

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Fabien Mehdi Pazuki**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

### DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

\*\*\*\*\*

## MINORATION DE LA HAUTEUR DE NÉRON-TATE SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES : SUR LA CONJECTURE DE LANG ET SILVERMAN

\*\*\*\*\*

Soutenue le 4 juillet 2008 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

Après avis de :

G. RÉMOND	Maître de conférences (HDR), Université Grenoble I	<b>Rapporteur</b>
J. H. SILVERMAN	Professeur, Brown University, Providence	<b>Rapporteur</b>

Devant la commission d'examen composée de :

P. AUTISSIER	Maître de conférences, Université Rennes I	
Y. BILU	Professeur, Université Bordeaux I	
H. COHEN	Professeur, Université Bordeaux I	<b>Directeur</b>
M. HINDRY	Professeur, Université Paris 7	<b>Co-Directeur</b>
Q. LIU	Professeur, Université Bordeaux I	
G. RÉMOND	Maître de conférences (HDR), Université Grenoble I	<b>Rapporteur</b>

**Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés  
abéliennes : sur la conjecture de Lang et Silverman.**

Fabien Mehdi Pazuki

-2008-



## Remerciements

Je remercie mes directeurs de thèse Henri Cohen et Marc Hindry. Henri pour m'avoir accueilli à Bordeaux dans les meilleures conditions possibles, pour sa puissance de travail sur les nombres et son aide dans mes débuts d'algorithmique arithmétique. Marc pour m'avoir fait connaître les problèmes de minoration de hauteur, pour sa vision et ses belles intuitions, pour sa patience avec moi lors de ma formation de géomètre diophantien. Pour leur gentillesse et leur amitié à tous les deux.

Je remercie les rapporteurs de ma thèse, Gaël Rémond et Joseph Silverman. Joe pour son soutien, son enthousiasme concernant mes travaux et ses conseils éclairants. Gaël pour son impressionnante précision dans la relecture et sa précieuse exigence, laquelle a permis d'améliorer le texte en plusieurs endroits.

Je remercie tous les membres de mon jury d'avoir pris le temps de se pencher sur mon travail. Merci à Qing Liu pour nos conversations sur les courbes, à Pascal Autissier pour nos échanges arakeloviens et à Yuri Bilu pour ses nombreuses questions. Merci encore à Yuri, qui a accepté avec enthousiasme d'être le président du jury.

Je remercie tous mes professeurs de m'avoir « nourri aux mathématiques » depuis le début, M. Boislève, M. Becker, Mme Giraud, M. Dumont, Mme Bonadona. Merci à Jean-Paul Alardet que j'ai toujours admiré pour son courage. Merci à M. Odoux et M. Quercia. Enfin merci à toute l'équipe de l'ENS-Cachan où j'ai passé de bonnes années et aux préparateurs de l'ENS-Cachan-Ker-Lann pour mon année bretonne.

Merci aux laboratoires de théorie des nombres de Bordeaux et de Paris 6 et 7 à Chevaleret. Toutes les conversations et amitiés qui ont pu naître dans ces endroits m'ont donné la force et le courage de poursuivre malgré les difficultés inhérentes au métier de chercheur.

Merci à mes étudiants. Pendant ces trois années, ils m'ont fait comprendre que j'aimais réellement le métier d'enseignant aussi.

Merci à toute ma famille pour l'amour et le soutien durant ces années. Mes parents, mes frères, ma soeur et leurs moitiés, mes grands-parents, mes oncles et tantes et mes cousins. Merci à Catherine et à Ludivine de m'avoir accompagné. Grand merci à Teresa de me donner l'envie de cueillir les bons moments et la force d'affronter les épreuves. Merci à tous d'avoir supporté ma passion pour ces êtres abstraits qui peuplent ma tête et qu'on appelle les Nombres.

Enfin merci à mes amis et aux villes qui me les ont donnés. Merci à Copenhague : Hadi, Marc-Antoine, Thibault, Nathalie, Stephan, Lærke, Nicole, Chloé et tous les autres... Merci à Voreppe : Serge et Sabine, Robin, Jérémy et Claire, Anthony, Florent et Cécile, Julien et Amandine, Nathalie, Manu et Claire. Merci à Grenoble : Anne-Charlotte, tout le groupe du D4, Sylvain, Olivier, Matthieu, Sorya, Hughes, Alban, Marouanne, Julien, Aurélie, Olivier

et Cécile. Merci à Paris : Cécile, Aurélien, Asher, Jérôme, Manuel, Esther, Maria, Cécilia, Claire, Nathalie, François, Mustapha, Yann, Hugo, Philippe. Merci à Rennes : Pierre et Zoé, Nicolas, Guillaume, Marie, Alain et Gwenola, Nicolas et Céline, Vincent, Jérôme. Merci à Pise : Luca, Marco, Gabriele, Emmanuel, Corentin. Merci à Bordeaux : Pierre et Florence (et Pauline), Hervé et Jeanne (et Alice), Bertrand, Jean, Delphine et Aubin, Joanne, Liv, Élie, Oswaldo, Pascal, Sara, Nora et Damien, Camille et Gwendal, Hubert, Vanessa, Enkil, Anna, Céline et Frédéric (et Aude) et bien sûr le quatuor : Florent, Mourad, Matthieu, Éric. Et merci à tous ceux que j'oublie...

À la mémoire de Jean-Paul Alardet,  
« *Le meilleur hommage que l'on puisse lui faire c'est de continuer.* »



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
La conjecture de Lang et Silverman sur les variétés abéliennes . . . . .	13
Contenu de la thèse . . . . .	16
<b>1 Généralités sur les hauteurs</b>	<b>25</b>
1.1 Hauteur dans un espace projectif . . . . .	27
1.2 Hauteur de Néron-Tate et hauteurs locales . . . . .	28
1.3 Espace de Siegel . . . . .	29
1.4 Hauteur d'une variété abélienne . . . . .	30
1.5 Trace archimédienne et discriminants . . . . .	35
1.6 Additivité de l'énoncé . . . . .	37
<b>2 Minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les variétés abéliennes de dimension 2</b>	<b>39</b>
Introduction . . . . .	41
2.1 Les hauteurs locales en dimension 2 . . . . .	43
2.1.1 Jacobienne et surface de Kummer . . . . .	43
2.1.2 Hauteurs . . . . .	45
2.2 Premières minorations . . . . .	46
2.2.1 Minorations locales aux places finies . . . . .	47
2.2.2 Minorations locales aux places archimédiennes . . . . .	52
2.3 Une autre hauteur locale archimédienne . . . . .	54
2.3.1 Définition . . . . .	54
2.3.2 Evolution du diviseur en dimension 2 . . . . .	55
2.4 Différences de hauteurs locales . . . . .	56
2.4.1 Discussion autour de la torsion . . . . .	57
2.4.2 Estimation aux places finies . . . . .	59
2.4.3 Estimation aux places archimédiennes . . . . .	64
2.5 Minoration globale de la hauteur de Néron-Tate . . . . .	87
2.5.1 Lemme de zéros et principe des tiroirs . . . . .	87
2.5.2 Minoration globale . . . . .	89
2.6 La hauteur de Faltings . . . . .	91
2.6.1 Expression dans le modèle d'Igusa . . . . .	91



2.6.2	Comparaison entre discriminants . . . . .	92
2.6.3	Constantes thêta . . . . .	93
2.6.4	Majoration de $h'_F(A/k)$ . . . . .	101
2.7	Produit de courbes elliptiques . . . . .	103
2.7.1	Hauteur de Néron-Tate et hauteurs locales . . . . .	103
2.7.2	Minorations . . . . .	104
2.7.3	Majoration de la hauteur de Faltings . . . . .	107
2.8	Corollaires . . . . .	108
2.8.1	Conjecture de Lang et Silverman en dimension 2 . . . . .	108
2.8.2	Borne pour la torsion d'une jacobienne de dimension 2. . . . .	112
2.8.3	Borne pour les points rationnels d'une courbe de genre 2. . . . .	113
<b>3</b>	<b>Minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les variétés abéliennes de dimension <math>g \geq 2</math></b>	<b>121</b>
3.1	Introduction . . . . .	123
3.1.1	Cadre . . . . .	123
3.1.2	Résultats . . . . .	124
3.2	Hauteur de Néron-Tate et hauteurs locales . . . . .	125
3.2.1	Décomposition en hauteurs locales . . . . .	125
3.2.2	Différences de hauteurs locales et niveau de torsion . . . . .	129
3.2.3	Minoration aux places finies . . . . .	130
3.2.4	Majoration aux places finies . . . . .	132
3.2.5	Minoration aux places archimédiennes . . . . .	134
3.2.6	Majoration aux places archimédiennes . . . . .	142
3.3	Minoration de la hauteur de Néron-Tate . . . . .	143
3.3.1	Lemme de zéros et principe des tiroirs . . . . .	144
3.3.2	Minoration globale . . . . .	150
3.4	Hauteur de Faltings d'une jacobienne hyperelliptique . . . . .	152
3.4.1	Hauteur de Faltings . . . . .	152
3.4.2	Équations de Weierstrass et discriminants . . . . .	153
3.4.3	Formes différentielles . . . . .	153
3.4.4	Partie non-archimédienne . . . . .	155
3.4.5	Partie archimédienne . . . . .	155
3.4.6	Majoration de la hauteur de Faltings . . . . .	157
<b>4</b>	<b>Étude d'exemples</b>	<b>161</b>
4.1	Variation du corps et restriction des scalaires à la Weil . . . . .	163
4.1.1	Variation du corps . . . . .	163
4.1.2	Restriction des scalaires à la Weil . . . . .	163
4.2	Points de Heegner et courbes modulaires . . . . .	165
4.2.1	Cadre général . . . . .	165
4.2.2	La formule de Gross-Zagier . . . . .	167
4.2.3	Un équivalent . . . . .	170

4.2.4	Remarques sur la conjecture de Lang et Silverman . . . . .	175
4.2.5	Torsion sur la jacobienne . . . . .	177
<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>179</b>
5.1	Extension en dimension 2 par isogénies . . . . .	181
5.2	Duplication sur la surface de Kummer . . . . .	184
5.2.1	Équation de la surface de Kummer . . . . .	185
5.2.2	Formules explicites de duplication sur la surface de Kummer . . . .	185
5.3	Invariants d'Igusa des courbes de genre 2 . . . . .	187



# Introduction générale



# La conjecture de Lang et Silverman sur les variétés abéliennes

Lorsqu'on s'intéresse à l'arithmétique des variétés abéliennes sur les corps de nombres on est très vite confronté à la notion de hauteur, déjà présente dans le cœur de la preuve du théorème de Mordell-Weil.

Le présent texte est entièrement consacré à l'étude d'une conjecture portant sur une hauteur particulière et énoncée sur les courbes elliptiques dans un livre de Serge Lang, puis généralisée aux variétés abéliennes de dimension supérieure dans un article de Joseph Silverman. S. Lang a conjecturé dans [Lan78] p. 92 une minoration de la hauteur de Néron-Tate d'une courbe elliptique, qu'on rappelle ici :

**Conjecture 1.** (Lang) *Pour tout corps de nombres  $k$ , il existe une constante positive  $c(k)$  telle que pour toute courbe elliptique  $E$  définie sur  $k$  et tout point  $P$  d'ordre infini de  $E(k)$  on ait :*

$$\widehat{h}(P) \geq c(k) \max \left\{ \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E), h(j_E) \right\},$$

où  $\widehat{h}(\cdot)$  est la hauteur de Néron-Tate sur  $E$ ,  $N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)$  la norme du discriminant minimal de la courbe  $E$  et  $h(j_E)$  la hauteur de Weil logarithmique et absolue de l'invariant modulaire  $j_E$  de la courbe  $E$ .

*Remarque :* Dans cette conjecture il est équivalent de chercher une minoration du type  $\widehat{h}(P) \geq c(k) h_F(E/k)$  où  $h_F(E/k)$  est la hauteur de Faltings (relative) de la courbe elliptique  $E$ . Dans la formulation de la question qui figure dans [Lan78], S. Lang ne faisait intervenir que le logarithme du discriminant.

Cette conjecture de Lang a été partiellement démontrée par M. Hindry et J. Silverman qui obtiennent dans [HS88], corollaire 4.2 (ii) de leur théorème 4.1 (p. 430 et 431), le résultat suivant :

**Théorème 1.** (Hindry, Silverman) *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soit  $E/k$  une courbe elliptique de discriminant minimal  $\Delta_E$  et de conducteur  $F_E$ . On note  $\sigma_E$  le quotient de Szpiro défini par  $\sigma_E = \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E) / \log N_{k/\mathbb{Q}}(F_E)$ . Alors pour tout point  $P \in E(k)$  d'ordre infini on a la minoration :*

$$\widehat{h}(P) \geq (20\sigma_E)^{-8d} 10^{-4\sigma_E} \frac{1}{12} \max \left\{ \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E), h(j_E) \right\}.$$

Ceci permet de conclure pour toute famille de courbes elliptiques pour lesquelles le quotient de Szpiro est borné uniformément. Une conjecture de Szpiro affirme que c'est en fait le cas de toutes les courbes elliptiques et entraîne donc la conjecture de Lang ci-dessus. La preuve de ce théorème repose sur l'existence d'une décomposition de la hauteur de Néron-Tate en somme de hauteurs locales bien normalisées.

J. Silverman avait démontré auparavant plusieurs cas particuliers de cette conjecture dans [Sil81] et [Sil84]. Par la suite S. David a publié une preuve de transcendance [Dav92]

offrant une constante  $c(d, \sigma_E)$  polynomiale inverse en  $d$  et  $\sigma_E$ . On peut citer aussi l'article de M. Krir [Kri01] qui explicite sur  $k = \mathbb{Q}$  d'une manière un peu différente ce résultat de minoration pour des familles de courbes elliptiques particulières. Plus récemment, une nouvelle constante polynomiale inverse a été obtenue par C. Petsche [Pet06] par la technique de décomposition locale.

La conjecture sur les courbes elliptiques a ensuite été généralisée aux variétés abéliennes de dimension supérieure par J. Silverman dans [Sil84] p. 396 :

**Conjecture 2.** (Lang, Silverman) Soit  $g \geq 1$ . Pour tout corps de nombres  $k$ , il existe une constante positive  $c(k, g)$  telle que pour toute variété abélienne  $A/k$  de dimension  $g$ , pour tout diviseur ample  $\mathcal{D} \in \text{Div}(A)$  et tout point  $P \in A(k)$  tel que  $\mathbb{Z} \cdot P = \{mP \mid m \in \mathbb{Z}\}$  est Zariski-dense on ait :

$$\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) \geq c(k, g) \max \left\{ 1, h_{\mathbb{F}}(A/k) \right\},$$

où  $\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(\cdot)$  est la hauteur de Néron-Tate sur  $A$  associée au diviseur  $\mathcal{D}$  et  $h_{\mathbb{F}}(A/k)$  est la hauteur de Faltings (relative) de la variété abélienne  $A$ .

*Remarque :* Il y a plusieurs notions de hauteur d'une variété abélienne. L'énoncé de cette conjecture est plus fin avec la hauteur de Faltings (relative) comme minorant qu'avec la hauteur de Faltings *stable* (voir 1.4.1 et 1.4.2 pour les définitions). Remarquons de plus que la hauteur de Faltings stable est comparable à une hauteur modulaire, comme par exemple la hauteur thêta d'une variété abélienne (voir 1.4.6 pour les comparaisons).

S. David a proposé une preuve partielle de cette conjecture généralisée, preuve basée sur un raisonnement de type transcendance ([Dav93]) : il donne une borne inférieure pouvant tendre vers l'infini avec la hauteur (thêta) de la variété. Plus précisément il obtient le théorème, dans lequel on note  $F_g$  le domaine de Siegel (précisément défini dans le paragraphe 1.3) :

**Théorème 2.** (David) Soient  $g \geq 1$  un entier,  $k$  un corps de nombres,  $v$  une place archimédienne,  $A/k$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $g$  et  $\tau_v \in F_g$  tel que  $A(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau_v \mathbb{Z}^g$ . On note  $\|\text{Im } \tau_v\| = \max_{i,j} |\text{Im } \tau_{v,ij}|$ . Posons  $d_0 = \max\{2, [k : \mathbb{Q}]\}$  et  $h = \max\{1, h_{\Theta}(A)\}$ , la hauteur thêta de  $A$ . Posons de plus :

$$\rho(A, k) = \frac{d_0(h + \log d_0)}{\|\text{Im } \tau_v\|} + d_0^{\frac{1}{g+2}}.$$

Alors il existe deux constantes  $c_1(g) > 0$  et  $c_2(g) > 0$  telles que tout point  $P \in A(k)$  vérifie :

- ou bien il existe une sous-variété abélienne  $B \subset A$ ,  $B \neq A$ , dont le degré vérifie  $\text{deg}(B) \leq c_2 \rho(A, k)^g (\log(\rho(A, k)^g))$  et telle que le point  $P$  soit d'ordre inférieur à  $c_2 \rho(A, k)^g (\log(\rho(A, k)^g))$  modulo  $B$ ,
- ou bien on a :

$$\widehat{h}(P) \geq c_1(g) \rho(A, k)^{-g} (\log(\rho(A, k)))^{-g} h.$$

Cet énoncé implique donc l'inégalité cherchée pour les familles de variétés abéliennes vérifiant  $\rho(A, k)$  borné. D.Masser utilise d'ailleurs ces résultats dans [Mas93] pour exhiber une famille de variétés abéliennes simples avec  $\rho$  borné, famille vérifiant donc la conjecture de Lang et Silverman.

*Applications* : Un résultat de minoration uniforme en la variété du type de l'énoncé de Lang et Silverman aurait des conséquences intéressantes pour plusieurs problèmes concernant les variétés algébriques. On se limitera ici à deux problèmes applicatifs, en direction desquels on trouvera dans la suite des énoncés partiels. Tout d'abord les techniques de preuve des résultats partiels en direction de l'inégalité de Lang et Silverman passent généralement par un raisonnement du type : « parmi les  $N$  points distincts  $P_1, \dots, P_N$ , il en existe un qui vérifie  $\widehat{h}(P_i) > \alpha$  ». Si  $\alpha$  est strictement positif, on déduit donc qu'il ne peut y avoir plus de  $N$  points de hauteur nulle, ce qui procure une borne uniforme sur la torsion des variétés abéliennes considérées pour peu que  $N$  soit uniforme. Le deuxième problème lié à ces minoration est l'obtention de bornes uniformes sur le nombre de points rationnels d'une courbe algébrique de genre  $g \geq 2$ , en passant par l'étude de la variété jacobienne.

Nous allons donc progresser un peu en direction d'une conjecture classique sur la torsion des variétés abéliennes :

**Conjecture 3.** *(de torsion forte) Soient  $k$  un corps de nombres de degré  $d$  et  $g \geq 1$  un entier. Alors il existe une constante  $c(k, g) > 0$  ne dépendant que de  $k$  et  $g$  telle que pour toute variété abélienne  $A$  de dimension  $g$  définie sur  $k$  on a :*

$$\text{Card} \left( A(k)_{\text{tors}} \right) \leq c(k, g).$$

*Remarque* : Il suffit de montrer cette conjecture pour  $k = \mathbb{Q}$  en toute dimension pour en déduire un énoncé général avec  $c(k, g) = c(\mathbb{Q}, dg)$  ne dépendant que du degré  $d$  et de la dimension  $g$ . En effet, si  $A/k$  est une variété abélienne,  $B = N_{k/\mathbb{Q}}(A)$  (restriction des scalaires à la Weil, voir le paragraphe 4.1.2) est une variété abélienne définie sur  $\mathbb{Q}$  de dimension  $dg$  et telle que  $A(k)_{\text{tors}} = B(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ .

Nous donnerons de plus un résultat en direction de l'énoncé suivant :

**Conjecture 4.** *(Mazur) Soient  $k$  un corps de nombres et  $g \geq 2$  un entier. Alors il existe une constante  $c = c(k, g) > 0$  telle que pour toute courbe  $C$  de genre  $g$  définie sur  $k$ , si on note  $A$  la jacobienne de  $C$ , on a :*

$$\text{Card} \left( C(k) \right) \leq c^{\text{rang } A(k) + 1}.$$

*Remarque* : Caporaso, Harris et Mazur montrent dans [CHM97] qu'une conjecture très générale de Lang, disant que l'ensemble des points rationnels d'une variété de type général n'est jamais Zariski-dense, implique en fait une borne encore plus uniforme du type  $\text{Card}(C(k)) \leq c(k, g)$ . En utilisant l'étude de [Pac97] on peut même espérer une borne  $\text{Card}(C(k)) \leq c(d, g)$ .



## Contenu de la thèse

Cette thèse se consacre entièrement à l'étude de la conjecture de Lang et Silverman sur les variétés abéliennes et à certaines de ses applications. Le travail se divise en quatre chapitres. Les chapitres 2, 3 et 4 sont largement indépendants les uns des autres. Toutes les hauteurs de variétés «  $h(A)$  » impliquées dans des majorations ou minorations doivent être comprises comme «  $\max\{1, h(A)\}$  ».

Le **premier chapitre** sera utile pour toute la suite. Il fixe les principales notations et normalisations dont on aura besoin, à savoir les définitions de hauteur d'un point dans un espace projectif, hauteur canonique ou de Néron-Tate pour les points d'une variété abélienne, et le théorème de Néron de décomposition en hauteurs locales, point central de la stratégie d'étude mise en place. On aura besoin de l'espace de Siegel associé aux variétés abéliennes principalement polarisées. On étudiera ensuite les définitions de hauteur d'une variété abélienne utiles dans ce texte. On définira ainsi la hauteur de Faltings, la hauteur de Faltings augmentée, la hauteur de Faltings stable, la hauteur thêta d'une variété abélienne, et on donnera les comparaisons entre ces différentes notions de hauteur. On rajoutera la définition de trace archimédienne d'une variété abélienne, ainsi qu'un paragraphe sur les discriminants associés aux courbes hyperelliptiques.

Le **second chapitre** est une étude détaillée de la conjecture de Lang et Silverman pour les variétés abéliennes de dimension 2. Une variété abélienne principalement polarisée de dimension 2 est isomorphe ou bien à une jacobienne d'une courbe  $C$  de genre 2 polarisée par le diviseur  $\Theta = C$ , ou bien à un produit de courbes elliptiques  $E_1 \times E_2$ , polarisé par  $\Theta = E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2$ .

On obtient dans ce chapitre un théorème de minoration de la hauteur de Néron-Tate associée au diviseur  $\Theta$  en utilisant une technique de décomposition en hauteurs locales légèrement modifiées. En effet ces hauteurs locales sont définies à une constante près, il y a donc plusieurs manières de normaliser ces fonctions. On met en place une étude des différences de hauteurs locales, ce qui est une manière détournée de fixer une normalisation, ce grâce à une propriété cruciale des points de 3-torsion en dimension 2. Malheureusement cette méthode fait apparaître une condition au bord de l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 2. Soit  $\varepsilon > 0$ . On notera  $F_{2,\varepsilon}$  et  $G_{2,\varepsilon}$  des sous-ensembles du domaine de Siegel  $F_2$  dans lesquels on retire un voisinage « tubulaire-hyperbolique » du lieu des produits de courbes elliptiques (voir l'introduction du chapitre 2 pour les définitions précises). Les énoncés se placeront donc toujours dans un tel ensemble  $F_{2,\varepsilon}$ . La quantité  $\text{Tr}(A)$  est appelée la *trace archimédienne* de la variété abélienne (voir définition précise en 1.5) et  $D$  est un certain discriminant associée à la courbe sous-jacente. Notons de plus que les calculs explicites et la mise en œuvre des estimations des hauteurs locales aux places finies est basée sur l'étude poussée de la surface de Kummer effectuée par V. Flynn, N. Smart et M. Stoll dans les articles [Fly95, FS97, Sto99, Sto02]. Dans le cas des jacobiniennes de dimension 2 simples, le théorème prend la forme suivante :

**Théorème 3.** Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soient  $C/k$  une courbe de genre 2 admettant un point de Weierstrass rationnel sur  $k$  et  $A$  sa jacobienne. Alors si  $A$  vérifie  $\tau_v \in F_{2,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ , il existe une constante  $c_1(d) > 0$  telle que pour tout point  $P \in A(k)$  l'une des deux propositions suivantes est vraie :

$$(1) [n]P = O \text{ pour un entier } 1 \leq n \leq 2 \cdot 240^{4 \cdot 3^{16}d},$$

$$(2) \widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c_1 \left( \text{Tr}(A) - 63 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) \right),$$

$$\text{où on peut prendre } c_1 = \frac{1}{160d \cdot 240^8 \cdot 3^{16}d}.$$

*Remarque 1 :* l'hypothèse «  $\tau_v \in F_{2,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne » peut être retirée dans le cas où le corps  $k$  n'a qu'une place archimédienne, en particulier pour  $k = \mathbb{Q}$ . Il suffit de faire une moyenne restreinte sur les points d'ordre 3, non pas sur 80 points mais sur 72 points bien choisis. Cela se fera au prix de la perte du caractère explicite de la constante  $c_1$  du théorème 3.

*Remarque 2 :* On va donc être amené dans les énoncés suivants à supposer que l'on a  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ . Imposer une hypothèse du type  $\text{Tr}(A) \geq c \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$  n'est pas rien. En dimension 1, une conjecture de Hall (voir par exemple [Sil92] p. 268) prédit que seul un nombre fini de courbes elliptiques peuvent la vérifier si la constante  $c$  est trop grande : on mène une étude à ce sujet dans un paragraphe succédant au théorème 2.7.4.

Cependant l'espace de modules des courbes de genre 2 est de dimension 3 : ceci permet d'obtenir des familles infinies de jacobienes vérifiant cette condition sur le discriminant. On verra dans le paragraphe succédant au théorème 2.5.3 ce que l'on peut montrer en utilisant l'article de Igusa [Igu62]. Cette remarque est toutefois une motivation supplémentaire pour chercher, dans le futur, à obtenir des contributions positives aux places finies.

*Remarque 3 :* L'existence d'un point de Weierstrass rationnel sur  $k$  est équivalente à l'existence d'un modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  sur  $k$ . Il suffit d'effectuer une extension de  $k$  de degré inférieur ou égal à 2 pour obtenir un point de Weierstrass rationnel sur  $k$ .

