$N°$ d'ordre : 3549

THÈSE

en cotutelle

entre

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX 1- FRANCE

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

et

L'UNIVERSITÉ ESSENIA ORAN - ALGERIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

par **Zohra BENDAOUD**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

****

Comportement à l'origine de la distance entre éléments d'un semigroupe fortement continu et inégalités dans les algèbres de Banach

****

Soutenue le 01 Février 2008

Après avis de :

M. BERKANI	Professeur, Université Mohamed I (Oujda -Maroc)	**Rapporteur**
I. CHALENDAR	Maître de Conférences , Université Claude Bernard Lyon	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen composée de :

C.BOUZAR	Professeur, Université Essenia (Oran-Algèrie)	**President**
M. BERKANI	Professeur, Université Mohamed I (Oujda -Maroc)	**Rapporteur**
I. CHALENDAR	Maître de Conférences , Université Claude Bernard Lyon 1 (France)	**Rapporteur**
J.ESTERLE	Professeur, Université Bordeaux I (France)	**Directeur**
B.MESSIRDI	Professeur, Université Essenia (Oran-Algèrie)	**Examinateur**
A.MOKHTARI	Maître de Conférences, Université Amar Telidji (Laghouat-Algèrie)	**Directeur**

- 2008 -

Remerciments

Je tiens en premier lieu à exprimer ma sincère gratitude à Jean Esterle pour avoir accepté de me diriger, je le remercie aussi pour ses conseils, ses encouragements, sa disponibilité, son énergie et son enthousiasme, qui m'ont guidé et motivé tout au long de mon séjour à l'Université de Bordeaux 1. De même, je suis profondément reconnaissante pour Messieurs Abdelkader Mokhtari et Bekai Messerdi pour leur précieuse contribution dans mon encadrement. Sans oublier Youcef Bellabaci qui a joué un rôle très important dans ma carrière.

Je remercie sincèrement Mohamed Berkani et Isabelle Chalendar pour avoir accepter de rapporter mon travail, Chikh Bouzar pour avoir accepter de présider mon jury de soutenance de thèse.

Un grand merci à Ahmed Sebbar pour son accueil au LABAG. Ses conseils et ses encouragements m'ont été utile et précieux.

Je remercie l'équipe d'Analyse de l'Université Bordeaux I et plus spécialement Elizabeth Strouse, Ouhabaz El Maati et Mohamed Zarrabi pour avoir toujours été prêt à répondre a mes questions et à me conseiller et/ou m'orienter vers des références.Leurs conseils et encouragements m'ont énormément aidée dans mon travail.

Je remercie l'Ecole Doctorale de l'Université de Bordeaux 1 et plus spécialement Eric Sopena pour tous les moyens scientifiques et matériels mis à disposition des doctorants et dont j'ai bénéficiée.

Je tiens à remercier le Recteur de l'Université d'Essenia-Oran, ainsi que les vices Recteurs de la faculté de sciences et de la post-graduation, pour m'avoir facilité toutes les taches. Le chef de Département de mathématiques, ainsi que toutes les personnes que j'ai contacté et qui ont étaient toujours disponible et satisfaisant que se soit au Département ou à la post-graduation.

Je remercie ma très chère mère ainsi que mon oncle Aissa et son épouse pour leur soutien et leurs encouragements, Hayet et Yacine pour leur présence pendant mon séjour en France et surtout Hakim pour sa disponibilité lors de mes déplacements.

Merci à mes amies Didi, Liz, Caroline, Ludmilla et Violeta grace à qui j'avais passé des moments, inoubliables, agréables et fructueux.

Je remercie mes amis Mohamed Ouinten, Youcef Boubrima, Hamid Guenane, et Fatiha Elhouitti du Département de Biologie, Université de Laghouat ainsi que Fatna Haria pour leur soutien, conseils et encouragements. Et surtout de m'avoir supporté toutes ces années.

Je remercie Monsieur Boucherit Mokhtar pour m'avoir aidé à progresser et d'avoir répondu présent a chaque fois que j'avais besoin de lui.

Je remercie Lahreche Aissa, Lahdeb Mohamed, Nia Fatima Zohra et Renane mohamed pour leur aide et encouragements.

Que tous ceux qui m'ont un jour aidée ou soutenue durant la préparation de ma thèse sachent que malgré l'oubli, qu'une place dans mon coeur leur est toujours réservée.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe dans une algèbre de Banach, et soit n un entier positif. J.Esterle et A. Mokhtari ont démontré dans [17] un certain nombre de résultats concernant le comportement asymptotique en 0 de $\|T(t) - T(t(n+1))\|$ (ces résultats faisaient suite à des inégalités dans les algèbres de Banach et pour les semigroupes continus en norme obtenus par Berkani, Esterle et Mokhtari dans les années 1980). Par exemple ils ont montré que si

$$\limsup_{t\to 0^+} \|T(t) - T(t(n+1))\| < \theta(n+1)$$

alors le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ admet une limite en norme J quand $t \to 0^+$, où

$$\theta(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \text{ pour } \alpha > 1.$$

D'autre part si le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ est borné en norme sur tout intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$, et si la sous-algèbre fermée engendrée par le semigroupe ne possède aucun idempotent non nul, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|T(t) - T(t(n+1))\| \geq \theta(n+1) \text{ pour } t \in]0, \delta[$$

(ces inégalités restent valables pour des semigroupes du type $(T(t))_{t\in K_+^*}$, K_+^* désignant l'ensemble des éléments strictement positifs d'un sous-corps K de $\mathbb{R}$). Ces résultats sont liés à l'inégalité

$$\inf_{\|x\| \geq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}} \|x - x^{n+1}\| \geq \theta(n+1) = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}},$$

valable pour toute algèbre de Banach qui ne possède aucun idempotent non nul. Esterle et Mokhtari suggéraient dans leur article d'essayer d'obtenir des inégalités du même type pour $\|(1+x) - (1+x)^{n+1}\|$, ce qui est le point de départ du Chapitre 4 de cette thèse.

Au Chapitre 5 nous montrons que la condition

$$\text{ll existe } \delta > 0 \text{ tel que } \|T(t) - T((n+1)t)\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}} \text{ pour tout } t \in]0, \delta]$$

implique que le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ admet une limite en norme à l'origine, ce qui améliore le résultat d'Esterle et Mokhtari mentionné ci-dessus, la condition ci-dessus étant évidemment moins contraignante que la condition

$$\limsup_{t\to 0^+} \|T(t) - T((n+1)t)\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

utilisée par Esterle et Mokhtari dans l'article mentionné plus haut. Par contre des contre-exemples montrent que cette amélioration n'est plus valable pour les semigroupes $(T(t))_{t\in\mathbb{Q}_+^*}$, où $\mathbb{Q}_+^*$ désigne l'ensemble des rationnels strictement positifs.

Dans un autre article paru en 2005 dans Arkiv fûr Mat., Esterle a montré que si $(T(t))_{t>0}$ est un semigroupe fortement continu d'opérateurs bornés sur un espace de Banach E, et s'il existe deux suites $(s_n)_{n\geq 0}$ et $(t_n)_{n\geq 0}$ de réels strictement positifs convergeant vers 0, avec $0 < t_n < s_n$, tels que

$$\|T(t_n) - T(s_n)\| < \theta(s_n/t_n),$$

alors la sous-algèbre fermée $\mathcal{A}_\mathbf{T}$ de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par le semigroupe n'est pas quasinilpotente, et il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ d'idempotents de $\mathcal{A}_\mathbf{T}$, avec $P_nP_{n+1} = P_n$ pour $n \geq 1$, tels que la suite $(\chi(P_n))_{n\geq 1}$ soit égale à 1 pour n assez grand pour tout caractère $\chi \in \hat{\mathcal{A}}_\mathbf{T}$. La méthode utilisée par Esterle n'est pas constructive, et nous complétons son article en donnant au Chapitre 6 des formules explicites permettant de calculer ces idempotents.

Le principe général suivant a été utilisé dans toute la thèse :
soit f une fonction entière vérifiant $f(0) = 0$, $\quad f'(0) \neq 0$, soit $R > 0$ tel que

$$f : f^{-1}(D(0,R)) \longrightarrow D(0,R)$$

soit injective et soit

$$g : D(0,R) \longrightarrow f^{-1}(D(0,R))$$

la fonction analytique vérifiant $g(f(z)) = z$ pour tout $z \in f^{-1}(D(0,R))$. Si $g^{(n)}(0)$ est de signe constant pour $n \geq 1$ alors

$$\|g(y)\| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!}\|y\|^n = |g(\|y\|)| \quad \text{pour} \quad \|y\| < R.$$

D'autre part si $x \in A$, et si

$$\|f(x)\| < R,$$

on a

$$x = g\left[f(x)\right],$$

donc

$$\|x\| \leq |g(\|f(x)\|)|$$

quand A ne possède aucun idempotent non nul (voir le théorème 3.1 de [7] pour une version très générale de ce résultat).

Ceci permet d'une part d'établir des inégalités dans les algèbres de Banach ne possédant pas d'idempotent non nul, et d'autre part de construire explicitement des idempotents dans les algèbres de Banach où ces inégalités ne sont pas vérifiées.

Dans le chapitre 2 on expose brièvement les résultats obtenus dans [3], [6], [12]. Plus précisément si l'algèbre de Banach commutative A ne possède aucun idempotent non nul, alors

$$\inf_{\|x\|\geq 1/2} \|x^2 - x\| \geq 1/4;$$

en particulier on a l'idempotent

$$P(x) = \frac{e}{2} + (x - \frac{e}{2})(e - 4x + 4x^2)^{-1/2} \neq 0,$$

dans toute algèbre de Banach contenant un élément x de norme $\geq 1/2$ tel que

$$\|x^2 - x\| < 1/4,$$

voir [3]. Ce qui permet de définir une unité approchée bornée séquentielle d'idempotents $(P(e_{p_n}))_{n\geq 1}$ à partir de toute unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_{n\geq 1}$ d'une algèbre de Banach commutative telle que

$$\liminf_{n\to+\infty} \|e_n^2 - e_n\| < 1/4,$$

voir [3]. On présente également des résultats beaucoup plus récents et généraux de Berkani, Esterle et Mokhtari concernant les distances entre puissances d' éléments d'une unité approchée bornée séquentielle [7].

Dans le chapitre 3 on expose les résultats préliminaires concernant la distance entre éléments d'un semigroupe et leur carré obtenus en 1987 par Mokhtari [27], et les résultats récents de Esterle-Mokhtari et Esterle concernant le comportement asymptotique à l'origine de la distance entre éléments d'un semigroupe évoqués au début de cette introduction [16] et [17].

Dans le chapitre 4, on démontre que si A est une algèbre de Banach qui ne possède aucun élément idempotent non nul, et si $x \in A$ vérifie pour $\gamma > 0$ la condition

$$\|x\| \geq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma},$$

alors

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Dans la lemme 4.2.3 on démontre que si

$$\rho(e^x - e^{(\gamma+1)x}) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

alors la formule

$$J := g'(e^x - e^{(\gamma+1)x})e^{g(e^x - e^{(\gamma+1)x})}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(e^x - e^{(\gamma+1)x})} - 1}{n!}(x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}))^{n-1}$$

définit un idempotent de A vérifiant

$$J(x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}) = x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}).$$

On montre aussi, moyennant une condition naturelle sur le spectre de x, que si

$$\|x\| \geq 1 - \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

alors

$$\|1 + x - (1+x)^{\gamma+1}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Les résultats du Chapitre 5 ont déjà été décrits plus haut.

Dans le chapitre 6, on considère la sous-algèbre fermée $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par un semigroupe non nul fortement continu $(T(t))_{t>0}$ d'opérateurs bornés sur un espace de Banach E, et on suppose que $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ ne possède aucun idempotent non nul. On démontre alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait, pour $0 < t < s \leq \delta$,

$$\|T(t) - T(s)\| \geq \theta(s/t).$$

Dans le cas contraire , l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ contient une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ d'idempotents telle que

$$P_m P_n = P_m \text{ pour } n \geq m \geq 1,$$

et telle que pour tout

$$\phi \in \hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{T}}$$

il existe $n_\phi \geq 1$ tel que $\phi(P_n) = 1$ pour tout $n \geq n_\phi$. On a pu donner des formules explicites de ces idempotents dans le

Théorème 6.0.3 :
Soit $T(t)_{t>0}$ un semigroupe d'opérateurs fortement continu non nul. On suppose qu'il existe deux suites $(t_n)_{n\geq 1}$, et $(s_n)_{n\geq 1}$ de réels vérifiant

$$0 < s_n < t_n, \lim_{n\to+\infty} s_n = 0$$

et

$$\|T(t_n) - T(s_n)\| < \theta(\frac{s_n}{t_n}),$$

de sorte que $(T(t))_{t>0}$ n'est pas quasinilpotent.
Soit

$$a > \rho(T(1)),$$

et posons

$$\tilde{T}(t) = e^{-at}T(t) \text{ pour } t > 0.$$

Alors il existe deux suites $(\tilde{t}_n)_{n\geq 1}$, et $(\tilde{s}_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs tels que

$$0 < \tilde{t}_n < \tilde{s}_n < s_n \text{ pour } n \geq 1, \ \tilde{s}_n/\tilde{t}_n = s_n/t_n$$

vérifiant

$$\rho(\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n)) < \theta(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}).$$

De plus si on pose, pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} U_n &:= \tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n) = \tilde{T}(\tilde{t}_n)\left(I - \tilde{T}((\tilde{s}_n - \tilde{t}_n))\right) \\ V_n &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{T}(k(\tilde{s}_n - \tilde{t}_n))}{k} \\ W_n &:= g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}} U_n^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}}, \end{aligned}$$

$$P_n := I - g'_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}\left((\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n))^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}}\right)\int_0^1 f'_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}\left(tV_n + (1-t)\left(g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}(\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n))^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}}\right)\right) dt,$$

on a les propriétés suivantes :

1. $(P_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'idempotents de A_T telle que

$$P_n(V_n - W_n) = V_n - W_n$$

   pour $n \geq 1$, et pour tout compact $K \subset \widehat{A_T}$, il existe $n_K \geq 1$ tel que $\chi(P_n) = 1$ pour tout $\chi \in K$ et pour tout $n \geq n_K$.
2. L'algèbre fermée engendrée par $(P_nT(t))_{t>0}$ est unitaire d'unité P_n pour tout $n \geq 1$.

Ces formules permettent donc d'expliciter les idempotents dont l'existence avait été établie par Esterle dans [16].

Chapitre 2

Inégalités dans les algèbres de Banach.

Dans cette partie de ce chapitre on va donner quelques définitions et notions utilisées.

2.1 Résultats généraux

Définition 2.1.1 *Soit A une algèbre sur $\mathbb{C}$ munie d'une norme qui en fait un espace vectoriel normé. Si A est non unitaire, on dit que $(A, \|.\|)$ est une algèbre normée si on a*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$$

pour tout couple (x, y) d'éléments de A.

On dit qu'une algèbre normée A est une algèbre de Banach quand $(A, \|.\|)$ est un espace de Banach (c'est-à-dire quand toute suite de Chauchy d'éléments de $(A, \|.\|)$ admet une limite dans $(A, \|.\|)$).

Si A est unitaire d'unité e on dit que A est une algèbre normée si on a de plus

$$\|e\| = 1.$$

Remarque 1 *Si $\|e\| \neq 1$, on obtient $\|e\|' = 1$ en posant la norme initiale*

$$\|x\|' = \sup_{y \neq 0} \frac{\|xy\|}{\|y\|}.$$

Remarque 2 *Si l'algèbre A n'est pas unitaire, on peut se ramener au cas unitaire en adjoignant une unité, par un procédé élémentaire classique [31]; ainsi l'algèbre obtenue, $A^{\#} = A \times \mathbb{C}$ qui est munie des opérations suivantes :*

$$\begin{aligned}(x,\lambda)+(y,\mu) &= (x+y,\lambda+\mu),\\ \alpha(x,y) &= (\alpha x,\alpha y),\\ (x,\lambda)(y,\mu) &= (xy+\lambda y+\mu x,\lambda\mu).\end{aligned}$$

est une algèbre unitaire d'unité $e=(0,1)$ et normée pour la norme

$$\|x+\lambda e\| = \|x\| + |\lambda|;\ x \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dans le cas où A est unitaire, on pose $A^{\#} = A$.

