

Résumé

L'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) joue un rôle déterminant dans la dynamique des restes de supernovae (RSN).

Dans cette thèse, nous avons étudié les effets de compressibilité de l'IRT pour des configurations statiques et instationnaires. Les configurations statiques sont plutôt représentatives de la phase tardive de l'évolution des RSN et on montre que la compressibilité peut changer fortement le taux de croissance de l'IRT si le nombre d'Atwood est petit. Cet effet disparaît dans le cas d'un fort contraste de densité (nombre d'Atwood proche de 1). Ce cas de fort contraste a été examiné pour une coquille en expansion instationnaire. En complément aux études réalisées par d'autres auteurs, on montre pourquoi seules les solutions incompressibles sont instables. De plus, malgré le caractère instationnaire de l'écoulement de base, on exhibe une relation de dispersion en utilisant une transformation qui permet de passer dans un repère co-mobile. Cette approche conduit à une interprétation plus simple et plus claire des résultats obtenus antérieurement.

On montre que ce modèle de coquille en expansion est applicable à la description des plérions (jeunes restes de supernovae de type II) et on examine le problème de la fragmentation de la coquille dense qui entoure le pulsar central. On applique cette démarche au cas de la nébuleuse du Crabe.

Enfin, à notre avis, certains aspects de ce problème peuvent être étudiés par l'irradiation d'une cible laser et nous proposons une expérience d'astrophysique de laboratoire qui devrait permettre de mettre en évidence la dynamique d'expansion d'une coquille et sa fragmentation. Bien que les échelles temporelles et spatiales soient très différentes, les lois d'échelle rendent possible la comparaison de tels phénomènes physiques.

Mots Clés : Hydrodynamique : instabilité de Rayleigh-Taylor, compressibilité, restes de supernovae, pulsar, astrophysique de laboratoire, lasers de puissance : Ligne d'Intégration Laser (LIL), Laser MégaJoule (LMJ).

Abstract

The Rayleigh-Taylor instability (RTI) plays a key role in the dynamics of supernova remnants (SNR).

In this thesis, the compressibility effects are studied for both static and non stationary configurations. Static configurations are related to the late stage of SNR evolution and it is shown that compressibility alters the growth rate of the instability provided the Atwood number is small. For high density contrasts (Atwood number close to 1), the compressibility effect disappears. This high contrast case has been studied for a shell experiencing a non stationary expansion. In comparison to previous studies, the unstable character of incompressible perturbations is elucidated. In addition, using a specific time dependant transformation (co-moving frame), a dispersion relation is derived in spite of the non stationary background flow. This transformation makes easier the physical interpretation of our results and previous results, as well.

This expanding shell model can be applied to the study of plerions (young type II SNR) and the disruption and fragmentation of the dense shell surrounding the central pulsar is examined. The general analysis is applied to the Crab nebula case.

Finally, we believe several aspects of this problem belong to the so-called "laboratory astrophysics" field and a laser experiment is proposed. The purpose of this experiment is providing evidence of the shell dynamics and its fragmentation. Although the space and time scales are quite different from the SNR to the laser target, scaling laws make possible the comparison between such physical phenomena.

Keywords: Hydrodynamics: Rayleigh-Taylor instability, compressibility, supernovae remnants, pulsar, laboratory astrophysics, high-power lasers: Ligne d'Intégration Laser (LIL), Laser MégaJoule (LMJ).

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Xavier RIBEYRE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Noyaux, Atomes, Agrégats, Plasmas

**Instabilité de Rayleigh-Taylor dans les restes de supernovae :
Application aux plérions**

Soutenue le : 4 Juillet 2006

Après avis de :

M^{me} C. Cherfils-Clérouin	Chercheur, CEA Bruyères le Châtel	Rapporteur
M. T. Foglizzo	Chercheur, CEA Saclay	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

M. C. Stenz	Professeur à l'Université Bordeaux 1	Président
M^{me} C. Cherfils-Clérouin	Chercheur, CEA Bruyères le Châtel	Rapporteur
M. T. Foglizzo	Chercheur, CEA Saclay	Rapporteur
M. P. Drake	Professeur à l'Université du Michigan	Examineur
M. V. T. Tikhonchuk	Professeur à l'Université Bordeaux 1	Directeur de thèse
M. S. Bouquet	Professeur INSTN, CEA Bruyères le Châtel	Co-directeur de thèse

Membre invité :

M. J.-P. Chièze Directeur de Recherche, CEA Saclay

À mon père



Cette gravure sur bois montre la quête de l'astronome qui cherche à voir au-delà de l'horizon terrestre et à découvrir une réalité profonde. [tiré de l'Atmosphère météorologie populaire (Paris 1888), Camille Flammarion.]

REMERCIEMENTS

Je remercie J.C. Gauthier et C. Rullière pour m'avoir permis de mener à bien ce travail de thèse dans de bonnes conditions.

Cela a été un plaisir de travailler sous la direction de V.T. Tikhonchuk qui m'a guidé pour éviter les écueils du calcul analytique en physique et m'a montré la beauté de la simplification de problèmes complexes. Je le remercie aussi pour sa disponibilité qui est très utile lors de ce long chemin.

J'exprime ma vive reconnaissance à S. Bouquet pour son apprentissage de la rigueur en physique-mathématique et de sa patience ainsi que pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues. Je le remercie aussi pour toutes les connaissances en astrophysique qu'il a pu me transmettre ainsi que pour la relecture approfondie du manuscrit.

Je remercie également tous les membres du jury et en particulier C. Cherfils et T. Foglizzo pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je tiens à remercier J.P. Chièze pour toutes les discussions intéressantes que nous avons pu avoir ensemble.

J'exprime également mes vifs remerciements à P. Drake pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour avoir effectué le déplacement des États Unis pour assister à cette thèse.

Je remercie C. Stenz pour avoir accepté d'être le président du jury et pour avoir montré un réel intérêt pour mon travail.

Je tiens à remercier tous les membres du groupe plasmas chauds du CELIA qui m'ont soutenu et aidé dans cette aventure. En particulier, merci à Ludovic, Jérôme et Pierre-Henri pour leur aide "numérique" précieuse. Pour toutes les discussions intéressantes et fructueuses, merci à Jean-Luc, Marina, Philippe et Guy.

Merci à S. Aussel, M. Mondolfi et C. Termens pour leur gentillesse et leur aide administrative. Je tiens à remercier particulièrement l'équipe informatique du laboratoire, Olivier et Didier pour leur aide précieuse et leur disponibilité.

Je remercie, le personnel de l'UFR de physique et de l'école doctorale pour leur aide.

Un salut à tous les thésards que j'ai côtoyé pendant ces trois années, Christophe, Benoit, Afeintou, Mickael, Vincent, Amelle, Samuel, Julien entre autres.

Je remercie toute ma famille, en particulier ma mère, pour m'avoir toujours soutenu pendant cette thèse.

Je tiens à remercier ma femme, Virginie, qui a toujours été présente lors de mes moments de doutes. Merci à Sophie pour son aide précieuse et ses encouragements.

À mes enfants, Julie et Bastien, merci de votre vitalité.

À tous ceux qui m'ont fait aimer la physique.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	5
INTRODUCTION	15
CHAPITRE I. Contexte astrophysique	19
1.1 Historique	19
1.2 Les différents types de supernovae	20
1.2.1 Supernovae de type Ia	21
1.2.2 Supernovae de type II	23
1.3 Introduction aux plérions	29
CHAPITRE II. Astrophysique de laboratoire	41
2.1 Introduction	41
2.2 Hypothèses de modélisation : hydrodynamique idéale	43
2.3 Lois d'échelle	45
2.4 Validité des équations d'Euler	48
2.4.1 Effets collisionnels	48
2.4.2 Effets du champ magnétique	49
2.4.3 Effets du rayonnement	50
2.5 Expériences et motivations	51
CHAPITRE III. Instabilités hydrodynamiques	53
3.1 Développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor	53
3.2 Effets de compressibilité sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor	58

3.3	L'instabilité de Rayleigh-Taylor en phase instationnaire	61
-----	--	----

CHAPITRE IV. Instabilité de Rayleigh-Taylor stationnaire : Effets de compressibilité **63**

4.1	Introduction	63
4.2	Géométrie du problème	66
4.3	Compressibilité et effet de masse finie	67
4.4	Linéarisation des équations hydrodynamiques	69
4.4.1	Fluide compressible barotrope isotherme	70
4.4.2	Fluide incompressible	73
4.4.3	Fluide incompressible stratifié	74
4.4.4	Fluide incompressible de masse finie	78
4.5	Analyse des relations de dispersion	79
4.5.1	Expression asymptotique du taux de croissance	82
4.6	Champ de vitesse généré par l'IRT	84
4.7	Discussion et conclusion	90

CHAPITRE V. Instabilité de Rayleigh-Taylor instationnaire : Expansion d'une coquille **93**

5.1	Introduction	93
5.2	Transformation de coordonnées	97
5.3	Solution de l'écoulement non perturbé	103
5.3.1	Sphère pleine	103
5.3.2	Coquille	109
5.4	Étude de stabilité de la coquille	112
5.5	Résolution numérique de l'équation de dispersion	119

5.6	Comportement de l'écoulement perturbé	122
5.7	Analyse qualitative de l'IRT	126
5.8	Évolution de la surface interne et externe de la coquille	128
5.9	Discussion et conclusion	140
CHAPITRE VI. Application du modèle instationnaire aux RSN		147
6.1	Contexte astrophysique	147
6.2	Modèle hydrodynamique d'un plériorion	156
6.3	Évolution temporelle de la luminosité du pulsar	161
6.4	Simulation numérique de l'instabilité de la coquille	165
6.5	Validité du modèle	174
6.6	Conclusion	177
CHAPITRE VII. Proposition expérimentale		183
7.1	But de l'expérience	183
7.2	Schémas de l'expérience	185
7.3	Dimensionnement de la coquille	187
7.3.1	Perturbation de la face interne de la coquille et IRT	191
7.3.2	Processus d'ablation et mise en mouvement de la coquille	192
7.3.3	Loi d'échelle	195
7.4	Diagnostics	195
7.5	Conclusion	196
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES		199
ANNEXES		207
A Liste des annexes		207

A.1	La masse de Chandrasekhar	207
A.1.1	Cas non-relativiste	207
A.1.2	Cas relativiste	208
A.2	Évolution des restes de supernovae : phase de Sedov	210
A.3	Évolution des restes de supernovae : phase isotherme	212
A.4	Commentaire par D. Livescu à propos de l'article : “Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in Supernova remnants” par Ribeyre, X., Tikhonchuk, V. T. et Bouquet S. et la réponse au commentaire de D. Livescu.	213
A.5	Transformation de coordonnées	219
A.6	Simplification de la relation de dispersion dans le cas d'un fluide stratifié	221
A.7	Annexe du chapitre V	222
	Liste des travaux et publications	227
	BIBLIOGRAPHIE	229

LISTE DES FIGURES

- 1.1 Résumé de la présentation faite par W. Baade et F. Zwicky à l'université de Standford en Décembre 1933. Elle introduit pour la première fois les supernovae, les rayons cosmiques et les étoiles à neutrons. 20
- 1.2 Image dans le domaine X obtenue avec le télescope Chandra en 2003 des restes de la supernova de type Ia : Tycho (SN1572). On distingue en bleu, la zone d'interaction avec le milieu interstellaire (bleu 4,1-6,1 keV). L'IRT est probablement responsable de la structure cotonneuse des éjectas en vert et rouge (rouge 0,95-1,26 keV, vert 1,63-2,26 keV). 22
- 1.3 (A) Image réalisée après l'explosion de la SN1987A par le télescope spatial Hubble. (B) Structure interne multi-couches (structure en pelure d'oignon) de l'étoile progéniteur avant l'explosion. 24
- 1.4 (A) Courbe de lumière de la SN1987A (1). La courbe théorique (2) prend en compte le mélange du ^{56}Co et la courbe (3) prend en compte un mélange plus faible. On observe un délai de 3 mois entre ces deux courbes. Le mélange permet de retrouver les observations [44]. (B) Simulation du mélange des couches internes avec les couches externes dû au développement de l'IRT lors de l'explosion. 26
- 1.5 Image dans le domaine optique de la nébuleuse du Crabe, restes de la supernova de type II : SN1054, obtenue par le VLT. Les filaments sont les restes ionisés de la supernova éjectés dans le milieu interstellaire et accélérés [5, 24, 61] par le vent du pulsar situé en son centre. On pense que l'instabilité de Rayleigh-Taylor est responsable de la formation de la structure filamentaire de la nébuleuse. 28
- 1.6 Observation à haute résolution du cœur de la nébuleuse du Crabe effectuée par le télescope spatial Hubble [5]. On distingue nettement les filaments dus à l'IRT, voir par exemple la zone notée F. Le pulsar apparaît approximativement au milieu de la partie inférieure du cliché. . . . 30

- 1.7 Images obtenues par spectroscopie Fabry-Pérot de la nébuleuse du Crabe. Le sens de la lecture se fait par numéro croissant de (1) à (12). Elle permet d'imager différentes classes de vitesse d'expansion, en bas à gauche pour une vitesse de -1435 km/s (vers l'observateur) jusqu'en haut à droite pour -5 km/s (vitesses données par rapport à un observateur au repos). Pour cette dernière image ont distingué nettement la structure filamentaire de la nébuleuse [70]. 32
- 1.8 Représentation schématique d'un pléïon. Le rayon du pulsar vaut typiquement 10 km, la bulle de vent relativiste a un rayon typique de 0,1 pc et le rayon des éjectas vaut typiquement 1 pc [71]. 33
- 1.9 Observation de la région centrale de la nébuleuse du Crabe dans le domaine des X (15 keV). On distingue le pulsar au centre du tore ainsi que le choc de terminaison entre la zone de vent ultra-relativiste et la bulle de rayonnement synchrotron [75]. 34
- 1.10 Représentation schématique d'une supernova type II. La figure montre le pulsar dont le vent souffle les éjectas de la SN. La discontinuité de contact entre la bulle formée par le vent du pulsar et les éjectas est instable au sens de Rayleigh-Taylor. Les doigts de Rayleigh-Taylor sont connectés entre eux par une fine coquille. 37
- 1.11 Image réalisée en 2004 des restes de la supernova de type II : Cas A. Ce cliché est une composition de trois domaines : en rouge le domaine infrarouge (Spitzer), optique en jaune (Hubble) et X en bleu et vert (Chandra). 39
- 2.1 Expérience dédiée à l'étude de l'IRT en géométrie divergente effectuée sur l'installation laser Omega [110]. L'abréviation P-V signifie "Peak-to-Valley" et correspond à l'amplitude de la perturbation. 52
- 3.1 Développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor lors d'un orage. On distingue les structures régulières formées par l'amplification d'une perturbation sur la face inférieure (c'est-à-dire vers le sol) des nuages. . . . 54

- 3.2 Représentation de l'interface perturbée de longueur d'onde λ dans un champ de pesanteur \vec{g} . Les milieux séparés par l'interface ont des densités notées ρ^+ et ρ^- , dans la partie supérieur et dans la partie inférieur, respectivement. 55
- 3.3 Développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor lors d'une expérience réalisée par J. Jacobs *et al.* voir le site <http://fluidlab.web.arizona.edu/rayleigh.html>. On distingue toutes les phases de développement de l'instabilité. La phase linéaire (a)-(c), la phase non-linéaire (d)-(e) et la phase turbulente (f). 57
- 4.1 Géométrie du problème en deux dimensions : une petite perturbation $\eta_1(x, t)$ est appliquée à l'interface $z = 0$ à $t = 0$ 66
- 4.2 Profils de densités dans les quatre cas : A - deux fluides incompressibles uniformes (masse infinie pour les deux milieux), B - deux fluides compressibles, C - deux fluides incompressibles stratifiés (masse finie, avec les mêmes caractéristiques que le cas B), D - deux fluides incompressibles dont la masse du milieu supérieur est finie (même masse que dans les cas B et C) et infinie pour le milieu inférieur. Ces profils sont calculés analytiquement au paragraphe 4.4.1. 68
- 4.3 Dépendance du taux de croissance normalisé, $\omega/\hat{\omega}$, en fonction du nombre d'onde normalisé, k/\hat{k} , pour les quatre cas et pour deux nombres d'Atwood différents : $A_t = 0,1$ (a) et $0,9$ (b). La courbe en trait plein correspond au cas compressible – en pointillés, le cas incompressible – en tirets, le cas incompressible stratifié – en tiret-double-point, le cas incompressible masse finie. La courbe en tiret-point donne le rapport des taux croissance du cas compressible sur le cas incompressible stratifié. . . 81
- 4.4 Champ de vitesse dans les quatre types d'écoulement : (A) - le cas incompressible uniforme, (B) - le cas compressible, (C) - le cas incompressible stratifié, (D) - le cas incompressible masse finie. Les paramètres utilisés sont les suivants : $\hat{\omega}t = 1$, $k = \hat{k}$, $\hat{k}a = 0,05$ et $A_t = 1/3$ et $g\hat{k}/\hat{\omega}^2 = 1$. . . 85

- 4.5 (A) Divergence de l'écoulement, $\text{div } \vec{v}$, dans le cas compressible et (B) composante y du rotationnel (perpendiculaire à l'axe z et x), $\text{rot } \vec{v}$, dans le cas incompressible stratifié. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 4.4 (le niveau de gris est représentatif du signe du rotationnel sur l'axe y , donc du sens de rotation des vortex). 86
- 4.6 Vitesse de cisaillement à l'interface, dans le cas compressible (trait plein) et dans le cas incompressible stratifié (tiret). 88
- 5.1 Représentation de la fonction d'échelle $C(t)$ [voir Éq. (5.24)] dans trois cas : sans vitesse initiale, $\beta = 0$ (1), avec une vitesse initiale positive, $\beta = 0,5$ (2) et avec une vitesse initiale négative, $\beta = -0,5$ (3). 106
- 5.2 Relation entre les temps t et \hat{t} [voir Éq. (5.36)] entre le repère co-mouvant et le repère du laboratoire, pour $\beta = 0$ (1), $0,5$ (2), et $-0,5$ (3). 108
- 5.3 Profils de densité (a), de pression (b) de vitesse (c) en fonction du rayon, dans le repère du laboratoire pour $t = 0$ (trait plein), $t = 0,5\tau$ (tirets), et $t = \tau$ (pointillés). Notons qu'à $t = 0$, le profil de vitesse est confondu avec l'axe horizontal. La figure (d) correspond au tracé de la pression du pulsar $p_{r_0}(t)$ sur la face interne de la coquille en fonction du temps. Les paramètres initiaux sont : $\beta = 0$ (vitesse initiale nulle) et $\hat{r}_0 = 0,2 \hat{r}_1$. La vitesse est normalisée par \hat{r}_1/τ , la densité par la densité centrale $\hat{\rho}_0(0)$ et la pression par $K\hat{\rho}_0(0)^{5/3}$ 110
- 5.4 Représentation de la coquille en expansion sous l'effet de la pression du vent du pulsar. À l'instant t la surface interne située est en $r_0(t) = \hat{r}_0 C(t)$, et la surface externe en $r_1(t) = \hat{r}_1 C(t)$ où \hat{r}_0 et \hat{r}_1 correspondent respectivement aux rayons initiaux pour l'intérieur et l'extérieur de la coquille. La surface interne de la coquille est accélérée par le vent du pulsar et est instable au sens de Rayleigh-Taylor. 113

- 5.5 Tracé des deux fonctions $F_L(\Delta)$ et $F_R(\Delta, l, R_0)$ représentant les membres de gauche et de droite de l'équation (5.66). L'intersection de ces deux courbes donne la valeur de Δ , correspondant à la solution de l'équation de dispersion (5.66). Ces courbes dépendent du numéro de mode l et F_R dépend aussi de l'épaisseur de la coquille R_0 (les courbes sont tracées pour $R_0 = 0,1 ; 0,5$ et $0,8$). Cependant, on constate que le point d'intersection reste inchangé. Dans cet exemple, on a $l = 4$ et on trouve que le point d'intersection s'effectue toujours pour $\Delta = 3$. Comme nous avons la relation $\Delta^2 = l(l+1) + 4 - 3\omega^2$, nous obtenons $3\omega^2 = 15$, soit $\omega^2 = 5$. On peut remarquer que cette valeur correspond à $l+1$. De même pour, $\Delta = 6$ (second point d'intersection), nous obtenons $3\omega^2 = -12$, soit $\omega^2 = -4$, cette valeur correspond alors à $-l$ 121
- 5.6 Tracé du taux de croissance adimensionné ω en fonction de l . Tous les modes sont instables et $\omega = \sqrt{l+1}$ [d'après l'Éq. (5.75)]. 125
- 5.7 Comparaison entre l'évolution temporelle du déplacement de la face interne (a) et externe (b) de la coquille pour le mode le plus instable : $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_{2,3,4} = 0$, pour le numéro de mode $l = 4$ avec une coquille d'épaisseur $R_0 = 0,5$ et une vitesse initiale nulle ($\beta = 0$). Le déplacement est divisé par la fonction d'échelle $C(t)$ pour montrer la croissance de la perturbation due seulement à l'IRT. Ces figures montrent un très bon accord entre la solution analytique (trait plein) et les simulations effectuées avec le code Pansy (tiret). Les différences entre les deux courbes (PANSY-Modèle) sont inférieures au pourcent. 131

- 5.8 Perturbation initiale de la coquille pour le mode “sausage” (a) à $t = 0$ et (b) pour $t = \tau$. Dans (c) on trace l'évolution temporelle de la perturbation face interne et externe et (d) donne le déplacement initial à l'intérieur de la coquille. Toutes les figures sont tracées pour le mode $l = 4$, une épaisseur de coquille correspondant à $R_0 = 0,5$ et une vitesse initiale nulle $\beta = 0$. Dans la figure (a) nous avons volontairement exagéré la perturbation initiale avec $a_0 = 0,1$ (ceci pour bien visualiser la forme initiale de la coquille). 134
- 5.9 Perturbation initiale de la coquille pour le mode “spaghetti” (a) à $t = 0$ et (b) pour $t = \tau$. Dans (c) on trace l'évolution temporelle de la perturbation face interne et externe et (d) donne le déplacement initial à l'intérieur de la coquille. Nous utilisons la même représentation que pour la figure 5.8. 135
- 5.10 Perturbation initiale de la coquille pour le mode “interne” (a) à $t = 0$ et (b) pour $t = \tau$. Dans (c) on trace l'évolution temporelle de la perturbation face interne et externe et (d) donne le déplacement initial à l'intérieur de la coquille. Nous utilisons la même représentation que pour la figure 5.8. 136
- 5.11 Perturbation initiale de la coquille pour le mode “vitesse” (a) à $t = 0$ et (b) pour $t = \tau$. Dans (c) on trace l'évolution temporelle de la perturbation face interne et externe et (d) donne le déplacement initial à l'intérieur de la coquille (il est nulle initialement car $D_0 = D_1 = 0$). Nous utilisons la même représentation que pour la figure 5.8. 137
- 5.12 Représentation de la perturbation de la face interne à $t = 0$ [région près du centre $X = Y = 0$, cas (a)] et à $t = 20\tau$ [cas (b)]. L'épaisseur de la coquille est telle que $R_0 = 0,65$ pour le mode $l = 12$ et le nombre azimutal $m = 0$. La perturbation relative initiale est de 0,24 %. 138
- 5.13 Représentation tridimensionnelle de la perturbation angulaire : $Y_{lm}(\theta, \phi)$, pour $l = 20$ et $m = 10$ 139

- 6.1 Figure extraite de la Réf. [79]. Structure d'un RSN avec la bulle centrale due au vent du pulsar. La coquille qui entoure cette bulle a pour rayon extérieur R_p . Cette quantité a été notée r_1 dans le chapitre V et la face interne de la coquille a pour rayon r_0 (non indiqué sur cette figure). . . . 150
- 6.2 Tracé de la grandeur $C(t) - 1$ en fonction de t/τ en échelles logarithmiques. En allant de bas en haut, les trois courbes correspondent respectivement à $\beta = 0$, $\beta = 0,2$ et $\beta = 0,5$. La quatrième courbe correspond à la droite donnée par $R_{PWN}(t) \sim t^{6/5}$ (6.10). 155
- 6.3 Solution analytique pour l'évolution d'un plérion. Cette figure donne les profils spatiaux de densité (a), de pression (b), de vitesse (c) pour $t = 0, \tau_p, 2\tau_p$. La loi de pression sur la face interne des éjectas est donnée sur (d). Dans cette figure la densité est normalisée par la densité ρ_0 sur la face interne à $t = 0$ 159
- 6.4 Représentation (a) de l'évolution temporelle de la face interne (trait plein) et externe (traits pointillés). Le rayon $r(t)$ est en parsec (pc) et le temps t en années. On note une évolution significative du rayon après $t = \tau_p = 210$ ans. Après une phase d'accélération, suit une phase d'expansion libre. Sur (b) on trace l'évolution temporelle de la vitesse [$V(t)$ est en km/s et t en années] de la face interne (trait plein) et la vitesse de la face externe (traits pointillés). L'augmentation de l'épaisseur de la coquille ne se voit pas en échelle Log-Log, par contre en échelle linéaire on se rend compte que l'épaisseur augmente d'un facteur ~ 15 pour $t = 1000$ 166
- 6.5 Comparaison de la luminosité $L(t)$ (L est en erg/s et t en années) du pulsar donnée par le modèle standard c'est à dire l'équation (6.38), sachant que $L_0 = 8,5 \times 10^{39} \text{ erg s}^{-1}$, $\tau = \tau_p = 210$ ans et $n = 2$ ($p = 3$) (en pointillés) avec la luminosité $L_p(t)$ donnée par notre modèle, l'équation (6.26) avec $L_{p0} = 5 \times 10^{39} \text{ erg s}^{-1}$ et $\tau_p = 210$ ans (trait plein). On observe un bon accord entre les deux modèles. 167

- 6.6 (a) Tracé en fonction du temps du calcul, par le code CHIC, de l'amplification de la perturbation pour différents modes l compris entre 40-80 (il s'agit du faisceau de cinq courbes qui sont rapprochées), avec $a_0 = 10^{-3}r_1$. La courbe supérieure en trait plein (notée Linear Theory : $l = 60$) est donnée par le modèle analytique linéaire. La figure (b) est un agrandissement local du faisceau des 5 courbes où l'on met en évidence que le mode $l = 80$ (trait plein) commence à saturer avant le mode 70 (---). En effet, pour $t > 1,4\tau_p$ le mode $l = 70$ passe au dessus du mode $l = 80$ 169
- 6.7 Représentation des simulations 2D pour le mode $l = 70$, fragilisant le plus la coquille, avec $a_0/r_1 = 5 \times 10^{-3}$, $\beta = 0,55$ et $R_0 = 0,9$ (voir sections 6.3 et 6.2) à trois instants différents : $t = 0$, $t = \tau_p$, $t = 2\tau_p$. On observe que la coquille des éjectas devient très fine au voisinage de $t = 2\tau_p$. L'échelle en densité est logarithmique. 171
- 6.8 Détail de la structure typique bulle-aiguille le long de l'axe x ($\theta = 0$) à $t = 2\tau_p$. La densité est tracée en échelle linéaire. On trace deux profils de densité : en haut le profil à l'intérieur de l'aiguille et en bas à dans la paroi de la bulle. L'origine des abscisses dans ces deux tracés est située sur la surface interne de la coquille. 172
- 7.1 Schéma de principe d'une expérience laser en attaque directe. La pression P, peut être fournie, soit par un laser UV ou par une source X. Cette pression accélère et ablate une coquille formée d'un pousseur (faible densité) et d'une coquille extérieure (forte densité) perturbée sur sa face intérieure. 186
- 7.2 Schéma de principe d'une expérience en attaque indirecte laser permettant d'accélérer une coquille et d'observer sa fragmentation. Le laser entre dans la cavité et produit des X, alors la pression d'ablation de ce rayonnement accélère la coquille. Celle-ci est constituée d'un matériau dit pousseur et d'une coquille perturbée sur laquelle va se développer l'IRT et mener à sa déformation. La rupture de la coquille peut être détectée à l'aide d'un diagnostic X. 187

7.3	Schéma de principe d'une expérience laser en attaque directe. Le faisceau principal met en vitesse une coquille, tandis qu'un faisceau secondaire retardé est utilisé pour effectuer une radiographie de la coquille en mouvement (backlighter).	188
-----	--	-----

INTRODUCTION

Lors de leur évolution, sous l'effet de la gravité, les étoiles dont la masse M satisfait $M < 8 M_{\odot}$ (où $M_{\odot} \simeq 10^{33}$ g est la masse du soleil) effectuent à des températures très élevées, la fusion de deux noyaux d'hydrogène pour former un noyau hélium. La fusion dégage assez d'énergie pour empêcher l'effondrement de l'étoile sur elle-même [1]. Alors, un équilibre s'établit entre la force gravitationnelle et la force de pression exercée par la matière dont le chauffage très élevé est produit par l'énergie de fusion. C'est le début d'une longue période pendant laquelle cet équilibre se maintient. C'est le cas, par exemple, pour le soleil. Pour des étoiles plus massives, dont la masse vérifie $M > 8 M_{\odot}$, la température au cœur de l'étoile est suffisante pour que la fusion de l'hydrogène et de l'hélium s'opère pour produire du carbone (mais aussi du Li, Be, B, N). À la fin de chaque cycle de fusion, la production d'énergie s'arrête et le cœur se contracte par gravité. La température augmente et donc, à chaque contraction du cœur de l'étoile, par fusions successives, les éléments tels que l'oxygène, le néon, le magnésium et le silicium sont produits. Finalement, le fer, le dernier produit de fusion est créé. L'étoile se structure en couches successives qui vont de l'élément le plus lourd au centre, le fer, au plus léger, l'hydrogène, sur la couche la plus externe. Une fois cet état atteint, la fusion du silicium contribue à augmenter la masse du noyau de fer, et sa température atteint environ 6×10^9 K pour une densité de l'ordre de 3×10^9 g cm⁻³. Les réactions de fusion ne se produisent plus au delà du fer, car cet élément est le plus stable (son énergie de liaison est la plus grande). À partir d'une certaine masse qui est appelée la masse de Chandrasekhar et qui vaut environ $1,4 M_{\odot}$, le noyau de fer s'effondre très rapidement sur lui même. La gravité l'emporte sur les forces de pression car les réactions de fusion n'ont plus lieu au cœur de l'objet. Lors de l'effondrement, la température augmente violemment et des photons gamma de très haute énergie sont produits et photodissocient les noyaux de fer. Les protons se neutronisent en absorbant un électron et un flux très important de neutrinos (soit une énergie

d'environ 10^{53} ergs) est produit. Après effondrement, le cœur de fer de l'étoile de masse M_F devient, soit une étoile à neutrons pour $M_F \simeq 1,4-3 M_\odot$, soit un trou noir lorsque $M_F \geq 3 M_\odot$. Alors que pendant cet effondrement, toutes les couches externes de l'étoile s'effondrent, puis "rebondissent" sur le cœur très dense. Les couches successives de l'étoile subissent alors l'onde de choc provenant du centre à cause du rebond et sont expulsées dans le milieu circumstellaire et interstellaire. Naît, alors ce que l'on appelle une supernova (SN) de type II (voir le chapitre I), dont le flash lumineux est équivalent à l'énergie rayonnée par le soleil pendant toute sa vie (~ 10 milliards d'années). On appelle alors, reste de supernova (RSN), les couches de matière provenant de la SN et qui se dispersent ultérieurement dans le milieu interstellaire.

Les observations [2, 3, 4] ont montré que lors de son explosion, l'étoile perd sa symétrie sphérique initiale. Ses différentes couches se mélangent et la matière éjectée dans le milieu interstellaire se filamente [5]. Une description hydrodynamique du phénomène est possible et l'étude de la stabilité de ce type d'écoulement est indispensable pour comprendre les observations. Il existe plusieurs types d'instabilités hydrodynamiques à l'origine de la perte de symétrie, mais l'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) est primordiale dans l'évolution des SN et des RSN. Ce point a été montré par exemple par Fryxell *et al.* [6], Kifonidis *et al.* [7] dans le cas des SN et par Chevalier *et al.* [8] et Blondin *et al.* [9] pour les RSN. Cette instabilité se développe lorsqu'un milieu de faible densité accélère (ou décélère) un milieu de forte densité [10]. C'est elle qui a permis d'interpréter certaines observations [6] (la courbe de lumière par exemple), comme celles de la supernova détectée en 1987 (SN1987A). La compréhension de l'évolution dynamique ainsi que le développement des instabilités hydrodynamiques dans les SN et les RSN reste donc une question importante en astrophysique.

Cette thèse est consacrée à l'étude de cette instabilité et de son rôle dans l'évolution des RSN.

On étudiera, en particulier deux thèmes principaux :

- Les effets de compressibilité sur l'IRT dans le cas d'un milieu isotherme

stationnaire et en géométrie plane. De nombreux travaux analytiques ont été menés dans ce domaine [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Notre objectif est de clarifier les controverses qui subsistent encore à ce jour dans ce domaine, en choisissant des configurations dans lesquelles seuls les effets de compressibilité ont une influence sur le développement de l'IRT. Dans ce cadre une application à l'évolution des RSN est effectuée.

– Le second thème porte sur l'étude de l'IRT instationnaire pour une coquille sphérique. Dans ce domaine, des travaux analytiques déterminants ont été effectués à l'heure actuelle, que ce soit pour des applications astrophysiques [9, 17], ou dans le domaine de la fusion par confinement inertiel (FCI) [18, 19]. On retrouve d'ailleurs, les mêmes auteurs dans chacun des domaines (Bernstein et Book, références [17, 19], par exemple). Notre objectif est de réaliser une étude analytique de l'IRT (les approches analytiques nous paraissent, en effet, essentielles, et complémentaires de celles menées numériquement) à l'aide d'une méthode de changement de coordonnées [20] originale. Ceci nous permet de trouver des solutions analytiques et surtout de donner une interprétation physique plus claire de l'IRT instationnaire en y associant une relation de dispersion. De plus, l'expression analytique du taux de croissance est comparée avec celle provenant de simulations numériques effectuées avec un code de perturbation. Enfin, le modèle analytique est appliqué à un objet astrophysique dans lequel l'IRT joue un rôle important dans son évolution. Nous avons choisi la famille des plériens (nébuleuse contenant un pulsar central – voir plus loin), dont la nébuleuse du Crabe est un prototype. Dans cette étude, nous nous sommes appuyés sur des travaux récents concernant des simulations numériques [21, 22], mais aussi des données observationnelles [5, 23, 24, 25]. Ensuite, la solution analytique que nous avons proposée, permet d'étudier la stabilité d'un tel objet et en particulier d'estimer le mode de perturbation pouvant mener à la fragmentation de sa coquille sous l'effet de l'IRT. Des simulations numériques bidimensionnelles effectuées à l'aide d'un code hydrodynamique ont mis en évidence le passage dans le domaine non-linéaire de l'IRT et de mieux comprendre le percement de la coquille.

Toutes les considérations analytiques de cette thèse sont basées sur les équations hydrodynamiques d'Euler pour un écoulement isentropique. Selon les lois d'échelle [26], ce système d'équations est valide à partir du moment où l'on néglige les effets dissipatifs, tels que la viscosité, le transfert de chaleur, le rayonnement et les aspects magnétiques. Dans ce cadre, il est possible d'étudier en laboratoire sur une installation laser tels que la LIL (Ligne d'Intégration Laser) ou le Laser Mégajoule (LMJ), une partie de l'évolution l'hydrodynamique d'une coquille mise en vol par la pression intérieure. En particulier, nous pouvons étudier les conditions de fragmentation de cette coquille en fonction de ses paramètres et de la pression. Cette approche peut mettre en lumière une partie de l'hydrodynamique des RSN tels que les plérions.

Le plan de ce document est le suivant :

Dans le chapitre I, on rappelle les différents types de SN et on y détaille l'évolution des RSN en insistant sur les plérions. Le chapitre II, permet de préciser le lien qui existe entre les RSN et les expériences laser. L'IRT est introduite dans le chapitre III, et on évoque les effets de compressibilité et de non-stationnarité. Le chapitre IV est consacré à une étude analytique des effets de compressibilité sur l'IRT dans la phase de décélération des RSN. Cette étude concerne principalement les RSN dits "*shell-type*". Cette phase peut être considérée comme stationnaire et le rayon des éjectas étant très grand, on peut mener l'étude en géométrie plane.

Dans les chapitres V et VI, une étude analytique de l'IRT est effectuée dans la phase d'accélération des éjectas par le vent du pulsar. Cette étude concerne les RSN de type plérions (par opposition à "*shell-type*"). Lors de cette étape, on doit prendre en compte la géométrie sphérique du système et la non-stationnarité de l'écoulement.

Enfin, dans le chapitre VII, on présente une expérience laser qui devrait permettre de simuler en laboratoire l'évolution hydrodynamique d'une coquille en vol et sa fragmentation.

CHAPITRE I

Contexte astrophysique

1.1 Historique

C'est en 1933 que Fritz Zwicky et Walter Baade prévoient dans un article devenu célèbre (voir Fig. 1.1), que lors de l'explosion de certaines étoiles, il reste un résidu compact constitué de neutrons et que sont produits d'intenses rayons cosmiques. C'est dans cet article que le mot supernova apparaît pour la première fois. Le concept d'étoile à neutrons ne sera accepté théoriquement qu'en 1939 et vérifié par l'observation en 1967. L'idée de supernova devient une réalité.

De nombreux scientifiques de renom dans les années trente, ont découvert les mécanismes physiques qui aboutissent à l'explosion de certaines étoiles. Citons, Chandrasekhar, qui détermina la masse maximale, M_{ch} (masse de Chandrasekhar), que peut atteindre un objet compact (naine blanche) avant son effondrement gravitationnel, soit $M_{ch} = 1,4 M_{\odot}$ où $M_{\odot} = 2 \times 10^{33}$ g est la masse du soleil [27] (voir annexe A.1). Par la suite, Landau [28], Oppenheimer et Volkov en 1938 [29] ont déterminé la masse maximale M_n que pouvait atteindre une étoile à neutrons soit $M_n \simeq 0,7 M_{\odot}$ ¹. Un an plus tard, Oppenheimer, à nouveau, et Snyder prévoient l'effondrement gravitationnel d'une étoile à neutrons en un trou noir [30, 31]. Cet objet avait été étudié par Schwarzschild [32] en 1916 sur les bases de la relativité générale d'Einstein [33]. En effet, la relativité prévoit que le rayon R_s (rayon de Schwarzschild) d'un trou noir est donné directement par sa masse, selon $R_s = 2GM/c^2$ (où G est la constante de la gravitation et c la vitesse de la lumière). Donc, pour un trou noir d'une masse solaire $M = M_{\odot}$, on obtient $R_s \simeq 3$ km.

¹Des calculs plus récents donnent $M_n \simeq 1,65 M_{\odot}$, valeur due principalement à des équations d'états plus réalistes, voir [1] p. 180.

Dans le même temps, de nombreux travaux effectués en physique nucléaire ont permis de mieux comprendre la formation, l'évolution et la fin de vie des étoiles. C'est la nucléosynthèse [1]. La découverte des pulsars (étoile à neutrons possédant un fort champ magnétique et en rotation rapide) en 1967 [34], notamment celui situé dans la nébuleuse du Crabe (reste de la supernova observée par les chinois en 1054), vint confirmer de manière spectaculaire, quarante ans plus tard, l'intuition de Zwicky et Baade [1, 35].

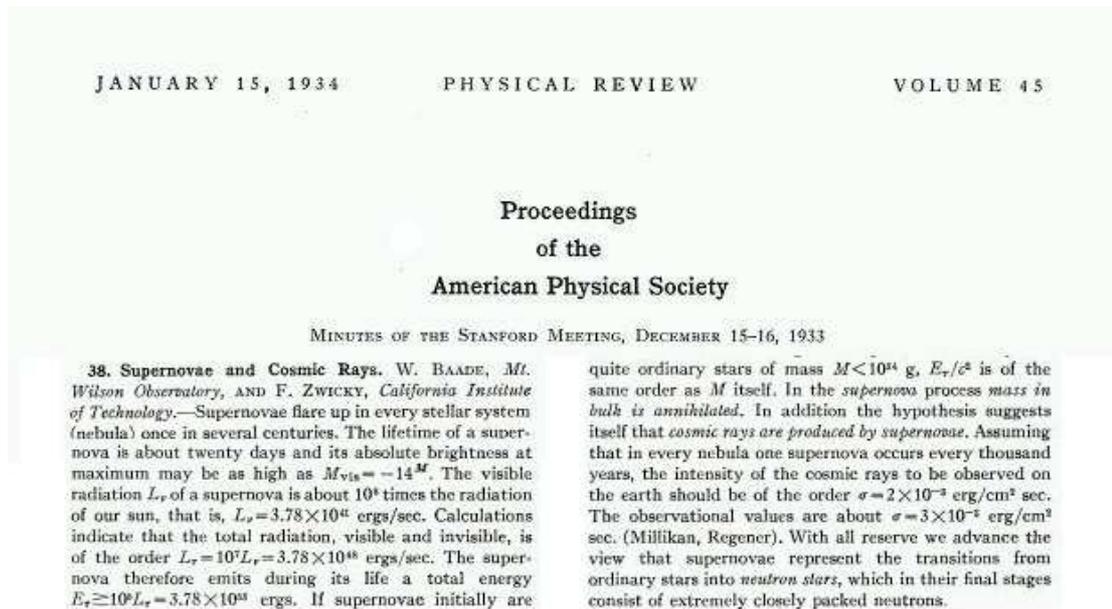


Figure 1.1: Résumé de la présentation faite par W. Baade et F. Zwicky à l'université de Standford en Décembre 1933. Elle introduit pour la première fois les supernovae, les rayons cosmiques et les étoiles à neutrons.

1.2 Les différents types de supernovae

Dans cette partie, nous allons décrire deux grand types de supernovae : les supernovae de type Ia et celles de type II. Cependant, la configuration dans laquelle nous étudions l'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) dans ce travail se rapporte

principalement aux SN du deuxième type. Pour ces deux types de SN, les mécanismes physiques de l'explosion sont différents [1, 36]. Pour la SN de type Ia, c'est la combustion thermonucléaire qui est à l'origine de l'explosion et pour la SN de type II, c'est la gravitation. Le classement des supernovae est plus riche, cependant, pour ne pas alourdir la présentation, nous ne décrivons que ces deux classes principales [1, 37, 38].

1.2.1 Supernovae de type Ia

Pour décrire cet objet, il est nécessaire de commencer par expliquer l'évolution d'un système binaire, c'est à dire, composé de deux étoiles. L'étoile la plus massive, dont la masse est comprise entre 2 et 8 M_{\odot} , termine son évolution en naine blanche d'environ 0,5 M_{\odot} pour une densité de 10^6 g/cm³ et un rayon de l'ordre de celui de la terre. La masse des naines blanches est inférieure à la masse de Chandrasekhar évoquée plus haut. Cette naine blanche est alors constituée essentiellement de carbone et d'oxygène avec des électrons dégénérés, et va accréter par gravitation la matière de l'autre étoile du système. Sa masse va augmenter et finir par atteindre la masse limite de Chandrasekhar. Entre temps, les électrons restes dégénérés et passent d'un régime non-relativiste à un régime ultra-relativiste. La pression du gaz dégénéré des électrons ultra-relativistes ne peut plus alors supporter le poids de l'étoile. En effet, la constante polytropique γ du gaz d'électrons, passe de 5/3 à 4/3 et la pression des électrons ne contrebalance plus la gravitation. L'étoile s'effondre brusquement et sa température centrale monte à plusieurs 10^8 K et la densité atteint 10^9 g/cm³ (annexe A.1). La fusion des noyaux de carbone s'amorce et l'énergie dégagée par la combustion chauffe le milieu. La température monte de plus en plus vite, les réactions s'emballent : alors la combustion thermonucléaire produit des noyaux lourds proches du fer tels que le nickel et le cobalt. Au même moment, les électrons passent de l'état dégénéré à l'état classique avec une pression (donnée par une loi "classique", par exemple, un gaz parfait) bien supérieure à la valeur qu'elle avait dans le régime quantique. L'explosion violente est inévitable et l'énergie dégagée est de $\sim 10^{51}$ ergs (annexe A.1). La naine blanche est complète-

ment désintégrée. La luminosité maximale lors de l'explosion est de $\sim 10^{43}$ erg/s. Durant les mois qui suivent son explosion, elle rayonne au total $\sim 10^{49}$ ergs. La quantité de masse brûlée est proche de la masse de Chandrasekhar, et pour cette raison, la SN de type Ia est considérée comme une "chandelle standard", permettant d'évaluer la distance des galaxies lointaines [1].

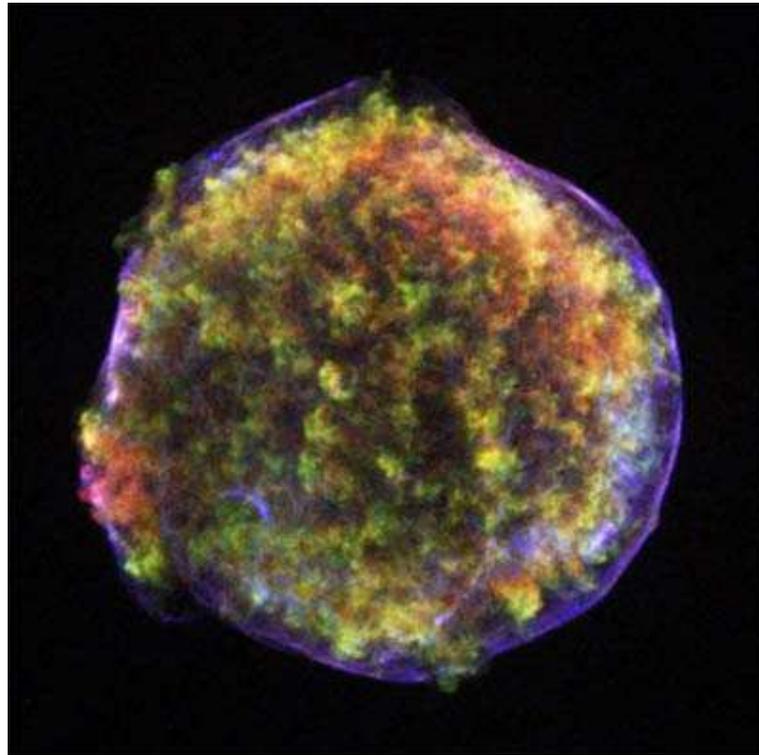


Figure 1.2: Image dans le domaine X obtenue avec le télescope Chandra en 2003 des restes de la supernova de type Ia : Tycho (SN1572). On distingue en bleu, la zone d'interaction avec le milieu interstellaire (bleu 4,1-6,1 keV). L'IRT est probablement responsable de la structure cotonneuse des éjectas en vert et rouge (rouge 0,95-1,26 keV, vert 1,63-2,26 keV).

Les restes de supernovae sont intensivement étudiés pour comprendre les mécanismes physiques qui ont engendré l'explosion de la supernova. Un exemple typique est le reste de la supernova Tycho âgé de 430 ans. Sur la figure 1.2, on distingue dans le domaine des X, l'expansion de la coquille des éjectas dans le milieu interstellaire. La perte de sphéricité des éjectas est certainement due à l'instabilité de Rayleigh-Taylor, qui donne un aspect cotonneux aux éjectas, comme le suggère

plusieurs auteurs [39, 40, 41].

1.2.2 Supernovae de type II

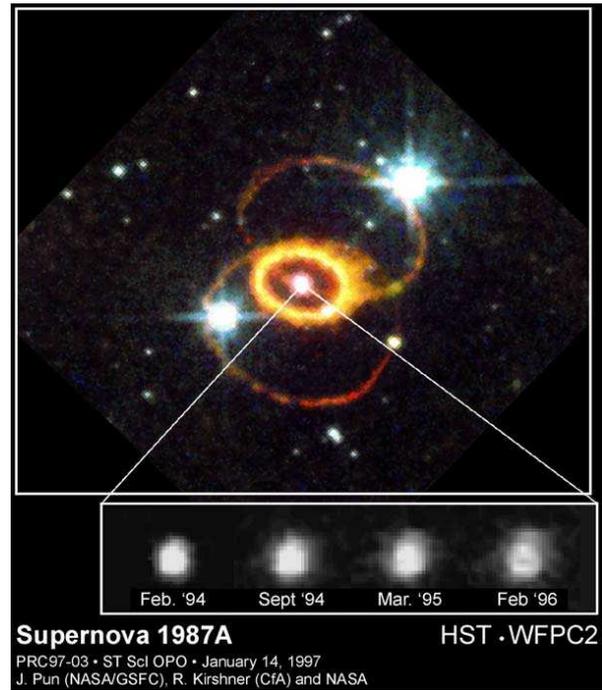
Lorsque qu'une étoile a épuisé une grande partie de son combustible, elle se refroidit et se contracte sous l'effet de la gravité. Une étoile suffisamment massive, $M \gtrsim 8-10 M_{\odot}$, explose en fin de vie et devient une supernova (SN) dite de type II [42]. Ce mécanisme a été décrit succinctement dans l'introduction de cette thèse.

Les mesures de l'effet Doppler lors de l'explosion de la SN1987A, dont la masse estimée est supérieure à $15 M_{\odot}$ (Fig. 1.3A), donne une évaluation de la vitesse d'expansion de la matière après l'explosion [1]. Les valeurs typiques sont : $v_e = 10^3-10^4$ km/s soit $v_e = 10^8-10^9$ cm/s ou encore $v_e = c/300-c/30$, c étant la vitesse de la lumière. On donne sur la figure 1.3B, un exemple de profil de densité avant l'explosion [43]. Sachant que la masse éjectée est de l'ordre de $15 M_{\odot}$ (voir Arnett [1] p. 439, et surtout [43, 44] pour la SN1987A), il est possible d'estimer l'énergie cinétique transportée par le plasma en expansion : on l'estime à 10^{51} ergs en moyenne.

De plus, la luminosité, L_{sn} (énergie émise par unité de temps), de la supernova est 10^{10} fois plus grande que la luminosité du soleil L_{\odot} : soit $L_{sn} = 10^{10} L_{\odot}$ où $L_{\odot} \simeq 10^{33}$ erg/s. Si l'on considère que cette luminosité est constante pendant 2×10^6 s (~ 1 mois), on en déduit que l'énergie rayonnée par la supernova est de 8×10^{49} ergs.

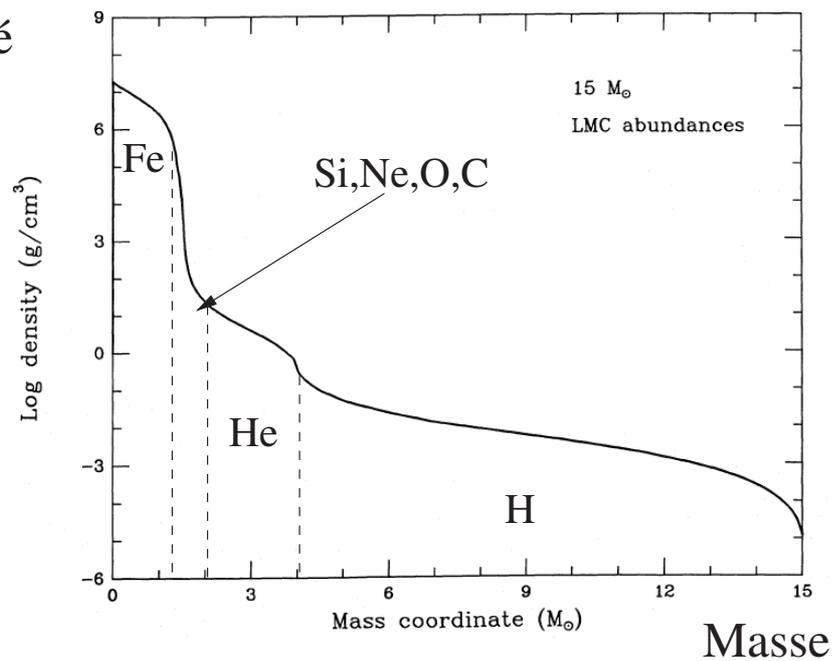
Une majeure partie de l'énergie distribuée pendant l'explosion part sous forme de neutrinos, $E_{\nu} = 0,15 M_{\odot} c^2$ (voir [1] p. 416), soit $2,7 \times 10^{53}$ ergs. Donc, si on effectue un bilan d'énergie, ~ 99 % d'énergie est emportée sous forme de neutrinos, ~ 1 % sous forme mécanique (énergie cinétique) et $\sim 0,01$ % sous forme de photons.

La phase d'explosion peut être définie comme la durée qui s'écoule entre le moment où l'onde de choc qui part du cœur émerge à la surface de l'étoile. Cette durée vaut environ une heure [1]. C'est pendant ce laps de temps qu'une partie de



(A)

Densité



(B)

Figure 1.3: (A) Image réalisée après l'explosion de la SN1987A par le télescope spatial Hubble. (B) Structure interne multi-couche (structure en pelure d'oignon) de l'étoile progéniteur avant l'explosion.

l'énergie interne de l'étoile est convertie en énergie cinétique.

Lors de l'explosion de la supernova 1987A [43, 44], les observations ont montré que le rayonnement des couches internes de l'étoile est apparu 6 mois avant que ne le prévoyait la théorie [45, 46]. En effet, les observations effectuées en 1987 ont montré l'apparition d'une source inhabituelle de rayons X [2, 3] qui annonçait l'apparition de rayons γ provenant de la désintégration des noyaux de ^{56}Co [47]. Les noyaux de ^{56}Co créés au centre de l'étoile lors de l'explosion se sont mélangés avec la couche externe d'hydrogène [48, 49]. Le mélange des couches est dû à la perte de symétrie sphérique du système initialement structuré en pelure oignon (Fig. 1.3B). C'est l'instabilité de Rayleigh-Taylor qui est principalement responsable de ce mélange. L'effet du mélange sur la courbe de lumière de la SN est clairement montré sur la figure 1.4A. Les courbes théoriques en pointillés [notées (2) et (3) sur la Fig. 1.4A] donnent un délai d'environ trois mois entre l'apparition du rayonnement γ avec deux hypothèses de mélanges différentes. Des simulations bidimensionnelles permettent de mieux comprendre le mélange suite au développement d'instabilités hydrodynamiques (Fig. 1.4B).

En effet, lors de l'explosion, les couches profondes (et donc denses) de l'étoile sont décélérées par les couches externes (et donc peu denses) et une petite perturbation initiale entre ces couches de différentes densités est amplifiée par cette instabilité [4, 6, 50, 51, 52].

Plus récemment, une étude montre que le flux de neutrinos peut aussi produire des IRT lors du collapse. Ces instabilités sont générées au niveau de la discontinuité de contact entre le choc produit lors de l'implosion du cœur et la neutrino-sphère [7, 53].

Ces résultats montrent l'intérêt majeur d'étudier l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour comprendre l'évolution de ce type d'objet.

Comme nous l'avons déjà dit, lors du collapse du cœur de fer, une étoile à neutrons peut se former. Des densités de l'ordre de $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ sont atteintes, pour un rayon de typiquement 10 km. Un pulsar correspond à une étoile à neutrons possédant un fort champ magnétique dont l'axe de rotation et l'axe de ce champ

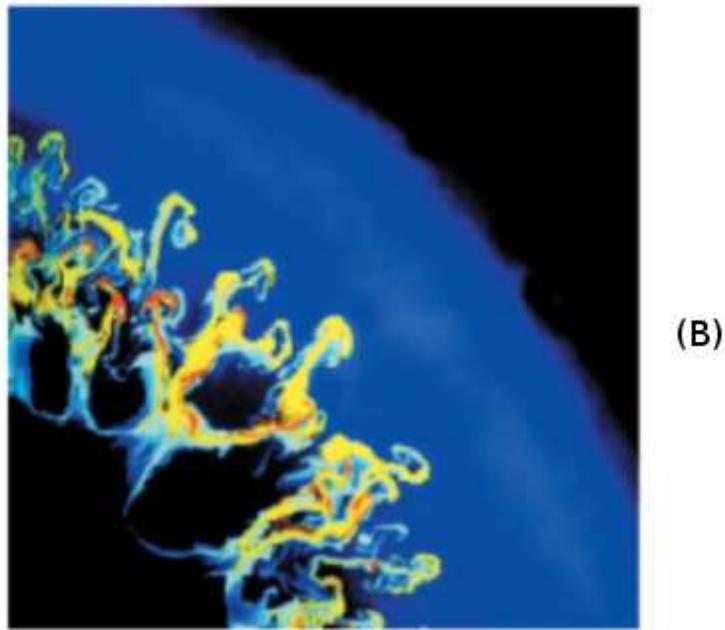
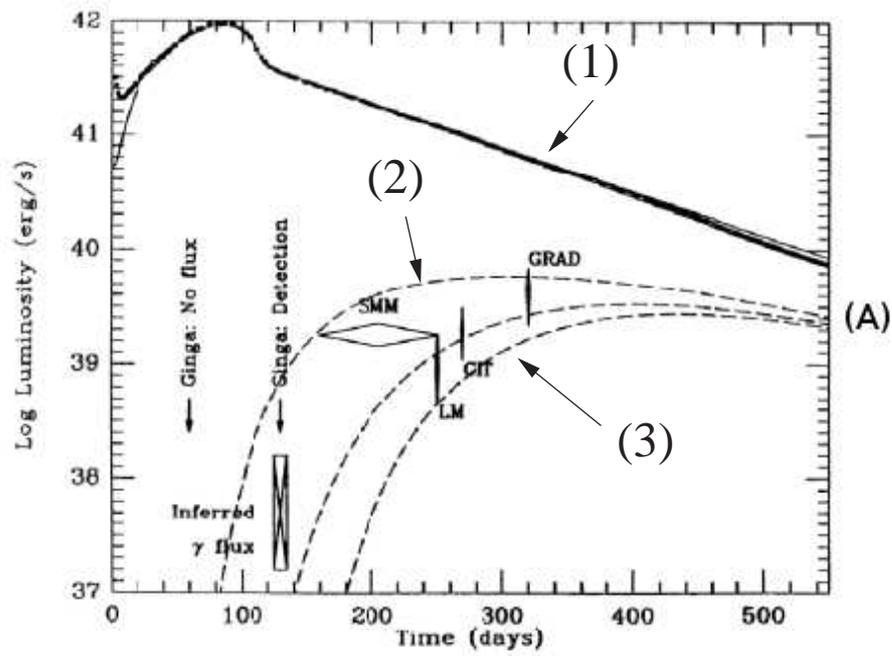


Figure 1.4: (A) Courbe de lumière de la SN1987A (1). La courbe théorique (2) prend en compte le mélange du ^{56}Co et la courbe (3) prend en compte un mélange plus faible. On observe un délai de 3 mois entre ces deux courbes. Le mélange permet de retrouver les observations [44]. (B) Simulation du mélange des couches internes avec les couches externes dû au développement de l'IRT lors de l'explosion.

ne sont pas confondus. Un pulsar émet un rayonnement synchrotron intense qui interagit avec les éjectas de la SN qui ont tendance à former une coquille autour du pulsar central. Cette famille de restes de supernovae, dite de type II, est nommé un plérion [54].

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, il existe une autre famille de restes de supernovae avec des coquilles dite *shell-type*. Mais celle ci provient le plus souvent de SN de type Ia. Un exemple typique est le reste de la supernova Tycho (supernova de type Ia) présenté dans la section 1.2.1 (figure 1.2). En effet, l'unique interaction a lieu essentiellement entre les éjectas et le milieu interstellaire [55, 56] car il n'y a pas d'étoile à neutrons au centre de la coquille. Que ce soit dans le cas de SN de type Ia ou de type II, on peut diviser l'évolution de ce RSN en plusieurs étapes [57, 58] :

- Juste après l'explosion de la SN, la coquille formée par les éjectas n'a pas eu le temps d'être décélérée par le milieu interstellaire (MIS). C'est la phase de vol libre. Durant cette phase, le rayon R des éjectas est proportionnel au temps : $R \propto t$.

- Ensuite, lorsque l'interaction avec le MIS devient importante, la coquille est décélérée. On entre dans la phase pré-Sedov. Lors de cette phase, l'IRT peut se développer sur la face externe des éjectas. L'entrée dans la phase de Sedov s'effectue lorsque la partie du MIS balayée par les éjectas a une masse supérieure à celle des éjectas (voir en annexe A.2). On considère que l'énergie de l'explosion est conservée et $R \propto t^{2/5}$ [59]. Plus tardivement, on peut considérer que c'est la quantité de mouvement qui est conservée. Le ralentissement de la coquille est plus important : $R \propto t^{1/4}$ (voir en annexe A.3). C'est dans cette phase (dite isotherme) que l'IRT sera traitée au cours du chapitre IV.

Après avoir vu la phase d'instabilité lors de l'expansion de la coquille dans le chapitre V, nous traiterons plus en détails l'évolution hydrodynamique des plérions dans le chapitre VI, cette étude concerne les supernovae dite de type II. Un des plus spectaculaire représentant de cette famille est la nébuleuse du Crabe (Fig. 1.5).

Actuellement, plus de 30 plérions ont été identifiés. Le nombre des découvertes

de ces objets s'est grandement accru depuis ces dernières années, surtout grâce au progrès de l'astronomie X. C'est notamment grâce aux satellites d'observation tel que Chandra ou XMM-Newton, que ce type d'objet a été mieux compris [60].

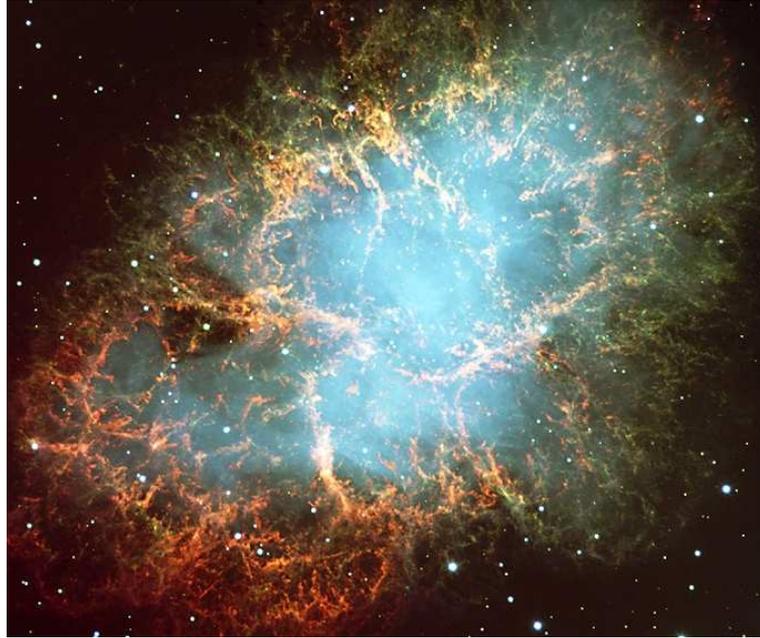


Figure 1.5: Image dans le domaine optique de la nébuleuse du Crabe, restes de la supernova de type II : SN1054, obtenue par le VLT. Les filaments sont les restes ionisés de la supernova éjectés dans le milieu interstellaire et accélérés [5, 24, 61] par le vent du pulsar situé en son centre. On pense que l'instabilité de Rayleigh-Taylor est responsable de la formation de la structure filamentaire de la nébuleuse.

Dans la section suivante, nous allons décrire de façon plus détaillée la structure et l'évolution des plérions. On montre aussi que l'on voit apparaître l'IRT à différentes étapes de leur évolution. En effet, dès qu'il y a des gradients de densité importants ainsi qu'une accélération ou une décélération des éjectas, cette instabilité peut se manifester (voir chapitre III). L'étude de cette instabilité est fondamentale pour connaître et étudier l'hydrodynamique de ce type d'objet.

1.3 Introduction aux plériens

Nous avons vu qu'un plérien résulte de l'expansion du reste d'une SN de type II et correspond à un système formé d'un pulsar central, rayonnant fortement, entouré d'une coquille d'éjecta en expansion à une vitesse telle que son énergie cinétique initiale est de l'ordre de 10^{51} ergs.

Il est répandu dans la littérature [24, 25, 55], de modéliser l'expansion des restes de supernovae par une vitesse radiale linéaire en r , c'est à dire, $v(r) \propto r$ (expansion homologue). Cette propriété est cohérente avec les observations. En effet, dans la nébuleuse du Crabe, Trimble [24] a observé que la vitesse des filaments est approximativement proportionnelle à leur distance au centre des restes de la supernova. Cette observation est confirmée plus récemment par Cadez *et al.* [25]. De tels profils ont été utilisés dans beaucoup de travaux pour modéliser l'expansion d'une coquille constituée des restes de supernova [17, 55].

Déjà en 1942, Baade [62] émit l'idée selon laquelle la matière de la nébuleuse du Crabe avait subi une accélération (non constante) à partir des observations réalisées par Duncan [63]. Il suppose qu'après une phase d'accélération, la nébuleuse du Crabe entre dans une phase de vol libre (vitesse constante). Cette hypothèse est confirmée plus tard en 1968 par Trimble [24] avec la comparaison d'images de la nébuleuse prises à une dizaine d'années d'intervalle. Elles montrent que les filaments de cette nébuleuse sont accélérés. Il y a moins de 10 ans, Nugent [64] a confirmé les résultats obtenus par Trimble. Par ailleurs, les observations dans le domaine radio de Bietenholz *et al.* [61] montrent que le cœur de la nébuleuse émet un rayonnement synchrotron dont l'expansion est plus rapide que celles des filaments que l'on observe. Ceci confirme le fait que la "bulle synchrotron" passe à travers les filaments.

Les observations montrent également qu'une partie de l'énergie cinétique des éjectas a été acquise après l'explosion initiale. Il a été suggéré que le pulsar central transfère une partie de son énergie de rotation à la nébuleuse [65, 66], par l'intermédiaire des particules et des ondes électromagnétiques qu'il émet : il s'agit du

vent du pulsar. Beaucoup de questions restent ouvertes concernant la théorie du vent des pulsars. Cependant, l'étude de la nébuleuse du Crabe est capitale dans la compréhension de ce phénomène [67].

Un modèle qualitatif permet d'expliquer ce vent violent [68]. Les pulsars se forment avec une période de rotation comprise entre 10-100 ms [69]. Par exemple, la période de rotation du pulsar du Crabe est de 33 ms. Les observations révèlent que cette période augmente avec le temps [69]. Ce ralentissement montre qu'une partie de son énergie cinétique de rotation est utilisée pour alimenter un vent de particules relativistes (principalement des paires électrons-positrons).

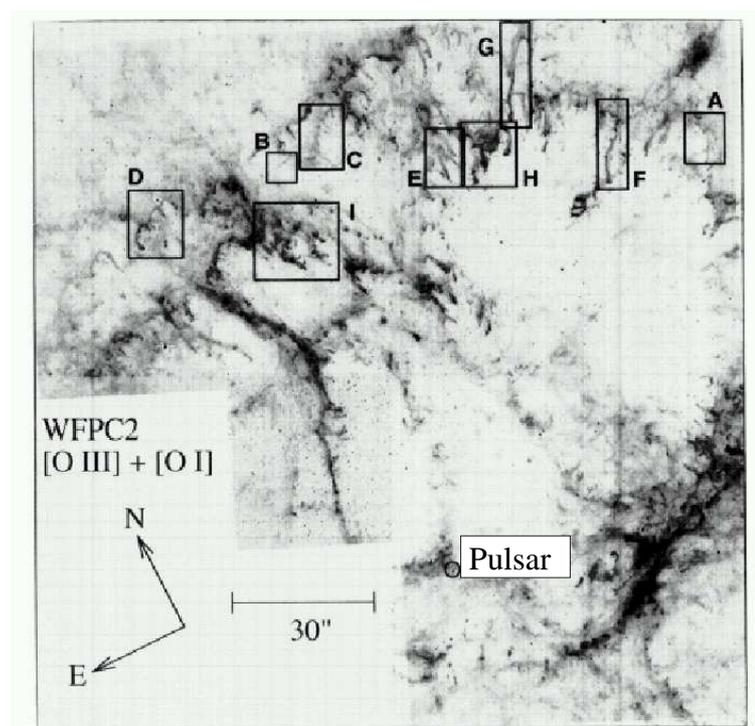


Figure 1.6: Observation à haute résolution du cœur de la nébuleuse du Crabe effectuée par le télescope spatial Hubble [5]. On distingue nettement les filaments dus à l'IRT, voir par exemple la zone notée F. Le pulsar apparaît approximativement au milieu de la partie inférieure du cliché.

Le vent du pulsar est confiné dans son propre champ magnétique et l'émission synchrotron qui est générée interagit avec le milieu environnant constitué des éjec-

tas de la SN. Lorsque la coquille des éjectas est opaque à ce rayonnement, celui-ci est piégé dans la matière (le RSN). Cet objet composé d'un pulsar et d'une coquille dense (éjectas) lié par un vent, est appelé un "plérierion" [54], comme nous l'avons déjà dit. Les observations montrent que Vela X, 3C 58 et la nébuleuse du Crabe se classent dans cette catégorie. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la nébuleuse du Crabe en raison de la qualité et du nombre de résultats observationnels disponibles. L'étude de l'interaction entre un pulsar et les éjectas constitue une partie essentielle dans la théorie des plérierions. Ce sont principalement les récentes observations effectuées par le télescope spatial Hubble qui ont motivé un regain d'intérêt pour ce type d'objet [5, 23], voir la figure 1.6. Ces observations révèlent beaucoup de détails sur la morphologie et la structure filamentaire de cette nébuleuse. En particulier, ces travaux suggèrent fortement que l'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) est principalement responsable de la structure filamentaire. De plus, les observations montrent que les filaments sont radiaux (orientés vers le pulsar). Une série d'images Fabry-Pérot (voir Fig. 1.7) de la nébuleuse du Crabe a permis aussi d'observer la structure filamentaire à plus grande échelle [70].

