques sphériques de degré inférieur ou égal à $2L$.

Intéressons nous maintenant à l'approximation de l'intégrand $e^{ik\langle s, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}(s) e^{-ik\langle s, r_2 \rangle}$ par un développement sur une base d'harmoniques sphériques. Compte tenu du développement

$$e^{ik\langle s, r \rangle} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l j_l(k|r|) P_l(\cos(s, r)) ,$$

en reprenant le comportement des fonctions de Hankel et de Bessel, nous obtenons l'approximation suivante à ϵ près :

$$e^{ik\langle s, r \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}(s) \approx \mathcal{T}_{L, r_0}(s) \sum_{l=0}^L (2l+1) (-i)^l j_l(k|r|) P_l(\cos(s, r)) . \quad (3.11)$$

Rappelons le théorème d'addition des harmoniques sphériques ([5]) :

Théorème 1. *Soient deux vecteurs de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et (r', θ', ϕ') . Notons γ l'angle entre ces deux vecteurs. Alors :*

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

où $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$

Compte tenu de la définition de $\mathcal{T}_{L, r_0}(s)$ et de l'approximation (3.11), on en déduit que l'intégrant $e^{ik\langle s, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}(s) e^{-ik\langle s, r_2 \rangle}$ peut être approché à ϵ près par une combinaison d'harmoniques sphériques de degré inférieur ou égal à $2L$.

En conclusion, la discrétisation de l'intégrale sur la sphère unité se fait avec un nombre de points $\mathbf{S} = (2\mathbf{L} + 1) \times (\mathbf{L} + 1) \sim 2(\mathbf{k}|r|)^2$, où L est donné par (3.10).

Notations utilisées par la suite

Nous considérons Γ_h , un maillage de la surface à N éléments, T_i , $i = 1, \dots, N$. Notons C_m , $m = 1, \dots, M$, les différents groupes de points du maillage. Nous désignons alors par X_m et R_m le centre et le rayon du groupe C_m . Un élément T_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ peut donc être repéré par le numéro du groupe auquel il appartient et sa position locale dans ce groupe : $T_{m\alpha}$ désignera le α ième élément de Γ_h appartenant au groupe C_m .

On peut alors considérer une bijection entre les ensembles d'indices :

$$i \in \{1, \dots, N\} \longleftrightarrow (m, \alpha) , m \in \{1, \dots, M\} , \alpha \in \{1, \dots, A_m\} ,$$

où A_m est le nombre d'éléments de Γ_h contenus dans C_m .

La notion de groupes voisins peut être définie de la façon suivante :

$$C_m \text{ est proche de } C_{m'} \iff |X_m - X_{m'}| \leq \beta(R_m + R_{m'}) ,$$

où β est une constante donnée > 1 .

Posons $V_m = \{m' \in \{1, \dots, M\} / C_{m'} \text{ est proche de } C_m\}$.

Nous pouvons désormais décomposer un produit matrice-vecteur $A_h.Y$, où Y est un vecteur donné, en interactions proches et lointaines : $A_h = A_h^{far} + A_h^{near}$,

$$\begin{aligned} (A_h^{far})_{ij} &= \begin{cases} 0 & \text{si } m' \in V_m \\ (A_h)_{ij} & \text{si } m' \notin V_m \end{cases}, \\ (A_h^{near})_{ij} &= \begin{cases} (A_h)_{ij} & \text{si } m' \in V_m \\ 0 & \text{si } m' \notin V_m \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où m' et m vérifient $T_i \in C_m$ et $T_j \in C_{m'}$.

La FMM consiste alors à approcher le produit $A_h^{far}.Y$ par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \sum_{m' \notin V_m} \sum_{j/x_j \in C_{m'}} 4 \text{mes}(T_i) \text{mes}(T_j) Y_j \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_p \omega_p e^{ik\langle s_p, r_i \rangle} \mathcal{T}_{L, r_{mm'}}(s_p) e^{-ik\langle s_p, r_j \rangle} \\ &= \frac{ik}{4\pi^2} \text{mes}(T_i) \sum_p \omega_p e^{ik\langle s_p, r_i \rangle} \sum_{m' \notin V_m} \mathcal{T}_{L, r_{mm'}}(s_p) \\ &\quad \cdot \sum_{j/x_j \in C_{m'}} e^{-ik\langle s_p, r_j \rangle} \text{mes}(T_j) Y_j, \end{aligned} \quad (3.13)$$

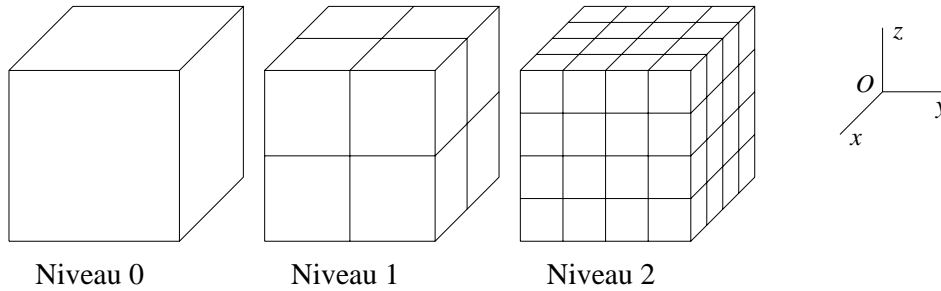
où on a introduit les vecteurs $r_i = x_i - X_m$, $r_j = x_j - X_{m'}$ et $r_{mm'} = X_m - X_{m'}$, avec $x_i \in C_m$.

3.1.4 Construction géométrique des groupes C_m

Construction des groupes

Le moyen utilisé pour regrouper les éléments de Γ_h consiste à découper l'espace contenant Γ_h en cubes. La construction se fait de façon récursive. Chaque étape de la récurrence correspond à la définition d'un niveau de construction où le pavage est plus fin qu'à l'étape précédente, et les cubes plus petits. Le niveau n correspond à l'ensemble des cubes, C_m^n , $m = 1, \dots, M_n$, de côtés de longueur d_n et d'intersection non vide avec le maillage Γ_h . Pour un cube C_m^n donné, d'un niveau donné, on désigne par X_m^n le centre de C_m^n , et par A_m^n le nombre d'éléments de Γ_h contenus dans C_m^n .

Tout d'abord on initialise le premier niveau, le niveau 0. Il s'agit, ici, de construire un cube qui contienne le domaine d'étude Γ_h . Ensuite, par récurrence, supposons le niveau n construit. Construisons le niveau $(n+1)$: Pour chaque cube C_m^n du niveau n , on subdivise C_m^n en 8 cubes de côtés de longueur $d_{n+1} = d_n/2$. Ces cubes seront appelés "les fils" de C_m^n . Inversement, C_m^n sera appelé "le père" de $C_{\tilde{m}}^{n+1}$, où $C_{\tilde{m}}^{n+1}$ désigne un quelconque cube du niveau $(n+1)$ contenu dans C_m^n . Ensuite, les éléments de C_m^n sont distribués à ses fils. Les cubes d'intersection vide avec Γ_h ne sont pas pris en compte et les autres sont numérotés. Le test permettant d'établir l'appartenance d'un élément à un cube se fait sur le centre de gravité de cet élément.



Le choix du niveau final

On choisit le niveau final de la construction dénoté $nivmax$ en fonction de M , le nombre de groupes désirés dans le niveau le plus fin.

Dans la construction, le passage d'un niveau à l'autre se fait en divisant la longueur des côtés des cubes par 2. Les cubes correspondant au regroupement d'éléments du maillage d'une surface, on a le lien suivant : Pour un niveau n donné, $M_n \sim (4^n)$. Il en résulte la relation suivante :

$$nivmax \sim \left(\frac{\ln M}{\ln 4} \right).$$

Notion de voisinage

Dans le cas des cubes, la notion de voisinage ne concerne que des cubes de même taille, du même niveau, et peut être redéfinie à partir de la norme de la borne supérieure, tout à fait adaptée à la situation cubique du problème :

Deux cubes C_m^n et $C_{m'}^n$ de centres respectifs X_m et $X_{m'}$ sont dits strictement voisins à l'ordre p , $p \geq 0$, si et seulement si $\|X_m^n - X_{m'}^n\|_\infty = p \times d_n$.

Les cubes C_m^n et $C_{m'}^n$ sont dits voisins à l'ordre p si et seulement si il existe $p' \leq p$ tel que C_m^n et $C_{m'}^n$ soient strictement voisins à l'ordre p' .

Une telle définition donnerait en 2 dimensions le résultat suivant :

Les numéros indiquent l'ordre auquel les "cubes" sont strictement voisins avec le "cube" numéroté 0.

3	3	3	3	3	3	3
3	2	2	2	2	2	3
3	2	1	1	1	2	3
3	2	1	0	1	2	3
3	2	1	1	1	2	3
3	2	2	2	2	2	3
3	3	3	3	3	3	3

Nous noterons $V_m^n = \{m' \in \{1, \dots, M_n\} / C_{m'}^n\}$ et C_m^n sont voisins à l'ordre $Vmax$, où $Vmax \leq 2$ est un paramètre de l'algorithme. En général $Vmax = 1$.

3.2 Une méthode multipôles à 1 niveau

3.2.1 Algorithme

La méthode à un niveau consiste à considérer les groupes du niveau le plus fin. Nous omettons alors les indices liés au niveau. Le choix des directions, s_p , $p = 1, \dots, S$, sur la sphère unité, se fait tel qu'il a été décrit dans le paragraphe 3.1.3, $S \sim 2(kR)^2$ où $R = \sqrt{2}d$.

Le calcul (3.13) se fait alors en quatre étapes :

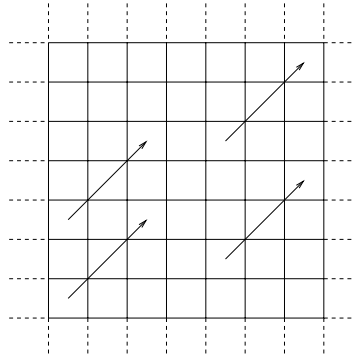
Étape 0 : Dans un premier temps, il s'agit d'évaluer les fonctions de transfert dans les différentes directions s_p .

$$\mathcal{T}_{L,r_{mm'}}(s_p) = \sum_{l=0}^L (2l+1) v^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}|) P_l(\cos(s_p, r_{mm'})) .$$

Cette étape doit être effectuée pour toute direction s_p et pour tout vecteur $r_{mm'}$.

Le nombre de vecteurs $r_{mm'}$ n'est pas en M^2 . Le choix d'une construction en cubes de même taille permet de réduire la complexité de cette étape. En effet, pour M tels cubes C_m , le nombre de vecteurs $r_{mm'} = X_m - X_{m'}$ est majoré par $8M$.

En 2 dimensions, le schéma suivant montre bien la différence entre les deux ensembles $\{(m, m') ; m, m' = 1, \dots, M\}$ et $\{X_m - X_{m'} ; m, m' = 1, \dots, M\}$:



Etape 1 : Rassemblement de l'information, regroupement local au niveau source, calcul des "fonctions de radiations".

$\forall m' \in \{1, \dots, M\}$, $\forall p \in \{1, \dots, S\}$:

$$F_{m'}(s_p) = \sum_{j/x_j \in C_{m'}} e^{ik\langle s_p, X_{m'} - x_j \rangle} \text{mes}(T_j) Y_j .$$

Etape 2 : Transfert de l'information des groupes sources $C_{m'}$ vers le groupe observateur C_m .

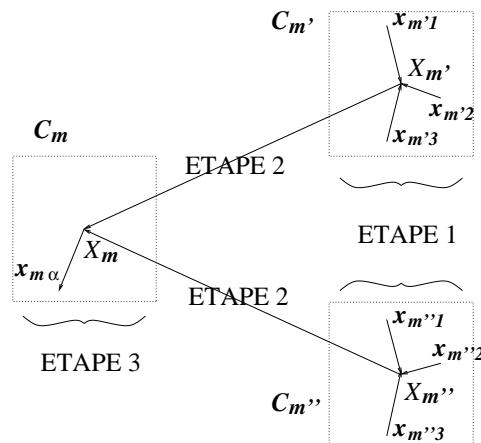
$\forall m \in \{1, \dots, M\}$, $\forall p \in \{1, \dots, S\}$:

$$G_m(s_p) = \sum_{m' \notin V_m} \mathcal{I}_{L, X_m - X_{m'}}(s_p) F_{m'}(s_p) .$$

Etape 3 : Passage de l'information de X_m vers x_i , le point observateur.

$\forall m \in \{1, \dots, M\}$, $\forall i/x_i \in C_m$:

$$\Psi_i = \frac{ik}{4\pi^2} \text{mes}(T_i) \sum_p \omega_p e^{ik\langle s_p, x_i - X_m \rangle} G_m(s_p) .$$



3.2.2 Une écriture matricielle

Cette méthode multipôles à un niveau peut être considérée matriciellement.

Posons : $\forall m, m' \in \{1, \dots, M\}$, $\forall j \in \{1, \dots, N\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, S\}$

$$\mathcal{P}_{m',j}(s_p) = \begin{cases} mes(T_j) e^{ik\langle s_p, X_{m'} - x_j \rangle} & \text{si } x_j \in C_{m'} , \\ 0 & \text{si } x_j \notin C_{m'} . \end{cases}$$

et

$$\mathcal{M}_{m,m'}(s_p) = \begin{cases} \mathcal{T}_{L, X_m - X_{m'}}(s_p) & \text{si } m' \notin V_m , \\ 0 & \text{si } m' \in V_m . \end{cases}$$

L'algorithme de la méthode multipôles à un niveau correspond alors au calcul suivant :

$$\Psi = \frac{ik}{4\pi^2} \sum_{p=1}^S \omega_p \mathcal{P}^*(s_p) \mathcal{M}(s_p) \mathcal{P}(s_p) Y . \quad (3.14)$$

$\mathcal{P}(s_p)$, $p \in \{1, \dots, S\}$, sont des matrices de taille $M \times N$ dont le nombre d'éléments non nuls est exactement N . Nous pouvons donc en déduire un premier terme de la complexité algorithmique en $\mathcal{O}(N.S)$. De même les matrices denses $\mathcal{M}(s_p)$, $p \in \{1, \dots, S\}$, de taille $M \times M$, engendrent un terme de la complexité algorithmique en $\mathcal{O}(M^2.S)$.

3.2.3 Complexité de la FMM 1 niveau

L'étape d'initialisation des fonctions de transfert, est une étape indépendante du vecteur Y et du second membre du système (1.15). Sa complexité est : $\sim 8LMS$ opérations et une place mémoire de $8MS$.

Les autres étapes sont dépendantes du vecteur Y . Leurs complexités sont données par :

Etape 1 : $\sim NS$ pour les calculs et $N + MS$ pour la place mémoire.

Etape 2 : $\sim M^2S$ pour les calculs et MS pour la place mémoire.

Etape 3 : $\sim NS$ pour les calculs et N pour la place mémoire.

Le produit par A_h^{far} nécessite donc $\sim 8LMS$ calculs élémentaires indépendants de Y et $\sim NS + M^2S + NS$ calculs élémentaires dépendants de Y .

Le produit par A_h^{near} nécessite $\mathcal{O}(N^2/M)$ opérations élémentaires.

Nous avons $S \sim (kR)^2 \sim N/M$. Nous choisissons donc M dans le but de minimiser l'expression $MN + N^2/M$. Cet algorithme est donc optimal pour $M \sim N^{1/2}$.

Ainsi, la FMM 1 niveau a la complexité suivante :

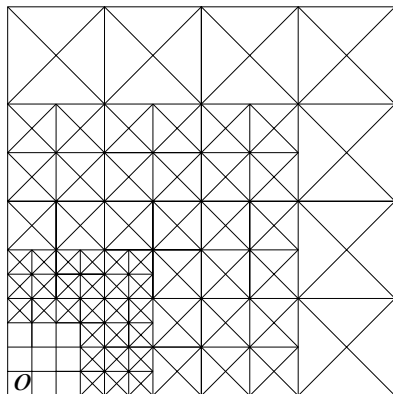
Calculs élémentaires en $\mathcal{O}(N^{3/2})$ et place mémoire en $\mathcal{O}(N)$.

3.3 Une méthode multipôles multi-niveaux

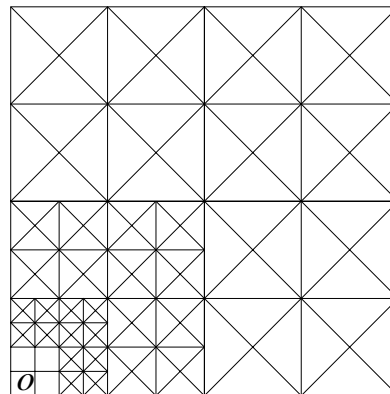
3.3.1 Considérations géométriques

Dans le cadre de la FMM multi-niveaux, le nombre de groupes choisi pour le niveau final est $M_{nivmax} \sim N$. La longueur des côtés des cubes est ν/k , où ν est une constante indépendante de k . Le nombre moyen d'éléments du maillage contenus dans chaque cube du niveau final est une constante indépendante de k .

La FMM multi-niveaux consiste à effectuer des regroupements de points en fonction de l'éloignement par rapport au point observateur. Les schémas suivants, en dimension 2, indiquent les différents groupes des différents niveaux intervenant explicitement dans la contribution multipolaire, en fonction de $Vmax$, par rapport à un groupe observateur O donné. Ces groupes intervenant explicitement sont marqués d'une croix.



Cas $Vmax = 2$



Cas $Vmax = 1$

Nous considérons des cubes dans chaque niveau n de construction, $n \in \{2, \dots, nivmax\}$. Dans les deux niveaux les plus grossiers, les cubes sont tous voisins les uns des autres. Par ce procédé, pour un point observateur donné, le nombre de cubes sources considérés est nettement réduit. De ce fait, l'intérêt de la méthode multi-niveaux est lié à la réduction du nombre de transferts entre groupes lointains.

Estimons le nombre de transferts entre groupes, dans le cas d'une construction multi-niveaux. Soit $C_{m(n)}^n$, $n = 0, \dots, nivmax$, les groupes des différents niveaux contenant un même

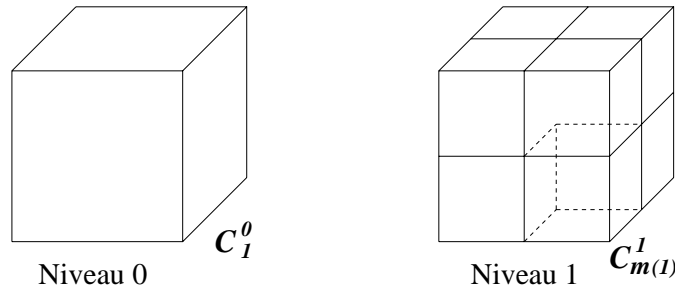
point observateur donné. Définissons de nouveaux ensembles de cubes :

$$TL^n(m) = \left\{ m' \in \{1, \dots, M_n\} \left/ \begin{array}{l} C_{m'}^n \text{ NON voisin de } C_m^n \\ PC^{n-1}(m') \text{ voisin de } PC^{n-1}(m) \end{array} \right. \right\}, \quad n \geq 3$$

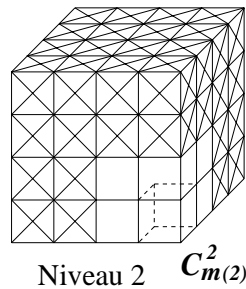
où $PC^{n-1}(m)$ désigne le “père” de C_m^n , c’est à dire le cube du niveau $(n-1)$ contenant le cube C_m^n .

La considération des groupes sources se fait par récurrence, de la façon suivante :

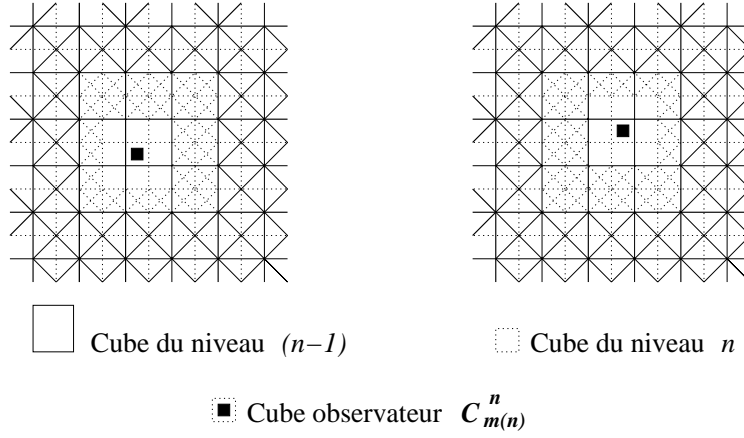
* Aucun groupe n’est considéré dans les niveaux 0 et 1.



* Dans le niveau 2, nous considérons tous les cubes non voisins de $C_{m(2)}^2$.



* Supposons considéré le cas du niveau $(n-1)$, $n > 2$, dans le niveau n , l’ensemble des cubes à considérer correspond à $\{C_{m'}^n, m' \in TL^n(m(n))\}$. Les autres sont, ou bien voisins avec $C_{m(n)}^n$, ou bien déjà considérés par l’intermédiaire de leur père. Ceci amène à huit configurations différentes (quatre en dimension 2), dont deux sont représentées par les schémas suivants dans le cas où $Vmax = 1$:



Cette considération permet d'établir $nbVec$, le nombre de vecteurs $X_m^n - X_{m'}^n$ à considérer pour un niveau n donné. En effet, pour $Vmax = 1$, on en déduit que $nbVec \leq 7^{dim} - 3^{dim}$ où $dim \in \{2, 3\}$ est la dimension de l'espace. En prenant $Vmax = 2$, nous obtenons un résultat analogue : $nbVec \leq 11^{dim} - 5^{dim}$.

De manière générale, nous avons $nbVec \leq (2(2Vmax + 1) + 1)^{dim} - (2Vmax + 1)^{dim}$. Notons ce majorant $nbTra$. Il s'agit du nombre de vecteurs pour lesquels les fonctions de transfert seront évaluées. Le paramètre $nbTra$ est une constante du problème. Cependant sa valeur est significative et elle intervient de manière non négligeable dans la complexité algorithmique du problème. Voici quelques valeurs de $nbTra$:

$$dim = 2 \quad \text{et} \quad Vmax = 1 \quad \implies \quad nbTra = 40$$

$$dim = 2 \quad \text{et} \quad Vmax = 2 \quad \implies \quad nbTra = 96$$

$$dim = 3 \quad \text{et} \quad Vmax = 1 \quad \implies \quad nbTra = 316$$

$$dim = 3 \quad \text{et} \quad Vmax = 2 \quad \implies \quad nbTra = 1206$$

3.3.2 Version "continue"

Par cette "version continue", nous présentons la méthode sans tenir compte des problèmes liés à la discrétisation de la sphère unité. Dans cette partie, nous ne nous soucions donc pas du choix des directions s_p .

Nous pouvons décomposer le calcul multipolaire en cinq étapes :

Etape 0 : Dans un premier temps, il s'agit d'évaluer les fonctions de transfert.

$$\mathcal{T}_{L, r_{mm'}^n}(s) = \sum_{l=0}^L (2l + 1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(s, r_{mm'}^n)) ,$$

où $r_{mm'}^n = X_m^n - X_{m'}^n$.

Cette étape doit être effectuée pour tout vecteur $r_{mm'}^n$, lorsque n décrit l'ensemble des niveaux et pour les couples $(C_m^n, C_{m'}^n)$ de groupes du niveau n vérifiant $m' \in TL^n(m)$.

Pour un niveau n donné, le nombre de couples $(C_m^n, C_{m'}^n)$ à considérer n'est pas en M_n^2 . Il n'est pas non plus de l'ordre de $8M_n$. Il est en fait majoré par la constante $nbTra$ définie dans le paragraphe 3.3.1, et qui ne dépend que de la définition du voisinage.

Étape 1 : Regroupement local au niveau source, calcul des fonctions de radiations.

$\forall n \in \{2, \dots, nivmax\}$, $\forall m' \in \{1, \dots, M_n\}$:

$$F_{m'}^n(s) = \sum_{j/x_j \in C_{m'}^n} e^{ik\langle s, X_{m'}^n - x_j \rangle} mes(T_j) Y_j .$$

Étape 2 : Dans chaque niveau n , transfert de l'information des groupes sources $C_{m'}^n$ vers le groupe observateur C_m^n .

$\forall n \in \{2, \dots, nivmax\}$, $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$:

$$G_m^n(s) = \sum_{m' \in TL^n(m)} \mathcal{T}_{L, X_m^n - X_{m'}^n}(s) F_{m'}^n(s) .$$

Étape 3 : Propagation de l'information jusqu'au niveau le plus fin.

Pour n allant de 3 à $nivmax$: $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$:

$$\text{affectation à } G_m^n(s) \text{ de la somme } G_m^n(s) + e^{ik\langle s, X_m^n - X_{m_1}^{n-1} \rangle} G_{m_1}^{n-1}(s) ,$$

où $C_{m_1}^{n-1}$ désigne le père de C_m^n , le cube du niveau $(n-1)$ contenant le cube C_m^n .

Étape 4 : Passage de l'information de X_m^{nivmax} vers x_i , le point observateur.

$\forall m \in \{1, \dots, M_{nivmax}\}$, $\forall i/x_i \in C_m^{nivmax}$:

$$\Psi_i = \frac{ik}{4\pi^2} mes(T_i) \int_{S^2} e^{ik\langle s, x_i - X_m^{nivmax} \rangle} G_m^{nivmax}(s) ds .$$

Premières remarques sur la FMM multi-niveaux

Un premier constat est lié aux interactions proches. Le nombre moyen d'éléments par cube du niveau le plus fin est de l'ordre d'une constante. Ainsi, si la répartition des éléments du maillage est uniforme, les interactions proches ont une complexité (CPU et stockage) en $\mathcal{O}(N)$. Un maillage non uniforme pourrait considérablement augmenter cette complexité et faire perdre tout son intérêt à la FMM multi-niveaux. On en déduit une hypothèse importante pour l'efficacité de la FMM et un premier résultat :

* **Le maillage Γ_h doit être uniforme.**

* **Complexité (CPU et Stockage) des interactions proches en $\mathcal{O}(N)$.**

Ensuite, le choix du paramètre ν introduit dans le paragraphe 3.3.1 est soumis à une contrainte. En effet, considérons le paramètre L donné par $L = kR + C \ln(\pi + kR)$ pour la définition de \mathcal{T}_{L,r_0} au niveau le plus fin (3.6), avec $R = R_{nivmax} = \nu\sqrt{2}/k$. D'autre part, compte tenu du comportement de la fonction de Hankel $h_l^{(0)}$ par rapport à l , pour un choix de $L > k|r_0|$, \mathcal{T}_{L,r_0} peut devenir très grand, et engendrer des erreurs numériques d'arrondi qui deviennent significatives pour la suite de l'algorithme. Nous rappelons que $Vmax$ est l'ordre de voisinage défini dans le paragraphe 3.1.4. $k|r_0|$ est minoré par $(Vmax + 1)kR$. Nous devons donc choisir $L = kR + C \ln(\pi + kR) < (Vmax + 1)kR$. Pour que cette condition soit vérifiée, il nous faut trouver un couple (C, ν) tel que

$$C \ln(\pi + \nu\sqrt{2}) < (Vmax + 1)\nu\sqrt{2} . \quad (3.15)$$

D'autre part, ce problème limite la précision de la méthode. En effet, (3.15) influe aussi "le choix" de C . Afin que la complexité des interactions proches ne soit pas trop grande, le nombre d'éléments par cubes doit être petit. Cette contrainte se traduit par le choix d'un paramètre ν non significatif devant k . La condition (3.15) impose donc que la constante C ne soit pas trop grande. Une étude du choix de C , par rapport à la précision désirée, a été réalisée par E. Darve (cf. [33]). De la même façon, lorsque le paramètre L est donné par $L = kR + C(kR)^{1/3}$, la constante C est soumise au même type de contrainte de forme plus explicite :

$$C < Vmax(\nu\sqrt{2})^{2/3} . \quad (3.16)$$

3.3.3 Version "discrète"

Nous présentons ici les problèmes liés à la discrétisation de la sphère unité. Le nombre de points de discrétisation est en $\mathcal{O}((kR)^2)$ où R est le diamètre des cubes concernés. Cependant, la méthode multi-niveaux fait appel à des cubes de différentes tailles.

Reprenons l'étape 1 de la "version continue". L'évaluation de $F_{m'}^n$ doit se faire en un nombre de points de l'ordre de $(kR_n)^2$. Or un moyen rapide d'effectuer ces évaluations consiste à utiliser une récurrence : Considérons connues $F_{m'}^n(s_p)$ pour tous les cubes $C_{m'}^n$ d'un niveau n donné et pour un ensemble de S_n points s_p de la sphère unité. Nous pouvons alors évaluer les fonctions $F_m^{n-1}(s_p)$ selon la formule

$$F_m^{n-1}(s_p) = \sum_{m' \in SON(m, n-1)} e^{ik \langle s_p, X_m^{n-1} - X_{m'}^n \rangle} F_{m'}^n(s_p) ,$$

où $SON(m, n-1) = \{m' / C_{m'}^n \text{ est un "fils" de } C_m^{n-1}\}$.

Selon la description précédente, les fonctions F_m^{n-1} sont évaluées en S_n points s_p de la sphère unité, avec $S_n = c(kR_n)^2$, c étant une constante indépendante de n . Cependant, les fonctions

F_m^{n-1} sont liées au niveau $n - 1$ où les cubes ont pour diamètre $R_{n-1} = 2R_n$. A ce niveau, la discrétisation nécessite la considération de $S_{n-1} = c(kR_{n-1})^2 = 4S_n$ points. Géométriquement, les cubes du niveau $(n - 1)$ contiennent en moyenne quatre fois plus d'éléments de Γ_h que ceux du niveau n .

Afin de résoudre ce problème, E. Darve ([33], [31]) a étudié trois méthodes d'**interpolations** pour obtenir l'évaluation des fonctions F_m^{n-1} en $S_{n-1} = 4S_n$ points $s'_{p'}$ à partir des valeurs de ces fonctions aux S_n points s_p . La première méthode, appelée "semi-naïve", est assez coûteuse. Elle nécessite $\mathcal{O}(S^{3/2})$ opérations élémentaires pour le passage de S à $4S$ points. Dans les niveaux les plus fins, S est assez petit devant k , mais pour les niveaux les plus grossiers, $S \sim k^2$. Une deuxième méthode consiste à améliorer la précédente en se ramenant à la FMM-1D due à V. Rokhlin ([43], [88], [89]). Sa complexité est en $\mathcal{O}(S \ln S)$, mais elle est nettement plus compliquée à mettre en œuvre. La troisième méthode dite "d'interpolation locale" est inspirée des travaux de J. Song, C.-C. Lu et W.C. Chew ([59], [75]). Elle a une complexité en $\mathcal{O}(S)$, mais elle est aussi assez compliquée à mettre en œuvre.

Un phénomène similaire apparaît dans l'étape 3 de la "version continue". En effet l'addition

$$G_m^n(s) + e^{ik\langle s, X_m^n - X_{m1}^{n-1} \rangle} G_{m1}^{n-1}(s)$$

concerne deux termes dont le premier $G_m^n(s)$ est évalué en S_n points de la sphère unité et le second en $S_{n-1} = 4S_n$ points, le résultat devant être évalué en S_n points. E. Darve ([33], [31]) propose la notion d'**anterpolation** qui consiste à déterminer une discrétisation avec S points à partir d'une discrétisation avec $4S$ points. L'algorithme de l'anterpolation est lié à celui de l'interpolation.

En conclusion, la FMM multi-niveaux se résume ainsi :

- 1 Evaluation des fonctions de radiations au niveau le plus fin, F_m^{nivmax} .
- 2 Interpolations successives des fonctions de radiation pour obtenir celles des niveaux supérieurs,

$$F_m^{n-1}(s'_{p'}) = \sum_{m' \in SON(m, n-1)} e^{ik\langle s'_{p'}, X_m^{n-1} - X_{m'}^n \rangle} Interp(F_{m'}^n)(s'_{p'}) ,$$

où *Interp* correspond à l'opérateur d'interpolation.

- 3 Calcul des transferts à tous les niveaux, $G_m^n(s_p)$, étape 2 de la "version continue".
- 4 Les "contributions" des fonctions G_m^n sont propagées du niveau le plus grossier vers le niveau final, pour n allant de 3 à $nivmax$: $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$:

$$\text{affectation à } G_m^n(s_p) \text{ de la somme } G_m^n(s_p) + Anterp(e^{ik\langle \cdot, X_m^n - X_{m1}^{n-1} \rangle} G_{m1}^{n-1}(\cdot))(s_p) ,$$

où *Anterp* correspond à l'opérateur d'anterpolation.

5 Transmission de l'information au point observateur $x_i \in C_m^{nivmax}$,

$$\Psi_i = \frac{ik}{4\pi^2} mes(T_i) \sum_{p=1}^{S_{nivmax}} \omega_p e^{ik \langle s_p, x_i - X_m^{nivmax} \rangle} G_m^{nivmax}(s_p) .$$

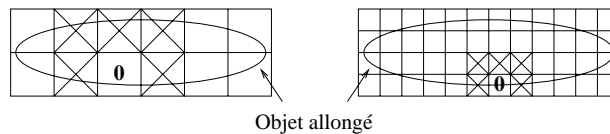
Complexité de la FMM multi-niveaux

La complexité des étapes 1, 2, 4, 5 dépend de la méthode d'interpolation choisie :

	Stockage	CPU
Méthode "semi-naïve"	$\mathcal{O}(N^{3/2})$	$\mathcal{O}(N^{3/2})$
Méthode se ramenant à FMM-1D	$\mathcal{O}(N \ln N)$	$\mathcal{O}(N \ln^2 N)$
Méthode "d'interpolation locale"	$\mathcal{O}(N \ln N)$	$\mathcal{O}(N \ln N)$

La complexité (temps CPU + stockage) de l'étape 3, indépendante de l'interpolation, est $\mathcal{O}(nbTra N \ln N)$.

Dans le meilleur des cas ($Vmax = 1$), $nbTra = 316$. Cette constante est donc significative devant N . En effet, pour des problèmes de taille moyenne, $nbTra$ peut être du même ordre que $N^{1/2}$. Ainsi, pour certaines valeurs de N , il est préférable d'utiliser la méthode d'interpolation "semi-naïve". Il en résulte aussi que la méthode multi-niveaux est de complexité $\mathcal{O}(N^{3/2})$ pour des valeurs de N petites ou moyennes. Cependant, même dans ce cas, la méthode multi-niveaux présente des avantages par rapport à la méthode à un niveau. En effet, les interactions proches sont bien moins importantes et le regroupement est nettement plus fin. Ceci permet de traiter le cas d'objets allongés pour lesquels le regroupement de la méthode à un niveau peut aboutir à un ensemble de groupes trop souvent voisins. Le schéma suivant montre deux exemples de regroupement dont le second est la subdivision directe du premier. Les cubes marqués d'une croix sont les voisins du cube numéroté 0 :



Chapitre 4

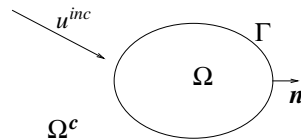
Idées de couplages

Dans le premier chapitre, nous avons établi le système linéaire (1.11)-(1.12) associé à la résolution d'une équation intégrale liée au problème extérieur de Helmholtz en trois dimensions, avec condition de Dirichlet au bord. Dans le deuxième et le troisième chapitres nous avons décrit différentes méthodes permettant d'accélérer la résolution du système linéaire (1.11)-(1.12). Dans ce chapitre, nous proposons alors des idées de couplages de ces différentes méthodes, leurs avantages et les obstacles auxquels elles sont confrontées.