On déduit immédiatement de ce théorème le corollaire suivant :

**Corollaire 1.** Soient  $k$  un corps de nombres de degré  $d$  et  $\varepsilon > 0$ . Soient  $C/k$  une courbe de genre 2 de modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  et  $A/k$  sa jacobienne. Soient  $\text{Tr}(A)$  sa trace archimédienne et  $D = 2^8 \text{disc}(F)$ . On suppose que pour toute place archimédienne  $v$  on a  $\tau_v \in F_{2,\varepsilon}$  et que :

$$\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D).$$

Alors on a :

$$\text{Card} \left( A(k)_{\text{tors}} \right) \leq 2^4 \cdot 240^{16} \cdot 3^{16}d.$$

On complète le théorème 3 par l'étude de la situation du produit de courbes elliptiques, qui donne un théorème plus faible que celui de M. Hindry et J. Silverman dans [HS88], mais qui permet d'aboutir à un énoncé faisant intervenir les mêmes quantités que pour les jacobiniennes simples.

Le chapitre 2 renferme aussi la preuve du théorème de majoration suivant, basé sur l'expression de la hauteur de Faltings donnée dans [Uen88]; on note ici  $h'_F(A/k)$  la hauteur de Faltings augmentée :

**Théorème 4.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soit  $C/k$  une courbe de genre 2 avec bonne réduction en 2, prise dans un modèle hyperelliptique  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$ . On note  $D = 2^8 \text{disc}(F)$ . On suppose que la jacobienne  $A = \text{Jac}(C)$  vérifie  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ . Alors il existe des constantes  $c_3(d) > 0$  et  $c_4(d) > 0$  telles que :*

$$h'_F(A/k) \leq c_3 \text{Tr}(A) + c_4 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D),$$

$$\text{et on peut prendre : } c_3 = \frac{5\pi + 2}{20d} \text{ et } c_4 = \frac{1}{10d}.$$

Notons que ce théorème est un pas vers la conjecture 1.7 de S. David donnée dans [Dav93] p. 513. La conjonction des théorèmes 3 et 4 fournit alors le corollaire suivant :

**Corollaire 2.** *Soient  $k$  un corps de nombres de degré  $d$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $(A, \Theta)/k$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension 2. Si  $A$  est simple, on suppose que  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne et que la courbe sous-jacente a bonne réduction en 2. On prend le modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$ . On suppose que  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ . Alors il existe une constante  $c(d) > 0$  telle que pour tout point  $P \in A(k)$  vérifiant  $\overline{\mathbb{Z}} \cdot P = A$  on a :*

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c h'_F(A/k),$$

$$\text{et on peut prendre } c = \frac{0,00005}{2408 \cdot 3^{16}d}.$$

Les théorèmes 1 et 2, ainsi que ce corollaire, permettent de vérifier la conjecture de Lang et Silverman pour une large classe de variétés abéliennes de dimension 2, par exemple les jacobiniennes simples qui ont potentiellement bonne réduction (on énonce ici le corollaire 2.8.4) :

**Corollaire 3.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soit  $C/k$  une courbe de genre 2 donnée dans un modèle hyperelliptique entier  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  et telle que  $C/k$  a potentiellement bonne réduction partout. Soit  $A$  la jacobienne de  $C$ , simple et vérifiant  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne. Alors pour tout point  $P \in A(k)$  d'ordre infini on a :*

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq \frac{0,0007}{240320 \cdot 15^{16}d} h'_{\text{st}}(A).$$

Cet énoncé n'est pas couvert par le théorème de S. David [Dav93] en dimension 2. Par contre le théorème de S. David se passe de l'hypothèse archimédienne dont on a besoin pour mener à bien la stratégie locale.

On rajoute un dernier énoncé dans la présentation de ce chapitre 2, concernant les points rationnels sur les courbes de genre 2. On compare deux techniques de recherche de borne sur le nombre de points rationnels d'une courbe de genre 2. Une première méthode consiste à utiliser les travaux de T. de Diego [dD97] où est mis en place un raisonnement en famille. La seconde se base sur l'article [Rém00] de G. Rémond, où figure une borne qui dépend encore de la hauteur de Faltings de la jacobienne. Combinées au corollaire 2 ci-avant, les deux méthodes donnent le même genre de borne. Voici le résultat obtenu avec la seconde :

**Corollaire 4.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $C/k$  une courbe de genre 2, avec bonne réduction en toute place divisant 2, donnée dans un modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$ . On notera  $D = 2^8 \text{disc}(F)$ . Soit  $A/k$  la jacobienne de  $C$ . On suppose que pour toute place archimédienne  $v$ , la matrice de périodes  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$ . On suppose de plus que  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ . Alors il existe une constante  $c_2(d)$  ne dépendant que de  $d = [k : \mathbb{Q}]$  telle que :*

$$\text{Card}(C(k)) \leq c_2 \text{rang } A(k) + 1,$$

et on peut choisir :

$$c_2 = 240(d+1)2^{35}.$$

Le **troisième chapitre** est une généralisation de la méthode utilisée en dimension 2 aux variétés abéliennes de dimension  $g \geq 2$ . Les difficultés principales à surmonter, outre la technicité accrue de certains calculs, sont les suivantes : tout d'abord on ne dispose pas de l'équivalent de l'étude explicite de V. Flynn, N. Smart et M. Stoll. On a donc choisi de composer avec les *coordonnées de Mumford* définies dans [Mum66] pour étudier les places finies, plus exactement avec les *coordonnées de Mumford modifiées* introduites dans l'article [DP02]. Pour réunir les informations locales en un théorème global, il faut ensuite trouver un niveau de torsion  $N$  *ad hoc*, jouant le même rôle que  $N = 3$  pour  $g = 2$ . On a besoin pour cela à la fois d'une propriété « algébrique » du type  $N = 2^s - 1$ , et d'une propriété « analytique » du type  $N > c(\mathcal{L}, g)$ , où  $c(\mathcal{L}, g)$  est une constante strictement positive ne dépendant que de  $g$  et du plongement projectif associé au fibré  $\mathcal{L}$  au-dessus d'une variété abélienne  $A$ . Il faut ensuite prendre des précautions avec l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension  $g$ . On notera  $F_{g,\varepsilon}$  un sous-ensemble de cet espace dans lequel on enlève un nombre fini d'hypersurfaces analytiques épaissies (voisinages « tubulaires-hyperboliques » de taille  $\varepsilon$ , voir définition précise au paragraphe 3.1.2). Ces hypersurfaces sont directement liées au niveau de torsion  $N$  choisi au départ. On note là encore  $\text{Tr}(A)$  la trace archimédienne de  $A$ ,  $h_{\text{fini}}(A)$  la partie finie de la hauteur thêta de  $A$  et  $S_{\text{fini}}(A)$  le terme issu de la multiplication par  $[2^s]$ , voir les paragraphes 1.5 et 3.2.10 pour les définitions précises. Finalement on peut affirmer :

**Théorème 5.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ , notons  $m = |M_k^\infty|$ . Soient  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe des constantes  $c_1(d, g) > 0$  et  $c_2(d, g) > 0$  telles que pour toute variété abélienne simple de dimension  $g$  principalement polarisée  $(A, \Theta)/k$  vérifiant que  $\tau_v \in F_{g, \varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne, et pour tout point  $P \in A(k)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne :*

$$\widehat{h}_{A, 16\Theta}(P) \geq c_1 \operatorname{Tr}(A) - c_2 \left( h_{\text{fini}}(A) + S_{\text{fini}}(A) \right),$$

et on peut prendre :

$$c_1 = \frac{\pi 4^g g!}{d g^2 (4^{2g} g!)^4 (16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2})^{4gm+1}}, \quad c_2 = \frac{1}{d g^2 (4^{2g} g!)^4 (16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2})^{4gm}}.$$

L'esprit de ce théorème est le même qu'en dimension 2, notre utilisation de la méthode des différences de hauteurs locales met en opposition les places archimédiennes et les places finies, aboutissant à un théorème de minoration non trivial dès que la somme des contributions archimédiennes domine la somme des contributions aux places finies. On pourra déduire une borne conditionnelle sur la torsion, de la même manière que dans le cas de la dimension 2. Il sera intéressant à l'avenir de chercher à faire contribuer positivement les places finies et d'ainsi viser un minorant toujours positif.

Ce troisième chapitre renferme de plus une expression explicite de la hauteur de Faltings pour les jacobiniennes de courbes hyperelliptiques de genre  $g$ . C'est la généralisation de la formule de K. Ueno de l'article [Uen88], établie ici grâce à l'utilisation de l'article de P. Lockhart [Loc94]. Une fois cette formule montrée, on travaille dans un sous-espace de modules  $G_{g, \varepsilon}$  excluant les voisinages « tubulaires-hyperboliques » d'un nombre fini d'hypersurfaces analytiques (voir définition précise en 3.1.3), ce qui permet d'estimer :

**Théorème 6.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe des constantes  $c_3(d, g) > 0$  et  $c_4(d, g) > 0$  telles que : pour toute courbe  $C/k$  hyperelliptique définie sur  $k$  de genre  $g$ , de discriminant minimal  $\Delta_{\min}$ , si la jacobienne  $(\operatorname{Jac}(C), \Theta)$ , principalement polarisée par le diviseur  $\Theta$ , admet des matrices  $\tau_v \in G_{g, \varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ , on a :*

$$h'_{\text{st}}(\operatorname{Jac}(C)) \leq c_3 \operatorname{Tr}(\operatorname{Jac}(C)) + c_4 \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}),$$

$$\text{et on peut prendre } c_3 = \frac{4\pi + 2}{d} \text{ et } c_4 = \frac{g}{(8g + 4)d}.$$

On peut déduire des théorèmes 5 et 6 le corollaire suivant en direction de la conjecture de Lang et Silverman :

**Corollaire 5.** Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $C/k$  une courbe hyperelliptique définie sur  $k$  de genre  $g$ , de discriminant minimal  $\Delta_{\min}$ . On suppose que sa jacobienne  $(A, \Theta)$  est simple, principalement polarisée par le diviseur  $\Theta$  et admet des matrices  $\tau_v \in G_{g,\varepsilon} \cap F_{g,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ . On suppose, pour  $c_5 = c_5(g)$  une constante donnée :

$$\mathrm{Tr}(A) \geq c_5 \max \left\{ h_{\mathrm{fini}}(A) + S_{\mathrm{fini}}(A), \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) \right\},$$

alors il existe une constante  $c = c(d, g) > 0$  ne dépendant que de  $d$  et  $g$  telle que pour tout point  $P \in \mathrm{Jac}(C)(k)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne :

$$\widehat{h}_{A,16\Theta}(P) \geq c h'_{\mathrm{st}}(A).$$

De plus on peut prendre :

$$c_5 = \frac{16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+1}}{\pi 4^g} + 1 \quad \text{et} \quad c = \left( 16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2} \right)^{-5gd}.$$

A priori cet énoncé est moins puissant que celui de S. David en dimension  $g$  car restreint aux jacobiniennes de courbes hyperelliptiques et affublé d'une hypothèse archimédienne difficilement calculable. De plus, s'il est clair qu'on peut trouver des familles de variétés avec  $\mathrm{Tr}(A)$  dominant  $h_{\mathrm{fini}}(A)$ , il est moins évident de contrôler les contributions finies de la hauteur des formes représentant la multiplication par  $[2^s]$ , regroupées dans  $S_{\mathrm{fini}}(A)$ .

Plusieurs points méritent d'être soulignés cependant. Tout d'abord la méthode sépare les places finies et les places archimédiennes, ce qui laisse espérer des énoncés futurs moyennant des hypothèses de réductions. Ceci n'est pas directement possible avec le théorème de S. David. En outre on peut espérer, moyennant un calcul de la hauteur de Faltings sans hypothèse de semi-stabilité sur la courbe, pouvoir obtenir un minorant faisant intervenir la hauteur de Faltings augmentée *relative* au corps  $k$ , qui est un majorant de la hauteur thêta utilisée pour obtenir le résultat de [Dav93] rappelé plus haut (la hauteur thêta est comparable à la hauteur de Faltings *stable*). Enfin, et à la lumière de l'historique des recherches sur la conjecture de Lang et Silverman, ce corollaire va dans le sens de la remarque de S. David suivante : les techniques de preuve de transcendance et de décomposition en hauteurs locales semblent aboutir par des voies différentes aux mêmes résultats, c'est-à-dire en l'état actuel des connaissances, à des résultats dans le cas où les places archimédiennes dominent.

*Remarque :* On peut bien sûr déduire, sous des hypothèses analogues, des énoncés partiels sur le nombre de points de torsion d'une variété abélienne de dimension  $g$  et sur le nombre de points rationnels d'une courbe hyperelliptique de genre  $g$ . Par souci de concision, nous laissons au lecteur le soin de formuler ces corollaires (voir les corollaires 1 et 4 dans le cas  $g = 2$ ).

Le **quatrième chapitre** est un chapitre d'étude de la dépendance de la constante présente dans l'inégalité de Lang et Silverman. On montre très facilement, par exemple par

un argument de division de point, que cette constante dépend nécessairement du corps de définition des points rationnels  $P$  considérés. En utilisant la restriction des scalaires à la Weil, on montre aussi qu'on doit considérer la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant  $P$ . La nécessité de la dépendance en la dimension de la variété abélienne ambiante, lorsqu'on se restreint aux points vérifiant que  $\mathbb{Z} \cdot P$  est Zariski-dense, est un peu moins évidente. On traite en détail le cas des jacobienes de courbes modulaires  $J_0(N)$ . Plus exactement on produit un équivalent de la hauteur de Néron-Tate d'un point de Heegner lorsque le niveau  $N$  est grand, généralisant une démarche déjà présente dans [MU98]. Pour  $k$  un corps de nombres dont l'anneau des entiers est noté  $\mathcal{O}_k$ , on note  $h_k$  son nombre de classes,  $u_k$  la moitié du cardinal de ses unités et  $\mathbb{N}_k$  un ensemble de produits de premiers appartenant à des classes de congruences constitué des entiers  $N$  tels qu'il existe un point de Heegner associé à  $\mathcal{O}_k$  sur  $X_0(N)$ . Le résultat est le suivant :

**Théorème 7.** *Soit  $k$  un corps quadratique dont le discriminant  $D$  vérifie les conditions :  $D < 0$ ,  $D$  est sans facteur carré et  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . Soit  $x_D \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$  et posons :  $c_D = (x_D) - (\infty)$ . Alors on a :*

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D) \sim h_k u_k \log(N),$$

lorsque  $N \in \mathbb{N}_k$  tend vers l'infini.

Notons  $g(N)$  la dimension de  $J_0(N)$ . L'utilisation de l'équivalent (obtenu dans [JK08] grâce à des calculs de géométrie hyperbolique complexe)  $h_{\text{st}}(J_0(N)) \sim \frac{g(N)}{3} \log(N)$  de la hauteur de Faltings de  $J_0(N)$  lorsque  $N$  est grand permet, par comparaison des asymptotiques, de conclure au fait suivant :

**Corollaire 6.** *Soit  $k$  un corps quadratique dont le discriminant  $D$  vérifie les conditions :  $D < 0$ ,  $D$  est sans facteur carré et  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . Soit  $x_D \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$  et posons :  $c_D = (x_D) - (\infty)$ . Notons  $g(N)$  le genre de  $X_0(N)$ . Alors on a :*

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D) \sim \frac{3h_k u_k}{g(N)} h_{\text{st}}(J_0(N)),$$

lorsque  $N \in \mathbb{N}_k$  tend vers l'infini.

*Remarque :*

Il faut noter que les exemples développés dans ce chapitre indiquent que, pour obtenir une inégalité du type  $\widehat{h}_{A,\Theta}(P) \geq c h_{\mathbb{F}}(A/k)$ , on ne peut se dispenser en général de :

- la dépendance en le corps  $k$  de la constante  $c$ ;
- la dépendance en la dimension  $g$  de la constante  $c$ ;
- l'hypothèse  $\overline{\mathbb{Z} \cdot P} = A$ .

Le **cinquième chapitre** est composé de trois annexes. Dans la première on montre comment augmenter le domaine de validité du corollaire 2 ci-avant en utilisant des isogénies particulières. On pourrait généraliser encore un peu. Il n'est pas impossible que cette voie d'attaque permette à l'avenir de faire disparaître la condition au bord de l'espace de modules. La deuxième annexe renferme les formules explicites utiles pour les calculs sur la surface de Kummer. La dernière annexe donne les formules des invariants d'Igusa des courbes de genre 2.





# Chapitre 1

## Généralités sur les hauteurs



## 1.1 Hauteur dans un espace projectif

Soit  $k$  un corps de nombres. On note  $d = [k : \mathbb{Q}]$  son degré sur  $\mathbb{Q}$ . On notera dans tout le texte  $M_k$  l'ensemble de ses places (deux à deux non équivalentes),  $M_k^\infty$  l'ensemble de ses places archimédiennes et  $M_k^0$  l'ensemble de ses places finies. Pour toute place  $v \in M_k$ , on notera  $k_v$  le complété de  $k$  pour la valuation  $|\cdot|_v$  associée à la place  $v$ , où on normalise  $|p|_v = p^{-1}$  pour toute place finie  $v$  au-dessus d'un nombre premier  $p$ . Pour les places archimédiennes on prendra la valeur absolue usuelle. On notera de plus  $d_v = [k_v : \mathbb{Q}_v]$  le degré local en  $v$  et :

$$n_v = \frac{d_v}{d} = \frac{[k_v : \mathbb{Q}_v]}{[k : \mathbb{Q}]}.$$

Soient  $n \geq 1$  un entier naturel et  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$  l'espace projectif sur  $\mathbb{Q}$  de dimension  $n$ . Soit  $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$  un point projectif et soit  $k$  un corps contenant  $x$ , i.e. contenant ses coordonnées. Alors on définit la hauteur de  $x$  comme étant :

$$h(x) = \sum_{v \in M_k} n_v \log \max_{i \in [0, n]} |x_i|_v.$$

C'est un nombre positif ou nul qui ne dépend ni de la normalisation du point  $x$  (formule du produit), ni du corps contenant  $x$  (formule d'extension).

Soient  $X/k$  une variété projective sur  $k$ ,  $\mathcal{D}$  un diviseur très ample sur  $X$  et  $\varphi_{\mathcal{D}}$  un plongement de  $X$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}^n$ . Alors on peut définir une hauteur sur  $X$ , appelée hauteur de Weil, de la manière suivante : pour tout point  $\bar{k}$ -rationnel  $P$  (i.e.  $P \in X(\bar{k})$ ) on pose :

$$h_{X, \mathcal{D}}(P) := h(\varphi_{\mathcal{D}}(P)).$$

Si le diviseur  $\mathcal{D}$  n'est pas très ample, on peut toujours écrire  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ , avec  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  très amples. On posera alors :

$$h_{X, \mathcal{D}}(P) := h(\varphi_{\mathcal{D}_1}(P)) - h(\varphi_{\mathcal{D}_2}(P)).$$

On vérifie ensuite que cette définition ne dépend ni du morphisme  $\varphi_{\mathcal{D}}$ , ni de la décomposition  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ , à une fonction bornée près. Toutes ces vérifications sont faites en détails dans la littérature, voir par exemple [HS00] p. 186, dans le cours de la preuve du théorème « Weil's Height Machine ».

Soient  $A/k$  une variété abélienne sur  $k$ ,  $\mathcal{D}$  un diviseur ample et symétrique sur  $A$ . Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on note  $[n]P$  le point  $[n-1]P + P$ , où le symbole « + », est ici l'addition sur  $A$ , et  $[1]P = P$ . On définit alors la hauteur canonique, ou hauteur de Néron-Tate, d'un point  $P \in A(k)$ , par la formule :

$$\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_{A, \mathcal{D}}([n]P)}{n^2}.$$

## 1.2 Hauteur de Néron-Tate et hauteurs locales

Une hauteur de Weil associée à un diviseur  $\mathcal{D}$  sur une variété abélienne  $A/k$  est par définition une somme indexée par les places de  $k$  de fonctions à valeurs réelles (définies hors du diviseur  $\mathcal{D}$ ). C'est de plus une fonction vérifiant la relation suivante (issue du théorème du cube) : il existe une constante  $c$  telle que pour tous points  $P, Q, R \in A(k)$ , et en notant temporairement  $h = h_{A, \mathcal{D}}$  :

$$\left| h(P + Q + R) - h(P + Q) - h(Q + R) - h(R + P) + h(P) + h(Q) + h(R) \right| \leq c.$$

Si on suppose de plus que le diviseur  $\mathcal{D}$  est symétrique on obtient (en prenant  $R = -Q$ ) une relation de quasi-parallélogramme :

$$\left| h(P + Q) + h(P - Q) - 2h(P) - 2h(Q) \right| \leq c.$$

Le passage à la limite effectué pour définir la hauteur de Néron-Tate permet d'obtenir  $c = 0$ . Cette construction offre donc l'avantage suivant : la hauteur de Néron-Tate devient une forme quadratique, dont le cône isotrope est le sous-groupe de torsion de la variété abélienne.

A. Néron souhaitait retrouver une décomposition locale de cette hauteur canonique, si possible en obtenant une somme de formes quadratiques locales. On donne ici l'aboutissement des travaux de A. Néron permettant de décomposer la hauteur de Néron-Tate en une somme de *hauteurs locales*. La décomposition s'écrit comme suit (voir [HS00] p. 242) :

**Théorème 1.2.1.** (Néron) *Soit  $A/k$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $k$ . Soit  $M_k$  l'ensemble des places de  $k$ . Pour tout diviseur  $\mathcal{D}$  sur  $A$  on note  $A_{\mathcal{D}} = A \setminus \text{supp}(\mathcal{D})$ . Alors pour toute place  $v \in M_k$  il existe une fonction hauteur locale, unique à une fonction constante près :*

$$\widehat{\lambda}_{\mathcal{D}, v} : A_{\mathcal{D}}(k_v) \longrightarrow \mathbb{R},$$

*appelée hauteur locale canonique, dépendant du choix de  $\mathcal{D}$  et vérifiant les propriétés suivantes, avec  $\gamma_{i, v}$  des constantes dépendant de  $v$  :*

1.  $\widehat{\lambda}_{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2, v} = \widehat{\lambda}_{\mathcal{D}_1, v} + \widehat{\lambda}_{\mathcal{D}_2, v} + \gamma_{1, v}$ .
2. Si  $\mathcal{D} = \text{div}(f)$ , alors  $\widehat{\lambda}_{\mathcal{D}, v} = v \circ f + \gamma_{2, v}$ .
3. Si  $\Phi : B \rightarrow A$  est un morphisme de variétés abéliennes alors on a la relation :  $\widehat{\lambda}_{\Phi^* \mathcal{D}, v} = \widehat{\lambda}_{\mathcal{D}, v} \circ \Phi + \gamma_{3, v}$ .
4. Soit  $Q \in A(k)$  et soit  $t_Q : A \rightarrow A$  la translation par  $Q$ . Alors on a la relation :  $\widehat{\lambda}_{t_Q^* \mathcal{D}, v} = \widehat{\lambda}_{\mathcal{D}, v} \circ t_Q + \gamma_{4, v}$ .
5. Soit  $\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}$  la hauteur globale canonique de  $A$  associée à  $\mathcal{D}$ . Il existe une constante  $c$  telle que, pour tout  $P \in A_{\mathcal{D}}(k)$  :

$$\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) = \sum_{v \in M_k} n_v \widehat{\lambda}_{\mathcal{D}, v}(P) + c.$$

6. Si  $\mathcal{D}$  vérifie  $[2]^*\mathcal{D} = 4\mathcal{D} + \text{div}(f)$  pour  $f$  une fonction rationnelle sur  $A$  et si l'on fixe les constantes de telle sorte qu'on ait la relation  $\widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}([2]P) = 4\widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}(P) + v(f(P))$ , alors :

$$\widehat{h}_{A,\mathcal{D}}(P) = \sum_{v \in M_k} n_v \widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}(P).$$

(Notons que  $f$  est unique à multiplication par une constante  $a \in k^*$  près.)

*Remarque :* On utilise ce théorème dans les chapitres 2 et 3. Dans le chapitre 4, on prendra le point de vue « symbole de Néron », dont les propriétés sont étudiées dans [Nér65]. Essentiellement pour un diviseur  $\mathcal{D}$ , un point  $P$  hors du support de  $\mathcal{D}$  et une place  $v$  de  $k$  on aura  $\widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}(P) = \langle \mathcal{D}, P \rangle_v$ .

### 1.3 Espace de Siegel

Soit  $v$  une place archimédienne. On notera  $H_g$  l'espace de Siegel associé aux variétés abéliennes sur  $\bar{k}_v$  principalement polarisées de dimension  $g$  et munies d'une base symplectique (on pourra consulter [LB92] p. 213). C'est l'ensemble des matrices  $\tau = \tau_v$  de taille  $g \times g$  symétriques à coefficients complexes et vérifiant la condition  $\text{Im } \tau > 0$  (i.e. définie positive). Cet espace est muni d'une action transitive du groupe symplectique  $\Gamma = \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$  donnée par :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}.$$

On considère alors  $F_g$  un domaine fondamental pour l'action du sous-groupe  $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ . On peut choisir  $F_g$  de telle sorte qu'une matrice  $\tau$  de ce domaine vérifie en particulier les conditions suivantes (voir [Fre83] p. 34) :

- S1 : Pour tout  $\sigma \in \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  on a :  $\det(\text{Im}(\sigma.\tau)) \leq \det(\text{Im}(\tau))$ . On dira que  $\text{Im } \tau$  est *maximale* pour l'action de  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ .
- S2 : Si  $\text{Re}(\tau) = (a_{i,j})$  alors  $|a_{i,j}| \leq \frac{1}{2}$ .
- S3 : Si  $\text{Im}(\tau) = (b_{i,j})$  alors pour tout  $l \in \{1, \dots, g\}$  et tout  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_g) \in \mathbb{Z}^g$  tel que  $\text{pgcd}(\zeta_1, \dots, \zeta_l) = 1$  on a  ${}^t\zeta \text{Im}(\tau)\zeta \geq b_{l,l}$ . De plus pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$  on a  $b_{i,i+1} \geq 0$ . On impose enfin  $b_{g,g} \geq \dots \geq b_{1,1} \geq \sqrt{3}/2$  et  $b_{i,i}/2 \geq |b_{i,j}|$ .