On note $Spec_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ :(x-\lambda e)$ non inversible$\}$ le spectre d'un élément x d'une algèbre unitaire A.
On posera $\sigma(x) = Spec_A(x)$ quand il n'y a pas risque de confusion.

Définition 2.1.2 *On appelle caractère d'une algèbre normée A un homomorphisme d'algèbre non nul de A dans $\mathbb{C}$. On notera $\widehat{A}$ l'ensemble des caractères χ de A, et*

$$\widehat{A^{\#}} = \widehat{A} \cup \chi_0$$

où

$$A = \ker \chi_0.$$

On a les résultats fondamentaux suivants, [32]

Théorème 2.1.1 *1. Tout caractère χ de $\widehat{A}$ est continu, et $\|\chi\| = 1$.*

2. Le spectre $\sigma(x)$ de x est un composant non vide de $\mathbb{C}$ pour tout $x \in A$.
Si A est commutative, on a $\sigma(x) = \{\chi(x)\}_{\chi\in\widehat{A}}$ pour tout $x \in A$

Remarque 3 *Si A n'est pas unitaire, alors pour tout élément de A on a*

$$\sigma(x) = \{\chi(x) : \chi \in \widehat{A}\} \cup \{0\}.$$

Définition 2.1.3 *Soit A une algèbre commutative et unitaire. On appelle radical de A l'intersection de tous les ideaux maximaux de A et on note*

$$RadA = \left\{x \in A : \chi(x) = 0,\ \forall\, \chi \in \widehat{A}\right\}.$$

L'algèbre A est semi-simple si $RadA = \{0\}$; radicale si $RadA = A$. On remarquera que $RadA^{\#} = RadA$.

Définition 2.1.4 *Soit A une algèbre normée . Alors pour tout $x \in A$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{m\in\mathbb{N}^*} \|x^m\|^{1/m}.$$

Cette limite est appelée rayon spectral et notée $\rho(x)$;notons que si A est unitaire, alors

$$\rho(x) = max_{\lambda\in\sigma(x)}|\lambda|.$$

On dit qu'un élément x, d'une algèbre de Banach A, est quasinilpotent si $\rho(x) = 0$. Posons $\mathscr{N}(A)$ l'ensemble de tous les éléments quasinilpotents de A, c'est-à-dire

$$\mathscr{N}(A) = \{x \in A : \rho(x) = 0\}.$$

2.1.1 Transformation de Gelfand

Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire, Soit $\widehat{A}$ l'ensemble des caractères de A et soit A^* le dual topologique de A. Notons par B la boule unité de A^*.

Il est clair que $\widehat{A}$ est faiblement fermé dans B. Donc $\widehat{A}$, muni de la topologie faible, est compact et l'application

$$\widehat{x} : \chi \to \chi(x) \quad \chi \in \widehat{A}$$

est continu pour tout $x \in A$ comme restriction à $\widehat{A}$ d'une application faiblement continue sur A^*, ceci par définition même de la topologie faible.
L'application

$$\begin{aligned} A &\to C(\widehat{A}, \mathbb{C}) \\ x &\to G(x) = \widehat{x} \end{aligned}$$

est appelée transformation de Gelfand.

Propriétés :
$G(x)$ est un homomorphisme d'algèbre contractant, et on a :

$$\begin{aligned} KerG &= \{x \in A : \widehat{x} = 0\} = \{x \in A : \chi(x) = 0, \ \ \forall x\} \\ &= \bigcap_{\chi\in\widehat{A}} Ker\chi = RadA. \end{aligned}$$

Donc si A est semi-simple G est injective.

Si A n'est pas unitaire, on définit la transformée de Gelfand :

$$\begin{aligned} A &\to C(\widehat{A^{\#}}, \mathbb{C}) \\ x &\to G(x) = \widehat{x} \end{aligned}$$

comme étant la restriction à A de la transformée de Gelfand sur $A^{\#}$.

2.2 L'inégalité $\|x^2 - x\| \geq \frac{1}{4}$ pour $\|x\| \geq \frac{1}{2}$

2.2.1 Distance entre éléments dans un espace de Banach sans idempotent non nul

Dans cette partie on va rappeler des résultats obtenus dans [12], [6], [3].
Soit x un élément d'une algèbre de Banach A tel que $\|x\| < 1$ et soit e l'élément unité de $A^{\#}$.
Posons :

$$\begin{aligned}(e-x)^{1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!}(-x)^n \\ (e-x)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)\dots(-1/2-n+1)}{n!}(-x)^n;\end{aligned}$$

les deux séries sont absolument convergentes et telles que

$$[(e-x)^{1/2}]^2 = e - x,$$

et

$$(e-x)^{-1/2} = [(e-x)^{1/2}]^{-1}.$$

On a,

$$\begin{aligned}\|e-(e-x)^{1/2}\| &= \left\| e - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!}(-x)^n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!}(-x)^n \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!}(-\|x\|)^n \\ &= -\left[(1-\|x\|)^{1/2} - 1\right] \\ &= 1 - \sqrt{1-\|x\|}. \qquad (2.2.1)\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\|(e-x)^{-1/2}\| &= \left\| e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)\dots(-1/2-n+1)}{n!}(-x)^n \right\| \\
&\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)\dots(-1/2-n+1)}{n!}(-x)^n \| \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|}} \qquad (2.2.2)
\end{aligned}$$

Lemme 2.2.1 *Soit A une algèbre de Banach, et soit $x \in A$ tel que*

$$\|x^2 - x\| < 1/4.$$

On pose

$$P(x) = \frac{e}{2} + (x - \frac{e}{2})(e - 4x + 4x^2)^{-1/2}.$$

Alors

(i) *$P(x)$ est un idempotent de A,*

(ii) $\|P(x)\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1/2 + \|x\|}{\sqrt{1 - 4\|x^2 - x\|}}$. *De plus $P(x) = 0$ si $\|x| \geq 1/2$.*

Preuve : On pose $y = 4x - 4x^2$; alors $\|y\| \leq 1$ et on a

$$\begin{aligned}
P^2(x) &= \left[\frac{e}{2} + (x - \frac{e}{2})(e - 4x + 4x^2)^{-1/2}\right]^2 \\
&= \frac{e}{4} + \left(x - \frac{e}{2}\right)(e-y)^{-1/2} + (x - \frac{e}{2})^2(e-y)^{-1};
\end{aligned}$$

comme

$$\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{e}{4} - \frac{y}{4}$$

on a alors

$$P^2(x) = \frac{e}{2} + (x - \frac{e}{2})(e - 4x + 4x^2)^{-1/2} = P(x).$$

Si A est unitaire, on a $P(x) \in A$. Sinon on a

$$\widehat{A^\#} = \widehat{A} \cup \chi_0 \text{ où } \ker \chi_0 = A.$$

Comme $\chi_0(P(x)) = 0$, on a $P(x) \in A$ d'où (i).

D'autre part on a, d'aprés 2.2.2

$$\begin{aligned}
\|P(x)\| &= \|\frac{e}{2} + (x - \frac{e}{2})(e-y)^{-1/2}\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \|(x - \frac{e}{2})\|\|(e-y)^{-1/2}\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \|x - \frac{e}{2}\|\frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|}} \\
&\leq \frac{1}{2} + (\|x\| + 1/2)(1 - \|4x + 4x^2\|)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

On suppose $P(x) = 0$. On a dans ce cas

$$\frac{e}{2} = -(x - \frac{e}{2})(e-y)^{-1/2},$$

donc

$$e = (2x - 1)(e-y)^{-1/2},$$

et

$$2x = e - (e-y)^{1/2}.$$

On déduit de 2.2.1 que l'on a

$$2\|x\| \leq 1 - \sqrt{1 - \|y\|} < 1, \quad \text{et } \|x\| < 1/2.$$

Donc $P(x) \neq 0$ si $\|x\| \geq 1/2$, ce qui démontre (ii). □

Ces résultats nous permettent de démontrer aisément les résultats de [12].

Théorème 2.2.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative ne possédant aucun idempotent non nul. Alors*

$$\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| \geq 1/4.$$

Preuve Dans le cas où $\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| < 1/4$, il existerait

$$P(x) = \frac{e}{2} + (x - \frac{e}{2})(e - 4x + 4x^2) \neq 0,$$

idempotent non nul de A ce qui entraine une contradiction. □

On a aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1 *Soit A une algèbre de Banach radicale. Alors*

$$\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| \geq 1/4.$$

2.2.2 Application aux algèbres de Banach possédant une u.a.b.s.

Définition 2.2.1 *Soit A une algèbre de Banach. On dira qu'une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A est une unité approchée bornée séquentielle de A si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

(i) il existe $k > 0$ tel que $\|e_n\| \leq k$ pour tout $n \geqslant 1$,

(ii) on a $x = \lim_{n\to\infty} e_n x = \lim_{n\to\infty} x e_n$ pour tout élément $x \in A$.

Quand A possède une u.a.b.s. formée d'idempotents, on a le résultat élémentaire suivant, démontré dans [4] et [6],

Proposition 2.2.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_{n\geq 1}$ formée d'idempotents.*

(i) Il existe une autre unité aprochée bornée séquentielle $(f_n)_{n\geq 1}$ de A formée d'idempotents telle que $f_n f_m = f_n$ pour $m, n \geqslant 1,\ n \geq m$.

(ii) Si A est non unitaire, il existe une suite $(U_m)_{m\geq 1}$ d'ouverts compacts non vide disjoint deux à deux de $\widehat{A}$ tels que $\widehat{A} = \cup_{m\geq 1} U_m$.

Le résultat suivant, démontré dans [6], donne une condition suffisante (et trivialement nécessaire) pour qu'une algèbre de Banach commutative A possède une u.a.b.s. formée d'idempotents.

Théorème 2.2.2 *Soit A une algèbre de Banach commutative. Si A posséde une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|e_n^2 - e_n\| < 1/4;$$

alors A posséde une unité approchée bornée séquentielle formée d'idempotents.

Preuve : Soit $\lambda \in \left]\liminf_{n\to+\infty} \|e_n^2 - e_n\|\ ,\ 1/4\right[$.
On peut construire une suite strictement croissante $(p_n)_{n\geq 1}$ d'entiers telle que

$$\|e_{p_n}^2 - e_{p_n}\| < \lambda \ \text{ pour tout } n.$$

Alors $(e_{p_n})_{n\geq 1}$ est une unité approchée bornée séquentielle de A, et dans ce cas $(P(e_{p_n}))_{n\geq 1}$, où P est le polynôme défini dans le lemme 2.2.1, est une unité approchée bornée de A formée d'idempotents. $\square$

2.2.3 Distance entre puissances d'éléments d'une u.a.b.s.

Plus généralement considérons deux entiers positifs p et q. On va étudier le cas où une u.a.b.s.$(e_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition $\liminf\limits_{n\to+\infty} \|e_n^p - e_n^{p+q}\| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q}$; voir [7].

On remarque que pour $p = q = 1$ on retrouve les résultats précédents. Pour $p = 1$ et $q = 2$, Mokhtari introduit dans [26], l'idempotent

$$J(x) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right)\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2}\left(e - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3\right)^{-1/2},$$

pour démontrer que si A posséde une u.a.b.s $(e_n)_{n\geq 1}$ qui vérifie

$$\|e_n\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

et

$$\|e_n^3 - e_n\| \leq \lambda \text{ pour } \lambda \in \left]0, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right[,$$

alors A admet une u.a.b.s formée d'idempotents.

Ce résultat (sans hypothèse restrictive $\|e_n\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$) a été généralisé dans [7] pour p et q quelconques.

Le point de départ des auteurs de [7] est le résultat élémentaire d'analyse complexe suivant

Lemme 2.2.2 *Soient p et q deux entiers positifs, et soit*

$$R_{p,q} = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q}.$$

Il existe une fonction analytique,

$$g : D(0, R_{p,q}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que $g(0) = 1$ et telle que

$$g(z)^p - g(z)^{p+q} = z \text{ pour } |z| < R_{p,q}.$$

De plus

$$|g(z)| > \left(\frac{p}{p+q}\right)^{1/q} \text{ pour } |z| < R_{p,q}$$

On note $\rho(x) = \lim_{n\to+\infty} \|x^n\|^{1/n}$ le rayon specral d'un élément x d'une algèbre de Banach A. Si A est unitaire, d'unité e, et si

$$\rho(x) < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

on pose

$$g(x) = e + \sum_{k\geq 1} \frac{g^k(0)}{k!} x^k,$$

on a alors

$$g(x)^p - g(x)^{p+q} = x.$$

Lemme 2.2.3 *Soit x un élément d'une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par x, soit $A^{\#}$ l'algèbre obtenue en adjoignant une unité e à A, soient p et q deux entiers positifs et soit g la fonction analytique associée à p et q au lemme précédent. Si*

$$\rho(x^p - x^{p+q}) < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

alors

$$pg(x^p - x^{p+q})^{p-1} - (p+q)g(x^p - x^{p+q})^{p+q-1}$$

est inversible dans $A^{\#}$, et

$$\begin{aligned} J_{p,q} := e - &[pg(x^p - x^{p+q})^{p-1} - (p+q)g(x^p - x^{p+q})^{p+q-1}]^{-1} \\ &\times \left[\sum_{2\leq k\leq p+q} C_{p+q}^k (x - g(x^p - x^{p+q}))^{k-1} g(x^p - x^{p+q})^{p+q-k}\right] \\ &\qquad - \sum_{2\leq k\leq p} C_p^k (x - g(x^p - x^{p+q}))^{k-1} g(x^p - x^{p+q})^{p-k}, \end{aligned}$$

est un idempotent de A. De plus

$$J_{p,q}(x)x = J_{p,q}(x)g(x^p - x^{p+q}),$$

et

$$\left\{\chi \in \widehat{A} : \chi(J_{p,q}(x)) = 1\right\} = \left\{\chi \in \widehat{A} : \chi(x) \in \Omega_0\right\} \subset \left\{\chi \in \widehat{A} : |\chi(x)| > (\frac{p}{p+q})^{1/q}\right\},$$

où Ω_0 désigne la composante connexe de 1 dans l'ouvert

$$\Omega := \left\{z \in \mathbb{C} : |z^p - z^{p+q}| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q}\right\}.$$

La preuve de ce lemme, ainsi que les résultats suivant sont donnés dans [7].

On énonce le résultat suivant [17], [7], qui a été évoqué précédement dans le cas des algèbres de Banach radicales.

Théorème 2.2.3 *: Soit A une algèbre de Banach sans idempotent non nul, soit $q \geq 1$. Si*

$$\|x - x^{q+1}\| \leq \frac{q}{(q+1)^{1+1/q}}$$

alors

$$\|x\| \leq \frac{1}{(q+1)^{1/q}}.$$

On note I l'application identité $x \to x$ sur un espace de Banach A, et $\mathscr{B}(A)$ l'ensemble des opérateurs bornés de A dans lui-même. Dans [7], on déduit des lemmes précédents le résultat suivant.

Lemme 2.2.4 *Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite d'opérateurs bornés sur un espace de Banach A convergeant fortement vers I, et soient p et q deux entiers positifs. S'il existe*

$$\delta < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

tel que $\|T_n^p - T_n^{p+q}\| \leq \delta$ pour $n \geq 1$, alors la suite $(J_{p,q}(T_n))_{n\geq 1}$ converge fortement vers I.

On obtient alors dans [7] le résultat général suivant :

Théorème 2.2.4 *Soit A une algèbre commutative, et soient p et q deux entiers positifs. Si A possède une u.a.b.s. $(e_n)_{n\geq 1}$ telle que $\liminf_{n\to+\infty} \|e_n^p - e_n^{p+q}\| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q}$, alors A possède une u.a.b.s formée d'idempotents.*

On sait que, (théorème 4.4 de [17] pour $p = 1$), si un élément x d'une algèbre de Banach est quasinilpotent et si

$$\|x\| \geq \left(\frac{1}{q+1}\right)^{1/q},$$

alors

$$\|x - x^{1+q}\| \geq \frac{q}{(q+1)^{1+1/q}}.$$

Par conséquent si une suite d'opérateurs quasinilpotents $(T_n)_{n\geq 1}$ converge fortement vers I et si q est un entier positif alors

$$\|T_n - T_n^{1+q}\| \geq \frac{q}{(q+1)^{1+1/q}} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

Par contre on ne peut estimer $\|x\|$ en fonction de $\|x^p - x^{p+q}\|$ pour $p \geq 2$, puisqu'il existe des algèbres de Banach radicales triviales où le produit de deux éléments quelconques est nul. D'où l'intérêt du résultat suivant pour $p \geq 2$, également démontré dans [7]

Théorème 2.2.5 *Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite d'opérateurs bornés quasinilpotents sur un espace de Banach $A \neq \{0\}$ qui converge fortement vers I. Alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|T_n^p - T_n^{p+q}\| \geq \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

pour tout couple (p, q) d'entiers positifs.