On peut schématiser un plérierion comme le représente la figure 1.8. Le pulsar est situé au centre, il génère une magnétosphère dans laquelle sont créées, entre autres, des paires d'électrons et de positrons. On estime le champ magnétique (nécessaire pour expliquer l'origine de leur rayonnement) de l'ordre de 10^{12} Gauss, soit $\sim 10^9$ fois plus qu'au voisinage d'une tache solaire (voir [72] p. 340). En conséquence, des champs électriques très puissants sont engendrés (des différences de potentiel de l'ordre de 10^{17} Volts sont créées) et ils arrachent des particules chargées (ions et électrons) de la surface du pulsar. On est alors en présence d'une zone centrale "froide" dans laquelle un vent relativiste souffle ($v = c$). Cette zone ne rayonne pas dans le domaine du rayonnement X [73] car elle est très magnétisée et est dominée par un vent de paires électron-positron. Elle produit un choc (choc de terminaison - voir Figs. 1.8 et 1.9), à l'endroit où la pression de la matière environnante est en équilibre avec la pression du vent du pulsar ($r \simeq 0,1$ pc avec $1 \text{ pc} \simeq 3 \times 10^{18} \text{ cm}$). C'est au voisinage du choc que des particules sont créées et leur rayonnement synchrotron émet de façon importante dans les domaines IR, radio, optique, X et

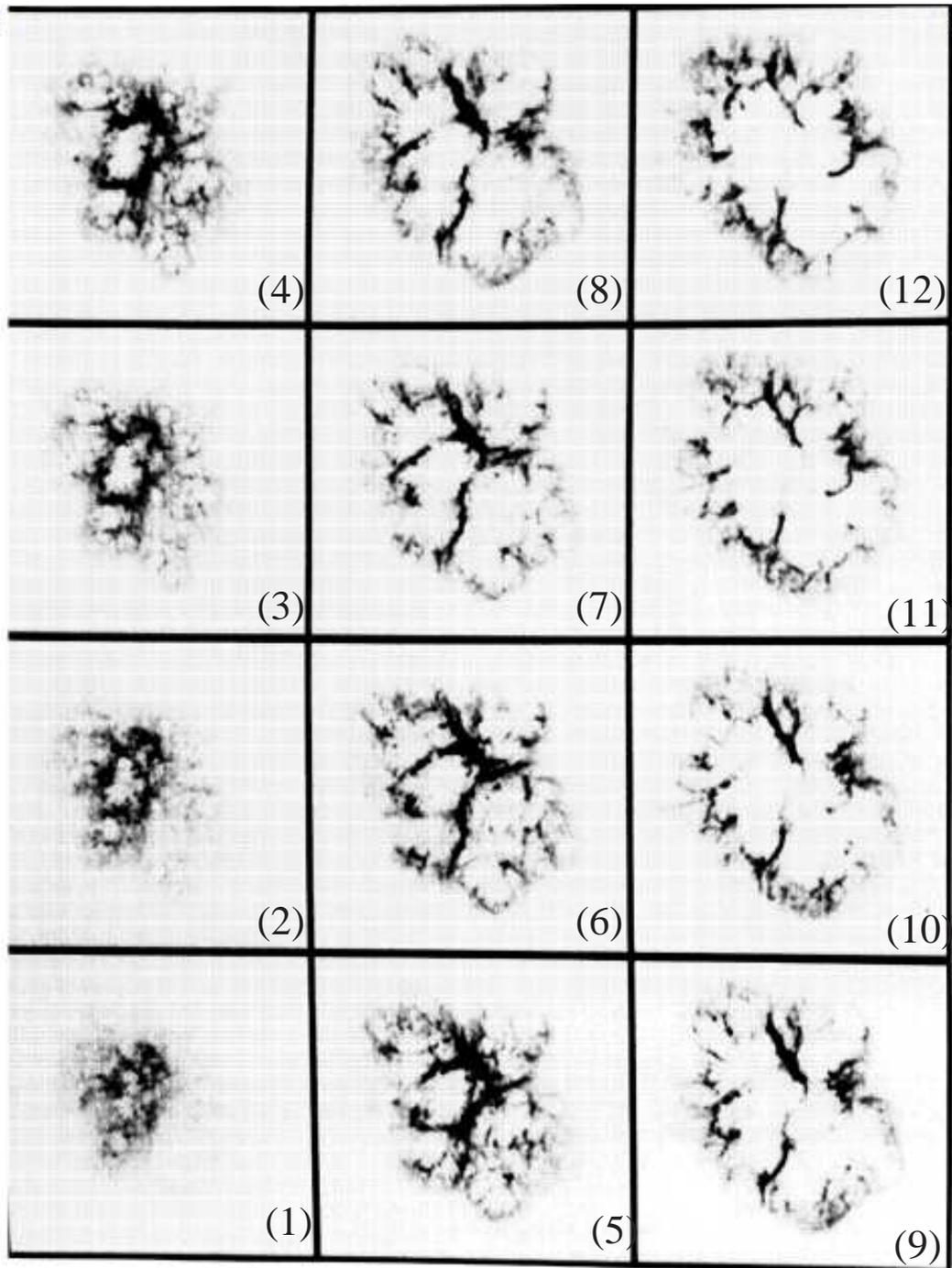


Figure 1.7: Images obtenues par spectroscopie Fabry-Pérot de la nébuleuse du Crabe. Le sens de la lecture se fait par numéro croissant de (1) à (12). Elle permet d'imager différentes classes de vitesse d'expansion, en bas à gauche pour une vitesse de -1435 km/s (vers l'observateur) jusqu'en haut à droite pour -5 km/s (vitesses données par rapport à un observateur au repos). Pour cette dernière image ont distingué nettement la structure filamentaire de la nébuleuse [70].

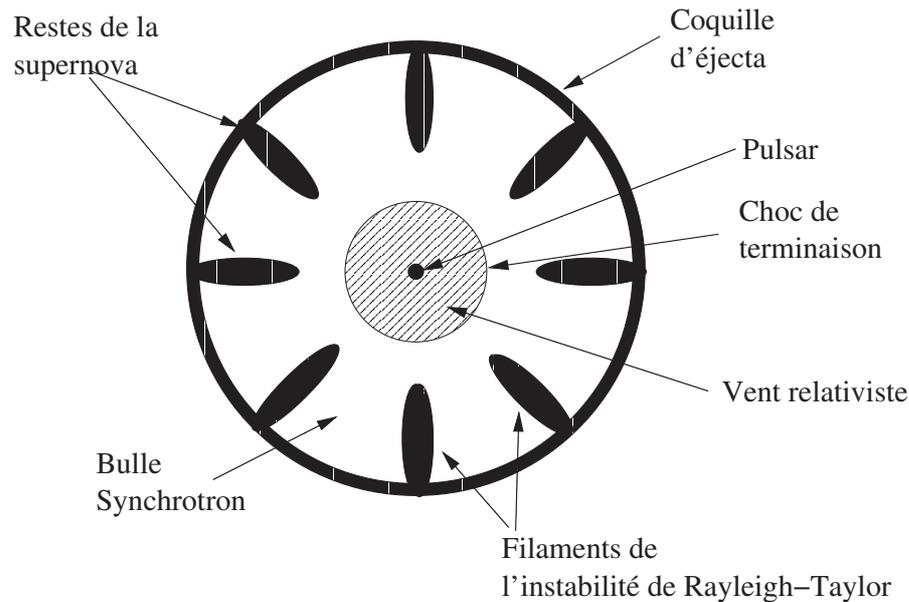


Figure 1.8: Représentation schématique d'un pléion. Le rayon du pulsar vaut typiquement 10 km, la bulle de vent relativiste a un rayon typique de 0,1 pc et le rayon des éjectas vaut typiquement 1 pc [71].

gamma [74]. Ce rayonnement interagit avec les éjectas de la supernova ($r \simeq 1$ pc) et il accélère la coquille (voir plus loin). L'IRT se développe alors sur la face interne de la coquille pour former de longs filaments orientés vers le pulsar.

On retrouve cette description sur les images réalisées lors des observations effectuées par le satellite Chandra (Fig. 1.9). Dans le domaine X (15 keV), on distingue nettement le pulsar au centre du tore de rayonnement synchrotron ainsi que la zone centrale froide à l'intérieur du choc de terminaison [75, 76]. Cette image montre aussi deux jets émis de part et d'autre du pulsar.

La morphologie et la structure d'un RSN et celle d'un pléion sont complexes.

Immédiatement après l'explosion d'une supernova (qu'elle soit de type I ou de type II), les éjectas et l' "onde de souffle" ("blast wave") par laquelle ils sont précédés, rentrent tous les deux en expansion et se propagent dans le milieu circumstellaire (milieu qui entourait initialement l'astre ayant donné lieu au phénomène de supernova) puis le milieu interstellaire (MIS). Comme la vitesse de propagation

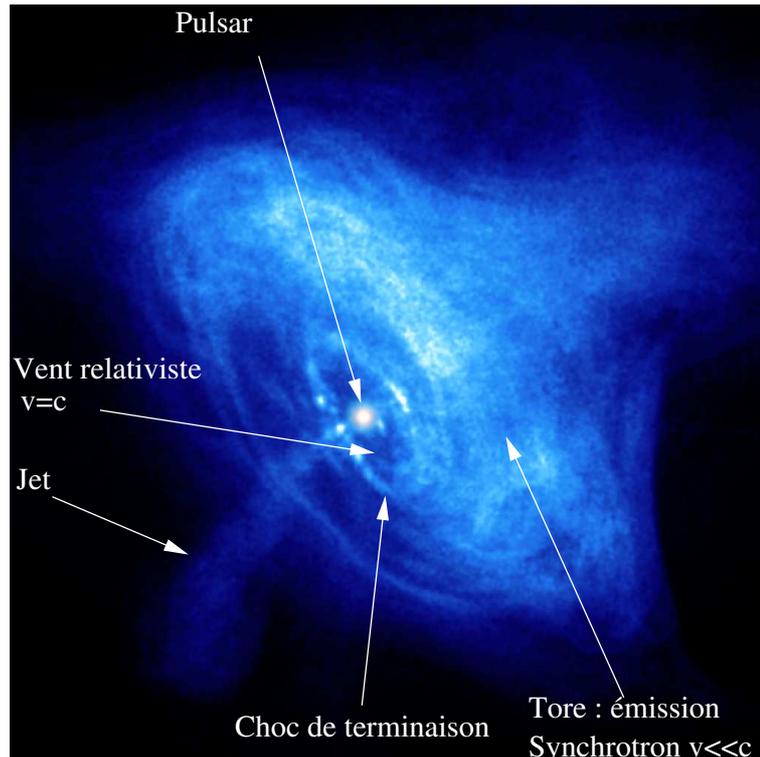


Figure 1.9: Observation de la région centrale de la nébuleuse du Crabe dans le domaine des X (15 keV). On distingue le pulsar au centre du tore ainsi que le choc de terminaison entre la zone de vent ultra-relativiste et la bulle de rayonnement synchrotron [75].

de l'onde de souffle est plus élevée que celle des éjectas, elle balaie et met en mouvement centrifuge la matière constituant le MIS. Avec le temps, la masse balayée augmente et lorsqu'elle devient du même ordre de grandeur que la masse de la matière éjectée lors de l'explosion de la supernova, l'expansion se ralentit² et des phénomènes supplémentaires apparaissent. Premièrement, l'onde de souffle (qui devient une discontinuité de contact - DC) provoque deux ondes de choc. L'une d'entre elles se propage vers l'avant ("forward shock" - FS) dans le MIS encore immobile tandis que l'autre ("reverse shock" - RS) remonte la matière en expansion. La distance entre le RS et la DC, d'une part, et celle entre la DC et le FS, d'autre part, augmente avec le temps et dans le repère lié à l'astre central initial, le RS, la DC et le FS représentent respectivement la surface de trois sphères em-

²Phase de Sedov (voir la fin du paragraphe 1.2.2)

boîtées dont les rayons s'accroissent avec le temps (malgré son nom, le RS est lui aussi en expansion). Par ailleurs, comme nous venons de voir que l'expansion est freinée, la DC est instable au sens de Rayleigh-Taylor. Le milieu léger correspond au MIS dans lequel le FS s'est propagé tandis que le milieu lourd est représenté par le plasma qui subit le passage du RS. L'interface entre les éjectas et le MIS perd alors la sphéricité approximative qu'elle possédait pour donner naissance à une structure constituée de "doigts" de lourd et de "bulles" de léger qui s'interpénètrent de manière identique à ce que nous avons pu voir pour le mélange des couches qui se produit à cause de l'IRT lors de l'explosion d'une supernova de type II (voir la figure 1.4B).

Schématiquement, on a donc un plasma chaud (éjectas) qui reste approximativement sphérique et qui forme une "bulle" dont le rayon croît mais dont la surface externe est très "chahutée" et est constituée de fortes modulations (voir par exemple la figure 1.2 sur laquelle des excroissances à la surface de la bulle sont clairement visibles).

Cette phase de forte interaction éjecta/MIS fait l'objet de nombreuses études [8, 55, 58, 77, 78]. Par ailleurs, la masse de matière située à la périphérie de cette bulle augmente. En effet comme à son passage, et dès l'instant initial (juste après l'explosion), l'onde de souffle met le milieu en mouvement radial centrifuge avec une vitesse $v(r)$ qui augmente comme r (voir de le début du paragraphe 1.3), la densité massique au centre de la bulle tend à diminuer. À l'inverse, sur le contour extérieur de celle-ci, la matière s'accumule et une coquille dense a tendance à se former dans la région située entre le RS et la DC. Bien que précédemment nous ayons parlé à plusieurs reprises de coquille, il ne s'agit pas de celle qui se forme à la surface de la bulle d'éjectas qui va être étudiée dans ce travail de thèse. Celle qui fait l'objet de notre étude est située au centre de la sphère d'éjectas et elle n'apparaît que dans le cas de supernovae de type II. C'est ce type de coquille qui a été représenté sur la figure 1.8.

Revenons, avec plus de détails, aux phénomènes qui se produisent au centre de la sphère d'éjectas (RSN) lorsque l'étoile à neutrons centrale est devenue un

pulsar. Le vent qu'il émet souffle, d'une part, dans le RSN en expansion uniforme et, d'autre part, est fortement chauffé par le choc de terminaison. En réaction, une bulle chaude, centrée sur le pulsar, se forme et entre en expansion dans le RSN. Une discontinuité de contact apparaît alors à l'interface bulle chaude/RSN (c'est la face interne de la coquille tracée en trait épais sur la Fig. 1.8) et un FS, qu'il ne faut pas confondre avec celui existant dans le MIS, se produit et se propage de manière centrifuge dans le RSN. La position de ce choc est représenté par le contour extérieur du trait épais (coquille) de la figure 1.8.

Ainsi, autour du pulsar, le RSN comporte une deuxième coquille. À l'inverse de la première coquille dont nous avons parlé et qui est instable au sens de Rayleigh-Taylor, sur sa surface externe, la seconde est instable sur sa face interne. C'est ordinairement ce type de structure qui est utilisé dans les études relatives au couplage pulsar/éjectas [5, 79, 80, 81, 82]. Ces éléments définissent les points qui font l'objet des travaux effectués dans cette thèse. De plus, comme dans ce travail nous allons mettre l'accent sur les aspects analytiques ainsi que l'on fait auparavant d'autres auteurs [17, 65, 68, 73, 81], nous allons simplifier la configuration. Nous ne considérerons pas le choc de terminaison et le plérion sera décrit simplement par le pulsar au centre, produisant simultanément le vent et le rayonnement, lequel interagit directement avec les éjectas. En effet, nous allons nous focaliser sur le développement de l'IRT sur la face interne des éjectas. Un schéma récapitulatif détaillé est donné sur la figure 1.10. Cette description est identique à celle effectuée par Hester *et al.* [5].

On peut diviser l'évolution des plérions en plusieurs étapes [83, 84] :

- Juste après l'explosion de la SN de type II, pour un jeune plérion ($t \lesssim 1000$ ans), la puissance du vent du pulsar est approximativement constante et accélère les RSN. Durant cette phase, le rayon R de la face interne des éjectas suit une loi de la forme $R \propto t^a$, avec $a > 1$. Par exemple dans le travail de Blondin *et al.* [79], on a $a = 6/5$. La nébuleuse du Crabe est dans ce régime. C'est principalement dans cette phase que l'IRT se développe sur la face interne des éjectas (voir la figure 1.10).

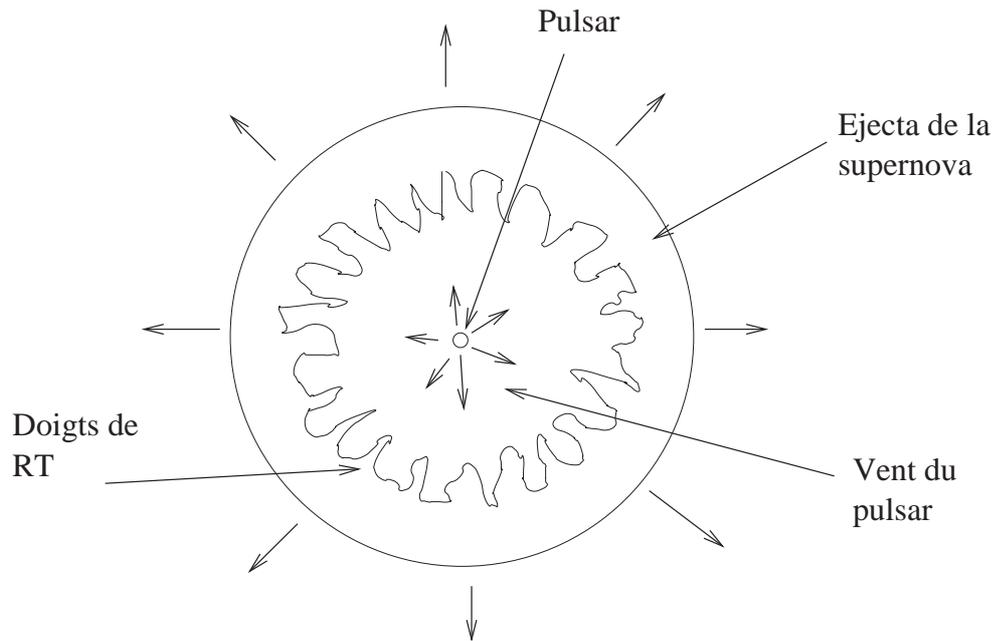


Figure 1.10: Représentation schématique d'une supernova type II. La figure montre le pulsar dont le vent souffle les éjectas de la SN. La discontinuité de contact entre la bulle formée par le vent du pulsar et les éjectas est instable au sens de Rayleigh-Taylor. Les doigts de Rayleigh-Taylor sont connectés entre eux par une fine coquille.

- Entre mille et 2 mille ans, le vent du pulsar diminue et les éjectas sont en expansion libre $R \propto t$: la masse des éjectas est encore très supérieure à celle que l'onde de souffle de l'explosion a balayée dans le MIS.

- Ensuite, entre 2 et 40 mille ans, l'interaction entre la partie externe des éjectas et le MIS devient importante. Un choc (FS) dans le MIS est généré ainsi qu'un choc en retour (RS) dans les éjectas et une discontinuité de contact (DC) à l'interface MIS/éjectas. Le vent du pulsar décroît fortement et le RS peut interagir avec la face interne des éjectas dans laquelle le FS produit par le pulsar progresse puis, ensuite, vient comprimer le vent du pulsar. Lors de cette phase, on considère que l'énergie de l'explosion se conserve, c'est la phase adiabatique. La discontinuité de contact MIS/éjectas devient instable au sens de Rayleigh-Taylor et lorsque la masse balayée devient supérieure à celle des éjectas, on entre dans la phase de

Sedov $R \propto t^{2/5}$ (voir en annexe A.2).

– Finalement, plus tard ($t \gtrsim 40$ mille ans), le pulsar peut quitter son site de naissance et éventuellement percer les éjectas de la supernova et générer un “bow” choc (choc d’étrave). De plus, les éjectas ralentissent fortement en $R \propto t^{1/4}$ (voir annexe A.3), et l’instabilité de Rayleigh-Taylor continue de croître, sauf si les éjectas sont déjà “déchiquetés”. Au cours de cette période, les pertes radiatives deviennent importantes et la quantité de mouvement est conservée (voir annexe A.3). C’est la phase d’expansion dite isotherme [59] et les éjectas se diluent dans le milieu interstellaire.

Ces valeurs ne sont que typiques ; elles dépendent fortement de la masse des éjectas, de la densité de MIS et de l’énergie de l’explosion. En effet, par exemple la supernova Cas A (Fig. 1.11), âgée de 320 ans entre dans la phase de Sedov (phase adiabatique) [70, 85, 86]. Certains travaux observationnels font clairement apparaître le FS et le RS dans la partie externe des éjectas [85]. Tandis que la supernova Tycho (Fig. 1.2) âgée de 430 ans est plutôt dans la phase isotherme. Ceci est la conséquence d’une émission importante de rayons cosmiques [87].

Dans notre étude, nous considérons le plérion dans sa première phase d’évolution, c’est à dire, la période correspondant à l’accélération de la coquille par le vent du pulsar et l’apparition de l’IRT (Fig. 1.10).

Au même moment où ce processus se déroule, la partie externe des éjectas interagit avec le MIS. Cependant, on peut considérer, en première approximation, que ces phénomènes sont découplés de la phase d’IRT sur la face interne. C’est ce qui est ordinairement admis dans la littérature pour les travaux qui se rapportent à l’interaction éjectas/MIS [8, 55, 78] et ceux relatifs au couplage vent du pulsar/face interne des éjectas [5, 79, 80].

Comme nous l’avons déjà mentionné, le travail présenté dans cette thèse se rapporte à la deuxième catégorie d’études. En particulier, l’un de nos objectifs est de prolonger les travaux initiaux de Chevalier [80] et de poursuivre l’étude effectuée par Jun [21] sur l’interaction du vent du pulsar avec les éjectas de la SN et de développer une base analytique pour l’étude de l’IRT comme l’on fait Bernstein et

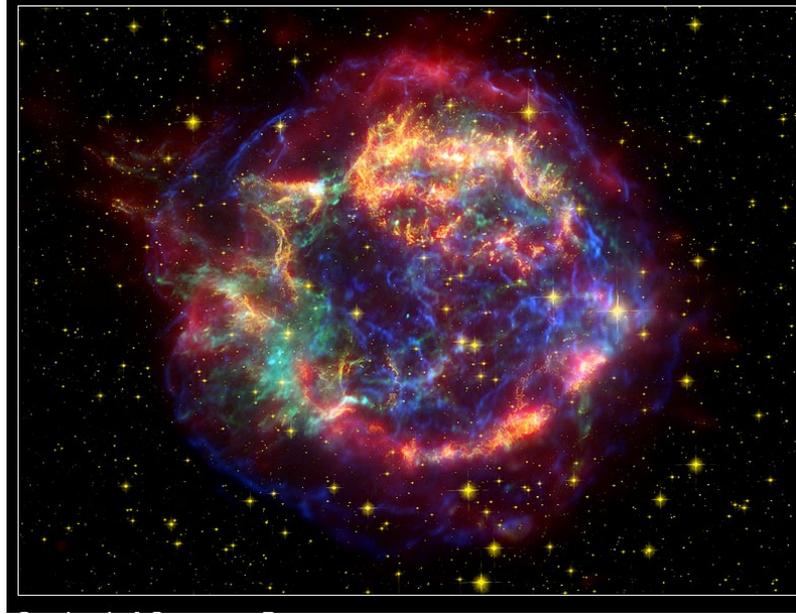


Figure 1.11: Image réalisée en 2004 des restes de la supernova de type II : Cas A. Ce cliché est une composition de trois domaines : en rouge le domaine infrarouge (Spitzer), optique en jaune (Hubble) et X en bleu et vert (Chandra).

Book [17] dans les années 80. Dans son travail, Jun a considéré un modèle auto-semblable pour la solution radiale du mouvement des éjectas, $r \propto t^a$ (la position est proportionnelle à une puissance du temps), et résout numériquement le problème 2D. Dans notre étude, nous proposons une solution différente et, nous semble-t-il, plus appropriée avec, $r \propto C(t)$, où $C(t)$ n'est pas une simple puissance du temps puisque $C(t) = \sqrt{(1 + \beta t/\tau)^2 + t^2/\tau^2}$ (cette fonction est très semblable à celle obtenue dans [17], ce point est examiné avec plus de détail dans les chapitres V et VI). Cette approche nous permet d'étudier le problème de l'IRT instationnaire de manière analytique [88]. On examine un RSN soufflé par le vent du pulsar en supposant que ce RSN s'est structuré sous la forme d'une épaisse et dense coquille lorsque la nébuleuse avait un rayon de l'ordre de 0,1 pc. Ultérieurement, c'est la valeur que nous prendrons. Toutefois cette valeur du rayon initial n'est pas la même que celle proposée par Ostricker [65] qui considère la formation d'une coquille au bout 50 ans, ce qui correspond à un rayon de 0,05 pc pour une vitesse de 1000 km/s pour les éjectas. Cependant, actuellement nous possédons peu de

connaissances pour prévoir la formation de cette coquille dense et opaque et nous prenons comme Jun [21] un rayon typique égal à $\sim 0,1$ pc.

Par ailleurs, dans ce travail comme dans les études similaires, la bulle du pulsar est considérée comme un gaz relativiste et par conséquent il peut être assimilé à un polytrophe dont la constante polytropique γ est $\gamma = 4/3$ [65, 79]. Quant aux éjectas, ils sont relativement froids (voir [79] par exemple). Il est donc plus approprié de les considérer dans ce cas comme un gaz polytropique avec $\gamma = 5/3$ [21, 88]. Cette étude de stabilité considère donc un gaz parfait mono-atomique pour les éjectas, qui, de plus, seront considérés adiabatiques. Cette hypothèse est généralement faite dans les modèles analytiques (voir par exemple [17]).

Comme le suggère les observations [5, 23, 37] l'interaction forte entre le pulsar et les éjectas a lieu via l'IRT. Dans le chapitre VI, nous utilisons la solution analytique que nous avons développé en détail au cours du chapitre V et nous étudions en particulier la fragmentation des éjectas suite à l'IRT.

Enfin, les mesures temporelles de la fréquence des pulsars montrent clairement que l'énergie cinétique de rotation est dissipée. En effet, la fréquence des pulsars décroît avec le temps [89, 90]. La puissance associée aux pertes de l'énergie de rotation (la luminosité de freinage) peut s'écrire comme $\dot{E} = I\Omega\dot{\Omega}$, où Ω est la fréquence de rotation du pulsar, I son moment d'inertie et $\dot{\Omega}$ sa décélération (le point supérieur indique la dérivée par rapport au temps). Supposant que $\dot{\Omega}$ décroisse avec le temps comme $-\Omega^n$ [91], alors n s'appelle l'indice de freinage. En particulier, pour un dipôle magnétique pur on a $n = 3$ [91]. On en déduit, par exemple, que la luminosité du pulsar décroît avec un temps caractéristique τ d'environ 200 ans (voir Rees et Gunn [91]). Nous développerons en détail dans le chapitre VI un modèle de luminosité tiré des observations et nous montrerons que notre modèle prend en compte de manière très satisfaisante l'effet de décroissance de la luminosité du pulsar.

CHAPITRE II

Astrophysique de laboratoire

2.1 Introduction

L'explosion d'une supernova (SN) engendre une grande variété de phénomènes physiques sur des échelles de temps et d'espace très variées. Notre intérêt se porte principalement sur un groupe de problèmes : les effets hydrodynamiques accompagnant l'explosion d'une SN et l'expansion de ses restes dans le milieu interstellaire.

Parmi les phénomènes physiques les plus importants, les instabilités hydrodynamiques jouent un rôle prépondérant. Celles que nous examinons dans ce travail peuvent être engendrées par un choc (instabilité de Richtmyer-Meshkov) ou par une accélération (instabilité de Rayleigh-Taylor) dans un fluide comportant des gradients de densité.

Pour réaliser une expérience de laboratoire pouvant simuler des phénomènes hydrodynamiques existant dans les SN, il est indispensable de respecter des lois d'échelle [26, 92, 93, 94]. La différence d'échelle spatiale entre une SN (10^{12} cm) et une expérience laser sur une cible (10^{-2} cm), soit 14 ordres de grandeur, est énorme. Malgré cela, on peut montrer formellement qu'il existe des conditions pour qu'une telle expérience soit représentative de certains aspects de la situation astrophysique.

Par la suite, nous allons proposer un critère de similitude permettant de définir le domaine d'évolution pour les paramètres caractéristiques des expériences laser.

Compte-tenu des nombreuses observations qui le concerne, l'objet astronomique de référence que nous allons considérer pour examiner ces lois de similitude

est la supernova SN1987A. En effet, beaucoup de données ont été recueillies à son propos durant les quinze dernières années. Les anneaux, dont le rayon le plus interne des trois est de l'ordre de 5×10^{17} cm, formés par l'expulsion de matière (vent stellaire) dans le milieu circumstellaire avant l'explosion de la SN, donnent une idée des échelles mises en jeu pour les RSN (voir Fig. 1.3A).

Dans leurs travaux, Ryutov *et al.* [26] considèrent trois phases d'évolution pour la supernova 1987A : une première phase dite d'explosion pendant laquelle l'onde de choc se propage du centre de l'étoile jusqu'à sa surface. Cette phase dure typiquement 1 heure. La deuxième phase est la phase précoce d'expansion des éjectas dans le milieu circumstellaire (MCS). Une discontinuité de contact éjectas/MCS apparaît simultanément avec un choc avant et un choc retour dans le MCS et les éjectas respectivement. Cette phase dure environ 10 ans et après cette période, les éjectas entrent en collision avec l'anneau intérieur de la nébuleuse planétaire. Pour une vitesse moyenne des éjectas de l'ordre de 10 000 km/s et reprenant 5×10^{17} cm pour l'ordre de grandeur du rayon de l'anneau interne, on trouve que la collision se produit approximativement 16 ans après l'explosion – en d'autres termes, elle se déroule à l'heure actuelle. C'est la troisième phase. Pour ces trois étapes de l'évolution, ils proposent un critère de similarité qui permet de définir des conditions pour la réalisation d'une expérience. Comme nous le verrons plus loin (chapitre VII), cette étude est le point de départ en vue du dimensionnement d'une expérience de laboratoire ultérieure.

Les premiers travaux et idées d'expériences de laboratoire datent des années 1960, dont les pionniers sont Basov et Krokhin [95] ainsi que Dawson [96]. À cette époque, Dawson propose déjà l'idée de production de plasmas laser pour des applications astrophysiques afin de simuler l'interaction d'une supernova avec un champ magnétique, mais aussi l'interaction entre les protubérances solaires et le champ magnétique terrestre. Il évoque également le développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans les plasmas magnétisés. C'est en 1968 que Tshuchimori *et al.* [97] réalisèrent une des premières expériences d'astrophysique de laboratoire. Ils simulèrent le mécanisme d'accélération de particules dans les protubérances

solaires à l'aide de plasmas produit par laser (durée d'impulsion 30 ns et une puissance de 20 MW, soit une énergie totale de l'ordre du Joule). Ensuite, dans les années 1990, eurent lieu de nombreuses expériences [98, 99] sur le laser américain Nova (durée d'impulsion 1 ns, énergie 15 kJ) du centre de Livermore. Parmi l'une d'entre elles, Kane *et al.* [100] réalisèrent des études pour tenter de reproduire l'évolution hydrodynamique de supernovae afin d'examiner, en particulier, le développement de l'IRT lors de l'explosion. Plus récemment, Remington et ses collaborateurs ont présenté les dernières avancées dans le domaine de l'astrophysique de laboratoire [94, 99, 101]. Notamment, ils évoquent l'étude en laboratoire de supernovae, de restes de supernovae, de sursauts gamma, de naines blanches ainsi que celle de cœur de planètes géantes.

Par ailleurs, il existe d'autres installations permettant d'étudier des phénomènes astrophysiques. On peut citer notamment le Z-pinch, qui à la différence des lasers, comprime la matière grâce à la force de Lorentz générée par un fort courant. Ce type d'instrumentation peut produire des jets supersoniques pertinents pour l'astrophysique [102, 103]. À ce jour, les Z-pinches ne sont pas utilisés pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

Dans ce type d'expériences, pour qu'une description hydrodynamique soit valide, il est nécessaire que le libre parcours moyen des particules soit beaucoup plus petit que les dimensions de l'objet (le fluide est alors traité comme collisionnel). Dans la suite de ce chapitre, nous allons, dans un premier temps, considérer le problème hydrodynamique décrit par les équations d'Euler. Nous discuterons ensuite des lois d'échelle qui en découlent et les conditions de validité de ce modèle.

2.2 Hypothèses de modélisation : hydrodynamique idéale

Durant les trois phases décrites précédemment, le milieu est ionisé et forme donc un plasma. Si le plasma est collisionnel, on peut appliquer les équations de

l'hydrodynamique. De plus, si la viscosité du milieu est faible (grand nombre de Reynolds) ainsi que la conduction thermique (nombre de Péclet), les équations d'Euler sont valables [26, 92, 93, 104]. Négligeons la force de gravité devant les forces de pression, les équations d'Euler se réduisent alors, à :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (2.2)$$

$$\partial_t \epsilon + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \epsilon + \frac{p}{\rho} \cdot \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2.3)$$

où ρ est la densité, \vec{v} la vitesse, p la pression et ϵ l'énergie interne par unité de masse. Le symbole " ∂_t " représente la dérivée partielle par rapport au temps.

En ce qui concerne l'équation d'état qui relie la pression et la densité, on suppose que le gaz est polytropique, et il est donc décrit par la relation : $p \propto \rho^\gamma$ où γ est la constante polytropique. Elle est équivalente à l'équation (2.3) qui stipule dans ce cas que l'entropie est constante. Une relation très simple s'ensuit entre l'énergie interne et la pression et il s'agit de $\epsilon = p/[(\gamma-1)\rho]$. Il faut noter que γ peut être différente du rapport classique c_p/c_v où c_p et c_v sont respectivement la capacité calorifique à pression constante et à volume constant pour le gaz parfait [105].

Compte tenu de l'expression précédente pour ϵ , l'équation d'énergie prend la forme suivante en fonction des variables ρ , \vec{v} , p :

$$\partial_t p + \gamma \frac{p}{\rho} \partial_t \rho + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p - \gamma \frac{p}{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (2.4)$$

Ces équations "simplifiées", (2.1), (2.2), (2.4) permettent de considérer un grand nombre de problèmes physiques dans lesquels des effets de compressibilité, des chocs mais aussi des effets non-linéaires sont présents. Il faut noter que la compressibilité est un phénomène délicat à prendre en compte analytiquement [16, 106]. Nous allons y revenir en détail plus loin (chapitre IV).

2.3 Lois d'échelle

Il est important de savoir sous quelles conditions deux systèmes physiques d'échelles différentes ont le même comportement. Pour cela, on cherche les transformations qui laissent inchangées les équations du modèle. Ici il s'agit des équations d'Euler (2.1), (2.2) et (2.4). Autrement dit, on cherche sous quelles conditions les équations d'Euler gardent la même forme (invariance de la structure des équations) après la transformation d'homothétie [26, 104] :

$$\vec{r} = a \vec{r}_1; \rho = b \rho_1; p = c p_1; t = d t_1; \vec{v} = e \vec{v}_1; \quad (2.5)$$

où a, b, c, d et e sont des constantes à déterminer et où $\vec{r}_1, \rho_1, p_1, t_1$ et \vec{v}_1 sont les grandeurs physiques du système homothétique au premier. On aura invariance d'échelle des deux systèmes à condition de satisfaire certaines contraintes. La première contrainte est immédiate et elle provient de l'introduction des relations (2.5) dans l'équation de continuité (2.1). En demandant son invariance, il vient : $a = e d$. La même opération pour l'équation du mouvement (2.2) conduit à : $d c = e b a$. Enfin, on peut montrer que l'équation sur l'énergie reste inchangée si la condition sur l'équation (2.1) est satisfaite. La demande d'invariance procure donc seulement deux contraintes (deux relations) entre les cinq paramètres a, b, c, d et e .

En conséquence, on peut exprimer deux d'entre eux en fonction des trois autres, ces trois derniers pouvant restés complètement arbitraires. Si on décide de ne pas contraindre les quantités a, b et c , on obtient les facteurs d'échelle d et e tels que :

$$t = a \sqrt{\frac{b}{c}} t_1; \vec{v} = \sqrt{\frac{c}{b}} \vec{v}_1. \quad (2.6)$$

Inversement, certains facteurs d'échelle peuvent être imposés dès le départ si on compare un objet astrophysique et une "maquette" que l'on réalise de celui-ci. Si par exemple on compare une supernova et l'explosion d'une micro-cible laser (ce qui est l'un des objectifs de l'astrophysique de laboratoire), trois paramètres vont ressortir immédiatement.

Il s'agit de a, b et e puisque le rapport entre les dimensions spatiales, les densités massiques et les vitesses de la cible et de la supernova vont être connus

dès le départ. Dans ces conditions, il faudra réaliser la correspondance suivante entre la pression et le temps :

$$t = \frac{a}{e} t_1; p = b e^2 p_1, \quad (2.7)$$

pour que l'évolution de la cible laser soit représentative de celle de la supernova.

D'après les relations (2.6), on peut définir un nombre sans dimension qui est invariant suivant la transformation (2.5) et qui s'appelle le nombre d'Euler dans les travaux de Ruytov *et al.* [26, 92, 93] :

$$\text{Eu} = \|\vec{v}\| \sqrt{\frac{\rho}{p}} = \|\vec{v}_1\| \sqrt{\frac{\rho_1}{p_1}}. \quad (2.8)$$

On remarque que ce nombre sans dimension est proportionnel au nombre de Mach : $M_a = v/C_{s0}$, où $C_{s0} = \sqrt{\gamma p/\rho}$ est la vitesse du son. On a, $\text{Eu} = M_a \sqrt{\gamma}$. Les équations (2.6) donnent une relation entre les temps caractéristiques des deux systèmes t et t_1 et les vitesses caractéristiques v et v_1 . Le temps caractéristique peut être soit la durée du passage d'un choc soit le temps de croissance d'une instabilité. Donc, une fois les grandeurs physiques r, ρ, p, t, v fixées, on peut ajuster les quantités $r_1, \rho_1, p_1, t_1, v_1$ (expérience de laboratoire, par exemple) pour que les deux systèmes soient similaires ou homothétiques. En effet, les équations d'Euler conservent leurs formes si $\text{Eu} = \text{Eu}_1$ [Éq. (2.8)] et si les temps caractéristiques sont reliés par l'équation (2.6) ou (2.7). Dans ce cas, les deux systèmes ont alors le même comportement et les mêmes propriétés physiques.

Si les quantités relatives à la cible sont repérées par l'indice "1", alors on peut obtenir les valeurs numériques des paramètres a, b et e puis en déduire la correspondance entre le temps t et t_1 , et les pressions p et p_1 .

Pour une supernova et une cible, on a respectivement des échelles spatiales, des densités et des vitesses satisfaisant typiquement $r = 10^{12}$ cm, $r_1 = 10^{-2}$ cm ; $\rho = 5 \times 10^{-3}$ g/cm³ (densité moyenne d'une masse égale à $10 M_\odot$ répartie dans une sphère de rayon r), $\rho_1 = 10^{-5}$ g/cm³ (hélium contenu dans un micro-ballon avec une pression initiale valant le dixième de la pression atmosphérique à $T_1 = 300$ K) et $v = 10^9$ cm/s, $v_1 = 10^7$ cm/s respectivement la vitesse de la matière dans la

supernova et dans la cible ³. Avec ces ordres de grandeur, on trouve :

$$a = 10^{14}; b = 5 \times 10^2; e = 10^2. \quad (2.9)$$

Dans ces conditions, le rapport entre les deux t et t_1 vaut $t/t_1 = 10^{12}$ [voir Éq. (2.7)] et, en conséquence, une durée d'une nanoseconde pour la cible (la nanoseconde est le temps caractéristique typique d'évolution des cibles lasers) correspond à une durée de 1000 secondes pour la supernova. Comme nous l'avons vu, c'est l'ordre de grandeur du temps qu'il faut au choc de rebond d'une SN de type II pour parcourir la distance entre le centre et la surface de l'astre.

Enfin, pour le rapport des pressions, nous trouvons $p/p_1 = 5 \times 10^6$. Comme la pression p_1 a été prise à 1/10 d'atmosphère ($\simeq 10^4$ Pa), on obtient $p \simeq 5 \times 10^{10}$ Pa. Cette valeur correspond à la valeur moyenne, que l'on peut trouver pour un progéniteur d'une SN de type II. En effet, comme la densité moyenne vaut $\rho = 5 \times 10^{-3}$ g/cm³, puis en prenant une température moyenne de 10 millions de Kelvin (elle est beaucoup plus élevée au centre du progéniteur, mais plus faible dans les couches périphériques) et une masse moyenne par particule valant deux fois la masse du proton (on fait l'approximation que même les éléments lourds sont complètement ionisés et que le nombre de masse vaut environ deux fois le numéro atomique), la loi des gaz parfait⁴ conduit à $p \simeq 10^{11}$ Pa. Cette valeur est en bon accord avec celle calculée plus haut.

Pour terminer, on peut comparer les nombres d'Euler. Dans le cas de la cible et celui de la SN, on trouve respectivement $Eu_1 \simeq 100$ et $Eu \simeq 70$. Ces deux valeurs sont très proches et on en déduit que la transformation (2.5) peut être utilisée pour passer de la cible à la SN.

³Les ondes de chocs produites dans la matière par des lasers se propagent typiquement à 100 km/s. Il en est approximativement de même pour la vitesse de la matière mise en mouvement par le choc.

⁴On sait que cette formule n'est pas valide, mais on peut estimer qu'elle donne un bon ordre de grandeur de la pression.

2.4 Validité des équations d'Euler

Bien qu'il existe des lois d'échelle pour les équations d'Euler, il faut se souvenir qu'elles ne sont valables que si l'on tient compte du caractère collisionnel des fluides et si l'on néglige les effets dissipatifs tels que la viscosité, le transport thermique et le rayonnement. Par ailleurs, sachant que le champ magnétique est important dans les RSN, on examine son effet dans la section 2.4.2, mais dans un premier temps on le néglige (section 2.4.1).

Maintenant, nous allons vérifier ces hypothèses. À partir des deux systèmes physiques considérés, on peut déterminer les paramètres importants permettant d'appliquer les équations d'Euler [26].

2.4.1 Effets collisionnels

Pour appliquer les équations de l'hydrodynamique, il est nécessaire que les fluides soient collisionnels. Autrement dit, que le libre parcours moyen entre deux collisions l_c soit petit devant l'échelle caractéristique de l'écoulement ($r = 0,02$ pc ou $r_1 = 100 \mu\text{m}$). Avec une température typique de 400 eV et une densité $\rho \simeq 10^{-20} \text{g cm}^{-3}$ pour le RSN, et 15 eV et 10g cm^{-3} pour la cible laser (on considère une cible hémisphérique de cuivre, voir le chapitre VII), on obtient [26, 107] pour le RSN :

$$\frac{l_c}{r} \simeq 3 \times 10^{-4},$$

et pour la cible laser :

$$\frac{l_c}{r_1} \simeq 7 \times 10^{-6}.$$

Donc les plasmas sont collisionnels dans les deux cas.

Viscosité

Pour pouvoir négliger les effets de diffusion de quantité de mouvement (viscosité), le nombre de Reynolds, Re , de chaque écoulement doit être très grand devant un. Ce nombre est le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité

($Re = rv/\nu$, où ν est la viscosité cinématique). Dans le cas du reste de supernova, on obtient [26, 107, 108] :

$$Re \simeq 3 \times 10^4,$$

et pour la cible laser :

$$Re_1 \simeq 3 \times 10^8.$$

Ce nombre est en accord avec les valeurs maximales données dans [108]. Dans les deux systèmes, le nombre de Reynolds est très grand et on peut, donc, négliger les effets dissipatifs dus à la viscosité.

Transport thermique

Si l'on désire négliger les effets du transport thermique (conduction thermique), le nombre de Péclet de chaque écoulement doit être très grand devant un. Ce nombre est le rapport entre le transport de chaleur par convection et celui effectué par conduction ($Pe = rv/\chi$, χ étant la diffusivité thermique). Dans le cas du reste de supernova, on obtient [26, 107] :

$$Pe \simeq 3 \times 10^2,$$

et pour la cible laser :

$$Pe_1 \simeq 6 \times 10^4.$$

Par conséquent, l'effet de diffusion thermique est négligeable dans les deux cas.

2.4.2 Effets du champ magnétique

Les observations des restes de supernovae montrent que la matière éjectée est soumise à un champ magnétique ambiant. Notamment, dans le cas de la nébuleuse du Crabe, on peut considérer que le fluide baigne dans un champ magnétique valant $B \simeq 540 \mu\text{Gauss}$ [5]. D'une manière générale, on pense que le champ magnétique dans les RSN varie de 10 à 100 μGauss [26, 109]. Dans le cas de la nébuleuse du Crabe, le libre parcours moyen des ions du plasma est donné par le rayon de

Larmor r_{Li} , et la condition de localisation des particules devient [26, 107] :

$$\frac{r_{Li}}{r} \simeq 10^{-10}.$$

En conséquence, le champ magnétique maintient les particules piégées dans les RSN et il renforce la localisation des particules. Ceci assure une meilleure validité des équations de l'hydrodynamique, et, de plus, il diminue les effets diffusifs, ce qui a tendance à augmenter encore la valeur des deux nombres Re et Pe.

2.4.3 Effets du rayonnement

Maintenant, quant est-il des pertes radiatives et de leur influence sur l'hydrodynamique? Dans le cas des restes de supernovae, le libre parcours moyen des photons, l_b (l'indice "b" provient du mot bremsstrahlung), est dû au Bremsstrahlung inverse [26]; on obtient $l_b = 10^{38}$ cm. Cette dimension est bien supérieure aux dimensions de l'objet étudié, le plasma est donc transparent. Il est donc nécessaire de connaître le temps τ_c (l'indice "c" provient de cooling) de refroidissement d'un tel milieu et de le comparer au temps caractéristique hydrodynamique $\tau = r/v$. D'après la relation (24) dans l'article de Ryutov *et al.* [26], on a :

$$\tau_c(s) = 4,0 \times 10^{-36} \times \frac{A(Z+1)T}{Z\rho\Lambda_N}$$

avec : $\Lambda_N = 1,7 \times 10^{-25} T^{1/2}$, T en eV, ρ en g cm^{-3} et avec A et Z respectivement le nombre de masse et l'ionisation moyenne de l'élément considéré.

Pour les conditions précédentes sur les SN et pour $Z = 1$ et $A = 1$ (hydrogène), on trouve $\tau_c/\tau = 5$. Donc l'effet du rayonnement commence à se faire sentir, mais en première approximation, on peut le négliger.

En ce qui concerne la cible laser $l_b = 10^{-9}$ cm et dans ce cas le plasma peut être considéré comme opaque. On peut supposer que le milieu est un corps noir et estimer le temps caractéristique τ_{bb} ("bb" comme blackbody) de refroidissement de ce plasma. L'équation (22) dans l'article Ryutov *et al.* [26] donne :

$$\tau_{bb}(s) = 0,7 \frac{(Z+1)\rho r}{AT^3}.$$

On obtient $\tau_{bb} = 10^{-6}$ s avec $A = 64$ et $Z = 3$ (cuivre). Dans ce cas τ_{bb} est très supérieur à τ . Les pertes par rayonnement peuvent donc être négligées.

En conclusion, la validité des équations d’Euler est plutôt assez bien justifiée pour les deux objets étudiés et ils sont reliés par une loi de similitude. Ces conditions réunies permettent de réaliser des expériences “mimant” diverses phases de l’évolution hydrodynamique des restes de supernovae.

2.5 Expériences et motivations

L’instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) joue un rôle très important dans les différentes phases d’évolution des supernovae (SN) [94] – voir aussi le chapitre I, mais nous y revenons également dans le chapitre III :

Lors de l’explosion, c’est à dire, après l’effondrement du cœur de fer, les couches internes de l’étoile sont décélérées par les couches externes et l’IRT se développe rapidement. Les couches profondes et denses se mélangent avec les couches peu denses en surface. Comme nous l’avons vu, cette instabilité a permis de comprendre certaines observations faites lors de l’explosion de la supernova 1987A. Des expériences de laboratoire étudiant ce mécanisme, ont été réalisées permettant de simuler certaines phases d’évolution hydrodynamique des explosions de supernova [94, 110].

Dans les années 90, des expériences sur des installations lasers telles que NOVA ou Phébus ont permis d’étudier le développement l’IRT dans les supernovae [100, 111]. Ces expériences offrent la double possibilité de tester à la fois les modèles astrophysiques et les modèles dédiés à l’expérimentation laser.

Récemment, des progrès importants dans la fabrication des cibles ont permis de tester de nouvelles configurations : en géométrie divergente ou en géométrie plane avec des perturbations de surface multimodes [110, 112]. En particulier, l’expérience réalisée par Drake *et al.* [110] (voir la figure 2.1) a été consacrée à l’étude de l’IRT en phase de décélération en géométrie divergente et de son développement sur la face externe d’une coquille en expansion. Cette situation correspond à celle

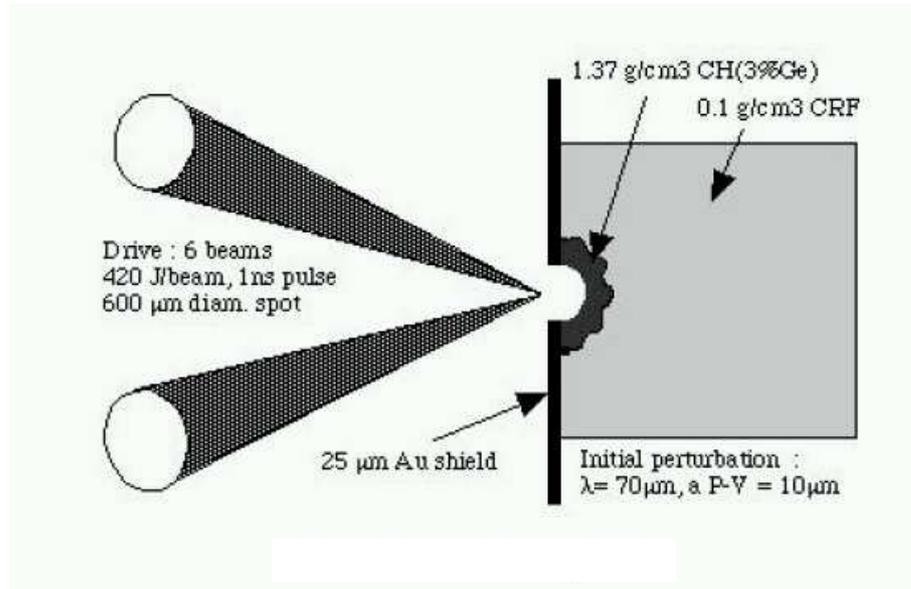


Figure 2.1: Expérience dédiée à l'étude de l'IRT en géométrie divergente effectuée sur l'installation laser Omega [110]. L'abréviation P-V signifie "Peak-to-Valley" et correspond à l'amplitude de la perturbation.

que l'on retrouve lors de l'explosion de SN, lorsque la couche d'hélium (perturbée) est décélérée par la couche d'hydrogène. Le schéma de l'expérience est présenté sur la figure 2.1. L'hélium est remplacé par du plastique (CH) et l'hydrogène par une mousse poreuse (CRF : "Carbonized Resinol Formaldehyde").

Bien que la géométrie de cette expérience soit assez identique à celle que nous allons présenter dans cette thèse lors du chapitre VII, le développement de l'IRT n'est pas situé au même endroit.

En effet, comme nous l'avons décrit au chapitre I, après l'explosion de la supernova, un pulsar peut se former et interagir avec la coquille formée dans les éjectas (plérion). La pression exercée par le rayonnement qu'il émet, accélère la coquille et l'instabilité de Rayleigh-Taylor peut se développer sur sa face interne et conduire à sa fragmentation (figure 1.10). L'expérience que l'on propose, étudie l'IRT lors de cette phase d'accélération en géométrie divergente (chapitre VII).

CHAPITRE III

Instabilités hydrodynamiques

3.1 Développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor

L'étude de la stabilité d'un système physique est un problème complexe qui peut être étudié via la théorie des perturbations.

L'étude perturbative pour un système physique régit par les équations de l'hydrodynamique, fait apparaître des termes non-linéaires. La linéarisation de ces équations consiste à les négliger pour ne garder que ceux qui sont linéaires. Le domaine linéaire est intéressant à plus d'un titre. Il simplifie le problème physique et permet d'utiliser le principe de superposition. En effet, dans ce cas, les solutions propres (ou modes propres) sont linéairement indépendantes et toute perturbation peut être décomposée en une somme de modes propres.

En hydrodynamique, les instabilités peuvent apparaître à la surface de séparation entre deux fluides. Il en existe plusieurs types :

- l'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) qui apparaît entre deux fluides perturbés dans un champ d'accélération [10, 113],
- l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui se produit lorsque les deux fluides perturbés possèdent des vitesses tangentielles [114, 115],
- l'instabilité de Richtmyer-Meshkov qui se développe lors du passage d'un choc à travers une interface perturbée ou non [116, 117].

La liste n'est pas exhaustive, d'autres types d'instabilités existent comme on peut le voir, par exemple, dans les travaux de Chandrasekhar [118].

Dans le chapitre I, nous avons indiqué que l'instabilité Rayleigh-Taylor est primordiale dans la compréhension de l'évolution des restes de supernovae. C'est Lord Rayleigh [10] qui le premier a réalisé une étude de la stabilité d'une interface entre deux fluides de densités différentes dans un champ de pesanteur. Ensuite, Taylor [113] généralisa le problème pour deux fluides dans un champ d'accélération.

L'IRT est présente dans de nombreux systèmes physiques :

- en astrophysique, comme nous l'avons déjà vu [5, 6, 7],
- en météorologie avec la formation des nuages [10] (voir Fig. 3.1),
- dans le cadre de la fusion par confinement inertiel (FCI) lors de l'implosion d'une coquille par laser [119],
- dans le domaine de la sonoluminescence, lors de l'implosion, par ondes sonores, d'une bulle de gaz plongée dans un fluide [120], etc...



Figure 3.1: Développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor lors d'un orage. On distingue les structures régulières formées par l'amplification d'une perturbation sur la face inférieure (c'est-à-dire vers le sol) des nuages.

Pour mieux comprendre cette instabilité, on considère deux fluides incompressibles superposés de densité ρ^+ et ρ^- dont l'interface η est perturbée (voir la

figure 3.2). À ces deux fluides on applique un champ de pesanteur vertical noté \vec{g} . On va montrer que le principe fondamental de la dynamique (loi de Newton) permet d'étudier cette instabilité.

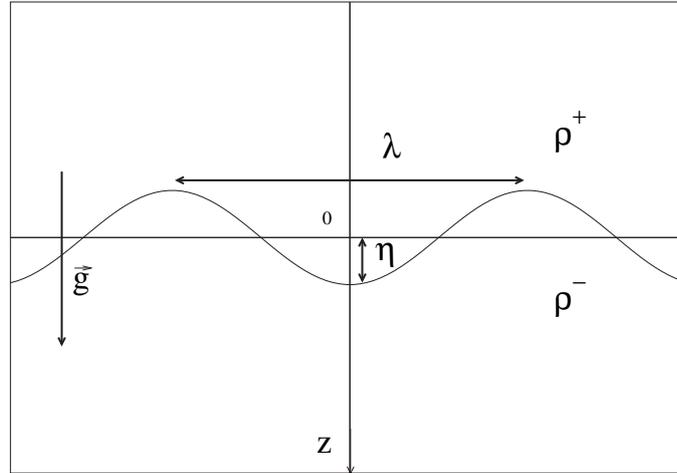


Figure 3.2: Représentation de l'interface perturbée de longueur d'onde λ dans un champ de pesanteur \vec{g} . Les milieux séparés par l'interface ont des densités notées ρ^+ et ρ^- , dans la partie supérieure et dans la partie inférieure, respectivement.

On considère une section S élémentaire, projetée sur l'horizontale et appartenant à l'interface perturbée. Ce morceau d'interface est soumis aux forces de pression p^+S et p^-S qui agissent respectivement au dessus et au dessous de celui-ci. Bien que cet élément d'interface ne possède pas de masse, son mouvement va provoquer un déplacement des masses de fluide, situées à la verticale de S et notées m^+ et m^- (m^+ représente la masse au dessus de S et m^- (m^+ représente la masse au dessus de S et m^- au dessous).

En conséquence, l'équation du mouvement de l'élément d'interface fait apparaître le terme d'inertie $(m^+ + m^-)\gamma_z$ où γ_z est l'accélération projetée selon l'axe vertical et en prenant en compte les forces de pression mentionnées plus haut, il vient :

$$S(p^+ - p^-) = (m^+ + m^-)\gamma_z.$$

Naturellement les pressions p^+ et p^- peuvent être obtenues en prenant en compte les masses des fluides “+” et “-” contenus dans la colonne de section S . Cependant, comme nous sommes partis d’un équilibre hydrostatique, il suffit de calculer, l’écart au 1^{er} ordre. Les pressions perturbées $p^{+,-}$ s’écrivent :

$$p^{+,-} = p_0 + \frac{dp_0}{dz}\eta = p_0 + \rho^{+,-}g\eta,$$

où p_0 est la pression hydrostatique qui satisfait $dp_0/dz = \rho g$. En mettant, ensuite, le terme d’inertie sous la forme :

$$(m^+ + m^-)\gamma_z = (\rho^+ + \rho^-)S\lambda \frac{d^2\eta}{dt^2},$$

l’équation du mouvement devient :

$$(\rho^+ - \rho^-)g\eta = (\rho^+ + \rho^-)\lambda \frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

Comme l’équation différentielle est linéaire à coefficient constants, on peut supposer que $\eta = e^{\omega t}$, où ω définit le taux de croissance de l’instabilité. L’identification des membres de gauche et de droite de l’équation différentielle conduit à :

$$\omega = \sqrt{A_t k g},$$

avec $k = 2\pi/\lambda$ et $A_t = (\rho^+ - \rho^-)/(\rho^+ + \rho^-)$ est appelé le nombre d’Atwood. Ce nombre sans dimension reflète la discontinuité (ou gradient) de densité qui existe à l’interface. Pour que l’instabilité croisse avec le temps, il est nécessaire que ω soit positif. Cela implique que le produit gA_t soit positif, donc que g et A_t soient de même signe. Dans notre cas, g est positif suivant l’axe z donc l’instabilité apparaît si $\rho^+ > \rho^-$, c’est à dire, lorsqu’un fluide dense tombe dans un fluide moins dense, on dit autrement, lorsqu’un fluide peu dense décélère un fluide plus dense. La relation donnant le taux de croissance montre que pour qu’une instabilité puisse croître, il est nécessaire d’avoir trois ingrédients : une perturbation de nombre d’onde k , une accélération g et un saut de densité donné par A_t . On retrouve ainsi rapidement le taux de croissance classique de l’instabilité de Rayleigh-Taylor [10]. Cependant, on montre au cours du chapitre IV, que cette formulation est simplifiée et qu’en particulier elle ne prend pas en compte la compressibilité des fluides considérés (on a supposé ici que les densités ρ^+ et ρ^- étaient constantes).

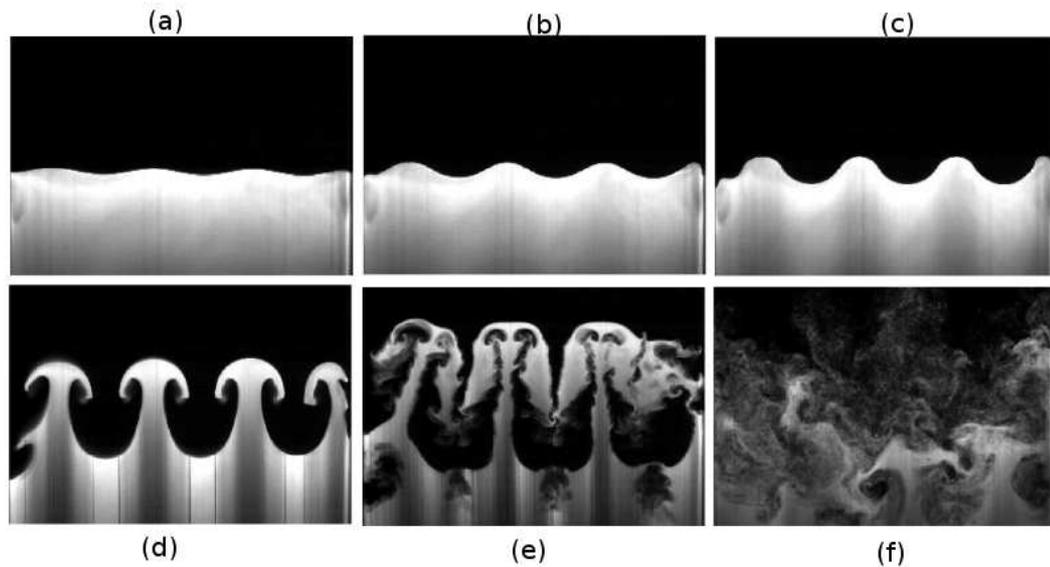


Figure 3.3: Développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor lors d'une expérience réalisée par J. Jacobs *et al.* voir le site <http://fluidlab.web.arizona.edu/rayleigh.html>. On distingue toutes les phases de développement de l'instabilité. La phase linéaire (a)-(c), la phase non-linéaire (d)-(e) et la phase turbulente (f).

La figure 3.3 représente les résultats d'une expérience permettant de visualiser l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Il s'agit d'accélérer deux fluides de densité différents dont l'interface est soumise à une perturbation initiale sinusoïdale (Fig. 3.3a). Le fluide lourd est situé en bas et le fluide léger en haut. Initialement, les deux fluides sont au repos et stables dans le champ de pesanteur. On accélère les fluides vers le bas en sur-compensant l'accélération de la pesanteur. Ceci génère un champ de pesanteur "équivalent" dirigé vers le haut. Si l'on suit l'interface entre les deux fluides au cours du temps, on peut réaliser une série de clichés, qui montrent comment le fluide lourd (en bas) tombe (suivant la direction du champ de pesanteur "équivalent") vers le haut dans le fluide léger. L'instabilité de Rayleigh-Taylor peut donc se développer. Les figures 3.3a-b-c montrent le développement linéaire de l'instabilité. La perturbation sinusoïdale croît mais reste approximativement sinusoïdale (elle reste symétrique par rapport à une interface plane non perturbée). Cette phase croît exponentiellement.

La phase non-linéaire, est visible sur les figures 3.3c-d-e. La forme sinusoïdale de l'interface initiale se déforme et l'on voit se développer une structure caractéristique en forme de champignons. L'instabilité commence à saturer, c'est à dire qu'elle ne croît plus exponentiellement. Cette structure en champignon est la signature de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui se développe lorsque deux fluides perturbés ont une vitesse de cisaillement. Cependant, on voit nettement des pics de fluide lourd monter dans le fluide léger et des bulles de fluide léger descendre dans le fluide lourd, ce qui est la signature de l'IRT non-linéaire. La perturbation devient non symétrique par rapport à l'interface initiale non-perturbée. Plus tardivement, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz commence à se développer à toutes les échelles et elle conduit à la phase turbulente figure (3.3d-f). Une fois la turbulence complètement développée, la distinction entre les deux fluides de départ devient difficile puisqu'il se crée une zone de mélange.

D'un point de vue théorique, la phase linéaire et la phase faiblement non-linéaire de l'IRT sont relativement bien étudiées [121, 122, 123]. La phase fortement non-linéaire et turbulente est plus complexe et demande des outils analytiques difficiles à manipuler [106, 124, 125, 126]. Cependant, il reste des points importants à étudier dans la phase linéaire. Dans cette thèse, nous allons étudier les effets de la compressibilité pour un fluide isotherme qui répond à une ancienne controverse sur le sujet. Ensuite, la phase non-stationnaire de l'IRT en géométrie sphérique sera traitée. Cette étude se fera toujours dans le soucis d'une application astrophysique, notamment dans l'expansion de restes de supernovae.

3.2 Effets de compressibilité sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor

Dans l'évolution des restes de supernovae, tous les paramètres tels que accélération-décélération, gradient de densité et perturbation sont regroupés pour que puisse se développer l'IRT. Comme nous l'avons montré dans le chapitre I dans certaines phases de leur évolution, les restes de supernovae peuvent être modélisés par une

coquille dense en expansion dans le milieu circumstellaire (MCS) ou interstellaire (MIS). Cette coquille est décélérée par le milieu environnant et l'interface entre la coquille dense et le MCS ou le MIS devient instable. Si, en première approximation, on traite cette phase comme un équilibre hydrostatique entre les deux milieux, on doit faire intervenir une accélération équivalente g , et on peut définir une longueur caractéristique h pour chaque milieu, $h \sim K/g$, où \sqrt{K} est la vitesse du son. Pour prendre en compte cette longueur dans l'évolution hydrodynamique de l'interface, on doit considérer les équations en régime compressible [118, 123, 127]. En pratique, cela revient à comparer la longueur d'onde λ de la perturbation à l'échelle h définie juste avant.

Des simulations numériques [50] ont montrés que la prise en compte de la compressibilité peut avoir un effet important sur le développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT). En particulier, ils montrent que le taux de croissance de l'IRT à l'interface He-CO et H-He lors de l'explosion d'une supernova sont différents. Des travaux récents [78] sur l'émission de rayons cosmiques des jeunes restes de supernovae, montrent que derrière le choc généré au voisinage de la discontinuité de contact, des taux de compression de la matière peuvent être supérieurs à 4, pour un coefficient polytropique de 5/3. Donc un gaz parfait mono-atomique n'est pas approprié pour décrire cet objet. Un choc quasi-isotherme, avec un coefficient polytropique proche de l'unité permet un taux de compression supérieur. Le cas isotherme semble plus réaliste pour les jeunes restes de supernovae [9]. C'est le point de vue que nous allons adopter au chapitre IV.

Jusqu'à ce jour, les études de l'effet de compressibilité sur le taux de croissance de l'IRT ne sont pas toujours concluantes. Selon certains travaux [11, 12], la compressibilité a un effet déstabilisant et augmente le taux de croissance. Ces résultats sont en contradiction avec d'autres travaux [13, 14] dont les auteurs concluent à un effet stabilisant sur l'IRT. De plus, certains articles [15, 128, 129] montrent que les effets de compressibilité dépendent du rapport de la vitesse du son dans les deux fluides, lequel ne peut pas être choisi arbitrairement mais dépend de l'équation d'état. L'origine de cette controverse est partiellement due au fait que le problème

n'est pas toujours posé proprement et que des comparaisons sont parfois réalisées dans des situations non comparables immédiatement. Par exemple, dans la référence [13], le cas compressible est comparé avec le cas IRT classique dans lequel la densité du fluide est uniforme, tandis que dans les travaux de Bernstein et Book [12] la comparaison se fait avec un fluide incompressible dont la densité est stratifiée.

Le débat sur les effets de compressibilité concernant le développement de l'IRT est encore un sujet d'actualité. En effet, récemment, Livescu s'est intéressé à cette question pour deux fluides idéales non-miscible [16] (voir le chapitre IV). Pour ce faire, il linéarise les équations de Navier-Stokes. Cette analyse lui permet de montrer par exemple que les effets de compressibilité sont plus importants pour un faible nombre d'Atwood (faible contraste de densité). De plus, son analyse prend en compte une variation de la constante adiabatique dans les deux fluides γ_1 et γ_2 . Il est important de souligner que cette étude est valable pour une température d'équilibre uniforme dans les deux milieux. Nous expliquerons avec plus de détails les différences entre les travaux de Livescu et notre approche sur le calcul des instabilités au cours du chapitre IV.

Ainsi, dans le chapitre IV, nous étudions l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans plusieurs configurations et nous les comparons entre elles en prenant en compte des paramètres sans dimension. Pour cela nous allons considérer, un fluide compressible, un fluide incompressible stratifié, avec les mêmes échelles caractéristiques verticales de gradient de densité, un fluide incompressible uniforme de masse finie et, enfin, un fluide incompressible uniforme d'extension infinie. Une comparaison des différentes situations est menée et elle met en lumière les effets de compressibilité sur la croissance de l'IRT. De plus, une étude approfondie du champ de vitesse dans chacun des fluides, permet de mettre en évidence des effets de la compressibilité sur la vorticité.

3.3 L'instabilité de Rayleigh-Taylor en phase instationnaire

Dans le paragraphe précédent, nous avons évoqué la phase stationnaire de l'IRT. Dans ce cas, les équations de l'hydrodynamique sont résolues en supposant qu'aucune des grandeurs physiques ne dépendent du temps (en ce qui concerne le système non perturbé). Ceci est une approximation. En effet, si les grandeurs physiques définissant l'équilibre varie temporellement, avec un temps caractéristique comparable à celui de l'IRT, on doit considérer ce problème comme instationnaire.

C'est typiquement le cas pour les éjectas d'une supernova [8, 127, 130, 131]. Ils peuvent être soumis à une accélération ou à une décélération qui varie fortement avec le temps. L'accélération peut être donnée par une interaction forte avec un objet compact au centre des RSN (cas du plérion). La décélération peut survenir par exemple, lors d'une interaction forte entre les restes de la supernova et le milieu circumstellaire puis interstellaire.

Le chapitre V et VI est consacré au développement de l'IRT dans le cas du plérion. Cet objet peut être soumis à plusieurs instabilités hydrodynamiques. En particulier, ainsi que nous l'avons vu, l'IRT peut se développer sur la face interne de la coquille durant sa phase d'accélération. Cette instabilité peut être responsable de la fragmentation de la coquille des éjectas autour du pulsar et par exemple de la structure filamentaire centrale de la nébuleuse du Crabe [5]. L'analyse de la stabilité des plérions est difficile, car la pression produite par le pulsar est non stationnaire et la distribution en densité dans la coquille est inhomogène. De plus, on doit prendre en compte la vitesse de la coquille puisqu'elle est en expansion.

En particulier, le chapitre V porte sur l'étude de l'IRT instationnaire en géométrie sphérique. De nombreux travaux analytiques existent pour des applications astrophysiques [9, 17], ou dans le domaine de la fusion par confinement inertiel (FCI) [18, 19]. Cependant, Bernstein et Book [17] ne donnent pas de relation de dispersion dans leur étude de l'IRT et Blondin et Ellison [9] étudient l'IRT dans la phase de ralentissement des éjectas (phase tardive).

Une étude analytique de l'IRT est menée dans ce chapitre à l'aide d'une méthode de changement de référentiel [20]. Il en résulte des solutions exactes avec des modes propres et la possibilité de "fabriquer" n'importe quel type de perturbation initiale, mais surtout cette méthode nous permet de donner une relation de dispersion. Par ailleurs, une comparaison de la solution analytique avec le code de perturbations Pansy [132, 133] est effectuée.

CHAPITRE IV

Instabilité de Rayleigh-Taylor stationnaire : Effets de compressibilité

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier pour un nombre d'Atwood et un gradient de densité donnés, les effets de compressibilité sur le développement de l'IRT. Pour caractériser ces effets, on étudie le taux de croissance des instabilités dans le cas où les deux fluides sont supposés isothermes, en liaison avec l'argumentation développée au paragraphe 3.2 du chapitre III, qui est pertinente pour l'objet étudié (voir aussi la fin du paragraphe 1.2 du chapitre I et l'annexe A.3). Pour cela, on considère quatre configurations : deux en fluides incompressibles uniformes (masse finie et infinie), une en fluides incompressibles stratifiés et la dernière, en fluides compressibles. Tous ces cas sont considérés comme ayant la même longueur caractéristique verticale, obtenue à partir de la vitesse du son et de l'accélération dans le cas compressible. Dans le cas incompressible, cette longueur caractéristique tend vers l'infini. De plus, tous ces cas sont caractérisés par le même nombre d'Atwood. Moyennant, ces conditions réalisées, on montre qu'une comparaison pertinente peut être effectuée. La plupart des résultats de ce chapitre ont déjà été publiés [134], cependant nous avons obtenu depuis la parution quelques résultats supplémentaires.

À peu près dans les mêmes moments, mais, néanmoins quelques mois avant, Livescu a analysé les effets de compressibilité pour l'IRT [16] et suite à notre publication [134], il a publié un commentaire [135] (voir l'annexe A.4), dans lequel, il insiste sur le fait que ce type de problème a été complètement résolu. Cependant, suite à notre réponse [136] à son commentaire [135], il a publié une autre

réponse [137], dans laquelle, il prétend que ses travaux résolvent complètement le problème, or nous pensons que ce n'est pas le cas. En effet, le problème considéré par Livescu diffère de nos préoccupations ainsi que nous allons le montrer.

Livescu s'est intéressé au problème de compressibilité pour des milieux visqueux et dont l'interface possède une tension de surface [16]. Dans son travail, il considère deux fluides non miscibles, avec une température constante à l'état initial (c'est comme si le fluide était en contact avec un thermostat, du point de vue de la thermodynamique). Cela implique que les profils spatiaux de densité sont exponentiels et que la vitesse du son est constante. De plus, dans son article Livescu [16] n'impose pas l'hypothèse de la température constante pour la perturbation. Il fait appel à une équation sur l'énergie et introduit un flux de chaleur pour rendre les deux milieux isothermes à l'équilibre (nous retrouvons ici la notion de thermostat). Par contre, lorsqu'il perturbe son système, il considère une perturbation adiabatique, c'est à dire, sans apport de chaleur ($dQ = 0 = c_v dT + p dV$), ce qui implique qu'une perturbation de densité doit engendrer une perturbation de température. En somme, à l'équilibre le système est isotherme et lorsqu'il le perturbe il est adiabatique avec des indices γ_1 et γ_2 de part et d'autre de l'interface. Donc, Livescu considère un fluide classique pour lequel l'instabilité se développe assez vite tel que le transport thermique n'a pas le temps de se développer pour établir "l'isothermalité".

Dans le contexte astrophysique, ce n'est pas le cas car le transport de chaleur peut être assuré par un flux d'électrons ou par le rayonnement. Dans le problème que nous traitons dans ce chapitre, que le système soit à l'équilibre ou perturbé, les deux milieux restent isothermes. Ceci a été expliqué dans la réponse [136]. Le temps de transport de la chaleur par rayonnement et par les électrons est très inférieur au temps de développement de l'IRT. C'est le contraire du point de vue de Livescu qui considère que le temps de relaxation de la température est très long et il fait l'hypothèse dans ses travaux [16, 135, 137] que la perturbation est adiabatique. Dans l'annexe A.4, on trouve le texte du commentaire de Livescu [135] concernant l'article de Ribeyre *et al.* [134] et la réponse au commentaire de Livescu [136] que

nous avons effectué. On trouve aussi dans cette annexe, la réponse de Livescu [137] suite à notre réponse [136].

