N° d'ordre : 3006

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

École Doctorale de Mathématiques et Informatiques

par

James SILIPO

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Mathématiques Pures

Systèmes de Sommes d'Exponentielles à Spectres Réels et Structure de leurs Amibes

---

Soutenue le mardi 12 Juillet 2005

Après avis de :

M. Passare, Professeur	Université de Stokholm (Suède)	Rapporteur
A. Rashkovskii, Professeur	Université de Stavanger (Norvège)	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

I. Itenberg, Professeur	Université Louis Pasteur, Strasbourg	Président
C. Bavard, Professeur	Université Bordeaux I	Rapporteur
A. Rashkovskii, Professeur	Université de Stavanger (Norvège)	Examinateur
A. Yger, Professeur	Université Bordeaux I	Examinateur

- 2005 -

A mia madre

Remerciements.

Il m'est très difficile de citer tous ceux qu'au long de ces années ont contribué d'une façon ou d'une autre à l'achèvement de ce travail, je voudrais donc qu'ils puissent tous trouver ici la place que leur est due.

C'était en 1998, lors de ma troisième année d'études à l'Université de la Calabre (Italie), que la Professeur Delly Fabiano m'a proposé son aide pour que je poursuive ma formation à l'étranger. Depuis ce moment elle n'a pas cessé de croire en moi, pour cela je la remercie de tout mon coeur. Je la remercie aussi de m'avoir présenté au Professeur Jacques Guenot, duquel j'ai beaucoup appris et qui m'a paternellement accompagné dans le monde de la recherche en dirigeant mon mémoire de maîtrise ; à lui aussi mon grand merci pour l'aide qu'il m'a constamment accordée.

Une fois encore, je dois remercier Delly pour m'avoir présenté au Professeur Alain Yger. Une liste des choses qu'Alain m'a offertes pendant ces cinq dernières années d'études ne pourrait pas rendre compte de la richesse de contenus scientifiques et humains dont il m'a fait cadeaux. A partir du français, dont au début je ne parlais pas un mot et que, (probablement sans le savoir), il m'a quasiment enseigné, pour arriver aux Mathématiques qu'il a su me transmettre avec l'originalité, la rigueur et la patiences qui lui sont propres. C'est avec mon respect que je le remercie de tout cela et de tout le temps précieux qu'il a consacré à corriger mes nombreuses erreurs. Je voudrais que ce travaille puisse mériter ses efforts, être digne de son appréciation, et devenir l'expression concrète de ma plus grande reconnaissance.

Merci aussi à August Tsikh et Alekos Vidras ainsi qu'à Michel Balzard, Alexandru Dimca, Alain Henaut et Lorenzo Ramero de m'avoir aidé, d'une manière plus ou moins directe, à achever cette thèse.

Un remerciement particulier est du à Boris Kazarnovskiĭ, que je n'ai connu que par correspondance électronique et qui, pourtant, a toujours répondu gentiment et ponctuellement à des tas de questions que je lui posait au sujet de ses travaux.

Un grand merci va aussi aux organismes qui m'ont accordé les allocations de recherche pendant ces années de thèse, l'Institut National d'Hautes Études Mathématiques *Francesco Severi* de Rome ainsi que le Bureau Scientifique de l'Ambassade de France en Italie.

Je remercie mes deux rapporteurs, Mikael Passare et Alexander Rashkovskii, qu'avec leurs suggestions m'ont permis d'améliorer mon manuscrit ainsi que tous les membres du jury, Christophe Bavard, Ilia Itenberg, Alexander Rashkovskii et Alain Yger, qui m'ont fait l'honneur d'être présent le jour de la soutenance.

Je souhaite aussi exprimer mon merci à tous les collègues doctorants, qui pendants ces années m'ont accueilli fraternellement parmi eux. Pour eux tous j'en citerai quatre avec qui j'ai eu l'honneur de partager une amitié particulièrement sincère, Nabil Aboudi, Maciej Denkowski, Oswaldo Velasquez Castañon et Matthieu Gendulphe.

Je remercie tous les amis connus en France, Ruven, Isabelle, Philippe, Sylvain, Bibiana, María, Thierry, Carolina, Jimena, Nino, Roberto, "Capo," Ciccio, Roberto, Charo et Donatella mais surtout Luis, Claudio et Carmina pour leur amitié et pour les moments inoubliables de nos promenades, nos journées et nos soirées à Bordeaux.

Merci beaucoup aussi à mes amis italiens, Massimo, Alessandro, Luciana, Maria, Francesca, Rita, Rosaria, Marco, Mariateresa, Francesca, Osvaldo, Pasquale, Luigi, Nico, Chiara, Marco et Simona qui pendant ces années d'absence m'ont jamais oublié.

Merci à Rosaria, pour le sentiment spécial et sincère que, malgré tout, elle a continué à me témoigner pendant ces années.

Merci infiniment à ma famille aimée, Tiziana, Dino, Elio, Alessandra, Ennio, Teresa, Justine, Danilo, Gianmarco, Danilo, Raffaele, Doriana, Andrews, Paola, Andrew, Zaira, Gianfranco, Antonio, dont l'amour et le support constant m'ont fait surmonter les moments plus difficiles et apprécier les plus sereins.

Enfin, je réserve ma gratitude plus intime à ma mère, le plus grand cadeau que la vie m'a jamais offert. C'est à elle et à tout l'amour dont elle a toujours comblé mon coeur, que je veux dédier ces années de travail, de difficulté et de joie.

James Silipo

Bordeaux, Juillet 2005

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Le but de ce travaille est d'étudier les amibes dans le cadre des sommes d'exponentielles à fréquences réelles. Il est articulé en quatre chapitres, desquels les deux premiers sont indispensables au troisième tandis que le dernier sert de conclusion. Le premier chapitre présente le *pseudovolume mixte de Kazarnovskiĭ*, introduit dans [17] pour l'étude des *sommes d'exponentiels* auxquelles est dédié le deuxième chapitre. Il s'agit d'une notion très intéressante, passée relativement inaperçue, qui généralise le volume mixte de Minkowski au cas de corps convexes de $\mathbb{C}^n$ prenant en compte la structure complexe de l'espace ambiant. Puisque dans le texte original [17] le pseudovolume mixte de Kazarnovskiĭ est traité de manière synthétique, on a voulu donner ici une présentation plus détaillée et absolument élémentaire qui rend compte de son caractère combinatoire, différentiel, et courantiel. Le chapitre deux, concerne les sommes d'exponentielles, soit les fonctions entières sur $\mathbb{C}^n$ de la forme

$$f(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} c_\lambda e^{\langle z,\lambda \rangle} ,$$

où $\Lambda_f \subset \mathbb{C}^n$ est un sous-ensemble fini (appelé le spectre de f) et $c_\lambda \in \mathbb{C}^*$, pour tout $\lambda \in \Lambda_f$. Sur le fil conducteur de l'article [17], on a envisagé d'étudier des propriétés des ensembles des zéros dans $\mathbb{C}^n$ des systèmes finis (et non vides) de sommes d'exponentielles (non nulles) appartenant à la classe des systèmes *réguliers*. Il s'agit d'une classe de systèmes de sommes d'exponentielles dont l'ensemble des zéros est soit vide soit une intersection complète. Il s'avère que le pseudovolume de Kazarnovskiĭ contrôle le comportement asymptotique de l'ensemble des zéros d'un système de cette classe et que ce comportement ne dépend que de la géométrie des spectres des sommes d'exponentielles du système. Encore une fois on a voulu compléter les esquisses des preuves fournies par Kazarnovskiĭ [17], en se limitant, par contre, aux résultats utilisés dans le troisième chapitre, qui constitue la partie plus original de cette thèse et que l'on va donc décrire plus en détail.

Dans le troisième chapitre on s'est occupé des systèmes de sommes d'exponentielles à spectres inclus dans $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'à la structure de leurs *amibes* (au sens de Favorov). Bien que ces formes de vie unicellulaires soient bien connues en biologie, l'emploi de l'expression "amibe" dans le vocabulaire de la recherche en mathématiques est tout récent et il fait référence à une région du plan ayant une forme semblable à celle d'une amibe au sens biologique du terme, soit la forme d'un organisme ayant plusieurs trous et des tentacules droites et pointues qui atteignent l'infini le long de certains directions privilégiées, le nombre de trous et de tentacules étant supposé fini. Ce terme a trouvé son acception mathématique en 1994 dans le riche ouvrage [12] où il dénomme un outil introduit pour l'étude des développements en série de Laurent des fonctions rationnelles du type p^{-1}, où p est un polynôme de Laurent en n variables à coefficients complexes.

Si $\mathrm{Log} : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application donnée, pour $u \in (\mathbb{C}^*)^n$, par

$$\mathrm{Log}\,(u) := (\log|u_1|, \ldots, \log|u_n|)\,,$$

et $V(p)$ est l'ensemble des zéros de p dans le tore $(\mathbb{C}^*)^n$, l'amibe $\mathcal{A}_p$ de p est l'image dans $\mathbb{R}^n$ de l'ensemble $V(p)$ sous l'application Log.

La notion d'amibe a connu une grand succes pendant les dix dernières années surtout grâce aux travaux de l'école suédoise, russe et ukrainienne, dont on cite Forsberg, Passare, Rullgård, Tsikh, Mikhalkin, Itenberg, Ronkin, Favorov et Rashkovskiĭ. Leurs travaux ont fourni des études plus raffinées et des généralisations diverses de la notion classique d'amibe, notamment en Analyse complexe et en Géométrie tropicale.

Pour donner une idée des questions auxquelles on s'est intéressé, on va commencer par rappeler un résultat montré dans [12].

Proposition 0.0.1. *Le complémentaire $\mathcal{A}_p^c$ de l'amibe d'un (seul) polynôme de Laurent p n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et chacune de ces composantes est convexe.*

La Proposition 0.0.1 n'est plus vraie si l'on remplace p par une fonction holomorphe sur $(\mathbb{C}^*)^n$ ayant une forme plus compliquée où même si l'on prend à un système P de polynômes de Laurent. En particulier, les composantes connexes de $\mathcal{A}_P^c$ ne sont plus en général des ensembles convexes ; cependant, Henriques [15] a observé que $\mathcal{A}_P^c$ vérifie une propriété plus faible qui s'exprime en des termes homologiques de la manière suivante.

Définition 0.0.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un $(k+1)$-sous-espace affine orienté et $Y \subseteq S$ un sous-ensemble. Une classe d'homologie (singulière) réduite dans $\tilde{H}_k(Y,\mathbb{Z})$ est dite* non négative *si, pour tout point $x \in S \setminus Y$, son image (sous le morphisme induit par l'inclusion) dans $\tilde{H}_k(S \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ est non négative. Le sous-ensemble des classes non négatives du groupe $\tilde{H}_k(Y,\mathbb{Z})$ est noté $\tilde{H}_k^+(Y,\mathbb{Z})$.*

*Un sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit k-*convexe *si pour tout $(k+1)$-sous-espace affine orienté $S \subset \mathbb{R}^n$, la classe nulle est la seule classe non négative de $\tilde{H}_k(S \cap X, \mathbb{Z})$ qui appartient au noyau du morphisme*

$$\tilde{H}_k(S \cap X, \mathbb{Z}) \to \tilde{H}_k(X, \mathbb{Z})$$

induit par l'inclusion.

Théorème 0.0.1. *Soit $P \subset \mathbb{C}[z^{\pm 1}, \ldots, z^{\pm 1}]$ un système de polynômes de Laurent tel que $V(P) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ a codimension $(k+1)$. Alors, $\mathcal{A}_P^c$ est un sous-ensemble k-convexe.*

Cet énoncé peut se lire comme un résultat d'injectivité partielle du morphisme

$$\iota_{k,S} : \tilde{H}_k(S \cap \mathcal{A}_P^c, \mathbb{Z}) \to \tilde{H}_k(\mathcal{A}_P^c, \mathbb{Z})$$

pour chaque $(k+1)$-sous-espace affine orienté $S \subset \mathbb{R}^n$. Si $k = 0$, les morphismes $\iota_{0,S}$ correspondant sont effectivement tous injectifs (et dans ce cas le Théorème 0.0.1 se réduit à la Proposition 0.0.1), par contre, dès que $k > 0$, les morphismes $\iota_{k,S}$ ne le sont plus que dans un sens conjectural, (voir [29]).

Les travaux de Ronkin et Favorov autour des amibes soulèvent des questions nouvelles et tout particulièrement intéressantes dans l'étude des certains sous-ensembles analytiques globaux de $\mathbb{C}^n$. En fait, les articles [33] et [9] adaptent la notion d'amibe au cadre des fonctions holomorphes presque périodiques définies dans les domaines de $\mathbb{C}^n$ du type $T_\Omega := \mathbb{R}^n + i\Omega$, où Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit de la classe $AP(T_\Omega)$ des fonctions $g \in \mathcal{O}(T_\Omega)$ telles que l'ensemble $\{g(z+t) \in \mathcal{O}(T_\Omega) \mid t \in \mathbb{R}^n\}$ est relativement compact dans la topologie $\tau(T_\Omega)$ induite sur $\mathcal{O}(T_\Omega)$ par la convergence uniforme sur les sous-domaines du type T_D, avec $D \Subset \Omega$.

Définition 0.0.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe non vide. L'amibe d'un système fini $G \subset AP(T_\Omega)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ donné par*

$$A_G := \overline{\mathrm{Im}\, V(G)}\,,$$

où $V(G)$ dénote l'ensemble de zéros de G dans T_Ω et $\mathrm{Im} : T_\Omega \to \Omega$ est l'application de prise de partie imaginaire sur chaque coordonnée.

Dans Favorov [9] on trouve la Définition 0.0.2 dans le cas d'un système réduit à une seule fonction et afin d'éviter toute ambiguïté entre les notations $\mathcal{A}_P$ et A_G, on va dorénavant indiquer les amibes au sens de Favorov (soit au sens de la Définition 0.0.2) par le symbole $\mathcal{F}_G$.

Un cas bien particulier (mais néanmoins très important[1]) de fonctions de $AP(T_{\mathbb{R}^n}) = AP(\mathbb{C}^n)$ est celui des sommes d'exponentielles à fréquences[2] dans $i\mathbb{R}^n$, toutefois, puisque l'on va plutôt travailler avec les systèmes finis de sommes d'exponentielles à fréquences réelles, on préfère assumer la définition suivante.

Définition 0.0.3. *Soit F un système de sommes d'exponentielles (en abrégé un SSE) à fréquences réelles. L'amibe au sens de Favorov de F est l'ensemble*

$$\mathcal{F}_F := \overline{\mathrm{Re}\, V(F)}\,,$$

où $\mathrm{Re} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ *est l'application de prise de partie réelle sur chaque coordonnée.*

Comme remarqué dans [33] ou [9], si $g \in AP(T_\Omega)$, puisqu'elle est holomorphe, chaque composante connexe de l'ensemble $\mathcal{F}_g^c \cap \Omega$ est aussi convexe ; en outre, si g (resp. f) est une somme d'exponentielles à fréquences imaginaires pures (resp. réelles), l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathrm{Im}\, V(g)}$, (resp. $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathrm{Re}\, V(f)}$) n'a qu'un nombre fini de composantes connexes convexes, donc la Proposition 0.0.1 se traduit mot à mot au cadre des amibes des sommes d'exponentielles à fréquences imaginaires pures (resp. réelles).

Or, si l'on passe aux systèmes finis des fonctions de $AP(T_\Omega)$, la structure des amibes devient considérablement plus compliquée. Cependant, dans le cadre des systèmes finis de sommes d'exponentielles à fréquences réelles (resp. imaginaires pures), la théorie développée par Kazarnovskiĭ [17] (à laquelle on a consacré les deux premiers chapitres) permet, d'une part, de mieux comprendre la structure des amibes au sens de Favorov associées à ces systèmes et, d'autre part, d'adapter à ce cadre le résultat d'Henriques [15]. Pour énoncer notre résultat on a besoin de quelques notations que l'on reprendra dans le troisième chapitre.

Si F est un système (non vide) fini de sommes d'exponentielles (non nulles) à fréquences réelles, on associe à F le sous-groupe additif $\Xi_F \subset \mathbb{C}^n$

[1] Un résultat profond de la théorie des fonctions holomorphes presque périodiques (le théorème d'approximation de Bochner-Fejér) assure que toute fonction $g \in AP(T_\Omega)$ est la limite dans la topologie $\tau(T_\Omega)$ d'une suite convergeante de sommes d'exponentielles dont les spectres sont contenus dans $i\mathbb{R}^n$.

[2] Les fréquences d'une somme d'exponentielles sont les éléments de son spectre.

engendré par l'union des spectres des éléments de F. En suite on note $\mathrm{Ch}\ \Xi_F$ le groupe des homorphismes du groupe Ξ_F dans celui de nombres complexes de module égal à 1. Ainsi on obtient une famille $\{F_\chi\}_{\chi\in\mathrm{Ch}\ \Xi_F}$ de "perturbations" du système F, où, pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, le système F_χ est donné par les sommes d'exponentielles

$$f_\chi(z) := \sum_{\lambda\in\Lambda_f} c_\lambda \chi(\lambda) e^{\langle z,\lambda\rangle}\,,$$

lorsque $f = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} c_\lambda e^{\langle z,\lambda\rangle}$ parcourt le système F donné.

On introduit ainsi une nouvelle notion d'*amibe* en posant

$$\mathcal{Y}_F := \bigcup_{\chi\in\mathrm{Ch}\ \Xi_F} \mathrm{Re}\ V(F_\chi)$$

et l'on obtient le résultat suivant (voir Théorème 3.2.2 et Théorème 3.4.1 respectivement).

Théorème 0.0.2. *Soit F un système constitué par $(k+1)$ sommes d'exponentielles à fréquences réelles génériques, alors l'amibe $\mathcal{Y}_F$ coïncide avec l'amibe $\mathcal{F}_F$ au sens de Favorov et le complémentaire $\mathcal{F}_F^c$ de l'amibe de F est k-convexe dans $\mathbb{R}^n$.* □

La première partie fournit un expression plus concrète de l'adhérence de l'ensemble $\mathrm{Re}\ V(F)$ et elle implique, entre autres, le fait quelque part inattendu que

$$\overline{\mathrm{Re}\ V(F)} = \overline{\mathrm{Re}\ V(F_\chi)}\,,$$

pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$. La deuxième partie constitue le pendant exponentiel du Théorème 0.0.1.

La preuve de Théorème 0.0.2 utilise le Théorème 0.0.1 ainsi que la technique de perturbation par caractères introduite depuis longtemps par Alain Yger dans les travaux [38] et [39] (puis utilisés par Berenstein et Yger) pour montrer que certains systèmes d'équations de convolution possédaient la propriété de la synthèse spectrale. L'hypothèse de généricité sur les fréquences du système F se justifie par le fait que notre démonstration fait appel à une méthode d'approximation de F par des systèmes à fréquences dans $\mathbb{Q}^n$ et que cette méthode prétend un contrôle de la géométrie des fréquences de F et de systèmes approchants.

Le quatrième et dernier chapitre, présente les motivations qui nous ont conduit à cette étude ainsi que les conclusions et les perspectives possibles que l'on pourrait en tirer.

Chapitre 1

Le pseudovolume mixte de Kazarnovskiĭ

1.1 Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'étude de la notion de pseudovolume mixte selon Kazarnovskiĭ. Il s'agit d'un objet géométriquement très intéressant, introduit par Kazarnovskiĭ dans [17] comme un outil pour étudier les sommes d'exponentielles, et qui depuis a été très peu exploité. Dans [17] il joue un rôle accessoire par rapport au sujet central de l'article, donc ses propriétés principales y sont brièvement énoncées sans démonstrations détaillées. Le papier [18] fournit, entre autres, des méthodes courantielles qui permettent de construire le pseudovolume mixte plus explicitement que dans [17]. Malgré quelque apparition occasionnelle dans la literature, jusqu'à l'heure actuelle le pseudovolume mixte de Kazarnovskiĭ ne semble pas avoir obtenue l'attention qu'à notre avis il mérite en rapport au potentiel d'applications qu'il pourrait comporter. En effet, cette notion de pseudovolume mixte, d'une part, généralise le volume mixte ordinaire et, d'autre part, en garde la majorité des propriétés géométriques en lui donnant aussi une nouvelle présentation courantielle. En outre, comme remarqué dans [21], le pseudovolume mixte de Kazarnovskiĭ pourrait s'avérer très utile dans une théorie de l'intersection pour les sous-ensembles analytiques exponentiels globaux de $\mathbb{C}^n$.

Ce chapitre se compose de quatre sections (outre la présente), dont la première contient les définitions et les propriétés des corps convexes (et, en particulier, des polytopes) de $\mathbb{R}^n$ qui seront utiles dans la suite, les résultats énoncés étant parfois accompagnés d'une démonstration. La deuxième section propose, de façon très élémentaire, une construction générale sur les polytopes de l'espace $\mathbb{R}^n$, dont le pseudovolume de Kazarnovskiĭ et sa version mixte seront un cas particulier faisant l'objet de la troisième section, où l'on traitera en détail le cas polytopal. La quatrième et dernière section sera enfin dédiée à l'étude du pseudovolume sur d'autres classes de sous-ensembles de $\mathbb{C}^n$, comme celle de tous les corps convexes, ou celle des compacts à bord lisse. La présence de ce chapitre se justifie par le fait que les démonstrations proposées ici sont plus simples et détaillées que celles de [17] ou [18].

1.2 Corps convexes et polytopes

Pour tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$, on note $\operatorname{aff} A$ le plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ qui contient A, E_A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ sous-jacent à $\operatorname{aff} A$, $\dim A$ la dimension de E_A et, en outre, on note $\operatorname{relint} A$ et $\operatorname{relbd} A$ l'intérieur et la frontière de A par rapport à la topologie induite sur $\operatorname{aff} A$ par $\mathbb{R}^n$. On note aussi $\operatorname{lin} A$ le plus petit sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^n$ qui contient A et on l'appelle l'*enveloppe linéaire* de A.

Un *cône* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble non vide tel que, si $x, y \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, alors $x + y \in C$ et $\lambda x \in C$. Pour tout sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}^n$, on appelle *enveloppe positive* de A le plus petit cône de $\mathbb{R}^n$, (noté $\operatorname{pos} A$), qui contient A. Un *cône polyédral* dans $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe positive d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$, un cône polyédral est dit *fortement convexe* s'il ne contient pas de droites.

Un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si, pour tout $x, y \in A$, le segment de droite de sommets x et y est aussi contenu dans A. Tout cône donne un exemple d'ensemble convexe. Pour tout sous-ensemble $A \neq \varnothing$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle *enveloppe convexe* de A le plus petit sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, (noté $\operatorname{conv} A$), qui contient A. Un *polytope* dans $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble fini et non vide de $\mathbb{R}^n$; dans la suite $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$) dénote l'ensemble de tous les sous-ensembles convexes compacts (resp. les polytopes) de l'espace $\mathbb{R}^n$. Un élément de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est souvent appelé un *corps convexe*, l'ensemble vide en est un exemple[1].

Si $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, et $(\,,\,)$ dénote le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$, on appelle *fonction de support de* A la fonction

$$h_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, par $h_A(u) := \sup_{v \in A}(v, u)$. Vu que A est compact,

[1] On a $\operatorname{aff} \varnothing = E_\varnothing = \operatorname{relint} \varnothing = \operatorname{relbd} \varnothing = \operatorname{conv} \varnothing = \varnothing$ en outre, par convention, $\operatorname{pos} \varnothing = \{0\}$ et $\dim \varnothing = -1$.

sa fonction de support est bien définie, en outre h_A est une fonction sous-additive et positivement homogène de degré 1, c'est-à-dire, pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$,

$$h_A(u+v) \leqslant h_A(u) + h_A(v) \qquad \text{et} \qquad h_A(\lambda u) = \lambda h_A(u)\,.$$

Il est facile de voir qu'une fonction $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ positivement homogène de degré 1 est sous-additive si et seulement si elle est convexe. En particulier, on en déduit que, pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, la fonction h_A est continue, et qu'elle est linéaire si et seulement si A est réduit à un point.

À l'aide de la fonction de support d'un ensemble $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, on peut construire la famille $\{H_A(u)\}_{u \in \mathbb{R}^n}$ d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$ dite des *hyperplans de support pour* A, où, pour $u \in \mathbb{R}^n$,

$$H_A(u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, u) = h_A(u)\}\,.$$

On remarque que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $A \cap H_A(u) \neq \varnothing$ et $A \subset H_A^-(u)$, où $H_A^-(u)$ dénote le demi-espace négatif de frontière $H_A(u)$. D'autre part, si H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tel que $H \cap A \neq \varnothing$ et que $A \subset H^-$, on a que H est de la forme $H_A(u)$ pour un certain $u \in \mathbb{R}^n$. En fait, si $u \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}$ sont tels que $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, u) = h\}$ et $A \subset H^-$, alors, pour $x_o \in A \cap H$, on a $h = (x_o, u) = h_A(u)$, d'où $H = H_A(u)$.

Pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, la fonction de support h_A détermine l'ensemble A à cause de l'égalité (cf. [37])

$$A = \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n} H_A^-(u)\,.$$

Réciproquement, on peut montrer, (mais on ne le fera pas ici, cf. [37]) que, pour toute fonction réelle f de n variables réelles qui soit sous-additive et positivement homogène de degré 1, il existe un ensemble $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, et un seul, tel que $f = h_A$.

De plus la fonction de support permet d'introduire la notion de face d'un corps convexe de la façon suivante : étant donné $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, on appelle *face* de A toute intersection du type $A \cap H_A(u)$, pour $u \in \mathbb{R}$. Les ensembles $\varnothing$ et A sont appelés les *faces impropres* de A.

Si F est une face de $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, on écrit $F \preccurlyeq A$ et l'on voit aisément que toute face d'un polytope est encore un polytope. On remarque à ce propos que, si $\Delta \preccurlyeq \Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta' \preccurlyeq \Delta$, alors $\Delta' \preccurlyeq \Gamma$, mais si l'on remplace Γ par un corps convexe quelconque, cette implication n'est plus vraie, (il suffit de prendre un carré dans le plan de coté ℓ auquel on colle un demi-cercle de diamètre ℓ le long d'un des cotés).

Pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose

$$\mathcal{B}(A,k) := \{F \preccurlyeq A \mid \dim F = k\} .$$

Étant donnée $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et un sous-ensemble $F \subseteq A$, on appelle *angle extérieur de F par rapport à A* l'ensemble $K_{F,A}$, (plus simplement K_F s'il n'y a pas de confusion), donné par

$$K_{F,A} := \{u \in \mathbb{R}^n \mid F = A \cap H_A(u)\} .$$

Il est facile de vérifier que, si $F \preccurlyeq A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, alors K_F est non vide et, dans ce cas, il constitue un cône relativement ouvert,

$$K_F = \operatorname{relint}(K_F) ,$$

appelé le *cône dual* à F dont la dimension est égale à

$$\dim K_F = n - \dim F .$$

De plus, si $F_1, F_2 \preccurlyeq A$ sont distinctes, on a $K_{F_1,A} \cap K_{F_2,A} = \varnothing$, par contre, si $F_1, F_2 \preccurlyeq A$ et $F_1 \preccurlyeq F_2$, alors $K_{F_2,A} \subseteq \operatorname{relbd}(K_{F_1,A})$ et $K_{F_1,A} \subseteq K_{F_1,F_2}$.

Si B_n est la boule unité[2] de $\mathbb{R}^n$, $\varkappa_n := \operatorname{Vol}_n(B_n)$ et $F \subseteq A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ avec $\dim F = k$, on appelle *mesure angulaire de $K_{F,A}$* le nombre réel :

$$\psi_A(F) := \varkappa_{n-k}^{-1} \operatorname{Vol}_{n-k}(K_{F,A} \cap B_n) .$$

Cette notion est particulièrement intéressante lorsque A est un polytope et F une face de A, car, dans ce cas, la mesure angulaire de $K_{F,A}$ est indépendante du sous-espace affine contenant A utilisé pour la calculer.

Lemme 1.2.1. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant k \leqslant \dim A$ et $F \in \mathcal{B}(A,k)$. Pour tout entier $\dim A \leqslant m \leqslant n$ et tout sous-espace affine m-dimensionnel $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset S$, on a*

$$\varkappa_{n-k}^{-1} \operatorname{Vol}_{n-k}(K_F \cap B_n) = \varkappa_{m-k}^{-1} \operatorname{Vol}_{m-k}(K_F \cap E_S \cap B_n) .$$

[2]On rappelle à ce propos que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\varkappa_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(1 + (n/2))} ,$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler. En particulier $\varkappa_0 = 1$.

Démonstration. Si l'on décompose $\mathbb{R}^n$ comme $E_S \oplus {E_S}^{\perp}$, on voit aisément que $K_F = (K_F \cap E_S) + E_S^{\perp}$, donc

$$K_F \cap B_n = \big((K_F \cap E_S) + {E_S}^{\perp}\big) \cap B_n \subset \big(({E_F}^{\perp} \cap E_S) + {E_S}^{\perp}\big) \cap B_n\,,$$

alors, si x, y et z désignent les coordonnées dans E_F, ${E_F}^{\perp} \cap E_S$ et ${E_S}^{\perp}$ respectivement, l'ensemble $\big((K_F \cap E_S) + {E_S}^{\perp}\big) \cap B_n$ est égal à

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|^2 + \|z\|^2 < 1, \text{ avec } y \in K_F \cap E_S \cap B_n\}\,,$$

et le théorème de Fubini, fait que

$$\begin{aligned}
&\varkappa_{n-k}^{-1} \operatorname{Vol}_{n-k}(K_F \cap B_n)\\
&\quad = \varkappa_{n-k}^{-1} \int_{\{y \in K_F \cap E_S \mid \|y\|^2 < 1\}} \Big(\int_{\{z \in {E_S}^{\perp} \mid \|z\|^2 < 1 - \|y\|^2\}} dz \Big) dy\\
&\quad = \varkappa_{n-k}^{-1} \varkappa_{n-m} \int_{K_F \cap E_S \cap B_n} \big(\sqrt{1 - \|y\|^2}\big)^{n-m} dy\\
&\quad = \varkappa_{n-k}^{-1} \varkappa_{n-m} (m-k) \operatorname{Vol}_{m-k}(K_F \cap E_S \cap B_n) \int_0^1 \rho^{m-k-1} \big(\sqrt{1-\rho^2}\big)^{n-m} d\rho\,;
\end{aligned}$$

donc, pour conclure, il suffit de vérifier que

$$(m-k) \int_0^1 \rho^{m-k-1} \big(\sqrt{1-\rho^2}\big)^{n-m} d\rho = \varkappa_{n-k} (\varkappa_{n-m} \varkappa_{m-k})^{-1}\,. \tag{1.1}$$

Si $\mathfrak{B}$ dénote la fonction bêta d'Euler, on a que le premier membre de (1.1) est égal à

$$(1/2)(m-k)\mathfrak{B}\big((m-k)/2, (n-m+2)/2\big)$$

et le deuxième est égal à

$$\frac{\Gamma\big(1 + (n-m)/2\big)\Gamma\big(1 + (m-k)/2\big)}{\Gamma\big(1 + (n-k)/2\big)}$$

mais ces deux derniers nombres sont égaux grâce aux relations existantes entre $\mathfrak{B}$ et Γ. $\square$

On va présenter maintenant des sous-ensembles de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ qui joueront un rôle très important dans les sections suivantes. Pour cela il sera utile d'introduire la notion de *sous-différentielle* d'une fonction de support.

Soit $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, h_A sa fonction de support et $u \in \mathbb{R}^n$, on appelle *sous-différentielle* de h_A au point u le sous-ensemble

$$\operatorname{Subd} h_A(u) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, x - u) \leqslant h_A(x) - h_A(u)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

Pour $u \in \mathbb{R}^n$ fixé, $\operatorname{Subd} h_A(u) \neq \varnothing$ dès que $A \neq \varnothing$, et ses éléments sont appelés les *sous-gradients* de h_A au point u. De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{Subd} h_A(u) = A \cap H_A(u)\,,$$

et h_A est différentiable en u si et seulement si $\nabla h_A(u)$ est le seul sous-gradient de h_A au point u, autrement dit, si et seulement si la face $A \cap H_A(u)$ se réduit au point $\nabla h_A(u)$. Dans ce cas, pour des raisons de convexité, h_A est de classe $\mathcal{C}^1$ au point u, et, en outre, si A n'est pas réduit à un seul point, h_A ne sera pas différentiable en 0.

Un corps convexe sera dit *lisse* s'il a un seul hyperplan de support pour chaque point de sa frontière, (en particulier l'intérieur d'un corps convexe lisse est non vide). Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un corps convexe $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est dit *de classe* $\mathcal{C}^k$ si son intérieur est non vide et sa frontière ∂A est une sous-variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$. Il existe alors une fonction réelle $\rho_A \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, dite *définissante pour* A, qui est nulle sur ∂A, strictement positive sur $\mathbb{R}^n \setminus A$, strictement négative sur int A et telle que $d\rho_A \neq 0$ sur ∂A.

Un corps convexe $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ de classe $\mathcal{C}^1$ est lisse, et, réciproquement, puisque la frontière d'un corps convexe lisse peut être localement représentée comme le graphe d'une fonction convexe, (qui, en effet, s'avère de classe $\mathcal{C}^1$), on déduit que A est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement s'il est lisse.

Un corps convexe $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est dit *strictement convexe* si sa frontière ne contient pas de segments de droite. En particulier, un corps strictement convexe a intérieur non vide. En outre, h_A est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si et seulement si h_A y est de classe $\mathcal{C}^1$, ou encore, si et seulement si A est strictement convexe. Il est pourtant facile d'imaginer un corps convexe lisse qui ne soit pas strictement convexe, et un corps convexe qui soit strictement convexe mais pas lisse.

Dans la suite, on notera $\mathcal{K}^\infty_+(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des corps convexes de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement convexes.

Si $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, on peut produire un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ en posant

$$A_1 + A_2 := \{x + y \in \mathbb{R}^n \mid x \in A_1, \quad y \in A_2\}\,,$$

le sous-ensemble $A_1 + A_2$ ainsi obtenu s'appelle *somme de Minkowski* de A_1 et A_2. L'opération que l'on vient de définir sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ est appelée *addition de Minkowski* et l'ensemble de tous les parties de $\mathbb{R}^n$ équipé de cette opération constitue un monoïde commutatif. Les trois ensembles $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{K}^\infty_+(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sont stables par rapport à cette opération et, pour tout couple de corps convexes $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$, on a l'égalité

$$h_{A_1+A_2} := h_{A_1} + h_{A_2}\,,$$

ce qui fait que les trois monoïdes $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{K}_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ satisfont à la loi de suppression.