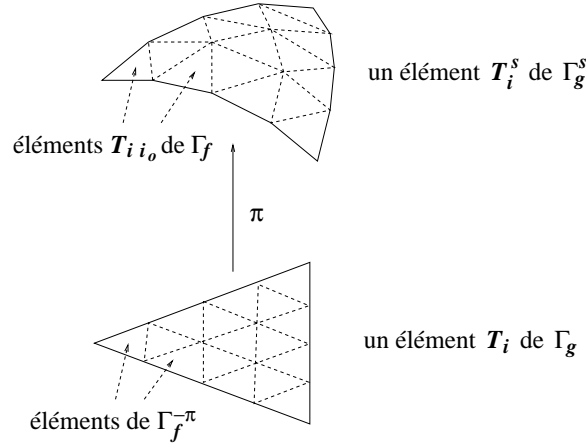
4.1 Méthodes multipôles et approximation de la phase

Nous présentons dans cette section, une idée de couplage de la méthode multipôles (chapitre 3) et de l'approximation de la phase (section 2.1). Nous nous plaçons alors dans le cadre de la section 2.1 en reprenant les mêmes notations.

- * Ω est un ouvert borné régulier convexe de \mathbb{R}^3 , de frontière Γ .
- * u^{inc} est une onde incidente plane.



Pour définir le problème discret, nous rappelons que nous utilisons deux maillages. Nous considérons un maillage grossier Γ_g dont le diamètre des N_g éléments est en $h_g \sim k^{-1/3}$. Nous considérons aussi un maillage fin Γ_f dont le diamètre des N_f éléments est en $h_f \sim k^{-1}$, et leurs intermédiaires $\Gamma_f^{-\pi}$ et Γ_g^s . π désigne la projection orthogonale de Γ_g sur Γ_f .



Géométriquement, un élément du maillage Γ_g^s est la réunion d'éléments du maillage fin Γ_f . En pratique, Γ_f est un raffinement de Γ_g . Rappelons que \mathcal{N}_i désigne le nombre d'éléments de Γ_f contenus dans le $i^{\text{ième}}$ élément de Γ_g^s . La numérotation des éléments de Γ_f se fait alors par l'intermédiaire de Γ_g^s : $T_{i i_0}$ désigne le $(i_0)^{\text{ième}}$ élément de Γ_f contenu dans T_i^s le $i^{\text{ième}}$ élément de Γ_g^s .

La considération de l'approximation de la phase aboutit au système (2.8)-(2.9) rappelé ci-dessous :

$$A_h X = B, \quad (4.1)$$

où A_h , B et X sont définis par : $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_h)_{ij} = \sum_{j_0=1}^{\mathcal{N}_j} \sum_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} \int_{T_{i i_0}} \int_{T_{j j_0}} \mathcal{J}_{i i_0} \mathcal{J}_{j j_0} e^{ik\phi_0(x)} G(k, |x-y|) e^{-ik\phi_0(y)} d\gamma(x) d\gamma(y) , \\ B_i = \sum_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} \int_{T_{i i_0}} \mathcal{J}_{i i_0} e^{-ik\phi_0(y)} u_h^{inc}(y) d\gamma(y) , \\ X = \text{inconnue du problème.} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où ϕ_0 est l'approximation de la phase au premier degré, déterminée comme indiqué dans la section 2.1.

A ce niveau, la taille du système est réduite, mais le coup calcul est toujours du même ordre. Plutôt que d'utiliser la théorie de la phase stationnaire, nous proposons ici d'accélérer le calcul de la matrice A_h selon une méthode multipôles.

Afin d'éviter des lourdeurs inutiles dans les notations, nous étudions l'idée dans le cas d'une discrétisation des intégrales à un point par triangle. Le système devient alors :

$$A_h X = B, \quad (4.3)$$

avec $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_h)_{ij} = \sum_{j_0=1}^{N_j} \sum_{i_0=1}^{N_i} 4 \operatorname{mes}(\pi^{-1}(T_{i i_0})) \operatorname{mes}(\pi^{-1}(T_{j j_0})) e^{ik\phi_0(x_{i i_0})} G(k, |x_{i i_0} - x_{j j_0}|) e^{-ik\phi_0(x_{j j_0})}, \\ B_i = \sum_{i_0=1}^{N_i} 2 \operatorname{mes}(\pi^{-1}(T_{i i_0})) e^{-ik\phi_0(x_{i i_0})} u_h^{inc}(x_{i i_0}), \\ X = \text{inconnue du problème.} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

4.1.1 Utilisation d'une méthode multipôles à 1 niveau

Nous considérons tout d'abord le regroupement des éléments de Γ_f dans un pavage à M cubes $\{C_m; m = 1, \dots, M\}$. De même que dans le paragraphe 3.1.3, nous définissons les centres X_m des groupes. Notons d leur diamètre commun, notation introduite dans les paragraphes 3.1.4 et 3.2.1. Nous reprenons aussi la notion de voisinage V_m et la définition des matrices A_h^{far} et A_h^{near} du chapitre 3.

Rappelons maintenant l'approximation du noyau de Green (3.7) :

$$G(k, |x_{i i_0} - x_{j j_0}|) \sim \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_p \omega_p e^{ik\langle s_p, r_{i i_0} \rangle} \mathcal{T}_{L, r_{m, m'}}(s_p) e^{-ik\langle s_p, r_{j j_0} \rangle}, \quad (4.5)$$

$$\text{où } \mathcal{T}_{L, r_{m, m'}}(s) = \sum_{l=0}^L (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{m, m'}|) P_l(\cos(s, r_{m, m'})).$$

avec les vecteurs $r_{i i_0} = x_{i i_0} - X_m$, $r_{j j_0} = x_{j j_0} - X_{m'}$ et $r_{m, m'} = X_m - X_{m'}$, où $x_{i i_0} \in C_m$ et $x_{j j_0} \in C_{m'}$.

Ainsi, la FMM 1 niveau nous permet d'approcher la matrice A_h^{far} par A_{approx}^{far} définie de la façon suivante :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$$

$$\begin{aligned}
(A_{approx}^{far})_{ij} &= \sum_{m/T_i^s \cap C_m \neq \emptyset} \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m} \sum_{m' \notin V_m/T_j^s \cap C_{m'} \neq \emptyset} \sum_{j_0/x_{j_0} \in C_{m'}} 4 \text{mes}(\pi^{-1}(T_{i_0})) \text{mes}(\pi^{-1}(T_{j_0})) \\
&\quad \cdot \frac{\imath k}{(4\pi)^2} \sum_p \omega_p e^{\imath k \phi_0(x_{i_0})} e^{\imath k \langle s_p, r_{i_0} \rangle} \mathcal{T}_{L, r_{m, m'}}(s_p) e^{-\imath k \langle s_p, r_{j_0} \rangle} e^{-\imath k \phi_0(x_{j_0})} \\
&= \frac{\imath k}{4\pi^2} \sum_p \omega_p \sum_{m/T_i^s \cap C_m \neq \emptyset} \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m} \text{mes}(\pi^{-1}(T_{i_0})) e^{\imath k \phi_0(x_{i_0})} e^{\imath k \langle s_p, r_{i_0} \rangle} \\
&\quad \cdot \sum_{m' \notin V_m/T_j^s \cap C_{m'} \neq \emptyset} \mathcal{T}_{L, r_{m, m'}}(s_p) \sum_{j_0/x_{j_0} \in C_{m'}} e^{-\imath k \langle s_p, r_{j_0} \rangle} e^{-\imath k \phi_0(x_{j_0})} \text{mes}(\pi^{-1}(T_{j_0})) .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Algorithme de la nouvelle méthode de calcul du produit matrice-vecteur

Lors d'une résolution itérative du système linéaire associé à la matrice A_h définie par (4.4), le temps de calcul de la résolution à N_{iter} itérations est de l'ordre de $CI + N_{iter} CD$ où CI et CD désignent les temps de calculs respectivement indépendants et dépendants de Y lors de la réalisation d'un produit $A_h Y$. Les calculs indépendants de Y correspondent ici à la construction de la matrice A_{approx}^{far} . Ceux dépendants de Y correspondent à l'évaluation classique d'un produit matrice-vecteur avec une matrice de taille $N_g \times N_g$.

Rappelons quelques estimations : $N_g \sim k^{2/3}$, $N_f \sim k^2$ et $\mathcal{N}_i \approx \frac{N_f}{N_g} \sim k^{4/3}$. M sera choisi dans le but d'optimiser la complexité de l'algorithme. Le choix des directions, s_p , $p = 1, \dots, S$, sur la sphère unité, se fait tel qu'il a été décrit dans le paragraphe 3.1.3, $S \sim 2(kR)^2$ et $L \sim kR$ où $R = d\sqrt{2}$.

Etape 1 : Le calcul de la matrice A_{approx}^{far} (4.6) se fait alors en trois étapes :

Etape 1-1 : Evaluation des fonctions de transfert dans les différentes directions s_p .
 $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$, $m/T_i^s \cap C_m \neq \emptyset$, $m' \notin V_m/T_j^s \cap C_{m'} \neq \emptyset$, $\forall p \in \{1, \dots, S\}$:

$$\mathcal{T}_{L, r_{m, m'}}(s_p) = \sum_{l=0}^L (2l+1) \imath^l h_l^{(1)}(k|r_{m, m'}|) P_l(\cos(s_p, r_{m, m'})) .$$

Cette étape doit être effectuée pour toute direction s_p et pour tout vecteur $r_{m, m'}$. Rappelons que le nombre de vecteurs $r_{m, m'}$ n'est pas en M^2 mais qu'il est majoré par $8M$ (cf. paragraphe 3.2.1).

Etape 1-2 : Regroupement local au niveau des groupes.

$\forall i \in \{1, \dots, N_g\}$, $m/T_i^s \cap C_m \neq \emptyset$, $\forall p \in \{1, \dots, S\}$:

$$F_{im}(s_p) = \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m} e^{\imath k \phi_0(x_{i_0})} e^{\imath k \langle s_p, x_{i_0} - X_m \rangle} \text{mes}(\pi^{-1}(T_{i_0})) .$$

Il est intéressant de constater que cette étape correspond à un regroupement local aussi bien au niveau observateur qu'au niveau source. Cette remarque prendra de l'importance lors de la considération d'un algorithme multipôles multi-niveaux.

Etape 1-3 : L'information d'un élément source de Γ_g désigné par j , par rapport à un élément observateur de Γ_g désigné par i .

$\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$:

$$(A_{approx}^{far})_{ij} = \frac{ik}{4\pi^2} \sum_{p=1}^S \omega_p \sum_{m/T_i^s \cap C_m \neq \emptyset} F_{im}(s_p) \sum_{m' \notin V_m/T_j^s \cap C_{m'} \neq \emptyset} \mathcal{T}_{L, X_m - X_{m'}}(s_p) \overline{F_{jm'}(s_p)} .$$

Etape 2 : Le produit matrice-vecteur se fait ensuite de manière classique. Par analogie avec la méthode multipôles, nous pouvons parler de passage de l'information des sources (notées j) vers l'observateur (noté i).

$\forall i \in \{1, \dots, N_g\}$:

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^{N_g} (A_{approx}^{far})_{ij} Y_j .$$

Complexité de la nouvelle méthode

Tout d'abord, nous pouvons faire un premier constat non négligeable. Dans l'algorithme donné ci-dessus, seule l'étape 2 dépend du vecteur Y . Cette dernière étape correspond à un produit matrice-vecteur classique de taille $N_g \times N_g$ et dont la complexité est $\mathcal{O}(N_g^2)$.

Les complexités des différentes étapes sont données dans le tableau suivant :

	Calculs	Mémoire
Etape 1 – 1	$\sim 8LMS$	$8MS$
1 – 2	$\sim N_f S$	$N_f + MS$
1 – 3	$\sim \max(M^2, N_g^2)S$	N_g^2
2	$\sim N_g^2$	N_g

Le produit par A_{approx}^{far} nécessite donc $\sim 8LMS + N_f S + \max(M^2, N_g^2)S$ calculs élémentaires indépendants de Y et $\sim N_g^2$ calculs élémentaires dépendants de Y .

Le produit par A_h^{near} nécessite $\mathcal{O}(N_f^2/M)$ opérations élémentaires indépendantes de Y , $\mathcal{O}(N_g)$ opérations élémentaires dépendantes de Y et une place mémoire en $\mathcal{O}(N_g)$.

Nous avons $S \sim (kR)^2 \sim N_f/M$ et $L \sim S^{1/2}$. La complexité du coût de calcul se réécrit

alors ainsi :

	Indépendant de Y	Dépendant de Y
A_h^{far}	$\sim 8LN_f + N_f^2/M + N_f \max(M^2, N_g^2)/M$	$\sim N_g^2$
A_h^{near}	$\sim N_f^2/M$	$\sim N_g$

De même nous pouvons réécrire le coût en place mémoire en $\mathcal{O}(N_f + N_g^2)$.

En rappelant que $N_f \sim k^2$ et que $N_g \sim k^{2/3}$, nous pouvons maintenant faire plusieurs constats :

- * La complexité du coût en mémoire est optimale, en $\mathcal{O}(N_f)$.
- * Le coût des calculs dépendants de Y est le même que dans le cas de l'approximation de la phase classique (section 2.1). En $\mathcal{O}(N_g^2)$, il est nettement inférieur à celui de la FMM 1 niveau.
- * Le coût des opérations indépendantes de Y est minimal pour la valeur de $M \sim N_f^{1/2}$. Il est dans ce cas en $\mathcal{O}(N_f^{3/2})$.

Nous pouvons établir le tableau comparatif suivant (pour les résultats concernant la FMM 1 niveau, nous renvoyons au paragraphe 3.2.3) :

	Calculs indépendants de Y	Calculs dépendants de Y	Place mémoire
Discrétisation microlocale sans phase stationnaire	$\sim N_f^2$	$\sim N_f^{2/3}$	$\sim N_f$
FMM 1 niveau ($M \sim N_f^{1/2}$)	$\sim N_f^{5/4}$	$\sim N_f^{3/2}$	$\sim N_f$
Nouvelle méthode ($M \sim N_f^{1/2}$)	$\sim N_f^{3/2}$	$\sim N_f^{2/3}$	$\sim N_f$

Nous avons

$$\begin{aligned} N_f^{5/4} + N_{iter} \times N_f^{3/2} &= N_f^{5/4} + N_f^{3/2} + (N_{iter} - 1) \times N_f^{3/2} \\ N_f^{3/2} + N_{iter} \times N_f^{2/3} &= N_f^{3/2} + N_f^{2/3} + (N_{iter} - 1) \times N_f^{2/3} \end{aligned}$$

avec $5/4 > 2/3$, ainsi, pour tout $N_{iter} \in \mathbb{N}^*$, le coût de calcul de la nouvelle méthode est inférieur à celui de la FMM 1 niveau. Il est également inférieur à celui de la méthode de discrétisation microlocale puisque en dimension trois l'utilisation de la théorie de la phase stationnaire

n'a pas été mise en place.

Les constantes intervenant dans la complexité de cette nouvelle méthode correspondent à celles introduites par la FMM 1 niveau. Ainsi, elles sont assez petites, de l'ordre de 8 (cf. section 3.2).

4.1.2 Utilisation d'une méthode multipôles multi-niveaux

Pour la méthode multipôles, nous pouvons également considérer le cas d'un regroupement des éléments de Γ_f selon un pavage multi-niveaux $\{C_m^n; n = 0, \dots, nivmax; m = 1, \dots, M_n\}$ où M_n désigne le nombre de groupes du $n^{\text{ième}}$ niveau. Γ_g est un maillage à N_g éléments. Notons $nivg$ le niveau dont le nombre de groupes M_{nivg} vérifie la propriété suivante :

$$M_{nivg-1} < N_g \leq M_{nivg}$$

Pour alléger les notations, désignons par M_f le nombre M_{nivmax} de groupes dans le niveau final et posons $M_g = M_{nivg}$. Notons aussi $nivf$ le niveau final $nivmax$. De même que dans le paragraphe 3.1.3, nous définissons les centres X_m^n des groupes. Notons d^n leurs diamètres, notation introduite dans le paragraphe 3.1.4. Nous reprenons aussi la notion de voisinage V_m^n du paragraphe 3.1.4, la définition des matrices A_h^{far} et A_h^{near} ainsi que les ensembles définis dans le paragraphe 3.3.1 :

$$TL^n(m) = \left\{ m' \in \{1, \dots, M_n\} \left/ \begin{array}{l} C_{m'}^n \text{ NON voisin de } C_m^n \\ PC^{n-1}(m') \text{ voisin de } PC^{n-1}(m) \end{array} \right. \right\}, \quad n \geq 3$$

où $PC^{n-1}(m)$ désigne le "père" de C_m^n , c'est à dire le cube du niveau $(n-1)$ contenant le cube C_m^n .

Reprenons les notations $r_{i i_0}^n = x_{i i_0} - X_m^n$, $r_{j j_0}^n = x_{j j_0} - X_{m'}^n$ et $r_{m, m'}^n = X_m^n - X_{m'}^n$, pour $x_{i i_0} \in C_m^n$ et $x_{j j_0} \in C_{m'}^n$. Contrairement à une méthode multipôles multi-niveaux classique, nous ne considérerons pas ici l'ensemble des différents niveaux du pavage. Nous verrons par la suite qu'un critère d'optimisation de la complexité algorithmique impose de ne considérer que les niveaux n compris entre $nivg$ et $nivf$. En considérant une méthode multipôles multi-niveaux "adaptée", la formule (4.6) se réécrit en "version continue" (cf 3.3.2) comme suit :

$$(A_{approx}^{far})_{ij} = \frac{ik}{4\pi^2} \int_{S^2} \sum_{n=nivg}^{nivf} \sum_{m/T_i^s \cap C_m^n \neq \emptyset} F_{im}^n(s) \sum_{m' \in TL^n(m)/T_j^s \cap C_{m'}^n \neq \emptyset} \mathcal{T}_{L, r_{m, m'}^n}(s) \overline{F_{j m'}^n(s)} ds, \quad (4.7)$$

$$\text{avec } F_{im}^n(s) = \sum_{i_0/x_{i i_0} \in C_m^n} \text{mes}(\pi^{-1}(T_{i i_0})) e^{ik\phi_0(x_{i i_0})} e^{ik\langle s, r_{i i_0}^n \rangle}.$$

Commençons par détailler l'algorithme de construction de la matrice. Nous expliquerons par la suite le choix d'une telle adaptation.

Algorithme de la nouvelle méthode

Rappelons quelques estimations : $M_g \sim N_g \sim k^{2/3}$, $M_f \sim N_f \sim k^2$. Le choix des directions, à un niveau n donné, s_p , $p = 1, \dots, S_n$, sur la sphère unité, se fait tel qu'il a été décrit dans le paragraphe 3.1.3, $S_n \sim 2(kR_n)^2$ où $R_n = d_n\sqrt{2}$ et $L_n \sim kR_n$, $L_n \sim \sqrt{S_n}$.

Nous décomposons le calcul en trois grandes étapes :

Étape 1 : Evaluation des fonctions de transfert.

$$\mathcal{T}_{L, r_{m, m'}^n}(s) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{m, m'}^n|) P_l(\cos(s, r_{m, m'}^n)) ,$$

où $r_{m, m'}^n = X_m^n - X_{m'}^n$.

Cette étape doit être effectuée pour tout vecteur $r_{m, m'}^n$, lorsque n décrit l'ensemble des niveaux de $nivg$ à $nivf$ et pour les couples $(C_m^n, C_{m'}^n)$ de groupes du niveau n vérifiant $m' \in TL^n(m)$ si $n > nivg$ et $m' \notin V_m^n$ si $n = nivg$. Pour un niveau donné $n > nivg$, le nombre de couples $(C_m^n, C_{m'}^n)$ à considérer n'est pas en M_n^2 . Il n'est pas non plus de l'ordre de $8M_n$. Il est en fait majoré par la constante $nbTra$ définie dans le paragraphe 3.3.1, et qui ne dépend que de la définition du voisinage.

Étape 2 : Les fonctions de radiations.

2-1 Regroupement local, calcul des fonctions de radiations au niveau le plus fin, $F_{jm'}^{nivf}$.

$\forall j \in \{1, \dots, N_g\}$, $\forall m'/T_j^s \cap C_{m'}^{nivf} \neq \emptyset$, $\forall p \in \{1, \dots, S_{nivf}\}$:

$$F_{jm'}^{nivf}(s_p) = \sum_{j_0/x_{j_0} \in C_{m'}^{nivf}} mes(\pi^{-1}(T_{j_0})) e^{ik\phi_0(x_{j_0})} e^{ik\langle s_p, x_{j_0} - X_{m'}^{nivf} \rangle} .$$

2-2 Interpolations successives des fonctions de radiation pour obtenir celles des niveaux $(nivf - 1)$ à $nivg$.

Pour $j \in \{1, \dots, N_g\}$, pour n allant de $nivf$ à $nivg+1$: $\forall m'/T_j^s \cap C_{m'}^{n-1} \neq \emptyset$, $\forall p' \in \{1, \dots, S_n\}$:

$$F_{jm'}^{n-1}(s_{p'}) = \sum_{\tilde{m} \in SON(m', n-1)/T_j^s \cap C_{\tilde{m}}^n \neq \emptyset} e^{ik\langle s_{p'}, X_{m'}^{n-1} - X_{\tilde{m}}^n \rangle} Interp(F_{j\tilde{m}}^n)(s_{p'}) ,$$

où $Interp$ est l'opérateur d'interpolation et $SON(m', n-1) = \{\tilde{m}/C_{\tilde{m}}^n \text{ est un "fils" de } C_{m'}^{n-1}\}$. Cette deuxième étape effectue un regroupement local au niveau source ainsi qu'au niveau observateur. Les interpolations nécessaires dans une utilisation classique de la méthode multipôles multi-niveaux au niveau observateur ne sont plus utiles dans ce nouvel algorithme. Elles sont "remplacées" par les interpolations effectuées dans cette étape.

Étape 3 : Nous considérons ensuite l'algorithme suivant pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N_g\}^2$:

3-1 Pour le niveau $n = nivg$, transfert de l'information des groupes sources,
 $\forall m/T_i^s \cap C_m^{nivg} \neq \emptyset$, $\forall p \in \{1, \dots, S_{nivg}\}$:

$$G_m^{nivg}(s_p) = F_{im}^{nivg}(s_p) \sum_{m' \notin V_m^{nivg} / T_j^s \cap C_{m'}^{nivg} \neq \emptyset} \mathcal{T}_{L, X_m^{nivg} - X_{m'}^{nivg}}(s_p) \overline{F_{jm'}^{nivg}(s_p)} .$$

3-2 Pour n allant du niveau $nivg + 1$ au niveau $nivf$, transfert de l'information des groupes sources $C_{m'}^n$ vers le groupe observateur C_m^n ,
 $\forall m/T_i^s \cap C_m^n \neq \emptyset$, $\forall p \in \{1, \dots, S_n\}$:

$$G_m^n(s_p) = F_{im}^n(s_p) \sum_{m' \in TL^n(m) / T_j^s \cap C_{m'}^n \neq \emptyset} \mathcal{T}_{L, X_m^n - X_{m'}^n}(s_p) \overline{F_{jm'}^n(s_p)} .$$

3-3 Approximation de l'élément matriciel $(A_h^{far})_{ij}$,

$$(A_{approx}^{far})_{ij} = \frac{\imath k}{4\pi^2} \sum_{n=nivg}^{nivf} \sum_{p=1}^{S_n} \omega_{s_p} \sum_{m/T_i^s \cap C_m^n \neq \emptyset} G_m^n(s_p) .$$

Complexité de la nouvelle méthode

Donnons tout d'abord quelques estimations. Le nombre de directions sur la sphère unité, S_n , est donné par l'estimation $S_n \sim N_f/M_n$. On en déduit : $\ln S_n$ est majoré par $\ln N_f$,
 $S_n \times M_n \sim N_f$, et $\sum_{n=2}^{nivf} S_n \sim N_f$.

Les complexités des différentes étapes du calcul de la matrice A_h^{far} sont données dans le tableau suivant :

Etape	Calculs	Mémoire
1	$8M_g L_{nivg} S_{nivg} + nbTra \sum_{n=nivg+1}^{nivf} L_n S_n$	$8M_g S_{nivg} + nbTra \sum_{n=nivg}^{nivf} S_n$
2.1	$S_{nivf} N_f$	$M_{nivf} S_{nivf}$
2.2	$\sum_{n=nivg}^{nivf-1} \max(M_n, N_g) S_n \ln S_n$	$\sum_{n=nivg}^{nivf-1} \max(M_n, N_g) S_n$
3.1	$8 \max(M_g, N_g) \max(M_g, N_g) S_{nivg}$	$\sum_{n=nivg}^{nivf} M_n S_n$
3.2	$\sum_{n=nivg+1}^{nivf} \max(nbTra, N_g) \max(M_n, N_g) S_n$	$\sum_{n=nivg}^{nivf} M_n S_n$
3.3	$\sum_{n=nivg}^{nivf} S_n M_n N_g$	N_g^2

La construction de A_h^{near} nécessite $\mathcal{O}(N_f^2/M_f)$ opérations élémentaires.

Le choix de M_f se fait en $\mathcal{O}(N_f)$ comme dans le cas de la FMM multi-niveaux classique. Le choix du niveau $nivg$ est lié aux termes “ $\max(M_n, N_g) S_n$ ” et “ $\max(M_g, N_g)$ ”. Par rapport au premier terme, si $M_n \geq N_g$ alors $\max(M_n, N_g) S_n = M_n S_n \sim N_f$, sinon $\max(M_n, N_g) S_n > M_n S_n \sim N_f$. D’autre part, $M_g = N_g$ minimise $\max(M_g, N_g)$. On en déduit que le choix optimal pour M_g est donné par $M_g \sim N_g$. Nous reformulons ci-dessous les complexités des différentes étapes en considérant les relations suivantes : $M_g \sim N_g \sim N_f^{1/3}$, $\forall n, S_n M_n \sim N_f$ et $L_n = S_n^{1/2}$,

$$\sum_{n=nivg+1}^{nivf} L_n S_n \sim L_{nivg} S_{nivg} \sim N_f, \quad \sum_{n=nivg+1}^{nivf} S_n \sim S_{nivg} \sim N_f^{2/3}.$$

Etape	Calculs	Mémoire
1	$N_g N_f + nbTra N_f$	$nbTra N_f^{2/3} + N_f$
2.1	N_f	N_f
2.2	$N_f \ln^2 N_f$	N_f
3.1	$N_g N_f$	N_f
3.2	$N_g N_f \ln N_f$	N_f
3.3	$N_g N_f \ln N_f$	N_g^2

La complexité se résume donc à $\mathcal{O}(N_f N_g \ln N_f) = \mathcal{O}(N_f^{4/3} \ln N_f)$ pour le coût de calcul et $\mathcal{O}(N_f)$ pour la place mémoire utilisée. Si nous considérons alors une résolution du problème intégral, le couplage de la méthode multipôles multi-niveaux avec l'approximation de la phase permet une résolution avec un coût de calcul en $\mathcal{O}(N_f^{4/3} \ln N_f + Niter N_f^{2/3})$ au lieu de $\mathcal{O}(nbTra N_f \ln N_f + nbTra Niter N_f \ln N_f)$ lors d'une résolution classique avec la FMM multi-niveaux.

D'un point de vue théorique cette nouvelle méthode semble déjà plus efficace qu'une utilisation classique de la FMM multi-niveaux. En effet, étant donné une résolution en $\mathcal{O}(Niter N_f^{2/3})$, elle est plus performante dès que $nbTra Niter$ est grand devant $N_f^{1/3}$ ou plutôt N_g . En pratique $nbTra \approx 316$. Considérons une sous-estimation de $Niter$, $Niter = 10$. Notre méthode apparaît alors plus efficace qu'une utilisation classique de la FMM multi-niveaux pour $N_f^{1/3} < 3160$, c'est à dire pour des valeurs de N_f de l'ordre de 10^{10} .

En pratique, les résultats sont plus modestes. Dans la partie suivante, nous considérons par exemple le cas $N_f \approx 300000$ pour lequel $N_g \approx 1000$ et le comportement de N_g par rapport à N_f nous permet de penser que le choix de $N_g \approx 3000$ permettrait de prendre $N_f \approx 10^7$. Ainsi, la condition $N_g \approx 3160$ se traduit d'un point de vue plus réaliste, par $N_f \approx 10^7$, ce qui correspond aux objectifs actuels dans l'industrie.

Cependant, nous pouvons espérer des améliorations pour notre nouvelle méthode. En effet, comme le suggère l'étape 3, le calcul de la matrice peut être assimilé à un calcul d'interactions entre obstacles multiples où les différents obstacles seraient représentés par les éléments T_i^s du maillage grossier. L'algorithme d'accélération du calcul de la matrice présenté ci-dessus est très proche des algorithmes utilisés lors de la considération d'obstacles multiples. Pour ces problèmes, certaines études consistent à privilégier des directions dans la discrétisation de la sphère unité. En effet, si nous considérons deux éléments du maillage grossier, T_i^s et T_j^s , les

vecteurs $r_{m,m'}^n$ introduits dans l'étape 1 sont regroupés autour d'une direction privilégiée, celle de $G_j^s - G_i^s$ où G_i^s et G_j^s désignent les centres de gravité respectifs de T_i^s et T_j^s . Ce constat permet selon certaines études de réduire le choix des directions s_p sur la sphère unité et donc de réduire la complexité de l'algorithme. P.A. Martin propose dans son article [61] une adaptation du développement du noyau de Green au cas d'obstacles multiples, à partir des travaux de V. Rokhlin, de W.-C. Chew ou encore de Y.-L. Xu ([86]-[87]).

4.2 L'intégrale sur la sphère unité : une limitation pour le couplage

La mise en œuvre d'une méthode multipôles nécessite la discrétisation de l'intégrale sur la sphère unité suivante :

$$j_l(k|r|) P_l(\cos(r, r_0)) = \frac{i^l}{4\pi} \int_{S^2} P_l(\cos(s, r_0)) e^{ik\langle s, r \rangle} ds \quad (4.8)$$

où $l \in \{1, \dots, L\}$ avec $L \sim k|r|$. Le choix du nombre $S \sim L^2$ de points de discrétisation sur la sphère unité est donc fortement lié au nombre d'onde k qui commande l'oscillation du noyau de Green concerné par l'approximation multipolaire.

Si nous nous intéressons à l'application classique de la méthode multipôles définie dans le chapitre 3, nous pouvons montrer en quel sens cette discrétisation de la sphère unité est une limitation pour le couplage. Imaginons que la géométrie de l'obstacle considéré soit approchée selon un maillage plus grossier que le maillage classique, avec un nombre de mailles d'un ordre strictement inférieur à k^2 . Dans ce cas, S , le nombre de points de discrétisation sur la sphère unité ne diminue pas. Il aurait même tendance à augmenter. En effet, si nous considérons un maillage plus grossier, nous pouvons supposer un nombre M de boîtes multipolaires plus faible. Mais dans ce cas, la valeur de $|r|$ est plus grande. Ainsi, L et donc le nombre S de points de discrétisation de la sphère unité en sont plus grands. Dans tous les cas, le produit $M \times S$ est de l'ordre de k^2 . Ce constat constitue une limitation à la méthode multipôles. Ainsi, avec un maillage dont le nombre de mailles serait $N \sim k$, la complexité d'une application classique de la FMM ne serait pas $\mathcal{O}(N^{3/2})$ pour une version à un niveau et $\mathcal{O}(N \ln N)$ pour une version multi-niveaux. Elle serait même supérieure à $\mathcal{O}(N^2)$.

Dans le cas de notre couplage d'une méthode multipôles avec une méthode d'approximation de la phase défini dans la section 4.1, il s'agit bien d'une application de la méthode multipôles à des calculs basés sur un maillage classique dont le nombre de mailles est de l'ordre de k^2 . Les mailles qui subissent le regroupement multipolaire sont bien celles du maillage fin correspondant au maillage considéré pour des résolutions plus classiques. Il n'est jamais question de considérer un regroupement multipolaire des mailles grossières, ni même de considérer une accélération de type multipolaire des produits matrice-vecteur lors de la résolution itérative basée sur le maillage grossier.

4.3 Méthodes multipôles et discrétisation de la phase

La remarque précédente est un préambule à la considération d'un couplage d'une méthode multipôles et d'une méthode de discrétisation de la phase présentée par A. de La Bourdonnaye et M. Tolentino. En effet, la remarque concernant la limitation de la méthode multipôles relative à l'intégration sur la sphère unité (4.8) permet de comprendre de manière quasi immédiate la difficulté d'une application directe de la méthode multipôles dans le cadre de la méthode de discrétisation de la phase présentée dans la section 2.2. Le système résolu est bien de taille $k^2 \times k^2$ mais il est construit à partir d'une approximation géométrique de la surface de l'obstacle selon un maillage dont le nombre de mailles est de l'ordre de k au lieu de k^2 pour un maillage classique.

Chapitre 5

Annexe : Calcul des singularités

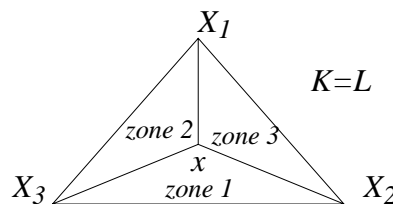
La résolution des équations intégrales nécessite de lever les singularités liées au noyau de Green. La méthode de J. Gay permet par changements de variables de lever les singularités des intégrales

$$I_{KL} = \int_K \int_L \frac{F(x, y)}{|x - y|^\alpha} d\gamma(x) d\gamma(y),$$

où K et L désignent des triangles non disjoints. Notons X_i et Y_i , $i = 1, \dots, 3$ les sommets respectifs de K et de L . Trois cas se présentent en fonction du nombre de sommets communs à K et L .

- 1^{er} cas : K et L sont confondus.