En dimension  $g = 2$  on aura en particulier les inégalités, utilisées constamment dans le chapitre 2 (on note  $\tau_1 = \tau_{11}$  et  $\tau_2 = \tau_{22}$ ) :

$$\begin{cases} \text{Im } \tau_2 \geq \text{Im } \tau_1 \geq 2 \text{Im } \tau_{12} \geq 0, \\ \text{Im } \tau_1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Dans tout le texte, les matrices  $\tau$  seront toujours supposées appartenir au domaine fondamental  $F_g$ .

## 1.4 Hauteur d'une variété abélienne

Nous avons défini la hauteur sur les points d'une variété abélienne, il nous faut à présent donner une définition de la hauteur de la variété elle-même. Il y a plusieurs possibilités de définition dans la littérature, nous allons en utiliser deux, à savoir la hauteur de Faltings et la hauteur thêta, qui chacune ont leurs avantages et qui sont comparables (*confer* la remarque 3 du paragraphe sur la hauteur thêta).

### Hauteur de Faltings

Soient  $k$  un corps de nombres et  $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$  le spectre de son anneau d'entiers. Un *fibré vectoriel métrisé* de rang  $r$  sur  $S$  est un  $\mathcal{O}_k$ -module projectif  $\mathcal{L}$  de rang  $r$  muni d'une collection  $\{\|\cdot\|_v\}_{v \in M_k^\infty}$  telle que  $\|\cdot\|_v$  est une norme hermitienne sur le  $k_v$ -espace vectoriel  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_k} \bar{k}_v$ , vérifiant  $\|x\|_v = \|\bar{x}\|_{\bar{v}}$  pour tout plongement  $v : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ .

Le *degré d'Arakelov* d'un fibré en droites métrisé  $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_v)$  sur  $S$  est défini, en prenant un élément non nul  $s \in \mathcal{L}$  :

$$\widehat{\text{deg}}(\mathcal{L}) = \log \text{Card}(\mathcal{L}/s\mathcal{O}_k) - \sum_{v:k \hookrightarrow \mathbb{C}} d_v \log \|s\|_v.$$

Ce degré ne dépend pas du choix de  $s$  non nul (application de la formule du produit).

Soit alors  $A/k$  une variété abélienne de dimension  $g \geq 1$ . Soient  $\mathcal{A} \rightarrow S$  son modèle de Néron,  $\varepsilon : S \rightarrow \mathcal{A}$  sa section neutre et  $\Omega_{\mathcal{A}/S}^g$  le faisceau des  $g$ -formes différentielles, qui est localement libre de rang 1. On pose  $\omega_{\mathcal{A}/S} = \varepsilon^*(\Omega_{\mathcal{A}/S}^g)$ ; c'est un fibré en droites sur  $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$  qu'on peut identifier au module de ses sections globales. On le munit des métriques suivantes :

$$\forall \alpha \in \omega_{\mathcal{A}/S} \otimes_v \mathbb{C}, \quad \|\alpha\|_v^2 = \frac{1}{2^g} \int_{A_v(\mathbb{C})} |\alpha \wedge \bar{\alpha}|.$$

On définit alors :

**Définition 1.4.1.** *Soit  $A/k$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $k$ . On appelle hauteur de Faltings relative à  $k$  ou plus simplement hauteur de Faltings la quantité :*

$$h_{\text{F}}(A/k) = \frac{1}{d} \widehat{\text{deg}}(\omega_{\mathcal{A}/S}).$$

**Définition 1.4.2.** *Soit  $A/k$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $k$ . Soit  $k'$  une extension de  $k$  telle que  $A/k'$  acquière réduction semi-stable. On appelle alors hauteur de Faltings stable la hauteur de Faltings relative à  $k'$  et on note :*

$$h_{\text{st}}(A) = h_{\text{F}}(A/k').$$

On donne enfin une variante, utile dans ce texte à plusieurs endroits. Commençons par quelques notations : pour une variété abélienne  $A/k$  principalement polarisée de dimension  $g$  définie sur un corps de nombres et une place  $v \in M_k^\infty$  on sait que les points complexes de  $A_v$  forment un tore complexe de dimension  $g$ , plus précisément il existe une matrice  $\tau_v$  symétrique de taille  $g \times g$ , avec  $\text{Im } \tau_v$  définie positive et *maximale* pour l'action de  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  (au sens de la propriété S1 du paragraphe précédent), telle que :

$$A_v(\bar{k}_v) \simeq \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \tau_v \mathbb{Z}^g).$$

On définit alors, en gardant toutes ces normalisations :

**Définition 1.4.3.** *Soit  $A/k$  une variété abélienne principalement polarisée définie sur un corps de nombres  $k$ . On appelle hauteur de Faltings augmentée (relative) la quantité :*

$$h'_F(A/k) = h_F(A/k) + \frac{1}{2d} \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log[\det(\text{Im } \tau_v)].$$

De même on définit :

**Définition 1.4.4.** *Soit  $A/k$  une variété abélienne principalement polarisée définie sur un corps de nombres  $k$ . Soit  $k'$  une extension de  $k$  telle que  $A/k'$  acquière réduction semi-stable. On appelle alors hauteur de Faltings augmentée stable la hauteur de Faltings augmentée relative à  $k'$  et on note :*

$$h'_{\text{st}}(A) = h'_F(A/k').$$

*Remarque 1 :* Lorsque  $\det(\text{Im } \tau_v) \geq 1$  pour toute place  $v$  archimédienne, on a les inégalités :

$$\begin{cases} h'_F(A/k) \geq h_F(A/k) \geq h_{\text{st}}(A), \\ h'_F(A/k) \geq h'_{\text{st}}(A) \geq h_{\text{st}}(A). \end{cases}$$

*Remarque 2 :* La hauteur de Faltings ne dépend d'aucun choix de plongement dans un espace projectif, ni même de la section (non nulle) qu'on utilise pour la calculer. C'est une quantité intrinsèque, ce qui rend sa présence très naturelle dans l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman.

## Hauteur thêta

On commence ce paragraphe par fixer un certain nombre de notations importantes, particulièrement pour le chapitre 3. On tire toute la présentation de la théorie des *coordonnées de Mumford* de l'article [DP02] dont on garde les notations, mais on pourra bien entendu se référer aussi à l'article original [Mum66] pour les preuves. On gardera en mémoire que les *coordonnées de Mumford modifiées*, correspondant au plongement thêta avec caractéristiques, sont définies et étudiées dans [DP02] uniquement.



Soit  $A/k$  une variété abélienne de dimension  $g$  munie de  $\mathcal{L}$  un fibré ample et totalement symétrique au sens de [Mum66] p. 305. Pour la compréhension de notre travail, il suffit de savoir que si  $\mathcal{M}$  est un fibré ample et symétrique, alors  $\mathcal{M}^{\otimes 3}$  est très ample et  $\mathcal{M}^{\otimes 4}$  est à la fois très ample et totalement symétrique. On définit, en notant  $t_x$  la translation par  $x \in A$ , les sous-groupes :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathcal{L}) &= \left\{ x \in A \mid t_x^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L} \right\}, \\ \mathcal{G}(\mathcal{L}) &= \left\{ (x, \varphi) \mid x \in \mathcal{H}(\mathcal{L}), \varphi \in \text{Isom}(\mathcal{L}, t_x^* \mathcal{L}) \right\}.\end{aligned}$$

On sait par [Mum66] p. 290 que l'on a la suite exacte :

$$\{1\} \rightarrow k^* \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{L}) \rightarrow 0, \quad (*)$$

et  $k^*$  est le centre de  $\mathcal{G}(\mathcal{L})$  pour sa structure de groupe naturelle. On définit de plus la forme bilinéaire alternée non dégénérée  $e^{\mathcal{L}}$  sur  $\mathcal{H}(\mathcal{L})$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soient } x \text{ et } y \text{ dans } \mathcal{H}(\mathcal{L}), \text{ avec } \tilde{x} \text{ et } \tilde{y} \text{ dans } \mathcal{G}(\mathcal{L}) \text{ au-dessus respectivement de } x \text{ et } y, \\ \text{on pose : } e^{\mathcal{L}}(x, y) = \tilde{x} \cdot \tilde{y} \cdot \tilde{x}^{-1} \cdot \tilde{y}^{-1} \in k^*. \end{array} \right.$$

On vérifie (voir [Mum66] p. 293) qu'on a une décomposition en sous-groupes isotropes  $\mathcal{K}(\mathcal{L})$  et  $\mathcal{K}'(\mathcal{L})$  tels que  $\mathcal{H}(\mathcal{L}) = \mathcal{K}(\mathcal{L}) \oplus \mathcal{K}'(\mathcal{L})$ . Le forme  $e^{\mathcal{L}}$  permet d'identifier  $\mathcal{K}'(\mathcal{L})$  avec le dual  $\widehat{\mathcal{K}(\mathcal{L})} = \text{Hom}(\mathcal{K}(\mathcal{L}), k^*)$  lorsque  $k$  est algébriquement clos.

On appelle *type de  $\mathcal{L}$*  et on note  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_g)$  le  $g$ -uplet des diviseurs élémentaires du groupe fini  $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ . On pose alors :

$$K(\mathbf{d}) = \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}/d_i \mathbb{Z}, \quad \widehat{K(\mathbf{d})} = \text{Hom}(K(\mathbf{d}), k^*), \quad H(\mathbf{d}) = K(\mathbf{d}) \oplus \widehat{K(\mathbf{d})}.$$

On définit de plus l'ensemble :

$$G(\mathbf{d}) = k^* \times K(\mathbf{d}) \times \widehat{K(\mathbf{d})},$$

que l'on munit de la loi de groupe :

$$(\alpha, x, l) \cdot (\alpha', x', l') = (\alpha \cdot \alpha' \cdot l'(x), x + x', l + l').$$

Le corollaire de [Mum66] p. 294 nous fournit, si  $\mathcal{L}$  est de type  $\mathbf{d}$ , un isomorphisme entre la suite exacte (\*) et la suite exacte suivante :

$$\{1\} \rightarrow k^* \rightarrow G(\mathbf{d}) \rightarrow H(\mathbf{d}) \rightarrow 0. \quad (**)$$

On définit ensuite (par les commutateurs, comme pour  $e^{\mathcal{L}}$ ) une forme  $e^{\mathbf{d}}$  bilinéaire alternée non dégénérée sur  $H(\mathbf{d})$  qui admet pour sous-espaces isotropes les  $K(\mathbf{d})$  et  $\widehat{K(\mathbf{d})}$ .

Le groupe admet alors une représentation naturelle dans le  $k$ -espace vectoriel  $\Gamma(A, \mathcal{L})$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soient } z = (x, \varphi) \in \mathcal{G}(\mathcal{L}) \text{ et } s \in \Gamma(A, \mathcal{L}), \\ \text{on définit } U_z : \Gamma(A, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{L}) \text{ en posant : } U_z(s) = \tau_{-x}^*(\phi(s)). \end{array} \right.$$

Cette représentation fait de  $\Gamma(A, \mathcal{L})$  un  $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ -module irréductible (*confer* [Mum66], théorème 2 p. 297).

On définit l'ensemble  $V(\mathbf{d})$  comme étant l'espace des fonctions de  $K(\mathbf{d})$  dans  $k$ . On définit une représentation  $U$  de  $G(\mathbf{d})$  dans  $V((d))$  en posant :

$$\forall y \in K(\mathbf{d}), \quad (U_{(\alpha, x, l)}(f))(y) = \alpha \cdot l(y) \cdot f(x + y).$$

On sait par [Mum66] p. 295 que cette représentation est irréductible. On a alors :

**Proposition-Définition 1.4.5.** (*Mumford*) *Soient  $A/k$  une variété abélienne et  $\mathcal{L}$  un fibré très ample et totalement symétrique sur  $A$ . Choisissons un isomorphisme entre  $\mathcal{G}(\mathcal{L})$  et  $G(\mathbf{d})$  agissant trivialement sur  $k^*$ . Il existe alors un unique (à multiplication par un scalaire non nul près) un isomorphisme du  $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ -module  $\Gamma(A, \mathcal{L})$  vers le  $G(\mathbf{d})$ -module  $V(\mathbf{d})$ . Un tel choix d'isomorphisme est appelée une structure thêta pour la paire  $(A, \mathcal{L})$ .*

Supposons donnée une structure thêta pour  $(A, \mathcal{L})$  et soit  $f : V(\mathbf{d}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{L})$  l'isomorphisme induit, pour  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_g)$  le  $g$ -uplet d'entiers correspondant. Les fonctions caractéristiques fournissent une base de  $V(\mathbf{d})$ . Pour tout  $a \in K(\mathbf{d})$  on définit la fonction  $\delta_a^{\mathbf{d}} \in V(\mathbf{d}) = \Gamma(A, \mathcal{L})$  en posant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta_a^{\mathbf{d}}(x) = 1 & \text{si } x = a \\ \delta_a^{\mathbf{d}}(x) = 0 & \text{si } x \neq a, x \in K(\mathbf{d}). \end{array} \right.$$

La famille de sections globales  $\delta^{\mathcal{L}} := (\delta_a^{\mathcal{L}})_{a \in K(\mathbf{d})} = (f(\delta_a^{\mathbf{d}}))_{a \in K(\mathbf{d})}$  fournit alors un plongement projectif de  $A$  noté  $\Theta_{\mathcal{L}}$ . Cette base est appelée *coordonnées de Mumford*.

En suivant [DP02] on va définir un système de coordonnées modifiées afin de tenir compte des caractéristiques thêta. On note tout d'abord  $K_i = K(2^i \mathbf{d})$  et on identifie  $\Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes 2^i})$  et  $V(2^i \mathbf{d})$ . On suppose que les structures thêta ainsi fixées sont *compatibles*, ce qui signifiera qu'elles vérifient deux à deux la proposition 7 p. 320 de [Mum66]. On peut donc fixer des coordonnées de Mumford pour chaque niveau  $i$ , que l'on notera  $(\delta_a^{(i)})_{a \in K_i}$ . On définit de plus  $K_i(n) \subset K_i$  le sous-groupe des éléments de  $n$ -torsion. Pour  $i = 0, 2, 4$  on désigne par  $\mathcal{Z}_i$  un système de représentant du quotient  $K_i/K_i(2 \cdot 2^{i/2})$ . On introduit alors les nouvelles coordonnées, pour  $(a, l) \in \mathcal{Z}_i \times \widehat{K_i(2 \cdot 2^{i/2})}$  :

$$\Delta_{(a, l)}^{(i)} = \sum_{c \in K_i(2 \cdot 2^{i/2})} l(c) \delta_{a+c}^{(i)}.$$

On définit alors :

$$\Theta_{\mathcal{L}^{\otimes 2^i}}(P) = \left( \dots : \Delta_{(a, l)}^{(i)}(P) : \dots \right).$$

La collection des coordonnées est définie à un scalaire près, ce qui donne bien un plongement projectif de la variété  $A$ , appelé *coordonnées de Mumford modifiées*. Dans toute la suite on choisira de travailler avec  $i = 2$ .

On va normaliser les points projectifs en divisant par l'une des coordonnées. Ceci fixera le diviseur  $\mathcal{D}$  utilisé pour la suite de notre travail. On va faire le choix de la caractéristique  $(a_0, l_0) \in \mathcal{Z}_2 \times \widehat{K_2(4)}$  correspondant à la caractéristique de Mumford  $[\delta', \delta'']$  donnée en 3.2.5 et on note  $x_0 = \Delta_{(a_0, l_0)}^{(2)}$ . On définit alors, pour tout point  $P$  hors du diviseur  $\mathcal{D} = (x_0 = 0)$  :

$$\tilde{\Theta}(P) = \left( 1, \dots, \frac{\Delta_{(a,l)}^{(2)}(P)}{x_0(P)}, \dots \right).$$

On notera qu'en particulier  $x_0(O_A) = 0$ .

**Définition 1.4.6.** *On appelle hauteur thêta de la variété abélienne polarisée  $(A, \mathcal{L})$  la hauteur projective de l'image de l'origine dans le plongement associé à  $\mathcal{L}^{\otimes 4}$  :*

$$h_{\Theta}(A) := h\left(\Theta_{\mathcal{L}^{\otimes 4}}(O_A)\right).$$

*On peut de plus définir les parties finie  $h_{\text{fini}}(A)$  et archimédienne  $h_{\infty}(A)$  de la hauteur thêta comme suit : il faut avant tout fixer une normalisation pour la hauteur locale de l'origine. Partons de la caractéristique privilégiée  $(a_0, l_0)$ . On sait par le lemme 3.5 p. 654 de [DP02] qu'il existe une caractéristique  $(b_0, k_0)$  telle que  $\Delta_{(b_0, k_0)}^{(2)}(O_A) \neq 0$ . C'est le choix qu'on fera pour trivialisier. On donne alors :*

$$\tilde{\Theta}(O_A) = \left( 0, \dots, 1, \dots, \frac{\Delta_{(a,l)}^{(2)}(O_A)}{\Delta_{(b_0, k_0)}^{(2)}(O_A)}, \dots \right).$$

*On peut alors définir :*

$$h_{\infty}(A) := \sum_{v \in M_k^{\infty}} d_v \log \|\tilde{\Theta}(O_A)\|_v,$$

$$h_{\text{fini}}(A) := \sum_{v \in M_k^0} d_v \log \|\tilde{\Theta}(O_A)\|_v,$$

*et on aura bien entendu :*

$$h_{\Theta}(A) = \frac{1}{d} \left( h_{\infty}(A) + h_{\text{fini}}(A) \right).$$

*Remarque 1 :* En partant d'un fibré ample  $\mathcal{M}$  associé à une polarisation principale, on obtient un fibré très ample et totalement symétrique en prenant la puissance tensorielle quatrième.

*Remarque 2 :* La hauteur thêta définie ici est exactement la hauteur des *thetanullwerte*, image par le plongement thêta complexe de l'origine de la variété abélienne. Les coordonnées de Mumford modifiées correspondent essentiellement au plongement thêta complexe avec caractéristiques; ce fait est détaillé dans [DP02] p. 655 et p. 656 où on trouve la formule :

$$\theta_{ab}(\tau, 2^k z) = \exp(2i\pi {}^t ab) \Delta_{\left(\frac{a}{2^k}, 2^k b\right)}^{(2(k-1))}(z).$$

*Remarque 3 :* La hauteur thêta et la hauteur de Faltings stable sont des hauteurs comparables au sens suivant. Explicitant un résultat de G. Faltings de 1983, J.-B. Bost et S. David montrent (voir par exemple [Rém99], dans lequel on prend  $r = 4$  avec notre choix de plongement thêta) qu'il existe une constante  $M(g) > 0$  telle que pour toute variété abélienne  $A$  principalement polarisée :

$$\left| h'_{\text{st}}(A) - 2h_{\Theta}(A) \right| \leq M(g).$$

On utilisera ce fait notamment dans la partie 2.8.3.

*Remarque 4 :* La hauteur thêta dépend donc d'un choix de plongement projectif contrairement à la hauteur de Faltings, mais elle possède la propriété agréable de se décomposer naturellement en somme de hauteurs locales.

*Remarque 5 :* Il existe des énoncés de minoration de la hauteur thêta, notamment le *matrix lemma* de D. Masser (voir [Mas87] p. 115). S. David et P. Philippon explicitent ce résultat dans [DP02] p. 697 de la manière suivante (où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme euclidienne) :

$$\frac{1}{d} \sum_{v \in M_k^\infty} \|\text{Im } \tau_v\|_2 \leq \frac{8}{\pi} \left( \max\{1, h_{\Theta}(A)\} + 2g^2 \log(4g) \right).$$

## 1.5 Trace archimédienne et discriminants

On définit ici une quantité purement archimédienne qui va rendre compte des contributions aux places archimédiennes de la hauteur d'une variété abélienne. On discute ensuite des notions classiques de discriminants pour les courbes hyperelliptiques.

### Trace archimédienne

On définit ici une quantité qui rend compte de la taille des contributions archimédiennes pour la hauteur d'une variété. Elle est bien sûr comparable au membre de gauche dans l'inégalité du *matrix lemma* donnée dans la remarque 5 ci-avant.

**Définition 1.5.1.** Soit  $A/k$  une variété abélienne principalement polarisée sur un corps de nombre  $k$ . On note  $M_k^\infty$  l'ensemble des places archimédiennes de  $k$  et  $d_v = [k_v : \mathbb{Q}_v]$ .

On a pour tout  $v \in M_k^\infty$  :  $A(\bar{k}_v) \simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau_v\mathbb{Z}^g$ , avec  $\tau_v \in F_g$ . On appelle alors trace archimédienne de  $A$  la quantité :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \mathrm{Tr}(\mathrm{Im} \tau_v).$$

*Remarque 1* : *A priori* la trace archimédienne ainsi définie n'est pas tout à fait intrinsèque. En effet le déterminant des matrices  $\mathrm{Im} \tau_v$  peut être choisi maximal pour l'action de  $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  (au sens de la propriété S1 dans le paragraphe sur l'espace de Siegel) mais cela ne fixe pas forcément la trace des  $\mathrm{Im} \tau_v$ . Pour une variété abélienne principalement polarisée  $A$ , on choisira toujours, parmi les  $\tau_v$  qui maximisent le déterminant de  $\mathrm{Im} \tau_v$ , les  $\tau_v$  maximisant aussi la trace des matrices  $\mathrm{Im} \tau_v$ .

*Remarque 2* : La quantité  $\frac{1}{d} \mathrm{Tr}(A)$  est stable par extension du corps de base. On pourra s'en convaincre en regardant le corollaire 2.8.4.

*Remarque 3* : Le lemme 2.1 p. 517 de [Dav93] combiné à la démonstration du théorème 3.4.9 permet d'obtenir une inégalité entre la trace archimédienne et la somme des contributions archimédiennes de la hauteur thêta. Notons  $\mathcal{Z}$  l'ensemble des caractéristiques. Fixons  $m_0 \in \mathcal{Z}$  la coordonnée par laquelle on divise, on peut écrire, en prenant les notations des fonctions thêta complexes :

$$h_\infty(A) = \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log \max_{m \in \mathcal{Z}} \left| \frac{\theta_m(\tau_v, 0)}{\theta_{m_0}(\tau_v, 0)} \right|.$$

Le lemme de [Dav93] (avec  $z = 0$ ) nous fournit une constante  $c(g) > 0$  ne dépendant que de la dimension telle que :

$$\log \max_{m \in \mathcal{Z}} \left| \theta_m(\tau_v, 0) \right| \leq c(g) \|\mathrm{Im} \tau_v\|,$$

et les détails de la preuve du théorème 3.4.9 fournissent, au moins lorsque  $\tau_v$  est dans un sous-espace du domaine de Siegel  $F_g$  noté  $G_{g,\varepsilon}$  (excluant l'hypersurface d'annulation de  $\theta_{m_0}(\tau_v, 0)$ , voir la définition précise en 3.4.8), une constante  $c'(g) > 0$  telle que :

$$-\log \left| \theta_{m_0}(\tau_v, 0) \right| \leq c'(g) \mathrm{Tr}(\mathrm{Im} \tau_v).$$

Ces deux inégalités fournissent, en sommant toutes les estimations et en majorant simplement  $\|\mathrm{Im} \tau_v\|$  par  $\mathrm{Tr}(\mathrm{Im} \tau_v)$ , une troisième constante  $c''(g) > 0$  telle que, si  $\tau_v \in G_{g,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne :

$$h_\infty(A) \leq c''(g) \mathrm{Tr}(A).$$

## Discriminants

### Discriminant d'une courbe hyperelliptique

Soit  $C$  une courbe hyperelliptique de genre  $g$  définie sur un corps  $k$ , munie d'un point  $P_0$  rationnel sur  $k$  (ce point sera placé à l'infini). On peut en donner un modèle affine :

$$E : y^2 + q(x)y = p(x),$$

avec  $\deg(q) \leq g$  et  $\deg(p) = 2g + 1$ .

On définit alors en suivant [Loc94] le discriminant du modèle hyperelliptique  $E$  :

$$\Delta_E = 2^{4g} \operatorname{disc} \left( p(x) + \frac{1}{4}q(x) \right).$$

Le fait important est que ce discriminant caractérise la mauvaise réduction du modèle (voir là aussi [Loc94]) :

$$\Delta_E = 0 \iff E \text{ est singulier.}$$

### Discriminant minimal

Soit  $v$  une place finie du corps  $k$ . Parmi tous les modèles hyperelliptiques entiers sur  $\mathcal{O}_v$  de  $(C, P_0)$ , on peut en trouver un qui minimise la quantité  $v(\Delta)$ . On appelle alors discriminant minimal local l'idéal  $\mathfrak{p}^{v(\Delta_v)}$ . Le discriminant minimal de la courbe  $C$  (munie du point  $P_0$ ) sera alors le produit des discriminants minimaux locaux :

$$\mathfrak{D}_{C/k} = \prod_{v \in M_k^0} \mathfrak{p}_v^{v(\Delta_v)}.$$

Une équation hyperelliptique dont le discriminant est le discriminant minimal global sera appelée équation minimale globale. Il est parfois possible d'en trouver une, par exemple dans le cas où l'anneau des entiers de  $k$  est principal. On pourra se reporter à la proposition 2.8 de [Loc94] ou à la proposition 2 de [Liu96]. On trouve dans [Liu96] une étude plus poussée sur les discriminants et discriminants minimaux, que l'on utilisera au chapitre 2. On utilisera plutôt les calculs de [Loc94] au chapitre 3, ainsi que dans un corollaire du chapitre 2. On notera souvent  $\Delta_{\min}$  pour le discriminant minimal (lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps).

*Remarque* : Il serait intéressant d'obtenir une comparaison entre le logarithme de la norme du discriminant d'une courbe hyperelliptique  $C$  et la somme des contributions aux places finies de la hauteur thêta  $h_{\text{fini}}(\operatorname{Jac}(C))$ .

## 1.6 Additivité de l'énoncé

On donne ici des informations concernant les produits de variétés abéliennes et les choix de polarisations.