Si $F \preccurlyeq A := A_1 + A_2$ et $u \in K_F$, on a

$$\begin{aligned} F &:= (A_1 + A_2) \cap H_{A_1+A_2}(u) \\ &= (A_1 + A_2) \cap (H_{A_1}(u) + H_{A_2}(u)) \\ &= (A_1 \cap H_{A_1}(u)) + (A_2 \cap H_{A_2}(u))\,, \end{aligned}$$

en fait, les hyperplans $H_{A_1}(u)$, $H_{A_2}(u)$ et $H_{A_1+A_2}(u)$ sont parallèles, ce qui fait que

$$H_{A_1+A_2}(u) = H_{A_1}(u) + H_{A_2}(u)\,,$$

et si d'une part on a

$$(A_1 + A_2) \cap (H_{A_1}(u) + H_{A_2}(u)) \supseteq (A_1 \cap H_{A_1}(u)) + (A_2 \cap H_{A_2}(u))\,,$$

d'autre part, un élément $z := x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ appartenant à l'intersection $(A_1 + A_2) \cap (H_{A_1}(u) + H_{A_2}(u))$, avec $x_i \in A_i$ et $y_i \in H_{A_i}(u)$, $i = 1, 2$, vérifie les égalités

$$h_{A_1}(u) + h_{A_2}(u) = (y_1 + y_2, u) = (x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u)\,,$$

sous les conditions $(x_i, u) \leqslant h_{A_i}(u)$, pour $i = 1, 2$, ce qui est possible si et seulement si $(x_i, u) = h_{A_i}(u)$, pour $i = 1, 2$, autrement dit, si et seulement si le point z appartient aussi à $(A_1 \cap H_{A_1}(u)) + (A_2 \cap H_{A_2}(u))$.

Ce qui précède montre, pour toute face $F \preccurlyeq A_1 + A_2$, l'existence d'une décomposition $F = F_1 + F_2$, avec $F_i := A_i \cap H_{A_i}(u) \preccurlyeq A_i$, $i = 1, 2$. Cette décomposition est unique, car si $F = F_1{}' + F_2{}'$ est une autre décomposition de F avec

$$F_i' := A_i \cap H_{A_i}(u_i) \preccurlyeq A_i\,,$$

pour $u_i \in K_{F_i'}$, $i = 1, 2$, par un même raisonnement qu'au paragraphe précédent, on voit aisément que

$$\begin{aligned} F_1{}' + F_2{}' &= (F_1{}' + F_2{}') \cap (H_{A_1}(u) + H_{A_2}(u)) \\ &= (F_1{}' \cap H_{A_1}(u)) + (F_2{}' \cap H_{A_2}(u))\,, \end{aligned}$$

donc, en passant aux fonctions de support, on obtient

$$h_{F_1{}'} + h_{F_2{}'} = h_{F_1{}' \cap H_{A_1}(u)} + h_{F_2{}' \cap H_{A_2}(u)}\,,$$

sous les conditions, $h_{F_1{}'} \geqslant h_{F_1{}' \cap H_{A_1}(u)}$ et $h_{F_2{}'} \geqslant h_{F_2{}' \cap H_{A_2}(u)}$, si et seulement si

$$F_1{}' = F_1{}' \cap H_{A_1}(u) \qquad \text{et} \qquad F_2{}' = F_2{}' \cap H_{A_2}(u)\,.$$

On en tire que $F_1{}' \subseteq A_1 \cap H_{A_1}(u) = F_1$ et $F_2{}' \subseteq A_2 \cap H_{A_2}(u) = F_2$. Comme

$$F_1 + F_2 = F_1{}' + F_2{}',$$

on obtient que $h_{F_1} + h_{F_2} = h_{F_1{}'} + h_{F_2{}'}$ avec $h_{F_i} \geqslant h_{F_i'}$, $i = 1, 2$, ce qui implique une fois de plus $F_1 = F_1{}'$ et $F_2 = F_2{}'$.

Une simple récurrence montre que ce résultat reste valable pour la somme de Minkowski d'un nombre fini quelconque de corps convexes. On a ainsi montré le lemme suivant.

Lemme 1.2.2. *Soient $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et A leur somme de Minkowski. Pour toute face F de A, il existe une unique suite de faces $F_i \preccurlyeq A_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, telle que*

$$F = \sum_{i=1}^{r} F_i\,, \qquad \text{et} \qquad K_{F,A} = \bigcap_{i=1}^{r} K_{F_i,A_i}\,.$$

Pour tout $u \in K_F$, la suite de ces faces est donnée, pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant r$, par $F_i = A_i \cap H_{A_i}(u)$.

Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et A est dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{K}^\infty_+(\mathbb{R}^n)$, ou $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on définit un autre corps convexe du même type en posant

$$\lambda A := \{\lambda x \in \mathbb{R}^n \mid x \in A\}\,.$$

Il évident que toute face de λA est de la forme λF pour une unique $F \preccurlyeq A$; dans ce cas, $E_{\lambda F} = E_F$, et $K_{\lambda F} = K_F$ ou bien $K_{\lambda F} = -K_F$ selon que λ soit positif ou négatif.

Les notions introduites jusqu'ici permettent d'en présenter trois autres qui auront une importance capitale dans la suite, à savoir la *métrique de Hausdorff*, le *volume mixte* et les *valuations* sur le corps convexes.

Pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ on appelle *ε-voisinage* de A le sous-ensemble $(A)_\varepsilon$ de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$(A)_\varepsilon := A + \varepsilon B_n\,,$$

où B_n dénote, comme d'habitude, la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.1. *La* métrique de Hausdorff *sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est l'application*

$$\mathfrak{H} : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

qu'à tout $A_1, A_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ associe le nombre réel $\mathfrak{H}(A_1, A_2)$ défini par

$$\mathfrak{H}(A_1, A_2) := \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid A_1 \subseteq (A_2)_\varepsilon \quad \text{et} \quad A_2 \subseteq (A_1)_\varepsilon\}\,.$$

On peut montrer (cf. [8] et [37]) que $\mathfrak{H}$ est effectivement une métrique sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ qui fait de ce dernier un espace métrique[3]. Une façon très simple pour le voir utilise les restrictions des fonctions de support à la frontière $\mathbb{S}^{n-1}$ de la boule unité B_n.

Lemme 1.2.3. *Pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\mathfrak{H}(A_1, A_2) = \sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_{A_1}(u) - h_{A_2}(u)| =: \|h_{A_1} - h_{A_2}\|_{\mathbb{S}^{n-1}} ,$$

et, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\|h_{A_1} - h_{A_2}\|_K \leqslant \Big(\sup_{u \in K} \|u\|\Big) \|h_{A_1} - h_{A_2}\|_{\mathbb{S}^{n-1}} .$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que $\mathfrak{H}(A_1, A_2) \leqslant \varepsilon$, alors $A_1 \subseteq A_2 + \varepsilon B_n$, d'où, pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$h_{A_1}(u) \leqslant h_{A_2 + \varepsilon B_n}(u) = h_{A_2}(u) + \varepsilon .$$

De la même façon, pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$h_{A_2}(u) \leqslant h_{A_1 + \varepsilon B_n}(u) = h_{A_1}(u) + \varepsilon ,$$

donc $|h_{A_1}(u) - h_{A_2}(u)| \leqslant \varepsilon$, pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, d'où $\|h_{A_1} - h_{A_2}\|_{\mathbb{S}^{n-1}} \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = \mathfrak{H}(A_1, A_2)$, on obtient

$$\mathfrak{H}(A_1, A_2) \geqslant \|h_{A_1} - h_{A_2}\|_{\mathbb{S}^{n-1}} .$$

Réciproquement, si $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ est tel que $\|h_{A_1} - h_{A_2}\|_{\mathbb{S}^{n-1}} \leqslant \tilde{\varepsilon}$, alors (par le même raisonnement) $\mathfrak{H}(A_1, A_2) \leqslant \tilde{\varepsilon}$, et donc, pour $\tilde{\varepsilon} = \|h_{A_1} - h_{A_2}\|_{\mathbb{S}^{n-1}}$, on obtient

$$\|h_{A_1} - h_{A_2}\|_{\mathbb{S}^{n-1}} \leqslant \mathfrak{H}(A_1, A_2) .$$

En outre, si $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact,

$$\|h_{A_1} - h_{A_2}\|_K := \sup_{u \in K} |h_{A_1}(u) - h_{A_2}(u)| \leqslant \Big(\sup_{u \in K} \|u\|\Big) \sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_{A_1}(u) - h_{A_2}(u)|$$

ce qui conclut la preuve. □

Le lemme précédent implique que la convergence d'une suite de corps convexes dans la métrique de Hausdorff est équivalente à la convergence

[3]En outre, le *Théorème de sélection de Blaschke* montre qu'il s'agit d'un espace métrique localement compact séparable (cf. [8]).

uniforme sur $\mathbb{S}^{n-1}$, et sur tout compact K, de la suite correspondante des fonctions de support. On remarque qu'en équipant $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie induite par la métrique $\mathfrak{H}$ (et $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle), l'application volume n-dimensionnel[4]

$$\mathrm{Vol}_n : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

et la somme de Minkowski

$$+ : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$$

sont continues (cf. [37]). On observe aussi que, par rapport à la métrique de Hausdorff, il est possible d'approcher tout corps convexe $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ par des polytopes et par des corps strictement convexes de classe $\mathcal{C}^\infty$, en d'autres termes, les sous-ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{K}_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ sont denses. La preuve de la densité de $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ est très simple à montrer (voir [8] par exemple), par contre, celle de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est plus élaborée car elle utilise un argument de régularisation. À ce propos on rappelle le résultat suivant, dont on renvoie à [37] pour une démonstration.

Théorème 1.2.1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support contenu dans l'intervalle compacte $[1/2, 1]$ et telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|y\|)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = 1\,.$$

Si $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$, alors la fonction $h_{R_\varepsilon A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par

$$h_{R_\varepsilon A}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} h_A(x + \|x\| y\varepsilon)\varphi(\|y\|)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n\,,$$

est une fonction positivement homogène de degré 1, convexe et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, donc elle est la fonction de support d'un unique corps strictement convexe $R_\varepsilon A \subset \mathbb{R}^n$. De plus, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} h_{R_\varepsilon A} = h_A$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^n$. □

À partir de ce théorème on montre que, si $A, A_1, A_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ et si T est une isométrie de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{gathered} R_\varepsilon(\lambda A) = \lambda\, R_\varepsilon A\,,\\ R_\varepsilon(A_1 + A_2) = R_\varepsilon A_1 + R_\varepsilon A_2\,,\\ R_\varepsilon\big(T(A)\big) = T(R_\varepsilon A)\,,\\ A \subseteq \mu B_n \Longrightarrow \mathfrak{H}(A, R_\varepsilon A) \leqslant \mu\varepsilon\,,\\ \mathfrak{H}(R_\varepsilon A_1, R_\varepsilon A_2) \leqslant (1+\varepsilon)\mathfrak{H}(A_1, A_2)\,. \end{gathered}$$

[4] Lorsque $n = 0$, on pose $\mathrm{Vol}_0 \equiv 1$.

Il faut quand même observer que, pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, bien que le corps convexe $R_\varepsilon A$ ait une fonction de support de classe $\mathcal{C}^\infty$, il peut arriver que la frontière de $R_\varepsilon A$ ne soit pas une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$. Toutefois, le ε-voisinage de $R_\varepsilon A$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa fonction de support de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$h_{R_\varepsilon A}(x) + \varepsilon \|x\| \,.$$

Le corps convexe $R_\varepsilon A$ sera appelé *ε-régularisé* du corps convexe A. On en déduit que, pour tout $A, A_1, A_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, et tout $\mu \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$$A \subseteq \mu B_n \Longrightarrow \mathfrak{H}(A, (R_\varepsilon A)_\varepsilon) \leqslant (1+\mu)\varepsilon \,,$$

et

$$\mathfrak{H}((R_\varepsilon A_1)_\varepsilon, (R_\varepsilon A_2)_\varepsilon) \leqslant (1+\varepsilon)\mathfrak{H}(A_1, A_2) + 2\varepsilon \,.$$

On conclut donc que tout corps convexe A peut être approché dans la métrique de Hausdorff par des corps convexes de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement convexes dont les fonctions de support correspondantes convergent uniformément vers h_A sur tous les compacts de $\mathbb{R}^n$.

Pour présenter le volume mixte, on propose d'abord le résultat suivant dont on peut trouver une démonstration dans [8], [37] ou [14].

Théorème 1.2.2. *Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Alors $\operatorname{Vol}_n\left(\sum_{\ell=1}^r \lambda_\ell A_\ell\right)$ est un polynôme homogène de degré n en $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.* □

Ce polynôme peut s'écrire comme

$$\operatorname{Vol}_n\left(\sum_{\ell=1}^r \lambda_\ell A_\ell\right) = \sum_\rho V_n(A_{\rho(1)}, \ldots, A_{\rho(n)})\lambda_{\rho(1)} \cdots \lambda_{\rho(n)} \,, \tag{1.2}$$

où la somme porte sur toutes les fonctions $\rho : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, r\}$ et les coefficients[5] sont choisis de tel sorte que

$$V_n(A_{\rho(1)}, \ldots, A_{\rho(n)}) = V_n(A_{\varsigma(\rho(1))}, \ldots, A_{\varsigma(\rho(n))}) \,,$$

pour toute permutation ς de l'image de ρ.

Définition 1.2.2. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Le* volume mixte n-dimensionnel *des corps convexes $A_1, \ldots, A_n$ est le nombre $V_n(A_1, \ldots, A_n)$ que l'on obtient dans l'égalité (1.2) lorsque $r = n$ et $\rho = id$.*

[5] Pour ρ fixée, le coefficient du monôme $\lambda_{\rho(1)} \cdots \lambda_{\rho(n)}$ dans l'expression (1.2) ne dépende que des $A_{\rho(1)}, \ldots, A_{\rho(n)}$, en fait, il suffit de poser égal à zéro tous les λ_ℓ correspondant aux indices ℓ qui n'appartiennet pas à l'image de ρ.

On peut montrer que V_n est une fonction (à valeurs réels positifs) multilinéaire (par rapport à la somme de Minkowski et aux multiples réels positifs), symétrique et telle que

$$V_n(A,\dots,A) = \mathrm{Vol}_n(A)\,,$$

pour tout $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Ces trois propriétés caractérisent V_n de manière unique. Parmi les nombreuses autres propriétés du volume mixte n-dimensionnel on en rappelle les suivantes.

– Le volume mixte est invariant par translations :

$$V_n(A_1,\dots,A_n) = V_n(x_1+A_1,\dots,x_n+A_n)\,;$$

pour tout $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^n$.

– Le volume mixte vérifie la *formule de polarisation* :

$$V_n(A_1,\dots,A_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{\mathrm{card}\, I}\, \mathrm{Vol}_n\left(\sum_{i\in I} A_i\right),$$

pour tout $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

– Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$ et tout $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, si Γ est la somme de Minkowski de $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k$, on a l'égalité

$$\varkappa_{n-k}^{-1}\binom{n}{k} V_n(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k,\underbrace{B_n,\dots,B_n}_{(n-k)\ \text{fois}}) = \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)} V_k(\Delta_1,\dots,\Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta)\,,$$

où, pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma,k)$, $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ dénote l'unique suite de faces dont la somme est égale à Δ, et V_k le volume mixte k-dimensionnel.

– Si $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et $A := \sum_{\ell=1}^n A_\ell$,

$$\dim E_A < n \Longleftrightarrow V_n(A_1,\dots,A_n) = 0\,.$$

– Le volume mixte n-dimensionnel est croissant, par rapport à l'inclusion, en chacun de ses arguments.

– L'application volume mixte n-dimensionnel

$$V_n : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est continue pour la métrique de Hausdorff.

Définition 1.2.3. *Une* valuation *sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans un groupe abélien $\mathbb{G}$ est une application $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)\cup\{\varnothing\} \longrightarrow \mathbb{G}$ telle que $\phi(\varnothing)=0$ et*

$$\phi(A_1)+\phi(A_2) = \phi(A_1\cup A_2)+\phi(A_1\cap A_2)\,,$$

pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \cup \{\varnothing\}$ *tels que* $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \cup \{\varnothing\}$.

Une valuation faible *sur* $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *à valeurs dans un groupe abélien* $\mathbb{V}$ *est une application* $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \cup \{\varnothing\} \longrightarrow \mathbb{G}$ *telle que* $\phi(\varnothing) = 0$ *et*

$$\phi(A \cap H^+) + \phi(A \cap H^-) = \phi(A) + \phi(A \cap H),$$

pour tout hyperplan $H \subset \mathbb{R}^n$ *et tout* $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \cup \{\varnothing\}$.

En général le groupe abélien $\mathbb{G}$ sera toujours un espace vectoriel réel $\mathbb{V}$ équipé d'une topologie, donc on va dorénavant utiliser le symbole $\mathbb{V}$ au lieu de $\mathbb{G}$.

Une valuation ϕ sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathbb{V}$ est dite *continue* si elle est telle par rapport à la métrique de Hausdorff sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et à la topologie de $\mathbb{V}$. Si $k \in \mathbb{N}$, la valuation (faible) ϕ est dite *k-homogène* si, pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$\phi(\lambda A) = \lambda^k \phi(A),$$

enfin la valuation ϕ est *simple* si $\phi(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\dim A < n$.

Ces notions s'adaptent au cas des valuations faibles ainsi qu'au cas des valuations et des valuations faibles sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ doté de la métrique de Hausdorff.

Les exemples les plus immédiats de valuations sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ sont la caractéristique d'Euler, la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle Vol_n, ainsi que l'application de prise de fonction de support, qu'à tout corps convexe A associe la fonction de support $h_A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. En fait il est facile de vérifier que, pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ dont l'union est convexe, on a

$$A_1 + A_2 = (A_1 \cup A_2) + (A_1 \cap A_2),$$

d'où l'affirmation en prenant la fonction de support de deux membres (et en posant $h_\varnothing := 0$). Cette égalité implique que, si ϕ est une valuation et $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est fixé, alors l'application ϕ_K donnée, pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, par $\phi_K(A) := \phi(A + K)$ est aussi une valuation.[6] Ceci permet d'introduire plusieurs valuations géométriquement intéressantes comme les *quermassintegrals*. En fait, si $1 \leqslant k \leqslant n$, $A_{k+1}, \dots, A_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n > 0$ sont

[6] Il s'agit d'une conséquence du fait suivant. Si $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est fixé et $A_1, A_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ sont tels que $A_1 \cup A_2$ est convexe, alors on a que

$$(A_1 \cup A_2) + K = (A_1 + K) \cup (A_2 + K) \quad \text{et} \quad (A_1 \cap A_2) + K = (A_1 + K) \cap (A_2 + K).$$

fixés, l'application ϕ_K, où $\phi = \mathrm{Vol}_n$ et $K = \sum_{\ell=k+1}^{n} \lambda_\ell A_\ell$, est une valuation. En outre, pour tout $\lambda > 0$ et tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\phi_K(\lambda A)$ est un polynôme en $\lambda, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ et, en choisissant $A_{k+1}, \dots, A_n = B$, le coefficient

$$W_{n-k}(A) := V_n(A, \dots, A, A_{k+1}, \dots, A_n)$$

de $\lambda^k \lambda_1 \cdots \lambda_n$ dans l'expression polynomiale de $\phi_K(A)$, multiplié par $(n!/k!)$, est une valuation continue k-homogène sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ appelée le $(n-k)$-ième *quermassintergral* de A. Un multiple important de celui-ci est le *k-ième volume intrinsèque* de A donné par

$$\varkappa_{n-k}^{-1} \binom{n}{k} W_{n-k}(A)\,,$$

que, pour un polytope Γ, peut s'exprimer à l'aide de la formule combinatoire[7]

$$\varkappa_{n-k}^{-1} \binom{n}{k} W_{n-k}(\Gamma) = \sum_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)} \mathrm{Vol}_k(\Delta) \psi_\Gamma(\Delta)\,.$$

De manière analogue on peut définir les valuations et les valuations faibles (continue ou homogène) sur $\mathcal{K}_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ et sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ou encore sur tout ensemble de corps convexes de $\mathbb{R}^n$. Évidemment toute valuation est aussi une valuation faible, mais il y a des exemples de valuations faibles qui ne sont pas des valuations, (cf. [26]). Réciproquement, on a les résultats suivants dûs respectivement à Sallee [36] et Groemer [13].

Théorème 1.2.3. *Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, toute valuation faible à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace linéaire topologique de Hausdorff, est une valuation.* □

Théorème 1.2.4. *Toute valuation faible continue sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace linéaire topologique de Hausdorff, est une valuation.* □

Dans la suite on rencontrera des valuations continues, homogènes, invariantes par translations et par d'autres transformations de l'espace ambiant.

1.3 Constructions fondamentales

Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, soit $\mathcal{G}_{k,n}$ la grassmanienne des k-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ équipée de sa structure de variété différentielle usuelle. Sur l'union

[7] La formule ci-dessus sera généralisée dans le section suivante au cas des polytopes de $\mathbb{C}^n$.

disjointe $\mathcal{G}(n)$ des grassmaniennes $\mathcal{G}_{k,n}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, (dotée de la topologie somme), on considère une fonction réelle φ quelconque

$$\varphi : \mathcal{G}(n) := \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathcal{G}_{k,n} \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Définition 1.3.1. *Si $0 \leqslant k \leqslant n$, le (k,φ)-volume*[8] *sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est la fonction*

$$\mathfrak{P}_k^{\varphi} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \cup \{\varnothing\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donnée, pour $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, par[9]

$$\mathfrak{P}_k^{\varphi}(\Gamma) := \sum_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma,k)} \varphi(E_\Delta) \operatorname{Vol}_k(\Delta) \psi_\Gamma(\Delta)\,.$$

Si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, on a évidemment

$$\mathfrak{P}_k^{\varphi}(\lambda\Gamma) = \lambda^k \mathfrak{P}_k^{\varphi}(\Gamma)\,,$$

(les deux membres étant nuls lorsque $k > \dim \Gamma$). On observe aussi que le calcul de φ, du volume k-dimensionnel et celui de l'angle sont tous indépendants de l'espace ambiant, donc il en est de même ainsi de $\mathfrak{P}_k^{\varphi}$.

Lemme 1.3.1. *Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Alors*

$$\mathfrak{P}_k^{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Gamma_i\right)$$

est un polynôme homogène de degré k en $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Démonstration. Soit $\Gamma := \sum_{\ell=1}^{r} \Gamma_\ell$ et $\Gamma' := \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell \Gamma_\ell$. Il est facile de voir qu'il y a une bijection entre $\mathcal{B}(\Gamma,k)$ et $\mathcal{B}(\Gamma',k)$ qu'à la face $\Delta = \sum_{\ell=1}^{r} \Delta_\ell$ de Γ associe la face $\Delta' := \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell \Delta_\ell$ de Γ' et ce de telle sorte que

$$E_\Delta = E_{\Delta'} \qquad \text{et} \qquad K_{\Delta,\Gamma} = K_{\Delta',\Gamma'}\,.$$

[8] Le terme (k,φ)-volume n'apparaît pas dans l'article de Kazarnovskiĭ [17], il s'agit plutôt d'une terminologie que l'on a voulu introduire ici.

[9] Si $k = 0$ on a $\mathfrak{P}_0^{\varrho}(\varnothing) = 0$ et $\mathfrak{P}_0^{\varrho}(\Gamma) = \varphi(\{0\}) \sum_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma,0)} \psi_\Gamma(\Delta) = \varphi(\{0\})$, pour tout $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_k^\varphi(\Gamma') &= \sum_{\Delta'\in\mathcal{B}(\Gamma',k)} \varphi(E_{\Delta'})\,\mathrm{Vol}_k(\Delta')\psi_\Gamma(\Delta') \\
&= \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)} \varphi(E_\Delta)\,\mathrm{Vol}_k\left(\sum_{\ell=1}^r \lambda_\ell\Delta_\ell\right)\psi_\Gamma(\Delta) \\
&= \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)} \varphi(E_\Delta)\left(\sum_\rho V_k(\Delta_{\rho(1)},\ldots,\Delta_{\rho(k)})\lambda_{\rho(1)}\cdots\lambda_{\rho(k)}\right)\psi_\Gamma(\Delta) \\
&= \sum_\rho\left(\sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)} \varphi(E_\Delta)V_k(\Delta_{\rho(1)},\ldots,\Delta_{\rho(k)})\psi_\Gamma(\Delta)\right)\lambda_{\rho(1)}\cdots\lambda_{\rho(k)}\,,
\end{aligned}$$

où l'indice ρ sous le signe de somme signifie que la somme porte sur l'ensemble des toutes les fonctions $\rho : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,r\}$. □

Définition 1.3.2. *Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\varphi : \mathcal{G}(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire, le (k,φ)*-volume mixte[10] *sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^k$ est la fonction*

$$\mathfrak{Q}_k^\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

donnée, pour $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^k$, par[11]

$$\mathfrak{Q}_k^\varphi(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k) := \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)} \varphi(E_\Delta)V_k(\Delta_1,\ldots,\Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta)\,,$$

où $\Gamma := \sum_{\ell=1}^k \Gamma_\ell$, et $\Delta = \sum_{\ell=1}^k \Delta_\ell \in \mathcal{B}(\Gamma,k)$.

Les lemmes qui suivent montrent que (k,φ)-volume mixte ressemble au k-volume mixte ordinaire.

Lemme 1.3.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$, le (k,φ)-volume mixte $\mathfrak{Q}_k^\varphi$ est une fonction symétrique en ses arguments.*

Démonstration. Si $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et si $\Delta = \sum_{\ell=1}^k \Delta_\ell$ est une face k-dimensionnelle de $\Gamma := \sum_{\ell=1}^k \Gamma_\ell$, on a

$$E_\Delta = \sum_{\ell=1}^k E_{\Delta_\ell} \qquad \text{et} \qquad K_{\Delta,\Gamma} = \bigcap_{\ell=1}^k K_{\Delta_\ell,\Gamma_\ell}\,.$$

[10] Comme pour le (k,φ)-volume, le terme (k,φ)-volume mixte est absent dans Kazarnovskiĭ [17], où d'ailleurs on utilise le symbol P_k pour noter à la fois ce qu'ici on a noté $\mathfrak{P}_k^\varphi$ et $\mathfrak{Q}_k^\varphi$.

[11] Lorsque $k = 0$ on a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^0 = \{\bullet\}$ et on pose $\mathfrak{Q}_0^\varphi(\bullet) := \varphi(\{0\}) = \mathfrak{P}_0^\varrho(\bullet)$.

Ceci ajouté à la propriété de symétrie du volume mixte k-dimensionnel, entraîne que toutes les opérations impliquées dans l'expression qui définit le (k,φ)-volume mixte de $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$ sont symétriques en $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$, d'où le lemme. $\square$

Lemme 1.3.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et tout $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ on a l'égalité*

$$\mathfrak{Q}_k^\varphi(\Gamma,\ldots,\Gamma) = \mathfrak{P}_k^\varphi(\Gamma)\,.$$

Démonstration. Comme $\sum_{\ell=1}^k \Gamma = k\Gamma$, on déduit que

$$\mathfrak{Q}_k^\varphi(\Gamma,\ldots,\Gamma) = \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)} \varphi(E_\Delta)\operatorname{Vol}_k(\Delta)\psi_\Gamma(\Delta) = \mathfrak{P}_k^\varphi(\Gamma)\,,$$

soit le lemme. $\square$

Lemme 1.3.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et tout $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on a l'égalité*

$$\mathfrak{Q}_k^\varphi(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k) = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}} (-1)^{\operatorname{card} I}\,\mathfrak{P}_k^\varphi\biggl(\sum_{\ell\in I}\Gamma_\ell\biggr)\,.$$

Démonstration. Le Lemme 1.3.1 fait que, pour tout $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, on a une expression polynomiale homogène de degré k du type

$$\mathfrak{P}_{n,k}^\varphi\biggl(\sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell\Gamma_\ell\biggr) = \sum_{m\in\mathcal{D}_k} v_m\lambda^m$$

où $\mathcal{D}_k := \{m \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^k m_i = k\}$, et, pour $m \in \mathcal{D}_k$, $\lambda^m := \prod_{\ell=1}^k \lambda_\ell^{m_\ell}$. Pour tout sous-ensemble $I \subseteq \{1,\ldots,k\}$ on note

$$\mathcal{D}_k^I := \{m \in \mathcal{D}_k \mid m_\ell = 0 \quad \forall \ell \notin I\}\,,$$

et il est clair que l'ensemble $\mathcal{D}_k$ est union des $\mathcal{D}_k^I$, pour $I \subseteq \{1,\ldots,k\}$. Si $I \subseteq \{1,\ldots,k\}$ est fixé, on voit que la valeur de $P_{k,\varphi}^n\bigl(\sum_{\ell\in I}\Gamma_\ell\bigr)$, n'est rien d'autre que l'évaluation du polynôme homogène ci-dessus au point λ dont les coordonnées λ_ℓ sont nulles lorsque $\ell \notin I$, et sont toutes égales à 1 si $\ell \in I$. Ceci signifie que, si $m \in \mathcal{D}_k$, une telle évaluation pour le monôme $v_m\lambda^m$ est égale à v_m si $m \in \mathcal{D}_k^I$ et est égale à 0 si $m \notin \mathcal{D}_k^I$. Donc, si $I \subseteq \{1,\ldots,k\}$ est fixé, on peut écrire la relation

$$\mathfrak{P}_k^\varphi\biggl(\sum_{\ell\in I}\Gamma_\ell\biggr) = \sum_{m\in\mathcal{D}_k^I} v_m\,.$$

D'autre part, si $m \in \mathcal{D}_k^I$, on a aussi $m \in \mathcal{D}_k^J$ pour chaque $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ tel que $I \subseteq J$. En outre, si $m \in \mathcal{D}_k$ a $j_m \leqslant k$ coordonnées nulles, il existe un sous-ensemble $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ avec $(k - j_m)$ éléments tel que $m \in \mathcal{D}_k^I$. Comme on peut trouver 2^{j_m} sous-ensembles distincts de $\{1, \ldots, k\}$ contenant I, on en déduit qu'il y a 2^{j_m} ensembles de la forme $\mathcal{D}_k^J$, avec $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$, auxquels m appartient. Si, pour tout $m \in \mathcal{D}_k$,

$$\mathcal{I}_m := \{I \subseteq \{1, \ldots, k\} \mid m \in \mathcal{D}_k^I\},$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^k}{k!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{\text{card } I}\, \mathfrak{P}_k^{\varphi}\Big(\sum_{\ell \in I} \Gamma_\ell\Big) &= \frac{1}{k!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{k-\text{card } I} \Big(\sum_{m \in \mathcal{D}_k^I} v_m\Big) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{m \in \mathcal{D}_k} v_m \Big(\sum_{I \in \mathcal{I}_m} (-1)^{k-\text{card } I}\Big),
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_m} (-1)^{k-\text{card } I} = \sum_{j=0}^{j_m} \binom{j_m}{j} (-1)^{k-(k-j_m+j)} = \sum_{j=0}^{j_m} \binom{j_m}{j} (-1)^{j_m-j},$$

où le dernier terme ci-dessus est nul si $j_m > 0$ et égal à 1 si $j_m = 0$. Donc on s'aperçoit qu'il faut compter uniquement les éléments de $\mathcal{D}_k$ sans aucune coordonnée nulle. Il existe évidement un seul élément de cette forme, et il a toutes ses coordonnées égales à 1. Si l'on le note v_1, on voit aisément que $v_1 = k!\mathfrak{Q}_k^{\varphi}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$, d'où le lemme. □

Remarque 1.3.1. Grâce au Lemme 1.3.4 on peut retrouver les résultats des Lemme 1.3.2 et Lemme 1.3.3. En fait, l'expression de $\mathfrak{Q}_k^{\varphi}$ que l'on vient d'établir dans le Lemme 1.3.4, parfois appelée *formule de polarisation*, a évidemment une nature symétrique, d'où le Lemme 1.3.2. Pour retrouver le Lemme 1.3.3, on voit que, d'après le Lemme 1.3.4,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_k^{\varphi}(\Gamma, \ldots, \Gamma) &= \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{\text{card } I}\, \mathfrak{P}_k^{\varphi}\Big(\sum_{i \in I} \Gamma\Big) \\
&= \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{\text{card } I}\, \mathfrak{P}_k^{\varphi}\big((\text{card } I)\Gamma\big) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{k-\text{card } I} (\text{card } I)^k\, \mathfrak{P}_k^{\varphi}(\Gamma) \\
&= \mathfrak{P}_k^{\varphi}(\Gamma) \Big(\frac{1}{k!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{k-\text{card } I} (\text{card } I)^k\Big),
\end{aligned}$$

où le dernier terme entre parenthèses ci-dessus est égal à 1.

Lemme 1.3.5. *Pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant n$, le (k,φ)-volume mixte $\mathfrak{Q}_k^\varphi$ est une fonction multilinéaire (par rapport à la somme de Minkowski et aux multiples réels positifs) en ses arguments.*

Démonstration. Grâce au Lemme 1.3.2 il suffit de vérifier la linéarité de $\mathfrak{Q}_k^\varphi$ par rapport au premier de ses arguments. Soient donc $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Si Γ dénote la somme $\sum_{\ell=1}^k \Gamma_\ell$, on a déjà eu l'occasion de remarquer dans la preuve du Lemme 1.3.1 que si $\Delta = \sum_{\ell=1}^k \Delta_\ell$ est une face de Γ, alors

$$\Delta' := \lambda\Delta_1 + \sum_{\ell=2}^k \Delta_\ell$$

est une face de $\Gamma' := \lambda\Gamma_1 + \sum_{\ell=2}^k \Gamma_\ell$ et, réciproquement, toute face de celui-ci est de la forme Δ' pour une unique $\Delta \preccurlyeq \Gamma$. En outre, $E_{\Delta'} = E_\Delta$, $K_{\Delta'} = K_\Delta$ et

$$V_k(\lambda\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta) = \lambda V_k(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k)\,.$$

Ceci entraîne les égalités

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_k^\varphi(\lambda\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k) &= \sum_{\Delta' \in \mathcal{B}(\Gamma', k)} \varphi(E_{\Delta'}) V_k(\lambda\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k)\psi_{\Gamma'}(\Delta') \\
&= \lambda \sum_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)} \varphi(E_\Delta) V_k(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta) \\
&= \lambda\, \mathfrak{Q}_k^\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k)\,.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\Gamma_1 = L_1 + L_2$, pour des $L_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$. Par conséquent, en posant $\Gamma^{(1)} := L_1 + \sum_{\ell=2}^k \Gamma_\ell$ et $\Gamma^{(2)} := L_2 + \sum_{\ell=2}^k \Gamma_\ell$, on aura de façon évidente

$$\Gamma = L_1 + L_2 + \sum_{\ell=2}^k \Gamma_\ell = L_1 + \Gamma^{(2)} = L_2 + \Gamma^{(1)}\,.$$

Si $\Delta = \sum_{\ell=1}^k \Delta_\ell$ est une face de Γ, et $F_i \preccurlyeq L_i$, $i = 1, 2$, sont les uniques faces, respectivement, de L_1 et de L_2 telles que $\Delta_1 = F_1 + F_2$, alors, en posant $\Delta^{(1)} := F_1 + \sum_{\ell=2}^k \Delta_\ell$ et $\Delta^{(2)} := F_2 + \sum_{\ell=2}^k \Delta_\ell$, on a aussi de façon évidente $\Delta^{(i)} \preccurlyeq \Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2$, et

$$\Delta = F_1 + F_2 + \sum_{\ell=2}^k \Delta_\ell = F_1 + \Delta^{(2)} = F_2 + \Delta^{(1)}\,.$$

Ces notations étant précisées, on va montrer que

$$\mathfrak{Q}_k^{\varphi}(L_1+L_2,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k)=\mathfrak{Q}_k^{\varphi}(L_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k)+\mathfrak{Q}_k^{\varphi}(L_2,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k)\,.$$

On observe d'abord que

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_k^{\varphi}(L_1+L_2,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k) &= \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)}\varphi(E_\Delta)V_k(F_1+F_2,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta)\\ &= \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)}\varphi(E_\Delta)V_k(F_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta)\\ &\quad+\sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)}\varphi(E_\Delta)V_k(F_2,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta)\,,\end{aligned}$$

et comme $V_k(F_i,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)=0$ si $\dim\Delta^{(i)}<k$, $i=1,2$, il suffit de calculer la somme

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{B}_i(\Gamma,k)}\varphi(E_\Delta)V_k(F_i,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta)$$

où $\mathcal{B}_i(\Gamma,k):=\{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)\mid \dim\Delta^{(i)}=k\}$, $i=1,2$. Pour conclure on doit donc montrer les égalités

$$(*)_i\qquad \sum_{\Delta\in\mathcal{B}_i(\Gamma,k)}\varphi(E_\Delta)V_k(F_i,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta)=\mathfrak{Q}_k^{\varphi}(L_i,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k)\,,$$

pour $i=1,2$, mais on va juste traiter le cas $i=1$, puisque l'autre est formellement identique. Pour cela on va procéder en plusieurs étapes.