La discrétisation suivant x se fait de manière classique. Le changement de variable concerne uniquement la variable y . Pour x donné, on découpe le triangle $K = L$ en trois zones concurrentes en x :



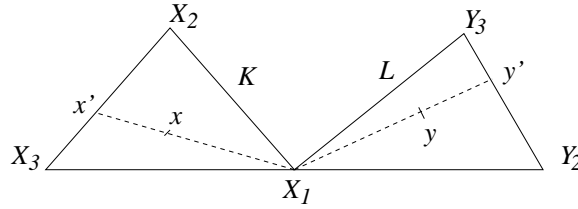
où le point x est repéré par ses coordonnées barycentriques :

$$x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i X_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_i \in [0, 1] \quad \forall i = 1, \dots, 3.$$

On effectue des changements de variables différents dans chacune des trois zones. Nous donnons ces changements de variables ainsi que leurs Jacobiens respectifs dans le tableau suivant :

zone	changement de variable	Jacobien
1	$y = (1 - \mu_1)x + \mu_1((1 - \mu_2)X_2 + \mu_2X_3)$	$\mu_1\lambda_1\text{mes}(K)$
2	$y = (1 - \mu_1)x + \mu_1((1 - \mu_2)X_3 + \mu_2X_1)$	$\mu_1\lambda_2\text{mes}(K)$
3	$y = (1 - \mu_1)x + \mu_1((1 - \mu_2)X_1 + \mu_2X_2)$	$\mu_1\lambda_3\text{mes}(K)$

• 2^{ième} cas : K et L ont un sommet commun.



Soit $x \in K$ et $y \in L$. On procède au changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} x &= (1 - \lambda_1)X_1 + \lambda_1((1 - \lambda_2)X_2 + \lambda_2X_3) \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in [0, 1]^2, \\ y &= (1 - \mu_1)X_1 + \mu_1((1 - \mu_2)Y_2 + \mu_2Y_3) \quad \text{avec } (\mu_1, \mu_2) \in [0, 1]^2, \end{aligned}$$

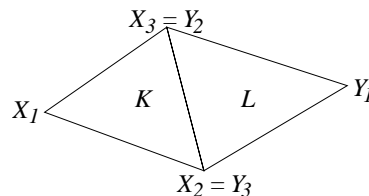
avec le Jacobien $J = J_x J_y = \lambda_1 \mu_1 \text{mes}(K) \text{mes}(L)$. Posons $x' = (1 - \lambda_2)X_2 + \lambda_2X_3$ et $y' = (1 - \mu_2)Y_2 + \mu_2Y_3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_{KL} &= \iint_{[0,1]^2} \left(\int_{\lambda_1=0}^1 \int_{\mu_1=0}^{\lambda_1} \frac{F((1 - \lambda_1)X_1 + \lambda_1x', (1 - \mu_1)X_1 + \mu_1y')}{|(\mu_1 - \lambda_1)X_1 + \lambda_1x' - \mu_1y'|^\alpha} \lambda_1 \mu_1 d\lambda_1 d\mu_1 \right. \\ &+ \left. \int_{\lambda_1=0}^1 \int_{\mu_1=0}^{\lambda_1} \frac{F((1 - \mu_1)X_1 + \mu_1x', (1 - \lambda_1)X_1 + \lambda_1y')}{|(\lambda_1 - \mu_1)X_1 + \mu_1x' - \lambda_1y'|^\alpha} \lambda_1 \mu_1 d\lambda_1 d\mu_1 \right) \text{mes}(K) \text{mes}(L) d\lambda_2 d\mu_2. \end{aligned}$$

Le changement de variable $(\lambda_1 = \xi_1, \mu_1 = \xi_1 \eta_1)$ avec $(\xi_1, \eta_1) \in [0, 1]^2$, avec le Jacobien $J = \xi_1$, soulève la singularité :

$$\begin{aligned} I_{KL} &= \iint_{[0,1]^2} \left(\iint_{[0,1]^2} \left[\frac{F((1 - \xi_1)X_1 + \xi_1x', (1 - \xi_1\eta_1)X_1 + \xi_1\eta_1y')}{|(\eta_1 - 1)X_1 + x' - \eta_1y'|^\alpha} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{F((1 - \xi_1\eta_1)X_1 + \xi_1\eta_1x', (1 - \xi_1)X_1 + \xi_1y')}{|(1 - \eta_1)X_1 + \eta_1x' - y'|^\alpha} \right] \frac{\xi_1^3}{\xi_1^\alpha} \eta_1 d\eta_1 d\xi_1 \right) \text{mes}(K) \text{mes}(L) d\lambda_2 d\mu_2. \end{aligned}$$

● 3^{ième} cas : K et L ont une arête commune.



Soit $x \in K$ et $y \in L$. On procède ici au premier changement de variable suivant :

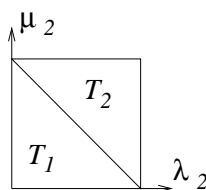
$$\begin{aligned} x &= (1 - \lambda_1)((1 - \lambda_2)X_2 + \lambda_2 X_3) + \lambda_1 X_1 \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in [0, 1]^2, \\ y &= (1 - \mu_1)((1 - \mu_2)Y_2 + \mu_2 Y_3) + \mu_1 Y_1 \quad \text{avec } (\mu_1, \mu_2) \in [0, 1]^2, \end{aligned}$$

avec le Jacobien $J = J_x J_y = (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1) \text{mes}(K) \text{mes}(L)$. Posons $x' = (1 - \lambda_2)X_2 + \lambda_2 X_3$ et $y' = (1 - \mu_2)Y_2 + \mu_2 Y_3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_{KL} &= \iint_{[0,1]^2} \left(\int_{\lambda_2=0}^1 \int_{\mu_2=0}^1 \frac{F(\lambda_1 X_1 + (1 - \lambda_1)x', \mu_1 X_1 + (1 - \mu_1)y')}{|\lambda_1 X_1 - \mu_1 Y_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3|^\alpha} (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1) d\lambda_2 d\mu_2 \right) \\ &\quad \cdot \text{mes}(K) \text{mes}(L) d\lambda_1 d\mu_1, \end{aligned}$$

avec $\delta_2 = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) - (1 - \mu_1)\mu_2$ et $\delta_3 = (1 - \lambda_1)\lambda_2 - (1 - \mu_1)(1 - \mu_2)$. Il y a singularité pour $\lambda_1 = \mu_1 = 1 - \lambda_2 - \mu_2 = 0$.

L'intégration par rapport à (λ_2, μ_2) sur $[0, 1]^2$ se fait par le découpage suivant :



Sur la zone T_1 , on effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= (1 - w)u, \\ \mu_2 &= (1 - w)(1 - u), \end{aligned} \quad \text{avec le Jacobien } J_{T_1} = 1 - w,$$

et sur T_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= (1 - w)u + w, \\ \mu_2 &= (1 - w)(1 - u) + w, \end{aligned} \quad \text{avec le Jacobien } J_{T_2} = 1 - w.$$

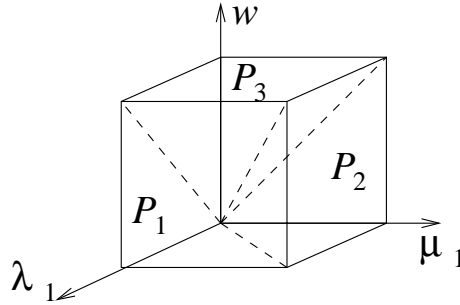
On obtient ainsi :

$$I_{KL} = \iiint\limits_{\lambda_1, \mu_1, w, u \in [0,1]^4} \left(\frac{F(\lambda_1 X_1 + (1 - \lambda_1)\bar{x}, \mu_1 X_1 + (1 - \mu_1)\bar{y})}{|\lambda_1 X_1 - \mu_1 Y_1 + \bar{\delta}_2 X_2 + \bar{\delta}_3 X_3|^\alpha} (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)(1 - w) \right. \\ \left. + \frac{F(\lambda_1 X_1 + (1 - \lambda_1)\tilde{x}, \mu_1 X_1 + (1 - \mu_1)\tilde{y})}{|\lambda_1 X_1 - \mu_1 Y_1 + \tilde{\delta}_2 X_2 + \tilde{\delta}_3 X_3|^\alpha} (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)(1 - w) \right) \\ \cdot \text{mes}(K) \text{mes}(L) du dw d\lambda_1 d\mu_1 ,$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (1 - (1 - w)u)X_2 + (1 - w)uX_3 , \\ \bar{y} &= (1 - (1 - w)(1 - u))Y_2 + (1 - w)(1 - u)Y_3 , \\ \tilde{x} &= (1 - (1 - w)u - w)X_2 + ((1 - w)u + w)X_3 , \\ \tilde{y} &= (1 - (1 - w)(1 - u) - w)Y_2 + ((1 - w)(1 - u) + w)Y_3 , \\ \bar{\delta}_2 &= (1 - \lambda_1)(1 - (1 - w)u) - (1 - \mu_1)(1 - w)(1 - u) , \\ \bar{\delta}_3 &= (1 - \lambda_1)(1 - w)u - (1 - \mu_1)(1 - (1 - w)(1 - u)) , \\ \tilde{\delta}_2 &= (1 - \lambda_1)(1 - (1 - w)u - w) - (1 - \mu_1)((1 - w)(1 - u) + w) , \\ \tilde{\delta}_3 &= (1 - \lambda_1)((1 - w)u + w) - (1 - \mu_1)(1 - (1 - w)(1 - u) - w) . \end{aligned}$$

La singularité est réduite à l'ensemble des points tels que $\lambda_1 = \mu_1 = w = 0$. Pour lever cette singularité, nous effectuons un dernier changement de variable décrit ci-dessous :



Le domaine d'intégration $[0, 1]^3$ est découpé en trois zones pyramidales comme indiqué par le dessin ci-dessus. Les singularités sont alors levées par les changements de variables décrits par le tableau suivant :

zone	P_1	P_2	P_3
λ_1	ξ	$\xi\eta$	$\xi\zeta$
μ_1	$\xi\eta$	η	$\eta\zeta$
w	$\xi\zeta$	$\eta\zeta$	ζ
Jacobien	ξ^2	η^2	ζ^2

Deuxième partie

Accélération de la résolution des
équations intégrales de Després pour
les problèmes de Helmholtz
tridimensionnels

Chapitre 6

L'équation intégrale de Després

6.1 Introduction

La discrétisation des équations intégrales classiques liées aux problèmes de Helmholtz aboutit à un système très mal conditionné et dont la résolution se fait alors généralement selon la méthode directe de Gauss très coûteuse. La nouvelle formulation intégrale introduite par B. Després aboutit à un système dont les propriétés de la matrice, symétrie, définie-positivité, bon conditionnement, permettent une résolution numérique du système discret basée sur le gradient conjugué. De telles formulations ont déjà été écrites pour l'équation de Maxwell en trois dimensions ([41], [24]) ainsi que pour l'équation de Helmholtz bidimensionnelle ([40], [8], [7]). En nous inspirant de l'article de N. Bartoli et F. Collino [8], nous proposons donc dans ce chapitre une telle formulation dans le cadre de l'équation de Helmholtz tridimensionnelle.

6.2 Formulation intégrale de Després

La formulation intégrale de B. Després est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle quadratique. Cette formulation peut être retrouvée à partir de simples manipulations sur les potentiels usuels. Nous proposons d'introduire la nouvelle formulation de B. Després dans le cadre de notre problème à partir des potentiels usuels. Pour plus d'informations sur la fonctionnelle quadratique, nous renvoyons aux travaux de N. Bartoli, F. Collino et B. Després ([40], [8], [7]).

La présentation se fait en deux étapes, tout d'abord dans le cadre d'une condition d'impédance $Z = 1$ au bord, puis dans le cadre d'une condition d'impédance généralisée. En considérant la condition d'impédance $Z = 1$ au bord, l'écriture du système intégral est basée sur la décomposition en partie réelle et partie imaginaire pure des opérateurs intégraux habituels. Une première équation est établie en considérant l'équation de Helmholtz sans prise en compte de la condition au bord. Cette dernière permet d'établir la seconde équation du système intégral

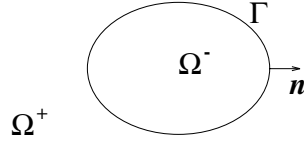
de B. Després. Le cas d'une condition d'impédance généralisée est considéré en se ramenant au cas précédent par un changement de second membre. En effet, dans la formulation intégrale de B. Després, la prise en compte de la condition au bord se fait au niveau du second membre du système.

6.2.1 Une condition d'impédance au bord

Nous cherchons ici à résoudre l'équation de Helmholtz en domaine extérieur :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 , & \text{dans } \Omega^+ , \\ \frac{\partial u}{\partial n} /_{\Gamma} + iku /_{\Gamma} = g , & \text{sur } \Gamma , \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 , & \end{cases} \quad (6.1)$$

où Ω^- est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^3 , de frontière Γ et $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$. g est une donnée liée à l'onde incidente, et nous orientons la normale à Γ vers l'extérieur de Ω^- .



Nous savons alors qu'une fonction u de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega^+})$ satisfait à

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 , & \text{dans } \Omega^+ , \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 , & \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} M(ku /_{\Gamma}) - L\left(\frac{\partial u}{\partial n} /_{\Gamma}\right) &= ku & \text{dans } \Omega^+ , \\ &= 0 & \text{dans } \Omega^- . \end{aligned} \quad (6.2)$$

L et M sont les opérateurs de simple et double couche définis pour tout $x \notin \Gamma$ par :

$$Lp(x) = k \int_{\Gamma} G(k, |x - y|) p(y) d\gamma(y) \quad \text{et} \quad Mq(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(k, |x - y|) q(y) d\gamma(y)$$

avec $G(k, |x - y|) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$.

L (resp. M) est prolongeable pour $p \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (resp. $q \in H^{1/2}(\Gamma)$) et à valeur dans $H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega^+})$.

Notons pour $x \in \Gamma$, $(Lp)^\pm(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in \Omega^\pm}} Lp(x')$ et $(Mq)^\pm(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in \Omega^\pm}} Mq(x')$.

Nous avons alors pour $x \in \Gamma$ (cf. par exemple [51]) :

$$\begin{aligned} (Lp)^\pm(x) &= k \int_{\Gamma} G(k, |x - y|) p(y) d\gamma(y) \\ \frac{\partial(Lp)^\pm}{\partial n}(x) &= \mp k \frac{p(x)}{2} + k \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(k, |x - y|) p(y) d\gamma(y) \\ (Mq)^\pm(x) &= \pm \frac{q(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(k, |x - y|) q(y) d\gamma(y) \\ \frac{\partial(Mq)^\pm}{\partial n}(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(k, |x - y|) q(y) d\gamma(y) \end{aligned}$$

Posons $q = ku_{/\Gamma}$ et $p = \frac{\partial u}{\partial n}_{/\Gamma}$. L'équation (6.2) implique alors :

$$\begin{aligned} ku_{/\Gamma} &= M(q)^+ - L(p)^+ , \\ \text{et } k \frac{\partial u}{\partial n}_{/\Gamma} &= \frac{\partial(Mq)^+}{\partial n} - \frac{\partial(Lp)^+}{\partial n} . \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les premières équations intégrales :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{q}{2} + Kq - Sp , \\ 0 = -\frac{p}{2} + Dq - K'p , \end{cases} \quad (6.3)$$

c'est à dire :

$$\begin{bmatrix} D & -K' - \frac{I}{2} \\ -K + \frac{I}{2} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où les opérateurs S , K , K' et D sont définis par :

$$\begin{aligned} Sp(x) &= k \int_{\Gamma} G(k, |x - y|) p(y) d\gamma(y) , & Dq(x) &= \frac{1}{k} \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(k, |x - y|) q(y) d\gamma(y) , \\ Kq(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(k, |x - y|) q(y) d\gamma(y) & \text{et} & & K'p(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(k, |x - y|) p(y) d\gamma(y) . \end{aligned}$$

En posant $G(k, |x-y|) = G_r(k, |x-y|) + \iota G_i(k, |x-y|)$, où $G_r = \Re(G)$ et $G_i = \Im(G)$, nous décomposons maintenant les différents opérateurs selon leurs parties réelle et imaginaire pure :

$$S = S_r + \iota S_i \quad , \quad K = K_r + \iota K_i \quad , \quad K' = K'_r + \iota K'_i \quad , \quad D = D_r + \iota D_i$$

où $S_r, K_r, K'_r, D_r, S_i, K_i, K'_i$ et D_i sont des opérateurs réels.

A ce stade, nous introduisons une nouvelle paire d'inconnues, $\mu = \iota q$ et $\lambda = \iota p$. Ainsi, en posant

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} D_r & -K'_r - \frac{I}{2} \\ -K_r + \frac{I}{2} & S_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} D_i & -K'_i \\ -K_i & S_i \end{bmatrix} \quad ,$$

les équations (6.3) se réécrivent

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (6.4)$$

d'où l'on obtient en multipliant par ι :

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad . \quad (6.5)$$

Comme S_r et D_r sont symétriques, \mathbf{K} est lié à son adjoint par la relation suivante :

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \Pi \quad . \quad (6.6)$$

Rappelons maintenant la condition au bord. Elle se réécrit

$$p + \mu = g \quad .$$

En la multipliant par ι , on a

$$-\lambda + q = -\iota g \quad .$$

En posant $\tilde{g} = \begin{bmatrix} -\iota g \\ g \end{bmatrix}$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \Pi \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} = \tilde{g} \quad .$$

En reprenant les relations (6.5) et (6.6), nous établissons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \mathbf{M} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} - \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} = \tilde{g} \quad . \quad (6.7)$$

Introduisons maintenant l'opérateur de champ lointain A_∞ définie par :
 $\forall p, q \in L^2(\Gamma), \forall \hat{s}$ direction de la sphère unité \mathcal{S}^2 ,

$$\left(A_\infty \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \right) (\hat{s}) = \frac{k}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-\iota ky \cdot \hat{s}} \cdot (p(y) + \iota(\hat{s} \cdot n_y)q(y)) d\gamma_y . \quad (6.8)$$

En utilisant la propriété

$$\frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} = \frac{k}{(4\pi)^2} \int_{\mathcal{S}^2} e^{\iota k(x-y) \cdot \hat{s}} d\hat{s} ,$$

où $\int_{\mathcal{S}^2} \cdot d\hat{s}$ désigne l'intégrale sur la sphère unité, on vérifie aisément que

$$\int_{\mathcal{S}^2} A_\infty \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \cdot \overline{A_\infty \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}} d\hat{s} = \int_{\Gamma} (\mathbf{M} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}) \cdot \overline{\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}} d\Gamma . \quad (6.9)$$

Il est ensuite facile de vérifier que l'opérateur adjoint de A_∞ est donné pour tout $\varphi \in L^2(\mathcal{S}^2)$ par :

$$(A_\infty^* \varphi)(y) = \begin{bmatrix} \frac{-k}{4\pi} \int_{\mathcal{S}^2} \iota(\hat{s} \cdot n_y) e^{\iota ky \cdot \hat{s}} \varphi(\hat{s}) d\hat{s} \\ \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{S}^2} e^{\iota ky \cdot \hat{s}} \varphi(\hat{s}) d\hat{s} \end{bmatrix} . \quad (6.10)$$

Finalement, il est assez immédiat de montrer l'égalité suivante :

$$\mathbf{M} = A_\infty^* A_\infty . \quad (6.11)$$

En reprenant les équations (6.4) et (6.7), on aboutit au système

$$\begin{cases} X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{K}^* Y = \tilde{g} , \\ \mathbf{K} X + A_\infty^* A_\infty Y = 0 , \end{cases} \quad (6.12)$$

en posant $X = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} = \iota X$.

Le problème de point selle associé, existence et unicité des solutions

Soit $\gamma = -\iota A_\infty Y$. Alors (6.12) équivaut à :

$$\begin{cases} X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{K}^* Y = \tilde{g} , \\ \gamma + \iota A_\infty Y = 0 , \\ \mathbf{K} X + \iota A_\infty^* \gamma = 0 , \end{cases} \quad (6.13)$$

c'est à dire

$$\left(\begin{array}{cc|c} \left[\begin{array}{cc} Id + A_\infty^* A_\infty & 0 \\ 0 & Id \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -\mathbf{K}^* \\ \imath A_\infty \\ 0 \end{array} \right] & \\ \hline \left[\begin{array}{c} -\mathbf{K} \\ -\imath A_\infty^* \end{array} \right] & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} X \\ \gamma \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système correspond à la recherche du point selle de la fonctionnelle de Lagrange :

$$\mathcal{L}(X, \gamma, Y) = \frac{1}{2} \| X \|^2 + \frac{1}{2} \| A_\infty X \|^2 + \frac{1}{2} \| \gamma \|^2 + \Re \langle -\mathbf{K}X - \imath A_\infty^* \gamma, Y \rangle - \Re \langle \tilde{g}, X \rangle .$$

Il s'agit en fait de minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{I}(X, \gamma) = \frac{1}{2} \| X \|^2 + \frac{1}{2} \| A_\infty X \|^2 + \frac{1}{2} \| \gamma \|^2 - \Re \langle \tilde{g}, X \rangle ,$$

avec la contrainte

$$-\mathbf{K}X - \imath A_\infty^* \gamma = 0, \quad (6.14)$$

ce qui équivaut à trouver (X, γ, Y) solution du problème de point selle :

$$\mathcal{L}(X, \gamma, Y) = \min_{\tilde{X}, \tilde{\gamma}} \max_{\tilde{Y}} \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{\gamma}, \tilde{Y}) .$$

\tilde{Y} apparait comme multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte (6.14).

Les résultats d'existence et d'unicité s'obtiennent par application du théorème de Brezzi ([14]). La condition "inf-sup" ou condition Babuška-Brezzi, assure l'existence de (X, Y) et l'unicité de X . L'existence de Y est assurée à un élément de $\ker A_\infty$ près. Nous renvoyons aux travaux de N. Bartoli ([7]) pour plus de précision concernant le lien entre le théorème de Brezzi et notre problème. Afin d'assurer l'unicité de Y , nous introduisons la modification ci-dessous.

Une modification : Le β -système

Pour assurer l'unicité de la solution Y du problème (6.12), B. Després a proposé à N. Bartoli et F. Collino (cf. [8]) la modification suivante : Puisque $Y = \imath X$, nous ne changeons pas le problème en introduisant les termes

$$\begin{array}{l} \beta X = -\imath \beta Y \quad \text{dans la première équation} \\ \text{et } \beta Y = \imath \beta X \quad \text{dans la deuxième,} \end{array}$$

où β est un paramètre strictement positif. Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} (1 + \beta)X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{K}^* Y = \tilde{g} - \imath \beta Y , \\ \mathbf{K}X + (\beta Id + A_\infty^* A_\infty)Y = \imath \beta X . \end{cases} \quad (6.15)$$

L'opérateur $(A_\infty^* A_\infty + \beta Id)$ vérifie une condition de coercivité qui manquait à $A_\infty^* A_\infty$ dans le système (6.12). Cette nouvelle propriété assure l'unicité de la solution (X, Y) du β -système (6.15) et cette solution vérifie de plus la relation

$$Y = \imath X . \quad (6.16)$$

6.2.2 Une condition d'impédance généralisée

Nous considérons dans ce paragraphe, la condition au bord

$$\frac{\partial u}{\partial n} /_{\Gamma} + ikZu /_{\Gamma} = f \quad \text{sur } \Gamma ,$$

où l'opérateur d'impédance Z est considéré à partie réelle positive. Notons R l'opérateur de réflexion associé,

$$R = \frac{Id - Z}{Id + Z} .$$

Il est aisé de vérifier que cette condition est du type

$$\frac{\partial u}{\partial n} /_{\Gamma} + ik u /_{\Gamma} = g \quad \text{sur } \Gamma ,$$

en exprimant g en fonction de R :

$$g = R\left(-\frac{\partial u}{\partial n} /_{\Gamma} + ik u /_{\Gamma}\right) + (1 + R)f .$$

Ainsi, nous pouvons réécrire le système (6.15) avec

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} -\imath g \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\imath R(-p + \imath q) \\ R(-p + \imath q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\imath(1 + R)f \\ (1 + R)f \end{bmatrix} .$$

En posant $F = \begin{bmatrix} -\imath(1 + R)f \\ (1 + R)f \end{bmatrix}$ et $N_R = R \begin{bmatrix} 1 & \imath \\ \imath & -1 \end{bmatrix}$, nous aboutissons au système

$$\begin{cases} (1 + \beta)X + A_{\infty}^* A_{\infty} X - \mathbf{K}^* Y = N_R X + F - \imath \beta Y , \\ \mathbf{K} X + (\beta Id + A_{\infty}^* A_{\infty}) Y = \imath \beta X , \end{cases} \quad (6.17)$$

c'est à dire

$$\mathcal{M}_{\beta} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathcal{R}_{R,\beta} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (6.18)$$

où

$$\mathcal{M}_{\beta} = \begin{bmatrix} (1 + \beta)Id + A_{\infty}^* A_{\infty} & -\mathbf{K}^* \\ \mathbf{K} & \beta Id + A_{\infty}^* A_{\infty} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{R,\beta} = \begin{bmatrix} N_R & -\imath \beta Id \\ \imath \beta Id & 0 \end{bmatrix} . \quad (6.19)$$

Pour $|R| \leq 1$, le problème reste bien posé et le système admet une unique solution vérifiant toujours la relation (6.16).

6.3 Discrétisation du système intégral

Nous proposons tout d'abord une formulation variationnelle du β -système avec condition d'impédance généralisée (6.17) :

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in (\mathbb{H}(\Gamma))^2 \text{ tel que pour tout } \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} \in (\mathbb{H}^{-1}(\Gamma))^2 : \\
& \quad \langle ((1 + \beta)Id + A_\infty^* A_\infty)X, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} - \langle \mathbf{K}^* Y, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} \\
& \quad + \langle \mathbf{K} X, \tilde{Y} \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} + \langle (\beta Id + A_\infty^* A_\infty)Y, \tilde{Y} \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} \\
& = \quad \langle N_R X, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} + \langle F, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} - \langle \imath \beta Y, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} \\
& \quad + \langle \imath \beta X, \tilde{Y} \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} .
\end{aligned} \tag{6.20}$$

où $\mathbb{H}(\Gamma)$ désigne l'espace $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Choisissons maintenant une discrétisation éléments-finis. Considérons Γ_h , une approximation de la surface Γ , polynomiale par morceaux de degré l (en général, en pratique $l = 1$). Considérons une triangulation \mathcal{T}_h de Γ_h , et V_h un sous-espace de dimension finie de $H^{1/2}(\Gamma_h)$. Choisissons

$$V_h = \text{Vect}\{\phi_i ; i = 1, \dots, N\} ,$$

avec $\phi_i, i \in \{1, \dots, N\}$ les fonctions de base \mathbb{P}_1 associées à \mathcal{T}_h , et N le nombre de nœuds du maillage éléments-finis :

$$\phi_i \in \mathbb{P}_1 \text{ et } \phi_i(\text{Nod}_j) = \delta_{ij}$$

où Nod_j désigne le $j^{\text{ième}}$ nœud du maillage éléments-finis.

Posons $\psi_i = \begin{bmatrix} \phi_i \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\psi_{i+N} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i \end{bmatrix}$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Nous cherchons alors les approximations \mathcal{X}_h et \mathcal{Y}_h de X et Y de la forme

$$\mathcal{X}_h = \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i \psi_i \text{ et } \mathcal{Y}_h = \sum_{i=1}^{2N} \gamma_i \psi_i \quad \text{avec } \alpha_i, \gamma_i \in \mathbb{C} .$$

La formulation variationnelle discrète s'écrit alors :

Trouver $\mathcal{X}_h = \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i \psi_i$ et $\mathcal{Y}_h = \sum_{i=1}^{2N} \gamma_i \psi_i$ tels que pour tout $j \in \{1, \dots, 2N\}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i \langle ((1 + \beta)Id + A_\infty^* A_\infty) \psi_i, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h} - \sum_{i=1}^{2N} \gamma_i \langle \mathbf{K}^* \psi_i, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h} \\ = & \langle F, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h} + \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i \langle N_R \psi_i, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h} - \sum_{i=1}^{2N} \gamma_i \langle \imath \beta \psi_i, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h} \end{aligned}$$

et (6.21)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i \langle \mathbf{K} \psi_i, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h} + \sum_{i=1}^{2N} \gamma_i \langle (\beta Id + A_\infty^* A_\infty) \psi_i, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h} \\ = & \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i \langle \imath \beta \psi_i, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h} , \end{aligned}$$

où \mathbb{V}_h désigne l'espace $V_h \times V_h$.

Le problème discret consiste donc à résoudre le système linéaire suivant en $X_h = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2N} \end{bmatrix}$ et

$$Y_h = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{2N} \end{bmatrix} :$$

$$\mathcal{M}_\beta \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \end{bmatrix} = \mathcal{R}_{R,\beta} \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_h \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (6.22)$$

où les matrices \mathcal{M}_β et $\mathcal{R}_{R,\beta}$ sont données par

$$\mathcal{M}_\beta = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_\beta + \mathcal{A} & -\mathcal{K}^* \\ \mathcal{K} & \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{R,\beta} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & -\imath \mathcal{B}_\beta \\ \imath \mathcal{B}_\beta & 0 \end{bmatrix} , \quad (6.23)$$

avec \mathcal{B}_β , \mathcal{D}_β , \mathcal{K} , \mathcal{K}^* , \mathcal{A} , \mathcal{N}_R les matrices $2N \times 2N$ et F_h le vecteur de taille $2N$ définis par :

$$\begin{aligned}
(F_h)_j &= \langle F, \psi_j \rangle_{V_h} , \\
(\mathcal{B}_\beta)_{ji} &= \langle \beta \psi_i, \psi_j \rangle_{V_h} , \\
(\mathcal{D}_\beta)_{ji} &= \langle (1 + \beta) \psi_i, \psi_j \rangle_{V_h} , \\
(\mathcal{N}_R)_{ji} &= \langle N_R \psi_i, \psi_j \rangle_{V_h} , \\
(\mathcal{K})_{ji} &= \langle \mathbf{K} \psi_i, \psi_j \rangle_{V_h} , \\
(\mathcal{K}^*)_{ji} &= \langle \mathbf{K}^* \psi_i, \psi_j \rangle_{V_h} , \\
(\mathcal{A})_{ji} &= \langle A_\infty \psi_i, A_\infty \psi_j \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} .
\end{aligned} \tag{6.24}$$

La condition “inf-sup” discrète ([14]) assure toujours l'existence et l'unicité de la solution (X_h, Y_h) . La structure éléments-finis choisie assure la convergence de la solution discrète (X_h, Y_h) vers la solution (X, Y) du système continu (6.17) quand $h \rightarrow 0$.

6.4 Le calcul des matrices

Le calcul du vecteur \mathcal{F} de taille $2N$ ne pose aucun problème. Les matrices \mathcal{B} , \mathcal{D} et \mathcal{N} de taille $2N \times 2N$ sont particulièrement creuses. Lorsque les indices i et j font référence à des nœuds n'appartenant pas à un même triangle, les termes \mathcal{B}_{ji} , \mathcal{D}_{ji} et \mathcal{N}_{ji} sont nuls. Ainsi, l'évaluation de ces trois matrices s'effectue avec un coût de calcul en $\mathcal{O}(N)$.

En raison des opérateurs intégraux \mathbf{K} , \mathbf{K}^* et A_∞ , l'évaluation des matrices \mathcal{K} , \mathcal{K}^* et \mathcal{A} s'effectue avec un coût de calcul en $\mathcal{O}(N^2)$.

Concernant les matrices \mathcal{K} et \mathcal{K}^* , nous sommes confrontés à des singularités. Décomposons leur évaluation. Le problème consiste à calculer les termes suivants :

$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$:

1. $\langle S_r \phi_i, \phi_j \rangle_{V_h} = k \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G_r(k, |x - y|) \phi_i(y) d\gamma(y) \overline{\phi_j(x)} d\gamma(x) ,$
2. $\langle K_r \phi_i, \phi_j \rangle_{V_h} = \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\partial G_r}{\partial n_y}(k, |x - y|) \phi_i(y) d\gamma(y) \overline{\phi_j(x)} d\gamma(x) ,$
3. $\langle K'_r \phi_i, \phi_j \rangle_{V_h} = \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\partial G_r}{\partial n_x}(k, |x - y|) \phi_i(y) d\gamma(y) \overline{\phi_j(x)} d\gamma(x) ,$
4. $\langle D_r \phi_i, \phi_j \rangle_{V_h} = \frac{1}{k} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\partial^2 G_r}{\partial n_x \partial n_y}(k, |x - y|) \phi_i(y) d\gamma(y) \overline{\phi_j(x)} d\gamma(x) .$

(6.25)

Le 4^{ième} terme se calcule exactement avec la formule suivante :

$$\langle D_r \phi_i, \phi_j \rangle_{V_h} = \frac{1}{k} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G_r(k, |x - y|) [k^2 \phi_i(y) \overline{\phi_j(x)} (n_x \cdot n_y) - \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma_h} \phi_i(y) \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma_h} \overline{\phi_j(x)}] d\gamma(y) d\gamma(x) .$$

Pour plus d'informations concernant cette formule, nous renvoyons par exemple à [9], [66] et [83].

Chacun de ces termes présentent des singularités lorsque les indices i et j désignent des nœuds d'un même triangle. Ces singularités sont levés selon les changements de variables habituels (cf. [56], [60], [57]) rappelés en annexe de la première partie de ce mémoire et établis par J. Gay, un ingénieur du CEA/CESTA.

6.5 Résolution du problème discret

Nous avons à résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_\beta + \mathcal{A} & -\mathcal{K}^* \\ \mathcal{K} & \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & -i\mathcal{B}_\beta \\ i\mathcal{B}_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_h \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (6.26)$$

Nous proposons la méthode itérative de Jacobi relaxée :

On se donne $\begin{bmatrix} X_h^{(0)} \\ Y_h^{(0)} \end{bmatrix}$.

Ensuite, on définit la suite $\left(\begin{bmatrix} X_h^{(n)} \\ Y_h^{(n)} \end{bmatrix} \right)_n$ selon la récurrence

$$\begin{bmatrix} X_h^{(n)} \\ Y_h^{(n)} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \tilde{X}_h^{(n)} \\ \tilde{Y}_h^{(n)} \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} X_h^{(n-1)} \\ Y_h^{(n-1)} \end{bmatrix} ,$$

où α est le coefficient de relaxation de la méthode et $\begin{bmatrix} \tilde{X}_h^{(n)} \\ \tilde{Y}_h^{(n)} \end{bmatrix}$ est solution du système

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_\beta + \mathcal{A} & -\mathcal{K}^* \\ \mathcal{K} & \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_h^{(n)} \\ \tilde{Y}_h^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & -i\mathcal{B}_\beta \\ i\mathcal{B}_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h^{(n-1)} \\ Y_h^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_h \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (6.27)$$

Posons

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V} \\ \mathcal{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & -i\mathcal{B}_\beta \\ i\mathcal{B}_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h^{(n-1)} \\ Y_h^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_h \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Une itération de la méthode se ramène alors à la résolution du système suivant :

$$\text{Trouver } \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \text{ tel que} \quad \begin{cases} (\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})X - \mathcal{K}^*Y = \mathcal{V}, \\ \mathcal{K}X + (\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A})Y = \mathcal{W}, \end{cases} \quad (6.28)$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} X = (\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}(\mathcal{V} + \mathcal{K}^*Y), \\ \mathcal{K}(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{V} + \mathcal{K}(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{K}^*Y + (\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A})Y = \mathcal{W}. \end{cases} \quad (6.29)$$

Le problème se ramène donc à la résolution en Y de l'équation suivante :

$$(\mathcal{K}(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{K}^* + \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A})Y = \mathcal{W} - \mathcal{K}(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{V}. \quad (6.30)$$

Cette résolution est effectuée à l'aide de la méthode du gradient conjugué :

1/ Calcul de $Z = \mathcal{W} - \mathcal{K}(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{V}$:

α) Résolution de $(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})Z = \mathcal{V}$ selon une méthode de gradient conjugué appliquée à la matrice $(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})$. On dira par la suite que l'on a calculé $Z = (\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{V}$ selon GC1.