## Produit de variétés abéliennes

Soient  $(A_1, \mathcal{D}_1)$  et  $(A_2, \mathcal{D}_2)$  des variétés abéliennes définies sur  $k$ , avec  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  des diviseurs associés à des polarisations principales. Alors la variété abélienne principalement polarisée  $(A, \mathcal{D}) = (A_1 \times A_2, \mathcal{D}_1 \times \{O_{A_2}\} + \{O_{A_1}\} \times \mathcal{D}_2)$  vérifie les relations suivantes, pour tout point  $P = (P_1, P_2)$  :

$$\begin{cases} \widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) = \widehat{h}_{A_1, \mathcal{D}_1}(P_1) + \widehat{h}_{A_2, \mathcal{D}_2}(P_2), \\ h_{\mathbb{F}}(A/k) = h_{\mathbb{F}}(A_1/k) + h_{\mathbb{F}}(A_2/k). \end{cases}$$

Toute information obtenue sur les variétés abéliennes simples aura donc des conséquences sur les variétés abéliennes composées.

## Polarisations

On va restreindre l'étude aux variétés abéliennes principalement polarisées. Il est souvent possible dans les travaux portant sur les variétés abéliennes d'étendre des résultats obtenus sur les variétés abéliennes principalement polarisées aux variétés abéliennes munies d'une polarisation quelconque. En effet pour toute variété abélienne  $A$ , le lemme de Zarhin (dont on trouve une preuve dans [MB85b] p. 205) nous assure que  $A^4 \times \check{A}^4$ , où  $\check{A}$  est la variété abélienne duale de  $A$ , peut être munie d'une polarisation principale dont le diviseur associé sera noté  $\mathcal{D}$ .

Dans l'étude de l'inégalité de Lang et Silverman, pour le membre de droite on a l'égalité  $h_{\mathbb{F}}(A/k) = h_{\mathbb{F}}(\check{A}/k)$ . Par contre, pour un diviseur  $\mathcal{D}_1$  ample sur  $A$ , il n'est pas évident de déduire d'une minoration de  $\widehat{h}_{A, \mathcal{D}_1}$  d'une minoration de  $\widehat{h}_{A^4 \times \check{A}^4, \mathcal{D}}$ .

On peut cependant utiliser le fait suivant : une variété abélienne polarisée est isogène à une variété abélienne principalement polarisée (on pourra consulter l'article de Milne sur les variétés abéliennes dans l'ouvrage [CS86]). On a la proposition suivante, qui se démontre comme en 5.1.2 :

**Proposition 1.** *Soit  $g \geq 2$  un entier. Soient  $k$  un corps de nombres et  $v$  une place archimédienne de  $k$ . Soient  $(A, \mathcal{D})/k$  une variété abélienne polarisée de dimension  $g$  et  $A'/k$  une variété abélienne principalement polarisée isogène à  $A$ . On note  $\Phi : A \rightarrow A'$  l'isogénie.*

*Supposons que l'inégalité de Lang et Silverman soit vérifiée pour toute variété abélienne principalement polarisée. Alors il existe une constante  $c_1(k, g, \Phi) > 0$  telle que pour tout point  $P \in A(k)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne :*

$$\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) \geq c_1(k, g, \Phi) \left( h_{\text{st}}(A) - \frac{1}{2} \log(\deg \Phi) \right).$$

## Chapitre 2

# Minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les variétés abéliennes de dimension 2





## Introduction

Ce chapitre est une étude de la situation en dimension 2 ; les variétés abéliennes de dimension 2 principalement polarisées sont, à isomorphisme près (voir [Wei57] p. 37 et la fin de cette introduction), ou bien des produits  $(E_1 \times E_2, \Theta)$  de deux courbes elliptiques, avec  $\Theta = E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2$ , ou bien des jacobienes  $(\text{Jac}(C), \Theta)$  de courbes de genre 2, avec  $\Theta = C$ . Dans le premier cas on peut utiliser la minoration donnée dans le théorème de M. Hindry et J. Silverman rappelé dans l'introduction générale (théorème 1) ou un énoncé dérivé. Dans le second on cherche à minorer la hauteur de Néron-Tate associée au diviseur  $\Theta = C$ .

Nous allons mettre en place une stratégie de minoration proche de celle adoptée par M. Hindry et J. Silverman dans le cas  $g = 1$  en utilisant la décomposition de la hauteur de Néron-Tate en hauteurs locales. Ce qui rend cette démarche possible en dimension 1 est l'existence de formules explicites et relativement manipulables pour ces hauteurs locales. Bien qu'on ne dispose pas de formule dans le cas général, on peut encore obtenir un énoncé en dimension 2.

Si  $A = \text{Jac}(C)$  est la jacobienne d'une courbe de genre 2, avec  $C$  donnée par  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$ , on note  $D = 2^8 \text{disc}(F)$ . Si  $A = E_1 \times E_2$  est un produit de courbes elliptiques, on note  $D = \Delta_{E_1} \Delta_{E_2}$  le produit des discriminants minimaux de  $E_1$  et  $E_2$ .

De plus on note  $\text{Tr}(A) = \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \text{Tr}(\text{Im } \tau_v)$  sa *trace archimédienne*, où  $d_v = [k_v : \mathbb{Q}_v]$  et  $\tau_v$  est une matrice de périodes de  $F_2$  associée au tore complexe :

$$A_v(\bar{k}_v) \simeq \mathbb{C}^2 / (\mathbb{Z}^2 + \tau_v \mathbb{Z}^2).$$

Enfin, on définit deux sous-ensembles du domaine de Siegel  $F_2$  : soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. On note :

$$F_{2,\varepsilon} = \left\{ \tau \in F_2 \mid \begin{cases} \text{Im } \tau_{12} \geq \varepsilon > 0 \\ \text{Im } \tau_1 \geq \max\{1/\varepsilon, \sqrt{3}/2\} \\ \text{Im } \tau_2 \geq 31 \end{cases} \right\}.$$

et :

$$G_{2,\varepsilon} = \left\{ \tau \in F_2 \mid \begin{cases} \text{Im } \tau_{12} \geq \varepsilon > 0 \\ \text{Im } \tau_1 \geq \max\{1/\varepsilon^2, 31\} \end{cases} \right\}.$$

On a bien sûr :  $G_{2,\varepsilon} \subset F_{2,\varepsilon} \subset F_2$ .

Ces deux ensembles visent en fait à exclure des voisinages tubulaires du lieu des produits de courbes elliptiques dans l'espace de module des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 2. On fera attention à la condition supplémentaire qui impose aux coefficients diagonaux d'être d'autant plus grands que l'on souhaite s'approcher du diviseur exclu ; ceci empêche donc de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0. Les voisinages exclus seront donc « tubulaire-hyperbolique ».

Le théorème principal obtenu est le suivant :

**Théorème 2.0.1.** *Soit  $k$  un corps de nombres. Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soient  $C/k$  une courbe de genre 2 donnée dans le modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  et  $A$  sa jacobienne. On suppose que  $A$  vérifie  $\tau_v \in F_{2,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne. Alors il existe une constante  $c_1(d) > 0$  telle que pour tout point  $P \in A(k)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne :*

$$\widehat{h}_{A,\Theta}(P) \geq c_1 \left( \text{Tr}(A) - 63 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) \right).$$

*De plus si  $A$  est un produit de courbes elliptiques on a la même inégalité en remplaçant 63 par 1/7.*

Dans la première partie on commence par décomposer la hauteur de Néron-Tate en hauteurs locales explicites. On s'inspire pour cela l'article de E. V. Flynn et N. P. Smart [FS97]. La deuxième partie est consacrée à la recherche d'une première minoration des hauteurs locales : on utilise là encore la référence [FS97] que l'on prolonge légèrement. La troisième partie donne une autre définition de hauteur locale aux places archimédiennes. On réunit les deux normalisations dans la quatrième. Après avoir effectué ces minoration place par place, on réunit ces informations dans une cinquième partie pour obtenir une minoration globale. On propose dans la sixième partie une majoration de la hauteur de Faltings de la jacobienne d'une courbe de genre 2. La septième partie regroupe des travaux parallèles sur les produits de courbes elliptiques. Enfin, on réunit les résultats des parties 5, 6 et 7 dans une huitième partie regroupant trois corollaires : une minoration de la hauteur de Néron-Tate par la hauteur de Faltings, une borne sur la torsion des variétés abéliennes de dimension 2 et une borne sur le nombre de points rationnels d'une courbe de genre 2. On obtient en particulier :

**Théorème 2.0.2.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$  et soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soient  $C/k$  une courbe de genre 2 donnée par  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  et  $A$  sa jacobienne. On suppose que  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne et que l'on a  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ . Alors il existe une constante  $c = c(d) > 0$  telle que pour tout point  $P \in A(k)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne, on a :*

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c h_{\mathbb{F}}(A/k).$$

Terminons cette introduction en redonnant brièvement l'argument permettant de déduire la structure des variétés abéliennes de dimension 2 principalement polarisées. Soit  $(A, \Theta)$  une telle variété. On a  $\dim(\Theta) = 1$  et  $(\Theta)^{(2)} = 2! = 2$  (par Riemann-Roch, ou bien la formule de Poincaré [LB92] p. 328). Si  $\Theta$  est une courbe  $C$  et  $j : C \hookrightarrow \text{Jac}(C)$  le plongement dans la jacobienne, on montre que  $j(C) + j(C)$  est birationnellement équivalent à  $A$ , ce qui n'est possible que si  $C$  est de genre 2 et  $A \simeq \text{Jac}(C)$ . Si  $\Theta = \sum C_i$  avec  $C_i$  des courbes, on a :

$$2 = (\Theta)^{(2)} = \sum (C_i \cdot C_j),$$

et chaque terme de la somme est un entier naturel. On déduit alors que  $\Theta$  est isomorphe à la somme de deux courbes, qui de plus sont des translatées de sous-variétés abéliennes de  $A$ .

## 2.1 Les hauteurs locales en dimension 2

Les deux premiers paragraphes sont directement issus de l'article de E.V. Flynn et N. Smart [FS97]. On en donne ici une reformulation un peu plus géométrique en omettant la plupart des preuves. Remarquons que l'article original [FS97] est écrit pour  $k = \mathbb{Q}$ , mais on peut tout utiliser, *mutatis mutandis*, sur un corps de nombres  $k$ . Ceci est en fait décrit dans les articles de M. Stoll [Sto99] et [Sto02].

### 2.1.1 Jacobienne et surface de Kummer

On se donne une courbe  $C$  de genre 2 sur un corps de nombres  $k$ . On sait que  $C$  est hyperelliptique, elle possède donc six *points de Weierstrass*, les points fixes de l'involution hyperelliptique. On fait l'hypothèse que l'un de ces points, appelé  $P_0$ , est rationnel sur  $k$ . On note  $\text{cl}$  pour la classe rationnelle d'un diviseur. On définit alors le plongement jacobien de la courbe  $C$  dans sa jacobienne :

$$j : C \hookrightarrow \text{Jac}(C)$$

$$P \mapsto \text{cl} \left( (P) - (P_0) \right).$$

On définit alors  $\Theta = j(C)$ .

*Remarque :* Ce choix de  $P_0$  permet d'affirmer que :

$$P \in \Theta \iff -P \in \Theta.$$

E.V. Flynn et N. Smart explicitent dans l'article [FS97] un choix possible des fonctions hauteurs locales lorsque  $A$  est la jacobienne d'une courbe de genre 2. Nous suivrons pour cela leur normalisation pour les hauteurs locales. Le diviseur qu'ils utilisent n'est pas explicitement cité dans l'article mais nous allons voir qu'il s'agit du diviseur  $\mathcal{D} = 2\Theta$  lorsque le modèle hyperelliptique est de degré 5. Soulignons que ce choix de diviseur est unique à translation par un point de 2-torsion près.

Soient  $k$  un corps de nombres et  $C/k$  une courbe de genre 2. On peut identifier la jacobienne  $\text{Jac}(C)$  au carré symétrique de la courbe,  $\text{Sym}^2(C)$ , dans lequel il faut contracter un diviseur (qui correspond au diviseur exceptionnel d'un éclatement d'un point de  $\text{Jac}(C)$ ). Ce procédé est bien décrit dans [Mum75] p. 52. La surface de Kummer  $K$  est définie comme le quotient  $\text{Jac}(C)/(\pm 1)$ . Elle se plonge dans  $\mathbb{P}^3$ . On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sym}^2(C) & \xrightarrow{\kappa} & K \subset \mathbb{P}^3 \\
\pi \downarrow & \nearrow \kappa_{2\Theta} & \\
\mathrm{Jac}(C) & & 
\end{array}$$

Voyons cela plus en détails : comme on a supposé que  $P_0$  est un point de Weierstrass rationnel sur  $k$ , on peut se donner un modèle hyperelliptique de la courbe  $C$  entier sur  $k$  de degré impair, avec  $a_5 \neq 0$  et sans racine multiple :

$$C : y^2 = F(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Contrairement au modèle plus général de degré 6, il n'y a dans ce modèle qu'un point à l'infini :  $P_0 = \infty$ . L'étude de [FS97] est menée en degré 6, le cas quintique est plus simple et inclus dans leur travail (il suffit de prendre  $f_6 = 0$  dans leur notation).

On note  $A = \mathrm{Jac}(C)$  la jacobienne de  $C$ . L'involution hyperelliptique donnée sur la courbe  $C$  par  $i : (x, y) \rightarrow (x, -y)$  induit la multiplication par  $[-1]$  sur  $A$ . On considère le quotient de  $A$  par  $(\pm 1)$ . La surface  $K$  est donnée par l'équation quartique homogène suivante (donnée dans [Fly95] ou [CF96] p. 19 et reprise dans l'annexe 5.2.1) :

$$R(k_1, k_2, k_3)k_4^2 + S(k_1, k_2, k_3)k_4 + T(k_1, k_2, k_3) = 0.$$

On peut donner les points de  $K$  par l'application :

$$\kappa : \mathrm{Sym}^2(C) \longrightarrow K \subset \mathbb{P}^3$$

$$\kappa : P = (P_1, P_2) \longmapsto K_P = (k_1, k_2, k_3, k_4),$$

où on a défini pour un point  $P = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$  hors du support du diviseur  $\Theta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
k_1 = 1, \\
k_2 = x_1 + x_2, \\
k_3 = x_1x_2, \\
k_4 = \left( \begin{array}{l}
2a_0 + a_1(x_1 + x_2) + 2a_2x_1x_2 + a_3(x_1^2x_2 + x_1x_2^2) \\
+ 2a_4x_1^2x_2^2 + a_5(x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3) - 2y_1y_2
\end{array} \right) / (x_1 - x_2)^2
\end{array} \right.$$

Pour un point  $P = ((x_1, y_1), \infty)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
k_1 = 0, \\
k_2 = 1, \\
k_3 = x_1, \\
k_4 = a_5x_1^2.
\end{array} \right.$$

Le diviseur  $\mathcal{D}'$  sur  $\text{Sym}^2(C)$  associé à  $(k_1 = 0)$  est donné par  $\mathcal{D}' = 2(C \times \{\infty\})$ . Ce diviseur  $\mathcal{D}'$  s'envoie donc *via* l'application  $\pi : \text{Sym}^2(C) \rightarrow \text{Jac}(C)$  sur le diviseur  $\mathcal{D} = 2\Theta$ .

Choisissons alors un plongement  $k \hookrightarrow_v \mathbb{C}$ . Les points complexes de  $(\text{Jac}(C), \Theta)$  forment un tore complexe qu'on normalise ainsi :  $\text{Jac}(C)(\mathbb{C}) \simeq A_{\tau_v}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2$ , avec  $\tau_v$  une matrice obtenue en calculant les périodes de la surface de Riemann compacte  $C(\mathbb{C})$ . Le diviseur  $\Theta(\mathbb{C})$  est alors identifié à la courbe  $C(\mathbb{C}) \hookrightarrow A_{\tau_v}(\mathbb{C})$ .

## 2.1.2 Hauteurs

On garde le cadre précédent et on définit suivant [FS97] les hauteurs naïve et canonique d'un point  $P = (P_1, P_2) \in A(k)$ . On va normaliser le point projectif  $K_P$  en fixant la première coordonnée non nulle comme étant égale à 1 (c'est la normalisation choisie dans [FS97]). On peut donc définir la hauteur naïve comme étant :

$$h_K(P) = h(K_P) = \sum_{v \in M_k} n_v \log \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (|k_i|_v),$$

et la hauteur canonique associée :

$$\widehat{h}_{A, 2\Theta}(P) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(K_{[2^n]P})}{4^n},$$

où on note  $K_{[2^n]P}$  l'image sur la surface de Kummer de la multiplication par  $[2^n]$  d'un point  $P$  de la jacobienne ; la surface de Kummer n'a plus la structure de groupe de la jacobienne, mais on peut passer l'application au quotient :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{[2^n]} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/(\pm 1) & \longrightarrow & A/(\pm 1) \end{array}$$

On a choisi de travailler avec la multiplication par  $[2]$ . En effet il existe des formules explicites de duplication sur la surface de Kummer : prenons un point  $K_P$ , alors la formule de duplication est donnée par des polynômes homogènes explicites (donnés sur le site internet de V. Flynn et reproduites dans l'annexe 5.2) notés  $\delta(K_P) = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$  de degré total 4 en les  $k_i$ . Avec la normalisation choisie ici, on aura donc (lorsque  $P$  et  $[2]P$  sont hors du support du diviseur  $\Theta$ ) :

$$K_{[2]P} = \frac{\delta(K_P)}{\delta_1(K_P)}.$$

La hauteur locale naïve en une place  $v$  est définie par :

$$\lambda_{2\Theta, v} : (k_1, k_2, k_3, k_4) \longmapsto \log \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (|k_i|_v).$$

*Remarque* : Cette construction doit être vue comme l’analogie de la hauteur locale sur une courbe elliptique  $\lambda_v(P) = \log |x(P)|_v$ , où  $x(P)$  est la coordonnée d’un point  $P$  dans un modèle de Weierstrass.

Calculons alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{2\Theta,v}(K_{[2]P}) - 4\lambda_{2\Theta,v}(K_P) &= \log \frac{\max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (|k_i([2]P)|_v)}{\max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (|k_i(P)|_v^4)} \\ &= -\log |\delta_1(K_P)|_v + \log \frac{\max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (|\delta_i(K_P)|_v)}{\max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (|k_i(P)|_v^4)}. \end{aligned}$$

Toujours en suivant [FS97] on définit la hauteur locale canonique d’un point  $P \in A(k)_{2\Theta}$  comme suit, en posant tout d’abord :

$$E_v(K_P) := \frac{\max(|\delta_i(K_P)|_v)}{\max(|k_i(P)|_v^4)}$$

et :

$$\mu_{2\Theta,v}(K_P) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \log \left( E_v(K_{[2^n]P}) \right).$$

*Remarque* : Cette quantité  $\mu_{2\Theta,v}(K_P)$  ne dépend pas de la normalisation du point projectif. Il est intéressant de remarquer que la preuve du lemme 3 de [FS97] utilise une normalisation différente du reste de l’article.

Alors on définit la hauteur locale canonique :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) = \lambda_{2\Theta,v}(K_P) + \mu_{2\Theta,v}(K_P).$$

Lorsque  $K_{[2]P}$  est lui aussi hors du support du diviseur  $2\Theta$ , cette hauteur locale canonique vérifie l’équation fonctionnelle :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([2]P) - 4\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) = -\log |\delta_1(K_P)|_v = v(f(P)),$$

avec  $\text{div}(f) = [2]^*(2\Theta) - 4(2\Theta)$ .

D’après le théorème 4 de l’article [FS97] (qui ne dépend pas de la normalisation projective choisie pour le point  $P$ ) on a bien pour  $P \in A(k)_\Theta$  (i.e. hors du support du diviseur  $\Theta$ ) :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) = \sum_{v \in M_k} n_v \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P).$$

## 2.2 Premières minorations

On montre dans cette partie pourquoi la normalisation des hauteurs locales présentée dans la partie précédente pose des problèmes lorsqu’on cherche à minorer ces fonctions. Le premier paragraphe, concernant les places finies, sera utile dans toute la suite, celui sur les places archimédiennes n’est inclus ici que pour justifier les travaux de la partie suivante.

## 2.2.1 Minorations locales aux places finies

### Notations

Soit  $C$  une courbe de genre 2 définie sur un corps  $k$ . Elle admet un modèle hyperelliptique entier de la forme :

$$y^2 = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = F(x),$$

et on décompose  $F$  (quitte à augmenter le corps de nombres  $k$ , ce qui n'affectera pas le calcul final) en un produit de polynômes de degré 2 (dont les coefficients sont des entiers algébriques) :

$$y^2 = P(x)Q(x)R(x) = (f_1x^2 + g_1x + h_1)(f_2x^2 + g_2x + h_2)(f_3x^2 + g_3x + h_3).$$

Dans notre cadre, puisqu'on a fait l'hypothèse qu'il existe un point de Weierstrass rationnel sur  $k$ , on pourra prendre dans toute la suite  $a_6 = 0$  et  $f_1 = 0$ , avec  $a_5 \neq 0$ ,  $f_2 \neq 0$  et  $f_3 \neq 0$ .

On sait d'après le lemme 2 de l'article [FS97] p. 336 qu'il est possible de choisir cette décomposition de telle sorte que  $\Delta_{PQR}$  soit non nul, où on a posé :

$$\Delta_{PQR} = \det \begin{bmatrix} h_1 & g_1 & f_1 \\ h_2 & g_2 & f_2 \\ h_3 & g_3 & f_3 \end{bmatrix}.$$

Notons que la preuve du lemme 2 de [FS97] est plus simple lorsque  $a_6 = 0$ , puisqu'on n'a pas besoin de changer de variable pour se ramener au cas des quintiques. On pose alors :

$$\begin{cases} b_1 = \text{Res}(P, Q) \text{Res}(P, R) \\ b_2 = \text{Res}(Q, P) \text{Res}(Q, R) \\ b_3 = \text{Res}(R, P) \text{Res}(R, Q). \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{disc}(F) &= \text{disc}(P) \text{disc}(Q) \text{disc}(R) \text{Res}(Q, R)^2 \text{Res}(R, P)^2 \text{Res}(P, Q)^2 \\ &= \text{disc}(P) \text{disc}(Q) \text{disc}(R) b_1 b_2 b_3. \end{aligned}$$

On notera que le discriminant  $\text{disc}(F)$  est nul modulo une place  $v$  finie si et seulement si la réduction de  $F$  modulo  $v$  en admet une racine double, donc aux places où le modèle est singulier. Il faut cependant prendre des précautions avec les places divisant 2 ; on peut, en suivant [Loc94], corriger le discriminant de telle sorte qu'il tienne compte de la réduction en 2.



Soit  $\widehat{C}$  la courbe isogène à  $C$  *via* la correspondance de Richelot (voir [FS97] et [BM88]). La courbe  $\widehat{C}$  est donnée par l'équation :

$$\Delta_{PQR}y^2 = \widehat{P}(x)\widehat{Q}(x)\widehat{R}(x) = \widehat{F}(x),$$

où l'on a noté :

$$\begin{cases} \widehat{P}(X) := [Q, R](X) = (Q'R - QR')(X) \\ \widehat{Q}(X) := [R, P](X) = (R'P - RP')(X) \\ \widehat{R}(X) := [P, Q](X) = (P'Q - PQ')(X). \end{cases}$$

On a :  $\widehat{P}(X) = (f_2g_3 - f_3g_2)X^2 + 2(f_2h_3 - f_3h_2)X + (g_2h_3 - g_3h_2)$ .

On définit une application sur les matrices :  $\mathbf{s} : (m_{i,j})_{i,j} \rightarrow (m_{i,j}^2)_{i,j}$ .

La multiplication par [2] sur la surface de Kummer associée à  $C$  s'explicite alors en :

$$\delta(K_P) = W_1\mathbf{s}W_2\mathbf{s}W_3K_P,$$

où on définit des matrices  $W_i$  suivant [Fly95] p. 3012 (avec  $\Delta = \Delta_{PQR}$ , et où les coefficients étoilés sont des polynômes en les  $f, g, h$  définis dans la même référence ; on remarquera qu'on peut prendre un des  $f$  égal à 0) :

$$W_3 := \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{b_1} & \sqrt{b_2} & \sqrt{b_3} \\ 1 & \sqrt{b_1} & -\sqrt{b_2} & -\sqrt{b_3} \\ 1 & -\sqrt{b_1} & \sqrt{b_2} & -\sqrt{b_3} \\ 1 & -\sqrt{b_1} & -\sqrt{b_2} & \sqrt{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & * & * & * \\ 0 & g_3h_2 - g_2h_3 & f_3h_2 - f_2h_3 & f_3g_2 - f_2g_3 \\ 0 & g_1h_3 - g_3h_1 & f_1h_3 - f_3h_1 & f_1g_3 - f_3g_1 \\ 0 & g_2h_1 - g_1h_2 & f_2h_1 - f_1h_2 & f_2g_1 - f_1g_2 \end{bmatrix}.$$

Puis :

$$W_2 := \widehat{W}_3V,$$

où le chapeau sur la matrice signifie qu'on prend la matrice  $W_3$  avec les coefficients du polynôme  $\widehat{F}$  de la courbe  $\widehat{C}$  et :

$$V := \begin{bmatrix} 2\Delta & * & * & * \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_1 & -f_2 & -f_3 \\ 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ 0 & -h_1 & -h_2 & -h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/\sqrt{b_1} & 1/\sqrt{b_1} & -1/\sqrt{b_1} & -1/\sqrt{b_1} \\ 1/\sqrt{b_2} & -1/\sqrt{b_2} & 1/\sqrt{b_2} & -1/\sqrt{b_2} \\ 1/\sqrt{b_3} & -1/\sqrt{b_3} & -1/\sqrt{b_3} & 1/\sqrt{b_3} \end{bmatrix}.$$

On donne finalement :

$$W_1 := U\widehat{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \widehat{V}.$$

On note pour une place  $v$  de  $k$  :  $\|(a_{i,j})\|_v = \max\{|a_{i,j}|_v\}$ . Pour une place finie  $v$  on notera  $N_{k/\mathbb{Q}}(v)$  la norme de l'idéal de  $\mathcal{O}_k$  associé à  $v$  et pour un idéal  $\mathfrak{a}$  on définit  $\text{ord}_v(\mathfrak{a})$  l'exposant de l'idéal associé à  $v$  dans la décomposition de  $\mathfrak{a}$  en idéaux premiers. On pose alors pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  :

$$N_{k/\mathbb{Q}}(v)^{w_i(v)} := \|W_i^{-1}\|_v.$$

## Minorations

Ce paragraphe permet d'obtenir une minoration des hauteurs locales aux places finies en utilisant des calculs élémentaires. Mise en garde pour le lecteur : il existe un résultat de M.Stoll dans [Sto99] qui permet d'obtenir un peu mieux au niveau des constantes que celui présenté ici, mais faisant appel à une preuve plus difficile. Le résultat déduit des travaux de M.Stoll est donné à la fin du paragraphe, proposition 2.2.6, et sera bien entendu celui utilisé dans la suite du texte.