(i) On montre que, pour tout $D\in\mathcal{B}(\Gamma^{(1)},k)$,

$$\mathcal{V}(D):=\{A\preccurlyeq L_2\mid D+A\in\mathcal{B}(\Gamma,k)\}\neq\varnothing\,.$$

Soient $u_1,\ldots,u_{n-k}\in K_{D,\Gamma^{(1)}}$ linéairement indépendants, alors

$$\operatorname{aff}D=\bigcap_{j=1}^{n-k}H_{\Gamma^{(1)}}(u_j)\,.$$

Par récurrence, on pose $A_{n-k}:=L_2$, et, pour $1\leqslant j\leqslant n-k$,

$$A_{n-k-j}:=A_{n-k-j+1}\cap H_{A_{n-k-j+1}}(u_{n-k-j+1})\,.$$

On définit ainsi une suite de faces (non vides) de L_2

$$L_2:=A_{n-k}\succcurlyeq A_{n-k-1}\succcurlyeq\cdots\succcurlyeq A_1\succcurlyeq A_0=:A\neq\varnothing\,,$$

et puisque

$$\begin{aligned} A_{n-k-2} &= A_{n-k-1} \cap H_{A_{n-k-1}}(u_{n-k-1}) \\ &= L_2 \cap H_{L_2}(u_{n-k}) \cap H_{L_2 \cap H_{L_2}(u_{n-k})}(u_{n-k-1}) \\ &= L_2 \cap H_{L_2}(u_{n-k}) \cap H_{L_2}(u_{n-k-1})\,, \end{aligned}$$

une simple récurrence montre que

$$A = L_2 \cap \bigcap_{i=1}^{n-k} H_{L_2}(u_j)\,.$$

Par conséquent, si $x \in A$ et $u := \sum_{j=1}^{n-k} u_j$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-k$, on a $(x, u_j) = h_{L_2}(u_j)$ d'où

$$(x, u) = \sum_{j=1}^{n-k} (x, u_j) = \sum_{j=1}^{n-k} h_{L_2}(u_j) \geqslant h_{L_2}(u)\,,$$

soit $A \subset H^+_{L_2}(u)$, mais puisque on a aussi $A \subseteq L_2 \subset H^-_{L_2}(u)$, on conclut que $u \in K_{A,L_2}$. Ceci fait que la somme $D+A$ soit une face de Γ car $u \in K_{D,\Gamma^{(1)}}$ et

$$D + A = (\Gamma^{(1)} \cap H_{\Gamma^{(1)}}(u)) + (L_2 \cap H_{L_2}(u)) = \Gamma \cap H_\Gamma(u)\,.$$

Par construction $E_A \subseteq E_D$, donc la face $D + A$ ne peut pas avoir dimension plus grande que k, par conséquent $A \in \mathcal{V}(D)$.

(*ii*) On montre que, pour tout $D \in \mathcal{B}(\Gamma^{(1)}, k)$,

$$\psi_{\Gamma^{(1)}}(D) = \sum_{A \in \mathcal{V}(D)} \psi_\Gamma(D + A)\,.$$

Soit $u \in K_{D,\Gamma^{(1)}}$, $u \neq 0$. Comme $K_{D,\Gamma^{(1)}}$ est ouvert dans $\operatorname{aff}(K_{D,\Gamma^{(1)}})$, on peut trouver des vecteurs $u_1, \ldots, u_{n-k} \in K_{D,\Gamma^{(1)}}$ linéairement indépendants tels que $u = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j u_j$, avec $\lambda_j > 0$ pour $j = 1, \ldots, n-k$. Alors, si l'on pose

$$A := L_2 \cap H_{L_2}(u)\,,$$

on a (par définition) $u \in K_{A,L_2}$ et, comme dans (*i*), on montre que $A \in \mathcal{V}(D)$. Ceci implique que

$$K_{D,\Gamma^{(1)}} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{V}(D)} K_{A,L_2}\,,$$

l'union étant disjointe. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\mathcal{V}(D)} \psi_\Gamma(D+A) &= \varkappa_{n-k}^{-1} \sum_{A\in\mathcal{V}(D)} \mathrm{Vol}_{\,n-k}(B_n \cap K_{D+A,\Gamma}) \\
&= \varkappa_{n-k}^{-1} \sum_{A\in\mathcal{V}(D)} \mathrm{Vol}_{\,n-k}(B_n \cap K_{D,\Gamma^{(1)}} \cap K_{A,L_2}) \\
&= \varkappa_{n-k}^{-1} \mathrm{Vol}_{\,n-k}\Bigg(\bigcup_{A\in\mathcal{V}(D)} B_n \cap K_{D,\Gamma^{(1)}} \cap K_{A,L_2}\Bigg) \\
&= \varkappa_{n-k}^{-1} \mathrm{Vol}_{\,n-k}\Bigg(B_n \cap K_{D,\Gamma^{(1)}} \cap \bigcup_{A\in\mathcal{V}(D)} K_{A,L_2}\Bigg) \\
&= \varkappa_{n-k}^{-1} \mathrm{Vol}_{\,n-k}(B_n \cap K_{D,\Gamma^{(1)}}) \\
&= \psi_{\Gamma^{(1)}}(D)\,.
\end{aligned}$$

(iii) Grâce aux étapes précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\Delta\in\mathcal{B}_1(\Gamma,k)} \varphi(E_\Delta)V_k(F_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\psi_\Gamma(\Delta) \\
=\;& \sum_{D\in\mathcal{B}(\Gamma^{(1)},k)} \Bigg(\sum_{A\in\mathcal{V}(D)} \varphi(E_{D+A})V_k(F_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\psi_\Gamma(D+A)\Bigg) \\
=\;& \sum_{D\in\mathcal{B}(\Gamma^{(1)},k)} \varphi(E_D)V_k(F_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\Bigg(\sum_{A\in\mathcal{V}(D)} \psi_\Gamma(D+A)\Bigg) \\
=\;& \sum_{D\in\mathcal{B}(\Gamma^{(1)},k)} \varphi(E_D)V_k(F_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k)\psi_{\Gamma^{(1)}}(D) \\
=\;& \mathfrak{Q}_k^\varphi(L_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k)\,,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 1.3.2. On observe que l'on peut montrer le Lemme 1.3.5 en passant par le Lemme 1.3.4, mais ici on a préféré un point de vue plus géométrique, l'autre étant purement algébrique.

Lemme 1.3.6. *Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant n$ fixés, alors $\mathfrak{Q}_k^\varphi$ est l'unique forme multilinéaire (par rapport à la somme de Minkowski et aux multiples réels positifs) et symétrique sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^k$ telle que, pour tout $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on ait*

$$\mathfrak{Q}_k^\varphi(\Gamma,\ldots,\Gamma) = \mathfrak{P}_k^\varphi(\Gamma)\,.$$

Démonstration. Soient $\mathfrak{L}$ une autre forme avec les mêmes propriétés que $\mathfrak{Q}_k^\varphi$ et $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. D'après le Lemme 1.3.4 on sait que

$$\mathfrak{Q}_k^\varphi(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{\operatorname{card} I}\, \mathfrak{P}_k^\varphi\Bigg(\sum_{\ell \in I} \Gamma_\ell\Bigg),$$

et puisque pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$

$$\mathfrak{P}_k^\varphi\Bigg(\sum_{\ell \in I} \Gamma_\ell\Bigg) = \mathfrak{L}\Bigg(\sum_{\ell \in I} \Gamma_\ell, \ldots, \sum_{\ell \in I} \Gamma_\ell\Bigg) = \mathfrak{L}\Bigg(\sum_{\ell_1 \in I} \Gamma_{\ell_1}, \ldots, \sum_{\ell_k \in I} \Gamma_{\ell_k}\Bigg),$$

il suffit de montrer l'égalité

$$\mathfrak{L}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{\operatorname{card} I}\, \mathfrak{L}\Bigg(\sum_{\ell_1 \in I} \Gamma_{\ell_1}, \ldots, \sum_{\ell_k \in I} \Gamma_{\ell_k}\Bigg).$$

En fait, (comme dans la preuve du Lemme 1.3.4) la symétrie et la multilinéarité de $\mathfrak{L}$ impliquent que

$$\sum_{I \subsetneq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{\operatorname{card} I}\, \mathfrak{L}\Bigg(\sum_{\ell_1 \in I} \Gamma_{\ell_1}, \ldots, \sum_{\ell_k \in I} \Gamma_{\ell_k}\Bigg) = 0,$$

donc

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{\operatorname{card} I}\, \mathfrak{L}\Bigg(\sum_{\ell_1 \in I} \Gamma_{\ell_1}, \ldots, \sum_{\ell_k \in I} \Gamma_{\ell_k}\Bigg) = (-1)^k k!\; \mathfrak{L}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k),$$

soit le lemme □

On observe que, dans la construction précédente, la fonction φ n'a joué qu'un rôle accessoire, vu le choix absolument arbitraire que l'on en avait fait. Dans la suite on verra que, si la fonction φ est continue, alors $\mathfrak{P}_k^\varphi$ devient une valuation faible, continue et invariante par translations, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ que l'on peut prolonger à une valuation, continue et invariante par translations, sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Lorsque $\varphi \equiv 1$, $\mathfrak{P}_k^\varphi$ n'est rien d'autre que le k-ième volume intrinsèque. Dans la section suivante on fera un choix particulier de la fonction φ tel que le $\mathfrak{P}_k^\varphi$ et le $\mathfrak{Q}_k^\varphi$ lui correspondant posséderont une signification géométrique.

1.4 Pseudovolume mixte

On se place maintenant dans l'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien standard, défini, pour $u, v \in \mathbb{C}^n$, par $\langle u, v\rangle := \sum_{j=1}^n u_j \bar{v}_j$, et l'on observe que le produit scalaire $\mathrm{Re}\,\langle\,,\rangle$ définit sur $\mathbb{C}^n$ une structure d'espace euclidien $2n$-dimensionnel telle que l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ donnée par

$$\mathbb{C}^n \ni z \longmapsto (\mathrm{Re}\ z_1, \mathrm{Im}\ z_1, \ldots, \mathrm{Re}\ z_n, \mathrm{Im}\ z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

est une isométrie.

On identifie $\mathcal{G}(2n)$ avec l'union de tous les sous-espace vectoriels réels de $\mathbb{C}^n$ et pour tout $E \in \mathcal{G}(2n)$, on pose

$$E^\perp := \{u \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Re}\,\langle u, v\rangle = 0,\ \text{pour tout } v \in E\}\,,$$

$$E^{\mathbb{C}} := E \cap iE\,, \qquad \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E := E + iE\,, \qquad E' := E^\perp \cap \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E\,,$$

ainsi, $E^\perp$ est le complément orthogonal de E par rapport au produit scalaire $\mathrm{Re}\,\langle\,,\rangle$, $E^{\mathbb{C}}$ est le plus grand sous-espace complexe de $\mathbb{C}^n$ contenu dans E, $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E$ est le plus petit sous-espace complexe de $\mathbb{C}^n$ qui contient E, et E' est le complément orthogonal de E relativement à $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E$. On remarque que, pour $E \in \mathcal{G}(2n)$ fixé, on a

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E)$$

ainsi que

$$\dim_{\mathbb{R}} E \leqslant \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E) \leqslant 2\dim_{\mathbb{R}} E\,,$$

d'où l'on tire

$$\dim_{\mathbb{R}} E' \leqslant \dim_{\mathbb{R}} E \qquad \text{et} \qquad \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E) \leqslant \dim_{\mathbb{R}} E\,.$$

De plus, on voit facilement que, pour tout $E \in \mathcal{G}(2n)$, les affirmations ci-dessous sont deux à deux équivalentes

$$E^{\mathbb{C}} \neq \{0\}\,,$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E) < 2\dim_{\mathbb{R}} E\,,$$
$$\dim_{\mathbb{R}} E' < \dim_{\mathbb{R}} E\,,$$
$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E) < \dim_{\mathbb{R}} E\,,$$

donc le sont aussi les affirmations

$$E^{\mathbb{C}} = \{0\}\,,$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E) = 2\dim_{\mathbb{R}} E\,,$$
$$\dim_{\mathbb{R}} E' = \dim_{\mathbb{R}} E\,,$$
$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E) = \dim_{\mathbb{R}} E\,.$$

On observe encore que si $E \in \mathcal{G}(2n)$ est tel que $E^{\mathbb{C}} = E = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E$, alors le sous-espace réel $E^{\perp}$ est aussi un sous-espace complexe car dans ce cas

$$E^{\perp} = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \langle u, v\rangle = 0,\ \text{pour tout } v \in E\}\,.$$

Or, pour tout $E \in \mathcal{G}(2n)$, on considère les décompositions

$$E \oplus E' = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E = iE' \oplus \big((iE')^{\perp} \cap \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E\big)\,,$$

on peut donc construire le diagramme

$$E \xrightarrow{\iota} E \oplus E' = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E \xrightarrow{id} \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E = iE' \oplus \big((iE')^{\perp} \cap \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E\big) \xrightarrow{\pi} iE'$$

où ι est l'inclusion, id l'application identique et π la projection sur le premier facteur. La composée $\varrho_E := \pi \circ \imath$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire qui permet de définir une fonction $\varrho : \mathcal{G}(2n) \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour tout $E \in \mathcal{G}(2n)$, $\varrho(E) := |\det \varrho_E|$, si ϱ_E est un isomorphisme, et $\varrho(E) = 0$ autrement.[12]

Lemme 1.4.1. *La fonction* $\varrho : \mathcal{G}(2n) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie ci-dessus est continue et*

$$\varrho^{-1}(0) = \{E \in \mathcal{G}(2n) \mid E^{\mathbb{C}} \neq \{0\}\}\,.$$

Démonstration. Si une suite (E_n) d'éléments de $\mathcal{G}(2n)$ converge vers E alors il est facile de voir que la suite (iE'_n) converge vers iE', ceci implique la continuité de ϱ. Puisque $\ker \varrho_E = E \cap (iE')^{\perp}$, il suffit de montrer que

$$E^{\mathbb{C}} = E \cap (iE')^{\perp}\,.$$

En fait, si $u \in E^{\mathbb{C}}$ alors $-iu \in E^{\mathbb{C}}$, donc $\mathrm{Re}\,\langle u, iE'\rangle = \mathrm{Re}\,\langle -iu, E'\rangle = 0$, soit $u \in (iE')^{\perp}$. D'autre part, si l'on suppose $u \in E \cap (iE')^{\perp}$, alors on a bien $-iu \in (\mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E) \cap (E')^{\perp} = E$, d'où $u \in iE$. □

Remarque 1.4.1. Si $E \in \mathcal{G}(2n)$ et $\dim_{\mathbb{R}} E \geqslant (n+1)$, alors $\varrho(E) = 0$ car forcement $E^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$. Ceci implique, en particulier, que

$$\mathfrak{P}_k^{\varrho} = \mathfrak{Q}_k^{\varrho} \equiv 0\,,$$

pour tout $(n+1) \leqslant k \leqslant 2n$. Si $\dim_{\mathbb{R}} E \in \{0, 1\}$, on a toujours $\varrho(E) = 1$ car, dans ce cas, $E^{\mathbb{C}} = \{0\}$ et $iE' = E$, donc $\mathfrak{P}_0^{\varrho} = \mathfrak{Q}_0^{\varrho} \equiv 1$ et $\mathfrak{P}_1^{\varrho} = \mathfrak{Q}_1^{\varrho} \not\equiv 0$.

[12] Le nombre $\varrho(E)$ est parfois appelé le coefficient de distortion de la mesure de Lebesgue sous la projection de E sur iE'.

En outre, si $1 \leqslant k := \dim_{\mathbb{R}} E \leqslant n$ et $E^{\mathbb{C}} = \{0\}$, on peut choisir une base orthonormale

$$\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_k\}$$

de $\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E = E \oplus E'$ telle que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ soit une base de E et $\{u_1, \ldots, u_k\}$ une base de E', ainsi on peut facilement calculer $\varrho(E)$. En fait, ce choix de base implique que $\{iu_1, \ldots, iu_k\}$ est une base de iE', et que $\{iv_1, \ldots, iv_k\}$ est une base de $\big((iE')^{\perp} \cap \operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E\big)$. Comme, pour tout $1 \leqslant j, l \leqslant k$,

$$m_{j,l} := \operatorname{Re} \langle v_j, iu_l \rangle = \operatorname{Re} -i\langle v_j, u_l \rangle = \operatorname{Im} \langle v_j, u_l \rangle = -i\langle v_j, u_l \rangle \,,$$

on tire que $(m_{j,l})$ est la matrice de ϱ_E par rapport à ces bases, donc $\varrho(E)$ est égale au module du déterminant de cette matrice, soit $|(-i)^k \det\langle v_j, u_l \rangle|$.

Exemple 1.4.1. On considère dans $\mathbb{C}^2$ le sous-espace réel E engendré par les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, i)$. Il est clair que $\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E = \mathbb{C}^2$ et que

$$\Big\{(1,0), (0,i), (i,2), \big(i2\sqrt{5}/5,\ -\sqrt{5}/5\big)\Big\}$$

est une base orthonormale (par rapport au produit scalaire $\operatorname{Re}\langle\,,\rangle$) de $\mathbb{C}^2$ (sur $\mathbb{R}$) dont les deux derniers éléments engendrent le sous-espace E'. On en déduit que $\varrho(E) = \sqrt{5}$, donc, en générale, la fonction ϱ peut prendre valeurs plus grands que 1.

Dans la suite on notera repsectivement $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ et $\mathcal{K}^{\infty}_{+}(\mathbb{C}^n)$ l'ensemble des polytopes, des corps convexes et de corps strictement convexes de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ contenus dans l'espace $\mathbb{C}^n$. Pour tout sous-ensemble non vide A de $\mathbb{C}^n$, on note $\operatorname{aff}_{\mathbb{R}}(A)$ (resp. $\operatorname{aff}_{\mathbb{C}}(A)$) le sous-espace affine réel (resp. complexe) de $\mathbb{C}^n$ engendré par A. On aura, évidemment,

$$\dim_{\mathbb{R}}\big(\operatorname{aff}_{\mathbb{R}}(A)\big) = \dim_{\mathbb{R}} E_A \qquad \text{et} \qquad \dim_{\mathbb{C}}\big(\operatorname{aff}_{\mathbb{C}}(A)\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_A\big)\,.$$

Lemme 1.4.2. *Si $k, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant n$, pour tout $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, on a $\mathfrak{P}^{\varrho}_k(\Gamma) = 0$ si et seulement si $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Gamma}) < k$.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante, car, pour toute face Δ, on a $\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta} \subseteq \operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Gamma}$ et, par conséquent,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta}) \leqslant \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Gamma}) < k\,.$$

Ceci implique $\varrho(E_{\Delta}) = 0$, pour toute $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$, soit $\mathfrak{P}^{\varrho}_k(\Gamma) = 0$.

On suppose maintenant que $\mathfrak{P}_k^{\varrho}(\Gamma) = 0$ alors, pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$, on a $\varrho(E_\Delta) = 0$, soit $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_\Delta) < k$. Il suffit donc de montrer qu'il existe une face $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$ pour laquelle on ait

$$\mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_\Gamma = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_\Delta \tag{1.3}$$

et pour cela, si $d := \dim_{\mathbb{R}} E_\Gamma$, on va construire une suite $\Delta_1 \succ \ldots \succ \Delta_{d-k}$ strictement décroissante de $(d-k)$ faces de Γ, telles que

$$\dim_{\mathbb{R}} E_{\Delta_\ell} = d - \ell \qquad \text{et} \qquad \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_\Gamma = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_\ell}\,,$$

pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant d-k$, en suite il ne restera qu'à mettre dans (1.3) la plus petite des faces $\Delta_{d-\ell}$ ainsi trouvées, (soit Δ_{d-k}).

On remarque d'abord que, pour toute face $\Gamma' \preccurlyeq \Gamma$ de dimension plus grande ou égale à k, on a $E_{\Gamma'}^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$. Ceci est vrai, en particulier, pour la face impropre Γ, et donc deux cas peuvent se présenter, à savoir $E_\Gamma = E_\Gamma^{\mathbb{C}}$ ou bien $E_\Gamma \supsetneq E_\Gamma^{\mathbb{C}}$. Dans le premier cas on a évidemment $E_\Gamma = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_\Gamma = E_\Gamma^{\mathbb{C}}$, donc pour toute facette Δ_1 de Γ, on a

$$E_{\Delta_1} \subset \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_1} \subseteq \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_\Gamma = E_\Gamma\,,$$

d'où, pour des raisons dimensionnelles, on voit que $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_1} = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_\Gamma$. Dans le deuxième cas, à une translation de $\mathbb{C}^n$ près, (qui n'affecte pas la valeur de $\mathfrak{P}_k^{\varrho}(\Gamma)$), on peut supposer que $0 \in \mathcal{B}(\Gamma, 0)$. Ceci fait qu'il existe une facette Δ_1 de Γ qui contient 0 en tant que sommet et telle que

$$E_\Gamma^{\mathbb{C}} \not\subseteq E_{\Delta_1}\,,$$

car autrement on aurait la relation absurde

$$\{0\} \subsetneq E_\Gamma^{\mathbb{C}} \subseteq \bigcap E_\Delta = \{0\}\,,$$

l'intersection étant prise sur l'ensemble des facettes de Γ qui contiennent 0 comme sommet. On déduit que $E_{\Delta_1} \cap E_\Gamma^{\mathbb{C}}$ a codimension réelle 1 dans $E_\Gamma^{\mathbb{C}}$, ce qui fait que $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\Delta_1} \cap E_\Gamma^{\mathbb{C}})$ soit un nombre impair et que $E_{\Delta_1} \cap E_\Gamma^{\mathbb{C}}$ ne soit pas un sous-espace complexe de $E_\Gamma^{\mathbb{C}}$. D'autre part, $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(E_{\Delta_1} \cap E_\Gamma^{\mathbb{C}})$ est par définition un sous-espace complexe de $E_\Gamma^{\mathbb{C}}$ et, pour les raisons dimensionnelles que l'on vient d'évoquer, on a même

$$E_\Gamma^{\mathbb{C}} = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(E_{\Delta_1} \cap E_\Gamma^{\mathbb{C}})\,.$$

Or, l'égalité ci-dessus et l'inclusion évidente $(E_{\Delta_1} \cap E_\Gamma^{\mathbb{C}}) \subset E_{\Delta_1}$ impliquent que $E_\Gamma^{\mathbb{C}} \subset \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_1}$ et ceci, en vertu de l'hypothèse $E_\Gamma^{\mathbb{C}} \not\subseteq E_{\Delta_1}$, fait que

$$E_{\Delta_1} \subsetneq E_\Gamma \cap \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_1}\,.$$

Pour des raisons dimensionnelles, $E_\Gamma \subseteq \mathrm{lin}_\mathbb{C} E_{\Delta_1}$, donc $\mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Gamma = \mathrm{lin}_\mathbb{C} E_{\Delta_1}$.

Si l'on recommence avec Δ_1, on trouve une face $\Delta_2 \prec \Delta_1 \prec \Gamma$, (telle que E_{Δ_2} soit de codimension 2 dans E_Γ) pour laquelle

$$\mathrm{lin}_\mathbb{C} E_{\Delta_2} = \mathrm{lin}_\mathbb{C} E_{\Delta_1} = \mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Gamma\,.$$

La preuve s'achève en réitérant, au total, $(d-k)$ fois le même argument.[13] □

Corollaire 1.4.1. *Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, si $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ et $\Gamma = \sum_{\ell=1}^k \Gamma_\ell$, les conditions suivantes sont équivalentes*

(*a*) $\mathfrak{P}_k^\varrho(\Gamma) = 0$,
(*b*) $\dim_\mathbb{C}\big(\mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Gamma\big) < k$,
(*c*) $\dim_\mathbb{C}\big(\mathrm{aff}_\mathbb{C} E_\Gamma\big) < k$,
(*d*) $\dim_\mathbb{C}\big(\mathrm{aff}_\mathbb{C} E_\Delta\big) < k$, *pour tout* $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$,
(*e*) $\mathfrak{Q}_k^\varrho(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k) = 0$.

Démonstration. Les équivalences $(a) \Leftrightarrow (b)$ et $(c) \Leftrightarrow (d)$ suivent toutes les deux du Lemme 1.4.2, tandis que $(b) \Leftrightarrow (c)$ et $(d) \Leftrightarrow (e)$ sont triviales. □

Remarque 1.4.2. Si l'on restreint $\mathfrak{Q}_n^\varrho$ aux polytopes réels de $\mathbb{C}^n$, alors il coïncide avec le volume mixte n-dimensionnel. En fait, si $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, et $\Gamma := \sum_{j=1}^n \Gamma_j$, on a $\varrho(E_\Delta) = 1$ pour toute $\Delta \preccurlyeq \Gamma$, donc

$$\mathfrak{Q}_n^\varrho(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n) = \sum_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, n)} V_n(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)\psi_\Gamma(\Delta) = V_n(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)\,,$$

en particulier, pour tout $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathfrak{P}_n^\varrho(\Gamma) = \mathrm{Vol}_n(\Gamma)$.

Lemme 1.4.3. *Pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, les formes $\mathfrak{P}_k^\varrho$ et $\mathfrak{Q}_k^\varrho$ sont invariantes par translations et par transformations unitaires de $\mathbb{C}^n$. En outre, les formes $\mathfrak{P}_1^\varrho$ est aussi invariante par transformations orthogonales de $\mathbb{R}^{2n}$.*

Démonstration. Si $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$ il n'y a rien à montrer, on suppose donc $1 \leqslant k \leqslant n$. Grâce au Lemme 1.3.4, il suffit de montrer l'affirmation pour $\mathfrak{P}_k^\varrho$. L'invariance par translations étant évidente, on va montrer que, pour $T \in \mathrm{U}(n)$ et $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, on a

$$\mathfrak{P}_k^\varrho(\Gamma) = \mathfrak{P}_k^\varrho(T(\Gamma))\,.$$

[13] L'idée de la preuve du Lemme 1.4.2 ma été signalée par B. Ya. Kazarnovskiĭ.

Pour cela, on remarque d'abord que, pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$, le fait que T est unitaire implique

$$\operatorname{Vol}_k(\Delta) = \operatorname{Vol}_k(T(\Delta)) \quad \text{et} \quad \psi_\Gamma(\Delta) = \psi_{T(\Gamma)}(T(\Delta))\,, \tag{1.4}$$

donc il ne reste qu'à prouver que

$$\varrho(E_\Delta) = \varrho(E_{T(\Delta)})\,.$$

En effet, pour tout $E \in \mathcal{G}(2n)$, on a $T(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E) = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}} T(E)$; en outre, comme T est unitaire, $T(E') = T(E)'$, d'où $T(i(E')) = i(T(E)')$. Mais alors

$$\varrho_{T(E)} = T \circ \varrho_E \circ T^{-1}\,,$$

ce qui implique l'égalité $\varrho(T(E)) = \varrho(E)$. Or, si $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$, $E_{T(\Delta)} = T(E_\Delta)$, d'où la première partie du lemme. Enfin, si $T \in \mathrm{O}(2n)$ et $E \in \mathcal{G}_{1,2n}$, on a aussi $\varrho(E) = 1 = \varrho(T(E))$, et les égalités (1.4) restent encore vraies pour $T \in \mathrm{O}(2n)$, d'où la conclusion. □

Lemme 1.4.4. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, la forme $\mathfrak{Q}_1^\varrho$ est croissante sur $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$.*

Démonstration. Soit $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, puisque ϱ restreinte à $\mathcal{G}_{1,2n}$ est égale à 1, on a que

$$\mathfrak{Q}_1^\varrho(\Gamma) = \frac{2n}{\varkappa_{2n-1}} \mathrm{V}_{2n}(\Gamma, B_{2n}, \ldots, B_{2n})\,,$$

donc, à un facteur de normalisation près, $\mathfrak{P}_1^\varrho(\Gamma)$ n'est rien d'autre que le volume mixte $2n$-dimensionnel de Γ avec $(2n-1)$ copies de la boule unité $2n$-dimensionnelle B_{2n}. □

Remarque 1.4.3. Le Lemme 1.4.4 n'est plus valable dès que $k \geqslant 2$, c'est-à-dire, dès que $k \geqslant 2$ la forme $\mathfrak{Q}_k^\varrho$ n'est pas croissante (en chacun des arguments). Au vu de symétrie de $\mathfrak{Q}_k^\varrho$ il suffit de le montrer pour le premier argument. En fait, si $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, Γ dénote leur somme de Minkowski et $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma \leqslant k-1$, le Corollaire 1.4.1 implique que

$$\mathfrak{Q}_k^\varrho(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k) = 0 = \mathfrak{Q}_k^\varrho({\Gamma_1}', \Gamma_2 \ldots, \Gamma_k)\,,$$

pour tout ${\Gamma_1}' \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ tel que $\operatorname{aff}_{\mathbb{C}} {\Gamma_1}' = \operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma_1$ et $\Gamma_1 \subsetneq {\Gamma_1}'$. Toutefois, lorsque $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on a $\varrho(E_\Delta) = 1$ pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$, donc

$$\mathfrak{Q}_k^\varrho(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k) = \varkappa_{2n-k}^{-1} \binom{2n}{k} \mathrm{V}_{2n}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k, B_{2n}, \ldots, B_{2n})\,,$$

ce qui implique la croissance de la restriction de $\mathfrak{Q}_k^\varrho$ à $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Le Lemme 1.4.4 implique, en particulier, que $\mathfrak{P}_n^\varrho$ ne peut en aucun cas se prolonger à une mesure sur $\mathbb{C}^n$, car, pour $n = 1$, il est égal au demi-périmètre qui n'est pas une fonction additive par rapport aux unions finies, et pour $n > 1$, il n'est pas croissant par rapport à l'inclusion. Néanmoins, comme il a été remarqué par Alesker [1], pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathfrak{P}_k^\varrho$ est une valuation sur $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$, qui est continue, k-homogène et invariante par translations et transformations unitaires de $\mathbb{C}^n$. La preuve de ce résultat suivra facilement d'un théorème de la la section suivante.

Définition 1.4.1. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, le n-*pseudovolume (mixte) de Kazarnovskiĭ *sur les (n-uplets de) polytopes de $\mathbb{C}^n$ est la forme $P_n := \mathfrak{P}_n^\varrho$, ($Q_n := \mathfrak{Q}_n^\varrho$).*

1.5 Formules intégrales.

Dans la section précédente on a défini le pseudovolume d'un polytope de $\mathbb{C}^n$ comme une certaine somme pondérée de volumes ; le but de cette section sera de prolonger la définition du pseudovolume à une classe plus large de sous-ensembles de $\mathbb{C}^n$. Pour cela on a besoin d'introduire certains objets qui, en suite, nous serviront pour effectuer le prolongement en question.