β) $Z = \mathcal{W} - \mathcal{K}Z$

2/ Résolution de $(\mathcal{K}(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{K}^* + \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A})Y = Z$ par une méthode de gradient conjugué appliquée à la matrice $(\mathcal{K}(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{K}^* + \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A})$. Ce travail fait apparaître des produits $(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{X}$ où \mathcal{X} est un vecteur donné. On les effectue selon GC1.

La convergence du double gradient conjugué est assurée par le caractère hermitien défini positif des matrices $(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})$ et $(\mathcal{K}(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})^{-1}\mathcal{K}^* + \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A})$. La convergence de la méthode de Jacobi relaxée est assurée sous la condition $|R| < 1$ ([8]). Dans le cas d'une condition $|R| = 1$, nous avons convergence faible de la méthode, la convergence forte n'est plus assurée ([7]).

6.6 Cas du coefficient de réflexion nul

Dans ce cas le système continu est donné par (6.12) :

$$\begin{cases} X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{K}^* Y = \tilde{g}, \\ \mathbf{K} X + A_\infty^* A_\infty Y = 0. \end{cases}$$

Ajoutons alors les termes

$$\begin{aligned} -\beta X - \imath\beta Y &= 0 && \text{dans la première équation} \\ \text{et } -\imath\beta X + \beta Y &= 0 && \text{dans la deuxième,} \end{aligned}$$

où β est un paramètre de $]0, 1[$. Nous obtenons alors le système suivant :

$$\begin{cases} (1 - \beta)X + A_\infty^* A_\infty X - (\mathbf{K} - \imath\beta Id)^* Y = \tilde{g}, \\ (\mathbf{K} - \imath\beta Id)X + (\beta Id + A_\infty^* A_\infty)Y = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Dans le cas de ce nouveau système, les résultats de convergence sont les mêmes que pour le β -système (6.15). Cependant, il présente un sérieux avantage par rapport au β -système. En effet le système (6.31) ne nécessite pas le niveau itératif de la méthode de Jacobi relaxée. Il se résoud directement par un double gradient conjugué.

Chapitre 7

Application de la nouvelle méthode

7.1 Introduction

La première partie de ce mémoire a abouti à une nouvelle méthode basée sur le couplage de l'approximation de la phase introduite par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou, avec une méthode multipôles. Nous proposons dans cette deuxième partie, une application de ce couplage à la nouvelle formulation intégrale introduite par B. Després. Ce chapitre présente tout d'abord l'application de l'approximation de la phase à la formulation intégrale de B. Després. Ensuite, l'accélération de la construction de la nouvelle matrice se fait en utilisant une méthode multipôles à un niveau. Pour cela, nous rappelons préalablement les outils de la méthode multipôles utilisée lors de ce travail.

7.2 Discrétisation microlocale

Nous reprenons ici le principe de l'approximation de la phase introduit dans la partie 1, chapitre 2. Nous adaptons cette idée à la formulation intégrale considérée avec des conditions au bord plus générales. Nous reprenons d'abord les estimations d'erreur afin d'énoncer quelques précisions relatives à la condition d'impédance au bord données dans [2].

Soit $q = u|_{\Gamma}$ l'inconnue sur la surface Γ . Soit Γ_h une approximation polynomiale par morceau de degré l de Γ . Si π_h est la projection orthogonale de Γ_h sur Γ , si q_h est la solution du problème discret \mathbb{P}_m -éléments-finis associé à Γ_h , nous avons les estimations suivantes :

$$\frac{\|q - \pi_h(q_h)\|_{H^s(\Gamma)}}{\|q\|_{H^s(\Gamma)}} \leq C (hk)^{m+1}, \quad (7.1)$$

où $s = 0$ dans le cas de Dirichlet et $s = 1/2$ dans le cas de Neumann. Ces estimations impliquent le choix $h \sim k^{-1}$. Après une approximation $k\phi_0(x) = kx \cdot \xi$ de la phase du premier ordre, en

introduisant la nouvelle inconnue \tilde{q} telle que $q = \tilde{q}e^{ik\phi_0}$, les estimations d'erreur deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{q} - \pi_h(\tilde{q}_h)\|_{L^2(\Gamma)}}{\|\tilde{q}\|_{L^2(\Gamma)}} &\leq C [h^m + h^l + (hk^{1/3})^{m+1} + kh^l] \\ &\text{cas de Dirichlet,} \\ \frac{\|\tilde{q} - \pi_h(\tilde{q}_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{\|\tilde{q}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} &\leq C [(hk^{1/3})^{m+1} + k^{3/2}h^l(kh + 1)] \\ &\text{cas de Neumann et de Robin.} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Nous considérons alors le double maillage déjà introduit dans la partie 1, un maillage grossier Γ_g pour la discrétisation de l'inconnue et un maillage fin Γ_f pour la discrétisation des intégrales. Les nouvelles estimations d'erreur sont données si dessous :

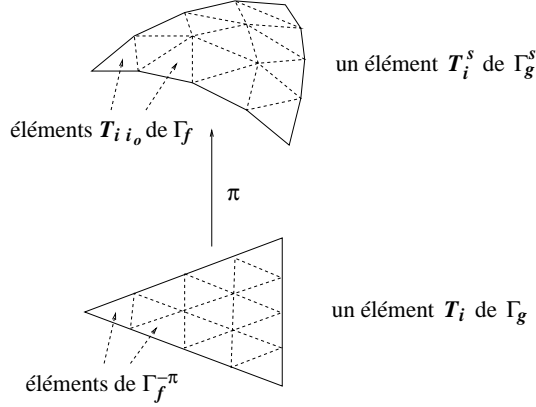
$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{q} - \pi_h(\tilde{q}_h)\|_{L^2(\Gamma)}}{\|\tilde{q}\|_{L^2(\Gamma)}} &\leq C [h_g^m + h_g^{-1}h_f^{l+1} + (h_gk^{1/3})^{m+1} + kh_g^{-1}h_f^{l+1}] \\ &\text{cas de Dirichlet,} \\ \frac{\|\tilde{q} - \pi_h(\tilde{q}_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{\|\tilde{q}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} &\leq C [k^{1/2}h_g^{m+1/2} + k^{1/2}h_f^{l+1} + (h_gk^{1/3})^{m+1} \\ &\quad + (h_f^l h_g^{-1} k^{1/2} + k^{3/2} h_f^l)(kh_f + 1)] \\ &\text{cas de Neumann et de Robin.} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Ceci implique le choix :

$$h_g \sim k^{-1/3} \quad , \quad h_f \sim k^{-1} \quad (7.4)$$

Nous avons déjà vu que ce choix nous autorisait la considération d'une approximation géométrique de degré $l = 1$ dans le cas de Dirichlet. Par contre, pour les cas de Neumann et de Robin, les estimations d'erreur impliquent une nouvelle condition nécessaire : $l \geq 3/2$ (et donc $l \geq 2$). Cependant, les résultats numériques avec une approximation géométrique de degré $l = 1$ sont, comme nous le verrons, très satisfaisants.

Nous rappelons maintenant les notations relatives aux différents maillages. L'inconnue est définie sur un maillage grossier Γ_g avec un nombre de mailles $N_g = \mathcal{O}(k^{2/3})$. Γ_f désigne le maillage fin utilisé pour la discrétisation des intégrales, avec un nombre de mailles $N_f = \mathcal{O}(k^2)$. Dans la partie 1, chapitre 2, nous avons aussi introduit les objets intermédiaires $\Gamma_f^{-\pi}$ et Γ_g^s , ainsi que π , la projection orthogonale des triangles plans de Γ_g vers ceux de Γ_f .



Nous considérons alors ici une discrétisation éléments-finis \mathbb{P}_1 basée sur Γ_g^s . Le nouvel espace de discrétisation est défini ainsi :

$$\tilde{V}_h(\Gamma_g^s) = \{ \tilde{q}_h / \tilde{q}_h = \tilde{q} \circ \pi^{-1}, \tilde{q} |_{T_j} \in \mathbb{P}_1(T_j) \},$$

où $(T_j)_j$ décrit l'ensemble des éléments de Γ_g . Pour alléger les notations, h désigne h_g .

Soit $\psi_i = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\psi_{(i+N_g)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix}$, pour tout i dans $\{1, \dots, N_g\}$, où φ_i , $i \in 1, \dots, N_g$, est la fonction de base associée au $i^{\text{ième}}$ nœud du maillage Γ_g . Posons $\tilde{\mathbb{V}}_h = \tilde{V}_h \times \tilde{V}_h$. L'inconnue est alors donnée par $q_h = \tilde{q}_h e^{ik\phi_0} = \sum_{i=1}^{2N_g} \tilde{q}_i \tilde{\psi}_i$ et $(\tilde{q}_i)_{i=1, \dots, 2N_g}$ est la nouvelle inconnue discrète, avec $\tilde{\psi}_i = \mathcal{J}_i(\psi_i \circ \pi^{-1}) e^{ik\phi_0}$. Nous rappelons que ψ_i est définie sur Γ_g et évaluée seulement pour des points des triangles plans de Γ_g , alors que les fonctions $\tilde{\psi}_i$ et ϕ_0 sont évaluées pour les points de quadrature du maillage Γ_g^s .

Le nouveau système correspondant au problème introduit dans la section 6.2 a une taille réduite en $\mathcal{O}(N_g \times N_g)$. En utilisant les fonctions test $\tilde{\psi}_i$, le système s'écrit comme (6.22)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_\beta + \mathcal{A} & -\mathcal{K}^* \\ \mathcal{K} & \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & -i\mathcal{B}_\beta \\ i\mathcal{B}_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

avec les nouvelles définitions suivantes :

$$\begin{aligned} (F_h)_j &= \langle F, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathbb{V}}_h} = \langle F, (\psi_j \circ \pi^{-1}) e^{ik\phi_0} \rangle_{\tilde{\mathbb{V}}_h}, \\ (\mathcal{B}_\beta)_{ji} &= \langle \beta \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathbb{V}}_h} = \langle \beta(\psi_i \circ \pi^{-1}) e^{ik\phi_0}, (\psi_j \circ \pi^{-1}) e^{ik\phi_0} \rangle_{\tilde{\mathbb{V}}_h}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

et définies de la même façon :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\beta)_{ji} &= \langle (1 + \beta)\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{V}_h}, & (\mathcal{N}_R)_{ji} &= \langle N_R\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{V}_h}, \\
(\mathcal{K})_{ji} &= \langle \mathbf{K}\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{V}_h}, & (\mathcal{K}^*)_{ji} &= \langle \mathbf{K}^*\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{V}_h}, \\
(\mathcal{A})_{ji} &= \langle A_\infty\tilde{\psi}_i, A_\infty\tilde{\psi}_j \rangle_{L^2(S^2)}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Par exemple, la dualité $\langle S_r\varphi_i, \varphi_j \rangle_{V_h}$ (6.25-1.) devient

$$\begin{aligned}
\langle S_r\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j \rangle_{\tilde{V}_h} &= k \int_{\Gamma_g^s} \int_{\Gamma_g^s} G_r(k, |x - y|) \tilde{\varphi}_i(y) \overline{\tilde{\varphi}_j(x)} d\gamma(y) d\gamma(x), \\
&= k \int_{\Gamma_f} \int_{\Gamma_f} G_r(k, |x - y|) \tilde{\varphi}_i(y) \overline{\tilde{\varphi}_j(x)} d\gamma(y) d\gamma(x), \\
&= k \sum_{\hat{i}/T_{\hat{i}}^s \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset} \sum_{\hat{i}_0} \sum_{\hat{j}/T_{\hat{j}}^s \cap \text{supp}(\varphi_j) \neq \emptyset} \sum_{\hat{j}_0} \\
&\quad \int_{T_{\hat{i}_0}} \int_{T_{\hat{j}_0}} G_r(k, |x - y|) \mathcal{J}_{\hat{i}_0} \varphi_i(\pi^{-1}(y)) e^{ik\phi_0(y)} \overline{\mathcal{J}_{\hat{j}_0} \varphi_j(\pi^{-1}(x)) e^{ik\phi_0(x)}} d\gamma(y) d\gamma(x),
\end{aligned} \tag{7.8}$$

où $\{T_{k k_0}\}_{k_0}$ décrit l'ensemble des triangles de Γ_f qui constituent T_k^s de Γ_g^s .

Par le choix particulier des fonctions test, le nouveau système (7.5) a les mêmes propriétés que le système initial (6.22). Ainsi, nous lui appliquons la même résolution donnée dans la section 6.5. Nous avons abouti à un nouveau système de taille $\mathcal{O}(k^{4/3})$ au lieu de $\mathcal{O}(k^4)$. La place mémoire nécessaire et le temps de résolution sont donc considérablement réduits. Cependant, le coût de calcul des matrices est en $\mathcal{O}(k^4)$. La section suivante concerne une accélération du calcul des matrices par application d'une méthode multipôles à un niveau.

7.3 Les outils FMM utilisés

La méthode multipôles est considérée à la place de la théorie de la phase stationnaire. Les produits matrice-vecteur sont effectués de manière classique. La considération du maillage grossier sert à la définition du nouveau système. Le principe de la méthode multipôles est appliqué lors de l'évaluation des intégrales discrétisées sur le maillage fin. Les boîtes multipolaires correspondent alors à un regroupement des éléments du maillage fin Γ_f .

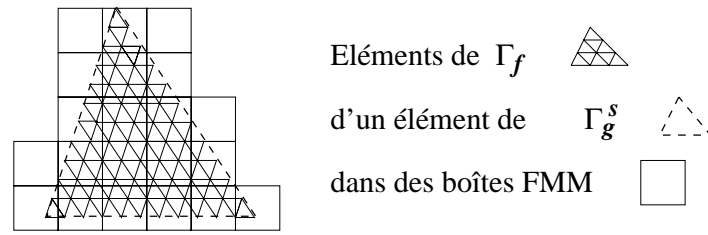
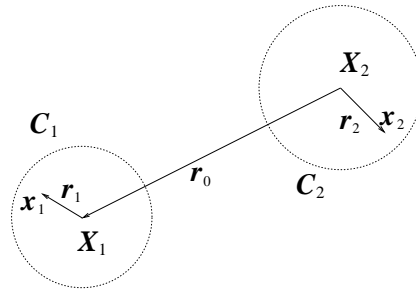


FIG. 7.1 – maillages et boîtes FMM

Nous avons présenté dans la partie 1 le développement multipolaire du noyau de Green. Nous présentons ici les développements relatifs aux noyaux régulier (partie imaginaire pure) et sigulier (partie réelle) des équations intégrales selon la formulation de B. Després. Soient $x_1, x_2 \in \Gamma_f$. Soient X_1, X_2 les centres respectifs de deux boîtes multipolaires C_1 et C_2 contenant respectivement x_1 et x_2 . Alors, $x_1 - x_2 = r_0 + r$ où $r_0 = X_1 - X_2$, $r = r_1 - r_2$ et $r_i = x_i - X_i$.



Avec $|r_0| > |r|$, le développement multipolaire du noyau de Green est donné comme suit :

$$\frac{e^{ik|x_1-x_2|}}{4\pi|x_1-x_2|} \approx \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S \omega_p e^{ik\langle s_p, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}(s_p) e^{-ik\langle s_p, r_2 \rangle} \quad (7.9)$$

avec $\mathcal{T}_{L, r_0}(s) = \sum_{l=0}^L (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_0|) P_l(\cos(s, r_0))$.

Nous renvoyons à la partie 1 pour le choix du paramètre L de troncature de la série de Gegenbauer et pour le choix de la discrétisation de l'intégrale sur la sphère unité. Nous rappelons la formule empirique suivante :

$$L = kd + C(kd)^{1/3}, \quad (7.10)$$

où d est le diamètre des boîtes multipolaires et C dépend seulement de la précision désirée. Ensuite, le choix S , le nombre de directions $\{s_p, p = 1, \dots, S\}$ sur la sphère unité se fait selon la formule suivante :

$$S = (L+1)(2L+1). \quad (7.11)$$

Nous avons pour objectif d'utiliser la méthode multipôles pour l'accélération de la construction de chacune des matrices \mathcal{K} , \mathcal{K}^* et \mathcal{A} , définies dans la section 7.2. Nous devons alors considérer les développements des noyaux intégraux régulier et sigulier donnés ci-dessous (cf. [25]). Nous avons les approximations multipolaires suivantes pour le noyau intégral singulier, pour les matrices \mathcal{K} et \mathcal{K}^* (cf. [3], p. 440) :

$$\frac{\cos(k|x_1 - x_2|)}{4\pi|x_1 - x_2|} \approx \frac{-k}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S \omega_p e^{ik\langle s_p, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}^{\Re}(s_p) e^{-ik\langle s_p, r_2 \rangle} \quad (7.12)$$

avec $\mathcal{T}_{L, r_0}^{\Re}(s) = \sum_{l=0}^L (2l+1) i^l y_l(k|r_0|) P_l(\cos(s, r_0))$.

La dérivée normale du noyau intégral a l'approximation suivante, pour $j = 1, 2$:

$$\partial_{n_j} \frac{\cos(k|x_1 - x_2|)}{4\pi|x_1 - x_2|} \approx \frac{(-1)^j i k^2}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S \omega_p \langle s_p, n(x_j) \rangle \times e^{ik\langle s_p, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}^{\Re}(s_p) e^{-ik\langle s_p, r_2 \rangle} . \quad (7.13)$$

Après dérivation, S doit être un petit peu plus grand que précédemment, comme l'a montré J. Rahola dans [68]. En effet, la présence du facteur $\langle s_p, n(x_j) \rangle$ incrémente de un le degré du polynôme à intégrer sur la phère unité. Comme dans le cas classique, les approximations précédentes sont valables pour les interactions lointaines (condition $|r_0| > |r|$).

Nous étudions maintenant le cas de la matrice \mathcal{A} , avec le noyau intégral régulier. Nous considérons pour cela la relation $(\mathcal{A})_{ji} = \langle \mathbf{M}\psi_i, \psi_j \rangle_{\mathbb{V}_h}$. Compte tenu de la régularité du noyau intégral, l'approximation peut être écrite pour tout x_1, x_2 . Ainsi, les interactions lointaines et proches sont approchées de la même manière :

$$\frac{\sin(k|x_1 - x_2|)}{4\pi|x_1 - x_2|} \approx \frac{k}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S \omega_p e^{ik\langle s_p, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}^{\Im}(s_p) e^{-ik\langle s_p, r_2 \rangle} \quad (7.14)$$

avec $\mathcal{T}_{L, r_0}^{\Im}(s) = \sum_{l=0}^L (2l+1) i^l j_l(k|r_0|) P_l(\cos(s, r_0))$.

La dérivée normale du noyau intégral a l'approximation suivante, pour $j = 1, 2$:

$$\partial_{n_j} \frac{\sin(k|x_1 - x_2|)}{4\pi|x_1 - x_2|} \approx \frac{(-1)^{j+1} i k^2}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S \omega_p \langle s_p, n(x_j) \rangle \times e^{ik\langle s_p, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}^{\Im}(s_p) e^{-ik\langle s_p, r_2 \rangle} , \quad (7.15)$$

$$\partial_{n_1} \partial_{n_2} \frac{\sin(k|x_1 - x_2|)}{4\pi|x_1 - x_2|} \approx \frac{k^3}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S \omega_p \langle s_p, n(x_1) \rangle \langle s_p, n(x_2) \rangle \times e^{ik\langle s_p, r_1 \rangle} \mathcal{T}_{L, r_0}^{\Im}(s_p) e^{-ik\langle s_p, r_2 \rangle} . \quad (7.16)$$

7.4 Accélération des calculs par la FMM

Nous reprenons le système (7.5)-(7.6)-(7.7) établi dans la section 7.2. En reprenant les mêmes notations, le système est défini par

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_\beta + \mathcal{A} & -\mathcal{K}^* \\ \mathcal{K} & \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & -\iota \mathcal{B}_\beta \\ \iota \mathcal{B}_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

avec

$$(F_h)_j = \langle F, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h} = \langle F, (\psi_j \circ \pi^{-1}) e^{ik\phi_0} \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h}, \quad (7.18)$$

$$(\mathcal{B}_\beta)_{ji} = \langle \beta \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h} = \langle \beta (\psi_i \circ \pi^{-1}) e^{ik\phi_0}, (\psi_j \circ \pi^{-1}) e^{ik\phi_0} \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h}, \quad (7.19)$$

et de même,

$$(\mathcal{D}_\beta)_{ji} = \langle (1 + \beta) \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h}, \quad (\mathcal{N}_R)_{ji} = \langle N_R \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h}, \quad (7.20)$$

$$(\mathcal{K})_{ji} = \langle \mathbf{K} \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h}, \quad (\mathcal{K}^*)_{ji} = \langle \mathbf{K}^* \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h}, \quad (7.21)$$

$$(\mathcal{A})_{ji} = \langle \mathbf{M} \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}_h}. \quad (7.22)$$

Nous renvoyons au chapitre 7 pour la définition de $\tilde{\psi}_i$. Les matrices \mathcal{B}_β , \mathcal{D}_β et \mathcal{N}_R sont calculées de manière classique avec un nombre d'opérations de l'ordre de $\mathcal{O}(N_f)$. Nous nous intéressons ici à l'accélération du calcul des matrices \mathcal{K} , \mathcal{K}^* et \mathcal{A} , par l'utilisation d'une méthode multipôles à un niveau. Nous rappelons d'abord quelques notations : $\{T_{k k_0}\}_{k_0}$ est l'ensemble de triangles de Γ_f qui constituent le triangle T_k^s de Γ_g^s . Considérons la matrice \mathcal{M} définie comme suit, $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$:

$$\mathcal{M}_{ij} = \sum_{\hat{j}/T_j^s \cap \text{supp}(\varphi_j) \neq \emptyset} \sum_{\hat{i}/T_i^s \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset} \sum_{T_{\hat{j}\hat{j}_0}} \sum_{T_{\hat{i}\hat{i}_0}} \alpha_{\hat{j}\hat{j}_0} e^{ik\phi_0(x_{\hat{j}\hat{j}_0})} \overline{\alpha_{\hat{i}\hat{i}_0}} e^{ik\phi_0(x_{\hat{i}\hat{i}_0})} G_r(k, |x_{\hat{j}\hat{j}_0} - x_{\hat{i}\hat{i}_0}|),$$

$$\text{avec } \alpha_{\hat{j}\hat{j}_0}, \alpha_{\hat{i}\hat{i}_0} \in \mathbb{C}.$$

Cette matrice correspond à une discrétisation de (6.25-1.) avec la nouvelle définition (7.21). Nous appliquons la méthode multipôles en séparant les interactions proches des interactions lointaines de la matrice et en utilisant la relation (7.12). L'approximation multipolaire des

éléments matriciels s'écrit alors ainsi : pour tout i, j dans $\{1, \dots, N_g\}$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}_{approx}^{far})_{ij} = & \\
& \frac{-k}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S \omega_p \sum_{\hat{j}/T_j^s \cap \text{supp}(\varphi_j) \neq \emptyset} \sum_{C/T_j^s \cap C \neq \emptyset} \sum_{\hat{j}_0/x_{\hat{j}_0} \in C} \alpha_{\hat{j}_0} e^{ik\phi_0(x_{\hat{j}_0})} e^{ik\langle s_p, r_{\hat{j}_0} \rangle} \\
& \times \sum_{\hat{i}/T_i^s \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset} \sum_{\substack{\tilde{C}/T_i^s \cap \tilde{C} \neq \emptyset \\ \tilde{C} \text{ far from } C}} \mathcal{T}_{L, r_{C\tilde{C}}}^{\Re}(s_p) \sum_{\hat{i}_0/x_{\hat{i}_0} \in \tilde{C}} \overline{\alpha_{\hat{i}_0}} e^{ik\phi_0(x_{\hat{i}_0})} e^{-ik\langle s_p, r_{\hat{i}_0} \rangle}, \tag{7.23}
\end{aligned}$$

avec L et S définis par (7.10) et (7.11). Ainsi, l'algorithme de calcul de la matrice \mathcal{M}^{far} , en utilisant la méthode multipôles à un niveau se compose de trois étapes :

Etape 1. Fonctions de transfert : $\forall (X_C - X_{\tilde{C}}), \tilde{C}$ non voisin de $C, \forall p \in \{1, \dots, S\}$

$$\mathcal{T}_{L, X_C - X_{\tilde{C}}}^{\Re}(s_p) = \sum_{l=0}^L (2l+1) i^l y_l(k|X_C - X_{\tilde{C}}|) P_l(\cos(s_p, X_C - X_{\tilde{C}})).$$

Etape 2. Nouvelles fonctions de radiation : $\forall j \in \{1, \dots, N_g\}, \forall \hat{j}/T_j^s \cap \text{supp}(\varphi_j) \neq \emptyset, \forall C$ boîte multipolaire telle que $T_j^s \cap C \neq \emptyset, \forall p \in \{1, \dots, S\}$

$$F_{\hat{j}C}(s_p) = \sum_{\hat{j}_0/x_{\hat{j}_0} \in C} \alpha_{\hat{j}_0} e^{ik\phi_0(x_{\hat{j}_0})} e^{ik\langle s_p, X_C - x_{\hat{j}_0} \rangle}.$$

Etape 3. Approximation de la matrice, $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}_{approx}^{far})_{ij} = & \frac{-k}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^S \omega_p \sum_{\hat{j}/T_j^s \cap \text{supp}(\varphi_j) \neq \emptyset} \sum_{C/T_j^s \cap C \neq \emptyset} \overline{F_{\hat{j}C}(s_p)} \\
& \sum_{\hat{i}/T_i^s \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset} \sum_{\substack{\tilde{C}/T_i^s \cap \tilde{C} \neq \emptyset \\ \tilde{C} \text{ far from } C}} \mathcal{T}_{L, X_C - X_{\tilde{C}}}^{\Re}(s_p) F_{\hat{i}\tilde{C}}(s_p).
\end{aligned}$$

Ensuite, un produit matrice-vecteur avec la matrice \mathcal{M} est approché par le calcul suivant : $\forall i \in \{1, \dots, N_g\}$

$$(\mathcal{M}Y)_i = \sum_{j=1}^{N_g} ((\mathcal{M}^{near})_{ij} + (\mathcal{M}_{approx}^{far})_{ij}) Y_j,$$

où \mathcal{M}^{near} est calculée de manière classique.

Les autres calculs discrets des matrices \mathcal{K} et \mathcal{K}^* s'effectuent de la même façon, en utilisant les relations (7.12) et (7.13). Les relations (7.14), (7.15) et (7.16) permettent d'effectuer l'approximation multipolaire de la matrice \mathcal{A} suivant la même technique sans nécessiter d'isoler les interactions proches. La formulation de B. Després ne change pas la complexité de la méthode. Ainsi, l'algorithme détaillé dans cette section a la même complexité que celui présenté dans la section 4.1 de la partie 1. Les matrices \mathcal{K} , \mathcal{K}^* et \mathcal{A} sont donc calculées avec un coût de l'ordre de $(N^{3/2})$.

Chapitre 8

Résultats numériques - Comparaisons - Conclusions

8.1 Introduction

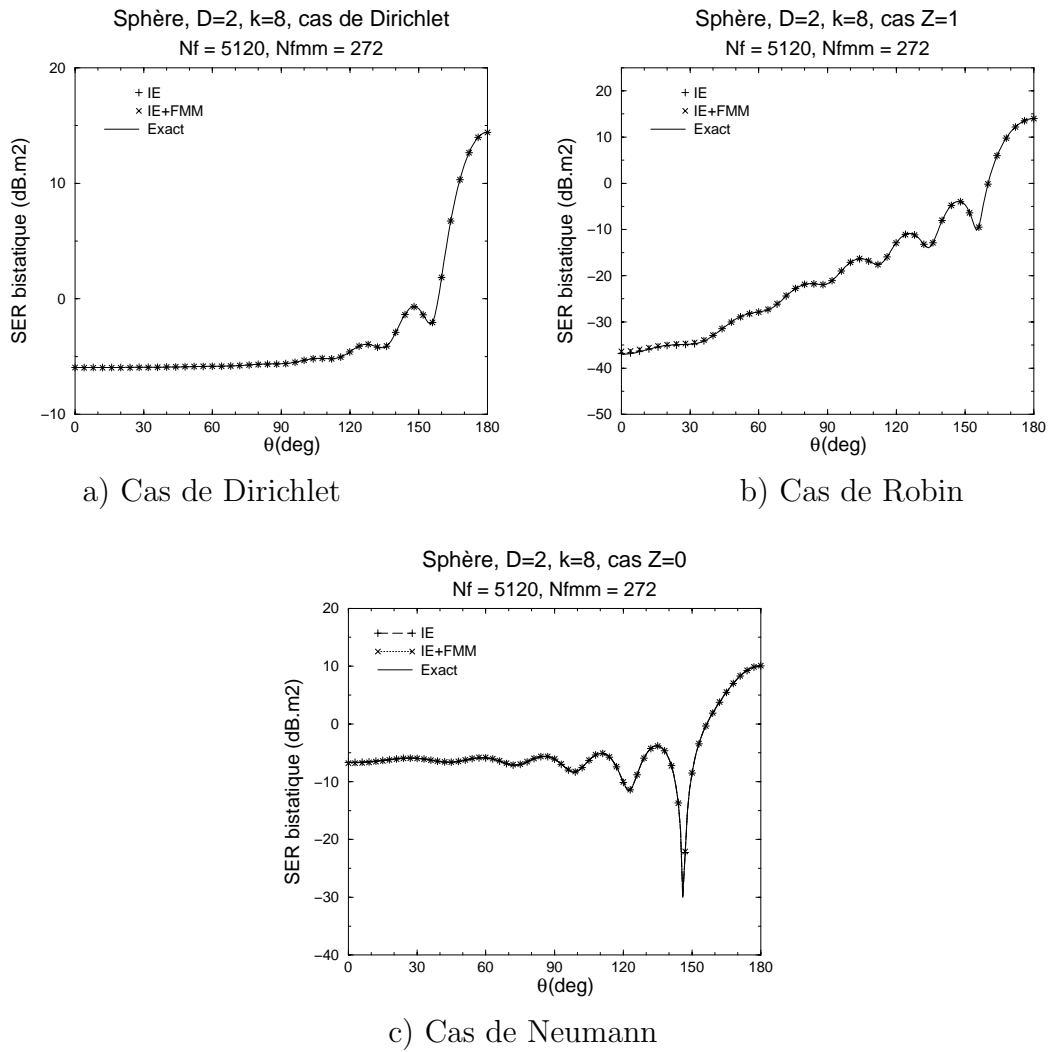
Afin de valider notre nouvelle méthode, quatre codes ont été écrits par l'auteur de ce mémoire. Le premier noté $\mathcal{C}(\text{IE})$ résout le système d'équations intégrales établi par B. Desprès selon la méthode classique définie dans le chapitre 6. Le deuxième code, $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$ est une variante du précédent, utilisant l'accélération des produits matrice-vecteur par la méthode multipôles à un niveau. Le troisième, $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD})$ est une application au système d'équations intégrales de l'approximation de la phase définie dans la section 7.2. Le code $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$ est une application du couplage de l'approximation de la phase et de la méthode multipôles auquel nous avons abouti dans la section 7.4, toujours dans le cadre de la résolution des équations intégrales selon la formulation de B. Desprès. Concernant le système d'équations intégrales, le paramètre β du β -système (6.15) et du système associé au cas d'impédance $Z = 1$ (6.31) est choisi égal à 0.5. Le paramètre de relaxation de la méthode de Jacobi relaxée est égal à 0.7 (voir section 6.5). Concernant la méthode multipôles, le nombre de termes dans la série de Gegenbauer est défini par $L = \kappa d + C(\kappa d)^{1/3}$, où d est le diamètre des boîtes multipolaires, avec $C = 6$ (voir section 7.3). Ce choix empirique de C assure une grande précision qui permet de valider $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD})$ avec $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$. De plus, nous désignons par JM la méthode de Jacobi relaxée, GC1 le gradient conjugué appliqué à la matrice $(\mathcal{D}_\beta + \mathcal{A})$ et GC2 le deuxième gradient conjugué (voir section 6.5). Dans ce chapitre, nous notons aussi N_f , N_g et N_{fmm} , le nombre de triangles de Γ_f , le nombre de triangles de Γ_g et le nombre de boîtes multipolaires. Tous les résultats sont obtenus sur un processeur EV67 d'un nœud Compaq ES40.

