

N° d'ordre : 2954

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE

Par **Fabrice Bazzaro**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Etiquetage de graphes : codage et coloration

Soutenue le : 4 février 2005

Après avis des rapporteurs :

Sylvain Gravier Chargé de Recherche HDR
Ondrej Sykora . Professeur

Devant la commission d'examen composée de :

Cyril Gavoille ..	Professeur	Examineur
Sylvain Gravier	Chargé de Recherche HDR	Rapporteur
Christophe Paul	Chargé de Recherche	Examineur
André Raspaud	Professeur	Examineur
Eric Sopena	Professeur	Président
Ondrej Sykora .	Professeur	Rapporteur

Etiquetage de graphes : codage et coloration

Résumé : Dans ce mémoire de thèse, nous nous intéressons à deux variantes d'étiquetage de graphes : l'étiquetage de distance et l'étiquetage avec contraintes tel que le $L(p, q)$ -étiquetage et l'étiquetage $(d, 1)$ -total.

L'étiquetage de distance est un codage du graphe permettant de calculer des distances. Nous nous sommes efforcés d'en définir un schéma pour les graphes de permutation. Pour cela, une étude sur la structure de cette famille a été effectuée.

Dans cette optique, nous avons proposé une caractérisation de cette famille et défini un algorithme de reconnaissance dynamique.

La seconde partie de notre travail s'est portée sur l'étiquetage $(d, 1)$ -total et le $L(p, q)$ -étiquetage qui sont des problèmes liés à l'assignation de fréquences dans des réseaux d'émetteurs.

Pour l'étiquetage $(d, 1)$ -total, nous obtenons des résultats optimaux sur la largeur de la bande de fréquence utilisée dans le cas des topologies planaires de grande maille et de grand degré maximum.

Enfin, pour le $L(p, q)$ -étiquetage une étude de complexité sur des étiquetages sans trou a été effectuée. Nous donnons la complexité de la décidabilité sur cet étiquetage dans les graphes quelconques suivant les valeurs des paramètres p et q . En effet, tous les graphes n'admettent pas de $L(p, q)$ -étiquetage sans trou, le problème de décidabilité est donc primordial.

Discipline : Informatique

Mots-Clefs :

Etiquetage de distance,
graphes de permutation,
caractérisation,
algorithme dynamique de reconnaissance,
coloration,
 $L(p, q)$ -étiquetage,
étiquetage $(d, 1)$ -total.

LaBRI,
Université Bordeaux 1,
351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex (FRANCE).

Labeling of graphs : coding and coloration

Abstract : In this thesis, we focus on two ways of labeling of graphs : distance labeling and labeling with constraints such as the $L(p, q)$ -labeling and the $(d, 1)$ -total labeling.

The distance labeling is a coding of the graph. We have defined a distance labeling scheme for the permutation graphs which implies a study on the structure of this family.

In this way, we have proposed a characterization and a dynamic recognition algorithm for the permutation graphs.

In the second part of this thesis, our work is focused on the $(d, 1)$ -total labeling and the $L(p, q)$ -labeling which are linked with problems on frequency assignation in transmitter networks.

For the $(d, 1)$ -total labeling, we have obtained tight results on the span of the frequency spectrum for planar topologies with large girth and high maximum degree.

Finally, we have studied the complexity of the no-hole $L(p, q)$ -labeling. We give the complexity of the decidability problem on this labeling for any graph depend on the parameters p and q . Indeed, all the graphs do not have a no-hole $L(p, q)$ -labeling, so, the decidability problem has an important place.

Discipline : Computer-Science

Keywords :

Distance labeling,
permutation graphs,
characterization,
dynamic recognition algorithm,
coloration,
 $L(p, q)$ -labeling,
 $(d, 1)$ -total labeling.

LaBRI,
Université Bordeaux 1,
351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex (FRANCE).

A tous, un grand merci...

Je tiens à remercier un grand nombre de personnes sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est aujourd'hui. Je citerai donc l'ensemble des personnes ayant contribué de près ou de loin à cette thèse dans l'ordre chronologique.

Je remercie, en premier lieu, ma famille, les premiers à m'avoir encouragé dans mes études, que ce soit pour montrer l'exemple aux petits frères ou tout simplement pour mon avenir. Je remercie donc mes parents et mes frères, même si ces mots sont quelque peu inutiles...

Ensuite, dans mon cursus, l'étape clef m'ayant permis d'en arriver à la thèse fût sans nul doute celle de l'IUT. Je veux ici remercier les enseignants qui m'ont encouragé et / ou donné envie de continuer dans cette voie grâce à la passion avec laquelle ils effectuent leurs enseignements : Michel Bauderon, Michel Billaud, Brigitte Carles, Serge Dulucq, Olivier Guibert, Jean-Michel Lépine, Franck Rubi, Eric Sopena...

Je tiens également à remercier les amis que j'ai depuis cette période avec qui j'ai été bizuté et qui accompagnent de nombreux bons moments même si nous ne sommes plus nécessairement proches géographiquement : Nico et Valérie, Laurent et Séverine, Bruno et Oïa, Marco et enfin les deux piliers Mclolo et Ludo.

L'étape suivante fut le DEA durant lequel Christophe Paul me présenta les graphes et me donna envie de continuer ce pour quoi je le remercie.

Je vais maintenant en arriver à la thèse elle-même, je tiens à commencer par mon Directeur de thèse André Raspaud pour sa patience. Même s'il a été nécessaire de me bousculer de temps en temps, cela a toujours été fait de manière à me motiver et je l'en remercie. Je veux aussi le remercier "au niveau" scientifique de la rigueur dont il fait preuve et dont j'espère me souvenir dans le futur même lorsque "cela se voit".

Durant cette thèse, j'ai eu la chance de cotoyer un grand nombre de personnes intéressantes que ce soit au niveau personnel ou professionnel.

Tout d'abord l'équipe de football du LaBRI, avec qui le défoulement du vendredi garantit de passer un bon week-end. Je remercie donc Afif, Bilel, Jérémie, Laurent, Laurent, Pascal, Pierre, Pierre, Rui, Yon et Yvan.

La NFT dont font partie, Alexandre, Daniel et Mickael avec qui on a passé de bons moments, et pas seulement lors de "xblast", on a quand même pas mal discuté boulot avec souvent de bonnes idées. Les amis des mini-GTs David et Julien, ou amis tout simplement, comme Jean-Baptiste ainsi que Martin rencontré plus récemment avec qui il est plaisant de travailler en temps que co-bureau et de discuter même si je ne comprends pas ce qu'il fait.

Les gens externes au LaBRI avec qui j'ai eu la chance de travailler, notamment, Guillaume Fertin et Frédéric Havet.

Et enfin pour finir avec le dernier jour, si l'on veut, de la thèse, je remercie l'ensemble de mon jury, Cyril Gavaille, Sylvain Gravier, Christophe Paul, André Raspaud, Eric Sopena et Ondrej Sykora pour leur participation à mon jury, pour leur disponibilité mais surtout pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail.

La dernière personne et non la moindre est celle qui est avec moi depuis trois ans et qui est encore à mes côtés, ce soir, alors que je rédige ces remerciements. Je te remercie Florence toi qui est la dernière à encore participer à cette thèse alors que tu as été la première à la lire pour en corriger les fautes.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Chaîne / Chemin	4
1.2 Cycle	5
1.3 Connexité	5
1.3.1 Graphe connexe	5
1.3.2 Composante connexe	6
1.4 Arbre et forêt	6
1.5 Graphe biparti	6
1.6 Ensemble dominant	7
I Graphes de permutation : caractérisation, reconnaissance et étiquetage de distance	9
2 Caractérisation	11
2.1 Définitions et représentations	11
2.1.1 Définitions et résultats connus	11
2.1.2 Graphes de permutation et représentations	16
2.2 Nouvelle caractérisation des graphes de permutation	19
2.2.1 Résultats connus sur les graphes de permutation bipartis	19
2.2.2 Généralisation	20
2.3 Conclusion	28
3 Reconnaissance dynamique	29
3.1 Introduction	29
3.2 Décomposition modulaire	30
3.2.1 Définitions	30

3.2.2	Théorème de décomposition modulaire	32
3.2.3	Liens avec l'orientation transitive	33
3.2.4	Cas des cographes	35
3.3	Reconnaissance des cographes	36
3.4	Reconnaissance des graphes de permutation premiers	37
3.4.1	Marquage	39
3.4.2	Propriété d'adjacence	39
3.4.3	Propriété de transitivité	41
3.4.4	Propriété de fermeture	45
3.4.5	Insertion du nouveau sommet	47
3.5	Conclusion	57
4	Etiquetage de distance	59
4.1	Motivations	59
4.2	Représentation des graphes de permutation dans un repère cartésien	60
4.3	Etiquetage de distance des graphes de permutation	61
4.4	Implémentation	66
4.4.1	Etiquetage de distance des graphes d'intervalles propres	66
4.4.2	Décodeur de distance	68
4.4.3	Taille des étiquettes	72
4.4.4	Construction des étiquettes	73
4.5	Extensions	76
4.5.1	Extraction de plus courts chemins	76
4.5.2	Schéma de routage compact	76
4.5.3	Graphes de permutation circulaires	77
4.6	Conclusion	79
II	$L(p, q)$-étiquetage et étiquetage $(d, 1)$-total	81
5	Préliminaires	83
5.1	Notations	83
5.1.1	Colorations	84
5.1.2	Chaîne Hamiltonienne	84
5.1.3	Classes de graphes	85
5.2	Notation spécifique	86

6	Assignation de fréquences	87
6.1	Problématique	87
6.2	Modélisation par des étiquetages	88
7	Etiquetage $(d, 1)$-total de graphes planaires	91
7.1	Définition	91
7.2	Résultats existants	92
7.2.1	Coloration totale	92
7.2.2	Majorations issues du $L(d, 1)$ -étiquetage	94
7.2.3	Majorations et minorations	94
7.2.4	Conjectures et résultats préliminaires	96
7.3	Résultats	98
7.4	Preuve du Théorème	98
7.4.1	Préliminaires	99
7.4.2	Preuve de (i)	101
7.4.3	Preuve de (ii)	102
7.4.4	Preuve de (iii)	105
7.4.5	Preuve de (iv)	108
7.5	Conclusion	111
8	Résultats sur le $L(p, q)$-étiquetage	113
8.1	Définition	113
8.2	Résultats existants	114
8.3	$L(p, q)$ -étiquetage sans trou	115
8.4	Conclusion	118
	Conclusion et perspectives	121
	Bibliographie	131
	Index	133

Table des figures

1.1	Exemple d'un graphe G et de son complémentaire \overline{G}	4
1.2	Le P_4 ou chaîne de longueur 3.	5
1.3	Exemple de cycle : un cycle de longueur 6 noté C_6	5
1.4	Exemple de deux composantes connexes : forêt composée de deux arbres. . . .	6
1.5	Exemple de graphe biparti	7
2.1	Exemple de graphe de permutation.	11
2.2	Graphe d'intersection d'intervalles sur la droite réelle ou graphe d'intervalles .	12
2.3	Représentation de G sous forme de graphe d'intersection de segments	12
2.4	Représentation de \overline{G}	13
2.5	Exemple de graphe de comparabilité n'étant pas de co-comparabilité	14
2.6	Pour chaque position de j sur la droite inférieure, j doit être adjacent à au moins i ou j	16
2.7	Pour chaque position de j sur la droite inférieure, j doit être non adjacent à au moins i ou k	16
2.8	Configurations interdites dans une extension linéaire non-séparante (les liens en pointillé sont des non-arêtes)	16
2.9	Exemple de graphe d'intersection, de chevauchement et d'inclusion à partir de la même représentation	17
2.10	Ouverture du modèle de graphe d'intersection.	18
2.11	Graphe de chevauchement obtenu après ouverture du graphe d'intersection de la Figure 2.9	18
2.12	Graphe d'inclusion obtenu après ouverture du graphe d'intersection du complémentaire du graphe de la Figure 2.9	19
2.13	Représentation avec le modèle des graphes d'intersection de cordes avec un équateur en pointillé.	19
2.14	Exemple de graphe décomposé en stables	21
2.15	Exemple de stable ordonné par un ordre vérifiant la propriété d'adjacence . .	23
2.16	Exemple de stables produits par la décomposition précédente basée sur un ordre ayant la propriété de fermeture	23

2.17	Cas $i = j = l$	25
2.18	Cas $i = j < l$	26
2.19	Cas $i < j = l$	26
2.20	Premier cas de $i = l \neq j$	26
2.21	Cas $i < j < l$	27
2.22	Premier cas de $i < l < j$	27
2.23	Premier cas de $j < l < i$	28
3.1	Equivalence entre les sommets 1 et 3 (entre les sommets 2 et 4).	30
3.2	Exemple de module	31
3.3	Graphe premier pour la décomposition modulaire (décomposable seulement en modules triviaux)	31
3.4	Décomposition modulaire d'un graphe.	32
3.5	Deux arêtes dont l'orientation est liée	33
3.6	Les deux orientations possibles pour une paire d'arêtes en relation par Γ	33
3.7	Recherche d'une orientation transitive dans un graphe de comparabilité.	34
3.8	Orientation transitive du graphe quotient.	34
3.9	Orientation transitive de l'ensemble X	34
3.10	Exemple de cographe	35
3.11	Exemple de cographe avec son coarbre associé.	36
3.12	Exemple de graphe de permutation et sa structure de données associée.	37
3.13	Marquage des sommets appartenant à $N(x) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$	39
3.14	Orientation des nouvelles arêtes	44
3.15	Situation d'un sommet u avant son décalage	51
3.16	Situation d'un sommet u avec un sommet v dont la propriété d'adjacence n'est pas respectée si u est décalé	52
3.17	Situation dans la boucle de l'algorithme	54
3.18	Cas lorsque $\text{succ}(f_c) <_{\sigma} l_c$	54
3.19	Cas lorsque $f_c \leq_{\sigma} l_c$	55
4.1	Un graphe de permutation $G[\pi]$ avec une de ses représentations $\pi = 5\ 7\ 2\ 6\ 1, 11, 8, 10, 4, 3, 9)$	60
4.2	Représentation dans le repère cartésien du graphe de permutation de la Figure 4.1.	61
4.3	Les graphes d'intervalles propres G_A et G_B de la Figure 4.2	63
4.4	Cas 2 du théorème où $u < v$ et $f_A(v) \leq l_A(u)$	65
4.5	Cas 3 du théorème où $u < v$ et $f_A(v) \leq l_A(l_B(u))$	65
4.6	Décalage des bornes lorsque des intervalles ont leurs bornes gauches confondues	69
4.7	Décalage des bornes lorsque des intervalles ont leurs bornes droites confondues	69

4.8	Décalage des bornes lorsque deux intervalles se succèdent avec leurs bornes confondues	69
4.9	Exemple de graphe de permutation circulaire	78
4.10	Graphe de permutation circulaire ouvert pour former un graphe de permutation	78
5.1	Chaîne Hamiltonienne dans le graphe de Petersen	85
5.2	Graphe subdivisé du graphe de Petersen	85
5.3	Intervalle d'étiquettes lorsque les étiquettes 0, 1, 2, 5, 7, 9 et 10 sont utilisées	86
6.1	Un émetteur E et les émetteurs pour lesquels se produisent des interférences.	88
6.2	Voisins du sommet représentant l'émetteur E	89
6.3	Graphe obtenu en itérant pour chaque sommet.	89
6.4	Sommets et contraintes sur les étiquettes par rapport au sommet E	90
7.1	Un graphe et son graphe d'incidence associé.	91
7.2	Le $L(2,1)$ -étiquetage d'un graphe d'incidence et l'étiquetage $(2,1)$ -total du graphe correspondant.	92
7.3	Répartition des couleurs pour un graphe différent d'un cycle impair ou d'une clique.	93
7.4	Liste de taille $\Delta + 1$ des couleurs possibles pour une arête xy d'un graphe G .	94
7.5	Répartition des étiquettes des sommets et des arêtes sur l'intervalle.	95
7.6	Répartition des étiquettes des sommets sur l'intervalle.	97
7.7	Graphe planaire nécessitant $\Delta + 2d - 1$ étiquettes avec $d = 2$	97
7.8	Deux 2-sommets adjacents.	101
7.9	Un 2-sommet v adjacent à un Δ -sommet u et un sommet w tel que $d(w) < \Delta$.	103
7.10	Un 3-sommet v adjacent à deux 3-sommets u et w	105
7.11	Règles 2 et 3 de la procédure de déchargement (3-sommets).	110
7.12	Règles 4 et 5 de la procédure de déchargement (4-sommets et 5-sommets). . .	110
8.1	Graphe avec un $L(2,1)$ -étiquetage avec 4 étiquettes et avec un $L(2,1)$ -étiquetage sans trou avec 5 étiquettes.	113
8.2	Exemple de 2-chaîne de longueur 5.	116
8.3	Exemple de construction d'un graphe H à partir d'un graphe G avec $p = 2$. .	117

Introduction

Différents types de réseaux (de capteurs, de processeurs ou de télécommunication, ...) sont actuellement utilisés. Leur modélisation, par des graphes, semble naturelle : un sommet du graphe correspond à un nœud du réseau et une arête à une liaison.

De nombreux problèmes connus dans les réseaux sont modélisés par des *étiquetages de graphes*. Dans ce mémoire de thèse, nous nous intéressons à deux sortes d'étiquetage :

- *L'étiquetage de distance*. La distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin les reliant. Nous devons attribuer à chaque sommet *une étiquette* telle que si nous considérons une paire quelconque de sommets a et b , une *requête de distance* donne la distance entre a et b en utilisant seulement ces étiquettes. Cette fonction est aussi appelée *décodeur de distance*. Notre objectif est de minimiser la taille des étiquettes.
- *Le $L(p, q)$ -étiquetage et l'étiquetage $(d, 1)$ -total*. Dans les deux cas, notre objectif est d'attribuer une étiquette entière à chacun des sommets. Dans le second cas, nous étiquetons également les arêtes et cela, de manière à respecter des contraintes locales. Dans le premier cas, deux sommets voisins doivent avoir des étiquettes dont la différence est au moins p et deux sommets à distance deux doivent avoir des étiquettes dont la différence est au moins q . Dans le second cas, *l'étiquetage $(d, 1)$ -total* est tel que deux sommets ou deux arêtes adjacents doivent avoir des étiquettes différentes, un sommet et une arête lui étant incidente doivent avoir des étiquettes différant d'au moins d . Dans ces deux cas, l'objectif est de minimiser le nombre d'étiquettes utilisées.

Ce mémoire de thèse se divise en deux parties, la première concerne uniquement les graphes de permutation, la seconde présente un ensemble de résultats sur l'étiquetage $(d, 1)$ -total de graphes planaires et le $L(p, q)$ -étiquetage.

Dans le chapitre 1, nous présentons quelques définitions et notations usuelles du domaine que nous considérons comme importantes pour la compréhension du texte.

Dans le chapitre 2, nous donnons un ensemble de propriétés locales qui caractérisent les graphes de permutation. Ces propriétés permettent de construire des algorithmes pour la reconnaissance dynamique des graphes de permutation ainsi qu'un schéma d'étiquetage de distance.

Dans le chapitre 3, nous définissons un algorithme incrémental partiel de reconnaissance des graphes de permutation. Nous formulons une requête d'ajout d'un sommet dans un graphe de permutation en spécifiant son voisinage dans ce graphe. A partir de cet ensemble de voisins nous devons déterminer si en ajoutant ce sommet le graphe reste de permutation, auquel cas le sommet doit être ajouté dans la structure de données, sinon l'insertion est impossible.

Dans le chapitre 4, nous définissons un schéma d'étiquetage de distance pour les graphes

de permutation que nous étendons ensuite aux graphes de permutation circulaires.

Dans le chapitre 5, nous introduisons la seconde partie en donnant un ensemble de définitions complémentaires aux préliminaires de la première partie. Ces nouvelles définitions sont essentielles pour les chapitres 7 et 8.

Dans le chapitre 6, nous définissons l'assignation de fréquences et son lien avec les problèmes de $L(p, q)$ -étiquetage et d'étiquetage $(d, 1)$ -total.

Dans le chapitre 7, nous prouvons un théorème permettant de donner le nombre d'étiquettes nécessaires pour étiqueter $(d, 1)$ -totalement les graphes planaires suivant leurs propriétés. L'objectif est de donner le nombre minimal d'étiquettes, nos résultats sont optimaux lorsque $d = 2$ et optimaux ou à un de l'optimalité lorsque $d = 3$.

Dans le chapitre 8, nous effectuons une étude de complexité sur le problème du $L(p, q)$ -étiquetage sans trou, i.e. avec des entiers formant un intervalle tel que tout entier dans l'intervalle est utilisé. Nous étudions la complexité du problème suivant : nous avons un graphe en entrée et nous voulons savoir s'il contient un $L(p, q)$ -étiquetage sans trou.

Chapitre 1

Préliminaires

Les notations et définitions usuelles de la théorie des graphes [Ber83, BLS99] sont introduites dans ce premier chapitre. Le Chapitre 5 en deuxième partie présentera les notations usuelles pour la coloration et l'étiquetage de graphes. Le lecteur averti peut directement se référer à la première partie consacrée aux graphes de permutation.

Un *graphe orienté* $G = (V, A)$ est un couple constitué :

1. par un ensemble $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
2. par une famille $A = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ d'éléments, appelés *arcs*, du produit cartésien

$$V \times V = \{(x, y) \mid x \in V, y \in V\}$$

Un élément (u, v) de $V \times V$ peut apparaître plusieurs fois dans la famille A , nous parlons alors d'*arc multiple*. Le nombre de sommets du graphe G est appelé l'*ordre* de G .

Un arc de G de la forme (u, u) est appelé une *boucle*. Pour un arc (u, v) , le point u est son *extrémité initiale*, le point v son *extrémité terminale*. Nous appelons v le *successeur* de u et u le *prédécesseur* de v s'il existe un arc ayant son extrémité initiale en u et son extrémité terminale en v .

L'ensemble des successeurs d'un sommet u se note $N^+(u)$ et l'ensemble de ses prédécesseurs $N^-(u)$. L'ensemble des voisins de u est noté $N(u) = N^+(u) \cup N^-(u)$.

Lorsque l'orientation de la relation ne nous intéresse pas, nous utilisons les graphes non-orientés. De ce fait, au lieu de l'arc (u, v) , nous considérons l'ensemble formé par les points u et v que nous notons $\{u, v\}$ et que nous appelons une *arête*. Deux sommets u et v sont aussi dits *adjacents* lorsqu'ils sont voisins (liés par une arête). De même deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune. L'ensemble des arêtes d'un graphe G est noté E et le voisinage d'un sommet u , noté $N(u)$, représente l'ensemble des sommets adjacents à u . Nous disons de deux sommets non-adjacents qu'ils forment une *non-arête*.

Sauf indication particulière, seulement des graphes non-orientés simples (sans boucle ni arête multiple) sont étudiés par la suite.

Le *degré* d'un sommet u dans le graphe G est noté $d_G(u)$, c'est le nombre d'arêtes ayant une extrémité en u . Nous utilisons $d(u)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe concerné. Pour un graphe G son *degré maximum* est : $\Delta(G) = \max \{d(u) \mid u \in V\}$

Nous pouvons, de la même façon que pour le degré, noter le degré maximum Δ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe concerné.

L'ensemble $N(v) \cup \{v\}$ est noté $N[v]$. Soit S un ensemble de sommets de G , le voisinage de S , noté $N(S)$, est l'union des voisinages des sommets de S privé de l'ensemble S . La notation $N[S]$ correspond à $N(S) \cup S$.

Notons l'existence de deux familles de graphes particulières : un *stable* (lorsqu'un sous-graphe induit est considéré, les termes *stable* et *ensemble indépendant* sont indifféremment utilisés), tous les sommets sont non-adjacents deux à deux. Un *graphe complet* ou *clique*, tous les sommets sont adjacents deux à deux. Une clique de taille (nombre de sommets) p est notée K_p et peut aussi être appelée p -clique.

Le *complémentaire* d'un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est noté $\overline{G} = (V, E')$ avec $E' = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \notin E\}$ (Figure 1.1 ci-dessous).

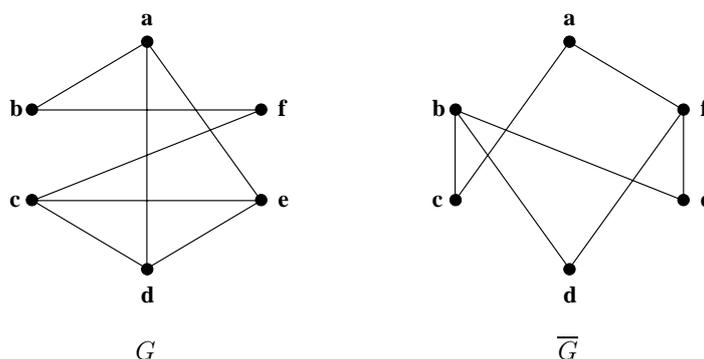


FIG. 1.1 – Exemple d'un graphe G et de son complémentaire \overline{G}

Un graphe $G' = (V', E')$ est un sous-graphe de G si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Si $E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}$, alors G' est un sous-graphe induit de G . G' induit par V' est généralement noté $G[V']$.

Une propriété P est *héréditaire* si elle est vraie pour tout sous-graphe induit de G . De même, une famille de graphes \mathcal{F} est dite héréditaire, si tous les sous-graphes induits d'un graphe de \mathcal{F} appartiennent à \mathcal{F} .

Nous avons besoin de définir la notion d'isomorphisme :

Définition 1.1 Deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont isomorphes s'il existe une fonction bijective f de V_1 dans V_2 telle que $\{u, v\} \in E_1$ si et seulement si $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Afin de compléter ces préliminaires, nous définissons maintenant un ensemble de familles de graphes et de sous-ensembles particuliers de graphes nécessaires par la suite.

1.1 Chaîne / Chemin

Les deux définitions suivantes sont valides dans le cadre de graphes orientés, celle de la chaîne dans le contexte non-orienté.

Définition 1.2 Une chaîne notée P_k est une séquence $\mu = u_1, u_2, \dots, u_k$ d'arêtes de G telle que chaque arête de la séquence a une extrémité en commun avec l'arête précédente et l'autre extrémité en commun avec l'arête suivante (Figure 1.2 ci-dessous). Le nombre d'arêtes de la séquence est la longueur k de la chaîne μ notée P_{k+1} . Une chaîne, qui ne rencontre pas deux fois le même sommet, est dite élémentaire ; une chaîne, qui n'utilise pas deux fois la même arête, est dite simple.

Définition 1.3 Un chemin de longueur q est une séquence $\mu = u_1, u_2, \dots, u_q$ d'arcs de G telle que pour tout arc u_i ($i < q$) de la séquence, l'extrémité terminale de l'arc u_i coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc u_{i+1} .

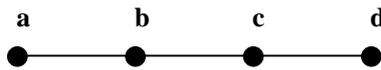


FIG. 1.2 – Le P_4 ou chaîne de longueur 3.

1.2 Cycle

Définition 1.4 Un cycle est une chaîne $\mu = u_1, u_2, \dots, u_k$ telle que :

1. la même arête ne figure pas deux fois dans la séquence,
2. les deux sommets aux extrémités de la chaîne coïncident.

La longueur d'un cycle est le nombre de sommets (ou d'arêtes) le composant. Un cycle de longueur k est noté C_k , la Figure 1.3 illustre le cas d'un C_6 .

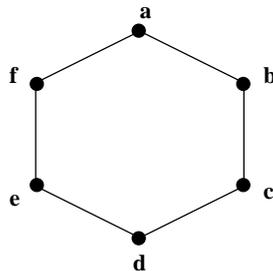


FIG. 1.3 – Exemple de cycle : un cycle de longueur 6 noté C_6 .

1.3 Connexité

1.3.1 Graphe connexe

Un graphe est *connexe* si pour toute paire u, v de sommets distincts, il existe une chaîne reliant ces deux points.

1.3.2 Composante connexe

Notons \equiv la relation binaire définie par :

$$u \equiv v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ \text{ou} \\ \text{il existe une chaîne reliant } u \text{ et } v \end{cases}$$

Cette relation est une relation d'équivalence :

1. $u \equiv u$ (réflexivité)
2. $u \equiv v \Rightarrow v \equiv u$ (symétrie)
3. $u \equiv v$ et $v \equiv w \Rightarrow u \equiv w$ (transitivité)

Les classes d'équivalence constituent une partition de V en sous-graphes connexes de G , appelées *composantes connexes* de G . La Figure 1.4 représente un graphe composé de deux composantes connexes.

1.4 Arbre et forêt

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Une forêt est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre ; en d'autres termes, c'est un graphe sans cycle (Figure 1.4).

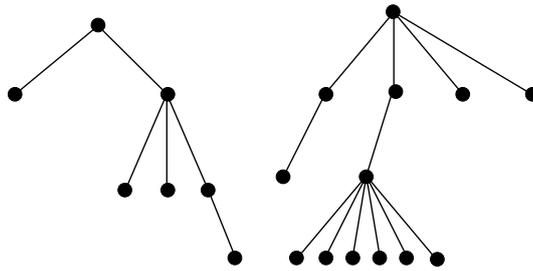


FIG. 1.4 – Exemple de deux composantes connexes : forêt composée de deux arbres.

1.5 Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti si et seulement si l'ensemble de ses sommets V peut être partitionné en deux ensembles indépendants V_1 et V_2 . Un tel graphe est noté $G = (V_1, V_2, E)$ (Figure 1.5).

Si pour tout $u \in V_1$ et pour tout $v \in V_2$, $\{u, v\} \in E$, le graphe $G = (V_1, V_2, E)$ est dit biparti complet. Un graphe biparti complet avec $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ est noté $K_{p,q}$.

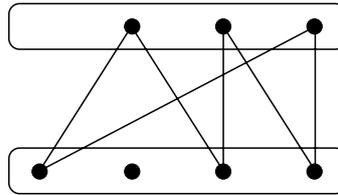


FIG. 1.5 – Exemple de graphe biparti

1.6 Ensemble dominant

Le sous-ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G (domine G) si tous les sommets appartenant à $V \setminus S$ ont au moins un voisin dans S , i.e. $N[S] = V$. Par exemple, dans un graphe biparti connexe, chacun des stables est un ensemble dominant.

Deux sommets u et v d'un graphe G forment une paire dominante de G si toutes les chaînes connectant u et v dominent G .

Première partie

Graphes de permutation : caractérisation, reconnaissance et étiquetage de distance

Dans cette partie, nous étudions les graphes de permutation. Notre travail va se diviser en trois chapitres principaux : la caractérisation, la reconnaissance dynamique et l'étiquetage de distance de cette famille. Notons que la caractérisation fournit les bases de notre travail. En effet, nous mettons en évidence des propriétés structurelles importantes des graphes de permutation utiles pour les études suivantes : reconnaissance dynamique et étiquetage de distance.

Chapitre 2

Caractérisation

Nous nous intéressons à la caractérisation des graphes de permutation afin d'obtenir des propriétés locales exploitables pour un étiquetage de distance et un algorithme dynamique de reconnaissance. Nous commençons par donner différentes définitions des graphes de permutation. Puis, nous présentons une nouvelle caractérisation de cette famille de graphes.

2.1 Définitions et représentations

Les définitions suivantes sont les bases de notre nouvelle caractérisation. Dans la Figure 2.1, nous présentons un exemple de graphe de permutation qui nous servira pour illustrer les différentes définitions, représentations et propriétés.

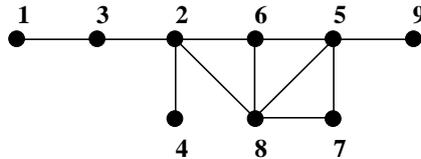


FIG. 2.1 – Exemple de graphe de permutation.

2.1.1 Définitions et résultats connus

Graphes d'intersection

Un graphe de permutation est avant tout un graphe d'intersection :

Définition 2.1 Soit S un ensemble d'objets, $G = (V, E)$ est un graphe d'intersection ayant pour représentation S si et seulement si :

1. il existe une bijection ϕ entre les sommets V et les objets S
2. pour tout couple s, s' de S : $s \cap s' \neq \emptyset \Leftrightarrow \{\phi(s), \phi(s')\} \in E$

La Figure 2.2 présente un graphe d'intersection d'intervalles sur la droite réelle. Ce graphe est un *graphe d'intervalles*.

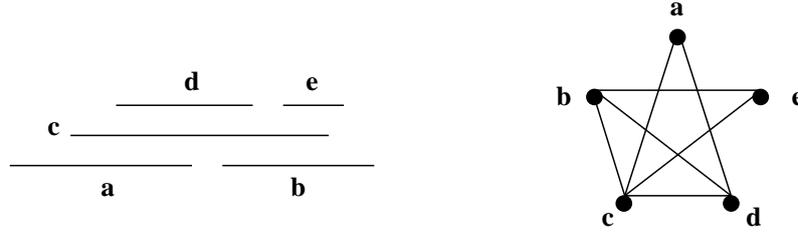
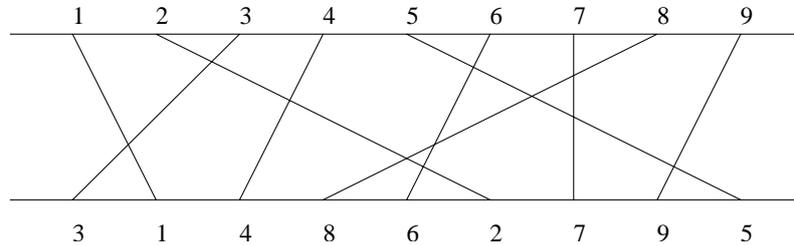


FIG. 2.2 – Graphe d'intersection d'intervalles sur la droite réelle ou graphe d'intervalles

Dans notre exemple, l'intervalle b intersecte les intervalles c , d et e , dans le graphe d'intersection, le voisinage de b est donc l'ensemble $\{c, d, e\}$.

Si l'ensemble S de la définition des graphes d'intersection est un ensemble de segments ayant leurs extrémités sur deux droites parallèles, nous obtenons un graphe de permutation. La Figure 2.3 illustre cette représentation correspondant au graphe de permutation de la Figure 2.1.

FIG. 2.3 – Représentation de G sous forme de graphe d'intersection de segments

Une *permutation* de E est toute bijection de E sur lui-même. Dans le cas où $E = \{1, \dots, n\}$, cet ensemble est noté S_n .

Une permutation π de E est notée $\pi = \pi(1) \pi(2) \dots \pi(n)$. La permutation miroir de π notée π^* est la permutation suivante : $\pi^* = \pi(n) \pi(n-1) \dots \pi(1)$. L'ordre total $<$ défini par une permutation π est tel que $\pi(1) < \pi(2) < \dots < \pi(n)$.

Nous pouvons définir un graphe de permutation de la façon suivante :

Définition 2.2 [PLE71, EPL72] Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux droites parallèles dans le plan et n points étiquetés $1, 2, \dots, n$ sur \mathcal{L}_1 , de même sur la droite \mathcal{L}_2 . Le segment L_i relie le point i sur la droite \mathcal{L}_1 avec le point i sur \mathcal{L}_2 .

Soit $G_{\mathcal{L}} = (\{1, 2, \dots, n\}, E_{\mathcal{L}})$ tel que $\{i, j\} \in E_{\mathcal{L}}$ si et seulement si L_i et L_j se coupent.

Un graphe G est un graphe de permutation s'il existe un modèle \mathcal{L} tel qu'il est décrit dans la première condition avec $G = G_{\mathcal{L}}$.

Cette définition est équivalente à la suivante :

Définition 2.3 [Gol80] Un graphe G est un graphe de permutation si et seulement si il existe une permutation π telle que G est isomorphe à $G[\pi]$ avec le graphe $G[\pi] = (V, E)$ défini de la façon suivante : il existe une numérotation des sommets et la permutation π définie sur

$V = \{1, 2, \dots, n\}$ est telle que $\{i, j\} \in E$ si et seulement si $(i - j)(\pi^{-1}(i) - \pi^{-1}(j)) < 0$. Nous appelons $G[\pi]$ ce graphe étiqueté.

Le graphe donné en exemple précédemment (Figure 2.1) est le graphe $G[\pi]$ obtenu avec la permutation $\pi = 3\ 1\ 4\ 8\ 6\ 2\ 7\ 9\ 5$. La permutation π ou l'illustration fournie Figure 2.3 est appelée *représentation* du graphe. La famille des graphes de permutation est une famille héréditaire. En effet, à partir d'un graphe de permutation G , enlever un sommet revient à enlever un segment dans sa représentation, nous obtenons une nouvelle représentation et en conséquence un nouveau graphe de permutation.

Remarquons que le graphe complémentaire d'un graphe de permutation est directement obtenu en inversant l'ordre des extrémités des segments sur l'une des droites. La permutation miroir de π est notée $\pi^* = 5\ 9\ 7\ 2\ 6\ 8\ 4\ 1\ 3$. Le graphe $G[\pi^*]$ a pour représentation la Figure 2.4.

Par la suite, pour alléger les notations, nous utiliserons directement les sommets au lieu d'introduire une notation pour accéder à leur étiquette. En conséquence lorsque nous comparons deux sommets, nous comparons leurs étiquettes.

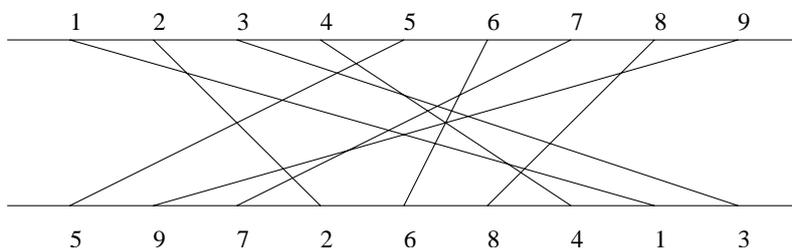


FIG. 2.4 – Représentation de \bar{G} .

Ordres partiels

Définition 2.4 L'orientation d'un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est définie par un ensemble d'arcs T tels que pour chacune des arêtes $\{u, v\} \in E$ l'arc (u, v) ou l'arc (v, u) appartient à T .

Par abus de langage, une orientation T d'un graphe G est l'ensemble des arcs définissant l'orientation de G .

Définition 2.5 L'orientation inverse T' d'une orientation T d'un graphe G est définie de la façon suivante : un arc (u, v) appartient à T' si et seulement si l'arc (v, u) appartient à T .

Définition 2.6 Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ possède une orientation transitive T si et seulement si pour tout triplet u, v, w de sommets de G , si les arcs (u, v) et (v, w) appartiennent à l'orientation T , alors (u, w) appartient à T .

Définition 2.7 [GH62] Un graphe est un graphe de comparabilité si et seulement si il admet une orientation transitive.

Un graphe dont le complémentaire est un graphe de comparabilité est un graphe de *co-comparabilité*.

La Figure 2.5 illustre le cas d'un graphe de comparabilité n'étant pas de co-comparabilité. Dans le complémentaire, l'orientation d'une arête impose successivement l'orientation des autres, il est alors impossible d'orienter la dernière.

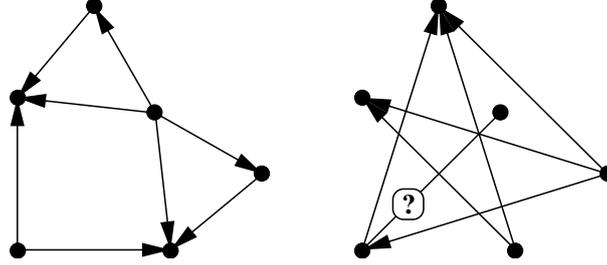


FIG. 2.5 – Exemple de graphe de comparabilité n'étant pas de co-comparabilité

Un théorème complémentaire, de Duschnik et Miller [DM41], donne une caractérisation des graphes de permutation utilisant les orientations transitives pour le graphe et son complémentaire :

Théorème 2.1 [DM41] *Un graphe G est un graphe de permutation si et seulement si G et \overline{G} sont des graphes de comparabilité.*

Comme approche, nous prouvons de manière simple que, si G est un graphe de permutation, alors G et \overline{G} possèdent une orientation transitive.

Soit $G[\pi] = (V, E)$, un graphe de permutation, nous définissons une orientation T de la façon suivante : si $\{u, v\} \in E$ et $u < v$ alors $(u, v) \in T$.

Montrons que cette orientation est transitive : soient $u, v, w \in V$ tels que $(u, v) \in T$ et $(v, w) \in T$ soit $\{u, v\} \in E$, $\{v, w\} \in E$ et $u < v < w$. Par conséquent, $\pi^{-1}(v) < \pi^{-1}(u)$ et $\pi^{-1}(w) < \pi^{-1}(v)$ ce qui implique $u < w$ et $\pi^{-1}(w) < \pi^{-1}(u)$ soit $\{u, w\} \in E$ et $(u, w) \in T$. Cette orientation est donc transitive.

De manière similaire, si l'ordre total défini par la permutation π^* (π^* étant la permutation miroir de π : $\pi(n), \pi(n-1), \dots, \pi(1)$) est utilisé pour définir une orientation, nous obtenons une orientation transitive.

Pour obtenir une orientation transitive T' pour \overline{G} , nous utilisons la même méthode avec le graphe de permutation $G[\pi^*]$ complémentaire de $G[\pi]$.

Remarque 2.1 *Il est facile de voir que pour un graphe G , une orientation inverse T' d'une orientation transitive T de G est aussi une orientation transitive de G .*

Nous pouvons maintenant définir les ordres partiels :

Définition 2.8 *Soit $(V, \leq_{\mathcal{P}})$ un ensemble partiellement ordonné :*

- V est totalement ordonné si pour tout $u, v \in V$ alors $u \leq_{\mathcal{P}} v$ ou $v \leq_{\mathcal{P}} u$.
- Un ordre total $<$ sur V tel que $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ est une extension linéaire de $\leq_{\mathcal{P}}$ si pour tout $v_i \leq_{\mathcal{P}} v_j$ alors $i \leq j$.

Définition 2.9 *Soit $(V, \leq_{\mathcal{P}})$ un ensemble partiellement ordonné :*

- Une famille $\leq_{\mathcal{P}_1}, \dots, \leq_{\mathcal{P}_k}$ d'ordres partiels réalise \mathcal{P} si $a \leq_{\mathcal{P}} b \Leftrightarrow a \leq_{\mathcal{P}_i} b$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.
- La dimension $\dim(\leq_{\mathcal{P}})$ d'un ordre partiel est le plus petit nombre k d'extensions linéaires L_1, \dots, L_k de $\leq_{\mathcal{P}}$ qui réalisent $\leq_{\mathcal{P}}$.

Définition 2.10 Soit $(V, \leq_{\mathcal{P}})$ un ensemble partiellement ordonné, alors : $G_{\mathcal{P}} = (V, E_{\mathcal{P}})$ avec $\{u, v\} \in E_{\mathcal{P}}$ si $u \leq_{\mathcal{P}} v$ ou $v \leq_{\mathcal{P}} u$ est le graphe de comparabilité de l'ordre partiel $\leq_{\mathcal{P}}$.

$G = (V, E)$ est un graphe de comparabilité s'il existe un ordre partiel $\leq_{\mathcal{P}}$ tel que G est isomorphe à $G_{\mathcal{P}}$.

Le théorème suivant permet de donner la dimension de l'ordre partiel représenté par le graphe de permutation en tant que graphe de comparabilité :

Théorème 2.2 [BFR71] Un graphe est un graphe de permutation si et seulement si c'est le graphe de comparabilité d'un ordre partiel de dimension 2.

Les graphes de permutation étant des graphes de comparabilité d'ordres partiels de dimension 2, nous pouvons exploiter leurs propriétés.

Théorème 2.3 [DM41] Un ordre partiel a pour dimension au plus 2 si et seulement si il existe une extension linéaire (v_1, \dots, v_n) de cet ordre partiel tel que si $i < j < k$ avec v_i et v_k comparables, alors v_j est comparable à v_i ou à v_k .

Une extension linéaire satisfaisant la condition du Théorème 2.3 est appelée *extension linéaire non-séparante*. Par la suite, afin d'alléger les notations, lorsque nous parlerons de l'extension linéaire d'un graphe de permutation G , il s'agira de l'extension linéaire du graphe de comparabilité G correspondant à un ordre partiel d'après la définition 2.10.

Sachant qu'un graphe de permutation est un graphe de comparabilité ainsi que son complémentaire (Théorème 2.1) nous pouvons en déduire la proposition et les remarques suivantes :

Proposition 2.1 Soit $G[\pi]$ un graphe de permutation, alors $\mathcal{L}_1 = (1, 2, \dots, n)$ et $\mathcal{L}_2 = (\pi(n), \pi(n-1), \dots, \pi(1))$ sont deux extensions linéaires non-séparantes de $G[\pi]$ et de $\overline{G[\pi]}$.

Preuve. Soient \mathcal{L}_1 l'ordre total $<$ sur les entiers et \mathcal{L}_2 l'ordre total défini par la permutation π^* . Ces deux ordres définissent des orientations transitives (Théorème 2.1) pour G et pour \overline{G} (Remarque 2.1).

Etant donné que ces ordres totaux définissent une orientation transitive dans G , nous obtenons que si $u <_{\mathcal{L}_i} v <_{\mathcal{L}_i} w$ ($i \in \{1, 2\}$) avec $\{u, w\} \notin E$, $\{u, v\} \notin E$ ou $\{v, w\} \notin E$ sinon nous obtiendrions une contradiction (la Figure 2.6 illustre cette propriété grâce à la représentation de $G[\pi]$).

De même, nous pouvons utiliser la même méthode dans $\overline{G[\pi]}$ et obtenir : si $u <_{\mathcal{L}_i} v <_{\mathcal{L}_i} w$ avec $i \in \{1, 2\}$ et que $\{u, w\} \in E$, $\{u, v\} \in E$ ou $\{v, w\} \in E$ (Figure 2.7).

Ces deux ordres sont donc des extensions linéaires non-séparantes de $G[\pi]$ et de $\overline{G[\pi]}$. \square

Remarque 2.2 Dans un graphe de permutation $G = (V, E)$, un triplet de sommets $u, v, w \in V$ forme une configuration interdite dans une extension linéaire non-séparante de G si $\{u, w\} \in E$

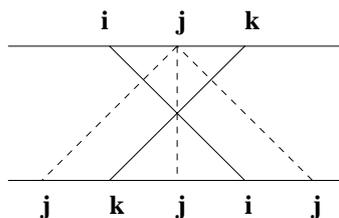


FIG. 2.6 – Pour chaque position de j sur la droite inférieure, j doit être adjacent à au moins i ou j .

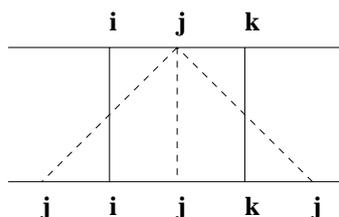


FIG. 2.7 – Pour chaque position de j sur la droite inférieure, j doit être non adjacent à au moins i ou k .

E et $\{u, v\} \notin E$ et $\{v, w\} \notin E$ ou si $\{u, w\} \notin E$ et $\{u, v\} \in E$ et $\{v, w\} \in E$ comme l'illustre la Figure 2.8.

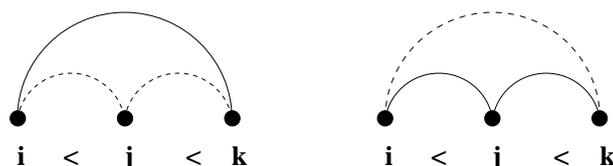


FIG. 2.8 – Configurations interdites dans une extension linéaire non-séparante (les liens en pointillé sont des non-arêtes)

2.1.2 Graphes de permutation et représentations

Les graphes de permutation peuvent être définis par rapport à des graphes de chevauchement et des graphes d'inclusion d'intervalles.