Soit $A \subset \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble compact à bord lisse et à intérieur non vide, dans ce cas il existe une fonction définissante $\rho_A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ pour A, c'est-à-dire une fonction réelle, lisse sur $\mathbb{C}^n$, telle que

$$\mathrm{int}\, A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho_A(z) < 0\}\,, \qquad \partial A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho_A(z) = 0\}\,,$$

et

$$(d\rho_A)_u \neq 0\,,$$

pour tout $u \in \partial A$. Une fois qu'une fonction définissante pour A a été fixée, on peut exprimer le champ $\nu_{\partial A}$ des vecteurs unitaires normaux extérieurs à ∂A (par rapport à l'orientation induite par $\mathbb{C}^n$) comme

$$\nu_{\partial A} = \frac{\nabla \rho_A}{\|\nabla \rho_A\|}\,,$$

avec

$$\nabla \rho_A = \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \rho_A}{\partial \xi_{2n}}\right),$$

dans les coordonnées réelles (qui correspondent au choix d'une base de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ positivement orientée), et

$$\nabla \rho_A = 2\left(\frac{\partial \rho_A}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial \rho_A}{\partial \bar{z}_n}\right),$$

par rapport aux coordonnées complexes données, pour tout $j = 1, \dots, n$, par $z_j = \xi_{2j-1} + i\xi_{2j}$ et $\bar{z}_j = \xi_{2j-1} - i\xi_{2j}$. Il s'agit d'un champ différentiable sur ∂A car ρ_A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\nabla\rho_A \neq 0$ sur ∂A, en outre, le champ $\nu_{\partial A}$ est indépendant du choix de la fonction définissante utilisée pour le définir, en fait, si $\tilde{\rho}_A$ est une autre fonction définissante pour A, il existe une fonction positive $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ et non nulle sur ∂A, telle que, d'une part $\rho_A = h\tilde{\rho}_A$ et, d'autre part, pour tout $u \in \partial A$,

$$\nabla\rho_A(u) = h(u)(\nabla\tilde{\rho}_A(u)),$$

ce qui fait que le champ $\nu_{\partial A}$ ne dépende que de ∂A. Un tel champ permet de définir la deuxième forme fondamentale $II_{\partial A}$ de ∂A, soit le champ de tenseurs deux fois covariants sur ∂A, donné, pour tout $u \in \partial A$ et tout $\zeta, \eta \in T_u\partial A$, par

$$(II_{\partial A})_u(\zeta, \eta) := \operatorname{Re}\langle (d\nu_{\partial A})_u(\zeta), \eta\rangle .$$

On remarque à ce propos que, si $u \in \partial A$ est fixé, en choisissant une carte locale autour du point u, il est facile de montrer que $(II_{\partial A})_u$ est une forme symétrique, (ou, de manière équivalente, en identifiant $T_u\partial A$ et $T_{\nu_{\partial A}(u)}\mathbb{S}^{2n-1}$ avec $\mathbb{R}^{2n-1}$, on peut facilement montrer que $(d\nu_{\partial A})_u$ est un opérateur auto-adjoint par rapport à la métrique induite sur $\mathbb{R}^{2n-1}$ par le produit scalaire $\operatorname{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{C}^n$). Si l'on fixe $u \in \partial A$ et on note $T_u^{\mathbb{C}}\partial A$ l'espace tangent complexe de ∂A au point u, on voit que, pour tout $\zeta, \eta \in T_u^{\mathbb{C}}\partial A$,

$$(II_{\partial A}^{\mathbb{C}})_u(\zeta, \eta) := \frac{1}{2}\Big[(II_{\partial A})_u(\zeta, \eta) + (II_{\partial A})_u(i\zeta, i\eta)\Big]$$

définit, sur $T_u^{\mathbb{C}}\partial A$, une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique et telle que

$$(II_{\partial A}^{\mathbb{C}})_u(\zeta, \eta) = (II_{\partial A}^{\mathbb{C}})_u(i\zeta, i\eta),$$

donc on en déduit une forme hermitienne sur $T_u^{\mathbb{C}}\partial A$ en posant

$$\mathcal{L}_{\partial A,u}(\zeta, \eta) := (II_{\partial A}^{\mathbb{C}})_u(\zeta, \eta) + i(II_{\partial A}^{\mathbb{C}})_u(\zeta, i\eta).$$

Lemme 1.5.1. *Soit $A \subset \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble compact à bord lisse et à intérieur non vide, $u \in \partial A$ fixé, et $\rho_A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ une fonction définissante pour A. Alors, pour tout $\zeta, \eta \in T_u^{\mathbb{C}}\partial A$,*

$$\mathcal{L}_{\partial A,u}(\zeta, \eta) = \frac{2}{\|\nabla\rho_A(u)\|}\sum_{k,\ell=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_\ell\partial\bar{z}_k}(u)\,\zeta_\ell\bar{\eta}_k .$$

Démonstration. En effet, pour tout $\zeta, \eta \in T_u^{\mathbb{C}}\partial A$,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L}_{\partial A,u}(\zeta,\eta) &= \operatorname{Re}\langle (d\nu_{\partial A})_u(\zeta),\eta\rangle + \operatorname{Re}\langle (d\nu_{\partial A})_u(i\zeta), i\eta\rangle \\
&+ i\operatorname{Re}\langle (d\nu_{\partial A})_u(\zeta), i\eta\rangle + i\operatorname{Re}\langle (d\nu_{\partial A})_u(i\zeta), i^2\eta\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle (d\nu_{\partial A})_u(\zeta),\eta\rangle + \operatorname{Re}\langle (d\nu_{\partial A})_u(i\zeta), i\eta\rangle \\
&+ i\operatorname{Im}\langle (d\nu_{\partial A})_u(\zeta),\eta\rangle + i\operatorname{Im}\langle (d\nu_{\partial A})_u(i\zeta), i\eta\rangle \\
&= \langle (d\nu_{\partial A})_u(\zeta),\eta\rangle + \langle (d\nu_{\partial A})_u(i\zeta), i\eta\rangle \\
&= \langle (d\nu_{\partial A})_u(\zeta) - i(d\nu_{\partial A})_u(i\zeta),\eta\rangle \\
&= \langle (\partial\nu_{\partial A})_u(\zeta) + (\bar\partial\nu_{\partial A})_u(\zeta) - i(\partial\nu_{\partial A})_u(i\zeta) - i(\bar\partial\nu_{\partial A})_u(i\zeta),\eta\rangle \\
&= 2\langle (\partial\nu_{\partial A})_u(\zeta),\eta\rangle\,,
\end{aligned}$$

et comme, pour tout $1 \leqslant k, \ell \leqslant n$ fixés,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\nu_{\partial A})_k}{\partial z_\ell}(u) &= \frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\frac{2}{\|\nabla\rho_A\|}\frac{\partial\rho_A}{\partial\bar z_k}\right)(u) \\
&= \frac{\partial\rho_A}{\partial\bar z_k}(u)\frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\frac{2}{\|\nabla\rho_A\|}\right)(u) + \frac{2}{\|\nabla\rho_A(u)\|}\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_\ell\partial\bar z_k}(u)\,,
\end{aligned}$$

on déduit que $\mathcal{L}_{\partial A,u}(\zeta,\eta)$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,\ell=1}^{n}\frac{\partial\rho_A}{\partial\bar z_k}(u)\frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\frac{2}{\|\nabla\rho_A\|}\right)(u)\zeta_\ell\bar\eta_k + \frac{2}{\|\nabla\rho_A(u)\|}\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_\ell\partial\bar z_k}(u)\zeta_\ell\bar\eta_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\rho_A}{\partial\bar z_k}(u)\bar\eta_k\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\frac{2}{\|\nabla\rho_A\|}\right)(u)\zeta_\ell + \sum_{k,\ell=1}^{n}\frac{2}{\|\nabla\rho_A(u)\|}\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_\ell\partial\bar z_k}(u)\zeta_\ell\bar\eta_k \\
&= \frac{2}{\|\nabla\rho_A(u)\|}\sum_{k,\ell=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_\ell\partial\bar z_k}(u)\zeta_\ell\bar\eta_k
\end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\rho_A}{\partial\bar z_k}(u)\bar\eta_k = \overline{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\rho_A}{\partial z_k}(u)\eta_k} = 0\,,$$

pour tout $\eta \in T_u^{\mathbb{C}}\partial A$. □

Dans ce qui suit on aura besoin de l'expression en coordonnées complexes de la forme volume $\upsilon_{\partial A}$ sur ∂A. En coordonnées réelles $\upsilon_{\partial A}$ est donnée par l'expression

$$\upsilon_{\partial A} = \sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}(\nu_{\partial A})_j d\xi_{[j]}\,,$$

où, pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2n$,

$$d\xi_{[j]} := \left(\bigwedge_{\ell=1}^{j-1} d\xi_\ell \right) \wedge \left(\bigwedge_{\ell=j+1}^{2n} d\xi_\ell \right),$$

d'autre part, si pour tout $1 \leqslant r \leqslant n$, on pose

$$dz_{[\bar{r}]} := \left(\bigwedge_{j \neq r} dz_j \wedge d\bar{z}_j \right) \wedge dz_r$$

et

$$dz_{[r]} := \left(\bigwedge_{j \neq r} dz_j \wedge d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_r\,,$$

on voit que

$$dz_{[\bar{r}]} - dz_{[r]} = 2^n(-i)^{n-2} d\xi_{[2r-1]}$$

ainsi que

$$dz_{[\bar{r}]} + dz_{[r]} = 2^n(-i)^{n-1} d\xi_{[2r]}\,,$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
\upsilon_{\partial A} &= \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} (\nu_{\partial A})_j d\xi_{[j]} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (\nu_{\partial A})_{2r-1} d\xi_{[2r-1]} - (\nu_{\partial A})_{2r} d\xi_{[2r]} \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\|\nabla \rho_A\|} \frac{\partial \rho_A}{\partial \xi_{2r-1}} d\xi_{[2r-1]} - \frac{1}{\|\nabla \rho_A\|} \frac{\partial \rho_A}{\partial \xi_{2r}} d\xi_{[2r]} \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\|\nabla \rho_A\|} \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial z_r} + \frac{\partial \rho_A}{\partial \bar{z}_r} \right) \frac{i^{n-2}}{2^n} \big(dz_{[\bar{r}]} - dz_{[r]} \big) \\
&- \frac{i}{\|\nabla \rho_A\|} \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial z_r} - \frac{\partial \rho_A}{\partial \bar{z}_r} \right) \frac{i^{n-1}}{2^n} \big(dz_{[\bar{r}]} + dz_{[r]} \big) \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{i^{n-2}}{2^n} \frac{1}{\|\nabla \rho_A\|} \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial z_r} + \frac{\partial \rho_A}{\partial \bar{z}_r} \right) \big(dz_{[\bar{r}]} - dz_{[r]} \big) \\
&+ \frac{i^{n-2}}{2^n} \frac{1}{\|\nabla \rho_A\|} \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial z_r} - \frac{\partial \rho_A}{\partial \bar{z}_r} \right) \big(dz_{[\bar{r}]} + dz_{[r]} \big) \\
&= \frac{i^{n-2}}{2^{n-1}} \frac{1}{\|\nabla \rho_A\|} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \rho_A}{\partial z_r} dz_{[\bar{r}]} - \frac{\partial \rho_A}{\partial \bar{z}_r} dz_{[r]}\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne l'expression cherchée.

Une fois introduite la forme hermitienne $\mathcal{L}_{\partial A}$, on va définir un autre objet qui sera nécessaire dans tout le reste du chapitre, à savoir la 1-forme différentielle $\alpha_{\partial A}$ sur ∂A donnée, pour $u \in \partial A$ et $\zeta \in T_u \partial A$, par

$$(\alpha_{\partial A})_u(\zeta) := \operatorname{Re} \langle \zeta, i\nu_{\partial A}(u) \rangle = \frac{i}{2}\big(\langle \nu_{\partial A}(u), \zeta \rangle - \langle \zeta, \nu_{\partial A}(u) \rangle\big)\,.$$

Il est facile de voir qu'en coordonnées réelles la forme $\alpha_{\partial A}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \alpha_{\partial A} &= \sum_{\ell=1}^{n} (\nu_{\partial A})_{2\ell-1}\, d\xi_{2\ell} - (\nu_{\partial A})_{2\ell}\, d\xi_{2\ell-1} \\ &= \frac{1}{\|\nabla \rho_A\|} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \rho_A}{\partial \xi_{2\ell-1}} d\xi_{2\ell} - \frac{\partial \rho_A}{\partial \xi_{2\ell}} d\xi_{2\ell-1}\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

tandis qu'en coordonnées complexes

$$\alpha_{\partial A} = \frac{i}{\|\nabla \rho_A\|}\big(\bar\partial \rho_A - \partial \rho_A\big) = \frac{d^c \rho_A}{\|\nabla \rho_A\|}\,,$$

où d^c est l'opérateur différentiel donné par

$$d^c := i(\bar\partial - \partial)\,.$$

Lemme 1.5.2. *Soit $A \subset \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble compact à bord lisse et à intérieur non vide. Alors*

$$\alpha_{\partial A} \wedge (d\alpha_{\partial A})^{\wedge(n-1)} = \frac{i^n 2^{n-1}}{\|\nabla \rho_A\|^n}\big(\bar\partial \rho_A - \partial \rho_A\big) \wedge \big(\partial\bar\partial \rho_A\big)^{\wedge(n-1)}\,,$$

où $\rho_A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ est une fonction définissante pour A.

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned} d\alpha_{\partial A} &= \big(\partial + \bar\partial\big)\left(\frac{i}{\|\nabla \rho_A\|}\big(\bar\partial \rho_A - \partial \rho_A\big)\right) \\ &= \big(\partial + \bar\partial\big)\left(\frac{i}{\|\nabla \rho_A\|}\right) \wedge \big(\bar\partial \rho_A - \partial \rho_A\big) + \frac{2i}{\|\nabla \rho_A\|}\partial\bar\partial \rho_A\,, \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \big(\partial + \bar\partial\big)\left(\frac{i}{\|\nabla \rho_A\|}\right) &= i\partial\Big(\big(\|\nabla \rho_A\|^2\big)^{-\frac{1}{2}}\Big) + i\bar\partial\Big(\big(\|\nabla \rho_A\|^2\big)^{-\frac{1}{2}}\Big) \\ &= \frac{i}{2\|\nabla \rho_A\|^3}\big(\bar\partial + \partial\big)\big(\|\nabla \rho_A\|^2\big)\,, \end{aligned}$$

on obtient

$$d\alpha_{\partial A} = \frac{1}{2\|\nabla\rho_A\|^2}\big(\bar\partial - \partial\big)\big(\|\nabla\rho_A\|^2\big) \wedge \alpha_{\partial A} + \frac{2i}{\|\nabla\rho_A\|}\partial\bar\partial\rho_A\,,$$

ce qui fait que

$$\alpha_{\partial A} \wedge (d\alpha_{\partial A})^{\wedge(n-1)} = \frac{i^n 2^{n-1}}{\|\nabla\rho_A\|^n}\big(\bar\partial\rho_A - \partial\rho_A\big) \wedge \big(\partial\bar\partial\rho_A\big)^{\wedge(n-1)}\,,$$

et donc la preuve du lemme s'achève. □

Théorème 1.5.1. *Soit $A \subset \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble compact à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à intérieur non vide. Alors on a l'égalité*

$$2^{n-1}(n-1)!\int_{\partial A}(\det\mathcal{L}_{\partial A})\upsilon_{\partial A} = \int_{\partial A}\alpha_{\partial A}\wedge(d\alpha_{\partial A})^{\wedge(n-1)}\,,$$

les deux intégrales étant positives dès que A est pseudoconvexe.

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout $u \in \partial A$, il y a égalité entre les germes, c'est-à-dire que

$$2^{n-1}(n-1)!\det\mathcal{L}_{\partial A,u}\,\upsilon_{\partial A,u} = \alpha_{\partial A,u}\wedge(d\alpha_{\partial A,u})^{\wedge(n-1)}\,.$$

Soit $u \in \partial A$ fixé. À moins d'une rotation, on peut supposer que

$$T_u\partial A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Im} z_n = 0\}\,,$$

et, donc, en particulier,

$$T_u^{\mathbb{C}}\partial A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_n = 0\}\,.$$

En outre, la forme $\mathcal{L}_{\partial A,u}$ étant hermitienne, on peut choisir une base de $T_u^{\mathbb{C}}\partial A$ (positivement orientée) par rapport à laquelle la matrice de $\mathcal{L}_{\partial A,u}$ est une matrice diagonale. Comme A admet une fonction définissante globale ρ_A telle que

$$\frac{\partial\rho_A}{\partial\xi_{2n}}(u) = 1\,,$$

nos choix de coordonnées impliquent que

$$\frac{\partial\rho_A}{\partial z_\ell}(u) = 0\,, \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant \ell \leqslant n-1\,, \qquad \frac{\partial\rho_A}{\partial z_n}(u) = \frac{1}{2i}\,,$$

et

$$\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_r\partial\bar z_s}(u) = 0 \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant r, s \leqslant n-1\,,\ r \neq s\,.$$

On en déduit que

$$\upsilon_{\partial A,u} = \frac{i^{n-2}}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2i}dz_{[\bar{n}]} + \frac{1}{2i}dz_{[n]}\right) = -d\xi_{[2n]}\,,$$

et, grâce au Lemme 1.5.1, que

$$\det \mathcal{L}_{\partial A,u} = 2^{n-1}\operatorname{cof}\left(\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_n\partial\bar{z}_n}(u)\right),$$

d'où

$$\det \mathcal{L}_{\partial A,u}\upsilon_{\partial A,u} = (-1)2^{n-1}\operatorname{cof}\left(\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_n\partial\bar{z}_n}(u)\right)d\xi_{[2n]}\,,$$

le cofacteur étant calculé par rapport à la matrice hessienne complexe de ρ_A au point u. D'autre part, le Lemme 1.5.2 assure que

$$\begin{aligned}\alpha_{\partial A,u}\wedge(d\alpha_{\partial A,u})^{\wedge(n-1)} &= 2^{n-2}i^{n+1}\big(d\bar{z}_n + dz_n\big)\wedge\big(\partial\bar{\partial}\rho_A(u)\big)^{\wedge(n-1)}\\ &= 2^{n-1}i^{n+1}\big(\partial\bar{\partial}\rho_A(u)\big)^{\wedge(n-1)}\wedge d\xi_{2n-1}\,,\end{aligned}$$

donc, pour conclure, il nous suffirait de montrer que

$$2^{n-1}(n-1)!\operatorname{cof}\left(\frac{\partial^2\rho_A}{\partial\bar{z}_n\partial z_n}(u)\right)d\xi_{[2n]} = i^{n-1}\big(\partial\bar{\partial}\rho_A(u)\big)^{\wedge(n-1)}\wedge d\xi_{2n-1}\,.$$

Pour cela, on remarque que la forme $\big(\partial\bar{\partial}\rho_A(u)\big)^{\wedge(n-1)}$ se décompose en la somme de deux formes

$$\big(\partial\bar{\partial}\rho_A(u)\big)^{\wedge(n-1)} = \omega + \eta\,,$$

où η comporte la forme $d\xi_{2n-1}$ tandis que ω ne la comporte pas. Ceci implique que

$$\big(\partial\bar{\partial}\rho_A(u)\big)^{\wedge(n-1)}\wedge d\xi_{2n-1} = \omega\wedge d\xi_{2n-1}\,,$$

d'ailleurs, la structure de $\partial\bar{\partial}\rho_A$ fait que ω ne comporte aucune des formes dz_n et $d\bar{z}_n$, donc

$$\begin{aligned}\omega &= \left(\sum_{r=1}^{n-1}\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_r\partial\bar{z}_r}(u)\,dz_r\wedge d\bar{z}_r\right)^{\wedge(n-1)}\\ &= (-2i)^{n-1}(n-1)!\operatorname{cof}\left(\frac{\partial^2\rho_A}{\partial z_n\partial\bar{z}_n}(u)\right)d\xi_1\wedge\ldots\wedge d\xi_{2n-2}\,,\end{aligned}$$

d'où la conclusion. En fin, si A est pseudoconvexe, la forme $\mathcal{L}_{\partial A}$ est définie positive, ce qui fait que la première des deux intégrales est positive. □

Remarque 1.5.1. On observe que notre présentation du Théorème 1.5.1 est différente de celle de [17] à cause du terme de normalisation $(n-1)!$ que [17] doit faire déjà apparaître dans l'expression de $\mathcal{L}_{\partial A}$ ou de $v_{\partial A}$.

Théorème 1.5.2. *Soit* $A \subset \mathcal{K}_+^\infty(\mathbb{C}^n)$, *alors on a*

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} d^c h_A \wedge (dd^c h_A)^{\wedge(n-1)} = \int_{\partial A} \alpha_{\partial A} \wedge (d\alpha_{\partial A})^{\wedge(n-1)} .$$

Démonstration. Si l'on montre que $d^c h_A$ et $\alpha_{\partial A}$ sont égales modulo une forme exacte, le théorème suit facilement. Pour cela, on commence par remarquer que, comme A est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut définir correctement une application de Gauss

$$\nu_{\partial A} : \partial A \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1} ,$$

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ∂A. Cette application est surjective, car, pour tout $u \in \mathbb{S}^{2n-1}$, chaque point de la face (non vide) $A \cap H_A(u)$ est une image réciproque de u. En outre, puisque A est strictement convexe, l'application de Gauss est injective, en fait, si $z, z' \in \partial A$ sont tels que $\nu_{\partial A}(z) = u = \nu_{\partial A}(z')$, la face $A \cap H_A(u)$ doit contenir le segment $[z, z']$, et comme ∂A n'admet pas de segments non triviaux, on en déduit que $z = z'$. Tout ceci implique que $\nu_{\partial A}$ est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais en fait il est même un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour le vérifier, on observe que, pour tout $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on a la relation

$$h_A(u) = \operatorname{Re} \left\langle u, \nu_{\partial A}^{-1}\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\rangle , \qquad \text{d'où} \qquad \nu_{\partial A}^{-1}\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \in A \cap H_A(u) .$$

D'autre part, comme un gradient est aussi un sous-gradient, on a que, pour tout $u \in \mathbb{C}^n$,

$$\nabla h_A(u) \in \operatorname{Subd} h_A(u) = A \cap H_A(u) .$$

Pour tout $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, la convexité stricte de A implique l'égalité

$$\nu_{\partial A}^{-1}\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \nabla h_A(u) ,$$

donc, en posant, pour tout $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$,

$$\nu_{\partial A}^{-1}(u) := \nu_{\partial A}^{-1}\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \nabla h_A(u) = 2\left(\frac{\partial h_A}{\partial \bar{u}_1}(u), \ldots, \frac{\partial h_A}{\partial \bar{u}_n}(u)\right) ,$$

(ce qui est cohérent avec le fait que toutes les dérivées de h_A sont positivement homogènes de degré 0), on voit que

$$\nu_{\partial A}^{-1} : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \partial A ,$$

ainsi que sa restriction à $\mathbb{S}^{2n-1}$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ceci fait, on va montrer que, pour tout $u \in \mathbb{S}^{2n-1}$, on a

$$\big(d^c h_A\big)_u - \big((\nu_{\partial A}^{-1})^* \alpha_{\partial A}\big)_u = d\big(\operatorname{Im}\langle u, \nu_{\partial A}^{-1}(u)\rangle\big)\,,$$

le théorème s'en suivra aisément. On fixe $u \in \mathbb{S}^{2n-1}$ et, on voit que, pour tout $\zeta \in T_u\mathbb{S}^{2n-1}$, on a

$$(d^c h_A)_u(\zeta) = \operatorname{Im}\langle \zeta, \nabla h_A(u)\rangle\,,$$

car

$$\operatorname{Im}\langle \zeta, \nabla h_A(u)\rangle = \frac{i}{2}\Big[\langle \nabla h_A(u), \zeta\rangle - \langle \zeta, \nabla h_A(u)\rangle\Big] = i\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_A}{\partial \bar u_k}(u)\bar\zeta_k - \frac{\partial h_A}{\partial u_k}(u)\zeta_k\,,$$

en outre,

$$\begin{aligned}
\big((\nu_{\partial A}^{-1})^* \alpha_{\partial A}\big)_u(\zeta) &= (\alpha_{\partial A})_{\nu_{\partial A}^{-1}(u)}\big((d\nu_{\partial A}^{-1})_u(\zeta)\big)\\
&= \operatorname{Re}\langle d(\nabla h_A)_u(\zeta), iu\rangle\\
&= \operatorname{Im}\langle d(\nabla h_A)_u(\zeta), u\rangle\,,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\big(d^c h_A - (\nu_{\partial A}^{-1})^* \alpha_{\partial A}\big)_u(\zeta) &= \operatorname{Im}\Big[\langle \zeta, \nabla h_A(u)\rangle - \langle d(\nabla h_A)_u(\zeta), u\rangle\Big]\\
&= \frac{i}{2}\Big[\langle \nabla h_A(u), \zeta\rangle + \langle d(\nabla h_A)_u(\zeta), u\rangle\Big]\\
&- \frac{i}{2}\Big[\langle u, d(\nabla h_A)_u(\zeta)\rangle - \langle \zeta, \nabla h_A(u)\rangle\Big]\\
&= \frac{i}{2}\Big[d\big(\langle \nabla h_A(u), u\rangle\big) - d\big(\langle u, \nabla h_A(u)\rangle\big)\Big](\zeta)\\
&= d\big(\operatorname{Im}\langle u, \nu_{\partial A}^{-1}(u)\rangle\big)(\zeta)\,,
\end{aligned}$$

et la preuve est ainsi achevée. □

Définition 1.5.1. *Soit $A \subset \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble compact à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à intérieur non vide. Le* n-pseudovolume de Kazarnovskiĭ *de A est le nombre réel*

$$P_n(A) := \frac{1}{n!\varkappa_n}\int_{\partial A} \alpha_{\partial A} \wedge (d\alpha_{\partial A})^{\wedge(n-1)}\,.$$

Remarque 1.5.2. Le pseudovolume au sens de la Définition 1.5.1 est une fonction positivement homogène de degré n, soit

$$P_n(\lambda A) = \lambda^n P_n(A)\,,$$

pour tout sous-ensemble compact A, dont bord de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'intérieur non vide, et tout $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. En fait, si λ dénote aussi l'homothétie de $\mathbb{C}^n$ de rapport λ, pour tout $z \in \partial A$ et tout vecteur tangent $\zeta \in T_z\partial A = T_{\lambda z}\partial\lambda A$, on a

$$\begin{aligned} \big(\lambda^*\alpha_{\partial\lambda A}\big)_{\lambda z}(\zeta) &= \big(\alpha_{\partial\lambda A}\big)_{\lambda z}\big(d\lambda_z(\zeta)\big) \\ &= \operatorname{Re}\langle\lambda\zeta, i\nu_{\partial\lambda A}(\lambda z)\rangle \\ &= \lambda\operatorname{Re}\langle\zeta, i\nu_{\partial A}(z)\rangle \\ &= \lambda\big(\alpha_{\partial A}\big)_z(\zeta)\,. \end{aligned}$$

Exemple 1.5.1. Le n-pseudovolume de la boule unité B de $\mathbb{C}^n$ est égal à

$$\frac{2^{n-1}(n-1)!}{n!\varkappa_n}\int_{\partial B}\det\mathcal{L}_{\partial B}\upsilon_{\partial B} = \frac{2^{n-1}}{n\varkappa_n}\int_B d\upsilon_{\partial B} = \frac{2^n\varkappa_{2n}}{\varkappa_n}\,.$$

D'après le Théorème 1.5.1 et Théorème 1.5.2, on dispose de trois formules pour calculer le pseudovolume d'un élément de $\mathcal{K}_+^\infty(\mathbb{C}^n)$. En outre, les outils développés jusqu'ici permettent aussi de prolonger la définition de pseudovolume à l'ensemble $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ tout entier. Pour cela on utilisera le fait que tout corps convexe peut être approché, dans la métrique de Hausdorff, par des éléments de $\mathcal{K}_+^\infty(\mathbb{C}^n)$, en suite, on prolongera le pseudovolume par continuité.

Théorème 1.5.3. *Si $k, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ et $\varepsilon > 0$, alors*

- *pour toute $(n-k, n-k)$-forme ς dont les coefficients sont continus et à support compact, la mesure $dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_n)_\varepsilon} \wedge \varsigma$ est localement de masse finie sur $\mathbb{C}^n$,*
- *lorsque $\varepsilon \to 0^+$, le courant positif $dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_k)_\varepsilon}$ converge faiblement vers le courant positif $dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_k}$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et ς fixés. La densité de la mesure

$$dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_k)_\varepsilon} \wedge \varsigma$$

est une somme de produits entre $(n-k)$-coefficients de ς et k dérivées secondes des fonctions $h_{(R_\varepsilon A_\ell)_\varepsilon}$. Or, le problème est à l'origine et chacune des fonctions $h_{(R_\varepsilon A_\ell)_\varepsilon}$ est (positivement) homogène de degré 1, donc chaque dérivée seconde de $h_{(R_\varepsilon A_\ell)_\varepsilon}$ sera homogène de degré -1, ce qui fait que la densité de la mesure en question sera égale à un $O(\|z\|^{-k})$ pour $z \to 0$, d'où l'intégrabilité locale sur $\mathbb{C}^n$.

La deuxième assertion est conséquence d'une construction connue comme *régularisation de l'opérateur de Monge-Ampère complexe* (décrite dans [6]) que l'on va brièvement rappeler en l'appliquant à notre situation.

Par récurrence on montre que, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant k$, le produit de courant $dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_\ell}$ est bien défini et qu'il est la limite faible, pour $\varepsilon \to 0^+$, des courants $dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_\ell)_\varepsilon}$. Si $\ell = 1$, $dd^c h_{A_1}$ est déjà bien défini et, par continuité faible des dérivées, il est la limite faible, pour $\varepsilon \to 0^+$, des $dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon}$, où, pour des raisons de convexité tous les courants impliqués sont positifs. Or, si l'on suppose avoir déjà montré l'assertion pour $\ell = k-1$, on pose

$$dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_k} := dd^c\big(h_{A_k} dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_{k-1}}\big)\,.$$

La définition est bien posée car h_{A_k} est continue et les coefficients du courant $dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_{k-1}}$ sont (par hypothèse de récurrence) des mesures positives. En outre le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} h_{(R_\varepsilon A_k)_\varepsilon} dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_{k-1})_\varepsilon} = h_{A_k} dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_{k-1}}\,,$$

donc, par continuité faible des différentiations,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \to 0^+} dd^c\big(h_{(R_\varepsilon A_k)_\varepsilon} dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_{k-1})_\varepsilon}\big) \\ = \; & dd^c\big(h_{A_k} dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_{k-1}}\big) \\ = \; & dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_k}\,. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, le théorème de Stokes fait que

$$\begin{aligned} & dd^c\big(h_{(R_\varepsilon A_k)_\varepsilon} dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_{k-1})_\varepsilon}\big) \\ = \; & dd^c h_{(R_\varepsilon A_k)_\varepsilon} \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_1)_\varepsilon} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{(R_\varepsilon A_{k-1})_\varepsilon} \end{aligned}$$

où ce dernier courant est positif pour tout $\varepsilon > 0$, par conséquent, en tant que limite faible de courants positifs, $dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_k}$ est positif. Ceci achève la récurrence et la preuve du théorème. □

Remarque 1.5.3. Les mêmes conclusions que celles du Théorème 1.5.3 restent valables si, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant k$, on remplace $h_{(R_\varepsilon A_\ell)_\varepsilon}$ par $h_{R_\varepsilon A_\ell}$.

Définition 1.5.2. *Si $k, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $c_{n,k} := (2^{n-k} k!(n-k)!\varkappa_{2n-k})^{-1}$ et $B \subset \mathbb{C}^n$ est la boule unité, le (k, ϱ)*-volume mixte *sur $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)^k$ est la forme qui, à $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$, associe le nombre réel non négatif*

$$\mathfrak{Q}_k^{\varrho}(A_1, \ldots, A_k) := c_{n,k} \int_B dd^c h_{A_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{A_k} \wedge (dd^c h_B)^{\wedge(n-k)} .$$

Le (k, ϱ)-volume sur $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ est la forme donnée, pour $A \in \mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$, par

$$\mathfrak{P}_k^{\varrho}(A) := \mathfrak{Q}_k^{\varrho}(A, \ldots, A) .$$

Le (n, ϱ)-volume (mixte) sur $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ (sur $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)^n$) est appellé n-pseudovolume (mixte) de Kazarnovskiĭ.

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on dispose de deux notions (k, ϱ)-volume mixte sur $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, on va donc vérifier qu'elle sont équivalentes et pour cela il vaut mieux rappeler les notations qui vont intervenir dans l'énoncé.

Si $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ est un polytope et $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(\Gamma, k)$ dénote l'ensemble des faces k-dimensionnelles de Γ. Si $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$, on rappelle que E_Δ dénote le sous-espace vectoriel réel sous-jacent au sous-espace affine réel engendré par Δ et que $\varrho(E_\Delta)$ est le coefficient de distortion de la mesure de Lebesgue sous la projection de E_Δ sur le sous-espace iE'_Δ, où E'_Δ est l'intersection entre le sous-espace complexe $\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_\Delta := E_\Delta + iE_\Delta$ et le complément orthogonal de E_Δ relativement au produit scalaire $\operatorname{Re}\langle\, , \rangle$. En outre, on rappelle que $\psi_\Gamma(\Delta)$ est égal au produit $\varkappa_{n-k}^{-1} \operatorname{Vol}_{n-k}(K_{\Delta,\Gamma} \cap B)$, où $\varkappa_{n-k}$ est la mesure de Lebesgue de la boule unité $(n-k)$-dimensionnelle, B est la boule unité $2n$-dimensionnelle est $K_{\Delta,\Gamma}$ est le cône relativement ouvert constitué par les points $u \in \mathbb{C}^n$ tels que Δ coïncide avec le lieu des points de Γ où la fonction $\operatorname{Re}\langle \cdot, u\rangle$ réalise son maximum. En fin, on rappelle que $c_{n,k}$ est la constante donnée par

$$c_{n,k} := (2^{n-k} k!(n-k)!\varkappa_{2n-k})^{-1} ,$$

où $\varkappa_{2n-k}$ dénote la mesure de Lebesgue de la boule unité $(2n-k)$-dimensionnelle.