On s'intéresse aux hauteurs locales associées à une place finie  $v$  du corps  $k$ , la place  $v$  étant au-dessus d'un nombre premier  $p$ . D'après l'article de E. V. Flynn et N. P. Smart ([FS97]) la hauteur locale se décompose en deux parties notées  $\lambda_{2\Theta,v}$  et  $\mu_{2\Theta,v}$  que l'on calcule sur la variété de Kummer issue de la jacobienne considérée. Plus précisément pour un point  $P \in \text{Jac}(C)(k)$  hors du support du diviseur  $2\Theta$  on a :  $\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) = \lambda_{2\Theta,v}(K_P) + \mu_{2\Theta,v}(K_P)$ .

On sait que  $\lambda_{2\Theta,v}(K_P) \geq 0$  par définition (voir plus haut ou bien [FS97] p. 340) et que :

$$\mu_{2\Theta,v}(K_P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \varepsilon_v(K_{[2^n]P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \log \left( E_v(K_{[2^n]P}) \right).$$

Alors par le lemme 3 p. 338 de [FS97] (établi pour  $k = \mathbb{Q}$  mais valable pour une extension finie) :

$$N_{k/\mathbb{Q}}(v)^{-(w_1(v) + 2w_2(v) + 4w_3(v))} \leq E_v(K_P) \leq 1.$$

On a donc :

$$0 \geq \mu_{2\Theta,v}(K_P) \geq - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w_1(v) + 2w_2(v) + 4w_3(v))}{4^{n+1}} \log N_{k/\mathbb{Q}}(v),$$

donc :

$$0 \geq \mu_{2\Theta,v}(K_P) \geq \frac{-(w_1(v) + 2w_2(v) + 4w_3(v))}{3} \log N_{k/\mathbb{Q}}(v).$$

Nous allons à présent estimer ce minorant et ainsi prolonger [FS97] en calculant les nombres  $w_i(v)$  grâce à la formule de la comatrice :

$$W_i^{-1} = \left( \det W_i \right)^{-1} {}^t \text{com}(W_i).$$

Pour  $i = 3$ , dans un modèle entier la matrice  $W_3$  est à coefficients entiers donc la matrice  $\text{com}(W_3)$  aussi, donc  $\|\text{com}(W_3)\|_v \leq 1$ . Ainsi :

$$\|W_3^{-1}\|_v \leq \left| \left( \det W_3 \right)^{-1} \right|_v = N_{k/\mathbb{Q}}(v)^{\text{ord}_v(\det W_3)}.$$

Pour  $i = 2$  cette estimation devient :

$$\|W_2^{-1}\|_v \leq \left| \left( \det W_2 \right)^{-1} \left( b_1 b_2 b_3 \right)^{-\frac{1}{2}} \right|_v = N_{k/\mathbb{Q}}(v)^{\text{ord}_v(\det W_2) + \frac{1}{2} \text{ord}_v(b_1 b_2 b_3)}.$$

Pour  $i = 1$  on obtient enfin :

$$\|W_1^{-1}\|_v \leq \left| \left( \det W_1 \right)^{-1} \left( \widehat{b}_1 \widehat{b}_2 \widehat{b}_3 \right)^{-\frac{1}{2}} \right|_v = N_{k/\mathbb{Q}}(v)^{\text{ord}_v(\det W_1) + \frac{1}{2} \text{ord}_v(\widehat{b}_1 \widehat{b}_2 \widehat{b}_3)}.$$

**Lemme 2.2.1.** *Un calcul direct donne :*

$$\begin{aligned} \det W_1 &= -2^{11} \widehat{\Delta}_{PQR}^5 (\widehat{b}_1 \widehat{b}_2 \widehat{b}_3)^{-1/2}, \\ \det W_2 &= 2^9 \Delta_{PQR}^5 \widehat{\Delta}_{PQR}^3 (\widehat{b}_1 \widehat{b}_2 \widehat{b}_3)^{1/2} (b_1 b_2 b_3)^{-1/2}, \\ \det W_3 &= 2^4 \Delta_{PQR}^3 (b_1 b_2 b_3)^{1/2}. \end{aligned}$$

**Lemme 2.2.2.** *On a la formule :*

$$\widehat{\Delta}_{PQR} = 2 \Delta_{PQR}^2,$$

et en utilisant les relations :

$$\begin{cases} \text{disc}([Q, R]) = 4 \text{Res}(Q, R) \\ \text{Res}([Q, R], [R, P]) = \Delta_{PQR}^2 \text{disc}(R), \end{cases}$$

on obtient :

$$\text{disc}(\widehat{F}) = 2^6 \Delta_{PQR}^{12} \text{disc}(F)^2 \left( \text{Res}(Q, R) \text{Res}(R, P) \text{Res}(P, Q) \right)^{-3}.$$

*Démonstration.* On exprime :

$$\widehat{\Delta}_{PQR} = \det \begin{bmatrix} (g_3 h_2 - g_2 h_3) & 2(f_3 h_2 - f_2 h_3) & (f_3 g_2 - f_2 g_3) \\ (g_1 h_3 - g_3 h_1) & 2(f_1 h_3 - f_3 h_1) & (f_1 g_3 - f_3 g_1) \\ (g_2 h_1 - g_1 h_2) & 2(f_2 h_1 - f_1 h_2) & (f_2 g_1 - f_1 g_2) \end{bmatrix} = 2 \det \left( \text{com}(M) \right),$$

où on a noté :

$$M = \begin{bmatrix} f_1 & -g_1 & h_1 \\ f_2 & -g_2 & h_2 \\ f_3 & -g_3 & h_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $M$  est de déterminant  $\Delta_{PQR}$ . Or en prenant le déterminant de la formule  ${}^t \text{com}(M)M = \det(M)I_3$  on obtient l'égalité  $\det(\text{com}(M)) = \det(M)^2$ . Pour le calcul du discriminant, il suffit d'utiliser les relations :

$$\text{disc}(F) = \text{disc}(P) \text{disc}(Q) \text{disc}(R) b_1 b_2 b_3,$$

$$\text{disc}(\widehat{F}) = \text{disc}(\widehat{P}) \text{disc}(\widehat{Q}) \text{disc}(\widehat{R}) \widehat{b}_1 \widehat{b}_2 \widehat{b}_3.$$

□

En utilisant les lemmes 2.2.1 et 2.2.2 on obtient :

**Proposition 2.2.3.** *On a les majorations :*

$$w_1(v) \leq 16 \text{ord}_v(2) + 10 \text{ord}_v(\Delta_{PQR}),$$

$$w_2(v) \leq 12 \text{ord}_v(2) + 14 \text{ord}_v(\Delta_{PQR}) + \frac{1}{2} \text{ord}_v(\text{disc}(F)),$$

$$w_3(v) \leq 4 \text{ord}_v(2) + 3 \text{ord}_v(\Delta_{PQR}) + \frac{1}{2} \text{ord}_v(\text{disc}(F))$$

et :

$$w_1(v) + 2w_2(v) + 4w_3(v) \leq 57 \text{ord}_v(2) + 51 \text{ord}_v(\Delta_{PQR}) + 3 \text{ord}_v(\text{disc}(F)).$$

**Notation 2.2.4.** *Considérons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des décompositions  $F = PQR$  telles que  $\Delta_{PQR}$  soit non nul. On note :*

$$\widetilde{\Delta} = \text{pgcd} \left\{ \Delta_{PQR} \mid (P, Q, R) \in \mathcal{F} \right\},$$

où le symbole  $\text{pgcd}$  est pris comme étant le produit des idéaux avec les plus petites puissances dans la décomposition en idéaux premiers.

**Proposition 2.2.5.** *La hauteur locale aux places finies peut être minorée de la façon suivante (pour  $P$  hors du support du diviseur) :*

$$\widehat{\lambda}_{2\theta, v}(P) \geq - \left( 19 \text{ord}_v(2) + 17 \text{ord}_v(\widetilde{\Delta}) + \text{ord}_v(\text{disc}(F)) \right) \log N_{k/\mathbb{Q}}(v).$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser les inégalités précédentes et de remarquer que le membre de gauche ne dépend pas de la décomposition  $F = PQR$ . On peut donc toujours choisir la décomposition donnant le plus petit ordre  $\text{ord}_v(\Delta_{PQR})$  en chaque place finie  $v$ .  $\square$

*Remarque :* La méthode utilisée ici est élémentaire mais pas assez fine pour éviter le terme en «  $\Delta$  » provenant de la correspondance de Richelot sur la courbe de genre 2 étudiée. On n'ajoute cependant pas de « mauvaises places » car d'après le lemme 2 de [FS97] p. 336 si  $\tilde{\Delta} = 0$  alors la courbe a au moins un point double (la réciproque n'est pas vraie en général). On sait donc qu'il existe une constante  $c$  telle que  $\tilde{\Delta} |(\text{disc}(F))^c$ . On peut cependant faire mieux :

**Proposition 2.2.6.** *La hauteur locale aux places finies peut être minorée de la façon suivante (pour  $P$  hors du support du diviseur  $\Theta$ ) :*

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) \geq -\frac{1}{3} \left( 4 \text{ord}_v(2) + \text{ord}_v(\text{disc}(F)) \right) \log N_{k/\mathbb{Q}}(v).$$

*Démonstration.* En étudiant des représentations du sous-groupe de 2-torsion de la jacobienne, M.Stoll ([Sto99], théorème 6.1) a obtenu la minoration :

$$E_v(K) \geq \left| 2^4 \text{disc}(F) \right|_v.$$

Ceci donne directement l'amélioration souhaitée par rapport au théorème 2.2.5. Remarquons qu'il est possible d'utiliser ce résultat de Stoll (écrit pour des sextiques) en prenant l'un des coefficients  $\beta_j$  égal à 0 dans son paragraphe 3. Cela induit les mêmes changements que pour les travaux de V. Flynn puisqu'il utilise le même plongement et les mêmes matrices agissant sur  $\mathbb{P}^3$ .  $\square$

## 2.2.2 Minorations locales aux places archimédiennes

Dans un premier temps, on propose une minoration de la hauteur locale archimédienne définie comme précédemment, i.e. comme dans l'article [FS97]. On se donne un modèle hyperelliptique entier du type (avec  $f_1 = 0$  par exemple) :

$$y^2 = P(x)Q(x)R(x) = (f_1x^2 + g_1x + h_1)(f_2x^2 + g_2x + h_2)(f_3x^2 + g_3x + h_3).$$

On pose alors :

$$h_v(P, Q, R) := \log \max_{i \in \{1,2,3\}} \left( |f_i|_v, |g_i|_v, |h_i|_v \right).$$

Posons de plus pour  $M = (m_{i,j})$  une matrice carrée de taille  $n$  à coefficients dans  $k$  :

$$h_v(M) := \log \max_{(i,j)} |m_{i,j}|_v + \log(n).$$

En gardant les mêmes notations que dans la partie précédente on a alors le lemme :

**Lemme 2.2.7.** *Un calcul direct donne :*

$$h_v(W_1^{-1}) \leq 39 \log 2 + 13 \log 3 + 54h_v(P, Q, R),$$

$$h_v(W_2^{-1}) \leq 35 \log 2 + 13 \log 3 + 57h_v(P, Q, R),$$

$$h_v(W_3^{-1}) \leq -\log 2 + \log 3 + 12h_v(P, Q, R).$$

Nous serons amenés par la suite à nous servir du lemme suivant :

**Lemme 2.2.8.** *Soit  $S$  un diviseur du polynôme  $T$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , avec  $\deg(T) \geq \deg(S) \geq 1$  et de coefficient dominant plus petit en module que le coefficient dominant de  $T$ . Alors on a :*

$$\|S\|_\infty \leq 2^{\deg S} (\deg T + 1)^{\frac{1}{2}} \|T\|_\infty.$$

*Démonstration.* On a tout d'abord l'inégalité classique :  $\|S\|_\infty \leq \|S\|_2$ .

On utilise ensuite la mesure de Mahler de  $T = a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ , avec  $a_n \neq 0$ , notée  $M(T)$  et définie comme :

$$M \left( a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \right) = |a_n| \prod_{i=1}^n \max(|\alpha_i|, 1).$$

Posons :

$$U(X) = a_n \prod_{|\alpha_i| \leq 1} (\bar{\alpha}_i X - 1) \prod_{|\alpha_i| > 1} (X - \alpha_i)$$

On a  $M(T) = |U(0)| \leq \|U\|_2 = \|T\|_2$ . De plus les relations coefficients-racines pour le polynôme  $T = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  donnent :

$$|a_i| \leq C_n^i |a_n| \max_{j_1 < \dots < j_i} |\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_i}| \leq C_n^i M(T),$$

ce qui implique :  $\|T\|_2 \leq 2^{\deg T} M(T)$ .

On a alors en appliquant ces inégalités à  $S$  et  $T$  :

$$\|S\|_2 \leq 2^{\deg S} M(S) \leq 2^{\deg S} M(T) \leq 2^{\deg S} \|T\|_2.$$

Il suffit ensuite d'utiliser la comparaison classique :  $\|T\|_2 \leq (\deg T + 1)^{\frac{1}{2}} \|T\|_\infty$ . □

On a alors la minoration :

**Proposition 2.2.9.** *La hauteur locale en une place  $v$  archimédienne peut être minorée de la façon suivante, pour  $P$  un point hors du support du diviseur  $2\Theta$  :*

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(P) \geq -(143 \log 2 + 51 \log 3) - 72h_v(F).$$

*Démonstration.* On a, en utilisant l'expression de la multiplication par [2] sur la surface de Kummer :

$$\log \max_{1 \leq i \leq 4} |\delta(K_P)_i|_v \geq 4 \log \max_{1 \leq i \leq 4} |k_i(P)|_v - 4h_v(W_3^{-1}) - 2h_v(W_2^{-1}) - h_v(W_1^{-1}),$$

ce qui induit :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(P) \geq \frac{1}{3} \left( -4h_v(W_3^{-1}) - 2h_v(W_2^{-1}) - h_v(W_1^{-1}) \right).$$

Il suffit ensuite d'utiliser le lemme 2.2.7 pour obtenir :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(P) \geq -(35 \log 2 + 15 \log 3) - 72h_v(P, Q, R).$$

A partir de là on applique le lemme 2.2.8 aux polynômes  $P, Q, R$  diviseurs du polynôme  $F$ , on obtient :

$$h_v(P, Q, R) \leq 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 6 + h_v(F).$$

□

On voit ainsi que la définition des hauteurs locales archimédiennes normalisées  $\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}$  dans l'article [FS97] ne permet pas d'en donner une minoration explicite apportant une contribution positive lors de la minoration place à place. On va donc proposer dans un premier temps une autre définition de la hauteur locale canonique associée au diviseur  $\Theta$  puis étudier le lien entre ces deux définitions.

## 2.3 Une autre hauteur locale archimédienne

On donne dans cette partie une autre normalisation des hauteurs locales archimédiennes, grâce à l'utilisation des fonctions thêta. Ce lien est donné par A. Néron, voir par exemple l'article fondateur [Nér65] p.329.

### 2.3.1 Définition

On commence ce paragraphe par rappeler la définition des fonctions thêta : soient  $Z \in \mathbb{C}^2$  et  $\tau \in F_2$  :

$$\theta_{a,b}(Z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{2i\pi \left( \frac{1}{2} {}^t(n+a)\tau(n+a) + {}^t(n+a)(Z+b) \right)},$$

où  $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$  forment le *vecteur caractéristique* de la fonction thêta.

Tout vecteur complexe peut se décomposer en  $Z = X + \tau Y$  avec  $X, Y \in \mathbb{R}^2$ .

Le théorème de Riemann (voir par exemple [LB92] p. 330) montre que les points complexes du diviseur  $\Theta$  sont les zéros d'une fonction thêta avec caractéristique (la caractéristique fixant le point de torsion par lequel il faut éventuellement translater, voir par exemple [Mum75] p. 60 et p. 69 et [Mum83] p. 164).

En se reportant à l'analyse menée dans [Mum83] p. 164 et [Mum84] p. 3.80-82, on peut identifier le vecteur caractéristique comme étant  $[a, b] = [1/2, 1/2, 1, 1/2]$ . C'est aussi le choix qui est fait dans [Yos98]. Il est de plus équivalent de prendre la troisième coordonnée égale à zéro.

Fixons alors  $[a, b] = [1/2, 1/2, 0, 1/2]$ . Cette caractéristique est impaire, la fonction thêta considérée vérifie en particulier  $\theta_{a,b}(0) = 0$ . On appelle  $\Theta = \Theta(\mathbb{C})$  son diviseur ; il contient  $O$  dans son support.

Soit  $k$  un corps de nombres. Soient  $C/k$  une courbe de genre 2 et  $A = \text{Jac}(C)$  sa jacobienne, polarisée par  $\Theta$ . Soit  $v$  une place archimédienne et soit  $\tau_v$  l'élément de  $F_2$  correspondant à  $(A(\bar{k}_v), \Theta)$ . On peut alors donner la définition suivante :

**Proposition-Définition 2.3.1.** *A une constante près, la hauteur locale associée au diviseur  $\Theta$  pour la place  $v \in M_k$  archimédienne peut s'exprimer comme suit, pour tout point  $P$  hors du support du diviseur  $\Theta$  et toute coordonnée complexe de  $P$  notée  $Z(P)$  :*

$$\Lambda_{\Theta,v}(P) = -\log \left( \left| \theta_{a,b}(Z(P)) \right|_v e^{-\pi^t \text{Im } Z (\text{Im } \tau_v)^{-1} \text{Im } Z} \right).$$

On peut trouver cette idée d'écriture de la hauteur locale dans l'article [Nér65], p. 329. Cette fonction est bien une fonction sur le tore, on a corrigé la fonction thêta de telle sorte qu'elle soit  $\mathbb{Z}^2 + \tau_v \mathbb{Z}^2$ -périodique. Elle vérifie de plus l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda_{\Theta,v}([2]P) - 4\Lambda_{\Theta,v}(P) = -\log \frac{|\theta_{a,b}(2Z(P))|_v}{|\theta_{a,b}(Z(P))|_v^4} = v(f(P)),$$

avec  $\text{div}(f) = [2]^*\Theta - 4\Theta$ .

### 2.3.2 Evolution du diviseur en dimension 2

Le but de ce paragraphe est de préciser la nature du diviseur  $\Theta$  en dimension 2. Le passage d'une variété abélienne principalement polarisée simple à un produit de courbes elliptiques (principalement polarisé) fait varier certaines propriétés arithmétiques du diviseur (au regard de la torsion par exemple) dont on se sert dans la suite, d'où l'importance des remarques faites ici.

On note la matrice de période :  $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_2 \end{bmatrix}$ .

On sait d'après les travaux de [Igu62] p. 178 et [Wei57] que dans le domaine de Siegel  $F_2$ , seules les matrices  $\tau$  dont le terme non diagonal  $\tau_{12}$  est nul représentent des produits de courbes elliptiques principalement polarisés. On s'intéresse ici à l'évolution du diviseur



$\Theta$  d'une variété abélienne simple principalement polarisée de dimension 2 lorsque  $\tau_{12}$  tend vers 0.

Nous avons fixé le diviseur en fixant le vecteur caractéristique  $[a, b] = [a_1, a_2, b_1, b_2]$  de la fonction  $\theta_{ab}$ . Soit  $Z = (z_1, z_2)$  un élément de  $\mathbb{C}^2$ . Observons alors lorsque  $\tau_{12} \rightarrow 0$  :

$$\theta_{\tau, [a_1, a_2, b_1, b_2]}(Z) \longrightarrow \theta_{\tau_1, [a_1, b_1]}(z_1)\theta_{\tau_2, [a_2, b_2]}(z_2),$$

où  $\theta_{\tau_1, [a_1, b_1]}(\cdot)$  est la fonction thêta de dimension 1.

On obtient donc avec les choix faits ci-avant :

$$\theta_{\tau, [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]}(Z) \longrightarrow \theta_{\tau_1, [\frac{1}{2}, 0]}(z_1)\theta_{\tau_2, [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(z_2).$$

Ceci signifie que lorsque la variété se décompose en produit  $E_1 \times E_2$  de deux courbes elliptiques associées aux périodes  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , le diviseur sur ce produit de courbes est de la forme  $E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2$  ceci à un point de 2-torsion près. Or ce point de 2-torsion est fixé par le choix du vecteur caractéristique. En effet les fonctions  $\theta$  vérifient les relations :

$$\begin{cases} \theta_{ab}(-Z) = e^{4\pi i {}^t ab} \theta_{ab}(Z), \\ \theta_{\tau, ab}(Z) = \theta_{\tau, 00}(Z + \tau a + b) e^{2i\pi(\frac{1}{2} {}^t a \tau a + {}^t a Z + {}^t ab)}. \end{cases}$$

Ces relations nous donnent donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \theta_{\tau_2, [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \right) = \{O\}, \\ \operatorname{div} \left( \theta_{\tau_1, [\frac{1}{2}, 0]} \right) = \left\{ \frac{1}{2} \right\}. \end{cases}$$

On sait donc que, lorsque  $\tau_{12}$  tend vers 0, les choix faits ici imposent au diviseur  $\Theta$  la forme  $E_1 \times \{O\} + \{P_1\} \times E_2$ , où  $P_1$  est le point de 2-torsion dont la coordonnée dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau_1\mathbb{Z}$  est  $\frac{1}{2}$ .

## 2.4 Différences de hauteurs locales

On montre dans cette partie comment tirer parti à la fois des informations aux places finies issues de la normalisation des hauteurs locales au sens de Flynn-Smart (donnée dans le paragraphe 2.1.2) et des calculs menés sur les fonctions thêta.

### 2.4.1 Discussion autour de la torsion

On va à présent comparer les hauteurs locales canoniques associées aux diviseurs  $\Theta$  et  $2\Theta$ . On rappelle la notation  $A_{\mathcal{D}}(k) = A(k) \setminus \mathcal{D}(k)$ .

**Proposition 2.4.1.** *Soit  $v$  une place archimédienne. Soit  $\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}$  la hauteur locale canonique normalisée au sens de Flynn-Smart et définie dans la partie 2.1.2. Soit  $\Lambda_{\Theta,v}$  la hauteur locale archimédienne définie en 2.3.1. Il existe une constante  $C_{\infty,v}$  telle que :*

$$\forall P \in A_{\Theta}(k), \quad \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) = 2\Lambda_{\Theta,v}(P) + C_{\infty,v}.$$

*Démonstration.* C'est en fait un simple corollaire du théorème 1.2.1. □

Pour obtenir une minoration de la hauteur locale archimédienne normalisée comme dans la partie 2.1.2, il suffira donc de minorer la hauteur locale archimédienne  $\Lambda_{\Theta,v}$  et la constante  $C_{\infty,v}$ . Nous allons estimer cette constante en particulierisant l'équation donnée dans la proposition 2.4.1 en des points de torsion. Il faut cependant s'assurer que les points ne sont pas sur le diviseur  $\Theta$ .

Nous allons utiliser le fait suivant :

**Proposition 2.4.2.** *(Boxall, Grant) Soit  $\text{Jac}(C)/k$  une jacobienne de dimension 2 sur un corps quelconque, simple et polarisée par le diviseur  $\Theta = C$ . Alors aucun point d'ordre 3 n'est sur le diviseur  $\Theta$ .*

*Démonstration.* On reprend ici la preuve de la proposition 1.5 de [BG00]. Une deuxième preuve de cette proposition figure en corollaire du lemme de zéros 2.5.1.

Soit  $\text{Div}^{(2)}(C)$  l'ensemble des diviseurs effectifs de degré 2 sur  $C$ , défini sur  $\bar{k}$ . Soit  $\widetilde{\mathcal{D}}$  l'ensemble des diviseurs canoniques dans  $\text{Div}^{(2)}(C)$ . La courbe  $C$  étant une courbe hyperelliptique, si on note  $\iota$  l'involution hyperelliptique on a  $\widetilde{\mathcal{D}} = \{\xi + \iota(\xi) \mid \xi \in C\}$ .

Soit  $Q$  un point de Weierstrass de  $C$ . On note  $j_Q$  l'application :

$$j_Q : \text{Div}^{(2)}(C) \longrightarrow \text{Jac}(C)(\bar{k})$$

définie par  $j_Q(a + b) = \text{cl}(a + b - 2Q)$ . Par le théorème d'Abel-Jacobi, on sait que cette application est une bijection entre  $\text{Div}^{(2)}(C) \setminus \widetilde{\mathcal{D}}$  et  $\text{Jac}(C) \setminus \{O\}$  et que  $j_Q(\widetilde{\mathcal{D}}) = O$ .

Le diviseur  $\Theta$  est alors l'image de  $C$  par l'application  $\pi : a \longmapsto j_Q(a + Q)$ .

Sachant cela supposons que  $P \in \Theta$  et  $[3]P \in \Theta$ . Il existe donc  $\xi \in C$  et  $\eta \in C$  tels que :  $P = j_Q(\xi + Q)$  et  $[3]P = j_Q(\eta + Q)$ . En partant de la relation  $P + P = [3]P - P$  on a que  $2\xi - 2Q$  est linéairement équivalent à  $\eta - Q + \iota(\xi) - Q$ , soit  $2\xi$  est linéairement équivalent à  $\eta + \iota(\xi)$ . La bijectivité de  $j_Q$  impose donc  $2\xi \in \widetilde{\mathcal{D}}$ , donc  $\xi = \iota(\xi)$ , donc  $[2]P = 0$ .