Ici, nous considérons une autre façon de distribuer la chaleur, par rayonnement ou par un flux d'électrons [137]. En fait, le bilan de la discussion avec Livescu, montre qu'il s'agit principalement d'un malentendu sur la nature du processus physique considéré.

Notre étude fournit une synthèse des relations de dispersion connues depuis longtemps [11, 12] dans plusieurs configurations [134]. Les effets de compressibilité sont évalués en terme de la longueur d'onde critique h_c de la perturbation et la génération de vorticité est examin e. De plus, cette analyse permet de discuter des effets de compressibilité sur le développement de l'IRT dans les RSN.

Il a été montré dans le chapitre II, que si les effets de viscosité ne sont pas importants, alors la phase linéaire de l'IRT pour un RSN et pour une cible laser peut être décrite par les équations d'Euler :

$$\partial_t \rho + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{g}, \quad (4.2)$$

$$p = K\rho, \quad (4.3)$$

où ρ , \vec{v} , et p sont respectivement la densité, la vitesse et la pression et où \vec{g} est le champ de gravité. Il est clair que \vec{g} n'existe pas pour une cible laser et souvent il est négligé (voir plus loin) pour l'évolution des RSN. On ne traite dans l'étude qui suit que le modèle isotherme, dans lequel la vitesse du son est constante et s'écrit $C_{s0} = \sqrt{K}$. Cette approximation est assur e par le transport rapide de l'énergie par électrons et par photons, par exemple. Elle est appropri e dans plusieurs objets astronomiques, par exemple pour les restes de la supernova Kepler où la température au voisinage de la discontinuité de contact entre les deux milieux (RSN et MIS) varie très lentement en espace et en temps [78]. L'étude de ce reste, montre que l'émission de rayon cosmique augmente le taux de compression de la matière au voisinage de la discontinuité de contact. Dans ce cas, on peut considérer que la vitesse du son est constante de part et d'autre de cette discontinuité. Donc,

le modèle isotherme est alors pertinent (voir le chapitre III).

4.2 Géométrie du problème

Dans ce chapitre, l'IRT est étudiée en géométrie plane (on suppose que le rayon extérieur du RSN est grand) dans un champ de gravitation constant (où plus généralement, un champ d'accélération ou de décélération : ici les éjectas sont décélérés par le MIS) \vec{g} dirigé suivant l'axe vertical z (Fig. 4.1). Une petite perturbation est appliquée à l'interface $z = 0$ dans un plan perpendiculaire à l'axe z : $z_{int} = \eta_1(x, t)$.

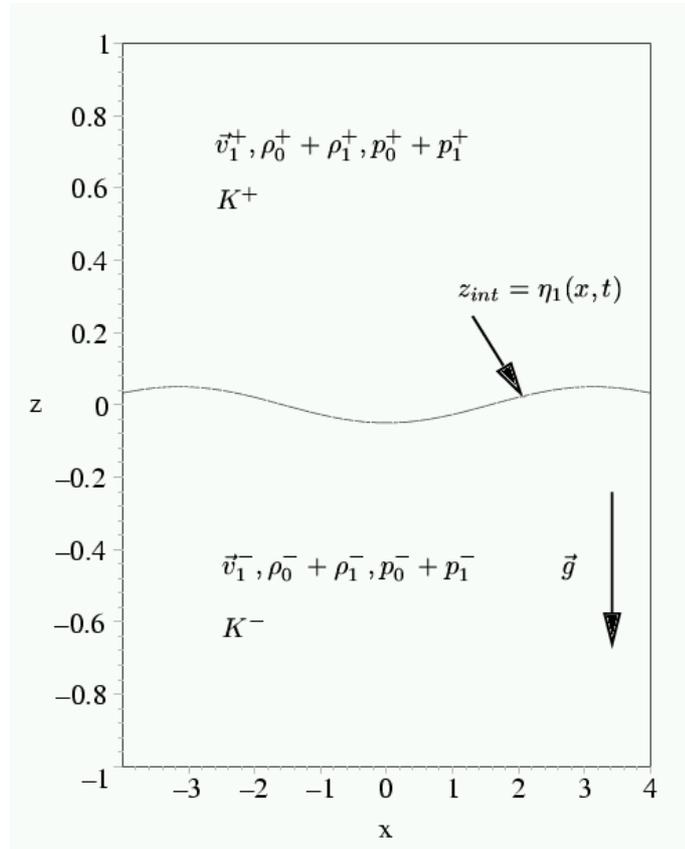


Figure 4.1: Géométrie du problème en deux dimensions : une petite perturbation $\eta_1(x, t)$ est appliquée à l'interface $z = 0$ à $t = 0$.

Dans la région $z > z_{int}$, toutes les quantités physiques sont labelisées $+$, c'est à dire, \vec{v}^+, ρ^+, p^+ , et la région $z < z_{int}$ est labelisée $-$, c'est à dire, \vec{v}^-, ρ^-, p^- . L'état

initial est supposé être l'équilibre, défini par :

$$\vec{v}_0^\pm = 0, \quad \rho_0^\pm(z), \quad p_0^\pm(z), \quad (4.4)$$

où, à l'interface, $p_0^+(0) = p_0^-(0)$. La dépendance spatiale de ces trois quantités est donnée au paragraphe 4.4.1 de ce chapitre. De plus les quantités perturbées sont notées avec l'indice 1 :

$$\vec{v}_1^\pm(x, z, t), \quad \rho_1^\pm(x, z, t), \quad p_1^\pm(x, z, t).$$

4.3 Compressibilité et effet de masse finie

Pour examiner les effets de compressibilité sur l'IRT, il est important d'étudier des caractéristiques comparables pour les configurations compressibles et incompressibles. Par exemple, nous considérons le même profil de densité dans les deux situations et, en conséquence, on obtient la même masse pour les deux fluides superposés.

Nous comparons quatre états spécifiques instables au sens de Rayleigh-Taylor. Trois d'entre eux correspondent à un cas incompressible avec des profils de densité variable et le quatrième cas est compressible (Fig. 4.2).

Dans le cas du milieu incompressible classique, cas A dans la figure 4.2, les masses des deux fluides sont infinies et les profils de densité sont uniformes. Dans le cas compressible isotherme (cas B dans la figure 4.2) les profils de densité sont exponentiels et la masse du fluide supérieur est finie. Dans le cas C, les milieux considérés sont incompressibles mais stratifiés. C'est à dire que dans ce cas, les profils de densité sont identiques à ceux du cas B. Finalement, dans le cas D, un cas incompressible avec une masse finie (pour le fluide supérieur) est présenté. La masse du milieu supérieur est choisie de telle sorte qu'elle soit égale à celle des cas B et C. Nous allons comparer le développement des instabilités dans chacun de ces cas. Une des difficultés importantes déjà énoncée plus haut, est de comparer le cas A et B car ils n'ont ni la même masse, ni le même profil de densité.

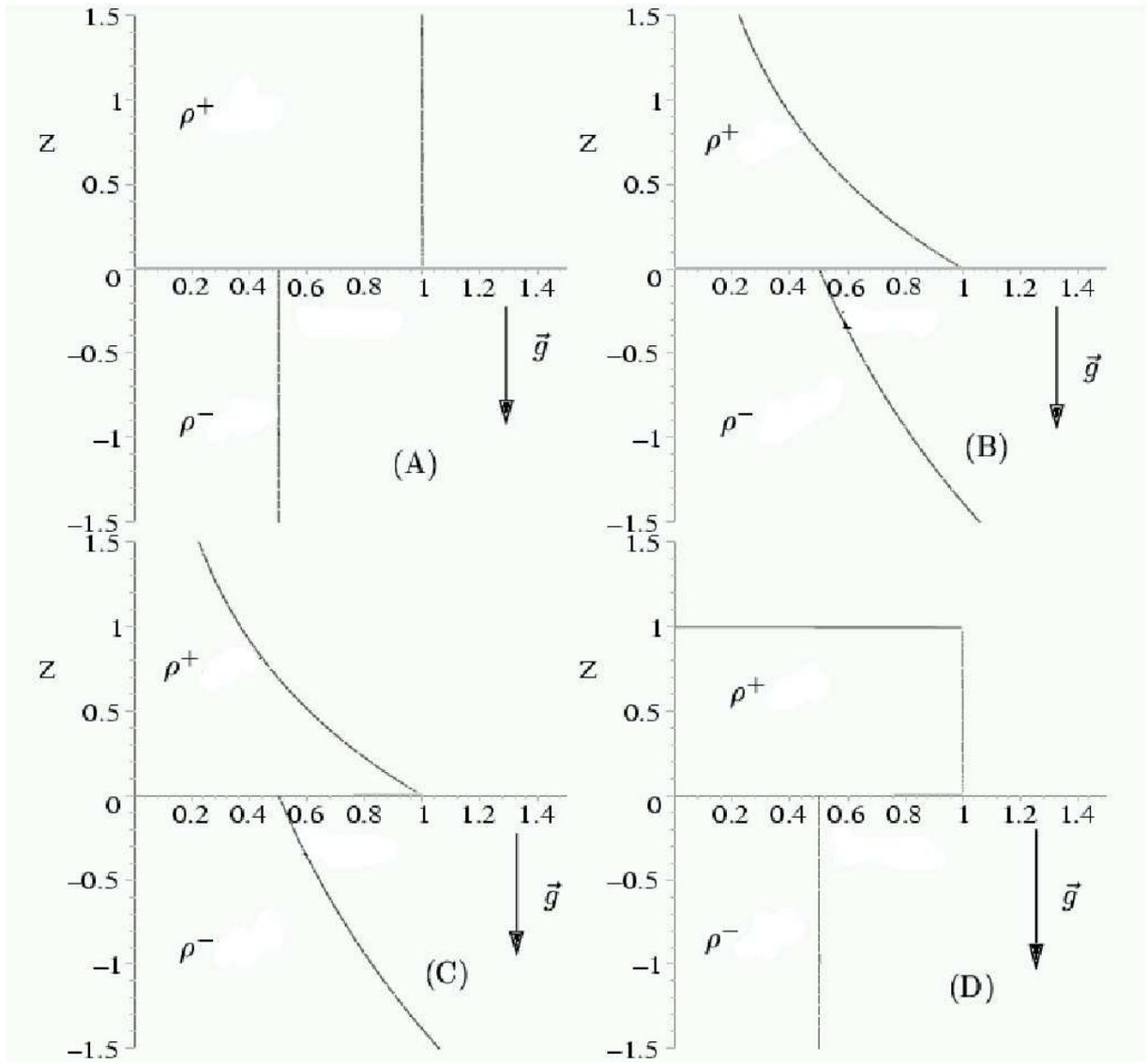


Figure 4.2: Profils de densités dans les quatre cas : A - deux fluides incompressibles uniformes (masse infinie pour les deux milieux), B - deux fluides compressibles, C - deux fluides incompressibles stratifiés (masse finie, avec les mêmes caractéristiques que le cas B), D - deux fluides incompressibles dont la masse du milieu supérieur est finie (même masse que dans les cas B et C) et infinie pour le milieu inférieur. Ces profils sont calculés analytiquement au paragraphe 4.4.1.

Dans un premier temps nous allons comparer le cas compressible B avec le cas incompressible masse finie : cas D. Bien que ces deux systèmes aient la même masse, ils n'ont pas le même profil de densité. Ensuite, la deuxième étape consiste à comparer le cas B avec le cas incompressible stratifié (cas C). Puisque les masses des deux fluides et leurs profils de densité sont identiques, la comparaison des effets de compressibilité est pertinente. Enfin le cas A va rester une situation de référence car c'est elle qui a été étudiée au tout début par Lord Rayleigh [10]. Cette configuration correspond à la relation de dispersion donnée par la formule $\omega = \sqrt{A_t k g}$ retrouvée à la fin du paragraphe 3.1 du chapitre III.

4.4 Linéarisation des équations hydrodynamiques

Nous devons linéariser les équations d'Euler pour obtenir l'évolution des quantités physiques au premier ordre. Pour cela, les équations (4.1), (4.2) et (4.3) sont exprimées dans un nouveau système de coordonnées associé à l'interface en mouvement, $z_{int} = \eta_1(x, t) : \tilde{z} = z - z_{int} = z - \eta_1(x, t)$, proposé la première fois par Mathews et Blumenthal [138] (voir l'annexe A.5). Puisque la fonction η_1 prend en compte la déformation de l'interface, la condition $\tilde{z} = 0$ est toujours valide sur l'interface. Cette procédure facilite grandement l'utilisation des conditions de saut à l'interface. En annexe A.5, on décrit avec plus de précision cette transformation de coordonnées. Dans le nouveau système, les équations de l'hydrodynamique non linéarisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) - \partial_t \eta_1 \partial_z \rho - [\partial_z(\rho \vec{v})] (\text{grad } \eta_1) &= 0, \\ \rho \partial_t \vec{v} + \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} - \rho (\partial_t \eta_1 + v_x \partial_x \eta_1 + v_y \partial_y \eta_1) \partial_z \vec{v} \\ - (\partial_z p) (\text{grad } \eta_1) &= \vec{g} \rho - \text{grad } p, \\ p &= K \rho. \end{aligned}$$

4.4.1 Fluide compressible barotrope isotherme

Un fluide est considéré comme compressible barotrope si son équation d'état est donnée par une relation de la forme $p = f(\rho)$. Dans le cas où $p = K\rho$, le fluide est alors isotherme si on suppose qu'il est décrit par une équation du type "loi des gaz parfaits". Le fluide compressible barotrope isotherme correspond au cas B dans la figure 4.2. Le système (4.1), (4.2) et (4.3) avec l'équation (4.4) à l'ordre zéro (équilibre) se réduit à une relation entre la pression et la densité :

$$d_{\tilde{z}}p_0 = -\rho_0g, \quad (4.5)$$

où le symbole $d_{\tilde{z}}$ signifie $d/d\tilde{z}$ et où $p_0 = K\rho_0$. Ceci implique un profil de densité exponentiel à l'équilibre :

$$\rho_0^\pm(\tilde{z}) = \rho_0^\pm(0) e^{-\tilde{z}/h^\pm}, \quad (4.6)$$

où $h^\pm = K^\pm/g$ est la longueur caractéristique des gradients qui existent dans le système.

Au premier ordre, les équations de l'hydrodynamique [voir annexe A.5, Éqs. (A.7), (A.8) et (A.9)] peuvent être réduites à une seule équation relative à la perturbation en densité, $\delta_1 = \rho_1/\rho_0$, dans le plan (x, \tilde{z}) :

$$\partial_{tt}\delta_1 - K(\partial_x^2 + \partial_{\tilde{z}}^2)\delta_1 + g\partial_{\tilde{z}}\delta_1 = -\frac{g}{K}\partial_{tt}\eta_1 + g\partial_x^2\eta_1, \quad (4.7)$$

$$\partial_tv_{1x} = -K\partial_x\delta_1 - g\partial_x\eta_1, \quad \partial_tv_{1z} = -K\partial_{\tilde{z}}\delta_1. \quad (4.8)$$

On note que les conditions de saut à l'interface sont données par, $p^+(0) = p^-(0)$ et $\partial_t\eta_1 = v_{1z}^\pm(0)$ [voir annexe A.5 Éq. (A.11)]. La constante K prend des valeurs différentes K^+ et K^- de part et d'autre de l'interface. Les équations sont résolues en prenant des conditions évanescentes comme conditions aux limites : $\delta_1 \rightarrow 0$ lorsque $\tilde{z} \rightarrow \pm\infty$.

L'hypothèse perturbative permet d'utiliser le principe de superposition et de décrire le fluide perturbé comme une somme de modes linéairement indépendants. Nous supposons que toute quantité perturbée évolue en temps et en espace proportionnellement à $e^{\omega t + ikx}$. Plus précisément, $\bar{\delta}_1$ est relié à δ_1 par : $\delta_1 = \bar{\delta}_1(\tilde{z})e^{\omega t + ikx}$.

Alors la perturbation en densité $\bar{\delta}_1$ est la partie de δ_1 qui ne dépend ni de x ni de t . La perturbation $\bar{\delta}_1$ est solution de :

$$-K d_{\tilde{z}}^2 \bar{\delta}_1 + g d_{\tilde{z}} \bar{\delta}_1 = -(\omega^2 + Kk^2) \bar{\delta}_1 - \frac{g}{K} a(\omega^2 + Kk^2), \quad (4.9)$$

où a est l'amplitude de la perturbation de l'interface qui à été écrite sous la forme $\eta_1(x, t) = a \exp(\omega t + ikx)$.

Une solution particulière de cette équation est $\bar{\delta}_1 = -a/h$ et comme les coefficients de l'équation différentielle ne dépendent pas de \tilde{z} , la solution générale peut être recherchée sous la forme : $\bar{\delta}_1 = -a/h + S e^{m_c \tilde{z}}$, où S et m_c sont respectivement une constante et un coefficient (dont la dimension est l'inverse d'une longueur) à déterminer. L'équation différentielle conduit à l'équation algébrique pour m_c :

$$K m_c^2 - g m_c = \omega^2 + Kk^2, \quad (4.10)$$

qui a deux solutions :

$$m_{c1,2} = \frac{1}{2h} \pm \sqrt{\frac{1}{4h^2} + \frac{\omega^2}{K} + k^2}. \quad (4.11)$$

Dans chaque famille de solution, nous pouvons éliminer une constante en considérant les conditions aux limites évanescentes. Pour satisfaire cette condition, m_c doit être réel et non nul. De plus, dans le demi-espace supérieur, $\tilde{z} > 0$, on a $m_c^+ < 0$ [on prend la racine précédée du signe négatif dans (4.11)], et pour le demi-espace inférieur $m_c^- > 0$ [on prend la racine précédée du signe positif dans (4.11)].

Au final, dans chacun des milieux + ou -, la solution s'écrit :

$$\bar{\delta}_1^\pm(\tilde{z}) = S^\pm e^{m_c^\pm \tilde{z}} - a \frac{g}{K^\pm}, \quad (4.12)$$

avec :

$$m_c^\pm = \frac{g}{2K^\pm} \mp \sqrt{\left(\frac{g}{2K^\pm}\right)^2 + \frac{\omega^2}{K^\pm} + k^2}. \quad (4.13)$$

La valeur des constantes restantes, c'est à dire S^+ et S^- , est obtenue à partir des conditions de saut. Depuis l'équation (4.8) et la condition $\partial_t \eta_1 = v_{1z}^\pm(0)$, on obtient :

$$S^\pm = -\frac{\omega^2}{K^\pm m_c^\pm} a. \quad (4.14)$$

À l'aide de cette relation nous pouvons déduire le champ de vitesse en intégrant les équations (4.8) et le profil de perturbation de pression. D'après la décomposition en $e^{\omega t + ikx}$, les solutions instables correspondent à ω positif. Les perturbations de la pression et de la vitesse peuvent s'exprimer en fonction de l'amplitude de la perturbation, a , au niveau de l'interface $\eta_1(x, t) = a e^{\omega t} \cos kx$, où l'exponentielle imaginaire e^{ikx} a été remplacée par la fonction oscillante $\cos(kx)$. Dans ces conditions, la perturbation en vitesse devient :

$$v_{1x}^{\pm}(x, \tilde{z}, t) = -a \frac{k\omega}{m_c^{\pm}} e^{m_c^{\pm} \tilde{z} + \omega t} \sin kx, \quad (4.15)$$

$$v_{1z}^{\pm}(x, \tilde{z}, t) = a\omega e^{m_c^{\pm} \tilde{z} + \omega t} \cos kx, \quad (4.16)$$

et les perturbations de densité et de pression s'écrivent :

$$\rho_1^{\pm}(x, \tilde{z}, t) = -\rho_0^{\pm}(\tilde{z}) \frac{a}{K^{\pm}} \left(\frac{\omega^2}{m_c^{\pm}} e^{m_c^{\pm} \tilde{z}} + g \right) e^{\omega t} \cos kx, \quad (4.17)$$

$$p_1^{\pm}(x, \tilde{z}, t) = -\rho_0^{\pm}(\tilde{z}) a \left(\frac{\omega^2}{m_c^{\pm}} e^{m_c^{\pm} \tilde{z}} + g \right) e^{\omega t} \cos kx. \quad (4.18)$$

On peut remarquer que l'amplitude de la composante de la vitesse selon x est proportionnelle à celle selon z d'après la relation $v_{1x} \approx (k/m_c)v_{1z}$. Si $kh \gg 1$, alors l'équation (4.11) donne $m_c \sim k$ et on obtient $v_{1x} \approx v_{1z}$. Cette situation correspond à un fluide très peu compressible ($\lambda \ll h$) et une perturbation sur la position d'un élément de fluide se traduit par des vitesses du même ordre de grandeur selon les directions indépendantes x et z .

Dans le domaine $kh \ll 1$, on trouve, de façon inattendue, que dans le milieu dense $v_{1x}^+ \gg v_{1z}$ (on omet l'exposant "+" pour v_{1z} car on sait qu'à l'interface, on a $v_{1z}^+ = v_{1z}^-$; la valeur commune est alors notée v_{1z}). Donc pour $\lambda \gg h$, l'effet de compressibilité tend à imposer un écoulement préférentiellement selon une direction perpendiculaire à \vec{g} (voir la Fig. 4.4B). Par contre, dans le milieu peu dense $v_{1x}^- \ll v_{1z}$. Autrement dit, pour $\lambda \gg h$, l'effet de compressibilité devient important et le fluide se densifie en s'écoulant préférentiellement selon la direction de l'accélération \vec{g} . Comme celle-ci est orientée selon l'axe z , on trouve qu'il y a très peu de mouvement selon x (voir la Fig. 4.4B).

Remarque : comme pour les grandes longueurs d'onde $\omega \propto k$ (voir plus loin),

on a $v_{1z} \propto k$ d'après l'équation (4.16). Par ailleurs, comme dans le milieu $-$, $m_c^- \rightarrow \text{constante}$, alors $v_{1x}^- \propto k^2$. On retrouve donc bien la propriété $v_{1x}^- \ll v_{1z}$. En revanche, dans le milieu $+$, $m_c^+ \rightarrow k^2$ alors $v_{1x}^+ \propto \text{constante}$ et, dans ce cas, on retrouve bien le comportement $v_{1x}^+ \gg v_{1z}$.

Par ailleurs, il est à noter que l'écoulement est irrotationnel, $\text{rot } \vec{v}_1 = 0$. Ceci peut être vérifié directement à partir du champ de vitesse perturbé (4.15) et (4.16).

Enfin, pour obtenir la relation de dispersion, nous utilisons la condition de continuité de la perturbation en pression au niveau de l'interface : $p_1^+(0) = p_1^-(0)$. À partir des équations (4.12) et (4.14) nous trouvons la relation entre le taux de croissance ω et le nombre k sous la forme [12] :

$$\omega^2 = g \frac{\rho_0^+(0) - \rho_0^-(0)}{-\rho_0^+(0)/m_c^+ + \rho_0^-(0)/m_c^-}, \quad (4.19)$$

où il est nécessaire de rappeler que m_c^+ et m_c^- dépendent de ω et k par l'intermédiaire de l'équation (4.13).

Il est important de remarquer que pour $A_t = 1$, c'est à dire pour $\rho_0^-(0) = 0$, la relation ci-dessus se simplifie et on obtient, $\omega = \sqrt{kg}$. Le taux de croissance est identique à celui déduit pour le cas incompressible dans lequel on fait aussi $A_t = 1$. Ce résultat semble montrer que dans cette configuration les effets de compressibilité n'affectent pas le taux de croissance de l'IRT.

4.4.2 Fluide incompressible

La limite incompressible (cas A) peut être obtenue directement à partir des équations de l'hydrodynamique en posant formellement K tendant vers l'infini. Le système (4.1), (4.2) et (4.3) avec la condition (4.4) et pour une densité ρ_0 prise constante donne, à l'ordre zéro, l'équation (4.5). Au premier ordre, le système se réduit à des équations sur les perturbations de vitesse et de pression :

$$\partial_x v_{1x} + \partial_z v_{1z} = 0, \quad (4.20)$$

$$\rho_0 \partial_t v_{1x} = -\partial_x p_1 - \rho_0 g \partial_x \eta_1, \quad \rho_0 \partial_t v_{1z} = -\partial_z p_1. \quad (4.21)$$

Ces équations s'obtiennent à partir de (4.7) et (4.8) lorsque K tend vers l'infini et $\rho_1 \rightarrow 0$ (perturbation incompressible) mais avec le produit $K\rho_1$ fini et valant p_1 . Notons que l'équation (4.7), dans la limite incompressible, se réduit à l'équation de Bernoulli (voir [72] p. 67) :

$$(\partial_x^2 + \partial_{\tilde{z}}^2)p_1 + \rho_0 g \partial_x^2 \eta_1 = 0.$$

La relation de dispersion est obtenue à partir des équations (4.20) et (4.21). Elle peut aussi être obtenue directement depuis l'équation (4.19). En posant K^\pm tendant vers l'infini dans l'équation (4.13), on trouve : $m_c^\pm = \mp k$. Ceci implique :

$$\omega^2 = kg \frac{\rho_0^+(0) - \rho_0^-(0)}{\rho_0^+(0) + \rho_0^-(0)} = kg A_t. \quad (4.22)$$

Nous retrouvons le taux de croissance "classique" de l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour un fluide incompressible uniforme donné dans le chapitre III.

Le comportement spatial et temporel des grandeurs physiques perturbées est déduit du cas compressible (4.15) et (4.16) pour la limite K^\pm tendant vers l'infini. Comme, $\rho_1^\pm(x, \tilde{z}, t) = 0$, on a pour les trois autres grandeurs physiques :

$$\begin{aligned} v_{1x}^\pm(x, \tilde{z}, t) &= \pm a \omega e^{\mp k\tilde{z} + \omega t} \sin kx, \\ v_{1z}^\pm(x, \tilde{z}, t) &= a \omega e^{\mp k\tilde{z} + \omega t} \cos kx, \\ p_1^\pm(x, \tilde{z}, t) &= -\rho_0^\pm a \left(\mp \frac{\omega^2}{k} e^{\mp k\tilde{z}} + g \right) e^{\omega t} \cos kx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ainsi que nous l'avons mentionné à la fin du paragraphe 4.4.1, les amplitudes des vitesses selon x et z sont du même ordre de grandeur $v_{1x} \approx v_{1z}$, pour un fluide incompressible.

Enfin, le champ de vitesse, comme il se doit, est incompressible, soit $\text{div } \vec{v}_1 = 0$ et irrotationnel, soit $\text{rot } \vec{v}_1 = 0$. Une analyse plus fine de la vorticité du champ de vitesse est effectuée dans la section 4.6.

4.4.3 Fluide incompressible stratifié

Dans cette section, nous considérons un fluide incompressible mais dont la densité à l'équilibre change verticalement, $\rho_0(z)$ – voir les conditions d'équilibre

définies par les équations (4.4). C'est le cas C de la figure 4.2. Il ne peut pas être réduit au cas précédent, car il n'est pas compatible avec une équation d'état. À l'équation d'état dans ce cas, il est substitué la condition d'incompressibilité, $\text{div } \vec{v} = 0$. Alors les équations (4.1) et (4.2) au premier ordre dans le système de coordonnées attaché à l'interface deviennent :

$$\partial_t \rho_1 + v_{1z} d_z \rho_0 = \partial_t \eta_1 d_z \rho_0, \quad (4.24)$$

$$\rho_0 \partial_t v_{1x} + \rho_0 g \partial_x \eta_1 = -\partial_x p_1, \quad (4.25)$$

$$\rho_0 \partial_t v_{1z} = -g \rho_1 - \partial_z p_1, \quad (4.26)$$

$$\partial_x v_{1x} + \partial_z v_{1z} = 0, \quad (4.27)$$

où $\rho_0(\tilde{z})$ est considéré comme une fonction donnée à priori (voir plus loin).

Bien que le fluide soit incompressible, il faut noter la présence de termes contenant la perturbation de densité ρ_1 . Ces termes sont légitimes. En effet, comme le fluide est formé de "strates" de densités différentes, l'IRT va provoquer un mélange entre ces strates, et, à une altitude z , la densité ne sera plus $\rho_0(z)$ mais deviendra égale à $\rho(z, x, t) = \rho_0(z) + \rho_1(x, z, t)$.

Le système d'équations (4.24) à (4.27) s'inspire du calcul effectué par Lord Rayleigh dans l'article de 1883 [10]. Les termes dépendant de η_1 qui interviennent dans les équations (4.24) et (4.25) apparaissent suite au changement de variable introduit par Mathews et Blumenthal [138] - voir annexe A.5.

Comme le système d'équations linéaires possèdent des coefficients qui ne dépendent ni de x ni de t , on peut rechercher une perturbation harmonique de la forme $e^{\omega t + ikx}$.

Avec cette hypothèse, on obtient :

$$\omega \bar{\rho}_1 + \bar{v}_{1z} d_z \rho_0 = \omega a d_z \rho_0, \quad (4.28)$$

$$-i \rho_0 \omega \bar{v}_{1x} + k \rho_0 g a = -k \bar{p}_1, \quad (4.29)$$

$$\rho_0 \omega \bar{v}_{1z} = -\bar{\rho}_1 g - \partial_z \bar{p}_1, \quad (4.30)$$

$$ik \bar{v}_{1x} + \partial_z \bar{v}_{1z} = 0. \quad (4.31)$$

Les quantités avec des barres $\bar{q} = \bar{\rho}_1, \bar{v}_{1x}, \bar{v}_{1z}, \bar{p}_1$ sont reliées aux mêmes quan-

tités sans barre $q = \rho_1, v_{1x}, v_{1z}, p_1$ par la relation :

$$q = \bar{q} \exp(\omega t + ikx). \quad (4.32)$$

De plus, nous avons pris, comme précédemment, une interface telle que $\eta_1(x, t) = a \exp(\omega t + ikx)$.

Avec les équations (4.28), (4.29) et (4.31), on trouve la perturbation de vitesse suivant l'axe x , la perturbation de pression et la perturbation de densité :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1x} &= \frac{i}{k} \partial_{\bar{z}} \bar{v}_{1z}, & \bar{p}_1 &= -\frac{\omega}{k^2} \rho_0 \partial_{\bar{z}} \bar{v}_{1z} - \rho_0 g a, \\ \bar{\rho}_1 &= \beta \rho_0 \left(\frac{\bar{v}_{1z}}{\omega} - a \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

où $\beta = -d_{\bar{z}} \ln \rho_0$ est le gradient logarithmique de stratification de densité.

On injecte ces relations dans (4.30) pour obtenir l'équation différentielle qui gouverne la composante de la vitesse suivant z :

$$d_{\bar{z}}^2 \bar{v}_{1z} - \beta d_{\bar{z}} \bar{v}_{1z} - k^2 \left(1 + \frac{\beta g}{\omega^2} \right) \bar{v}_{1z} = 0. \quad (4.34)$$

Comme attendu, cette équation est en accord avec les travaux de Lord Rayleigh et de Chandrasekhar [10, 118]. Nous considérons le cas particulier où la dérivée logarithmique de ρ_0 est constante, soit l'intégration de $d_{\bar{z}} \ln \rho_0 = -\beta$ donne $\rho_0(z) = \rho_0(0) e^{-\beta z}$. Nous avons effectué ce choix car la configuration isotherme compressible (cas B de la figure 4.2) fait apparaître aussi un profil exponentiel de densité et ainsi nous pouvons réaliser une comparaison correcte entre les deux situations B et C.

Par ailleurs, comme l'équation qui gouverne v_{1z} [Éq. (4.34)] est linéaire à coefficients indépendants de \bar{z} , nous recherchons une solution sous forme, $e^{m_s \bar{z}}$, et nous obtenons deux racines pour le paramètres m_s :

$$m_s^\pm = \frac{\beta^\pm}{2} \mp \sqrt{\frac{\beta^{\pm 2}}{4} + k^2 \left(1 + \frac{\beta^\pm g}{\omega^2} \right)}. \quad (4.35)$$

La solution appropriée pour chacun des milieux est trouvée en satisfaisant les conditions d'évanescence à l'infini. Pour chaque milieu, la solution de (4.34) est :

$$\bar{v}_{1z}^\pm = V^\pm e^{m_s^\pm \bar{z}}, \quad (4.36)$$

où m_s^\pm est donnée par (4.35).

Ensuite, pour évaluer les constantes V^+ et V^- , on applique la continuité de la vitesse à l'interface soit $v_{1z}^+(0) = v_{1z}^-(0) = \partial_t \eta_1$ comme dans le cas compressible. Ceci implique $V^+ = V^- = \omega a$, d'où :

$$\bar{v}_{1z}^\pm = \omega a e^{m_s^\pm \tilde{z}}. \quad (4.37)$$

Enfin, en utilisant $q = \bar{q} \exp(\omega t + ikx)$ [Éq. (4.32)] on obtient l'expression totale de la vitesse.

$$\bar{v}_{1z}^\pm(x, \tilde{z}, t) = \omega a e^{m_s^\pm \tilde{z}} \exp(\omega t + ikx). \quad (4.38)$$

Pour obtenir la relation de dispersion, il faut calculer la perturbation en pression à partir de (4.33) et appliquer la condition de continuité à l'interface, $p_1^+(0) = p_1^-(0)$, ce qui revient à écrire $\bar{p}_1^+(0) = \bar{p}_1^-(0)$. On en déduit la relation de dispersion :

$$\omega^2 = k^2 g \frac{\rho_0^+(0) - \rho_0^-(0)}{-\rho_0^+(0)m_s^+ + \rho_0^-(0)m_s^-}. \quad (4.39)$$

Dans la limite d'un milieu homogène en densité, β tendant vers zéro et à l'aide de (4.35) on a $m_s^\pm = \mp k$. L'équation de dispersion (4.39) se réduit alors au cas classique (4.22).

Dans l'annexe A.6, nous démontrons que $m_s^+ = -m_s^- = -m_s$ (où m_s est par définition $m_s = -\beta^+ / 2 + \sqrt{\beta^{+2} / 4 + k^2 (1 + \beta^+ g / \omega^2)}$ quelque soit les valeurs prises par ω et k). Dans ces conditions, nous pouvons réécrire la relation de dispersion (4.39) comme [12] :

$$\omega^2 = \frac{k^2 g}{m_s} \frac{\rho_0^+(0) - \rho_0^-(0)}{\rho_0^+(0) + \rho_0^-(0)} = \frac{k^2 g A_t}{m_s}. \quad (4.40)$$

Pour effectuer la comparaison du cas incompressible stratifié avec le cas compressible, nous supposons que les profils de densité sont les mêmes, c'est à dire, $\beta^\pm = 1/h^\pm = g/K^\pm$. Les résultats de cette comparaison sont présentés dans la section 4.5.

Toutes les grandeurs physiques de l'écoulement peuvent être obtenues à l'aide de (4.32), (4.33) et (4.37) (ω est supposé réel et positif) :

$$v_{1x}^{\pm}(x, \tilde{z}, t) = \mp \frac{\omega}{k} a m_s e^{\pm m_s \tilde{z} + \omega t} \sin kx, \quad (4.41)$$

$$v_{1z}^{\pm}(x, \tilde{z}, t) = a \omega e^{\pm m_s \tilde{z} + \omega t} \cos kx, \quad (4.42)$$

$$\rho_1^{\pm}(x, \tilde{z}, t) = a \rho_0^{\pm} \beta^{\pm} (e^{\pm m_s \tilde{z}} - 1) e^{\omega t} \cos kx, \quad (4.43)$$

$$p_1^{\pm}(x, y, \tilde{z}, t) = -a \rho_0^{\pm} \left(\pm \frac{\omega^2}{k^2} m_s e^{\pm m_s \tilde{z}} + g \right) e^{\omega t} \cos kx. \quad (4.44)$$

Ici, comme dans le cas compressible (paragraphe 4.4.2), les signes opposés de la vitesse v_{1x} de part et d'autre de l'interface provoque un cisaillement. On s'attend à une composante non nulle de $\text{rot } \vec{v}$ selon l'axe y . Si on calcule cette composante au niveau de l'interface on trouve $\omega a k (1 - m_s^2/k^2) \exp(\omega t) \sin(kx)$ [voir plus loin l'Éq. (4.55) pour $\tilde{z} = 0$]. L'instabilité qui résulte de ce cas génère donc de la vorticité.

4.4.4 Fluide incompressible de masse finie

Une autre possibilité est de comparer le cas compressible avec un cas dans lequel le fluide est homogène mais avec une masse finie du fluide supérieur. C'est le cas D de la figure 4.2. Nous choisissons l'épaisseur h du fluide supérieur de telle sorte que sa masse soit la même que dans le cas compressible B (en effet, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \rho^+(0) e^{-\tilde{z}/h} d\tilde{z}$ est convergente). De plus, ils ont la même densité à l'interface et il est facile de voir que dans ce cas $h = K^+/g$.

Pour obtenir la relation de dispersion, nous utilisons l'analyse précédente concernant le cas incompressible stratifié, mais nous modifions la condition aux limites telle que $\bar{v}_{1z}(h) = 0$ à une altitude finie $\tilde{z} = h$. Aussi, nous supprimons la stratification en supposons $\beta = 0$ et l'équation (4.35) se simplifie et donne $m_s^{\pm} = \mp k$. La solution de l'équation (4.34) avec la condition aux limites correspondantes s'écrit :

$$\bar{v}_{1z}^+(\tilde{z}) = V^+ (e^{-k(\tilde{z}-h)} - e^{k(\tilde{z}-h)}), \quad (4.45)$$

$$\bar{v}_{1z}^-(\tilde{z}) = V^- e^{k\tilde{z}}. \quad (4.46)$$

Une relation entre les constantes V^+ et V^- s'obtient à partir de la condition de continuité des vitesses à l'interface et on obtient :

$$2V^+ \sinh(kh) = V^- = \omega a. \quad (4.47)$$

Ensuite, à l'aide de (4.33), on trouve la perturbation en pression en supposant la continuité des pressions à l'interface, $\bar{p}_1^+(0) = \bar{p}_1^-(0)$. On obtient alors la relation de dispersion dans le cas d'un fluide incompressible dont la masse supérieure est finie :

$$\omega^2 = kg \frac{\rho_0^+(0) - \rho^-(0)}{\rho_0^+(0) \tanh^{-1}(kh) + \rho_0^-(0)}. \quad (4.48)$$

Naturellement, dans la limite où l'épaisseur de la couche supérieure, h tend vers l'infini, l'équation se réduit au cas classique de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (4.22).

À partir des équations (4.33) nous pouvons trouver le profil spatial et temporel de toutes les quantités physiques. Dans le fluide inférieur, les solutions sont les mêmes que celles données par (4.23). Pour le fluide supérieur on a :

$$v_{1x}^+(x, \tilde{z}, t) = \omega a \frac{\cosh [k(h - \tilde{z})]}{\sinh(kh)} e^{\omega t} \sin kx, \quad (4.49)$$

$$v_{1z}^+(x, \tilde{z}, t) = \omega a \frac{\sinh [k(h - \tilde{z})]}{\sinh(kh)} e^{\omega t} \cos kx, \quad (4.50)$$

$$p_1^+(x, \tilde{z}, t) = a\rho_0^+ \left(\frac{\omega^2 \cosh [k(h - \tilde{z})]}{k \sinh(kh)} - g \right) e^{\omega t} \cos kx. \quad (4.51)$$

Si on calcule $\text{rot } \vec{v}_1$, on peut remarquer que sa valeur est nulle et cet écoulement est donc irrotationnel.

4.5 Analyse des relations de dispersion

Nous avons obtenu les relations de dispersions dans les quatre cas présentés dans la figure 4.2 : l'écoulement incompressible uniforme (IRT classique - cas A) décrit par l'équation (4.22), le cas général compressible (cas B) décrit

par l'équation (4.19), le cas incompressible et stratifié (cas C) décrit par l'équation (4.39). Et finalement, le cas incompressible dont la masse du fluide supérieur est finie (cas D) décrit par l'équation (4.48). Pour tous les cas, le critère d'instabilité est : $\rho_0^+(0) > \rho_0^-(0)$ et la condition d'équilibre correspond à la continuité de la pression non perturbée à l'interface, à l'instant initial : $p_0^+(0) = K^+ \rho_0^+(0) = K^- \rho_0^-(0) = p_0^-(0)$.

Bien que pour les fluides envisagés ici la vitesse du son soit égale à $\sqrt{K^\pm}$ dans le cas compressible et qu'elle soit infinie dans les situations incompressibles, on peut définir une vitesse caractéristique donnée par $(K^+ K^-)^{1/4} \equiv \sqrt{\hat{K}}$ pour toutes les configurations. Par ailleurs, un nombre d'onde caractéristique est donné par $g/\hat{K} \equiv \hat{k}$ et une fréquence caractéristique s'écrit $g/\sqrt{\hat{K}} \equiv \hat{\omega}$.

Dans ces conditions, les rapports k/\hat{k} et $\omega/\hat{\omega}$ sont des quantités adimensionnées et tous les cas dépendent seulement d'un paramètre sans dimension unique (les grandeurs g, K^+ et K^- sont absorbées par l'adimensionnement), déjà utilisé au chapitre III, qui est le nombre d'Atwood, donné par :

$$A_t = \frac{\rho_0^+(0) - \rho_0^-(0)}{\rho_0^+(0) + \rho_0^-(0)}.$$

La figure 4.3 montre les solutions des équations de dispersion dans les quatre situations pour deux nombres d'Atwood différents (pour résoudre les différentes relations de dispersion nous utilisons le logiciel "Maple"). On peut remarquer que les effets de compressibilité sont importants lorsque la densité des deux fluides sont proches, $A_t \ll 1$.

Dans tous les cas, la courbe du fluide incompressible (pointillés) est située au dessus de celle du fluide compressible (trait plein). Ceci suggère que le cas compressible est toujours plus stable que le cas incompressible. De plus, pour la plus faible valeur du nombre d'Atwood ($A_t = 0,1$), c'est le cas incompressible stratifié (tirets) qui est le plus stable d'entre tous, alors que pour $A_t = 0,9$, c'est la configuration incompressible masse finie (tiret-double point) qui est la plus stable d'entre toutes.

On remarque que c'est pour des valeurs de k proche de \hat{k} que la majorité

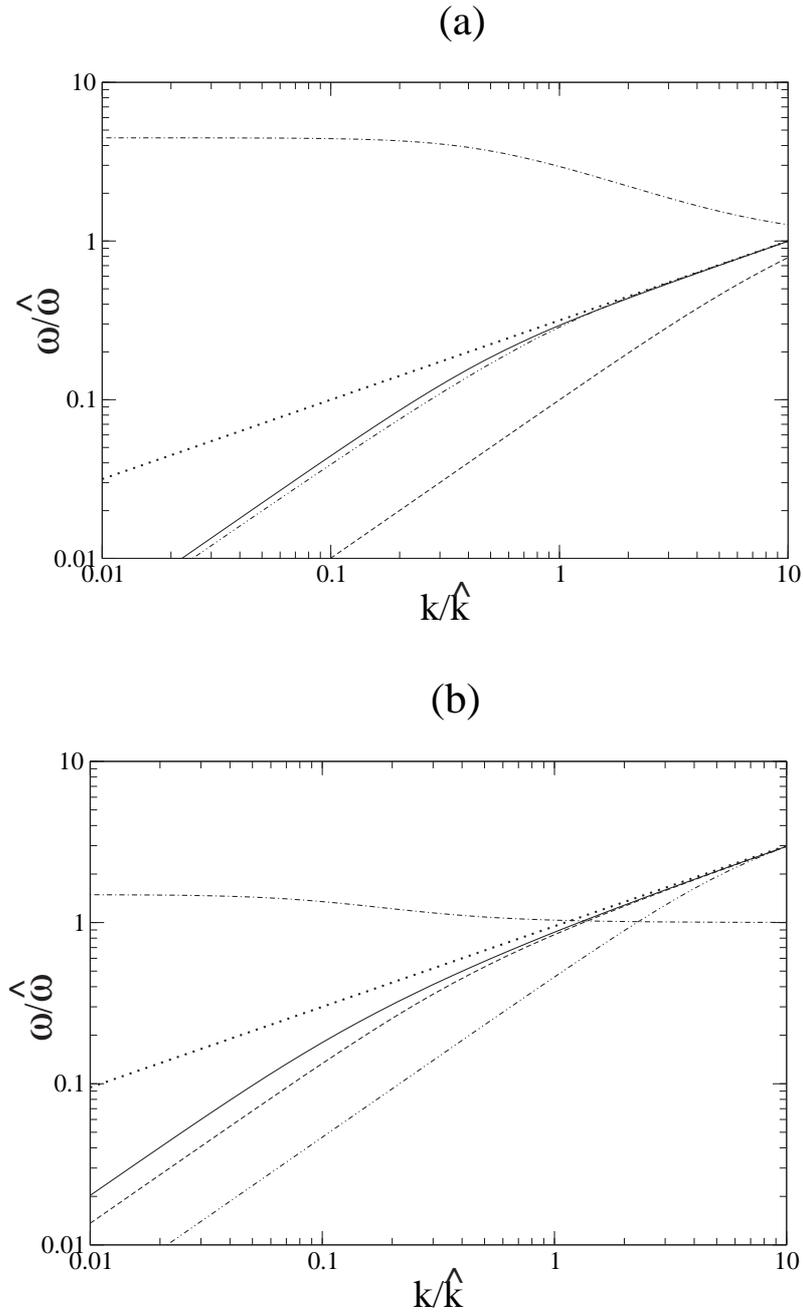


Figure 4.3: Dépendance du taux de croissance normalisé, $\omega/\hat{\omega}$, en fonction du nombre d'onde normalisé, k/\hat{k} , pour les quatre cas et pour deux nombres d'Atwood différents : $A_t = 0,1$ (a) et $0,9$ (b). La courbe en trait plein correspond au cas compressible – en pointillés, le cas incompressible – en tirets, le cas incompressible stratifié – en tiret-double-point, le cas incompressible masse finie. La courbe en tiret-point donne le rapport des taux croissance du cas compressible sur le cas incompressible stratifié.

des courbes se rejoignent, ce qui signifie que les effets de compressibilité sont importants pour des valeurs de k inférieures à \hat{k} (c'est à dire, pour des longueurs d'onde plus grandes que $2\pi\hat{K}/g$).

On observe que pour les grandes valeurs de k (petites longueurs d'onde), toutes les courbes se réunissent. C'est normal, car pour $k/\hat{k} \gg 1$, on tend vers un régime incompressible et toutes les courbes se comportent de la même façon (voir section suivante 4.5.1). La représentation en échelle logarithmique permet de mettre en évidence la puissance de k contenue dans la relation de dispersion. En effet, la cas incompressible à une pente de 1/2 ($\omega \propto \sqrt{k}$), tandis que dans les autres configurations la pente est de 1 ($\omega \propto k$) pour de petites valeurs de k .

4.5.1 Expression asymptotique du taux de croissance

Nous considérons les solutions asymptotiques des relations de dispersion dans deux cas limites, k tendant vers l'infini et k tendant vers zéro. Rappelons que dans le cas d'un écoulement incompressible, la relation de dispersion est :

$$\omega_{RT} = \sqrt{A_t k g}. \quad (4.52)$$

On peut montrer que ce résultat est obtenu avec toutes les autres relations de dispersion dans la limite des petites longueurs d'onde de perturbation : k tendant vers l'infini ($k \gg \hat{k}$). Au contraire, pour les grandes longueurs d'onde (k tendant vers zéro - $k/\hat{k} \ll 1$ - et pour ω/k fini), le résultat dépend fortement du modèle. Nous comparons tous les modèles dans le tableau 4.1.

Incompressible	$\omega_{RT} = \sqrt{A_t k g}$
Compressible	$\omega_C = k\sqrt{\hat{K}}\sqrt{2A_t}/(1 - A_t^2)^{1/4}$
Incompressible Stratifié	$\omega_{IS} = k\sqrt{\hat{K}}A_t/(1 - A_t^2)^{1/4}$
Incompressible Masse Finie	$\omega_{IFM} = k\sqrt{\hat{K}}\sqrt{2A_t}(1 - A_t^2)^{1/4}/(1 + A_t)$

Table 4.1: Comparaison des taux de croissance asymptotiques ($k \rightarrow 0$) pour les quatre modèles de fluides.

Les indices “C”, “IS” et “IFM” correspondent respectivement à “Compressible”, “Incompressible”, “Incompressible Masse Finie”.

La comparaison entre ces trois types d’écoulement “C”, “IS” et “IFM”, est justifiée car ils ont le même saut de densité (caractérisé par le nombre d’Atwood) ainsi que la même masse pour le fluide supérieur. Il est évident que la déviation par rapport au cas idéal de l’IRT apparaît pour une longueur d’onde supérieure à une hauteur caractéristique h_c ou pour un nombre d’onde inférieur à un nombre d’onde caractéristique $k_c = 2\pi/h_c$. La comparaison du comportement du cas compressible avec le cas incompressible stratifié nous donne :

$$k_c = \frac{g}{2\hat{K}} \sqrt{1 - A_t^2}, \quad \frac{\omega_C}{\omega_{IS}} = \sqrt{\frac{2}{A_t}}. \quad (4.53)$$

La valeur de k_c est obtenue en égalisant ω_{RT} et ω_C et elle est proche du nombre d’onde \hat{k} défini précédemment. Ceci donne la comparaison entre la configuration incompressible et compressible et non entre le cas incompressible stratifié et compressible.

Il ressort de (4.53) que le taux de croissance dans le cas compressible augmente fortement lorsque $A_t \ll 1$, si on le compare au cas incompressible stratifié et lorsque les hauteurs caractéristiques sont identiques. Au contraire, ainsi que nous l’avons vu sur la figure 4.3, que ce soit dans le cas compressible ou dans le cas masse finie, ils sont plus stables vis à vis de l’IRT lorsque qu’on les compare avec le cas RT classique (densité uniforme). Pour des grands nombres d’Atwood (c’est à dire, pour des sauts importants de densité), mais néanmoins toujours inférieurs ou égaux à 1 par définition, le nombre d’onde critique est très petit et la différence entre le cas compressible et incompressible devient moins important [voir les équations (4.53)]. Autrement dit, les effets de compressibilité disparaissent lorsque $A_t = 1$, en effet le nombre d’onde critique $k_c \rightarrow 0$. Il est à noter que le taux de croissance dans les cas “C”, “IS” et “IFM” deviennent indépendants du champ de gravité g lorsque $k < k_c$ (petits nombres d’onde). Comme on l’a déjà vu, pour les petites valeurs de k , les taux de croissance ω_C , ω_{IS} et ω_{IFM} varient linéairement avec k alors que ω_{RT} est proportionnel à \sqrt{k} .

On peut comparer les relations de dispersion que nous avons obtenues avec celles données par Livescu [16]. En fait, comme le montre Livescu dans son commentaire [135], pour retrouver nos relations de dispersion, il est nécessaire d'ajouter un flux de chaleur pour maintenir les perturbations de température nulles.

4.6 Champ de vitesse généré par l'IRT

Pour bien comprendre le développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, il est instructif d'analyser le champ de vitesse et en particulier la production de vorticité. Le champ de vitesse est présenté sur la figure 4.4 pour les quatre types d'écoulement considérés précédemment.

Il est bien connu (voir page 142 dans [72]) que l'IRT classique, c'est à dire, en régime linéaire et pour des fluides incompressibles uniformes en densité, produit un champ de vitesse sans divergence et irrotationnel :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{v} = 0,$$

ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 4.4.2. Ceci est valable aussi pour le cas incompressible masse finie (voir le paragraphe 4.4.4).

Le cas compressible correspond à un écoulement irrotationnel mais, comme il se doit, à divergence non nulle :

$$\operatorname{div} \vec{v}^{\pm} = \frac{a\omega}{m_c^{\pm}} e^{m_c^{\pm} \bar{z} + \omega t} (k^2 - m_c^{\pm 2}) \cos kx. \quad (4.54)$$

On représente la divergence dans ce cas sur la figure 4.5A.

Il est important de remarquer que pour un fort contraste de densité, $A_t = 1$ [$\rho_0(0)^- = 0$], et en utilisant la relation de dispersion dans le cas compressible [ q. (4.19)] les effets de compressibilité disparaissent, car dans ce cas, $(m_c^+)^2 = k^2$ et $\operatorname{div} \vec{v}^+ = 0$.

Enfin, le champ de vitesse dans le cas incompressible stratifié est naturellement sans divergence, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, mais dans ce cas la vorticité n'est pas nulle. Si on

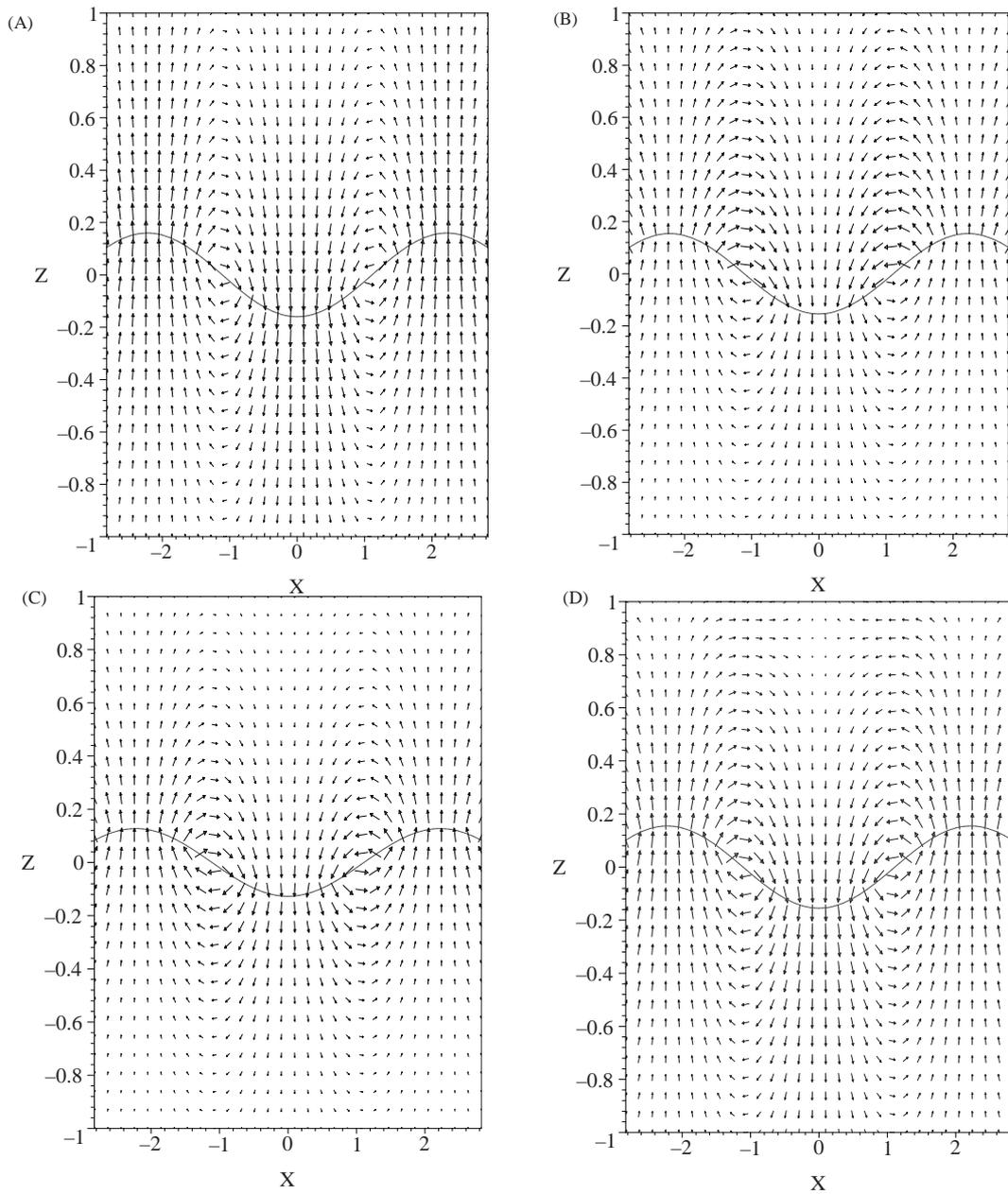


Figure 4.4: Champ de vitesse dans les quatre types d'écoulement : (A) - le cas incompressible uniforme, (B) - le cas compressible, (C) - le cas incompressible stratifié, (D) - le cas incompressible masse finie. Les paramètres utilisés sont les suivants : $\hat{\omega}t = 1$, $k = \hat{k}$, $\hat{k}a = 0,05$ et $A_t = 1/3$ et $g\hat{k}/\hat{\omega}^2 = 1$.

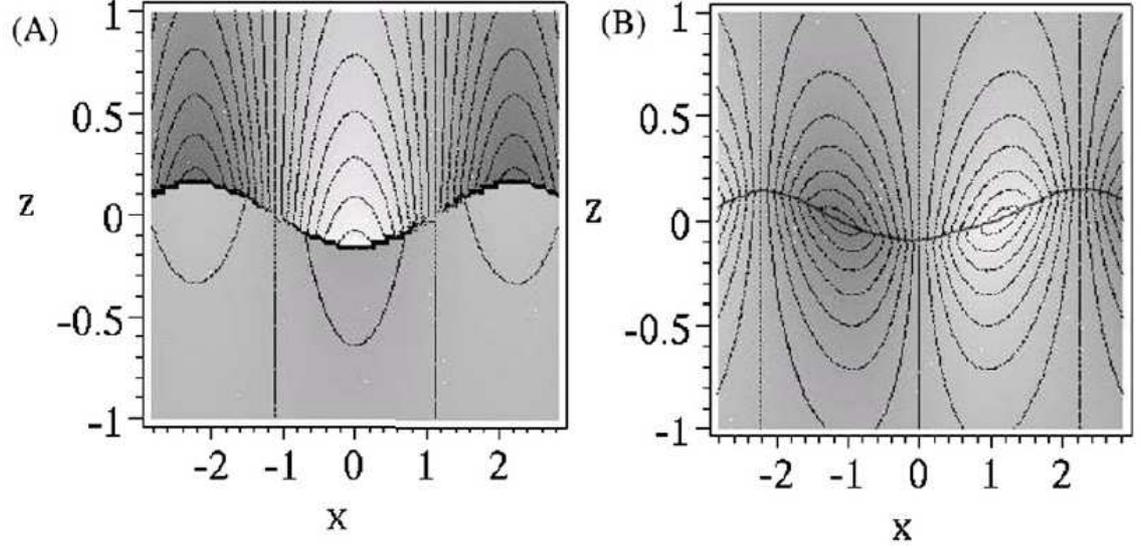


Figure 4.5: (A) Divergence de l'écoulement, $\text{div } \vec{v}$, dans le cas compressible et (B) composante y du rotationnel (perpendiculaire à l'axe z et x), $\text{rot } \vec{v}$, dans le cas incompressible stratifié. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 4.4 (le niveau de gris est représentatif du signe du rotationnel sur l'axe y , donc du sens de rotation des vortex).

reprend les formules du paragraphe 4.4.3, on trouve :

$$\text{rot } \vec{v}^{\pm} = \frac{a\omega}{k} e^{\pm m_s \tilde{z} + \omega t} (k^2 - m_s^2) \sin kx. \quad (4.55)$$

Cette vorticité est donn e sur la figure 4.5B.

Afin de mieux comprendre les effets de compressibilité et de stratification, il est instructif de représenter les équations d'Euler et de continuité (4.1)-(4.2) sous la forme suivante :

$$\text{div } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} d_t \rho, \quad (4.56)$$

$$d_t \vec{\Omega} = -\vec{\Omega} \text{div } \vec{v} + (\vec{\Omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{1}{\rho^2} \text{grad } \rho \times \text{grad } p, \quad (4.57)$$

où $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$ est la vorticité et d_t est la dérivée totale (lagrangienne).

Comme on le sait déjà, on peut conclure en considérant la première équation, que la divergence du champ de vitesse est seulement due à la nature compressible du fluide. Par contre, la source de vorticité est due au fait que les gradients

de pression et de densité ne sont plus colinéaires. Aussi, dans le cas d'un fluide barotropique, la pression est donnée par une fonction de la densité $p = p(\rho)$, et $\text{grad } p$ est proportionnel à $\text{grad } \rho$. Le cas compressible ne peut donc pas générer de vorticité car nous avons $p = K\rho$. Par ailleurs pour les deux cas incompressibles uniformes (masse finie ou masse infinie), on a $\text{grad } \rho = 0$ et du coup, on ne peut pas avoir de vorticité également. Le seul cas pouvant générer de la vorticité est donc la situation incompressible stratifiée. C'est effectivement ce que nous obtenons et celle-ci est donnée par (4.55). Au contraire, dans le cas d'un fluide baroclinique pour lequel $\text{grad } p$ et $\text{grad } \rho$ ne sont pas colinéaires [139], il ressort de l'équation (4.57) que de la vorticité est crée. L'inclinaison du gradient de pression à l'interface perturbée produit un écoulement principalement vertical [123]. Cet effet est important pour les longueurs d'onde comparables à la stratification verticale et correspond à des d evirements non-linéaires différents. Comme on semble l'observer dans la phase fortement non-linéaire, suite aux simulations numériques effectuées par Gardner *et al.* [140], l'écoulement compressible génère de longues "structures en forme de doigt" (peu de tourbillons) dans le fluide léger, tandis que l'écoulement incompressible (en phase non-linéaire) d evloppe plutôt des "structures en champignon" (tourbillons) ce qui implique un meilleur mélange. Sur la figure 4.5B, on observe deux vortex dont les sens de rotation sont de directions opposées et localisées au voisinage de la discontinuité de contact.

Une différence entre les cas compressible et incompressible stratifi e concerne la vitesse de cisaillement à l'interface : $\Delta v_{1x} = v_{1x}^+(0) - v_{1x}^-(0)$. Dans le cas compressible :

$$\Delta v_{1x} = -ak\omega \left(\frac{1}{m_c^+} - \frac{1}{m_c^-} \right) e^{\omega t} \sin kx, \quad (4.58)$$

tandis que dans le cas incompressible stratifi e, on obtient :

$$\Delta v_{1x} = -2m_s a \frac{\omega}{k} e^{\omega t} \sin kx. \quad (4.59)$$

Les vitesses parallèles à l'interface ont la même magnitude mais sont de signes oppos es.

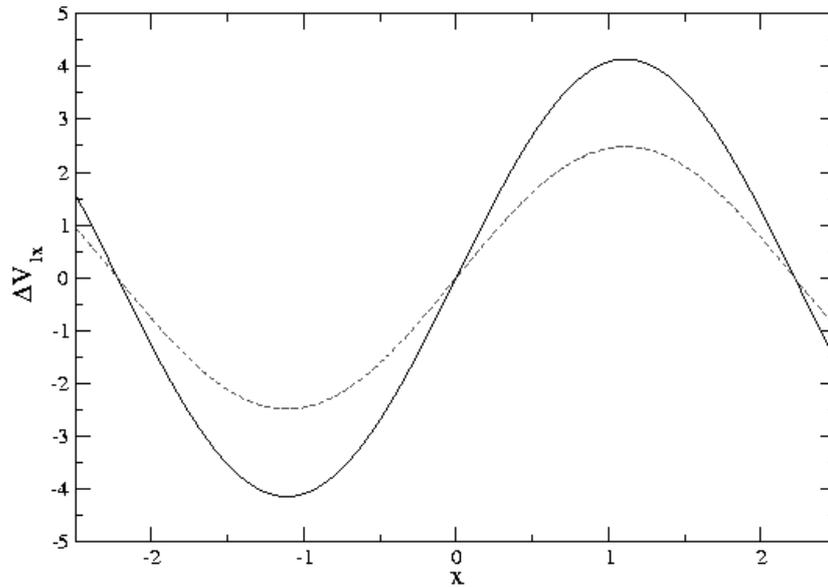


Figure 4.6: Vitesse de cisaillement à l'interface, dans le cas compressible (trait plein) et dans le cas incompressible stratifié (tiret).

La figure 4.6 montre que la vitesse de cisaillement est plus grande dans le cas compressible et atteint un maximum au niveau du point d'inflexion de l'interface. Donc, dans le cas compressible, il semble possible de générer plus rapidement l'instabilité de Kelvin-Helmholtz que dans le cas incompressible stratifié car le taux de croissance de cette instabilité dépend directement des vitesses tangentielles à l'interface des deux fluides [72]. Dans le domaine non-linéaire, cette instabilité génère de la vortacité [139].

Revenons maintenant à la vortacité. À partir de l'équation de son évolution (4.57), on peut donner l'évolution de la vortacité perturbée. Elle s'écrit :

$$\rho_0^2 d_t \vec{\Omega}_1 = \text{grad } \rho_0 \times \text{grad } p_1 + \text{grad } \rho_1 \times \text{grad } p_0. \quad (4.60)$$

En introduisant les expressions de ρ_1 et p_1 données par les équations (4.43) et (4.44) ainsi que p_0 et ρ_0 dans le cas incompressible stratifié, on obtient pour la

composante suivant l'axe y :

$$d_t \Omega_{1y}^\pm = 2ka\beta^\pm g \frac{\rho_0(0)^\pm}{\rho_0(0)^+ + \rho_0(0)^-} \sin(kx) e^{\pm m_s z}. \quad (4.61)$$

On a constaté que la vorticité n'est pas nulle [  q. 4.55] pour cette configuration et on déduit donc que les gradients de pression et de densité sont croisés. Il faut remarquer que cette vorticité est g  n  r  e en volume, et elle est directement reli  e à un gradient d'entropie de l'équilibre. L'absence de vorticité dans le cas compressible peut être interpr  t  e comme la conséquence directe d'une entropie uniforme dans les deux fluides.

Il est intéressant, également, d'effectuer le calcul de la vorticité totale C_y suivant l'axe y int  gr  e en z et donc au travers de l'interface de deux fluides. Ce scalaire est donné par :

$$C_y = \int (\text{rot } \vec{v})_y dz,$$

et cette intégrale se réduit à deux termes. En particulier, au voisinage de l'interface entre les deux fluides, *i.e.*, lorsque $z \rightarrow 0$, on obtient :

$$C_y = \Delta v_{1x} - \int \partial_x v_z dz,$$

où Δv_{1x} est le saut de vitesse tangentielle déjà évoqué plus haut. Ce terme génère de la vorticité seulement à l'interface. Tandis que le deuxième terme (l'intégrale) est responsable de la vorticité en volume.    partir de cette expression on peut donner C_y dans les deux cas qui nous intéressent :

– le cas incompressible stratifié : $C_y \propto (m_s^2 - k^2)$. Donc, on retrouve que dans ce cas de la vorticité est g  n  r  e.

– le cas compressible : $C_y = 0$. Les deux termes dans l'expression de C_y se compensent exactement et la vorticité totale est nulle, ce qui est naturel dans ce cas. Le comportement est le même que pour la vorticité locale : $\text{rot } \vec{v} = 0$.

Le développement de l'IRT produit un cisaillement au niveau de la discontinuité de contact [voir par exemple la formule (4.41) dans laquelle on observe que v_{1x} change de signe à la travers  e de l'interface]. Dans le cas compressible la vorticité

totale C_y est nulle et le cisaillement ne produit pas de vorticité, ni localement, ni globalement.

4.7 Discussion et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons choisi quatre géométries permettant une comparaison pertinente du développement de l'IRT dans les cas compressible et incompressible. Une transformation du système de coordonnées relative à la perturbation à l'interface, nous a permis de simplifier l'analyse de l'instabilité. De plus, les relations de dispersion  tudi es, ont pu être repr sent es en utilisant un adimensionnement unique.

La compressibilité fait décroître le taux de croissance de l'IRT pour des longueurs d'onde grandes devant la longueur d'onde critique, $h_c \sim \hat{K}/g$, lorsqu'on le compare au cas classique de l'IRT. Mais, la compressibilité accroît le taux de croissance de l'IRT lorsque : $\lambda > h_c \sim \hat{K}/g$ si nous comparons ce cas avec l'écoulement incompressible stratifié, ce qui est plus approprié car les profils de densité et les masses sont alors les mêmes. L'effet de compressibilité est inversement proportionnel à la racine carr e du nombre d'Atwood [voir éq. (4.53)] et il est donc plus important lorsque le saut de densité entre les deux milieux est faible.   l'inverse, on montre que pour un contraste de densité important entre les deux milieux ($A_t = 1$), les effets de compressibilité disparaissent car le taux de croissance compressible devient égal à \sqrt{gk} et la divergence du champ de vitesse devient nulle. On peut interpréter ce phénomène en remarquant que les modes compressible et incompressible sont totalement découplés (un des milieux est le vide) et ce n'est que lorsque $A_t < 1$ qu'un couplage s'effectue et modifie le taux de croissance pour $k < k_c$ (les deux milieux sont en interaction).

De plus, on remarque que le taux de croissance est indépendant du champ de gravité pour $k < k_c$. Cependant, même en considérant des taux de croissance similaires en compressible et en incompressible stratifié, les champs de vitesse sont complètement différents. Nous avons mis en évidence la génération de vorticité

durant l'étape linéaire du développement de l'instabilité dans le cas incompressible stratifié. Il serait intéressant de comprendre ultérieurement les manifestations de la divergence et de la vorticité durant l'étape non-linéaire du développement de l'IRT.

Il est possible cependant d'estimer le taux de croissance de l'IRT dans le cas de restes de supernovae typiques. Nous choisissons $M = 15 M_{\odot}$ ($M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33}$ g est la masse du soleil), $v_0 = 6 \times 10^8$ cm/s (voir annexe A.3 pour la définition de M et v_0), $T_0 \simeq 3 \times 10^5$ K (30 eV) respectivement pour la masse, la vitesse et la température des éjectas et $\rho_{mis} = 10^{-24}$ g/cm³ (1 part/cm³), valeur typique pour la densité du milieu interstellaire.   l'aide de ces quantités typiques, il est possible d'estimer la décélération g des éjectas ainsi que A_t (le nombre d'Atwood) en fonction du rayon des éjectas de la supernova (annexe A.3).

Lorsque le rayon des restes de la supernova (RSN) est de $r = r_s/2$, on estime le temps d'expansion à $t = 0,56 t_s$ (voir l'annexe A.3 pour la définition de r_s et t_s) et on obtient : $A_t = 0,78$ et $g = 10^{-2}$ cm/s² où $r_s = 2 \times 10^{19}$ cm soit 6,7 pc (1 pc $\simeq 3 \times 10^{18}$ cm) et $t_s = 950$ ans. On trouve alors une longueur critique h_c donn e par (4.53) de 10^{16} cm soit $r_s/2000$. Donc, seules les perturbations de petites échelles, $\lambda < h_c$, peuvent être consid r es comme incompressibles. Pour une perturbation de longueur d'onde $\lambda > h_c$, les effets de compressibilité sur le taux de croissance de l'IRT sont importants. Par exemple, pour une perturbation de longueur d'onde $\lambda = r/50$ soit 2×10^{17} cm, on a $\omega_c t = 1,8$ et $\omega_{is} t = 1,1$, après application des relations donn es dans le tableau 4.1. Il ressort donc que la compressibilité domine l'excitation de l'IRT.

Nous voyons que l'IRT peut être excit e lors de l'expansion de jeunes restes de supernovae et dans cette phase la masse balay e par les éjectas est encore faible devant leur propre masse. On vient de montrer que l'instabilité de l'interface entre les restes de la supernova et le milieu interstellaire est domin e par les effets de compressibilité, même si la stratification peut avoir une contribution lorsque la densité du milieu interstellaire et celle des éjectas sont inhomogènes. Dans ce régime, le temps de croissance de l'IRT est comparable avec le temps caractéristique

de l'évolution des éjectas. Une analyse plus fine serait de considérer le développement instationnaire de l'IRT (voir les chapitres V et IV).

CHAPITRE V

Instabilité de Rayleigh-Taylor instationnaire : Expansion d'une coquille

5.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà souligné dans les chapitres I et III, l'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) est omniprésente dans l'évolution des supernovae depuis l'explosion de l'astre jusqu'à l'expansion de ses restes.

Bien que l'IRT soit étudiée depuis longtemps, avec les premiers travaux de Lord Rayleigh [10] et de Sir G. Taylor [113], seulement un nombre limité de solutions analytiques exactes existent dans le cas instationnaire, c'est à dire, lorsque l'état que l'on perturbe évolue avec le temps. Cependant, l'IRT appliquée à l'évolution des restes de SN a été examinée, par exemple, par Bernstein et Book [17], Jun [21], Blondin *et al.* [79], par Bucciantini *et al.* [22], etc... dans le cadre de l'évolution des plérions (voir chapitre II). Par ailleurs, une étude approfondie du développement de l'IRT a été réalisée par Blondin et Ellison [9] et Chevalier et Blondin [56], lors de la phase de ralentissement d'une fine coquille (provenant d'un reste sans étoile à neutrons) en interaction avec le milieu interstellaire. Dans le contexte de la Fusion par Confinement Inertiel (FCI), l'IRT est étudiée lors de l'implosion de cibles laser [18, 121, 141, 142]. Dans ces deux domaines (astrophysique et FCI), les instabilités hydrodynamiques se développent en géométrie sphérique. Bien que les échelles spatiales et temporelles ainsi que la vitesse et l'accélération de la coquille (ou éjectas pour les RSN) soient différentes, le développement de l'IRT de ces deux domaines sont comparables ([26, 94] et voir chapitres II et VII).