Théorème 1.5.4. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, k un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ on a l'égalité*

$$\begin{aligned} & \sum_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)} \varrho(E_\Delta) V_k(\Delta_1, \ldots, \Delta_k) \psi_\Gamma(\Delta) \\ = \; & c_{n,k} \int_B dd^c h_{\Gamma_1} \wedge \ldots \wedge dd^c h_{\Gamma_k} \wedge \big(dd^c h_B\big)^{\wedge(n-k)} , \end{aligned}$$

où Γ dénote la somme des $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ et $\Delta = \sum_{\ell=1}^k \Delta_\ell$ est l'unique décomposition de Δ en tant que somme de faces de $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

Démonstration. En vertu de la multilinéarité des deux membres, il suffit de montrer que, pour tout $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, on a

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma,k)} \varrho(E_\Delta) V_k(\Delta) \psi_\Gamma(\Delta) = c_{n,k} \int_B \big(dd^c h_\Gamma\big)^{\wedge k} \wedge \big(dd^c h_B\big)^{\wedge(n-k)} .$$

Pour cela, on fixe $\lambda > 0$ et l'on remarque que

$$\begin{aligned} P_n\big((\Gamma)_\lambda\big) &= \int_B \big(dd^c h_\Gamma + \lambda dd^c h_B\big)^{\wedge n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \int_B \big(dd^c h_\Gamma\big)^{\wedge k} \wedge \big(dd^c h_B\big)^{\wedge(n-k)} , \end{aligned}$$

d'autre part on a aussi

$$P_n\big((\Gamma)_\lambda\big) = \int_{\partial(\Gamma)_\lambda} \alpha_{\partial(\Gamma)_\lambda} \wedge \big(d\alpha_{\partial(\Gamma)_\lambda}\big)^{\wedge(n-1)} ,$$

on va donc calculer cette dernière intégrale puis comparer les termes de même degré en λ. On remarque d'abord que

$$\partial(\Gamma)_\lambda = \bigcup_{k=0}^{2n-1} \bigcup_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma,k)} \Delta + (K_\Delta \cap \partial\lambda B)$$

les deux unions étant disjointes, ainsi

$$\int_{\partial(\Gamma)_\lambda} \alpha_{\partial(\Gamma)_\lambda} \wedge \big(d\alpha_{\partial(\Gamma)_\lambda}\big)^{\wedge(n-1)} = \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma,k)} \int_{\Delta+(K_\Delta \cap \partial\lambda B)} \alpha_\Delta \wedge \big(d\alpha_\Delta\big)^{\wedge(n-1)} ,$$

où, pour tout $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$ et tout $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma,k)$, α_Δ dénote la restriction de $\alpha_{\partial(\Gamma)_\lambda}$ à $\Delta + (K_\Delta \cap \partial\lambda B)$. Or, pour $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$ et $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma,k)$ fixés, on observe que l'hypersurface $\Delta + (K_\Delta \cap \partial\lambda B)$ a la structure d'un produit de variétés lisses, en fait elle peut se voir comme un cylindre droit sur la base $K_\Delta \cap \partial\lambda B$ de dimension $(2n-k-1)$. Si $k > n$, à une isométrie de $\mathbb{R}^{2n}$ près, on peut supposer que $E_\Delta^\perp$ est égal au sous-espace

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{2n} \mid \xi_{2j-1} = 0 = \xi_{2\ell}, \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant \ell \leqslant (k-n)\} ;$$

ainsi la formule (1.5) et le changement de coordonnées impliquent que

$$\alpha_\Delta = \lambda^{-1} \sum_{\ell=k-n+1}^{n} -\xi_{2\ell}\, d\xi_{2\ell-1} ,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta+(K_\Delta\cap\partial\lambda B)} \alpha_\Delta \wedge \big(d\alpha_\Delta\big)^{\wedge(n-1)} \\
&\quad = \lambda^{-n}\int_{\Delta+(K_\Delta\cap\lambda B)} \Big(\sum_{\ell=k-n+1}^{n} d\xi_{2\ell-1}\wedge d\xi_{2\ell}\Big)^{\wedge n} = 0
\end{aligned}$$

car $2(2n-k) < 2n$ et donc sur $\mathbb{R}^{2(2n-k)}$ il n'y a pas de formes de degré $2n$. On fixe maintenant $0 \leqslant k \leqslant n$ et $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma, k)$. On considère $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, si $\mu : \mathbb{R}^k \to E_\Delta$ est un isomorphisme de déterminant égal à 1 et $J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est la multiplication par i, l'application linéaire

$$\mu' := J^{-1} \circ \varrho_{E_\Delta} \circ \mu \circ J^{-1} : i\mathbb{R}^k \longrightarrow E'_\Delta$$

est un isomorphisme si et seulement si ϱ_{E_Δ} l'est. Par conséquent, si

$$\kappa : (\mathbb{R}^k + i\mathbb{R}^k)^\perp \longrightarrow (\mathrm{lin}_\mathbb{C}\, E_\Delta)^\perp$$

est un isomorphisme de déterminant égal à 1, on a que

$$T_\Delta := \mu \oplus \mu' \oplus \kappa : (\mathbb{R}^k \oplus i\mathbb{R}^k) \oplus (\mathbb{R}^k \oplus i\mathbb{R}^k)^\perp \longrightarrow E_\Delta \oplus E'_\Delta \oplus (\mathrm{lin}_\mathbb{C}\, E_\Delta)^\perp$$

est un isomorphisme si et seulement si ϱ_{E_Δ} l'est. En outre, μ et κ peuvent être choisis de telle sorte que

$$\det(T_\Delta) = \varrho(E_\Delta)\,,$$

ainsi

$$T_\Delta^{-1}(E_\Delta^\perp) = \{\xi \in \mathbb{R}^{2n} \mid \xi_{2\ell-1} = 0, \quad \text{pour } 1 \leqslant \ell \leqslant k\} = (\mathbb{R}^k)^\perp$$

et, grâce à (1.5),

$$T_\Delta^*(\alpha_\Delta) = \lambda^{-1}\sum_{\ell=k+1}^{n} T_{\Delta,2\ell-1}\wedge dT_{\Delta,2\ell} - \lambda^{-1}\sum_{\ell=1}^{n} T_{\Delta,2\ell}\wedge dT_{\Delta,2\ell-1}\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta+(K_\Delta\cap\partial\lambda B)} \alpha_\Delta \wedge \big(d\alpha_\Delta\big)^{\wedge(n-1)} \\
&= \int_{T_\Delta^{-1}(\Delta+(K_\Delta\cap\partial\lambda B))} T_\Delta^*\big(\alpha_\Delta \wedge \big(d\alpha_\Delta\big)^{\wedge(n-1)}\big) \\
&= \int_{T_\Delta^{-1}(\Delta+(K_\Delta\cap\lambda B))} \big(dT_\Delta^*\alpha_\Delta\big)^{\wedge n} \\
&= \lambda^{-n} \int_{T_\Delta^{-1}(\Delta+(K_\Delta\cap\lambda B))} \Bigg(\sum_{\ell=1}^{k} dT_{\Delta,2\ell-1}\wedge dT_{\Delta,2\ell} + \sum_{\ell=k+1}^{n} 2\, dT_{\Delta,2\ell-1}\wedge dT_{\Delta,2\ell}\Bigg)^{\wedge n} \\
&= \lambda^{-n}2^{n-k}n! \int_{T_\Delta^{-1}(\Delta+(K_\Delta\cap\lambda B))} \bigwedge_{\ell=1}^{n} dT_{\Delta,2\ell-1}\wedge dT_{\Delta,2\ell} \\
&= \lambda^{n-k}2^{n-k}n!\varrho(E_\Delta)\operatorname{Vol}_k(\Delta)\operatorname{Vol}_{2n-k}(K_\Delta\cap B)\,.
\end{aligned}$$

On conclut que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma,k)} \varrho(E_\Delta)\operatorname{Vol}_k(\Delta)\psi_\Gamma(\Delta) = c_{n,k}\int_B \big(dd^c h_\Gamma\big)^{\wedge k} \wedge \big(dd^c h_B\big)^{\wedge(n-k)}\,,$$

d'où le théorème. □

Remarque 1.5.4. Dans le cas de n corps convexes $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, le Théorème 1.5.4 permet de donner une formule "courantielle" pour calculer le volume mixte $\mathrm{V}_n(A_1,\ldots,A_n)$. En fait, on sait déjà que pour des polytopes réels $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathrm{V}_n(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n) = Q_n(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n) = \frac{1}{n!\varkappa_n}\int_B dd^c h_{\Gamma_1}\wedge\ldots\wedge dd^c h_{\Gamma_n}\,,$$

donc par densité de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, on déduit que

$$\mathrm{V}_n(A_1,\ldots,A_n) = \frac{1}{n!\varkappa_n}\int_B dd^c h_{A_1}\wedge\ldots\wedge dd^c h_{A_n}\,,$$

où, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant n$, les coefficients du courant $dd^c h_{A_\ell}$ ne dépendent que des variables réelles $\operatorname{Re} z$.

On termine la section par une remarque due à Alesker [1] puis généralisée par Kazarnovskiĭ [22].

Théorème 1.5.5. *Si $k, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant n$, le (k, ϱ)-volume est une valuation k-homogène continue sur $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ invariante par translations et transformation unitaires de $\mathbb{C}^n$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ fixé. Si $v \in \mathbb{C}^n$ et fixé, on a

$$h_{A+v}(z) = h_A(z) + \operatorname{Re}\langle z, v\rangle \,,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, d'où $dd^c h_{A+v} = dd^c h_A$. En outre si $T \in \mathrm{U}(n)$ est fixé, on a $h_{T(A)} = h_A \circ T^{-1}$ et $B = T(B)$, d'où $h_B = h_{T(B)} = h_B \circ T^{-1}$ et

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_k^{\varrho}\big(T(A)\big) &= \int_B (dd^c h_{T(A)})^{\wedge k} \wedge (dd^c h_B)^{\wedge(n-k)} \\
&= \int_B \big(dd^c(h_A \circ T^{-1})\big)^{\wedge k} \wedge \big(dd^c(h_B \circ T^{-1})\big)^{\wedge(n-k)} \\
&= \int_{T(B)} |\det T^{-1}|^{2n} (dd^c h_A)^{\wedge k} \wedge (dd^c h_B)^{\wedge(n-k)} \\
&= \int_B (dd^c h_A)^{\wedge k} \wedge (dd^c h_B)^{\wedge(n-k)} \\
&= \mathfrak{P}_k^{\varrho}(A)\,,
\end{aligned}$$

car $|\det T^{-1}| = 1$. Pour ce qui concerne la continuité, si $\varepsilon \to 0^+$, la famille de corps lisses et strictement convexes $(R_\varepsilon A)_\varepsilon$ converge vers A dans la métrique de Hausdorff donc le Théorème 1.5.3 implique la convergence faible du courant positif $(dd^c h_{(R_\varepsilon A)_\varepsilon})^{\wedge k}$ vers le courant positif $(dd^c h_A)^{\wedge k}$. La continuité suit alors du fait que $\mathcal{K}_+^\infty(\mathbb{C}^n)$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ pour la métrique de Haussdorf. En fin, quitte à poser $h_\varnothing = 0$, il faut montrer que $\mathfrak{P}_k^{\varrho}$ est une valuation et pour cela on remarque qu'il suffit de montrer qu'il s'agit d'une valuation faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$. En fait, si tel est le cas, un argument de continuité impliquera la propriété de valuation faible sur $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$, d'où la conclusion grâce au Théorème 1.2.4. Soient donc $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ fixé et $H \subset \mathbb{C}^n$ un hyperplan. Si Γ est contenu dans un des demi-espaces H^+ où H^- il n'y a rien à montrer, si par contre $\Gamma \cap H^+ \neq \varnothing \neq \Gamma \cap H^-$, alors les trois sous-ensembles $\Gamma \cap H$, $\Gamma \cap H^+$ et $\Gamma \cap H^-$ sont aussi des polytopes. Si $\mathfrak{P}_k^{\varrho}(\Gamma) = 0$, le Lemme 1.4.2 assure que Γ engendre un sous-espace affine complexe de dimension strictement plus petite que k, donc il en est de même ainsi de trois polytopes $\Gamma \cap H$, $\Gamma \cap H^+$ et $\Gamma \cap H^-$, ce qui fait que

$$\mathfrak{P}_k^{\varrho}(\Gamma) = \mathfrak{P}_k^{\varrho}(\Gamma \cap H) = \mathfrak{P}_k^{\varrho}(\Gamma \cap H^+) = \mathfrak{P}_k^{\varrho}(\Gamma \cap H^-) = 0\,,$$

d'où la conclusion dans ce cas. En fin si $\mathfrak{P}_k^{\varrho}(\Gamma) \neq 0$, et $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma \cap H, k)$, on a bien $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma \cap H^+, k) \cap \mathcal{B}(\Gamma \cap H^-, k)$ et

$$\bar{K}_{\Delta, \Gamma\cap H} = \bar{K}_{\Delta, \Gamma\cap H^+} \cup \bar{K}_{\Delta, \Gamma\cap H^-}\,.$$

La conclusion suit alors du fait que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\Gamma, k) \cup \mathcal{B}(\Gamma \cap H, k) &= \mathcal{B}(\Gamma \cap H, k) \\ &\cup \big(\mathcal{B}(\Gamma \cap H^+, k) \setminus \mathcal{B}(\Gamma \cap H, k)\big) \\ &\cup \big(\mathcal{B}(\Gamma \cap H^-, k) \setminus \mathcal{B}(\Gamma \cap H, k)\big),\end{aligned}$$

toutes les unions étant disjointes. $\square$

Chapitre 2

Sommes d'exponentielles et pseudovolume mixte

2.1 Sommaire

Dans ce deuxième chapitre, on se propose d'étudier certaines propriétés des ensembles des zéros d'un système de sommes d'exponentielles sur le modèle de [17]. Une fois encore les preuves que l'on propose ici voudraient combler certains points sur lesquels, à notre avis, [17] est particulièrement synthétique. Les résultats montrés dans ce chapitre seront fondamentaux pour les constructions du chapitre suivant.

2.2 Systèmes de sommes d'exponentielles

On commence par définir les objets auxquels on va consacrer le chapitre.

Définition 2.2.1. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, une* somme d'exponentielles *sur $\mathbb{C}^n$ est un élément de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{S}_n$ engendrée, en tant qu'espace vectoriel complexe, par l'ensemble des fonctions entières de la forme $e^{\langle z,\lambda\rangle}$, où $\lambda \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathcal{S}_n^*$ l'ensemble des sommes d'exponentielles non nulles.*

Tout d'abord un lemme algébrique dont la preuve utilise un argument trouvé dans [4].

Lemme 2.2.1. *La famille $\{e^{\langle z,\lambda\rangle}\}_{\lambda\in\mathbb{C}^n}$ est une base de $\mathcal{S}_n$ en tant qu'espace vectoriel complexe.*

Démonstration. Il faut montrer qu'il s'agit d'une famille libre et on le fait d'abord pour $n = 1$. Supposons, par l'absurde, que le lemme soit faux, il existe ainsi une relation de dépendance linéaire du type

$$f(z) := c_1 e^{\lambda_1 z} + \cdots + c_m e^{\lambda_m z} = 0\,,$$

valable pour tout z dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, où les $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont deux à deux distincts et les $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}^*$. Pour $1 \leqslant \ell \leqslant m$, soit D_ℓ l'opérateur différentiel linéaire donné par

$$D_\ell := \left(\frac{d}{dz} - \lambda_m\right) \circ \cdots \circ \widehat{\left(\frac{d}{dz} - \lambda_\ell\right)} \circ \cdots \circ \left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right).$$

Or pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant m$ et tout $z \in U$, on a l'absurde

$$\begin{aligned} 0 &= D_\ell(f) \\ &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} D_\ell(c_k e^{\lambda_k z}) \\ &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} c_k e^{\lambda_k z} \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} (\lambda_k - \lambda_j) \\ &= c_\ell e^{\lambda_\ell z} \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} (\lambda_\ell - \lambda_j) \neq 0\,, \end{aligned}$$

ce qui implique le lemme pour $n = 1$. En fin, s'il existe $n > 1$ pour lequel le lemme est faux, on a une relation de dépendance linéaire non triviale

$$f(z) := \sum_{j=1}^{m} c_j e^{\langle z, \lambda_j \rangle} = 0\,,$$

valable pour tout z dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, avec les $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ deux à deux distincts et les $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}^*$. Dans ce cas, si L est une droite complexe telle que $U \cap L \neq \varnothing$, la restriction de f à $U \cap L$ constitue une relation de dépendance linéaire non triviale à une variable, ce qui est est absurde pour la première partie de la preuve. □

D'après le Lemme 2.2.1, si $f \in \mathcal{S}_n^*$, il n'existe qu'une seule représentation de f sous la forme $f(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{\langle z, \lambda \rangle}$, où $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ est un sous-ensemble fini et, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $c_\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Définition 2.2.2. *Si $f \in \mathcal{S}_n$, le* spectre *de f est le plus petit sous-ensemble Λ_f de $\mathbb{C}^n$ tel que f appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n$ engendré par l'ensemble $\{e^{\langle z, \lambda \rangle} \mid \lambda \in \Lambda_f\}$. Le* polytope de Newton *de f est l'enveloppe convexe $\Gamma_f := \operatorname{conv} \Lambda_f$ de son spectre.*

Les éléments du spectre d'une somme d'exponentielles f sont souvent appelés les *fréquences* de f et puisque on aura l'occasion d'étudier des sommes d'exponentielles dont les fréquences appartiennent à des sous-groupes additifs particuliers de $\mathbb{C}^n$, on introduit, pour un tel sous-groupe $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^n$, la sous-algèbre

$$\mathcal{S}_{n,\mathbb{G}} := \{f \in \mathcal{S}_n \mid \Lambda_f \subset \mathbb{G}\}\,.$$

Lorsque $\mathbb{G}$ est égale à $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ ou $i\mathbb{R}^n$, on parle, respectivement, de sommes d'exponentielles à fréquences entières, rationnelles, réelles ou imaginaires pures.

Les systèmes de sommes d'exponentielles sont les objets auxquels tout le reste de la thèse sera consacré, on précise donc de quoi il s'agit.

Définition 2.2.3. *Un* système de sommes d'exponentielles *F sur $\mathbb{C}^n$, (en abrégé un SSE), à fréquences dans le sous-groupe $\mathbb{G}$ de $\mathbb{C}^n$ est un sous-ensemble non vide et fini de $\mathcal{S}_{n,\mathbb{G}} \setminus \{0\}$.*

À tout SSE $F \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{G}}$ on associe un certain nombre d'objets algébriques et géométriques nécessaires à l'étude de la géométrie de l'ensemble $V(F)$ des zéros de F, on introduit ainsi

- la famille des spectres de F i.e. la famille $\{\Lambda_f\}_{f\in F}$,
- les fréquences de F i.e. les éléments de l'union de la famille des spectres de F,
- le groupe des fréquences de F i.e. le sous-groupe additif Ξ_F de $\mathbb{C}^n$ engendré par les fréquences de F,
- le sous-espace réel (resp. rationnel) $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(\Xi_F)$ (resp. $\mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}(\Xi_F)$) engendré par les fréquences de F,
- le polytope de Newton de F i.e. la somme de Minkowski

  $$\Gamma_F := \sum_{f\in F} \Gamma_f$$

  des polytopes de Newton des $f \in F$.
- l'ensemble (non vide)

  $$\mathcal{D}_F := \{\Delta \preccurlyeq \Gamma_F \mid \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{aff}_{\mathbb{C}}\,\Delta) < \mathrm{card}\ F\}\,,$$

- l'ensemble (éventuellement vide)

  $$\mathcal{E}_F := \{\Delta \preccurlyeq \Gamma_F \mid \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{aff}_{\mathbb{C}}\,\Delta) = \mathrm{card}\ F\}\,.$$

Définition 2.2.4. *Soit $F \subset \mathcal{S}_n$ un SSE et $\Delta := \sum_{f\in F} \Delta_f$ une face de Γ_F. La Δ-*trace *de F est le SSE*

$$F^\Delta := \{f^\Delta \mid f \in F\}$$

obtenu en posant,

$$f^\Delta(z) := \sum_{\lambda\in\Lambda_f\cap\Delta_f} c_\lambda e^{\langle z,\lambda\rangle}\,,$$

si $f = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} c_\lambda e^{\langle z,\lambda\rangle}$.

Remarque 2.2.1. On remarque que, si F est un SSE, pour toute $\Delta \preccurlyeq \Gamma_F$, on a $\Gamma_{F^\Delta} = \Delta$ car, pour tout $f \in F$, $\Lambda_{f^\Delta} = \Lambda_f \cap \Delta_f$ et $\Gamma_{f^\Delta} = \Delta_f$.

Lemme 2.2.2. *Soit $F \subset \mathcal{S}_n$ un SSE, Δ une face de Γ_F et $\widetilde{F}_\Delta$ le SSE obtenu en restreignant chaque élément de F au sous-espace linéaire $\mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Delta$. Alors $V(F^\Delta) = V(\widetilde{F}^\Delta)$.*

Démonstration. Si $d := \dim_\mathbb{C}(\mathrm{aff}_\mathbb{C} \Delta)$, on choisit une base de $\mathbb{C}^n$ telle que les premiers d éléments engendrent le sous-espace $\mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Delta$ sous-jacent à $\mathrm{aff}_\mathbb{C} \Delta$. On note x les coordonnées dans $\mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Delta$ et y celles dans le complément orthogonal de $\mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Delta$ ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, il existe une décomposition unique du type $z = x+y$. Pour tout $f \in F$, le sous-espace affine $\mathrm{aff}_\mathbb{C} \Delta_f$ est parallèle à $\mathrm{aff}_\mathbb{C} \Delta$, donc il existe un vecteur β_f orthogonal à $\mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Delta$ et tel que $\lambda-\beta_f \in \mathrm{lin}_\mathbb{C} E_\Delta$, pour tout $\lambda \in \mathrm{aff}_\mathbb{C} \Delta_f$. Par conséquent, pour tout $f \in F$ et tout $\lambda \in \Lambda_f \cap \Delta_f$,

$$\langle z, \lambda\rangle = \langle x + y, (\lambda - \beta_f) + \beta_f\rangle = \langle x, \lambda\rangle + \langle y, \beta_f\rangle\,,$$

donc, si $f = \sum_{\lambda\in\Lambda_f\cap\Lambda_f} c_\lambda e^{\langle x,\lambda\rangle}$, on a

$$f^\Delta(z) = e^{\langle y,\beta_f\rangle} \sum_{\lambda\in\Lambda_f\cap\Delta_f} c_\lambda e^{\langle x,\lambda\rangle} = e^{\langle y,\beta_f\rangle} f^\Delta(x)\,,$$

d'où le lemme. □

On va maintenant s'intéresser à une classe particulière de SSE et pour cela il faut introduire une fonction accessoire associée à tout SSE de la manière suivante. Si $F \subset \mathcal{S}_n$ est un SSE on pose

$$K[F] := \sum_{f\in F} \frac{|f|}{e^{h_{\Gamma_f}}}\,.$$

Puisque, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$,

$$0 \leqslant K[F](z) \leqslant \sum_{f \in F} \sum_{\lambda \in \Lambda_f} \frac{|c_\lambda||e^{\langle z, \lambda \rangle}|}{e^{h_{\Gamma_f}(z)}} \leqslant \sum_{f \in F} \sum_{\lambda \in \Lambda_f} |c_\lambda| \,,$$

on voit que $K[F]$ est une fonction bornée sur $\mathbb{C}^n$ qui a le mêmes zéros du système F.

Définition 2.2.5. *Un SSE $F \subset \mathcal{S}_n$ est dit* régulier *s'il existe $\varepsilon_F > 0$ tel que,*

$$K[F^\Delta] \geqslant \varepsilon_F \,,$$

pour toute face $\Delta \in \mathcal{D}_F$.

Remarque 2.2.2. Un SSE régulier $F \subset \mathcal{S}_n$ tel que card $F > n$ n'a pas de zéros, car la face (impropre) Γ_F satisfait la condition dimensionnelle impliquée dans la définition ci-dessus et $F = F_{\Gamma_F}$.

Il existe une condition géométrique portant sur la famille des spectres d'un SSE qui garantit la régularité du système.

Définition 2.2.6. *Soit $\Lambda := \{\Lambda_\iota\}_{\iota \in I}$ une famille finie et non vide de sous-ensembles finis et non vides de $\mathbb{C}^n$. La famille Λ est dite* fermée *si, pour toute face $\Delta = \sum_{\iota \in I} \Delta_\iota$ du polytope $\Gamma := \sum_{\iota \in I} \operatorname{conv}(\Lambda_\iota)$ telle que*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Delta) < \operatorname{card} I \,,$$

il existe $\iota \in I$ tel que Δ_ι soit réduite à un seul point.

La famille des spectres d'un SSE constitué par une seule somme d'exponentielles est toujours fermée mais, pour un SSE comportant plusieurs sommes d'exponentielles, ceci ne reste vrai que dans un sens générique.

Lemme 2.2.3. *Soit $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ un sous-corps, $r \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_1, \ldots, \ell_r \in \mathbb{N}^*$. Si*

$$\mathbb{A} := (\mathbb{K}^n)^{\ell_1} \times \cdots \times (\mathbb{K}^n)^{\ell_r} \,,$$

il existe un ouvert de Zariski $U \subset \mathbb{A}$, (dont le complémentaire a codimension au moins égale à 2), paramétrisant l'espace de toutes les familles $\{\Lambda_\iota\}_{\iota=1,\ldots,r}$ de r sous-ensembles de $\mathbb{K}^n$ tels que

- card $(\Lambda_\iota) = \ell_\iota$*, pour tout $\iota = 1, \ldots, r$,*
- *$\Lambda_\iota \subset \mathbb{K}^n$ est $\mathbb{K}$-affinement indépendant, pour tout $\iota = 1, \ldots, r$,*

– *la famille de sous-ensembles* $\{\Lambda_\iota\}_{\iota=1,\ldots,r}$ *est fermée.*

Démonstration. On observe d'abord que, pour tout $\iota = 1,\ldots,r$, l'ensemble des applications non injectives de $\{1,\ldots,\ell_\iota\}$ dans $\mathbb{K}^n$ s'identifie avec un un sous-ensemble propre V_ι de $(\mathbb{K}^n)^{\ell_\iota}$, qui est fermé dans la topologie de Zariski, donc $V := V_1 \times \cdots \times V_r \subset \mathbb{A}$ est un sous-ensemble du même type et, de plus, il paramétrise l'espace de toutes les familles $\{\Lambda_\iota\}_{\iota=1,\ldots,r}$ de r sous-ensembles de $\mathbb{K}^n$ tels que card $(\Lambda_\iota) < \ell_\iota$, pour tout $\iota = 1,\ldots,r$. Il est clair que V a codimension positive. En outre, le familles $\{\Lambda_\iota\}_{\iota=1,\ldots,r}$ comportant au moins un ensemble qui n'est pas $\mathbb{K}$- affinement indépendant, s'obtiennent comme le lieu W des zéros dans $\mathbb{A}$ d'un nombre fini d'équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$. On remarque que $V \subsetneq W$, donc la codimension de W est au moins égale à 2. En fin, si $\Gamma := \sum_{\iota=1}^r \operatorname{conv}(\Lambda_\iota)$, et si la famille $\{\Lambda_\iota\}_{\iota=1,\ldots,r}$ n'est pas fermé, alors il existe une face $\Delta = \sum_{\iota=1}^r \Delta_\iota$ de Γ, telle que $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_\Delta) < r$ et $\dim_{\mathbb{R}} E_{\Delta_\iota} \geqslant 1$, pour tout $\iota = 1,\ldots,r$. Alors, pour tout $\iota = 1,\ldots,r$, on a $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_\iota}) \geqslant 1$ et, puisque

$$\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_\Delta = \sum_{\iota=1}^r \operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_\iota}\,,$$

on déduit que la somme ci-dessus n'est pas directe, autrement dit, il existe un nombre fini de relations de dépendance $\mathbb{K}$-linéaire non triviales entre certains des éléments de l'union de la famille $\{\Lambda_\iota\}_{\iota=1,\ldots,r}$. Ainsi les familles qui ne sont pas fermées sont paramétrisées par un sous-ensemble propre $Z \subsetneq \mathbb{A}$, fermé dans la topologie de Zariski et tel que $W \cup Z \neq \mathbb{A}$. Son complémentaire est l'ouvert U de l'énoncé. □

Lemme 2.2.4. *Un SSE dont la famille des spectres est fermée est un SSE régulier.*

Démonstration. Si $F \subset \mathcal{S}_n$, $\{\Lambda_f\}_{f\in F}$ est fermée, et $\Delta = \sum_{f\in F} \Delta_f \in \mathcal{D}_F$, il existe $f_\Delta \in F$ tel que $\Delta_{f_\Delta} = \{\lambda_\Delta\}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, on a

$$(f_\Delta)^\Delta(z) = c_{\lambda_\Delta} e^{\langle z,\lambda_\Delta\rangle}\,,$$

avec $c_{\lambda_\Delta} \neq 0$. Si $\varepsilon_F := \min\left\{|c_{\lambda_\Delta}| \mid \Delta \in \mathcal{D}_F\right\}$, on a $\varepsilon_F > 0$ et

$$K[F^\Delta](z) = \sum_{f\in F} \frac{|f^\Delta(z)|}{e^{h_{\Delta_f}(z)}} \geqslant |c_{\lambda_\Delta}| \geqslant \varepsilon_F\,,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ et toute $\Delta \in \mathcal{D}_F$. □

2.3 Zéros d'un SSE régulier

En vue des applications au chapitre suivant, on va dorénavant s'intéresser uniquement aux SSE réguliers. On prouve ainsi une suite des lemmes autour de ces systèmes et de leurs ensembles des zéros.

Lemme 2.3.1. *Soit $F \subset \mathcal{S}_n$ un SSE régulier constitué par r éléments. Alors il existe $R_F > 0$ tel que*

$$V(F) \subset \bigcup_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma_F, r)} (K_\Delta)_{R_F} .$$

Démonstration. Si $V(F) = \varnothing$ il n'y a rien à montrer, soit donc $V(F) \neq \varnothing$. Par l'absurde, on suppose que le lemme soit faux donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in V(F)$ tel que

$$z_n \in \left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma_F, r)} (K_\Delta)_n \right)^c = \bigcup_{v \in \mathcal{B}(\Gamma_F, 0)} \left(\bar{K}_v \setminus \bigcup_{\substack{\Delta \in \mathcal{F}(\Gamma_F, r) \\ \Delta \ni v}} (K_\Delta)_n \right).$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les points z_n soient tous contenus dans

$$\bar{K}_v \setminus \bigcup_{\substack{\Delta \in \mathcal{F}(\Gamma_F, r) \\ \Delta \ni v}} (K_\Delta)_n ,$$

pour quelque $v \in \mathcal{B}(\Gamma_F, 0)$. Soit $\Delta' = \sum_{f \in F} \Delta'_f \in \mathcal{D}_F$ un élément maximal parmi ceux qui contiennent $v = \sum_{f \in F} v_f$. Alors on a évidemment

$$\bar{K}_v = \bigcap_{f \in F} \bar{K}_{v_f} , \qquad \bar{K}_{\Delta'} = \bigcap_{f \in F} \bar{K}_{\Delta'_f}$$

où, pour tout $f \in F$, $\bar{K}_{\Gamma_f} \subset \bar{K}_{\Delta_f} \subset \bar{K}_{v_f}$, ce qui fait que

$$h_{\Gamma_f}(z) = h_{\Delta'_f}(z) = \mathrm{Re}\, \langle z, v_f \rangle ,$$

pour tout $z \in \bar{K}_v$, d'où

$$0 = K[F](z_n) \geqslant \sum_{f \in F} \left| \frac{|f^{\Delta'}(z_n)|}{e^{h_{\Delta'_f}(z_n)}} - \frac{|(f - f^{\Delta'})(z_n)|}{e^{h_{\Delta'_f}(z_n)}} \right| ,$$

et donc

$$K\big[F^{\Delta'}\big](z_n) = \sum_{f \in F} \frac{|(f - f^{\Delta'})(z_n)|}{e^{\mathrm{Re}\, \langle z_n, v_f \rangle}} ,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, en vertu de la régularité de F, il existe $\varepsilon_F > 0$ tel qu'on ait $K\big[F^{\Delta'}\big](z_n) > \varepsilon_F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{f\in F} \frac{|(f - f^{\Delta'})(z_n)|}{e^{\mathrm{Re}\,\langle z_n, v_f\rangle}} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{f\in F} \sum_{\lambda\in\Lambda_f\setminus\Delta_f} |c_\lambda| e^{\mathrm{Re}\,\langle z_n, \lambda - v_f\rangle} = 0$$

car, pour tout $f \in F$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\,\langle z_n, \lambda - v_f\rangle = -\infty\,,$$

dès que $\lambda \in \Lambda_f \setminus \Delta_f$. La contradiction achève la preuve. □

Remarque 2.3.1. Le Lemme 2.3.1 implique que, si F est à fréquences réelles et card $F = n$, il existe $\varepsilon_F > 0$ tel que $V(F)$ soit contenu dans $(i\mathbb{R}^n)_{\varepsilon_F}$. En fait, si le polytope Γ_F n'a pas dimension maximale n, alors, en vertu de la régularité de F, $V(F) = \varnothing$. Si, par contre, Γ_F a dimension maximale, il n'aura pas de faces n-dimensionnelles propres et $K_{\Gamma_F} = i\,\mathrm{Im}\,\mathbb{C}^n = i\mathbb{R}^n$.

Lemme 2.3.2. *Soit $F \subset \mathcal{S}_n$ un SSE régulier constitué par $r < n$ éléments et tel que $r \leqslant \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{aff}_{\mathbb{C}}\,\Gamma_F)$. Alors il existe un SSE régulier $G \subset \mathcal{S}_n$ constitué par $(r+1)$ éléments tel que $F \subseteq G$. En outre, pour tout $\tilde{z} \in V(F)$, le système G peut être choisi de telle sorte que $\tilde{z} \in V(G)$.*

Démonstration. Soit $d := \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{aff}_{\mathbb{C}}\,\Gamma_F)$. Puisque $r \leqslant d$, le Lemme 1.4.2 impliquent l'inégalité stricte $\mathfrak{P}_r^{\varrho}(\Gamma_F) > 0$, d'où l'on déduit que $\mathcal{E}_F$ n'est pas vide. Or, comme $r < n$, l'union

$$\bigcup_{\Delta\in\mathcal{E}_F} \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E_\Delta$$

est un sous-ensemble propre de $\mathbb{C}^n$, ainsi le complémentaire de cette union contient un vecteur $v \neq 0$. Soit donc $g(z) := e^{\langle z,v\rangle} + c$ et G le SSE donné par $G := F \cup \{g\}$, c étant un paramètre complexe non nul. Pour tout $\Delta \in \mathcal{D}_G$, on a une décomposition unique $\Delta = \Delta_F + \Delta_g$, où $\Delta_F \preccurlyeq \Gamma_F$ et $\Delta_g \preccurlyeq \Gamma_g$, donc une décomposition correspondante au niveau des traces, $G^\Delta = F^{\Delta_F} \cup \{g^{\Delta_g}\}$, qui fournit ainsi l'égalité

$$K[G^\Delta] = K[F^{\Delta_F}] + K[g^{\Delta_g}]\,.$$

Or, si $\Delta_F \in \mathcal{D}_F$, la régularité de F implique l'existence d'un $\varepsilon_F > 0$ tel que

$$K[G^\Delta] > \varepsilon_F\,.$$

Si, par contre $\Delta_F \notin \mathcal{D}_F$, on a

$$r \leqslant \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_F}) \leqslant \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_F} + \operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_g}) = \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta}) \leqslant r \,,$$

d'où l'on déduit $\Delta_F \in \mathcal{E}_F$ et $\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_g} \subset \operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E_{\Delta_F}$. Le choix de v implique que la face Δ_g soit réduite à un seul des deux sommets de Γ_g, donc la condition de régularité pour le système G est satisfaite avec $\varepsilon_G := \min\{\varepsilon_F, 1, |c|\}$. Enfin, si $\tilde{z} \in V(F)$, en choisissant $c := -e^{\langle \tilde{z}, v\rangle}$, on a aussi $\tilde{z} \in V(G)$. □

Remarque 2.3.2. On remarque que la construction du système G donnée dans la preuve du Lemme 2.3.2 a été faite en sorte que, si $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma_F) < n$, on peut choisir le système G de manière à avoir

$$1 + \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma_F) = \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma_G) \,,$$

il suffit en fait de choisir $v \in (\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} \Gamma_F)^{\perp}$. En outre, la construction du système G implique aussi que la famille des spectres de G est fermée, dès que la famille des spectres de F l'est.

Lemme 2.3.3. *Soit $F \subset \mathcal{S}_n$ un SSE régulier tel que $V(F) \neq \varnothing$. Alors le sous-ensemble analytique $V(F)$ a codimension égale à* card F.

Démonstration. En vertu du Lemme 2.3.2, on peut compléter F à un SSE régulier $G \supset F$ tel que card $G = n$ et $V(G) \neq \varnothing$. Il suffit donc de montrer que le sous-ensemble analytique $V(G)$ est discret. Par l'absurde, on suppose que la dimension de $V(G)$ soit strictement positive, alors (grâce au Lemme 2.3.1) il existe une face $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma_G, n)$ telle que la dimension de $V(G) \cap (K_\Delta)_{R_G}$ est strictement positive, on peut donc trouver une sous-variété analytique lisse et connexe $X \subseteq V(G) \cap (K_\Delta)_{R_G}$ ayant dimension strictement positive. On considère une base orthonormale $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E_Δ, ainsi que les fonctions holomorphes $e^{\langle z, v_\ell\rangle}$, pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$. Si $z \in (K_\Delta)_{R_G}$, on peut toujours écrire $z = x + y$, avec $x \in E_\Delta$, $\|x\| \leqslant R_G$ et $y \in K_\Delta$, donc, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant n$ et tout $z \in (K_\Delta)_{R_G}$, on a

$$|e^{\langle z, v_\ell\rangle}| = e^{\operatorname{Re}\langle x, v_\ell\rangle} \leqslant e^{R_G} \,.$$

Grâce au théorème de Liouville, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant n$, la fonction holomorphe $e^{\langle z, v_\ell\rangle}$ est constante sur X, donc si $a_\ell \in \mathbb{C}$ est la constante en question, on déduit que l'ensemble X est discret, car il est contenu dans l'ensemble discret $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \langle z, v_\ell\rangle = \ln a_\ell, \text{ pour tout } 1 \leqslant \ell \leqslant n\}$, ceci étant en contradiction avec l'hypothèse que la dimension de X est strictement positive. □

Si $F \subset \mathcal{S}_n$ est un SSE régulier tel que $\mathcal{E}_F = \varnothing$ (soit tel que $\Gamma_F \in \mathcal{D}_F$) alors il est clair que $V(F) = \varnothing$. D'autre part on voudrait que cette condition soit aussi nécessaire pour que $V(F)$ soit non vide. Pour le montrer en détail on va introduire quelques notation.