2.2.4 Idempotents et inégalités dans les algèbres de Banach

Si x est un élément d'une algèbre de Banach commutative A, $\rho(x)$ son rayon spectral, et $\sigma(x)$ son spectre.

On va donner ici une formule explicite de $J_{p,q}$ en utilisant un principe général, que l'on pourrait appeler principe de l'idempotent, qui découle de la formule de Taylor avec reste integral.

Théorème 2.2.6 *Soit x un élément d'une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par x, soit $A^{\#}$ l'algèbre obtenue en adjoignant une unité e à A, soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant 0, soit $R > 0$, soient*

$$f : U \to \mathbb{C}$$

et

$$g : D(0, R) \to U$$

deux fonctions analytiques telles que

$$f(g(z)) = z$$

pour $|z| < R$, soit

$$\Omega = \{z \in U : |f(z)| < R\},$$

soit Ω_0 la composante connexe de $g(0)$ dans Ω, et soit Ω_1 le complémentaire de Ω_0 dans Ω. Si $Spec_A(x) \subset U$, et $\rho(f(x)) < R$, posons

$$J(x) = (g(f(x)) - x)g'(f(x)) \int_0^1 (1-t)f''(tx + (1-t)g(f(x)))dt$$

si $g(f(0)) = 0$, et

$$J(x) = e - (g(f(x)) - x)g'(f(x)) \int_0^1 (1-t)f''(tx + (1-t)g(f(x)))dt$$

si $g(f(0)) \neq 0$.
Alors J est un idempotent de A. De plus

$$\Omega_0 = g(D(0, R)) = \{z \in \Omega : g(f(z)) = z\},$$

et dans le premier cas

$$\left\{\chi \in \widehat{A} : \chi(J(x)) = 1\right\} = \left\{\chi \in \widehat{A} : \chi(x) \in \Omega_1\right\},$$

alors que dans le deuxième cas

$$\left\{\chi \in \widehat{A} : \chi(J(x)) = 1\right\} = \left\{\chi \in \widehat{A} : \chi(x) \in \Omega_0\right\}.$$

Preuve : Ici $f(x)$ et $g(f(x))$ se calculent au moyen du calcul fonctionnel holomorphe en une variable usuel, qui commute avec les caractères
(en fait $g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f(x)^n$, et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ si f est entière, ce qui arrive souvent dans les applications).
U étant convexe, on a, d'aprés la formule de Taylor, puisque$f(x) - f(g(f(x))) = 0$,

$$(x - g(f(x)))f'(g(f(x))) + (x - g(f(x)))^2 \int_0^1 (1-t)f''(tx + (1-t)g(f(x)))dt = 0.$$

Comme

$$f'(g(f(z)))g'(f(z)) = 1$$

pour $|z| < R$ on a

$$f'(g(f(x)))g'(f(x)) = e$$

et $g'(f(x))$ est l'inverse de $f'(g(f(x)))$ dans $A^{\#}$. Posons

$$\begin{aligned} y &= g(f(x)) - x, \\ v &= g'(f(x)) \int_0^1 (1-t)f''(tx + (1-t)g(f(x)))dt \\ J &= yv \end{aligned}$$

On a $y = y^2 v$, donc

$$J^2 = y^2 v^2 = yv = J,$$

et $J(x)$ est idempotent de $A^{\#}$.
Soit χ un caractère de $\widehat{A^{\#}}$. Posons :

$$\begin{aligned} \lambda &= \chi(x), \\ \mu &= \chi(f(x)) = f(\lambda), \end{aligned}$$

de sorte que $|\mu| < R$. On a :

$$\chi(J) = (g(\mu) - \lambda)g'(\mu) \int_0^1 (1-t)f''(t\lambda + (1-t)g(\mu))dt.$$

Si $g(\mu) = \lambda$ alors $\chi(J) = 0$. Si $g(\mu) \neq \lambda$, on obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \chi(J) &= g'(\mu)\left([-(1-t)f'(t\lambda + (1-t)g(\mu))]_0^1\right) - g'(\mu) \int_0^1 f'(t\lambda + (1-t)g(\mu))dt \\ &= g'(\mu)f'(g(\mu)) - \frac{g'(\mu)}{\lambda - g(\mu)}(f(\lambda) - f(g(\mu)). \end{aligned}$$

Comme

$$g'(\mu)f'(g(\mu)) = (f \circ g)'(\mu) = 1$$

et

$$f(g(\mu)) = \mu = f(\lambda)$$

on a $\chi(J) = 0$ si et seulement si $g(f(\chi(x))) = \chi(x)$. En particulier, si $ker\chi_0 = A$ alors $\chi_0(J) = 0$ si $g(f(0)) = 0$ et $\chi_0(J) = 1$ si $g(f(0)) \neq 0$. Donc $J(x) \in A$. $\square$

Chapitre 3

semigroupes dans une algèbre de Banach, semigroupes d'opérateurs

Dans ce chapitre on va exposer les résultats d'Esterle et de Mokhtari, les preuves se trouvent dans [16] et [17]. Dans un premier temps on va rappeler quelques notions et résultats importants sur les semigroupes.

3.1 semigroupe dans une algèbre de Banach

Définition 3.1.1 *Soit A une algèbre de Banach. Un semigroupe de A est une famille $(T(t))_{t>0}$ d'éléments de A vérifiant pour tout couple s, t de réels strictement positifs la condition*

$$T(t+s) = T(t)T(s).$$

On notera $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ la sous algèbre fermée de A engendrée par le semigroupe $(T(t)_{t>0}$. On dira qu'un semigroupe $(T(t))_{t>0}$ est continu en norme si

$$\lim_{h\to 0} \|T(t+h) - T(t)\| = 0 \quad \textit{pour tout } \ t > 0,$$

et on dira que $(T(t))_{t\to 0}$ admet une limite en norme à l'origine s'il existe $J \in A$ tel que

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - J\| = 0.$$

Notons que si le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ admet une limite en norme J à l'origine alors J est un idempotent de A, et l'algèbre de Banach $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ est unitaire d'unité J. De plus dans ce cas on sait qu'il existe $u \in \mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ tel que l'on ait, pour $t > 0$,

$$T(t) = exp(tu) := J + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n u^n}{n!}. \text{ [17]}$$

On obtient alors une extension analytique $(T(z))_{z \in \mathbb{C}}$ du semigroupe en posant

$$T(z) = exp(tz) \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Autrement dit le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ est la restriction à $]0, +\infty[$ d'un groupe analytique de $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$.

On définit de même des semigroupes $(T(t))_{t \in K_+^*}$, K désignant un sous-corps quelconque de $\mathbb{R}$ et K_+^* désignant l'ensemble des éléments strictement positifs de K.

Un cas particulier important est celui où $A = \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}(E)$ désignant l'algèbre de Banach des endomorphismes bornés d'un espace de Banach E. On dit alors que $(T(t))_{t>0}$ est un semigroupe d'opérateurs bornés sur E. On a alors les notions suivantes :

Définition 3.1.2 *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe d'opérateurs bornés sur un espace de Banach E.*

(i) On dit que $(T(t))_{t>0}$ est d'image dense si $\cup_{t>0} T(t)(E)$ est dense dans E.

(ii) On dit que $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu si $\lim_{h \to 0} \|T(t+h)x - T(t)x\| = 0$ pour tout $x \in E$ et pour tout $t > 0$.

(iii) On dit que $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu à l'origine si $\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$ pour tout $x \in E$.

Notons que si l'on pose

$$F = \cup_{t>0} T(t)(E),$$

alors

$$\cup_{t>0} T(t)(F) = \cup_{t>0, s>0} T(t+s)(E) = \cup_{t>0} T(t)(E) = F.$$

Donc si l'on note $\tilde{T}(t)$ la restriction de $T(t)$ à $\overline{F}$, le semigroupe $(\tilde{T}(t))_{t>0}$ est un semigroupe d'opérateurs bornés sur $\overline{F}$ qui est d'image dense. D'autre part il est bien connu que si $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu à l'origine alors il est fortement continu ; on peut alors poser $T(0) = I$, I désignant l'application identité $x \to x$ sur E, et dans ce cas l'application $t \to T(t)x$ est une application continue de $[0, +\infty[$ dans E pour tout $x \in E$.

Il résulte immédiatement du théorème de Banach-Steinhaus que si $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu à l'origine, alors $\limsup_{t \to 0^+} \|T(t)\| < +\infty$.
Réciproquement si $\limsup_{t \to 0^+} \|T(t)\| < +\infty$, et si $(T(t))_{t>0}$ est d'image dense, une vérification de routine montre que $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu à l'origine.

Proposition 3.1.1 *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe fortment continu sur x. Alors :*

1. *$t \to \|T(t)\|$ est borné sur tout l'intevalle compact $[0, \alpha[$;*

2. *il existe des constantes réelles ω et M telles que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \ t \in \mathbb{R}^+$$

Définition 3.1.3 *Un semigroupe fortement continu $(T(t))_{t>0}$ est appelé contractant si l'on a :*

$$\|T(t)\| \leq 1 \quad \leq pour \ \ t \geq 0$$

Définition 3.1.4 *Le type du semigroupe fortement continu $T(t))_{t\geq 0}$ est la borne inferieure $\bar{\omega}$ de l'ensemble des ω telsqu'il existe un nombre M_ω vérifiant*

$$\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \ \ t \geq 0$$

Proposition 3.1.2 *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe fortment continu et $\bar{\omega}$ son type, alors on a*

(i) $\bar{\omega} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|$,

(ii) $\rho(T(t)) = e^{\bar{\omega}t}$, *où $\rho(T(t))$ est le rayon spectral de l'opérateur $T(t)$.*

Si le semigroupe est fortement continu et d'image dense, alors le domaine $D(A)$ est dense dans A car il contient tous les éléments y de E de la forme $y = \int_\alpha^\beta T(t)xdt$, avec $\beta > \alpha > 0$, $x \in E$.

On a alors, heuristiquement, $T(t) = e^{tA}$, et montrer que le semigroupe admet une limite en norme à l'origine revient à montrer que son générateur infinitésimal est borné.

Notons également que si le semigroupe est fortement continu à l'origine, alors son générateur infinitésimal est un opérateur fermé, c'est à dire que son graphe $\mathcal{G} := \{x, Ax\}_{x\in D(A)}$ est fermé dans $E \times E$.

3.1.1 Générateur infinitésimal d'un semigroupe

L'opérateur linéaire A défini par par :

$$D(A) = \left\{ x \in A \, : \, \lim_{t\to t_0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt}|_{t=0} \text{ pour } x \in D(A).$$

est le générateur infinitésimal du semigroupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de A.

3.2 Distance entre éléments d'un semigroupe dans une algèbre de Banach

Soit $n \geq 0$ un entier, et soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe dans une algèbre de Banach. On démontre que si

$$\limsup_{t \to 0} \|T(t) - T((\gamma + 1)t)\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}},$$

alors ou bien $T(t) = 0$, ou bien la sous-algèbre fermée A engendrée par $(T(t))_{t>0}$ est unitaire, et qu'il existe $u \in A$ tel que $T(t) = Je^{tu}$ pour $t > 0$ où J designe l'unité de A. Ceci est une généralisation des résultats obtenus par Mokhtari dans [27] pour $n = 1$, où il supposait le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ continu en norme pour $t > 0$ et borné à l'origine, et de résultats obtenus dans sa thèse pour $n = 1$ et $n = 2$, où il supposait seulement que le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ étais continu en norme pour $t > 0$.

Pour démontrer ce résultat, les auteurs ont commencé par discuter les semigroupes dans $\mathbb{C}$ c'est à dire les applications

$$\theta : K^+ \to \mathbb{C}$$

telles que

$$\theta(s + t) = \theta(s)\theta(t)$$

pour $s, t \in K^+$, K^+ désignant l'ensemble des éléments strictement positifs d'un sous-corps K de $\mathbb{R}$. Ils vérifient que si θ n'est pas continu alors ou bien

$$\limsup_{t \to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma + 1))| = 2,$$

ou bien

$$\limsup_{t \to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma + 1))| = +\infty$$

pour tout $\gamma \in K^+$. Ensuite ils Considèrent un semigroupe $(T(t))_{t \in K^+}$, dans une algèbre de Banach commutative A. Ils remarquent que si $\gamma \in K^+$, et si

$$\limsup_{t \to 0^+} \rho(T(t) - T(t(\gamma + 1))) < 2,$$

alors l'application $t \to \phi(T(t))$ est continue sur K^+ pour tout $\phi \in \widehat{A}$.

Le deuxième point important était l'étude de la fonction

$$f : x \to x - x^{\gamma+1}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$ pour $\gamma > 0$. Il est à remarquer que si

$$\delta \in \left]0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right[$$

alors $f^{-1}([0, \delta])$ est la réunion de deux intervalles disjoints $[0, s_1]$ et $[s_2, 1]$, ce qui a permis de déduire que si

$$\limsup_{t\to 0^+} \rho(T(t) - T(t(\gamma+1))) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

et si le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ n'est pas quasinilpotent alors $A/Rad(A)$ est unitaire. On obtient aussi le résultat général suivant :

Théorème 3.2.1 . *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(T(t))_{t\in K^+}$ un semigroupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach. Soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t\in K^+}$ et soit $\gamma \in K^+$. Si*

$$\limsup_{t\to 0} \rho(T(t) - T((\gamma+1)t) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

alors $A/Rad(A)$ est unitaire, et il existe un idempotent J de A, un élément u de JA et une application $r : t \to r(t)$ de K^+ dans $Rad(JA)$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $\phi(J) = 1$ pour tout $\phi \in \widehat{A}$,

(ii) $r(s+t) = r(s) + r(t)$ pour $s, t \in K^+$,

(iii) $JT(t) = Je^{tu+r(t)}$ pour $t \in K^+$,

(iv) $(T(t) - JT(t))_{t\in K^+}$ est un semigroupe quasinilpotent.

Ce qui a permis d'obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1 . *Soit $(T(t))_{t\in K^+}$ un semigroupe non nul dans une algèbre de Banach commutative semi-simple soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t\in K^+}$ et soit $\gamma >\in K^+$. Si*

$$\limsup_{t\to 0} \rho(T(t) - T((\gamma+1)t) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

alors A est unitaire et il existe un élément u de A tel que $T(t) = Je^{tu}$ pour $t \in K^+$.

Posons

$$U_\gamma = D(0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}) \text{ pour } \gamma > 0.$$

La démonstration du théorème suivant se base sur le fait que

$$g_\gamma : U_\gamma \to \mathbb{C}$$

tel que $g_\gamma(0) = 0$ et telle que

$$e^{g_\gamma(z)} - e^{(\gamma+1)g_\gamma(z)} = z$$

pour $z \in U_\gamma$.

Théorème 3.2.2 . *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(T(t))_{t\in K^+}$ un semigroupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach. Soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t\in K^+}$ et soit $\gamma \in K^+$, Si*

$$\limsup_{t\to 0} \|(T(t) - T((\gamma+1)t)\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

alors il existe un idempotent J de A et $u \in JA$ vérifiant les propriétés suivantes :

- *(i) $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \widehat{A}$*
- *(ii) $(T(t) - JT(t))_{t\in K^+}$ est un semigroupe quasi nilpotent*
- *(iii) $JT(t) = e^{tu}$ pour $t \in K^+$*

Avec les condition ci-dessus, $tu + r(t) = g(JT(t) - JT(t(\gamma+1)))$ pour t assez petit, ce qui permet de déduire que

$$\limsup_{t\to 0} \|(r(t)\| < +\infty$$

c'est à dire que r est continue. Ce qui ramène le travail au cas des semigroupes quasinilpotents et donne les résultats suivants.