Donc si un point est d'ordre exactement 3, comme  $[3]P = O \in \Theta$ , il ne saurait être lui aussi sur  $\Theta$ .  $\square$

*Remarque importante :* La situation est complètement différente sur un produit de courbes elliptiques  $E_1 \times E_2$  polarisé par  $E_1 \times \{O\} + \{P_1\} \times E_2$ , où  $P_1$  est un point de 2-torsion non nul. En effet les points de la forme  $(R, O)$ , avec  $3R = O$ , sont des points de 3-torsion qui sont sur le diviseur. Quitte à étendre un peu le corps, il y a donc 9 points de 3-torsion sur les produits de courbes elliptiques ainsi polarisés.

Revenons aux variétés abéliennes simples en dimension 2. Nous pouvons nous baser sur la dernière proposition et utiliser les points de 3-torsion dans l'étude de la constante de normalisation des hauteurs locales. Reprenons, pour tout point  $P \in A_\Theta(k)$  :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(P) = 2\Lambda_{\Theta, v}(P) + C_{\infty, v}.$$

En particulierisant cette égalité pour  $R$  un point de 3-torsion non nul nous obtenons :

$$C_{\infty, v} = \widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(R) - 2\Lambda_{\Theta, v}(R),$$

ce qui implique donc que pour tout point  $P \in A_\Theta(k)$  et tout point  $R$  d'ordre 3 la différence est constante (on n'utilise que le fait que  $R \notin \Theta$  pour l'instant) :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(P) - \widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(R) = 2\Lambda_{\Theta, v}(P) - 2\Lambda_{\Theta, v}(R).$$

Posons  $\mathcal{T}_3$  l'ensemble des points d'ordre 3. C'est un ensemble de cardinal 80, car il y a 81 points de 3-torsion mais le point  $O$  n'est pas d'ordre exactement 3. Nous allons à présent effectuer le calcul clef de notre stratégie d'étude de la hauteur globale.

*Remarque :* Notons que nous allons supposer ici que  $k(A[3]) = k$ . Nous verrons à la fin de notre travail comment nous passer de cette hypothèse.

**Egalité Clef 2.4.3.** Soit  $P \in A(k)$  et soit  $n \geq 1$  tel que  $[n]P \in A_\Theta(k)$  :

$$\widehat{h}_{A, 2\Theta}(P) = \frac{1}{80n^2} \sum_{R \in \mathcal{T}_3} \left[ \sum_{v \in M_k^0} n_v \left( \widehat{\lambda}_{2\Theta, v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(R) \right) + \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left( 2\Lambda_{\Theta, v}([n]P) - 2\Lambda_{\Theta, v}(R) \right) \right].$$

*Démonstration.* Il suffit de suivre ce calcul :

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) &= \frac{1}{n^2} \widehat{h}_{A,2\Theta}([n]P) - \frac{1}{80n^2} \sum_{R \in \mathcal{T}_3} \widehat{h}_{A,2\Theta}(R) \\
&= \frac{1}{80n^2} \sum_{R \in \mathcal{T}_3} \left( \widehat{h}_{A,2\Theta}([n]P) - \widehat{h}_{A,2\Theta}(R) \right) \\
&= \frac{1}{80n^2} \sum_{R \in \mathcal{T}_3} \sum_{v \in M_k} n_v \left( \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) \right) \\
&= \frac{1}{80n^2} \sum_{R \in \mathcal{T}_3} \left[ \sum_{v \in M_k^0} n_v \left( \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) \right) + \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left( 2\Lambda_{\Theta,v}([n]P) - 2\Lambda_{\Theta,v}(R) \right) \right]
\end{aligned}$$

□

Nous avons donc cinq tâches à mener :

1. Pour  $v$  une place finie : minorer  $\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P)$ .
2. Pour  $v$  une place finie : majorer  $\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R)$ .
3. Pour  $v$  une place archimédienne : minorer  $\Lambda_{\Theta,v}([n]P)$ .
4. Pour  $v$  une place archimédienne : majorer  $\Lambda_{\Theta,v}(R)$ .
5. Redescendre sur le corps de base.

On a déjà résolu le premier point dans la partie précédente. Nous allons donc compléter l'étude aux places finies en traitant dans le prochain paragraphe la deuxième tâche. Les études 3 et 4 aux places archimédiennes feront l'objet des parties suivantes. Le cinquième point sera traité à la fin de la preuve du théorème 2.5.3.

## 2.4.2 Estimation aux places finies

Nous commençons ce paragraphe en montrant la proposition suivante :

**Lemme 2.4.4.** *Soit  $A/k$  une variété abélienne de dimension 2, simple et principalement polarisée. Soit  $R \in A(k)$  un point de 3-torsion non nul. Soit  $\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}$  la hauteur locale normalisée comme dans la partie 2.1.2. Alors on a :*

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) = \frac{1}{3} \log \left| \delta_1(K_R) \right|_v.$$

*Démonstration.* On note  $v(f(P)) = -\log |f(P)|_v$ . Il suffit de partir de l'équation fonctionnelle fixant la hauteur locale :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([2]R) - 4\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) = v(f(R)).$$

Comme  $R$  est un point de 3-torsion non nul, on a  $[2]R = -R$ . De plus le diviseur  $\Theta$  est symétrique et défini grâce à un point de Weierstrass donc la hauteur locale est paire, ce qui implique :

$$-3\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) = v(f(R)),$$

d'où le résultat, en notant que dans la normalisation 2.1.2,  $f(P) = \delta_1(K_P)$ .  $\square$

On peut en fait déduire de l'équation fonctionnelle une formule close pour la hauteur locale de tout point de torsion dont aucun itéré par la multiplication par  $[2]$  ne tombe sur le diviseur  $\Theta$ . On a donc la généralisation suivante :

**Lemme 2.4.5.** *Soit  $Q$  un point de  $m$ -torsion dont tous les itérés par la multiplication par  $[2]$  sont hors du support du diviseur  $\Theta$ . Alors, en notant  $\phi$  l'indicatrice d'Euler,  $\alpha = v_2(m)$  et  $m'$  tel que  $m = 2^\alpha m'$ , on a :*

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(Q) = -\sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{1}{4^{i+1}} v(f([2^i]Q)) - \left( \frac{4^{\phi(m')}}{4^\alpha(4^{\phi(m')} - 1)} \right) \sum_{i=0}^{\phi(m')-1} \frac{1}{4^{i+1}} v(f([2^{\alpha+i}]Q)).$$

*Démonstration.* Soit  $Q$  un point de  $m$ -torsion vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Par le théorème d'Euler on sait que :

$$2^{\phi(m')} \equiv 1 \pmod{m'}.$$

Repartons de l'équation fonctionnelle :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([2]P) - 4\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) = v(f(P)),$$

d'où l'on déduit, en notant  $Q' = [2^\alpha]Q$  et en évaluant en  $P = Q'$  :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(Q') = -\frac{1}{4}v(f(Q')) + \frac{1}{4}\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([2]Q'),$$

et par itération :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(Q') = -\sum_{i=0}^{\phi(m')-1} \frac{1}{4^{i+1}} v(f([2^i]Q')) + \frac{1}{4^{\phi(m')}} \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([2^{\phi(m')}]Q'),$$

d'où :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(Q') = -\left( \frac{4^{\phi(m')}}{4^{\phi(m')} - 1} \right) \sum_{i=0}^{\phi(m')-1} \frac{1}{4^{i+1}} v(f([2^i]Q')).$$

De plus on a par le même calcul :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(Q) = -\sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{1}{4^{i+1}} v(f([2^i]Q)) + \frac{1}{4^\alpha} \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([2^\alpha]Q),$$

donc finalement, en reprenant  $Q' = [2^\alpha]Q$  :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(Q) = - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{1}{4^{i+1}} v(f([2^i]Q)) - \left( \frac{4^{\phi(m')}}{4^\alpha(4^{\phi(m')} - 1)} \right) \sum_{i=0}^{\phi(m')-1} \frac{1}{4^{i+1}} v(f([2^{\alpha+i}]Q)).$$

□

*Remarque* : On peut retrouver notre formule pour les points de 3-torsion : un point de 3-torsion a tous ses itérés hors du support du diviseur  $\Theta$  d'après la proposition 2.4.2. On a dans ce cas :  $\alpha = 0$  et  $\phi(m') = \phi(3) = 2$ , donc :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(R) = \frac{16}{16-1} \left( -\frac{1}{4}v(f(R)) - \frac{1}{16}v(f([2]R)) \right).$$

Or  $[2]R = -R$ , donc comme  $f$  est paire on obtient en réunissant les termes :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(R) = -\frac{1}{3}v(f(R)).$$

On va alors se servir de ce lemme pour démontrer la proposition suivante :

**Proposition 2.4.6.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $C/k$  une courbe de genre 2. On se donne un modèle hyperelliptique  $y^2 = F(x)$ . Soit  $\text{Jac}(C)$  sa jacobienne, simple et principalement polarisée. Soit  $R$  un point de 3-torsion non nul. Soit  $v$  une place finie pour laquelle le modèle de  $C$  a bonne réduction. Alors la hauteur locale associée à  $v$  et normalisée comme en 2.1.2 vérifie :*

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(R) \leq 0.$$

*Démonstration.* On utilise sans rappel les notations de la partie 2.2.1. Reprenons la relation vérifiée par les points  $R$  de 3-torsion sur la surface de Kummer :

$$K_{[2]R} = K_{-R} = K_R.$$

On sait par ailleurs exprimer la multiplication par  $[2]$  sur la surface de Kummer grâce à  $\delta$ . Le double d'un point, une fois normalisé, vérifie donc, avec les notations de 2.2.1 :

$$K_{[2]R} = \frac{\delta(K_R)}{\delta_1(K_R)}.$$

On tire donc de ces deux relations en prenant les normes  $v$ -adiques :

$$|\delta_1(K_R)|_v = \frac{|\delta(K_R)|_v}{|K_{[2]R}|_v} = \frac{|\delta(K_R)|_v}{|K_R|_v} = \frac{|\delta(K_R)|_v}{|K_R|_v^4} |K_R|_v^3.$$

Il nous faut donc *majorer* le quotient de la multiplication par [2]. En utilisant la remarque 2 suivant le théorème 6.1 de [Sto99], on a :

$$\frac{||\delta(K_R)||_v}{||K_R||_v^4} \leq 1,$$

donc :

$$|\delta_1(K_R)|_v \leq ||K_R||_v^3.$$

Or en utilisant le théorème de Boxall-Grant sur la variété réduite en  $v$ , comme la courbe a bonne réduction en  $v$  on sait que  $R$  n'est pas sur le diviseur  $\Theta$  réduit en  $v$ . Or  $K_R = (1, k_2, k_3, k_4)$ . Comme l'image de  $R$  après réduction en  $v$  n'est pas sur le diviseur, on obtient que les coordonnées de  $K_R$  vérifient  $\text{ord}_v(k_i) \geq 0$ , ce qui implique  $||K_R||_v = 1$ .

On obtient alors le résultat en prenant le logarithme et en utilisant le lemme 2.4.4.  $\square$

**Lemme 2.4.7.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $C/k$  une courbe de genre 2, dont on se donne un modèle hyperelliptique  $y^2 = F(x) = a_5x^5 + \dots + a_0$ . Soit  $A$  la jacobienne de  $C$ . On note  $D = 2^8 \text{disc}(F)$ . Alors on a l'égalité :*

$$\prod_{R \in A[3] \setminus \{O\}} \delta_1(K_R) = \frac{1}{3^{24}} D^{36}.$$

*Démonstration.* On sait que si  $D \neq 0$ , la courbe  $C$  est lisse et les points d'ordre exactement 3 de  $\text{Jac}(C)$  ne sont pas sur le support du diviseur  $\Theta$ . Ceci implique que  $-R = [2]R$  n'est pas sur le support de  $\Theta$ , donc  $\delta_1(R) \neq 0$  pour tout point d'ordre 3.

En contraposant on obtient l'implication :  $(\delta_1(R) = 0) \Rightarrow (D = 0)$ .

On sait de plus que  $\delta_1(K_R) \in \mathbb{Z}[k_1, \dots, k_4][a_0, \dots, a_5]$  et le degré total en les  $a_i$  est 3. Le degré total en les  $k_i$  est 4. Soit  $L = \mathbb{Q}(a_0, \dots, a_5)$ . Les  $k_i$  étant les coordonnées des points d'ordre 3 ce sont des éléments algébriques sur  $L$ . On sait de plus que  $[L[A[3]] : L] \leq 3^{16}$ . Posons :

$$Q(a_0, \dots, a_5) = \prod_{R \in A[3] \setminus \{O\}} \delta_1(K_R).$$

L'ensemble  $A[3] \setminus \{O\}$  est stable sous l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{L}/L)$ . On peut en déduire que  $Q \in \mathbb{Q}(a_0, \dots, a_5)$ . Or  $Q$  est une fonction sans pôle : c'est donc un polynôme. On en déduit que  $Q(a_0, \dots, a_5) \in \mathbb{Q}[a_0, \dots, a_5]$ .

D'autre part on a  $D \in \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_5]$  et  $D$  est irréductible. Ceci permet de dire qu'il existe des constantes universelle  $c_0 \in \mathbb{Q}$  et  $d_0 \in \mathbb{N}$  telles que :

$$Q = c_0 D^{d_0}.$$

Dans un deuxième temps on cherche à expliciter les constantes  $c_0$  et  $d_0$ . Il suffit pour cela de mener le calcul complet dans un cas particulier. Nous allons choisir l'équation  $y^2 = x^5 - 1$ . On pose  $F(x) = x^5 - 1$ . On a donc  $\text{disc}(F) = 3125 = 5^5$ .

On va calculer les coordonnées  $K_R$  des points  $R$  d'ordre 3 exactement pour cet exemple particulier. On note  $K_R = (1, k_2, k_3, k_4)$  la coordonnée normalisée. Ces points vérifient l'équation :

$$K_{[2]R} = K_R.$$

Cette dernière se traduit par le système suivant, dans lequel on note  $\delta(K_R) = (\delta_1, \dots, \delta_4)$  :

$$\begin{cases} \delta_2 &= k_2\delta_1, \\ \delta_3 &= k_3\delta_1, \\ \delta_4 &= k_4\delta_1. \end{cases}$$

Les coordonnées de ces points vérifient aussi l'équation de la surface de Kummer (donnée dans [CF96] p. 19 ou dans l'annexe 5.2.1), qu'on notera  $\delta_0$ . On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \delta_2 - k_2\delta_1 &= 0, \\ \delta_3 - k_3\delta_1 &= 0, \\ \delta_4 - k_4\delta_1 &= 0, \\ \delta_0 &= 0. \end{cases}$$

On utilise alors les formules de duplication sur la surface de Kummer données en annexe, dans lesquelles on spécialise ainsi :  $a_6 = 0$ ,  $a_5 = 1$ ,  $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$ ,  $a_0 = -1$  et  $k_1 = 1$ . A partir de là, on s'est ramené au problème de la recherche de racines communes à quatre polynômes fixés dépendant de trois variables  $k_2$ ,  $k_3$  et  $k_4$ .

On peut résoudre ce système en utilisant une technique de résultants : on prend le résultant des deux premiers polynômes par rapport à la première variable, puis le résultant du résultat avec le troisième polynôme par rapport à la deuxième variable et un dernier résultant en fonction de la dernière variable. On fait cela dans tous les ordres possibles. Ceci donne des valeurs possibles pour la dernière variable, on remonte ensuite les calculs et on vérifie *a posteriori* que les coordonnées candidates sont bien des solutions des quatre équations de départ. Une fois les coordonnées trouvées, le calcul de  $\delta_1$  est direct.

Les calculs ont été menés complètement en utilisant le logiciel PARI. Le résultat est le suivant :

$$Q(1, 0, 0, 0, 0, -1) = 2^{288}3^{-24}5^{180}.$$

Ceci fournit, puisqu'on a  $D = 2^8 \text{disc}(F) = 2^8 5^5$ , les valeurs  $c_0 = 3^{-24}$  et  $d_0 = 36$ . □

**Proposition 2.4.8.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $C/k$  une courbe de genre 2. On se donne un modèle hyperelliptique  $y^2 = F(x)$ . On pose  $D = 2^8 \text{disc}(F)$ . Soit  $\text{Jac}(C)$*



la jacobienne de  $C$ , simple et principalement polarisée. On note  $\mathcal{T}_3$  l'ensemble des points d'ordre 3. Alors on a :

$$\sum_{R \in \mathcal{T}_3} \sum_{v \in M_k^0} d_v \widehat{\lambda}_{2\Theta, v}(R) \leq 36 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) - 24 \log 3.$$

*Démonstration.* Il suffit de conjuguer la proposition 2.4.6, le lemme 2.4.7 et le lemme 2.4.4.  $\square$

### 2.4.3 Estimation aux places archimédiennes

#### Minoration de $\Lambda_{\Theta, v}(P)$

On veut dans cette sous-partie minorer la hauteur locale archimédienne définie pour  $P \in A_{\Theta}(\mathbb{C})$  par :

$$\Lambda_{\Theta, v}(P) = -\log \left( \left| \theta_{a,b}(Z(P)) \right|_v e^{-\pi^t \operatorname{Im} Z (\operatorname{Im} \tau)^{-1} \operatorname{Im} Z} \right),$$

où on a fixé  $[a, b] = [1/2, 1/2, 0, 1/2]$ . Pour tout vecteur  $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ , on définit la quantité  $d(x, \mathbb{Z}^2) := \min\{d(x_1, \mathbb{Z}), d(x_2, \mathbb{Z})\}$ . Nous allons montrer dans ce paragraphe la proposition :

**Proposition 2.4.9.** *Soit  $C/k$  une courbe de genre 2 et soit  $v$  une place archimédienne. Soit  $P$  un point de  $\operatorname{Jac}(C)(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}^2 + \tau_v \mathbb{Z}^2)$  hors du support du diviseur  $\Theta$ . On note  $Z = X + \tau_v Y$  une coordonnée de  $P$ , avec  $Y = [y_1, y_2]$ . On définit la norme de vecteur  $\|(X, Y)\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |y_1|, |y_2|\}$ . Alors la hauteur locale archimédienne  $\Lambda_{\Theta, v}$  peut être minorée de la façon suivante, dès que  $\|(X, Y)\| \leq \frac{1}{2}$  :*

$$\begin{aligned} \Lambda_{\Theta, v}(P) &\geq \pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau_v) - 2 \operatorname{Im} \tau_{v,12}) d(a + Y, \mathbb{Z}^2)^2 - \log \left( 4 + \frac{3}{2} \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau_v) \right) \\ &\quad + \log \frac{1}{\|(X, Y)\|} - \log C_3(Y), \end{aligned}$$

où l'on peut prendre :

$$C_3(Y) = \max_{i \in \{1, 2\}} 8\pi \left( \frac{4}{\pi} + 2|y_i| + \frac{1}{2} \left( \sqrt{y_i^2 + \frac{8}{\pi}} + 2 \right)^2 + \frac{1}{2} \right).$$

*Remarque :*

On a la majoration  $C_3(Y) \leq 239, 2$  pour  $y_i \leq 1/2$ .

*Démonstration.* On notera tout au long de la preuve :  $\tau = \tau_v$ . Calculons, pour  $Z = X + \tau Y$ , avec  $X$  et  $Y$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  :

$${}^t \text{Im } Z (\text{Im } \tau)^{-1} \text{Im } Z = {}^t \text{Im}(\tau Y) (\text{Im } \tau)^{-1} \text{Im}(\tau Y) = {}^t Y \text{Im } \tau Y.$$

Posons :

$$\zeta_n(X, Y) := 2i\pi \left( \frac{1}{2} {}^t(n+a)\tau(n+a) + {}^t(n+a)\tau Y + {}^t(n+a)(X+b) \right),$$

et :

$$g(X, Y) := \theta_{a,b}(X + \tau Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{\zeta_n(X, Y)}.$$

On veut donc majorer la quantité :  $|g(X, Y)| e^{-\pi {}^t Y \text{Im } \tau Y}$ .

Tout d'abord par l'inégalité des accroissements finis, avec  $\|(X, Y)\| = \sup\{|x_1|, |x_2|, |y_1|, |y_2|\}$  et  $\|\cdot\|$  la norme subordonnée :

$$|g(X, Y) - g(0, 0)| \leq \left( \max_{(X', Y') \in [(0,0), (X,Y)]} \|\| dg|_{(X', Y')} \|\| \right) \|(X, Y) - (0, 0)\|.$$

donc comme  $g(0, 0) = \theta_{a,b}(0) = 0$  :

$$|g(X, Y)| \leq \left( \max_{u \in [0,1]} \|\| dg|_{u(X,Y)} \|\| \right) \|(X, Y)\|.$$

On a alors en écrivant  $[X, Y] = [x_1, x_2, y_1, y_2]$  :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} 2\pi i \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) e^{\zeta_n(X, Y)},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} 2\pi i \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) e^{\zeta_n(X, Y)},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} 2\pi i \left( \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \tau_1 + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \tau_{12} \right) e^{\zeta_n(X, Y)},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2}(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} 2\pi i \left( \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \tau_{12} + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \tau_2 \right) e^{\zeta_n(X, Y)}.$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu, Yu)) &= -\pi^t(n+a) \operatorname{Im} \tau(n+a) - 2\pi^t(n+a) \operatorname{Im} \tau Y u \\
&= -\pi^t(n+a+Yu) \operatorname{Im} \tau(n+a+Yu) + \pi u^2 {}^t Y \operatorname{Im} \tau Y.
\end{aligned}$$

On obtient alors pour tout vecteur  $(X, Y)$  non nul :

$$\begin{aligned}
\frac{|g(X, Y)|}{2\pi \|(X, Y)\|} &\leq \max_{u \in [0,1]} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu, Yu))} \right. \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \left| n_2 + \frac{1}{2} \right| e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu, Yu))} \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \left( \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| |\tau_1| + \left| n_2 + \frac{1}{2} \right| |\tau_{12}| \right) e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu, Yu))} \\
&\quad \left. + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \left( \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| |\tau_{12}| + \left| n_2 + \frac{1}{2} \right| |\tau_2| \right) e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu, Yu))} \right].
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{|g(X, Y)| e^{-\pi^t Y \operatorname{Im} \tau Y}}{2\pi \|(X, Y)\|} &\leq \max_{u \in [0,1]} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \left( (1 + |\tau_1| + |\tau_{12}|) \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| + \right. \\
&\quad \left. (1 + |\tau_2| + |\tau_{12}|) \left| n_2 + \frac{1}{2} \right| \right) e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu, Yu))} - \pi^t Y \operatorname{Im} \tau Y \Big] \\
&\leq \max_{u \in [0,1]} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \left( (1 + |\tau_1| + |\tau_{12}|) \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| + \right. \quad (*) \\
&\quad \left. (1 + |\tau_2| + |\tau_{12}|) \left| n_2 + \frac{1}{2} \right| \right) e^{-\pi^t(n+a+Yu) \operatorname{Im} \tau(n+a+Yu)} \Big].
\end{aligned}$$

Nous montrons à présent une batterie de lemmes analytiques utiles pour terminer cette estimation :

**Lemme 2.4.10.** *Pour toute matrice  $\tau \in F_2$  on a la minoration pour tout vecteur réel  $R = [R_1, R_2] \in \mathbb{R}^2$  :*

$${}^t R \operatorname{Im} \tau R \geq (\operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12}) R_1^2 + (\operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}) R_2^2.$$

*Démonstration.* Il suffit de développer la forme quadratique et d'écrire :

$$\begin{aligned}
{}^t R \operatorname{Im} \tau R &= R_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + R_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 + 2R_1 R_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \\
&\geq R_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + R_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 - (R_1^2 + R_2^2) \operatorname{Im} \tau_{12} \\
&\geq R_1^2 (\operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12}) + R_2^2 (\operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}).
\end{aligned}$$

On gardera en mémoire que  $\operatorname{Im} \tau_2 \geq \operatorname{Im} \tau_1 \geq 2 \operatorname{Im} \tau_{12} \geq 0$  et  $\operatorname{Im} \tau_1 > 0$ . Ces inégalités impliquent que le minorant est une fonction définie positive. □

**Lemme 2.4.11.** *Soit  $r > 0$  un réel. Alors on a l'inégalité :*

$$\int_r^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-r^2}.$$

*Démonstration.* On se ramène au calcul en coordonnées polaires :

$$\left( \int_r^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \iint_{\substack{x \geq r \\ y \geq r}} e^{-x^2 - y^2} dx dy \leq \iint_{\substack{\rho \geq r\sqrt{2} \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} } e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-2r^2}.$$

□

**Lemme 2.4.12.** *Soient  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Alors si  $\beta \notin \mathbb{Z}$  :*

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(n_1 + \beta)^2} \leq \left( 2 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \right) e^{-\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2},$$

*et si  $\beta \in \mathbb{Z}$  :*

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(n_1 + \beta)^2} \leq 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}.$$

*De plus si  $\beta = \frac{1}{2}$  on a :*

$$\sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq -3, -2, -1, 0, 1, 2}} e^{-\alpha(n_1 + \beta)^2} \leq \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \right) e^{-\alpha \frac{25}{4}}.$$

*Enfin si  $\beta = 0$  on a :*

$$\sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq -1, 0, 1}} e^{-\alpha n_1^2} \leq \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \right) e^{-\alpha}.$$

*Démonstration.* On démontre la première inégalité,  $\beta \notin \mathbb{Z}$ , les autres s'en déduisent. On mène une comparaison série-intégrale pour la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = e^{-\alpha(x+\beta)^2}$ . On note  $n_0$  le plus grand entier inférieur à  $-\beta$  (on notera  $n_0 = \lfloor -\beta \rfloor$ ) et on utilise la distance  $d(\beta, \mathbb{Z}) = \min\{|n_0 + \beta|, |n_0 + 1 + \beta|\}$ . On obtient alors la majoration :

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(n_1 + \beta)^2} &\leq \int_{-\infty}^{n_0} e^{-\alpha(x + \beta)^2} dx + e^{-\alpha(n_0 + \beta)^2} + e^{-\alpha(n_0 + 1 + \beta)^2} \\ &\quad + \int_{n_0+1}^{+\infty} e^{-\alpha(x + \beta)^2} dx, \end{aligned}$$

donc :

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(n_1 + \beta)^2} \leq \int_{(-n_0 - \beta)\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}} + 2e^{-\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2} + \int_{(n_0 + 1 + \beta)\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}}.$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité du lemme 2.4.11 pour conclure. □

**Lemme 2.4.13.** Soient  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(n_1 + \beta)^2} \leq C(\alpha, \beta) e^{-\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2},$$

où l'on peut prendre :

$$C(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} + \left| \beta - \frac{1}{2} \right| \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2} \left( \sqrt{\left( \beta - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2}{\alpha}} + 2 \right)^2 + \frac{1}{2}.$$

*Démonstration.* On mène ici une comparaison série-intégrale pour la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = |x + \frac{1}{2}| e^{-\alpha(x+\beta)^2}$ . Il y a ici trois changements de sens de variation. On notera  $x_{\max 1} < -\frac{1}{2} < x_{\max 2}$  les abscisses des maxima locaux. L'étude de la dérivée donne les expressions :

$$\begin{cases} x_{\max 1} = \frac{-\beta - 1/2 - \sqrt{(\beta + 1/2)^2 - 2\beta + 2/\alpha}}{2}, \\ x_{\max 2} = \frac{-\beta - 1/2 + \sqrt{(\beta + 1/2)^2 - 2\beta + 2/\alpha}}{2}. \end{cases}$$

Posons :  $N_1 = \lfloor x_{\max 1} \rfloor$  et  $N_2 = \lfloor x_{\max 2} \rfloor$ , où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ .

On a alors la majoration :

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(n_1 + \beta)^2} \leq A + B + C,$$

où :

$$A = \int_{-\infty}^{N_1} \left| x + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(x + \beta)^2} dx,$$

$$B = \sum_{n_1=N_1}^{N_2+1} \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(n_1 + \beta)^2},$$

$$C = \int_{N_2+1}^{+\infty} \left| x + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(x + \beta)^2} dx.$$

Alors en posant  $r = (-N_1 - \beta)\sqrt{\alpha} > 0$  on obtient par inégalité triangulaire :

$$A = \int_r^{+\infty} \left| \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + \beta - \frac{1}{2} \right| e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha} \int_r^{+\infty} x e^{-x^2} dx + \frac{|\beta - \frac{1}{2}|}{\sqrt{\alpha}} \int_r^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

donc par intégration directe et par l'inégalité du lemme 2.4.11 :

$$A \leq \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha(-N_1 - \beta)^2} + \frac{|\beta - \frac{1}{2}|\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\alpha(-N_1 - \beta)^2} \leq \left( \frac{1}{2\alpha} + \frac{|\beta - \frac{1}{2}|\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \right) e^{-\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2}.$$

On obtient la même majoration pour le terme  $C$ . Reste le terme médian :

$$B \leq \sum_{n_1=N_1}^{N_2+1} \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2} \leq \left( \sum_{n_1=0}^{N_2+1} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) - \sum_{n_1=N_1}^{-1} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \right) e^{-\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2},$$

donc :

$$B e^{\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2} \leq \frac{N_1^2 + N_2^2 + 4N_2 + 4}{2} = \frac{(N_2 - N_1)^2 + 2N_1 N_2 + 4N_2 + 4}{2},$$

donc en utilisant les inégalités  $N_1 \leq -1$  et  $2 \leq -2N_1$  :

$$B e^{\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2} \leq \frac{(N_2 - N_1)^2 + 2(N_2 - N_1) + 2}{2} = \frac{(N_2 - N_1 + 1)^2 + 1}{2}.$$

Or  $0 \leq N_2 - N_1 < x_{\max 2} - x_{\max 1} + 1 = \sqrt{(\beta - \frac{1}{2})^2 + \frac{2}{\alpha}} + 1$ , donc :

$$B \leq \left( \frac{1}{2} \left( \sqrt{\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}} + 2 \right) + \frac{1}{2} \right)^2 e^{-\alpha d(\beta, \mathbb{Z})^2}.$$

Il suffit alors de réunir les majorations des termes  $A, B, C$  pour obtenir le lemme.  $\square$

**Lemme 2.4.14.** *On rappelle  $d(a + Y, \mathbb{Z}^2) = \min\{d(\frac{1}{2} + y_1, \mathbb{Z}), d(\frac{1}{2} + y_2, \mathbb{Z})\}$ . On suppose que  $\|(X, Y)\| \leq \frac{1}{2}$ . On a alors la majoration pour tout  $u \in [0, 1]$  :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \left| n_i + \frac{1}{2} \right| e^{-\pi {}^t(n + a + Yu) \operatorname{Im} \tau (n + a + Yu)} \leq C_2(y_i) e^{-\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) - 2 \operatorname{Im} \tau_{12}) d(a + Y, \mathbb{Z}^2)^2},$$

où l'on peut prendre :

$$C_2(y_i) = 4 \left( \frac{4}{\pi} + 2|y_i| + \frac{1}{2} \left( \sqrt{y_i^2 + \frac{8}{\pi}} + 2 \right)^2 + \frac{1}{2} \right).$$

*Démonstration.* On applique successivement les lemmes 2.4.10, 2.4.12 et 2.4.13 en spécialisant  $\alpha = \pi(\operatorname{Im} \tau_i - \operatorname{Im} \tau_{12})$  et  $\beta = \frac{1}{2} + uy_i$  (avec  $u \in [0, 1]$ ) pour  $i \in \{1, 2\}$ . Le maximum sur  $u$  est atteint, pour le majorant, en  $u = 1$ , car  $|y_i| \leq \frac{1}{2}$ .  $\square$

On utilise alors le lemme 2.4.14 dans la majoration (\*) :

$$\begin{aligned} \frac{|g(X, Y)| e^{-\pi {}^t Y \operatorname{Im} \tau Y}}{2\pi \|(X, Y)\|} &\leq (1 + |\tau_1| + |\tau_{12}|) C_2(y_1) e^{-\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) - 2 \operatorname{Im} \tau_{12}) d(a + Y, \mathbb{Z}^2)^2} \\ &\quad + (1 + |\tau_2| + |\tau_{12}|) C_2(y_2) e^{-\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) - 2 \operatorname{Im} \tau_{12}) d(a + Y, \mathbb{Z}^2)^2}, \end{aligned}$$

donc on obtient en notant  $C_2(Y) := \max\{C_2(y_1), C_2(y_2)\}$  :

$$\frac{|g(X, Y)| e^{-\pi {}^t Y \operatorname{Im} \tau Y}}{2\pi \|(X, Y)\|} \leq (2 + |\tau_1| + |\tau_2| + 2|\tau_{12}|) C_2(Y) e^{-\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) - 2 \operatorname{Im} \tau_{12}) d(a + Y, \mathbb{Z}^2)^2}.$$

En prenant l'opposé du logarithme de cette dernière inégalité il vient finalement :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\Theta,v}(P) &\geq \pi(\mathrm{Tr}(\mathrm{Im} \tau) - 2 \mathrm{Im} \tau_{12})d(a + Y, \mathbb{Z}^2)^2 - \log(2 + |\tau_1| + |\tau_2| + 2|\tau_{12}|) \\ &\quad + \log \frac{1}{\|(X, Y)\|} - \log 2\pi C_2(Y),\end{aligned}$$

De plus, en utilisant  $|\tau_i| \leq \frac{1}{2} + \mathrm{Im} \tau_i$  et  $|\tau_{12}| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{Im} \tau_i$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$  on obtient :

$$\log(2 + |\tau_1| + |\tau_2| + 2|\tau_{12}|) \leq \log \left( 4 + \frac{3}{2} \mathrm{Tr}(\mathrm{Im} \tau) \right).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 2.4.9. □

### Majoration de $\Lambda_{\Theta,v}(R)$

**Proposition 2.4.15.** *Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soit  $A/k$  une variété abélienne simple de dimension 2, principalement polarisée. Soit  $v$  une place archimédienne du corps  $k$ . Soit  $\mathcal{T}_3$  l'ensemble des points d'ordre 3 exactement. Supposons que  $\mathrm{Im} \tau_{12,v} \geq \varepsilon > 0$ ,  $\mathrm{Im} \tau_{2,v} \geq 31$  et que  $\mathrm{Im} \tau_{1,v} \geq \max\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\varepsilon}\}$ . Alors la somme des hauteurs locales des points de  $\mathcal{T}_3$  est majorée :*

$$\sum_{R \in \mathcal{T}_3} \Lambda_{\Theta,v}(R) \leq 8\pi \mathrm{Tr}(\mathrm{Im} \tau_v) - 8\pi \mathrm{Im} \tau_{12,v} + 10 \log \left( \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, 15 \right\} \right).$$

*Démonstration.* Soit  $v$  une place archimédienne du corps de nombres  $k$ . On écrira  $\tau = \tau_v$  dans le cours de la preuve. Écrivons l'expression de  $\Lambda_{\Theta,v}$  :

$$\Lambda_{\Theta,v}(P) = -\log \left( \left| \theta_{[1/2, 1/2, 0, 1/2]}(Z(P)) \right|_v e^{-\pi {}^t \mathrm{Im} Z (\mathrm{Im} \tau)^{-1} \mathrm{Im} Z} \right),$$

avec :

$$\theta_{a,b}(Z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{2i\pi \left( \frac{1}{2} {}^t(n+a)\tau(n+a) + {}^t(n+a)(Z+b) \right)}.$$

Soit  $R$  un point de 3-torsion. Ses coordonnées dans  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau\mathbb{Z}^2$  s'écrivent :

$$Z(R) = \begin{bmatrix} a_1/3 \\ a_2/3 \end{bmatrix} + \tau_v \begin{bmatrix} a_3/3 \\ a_4/3 \end{bmatrix},$$

avec  $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{0, 1, 2\}^4$ . L'ensemble  $\mathcal{T}_3$  des points d'ordre exactement trois est donc :

$$\mathcal{T}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1/3 \\ a_2/3 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} a_3/3 \\ a_4/3 \end{bmatrix} \mid (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{0, 1, 2\}^4 \right\} \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$$



On veut majorer la valeur de la hauteur locale en ces points, ce qui revient donc à minorer le module de la fonction  $\theta_{a,b}$  en ces points. Ecrivons :

$$\left| \theta_{a,b}(Z(R)) \right| = \left| \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{i\pi(Q(n_1, n_2) + L(n_1, n_2))} \right|,$$

avec :

$$Q(n_1, n_2) = \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_1 + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_2 + 2 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \tau_{12}$$

$$L(n_1, n_2) = 2 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{a_3 \tau_1 + a_4 \tau_{12} + a_1}{3} + 2 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{a_3 \tau_{12} + a_4 \tau_2 + a_2}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

Notons  $n = (n_1, n_2)$  et  $\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, -1), (-1, 0), (-1, -1)\}$ . On commence à minorer en appliquant l'inégalité triangulaire :

$$\left| \theta_{a,b}(Z(R)) \right| \geq A(R) - B(R),$$

où on a posé :

$$A(R) = \left| \sum_{n \in \mathcal{C}} e^{i\pi(Q(n_1, n_2) + L(n_1, n_2))} \right|$$

et :

$$B(R) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{C}} e^{-\pi(\text{Im } Q(n_1, n_2) + \text{Im } L(n_1, n_2))}.$$

On va à présent étudier plus en détails les termes  $A(R)$  et  $B(R)$ .

Afin de mieux visualiser la stratégie d'étude de la série thêta on peut se reporter à la figure ci-après. La somme  $A(R)$  est constituée des 4 points de plus grand module : ce sont les points en noir, dont les coordonnées sont dans  $\mathcal{C}$ . Ce terme  $A(R)$  est la clef de la minoration : lorsqu'on s'approche du diviseur  $\Theta$ , il va avoir tendance à être petit, et c'est à ce moment qu'on a besoin d'introduire la quantification en  $\varepsilon$ . On va ensuite diviser  $B(R)$  en trois morceaux :

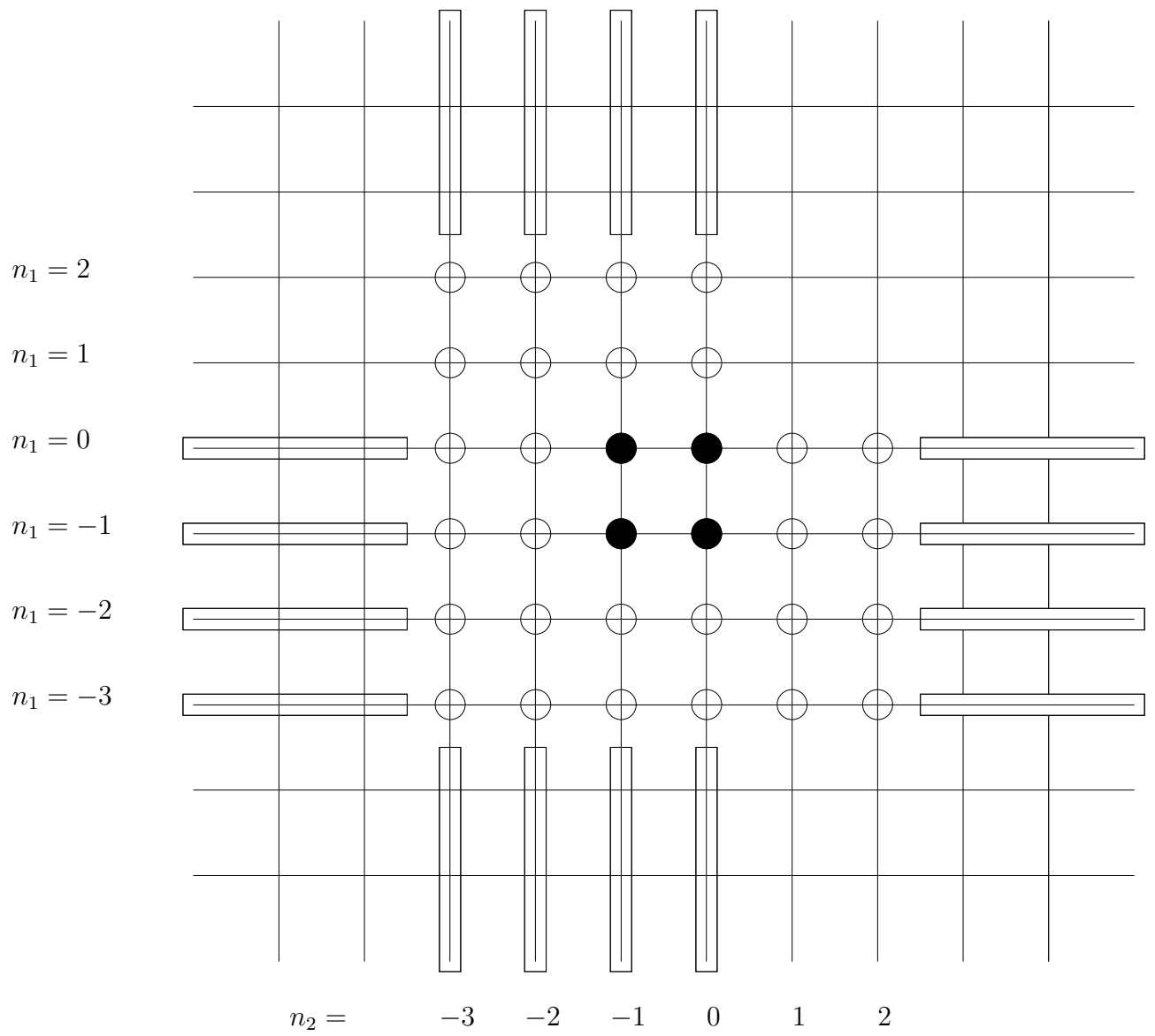
$$B(R) = B_1(R) + B_2(R) + B_3(R),$$

où on considère sur la figure de la page suivante :

Le terme  $B_1(R)$  : les points encadrés, qui sont les 28 points les plus proches en module de ceux de  $A(R)$ .

Le terme  $B_2(R)$  : les 16 demi-droites épaissies.

Le terme  $B_3(R)$  : les 4 quarts de plan, sur lesquels les termes de la série sont les plus petits.



Étude de  $A(R)$  :

Ecrivons en détail la somme des exponentielles complexes :

$$\begin{aligned}
A(R) &= \left| e^{i\pi \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} + \frac{-2a_1 - 2a_2 - 3}{6} \right]} \right. \\
&\quad + e^{i\pi \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} + \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{1}{2} + \frac{a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} + \frac{2a_1 + 2a_2 + 3}{6} \right]} \\
&\quad + e^{i\pi \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{-a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} + \frac{2a_1 - 2a_2 - 3}{6} \right]} \\
&\quad \left. + e^{i\pi \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} + \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{a_3 - a_4}{3} \right) \tau_{12} + \frac{-2a_1 + 2a_2 + 3}{6} \right]} \right|
\end{aligned}$$

donc en factorisant on forme le nombre  $\tilde{A}(R)$  :

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(R) &= A(R) e^{\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]} \\
&= \left| 1 - e^{\frac{i2\pi}{3} (a_3\tau_1 + a_4\tau_2 + (a_3 + a_4)\tau_{12} + a_1 + a_2)} \right. \\
&\quad \left. + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{\frac{i2\pi}{3} (a_3\tau_1 + a_4\tau_{12} + a_1)} - e^{\frac{i2\pi}{3} (a_4\tau_2 + a_3\tau_{12} + a_2)} \right) \right|
\end{aligned}$$

On va chercher à estimer ce module en fonction des valeurs de  $R$ . Il y a *a priori* 80 calculs à mener ; en utilisant le fait que  $\Lambda_{\Theta,v}(R) = \Lambda_{\Theta,v}([2]R)$  on va se ramener à l'analyse de 40 points. Le fait que les valeurs de  $a_1$  et  $a_2$  n'influent pas sur le module d'un terme seul permet de restreindre l'étude à 10 calculs. On regroupe les résultats dans le tableau suivant, dans lequel la première colonne donne les coordonnées de  $R$  (avec  $a_i \in \{0, 1, 2\}$ ) et la dernière colonne représente le nombre de points de 3-torsion  $R$  pour lesquels la minoration de  $\tilde{A}(R)$  est valable. On rappelle la majoration cruciale :  $|\operatorname{Re} \tau_{12}| \leq 1/2$ .

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \quad \tilde{A}(R) \quad (nb)$$

$$1\ 0\ 0\ 0 \quad \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1 \right) \right| = \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right| \left| 1 - e^{-i\pi\tau_{12}} \right| \geq \sqrt{3} (e^{\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} - 1) \quad (1*)$$

$$0\ 1\ 0\ 0 \quad \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right) \right| = \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right| \left| 1 + e^{-i\pi\tau_{12}} \right| \geq \sqrt{3} \sqrt{e^{2\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} + 1} \quad (1*)$$

$$1\ 1\ 0\ 0 \quad \left| 1 - e^{i\frac{4\pi}{3}} \right| = \sqrt{3} \quad (1)$$

$$1\ 2\ 0\ 0 \quad \left| e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}} \right) \right| \geq \sqrt{3} e^{\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} \quad (1*)$$

$$\begin{aligned} 0\ a_2\ 0\ 1 & \quad \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_2 + \tau_{12})} + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}\tau_{12}} - e^{i\frac{2\pi}{3}\tau_2} \right) \right| \\ & \geq \left| 1 + e^{-i\frac{\pi}{3}\tau_{12}} \right| - \left| e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_2 + \tau_{12})} + e^{i\pi\left(\frac{2}{3}\tau_2 - \tau_{12}\right)} \right| \\ & \geq e^{\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} \left| e^{-\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} + e^{-i\frac{\pi}{3} \operatorname{Re} \tau_{12}} \right| - e^{-\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im} \tau_2 + \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\pi\left(\frac{2}{3} \operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}\right)} \\ & \geq e^{\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} - e^{-\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im} \tau_2 + \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\pi\left(\frac{2}{3} \operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}\right)} \quad (3**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} 1\ a_2\ 0\ 1 \\ 2\ a_2\ 0\ 1 \end{matrix} & \quad \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_2 + \tau_{12} + 1)} + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_{12} + 1)} - e^{i\frac{2\pi}{3}\tau_2} \right) \right| \\ & \geq \left| 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}\tau_{12}} \right| - \left| e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_2 + \tau_{12} + 1)} + e^{i\pi\left(\frac{2}{3}\tau_2 - \tau_{12}\right)} \right| \\ & \geq e^{\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} \left| e^{-\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3} \operatorname{Re} \tau_{12}} \right| - e^{-\frac{2\pi}{3} \operatorname{Im}(\tau_2 + \tau_{12})} - e^{-\pi \operatorname{Im}\left(\frac{2}{3}\tau_2 - \tau_{12}\right)} \\ & \geq e^{\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} - e^{-\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im} \tau_2 + \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\pi\left(\frac{2}{3} \operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}\right)} \quad (6**) \end{aligned}$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \quad \tilde{A}(R) \quad (nb)$$


---

$$\begin{aligned}
a_1 \ 0 \ 1 \ 0 & \quad \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_1 + \tau_{12})} + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}\tau_1} - e^{i\frac{2\pi}{3}\tau_{12}} \right) \right| \\
& \geq e^{\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} - 1 - e^{-\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\pi(\frac{2}{3} \operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12})}
\end{aligned} \quad (3^{**})$$


---

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} a_1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ a_1 \ 2 \ 1 \ 0 \end{matrix} & \quad \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_1 + \tau_{12} + 1)} + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}\tau_1} - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_{12} + 1)} \right) \right| \\
& \geq \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}\tau_{12}} \right| - \left| e^{i\pi(\frac{2}{3}\tau_1 - \tau_{12})} - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_1 + \tau_{12} + 1)} \right| \\
& \geq e^{\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} - e^{-\pi(\frac{2}{3} \operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_{12})}
\end{aligned} \quad (6^{**})$$


---

$$\begin{aligned}
a_1 \ a_2 \ 1 \ 1 & \quad \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_1 + \tau_2 + 2\tau_{12})} + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_1 + \tau_{12})} - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_2 + \tau_{12})} \right) \right| \geq \\
& 1 - e^{-\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_2 + 2 \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\frac{\pi}{3}(2 \operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\frac{\pi}{3}(2 \operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12})}
\end{aligned} \quad (9)$$


---

$$\begin{aligned}
a_1 \ a_2 \ 1 \ 2 & \quad \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_{12})} + e^{-i\pi\tau_{12}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}(\tau_1 + 2\tau_{12})} - e^{i\frac{2\pi}{3}(2\tau_2 + \tau_{12})} \right) \right| \geq \\
& 1 - e^{-\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im} \tau_1 + 2 \operatorname{Im} \tau_2 + 3 \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\frac{\pi}{3}(2 \operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-\frac{\pi}{3}(4 \operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12})}
\end{aligned} \quad (9)$$


---

*Remarque 1 :* On peut noter ici que les points de 3-torsion dont le vecteur coordonné vérifie  $a_2 = a_4 = 0$  ont des minorants négatifs si  $\tau_{12} = 0$ . C'est le phénomène expliqué dans le paragraphe 2.3.2.

*Remarque 2 :* Les lignes étoilées correspondent aux 21 points de 3-torsion pour lesquelles  $\tilde{A}(R)$  est minoré par une exponentielle comportant un terme en  $+\operatorname{Im} \tau_{12}$  ou  $+\frac{1}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}$  en exposant. Cette remarque sera utile dans le décompte final.

Étude de  $B(R)$  :

Explicitons l'exposant de  $B(R)$  :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} Q(n_1, n_2) &= \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{Im} \tau_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{Im} \tau_2 + 2 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Im} \tau_{12} \\ \operatorname{Im} L(n_1, n_2) &= 2 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \frac{a_3 \operatorname{Im} \tau_1 + a_4 \operatorname{Im} \tau_{12}}{3} + 2 \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{a_3 \operatorname{Im} \tau_{12} + a_4 \operatorname{Im} \tau_2}{3}\right)\end{aligned}$$

On va diviser l'étude en trois : des termes isolés ( $B_1$ ), des sommes simples ( $B_2$ ) et la somme double restante ( $B_3$ ).