TAB. 8.1 – $\mathcal{C}(\text{IE}) - \mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$, coût et précision

		Temps CPU (s)	Coût mémoire	$Y_{\iota X}$	$Err(AD)$
Fig. 8.1 a)	$\mathcal{C}(\text{IE})$	15256	682 Mo	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$	6048	522 Mo	$9.1 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
Fig. 8.1 b)	$\mathcal{C}(\text{IE})$	11311	682 Mo	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$
	$\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$	546	521 Mo	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
Fig. 8.1 c)	$\mathcal{C}(\text{IE})$	17701	682 Mo	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$0.5 \cdot 10^{-3}$
	$\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$	8450	522 Mo	$9.4 \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-3}$

8.2 Résultats obtenus sur la sphère

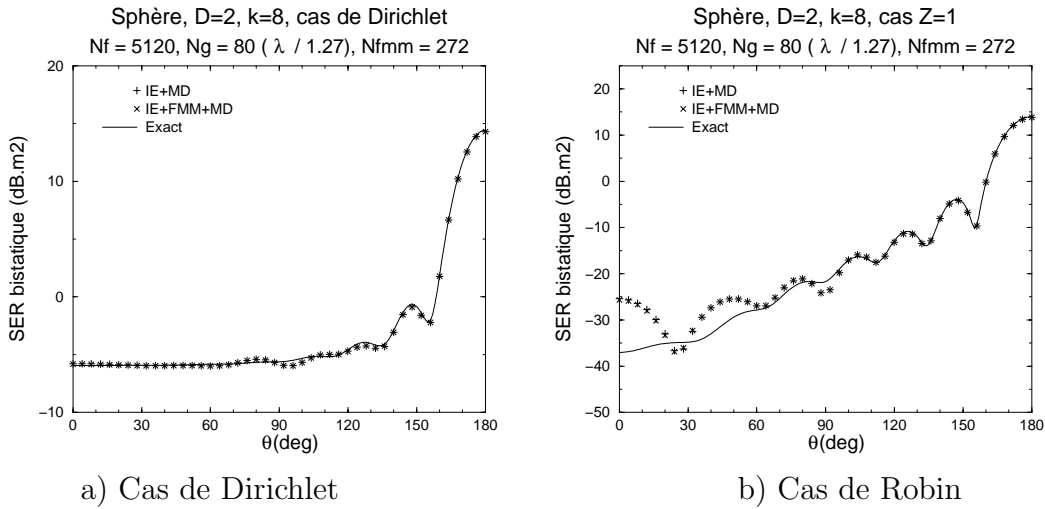
Nous commençons par présenter des résultats pour une sphère de diamètre $D = 2$ m, qui permet de comparer les solutions numériques avec la solution exacte donnée par les séries de Mie. Les comparaisons sont faites en considérant la SER (surface équivalente radar) bistatique. Pour la définition des séries de Mie et de la SER, nous renvoyons à l'annexe de cette partie. Les résultats sont obtenus avec les résidus 10^{-4} et 10^{-3} respectivement pour GC1 et GC2, et la différence relative 10^{-3} entre deux itérés de JM. Le maillage fin Γ_f a une longueur d'arête moyenne en $\lambda/10$. Nous considérons une onde incidente de direction $(0, 0, -1)$. La figure 8.1 valide $\mathcal{C}(\text{IE})$ et la contribution des multipôles dans $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$. Concernant les coûts de calcul (temps CPU) et de mémoire, nous pouvons donner le gain résultant de l'approximation multipolaire. La différence de temps CPU pour la condition au bord de Robin ($R = 0$) provient de la non utilisation du niveau itératif de la méthode de Jacobi relaxé (voir Section 6.5). Concernant la précision, le tableau 8.1 montre le bon comportement de la méthode multipôles. $Err(AD)$ désigne l'erreur relative en norme l^2 commise sur l'amplitude de diffusion en comparaison avec la solution donnée par les séries de Mie. $Y_{\iota X}$ désigne l'erreur relative $\frac{\|Y_h - \iota X_h\|_2}{\|X_h\|_2}$ qui converge vers 0. En fait, la relation (6.16) conduit à un bon critère de précision. Un tel critère n'existe pas pour les formulations intégrales plus classiques ([78]).

FIG. 8.1 - $\mathcal{C}(\text{IE}) - \mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$, pour $k = 8$

TAB. 8.2 – $\mathcal{C}(\text{IE+MD})$ - $\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$, coût et précision

		Temps CPU (s)	Mémoire	$Y_{\lambda X}$	$Err(AD)$
Fig. 8.2 a)	$\mathcal{C}(\text{IE})$	15256	682 Mo	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-4}$
	$\mathcal{C}(\text{IE+MD})$	1613	12 Mo	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
	$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	183	37 Mo	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
Fig. 8.2 b)	$\mathcal{C}(\text{IE})$	11311	682 Mo	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$
	$\mathcal{C}(\text{IE+MD})$	1599	12 Mo	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-2}$
	$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	181	37 Mo	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$

Pour de petits cas-tests, la figure 8.2 montre que le couplage $\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$ permet d'obtenir des résultats similaires à ceux obtenus par le code basé sur la seule approximation de la phase $\mathcal{C}(\text{IE+MD})$ avec un temps CPU nettement inférieur. Ainsi, pour des cas-tests plus grands, nous validerons seulement le couplage $\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$.

FIG. 8.2 – $\mathcal{C}(\text{IE+MD})$ - $\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$, pour $k = 8$

Nous pouvons aussi donner le gain résultant de l'approximation multipolaire et la précision des différents tests dans le tableau 8.2. Les coûts de $\mathcal{C}(\text{IE})$, donné dans le tableau 8.1, sont rappelés pour comparaison.

Nous validons maintenant le code $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$ en considérant de plus hautes fréquences. Les figures 8.3 et 8.4 montrent les excellents résultats obtenus pour la condition au bord de Dirichlet.

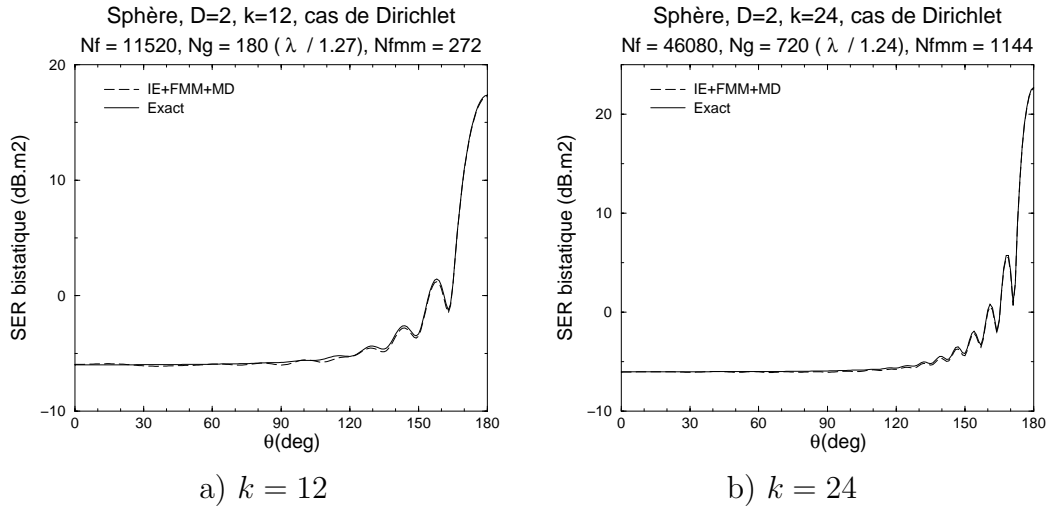


FIG. 8.3 – $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$, cas de Dirichlet

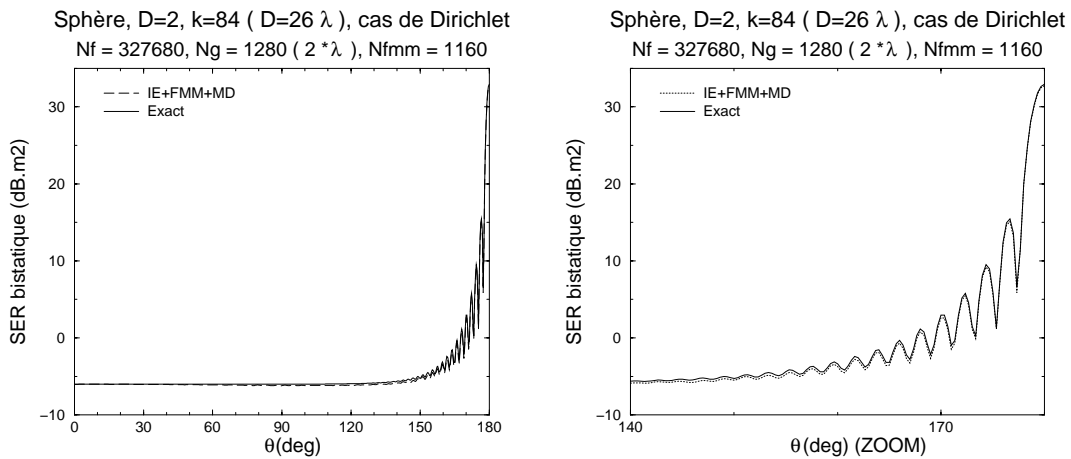
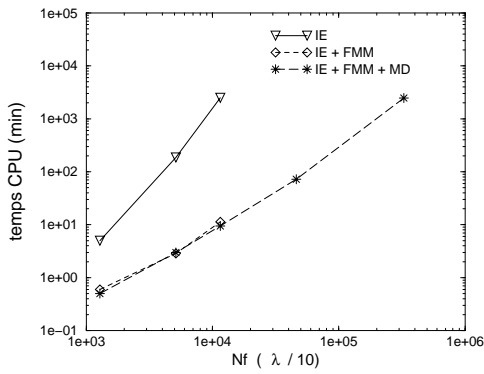


FIG. 8.4 – $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$, cas de Dirichlet, $D = 26\lambda$

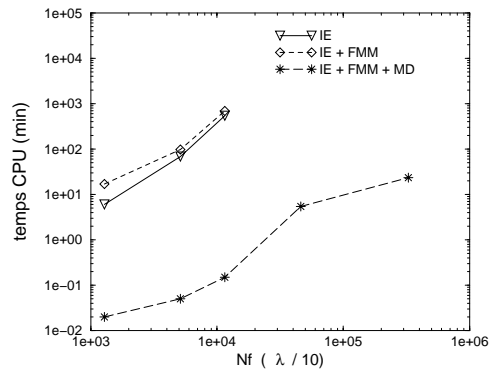
Les erreurs numériques sont données dans le tableau 8.3. La figure 8.5 montre les résultats concernant le temps CPU et la mémoire consommée, par le biais de courbes en échelle log-log. Les résultats de la FMM un niveau concerne des cas de fréquences trop petites pour être significatifs.

TAB. 8.3 – Précision avec la condition au bord de Dirichlet

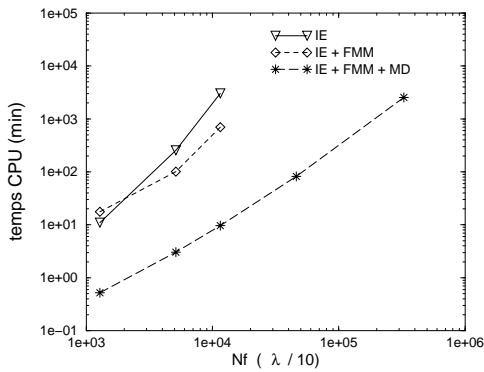
Fig.	k	Nf	Ng	$Y_{\lambda}X$	$Err(AD)$
8.3 a)	12	11520	180	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
8.3 b)	24	46080	720	$3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
8.4	84	327680	1280	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$



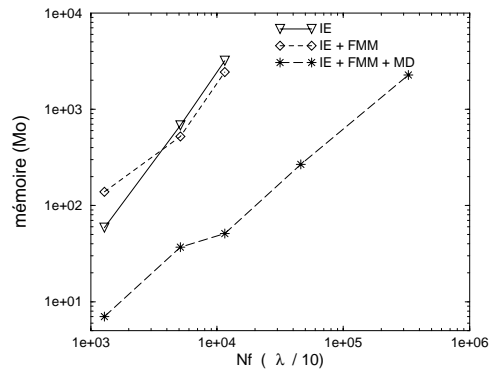
a) Précalcul



b) Résolution



c) Temps CPU total



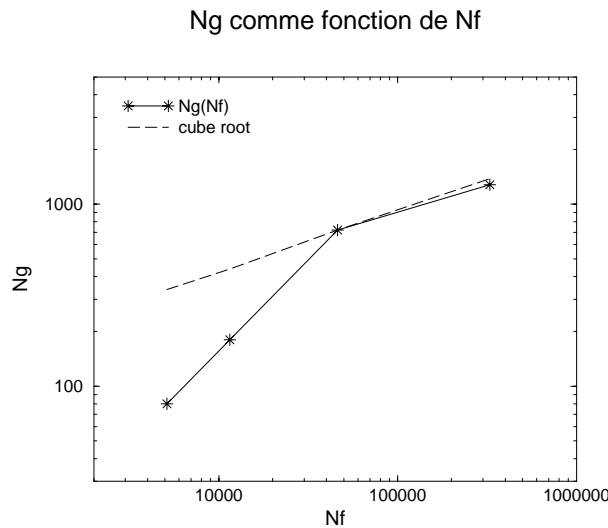
d) Mémoire consommée

FIG. 8.5 – temps CPU et mémoire consommée

TAB. 8.4 – Nombres d’itérations

k	8	12	24	84
IE	11 - 8 - 19	10 - 8 - 20		
IE+FMM+MD	10 - 9 - 16	11 - 9 - 15	12 - 10 - 13	13 - 12 - 12

La figure 8.5 montre bien l’efficacité de notre nouvelle méthode. En considérant un maillage fin d’arête moyenne en $\lambda/10$, nous pouvons choisir un maillage grossier d’arête moyenne en λ/C_k où C_k décroît quand k augmente. Le cas donné par la figure 8.4 est très intéressant. Il concerne une résolution basée sur un maillage grossier pour lequel $C_k = 0.5$, c’est à dire avec une arête moyenne en 2λ . Les fréquences considérées restent trop faibles pour valider le comportement $Ng \sim Nf^{1/3}$ estimé par la théorie. Cependant, nous pouvons donner une première courbe du comportement de Ng par rapport à Nf (figure 8.6).

FIG. 8.6 – $Ng(Nf)$

Nous pouvons déjà constater que le comportement de Ng par rapport à Nf , ou bien par rapport à la fréquence, est prometteur. Nous donnons aussi des informations sur les nombres d’itérations lors de la résolution itérative. Dans le tableau 8.4, les nombres d’itérations sont donné sous la forme $a - b - c$ qui sont les nombres d’itérations respectifs de GC1, GC2 et JM. Les nombres d’itérations ne croissent pas avec le nombre d’onde k et la nouvelle méthode ne dégrade pas la convergence des méthodes itératives. De plus, lors de l’utilisation du code $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$, lorsque le nombre d’onde croît, l’erreur sur $\|Y_h - \imath X_h\|_2$ donnée dans le tableau 8.3 diminue, ce qui confirme l’amélioration avec la montée en fréquence.

Dans le cas des conditions au bord de Neumann et de Robin, les résultats ne sont pas aussi bons, probablement à cause de l'approximation de la surface de degré $l = 1$ (voir les estimations d'erreur de la section 7.2). Ils restent tout de même satisfaisants. Les figures 8.7 et 8.8 donnent les résultats pour la condition au bord de Neumann et pour la condition au bord de Robin avec l'impédance $Z = 1$. D'autre part, nous constatons à nouveau l'augmentation de la précision avec la montée en fréquence. Les résultats obtenus pour le nombre d'onde $k = 60$ sont bien meilleurs que ceux obtenus pour $k = 12$.

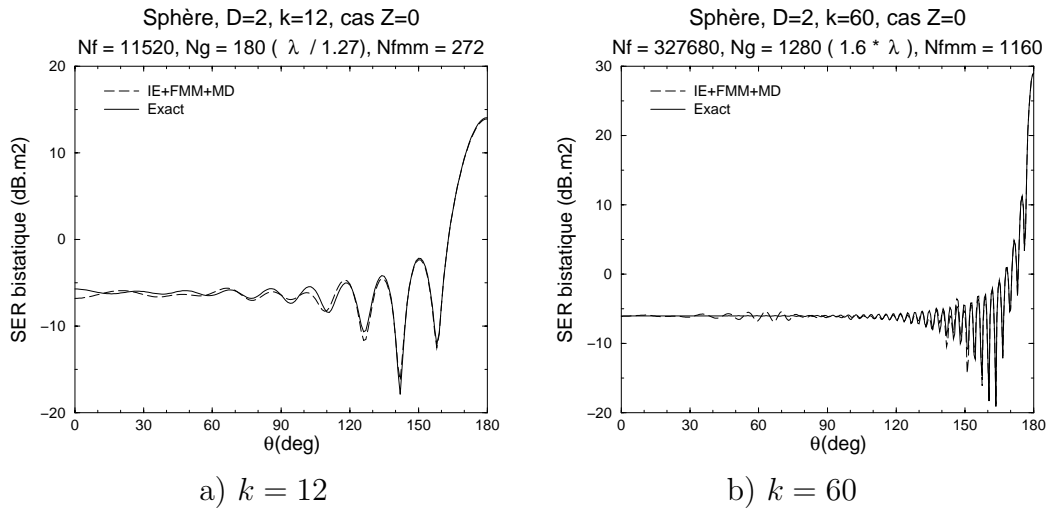


FIG. 8.7 – $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$, cas de Neumann, $k = 12$ ou 60

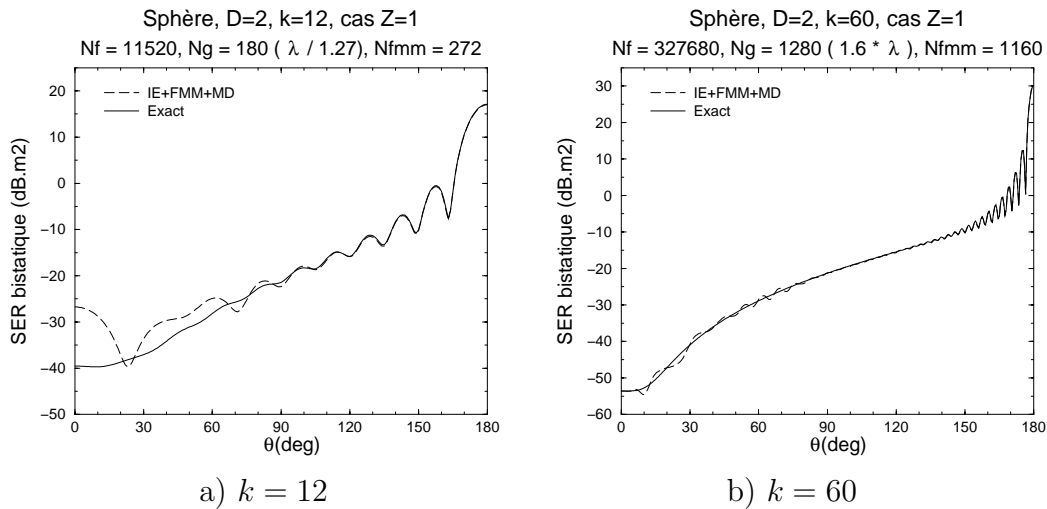


FIG. 8.8 – $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$, cas de Robin, $k = 12$ ou 60

TAB. 8.5 – Précision avec la condition au bord de Neumann

Fig.	k	Nf	Ng	$Y_{\iota X}$	$Err(AD)$
8.7 a)	12	11520	180	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$
8.7 b)	60	327680	1280	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$

TAB. 8.6 – Précision avec la condition au bord de Robin

Fig.	k	Nf	Ng	$Y_{\iota X}$	$Err(AD)$
8.8 a)	12	11520	180	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$
8.8 b)	60	327680	1280	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$

Les gains concernant le temps CPU et la mémoire consommée pour les cas de Neumann et de Robin sont du même ordre que ceux concernant le cas de Dirichlet. Pour le cas de Neumann, les résultats sont donnés par la figure 8.7 et la précision est donnée dans le tableaux 8.5. Pour le cas de Robin, les résultats sont donnés par la figure 8.8 et la précision est donnée dans le tableaux 8.6.

Dans cette section, nous avons présenté des résultats pour lesquels le maillage grossier avait une longueur moyenne d'arête en λ/C_k où C_k pouvait être pris de plus en plus petit lorsque le nombre d'onde k croissait. Il en résulte que le temps CPU de résolution ainsi que la place mémoire consommée sont inférieurs à ceux des autres méthodes. Néanmoins, le calcul de la matrice mérite davantage d'accélération. Nous avons bon espoir que l'emploi d'une FMM multi-niveaux réduise davantage ce temps de calcul. L'emploi de la FMM multi-niveaux a été réservé à l'application du couplage pour la résolution des équations de Maxwell dans la troisième partie de cette thèse.

8.3 Résultats obtenus sur le Cetaf

Nous nous sommes également intéressés à un obstacle industriel qui nous a été fourni par Dassault-Aviation, le Cetaf. Il s'agit d'un objet intéressant pour les différentes difficultés qu'il engendre. Le Cetaf est un objet plat par morceaux, sans plan de symétrie, qui présente donc des arêtes saillantes ainsi que des coins délicats par rapport aux théories de la diffraction et à l'approximation de la phase. D'autre part, le Cetaf possède une concavité avec en son centre une fente qui traverse l'obstacle. Cet objet ne rentre donc pas dans les hypothèses théoriques de

convexité de notre nouvelle méthode. Lors de cette étude, une complication numérique complète la gamme des difficultés : Le maillage le plus grossier à notre disposition possède 3594 mailles. Cela implique des maillages fins très vite très importants. En raffinant une première fois le maillage grossier, on obtient un premier maillage fin Γ_{f1} avec 14376 mailles. En raffinant une deuxième fois, on obtient un deuxième maillage fin Γ_{f2} à 57504 mailles. La fréquence est choisie de telle sorte que le maillage fin ait une longueur d'arête moyenne en $\lambda/7$. Ainsi, avec Γ_{f1} , le maillage grossier est un maillage en $\lambda/3.5$. Dans ce cas, les résultats sont très bons, mais une méthode classique appliquée avec le maillage en $\lambda/3.5$ aboutit à des résultats qui sont également assez bons. Il est alors difficile de se faire une opinion de la nouvelle méthode dans ce cas. Par contre avec le maillage fin Γ_{f2} , le maillage grossier est en $\lambda/1.7$. Les résultats ont dans ce cas déjà beaucoup plus d'intérêt. Cependant l'obtention d'une solution de référence est assez coûteuse compte tenu de la taille du maillage fin. Elle n'est en fait envisageable que pour le cas de Robin car le résolution numérique se fait avec deux niveaux itératifs au lieu de trois pour les autres conditions au bord. Nous donnons donc ci-dessous une étude et un intérêt du couplage méthode multipôles et méthode microlocale dans le cadre du Cetaf avec une condition au bord de Robin et un maillage grossier en $\lambda/1.7$, même si les résultats ne sont pas aussi remarquables que dans le cas de la sphère. D'autre part, nous considérons une onde incidente de direction $(0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Cette onde incidente frappe le Cetaf avec un angle de 45° par rapport à sa surface. La figure 8.9 représente le maillage grossier du Cetaf et met en évidence la concavité signalée précédemment. Une présentation plus précise du Cetaf est donnée par E. Darve dans son article [33] (p 233, Fig. 43). La solution de référence est calculée par $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$ à partir du maillage fin avec un critère d'arrêt sur le résidu de 10^{-3} pour GC1 et GC2.

Pour les premières comparaisons, nous considérons la solution obtenue par notre couplage $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$ et la solution calculée par $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$ à partir du maillage grossier en $\lambda/1.7$, et nous les comparons à la solution de référence. Le tableau 8.7 montre que les coûts de calcul et de mémoire de $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM}+\text{MD})$ sont de l'ordre de ceux du code $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$ avec le maillage grossier alors qu'il donne une meilleure précision que $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$ avec le maillage grossier. Les courants montrés par la figure 8.10 confirment ce constat. Cependant, la précision du couplage $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM}+\text{MD})$ n'est pas suffisante, notamment en ce qui concerne la SER comme l'indiquent le tableau 8.7 et la figure 8.11 a). Ici, $Err(AD)$ désigne l'erreur relative en norme l^2 commise sur l'amplitude de diffusion en comparaison avec la solution de référence.

Nous proposons alors de calculer la solution avec $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$ à partir du maillage fin, en initialisant la résolution itérative avec la solution obtenue par $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM}+\text{MD})$. Ainsi, après deux itérations de GC2, après environs 25 heures (incluant le temps de calcul de l'initialisation par $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM}+\text{MD})$, donné dans le tableau 8.7), $\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$ donne des résultats dont la précision est très acceptable avec $Err(AD) = 1.5 \cdot 10^{-2}$. La courbe de SER donnée par la figure 8.10 d) et les courants visibles sur 8.11 c), confirment cette précision. D'autre part, les courbes de la figure 8.11 montrent deux pics qui peuvent être interprétés comme E. Darve l'a fait dans son article [33]. Le premier apparaît pour $\theta = 45^\circ + 180^\circ$. Il correspond à la région dans l'ombre. Le second correspond à la réflexion de l'onde incidente sur la surface du Cetaf. Il apparaît pour $\theta = 45^\circ + 180^\circ + 90^\circ$. La figure 8.10 montre aussi la période des courants déjà présentés par E.

TAB. 8.7 – $\mathcal{C}(\text{IE+MD}) - \mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$, coût et précision

	Temps CPU	Mémoire	Y_{iX}	$Err(AD)$
$\mathcal{C}(\text{IE+FMM}) (\lambda/7)$	200 h	3164 Mo	$5 \cdot 10^{-2}$	
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM}) (\lambda/1.7)$	5 h 23 min	1012 Mo	$4 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-1}$
$\mathcal{C}(\text{IE+FMM}) (\lambda/1.7)$	1 h 29 min	779 Mo	$2.9 \cdot 10^{-1}$	$2.4 \cdot 10^{-1}$

Darve dans [33].

Dans le cas du Cetaf qui ne vérifie pas toutes les hypothèses de l'approximation de la phase, notre méthode présente tout de même un bon intérêt dans la mesure où elle peut être utilisée comme une bonne initialisation des méthodes plus classiques.

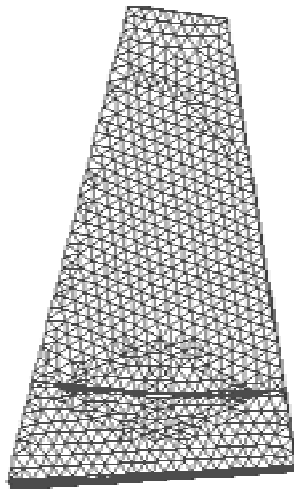


FIG. 8.9 – Maillage grossier du Cetaf

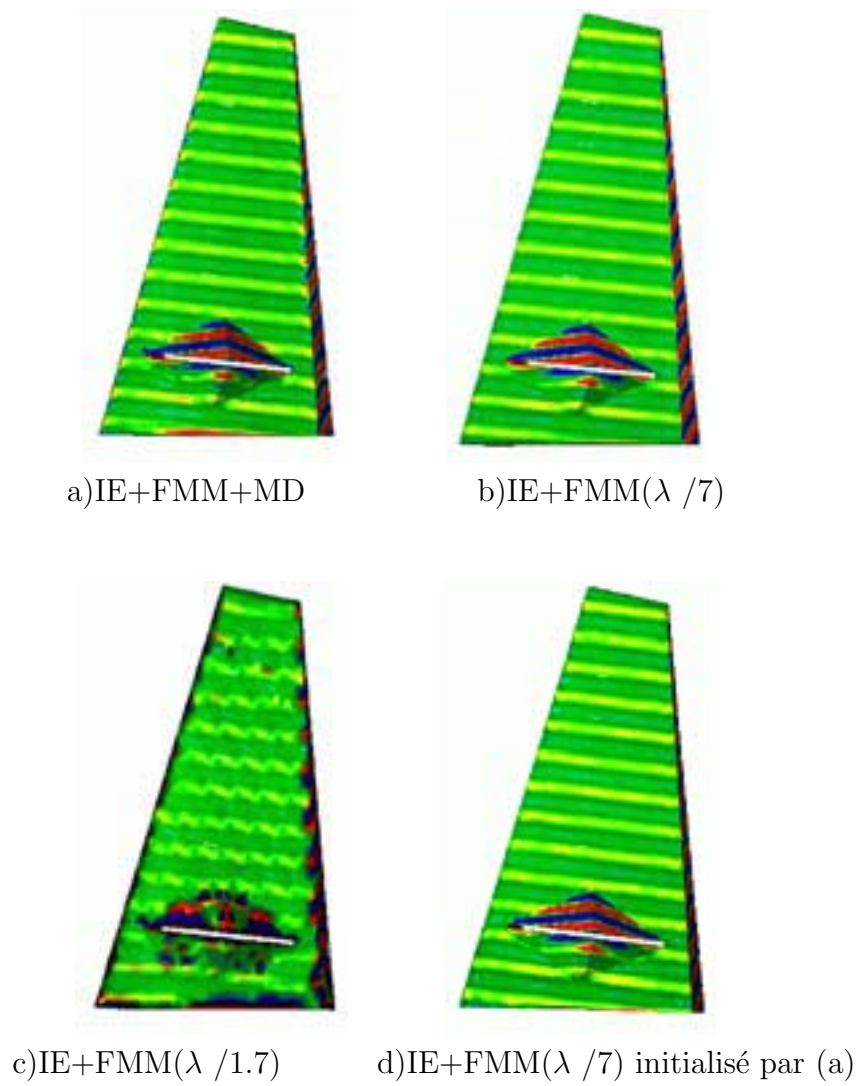


FIG. 8.10 – Partie réelle des courants sur le Cetaf

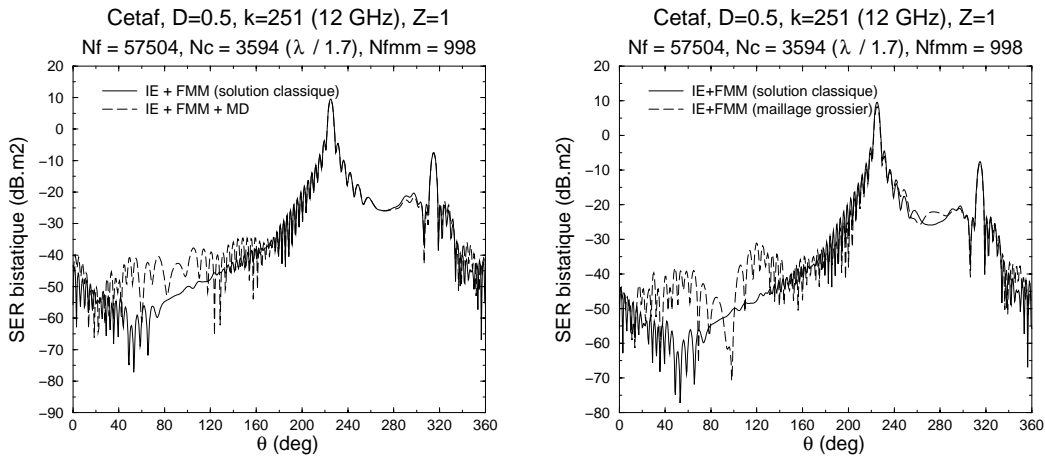
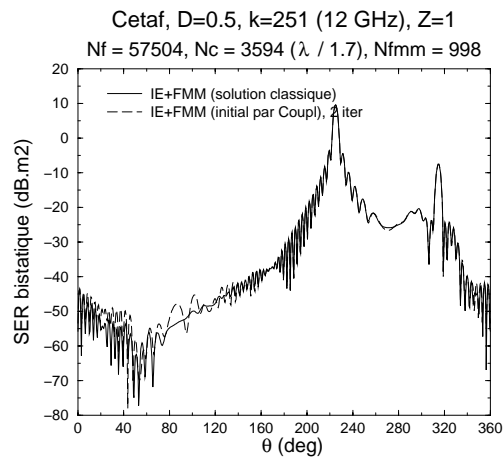
a) IE+FMM($\lambda / 7$) / IE+FMM+MDb) IE+FMM($\lambda / 7$) / IE+FMM($\lambda / 1.7$)c) IE+FMM($\lambda / 7$) / IE+FMM($\lambda / 7$) avec initialisation

FIG. 8.11 – SER bistatique du Cetaf

8.4 Résultats obtenus sur la double-sphère

Nous mettons ici en évidence les limitations de notre nouvelle méthode dans le cas d'un obstacle fortement non convexe. Nous considérons un obstacle constitué de deux sphères de diamètre 2λ chacune et distantes de $\lambda/10$ l'une de l'autre, où λ désigne toujours la longueur d'onde. Le maillage fin est en $\lambda/10$ avec 23040 mailles et le maillage grossier en $\lambda/1.25$ avec

TAB. 8.8 – Coût et précision, cas de Dirichlet

	Y_{iX}	$Err(AD)$	Mémoire	Temps CPU
Inc = (0,0,-1)				
$\mathcal{C}(\text{IE+FMM})$ (référence)	8.10^{-3}		1167 Mo	350 h
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	1.10^{-2}	1.410^{-3}	230 Mo	37 min
Inc = (0,-1,-1)				
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	3.610^{-2}		230 Mo	37 min
Inc = (0,-3.6,-1)				
$\mathcal{C}(\text{IE+FMM})$ (référence)	5.10^{-3}		1167 Mo	280 h
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	1.210^{-1}	2.910^{-1}	230 Mo	37 min
Inc = (0,-1,0)				
$\mathcal{C}(\text{IE+FMM})$ (référence)	4.10^{-3}		1167 Mo	320 h
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	1.510^{-1}	1.710^{-1}	230 Mo	35 min

360 mailles, pour un nombre d'onde $k = 12$, c'est à dire pour une fréquence de 573 MHz. La résolution itérative se fait avec un critère d'arrêt sur le résidu de 10^{-4} pour chaque niveau itératif. Les sphères sont placées l'une au dessus de l'autre suivant l'axe (Oz).

Pour la condition au bord de Dirichlet, avec une onde incidente de direction (0,0,-1), la réflexion d'une sphère vers l'autre est asymptotiquement nulle à haute fréquence. La non-convexité de la double-sphère influe donc peu pour une onde incidente verticale. Dans le cas d'une onde de direction (0,-1,0), l'effet de la non-convexité est maximal. La considération de directions intermédiaires, (0,-1,-1) et (0,-3.6,-1) (tangente aux deux sphères), permet de constater la dégradation de la précision de la méthode de discrétisation microlocale. Ce comportement est visible aussi bien au regard de l'erreur sur l'amplitude de diffusion qu'au regard du critère de convergence propre à la formulation de B. Després, Y_{iX} (voir le tableau 8.8 et les figures 8.12). Rappelons que le critère d'arrêt de JM porte sur la différence entre deux itérés successifs. Les valeurs minimales et maximales des courants sur la surface de la double-sphère confirment ce constat (voir le tableau 8.9 et les figures 8.13-8.14).