Théorème 3.2.3 . *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(T(t))_{t\in K^+}$ un semigroupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach. Soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t\in K^+}$ et soit $n \geq 1$ un entier. Si*

$$\limsup_{t\to 0} \|T(t) - T((n+1)t)\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

alors :

- *ou bien $T(t) = 0$ pout $t \in K^+$,*
- *ou bien A est unitaire, et il existe un élément u de A tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t \in K^+$.*

Soit $n \geq 1$ un entier, et soit x un élément d'une algèbre de Banach commutative A tel que

$$\|x\| \geq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

et

$$\|x - x^{n+1}\| \geq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

On déduit qu'il existe un idempotent non nul J de A tel que

$$\left\{\phi \in \widehat{A} : \phi(J) = 1\right\} = \left\{\phi \in \widehat{A} : |\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right\}.$$

Le résultat suivant donne une formule explicite pour calculer un tel idempotent, valable pour tout entier positif n.

Théorème 3.2.4 . *Soit A une algèbre de Banach, soit $n \geq 1$ un entier, et soit $x \in A$ tel que*

$$\|x\| \geq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

et

$$\|x - x^{n+1}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Soit U le disque de centre 0 et de rayon

$$\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}},$$

et soit h la fonction analytique définie sur U et contruite plus haut. Alors

$$|\phi(x)| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

pour $\phi \in \widehat{A}$ et

$$J := (I - (n+1)h^n(x - x^{n+1}))^{-1} \left(\sum_{2 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k (x - h(x - x^{n+1}))^{k-1} h(x - x^{n+1})^{n+1-k} \right)$$

est un idempotent non nul de A vérifiant

$$x - h(x - x^{n+1}) = J(x - h(x - x^{n+1})).$$

De plus si $\phi \in \widehat{A}$ on a $\phi(J) = 1$ si $|\phi(x)| > \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, et $\phi(J) = 0$ si $|\phi(x)| < \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.

Dans la dernière partie, les auteurs se limitent aux semigroupes localement bornés, c'est-à-dire aux semigroupes tels que

$$\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|T(t)\| < +\infty$$

pour $0 < \alpha < \beta < +\infty$ et montrent que si la condition ci-dessus est vérifiée par un semigroupe localement borné non nul alors la sous-algèbre férmée A engendrée par par le semigroupe contient une suite croissante $(J_p)_{p\geq 1}$ d'idempotents telle que UJ_pA est dense dans A.
Si $T(t)_{t>0}$ est continu en norme, il y a des résultats plus précis :

- ou bien A est unitaire, et dans ce cas il existe $u \in A$ tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t > 0$.
- ou bien il existe une suite croissante $(J_p)_{p\geq 1}$ d'idempotents non nuls de A telle que $U_{p\geq J_pA}$ est dense dans A et telle que pour $p \geq 1$ il existe $u_p \in J_pA$ vérifiant

$$J_pT(t) = e^{tu_p} \quad \text{pour } p \geq 1.$$

3.3 Distance près de l'origine entre éléments d'un semigroupe fortement continu

Dans [16] l'auteur s'est interessé au voisinage de $\|T(t) - T(s)\|$ prés de l'origine quand le générateur infinitésimal A du semigroupe fortement continu d'opérateurs bornés $(T(t))_{t>0}$ sur un espace de Banach X n'est pas borné sur son domaine D_A.

On pose

$$\theta(s/t) = (\frac{s}{t-1})(\frac{t}{s})^{\frac{\frac{s}{t}}{\frac{s}{t}-1}} = (s-t)\frac{t^{\frac{t}{s-t}}}{s^{\frac{s}{s-t}}}$$

si $0 < t < s$, valeur qui va jouer un rôle important pour le voisinage de $\|T(t) - T(s)\|$ quand le générateur infinitésimal du semigroupe n'est pas borné.
Soit $\widehat{\mathcal{A}_{\mathbf{T}}}$ l'espace des caractères de la sous-algèbre fermée $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ de $B(X)$ engendrée par le semigroupe $(T(t))_{t>0}$. Posons

$$\sigma_T = \{|\phi(T(1))|\}_{\phi \in \widehat{A_T}} \cup \{0\}.$$

Dans le cas où

$$\widehat{A_T} = \emptyset,$$

le semigroupe est quasinilpotent.

On pourra distinguer quatre cas :

1. 0 est un point isolé de σ_T, et le semigroupe n'est pas quasinilpotent ;
2. il existe $\delta > 0$ tel que $[0, \delta] \subset \sigma_T$, et dans ce cas il est clair qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|T(t) - T(s)\| > \theta(s/t) \text{ pour } 0 < t < s \leq \eta\,;$$

3. 0 n'est pas un point isolé de σ_T ;
4. $\sigma_T = \{0\}$ et le semigroupe est quasinilpotent.

Le résultat important suivant a été démontré dans le cas (4) :

Théorème 3.3.1 . *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe fortement continu, non nul d'opérateurs bornés sur un espace de Banach X. Si $(T(t))_{t>0}$ est quasinilpotent alors il existe $\delta > 0$ tel que $\|T(t) - T(s)\| > \theta(s/t)$ pour $0 < t < s < \delta$*

Ce résultat est essentiellement optimal, comme le montre le résultat suivant :

Théorème 3.3.2 . *Soit $\varepsilon : (0, 1) \to (0, \infty)$ une fonction continue. Il existe alors un semigroupe quasinilpotent continu en norme, non nul $(T_\varepsilon(t))_{t>0}$ d'opérateurs sur un espace de Hilbert séparable qui vérifie, pour $0 < t < s \leq 1$,*

$$\|T_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(s)\| \leq \theta(s/t) + (s - t)\varepsilon(s).$$

Dans les cas (1) et (3), l'auteur démontre en utilisant les théorèmes précédents les résultats suivants :

1. Si l'algèbre n'admet pas d'idempotents non nuls, alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|T(t) - T(s)\| \geq \theta(s/t) \;\text{ pour } 0 < t, s \leq \eta.$$

2. Plus précisément, s'il existe deux suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels vérifiant

$$0 < t_n < s_n, \;\; \|T(t_n) - T(s_n)\| < \theta(\frac{s_n}{t_n})$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$, alors il existe des suites $(P_n)_{n\geq 1}$ d'idempotents de $\mathcal{A}_\mathbf{T}$ tel que $\phi(P_n) = 1$ quand n est assez grand, pour tout $\phi \in \widehat{\mathcal{A}_\mathbf{T}}$. Si en plus le semigroupe est continu en norme, alors la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ vérifie les conditions suivante :

(i) $\cup_{n\geq 1} P_n \mathcal{A}_\mathbf{T}$ est dense dans $\mathcal{A}_\mathbf{T}$;

(ii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|P_n T(t) - P_n\| = 0$ pour $n \geq 0$, et le générateur infinitésimal du semigroupe $(P_n T(t))_{t>0}$ est borné pour $n \geq 1$.

3. Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe fortement continu non nul, d'opérateurs bornés sur un espace de Banach X. S'il existe $\delta > 0$ et une fonction continue

$$s : [0, \delta] \to (0, +\infty)$$

tel que $0 < t < s(t)$ et

$$\|T(t) - T(s(t))\| < \theta(\frac{s(t)}{t}) \text{ pour } 0 < t \leq \delta,$$

alors le générateur infinitisimal du semigroupe $(T(t))_{t>0}$ est borné, et on a

$$\|T(t) - T(s(t))\| = |s - t|(\|u\| + M(s, t)|s - t|),$$

où

$$\sup_{0<s,t\leq 1} |M(s, t)| < +\infty.$$

Chapitre 4

Nouvelles inégalités dans les algèbres de Banach

4.1 Introduction

On a rappelé au Chapitre 2 des résultats de [12] qui montrent que si x est un élément quasinilpotent d'une algèbre de Banach tel que

$$\|x\| \geq \frac{1}{2}$$

alors

$$\|x^2 - x\| > \frac{1}{4}$$

(voir également [4]) ; plus généralement si une algèbre de Banach A ne possède aucun idempotent non nul alors

$$\inf_{\|x\| \geq \frac{1}{2}} \|x^2 - x\| \geq \frac{1}{4},$$

et cette inégalité est optimale.

Une première application aux semigroupes a été obtenue par Mokhtari dans [27] : si $(T(t))_{t>0}$ est un semigroupe continu non nul dans une algèbre de Banach, et si

$$\limsup_{t \to 0^+} \|T(t) - T(2t)\| < \frac{1}{4},$$

alors l'algèbre de Banach A engendrée par $(T(t))_{t>0}$ possède une unité e et

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - e\| = 0,$$

de sorte que

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - T(2t)\| = 0.$$

Ce résultat a été généralisé dans [17] : si $(T(t))_{t>0}$ est un semigroupe dans une algèbre de Banach et si

$$\limsup_{t\to 0^+} \|T(t) - T((n+1)t)\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

pour un entier $n \geq 1$ alors

ou bien $T(t) = 0$ pour tout $t > 0$,

ou bien l'algèbre de Banach engendrée par le semigroupe possède une unité e, et

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - e\| = 0$$

de sorte que, de même que plus haut,

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - T((n+1)t)\| = 0,$$

et la constante $\dfrac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ est optimale (on notera que ce résultat ne nécessite aucune condition de continuité pour le semigroupe).

Pour les semigroupes fortement continus (voir [30] pour la théorie générale des semigroupes) on a des résultats très généraux, qui étendent en particulier le résultat ci-dessus au cas où n est non entier [16]. En fait s'il existe $t > 0$ tel que $T(t) \neq 0$, et s'il existe une fonction

$$t \to x(t)$$

définie et continue sur un intervalle $[0, \delta]$ telle que

$$x(0) = 0, \;\; 0 < t < x(t)$$

et

$$\|T(t) - T(x(t))\| < (x(t) - t)\frac{t^{\frac{t}{x(t)-t}}}{(x(t))^{\frac{x(t)}{x(t)-t}}}$$

pour $t \in]0, \delta]$, alors l'algèbre engendrée par le semigroupe possède une unité e et

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - e\| = 0.$$

Des résultats analogues concernant la distance entre puissances d'une unité approchée bornée dans les algèbres de Banach ont été obtenus dans [4].

Un principe général qui sous-tend ces résultats, ainsi que les résultats obtenu par Kalton, Montgomery-Smith, Oleszkiewicz et Tomilov dans [24], est le suivant : soit f une fonction entière vérifiant $f(0) = 0, \quad f'(0) \neq 0$, soit $R > 0$ tel que

$$f : f^{-1}(D(0,R)) \longrightarrow D(0,R)$$

soit injective et soit

$$g : D(0,R) \longrightarrow f^{-1}(D(0,R))$$

la fonction analytique vérifiant $g(f(z)) = z$ pour tout $z \in f^{-1}(D(0,R))$. Si $g^{(n)}(0)$ est de signe constant pour $n \geq 1$ alors

$$\|g(y)\| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!}\|y\|^n = |g(\|y\|)| \quad \text{pour} \quad \|y\| < R.$$

D'autre part si $x \in A$, et si

$$\|f(x)\| < R,$$

on a

$$x = g\left[f(x)\right],$$

donc

$$\|x\| \leq |g(\|f(x)\|)|$$

quand A ne possède aucun idempotent non nul (voir le théorème 3.1 de [7] pour une version très générale de ce résultat).

Ceci permet d'une part d'établir des inégalités dans les algèbres de Banach ne possédant pas d'idempotent non nul, et d'autre part de construire explicitement des idempotents dans les algèbres de Banach où ces inégalités ne sont pas vérifiées. Par exemple les résultats de [17] sont basés sur ce principe appliqué à la fonction entière

$$f : z \to z - z^{n+1},$$

avec

$$R = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Il est suggéré dans [17] d'essayer d'obtenir des inégalités liées au comportement de la même fonction au voisinage de $1 \in f^{-1}(0)$, ou en d'autres termes d'essayer d'appliquer le principe ci-dessus à la fonction

$$z \to 1 + z - (1+z)^{n+1}.$$

Nous répondons à cette question au théorème 4.2.2 où nous montrons plus généralement, moyennant une hypothèse spectrale sur x permettant de définir le logarithme complexe au voisinage de $Spec(1+x)$, que si A ne possède aucun idempotent non trivial, et si

$$\|x\| \geq 1 - \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

γ désignant un réel positif quelconque, alors

$$\|1 + x - (1+x)^{\gamma+1}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

où

$$(1+x)^{\gamma+1} := e^{(\gamma+1)\log(1+x)}.$$

On répond au préalable au théorème 4.2.1 à une autre question posée dans [17] : si A ne possède aucun idempotent non nul, et si

$$\|x\| \geq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}$$

alors

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Ce résultat se déduit du fait, établi dans [16], que les dérivées successives en 0 de la fonction analytique g vérifiant

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad e^{g(z)} - e^{(\gamma+1)g(z)} = z$$

au voisinage de 0 sont toutes négatives.

Le théorème 4.2.2 est basé sur le fait que $h^{(n)}(0) < 0$ pour $n \geq 1$, où $h = e^g - 1$ (lemme 4.2.4). On notera que si $u = e^v - 1$, avec $v(0) = 0$, alors le fait que les dérivées successives en 0 de u soient négatives entraîne que celles de v le sont aussi, alors que la réciproque est fausse. On voit donc que le théorème 4.2.2 ne peut se déduire du théorème 4.2.1.

4.2 Nouvelles inégalités dans les algèbres de Banach

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$, on pose

$$D(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \alpha| \ < r\}$$

Le lemme suivant est une reformulation du lemme 2.2 de [16]. Avec les notations de [16], la fonction g du lemme ci-dessous est la fonction $g = -\dfrac{g_\alpha}{\gamma}$ avec $\alpha = \dfrac{1}{\gamma} + 1$.

Lemme 4.2.1 *Soit $\gamma > 0$, soit*

$$U = D(0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}})$$

et soit

$$V = D(0, \frac{log(\gamma+1)}{\gamma}).$$

Il existe une unique fonction analytique

$$g : U \longrightarrow V$$

telle que $g(0) = 0$ vérifiant

$$e^{g(z)} - e^{(\gamma+1)g(z)} = z$$

pour $z \in U$, et on a $g^{(n)}(0) < 0$ pour $n \geq 1$. De plus,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \left[\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right]^k = -\frac{log(\gamma+1)}{\gamma}$$

Lemme 4.2.2 *Soit A une algèbre de Banach, soit $\gamma > 0$, soit $u \in A$ et soit g la fonction analytique construite au lemme 2.1. Si*

$$\|u\| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+1/\gamma}}$$

alors la série $\sum_{k\geq 1} \frac{g^k(0)}{k!} u^k$ converge dans A.
Si l'on pose

$$g(u) = \sum_{k \geq 1} \frac{g^k(0)}{k!} u^k,$$

on a

$$e^{g(u)} - e^{(\gamma+1)g(u)} = u,$$

et

$$\|g(u)\| \le |g(\|u\|)| \le \frac{log(\gamma+1)}{\gamma}.$$

Preuve : Soit g la fonction introduite au lemme précédent. Alors g est décroissante sur $\left[0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right]$, et on a

$$\begin{aligned} \|g(u)\| &\le \sum_{n\ge1} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!}\|u^n\| \le -\sum_{n\ge1} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\|u\|^n = -g(\|u\|) \\ &\le -g\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}. \quad \square \end{aligned}$$

Dans toute la suite on désigne par

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

le rayon spectral d'un élément x d'une algèbre de Banach A. Si A est unitaire on pose $A^{\#} = A$. Sinon on note $A^{\#} = A \oplus \mathbb{C}1$ l'algèbre obtenue en ajoutant une unité 1 à A.