Graphes de chevauchement et d'inclusion

Les familles de graphes de chevauchement et d'inclusion, ont des définitions relativement proches. Nous les définissons en illustrant chacun des cas de la Figure 2.9, à partir du même ensemble d'intervalles, sur la droite réelle, en utilisant pour référence le graphe d'intersection associé.

Définition 2.11 Soit S un ensemble d'objets, $G = (V, E)$ est un graphe de chevauchement ayant pour représentation S si et seulement si :

1. il existe une bijection ϕ entre les sommets V et les objets S
2. pour tout couple s, s' de S :

$$(s \cap s' \neq \emptyset \text{ et } s \not\subseteq s' \text{ et } s' \not\subseteq s) \Leftrightarrow (\phi(s), \phi(s')) \in E$$

Dans notre exemple, l'intervalle b intersecte les intervalles c, d et e , mais l'intervalle e est inclus dans celui de b donc, dans le graphe de chevauchement, le voisinage de b est l'ensemble $\{c, d\}$.

Définition 2.12 Soit S un ensemble d'objets, $G = (V, E)$ est un graphe d'inclusion ayant pour représentation S si et seulement si :

1. il existe une bijection ϕ entre les sommets V et les objets S
2. pour tout couple s, s' de S :

$$(s \subseteq s' \text{ ou } s' \subseteq s) \Leftrightarrow (\phi(s), \phi(s')) \in E$$

Enfin, considérons dans notre exemple l'intervalle b , il n'a pour voisin que le sommet e , le seul inclus dans celui de b et aucun intervalle n'inclut celui de b .

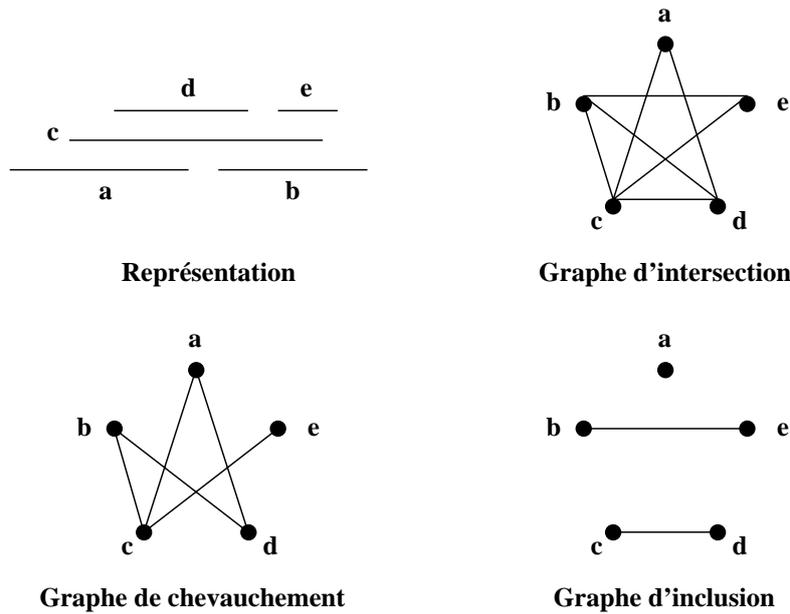


FIG. 2.9 – Exemple de graphe d'intersection, de chevauchement et d'inclusion à partir de la même représentation

Les graphes de permutation peuvent être représentés différemment en modifiant géométriquement leur représentation sous forme d'intersection de segments. Les deux droites parallèles de cette représentation sont “ouvertes” jusqu'à superposition de ces droites. Un modèle de chevauchement d'intervalles sur la droite réelle est ainsi obtenu (cf. Figures 2.10 et 2.11).

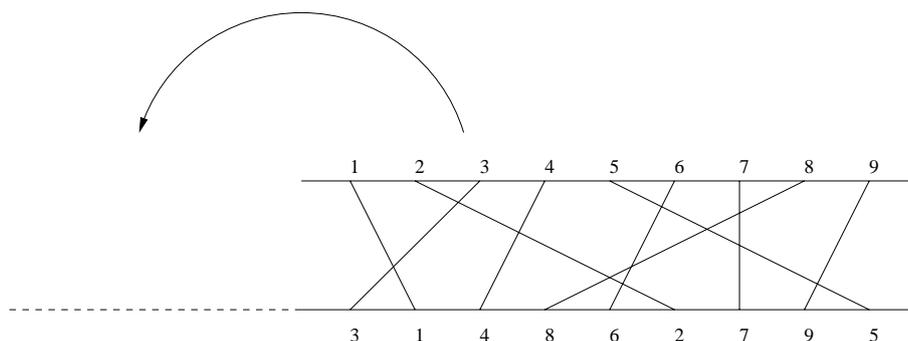


FIG. 2.10 – Ouverture du modèle de graphe d’intersection.

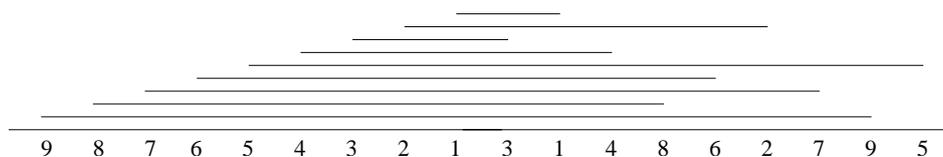


FIG. 2.11 – Graphe de chevauchement obtenu après ouverture du graphe d’intersection de la Figure 2.9

Si deux segments se coupent dans la représentation sous forme de graphe d’intersection, c’est qu’un segment a ses extrémités en position a sur une première droite et a' sur une seconde et le second segment en position $b > a$ sur la première droite et $b' < a'$ sur la seconde. En “ouvrant” la représentation, nous obtenons deux intervalles $[a, a']$ et $[b, b']$ tels que $b < a$ (l’ordre de cette demi-droite est maintenant inversé) et $b' < a'$ et, par construction, $a < b'$, les intervalles se chevauchent donc. De plus, en utilisant la même méthode, nous pouvons prouver que si deux segments ne sont pas adjacents dans la première représentation alors ils forment deux intervalles inclus l’un dans l’autre dans la seconde représentation. La relation d’adjacence reste donc inchangée par cette opération.

Dushnik et Miller [DM41] ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.4 [DM41] *G est un graphe d’inclusion d’intervalles si et seulement si G est un graphe de permutation.*

Un autre théorème plus récent de M.C. Golumbic [Gol84] permet d’obtenir le même résultat à partir de la représentation des graphes de permutation en tant que graphes d’inclusion d’objets géométriques (dans notre cas des intervalles) :

Théorème 2.5 [Gol84] *G est un graphe d’inclusion de boîtes de dimension k si et seulement si G est le graphe de comparabilité d’un ordre partiel de dimension $2k$.*

De même que pour les graphes de chevauchement, en modifiant la représentation par quelques transformations simples nous obtenons l’implication de ce théorème. Pour construire la représentation sous forme de graphe de chevauchement, nous avons “ouvert” la représentation du graphe sous sa forme d’intersection de segments. Nous “ouvrons” le complémentaire du

graphe pour obtenir la représentation de la Figure 2.12. Nous pouvons, en utilisant les mêmes méthodes que pour les graphes de chevauchement, montrer que la relation d'adjacence reste inchangée par les transformations que nous appliquons.

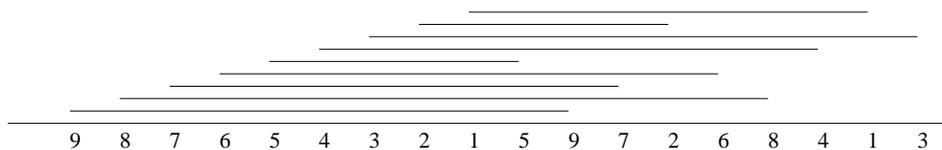


FIG. 2.12 – Graphe d'inclusion obtenu après ouverture du graphe d'intersection du complémentaire du graphe de la Figure 2.9

Graphes de cordes

Un graphe de corde est le graphe d'intersection de cordes dans un cercle. La famille des graphes de permutation est incluse dans cette famille. En effet, les droites parallèles de la représentation sous forme de graphe d'intersection de segments peuvent être vues comme le résultat de l'extension d'un cercle à l'infini. La seule contrainte est qu'il doit être possible d'ajouter un équateur (une corde coupant toutes les autres peut être placée sur le cercle : la corde en pointillé Figure 2.13).

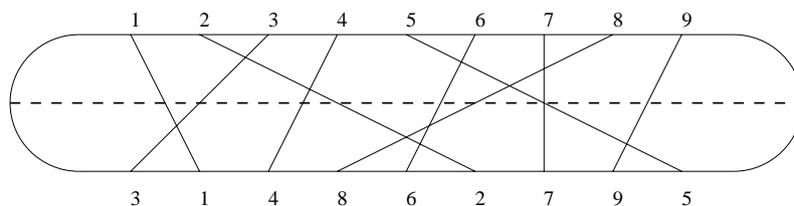


FIG. 2.13 – Représentation avec le modèle des graphes d'intersection de cordes avec un équateur en pointillé.

2.2 Nouvelle caractérisation des graphes de permutation

Dans cette nouvelle caractérisation, nous cherchons à obtenir des propriétés utiles pour l'étiquetage de distance et la reconnaissance dynamique. Pour cela, nous étendons les résultats de J.P. Spinrad, A. Brandstädt et L. Stewart [SBS87] sur les graphes de permutation bipartis. Cette extension est basée sur l'orientation transitive du graphe et surtout sur la propriété de l'extension linéaire non-séparante.

2.2.1 Résultats connus sur les graphes de permutation bipartis

J.P. Spinrad, A. Brandstädt et L. Stewart [SBS87] ont donné une caractérisation des graphes de permutation bipartis en utilisant des ordres sur les stables composant le graphe biparti. Ils donnent trois définitions permettant de caractériser les graphes de permutation :

Définition 2.13 *Un ordre sur l'ensemble des sommets de S dans un graphe biparti $G = (S, T, E)$ a la propriété d'adjacence si pour tout sommet de T , $N(x)$ est un ensemble de sommets consécutifs dans l'ordre de S .*

Définition 2.14 *Un ordre sur l'ensemble des sommets de S dans un graphe biparti $G = (S, T, E)$ a la propriété de fermeture si pour toute paire de sommets v, w de T tels que $N(v)$ est un sous-ensemble de $N(w)$, les sommets de $N(w) \setminus N(v)$ est un ensemble consécutif de sommets dans l'ordre de S .*

Définition 2.15 *Un ordre fort des sommets d'un graphe biparti $G = (S, T, E)$ consiste en un ordre sur l'ensemble S et un ordre sur T tels que pour tout $\{s, t\}, \{s', t'\} \in E$ où s, s' appartiennent à S et t, t' appartiennent à T , $s < s'$ et $t > t'$ implique que $\{s, t'\}, \{s', t\} \in E$.*

J.P. Spinrad, A. Brandstädt et L. Stewart [SBS87] donnent ensuite le théorème de caractérisation :

Théorème 2.6 *Pour un graphe biparti $G = (S \cup T, E)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est un graphe de permutation.*
2. *il existe un ordre fort défini sur les sommets $S \cup T$.*
3. *il existe un ordre défini sur S ayant la propriété d'adjacence et de fermeture.*

Nous allons tenter d'obtenir des propriétés similaires dans le cas des graphes de permutations quelconques. Pour cela, nous devons donner une partition des sommets du graphe en stables et ensuite obtenir des propriétés équivalentes basées sur des ordres dans ces stables. Notons que les ordres ayant ces propriétés dans les graphes de permutation bipartis sont les extensions linéaires non-séparantes du graphe (graphe de comparabilité).

2.2.2 Généralisation

Définitions et propriétés

Pour obtenir une nouvelle caractérisation des graphes de permutation, nous devons tout d'abord introduire de nouvelles définitions :

Définition 2.16 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et σ un ordre total sur l'ensemble V . L'orientation T de G induite par σ est définie de la façon suivante : pour toute paire de sommets $u, v \in V$, $(u, v) \in T$ si et seulement si $\{u, v\} \in E$ et $u <_{\sigma} v$.*

A partir de cette définition de l'orientation d'un graphe induite par un ordre total, nous définissons la notion suivante :

Définition 2.17 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ordre total σ sur l'ensemble V est un ordre transitif si et seulement si l'orientation des arêtes induite par T_{σ} est transitive.*

Par définition, une extension linéaire non séparante d'un graphe de permutation définit une orientation transitive pour ce dernier. Nous obtenons donc la remarque suivante :

Remarque 2.3 *Toute extension linéaire non-séparante d'un graphe de permutation est un ordre transitif.*

Nous voulons maintenant définir une méthode de décomposition de graphes pour laquelle nous pourrions donner des propriétés nécessaires et suffisantes caractérisant les graphes de permutation.

Notation 2.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et σ un ordre total sur V , pour tout sommet $u \in V$, nous notons $h(u)$ la fonction qui retourne la longueur du plus long chemin se terminant en u dans G muni de l'orientation induite par σ .*

Notation 2.2 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et σ un ordre total sur V , notons $X_i = \{u \mid h(u) = i\}$ pour i de 0 à β où $\beta = \max \{h(u) \mid u \in V\}$.*

Lemme 2.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et σ un ordre transitif sur V , les ensembles X_i sont des stables ($i \in [1, \beta]$).*

Preuve. Supposons que deux sommets $u, v \in X_i$ soient adjacents. Sans perte de généralité, posons $u <_\sigma v$, dans l'orientation T induite par σ , nous obtenons l'arc (u, v) et en conséquence $h(v)$ est au moins $h(u) + 1$. Ce qui contredit notre hypothèse : u et v appartiennent à l'ensemble X_i . En conséquence, deux sommets adjacents ne peuvent pas appartenir au même ensemble X_i , ces ensembles sont donc des stables. \square

La Figure 2.14 illustre la décomposition d'un graphe en stables à partir de la Définition 2.2.

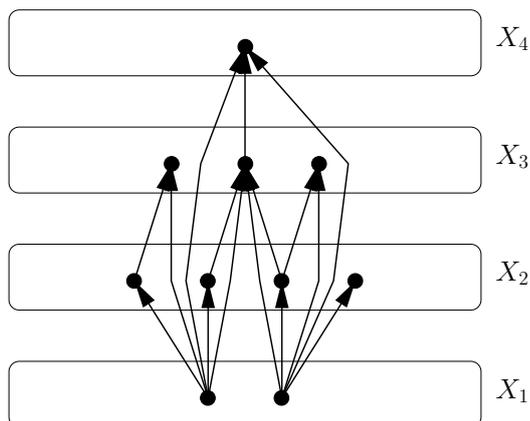


FIG. 2.14 – Exemple de graphe décomposé en stables

Lemme 2.2 *Si $G = (V, E)$ est un graphe et σ un ordre transitif sur V , alors tout sommet $u \in V$ possède des voisins dans chacun des stables X_i avec $0 \leq i \leq h(u)$.*

Preuve. Considérons un sommet v_i appartenant au stable X_i , si $i \geq 1$, il existe un plus long chemin $P = v_0, \dots, v_i$ de longueur i . Par transitivité de σ , tout sommet v_j avec $0 \leq j < i$ est adjacent à v_i .

De plus, un sommet v_j de P ($0 \leq j \leq i$) appartient au stable X_j . En effet, $h(v_j) \geq j$ (il existe au moins le sous-chemin v_0, \dots, v_j se terminant en v_j) et si $h(v_j) = k > j$, c'est qu'il existe un chemin P' de longueur k se terminant en v_j . Or, dans ce cas, nous pouvons composer un chemin $P'' = P', v_{j+1}, \dots, v_i$ plus long que P se terminant en v_i ce qui est en contradiction avec nos hypothèses. Donc $v_j \in X_j$, en conséquence, tout sommet u possède des voisins dans chacun des stables X_i avec $0 \leq i \leq h(u)$. \square

Définition 2.18 Soient $G = (V, E)$ un graphe et σ un ordre total sur V , pour tout sommet $u \in V$ et $i \in [1, \beta]$, notons :

$$\begin{aligned} N_i(u) &= N(u) \cap X_i \\ f_i(u) &= \min_{<_\sigma} \{v \in X_i \mid \{u, v\} \in E\} \\ l_i(u) &= \max_{<_\sigma} \{v \in X_i \mid \{u, v\} \in E\} \end{aligned}$$

Nous appelons respectivement $f_i(u)$ et $l_i(u)$ le premier et le dernier voisin du sommet u dans le stable X_i .

Notons que pour effectuer une extension des propriétés définies par J.P. Spinrad, A. Brandstädt et L. Stewart [SBS87], nous redéfinissons les notions d'adjacence et de fermeture.

Redéfinition des propriétés d'adjacence et de fermeture

Définition 2.19 Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ordre total σ défini sur V vérifie la propriété d'adjacence si et seulement si pour tout sommet $u \in V$ et $i \in [1, \beta]$, si $N_i(u) \neq \emptyset$, il n'existe pas $v \in X_i$ tel que $\{u, v\} \notin E$ et que $f_i(u) <_\sigma v <_\sigma l_i(u)$ (Figure 2.15).

Définition 2.20 Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ordre total σ défini sur V vérifie la propriété d'adjacence forte si et seulement si pour tout sommet $u \in V$ et tout stable X de G , lorsque $N(u) \cap X \neq \emptyset$, il n'existe pas de triplet de sommets $v, w, z \in X$ tel que $\{u, v\} \in E$, $\{u, w\} \notin E$, $\{u, z\} \in E$ avec $v <_\sigma w <_\sigma z$.

Lemme 2.3 Toute extension linéaire non-séparante σ d'un graphe de permutation $G = (V, E)$ vérifie la propriété d'adjacence forte.

Preuve. Soient $G = (V, E)$ un graphe de permutation et σ une extension linéaire non-séparante de G . Supposons que le voisinage d'un sommet $u \in V$ ne soit pas consécutif dans un stable X , posons $v, w, z \in X$ tels que $\{u, v\} \in E$, $\{u, w\} \notin E$, $\{u, z\} \in E$ et $v <_\sigma w <_\sigma z$

Notons que la position de u n'est pas quelconque, nous avons $u <_\sigma v$ ou $z <_\sigma u$. Si $v <_\sigma u <_\sigma z$, par la propriété de transitivité de l'extension linéaire non-séparante (Remarque 2.3), nous aurions $\{v, z\} \in E$ or, par hypothèse, X est un stable.

Nous obtenons donc deux cas :

- $u <_\sigma v$ d'où $u <_\sigma v <_\sigma w <_\sigma z$. Les sommets u, w et z forment une configuration interdite (Remarque 2.2), en effet, $\{u, z\} \in E$, $\{u, w\} \notin E$ et $\{v, z\} \notin E$.
- $z <_\sigma u$ d'où $v <_\sigma w <_\sigma z <_\sigma u$. De manière similaire au cas précédent, les sommets v, w et u forment une configuration interdite : $\{v, u\} \in E$, $\{v, w\} \notin E$ et $\{w, u\} \notin E$.

En conséquence u est nécessairement adjacent à w et nous obtenons bien la propriété recherchée. \square

Nous pouvons en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Toute extension linéaire non-séparante d'un graphe de permutation vérifie la propriété d'adjacence.*

La Figure 2.15 illustre le cas d'un stable tel que l'ordre total sur les sommets vérifie la propriété d'adjacence.

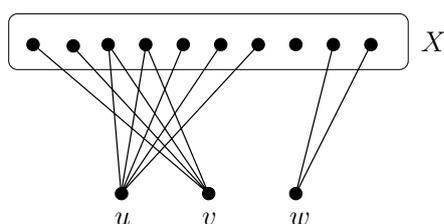


FIG. 2.15 – Exemple de stable ordonné par un ordre vérifiant la propriété d'adjacence

Définition 2.21 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ordre total σ défini sur V vérifie la propriété de fermeture si et seulement si pour toute paire de sommets $u, v \in V$, telle que $\{u, v\} \notin E$ et pour $i \in [1, \beta]$, $N_i(u) \neq \emptyset$ et $N_i(v) \neq \emptyset$, si $u <_\sigma v$ alors $f_i(u) \leq_\sigma f_i(v)$ et $l_i(u) \leq_\sigma l_i(v)$.*

La Figure 2.15 ne respecte pas cette propriété de fermeture (sommets u et v). Pour respecter cette propriété, nous devons inverser la position de ces deux sommets afin d'obtenir la Figure 2.16.

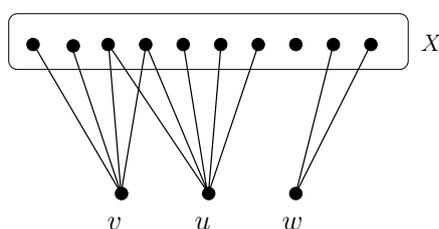


FIG. 2.16 – Exemple de stables produits par la décomposition précédente basée sur un ordre ayant la propriété de fermeture

Définition 2.22 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ordre total σ défini sur V vérifie la propriété de fermeture forte si et seulement si : pour toute paire de sommets non-adjacents $u, v \in V$ tels que $u <_\sigma v$ et X un stable de G dans lequel u et v ont un voisinage, $f(u) \leq_\sigma f(v)$ et $l(u) \leq_\sigma l(v)$ avec $f(u)$ et $l(u)$ désignant le premier et le dernier voisin de u dans X .*

Lemme 2.4 *Toute extension linéaire non-séparante σ d'un graphe de permutation $G = (V, E)$ vérifie la propriété de fermeture forte.*

Preuve. Soient $G = (V, E)$ un graphe de permutation et σ une extension linéaire non-séparante de G . Supposons que le lemme ne soit pas vérifié. Soient $u, v \in V$ tels que $\{u, v\} \notin E$ et $u <_\sigma v$, étudions leur voisinage dans le stable X en prenant, par hypothèse, que leur voisinage dans ce stable est non-vide. De même que pour la preuve de la propriété d'adjacence, le sommet v précède son voisinage dans X ou il lui succède dans l'ordre de l'extension linéaire non-séparante.

Deux cas se posent :

- $v < f(v)$:
 - Si $f(v) < f(u)$, nous avons $u <_\sigma v <_\sigma f(v) <_\sigma f(u)$ et les sommets $u, f(u)$ et $f(v)$ forment une configuration interdite (Remarque 2.2) : $\{u, f(u)\} \in E$, $\{u, f(v)\} \notin E$ et $\{f(v), f(u)\} \notin E$.
 - Si $l(v) < l(u)$, nous avons $u <_\sigma v <_\sigma l(v) <_\sigma l(u)$ et les sommets u, v et $l(u)$ forment une configuration interdite : $\{u, l(u)\} \in E$, $\{u, v\} \notin E$ et $\{v, l(u)\} \notin E$.
- $l(v) < v$: nous obtenons différents sous-cas suivant l'ordre d'apparition des différents sommets dans σ . Dans chacun d'eux nous allons donner les sommets qui sont en contradiction avec la propriété de l'extension linéaire non-séparante.
 - Si $l(u) < u$:
 - si $f(v) <_\sigma f(u) <_\sigma u <_\sigma v$, les sommets $f(v), u$ et v forment une configuration interdite : $\{f(v), v\} \in E$, $\{f(v), u\} \notin E$ et $\{u, v\} \notin E$.
 - si $l(v) <_\sigma l(u) <_\sigma u <_\sigma v$, les sommets $l(v), l(u)$ et v forment une configuration interdite : $\{l(v), v\} \in E$, $\{l(v), l(u)\} \notin E$ et $\{l(u), v\} \notin E$.
 - Si $u < f(u)$:
 - si $f(v) <_\sigma u <_\sigma f(u) <_\sigma v$, les sommets $f(v), u$ et v forment une configuration interdite : $\{f(v), v\} \in E$, $\{f(v), u\} \notin E$ et $\{u, v\} \notin E$.
 - si $u <_\sigma f(v) <_\sigma f(u) <_\sigma v$, les sommets $u, f(v)$ et $f(u)$ forment une configuration interdite : $\{u, f(u)\} \in E$, $\{u, f(v)\} \notin E$ et $\{f(v), f(u)\} \notin E$.
 - si $l(v) <_\sigma u <_\sigma l(u) <_\sigma v$ ou $u <_\sigma l(v) <_\sigma l(u) <_\sigma v$, les sommets $l(v), l(u)$ et v forment une configuration interdite : $\{l(v), v\} \in E$, $\{l(v), l(u)\} \notin E$ et $\{l(u), v\} \notin E$.
 - si $u <_\sigma l(v) <_\sigma v <_\sigma l(u)$ ou $l(v) <_\sigma u <_\sigma v <_\sigma l(u)$, les sommets u, v et $l(u)$ forment une configuration interdite : $\{u, l(u)\} \in E$, $\{u, v\} \notin E$ et $\{v, l(u)\} \notin E$.

En conséquence, nous obtenons bien la propriété recherchée. \square

Nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 *Toute extension linéaire non-séparante d'un graphe de permutation vérifie la propriété de fermeture.*

Nous pouvons maintenant donner notre théorème de caractérisation des graphes de permutation :

Théorème de caractérisation

Théorème 2.7 $G = (V, E)$ est un graphe de permutation si et seulement si il existe un ordre total σ sur V tel que :

1. σ est un ordre transitif;
2. σ vérifie les propriétés d'adjacence et de fermeture.

Preuve.

\Rightarrow D'après la Remarque 2.3 et les Corollaires 2.1 et 2.2 une extension linéaire non-séparante σ d'un graphe de permutation $G = (V, E)$ est un ordre transitif vérifiant les propriétés d'adjacence et de fermeture.

\Leftarrow Soit $G = (V, E)$ un graphe et σ un ordre total sur V étant un ordre transitif et vérifiant les propriétés d'adjacence et de fermeture. Pour prouver que ce graphe est un graphe de permutation, nous donnerons une orientation transitive du complémentaire du graphe. En effet, pour le graphe lui même cela est implicite, σ est un ordre transitif.

Donnons une orientation T' du complémentaire : pour tout $u, v \in V$, avec $u \in X_i$, $v \in X_j$, $\{u, v\} \notin E$ et $1 \leq i \leq j \leq \beta$

- si $i = j$ et $u <_\sigma v$, alors $(u, v) \in T'$;
- si $i < j$ et $u <_\sigma f_i(v)$ alors $(u, v) \in T'$ sinon $(v, u) \in T'$.

L'objectif est maintenant de vérifier si T' est une orientation transitive du complémentaire du graphe. Pour tout $u, v, w \in V$, $u \in X_i$, $v \in X_j$ et $w \in X_l$ avec $i, j, l \in [1, \beta]$. Nous avons $(u, v) \in T'$ et $(v, w) \in T'$, nous voulons obtenir $\{u, w\} \notin E$ et $(u, w) \in T'$.

- $i = j = l$, $\{u, w\} \notin E$ car d'après le Lemme 2.1 ces deux sommets sont dans le même stable comme l'illustre la Figure 2.17. $(u, v) \in T' \Rightarrow u <_\sigma v$ et $(v, w) \in T' \Rightarrow v <_\sigma w$ or $<_\sigma$ est un ordre total donc $u <_\sigma w$ et $(u, w) \in T'$.

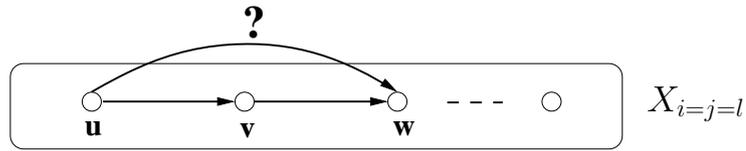
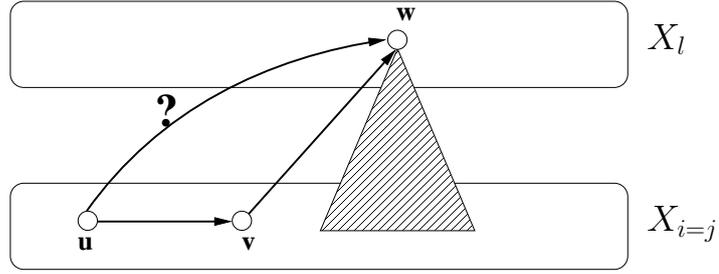
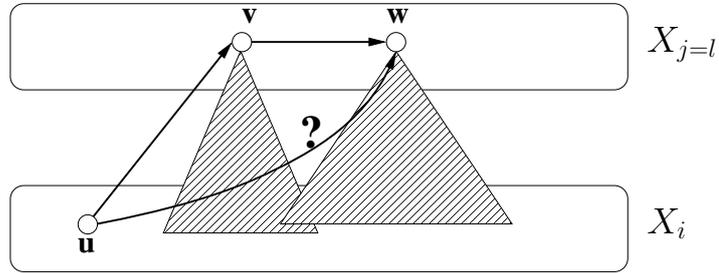


FIG. 2.17 – Cas $i = j = l$

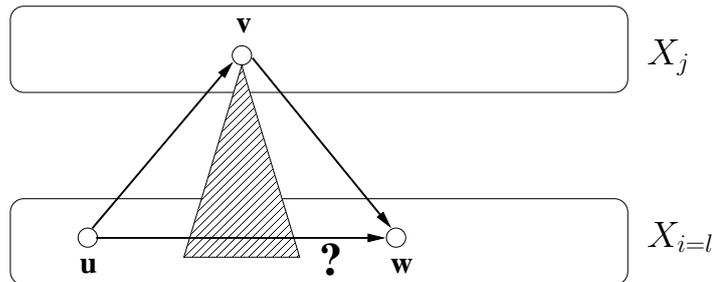
- Si $i = j \neq l$, l'arc $(v, w) \in T'$ implique $v <_\sigma f_j(w)$ or $u <_\sigma v$ et $u \in X_j$ d'où $u <_\sigma f_j(w)$ et en conséquence $\{u, w\} \notin E$ et $(u, w) \in T'$. Nous ne traitons ce cas que lorsque $l > i$ illustré Figure 2.18, ce qui garantit que w a des voisins dans X_i d'après le Lemme 2.2. La preuve du sous-cas $l < i$ est similaire en utilisant le voisinage de v comme référence.

FIG. 2.18 – Cas $i = j < l$

- Si $i \neq j = l$, ce cas est symétrique au précédent, l'arc $(u, v) \in T'$ implique $l_i(u) <_\sigma v$ or $v <_\sigma w$ et $w \in X_j$ d'où $l_i(u) <_\sigma w$ et en conséquence $\{u, w\} \notin E$ et $(u, w) \in T'$. De même que pour le cas précédent, nous ne traitons que le sous-cas $i > j$, ce qui nous garantit que u a des voisins dans X_j d'après le Lemme 2.2, le cas $i < j$ est illustré figure 2.19.

FIG. 2.19 – Cas $i < j = l$

- $i = l \neq j$ (Figure 2.20), par hypothèse nous avons $\{u, w\} \notin E$, maintenant, si $i < j$, d'après le Lemme 2.2 $N_i(v) \neq \emptyset$, d'où $(u, v) \in T'$ implique $u <_\sigma f_i(v)$ et $(v, w) \in T'$ implique $l_i(v) <_\sigma w$ et en conséquence $u <_\sigma w$ soit $(u, w) \in T'$. Si $j < i$, nous obtenons $u <_\sigma w$ avec la contraposée de la propriété de fermeture (Définition 2.21) et donc $(u, w) \in T'$.

FIG. 2.20 – Premier cas de $i = l \neq j$

- $i \neq j$ et $j \neq l$ et $i \neq l$

- $i < j < l \Leftrightarrow l < j < i$, ces deux cas sont symétriques, nous appliquons directement la propriété de fermeture (entre v et w dans le premier cas et entre u et v dans le second, d'après le Lemme 2.2 nous sommes certains qu'ils ont des voisins dans les stables d'indice inférieur) et en conséquence $(u, w) \in T'$ (Figure 2.21).

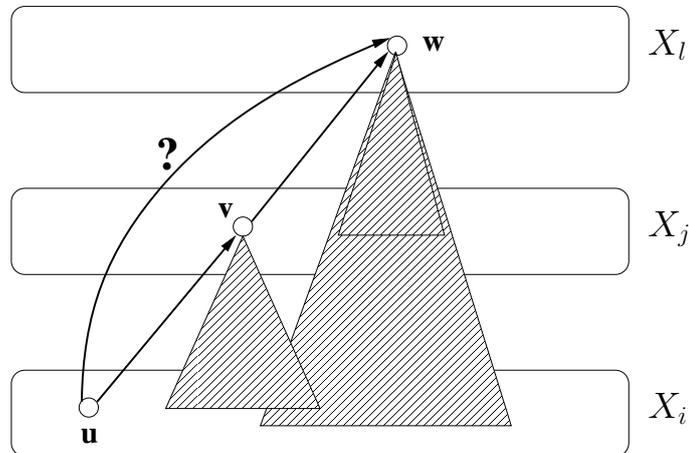


FIG. 2.21 - Cas $i < j < l$

- $i < l < j \Leftrightarrow l < i < j$ (Figure 2.22), similairement au cas précédent, nous appliquons directement la propriété de fermeture (entre v et w dans le premier cas et entre u et v dans le second) pour obtenir $(u, w) \in T'$.

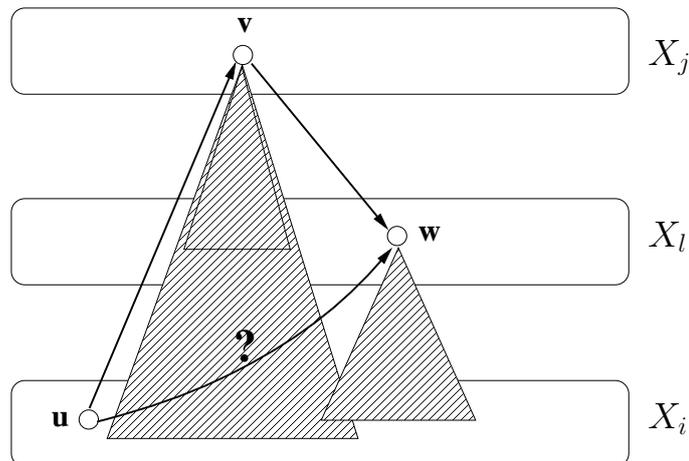
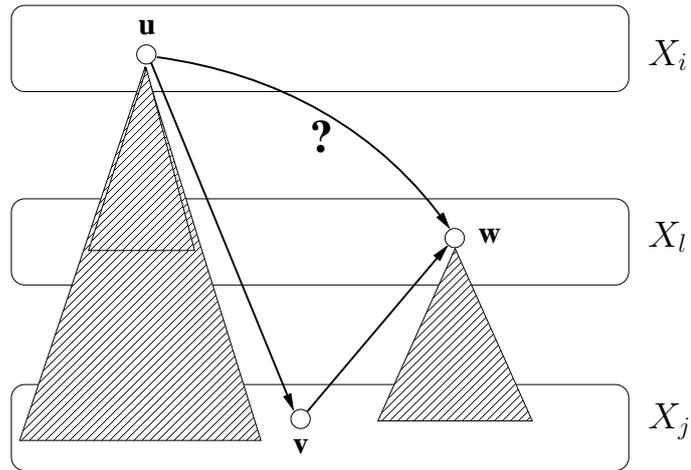


FIG. 2.22 - Premier cas de $i < l < j$

- $j < l < i \Leftrightarrow j < i < l$, dans ces deux cas, nous avons $l_j(u) <_\sigma v <_\sigma f_j(w)$ et en utilisant la contraposée de la propriété de fermeture, nous obtenons $l_j(u) <_\sigma w$ dans le premier cas et $u <_\sigma f_i(w)$ dans le second, en conséquence $(u, w) \in T'$ (Figure 2.23).

FIG. 2.23 – Premier cas de $j < l < i$

Enfinement nous obtenons l'équivalence entre un graphe de permutation et un graphe ayant un ordre transitif sur ces sommets vérifiant les propriétés d'adjacence et de fermeture. \square

2.3 Conclusion

Cette caractérisation fournit un ensemble de propriétés relatives au voisinage des sommets. Cette caractérisation a été définie afin de permettre le développement d'un algorithme de reconnaissance dynamique des graphes de permutation ainsi que d'un étiquetage de distance de cette même famille. Nous appliquerons et montrerons la pertinence de ce résultat sur ces problèmes dans les Chapitres 3 et 4.

Chapitre 3

Reconnaissance dynamique

Notre objectif est de répondre à la question suivante : à partir d'un graphe de permutation $G = (V, E)$, si une requête d'ajout d'un sommet x est effectuée avec $|N(x)| = d$ et $N(x) \subseteq V(G)$ est-ce que le graphe reste de permutation ? Dans la cas où la réponse est positive, quelles sont les mises à jour que nous devons effectuer ?

Nous étudions la résolution de ce problème en utilisant la caractérisation définie précédemment. Pour cela, nous donnons un ensemble d'algorithmes permettant la vérification des propriétés de transitivité, d'adjacence et de fermeture. Avant de présenter ces résultats, nous définissons la décomposition modulaire et son lien avec les graphes de permutation en utilisant les résultats connus sur la famille des cographes.

3.1 Introduction

Le principe d'un algorithme dynamique est de permettre d'effectuer des modifications sur un graphe tout en maintenant un certain nombre de propriétés sans jamais faire de calcul global sur le graphe. Chaque opération sur un graphe, comme par exemple, l'insertion ou la suppression de sommets, ne dépend que du degré des sommets concernés. L'intérêt majeur est la complexité en temps de ces opérations. Lorsque nous considérons une telle modification, au lieu de vérifier si des propriétés sont maintenues dans le graphe en exécutant un algorithme global, nous exécutons un algorithme local à la partie modifiée. La complexité joue alors un rôle important. En effet, nous devons comparer l'algorithme local à l'algorithme global. La complexité de l'algorithme local doit être inférieure pour que ce dernier soit intéressant et exploitable.

Les algorithmes dynamiques de reconnaissance sont habituellement divisés en diverses classes [EGI97] :

1. algorithmes dynamiques *complets ou totaux* si les suppressions et les insertions d'arêtes sont possibles.
2. algorithmes dynamiques *partiels incrémentaux* si seulement les insertions d'arêtes sont autorisées.
3. algorithmes dynamiques *partiels décrémenteaux* si seulement les opérations de suppression d'arêtes sont autorisées.

Dans notre cas, nous nous intéressons à l'ajout de sommets et non d'arêtes dans les graphes de permutation. Nous construisons un algorithme de reconnaissance des graphes de permutation dynamique partiel incrémental pour les sommets. Notons que si nous sommes capables d'ajouter et de supprimer des sommets dans un graphe, nous sommes capables d'ajouter et de supprimer des arêtes dans un graphe. Prenons l'exemple de l'ajout d'une arête entre deux sommets u et v d'un graphe, nous supprimons u et le rajoutons avec son voisinage modifié par l'ajout de l'arête $\{u, v\}$.

Le problème d'une telle méthode est que nous devons comparer la complexité de l'algorithme global qui permet de vérifier nos propriétés et celle de deux algorithmes locaux utilisés pour supprimer le sommet et rajouter le sommet. Cette méthode n'est alors intéressante que si la complexité de l'algorithme global reste supérieure à celle des deux opérations.

3.2 Décomposition modulaire

Les graphes de permutation admettent de nombreuses représentations et définitions. Le principal problème est que pour un graphe de permutation G , plusieurs représentations sont possibles. Prenons le graphe Figure 3.1, les sommets 1 et 3 sont interchangeable de même que les sommets 2 et 4. Nous présenterons les raisons pour lesquelles ces sommets sont interchangeables ainsi qu'une structure de données permettant de retrouver toutes les représentations correspondant à un graphe donné.

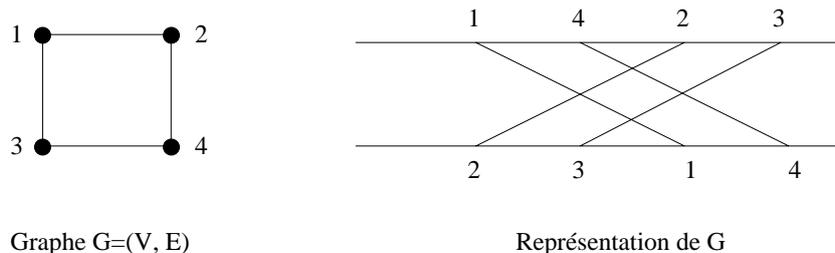


FIG. 3.1 – Equivalence entre les sommets 1 et 3 (entre les sommets 2 et 4).

En fait, le nombre de représentations différentes est lié à la présence de modules. Nous définissons donc cette notion et présentons les résultats connus sur la décomposition modulaire.

3.2.1 Définitions

La *décomposition modulaire* (aussi appelée *décomposition par substitution*) est largement utilisée pour des graphes, des ordres partiels, des hypergraphes ou d'autres types de structures [MR84, Möh85, Möh89].

Définition 3.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le sous-ensemble $M \subseteq V$ est un module de G si pour tout triplet de sommets $u, v \in M$, et $w \in V \setminus M$, si $\{u, w\} \in E$ alors $\{v, w\} \in E$ (Figure 3.2).

Si nous reprenons l'exemple du C_4 Figure 3.1, les sommets 2 et 4 (1 et 3) sont interchangeables car ils appartiennent au même module.

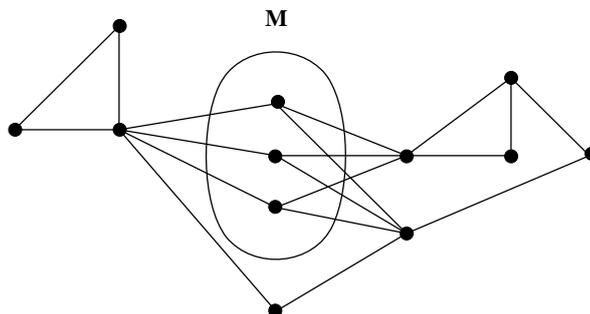


FIG. 3.2 – Exemple de module

Notons la présence de modules particuliers :

Définition 3.2 Soit $G = (V, E)$ un graphe :

1. $M \subseteq V$ est un module trivial de G si $M = V$, $M = \emptyset$, ou $|M| = 1$. M est un module propre si $M \neq V$.
2. M est un module premier, si M contient seulement des modules triviaux (il n'est pas décomposable).
3. Deux modules M, M' se chevauchent si les ensembles $M \cap M'$, $M \setminus M'$, et $M' \setminus M$ sont non vides.
4. Un module M est dit module fort si pour tout module M' , les modules M et M' ne se chevauchent pas, i.e. $M \cap M' = \emptyset$, ou $M \subseteq M'$, ou $M' \subseteq M$.

Nous pouvons maintenant définir la notion de graphe premier. Un graphe est premier si et seulement si il ne peut pas être décomposé en modules non triviaux, la Figure 3.3 donne l'exemple d'un tel graphe.

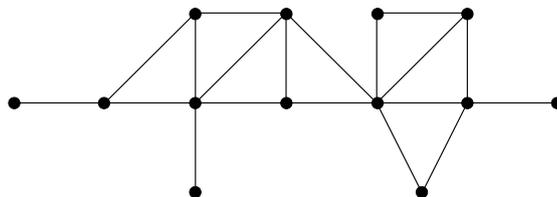


FIG. 3.3 – Graphe premier pour la décomposition modulaire (décomposable seulement en modules triviaux)

Quelques propriétés intéressantes permettent d'effectuer des opérations entre les modules :

Proposition 3.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe et soient A et B deux modules de G . Alors les opérations suivantes peuvent être appliquées :

1. $A \cap B$ est un module.
2. Si $B \not\subseteq A$, alors $A \setminus B$ est un module.
3. Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est un module.
4. Pour $U \subseteq V$, l'ensemble $A \cap U$ est un module de $G(U)$.

3.2.2 Théorème de décomposition modulaire

L'ensemble de ces propriétés donne un théorème de décomposition canonique, un arbre de décomposition unique correspondant à chaque graphe :

Théorème 3.1 [Gal67, Hab81, HM79, Sum71] Soit $G = (V, E)$ un graphe avec au moins deux sommets. Alors une seule de ces conditions est valide :

1. G est non connexe et peut être décomposé en ses composantes connexes (décomposition parallèle).
2. \overline{G} est non connexe, G peut être décomposé via les composantes connexes de \overline{G} (décomposition série).
3. G et \overline{G} sont connexes. Il existe $U \subseteq V$ et une unique partition P de V telle que :
 - (a) $|U| > 3$
 - (b) $G(U)$ est un sous-graphe premier maximal de G
 - (c) Pour toute classe S de la partition P , S est un module et $|S \cap U| = 1$.

Des algorithmes de décomposition modulaire polynomiaux existent à partir de cette définition [MS99]. L'arbre de décomposition obtenu contient trois types de nœuds : des nœuds parallèles, des nœuds séries et des nœuds premiers comme l'illustre la Figure 3.4.

La notion de nœud est attachée à celle de *graphe quotient*. Le graphe quotient G' d'un graphe G est le graphe obtenu par contraction de tous les modules de G .

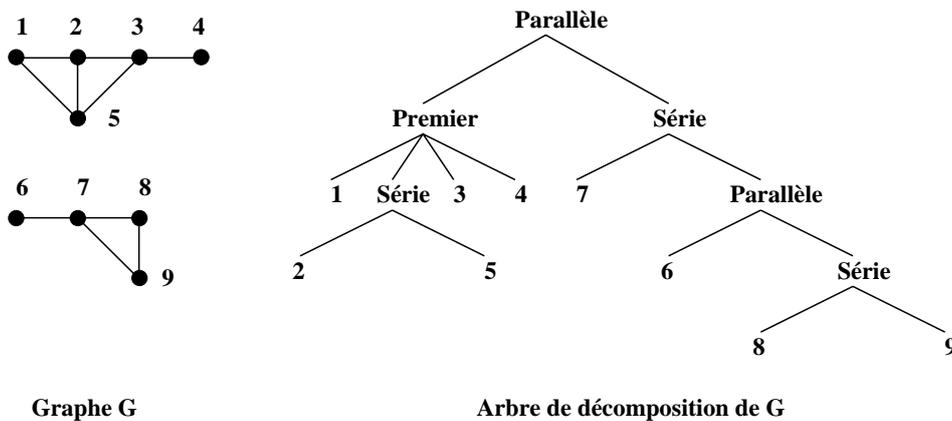


FIG. 3.4 – Décomposition modulaire d'un graphe.

3.2.3 Liens avec l'orientation transitive

La décomposition modulaire est fortement liée à l'orientation transitive des graphes. Prenons un graphe $G = (V, E)$ et regardons de quelle façon nous pouvons lui attribuer une orientation transitive et quel est le lien avec la décomposition modulaire. Pour cela nous utilisons la méthode de Gallai [Gal67] en définissant deux relation Γ et Γ^* de la façon suivante :

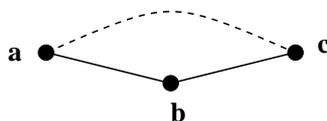


FIG. 3.5 – Deux arêtes dont l'orientation est liée

Construisons la relation suivante : $\{a, b\} \Gamma \{c, d\}$ si et seulement si $b = c$ et $\{a, d\} \notin E$. Cette définition est telle qu'une arête, une fois orientée, force l'orientation des arêtes avec lesquelles elle est en relation (Figure 3.5). La Figure 3.6 illustre les différentes orientations possibles pour cette paire d'arêtes.