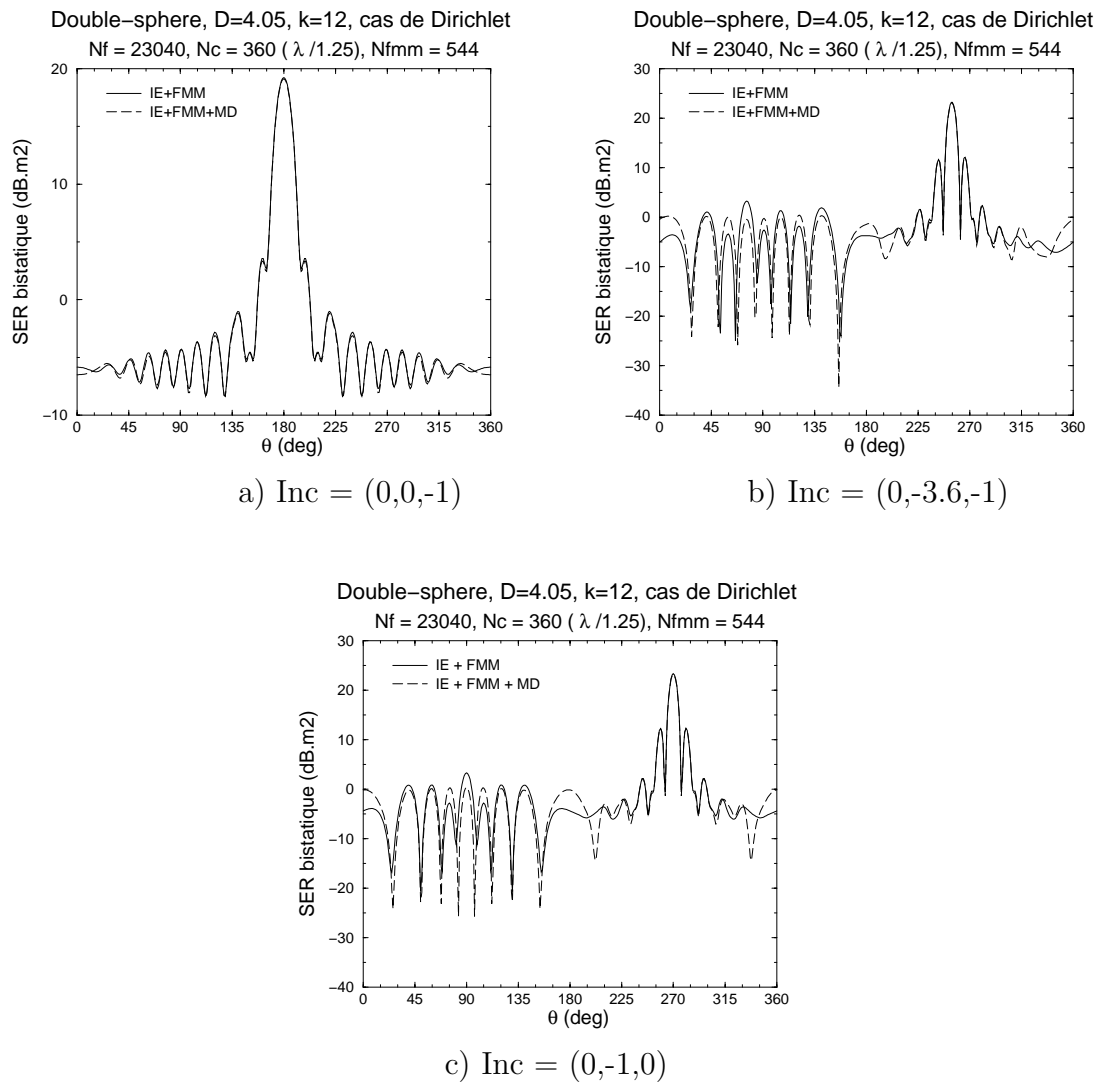


FIG. 8.12 – SER bistatique, condition de Dirichlet

TAB. 8.9 – Valeurs Min/Max des courants, cas de Dirichlet

	$\mathcal{C}(\text{IE}+\text{FMM})$	$\mathcal{C}(\text{IE}+\text{MD}+\text{FMM})$
Inc = (0,0,-1)	-1.08 / 1.03	-1.00 / 1.00
Inc = (0,-3.6,-1)	-1.03 / 1.04	-1.13 / 1.13
Inc = (0,-1,0)	-1.03 / 1.03	-1.14 / 1.15

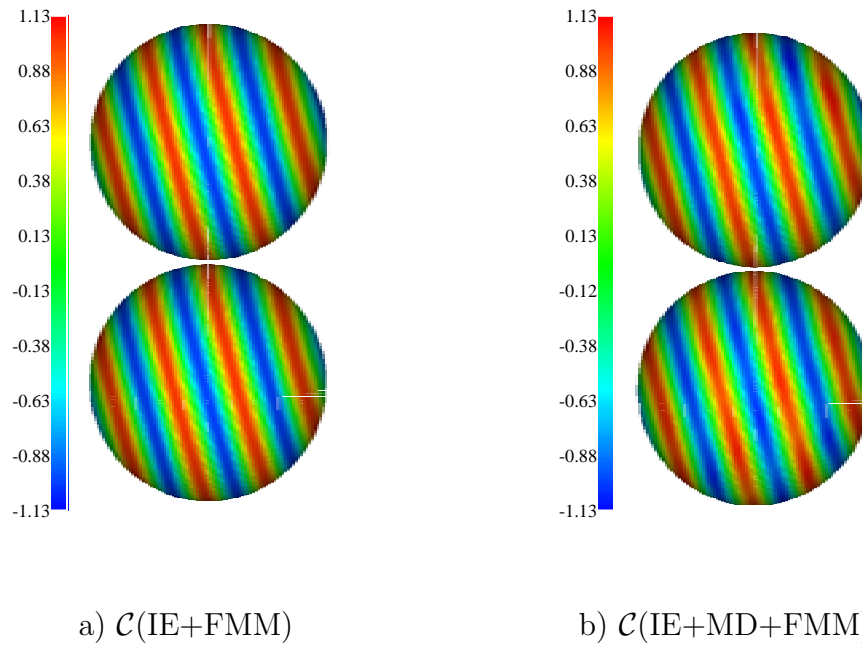
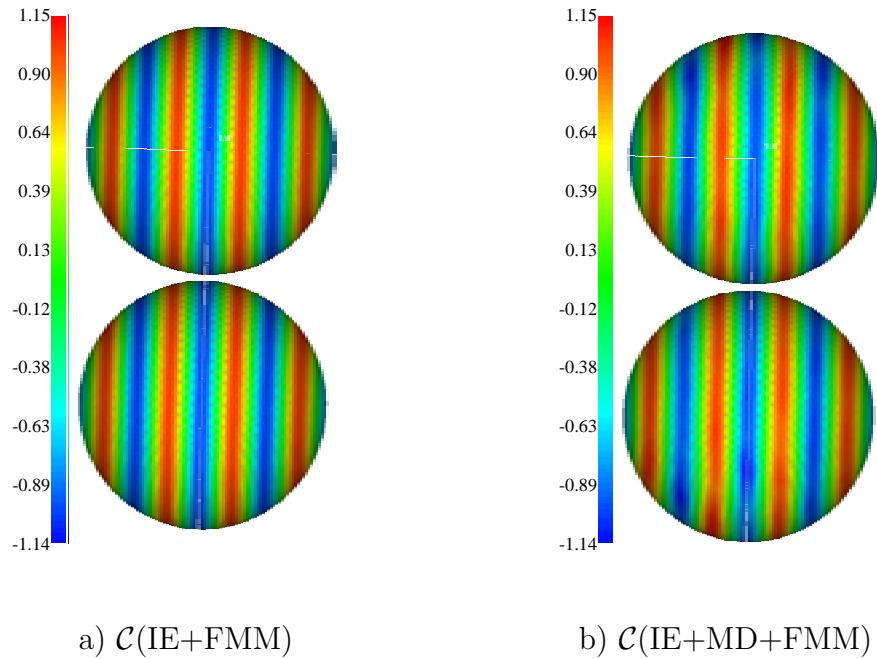


FIG. 8.13 – Partie réelle des courants, condition de Dirichlet, Inc = (0,-3.6,-1)

FIG. 8.14 – Partie réelle des courants, condition de Dirichlet, $\text{Inc} = (0,-1,0)$

Concernant la condition au bord de Robin d'impédance $Z = 1$, les résultats sont globalement très moyens indépendamment de la direction de l'onde incidente. Même si le critère de convergence $Y \backslash X$ et les valeurs minimales et maximales des courants ont un bon comportement, l'erreur sur l'amplitude de diffusion est assez décevante (tableaux 8.10-8.11 et figures 8.15-8.16).

TAB. 8.10 – Coût et précision, cas de Robin

	YiX	$Err(AD)$	Mémoire	Temps CPU
Inc = (0,0,-1)				
$\mathcal{C}(\text{IE+FMM})$ (référence)	6.10^{-3}		1164 Mo	26 h
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	1.710^{-2}	4.710^{-1}	230 Mo	30 min
Inc = (0,-1,-1)				
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	1.810^{-2}		230 Mo	30 min
Inc = (0,-3.6,-1)				
$\mathcal{C}(\text{IE+FMM})$ (référence)	5.10^{-3}		1163 Mo	23 h
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	3.910^{-2}	2.610^{-1}	230 Mo	31 min
Inc = (0,-1,0)				
$\mathcal{C}(\text{IE+FMM})$ (référence)	4.10^{-3}		1164 Mo	23 h
$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$	3.910^{-2}	3.310^{-1}	230 Mo	30 min

TAB. 8.11 – Valeurs Min/Max des courants, cas de Robin

	$\mathcal{C}(\text{IE+FMM})$	$\mathcal{C}(\text{IE+MD+FMM})$
Inc = (0,0,-1)	-1.06 / 1.10	-1.07 / 1.09
Inc = (0,-3.6,-1)	-1.11 / 1.10	-1.08 / 1.10
Inc = (0,-1,0)	-1.10 / 1.10	-1.17 / 1.09

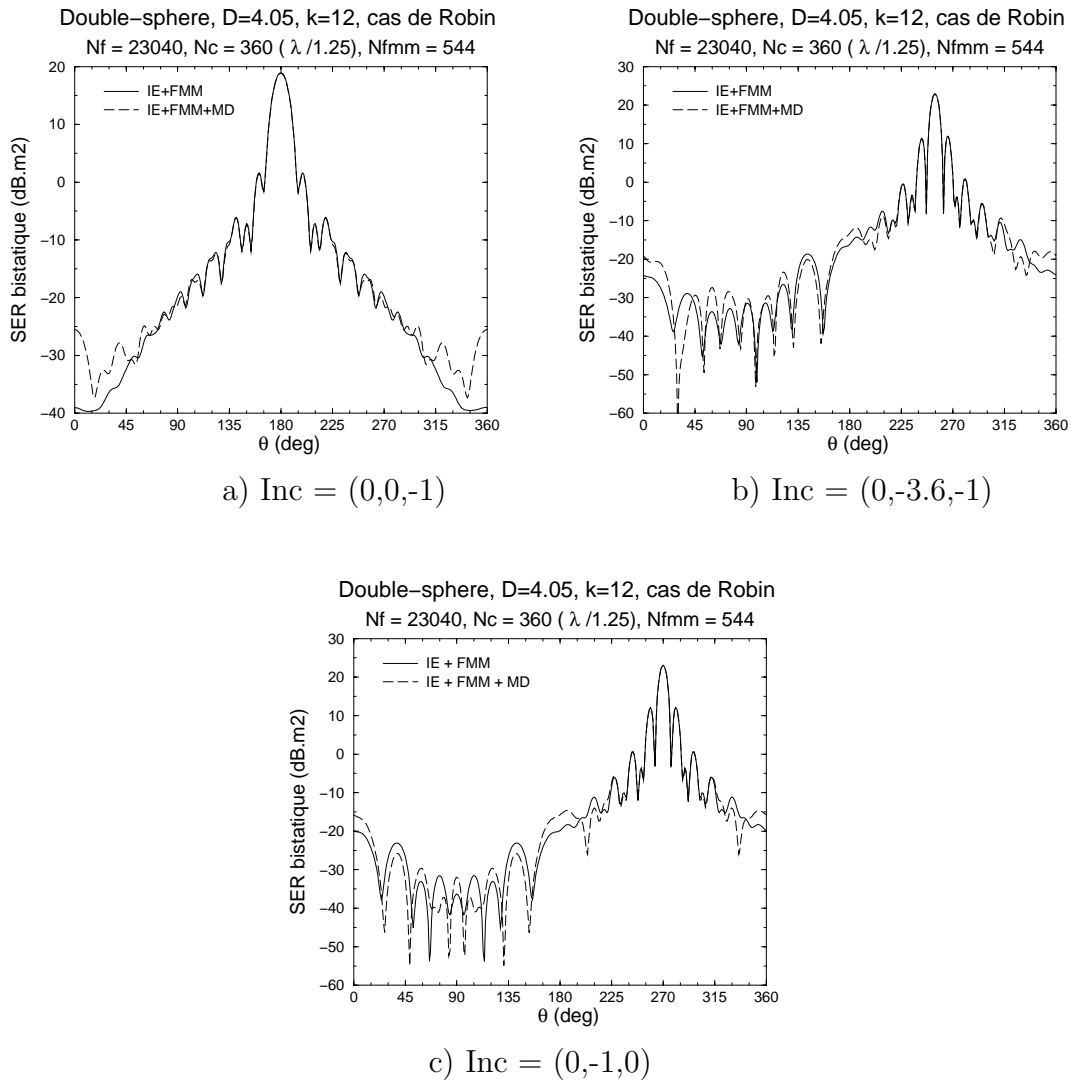


FIG. 8.15 – SER bistatique, condition de Robin

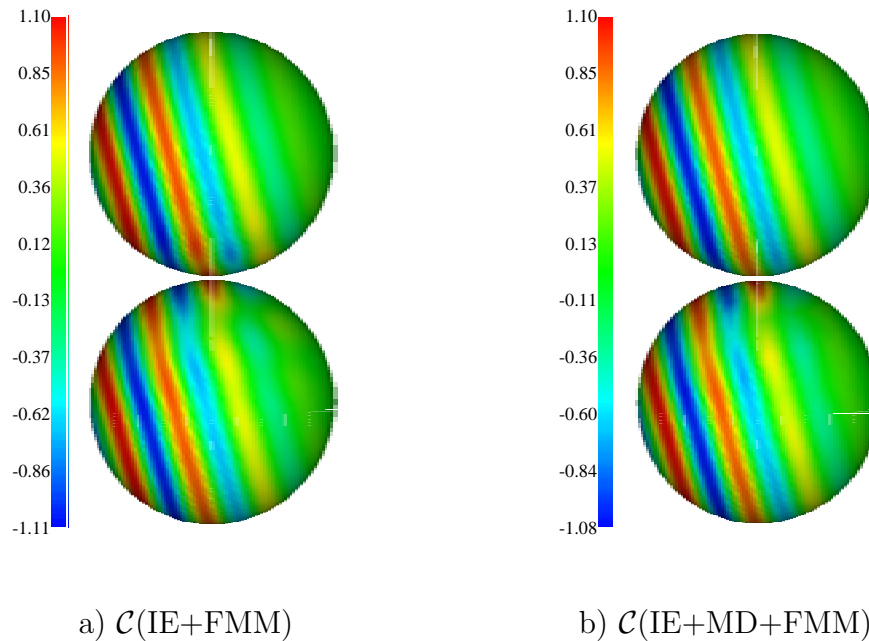


FIG. 8.16 – Partie réelle des courants, condition de Robin, $\text{Inc} = (0, -3.6, -1)$

8.5 Quelques voies pour les obstacles non convexes

Concernant le traitement des obstacles non convexes, nous suggérons ici quelques idées.

- La première idée venant à l'esprit concerne un raffinement local du maillage grossier. Lorsque l'obstacle est convexe, les réflexions multiples ne sont pas prises en compte par l'approximation de la phase telle que nous l'avons définie. Dans les zones de l'obstacle touchées par ces réflexions, l'approximation de la phase de l'inconnue n'est donc pas valide. Le choix du maillage grossier n'est plus suffisant. Une première proposition d'adaptation de la méthode au cas non convexe consiste alors à considérer un raffinement local du maillage grossier au niveau des concavités.
- Une autre idée consisterait à prendre en compte les réflexions multiples dans l'approximation de la phase. Ceci pourrait se faire par le biais d'une décomposition de domaine surfacique avec la considération d'un niveau itératif supplémentaire dans la résolution itérative. Par exemple, dans le cas de la double-sphère, nous pourrions décomposer l'obstacle en deux domaines correspondant chacun à une des deux sphères. Ensuite, le calcul des

courants sur une sphère se ferait en considérant l'écho de l'autre sphère pris en compte dans l'approximation de la phase.

- Nous donnons aussi une troisième idée qui s'inspire de la discrétisation de la phase proposée par A. de La Bourdonnaye et M. Tolentino. Le principal handicap de leur méthode réside dans le choix d'un important nombre de directions. Nous pourrions envisager une approximation de la phase basée sur la considération de plusieurs directions. Mais ces directions seraient choisies en nombre limité et fonctions de l'obstacle. Elles constitueraient un ensemble de directions caractéristiques de l'obstacle. Il resterait ensuite à définir une opération permettant l'approximation de la phase à partir de l'ensemble des directions retenues.

Chapitre 9

Annexe : Calcul de la SER

9.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons les formules de calcul de la SER (surface équivalente radar) bistatique ainsi que les séries de Mie correspondant aux solutions de références utilisées lors de l'étude numérique de la méthode dans le cas où l'objet est une sphère.

9.2 Amplitude de diffusion et SER bistatique

Par rapport aux applications physiques, pour un objet donné, frappé par une onde donnée, il s'agit en fait de déterminer l'écho de cette onde émis par cet objet à un observateur quelconque situé à une grande distance de l'objet, et dans n'importe quelle direction notée \hat{d} . Lorsque l'objet est un avion dans le ciel et que l'observateur est un radar au sol, nous considérons que la perception du radar correspond à une observation à l'infini. A partir d'une certaine distance, l'évolution de l'observation devient négligeable. L'amplitude de diffusion correspond en fait à l'observation à l'infini.

Pour établir la définition de l'amplitude de diffusion, nous devons d'abord réécrire le champ u en y un point de l'espace, à partir de la formulation intégrale (6.2). Ensuite, par le biais d'un développement asymptotique du noyau de Green selon $|y|$, par un passage à la limite quand $|y|$ tend vers l'infini, on établit une formule d'approximation de u pour des observateurs éloignés dans les différentes directions de la sphère unité :

$$\forall y \in \Omega^+ / |y| \text{ assez grand, } u(y) \approx \frac{e^{ik|y|}}{|y|} \mathcal{A}\left(\frac{y}{|y|}\right),$$

où $\mathcal{A}\left(\frac{y}{|y|}\right)$ désigne l'amplitude de diffusion dans la direction $\frac{y}{|y|}$ définie par :

$$\forall \hat{d} \in \mathcal{S}^2, \quad \mathcal{A}(\hat{d}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ikx \cdot \hat{d}} \left[ik(\hat{d} \cdot n_x)u(x) + \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) \right] d\gamma(x).$$

Des détails sur l'établissement de cette formule sont donnés dans le livre de J.-C. Nédélec ([67], p 122) dans le cas d'un potentiel de simple couche. Pour notre formulation intégrale, la démarche est la même.

La SER bistatique est une transformation logarithmique de l'amplitude de diffusion permettant une visualisation plus précise des signatures faibles, c'est à dire qu'elle constitue un zoom quand \mathcal{A} est proche de 0 :

$$\forall \hat{d} \in \mathcal{S}^2, \quad SER(\hat{d}) = 20 \log_{10}(\mathcal{A}(\hat{d})) .$$

9.3 Séries de Mie - Cas de la sphère unité

Dans le cas où l'objet est une sphère centrée en 0 et de rayon $r_0 = 1$, nous pouvons établir le champ u et la SER bistatique de manière analytique selon un développement en harmoniques sphériques. J.-C. Nédélec donne les solutions des problèmes extérieurs de Dirichlet et de Neumann ([67], p 90 et p 123). Dans le cas de la condition d'impédance au bord, nous établissons de même les formules dans le cas d'une condition d'impédance généralisée :

$$\frac{\partial u}{\partial n} /_{\Gamma} + \imath k Z u /_{\Gamma} = g \quad , \quad \text{sur } \Gamma \quad .$$

Le champ u admet alors le développement suivant :

$$\forall x = (r, \theta, \phi) \quad , \quad u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l^m \frac{h_l^{(1)}(kr)}{k \left(\frac{d}{dr} h_l^{(1)} \right) (kr_0) + \imath k Z h_l^{(1)}(kr_0)} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad ,$$

$$\text{avec} \quad g_l^m = \int_{S^2} g(\sigma) \overline{Y_{lm}(\theta_{\sigma}, \phi_{\sigma})} d\sigma \quad .$$

Nous avons déjà défini les fonctions sphériques de Hankel de degré l , $h_l^{(1)}$, et les harmoniques sphériques Y_{lm} . Pour établir le développement de l'amplitude de diffusion dans une direction \hat{d} , nous écrivons le développement précédent pour $x = r\hat{d}$, puis on fait tendre r vers l'infini. On utilise aussi les relations suivantes :

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_x, \phi_x) \overline{Y_{lm}(\theta_{\sigma}, \phi_{\sigma})} = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(x \cdot \sigma) \quad ,$$

$$k \left(\frac{d}{dr} h_l^{(1)} \right) (kr_0) = \frac{l}{r_0} h_l^{(1)}(kr_0) - k h_{l+1}^{(1)}(kr_0) \quad ,$$

$$r e^{-\imath kr} h_l^{(1)}(kr) \longrightarrow \frac{(-\imath)^{l+1}}{k} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty \quad .$$

Nous rappelons que P_l est le polynôme de Legendre de degré l . L'amplitude de diffusion s'écrit ainsi :

$$\forall \hat{d} \in \mathcal{S}^2, \quad \mathcal{A}(\hat{d}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}^2} g(\sigma) \sum_{l=0}^{\infty} H_l(k, r_0) P_l(x \cdot \sigma) d\sigma,$$

avec

$$H_l(k, r_0) = \frac{2l+1}{k} \frac{(-i)^{l+1}}{\left(\frac{l}{r_0} + ikZ\right) h_l^{(1)}(kr_0) - kh_{l+1}^{(1)}(kr_0)}.$$

Troisième partie

Accélération de la résolution des équations intégrales de Després pour le problème de Maxwell

Chapitre 10

Equations intégrales de Després

10.1 Introduction

Dans la deuxième partie, nous avons déjà introduit la nouvelle formulation intégrale selon B. Després dans le cadre du problème extérieur de Helmholtz afin de lui appliquer le couplage de la méthode d'approximation de la phase et de la méthode multipôles établi dans la première partie. Nous proposons dans cette troisième partie, une application de ce couplage à la formulation intégrale selon B. Després dans le cadre du problème extérieur de Maxwell. Nous adaptons alors la nouvelle méthode à une résolution des équations intégrales de l'électromagnétisme. Nous considérons pour cela le code FMMAX du CEA-CESTA. Ce code correspond à une résolution numérique des équations intégrales de Maxwell selon la formulation de B. Després et propose une accélération de cette résolution par une application classique de la FMM multi-niveaux. Nous présentons alors dans ce chapitre ces nouvelles équations intégrales. Le moyen le plus simple pour les présenter consiste à s'inspirer du récent article [24] de F. Collino et B. Després qui reformule les équations de manière plus simple. Ensuite, nous donnons le lien entre le système ainsi établi et celui résolu par le code FMMAX ([41], [64], [25]).

10.2 Formulation intégrale de Després

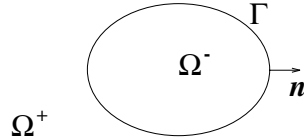
Comme pour le problème de Helmholtz, nous établissons d'abord le système intégral pour une condition d'impédance $Z = 1$ au bord. L'écriture du système intégral reste basée sur la décomposition en partie réelle et partie imaginaire pure des opérateurs intégraux habituels.

10.2.1 Une condition d'impédance au bord

Nous cherchons ici à résoudre les équations de Maxwell en domaine extérieur :

$$\begin{cases} \nabla \wedge E^+ - ikZ_0 H^+ = 0, & \text{dans } \Omega^+, \\ \nabla \wedge H^+ + ikZ_0^{-1} E^+ = 0, & \text{dans } \Omega^+, \\ n \wedge (E_{/\Gamma}^+ \wedge n) + Z_0 (H_{/\Gamma}^+ \wedge n) = g^{inc}, & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left(Z_0 H^+ \wedge \frac{x}{|x|} - E^+ \right) = 0, & \end{cases} \quad (10.1)$$

où Ω^- est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^3 , de frontière Γ et $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$. g^{inc} est une donnée liée à l'onde incidente, et nous orientons la normale n à Γ vers l'extérieur de Ω^- .



La formulation intégrale consiste à résoudre le problème en $J = n \wedge H_{/\Gamma}^+$ et $M = -n \wedge E_{/\Gamma}^+$ dans l'espace des champs tangents, $L^2(T\Gamma) = \{\varphi \in (L^2(\Gamma))^3, \varphi \cdot n = 0\}$.

Ensuite, la connaissance des champs dans l'espace est donnée par :

$$\begin{cases} E^+(x) = \imath Z_0 \tilde{T} J(x) + \tilde{K} M(x), \\ H^+(x) = -\tilde{K} J(x) + \imath Z_0^{-1} \tilde{T} M(x). \end{cases}$$

où les opérateurs \tilde{T} et \tilde{K} sont définis par : $\forall J \in L^2(T\Gamma)$,

$$\begin{aligned} \tilde{T} J(x) &= \frac{1}{k} \nabla_x \wedge \left(\nabla_x \wedge \int_{\Gamma} G(k, |x-y|) J(y) d\gamma(y) \right), \\ \text{et } \tilde{K} J(x) &= -\nabla_x \wedge \int_{\Gamma} G(k, |x-y|) J(y) d\gamma(y), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \tilde{T} J(x) &= k \int_{\Gamma} \left(G(k, |x-y|) J(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G(k, |x-y|) \nabla^t \cdot J(y) \right) d\gamma(y), \\ \text{et } \tilde{K} J(x) &= \int_{\Gamma} \nabla_y G(k, |x-y|) \wedge J(y) d\gamma(y), \end{aligned}$$

avec $G(k, |x-y|) = \frac{e^{\imath k|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ et $\nabla^t \cdot J(y)$ est la divergence surfacique de J .

Soient : $\forall x \in \Gamma$,

$$TJ(x) = \lim_{y \rightarrow x/y \in \Omega^+} n(x) \wedge ((\tilde{T}J(y)) \wedge n(x)),$$

$$\text{et } KJ(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} n(x) \wedge \left(\left(\int_{\Gamma, |x-y| > \epsilon} \nabla_y G(k, |x-y|) \wedge J(y) d\gamma(y) \right) \wedge n(x) \right).$$

$(J = n \wedge H_{/\Gamma}^+, M = -n \wedge E_{/\Gamma}^+)$ est donc solution des équations intégrales suivantes dans $L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)$:

$$\begin{cases} 0 = \imath Z_0(TJ)(x) + (KM)(x) - \frac{1}{2}n(x) \wedge M(x), \\ 0 = (KJ)(x) - \frac{1}{2}n(x) \wedge J(x) - \imath Z_0^{-1}(TM)(x), \end{cases} \quad (10.2)$$

c'est à dire

$$SX = 0$$

avec :

$$S = \begin{bmatrix} T & K - \frac{1}{2}n \wedge \\ K - \frac{1}{2}n \wedge & T \end{bmatrix}$$

et

$$X = \begin{bmatrix} J_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\imath Z_0} J \\ \sqrt{\imath Z_0}^{-1} M \end{bmatrix} \in L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)$$

où les opérateurs T et K vérifient :

$$(TJ, J') = k \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(k, |x-y|) \left(J(y) \cdot \overline{J'(x)} - \frac{1}{k^2} \nabla_y^t J(y) \cdot \overline{\nabla_x^t J'(x)} \right) d\gamma(y) d\gamma(x),$$

$$\text{et } (KM, J') = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (\nabla_y^t G(k, |x-y|) \wedge M(y)) \cdot \overline{J'(x)} d\gamma(y) d\gamma(x).$$

En posant $G(k, |x-y|) = G_r(k, |x-y|) + \imath G_i(k, |x-y|)$, où $G_r = \Re(G)$ et $G_i = \Im(G)$, nous décomposons maintenant les différents opérateurs selon leurs parties réelle et imaginaire pure :

$$T = T_r + \imath T_i, \quad K = K_r + \imath K_i$$

où T_r, K_r, T_i et K_i sont des opérateurs réels.

A ce stade, nous introduisons une nouvelle paire d'inconnues :

$$Y = \begin{bmatrix} J_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \imath \sqrt{\imath Z_0} J \\ \imath \sqrt{\imath Z_0}^{-1} M \end{bmatrix}$$

Elle vérifie $Y = \imath X$.

Ainsi, en posant

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_r & K_r - \frac{1}{2}n\wedge \\ K_r - \frac{1}{2}n\wedge & T_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} T_i & K_i \\ K_i & T_i \end{bmatrix} ,$$

les équations (10.2) se réécrivent

$$-\mathbf{T}X - \mathbf{R}Y = 0 , \quad (10.3)$$

d'où l'on obtient en multipliant par ι :

$$\mathbf{T}Y - \mathbf{R}X = 0 , \quad (10.4)$$

\mathbf{T} est lié à son adjoint par la relation suivante :

$$\mathbf{T} - \mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 0 & -n(x)\wedge \\ -n(x)\wedge & 0 \end{bmatrix} = \Pi . \quad (10.5)$$

Rappelons maintenant la condition au bord. Elle s'écrit :

$$n \wedge (E_{\Gamma}^+ \wedge n) + Z_0(H_{\Gamma}^+ \wedge n) = g^{inc} , \quad \text{sur } \Gamma ,$$

ce qui équivaut à :

$$n \wedge M - Z_0 J = g^{inc} ,$$

ou encore :

$$J_1 - \iota n \wedge M_1 = -\iota \sqrt{\iota Z_0}^{-1} g^{inc} . \quad (10.6)$$

En multipliant (10.6) par $(-n\wedge)$, on obtient (10.7) en se rappelant que $n \wedge (n \wedge \xi) = -\xi$ pour tout vecteur ξ orthogonal au vecteur unitaire n :

$$-\iota n \wedge J_1 + M_1 = -n \wedge \sqrt{\iota Z_0}^{-1} g^{inc} . \quad (10.7)$$

En posant $\tilde{g} = \begin{bmatrix} -\iota \sqrt{\iota Z_0}^{-1} g^{inc} \\ -n \wedge \sqrt{\iota Z_0}^{-1} g^{inc} \end{bmatrix}$, nous obtenons la relation suivante :

$$X - \Pi Y = \tilde{g} .$$

En reprenant les relations (10.4) et (10.5), nous établissons l'équation :

$$X + \mathbf{R}X - \mathbf{T}^*Y = \tilde{g} . \quad (10.8)$$

Introduisons maintenant les opérateurs de champ lointain a_∞ et A_∞ définis par :
 $\forall (J(x), M(x)) \in \Gamma, \forall \hat{s}$ direction de la sphère unité \mathcal{S}^2 ,

$$\begin{aligned} (a_\infty J)(\hat{s}) &= \frac{k}{4\pi} \int_\Gamma \hat{s} \wedge (J \wedge \hat{s}) e^{-ikx \cdot \hat{s}} d\gamma(y) . \\ \left(A_\infty \begin{bmatrix} J \\ M \end{bmatrix} \right) (\hat{s}) &= (a_\infty J)(\hat{s}) - \iota \hat{s} \wedge (a_\infty M)(\hat{s}) . \end{aligned} \quad (10.9)$$

En utilisant la propriété

$$\frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} = \frac{k}{(4\pi)^2} \int_{\mathcal{S}^2} e^{ik(x-y) \cdot \hat{s}} d\hat{s} ,$$

où $\int_{\mathcal{S}^2} \cdot d\hat{s}$ désigne l'intégrale sur la sphère unité. Il est possible de vérifier la relation suivante :

$$\mathbf{R} = A_\infty^* A_\infty . \quad (10.10)$$

Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à l'article [24] de F. Collino et B. Després. En reprenant les équations (10.3) et (10.8), on aboutit ainsi au système

$$\begin{cases} X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{T}^* Y = \tilde{g} , \\ -\mathbf{T} X - A_\infty^* A_\infty Y = 0 . \end{cases} \quad (10.11)$$

Comme dans le cas de l'équation de Helmholtz, ce dernier système peut être associé à un problème de point selle :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{\gamma}, \tilde{Y}) &= \frac{1}{2} \| \tilde{X} \|_{L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \| A_\infty \tilde{X} \|_{L^2(T\mathcal{S}^2)}^2 + \frac{1}{2} \| \tilde{\gamma} \|_{L^2(T\mathcal{S}^2)}^2 \\ &+ \Re \langle \mathbf{T} \tilde{X} - \iota A_\infty^* \tilde{\gamma}, \tilde{Y} \rangle_{L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)} \\ &- \Re \langle \tilde{g}, \tilde{X} \rangle_{L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)} . \end{aligned}$$

Alors, une solution (X, γ, Y) du problème de point selle $\mathcal{L}(X, \gamma, Y) = \min_{\tilde{X}, \tilde{\gamma}} \max_{\tilde{Y}} \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{\gamma}, \tilde{Y})$ est solution de (10.11) avec $\gamma = \iota A_\infty Y$. L'étude de ce problème permet de donner les conditions d'existence et d'unicité de la solution (X, Y) du système (10.11). Les résultats d'existence et d'unicité s'obtiennent par application du théorème de Brezzi ([14]). La condition "inf-sup" ou condition Babuška-Brezzi, assure l'existence de (X, Y) et l'unicité de X . L'existence de Y est assurée à un élément de $\ker A_\infty$ près. Nous renvoyons aux travaux de F. Collino et B. Després ([24]) pour plus de précision sur ce résultat. Afin d'assurer l'unicité de Y , la modification ci-dessous est proposée.

Une modification : Le β -système

Pour assurer l'unicité de la solution Y du problème (10.11), F. Collino et B. Després (cf. [24]) proposent la modification suivante : Puisque $Y = \iota X$, nous ne changeons pas le problème en introduisant les termes

$$\begin{aligned} & \beta X = -\iota \beta Y \quad \text{dans la première équation} \\ \text{et} \quad & \beta Y = \iota \beta X \quad \text{dans la deuxième,} \end{aligned}$$

où β est un paramètre strictement positif. Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} (1 + \beta)X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{T}^* Y = \tilde{g} - \iota \beta Y, \\ \mathbf{T}X + (\beta Id + A_\infty^* A_\infty)Y = \iota \beta X. \end{cases} \quad (10.12)$$

L'opérateur $(A_\infty^* A_\infty + \beta Id)$ vérifie une condition de coercivité qui manquait à $A_\infty^* A_\infty$ dans le système (10.11). Cette nouvelle propriété assure l'unicité de la solution (X, Y) du β -système (10.12) et cette solution vérifie de plus la relation

$$Y = \iota X. \quad (10.13)$$

Une autre solution est envisageable et plus intéressante dans le cas d'une condition d'impédance $Z_r = 1$ au bord : Ajoutons plutôt les termes

$$\begin{aligned} & -\beta X - \iota \beta Y = 0 \quad \text{dans la première équation} \\ \text{et} \quad & -\iota \beta X + \beta Y = 0 \quad \text{dans la deuxième,} \end{aligned}$$

où β est un paramètre de $]0, 1[$. Nous obtenons ainsi le système :

$$\begin{cases} (1 - \beta)X + A_\infty^* A_\infty X - (\mathbf{T}^* + \iota \beta Id)Y = \tilde{g}, \\ (\mathbf{T} - \iota \beta Id)X + (\beta Id + A_\infty^* A_\infty)Y = 0. \end{cases} \quad (10.14)$$

Ce système a les mêmes propriétés que le β -système (6.15). Cependant, dans le cas d'une condition d'impédance $Z_r = 1$ au bord, il se résoud avec deux niveaux itératifs au lieu de trois pour le β -système (6.15) (cf. la section 10.5).