Lemme 4.2.3 *Soit A une algèbre de Banach, soit $\gamma > 0$, et soit $x \in A$ tel que*

$$\rho(e^x - e^{(\gamma+1)x}) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Soit

$$U = D(0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}})$$

et soit g la fonction analytique sur U définie au lemme 4.2.1. *Alors la formule*

$$J := g'(e^x - e^{(\gamma+1)x})e^{g(e^x-e^{(\gamma+1)x})}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(e^x-e^{(\gamma+1)x})} - 1}{n!}(x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}))^{n-1}$$

définit un idempotent de A vérifiant

$$J(x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}) = x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}).$$

Preuve : Posons
$$u = e^x - e^{(\gamma+1)x}$$
et
$$y = x - g(u)$$
où g est la fonction définie au lemme 4.2.1. On a

$$\begin{aligned}
e^x - e^{(\gamma+1)x} - u &= 0 \\
&= e^y e^{g(u)} - e^{(\gamma+1)y} e^{(\gamma+1)g(u)} - e^{g(u)} + e^{(\gamma+1)g(u)} \\
&= e^{g(u)}[e^y - 1] - e^{(\gamma+1)g(u)}[e^{(\gamma+1)y} - 1] \\
&= e^{g(u)}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{y^n}{n!}\right) - e^{(\gamma+1)g(u)}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(\gamma+1)^n}{n!} y^n\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y\left[e^{g(u)} - (\gamma+1)e^{(\gamma+1)g(u)}\right] \\
&\quad -y^2\left[e^{(\gamma+1)g(u)}\left(\sum_{n\geq 2} \frac{(\gamma+1)^n}{n!} y^{n-2}\right) - e^{g(u)}\left(\sum_{n\geq 2} \frac{y^{n-2}}{n!}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Posons de nouveau $f(z) = e^z - e^{(\gamma+1)z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a
$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z) = 1 \text{ pour } z \in U.$$

Donc comme $\rho(u) < \dfrac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+1/\gamma}}$, $g'(u)$ est bien définie dans A et $f'(g(u))g'(u) = 1$. On voit que $e^{g(u)} - (\gamma+1)e^{(\gamma+1)g(u)}$ est inversible dans $\tilde{A}$, et on a
$$g'(u) = (e^{g(u)} - (\gamma+1)e^{(\gamma+1)g(u)})^{-1}.$$

L'équation (4.2.1) donne
$$y = y^2 v$$
où
$$v := g'(u)e^{g(u)} \sum_{n\geq 2} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(u)} - 1}{n!} y^{n-2}$$
Ainsi l'élément $J = yv$ est un idempotent de A donné par la formule

$$J := g'(e^x - e^{(\gamma+1)x})e^{g(e^x - e^{(\gamma+1)x})}\sum_{n\geq 2}\frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(e^x - e^{(\gamma+1)x})} - 1}{n!}(x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}))^{n-1}.$$

De plus on a

$$J(x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}) = Jy = y^2 v = y = x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}).\ \square$$

Notons qu'on aurait aussi pu définir J par une formule du type de celle donnée par le théorème 2.2.5, mais l'utilisation des séries de Taylor nous a semblé plus naturelle dans ce contexte.

Théorème 4.2.1 *Soit $\gamma > 0$, soit A une algèbre de Banach et soit $x \in A$ tel que $\|x\| \geq \frac{log(\gamma+1)}{\gamma}$.*
(i) Si A ne possède aucun idempotent non nul alors

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

(ii) Si x est quasinilpotent on a plus précisément $\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| > \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$.

Preuve : Supposons que

$$\|x\| \geq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}$$

et

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Posons

$$u = e^x - e^{(\gamma+1)x}$$

et

$$y = x - g(u).$$

Il résulte du lemme 4.2.2 que

$$\|g(u)\| < \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma} \leq \|x\|,$$

donc $y \neq 0$, et il resulte du lemme 4.2.3 que A contient un idempotent $J = yv$ où

$$v := g'(u)e^{g(u)}\sum_{n\geq 2}\frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(u)} - 1}{n!}y^{n-2}$$

vérifiant $y = Jy = y^2v$. Donc $J \neq 0$, et dans ce cas A possède un idempotent non nul. Ceci prouve (i).

Supposons maintenant que x est quasinilpotent et que

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Posons

$$u = e^x - e^{(\gamma+1)x} \text{ et } y = g(u).$$

Alors u et y sont quasinilpotents et vérifient

$$e^x - e^y = e^{(\gamma+1)x} - e^{(\gamma+1)y},$$

et

$$(x-y)\left[1 + \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k y^{n-1-k}}{n!}\right)\right] = (\gamma+1)(x-y)\left[1 + \sum_{n\geq 2}\frac{(\gamma+1)^{n-1}}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right)\right]$$

d'où

$$(x-y)[\gamma + \vartheta] = 0$$

avec

$$\vartheta = \sum_{n\geq 2}\frac{(\gamma+1)^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right) - \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k y^{n-1-k}}{n!}\right).$$

Comme $\vartheta \in RadA$ alors $x = y$.

Comme tous les coefficients de Taylor d'ordre ≥ 1 de g en 0 sont strictement négatifs, et comme

$$\lim_{n\to\infty}\|u^n\|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

il existe $p \geq 1$ tel que

$$\|u^n\| < \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)^n$$

pour tout $n \geq p$, et on a

$$-\sum_{n=p}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\|u^n\| < -\sum_{n=p}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)^n.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\|x\| \leq -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\|u^n\| &< -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)^n \\ &= -g\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) \\ &= \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}. \quad \square\end{aligned}$$

Pour $z \in D(0,1)$, $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$(1+z)^t = \sum_{n\geq 0} \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} z^n,$$

et $\log(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$, de sorte que $(1+z)^t = e^{t \log(1+z)}$.

Lemme 4.2.4 *Soit $\gamma > 0$, et soit $g : U \to V$ la fonction définie au lemme 4.2.1. Posons $h = e^g - 1$, de sorte que $h(0) = g(0) = 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $|h(z)| < 1$ pour $|z| < \delta$. Alors*

$$1 + h(z) - (1 + h(z))^{\gamma+1} = z \quad \textit{pour} \quad |z| < \delta, \quad h^{(n)}(0) < 0 \quad \textit{pour} \quad n \geq 1,$$

et

$$h\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = -1 + \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Preuve : De même qu'au lemme 4.2.1 on considère la fonction

$$f(z) = e^z - e^{(\gamma+1)z}$$

qui vérifie $f(g(z)) = z$ pour $z \in U$. Notons que le réel positif δ, de même que la fonction g, dépend du réel positif γ.

Pour $|z| < \delta$ on a $e^{g(z)} = 1 + h(z)$, avec $|h(z)| < 1$, donc

$$e^{g(z)} = e^{\log(1+h(z))}.$$

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$g(z) = \log(1 + h(z)) + 2k\pi i.$$

Comme $g(0) = 0 = \log(1 + h(0))$ on a $k = 0$. Donc

$$g(z) = \log(1 + h(z)).$$

On a

$$(1 + h(z))^t = e^{t\log(1+h(z))} = e^{tg(z)}, \text{pour} |z| < \delta, \quad t \in \mathbb{R},$$

donc

$$1 + h(z) - (1 + h(z))^{\gamma+1} = z.$$

On a

$$h'(z) - (\gamma + 1)h'(z)(1 + h(z))^{\gamma} = 1. \tag{4.2.2}$$

Posons

$$\psi(z) := 1 - (\gamma + 1)(1 + h(z))^{\gamma}. \tag{4.2.3}$$

On a

$$\psi(0) = -\gamma \quad \text{et} \quad h'(z)\psi(z) = 1 \ \text{ et donc } \ h'(0) = -\frac{1}{\gamma} < 0.$$

On obtient

$$h''(z)\psi(z) = -h'(z)\psi'(z);$$

d'autre part on déduit de l'équation (4.2.2) que

$$(1 + h(z))\psi'(z) = \gamma[-h'(z) + 1],$$

donc

$$(1 + h(z))\psi''(z) = -h'(z)\psi'(z) - \gamma h''(z).$$

On montre alors par récurrence qu'il existe pour $n \geq 2$ deux familles $(a_{k,n})_{1\leq k\leq n}$ et $(b_{k,n})_{1\leq k\leq n}$ de réels strictements positifs telles que

$$h^{(n)}(z)\psi(z) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{k,n} h^{(k)}(z)\psi^{(n-k)}(z).$$

et

$$(1 + h(z))\psi^{(n)}(z) = -\sum_{k=1}^{n-1} b_{k,n} h^{(k)}(z)\psi^{(n-k)}(z) - \gamma h^{(n)}(z).$$

Supposons que $n \geq 1$ et que pour $1 \leq k \leq n$ on a $h^{(k)}(0) < 0$ et $\psi^{(k)}(0) > 0$.
On a alors

$$-\gamma h^{(n+1)}(0) = h^{(n+1)}(0)\psi(0) = -\sum_{k=1}^{n} a_{k,n+1} h^{(k)}(0)\psi^{(n+1-k)}(0) > 0,$$

et $h^{(n+1)}(0) < 0$. De plus

$$\psi^{(n+1)}(0) = (1+h(0))\psi^{(n+1)}(0) = -\sum_{k=1}^{n} b_{k,n+1} h^{(k)}(0)\psi^{(n+1-k)}(0) - \gamma h^{(n+1)}(0) > 0.$$

On voit donc que $h^{(n)}(0) < 0$ pour tout $n \geq 1$.

D'après le lemme 4.2.1 on a

$$g\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\left[\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right]^k = -\frac{\log(\gamma+1)}{\gamma} .$$

Comme $g(z) = \log(1+h(z))$ on a

$$g\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = \log\left(1 + h\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)\right) = \log\left((\gamma+1)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)$$

et donc

$$h\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = -1 + \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}} . \quad \square$$

Remarque :

On a ici $h = e^g - 1$, g désignant la fonction introduite au lemme 4.2.1. Notons que si on pose $u(z) = -z$ et $v = e^u - 1$, alors $u(0) = v(0) = 0$ et $u^{(n)}(0) \leq 0$ pour tout $n \geq 1$, alors que $v^{(n)}(0) < 0$ pour n pair, $v^{(n)}(0) > 0$ pour n impair.
Par contre si deux fonctions u et v, définies au voisinage de 0 vérifient la relation $v = e^u - 1$, avec $u(0) = v(0) = 0$ on a

$$u(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n} = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-v)^n}{n}$$

Donc si $v^{(n)}(0) < 0$ (respectivement $v^{(n)}(0) \leq 0$) pour tout $n \geq 1$, on a $u^{(n)}(0) < 0$ (respectivement $u^{(n)}(0) \leq 0$) pour tout $n \geq 1$.
Par conséquent le fait que la fonction h du lemme 4.2.3 vérifie $h^{(n)}(0) < 0$ pour tout $n \geq 1$ implique que la fonction g du lemme 4.2.1 verifie $g^{(n)}(0) < 0$ pour tout $n \geq 1$, mais l'inverse n'est pas vrai et le lemme ci-dessus apporte plus d'informations que le lemme 4.2.1.

Soit x un élément d'une algèbre de Banach A. On note $Spec(x)$ le spectre de x dans l'algèbre obtenue en ajoutant si nécessaire une unité 1 à $A^{\#}$.

On note $Res_\infty(x)$ la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus Spec(x)$. Si $0 \in Res_\infty(x)$, il existe un voisinage ouvert U de $Spec(x)$ et une détermination du logarithme de z sur U, c'est à dire une fonction $z \mapsto \log z$ tel que $e^{logz} = z$ pour $z \in U$. On pose alors $x^t = e^{tlogx}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On notera que x^t dépend évidemment de la détermination du logarithme choisie sur U.

Théorème 4.2.2 *Soit A une algèbre de Banach, soit $\gamma > 0$, et soit $x \in A$ tel que*

$$\|x\| \geq 1 - \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

et tel que

$$-1 \in Res_\infty(x).$$

(i) Si A ne possède aucun idempotent non nul alors

$$\|1 + x - (1+x)^{\gamma+1}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} .$$

(ii) Si x est quasinilpotent on a plus précisement

$$\|1 + x - (1+x)^{\gamma+1}\| > \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} .$$

Preuve : Soit $x \in A$ tel que $-1 \in Res_\infty(x)$. On pose $a = \log(1+x)$, avec une détermination convenable du logarithme complexe sur un voisinage de $Spec(1+x)$, de sorte que $1 + x = e^a$.
Posons

$$u = e^a - e^{(\gamma+1)a} = 1 + x - (1+x)^{\gamma+1}$$

et supposons que

$$\|u\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Soit g la fonction analytique introduite au lemme 4.2.1. Il résulte du lemme 4.2.3 que si l'on pose

$$J := g'(e^a - e^{(\gamma+1)a}) e^{g(e^a - e^{(\gamma+1)a})} \sum_{n \geq 2} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(e^a - e^{(\gamma+1)a})} - 1}{n!} \left(a - g(e^a - e^{(\gamma+1)a})\right)^{n-1} \tag{4.2.4}$$

alors J est un idempotent de A, qui commute avec x, tel que

$$a - g(u) \in H := \{v \in A : Jv = v\}.$$

Il est clair que H est un idéal à droite fermé de $\tilde{A}$. Soit $h = e^g - 1$ la fonction introduite au lemme 4.2.4 . On a

$$x - h(u) = e^a - 1 - (e^{g(u)} - 1) = (a - g(u)) \left[\sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k g(u)^{n-1-k}}{n!} \right) \right] \in (a - g(u))A \subset H.$$

Donc

$$J(x - h(u)) = x - h(u).$$

Si A ne contient aucun idempotent non nul, on a

$$J = 0, \quad x = h(u), \quad \|x\| \leq -\sum_{n \geq 1} \frac{h^n(0)}{n!} \|u\|^n < -h \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right) = 1 - \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Ceci prouve (i).

Supposons maintenant que x est quasinilpotent. Il résulte d'une propriété standard du calcul fonctionnel holomorphe que

$$Spec(a) = \{\log(1+\lambda) : \lambda \in \operatorname{Spec}(x)\} = \{0\},$$

donc a est quasinilpotent. Donc

$$u = e^a - e^{(\gamma+1)a},$$

est aussi quasinilpotent et il résulte de même que plus haut du lemme 4.2.3 que la formule 4.2.4 définit un idempotent J de A tel que

$$J(x - h(u)) = x - h(u),$$

et $J \in RadA$ car $a - g(u) \in RadA$. Donc $J = 0$, et $x = h(u)$. Comme tous les coefficients de Taylor d'ordre ≥ 1 de h en 0 sont strictement négatifs, et comme u est quasi nilpotent il existe $p \geq 1$ tel que

$$\|u^n\| < \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right)^n \quad \text{pour} \quad \text{tout} \;\; n \geq p,$$

et on a

$$-\sum_{n=p}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \|u^n\| < -\sum_{n=p}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right)^n.$$

Si

$$\|u\| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

on aurait

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!}\|u^n\| \\
&< -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)^n \\
&= -h\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) \\
&= 1-\frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}
\end{aligned}$$

Ceci prouve (ii). $\square$

Chapitre 5

Amélioration de résultats d'Esterle-Mokhtari

5.1 Introduction

Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $n \geq 1$ un entier , et soit $(T(t))_{t \in K_+^*}$ un semigroupe non identiquement nul dans une algèbre de Banach, K_+^* désignant l'ensemble des éléments strictement positifs de K. Esterle et Mokhtari ont montré dans [17] que si

$$\limsup_{t \to 0^+} \|T(t) - T((n+1)t)\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}},$$

alors la sous-algèbre fermée A engendrée par le semigroupe possède une unité J telle que

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - J\| = 0,$$

de sorte qu'il existe $u \in A$ tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t \in K_+^*$ (on notera que ce résultat ne nécessite aucune propriété de continuité pour le semigroupe considéré). On peut se demander si ce résultat reste valable en remplaçant la condition

$$\limsup_{t \to 0^+} \|T(t) - T((n+1)t\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

par la condition plus faible , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|T(t) - T((n+1)t\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

pour tout $t \in K \cap]0, \delta]$. On va voir que c'est bien le cas si $K = \mathbb{R}$. Par contre nous donnons à la fin du Chapitre des exemples simples qui montrent que ce n'est plus le cas quand $K = \mathbb{Q}$.

Dans toute la suite $(T(t))_{t>0}$ désigne un semigroupe dans une algèbre de Banach.