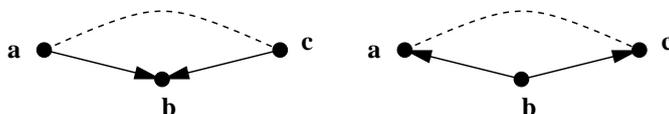


FIG. 3.6 – Les deux orientations possibles pour une paire d'arêtes en relation par Γ

Nous pouvons définir la relation Γ^* de la façon suivante : $\{a, b\} \Gamma^* \{c, d\}$ si et seulement si il existe une suite d'arêtes $\{u_1, u'_1\}, \{u_2, u'_2\}, \dots, \{u_k, u'_k\}$ avec $k \geq 2$ telle que $\{a, b\} = \{u_1, u'_1\}$ et $\{u_k, u'_k\} = \{c, d\}$ et $\{u_i, u'_i\} \Gamma \{u_{i+1}, u'_{i+1}\}$ avec $1 \leq i \leq k - 1$.

La relation Γ^* est une relation d'équivalence, elle est réflexive, symétrique et transitive. Nous pouvons donc regarder les classes d'équivalence obtenues.

Nous pouvons identifier le lien entre les modules et la relation Γ^* : les arêtes internes au module M ne peuvent pas être forcées par l'orientation fixée ailleurs dans le graphe. En effet, un sommet u appartenant à $V \setminus M$ est adjacent soit à aucun sommet de M soit à tous les sommets de M . Dans ce dernier cas, u est adjacent aux deux extrémités de chacune des arêtes internes de M (dont les deux extrémités appartiennent à M). Les arêtes ayant une extrémité dans M et une extrémité dans $V \setminus M$ ne peuvent donc pas forcer l'orientation d'arêtes internes à M . L'orientation de M est donc indépendante de celle de G où M est quotienté.

Si nous considérons le cas des graphes premiers, un graphe est premier si toutes ses arêtes appartiennent à la même classe d'équivalence appelée aussi *classe de forçage* par la relation Γ^* . Ce résultat implique naturellement le Théorème 3.2. En conséquence, un tel graphe ne contient que deux orientations transitives inverses l'une de l'autre.

Théorème 3.2 [Gol80] *Un graphe de comparabilité premier a exactement deux orientations transitives, dont chacune est l'inverse de l'autre.*

Notons qu'à partir du Théorème 3.2 nous pouvons en déduire :

Remarque 3.1 *Pour un graphe de permutation premier, les deux seules orientations transitives du graphe sont obtenues par la méthode issue de la Proposition 2.1 page 15.*

Nous obtenons directement le lien entre la décomposition modulaire et l'orientation transitive d'un graphe. Sur un exemple de décomposition modulaire de graphe, nous étudions de quelle façon une orientation transitive est obtenue.

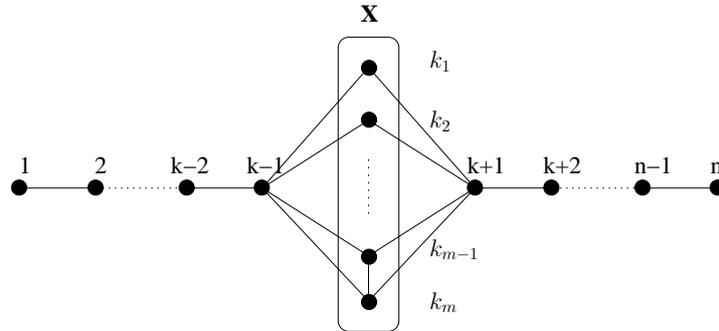


FIG. 3.7 – Recherche d’une orientation transitive dans un graphe de comparabilité.

Considérons le graphe de comparabilité de la Figure 3.7, nous recherchons une orientation transitive de ce dernier à partir de sa décomposition modulaire. L'exemple que nous avons choisi ne contient qu'un seul module, mais la méthode est identique s'il en contient plusieurs.

Pour orienter ce graphe, nous procédons par étape, quelle que soit l'orientation choisie dans l'ensemble X , le choix de l'orientation vers l'extérieur ne dépend que de celle choisie pour le graphe quotient (une fois l'ensemble X contracté).

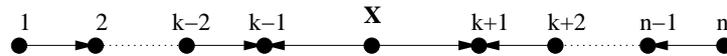


FIG. 3.8 – Orientation transitive du graphe quotient.

Ensuite, il suffit de chercher une orientation dans l'ensemble X pour connaître l'orientation transitive de l'ensemble du graphe. Quel que soit le choix d'orientation de X , la transitivité vers l'extérieur est respectée.

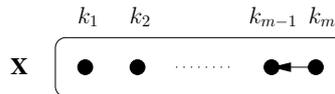


FIG. 3.9 – Orientation transitive de l'ensemble X .

Nous présentons maintenant la famille des cographes afin d'étudier les liens entre cette classe de graphes et celle des graphes de permutation. En effet, la famille des cographes permet d'étayer l'utilisation de la décomposition modulaire et d'effectuer un traitement particulier dans le cas des nœuds premiers.

3.2.4 Cas des cographe

Corneil, Perl et Stewart ont donné un algorithme linéaire incrémental de reconnaissance des cographe [CPS85] étendu, plus récemment, par Shamir et Sharan, en algorithme dynamique total [SS04]. Dans les deux cas, un arbre de décomposition modulaire est maintenu.

Définition 3.3 *Un graphe est un cographe si et seulement si l'arbre de sa décomposition modulaire (coarbre) ne contient que des nœuds parallèles ou séries.*

La Figure 3.10 illustre le cas d'un cographe.

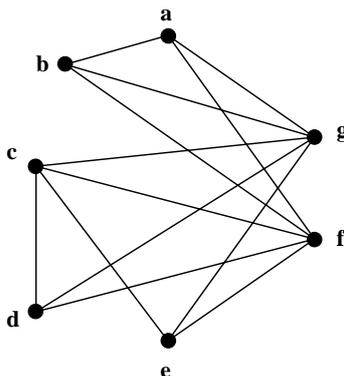


FIG. 3.10 – Exemple de cographe

De manière similaire, un théorème de Sumner définit les cographe :

Théorème 3.3 [Sum73, Sum71] *Si G est un graphe premier, alors G contient un P_4 induit.*

Un graphe décomposable en nœuds parallèles et séries est un graphe admettant une orientation transitive et par conséquent dont le complémentaire admet une orientation transitive (le type des nœuds est inversé). En effet, en partant du bas de l'arbre nous définissons une orientation transitive T au cographe $G = (V, E)$: si deux modules sont en composition parallèle, il n'y a pas d'arête à orienter.

S'il s'agit d'un nœud série, ayant pour fils k modules M_1, \dots, M_k , si nous considérons le graphe quotient induit par ces modules, nous obtenons une clique. Nous orientons chaque arête d'un sommet d'un module M_i vers un sommet du module M_j si $i < j$. Notons que les modules M_i et M_j induisent un graphe biparti complet dans le cographe et que les arêtes internes aux modules sont déjà orientées transitivement.

Si nous avons trois sommets $u \in M_i$, $v \in M_j$ et $w \in M_l$ tels que dans l'orientation T , obtenue par cette méthode, nous avons les arcs $(u, v) \in T$ et $(v, w) \in T$. Si $i = j = l$, par hypothèse, nous avons une orientation transitive dans le module et en conséquence $(u, w) \in T$. Si $i < j = l$ (ou $i = j < l$, ces deux cas sont symétriques) nous avons bien un arc de u vers w , en effet M_i et M_j forment un biparti complet, nous avons donc l'arête $\{u, w\} \in E$ et i étant inférieur à j , nous avons l'arc $(u, w) \in T$. Enfin, si $i < j < l$, les modules induisant une clique, nous avons l'arête $\{u, w\} \in E$ et i étant inférieur à l , nous obtenons que $(u, w) \in T$. En conséquence, nous avons bien obtenu une orientation transitive de G par cette méthode.

L'utilisation d'une méthode similaire dans le graphe complémentaire permet de montrer qu'un cografe est un graphe de comparabilité et de co-comparabilité et en conséquence un graphe de permutation.

3.3 Reconnaissance des cograves

Une piste de recherche pour la reconnaissance dynamique des graphes de permutation serait d'étendre les travaux de Corneil, Perl et Stewart [CPS85] qui utilisent la décomposition modulaire dans un algorithme dynamique partiel incrémental de reconnaissance des cograves (Définition 3.3 page précédente). Ces travaux ont été étendus par Shamir et Sharan [SS04] qui ont donné un algorithme dynamique total, ajoutant ainsi un algorithme pour l'ajout et la suppression des arêtes. Notre travail, réalisé après une étude de ces travaux, se place en amont de cette étape de traitement de l'arbre de décomposition. En effet, nous fournissons une reconnaissance dynamique des graphes de permutation premiers. Par la suite, l'idée serait d'étudier la possibilité de cumuler les résultats sur les nœuds premiers avec ces travaux sur les cograves pour obtenir une reconnaissance de la famille des graphes de permutation.

Précédemment, nous avons conclu que les cograves ne contiennent pas de nœud premier et donc pas de P_4 induit (Théorème 3.3 page précédente). De plus, un arbre de décomposition unique correspond à chaque cografe (*coarbre*, Figure 3.11).

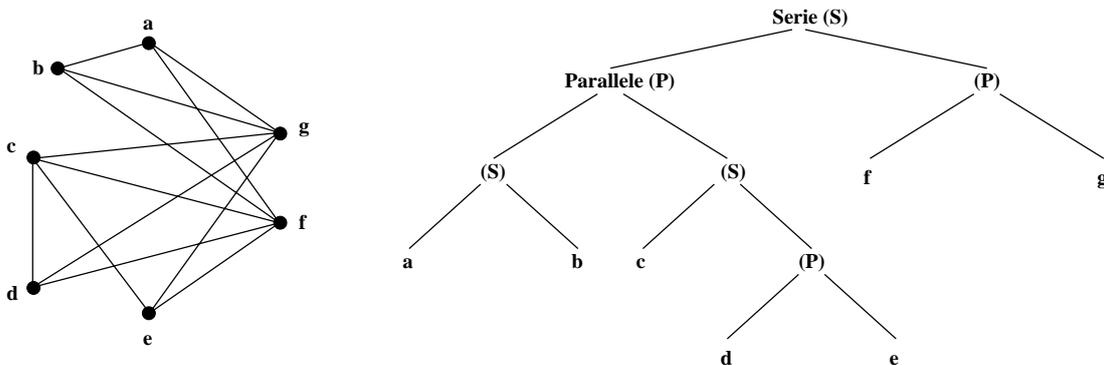


FIG. 3.11 – Exemple de cografe avec son coarbre associé.

En conséquence, le principe de l'algorithme de reconnaissance est le suivant : soit un cografe $G = (V, E)$, une requête pour ajouter un sommet x est effectuée avec $N(x) \subseteq V(G)$ et $|N(x)| = d$. A partir de l'ensemble $N(x)$, le coarbre correspondant au graphe est marqué. Une fois cette étape de marquage terminée, une étape de vérification est lancée. En effet, des configurations concernant le marquage induisent la création de P_4 et en conséquence que le sommet ne peut pas être ajouté sans que le graphe ne soit plus un cografe.

Enfin, la dernière étape est une mise à jour de l'ensemble du coarbre. Cet algorithme fournit donc une reconnaissance dynamique partielle incrémentale des cograves avec une complexité en temps $\mathcal{O}(d)$ pour l'ajout d'un sommet de degré d .

La famille des cograves est une famille héréditaire (Définition 1 page 4), il faut uniquement définir la mise à jour du coarbre lors d'une suppression. Le problème restant est le traitement des ajouts et suppressions d'arêtes. Shamir et Sharan ont défini des règles supplémentaires

nécessaires pour traiter ces cas ainsi qu'un ensemble d'algorithmes de reconnaissance pour des sous-classes des cographes [SS04].

3.4 Reconnaissance des graphes de permutation premiers

Ce type de mise à jour de l'arbre de décomposition constitue une base solide pour fournir un algorithme pour les graphes de permutation quelconques. Dans cette optique, il serait seulement nécessaire d'ajouter des règles de marquage spécifiques aux nœuds premiers. Pour cela, il est nécessaire de savoir traiter les nœuds premiers seuls. Notre travail consiste donc en la définition d'un algorithme partiel incrémental pour la reconnaissance des graphes de permutation premiers.

Pour traiter les graphes de permutation dans leur ensemble, nous supposons que cette brique de base suffirait en ajoutant, dans des travaux futurs, des règles de maintenance de l'arbre de décomposition modulaire (de la même manière que [CPS85]).

Nous utilisons une structure de données composée d'un ordre transitif σ et d'un ensemble de β stables $\mathcal{S} = \{X_1, \dots, X_\beta\}$ tels que $X_i = \{u \in V \mid h(u) = i\}$ et σ vérifie les propriétés d'adjacence et de fermeture. Le Figure 3.12 donne l'exemple d'un graphe dans la structure ainsi définie.

Les algorithmes utilisent les fonctions donnant le premier et le dernier voisin d'un sommet u dans chaque stable X_i : $f_i(u)$ et $l_i(u)$. Mais, il est aussi nécessaire d'accéder au successeur et au prédécesseur d'un sommet dans un stable donné ainsi qu'au degré d'un sommet limité à un stable particulier.

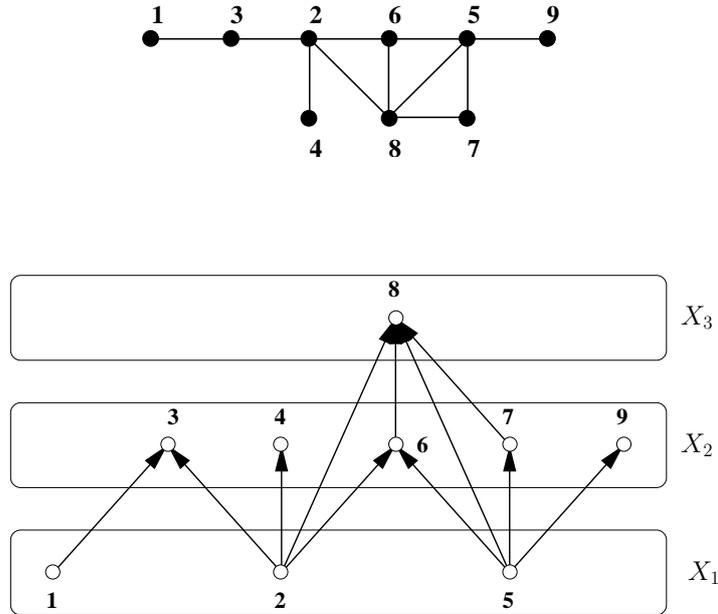


FIG. 3.12 – Exemple de graphe de permutation et sa structure de données associée.

Définition 3.4 Dans un stable X , sont définis le successeur et le prédécesseur d'un sommet

$u \in X$ de la façon suivante :

$$\text{succ}(u) = \min_{<_{\sigma}} \{v \in X \mid u <_{\sigma} v\}$$

$$\text{pred}(u) = \max_{<_{\sigma}} \{v \in X \mid v <_{\sigma} u\}$$

Le degré d'un sommet dans un stable pour $i \in [1, \beta]$:

$$d_i(u) = |N(u) \cap X_i|$$

Le voisinage d'un sommet u peut être partitionné en deux sous-ensembles :

$$N^+(u) = \{v \in N(u) \mid h(v) > h(u)\}$$

$$N^-(u) = \{v \in N(u) \mid h(v) < h(u)\}$$

Nous procédons par étape en effectuant, dans un premier temps, un marquage des sommets voisins du nouveau sommet x , soit de l'ensemble $N(x)$, dans un second temps, des vérifications successives pour chacune des propriétés que nous devons maintenir dans le graphe.

D'après le Théorème 2.7 page 25, un graphe est un graphe de permutation s'il existe un ordre transitif σ vérifiant les propriétés d'adjacence et de fermeture.

Lorsque la requête d'ajout du sommet x de degré d est effectuée, nous voulons vérifier s'il est possible de l'ajouter dans l'ordre σ pour que cet ordre reste transitif et qu'il respecte les propriétés d'adjacence et de fermeture.

L'algorithme principal se décompose de la façon suivante :

Algorithme 1: Reconnaissance

Données : Un graphe de permutation connexe G avec n sommets décomposé en β stables, un ordre total σ défini sur V et le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x

Résultat : Le nouveau graphe de permutation premier s'il le reste

- | | |
|---|---|
| 1 | Marquage de $N(x)$. |
| 2 | Nous vérifions si le voisinage de x respecte la propriété d'adjacence. |
| 3 | Nous vérifions si x peut être ajouté dans σ de manière à respecter la propriété de transitivité. |
| 4 | Nous vérifions si le voisinage de x respecte la propriété de fermeture. |
| 5 | Une fois ces étapes terminées, la position de x est déterminée et nous l'insérons de manière fictive à sa position. |
| 6 | Nous vérifions si les sommets du graphe vérifient toujours la propriété d'adjacence malgré l'ajout de x . |
| 7 | Nous vérifions si les sommets du graphe vérifient toujours la propriété de fermeture malgré l'ajout de x . |
| 8 | Nous insérons réellement le sommet à la position déterminée précédemment. |
-

Nous donnons maintenant le développement de chacune de ces étapes.

3.4.1 Marquage

Nous marquons l'ensemble des voisins du nouveau sommet x (étape 1 de l'algorithme *Reconnaissance*) ainsi que les stables les contenant. Nous définissons les fonctions suivantes :

Définition 3.5 Les fonctions $M(u)$ et $M_S(X)$ avec u un sommet et X un stable :

$$M(u) = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } u \text{ est marqué} \\ 0 & \text{si le sommet } u \text{ est non-marqué} \end{cases}$$

$$M_S(X) = \sum_{u \in X} M(u)$$

A partir de ce marquage, nous pouvons vérifier les différentes propriétés et valider l'appartenance du graphe à la famille des graphes de permutation.

Considérons le graphe de la Figure 3.12, nous illustrerons l'ensemble des algorithmes en utilisant ce graphe avec l'ensemble $N(x) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$. La Figure 3.13 illustre le marquage des sommets appartenant à $N(x)$.

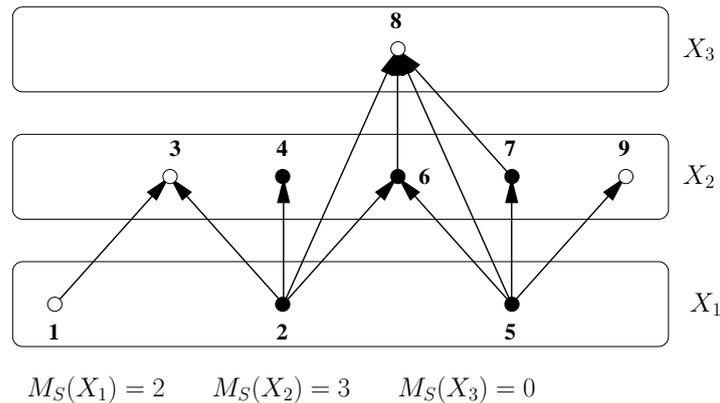


FIG. 3.13 – Marquage des sommets appartenant à $N(x) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.

3.4.2 Propriété d'adjacence

Pour vérifier la propriété d'adjacence (étape 2 de l'algorithme *Reconnaissance*), il est nécessaire de vérifier que les sommets voisins de x (sommets marqués) forment un intervalle dans chacun des stables.

Algorithme 2: Adjacence

Données : Un graphe de permutation connexe G avec n sommets décomposé en β stables, un ordre total σ défini sur V et le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x

Résultat : Si la propriété d'adjacence est respectée par le voisinage de x

```

1  |   pour chaque  $i \in [1, \beta]$  tel que  $M_S(X_i) > 0$  faire
    |        $Adj[i] \leftarrow 0$ 
    |   fin
2  |   pour chaque  $u \in N(x)$  faire
    |       si  $\text{pred}(u)$  n'existe pas ou  $M(\text{pred}(u)) = 0$  alors
    |            $Adj[h(u)] \leftarrow Adj[h(u)] + 1$ 
    |       fin
    |       si  $\text{succ}(u)$  n'existe pas ou  $M(\text{succ}(u)) = 0$  alors
    |            $Adj[h(u)] \leftarrow Adj[h(u)] + 1$ 
    |       fin
    |   fin
3  |   pour chaque  $i \in [1, \beta]$  tel que  $M_S(X_i) > 0$  faire
    |       si  $Adj[i] \neq 2$  alors
    |           return Insertion Impossible
    |       fin
    |   fin

```

La complexité de cet algorithme est en temps $\mathcal{O}(d)$, nous ne parcourons que l'ensemble des sommets marqués.

Cet algorithme se décompose en trois étapes :

- La boucle 1 initialise un tableau à zéro, elle ne parcourt que les stables marqués. Elle prépare un compteur par stable X_i marqué qui donne par la suite le nombre de sommets bornant un intervalle marqué dans X_i . Nous parcourons au plus d stables.
- La boucle 2 compte le nombre de sommets qui sont à l'extrémité d'un intervalle de sommets marqués. Notons qu'un sommet seul, compté deux fois, forme un intervalle à un élément. Nous parcourons ici exactement d sommets.
- La boucle 3 est l'étape de vérification : pour chacun des stables marqués, si un compteur est différent de 2 c'est que plus d'un intervalle est présent dans ce stable. Nous parcourons au plus d stables lors de cette vérification.

De cette façon, nous obtenons les sommets formant les bornes des intervalles de sommets marqués dans chacun des stables. Donc, à partir de cette étape, nous pouvons utiliser les fonctions $f_i(x)$ et $l_i(x)$ pointant sur le premier et le dernier sommet marqué du stable X_i avec $i \in [1, \beta]$.

Dans notre exemple, le marquage illustré Figure 3.13 respecte bien la propriété d'adjacence. Si jamais le sommet 6 n'avait pas été marqué nous aurions obtenu $Adj[2] = 4$ et donc que la propriété d'adjacence n'était pas respectée.

3.4.3 Propriété de transitivité

Pour vérifier la propriété de transitivité (étape 3 de l'algorithme *Reconnaissance*), nous simulons l'ajout de x et nous orientons l'ensemble des arêtes E_x lui étant incidentes.

Lemme 3.1 *Soit $G = (V, E)$ le graphe de permutation premier avant l'ajout de x ayant une orientation transitive T , une orientation transitive de $G' = (V \cup \{x\}, E \cup E_x)$ ne nécessite qu'une orientation des arêtes de E_x sans modifier l'orientation T .*

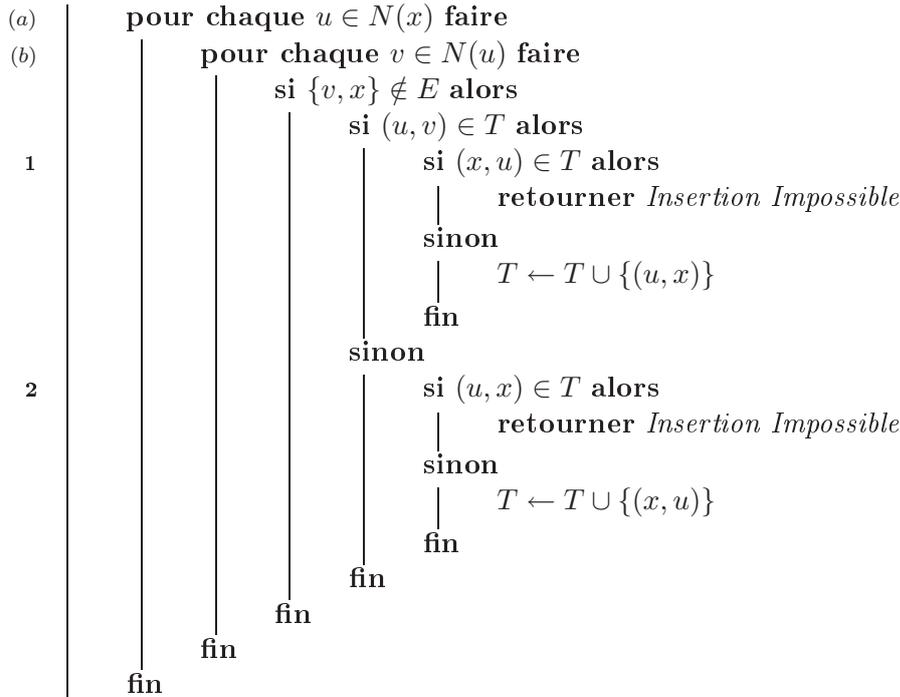
Preuve. Si G' est un graphe de comparabilité, il possède une orientation transitive T' qui induit une orientation transitive dans G . Or, si $G = (V, E)$ est un graphe de permutation premier, d'après le Théorème 3.2, il ne possède que deux orientations transitives inverses l'une de l'autre. Donc, pour donner une orientation transitive de G' , nous pouvons étendre l'orientation transitive de G en donnant uniquement l'orientation des arêtes de E_x . \square

Pour étendre l'orientation de G en orientant les arêtes autour de x , nous utilisons les classes de forçage décrites précédemment (sous-section 3.2.3) dues à Gallai [Gal67].

Algorithme 3: Orientation : Partie 1

Données : Un graphe de permutation premier G , une orientation T induite par un ordre transitif σ et le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x

Résultat : Une orientation des arêtes incidentes à x ajoutée dans T



Dans cet algorithme *Orientation : Partie 1*, pour chacune des arêtes incidentes à x :

- Si elle est déjà orientée, nous regardons si elle ne peut pas être forcée dans l'autre sens.

- Si elle n'est pas orientée, nous vérifions qu'aucune arête lui étant adjacente ne force son orientation.

A la suite de cet algorithme, nous avons une orientation des arêtes forcées par les sommets non-adjacents à x . Nous devons encore vérifier que les arêtes incidentes à x ne se forcent pas entre elles.

Algorithme 4: Orientation : Partie 2

Données : Un graphe de permutation premier G , une orientation T induite par un ordre transitif σ avec les arcs ajoutés par l'algorithme *Orientation : Partie 1* et le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x

Résultat : Si l'orientation T modifiée par l'algorithme *Orientation : Partie 1* est une orientation transitive

```

(c) |   pour chaque  $u \in N(x)$  faire
(d) |       pour chaque  $v \in N(x) \setminus N(u)$  faire
3   |           si  $(v, x) \in T$  et  $(x, u) \in T$  alors
      |               retourner Insertion Impossible
      |           fin
4   |           si  $(x, v) \in T$  et  $(u, x) \in T$  alors
      |               retourner Insertion Impossible
      |           fin
      |       fin
5   |       si  $(u, x) \notin T$  et  $(x, u) \notin T$  alors
      |           retourner Module série créé
      |       fin
      |   fin
  
```

L'algorithme *Orientation : Partie 1* est en temps $\mathcal{O}(d\Delta)$. En effet, la boucle (a) est itérée pour chaque voisin de x soit d fois et la boucle (b) est itérée Δ fois. Pour chaque voisin de x , nous parcourons son voisinage qui est au plus de taille Δ .

La complexité de l'algorithme *Orientation : Partie 2* est en temps $\mathcal{O}(d^2)$, la boucle (c) est itérée d fois, et la boucle (d) est itérée au plus d fois.

Montrons maintenant que l'orientation obtenue est une orientation transitive :

Lemme 3.2 *Pour tout sommet $u \in V$ voisin de x , il n'y a pas de paire de sommets $v, w \in V$ telle que $(u, v), (w, u) \in T$ avec $\{x, w\} \notin E$ et $\{x, v\} \notin E$ sans "Insertion Impossible" retourné par l'algorithme.*

Preuve. Si deux tels sommets v et w existent, dans l'orientation T , l'arc $(u, v) \in T$ force l'arc $(u, x) \in T$ et l'arc $(w, u) \in T$ force l'arc $(x, u) \in T$ ce qui est contradictoire. Cette situation est détectée lignes 1 et 2 de l'algorithme *Orientation : Partie 1*, qui retourne alors que l'insertion est impossible. \square

Lemme 3.3 *Il n'existe pas de paire de sommets $u, v \in V$ tels que $(u, x) \in T$ et $(x, v) \in T$ avec $\{u, v\} \notin E$ sans "Insertion Impossible" retourné par l'algorithme.*

Preuve. Si deux tels sommets u et v existent, dans l'orientation T , l'arc $(u, x) \in T$ force l'orientation de l'arc $(v, x) \in T$ et réciproquement, l'arc $(x, v) \in T$ force l'orientation de l'arc $(x, u) \in T$. Cette orientation est contradictoire et est détectée lignes 3 et 4 dans l'algorithme *Orientation : Partie 2* comme impliquant que l'insertion est impossible. \square

Lemme 3.4 *Notre algorithme d'orientation est tel qu'il n'y a pas de circuit induit par T .*

Preuve. Si un circuit est créé par l'ajout de x , c'est que nous avons un chemin de u à v dans le graphe G tel que nous obtenons par nos algorithmes les arcs $(x, u) \in T$ et $(v, x) \in T$.

Supposons que nous soyons dans cette situation, par transitivité de T dans G , nous avons l'arc $(u, v) \in T$. Si $(x, u) \in T$, c'est qu'il existe $u' \in V$ tel que $\{u, u'\} \notin E$ et $(u', u) \in T$ et par transitivité $(u', v) \in T$.

Par conséquent, nous avons $\{u', x\} \notin E$, $\{x, v\} \in E$ et $(u', v) \in T$ ce qui implique que nous ayons $(x, v) \in T$ et nous obtenons une contradiction avec la création d'un circuit. \square

Lemme 3.5 *Il n'existe pas de module série dans le graphe G avec x ajouté sans "Module série créé" retourné par l'algorithme.*

Preuve. S'il existe un module série dans le graphe à la suite de l'insertion de x , c'est qu'il existe un sommet u voisin de x tel que $N[x] = N[u]$. Dans ce cas, l'orientation forcée autour de x va correspondre à l'orientation des arêtes autour de u . L'ensemble des arêtes va être dans la même classe de forçage.

Maintenant regardons l'orientation de l'arête $\{u, x\} \in E$. Elle n'est pas forcée en effet, pour tout v appartenant à $N(x)$, nous avons $v \in N(u)$. Ce cas est détecté ligne 5 de l'algorithme *Orientation : Partie 2* et renvoie "Module série créé" contenant u et x . \square

Théorème 3.4 *L'orientation T obtenue par les algorithmes *Orientation : Partie 1* et *Orientation : Partie 2* est une orientation transitive.*

Preuve. Avant l'insertion de x , l'orientation de G est transitive, nous devons donc vérifier que l'ajout de x et l'orientation des arêtes autour de x n'enfreint pas la transitivité. Or,

1. toutes les arêtes sont orientées d'après le Lemme 3.5 ;
2. et, il n'existe pas deux arcs consécutifs $(u, v), (v, x) \in T$ ou $(x, u), (u, v) \in T$ ou $(u, x), (x, v) \in T$ sans la propriété de transitivité d'après les Lemmes 3.2, 3.3 et 3.4.

En conséquence, l'orientation T obtenue à partir des algorithmes *Orientation : Partie 1* et *Orientation : Partie 2* est une orientation transitive. \square

A la suite de cette orientation transitive des arêtes, remarquons quelques propriétés respectées par le graphe.

Propriété 3.1 *A la suite de ces algorithmes, pour tout stable X , soit tous les sommets de $X \cap N(x)$ précèdent x soit ils lui succèdent dans l'orientation transitive.*

Preuve. D'après le Lemme 3.3, nous ne pouvons pas avoir deux sommets $u, v \in V$ tels que $(u, x) \in T$ et $(x, v) \in T$ avec $\{u, v\} \notin E$ donc si u et v appartiennent au même stable, nous avons $\{u, v\} \notin E$ et en conséquence soit $(u, x), (v, x) \in T$ soit $(x, u), (x, v) \in T$. \square

Définition 3.6 Lorsque tous les sommets d'un stable X , voisins d'un sommet x , précèdent x (resp. succèdent à x) dans une orientation T , nous dirons que ce stable précède x (resp. succède à x).

Notation 3.1 Notons p le plus grand indice de stable tel que X_p précède x .

Lemme 3.6 Dans une orientation transitive T , pour tout stable X_j , si $j \leq p$ alors X_j précède x et si $j > p$ avec $X_j \cap N(x) \neq \emptyset$ alors X_j succède à x .

Preuve. Si un stable X_j avec $j \leq p$ est tel que $X_j \cap N(x) = \emptyset$, il existe un sommet u de X_p ayant un prédécesseur v dans X_j . Nous obtenons alors les arcs $(v, u) \in T$ et $(u, x) \in T$, or $\{u, x\} \notin E$, nous n'avons donc pas d'orientation transitive ce qui est une contradiction.

Si un stable X_j avec $j \leq p$ est tel que X_j succède à x , tout sommet u marqué de X_p a un prédécesseur v dans X_j , ce sommet est alors marqué (si ce n'était pas le cas, soit l'orientation de l'arc aurait été dans l'autre sens, soit nous aurions obtenu la configuration interdite du Lemme 3.2). Nous obtenons alors les arcs $(v, u) \in T$, $(u, x) \in T$ et $\{x, v\} \notin E$, nous n'avons donc pas une orientation transitive ce qui est une contradiction.

De manière symétrique, nous obtenons une contradiction avec le fait que T est une orientation transitive si un stable X_l précède x avec $l > p$. \square

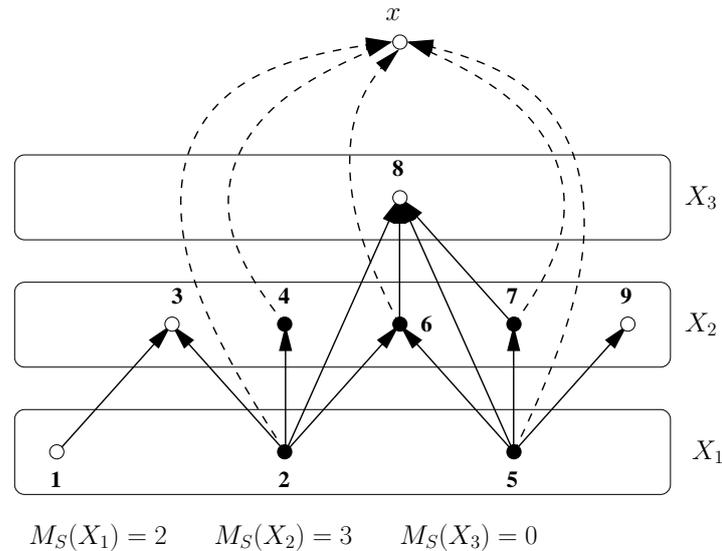


FIG. 3.14 – Orientation des nouvelles arêtes

L'orientation des arcs permet de déterminer où doit être inséré le sommet x . En effet, il doit être inséré dans le stable $p + 1$ pour respecter après insertion le Lemme 2.2. Nous aborderons

par la suite l'insertion elle-même, car si le stable $p + 1$ est marqué, différentes opérations sont nécessaires pour garantir la transitivité.

Dans notre exemple, nous obtiendrions l'orientation des arêtes entre les sommets de $N(x)$ et x comme illustré Figure 3.14. Notons que le sommet x devra donc être inséré dans le stable d'indice 2. S'il était inséré dans un stable d'indice différent nous aurions une contradiction avec la définition des stables. Tout sommet u d'un stable d'indice i est tel qu'il existe un plus long chemin de longueur i se terminant en u et, dans notre cas, la longueur du plus long chemin se terminant en x est 2.

3.4.4 Propriété de fermeture

Dans cet algorithme, nous devons vérifier que le voisinage de x vérifie bien la propriété de fermeture (étape 4 de l'algorithme *Reconnaissance*). En d'autres termes, qu'aucun sommet w non voisin de x ne possède son voisinage inclus dans celui de x et inversement que x n'ait pas son voisinage inclus dans celui de w et cela sans borne commune et dans aucun stable. En premier lieu, vérifions qu'aucun sommet ne possède son voisinage inclus de cette façon dans celui de x , et cela, dans chacun des stables. Nous rappelons que, pour un sommet u , $d_i(u)$ est son degré dans le stable X_i avec $1 \leq i \leq \beta$.

Algorithme 5: Fermeture

Données : Un graphe de permutation connexe G , avec n sommets, décomposé en β stables et le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x

Résultat : Si la propriété de fermeture est partiellement respectée

```

1  |   pour chaque  $i \in [1, \beta]$  tel que  $M_S(X_i) > 0$  faire
   |        $c \leftarrow f_i(x)$ 
2  |       tant que  $c \neq l_i(x)$  faire
   |            $c \leftarrow succ(c)$ 
3  |           pour chaque  $u \in N(c) \setminus N(x)$  faire
   |                $d_i(u) \leftarrow d_i(u) - 1$ 
4  |               si  $d_i(u) = 0$  alors
   |                   |   retourner Insertion Impossible
   |                   |   fin
   |                   fin
   |           fin
   |       fin
   |   fin

```

Concernant la complexité de cet algorithme, les boucles 1 et 2 permettent de parcourir l'ensemble des voisins de x . La boucle 3 permet de parcourir les sommets adjacents aux voisins de x et de vérifier si leur voisinage est inclus ou pas dans celui de x . La complexité globale de cet algorithme est donc en $\mathcal{O}(d\Delta)$.

Nous supposons que la table des $d_i(u)$ pour les sommets de l'ensemble $N(N(x))$ est sauvegardée avant cette opération puis restaurée.

Lemme 3.7 *A la suite de l'algorithme Fermeture, il n'y a pas de sommet u dans le graphe*

ayant son voisinage inclus dans celui de x , sans borne commune dans un stable, tel que la sortie de l'algorithme ne renvoie pas "Insertion Impossible".

Preuve. Supposons qu'un tel sommet u existe. Ce sommet a son voisinage inclus sans borne commune dans celui de x dans le stable X_i donc nous avons $f_i(x) <_\sigma f_i(u) <_\sigma l_i(u) <_\sigma l_i(x)$. Nous parcourons l'ensemble des sommets de X_i entre les sommets $\text{succ}(f_i(x))$ et $\text{pred}(l_i(x))$. Nous décrétons $d_i(u)$ pour chacun de ses voisins rencontrés. Donc entre $f_i(u)$ et $l_i(u)$, le sommet va être décrétementé $d_i(u)$ fois et l'algorithme *Fermeture* renvoie que l'insertion est impossible (ligne 4). \square

Dans notre exemple, illustré après le marquage, Figure 3.13, la propriété de fermeture est respectée. Si le sommet 9 avait été marqué, nous aurions le voisinage des sommets 5 et 8 qui aurait été inclus, dans le stable X_2 , dans le voisinage de x et aurait enfreint la propriété de fermeture.

De manière similaire, nous pouvons vérifier si le voisinage de x est inclus et sans borne commune, dans celui d'un autre sommet, dans un stable.

Algorithme 6: Fermeture Suite

Données : Un graphe de permutation connexe G , avec n sommets, décomposé en β stables et le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x

Résultat : Si la propriété de fermeture est partiellement respectée

```

1  |   pour chaque  $u \in N(x)$  faire
    |   |   pour chaque  $v \in N(u)$  faire
    |   |   |    $d'(v) \leftarrow d(v)$ 
    |   |   |   fin
    |   |   fin
    |   fin
    |   pour chaque  $u \in N(x)$  faire
    |   |   pour chaque  $v \in N(u)$  faire
    |   |   |    $d(v) \leftarrow d(v) - 1$ 
    |   |   |   si  $f_i(v) <_\sigma f_i(x)$  et  $l_i(x) <_\sigma l_i(v)$  alors
    |   |   |   |   retourner Insertion Impossible
    |   |   |   fin
    |   |   fin
    |   fin
    |   pour chaque  $u \in N(x)$  faire
    |   |   pour chaque  $v \in N(u)$  faire
    |   |   |   si  $d(v) = 0$  et  $d'(v) = d(x)$  alors
    |   |   |   |   retourner Module parallèle créé
    |   |   |   fin
    |   |   fin
    |   fin
  
```

Lemme 3.8 *A la suite de l'algorithme Fermeture Suite, il n'y a pas de sommet u dans le graphe tel que x a son voisinage inclus dans celui de u , sans borne commune dans un stable,*

tel que la sortie de l'algorithme ne renvoie pas "Insertion Impossible".

Preuve. Supposons qu'un tel sommet u existe. Nous détectons directement sa présence Ligne 1 de l'algorithme. \square

Théorème 3.5 *A la suite des algorithmes Fermeture et Fermeture Suite, le voisinage de x vérifie la propriété de fermeture.*

Preuve. Nous déduisons directement ce théorème à partir des Lemmes 3.7 et 3.8. \square

Lemme 3.9 *Il n'existe pas de module parallèle dans le graphe G avec x ajouté sans "Module parallèle créé" retourné par l'algorithme.*

Preuve. S'il existe un module parallèle dans le graphe à la suite de l'insertion de x , c'est qu'il existe un sommet u à distance 2 de x tel que $N(x) = N(u)$. Dans ce cas, lorsque nous décrétons de 1 le degré de tous les sommets voisins des sommets adjacents à x , nous devons obtenir $d(u) = 0$. Or, avant l'exécution de l'algorithme, $d(u) = d(x)$ et $d'(u)$ étant une sauvegarde de $d(u)$ avant les opérations, nous détectons la création de modules parallèles Ligne 2 de l'algorithme *Fermeture Suite*. \square

Dans notre exemple, illustré après le marquage, Figure 3.13, cette seconde partie de la propriété de fermeture est respectée. Si les sommets 4 et 6 n'avaient pas été marqués, le voisinage de x dans le stable X_2 aurait été inclus dans celui de 5 et aurait enfreint cette seconde partie de la propriété de fermeture.

La complexité de cet algorithme est $\mathcal{O}(d\Delta)$, nous parcourons l'ensemble des sommets à distance 2 de x .

3.4.5 Insertion du nouveau sommet

Notation 3.2 *Le stable contenant x , déterminé lors de l'étape de vérification de l'orientation transitive, est noté : $h(x) = p + 1$.*

Nous devons maintenant envisager comment s'effectue cette insertion. Les algorithmes qui composent cette partie, regroupent les étapes 5, 6 et 7 de l'algorithme *Reconnaissance*.

Nous devons déterminer à quelle position doit être inséré x dans le stable $X_{h(x)}$. Nous recherchons donc la position dans le stable qui respecte les propriétés d'adjacence et de fermeture.

Nous devons examiner trois cas :

1. S'il n'y a pas de stable $X_{h(x)}$, un nouveau stable contenant uniquement le sommet x est directement créé. Nous ne pouvons enfreindre aucune règle lors de cette insertion, le voisinage respecte les propriétés de fermeture et d'adjacence.

2. Si $M_S(X_{h(x)}) > 0$, nous devons changer des sommets de stables, nous traiterons ce cas dans le paragraphe suivant.
3. Si $M_S(X_{h(x)}) = 0$, nous pouvons effectuer l'insertion directement dans ce stable. Dans ce cas, nous devons vérifier à nouveau l'adjacence et la fermeture après l'insertion de x dans son stable. Nous traitons ce cas ultérieurement.

Dans notre exemple, illustré après le marquage, Figure 3.13, nous sommes dans le cas 3. Avant de détailler les cas 2 et 3, nous devons introduire une nouvelle notation :

Notation 3.3 *Pour tout sommet $u \in V$, nous notons :*

$$f'_i(u) = \begin{cases} \text{pred}(f_i(u)) & \text{si } N_i(u) \neq \emptyset \\ \max_{<_\sigma} \{w \in N(v) \mid v \in X_{h(u)} \text{ et } v <_\sigma u\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous notons v_1 un voisin de $f'_i(u)$ dans $X_{h(u)}$.

$$l'_i(u) = \begin{cases} \text{succ}(l_i(u)) & \text{si } N_i(u) \neq \emptyset \\ \min_{<_\sigma} \{w \in N(v) \mid v \in X_{h(u)} \text{ et } u <_\sigma v\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous notons v_2 un voisin de $l'_i(u)$ dans $X_{h(u)}$.

Remarquons que la fonction $f'_i(u)$ (resp. $l'_i(u)$) peut ne pas être définie dans le cas où u n'a pas de prédécesseur (resp. de successeur) ou si les prédécesseurs (resp. les successeurs) de u n'ont pas de voisin dans X_i .

Cas où des sommets doivent changer de stable : $M_S(X_{h(x)}) > 0$

Nous divisons cette procédure en deux étapes :

- Nous déterminons les sommets qui doivent être déplacés d'un stable à un autre.
- Nous donnons ensuite une méthode permettant de déplacer ces sommets.

Pour cela, nous avons besoin des notations suivantes :

Notation 3.4 *Le plus petit indice du stable non marqué d'indice supérieur à $h(x)$ est noté p' :*

$$p' = \min \{X_i \mid X_i \cap N(x) \neq \emptyset \text{ et } h(x) < i < \beta\}$$

L'ensemble des sommets u , tels que $h(u)$ est augmenté de un par l'insertion de x , est noté $N_d(x)$.

Pour déterminer les sommets appartenant à $N_d(x)$, nous effectuons un parcours en profondeur entre les stables $X_{h(x)}$ et $X_{p'}$ en ne traitant que les sommets marqués.

Algorithme 7: Décalage : Sommets décalés

Données : Un graphe de permutation connexe G avec n sommets décomposé en β stables, un ordre total σ défini sur V , le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x ainsi que les indices $h(x)$ et p'

Résultat : Détermine $N_d(x)$, les sommets voisins de x qui doivent changer de stable

```

 $N_d(x) \leftarrow N_{h(x)}(x)$ 
pour  $i$  de  $h(x) + 1$  à  $p' - 1$  faire
  |
  | pour chaque  $u \in N_i(x)$  faire
  | |
  | | si  $N_{i-1}(u) \cap N_d(x) \neq \emptyset$  alors
  | | |
  | | |  $N_d(x) \leftarrow N_d(x) \cup \{u\}$ 
  | | |
  | | | fin
  | | fin
  | fin
fin

```

Cet algorithme, de même que précédemment, est en $\mathcal{O}(d\Delta)$, nous ne parcourons que les sommets à distance deux de x soit au plus $d\Delta$ sommets.

Cet algorithme détermine les sommets qui doivent être décalés de la façon suivante : les sommets de $N_{h(x)}(x)$ sont les seuls qui changent obligatoirement de stable, étant donné que x est ajouté dans ce stable (par hypothèse, cet ensemble n'est pas vide). Ensuite, si un sommet est dans un stable X_i et qu'un de ses voisins dans le stable X_{i-1} passe dans le stable X_i , ce sommet devra lui aussi changer de stable.

La procédure qui effectue réellement le décalage des sommets est la suivante :

Algorithme 8: Décalage de $N_d(x)$

Données : Un graphe de permutation connexe G avec n sommets décomposé en β stables, un ordre total σ défini sur V , l'ensemble des sommets à décaler dans le graphe $N_d(x)$ ainsi que les indices $h(x)$ et p'

Résultat : Décale les sommets voisins de x qui doivent changer de stable

```

tant que  $N_d(x) \neq \emptyset$  faire
  |
  |  $i \leftarrow \max \{j \in [1, \beta] \mid X_j \cap N_d(x) \neq \emptyset\}$ 
  | pour chaque  $u \in N_d(x) \cap X_i$  faire
  | | la position d'insertion de  $u$  est entre  $f'_{i+1}(u)$  et  $l'_{i+1}(u)$ 
  | | fin
  | tant que  $N_d(x) \cap X_i \neq \emptyset$  faire
  | |  $u \leftarrow \min_{<\sigma} \{v \in V \mid v \in X_j \cap N_d(x)\}$ 
  | | Insérer  $u$  et les sommets ayant le même  $f'_{h(u)+1}(u)$  et  $l'_{h(u)+1}(u)$  dans
  | | le même ordre entre  $f'_{h(u)+1}(u)$  et  $l'_{h(u)+1}(u)$ 
  | | Nous supprimons les sommets insérés de  $N_d(x)$ 
  | | fin
  | fin
fin

```

Nous détaillons maintenant ces opérations et vérifions que le graphe obtenu respecte toujours les propriétés d'adjacence et de fermeture. Sans perte de généralité, nous considérons le sommet u et ceux qui sont décalés en même temps que lui comme un seul sommet, en fixant que les sommets de $N_d(x)$ qui ont déjà été décalés respectent les propriétés d'adjacence et de fermeture. En effet, si une des propriétés est enfreinte par le décalage d'un sommet v , c'est que cette propriété l'est également entre v et un sommet non décalés (les sommets décalés sont consécutifs).