Tout comme pour l'étude des SN et RSN, celle pour la FCI souffre de limitations. Les études effectuées, par exemple, par Hattori *et al.* [18] se limitent à la

phase de stagnation de la coquille et supposent un profil de densité homogène. Pour les RSN, Bernstein et Book [17] ont analysé l'IRT d'une coquille en expansion. Ils proposent une solution exacte pour tous les temps lors d'une évolution isentropique et pour γ quelconque. Cependant, leur formalisme nous semble abstrait et complexe et l'analyse physique qu'ils proposent est peu développée. Malgré tout, avec cette méthode, ils analysent le comportement asymptotique de la perturbation et trouvent que l'IRT ne se développe que pour les modes incompressibles. Nous expliquerons plus loin ce résultat.

Dans [19] l'étude de l'IRT est effectuée en géométrie cylindrique pour un milieu isotherme mais elle n'est pas effectuée dans un cadre astrophysique. L'étude effectuée par Blondin *et al.* [79] se rapporte à l'astrophysique et le pulsar est pris en compte, mais ils ne considèrent que le développement des instabilités dans une phase tardive de l'évolution des restes de SN ($\sim 10^4$ ans). À cette période, les éjectas soufflés par le vent du pulsar sont fortement décélérés par le milieu interstellaire ce qui engendre un choc en retour qui interagit avec le vent du pulsar. On peut consulter aussi la référence [143] qui traite du même problème. Cependant, l'IRT peut se développer beaucoup plus tôt (~ 1000 ans) lors de l'interaction du vent du pulsar avec les éjectas qui sont en expansion libre [21, 22, 82] (voir la nébuleuse du Crabe [5]).

Dans ce cadre, l'étude réalisée par Bucciantini *et al.* [22] prend, en plus, en compte l'effet du champ magnétique sur le développement de l'IRT. Les auteurs réalisent des simulations 2D et étudient l'effet stabilisant du champ magnétique de façon numérique mais pour des problèmes de stabilité de schéma, ils doivent prendre une constante polytropique égale à $4/3$ aussi bien dans le vent du pulsar que dans les éjectas. De plus, dans leurs simulations ils ne considèrent pas l'effet de la décroissance temporelle de la luminosité du pulsar. Dans son étude [21], Jun ne prend pas de champ magnétique, mais il montre que l'IRT peut se produire à trois instants distincts lors de l'interaction vent du pulsar/éjecta de la supernova. Néanmoins, son travail numérique est réalisé pour une constante polytropique qui vaut partout $5/3$ avec un pulsar dont la luminosité est constante.

L'objectif de ce chapitre est de fournir une analyse hydrodynamique complète de l'IRT pour une coquille en expansion (ou en compression) instationnaire en géométrie sphérique. Pour une coquille dont $\gamma = 5/3$, nous obtenons une solution exacte pour tout temps et pour tous les modes (incompressibles et compressibles) en tenant compte aussi de la vitesse initiale de la coquille. Bien que la solution formelle soit la même que celle de Bernstein et Book [17], notre approche donne la possibilité d'identifier les processus physiques et de mieux les interpréter. En particulier, la séparation des modes compressibles et incompressibles est démontrée explicitement. Cette propriété est la conséquence directe du fait que le nombre d'Atwood soit égal à un. De plus, l'expression de l'accélération instantanée de la face interne de la coquille (par intégration locale du taux de croissance) nous permet de donner rapidement une approximation du taux de croissance de l'instabilité qui est en accord avec la solution exacte. À la différence de Bernstein et Book [17], nous utiliserons une autre méthode de changement de repère pour résoudre le problème. Par ailleurs, de la même manière que Bernstein et Book [17], nous insisterons sur l'évolution spatiale et temporelle de l'IRT, en tenant compte de toutes les perturbations possibles, compressibles et incompressibles. Cependant, en plus, nous sommes capables de déduire une relation de dispersion valide à tout instant. Finalement, nous avons étudié un critère de fragmentation de la coquille formée par les éjectas lors de leur compression et expansion sous l'influence du vent du pulsar.

Dans notre étude, nous préférons négliger le champ magnétique et le refroidissement radiatif pour pousser le plus loin possible l'approche analytique. En ce qui concerne le refroidissement, on sait que son effet va être de densifier la coquille d'éjectas choquée par le vent du pulsar. Le second effet apparaît lors de la phase d'existence de l'IRT et des doigts de matière plus longs et plus fins peuvent être créés [140].

À propos du champ magnétique, l'affaire semble moins cruciale. En effet, il a été montré récemment [82, 143] que l'évolution de la discontinuité de contact entre le vent et le RSN est pratiquement indépendante de la magnétisation de la bulle

(autour du pulsar), si l'on considère que l'énergie totale (somme de l'énergie des particules et de l'énergie magnétique) reste la même d'un cas à l'autre. Cependant, il est clair que la structure interne de la bulle va dépendre du champ magnétique \vec{B} , mais comme nous n'étudions pas cet aspect, on peut ne pas prendre en compte \vec{B} . Cette démarche est justifiée à posteriori dans le chapitre VI, où nous montrons que pour les modes que nous considérons, le champ magnétique et l'effet du transport radiatif peuvent être négligés. Cependant dans certaines phases d'évolutions des plérions, ces effets pourront être intégrés dans une étude ultérieure en se basant sur des travaux existants [144, 145] ou en cours [146] afin d'avoir une description plus affinée de la filamentation qui se forme dans certaine nébuleuse comme celle du Crabe.

De plus, nous verrons ultérieurement dans le chapitre VII, que dans notre modèle, la luminosité L du pulsar, varie avec le temps [$L(t) \propto t^{-3}$]. Ce comportement est plus réaliste que dans les modèles de Jun [21] ou de Bucciantini *et al.* [143] où dans leurs études numériques, ils prennent $L(t) = L_0$ où L_0 est une constante. En effet, nous montrons que la luminosité de la forme $L(t) \propto t^{-\mu}$ pour $2 \leq \mu \leq 3$ reproduit convenablement certaines données observationnelles utilisées dans Blondin *et al.* [79], ainsi que celles reprises par Chevalier [80].

Dans ce chapitre, la section 5.2 présente les équations de bases dans le repère co-mouvant de la coquille en expansion. Ce changement de coordonnées permet de trouver une solution statique dans ce repère co-mouvant et d'obtenir une solution analytique pour un gaz polytropique $\gamma = 5/3$. Naturellement, dans l'espace physique initial (\vec{r}, t) non co-mouvant, cette solution est instationnaire. Elle est présentée dans la section 5.3 et nous y décrivons aussi la géométrie et nous discutons des paramètres pertinents pour l'interaction entre le vent du pulsar et les éjectas. Une analyse de stabilité est effectuée dans le repère co-mouvant et nous trouvons une relation de dispersion qui est donnée dans la section 5.4. Le paragraphe 5.5 traite de l'étude numérique de cette équation de dispersion et la nature de la solution instable est discutée en détail dans la section 5.6. Une étude qualitative de l'IRT est effectuée dans la section 5.7. L'étude de l'évolution temporelle de

la surface interne et externe de la coquille est analysée dans la section 5.8. Enfin, une conclusion est donnée dans la section 5.9.

5.2 Transformation de coordonnées

Nous allons considérer l'évolution spatio-temporelle de la coquille en expansion adiabatique sous la pression du pulsar central. Comme dans les modèles d'évolution des plérons présentés dans la littérature, nous négligeons le champ de gravitation du pulsar [21, 79]. Le calcul de cette accélération gravitationnelle à une distance de $r = 0,2$ pc (voir [21] ou le chapitre VI pour le choix de cette distance), donne la valeur $GM/r^2 \sim 5 \times 10^{-10}$ cm/s² (où M est la masse du pulsar qui est de l'ordre d'une masse solaire) fortement inférieure à l'accélération produite par le vent du pulsar qui est environ 6×10^6 fois plus grande puisqu'elle est estimée à 3×10^{-3} cm/s² [5]. Notre modèle est constitué de l'équation de continuité et de l'équation d'Euler pour un gaz de densité ρ et de vitesse \vec{v} :

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (5.1)$$

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_{\vec{r}} p, \quad (5.2)$$

avec une équation d'état polytropique :

$$p = K \rho^\gamma, \quad (5.3)$$

où les indices "t" et "r" correspondent aux dérivées partielles par rapport au temps et par rapport à l'espace $\vec{r}(r, \theta, \phi)$. On peut écrire les opérateurs différentiels en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) comme :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \rho v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi (\rho v_\phi), \quad (5.4)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} p = \left\{ \partial_r p, \frac{1}{r} \partial_\theta p, \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi p \right\}, \quad (5.5)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) v_r = v_r \partial_r v_r + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_r + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi v_r - \frac{1}{r} (v_\theta^2 + v_\phi^2), \quad (5.6)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) v_\theta = v_r \partial_r v_\theta + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_\theta + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi v_\theta + \frac{1}{r} (v_r v_\theta - \cot \theta v_\phi^2), \quad (5.7)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) v_\phi = v_r \partial_r v_\phi + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_\phi + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi v_\phi + \frac{1}{r} (v_r v_\phi + \cot \theta v_\theta v_\phi), \quad (5.8)$$

où v_r , v_θ et v_ϕ sont respectivement la composante radiale, azimutale et tangentielle de la vitesse \vec{v} . Même pour un écoulement radial, ce système d'équations est difficile à résoudre car l'évolution du fluide est instationnaire.

Nous allons résoudre les équations (5.1) et (5.2) par l'utilisation d'une transformation temporelle initialement introduite par Munier et Feix [20] et plus tard par Bouquet *et al.* [147, 148], appelée "zooming coordinates" [149, 150, 151] dans les articles relatifs à l'astrophysique. Cette transformation spécifique de coordonnées permet de passer du repère du laboratoire au repère co-mouvant. Ce nouvel espace est labélisé avec le symbole chapeau et est défini par les relations suivantes :

$$r = C(t) \hat{r}, \quad \theta = \hat{\theta}, \quad \phi = \hat{\phi}, \quad dt = A^2(t) d\hat{t}, \quad (5.9)$$

$$\rho = D(t) \hat{\rho}, \quad p = B(t) \hat{p}, \quad (5.10)$$

où A , B , C , D sont les fonctions d'échelle dépendantes du temps t ; $\hat{\rho}$ et \hat{p} sont la densité et la pression dans le repère co-mouvant $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{t})$. La vitesse $\hat{\vec{v}}$ dans le nouveau repère est donnée par la définition classique :

$$\vec{v} \equiv d\vec{\hat{r}}/d\hat{t}. \quad (5.11)$$

D'après les équations (5.9) et (5.11), la vitesse se transforme alors comme :

$$\vec{v} = \frac{C}{A^2} \hat{\vec{v}} + \dot{C} \hat{\vec{r}}, \quad (5.12)$$

où le point signifie la dérivée par rapport au temps t . On remarque que contrairement aux grandeurs physiques p et ρ qui sont reliées à \hat{p} et $\hat{\rho}$ par une simple loi de proportionnalité [Éqs. (5.10)], la relation entre \vec{v} et $\hat{\vec{v}}$ est plus complexe car elle fait apparaître un terme de translation proportionnel à $\hat{\vec{r}}$. Enfin, nous avons introduit une fonction $A(t)$ élevée au carré pour la relation entre les intervalles de temps dt et $d\hat{t}$. Cette formulation permet de travailler avec des temps t et \hat{t} qui s'écoulent dans le même sens. Cependant, comme la fonction A dépend explicitement du temps, il est clair que la relation entre \hat{t} et t (qui s'obtient par la quadrature $\hat{t} = \int [A(t)]^{-2} dt$) peut être hautement non-linéaire. Nous le verrons par la suite, mais pour simplifier, nous prendrons des origines des temps identiques, c'est à dire qu'à $t = 0$ correspond $\hat{t} = 0$, dans tous les cas.

Ces deux repères coïncident à $t = \hat{t} = 0$, c'est à dire que nous choisissons les fonctions A , B , C et D telles qu'à $t = 0$, nous ayons : $A(0) = B(0) = C(0) = D(0) = 1$. Par ailleurs, compte-tenu des équations (5.3) et (5.10), dans le nouveau repère l'équation d'état s'écrit :

$$\hat{p} = (D^\gamma/B)K\hat{\rho}^\gamma, \quad (5.13)$$

et les équations (5.1) et (5.2) deviennent :

$$\partial_{\hat{t}}\hat{\rho} + \vec{\nabla}_{\hat{r}} \cdot (\hat{\rho}\hat{v}) = -\Omega_1\hat{\rho}, \quad (5.14)$$

$$\partial_{\hat{t}}\hat{v} + (\hat{v} \cdot \vec{\nabla}_{\hat{r}})\hat{v} = -\frac{N}{\hat{\rho}}\vec{\nabla}_{\hat{r}}\hat{p} - \Omega_2\hat{v} - \frac{1}{\tau^2}\hat{r}, \quad (5.15)$$

où les quantités Ω_1 , N , Ω_2 et τ sont données par :

$$\Omega_1 = A^2 \left(3 \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D} \right), \quad N = \frac{BA^4}{C^2D}, \quad \Omega_2 = 2A^2 \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \right), \quad \frac{1}{\tau^2} = \frac{\ddot{C}A^4}{C}. \quad (5.16)$$

Ces quantités ne s'expriment qu'à l'aide des fonctions d'échelle et de leurs dérivées par rapport au temps. Nous allons discuter leurs dimensions un peu plus loin.

La raison pour laquelle les équations (5.14) et (5.15) contiennent des termes supplémentaires contenant ces quantités, est liée à la nature non inertielle du repère co-mobile. En conséquence, des forces supplémentaires ($-\Omega_2\hat{v}$ et $-\hat{r}/\tau^2$) apparaissent dans l'équation du mouvement, en même temps que le coefficient multiplicatif N , devant le gradient de pression.

À propos de l'équation de continuité (5.14), le membre de droite de l'équation, $-\Omega_1\hat{\rho}$, peut simplement s'interpréter comme un terme source (ou un puits, selon le signe de Ω_1) de matière.

Si l'on compare le premier terme du membre de gauche de (5.14) avec le membre de droite, il ressort immédiatement que la dimension de Ω_1 est celle de l'inverse d'un temps. En procédant de même avec l'équation (5.15), on trouve que Ω_2 possède la même dimension que Ω_1 , tandis que τ est homogène à un temps et N est une quantité sans dimension (nombre pure).

Nous allons montrer que les fonctions d'échelle A , B , C , D peuvent être déduites par des considérations d'invariance et de lois de conservation.

Dans un premier temps, nous allons imposer une condition d'invariance de l'équation d'état lors de la transformation d'échelle. Nous allons demander l'invariance de l'équation (5.3), c'est à dire que l'équation (5.13) va être strictement identique à l'équation (5.3). Dans ces conditions, il faut prendre $D^\gamma/B = 1$ soit :

$$B = D^\gamma. \quad (5.17)$$

En d'autres termes, l'écoulement conserve les mêmes propriétés thermodynamiques dans le nouvel espace (co-mouvant) par rapport à l'espace initial (\vec{r}, t) . C'est la première contrainte sur les fonctions d'échelle.

Deuxièmement, on demande les mêmes propriétés vis-à-vis des équations de continuité (5.1) et (5.14). Dans ces conditions, il faut prendre $\Omega_1 = 0$ et on obtient :

$$D = 1/C^3. \quad (5.18)$$

Cela signifie que la masse totale de la configuration est la même que nous soyons dans un espace ou dans l'autre. De plus, il est clair que cette masse est conservée au cours du temps dans chaque espace puisque le terme source, $-\Omega_1 \hat{\rho}$ a disparu dans (5.14) [dans l'équation (5.1), il n'y avait pas de terme source dès le départ].

Par ailleurs, dans le premier terme membre de droite de l'équation (5.15), on souhaite garder invariante la force due au gradient de pression. Ceci donne $N = 1$, soit :

$$\frac{BA^4}{C^2D} = 1. \quad (5.19)$$

En combinant les trois relations (5.17), (5.18) et (5.19), on a [152] :

$$A = C^{(3\gamma-1)/4}, \quad B = C^{-3\gamma}, \quad D = C^{-3}. \quad (5.20)$$

À ce stade, nous avons trouvé des expressions pour les trois fonctions d'échelle A , B , et D en terme de l'unique fonction $C(t)$. On rappelle qu'elle donne la relation entre les coordonnées radiales r et \hat{r} . Cependant, nous avons à satisfaire

deux conditions supplémentaires. Elles concernent toutes les deux l'équation du mouvement. Il s'agit du terme $-\Omega_2 \hat{v}$ qui est proportionnel mais de signe opposé à une vitesse et peut donc être interprété comme une friction. Puis, il s'agit du terme $-(1/\tau^2) \hat{r}$ qui est proportionnel à la position radiale et peut être vu comme une force de rappel puisqu'il comporte un signe négatif.

Avec les relations (5.20), les coefficients Ω_2 et τ^2 s'écrivent respectivement :

$$\Omega_2 = [(3\gamma - 5)/2] \dot{C} C^{3(\gamma-1)/2}, \quad (5.21)$$

$$\tau^{-2} = \ddot{C} C^{3\gamma-2}. \quad (5.22)$$

Nous passons maintenant à d'autres considérations. Il est clair que dans l'espace initial, nous avons un écoulement instationnaire (expansion de RSN). Cependant, comme la relation (5.12) entre $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et $\hat{v}(\hat{r}, t)$ contient un terme de "shift", à savoir $\dot{C}(t) \hat{r}$, il est tout à fait réalisable de chercher un écoulement stationnaire ($\partial/\partial \hat{t} \equiv 0$), voire statique ($d/d\hat{t} = 0$) dans l'espace co-mouvant sans pour autant remettre en cause la possibilité d'obtenir un écoulement variable avec l'espace et le temps dans le "repère" initial (\vec{r}, t) . C'est cette approche que nous allons choisir. À cet effet, il faut éliminer tout coefficient pouvant dépendre explicitement du temps dans les équations redimensionnées (5.13), (5.14) et (5.15) et avoir de nouvelles équations dont la structure permet de trouver des états d'équilibre. Pour la première équation, ceci a déjà été réalisé (5.17) et pour (5.14), la propriété est vérifiée grâce à l'équation (5.18). Puis enfin, nous avons satisfait $N = 1$ à travers la relation (5.19).

Il reste maintenant à demander que les quantités Ω_2 et τ données respectivement par (5.21) et (5.22) soient constantes et/ou nulles. Cette condition va faire apparaître deux contraintes, l'une sur la constante polytropique γ , l'autre sur la fonction d'échelle $C(t)$.

Une étude des équations (5.21) et (5.22) montre que la seule façon de satisfaire cette contrainte est de poser $\Omega_2 = 0$ en choisissant une constante polytropique $\gamma = 5/3$, correspondant à un gaz parfait mono-atomique. Dans ces conditions, la force de friction disparaît dans l'équation (5.15). Ensuite, lorsqu'on injecte $\gamma = 5/3$

dans (5.22), l'équation devient :

$$\ddot{C} C^3 = \frac{1}{\tau^2}, \quad (5.23)$$

qui peut être interprétée comme une équation différentielle ordinaire du second ordre pour la fonction d'échelle $C(t)$.

En prenant le paramètre τ constant, l'équation (5.23) prend sa forme la plus simple et elle peut être intégrée analytiquement. La solution générale est :

$$C(t) = \sqrt{\left(1 + \frac{\beta t}{\tau}\right)^2 + \frac{t^2}{\tau^2}}, \quad (5.24)$$

avec $C(0) = 1$ et où le paramètre β est une constante d'intégration arbitraire reliée à $\dot{C}(0)$ par $\beta \equiv \tau \dot{C}(0)$. D'après l'équation (5.12), il est clair que ce paramètre va être relié à la valeur initiale ($t = 0$) du champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, 0)$. Nous y reviendrons plus loin.

Il ressort que la solution (5.24) est pertinente pour décrire l'évolution d'une large classe d'objets astronomiques [17, 84]. Par exemple dans [17] les auteurs utilisent une fonction $C(t)$ de la forme $\sqrt{1 + (t/\tau)^2}$, et dans [84], $C(t)$ est une puissance de t soit $t^{6/5}$. Enfin, dans les simulations numériques effectuées par Jun [21], $C(t)$ est donnée par At^a où a est un exposant supérieur à un. La prise en compte de la vitesse initiale de la coquille par le paramètre β dans la fonction $C(t)$, généralise celle trouvée antérieurement par Bernstein et Book [17] [si on pose $\beta = 0$ dans l'équation (5.24)]. Ce paramètre nous permet de considérer une classe plus générale de RSN. Il pourrait être absorbé par une translation dans le temps, mais le temps caractéristique τ serait alors changé et il ne décrirait plus le même objet (la nouvelle expression de τ dépend, en effet, de β et de t_0 , la nouvelle origine des temps).

Ensuite, une fois $C(t)$ déterminée, les fonctions $A(t)$, $B(t)$ et $D(t)$ sont déduites des relations (5.20). À ce stade, toutes les données du "rescaling" (lien entre l'initial et le nouveau référentiel) sont obtenues et nous allons montrer que cette approche permet une étude analytique complète du développement de l'IRT en régime instationnaire.

Pour une constante polytropique $\gamma \neq 5/3$, la fonction d'échelle C est encore définie par l'équation (5.22), mais la quantité Ω_2 n'est plus nulle. Elle devient même une fonction du temps selon la forme donnée par (5.21). Dans ces conditions, il devient nécessaire de prendre en compte une force de friction dans l'équation du mouvement (5.15) écrite dans le repère co-mouvant. Cependant, cette approche n'est pas très fructueuse puisqu'un terme dépendant explicitement du temps apparaît lors du changement d'échelle et le problème devient bien plus complexe dans l'espace (\hat{r}, \hat{t}) que dans l'espace initial. Ce résultat est clairement en opposition avec l'esprit initial de la méthode, qui consiste à essayer de rendre le plus simple possible un problème complexe.

5.3 Solution de l'écoulement non perturbé

5.3.1 Sphère pleine

Nous avons vu qu'avec le choix $\gamma = 5/3$, tous les coefficients dans les équations d'évolution du système redimensionné [Éqs. (5.13) à (5.15)] sont constants. Il est intéressant de constater combien la physique et les mathématiques se plaisent à se combiner pour aller dans le même sens qui est celui de la simplification. En effet, du point de vue de la physique, $\gamma = 5/3$ représente le gaz parfait le plus simple (gaz mono-atomique) mais, en même temps, il correspond à des situations astrophysiques pertinentes ainsi que nous l'avons vu dans les chapitres précédents. Du point de vue des mathématiques, cette valeur de γ produit de nouvelles équations, dans l'espace co-mouvant, qui sont les plus simples possibles, même si l'équation du mouvement redimensionnée contient un terme supplémentaire, à savoir la force proportionnelle à \hat{r} [dernier terme dans l'équation (5.15)].

Il ne faut pas voir ce terme comme un inconvénient, mais au contraire comme un avantage. En effet, dans le membre de droite de (5.15), nous avons maintenant deux termes puisque la force de friction a disparu. Il faut noter que dans l'équation du mouvement initial (5.2), le membre de droite ne contient qu'une seule force

(le gradient de pression). Le fait que nous ayons deux forces dans l'espace redimensionné va nous permettre de trouver des solutions particulières très simples dans cet espace. La solution la plus simple correspond, par exemple, à imposer un équilibre avec la condition :

$$-\frac{1}{\hat{\rho}} \vec{\nabla}_{\hat{r}} \hat{p} - \frac{1}{\tau^2} \hat{r} = 0. \quad (5.25)$$

Cet équilibre se traduit simultanément par :

$$\hat{v}(\hat{r}, \hat{t}) = 0, \quad \forall \hat{r}, \forall \hat{t}, \quad (5.26)$$

et l'équation de continuité redimensionnée (5.14) est identiquement satisfaite puisque dans le cas d'un équilibre dans l'espace co-mouvant, toutes les grandeurs redimensionnées sont indépendantes du temps \hat{t} , soit :

$$\partial_{\hat{t}} \equiv d/d\hat{t} = 0. \quad (5.27)$$

Enfin, le lien entre $\hat{p}(\hat{r})$ et $\hat{\rho}(\hat{r})$ se fait par l'équation polytropique :

$$\hat{p} = K \hat{\rho}^{5/3} \quad (5.28)$$

qui provient de (5.13).

Ce type de simplification est rendu possible par le fait que la relation entre \vec{v} et \hat{v} n'est pas une simple loi de proportionnalité. En effet, d'après (5.12), même si on prend $\hat{v} = 0$, la vitesse dans l'espace physique initial est non nulle et est donnée par $\vec{v} = \dot{C} \hat{r}$, soit [en utilisant (5.9)] :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \vec{r}. \quad (5.29)$$

Nous avons donc un écoulement homologue ($v \propto r$) dans l'espace initial mais il est complètement instationnaire à cause du coefficient \dot{C}/C . Nous allons voir ceci plus en détail plus loin et pour cela, nous allons nous placer en symétrie purement sphérique :

$$\partial/\partial\theta = \partial/\partial\hat{\theta} = 0, \quad (5.30)$$

$$\partial/\partial\phi = \partial/\partial\hat{\phi} = 0. \quad (5.31)$$

Cette procédure va nous procurer un écoulement sphérique uni-dimensionnel instationnaire, et c'est celui dont nous allons étudier la stabilité au sens de Rayleigh-Taylor. Cette approche est inhabituelle puisqu'ici, il s'agit d'un écoulement dépendant du temps qui va être examiné, alors qu'ordinairement, l'étude de l'IRT est souvent menée autour d'un état d'équilibre dans l'espace usuel (\vec{r}, t) . Il n'y a pas d'écoulement de base, contrairement à la situation que nous allons étudier.

Pour trouver cet écoulement de base où la vitesse radiale est [voir Éq. (5.29)] :

$$v(r, t) = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} r, \quad (5.32)$$

il faut exhiber une solution statique à symétrie centrale à partir des équations (5.14) et (5.15) dans le repère co-mouvant en posant $\hat{v}(\hat{r}, \hat{t}) \equiv \hat{v}_0 = 0$, $\hat{\rho}(\hat{r}, \hat{t}) \equiv \hat{\rho}_0(\hat{r})$, et $\hat{p}(\hat{r}, \hat{t}) \equiv \hat{p}_0(\hat{r})$. Alors, en utilisant les Éqs. (5.25) et (5.28), la solution s'écrit (après avoir réalisé une intégration sur l'espace) :

$$\hat{\rho}_0(\hat{r}) = \hat{\rho}_0(0) \left(1 - \frac{\hat{r}^2}{\hat{r}_1^2}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(\hat{r}) = K \hat{\rho}_0^\gamma(0) \left(1 - \frac{\hat{r}^2}{\hat{r}_1^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (5.33)$$

où la densité centrale s'exprime par :

$$\hat{\rho}_0(0) = [\hat{r}_1^2 (\gamma - 1) / 2K \gamma \tau^2]^{1/(\gamma-1)}, \quad (5.34)$$

dans laquelle il faut faire $\gamma = 5/3$ et où \hat{r}_1 est une constante d'intégration.

Pour que la quantité $\hat{\rho}_0(0)$ soit une grandeur réelle, on suppose que $\tau^2 > 0$ et les profils statiques de densité, $\hat{\rho}_0(\hat{r})$, et de pression, $\hat{p}_0(\hat{r})$, s'annulent à la surface d'une sphère de rayon \hat{r}_1 . Cette constante d'intégration représente donc l'extension spatiale (rayon) d'une sphère de gaz à l'équilibre hydrostatique dans le référentiel co-mouvant.

De plus, comme à $t = 0$, on a $C(0) = 1$, la première équation du système (5.9) signifie que \hat{r}_1 correspond au rayon initial $r_1(t = 0)$, de la sphère gazeuse dont le champ de vitesse initiale est donné par :

$$v(r, 0) = r \dot{C}(0) = \beta \frac{r}{\tau}, \quad 0 \leq r \leq r_1(0). \quad (5.35)$$

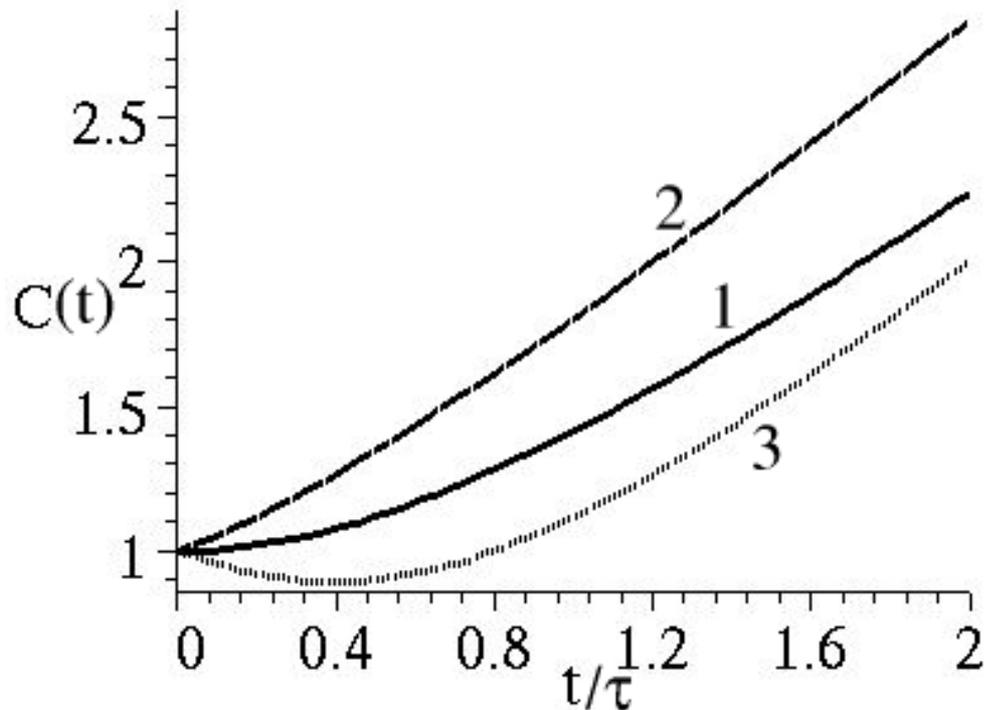


Figure 5.1: Représentation de la fonction d'échelle $C(t)$ [voir Éq. (5.24)] dans trois cas : sans vitesse initiale, $\beta = 0$ (1), avec une vitesse initiale positive, $\beta = 0,5$ (2) et avec une vitesse initiale négative, $\beta = -0,5$ (3).

Pour obtenir cette égalité, nous avons utilisé l'équation (5.32) et l'expression générale de $C(t)$ donnée par (5.24). Il apparaît clairement que le paramètre β introduit dans la solution générale (5.24) pour $C(t)$ est directement proportionnel à la vitesse initiale du fluide.

Dans leur publication [17], Bernstein et Book limitent leur solution au cas $\beta = 0$ et, par conséquent, ils décrivent l'évolution dans un RSN initialement au repos. Notre étude est plus générale et la fonction d'échelle que nous avons est plus riche.

La fonction $C(t)$ [voir Éq. (5.24)] est tracée sur la figure 5.1 pour trois valeurs de β . Dans les trois cas, C approche un comportement balistique [$C(t) \propto t$] lorsque $t \gg \tau$, mais lorsque $t < \tau$, il existe des comportements différents. Si la vitesse initiale est positive ou nulle ($\beta \geq 0$), $C(t)$ est monotone et décrit un écoulement

toujours en expansion. Par contre, lorsque la vitesse initiale est négative, c'est à dire, lorsque $\beta < 0$, alors il existe un rayon minimum, lequel correspond à une stagnation pour le temps : $t_r = \tau |\beta|/(\beta^2 + 1)$, suivie d'une phase d'expansion.

Une fois la fonction $C(t)$ complètement définie, nous avons $A(t) = [C(t)]^{(3\gamma-1)/4} = C(t)$ pour $\gamma = 5/3$ et l'intégration de la quatrième équation dans (5.9) fournit une relation entre les deux temps t et \hat{t} :

$$\hat{t} = \tau g(t) \quad \text{où} \quad g(t) = \arctan[\beta + (\beta^2 + 1)t/\tau] - \arctan \beta. \quad (5.36)$$

Sur la figure 5.2, est tracé la relation entre \hat{t} et t pour trois valeurs de β . Bien que t varie entre zéro et l'infini dans le repère du laboratoire, \hat{t} a une excursion limitée et varie entre $[0, \hat{t}_{max}[$ où la valeur supérieure \hat{t}_{max} dépend de β et est donnée par :

$$\hat{t}_{max} = \tau(\pi/2 - \arctan \beta). \quad (5.37)$$

Il s'avère qu'à partir de l'équation (5.32), que la fonction $C(t)$ caractérise l'accélération de la matière. En effet, en faisant la dérivée temporelle de $v(t)$ lorsque l'on suit la coquille, on obtient :

$$\dot{v} = \frac{r}{\tau^2 C^{3\gamma-1}} \quad . \quad (5.38)$$

En fait, précédemment nous avons annulé le terme de friction, $\Omega_2 \hat{v}$, en annulant Ω_2 . Mais, pour l'écoulement non perturbé étudié dans cette section, ce terme est nul quelque soit Ω_2 , car dans ce cas, $\hat{v} = \hat{v}_0 = 0$. Par conséquent, la relation (5.38) est valable quelque soit γ . En particulier, pour $\gamma = 5/3$ elle se réduit à :

$$\dot{v} = \frac{r}{\tau^2 C^4} \quad . \quad (5.39)$$

On voit que pour les cas $\beta \geq 0$ l'accélération diminue au cours du temps comme $C(t)$ croit de façon monotone. Par contre, pour $\beta < 0$, l'accélération est maximale au moment du rebond, ensuite la coquille entre dans la phase d'expansion (Fig. 5.1).

Pour $\gamma = 5/3$, on peut obtenir aussi les fonctions d'échelle $B(t)$ et $D(t)$ à partir des équations (5.20). Il s'ensuit $B = C^{-5}$ et $D = C^{-3}$. En conséquence,

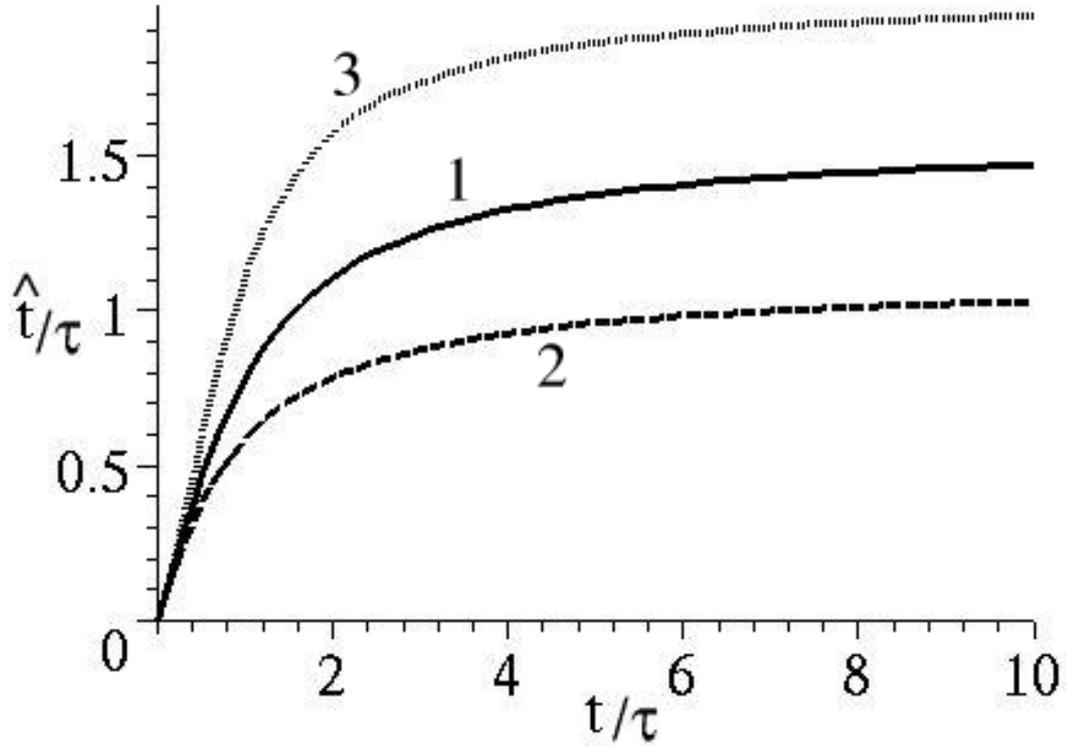


Figure 5.2: Relation entre les temps t et \hat{t} [voir Éq. (5.36)] entre le repère co-mouvant et le repère du laboratoire, pour $\beta = 0$ (1), 0,5 (2), et $-0,5$ (3).

la solution non-stationnaire dans le repère du laboratoire peut être déduite [voir Éqs. (5.9), (5.10) et (5.12)] et on obtient :

$$\rho(r, t) = \hat{\rho}_0(0) C^{-3} \left(1 - \frac{r^2}{C(t)^2 \hat{r}_1^2} \right)^{3/2}, \quad (5.40)$$

$$p(r, t) = K \hat{\rho}_0^{5/3}(0) C^{-5} \left(1 - \frac{r^2}{C(t)^2 \hat{r}_1^2} \right)^{5/2}, \quad (5.41)$$

$$v_r(r, t) = \frac{r}{C^2 \tau} \left(\beta + (\beta^2 + 1) \frac{t}{\tau} \right). \quad (5.42)$$

L'indice "r" pour la vitesse indique que celle-ci est purement radiale. Cette solution décrit l'expansion d'une bulle de fluide, dont la densité et la pression décroissent avec le rayon. De plus, comme le fluide est compressible, la divergence de la vitesse de l'écoulement de base est non nulle et s'exprime par :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{3\dot{C}}{C} = \frac{3}{\tau} \frac{(\beta + t/\tau)}{[(1 + \beta t/\tau)^2 + t^2/\tau^2]}. \quad (5.43)$$

Elle décroît avec le temps comme $3/t$ lorsque t tend vers l'infini, autrement dit le volume de la coquille croît avec le temps. De plus, la vitesse croît linéairement avec l'espace [voir l'Éq. (5.42)] dans la coquille. Cette solution peut être obtenue par une approche différente en imposant initialement un profil de vitesse $v_r \propto r$ [55, 153]. Cependant, la méthode que nous utilisons est plus rigoureuse puisque ce type de profil initial n'a pas été supposé dès le début, mais déduit. De la même façon, comme nous allons le voir, elle est plus efficace pour effectuer l'analyse perturbative qui va suivre.

5.3.2 Coquille

À partir de la solution hydrodynamique pour une sphère ou une bulle [Éqs. (5.40) à (5.42)] décrite ci-dessus, on peut construire un modèle de reste de supernova soufflé par le vent d'un pulsar. Pour cela, nous "évidons" la partie interne de la bulle à l'intérieur d'un rayon $\hat{r}_0 < \hat{r}_1$ dans le repère co-mouvant. Que ce soit dans le repère co-mouvant ou dans le repère initial, nous avons une sphère creuse ou plus exactement une coquille. La pression du fluide supprimé est remplacée par une pression radiative attribuée au vent du pulsar (voir le chapitre VI). La solution correspondant à l'expansion d'une coquille dans le repère du laboratoire, est représentée sur la figure 5.5. Les rayons interne r_0 et externe r_1 de la coquille à l'instant t sont donnés par $r_{0,1}(t) = C(t) \hat{r}_{0,1}$. Rappelons que les quantités \hat{r}_0 et \hat{r}_1 sont fixes (statiques). Elles correspondent, en fait aux valeurs respectives de $r_0(t)$ et de $r_1(t)$ prises à $t = 0$. Puisque la densité du vent est très inférieure à la densité de la coquille, dans notre analyse nous la négligeons, ce cas correspond à un nombre d'Atwood, $A_t = 1$ pour l'IRT.

Les profils de densité, de pression et de vitesse dans la coquille découlent directement des équations (5.40)–(5.42). Ils sont tracés sur la figure 5.3. L'épaisseur L de la coquille croît comme $L = C L_0$ où $L_0 = \hat{r}_1 - \hat{r}_0$ est l'épaisseur initiale et la coquille s'étend dans le vide tout en conservant sa masse. La loi de pression sur la surface interne [$r = r_0(t)$] de la coquille donne la pression produite directement

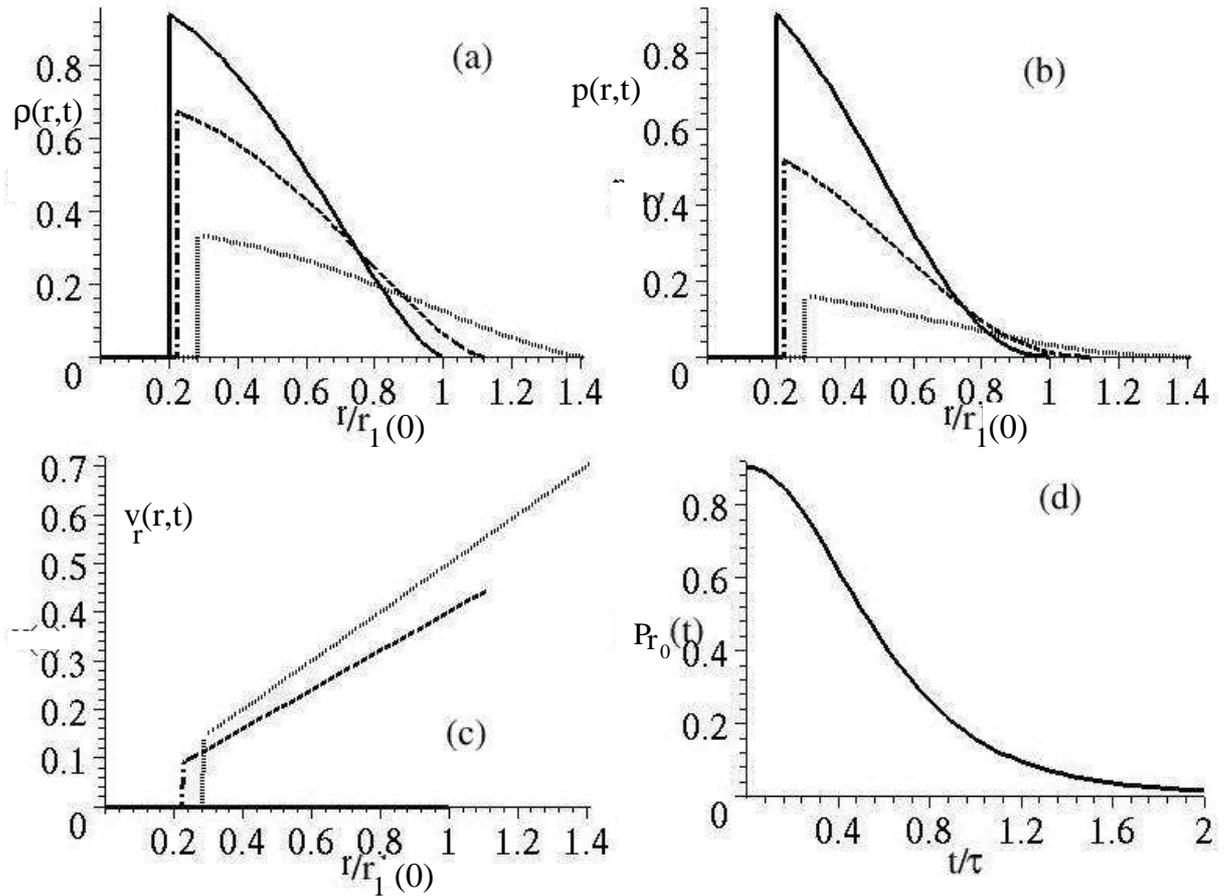


Figure 5.3: Profils de densité (a), de pression (b) de vitesse (c) en fonction du rayon, dans le repère du laboratoire pour $t = 0$ (trait plein), $t = 0,5\tau$ (tirets), et $t = \tau$ (pointillés). Notons qu'à $t = 0$, le profil de vitesse est confondu avec l'axe horizontal. La figure (d) correspond au tracé de la pression du pulsar $p_{r_0}(t)$ sur la face interne de la coquille en fonction du temps. Les paramètres initiaux sont : $\beta = 0$ (vitesse initiale nulle) et $\hat{r}_0 = 0,2 \hat{r}_1$. La vitesse est normalisée par \hat{r}_1/τ , la densité par la densité centrale $\hat{\rho}_0(0)$ et la pression par $K\hat{\rho}_0(0)^{5/3}$.

par le vent du pulsar :

$$p_{r_0}(t) = K \hat{\rho}_0^{5/3}(0) [C(t)]^{-5} \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right)^{5/2}. \quad (5.44)$$

La figure 5.3(d) montre l'évolution temporelle de cette pression. En particulier, lorsque $t \gg \tau$ la pression décroît comme $p_{r_0} \propto t^{-5}$. Cette dépendance temporelle peut être reliée à la luminosité du pulsar $L(t) \propto -d_t(p_{r_0}V)$, où V est le volume à l'intérieur de la coquille formée par les éjectas. Puisque le volume croît comme C^3 et que la pression décroît comme C^{-5} , la dérivée du produit varie comme \dot{C}/C^3 . Donc, asymptotiquement pour $t \gg \tau$, on trouve que $L(t) \propto t^{-3}$. Cette dépendance temporelle est en accord avec le modèle classique de la luminosité des pulsars. Comme le montrent Blondin *et al.* [79], pour $t \gg \tau$ la luminosité du pulsar décroît comme $t^{-\mu}$ où $2 < \mu < 3$ (l'incertitude sur μ dépend des caractéristiques du pulsar) et τ est le temps caractéristique de durée de vie du pulsar [154] – voir le chapitre VI. Donc, la loi de pression définie par notre solution analytique (5.44) peut être considérée comme appropriée pour décrire la pression du milieu relativiste créé par un pulsar dont la rotation décroît par émission d'un vent de particules relativistes et de rayonnement [22, 79].

Il est important de remarquer que dans notre modèle, la luminosité du pulsar décroît temporellement. Ce modèle est plus proche de la nature de l'objet astrophysique étudié, tandis que dans la littérature, le plus souvent, cette luminosité est considérée comme constante dans certaines simulations numériques récentes [21, 22]. Cet effet de diminution de luminosité a une incidence directe sur l'accélération de la coquille donc sur le taux de croissance de l'IRT. En effet, à cause de la décroissance de la luminosité du pulsar (voir chapitre VI), l'accélération sur la face interne de la coquille va tendre vers zéro et, en conséquence, la croissance des perturbations de l'IRT ne va pas être soutenue comme dans le cas où la luminosité est prise constante. Par ailleurs l'expansion va devenir linéaire en temps (c'est d'ailleurs ce que l'on obtient). Bien que ce point soit souligné, par exemple dans [143], il n'est pas pour autant pris en compte.

De plus, l'accélération produite par la poussée du vent du pulsar sur la face interne vaut $w_0(t) = [1/C(t)]^3(\hat{r}_0/\tau^2)$, d'après l'équation (5.38) avec $r = C\hat{r}_0$ et

$\gamma = 5/3$ (où \hat{r}_0 et τ sont respectivement le rayon interne initial de la coquille et τ le temps caractéristique d'expansion). Si l'on considère l'action de champ gravitationnel $w_g(t)$ du pulsar central sur la face interne, il est de la forme : $w_g(t) = [1/C(t)]^2 [G M_p / \hat{r}_0^2]$ (G est la constante de gravitation et M_p la masse du pulsar d'environ une masse solaire). On remarque que $w_0(t)$ décroît asymptotiquement en t^{-3} tandis que $w_g(t)$ varie t^{-2} . Le champ de gravitation du pulsar au niveau de la face interne décroît le moins vite et il est légitime d'estimer le temps t_c à partir duquel la gravitation l'emporte. Cette quantité est donnée par l'égalité $w_0(t_c) = w_g(t_c)$, on trouve $t_c \sim 3 \times 10^9$ ans ($r_0 = 0,2$ pc et $\tau \sim 200$ ans). Donc ce temps est largement plus grand que le temps caractéristique d'évolution du pulsar, $\tau = 200$ ans. En conséquence l'attraction gravitationnelle n'a, en principe, pas le temps de ralentir l'expansion de la coquille, même si un "fallback" peut arriver pour certains types de SN [82]. Néanmoins, dans notre cas il est légitime de négliger le champ gravitationnel dans toute la phase d'évolution du pléion.

La distribution radiale de la vitesse de l'écoulement est aussi en accord avec les observations astronomiques. En effet, le mouvement et la structure filamentaire de l'enveloppe de la nébuleuse du Crabe ont été notamment étudiés par Trimble [24, 25]. Le mouvement des filaments est majoritairement radial et la vitesse des filaments est essentiellement proportionnelle à la distance au centre, $v \propto r$. De plus, ces observations montrent que les filaments ont été accélérés. Ce comportement peut être reproduit par le modèle analytique que nous proposons en ajustant les paramètres β et τ (voir le chapitre VI).

5.4 Étude de stabilité de la coquille

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité de la coquille en expansion par le vent du pulsar. Cette configuration est instable au sens de Rayleigh-Taylor car un fluide léger (radiation) pousse un fluide lourd (la coquille formée des restes de la SN). Le cas considéré ici, si l'on se rapporte aux exemples du chapitre IV, correspond au cas compressible avec un nombre d'Atwood, $A_t = 1$ et avec une

épaisseur de fluide finie. Ainsi que l'on peut le voir sur la figure 5.4, une petite perturbation sur la face interne de la coquille peut croître durant la phase d'accélération de celle-ci et éventuellement la fragmenter (voir plus loin). Un autre cas possible est éventuellement une déformation de la face externe de la coquille synchronisée avec celle ayant lieu sur la face interne. C'est l'instabilité de coquille fine étudiée par Vishniac *et al.* [155, 156, 157] mentionnée dans [22].

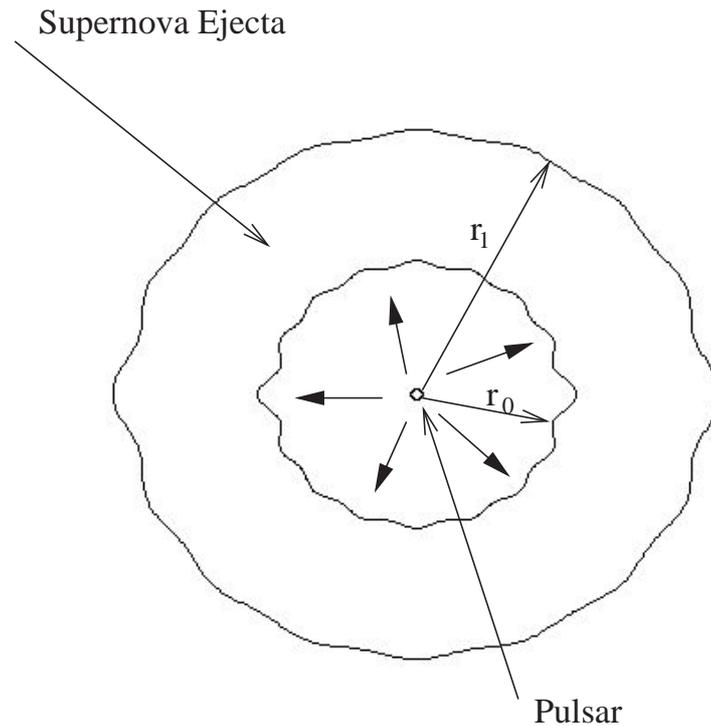


Figure 5.4: Représentation de la coquille en expansion sous l'effet de la pression du vent du pulsar. À l'instant t la surface interne située est en $r_0(t) = \hat{r}_0 C(t)$, et la surface externe en $r_1(t) = \hat{r}_1 C(t)$ où \hat{r}_0 et \hat{r}_1 correspondent respectivement aux rayons initiaux pour l'intérieur et l'extérieur de la coquille. La surface interne de la coquille est accélérée par le vent du pulsar et est instable au sens de Rayleigh-Taylor.

L'analyse de stabilité de la coquille dans le repère du laboratoire est compliquée car l'écoulement de base est instationnaire. La vitesse, la densité et la pression varient en temps et en espace. Cette analyse est beaucoup plus simple dans le repère co-mouvant car alors la coquille est au repos. Dans cet espace, nous

définissons alors toute perturbation, $\delta\hat{q}$, d'une quantité physique \hat{q} quelconque par $\hat{q}(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{t}) = \hat{q}_0(\hat{r}) + \delta\hat{q}(\hat{r}, \theta, \phi, \hat{t})$ (on se souvient que θ et $\hat{\theta}$ ainsi que ϕ et $\hat{\phi}$ coïncident exactement) et la perturbation de position de chacune des surfaces (interne et externe) de la coquille par $\delta\hat{r} = \hat{\eta}(\theta, \phi, \hat{t})$ (voir plus loin). Puisque $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ et $\gamma = 5/3$, les équations du mouvement (5.14) et (5.15) linéarisées en trois dimensions, en coordonnées sphériques sont :

$$\partial_{\hat{t}}\delta\hat{\rho} + \frac{1}{\hat{r}^2}\partial_{\hat{r}}(\hat{r}^2\hat{\rho}_0\delta\hat{v}_{\hat{r}}) + \frac{1}{\hat{r}\sin\theta}\partial_{\theta}(\sin\theta\hat{\rho}_0\delta\hat{v}_{\theta}) + \frac{1}{\hat{r}\sin\theta}\partial_{\phi}(\hat{\rho}_0\delta\hat{v}_{\phi}) = 0 \quad (5.45)$$

$$\hat{\rho}_0\partial_{\hat{t}}\delta\hat{v}_{\hat{r}} = -\partial_{\hat{r}}\delta\hat{p} - \tau^{-2}\hat{r}\delta\hat{\rho}, \quad (5.46)$$

$$\hat{r}\hat{\rho}_0\partial_{\hat{t}}\delta\hat{v}_{\theta} = -\partial_{\theta}\delta\hat{p} \quad (5.47)$$

$$\hat{r}\sin\theta\hat{\rho}_0\partial_{\hat{t}}\delta\hat{v}_{\phi} = -\partial_{\phi}\delta\hat{p}, \quad (5.48)$$

où

$$\delta\hat{p} = C_{s_0}^2(\hat{r})\delta\hat{\rho}, \quad (5.49)$$

avec, $C_{s_0}^2(\hat{r}) = (5/3)K\hat{\rho}_0^{2/3}(\hat{r}) \equiv (\hat{r}_1^2 - \hat{r}^2)/3\tau^2$, le carré de la vitesse du son locale dans le système physique statique de l'espace co-mouvant. Elle correspond aussi à la vitesse du son initiale (à $t = 0$) en tout point de la configuration dans l'espace physique (r, t) .

Dès lors, il est nécessaire de définir les conditions aux limites aux deux interfaces \hat{r}_0 et \hat{r}_1 . Nous allons supposer que chacune des interfaces subissent la perturbation : $\hat{\eta}_i(\theta, \phi, \hat{t}), i = 0, 1$. Alors, on doit satisfaire la continuité de la pression et de la vitesse radiale à chaque interface, $\hat{r} = \hat{r}_i + \hat{\eta}_i (i = 0, 1)$. Ces conditions s'écrivent :

$$\partial_{\hat{t}}\hat{\eta}_i = \delta\hat{v}_{\hat{r}}(\hat{r}_i), \quad \hat{\eta}_i\partial_{\hat{r}}\hat{p}_0(\hat{r}_i) + \delta\hat{p}(\hat{r}_i) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (5.50)$$

Elles sont similaires à celles de Bernstein et Book [17] et correspondent aux perturbations incompressibles de la surface. C'est la conséquence directe du fait que les deux faces de la coquille soient en contact avec le vide. Nous reviendrons sur ce point au cours de ce chapitre et dans le chapitre VI.

En introduisant la perturbation relative de densité (contraste de densité) $\hat{\epsilon} = \delta\hat{\rho}/\hat{\rho}_0$, on peut réduire le système des équations (5.45), (5.46), (5.47), et (5.48) à

une seule équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \hat{\epsilon} + \frac{2}{\tau^2} \hat{\epsilon} = & C_{s0}^2 \partial_{\hat{r}}^2 \hat{\epsilon} + \left(\frac{2C_{s0}^2}{\hat{r}} - \frac{7\hat{r}}{3\tau^2} \right) \partial_{\hat{r}} \hat{\epsilon} + \frac{2\hat{r}^2}{3\tau^4 C_{s0}^2} \hat{\epsilon} + \\ & \frac{C_{s0}^2}{\hat{r}^2 \sin^2 \theta} [\sin \theta \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta} \hat{\epsilon}) + \partial_{\phi}^2 \hat{\epsilon}]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Dans cette équation, si nous conservons seulement le premier terme du membre de gauche et le premier terme du membre de droite, on obtient une équation aux dérivées partielles très simple : $\partial_t^2 \hat{\epsilon} = C_{s0}^2 \partial_{\hat{r}}^2 \hat{\epsilon}$, correspondant à l'équation des ondes sonores. Dans l'équation (5.51), beaucoup d'autres termes apparaissent et proviennent des effets de la dynamique dans l'espace initial (\vec{r}, t) . Cependant, on s'attend à des comportements beaucoup plus complexes que ceux décrits par des ondes sonores.

À l'aide des équations du mouvement (5.46)–(5.50) et de la relation existant entre $\delta \hat{p}$ et $\delta \hat{\rho}$, les composantes du champ de vitesse perturbé peuvent s'exprimer en fonction du contraste de densité :

$$\partial_t \delta \hat{v}_{\hat{r}} = -C_{s0}^2 \partial_{\hat{r}} \hat{\epsilon} + \frac{2\hat{r}}{3\tau^2} \hat{\epsilon}, \quad (5.52)$$

$$\hat{r} \partial_t \delta \hat{v}_{\theta} = -C_{s0}^2 \partial_{\theta} \hat{\epsilon}, \quad (5.53)$$

$$\hat{r} \sin \theta \partial_t \delta \hat{v}_{\phi} = -C_{s0}^2 \partial_{\phi} \hat{\epsilon}. \quad (5.54)$$

La dépendance angulaire des quantités perturbées peut être écrite en terme d'harmoniques sphériques, $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$\hat{\epsilon}(\hat{r}, \theta, \phi, \hat{t}) = \hat{\zeta}(\hat{r}, \hat{t}) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.55)$$

$$\hat{\eta}_i(\theta, \phi, \hat{t}) = \hat{\kappa}_i(\hat{t}) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad i = 0, 1, \quad (5.56)$$

où $\hat{\zeta}(\hat{r}, \hat{t})$ et $\hat{\kappa}_i$ ($i = 0, 1$) sont trois fonctions que l'on déterminera plus tard, l et m sont deux entiers avec $l \geq 0$ et $m \in [-l, l]$. L'équation (5.51) se réduit alors à une équation aux dérivées partielles par rapport à \hat{t} et \hat{r} pour la fonction $\hat{\zeta}(\hat{r}, \hat{t})$:

$$\partial_t^2 \hat{\zeta} + \frac{2}{\tau^2} \hat{\zeta} = C_{s0}^2 \left[\partial_{\hat{r}}^2 \hat{\zeta} + \left(\frac{2}{\hat{r}} - \frac{7\hat{r}}{3C_{s0}^2 \tau^2} \right) \partial_{\hat{r}} \hat{\zeta} + \left(\frac{2\hat{r}^2}{3\tau^4 C_{s0}^4} - \frac{l(l+1)}{\hat{r}^2} \right) \hat{\zeta} \right]. \quad (5.57)$$

C'est une équation linéaire dont tous les coefficients sont indépendants du temps \hat{t} . Il est donc possible de considérer une solution avec une dépendance temporelle exponentielle. On note ω la quantité sans dimension représentant la valeur

propre et $S(\hat{r})$ la fonction propre et nous posons :

$$\hat{\zeta}(\hat{r}, \hat{t}) = (\hat{a}_0/\hat{r}_1)S(\hat{r}) \exp(\omega\hat{t}/\tau) \quad (5.58)$$

et

$$\hat{\kappa}_i(\hat{t}) = \hat{a}_i \exp(\omega\hat{t}/\tau), \quad i = 0, 1 \quad (5.59)$$

où, \hat{a}_i est l'amplitude initiale de la perturbation en position de la face interne ($i = 0$) et de la face externe ($i = 1$), et nous supposons que : $\hat{a}_i \ll \hat{r}_i$. On remarque que $\hat{\zeta}$ s'exprime en fonction de \hat{a}_0 et de \hat{r}_1 . Les quantités des faces interne et externe apparaissent ensemble mais c'est parce que les longueurs sont normalisées par rapport au rayon extérieur de la coquille. L'équation (5.57) devient alors sous une forme adimensionnée une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S}{dR^2} + \left(\frac{2}{R} - \frac{7R}{1-R^2} \right) \frac{dS}{dR} \\ + \left(\frac{6(2R^2-1)}{(1-R^2)^2} - \frac{l(l+1)}{R^2} - \frac{3\omega^2}{1-R^2} \right) S = 0, \end{aligned} \quad (5.60)$$

où $R = \hat{r}/\hat{r}_1$ varie entre $R_0 = \hat{r}_0/\hat{r}_1$ et 1.

Cette équation peut se réduire à une forme canonique pour une fonction F par la transformation $S(R) = R^\mu F(R^2)/(1-R^2)$:

$$\begin{aligned} x(x-1) \frac{d^2 F}{dx^2} + \left[x(\mu+3) - \left(\frac{3}{2} + \mu \right) \right] \frac{dF}{dx} \\ + \left(-\frac{\mu^2 + \mu - l(l+1)}{4x} + \frac{\mu^2 + 4\mu - l(l+1) + 3\omega^2}{4} \right) F = 0, \end{aligned} \quad (5.61)$$

où $x = R^2$, et où μ est un paramètre qui va être déterminé tout de suite après.

Elle correspond à l'équation hypergéométrique [158] si le terme en F/x est nul, c'est à dire si $\mu^2 + \mu - l(l+1) = 0$. On en déduit deux solutions pour le paramètre μ : $\mu_1 = l$ et $\mu_2 = -(l+1)$. En identifiant tous les termes de l'équation (5.61) avec l'équation hypergéométrique [158], deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (5.61) peuvent être exprimées en terme de fonctions hypergéométriques notées : $\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x)$ avec les paramètres α , β et γ calculés pour les deux valeurs $\mu_{1,2}$ trouvées plus haut et où x est l'argument. On en déduit la solution de l'équation (5.60) :

$$S(R) = \frac{R^l}{1-R^2} C_1 \mathcal{F}(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; R^2) + \frac{R^{-(l+1)}}{1-R^2} C_2 \mathcal{F}(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; R^2), \quad (5.62)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires et où :

$$\alpha_{1,2} = \frac{\mu_{1,2}}{2} + 1 + \Delta, \quad \beta_{1,2} = \frac{\mu_{1,2}}{2} + 1 - \Delta, \quad \gamma_{1,2} = \frac{3}{2} + \mu_{1,2}, \quad (5.63)$$

avec :

$$\Delta = \sqrt{l(l+1) + 4 - 3\omega^2}. \quad (5.64)$$

L'expression (5.62) donne la solution générale de l'équation (5.60) et donc englobe toutes les solutions possibles. On peut se demander si l'équation (5.61) a des solutions pour d'autres valeurs que $\mu_{1,2}$? Dans ce cas, l'équation (5.61) ne se réduit plus à une équation hypergéométrique et devient plus difficile à résoudre. Néanmoins, cette solution peut être représentée par l'expression (5.62) avec un choix approprié des constantes C_1 et C_2 . Les valeurs de μ telles que $\mu_1 = l$ et $\mu_2 = -(l+1)$ nous donnent rapidement et simplement accès à toutes les solutions de l'équation (5.60) développées sur des fonctions hypergéométriques, voir l'expression (5.62).

Dans ce cas, pour chaque jeu de paramètres, \mathcal{F} se réduit aux fonctions de Legendre associées P_a^b et Q_a^b [158] – voir l'annexe A.7.

Dans ces conditions (5.62) devient :

$$S(R) = \frac{1}{\sqrt{R}(1-R^2)^{3/2}} [C_1 P(R) + C_2 Q(R)], \quad (5.65)$$

où les fonctions P et Q sont reliées aux fonctions de Legendre associées [voir les équations (A.14) et (A.15) dans l'annexe A.7].

Pour trouver les deux constantes C_1 et C_2 , il faut appliquer les conditions limites (5.50) qui sont aux nombres de quatre. Ceci n'est pas surprenant car, en plus de la détermination de C_1 et C_2 , nous avons besoin d'au moins une relation supplémentaire. C'est grâce à elle que nous allons obtenir la relation de dispersion que nous recherchons.

La quatrième et dernière contrainte nous indique que les amplitudes des perturbations sur chaque face de la coquille ne sont pas indépendantes. Tous les calculs sont donnés dans l'annexe A.7. Cette dernière propriété provient des conditions

limites que nous imposons à la coquille étudiée. Sur sa face externe, la coquille est en contact avec le vide et la pression sur cette surface (même si elle est perturbée par des modes arbitraires) doit toujours rester nulle. Par ailleurs, sur sa face interne, la coquille est en contact avec la pression de la nébuleuse. Dans l'espace co-mouvant cette pression reste constante et, en conséquence, la pression dans la coquille, près de son bord intérieur, doit rester constante. Si nous raisonnions dans l'espace (\vec{r}, t) , la pression due au rayonnement du pulsar ne serait pas constante mais, néanmoins, la façon dont elle devrait décroître avec le temps serait imposée "extérieurement" par la loi de variation de la luminosité du pulsar.

Pour revenir à la solution générale (5.65), les constantes C_1 et C_2 sont respectivement données par les équations (A.29) et (A.30) de l'annexe A.7. La relation de dispersion est donnée par l'équation (A.33), mais vu son importance, nous la reportons ici :

$$\omega^2 = -\Delta - \frac{2R_0^2}{1 - R_0^2} - \frac{\Delta + l}{\sqrt{1 - R_0^2}} \frac{P(1)Q_1(R_0) - Q(1)P_1(R_0)}{P(R_0)Q(1) - P(1)Q(R_0)}. \quad (5.66)$$

Ainsi, malgré le caractère instationnaire du problème étudié, nous avons été capables de trouver une relation de dispersion là où d'autres personnes étudiant ce même problème n'avaient pas réussi [17]. Par contre, ils étaient capables de donner l'évolution exacte de la perturbation quelque soit la valeur de γ alors que nous devons nous restreindre au cas $\gamma = 5/3$.

Soulignons qu'obtenir une relation de dispersion pour une situation instationnaire est assez rare et ce problème a été résolu grâce à l'utilisation du repère co-mouvant où les phénomènes sont statiques.

De ce point de vue, ce chapitre se situe dans le prolongement logique du chapitre IV dans lequel nous avons exhibé plusieurs relations de dispersion. Celle que nous avons ici est beaucoup plus complexe que celle obtenue précédemment.

L'équation (5.66) définit ω à partir de deux paramètres sans dimension, le "rayon" de la coquille R_0 (on se souvient que $R_0 = \hat{r}_0/\hat{r}_1$) et le numéro du mode l . Cette relation est indépendante du nombre azimutal m , car le système non perturbé est à symétrie sphérique. On montrera plus loin que cette relation ne dépend

pas de l'épaisseur de la coquille, $L_0 = \hat{r}_1 - \hat{r}_0$, qui peut s'exprimer en fonction du rapport R_0 (pour les perturbations incompressibles, voir plus loin).

Enfin, pour revenir au lien entre les deux faces de la coquille [voir Éq. (A.32) de l'annexe A.7], on obtient une relation entre les déplacements \hat{a}_0 et \hat{a}_1 des surfaces (interne et externe) de la coquille à l'aide de l'équation (A.32) :

$$3 \frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_0} = 2^{l+1} \frac{\Gamma[(\Delta + l)/2 + 1]}{\Gamma[(\Delta - l)/2]} \times \left(C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\pi(\Delta + l)}{2} + C_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi(\Delta + l)}{2} \right). \quad (5.67)$$

Cette relation sera utilisée ultérieurement pour l'analyse de l'évolution temporelle des instabilités.

5.5 Résolution numérique de l'équation de dispersion

L'équation de dispersion (5.66) est relativement compliquée et nous allons d'abord chercher une solution numérique. Dans ce but, nous représentons cette équation par une relation entre deux fonctions $F_L(\Delta) = F_R(\Delta) - L$ est comme left et R comme right, dépendant du paramètre Δ . Les deux fonctions sont données par :

$$F_L(\Delta) = [l(l+1) + 4 - \Delta^2]/3, \quad (5.68)$$

$$F_R(\Delta) = -\Delta - \frac{2R_0^2}{1 - R_0^2} - \frac{\Delta + l}{\sqrt{1 - R_0^2}} \frac{P(1)Q_1(R_0) - Q(1)P_1(R_0)}{P(R_0)Q(1) - P(1)Q(R_0)}, \quad (5.69)$$

où, F_R est le membre de droite de l'équation de dispersion (5.66). Pour le membre de gauche, $F_L(\Delta)$, nous avons utilisé la relation $\Delta = \sqrt{l(l+1) + 4 - 3\omega^2}$ [Éq. (5.64)] pour exprimer ω^2 en fonction de Δ et de l .

Sur la figure 5.5, on a représenté F_L et F_R en fonction de Δ et nous avons cherché les points d'intersection de ces deux fonctions pour un numéro de mode l et différentes épaisseurs de coquille R_0 .

Pour obtenir une solution instable (ω^2 doit être réel et positif), le point d'intersection de ces deux fonctions doit se produire dans la partie supérieure droite du plan $(F_{R,L}; \Delta) : 0 < \Delta < \sqrt{l(l+1)+4} = \Delta_m$ et pour $0 < F_R < [l(l+1)+4]/3$. La condition $\Delta = 0$ définit une valeur limite pour le taux de croissance pour l donné : $\omega^2 < [l(l+1)+4]/3$. Pour une solution stable, l'intersection doit se produire à l'intérieur du domaine inférieur droit du plan $(F_{R,L}; \Delta) : 0 < \Delta < \sqrt{l(l+1)+4} = \Delta_m$ et pour $F_L < 0$. Ces restrictions sont très utiles pour trouver une solution numérique à l'équation de dispersion.

Un exemple de courbes F_R, F_L est tracé sur la figure 5.5. Les deux courbes sont plutôt simples. La fonction F_L est juste une parabole qui atteint un maximum pour $\Delta = 0$ et devient négative pour $\Delta > \Delta_m$. Le membre de droite passe aussi par un maximum pour $\Delta = 0$ et il décroît avec Δ lorsque Δ augmente. Il y a deux points d'intersection : un pour $\omega^2 > 0$ (mode instable) et un autre pour $\omega^2 < 0$ (modes oscillants pour $\Delta = 6$ dans le cas présent). La solution numérique indique que les points d'intersection sont indépendants de l'épaisseur de la coquille R_0 . En particulier, le point d'intersection instable correspond à $\Delta = 3$ pour un numéro de mode $l = 4$. On montre plus loin que c'est une conséquence de la nature de la perturbation. Ce résultat est en accord avec la solution formulée par Bernstein et Book [17], qui après l'analyse asymptotique ont conclu que seules les perturbations incompressibles pouvaient croître et que le taux de croissance ne dépendait pas de l'épaisseur de la coquille.

De plus, on peut vérifier facilement que l'écoulement général est irrotationnel. Premièrement, l'écoulement non-perturbé est irrotationnel car le champ de vitesse est purement radial [équation (5.42)]. Deuxièmement, la vorticité de l'écoulement perturbé dans le repère du laboratoire est donn e par : $\text{rot } \delta \vec{v} = [\text{rot } \hat{\delta \vec{v}}]/C(t)$ puisque $A(t) = C(t)$ [nous avons utilisé la relation (5.12) entre les vitesses $\delta \vec{v}$ et $\hat{\delta \vec{v}}$]. Comme $\text{rot } \hat{\delta \vec{v}} = 0$, d'après les équations (A.17) (voir annexe A.7), alors l'écoulement perturbé est par conséquent aussi irrotationnel dans l'espace physique.