5.2 Amélioration de résultats d'Esterle-Mokhtari

Supposons que

$$\rho\left(T(t) - T(t(\gamma+1))\right)$$

est borné pour $t \in \left]0, \delta\right]$, avec $\delta > 0$, $\gamma > 0$. Il résulte alors du lemme 2.1 de [17] que l'application $t \to |\phi(T(t))|$ est continue sur $]0, +\infty[$, et que

$$\lim_{t \to 0^+} |\phi(T(t))| = 1 \text{ pour } \phi \in \widehat{A}.$$

Supposons maintenant que

$$\lim_{t \to 0^+} \rho(T(t) - T(t(\gamma+1))) < 2,$$

avec $\gamma > 0$. Il résulte du lemme 2.1 de [17] que

$$\lim_{t \to 0^+} \phi(T(t)) = 1,$$

et qu'il existe, pour tout $\phi \in \widehat{A}$ un complexe c_ϕ tel que $\phi(T(t)) = e^{tc_\phi}$ pour $t > 0$.

Pour $K = \mathbb{R}$, le théorème 2.3 de [17] reste valable sous la forme :

Théorème 5.2.1 . *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach, soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t>0}$ et soit $\gamma > 0$ un réel. Si*

$$\rho(T(t) - T(t(\gamma+1))) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

pour $0 < t \leq t_0$, avec $t_0 > 0$, alors $A/Rad(A)$ est unitaire, et il existe un idempotent J de A, un élément u de JA et une application

$$r : t \to r(t)$$

de $\mathbb{R}^+$ dans $Rad(JA)$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $\phi(J) = 1$ pour tout $\phi \in \widehat{A}$

(ii) $r(s+t) = r(s) + r(t)$ pour $s, t \in \mathbb{R}^+$

(iii) $JT(t) = e^{tu + r(t)}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, où $e^v = J + \sum_{k \geq 1} \frac{v^k}{k!}$ pour $v \in JA$.

(iv) $(T(t) - JT(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un semigroupe quasinilpotent.

Preuve : Soit $t_0 > 0$ tel que

$$\rho(T(t) - T(t(\gamma+1))) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

pour $t \in]0, t_0]$, et soit $\phi \in \widehat{A}$; il existe alors $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\phi(T(t)) = e^{ct} \text{ pour } t > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} ||\phi(T(t))| - |\phi(T(t))|^{\gamma+1}| &\leq |\phi(T(t)) - \phi(T(t))^{\gamma+1}| \\ &< \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \quad \textit{pour} \quad t \in]0, t_0]. \end{aligned}$$

Alors ou bien

$$|\phi(T(t))| < \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

ou bien

$$|\phi(T(t))| > \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

et l'ensemble $(|\phi(T(t))|)_{0<t\leq t_0}$ est un intervalle I qui ne contient pas $\dfrac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$.
Comme

$$\lim_{t\to 0^+} \phi(T(t)) = 1,$$

on a

$$I \subset \left] \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}, +\infty \right[,$$

et $|\phi(T(t_0)| > \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$ pour tout $\phi \in \widehat{A}$.
Donc $\widehat{A}$ est compact. D'après les théorèmes 3.6.3 et 3.6.6 de [31], l'algèbre quotient $A/Rad(A)$ est unitaire, il existe un idempotent J de A tel que $\phi(J) = 1$ pour tout t, $\phi \in \widehat{A}$, et $(T(t) - JT(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un semigroupe quasinilpotent.

On considère l'algèbre $B = JA$ d'unité J, et on pose

$$S(t) = JT(t) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $\psi \in \widehat{B}$; l'application $\phi : x \to \psi(Jx)$ est un caractère de A.
On a

$$\frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}|1 - \psi(b^{t\gamma})| \leq |\phi(T(t))||1 - \psi(b^{t\gamma})| = |\phi(T(t)) - \phi(a^{t(\gamma+1)})| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

pour $t \in]0, t_0]$.
Donc

$$|1 - \psi(b^{t\gamma})| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)} < 1,$$

et

$$\rho(J - S(t)) < 1 \quad \text{pour} \quad 0 < t \leq t_0.$$

On pose

$$u_t = \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}(S(t) - J)^k}{k} \quad \text{pour} \quad t \in]0, t_0].$$

On a $S(t) = e^{u_t}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, et soit n le plus petit entier positif tel que $t \leq nt_0$. On pose $u_t = nu_{\frac{t}{n}}$, et on a $S(t) = e^{u_t}$.
Considérons de nouveau $\psi \in \widehat{B}$ et soit

$$\phi : x \to \psi(Jx)$$

le caractère de A associé a ψ. Il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\psi(S(t)) = \phi(T(t)) = e^{ct}$$

pour $t > 0$. On a

$$\psi(u_t) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}\psi(S(t) - J)^k}{k},$$

donc $\psi(u_t)$ coincide avec la determination principale du logarithme de

$$1 + \psi(S(t) - J) = \psi(S(t)) = e^{ct}$$

pour $0 < t \leq t_0$. Donc

$$\psi(u_t) = ct \;\text{ pour } \quad 0 < t \leq t_0.$$

On obtient

$$\psi(u_t) = n\psi(u_{\frac{t}{n}}) = ct \;\text{ pour }\; t > 0.$$

Posons

$$u = t_0^{-1} u_{t_0}, \;\; r(t) = u_t - tu.$$

On a

$$\psi(r(t)) = ct - ct = 0,$$

donc $r(t) \in Rad(A)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$; on a

$$e^{r(s)+r(t)} = e^{-(s+t)u} b^{s+t} = e^{r(s+t)}.$$

Comme l'application $x \to e^x$ est injective sur $Rad(A)$, d'aprés le lemme 2.2 de [17] on a

$$r(s+t) = r(s) + r(t)$$

pour $s,\ t\ \in \mathbb{R}^+$. $\square$

On a le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.1 . *Soit $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ un semigroupe non nul dans une algèbre de Banach commutative semi-simple, soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ et soit $\gamma > 0$. Si*

$$\rho(T(t) - T((\gamma+1)t)) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

alors A est unitaire et il existe un élément u de A tel que

$$T(t) = e^{tu}$$

pour $t \in \mathbb{R}^+$.

Lemme 5.2.1 . *Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$, soit $(T(t))_{t\in K^+}$ un semigroupe quasinilpotent et soit $n \geq 1$ un entier. Si*

$$\|T(t) - T(t(n+1))\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

pour $t \in K^+ \cap\,]0, t_0]$ avec $t_0 > 0$, alors $T(t) = 0$ pour $t \in K^+$.

Preuve : Soit $t_0 > 0$. Si $(T(t))_{t>0}$ n'est pas nul, il existe $t_1 \in K \cap\,]0, t_0]$ tel que $a^{t_1} \neq 0$. Pour $p \geq 1$ on a

$$\|a^{\frac{t_1}{p}}\|^p \geq \|a^{t_1}\|$$

donc

$$\|a^{\frac{t_1}{p}}\| \geq \|a^{t_1}\|^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\|a^{\frac{t_1}{p}}\| \geq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

pour p assez grand. Il résulte alors du théorème 4.4 de [17] que

$$\|a^{\frac{t_1}{p}} - a^{\frac{t_1}{p}(n+1)}\| > \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Par conséquent $T(t) = 0$ pour $t \in k^+$ si les conditions du lemme sont vérifiées. $\square$

Lemme 5.2.2 . *Soit A une algèbre de Banach et soit*

$$\theta :]0, +\infty[\to A$$

tel que

$$\theta(s+t) = \theta(s) + \theta(t) \ \ pour \ \ s > 0, \ \ t > 0.$$

Si

$$\limsup_{t \to 0^+} \|\theta(t)\| < +\infty$$

alors $\theta(t) = t\theta(1)$ pour $t > 0$.

Preuve : Ce résultat apparaît implicitement dans la démonstration du théorème 3.2 de [17]. Donnons ici une démonstration detaillée pour le confort du lecteur.
Soit $l : A \to \mathbb{R}$ une forme lineaire continue sur A. Posons

$$\phi(t) = e^{l(r(t))}$$

pour $t > 0$. On a

$$\phi(s+t) = \phi(s).\phi(t)$$

pour $s > 0, \ \ t < 0$ et

$$\limsup_{t \to 0^+} |\phi(t)| < +\infty,$$

il résulte alors de [22] section 4.17 qu'il existe $\alpha_l > 0$ tel que

$$\phi(t) = e^{t\alpha_l} \ \ \text{pour} \ \ t > 0,$$

on a donc

$$l(r(t)) = \alpha_l t = tl(r(1)).$$

Il résulte alors du théorème de Hahn-Banach que $r(t) = t(r(1))$ pour $t > 0$. $\square$

Lemme 5.2.3 . *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ et $t_0 > 0$ tel que*

$$\|T(t) - T(t(\gamma+1))\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

pour $0 < t < t_0$. Soit J l'idempotent de la sous algèbre fermée engendrée par le semigroupe vérifiant les conditions du théorème 5.2.1. Alors il existe $v \in JA$ tel que $JT(t) = e^{tv}$ pour $t > 0$.

Preuve : Posons
$$U = D(0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}})$$
et soit
$$g : U \to \mathbb{C}$$
la fonction holomorphe sur U vérifiant $g(0) = 0$ et
$$e^{g(z)} - e^{(\gamma+1)g(z)} = z$$
pour $z \in U$. Posons
$$b_t = JT(t) - Ja^{t(\gamma+1)} \quad \text{pour} \quad t > 0.$$
Comme
$$\|b_t^k\| \leq \|J\| \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right)^k \quad \text{pour} \quad k > 1,$$
la série
$$\sum_{k \geq 1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \|b_t^k\|$$
est convergente.
Posons
$$g(b_t) := \sum_{k \geq 1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} b_t^k.$$
Il résulte de propriétés standards du calcul fonctionnel holomorphe que
$$e^{g(\lambda b_t)} - e^{(\gamma+1)g(\lambda b_t)} = \lambda b_t \quad \text{pour} \quad \lambda < 1.$$
Par continuité on obtient, avec les notations du théorème 2.1, que
$$e^{g(b_t)} - e^{(\gamma+1)g(b_t)} = b_t = e^{tu+r(t)} - e^{(\gamma+1)(tu+r(t))}.$$
Pour $0 < t < t_0$ on a
$$\rho(tu + r(t)) = t\rho(u),$$
donc
$$\lim_{t \to 0^+} \rho(tu + r(t)) = 0,$$
donc
$$\rho(b_t) = \rho(e^{tu+r(t)} - e^{(\gamma+1)(tu+r(t))}) = \rho(e^{tu} - e^{t(\gamma+1)u}) \leq e^{t\rho(u)}\rho(J - e^{t\gamma u})$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\lim_{t \to 0^+} \rho(b_t) = 0.$$

Comme $g(0) = 0$ on a

$$\lim_{t \to 0^+} \rho(g(b_t)) = 0.$$

Soit

$$f : z \to e^z - e^{(\gamma+1)z}.$$

Posons

$$F(z_1, z_2) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \text{ pour } z_1 \neq z_2$$

et

$$F(z_1, z_2) = f'(z_1) \text{ pour } z_1 = z_2.$$

Alors f et F sont entières. Comme $f'(0) \neq 0$ il existe un disque ouvert $D(0, \alpha)$ tel que f soit injective et $F(z_1, z_2) \neq 0$ pour z_1, z_2 dans $D(0, \alpha)$. Soit t_1 tel que

$$\rho(g(b_t)) < \alpha$$

pour $0 < t < t_1$.
Soit $t \in \left]0, t_1\right]$. On a

$$0 = f(g(b_t)) - f(tu + r(t)) = (g(b_t) - (tu + r(t)))(F(g(b_t, tu + r(t)))).$$

Pour $\phi \in \widehat{JA}$ on a

$$\phi(F(g(b_t), (tu + r(t))) = F(\phi(g(b_t), \phi(tu + r(t))) \neq 0$$

et donc $F(g(b_t), (tu + r(t)))$ est inversible dans JA et

$$g(b_t) = tu + r(t), \text{ pour } t \in \left]0, t_1\right].$$

D'autre part, d'après le lemme 2.1 de [2] on a

$$\limsup_{t \to 0^+} \|g(b_t)\| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{|g^{(k)}(0)|}{k!} \|b_t^k\| = -\sum_{k \geq 1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \left[\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right]^{\gamma} < +\infty.$$

Donc

$$\limsup_{t \to 0^+} \|r(t)\| < +\infty$$

et il résulte du lemme 5.2.2 que $r(t) = tr(1)$. On a donc $JT(t) = e^{tv}$ pour $t > 0$ avec $v = u + r(1)$. $\square$

Théorème 5.2.2 . *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe non nul dans une algèbre de Banach, soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t>0}$ et soit $n \geq 1$ un entier.*
S'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\|(T(t) - T(t(n+1)))\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

pour $0 < t \leq t_0$, alors A possède une unité J, $\lim_{t \to 0^+} T(t) = J$ et il existe $u \in A$ tel que $T(t) = e^{tu}$ pour tout $t > 0$.

Preuve : Comme

$$\rho(T(t) - T(t(n+1))) \leq \|T(t) - T(t(n+1))\|,$$

il existe un idempotent J de A vérifiant les conditions du théorème 5.2.1. En particulier

$$S(t) := T(t) - JT(t)$$

est quasinilpotent pour $t > 0$. Soit

$$\pi : A \to A/JA$$

la surjection canonique. Comme $\pi(S(t))_{t>0}$ est un semigroupe quasinilpotent de A/JA, il résulte du lemme 5.2.1 que

$$\pi(T(t)) = \pi(S(t)) = 0,$$

et $T(t) \in JA$, pour $t > 0$. Donc

$$T(t) = JT(t).$$

Il résulte du lemme 5.2.3 qu'il existe $v \in A = JA$ telque

$$T(t) = JT(t) = e^{tv} \text{ pour } t > 0. \qquad \square$$

Posons

$$\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q} \cap \left]0, +\infty\right[.$$

Soit

$$c_0 = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} \quad / \quad \lim_{t \to 0^+} x_n = 0 \right\}.$$

Alors c_0 est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|(x_n)_{n \geq 1}\| = \max_{n \geqslant 1} |x_n|$$

et on a

$$\rho(x) = \|x\| \quad \text{pour } x \in c_0.$$

Il est facile de voir que si on pose

$$T(t) = \left(\frac{1}{(2n+1)^t}\right)_{n\geqslant 1}$$

pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors

$$\|T(t) - T(2t)\| < \frac{1}{4}$$

pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$ bien que l'algèbre engendrée par le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$ ne soit pas unitaire. Plus généralement on a l'exemple suivant, qui montre que le théorème 5.2.1 n'est plus valable pour les semigroupes rationnels, même si on suppose ces semigroupes continus en norme.

Proposition 5.2.1 . *Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante de nombres premiers. Posons $S(t) = \left(\frac{1}{p_n^t}\right)_{n\geq 1}$ pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors l'application $t \to S(t)$ est une application continue de $\mathbb{Q}_+^*$ dans c_0, la sous-algèbre fermée engendrée par le semigroupe $(S(t))_{t\in\mathbb{Q}_+^*}$ n'est pas unitaire ; de plus*

$$\|S(t) - S(t(\gamma+1))\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$ si $\gamma \in \mathbb{Q}_+^*$ n'est pas entier, et

$$\|S(t) - S(t(\gamma+1))\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

pour $t < \frac{1}{\gamma}$ si $\gamma \geq 1$ est entier.

Preuve. On a

$$\|S(t) - S(t(\gamma+1))\| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

puisque $\frac{1}{p_n} \in]0,1[$ pour $n \geq 1$, $t > 0$. Supposons que

$$\|S(t) - S(t(\gamma+1))\| = \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

avec $t = p/q$, $\gamma = u/v \in \mathbb{Q}_+^*$.