Il n'y a pas de sommet $v \in N_d(x)$ tel que :

- $h(u) < h(v)$ ou
- $h(u) = h(v)$ et $v <_\sigma u$.

En effet, si un tel sommet v existe, d'après notre algorithme *Décalage de $N_d(x)$* , il est traité en premier et enlevé de $N_d(x)$.

Nous devons maintenant envisager le cas du décalage du sommet u et déterminer pourquoi la position donnée par l'algorithme est une position respectant les propriétés d'adjacence et de fermeture.

Fait 3.1 *Le sommet u n'a pas de voisin v dans le stable $X_{h(u)+1}$.*

Preuve. Si tel était le cas, x étant inséré dans un stable d'indice inférieur, par transitivité, x serait voisin de v . Or, dans le cas où v est marqué et possède un voisin dans le stable directement inférieur qui est décalé, v appartient à $N_d(x)$. Dans ce cas, v est déjà traité par notre algorithme et appartient maintenant au stable $X_{h(u)+2}$. \square

Lemme 3.10 *Le sommet u est tel que si $f'_{h(u)+1}(u)$ et $\text{pred}(l'_{h(u)+1}(u))$ sont définis, alors $f'_{h(u)+1}(u) = \text{pred}(l'_{h(u)+1}(u))$ (Figure 3.15).*

Preuve. Montrons que si $f'_{h(u)+1}(u) \neq \text{pred}(l'_{h(u)+1}(u))$, nous obtenons une contradiction.

- Si $l'_{h(u)+1}(u) \leq_\sigma f'_{h(u)+1}(u)$, par construction $v_1 <_\sigma v_2$ et, d'après la propriété de fermeture, nous obtenons :

- $f_{h(u)+1}(v_1) \leq_\sigma f_{h(u)+1}(v_2) = l'_{h(u)+1}(u)$
- $f'_{h(u)+1}(u) = l_{h(u)+1}(v_1) \leq_\sigma l_{h(u)+1}(v_2)$

En conséquence, il existe au moins un sommet v dans l'intervalle $[l'_{h(u)+1}(u), f'_{h(u)+1}(u)]$ de $X_{h(u)+1}$ adjacent à v_1 et v_2 .

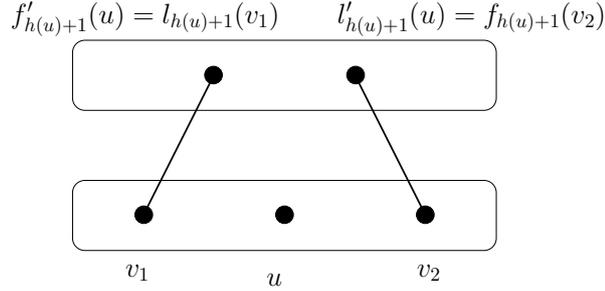
Or, ce sommet v n'est pas voisin de u (Lemme 3.1) en conséquence, son voisinage ne respecte pas la propriété d'adjacence. Donc $f'_{h(u)+1}(u) <_\sigma l'_{h(u)+1}(u)$.

- Si $f'_{h(u)+1}(u) <_\sigma \text{pred}(l'_{h(u)+1}(u))$, notons $w = \text{pred}(l'_{h(u)+1}(u))$. Ce sommet w a au moins un voisin dans le stable $X_{h(u)}$ or par construction de f' et de l' , w n'a aucun voisin ni inférieur à u ni supérieur à u dans l'ordre σ dans $X_{h(u)}$ ce qui est une contradiction.

Donc, $f'_{h(u)+1}(u) \geq_\sigma \text{pred}(l'_{h(u)+1}(u))$.

En conséquence, $f'_{h(u)+1}(u) =_\sigma \text{pred}(l'_{h(u)+1}(u))$

\square

FIG. 3.15 – Situation d'un sommet u avant son décalage

Lemme 3.11 *Le sommet u avant le décalage est tel que :*

1. *si $f'_{h(u)+1}(u)$ est défini et $l'_{h(u)+1}(u)$ ne l'est pas, il n'existe pas de sommet $v \in X_{h(u)+1}$ tel que $f'_{h(u)+1}(u) <_{\sigma} v$.*
2. *De même, si $l'_{h(u)+1}(u)$ est défini et $f'_{h(u)+1}(u)$ ne l'est pas, il n'existe pas de sommet $v \in X_{h(u)+1}$ tel que $v <_{\sigma} l'_{h(u)+1}(u)$.*

Preuve. Nous ne traitons que la preuve du cas 1, la preuve pour le second cas étant symétrique.

Supposons qu'un tel sommet v existe, dans ce cas, il possède un voisin dans $X_{h(u)}$ (Lemme 2.2). Par définition de f' , ce voisin ne peut pas précéder u ce voisin est donc après u dans l'ordre σ et dans le stable $X_{h(u)}$. Or, les successeurs de u n'ont pas de voisin dans $X_{h(u)+1}$ étant donné que $l'_{h(u)+1}(u)$ n'est pas défini. Nous avons donc une contradiction et le sommet v ne peut exister. \square

Lemme 3.12 *Soient $u_1, u_2 \in V$ tels que $\{u_1, u_2\} \notin E$, si $N(u_1) \cap X_{h(u_2)} \neq \emptyset$ et $l_{h(u_2)}(u_1) <_{\sigma} u_2$ alors $u_1 <_{\sigma} u_2$. De même, si $N(u_1) \cap X_{h(u_2)} \neq \emptyset$ et $u_2 <_{\sigma} f_{h(u_2)}(u_1)$ alors $u_2 <_{\sigma} u_1$.*

Preuve. Si $h(u_1) < h(u_2)$ cette preuve est évidente, car par transitivité, nous obtenons $u_1 <_{\sigma} l_{h(u_2)}(u_1) <_{\sigma} u_2$. Supposons $h(u_1) > h(u_2)$ et $u_2 <_{\sigma} l_{h(u_2)}(u_1)$, cela implique que $u_2 <_{\sigma} f_{h(u_2)}(u_1)$ ($u_2 \notin N(u_1)$) et par transitivité que $u_2 <_{\sigma} u_1$, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses donc $u_1 <_{\sigma} u_2$. Lorsque $u_2 <_{\sigma} f_{h(u_2)}(u_1)$, nous pouvons utiliser une preuve similaire pour obtenir $u_2 <_{\sigma} u_1$. \square

Lemme 3.13 *Une fois le sommet u déplacé, la propriété d'adjacence est toujours respectée.*

Preuve. S'il ne respecte pas la propriété d'adjacence, nous avons deux possibilités : (i) u coupe le voisinage d'un sommet en deux intervalles, (ii) un voisin de u a son voisinage séparé en deux intervalles.

- (i) Si u sépare le voisinage d'un sommet v qui lui est non-adjacent, c'est que v est voisin de $f'_{h(u)+1}(u)$ et de $l'_{h(u)+1}(u)$. En conséquence $h(v) \leq h(u)$, sinon par transitivité v serait voisin de v_1 et de v_2 mais pas de u ce qui est impossible d'après la propriété d'adjacence. Or, v ne peut pas être dans le stable de u par définition de f' et de l' . Donc $h(v) < h(u)$. D'après le Lemme 3.12 appliqué aux sommets $f'_{h(u)+1}(u)$ et u , nous obtenons $f'_{h(u)+1}(u) <_{\sigma} u$ (nous avons $l_{h(u)}(f'_{h(u)+1}(u)) <_{\sigma} u$). Par la propriété de transitivité,

d'après le Lemme 2.2, u possède un voisin dans le stable $X_{h(v)}$. Regardons la disposition du voisinage de u dans le stable $X_{h(v)}$.

D'après la propriété de fermeture, nous obtenons $l_{h(v)}(f'_{h(u)+1}(u)) \leq_{\sigma} l_{h(v)}(u)$, en conséquence le voisinage de u dans $X_h(v)$ ne peut pas précéder v . En appliquant la même méthode entre les sommets u et $l'_{h(u)+1}(u)$, nous obtenons que le voisinage de u ne peut pas être après v dans σ . Il est donc impossible qu'un tel sommet v existe.

- (ii) Si un voisin de u noté v a son voisinage séparé après le déplacement du sommet u , d'après les Lemmes 3.10 et 3.11, c'est qu'il est adjacent à un sommet w avec soit $w <_{\sigma} f'_{h(u)+1}(u)$ et v est non-adjacent à $f'_{h(u)+1}(u)$ (Figure 3.16), soit $w >_{\sigma} l'_{h(u)+1}(u)$ et v est non-adjacent à $l'_{h(u)+1}(u)$.

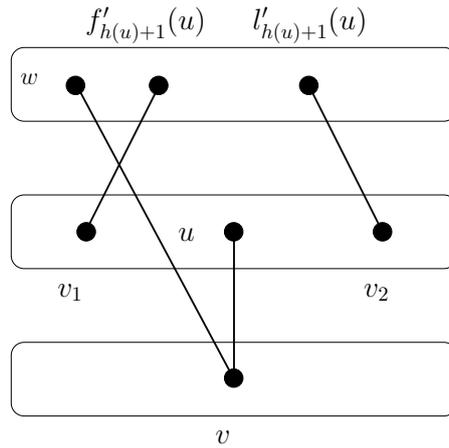


FIG. 3.16 – Situation d'un sommet u avec un sommet v dont la propriété d'adjacence n'est pas respectée si u est décalé

Traitons le cas du sommet $w <_{\sigma} f'_{h(u)+1}(u)$ et où v est non-adjacent à $f'_{h(u)+1}(u)$, le second cas est symétrique. D'après la contraposée de la propriété de fermeture (Définition 2.21), $v <_{\sigma} v_1$ car $l_{h(u)+1}(v) <_{\sigma} f'_{h(u)+1}(u) = l_{h(u)+1}(v_1)$ or d'après le Lemme 3.12, $v_1 <_{\sigma} v$ car $v_1 <_{\sigma} f_{h(u)}(v)$. En conséquence, un tel sommet w ne peut pas exister.

L'autre cas étant symétrique, nous obtenons une contradiction et le sommet v ne peut pas exister.

□

Lemme 3.14 *Le sommet u ainsi déplacé respecte la propriété de fermeture.*

Preuve. L'ordre σ restreint aux voisins de u reste inchangé par le décalage de u .

Enfin, l'ordre entre u et les sommets qui ne lui sont pas adjacents n'est pas modifié. En effet, les seuls sommets, avec lesquels u pourrait être inversé, sont ceux du stable $X_{h(u)+1}$. Or, le Lemme 3.12, appliqué à u avant le décalage et $f'_{h(u)+1}(u)$, implique que $f'_{h(u)+1}(u) <_{\sigma} u$ et symétriquement, $u <_{\sigma} l'_{h(u)+1}(u)$. Donc lors du décalage et de l'insertion de u entre ces deux sommets, l'ordre dans le stable $X_{h(u)+1}$ n'est pas modifié.

L'ordre σ n'étant pas modifié par cette opération de décalage, la propriété de fermeture étant valide avant le décalage, elle le reste après. \square

Théorème 3.6 *Le décalage d'un sommet u entre les sommets $f'_{h(u)+1}(u)$ et $l'_{h(u)+1}(u)$ laisse inchangé l'ordre σ et maintient la propriété d'adjacence et de fermeture.*

Preuve. Ce théorème se déduit directement des Lemmes 3.13 et 3.14. \square

Maintenant, nous pouvons directement ajouter le sommet x dans le graphe comme le montre l'étape suivante.

Déduction de la position d'insertion de x en vérifiant les propriétés de fermeture et d'adjacence

Nous effectuons l'insertion dans le stable $X_{h(x)}$ déterminé précédemment, ce dernier ne contient aucun sommet adjacent à x . Si c'était le cas, nous aurions décalé ces sommets en utilisant les algorithmes *Décalage : Sommets décalés* et *Décalage de $N_d(x)$* de la partie précédente.

Algorithme 9: Adjacence / Insertion : Partie 1

Données : Un graphe de permutation connexe G avec n sommets décomposé en β stables et le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x

Résultat : L'intervalle dans lequel nous pouvons effectuer l'insertion

```

|    $m \leftarrow \max \{i \mid M_S(X_i) > 0\}$ 
|    $l_c \leftarrow f_{h(x)}(l_m(x))$ 
|    $f_c \leftarrow l_{h(x)}(f_m(x))$ 
|   pour chaque  $i \neq m$  tel que  $M_S(X_i) > 0$  faire
|       |   si  $f_{h(x)}(l_i(x)) >_{\sigma} l_c$  alors
|           |    $l_c \leftarrow f_{h(x)}(l_i(x))$ 
|           |   fin
|           |   si  $l_{h(x)}(f_i(x)) <_{\sigma} f_c$  alors
|               |    $f_c \leftarrow l_{h(x)}(f_i(x))$ 
|               |   fin
|       |   fin
|       si  $\text{succ}(l_c) <_{\sigma} f_c$  alors
|           |   retourner Insertion Impossible
|       sinon
|           |   si  $l_c \leq f_c$  alors
|               |   retourner  $[\min \{f_{h(x)}(\text{succ}(l_1(x))), f_c\}, \max \{l_{h(x)}(\text{succ}(f_1(x))), l_c\}]$ 
|               |   sinon
|                   |   retourner  $]f_c, l_c[$ 
|                   |   fin
|           |   fin
|       fin

```

Durant une étape de l'algorithme, la situation est celle de la Figure 3.17.

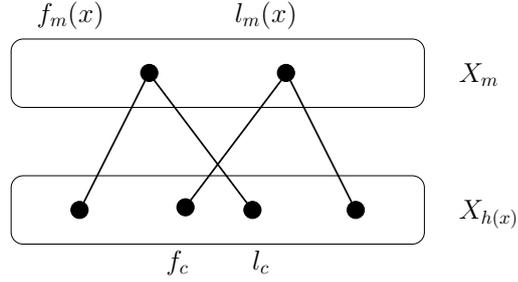


FIG. 3.17 – Situation dans la boucle de l'algorithme

Pour déterminer la position d'insertion vérifiant la propriété d'adjacence, nous effectuons l'intersection du voisinage de tous les sommets de $N(x)$ dans le stable $X_{h(x)}$.

Pour effectuer cette intersection, nous prenons les sommets bornant l'intervalle de voisins et nous regardons leur voisinage dans le stable $X_{h(x)}$. Ces sommets sont les plus contraignants, s'ils ne partagent pas de sommet dans le stable $X_{h(x)}$, c'est que l'ajout ne peut pas être fait sans que l'un des sommets n'enfreigne la propriété d'adjacence.

Lemme 3.15 *L'intervalle solution retourné par cet algorithme est le seul possible pour l'insertion de x .*

Preuve. Nous effectuons l'intersection du voisinage de chacun des sommets adjacents à x dans le stable $X_{h(x)}$ (s'ils ont des voisins dans $X_{h(x)}$ sinon nous obtiendrions l'ensemble vide). Suivant l'intervalle obtenu, nous pouvons vérifier si l'insertion de x est possible.

- Si $\text{succ}(l_c) <_{\sigma} f_c$, c'est qu'il existe deux sommets $u, v \in N(x)$ et un sommet $w \in X_{h(x)} \setminus N(x)$ tels que $l_{h(x)}(u) <_{\sigma} w <_{\sigma} f_{h(x)}(v)$ (Figure 3.18).

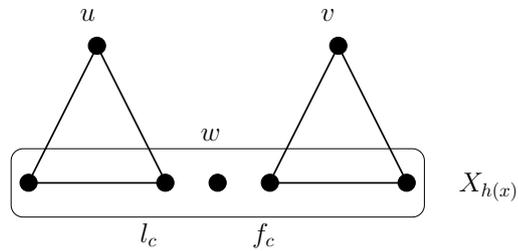


FIG. 3.18 – Cas lorsque $\text{succ}(f_c) <_{\sigma} l_c$

Le sommet x doit être inséré avant ou après w . Dans le cas où on insère x avant w , le voisinage de v ne respecte plus la propriété d'adjacence. Si x est inséré après w , le voisinage de u ne respecte plus la propriété d'adjacence. Donc le sommet x ne peut pas être inséré.

- Dans le cas où $\text{succ}(l_c) = f_c$, la seule solution d'insertion possible est entre ces deux sommets. En effet, nous pouvons nous référer à la Figure 3.18 en supprimant le sommet

w . Dans ce cas, si nous insérons à une autre position, l'un des sommets entre u et v aura son voisinage non-consécutif.

– Si $f_c \leq_\sigma l_c$, deux cas se présentent :

– Tous les stables marqués ont un voisin dans $X_{h(x)}$. Supposons le contraire, par définition de f_c et de l_c , tous les sommets de $[f_c, l_c]$ sont voisins de tous les sommets marqués. Donc le voisinage de tout sommet de cet intervalle est égal ou inclue celui de x . Dans le cas où le voisinage est égal, nous obtenons un module parallèle et ce cas est déjà traité (Lemme 3.9).

Tous les sommets de cet intervalle ne peuvent pas inclure le voisinage de x dans tous les stables marqués, nous enfreindrions la propriété de fermeture qui est déjà vérifiée d'après le Théorème 3.5.

Dans ce cas, l'ajout est donc impossible.

– Au moins un stable marqué n'a aucun voisin dans $X_{h(x)}$. Il existe donc un stable X_s , tel que l'intersection de X_h et du voisinage des sommets marqués de X_s est vide.

L'indice s est inférieur à $h(x)$ car à partir de la propriété de transitivité de l'ordre σ et d'après le Lemme 2.2 tous les sommets de X_s ont des voisins dans les stables d'indice inférieur à s . Or, tous les sommets de $X_{h(x)}$ ont au moins un voisin dans les stables inférieurs et en conséquence dans X_s .

Donc, tout sommet de $[l_c, f_c]$ précède ou succède le voisinage de x dans X_s d'après le Lemme 3.12 basé sur la propriété de fermeture.

La propriété de fermeture étant respectée avant l'ajout de x , il existe un sommet v de $[l_c, f_c]$ tel que pour tout sommet $v' \in [l_c, f_c]$ avec $v <_\sigma v'$, pour tout sommet $w \in N(x) \cap X_s$, nous avons $v <_\sigma w <_\sigma v'$ (Figure 3.19).

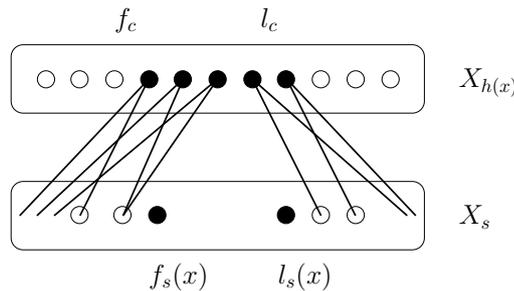


FIG. 3.19 – Cas lorsque $f_c \leq_\sigma l_c$

La position d'insertion de x est donc en tant que successeur de v pour ne pas enfreindre la propriété d'adjacence.

□

La complexité de cet algorithme est en temps $\mathcal{O}(d\Delta)$, car dans le pire des cas, lorsque l'intervalle $[l_c, f_c]$ est grand, nous pouvons parcourir au plus Δ sommets.

Nous obtenons une seule position possible dans laquelle nous pouvons insérer x , pour terminer de vérifier la propriété d'adjacence, nous vérifions que cette position ne sépare pas

en deux intervalles le voisinage d'un sommet non-adjacent à x . Nous notons respectivement p_x et s_x le prédécesseur et le successeur de x .

Algorithme 10: Adjacence / Insertion : Partie 2

Données : Un graphe de permutation connexe G avec n sommets décomposé en β stables, un ordre transitif σ , le voisinage $N(x)$ d'un nouveau sommet x ainsi que les positions p_x et s_x

Résultat : Si l'insertion est possible ou pas

si $N(p_x) \cap N(s_x) \subseteq N(x)$ alors retourner <i>Insertion Possible</i> sinon retourner <i>Insertion Impossible</i> fin
--

Lemme 3.16 *Si l'algorithme Adjacence / Insertion : Partie 2 retourne "Insertion Possible" tous les sommets non-adjacents à x ont leur voisinage consécutif dans $X_{h(x)}$.*

Preuve. D'après le Lemme 3.15, tous les voisins de x ont leur voisinage qui respecte la propriété d'adjacence après l'ajout de x . Supposons qu'un sommet v non-adjacent à x ait son voisinage séparé en deux intervalles par l'insertion de x . Alors, v est voisin de p_x et de s_x (la propriété d'adjacence est respectée avant l'insertion) et donc $N(p_x) \cap N(s_x) \not\subseteq N(x)$. \square

Nous pouvons en déduire directement :

Corollaire 3.1 *L'insertion du nouveau sommet x entre p_x et s_x est telle que la propriété d'adjacence est toujours respectée.*

La complexité de cet algorithme $\mathcal{O}(\Delta)$, nous vérifions les voisins des sommets p_x et s_x .

Nous devons maintenant vérifier la propriété de fermeture, c'est à dire que tous les sommets non-voisins de x aient leur voisinage qui chevauche correctement celui de x (par rapport à l'ordre σ).

Pour commencer, nous devons déterminer la position de x dans l'ordre total σ .

Nous positionnons x entre les sommets $\max\{p_x\} \cup N^-(x)$ et $\min\{s_x\} \cup N^+(x)$. Dans ce cas, nous respectons les positions dans le stable et dans l'ordre transitif.

Maintenant que x est positionné dans l'ordre σ , nous devons vérifier que la propriété de fermeture est bien respectée.

Soient v_1 et v_2 deux sommets de V tels que $v_1 = \max\{u \in V \mid u <_\sigma x \text{ et } \{u, x\} \notin E\}$ et $v_2 = \min\{u \in V \mid x <_\sigma u \text{ et } \{u, x\} \notin E\}$.

Lemme 3.17 *Si la propriété de fermeture est vérifiée entre x et les sommets v_1 et v_2 , alors σ vérifie la propriété de fermeture.*

Preuve. Nous ne vérifions ce lemme que pour v_1 , la preuve étant symétrique pour v_2 .

x et v_1 vérifient la propriété de fermeture si et seulement si $f_i(v_1) \leq_\sigma f_i(x)$ et $l_i(v_1) \leq_\sigma l_i(x)$ pour tout stable i marqué.

Considérons un sommet $w <_\sigma v_1$ tel que $\{w, x\} \notin E$, deux cas se présentent :

- $\{v_1, w\} \in E$, dans ce cas, par transitivité, nous obtenons $f_i(w) \leq_\sigma f_i(v_1) \leq_\sigma f_i(x)$ et $l_i(v_1) \leq_\sigma l_i(w)$. Or $l_i(w) \leq_\sigma l_i(x)$ car sinon le voisinage de x serait inclus dans celui de w et nous aurions déjà détecté ce cas dans l'algorithme *Fermeture*. Donc la propriété de fermeture est vérifiée.
- $\{v_1, w\} \notin E$, la propriété de fermeture entre v_1 et w étant vérifiée avant l'insertion de x , elle l'est aussi entre v_1 et x .

La propriété de fermeture est donc vérifiée dans le graphe. \square

Nous pouvons parcourir l'ordre σ à partir de x pour trouver v_1 et v_2 , au pire nous parcourons d sommets avant de les atteindre. Ensuite, nous effectuons au plus d tests pour vérifier la propriété de fermeture entre v_1 et x d'un côté et v_2 et x ensuite.

Les propriétés d'adjacence et de fermeture étant vérifiées après l'ajout simulé de x , nous pouvons ajouter réellement x et nous obtenons bien un graphe de permutation premier.

Théorème 3.7 *Soit G un graphe de permutation premier stocké dans notre structure de données, l'ajout de x en utilisant l'algorithme Reconnaissance ne s'effectue que si le graphe reste un graphe de permutation premier.*

Preuve. D'après les Théorèmes 3.4, 3.5 et 3.6, le Corollaire 3.1 et le Lemme 3.17, si l'ajout de x est effectué, le graphe obtenu est tel que l'ordre σ est toujours un ordre transitif et il respecte les propriétés d'adjacence et de fermeture. En conséquence le graphe obtenu est toujours un graphe de permutation. De plus, ce graphe est un graphe de permutation premier étant donné que la création d'un module série ou parallèle est traitée et interdite (Lemmes 3.5 et 3.9). \square

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fourni un algorithme partiel incrémental de reconnaissance des graphes de permutation premiers. Soit, une reconnaissance incrémentale avec une complexité en temps en $\mathcal{O}(d\Delta + d^2)$.

Il semble pertinent d'affirmer que c'est une étape vers une reconnaissance des graphes de permutation quelconques. En effet, l'étude de la mise à jour de l'arbre de décomposition de cette famille en utilisant les résultats sur les cographes permettrait d'aboutir à cette reconnaissance.

Les difficultés résident dans la complexité en temps de nos algorithmes. Actuellement notre reconnaissance est en $\mathcal{O}(d\Delta + d^2)$ alors que des algorithmes de reconnaissance non dynamiques permettent de reconnaître cette famille en temps linéaire : $\mathcal{O}(n + m)$ où n est le nombre de sommets et m le nombre d'arêtes du graphe [MS97]. Est-il possible en gardant pour base notre caractérisation (Chapitre 2) d'obtenir un ensemble d'algorithmes tel que pour la construction d'un graphe nous ayons une complexité approchant celle de l'algorithme non dynamique ? Si

cela s'avère impossible, quelles en seraient les raisons, devrions-nous étendre notre caractérisation en ajoutant d'autres propriétés issues des graphes de permutation, notamment concernant le complémentaire ? Ce dernier intervient grandement dans les problèmes algorithmiques de cette reconnaissance dynamique. En effet, lors de l'ajout d'un sommet, il est nécessaire de faire des vérifications sur les sommets non-adjacents au nouveau sommet. Pouvons-nous nous passer de ces vérifications pour pallier aux difficultés posées par la vérification de la propriété de fermeture ?

Chapitre 4

Étiquetage de distance

Dans ce chapitre, nous traitons un nouveau problème, l'étiquetage de distance. L'objectif est d'étiqueter l'ensemble des sommets d'un graphe de façon à ce que quelque soit la paire de sommets choisie, nous soyons capable de donner la distance entre ces sommets en utilisant uniquement les informations stockées dans leur étiquette. Les principaux problèmes sont que les étiquettes utilisées doivent être les plus petites possibles et le calcul de celles-ci, ainsi que le décodage de distance, doivent être le moins coûteux possible pour la complexité en temps. Afin d'obtenir cet étiquetage de distance, nous utilisons les propriétés d'adjacence et de fermeture (Définitions 2.19 et 2.21 pages 22 et 23) dans des ensembles particuliers.

4.1 Motivations

Dans cette étude, nous traitons des propriétés locales des graphes de permutation : en général, lorsque une requête est effectuée sur un ensemble de noeuds dans un réseau (distance, adjacence, connectivité, etc...), un accès global à la structure de données est nécessaire. Pour que seul un accès local soit effectué, la solution est de stocker le maximum d'informations dans l'étiquette des sommets et ainsi de répartir les connaissances du réseau.

Notation 4.1 Notons $d_G(x, y)$ la longueur du plus court chemin connectant x et y dans G appelée la distance entre ces deux sommets.

Une requête de distance s'effectue lorsque nous souhaitons connaître la distance entre deux sommets en utilisant uniquement l'étiquette de ces sommets. Nous nous intéressons au problème d'étiquetage de distance [Pel99] : la définition d'une structure de données totalement distribuée supportant des requêtes de distance dans les graphes de permutation.

Notre problème est le suivant : comment étiqueter les sommets d'un graphe de permutation G pour calculer la distance entre deux sommets x et y en utilisant seulement l'information stockée dans les étiquettes de x et de y ? De plus est-il possible de construire ces étiquettes avec une complexité en temps linéaire durant une étape de précalcul, pour permettre des requêtes de distance en temps constant ?

Du fait de l'importance des systèmes distribués (pair-à-pair, clusters de PCs, systèmes multiprocesseurs, réseaux sans fil, ...), les schémas d'étiquetage de distance sont largement

étudiés depuis quelques années. M.A. Breuer a introduit l'étiquetage d'adjacence [Bre66, BF67, KNR92, ABR03] et par la suite d'autres schémas ont été introduits, l'étiquetage de distance [Pel99, CDV03] et de routage compact [Gav01, TZ01]. La majorité des études sur l'étiquetage de distance se focalise sur des familles de graphes spécifiques : graphes d'intervalles, graphes d'arcs circulaires et graphes de permutation [KKP00, GKK⁺01, GP03b, GP03a]. Ces études mettent en avant des propriétés structurales de ces familles de graphes telles que les graphes "bien séparés". La décomposition est donc au centre de nos préoccupations, en effet, si nous sommes capable de "bien séparer" le graphe, autrement dit de le décomposer en divisant par deux sa taille à chaque étape, nous obtenons un arbre dans lequel nous sommes capables de donner des étiquettes de taille $\mathcal{O}(\log^2 n)$. Dans notre cas, nous nous intéressons uniquement à la famille des graphes de permutation en utilisant les propriétés que nous avons dégagées lors de la caractérisation de cette famille (Chapitre 2).

4.2 Représentation des graphes de permutation dans un repère cartésien

Notons que par la suite nous ne considérerons que des graphes de permutation connexes. A partir de la définition des graphes de permutation 2.3 page 12, nous construisons une nouvelle représentation des graphes de permutation nous permettant de visualiser plus simplement certaines propriétés.

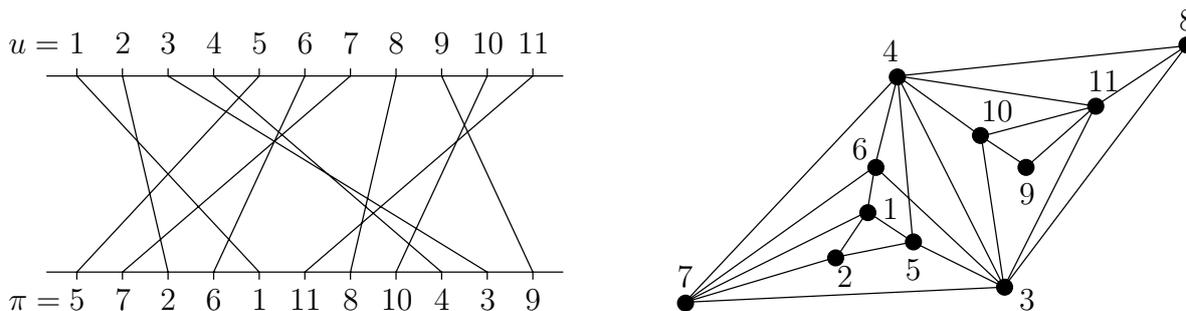


FIG. 4.1 – Un graphe de permutation $G[\pi]$ avec une de ses représentations $\pi = 5\ 7\ 2\ 6\ 1, 11, 8, 10, 4, 3, 9$.

De manière abusive, étant donné que $V = \{1, \dots, n\}$, lorsque nous écrivons $v \in V$, nous utilisons v en tant que sommet ou v en tant qu'entier (seul le contexte permettra de différencier ces cas). Nous représentons le graphe dans un repère cartésien à partir de cette permutation π . Nous utilisons directement la numérotation des sommets ainsi que la permutation associée en tant que coordonnées dans un repère cartésien. Chaque sommet v est représenté par un point P_v du plan cartésien de coordonnées $(v, \pi^{-1}(v))$ comme illustré dans la Figure 4.2 (v est par définition un entier, nous utilisons son étiquette comme abscisse).

Selon les règles d'adjacence, un sommet u est voisin d'un sommet v si et seulement si $(u - v)(\pi^{-1}(u) - \pi^{-1}(v)) < 0$. Et dans le repère cartésien, si les points $P_u = (x_u, y_u)$ et $P_v = (x_v, y_v)$ sont tels que $(x_u - x_v)(y_u - y_v) < 0$, en d'autres termes lorsque P_u appartient au quart de plan Sud-Est ou au quart de plan Nord-Ouest de P_v (Figure 4.2).

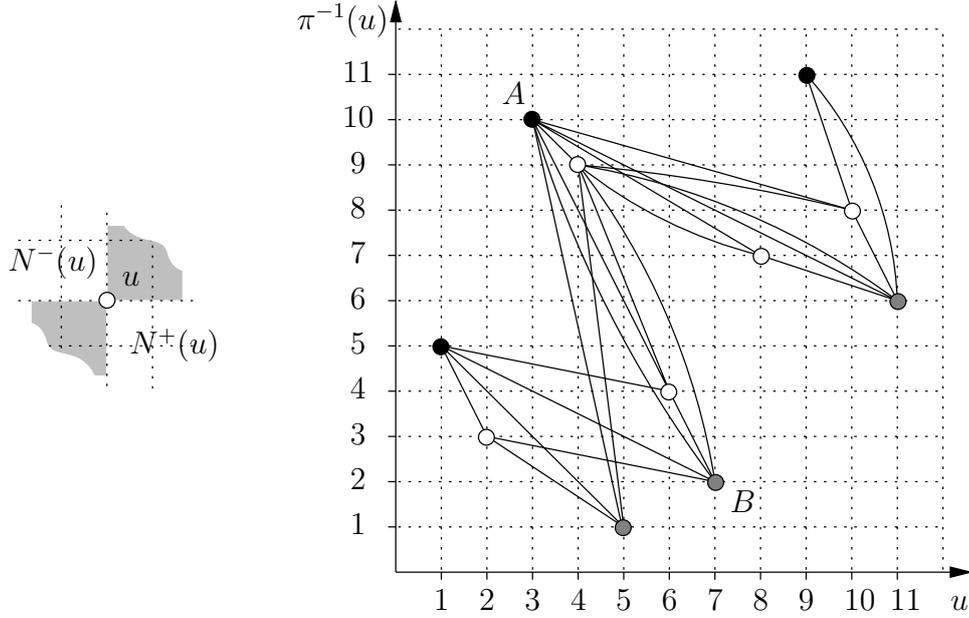


FIG. 4.2 – Représentation dans le repère cartésien du graphe de permutation de la Figure 4.1.

Etant donné $G[\pi]$ un graphe de permutation, nous utilisons l'ordre naturel entre les entiers comme ordre total entre les sommets. Nous rappelons que cet ordre est une extension linéaire non-séparante du graphe (Proposition 2.1) et définit en conséquence une orientation transitive du graphe.

Nous partitionnons l'ensemble des voisins d'un sommet u en deux sous-ensembles $N^+(u)$ et $N^-(u)$ de la façon suivante :

Définition 4.1 *Pour tout sommet u d'un graphe de permutation G , nous pouvons partitionner $N(u)$ en deux ensembles $N^+(u)$ et $N^-(u)$:*

$$N^+(u) = \{v \in N(u) \mid u < v\}$$

$$N^-(u) = \{v \in N(u) \mid v < u\}$$

Nous distinguons deux sous-ensembles particuliers de V , A et B de la façon suivante :

$$A = \{u \in V \mid N^-(u) = \emptyset\} \quad \text{et} \quad B = \{u \in V \mid N^+(u) = \emptyset\}$$

Notons que A et B sont des stables, deux sommets u et v de A ou de B ne peuvent pas être voisins sans provoquer d'incohérence avec la définition de ces deux sous-ensembles. De plus, si G est connexe et possède au moins une arête, nous avons $A \cap B = \emptyset$. Ces deux ensembles A et B sont notés avec des points respectivement noirs et gris dans la Figure 4.2.

4.3 Etiquetage de distance des graphes de permutation

Pour donner des propriétés sur les stables A et B , nous allons utiliser les Lemmes 2.3 et 2.4 des pages 22 et 23.

D'après la Proposition 2.1 et le Lemme 2.3, la numérotation des sommets est telle que l'ordre $<$ sur V est une extension linéaire non-séparante vérifiant la propriété d'adjacence forte (Définition 2.20 page 22).

Nous notons donc $f_A(u)$ et $l_A(u)$ (resp. $f_B(u)$ et $l_B(u)$) le premier et le dernier voisin d'un sommet u dans le stable A (dans le stable B). Notons une différence majeure par rapport aux fonctions similaires de la caractérisation. En effet, si u appartient à A , $f_A(u) = l_A(u) = u$, de même pour le stable B .

De plus, les sommets de A et de B sont respectivement les sources et les puits (respectivement sommets sans prédécesseur et sans successeur dans un graphe orienté) de l'orientation transitive. Nous obtenons donc à partir de la propriété d'adjacence forte :

Corollaire 4.1 *Pour tout $u \in V$, il existe $f_A(u), l_A(u) \in A$ tels que $f_A(u) \leq l_A(u)$ et $N[u] \cap A = [f_A(u), l_A(u)] \cap A$. De façon similaire, il existe $f_B(u), l_B(u) \in B$ tels que $f_B(u) \leq l_B(u)$ et $N[u] \cap B = [f_B(u), l_B(u)] \cap B$.*

$N[u] \cap A$ et $N[u] \cap B$ ne sont jamais vides et sont respectivement des sommets consécutifs dans A et B avec $f_A(u) = \min \{N[u] \cap A\}$ et $l_A(u) = \max \{N[u] \cap A\}$, de même pour $f_B(u)$ et $l_B(u)$.

D'après le Lemme 2.4, l'ordre $<$ entre les sommets vérifie la propriété de fermeture forte, nous obtenons donc :

Corollaire 4.2 *Soient $u < v$ deux sommets non-adjacents, alors $f_A(u) \leq f_A(v)$, $l_A(u) \leq l_A(v)$, $f_B(u) \leq f_B(v)$ et $l_B(u) \leq l_B(v)$.*

Lemme 4.1 *Soient $u < v$ deux sommets non-adjacents, alors il existe un plus court chemin $u, w_1, \dots, w_{k-1}, v$ tel que $w_1 \in \{l_A(u), l_B(u)\}$ et si $d_G(u, v) \geq 3$ alors $w_{k-1} \in \{f_A(v), f_B(v)\}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k$ un plus court chemin entre $u = p_0$ et $v = p_k$ avec $k = d_G(u, v) \geq 2$ et $u < v$.

Notons que si $u < v$, P_v appartient au quadrant Nord-Est de P_0 , sinon u et v seraient adjacents.

Considérons les deux premières arêtes de \mathcal{P} et montrons que p_1 peut être remplacé par un sommet satisfaisant les conditions de ce lemme. Premièrement, montrons que $p_0 < p_2$.

Si $p_2 < p_0$, d'après la représentation graphique nous obtenons que P_{p_2} appartient au quadrant Sud-Ouest de P_{p_0} , or il n'y a pas d'arête joignant le quadrant Sud-Ouest au quadrant Nord-Est de P_{p_0} . En conséquence, par connexité de \mathbb{R}^2 , tout chemin de P_{p_0} à P_{p_k} passant par P_{p_2} doit contenir un point intermédiaire P_w positionné soit dans le quadrant Nord-Ouest soit dans le quadrant Sud-Est de P_{p_0} . Ceci est une contradiction étant donné que w serait adjacent à p_0 et un chemin plus court que \mathcal{P} serait obtenu.

Observons que, étant donné que $\{p_0, p_2\} \notin E$, nous obtenons $p_1 \in N^-(p_0) \cap N^-(p_2)$ ou $p_1 \in N^+(p_0) \cap N^+(p_2)$.

Supposons que $p_1 \in N^-(p_0) \cap N^-(p_2)$, il suffit de montrer que $l_A(p_0)$ est adjacent à p_2 (et donc $l_A(p_0) = w_1$). Nous avons $l_A(p_1) \in N(p_0) \cap A$ ainsi que $l_A(p_1) \in N(p_2) \cap A$. En d'autres termes, $l_A(p_1) \in [f_A(p_0), l_A(p_0)] \cap [f_A(p_2), l_A(p_2)]$ ce qui implique que $f_A(p_2) \leq l_A(p_0)$. D'après le Corollaire 4.2 (propriété de fermeture) appliqué sur les sommets non-adjacents $p_0 < p_2$,

nous obtenons $l_A(p_0) \leq l_A(p_2)$ et donc $f_A(p_2) \leq l_A(p_0) \leq l_A(p_2)$. Nous en déduisons que $l_A(p_0) \in [f_A(p_2), l_A(p_2)]$ et en conséquence, $l_A(p_0)$ est adjacent à p_2 .

La preuve du cas $p_1 \in N^+(p_0) \cap N^+(p_2)$ est similaire en démontrant que $l_B(p_0)$ est adjacent à p_2 .

Finalement, si u et v sont à distance ≥ 3 , i.e. $k \geq 3$, nous pouvons considérer les deux dernières arêtes de P entre les sommets p_{k-2}, p_{k-1}, p_k afin de montrer que $p_{k-1} \neq p_1$ peut être remplacé par un sommet satisfaisant les conditions du lemme. La preuve est symétrique en échangeant les rôles de p_k avec p_0 , de p_{k-1} avec p_1 , de p_{k-2} avec p_2 et en prenant en compte le fait que $p_k > p_{k-2}$. \square

Notation 4.2 Pour tout sommet u , soient $\mathcal{I}_B(u) = [f_A(u), l_A(u)]$ et $\mathcal{I}_A(u) = [f_B(u), l_B(u)]$. De plus, nous notons $G_A = (A, E_A)$ le graphe d'intersection de la famille $\{\mathcal{I}_A(u) \mid u \in A\}$. Pour deux sommets u, v de A , nous avons donc $\{u, v\} \in E_A$ si et seulement si $\mathcal{I}_A(u) \cap \mathcal{I}_A(v) \neq \emptyset$. Et similairement, nous définissons $G_B = (B, E_B)$ le graphe d'intersection de la famille $\{\mathcal{I}_B(u) \mid u \in B\}$.

Par définition, G_A et G_B sont des graphes d'intervalles (Figure 4.3) mais nous verrons, ultérieurement dans le Lemme 4.5, que G_A et G_B sont des graphes d'intervalles propres. Nous prêterons une attention particulière à ces notations pouvant prêter à confusion : si nous prenons le graphe G_A , ces sommets sont dans A et les intervalles sont composés des voisins de A dans B . Les intervalles proprement dits sont donc dans B malgré le nom du graphe.

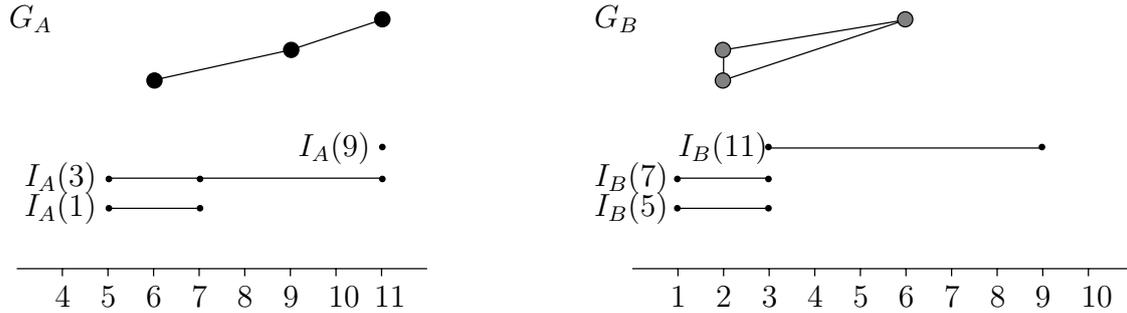


FIG. 4.3 – Les graphes d'intervalles propres G_A et G_B de la Figure 4.2

Lemme 4.2 *Le graphe de permutation G étant connexe, les graphes G_A et G_B sont connexes.*

Preuve. Précédemment, A et B ont été définis comme les puits et sources de l'orientation transitive. Si G est connexe et que G_A possède deux composantes connexes C_1 et C_2 , c'est que pour tout couple de sommets $(u, v) \in C_1 \times C_2$, il n'existe pas de sommet w de B voisin à la fois de u et de v . Par transitivité, il n'existe pas de sommet w' de V voisin à la fois de u et de v . Or, A étant un stable, cela implique que G est non connexe, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses, donc G_A est connexe.

De manière similaire, nous pouvons prouver que G_B est connexe. \square

Le graphe de permutation G et les graphes d'intervalles propres G_A et G_B sont liés de la façon suivante :

Lemme 4.3 *Pour tout $u, v \in A$, $d_G(u, v) = 2d_{G_A}(\mathcal{I}_A(u), \mathcal{I}_A(v))$. De même, pour tout $u, v \in B$, $d_G(u, v) = 2d_{G_B}(\mathcal{I}_B(u), \mathcal{I}_B(v))$.*

Preuve. Ce lemme est vrai si $u = v$, donc supposons que $u \neq v$. Soient u, v deux sommets distincts de A ($\{u, v\} \notin E$). D'après le Lemme 4.1, un plus court chemin entre u et v est composé uniquement de sommets de $A \cup B$ (étant donné que u et v appartiennent à A). La distance dans G entre u et v sera donc un multiple de 2 car A et B sont des stables.

$d_{G_A}(\mathcal{I}_A(u), \mathcal{I}_A(v)) = 1$, si et seulement si $\mathcal{I}_A(u) \cap \mathcal{I}_A(v) \neq \emptyset$ soit si et seulement si $[f_B(u), l_B(u)] \cap [f_B(v), l_B(v)] \cap B \neq \emptyset$ et donc $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$ d'où $d_G(u, v) = 2$.

Considérons que deux sommets $u, v \in A$ soient à distance k dans G_A . Dans ce cas, notons p_0, p_1, \dots, p_k un plus court chemin de u à v dans G_A avec $u = p_0$ et $v = p_k$. Or, pour aller de p_i en p_{i+1} avec $0 \leq i < k$, nous devons passer par un chemin de longueur 2. En conséquence, il existe un chemin de longueur au plus $2k$ de u à v dans G .

Maintenant, considérons que deux sommets $u, v \in A$ soient à distance $2k$ dans G . Dans ce cas, notons p_0, p_1, \dots, p_{2k} un plus court chemin de u à v dans G avec $u = p_0$ et $v = p_{2k}$ tel que $p_i \in A$ si i est pair et $p_i \in B$ si i est impair avec $0 \leq i \leq k$ (un tel chemin existe d'après le Lemme 4.1). Or, les sommets p_{2j} et p_{2j+2} avec $0 \leq j < k$ sont tels que leur voisinage se chevauche dans B en p_{2j+1} . En conséquence $\{p_{2j}, p_{2j+2}\}$ est une arête de G_A . Donc il existe un chemin p_0, p_2, \dots, p_{2k} de longueur k dans G_A .

Donc, pour tout $u, v \in A$, $d_G(u, v) = 2d_{G_A}(\mathcal{I}_A(u), \mathcal{I}_A(v))$.

Nous pouvons effectuer des preuves similaires si les sommets u et v appartiennent à B et obtenir que pour tout $u, v \in B$, $d_G(u, v) = 2d_{G_B}(\mathcal{I}_B(u), \mathcal{I}_B(v))$. \square

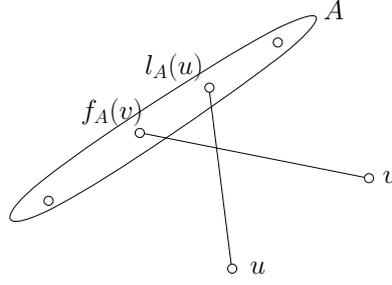
D'après le Lemme 4.2, G_A et G_B sont connexes (nous ne considérons que le cas où G est connexe). Nous prouvons maintenant notre résultat principal qui servira de base à notre étiquetage de distance.