10.2.2 Une condition d'impédance généralisée

Nous considérons dans ce paragraphe, la condition au bord

$$n \wedge (E_\Gamma^+ \wedge n) + Z_0 Z_r (H_\Gamma^+ \wedge n) = f^{inc} \quad \text{sur } \Gamma,$$

où l'opérateur d'impédance Z_r vérifie $\langle \Re Z_r J, J \rangle \geq 0$, pour tout $J \in D(Z_r)$. Notons R l'opérateur de réflexion associé,

$$R = (Id - Z_r)(Id + Z_r)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(T\Gamma)).$$

Cette condition est du type

$$n \wedge (E_{/\Gamma}^+ \wedge n) + Z_0(H_{/\Gamma}^+ \wedge n) = g^{inc} \quad \text{sur } \Gamma \quad ,$$

en exprimant g^{inc} en fonction de R :

$$g^{inc} = -Rg^{out} + (Id + R)f^{inc} \quad .$$

Et g^{out} est défini par :

$$\begin{aligned} g^{out} &= n \wedge (E_{/\Gamma}^+ \wedge n) - Z_0(H_{/\Gamma}^+ \wedge n) \\ &= \sqrt{iZ_0}(n \wedge M_1 - iJ_1) \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons réécrire le système (10.12) avec

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} -i\sqrt{iZ_0}^{-1}g^{inc} \\ -n \wedge \sqrt{iZ_0}^{-1}g^{inc} \end{bmatrix} \quad .$$

En posant $F = \begin{bmatrix} -i\sqrt{iZ_0}^{-1}(Id + R)f^{inc} \\ -n \wedge \sqrt{iZ_0}^{-1}(Id + R)f^{inc} \end{bmatrix}$ et $N_R = \begin{bmatrix} -R \cdot & -iR(n \wedge \cdot) \\ i n \wedge R \cdot & -n \wedge R(n \wedge \cdot) \end{bmatrix}$, nous aboutissons au système

$$\begin{cases} (1 + \beta)X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{T}^* Y + N_R X + i\beta Y = F \quad , \\ \mathbf{T} X - i\beta X + (\beta Id + A_\infty^* A_\infty) Y = 0 \quad . \end{cases} \quad (10.15)$$

Pour $\| R \|_{\mathcal{L}(L^2(T\Gamma))} < 1$, le problème reste bien posé et le système admet une unique solution vérifiant toujours la relation (10.13).

10.3 Diagonalisation par blocs du système

Le système résolu par le code FMMAX du CESTA est différent de celui présenté précédemment (10.15). Il provient de la formulation initiale des équations intégrales de B. Després ([41]). Nous introduisons alors dans cette section le système résolu par FMMAX et le lien avec le système (10.15).

Nous rappelons tout d'abord le système établi précédemment (10.15) avec $\beta = 0$:

$$\begin{cases} X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{T}^* Y = F - N_R X \quad , \\ \mathbf{T} X + A_\infty^* A_\infty Y = 0 \quad . \end{cases} \quad (10.16)$$

En effectuant le changement d'inconnues suivant :

$$\begin{aligned} J_\nu &= \sqrt{i}(M_1 - J_1) \quad , & J'_\nu &= \sqrt{i}(M_2 - J_2) \quad , \\ M_\nu &= \sqrt{i}(M_1 + J_1) \quad , & M'_\nu &= \sqrt{i}(M_2 + J_2) \quad , \end{aligned}$$

et en posant :

$$F_1^{EID} = \sqrt{i} \frac{F_2 - F_1}{2}, \quad F_2^{EID} = \sqrt{i} \frac{F_2 + F_1}{2},$$

par le biais d'une suite de combinaisons, nous pouvons montrer ([63]) que (10.16) équivaut au double système suivant :

$$(I) \quad \mathcal{M}^{(I)} \begin{bmatrix} J_\nu \\ J'_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{EID} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{i R n \wedge \cdot + R}{2} M_\nu \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$(II) \quad \mathcal{M}^{(II)} \begin{bmatrix} M_\nu \\ M'_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{EID} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{i R n \wedge \cdot - R}{2} J_\nu \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathcal{M}^{(I)} = \begin{bmatrix} \frac{Id}{2} + \frac{T_i - K_i}{2} & -\frac{1}{2}(T_r - K_r - \frac{1}{2}n \wedge \cdot) \\ \frac{1}{2}(T_r - K_r + \frac{1}{2}n \wedge \cdot) & \frac{T_i - K_i}{2} \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

et

$$\mathcal{M}^{(II)} = \begin{bmatrix} \frac{Id}{2} + \frac{T_i + K_i}{2} & -\frac{1}{2}(T_r + K_r + \frac{1}{2}n \wedge \cdot) \\ \frac{1}{2}(T_r + K_r - \frac{1}{2}n \wedge \cdot) & \frac{T_i + K_i}{2} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons réécrire ce double système comme suit : Pour $l \in \{1, 2\}$, en définissant l^c par $l^c \in \{1, 2\} \setminus \{l\}$,

$$\begin{bmatrix} \frac{Id}{2} + \frac{1}{4k^2} \delta_l^* \delta_l & kK_l \\ -kK_l^* & \delta_l^* \delta_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\nu^l \\ \lambda_\nu^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_l^{EID} + A_l x_\nu^{l^c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

avec les relations suivantes :

$$x_\nu^1 = J_\nu, \quad \lambda_\nu^1 = \frac{J'_\nu}{2k}, \quad x_\nu^2 = M_\nu, \quad \lambda_\nu^2 = \frac{M'_\nu}{2k},$$

et les nouveaux opérateurs définis ainsi :

$$\begin{aligned} K_1 &= -(T_r - K_r - \frac{1}{2}n \wedge \cdot) , & K_2 &= -(T_r + K_r + \frac{1}{2}n \wedge \cdot) , \\ \delta_1^* \delta_1 &= 4k^2 \frac{T_i - K_i}{2} , & \delta_2^* \delta_2 &= 4k^2 \frac{T_i + K_i}{2} , \\ A_1 &= -\frac{\iota R n \wedge \cdot + R}{2} , & A_2 &= \frac{\iota R n \wedge \cdot - R}{2} . \end{aligned}$$

L'inconnue $(\lambda_\nu^1, \lambda_\nu^2)$ correspond toujours à un multiplicateur de Lagrange et est liée à (x_ν^1, x_ν^2) par la relation $x_\nu^l = -2\iota k \lambda_\nu^l$, $l = 1, 2$. Les opérateurs δ_1 et δ_2 sont définis par :

$$(\delta_l \varphi)(\hat{s}) = k \left((a_\infty J)(\hat{s}) + (-1)^{l+1} \iota \hat{s} \wedge (a_\infty J)(\hat{s}) \right) , \quad l = 1, 2. \quad (10.19)$$

Compte tenu de la relation entre x_ν^l et λ_ν^l , le β -système s'établit en ajoutant les termes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \beta x_\nu^l &= -\iota \beta k \lambda_\nu^l && \text{dans la première équation} \\ \text{et } 2\beta k^2 \lambda_\nu^l &= \iota \beta k x_\nu^l && \text{dans la deuxième,} \end{aligned}$$

pour une condition au bord d'impédance généralisée, et

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \beta x_\nu^l - \iota \beta k \lambda_\nu^l &= 0 && \text{dans la première équation} \\ \text{et } 2\beta k^2 \lambda_\nu^l - \iota \beta k x_\nu^l &= 0 && \text{dans la deuxième,} \end{aligned}$$

pour une condition de Leontovitch $R = 0$. Il prend alors les formes suivantes :

- Dans le cas d'un condition au bord d'impédance généralisée :

$$\begin{bmatrix} (1 + \beta) \frac{Id}{2} + \frac{1}{4k^2} \delta_l^* \delta_l & kK_l \\ -kK_l^* & 2\beta k^2 Id + \delta_l^* \delta_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\nu^l \\ \lambda_\nu^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_l^{EID} + A_l x_\nu^l - \iota \beta k \lambda_\nu^l \\ \iota \beta k x_\nu^l \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

- Dans le cas d'une condition de Leontovitch $R = 0$:

$$\begin{bmatrix} (1 - \beta) \frac{Id}{2} + \frac{1}{4k^2} \delta_l^* \delta_l & kK_l - \iota \beta k Id \\ -kK_l^* - \iota \beta k Id & 2\beta k^2 Id + \delta_l^* \delta_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\nu^l \\ \lambda_\nu^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_l^{EID} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

10.4 Discrétisation des équations

Par le biais d'une formulation variationnelle habituelle, en utilisant une discrétisation éléments-finis Raviart-Thomas ([69]), les systèmes (10.20) et (10.21) se ramènent à la résolution de

systèmes discrets linéaires. Notons Γ_h l'approximation de Γ de degré l et \mathcal{T}_h une triangulation de Γ_h . L'espace éléments-finis V_h est défini par $V_h = Vect\{\varphi_i, i = 1, \dots, N\}$ où N est le nombre d'arêtes du maillage éléments-finis, et $\varphi_i, i \in \{1, \dots, N\}$ désigne la fonction de base associée à la $i^{\text{ième}}$ arête du maillage définie comme suit : Soit a_i une arête du maillage Γ_h . Soient T_i un triangle de \mathcal{T}_h dont une arête est a_i et S_i le sommet de T_i opposé à a_i . Alors pour $x \in T_i$:

$$\varphi_i(x) = \frac{x - S_i}{2 \text{mes}(T_i)} \text{sgn}(a_i, T_i) .$$

Contrairement au cas de l'équation de Helmholtz, la discrétisation des courants sur la surface de l'obstacle nécessite la considération de fonctions de bases vectorielles. Ces fonctions de bases vérifient la propriété de conservation de la charge. Cette structure éléments-finis assure la convergence de la solution discrète $\{(x_{\nu,h}^l, \lambda_{\nu,h}^l), l = 1, 2\}$ vers la solution $\{(x_{\nu}^l, \lambda_{\nu}^l), l = 1, 2\}$ du système continu (10.20) ou (10.21) quand $h \rightarrow 0$. L'existence et l'unicité de $\{(x_{\nu,h}^l, \lambda_{\nu,h}^l), l = 1, 2\}$ sont assurées par la condition "inf-sup" discrète. Les matrices intervenant dans les systèmes discrets sont du même type que celles intervenant dans le cadre de l'équation de Helmholtz. Désignons par h le diamètre des éléments du maillage. Les estimations d'erreur, concernant l'erreur relative notée Err , associées à cette formulation éléments-finis s'écrivent ([90]) :

Pour $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, il existe une constante C telle que

$$Err \leq C (h^{m-\sigma} k + h^l k + h^{m+1/2} k)$$

où l et m désignent respectivement le degré d'approximation de la géométrie et celui des fonctions de bases de l'espace éléments-finis. Numériquement, ces paramètres sont pris égaux à 1. Ainsi, le terme $h^{m-\sigma} k$ n'autoriserait plus le choix $h \sim k^{-1}$. Cependant, d'un point de vue numérique, la formule empirique $h \approx \lambda/10$ nous amène à conserver le choix $h \sim k^{-1}$. Ainsi, la taille de l'espace éléments-finis est toujours liée au carré du nombre d'onde : $N \sim k^2$.

10.5 Résolution du problème discret

Le problème discret à résoudre a les mêmes caractéristiques que le système considéré au chapitre 6 dans le cadre de l'équation de Helmholtz. Pour découpler les deux systèmes dans le cas d'une condition au bord d'impédance $Z_r \neq 1$, c'est à dire $R \neq 0$, nous utilisons la méthode de Jacobi relaxée déjà introduite au chapitre 6. Ensuite, à chaque itération de la méthode de Jacobi relaxée, les deux systèmes sont résolus selon une méthode de double gradient conjugué. La convergence de cette résolution itérative est assurée de la même façon que dans le cas de l'équation de Helmholtz, sous la condition $\|R\| < 1$. Pour le cas particulier où $R = 0$, le niveau itératif de la méthode de Jacobi relaxée n'est plus utile dès que l'on utilise la version (10.21) discrétisée du β -système.

Chapitre 11

Application de la nouvelle méthode

11.1 Introduction

La première partie de ce mémoire a abouti à une nouvelle méthode basée sur l'approximation de la phase introduite par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou, couplée à une méthode multipôles. Dans la deuxième partie, cette nouvelle méthode basée sur l'approximation de la phase et la FMM a été appliquée à la formulation intégrale de B. Després pour l'équation de Helmholtz. Nous donnons ici les difficultés relatives à l'application de cette méthode dans le cadre des équations de Maxwell. L'aspect vectoriel complique l'utilisation de la méthode de discrétisation de la phase et amène à considérer des variantes de la FMM. D'autre part, le choix d'une FMM multi-niveaux nécessite une adaptation.

11.2 Discrétisation microlocale

La considération de l'approximation de la phase et de la nouvelle formulation éléments-finis basée sur un double maillage se fait selon le même principe que pour le problème de Helmholtz (voir la section 7.2). Rappelons les estimations d'erreur classiques :

Pour $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, il existe une constante C telle que

$$Err \leq C (h^{m-\sigma} k + h^l k + h^{m+1/2} k)$$

Dans le cadre de la nouvelle formulation éléments-finis à deux maillages, désignons respectivement par h_f et h_g les longueurs moyennes des arêtes des maillages fin et grossier. En imposant le choix du maillage fin par la relation $h_f \sim k^{-1}$, les estimations d'erreur s'écrivent :

Pour $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, il existe une constante C telle que

$$Err \leq C ((h_g^{m-\sigma} + h_g^{m+1/2}) k^{m/3} + h_f^l k)$$

Ces estimations ne permettent plus le choix de $h_g \sim k^{-1/3}$ mais comme dans le cas classique, nous nous en contentons. Ainsi, nous conservons le choix $h_g \sim k^{-1/3}$ déjà considéré dans le cadre

de l'équation de Helmholtz. Nous rappelons maintenant les notations relatives aux différents maillages. L'inconnue est définie sur un maillage grossier Γ_g avec un nombre de mailles $N_g = \mathcal{O}(k^{2/3})$. Γ_f désigne le maillage fin utilisé pour la discrétisation des intégrales, avec un nombre de mailles $N_f = \mathcal{O}(k^2)$. Dans la partie 1, chapitre 2, nous avons aussi introduit les objets intermédiaires $\Gamma_f^{-\pi}$ et Γ_g^s , ainsi que π , la projection orthogonale des triangles plans de Γ_g vers ceux de Γ_f .

Une différence notable par rapport à l'étude faite dans la section 7.2 concerne les fonctions de base. En effet, elles sont ici vectorielles et tangentes à la surface de l'objet. Comme pour le problème de Helmholtz, la discrétisation de l'inconnue implique la définition des fonctions de base à partir du maillage grossier. Le maillage fin permet d'avoir une évaluation adaptée des fonctions oscillantes $e^{ik\phi_0}$ et $G(k, \cdot)$, et de la normale à la surface. Pour le problème de Maxwell, une nouvelle difficulté numérique est à prendre en compte. Les fonctions de base sont définies à partir du maillage grossier mais elles doivent être portées par des vecteurs définis sur le maillage fin. Soient a_i une arête du maillage grossier et T_i un triangle du maillage grossier dont une des arêtes est a_i . La fonction de base classique φ_i sur T_i est de la forme $\varphi_i = f_i^{(1)} e_i^{(1)} + f_i^{(2)} e_i^{(2)}$ où $(e_i^{(1)}, e_i^{(2)})$ constitue une base locale de T_i . La fonction de base $\tilde{\varphi}_i$ associée à la nouvelle formulation éléments-finis peut alors être définie sur le triangle plan T_i à partir de φ_i par la relation :

$$\tilde{\varphi}_i = \mathcal{J}_i \left(f_i^{(1)} \pi \left(e_i^{(1)} \right) + f_i^{(2)} \pi \left(e_i^{(2)} \right) \right).$$

Le choix des fonctions test se fait selon le même principe que pour l'équation de Helmholtz. Le nouveau système conserve les propriétés du système initial (10.20) ou (10.21) discrétisé, lui permettant une résolution itérative du même type. Le nouveau système est de taille $\mathcal{O}(k^{4/3})$ au lieu de $\mathcal{O}(k^4)$. La place mémoire nécessaire et le temps de résolution sont donc considérablement réduits. Cependant, le coût de calcul des matrices reste en $\mathcal{O}(k^4)$. La section suivante concerne une accélération du calcul des matrices par application d'une méthode multipôles multi-niveaux.

11.3 Les outils FMM utilisés

11.3.1 La version FMM à quatre composantes

Considérons la matrice intervenant dans la formulation intégrale pour les équations de Maxwell. Définissons la ainsi, de taille $N \times N : \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\mathcal{M}_{ij} = \overline{\alpha_i} \alpha_j G(k, |x - y|) \overline{\varphi_i(x_i)} \cdot \varphi_j(x_j).$$

Nous avons vu que la FMM consistait à découpler x_i et x_j . Pour l'équation de Helmholtz, tout le couplage réside dans le noyau de Green. Ici, le produit scalaire entre la fonction de base φ_j et la fonction test φ_i y contribue aussi. Pour se débarrasser de ce problème, le moyen le plus

immédiat est de réécrire l'élément matriciel ainsi :

$$\mathcal{M}_{ij} = \sum_{l=1}^3 \mathcal{M}_{ij}^{(l)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_{ij}^{(l)} = \bar{\alpha}_i \alpha_j G(k, |x-y|) \overline{\varphi_i^{(l)}(x_i)} \cdot \varphi_j^{(l)}(x_j),$$

où $\varphi_\mu^{(l)}(x_i)$ $l = 1, \dots, 3$ désignent les composantes scalaires de $\varphi_\mu(x_i)$. Ensuite, il suffit d'appliquer la FMM comme pour l'équation de Helmholtz à chacune des trois matrices $\mathcal{M}^{(l)}$ à partir des développements données dans la section 7.3. Les équations intégrales de Maxwell font aussi intervenir une matrice définie à partir de la divergence des fonctions de base. Cette divergence étant scalaire, le traitement d'un produit matrice-vecteur dans le cas de cette quatrième matrice se fait de manière classique. Le choix de cette stratégie engendre une version de l'application de la FMM que l'on dit à quatre composantes. Dans le cadre du noyau régulier, il est assez facile de considérer une version à une composante. C'est ce que nous proposons dans le chapitre suivant.

11.3.2 Une version FMM à une composante pour le terme régulier

Les matrices associées au noyau régulier sont écrites en considérant la relation suivante ([3]) :

$$\frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} = \frac{k}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik(x-y) \cdot \hat{s}} d\hat{s}.$$

Nous les avons sous la forme :

$$\mathcal{M}_{ij} = (\delta_l \varphi_j, \delta_l \varphi_i)_{L^2(S^2)}, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}$$

avec (voir (10.9) et (10.19))

$$(\delta_l \varphi)(\hat{s}) = \frac{k^2}{2\pi\sqrt{2}} \int_{\Gamma} \varphi(x) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l \iota \hat{\phi}) e^{-ikx \cdot \hat{s}} d\gamma(x).$$

où $(\hat{s}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ désigne le repère local en coordonnées sphériques sur la sphère unité. L'élément matriciel s'écrit alors :

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{k^4}{8\pi} \int_{S^2} \left(\int_{\Gamma} \varphi_j(y) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l \iota \hat{\phi}) e^{-iky \cdot \hat{s}} d\gamma(y) \right) \overline{\left(\int_{\Gamma} \varphi_i(x) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l \iota \hat{\phi}) e^{-ikx \cdot \hat{s}} d\gamma(x) \right)} d\hat{s}.$$

Sous cette forme, la discrétisation de la sphère unité nécessiterait $\mathcal{O}(N)$ directions à cause du caractère oscillant de $e^{-ikx \cdot \hat{s}}$ en la variable \hat{s} . Ainsi, même si les indices i et j sont découplés,

le coût de calcul est en $\mathcal{O}(N^2)$. Introduisons alors les centres C_x et C_y des boîtes multipolaires contenant respectivement x et y :

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{k^4}{8\pi} \int_{S^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\varphi_j(y) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l \iota \hat{\phi}) e^{-ik(y-C_y) \cdot \hat{s}} \right) e^{-ik(C_y-C_x) \cdot \hat{s}} \cdot \overline{\left(\varphi_i(x) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l \iota \hat{\phi}) e^{-ik(x-C_x) \cdot \hat{s}} \right)} d\gamma(y) d\gamma(x) d\hat{s} .$$

Ensuite nous approchons $e^{-ik(C_y-C_x) \cdot \hat{s}}$ par la série de Jacobi-Anger :

$$e^{-ik(C_y-C_x) \cdot \hat{s}} \approx \sum_{l=0}^L (2l+1) \iota^l j_l(k|C_y-C_x|) P_l(\cos(\hat{s}, C_y-C_x)) .$$

Les éléments $\varphi_i(x) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l \iota \hat{\phi})$ et $\varphi_j(y) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l \iota \hat{\phi})$ étant des scalaires, nous aboutissons ainsi à une approximation multipolaire à une composante du même type que celles présentées dans le cadre de l'équation de Helmholtz à deux nuances près ([26]) :

- Les facteurs $(\hat{\theta} + (-1)^l \iota \hat{\phi})$ incrémentent de un le degré des polynômes à intégrer sur la sphère unité. Ainsi, nous sommes contraints d'augmenter le nombre de points de discrétisation sur la sphère unité en conséquence.
- Une astuce numérique pour l'interpolation des nouvelles fonctions de radiation consiste à multiplier la fonction à interpoler par $\sin \theta$ avant l'interpolation et à la diviser par $\sin \theta$ après.

11.3.3 Une version FMM à une composante pour le terme singulier

Concernant les matrices associées au terme singulier, avec la formulation intégrale de B. Després, on peut obtenir une version à une composante au lieu de quatre. Cette version a été établie par F. Collino et K. Mer-Nkonga ([25]). Elle est basée sur une première relation (11.2) établie par F. Collino et F. Millot ([27]). Considérons la matrice T_h définie par :

$$(T_h)_{ij} = k \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G_r(k, |x-y|) \left(\varphi_j(y) \cdot \overline{\varphi_i(x)} - \frac{1}{k^2} \nabla_y^t \cdot \varphi_j(y) \cdot \overline{\nabla_x^t \cdot \varphi_i(x)} \right) d\gamma(y) d\gamma(x) .$$

Considérons aussi la matrice \tilde{T}_h définies par :

$$(\tilde{T}_h)_{ij} = k \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \mathcal{G}_r(k, |x-y|) \varphi_j(y) \cdot \overline{\varphi_i(x)} d\gamma(y) d\gamma(x) ,$$

où $\mathcal{G}_r(k, |x-y|) = (Id_{3 \times 3} + \frac{1}{k^2} \nabla_x \otimes \nabla_x) G_r(k, |x-y|)$ est le tenseur dyadique de Maxwell. Soit $(T_h^{T_i, T_j})_{ij}$ la contribution de deux triangles (T_i, T_j) du maillage à $(T_h)_{ij}$, tels que $T_i \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset$

et $T_j \cap \text{supp}(\varphi_j) \neq \emptyset$. Définissons de même $(\tilde{T}_h^{T_i, T_j})_{ij}$. Considérons aussi $(R_h^{T_i, T_j})_{ij}$ tel que :

$$\begin{aligned} k(R_h^{T_i, T_j})_{ij} &= \int_{\partial T_i} \int_{T_j} \tilde{G}_r(k, |x-y|) (n_{\partial T_i}(x) \overline{\varphi_i(x)}) \nabla_y^t \varphi_j(y) d\partial T_i(x) dT_j(y) \\ &+ \int_{\partial T_i} \int_{T_j} \tilde{G}_r(k, |x-y|) (n_{\partial T_j}(y) \varphi_j(y)) \nabla_x^t \overline{\varphi_i(x)} dT_i(x) d\partial T_j(y) \\ &- \int_{\partial T_i} \int_{\partial T_j} \tilde{G}_r(k, |x-y|) (n_{\partial T_i}(x) \overline{\varphi_i(x)}) (n_{\partial T_j}(y) \varphi_j(y)) d\partial T_i(x) d\partial T_j(y) . \end{aligned} \quad (11.1)$$

où $\tilde{G}_r = G_r$ sur $T_i \times T_j$. Une intégration par partie nous donne alors la relation :

$$(T_h^{T_i, T_j})_{ij} = (\tilde{T}_h^{T_i, T_j})_{ij} + (R_h^{T_i, T_j})_{ij} . \quad (11.2)$$

D'autre part, nous avons aussi :

$$\sum_{T_i, T_j} (R_h^{T_i, T_j})_{ij} = 0 . \quad (11.3)$$

A cause de la singularité en $x = y$, nous ne considérons $(\tilde{T}_h^{T_i, T_j})_{ij}$ que pour des couples de triangles éloignés. Ainsi, le calcul de $(T_h^{T_i, T_j})_{ij}$ est remplacé par :

- $(\tilde{T}_h^{T_i, T_j})_{ij}$ si T_i et T_j sont éloignés au sens multipolaire.
- $\left((T_h^{T_i, T_j})_{ij} - (R_h^{T_i, T_j})_{ij} \right)$ si T_i et T_j sont proches.

La relation (11.3) fait le reste. A partir de cette écriture, F. Collino et F. Millot ont établi une version à deux composantes ([26]) que nous ne développerons pas ici. Pour la version à une composante, nous considérons directement la matrice $\tilde{T}_r + K_r$ (ou $\tilde{T}_r - K_r$) intervenant dans les systèmes (10.20) et (10.21). Les matrices élémentaires sont de la forme :

$$\begin{aligned} (TK_h^{T_i, T_j})_{ij} &= k \int_{T_i} \int_{T_j} \left((Id_{3 \times 3} + \frac{1}{k^2} \nabla_x \otimes \nabla_x) G_r(k, |x-y|) + \frac{1}{k} \nabla_y G_r(k, |x-y|) \wedge \cdot \right) \\ &\quad \times \varphi_j(y) \cdot \overline{\varphi_i(x)} d\gamma(y) d\gamma(x) . \end{aligned}$$

A partir des développements de G_r (7.12) et de ses dérivées, on obtient :

$$\begin{aligned} (TK_h^{T_i, T_j})_{ij} &= \frac{k^2}{(4\pi)^2} \int_{\mathcal{S}^2} \int_{T_i} \int_{T_j} \overline{\varphi_i(x)} \cdot ((Id - \hat{s} \otimes \hat{s}) \varphi_j(y) + \imath \hat{s} \wedge \varphi_j(y)) \\ &\quad \times e^{\imath k(x-C_x) \cdot \hat{s}} \mathcal{T}_{L, C_y - C_x}^{\Re}(\hat{s}) e^{\imath k(C_y - y) \cdot \hat{s}} d\gamma(y) d\gamma(x) d\hat{s} . \end{aligned}$$

Or, pour tous V, W vecteurs de \mathbb{C}^3 :

$$V \cdot (W - \hat{s}(\hat{s} \cdot W) + \imath \hat{s} \wedge W) = (V \cdot (\hat{\theta} + \imath \hat{\phi})) \overline{(W \cdot (\hat{\theta} + \imath \hat{\phi}))} .$$

Ainsi :

$$(TK_h^{T_i, T_j})_{ij} = \frac{k^2}{(4\pi)^2} \int_{S^2} \int_{T_i} \int_{T_j} \overline{(\varphi_i(x) \cdot (\hat{\theta} + \imath \hat{\phi}))} (\varphi_j(y) \cdot (\hat{\theta} + \imath \hat{\phi})) \\ \times e^{\imath k(x-C_x) \cdot \hat{s}} \mathcal{T}_{L, C_y - C_x}^{\Re}(\hat{s}) e^{\imath k(C_y - y) \cdot \hat{s}} d\gamma(y) d\gamma(x) d\hat{s} .$$

$\overline{(\varphi_i(x) \cdot (\hat{\theta} + \imath \hat{\phi}))}$ et $(\varphi_j(y) \cdot (\hat{\theta} + \imath \hat{\phi}))$ étant des scalaires, nous aboutissons ainsi à une version à une composante du même type que celle écrite pour le terme régulier.

11.4 Discrétisation microlocale et FMM multi-niveaux

Nous proposons dans cette partie l'application de notre nouvelle méthode avec l'utilisation d'une méthode multipôles rapide multi-niveaux. Nous rappelons ici l'adaptation liée au choix des niveaux considérés.

Lors d'une utilisation classique de la méthode multipôles multi-niveaux, nous considérons tous les niveaux de boîtes multipolaires exceptés les niveaux 0 et 1. Ainsi, lorsque nous effectuons les transferts entre les boîtes sources et les boîtes observatrices, nous ne considérons que des couples de boîtes source et observatrice, B_s et B_o vérifiant les propriétés suivantes :

- B_s et B_o ne sont pas voisines.
- Les boîtes du niveau précédent contenant B_s et B_o sont voisines.

Il s'agit des transferts définis dans le paragraphe 3.3.1, au nombre de 316 pour un ordre de voisinage $Vmax = 1$.

Lorsque nous appliquons la méthode multipôles à la méthode de discrétisation microlocale, nous sommes limités dans le choix des niveaux. Le niveau le plus grossier considéré n'est pas forcément le niveau le plus grossier d'une utilisation classique. Dans ce cas, au niveau le plus grossier, les transferts s'effectuent comme pour une méthode multipôles à un niveau, en considérant tous les couples de boîtes non voisines. Nous minimisons le coût de calcul de ces transferts comme dans le cas d'une méthode multipôles à un niveau. Cependant, nous voyons apparaître ici un paramètre supplémentaire, le niveau grossier. D'un point de vue numérique, il faut trouver le juste milieu entre l'intérêt théorique d'un nombre de niveau réduit et le coût numérique toujours élevé du calcul des transferts.

Chapitre 12

Résultats numériques

12.1 Introduction

L'application du couplage dans le cadre des équations de Maxwell s'est effectuée à partir du code FMMAX du CEA-CESTA. Ce code résout les équations intégrales de B. Després par une méthode itérative. Il permet une résolution classique et propose une résolution à coûts réduits par l'utilisation classique d'une méthode multipôles multi-niveaux pour l'accélération des produits matrice-vecteur. L'auteur de ce mémoire a donc développé une option supplémentaire dans le code FMMAX qui permet désormais de résoudre les équations intégrales par l'emploi d'une discrétisation microlocale. Cette résolution se fait, au choix de l'utilisateur, avec ou sans accélération du calcul des matrices par application d'une méthode multipôles multi-niveaux. Nous signalons tout d'abord quelques détails concernant la mise en œuvre informatique. Ensuite, nous proposons une validation de la nouvelle option, une considération du problème de la montée en fréquence, et envisageons le cas d'un obstacle un peu moins académique, le cône-sphère.

12.2 Mise en œuvre informatique

La mise en œuvre informatique et l'optimisation du code nous ont amené à considérer un nouveau paramètre d'une part et à reconsidérer le choix du niveau grossier du pavage multipolaire d'autre part.

12.2.1 Les interactions proches

La première considération est liée à la FMM. Considérons un maillage à N_0 mailles et un pavage multipolaire avec M_0 boîtes dans le niveau le plus fin. Le nombre d'interactions proches est donc de l'ordre de $M_0 \left(\frac{N_0}{M_0}\right)^2$. Dans le cas d'une FMM multi-niveaux, $\left(\frac{N_0}{M_0}\right)^2$ est interprété comme une constante que l'on choisit ainsi $\frac{N_0}{M_0} \approx 5$ dans la mesure du possible. Supposons alors

$\frac{N_0}{M_0} = 5$. Considérons maintenant, pour une autre fréquence, avec le même objet, un maillage à N_1 mailles avec $N_1 = 2N_0$. Le choix de $M_1 = M_0$ nous amène à $\frac{N_1}{M_1} = 10$, ce qui multiplie par $2^2 = 4$ le coefficient $\left(\frac{N_0}{M_0}\right)^2$ supposé constant dans la théorie. Si nous choisissons de raffiner le pavage, M_1 sera de l'ordre de $4M_0$. Les boîtes seront trop petites et des calculs singuliers pourraient être considérés dans les interactions lointaines.

Pour remédier à ce problème, nous proposons de multiplier la taille de la première boîte multipolaire, celle du niveau 0, par un coefficient dans $]1; 2[$. D'un point de vue pratique, pour $N_1 = 737280$, le tableau suivant donne le nombre de boîtes à différents niveaux suivant la configuration. Dans la deuxième colonne, la taille de la boîte initiale est égale à la taille de l'objet. Dans la troisième colonne, la taille de la boîte initiale est égale à 1.4 fois la taille de l'objet.

Niveau	Taille de la boîte initiale = taille de l'objet	Taille de la boîte initiale = 1.4 × taille de l'objet
0	1	1
1	8	8
2	56	56
3	272	152
4	1160	608
5	4708	2508
6	18272	9548
7	69706	36488
8	248311	135446

Nous constatons que la troisième colonne propose, au niveau 8, un nombre de boîtes optimal alors que la deuxième colonne n'autorise que 7 niveaux avec un nombre de boîtes pour lequel les interactions proches seraient assez coûteuses. Nous voyons apparaître dans ce paragraphe un nouveau paramètre qui permettra d'importants gains en coût de calcul des interactions proches.

12.2.2 Le choix du niveau grossier du pavage

Comme nous l'avons vu, ce choix dépend des transferts effectués et du maillage grossier.

Nous rappelons tout d'abord que les fonctions de transfert $\mathcal{T}_{L, r_{m, m'}^n}(s_p)$ dépendent des boîtes C_m^n et $C_{m'}^n$ uniquement par le biais des vecteurs $r_{m, m'}^n = X_m^n - X_{m'}^n$. Ainsi, en stockant les fonctions de transfert, le nombre de fonctions de transfert à calculer est nettement inférieur au nombre de transferts à effectuer :

Niveau n	Coût des transferts	Coût de calcul des fonctions de transfert
$n \neq n_{ivg}, M_n > N_g$	$\sim N_f N_g$	$\sim nbTra S_n L_n$
$n \neq n_{ivg}, M_n < N_g$	$\sim \frac{N_g^2}{M_n} N_f$	$\sim nbTra S_n L_n$
$n = n_{ivg}$	$\sim \frac{N_g^2}{M_{n_{ivg}}} N_f$	$\sim M_{n_{ivg}} S_{n_{ivg}} L_{n_{ivg}}$

Cependant, en pratique, l'évaluation d'une fonction de transfert est très coûteuse et lors d'une application de la FMM, le coût de calcul des fonctions de transfert peut être prépondérant devant celui des transferts effectifs, notamment si le niveau grossier n_{ivg} est relativement fin. Ainsi, le choix du niveau n_{ivg} peut se porter vers un niveau bien plus grossier que prévu.

D'autre part dans la pratique, le maillage grossier n'est pas aussi lâche que le prévoit la théorie. D'un point de vue théorique, si N_g et N_f désignent respectivement les nombres de triangles sur les maillages grossier et fin, alors nous avons la relation $N_g \sim N_f^{1/3}$. Cependant, cette relation est valable pour les hautes fréquences asymptotiquement. Si nous tâchons de respecter cette relation pour des fréquences pas trop grandes, même de l'ordre de 5 GHz, les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants. Envisageons le cas ($N_f = 737280$, $N_g = 2880$). Lors d'une résolution classique, ce cas correspond à un problème à 1.1 million de degrés de liberté pour une fréquence de 4.7 GHz. Dans ce cas, $N_g \approx 3.35N_f^{1/2}$ et $N_g^2 \approx 11N_f$ au lieu de l'estimation théorique $N_g^2 \sim N_f^{2/3}$, c'est à dire $N_g^2 \approx 8.10^6$ lorsque la théorie prévoit $N_g^2 \sim 8.10^3$.