Dans cette section, nous avons identifié sur la figure 5.5, les deux points d'in-

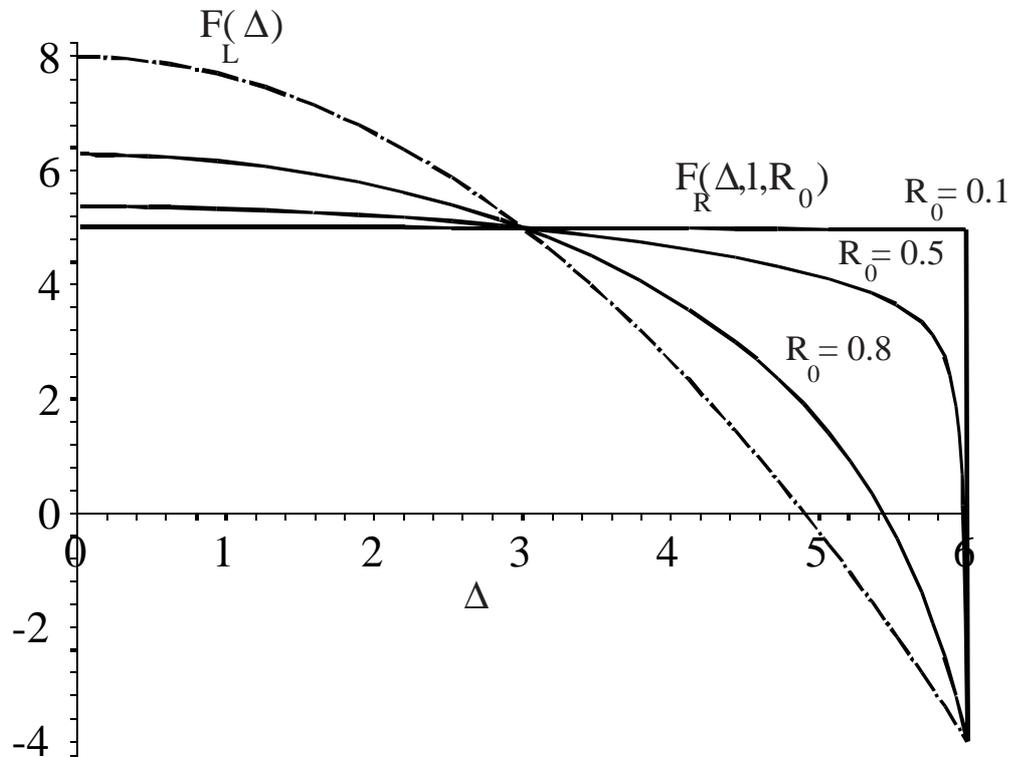


Figure 5.5: Tracé des deux fonctions $F_L(\Delta)$ et $F_R(\Delta, l, R_0)$ représentant les membres de gauche et de droite de l'équation (5.66). L'intersection de ces deux courbes donne la valeur de Δ , correspondant à la solution de l'équation de dispersion (5.66). Ces courbes dépendent du numéro de mode l et F_R dépend aussi de l'épaisseur de la coquille R_0 (les courbes sont tracées pour $R_0 = 0,1 ; 0,5$ et $0,8$). Cependant, on constate que le point d'intersection reste inchangé. Dans cet exemple, on a $l = 4$ et on trouve que le point d'intersection s'effectue toujours pour $\Delta = 3$. Comme nous avons la relation $\Delta^2 = l(l + 1) + 4 - 3\omega^2$, nous obtenons $3\omega^2 = 15$, soit $\omega^2 = 5$. On peut remarquer que cette valeur correspond à $l + 1$. De même pour, $\Delta = 6$ (second point d'intersection), nous obtenons $3\omega^2 = -12$, soit $\omega^2 = -4$, cette valeur correspond alors à $-l$.

tersection comme étant des modes associés à une perturbation incompressible. Cependant, nous pouvons prolonger les deux fonctions F_L et F_R pour des valeurs de Δ supérieures à six (toujours pour $l = 4$) et, par exemple, pour $R_0 = 0,8$. Dans ces conditions, d'autres points d'intersection entre F_L et F_R existent. Nous avons vu que pour les modes incompressibles, l'intersection s'effectue pour les points $(\omega^2 = 5, \Delta = 3)$ et $(\omega^2 = -4, \Delta = 6)$ [voir la figure 5.5]. En conséquence, les autres points d'intersection pour $R_0 = 0,8$ donnés par $(\omega^2 \sim -28, \Delta \sim 10)$ et $(\omega^2 \sim -68, \Delta \sim 15)$ etc... sont tous stables et correspondent aux modes compressibles (ondes de gravité perturbées par l'accélération). Cet exemple montre que seules les perturbations incompressibles sont instables. Bernstein et Book [17] observent que seuls les modes incompressibles ont un comportement instable de façon asymptotique. La relation de dispersion que nous trouvons nous permet de séparer les modes incompressibles des modes compressibles.

5.6 Comportement de l'écoulement perturbé

Jusqu'à maintenant, nous avons recherché une solution générale à l'écoulement perturbé, c'est à dire sans faire d'hypothèse sur la nature de l'écoulement. En particulier, nous avons considéré un fluide compressible. Cependant, la solution numérique plutôt simple pour la relation de dispersion, suggère qu'une propriété spécifique de l'écoulement doit pouvoir émerger. Dans cette section, nous allons étudier les propriétés de l'écoulement perturbé.

Puisque $\partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta Y_{lm}) / \sin \theta + (\partial_\phi^2 Y_{lm}) / \sin^2 \theta = -l(l+1)Y_{lm}$, et après injection de la dérivée seconde de S , obtenue à partir de l'équation (5.60), la divergence de la perturbation s'exprime par :

$$\operatorname{div} \delta \hat{\vec{V}} = \frac{\hat{\omega}}{\hat{r}_1 \tau} \left\{ -S - \frac{R}{\omega^2} \left[\frac{dS}{dR} - \left(\frac{2RS}{1-R^2} \right) \right] \right\} Y_{lm}, \quad (5.70)$$

où $\delta \hat{\vec{V}}$ est le champ de la vitesse perturbée [donnée par les équations (A.17) de l'annexe A.7]. On peut noter que d'après la seconde condition aux limites (5.50), la divergence de la vitesse perturbée est nulle aux bords de la coquille. Maintenant,

nous allons poser l'hypothèse selon laquelle $\text{div } \delta \hat{\mathbf{V}} = 0$ quelque soit $R \in [R_0, 1]$. Cette condition revient à dire que l'écoulement perturbé serait incompressible. Cette hypothèse peut paraître hardie, mais, en fait, elle ne l'est pas. En effet, lorsque nous avons étudié dans le chapitre IV, la relation de dispersion pour un fluide compressible [Éq. (4.19)], nous avons noté que lorsque le nombre d'Atwood vaut 1, cette relation de dispersion se réduit à celle d'un fluide incompressible, $\omega = \sqrt{kg}$.

En conséquence, lorsqu'un fluide compressible se retrouve en contact avec le vide, il "oublie" ses propriétés de compressibilité lorsqu'il est perturbé.

À propos du problème de la coquille, qui comporte à l'intérieur un fluide relativiste de densité nulle et, à l'extérieur, du vide, on s'attend donc à ce que les propriétés compressibles de la perturbation disparaissent. C'est l'objet du calcul qui suit dans lequel nous montrons rigoureusement que la relation de dispersion (5.66) se réduit à une relation de dispersion incompressible.

On peut exprimer les dérivées première et seconde de $S(R)$ par :

$$\frac{dS}{dR} = S \left(\frac{2R}{1-R^2} - \frac{\omega^2}{R} \right), \quad (5.71)$$

$$\frac{d^2S}{dR^2} = S \left[\left(\frac{2(1-R^2) + 4R^2}{(1-R^2)^2} + \frac{\omega^2}{R^2} \right) + \left(\frac{2R}{1-R^2} - \frac{\omega^2}{R} \right)^2 \right], \quad (5.72)$$

où l'équation (5.71) est obtenue à partir de l'équation (5.70) en posant $\text{div } \delta \hat{\mathbf{V}} = 0$ pour $R \in [R_0, 1]$. De plus, l'équation (5.72) est la dérivée de (5.71) par rapport à R .

Maintenant, on injecte ces deux relations dans l'équation différentielle (5.60) qui gouverne la perturbation générale et on obtient une relation purement algébrique sur S :

$$\begin{aligned} S \left[\frac{2(1-R^2)}{(1-R^2)^2} + \frac{\omega^2}{R} + \left(\frac{2R}{1-R^2} - \frac{\omega^2}{R} \right)^2 + \right. \\ \left. \left(\frac{2}{R} - \frac{7R}{1-R^2} \right) \left(\frac{2R}{1-R^2} - \frac{\omega^2}{R} \right) \right. \\ \left. + 6 \frac{2R^2-1}{(1-R^2)^2} - \frac{l(l+1)}{R^2} - \frac{3\omega^2}{1-R^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Après simplification, pour que (5.73) soit toujours satisfaite, une relation simple entre ω et l doit être vérifiée :

$$\omega^4 - \omega^2 - l(l+1) = 0. \quad (5.74)$$

En conséquence, cette relation est consistante avec les valeurs propres de l'équation (5.60) (elle est automatiquement satisfaite) et avec notre contrainte supplémentaire provenant de l'équation (5.70), c'est à dire, imposant $\text{div } \delta \hat{V} = 0$ dans toute la coquille. De plus, elle est cohérente avec les conditions aux limites données par l'équation (A.24).

La solution de cette équation quartique est donnée par :

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{l+1}, \quad \omega_{3,4} = \pm i\sqrt{l}. \quad (5.75)$$

De plus, on insiste sur le fait que cette solution est en parfait accord avec la solution générale de l'équation de dispersion (5.66) trouvée numériquement dans la section précédente. En effet, pour $l = 4$, on trouve numériquement $\omega^2 = 5$ et $\omega^2 = -4$ conduisant à $\omega = \pm\sqrt{5}$ et $\omega = \pm 2i$, respectivement. Ces valeurs sont exactement celles obtenues à partir de (5.75) en remplaçant l par la valeur spécifique $l = 4$.

En conséquence, la solution que nous avons trouvé, prouve que le profil de vitesse perturbé est à divergence nulle, et n'est plus perçu comme un artifice de calcul visant à satisfaire toutes les contraintes. Ce résultat est la preuve que la perturbation de l'écoulement perturbé est incompressible et que le taux de croissance est indépendant de l'épaisseur de la coquille. Ce résultat est nouveau, bien que des études antérieures sur les coquilles minces et épaisses aient été faites (voir par exemple l'article de revue par Kull [121]). Tous les modes sont instables pour toutes les valeurs de l et le taux de croissance le plus instable parmi $\omega_1(l)$ et $\omega_2(l)$, à savoir $\omega(l) = \sqrt{l+1}$ est tracé sur la figure 5.6.

Dans leurs travaux, Bernstein et Book [17] donnent l'expression de l'évolution d'une perturbation incompressible pour γ quelconque et pour tous temps (voir l'équation (46) dans [17]). Si on applique cette expression pour $\gamma = 5/3$, l'expres-

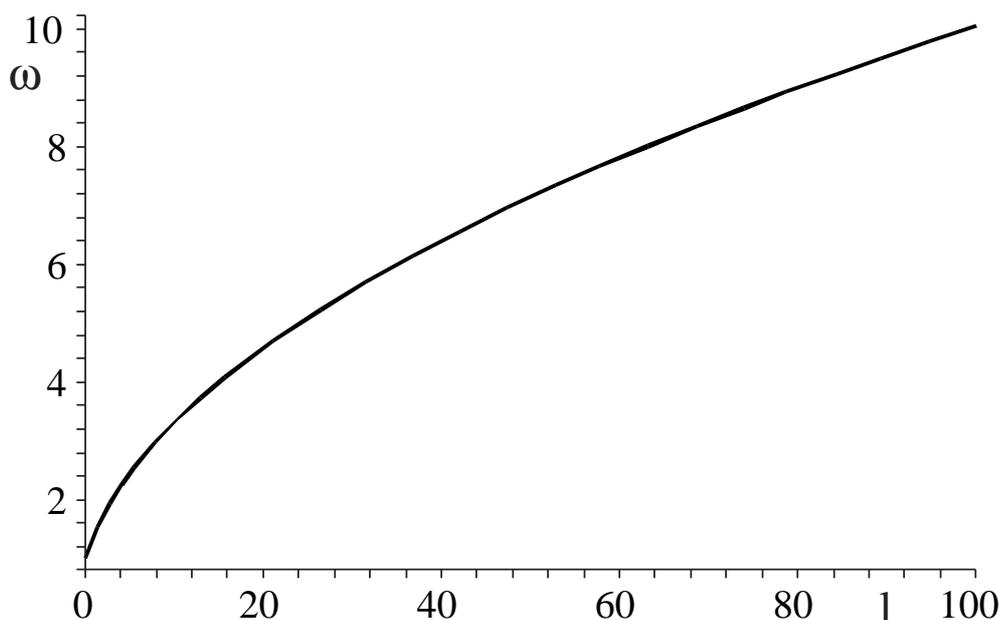


Figure 5.6: Tracé du taux de croissance adimensionné ω en fonction de l . Tous les modes sont instables et $\omega = \sqrt{l+1}$ [d'après l'Éq. (5.75)].

sion de l'évolution temporelle de la perturbation appelé \mathcal{F} dans leur article s'écrit :

$$\mathcal{F} \propto f(t) \cosh[\sqrt{l+1} \arctan(t/\tau)]. \quad (5.76)$$

où $f(t)$ est égale à $C(t)$ pour $\beta = 0$ (*i.e.*, sans vitesse initiale de la coquille).

On trouve la même expression en considérant la superposition linéaire des modes $\omega_{1,2}$ donnés par la relation (5.75) et pour $\beta = 0$ [d'après l'équation (5.36) qui donne le lien entre t et \hat{t}], on obtient une évolution temporelle de la perturbation de la forme :

$$C(t) \cosh[\sqrt{l+1} \arctan(t/\tau)]. \quad (5.77)$$

Le résultat que nous avons est strictement identique à celui obtenu dans [17]. Cependant, notre approche possède le mérite de faire intervenir une relation de dispersion et, lorsqu'on y fait $A_t = 1$, d'expliquer l'apparition de modes perturbatifs purement incompressibles.

Une étude plus approfondie de la combinaison des quatre modes incompress-

sibles, ω_i ($i = 1, 4$), est effectuée dans la section 5.8. Cette analyse permet de définir différentes conditions initiales pour la coquille et d'en étudier la stabilité ainsi que l'interaction entre la face interne et externe de la coquille.

5.7 Analyse qualitative de l'IRT

La relation de dispersion définie par l'équation (5.74) et les solutions (5.75) sont en effet étonnamment simples et nous avons montré qu'elles correspondent aux modes dont les perturbations sont incompressibles. En particulier, si l'on ne considère que le mode instable $\omega_1 = \sqrt{l+1}$, alors la perturbation à une évolution temporelle de la forme, $\exp[\omega_1 \hat{t}/\tau]$, c'est à dire, en $\exp[\sqrt{l+1} g(t)]$ [où $g(t)$ est donnée par l'équation (5.36)]. Ce comportement peut être comparé avec un modèle simple, en supposant qu'à chaque instant le taux de croissance de l'IRT soit donné par la formule classique $\omega = \tau\sqrt{w_0 k_0}$ [10] (voir chapitre IV), où w_0 est l'accélération de la face interne, définie par l'équation (5.38). Par conséquent, l'évolution temporelle de la perturbation dans ce modèle s'écrit :

$$\exp \left[\int_0^t \sqrt{k_0(t') w_0(t')} dt' \right], \quad (5.78)$$

où $k_0(t)$ est le nombre d'onde de la perturbation. Dans la géométrie sphérique, la longueur d'onde de la perturbation λ évolue au cours du temps, $2\pi/\lambda(t) = (l+1)/[\hat{r}_0 C(t)]$ (où l est le numéro du mode de la perturbation). En injectant l'expression de (5.38) dans l'équation (5.78) on obtient :

$$\exp \left[\int_0^t \sqrt{\frac{(l+1)}{\hat{r}_0 C(t')} \frac{\hat{r}_0 C(t')}{\tau^2 C^{3\gamma-1}}} dt' \right] = \exp \left[\frac{\sqrt{l+1}}{\tau} \int_0^t \frac{dt'}{C^{\frac{3\gamma-1}{2}}} \right], \quad (5.79)$$

– Pour $\gamma = 5/3$, (5.79) devient :

$$\exp \left[\frac{\sqrt{l+1}}{\tau} \int_0^t \frac{dt'}{C^2} \right] = \exp \left[\sqrt{l+1} g(t) \right]. \quad (5.80)$$

Sachant que l'expression $g(t)$ est donnée par (5.36), on retrouve alors pour $\gamma = 5/3$ le taux de croissance exact pour le mode le plus instable.

Dans ce cas, on peut aller plus loin et calculer le taux de croissance pour γ quelconque ($\gamma > 1$). En effet, l'expression de $k_0(t)$, le nombre d'onde, ne change pas, il suffit de calculer la nouvelle accélération $w_0(t, \gamma)$.

– Pour $\gamma \neq 5/3$, le taux de croissance donné par l'expression (5.78) devient en intégrant l'équation (5.22) :

$$\exp \left[\sqrt{l+1} \int_0^{C(t)} \frac{C^{(1-3\gamma)/2} dC}{\sqrt{\beta^2 + \frac{2}{3(\gamma-1)} \left(1 - \frac{1}{C^{3\gamma-3}}\right)}} \right]. \quad (5.81)$$

À partir de cette expression on peut donner facilement le taux de croissance asymptotique [$C(t) \rightarrow t$ pour $t \rightarrow +\infty$] avec $\beta = 0$ et la comparer à l'expression du taux de croissance asymptotique fournie par Bernstein et Book pour γ quelconque (voir expression (51) dans [17]).

γ	Notre modèle approché	Solution de Bernstein et Book [17]
4/3	21,63 – 2,48 × 10 ⁹	20,06 – 5,20 × 10 ⁸
5/3	15,09 – 3,60 × 10 ⁶	15,09 – 3,60 × 10 ⁶
2	12,19 – 1,98 × 10 ⁵	12,84 – 3,78 × 10 ⁵

Table 5.2: Comparaison du taux croissance et de l'amplification de la perturbation pour $t \rightarrow \infty$, donnés par l'Éq. (5.81) avec $\beta = 0$ et la solution de Bernstein et Book, *i.e.*, l'Éq. (51) dans [17], pour $\gamma = 4/3, 5/3, 2$ et pour $l = 100$. On donne pour chaque valeur de γ , le taux de croissance et ensuite l'amplification qui correspond à l'exponentielle du taux de croissance.

Dans ce cas, pour $l = 100$ et pour trois valeurs de γ données dans l'article de Bernstein et Book, soit $\gamma = 5/3, 4/3$ et 2 , l'écart entre les deux taux de croissance ne dépasse pas 8 % (voir Tableau 5.2). Donc, l'expression instantanée, $\omega = \tau \sqrt{w_0 k_0}$, donne une bonne approximation du taux de croissance de l'instabilité, même pour $\gamma \neq 5/3$. Par contre, il existe une incertitude importante, jusqu'à un facteur cinq, sur la valeur de l'amplification de la perturbation, puisque l'on prend l'exponentielle du taux de croissance.

5.8 Évolution de la surface interne et externe de la coquille

L'effet de l'instabilité peut être analysé par l'étude du déplacement $\hat{\xi}$ de chaque point de la coquille. Il peut être calculé à partir du champ de vitesse dans le repère co-mouvant en utilisant la relation : $d\hat{\xi}/d\hat{t} = \delta\hat{v}$ qui nous donne $\hat{\xi}(\hat{r}, \theta, \phi, \hat{t}) = (\tau/\omega)\delta\hat{v} = (\tau/\omega)\exp(\omega\hat{t}/\tau)\delta\hat{V}(\hat{r}, \theta, \phi)$, où $\delta\hat{V}$ est donnée par (A.17) (voir l'annexe A.7). Puisque l'équation de dispersion a quatre racines (5.75), la solution générale pour le déplacement est une superposition linéaire de quatre modes. En particulier, le déplacement radial est donné par :

$$\hat{\xi}_r(R, \theta, \phi, \hat{t}) = \hat{a}_0 \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \hat{\xi}_i(R) e^{\omega_i \hat{t}/\tau} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.82)$$

où,

$$\hat{\xi}_i(R) = \frac{1}{3\omega_i^2} \left[-(1-R^2) \frac{dS_i}{dR} + 2RS_i \right], \quad (5.83)$$

est le déplacement des modes propres i [pour cela nous avons utilisé la première équation du système (A.17) de l'annexe A.7] et les Λ_i sont les amplitudes de ces modes ($\Lambda_{1,2}$ sont réels, $\Lambda_3 = \Lambda_4^*$).

Cependant, comme la fonction S dépend de ω^2 alors $\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_2$ et $\hat{\xi}_3 = \hat{\xi}_4$. Nous avons aussi $\hat{\xi}_i(R_0) = 1$. Cette égalité provient de la normalisation de $\hat{\xi}_i$ par l'amplitude, \hat{a}_0 , de la perturbation sur la face interne \hat{a}_0 (voir section 5.4). Par ailleurs, sur la face externe, le déplacement $\hat{\xi}_i(1)$ est donné par l'équation (5.67).

À partir de là, on peut calculer la déformation de la coquille dans l'espace initial (R, θ, ϕ, t) . À l'aide de la relation d'échelle sur les distances [première équation du système des équations (5.9)] et d'après la relation (5.36) entre t et \hat{t} , le déplacement radial $\xi_r(R, \theta, \phi, t)$ s'écrit :

$$\xi_r(R, \theta, \phi, \hat{t}) = a_0 C(t) Y_{lm}(\theta, \phi) \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \hat{\xi}_i(R) e^{\omega_i g(t)}, \quad (5.84)$$

où $a_0 = C(0)\hat{a}_0 = \hat{a}_0$ et où $g(t)$ est donnée par (5.36). La perturbation de la vitesse

radiale est fournie par l'équation (5.12) sachant que $A(t) = C(t)$ car $\gamma = 5/3$:

$$\delta\vec{v} = \frac{\delta\hat{v}}{C(t)} = \frac{\delta\hat{V}}{C(t)}e^{\omega g(t)}, \quad (5.85)$$

où $\delta\hat{V}$ est donnée par les équations (A.17) de l'annexe A.7.

La façon dont on obtient la relation (5.85) demandent quelques détails. Les vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et $\hat{v}(\hat{r}, \hat{t})$ dans l'espace (\vec{r}, t) et (\hat{r}, \hat{t}) , respectivement, sont reliées à travers l'équation (5.12). Dans (\hat{r}, \hat{t}) , nous avons $\hat{v}(\hat{r}, \hat{t}) = \delta\hat{v}$, (car il n'y a pas d'écoulement de base dans l'espace co-mouvant) tandis que l'équation correspondante est $\vec{v}(\vec{r}, t) = \delta\vec{v} + \vec{v}_0(\vec{r}, t)$ dans (\vec{r}, t) où $\delta\vec{v}$ est la vitesse perturbée et où $\vec{v}_0(\vec{r}, t)$ est la vitesse de l'écoulement de base donnée par $\vec{v}_0(\vec{r}, t) = \dot{C}(t)\vec{r}/C(t)$. Après introduction de ces éléments dans (5.12), nous obtenons (5.85) immédiatement. De plus, nous introduisons dans la suite la quantité $\delta\vec{V}(\vec{r}, t) = \delta\hat{V}/C(t)$ par $\delta\vec{v} = \delta\vec{V} \exp[\omega g(t)]$ (cette expression est identique à la relation entre $\delta\hat{v}$ et $\delta\hat{V}$).

Il est maintenant possible d'exprimer les constantes Λ_i ($i = 1, 4$) à partir de la connaissance des déformations sur chacune des faces ainsi que le profil de la vitesse initiale perturbée dans l'espace physique. Dans l'espace chapeau, la vitesse radiale $\delta\hat{v}_r$ est donnée par $\delta\hat{v}_r = d\hat{\xi}_r/d\hat{t}$. Autrement dit, puisque nous avons $\delta V_r(R, 0) = \delta\hat{V}_r(R, 0)$ à $t = \hat{t} = 0$ et, en réalisant une initialisation sur l'axe $\theta = \phi = 0$, les Λ_i peuvent être calculés à partir des conditions aux limites, données par $\xi_r(R_0, 0) = a_0 D_0$, $\xi_r(1, 0) = a_0 D_1$, $\delta V_r(R_0, 0) = a_0 V_0$, $\delta V_r(1, 0) = a_0 V_1$ dans l'espace physique. Les quantités D_0 et D_1 sont deux nombres sans dimension qui donnent la valeur des déformations (mesurées par rapport à a_0) sur la face interne et la face externe de la coquille, respectivement. Ainsi pour une valeur de a_0 donnée, on peut ne pas avoir de déformation sur l'une des deux faces si D_0 ou D_1 est nul. De façon similaire, les quantités V_0 et V_1 représentent les "déformations" dans l'espace des vitesses. En conséquence, pour a_0 donné les paramètres D_i et V_i ($i = 0, 1$) permettent de contrôler les perturbations en espace et en vitesse sur chacune des deux faces de la coquille.

Une fois résolu, le système d'équations correspondant s'écrit :

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2(b_1 - b_2)} \left[D_1 - D_0 b_2 \pm \frac{\tau}{\sqrt{l+1}} (V_1 - V_0 b_2) \right], \quad (5.86)$$

$$\Lambda_{3,4} = \frac{1}{2(b_1 - b_2)} \left[D_0 b_1 - D_1 \mp i \frac{\tau}{\sqrt{l}} (V_1 - V_0 b_1) \right], \quad (5.87)$$

où $b_1 = \hat{\xi}_{1,2}(1)$ et $b_2 = \hat{\xi}_{3,4}(1)$ et de plus les modes propres sont normalisés par la condition $\hat{\xi}_i(R_0) = 1$ ($i = 1, 4$). Par la suite, nous allons étudier l'évolution de la perturbation pour plusieurs cas spécifiques particulièrement intéressant à notre sens.

Premièrement, nous allons étudier le mode le plus instable $\omega_1 = \sqrt{l+1}$ tel que $\Lambda_1 = 1$ et $\Lambda_{2,3,4} = 0$, ce qui correspond à $D_0 = 1$, $D_1 = b_1$ et $V_0 = \sqrt{l+1}/\tau$, $V_1 = b_1 V_0$. La courbe en trait plein sur la figure 5.7 représente l'évolution temporelle du déplacement radial de la face interne (a) et externe (b) de l'interface, $\eta_{0,1}$, dans le repère du laboratoire (pour les angles $\theta = 0$ et $\phi = 0$). Il dépend de deux paramètres : τ - le temps caractéristique d'expansion et β - la vitesse initiale de la coquille.

La loi exponentielle pour la variation du déplacement est valable seulement si $t \ll \tau$ (phase d'accélération de la coquille). En effet, d'après (5.36), pour $t \ll \tau$ on a $g(t) \simeq t/\tau$ et cela implique que $\exp[\omega_1 g(t)]$ se comporte comme $\exp(\omega_1 t/\tau)$, donc $\eta_{0,1}/a_0 = \exp(t/\tau)$, avec $C(t)$ restant proche de 1. Lorsque $t \gg \tau$, $\exp[g(t)]$ tend vers $\exp[\omega_1(\pi/2 - \arctan \beta)]$ et cela implique $\eta_{0,1}/[(t/\tau)a_0] = \exp[\omega_1(\pi/2 - \arctan \beta)]$ avec $C(t)$ tendant vers t/τ . La coquille est en vol pratiquement libre et la perturbation croît linéairement, c'est à dire, que $\eta_{0,1} \propto t/\tau$ puisque le quotient $\eta_i/C(t)$, $i = 0, 1$, tend vers une constante pour $t \gg \tau$. Cette propriété résulte du fait que la fonction $g(t)$ est bornée et $C(t)$ devient une fonction linéaire du temps.

Sur la figure 5.7, le déplacement est divisé par la fonction d'échelle pour faire apparaître seulement la perturbation due à l'IRT. Il est intéressant de noter que dans ce cas, la vitesse initiale est nulle ($\beta = 0$) et le facteur d'amplification, $e^{\omega\pi/2}$, ne dépend plus du temps d'expansion. Au contraire, l'amplification est beaucoup plus forte pour une coquille convergente initialement ($\beta < 0$ mais $|\beta| \gg 1$).

Pour comparer évolution analytique et évolution numérique, nous avons uti-

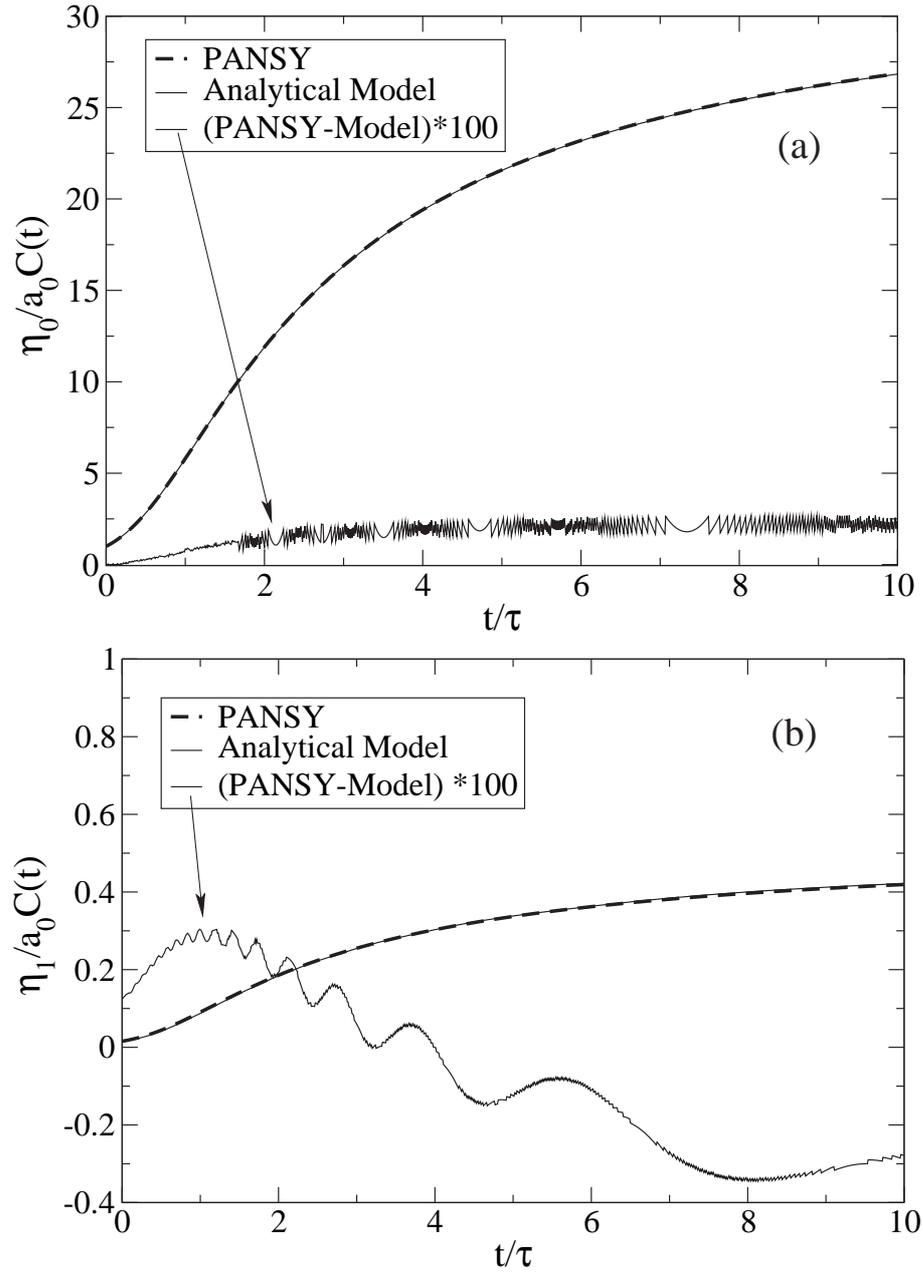


Figure 5.7: Comparaison entre l'évolution temporelle du déplacement de la face interne (a) et externe (b) de la coquille pour le mode le plus instable : $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_{2,3,4} = 0$, pour le numéro de mode $l = 4$ avec une coquille d'épaisseur $R_0 = 0,5$ et une vitesse initiale nulle ($\beta = 0$). Le déplacement est divisé par la fonction d'échelle $C(t)$ pour montrer la croissance de la perturbation due seulement à l'IRT. Ces figures montrent un très bon accord entre la solution analytique (trait plein) et les simulations effectuées avec le code Pansy (tiret). Les différences entre les deux courbes (PANSY-Modèle) sont inférieures au pourcent.

lisé le code hydrodynamique Pansy [132]. Il permet de calculer le développement temporel de perturbations tridimensionnelles. Il prend en compte la thermodynamique, les phénomènes de transport tels que le flux de chaleur et la viscosité. Ce code est complètement linéarisé autour de l'ordre zéro pour la géométrie sphérique ou cylindrique et pour un écoulement compressible. L'ordre zéro est calculé à une dimension sur une grille lagrangienne de la forme $f^j(t)$, où les f sont toutes les grandeurs hydrodynamiques nécessaires, et où j est un indice numérotant la zone radiale. Au premier ordre, f s'écrit $f_{l,m}^j(t)Y_{l,m}(\theta)\exp(im\phi)$ en géométrie sphérique et les équations sont résolues une fois linéarisées autour de l'ordre zéro. Ce code a été amélioré pour prendre en compte les phénomènes demandant une haute résolution [133].

La solution analytique pour les déplacements interne et externe d'un mode instable a été comparée avec les simulations réalisées avec le code Pansy. Un très bon accord entre l'analytique et les simulations est obtenu puisque la différence est inférieure au pourcent. On montre aussi sur la figure 5.7 que l'interface interne croît rapidement car elle est instable, tandis que l'interface externe qui est en contact avec le vide ne montre pas une croissance importante. Le quotient $\eta_1/C(t)$ varie peu. La déviation entre la théorie et les simulations est plus importante avec la face externe qu'avec la face interne, car il est plus difficile pour le code de traiter l'interface avec le vide.

D'après l'équation (5.36), le facteur d'amplification $\exp[\omega g(t)]$, lorsque t tend vers l'infini, est donné par $\exp[\sqrt{l+1}(\pi/2 - \arctan \beta)]$. Donc, l'amplification asymptotique dépend fortement de la vitesse initiale de la coquille, définie par le paramètre β [voir l'équation (5.42)]. Par exemple, pour le mode $l = 60$, si $\beta = 1$, c'est à dire, lorsque la coquille est en phase d'expansion, le coefficient d'amplification est diminué d'un facteur 10^3 par rapport au cas $\beta = 0$. Donc, la coquille est moins fragilisée. Cependant, lorsque $\beta = -1$, c'est à dire, pour une coquille initialement convergente, l'amplification atteint 10^8 . Il en résulte que la coquille devient plus fragile. Si on se réfère à la FCI, on en conclut, par conséquent, que la phase la plus dangereuse est la phase de stagnation, qui a été analysée notamment par Hattori

et al. [18].

La croissance d'un mode propre pur, que nous avons étudiée ci-dessus correspondant à un déplacement corrélé des deux interfaces de la coquille (interne et externe), ne semble pas assez riche ou réaliste. Il est plus approprié de considérer des perturbations initiales sur les faces interne et externe indépendantes. À l'aide des équations (5.86) et (5.87), à partir des quatre modes incompressibles, on peut construire toutes sortes de perturbations initiales. On peut considérer le cas pour lequel la face interne et externe ont une déformation initiale opposée, c'est à dire, $D_0 = 1$, $D_1 = -1$, tandis que les vitesses sont nulles $V_0 = V_1 = 0$. Ce type de perturbation sera dénommé par la suite : "sausage". Cette perturbation peut être produite dans les couches externes de la supernova par des mouvements de convection juste avant son explosion et être "imprimée" ensuite dans les éjectas.

D'après les équations (5.86) et (5.87), on en déduit : $\Lambda_1 = \Lambda_2 = (-1 - b_2)/[2(b_1 - b_2)]$ et $\Lambda_3 = \Lambda_4 = (b_1 + 1)/[2(b_1 - b_2)]$. La forme initiale de la coquille est représentée sur la figure 5.8a et le profil du déplacement radial initial est donné sur la figure 5.8d. L'évolution temporelle du déplacement des faces d'une telle coquille est donnée sur la figure 5.8c pour le mode $l = 4$. Nous avons normalisé le déplacement ξ_r par la fonction d'échelle $a_0 C(t)$, ceci pour observer l'amplification due seulement à l'instabilité de Rayleigh-Taylor, en supprimant l'expansion de la coquille. Nous observons clairement une croissance importante de la perturbation face interne due à l'IRT, tandis que la face externe devient sphérique car elle est stable [figure 5.8b]. La perturbation croît sur une période de temps telle que $t < \tau$, c'est à dire, lorsque la coquille est accélérée. De plus, on peut observer qu'à $t = \tau$ le déplacement est plus important sur l'axe polaire $\theta = 0$ [l'axe X sur la figure 5.8b] (pour les angles $\theta = 0$ et $\phi = 0$). Par ailleurs, à cet instant, la face externe de la coquille est redevenue sphérique ainsi que le montre la figure.

Il existe trois autres types de perturbations intéressantes à étudier : (i) la perturbation "kink" ou "spaghetti" pour lesquelles les perturbations face interne et externe ont la même amplitude avec une vitesse nulle, c'est à dire, lorsque $D_0 = D_1 = 1$, $V_0 = V_1 = 0$; (ii) le mode "interne" pour lequel seule la position de

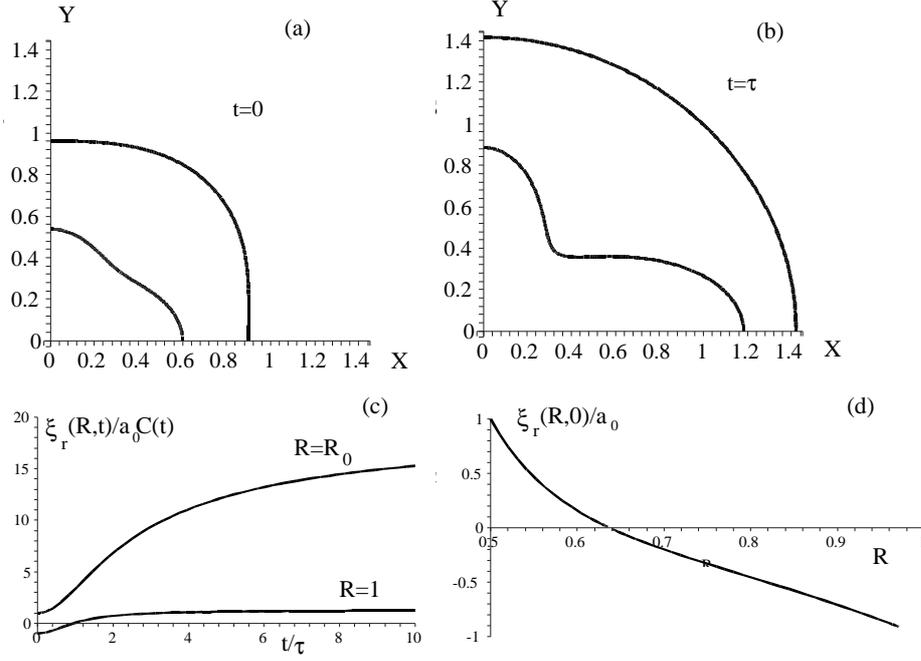


Figure 5.8: Perturbation initiale de la coquille pour le mode “sausage” (a) à $t = 0$ et (b) pour $t = \tau$. Dans (c) on trace l’évolution temporelle de la perturbation face interne et externe et (d) donne le déplacement initial à l’intérieur de la coquille. Toutes les figures sont tracées pour le mode $l = 4$, une épaisseur de coquille correspondant à $R_0 = 0,5$ et une vitesse initiale nulle $\beta = 0$. Dans la figure (a) nous avons volontairement exagéré la perturbation initiale avec $a_0 = 0,1$ (ceci pour bien visualiser la forme initiale de la coquille).

la face interne est perturbée, alors $D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $V_0 = V_1 = 0$; (iii) le mode “vitesse” pour lequel les faces interne et externe ne sont pas perturbées, mais dont seule la vitesse de la face interne est perturbée, dans ce cas $D_0 = D_1 = 0$, $V_0 = 1$, $V_1 = 0$. Cette dernière configuration peut correspondre à une coquille soumise à des fluctuations du vent provenant du pulsar.

Le poids relatif du mode instable pour chacune des perturbations est donné par la constante Λ_1 . Donc, ce paramètre peut être utilisé pour comparer les différentes configurations. Pour le mode “sausage” dans le cas où $R_0 = 0,5$ et $l = 4$, figure 5.8, $\Lambda_1 = 0,56$. Pour les trois autres perturbations, on obtient : $\Lambda_1 = 0,43$ (“spaghetti”, figure 5.9), $\Lambda_1 = 0,50$ (“interne”, figure 5.10), et $\Lambda_1 = 0,22$ dans le cas “vites-

se" (figure 5.11). Donc, les trois configurations avec une perturbation, "sausage", "spaghetti" et "interne" sont également instables. Cependant, le coefficient d'amplification pour ces trois modes est deux fois plus petit que le mode pur ($\Lambda_1 = 1$ et $\Lambda_j = 0, j = 2, 4$). Ces modes peuvent probablement être excités naturellement par les perturbations du progéniteur de la supernova. Finalement, la perturbation en "vitesse" semble être moins instable. Son coefficient d'amplification est quatre fois plus petit.

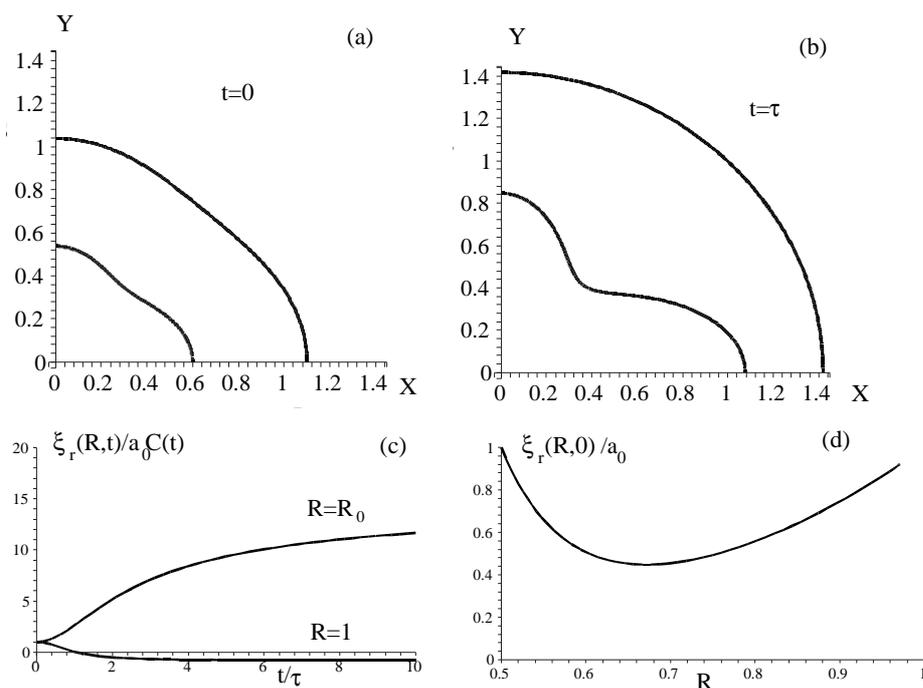


Figure 5.9: Perturbation initiale de la coquille pour le mode "spaghetti" (a) à $t = 0$ et (b) pour $t = \tau$. Dans (c) on trace l'évolution temporelle de la perturbation face interne et externe et (d) donne le déplacement initial à l'intérieur de la coquille. Nous utilisons la même représentation que pour la figure 5.8.

Cependant, l'importance respective entre les différents types de perturbation dépend de l'épaisseur de la coquille et du numéro du mode l . Par exemple, pour $R_0 = 0,9$ et le même mode que précédemment ($l = 4$), on trouve : $\Lambda_1 = 1,41$ pour le mode "sausage", $\Lambda_1 = 0,22$ ("spaghetti"), $\Lambda_1 = 0,80$ ("interne"), et $\Lambda_1 = 0,36$ ("vitesse"). Dans ce cas, le mode "sausage" déforme le plus la coquille et il croît plus rapidement que le mode pur. La connaissance des coefficients d'amplification

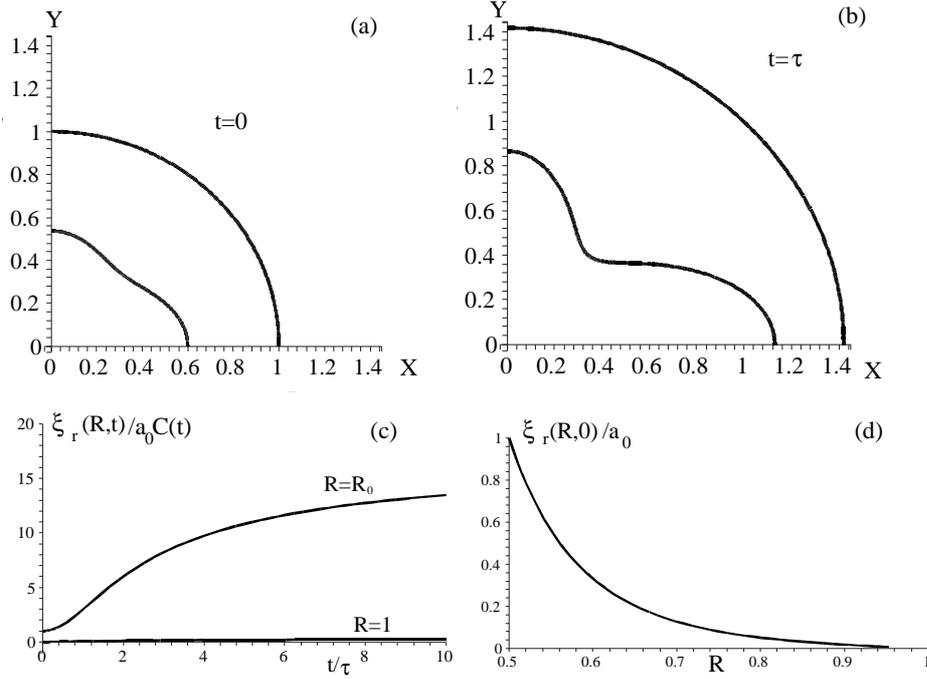


Figure 5.10: Perturbation initiale de la coquille pour le mode “interne” (a) à $t = 0$ et (b) pour $t = \tau$. Dans (c) on trace l’évolution temporelle de la perturbation face interne et externe et (d) donne le déplacement initial à l’intérieur de la coquille. Nous utilisons la même représentation que pour la figure 5.8.

peut nous renseigner sur la géométrie finale de la coquille et sur ses zones les plus amincies. On peut alors, fournir un critère sur le risque de fragmentation des éjectas dû à l’instabilité de Rayleigh-Taylor. On suppose que la fragmentation de la coquille se produit lorsque l’amplitude de la perturbation et l’épaisseur de la coquille deviennent comparables (mais de signes opposés) au même instant. Ce critère définit une amplitude critique, a_{cr} , qui est l’amplitude initiale pour laquelle la coquille risque de se fragmenter à un instant ultérieur. Nous obtenons immédiatement ce critère dans l’espace “chapeau” (puisque dans cet espace la coquille est statique avec une épaisseur constante $\hat{r}_1 - \hat{r}_0$, à la perturbation près), à partir de l’équation (5.82) pour $\theta = \phi = 0$. Le déplacement de la face interne sur l’axe X pour le mode le plus instable s’écrit : $\hat{\xi}_r(R_0, 0, 0, t) = a_{cr} \Lambda_1 \exp[\omega_1 g(t)]$ et le critère énoncé précédemment donne : $a_{cr} \Lambda_1 \exp[\omega_1 g(t)] = \hat{r}_1 - \hat{r}_0 = \hat{r}_1 (1 - R_0)$.

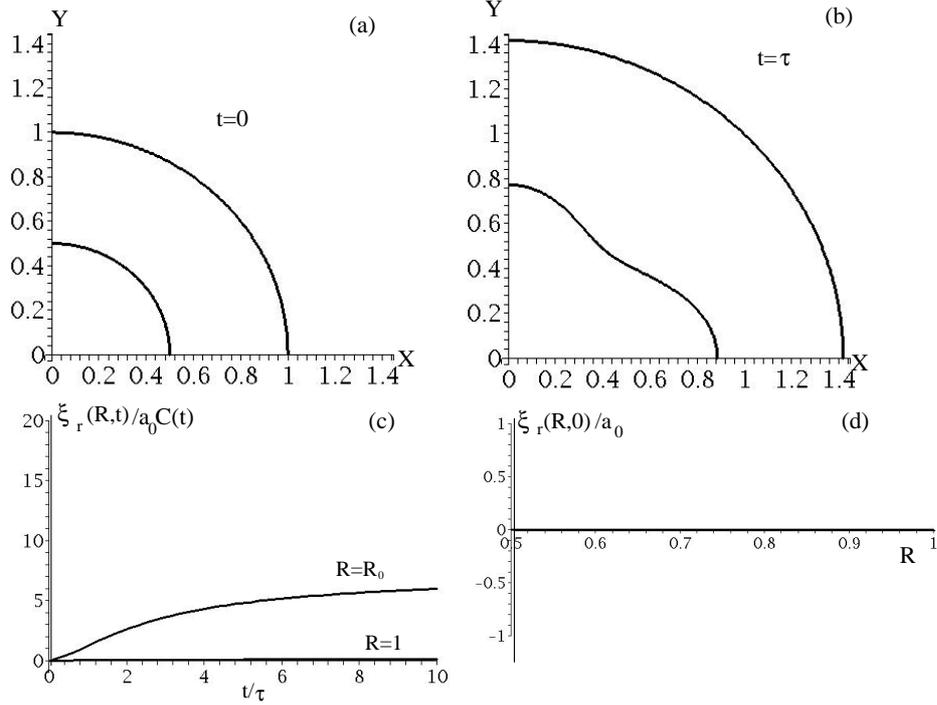


Figure 5.11: Perturbation initiale de la coquille pour le mode “vitesse” (a) à $t = 0$ et (b) pour $t = \tau$. Dans (c) on trace l’évolution temporelle de la perturbation face interne et externe et (d) donne le déplacement initial à l’intérieur de la coquille (il est nulle initialement car $D_0 = D_1 = 0$). Nous utilisons la même représentation que pour la figure 5.8.

Nous pouvons réécrire ce critère comme :

$$\frac{a_{cr}}{\hat{r}_1} \approx \frac{1 - R_0}{\Lambda_1} e^{-g(t)\sqrt{l+1}}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (5.88)$$

sachant que pour $t \gg \tau$, d’après l’équation (5.36), $g(t) \rightarrow \exp[\sqrt{l+1}(\pi/2 - \arctan \beta)]$.

Cette amplitude critique dépend du numéro du mode l , de l’épaisseur de la coquille et du type de perturbation. Cette formulation est valide pour les petits modes l , tel que $l < l_M = 2\pi R_0/(1 - R_0)$ lorsque la fragmentation se produit en régime linéaire. Les modes plus élevés, $l > l_M$, semblent moins fragilisant. En effet, bien que leurs coefficients d’amplification soit plus élevés, la perturbation évolue plus vite vers un régime non-linéaire et donc par la suite ces modes vont croître moins vite qu’en régime linéaire. Par contre, les modes tels que $l < l_M$

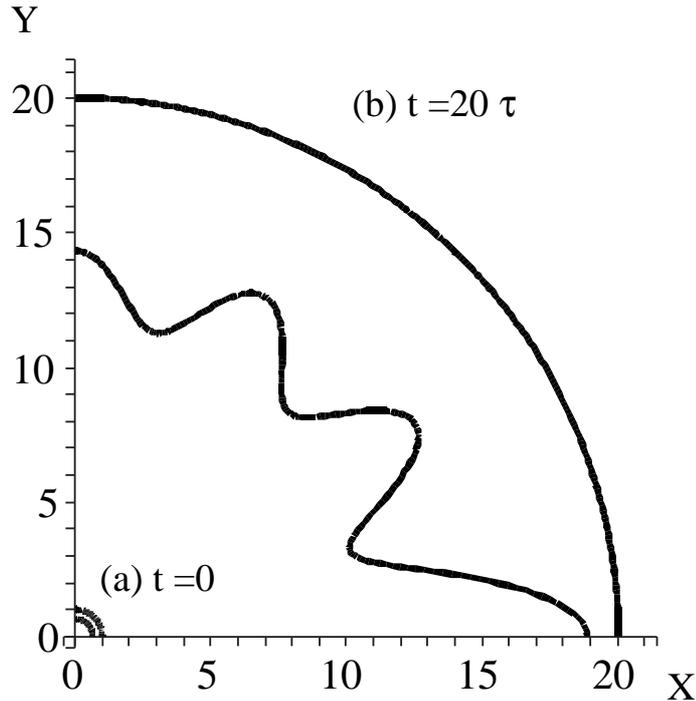


Figure 5.12: Représentation de la perturbation de la face interne à $t = 0$ [région près du centre $X = Y = 0$, cas (a)] et à $t = 20\tau$ [cas (b)]. L'épaisseur de la coquille est telle que $R_0 = 0,65$ pour le mode $l = 12$ et le nombre azimutal $m = 0$. La perturbation relative initiale est de 0,24 %.

restent dans le domaine linéaire et croissent moins vite que le mode l_M car le taux de croissance est proportionnel à \sqrt{l} . La théorie linéaire permet donc de prédire le mode de fragmentation l_M ainsi que l'amplitude critique a_{cr} donnée par l'équation (5.88) dans laquelle on remplace l par l_M qui conduit au percement de la coquille. Par exemple, pour $R_0 = 0,65$ et $\beta = 0$ le mode de fragmentation est le mode $l_M \sim 12$, avec la perturbation type "sausage" ou "interne" ($\Lambda_1 \approx 0,5$). Alors, on obtient $a_{cr}/\hat{r}_1 = 2,4 \times 10^{-3}$. La perturbation en "vitesse" est moins fragilisante puisqu'elle correspond à $\Lambda_1 = 0,14$.

Il en résulte qu'une amplitude aussi petite que 0,24 % sur le rayon interne peut être assez importante pour briser la coquille. La figure 5.12 montre une perturbation de type "sausage" ayant l'amplitude critique a_{cr} [Fig. 5.12.a] et la même coquille pour $t = 20\tau$ [Fig. 5.12.b]. De plus, la théorie prédit que le percement

a lieu d'abord sur l'axe des pôles (axe X). L'épaisseur devient en effet très faible à cet endroit à $t = 20\tau$. Ceci est dû aux conditions initiales de la perturbation. En effet, initialement, dans cet exemple nous avons annulé le nombre azimutal m (perturbation axisymétrique). Dans ce cas, la perturbation angulaire développée en harmonique sphérique, s'écrit sous la forme d'un polynôme de Legendre dont la valeur sur l'axe des pôles (axe X) est la plus importante. La figure 5.13 donne

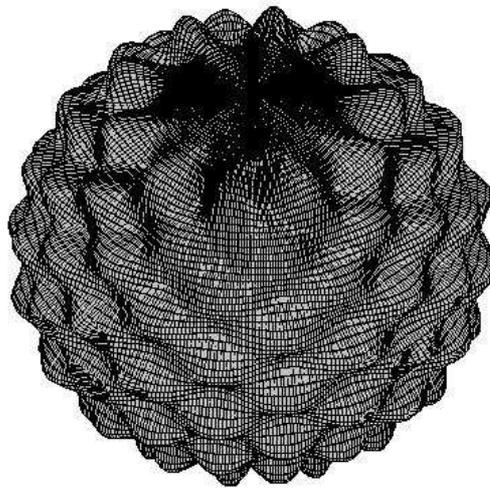


Figure 5.13: Représentation tridimensionnelle de la perturbation angulaire : $Y_{lm}(\theta, \phi)$, pour $l = 20$ et $m = 10$.

un exemple de perturbation angulaire en trois dimensions.

5.9 Discussion et conclusion

Ce chapitre est constitué de plusieurs parties.

Dans la première partie, nous avons trouvé la solution d'un écoulement sphérique unidimensionnel. Cette solution non-stationnaire permet de décrire l'évolution d'une coquille dont l'épaisseur L_0 est finie. L'évolution temporelle de cette coquille dépend de deux paramètres : la vitesse initiale donnée par β et le temps caractéristique d'expansion τ . Cette solution obtenue à l'aide de la méthode de changement d'échelle [147] des équations d'Euler pour un gaz polytropique, peut être considérée comme un modèle décrivant l'expansion instationnaire des éjectas d'une supernova.

On verra dans le chapitre VI que cette solution est pertinente pour décrire l'évolution des plérions, parce que le comportement temporel de la pression sur la face interne des éjectas est en accord avec la loi classique de décroissance de la luminosité des pulsars [79]. Le paramètre β prend en compte l'énergie cinétique initiale de la coquille, qui est libérée lors de l'explosion, tandis que le temps τ est relié à la durée de vie du pulsar situé au centre des éjectas.

Dans une deuxième étape, on montre que la transformation passant du repère du laboratoire au repère co-mouvant, permet d'effectuer une étude analytique tridimensionnelle en régime linéaire de la stabilité de l'écoulement dépendant du temps, vis-à-vis de l'IRT. Les équations de l'hydrodynamique sont résolues pour un gaz parfait mono-atomique ($\gamma = 5/3$) en utilisant une décomposition de la perturbation en harmonique sphérique et le taux de croissance ω a été obtenu. La relation de dispersion définissant le taux de croissance pour tous les modes l , est donnée dans le repère co-mouvant et correspond à une amplification finie dans le repère du laboratoire. De plus, on montre que le taux de croissance est indépendant de l'épaisseur R_0 de la coquille (pour une perturbation incompressible). Il n'est fait aucune hypothèse sur le comportement de la perturbation, mais au final, on trouve que la perturbation est incompressible et irrotationnelle. Une expression analytique du taux de croissance est donnée pour tous les modes l et permet de

trouver quatre valeurs propres distinctes. De là, on définit quatre modes purs : un mode instable, un mode évanescent et deux modes oscillants. L'expression analytique du taux de croissance est comparée avec les simulations effectuées avec le code Pansy [132, 133]. Les simulations sont en excellent accord avec l'approche analytique.

Dans un troisième temps, il ressort que le signe et la grandeur de la vitesse initiale jouent un rôle important dans le développement de l'IRT. Une vitesse initiale positive stabilise la coquille alors que dans le cas convergent, $\beta < 0$, la croissance de la perturbation est beaucoup plus rapide et atteint des valeurs plus grandes.

En utilisant le critère de la fragmentation proposé à la fois par Bernstein et Book [17] et par Chevalier [80], on peut définir le mode fragilisant le plus une coquille pour une épaisseur donnée. Le coefficient d'amplification dépend de la perturbation initiale. Il a été montré que la déformation de la face interne fragilisant le plus la coquille, dans le cas d'une coquille épaisse, correspond à une amplification deux fois plus petite que pour le mode pur le plus instable. En revanche, pour une coquille fine, il semble que le mode "sausage" soit le plus fragilisant.

La structure filamentaire observée par Hester *et al.* [5] et Sankrit *et al.* [23] dans la nébuleuse du Crabe résulte très probablement du développement de l'IRT. La vitesse de ces filaments montre qu'ils ont une origine commune : la coquille formée par les éjectas est sphérique. On retrouve une telle structure dans les simulations numériques effectuées par Jun [21] et il montre que l'instabilité de Rayleigh-Taylor se développe lors de l'accélération d'une coquille fine et conduit à sa fragmentation. Notre prédiction analytique pour le mode le plus fragilisant l_M est en bon accord avec ces observations et ces simulations numériques.

En considérant une coquille avec un rapport d'aspect de 10 ($R_0 = 0,9$), identique à celui des travaux de Jun [21], on en déduit que le mode de fragmentation est $l = 60$. De plus, cette valeur est en accord avec le mode ayant le taux de croissance le plus élevé observé par Jun. Par ailleurs, une perturbation d'amplitude initiale de $\sim 1\%$ est utilisée par Jun, en utilisant l'équation (5.88) avec comme

paramètres : une vitesse initiale de la coquille de 500 km s^{-1} , un rayon initial de $0,2 \text{ pc}$ ainsi qu'un temps caractéristique $\tau = 500 \text{ ans}$ (c'est à dire, $\beta = 1,3$). Il se trouve qu'on obtient approximativement cette valeur (1 % d'écart) pour l'amplitude initiale de la perturbation. Cette démonstration suggère que notre modèle analytique peut être utile pour une analyse poussée de la stabilité des restes de supernovae.

Il est important de remarquer, que l'étude effectuée dans ce chapitre permet de montrer rigoureusement que seules les perturbations incompressibles sont instables, ceci malgré un écoulement de base de la coquille compressible ($\gamma = 5/3$). On montre en particulier que les modes compressibles sont stables et ne participent pas à l'IRT. En utilisant notre changement d'espace ("zooming coordinates") on retrouve le même résultat que Bernstein et Book [17]. Nous montrons que pour $\gamma = 5/3$ les solutions données par Bernstein et Book s'expriment plus simplement. C'est une avancée essentiellement formelle, appréciable dans la mesure où les fonctions hypergéométriques de Bernstein et Book sont complexes. Notre relation de dispersion dans le repère co-mobile, nous permet de séparer les modes incompressibles des modes compressibles et rejoint l'analyse asymptotique effectuée par Bernstein et Book [17].

Nous voudrions ajouter une remarque d'ordre général à propos de l'obtention de la relation de dispersion pour les problèmes d'instabilités.

Ordinairement, les études de stabilité sont menées autour d'un état d'équilibre initial. Dans ces conditions, les équations différentielles linéaires qui sont obtenues ne contiennent aucun coefficient dépendant du temps et il est complètement légitime de chercher l'évolution de la partie temporelle de la perturbation sous la forme $\exp(\omega t)$. Cette opération permet de définir rigoureusement un taux de croissance, ω , et d'aboutir à une relation de dispersion qui relie ω au nombre d'onde k d'un mode de perturbation.

Lorsqu'on étudie la stabilité d'un écoulement qui, est instationnaire (soit dépendant explicitement du temps), les équations différentielles linéaires contiennent obligatoirement des coefficients dépendant, eux aussi, explicitement du temps.

Cette modification par rapport au cas d'un équilibre initial est importante car elle empêche de chercher une évolution en temps de la forme $\exp(\omega t)$ où ω est une quantité indépendante du temps, comme dans le cas précédent. Dès lors, il n'est pas envisageable de trouver une relation de dispersion et de prédire le taux de croissance d'un mode donné à l'avance.

Pourtant, dans notre situation, nous avons un écoulement instationnaire et, malgré tout, nous avons trouvé une relation de dispersion. Ce résultat surprenant a été rendu possible par l'utilisation d'un référentiel qui absorbe l'écoulement de base de la configuration étudiée. Dans ces conditions, dans ce nouvel espace, nous pouvons travailler autour d'un état d'équilibre et tout ce que nous disions précédemment devient à nouveau applicable. Le résultat est, qu'en effet, une relation de dispersion est obtenue.

Cette approche de redimensionnement a déjà été étudiée [148] pour une autre instabilité que l'IRT. Il s'agit de celle de l'effondrement gravitationnel ou instabilité de Jeans bien connue en astrophysique. Dans ce cas, la gravité auto-consistante d'un nuage interstellaire provoque un effondrement total (ou plus exactement l'effondrement de sous-structure). Cette dynamique est instable car plus l'objet devient compact, plus l'accélération gravitationnelle devient forte et, en réaction, elle provoque une phase supplémentaire de l'effondrement. Nous sommes donc ici dans un cas typique où l'écoulement de base est également instationnaire et instable. Pour ce problème, les auteurs ont utilisé [148] l'approche du référentiel co-mouvant et tout comme pour le cas d'IRT traité dans ce chapitre, ils ont également été capables de trouver une relation de dispersion. Cette méthode semble donc présenter une certaine généralité dans ses domaines d'application.

Les résultats de ce chapitre sont aussi en accord avec l'étude sur les effets de compressibilité effectuée au chapitre IV. Dans le chapitre IV, on montre que l'effet de compressibilité dépend naturellement du nombre d'Atwood. Pour $A_t = 1$, c'est à dire, pour un contraste de densité très grand, le taux de croissance du cas compressible est proportionnel à \sqrt{k} et seules les perturbations incompressibles sont instables. Cette observation nous permet de mettre en lumière le rôle important

joué par la densité du vent du pulsar. Dans ce chapitre nous avons une densité du vent du pulsar nulle ($A_t = 1$). L'étude réalisée dans le chapitre IV nous permet de dire que les effets de compressibilité doivent être faibles si la densité du vent du pulsar est petite devant la densité de la coquille. Les perturbations de la face interne de la coquille affectées par la compressibilité ont le nombre d'onde k , tel que $k \ll \sqrt{1 - A_t^2} w_0 / C_s^2 \simeq k_c$ (w_0 est l'accélération de la coquille et C_s la vitesse du son). En posant, $k_c \sim l_c / r_0$ et en injectant les expressions de l'accélération et de la vitesse du son, on obtient, $l_c \simeq 3R_0^2 \sqrt{1 - A_t^2} / (1 - R_0^2)$, avec $R_0 = r_0 / r_1$ (rapport des rayons interne et externe de la coquille). Donc, par exemple pour $A_t = 0,9$ et $R_0 = 0,9$, c'est à dire avec une densité du vent du pulsar $\sim 5\%$ de la densité de la coquille et pour une coquille relativement fine, on trouve $l_c \simeq 5$. Sachant que le mode fragilisant de cette coquille est $l_M = 60$ [$l_M = 2\pi R_0 / (1 - R_0)$], on en déduit alors, que les effets de compressibilité dans ce cas, ne sont pas importants car $l_c \ll l_M$. On peut réécrire cette relation comme, $\sqrt{1 - A_t^2} \ll 2\pi(1 + R_0) / R_0$. Comme cette relation est toujours vérifiée. on en conclut que les effets de compressibilité sont négligeables.

Cette analyse des effets de compressibilité expliquent aussi le rôle très particulier joué par la condition limite sur la face interne de la coquille. Nous avons montré qu'à partir de l'expression de l'accélération instantanée de l'interface interne de la coquille, nous obtenions une bonne approximation du taux de croissance pour γ quelconque. Ce résultat met en évidence le rôle négligeable joué par le gradient de densité à l'intérieur de la coquille ainsi que son épaisseur, sur le taux de croissance de la perturbation.

En ce qui concerne la condition limite au bord externe de la coquille, nous avons fait l'hypothèse que la coquille était en expansion isentropique dans le vide. Donc, cette analyse ne nous permet pas de traiter le choc qui pourrait se former entre la coquille et le milieu interstellaire. Cette hypothèse ne permet pas non plus de traiter le cas d'une onde de choc en expansion dans les éjectas. Ces aspects seront abordés au début du chapitre VI. Par contre, l'approximation du taux de croissance [par l'accélération locale instantanée, Éq. (5.78)] montre que la condition limite

sur la face externe n'a pas d'influence sur le taux de croissance. En effet, seule la face interne de la coquille est instable. On peut conclure de façon qualitative que la face externe de la coquille joue peu de rôle dans le développement de l'IRT et de plus, que les effets de compressibilité sont peu importants (la densité du milieu externe à la coquille étant très faible).

Finalement, ce travail peut être appliqué aussi dans le domaine de la fusion par confinement inertiel, c'est à dire, à l'étude de l'IRT dans la conception de cibles. On peut l'utiliser pour la conception de cibles appropriées pour examiner l'IRT dans les RSN, en réalisant des expériences avec des lasers. Dans les chapitres suivants nous allons nous focaliser sur l'application de ce modèle à l'astrophysique et ensuite au dimensionnement d'une expérience laser.

CHAPITRE VI

Application du modèle instationnaire aux RSN

Dans ce chapitre, nous reprenons une partie des résultats du chapitre V pour les appliquer à une description analytique de l'évolution des plériens. L'expansion radiale des plériens est donnée dans la section 6.2. Dans la section 6.3, nous appliquons ce modèle à la nébuleuse du Crabe en considérant la relation entre les paramètres du modèle et la loi de décroissance de la luminosité du pulsar. La section 6.4 est dévolue à l'analyse du développement de l'IRT et nous discuterons des conditions de fragmentation des éjectas. La validation du modèle est discutée dans la section 6.5. Enfin, nous concluons dans la section 6.6.

6.1 Contexte astrophysique

Bien que le problème astrophysique et le type d'objet que nous étudions dans ce travail aient été mentionnés dans les chapitres précédents, nous voudrions faire dans ce paragraphe une synthèse de l'évolution d'un plérion et rappeler les points qui ont fait l'objet de travaux antérieurs ou font l'objet d'études actuelles.

Bien que cette synthèse ne prétende pas être exhaustive, elle peut avoir le mérite de faire le lien entre l'objet astrophysique et le modèle développé au chapitre V. De plus, elle permet d'éclaircir les déficiences de ce modèle tout en examinant les conséquences du point de vue physique mais, en complément, elle permet, nous semble-t-il, de mettre en avant les points nouveaux et les éléments positifs développés dans ce travail de thèse.

Un RSN résulte de l'interaction du gaz ambiant avec le plasma stellaire éjecté par la SN. Le profil spatial de la densité, ρ_a , du milieu ambiant est ordinairement décrite par [55, 159] :

$$\rho_a = \rho_{a,0} r^{-s}. \quad (6.1)$$

Pour $s = 0$, la densité est uniforme et $\rho_{a,0}$ correspond à la densité du MIS qui est $\rho_{a,0} \simeq 10^{-24}$ g/cm³ dans le cas de la nébuleuse du Crabe [143]. La valeur de $s = 2$ est prise pour décrire le MCS (milieu circumstellaire) lorsque le progéniteur de la SN émet un vent stationnaire à vitesse constante, ce qui est une approximation raisonnable [82, 160].

Lorsqu'une supernova de type II vient d'éjecter la majeure partie de sa matière, celle-ci est en phase d'expansion balistique avec une vitesse eulerienne donnée par [77] :

$$v(r, t) = r/t. \quad (6.2)$$

C'est la phase qu'on appelle "étape dominée par les éjectas (EDE)" [86, 160]. Lors de cette phase, deux régimes coexistent simultanément pour le profil de densités des éjectas [8, 82] :

$$\rho_{ej,int}(t) = At^{-3}, \quad (6.3)$$

$$\rho_{ej,ext}(t) = Bt^{q-3}r^{-q}, \quad (6.4)$$

où q est un exposant constant et où A et B sont deux paramètres qui dépendent de l'énergie de la SN et de la masse éjectée [79, 82]. La durée de l'EDE est typiquement inférieure à 1000 ans. Au cours de cette période la vitesse d'expansion des éjectas est beaucoup plus grande que la vitesse du son dans le milieu ambiant et, en conséquence, les éjectas sont précédés par un choc dû à l'onde de souffle. Le milieu ambiant est alors accéléré, comprimé et chauffé par le choc et, en retour, ce milieu ambiant choqué décélère et provoque la compression des éjectas adjacents. Une discontinuité de contact (DC) entre les éjectas et le milieu ambiant en même temps qu'un choc retour ("reverse shock" ou RS) remonte l'écoulement des éjectas. Pendant ce temps, le choc initial (choc avant ou "forward shock" - FS) continue sa progression vers l'extérieur dans le milieu ambiant non perturbé [86]. Sans tenir compte du pulsar et de la bulle qui l'entoure (nous allons en parler tout de suite après), on assiste à une séquence de structure ordonnées de la manière suivante (en se déplaçant vers l'extérieur en géométrie sphérique) : les éjectas non choqués,

le RS, les éjectas choqués, la DC, le milieu ambiant choqué, le FS et le milieu ambiant non choqué [9, 59, 86].