Théorème 4.1 *Soient u, v deux sommets tels que $u < v$. Alors,*

1. si $\pi^{-1}(u) > \pi^{-1}(v)$ alors $d_G(u, v) = 1$;
2. sinon, si $f_A(v) \leq l_A(u)$ ou $f_B(v) \leq l_B(u)$, alors $d_G(u, v) = 2$;
3. sinon, si $f_A(v) \leq l_A(l_B(u))$ ou $f_B(v) \leq l_B(l_A(u))$ alors $d_G(u, v) = 3$;
4. sinon, $d_G(u, v)$ est le minimum entre :
 - $2 + 2d_{G_A}(\mathcal{I}_A(l_B(u)), \mathcal{I}_A(f_B(v)))$
 - $2 + 2d_{G_B}(\mathcal{I}_B(l_A(u)), \mathcal{I}_B(f_A(v)))$
 - $3 + 2d_{G_B}(\mathcal{I}_B(l_A(l_B(u))), \mathcal{I}_B(f_A(v)))$
 - $3 + 2d_{G_A}(\mathcal{I}_A(l_B(l_A(u))), \mathcal{I}_A(f_B(v)))$

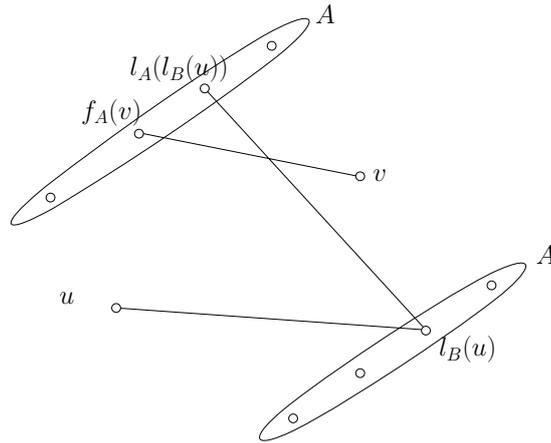
Preuve. Soient $u < v$ deux sommets, si $\pi^{-1}(u) > \pi^{-1}(v)$, alors par définition, u et v sont adjacents, prouvant ainsi le cas 1.

Ensuite, supposons que $\pi^{-1}(u) < \pi^{-1}(v)$, alors par définition, $\{u, v\} \notin E$. Et nous obtenons la situation de la Figure 4.4.

FIG. 4.4 – Cas 2 du théorème où $u < v$ et $f_A(v) \leq l_A(u)$

Etant donné que $u < v$, d'après le Corollaire 4.2, $f_A(u) \leq f_A(v)$ et $f_B(u) \leq f_B(v)$. Donc dans le cas 2, si $f_A(v) \leq l_A(u)$ alors $f_A(v) \in [f_A(u), l_A(u)] \cap A$ (Lemme 4.1). En conséquence, $f_A(v) \in N(u)$ (notons que $f_A(v) \neq u$, sinon $d_G(u, v) \leq 1$ ce qui est impossible). En conséquence, $u, f_A(v), v$ est un chemin dans G et $d_G(u, v) = 2$. De même, si $f_B(v) \leq l_B(u)$, $u, f_B(v), v$ est un chemin dans G . Donc $d_G(u, v) = 2$ dans les deux cas, le cas 2 est ainsi prouvé.

Supposons maintenant que nous ne sommes ni dans le premier ni dans le second cas. Montrons tout d'abord que $d_G(u, v) > 2$. En effet, d'après le Lemme 4.1, si $d_G(u, v) = 2$ alors il existe un plus court chemin u, w, v avec $w \in A \cup B$. De plus, étant donné que $l_A(u) < f_A(v)$ et $l_B(u) < f_B(v)$, nous obtenons $\mathcal{I}_A(u) \cap \mathcal{I}_A(v) = \emptyset$ et $\mathcal{I}_B(u) \cap \mathcal{I}_B(v) = \emptyset$ ce qui implique $N[u] \cap N[v] \cap A = \emptyset$. Similairement, nous obtenons $N[u] \cap N[v] \cap B = \emptyset$. En conséquence, un tel w n'existe pas et $d_G(u, v) > 2$. Nous sommes alors dans la configuration de la Figure 4.5.

FIG. 4.5 – Cas 3 du théorème où $u < v$ et $f_A(v) \leq l_A(l_B(u))$

Prouvons maintenant que si $f_A(v) \leq l_A(l_B(u))$ alors $d_G(u, v) = 3$. Nous avons $u \leq v$ et $\{u, l_B(u)\} \in E$. Si $v \leq l_B(u)$ alors d'après la Proposition 2.1 page 15, v est voisin de u ou de $l_B(u)$. Ce qui est impossible car $d_G(u, v) > 2$. Donc nous avons $l_B(u) \leq v$ ainsi que v et $l_B(u)$ qui ne sont pas voisins. Nous sommes donc sous les hypothèses du cas 2 appliquées à $l_B(u)$ et v , ainsi nous obtenons $d_G(l_B(u), v) = 2$. Il y a donc un chemin de longueur au plus trois entre u et v , or $d_G(u, v) > 2$, et nous obtenons $d_G(u, v) = 3$. Le cas $f_B(v) \leq l_B(l_A(u))$ peut être traité de manière similaire. Ce qui termine la preuve du cas 3.

Considérons que nous ne sommes dans aucun des trois premiers cas. Nous avons v non-adjacent à $l_B(u)$ et nous avons, de même que précédemment, $l_B(u) \leq v$. Nous avons constaté que lorsque $u \leq v$ et que u et v ne sont pas dans les deux premiers cas, $d_G(u, v) > 2$. Nous pouvons donc appliquer le même argument entre $l_B(u)$ et v pour obtenir $d_G(l_B(u), v) > 2$ et en conséquence $d_G(u, v) > 3$.

D'après le Lemme 4.1, soit $P = u, w_1, \dots, w_{k-1}, v$ un plus court chemin avec $w_1 \in \{l_A(u), l_B(u)\}$ et $w_{k-1} \in \{f_A(v), f_B(v)\}$. Si $w_1, w_{k-1} \in A$ ou $w_1, w_{k-1} \in B$ alors d'après le Lemme 4.3,

$$d_G(u, v) = 2 + 2d_{G_A}(\mathcal{I}_A(l_A(u)), \mathcal{I}_A(f_A(v))) \quad \text{ou} \quad (1)$$

$$d_G(u, v) = 2 + 2d_{G_B}(\mathcal{I}_B(l_B(u)), \mathcal{I}_B(f_B(v))) \quad (2)$$

Supposons que $w_1 \in B$ et que $w_{k-1} \in A$, i.e. $w_1 = l_B(u)$ et $w_{k-1} = f_A(v)$ (la preuve est similaire si $w_1 \in A$ et $w_{k-1} \in B$). Or $d_G(l_B(u), v) \geq 3$, nous pouvons donc appliquer le Lemme 4.1 entre w_1 et v . Soit $P' = w'_1, \dots, w'_{k-2}, w'_{k-1}, v$ le plus court chemin de $w'_1 = w_1 = l_B(u)$ à v . Notons que, nécessairement, $w'_2 \in A$ (étant donné que $w'_1 \in B$) et donc $w'_2 = l_A(l_B(u))$.

Si $w'_{k-1} \in B$ alors $u, l_B(u), w'_2, \dots, w'_{k-2}, w'_{k-1}, v$ est un plus court chemin et d'après le Lemme 4.3,

$$d_G(u, v) = 2 + 2d_{G_B}(\mathcal{I}_B(l_B(u)), \mathcal{I}_B(f_B(v))) \quad (3)$$

Si $w'_{k-1} \in A$ alors étant donné que $w'_2 \in A$, d'après le Lemme 4.3,

$$d_G(u, v) = 3 + 2d_{G_A}(\mathcal{I}_A(l_A(l_B(u))), \mathcal{I}_A(f_A(v))) \quad (4)$$

De manière similaire, si $w_{k-1} \in B$ et si w_1 appartient à B ou à A la distance est :

$$d_G(u, v) = 2 + 2d_{G_A}(\mathcal{I}_A(l_A(u)), \mathcal{I}_A(f_A(v))) \quad \text{ou} \quad (5)$$

$$d_G(u, v) = 3 + 2d_{G_B}(\mathcal{I}_B(l_B(l_A(u))), \mathcal{I}_B(f_B(v))) \quad (6)$$

Soit d_i la valeur produite par l'expression (i). Pour chaque expression nous testons si $u < v$ et si $d_G(u, v) \geq 4$, dans ce cas, il y a un chemin de u à v utilisant les sommets énoncés dans la formule correspondante. En effet, il existe toujours un chemin de u à v utilisant, par exemple, $l_B(u)$ et $f_B(v)$ (si $d_G(u, v) \geq 4$) et de même pour les autres combinaisons possibles pour le premier et le dernier sommet interne du chemin entre u et v . Donc $d_G(u, v) = \min_i \{d_i\}$.

Finalement, observons que les expressions (1) et (5) d'une part et les expressions (2) et (3) d'autre part sont les mêmes. En conséquence,

$$d_G(u, v) = \min \{d_1, d_2, d_4, d_6\}$$

□

4.4 Implémentation

4.4.1 Etiquetage de distance des graphes d'intervalles propres

Un graphe d'intervalles est le graphe d'intersection d'une famille d'intervalles sur la droite réelle. La *représentation* d'un graphe d'intervalle est par définition l'ensemble des intervalles.

Une représentation est une *représentation propre* si aucun intervalle n'est inclus dans un autre, i.e. il n'y a pas d'intervalle $[a, b]$ tel qu'un autre intervalle $[c, d]$ avec $a < c < d < b$ existe (par contre des intervalles tels que $a = c$ ou $b = d$ sont possibles). Les graphes ayant une telle représentation sont appelés graphes d'intervalles propres. Une représentation est *normalisée* si les bornes, de tous les intervalles, sont distinctes deux à deux.

Dans une représentation normalisée, l'ensemble des bornes des intervalles est donc exactement l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$ où n est le nombre de sommets du graphe. A partir d'une représentation non normalisée, si les bornes des intervalles sont entières et sont consécutives (notons que les représentations produites par les algorithmes de reconnaissance linéaire de [CKN⁺95, dFHMPdM95] possèdent cette propriété), la représentation peut être normalisée en temps $\mathcal{O}(n)$.

Notons qu'une telle procédure de normalisation garde la propriété de propreté de la représentation.

Considérons un graphe d'intervalles propres connexe H ayant n sommets avec sa représentation propre normalisée $\mathcal{L} = \{[L(u), R(u)] \mid u \in V(H)\}$. Dans [GP03b], il est prouvé qu'en temps $\mathcal{O}(n)$ il est possible de calculer deux fonctions $\lambda, \sigma : V(H) \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ telles que la distance entre deux sommets u et v peut être calculée à partir des paires $\lambda(u), \sigma(u)$ et $\lambda(v), \sigma(v)$. En d'autres termes, la famille des graphes d'intervalles propres admet un étiquetage de distance avec des étiquettes de taille $2 \lceil \log n \rceil$ bits [GP03b]. Les fonctions λ et σ sont respectivement basées sur un parcours en largeur et un parcours en profondeur à partir du sommet u_0 de H dont l'intervalle correspondant \mathcal{I}_{u_0} a la borne gauche la plus petite dans la représentation de H . En d'autres termes, pour un sommet v de H , $\lambda(v) = d_H(u_0, v)$. Définissons la relation binaire suivante donnant l'adjacence entre deux sommets de H : $\text{adj}(u, v) \in \{0, 1\}$ avec $\text{adj}(u, v) = 1$ si et seulement si $\lambda(u) < \lambda(v)$ et $\sigma(u) > \sigma(v)$ [GP03b]. Ces fonctions ont les propriétés suivantes :

Lemme 4.4 [GP03b] *Pour tout couple de sommets distincts u et v de H avec $\lambda_H(u) \leq \lambda_H(v)$:*

1. $d_G(u, v) = \lambda_H(v) - \lambda_H(u) + 1 - \text{adj}_H(u, v)$.
2. $\lambda_H(u) = d_H(u_0, u)$.
3. σ_H est bijective.
4. Si $\lambda_H(u) = \lambda_H(v)$, alors $L_H(u) < L_H(v)$ si et seulement si $\sigma_H(u) < \sigma_H(v)$.

Lemme 4.5 *Les familles $\mathcal{J}_A = \{[f_B(u), l_B(u)] \mid u \in A\}$ et $\mathcal{J}_B = \{[f_A(u), l_A(u)] \mid u \in B\}$ sont respectivement des représentations propres des graphes G_A et G_B .*

Preuve. Soient $u, v \in A$ avec $u < v$. Nous pouvons utiliser la propriété de fermeture, d'après le Corollaire 4.2 appliqué à u et v , étant donné que u et v ne peuvent pas être adjacents (A est un stable). Nous en déduisons que $f_B(u) \leq f_B(v)$ et $l_B(u) \leq l_B(v)$. En conséquence, $f_B(u) < f_B(v) < l_B(v) < l_B(u)$ est impossible, de même que $f_B(v) < f_B(u) < l_B(u) < l_B(v)$. Donc $[f_B(u), l_B(u)]$ n'est pas strictement inclus dans $[f_B(v), l_B(v)]$, de même que $[f_B(v), l_B(v)]$ n'est pas strictement inclus dans $[f_B(u), l_B(u)]$. Finalement, \mathcal{J}_A est une représentation propre de G_A et \mathcal{J}_B est une représentation propre de G_B . \square

4.4.2 Décodeur de distance

Nous avons désormais toutes les données nécessaires pour prouver qu'un schéma d'étiquetage de distance peut être construit pour les graphes de permutation avec des étiquettes en $\mathcal{O}(\log n)$ bits. En effet, le Théorème 4.1 peut être facilement implémenté avec des étiquettes. Chaque sommet u stocke :

1. les entiers u et $\pi^{-1}(u)$ pour calculer l'adjacence ;
2. l'abscisse des six sommets $f_A(u), l_A(u), f_B(u), l_B(u), l_A(l_B(u)), l_B(l_A(u))$ pour les distances 2 et 3 ;
3. les étiquettes de distance (deux entiers par étiquette) pour les intervalles propres dans G_A et G_B de ces six sommets pour les distances supérieures à 4.

L'étiquette obtenue est composée de 20 entiers en $\mathcal{O}(n)$, i.e. de longueur $20 \log n + \mathcal{O}(1)$ bits. Mais nous pouvons réduire de façon significative la taille de ces étiquettes.

Pour pouvoir appliquer les résultats de [GP03b] (Lemme 4.5), nous devons transformer les représentations originales \mathcal{I}_A et \mathcal{I}_B en représentations normalisées. Notons qu'il n'est pas nécessaire que le graphe soit vraiment normalisé, il suffit que, deux à deux, tous les intervalles aient des bornes gauches distinctes.

Nous donnons, tout de même, une méthode de normalisation complète de la représentation. Pour distinguer les bornes des intervalles et normaliser la représentation, nous ordonnons totalement les bornes des intervalles pour obtenir une nouvelle représentation que nous noterons, $\mathcal{L}_A = \{[L_A(u), R_A(u)] \mid u \in A\}$ pour G_A et $\mathcal{L}_B = \{[L_B(u), R_B(u)] \mid u \in B\}$ pour G_B . Pour cela, nous traitons les bornes des intervalles comme des valeurs entières sur l'axe réel et nous les balayons dans l'ordre croissant. Lorsque k bornes sont minimales et confondues, nous fixons les règles de priorité suivantes :

1. si $f_B(u) = f_B(v)$ et $u < v$, alors nous ordonnons $L_A(u) < L_A(v)$, donc nous trions les bornes L_A dans le même ordre que les sommets entre eux dans l'ordre naturel (les sommets étant des entiers) ;
2. si $l_B(u) = l_B(v)$ et $u < v$, alors nous ordonnons $R_A(u) < R_A(v)$;
3. si $l_B(u) = f_B(v)$ ($u < v$), nous ordonnons en priorité les bornes droites et ensuite les bornes gauches soit dans notre cas $L_A(v) < R_A(u)$.

Nous effectuons ensuite la même normalisation pour le graphe G_B .

Ces trois règles de priorité s'illustrent de la façon suivante :

1. Lorsque des intervalles ont leurs bornes gauches confondues, nous ne provoquons pas l'inclusion d'un intervalle dans un autre. En effet, lorsque des intervalles $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_k$ ont leur borne gauche égale, nous prenons en premier la borne gauche du plus petit intervalle (celui qui est inclus dans les autres, i.e. le sommet ayant l'abscisse la plus petite) jusqu'au plus grand intervalle. Ainsi, dans la représentation normalisée les intervalles se chevauchent (Figure 4.6).

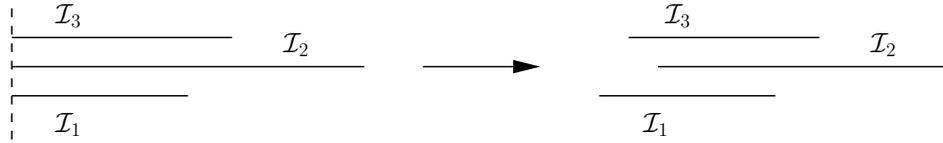


FIG. 4.6 – Décalage des bornes lorsque des intervalles ont leurs bornes gauches confondues

2. Lorsque des intervalles ont leurs bornes droites confondues, nous procédons de la même manière en triant les bornes droites par rapport à l'ordre de grandeur des intervalles mais cette fois du plus grand au plus petit (Figure 4.7).

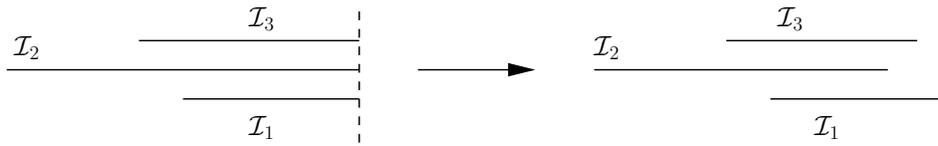


FIG. 4.7 – Décalage des bornes lorsque des intervalles ont leurs bornes droites confondues

3. Enfin, en prenant deux intervalles \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 , supposons que la borne droite de \mathcal{I}_1 est confondue avec la borne gauche de \mathcal{I}_2 . Nous prenons en premier la borne gauche de \mathcal{I}_2 et ensuite la borne droite de \mathcal{I}_1 de manière à garder leur chevauchement (Figure 4.8). Si un plus grand nombre d'intervalles sont en jeu, nous prendrons en priorité les bornes gauches et ensuite les bornes droites, par rapport, aux ordres fixés précédemment.

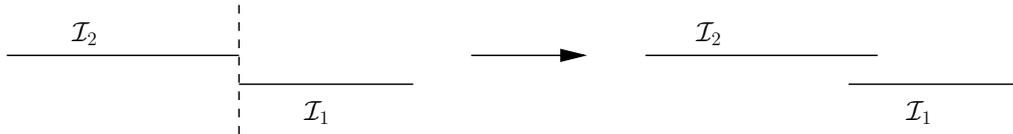


FIG. 4.8 – Décalage des bornes lorsque deux intervalles se succèdent avec leurs bornes confondues

Théorème 4.2 *La nouvelle représentation obtenue par cette méthode est une représentation normalisée.*

Preuve. Nous obtenons donc une représentation propre normalisée correspondant à la représentation originale :

- La relation d'adjacence n'est pas modifiée par cette normalisation : soient deux sommets $u, v \in A$ tels que les intervalles $[f_B(u), l_B(u)]$ et $[f_B(v), l_B(v)]$ se chevauchent et $u < v$. Lors de la normalisation, les bornes des intervalles sont traitées dans l'ordre croissant. D'après la propriété de fermeture, $f_B(u) \leq f_B(v)$ et $l_B(u) \leq l_B(v)$ donc, même si les bornes gauches sont égales, nous avons $L_A(u) < L_A(v)$. Les bornes gauches sont traitées avant les deux bornes droites. Concernant les bornes droites des deux intervalles, nous avons à partir des règles fixées $R_A(u) < R_A(v)$. Dans ce nouvel ordre, nous obtenons : $L_A(u) < L_A(v) < R_A(u) < R_A(v)$ et les intervalles se chevauchent bien.

- De la même façon, les bornes étant traitées dans l'ordre croissant, nous ne pouvons provoquer l'inclusion d'un intervalle dans un autre. Si à la fin des opérations, nous avons un intervalle inclus dans un autre, c'est que l'ordre entre les bornes est le suivant $L_A(u) < L_A(v) < R_A(v) < R_A(u)$. Pour obtenir $L_A(u) < L_A(v)$, nous devons avoir $f_B(u) \leq f_B(v)$ et en conséquence $u < v$, de même pour obtenir $R_A(v) < R_A(u)$, nous devons avoir $v < u$ ce qui est contradictoire, nous ne pouvons donc pas avoir d'intervalle inclus strictement dans un autre.
- Nous avons donné un ordre total sur l'ensemble des bornes des intervalles, les bornes sont donc toutes distinctes.
- Nous avons un ordre total sur $2n$ bornes, nous pouvons donc les numéroter de 1 à $2n$.

□

Notons qu'à partir de cette normalisation, $L_A(u) < L_A(v)$ si et seulement si $f_B(u) \leq f_B(v)$, de plus $L_B(u) < L_B(v)$ si et seulement si $f_A(u) \leq f_A(v)$.

Nous obtenons les propriétés suivantes dans les représentations normalisées \mathcal{L}_A et \mathcal{L}_B :

Lemme 4.6 *Pour toute paire de sommets distincts $u, v \in A$, $u < v$ si et seulement si $L_A(u) < L_A(v)$. De même, pour toute paire de sommets distincts $u, v \in B$, $u < v$ si et seulement si $L_B(u) < L_B(v)$.*

Preuve. Nous prouvons seulement ce lemme pour $u, v \in A$, la preuve est symétrique pour $u, v \in B$.

\Rightarrow Supposons que nous ayons $u < v$, montrons que cela implique que $L_A(u) < L_A(v)$. A partir de la normalisation, il suffit de montrer que $f_B(u) \leq f_B(v)$. Or, $\{u, v\} \notin E$, et d'après le Corollaire 4.2 $u < v$ implique $f_B(u) \leq f_B(v)$.

\Leftarrow Supposons que nous ayons $L_A(u) < L_A(v)$, montrons que cela implique $u < v$. Notons que si $L_A(u) < L_A(v)$ alors $f_B(u) \leq f_B(v)$. A partir de la représentation non-normalisée, si $f_B(u) = f_B(v)$ et que $L_A(u) < L_A(v)$, alors nous obtenons $u < v$ par les règles de priorité fixées lors de la normalisation de \mathcal{L}_B . Si $f_B(u) < f_B(v)$, en utilisant la contraposée de la propriété de fermeture (Corollaire 4.2) nous obtenons directement $u \leq v$ or $u \neq v$ donc $u < v$.

□

Soient λ_A, σ_A et λ_B, σ_B les fonctions obtenues après application du Lemme 4.5 pour les graphes G_A et G_B avec les représentations normalisées \mathcal{L}_A et \mathcal{L}_B .

Nous pouvons maintenant définir l'étiquette d'un sommet u , composée des 14 champs suivants :

$$\text{label}(u) = \langle u, \pi^{-1}(u), \{ \lambda_A(a), \sigma_A(a) \mid a \in \{f_A(u), l_A(u), l_A(l_B(u))\} \}, \{ \lambda_B(b), \sigma_B(b) \mid b \in \{f_B(u), l_B(u), l_B(l_A(u))\} \} \rangle$$

Les informations sur les six sommets nécessaires pour calculer les quatre distances relatives au cas 4 du Théorème 4.1 sont dans l'étiquette. Donc, lorsque nous implémentons la procédure de décodage de distance, l'unique problème réside dans les comparaisons sur les abscisses des sommets, ce qui est nécessaire dans les cas 2 et 3 du Théorème 4.1. Pour ces deux cas, nous

devons effectuer des comparaisons entre des sommets de A ou entre des sommets de B . Dans le cas 2, par exemple, nous devons tester si $f_A(u) \leq f_A(v)$. Ce problème est résolu grâce au lemme suivant.

Lemme 4.7

- Pour tout $u, v \in A$, $u \leq v$ si et seulement si :
 - $\sigma_A(u) = \sigma_A(v)$ ou
 - $\lambda_A(u) < \lambda_A(v)$ ou
 - $\lambda_A(u) = \lambda_A(v)$ et $\sigma_A(u) < \sigma_A(v)$.
- De même pour les sommets de B , pour tout $u, v \in B$, $u \leq v$ si et seulement si :
 - $\sigma_B(u) = \sigma_B(v)$ ou
 - $\lambda_B(u) < \lambda_B(v)$ ou
 - $\lambda_B(u) = \lambda_B(v)$ et $\sigma_B(u) < \sigma_B(v)$.

Preuve. Nous prouvons ce résultat seulement pour $u, v \in A$, la preuve est symétrique pour $u, v \in B$.

Premièrement, $u = v$ peut être testé en utilisant la bijectivité de la fonction σ_A (Propriété 3 du Lemme 4.5). Le lemme est donc vrai si $u = v$. Posons donc $u \neq v$.

D'après le Lemme 4.6, $u < v \Leftrightarrow L_A(u) < L_A(v)$ pour tout $u, v \in A$. Il reste à prouver :

$$L_A(u) < L_A(v) \Leftrightarrow \lambda_A(u) < \lambda_A(v) \text{ ou } (\lambda_A(u) = \lambda_A(v) \text{ et } \sigma_A(u) < \sigma_A(v)) \quad (7)$$

Montrons d'abord que :

Fait 4.1 Pour $u \neq v$,

$$\lambda_A(u) < \lambda_A(v) \Rightarrow L_A(u) < L_A(v) \Rightarrow \lambda_A(u) \leq \lambda_A(v) . \quad (8)$$

Preuve. Soit a_0 le sommet de A avec la borne gauche minimale dans \mathcal{L}_A . Considerons un plus court chemin quelconque $P = u_0, u_1, \dots, u_k$ de $a_0 = u_0$ à $v = u_k$ dans G_A . Pour tout i , $L_A(u_i) < L_A(u_{i+1})$. En effet, si $L_A(u_0) < \dots < L_A(u_{i-1}) < L_A(u_i)$ et $L_A(u_i) > L_A(u_{i+1})$, alors u_{i-1} doit être adjacent à u_{i+1} .

Posons $\lambda_A(u) < \lambda_A(v)$, i.e. $d_{G_A}(a_0, u) < d_{G_A}(a_0, v)$ (λ est l'ordre d'un parcours en largeur à partir de a_0). Il est montré dans [GP03b], que tout ensemble $V_i = \{u \mid d_{G_A}(a_0, u) = i\}$ induit une clique dans le graphe d'intervalle propre G_A . Donc, u est adjacent à $u_i \in V_i$ avec $i = d_{G_A}(a_0, u) < k$. Si $\{u, u_{i+1}\} \in E$, alors nous pouvons choisir le plus court chemin P de a_0 à v passant par u .

Comme nous l'avons étudié précédemment, cela implique $L_A(u) < L_A(v)$. Supposons que $\{u, u_{i+1}\} \notin E$, $L_A(u_i) < L_A(u)$ (étant donné que $L_A(u_i) < L_A(v)$), mais aussi $L_A(u) \leq R_A(u_i)$ (car u_i s'intersecte avec u), $R_A(u) < L_A(u_{i+1})$ (car $\{u, u_{i+1}\} \notin E$) et $L_A(u_{i+1}) \leq R_A(u_i)$ (car u_i s'intersecte avec u_{i+1}). Il s'ensuit que $L_A(u_i) < L_A(u) \leq R_A(u) < R_A(u_i)$, i.e. \mathcal{L}_A n'est pas une représentation propre ce qui est une contradiction. En conséquence, nous avons prouvé la première implication de l'expression (8), qui est que $\lambda_A(u) < \lambda_A(v)$ implique $L_A(u) < L_A(v)$.

Prouvons la seconde implication et posons $L_A(u) < L_A(v)$. Soit i tel que $L_A(u_{i-1}) < L_A(u) \leq L_A(u_i)$. Etant donné que les intervalles de u_{i-1} et u_i s'intersectent, u est

voisin de u_{i-1} . Donc $d_{G_A}(a_0, u) \leq d_{G_A}(a_0, u_{i-1}) + 1 = i$. Nous avons posé que $L_A(u) < L_A(v)$ donc $i < k$. En conséquence, $d_{G_A}(a_0, u) < k = d_{G_A}(a_0, v)$, i.e. $\lambda_A(u) \leq \lambda_A(v)$, prouvant ainsi l'expression (8). \square

Il reste à prouver l'expression (7).

- \Rightarrow D'après l'expression (8), $L_A(a_u) < L_A(a_v)$ implique $\lambda_A(a_u) \leq \lambda_A(a_v)$, i.e. soit $\lambda_A(a_u) < \lambda_A(a_v)$, soit $\lambda_A(a_u) = \lambda_A(a_v)$. Cependant, d'après la Propriété 4 du Lemme 4.5, si $\lambda_A(a_u) = \lambda_A(a_v)$, alors $L_A(a_u) < L_A(a_v) \Leftrightarrow \sigma_A(a_u) < \sigma_A(a_v)$. En conséquence, $L_A(a_u) < L_A(a_v)$ implique $\lambda_A(a_u) < \lambda_A(a_v)$ ou $\lambda_A(a_u) = \lambda_A(a_v)$ et $\sigma_A(a_u) < \sigma_A(a_v)$.
- \Leftarrow D'après l'expression (8), $\lambda_A(a_u) < \lambda_A(a_v)$ implique $L_A(a_u) < L_A(a_v)$. Et, d'après la Propriété 4 du Lemme 4.5, $\lambda_A(a_u) = \lambda_A(a_v)$ et $\sigma_A(a_u) < \sigma_A(a_v)$ implique $L_A(a_u) < L_A(a_v)$, prouvant ainsi le Lemme 4.7. \square

De plus, d'après les Lemmes 4.5, 4.7 et le Théorème 4.1, le calcul de distance effectue un nombre constant d'additions et de comparaisons entre des entiers.

4.4.3 Taille des étiquettes

Etant donné que chaque champs de $\text{label}(u)$ est en $\mathcal{O}(n)$, la taille d'une étiquette est *a priori* de $14 \log n + \mathcal{O}(1)$ bits. Cependant, cette taille peut être réduite en utilisant des corrélations entre certaines valeurs contenues dans $\text{label}(u)$ pour réduire la taille à $9 \log n + \mathcal{O}(1)$ bits. Les six valeurs de λ appartenant à $\text{label}(u)$ sont fortement liées.

Lemme 4.8 *Soit $u \in V$. Pour tout $a \in N[u] \cap A$ et $b \in N[u] \cap B$, $|\lambda_A(a) - \lambda_B(b)| \leq 1$.*

Preuve. Soit $a_0 = \min\{u \in A\}$ et $b_0 = \min\{u \in B\}$. Notons que a_0 a la borne gauche minimale dans \mathcal{L}_A étant donné que $f_B(a_0) = a_0 = \min\{u \in A\}$. De même, étant donné que $f_A(b_0) = b_0 = \min\{u \in B\}$, b_0 a la borne gauche minimale dans \mathcal{L}_B . En conséquence, d'après la Propriété 2 du Lemme 4.5, $\lambda_A(a) = d_{G_A}(a_0, a)$ pour tout $a \in A$ et $\lambda_B(b) = d_{G_B}(b_0, b)$ pour tout $b \in B$. Il nous reste à démontrer que $|d_{G_A}(a_0, a) - d_{G_B}(b_0, b)| \leq 1$ pour tout $a \in N[u] \cap A$ et $b \in N[u] \cap B$.

Notons que $\{a_0, b_0\} \in E$, sinon G serait non connexe. Soient $k = d_{G_A}(a_0, a)$ et $k' = d_{G_B}(b_0, b)$. Nous devons montrer que $|k' - k| \leq 1$. Par inégalité triangulaire, (notons que a et b sont voisins),

$$d_G(b_0, b) \leq d_G(b_0, a_0) + d_G(a_0, a) + d_G(a, b) = d_G(a_0, a) + 2 .$$

D'après le Lemme 4.3, $d_G(b_0, b) = 2d_{G_B}((b_0), b) = 2k'$ et $d_G(a_0, a) = 2d_{G_A}(a_0, a) = 2k$. Donc $2k' \leq 2k + 2$ implique $k' - k \leq 1$. De même, $d_G(a_0, a) \leq d_G(b_0, b) + 2$ implique $k - k' \leq 1$. En conséquence, $|k' - k| \leq 1$. \square

Lemme 4.9 *Les étiquettes sont au plus de taille $9 \lceil \log n \rceil + 6$ bits et la distance entre deux sommets peut être décodée à partir de leur étiquette en temps constant.*

Preuve. Considérons un sommet quelconque u .

Etant donné que $L_A(f_A(u)) \leq L_A(l_A(u))$, nous obtenons que $\lambda_A(f_A(u)) \leq \lambda_A(l_A(u))$ (d'après l'expression (8) dans la preuve du Lemme 4.7 en utilisant le fait que $f_A(u) \leq l_A(u)$). Il s'ensuit que $d_G(f_A(u), l_A(u)) = 0$ ou 2. Donc d'après le Lemme 4.3, $d_{G_A}(f_A(u), l_A(u)) = 0$ ou 1. Donc, $\lambda_A(l_A(u)) - \lambda_A(f_A(u)) \leq 1$.

De même, $\lambda_A(l_A(u)) \leq \lambda_A(l_A(l_B(u)))$. Les sommets $l_A(u)$ et $l_B(u)$ sont voisins car si $u \notin A \cup B$, $l_A(u) \in N^-(u)$ et $l_B(u) \in N^+(u)$. Nous obtenons ensuite que $d_G(l_A(u), l_A(l_B(u))) = 2$ et $d_{G_A}(l_A(u), l_A(l_B(u))) = 1$ d'après le Lemme 4.3. Donc, $\lambda_A(l_A(l_B(u))) - \lambda_A(l_A(u)) \leq 1$.

De manière similaire, nous obtenons $\lambda_B(l_B(u)) - \lambda_B(f_B(u)) \leq 1$ et $\lambda_B(l_B(l_A(u))) - \lambda_B(l_B(u)) \leq 1$.

Pour tout $u \in V$, nous définissons $\delta(u) = \min\{\lambda_A(f_A(u)), \lambda_B(f_B(u))\}$ et soit $\Psi(u)$ le tableau muni des six entrées définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi(u)[1] &= \lambda_A(f_A(u)) - \delta(u) \\ \Psi(u)[2] &= \lambda_A(l_A(u)) - \lambda_A(f_A(u)) \\ \Psi(u)[3] &= \lambda_A(l_A(l_B(u))) - \lambda_A(l_A(u)) \\ \Psi(u)[4] &= \lambda_B(f_B(u)) - \delta(u) \\ \Psi(u)[5] &= \lambda_B(l_B(u)) - \lambda_B(f_B(u)) \\ \Psi(u)[6] &= \lambda_B(l_B(l_A(u))) - \lambda_B(l_B(u)) \end{aligned}$$

A partir de $\delta(u)$ et du tableau $\Psi(u)$, tous les λ peuvent être retrouvés. Par exemple, $\lambda_B(l_A(l_B(u))) = \delta(u) + \Psi(u)[1] + \Psi(u)[2] + \Psi(u)[3]$.

A partir du Lemme 4.8, les première et quatrième entrées de $\Psi(u)$ sont 0 ou 1 et à partir de la borne supérieure ci-dessus, les quatre autres entrées sont également 0 ou 1. En conséquence, $\text{label}(u)$ peut être implémenté avec $\langle u, \pi^{-1}(u), \delta(u), \Psi(u), \sigma_A(a), \sigma_B(b), \dots \rangle$ pour tout $a \in \{f_A(u), l_A(u), l_A(l_B(u))\}$ et $b \in \{f_B(u), l_B(u), l_B(l_A(u))\}$.

Soit $s = \max\{|A|, |B|\}$. Notons que tous les λ et σ sont dans $\{0, \dots, s-1\}$. En conséquence, la longueur de cette étiquette est au plus $2 \lceil \log n \rceil + 7 \lceil \log s \rceil + 6 \leq 9 \lceil \log n \rceil + 6$ bits. \square

4.4.4 Construction des étiquettes

Décrivons les étapes principales dans notre procédure de calcul de toutes les étiquettes définies précédemment. Notons f_A la table contenant les valeurs $f_A(u)$ pour tout $u \in V$. Plus précisément, $f_A[u] = f_A(u)$. Nous définissons également les tables l_A , f_B et l_B de manière similaire. Observons que l'entrée de notre procédure peut être obtenue en temps $\mathcal{O}(n+m)$ si le graphe est donné par sa liste d'adjacence [MS97, KMMS03], m étant le nombre d'arêtes.

Algorithme 11: Construction étiquettes**Données** : un graphe de permutation connexe G avec n sommets et sa représentation π **Résultat** : $\text{label}(u)$ pour tout $u \in V$

-
- | | |
|---|---|
| 1 | Calculer π^{-1} |
| 2 | Calculer les ensembles A et B |
| 3 | Calculer les tables f_A, l_A, f_B, l_B |
| 4 | Calculer les représentations \mathcal{I}_A et \mathcal{I}_B à partir de f_A, l_A, f_B, l_B |
| 5 | Normaliser \mathcal{I}_A et \mathcal{I}_B en \mathcal{L}_A et \mathcal{L}_B |
| 6 | Calculer les fonctions $\lambda_A(w), \sigma_A(w)$ pour tout $w \in A$ et $\lambda_B(w), \sigma_B(w)$ pour tout $w \in B$ |
| 7 | Calculer $\delta(u)$ et enfin $\text{label}(u)$ pour tout $u \in V$ |
-

Il est facile de montrer la validité de cette procédure à partir des précédents paragraphes. Les étapes 1,4 et 5 sont clairement en temps $\mathcal{O}(n)$. L'étape 6 est en temps $\mathcal{O}(n)$ à partir de [GP03b] et l'étape 7 peut être effectuée en temps $\mathcal{O}(n)$ car le calcul de chaque $\delta(u)$ prend un temps $\mathcal{O}(1)$ (le calcul en temps constant sur G_A et G_B peut être utilisé). Nous détaillerons uniquement les étapes 2 et 3 pour montrer qu'elles sont également en temps $\mathcal{O}(n)$.

Par définition $u \in A$ si et seulement si $N^-(u) = \emptyset$. Donc, à partir de la représentation graphique, nous pouvons facilement construire A en temps $\mathcal{O}(n)$:

Algorithme 12: Construction A **Données** : un graphe de permutation connexe G avec n sommets et sa représentation π **Résultat** : $\text{label}(u)$ pour tout $u \in V$

-
- | | |
|-----|---|
| | $A = \{1\}$ |
| | $a_0 = 1$ |
| (*) | pour $u = 2$ à n faire |
| | si $\pi^{-1}(u) > \pi^{-1}(a_0)$ alors |
| | $a_0 = u$ |
| | $A = A \cup \{u\}$ |
| | fin |
| | fin |
-

Nous maintenons le sommet maximum courant a_0 durant un parcours (maximum au niveau de l'ordonnée, i.e. π^{-1}). De cette façon, pour tout sommet u tel que $u < a_0$, nous avons $\pi^{-1}(u) < \pi^{-1}(a_0)$, autrement dit il le point P_{a_0} n'a jamais de point dans son quart de plan Nord-Ouest. En conséquence, à tout moment a_0 est un élément de A . De même, B peut être calculé en maintenant le sommet minimum courant b_0 (avec initialement $B = \{n\}$ et $b_0 = n$) et en testant successivement, pour u de $n - 1$ à 1, la valeur $\pi^{-1}(u) < \pi^{-1}(b_0)$. Ces deux algorithmes sont donc en temps $\mathcal{O}(n)$, la boucle (*) n'effectue que n itérations.

Pour tout u , le calcul de $l_A(u)$ et de $f_B(u)$ peut s'effectuer de la façon suivante :

Algorithme 13: Construction l_A	Algorithme 14: Construction f_B
<pre>(+) pour $u = 1$ à n faire si $u \in A$ alors $l_A(u) = u$ $a_0 = u$ sinon $l_A(u) = a_0$ fin fin fin</pre>	<pre>(+) pour $u = n$ à 1 faire si $u \in B$ alors $f_B(u) = u$ $b_0 = u$ sinon $f_B(u) = b_0$ fin fin fin</pre>

Ces algorithmes ont une complexité linéaire car les boucles (+) sont itérées n fois. Considérons le cas de l'algorithme de construction des l_A . Nous avons utilisé le même type de boucle pour la construction de l'ensemble A , le sommet a_0 est toujours un sommet de A (le premier sommet est toujours un sommet de A , il ne peut pas avoir de voisin le précédant). Considérons le sommet u , il est tel que son dernier voisin dans A est bien a_0 , il ne peut pas être précédé par un sommet représenté par un point d'ordonnée plus grande étant donné que a_0 est le sommet dont le point correspondant est d'ordonnée maximum. En conséquence, a_0 correspond au sommet $l_A(u)$.

Maintenant, à partir des points correspondants aux sommets de V triés selon leur ordonnée (cela peut être effectué en temps linéaire à partir de la permutation π). Nous pouvons utiliser des procédures similaires pour $f_A(u)$ et $l_B(u)$ pour tout u terminant ainsi l'étape 3 :

Algorithme 15: Construction f_A	Algorithme 16: Construction l_B
<pre> pour $\pi^{-1}(u) = n$ à 1 faire si $u \in A$ alors $f_A(u) = u$ $a_0 = u$ sinon $f_A(u) = a_0$ fin fin fin</pre>	<pre> pour $\pi^{-1}(u) = 1$ à n faire si $u \in B$ alors $l_B(u) = u$ $b_0 = u$ sinon $l_B(u) = b_0$ fin fin fin</pre>

En combinant les algorithmes précédents avec le Lemme 4.9, nous obtenons :

Théorème 4.3 *Les graphes de permutation avec n sommets possèdent un schéma d'étiquetage de distance utilisant des étiquettes de taille $9 \lceil \log n \rceil + 6$ bits. Le calcul de la distance à partir de ces étiquettes est en temps constant. De plus, à partir de la représentation du graphe, une permutation de $\{1, \dots, n\}$, toutes les étiquettes peuvent être calculées en temps $\mathcal{O}(n)$.*

4.5 Extensions

4.5.1 Extraction de plus courts chemins

Le Théorème 4.1 nous indique la distance entre deux sommets u et v avec $u < v$, mais aussi la première arête incidente à u sur le plus court chemin de u à v .

Cette première arête est : $\{u, v\}$ si la distance est 1 et $\{u, l_A(u)\}$ ou $\{u, l_B(u)\}$ suivant l'un des autres cas se produisant. Prenons un exemple, d'après le cas 2 et le Lemme 4.1, l'arête utilisée est $\{u, l_A(u)\}$ si $f_A(v) \leq f_A(u)$.

Donc, en ajoutant dans les étiquettes des pointeurs vers l'un des sommets suivants, $l_A(u)$ ou $l_B(u)$, la première arête à suivre pour être sur un plus court chemin entre u et v peut être déduite (si $u < v$). Il est certain que nous pouvons construire une structure de données similaire pour permettre de traiter les plus courts chemins de v à u avec $u < v$. Les cas 3 et 4 du Théorème 4.1 doivent être adaptés en conséquence, en considérant, par exemple, les sommets $f_A(f_B(v))$ et $f_B(f_A(v))$ à la place de $l_A(l_B(v))$ et $l_B(l_A(v))$.

En fait, il faut doubler la structure de données pour permettre de donner la première arête pour un plus court chemin entre toute paire de sommets en temps constant. Nous obtenons donc qu'un chemin de longueur d peut être donné en temps $\mathcal{O}(d)$ (en suivant la première arête du plus court chemin à chaque étape). De plus nous avons :

Théorème 4.4 *A partir de la représentation d'un graphe de permutation ayant n sommets, nous pouvons construire en temps $\mathcal{O}(n)$ une structure de taille $\mathcal{O}(n)$ permettant d'effectuer l'extraction de plus courts chemins entre toute paire de sommets en temps linéaire (linéaire en la longueur du plus court chemin retourné).*

4.5.2 Schéma de routage compact

Une autre application de notre structure de données est le routage compact. L'objectif est de donner de petites adresses et tables de routages pour chaque sommet afin que quelque soit le couple de sommet u, v , la première arête d'un plus court chemin partant de u puisse être déterminée avec les informations locales de u et l'adresse de v . Calculer la route à suivre signifie que l'algorithme de routage est exécuté par u et retourne le numéro de port (l'arête) correspondant à un plus court chemin entre u et v (les arêtes autour d'un sommet sont numérotées, le port est donc un entier de $\{1, \dots, \deg(u)\}$). Une solution simple à ce problème est une table de routage standard : chaque sommet u stocke une fonction faisant la correspondance entre un sommet v et le port de la première arête d'un plus court chemin allant de u à v . Ce type de schéma utilise $\mathcal{O}(n \log \deg(u))$ bits pour le sommet u .

Nous pouvons utiliser notre schéma pour fournir une meilleure solution : une table locale pour u est composée de l'étiquette du schéma d'étiquetage de distance et d'une fonction faisant correspondre un numéro de port à chaque voisin de u , ce qui représente $\mathcal{O}(\deg(u) \log n)$ bits. Les adresses sont seulement représentées par les étiquettes de l'étiquetage de distance, soit $\mathcal{O}(\log n)$ bits. Ce schéma apporte une amélioration par rapport au routage existant [DL04] qui était à un facteur additif 1 près.

Théorème 4.5 *Les graphes de permutations possèdent un schéma de routage de plus courts chemins avec un protocole en temps constant construit avec des adresses de taille $\mathcal{O}(\log n)$*

bits. Pour tout sommet u , la table de routage de u est de taille $\mathcal{O}(\deg(u) \log n)$ bits.

Preuve. En utilisant l'étiquetage de distance, le routage entre deux sommets non-adjacents u et v peut être effectué avec seulement $\mathcal{O}(\log n)$ bits par sommet. En effet, d'après le Lemme 4.1, les routes passent toutes par $l_A(u)$ ou $l_B(u)$ ($f_A(u)$ ou $f_B(u)$ si $u > v$), il suffit donc pour un sommet u de stocker les 4 ports correspondants à ces voisins. En conséquence, la difficulté restante est de router vers les sommets voisins.

Pour cela, nous pouvons utiliser une table de correspondance de $\mathcal{O}(\deg(u) \log n)$ bits entre les sommets de $N(u)$ et les numéros de ports $\{1, \dots, \deg(u)\}$. \square

Par contre, dans un graphe de permutation biparti, le routage peut être simplifié et les numéros de ports peuvent être permutés pour que la mémoire nécessaire pour un sommet soit seulement de $\mathcal{O}(\log n)$ bits :

Théorème 4.6 *Les graphes de permutation bipartis possèdent un schéma de routage de plus courts chemins avec un protocole en temps constant construit avec des adresses de taille $\mathcal{O}(\log n)$ bits. Pour tout sommet u , la table de routage de u est de taille $\mathcal{O}(\log n)$ bits.*

Preuve. Dans ce cas, $V = A \cup B$ avec des arêtes entre A et B . Nous détaillerons uniquement la numérotation de port pour un sommet $u \in A$ vers un sommet $v \in B$ (le cas $u \in B$ et $v \in A$ est symétrique). Le numéro de port d'une arête $\{u, v\}$ est p si et seulement si v est le $p^{\text{ième}}$ voisin de u . Soit $r(b) = |\{w \in B \mid w \leq b\}|$ le rang du sommet $b \in B$. Le sommet u stocke $r(f_B(u))$ et $r(l_B(u))$, alors que v a pour adresse son propre rang dans B : $r(v)$. Si $r(v) \in [r(f_B(u)), r(l_B(u))]$, alors v est adjacent à u et le numéro de port de cette arête est $r(v) - r(f_B(u)) + 1$. Le routage peut donc être effectué via ce port. Sinon, le routage se fera par le port 1 ou $\deg(u)$ (i.e. par le voisin $f_B(u)$ ou $l_B(u)$) suivant que nous ayons $v < u$ ou pas. L'adresse d'un sommet v peut être réduite à une paire (r, t) de $\lceil \log n \rceil + 1$ bits, où r est le rang de v dans son stable (A ou B) et t est un booléen indiquant si $v \in A$ ou si $v \in B$. \square

4.5.3 Graphes de permutation circulaires

Le schéma d'étiquetage de distance pour les graphes de permutation peut être étendu naturellement aux graphes de permutation circulaires. Un graphe de permutation circulaire est le graphe d'intersection de courbes entre deux cercles concentriques tels que deux courbes ne peuvent pas se couper en plus d'un point (Figure 4.9).