Finalement, la relation $M_g \geq N_g$ n'est plus respectée, la complexité s'en trouve alourdie par rapport aux estimations théoriques. Les tests numériques ont même amené à choisir systématiquement pour n_{ivg} le niveau le plus grossier possible du pavage multipolaire, $n_{ivg} = 2$.

12.3 Validation numérique et montée en fréquence

12.3.1 Validation numérique

Nous commençons par donner des résultats sur un petit cas qui permet de valider le code. L'obstacle considéré est une sphère de diamètre $D = 2$. Les résultats sont obtenues pour une fréquence de 800 MHz. Ce cas est traité avec un maillage fin de 20480 mailles en $\lambda/10$ et un maillage grossier de 1280 mailles en $\lambda/2.5$. Pour l'approximation multipolaire, nous utilisons systématiquement la version à une composante pour le terme singulier comme pour le terme régulier. Tout au long de ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes :

- “Std” désigne les résultats obtenus sans discrétisation microlocale et sans méthode multipôles.
- “MD” désigne les résultats obtenus avec discrétisation microlocale et sans méthode multipôles.

TAB. 12.1 – Coût CPU pour la fréquence 800 MHz, $Z_r = 1$

	FMM	MD	FMD $C = 2.25$	FMD $C = 6$
Temps CPU	1 h 58 min	120 min	43 min	1 h 23 min

- “FMM” désigne les résultats obtenus sans discrétisation microlocale et avec une méthode multipôles à une composante.
- “FMD” désigne les résultats obtenus avec discrétisation microlocale et avec une méthode multipôles à une composante.

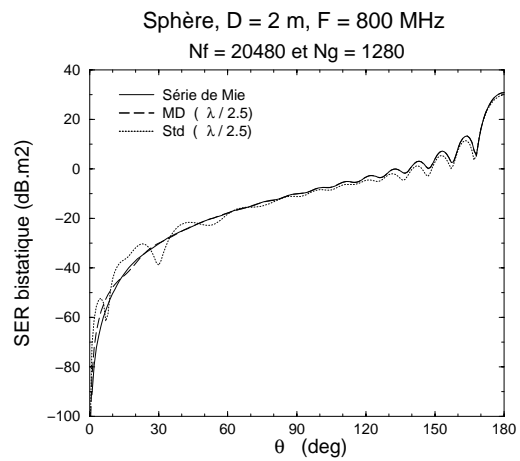
Rappelons aussi le paramètre C introduit par la relation (3.10) dans le chapitre de description générale des méthodes multipôles rapides, dans le paragraphe 3.1.3 : Il intervient dans le choix de la troncature des développements dérivant de la série de Gegenbauer et le nombre de directions pour la discrétisation de la sphère unité. Les résultats donnés sur la SER bistatique valident le code et permettent de voir l’influence du choix du paramètre C sur la précision et le coût. La figure 12.1 montre que la solution obtenue avec notre couplage suit bien la solution exacte, avec une résolution basée sur un maillage en $\lambda/2.5$ alors qu’une méthode classique avec ce même maillage engendre un résultat qui diffère sur l’ensemble des directions θ . Le tableau 12.1 et la figure 12.1 montrent l’influence du paramètre C de la méthode multipôles : Le temps CPU croît assez vite avec C . Pour les résultats suivants, le paramètre C est systématiquement choisi égal à 2.25.

12.3.2 Montée en fréquence

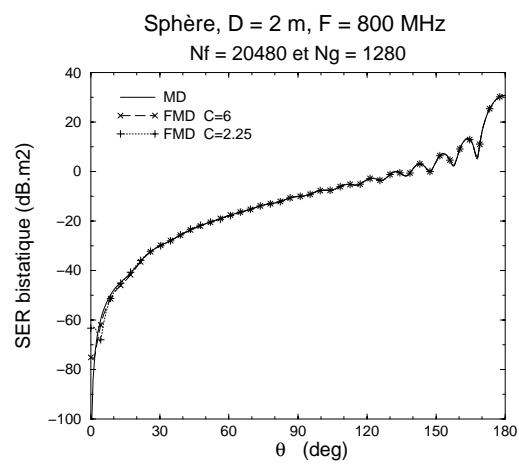
Nous présentons ici le cas d’une sphère de deux mètres de diamètre à 1.6 GHz, 3.2 GHz et 4.7 GHz. Les maillages utilisés sont précisés dans le tableau suivant :

Fréquence (GHz)	N_g	N_f
1.6	1280	81920
3.2	1280	327680
4.7	2880	737280

Le cas $N_g = 737280$ mailles correspond à un cas à 1.1 million de degrés de liberté. Les résultats des tableaux 12.2-12.3 montrent le gain en coût de calcul obtenu par le couplage. Ce gain s’avère assez léger dans le cas d’une condition au bord de Léontovitch $Z = 1$, alors qu’il est vraiment considérable dans le cas du conducteur parfait (impédance $Z = 0$). En effet pour une condition au bord d’impédance $Z \neq 1$, c’est à dire $R \neq 0$, le niveau itératif de Jacobi accroît



a) MD



b) FMD

FIG. 12.1 – Fréquence 800 Mhz, $Z_r = 1$

TAB. 12.2 – Coût CPU pour la condition $Z_r = 1$

Fréquence (GHz)	1.6	3.2	4.7
FMM	6 h 36 min	33 h 03 min	≈ 50 h
FMD	2 h 35 min	10 h 30 min	≈ 30 h

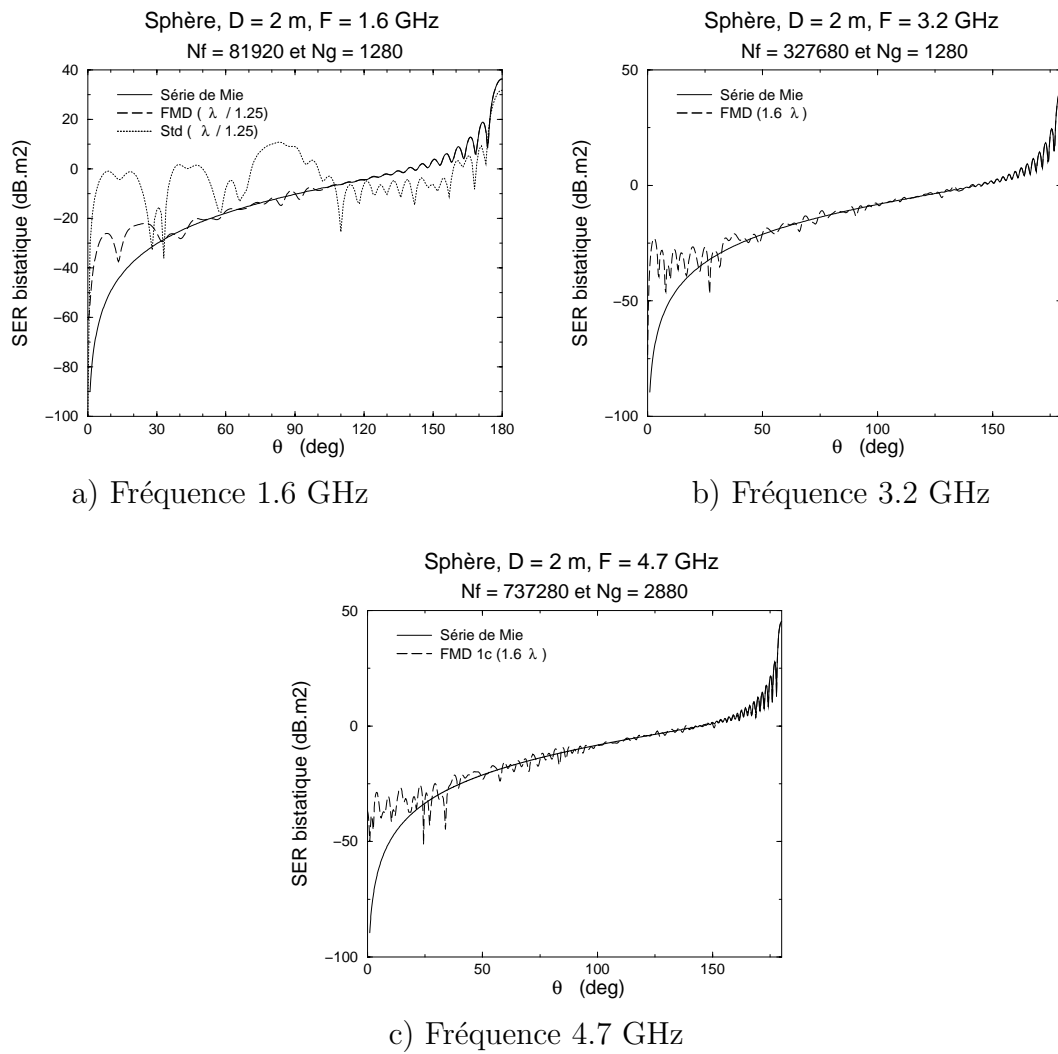
TAB. 12.3 – Coût CPU, conducteur parfait

Fréquence (GHz)	0.8	1.6	3.2	4.7
FMM	> 12 h			
FMD	1 h 15 min	3 h 20 min	13 h 00 min	

fortement le coût d'une résolution classique alors que le couplage proposé est peu sensible à ce changement puisque le coût de résolution est faible devant le coût de précalcul des matrices. En ce sens, ce couplage ouvre la voie à une nouvelle génération de codes, des codes de résolution multi-impédances qui seraient adaptés à des balayages en impédance. Concernant la précision, elle est assez bonne dans le cas du conducteur parfait (Figure 12.2). Pour la condition au bord de Leontovitch $Z = 1$, si la précision est mauvaise pour les faibles niveaux de SER, elle semble s'améliorer lorsque la fréquence croît (Figure 12.3).

12.4 Cas d'une géométrie convexe quelconque

Tout obstacle autre que la sphère unité dont la surface n'est pas plane par morceaux, présente une difficulté supplémentaire. En effet, nous avons besoin d'un maillage fin Γ_f construit par raffinement du maillage grossier Γ_g et projection sur la surface de l'objet. Pour ce qui est du raffinement de Γ_g , il n'y a pas de problème particulier. Une subdivision successive des triangles convient bien. Pour ce qui est de la projection sur la surface de l'objet, un outil a été développé sous I-deas. Cet outil permet la projection des nœuds du maillage sur la surface de l'obstacle en un temps acceptable lorsqu'il est utilisé en batch. Un maillage fin de 13824 mailles et 6914 nœuds est projeté sur la surface en environ 30 minutes. Ce temps peut paraître long mais il est acceptable dans la mesure où il concerne une opération qu'il est nécessaire d'effectuer une seule fois dans la vie du maillage considéré.

FIG. 12.2 – SER, cas $Z_r = 1$

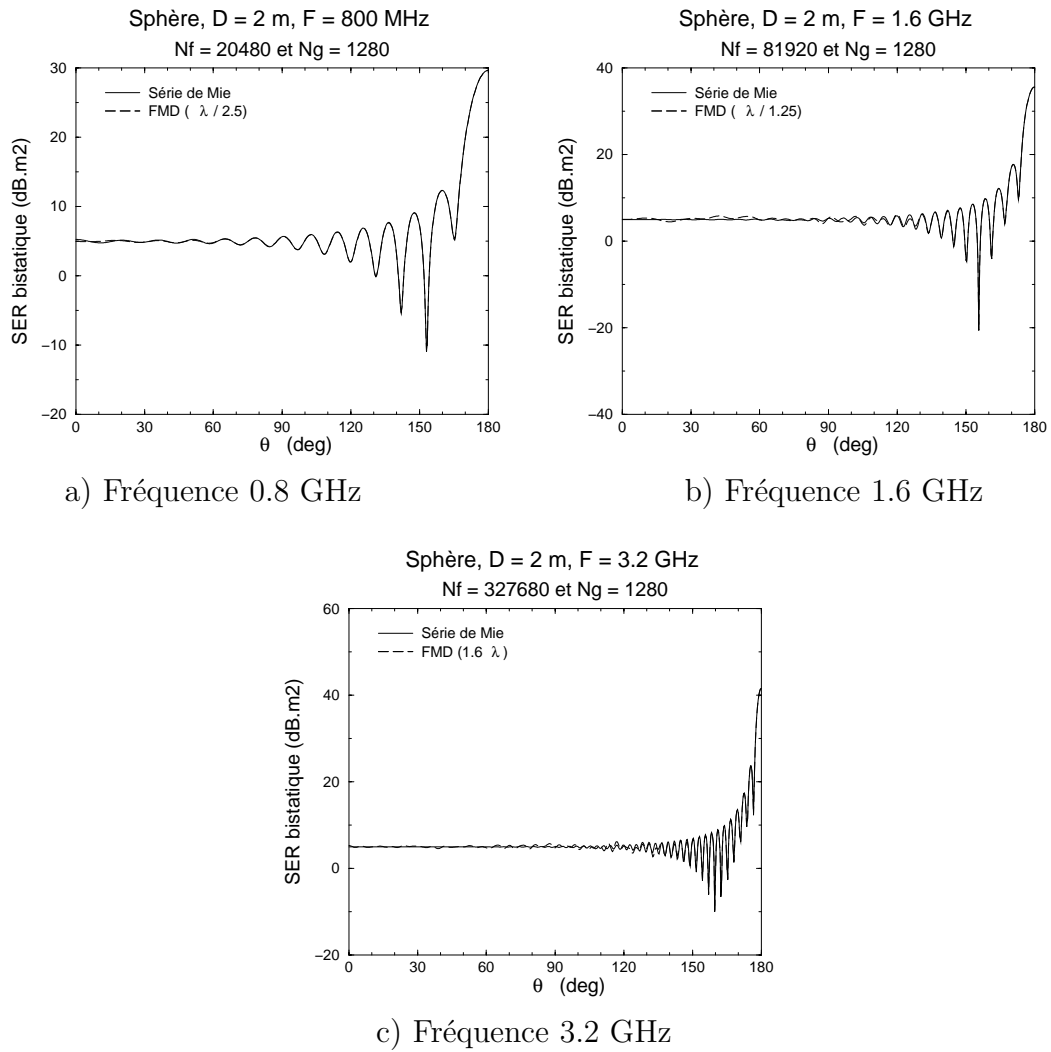


FIG. 12.3 – SER, conducteur parfait

Conclusion générale

Nous avons développé une méthode basée sur le couplage de deux types de méthodes ayant pour but de réduire les coûts de mémoire et de calcul des résolutions des équations intégrales de l'électromagnétisme. Par le biais d'une approximation de la phase de l'inconnue, la méthode de discrétisation microlocale développée par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou permet de réduire le nombre de degrés de liberté à $\mathcal{O}(k^{2/3})$ au lieu du classique $\mathcal{O}(k^2)$ où k désigne le nombre d'onde. Ensuite, la méthode multipôles est appliquée au calcul des matrices. Ce calcul intégral nécessitant une discrétisation fine, une application originale de la méthode multipôles permet de réduire sa complexité numérique de $\mathcal{O}(k^4)$ à $\mathcal{O}(k^3)$ pour une méthode à un niveau et $\mathcal{O}(k^{8/3})$ pour une méthode multi-niveaux. Ainsi, nous aboutissons à un nouvel algorithme dont la complexité globale est $\mathcal{O}(k^3 + N_{iter}k^{4/3})$ ou $\mathcal{O}(k^{8/3} + N_{iter}k^{4/3})$ au lieu de $\mathcal{O}(N_{iter}k^4)$ pour une méthode classique et $\mathcal{O}(N_{iter}k^3)$ ou $\mathcal{O}(N_{iter}k^2 \ln k)$ pour une méthode multipôles, N_{iter} désignant le nombre d'itérations de la méthode itérative considérée. D'un point de vue théorique, nous avons abouti à une méthode dont l'efficacité est remarquable.

D'un point de vue numérique, dans le cadre de l'équation de Helmholtz, nous avons considéré un couplage basé sur une méthode multipôles à un niveau. La comparaison de cette version avec la méthode multipôles à un niveau classique s'est avérée très avantageuse pour notre nouvelle méthode. La réduction du coût de la résolution itérative basée sur un maillage plus grossier (jusqu'à deux longueurs d'onde par maille), engendre une forte réduction globale par rapport à des méthodes plus classiques. Pour les équations de Maxwell, avec la considération d'une méthode multipôles multi-niveaux, le gain apporté est moins considérable. Il reste cependant intéressant notamment dans le cas des conditions au bord d'impédance $Z_r \neq 1$, telles que le cas conducteur parfait.

De nombreuses perspectives d'amélioration de cette nouvelle méthode sont envisageables. Tout d'abord, en ce qui concerne les conditions au bord de Neumann et de Robin, les estimations d'erreur imposent une discrétisation éléments-finis de degré 2 pour le calcul intégral. Cette condition n'ayant pas été respectée dans la mise en œuvre numérique de cette thèse, la montée en régularité, tant pour l'approximation de la géométrie, que pour le choix des éléments finis, constitue une première perspective envisagée pour la suite de nos travaux. La discrétisation microlocale nécessite aussi une hypothèse de convexité de l'obstacle. Des améliorations de l'approximation de la phase ont été proposées dans le chapitre 8 pour adapter la méthode au cas non convexe. D'autre part, une amélioration de l'application de la méthode multipôles est envisageable pour le calcul des transferts. Cette perspective repose sur les similitudes que

présente le nouvel algorithme avec le problème des obstacles multiples (paragraphe 4.1.2). La parallélisation du nouvel algorithme est une perspective incontournable qui ne devrait pas engendrer plus de difficultés que la parallélisation d'une application classique d'une méthode multipôles. Plus généralement, il est envisagé d'adapter la méthode afin de la coupler à une méthode éléments-finis de volume à l'aide d'une condition de transmission au bord.

Bibliographie

- [1] T. ABBOUD, J.-C. NÉDÉLEC, and B. ZHOU. Méthodes des équations intégrales pour les hautes fréquences. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 318, serie I :165–170, 1994.
- [2] T. ABBOUD, J.-C. NÉDÉLEC, and B. ZHOU. Improvement of the Integral Equation Method for High Frequency Problems. *Third international conference on mathematical aspects of wave propagation phenomena, SIAM*, pages 178–187, 1995.
- [3] M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. John Wiley, New York, 1972.
- [4] B. ALPERT, G. BEYLKIN, R. COIFMAN, and V. ROKHLIN. Wavelet-Like Bases for the Fast Solution of Second-Kind Integral Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14(1) :159–184, Jan. 1993.
- [5] G. ARFKEN. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 1985.
- [6] V.M. BABIČ and V.S. BULDYREV. *Short-Wavelength Diffraction Theory*. Springer-Verlag, 1991.
- [7] N. BARTOLI. *Modèles pour la diffraction d’ondes par des obstacles revêtus de couches minces - Résolution de problèmes de diffraction d’ondes via une formulation intégrale de type point selle*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse 3, Décembre 2000.
- [8] N. BARTOLI and F. COLLINO. Integral Equations via Saddle Point Problem for Acoustic Problems. *M2AN*, 34(5) :1023–1049, 2000.
- [9] A. BENDALI. *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, Janvier 1984.
- [10] A. N. BESPALOV. Cost-Effective Solution of the Boundary Integral Equations for 3 D Maxwell Problems. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 14(5) :403–428, 1999.
- [11] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, and V. ROKHLIN. Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms. *Comm. Pure Appl. Math.*, XLIV :141–183, 1991.
- [12] D. BOUCHE and F. MOLINET. *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*. Springer-Verlag, 1994.
- [13] M. BRANDFASS and W.C. CHEW. A Multilevel Fast Multipole Based Approach for the Efficient Reconstruction of Perfectly Conducting Scatterers. *J. Electromag. Waves and Appl.*, 15(1) :81–106, 2001.

-
- [14] F. BREZZI and M. FORTIN. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15. Springer-Verlag, 1991.
- [15] O.P. BRUNO and L.A. KUNYANSKY. A Fast High Order Algorithm for the Solution of Surface Scattering Problems : Basic Implementation, tests, and Applications. *J. Comput. Phys.*, 169(1) :80–110, May 2001.
- [16] O.P. BRUNO and L.A. KUNYANSKY. Surface Scattering in 3-D : An Accelerated High Order Solver. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 457(2016) :2921–2934, 2001.
- [17] F.X. CANNING. The Impedance Matrix Localisation (IML) Method for the Moment-Method Calculations. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, pages 18–30, October 1990.
- [18] F.X. CANNING. Sparse Approximation for Solving Integral Equations with Oscillatory Kernels. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(1) :71–87, January 1992.
- [19] Q. CARAYOL. *Développement et analyse d'une méthode multipôle multiniveau pour l'électromagnétisme*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, Décembre 2001.
- [20] J. CHAZARAIN and A. PIRIOU. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*. Gauthier-Villars, 1981.
- [21] H. CHENG, L. GREENGARD, and V. ROKHLIN. A Fast Adaptative Multipole Algorithm in Three Dimensions. *J. Comput. Phys.*, 155(2) :468–498, 1999.
- [22] G. COHEN and P. JOLY. *Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*. Ecole des Ondes - INRIA, Mars 1998.
- [23] R. COIFMAN, V. ROKHLIN, and S. WANDZURA. The Fast Multipole Method for the Wave Equation : A Pedestrian Prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35(3) :7–12, June 1993.
- [24] F. COLLINO and B. DESPRÉS. Integral Equations via Saddle Point Problems for Time-Harmonic Maxwell's Equations. Technical Report 00036, Université Paris VI, Novembre 2000.
- [25] F. COLLINO and K. MER-NKONGA. The Fast Multipole Method Applied to a Mixed Integral System for Time-Harmonic Maxwell's Equations. In *JEE 02 : European Symposium on Numerical Methods in Electromagnetics*, pages 121–126. ONERA - Toulouse, France, March 2002.
- [26] F. COLLINO and F. MILLOT. Méthodes multipôles pour les équations intégrales de Després. Rapport d'étude, CERFACS, Toulouse, France, Juin 2000.
- [27] F. COLLINO and F. MILLOT. A 2-Components Algorithm for the Multilevel Fast Multipole Method for Solving Large Scale Diffraction Problems. In *JEE 02 : European Symposium on Numerical Methods in Electromagnetics*, pages 103–108. ONERA - Toulouse, France, March 2002.

-
- [28] D. COLTON and R. KRESS. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theorie*, volume 93. Springer-Verlag, 1992.
- [29] E. DARRIGRAND. Coupling of Fast Multipole Method and Microlocal Discretization for the 3-D Helmholtz Equation. *J. Comput. Phys.*, 181 :126–154, 2002.
- [30] E. DARVE. Fast Multipole Method : A Mathematical Study. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 325, serie I(9) :1037–1042, 1997.
- [31] E. DARVE. *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, Juin 1999.
- [32] E. DARVE. The Fast Multipole Method (I) : Error Analysis and Asymptotic Complexity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(1) :98–128, 2000.
- [33] E. DARVE. The Fast Multipole Method : Numerical Implementation. *J. Comput. Phys.*, 160(1) :195–240, 2000.
- [34] E. DARVE. Efficient Fast Multipole Method for Low Frequency Scattering. *submitted to J. Comput. Phys.*, 2001.
- [35] I. DAUBECHIES. *Ten Lectures on Wavelets*, volume 61. CBMS Lecture Notes, SIAM, Philadelphia PA, 1992.
- [36] A. DE LA BOURDONNAYE. Convergence de l’approximation par des fonctions oscillantes d’une onde dans la limite des hautes fréquences. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 318, serie I :765–768, 1994.
- [37] A. DE LA BOURDONNAYE. High Frequency Approximation of Integral Equations Modeling Scattering Phenomena. *Mod. Math. et Anal. Num.*, 28(2) :223–241, 1994.
- [38] A. DE LA BOURDONNAYE. Une méthode de discrétisation microlocale et son application à un problème de diffraction. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 318, serie I :385–388, 1994.
- [39] A. DE LA BOURDONNAYE and M. TOLENTINO. Discrétisation d’un opérateur pseudo-différentiel d’ordre 1 en hautes fréquences. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 320, serie I :507–510, 1995.
- [40] B. DESPRÉS. Fonctionnelle quadratique et équations intégrales pour les problèmes d’onde harmonique en domaine extérieur. *M2AN*, 31(6) :679–732, 1997.
- [41] B. DESPRÉS. Fonctionnelle quadratique et équations intégrales. In G. Cohen and P. Joly, editors, *Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*, chapter 8, pages 2–81. INRIA, Ecole des Ondes, Mars 1998.
- [42] K.C. DONEPUDI, J.-M. JIN, S. VELAMPARAMBIL, J. SONG, and W.C. CHEW. A Higher Order Parallelized Multilevel Fast Multipole Algorithm for 3-D Scattering. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 49(7) :1069–1078, July 2001.
- [43] A. DUTT, M. GU, and V. ROKHLIN. Fast Algorithms for Polynomial Interpolation, Integration, and Differentiation. *J. Numer. Anal.*, 33(5) :1689–1711, October 1996.
- [44] M.A. EPTON and B. DEMBART. Multipole Translation Theory for the Three-Dimensional Laplace and Helmholtz Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16 :865–897, July 1995.

- [45] A.A. ERGIN, B. SHANKER, and E. MICHIELSSEN. The Plane-Wave Time-Domain Algorithm for the Fast Analysis of Transient Wave Phenomena. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 41(4) :39–52, August 1999.
- [46] J. GIROIRE. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, Septembre 1987.
- [47] W.L. GOLIK. Wavelet Packets for Fast Solution of Electromagnetic Integral Equations. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 46(5) :618–624, May 1998.
- [48] W.L. GOLIK. Sparsity and Conditioning of Impedance Matrices Obtained with Semi-orthogonal and Bi-orthogonal Wavelet Bases. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 48(4) :473–481, 2000.
- [49] L. GREENGARD and V. ROKHLIN. The Rapid Evaluation of Potential Fields in Three Dimensions. In *Vortex Methods in Lecture Notes in Mathematics, 1360*, Springer Verlag, pages 121–141, 1988.
- [50] L. GREENGARD and V. ROKHLIN. A New Version of the Fast Multipole Method for the Laplace Equation in Three Dimensions. *Acta Numerica*, 6 :229–269, 1997.
- [51] T. HA DUONG. *Equations intégrales pour la résolution numérique de problèmes de diffraction d'ondes acoustiques dans \mathbb{R}^3* . Thèse de doctorat, Université Paris VI, Octobre 1987.
- [52] L. HÖRMANDER. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, 1983.
- [53] B. HU, W.C. CHEW, E. MICHIELSSEN, and J. ZHAO. Fast Inhomogeneous Plane-Wave Algorithm (FIPWA) for the Fast Analysis of Two-Dimensional Scattering Problems. Research Report CCEM-5-99, University of Illinois, Urbana, 1999.
- [54] D. JIAO, M. LU, E. MICHIELSSEN, and J.-M. JIN. A Fast Time-Domain Finite Element-Boundary Integral Method for Electromagnetic Analysis. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 49(10) :1453–1461, Oct. 2001.
- [55] S. KOC, J.M. SONG, and W.C. CHEW. Error Analysis for the Numerical Evaluation of the Diagonal Forms of the Scalar Spherical Addition Theorem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(3) :906–921, April 1999.
- [56] V. LANGE. *Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Octobre 1995.
- [57] V. LECOMPTE. *Compatibilité électromagnétique d'un téléphone portable avec son environnement*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Juillet 1997.
- [58] M. LEMOU. Fast Multipole Method for Multidimensional Integrals. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 326, serie I :105–110, 1998.
- [59] C.-C. LU and W.C. CHEW. A Multilevel Algorithm for Solving a Boundary Integral Equation of Wave Scattering. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 7(10) :466–470, July 1994.

- [60] V. LUBET. Diffraction d'une onde électromagnétique sur un corps 3.D. Résolution par méthode intégrale avec éléments plans et triangulaires. Rapport de d.e.a., Université Bordeaux I, 1991.
- [61] P.A. MARTIN. Multiple Scattering and the Rehr-Albers-Fritzsche Formula for the Propagator Matrix. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 31 :8923–8932, 1998.
- [62] R.B. MELROSE and M.E. TAYLOR. Near Peak Scattering and the Corrected Kirchhoff Approximation for a Convex Obstacle. *Adv. in Math.*, 55 :242–315, 1985.
- [63] K. MER-NKONGA. Reformulation des équations intégrales de Després, validations et optimisation du code Maxiim. Rapport CEA/CESTA/DEV/SIS/GANA DO 280, CEA-CESTA, Septembre 1999.
- [64] K. MER-NKONGA. The Fast Multipole Method Applied to a Mixed Integral System for Time-Harmonic Maxwell's Equations. In *Second International Conference on Boundary Integral Methods : Theory and Applications*. IMA - University of Bath, September 2000.
- [65] K. NABORS, F.T. KORSMEYER, F.T. LEIGHTON, and J. WHITE. Preconditioned, Adaptive, Multipole-Accelerated Iterative Methods for Three-Dimensional First-Kind Integral Equations of Potential Theory. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15 :714–735, May 1994.
- [66] J.-C. NÉDÉLEC. Résolution des équations d'ondes acoustiques et électromagnétiques. Cours de d.e.a., Ecole Polytechnique, 1999.
- [67] J.-C. NÉDÉLEC. *Acoustic and Electromagnetic Equations, Integral Representation for Harmonic Problems*. Springer-Verlag, 2001.
- [68] J. RAHOLA. Diagonal Forms of the Translation Operators in the Fast Multipole Algorithm for Scattering Problems. *BIT*, 36(2) :333–358, 1996.
- [69] P.A. RAVIART and J.M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1983.
- [70] M. REED and B. SIMON. *Scattering Theory : Method of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, 1979.
- [71] V. ROKHLIN. Rapid Solution of Integral Equations of Scattering Theory in Two Dimensions. *J. Comput. Phys.*, 86(2) :414–439, 1990.
- [72] V. ROKHLIN. Diagonal Forms of Translation Operators for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. Research Report YALEU/DCS/RR-894, Yale University, March 1992.
- [73] S. A. SAUTER. Variable Order Panel Clustering. *Computing*, 64 :223–261, 2000.
- [74] H. SCHWICHTENBERG, G. WINTER, and H. WALLMEIER. Acceleration of Molecular Mechanics Simulation by Parallelization and Fast Multipole Techniques. *Parallel Computing*, 25 :535–546, 1999.
- [75] J.M. SONG and W.C. CHEW. Multilevel Fast Multipole Algorithm for Solving Combined Field Integral Equations of Electromagnetic Scattering. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 10(1) :14–19, September 1995.

-
- [76] J.M. SONG, C.-C. LU, and W.C. CHEW. Multilevel Fast Multipole Algorithm for Electromagnetic Scattering by Large Complex Objects. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 45(10) :1488–1493, October 1997.
- [77] E.M. STEIN. *Harmonic Analysis : Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, 1993.
- [78] B. STUPFEL. A Hybrid Finite Element and Integral Equation Domain Decomposition Method for the Solution of the 3-D Scattering Problem. *J. Comput. Phys.*, 172 :451–471, 2001.
- [79] G. SYLVAND. *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : Performances, parallélisation, applications*. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, Juin 2002.
- [80] J. TAUSCH. Wavelet and Multipole Sparsification to Integral Equations on Geometrically Complicated Boundaries. In *Second International Conference on Boundary Integral Methods : Theory and Applications*. IMA - University of Bath, September 2000.
- [81] M.E. TAYLOR. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, 1981.
- [82] M. TOLENTINO. *Résolution hautes fréquences d'équations intégrales par une méthode de discrétisation microlocale*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Décembre 1997.
- [83] L. VERNHET. *Approximation par éléments finis de frontière des problèmes de diffraction d'ondes avec condition d'impédance*. Thèse de doctorat, Université de Pau, Décembre 1997.
- [84] R.L. WAGNER and W.C. CHEW. A Ray-Propagation Fast Multipole Algorithm. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 7(10) :435–438, July 1994.
- [85] R.L. WAGNER and W.C. CHEW. A Study of Wavelets for the Solution Electromagnetic Integral Equations. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 43(8) :802–810, August 1995.
- [86] Y.-L. XU. Calculation of the Addition Coefficients in Electromagnetic Multisphere-Scattering Theory. *J. Comput. Phys.*, 127 :285–298, 1996.
- [87] Y.-L. XU. (Erratum) Calculation of the Addition Coefficients in Electromagnetic Multisphere-Scattering Theory. *J. Comput. Phys.*, 134 :200, 1997.
- [88] N. YARVIN and V. ROKHLIN. A Generalized One-Dimensional Fast Multipole Method with Application to Filtering of Spherical Harmonics. *J. Comput. Phys.*, 147 :594–609, 1998.
- [89] N. YARVIN and V. ROKHLIN. An Improved Fast Multipole Algorithm for Potential Fields on the Line. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(2) :629–666, March 1999.
- [90] B. ZHOU. *Méthode des équations intégrales pour la résolution des problèmes de diffraction à hautes fréquences*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, Novembre 1995.

Résumé / Abstract

RÉSUMÉ

La résolution des équations intégrales liées aux problèmes de propagation des ondes est confrontée aux limitations des moyens informatiques pour la considération des problèmes à hautes fréquences. Nous proposons dans ce mémoire de thèse, un couplage de deux types de méthodes ayant pour but de réduire les coûts de calcul et la place mémoire consommée lors de la résolution de ces équations intégrales par méthode itérative. La méthode de discrétisation microlocale introduite par T. Abboud, J.-C. Nédélec et B. Zhou, permet de réduire considérablement la taille du système par approximation de la phase de l'inconnue. Cependant, elle nécessite un précalcul très coûteux. Nous utilisons alors le principe des méthodes multipôles rapides introduites par V. Rokhlin, pour accélérer ce précalcul. Cette application originale des méthodes multipôles dans le cadre d'une discrétisation microlocale aboutit à une méthode dont l'application à la formulation intégrale de B. Després pour l'équation de Helmholtz est très efficace. Son application à la résolution des équations de Maxwell bien que moins spectaculaire est tout de même intéressante.

MOTS CLES

Acoustique, Helmholtz, Electromagnétisme, Maxwell, Equations intégrales de Després, Éléments finis, Méthode multipôles rapide, Discrétisation microlocale

ABSTRACT

We are concerned with integral equations of scattering. In order to deal with the well-known high frequency problem, we suggest a coupling of two kind of methods that reduce the numerical complexity of iterative solution of these integrals equations. The microlocal discretization method introduced by T. Abboud, J.-C. Nédélec and B. Zhou, enables one to reduce efficiently the size of the system considering an approximation of the phase function of the unknown. However, the method needs an expensive precalculation. We suggest the use of the fast multipole method introduced by V. Rokhlin, in order to speed up the precalculation. This work is an original application of the fast multipole method for acceleration of a microlocal discretization method within the new integral formulation written by B. Després. Numerical results obtained for Helmholtz's equation are very satisfying. For Maxwell's equations, they are also quite interesting.

KEY WORDS

Acoustic, Helmholtz, Electromagnetism, Maxwell, Després's Integral Equations, Finite Elements , Fast Multipôle Method, Microlocal Discretization