On peut supposer que $p.g.c.d(p,q) = p.g.c.d(u,v) = 1$; il existe alors $n \geq 1$ tel que

$$\left|\frac{1}{p_n^t} - \frac{1}{p_n^{t(\gamma+1)}}\right| = \frac{1}{p_n^t} - \frac{1}{p_n^{t(\gamma+1)}} = \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

et on a
$$\frac{1}{p_n^t} = \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}.$$
Posons $m = p_n$, de sorte que m est premier. On a
$$\frac{1}{m^{p/q}} = \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{1}{(\frac{u}{v}+1)^{v/u}}$$

soit
$$m^{pu}v^{qv} = (u+v)^{qv}.$$
Comme u et v sont premier entre eux, v^{qv} et $u+v$ le sont aussi et $u+v$ divise m. Comme $\gamma \neq 0$, $u \geq 1$, $u+v \geq 2$, et on voit que $u+v = m$, donc
$$v^{qv}m^{pu} = m^{qv}.$$

Par conséquent
$$qv \geq pu, \quad \text{et} \quad v^{qv} = m^{qv-pu}.$$
Si $qv > pu$, v divise m. Si $v = m$ on aurait $pu = 0$, ce qui est absurde. Donc $v = 1$, ce qui est également le cas si $qv = pu$. On a alors
$$\gamma = \frac{u}{v} = u,$$

γ est entier, et
$$t = \frac{p}{q} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\gamma},$$
ce qui achéve la démonstration. $\square$

On peut aussi construire formellement un semigroupe $(S(t))_{t>0}$ dans c_0 vérifiant les conditions ci-dessus et tel que
$$\|S(t) - S(t(\gamma+1))\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \quad \text{pour} \ t \in \mathbb{Q}_+^*, \ \gamma \in \mathbb{Q}_+^*.$$

Il suffit de prendre
$$S(t) = \left(\frac{1}{(\pi n)^t}\right)_{n\geq 1}.$$

Chapitre 6

Explicitation des idempotents associés aux semigroupes fortement continus ne vérifiant pas $\|T(t) - T(s)\| \geq \theta(s/t)$ près de l'origine

Posons de nouveau, pour $\alpha > 0$,

$$\theta(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

Comme on l'a rappelé au Chapitre 3, il résulte de[16] que si la sous-algèbre fermée $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par un semigroupe (non nul) fortement continu $(T(t))_{t>0}$ d'opérateurs bornés sur un espace de Banach E ne possède aucun idempotent non nul, alors il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait, pour $0 < t < s \leq \delta$,

$$\|T(t) - T(s)\| \geq \theta(s/t).$$

Si la propriété ci-dessus n'est pas vérifiée, alors l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ contient une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ d'idempotents telle que $P_m P_n = P_m$ pour $n \geq m \geq 1$, et telle que pour tout $\phi \in \hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{T}}$ il existe $n_\phi \geq 1$ tel que $\phi(P_n) = 1$ pour tout $n \geq n_\phi$. On se propose ici de donner des formules explicites permettant de calculer ces idempotents.

Pour $0 < t < s$ on pose

$$m(s,t) = \frac{1}{\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{(s-t)}}} = e^{-\frac{\log(s)-\log(t)}{s-t}}.$$

On a pour $0 < t < s \leq 1$

$$m(s,t)^t - m(s,t)^s = \theta(s/t),$$

et

$$e^{-1/t} \leq m(s,t) \leq e^{-1/s}.$$

En particulier on a

$$m(s,t) \leq \frac{1}{e}. \tag{6.0.1}$$

Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe d'opérateurs fortement continus bornés sur un espace de Banach X, et soit A_T la sous algèbre fermée de $B(X)$ engendrée par $(T(t))_{t>0}$. Posons

$$\sigma_T = \{|\chi(T(1))|, \chi \in \widehat{A_T}\ \} \bigcup \{0\}.$$

On sait qu'il existe pour tout $\chi \in \widehat{A_T}$ un nombre réel α tel que

$$|\chi(T(t))| = e^{t\alpha}$$

pour tout $t > 0$, et on a :

$$|\chi(T(t))| = |\chi(T(1))|^t \text{ pour } \chi \in \widehat{A_T},\ \ t > 0.$$

Lemme 6.0.4 *Soit $T(t)_{t>0}$ un semigroupe fortement continu d'opérateurs bornés sur un espace de Banach X, et soit $a > 0$. On suppose qu'il existe deux réels s et t tels que*

$$\rho(T(t) - T(s)) < \theta(s/t),$$

avec $s > t > 0$,. Alors il existe $\lambda(a,s,t) \in]0,1]$ tel que, si l'on pose

$$\begin{cases} s' = \lambda(a,s,t)s \\ t' = \lambda(a,s,t)t. \end{cases}$$

on a

$$\rho(e^{-at'}T(t') - e^{-as'}T(s')) < \theta(s'/t') = \theta(s/t). \tag{6.0.2}$$

Preuve : Si le semigroupe est quasinilpotent il n'y a rien a démontrer.
Sinon on a

$$|\chi(T(t))| \neq \frac{1}{(\frac{s}{t})^{\frac{1}{\frac{s}{t}-1}}}$$

pour tout $\chi \in \widehat{A_T}$. Comme

$$|\chi(T(t))| = |\chi(T(1))|^t$$

on a

$$|\chi(T(1))| \neq \frac{1}{(\frac{s}{t})^{\frac{1}{s-t}}} = m(s,t) \notin \sigma_T.$$

Donc

$$\frac{\log(s) - \log(t)}{s-t} \notin \log(\sigma_T^{-1}).$$

Soit $a > 0$, posons

$$T_a(t) = e^{-ta}T(t).$$

On a

$$\sigma_{T_a} = e^{-a}\sigma_T$$

et

$$\sigma_T = e^a \sigma_{T_a}.$$

Comme

$$m(s,t) \notin \sigma_T,$$

on a

$$e^{-\frac{\log(s)-\log(t)}{s-t}-a} \notin \sigma_{T_a}.$$

Posons

$$\delta = \frac{\log(s)-\log(t)}{s-t}, \quad \lambda(a,s,t) = \frac{\delta}{a+\delta},$$

de sorte que

$$\lambda(a,s,t) \in \left]0,1\right].$$

On a

$$\frac{\delta}{\lambda(a,s,t)} = a+\delta.$$

Posons maintenant

$$\begin{cases} s' = \lambda(a,s,t)s \\ t' = \lambda(a,s,t)t. \end{cases}$$

On a

$$\frac{\log(s')-\log(t')}{s'-t'} = \frac{\delta}{\lambda(a,s,t)} = a+\delta = \frac{\log(s)-\log(t)}{s-t} + a.$$

Donc

$$\frac{\log(s')-\log(t')}{s'-t'} - a \notin \log(\sigma_T^{-1}),$$

et

$$\frac{\log(s')-\log(t')}{s'-t'} \notin \log[(e^{-a}\sigma_T)^{-1}] = \log(\sigma_{T_a}^{-1}),$$

et on a

$$\rho(T_a(t^{'}) - T_a(s^{'})) < \theta(s'/t') = \theta(s/t). \quad \square$$

Soit $T(t)_{t>0}$ un semigroupe fortement continu d'opérateurs bornés sur un espace de Banach X, tel que $\rho(T(1)) < 1$. Fixons s et t, avec $0 < t < s$. On pose, pour $\tau > 0$

$$(I - T(s-t))^\tau = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\tau(\tau-1)\cdots(\tau-k+1)}{k!}T(k(s-t)) \tag{6.0.3}$$

et,

$$(T(t)-T(s))^{\tau}=T(\tau t)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\tau(\tau-1)\cdots(\tau-k+1)}{k!}T(k(s-t)). \qquad (6.0.4)$$

Alors

$$(T(t)-T(s))^{\tau})_{t>0}$$

est un semigroupe fortement continu.
Soit $\alpha>1$, soit f_α la fonction entière définie par

$$f_\alpha(z)=e^{-(\alpha-1)z}-e^{-\alpha z},$$

et soit

$$g_\alpha : D(0,\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha})\to D(0,\log\frac{\alpha}{\alpha-1}),$$

la fonction holomorphe définie dans [16], qui vérifie

$$g_\alpha(0)=0 \text{ et } e^{g_\alpha(z)}-ze^{\alpha g_\alpha(z)}=1,$$

ce qui donne $(f_\alpha\circ g_\alpha)(z)=z$. Comme

$$\theta(\alpha)=\frac{(\alpha-1)}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

on a, d'après le lemme 2.2 de [16],

$$g_\alpha(\theta(\alpha)^{\alpha-1})=\log(\frac{\alpha}{\alpha-1}).$$

Le lemme suivant ne présente evidemment d'interêt que si les opérateurs V et W définis ci-dessous sont distincts. On pourrait certainement le déduire du lemme2.2.4, mais il est plus simple de donner ici une démonstration directe.

Lemme 6.0.5 *Soit $T(t)_{t>0}$ un semigroupe fortement continu d'opérateurs bornés sur un espace Banach X tel que $\rho(T(1))<1$. On suppose qu'il existe deux réels s, t tels que*

$$\rho(T(t)-T(s))<\theta(s/t)$$

avec $0<t<s$.
Posons

$$\begin{aligned}
\alpha &= s/t\\
U &:= T(t)-T(s)=T(t)\,(I-T(s-t))\\
V &:= -\log(I-T(s-t))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T(k(s-t))}{k}\\
W &:= g_\alpha(U^{\alpha-1}),
\end{aligned}$$

de sorte que

$$T(t) = Ue^V.$$

Alors

$$f_\alpha(V) = f_\alpha(W),$$

et

$$J := I - g'_\alpha(U^{\alpha-1}) \int_0^1 f'_\alpha(tV + (1-t)W)dt$$

est un idempotent de A_T *tel que*

$$J(W - V) = W - V.$$

De plus pour $\chi \in \widehat{A_T}$ *on a*

$$|\chi(T(t))| \neq \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}}, \quad et \ |\chi(V)| \neq \log(\frac{\alpha}{\alpha-1}),$$

et les conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\chi(V) \neq \chi(W)$

(*ii*) $|\chi(V)| > \log(\frac{\alpha}{\alpha-1})$

(*iii*) $|\chi(T(t))| > \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}}$

(*iv*) $\chi(J) = 1.$

Preuve : Comme $\rho(T(1)) < 1$, on a $\rho(T(t)) = [\rho(T(1))]^t < 1$.
On a :

$$\begin{aligned} f_\alpha(V) &= e^{-(\alpha-1)V} - e^{-\alpha V} \\ &= (I - T(s-t))^{\alpha-1} - (I - T(s-t))^\alpha \\ &= T(s-t)(I - T(s-t))^{\alpha-1} \\ &= T(t)^{\alpha-1}(I - T(s-t))^{\alpha-1} = U^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

et

$$f_\alpha(W) = e^{-(\alpha-1)W} - e^{-\alpha W} = (f_\alpha \circ g_\alpha)(U^{\alpha-1}) = U^{\alpha-1}.$$

On a donc

$$f_\alpha(V) = f_\alpha(W).$$

On pose
$$J := I - g_\alpha'(U^{\alpha-1})\int_0^1 f_\alpha'(tV+(1-t)W)dt,$$

$$\begin{aligned} y &= W - V, \\ u &= g_\alpha'(U^{\alpha-1})\int_0^1 (1-t)f_\alpha''(tV+(1-t)W)dt \end{aligned}$$

On a
$$yu = g_\alpha'(U^{\alpha-1})\int_0^1 (1-t)f_\alpha''(tV+(1-t)W)(W-V)dt,$$
et
$$g_\alpha'(U^{\alpha-1})f_\alpha'(g_\alpha(U^{\alpha-1})) = (f_\alpha \circ g_\alpha)'(U^{\alpha-1}) = I.$$
Posons
$$\Delta = \int_0^1 f_\alpha'(tV+(1-t)W)dt.$$
On obtient alors, par une simple intégration par parties,
$$yu = I - g_\alpha'(U^{\alpha-1})\Delta = J.$$
Posons
$$\varphi(t) = f_\alpha(tV+(1-t)W).$$

On a
$$\varphi'(t) = f_\alpha'(tV+(1-t)W)(V-W), \;\; \varphi(1) = f_\alpha(V), \;\; \text{et} \;\; \varphi(0) = f_\alpha(W).$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 = f_\alpha(V) - f_\alpha(W) &= \varphi(1) - \varphi(0) \\ &= \int_0^1 \varphi'(t)dt = (V-W)\int_0^1 f_\alpha'(tV+(1-t)W)dt \\ &= -y\Delta. \end{aligned}$$

On a
$$Jy = y - g_\alpha'(U^{\alpha-1})y\Delta = y,$$
et
$$J^2 = y^2u^2 = Jyu = yu = J.$$

Soit $\chi \in \widehat{A_T}$. On a

$$\begin{aligned}||\chi(T(t))| - |\chi(T(t))|^\alpha| &= ||\chi(T(t))| - |\chi(T(s))|| \\ &\leq |\chi(T(t) - T(s))| \\ &< \theta(\alpha),\end{aligned}$$

donc
$$|\chi(T(t))| \neq \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

D'autre part
$$\chi(J) = 1 - g'_\alpha(\chi(U^{\alpha-1})) \int_0^1 f'_\alpha(t\chi(V) + (1-t)\chi(W))dt.$$

Si $\chi(V) \neq \chi(W)$ on a

$$\begin{aligned}\chi(J) &= 1 - g'_\alpha(\chi(U^{\alpha-1}))\frac{1}{\chi(V) - \chi(W)} \int_0^1 f'_\alpha(t\chi(V) + (1-t)\chi(W))(\chi(V) - \chi(W))dt \\ &= 1 - g'_\alpha(\chi(U^{\alpha-1}))\frac{f_\alpha(\chi(V)) - f_\alpha(\chi(W))}{\chi(V) - \chi(W)}.\end{aligned}$$

Comme
$$\chi(f_\alpha(V)) - \chi(f_\alpha(W)) = \chi(f_\alpha(V) - f_\alpha(W)) = \chi(0) = 0,$$
on voit que dans ce cas
$$\phi(J) = 1.$$

Si $\chi(V) = \chi(W)$ on a
$$\begin{aligned}\chi(J) &= 1 - g'_\alpha(\chi(U^{\alpha-1})) \int_0^1 f'_\alpha(\chi(W))dt \\ &= 1 - g'_\alpha(\chi(U^{\alpha-1}))f'_\alpha(\chi(W)) = 1 - \chi(g'_\alpha(U^{\alpha-1}f'_\alpha(W))) = 1 - \chi(I) = 0.\end{aligned}$$

Donc (i) et (iv) sont équivalents.

On vient d'utiliser le fait que $f_\alpha(V) = f_\alpha(W)$. Comme les coefficients de Taylor de g_α en 0 sont positifs, et comme
$$|\chi(U^{\alpha-1})| = |\chi(U)|^{\alpha-1} < \theta(\alpha)^{\alpha-1} = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha},$$

on a

$$|\chi(W)| < g_\alpha(\theta(\alpha)^{\alpha-1}) = \log\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Si

$$|\chi(V)| \leq \log(\frac{\alpha}{\alpha-1}),$$

on a

$$\chi(V) = \chi(W),$$

puisque f_α est injective sur le disque fermé $\bar{D}(0, \log(\frac{\alpha}{\alpha-1}))$. Donc

$$|\chi(V)| \neq \log(\frac{\alpha}{\alpha-1}),$$

pour tout $\chi \in \widehat{A_T}$, et on voit que (ii) est vérifié si (i) est vérifié. Comme

$$|\chi(W)| < log(\frac{\alpha}{\alpha-1})$$

pour tout $\chi \in \hat{A}_T$, on en déduit que (i) et (ii) sont équivalents.

Les coefficients de Taylor à l'origine de la fonction

$$x \to -\log(1-x)$$

sont positifs. Si

$$|\chi(T(t))| < \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}},$$

on a

$$|\chi(T(s-t))| < \left(\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha}$$

et

$$|\chi(V)| < -\log(1-\frac{1}{\alpha}) = \log(\frac{\alpha}{\alpha-1}).$$

Réciproquement, si

$$|\chi(V)| < \log(\frac{\alpha}{\alpha-1})$$

on a

$$|\chi(T(t))| = |\chi(Ue^V)| \leq |\chi(U)|e^{|\chi(V)|} \leq \theta(\alpha)\frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

Comme

$$|\chi(V)| \neq \log\frac{1}{\alpha-1},$$

on voit que (ii) et (iii) sont équivalents, ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

Nous utiliserons également le résultat facile suivant :

Lemme 6.0.6 *Soit $T(t)_{t>0}$ un semigroupe d'opérateurs fortement continu. Si 0 est un point isolé de σ_T, et s'il existe deux suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels vérifiant $0 < t_n < s_n$,*

$$\|T(t_n) - T(s_n)\| < \theta(\frac{s_n}{t_n})$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = 0,$$

alors l'algèbre A_T possède une unité J.