En utilisant une méthode similaire à [GP03b] et [CLSS98], les cercles peuvent être "déroulés" deux fois pour produire un graphe de permutation H ayant deux fois la taille du graphe de permutation circulaire G en entrée. Prenons le graphe de permutation circulaire G précédent et ouvrons le pour construire le graphe H . Nous effectuons l'ouverture entre les sommets h et a du cercle intérieur. Nous traitons de manière particulière les segments passant par la coupe (Figure 4.9). Ici, les segments concernés sont a , f et h . Lors de l'ouverture, nous lions différemment les segments les concernant (ils ne sont pas dupliqués dans le graphe de permutation) afin de garder une adjacence correcte lors du deuxième "déroulement". L'adjacence est correcte si le voisinage d'un sommet reste inchangé durant l'opération. Nous obtenons ainsi le graphe de permutation de la Figure 4.10.

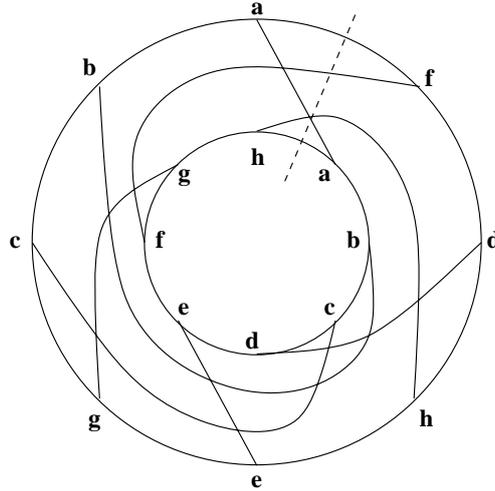


FIG. 4.9 – Exemple de graphe de permutation circulaire

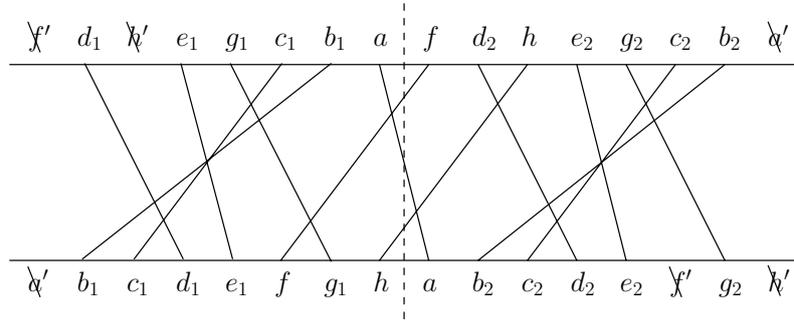


FIG. 4.10 – Graphe de permutation circulaire ouvert pour former un graphe de permutation

Considérons maintenant le plus court chemin entre deux sommets quelconques u et v de G :

- Si u appartient à S (resp. v appartient à S), alors le plus court chemin sera soit $d_H(v_1, u)$ soit $d_H(u, v_2)$ (resp. $d_H(u_1, v)$ soit $d_H(v, u_2)$).
- Si u et v appartiennent à la coupe, le plus court chemin est $d_H(u, v)$.
- Si u et v ne sont pas dans S , nous obtenons deux possibilités, soit le chemin ne passe pas par l'ensemble S soit il y passe. Dans le premier cas, ce chemin est entre u_1 et v_1 ou entre u_2 et v_2 (ce qui représente le même chemin, il s'agit de la partie dupliquée). La distance est donc $d_H(u_1, v_1)$. Dans le second cas, si le chemin passe par S , il faut utiliser le minimum entre $d_H(u_1, v_2)$ et $d_H(v_1, u_2)$.

Si les graphes de permutation ont un schéma d'étiquetage de distance de $\ell(n)$ bits, alors les graphes de permutation circulaires ont un schéma d'étiquetage de distance avec $2\ell(2n)$ bits, soit un schéma d'étiquetage de $\mathcal{O}(\log n)$ bits d'après le Théorème 4.3.

Théorème 4.7 *Les graphes de permutation circulaires avec n sommets ont un schéma d'étiquetage de distance avec $\mathcal{O}(\log n)$ bits par étiquette et le calcul de distance est en temps constant.*

Les Théorèmes 4.4 et 4.5 peuvent être étendus à partir du Théorème 4.7 pour obtenir une structure de données locale et compacte pour l'extraction de plus courts chemins et de routage pour les graphes de permutation circulaires.

4.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons cherché à donner le plus large panel de familles de graphes pour lesquelles un schéma d'étiquetage de distance utilisant des étiquettes de taille $\mathcal{O}(\log n)$ bits peut être défini. Plus précisément, nous recherchons des schémas avec des étiquettes de taille $\mathcal{O}(f(d) \log n)$ bits où d serait un invariant de la famille de graphe. Dans notre schéma, nous avons mis en évidence l'importance des extensions linéaires en nous appuyant sur le fait qu'un graphe de permutation est le graphe de comparabilité d'un ordre partiel de dimension 2. Nous avons donc montré la propriété suivante : le graphe de comparabilité d'un ordre partiel de dimension d supporte un schéma de distance avec des étiquettes de taille $\mathcal{O}(\log n)$ bits avec $d \leq 2$. Or, dès que la dimension d de l'ordre partiel est supérieure ou égale à 3, un schéma d'étiquetage de distance requière au moins des étiquettes de taille $\Omega(n^{1/3})$ bits.

En effet, Schnyder [Sch89] a montré que tout graphe de l'ordre partiel d'inclusion sommets/arêtes d'un graphe planaire G est le graphe de comparabilité d'un ordre partiel de dimension au plus 3. D'après [GPPR04], pour tout étiquetage de distance d'une famille de graphes planaire d'au plus n sommets, il existe un graphe planaire $G_0 = (V_0, E_0)$ avec une étiquette de taille $\ell(n) = \Omega(n^{1/3})$.

Il peut-être intéressant de se concentrer sur les familles de graphes d'intersection (graphes d'intersection de trapèzes) afin de trouver une caractérisation similaire et de fournir un schéma d'étiquetage de cette famille. Par la suite, un autre problème que nous pourrions étudier est celui de l'optimalité de la taille des étiquettes de notre schéma.

Seconde partie

$L(p, q)$ -étiquetage et étiquetage $(d, 1)$ -total

Dans cette partie, nous nous intéressons à un problème d'assignation de fréquences modélisé sous la forme de problèmes d'étiquetages. Plus particulièrement, nous nous focalisons sur le problème de $L(p, q)$ -étiquetage de graphes quelconques et d'étiquetage $(d, 1)$ -total de graphes planaires. Nous étudions de quelle façon ces travaux se positionnent vis à vis des résultats et conjectures actuelles et dans quelle mesure ils généralisent des approches déjà existantes. En première partie, nous donnons un ensemble de définitions issues pour la plupart du domaine de la coloration de graphes. Nous définissons ensuite ce qu'est l'assignation de fréquence pour en venir au problème exact que nous nous posons. Un premier ensemble de résultat est donné concernant le $L(p, q)$ -étiquetage et plus précisément le $L(p, q)$ -étiquetage sans trou. Enfin, un ensemble de résultats est énoncé sur l'étiquetage $(d, 1)$ -total suivi de perspectives et de conclusions sur ces deux types d'étiquetage.

Chapitre 5

Préliminaires

Dans ce chapitre nous donnons diverses notations et définitions complémentaires à celles données dans la première partie.

5.1 Notations

Un sommet de degré k est noté k -sommet, de plus lorsque $k = 1$, nous appelons un tel sommet un sommet pendant.

Notation 5.1 *Le nombre de sommets de degré i dans le graphe est noté n_i .*

Définition 5.1 *Le degré moyen maximum noté $\text{Mad}(G)$, est le maximum des degrés moyens de tous ses sous-graphes :*

$$\text{Mad}(G) = \max \left\{ \frac{2 |E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

Définition 5.2 *La maille d'un graphe, notée g , est la taille du cycle de plus petite longueur.*

Nous pouvons maintenant introduire les graphes planaires :

Définition 5.3 *Un graphe est planaire s'il peut être représenté dans le plan ou sur la sphère de façon telle que ses arêtes ne se coupent pas (en dehors de leurs extrémités).*

Définition 5.4 *Une face est une région connexe du plan délimitée par des arêtes.*

Nous notons F l'ensemble des faces d'un graphe. Le nombre d'arêtes délimitant une face $f \in F$ est noté $r(f)$ (taille de la face). Pour une face de taille k , nous parlons aussi de k -face.

Définition 5.5 *Un graphe est planaire extérieur s'il est planaire et peut être représenté de façon telle que tous ses sommets soient sur la face extérieure (face infinie dans le plan).*

5.1.1 Colorations

Soit $G = (V, E)$ un graphe, lorsque nous parlons de *coloration de sommets*, nous voulons en fait une *coloration propre des sommets* qui consiste en une fonction $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ telle que $c(u) \neq c(v)$ pour toute arête $\{u, v\} \in E$.

Une coloration propre utilisant k couleurs est appelée une k -coloration. Le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une coloration propre.

De même, pour la *coloration des arêtes*, une *coloration propre des arêtes* est une fonction $c' : E \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ telle que $c'(e_1) \neq c'(e_2)$ si e_1 et e_2 sont adjacentes (incidentes à un même sommet).

Une coloration propre des arêtes utilisant k couleurs est appelée une k -arête coloration. L'*index chromatique*, noté $\chi'(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -arête coloration.

La *coloration totale* est une coloration propre des sommets et des arêtes avec une contrainte supplémentaire : la couleur d'un sommet doit être différente de la couleur des arêtes qui lui sont incidentes. Pour un graphe G , le nombre minimal de couleurs pour une telle coloration est le *nombre chromatique total* noté : $\chi^T(G)$.

Nous pouvons maintenant introduire la *coloration par liste*, supposons qu'une liste $L(u)$ de couleurs autorisées est assignée à chaque sommet u . Un graphe G est k -liste coloriable ou k choisissable si quelques soient les listes de taille k assignées aux sommets de G , il existe une coloration propre des sommets c (des arêtes ou totale) telle que pour tout sommet u , $c(u) \in L(u)$.

Pour un graphe G , la taille de liste minimale k est notée $\chi_l(G)$ et appelée *nombre chromatique par liste* (resp. $\chi_l(G)$ l'*index chromatique par liste* et $\chi_l^T(G)$ le *nombre chromatique total par liste*).

5.1.2 Chaîne Hamiltonienne

Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque, une chaîne Hamiltonienne est un sous-graphe H de G tel que H est une chaîne passant une et une seule fois par chaque sommet (Figure 5.1).

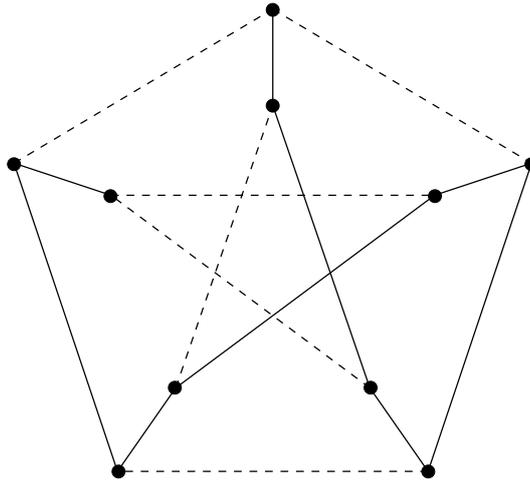


FIG. 5.1 – Chaîne Hamiltonienne dans le graphe de Petersen

5.1.3 Classes de graphes

Nous présentons une série de classes de graphes connues nécessaires ultérieurement.

Graphe d'incidence

Ce n'est pas une classe de graphe à proprement parlé, mais un graphe d'incidence peut être défini en tant que tel. Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque, son graphe d'incidence $G = (V \cup E, E')$ est tel que $\{u, e\} \in E'$ si et seulement si u est une extrémité de e dans G .

Cette construction revient, dans le cas d'un graphe simple, à prendre le graphe obtenu en subdivisant toutes les arêtes une fois. En d'autres termes, toutes les arêtes sont remplacées par une chaîne de longueur 2 (Figure 5.2).

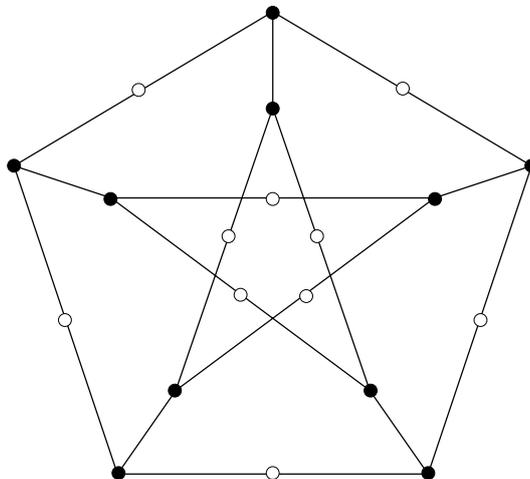


FIG. 5.2 – Graphe subdivisé du graphe de Petersen

Graphe k -dégénéré

Définition 5.6 *Un graphe est k -dégénéré si tout sous-graphe induit contient au moins un sommet de degré inférieur ou égal à k .*

Les arbres par exemple sont des graphes 1-dégénérés, les graphes planaires extérieurs sont 2-dégénérés et les graphes planaires sont 5-dégénérés.

5.2 Notation spécifique

Nous présentons uniquement le cas des intervalles d'étiquettes. En effet par la suite nous recourons au terme intervalle d'étiquettes même lorsque les étiquettes utilisées ne sont pas consécutives. Prenons l'exemple où l'étiquetage d'un graphe nécessite l'utilisation des étiquettes 0, 1, 2, 5, 7, 9 et 10. Dans ce cas, l'intervalle d'étiquettes sera l'intervalle $[0, 10]$ (Figure 5.3).

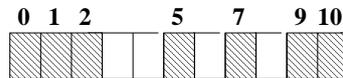


FIG. 5.3 – Intervalle d'étiquettes lorsque les étiquettes 0, 1, 2, 5, 7, 9 et 10 sont utilisées

Chapitre 6

Assignation de fréquences

L'assignation de fréquences consiste à affecter une fréquence d'émission aux émetteurs composant un réseau sans fil. Cette affectation doit se faire suivant un certain nombre de contraintes : les interférences, les règles de régulation ou les préférences des utilisateurs de ces réseaux. Dans cette partie, nous poserons notre cadre d'étude de l'assignation de fréquences et sa modélisation.

6.1 Problématique

Le problème de l'assignation de fréquences se pose différemment selon le type de réseau sans fil considéré (radio, télévision, téléphones portables, cellulaires par satellite, réseaux de capteurs, ...). Chaque type de réseau a des contraintes spécifiques. Ce problème d'assignation de fréquences se pose dès que des connexions dans un réseau d'émetteurs, en amont de la phase de communication, doivent être établies. En d'autres termes, si deux émetteurs désirent communiquer, ils doivent auparavant effectuer leur connexion sur une fréquence particulière en tenant compte des contraintes relatives au réseau. Dans la pratique, pour une connexion entre deux émetteurs, deux fréquences sont utilisées : une pour chaque émetteur. Ces fréquences sont choisies parmi un ensemble de fréquences autorisées par l'émetteur selon des préférences potentiellement fixées, des règles de régulation, des caractéristiques physiques des émetteurs et des interférences pouvant se produire. De plus, au niveau global, le spectre de fréquences est une ressource limitée, le réseau doit donc utiliser la plus petite bande de fréquences possible (nous parlerons par la suite d'intervalle de fréquences). Nous nous focalisons sur le problème d'assignation de fréquences lorsque des problèmes d'interférences se produisent dans les situations suivantes :

- **Contrainte 1.** Si deux émetteurs sont très proches géographiquement, ils doivent utiliser des fréquences éloignées pour effectuer leurs transmissions ;
- **Contrainte 2.** Si deux émetteurs sont un peu plus éloignés, ils doivent utiliser des fréquences différentes.

La figure 6.1 illustre les différents cas dans lesquels se produisent ces deux types d'interférences en prenant pour référence un seul émetteur (l'opération devra être répétée pour

l'ensemble des émetteurs). Un ensemble d'émetteurs est disposé dans le plan et pour un émetteur donné E , certains émetteurs lui sont proches. Cette proximité est fixée par une distance limite au delà de laquelle aucune interférence ne se produit si les émetteurs utilisent des fréquences proches de celle de E . En conséquence, tous les sommets contenus dans le cercle plein de la Figure 6.1 doivent utiliser des fréquences éloignées de celle de E (*Contrainte 1*).

Les émetteurs avec lesquels il y a des interférences s'ils utilisent exactement la même fréquence que E (*Contrainte 2*) sont contenus dans le cercle en pointillé (Figure 6.1).

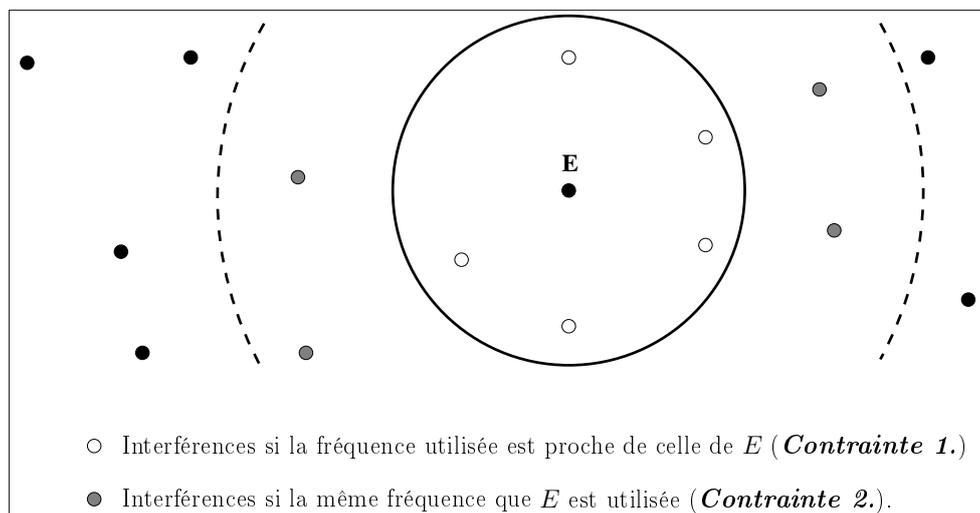


FIG. 6.1 – Un émetteur E et les émetteurs pour lesquels se produisent des interférences.

Il s'agit donc de minimiser le nombre de fréquences utilisées pour respecter ces deux contraintes. Pour résoudre ce problème, nous introduisons le modèle de Metzger [Met70] que nous replaçons succinctement dans le contexte des précédentes études sur ce sujet.

6.2 Modélisation par des étiquetages

B.H. Metzger [Met70] et par la suite W.K. Hale [Hal80] se sont intéressés au problème posé par la *Contrainte 1* : deux émetteurs proches doivent émettre sur des fréquences suffisamment éloignées. Ceci est équivalent à un problème d'étiquetage de graphes : les sommets représentent les émetteurs et les arêtes lient les sommets entre lesquels des interférences sont susceptibles de se produire (Figure 6.2 pour le sommet E , Figure 6.3 pour le réseau complet).

Dans notre cas, nous voulons effectuer un étiquetage respectant les *Contraintes 1 et 2*. Nous utilisons donc la même définition que Metzger [Met70] pour le graphe, mais nous étiquetons différemment celui-ci. Le graphe est étiqueté à l'aide d'entiers¹ de telle façon que deux sommets à distance deux aient des étiquettes différentes et deux sommets voisins aient des étiquettes distantes d'au moins deux. Ce type d'étiquetage est appelé $L(2, 1)$ -étiquetage. Nous utilisons un ensemble d'entiers inclus dans un intervalle commençant par zéro, ainsi nous pouvons revenir simplement sur des fréquences afin de résoudre le problème initial [GY92]. Le $L(2, 1)$ -étiquetage a été introduit par Griggs et Yeah [GY92], cet étiquetage a été et reste

¹par la suite nous utiliserons de façon équivalente les termes couleur, étiquette ou entier

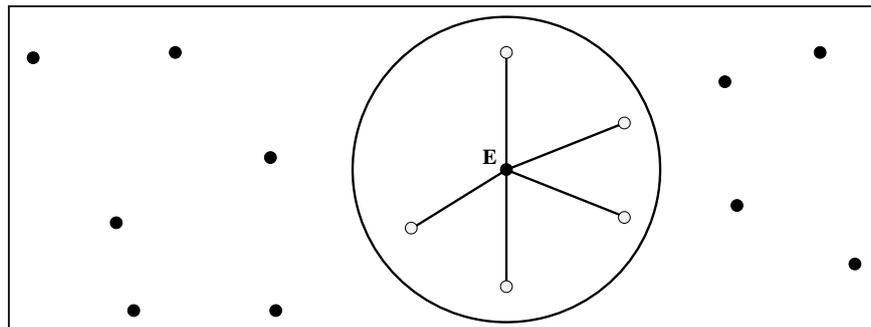
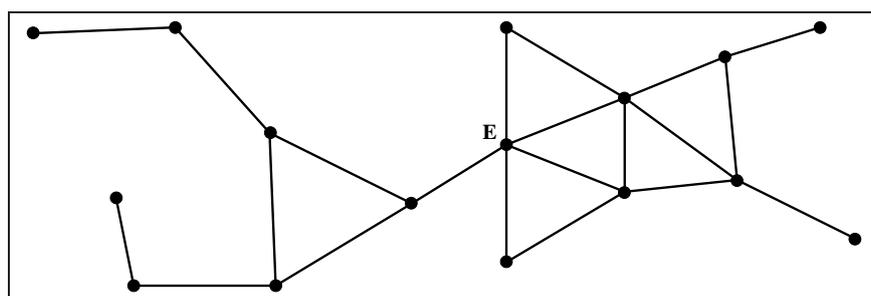
FIG. 6.2 – Voisins du sommet représentant l'émetteur E .

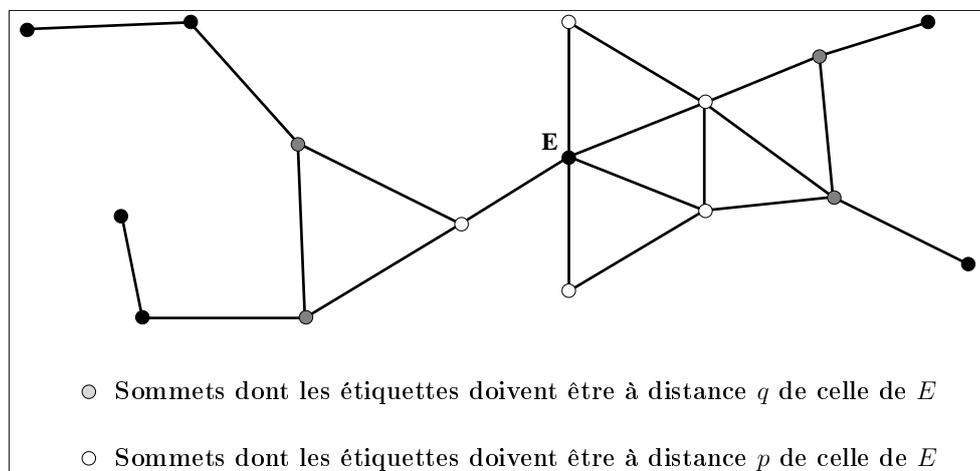
FIG. 6.3 – Graphe obtenu en itérant pour chaque sommet.

encore très étudié [GL94, CK96, JNS⁺00, Jha00, CP01]. Par la suite, cet étiquetage a été généralisé en un $L(p, q)$ étiquetage, lui aussi largement étudié pour différentes classes de graphes [Sak94, WGM95, BPT00, BKTvL00, CKK⁺02, MS02, BPT02, FR03a]. Les valeurs de p et de q sont fixées à partir des différences de fréquences qui produisent des interférences. Ces valeurs sont directement dépendantes du type de réseau. Par la suite, nous nous intéresserons essentiellement à ce problème avec $q = 1$.

Définition 6.1 *Le $L(p, q)$ -étiquetage d'un graphe, illustré sur un exemple Figure 6.4, est tel que :*

- deux sommets voisins doivent avoir leurs étiquettes distantes d'au moins p ;
- deux sommets à distance deux doivent avoir leurs étiquettes à distance au moins q (en général $p \geq q$).

Comme nous l'avons noté précédemment, la bande de fréquences est une ressource limitée, cela nous contraint à rechercher la plus petite plage d'étiquettes possible. Elle est notée $\lambda_{p,q}(G)$ et correspond à la différence entre la plus grande et la plus petite fréquence / étiquette assignée. Notre intervalle d'étiquettes commençant par zéro, $\lambda_{p,q}(G)$ est égal à la valeur de la plus grande étiquette utilisée (appelée aussi taille de l'intervalle par la suite).

FIG. 6.4 – Sommets et contraintes sur les étiquettes par rapport au sommet E .

Chapitre 7

Étiquetage $(d, 1)$ -total de graphes planaires

Dans ce chapitre, nous donnons : un ensemble de définitions concernant l'étiquetage $(d, 1)$ -total et de quelle façon il est obtenu à partir du $L(p, q)$ -étiquetage. Ensuite, les résultats dans ce domaine sont donnés. Finalement nous exposons nos résultats suivis de leur preuve et de nos perspectives dans ce domaine.

7.1 Définition

Nous venons de définir le $L(p, q)$ -étiquetage dans des graphes quelconques, maintenant, nous nous intéressons plus particulièrement au $L(d, 1)$ -étiquetage de graphes d'incidence [WGM95]. Notons l'utilisation d'un d à la place du p lorsque $q = 1$ pour simplifier le passage à l'étiquetage $(d, 1)$ -total. Le graphe d'incidence G' d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant toute arête de G par une chaîne de longueur deux (cf. Figure 7.1).

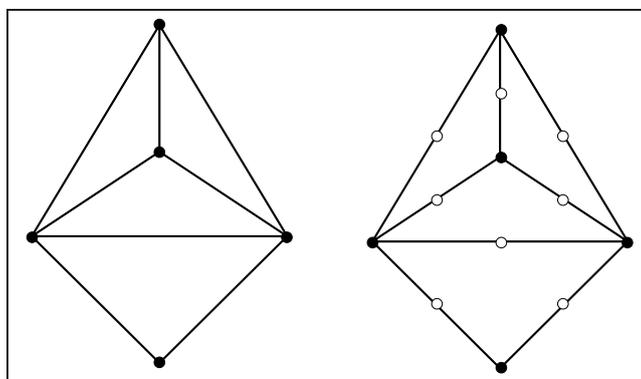


FIG. 7.1 – Un graphe et son graphe d'incidence associé.

Le $L(d, 1)$ -étiquetage du graphe d'incidence d'un graphe G correspond à un étiquetage total particulier de G : l'étiquetage $(d, 1)$ -total introduit par Havet et Yu [HY02, Hav03] (cf. Figure 7.2).

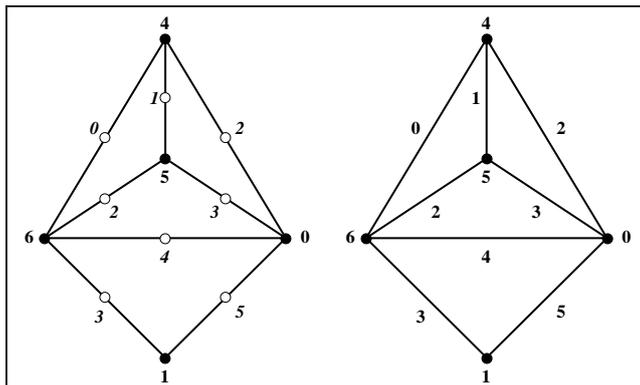


FIG. 7.2 – Le $L(2, 1)$ -étiquetage d'un graphe d'incidence et l'étiquetage $(2, 1)$ -total du graphe correspondant.

Plus formellement, l'étiquetage $(d, 1)$ -total d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \cup E \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant :

- (i) $\forall (u, v) \in V^2 : uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$
- (ii) $\forall (u, v, w) \in V^3 : uv \in E, vw \in E \Rightarrow c(uv) \neq c(vw)$
- (iii) $\forall (u, v) \in V^2 : uv \in E \Rightarrow |c(u) - c(v)| \geq d$

Soit \mathcal{L} l'ensemble des étiquettes attribuées au graphe G , l'*intervalle* d'étiquettes est l'intervalle d'entiers $[\min \mathcal{L}, \max \mathcal{L}]$ (en général $\min \mathcal{L} = 0$). Notre objectif est de minimiser la *taille* de cet intervalle : minimiser la différence entre la plus grande et la plus petite étiquette utilisée. Lorsque cette minimalité est obtenue, la taille de l'intervalle est alors appelée *nombre $(d, 1)$ -total*, noté $\lambda_d^T(G)$.

A partir de ce lien entre l'étiquetage $(d, 1)$ -total et le $L(d, 1)$ -étiquetage nous obtenons un ensemble de majorations et de minorations pour $\lambda_d^T(G)$ (nombre $(d, 1)$ -total). Une attention particulière doit être prêtée au fait que le nombre d'étiquettes est égal au nombre $(d, 1)$ -total plus un.

7.2 Résultats existants

Dans la section précédente, nous avons identifié que l'étiquetage $(d, 1)$ -total est un $L(d, 1)$ -étiquetage de graphes d'incidence. De plus, notons que lorsque d est égal à un, nous obtenons une coloration totale. Le problème de la coloration totale a souvent été étudié [Vij71, Ros71, BKW96, BKW97, BKW98, IZN01].

7.2.1 Coloration totale

Pour commencer, donnons un ensemble de résultats sur la coloration totale (cf. Définition 5.1.1 page 84), de cette façon, nous obtenons un ensemble de bornes pour l'étiquetage $(d, 1)$ -total avec $d = 1$. Celles-ci nous apportent un certain nombre de références sur les valeurs que nous devrions ensuite obtenir en faisant varier la valeur de d .

Débutons par la conjecture de Behzad/Vizing sur le nombre chromatique total :

Conjecture 7.1 [Beh65, Viz68] *Pour tout graphe G de degré maximum Δ :*

$$\chi^T(G) \leq \Delta + 2$$

Cette conjecture a été prouvée par Rosenfeld [Ros71] et Vijayaditya [Vij71] pour $\Delta \leq 3$, par Kostochka [Kos77, Kos78, Kos96] pour $\Delta \leq 5$, par Borodin [Bor89] pour les graphes planaires avec $\Delta \geq 9$, par Isobe, Zhou et Nishizeki [IZN01] pour les graphes s -dégénérés avec $\Delta \geq 4s + 3$ et par Bojarshinov pour les graphes d'intervalles [Boj01].

Par la suite, Borodin, Kostochka et Woodall ont montré le théorème suivant :

Théorème 7.1 [BKW98] *Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ et de maille g . Le nombre total chromatique $\chi^T(G) = \Delta + 1$ dans chacun des cas suivants :*

1. $\Delta \geq 11$;
2. $\Delta \geq 7$ et $g \geq 4$;
3. $\Delta \geq 5$ et $g \geq 5$;
4. $\Delta \geq 4$ et $g \geq 6$;
5. $\Delta \geq 3$ et $g \geq 10$.

Grâce à des méthodes probabilistes, deux majorations ont été données pour des graphes quelconques :

Théorème 7.2 [HMR98] *Si un graphe simple G a pour degré maximum Δ suffisamment grand, alors $\chi^T(G) \leq \Delta + 8 \ln^8 \Delta$.*

Théorème 7.3 [MR98] *Si un graphe simple G a pour degré maximum Δ suffisamment grand, alors $\chi^T(G) \leq \Delta + C$, avec $C = 10^{26}$.*

Cette dernière majoration est actuellement la meilleure connue sur le nombre chromatique total de graphes quelconques.

Une majoration simple est obtenue de la façon suivante (la même méthode est utilisée pour obtenir une majoration de l'étiquetage $(d, 1)$ -total) : $\chi(G) \leq \Delta(G)$ (Théorème de Brooks [Bro41]) sauf si G est complet ou un cycle impair et $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ (Théorème de Vizing [Viz64]). Par conséquent, pour un graphe différent d'un cycle impair ou d'une clique, $\chi^T(G) \leq 2\Delta(G) + 1$ (Figure 7.3). Pour tout graphe G , la majoration devient : $\chi^T(G) \leq 2\Delta(G) + 2$.



FIG. 7.3 – Répartition des couleurs pour un graphe différent d'un cycle impair ou d'une clique.

Observation 7.1 *Si la conjecture de la coloration par liste $\chi'_l(G) = \chi'(G)$ est vérifiée alors $\chi^T(G) \leq \Delta + 3$ couleurs.*

Preuve. Nous voulons colorier totalement un graphe G . Soit un ensemble de $\Delta + 3$ couleurs, colorions proprement ses sommets à l'aide de $\Delta + 3$ couleurs ($\chi(G) \leq \Delta + 1$ [Bro41]). A

chaque arête, nous associons la liste obtenue en prenant les $\Delta + 3$ couleurs moins celles des deux sommets incidents. Pour chaque arête, nous avons des listes de taille $\Delta + 1$. Par hypothèse, $\chi' = \chi'_l$, et $\chi' \leq \Delta + 1$ [Viz64]. Nous pouvons donc colorier chaque arête par une couleur de sa liste de façon à obtenir une coloration propre des arêtes.

Par construction des listes, nous avons donc une coloration totale du graphe. \square

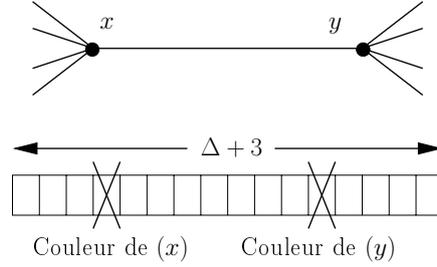


FIG. 7.4 – Liste de taille $\Delta + 1$ des couleurs possibles pour une arête xy d'un graphe G .

Or, $\chi'_l(G) = \chi'(G)$ dans les graphes planaires extérieurs avec $\Delta \geq 5$ [HK01], dans les graphes séries parallèles avec $\Delta \geq 5$ [JMT99] et dans les graphes planaires avec $\Delta \geq 12$ [BKW97].

7.2.2 Majorations issues du $L(d, 1)$ -étiquetage

Comme défini dans le chapitre précédent (Chapitre 6), le $L(d, 1)$ -étiquetage d'un graphe d'incidence G' d'un graphe G est un étiquetage $(d, 1)$ -total de G . Nous pouvons en déduire :

Observation 7.2 Soit G un graphe, $\lambda_d^T(G) = \lambda_{d,1}(G')$ où G' est le graphe d'incidence de G .

Cette observation donne des majorations dans le cas où $d = 2$ en utilisant les bornes issues du $L(2, 1)$ -étiquetage. En remarquant que si G est planaire, son graphe d'incidence G' l'est aussi d'où :

Lemme 7.1 Soit G un graphe planaire et G' son graphe d'incidence, alors

- (i) $\lambda_2^T(G) \leq \lambda_{2,1}(G') \leq 2\Delta + 25$ [vdHM03]
- (ii) $\lambda_2^T(G) \leq \lambda_{2,1}(G') \leq \frac{5}{3}\Delta + 90$ [MS02]

Ces majorations, données à titre indicatif, sont éloignées des résultats que nous détaillons ultérieurement [HY02, BMR03]. En effet, dans [vdHM03] et [MS02], les majorations du Lemme 7.1 sont obtenues sur des graphes planaires quelconques. Dans notre cas, sont uniquement considérés les graphes planaires qui sont des graphes d'incidence. Ceux-ci sont bipartis. En nous limitant à cette classe de graphes planaires, nous sommes à même d'obtenir des bornes plus fines. Ces résultats sont donc là à titre indicatif et donnent des majorations générales.

7.2.3 Majorations et minoration

Dans cette section, nous donnons les principaux résultats connus pour ce type d'étiquetage.

Proposition 7.1 [Hav03] *Soit G un graphe de degré maximum Δ , alors*

- (i) $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d - 1$;
- (ii) si G est Δ -régulier, $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d$;
- (iii) si $d \geq \Delta$, $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d$.

Preuve. Soit G un graphe quelconque de degré maximum Δ . Considérons le/un sommet u de degré Δ dans G . Supposons qu'il soit étiqueté 0. Dans ce cas, les étiquettes des arêtes incidentes à u ne peuvent pas être comprises dans l'intervalle $[0, d - 1]$ et doivent être différentes deux à deux. En conséquence, un intervalle de taille au moins $\Delta + d - 1 + 1$ doit être utilisé. Si jamais le sommet u est étiqueté avec une valeur différente de 0 ou de $\Delta + d - 1$ alors deux intervalles d'étiquettes de taille $d - 1$, autour de l'étiquette de u , doivent être laissés inutilisées pour les arêtes incidentes. Nous devrions alors utiliser un intervalle plus grand pour l'étiquetage de G ce qui implique (i).

Si G admet un étiquetage avec $\Delta + d$ étiquettes, alors les sommets doivent tous être étiquetés avec 0 ou $\Delta + d - 1$. Prenons à nouveau un sommet u de G et supposons qu'il est étiqueté par 0. Comme nous l'avons vu précédemment, les arêtes incidentes à ce sommet sont étiquetées dans l'intervalle $[d, \Delta + d - 1]$ considérons l'arête uv étiquetée $\Delta + d - 1$. Pour le sommet v ni la valeur 0 ni la valeur $\Delta + d - 1$ ne peuvent être utilisées comme étiquettes. Ce qui est une contradiction et implique (ii).

Similairement, si nous considérons l'arête uw étiquetée d et que $d \geq \Delta$, le sommet w doit avoir une étiquette au moins supérieure ou égale à $2d$ et donc supérieure à $\Delta + d - 1$ ce qui implique (iii). □

Observons que pour étiqueter les sommets avec un intervalle I_v de $\chi(G)$ étiquettes et les arêtes avec un intervalle I_e de taille $\chi'(G)$. I_v et I_e sont séparés par un intervalle de taille $d - 1$ (Figure 7.5).

De cette observation, nous déduisons la majoration suivante :

Proposition 7.2 [Hav03] *Soit G un graphe, alors :*

- (i) $\lambda_d^T(G) \leq \chi(G) + \chi'(G) + d - 2$ (cf. Figure 7.5).
- (ii) $\lambda_d^T(G) \leq 2\Delta + d - 1$.

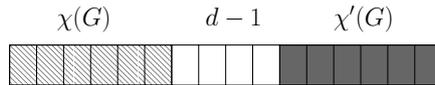


FIG. 7.5 – Répartition des étiquettes des sommets et des arêtes sur l'intervalle.

A partir de cette proposition, les corollaires suivants vont être déduits à partir de valeurs particulières pour χ et χ' associées à diverses familles de graphes.

Pour un graphe biparti, $\chi'(G) = \Delta$ [Kön16] ; par la proposition 7.2, nous obtenons :

Corollaire 7.1 (Graphes bipartis) *Soit G un graphe biparti, alors :*

$$\Delta + d - 1 \leq \lambda_d^T(G) \leq \Delta + d$$

Si un graphe biparti G est régulier ou si $d \geq \Delta$, alors $\lambda_d^T(G) = \Delta + d$. Dans le cas des graphes planaires, en utilisant le théorème des quatre couleurs [AH89]. Le corollaire suivant est obtenu :

Corollaire 7.2 (Graphes planaires) *Soit G un graphe planaire simple, alors :*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + 3$$

Pour un graphe planaire, si $\Delta \geq 8$, alors $\chi'(G) = \Delta$ [Viz64] et si $g \geq 4$, alors $\chi(G) = 3$ [Grö59] : les majorations deviennent $\Delta + d + 1$. Pour un graphe planaire extérieur différent d'un cycle impair, $\chi'(G) = \Delta$ et $\chi(G) = 3$. Pour les cycles impairs nous obtenons la même majoration suivante :

Corollaire 7.3 (Graphes planaires extérieurs) *Soit G un graphe planaire extérieur, alors*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + 1$$

Pour un graphe s -dégénéré, $\chi(G) = s + 1$.

Corollaire 7.4 (Graphes s -dégénérés) *Soit G un graphe s -dégénéré, alors*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + s$$

Donc, si $\Delta \geq 2s$, alors $\chi'(G) = \Delta$ [Viz65]. La majoration devient $\Delta + d + s - 1$.

7.2.4 Conjectures et résultats préliminaires

Frédéric Havet et Min-Li Yu [HY02] ont proposé la conjecture suivante :

Conjecture 7.2 [HY02] *Soit G un graphe, alors $\lambda_d^T(G) \leq \min\{\Delta + 2d - 1, 2\Delta + d - 1\}$.*

Observation 7.3 *Soit G un graphe alors,*

1. Si $d \leq \Delta$, alors $\Delta + 2d - 1 \leq 2\Delta + d - 1$.
2. Si $d \geq \Delta$, la Proposition 7.2 (ii) implique la Conjecture 7.2.
3. Si G est planaire et que $g \geq 3$ et $\Delta \geq 8$, l'observation précédente implique la Conjecture 7.2.

Pour la minoration, nous obtenons :

Lemme 7.2 *Pour tout graphe G , de degré maximum Δ et de nombre chromatique $\chi(G) \leq 2d$, nous pouvons construire un graphe G' de degré maximum $\delta' \geq \Delta$ et de nombre chromatique $\chi(G') = \chi(G)$ tel que $\lambda_d^T(G') \geq \left\lceil \frac{\chi(G')}{2} \right\rceil + d - 2 + \Delta'$.*

Preuve. Soit G un graphe de degré maximum Δ et de nombre chromatique $\chi(G)$. Pour tout sommet u de G , nous lui ajoutons des sommets pendants jusqu'à ce que nous obtenions : $d(u) = k \geq \Delta$. Appelons G' le graphe obtenu, et notons son degré maximum $\Delta' = k$. Il est clair que $\chi(G') = \chi(G)$, si G' est étiqueté $(d, 1)$ -totalement, il existe un sommet v tel que son étiquette est à distance au moins $\lceil \chi(G')/2 \rceil$ de l'une des extrémités de l'intervalle d'étiquettes. Pour étiqueter les arêtes incidentes de v , au moins $\lceil \chi(G')/2 \rceil + d - 1 + \Delta'$ étiquettes sont utilisées (Figure 7.6). \square

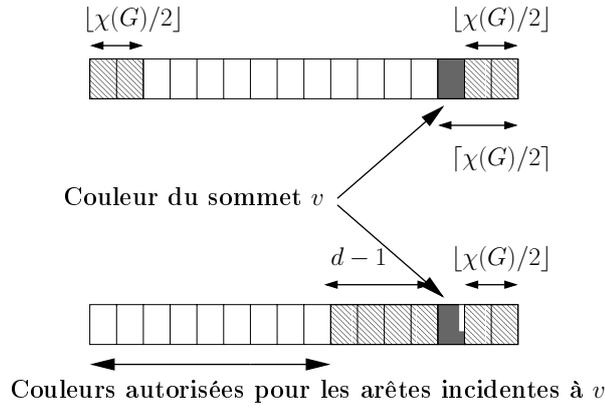


FIG. 7.6 – Répartition des étiquettes des sommets sur l'intervalle.

Dans la preuve précédente, si $\chi(G) = 2d - 1$ ou $\chi(G) = 2d$, il est possible de construire un graphe G' qui nécessite au moins $\Delta + 2d - 1$ étiquettes pour un étiquetage $(d, 1)$ -total. La Figure 7.7 montre un graphe planaire nécessitant $\Delta + 2d - 1$ étiquettes avec $d = 2$.

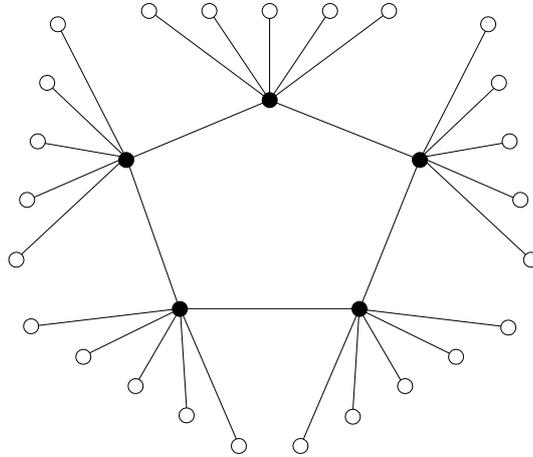


FIG. 7.7 – Graphe planaire nécessitant $\Delta + 2d - 1$ étiquettes avec $d = 2$.

A partir du lemme précédent, si $\chi(G) = 2d - 1$ ou $\chi(G) = 2d$, il est possible de construire un graphe G' nécessitant au moins $\Delta + 2d - 1$ étiquettes pour un étiquetage $(d, 1)$ -total. En

1964/1965, Behzad [Beh65] et Vizing [Viz64] ont conjecturé indépendamment que le nombre chromatique total est $\Delta + 1$ ou $\Delta + 2$. La Conjecture 7.2 peut être considérée comme une extension de la conjecture de Behzad et de Vizing. Cette conjecture est confortée par les résultats obtenus par Havet et Yu [HY02] pour les graphes complets.

Pour conclure cette section, nous rappelons la conjecture de Havet (Conjecture 7.3) qui propose une majoration de la valeur du nombre $(d, 1)$ -total pour les graphes cubiques et sub-cubiques :

Conjecture 7.3 [HY02] *Soit G un graphe avec $\Delta \leq 3$, $G \neq K_4$, alors $\lambda_2^T(G) \leq 5$.*

7.3 Résultats

Dans cette partie, nous montrons nos résultats obtenus sur l'étiquetage $(d, 1)$ -total de graphes planaires :

Théorème 7.4 *Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ et de maille g . Alors, lorsque $d \geq 2$, $\lambda_d^T(G) \leq \Delta + 2d - 2$ dans les cas suivants :*

- (i) $\Delta \geq 2d + 1$ et $g \geq 11$;
- (ii) $\Delta \geq 2d + 2$ et $g \geq 6$;
- (iii) $\Delta \geq 2d + 3$ et $g \geq 5$;
- (iv) $\Delta \geq 8d + 2$.

Dans chaque cas du théorème 7.4, si G est planaire et sans triangle, alors $\chi(G) \leq 3$; sinon, si $\Delta \geq 8$, alors $\chi'(G) = \Delta$ [Viz64]. La majoration du Théorème 7.4 doit être comparée à la majoration $\Delta + d + 1$ et $\Delta + d + 2$ obtenue par le Corollaire 7.2. Notre majoration est meilleure pour $d = 2$ dans tous les cas et pour $d = 3$ dans les cas (i) et (iv). De plus, d'après le Lemme 7.2, ces résultats sont optimaux pour $d = 2$, en effet, il est possible de construire des graphes nécessitant $\Delta + 3$ étiquettes. Pour $d = 3$, il existe un écart de un entre la minoration et la majoration du Théorème 7.4.