Au cours de ce processus, le raccordement entre les deux types de milieu (6.1) et (6.4) s'effectue selon une solution auto-semblable (SAS) [55, 159] et la DC évolue selon (il est le même pour le FS) [8] :

$$\rho_{DC}(t) \sim t^{(q-3)/(q-s)}. \quad (6.5)$$

Rappelons que la condition d'un écoulement de masse et d'énergie finie entraîne les deux inégalités : $q > 5$ et $s < 3$ [8]. Notons que cette SAS est de type classique, c'est à dire que les grandeurs physiques évoluent comme des puissances du temps t .

En toute généralité, une SAS est telle que toute grandeur physique, $g(r, t)$, puisse s'exprimer sous la forme [148] :

$$g(r, t) = G_1(t)\hat{g}[r/G_2(t)], \quad (6.6)$$

où les fonctions $G_1(t)$ et $G_2(t)$ ne sont pas nécessairement des monômes du temps [161]. C'est, en particulier, le cas pour la solution [17] ou celle que nous avons obtenue dans le chapitre V.

Pour des temps supérieurs à 10^3 ans (intervalles de temps de 10^3 à quelques 10^4 ans), deux phénomènes nouveaux essentiels se produisent. Premièrement, les éjectas sont ralentis et leur rayon évolue selon la loi de Sedov [$R_{ej}(t) \sim t^{2/5}$], [104]. Nous en avons parlé dans le chapitre I. Deuxièmement, bien qu'initialement le RS soit en expansion, ainsi que tout le reste de la structure, lorsque la masse balayé du MIS augmente, la vitesse de la DC diminue et, au bout d'un certain temps (10^3 à 10^4 ans), le RS se rapproche de l'origine ($r = 0$) de l'explosion et provoque l'implosion de la partie centrale du RSN comprenant le pulsar ainsi que la bulle qui l'entoure. Ce problème a été étudié en détail par Bucciantini *et al.* [143] et peu de temps avant par Blondin *et al.* [79].

Dans notre cas, nous n'avons pas de matière à l'extérieur de la coquille qui entoure la bulle enveloppant le pulsar. Ainsi, nous ne pouvons pas obtenir et décrire

les phénomènes mentionnés juste avant. Cependant, ces phénomènes se produisent très tardivement alors que le problème d'accélération de coquille que nous avons examiné commence à intervenir dès 100 ans environ après l'explosion [144]. Grâce à ce grand décalage en temps, on peut penser qu'en première approximation, il est raisonnable de négliger la partie extérieure des RSN. Autrement dit, l'interaction avec le MIS ne modifie pas l'analyse que nous avons menée dans le chapitre V, à condition de ne pas examiner l'évolution non-linéaire de l'IRT sur la face intérieure de la coquille à des temps supérieurs à 10^3 ans. Étant donné la phase d'évolution dans laquelle se situe la nébuleuse du Crabe [5, 21, 22], il nous semble que l'approche développée ici est instructive pour comprendre sa structure observée à ce jour [5, 23, 162].

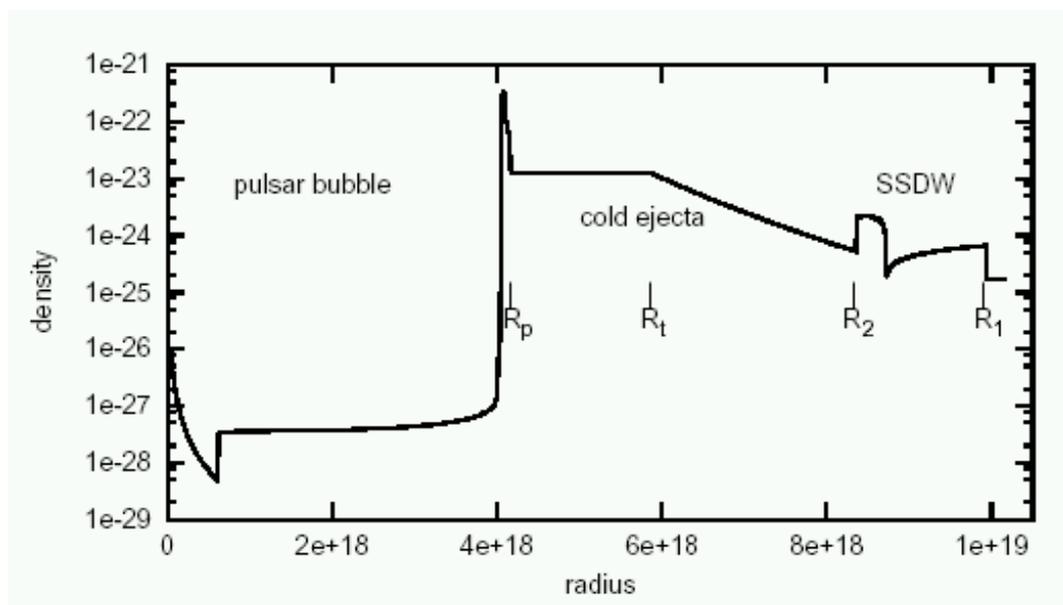


Figure 6.1: Figure extraite de la Réf. [79]. Structure d'un RSN avec la bulle centrale due au vent du pulsar. La coquille qui entoure cette bulle a pour rayon extérieur R_p . Cette quantité a été notée r_1 dans le chapitre V et la face interne de la coquille a pour rayon r_0 (non indiqué sur cette figure).

Dès que le pulsar central commence à rayonner, la nébuleuse (ou bulle) qu'il produit s'expand dans les éjectas de la SN qui sont initialement en expansion libre.

Cependant, le vent du pulsar balaye les éjectas et une coquille se forme (voir

la figure 6.1) [79] dans la région centrale du RSN. Sur la figure 6.1 on observe la structure radiale d'un RSN incluant la bulle due au pulsar (pulsar wind nebula–PWN). Commençons par décrire la partie située autour de l'origine. Après une décroissance rapide de la densité, nous avons un saut (discontinuité plus grande à gauche) qui correspond au choc de terminaison du vent. À ce niveau, on peut faire un parallèle avec la figure 1.8 du chapitre I. Ensuite, une région presque homogène est bordée par une coquille dont le rayon extérieur est noté R_p . Cette quantité correspond au rayon r_1 introduit au chapitre V. La face interne de cette coquille (dont la position n'est pas indiquée sur la figure) correspond au rayon r_0 défini en même temps que r_1 . L'épaisseur instantanée de cette coquille est $L(t) = r_1(t) - r_0(t)$ et c'est elle qui est accélérée par le vent du pulsar. La distance R_t correspondant au lieu où les deux types de densité (6.3) et (6.4) se raccordent tandis que R_2 et R_1 donnent respectivement la position du RS et du FS. La DC (non labelisée sur la figure), se décèle clairement par son pic orienté vers le bas et situé entre ces deux positions – L'abréviation SSDW signifie “Self-Similar Driven Wave” et est la solution qui permet de raccorder les éjectas (6.4) au milieu ambiant (6.1). Nous en avons déjà parlé [voir l'équation (6.5)].

Il faut remarquer que sur la figure (6.1) le maximum de densité de la coquille est 30 fois plus important que la densité à l'extérieur de la coquille. Donc il est possible de négliger l'effet de la densité du milieu extérieur à la coquille et on suppose qu'elle s'expand dans le vide. À posteriori on verra plus loin (section 6.5) que cette hypothèse a peu d'importance sur la stabilité de la face interne de la coquille.

Enfin, comme cette figure provient d'un calcul monodimensionnel, on ne peut pas observer les IRT sur la face interne de la coquille mais on peut se reporter aux schémas 1.8 ou 1.10 du chapitre I ou bien aux simulations numériques bidimensionnelles de la littérature (voir les travaux de Jun [21] et de Bucciantini *et al.* [22]).

En supposant une puissance [ou luminosité $L(t)$] du pulsar qui varie comme

(voir plus loin dans ce chapitre) :

$$L(t) \sim t^{-p}, \quad (6.7)$$

où p s'écrit traditionnellement comme le quotient :

$$p = \frac{n+1}{n-1}, \quad (6.8)$$

où n s'appelle l'indice de freinage [82, 91, 163] car il est lié au ralentissement de la vitesse de rotation du pulsar, on montre que le rayon de la PWN varie comme [21] (on peut utiliser l'analyse dimensionnelle) :

$$R_{PWN}(t) \sim t^{(6-p-q)/(5-q)}. \quad (6.9)$$

La relation (6.4) qui pour le cas particulier $q = 0$ redonne (6.3) a été utilisée. Comme au départ la bulle s'expand dans le milieu où le gradient de densité spatial est faible [79], on peut faire $q = 0$ dans (6.9).

Par ailleurs, comme le suggère Chevalier [82], pour $t \ll \tau$ (τ est le temps caractéristique de décroissance de la luminosité du pulsar – voir plus loin), $L(t)$ est approximativement constant et, dans ces conditions, on obtient :

$$R_{PNW}(t) \sim t^{6/5}. \quad (6.10)$$

Si on désire garder un effet de gradient de densité, (6.9) devient alors [82, 164] :

$$R_{PNW}(t) \sim t^{(6-q)/(5-q)}. \quad (6.11)$$

Dans les deux cas, l'exposant du temps est supérieur à un et la coquille est accélérée. Ces lois temporelles sont ainsi valables pour le choc (dont la position est notée R_p sur la figure 6.1) qui progresse dans les éjectas.

Parallèlement à cette dynamique, la masse de la coquille augmente avec le temps et, au début [82], elle varie comme :

$$M_{coq} \sim t^{(q-3)/(q-5)}. \quad (6.12)$$

Pour $q = 0$, la formule (6.12) se réduit à :

$$M_{coq} \sim t^{3/5}. \quad (6.13)$$

Mais lorsque t vérifie $t > \tau$, les relations (6.12) et (6.13) ne sont plus valides. En effet, la luminosité du pulsar chute de plus en plus et la vitesse du gaz balayé par le vent tend vers une constante. Comme par ailleurs, les éjectas situés à l'extérieur de la coquille sont aussi en expansion balistique, la masse de cette coquille tend vers une valeur constante.

En conséquence, pour que le modèle que nous proposons soit pertinent, il doit être appliqué à une période de l'évolution du pléïon qui n'est pas trop proche de la phase d'explosion, lorsque la coquille a déjà été formée et que sa masse n'évoluera plus fortement. Des équations (6.10) et (6.11), il ressort clairement que la coquille est accélérée (l'exposant du temps est supérieur à un) et elle est donc soumise à l'IRT sur sa face interne.

Les simulations numériques de Jun [21] et de Bucciantini *et al.* [22] mettent en évidence ce phénomène avec l'apparition d'une filamentation à petite échelle. Bien que dans son travail Jun développe un modèle analytique auto-semblable avec, en particulier, $p = 1/2$ (cette valeur est assez peu représentative car la plupart des PWN satisfont $2 \leq p \leq 3$, comme on l'a vu dans l'introduction du chapitre V), ses simulations numériques ne prennent pas en compte la variation de L avec t . Néanmoins, outre la dynamique des doigts de Rayleigh-Taylor, il examine aussi celle du choc induit par le vent du pulsar et il trouve que sa position varie approximativement comme :

$$R_{Jun} \sim t^m, \quad (6.14)$$

où $m \simeq 1,157$. Cette valeur est très proche de celle donnée analytiquement par la formule (6.10).

De leur côté, Bucciantini *et al.* [22] prennent l'influence du champ magnétique \vec{B} sur la croissance de l'IRT en considérant également une luminosité constante du pulsar. Ils observent une stabilisation du processus pour un rayon du PWN donnée par (6.11) en initialisant leurs simulations numériques bidimensionnelles sur une SAS. Ils disent que, contrairement à Jun [21], ils n'obtiennent pas de solution transitoire mais, pour autant, il ne nous semble pas clair que l'évolution ultérieure qu'ils calculent reste auto-semblable. Cependant, le rayon de la PWN

qu'ils simulent est tout à fait en accord avec celui obtenu par Jun [21] en faisant $\vec{B} = 0$.

Dans notre situation, nous n'avons pas de champ magnétique et Chevalier [82] pense que la stabilité de configurations magnétiques ainsi que leur polarisation (champ \vec{B} purement tangent à la surface de la bulle) ne sont pas des éléments dont on soit complètement certain. C'est pourquoi, il considère qu'un modèle purement hydrodynamique est une première approche raisonnable et que, de plus, la pression qui agit sur la face interne de la coquille ne dépend pas des propriétés détaillées (présence ou non de \vec{B}) de la bulle en s'appuyant sur la Réf. [143]

C'est la démarche que nous avons adoptée en nous plaçant en régime hydrodynamique pur. En revanche, nous avons introduit une difficulté supplémentaire en prenant en compte analytiquement la variation temporelle de la luminosité du pulsar alors qu'elle est négligée dans [21] et [22]. Par ailleurs, notre étude donne une évolution qui reste toujours auto-semblable, et elle conduit à des solutions beaucoup plus générales que (6.10). Sur la figure 6.2 nous avons tracé la quantité $C(t) - 1$ (nous retranchons 1 à la fonction d'échelle pour mieux faire apparaître le comportement pour $t \ll \tau$) en fonction de t en échelles logarithmiques ainsi que la loi (6.10).

Notons tout d'abord que sur cette figure, la droite du haut n'est valide que pour $t/\tau \lesssim 1$. En effet, pour $t/\tau \gg 1$, la coquille est en vol balistique et le rayon de la bulle croît comme t . C'est le cas pour les trois courbes inférieures qui convergent vers la droite de pente 1 pour t/τ grand. C'est le comportement physique correct attendu. Pour les petites valeurs du temps, on peut observer l'effet du paramètre β . Pour $\beta = 0,5$, la courbe est pratiquement parallèle à la droite du haut. En revanche, pour $\beta = 0$ (vitesse initiale nulle), la pente est nettement plus grande. Un calcul indique qu'elle vaut 2. En conséquence, la fonction $C(t)$ que nous utilisons permet de décrire selon les valeurs de β , un continuum de phases d'accélération dont la pente (exposant en temps) peut décroître de 2 (valeur maximale) à $6/5$ [valeur donnée par la formule (6.10)] et de couvrir un domaine de comportements différents pour la dynamique de la coquille et, par conséquent, sur la croissance

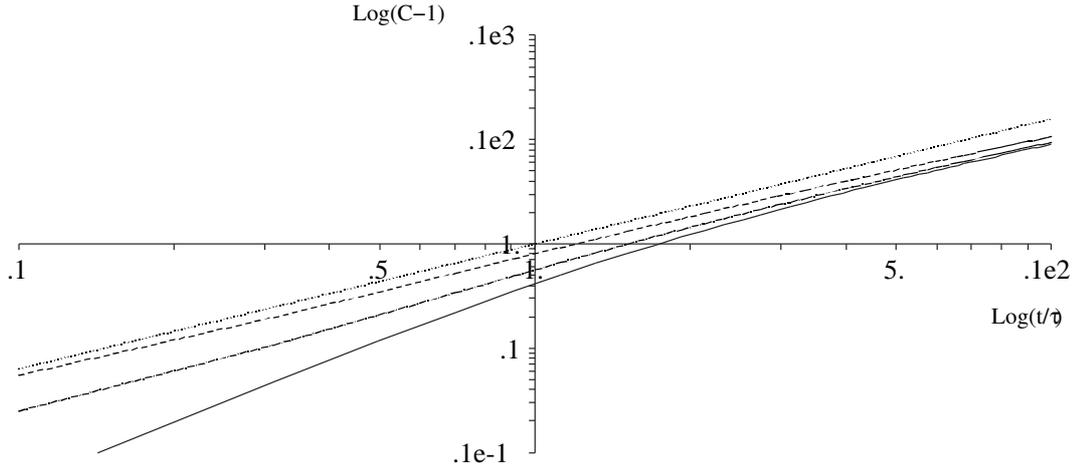


Figure 6.2: Tracé de la grandeur $C(t) - 1$ en fonction de t/τ en échelles logarithmiques. En allant de bas en haut, les trois courbes correspondent respectivement à $\beta = 0$, $\beta = 0,2$ et $\beta = 0,5$. La quatrième courbe correspond à la droite donnée par $R_{PWN}(t) \sim t^{6/5}$ (6.10).

de l'IRT.

L'existence d'une coquille dans une PWN a, par ailleurs, été montrée à partir d'observations [165] dans un reste de supernova moins lumineux que la nébuleuse Crabe. Le satellite Chandra montre que la bulle contenant le pulsar et incluant des jets et des filaments émet fortement dans le domaine des X et cette émission décroît fortement lorsqu'on s'écarte de la position du pulsar. À l'inverse, la détection dans une bande moins énergétique (500 eV à 1 keV) met en évidence une émission plus forte sur le bord extérieur de la bulle.

En conséquence, la région externe de la PWN présente une thermalisation qui semble indiquer la présence d'une coquille résultant du balayage des éjectas par le vent du pulsar. L'émission provenant de l'intérieur de la bulle est non thermique puisqu'elle provient d'un vent relativiste magnétisé que l'on pense essentiellement constitué de paires électrons-positrons [22]. Ce milieu est de très faible densité et son coefficient polytropique vaut $\gamma = 4/3$. Il est représenté par une pression dépendant du temps que nous imposons sur la face interne de la coquille en supposant qu'elle contient du vide. Cette pression pourrait être identifiée à celle provoquée

par un rayonnement électromagnétique pur dont $\gamma = 4/3$.

L'hypothèse du vide intérieur peut se justifier par le fait que le vent du pulsar a une très faible densité et apporte donc peu de matière à la coquille en expansion. D'un autre côté, nous ne considérons pas l'effet de l'ablation de la face interne de la coquille [124, 166, 167]. Bien que l'ablation soit possible, elle ne doit pas avoir beaucoup d'effet puisque le rayonnement du pulsar est piégé en volume et par conséquent, l'ablation et le dépôt de matière du vent sont en équilibre. De plus, nous savons que l'ablation stabilise surtout les petites longueurs d'onde, alors que nous nous intéressons aux longueurs d'onde plus grandes ou de l'ordre de l'épaisseur de la coquille.

Enfin, revenons quelques instants sur notre hypothèse qui consiste à supposer que le vide règne à l'extérieur de la coquille. Nous avons déjà abordé ce point dans ce paragraphe mais nous désirons ajouter que nous avons vu au chapitre V que la condition limite externe sur la coquille a peu d'influence sur le taux de croissance de l'IRT [voir l'expression du taux de croissance (5.78) dans le chapitre V], car seule la face interne de la coquille est instable. La vérification de l'hypothèse du vide extérieur devrait peu influencer le développement de l'IRT.

6.2 Modèle hydrodynamique d'un plérion

Nous allons maintenant nous rapprocher davantage des caractéristiques de la nébuleuse du Crabe. Les observations de la nébuleuse du Crabe, un plérion typique, indiquent que les RSN sont en expansion instationnaire. Pour une position actuelle des filaments de la nébuleuse, situés à environ $r \simeq 1$ pc du pulsar central et dont l'âge est de $t \simeq 930$ ans (les données utilisées ici proviennent de mesures effectuées en 1985 [168]), le rapport r/t est de 1050 km s^{-1} ; mais la vitesse actuelle de ces filaments est plus grande de 10 % ($\sim 1150 \text{ km s}^{-1}$). Ceci indique que la nébuleuse a été accélérée [24, 168].

Des modèles hydrodynamiques de l'évolution des plérions ont été récemment développés [21, 79, 82] et comme nous l'avons vu, des études analytiques et nu-

mériques ont été menées sur l'interaction du vent d'un pulsar avec les éjectas de la supernova. Reynolds *et al.* [81] ont étudié un modèle auto-semblable en supposant que l'expansion des éjectas était à symétrie sphérique et homologue (le champ de vitesse radiale est proportionnel au rayon). Jun [21] considère un vent de pulsar constant en interaction avec des éjectas. Il a effectué des simulations bi-dimensionnelles en géométrie axisymétrique pour étudier le développement de l'IRT d'une coquille en expansion sur une échelle de temps de mille ans. Par ailleurs, Blondin *et al.* [79] étudient en particulier, la phase d'évolution supérieure à 10^4 ans, lorsque le choc en retour dans les éjectas, suite à l'interaction des éjectas avec le milieu interstellaire, vient interagir avec le vent du pulsar. Récemment, Bucciantini prend en compte l'influence du champ magnétique sur le développement de l'IRT [22] sur une échelle de temps d'environ 2000 ans.

Dans ce chapitre, nous allons nous baser sur le modèle développé dans le chapitre précédant, qui est similaire au modèle étudié par Bernstein et Book [17]. Dans ce modèle, le vent provenant du pulsar composé de particules et de photons très énergétiques, est modélisé par une loi de pression qui décroît en volume dans la coquille en expansion. La phase d'évolution du plérion que nous considérons correspond à celle étudiée par Jun [21], c'est à dire, sur une période de plus de 1000 ans après l'explosion.

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 6.1, nous rappelons les hypothèses de notre modèle :

- La masse apportée à la coquille en expansion est négligeable et par conséquent la masse de la coquille est constante,
- Face interne : lors de l'interaction entre la coquille, on suppose que le vent du pulsar est de densité très faible.
- Face externe : suite à l'interaction avec le milieu environnant, on suppose que la densité de ce milieu est négligeable.

La première hypothèse est raisonnable si l'on considère une période d'évolution du plérion pas trop proche de l'explosion, lorsque la coquille a déjà été formée et

en conséquence, sa masse n'évoluera plus fortement [82].

Dans ces conditions nous pouvons penser que le modèle développé au chapitre V est applicable pour décrire l'évolution d'un pléion, tel que le Crabe. Ce modèle d'expansion de coquille intègre naturellement une décroissance de l'intensité du vent du pulsar. Cette décroissance peut être due à une perte d'énergie cinétique de rotation du pulsar central, mais aussi à une interaction moins forte avec la coquille.

La solution développée dans le chapitre V a été obtenue à partir des équations d'Euler pour un polytrophe tel que $p = K\rho^\gamma$ avec $\gamma = 5/3$. L'effet du vent du pulsar est traité par une loi de pression agissant sur la face interne des éjectas et la bulle peut être considérée comme un milieu avec $\gamma = 4/3$ [connaissant la pression, on peut par exemple déterminer la température T sur l'intérieur de la bulle par une loi radiative ($\gamma = 4/3$) avec $p = \sigma T^4/3$ où σ est la constante de Stefan-Boltzmann].

La solution instationnaire pour l'écoulement radial d'une coquille est décrit par les équations (5.40) à (5.42) :

$$\rho(r, t) = \rho_0 C^{-3} (1 - R_0^2)^{-3/2} \left(1 - \frac{r^2}{C^2 r_1^2}\right)^{3/2}, \quad (6.15)$$

$$p(r, t) = K \rho_0^{5/3} (1 - R_0^2)^{-5/2} C^{-5} \left(1 - \frac{r^2}{C^2 r_1^2}\right)^{5/2}, \quad (6.16)$$

$$v_r(r, t) = \frac{r}{C^2 \tau_p} \left(\beta + (\beta^2 + 1) \frac{t}{\tau_p}\right). \quad (6.17)$$

où $\rho(r, t)$, $p(r, t)$, $v_r(r, t)$ sont respectivement la densité, la pression et la vitesse radiale d'une coquille de rayon interne r_0 et externe r_1 avec $R_0 \equiv r_0/r_1$ et $\rho_0 \equiv \rho(r_0, 0)$ la densité à la face interne de la coquille. De plus, on appelle :

$$\Delta = 1 - r_0/r_1 \quad (6.18)$$

le rapport d'aspect. La fonction d'échelle $C(t)$ est définie par l'équation (5.24) :

$$C(t) = \sqrt{\left(1 + \frac{\beta t}{\tau_p}\right)^2 + \frac{t^2}{\tau_p^2}}. \quad (6.19)$$

Le paramètre τ_p est le temps caractéristique d'expansion de la coquille et la constante $\beta \equiv \tau_p \dot{C}(0)$ caractérise sa vitesse initiale $v_0(r) = \beta r/\tau_p$. Il est noté

τ dans le chapitre V et nous avons ajouté ici l'indice “ p ” comme “plérier”. De plus, l'évolution temporelle de la face interne est donnée par : $r_0(t) = C(t)r_0(0)$ et l'évolution de la face externe est donnée par : $r_1(t) = C(t)r_1(0)$.

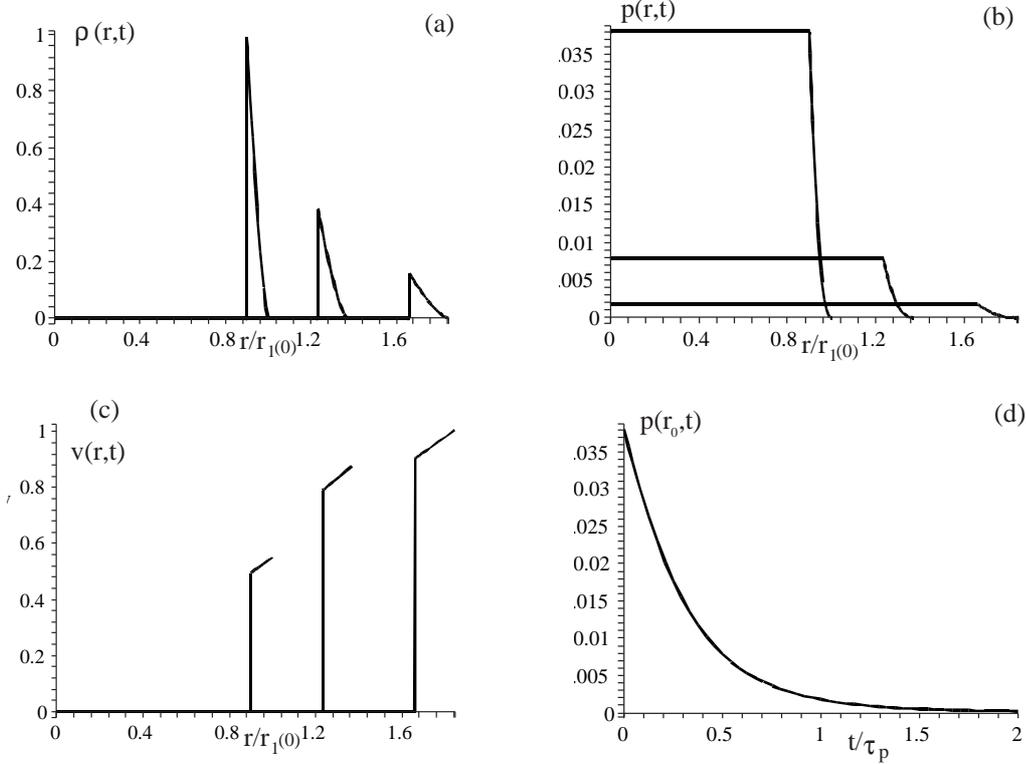


Figure 6.3: Solution analytique pour l'évolution d'un plérier. Cette figure donne les profils spatiaux de densité (a), de pression (b), de vitesse (c) pour $t = 0, \tau_p, 2\tau_p$. La loi de pression sur la face interne des éjectas est donnée sur (d). Dans cette figure la densité est normalisée par la densité ρ_0 sur la face interne à $t = 0$.

L'équation (6.15) donne l'évolution de la densité dans la coquille, laquelle décroît temporellement comme globalement $C^{-3}(t)$. Asymptotiquement, pour $t \gg \tau_p$, la densité décroît comme t^{-3} et l'équation (6.17) montre que la vitesse de l'écoulement est proportionnelle au rayon, comme le suppose Reynolds *et al.* [81] et Chevalier [169] dans ce type d'étude. La fonction d'échelle $C(t)$ est monotone pour $\beta > 0$, et lorsque $t \ll \tau_p$, la coquille est accélérée : $C(t) \propto t^2$ (voir la figure 6.2) et pour $t \gg \tau_p$ la coquille est en expansion libre [$C(t) \sim t$].

Sur la figure 6.3, on représente l'évolution temporelle du profil de densité (a), de la pression (b) et de la vitesse (c) des éjectas. La figure 6.3a montre la densité

d'une coquille fine [$\Delta = 1 - R_0 = 0,1$; voir Éq. (6.18)] décroissant dans le temps et tendant vers zéro sur la face externe tandis que l'épaisseur de la coquille augmente avec le temps. La pression dans la coquille (b) décroît avec le temps et la loi de pression sur la face interne est donnée sur la figure 6.3d. La vitesse est linéaire en fonction du rayon à l'intérieur de la coquille (d). La vitesse moyenne des éjectas augmente, ceci est dû au fait que la coquille est accélérée mais elle tend vers une phase d'expansion libre après un temps $t \gg \tau_p$.

La masse des éjectas, M_{ej} , est obtenue après intégration de l'équation (6.15) sur le volume de la coquille :

$$M_{ej} = \frac{4\pi\alpha_1}{3} r_1^3 \rho_0, \quad (6.20)$$

où le coefficient α_1 est un facteur de forme défini par l'intégrale générique suivante, α_n , en posant $n = 1$:

$$\alpha_n = \frac{3}{(1 - R_0^2)^{3/2}} \int_{R_0}^1 (1 - R^2)^{3/2} R^{2n} dR. \quad (6.21)$$

Connaissant M_{ej} , l'équation (6.20) permet de trouver la densité sur la face interne des éjectas sachant que R_0 est connu. Avec ce modèle, on peut trouver l'expression de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique E_c pour une coquille sphérique :

$$E_c(t) = E_0 + E_p(t) \quad (6.22)$$

où :

$$E_0 = \beta^2 M_{ej} \frac{r_1^2 \alpha_2}{2\tau_p^2 \alpha_1}, \quad (6.23)$$

est l'énergie cinétique initiale et :

$$E_p(t) = M_{ej} \frac{r_1^2}{2\tau_p^2} \left(1 - \frac{1}{C(t)^2} \right) \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (6.24)$$

est l'énergie cinétique acquise par la poussée de la pression du vent du pulsar dans la phase d'expansion. La quantité α_2 est obtenue en faisant $n = 2$ dans l'expression de α_n . Lorsque $\Delta \ll 1$ (pour une coquille fine), on obtient :

$$\alpha_n = \frac{3}{2^{3/2} \Delta^{3/2}} \int_0^\Delta 2^{3/2} x^{3/2} (1 - x)^{2n} dx \simeq \frac{6}{5} \Delta. \quad (6.25)$$

Cette relation permet de simplifier les calculs pour une coquille fine. Une fois donnée l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$, la luminosité du pulsar $L_p(t)$ peut être exprimée de la façon suivante :

$$L_p(t) = \frac{dE_c}{dt} = M_{ej} \frac{r_1^2}{\tau_p^2} \frac{\dot{C}}{C^3} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (6.26)$$

où $C(t)$ est donnée par l'équation (6.19). La luminosité initiale :

$$L_{p0} = \frac{\beta M_{ej} r_1^2 \alpha_2}{\tau_p^3 \alpha_1}, \quad (6.27)$$

s'exprime elle aussi à partir de l'équation (6.19). Dans le paragraphe 5.3.2 du chapitre V, nous avons déterminé la luminosité $L(t)$ par l'expression $L(t) \sim -d_t(p_{r_0} V)$. Cette expression est équivalente à (6.26) car l'énergie cinétique est acquise par le travail de la force de pression p_{r_0} . Nous pouvons donner le temps caractéristique τ_p par :

$$\tau_p = \left(\frac{\beta M_{ej} r_1^2 \alpha_2}{L_{p0} \alpha_1} \right)^{1/3}. \quad (6.28)$$

La vitesse du son sur la face interne à $t = 0$ est donnée par l'expression :

$$C_{s0} \equiv \sqrt{1 - R_0^2} \frac{r_1}{\sqrt{3} \tau_p}, \quad (6.29)$$

voir la formule (5.49) et l'expression de la vitesse du son qui suit. Nous avons ainsi exprimé toutes les formules fondamentales permettant d'étudier l'évolution des éjectas soufflés par un pulsar central. Une fois définis r_0 , r_1 , M_{ej} , E_0 ainsi que L_{p0} (la luminosité initiale du pulsar), nous pouvons trouver la densité des éjectas sur la face interne ρ_0 ainsi que les paramètres β , τ_p et C_{s0} . Dans cette section, un indice "p" apparaît sur toutes les grandeurs liées à notre modèle. Dans la section suivante, relatif au modèle observationnel, cet indice n'est plus utilisé.

6.3 Évolution temporelle de la luminosité du pulsar

Les modèles d'évolution des plérions [73] et l'estimation de l'énergie totale contenue depuis le domaine radio jusqu'au domaine des X [74], montrent que la

majeure partie de l'émission d'énergie provient d'une étoile à neutrons magnétisée en rotation rapide [68, 165]. L'énergie de rotation d'un pulsar peut s'exprimer comme :

$$E_r = \frac{I\Omega^2}{2} = \frac{2\pi^2 I}{P^2}, \quad (6.30)$$

où I est le moment d'inertie du pulsar, Ω est sa fréquence de rotation et $P = 2\pi/\Omega$ sa période de rotation. L'énergie de rotation initiale d'un pulsar E_r peut être très importante car son moment d'inertie est grand, $I \sim 10^{45}$ g cm². Par exemple, pour un pulsar ayant une période de rotation initiale de 5 ms, E_r est de l'ordre de $\sim 10^{51}$ ergs [79]. Cette énergie est comparable avec l'énergie cinétique mise en jeu lors de l'explosion d'une supernova. Les observations montrent que la période de rotation des pulsars croît avec le temps. Ceci implique que le pulsar perd progressivement son énergie initiale de rotation. La loi de freinage de la rotation des pulsars peut être donnée par [69] :

$$\dot{\Omega} = -K_l \Omega^n, \quad (6.31)$$

où K_l est une constante, n est l'indice de freinage et $\dot{\Omega}$ est la dérivée temporelle de la fréquence de rotation du pulsar (voir la fin du paragraphe 1.3 du chapitre I). L'intégration de l'équation (6.31) donne l'évolution temporelle de la fréquence :

$$\Omega(t) = \frac{\Omega_0}{(1 + t/\tau)^{1/(n-1)}}, \quad (6.32)$$

où Ω_0 est la fréquence initiale, τ est le temps caractéristique de ralentissement donné par :

$$\tau = \frac{\Omega_0^{1-n}}{K_l(n-1)}. \quad (6.33)$$

Nous pouvons utiliser la relation (6.32) pour trouver la fréquence ou la période de rotation initiale du pulsar :

$$\Omega_0 = [\Omega(t)^{1-n} - K_l(n-1)t]^{1/(1-n)}. \quad (6.34)$$

Si les paramètres du pulsar sont connus à un instant t , on peut exprimer son âge t [154] à partir de l'équation (6.34) :

$$t = -\frac{\Omega}{\dot{\Omega}(n-1)} \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{n-1} \right] = \frac{P}{\dot{P}(n-1)} \left[1 - \left(\frac{P_0}{P} \right)^{n-1} \right]. \quad (6.35)$$

Une approximation de cette expression est valable si une décélération importante s'est produite entre le temps actuel t et le temps initial $t = 0$, c'est à dire, lorsque $\Omega_0 \gg \Omega$ ou $P_0 \ll P$. Alors, l'équation (6.35) devient :

$$t = -\frac{\Omega(t)}{(n-1)\dot{\Omega}(t)} = \frac{P(t)}{(n-1)\dot{P}(t)}. \quad (6.36)$$

À partir de cette expression, dans le cas d'un pulsar décrit par un dipôle magnétique pur, on a $n = 3$ [91] et on peut trouver dans ce cas le temps caractéristique du pulsar défini par $t = \tau_c \equiv -\Omega/2\dot{\Omega} = P/2\dot{P}$. Cette dernière expression permet d'estimer le temps pendant lequel le ralentissement du pulsar est important, si nous connaissons la période de rotation P ainsi que sa dérivée temporelle \dot{P} .

L'indice de freinage n peut être obtenu à partir de la dérivée temporelle de l'équation (6.31) : $n \equiv \ddot{\Omega}\Omega/\dot{\Omega}^2$. Donc, la mesure de Ω , $\dot{\Omega}$ et $\ddot{\Omega}$ à un instant donné t , permet de trouver n , K_l et Ω_0 à partir de l'équation (6.34), et l'équation (6.33) permet d'obtenir le temps caractéristique de ralentissement τ .

Connaissant la fréquence initiale de rotation, on peut en déduire l'énergie cinétique de rotation initiale, $E_0 = I\Omega_0^2/2$. La dérivée par rapport au temps de la relation (6.30) nous permet d'exprimer la puissance \dot{E}_r irradiée par le pulsar et écrire :

$$\dot{E}_r = \frac{1}{2} \frac{d(I\Omega^2)}{dt} = -L(t), \quad (6.37)$$

où $L(t)$ est la luminosité du pulsar. On obtient $L = -I\Omega\dot{\Omega} = 4\pi^2\dot{P}/P^3$. Partant de l'équation (6.32) la luminosité temporelle du pulsar évolue alors comme :

$$L(t) = \frac{L_0}{(1+t/\tau)^p}, \quad (6.38)$$

où $L_0 = I\Omega_0^2/\tau(n-1)$ est la luminosité initiale du pulsar et p est défini $p \equiv (n+1)/(n-1)$ [79].

Par exemple, les mesures de pulsation du pulsar du Crabe donnent un indice de freinage de $n = 2,5$ soit $p = 2,3$ [82, 89, 154], $\Omega = 190 \text{ s}^{-1}$ et $\dot{\Omega} = -2,4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ [170].

Ces valeurs sont mesurées à un certain temps t après l'explosion de la SN, et dans le cas de la nébuleuse du Crabe, l'explosion est datée en l'an 1054. Sachant

que les mesures de Ω et de $\dot{\Omega}$ ont eu lieu en 1975, on en déduit $t = 1975 - 1054 = 921$ ans. Ensuite, en supposant que l'ordre de grandeur de I est $I = 10^{45}$ g cm² [80], on peut estimer la période de rotation initiale à $P_0 \sim 19$ ms. Alors, il vient $E_0 \sim 5,3 \times 10^{49}$ ergs, $L_0 \sim 3 \times 10^{39}$ erg s⁻¹, $\tau \sim 733$ ans et $\tau_c \sim 1240$ ans. Ces valeurs sont en accord avec celles données dans [79], par exemple.

La luminosité L_0 peut être comparée à l'émission du corps noir L_n de l'étoile à neutrons. Si l'on considère une étoile à neutrons de 10 km de rayon avec une température de surface de ~ 2 MK [165, 171], alors on a $L_n \sim 10^{38}$ erg s⁻¹. Donc, l'émission thermique de l'étoile à neutrons est plus faible et la luminosité du pulsar est dominée par l'émission de particules relativistes qui ralentissent sa rotation.

Dans ce modèle, nous supposons que l'indice de freinage n est constant. En réalité, ce paramètre évolue avec le temps, et la loi de freinage, donnée par la relation (6.31) devient plus compliquée. En effet, les pertes dues au rayonnement gravitationnel quadrupolaire sont à prendre en compte [172]. Cependant, elles sont considérées négligeables dans notre modèle, lequel reste plutôt qualitatif. D'ailleurs, la majorité des pulsars ont un indice de freinage compris entre 2 ($p = 3$) et 3 ($p = 2$) [82]. Ceci correspond au rotateur purement électrique ou magnétique. Il existe cependant une exception, le pulsar de Vela X pour lequel $p = 6$ soit $n = 1,4!$ [173].

À partir des données d'entrée de Jun [21], on prend $\Delta = 0,1$, $r_1 = 0,22$ pc et une vitesse initiale de ~ 500 km/s. De plus, on prend une masse de coquille égale à $M_{ej} = 3 M_\odot$ (M_\odot est la masse du soleil) et, en conséquence, l'énergie cinétique initiale des éjectas vaut $E_0 \simeq 10^{49}$ ergs. Enfin, la luminosité initiale est $L_{p0} = 5 \times 10^{39}$ erg s⁻¹ [luminosité déduite de la formule (6.27) du modèle décrit dans la section 6.2]. Ces paramètres initiaux sont proches de ceux de la nébuleuse du Crabe [21].

Notre modélisation présentée dans la section 6.2 permet de donner la densité initiale $\rho_0 = 4,3 \times 10^{-20}$ g cm⁻³, la vitesse initiale de 560 km s⁻¹ (soit $\beta = 0,55$), avec un temps caractéristique $\tau_p = 210$ ans [voir Éq. (6.28)] et la constante $K = 3,3 \times 10^{27}$ C.G.S. (voir le paragraphe 6.2) pour une vitesse du son de $C_{s0} = 260$

km s^{-1} [voir Éq. (6.29)] correspondant à une température de ~ 5 MK (400 eV) [174]. On retrouve le même ordre de grandeur que les paramètres initiaux utilisés par Jun dans ses simulations [21].

Avec ces valeurs initiales, notre modèle fournit l'évolution temporelle des rayons interne et externe des éjectas (voir la figure 6.4a). Ils sont en accord avec les observations [24] et les simulations numériques [21]. Sur une échelle de temps d'environ $5\tau_p$, c'est à dire ~ 1000 ans, le rayon des éjectas varie entre 0,2 et 1,5 pc et la vitesse des éjectas croît de ~ 500 à ~ 1100 km s^{-1} (figure 6.4b).

Finalement, sur la figure 6.5, nous comparons la luminosité du pulsar (6.26) donnée par notre modèle, avec la loi d'échelle donnée par l'équation (6.38) avec $L_0 = 8,5 \times 10^{39}$ erg s^{-1} , $\tau = \tau_p = 210$ ans. La valeur de n est fixée à 2 ($p = 3$) dans le modèle, la luminosité décroît alors en t^{-3} et cette valeur est un indice de freinage réaliste pour les modèles de luminosité de pulsar [typiquement $p = (n + 1)/(n - 1)$ est compris entre 2 et 3 et il en est de même pour n].

Le bon accord entre les observations et les résultats analytiques de l'expansion de la nébuleuse du Crabe nous permet de suggérer que ce modèle fournit une description raisonnable pour l'expansion des RSN et des plériens.

6.4 Simulation numérique de l'instabilité de la coquille

L'accord entre le modèle et les observations pour l'écoulement radial unidimensionnel moyen, nous permet de l'utiliser pour décrire une perturbation angulaire. Le vent du pulsar peut être considéré comme un milieu léger poussant un milieu lourd (la coquille). Cette configuration est instable et l'écoulement de base est instationnaire. L'étude de sa stabilité a été traité lors du chapitre V.

Le développement de l'IRT semble être responsable de la filamentation de la nébuleuse du Crabe [5], comme nous l'avons montré au cours du chapitre I puis ultérieurement. En utilisant la simulation numérique ainsi que la solution analytique

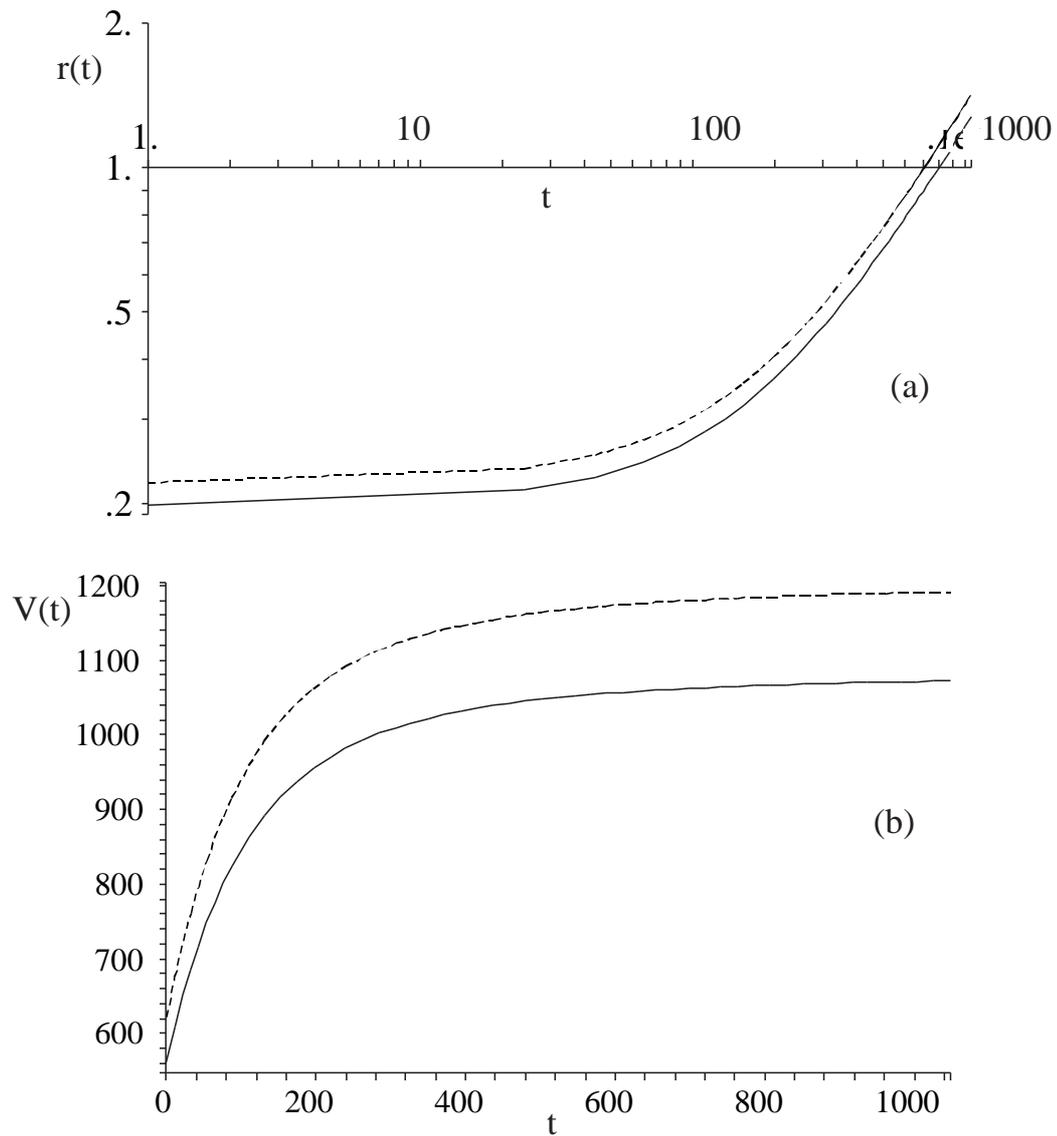


Figure 6.4: Représentation (a) de l'évolution temporelle de la face interne (trait plein) et externe (traits pointillés). Le rayon $r(t)$ est en parsec (pc) et le temps t en années. On note une évolution significative du rayon après $t = \tau_p = 210$ ans. Après une phase d'accélération, suit une phase d'expansion libre. Sur (b) on trace l'évolution temporelle de la vitesse [$V(t)$ est en km/s et t en années] de la face interne (trait plein) et la vitesse de la face externe (traits pointillés). L'augmentation de l'épaisseur de la coquille ne se voit pas en échelle Log-Log, par contre en échelle linéaire on se rend compte que l'épaisseur augmente d'un facteur ~ 15 pour $t = 1000$.

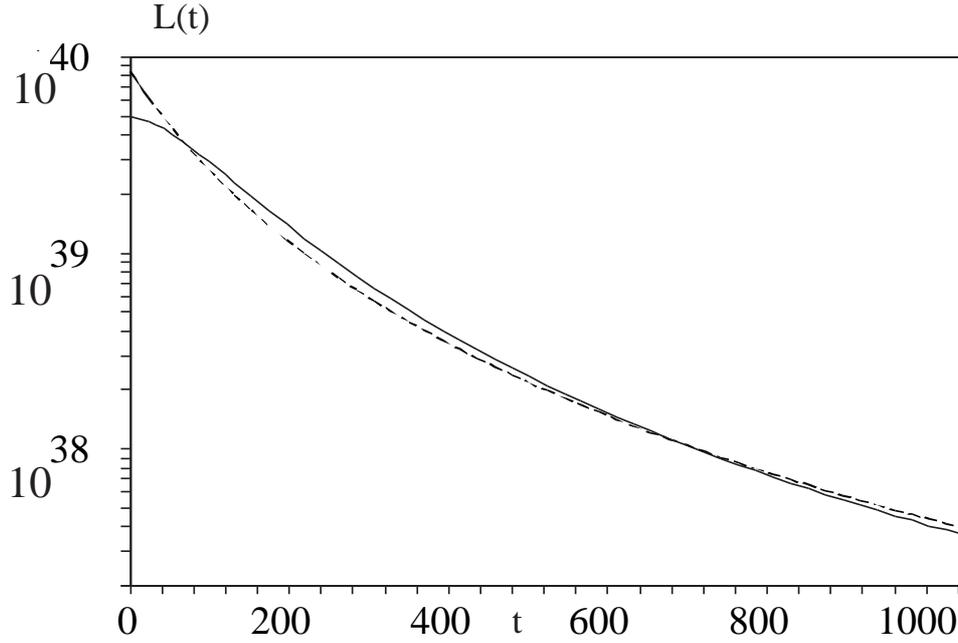


Figure 6.5: Comparaison de la luminosité $L(t)$ (L est en erg/s et t en années) du pulsar donnée par le modèle standard c'est à dire l'équation (6.38), sachant que $L_0 = 8,5 \times 10^{39}$ erg s $^{-1}$, $\tau = \tau_p = 210$ ans et $n = 2$ ($p = 3$) (en pointillés) avec la luminosité $L_p(t)$ donnée par notre modèle, l'équation (6.26) avec $L_{p0} = 5 \times 10^{39}$ erg s $^{-1}$ et $\tau_p = 210$ ans (trait plein). On observe un bon accord entre les deux modèles.

développée au cours du chapitre V, nous désirons étudier plus précisément la fragmentation de la coquille formée par les éjectas. Pour simuler la phase non-linéaire de l'IRT d'une coquille perturbée et accélérée par le vent du pulsar, nous utilisons le code hydrodynamique CHIC (Code d'Hydrodynamique et d'Implosion du Celia) [175, 176]. Ce code bidimensionnel, en géométrie axisymétrique, utilise une formulation lagrangienne des équations d'Euler. Le solveur hydrodynamique est basé sur les principes de conservation de l'impulsion et de l'inégalité entropique (garantit une dissipation positive de l'entropie). C'est une extension du solveur acoustique 2D de Godunov [175, 176, 177].

Dans la section 5.7, une perturbation arbitrairement petite :

$$\vec{\xi}(r, \theta, \phi, t) = \sum_{l,m} \vec{\xi}_{l,m}(r, t) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (6.39)$$

a été développée en harmoniques sphériques Y_{lm} dans le référentiel associé à la

coquille en accélération. Chaque perturbation angulaire est développée sur quatre modes propres. En particulier, l'évolution temporelle de la composante radiale de la perturbation de la coquille $\xi_r(r, t)$ peut être représentée par [voir Éq. (5.84)] :

$$\xi_r(r, t) = C(t) \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \hat{\xi}_i(r) e^{\omega_i g(t)}, \quad (6.40)$$

où $g(t)$ est donné par : $g(t) = \arctan[\beta + (\beta^2 + 1) t/\tau_p] - \arctan \beta$. Les fonctions $\hat{\xi}_i(r)$ donnent la distribution radiale de la perturbation pour un mode pur dont la fréquence dépend seulement du nombre orbital l : $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{l+1}$, $\omega_{3,4} = \pm i\sqrt{l}$ (voir chapitre V). Seul le premier mode, ω_1 est instable et parmi les trois autres, deux oscillent et l'un est évanescent et ils dépendent des conditions initiales. On définit $a_0 = \hat{\xi}_i(r_0)$ comme l'amplitude de la déformation initiale de la face interne de la coquille.

La perturbation initiale est décomposée en harmoniques sphériques selon (6.39) et on considère le cas axisymétrique pour un l donné avec $m = 0$. L'écoulement radial de base a été donné dans la section 6.2. La loi de pression sur la face interne est donnée par l'équation (6.16). Les paramètres initiaux de la coquille sont définis dans la section 6.3, c'est à dire, $M_{ej} = 3 M_\odot$, $r_1(0) = 0,22$ pc, $\Delta \equiv [r_1(0) - r_0(0)]/r_1(0) = 0,1$ avec une énergie cinétique initiale des éjectas $E_0 = 10^{49}$ ergs et une luminosité initiale du pulsar $L_{p0} = 5 \times 10^{39}$ erg s⁻¹.

La figure 6.6 montre l'amplification de la perturbation initiale $\xi_r(r_0, 0)$ sur la face interne en fonction du temps. Pour calculer cette amplification, deux simulations sont effectuées. La première simulation sans perturbation, donne la position non perturbée du rayon interne $r_{0,np}(t)$. La seconde simulation est effectuée avec une perturbation initiale du rayon interne de la forme $r_p(0) = r_{0,np}(0) + a_0$ sur l'axe $\theta = \phi = 0$ pour une mode l donné. Angulairement, cette perturbation initiale s'écrit $r_{0,p}(0, \theta, \phi) = r_{0,np}(0) + a_0 Y_{lm}(\theta, \phi)$.

La soustraction $r_{0,p}(t) - r_{0,np}(t)$ donne l'évolution temporelle de la perturbation $\xi_r(r_0, t)$ sur l'axe $\theta = \phi = 0$ et la quantité $\xi_r(r_0, t)/[a_0 C(t)]$ est tracé sur la figure 6.6. Naturellement, à $t = 0$, ce rapport vaut 1 et nous avons normalisé l'amplification par la fonction d'échelle $a_0 C(t)$ pour soustraire l'expansion de la

coquille et isoler seulement l'amplification due à l'IRT.

Les courbes sur la figure 6.6a montrent une comparaison entre la solution analytique (6.40) pour le mode 60 et la simulation pour les modes $l = 40$ à 80 par pas de 10. On observe un bon accord pour $t < \tau_p$. Dans ce domaine, la solution analytique ne diffère pas plus d'un facteur deux par rapport à la simulation (on considère qu'on est encore en régime linéaire). Plus tard, la perturbation entre dans le domaine non-linéaire lorsque $t > \tau_p$ et, comme on s'y attendait, la croissance ralentie.

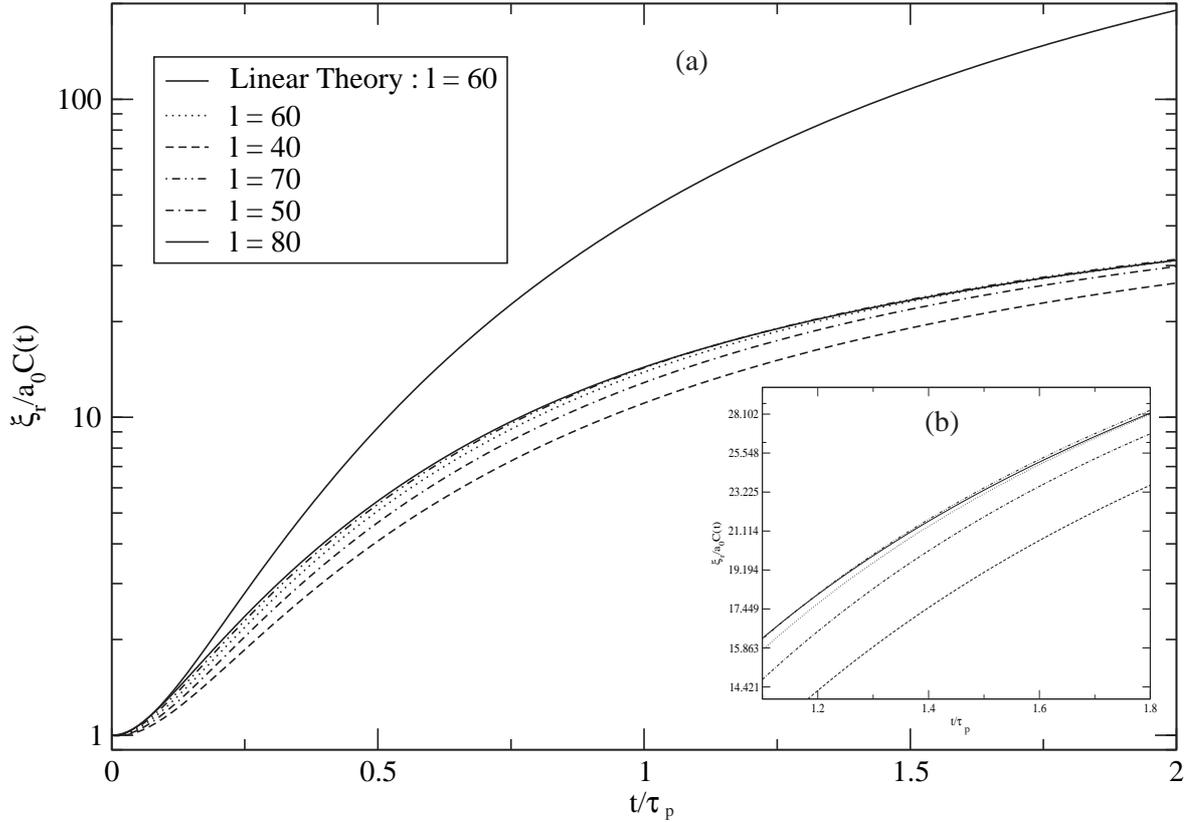


Figure 6.6: (a) Tracé en fonction du temps du calcul, par le code CHIC, de l'amplification de la perturbation pour différents modes l compris entre 40-80 (il s'agit du faisceau de cinq courbes qui sont rapprochées), avec $a_0 = 10^{-3}r_1$. La courbe supérieure en trait plein (notée Linear Theory : $l = 60$) est donnée par le modèle analytique linéaire. La figure (b) est un agrandissement local du faisceau des 5 courbes où l'on met en évidence que le mode $l = 80$ (trait plein) commence à saturer avant le mode 70 ($-\cdot-\cdot-$). En effet, pour $t > 1,4\tau_p$ le mode $l = 70$ passe au dessus du mode $l = 80$.

Nous pouvons estimer le mode l_M pour lequel la coquille peut se casser en devenant trop fine. On définit l_M comme le mode pour lequel est satisfait le critère défini au chapitre V [17, 80, 145]. Il est évident que ce mode est dans un régime linéaire marginal, puisque la non-linéarité ralentit la croissance. Donc, on suppose que l'amplitude finale, a_f , de la perturbation est de l'ordre de sa longueur d'onde : $a_f \simeq \lambda$ ($\lambda = 2\pi r_0/l$) et que, de même, elle est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la coquille $r_1\Delta$. Alors, on obtient $l_M = 2\pi/\Delta$, avec $\Delta = 0,1$ et on trouve $l_M \simeq 60$. Cette valeur est proche de celle obtenue par les simulations. Pour démontrer que ce mode fragilise le plus la coquille, nous réalisons plusieurs simulations avec des modes distribués autour de l_M . Pour toutes ces simulations, on a $a_0/r_1 = 10^{-3}$ et on trace sur la figure 6.6a l'amplification pour les modes : $l = 40, 50, 60, 70$ et 80 .

Nous observons que l'amplification pour le mode $l = 80$ commence à saturer avant le mode $l = 70$ (Fig. 6.6b), car ce mode ($l = 80$) croît initialement plus rapidement et entre dans la phase non-linéaire avant les autres. L'agrandissement effectué dans la figure 6.6b, montre que pour $t > \tau_p$, le mode $l = l_M = 70$ croît plus vite que les autres. Nous déduisons que ce mode fragilise le plus la coquille et peut conduire à sa fragmentation.

Une fois ce mode trouvé, nous augmentons l'amplitude de la perturbation jusqu'à ce que la coquille se brise. Sur la figure 6.7, nous traçons la densité de la coquille perturbée avec $a_0/r_1 = 5 \times 10^{-3}$ et $l = 70$.

Pour mettre en évidence l'évolution de l'IRT, nous traçons la densité à trois instants différents : $t = 0$, $t = \tau_p$, $t = 2\tau_p$. On distingue nettement que la déformation de la coquille est plus importante sur l'axe polaire ($\theta = 0$), car la perturbation initiale est développée en polynôme de Legendre. Avec cette perturbation particulière, on peut observer les différentes étapes de l'IRT en fonction de l'angle. Sur l'axe équatorial ($\theta = \pi/2$), la perturbation est encore en régime linéaire alors que sur l'axe polaire, la perturbation est en régime non-linéaire, avec le développement de structures bulles-aiguilles caractéristiques de l'IRT. On peut observer ce régime caractéristique sur la figure 6.8, où l'on distingue un long filament et sur l'axe une



Figure 6.7: Représentation des simulations 2D pour le mode $l = 70$, fragilisant le plus la coquille, avec $a_0/r_1 = 5 \times 10^{-3}$, $\beta = 0,55$ et $R_0 = 0,9$ (voir sections 6.3 et 6.2) à trois instants différents : $t = 0$, $t = \tau_p$, $t = 2\tau_p$. On observe que la coquille des éjectas devient très fine au voisinage de $t = 2\tau_p$. L'échelle en densité est logarithmique.

bulle dont la parois s'affine au cours du temps. Sur cette figure, on trace deux profils de densité, en haut, à l'intérieur de l'aiguille et en bas à l'intérieur de la bulle. On observe que le profil dans l'aiguille est environ quatre fois plus épais que le profil dans la bulle, avec la même densité sur la face interne (la densité s'annule sur la face externe de la coquille). Ce résultat montre que l'aiguille est plus massive que la bulle. La masse surfacique de l'aiguille est plus de 10 fois plus grande que la masse surfacique de la bulle. La coquille est donc proche de sa fragmentation pour $\theta = 0$, autour de $t = 2\tau_p$. Dans la section 6.4, le temps caractéristique est $\tau_p = 210$ ans, alors la fragmentation des éjectas se produit donc autour de $t \simeq 420$ ans.

De plus, sur les figures 6.7 et 6.8, on observe que la densité pour $t = 2\tau_p$ est maximale sur la face interne de la coquille comme on l'observe à l'intérieur de la nébuleuse du Crabe [23]. Si l'on considère les filaments à un temps $t = 2\tau_p$, alors le

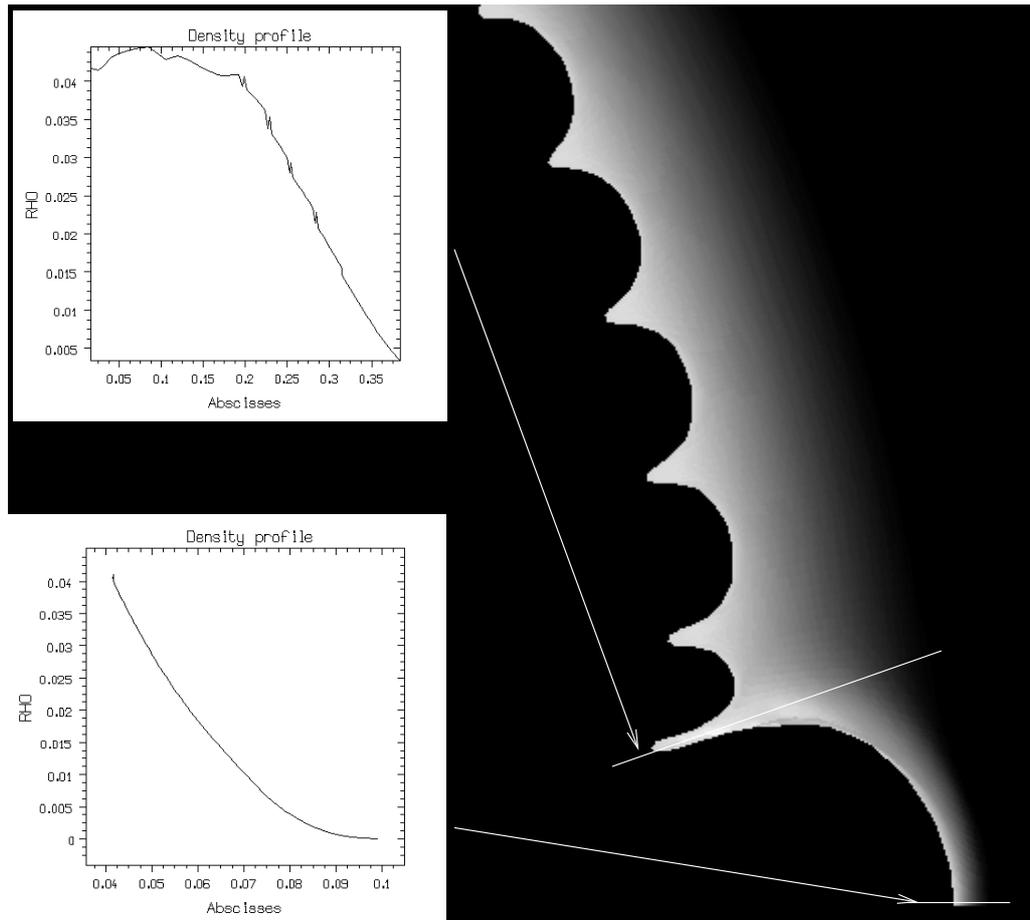


Figure 6.8: Détail de la structure typique bulle-aiguille le long de l'axe x ($\theta = 0$) à $t = 2\tau_p$. La densité est tracée en échelle linéaire. On trace deux profils de densité : en haut le profil à l'intérieur de l'aiguille et en bas à dans la paroi de la bulle. L'origine des abscisses dans ces deux tracés est située sur la surface interne de la coquille.

rayon de la coquille est de $\sim 0,5$ pc et son épaisseur est de $0,06$ pc, sachant qu'elle est donnée par : $[r_1(0) - r_0(0)]C(t)$. On en déduit que la longueur du filament le plus long est d'approximativement deux fois l'épaisseur de la coquille, c'est à dire $\sim 0,1$ pc. Après $t = 2\tau_p$, la croissance de l'IRT est moins importante car la pression initiale à l'intérieur de la bulle diminue. La coquille entre dans une phase de vol libre et sa structure filamentaire se fige. La longueur moyenne des filaments est en accord avec celle observée dans la nébuleuse du Crabe par Davidson et Fesen [168] et Hester *et al.* [5].

On peut estimer la masse des filaments si l'on suppose que la fragmentation

se produit en géométrie 3D. La modélisation monomode 2D ($l, m = 0$) donne des résultats qualitatifs. En réalité, les modes azimutaux peuvent être aussi excités. En faisant l’hypothèse d’une équirépartition des modes, c’est à dire, $l \simeq m$, le nombre de filaments est de l’ordre de l^2 . On peut en déduire directement la masse moyenne des filaments qui est approximativement donnée par $\delta M = M_{ej}/l^2$ où δM est la partie de la masse de la coquille dans chacun des filaments. Pour $l = l_M = 70$ (le mode de fragmentation), on trouve une masse des filaments de l’ordre de $6 \times 10^{-4} M_\odot$. Cependant, la structure filamentaire réelle est beaucoup plus complexe. Ceci suggère que l’IRT définit l’échelle mésoscopique (l’ordre de l’épaisseur de la coquille) des éjectas et que la filamentation “chahutée” se développe par la suite.

Cette discussion concernant la masse des filaments est très approximative car elle est effectuée pour un seul mode. Jun [21] a estimé l’évolution temporelle de la distribution de masse et de densité dans les filaments à partir de simulations numériques pour une perturbation donnée par un bruit numérique de son calcul (Bucciantini *et al.* [22] ont pris, quand à eux, une perturbation monomode). On constate un élargissement temporel de l’épaisseur de la coquille perturbée. Les résultats de Jun [21] montrent que plus de 60 à 75 % de la masse totale se trouve dans les filaments. Dans les simulations que nous présentons sur la Fig. 6.8, on retrouve 90 % de la masse totale dans les filaments. Bien que nos simulations soient réalisées en 2D en régime faiblement non-linéaire (on ne prend pas en compte les petites échelles spatiales) tandis que Jun examine, dans le régime fortement non-linéaire en 2D, les résultats sont assez proches.

Une fois que la coquille est fragmentée, sous l’influence de l’IRT, la dynamique des éjectas est considérablement modifiée. Le vent du pulsar et les éjectas sont découplés et le vent n’accélère que partiellement les filaments, comme le remarque Kennel *et al.* [73] à partir des observations effectuée par Trimble [24]. Donc, le pulsar devient plus clairement visible et les éjectas de la SN entrent progressivement dans la phase de vol libre.

6.5 Validité du modèle

La pertinence astrophysique de notre modèle ainsi que celui de Bernstein et Book [17], par exemple, est limitée à une phase d'expansion intermédiaire, c'est à dire, pas trop proche de l'explosion, car la masse d'éjecta choqué est susceptible de varier fortement au début de l'expansion. Elle ne doit pas être trop tardive car les phénomènes de refroidissement radiatif, magnétique et de ralentissement avec le milieu interstellaire peuvent devenir prépondérants. De plus, notre modèle ne considère pas l'ablation de la surface interne de la coquille par le vent du pulsar.

Il est important de remarquer que la coquille est supposée être en expansion dans le vide et donc la condition aux limites sur la face externe n'est pas celle d'un choc. En effet le rapport de densité entre la coquille et le milieu environnant est de d'environ $1/30$ (voir section 6.1). De plus nous avons montré précédemment que le taux de croissance de l'IRT ne dépendait pas de l'épaisseur de la coquille. Dans ce cas l'augmentation de la masse de la coquille lors de son expansion a peu d'influence sur le développement de l'IRT. Par contre, elle peut avoir une incidence sur le critère de fragmentation qui dépend de l'épaisseur de la coquille.

Nous avons aussi supposé que seule une perturbation monomode ensemencit l'IRT. Une perturbation multimode, autour de $l \sim l_M$, peut modifier la hiérarchie de la structure filamentaire [5]. En effet, pour ce type de perturbation, la saturation non-linéaire est différente d'une perturbation monomode [124]. Cependant, c'est le mode le plus instable, l_M , qui aura tendance à surgir et à dominer naturellement les autres modes. La comparaison entre notre approche analytique et nos simulations numériques non-linéaires et celles de Jun montre qu'on obtient presque la même estimation pour le mode le plus fragilisant ainsi que pour la masse typique des filaments. Cependant, nous réussissons, malgré tout, à prendre en compte la variation temporelle de la luminosité du pulsar.

Notre modèle est basé sur les équations hydrodynamiques d'Euler. Ce système est valide, seulement si les processus dissipatifs (la viscosité et le transport radiatif) ainsi que le champ magnétique sont négligeables (voir le chapitre II). Ce dernier

peut contrôler la croissance de l'IRT [5] dans le domaine des petites longueurs d'onde [22].

Nous allons estimer l'importance des effets de la viscosité, du champ magnétique ainsi que du refroidissement radiatif sur le développement de l'IRT.

Selon l'analyse effectuée dans le chapitre précédent, le taux de croissance de l'IRT peut être estimé par $\omega_{IRT} \simeq \sqrt{gk}$, où $g \simeq r/\tau_p^2$ est l'accélération de la coquille à l'instant initial et $k \simeq l/r$ donne la longueur d'onde associée $\lambda \simeq 2\pi/k$. Les effets visqueux ajoutent un terme dissipatif dans la formule donnant le taux de croissance de la façon suivante [26, 40, 118] :

$$\omega_{IRT} \simeq \sqrt{gk - 2\nu k^2 \omega_{IRT}}, \quad (6.41)$$

où, ν est la viscosité cinématique. Sachant que la valeur de k_m pour laquelle $\omega_{IRT}(k)$ atteint un maximum [voir l'Éq. (6.41)] est donnée par $k_m = (g/\nu^2)^{1/3}$, on en déduit que les effets visqueux peuvent être négligés pour les perturbations telles que $k \ll (g/\nu^2)^{1/3}$ [40]. Ceci donne le critère $l \ll l_\nu$, où $l_\nu = \text{Re}^{2/3}$ et $\text{Re} = r^2/\nu\tau_p$ est le nombre de Reynolds [26]. Le nombre de Reynolds, compte tenu des paramètres de la section 6.3, $\text{Re} \sim 10^5$, avec $r \sim 0,2$ pc, $\tau_p \simeq 200$ ans et $\nu \simeq 10^{20}$ cm²/s (voir aussi chapitre II). Donc, pour le mode le plus fragilisant $l_M \sim 100$, les effets visqueux sont négligeables car $l_\nu \simeq (10^5)^{2/3} \simeq 5000$.

De plus, on peut estimer l'effet du champ magnétique sur le développement de l'IRT. Le champ magnétique a un rôle stabilisant important si sa direction est dans le plan de la perturbation [5, 22, 118]. Le taux de croissance ω de la perturbation s'écrit alors :

$$\omega = \sqrt{gk - \frac{B^2 k^2}{2\pi\rho}}. \quad (6.42)$$

On en déduit alors, que l'effet du champ magnétique B est négligeable si $l < l_B$, avec $l_B = 2\pi r \rho g / B^2$ pour une accélération initiale de la coquille $g = r/\tau_p^2$, on en déduit que $l_B = 2\pi r^2 \rho / B^2 \tau_p^2$. On peut estimer $l_B \simeq 3000$ pour $r \simeq 0,2$ pc, $\tau_p \simeq 200$ ans et $B \simeq 500$ μ Gauss [5] avec $\rho = \rho_0 = 3 \times 10^{-20}$ g/cm³. Comme $l_M \simeq 100 \ll l_B$, les effets du champ magnétique sur le développement de l'IRT peuvent être négligés.