Soit $F \subset \mathcal{S}_n$ est un SSE régulier tel que card $F = r \leqslant n$ et $A \subset \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble compact. Puisque A est compact, il n'y a qu'un nombre fini, dépendant de F et de A, de composantes irréductibles du sous-ensemble analytique $V(F) \cap A$. Si $\{X_1, \ldots, X_s\}$ dénote l'ensemble des composantes irréductibles de dimension $(n-r)$, chaque X_ℓ étant affectée de sa multiplicité $m_\ell \in \mathbb{N}$, $\ell = 1, \ldots, s$, on introduit la quantité

$$N(F, A) := \sum_{\ell=1}^{s} m_\ell \operatorname{Vol}_{2(n-r)}(X_\ell) .$$

Il s'agit d'un outil qui permet d'étudier la densité asymptotique des zéros de F dans l'espace $\mathbb{C}^n$ et qui se calcule explicitement à l'aide du courant d'intégration $[V(F)]$, à son tourne exprimé par la formule de Lelong-Poincare,

$$[V(F)] = \bigwedge_{f \in F} \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial} \log |f| = \bigwedge_{f \in F} (4\pi)^{-1} dd^c \log |f|^2 ,$$

dans laquelle le produit de courants est licite car les $f \in F$ sont holomorphes et donc chacune des fonctions $\log |f|^2$, $f \in F$, plurisousharmonique.

On remarque tout de suite que l'existence d'un compact $A \subset \mathbb{C}^n$ tel que $N(F, A) > 0$ implique trivialement que $V(F) \neq \varnothing$. On va donc montrer, en plusieurs étapes, l'existence d'un tel compact A.

Lemme 2.3.4. *Soit $F \subset \mathcal{S}_n$ un SSE régulier constitué par n éléments, $\varepsilon > 0$ et $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma_F, n)$, alors, si $\eta \to +\infty$,*

$$N(F, \eta B \cap (K_\Delta)_\varepsilon) = \left(\int_{B \cap K_\Delta} (2\pi)^{-n} \bigwedge_{f \in F} dd^c h_{\Gamma_f} \right) \eta^n + o(\eta^{n-1}) .$$

Démonstration. Si $\Delta \in \mathcal{B}(\Gamma_F, n)$ et $\varepsilon > 0$ sont fixé, pour tout $\eta > 0$ on a

$$\begin{aligned} &(2\pi)^n 2^n N(F, \eta B \cap (K_\Delta)_\varepsilon) \\ &= \int_{\eta B \cap (K_\Delta)_\varepsilon} \left(\bigwedge_{f \in F} dd^c \log |f(z)|^2 \right) \\ &= \int_{B \cap (K_\Delta)_{\varepsilon/\eta}} \left(\bigwedge_{f \in F} dd^c \log |f(\eta z)|^2 \right) \\ &= \eta^n \int_{B \cap (K_\Delta)_{\varepsilon/\eta}} \left(\bigwedge_{f \in F} dd^c \eta^{-1} \log |f(\eta z)|^2 \right) , \end{aligned} \tag{2.1}$$

donc il suffit de montrer que

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_{B\cap(K_\Delta)_{\varepsilon/\eta}}\Big(\bigwedge_{f\in F} dd^c\eta^{-1}\log|f(\eta z)|^2\Big)=\int_{B\cap K_\Delta}2^n\bigwedge_{f\in F}dd^c h_{\Gamma_f}\,.$$

Pour cela, on remarque que, si $z\in B\cap(K_\Delta)_{\varepsilon/\eta}$, on peut trouver $x\in\partial B\cap E_\Delta$ et $y\in K_\Delta$ tels que $z=(\varepsilon/\eta)x+y$. Or, si $f\in F$ est fixé et donné par une expression de la forme

$$f(z)=\sum_{\lambda\in\Lambda_f}c_\lambda e^{\langle z,\lambda\rangle}\,,$$

et $\widetilde{\Delta}_f$ dénote l'enveloppe convexe de $\Lambda_f\setminus\Delta_f$, on a bien

$$\begin{aligned}
|f(\eta z)| &= |f^\Delta(\eta z)|\Big(1+\frac{|f(\eta z)-f^\Delta(\eta z)|}{|f^\Delta(\eta z)|}\Big)\\
&= \Big|\sum_{\lambda\in\Lambda_f\cap\Delta_f}c_\lambda e^{\varepsilon\langle x,\lambda\rangle}e^{\eta\langle y,\lambda\rangle}\Big|\Bigg(1+\frac{\big|\sum_{\lambda\in\Lambda_f\setminus\Delta_f}c_\lambda e^{\varepsilon\langle x,\lambda\rangle}e^{\eta\langle y,\lambda\rangle}\big|}{\big|\sum_{\lambda\in\Lambda_f\cap\Delta_f}c_\lambda e^{\varepsilon\langle x,\lambda\rangle}e^{\eta\langle y,\lambda\rangle}\big|}\Bigg)\\
&= e^{\eta h_{\Gamma_f}(y)}\Bigg(|f^\Delta(\varepsilon x)|+\frac{|(f-f^\Delta)(\varepsilon x)|}{e^{\eta(h_{\Gamma_f}(y)-h_{\widetilde{\Delta}_f}(y))}}\Bigg)\,. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

De plus, le terme entre parenthèses dans (2.2) est borné lorsque η est assez grand, en fait $x\in\partial B\cap E_\Delta$ et $y\in B\cap K_\Delta\subset B\cap K_{\Delta_f}$ donc

$$|f^\Delta(\varepsilon x)|\leqslant e^{A_f\varepsilon}\sum_{\lambda\in\Lambda_f\cap\Delta_f}|c_\lambda|$$

et

$$\frac{|(f-f^\Delta)(\varepsilon x)|}{e^{\eta(h_{\Gamma_f}(y)-h_{\widetilde{\Delta}_f}(y))}}\leqslant e^{A_f\varepsilon-\eta M_{f,\Delta}}\sum_{\lambda\in\Lambda_f\setminus\Delta_f}|c_\lambda|$$

où l'on a posé

$$A_f:=\max_{\lambda\in\Lambda_f}\|\lambda\|$$

et

$$M_{f,\Delta}:=\min_{y\in B\cap K_\Delta}(h_{\Gamma_f}(y)-h_{\widetilde{\Delta}_f}(y))\,,$$

celui-ci étant strictement positif vu que (par définition) $\widetilde{\Delta}_f\cap\Delta_f=\varnothing$. Par conséquent

$$\Bigg(|f^\Delta(\varepsilon x)|+\frac{|(f-f^\Delta)(\varepsilon x)|}{e^{\eta(h_{\Gamma_f}(y)-h_{\widetilde{\Delta}_f}(y))}}\Bigg)\leqslant e^{A_f\varepsilon}\big(1+e^{-\eta M_{f,\Delta}}\big)\sum_{\lambda\in\Lambda_f}|c_\lambda|\,,$$

et donc

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{-1} \log|f(\eta z)| = h_{\Gamma_f}(y)\,,$$

pour tout $z = (\varepsilon/\eta)x + y \in B \cap (K_\Delta)_{\varepsilon/\eta}$. Par la continuité faible des dérivations et la positivité des courants impliqués, on déduit que

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_{B\cap(K_\Delta)_{\varepsilon/\eta}} \left(\bigwedge_{f\in F} dd^c \eta^{-1} \log|f(\eta z)|^2 \right) \;=\; \int_{B\cap K_\Delta} 2^n \bigwedge_{f\in F} dd^c h_{\Gamma_f}(z)\,,$$

d'où la conclusion. □

Corollaire 2.3.1. *Soit $F = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{S}_n$ un SSE régulier, alors*

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{-n} N(F, \eta B) = \frac{n!\varkappa_n}{(2\pi)^n}\, Q_n(\Gamma_{f_1}, \ldots, \Gamma_{f_n})\,.$$

Démonstration. Le Lemme 2.3.1 implique que

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{-n} N(F, \eta B) = \lim_{\eta\to+\infty} \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma_F,n)} \eta^{-n} N(F, \eta B \cap (K_\Delta)_{R_F})\,,$$

tandis que le Lemme 2.3.4 assure que

$$\lim_{\eta\to+\infty} \sum_{\Delta\in\mathcal{B}(\Gamma_F,n)} \eta^{-n} N(F, \eta B \cap (K_\Delta)_{R_F}) = (2\pi)^{-n} \int_{B\cap K_\Delta} \bigwedge_{\ell=1}^{n} dd^c h_{\Gamma_{f_\ell}}\,.$$

La conclusion suit du Théorème 1.5.4. □

Corollaire 2.3.2. *Soit $F \subset \mathcal{S}_n$ un SSE régulier constitué par r éléments. Alors les conditions suivantes sont équivalentes,*

(a) $V(F) = \varnothing$,
(b) $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma_F) < r$,
(c) $\mathcal{B}(\Gamma_F, r) \cap \mathcal{E}_F = \varnothing$.

Démonstration. L'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c) suit du Corollaire 1.4.1 et l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) suit de la régularité de F et de l'égalité $F = F^{\Gamma_F}$. Pour ce qui concerne (a) $\Rightarrow$ (b), on va montrer que si $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma_F) \geqslant \operatorname{card} F$ alors $V(F) \neq \varnothing$. En fait, le Lemme 2.3.2 et la Remarque 2.3.2 permettent de compléter F à un SSE régulier G tel que $\operatorname{card} G = n = \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma_G)$. Or, le Corollaire 2.3.1 et le Corollaire 1.4.1 impliquent que $V(G) \neq \varnothing$, donc $V(F) \neq \varnothing$. □

Remarque 2.3.3. Les calculs faits dans cette sections peuvent être poursuivis comme indiqué dans [17] pour obtenir un analogue du Corollaire 2.3.1 pour les SSE réguliers qui comportent moins de n éléments. Puisqu'on n'utilisera pas ce résultat plus général, on n'aura pas besoin de pousser ces calculs plus loin, cependant, on préfère donner l'énoncé du résultat en question.

Théorème 2.3.1. *Soit $F = \{f_1, \ldots, f_r\} \subset \mathcal{S}_n$ un SSE régulier. Alors*

$$\lim_{\eta \to +\infty} \eta^{r-2n}\, N(F, \eta B) = \frac{r!\varkappa_{2n-r}}{(2\pi)^r}\, \mathfrak{Q}_r^{\varrho}(\Gamma_{f_1}, \ldots, \Gamma_{f_r})\,.$$

La preuve de ce théorème fait intervenir une méthode délicate de moyennisation sur l'ensemble des SSE avec spectres donnés. Cette construction est présentée dans les articles [17], [18], [22], [23] auxquels on renvoi pour des informations plus détaillées.

Chapitre 3

Amibes de sommes d'exponentielles à fréquences réelles

3.1 Sommaire

Le but de ce chapitre est d'étudier une notion d'*amibe* pour les systèmes de sommes d'exponentielles à fréquences réelles. Sous des hypothèses de généricité, l'approche proposée ici coïncide avec celle présentée par Favorov [9] pour les fonctions holomorphes presque périodiques dans les domaines tubulaires. Le chapitre se constitue de cinq sections, (outre ce sommaire) ; la deuxième section propose notre notion d'amibe et en étudie les propriétés principales, la troisième section est consacrée à la *convexité généralisée* selon Henriques, propriété que l'on démontre, dans la quatrième section, pour l'amibe de certains systèmes de sommes d'exponentielles à fréquences réelles. La dernière section traite des rapports entre la notion classique (ou polynomiale) et la notion nouvelle (ou exponentielle) d'amibe à l'aide d'une fonction de Jessen-Ronkin adaptée au cadre exponentiel.

3.2 Amibes exponentielles

Pour tout sous-groupe additif $\mathbb{G}$ de $\mathbb{C}^n$, on note Ch $\mathbb{G}$ le groupe des $\mathbb{S}^1$-caractères[1] de $\mathbb{G}$, soit

$$\mathrm{Ch}\ \mathbb{G} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{G}, \mathbb{S}^1)\,.$$

[1]Bien entendu $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Si $f \in \mathcal{S}_n^*$, il est évident que Ξ_f est un groupe libre de type fini donc, si $s \in \mathbb{N}$ est son rang[2], Ch $\Xi_f \simeq (\mathbb{S}^1)^s$, un isomorphisme étant donné, pour tout choix d'un système libre $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ de générateurs de Ξ_f, par la loi qui associe au caractère $\chi \in \text{Ch } \Xi_f$ le s-uplet

$$(\chi(\omega_1) \dots, \chi(\omega_s)) \in (\mathbb{S}^1)^s .$$

De plus si, pour $j \in \{1, \dots, s\}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$ est une détermination de l'argument de $\chi(\omega_j)$, on a $\chi(\omega_j) = e^{i\theta_j}$ et, par conséquent, pour $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$,

$$\chi(k_1\omega_1 + \cdots + k_s\omega_s) = e^{i(k_1\theta_1 + \cdots + k_s\theta_s)} .$$

Si $f(\cdot) := \sum_{\lambda \in \Lambda_f} c_\lambda e^{\langle \cdot, \lambda \rangle} \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{G}} \setminus \{0\}$ et $\chi \in \text{Ch } \mathbb{G}$, on pose

$$f_\chi(\cdot) := \sum_{\lambda \in \Lambda_f} c_\lambda \chi(\lambda) e^{\langle \cdot, \lambda \rangle} ,$$

donc $\Lambda_{f_\chi} = \Lambda_f$, d'où $\Xi_{f_\chi} = \Xi_f$ et $\Gamma_{f_\chi} = \Gamma_f$. On remarque que l'injectivité du groupe $\mathbb{S}^1$ implique la surjectivité de l'homomorphisme de restriction

$$\text{Ch } \mathbb{G} \longrightarrow \text{Ch } \Xi_f ,$$

par conséquent, quel que soit le sous-groupe $\mathbb{G}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\Lambda_f \subset \Xi_f \subset \mathbb{G}$, l'ensemble

$$\{f_\chi \in \mathcal{S}_n^* \mid \chi \in \text{Ch } \mathbb{G}\}$$

ne dépend pas de $\mathbb{G}$, mais il dépend uniquement de f.

Pour tout $\chi \in \text{Ch } \Xi_F$, F_χ dénote le SSE donné par

$$F_\chi := \{f_\chi \in \mathcal{S}_n^* \mid f \in F\} .$$

Comme dans le cas d'une seule somme d'exponentielles, si F est un SSE à fréquences réelles, l'ensemble

$$\{F_\chi \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n} \mid \chi \in \text{Ch } \mathbb{G}\}$$

est le même pour tout sous-groupe additif $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^n$ tel que $\Xi_F \subset \mathbb{G}$. On peut définir ainsi une action de Ch $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$.

Suite à une idée d'Alain Yger [38], [39], on propose ici une nouvelle définition d'amibe pour les systèmes finis de sommes d'exponentielles à fréquences réelles.[3] On verra en suite sous quelles conditions cette notion d'amibe coïncide avec celle due à Favorov.

[2]Puisque le groupe additif $\mathbb{R}^n$ n'a pas de torsion, ses sous-groupes de type fini sont libres.

[3]Cette notion d'amibe pourrait s'adapter au cas plus général des systèmes finis de fonctions holomorphes presque périodiques dans les domaines tubulaires de $\mathbb{C}^n$.

Définition 3.2.1. *Soit F un SSE à fréquences réelles, $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^n$ un sous-groupe contenant les fréquences de F. L'*amibe *de F est le sous-ensemble $\mathcal{Y}_F$ de $\mathbb{R}^n$ défini par*

$$\mathcal{Y}_F := \bigcup_{\chi \in \mathrm{Ch}\ \mathbb{G}} \mathrm{Re}\ V(F_\chi)\,.$$

L'amibe $\mathcal{Y}_F$ est bien définie car elle est la même pour tout choix du groupe additif $\mathbb{G}$, (parmi ceux tels que $\Xi_F \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{C}^n$), utilisé dans sa définition. Ceci nous autorise entre autre à représenter l'amibe $\mathcal{Y}_F$ à l'aide du groupe $\mathbb{G}$ qui nous convient le plus. On remarque aussi que si $\chi \in \mathrm{Ch}\ \mathbb{G}$ alors F et F_χ ont les mêmes fréquences et donc les mêmes amibes : $\mathcal{Y}_F = \mathcal{Y}_{F_\chi}$.

Proposition 3.2.1. *Soit $F \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$ un SSE à fréquences réelles, alors*

(i) *on a l'égalité*

$$\mathcal{Y}_F = \mathbb{R}^n \cap \bigcup_{\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F} V(F_\chi)\,,$$

(ii) *$\mathcal{Y}_F$ est un sous-ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$ dont l'ensemble complémentaire est non vide.*

Démonstration. (i) Soit r le rang de Ξ_F et $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ un système de générateurs libres de Ξ_F, alors, pour tout $f \in F$, on a l'expression

$$f(z) = \sum_{k \in A_{f,\omega}} a_{f,k} \Big(e^{i\langle \omega_1, \mathrm{Im}\ z\rangle}\Big)^{k_1} \cdots \Big(e^{i\langle \omega_r, \mathrm{Im}\ z\rangle}\Big)^{k_r} e^{\langle k_1\omega_1 + \cdots + k_r\omega_r, \mathrm{Re}\ z\rangle}$$

où $A_{f,\omega} \subset \mathbb{Z}^r$ est un sous-ensemble fini et $a_{f,k} \in \mathbb{C}^*$ pour tout $k \in A_{f,\omega}$. Or, si $\xi \in \mathcal{Y}_F$, il existe un $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$ et un $\eta \in \mathbb{R}^n$ tels que $f_\chi(\xi + i\eta) = 0$, pour tout $f \in F$. Par conséquent si, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, θ_j désigne la détermination principale de l'argument de $\chi(\omega_j)$ on a

$$f_\chi(\xi + i\eta) = \sum_{k \in A_{f,\omega}} a_{f,k} \Big(e^{i(\theta_1 + \langle \omega_1, \eta\rangle)}\Big)^{k_1} \cdots \Big(e^{i(\theta_r + \langle \omega_r, \eta\rangle)}\Big)^{k_r} e^{\langle k_1\omega_1 + \cdots + k_r\omega_r, \xi\rangle}$$

pour tout $f \in F$ donc, si χ' dénote le caractère de Ξ_F donné, pour $1 \leqslant j \leqslant r$, par $\chi'(\omega_j) = e^{i\langle \eta, \omega_j\rangle}$, on aura $f_{\chi\chi'}(\xi) = f_\chi(\xi + i\eta) = 0$, pour tout $f \in F$, soit $\xi \in V(F_{\chi\chi'})$. L'autre inclusion est triviale.

(ii) Si $(\xi_q)_{q\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Y}_F$ est une suite convergeante vers $\xi \in \mathbb{R}^n$, pour tout indice $q \in \mathbb{N}$, il existe, grâce à (i), un $\chi_q \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$ tel que, $f_{\chi_q}(\xi_q) = 0$, pour tout $f \in F$. En vertu de la compacité de $\mathrm{Ch}\ \Xi_F$, la suite $(\chi_q)_{q\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Ch}\ \Xi_F$ admet une sous-suite $(\chi_{q_m})_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un caractère $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, donc

$$f_\chi(\xi) = \lim_{m\to\infty} f_{\chi_{q_m}}(\xi_{q_m}) = 0\,,$$

pour tout $f \in F$, soit $\xi \in \mathcal{Y}_F$. Enfin, pour tout $f \in F$, on a $\mathcal{Y}_F \subseteq \mathcal{Y}_f$ et le Lemme 2.3.1 implique que $\mathcal{Y}_f \neq \mathbb{R}^n$. $\square$

Remarque 3.2.1. Si F est un SSE à fréquences réelles, on rappelle que l'amibe au sens de Favorov de F est l'ensemble

$$\mathcal{F}_F := \overline{\text{Re } V(F)}\,,$$

où Re : $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'application de prise de partie réelle sur chaque coordonnée. On a alors

$$\mathcal{Y}_F = \bigcup_{\chi \in \text{Ch } \Xi_F} \mathcal{F}_{F_\chi} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Y}_F^c = \bigcap_{\chi \in \text{Ch } \Xi_F} \mathcal{F}_{F_\chi}^c\,,$$

ainsi que les inclusions (en général strictes) Re $V(F_\chi) \subseteq \mathcal{F}_{F_\chi} \subseteq \mathcal{Y}_F$, valables pour tout $\chi \in \text{Ch } \Xi_F$.

On va maintenant s'intéresser plus en détail aux rapports entre la notion d'amibe que l'on vient de définir et celle due à Favorov. Le Théorème 3.2.2 fait le lien entre les deux notions mais sa preuve utilise une version multidimensionnelle d'un théorème dit *d'Approximation de Kronecker* (déjà utilisée par Ronkin [33]) dont on préfère ajouter ici une démonstration. On montre d'abord un lemme.

Lemme 3.2.1. *Soit $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^r$ un sous-groupe (additif) fermé. Alors $\mathbb{H} = \mathbb{R}^r$ ou bien il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\psi \not\equiv 0$ sur $\mathbb{R}^r$ telle que $\psi(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Si $r = 1$ le lemme est une simple conséquence du fait bien connu qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit dense soit discret. Par récurrence, on suppose que le lemme soit vrai dans $\mathbb{R}^s$, pour tout $s < r$. Or, si $\mathbb{H} \neq \mathbb{R}^r$, il existe un sous-espace linéaire non trivial $S \subset \mathbb{R}^r$ tel que l'image de $\mathbb{H}$, sous la projection orthogonale $\pi_S : \mathbb{R}^r \to S$, constitue un sous-groupe discret de S. Puisque $\pi_S(\mathbb{H})$ est discret dans S, il existe par hypothèse de récurrence une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\psi_S \not\equiv 0$ sur S telle que $\psi_S(\pi_S(\mathbb{H})) \subseteq \mathbb{Z}$. La forme $\mathbb{R}$-linéaire $\psi := \psi_S \circ \pi_S$ vérifie le lemme pour $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^r$. $\square$

Théorème 3.2.1. *Soient $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{R}^n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Alors le sous-groupe additif*

$$\mathbb{G} := \{x \in \mathbb{R}^r \mid x_j = \langle t, \omega_j \rangle + p_j \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}^n,\ p_j \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad j = 1, \ldots, r\}$$

est dense [4] *dans $\mathbb{R}^r$.*

[4] On observe que des conditions diophantiennes portant sur les $\omega_1, \ldots, \omega_r$ "freinent" la vitesse de l'approximation du point courant de $\mathbb{R}^r$ par des points de $\mathbb{G}$.

Démonstration. Soit $\mathbb{H}$ l'adhérence de $\mathbb{G}$. $\mathbb{H}$ est aussi un sous-groupe et on va montrer que $\mathbb{H} = \mathbb{R}^r$. Si, par l'absurde, $\mathbb{H} \subsetneq \mathbb{R}^r$, le Lemme 3.2.1 implique qu'il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\psi \not\equiv 0$ sur $\mathbb{R}^r$ telle que $\psi(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{H}$ et donc *à fortiori* pour tout $x \in \mathbb{G}$. En évaluant ψ sur un point p de $\mathbb{Z}^r \subset G$ on trouve

$$\psi(p) = q_1 p_1 + \cdots + q_r p_r \,,$$

pour certains $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{Z}$ non tous nuls, d'autre part en l'évaluant sur un point du type

$$x_t = (\langle t, \omega_1 \rangle, \ldots, \langle t, \omega_r \rangle) \in \mathbb{G} \,,$$

où $t \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire, on obtient

$$\psi(x_t) = q_1 \langle t, \omega_1 \rangle + \cdots + q_r \langle t, \omega_r \rangle = \langle t, q_1\omega_1 + \cdots + q_r\omega_r \rangle \in \mathbb{Z}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, ce qui est possible si et seulement si

$$q_1\omega_1 + \cdots + q_r\omega_r = 0 \,,$$

d'où la contradiction. □

Les preuves du Lemme 3.2.1 et du Théorème 3.2.1 ont été obtenues en modifiant celles que l'on trouve dans [27].

Théorème 3.2.2. *Soit* $F = \{f_1, \ldots, f_s\} \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$, $s \leqslant n$, *tel que* $V(F_\chi) = \varnothing$ *pour tout* $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, *ou bien tel que* codim $V(F_\chi) = s$ *pour tout* $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$. *Alors*

$$\mathcal{Y}_F = \overline{\mathrm{Re}\ V(F)} = \mathcal{F}_F \,.$$

Démonstration. Si $V(F_\chi)$ est vide pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, le théorème est vrai trivialement. Soit donc codim $V(F_\chi) = s$, (en particulier $V(F_\chi) \neq \varnothing$), pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$. L'inclusion $\mathcal{Y}_F \supseteq \overline{\mathrm{Re}\ V(F)}$ est évidente, on doit donc montrer que $\mathrm{Re}\ V(F_\chi) \subseteq \overline{\mathrm{Re}\ V(F)}$, pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$. On suppose, par l'absurde, qu'il existe un $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$ et un point $x \in \mathbb{R}^n \cap V(F_\chi)$ qui n'est pas adhérent à $\mathrm{Re}\ V(F)$. Cela signifie qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la bande

$$D := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|x - \mathrm{Re}\ z\| < \varepsilon\}$$

ne contient pas de zéros de F. Si $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ est un système de générateurs libres du groupe Ξ_F et, pour $1 \leqslant \ell \leqslant r$, θ_ℓ est la détermination principale de l'argument de $\chi(\omega_\ell)$, on a les expressions suivantes pour tout $1 \leqslant j \leqslant s$,

$$f_j(z) = \sum_{k \in A_j} a_{j,k} \Big(e^{i\langle \omega_1, \mathrm{Im}\ z\rangle}\Big)^{k_1} \cdots \Big(e^{i\langle \omega_r, \mathrm{Im}\ z\rangle}\Big)^{k_r} e^{\langle k_1\omega_1 + \cdots + k_r\omega_r, \mathrm{Re}\ z\rangle}$$

et

$$f_{j,\chi}(z) = \sum_{k\in A_j} a_{j,k} \Big(e^{i(\theta_1+\langle\omega_1,\mathrm{Im}\ z\rangle)}\Big)^{k_1} \cdots \Big(e^{i(\theta_r+\langle\omega_r,\mathrm{Im}\ z\rangle)}\Big)^{k_r} e^{\langle k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r,\mathrm{Re}\ z\rangle},$$

où A_j est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^r$ et $a_{j,k} \in \mathbb{C}^*$ pour tout $k \in A_j$. Le Théorème 3.2.1 implique qu'il existe une suite $(t_m) \subset \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant r$, on ait

$$\lim_{m\to+\infty} \langle\omega_\ell, t_m\rangle = \theta_\ell \qquad \text{mod. } 2\pi\mathbb{Z}\,,$$

ce qui fait que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant s$ et tout $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\lim_{m\to+\infty} f_j(z + it_m) = f_{j,\chi}(z)\,.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout $1 \leqslant j \leqslant s$ et tout $z \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$g_{j,m}(z) := f_j(z + it_m)\,,$$

donc $\lim_{m\to+\infty} g_{j,m} = f_{j,\chi}$, ce qui fait que le système $G_m = \{g_{1,m}, \ldots, g_{s,m}\}$ "tend[5]" vers F_χ si m tend vers l'infini. Or, puisque $V(F) \cap D = \varnothing$, on a aussi $V(G_m) \cap D = \varnothing$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, mais comme par construction codim $V(G_m) = s =$ codim $V(F_\chi)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, la version plusieurs variables du théorème de Rouché fait que $V(F_\chi) \cap D = \varnothing$ aussi. Ceci est absurde car par hypothèse $x \in V(F_\chi) \cap D$. □

Corollaire 3.2.1. *Soit* $F = \{f_1, \ldots, f_s\} \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$, $s \leqslant n$, *tel que* $V(F_\chi) = \varnothing$ *pour tout* $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, *ou bien tel que* codim $V(F_\chi) = s$ *pour tout* $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$. *Alors*

$$\overline{\mathrm{Re}\ V(F)} = \overline{\mathrm{Re}\ V(F_\chi)}\,,$$

pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$.

Démonstration. Pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$ le système F_χ vérifie les mêmes hypothèses que F donc le Théorème 3.2.2 fait qu'on ait aussi

$$\mathcal{Y}_{F_\chi} = \overline{\mathrm{Re}\ V(F_\chi)} = \mathcal{F}_{F_\chi}\,,$$

d'autre part $\mathcal{Y}_F = \mathcal{Y}_{F_\chi}$, donc $\overline{\mathrm{Re}\ V(F)} = \overline{\mathrm{Re}\ V(F_\chi)}$. □

[5] L'idée d'approcher les $f_{j,\chi}$ par des translatées des f_j à l'aide du Théorème 3.2.1 a été déjà exploitée par Ronkin dans [33].

Corollaire 3.2.2. *Soit $F \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$ un SSE dont la famille des spectres est fermée, alors*

$$\mathcal{Y}_F = \overline{\mathrm{Re}\; V(F)} = \mathcal{F}_F\,.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'à cause du Lemme 2.3.3, pour tout caractère $\chi \in \mathrm{Ch}\;\Xi_F$, le système F_χ est régulier et donc on n'a plus que deux possibilités, selon que $V(F_\chi) = \varnothing$ ou que codim $V(F_\chi) = \mathrm{card}\; F$, pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\;\Xi_F$. □

Corollaire 3.2.3. *Soit $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$, alors $\mathcal{Y}_f = \overline{\mathrm{Re}\; V(f)} = \mathcal{F}_f$.*

Démonstration. La famille des spectres d'un SSE constitué par une seule somme d'exponentielles est toujours fermé. □

Le lemme qui suit concerne le comportement des amibes sous l'action d'un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^n$ qui préserve $\mathbb{R}^n$, si φ est un tel automorphisme et F un SSE à fréquences réelles, on pose

$$F \circ \varphi := \{f \circ \varphi \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n} \mid f \in F\}\,.$$

Lemme 3.2.2. *Soit F un SSE à fréquences réelles et $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire tel que $\varphi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Alors on a*

$$\mathrm{Re}\,\Big[V(F\circ\varphi)\Big] \;=\; \mathrm{Re}\,\Big[\varphi^{-1}(V(F))\Big] = \varphi^{-1}(\mathrm{Re}\;V(F))$$

ainsi que

$$\mathcal{Y}_F \;=\; \varphi^a(\mathcal{Y}_{F\circ\varphi^a})\,,$$

où φ^a dénote l'adjoint de φ par rapport à la forme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$.

Démonstration. La première égalité est évidente. Si $x \in \mathrm{Re}\;\varphi^{-1}(V(F))$ et $z = x + iy \in \varphi^{-1}(V(F))$, on a $\varphi(z) = \varphi(x) + i\varphi(y)$ d'où $\mathrm{Re}\;\varphi(z) = \varphi(x)$, soit $x \in \varphi^{-1}(\mathrm{Re}\;V(F))$. D'autre part, si $x \in \varphi^{-1}(\mathrm{Re}\;V(F))$, il existe un point $\zeta \in V(F)$ tel que $\mathrm{Re}\;\zeta = \varphi(x)$ et comme φ est inversible, on a

$$x = \varphi^{-1}(\mathrm{Re}\,(\zeta)) = \mathrm{Re}\;\varphi^{-1}(\zeta) \in \mathrm{Re}\;\varphi^{-1}(V(F))\,,$$

ce qui achève la preuve de la première affirmation. Pour montrer la deuxième affirmation, soit $f \in F$, $f(z) := \sum_{\lambda\in\Lambda_f} c_\lambda e^{\langle z,\lambda\rangle}$, alors, pour tout $\lambda \in \Lambda_f$ on a

$$\langle\varphi^a(z),\lambda\rangle = \overline{\langle\lambda,\varphi^a(z)\rangle} = \overline{\langle\varphi(\lambda),z\rangle} = \langle z,\varphi(\lambda)\rangle\,,$$

d'où

$$f \circ \varphi^a(z) = \sum_{\varphi(\lambda) \in \varphi(\Lambda_f)} c_{\varphi(\lambda)} e^{\langle z, \varphi(\lambda) \rangle}$$

et

$$\text{Ch } \Xi_{F \circ \varphi^a} = \{\chi \circ \varphi^{-1}_{|\varphi(\Xi_F)} \mid \chi \in \text{Ch } \Xi_F\} .$$

Ceci fait que, pour tout $f \in F$ et tout $\chi \in \text{Ch } \Xi_F$, on ait

$$f_\chi \circ \varphi^a = (f \circ \varphi^a)_{\chi \circ \varphi^{-1}}$$

ainsi on en déduit

$$\text{Re } V\big(F_\chi \circ \varphi^a\big) = \text{Re } V\Big((F \circ \varphi^a)_{\chi \circ \varphi^{-1}}\Big)$$

et, grâce à la première partie de la preuve

$$\text{Re } V(F_\chi) = \varphi^a\Big(\text{ Re } V\Big((F \circ \varphi^a)_{\chi \circ \varphi^{-1}}\Big)\Big) ,$$

d'où la conclusion en prenant l'union sur $\chi \in \text{Ch } \Xi_F$. □

Lemme 3.2.3. *Soit F un* SSE *à fréquences réelles tel que le rang de Ξ_F soit égale à* $\dim_{\mathbb{R}}(\text{lin}_{\mathbb{R}} \Xi_F)$. *Alors on a l'égalité*

$$\mathcal{Y}_F = \text{Re } V(F) .$$

Démonstration. On suppose d'abord que, pour tout $f \in F$, $\Lambda_f \subset \mathbb{Z}^n$ et que Ξ_F est de la forme

$$\Xi_F = \{(m_1, \ldots, m_s, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\} ,$$

où $s \in \{1, \ldots, n\}$ dénote le rang de Ξ_F. Dans ce cas, pour déterminer l'amibe de F on peut utiliser les caractères du groupe $\mathbb{Z}^n$; donc si $\chi \in \text{Ch } \mathbb{Z}^n$ est le caractère associé au n-uplet $(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$, où $(\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \mathbb{R}^n$, $f \in F$ et $\lambda \in \Lambda_f$, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) e^{\langle z, \lambda \rangle} &= e^{i(m_1\theta_1 + \cdots + m_s\theta_s)} e^{z_1 m_1 + \cdots + z_s m_s} \\ &= e^{(z_1 + i\theta_1)m_1 + \cdots + (z_r + i\theta_s)m_s} \\ &= e^{\langle z + i\theta, \lambda \rangle} , \end{aligned}$$

donc $f_\chi(z) = f(z + i\theta)$. On en tire que, pour tout $\chi \in \text{Ch } \mathbb{Z}^n$, $z \in V(F_\chi)$ si et seulement si $z + i\theta \in V(F)$, d'où $\text{Re } V(F_\chi) = \text{Re } V(F)$ et pour le choix arbitraire de $\chi \in \text{Ch } \mathbb{Z}^n$, on déduit que $\mathcal{Y}_F = \text{Re } V(F)$.