7.4 Preuve du Théorème

Nous prouvons le Théorème 7.4 par contradiction. Soit α un entier et $H = (V, E)$ un graphe contre-exemple minimal au Théorème 7.4 avec $\Delta \geq \alpha$, de maille g ayant un nombre minimal de sommets n et d'arêtes m (dans le cas (i), $\alpha = 2d + 1$ et $g \geq 11$; dans le cas (ii), $\alpha = 2d + 2$ et $g \geq 6$; dans le cas (iii), $\alpha = 2d + 3$ et $g \geq 5$ et dans le dernier cas, $\alpha = 8d + 2$ et $g \geq 3$). Ce graphe est minimal au niveau du nombre de sommets et d'arêtes dans le sens où si un sommet (ou une arête) est supprimé dans le graphe, alors il n'est plus un contre-exemple et a pour nombre $(d, 1)$ -total la valeur déterminée par le théorème.

7.4.1 Préliminaires

En premier lieu, dans cette preuve, nous devons déterminer si des sommets pendants sont présents ou pas dans un contre-exemple minimal suivant la maille ou le degré maximum. Pour cela, nous utilisons les trois lemmes suivants :

Lemme 7.3 *Si $\Delta > \alpha$, alors H n'a pas de sommet pendent.*

Preuve. Supposons que H contienne un sommet pendent v adjacent au sommet w ; le graphe $H' = H \setminus \{v\}$ a un degré maximum $\Delta(H') \geq \alpha$ et par minimalité de H , il admet un étiquetage $(d, 1)$ -total avec $\Delta(H') + 2d - 1$ étiquettes. Notons que $d_{H'}(w) \leq \Delta(H) - 1$. Nous étiquetons les sommets et les arêtes de H avec les étiquettes correspondantes dans le graphe H' : si un sommet ou une arête x possède l'étiquette a dans H' nous allons étiqueter le sommet ou l'arête x par a dans H . Nous étendons cette étiquetage pour le sommet et l'arête restante. Pour étiqueter wv , nous avons $\Delta(H) + 2d - 1$ étiquettes et :

- au maximum $\Delta(H) - 1$ étiquettes sont interdites par les étiquettes des arêtes incidentes à w et différentes de wv .
- au maximum $2d - 1$ étiquettes sont interdites par celle de w .

Dans le pire des cas, il reste une étiquette non utilisée pour wv . Finalement, en effectuant le même raisonnement, nous avons au moins $\Delta(H) - 1$ possibilités pour étiqueter le sommet v ($\Delta(H) + 2d - 1 - (2d - 1) - 1$). Cela implique que H admet un étiquetage $(d, 1)$ -total avec $\Delta + 2d - 1$ étiquettes. Ce résultat contredit nos hypothèses de départ. \square

Lemme 7.4 *Si $\Delta = \alpha$ et que H contient des sommets pendants, alors ils sont adjacents à l'unique Δ -sommet de H .*

Preuve. Supposons que H contienne des sommets pendants qui une fois enlevés ne modifient pas le degré maximum. Dans ce cas de figure, le graphe H' est égal à H sans les sommets pendants (ni la maille ni le degré maximum ne sont modifiés). Par minimalité de H , le graphe résultant de H' peut être étiqueté $(d, 1)$ -totalement à l'aide de $\Delta + 2d - 1$ étiquettes. De même que précédemment, nous étiquetons les sommets et les arêtes de H avec les étiquettes correspondantes dans le graphe H' . En conséquence, si un sommet pendent ne modifie pas le degré maximum, nous pouvons étiqueter le graphe à l'aide de $\Delta + 2d - 1$ étiquettes. Or, cela implique que dans un contre-exemple minimal, si les sommets pendants sont liés à plusieurs Δ -sommets, supprimer l'un d'eux ne modifie pas le degré maximum. En conséquence, les sommets pendants sont liés à un Δ -sommet et celui-ci est unique.

Considérons un sommet x tel que $d_H(x) - d_{H'}(x) = a > 0$. Nous étiquetons dans H les sommets pendants liés à x un par un. Soit v_i le i upème sommet pendent lié à x ($i \in [1, a]$). Pour étiqueter l'arête xv_i , nous avons $\Delta + 2d - 1$ étiquettes possibles avec :

- au plus $\Delta - (a - i + 1)$ étiquettes interdites par les étiquettes des arêtes déjà étiquetées ;
- et $2d - 1$ étiquettes interdites par l'étiquette du sommet x .

Il reste donc toujours au moins $a - i + 1$ étiquettes de libres soit toujours au moins une possibilité par arête. Pour étiqueter le sommet v_i , nous avons $\Delta + 2d - 1$ étiquettes avec :

- une étiquette interdite par celle du sommet x ;

– et $2d - 1$ étiquettes interdites par l'étiquette de l'arête xv_i .

En conséquence, nous avons $\Delta - 1$ étiquettes libres par sommet v_i . Nous pouvons donc étiqueter l'ensemble du graphe H sans ajouter de nouvelle étiquette. \square

Lemme 7.5 *Si $\Delta = \alpha$ et que $g \geq 4$ ou $\Delta \geq 10$, alors H contient au plus un seul sommet pendant.*

Preuve. Supposons que H contienne deux sommets pendants v et v' adjacents au sommet w . Nous divisons la preuve en deux cas :

1. **il existe un sommet w' de degré $\alpha - 1$ dans H .** Considérons le graphe H' construit à partir de H de la façon suivante :

- le sommet pendant v est supprimé
- le sommet pendant v' est supprimé
- un sommet pendant v'' adjacent à w' est ajouté

Le graphe H' ainsi obtenu a pour degré maximum $\Delta(H') = \alpha = \Delta(H)$ et possède moins de sommets que H . Par minimalité de H , H' admet donc un étiquetage $(d, 1)$ -total à l'aide de $\Delta(H) + 2d - 1$ étiquettes. De même que pour les Lemmes 7.3 et 7.4, nous pouvons, à partir de l'étiquetage de H' , étiqueter partiellement H et étendre cet étiquetage aux sommets pendants v et v' avec leurs arêtes adjacentes sans ajouter d'étiquette.

2. **Il n'existe pas de sommet de degré $\alpha - 1$ dans H .** Le graphe H' est construit de la façon suivante : $H' = H \setminus \{v, v'\}$. Nous obtenons que $\Delta(H') \leq \alpha - 2$. Ce graphe admet un étiquetage $(d, 1)$ -total avec au plus $\chi(H') + \chi'(H') + d - 1$ étiquettes (Proposition 7.2). Nous avons l'une des conditions suivantes :

- Si H' est planaire, $\chi(H') \leq 4$ [AH89], de plus, si H' est sans triangle ($g \geq 4$) alors $\chi(H') \leq 3$ [Grö59];
- Si $\Delta(H') \geq 8$ alors $\chi'(H') = \Delta(H') \leq \alpha - 2$ [Viz64].

L'étiquetage avec $\chi(H') + \chi'(H') + d - 1$ étiquettes devient donc $3 + \alpha - 1 + d - 1 = \alpha + d + 1 \leq \alpha + 2d - 1$ étiquettes. Si $d \geq 2$, nous étiquetons donc H avec au plus $\Delta(H) + 2d - 1$ étiquettes. \square

Par la suite, nous utilisons le résultat connu suivant :

Lemme 7.6 [NRS97] *Soit G un graphe planaire de degré minimum 2 et de maille $g \geq 5d + 1$, alors G contient une chaîne de d 2-sommets adjacents.*

Preuve. Pour un graphe planaire quelconque $G = (V, E)$, notons, V' l'ensemble des sommets de degré supérieur ou égal à trois. Construisons le graphe $G' = (V', E')$ tel que G soit une subdivision du graphe G' . Notons que G' est planaire et de degré minimum au moins trois. Etant donné que dans le dual d'un graphe planaire de degré minimum au moins trois, il existe au moins un sommet de degré au plus cinq, il existe un cycle de longueur cinq dans G . Or, si la maille de G est supérieure à $5d + 1$, cela signifie que sur ce cycle de longueur cinq, $5(d - 1) + 1$

sommets de degré deux ont été contractés. Si ces sommets sont répartis sur le cycle, au moins une arête de G' sera le résultat de la contraction de $d+1$ sommets consécutifs de degré deux. \square

Ce lemme est primordial pour étudier les différentes configurations présentes dans des contre-exemples minimaux. Il nous permet d'exclure un certain nombre de motifs (Lemmes 7.7, 7.9, 7.11 et 7.12).

7.4.2 Preuve de (i)

Pour prouver ce cas du Théorème 7.4, nous devons montrer que dans un contre-exemple minimal, deux 2-sommets ne peuvent pas être adjacents. En effet, d'après le Lemme 7.6, si le graphe est de maille onze, alors il doit posséder deux 2-sommets voisins. En montrant que cette configuration est interdite, alors nous pourrons étiqueter $(d,1)$ -totalement tout graphe de maille onze à l'aide de $\Delta + 2d - 1$ étiquettes.

Lemme 7.7 *Si $\Delta \geq 2d + 1$ et $d \geq 2$, alors H ne peut pas contenir deux 2-sommets adjacents (Figure 7.8).*

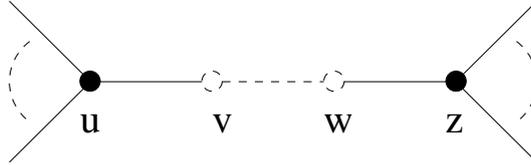


FIG. 7.8 – Deux 2-sommets adjacents.

Preuve. Supposons que H contienne la configuration décrite Figure 7.8 : notons $uvwz$ la chaîne P telle que $d(v) = d(w) = 2$ et $2 \leq d(u) \leq \Delta$, $2 \leq d(z) \leq \Delta$.

Considérons le graphe H' égal à :

- H avec l'arête vw contractée si vw est un isthme
- ou H sans l'arête vw , sinon.

Observons que $\Delta(H') = \Delta(H)$ (nous utiliserons la notation Δ par la suite) et $g(H') \geq g(H)$. Par minimalité de H , le graphe H' admet un étiquetage $(d,1)$ -total avec $\Delta(H') + 2d - 1$. Nous étiquetons les sommets et les arêtes de H avec les étiquettes correspondantes dans le graphe H' (de manière similaire aux lemmes précédents). Ensuite, cet étiquetage est étendu afin d'étiqueter $(d,1)$ -totalement le graphe H en utilisant $\Delta(H) + 2d - 1$ étiquettes.

Nous ré-étiquetons les sommets v et w pour permettre l'étiquetage de l'arête vw . Pour les sommets v et w , $1 + 2d - 1$ étiquettes sont interdites (pour le sommet v , par exemple, 1 étiquette est interdite par celle de u et $2d - 1$ sont interdites par l'étiquette de l'arête uv de laquelle nous devons être distant d'au moins d). $\Delta - 1$ étiquettes sont donc possibles pour les sommets v et w . Etant donné que $\Delta \geq 3$, nous pouvons étiqueter les sommets avec deux étiquettes différentes.

Pour l'arête vw , au plus $2 + 2(2d - 1)$ étiquettes sont interdites (2 pour les étiquettes de uv et wz et $2(2d - 1)$ pour les étiquettes à distance d de celles de v et de w). Il reste donc $\Delta - 2d - 1$

étiquettes pour vw . Supposons que $\Delta = 2d + 1$, en effet, si $\Delta \geq 2d + 2$, il reste au moins une étiquette de libre. L'intervalle d'étiquettes disponibles est alors de taille $2d + 1 + 2d - 1 = 4d$, nous montrons que v et w peuvent être étiquetés à l'aide d'étiquettes contiguës. Si de telles étiquettes peuvent être trouvées, nous pourrions alors étiqueter l'arête vw car nous interdirions moins d'étiquettes avec celles de v et de w .

Définissons S_v comme l'ensemble des étiquettes possibles pour le sommet v et S_w celles de w . L'intervalle total d'étiquettes est de taille $4d$ et les intervalles S_v et S_w sont au moins de taille $2d$.

- Si $|S_v \cap S_w| = 0$, il existe au moins une étiquette de S_v voisine d'une étiquette de S_w dans l'intervalle d'étiquettes.
- Si $|S_v \cap S_w| = i$ ($1 \leq i < 2d$), nous pouvons définir quatre types d'étiquettes dans l'intervalle d'étiquettes.
 - les étiquettes appartenant uniquement à S_v ;
 - celles appartenant uniquement à S_w ;
 - celles appartenant à $S_v \cap S_w$;
 - celles n'appartenant à aucun des deux ensembles.

Supposons qu'il n'y a pas d'étiquette de S_v voisine d'une étiquette de S_w . Dans ce cas, toute étiquette de l'intersection doit être à distance 2 de toutes les étiquettes de $S_v \cup S_w$. En conséquence, le nombre total d'étiquettes doit être, au minimum, de $|S_v| - i + 2i + 1 + |S_w| - i = 4d + 1$ ce qui est supérieur à la taille $4d$ de notre intervalle. Nous avons donc nécessairement une étiquette de S_v voisine d'une étiquette de S_w .

- Enfin, supposons que $S_v = S_w$, S_v est l'union d'au plus trois intervalles d'étiquettes (l'intervalle de $4d$ étiquettes sans les couleurs interdites par l'arête uv et sans celles interdites par u soit $2d - 1$ étiquettes consécutives). Donc, étant donné que $|S_v| \geq 4$ ($d \geq 2$), il existe deux étiquettes consécutives pour v et w .

En conséquence, lorsque v et w sont étiquetés avec des étiquettes consécutives, l'arête vw peut être étiquetée. Il existe au maximum 2 étiquettes interdites par uv et wz et $2d$ étiquettes interdites par les sommets v et w . Soit, au total, $2d + 2$ étiquettes sont interdites sur un intervalle de taille $\Delta + 2d - 1$ avec $\Delta \geq 2d + 1$, il reste donc au moins $2d - 2$ soit 2 étiquettes pour l'arête vw ($d \geq 2$). \square

Le Lemme 7.7 implique le cas (i) du Théorème 7.4. En effet, supposons que H soit un contre-exemple minimal avec $\Delta \geq 2d + 1$ et $g \geq 11$. Si H possède un sommet pendant v alors, il est lié à l'unique sommet de degré Δ du graphe (Lemme 7.5). D'après le Lemme 7.6, $H \setminus \{v\}$ contient au moins deux 2-sommets adjacents ce qui est impossible d'après le Lemme 7.7.

7.4.3 Preuve de (ii)

De même que dans le cas précédent, en premier lieu, nous mettons en avant des configurations interdites dans un contre-exemple minimal. Nous prouvons ensuite que les graphes de maille 6, lorsque le degré maximum est égal à $2d + 2$, sont étiquetables avec $\Delta + 2d - 1$ étiquettes.

Lemme 7.8 *La formule d'Euler peut être réécrite :*

- (i) $\sum_{v \in V} ((t-2)d(v) - 2t) < 0$ si $0 < t \leq g$
- (ii) $\sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (r(f) - 4) < 0$
- (iii) $\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2r(f) - 6) < 0$

Preuve. Nous pouvons réécrire la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} n - m + r &= 2 \\ \Rightarrow (2m - 4n) + (2m - 4r) &= -8 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Rightarrow (2m - 6n) + (4m - 6f) = -12 \tag{10}$$

$$\Rightarrow ((2t - 4)m - 2tn) + (4m - 2tr) = -4t \tag{11}$$

A partir de l'équation 9, étant donné que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m = \sum_{f \in F} r(f)$, nous avons la preuve du (ii). De la même façon, l'équation 10 prouve directement le point (iii). Enfin, à partir de l'équation 11, nous obtenons $\sum_{v \in V} ((t-2)d(v) - 2t) < 0$ si $0 < t \leq g$ où g est la maille. \square

Les Lemmes 7.9, 7.11 et 7.12 sont des extensions naturelles aux Lemmes 2 et 3 de [BKW98] et du Lemme 1 de [BKW96].

Lemme 7.9 *Si $\Delta \geq 2d + 2$, alors*

- (i) *tout 2-sommet est adjacent à deux Δ -sommets*
- (ii) $n_2 < n_\Delta$

Preuve.

- (i) Supposons que v soit un 2-sommet adjacent à u et w , tels que $d(w) < \Delta$ (Figure 7.9).

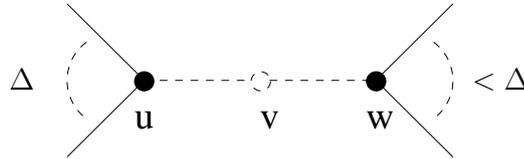


FIG. 7.9 – Un 2-sommet v adjacent à un Δ -sommet u et un sommet w tel que $d(w) < \Delta$.

De même que dans la preuve précédente, nous considérons un graphe H' égal à :

- H avec l'arête vw contractée, si vw est un isthme
- H sans l'arête vw , sinon.

Observons que $\Delta(H') = \Delta(H)$ et $g(H') \geq g(H)$. Par minimalité de H , le graphe H' admet un étiquetage $(d, 1)$ -total avec $\Delta(H') + 2d - 1$ étiquettes. Nous étiquetons les sommets et les arêtes du graphe H avec les étiquettes correspondantes du graphe H' . Nous étendons cet étiquetage afin d'étiqueter complètement H avec $\Delta + 2d - 1$ étiquettes. Nous supprimons les étiquettes de v et de uv et nous devons étiqueter uv , vw et v .

Pour uv , nous avons $\Delta + 2d - 1$ étiquettes, mais $2d - 1$ étiquettes sont interdites par celles de u , et au plus $\Delta - 1$ sont interdites par les étiquettes des arêtes incidentes à u différentes de uv . Donc, au moins une étiquette est libre pour l'arête uv .

De la même façon, nous avons au moins 2 étiquettes de libres pour vw (il y a au moins une arête de moins incidente à w). Nous pouvons donc étiqueter proprement toutes les arêtes.

Seul le sommet v doit encore être étiqueté. Pour celui-ci, nous avons le choix parmi $\Delta + 2d - 1$ étiquettes. Or, $4d - 2$ étiquettes sont interdites par celles des arêtes uv et vw ainsi que 2, interdites par celles des sommets u et w . Nous avons donc le choix parmi $\Delta - 2d - 1$ soit au moins une étiquette lorsque $\Delta \geq 2d + 2$. Dans un contre-exemple minimal, si un 2-sommet est présent alors il sera adjacent à deux Δ -sommets.

- (ii) A partir du résultat du premier point de ce lemme, nous concluons que le nombre de sommets de degré 2 est inférieur **ou égal** au nombre de sommets de degré Δ . La seule possibilité pour que le nombre de 2-sommets soit égal au nombre de Δ -sommets est que le contre-exemple minimal contienne des cycles alternés de 2-sommets et de Δ -sommets. Supposons qu'un tel contre-exemple existe et qu'il possède un tel cycle appelé cycle 2-alterné et noté $C = v_1v_2 \dots v_{2k}v_1$. Les degrés sont donc : $d(v_1) = d(v_3) = \dots = d(v_{2k-1}) = 2$ et les autres sommets sont de degré Δ . Considérons le graphe H' composé du graphe H privé de l'ensemble des 2-sommets. Par minimalité de H , H' admet un étiquetage $(d, 1)$ -total avec $\Delta + 2d - 1$ étiquettes. Nous étiquetons les sommets et arêtes du graphe H avec leur étiquette correspondante dans le graphe H' . Nous commençons par étiqueter les arêtes, pour chacune nous avons $\Delta + 2d - 1$ étiquettes avec $\Delta - 2$ étiquettes interdites par les étiquettes des arêtes incidentes au Δ -sommet (nous ne comptons pas les arêtes liant les deux 2-sommets du cycle 2-alterné) ainsi que $2d - 1$ étiquettes interdites par l'étiquette du Δ -sommet. Le résultat est que pour chaque arête nous avons le choix parmi deux étiquettes possibles. Ce problème est équivalent à la coloration des sommets d'un cycle pair avec des listes de taille 2. Ce problème est bien connu et résolu, nous pouvons donc étiqueter les arêtes de C proprement [ERT79]. Enfin, pour étiqueter les 2-sommets de C , nous avons $\Delta + 2d - 1$ avec $2(2d - 1)$ étiquettes interdites par celles des arêtes incidentes et 2 étiquettes interdites par celles des sommets adjacents. Soit au total $\Delta - 2d - 1$ étiquettes sont possibles pour chaque sommet, donc si $\Delta \geq 2d + 2$, au moins une étiquette est possible. Le cycle 2-alterné est ainsi étiqueté à l'aide de $\Delta + 2d - 1$ étiquettes, il ne peut donc y avoir de contre-exemple minimal ayant un nombre de 2-sommets égal au nombre de Δ -sommets, nous obtenons donc $n_2 < n_\Delta$

□

Lemme 7.10 *Un contre-exemple minimal H de maille $g \geq 6$ et de degré maximum $\Delta \geq 2d + 2$ ne contient pas de sommet pendant.*

Preuve. Supposons qu'un contre-exemple H de maille $g \geq 6$ et de degré maximum $\Delta \geq 2d + 2$ possède un sommet pendant v . Ce sommet pendant v est alors adjacent à l'unique Δ -sommet (Lemme 7.4). En conséquence H ne contient pas de 2-sommet (Lemme 7.9, un 2-sommet est voisin de deux Δ -sommets). D'autre part, d'après le Lemme 7.6, $H \setminus \{v\}$ contient un 2-sommet w .

Le sommet v est donc nécessairement adjacent au sommet w , d'où $\Delta = d(w) = 3$. Ce résultat contredit notre hypothèse $\Delta \geq 2d + 2$. \square

Le Lemme 7.10 implique qu'un contre-exemple minimal ne peut pas contenir de sommet pendant si sa maille est supérieure ou égale à 6. Ensuite, le Lemme 7.8 (i), lorsque $t = 6$ nous donne la relation suivante : $n_2 \geq n_4 + 2n_5 + \dots$. D'autre part, à partir de la formule d'Euler, le point (ii) du Lemme 7.9 implique $n_2 < n_\Delta$. Nous obtenons donc une contradiction, il n'existe donc pas de contre-exemple minimal de maille $g \geq 6$ et de degré $\Delta \geq 2d + 2$ non étiquetable avec $\Delta + 2d - 1$ étiquettes, ce qui prouve le Théorème 7.4 (ii).

7.4.4 Preuve de (iii)

De même que dans les cas précédents, nous interdisons des configurations dans un contre-exemple minimal et nous montrons par la suite qu'il est impossible de construire un contre-exemple minimal sans enfreindre la formule d'Euler.

Lemme 7.11 *Dans un contre-exemple minimal H , si $\Delta \geq 2d + 3$, il n'existe pas de 3-sommet adjacent à deux 3-sommetts.*

Preuve. Par contradiction, supposons qu'un contre-exemple minimal H contienne un 3-sommet adjacent à deux 3-sommetts. Soient $r, s, t, u, v, w, x, y \in V$ et $ru, su, uv, vw, tu, xw, yw \in E$ formant le motif de la Figure 7.10.

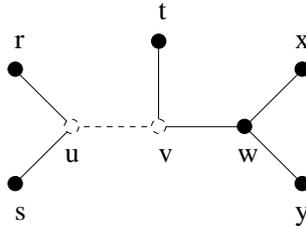


FIG. 7.10 – Un 3-sommet v adjacent à deux 3-sommetts u et w .

Nous construisons H' égal à :

- H avec l'arête uv contractée, si uv est un isthme
- H sans l'arête uv , sinon.

Notons que $\Delta(H') = \Delta(H)$ et $g(H') \geq g(H)$. Par minimalité de H , le graphe H' admet un étiquetage $(d, 1)$ -total avec $\Delta(H') + 2d - 1$ étiquettes. Nous étiquetons H avec les étiquettes correspondantes dans le graphe H' . Nous étendons cet étiquetage pour étiqueter $(d, 1)$ -totalement le graphe H avec $\Delta(H) + 2d - 1$ étiquettes.

Nous supprimons les étiquettes de u et de v , pour ré-étiqueter le graphe ensuite. Nous avons au moins 2 étiquettes possibles pour u (et pour v) : les arêtes ru et su interdisent chacune $2d - 1$ étiquettes et les sommets r et s interdisent chacun une étiquette. Il reste donc $\Delta + 2d - 1 - 2(2d - 1) - 2 = \Delta - 2d - 1$ étiquettes soit au moins deux ($\Delta \geq 2d + 3$) pour u (et v). Nous étiquetons proprement les sommets.

Maintenant, nous devons étiqueter l'arête uv . Deux cas distincts sont identifiés :

- Si $\Delta \geq 2d + 4$, au moins une étiquette est disponible ($\Delta + 2d - 1 - 2(2d - 1) - 4 \geq 1$) pour uv .
- Si $\Delta = 2d + 3$, nous ne pouvons rien déduire de la précédente inégalité pour l'étiquetage de uv . Dans ce cas, l'intervalle contient $4d + 2$ étiquettes, notons S_u (resp. S_v) comme étant le couple d'étiquettes possibles pour u (resp. pour v). Soit $For(z)$ $z \in V$ (resp. $z \in E$) l'ensemble des étiquettes interdites par z pour un sommet (resp. une arête) adjacent (resp. incidente) à z . S'il existe $x \in S_u$ et $y \in S_v$, tel que $|For(x) \cup For(y)| < 2(2d - 1)$, par l'inégalité précédente, il reste au moins une étiquette de libre pour uv . Posons $|For(x) \cup For(y)| = 2(2d - 1)$, soit $(x_1, y_1) \in S_u \times S_v$, si nous ne pouvons pas étiqueter uv , cela signifie que les quatre arêtes ru, su, tv et vw utilisent les quatre seules étiquettes libres restantes dans l'intervalle de taille $4d + 2$. Etant donné qu'il existe une autre paire $(x_2, y_2) \neq (x_1, y_1)$, nous devons avoir $x_2 = y_1$ et $y_2 = x_1$ ce qui implique que $S_u = S_v$.

Nous supprimons donc l'étiquette de vw afin d'obtenir des choix différents pour les étiquettes possibles pour v . Au moins $2d - 1$ étiquettes différentes de la précédentes sont possibles pour ré-étiqueter vw ($4d + 2 - (2d - 1) - 3 \geq 2d$). En changeant l'étiquette de vw , deux étiquettes différentes sont obtenues pour S_v , nous sommes dans le cas précédent et nous pouvons donc étiqueter uv .

□

Pour terminer la preuve du Théorème 7.4 (iii), nous avons besoin de l'observation suivante :

Observation 7.4 *Soit G un graphe planaire de maille g ayant m arêtes, alors*

$$m \leq \frac{g(n - 2)}{g - 2}$$

Preuve. A partir de la formule d'Euler $n - m + f = 2$ et de l'inégalité $2m \geq gf$ nous obtenons directement $2 - n + m = f \leq \frac{2m}{g}$. □

Nous complétons la preuve du point (iii) du Théorème 7.4 en utilisant des procédures de déchargement. Pour cela nous considérons deux cas distincts : si le contre-exemple minimal H contient un sommet pendant ou n'en contient pas.

H ne contient pas de sommet pendant

Soit V_2 l'ensemble des 2-sommets et V_Δ l'ensemble des Δ -sommets d'un contre-exemple minimal H . Nous considérons le graphe T tel que $V(T) = V_2 \cup V_\Delta$ et $E(T)$ est l'ensemble des arêtes liant un sommet de V_2 à un sommet de V_Δ . Par le Lemme 7.9, T est une forêt. Nous associons un 2-sommet à exactement un Δ -sommet de la façon suivante : pour chaque arbre, prenons un Δ -sommet comme racine, chaque 2-sommet v est ensuite associé avec son fils w dans l'arbre (toutes les feuilles sont des Δ -sommets). Nous appelons w (le Δ -sommet) le *maître* de v (le 2-sommet) et v est l'*esclave* de w .

L'objectif de la procédure de déchargement est d'obtenir une contradiction : nous voulons démontrer qu'à partir d'un graphe ne contenant pas un certain nombre de motifs, nous finissons par obtenir des contradictions soit avec la formule d'Euler soit avec les hypothèses fixées au départ. La procédure de déchargement se décompose en trois temps :

- Une phase d'initialisation : une charge est assignée aux sommets, aux arêtes ou aux faces du graphe. Lors de cette phase, une propriété sur la somme des charges sera relevée.
- Une seconde phase : donner l'ensemble des règles de redistribution des charges (la somme des charges restant constante). Ces règles sont ensuite appliquées au graphe, c'est la procédure de déchargement proprement dite.
- Une dernière phase de validation : soit la propriété relevée dans la première phase se révèle fausse après la redistribution des charges (alors que la somme des charges reste constante durant cette opération), soit après redistribution des charges, étant donné que des motifs sont exclus du graphe de départ, nous obtenons une contradiction avec la formule d'Euler.

Grâce à cette méthode, nous montrons qu'une fois certains motifs interdits, il est impossible de construire des contre-exemple minimaux au théorème 7.4 sans enfreindre la formule d'Euler.

Dans la procédure de déchargement, nous notons $w(x)$ comme étant la charge initiale de x (x étant soit un sommet soit une face) et $w^*(x)$ la charge de x après la procédure.

Pour chaque sommet v , la charge $w(v) = d(v) - \frac{10}{3}$ est attribuée. En conséquent, la charge totale de l'ensemble des sommets du graphe H est de :

$$\sum_{v \in V} w(v) = \sum_{v \in V} \left(d(v) - \frac{10}{3} \right) = \sum_{v \in V} d(v) - \frac{10}{3}n = 2m - \frac{10}{3}n$$

Si $g \geq 5$, par l'Observation 7.4, nous obtenons $m \leq \frac{5(n-2)}{3}$.

Finalement cela implique :

$$\sum_{v \in V} w(v) \leq -\frac{20}{3} < 0$$

Les règles de redistribution des charges sont les suivantes :

Règle 1. Chaque *maître* donne $\frac{4}{3}$ à ses *esclaves*.

Règle 2. Chaque k -sommet, $4 \leq k \leq \Delta$ donne $\frac{1}{6}$ aux 3-sommets qui lui sont adjacents.

Calculons la nouvelle charge $w^*(v)$ de chaque k -sommet v .

- Si $k = 2$, alors v a une charge $w(v) = 2 - \frac{10}{3}$ et gagne $\frac{4}{3}$. Sa nouvelle charge est donc $w^*(v) = 2 - \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = 0$.
- Si $k = 3$, alors v a une charge $w(v) = 3 - \frac{10}{3}$ et gagne au moins $2\frac{1}{6}$. Sa nouvelle charge est donc $w^*(v) \geq 3 - \frac{10}{3} + 2\frac{1}{6} = 0$.
- Si $4 \leq k < \Delta$, alors v a une charge $w(v) = k - \frac{10}{3}$ et a donné au plus $k\frac{1}{6}$. Sa nouvelle charge est donc $w^*(v) \geq \frac{5k}{6} - \frac{10}{3} \geq 0$.
- Si $k = \Delta$, alors v a une charge $w(v) = \Delta - \frac{10}{3}$ et donne au plus $\frac{4}{3} + (\Delta - 1)\frac{1}{6} = \frac{\Delta+7}{6}$. Sa nouvelle charge est donc $w^*(v) \geq \frac{4}{3}$ si $\Delta \geq 2d + 3$ et $d \geq 2$.

De ce qui précède, nous déduisons que $\sum_{v \in V} w^*(v) \geq 0$ or $\sum_{v \in V} w(v) = \sum_{v \in V} w^*(v) < 0$. Ce résultat signifie que la construction de contre-exemple minimal de maille $g \geq 5$ et de degré maximal $\Delta \geq 2d + 3$ ne possédant pas de sommet pendant est impossible.

H contient un sommet pendant

Le Lemme 7.5 implique que si un contre-exemple minimal H possède un sommet pendant, alors il est adjacent à l'unique sommet de degré Δ . Ce résultat implique que H ne peut pas contenir de 2-sommet (un 2-sommet est adjacent à deux Δ -sommets d'après le Lemme 7.9). Nous utilisons le même type de procédure que précédemment mais avec des règles de déchargement différentes. La charge initiale d'un sommet est toujours la même par rapport à la preuve précédente soit chaque sommet v a une charge initiale de $w(v) = d(v) - \frac{10}{3}$. La somme des charges est donc toujours :

$$\sum_{v \in V} w(v) \leq -\frac{20}{3} < 0$$

Les nouvelles règles de déchargement sont les suivantes :

Règle 1. Le Δ -sommet donne $\frac{7}{3}$ à l'unique sommet pendant.

Règle 2. Chaque k -sommet, $4 \leq k \leq \Delta$ donne $\frac{1}{6}$ à chaque 3-sommet lui étant adjacent.

Pour un k -sommet v , la charge suivante est obtenue après la procédure de déchargement :

- Si $k = 1$, alors $w(v) = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}$ et la nouvelle charge est $w^*(v) = 0$ (*Règle 1*).
- Si $k = 3$, alors $w(v) = 3 - \frac{10}{3}$ et la nouvelle charge est $w^*(v) \geq 3 - \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$ (*Règle 2*), en effet le Lemme 7.11 implique que v est adjacent à au moins deux sommets de degré supérieur ou égal à 4.
- Si $4 \leq k < \Delta$, alors $w(v) = k - \frac{10}{3}$ et la nouvelle charge est $w^*(v) \geq \frac{5k}{6} - \frac{10}{3} \geq 0$
- Si $k = \Delta$, alors $w(v) = \Delta - \frac{10}{3}$ et la nouvelle charge est $w^*(v) \geq \Delta - \frac{10}{3} - \frac{7}{3} - (\Delta - 1) \cdot \frac{1}{6} \geq \frac{1}{3}$ si $\Delta \geq 2d + 3$ et $d \geq 2$.

Nous aboutissons à une contradiction, $\sum_{v \in V} w(v) = \sum_{v \in V} w^*(v)$, or $\sum_{v \in V} w(v) < 0$ et $\sum_{v \in V} w^*(v) \geq 0$. La construction d'un contre-exemple minimal de maille $g \geq 5$ et de degré maximal $\Delta \geq 2d + 3$ possédant un sommet pendant est impossible.

Il n'existe pas de contre-exemple minimal de maille $g \geq 5$ et de degré maximal $\Delta \geq 2d + 3$ non étiquetable à l'aide de $\Delta + 2d - 1$ étiquettes.

7.4.5 Preuve de (iv)

Par le Lemme 7.3, si $\Delta(H) \geq 8d + 3$, alors H ne contient pas de sommet pendant et si $\Delta(H) = 8d + 2$ alors, par les Lemmes 7.4 et 7.5, H ne contient qu'un unique sommet pendant et celui-ci est adjacent à l'unique Δ -sommet de H .

Lemme 7.12 *Posons $\Delta \geq 8d + 2$ et $d \geq 2$, soit xy une arête de H avec $2 \leq d(x) \leq 5$, alors $d(x) + d(y) \geq \Delta + 2$.*

Preuve. Supposons que H contienne une arête xy avec $d(x) \leq 5$ et $d(x) + d(y) \leq \Delta + 1$.

Considérons maintenant le graphe H' égal à :

- H avec l'arête xy contractée, si xy est un isthme.
- H sans l'arête xy , sinon.

Notons que $\Delta(H') = \Delta(H)$ et $g(H') \geq g(H)$. Par minimalité de H , le graphe H' admet un étiquetage $(d, 1)$ -total avec $\Delta(H') + 2d - 1$ étiquettes. Nous étiquetons les sommets et les arêtes de H avec leur étiquette dans H' . Nous allons étendre cet étiquetage $(d, 1)$ -total à l'arête xy sans ajouter de nouvelle étiquette. Supprimons l'étiquette du sommet x . Pour l'arête xy , le nombre d'étiquettes interdites est le suivant : $d(x) - 1 + d(y) - 1 + 2d - 1 = d(x) + d(y) + 2d - 3 \leq \Delta + 2d - 2$. Il reste donc au moins une étiquette pour l'arête xy . Il ne reste plus qu'à étiqueter le sommet x . Pour cela, il reste au moins une couleur si $\Delta + 2d - 1 - (5(2d - 1) + 5) \geq 1$, soit $\Delta \geq 8d + 2$. \square

Par la suite nous considérons le graphe H' obtenu à partir de H en supprimant le sommet pendant s'il existe. $\Delta(H') = \Delta(H) - 1$ s'il y a un sommet pendant et $\Delta(H') = \Delta(H)$ sinon. Soit xy une arête de H' avec $2 \leq d(x) \leq 5$, nous obtenons $d(x) + d(y) \geq \Delta(H') + 2$ d'après le Lemme 7.12 (x n'est pas un Δ -sommet). Soit V' l'ensemble des sommets de H' , E' l'ensemble de ses arêtes, F' l'ensemble de ses faces et Δ' son degré maximum. Le Lemme 7.12 implique que pour une face f , au moins $\left\lceil \frac{r(f)}{2} \right\rceil$ sommets de sa frontière sont de degré $k \geq 6$. De même que pour la preuve du cas précédent, nous utilisons une procédure de déchargement.

Nous donnons comme charge initiale :

$$w(x) = \begin{cases} d(x) - 6 & \text{si } x \in V' \\ 2r(x) - 6 & \text{si } x \in F' \end{cases}$$

D'après le Lemme 7.8 (iii), la valeur de la somme des charges est strictement négative. Les règles de déchargement suivantes sont définies :

Règle 1. Chaque *maître* donne 3 à ses *esclaves* (voir la preuve du Théorème 7.4 (iii)).

Règle 2. Chaque face f avec $r(f) \geq 4$ donne 1 à chacun des 2-sommets ou 3-sommets de sa frontière.

Règle 3. Soit v un 3-sommet. Si v est adjacent à exactement une 3-face avb , alors v reçoit $\frac{1}{2}$ de a et de b . Si v est adjacent à exactement deux 3-faces avb et bvc , alors v reçoit $\frac{1}{2}$ de a et de c , et 1 de b . Enfin, si v est adjacent à exactement trois 3-faces, alors v reçoit 1 de chacun de ses voisins.

Règle 4. Soit v un 4-sommet, alors v reçoit $\frac{1}{2}$ de chacun de ses voisins.

Règle 5. Soit v un 5-sommet, alors v reçoit $\frac{1}{5}$ de chacun de ses voisins.

Soit $w^*(x)$ avec $x \in V' \cup F'$ la nouvelle charge après la procédure de déchargement d'un sommet ou d'une face. Nous avons $\sum_{x \in V' \cup F'} w^*(x) = \sum_{x \in V' \cup F'} w(x) < 0$ et nous voulons obtenir une contradiction en aboutissant à $w^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in V' \cup F'$.

Si x est une face, alors $w(x) = 2r(x) - 6$ et x donne au plus $\left\lfloor \frac{r(x)}{2} \right\rfloor$ aux 2-sommets et 3-sommets (*Règle 2*) d'après le Lemme 7.12. Donc, $w^*(x) \geq 2r(x) - 6 - \left\lfloor \frac{r(x)}{2} \right\rfloor \geq 0$ si $r(x) \geq 4$.

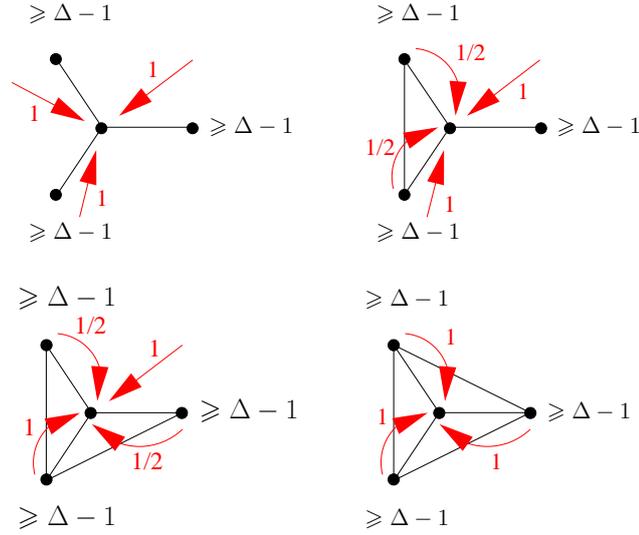


FIG. 7.11 – Règles 2 et 3 de la procédure de déchargement (3-sommets).

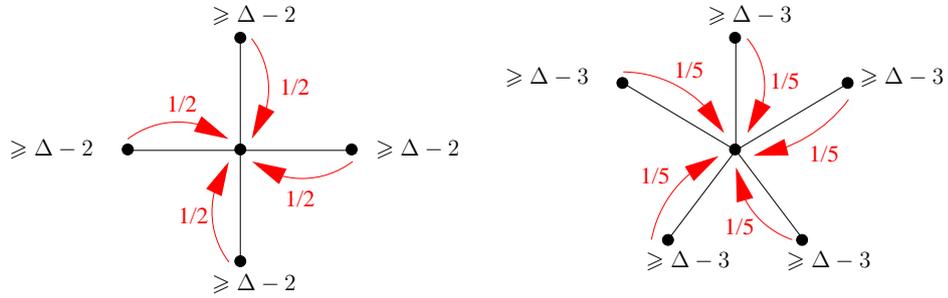


FIG. 7.12 – Règles 4 et 5 de la procédure de déchargement (4-sommets et 5-sommets).

Maintenant si x est un k -sommets, avec $k \leq 5$:

- Si $k = 2$, alors $w(x) = -4$. x reçoit au moins 1 par les faces adjacentes grâce à la *Règle 2*, (le graphe est simple, il est donc adjacent à au moins une face f avec $r(f) \geq 4$). De plus ce sommet reçoit 3 par son *maître* (*Règle 1*). En conséquent, $w^*(x) \geq 0$.
- Si $k = 3$, alors $w(x) = -3$. Si x n'est pas adjacent à une 3-face, alors x reçoit 1 de chacune des faces adjacentes (*Règle 2*). Maintenant, si x est adjacent à au moins une 3-face, un simple calcul avec l'utilisation des *Règles 2 et 3* montre que x reçoit 3. $w^*(x) = 0$ est donc obtenu.
- Si $k = 4$, alors $w(x) = -2$ et la *Règle 4* implique $w^*(x) = 0$.
- Si $k = 5$, alors $w(x) = -1$ et la *Règle 5* implique $w^*(x) = 0$.

Par le Lemme 7.12, nous savons qu'un 2-sommets est adjacent à un deux Δ' -sommets ; un 3-sommets est adjacent à trois sommets de degré au moins $\Delta' - 1$; un 4-sommets est adjacent à quatre sommets de degré au moins $\Delta' - 2$ et un 5-sommets est adjacent à cinq sommets de degré au moins $\Delta' - 3$. De plus, tout k -sommets avec $6 \leq k \leq \Delta' - 4$ ne donne aucune charge

et a donc une charge $w^*(x) = w(x) = d(x) - 6 \geq 0$.

Les Règles 3, 4 et 5 impliquent qu'un k -sommet avec $\Delta' - 3 \leq k \leq \Delta'$ donne au plus $k\frac{1}{2}$.

Soit x un k -sommet avec $\Delta' - 3 \leq k \leq \Delta'$ et $\Delta' \geq 8d + 1$, $d \geq 2$:

- Si $k = \Delta' - 3$, alors $w(x) = \Delta' - 9$ et $w^*(x) \geq \Delta' - 9 - (\Delta' - 3)\frac{1}{2} \geq \frac{\Delta' - 15}{2} \geq 0$.
- Si $k = \Delta' - 2$, alors $w(x) = \Delta' - 8$ et $w^*(x) \geq \Delta' - 8 - (\Delta' - 2)\frac{1}{2} \geq \frac{\Delta' - 14}{2} \geq 0$.
- Si $k = \Delta' - 1$, alors $w(x) = \Delta' - 7$ et $w^*(x) \geq \Delta' - 7 - (\Delta' - 1)\frac{1}{2} \geq \frac{\Delta' - 13}{2} \geq 0$.
- Si $k = \Delta'$, alors $w(x) = \Delta' - 6$ et $w^*(x) \geq \Delta' - 6 - 3 - (\Delta' - 1)\frac{1}{2} \geq \frac{\Delta' - 17}{2} \geq 0$.

Donc $w^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in V' \cup F'$. Ce résultat contredit le Lemme 7.8 (iii) et complète la preuve du Théorème 7.4 (iv).

Dans cette partie, nous venons de démontrer le Théorème 7.4 qui permet d'étiqueter $(d, 1)$ -totalement un graphe planaire suivant sa maille et son degré maximum. Nous allons maintenant voir quelles sont les perspectives et les conclusions de ces travaux.

7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenus des résultats optimaux pour $d = 2$ et optimaux ou à un de l'optimalité pour $d = 3$, concernant le coloration $(d, 1)$ -totale de graphes planaires ou de grand degré maximum.

Chapitre 8

Résultats sur le $L(p, q)$ -étiquetage

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au $L(p, q)$ -étiquetage défini précédemment mais avec une contrainte supplémentaire : cet étiquetage doit être sans trou. Nous définirons cette notion avant de donner un ensemble de références liées à ce type d'étiquetage.

8.1 Définition

De même que pour l'étiquetage $(d, 1)$ -total, le $L(p, q)$ -étiquetage est directement lié à l'assignation de fréquences. Nous voulons donner le $L(p, q)$ -étiquetage de graphes mais pas seulement, il doit être sans trou et minimal. L'étiquetage d'un graphe G est sans trou, si toutes les fréquences de l'intervalle sont utilisées (assignées à au moins un sommet) et il est minimal si un étiquetage sans trou de G ne peut pas être effectué avec moins de fréquences (d'étiquettes). Notons que par convention l'intervalle commence en zéro, si jamais nous utilisons un intervalle $[i, j]$, nous pouvons retrancher i à chaque étiquette pour obtenir un intervalle commençant en zéro.

Le graphe admet un $L(p, q)$ -étiquetage avec $\lambda_{p,q}$ étiquettes et toutes les étiquettes de l'intervalle $[0, \lambda_{p,q}]$ doivent donc être assignées à un sommet.

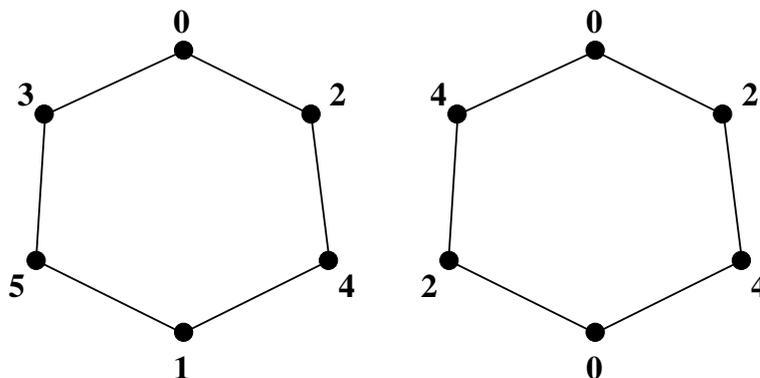


FIG. 8.1 – Graphe avec un $L(2, 1)$ -étiquetage avec 4 étiquettes et avec un $L(2, 1)$ -étiquetage sans trou avec 5 étiquettes.

8.2 Résultats existants

Nous revenons brièvement sur les résultats connus dans le domaine du $L(p, q)$ -étiquetage mais surtout sur ses interactions avec les divers étiquetages et colorations existants. Le $L(p, q)$ -étiquetage d'un graphe est un étiquetage des sommets avec des entiers peuvent être considéré comme une coloration des sommets. Le $L(1, 0)$ -étiquetage est la coloration des sommets telle que deux sommets voisins doivent avoir des couleurs différentes. Pour tout graphe G , $\lambda_{1,0}(G) = \chi(G)$.