On peut lier le paramètre l_B avec le rapport de la pression thermique de la matière de la coquille P_T sur la pression du champ magnétique P_B , $l_B \simeq 3R_0^2 P_T / [4P_B(1-R_0^2)]$. En effet, $P_B = B^2/8\pi$ et $P_T \simeq \rho C_{s0}^2 \simeq \rho r^2(1-R_0^2)/3\tau_p^2 R_0^2$ car dans le cadre de notre modèle la vitesse du son est donnée par $C_{s0} = r\sqrt{(1-R_0^2)}/\sqrt{3}R_0\tau$ (chapitre V). Par conséquent dans la limite d'une coquille fine, $\Delta \ll 1$, notre approche est valable si $P_T/P_B \gg 16\pi(1+R_0)/3R_0 \simeq 35$.

Il faut rappeler que cette estimation est qualitative, car la valeur de l_B n'est en principe valable que pour le développement de l'IRT en régime linéaire [118]. Dans leurs travaux, Bucciantini *et al.* [22] étudient l'effet du champ magnétique sur le développement de l'IRT, dans une phase fortement non-linéaire, c'est à dire lorsque la coquille est fragmentée. Ils montrent que dans cette phase, le champ magnétique peut avoir un effet stabilisant sur le développement des filaments. Ils trouvent une valeur pour le mode critique $l_B \simeq 24-32$. En effet, dans leur cas, la densité initiale est 30 fois plus faible que la notre et comme l'accélération dépend du temps en $6r/25\tau^2$, leur accélération initiale est 4 fois plus faible que la notre [22]. Comme, l_B est proportionnel au produit ρg (voir ci-dessus), leur mode critique est 120 fois plus faible que la valeur de l_B dans notre cas ($l_B = 3000$, valeur calculée auparavant), on retrouve leur valeur, soit $l_B \simeq 25$.

Donc, dans notre cas les effets du champs magnétique peuvent être négligés, dans la phase qui nous intéresse, c'est à dire, avant la fragmentation de la coquille. Cependant, ils peuvent avoir un effet sur les filaments après la fragmentation. De la même façon, on peut estimer la dissipation d'énergie suite au refroidissement radiatif. Tout d'abord nous allons calculer le libre parcours moyen des photons l_{ph} dans la coquille. Si $l_{ph} \ll r_1\Delta$ ($r_1\Delta$ étant l'épaisseur de la coquille), le milieu est optiquement épais et le refroidissement est celui donné par corps noir. Au contraire, pour $l_{ph} \gg r_1\Delta$ le milieu est optiquement transparent et le rayonnement quitte très rapidement le milieu. Le libre parcours moyen est dû soit au bremsstrahlung inverse $l_{br} \simeq \text{const } T^{7/2}/\rho^2$ où à la diffusion Thomson $l_T \simeq \text{const}/\rho$, dans ce cas $l_{ph} = \min(l_{br}, l_T)$. Pour un plasma entièrement ionisé (voir les Éqs. (16) et (17) dans [26]), l_{ph} est dû à la diffusion Thomson et $l_{ph} \sim 30$ pc, pour $T \sim 400$

eV et $\rho_0 = 3 \times 10^{-20}$ g/cm³ (voir la section 6.3). Sachant que l'épaisseur initiale de la coquille est de $r_1 \Delta \sim 0,02$ pc, dans ce cas $l_{ph} \gg r_1 \Delta$, donc, le milieu est optiquement mince.

Pour un tel milieu on peut estimer les pertes radiatives dues au rayonnement bremsstrahlung E_r par unité de masse et par unité de temps, on a $E_r \simeq \sigma T^4 / \rho l_{br}$. D'autre part, l'énergie cinétique de la coquille E_c par unité de masse est donnée par $E_c \simeq V_0^2 / 2$. Sachant que pour un plasma optiquement mince, l'énergie perdue $E_r \tau_p$ pendant τ_p divisée l'énergie cinétique E_c devient (page 79 [124]) :

$$\frac{E_r}{E_c} \sim \frac{A_b \rho_0 \sqrt{T} \tau_p}{V_0^2},$$

où : $A_b = 9,5 \times 10^{30}$, avec la température T en keV, V_0 en cm/s, τ_p en années et la densité ρ_0 en g/cm³. Sachant que $T \sim 0,4$ keV, $\rho_0 = 3 \times 10^{-20}$ g/cm³, $\tau_p = 200$ ans et $V_0 \sim r_0 / \tau_p$, on en déduit que $E_r / E_c \sim 4 \times 10^{-3}$. Il s'en suit, que les effets radiatifs ne sont pas importants au début de l'expansion de la coquille. Comme dans notre modèle, la densité décroît en t^{-3} et la température en t^{-2} ($T \propto C_s^2$), le rapport E_r / E_c diminue rapidement et donc les effets radiatifs deviennent négligeable.

On peut effectuer le même type d'analyse en ce qui concerne l'énergie interne, $u = 3p/2\rho$ (énergie par unité de masse), sachant que p est donné par $p = K\rho^{5/3}$. On trouve que le rapport $u/E_c \sim 0,3$, en début d'expansion. Pour les mêmes raisons que pour le cas de l'énergie radiative, l'énergie interne décroît en t^{-2} tandis que l'énergie cinétique de la coquille augmente (suite à l'accélération). Donc, l'expansion de la coquille est dominée par les effets cinétiques.

On en conclu que ni les effets dissipatifs ni les champs magnétiques et ni les effets radiatifs, ne sont prépondérants, dans ce cas les équations d'Euler fournissent une description satisfaisante valide pour le développement de l'IRT des RSN.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé un modèle analytique et qualitatif d'une coquille accélérée dans un plérier. Ce modèle a été appliqué à la nébuleuse de

Crabe, laquelle est un pléïon typique.

Dans nos simulations numériques ainsi que dans notre modèle analytique, la luminosité du pulsar décroît comme t^{-p} avec $p = 3$, alors que les modèles précédents [21, 22] utilisent une luminosité constante. Dans ce sens, notre simulation est plus réaliste car elle prend en compte la décroissance de la luminosité du pulsar de façon proche des observations. En particulier, on retrouve des vitesses caractéristiques de coquille ~ 1100 km/s, à une distance de ~ 1 pc du pulsar, après ~ 1000 ans d'évolution. Ces valeurs sont proches de celles que l'on peut observer dans la nébuleuse du Crabe. Dans les simulations de Jun, l'accélération est plus forte et au bout de cette même période, le rayon de sa coquille est supérieur à 7 pc. De plus, dans notre cas la masse de la coquille est d'environ $3 M_{\odot}$, valeur proche de celle formée dans la nébuleuse du Crabe, alors que Jun considère une coquille de masse inférieure à une masse solaire.

Tous ces indices semblent montrer que notre modèle décrit de façon simple l'expansion d'une coquille en interaction avec le vent d'un pulsar tout en étant réaliste à notre sens.

Ce modèle a été aussi appliqué à l'étude de la stabilité d'une coquille en expansion. Il décrit l'IRT qui se développe sur la face interne de la coquille accélérée sous la pression du vent du pulsar et il fournit le taux de croissance des perturbations et donne aussi le mode l_M pouvant conduire à la fragmentation de la coquille constituée des éjectas. Pour une épaisseur initiale de coquille correspondant à $R_0 = 0,9$, on obtient $l_M = 60$. On peut remarquer, que dans ses simulations Jun [21] utilise la même épaisseur initiale qui évolue pendant l'expansion sous l'effet d'une pression du vent du pulsar plus forte que dans notre cas. On s'attend donc à ce que le mode le plus fragilisant augmente pour Jun. Néanmoins, les simulations montrent que ce sont les conditions initiales qui sont prépondérantes, car le mode qui émerge dans [21] après 4000 ans d'expansion est proche du mode 60 prédit par l'analyse linéaire.

Les simulations hydrodynamiques 2D non-linéaires que nous avons menées confirment la condition pour laquelle la coquille peut se déchiqeter. Compte tenu

des paramètres initiaux de la coquille ainsi que de sa mise en mouvement, on peut estimer que la fragmentation de la coquille se produit environ 400 ans après sa formation. Cette valeur est cohérente avec les observations de la nébuleuse du Crabe, car le temps de fragmentation est nécessairement inférieur à son âge (~ 940 ans).

Par ailleurs, cette analyse fournit les paramètres physiques pouvant être comparés avec l'observation ou à des simulations, c'est à dire, la masse des filaments, leur taille et leur vitesse ainsi que leur forme. En effet, on montre que la répartition de masse entre la coquille et les filaments est proche de celle obtenue par Jun [21]. Dans nos simulations, le schéma lagrangien du code CHIC ne nous permet pas de poursuivre assez loin dans le domaine non-linéaire. Comme Jun [21] utilise un code Eulérien, il peut s'engager plus loin dans cette phase et il obtient une forme de filament plus réaliste. Néanmoins, nos estimations de la masse des filaments sont comparables.

Enfin, nous montrons que le modèle de fluide idéal est valide, dans la phase d'évolution de la coquille qui nous intéresse, c'est à dire, avant son éventuelle rupture. En effet, dans cette phase, la viscosité, le rayonnement et le champ magnétique n'ont pas d'effet sur le développement de l'IRT.

Bien qu'ayant considéré une application de ce modèle à la nébuleuse du Crabe, d'autres plériions ont été observés comme Vela X [178] et 3C 58 [165] et montrent aussi une structure filamentaire avec un pulsar central. Il pourrait être instructif d'essayer d'appliquer ce modèle à ces autres objets, dans le but de prédire la taille et la masse des fragments de manière simple et rapide grâce à l'approche analytique.

Par ailleurs, une direction inexplorée jusqu'à ce jour [179] pourrait être examinées grâce à ce modèle analytique en essayant de le rapprocher de celui de Dwarkadas [160]. Il s'agit de l'instabilité de coquille qui s'appelle l'instabilité de Vishniac [155, 156, 157] dans le cas de l'onde de souffle provenant d'une explosion de SN et qui provoque une bulle dont l'intérieur est à très faible densité est dont le bord comporte presque toute la masse des éjectas bien qu'étant très fin (faible épaisseur par rapport au rayon). Pour une grande longueur d'onde une coquille

fine peut se déformer dans son ensemble en se tordant [22] tout en gardant ses faces parallèles.

Comme dans la partie centrale de la nébuleuse du Crabe, on observe des structures à grande échelle, celles-ci pourrait résulter de la déformation initiale d'une coquille fine contenant seulement quatre ou cinq modes et celle-ci se serait brisée ultérieurement lors de son évolution [179].

Enfin, nous voudrions discuter d'un problème fréquent en astrophysique et qui correspond à l'explosion d'un milieu dans le vide. Ordinairement, lorsqu'un milieu s'expand dans le vide, la vitesse d'expansion asymptotique, v_b du bord est reliée à la vitesse du son initiale au centre de la configuration, $C_s(0)$, par la relation (page 102-103 volume I dans [180]) :

$$v_b = \frac{2}{\gamma - 1} C_s(0), \quad (6.43)$$

où γ est le coefficient polytropique du milieu considéré. Pour $\gamma = 5/3$, on s'attend à trouver :

$$v_b = 3 C_s(0), \quad (6.44)$$

Cependant, si on reprend les formules données dans cette étude, on trouve :

$$v_b = r_1(0)/\tau, \quad (6.45)$$

et

$$C_s(0) = r_1(0)/(\sqrt{3}\tau). \quad (6.46)$$

On obtient alors :

$$v_b = \sqrt{3} C_s(0), \quad (6.47)$$

qui ne correspond pas à (6.43). En fait, la relation (6.43) n'est valide qu'en géométrie plane et sa généralisation donne [181] :

$$v_b = \frac{2}{\sqrt{1+d}(\gamma-1)} C_s(0), \quad (6.48)$$

où $1 + d$ est la dimensionalité du problème avec d qui vaut 0, 1 ou 2 selon qu'on soit respectivement en géométrie plane, cylindrique ou sphérique.

Pour $d = 0$, (6.48) se réduit comme convenu à (6.43) et pour une explosion à symétrie sphérique dans le cas $\gamma = 5/3$, elle donne bien (6.47).

Si nous nous permettons de rappeler ce point, c'est qu'à notre connaissance, il est peu connu ou bien est peu diffusé d'une communauté à une autre.

CHAPITRE VII

Proposition expérimentale

7.1 But de l'expérience

Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu que l'expansion et la fragmentation des RSN sous la pression du vent d'un pulsar, jouent un rôle important dans la dynamique des pléions. Par conséquent, il est intéressant de valider expérimentalement à la fois le modèle hydrodynamique d'expansion ainsi que le critère de fragilisation d'une coquille. Selon les lois d'échelle (voir chapitre II), une expérience laser peut fournir des informations instructives et en même temps confirmer des parties de modèles de dynamique concernant certaines phases d'objets astrophysiques et aussi, de cibles utilisées pour la FCI. En effet, ce type d'expérience permet de tester à la fois le modèle développé dans le chapitre V, ainsi que le domaine de validité des équations d'Euler, discuté dans le chapitre II.

Cette approche a été utilisée avec succès aux USA pour l'étude, par exemple, de l'IRT concernant les SN [99, 182, 183] et, en particulier la supernova SN1987A [6, 43, 100, 110, 184, 185]. En particulier, ils ont pu montrer, grâce à des simulations numériques qu'aux échelles près, les profils de densité et de pression, d'une part, pour une SN autour de l'interface He/H et, d'autre part pour une cible laser bicouche Cu/CH₂ sont extrêmement similaires [26, 92]. L'un de leurs travaux typique a été présenté dans le chapitre II.

En ce qui concerne, par exemple, la SN1987A, les IRT ont permis d'obtenir une vitesse des éjectas de l'ordre de 10 000 km/s alors que le modèle à symétrie sphérique sous estimait cette valeur d'un facteur 2. Maintenant, les observations donnent une vitesse d'environ 15 000 km/s et, en conséquence, l'IRT n'est pas

encore suffisante pour expliquer cette valeur très élevée [186]. Certains évoquent un passage en régime turbulent [183, 187].

En conséquence, même s'il reste encore beaucoup d'effort à faire, les expériences auprès des lasers permettent néanmoins de valider des hypothèses théoriques, le bon fonctionnement de codes et au final, de progresser petit à petit d'une nouvelle manière.

Pour cette raison nous proposons une expérience laser dédiée à l'étude du développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) sur la face interne d'une coquille, accélérée par les faisceaux d'un laser de puissance. Cette instabilité peut, sous certaines conditions discutées ci-dessus, conduire au percement de la coquille. Le but de cette expérience est de montrer que pour une coquille donnée, une certaine forme de perturbation favorise le percement. Lors des chapitres V et VI, nous avons étudié, entre autres, cet aspect pendant le développement de l'IRT. La connaissance de l'épaisseur de la coquille permet d'estimer la longueur d'onde de la perturbation la fragilisant le plus.

Sur les installations lasers actuelles, il est possible de réaliser ce type d'expérience. Par exemple, la LIL (Ligne d'Intégration Laser) est composée actuellement de quatre faisceaux laser délivrant chacun 8 kJ à 351 nm, pour des durées typique de 3 ns avec une tache focale de 700 μm [188]. Sachant que la version finale de la LIL comportera huit faisceaux, cette installation sera capable de délivrer 60 kJ sur une cible dans le domaine UV (351 nm). De plus, cette installation dispose de diagnostics comme l'imagerie X qui permet d'étudier le développement de l'IRT.

Sur la base de notre analyse, il semble réalisable de reproduire le développement de l'IRT dans une coquille en expansion. Cette nouvelle expérience s'effectue en géométrie sphérique divergente (figure 7.1). Elle est dans la continuité de l'expérience ASTROLABE effectuée sur l'installation Phébus en 1999 [111, 189], qui a permis d'étudier le développement de l'IRT mais en géométrie plane. Récemment, une expérience en géométrie divergente a été réalisée par Drake *et al.* [110] (voir chapitre II). Cette expérience consiste à étudier l'IRT sur la face externe d'une coquille décélérée dans une mousse. Comme nous l'avons dit, le respect des lois

d'échelle (voir chapitre II) permet de rendre pertinent ce type d'expérience pour l'étude du développement de l'IRT dans les supernovae et de confronter l'expérience à la simulation [110]. L'expérience proposée dans ce chapitre, consiste au contraire à accélérer une coquille dont la face interne est perturbée et observer sa déformation et fragmentation due à l'IRT (figure 7.1). On pense que cette expérience permettrait de déterminer, pour une certaine épaisseur de coquille, la longueur d'onde de perturbation conduisant à sa rupture, le temps auquel celle-ci se produit ainsi que la masse caractéristique des fragments.

7.2 Schémas de l'expérience

On se propose d'accélérer une coquille constituée de deux milieux, en imposant une pression sur l'interface interne de la coquille. On souhaite effectuer une accélération avec un nombre d'Atwood proche de 1 ($\rho_2 \ll \rho_1$) et sans ablation. Sur la figure 7.1, on a représenté le schéma envisagé. Une coquille extérieure de forte densité, dont la face interne est perturbée est mise en mouvement par l'intermédiaire d'un poussoir de faible densité. L'interface entre le poussoir et la coquille dense est instable. De cette manière, on peut exercer une pression P par ablation du poussoir, ceci permet de ne pas ablater l'interface perturbée et de laisser la face externe libre. L'accélération de la coquille peut s'effectuer de deux façons différentes :

- en attaque indirecte, à l'aide d'une source X,
- en attaque directe, à l'aide d'une source UV.

Par la suite, nous allons considérer ces deux processus d'attaque pour réaliser cette expérience. Le schéma de l'expérience présenté sur la figure 7.2, permet de mettre en mouvement la coquille à l'aide d'un flux de rayon X par l'intermédiaire d'une cavité. Ce type de procédé est appelé attaque indirecte. L'attaque directe déjà évoquée sur la figure 7.1 est représentée plus en détail sur la figure 7.3.

L'attaque indirecte doit permettre en principe une meilleure uniformité d'éclairement sur la coquille, donc une poussée plus isotrope en évitant la création d'un

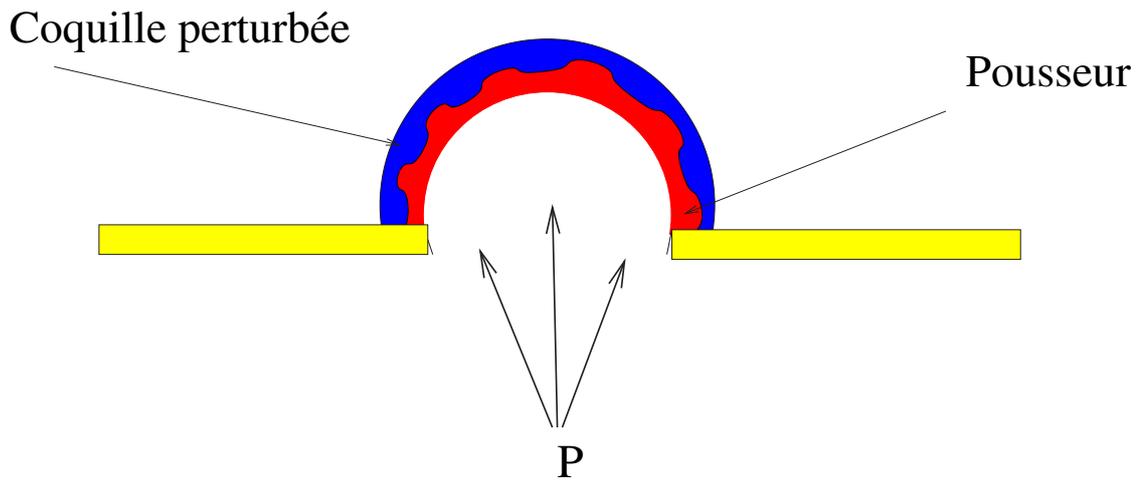


Figure 7.1: Schéma de principe d'une expérience laser en attaque directe. La pression P , peut être fournie, soit par un laser UV ou par une source X. Cette pression accélère et ablate une coquille formée d'un poussoir (faible densité) et d'une coquille extérieure (forte densité) perturbée sur sa face intérieure.

point chaud qui modifierait la dynamique locale de la coquille.

Les contraintes d'alignement du laser en attaque indirecte sont moins importantes que pour l'attaque directe, où le dépôt d'énergie est maximal dans l'axe du laser et moins important dans le plan équatorial (voir la figure 7.3).

En ce qui concerne l'attaque indirecte, le dimensionnement et la simulation de ce type de cavité est complexe.

Il faut maîtriser la physique du rayonnement dans la cavité et éviter les problèmes de bouchage des trous par lesquels entrent les faisceaux à cause de la détente de plasma sur le contour. Ceci impose des contraintes sur la durée de l'impulsion laser.

Dans le cas de l'attaque directe, la cible est relativement plus simple et pour un rayonnement laser donné (tache focale) la simulation de l'hydrodynamique de la coquille est plus accessible comparée à l'attaque indirecte.

Après ces constatations, le schéma en attaque directe semble plus accessible.

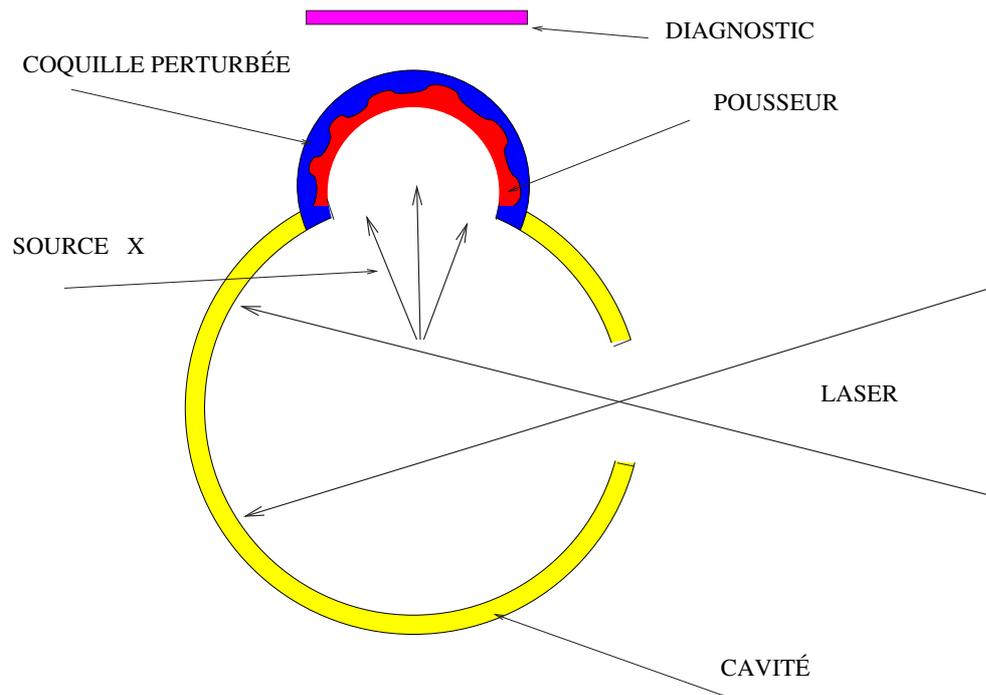


Figure 7.2: Schéma de principe d'une expérience en attaque indirecte laser permettant d'accélérer une coquille et d'observer sa fragmentation. Le laser entre dans la cavité et produit des X, alors la pression d'ablation de ce rayonnement accélère la coquille. Celle-ci est constituée d'un matériau dit poussoir et d'une coquille perturbée sur laquelle va se développer l'IRT et mener à sa déformation. La rupture de la coquille peut être détectée à l'aide d'un diagnostic X.

7.3 Dimensionnement de la coquille

La définition d'une expérience laser nécessite, au préalable, une analyse du phénomène physique étudié, en même temps qu'une étude de la cible utilisée pour la réalisation des expériences.

Ce travail se fait en réalisant des simulations numériques à l'aide de codes spécifiques d'interaction laser/matières. Ces simulations doivent prendre en compte la géométrie réelle de la cible, les caractéristiques techniques du laser et décrire convenablement la physique qui est supposée être examinée. De tels codes existent à deux dimensions [190, 191, 192] et sont plus ou moins sophistiqués, et des versions 3D verront bientôt le jour [193]. Il s'agit de ceux qui sont utilisés pour étudier

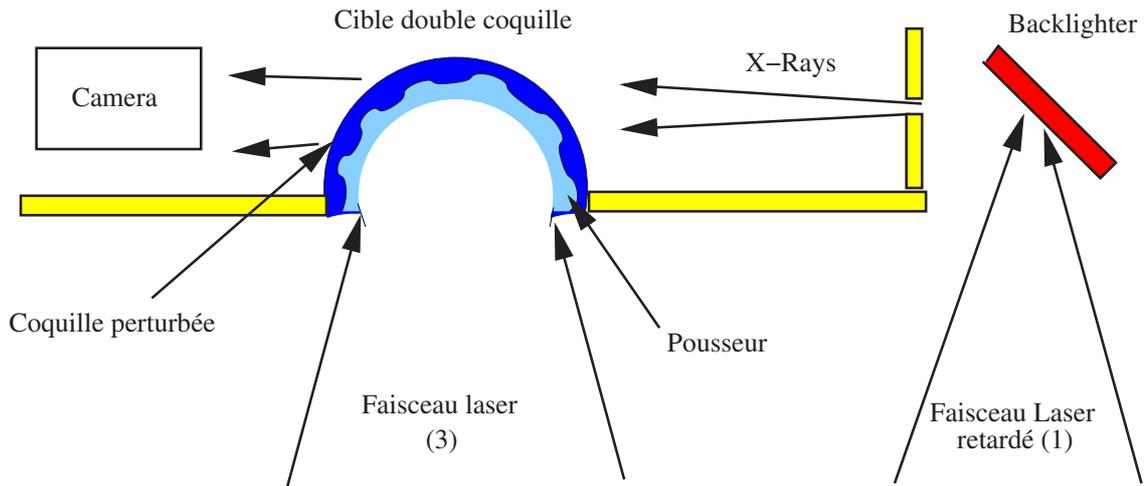


Figure 7.3: Schéma de principe d'une expérience laser en attaque directe. Le faisceau principal met en vitesse une coquille, tandis qu'un faisceau secondaire retardé est utilisé pour effectuer une radiographie de la coquille en mouvement (backlighter).

la FCI. Ce travail est long, mais nécessaire afin d'assurer l'obtention de résultats expérimentaux pertinents.

Cette étude numérique sort du cadre de cette thèse (elle pourrait constituer l'objet d'une autre thèse, d'ailleurs). Cependant, avant de commencer ces travaux, il est indispensable d'effectuer une première approche analytique dont l'objectif est de donner les ordres de grandeurs des quantités physiques et de procurer des "gardes fous" et des jalons pour obtenir, au préalable, des informations relatives aux résultats numériques. C'est ce que nous présentons maintenant. Cette information doit aussi servir pour définir les paramètres du laser ainsi que les diagnostics pertinents.

Le modèle analytique développé dans les chapitres V-VI sur la mise en mouvement de la coquille, permet de déterminer la pression, p_{r0} , sur la face interne de la coquille au début de l'impulsion laser en considérant un gaz parfait en détente isentropique :

$$p_{r0} = K \rho_{r0}^{5/3}, \quad (7.1)$$

où ρ_{r0} est la densité initiale de la coquille et K une constante. Le modèle permet

de déterminer la constante K et de la relier à la durée de l'impulsion laser par l'équation (5.34) avec $\gamma = 5/3$:

$$K = \frac{r_1^2(1 - R_0^2)}{5\tau^2\rho_{r_0}^{2/3}}, \quad (7.2)$$

où r_1 est le rayon externe de la coquille dense et $R_0 = r_0/r_1$, r_0 étant le rayon interne de la coquille de lourd. La vitesse du son dans la coquille sur sa face interne C_{s0} est reliée à K , $C_{s0}^2 = 5K\rho_{r_0}^{2/3}/3$ (voir Section 6.5), on obtient :

$$C_{s0}^2 = \frac{r_1^2(1 - R_0^2)}{3\tau^2}, \quad (7.3)$$

d'où on peut déduire la température de la coquille T_c [174] :

$$T_c \simeq 6,3 \times 10^{-13} \frac{r_1^2(1 - R_0^2)}{3\tau^2} \text{ eV}, \quad (7.4)$$

où r_1 et τ sont en centimètre et en seconde respectivement.

L'énergie cinétique E_c de la coquille devant être fournie après la fin de l'impulsion laser, est reliée au temps τ par l'équation (6.24), lorsque $t \gg \tau$ par :

$$E_c = \frac{M_0\alpha_2 r_1^2}{2\tau^2\alpha_1}, \quad (7.5)$$

où $M_0 = 4\pi\alpha_1\rho_{r_0}r_1^3/3$ est la masse de la coquille dont le rayon externe serait r_1 et la densité moyenne, ρ_0 , et α_1, α_2 (voir équation 6.21) sont des facteurs de forme qui dépendent de R_0 . Ce modèle permet alors de déterminer à partir des paramètres suivants : r_1, R_0, M_0 et τ , la pression subie par la coquille p_{r_0} ainsi que son énergie cinétique E_c . On peut ensuite remonter à l'énergie du laser (voir plus loin).

En ce qui concerne les dimensions de la coquille, il semble raisonnable, compte tenu des diagnostics, de choisir des rayons de l'ordre de plusieurs centaines de microns. On prend, pour le rayon interne de la deuxième coquille (la plus dense), $r_0 = 500 \mu\text{m}$ et pour le rayon externe, $r_1 = 600 \mu\text{m}$. Ce qui donne $R_0 = 0,83$. On prend pour le milieu lourd, une coquille de cuivre de densité $\rho_{r_0} = 8,9 \text{ g cm}^{-3}$, il faut remarquer que la masse M_0 doit être divisée par deux dans le modèle, car on accélère une demi coquille. C'est la face interne de cette coquille en contact avec un milieu léger (plastique par exemple) que l'on perturbe. Pour le temps caractéristique, nous sommes limités par la durée des impulsions lasers pouvant

être fournies par les installations. Par exemple pour la LIL en impulsion carrée, il semble raisonnable de prendre $\tau < 10$ ns pour la durée pendant laquelle la coquille est accélérée. Si l'on choisit une impulsion laser d'une durée de 8 ns et que l'on prend une marge de 2 ns pour la mise en mouvement de la coquille, on a alors $\tau = 6$ ns.

À l'aide de tous ces paramètres, on obtient :

$$E_c \simeq 2,5 \text{ kJ}, \quad p_{r_0} \simeq 50 \text{ Mbar} \quad \text{et} \quad T_c \simeq 6 \text{ eV}. \quad (7.6)$$

À partir de l'énergie cinétique de la coquille, il est possible de déduire l'énergie laser nécessaire à sa mise en mouvement. On suppose que l'énergie cinétique de la coquille est reliée à l'énergie laser E_l par la relation :

$$E_c = \theta E_l, \quad (7.7)$$

où θ est l'efficacité de transmission de l'énergie. On peut décomposer ce paramètre en plusieurs contributions :

Dans le cas de l'attaque directe, on a une contribution liée à l'absorption de l'énergie laser dans l'ablateur θ_{abs} et une contribution liée au transfert hydrodynamique de l'énergie absorbée dans le mouvement de la coquille θ_{hydro} . On estime : $\theta_{abs} \sim 60$ % et $\theta_{hydro} \sim 30$ %, donc, dans ce cas, $\theta = \theta_{abs}\theta_{hydro} \sim 18$ %. D'où en attaque directe, on obtient : $E_l \sim 14$ kJ.

En attaque indirecte le coefficient de transfert hydrodynamique est plus important ($\theta_{hydro} \sim 40$ %) mais l'absorption de l'énergie laser dans la paroi de la cavité est d'environ $\theta_{abs} \sim 90$ %. De plus, l'efficacité de l'utilisation de l'énergie absorbée est faible car elle est de l'ordre du rapport de la surface de la cible sur la surface de la paroi. Ce rapport ne peut pas être supérieur à 10 % pour des raisons d'homogénéité de l'éclairement et du bouchage du trou d'entrée. Par conséquent, on peut considérer que l'énergie laser à fournir doit être supérieure au cas de l'attaque directe.

En conclusion, il est nécessaire d'atteindre des énergies laser d'au moins 10 kJ pour un durée de 8 ns. Il se trouve que ces caractéristiques sont accessibles sur des installations du type de la LIL.

7.3.1 Perturbation de la face interne de la coquille et IRT

Il s'agit de déterminer ici la longueur d'onde la plus fragilisante pour la coquille, c'est à dire celle qui "percera" la première. Un premier modèle consiste à considérer que cette longueur d'onde particulière λ_M est de l'ordre de l'épaisseur de la coquille (chapitre V), c'est à dire, $\lambda_M = r_1 - r_0$, ce qui correspond au numéro de mode $l_M = 2\pi r_0/\lambda_M$, d'où :

$$l_M = \frac{2\pi R_0}{1 - R_0}. \quad (7.8)$$

Pour : $r_0 = 500 \mu\text{m}$ et $r_1 = 600 \mu\text{m}$, alors $R_0 = 5/6$ et $l_M = 30$. La longueur d'onde vaut $\lambda \simeq 100 \mu\text{m}$, comme convenu.

De là, on peut, à l'aide du modèle, remonter à l'amplitude de la perturbation initiale a_{cr} , qui provoquera la rupture de la coquille après le temps caractéristique τ , d'après l'équation (5.88) :

$$a_{cr} = r_1 \frac{1 - R_0}{\Lambda_1} e^{-\pi\sqrt{l_M+1}/4}. \quad (7.9)$$

Pour $R_0 = 0,83$, $l_M = 30$, le poids du mode le plus instable pour une configuration de coquille dont seule la face interne est perturbée (voir chapitre V, mode "interne") varie peu et vaut $\Lambda_1 = 0,5$. Ce résultat est valide pour une coquille sans vitesse initiale, c'est à dire, avec $\beta = 0$ (chapitre V).

Après application numérique, on obtient $a_{cr} = 3 \mu\text{m}$ ou une amplitude totale de la perturbation initiale de $6 \mu\text{m}$. Pour vérifier que le mode 30 est le mode correspondant au seuil de fragmentation, il est nécessaire de réaliser des coquilles avec un mode 20 (plus stable) et un mode 40 qui passera en phase non-linéaire avant le mode 30. Ceci correspond à trois longueurs d'onde de perturbations différentes : 80, 100 et 160 μm . Ces types de cibles semblent envisageables avec les nouvelles techniques développées à Livermore [110].

Dans cette expérience le développement de l'IRT se fait après le passage d'un choc dans la coquille. Dans ce cas l'instabilité de Richtmyer-Meshkov (IRM) [123] peut se développer et changer les conditions initiales pour l'IRT. On peut estimer

la croissance de la perturbation sur la face interne de la coquille après le passage du choc. En connaissant la vitesse du choc v_s , le nombre d'onde de la perturbation k et t_s la durée avant l'accélération de la coquille, l'amplitude de la perturbation est donnée par $\zeta(t_s) = \zeta_0(1 + \sigma_{RM}t_s)$ avec $\sigma_{RM} = A_t k v_s$ [124]. Pour le cas qui nous intéresse ici, on a un nombre d'Atwood A_t proche de un et $k = 2\pi/\lambda$ avec $\lambda = 100 \mu\text{m}$, $v_s \simeq 2 \times 10^6 \text{ cm/s}$, sachant que t_s est de l'ordre de 2 ns, alors $\zeta(t_s) \simeq \zeta_0(1 + 2,4)$. Alors, ceci nous montre qu'on doit prendre en compte l'instabilité de Richtmyer-Meshkov dans notre expérience.

7.3.2 Processus d'ablation et mise en mouvement de la coquille

La mise en mouvement et, par conséquent, l'ablation nous semble être l'un des processus au sujet duquel on doit porter une attention particulière. En effet, le type d'expérience que nous désirons effectuer n'a pas encore été réalisé à ce jour.

Jusqu'à présent les études relatives à l'IRT ont toutes été menées autour d'un état "d'équilibre" alors que de notre côté nous voulons un état de base instationnaire. Plus précisément, dans les travaux actuels, la mise en mouvement de l'interface modulée est mise en mouvement simultanément avec l'excitation de la perturbation. Autrement dit, le développement de l'IRT ne se produit pas sur un milieu qui, au préalable, est mis en mouvement. La difficulté consiste à réaliser cet enchaînement de phénomène : mise en vitesse dans un premier temps, de la coquille comprenant la perturbation initiale puis, dans une deuxième étape, excitation de l'IRT et amplification par l'accélération de la coquille.

Dans la première phase, la coquille de léger (plastique) va être ablatée progressivement et il faut que son épaisseur soit réglée telle que la pellicule de plastique soit évaporée avant la fin de l'impulsion laser. Pendant la deuxième phase, le laser doit continuer à irradier la face interne de la coquille de lourd et continuer de l'accélérer. C'est alors à ce moment que l'on verra évoluer la croissance de l'IRT en phase instationnaire. Il faut noter que lors cette étape le milieu lourd devrait

être peu ablaté car il est protégé par la pellicule de plastique intérieure et la température du milieu devrait avoir un peu augmentée au cours de la première phase. De plus, comme par définition, le milieu lourd a une densité élevée comparativement au plastique, peu de masse sera ablatée sans pour autant diminuer “l’effet fusée”. L’accélération de la coquille devrait alors avoir effectivement lieu même après l’ablation de la coquille interne.

Par ailleurs, nous voudrions attirer l’attention sur un autre point qui, à première vue, pourrait paraître gênant. En effet, dès que le rayonnement attaque le système constitué des deux coquilles concentriques emboîtées, un choc va être généré et se propager dans le milieu léger puis dans le lourd. On peut se demander quel effet va subir l’interface modulée. En fait, ce choc produit une accélération proche d’une fonction de Dirac et si instabilité il y a, nous aurions affaire avec celle de Richtmyer-Meshkov (IRM) [123]. Cette instabilité croît linéairement avec le temps (voir section précédente), et, lorsque la coquille commence à être accélérée c’est l’IRT qui va dominer avec au début une croissance exponentielle en temps (l’écoulement est instationnaire).

Mais revenons à la pression d’ablation qui va agir sur la face interne de la coquille. Cette pression peut être créée par ablation d’une couche légère de deux manières différentes ; de façon directe, par le rayonnement laser ; ou de façon indirecte, par un rayonnement X. Le schéma de création de la pression par rayonnement X thermique produit par une cavité est représentée sur la figure 7.2 et le schéma en attaque directe est donnée sur la figure 7.3.

En attaque indirecte, la température radiative, T_r , de la cavité dans laquelle les faisceaux lasers sont focalisés, est estimée en faisant le bilan des flux de rayonnement [194, 195]. La cavité est supposée rayonner comme un corps noir et en considérant les pertes de rayonnement par le trou d’entrée ainsi que le gain apporté par la cavité et par le laser (corrigé de l’albedo de la cavité), on obtient [195] :

$$T_r = \left\{ \frac{P_l}{\sigma_{SB}[S + A(1 - \beta_c)]} \right\}^{1/4}, \quad (7.10)$$

où P_l est la puissance laser incidente dans la cavité, S la surface du trou d’entrée

de la cavité, A la surface totale de la cavité, β_c est l'albedo de la cavité et σ_{SB} est la constante de Stefan-Boltzmann.

La pression d'ablation en Mbar exercée par la source X créée dans la cavité est donnée par Lindl [194] :

$$p_{ab} = 3 \times 10^{-7} T_r^{7/2} \text{ Mbar} \quad (7.11)$$

avec T_r en eV et p_{ab} défini par (7.6). Par conséquent, pour une pression d'ablation p_{ab} de l'ordre 50 Mbar, on obtient une température de cavité de ~ 220 eV. Ce résultat dépend en réalité de la géométrie de la cavité selon l'équation (7.10). Pour effectuer le dimensionnement complet, il est nécessaire d'utiliser des codes permettant, à partir d'une géométrie de cavité, de donner T_r . Cependant, cette estimation de 220 eV est compatible avec les températures obtenues dans les expériences en cavité [124, 194].

En attaque directe, la pression d'ablation dépend de la longueur d'onde du laser λ et de l'intensité I_{abs} absorbée par la cible. D'après Lindl [194] on a :

$$p_{ab} = 40 \left(\frac{I_{abs}}{\lambda} \right)^{2/3} \text{ Mbar}, \quad (7.12)$$

où, $I_{abs} = \theta_{abs} I$ et I sont normalisée à 10^{15} W/cm², λ est en μm et I est normalisée par 10^{15} W/cm².

Donc, pour $\theta_{abs} = 60$ %, on a besoin d'une intensité laser de 8×10^{14} W/cm² avec $\lambda = 0,351$ μm , pour arriver à la pression d'ablation calculée en (7.6), $p_{ab} \simeq 50$ Mbar. Sachant que l'impulsion laser est de l'ordre de 8 ns et la taille de la tache focale d'environ un diamètre de 500 μm , on obtient une énergie laser de 13 kJ qui est proche de celle estimée au début du paragraphe 7.3. Ces valeurs sont réalisables sur une installation laser telle que la LIL.

Dans notre modèle, la loi de pression sur la face interne de la coquille décroît rapidement au cours du temps (chapitre V). Par conséquent, l'application de cette pression implique une mise en forme temporelle spécifique de l'impulsion laser.

7.3.3 Loi d'échelle

Lors du chapitre II, on a établi les lois d'échelle permettant de faire correspondre certaines quantités physiques pour deux systèmes différents de tailles différentes et, en l'occurrence, une cible laser et une SN.

Ici on considère, d'une part, un reste de supernova dont la dimension caractéristique est $r \simeq 6 \times 10^{16}$ cm (0,02 pc), avec une densité $\rho \simeq 3 \times 10^{-20}$ g cm⁻³, une pression $p \simeq 10^{-5}$ dyne cm⁻² ($\simeq 10^{-11}$ bar), une vitesse $v \simeq 5 \times 10^7$ cm s⁻¹ (soit 500 km s⁻¹) et une température $T \simeq 5 \times 10^6$ K. Ces paramètres sont proches de ceux utilisés par Jun [21], lors de ses simulations numériques de l'évolution d'un plérion.

D'autre part, on considère une cible soumise à un rayonnement laser dont $r_1 \simeq 10^{-2}$ cm (100 μ m), de densité $\rho_1 \simeq 10$ g cm⁻³ avec une pression $p_1 \simeq 30$ Mbar, une vitesse $v_1 \simeq 5 \times 10^6$ cm s⁻¹ (soit 50 km s⁻¹) et une température T_1 de 15 eV ($\simeq 175000$ K).

En se reportant au chapitre II, on en déduit que le nombre d'Euler pour le reste de supernova est $Eu = 2,7$ et $Eu_1 = 2,9$ pour la cible. Il ressort que les deux systèmes ont le même comportement hydrodynamique suivant la transformation d'échelle définie. À partir des facteurs d'échelle a , b et e , on peut faire correspondre les deux échelles de temps caractéristiques t et t_1 , d'où l'on en déduit que 10 ns à l'échelle de la cible laser correspondent à environ 200 ans pour le reste de supernova. Entre p et p_1 , on retrouve bien un facteur 3×10^{-19} et pour $p_1 \simeq 30$ Mbar on retrouve la pression p dans le RSN (voir Éqs. 2.7).

Ces deux valeurs sont très proches et on en déduit que la transformation (2.5) peut être utilisée pour passer de la cible au RSN.

7.4 Diagnostics

Les différents diagnostics envisagés pour cette expérience sont :

Si on utilise l'attaque indirecte :

– Une imagerie 2D, résolue en temps dans le domaine des X, de la coquille en mouvement est nécessaire. Ce diagnostic utilisant le rayonnement passif de la cavité peut être utilisé (voir Fig. 7.2). Il permet de mesurer la transmission de la coquille en fonction du temps. Cette transmission dépend directement de l'épaisseur de la coquille, qui elle-même, dépend du développement de l'IRT. Donc, ce diagnostic peut nous permettre de déterminer le mode fragilisant le plus la coquille.

– La mesure de la température radiative de la cavité résolue en temps apporte des informations importantes. En effet, ce diagnostic permet à l'aide de code de simulation de remonter à la pression d'ablation sur la face interne de la coquille.

Si on utilise l'attaque directe :

– Radiographie X. En focalisant un faisceau laser supplémentaire sur une cible annexe (voir Fig. 7.3, backlighter), on réalise une source X secondaire. Cette source permet d'obtenir par radiographie (après imagerie sur une caméra), une vue de profil de la perturbation. Ce diagnostic permet de remonter à la variation de l'épaisseur de la coquille en fonction du temps, c'est à dire, au développement de l'IRT. Ce moyen de mesure doit être capable de résoudre au moins $1/10$ de la longueur d'onde de perturbation, c'est à dire, $\sim 10 \mu\text{m}$. C'est la résolution actuelle des diagnostics standards sur la LIL. Cela justifie notre choix des longueurs d'onde des perturbations, et par conséquent, la dimension de la coquille. L'impulsion du faisceau laser supplémentaire est retardé de plusieurs nanosecondes pour capturer différentes phases ultérieures dans le développement de l'IRT.

7.5 Conclusion

Cette étude donne les tous premiers éléments permettant de proposer une expérience sur une installation laser. Nous avons montré qu'une impulsion de l'ordre de 10 ns avec une énergie d'environ 10 kJ est pour accélérer une demi-coquille de $500 \mu\text{m}$ de rayon et de $100 \mu\text{m}$ d'épaisseur. Une installation du type de la LIL semble donc être préférable par rapport à des installations de plus faible énergie. Par exemple, le laser du type LULI 2000 : 1 à 2 kJ, 1 ns, peut accélérer une

coquille de moins de $100 \mu\text{m}$ de rayon. Ce qui demande une résolution au-delà des diagnostics existants. Nous avons effectué un premier dimensionnement de la coquille et proposé des diagnostics pour l'attaque directe ou indirecte. Il semble que le schéma en attaque directe soit plus accessible à la fois expérimentalement et par les codes de simulations. Cependant, une estimation plus précise, à l'aide de codes de simulations permettra de mieux définir les caractéristiques du laser ainsi que le besoin en cibles (géométrie, structure...) et en diagnostics.

Cette expérience doit permettre d'étudier le développement de l'IRT et la fragmentation d'une coquille en écoulement instationnaire à condition de surmonter les difficultés mentionnées dans le paragraphe 7.3.2. Les résultats de cette expérience seront confrontés au modèle hydrodynamique développé au chapitre V, c'est à dire, à un modèle développé à partir des équations d'Euler. Autrement dit, cette expérience a aussi pour but de réaliser un écoulement sans effet dissipatif, tels que la viscosité, le transport thermique et le rayonnement (chapitre II). D'après le modèle développé au chapitre V, on devrait pouvoir vérifier les dimensions caractéristiques des fragments et leurs comportements ultérieurs. De plus, il sera possible de valider les codes hydrodynamiques pour des conditions fortement non-linéaires où des désaccords entre simulations et expérience peuvent survenir.

Enfin, des effets pourront être étudiés dans des expériences futures :

- Les effets de compressibilité sur l'IRT en faisant varier le nombre d'Atwood.
- L'IRT pour une coquille de masse variable, lorsque la coquille est accélérée dans un milieu de densité non nulle.
- La maîtrise de l'accélération de la coquille est importante et elle peut s'effectuer par une mise en forme temporelle appropriée de l'impulsion laser.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce travail de thèse entre dans le cadre des études nouvellement nommées “astrophysique de laboratoire”. Cette discipline consiste à reproduire au sein du laboratoire (à l’aide de laser, d’un Z-pinch,...) des conditions physiques supposées se produire dans plusieurs phénomènes ou objets astrophysiques. Ainsi, après le désaccord entre les observations de la supernova SN1987A et les prédictions théoriques, l’instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) est devenu un thème d’étude majeur dans l’évolution des supernovae et de leurs restes.

Cette thèse est donc dédiée à l’étude du développement de l’IRT en milieu compressible et à ses applications dans l’évolution des restes de supernovae ; en particulier, celles des plérions.

Quatre sujets ont été étudiés :

- L’effet de compressibilité du milieu accéléré sur le taux de croissance et sur la structure de l’écoulement produit par l’IRT (chapitre IV).
- Le développement de l’IRT dans une coquille sphérique accélérée par une pression régnant à l’intérieur de celle-ci (chapitre V).
- Développement d’un modèle hydrodynamique de RSN et de son application aux plérions (chapitre VI).
- Proposition d’une expérience dédiée à la vérification du modèle de l’IRT dans la coquille à sa fragmentation (chapitre VII).

Dans notre étude (chapitre IV), nous avons considéré une stratification identique en densité ce qui permet de ne faire ressortir que la contribution liée à la compressibilité et non à la différence de gradient de densité dans le fluide supérieur, ni à sa masse. Cette étude est effectuée pour un régime stationnaire, et pour le cas où la perturbation est isotherme.

Nous avons pris quatre systèmes : une configuration uniforme incompressible avec deux milieux de densité uniforme et de masse infinie – une configuration incompressible avec une masse finie pour le milieu supérieur – une configuration avec un gradient de densité (stratification) et une masse finie pour le fluide supérieur, enfin, une configuration compressible avec le même gradient et la même masse que dans le cas précédent pour le fluide supérieur. Grâce à cette approche toutes les relations de dispersion ont été représentées sous la même forme mathématique.

Dans notre étude, on a obtenu deux comportements caractéristiques pour la relation de dispersion, $\omega(k)$, entre le taux de croissance d'instabilité ω et le nombre d'onde k . D'une part, on a retrouvé le résultat antérieur de Vandervoort [11] qui dit que pour des grandes longueurs d'onde de perturbation, le taux de croissance de l'IRT se comporte linéairement ($\omega \propto k$). D'autre part, pour des longueurs d'onde plus courtes, on retrouve le cas classique incompressible de densité uniforme ($\omega \propto \sqrt{k}$). On montre alors, que dans le cas compressible le taux de croissance est toujours supérieur au cas incompressible stratifié. Ceci permet de déterminer une longueur d'onde critique de perturbation au-delà de laquelle les effets de compressibilité apparaissent (voir chapitre IV). Par ailleurs, l'effet de compressibilité (rapport des taux d'instabilité dans le cas compressible et incompressible stratifié) est inversement proportionnel à la racine carrée du nombre d'Atwood, A_t , pour les petits k . Aussi, l'effet est plus important lorsque le saut de densité entre les deux milieux est faible [voir l'équation (4.53)]. Au contraire, lorsque le saut de densité entre les deux milieux est très important ($A_t = 1$), les effets de compressibilité disparaissent. Le taux de croissance se comporte alors comme \sqrt{kg} . Ce résultat explique ceux trouvés par Bernstein et Book [17] qui consistaient à constater que seuls les modes incompressibles étaient instables pour une coquille en expansion dans le vide et contenant aussi du vide (nous allons y revenir plus loin).

Enfin, lorsque nous appliquons notre approche à l'étude du ralentissement de restes de supernovae par le milieu interstellaire, on montre que les effets de compressibilité peuvent dominer l'excitation de l'IRT.

Dans une deuxième étude (chapitre V), nous avons traité l'IRT d'une coquille

sphérique en expansion. Il s'agit du cas non-stationnaire, c'est à dire, lorsque l'accélération et la vitesse du milieu changent au cours du temps. Une transformation de coordonnées originale a permis d'exhiber une solution analytique valable à tout temps. Dans ce nouveau référentiel, le problème instationnaire initial peut se ramener à l'étude d'un cas statique. Une étude de stabilité autour de cet équilibre est effectuée et permet d'aboutir à une relation de dispersion dans le régime linéaire pour une constante polytropique $\gamma = 5/3$.

Grâce à cette relation analytique, on peut pousser davantage l'analyse physique des résultats et elle permet de montrer que la variation temporelle (dans l'espace physique ordinaire) de la perturbation de l'écoulement instationnaire n'est pas triviale. De plus comme cette relation de dispersion est de "type incompressible", elle permet de comprendre d'une autre manière pourquoi seuls des modes incompressibles sont instables. C'est donc aussi une autre vision pour comprendre les résultats de Bernstein et Book [17] qui ont été obtenus quelque soit la valeur de γ .

Comme on l'a dit, notre approche n'est valide que pour $\gamma = 5/3$. Cependant, si on s'attache à calculer le taux d'instabilité instantané pour toutes les valeurs de γ , on retrouve bien ceux de [17]. De plus, en ce qui nous concerne, nous avons un paramètre libre supplémentaire, β , qui est directement proportionnel à la vitesse du fluide à $t = 0$.

La relation de dispersion explicite nous permet de séparer les modes incompressibles des modes compressibles. On en déduit que seul un mode parmi les quatre modes incompressibles est instable, les autres sont évanescents ou oscillants et dans ce cas le taux de croissance ne dépend pas de l'épaisseur de la coquille. Cette propriété permet de construire un jeu de perturbations dans la coquille correspondant à différentes situations physiques initiales : par exemple perturber une coquille en mode "sausage", peut simuler de la convection dans les éjectas avant explosion. En ce qui concerne les modes compressibles, ils sont tous stables et nous exhibons la relation de dispersion générale, mais elle est implicite et ne peut être résolue que numériquement (c'est seulement pour les modes incompressibles qu'elle se simplifie remarquablement). Il ressort que, dans ce cas ils dépendent de

l'épaisseur.

Enfin, l'expression analytique du taux de croissance instationnaire est comparée avec celle obtenue de simulations numériques effectuées avec un code de perturbations. L'approche analytique permet de valider le code. Ensuite, grâce au code, nous avons la possibilité d'effectuer l'analyse de l'instabilité pour des écoulements radiaux beaucoup plus complexes pour lesquels nous n'avons pas de solutions analytiques. D'ailleurs, cette approche devrait permettre de montrer d'éventuelles propriétés d'attracteur de la solution unidimensionnelle instationnaire (solution auto-semblable, SAS). Nous voulons dire qu'il se peut qu'en partant d'un certain ensemble de conditions initiales (CI) ne correspondant pas nécessairement à celles de la SAS, nous tendons vers celles-ci asymptotiquement pour les grands temps. Cette propriété n'est pas rare et elle se produit, par exemple, pour l'effondrement gravitationnel dans un milieu ambiant à pression constante [148].

Ce modèle a été appliqué à la nébuleuse du Crabe, laquelle est un pléïon typique (chapitre VI). Un bon accord entre le modèle et les paramètres mesurés lors d'observations a été obtenu. Dans nos calculs analytiques la luminosité du pulsar décroît comme t^{-3} en complément aux résultats numériques de Jun [21] ou de Bucciantini *et al.* [22] qui ont utilisé une luminosité constante. En effet, une luminosité de la forme $L(t) \propto t^{-\mu}$ pour $2 \leq \mu \leq 3$ reproduit convenablement certaines données observationnelles utilisées dans Blondin *et al.* [79], ainsi que celles reprises par Chevalier [80]. Dans ce sens, notre approche comporte un aspect plus réaliste car elle prend en compte la décroissance de la luminosité du pulsar.

Le modèle décrit dans le chapitre V a été aussi appliqué à l'étude de la stabilité des éjectas en expansion dans le chapitre VI. En s'appuyant principalement sur les travaux de Jun, nous avons appliqué notre modèle analytique pour étudier le développement de l'IRT qui se développe sur la face interne des éjectas. Ce modèle fournit le taux de croissance des perturbations et donne aussi le mode fragilisant le plus la coquille formée par les éjectas, menant à sa fragmentation. On peut estimer la masse des filaments, leur taille et leur vitesse ainsi que leur forme.

La simulation numérique bidimensionnelle a permis d'observer le passage dans

le domaine non-linéaire de l'IRT et de mieux comprendre la rupture de la coquille. Nos simulations effectuées avec le schéma lagrangien sont complémentaires de celles de Jun qui a utilisé un code Eulerien. De plus, que ce soit dans les simulations de Jun ou dans les nôtres, il n'a pas été pris en compte le rôle stabilisant du champ magnétique [22]. En outre, comme le souligne Jun [21], les larges structures filamentaires ont pu se former à partir d'une coquille d'éjectas très inhomogène en densité. Ce facteur n'est pas non plus pris en compte.

Toutes les considérations analytiques de cette thèse sont basées sur les équations hydrodynamiques d'Euler pour un écoulement isentropique. Selon la loi d'échelle [26], ce système d'équations est valide à partir du moment où l'on néglige les effets dissipatifs, tels que la viscosité, le transfert de chaleur, le rayonnement et les aspects magnétiques. Ceci est possible si l'on conserve, en particulier, un nombre sans dimension (nombre d'Euler) entre le plériorion et la cible laser. Nous montrons que le modèle de fluide idéal est valide pour la nébuleuse du Crabe et que les effets dissipatifs peuvent être négligés. L'expérience d'astrophysique de laboratoire (chapitre VII) que nous proposons permettra d'étudier la fragmentation due à l'IRT d'une coquille mince perturbée et accélérée sous l'action d'un faisceau laser. Les résultats de cette expérience seront confrontés au modèle hydrodynamique développé au chapitre V. Cette expérience permettra notamment de vérifier le scénario de fragmentation de la coquille par l'IRT, les dimensions caractéristiques des fragments ainsi que leurs comportements ultérieurs. Ce sera aussi la possibilité de valider les codes hydrodynamiques pour des conditions fortement non-linéaires en géométrie divergente.

En ce qui concerne les perspectives, il est possible de poursuivre l'étude analytique de l'IRT en hydrodynamique pure ou en incluant de nouveaux phénomènes.

À propos du premier volet, deux points méritent d'être examinés, à notre sens. Le premier est relatif à la phase non-linéaire de l'IRT. Elle a été abordée dans

le chapitre VI et le prolongement de son étude peut être mené soit, de façon analytique, soit de façon numérique. En effet, comme l'approximation $A_t = 1$ est valide pour la coquille, une approche de la phase linéaire jusqu'à la phase hautement non-linéaire peut être réalisée grâce à une extension [106, 126] de la méthode initiale de Layzer [125]. Elle permet de donner la forme asymptotique des aiguilles et des bulles qui composent la coquille pour $t \rightarrow +\infty$. Dans ces conditions, on peut estimer de façon précise la structure des filamentations ainsi que leurs masses, en même temps que la taille des bulles de vide qui s'incrustent dans la matière. Dans la réalité le nombre d'Atwood ne vaut pas strictement un, et cette propriété a pour conséquence de produire des vortex de Kelvin-Helmholtz à l'extrémité des doigts produits par l'IRT [123]. Ces structures ne peuvent pas, à notre connaissance, être décrites analytiquement jusqu'à ce jour et dans ces conditions, seules les simulations numériques sont capables de prendre en compte ce phénomène. C'est une voie qui a été étudiée à deux dimensions [21, 22] et l'étape suivante serait de se placer en géométrie tridimensionnelle.

Bien que le code CHIC [175] soit écrit en coordonnées lagrangiennes et qu'il ne puisse donc pas décrire des structures trop complexes et enchevêtrées, il pourrait, néanmoins, permettre de calculer une évolution similaire à celle donnée sur les figures 6.7 et 6.8, mais à trois dimensions.

Dans l'approche hydrodynamique pure un point essentiel reste encore inexpliqué, jusqu'à ce jour dans la nébuleuse du Crabe [179]. Les "petites" structures filamentaires sont relativement bien expliquées par l'IRT à condition de prendre des longueurs d'onde beaucoup plus petites que la taille de la nébuleuse. Si on se reporte à la figure 1.5 du chapitre I, outre les petites structures, on peut discerner quatre lobes (en forme de trèfle à quatre feuilles) dont le centre serait situé très proche de la position du pulsar. De plus, comme on peut le voir, chacun des lobes a une extension de l'ordre de grandeur du rayon de la nébuleuse. Ces quatre lobes ont des axes perpendiculaires. L'un des lobes part du centre et son contour constitue la partie de la nébuleuse située dans le coin supérieur droit de l'image ; un deuxième lobe est de direction opposée au premier et décrit le contour

de la nébuleuse localisée dans le coin inférieur gauche de la figure. Les deux autres lobes sont perpendiculaires aux deux premiers et ils sont légèrement plus courts étant donné la forme de la nébuleuse. Ils partent dans deux directions opposées et sont respectivement situés dans les coins supérieur gauche et inférieur droit de la figure 1.5. Ces lobes pourraient être les reliques d'une coquille apparue très tôt après l'explosion de la SN et qui aurait été perturbée initialement par un mode bas ($l \simeq 4$). Cette coquille aurait été soumise à l'instabilité de coquille fine [ou instabilité de Vishniac [155, 156, 157]. Cette instabilité entre en compétition avec l'IRT comme l'indique Bucciantini *et al.* [22], mais ils n'abordent pas ce problème des structures à grande échelle qui reste donc ouvert.

Pour sortir du volet hydrodynamique, on peut examiner l'influence du champ magnétique \vec{B} . Cet aspect a été étudié en 1995 par Jun et Norman [144] et très récemment par Bucciantini *et al.* [22]. Bien que Chevalier [82] indique qu'à ce jour on a très peu de connaissances sur la configuration des lignes de champ par rapport à la coquille du pulsar, l'étude de la Réf. [22] montre qu'un champ \vec{B} tangent à l'interface interne de la coquille réduit la croissance des modes sensibles à l'IRT. Récemment, des études analytiques bidimensionnelles, avec un champ \vec{B} parallèle à l'interface entre deux milieux et pouvant être présent dans chacun de ces milieux, ont été développées en phase linéaire [146, 196]. Cette approche permettrait de quantifier les effets de stabilisation de \vec{B} sur l'IRT trouvés dans [22] et, de plus, d'examiner les modifications de comportement lorsqu'on passe d'un fluide incompressible à un fluide compressible. La relation de dispersion prise par Bucciantini *et al.* [22] est celle qui est donnée pour un fluide incompressible par Chandrasekhar [118]. Or, nous avons vu dans le chapitre IV que les effets de compressibilité peuvent être importants. C'est donc cette situation qu'il faut examiner en présence d'un champ magnétique.

Une autre extension de l'aspect hydrodynamique peut être effectuée en incluant les effets radiatifs. Hester *et al.* [5] ont déduit que le refroidissement radiatif jouait un rôle important pour la nébuleuse du Crabe. Il est bien connu que les pertes d'énergie radiative provoquent une densification du milieu qui subit ces pertes [59].

Par exemple, pour un milieu avec $\gamma = 5/3$, les pertes de rayonnement font que la compression derrière une onde de choc est estimée par l'expression $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, on passe de la valeur 4 ($\gamma = 5/3$) à la valeur 7 ($\gamma = 4/3$) [197]. Si le rayonnement est très important $\gamma \rightarrow 1$ et le taux de compression peu dans ce cas être très élevé. Dans le cas de la nébuleuse du Crabe, on s'attend à ce que l'apparition des doigts de l'IRT soit favorisée. La compressibilité (due au rayonnement) devrait conduire à des doigts plus minces et plus longs. On s'attend donc à des régimes linéaires et non-linéaires différents de ceux que l'on trouve dans le chapitre VI. Par ailleurs, avec cet ingrédient supplémentaire, il deviendra nécessaire de prendre en compte, en plus, l'instabilité de Vishniac ainsi qu'elle est considérée dans les RSN dès que le rayonnement devient significatif [56].

Enfin, et il s'agit du point le plus urgent et le plus impératif. Il concerne la simulation, avec des codes d'interaction laser/matière, de l'expérience d'astrophysique de laboratoire détaillée dans le chapitre VII. Cette étape est difficile car l'expérience "réelle" avec le laser fera probablement intervenir le refroidissement radiatif des plasmas ainsi qu'un éventuel champ magnétique. Celui-ci peut être dû, par exemple, à l'existence de gradients croisés de densité et de température. Les simulations devront donc être suffisamment réalistes en espérant que, d'un autre côté, elles ne s'écartent pas significativement du modèle hydrodynamique développé dans cette thèse, afin qu'il joue un rôle de fil conducteur et que le scénario qu'il propose reste à la base de la démarche qui devra être réalisée avec les codes de calcul (comme le code CHIC, par exemple).

En parallèle, une étude des diagnostics plasmas disponibles est primordiale pour effectuer des mesures pertinentes (on peut penser, par exemple, à la modélisation de l'imagerie X de la coquille perturbée).

ANNEXES

A

Liste des annexes

A.1 La masse de Chandrasekhar

Dans cette annexe, nous décrivons comment une sphère de matière peut s'effondrer sous les forces de gravité. Le corps considéré est assimilable à un gaz d'électrons dégénérés. Dans un premier temps les électrons sont considérés comme non-relativistes, ensuite, on abordera le cas des électrons relativistes [198, 28].

A.1.1 Cas non-relativiste

Les électrons sont considérés comme étant dégénérés et non-relativistes. L'énergie des électrons est proche de l'énergie de Fermi E_F :

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_e},$$

où m_e est la masse de l'électron, et p_F l'impulsion des électrons. Les électrons sont très proches les uns des autres et la mécanique quantique prévoit que : $p_F = \hbar/\lambda$ (\hbar est la constante de Planck divisée par 2π) et λ la distance entre les électrons. Soit n le nombre d'électrons dans le volume R^3 , on obtient :

$$E_F \simeq \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{n^{2/3}}{R^2}.$$

L'énergie des n électrons s'écrit alors : $E_c \simeq nE_F$. Donc, l'énergie cinétique des électrons s'écrit :

$$E_c \simeq \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{n^{5/3}}{R^2}.$$

D'autre part l'énergie gravitationnelle potentielle s'écrit :

$$E_P \simeq -G \frac{(Zm_p + Nm_n)^2}{R},$$

où G est la constante de gravitation, m_p et m_n sont respectivement la masse du proton et du neutron. On considère que $m_p \simeq m_n$, et $Z + N = A = 2n$, on suppose que le nombre de protons et de neutrons sont les mêmes. D'où :

$$E_P \simeq -G \frac{4n^2 m_p^2}{R}.$$

L'énergie totale du système s'écrit, $E_T = E_c + E_P$. On recherche le rayon $R = R_e$ qui assure un équilibre. C'est à dire si l'énergie totale est minimum :

$$\frac{dE_T}{dR} = 0,$$

pour un rayon particulier, $R = R_e$. La réponse est que cette possibilité existe, et on obtient :

$$R_e \simeq \frac{\hbar^2 (2m_p)^{1/3}}{4Gm_e m_p^2} M^{-1/3} \simeq 2,45 \cdot 10^{19} M^{-1/3},$$

où $M = 2nm_p$ est la masse de l'objet. On peut simplifier la relation et écrire :

$$R_e \simeq 0,3R_T \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3},$$

où R_T est le rayon de la Terre et M_\odot est la masse du soleil.

Cette dernière relation est importante puisqu'elle donne le rayon d'équilibre R_e d'une masse M dont les électrons sont dégénérés mais non-relativistes. On trouve alors que le rayon R_e pour une masse solaire est proche du rayon terrestre R_T , soit une densité de $\sim 10^6 \text{ g cm}^{-3}$. Cette valeur est caractéristique d'une naine blanche.

A.1.2 Cas relativiste

Une fois le stade de naine blanche atteint, que devient ce corps lorsque les électrons deviennent relativistes. L'énergie cinétique des électrons s'écrit alors :

$$E_c = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2,$$

où m_e est la masse au repos des électrons et p son impulsion. Si les électrons sont ultra-relativistes : $E_c = p c$, et comme ils sont dégénérés, on $E_c = p_F c$ (voir cas non-relativiste pour la définition de p_F). L'énergie cinétique des électrons relativistes devient :

$$E_c \simeq \hbar c \frac{n^{4/3}}{R}.$$

L'énergie potentielle gravitationnelle garde la même forme que pour le cas non-relativiste. L'énergie totale E_T s'exprime maintenant par :

$$E_T = \frac{\hbar c n^{4/3}}{R} - \frac{4Gm_p^2 n^2}{R}.$$

On remarque que la relation d'équilibre ne dépend plus du rayon R . L'équilibre existe si l'énergie totale est positive. Après calcul, on obtient un critère sur la masse M . L'équilibre existe si :

$$M < 2m_p \left(\frac{\hbar c}{4Gm_p^2} \right)^{3/2} \equiv M_{ch},$$

où $M_{ch} \simeq 0,5 M_\odot$.

Ce calcul donne un ordre de grandeur de la masse de Chandrasekhar, M_{ch} . Si une naine blanche dépasse cette masse, elle est instable et s'effondre sous la force de gravitation. Un calcul plus approfondi donne $M_{ch} = 1,6-5 M_\odot$ [105] p. 438 et dans l'article célèbre de 1931, Chandrasekhar donne $M_{ch} \simeq 0,91 M_\odot$ [27]. Des calculs plus précis permettent d'obtenir : $M_{ch} \simeq 1,65 M_\odot$ [1] p. 180.

A.2 Évolution des restes de supernovae : phase de Sedov

On considère un reste de supernova de masse M en expansion dans le milieu interstellaire de densité ρ_{mis} . On peut écrire l'équation de conservation de l'énergie cinétique totale en supposant que tous les profils de densité soient uniformes. Dans ces conditions, on obtient :

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{4\pi\rho_{mis}r^3}{3} \right) v^2,$$

où v_0 est la vitesse initiale des éjectas, r est le rayon de l'interface sphérique entre les éjectas et le milieu interstellaire et v est la vitesse de la matière (supposée uniforme) à l'intérieur de cette sphère. Sachant que $v = dr/dt$, on en déduit :

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{v_0^2}{1 + (r/r_s)^3},$$

où $r_s = (4\pi\rho_{mis}/3M)^{-1/3}$. On peut en déduire dt en fonction de dr . Alors, pour $dt > 0$ on tire une relation intégrale entre le temps et le rayon des éjectas de la forme :

$$t = t_s \int_0^r \sqrt{1 + \alpha^3} d\alpha, \quad (\text{A.1})$$

dans laquelle, $t_s = r_s/v_0$ et $\alpha = r/r_s$. Cette relation peut être étudiée dans deux cas limites : lorsque $\alpha \ll 1$, alors on trouve $r = v_0 t$ et les éjectas sont en phase de vol libre. Si $\alpha \gg 1$, l'intégrale se simplifie et on obtient :

$$r = r_s \left(\frac{5}{2t_s} \right)^{2/5} t^{2/5}.$$

Donc l'évolution temporelle du rayon est de la forme $r \propto t^{2/5}$. On entre dans la phase dite de Sedov concernant l'évolution des éjectas [104]. En particulier, en posant $E_0 = M v^2/2$, on obtient :

$$\begin{aligned} r(t) &= \left(\frac{5}{2\sqrt{2\pi}} \right)^{2/5} \left(\frac{E_0}{\rho_{mis}} \right)^{1/5} t^{2/5} \simeq \left(\frac{E_0}{\rho_{mis}} \right)^{1/5} t^{2/5}, \\ v(t) &= \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2\sqrt{2\pi}} \right)^{2/5} \left(\frac{E_0}{\rho_{mis}} \right)^{1/5} t^{-3/5} \simeq \left(\frac{E_0}{\rho_{mis}} \right)^{1/5} t^{-3/5}. \end{aligned}$$

On retrouve les relations classiques d'évolution du rayon et de la vitesse d'une forte explosion dans un milieu peu dense (voir l'ouvrage de Sedov [104] p. 234 ou aussi les références [59] p. 303 et [72] p. 116). On peut noter que l'équation (A.1) permet de passer continuellement d'un vol libre à la phase de Sedov, c'est à dire, à un ralentissement avec une expression proportionnelle à $t^{2/5}$.

A.3 Évolution des restes de supernovae : phase isotherme

On considère les éjectas d'une supernova dont la masse totale est M et dont la vitesse moyenne est v_0 (voir l'annexe A.2). Les éjectas sont en expansion dans le milieu interstellaire dont la densité est ρ_{mis} . D'après la loi de conservation de l'impulsion, on a [199, 200] :

$$Mv_0 = \left(M + \frac{4\pi\rho_{mis}}{3}r^3 \right) v,$$

où r et v sont respectivement, le rayon et la vitesse moyenne des éjectas au temps t . En utilisant la définition $v = dr/dt$, et en intégrant par quadrature, on obtient la vitesse et le rayon des éjectas en fonction du temps (nous supposons que la vitesse est uniforme dans les éjectas) :

$$\frac{t}{t_s} = \frac{r}{r_s} + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_s} \right)^4, \quad v = \frac{v_0}{1 + (r/r_s)^3},$$

où $r_s = (3M/4\pi\rho_{mis})^{1/3}$ et $t_s = r_s/v_0$.