Preuve : Comme 0 est un point isolé de σ_T, et comme $\chi(T(1)) \neq 0$ pour tout $\chi \in \widehat{A_T}$, l'ensemble $\widehat{A_T}$ est compact pour la topologie de Guelfand. Il résulte alors des théorèmes 3.6.3 et 3.6.6 de [31] qu'il existe un idempotent J de A_T tel que $\chi(J) = 1$ pour tout $\chi \in \widehat{A_T}$.
Soit $B = A_T/JA_T$ et soit

$$\pi : A_T \to B$$

la surjection canonique. Alors B est radicale, et on a

$$\|\pi(T(t_n)) - \pi(T(s_n))\| < \theta(\frac{s_n}{t_n}).$$

Il résulte alors du théorème principal de [16] que $\pi(T(t)) = 0$ pour tout $t > 0$.
Comme B est engendrée par le semigroupe $(\pi(T(t)))_{t>0}$, on a $B = \{0\}$, $A_T = JA_T$, et A_T est unitaire d'unité J. $\square$

Théorème 6.0.3 *Soit $T(t)_{t>0}$ un semigroupe d'opérateurs fortement continu non nul. On suppose qu'il existe deux suites $(t_n)_{n\geq 1}$, et $(s_n)_{n\geq 1}$ de réels vérifiant*

$$0 < s_n < t_n, \lim_{n\to+\infty} s_n = 0$$

et

$$\|T(t_n) - T(s_n)\| < \theta(\frac{s_n}{t_n}),$$

de sorte que $(T(t))_{t>0}$ n'est pas quasinilpotent.
Soit $a > \rho(T(1))$, et posons $\tilde{T}(t) = e^{-at}T(t)$ pour $t > 0$. Alors il existe deux suites $(\tilde{t}_n)_{n\geq 1}$, et $(\tilde{s}_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs tels que

$$0 < \tilde{t}_n < \tilde{s}_n < s_n \text{ pour } n \geq 1, \ \tilde{s}_n/\tilde{t}_n = s_n/t_n$$

vérifiant

$$\rho(\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n)) < \theta(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}).$$

De plus si on pose, pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} U_n &:= \tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n) = \tilde{T}(\tilde{t}_n)\left(I - \tilde{T}((\tilde{s}_n - \tilde{t}_n))\right) \\ V_n &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{T}(k(\tilde{s}_n - \tilde{t}_n))}{k} \\ W_n &:= g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}} U_n^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}}, \end{aligned}$$

$$P_n := I - g'_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}\left((\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n))^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}}\right) \int_0^1 f'_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}\left(tV_n + (1-t)\left(g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}(\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n))^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}}\right)\right) dt,$$

on a les propriétés suivantes :

1. *$(P_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'idempotents de A_T telle que $P_n(V_n - W_n) = V_n - W_n$ pour $n \geq 1$, et pour tout compact $K \subset \widehat{A_T}$, il existe $n_K \geq 1$ tel que $\chi(P_n) = 1$ pour tout $\chi \in K$ et pour tout $n \geq n_K$.*
2. *L'algèbre fermée engendrée par $(P_nT(t))_{t>0}$ est unitaire d'unité P_n pour tout $n \geq 1$.*

Preuve : Il résulte de [16] que le semigroupe $(\tilde{T}(\tilde{t}_n))_{\tilde{t}_n>0}$ n'est pas quasinilpotent. L'existence des suites $(\tilde{t}_n)_{n\geq 1}$, et $(\tilde{s}_n)_{n\geq 1}$ verifiant les conditions demandées résulte du lemme 6.0.4. On déduit alors du lemme 6.0.5 que P_n est un idempotent de A_T pour $n \geq 1$, et que

$$P_n(V_n - W_n) = V_n - W_n.$$

De même que plus haut, on a $\tilde{T}(t_n) = U_n e^{V_n}$. On pose

$$R_n = (\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n))exp\left[g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}\left[\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n)\right]^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}}\right] = U_n e^{W_n}.$$

Comme

$$\rho(\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n)) < \theta(\tilde{s}_n/\tilde{t}_n) = (\tilde{s}_n - \tilde{t}_n)\frac{\tilde{t}_n^{\frac{\tilde{t}_n}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}}{\tilde{s}_n^{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}},$$

et comme les coefficients de $g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}$ en 0 sont positifs, on a

$$\rho(R_n) < \theta(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n})exp\left[g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}}(\theta(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}))^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}}\right] = \frac{1}{(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n})^{\frac{\tilde{t}_n}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}}.$$

Donc
$$\rho(R_n) = (\rho(R_n))^{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}} < \frac{1}{\left(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}\right)^{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}} \leq \frac{1}{e}.$$

D'autre part , comme le semigroupe $(\tilde{T}(\tilde{t}_n))_{n\geq 1}$ n'est pas quasinilpotent
$$\lim_{n\to 0^+} \rho(\tilde{T}(t)) = 1$$
et il existe $n_0 \geq 1$ tel que
$$\rho(\tilde{T}(\tilde{s}_n)) > \frac{1}{e} \ \text{ pour } n \geq n_0.$$
Comme
$$\rho(\tilde{T}(\tilde{s}_n)) = \rho(\tilde{T}(\tilde{t}_n))^{\frac{s_n}{t_n}},$$
on voit que
$$R_n \neq \tilde{T}(t_n) \ \text{ pour } \ n \geq n_0.$$
En particulier $V_n \neq W_n$ pour $n \geq n_0$.
Posons
$$\alpha_n = \tilde{s}_n/\tilde{t}_n.$$
Soit $\chi \in \widehat{A_T}$.

Il résulte également du lemme 6.0.5 que
$$\chi(P_n) = 1$$
si
$$|\chi(\tilde{T}(\tilde{t}_n))| > \frac{1}{\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n - 1}}},$$
c'est-à-dire si
$$\chi(\tilde{T}(\tilde{s}_n)) > \frac{1}{\left(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}\right)^{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}}.$$
Comme
$$\frac{1}{\left(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}\right)^{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}} \leq \frac{1}{e},$$
on voit en particulier que
$$|\chi(P_n)| = 1$$
si
$$|\chi(\tilde{T}(\tilde{s}_n))| > \frac{1}{e}.$$

Il est clair que si K est un compact de $\widehat{A_T}$ alors
$$\delta := \inf_{\varphi \in K} |\varphi(\tilde{T}(1))| > 0, \ \text{ et } \ |\chi(\tilde{T}(\tilde{s}_n))| \geq \delta^{\tilde{s}_n}.$$

On voit donc que $\varphi(P_n) = 1$ pour tout $\varphi \in K$ si $n \geq n_K$, où n_K est choisi de façon que

$$\delta^{\tilde{s}_n} > \frac{1}{e}.$$

Posons

$$\tilde{T}_n(t) = P_n \tilde{T}(t)$$

pour $t > 0$, et

$$\Omega_n = \left\{ \chi \in \widehat{A_T} : \ \chi(P_n) = 1 \right\}.$$

Toujours d'après le lemme 6.0.5, on a

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= \left\{ \chi \in \widehat{A_T} : \ \chi(\tilde{T}(\tilde{t}_n) > \frac{1}{(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n})^{\frac{\tilde{t}_n}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}} \right\} \\
&= \left\{ \chi \in \widehat{A_T} : \ \chi(\tilde{T}(1) > (\frac{1}{(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n})^{\frac{\tilde{t}_n}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}})^{\frac{1}{\tilde{t}_n}} = \frac{1}{(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n})^{\frac{1}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}} \right\}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tilde{T}_n} &= \left\{ \varphi(\tilde{T}_n(1)) \right\}_{\varphi \in \widehat{A_{T_n}}} \\
&= \left\{ \chi(P_n)\chi(\tilde{T}(1)) \right\}_{\chi \in \widehat{A_T}} \\
&= \{0\} \cup \left\{ \chi(\tilde{T}(1)) \right\}_{\chi \in \Omega_n},
\end{aligned}$$

donc

$$\sigma_{\tilde{T}_n} \cap \left] 0, \frac{1}{(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n})^{\frac{1}{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}}} \right[= \phi.$$

Comme

$$\sigma_{T_n} = e^a \sigma_{\tilde{T}_n},$$

on voit que 0 est un point isolé de σ_{T_n}. Il résulte alors du lemme 6.0.6 que l'algèbre engendrée par $(P_n T(t))_{t>0}$, qui coïncide avec celle engendrée par $(P_n \tilde{T}(t))_{t>0}$ est unitaire d'unité P_n. $\square$

Bibliographie

[1] R. Arens and A. P. Calderón, *Analytic functions of several Banach algebra elements*, Ann. of Math. (2) **62** (1955), 204–216.

[2] Z. Bendaoud, J. Esterle, and A. Mokhtari, *Distances entre exponentielles et puissances d'éléments de certaines algèbres de Banach.*, Archiv der Mathematik **89** (2007), no. 3, 243–253.

[3] M. Berkani, *Inégalités et propriétés spectrales dans les algèbres de Banach, thèse de 3éme cycle, Bordeaux,* 1983.

[4] M. Berkani, *Inégalités dans les algèbres de Banach*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B **42** (1990), no. 1, 105–116.

[5] ______, *Idempotents dans les algèbres de Banach*, Studia Math. **120** (1996), no. 2, 155–158.

[6] M. Berkani and J. Esterle, *Banach algebras with left sequential approximate identities close to their square*, Operators in indefinite metric spaces, scattering theory and other topics (Bucharest, 1985), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 24, Birkhäuser, Basel, 1987, pp. 29–40.

[7] M. Berkani, J. Esterle, and A. Mokhtari, *Distance entre puissances d'une unité approchée bornée*, J. London Math. Soc. (2) **67** (2003), no. 2, 461–480.

[8] M. Berkani and M. Sarih, *Extension de certaines inegálités dans les algébres de Banach*, Functional analysis with current applications in science, technology and industry (Aligarh, 1996), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 377, Longman, Harlow, 1998, pp. 56–69.

[9] M.D. Blake, *A spectral bound for asymptotically norm-continuous semigroups*, J. Operator Theory **45** (2001), no. 1, 111–130.

[10] G. Chilov, *Analyse mathématique : fonctions d'une variable. 3e partie*, Éditions Mir, Moscow, 1973, Traduit du russe par Vitali Kharine.

[11] K.J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 194, Springer-Verlag, New York, 2000, With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.

[12] J. Esterle, *Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras*, Radical Banach algebras and automatic continuity (Long Beach, Calif., 1981), Lecture Notes in Math., vol. 975, pp. 66–162.

[13] ______, *Elements for a classification of commutative radical Banach algebras*, Radical Banach algebras and automatic continuity (Long Beach, Calif., 1981), Lecture Notes in Math., vol. 975, 1983, pp. 4–65.

[14] ______, *Zero-$\sqrt{3}$ and zero-2 laws for representations of locally compact abelian groups*, Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **38** (2003), no. 5, 11–22.

[15] ______, *Zero-one and zero-two laws for the behavior of semigroups near the origin*, Banach algebras and their applications, Contemp. Math., vol. 363, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 69–79.

[16] ______, *Distance near the origin between elements of a strongly continuous semigroup*, Ark. Mat. **43** (2005), no. 2, 365–382.

[17] J. Esterle and A. Mokhtari, *Distance entre éléments d'un semi-groupe dans une algèbre de Banach*, J. Funct. Anal. **195** (2002), no. 1, 167–189.

[18] W. Feller, *On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators*, Ann. of Math. (2) **58** (1953), 166–174.

[19] W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 4, 851–874.

[20] G. N. Hile and W. E. Pfaffenberger, *Generalized spectral theory in complex Banach algebras*, Canad. J. Math. **37** (1985), no. 6, 1211–1236.

[21] ______, *Idempotents in complex Banach algebras*, Canad. J. Math. **39** (1987), no. 3, 625–630.

[22] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974, Third printing of the revised edition of 1957, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI.

[23] S. C. Hille, *Continuity of the restriction of C_0-semigroups to invariant Banach subspaces*, Integral Equations Operator Theory **53** (2005), no. 4, 597–601.

[24] N. Kalton, S. Montgomery-Smith, K. Oleszkiewicz, and Y. Tomilov, *Power-bounded operators and related norm estimates*, J. London Math. Soc. (2) **70** (2004), no. 2, 463–478.

[25] J. Malinen, O. Nevanlinna, V. Turunen, and Z. Yuan, *A lower bound for the difference of powers of linear operators*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **23** (2007), no. 4, 745–748.

[26] A. Mokhtari, *Distance entre éléments d'un semi-groupe continu dans une algèbre de Banach, thèse de Doctorat, Bordeaux,* 1988.

[27] A. Mokhtari, *Distance entre éléments d'un semi-groupe continu dans une algèbre de Banach*, J. Operator Theory **20** (1988), no. 2, 375–380.

[28] A. Pazy, *Semigroups of operators in Banach spaces*, Equadiff 82 (Würzburg, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1017, pp. 508–524.

[29] ———, *Approximations of the identity operator by semigroups of linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **30** (1971), 147–150.

[30] ———, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[31] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, The University Series in Higher Mathematics, D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, 1960.

[32] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[33] ———, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[34] ———, *Fourier analysis on groups*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.

[35] A. M. Sinclair, *Bounded approximate identities, factorization, and a convolution algebra*, J. Funct. Anal. **29** (1978), no. 3, 308–318.

[36] ———, *Cohen's factorization method using an algebra of analytic functions*, Proc. London Math. Soc. (3) **39** (1979), no. 3, 451–468.

[37] Z. Słodkowski, W. Wojtyński, and J. Zemánek, *A note on quasinilpotent elements of a Banach algebra*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), no. 2, 131–134.

[38] P. H. You, *Characteristic conditions for a c_0-semigroup with continuity in the uniform operator topology for $t > 0$ in Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), no. 4, 991–997.

[39] J. Zemánek, *A note on the radical of a Banach algebra*, Manuscripta Math. **20** (1977), no. 2, 191–196.

[40] ———, *Idempotents in Banach algebras*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), no. 2, 177–183.

Résumé

Le but de cette thèse est, d'une part d'étudier certaines inégalités valables dans les algèbres de Banach ne possédant aucun idempotent non nul, et d'autre part d'expliciter des idempotents dans les algèbres de Banach ne vérifiant pas ces inégalités. On obtient des inégalités de ce type concernant la norme de $exp(x) - exp((\gamma+1)x)$ et la norme de $1+x-(1+x)^{\gamma+1}$ pour $\gamma > 0$. On améliore également la condition de Esterle-Mokhtari concernant la norme de $T(t) - T((n+1)t)$, condition qui permet de conclure qu'un semigroupe $(T(t))_{t>0}$ admet une limite en norme à l'origine, quand $n \geq 1$ est un entier. On donne enfin des formules explicites permettant de construire une suite exhaustive $(P_n)_{n\geq 1}$ d'idempotents dans l'algèbre de Banach engendrée par un semigroupe fortement continu ne vérifiant pas la minoration $\|T(t)-T(s)\| \geq (s-t)\dfrac{s^{\frac{s}{s-t}}}{t^{\frac{t}{s-t}}}$ au voisinage de l'origine.

Mots-clés : semi groupes, semi groupes fortements continus, Algèbres de Banach, idempotents

Abstract

The main objectives of this thesis consist

1. In studying inegalities which are valid in Banach algebras which do not possess any nonzero idempotent .
2. In constructing explicitly idempotents in Banach algebras for which such inequalities are not satisfied.

We obtain inequalities of this type concerning the norm of $exp(x) - exp((\gamma+1)x)$ and the norm of $1+x-(1+x)^{\gamma+1}$ for $\gamma > 0$.
We also improve a condition of Esterle-Mokhtari concerning the norm of $T(t)-T((n+1)t)$, condition which implies that a semigroup $(T(t))_{t>0}$ admits a limit in norm at the origin, when $n \geq 1$ is an integer.
We also give explicit formulae which allow to compute an exhaustive sequence $(P_n)_{n\geq 1}$ of idempotents in the Banach algebra generated by a strongly continuous semigroup for which the condition $\|T(t)-T(s)\| \geq (s-t)\dfrac{s^{\frac{s}{s-t}}}{t^{\frac{t}{s-t}}}$ is not everywhere satisfied near the origin.

Keywords : semigroups, strongly continuous semigroup, Banach algebras, idempotents.