On passe maintenant au cas général. Supposons que le rang s de Ξ_F soit égal à $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\,\Xi_F)$ et soit $\{\omega_1,\ldots,\omega_s\}$ un système libre de générateurs de Ξ_F. Les éléments $\omega_1\ldots,\omega_s$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ car autrement le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qu'ils engendrent, à savoir le sous-espace $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\,\Xi_F$, aurait dimension plus petite que s. Ceci permet de compléter le système $\{\omega_1,\ldots,\omega_s\}$ en une base $\{\omega_1,\ldots,\omega_s,\omega_{s+1},\ldots,\omega_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit A la matrice donnée par

$$A := \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{1n} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix},$$

alors, si B est l'inverse de A et φ l'automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^n$ répresenté dans les bases canoniques par la matrice B, on voit que $\varphi(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$, et qu'à moins d'une permutation impaire des premières s colonnes de A on peut supposer $\det\varphi>0$. Ceci implique l'égalité

$$\varphi(\Xi_F)=\{(m_1,\ldots,m_s,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n \mid m_1,\ldots,m_s\in\mathbb{Z}\}\,;$$

donc, avec les notations du Lemme 3.2.2, la première partie de la démonstration nous assure que

$$\mathcal{Y}_{F\circ\varphi}=\mathrm{Re}\,V(F\circ\varphi)\,,$$

et un recours au Lemme 3.2.2 nous donne

$$\mathcal{Y}_F=\varphi(\mathcal{Y}_{F\circ\varphi})=\varphi(\mathrm{Re}\,V(F\circ\varphi))=\varphi(\varphi^{-1}(\mathrm{Re}\,V(F)))=\mathrm{Re}\,V(F)\,,$$

ce qui achève la preuve. □

Corollaire 3.2.4. *Si F est un SSE à fréquences rationnelles alors*

$$\mathcal{Y}_F=\mathrm{Re}\,V(F)\,.$$

Démonstration. Au vu de Lemme 3.2.3, il suffit de vérifier que le rang s de Ξ_F est égal à $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\,\Xi_F)$. Pour cela, soit $\{\omega_1,\ldots,\omega_s\}\subset\mathbb{Q}^n$ un système libre de générateurs de Ξ_F. On a $s\leqslant n$; en effet, si $j\in\{1,\ldots,s\}$ et

$$\omega_j=\left(\frac{p_{j1}}{q_{j1}},\ldots,\frac{p_{jn}}{q_{jn}}\right),$$

avec $p_{j1},\ldots,p_{jn}\in\mathbb{Z}$ et $q_{j1},\ldots,q_{jn}\in\mathbb{Z}^*$, alors, en posant

$$\mu := \textsc{ppmc}\{q_{jk}\in\mathbb{Z} \mid j\in\{1,\ldots,s\}\,,k\in\{1,\ldots,n\}\}\,;$$

on voit que $\mu \neq 0$, donc Ξ_f est isomorphe à $\mu\Xi_f$ et comme $\mu\Xi_F \subseteq \mathbb{Z}^n$, on en tire que $s \leqslant n$. De plus, $\omega_1, \dots, \omega_s$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants car en multipliant une éventuelle relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ par le plus petit multiple commun des dénominateurs des coefficients de la relation, on obtient une relation sur $\mathbb{Z}$, ce qui est contraire au fait que les éléments $\omega_1, \dots, \omega_s$ définissent une famille libre sur $\mathbb{Z}$. Par conséquent, on peut compléter $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ en une base $\{\omega_1, \dots, \omega_s, \omega_{s+1}, \dots, \omega_n\}$ de $\mathbb{Q}^n$. Comme dans la démonstration du Lemme 3.2.3, soit A la matrice donnée par

$$A := \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{1n} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix},$$

alors, si B est l'inverse de A et φ l'automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^n$ représenté dans les bases canoniques par la matrice B, on a que $\varphi(\mathbb{Q}^n) = \mathbb{Q}^n$ et, à moins d'une permutation impaire des premières s colonnes de A, on peut supposer $\det \varphi > 0$. Ceci implique l'égalité

$$\varphi(\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} \Xi_F) = \{(m_1, \dots, m_s, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Q}\},$$

où $\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} \Xi_F$ dénote le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^n$ engendré par Ξ_F, d'où

$$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{R}} \Xi_F) = \dim_{\mathbb{R}}(\varphi(\operatorname{lin}_{\mathbb{R}} \Xi_F)) = \dim_{\mathbb{Q}}(\varphi(\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} \Xi_F)) = s,$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque 3.2.2. Le Corollaire 3.2.4 a comme conséquence le fait que notre notion d'amibe pour un système de sommes d'exponentielles généralise la notion classique d'amibe. En fait si $P = \{p_1, \dots, p_r\} \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ est un système de polynômes de Laurent non nuls, $V(P)$ son ensemble des zéros dans le tore $(\mathbb{C}^*)^n$ et $\mathcal{A}_P := \operatorname{Ln} V(P)$ son amibe au sens classique, la substitution $x_j = e^{z_j}$, pour $j = 1, \dots, n$, transforme P en le SSE à fréquences entières $F := \{f_1, \dots, f_r\} \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{Z}^n}$, où, pour $1 \leqslant k \leqslant r$ et $z \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$f_k(z) := p_k(e^{z_1}, \dots, e^{z_n}).$$

Comme, pour tout $j = 1, \dots, n$, $\ln |x_j| = \ln |e^{z_j}| = \operatorname{Re} z_j$, on en déduit que

$$\mathcal{A}_P = \mathcal{Y}_F = \mathcal{F}_F.$$

On remarque encore que pour un SSE $F \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$ on peut aussi considérer l'amibe $\mathcal{A}_F$ au sens classique, soit l'image de $V(F) \cap (\mathbb{C}^*)^n$ sous l'application Log. Cependant cette approche semble inefficace car, d'une part elle "renonce" à une partie des zéros de F (ceux qui pourraient avoir quelque coordonnée nulle) et, d'autre part, elle semble négliger la structure combinatoire de F.

Exemple 3.2.1. Soit $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f \in \mathcal{S}_{1,\mathbb{R}}$ donnée, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos(iz) + \sin(i\gamma z) - 2 \\ &= \frac{1}{2}\big(e^{-z} + e^{z}\big) + \frac{1}{2i}\big(e^{-\gamma z} - e^{\gamma z}\big) - 2\,. \end{aligned}$$

L'ensemble Re $V(f)$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc Re $V(f) \subsetneq \mathcal{Y}_f$. En effet, si z est imaginaire pur, $f(z) = 0$ si et seulement si $\cos iz = 1$ et $\sin(i\gamma z) = 1$, soit si et seulement si

$$iz \in 2\,\pi\mathbb{Z} \cap \Big((\pi/2\gamma) + (2\,\pi/\gamma)\mathbb{Z}\Big) = \varnothing\,,$$

en particulier $0 \notin$ Re $V(f)$. D'autre part, si $\chi \in$ Ch Ξ_f est tel que $\chi(1) = 1$ et $\chi(\gamma) = -i$, on a bien

$$f_\chi(z) = \cos(iz) + \cos(i\gamma z) - 2\,,$$

d'où $f_\chi(0) = 0$ et donc $0 \in \mathcal{Y}_f = \overline{\text{Re } V(f)}$.[6] Puisque le rang du groupe Ξ_f est égale à 2 on voit que le Lemme 3.2.3 est en général faux si le rang de Ξ_F est plus grand que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{lin}_{\mathbb{R}}\ \Xi_F)$.

Exemple 3.2.2. Soit $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f \in \mathcal{S}_{1,\mathbb{R}}$ donnée, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$f(z) = (e^{z} - 1)(e^{\gamma z} - e^{\gamma})\,,$$

alors Re $V(f) = \{0, 1\} = \mathcal{Y}_f$ malgré les hypothèses du Lemme 3.2.3 ne soient pas satisfaites. La condition énoncée dans le Lemme 3.2.3 est donc suffisante mais pas nécessaire pour qu'on ait $\mathcal{Y}_f =$ Re $V(f)$.

Exemple 3.2.3. Soit $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $F = \{f, g\} \subset \mathcal{S}_{1,\mathbb{R}}$, où f et g sont données, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$f(z) = \cos(iz) + \sin(i\gamma z) - 2 \qquad \text{et} \qquad g(z) = e^{z} - 1\,.$$

Il s'agit d'un système qui n'a pas de solutions (car f n'a pas de zéros imaginaires purs alors que g n'a que de tels zéros), donc $\overline{\text{Re } V(F)} = \varnothing$. D'autre part $\mathcal{Y}_F \neq \varnothing$ car $0 \in V(F_\chi)$, où χ désigne le caractère tel que $\chi(1) = 1$ et $\chi(\gamma) = -i$. Donc il existe bien de systèmes $F \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$ qui n'ont pas de zéros et dont l'amibe $\mathcal{Y}_F$ n'est pas vide. Dans ces cas l'amibe $\mathcal{Y}_F$ est trop grande (donc peu intéressante) et le Théorème 3.2.2 est faux.

[6] Une preuve directe de ceci n'utilisant pas le langage des amibes m'a été signalée par Michel Balazard.

3.3 k-convexité selon Henriques.

Dans cette section on va faire quelques remarques autour de la notion de k-convexité pour un ouvert d'un espace affine réel telle qu'elle a été introduite dans [15], auquel on renvoie pour toutes les définitions, les détails techniques et tous les résultats que l'on évoquera dans la suite, en particulier en ce qui concerne le complexe des chaînes polyédrales.

Si $\varnothing \neq X \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, on note ${}^{\mathrm{pl}}C_\bullet(X)$ le complexe des chaînes polyédrales de X, il est obtenu comme le quotient du complexe ${}^{\Delta}C_\bullet(X)$ de chaînes linéaires par morceaux de X modulo la relation $\sim$ d'équivalence géométrique de ces chaînes. Si $\sigma = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sigma_j \in {}^{\mathrm{pl}}C_k(X)$, avec $\lambda_j \neq 0$ pour tout j et $c = [\sigma]_\sim \in {}^{\Delta}C_k(X)$, on rappelle que le support Supp σ de σ est l'union des images des chaînes σ_j qui apparaissent dans l'expression de σ et que

$$\mathrm{Supp}\ c := \bigcap_{\tau \sim \sigma} \mathrm{Supp}\ \tau\,,$$

ce dernier étant bien défini en vertu du Lemme 2.4 dans [15]. On rappelle aussi que l'homologie du complexe ${}^{\Delta}C_\bullet(X)$ est isomorphe à l'homologie singulière de X, ([15] Lemme 2.2), donc dans toute question de k-convexité pour un ouvert X d'un espace affine réel, on pourra utiliser l'homologie du complexe ${}^{\Delta}C_\bullet(X)$ au lieu de celui des chaînes singulières de X.

Le terme *k-convexité* n'est pas nouveau en Mathématiques, il existe en fait en analyse complexe de plusieurs variables ainsi qu'en analyse fonctionnelle. Néanmoins ces notions analytiques ne ressemblent pas à la notion présentée par Henriques, qui me parait quand même assez nouvelle. On mentionne d'ailleurs que Mikalkhin [29] a introduit, sous le même nom de k-convexité, une notion plus forte que celle d'Henriques.

Il faut remarquer que, si $k \in \mathbb{N}$ est fixé, la k-convexité dans $\mathbb{R}^n$ ne dévient intéressante que pour $n \geqslant k+2$, sinon tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est k-convexe. Des simples exemples sont le complémentaire d'une union finie de droites dans $\mathbb{R}^3$, qui est 1-convexe mais qu'il n'est pas 0-convexe[7] et, plus en général, le complémentaire d'une union finie de k-sous-espaces affines dans $\mathbb{R}^{k+2}$, qui est k-convexe mais il n'est pas ℓ-convexe, pour $\ell < k$. Par contre, le complémentaire d'un ensemble fini de points dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas 0-convexe, ni 1-convexe (mais il est trivialement 2-convexe).

La "faiblesse" de la notion de k-convexité croit avec k.

[7]Un autre exemple assez explicatif d'un tel sous-ensemble m'a été signalé par Mikael Passare, il s'agit du complémentaire d'une "tour Eiffel" dans $\mathbb{R}^3$ dont la "pointe" et les "pieds" tendent vers l'infini.

Lemme 3.3.1. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, si X est k-convexe, il est aussi $(k+1)$-convexe.*

Démonstration. On suppose par l'absurde que X soit k-convexe mais qu'il ne soit pas $(k+1)$-convexe. Il existe donc un $(k+2)$-sous-espace affine orienté S de $\mathbb{R}^n$ qui rencontre X et il existe aussi une classe non nulle c dans $\widetilde{H}^+_{k+1}(S \cap X, \mathbb{Z})$ dont l'image, (sous le morphisme induit par l'inclusion), dans $\widetilde{H}_{k+1}(X, \mathbb{Z})$ est nulle. Soit alors σ un $(k+1)$-cycle non négatif dans $S \cap X$ qui représente la classe c et S' est un $(k+1)$-sous espace affine orienté de S tel que l'intersection $\sigma' := S' \cap \sigma$ soit un k-cycle non négatif et non nul contenu dans $S' \cap X$, (un tel sous-espace existe car autrement σ représenterait la classe nulle de $\widetilde{H}^+_{k+1}(S \cap X, \mathbb{Z})$). Puisque σ représente la classe nulle dans $\widetilde{H}_{k+1}(X, \mathbb{Z})$, on déduit que σ' représente la classe nulle dans $\widetilde{H}_k(X, \mathbb{Z})$, ce qui est contraire à la k-convexité de X. □

On termine la section par le lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorphisme d'espaces affines qui préserve l'orientation. Alors si $X \subset \mathbb{R}^n$ est k-convexe, $\varphi(X)$ l'est.*

Démonstration. Si $X = \varnothing$ il n'y a rien à montrer. Sinon, la restriction de φ à X induit un homéomorphisme de X sur $\varphi(X)$ donc un isomorphisme en homologie réduite $\varphi_* : \tilde{H}_\bullet(X) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(\varphi(X))$. En outre, comme φ préserve l'orientation, pour tout $(k+1)$-sous-espace affine orienté S de $\mathbb{R}^n$ qui rencontre X, $\varphi(S)$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ qui est isomorphe à S, en tant qu'espace affine réel orienté, et qui rencontre $\varphi(X)$; d'autre part, tout $(k+1)$-sous-espace affine orienté de $\mathbb{R}^n$ qui rencontre $\varphi(X)$ est de la forme $\varphi(S)$ pour un unique S. Enfin, pour tout $(k+1)$-sous-espace affine S de $\mathbb{R}^n$ qui rencontre X et tout $x \in S \setminus X$, l'isomorphisme φ induit un isomorphisme

$$\varphi_* : \mathbb{Z} = \tilde{H}_k(S \setminus \{x\}) \longrightarrow \tilde{H}_k(\varphi(S) \setminus \{\varphi(x)\}) = \mathbb{Z}$$

qui, comme on le voit facilement, n'est rien d'autre que l'isomorphisme identité. On peut donc conclure la démonstration, en fait, pour tout $(k+1)$-sous-espace affine orienté S de $\mathbb{R}^n$ qui rencontre X et tout $x \in S \setminus X$,

$$\tilde{H}^+_k(\varphi(S) \cap \varphi(X)) \setminus \{0\} = \varphi_*(\tilde{H}^+_k(S \cap X) \setminus \{0\})$$

et de plus le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{H}_k(\varphi(S) \cap \varphi(X)) & \longrightarrow & \widetilde{H}_k(\varphi(S) \setminus \{\varphi(x)\}) \\
{\scriptstyle \varphi_*^{-1}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle id} \\
\widetilde{H}_k(S \cap X) & \longrightarrow & \widetilde{H}_k(S \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}
\end{array}$$

(où les flèches horizontales sont induites par l'inclusion), est commutatif. □

3.4 Le complémentaire de l'amibe.

Dans cette section on démontre un résultat sur le complémentaire $\mathcal{F}_F^c$ de l'amibe d'un SSE F à fréquences réelles qui constitue le pendant du Théorème 0.0.1. Pour cela, on aura besoin d'une hypothèse géométrique sur les fréquences de F, à savoir l'hypothèse que la famille des spectres de F est fermée.

Théorème 3.4.1. *Soit $F \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$ un SSE dont la famille des spectres est fermée. Si F est constitué par $(k+1)$ sommes d'exponentielles, le complémentaire $\mathcal{F}_F^c$ de l'amibe de F est un sous-ensemble k-convexe de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. La famille des spectres de F est fermée donc $\mathcal{F}_F = \mathcal{Y}_F$ et, pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, le SSE F_χ est régulier. Si $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{aff}_{\mathbb{C}}\,\Gamma_F) < (k+1)$, pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, on a $V(F_\chi) = \varnothing$, donc $\mathcal{Y}_F^c = \mathbb{R}^n$ qui est évidemment k-convexe. Par contre, si $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{aff}_{\mathbb{C}}\,\Gamma_F) \geqslant (k+1)$, l'ensemble analytique $V(F_\chi)$ est non vide et de codimension $(k+1)$ dans $\mathbb{C}^n$, pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$. En particulier $\varnothing \neq \mathcal{Y}_F \neq \mathbb{R}^n$. On conduit la démonstration en trois étapes.

(i) Si $\Lambda_f \subset \mathbb{Z}^n$ pour tout $f \in F$, l'amibe $\mathcal{Y}_F$ coïncide avec l'amibe (au sens classique) $\mathcal{A}_P$ d'un système P de polynômes de Laurent de n variables tel que la codimension, dans $(\mathbb{C}^*)^n$, de l'ensemble algébrique $V(P)$ soit égale à $(k+1)$. Grâce au Théorème 0.0.1, on peut conclure que $\mathcal{Y}_F^c$ est k-convexe dans ce cas.

(ii) On suppose maintenant que $\Lambda_f \subset \mathbb{Q}^n$ pour tout $f \in F$, et, comme dans la démonstration du Corollaire 3.2.3, on peut trouver un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire φ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\det\varphi > 0$, $\varphi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ et $\varphi(\Xi_F) \subset \mathbb{Z}^n$. Ainsi, avec les mêmes notations qu'au Lemme 3.2.2, on a

$$\mathcal{Y}_F = \varphi^a(\mathcal{Y}_{F\circ\varphi^a}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Y}_F^c = \varphi^a(\mathcal{Y}_{F\circ\varphi^a}^c)$$

car l'adjoint φ^a de φ est aussi bijectif. En outre, le fait que φ soit un isomorphisme implique que l'ensemble des spectres du système $F \circ \varphi^a$ soit aussi fermé, donc $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{aff}_{\mathbb{C}}\,\Gamma_{F\circ\varphi^a}) \geq (k+1)$, et codim $V(F \circ \varphi^a) = (k+1)$.

Or, comme $\Xi_{F\circ\varphi^a} = \varphi(\Xi_F) \subset \mathbb{Z}^n$, la première partie de la démonstration montre que l'ensemble $\mathcal{Y}_{F\circ\varphi^a}^c$ est k-convexe dans $\mathbb{R}^n$ et vu que $\det\varphi^a > 0$ un recours au Lemme 3.2.2 permet de conclure la démonstration dans ce deuxième cas.

(*iii*) On passe donc au cas général où $\Lambda_f \subset \mathbb{R}^n$ pour tout $f \in F$. Si $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ est un système libre de générateurs de Ξ_F on aura

$$f(z) = \sum_{k \in A_{f,\omega}} a_{f,k} e^{k_1 \langle z, \omega_1 \rangle + \cdots + k_r \langle z, \omega_r \rangle},$$

où $A_{f,\omega} \subset \mathbb{Z}^r$ est un sous-ensemble fini et $a_{f,k} \in \mathbb{C}^*$ pour tout $k \in A_{f,\omega}$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, soit $(\omega_{j,\ell})_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^n$ une suite convergeante vers ω_j et, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, soit $F^{[\ell]} := \{f^{[\ell]} \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}} \mid f \in F\}$, où $f^{[\ell]}$ est la somme d'exponentielles donnée par

$$f^{[\ell]}(z) := \sum_{k \in A_{f,\omega}} a_{f,k} e^{k_1 \langle z, \omega_{1,\ell} \rangle + \cdots + k_r \langle z, \omega_{r,\ell} \rangle}.$$

On voit ainsi que, pour tout $f \in F$, la suite des polytopes $(\Gamma_{f^{[\ell]}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers le polytope Γ_f pour la métrique de Hausdorff ; par conséquent, pour ℓ assez grand, l'ensemble des spectres du système $F^{[\ell]}$ est aussi fermé (donc $F^{[\ell]}$ est régulier) et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{aff}_{\mathbb{C}} \Gamma_{F^{[\ell]}}) \geqslant (k+1)$. Ceci implique que, pour ℓ assez grand, l'ensemble analytique $V(F^{[\ell]})$ est non vide et de codimension $(k+1)$ dans $\mathbb{C}^n$. D'autre part, pour tout $f \in F$, le support de $f^{[\ell]}$ est contenu dans $\mathbb{Q}^n$, donc, en vertu de la deuxième partie de la démonstration, on sait que pour ℓ assez grand, l'ensemble $\mathcal{Y}^c_{F^{[\ell]}}$ est k-convexe.

De façon analogue, pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on peut définir la système $(F_\chi)^{[\ell]}$, et puisque, pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $f \in F$, on a $\Lambda_{f^{[\ell]}} = \Lambda_{(f_\chi)^{[\ell]}} \subset \mathbb{Q}^n$, on peut également conclure que, pour tout caractère $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$ et pour ℓ assez grand, l'ensemble $\mathcal{Y}^c_{(F_\chi)^{[\ell]}}$ est k-convexe.

Puisque $\varnothing \neq \mathcal{Y}_F \neq \mathbb{R}^n$, il existe un $(k+1)$-sous-espace affine orienté S de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varnothing \neq S \cap \mathcal{Y}^c_F \neq S$. Soit S un tel sous-espace affine (d'espace vectoriel sous-jacent E_S) et supposons, par l'absurde, qu'il existe une classe $\gamma \in \widetilde{H}^+_k(S \cap \mathcal{Y}^c_F) \setminus \{0\}$ dont l'image est nulle sous le morphisme

$$\iota : \widetilde{H}_k(S \cap \mathcal{Y}^c_F) \longrightarrow \widetilde{H}_k(\mathcal{Y}^c_F)$$

induit par l'inclusion ; il s'agit de montrer que l'existence d'un tel élément conduit à une contradiction. On choisit pour cela un représentant c de γ dans le groupe $\mathcal{C}^\Delta_k(S \cap \mathcal{Y}^c_F)$ (c'est-à-dire un k-cycle affine par morceaux de l'ouvert $S \cap \mathcal{Y}^c_F$ de l'espace affine $(k+1)$-dimensionnel S) ; grâce au Lemme 2.7 de [15], il existe une unique $(k+1)$-chaîne affine par morceaux C de $\mathcal{C}^\Delta_{k+1}(S)$ (dépendant de c) telle que $\partial C = c$ et l'hypothèse que la classe d'homologie de c dans $S \cap \mathcal{Y}^c_F$ soit non nulle équivaut (pour le même Lemme 2.7 de [15]) à ce que le support de C ne soit pas inclus dans $\mathcal{Y}^c_F$; il existe donc un caractère

χ_o de Ξ_F tel que le support de C n'est pas inclus dans $S \cap (\mathrm{Re}\, V(F_{\chi_o}))^c$. En outre, comme Supp $c \subset \mathcal{Y}_F^c$, on voit que la classe nulle de $\widetilde{H}_k(\mathcal{Y}_F^c)$ peut être représentée par le cycle c, donc il existe un élément $D \in \mathcal{C}_{k+1}^{\Delta}(\mathcal{Y}_F^c)$, tel que $\partial D = c$ dans $\mathcal{Y}_F^c$.

On admet pour l'instant qu'il existe $L \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\ell \geqslant L$ on a

$$\mathrm{Supp}\ c \cup \mathrm{Supp}\ D \subseteq \mathcal{Y}^c_{(F_\chi)^{[\ell]}}\,, \qquad (*)^\ell_\chi$$

pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_F$, donc, pour $\ell \geqslant L$, la relation $(*)^\ell_{\chi_o}$ implique que c représente une classe d'homologie $\gamma_{\chi_o,\ell}$ de $\widetilde{H}_k(S \cap \mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}})$ dont l'image est nulle sous le morphisme

$$\iota_\ell : \widetilde{H}_k(S \cap \mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}}) \longrightarrow \widetilde{H}_k(\mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}})\ ,$$

induit par l'inclusion. En outre, l'hypothèse $\gamma \in \widetilde{H}_k^+(S \cap \mathcal{Y}_F^c)$ implique que, si $\ell \geqslant L$, on a $\gamma_{\chi_o,\ell} \in \widetilde{H}_k^+(S \cap \mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}})$. En fait si, pour $\ell \geqslant L$ et x appartenant $S \setminus \mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}}$, υ_x dénote le générateur standard du groupe de cohomologie de de Rham $H^k_{dR}(S \setminus \{x\})$,

$$\upsilon_x := \frac{1}{(k+1)\varkappa_{k+1}} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{\xi_j - x_j}{\parallel \xi - x \parallel^{k+1}}\, d\xi_{[j]}\ ,$$

on a

$$\int_c \upsilon_x > 0 \quad \text{lorsque } x \in \mathrm{Supp}\ C\,,$$

ou alors

$$\int_c \upsilon_x = 0 \quad \text{lorsque } x \notin \mathrm{Supp}\ C\,.$$

Si l'on change de représentant pour $\gamma_{\chi_o,\ell}$, il est facile de voir (par le théorème de Stokes) qu'aucune des deux intégrales ci-dessus peut devenir négative, donc, grâce au Lemme 3.2 de [15], si $\ell \geqslant L$, la classe $\gamma_{\chi_o,\ell}$ est non négative dans $\widetilde{H}_k(S \cap \mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}})$, d'autre part, si $\ell \geqslant L$, la k-convexité de $\mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}}$ implique que $\gamma_{\chi_o,\ell}$ représente la classe nulle dans le groupe $\widetilde{H}_k(S \cap \mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}})$, soit Supp $C \subseteq \mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}}$.

La contradiction attendue viendra alors du fait que l'on sait que le support de C n'est pas inclus dans $S \cap \mathrm{Re}\,(V(F_{\chi_o}))^c$. En fait on peut trouver un point $x \in S \cap \mathrm{Re}\,(V(F_{\chi_o}))$ qui appartient aussi à l'intérieure relatif de Supp C, donc il existe un voisinage W de x tel que $W \cap S$ soit entièrement contenu dans Supp C. Si $y \in \mathbb{R}^n$ est tel que $z := x + iy \in V(F_{\chi_o})$, l'intersection de $V(F_{\chi_o})$ avec

$$U := S + i(y + E_S)\,,$$

constitue un ensemble analytique discret dans $\mathbb{C}^n$. Soit B_z dans $\mathbb{C}^n$ une boule ouverte de centre z qui ne contient pas d'autres points de $V(F_{\chi_o}) \cap U$. Pour ℓ assez grand, l'ensemble analytique $V((F_{\chi_o})^{[\ell]}) \cap U$ est aussi discret et, dans ce cas, la version en plusieurs variables du théorème de Rouché assure que cet ensemble admet dans B_z le même nombre d'éléments que $V(F_{\chi_o}) \cap U$ y admet, soit un seul élément, que l'on note $z_\ell := x_\ell + iy_\ell$.

Il est clair que la suite des points z_ℓ tend vers z et, en particulier, que les points de la suite (x_ℓ) appartiennent à $W \cap S$, pour ℓ assez grand. Mais alors on a trouvé la contradiction attendue, car, pour ℓ assez grand, on a d'une part $x_\ell \in \mathcal{Y}_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}}$ et d'autre part $x_\ell \in W \cap S \subset \text{Supp } C \subset \mathcal{Y}^c_{(F_{\chi_o})^{[\ell]}}$.

Pour terminer la démonstration, il nous reste à prouver qu'il existe $L \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\ell \geqslant L$, la relation $(*)^\ell_\chi$ est vérifiée pour tout $\chi \in \text{Ch } \Xi_F$. On commence par remarquer qu'il existe un nombre fini m de boules fermées $\bar{B}(x_s, \varepsilon_{x_s})$, $1 \leqslant s \leqslant m$, telles que

$$\text{Supp}\, c \cup \text{Supp } D \subset \bigcup_{s=1}^{m} \bar{B}(x_s, \varepsilon_{x_s}) \subset \mathcal{Y}^c_F\,.$$

Il suffit de montrer que, pour chaque $1 \leqslant s \leqslant m$, il existe un $l_s \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $\ell \geqslant l_s$, on ait

$$\bar{B}(x_s, \varepsilon_{x_s}) \subset \mathcal{Y}^c_{(F_\chi)^{[\ell]}}\,,$$

pour tout $\chi \in \Xi_F$, et prendre en suite $L := \max\{l_s \mid 1 \leqslant s \leqslant m\}$. On prouve ceci par l'absurde ; on suppose que pour un certain s, $1 \leqslant s \leqslant m$, il existe un une suite strictement croissante $(\ell_q) \subseteq \mathbb{N}$ et une suite $(\chi_q) \subset \text{Ch } \Xi_F$ telles que

$$\bar{B}(x_s, \varepsilon_{x_s}) \cap \mathcal{Y}_{(F_{\chi_q})^{[\ell_q]}} \neq \varnothing\,.$$

Comme, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Y}_{(F_{\chi_q})^{[l_q]}} = \text{Re } V((F_{\chi_q})^{[l_q]})$, on déduit l'existence d'une suite de points ξ_q de $\bar{B}(x_s, \varepsilon_{x_s})$ et d'une suite de points η_q de $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout $f \in F$ et tout $q \in \mathbb{N}$, on ait

$$(f_{\chi_q})^{[\ell_q]}(\xi_q + i\eta_q) = 0\,,$$

soit

$$(f_{\tilde{\chi}_q})^{[\ell_q]}(\xi_q) = 0\,,$$

où, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\tilde{\chi}_q := \chi_q \kappa_q$, κ_q désignant le caractère de Ξ_F donné, pour $1 \leqslant j \leqslant r$, par $\kappa_q(\omega_j) = e^{i\langle \eta_q, \omega_{j,\ell_q}\rangle}$. Par compacité de $\bar{B}(x_s, \varepsilon_{x_s})$ et de Ch Ξ_F, on extrait une sous-suite (ξ_{q_r}) et une sous-suite $(\tilde{\chi}_{q_r})$ convergeantes respectivement vers un point $\tilde{\xi}$ de la boule $\bar{B}(x_s, \varepsilon_{x_s})$ et un caractère $\tilde{\chi}$ de Ch Ξ_F ; en passant à la limite, on a donc, pour tout $f \in F$,

$$0 = \lim_{r \to \infty} (f_{\tilde{\chi}_{q_r}})^{[\ell_{q_r}]}(\xi_{q_r}) = f_{\tilde{\chi}}(\tilde{\xi}) ,$$

ce qui est absurde, vu que $\tilde{\xi} \in \bar{B}(x_s, \varepsilon_{x_s}) \subset \mathcal{Y}_F^c$. □

Remarque 3.4.1. Le Théorème 3.4.1 n'est utile que pour les SSE constitués par n équations en n variables complexes, car tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est $(n-1)$-convexe.

3.5 La fonction de Jessen

Dans le reste du chapitre on s'intéresse à certains des relations existantes entre la notion d'amibe et celle de fonction de Jessen pour une somme d'exponentielles à fréquences réelles. Bien que ceci ne soit pas nouveau, (voir [9]), on veut quand même mettre en évidence la façon extrêmement naturelle par laquelle le Corollaire 3.2.3 permet de passer du cadre polynomial au cadre exponentiel.

3.5.1 Amibes polynomiales et amibes exponentielles

Dans cette sous-section on montre que, si $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$, l'amibe de f peut être réalisée comme l'intersection, dans un espace affine de dimension égale au rang de Ξ_f, d'un sous-espace linéaire et de l'amibe au sens classique d'un certain polynôme de Laurent associé à f.

Comme on déjà vu, si r est le rang de Ξ_f et $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ est un système de générateurs libres de Ξ_f, $\chi \in$ Ch Ξ_f et, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant r$, θ_ℓ la détermination principale de l'argument de $\chi(\omega_\ell)$, on a une représentation du type

$$f_\chi(z) = \sum_{k \in A_{f,\omega}} a_{f,k} \left(e^{\langle z, \omega_1\rangle + i\theta_1}\right)^{k_1} \cdots \left(e^{\langle z, \omega_r\rangle + i\theta_r}\right)^{k_r} ,$$

où $A_{f,\omega} \subset \mathbb{Z}^r$ est un sous-ensemble fini et $a_{f,k} \in \mathbb{C}^*$ pour tout $k \in A_{f,\omega}$. Or, si $L_\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$ dénote l'application linéaire donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par

$$L_\omega(x) := (\langle x, \omega_1\rangle, \ldots, \langle x, \omega_r\rangle)$$

et $q_{f,\omega}$ désigne le polynôme de Laurent de r variables

$$q_{f,\omega}(\zeta) := \sum_{k \in A_{f,\omega}} a_{f,k}\, \zeta^k \,,$$

on a bien

$$f_\chi(x) \quad = \quad q_{f,\omega}\big(e^{\langle x,\omega_1\rangle + i\theta_1}, \dots, e^{\langle x,\omega_r\rangle + i\theta_r}\big)\,, \tag{3.1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_f$. De plus on a le lemme suivant.

Lemme 3.5.1. *Avec les notations ci-dessus on a les relations suivantes*

$$L_\omega(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{A}_{q_{f,\omega}} \qquad et \qquad L_\omega(\mathcal{F}_f^c) \subseteq \mathcal{A}^c_{q_{f,\omega}}\,.$$

En particulier, $\mathcal{F}_f^c$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{F}_f = \mathcal{Y}_f$. Pour le Corollaire 3.2.3 et la Proposition 3.2.1, il existe $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_f$, et donc un $\theta \in [0, 2\pi)^n$, tel que $f_\chi(x) = 0$. L'égalité 3.1 montre que $L_\omega(x) \in \mathcal{A}_{q_{f,\omega}}$, ainsi $L_\omega(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{A}_{q_{f,\omega}}$. D'autre part, $x \in \mathcal{Y}_f^c$, implique $f_\chi(x) \neq 0$, pour tout caractère $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_f$. Si, par l'absurde, on suppose que $L_\omega(x) \in \mathcal{A}_{q_{f,\omega}}$, il doit exister un point $\zeta \in V(q_{f,\omega})$ tel que $\mathrm{Log}\,(\zeta) = L_\omega(x)$. Soit $\theta \in [0, 2\pi)^r$ le r-uplet des arguments principaux de ζ, alors

$$0 = q_{f,\omega}(\zeta) = q_{f,\omega}\big(e^{\langle x,\omega_1\rangle + i\theta_1}, \dots, e^{\langle x,\omega_r\rangle + i\theta_r}\big) = f_\chi(x)\,,$$

où $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_f$ désigne le caractère correspondant à $\theta \in [0, 2\pi)^r$, ce qui est absurde au vu du choix de x. On conclut que $L_\omega(\mathcal{F}_f^c) \subseteq \mathcal{A}^c_{q_{f,\omega}}$.