A l'origine, le $L(p, q)$ -étiquetage est une extension de la T -coloration introduite par Hale[Hal80]. T étant un ensemble de valeurs interdites tel que pour chaque paire de sommets x et y de G , si x et y sont adjacents, la différence entre la valeur de leurs étiquettes ne doit pas appartenir à l'ensemble T . De même que pour le $L(p, q)$ -étiquetage, l'objectif est d'utiliser un minimum d'étiquettes. Ce problème de T -coloration a été très largement étudié [CLZ99, CR82, CR91, GL94, Liu92, Liu94, Liu96, RP85, Ray94, Tes89]. De plus pour des valeurs particulières de T , nous pouvons citer d'autres études faites sous d'autres noms :

- Si $T = \{0, 1\}$ (équivalent au $L(2, 0)$ -étiquetage) une T -coloration sans trou est appelée N -coloration [Rob93].
- Si $T = \{0, 1, 2, \dots, r\}$ (équivalent au $L(r + 1, 0)$ -étiquetage) une T -coloration sans trou est appelée N_r -coloration [SW93].

Dans ces deux articles, Roberts, Sakaï et Wang [Rob93, SW93] se sont intéressés à l'existence d'une N -coloration et d'une N_r -coloration dans des graphes particuliers : chaînes, cycles, graphes bipartis et graphes d'intersection de sphères unitaires. Lorsque cette coloration est possible, les auteurs ont donné des bornes inférieures et supérieures pour la taille de l'intervalle nécessaire.

Par la suite, Liu et Yeh [LY99] se sont intéressés à des valeurs exactes pour la taille de cet intervalle en introduisant des paramètres sur T . Chang, Juan et Liu ont donné des valeurs exactes pour les graphes d'intervalles propres [CJL01b] et pour les graphes bipartis [CJL01a]. Plus récemment, Fertin, Raspaud et Sykora [FRS04] ont donné des bornes pour le $L(p, 0)$ -étiquetage sans trou (correspondant à une N_{p-1} -coloration) de cycles, d'hypercubes de dimension d et de grilles de dimension 2 et 3. Pour le $L(2, 1)$ -étiquetage, qui est le plus étudié, Fishburn et Roberts[FR03b] montrent des liens existant entre les tailles d'intervalles pour le $L(2, 1)$ -étiquetage avec et sans trou.

Il est prouvé dans [CR82] que quelque soient T un ensemble d'entiers positifs et G un graphe, il existe une T -coloration de G . Ce n'est pas le cas concernant une N -coloration, le K_2 par exemple ne peut pas être coloré avec deux couleurs consécutives (la différence devant être supérieure ou égale à 2). Nous nous intéressons à ce problème d'existence ou pas de coloration / d'étiquetage pour un graphe donné. Plus précisément, nous voulons déterminer la complexité du problème suivant lorsque $p \geq q$:

Problème de l'Etiquetage Sans Trou NHLP(p, q) :

Instance : Un graphe G .

Question : Est-ce que G admet un $L(p, q)$ -étiquetage sans trou ?

Or, dans le cas où $q = 0$, nous étendrons directement les résultats sur la N -coloration et

la N_r -coloration. Nous savons que pour trouver le minimum de couleurs / d'étiquettes pour la coloration de sommets ou pour le $L(p, q)$ -étiquetage le problème est NP -complet. Mais nous voulons étendre les résultats de Roberts [Rob93], Sakai et Wang [SW93] et montrer que ce problème est NP -complet pour certaines valeurs de q ($q = 0$ et $q = 1$). Pour obtenir la NP -complétude de ce problème, nous le réduisons à celui de la chaîne Hamiltonienne.

8.3 $L(p, q)$ -étiquetage sans trou

Pour $p \geq q$ deux entiers fixés, nous nous intéressons au problème $NHLP(p, q)$. $NHLP(1, 1)$ et $NHLP(1, 0)$ sont polynomiaux, en effet, il suffit d'étiqueter les sommets avec des entiers de 1 à n (deux sommets voisins ou à distance deux auront bien des étiquettes différentes). En conséquence, tout graphe admet un $L(1, 1)$ -étiquetage sans trou, qui est aussi un $L(1, 0)$ -étiquetage sans trou.

Conjecture 8.1 *Soit $p \geq q \geq 0$ deux entiers. Si $(p, q) \notin \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$ alors $NHLP(p, q)$ est NP -complet.*

Par la suite, nous aurons besoin de la notion d'étiquetage *injectif* : un $L(p, q)$ -étiquetage est *injectif* si toutes les étiquettes des sommets sont différentes. Remarquons que si un graphe G d'ordre n possède un $L(p, q)$ -étiquetage injectif sans trou, les étiquettes sont dans l'intervalle $[0, n - 1]$.

Lemme 8.1 *Soit G un graphe, G possède un $L(p, q)$ -étiquetage sans trou si et seulement si il a un $L(p, q)$ -étiquetage injectif sans trou.*

Preuve. Considérons le $L(p, q)$ -étiquetage f , possédant le nombre maximum d'images distinctes. Soit v_1, v_2, \dots, v_n un ordre sur les sommets de G , tel que $f(v_i) \leq f(v_{i+1})$ pour tout $1 \leq i < n$.

Supposons que deux sommets aient la même étiquette, alors il existe un k pour lequel $f(v_k) = f(v_{k+1})$. Soit g défini comme suit : $g(v_i) = f(v_i)$ si $1 \leq i \leq k$ et $g(v_i) = f(v_i) + 1$ si $k < i \leq n$. g est alors un $L(p, q)$ -étiquetage sans trou avec un entier supplémentaire dans l'intervalle $(f(v_n) + 1)$. A partir d'un $L(p, q)$ -étiquetage sans trou, nous pouvons donc diminuer le nombre d'étiquettes utilisées plusieurs fois jusqu'à obtenir un $L(p, q)$ -étiquetage injectif sans trou ce qui suffit à démontrer ce lemme. \square

Etant donné qu'un $L(p, 0)$ -étiquetage injectif sans trou est un $L(p, 1)$ -étiquetage injectif sans trou, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 8.1 *Soient p un entier et G un graphe. G a un $L(p, 0)$ -étiquetage sans trou si et seulement si G a un $L(p, 1)$ -étiquetage sans trou. En particulier, $NHLP(p, 0)$ et $NHLP(p, 1)$ sont équivalents.*

Théorème 8.1 *G admet un $L(2, 0)$ -étiquetage si et seulement si \overline{G} admet une chaîne Hamiltonienne.*

Preuve. Supposons que \overline{G} possède une chaîne Hamiltonienne (v_1, v_2, \dots, v_n) . Soit f l'étiquetage suivant : $f(v_i) = i$. Il est facile de voir que cet étiquetage f est bien un $L(2, 0)$ -étiquetage injectif sans trou de G (par construction, deux sommets voisins ne peuvent pas avoir des étiquettes consécutives).

Supposons maintenant que G admette un $L(2, 0)$ -étiquetage sans trou. D'après le Lemme 8.1, G admet un $L(2, 0)$ -étiquetage injectif sans trou f dans $[1, n]$. Soit v_i le sommet étiqueté i , alors (v_1, v_2, \dots, v_n) est une chaîne Hamiltonienne de \overline{G} . \square

Etant donné que le problème de la chaîne Hamiltonienne est NP-complet, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 8.2 *NHLP(2, 0) et NHLP(2, 1) sont NP-complets.*

Définition 8.1 *Soit $p \geq 1$ un entier. Une p -chaîne $P = (V, E)$ est un graphe non-vide de la forme :*

$$V = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \quad \text{et} \quad \{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow |i - j| \leq p$$

où tous les v_i sont distincts. Les sommets v_1 et v_n sont respectivement appelés les extrémités de P . Une p -chaîne correspond à une chaîne à la puissance p , en particulier une 1-chaîne est une chaîne.

Nous nous référons à une p -chaîne par la séquence de ses sommets, écrite : $P = v_1, \dots, v_n$ et nous appelons chaîne origine d'une p -chaîne, la chaîne définie par la même séquence P .

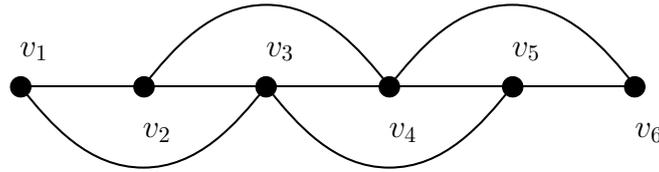


FIG. 8.2 – Exemple de 2-chaîne de longueur 5.

Définition 8.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, une p -chaîne Hamiltonienne de G est un sous-graphe $G' = (V, E' \subseteq E)$ de G tel que G' est une p -chaîne de longueur $n - 1$.*

Théorème 8.3 *Soit $p \geq 2$ un entier. G admet un $L(p, 0)$ -étiquetage sans trou si et seulement si \overline{G} possède une $(p - 1)$ -chaîne Hamiltonienne.*

Preuve. Soit G un graphe ayant un $L(p, 0)$ -étiquetage sans trou et donc un $L(p, 0)$ -étiquetage injectif sans trou f . Soit (v_0, v_1, \dots, v_n) les sommets dans l'ordre de leur étiquette (pour toute paire de sommets $v_i, v_j, i < j$ si et seulement si $f(v_i) < f(v_j)$). Dans ce cas, nous avons bien une $(p - 1)$ -chaîne Hamiltonienne définie par la séquence v_0, v_1, \dots, v_n dans \overline{G} . En effet, soit $i \in [1, n]$ alors v_i ne peut pas être voisin d'un sommet v_j avec $j \in [i - p + 1, i + p - 1]$.

Supposons que le complémentaire du graphe G possède une $(p - 1)$ -chaîne Hamiltonienne, dans ce cas, nous pouvons étiqueter les sommets du graphe dans leur ordre d'apparition dans la séquence liée à la $(p - 1)$ -chaîne Hamiltonienne et avoir un $L(p, 0)$ -étiquetage sans trou. En effet, dans le complémentaire, un sommet est adjacent à tous les sommets à distance

$p - 1$ dans la chaîne origine de la $(p - 1)$ -chaîne Hamiltonienne. En conséquence, si nous étiquetons les sommets dans l'ordre de la séquence de la chaîne origine de la $(p - 1)$ -chaîne Hamiltonienne, cela nous garantit que si deux sommets ont des étiquettes distantes d'au plus $p - 1$, ils ne sont pas voisins dans G , ce qui est bien un $L(p, 0)$ -étiquetage. Il est sans trou et injectif étant donné que les sommets sont étiquetés par les entiers distincts d'un intervalle. \square

De plus, pour étudier le $NHLP(p, 0)$, nous étudions le problème suivant qui lui est équivalent :

Problème de la p -chaîne Hamiltonienne :

Instance : Un graphe G .

Question : Est-ce que G possède une p -chaîne Hamiltonienne ?

Théorème 8.4 *Pour tout entier $p \geq 1$, le problème de la p -chaîne Hamiltonienne est NP-complet.*

Preuve. Nous prouvons que le problème de la p -chaîne Hamiltonienne est équivalent au problème NP-complet suivant :

Problème de la chaîne Hamiltonienne avec Extrémités Fixées :

Instance : Un graphe G et deux sommets distincts a et b de G

Question : Est-ce que G possède une chaîne Hamiltonienne avec pour extrémités a et b ?

Soient $G = (V, E)$ un graphe, a et b deux sommets distincts de G . Soit H le graphe construit comme suit : prenons $|V|$ graphes complets disjoints $K(v), v \in V$ tels que $|K(v)| = 2p$ si $v \in V \setminus \{a, b\}$ et $|K(a)| = |K(b)| = p$; pour toute arête $\{u, v\} \in E$, ajoutons une arête pour tout sommet de $K(u)$ à tout sommet de $K(v)$; finalement, pour tout sommet $v \in V$, ajoutons un nouveau sommet $x(v)$ connecté à tous les sommets de $K(v)$ (Figure 8.3).

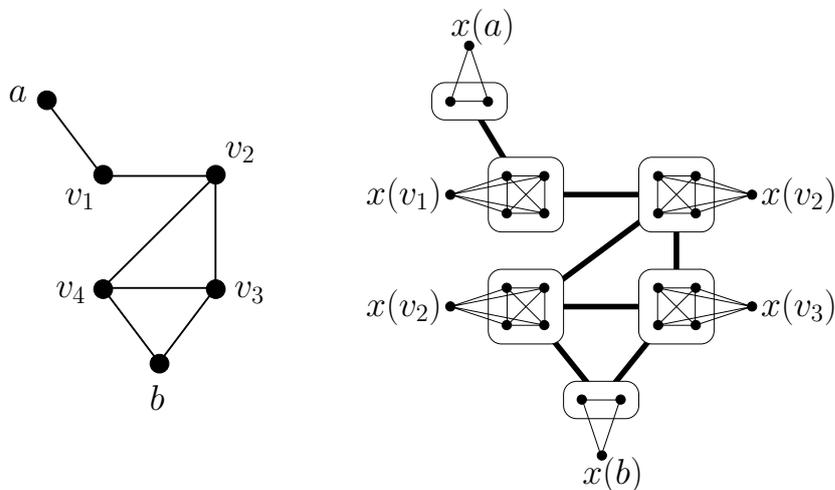


FIG. 8.3 – Exemple de construction d'un graphe H à partir d'un graphe G avec $p = 2$

Maintenant, prouvons que G possède une chaîne Hamiltonienne ayant pour extrémités a et b si et seulement si H possède une p -chaîne Hamiltonienne.

En premier lieu, supposons que G possède une chaîne Hamiltonienne définie par la séquence $P = v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ avec $a = v_1$ et $b = v_n$. Pour $i \in [1, n]$ notons $y_1(v_i), y_2(v_i), \dots, y_{|K(v_i)|}(v_i)$ les sommets de $K(v_i)$. Alors, il est facile de voir que $P' = x(a), y_1(a), \dots, y_p(a), y_1(v_2), \dots, y_p(v_2), x(v_2), y_{p+1}(v_2), \dots, y_{2p}(v_2), \dots, y_1(v_{n-1}), \dots, y_p(v_{n-1}), x(v_{n-1}), y_{p+1}(v_{n-1}), \dots, y_{2p}(v_{n-1}), y_1(b), \dots, y_p(b), x(b)$ est une p -chaîne Hamiltonienne de H .

Supposons maintenant que H possède une p -chaîne Hamiltonienne définie par une séquence P . Etant donné que $x(a)$ et $x(b)$ sont de degré p dans H ils doivent être les extrémités de cette p -chaîne Hamiltonienne.

Dans H , pour tout sommet v , distinct de a et de b , le sommet $x(v)$ correspondant à $2p$ voisins (les sommets de $K(v)$) donc dans la chaîne origine de la p -chaîne Hamiltonienne, l'ensemble des sommets de $K(v)$ doivent donc être à distance au plus p de v . Donc P est de la forme : $(x(a), y_1(a), \dots, y_p(a), y_1(v_2), \dots, y_p(v_2), x(v_2), y_{p+1}(v_2), \dots, y_{2p}(v_2), \dots, y_1(v_{n-1}), \dots, y_p(v_{n-1}), x(v_{n-1}), y_{p+1}(v_{n-1}), \dots, y_{2p}(v_{n-1}), y_1(b), \dots, y_p(b), x(b))$ avec $y_i(u)$ un sommet de $K(u)$. Pour tout $2 \leq i \leq n-2$, $\{v_i, v_{i+1}\}$ est une arête de G étant donné que $y_{2p}(v_i)$ et $y_1(v_{i+1})$ sont adjacents et pour une raison analogue, $\{a, v_2\}$ et $\{v_{n-1}, b\}$ sont des arêtes de G . Donc $(a, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, b)$ est une chaîne Hamiltonienne de G . \square

Corollaire 8.2 *Soit $p \geq 2$ un entier, alors $NHLP(p, 0)$ et $NHLP(p, 1)$ sont NP -complets.*

De même que pour le $L(p, 0)$ -étiquetage, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 8.5 *Soient $p \geq q \geq 1$ des entiers. G admet un $L(p, q)$ -étiquetage sans trou si et seulement si il existe une séquence $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ telle que P définit une $(p-1)$ -chaîne Hamiltonienne dans \overline{G} et une $(q-1)$ -chaîne Hamiltonienne dans $\overline{G^2}$.*

Preuve. Etant donné que $p \geq q$, le problème du $L(p, q)$ -étiquetage d'un graphe G consiste à résoudre le problème du $L(p, 0)$ -étiquetage de G et du $L(q, 0)$ -étiquetage du carré du graphe (les sommets de G à distance 2 dans G se retrouvent voisins dans G^2). En conséquence, en appliquant le Théorème 8.3, nous obtenons que ce problème est équivalent à celui de la $(p-1)$ -chaîne dans \overline{G} et de la $(q-1)$ -chaîne dans $\overline{G^2}$. \square

L'étude de complexité sur ce problème semble difficile, il faut étudier une façon de construire le carré d'un graphe dont le complémentaire aurait des propriétés similaires au graphe défini dans la preuve du Théorème 8.3. Il semble raisonnable de penser que ce problème est NP -complet pour $p \geq 2$ et $q \geq 2$ mais nous conclurons cette étude avec les perspectives de ces travaux abordées dans nos conclusions.

8.4 Conclusion

Nous avons obtenu la NP -complétude du problème du $L(p, q)$ -étiquetage sans trou lorsque $q = 0$ et $q = 1$ et effectué des extensions des études de complexité sur la N -coloration et sur la N_r -coloration. La perspective principale est donc de trouver la complexité de ce problème :

Problème de la p -chaîne Hamiltonienne du Complémentaire d'un Carré :

Instance : Un graphe G .

Question : Est-ce que $\overline{G^2}$ possède une p -chaîne Hamiltonienne ?

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire de thèse, nous nous sommes attachés à étudier les étiquetages des graphes selon deux directions : l'étiquetage de distance vu comme un codage du graphe et l'étiquetage en tant que coloration.

Le premier volet de cette étude comporte trois étapes : la caractérisation, la reconnaissance et la définition d'un schéma d'étiquetage de distance pour les graphes de permutation. Notre caractérisation fournit un ensemble de propriétés relatives au voisinage des sommets. Cette localité est recherchée pour la reconnaissance dynamique et l'étiquetage de distance qui étaient nos principaux objectifs. Pour la reconnaissance dynamique, la localité donne des contraintes sur le voisinage du sommet que nous souhaitons ajouter dans le graphe. Pour l'étiquetage de distance, elle permet de définir la liaison entre la position des plus courts chemins et la structure des graphes de permutation.

A partir de notre caractérisation, nous avons élaboré un algorithme partiel incrémental de reconnaissance des graphes de permutation premiers ayant une complexité en $\mathcal{O}(\max\{d\Delta, d^2\})$. A notre connaissance, un tel algorithme n'existait que pour les graphes de permutation bipartis [SBS87]. Nous pensons que cette étude sur les graphes de permutation premiers est une étape importante pour la reconnaissance dynamique de la famille des graphes de permutation. Les perspectives de ce travail sont de définir le comportement de l'arbre de décomposition lors des mises à jour du graphe, d'identifier de quelle façon l'ajout d'un sommet modifie sa structure et surtout de mesurer la complexité optimale pour un tel problème. Notre caractérisation des graphes de permutation nous a notamment permis d'étendre des propriétés structurelles des graphes de permutation bipartis aux graphes de permutation quelconques. En effet, les propriétés d'adjacence et de fermeture définies à l'origine pour les graphes bipartis sont des propriétés très fortes et contribueront à la définition de nouveaux algorithmes.

Des questions restent cependant en suspend : une extension de ces propriétés est-elle nécessaire afin d'obtenir une meilleure complexité sur le problème de la reconnaissance ? Est-il possible voire nécessaire de définir une autre décomposition afin de traiter plus facilement le complémentaire du graphe ? En effet, actuellement la difficulté est centrée sur le passage au complémentaire, la décomposition modulaire, par exemple, permet d'accéder au graphe et à son complément, il suffit d'inverser le type des nœuds. Pour permettre ce type d'accès au complémentaire, il est nécessaire d'étendre notre propriété de fermeture et de voir quelle sont ses propriétés dans le complémentaire. Notre caractérisation nous apporte néanmoins des informations importantes sur la structure des graphes de permutation et a permis la définition d'un étiquetage de distance intéressant.

Pour cet étiquetage, nous avons utilisé des propriétés plus générales que celles utilisées lors de la caractérisation. Notre schéma d'étiquetage utilise des étiquettes de taille $\mathcal{O}(\log n)$. Ces

étiquettes sont calculables en temps linéaire et le décodeur de distance fonctionne en temps constant. Nous avons ainsi amélioré les résultats existants d'un facteur $\log n$ [KKP00]. De plus, nous avons fourni un algorithme d'extraction de plus courts chemins et un algorithme de routage. L'ensemble de ces résultats est applicable à la famille des graphes de permutation circulaires.

Une direction intéressante pour des recherches futures serait d'étudier quelles sont les familles de graphes qui supporteraient un étiquetage de distance avec des étiquettes de taille polylogarithmique en fonction du nombre de sommets du graphe. Actuellement seuls les graphes d'intervalles et de permutation, ainsi que les extensions directes, telles que les graphes d'arcs et de permutation circulaires ont des schémas d'étiquetage de distance avec des étiquettes de taille $\mathcal{O}(\log n)$ bits. Seulement, beaucoup de famille de graphes d'intersection contiennent les graphes planaires. Ceux-ci peuvent avoir des étiquettes assez petites pour le problème de l'étiquetage d'adjacence : $3 \log n + O(\log^* n)$ bits par sommet [AR02]. Mais, il est admis qu'un schéma d'étiquetage de distance pour cette famille nécessite des étiquettes de taille $\Omega(n^{1/3})$ bits [GPPR04]. Prenons par exemple, une généralisation des graphes d'intervalles : les graphes de 3-intervalles (graphes d'intersection de l'union de 3 intervalles) et les graphes d'intersection du produit cartésien de 3 intervalles contiennent tout les deux les graphes planaires [SW83, Tho86]. Les problèmes de définition des schémas d'étiquetage de distance à l'aide d'étiquettes de taille en $\mathcal{O}(\log n)$ bits (ou les problèmes liés comme l'extraction de plus courts chemins ou le routage compact) restent ouverts pour ces généralisations avec une boxicité 2 et pour les 2-intervalles.

Le second volet de notre étude concernant l'étiquetage en temps que coloration est divisé selon deux directions : l'étiquetage $(d, 1)$ -total de graphes et une étude de complexité sur le $L(p, q)$ -étiquetage sans trou.

Dans le cadre de l'étiquetage $(d, 1)$ -total, nous avons généralisé des travaux sur la coloration totale [BKW96, BKW98], donné des résultats optimaux pour $d = 2$ et optimaux ou à un de l'optimalité pour $d = 3$. Pour cela, nous avons fixé des conditions sur le degré maximum et la maille des graphes.

Nous conjecturons à partir de nos résultats que pour une valeur $d = 2$:

Conjecture 8.2 *Pour tout graphe planaire sans triangle G avec $\Delta \geq 3$, $\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d$.*

De plus, Montassier et Raspaud [MR03] ont étudié les liens entre l'étiquetage $(d, 1)$ -total et le degré moyen maximum. Leurs travaux ont amélioré le premier cas de notre théorème en abaissant de 1 la maille nécessaire.

Une question se pose naturellement, est-ce que les conditions sur la maille sont optimales ?

L'ensemble de ces travaux a été motivé par la conjecture de Havet et Yu sur l'étiquetage $(d, 1)$ -total des graphes cubiques et sub-cubiques :

Conjecture 8.3 [HY02] *Soit G un graphe avec $\Delta \leq 3$, $G \neq K_4$, alors $\lambda_2^T(G) \leq 5$.*

De nouvelles questions relatives à l'existence d'algorithmes d'étiquetage se posent : algorithmiquement, est-il possible d'étiqueter $(d, 1)$ -totalement un graphe ? Quelle serait la complexité de ces algorithmes suivant les classes de graphes ?

Pour répondre à ces questions, nous pourrions exploiter les résultats de Calamoneri et

Petreschi [CP01] sur le $L(2, 1)$ -étiquetage de graphes planaires. En effet, leur principal résultat est basé sur un algorithme de parcours particulier de graphes planaires qui permet ensuite un $L(2, 1)$ -étiquetage.

Notre seconde direction sur l'étiquetage, vu comme une coloration, est une étude de complexité du problème de $L(p, q)$ -étiquetage sans trou de graphes quelconques.

Nous avons obtenu la NP -complétude du problème du $L(p, q)$ -étiquetage sans trou lorsque $q = 0$ et $q = 1$ et effectué des extensions des études de complexité sur la N -coloration et sur la N_r -coloration. Afin de compléter cette étude, il est nécessaire de trouver la complexité du problème de la p -chaîne hamiltonienne du complémentaire d'un carré.

Il semble raisonnable de penser que ce problème est NP -complet pour $p \geq 2$ et $q \geq 2$. Mais les questions suivantes résultent de cette étude de complexité : si le problème est NP -complet, est-il possible de caractériser les familles de graphes pour lesquelles, trouver un chemin Hamiltonien dans le complémentaire du carré de ces graphes est un problème polynomial ? S'il ne l'est pas, est-il possible de donner un algorithme pour effectuer cet étiquetage ? Ces questions font actuellement l'objet de travaux en collaboration avec G. Fertin, F. Havet et A. Jarry.

Enfin, une voie de recherche serait d'utiliser la caractérisation des graphes de permutation pour donner des valeurs optimales et des algorithmes pour l'étiquetage $(d, 1)$ -total ou le $L(p, q)$ étiquetage sans trou de cette famille.

Bibliographie

- [ABR03] S. Alstrup, P. Bille, and T. Rauhe. Labeling schemes for small distances in trees. In *Proceedings of the 14th Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 689–698. ACM-SIAM, January 2003.
- [AH89] K. Appel and W. Haken. *Every planar map is four-colorable*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1989.
- [AR02] S. Alstrup and T. Rauhe. Small induced-universal graphs and compact implicit graph representations. In *Proceedings of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 53–62. IEEE Computer Society Press, November 2002.
- [Beh65] M. Behzad. *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University, 1965.
- [Ber83] C. Berge. *Graphes*. Gauthier-Villars, 3^{ème} edition, 1983.
- [BF67] M.A. Breuer and J. Folkman. An unexpected result in coding the vertices of a graph. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 20 :583–600, 1967.
- [BFR71] K.A. Baker, P.C. Fishburn, and F.S. Roberts. Partial orders of dimension 2. *Networks*, 2 :11–28, 1971.
- [BKTvL00] H.L. Bodlaender, T. Kloks, R.B. Tan, and J. van Leeuwen. λ -coloring of graphs. In *Proceedings of STACS 2000 : 17th Annual Symposium on Theoretical Aspect of Computer Science*, volume 1770, pages 395–406. Lecture Notes Computer Science, Springer-Verlag Berlin, 2000.
- [BKW96] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. Total colorings of planar graphs with large maximum degree. *Journal of graph theory*, 26 :53–59, 1996.
- [BKW97] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. List edge and list total colourings of multigraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 71 :184–204, 1997.
- [BKW98] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. Total colourings of planar graphs with large girth. *European Journal of Combinatorics*, 19 :19–24, 1998.
- [BLS99] A. Brandstädt, V.B. Le, and J.P. Spinrad. *Graph Classes a Survey*. SIAM, 1999.
- [BMR03] F. Bazzaro, M. Montassier, and A. Raspaud. $(d, 1)$ -total labelling of planar graphs with large girth and high maximum degree. Technical Report 1307-03, LaBRI, 2003.

- [Boj01] V.A. Bojarshinov. Edge and total coloring of interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 114 :23–28, 2001.
- [Bor89] O.V. Borodin. On the total coloring of planar graphs. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 394 :180–185, 1989.
- [BPT00] A.A. Bertossi, C.M. Pinotti, and R.B. Tan. Efficient use of radio spectrum in wireless networks with channel separation between close stations. In *Proceedings of the 4th DIAL M for Mobility*, 2000.
- [BPT02] A.A. Bertossi, C.M. Pinotti, and R.B. Tan. Channel assignment with separation for special classes of wireless networks : grids and rings. In *Proceedings of IPDPS'02*, pages 28–33. IEEE Computer Society, 2002.
- [Bre66] M.A. Breuer. Coding the vertices of a graph. *IEEE Transaction on Information Theory*, 12 :148–153, 1966.
- [Bro41] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Mathematical and Physical Sciences*, volume 37, pages 194–197, 1941.
- [CDV03] V. Chepoi, F. Dragan, and Y. Vaxès. Distance and routing labeling schemes for non-positively curved plane graphs. Technical Report 13-2003, LIF, 2003.
- [CJL01a] G.J. Chang, S. Juan, and D.D.-F. Liu. Minimum span of no-hole $(r + 1)$ -distant coloring. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 14 :370–380, 2001.
- [CJL01b] G.J. Chang, S. Juan, and D.D.-F. Liu. No-hole 2-distant coloring for unit interval graphs. *Ars Combinatoria*, 61 :233–244, 2001.
- [CK96] G.J. Chang and D. Kuo. The $L(2, 1)$ -labeling on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 9 :309–316, 1996.
- [CKK⁺02] G.J. Chang, W.-T. Ke, D. Kuo, D.D.-F. Lyu, and R.K. Yeh. On $L(d, 1)$ labelings of graphs. *Discrete Mathematics*, 220 :57–66, 2002.
- [CKN⁺95] D.G. Corneil, H. Kim, S. Natarajan, S. Olariu, and A.P. Sprague. Simple linear time algorithm of unit interval graphs. *Information Processing Letters*, 55(2) :99–104, 1995.
- [CLSS98] D.Z. Chen, D.T. Lee, R. Sridhar, and C.N. Sekharan. Solving the all-pair shortest path query problem on interval and circular-arc graphs. *Networks*, 31(4) :249–257, 1998.
- [CLZ99] G.J. Chang, D.D.-F. Lyu, and X. Zhu. Distance graphs and t -coloring. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75 :259–269, 1999.
- [CP01] T. Calamoneri and R. Petreschi. $L(2, 1)$ -labeling of planar graphs. In *Proceedings of the 5th DIAL M for Mobility*, pages 28–33, 2001.
- [CPS85] D.G. Corneil, Y. Perl, and L.K. Stewart. A linear recognition for cographs. *SIAM Journal on Computing*, 14(4) :926–934, 1985.
- [CR82] M.B. Cozzens and F.S. Roberts. t -colorings of graphs and the channel assignment problem. *Congressus Numerantium*, 35 :191–208, 1982.
- [CR91] M.B. Cozzens and F.S. Roberts. Greedy algorithms for t -colorings of complete graphs and the meaningfulness of conclusions about them. *Journal of Combinatorics Information and System Science*, 16 :286–299, 1991.

- [dFHMPdM95] C.M. de Figueiredo Herrera, J. Meidanis, and C. Picinin de Mello. A linear-time algorithm for proper interval recognition. *Information Processing Letters*, 56(3) :179–184, 1995.
- [DL04] F. Dragan and I. Lomonosov. New routing schemes for interval graphs, circular-arc graphs, and permutation graphs. In *Proceedings of the 14th IAS-TED International Conference on Parallel and Distributed Computing and Systems (PDCS)*, November 2004. To appear.
- [DM41] B. Dushnik and E.W. Miller. Partially ordered sets. *American Journal of Mathematics*, 63 :600–610, 1941.
- [EGI97] D. Eppstein, Z. Galil, and G.F. Italiano. Dynamic graph algorithms. *Algorithms and Theory of Computation Handbook, Chapter 22*, 1997.
- [EPL72] S. Even, A. Pnueli, and A. Lempel. Permutation graphs and transitive graphs. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 19 :400–410, 1972.
- [ERT79] P. Erdős, A.L. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. In *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Congressus Numerantium XXVI*, pages 125–157, 1979.
- [FR03a] G. Fertin and A. Raspaud. $L(p, q)$ -labeling of d -dimensional grids. *Discrete Mathematics*, 2003. Submitted.
- [FR03b] P.C. Fishburn and F.S. Roberts. No-hole $l(2, 1)$ -colorings. *Discrete Applied Mathematics*, 130 :513–519, 2003.
- [FRS04] G. Fertin, A. Raspaud, and O. Sykora. No-hole $l(p, 0)$ -labeling of cycles, grids and hypercubes. In *Proceedings of the 11th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity SIROCCO '04*, 2004.
- [Gal67] T. Gallai. Transitiv orinetierbare graphen. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 18 :25–66, 1967.
- [Gav01] C. Gavaille. Routing in distributed networks : Overview and open problems. *ACM SIGACT News - Distributed Computing Column*, 32(1) :36–52, 2001.
- [GH62] A. Ghouila-Houri. Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre. *Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 254 :1370–1371, 1962.
- [GKK⁺01] C. Gavaille, M. Katz, N.A. Katz, C. Paul, and D. Peleg. Approximate distance labeling schemes. In F. Meyer auf der Heide, editor, *Proceedings of 9th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, volume 2161 of Lecture Notes in Computer Science, pages 476–488. Springer, 2001.
- [GL94] J.R. Griggs and D.D.-F. Liu. The channel assignment problem for mutually adjacent sites. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 68 :169–183, 1994.
- [Gol80] M.C. Golumbic. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [Gol84] M.C. Golumbic. Containment graphs and intersection graphs. Technical Report 88-135, IBM Israel, 1984.
- [GP03a] C. Gavaille and C. Paul. Distance labeling scheme and split decomposition. *Discrete Mathematics*, 273(1-3) :115–130, 2003.

- [GP03b] C. Gavaille and C. Paul. Optimal distance labeling schemes for interval and circular-arc graphs. In G. Di Battista and U. Zwick, editors, *Proceedings of the 11th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, volume 2832 of Lecture Notes in Computer Science, pages 254–265. Springer, September 2003.
- [GPPR04] C. Gavaille, D. Peleg, S. Pérennes, and R. Raz. Distance labeling in graphs. *Journal of Algorithms*, 53(1) :85–112, 2004.
- [Grö59] H. Grötzsch. Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe*, 8 :109–120, 1959.
- [GY92] J.R. Griggs and R.K. Yeh. Labelling graphs with a condition at distance two. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5 :586–595, 1992.
- [Hab81] M. Habib. *Substitution de structures combinatoires, Théories et algorithmes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1981.
- [Ha180] W.K. Hale. Frequency assignment : theory and applications. In *Proceedings of the IEEE*, volume 68, pages 1497–1514, 1980.
- [Hav03] F. Havet. $(d, 1)$ -total labelling of graphs. Workshop Graphs and Algorithms, Dijon (FRANCE), 2003.
- [HK01] A. Hackmann and A. Kemnitz. List edge coloring of outerplanar graphs. *Ars Combinatoria*, 60 :181–185, 2001.
- [HM79] M. Habib and M.C. Maurer. On the x -join decomposition for undirected graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3 :198–207, 1979.
- [HMR98] H. Hind, M. Molloy, and B. Reed. Total colouring with $\delta + \text{poly}(\log \delta)$ colours. *SIAM Journal on Computing*, 28 :816–821, 1998.
- [HY02] F. Havet and M.-L. Yu. $(d, 1)$ -total labelling of graphs. Technical Report 4650, INRIA, 2002.
- [IZN01] S. Isobe, X. Zhou, and T. Nishizeki. Total colorings of degenerated graphs. In *Proceedings of ICALP 2001*, pages 506–517, 2001.
- [Jha00] P.K. Jha. Optimal $L(2, 1)$ -labeling of cartesian products of cycles with an application to independent domination. *IEEE Transactions Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 47 :1531–1534, 2000.
- [JMT99] M. Juvan, B. Mohar, and R. Thomas. List edge-colorings of series-parallel graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 6(1), 1999.
- [JNS⁺00] P.K. Jha, A. Narayanan, P. Sood, K. Sundaram, and V. Sunder. On $L(2, 1)$ -labeling of the cartesian product of a cycle and a path. *Ars Combinatoria*, 55 :81–89, 2000.
- [KKP00] M. Katz, N.A. Katz, and D. Peleg. Distance labeling schemes for well-separated graph classes. In *Proceedings of the 17th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, volume 1770 of Lecture Notes in Computer Science, pages 516–528. Springer Verlag, 2000.
- [KMMS03] D. Kratsch, R.M. McConnell, K. Mehlhorn, and J.P. Spinrad. Certifying algorithms for recognizing interval graphs and permutation graphs. In *Proceedings of the 14th Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 158–167. ACM-SIAM, 2003.

- [KNR92] S. Kannan, M. Naor, and S. Rudich. Implicit representation of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5 :596–603, 1992.
- [Kos77] A.V. Kostochka. The total coloring of a multigraph with maximal degree 4. *Discrete Mathematics*, 17 :161–163, 1977.
- [Kos78] A.V. Kostochka. *Upper bounds of chromatic functions on graphs (in Russian)*. PhD thesis, Novosibirsk University, 1978.
- [Kos96] A.V. Kostochka. The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven. *Discrete Mathematics*, 162 :199–214, 1996.
- [Kön16] D. König. Über graphen und ihre anwendug auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 77 :453–465, 1916.
- [Liu92] D.D.-F. Liu. t -colorings of graphs. *Discrete Mathematics*, 101 :203–212, 1992.
- [Liu94] D.D.-F. Liu. On a conjecture of t -colorings. *Congressus Numerantium*, 103 :27–31, 1994.
- [Liu96] D.D.-F. Liu. t -graphs and the channel assignment problem. *Discrete Mathematics*, 161 :197–205, 1996.
- [LY99] D.D.-F. Liu and R. Yeh. No-hole t -coloring of graphs. *Congressus Numerantium*, 138 :39–48, 1999.
- [Met70] B.H. Metzger. Spectrum management technique. In *Proceedings of the 38th National ORSA Meeting, Detroit, MI*, 1970.
- [MR84] R.H. Möhring and F.J. Radermacher. Substitution decomposition for discrete structures and connections with combinatorial optimization. *Annals of Discrete Mathematics*, 19 :257–356, 1984.
- [MR98] M. Molloy and B. Reed. A bound on the total chromatic number. *Combinatorica*, 18(2) :241–280, 1998.
- [MR03] M. Montassier and A. Raspaud. $(d, 1)$ -total labelling of graphs with given maximum average degree. Technical Report 1308-03, LaBRI, 2003.
- [MS97] R.M. McConnell and J.P. Spinrad. Linear-time transitive orientation. In *Proceedings of the 8th Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 19–25. ACM-SIAM, 1997.
- [MS99] R.M. McConnell and J.P. Spinrad. Modular decomposition and transitive orientation. *Discrete Mathematics*, 201 :189–241, 1999.
- [MS02] M. Molloy and M.R. Salavatipour. Frequency channel assignment on planar networks. In *Proceedings of the 10th Annual European Symposium (ESA 2002), Rome, Italy*, volume 2461, pages 736–747. Lecture Notes Computer Science, Springer-Verlag Berlin, September 2002.
- [Möh85] R.H. Möhring. Algorithmic aspects of comparability graphs and intervals graphs. *Graphs and Order*, pages 41–101, 1985.
- [Möh89] R.H. Möhring. Computationally tractable classes of ordered sets. *Algorithms and Order*, pages 105–193, 1989.
- [NRS97] J. Nešetřil, A. Raspaud, and E. Sopena. Colorings and girth of oriented planar graphs. *Discrete Mathematics*, 165-166 :519–530, 1997.

- [Pel99] D. Peleg. Proximity-preserving labeling schemes and their applications. In Peter Widmayer, Gabriele Neyer, and Stephan Eidenbenz, editors, *Proceedings of the 25th International Workshop, Graph - Theoretic Concepts in Computer Science (WG)*, volume 1665 of Lecture Notes in Computer Science, pages 30–41. Springer, June 1999.
- [PLE71] A. Pnueli, A. Lempel, and S. Even. Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 23 :160–175, 1971.
- [Ray94] A. Raychaudhuri. Further results on t -coloring and frequency assignment problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6 :605–613, 1994.
- [Rob93] F.S. Roberts. No-hole 2-distant colorings. *Mathematical and Computer Modeling*, 17 :139–144, 1993.
- [Ros71] M. Rosenfeld. On the total coloring of certain graphs. *Israel Journal of Mathematics*, 9 :396–402, 1971.
- [RP85] J.H. Rabinowitz and V.K. Proulx. An asymptotic approach to the channel assignment problem. *SIAM Journal Algebraic Discrete Methods*, 6 :507–518, 1985.
- [Sak94] D. Sakai. Labeling chordal graphs with a condition at distance two, SIAM. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7 :133–140, 1994.
- [SBS87] J.P. Spinrad, A. Brandstädt, and L. Stewart. Bipartite permutation graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 18 :279–292, 1987.
- [Sch89] W. Schnyder. Planar graphs and poset dimension. *Order*, 5 :323–343, 1989.
- [SS04] R. Shamir and R. Sharan. A fully dynamic algorithm for modular decomposition and recognition of cographs. *Discrete Applied Mathematics*, 136 :329–340, 2004.
- [Sum71] D.P. Sumner. *Indecomposable graphs*. PhD thesis, Massachusetts University, Amherst, 1971.
- [Sum73] D.P. Sumner. Graphs indecomposable with respect to the x -join. *Discrete Mathematics*, 6 :281–298, 1973.
- [SW83] E.R. Scheinerman and D.B. West. Interval number of a planar graph : Three intervals suffice. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 35 :224–239, 1983.
- [SW93] D. Sakai and C. Wang. No-hole $(r + 1)$ -distant colorings. *Discrete Mathematics*, 119 :175–189, 1993.
- [Tes89] B.A. Tesman. *T-colorings, List T-Colorings and Set T-Colorings of Graphs*. PhD thesis, Rutgers University, 1989.
- [Tho86] C. Thomassen. Interval representations of planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 40 :9–20, 1986.
- [TZ01] M. Thorup and U. Zwick. Compact routing schemes. In *Proceedings of the 13th Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA)*, pages 1–10, Hersonissos, Crete, Greece, 2001. ACM Press.
- [vdHM03] J. van den Heuvel and S. McGuinness. Coloring the square of a planar graph. *Journal of Graph Theory*, 42 :110–124, 2003.

- [Vij71] N. Vijayaditya. On total chromatic number of a graph. *Journal of the London Mathematical Society*, 3(2) :405–408, 1971.
- [Viz64] V.G. Vizing. On the estimate of the chromatic class of a p-graphs (in Russian). *Metody Diskretnogo Analiza*, 3 :25–30, 1964.
- [Viz65] V.G. Vizing. Critical graphs with given chromatic class (in Russian). *Metody Diskretnogo Analiza*, 5 :9–17, 1965.
- [Viz68] V.G. Vizing. Some unsolved problems in graph theory. *Russian Mathematical Surveys*, 23 :125–141, 1968.
- [WGM95] M.A. Whittlesey, J.P. Georges, and D.W. Mauro. On the λ -number of Q_n and related graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 8 :449–506, 1995.

Index

Symboles	
• K_p	4
• $L(2, 1)$ -étiquetage	88
• $L(p, q)$ -étiquetage	89
• P_k	4
• Δ	3
• k -sommet	83
• p -chaîne	116
• 1-sommet	83
A	
• Algorithme	
décomposition modulaire	32
dynamique	29
• Arête	3
• Arbre	6
• Arc	3
• Arc	
multiple	3
• Assignation de fréquences	87
B	
• Boucle	3
C	
• Chaîne	4
élémentaire	5
origine	116
simple	5
• Chaîne Hamiltonienne	84
• Chemin	5
• Chemin	4
• Classe de forçage	33
• Clique	4
• Coarbre	35, 36
• Cographe	35, 36
• Coloration	
des sommets	84
par liste	84
totale	84
• Composante	
connexe	6
D	
• Décomposition	
modulaire	30
par substitution	30
parallèle	32
série	32
• Degré	3
• Degré maximum	3
E	
• Ensemble	
dominant	7
indépendant	4
• Etiquetage $(d, 1)$ -total	91
• Extension	
linéaire	14
linéaire non-séparante	15
F	
• Face	83
• Famille	
héréditaire	4
G	
• Graphe	
complet	4
d'intervalles	11
quotient	32
k -dégénéré	86
biparti	6
connexe	5
d'inclusion	17
d'intersection	11
de chevauchement	16
de co-comparabilité	13
de comparabilité	13
de permutation	12

- orienté 3
 - planaire 83
 - planaire extérieure 83
 - premier 31, 35
- H
- Hérité 4
- I
- Index chromatique 84
 - Isomorphes 4
- K
- k-face 83
- M
- Maille 83
 - Module 30
 - fort 31
 - premier 31
 - propre 31
 - trivial 31
- N
- Nombre $(d, 1)$ -total 92
 - Nombre chromatique 84
 - Nombre chromatique total 84
 - Non-arête 3
- O
- Ordre 3
 - Orientation 13
 - inverse 13
 - transitive 13
- P
- Paire
 - dominante 7
 - Permutation 12
 - Prédécesseur 3
 - Propriété
 - adjacence forte 22
 - d'adjacence 22
 - de fermeture 23
 - de fermeture forte 23
- R
- Représentation 13
- S
- Sommet
 - pendant 83
 - Stable 4
 - Successeur 3

Etiquetage de graphes : codage et coloration

Résumé : Dans ce mémoire de thèse, nous nous intéressons à deux variantes d'étiquetage de graphes : l'étiquetage de distance et l'étiquetage avec contraintes tel que le $L(p, q)$ -étiquetage et l'étiquetage $(d, 1)$ -total.

L'étiquetage de distance est un codage du graphe permettant de calculer des distances. Nous nous sommes efforcés d'en définir un schéma pour les graphes de permutation. Pour cela, une étude sur la structure de cette famille a été effectuée.

Dans cette optique, nous avons proposé une caractérisation de cette famille et défini un algorithme de reconnaissance dynamique.

La seconde partie de notre travail s'est portée sur l'étiquetage $(d, 1)$ -total et le $L(p, q)$ -étiquetage qui sont des problèmes liés à l'assignation de fréquences dans des réseaux d'émetteurs.

Pour l'étiquetage $(d, 1)$ -total, nous obtenons des résultats optimaux sur la largeur de la bande de fréquence utilisée dans le cas des topologies planaires de grande maille et de grand degré maximum.

Enfin, pour le $L(p, q)$ -étiquetage une étude de complexité sur des étiquetages sans trou a été effectuée. Nous donnons la complexité de la décidabilité sur cet étiquetage dans les graphes quelconques suivant les valeurs des paramètres p et q . En effet, tous les graphes n'admettent pas de $L(p, q)$ -étiquetage sans trou, le problème de décidabilité est donc primordial.

Discipline : Informatique

Mots-Clefs : Etiquetage de distance, graphes de permutation, caractérisation, algorithme dynamique de reconnaissance, coloration, $L(p, q)$ -étiquetage, étiquetage $(d, 1)$ -total.

Labeling of graphs : coding and coloration

Abstract : In this thesis, we focus on two ways of labeling of graphs : distance labeling and labeling with constraints such as the $L(p, q)$ -labeling and the $(d, 1)$ -total labeling.

The distance labeling is a coding of the graph. We have defined a distance labeling scheme for the permutation graphs which implies a study on the structure of this family.

In this way, we have proposed a characterization and a dynamic recognition algorithm for the permutation graphs.

In the second part of this thesis, our work is focused on the $(d, 1)$ -total labeling and the $L(p, q)$ -labeling which are linked with problems on frequency assignation in transmitter networks.

For the $(d, 1)$ -total labeling, we have obtained tight results on the span of the frequency spectrum for planar topologies with large girth and high maximum degree.

Finally, we have studied the complexity of the no-hole $L(p, q)$ -labeling. We give the complexity of the decidability problem on this labeling for any graph depend on the parameters p and q . Indeed, all the graphs do not have a no-hole $L(p, q)$ -labeling, so, the decidability problem has an important place.

Discipline : Computer-Science

Keywords : Distance labeling, permutation graphs, characterization, dynamic recognition algorithm, coloration, $L(p, q)$ -labeling, $(d, 1)$ -total labeling.

LaBRI,
Université Bordeaux 1,
351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex (FRANCE).