Comme on peut le deviner, r_s est le rayon d'une sphère dans le milieu interstellaire de densité ρ_{mis} dont la masse est égale à celle des éjectas. On peut en déduire deux cas limites : lorsque $r \ll r_s$, il vient immédiatement que $r \propto t$. Ce régime a déjà été trouvé dans l'annexe A.2 en utilisant une autre approche. À l'inverse, lorsque $r \gg r_s$, on en déduit que $r \propto t^{1/4}$. À l'aide des équations ci-dessus on obtient l'accélération g et le nombre d'Atwood A_t en fonction du rayon :

$$g(r) = \frac{3v_0^2}{r_s} \frac{(r/r_s)^2}{[1 + (r/r_s)^2]^3}, \quad A_t(r) = \frac{1 - (r/r_s)^3}{1 + (r/r_s)^3}.$$

L'instabilité de Rayleigh-Taylor à la surface des restes de supernovae ne peut se développer que si $r < R_s$ car le nombre d'Atwood doit rester positif.

A.4 Commentaire par D. Livescu à propos de l'article : “Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in Supernova remnants” par Ribeyre, X., Tikhonchuk, V. T. et Bouquet S. et la réponse au commentaire de D. Livescu.

Dans cette annexe, on trouve le texte du commentaire de D. Livescu [135] concernant l'article de Ribeyre *et al.* [134] ainsi que la réponse au commentaire de Livescu que nous avons effectué [136]. De plus, nous avons ajouté la réponse de Livescu [137] suite à notre réponse [136].

[HTML ABSTRACT + LINKS](#)

PHYSICS OF FLUIDS 17, 069101 (2005)

Comment on “Compressible Rayleigh–Taylor instabilities in supernova remnants” [Phys. Fluids 16, 4661 (2004)]

D. Livescu^{a)}

Los Alamos National Laboratory, University of California, CCS-2 MS B296, Los Alamos, New Mexico 37545

(Received 12 November 2004; accepted 22 February 2005; published online 31 May 2005)

[DOI: 10.1063/1.1920348]

Recently, Ribeyre *et al.*¹ have investigated the role of compressibility on the isothermal Rayleigh–Taylor instability in the linear regime for ideal fluids. They state that a controversy exists in the previous studies, which report both stabilizing and destabilizing effects of compressibility, and examine these different views by comparing compressible and incompressible configurations. However, this controversy had already been settled by Livescu,² in a more general framework than that considered by Ribeyre *et al.*¹ In particular, the dispersion relation for the compressible case derived in Ref. 1 [Eq. (11)] can be deduced from the more general results obtained in Ref. 2. The relation can be obtained from Eq. (27) by setting the ratios of specific heats $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ (which recovers the compressible isothermal case *B* considered in Ref. 1) or from Eq. (26) by letting in addition $L_1, L_2 \rightarrow \infty$ (infinite domain). As explained by Livescu² (see also Fig. 1, Ref. 2), it follows from Eq. (27) that increasing the equilibrium pressure at the interface (less compressible flow), the compressible rate of growth increases towards the constant density incompressible flow result (case *A* in Ref. 1). This is in agreement with the stabilizing effect of compressibility reported earlier (e.g., see the work by Sharp³). On the other hand, as γ_1 and γ_2 increase (less compressible fluids), the rate of growth decreases towards the variable density incompressible flow result (case *C* in Ref. 1) which recovers the destabilizing effect of compressibility seen in previous studies (e.g., work by Bernstein and Book⁴).

For the isothermal case, the polytropic coefficient is equal to 1; however, Ribeyre *et al.*¹ implicitly assume that the ratio of specific heats is also equal to 1 (see the formula for the speed of sound). While the case $\gamma = 1$ indeed implies isothermal flow and has a certain theoretical importance in the study of compressible Rayleigh–Taylor instability growth as a limiting case, it has a little practical importance since in this case $c_p = c_v$ and the gas constant is zero! Nevertheless, the isothermal case can be realized for any γ by adding a source/sink of heat to the energy equation (which can be, for example, the heat gained/lost through radiation). More generally, assume that the flow evolves such that the thermodynamic variables undergo a polytropic transformation with coefficient β along any streamline.

^{a)}Electronic mail: livescu@lanl.gov

$$\frac{d(p + p_{0m})}{p + p_{0m}} = \beta_m \frac{d(\rho + \rho_{0m})}{\rho + \rho_{0m}}, \quad (1)$$

where the notations from Ref. 2 were used, with the index m denoting the material 1 or 2 and the index 0 denoting the 0th order variables. For $\beta_m = 1$ the isothermal case is recovered, in which case the first-order pressure is given by $p = (p_{0m}/\rho_{0m})\rho$, and for $\beta_m = \gamma_m$ the isentropic case is recovered. Following Ref. 2, gravity is considered to act in x_1 direction, and the x_2, x_3 , and time dependence of the first-order variables are assumed to be of the form $\exp[i(k_2x_2 + k_3x_3) + nt]$. After replacing the total derivatives in the equation above, to first order, the pressure mode (where the same notations are used for the modes of the variables as for the first-order variables) is given by

$$p = \beta_m \frac{p_{0m}}{\rho_{0m}} \rho + \frac{p_{0m}}{n} u_1 \left(\beta_m \frac{D\rho_{0m}}{\rho_{0m}} - \frac{Dp_{0m}}{p_{0m}} \right), \quad (2)$$

where D denotes the derivative in x_1 direction. Assuming that the rate of heat addition per unit mass can also be expanded in Fourier series in x_2 and x_3 directions then for each wavenumber it follows from the energy equation, neglecting diffusive effects, that \dot{Q}_m necessary to ensure the polytropic transformation is

$$\dot{Q}_m = \frac{\gamma_m - \beta_m p_{0m} \Delta}{\gamma_m - 1 \rho_{0m}}, \quad (3)$$

where Δ is the divergence of the velocity modes. The dispersion relation becomes in this case,

$$\bar{n}^2 = \frac{\alpha_2 \beta_2 (\beta_1 + \bar{n}^2 M \alpha_1) - \alpha_1 \beta_1 (\beta_2 + \bar{n}^2 M \alpha_2)}{\alpha_1 \beta_1 (\beta_2 + \bar{n}^2 M \alpha_2) \bar{\lambda}_{11} - \alpha_2 \beta_2 (\beta_1 + \bar{n}^2 M \alpha_1) \bar{\lambda}_{22}} \quad (4)$$

and it can be seen that it is the same as that obtained for the $\dot{Q} = 0$ case [formula (27), Ref. 2] with γ_m replaced by the polytropic coefficient β_m . The nondimensional variables are the compressibility parameter $M = g(\rho_1 + \rho_2)/k p_\infty$, with g the gravitational acceleration and p_∞ the equilibrium pressure at the interface, the nondimensional equilibrium densities at the interface α_m , and $\bar{\lambda}_{1,2} = \alpha_m M / 2 \pm \sqrt{1 + (1/\beta_m) \bar{n}^2 \alpha_m M + (\beta_m - 1/\beta_m) (\alpha_m M / \bar{n}^2) + (\alpha_m^2 M^2 / 4)}$.

Then the rate of heat addition for each fluid can be written as

$$\dot{Q}_m = \frac{\gamma_m - \beta_m}{\gamma_m - 1} \frac{1 + \bar{\pi}^2 \bar{\lambda}_{m_m}}{\beta_m + \bar{\pi}^2 M \alpha_m} u_{1s} g \exp(\bar{\lambda}_{k_m} k x_1), \quad (5)$$

with u_{1s} the u_1 velocity at the interface. Using the dispersion relation, it follows that the sign of heat addition is given by the sign of $(\gamma_m - \beta_m) u_{1s} \exp i(k_2 x_2 + k_3 x_3)$. In other words, for $\beta_m > \gamma_m$, the polytropic transformation requires extraction of heat from the bubble region and addition to the spike region, with the effect of decreasing the rate of instability growth. The lower bound for $\bar{\pi}^2$ is obtained when $\beta_1, \beta_2 \rightarrow \infty$. The result is the same as that discussed by Livescu² for the $\dot{Q}_m = 0$ case and corresponds to the rate of growth obtained for the incompressible, variable density case. On the other hand, for $\beta_m < \gamma_m$, on both sides of the interface heat is added in the bubble region and removed from the spike region in or-

der to maintain the polytropic transformation. The upper bound for the rate of growth can be obtained by noticing that $\bar{\pi}^2$ increases as β_1 and β_2 decrease (see, for example, the effect of γ on the rate of growth discussed in Ref. 2); however, the smallest values of β_1 and β_2 are fixed by the requirements that $\bar{\lambda}_{1_1}$ remains real and $\bar{\lambda}_{2_2}$ remains real and negative. The upper bound for rate of growth is then obtained as $\bar{\pi}^2 \leq 1/\alpha_2 M [\sqrt{1 + 4(\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_2/\alpha_1^2} - 1]$ and can become larger than the upper bound obtained for the no heat added case, which was the rate of growth corresponding to the incompressible, constant density case.

In general, if heat is added to the flow, then let \dot{Q}_m be the rate of heat addition per unit mass. In the absence of diffusive effects, following the methodology from Ref. 2, it is straightforward to obtain the dispersion relation:

$$\bar{\pi}^2 = \frac{\left[\alpha_2 \gamma_2 - (\gamma_2 - 1) \alpha_2^2 M \frac{\dot{Q}_2|_{x_1=0}}{u_{1s} g} \right] (\gamma_1 + \bar{\pi}^2 M \alpha_1) - \left[\alpha_1 \gamma_1 - (\gamma_1 - 1) \alpha_1^2 M \frac{\dot{Q}_1|_{x_1=0}}{u_{1s} g} \right] (\gamma_2 + \bar{\pi}^2 M \alpha_2)}{\left[\alpha_1 \gamma_1 \bar{\lambda}_{1_1} + \frac{I_1}{u_{1s}} (\bar{\lambda}_{1_1} - \bar{\lambda}_{1_2}) \right] (\gamma_2 + \bar{\pi}^2 M \alpha_2) - \left[\alpha_2 \gamma_2 \bar{\lambda}_{2_2} + \frac{I_2}{u_{1s}} (\bar{\lambda}_{2_2} - \bar{\lambda}_{2_1}) \right] (\gamma_1 + \bar{\pi}^2 M \alpha_1)}, \quad (6)$$

where

$$\bar{\lambda}_{1,2_m} = \alpha_m M / 2 \pm \sqrt{1 + (1/\gamma_m) \bar{\pi}^2 \alpha_m M + (\gamma_m - 1/\gamma_m) (\alpha_m M / \bar{\pi}^2) + (\alpha_m^2 M^2 / 4)}, \quad I_1 = \int_{-\infty}^0 [\exp(-\bar{\lambda}_{2_1} k s) \dot{Q}'_1] / (\bar{\lambda}_{1_1} - \bar{\lambda}_{2_1}) k ds,$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\exp(-\bar{\lambda}_{1_2} k s) \dot{Q}'_2] / (\bar{\lambda}_{1_2} - \bar{\lambda}_{2_2}) k ds,$$

and the solution for the u_1 velocity mode is given by

$$u_1 = \exp(\bar{\lambda}_{1_1} k x_1) \left(\int_0^{x_1} \frac{\exp(-\bar{\lambda}_{1_1} k s)}{(\bar{\lambda}_{1_1} - \bar{\lambda}_{2_1}) k} \dot{Q}'_m ds + I_1 + u_{1s} \right) - \exp(\bar{\lambda}_{2_1} k x_1) \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\exp(-\bar{\lambda}_{2_1} k s)}{(\bar{\lambda}_{1_1} - \bar{\lambda}_{2_1}) k} \dot{Q}'_m ds \quad \text{for } x_1 \leq 0, \quad (7)$$

$$u_1 = \exp(\bar{\lambda}_{2_2} k x_1) \left(\int_0^{x_1} \frac{\exp(-\bar{\lambda}_{2_2} k s)}{(\bar{\lambda}_{1_2} - \bar{\lambda}_{2_2}) k} \dot{Q}'_m ds + I_2 + u_{1s} \right) - \exp(\bar{\lambda}_{1_2} k x_1) \int_{x_1}^{\infty} \frac{\exp(-\bar{\lambda}_{1_2} k s)}{(\bar{\lambda}_{1_2} - \bar{\lambda}_{2_2}) k} \dot{Q}'_m ds \quad \text{for } x_1 \geq 0, \quad (8)$$

with $\dot{Q}'_m = (\gamma_m - 1/\gamma_m) (\alpha_m M k / g) [D \dot{Q}_m - k (\alpha_m M + 1/\bar{\pi}^2) \dot{Q}_m]$ and the requirements that the integrals exist and all variables vanish at $\pm\infty$.

¹X. Ribeyre, V. T. Tikhonchuk, and S. Bouquet, "Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants," Phys. Fluids **16**, 4661 (2004).

²D. Livescu, "Compressibility effects on the Rayleigh-Taylor instability growth between immiscible fluids," Phys. Fluids **16**, 118 (2004).

³D. H. Sharp, "An overview of Rayleigh-Taylor instability," Physica D **12**, 3 (1984).

⁴I. B. Bernstein and D. L. Book, "Effect of compressibility on the Rayleigh-Taylor instability," Phys. Fluids **26**, 453 (1983).

[HTML ABSTRACT + LINKS](#)

PHYSICS OF FLUIDS 17, 069102 (2005)

Response to “Comment on ‘Compressible Rayleigh–Taylor instabilities in supernova remnants’” [Phys. Fluids 17, 069101 (2005)]

X. Ribeyre^{a)} and V. T. Tikhonchuk
*Centre Lasers Intenses et Applications, Université Bordeaux I-CEA, UMR 5107 CNRS,
 Université Bordeaux I, 351, Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France*

S. Bouquet
*Commissariat à l’Energie Atomique, DIF/Département de Physique Théorique et Appliquée,
 91680 Bruyères le Châtel, France*

(Received 8 April 2005; accepted 15 April 2005; published online 31 May 2005)

[DOI: 10.1063/1.1927553]

The Comment by Livescu¹ states that the controversy on the compressibility effects in the Rayleigh–Taylor instability (RTI) has been completely solved in his former paper (Ref. 2) in a more general framework than that considered by Ribeyre *et al.*³ Indeed the paper by Livescu is more general in the sense that he includes the effects of viscosity, surface tension, and energy transport. However, we disagree with the statement of Comment for three reasons: (i) the analysis by Livescu² is incorrect because it is not valid for arbitrary polytropic constant γ ; (ii) the study by Livescu² is not appropriate for demonstrating compressibility effects, because he compares the growth rate of RTI in different fluids with nonequal masses of the upper (heavier) medium; (iii) the statement in the Comment¹ that in the isothermal case “the gas constant is zero” is wrong.

The following explains our arguments. In his paper,² Livescu considers two immiscible fluids, with constant temperatures at zero order (see Sec. II A, zeroth-order equations). This implies that the density profiles are exponential [see Eq. (8) in Ref. 2] and the sound speed is constant. In this case, the two fluids have the same polytropic constants $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Hence, the value of γ is prescribed and the variation of γ is not possible. In contrast, the general case of a polytropic equation of state: $p \propto \rho^\gamma$, $\gamma \neq 1$ implies the variation of the sound velocity with the coordinate at zero order. Hence, the density profile is no longer exponential; the temperature and the sound velocity depend upon the space variable.

Yet, in his paper,² Livescu considers an arbitrary value of γ and takes a constant sound velocity [see Sec. III for the expression of the sound speed c —just after Eq. (22)]. This is incorrect and inconsistent with the assumption of the value of γ not equal to 1.

Moreover, when Livescu studies the compressibility effect for a finite size domain (Sec. III A), he varies the size of two domains L_1 and L_2 independently on γ and then the masses of the two domains are not the same. Hence, the

influence of compressibility alone is hidden by the mass variation. In opposition, Ribeyre *et al.*³ consider in all cases the same mass for the upper fluid, allowing to separate the compressibility effect from other ones.

In his Comment,¹ Livescu states that in the isothermal case where the polytropic coefficient is equal to one ($\gamma=1$), the gas constant $R=0$. This is not correct since R is a physical constant and cannot become zero ($R=k_B N_a$ where k_B is Boltzmann constant and N_a the Avogadro number). However, in the isothermal case the specific heat c_v becomes infinite, $c_v=R/(\gamma-1)$, because the system could exchange heat (for more details see, for example, the book by Chandrasekhar⁴). In addition, the constant pressure heat coefficient c_p goes also to infinity. The ratio c_p/c_v goes to one, but the difference $c_p - c_v$ is finite, but it is not zero as Livescu states. The isothermal case is relevant in the astrophysical context. For example, in the paper by Mathews and Blumenthal,⁵ where the Rayleigh–Taylor instability analysis is applied to quasi-stellar-object clouds.

The RTI growth rates for the isothermal case were well known before the publication of the papers by Livescu² and Ribeyre *et al.*³ Reference 3 provides a summary and a synthesis of the dispersion relations for different cases that may arise. The compressibility effect is discussed in terms of the critical wavelength h_c (see Sec. IV) and the vorticity generation is examined. In addition, this analysis is applied to astrophysical objects and the influence of compressibility is discussed in the context of evolution of supernova remnants.

¹D. Livescu, “Comment on ‘Compressible Rayleigh–Taylor instabilities in supernova remnants,’” *Phys. Fluids* **17**, 069101 (2004).

²D. Livescu, “Compressible effects on the Rayleigh–Taylor instability growth between immiscible fluids,” *Phys. Fluids* **16**, 118 (2004).

³X. Ribeyre, V. T. Tikhonchuk, and S. Bouquet, “Compressible Rayleigh–Taylor instabilities in supernova remnants,” *Phys. Fluids* **16**, 4661 (2004).

⁴S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover, New York, 1957), pp. 38–60.

⁵W. G. Mathews and G. R. Blumenthal, “Rayleigh–Taylor stability of compressible and incompressible radiation-supported surfaces and slabs: Application to QSO clouds,” *Astrophys. J.* **241**, 10 (1978).

^{a)}Electronic mail: ribeyre@celia.u-bordeaux1.fr

Reply to “Response to ‘Comment on “Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants””” [Phys. Fluids 17, 069102 (2005)]

D. Livescu^{a)}

University of California, Los Alamos National Laboratory, CCS-2 MS B296, Los Alamos, New Mexico 87545

(Received 3 June 2005; accepted 14 June 2005; published online 11 August 2005)

[DOI: 10.1063/1.2001688]

Recently, Livescu¹ examined the compressibility effects on the early stages of Rayleigh-Taylor instability and settled a controversy existent in the literature regarding the stabilizing and destabilizing effects of compressibility. In a later paper, Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet² claimed that the controversy still exists and examined the particular case of isothermal flow for fluids with the ratio of specific heats equal to 1. Livescu³ pointed out that the controversy had already been settled and in a more general context. In reply, Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet⁴ claimed that since the initial conditions correspond to thermal equilibrium, the polytropic coefficients should remain 1 during the evolution of the flow and thus the study of compressibility effects as a function of the ratio of specific heats performed in Ref. 1 is not valid. The claims are erroneous, the analyses in Refs. 1 and 3 are valid, and I apologize to the readers of Physics of Fluids for having to explain the following elementary matters.

- Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet confuse the ratio of specific heats with the polytropic coefficient. The ratio of specific heats γ and the polytropic coefficient β are different concepts (and quantities for nonisentropic flows). The ratio of specific heats is a *material property* (see any book on Thermodynamics, e.g., Ref. 5) and can be varied in a study by comparing systems with different fluids. For example, at normal conditions $\gamma_{\text{air}} \approx 1.4$ for air and $\gamma_{\text{argon}} \approx 1.67$ for argon. The relation $\gamma_{\text{air}} = \gamma_{\text{argon}} = 1$ is never going to be satisfied as Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet claim that should happen for this flow. In fact, there is no known ideal gas with $\gamma = 1$,⁵ although this case has theoretical value in the study of compressibility effects as a limiting case.

Fluids with larger γ are less compressible (see also Ref. 5) and the limit $\gamma = \infty$ corresponds to the incompressible variable density case. For ideal gases γ does not exceed 5/3; however, if the ideal-gas equation of state ($p = \rho RT$) is relaxed and γ is interpreted as the adiabatic exponent, then many liquids can be treated as gamma-law gases with large values of γ . The ratio of specific heats γ is an independent compressibility parameter and can be used in the study of compressibility effects as done by Livescu.¹

- The polytropic coefficient β is a function of the local flow conditions. For fluids at rest a polytropic transformation between two states is defined by the relation $p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^\beta$ where β can have any value, even negative. Initially, the flow considered in Ref. 1 is at rest and in thermal equilibrium and since there is no thermodynamic transformation β is not defined.

In the absence of diffusive effects and heat sources, for infinite domains or finite-size domains with adiabatic walls, the flow is isentropic and β (for moving fluids β is defined in Ref. 3) is equal to the predefined (by the choice of the fluid used) value of γ . Therefore, as the fluids start to move, the temperature, pressure, and density change in agreement with the equation of state ($p = \rho RT$ for ideal gases) and such that $\beta = \gamma \neq 1$. This is contrary to the claim by Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet⁴ that β can only be 1 if starting from thermal equilibrium. Any value of β can be obtained in the flow (even $\beta = 1$ which corresponds to the isothermal case) by adding a source/sink of heat to the energy equation. However, the addition of heat to the flow prevents a direct comparison with the incompressible case. Livescu³ studied the influence of β on the instability growth.

- For ideal gases the speed of sound is $c^2 = dp/d\rho|_s = \gamma p/\rho = \gamma RT$, where the derivative should be taken at constant entropy. For uniform zero-order temperature and any given γ , the zero-order speed of sound is also uniform for the same fluid, contrary to the claim by Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet.⁴ Note that the exponential pressure and density equilibrium profiles are obtained from the momentum equation, the ideal-gas equation of state, and using the thermal equilibrium condition, and are not affected by the value of γ , again contrary to the claim by Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet.⁴

- For ideal gases the following relations hold: $c_p - c_v = R$ (where R is the gas constant, $c_p = dh/dT|_p = h/T$ and $c_v = de/dT|_v = e/T$ are specific heats, h is the enthalpy, and e the internal energy) and $\gamma = c_p/c_v$ which defines γ . Since the internal energy cannot be infinite at finite temperatures, c_v has finite values. For a hypothetical fluid with $\gamma = 1$ the two relations imply $R = 0$ which shows the impossibility of having $\gamma = 1$.

The relation $c_v = R/(\gamma - 1)$ used by Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet⁴ is derived from the two relations above assum-

^{a)}Electronic mail: livescu@lanl.gov

089101-2 D. Livescu

Phys. Fluids 17, 089101 (2005)

ing $\gamma \neq 1$ so that the division by $(\gamma-1)$ makes sense mathematically. The use of the relation $c_v = R/(\gamma-1)$ for $\gamma=1$ to calculate c_v is not appropriate.

- c_v is a *material property* (see any introductory text on Thermodynamics) and is constant for ideal gases. The fact that a fluid undergoes an isothermal transformation cannot make $c_v = \infty$ as claimed by Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet.⁴ They also cite a book by Chandrasekhar⁶ in support of this erroneous statement. There is no such claim in the book. However, if Ribeyre, Tikhonchuk, and Bouquet had actually read the book they cited, they would have understood that γ and β (or γ' using the notation from the book) are different concepts; γ is a material property while β is not, $\gamma > 1$ and is different for different substances, etc.

The list can continue but I will stop here. Just one more point. In addition to settling the controversy on the effects of compressibility in infinite domains, Livescu¹ studied the influence of the two compressibility parameters p_∞ and γ on the instability growth for finite-size domains. Ribeyre,

Tikhonchuk, and Bouquet⁴ claim that this study is not relevant for understanding the compressibility effects since the masses of the two fluids are different. Since many flows occur in finite-size domains the study is relevant for understanding the effects of changing the compressibility parameters. After all, it is the property of compressible materials to be able to be packed in different amounts in a certain domain as a function of the compressibility parameters.

¹D. Livescu, "Compressibility effects on the Rayleigh-Taylor instability growth between immiscible fluids," Phys. Fluids **16**, 118 (2004).

²X. Ribeyre, V. T. Tikhonchuk, and S. Bouquet, "Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants," Phys. Fluids **16**, 4661 (2004).

³D. Livescu, "Comment on 'Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants'," Phys. Fluids **17**, 069101 (2005).

⁴X. Ribeyre, V. T. Tikhonchuk, and S. Bouquet, "Response to 'Comment on 'Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants''," Phys. Fluids **17**, 069102 (2005).

⁵E. P. Gyftopoulos and G. P. Beretta, *Thermodynamics: Foundations and Applications* (McMillan, New York, 1991).

⁶S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover, New York, 1957).

A.5 Transformation de coordonnées

On considère une fonction $\eta(x, y, t)$ qui définit la position de l'interface $z_{int} = \eta$. Nous introduisons une nouvelle variable, \tilde{z} donnée par $\tilde{z} = z - z_{int} = z - \eta(x, y, t)$.

Dans le nouveau système de coordonnées, une quantité physique $f(x, y, z, t)$ est notée $\tilde{f}(x, y, \tilde{z}, t)$. Nous avons alors $f(x, y, z, t) = \tilde{f}(x, y, \tilde{z}, t)$. En conséquence, les dérivées totales des deux fonctions sont identiques. Et on obtient la relation suivante entre les dérivées partielles :

$$\partial_i f = \partial_i \tilde{f} - \partial_i \eta \partial_{\tilde{z}} \tilde{f}, \quad i = x, y, t; \quad (\text{A.2})$$

$$\partial_z f = \partial_{\tilde{z}} \tilde{f}. \quad (\text{A.3})$$

Pour simplifier, par la suite on ne tient pas compte du tilde sur toutes les quantités physiques. Les équations de l'hydrodynamique s'écrivent après la transformation :

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) - \partial_t \eta \partial_z \rho - [\partial_z(\rho \vec{v})](\text{grad } \eta) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \vec{v} + \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} - \rho (\partial_t \eta + v_x \partial_x \eta + v_y \partial_y \eta) \partial_z \vec{v} \\ - (\partial_z p)(\text{grad } \eta) = \vec{g} \rho - \text{grad } p, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$p = K \rho. \quad (\text{A.6})$$

Pour une solution statique à l'ordre zéro, on obtient : $\vec{v}_0 = 0$, $\text{grad } p_0 = \rho_0 \vec{g}$, $\eta_0 = 0$, et $p_0 = K \rho_0$. Après linéarisation du système autour de cet état, on obtient au premier ordre :

$$\partial_t \rho_1 + \text{div}(\rho_0 \vec{v}_1) - (\partial_z \rho_0)(\partial_t \eta_1) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}_1 - (\partial_z p_0)(\text{grad } \eta_1) = \vec{g} \rho_1 - \text{grad } p_1, \quad (\text{A.8})$$

$$p_1 = K \rho_1. \quad (\text{A.9})$$

Cette linéarisation est valide si le terme du second ordre est petit en comparaison du premier ordre, c'est à dire si :

$$\partial_t \vec{v} \gg (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}. \quad (\text{A.10})$$

On pose a l'amplitude de la perturbation, τ la période d'oscillation des particules de fluide dans cette perturbation, et λ la longueur d'onde de l'oscillation. Alors $v \sim a/\tau$, la dérivée de la vitesse par rapport au temps devient $\sim v/\tau$ et la dérivée par rapport à l'espace devient $\sim v/\lambda$. La condition (A.10) implique alors que $a/\tau^2 \gg 1/[\lambda(a/\tau)^2]$ ce qui revient à écrire $a \ll \lambda$. Autrement dit, l'amplitude de la perturbation doit être petite comparée à la longueur d'onde de la perturbation pour que la linéarisation soit valide.

Les équations dans le nouveau système de coordonnées fournissent aussi les conditions de saut à l'interface $\tilde{z} = 0$. Par intégration de l'équation (A.7) à travers l'interface, on obtient : $\rho_0^+(0)[\partial_t \eta_1 - v_{1z}^+(0)] = \rho_0^-(0)[\partial_t \eta_1 - v_{1z}^-(0)]$. Puisque $\rho_0^+(0) \neq \rho_0^-(0)$, les conditions suivantes doivent être satisfaites au voisinage de l'interface :

$$v_{1z}^+(0) = v_{1z}^-(0) = \partial_t \eta_1. \quad (\text{A.11})$$

À l'aide de la composante z de l'équation d'Euler (A.8), on obtient la condition de continuité de la pression à l'interface : $p_0^+(0) = p_0^-(0)$ et $p_1^+(0) = p_1^-(0)$ comme il se doit.

Finalement, on se restreint à une perturbation 2D, $z_{int} = \eta(x, t)$. Dans ces conditions, la composante suivant y n'a pas besoin d'être traitée, et le système d'équations linéarisées prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_1 + \partial_x(\rho_0 v_{1x}) + \partial_z(\rho_0 v_{1z}) - (\partial_z \rho_0)(\partial_t \eta_1) &= 0, \\ \rho_0 \partial_t v_{1x} - (\partial_x \eta_1)(\partial_z p_0) &= -\partial_x p_1, \\ \rho_0 \partial_t v_{1z} &= -g \rho_1 - \partial_z p_1. \end{aligned}$$

A.6 Simplification de la relation de dispersion dans le cas d'un fluide stratifié

Introduisons la valeur du taux de croissance ω obtenue à partir de la relation de dispersion (4.39) dans l'équation (4.35), nous pouvons trouver une expression pour m_s^+ :

$$m_s^+ = \frac{\beta^+}{2} - \sqrt{\frac{\beta^{+2}}{4} + k^2 - \beta^+ \frac{\rho_0^+ m_s^+ - \rho_0^- m_s^-}{\rho_0^+ - \rho_0^-}}.$$

Cette expression peut être représentée de la façon suivante :

$$m_s^{+2} + \beta^+ \frac{\rho_0^+}{\rho_0^+ - \rho_0^-} (m_s^+ - m_s^-) = k^2.$$

Une expression similaire peut être obtenue pour m_s^- :

$$m_s^{-2} + \beta^- \frac{\rho_0^-}{\rho_0^+ - \rho_0^-} (m_s^+ - m_s^-) = k^2,$$

et après soustraction des deux équations précédentes on a :

$$m_s^{+2} - m_s^{-2} = (m_s^+ - m_s^-) \frac{\beta^+ \rho_0^- - \beta^- \rho_0^+}{\rho_0^+ - \rho_0^-}.$$

Ayant à l'esprit que m_s^+ et m_s^- sont de signes opposés et que la condition aux limites à l'équilibre s'écrit : $\beta^- \rho_0^+ = \beta^+ \rho_0^-$, alors $m_s^+ = -m_s^- = -m_s$. En conclusion, dans le chapitre IV, nous pouvons réécrire la relation de dispersion (4.39) sous la forme de (4.40).

A.7 Annexe du chapitre V

Pour chaque jeu de paramètres, \mathcal{F} se réduit aux fonctions de Legendre associées [158], avec :

$$\mathcal{F}(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; R^2) \propto \frac{R^{-l-1/2} P(R)}{\sqrt{1-R^2}}, \quad (\text{A.12})$$

et

$$\mathcal{F}(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; R^2) \propto \frac{R^{l+1/2} Q(R)}{\sqrt{1-R^2}}, \quad (\text{A.13})$$

où

$$P(R) \equiv P_{\Delta-1/2}^{l+1/2}(\sqrt{1-R^2}) \quad (\text{A.14})$$

et

$$Q(R) \equiv Q_{\Delta-1/2}^{l+1/2}(\sqrt{1-R^2}) \quad (\text{A.15})$$

où P_a^b et Q_a^b avec $a = \Delta - 1/2$ et $b = l + 1/2$ sont les deux fonctions de Legendre associées [158].

Alors la solution (5.62) prend la forme suivante :

$$S(R) = \frac{1}{\sqrt{R}(1-R^2)^{3/2}} [C_1 P(R) + C_2 Q(R)]. \quad (\text{A.16})$$

Les composantes de la vitesse perturbée $\delta \hat{v} = \delta \hat{V} \exp(\omega \hat{t}/\tau)$ peuvent s'exprimer en fonction de S [on utilise les équations (5.52) à (5.54) en intégrant sur le temps] :

$$\begin{aligned} \delta \hat{V}_r &= \frac{\hat{a}_0}{3\omega\tau} \left[-(1-R^2) \frac{dS}{dR} + 2RS \right] Y_{lm}, \\ \delta \hat{V}_\theta &= -\frac{\hat{a}_0}{3\omega\tau R} (1-R^2) S \partial_\theta Y_{lm}, \\ \delta \hat{V}_\phi &= -\frac{\hat{a}_0}{3\omega\tau R \sin \theta} (1-R^2) S \partial_\phi Y_{lm}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

On peut montrer que le rotationnel de $\delta \hat{v}$ est nul.

Revenons à l'équation (A.16) pour obtenir la solution $S(R)$. Les constantes C_1 et C_2 sont déduites des conditions aux limites (5.50). Sans considérer la dépendance exponentielle en temps ainsi que la dépendance angulaire, la condition de

continuité pour $\hat{r} = \hat{r}_0$ sur la pression dans (5.50) s'écrit :

$$\hat{\eta}_0 \partial_{\hat{r}} \hat{p}_0(\hat{r}_0) + \delta \hat{p}(\hat{r}_0) = 0. \quad (\text{A.18})$$

À l'aide de la condition à l'équilibre (5.25), la définition de la vitesse du son (5.49) ainsi que la relation (5.58) qui permet d'introduire $S(R)$, cette condition devient :

$$S(R_0) = \frac{3R_0}{1 - R_0^2}. \quad (\text{A.19})$$

La même étude menée sur la face externe de la coquille, c'est à dire, pour $\hat{r} \rightarrow \hat{r}_1$ ($R \rightarrow R_1 \equiv 1$) donne :

$$\hat{a}_0 S(R_1) = \hat{a}_1 \frac{3R}{1 - R^2} \Big|_{R=R_1}, \quad (\text{A.20})$$

Maintenant, à partir la condition de continuité pour $\hat{r} = \hat{r}_0$ ($R = R_0$) sur la vitesse radiale dans (5.50) devient :

$$\partial_{\hat{t}} \hat{\eta}_0 = \delta \hat{v}_{\hat{r}}(\hat{r}_0). \quad (\text{A.21})$$

Sachant que la vitesse perturbée est donnée par la première équation du système (A.17) et que la perturbation de la face interne de la coquille est obtenue avec (5.59), il vient :

$$R(1 - R^2) \frac{dS}{dR} \Big|_{R=R_0} = S(R_0) [2R_0^2 - \omega^2(1 - R_0^2)]. \quad (\text{A.22})$$

En ce qui concerne la face externe $R \rightarrow R_1 \equiv 1$, on obtient :

$$R(1 - R^2) \frac{dS}{dR} \Big|_{R=R_1} = S(R_1) [2R_1^2 - \omega^2(1 - R_1^2)]. \quad (\text{A.23})$$

Finalement, on peut regrouper les conditions aux limites de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 S(R) &= \hat{a}_i \frac{3R}{1 - R^2} \Big|_{R=R_i}, \\ R(1 - R^2) \frac{dS}{dR} \Big|_{R=R_i} &= S(R) [2R^2 - \omega^2(1 - R^2)], \quad i = 0, 1. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

La dérivée de S dans la seconde équation de (A.24) peut être déterminée de façon analytique à partir de l'expression de la dérivée de la solution de l'équation différentielle (A.16) :

$$S(R) = H(R)[C_1 P_{\Delta-1/2}^{l+1/2}(\sqrt{1-R^2}) + C_2 Q_{\Delta-1/2}^{l+1/2}(\sqrt{1-R^2})], \quad (\text{A.25})$$

où $H(R) = 1/[\sqrt{R}(1-R^2)^{3/2}]$.

En appliquant le changement de variable : $x = \sqrt{1-R^2}$ on a :

$$S(R) = H(x)[C_1 P_a^b(x) + C_2 Q_a^b(x)], \quad (\text{A.26})$$

où $H(x) = 1/[x^3(1-x^2)^{1/4}]$, $a = \Delta - 1/2$ et $b = l + 1/2$. On peut exprimer dS/dx comme :

$$\frac{dS}{dx} = H(x) \left[\frac{7x^2 - 6}{2x(1-x^2)} [C_1 P_a^b(x) + C_2 Q_a^b(x)] + \left(C_1 \frac{dP_a^b}{dx} + C_2 \frac{dQ_a^b}{dx} \right) \right], \quad (\text{A.27})$$

avec :

$$\frac{dP_a^b}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1} [xaP_a^b(x) - (a+b)P_{a-1}^b(x)], \quad (\text{A.28})$$

on obtient une relation similaire pour la fonction Q [158].

Finalement, on trouve l'expression suivante pour la dérivée de la solution $S(R)$:

$$\frac{dS}{dR} = \frac{-S(R)}{R(1-R^2)} [(1-R^2)(4-\Delta) - 3] - \frac{\Delta+l}{(1-R^2)^2 R^{3/2}} [C_1 P_1(R) + C_2 Q_1(R)],$$

où $P_1(R) \equiv P_{\Delta-3/2}^{l+1/2}(\sqrt{1-R^2})$ et $Q_1(R) \equiv Q_{\Delta-3/2}^{l+1/2}(\sqrt{1-R^2})$.

Les équations (A.24) pour la limite sur la face interne $R = R_0$ donnent deux relations linéaires entre C_1 et C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 P(R_0) + C_2 Q(R_0) &= 3R_0^{3/2} \sqrt{1-R_0^2}, \\ C_1 P_1(R_0) + C_2 Q_1(R_0) &= \frac{3R_0^{3/2}(1-R_0^2)}{\Delta+l} \left(\omega^2 + \Delta + \frac{2R_0^2}{1-R_0^2} \right). \end{aligned}$$

Ce jeu de relations définit complètement les expressions pour les constantes C_1 et C_2 :

$$C_1 = \frac{3R_0^{3/2} \sqrt{1-R_0^2}}{\mathcal{B}} \left[Q(R_0) \frac{\sqrt{1-R_0^2}}{\Delta+l} \left(\omega^2 + \Delta + \frac{2R_0^2-1}{1-R_0^2} \right) - Q_1(R_0) \right], \quad (\text{A.29})$$

$$C_2 = \frac{3R_0^{3/2} \sqrt{1-R_0^2}}{\mathcal{B}} \left[P(R_0) \frac{\sqrt{1-R_0^2}}{\Delta+l} \left(\omega^2 + \Delta + \frac{2R_0^2-1}{1-R_0^2} \right) - P_1(R_0) \right], \quad (\text{A.30})$$

où $\mathcal{B} = P_1(R_0)Q(R_0) - P(R_0)Q_1(R_0)$. D'après Abramovitz et Stegun [158], on peut montrer que \mathcal{B} est une constante égale à $-\Gamma(\Delta + l)/\Gamma(\Delta - l)$ où Γ est la fonction classique gamma.

Avec les constantes C_1 et C_2 données par les équations (A.29) et (A.30), la solution (A.16) est complètement définie. Elles dépend du numéro du mode l , de la position de la face interne R_0 et d'un paramètre libre ω . Ce dernier paramètre peut être déduit des conditions aux limites restantes sur la face externe $R = R_1$. Les perturbations de déplacement des deux interfaces ($R = R_0$ et $R = R_1 \equiv 1$) ne peuvent pas être données initialement indépendantes, et donc ne peuvent pas évoluer indépendamment. En effet, à partir de l'équation (A.20), sur la face externe $R = R_1 \equiv 1$, on trouve :

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{3} \hat{a}_0 \lim_{R \rightarrow 1} S(R) (1 - R^2). \quad (\text{A.31})$$

Comme le terme $1 - R^2$ tend vers zéro pour $R \rightarrow R_1 = 1$, cette relation ne force pas la fonction S à converger au voisinage de l'interface externe, car la densité et la vitesse du son de l'écoulement non perturbé tendent vers zéro pour cette position. Puisque dans l'équation (A.16) P et Q sont des fonctions rationnelles de $y = \sqrt{1 - R^2}$, on peut développer S en série de Taylor autour de $y \rightarrow 0$ et exprimer l'équation (A.31) par :

$$3 \frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_0} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{C_1 P(1) + C_2 Q(1)}{y} \right] + C_1 \left. \frac{dP}{dy} \right|_{y=0} + C_2 \left. \frac{dQ}{dy} \right|_{y=0} \right\}. \quad (\text{A.32})$$

Le premier terme du membre de droite diverge si le numérateur est différent de zéro. La seule façon de satisfaire cette condition aux limites est d'obtenir un déplacement fini sur la face externe et d'annuler le numérateur. La condition $C_1 P(1) + C_2 Q(1) = 0$ impose la relation de dispersion pour la coquille instable. En utilisant les deux constantes C_1 et C_2 , on peut exprimer cette relation par :

$$\omega^2 = -\Delta - \frac{2R_0^2}{1 - R_0^2} - \frac{\Delta + l}{\sqrt{1 - R_0^2}} \frac{P(1)Q_1(R_0) - Q(1)P_1(R_0)}{P(R_0)Q(1) - P(1)Q(R_0)}. \quad (\text{A.33})$$

On montrera dans la section 5.6 (chapitre V) que dans ce cas, la seconde condition aux limites sur la face externe est satisfaite automatiquement.

Liste des travaux et publications

Publications

1. Ribeyre X., Tikhonchuk V. T. and Bouquet S., “Compressible Rayleigh-Taylor Instabilities Relevant to Astrophysics”, IFSA 2003, proceeding, Eds. Hammel et al., p. 970.
2. Ribeyre X., Tikhonchuk V. T. and Bouquet S., “Compressible Rayleigh-Taylor Instabilities in Supernova Remnants”, *Phys. of Fluids*, **16**, 4661, (2004).
3. Ribeyre X., Tikhonchuk V. T. and Bouquet S., Response to “Comment on ‘Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants’ ” [*Phys. Fluids* 17, 069101 (2005)], *Phys. of Fluids*, **17**, 069102 (2005).
4. Ribeyre X., Tikhonchuk V. T. and Bouquet S., “Analytical Study of Supernova Remnant Non-Stationnary Expansions”, *Astrophysics and Space Science*, **298**, 75 (2005).
5. Ribeyre X., Hallo, L., Tikhonchuk V. T. and Bouquet S., “Non stationnary Rayleigh-Taylor Instability in plerion”, *Journal de Physique IV France* **133** (2006) 1055-1057 (EDP sciences) IFSA 2005, proceedings.
6. Ribeyre X., Hallo L., Tikhonchuk V. T., Bouquet S. and Sanz, J., “Non-stationnary Rayleigh-Taylor instabilities in pulsar wind interaction with a supernova shell”, soumis à *Astrophysics and Space Science* (2006). (proceedings HEDLA 2006)
7. Ribeyre X., Hallo L., Tikhonchuk V. T., Bouquet S. and Sanz J., “Non-stationnary Rayleigh-Taylor instability in supernova ejecta”, en préparation *Astronomy and*

Astrophysics (2006).

8. Ribeyre X., Tikhonchuk V. T. and Bouquet S., “Rayleigh-Taylor Instability in plerions”, en préparation pour *ApJ*.

Conférences et colloques

- IFSA 2003, Monterey : “Compressible Rayleigh-Taylor Instabilities Relevant to Astrophysics”, Poster.

- HEDLA, Tucson 2004, High Energy Density Laboratory Astrophysics 2004, “Analytical Study of Supernova Remnant Non-Stationary Expansions”, Oral.

- Séminaire, ILP Autrans 2004, “Le rôle de l’instabilité de Rayleigh-Taylor dans les restes de supernovae”, Oral.

- IFSA 2005, Biarritz, “Non stationary Rayleigh-Taylor Instability in plerions”, Poster.

- HEDLA, Houston 2006, High Energy Density Laboratory Astrophysics 2006, “Non stationary Rayleigh-Taylor Instability in pulsar wind nebula”, Poster.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. D. Arnett. *Supernovae and nucleosynthesis*. Princeton, 1996.
- [2] T. Dotani et al. Discovery of an unusual hard X-ray source in the region of supernova 1987A. *Nature*, 330 :230, 1987.
- [3] R. Sunyaev et al. Discovery of hard X-ray emission from supernova 1987A. *Nature*, 330 :227, 1987.
- [4] D. Arnett and B. Fryxell. Instabilities and nonradial motion in SN 1987A. *ApJ*, 341 :L63, 1989.
- [5] J. J. Hester et al. WFPC2 studies of the crab nebula. III. Magnetic Rayleigh-Taylor instabilities and the origin of the filaments. *ApJ*, 456 :225, 1996.
- [6] B. Fryxell et al. Instabilities and clumping in SN 1987A. I - early evolution in two dimensions. *ApJ*, 367 :619, 1991.
- [7] K. Kifonidis et al. Non-spherical core collapse supernovae. *A&A*, 408 :621, 2003.
- [8] R. A. Chevalier et al. Hydrodynamic instabilities in supernovae remnants : self similar driven waves. *ApJ*, 392 :118, 1992.
- [9] J. M. Blondin and D. C. Ellison. Rayleigh-Taylor instabilities in young supernova remnants undergoing efficient particule acceleration. *ApJ*, 560 :244, 2001.
- [10] Lord Rayleigh. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 14 :170, 1883.
- [11] P. O. Vandervoort. The character of the equilibrium of a compressible, inviscid fluid of varying density. *ApJ*, 134 :699, 1961.
- [12] I. B. Bernstein and D. L. Book. Effect of compressibility on the Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, 26(2) :543, 1983.
- [13] G. M. Blake. Fluid dynamic stability of double radio sources. *MNRAS*, 156 :67, 1972.

- [14] D. H. Sharp. An overview of Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, 12 :3, 1984.
- [15] M. S. Plesset and D. Hsieh. General analysis of the stability of superposed fluids. *Phys. Fluids*, 7(7) :1099, 1964.
- [16] D. Livescu. Compressibility effect on the Rayleigh-Taylor instability growth between immiscible fluids. *Phys. Fluids*, 16(1) :118, 2004.
- [17] I. B. Bernstein and D. L. Book. Rayleigh-Taylor instability of a self-similar spherical expansion. *ApJ*, 225 :633, 1978.
- [18] F. Hattori et al. Rayleigh-Taylor instability in a spherical stagnation system. *Phys. Fluids*, 29(5) :1719, 1986.
- [19] D. L. Book and I. B. Bernstein. Soluble model for the analysis of stability in an imploding compressible liner. *Phys. Fluids*, 22(1) :79, 1979.
- [20] A. Munier and M. R. Feix. QUIPS : time-dependent properties of quasi-invariant self-gravitating polytropes. *ApJ*, 267 :344, 1983.
- [21] B.-I. Jun. Interaction of a pulsar wind with the expanding supernova remnant. *ApJ*, 499 :282, 1998.
- [22] N. Bucciantini et al. Magnetic Rayleigh-Taylor instability for pulsar wind nebulae in expanding supernova remnants. *A&A*, 423 :253, 2004.
- [23] R. Sankrit et al. WFPC2 studies of the Crab Nebula. II. Ionization structure of the Crab filaments. *ApJ*, 504 :344, 1998.
- [24] V. Trimble. Motions and structure of the filamentary envelope of the Crab nebula. *AJ*, 73(7) :535, 1968.
- [25] A. Cadez et al. Spectroscopy and three-dimensional imaging of the Crab nebula. *ApJ*, 609 :797, 2004.
- [26] D. D. Ryutov et al. Similarity criteria for the laboratory simulation of supernova hydrodynamics. *ApJ*, 518 :821, 1999.
- [27] S. Chandrasekhar. The maximum mass of ideal white dwarf. *ApJ*, 74(1) :81, 1931.
- [28] L. D. Landau. *Statistical physics*. Pergamonn Press, 1959.

- [29] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Physical Review*, 55 :374, 1939.
- [30] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56 :455, 1939.
- [31] S. Hawking et al. *300 years of gravitation*. Cambridge University Press, 1987.
- [32] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsberichte der Koeniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, (translation and foreword by S. Antoci and A. Loinger), page 189, 1916.
- [33] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Ann. der Physik*, 49 :769, 1916.
- [34] A. Hewish et al. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, 217 :709, 1968.
- [35] K. S. Thorne. *Black holes and time warps : Einstein's outrageous legacy*. Papermac, 1994.
- [36] J. C. Wheeler. Observations and theory of supernovae. *Am. J. Phys.*, 71 :11, 2003.
- [37] V. Trimble. Supernovae. Part I : the events. *Rev. of Mod. Physics*, 54(4) :1183, 1982.
- [38] V. Trimble. Supernovae. Part II : the aftermath. *Rev. of Mod. Physics*, 55(2) :511, 1983.
- [39] E. M. Reynoso et al. A VLA study of the expansion of Tycho's supernova remnant. *ApJ*, 491 :816, 1997.
- [40] P. F. Velázquez et al. Study of the Rayleigh-Taylor instability in Tycho's supernova remnant. *A&A*, 334 :1060, 1998.
- [41] J. P. Hughes. The expansion of the X-ray remnant of Tycho's supernova (SN 1572). *ApJ*, 545 :L53, 2000.

- [42] S. A. Falk and D. Arnett. A theoretical model for type II supernovae. *ApJ*, 180 :L65, 1973.
- [43] W. D. Arnett. Supernova theory and supernova 1987A. *ApJ*, 319 :136, 1987.
- [44] W. D. Arnett et al. Supernova 1987A. *ARA&A*, 27 :629, 1989.
- [45] R. Lehoucq et al. The radioactivity of SN 1987 A. *A&A*, 224 :117, 1989.
- [46] A. P. Pinto and S. E. Woosley. X-ray and gamma-ray emission from supernova 1987A. *ApJ*, 329 :820, 1988.
- [47] S. Matz et al. Gamma-ray line emission from 1987A. *Nature*, 331 :416, 1988.
- [48] T. Shigeyama and K. Nomoto. Theoretical light curve of SN 1987A and mixing of hydrogen and nickel in the ejecta. *ApJ*, 360 :242, 1990.
- [49] S. Blinnikov et al. Radiation hydrodynamic of SN1987A. I. Global analysis of the light curve for the first 4 months. *ApJ*, 532 :1132, 2000.
- [50] E. Müller et al. Instability and clumping in SN1987A. *A&A*, 251 :505, 1991.
- [51] I. Hachisu et al. Rayleigh-Taylor instabilities and mixing in the Helium star models for Type Ib/Ic supernovae. *ApJ*, 368 :L27, 1991.
- [52] M. Herant and W. Benz. Hydrodynamical instabilities and mixing in SN 1987A : Two-dimensional simulations of the first 3 months. *ApJ*, 370 :L81, 1991.
- [53] H.-Th. Janka and E. Müller. Neutrino heating, convection, and the mechanism of type-II supernova explosions. *A&A*, 306 :167, 1996.
- [54] K. W. Weiler and N. Panagia. Vela X and the evolution of plerions. *A&A*, 90 :269, 1980.
- [55] R. A. Chevalier. Self-similar solutions for the interaction of stellar ejecta with an external medium. *ApJ*, 258 :790, 1982.
- [56] R. A. Chevalier and J. M. Blondin. Hydrodynamic instabilities in supernova remnants early radiative cooling. *ApJ*, 444 :312, 1995.
- [57] L. Woltjer. Supernova remnants. *ARA&A*, 10 :129, 1972.
- [58] S. F. Gull. A numerical model of the structure and evolution of young supernova remnants. *MNRAS*, 161 :47, 1973.

- [59] J. Lequeux. *Le milieu interstellaire*. CNRS Editions, 2002.
- [60] E. Amato. Understanding pulsar wind nebulae : recent progress and open questions. *Chin. J. Astron. Astrophys. Suppl.*, 3 :316, 2003.
- [61] M. F. Bietenholz et al. The expansion of the Crab nebula. *ApJ*, 373 :L59, 1991.
- [62] W. Baade. The Crab nebula. *ApJ*, 96 :188, 1942.
- [63] J. C. Duncan. Second report on the expansion of the Crab nebula. *ApJ*, 89 :482, 1939.
- [64] R. J. Nugent. New measurement of the expansion of the Crab nebula. *PASP (The Publication of the Astronomical Society of the Pacific)*, 110 :831, 1998.
- [65] J. P. Ostriker and J. E. Gunn. Do pulsars make supernovae? *ApJ*, 164 :L95, 1971.
- [66] P. Bodenheimer and J. P. Ostriker. Do pulsars make supernovae? II. Calculations of light curves for type II events. *ApJ*, 191 :465, 1974.
- [67] J. Arons. Theory of pulsar winds. *Advances in Space Research (COSPAR publication)*, 33 :466, 2004.
- [68] P. Goldreich and W. Julian. Pulsar electrodynamics. *ApJ*, 157 :869, 1969.
- [69] J. H. Taylor and R. N. Manchester. Recent observations of pulsars. *ARA&A*, 15 :19, 1977.
- [70] S. S. Lawrence et al. Three-dimensional Fabry-Perot imaging spectroscopy of the Crab nebula, Cassiopeia A, and nova GK Persei. *ApJ*, 109 :6, 1995.
- [71] P. Slane. The devil is in the details : Compact structures in pulsar wind nebulae. *Advances in Space Research (a COSPAR publication)*, 35 :1092, 2005.
- [72] A. R. Choudhuri. *The physics of fluids and plasmas. An introduction for astrophysicists*. Cambridge University Press, 1998.
- [73] C. F. Kennel and F. V. Coroniti. Confinement of the Crab pulsar's wind by its supernova remnant. *ApJ*, 283 :694, 1984.

- [74] A. M. Atoyan. Radio spectrum of the Crab nebula as an evidence for fast initial spin of its pulsar. *A&A*, 346 :L49, 1999.
- [75] M. C. Weisskopf et al. Discovery of spatial and spectral structure in the X-ray emission from the crab nebula. *ApJ*, 536 :L81, 2000.
- [76] J. J. Hester et al. Hubble space telescope and Chandra monitoring of the Crab synchrotron nebula. *ApJ*, 577 :L49, 2002.
- [77] R. A. Chevalier. The interaction of supernovae with the interstellar medium. *ARA&A*, 15(175), 1977.
- [78] A. Decourchelle et al. Thermal X-Ray emission and cosmic-ray production in young supernova remnants. *ApJ*, 543 :L57, 2000.
- [79] J. M. Blondin et al. Pulsar wind nebulae in evolved supernova remnants. *ApJ*, 563 :806, 2001.
- [80] R. A. Chevalier. In *Supernovae. Eds. D.N. Schramm (Dordrech : Reidel), p.53, 1977.*
- [81] S. P. Reynolds and R. A. Chevalier. Evolution of pulsar-driven supernova remnants. *ApJ*, 278 :630, 1984.
- [82] R. A. Chevalier. Young core-collapse supernova remnants and their supernovae. *ApJ*, 619 :839, 2005.
- [83] B. M. Gaensler. Shocks and wind bubbles around energetic pulsars. In F. Camilo and B.M. Gaensler, editors, *Young Neutron Stars and Their Environments, IAU Symposium, Vol. 218*, page 1, 2004.
- [84] E. van der Swaluw et al. An evolution model for pulsar-driven supernova remnants. A hydrodynamical model. *A&A*, 420 :937, 2004.
- [85] E. V. Gotthelf et al. CHANDRA detection of the forward and reverse shocks in Cassiopeia A. *ApJ*, 552 :L39, 2001.
- [86] J. K. Truelove and C. F. McKee. Evolution of non-radiative supernova remnants. *ApJS*, 120 :299, 1999.
- [87] J. S. Warren et al. Cosmic ray acceleration at the forward shock in Tycho's supernova remnant : Evidence from Chandra X-ray observations. *ApJ*, 634 :376, 2005.

- [88] X. Ribeyre et al. Non-stationary Rayleigh-Taylor instability in supernova ejecta. *A&A*, 2005 (submitted).
- [89] E. J. Groth. Timing of the Crab pulsar III. The slowing down and the nature of the random process. *ApJS*, 29(293) :453, 1975.
- [90] H. C. Goldwire and F. C. Michel. Analysis of the slowing-down rate of NP 0532. *ApJ*, 156 :L111, 1969.
- [91] M. J. Rees and J. E. Gunn. The origin of the magnetic field and relativistic particles in the Crab nebula. *MNRAS*, 167 :1, 1974.
- [92] D. D. Ryutov et al. Magnetohydrodynamic scaling : from astrophysics to the laboratory. *Phys. Plasmas*, 8(5) :1804, 2001.
- [93] D. D. Ryutov et al. Criteria for scaled laboratory simulations of astrophysical MHD phenomena. *ApJS*, 127 :465, 2000.
- [94] B. A. Remington et al. Modeling astrophysical phenomena in the laboratory with intense lasers. *Science*, 284 :1488–1493, 1999.
- [95] N. G. Basov and O. N. Krokhin. The conditions of plasma heating by the optical generator radiation. *Soviet Physics JETP*, 19(1) :123, 1964.
- [96] J. M. Dawson. On the production of plasma by giant pulse lasers. *Phys. Fluids*, 7(7) :981, 1964.
- [97] N. Tsuchimori et al. A simulation of space plasma by laser produced plasma. *Japan J. Appl. Phys.*, 7 :84, 1968.
- [98] B. A. Remington et al. Single-mode and multimode Rayleigh-Taylor experiments on Nova. *Phys. Plasmas*, 2(1) :241, 1995.
- [99] B. A. Remington et al. Supernova hydrodynamics experiments on the Nova laser. *Phys. Plasmas*, 4(5) :1944, 1997.
- [100] J. Kane et al. Supernova-relevant hydrodynamic instability experiments on the Nova laser. *ApJ*, 478 :L75, 1997.
- [101] B. A. Remington et al. A review of astrophysics experiments on intense lasers. *Phys. Plasmas*, 7(5) :1641, 2000.

- [102] S. V. Lebedev et al. Radiatively cooled supersonic plasma jets generated in wire array Z-pinches. *IFSA 2001 Proceedings*, Eds. K.A. Tanaka, D. D. Meyerhofer, J. Meyer-ter-Vehn, page 1034, 2001.
- [103] National Research Council. *Frontiers in high energy density physics*. The National Academies Press Washington, D.C., 2003.
- [104] L. Sedov. *Similitude et dimensions en mécanique*. Eds. MIR (Moscou), 1997.
- [105] S. Chandrasekhar. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover Publications, inc. (réédition), 1957.
- [106] M. Tricottet. *Les instabilités de Rayleigh-Taylor : effets de la compressibilité, des non-linéarités et applications à une expérience d'astrophysique de laboratoire*. PhD thesis, Université Paris VII, 2004.
- [107] S. I. Braginskii. Transport process in a plasma. *Reviews of Plasma Physics* (New York : Consultant Bureau), (205), 1965.
- [108] D. Galmiche and S. Gauthier. On the reynolds number in laser experiments. *Jnp. J. Appl. Phys.*, 35(8) :4516, 1996.
- [109] D. C. Ellison and S. P. Reynolds. Electron acceleration in a nonlinear shock model with applications to supernova remnants. *ApJ*, 382 :242, 1991.
- [110] R. P. Drake et al. Experiment to produce a hydrodynamically unstable, spherically diverging system of relevance to instabilities in supernovae. *ApJ*, 564 :896, 2002.
- [111] A. Benuzzi-Mounaix et al. Supernovae Rayleigh-Taylor instability experiments on CEA-Phébus laser facility. *Ap&SS*, 277 :143–146, 2001.
- [112] A. Miles et al. Numerical simulation of supernova-relevant laser-driven hydro experiment on Omega. *Phys. Plasmas*, 11(7) :3631, 2004.
- [113] G. Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. *Proc. Roy. Soc., A*. 201 :192, 1950.
- [114] Lord Kelvin. Hydrokinetic solutions and observations. *Phil. Mag.*, 42(4) :362, 1871.

- [115] H. von Helmholtz. On discontinuous movement of fluids. *Phil. Mag.*, 36(4) :337, 1868.
- [116] R. D. Richtmyer. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. *Commun. Pure Appl. Math.*, 13 :297, 1960.
- [117] E. E. Meshkov. Instability of a shock wave accelerated interface between two gases. *NASA Tech. Trans.*, F-13 :074, 1970.
- [118] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press, 1968.
- [119] S. Nakai and H. Takabe. Principles of inertial confinement fusion - physics of implosion and concept of inertial fusion energy. *Rep. Prog. Phys.*, 59 :1071, 1996.
- [120] M. P. Brenner et al. Bubble shape oscillations and the onset of sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 75(5) :954, 1995.
- [121] H. J. Kull. Theory of the Rayleigh-Taylor instability. *Physics Reports*, 206(5) :197, 1991.
- [122] M. Vandenboomgaerde et al. Efficient perturbation methods for Richtmyer-Meshkov and Rayleigh-Taylor instabilities : Weakly nonlinear stage and beyond. *Laser and Particle Beams*, 21 :321, 2003.
- [123] N. A. Inogamov. The role of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities in astrophysics : an introduction. *Astrophys. Space Phys.*, 10 :1-335, 1999.
- [124] S. Atzeni and J. Meyer-Ter-Vehn. *The physics of inertial fusion*. Oxford University Press, 2004.
- [125] D. Layzer. On the instability of superposed fluids in gravitational field. *ApJ*, 122(1) :1, 1955.
- [126] M. Tricottet et al. On RT and RM single-mode solution. *IFSA Proceedings*, Eds. K.A. Tanaka, D.D. Meyerhofer, J. Meyer-ter-Vehn, page 76, 2001.
- [127] S. F. Gull. The X-ray, optical and radio properties of young supernova remnants. *MNRAS*, 171 :263, 1975.

- [128] L. Baker. Compressible Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, 26 :950, 1983.
- [129] Y. Elbaz et al. Compressibility effects on the Rayleigh-Taylor instability. In *Workshop on Physics of Compressible Turbulent Mixing. 8th*, 2001.
- [130] R. A. Chevalier and T. R. Gull. The outer structure of the Crab nebula. *ApJ*, 200 :399, 1975.
- [131] V. V. Dwarkadas. Interaction of type Ia supernovae with their surroundings : the exponential profile in two dimensions. *ApJ*, 541 :418, 2000.
- [132] R. L. McCrory et al. Growth and saturation of the instability of spherical implosions driven by laser or charged particle beams. *Nucl. Sci. and Eng.*, 64 :163, 1977.
- [133] D. B. Henderson et al. Ablation stability of laser-driven implosions. *Phys. Rev. Lett.*, 33(4) :205, 1974.
- [134] X. Ribeyre et al. Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants. *Phys. Fluids*, 16(12) :4661, 2004.
- [135] D. Livescu. Comment on "Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants [Phys. Fluids 16(12), 4661 (2004)]." *Phys. Fluids*, 17 (6), 2004.
- [136] X. Ribeyre et al. Response to Comment on "Compressibility Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants". *Phys. Fluids*, 17 :1, 2005.
- [137] D. Livescu. Reply to "Response to 'Comment on "Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants' ""[Phys. Fluids 17, 069102 (2005)]." *Phys. Fluids*, 17 (8)(089101), 2005.
- [138] W. G. Mathews and G. R. Blumenthal. Rayleigh-Taylor stability of compressible and incompressible radiation-supported surfaces and slabs : application to QSO clouds. *ApJ*, 214 :10, 1977.
- [139] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [140] C. L. Gardner et al. The dynamics of bubble growth for Rayleigh-Taylor unstable interface. *Phys. Fluids*, 31(3) :447, 1988.

- [141] S. J. Han. Stability of an imploding spherical shell. *Phys. Rev. A*, 44(9) :5784, 1991.
- [142] V. N. Goncharov et al. Modeling hydrodynamic instabilities in inertial confinement fusion targets. *Phys. Plasmas*, 7(12) :5118, 2000.
- [143] N. Bucciantini et al. Spherically symmetric relativistic MHD simulations of pulsar wind nebulae in supernova remnants. *A&A*, 405 :617, 2003.
- [144] B.-I. Jun and M. L. Norman. A numerical study of Rayleigh-Taylor instability in magnetic fluids. *ApJ*, 453 :332, 1995.
- [145] S. P. Reynolds. Filamentary structure in Crab-like supernova remnants. *ApJ*, 327 :853, 1988.
- [146] S. Liberatore and S. Bouquet. Linear study of the Rayleigh-Taylor instability in a compressible magnetized fluid. *IFSA 2003 Proceedings, Eds. B.A. Hammel, D. D. Meyerhofer, J. Meyer-ter-Vehn, H. Azechi*, page 201, 2003.
- [147] S. Bouquet et al. Density bifurcation in a homogeneous isotropic collapsing star. *ApJ*, 293 :494, 1985.
- [148] P. Blottiau et al. An asymptotic self-similar solution for the gravitational collapse. *A&A*, 207 :24, 1988.
- [149] T. Hanawa and T. Matsumoto. Growth of a vortex mode during gravitational collapse resulting in type II supernovae. *ApJ*, 540 :962, 2000.
- [150] P. Hennebelle. Exact solutions of the aspherical axisymmetric gravito-magnetic condensation. *A&A*, 378 :214, 2001.
- [151] M. Shadmehri and J. Ghanbari. Radiative cooling flows of self-gravitating filamentary clouds. *Ap&SS*, 278 :347, 2001.
- [152] X. Ribeyre et al. Analytical study of supernova remnant non-stationary expansion. *Ap&SS*, 298 :75, 2005.
- [153] R. A. London and M. D. Rosen. Hydrodynamics of exploding foil X-ray lasers. *Phys. Fluids*, 29(11) :3813, 1986.
- [154] F. Camilo et al. Discovery of two high magnetic field radio pulsars. *ApJ*, 541 :367, 2000.

- [155] E. T. Vishniac. The dynamic and gravitational instabilities of spherical shocks. *ApJ*, 274 :152, 1983.
- [156] D. Ryu and E. T. Vishniac. The dynamic instability of adiabatic blast waves. *ApJ*, 368 :411, 1991.
- [157] D. Ryu and E. T. Vishniac. The growth of linear perturbations of adiabatic shock waves. *ApJ*, 313 :820, 1987.
- [158] M. Abramovitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Washington : Government Printable Office, 1972.
- [159] D. K. Nadyozhin. On the initial phase of interaction between expanding stellar envelopes and surrounding medium. *Ap&SS*, 112 :225, 1985.
- [160] V. V. Dwarkadas. The evolution of supernovae in circumtellar wind-blown bubbles. I. Introduction and one-dimensional calculations. *ApJ*, 630 :892, 2005.
- [161] S. Bouquet. *Intégrales premières, symétries et intégrabilité. Applications aux systèmes hamiltoniens, à l'astrophysique et à la physique des plasmas*. HDR, Commissariat à l'Energie Atomique, Centre d'Etudes de Vaujours, 1993.
- [162] R. Sankrit and J. J. Hester. The shock and extended remnant around the Crab nebula. *ApJ*, 491 :796, 1997.
- [163] F. Pacini and M. Salvati. On the evolution of supernova remnants. I. Evolution of the magnetic field, particles, content, and luminosity. *ApJ*, 186 :249, 1973.
- [164] R. A. Chevalier and C. Fransson. Pulsar nebulae in supernovae. *ApJ*, 395 :540, 1992.
- [165] P. Slane et al. New constraints on the structure and evolution of the pulsar wind nebula 3C 58. *ApJ*, 616 :403, 2004.
- [166] J. Sanz and R. Betti. Analytical model of the ablative Rayleigh-Taylor instability in deceleration phase. *Phys. Plasmas*, 12 :042704–1, 2005.
- [167] L. Masse et al. Direct drive ablation front stability : numerical prediction against flame front model. *IFSA 1999 Proceedings, Eds. C. Labaune, W. J. Hogan, K. A. Tanaka*, page 220, 1999.

- [168] K. Davidson and R. A. Fesen. Recent developments concerning the Crab nebula. *ARA&A*, 23 :119, 1985.
- [169] R. A. Chevalier. Pulsar wind nebulae : theoretical aspects and observational constraints. *Advances in Space Research (a COSPAR Publication)*, 33 :456, 2004.
- [170] J. H. Taylor and R. N. Manchester. Observed properties of 147 pulsars. *AJ*, 80(10) :794, 1975.
- [171] D. G. Yakovlev et al. Neutron star cooling : theoretical aspect and observational constraints. *Advances in Space Research (a COSPAR publication)*, 33 :523, 2004.
- [172] J. P. Ostriker and J. E. Gunn. On the nature of the pulsar. I. Theory. *ApJ*, 157 :1395, 1969.
- [173] R. Bandiera et al. The supernova remnant G11.2-0.3 and its central pulsar. *ApJ*, 465 :L39, 1996.
- [174] J. D. Huba. *NRL : plasma formulary*. Naval Research Laboratory, 2004.
- [175] R. Abgrall et al. Un schéma centré pour l'hydrodynamique Lagrange bidimensionnelle. *LRC-04-10 (Mathématiques Appliquées de Bordeaux)*, 2004.
- [176] R. Abgrall et al. Lagrangian scheme for multidimensional compressible flow. *To appear in SIAM, SISC.*, 2006.
- [177] E. F. Toro. Godunov methods. Theory and applications. *Edited by E. F. Toro, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York*, 2001.
- [178] V. Gvaramadze. The nature of the Vela X-Ray "Jet". The Rayleigh-Taylor instability and the origin of filamentary structure. *A&A*, 352 :712, 1999.
- [179] J. J. Hester. Communication privée, HEDLA'06, Houston (USA), 11-14 mars 2006. 2006.
- [180] Ya. B. Zel'dovitch and Yu. P. Raiser. *Physics of shocks waves and high-temperature hydrodynamic phenomena. Volume I et II*. Academic Press, New york and London, 1966.
- [181] E. Falize and S. Bouquet. Communication privée. 2006.

- [182] R. P. Drake et al. Laser experiments to simulate supernova remnants. *Phys. Plasmas*, 7(5) :2142, 2000.
- [183] H. F. Robey et al. An experiment testbed for study of hydrodynamic issues in supernovae. *Phys. Plasmas*, 8(5) :2446, 2001.
- [184] J. Kane et al. Scaling supernova hydrodynamics to the laboratory. *Phys. Plasmas*, 6(5) :2065, 1999.
- [185] T. Ebisuzaki et al. Rayleigh-Taylor instability and mixing in SN 1987A. *ApJ*, 344 :L65, 1989.
- [186] C. C. Kuranz et al. Progress toward the study of laboratory scale, astrophysically relevant, turbulent plasmas. *Ap&SS*, 298 :9, 2005.
- [187] H. F. Robey et al. The time scale for the transition to turbulence in high Reynolds number accelerated flow. *Phys. Plasmas*, 10(3) :614, 2003.
- [188] J.-M. Di-Nicola et al. The LIL facility start-up : first high power energy laser experimental results at 1053 nm and 351 nm. *IFSA 2003 Proceedings*, Eds. B. A. Hammel, D. D. Meyerhofer, J. Meyer-ter-Vehn, H. Azechi, page 558, 2003.
- [189] M. Tricottet and S. Bouquet. Simulation and modeling of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities relevant to Type II supernovae. *IFSA Proceedings*, Eds. B. A. Hammel, D.D. Meyerhofer, J. Meyer-ter-Vehn, H. Azechi, page 930, 2003.
- [190] R. Ramis et al. MULTI - A Computer Code for One-Dimensional Multigroup Radiation Hydrodynamics. *Comput. Phys. Comm.*, 49 :475, 1988.
- [191] R. Dautray and J. P. Watteau. *La fusion thermonucléaire inertielle par laser*. Eds. Eyrolles, séries synthèse, 1993.
- [192] S. Atzeni. Review article : The physical basis for numerical fluid simulations in laser fusion. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 29 :1535, 1987.
- [193] G. Weirs et al. Validating the Flash code : Vortex-dominated flows. *Ap&SS*, 298 :341, 2005.

- [194] J. Lindl. Development of the indirect-drive approach to inertial confinement fusion and target physics basis for ignition and gain. *Phys. Plasmas*, 2(11) :3933, 1995.
- [195] W. A. Stygar et al. Analytical models of high-temperature hohlraums. *Phys. Rev. E*, 64 :0226410–1, 2001.
- [196] S. Liberatore and S. Bouquet. Analytical modeling of magnetic Rayleigh-Taylor instabilities in compressible fluids. *A&A*, to be submitted (2006).
- [197] S. Bouquet et al. Analytical study and structure of a stationary radiative shock. *ApJS*, 127 :245, 2000.
- [198] L. Valentin. *Physique subatomique : noyaux et particules*. Hermann : enseignant des sciences, 1975.
- [199] V. Sobolev. *Cours d'astrophysique théorique*. Eds. Mir Moscou, 1975.
- [200] Y. P. Zakharov. Collisionless laboratory astrophysics with lasers. *IEEE Transaction Plasma Science*, 31(6) :435, 2003.