En fin, le Lemme 2.2.2 implique que, dans des coordonnées convenables,

$$V(f_\chi) = \big(V(f_\chi) \cap \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E_{\Gamma_f}\big) \times \big(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E_{\Gamma_f}\big)^\perp\,,$$

pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_f$, mais, puisque $\Lambda_f \subset \mathbb{R}^n$, on a $\big(\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E_{\Gamma_f}\big)^\perp = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, E^\perp_{\Gamma_f}$ et

$$\mathrm{Re}\ V(f_\chi) = \big(\mathrm{Re}\ V(f_\chi) \cap E_{\Gamma_f}\big) \times E^\perp_{\Gamma_f}$$

pour tout $\chi \in \mathrm{Ch}\ \Xi_f$, donc

$$\mathcal{Y}_f^c = \big(\mathcal{Y}_f^c \cap E_{\Gamma_f}\big) \times E^\perp_{\Gamma_f}\,.$$

On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{Y}_f^c$ et celui de composantes connexes de $\mathcal{Y}_f^c \cap E_{\Gamma_f}$. Puisque $\ker L_\omega = E^\perp_{\Gamma_f}$, on déduit que

$$L_\omega(\mathcal{Y}_f^c) = L_\omega\big(\mathcal{Y}_f^c \cap E_{\Gamma_f}\big) = L_\omega(E_{\Gamma_f}) \setminus \mathcal{A}_{q_{f,\omega}}\,,$$

d'où la conclusion, car $L_\omega(E_{\Gamma_f}) \setminus \mathcal{A}_{q_{f,\omega}}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et L_ω est injective sur E_{Γ_f}. □

Remarque 3.5.1. D'après le Lemme 3.5.1 le nombre de composantes connexes de $\mathcal{F}_f^c$ est majoré par celui de composantes connexes de $\mathcal{A}^c_{q_{f,\omega}}$. Par contre ce nombre dépende du choix du système de générateurs libres du groupe Ξ_f. Ronkin, dans [33], a estimé que le nombre de composantes connexes de $\mathcal{F}_f^c$ est majoré par le nombre

$$2^{-r}\varkappa_r\big(\sqrt{r}+2r\max_{k\in A_{f,\omega}}\|k\|\big)^r\,, \tag{3.2}$$

mais, la présence du terme $\max_{k\in A_{f,\omega}}\|k\|$ fait que cette estimation dépend encore du choix du système de générateurs libres de Ξ_f.

3.5.2 Fonction de Ronkin et fonction de Jessen

On passe maintenant à l'étude de la fonction de Jessen associée à une somme d'exponentielles à fréquences réelles. Pour rendre plus évident le lien avec le cas des polynômes de Laurent, on commence par rappeler un analogue polynomial introduit par Ronkin dans [33].

Si $p\in\mathbb{C}[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]$ est un polynôme de Laurent, la *fonction de Ronkin* de p est la fonction $N_p:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ donnée, pour $x\in\mathbb{R}^n$, par

$$\begin{aligned}N_p(x) &:= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)}\frac{\log|p(z_1,\dots,z_n)|}{z_1\cdots z_n}\,dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n}\log|p(e^{x_1+i\theta_1},\dots,e^{x_n+i\theta_n})|d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_n\,.\end{aligned}$$

La définition est bien posée[8] et N_p est une fonction convexe[9] et (comme montre dans [33] par exemple), N_p est affine par morceaux sur $\mathcal{A}_p^c$. Le gradient ∇N_p envoie $\mathbb{R}^n$ sur le polytope de Newton Γ_p de p, il est constant sur chaque composante connexe de $\mathcal{A}_p^c$, mais il prend valeurs distinctes sur composantes distinctes. La valeur de ∇N_p sur une telle composante est un point

[8]Grâce à la formule de Jensen et au théorème de préparation de Weierstrass, on peut montrer, (voir [7] par exemple), que l'intégrale impliquée dans l'expression de $N_p(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, même pour x dans l'amibe $\mathcal{A}_p$ (où l'intégrand est singulier). En Théorie de nombres la fonction N_p est appelée *la mesure de Mahler* de p.

[9]La convexité de la fonction N_p suit du du Corollaire I.26 de [25] et du fait que la fonction $U:(\mathbb{C}^*)^n\longrightarrow\mathbb{R}$ donnée, pour $\zeta\in(\mathbb{C}^*)^n$, par

$$U(\zeta)=\int_{[0,2\pi]^n}\log|p(\zeta_1e^{i\theta_1},\dots,\zeta_ne^{i\theta_n})|\,d\theta_1\wedge\ldots\wedge d\theta_n\,,$$

est plurisousharmonique et indépendante des arguments de ses variables.

de $\Gamma_p \cap \mathbb{Z}^n$ qui est appelé l'*ordre* de la composante, (voir [11] et [31] pour plus de détails).

On remarque que la deuxième des expressions de N_p données plus haut, suggère une interprétation de N_p qui se généralise immédiatement aux sommes d'exponentielles à fréquences réelles. En effet, si $p(z) := \sum_{\alpha\in A} a_\alpha z^\alpha$ est non nul et $\chi \in \mathrm{Ch}\ \mathbb{Z}^n$, soit p_χ le polynôme de Laurent

$$p_\chi(z) := \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \chi(\alpha) z^\alpha .$$

Comme pour les sommes d'exponentielles à fréquences réelles, ceci induit une action de $\mathrm{Ch}\ \mathbb{Z}^n$ sur l'anneau $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ des polynômes de Laurent. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^n$, et, pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$, $\theta_\ell \in [0, 2\pi)$ est la détermination principale de l'argument de $\chi(e_\ell)$, on voit que

$$\begin{aligned} p(e^{x_1+i\theta_1}, \ldots, e^{x_n+i\theta_n}) &= \sum_{\alpha\in A} a_\alpha e^{i\langle\theta,\alpha\rangle} e^{\langle x,\alpha\rangle} \\ &= \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \chi(\alpha) e^{\langle x,\alpha\rangle} \\ &= p_\chi(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}) , \end{aligned}$$

donc la fonction de Ronkin de p n'est rien d'autre que la moyenne du logarithme des modules des polynômes de Laurent appartenant à l'orbite de p sous l'action de $\mathrm{Ch}\ \mathbb{Z}^n$, la moyenne étant prise sur le tore $\mathrm{Ch}\ \mathbb{Z}^n$ par rapport à sa mesure de Haar normalisée,

$$N_p(x) := \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{Ch}\ \mathbb{Z}^n)} \int_{\mathrm{Ch}\ \mathbb{Z}^n} \log |p_\chi(x)|\, d\chi .$$

La même définition peut se traduire terme à terme pour les sommes d'exponentielles à fréquences réelles.

Définition 3.5.1. *Soit $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n} \setminus \{0\}$, on appelle* fonction de Ronkin de f *la fonction $\mathcal{N}_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par*

$$\mathcal{N}_f(x) := \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{Ch}\ \Xi_f)} \int_{\mathrm{Ch}\ \Xi_f} \log \big| f_\chi(x) \big|\, d\chi .$$

Pour voir que cette définition est bien posée, on observe qu'en utilisant les notations introduites dans la section précédente, si r et le rang de Ξ_f et $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ est un système de générateurs libres de Ξ_f, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{[0,2\pi]^r} \log \big| q_{f,\omega}\big(e^{\langle x,\omega_1\rangle + i\theta_1}, \ldots, e^{\langle x,\omega_r\rangle + i\theta_r}\big) \big|\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_r \\ &= N_{q_{f,\omega}}\big(L_\omega(x)\big) , \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ainsi $\mathcal{N}_f$ est bien définie et convexe.[10] Le lemme suivant généralise au cas des sommes d'exponentielles à fréquences réelles la relation existante entre la fonction de Ronkin et l'amibe d'un polynôme de Laurent.

Lemme 3.5.2. *Si $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}}$ est non nulle, la fonction $\mathcal{N}_f$ est linéaire par morceaux sur $\mathcal{F}_f^c$ et l'image de $\mathcal{F}_f^c$ sous l'application* $\operatorname{grad}\mathcal{N}_f$ *constitue un sous-ensemble fini de $\Xi_f \cap \Gamma_f$. En outre le gradient* $\operatorname{grad}\mathcal{N}_f$ *est constant sur chaque composante connexe de $\mathcal{Y}_f^c$ et à composantes distinctes associe des valeurs distinctes.*

Démonstration. Si r est le rang de Ξ_f et $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ un système de générateurs libres de Ξ_f, grâce au Lemme 3.5.1, l'application L_ω envoi de manière injective l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{F}_f^c$ dans l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{A}^c_{q_{f,\omega}}$. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ et tout point $x \in \mathcal{F}_f^c$, on a

$$\frac{\partial \mathcal{N}_f}{\partial x_j}(x) = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{\partial N_{q_{f,\omega}}}{\partial \zeta_\ell}\big(L_\omega(x)\big)\frac{\partial (L_\omega)_\ell}{\partial x_j}(x) = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{\partial N_{q_{f,\omega}}}{\partial \zeta_\ell}\big(L_\omega(x)\big)\omega_{\ell,j}\,,$$

soit

$$\operatorname{grad}_x \mathcal{N}_f(x) = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{\partial N_{q_{f,\omega}}}{\partial \zeta_\ell}(L_\omega(x))\,\omega_\ell\,.$$

Or, $N_{q_{f,\omega}}$ est linéaire par morceaux sur $\mathcal{A}^c_{q_{f,\omega}}$, son gradient est constant sur les composantes connexes de $\mathcal{A}^c_{q_{f,\omega}}$ et il envoi de manière injective l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{A}^c_{q_{f,\omega}}$ sur un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^r \cap \Gamma_{q_{f,\omega}}$, donc $\mathcal{N}_f$ est linéaire par morceaux sur $\mathcal{F}_f^c$, son gradient est constant sur chaque composante connexe de $\mathcal{F}_f^c$ et, puisque les $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sont libres sur $\mathbb{Z}$, il envoi de manière injective l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{F}_f^c$ sur un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$. Il reste donc à montrer que le gradient de $\mathcal{N}_f$ prend ses valeurs dans $\Xi_f \cap \Gamma_f$. En fait, si γ_ω est l'isomorphisme de Ξ_f sur $\mathbb{Z}^r$ qu'à l'élément $\sum_{\ell=1}^r k_\ell \omega_\ell$ de Ξ_f associe le r-uplet $(k_1, \ldots, k_r)$, on a que

$$\operatorname{grad}_x \mathcal{N}_f(x) = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{\partial N_{q_{f,\omega}}}{\partial \zeta_\ell}(L_\omega(x))\,\omega_\ell = \gamma_\omega^{-1}\big(\operatorname{grad}_\zeta N_{q_{f,\omega}}(L_\omega(x))\big) \in \Xi_f\,,$$

pour tout $x \in \mathcal{F}_f^c$. En fin, comme $\Gamma_{q_\omega} = \operatorname{conv}(\gamma_\omega(\Lambda_f))$, pour tout $x \in \mathcal{F}_f^c$ il existe $t_x \in [0,1]^{\Lambda_f}$ avec $\sum_{\lambda \in \Lambda_f} t_x(\lambda) = 1$ et tel que

$$\operatorname{grad}_\zeta N_{q_{f,\omega}}(L_\omega(x)) = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} t_x(\lambda)\gamma_\omega(\lambda) \in \mathbb{Z}^r \cap \Gamma_{q_\omega}\,,$$

[10] On peut déduire la convexité de $\mathcal{N}_f$ par celle de $N_{q_{f,\omega}}$ et par la linéarité de L_ω.

par conséquent

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}_x \mathcal{N}_f(x) &= \gamma_\omega^{-1}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_f} t_x(\lambda)\gamma_\omega(\lambda)\Big)\\ &= \sum_{\ell=1}^{r}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_f} t_x(\lambda)\gamma_\omega(\lambda)_\ell\Big)\omega_\ell\\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda_f} t_x(\lambda)\Big(\sum_{\ell=1}^{r}\gamma_\omega(\lambda)_\ell\omega_\ell\Big)\\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda_f} t_x(\lambda)\,\lambda \in \Gamma_f\,,\end{aligned}$$

et la preuve est achevée. □

Le Lemme 3.5.2 justifie la définition suivante.

Définition 3.5.2. *Soit $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}}$ non nulle et X une composante connexe de $\mathcal{F}_f^c$. L'*ordre *de la composante connexe X est la valeur* ord $X \in \Xi_f \cap \Gamma_f$ *que* grad $\mathcal{N}_f$ *prend sur chaque point de X.*

Remarque 3.5.2. Dans le cas d'un polynôme de Laurent p de n variables, le cardinal de l'ensemble $\mathbb{Z}^n \cap \Gamma_p$ donne une estimation du nombre des composantes connexes de $\mathcal{A}_p^c$ (voir [11]), par contre dans le cas d'une somme d'exponentielle $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$, vu que le sous-groupe Ξ_f peut être dense dans $\mathbb{R}^n$, le cardinal de $\Xi_f \cap \Gamma_f$ ne peut plus fournir en général une telle estimation pour $\mathcal{F}_f^c$.

On conclut la section par une remarque concernant l'égalité, pour toute somme d'exponentielles $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n} \setminus \{0\}$, entre la fonction de Ronkin $\mathcal{N}_f$ que l'on vient d'introduire et la fonction de Jessen $\mathcal{J}_f$ de f introduite dans [16] pour toute fonction holomorphe presque périodique.

Définition 3.5.3. *Si $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$,* la fonction de Jessen[11] *de f est la fonction $\mathcal{J}_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par*

$$\mathcal{J}_f(x) := \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(2t)^n}\int_{[-t,t]^n} \ln|f(x+iy)|dy\,.$$

[11]Pour le cas général des fonctions holomorphes presque périodiques, cette notion a été introduite par Jessen [16] dans l'article [16] sous le nom de *fonction de Jensen*, mais, comme rapporté par Favorov et Rashkovskiĭ, c'était Ronkin à l'avoir successivement rebaptisée fonction de Jessen.

A ce propos, Ronkin [33] a montré le théorème qui suit.

Théorème 3.5.1. *Si $f \in \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$, on a l'égalité $\mathcal{J}_f = \mathcal{N}_f$.* □

La démonstration du Théorème 3.5.1 utilise le lemme de Weil suivant.[12]

Lemme 3.5.3. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique en chaque variable. Si $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, alors on a l'égalité*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{(2t)^n} \int_{[-t,t]^n} \Phi(\langle \xi, \omega_1 \rangle + a_1, \ldots, \langle \xi, \omega_r \rangle + a_r)\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{[0,2\pi]^r} \Phi(\vartheta)\, d\vartheta\,,$$

pour tout $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$. □

Au vu du Théorème 3.5.1, notre approche rejoint la théorie classique en passant, de façon très naturelle, du cas polynomial au cas exponentiel. Ceci pourrait s'avérer intéressant dans le cadre d'une généralisation de la fonction de Ronkin au cas de systèmes de polynômes de Laurent et de la fonction de Jessen au cas des SSE à fréquences réelles, comme par exemple a été fait par Rashkovskiĭ [32].

[12] La preuve du Lemme 3.5.3 dépende essentiellement de propriétés de la fonction Φ et du Lemme 3.2.1.

Chapitre 4

Motivations, conclusions et perspectives

4.1 Sommaire

Ce chapitre voudrait, d'une part, présenter les questions qui ont inspiré le sujet de ce travail et, d'autre part, terminer ce même travail par des perspectives et des problèmes plus ou moins ambitieux auxquels cette thèse n'a pas été capable de donner réponse.

4.2 Motivations

J'ai commencé mon doctorat en octobre 2001 après un DEA de Mathématiques Pures pendant lequel je me suis intéressé à des questions de Géométrie torique et, en particulier, aux résultats de David Cox autour de l'anneau des coordonnées homogènes associé à certaines variétés toriques complexes. La construction combinatoire d'une variété torique complexe n-dimensionnelle fait intervenir de manière fondamentale la structure combinatoire de certaines sous-algèbres de l'algèbre des polynômes de Laurent en n variables à coefficients complexes. Ceci peut être facilement illustré sur l'exemple d'une variété torique affine. En fait, à partir d'un réseau Ξ de rang n, on considère, dans l'espace vectoriel réel $\Xi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$, un cône polyédral n-dimensionnel fortement convexe $\sigma := \operatorname{pos} A$, où A est un sous-ensemble de Ξ (ce dernier fait s'exprime en disant que le cône σ est *rationnel*). Dans la pratique, le réseau Ξ est toujours vu comme le réseau $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, donc un tel cône σ est engendré par un nombre fini de vecteurs à coordonnées entières. Dans ce cas le sous-monoïde $\sigma \cap \Xi$ est toujours de type fini et donc la $\mathbb{C}$-algèbre de monoïde $R_\sigma := \mathbb{C}[\sigma \cap \Xi]$ associée est noethérienne. Elle peut être toujours réalisée comme un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ des polynômes de Laurent ou encore de l'anneau $\mathcal{S}_{n,\mathbb{Z}^n}$ des sommes d'exponentielles à fréquences entières. Ainsi la variété torique affine associée au cône σ n'est rien d'autre que le spectre Spec R_σ de l'anneau R_σ. Il s'agit d'une variété algébrique normale équipée d'une action algébrique naturelle du tore algébrique $(\mathbb{C}^*)^n$ prolongeant l'action par multiplication de ce tore sur lui même, de telle sorte que Spec R_σ possède une orbite dense isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^n$. On est donc en présence d'un objet fourni d'une structure géométrique remarquablement riche qui provient entièrement des hypothèses faites sur le cône dont on est parti. En outre, beaucoup d'invariants géométriques et algébriques de la variété Spec R_σ peuvent s'interpréter en des termes combinatoires à travers la structure du cône σ. Il nous paraît donc assez naturel de croire, qu'en affaiblissant les hypothèse faites sur le cône σ et sur le groupe Ξ, le schéma (et espace analytique complexe) Spec R_σ aurait du garder plusieurs de ses propriétés remarquables. On s'est donc posé les questions suivantes.

Quelles sont le propriétés géométriques de Spec R_σ qui restent valables en affaiblissant les hypothèses sur le cône σ et sur le groupe Ξ ? Sous de telles hypothèses affaiblies, est il encore possible d'associer au monoïde $\sigma \cap \Xi$ un espace analytique complexe qui en réfléchisse la structure algébrique et combinatoire ?

Les hypothèses auxquelles on voudrait renoncer sont de deux types différentes et ici on voudrait se placer dans une des deux situations suivantes,

(a) le sous-groupe $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ reste discret mais le cône σ n'est plus l'enveloppe positive d'un sous-ensemble fini de Ξ,

(b) le cône σ est l'enveloppe positive d'un sous-ensemble fini de Ξ et le sous-groupe $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ est libre de type fini, mais il n'est plus discret.

Dans chacun des deux cas, le monoïde $\sigma \cap \Xi$ correspondant n'est plus de type fini, donc l'algèbre R_σ associée n'est plus noethérienne et, par conséquent son spectre n'est plus une variété algébrique complexes, mais plutôt un schéma affine (irréductible, réduit) non noethérien sur lequel il y a encore une action algébrique naturelle du tore $(\mathbb{C}^*)^n$. Cependant, le fait que les schémas de ce type ne soient pas noethériens implique l'impossibilité de les décrire comme le lieu des zéros d'un nombre fini d'équations polynomiales en un nombre fini de variables. Ceci nous a fait vite abandonner ces objets si abstraits, mais, malgré cela, il a aussi involontairement contribué à éveiller notre intérêt vers les sommes d'exponentielles. En fait, l'algèbre associée à un monoïde correspondant à chacune des situations (a) et (b) peut toujours être réalisée comme une sous-algèbres d'un anneau de sommes d'exponentielles, à savoir l'anneau

$$\{f \in \mathcal{S}_{n,\Xi} \mid \Lambda_f \subset \sigma \cap \Xi\}\,.$$

Cette observation purement algébrique avait probablement été déjà faite par Thierry Pellé, lorsque, dans sa thèse [30], inspiré par l'approche adoptée dans [12] pour définir une classe (élargie) de variétés toriques classiques, il a proposé la construction d'un espace analytique réel associé à des donnés combinatoires provenant des sommes d'exponentielles. Cependant, ce qui a orienté notre intérêt définitif vers les sommes d'exponentielles a été la remarque (déjà faite par Sergey Favorov dans [9]) concernant la possibilité d'adapter la théorie des amibes au cas des sommes d'exponentielles, tout en profitant de leur caractère combinatoire révélé par les travaux de Kazarnovskiĭ (en particulier [17]). En fait, grâce aux résultats de [17], une bonne partie des théorèmes classiques sur les amibes des sous-variétés algébriques de $(\mathbb{C}^*)^n$ a été transposée au cas des amibes des intersections complètes d'hypersurfaces analytiques exponentielles globales de $\mathbb{C}^n$.

Jusqu'à l'heure actuelle, une classe d'espaces analytiques complexes qui pourraient être associés à des cônes (ou plus généralement à des éventails de cônes) satisfaisant aux conditions (a) ou (b) évoquées plus haut n'a pas encore été trouvée. Comme remarqué par Paul Bressler et Valery Lunts [5] (entre autres), une telle classe d'espace analytiques ne peut pas comporter des variétés toriques, cependant nous sommes persuadés qu'en dehors de la catégorie torique, une telle classe d'espaces devrait exister et que, comme dans le cas de la Géométrie torique classique, cette classe devrait faire intervenir de manière essentielle la combinatoire offerte par les sommes d'exponentielles.

On ajoute à ce propos qu'une tentative dans ce sens a été faite par Fiammetta Battaglia et Elisa Prato dans [2] et [3] où elles ont introduit des espaces stratifiés par des objets appelés *quasifolds*.[1] À chaque polytope de $\mathbb{R}^n$ on peut associer un tel espace stratifié de telle sorte que, si les sommets du polytope appartiennent à $\mathbb{Z}^n$, l'espace correspondant coïncide avec la variété torique associé au polytope. Ces objets généralisent les variétés toriques projectives symplectiques, mais en général ils constituent des espaces qui sont loin d'être analytiques. En effet, leur introduction a été motivée par des questions de Géométrie symplectique, alors que notre approche à la question est inspirée par un contexte complètement différent, il est donc normal que la notion de quasifold ne réponde pas à nos attentes.

[1] Un *quasifold* est un espace topologique localement isomorphe au quotient d'une variété lisse sous l'action d'un groupe discret, éventuellement infini, de difféomorphismes de la variété.

4.3 Conclusions et perspectives

Les questions abordées dans cette thèse se placent dans le cadre général de l'étude des sous-ensembles analytiques exponentiels globaux (en abrégé SAEG) de $\mathbb{C}^n$. Les travaux de Kazarnovskiĭ [17], [18] (dont l'article de Khovanskii [24] constitue une partielle amélioration) relient la combinatoire des équations d'un SSE générique avec la structure asymptotique du SAEG correspondant, tandis que [20] s'intéresse à la décomposition d'un SAEG en des composantes plus simples. Dans le même esprit que [17], [18] et [24], Rashkovskiĭ [32] donne, (dans le cas des SSE à fréquences imaginaires pures et plus généralement dans celui des systèmes de fonction holomorphes presque périodiques), une information plus précise concernant la densité d'un SAEG dans des régions préfixées de l'espace à l'aide de certaines courants de Monge-Ampère construits à partir des fonctions de Jessen associées aux équations du SAEG.

Notre contribution à ce sujet fournit une compréhension plus explicite de l'amibe d'un SSE à fréquences réelles (ou, à changement des variables près, à fréquences imaginaires pures) ainsi qu'une information sur la topologie de l'ensemble complémentaire d'une telle amibe.

La technique de perturbation par caractères appliquée aux amibes suggère l'application d'une démarche semblable pour les *co-amibes.* Étant donné un SSE (régulier) $F \subset \mathcal{S}_{n,\mathbb{R}^n}$ la *co-amibe* de F est l'adhérence dans $\mathbb{R}^n$, de l'ensemble Im $V(F)$ des parties imaginaires des zéros de F.

La connaissance de la structure de cet ensemble, (ajoutée à celle de l'amibe de F que l'on a donnée dans le chapitre précédent), permettrait de localiser des sous-ensembles de $\mathbb{C}^n$ où F n'a pas des zéros, ainsi on pourrait envisager d'estimer la distance relative entre ces sous-ensembles. Dans le cas des SSE à fréquences entières, ce problème se réduit au problème de la *séparation de racines* d'un système de polynômes de Laurent. La séparation de racines d'un seul polynôme de Laurent est considéré dans [12] comme étant un problème difficile et, bien sûr, dans le cadre plus général des SSE à fréquences réelles, cela dévient encore plus compliqué. Cependant, la démarche suivie dans le chapitre précédent laisse espérer que la co-amibe d'un SSE régulier devrait s'exprimer de manière aussi raisonnable que son amibe. Si le SSE est à fréquence réelles, on pourrait s'attendre à une description de la co-amibe du système comme l'union des parties imaginaires des zéros de systèmes perturbés. On imagine encore une perturbation par caractères du groupe des fréquences, par contre maintenant les caractères devraient prendre leurs valeurs dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+$ des nombres réels strictement positifs. Bien évidemment, cette fois l'ensemble complémentaire de la co-amibe n'a plus de raison d'avoir un nombre fini de composantes connexes.

Dans ce but on pourrait aussi envisager, sur l'exemple de Rashkovskiĭ [32] et de l'interprétation donnée dans le chapitre précédent, un analogue de la fonction de Ronkin pour les systèmes. Une telle fonction devrait fournir encore une fonction convexe qui pourrait servir à définir une notion d'*ordre* pour les composantes connexes du complémentaire de l'amibe d'un SSE à fréquences réelles.

On mentionne aussi un lien avec la Théorie des nombres. En fait, pour un SSE F à fréquences réelles pour lequel $\mathcal{F}_F \neq \mathcal{Y}_F$, l'ensemble $\mathcal{Y}_F \setminus \mathcal{F}_F$ devrait réfléchir des propriétés arithmétiques des fréquences et des coefficients des éléments du système et donc, en ce sens il pourrait s'avérer intéressant du point de vue des questions de petits dénominateurs inhérentes aux systèmes à fréquences réelles non commensurables.

Une autre perspective possible c'est celle mentionnée par Kazarnovskiĭ dans [22], où il préconise une théorie de l'intersection pour les SAEG dans laquelle le pseudovolume mixte pourrait jouer un rôle analogue à celui du volume mixte ordinaire dans la théorie de l'intersection pour les sous-variétés algébriques de $(\mathbb{C}^*)^n$. La aussi on peut s'attendre à des liens avec la théorie des amibes.

En fin, on observe que le caractère combinatoire de toutes ces questions pourrait aussi donner lieu à des analogues tropicaux, lesquels, vus les succès récents en Géométrie algébrique réelle obtenus dans [29], pourraient sans doute réserver des surprises intéressantes.

Indice des notations

Symbol	Explication	Page
$\operatorname{aff} A$	sous-espace affine engendré par A	12
E_A	sous-espace linéaire sous jacent à $\operatorname{aff} A$	12
$\dim A$	dimension (réelle) de E_A	12
$\operatorname{relint} A$	intérieur de A relativement à $\operatorname{aff} A$	12
$\operatorname{relbd} A$	bord de A relativement à $\operatorname{aff} A$	12
$\operatorname{lin} A$	enveloppe linéaire de A	12
$\operatorname{pos} A$	enveloppe positive de A	12
$\operatorname{conv} A$	enveloppe convexe de A	12
$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$	ensemble des corps convexes de $\mathbb{R}^n$	12
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	ensemble des polytopes de $\mathbb{R}^n$	12
$(\, , \,)$	produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$	12
h_A	fonction de support du corps convexe A	12
$H_A(u)$	hyperplan de support de A orthogonale à u	13
$F \preccurlyeq A$	F est face de A	13
$\mathcal{B}(A, k)$	ensemble de faces k-dimensionnelles de A	14
$K_{F,A}$	angle extérieur de F dans A	14
B_n	boule unité dans $\mathbb{R}^n$	14
$\varkappa_n$	volume n-dimensionnel de B_n	14
$\psi_A(F)$	mesure angulaire de $K_{F,A}$ dans $\mathbb{R}^n$	14
Γ	fonction gamma d'Euler	14
$\mathfrak{B}$	fonction bêta d'Euler	15
$\operatorname{Subd} h$	sous-différentielle de la fonction h	15
$\mathcal{K}_+^\infty(\mathbb{R}^n)$	ensemble des corps strictement convexes $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$	16
$A_1 + A_2$	somme de Minkowski de A_1 et A_2	16
$(A)_\varepsilon$	ε-voisinage de A	18
$\mathfrak{H}(A_1, A_2)$	distance de Hausdorff entre A_1 et A_2	18
Vol_n	volume n-dimensionnel	20
$R_\varepsilon A$	ε-régularisé du corps convexe A	20
V_n	n-volume mixte de Minkowski	21

Bibliographie

[1] S. Alesker, *Hard Lefschetz theorem for valuations, complex integral geometry, and unitarily invariant valuations,* J. Differential Geom. 63 (2003), Vol. 1, 63-95.

[2] F. Battaglia, E. Prato, *Generalized toric varieties for simple non rational convexe polytopes,* Internat. Math. Res. Notices no. 24 (2001) 1315-1337.

[3] F. Battaglia, E. Prato, *Nonrational, nonsimple convex polytopes in symplectic Geometry,* Electr. Res. Ann. AMS, 8 (2002), 29-34.

[4] C. A. Berenstein, R. Gay, *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis,* Springer (1995).

[5] P. Bressler, V. Lunts, *Intersection cohomology on nonrational polytopes,* Compos. Math. 135, No.3, (2003), 245-278.

[6] E. Bedford, A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation,* Invent. Math. 37 (1976), 1-44.

[7] G. Everest, T. Ward, *Heights of Polynomials and Entropy in Algebraic Dynamics,* Universitext, Springer (1999).

[8] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry,* G.T.M. 168 Springer (1998).

[9] S. Favorov, *Holomorphic almost periodic functions in tube domains and their amoebas,* Comput. Methods Funct. Theory 1 (2001), Vol 2, 403-415.

[10] M. Forsberg, *Amoebas and Laurent Series,* Doctoral thesis, Royal Institut of Technology, Stockholm, (1998).

[11] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas,* Adv. in Math. 151 (2000), 45-70.

[12] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and multidimensional Determinants,* Birkhaüser, Boston, (1994).

[13] H. Groemer *On the extension of additive functionals on classes of convex sets,* Pacific J. Math. (1978) Vol. 75 No. 2. 397-410.

[14] B. Grünbaum, *Convex Polytopes,* Interscience Publ. (1967).

[15] A. Henriques, *An analogue of convexity for complements of amoebas of varieties of higher codimension, an answer to a question asked by B. Sturmfels,* Adv. in Geom. Vol. 4 (2004).

[16] B. Jessen, *Über die Nullstellen einer analitischen fastoperiodischen Functions, Eine Verallagemeinerung der Jensenschen Formel,* Math. Ann. 108 (1933), 485-516.

[17] B. Ya. Kazarnovskiĭ, *On the zeros of exponential sums,* Soviet Math. Dokl. Vol. 23 (1981), No. 2, 347-351.

[18] B. Ya. Kazarnovskiĭ, *Newton polyhedra and zeros of systems of exponential sums,* Functional Anal. and Appl., Vol. 18 (1984) 299-307.

[19] B. Ya. Kazarnovskiĭ, *Newton polyhedra and the Bezout formula for matrix-valued functions of finite-dimensional representations,* Functional Anal. and Appl., Vol. 21 (1987) 319-321.

[20] B. Ya. Kazarnovskiĭ, *Exponential Analytic Sets,* Functional Anal. and Appl., Vol. 31, (1997) No. 2.

[21] B. Ya. Kazarnovskiĭ, *c-fans and Newton polyhedra of algebraic varieties,* Izv. Math. 67 (2003), no. 3, 439-460.

[22] B. Ya. Kazarnovskiĭ, *"Newton polyhedra" of generalized functions,* Izv. Math. 68 (2004), no. 2, 273-289.

[23] B. Ya. Kazarnovskiĭ, *Newton polytopes, increments and roots of systems of matrix functions for finite-dimensional representations,* Functional Anal. and Appl., Vol. 38, (2004), No. 4, 256-266.

[24] A. G. Khovanskii, *Fewnomials,* Trans. Math. Mono., vol88, AMS (1991).

[25] P. Lelong, L. Gruman, *Entire Functions of Several Complex Varaibles,* Springer-Verlag Grund. mat. Wiss. vol. 282, (1986).

[26] P. McMullen, R. Schneider, *Valuations on convex bodies,* in Convexity and its applications, 170-224, Birkhäuser, Basel, (1983).

[27] Y. Meyer : *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis,* North-Holland, (1972).

[28] G. Mikhalkin, *Real algebraic curves, moment map and amoebas,* Ann. of Math. 151 (2000), no. 1, 309-326.

[29] G. Mikhalkin, *Amoebas of Algebraic Varieties and Tropical Geometry,* dans *Different Faces of Geometry,* Int. Math. Ser. Luwer Academic / Plenum Publishers.

[30] T. Pellé, *Sommes d'exponentielles : identités de Bézout et approche pseudo-torique,* Thèse de doctorat de Mathématiques Pures, Univeristé Bordeaux 1, (1998).

[31] M. Passare, H. Rullgård : *Amoebas, Monge-Ampère measures and triangulations of the Newton Polytope,* Duke Math. J. 121 (2004), n. 3, 481-507.

[32] A. Rashkovskiĭ, *Zeros of Holomrphic Almost Periodic Mappings with Indipendent Components,* Complex Variables, 44 (2001), 299-316.

[33] L. Ronkin, *On the zeros of almost periodic function generated by holomorphic functions in a multicircular domain,* Complex analysis in Modern Mathematics, Fazis, Moscow, (2000), pp. 243-256.

[34] H. Rullgård, *Polynomial Amoebas and Convexity,* Licensiate Thesis, Stokholm University, (2000).

[35] H. Rullgård, *Stratification des espaces de polynômes de Laurent et structure de leurs amibes,* C.R. Acad. Sci. (2000), 355-358.

[36] G.T. Sallee, *Polytopes, valuations and the Euler relation,* Canad. J. Math. 20, (1968), 1412-1424.

[37] R. Schneider, *Convex Bodies : the Brunn-Minkowski Theory,* Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press vol. 44 (1993).

[38] A. Yger, *Fonctions définies dans le plan et moyennes en tout point de leurs valeurs aux sommets de deux carrés,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 288, (1979), no. 10, A535 – A538.

[39] A. Yger, *Une généralisation d'un théorème de J. Delsarte,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 288, (1979), no. 9, A497 – A499.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la notion d'amibe (dans le sens de Favorov) pour un système F des sommes d'exponentielles de n-variables complexes et à fréquences réelles génériques. À l'aide d'une perturbation par caractères du groupe des fréquences de F, on obtient une expression de l'amibe de F qui nous permet d'en étudier la topologie. En particulier on montre que, si F est constitué par $(k+1)$ éléments, le complémentaire de l'amibe de F est un sous-ensemble k-convexe de $\mathbb{R}^n$. Ce résultat généralise l'analogue algébrique montré par Henriques. En outre, dans le cas d'une seule somme d'exponentielles f, on envisage les rapports entre l'amibe de f et sa fonction de Ronkin.

Mots clés

Sommes d'exponentielles, Pseudovolume mixte de Kazarnovskiĭ, Amibes au sense de Favorov, k-Convexité au sens d'Henriques.

Abstract

The aim of this work is to study the notion of amoeba (in the sens of Favorov) for a system F of exponential sums of n complex variables and real generic frequencies. Thanks to a perturbation by characters of the group of frequencies of F, we obtain a expression of the amoeba of F which is useful in the study of its topology. In particular, we show that, if F has $(k+1)$ elements, the complementary set to the amoeba of F is a k-convex subset of $\mathbb{R}^n$ in Henriques' sense. This result generalize the algebraic analog shown by Henriques. Moreover, in the case of one exponential sum f, we investigate the relations between the amoeba of f and its Ronkin function.

Key words

Exponential sums, Kazarnovskiĭ mixed pseudovolume, Amoebae in Favorov's sense, Henriques' k-convexity.