*Étude du terme  $B_1$  :*  $B_1$  est la somme de 28 modules, il suffit de se reporter au dessin ci-avant ; on garde ces termes isolés pour permettre d'étudier plus facilement les sommes simples de  $B_2$ . On a :

$$\begin{aligned}B_1 = e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{1}{4} + \frac{a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} - a_4\right) \tau_2 + \left(-\frac{3}{2} - a_3 + \frac{a_4}{3}\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} - a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{a_3}{3} - a_4\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{1}{4} - \frac{a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} - a_4\right) \tau_2 + \left(\frac{3}{2} - a_3 - \frac{a_4}{3}\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} - a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{a_3}{3} - a_4\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{1}{4} + \frac{a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(-\frac{5}{2} - \frac{5a_3}{3} + \frac{a_4}{3}\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{a_3}{3} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{1}{4} - \frac{a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{5a_3}{3} - \frac{a_4}{3}\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{a_3}{3} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} - a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(\frac{15}{2} - \frac{5a_3}{3} - a_4\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} - a_4\right) \tau_2 + \left(\frac{15}{2} - a_3 - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} - a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} - a_4\right) \tau_2 + \left(\frac{9}{2} - a_3 - a_4\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(\frac{25}{2} - \frac{5a_3}{3} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{25}{4} + \frac{5a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(-\frac{25}{2} + \frac{5a_3}{3} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{25}{4} + \frac{5a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(-\frac{25}{2} - \frac{5a_3}{3} + \frac{5a_4}{3}\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} + a_4\right) \tau_2 + \left(-\frac{15}{2} + a_3 - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} + a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{25}{4} - \frac{5a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(-\frac{15}{2} - \frac{5a_3}{3} + a_4\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} - a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{25}{4} + \frac{5a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(-\frac{15}{2} + \frac{5a_3}{3} - a_4\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{25}{4} + \frac{5a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} - a_4\right) \tau_2 + \left(-\frac{15}{2} - a_3 + \frac{5a_4}{3}\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} - a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} + a_4\right) \tau_2 + \left(-\frac{9}{2} + a_3 - a_4\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} + a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} - a_4\right) \tau_2 + \left(-\frac{9}{2} - a_3 + a_4\right) \tau_{12} \right] \\ +e & \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{1}{4} - \frac{a_3}{3}\right) \tau_1 + \left(\frac{9}{4} + a_4\right) \tau_2 + \left(-\frac{3}{2} + a_3 - \frac{a_4}{3}\right) \tau_{12} \right]_{+e} \quad -\pi \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{9}{4} + a_3\right) \tau_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{a_4}{3}\right) \tau_2 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{a_3}{3} + a_4\right) \tau_{12} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{25}{4} + \frac{5a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -\frac{5}{2} + \frac{5a_3}{3} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{25}{4} + \frac{5a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -\frac{5}{2} - \frac{a_3}{3} + \frac{5a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{25}{4} + \frac{5a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{5}{2} + \frac{5a_3}{3} + \frac{a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{25}{4} + \frac{5a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} + \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{5}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{5a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{9}{4} + a_4 \right) \tau_2 + \left( \frac{3}{2} + a_3 + \frac{a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{9}{4} + a_3 \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} + \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{3}{2} + \frac{a_3}{3} + a_4 \right) \tau_{12} \right].
\end{aligned}$$

On va alors former le nombre :

$$\tilde{B}_1(R) = B_1(R) e^{\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]}.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_1 = & e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \frac{2a_3}{3} \tau_1 + \left( 2 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -2 - \frac{2a_3}{3} + \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]} +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -2 + \frac{2a_3}{3} - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 1 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 1 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -3 - \frac{4a_3}{3} + \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -3 + \frac{2a_3}{3} - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 2 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 2 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 7 - \frac{4a_3}{3} - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 2 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 7 - \frac{2a_3}{3} - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 2 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 4 - \frac{2a_3}{3} - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 12 - \frac{4a_3}{3} - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 + 2a_4 \right) \tau_2 + \left( -13 + 2a_3 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + 2a_3 \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -13 - \frac{4a_3}{3} + 2a_4 \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 2 + \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -8 + \frac{4a_3}{3} - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 + \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -8 - \frac{4a_3}{3} + \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 + 2a_4 \right) \tau_2 + \left( -8 + 2a_3 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + 2a_3 \right) \tau_1 + \left( 2 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -8 - \frac{2a_3}{3} + 2a_4 \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 2 + \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -5 + \frac{4a_3}{3} - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 + \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 2 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -5 - \frac{2a_3}{3} + \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 + \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( -2 + \frac{4a_3}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 + \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( -2 + \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + 2a_4 \right) \tau_2 + \left( -3 + 2a_3 \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + 2a_3 \right) \tau_1 + \left( -3 + 2a_4 \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 + 2a_4 \right) \tau_2 + \left( 2 + 2a_3 + \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + 2a_3 \right) \tau_1 + \left( \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 2 + \frac{2a_3}{3} + 2a_4 \right) \tau_{12} \right] \\
& +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 2 + \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 1 + \frac{4a_3}{3} + \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right] +_e -\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 + \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( 1 + \frac{2a_3}{3} + \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right].
\end{aligned}$$

Étude du terme  $B_2$  :

Posons tout d'abord  $\tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ . Alors  $B_2$  peut être exprimé comme la somme de huit séries indexées sur  $\tilde{\mathbb{Z}}$ , voir là encore la figure 2.4.3. On a :

$$\begin{aligned}
B_2 = & \sum_{n_2 \in \tilde{\mathbb{Z}}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_2 + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2a_4}{3} \tau_2 + \left( \frac{2a_3}{3} + 1 \right) \tau_{12} \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \frac{a_4}{3} \tau_{12} \right]} \\
& + \sum_{n_1 \in \tilde{\mathbb{Z}}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_1 + \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2a_3}{3} \tau_1 + \left( \frac{2a_4}{3} + 1 \right) \tau_{12} \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \frac{a_3}{3} \tau_{12} \right]} \\
& + \sum_{n_2 \in \tilde{\mathbb{Z}}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_2 + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2a_4}{3} \tau_2 + \left( \frac{2a_3}{3} - 1 \right) \tau_{12} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 - \frac{a_4}{3} \tau_{12} \right]} \\
& + \sum_{n_1 \in \tilde{\mathbb{Z}}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_1 + \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2a_3}{3} \tau_1 + \left( \frac{2a_4}{3} - 1 \right) \tau_{12} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 - \frac{a_3}{3} \tau_{12} \right]} \\
& + \sum_{n_2 \in \tilde{\mathbb{Z}}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_2 + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2a_4}{3} \tau_2 + \left( \frac{2a_3}{3} - 3 \right) \tau_{12} \right) + \left( \frac{9}{4} - a_3 \right) \tau_1 - a_4 \tau_{12} \right]} \\
& + \sum_{n_1 \in \tilde{\mathbb{Z}}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_1 + \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2a_3}{3} \tau_1 + \left( \frac{2a_4}{3} - 3 \right) \tau_{12} \right) + \left( \frac{9}{4} - a_4 \right) \tau_2 - a_3 \tau_{12} \right]} \\
& + \sum_{n_2 \in \tilde{\mathbb{Z}}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_2 + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2a_4}{3} \tau_2 + \left( \frac{2a_3}{3} - 5 \right) \tau_{12} \right) + \left( \frac{25}{4} - \frac{5a_3}{3} \right) \tau_1 - \frac{5a_4}{3} \tau_{12} \right]} \\
& + \sum_{n_1 \in \tilde{\mathbb{Z}}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \tau_1 + \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2a_3}{3} \tau_1 + \left( \frac{2a_4}{3} - 5 \right) \tau_{12} \right) + \left( \frac{25}{4} - \frac{5a_4}{3} \right) \tau_2 - \frac{5a_3}{3} \tau_{12} \right]} .
\end{aligned}$$



On va majorer chacune de ces huit sommes. Il suffit pour cela de minorer les exposants. Afin de faciliter la lecture du lemme d'exposant suivant, on pose :

**Notation 2.4.16.**

$$\alpha_2 = \text{Im} \left( \left(1 - \frac{4a_4}{21}\right)\tau_2 + \left(-\frac{2}{7} - \frac{4a_3}{21}\right)\tau_{12} \right)$$

$$\beta_2 = \min \left\{ \text{Im} \left( \left(1 + \frac{4a_4}{21}\right)\tau_2 + \left(\frac{4a_3}{21} - \frac{2}{7}\right)\tau_{12} \right), \text{Im} \left( \left(1 - \frac{4a_4}{21}\right)\tau_2 + \left(\frac{2}{7} - \frac{4a_3}{21}\right)\tau_{12} \right) \right\}.$$

$$\gamma_2 = \min \left\{ \text{Im} \left( \left(1 + \frac{4a_4}{21}\right)\tau_2 + \left(\frac{4a_3}{21} - \frac{6}{7}\right)\tau_{12} \right), \text{Im} \left( \left(1 - \frac{4a_4}{21}\right)\tau_2 + \left(\frac{6}{7} - \frac{4a_3}{21}\right)\tau_{12} \right) \right\}.$$

$$\delta_2 = \min \left\{ \text{Im} \left( \left(1 + \frac{4a_4}{21}\right)\tau_2 + \left(\frac{4a_3}{21} - \frac{10}{7}\right)\tau_{12} \right), \text{Im} \left( \left(1 - \frac{4a_4}{21}\right)\tau_2 + \left(\frac{10}{7} - \frac{4a_3}{21}\right)\tau_{12} \right) \right\}.$$

Les nombres  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  et  $\delta_1$  sont obtenus à partir de ceux-là en remplaçant  $\tau_2$  par  $\tau_1$  et échangeant  $a_4$  et  $a_3$ . Ces nombres sont tous strictement positifs pour tous  $a_3, a_4 \in \{0, 1, 2\}$ .

On calcule alors :

**Lemme 2.4.17.** *Pour tout entier  $n_2 \in \tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  on a :*

$$\text{Im} \left[ \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \tau_2 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2a_4}{3}\tau_2 + \left(\frac{2a_3}{3} + 1\right)\tau_{12}\right) \right] \geq \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \alpha_2$$

$$\text{Im} \left[ \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \tau_2 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2a_4}{3}\tau_2 + \left(\frac{2a_3}{3} - 1\right)\tau_{12}\right) \right] \geq \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \beta_2$$

$$\text{Im} \left[ \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \tau_2 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2a_4}{3}\tau_2 + \left(\frac{2a_3}{3} - 3\right)\tau_{12}\right) \right] \geq \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \gamma_2$$

$$\text{Im} \left[ \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \tau_2 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2a_4}{3}\tau_2 + \left(\frac{2a_3}{3} - 5\right)\tau_{12}\right) \right] \geq \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \delta_2$$

*De plus, on a les mêmes minoration pour les sommes indexées par  $n_1$ , dans lesquelles il faut remplacer  $\tau_2$  par  $\tau_1$  et échanger  $a_4$  et  $a_3$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$  sont les termes calculés en  $n_2 = -4$  et  $n_2 = 3$ . Une preuve détaillée de ce type de lemme est donnée en 2.6.3.

□

On forme alors le nombre :

$$\widetilde{B}_2(R) = B_2(R)e^{\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]}.$$

On applique les lemmes 2.4.17 et 2.4.12 à chacune des huit sommes de  $B_2$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_2 &\leq \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \right) e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \frac{2a_3}{3} \tau_1 + \left( 6 - \frac{6a_4}{7} \right) \tau_2 + \left( -\frac{16}{7} - \frac{6a_3}{7} + \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]} \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \right) e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{6a_3}{7} \right) \tau_1 + \frac{2a_4}{3} \tau_2 + \left( -\frac{16}{7} - \frac{6a_4}{7} + \frac{2a_3}{3} \right) \tau_{12} \right]} \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \right) e^{-\pi \min \left\{ \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{6a_4}{7} \right) \tau_2 + \left( \frac{9}{7} - \frac{6a_3}{7} \right) \tau_{12} \right], \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + \frac{32a_4}{21} \right) \tau_2 + \left( -\frac{16}{7} + \frac{32a_3}{21} \right) \tau_{12} \right] \right\}} \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \right) e^{-\pi \min \left\{ \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{6a_3}{7} \right) \tau_1 + \left( \frac{9}{7} - \frac{6a_4}{7} \right) \tau_{12} \right], \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + \frac{32a_3}{21} \right) \tau_1 + \left( -\frac{16}{7} + \frac{32a_4}{21} \right) \tau_{12} \right] \right\}} \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}} \right) \max \left\{ e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{6a_4}{7} \right) \tau_2 + \left( \frac{34}{7} - \frac{6a_3}{7} - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]}, \right. \\ &\quad \left. e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 + \frac{32a_4}{21} \right) \tau_2 + \left( \frac{32a_3}{21} - \frac{2a_4}{3} - \frac{41}{7} \right) \tau_{12} \right]} \right\} \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \right) \max \left\{ e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{6a_3}{7} \right) \tau_1 + \left( 2 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{34}{7} - \frac{2a_3}{3} - \frac{6a_4}{7} \right) \tau_{12} \right]}, \right. \\ &\quad \left. e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + \frac{32a_3}{21} \right) \tau_1 + \left( 2 - \frac{2a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{32a_4}{21} - \frac{2a_3}{3} - \frac{41}{7} \right) \tau_{12} \right]} \right\} \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{\delta_2}} \right) \max \left\{ e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{6a_4}{7} \right) \tau_2 + \left( \frac{59}{7} - \frac{6a_3}{7} - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]}, \right. \\ &\quad \left. e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( 6 + \frac{32a_4}{21} \right) \tau_2 + \left( \frac{32a_3}{21} - \frac{4a_4}{3} - \frac{66}{7} \right) \tau_{12} \right]} \right\} \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{\delta_1}} \right) \max \left\{ e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 - \frac{6a_3}{7} \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{59}{7} - \frac{6a_4}{7} - \frac{4a_3}{3} \right) \tau_{12} \right]}, \right. \\ &\quad \left. e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 6 + \frac{32a_3}{21} \right) \tau_1 + \left( 6 - \frac{4a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{32a_3}{21} - \frac{4a_4}{3} - \frac{66}{7} \right) \tau_{12} \right]} \right\} \end{aligned}$$

*Étude de  $B_3$  :*

Après tout le travail préparatoire précédent, l'étude de  $B_3$  devient très rapide. Tout d'abord :

$$B_3 = \sum_{n \in (\mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 0\})^2} e^{-\pi \left( \operatorname{Im} Q(n_1, n_2) + \operatorname{Im} L(n_1, n_2) \right)},$$

avec :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} Q(n_1, n_2) &= \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \operatorname{Im} \tau_1 + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \operatorname{Im} \tau_2 + 2 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{Im} \tau_{12} \\ \operatorname{Im} L(n_1, n_2) &= 2 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{a_3 \operatorname{Im} \tau_1 + a_4 \operatorname{Im} \tau_{12}}{3} + 2 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{a_3 \operatorname{Im} \tau_{12} + a_4 \operatorname{Im} \tau_2}{3} \right) \end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité :

$$2 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \geq - \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2$$

pour couper la somme double en produit de sommes simples et obtenir l'amorce de la majoration :

$$B_3 \leq S_1 S_2,$$

où :

$$S_1 = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 (\tau_1 - \tau_{12}) + \frac{2}{3} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) (\tau_1 a_3 + \tau_{12} a_4) \right]},$$

$$S_2 = \sum_{n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}} e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 (\tau_2 - \tau_{12}) + \frac{2}{3} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) (\tau_2 a_4 + \tau_{12} a_3) \right]}.$$

On donne alors le lemme d'exposants suivant, en posant tout d'abord :

**Notation 2.4.18.**

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left( 1 - \frac{4}{21} a_3 \right) \operatorname{Im} \tau_1 + \left( -1 - \frac{4}{21} a_4 \right) \operatorname{Im} \tau_{12}, \\ \omega_2 &= \left( 1 - \frac{4}{21} a_4 \right) \operatorname{Im} \tau_2 + \left( -1 - \frac{4}{21} a_3 \right) \operatorname{Im} \tau_{12}. \end{aligned}$$

*Remarque* :  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont strictement positifs pour tous  $a_3, a_4 \in \{0, 1, 2\}$ , sauf éventuellement en  $a_3 = a_4 = 2$ . Cependant on verra un peu plus bas qu'en utilisant la relation  $\Lambda_{\Theta, v}(R) = \Lambda_{\Theta, v}([2]R)$  on évite ce point car on mène le calcul pour  $a_3 = a_4 = 1$ . On peut donc exclure le cas  $a_3 = a_4 = 2$  dans les calculs suivants.

**Lemme 2.4.19.** *Pour tout entier  $n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 0\}$ , on peut minorer :*

$$\operatorname{Im} \left[ \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 (\tau_2 - \tau_{12}) + \frac{2}{3} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) (\tau_2 a_4 + \tau_{12} a_3) \right] \geq \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \omega_2,$$

de même pour la somme indexée par  $n_1$  :

$$\operatorname{Im} \left[ \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 (\tau_1 - \tau_{12}) + \frac{2}{3} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) (\tau_1 a_3 + \tau_{12} a_4) \right] \geq \left( n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \omega_1.$$

*Démonstration.* Le nombre  $\omega_2$  est calculé en étudiant les cas  $n_2 = -4$  et  $n_2 = 1$ . □

Comme pour les termes précédents on forme alors :

$$\widetilde{B}_3 = B_3 e^{\pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]}.$$

On applique les lemmes 2.4.17 et 2.4.12 pour obtenir finalement :

$$\widetilde{B}_3 \leq e^{-\pi \operatorname{Im} \left[ \left( 2 - \frac{2}{21} a_3 \right) \tau_1 + \left( 2 - \frac{2}{21} a_4 \right) \tau_2 + \left( -\frac{2}{21} (a_3 + a_4) - 5 \right) \tau_{12} \right]} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \right).$$

On va à présent réunir les informations collectées jusqu'ici. On appelle  $\mathcal{T}'_3$  l'ensemble des points d'ordre 3 étudiés dans le tableau 2.4.3. On appelle  $\mathcal{T}''_3$  l'ensemble des doubles des points de  $\mathcal{T}'_3$ . L'union  $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}'_3 \cup \mathcal{T}''_3$  est une partition de  $\mathcal{T}_3$ . On a donc en vertu de  $\Lambda_{\Theta, v}(R) = \Lambda_{\Theta, v}([2]R)$  :

$$\sum_{R \in \mathcal{T}_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) = \sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) + \sum_{R \in \mathcal{T}''_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) = 2 \sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \Lambda_{\Theta, v}(R).$$

Il suffit donc de majorer cette dernière somme. On va utiliser tout le matériel précédent pour ce faire :

$$\begin{aligned}
\sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) &= \sum_{R \in \mathcal{T}'_3} -\log \left( \left| \theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}(Z(R)) \right|_v e^{-\pi {}^t Y(R) \operatorname{Im} \tau_v Y(R)} \right) \\
&= \sum_{R \in \mathcal{T}'_3} -\log \left| \theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}(Z(R)) \right|_v + \sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \pi {}^t Y(R) \operatorname{Im} \tau_v Y(R),
\end{aligned}$$

où  $Z(R) = X(R) + \tau_v Y(R)$ , avec  $X$  et  $Y$  des vecteurs réels. On calcule :

$$\pi {}^t Y(R) \operatorname{Im} \tau_v Y(R) = \frac{\pi}{9} (a_3^2 \operatorname{Im} \tau_1 + 2a_3 a_4 \operatorname{Im} \tau_{12} + a_4^2 \operatorname{Im} \tau_2).$$

En reprenant les calculs précédents on a :

$$\sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) \leq \sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \left[ -\log (A(R) - B(R)) + \frac{\pi}{9} (a_3^2 \operatorname{Im} \tau_1 + 2a_3 a_4 \operatorname{Im} \tau_{12} + a_4^2 \operatorname{Im} \tau_2) \right],$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) &\leq \sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \left[ -\log (\tilde{A}(R) - \tilde{B}(R)) \right] + \\
&\sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{a_3^2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{a_4^2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{2a_3 a_4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} \right]
\end{aligned}$$

On va définir alors le sous-ensemble  $\mathcal{T}_{3a} \subset \mathcal{T}'_3$  contenant les points  $R$  d'ordre 3 tels que le plus grand terme du minorant de  $\tilde{A}(R)$  est de module  $e^{\pi \operatorname{Im} \tau_{12}}$ . Il y a 3 tels points, qui sont les points étoilés dans le tableau 2.4.3.

On définit de plus  $\mathcal{T}_{3b} \subset \mathcal{T}'_3$  le sous-ensemble contenant les points  $R$  d'ordre 3 tels que le plus grand terme du minorant de  $\tilde{A}(R)$  est de module  $e^{\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}}$ . Il y a 18 tels points, ce sont les points doublement étoilés dans le tableau 2.4.3.

On appelle  $\mathcal{T}_{3c}$  l'ensemble des 19 autres points, non étoilés dans le tableau, pour lesquels le plus grand terme du minorant est constant.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) &\leq - \sum_{R \in \mathcal{T}_{3a}} \log \left( \tilde{A}(R) - \tilde{B}(R) \right) e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} - \sum_{R \in \mathcal{T}_{3a}} \pi \operatorname{Im} \tau_{12} \\
&\quad - \sum_{R \in \mathcal{T}_{3b}} \log \left( \tilde{A}(R) - \tilde{B}(R) \right) e^{-\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} - \sum_{R \in \mathcal{T}_{3b}} \frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12} \\
&\quad - \sum_{R \in \mathcal{T}_{3c}} \log \left( \tilde{A}(R) - \tilde{B}(R) \right) \\
&\quad + \sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \pi \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{a_3^2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{a_3}{3} \right) \tau_1 + \left( \frac{a_4^2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{a_4}{3} \right) \tau_2 + \left( \frac{2a_3 a_4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{a_3 + a_4}{3} \right) \tau_{12} \right],
\end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{R \in \mathcal{T}'_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) &\leq C(\varepsilon) - 9\pi \operatorname{Im} \tau_{12} + \left( 13 \times \frac{1}{4} + 27 \times \frac{1}{36} \right) \pi \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) \\
&\quad + \left( 4 \times \frac{1}{2} + 18 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{2}{36} - 9 \times \frac{2}{36} \right) \pi \operatorname{Im} \tau_{12}
\end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned}
C(\varepsilon) &= \sup_{\tau_v \in F_{2, \varepsilon}} \left\{ \sum_{R \in \mathcal{T}_{3a}} \left[ -\log \left( \tilde{A}(R) - \tilde{B}(R) \right) e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{R \in \mathcal{T}_{3b}} \left[ -\log \left( \tilde{A}(R) - \tilde{B}(R) \right) e^{-\frac{\pi}{3} \operatorname{Im} \tau_{12}} \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{R \in \mathcal{T}_{3c}} \left[ -\log \left( \tilde{A}(R) - \tilde{B}(R) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\sum_{R \in \mathcal{T}_3} \Lambda_{\Theta, v}(R) \leq 2C(\varepsilon) + 8 \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) - 8 \operatorname{Im} \tau_{12}.$$

On donne à présent un argument d'estimation grossière pour donner une idée du comportement de  $C(\varepsilon)$ . Notons  $\tilde{A}(R)$  les sommes ajustées de telle sorte que le terme dominant est 1 (c'est la stratégie mise en place dans les calculs précédents) : ce sont exactement les termes qui interviennent dans  $C(\varepsilon)$ . On notera  $\tilde{B}(R)$  les termes obtenus par la même transformation à partir de  $B(R)$ . Pour les quatre points  $R$  du tableau de coordonnées

$a_2 = a_4 = 0$  on a essentiellement :

$$\check{A}(R) \geq 1 - e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} - 2e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_1},$$

pour les trente-six autres on a :

$$\check{A}(R) \geq 1 - 3e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_1}.$$

Pour tout point  $R$  on a ensuite :

$$\check{B}(R) \leq 28e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_1} + 8e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_1} + 4e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_1}.$$

Ceci donne comme première estimation :

$$C(\varepsilon) \leq -4 \log \left( 1 - e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} - 45e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_1} \right) - 36 \log \left( 1 - 46e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_1} \right).$$

Les termes du membre de droite sont, lorsque  $\varepsilon$  est au voisinage de 0, ou bien bornés ou bien du type :

$$-\log(1 - e^{-\varepsilon}) = -\log(\varepsilon + o(\varepsilon)).$$

Cela fournit donc, au moins lorsque  $\operatorname{Im} \tau_1$  est suffisamment grand, une estimation de  $C(\varepsilon)$ .

On peut faire mieux en utilisant un logiciel de calcul, car tous les termes  $\check{A}(R)$  et  $\check{B}(R)$  sont explicites. La majorité des termes exponentiels seront écrasés par le fait qu'on suppose  $\operatorname{Im} \tau_2$  suffisamment grand. En tenant compte de plus de  $\operatorname{Im} \tau_1 \geq \max\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\varepsilon}\}$  on obtient finalement :

$$C(\varepsilon) \leq 5 \log \left( \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, 15 \right\} \right).$$

□

### Remarques sur le cas $31 \geq \operatorname{Im} \tau_2$

Dans le cas où la matrice de périodes a tous ses coefficients bornés, nous allons obtenir :

**Proposition 2.4.20.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Soient  $k$  un corps de nombres et  $C/k$  une courbe de genre 2. Soit  $v$  une place archimédienne de  $k$ , on a :  $\operatorname{Jac}(C)(\bar{k}_v) \simeq \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau_v \mathbb{Z}^2$ . On suppose qu'il existe une constante absolue  $c > 0$  telle que  $c \geq \operatorname{Im} \tau_{2,v}$ . On suppose de plus que  $\operatorname{Im} \tau_{12} \geq \varepsilon$ . Il existe une constante  $c_v(\varepsilon) \geq 0$  ne dépendant que du corps  $k$  et de  $\varepsilon$  telle que pour tout point  $R \in A_\Theta(k)$  d'ordre exactement 3 :*

$$-\Lambda_{\Theta,v}(R) \geq -c_v(\varepsilon).$$

*Démonstration.* On sait que les points  $R$  d'ordre exactement 3 ne sont pas sur le diviseur  $\Theta$ ; il suffit de constater que la fonction :

$$\tau_v \longmapsto -\Lambda_{\Theta,v}(R)$$

est continue sur le compact défini par les conditions  $c \geq \text{Im } \tau_{2,v}$  et  $\text{Im } \tau_{12,v} \geq \varepsilon$ . □

*Remarque 1 :* Cette proposition permettra donc d'étendre le domaine de validité du théorème 2.5.3 (quitte à changer un peu le principe des tiroirs) au prix du caractère explicite des constantes.

*Remarque 2 :* Pour chercher à préciser cette minoration on peut partir directement de la minoration de la proposition 2.2.9 :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) \geq -(143 \log 2 + 51 \log 3) - 72h_v(F).$$

Un énoncé de comparaison entre  $\text{Im } \tau_v$  et  $h_v(F)$  permettrait donc d'expliciter la constante  $c_v$  de la proposition précédente.

## 2.5 Minoration globale de la hauteur de Néron-Tate

On montre dans cette partie comment à partir des informations locales on peut obtenir un théorème global de minoration de la hauteur de Néron-Tate sur une jacobienne de dimension 2.

### 2.5.1 Lemme de zéros et principe des tiroirs

**Lemme 2.5.1.** *Soit  $k$  un corps de nombres. Soit  $C/k$  une courbe de genre 2 plongée dans  $A$  sa jacobienne. Soient  $P_1$  et  $P_2$  des points non nuls de  $A(k)$  tels que  $P_1 + P_2 \neq 0$ . Alors :*

$$\{\pm P_1, \pm P_2, \pm(P_1 + P_2)\} \not\subset C(k).$$

*Démonstration.* La preuve proposée ici montre un résultat un peu plus général. Soient  $S_1 = \{T_1, \dots, T_r\}$  et  $S_2 = \{Q_1, \dots, Q_r\}$  deux ensembles de points de  $A(k)$  à exactement  $r \geq 2$  éléments. On suppose que  $S_1 + S_2 \subset C(k)$ .

Posons alors  $C^{(1)} = \bigcap_{t \in S_1} (C - t)$ . C'est une sous-variété non vide et stricte de  $A$ , sa dimension vaut donc 0 ou 1. Or si  $t \neq O$ , l'ensemble  $C \cap (C - t)$  est fini (cela vient du fait que  $\Theta$  est associé à une polarisation principale); donc la dimension de  $C^{(1)}$  est zéro car  $\text{Card}(S_1) \geq 2$ . Comme de plus  $S_2 \subset C^{(1)}$  par construction, il vient :

$$r = \text{Card}(S_2) \leq \deg(C^{(1)}) \leq 2,$$



la dernière inégalité étant justifiée par le fait que  $C \cdot C = 2! = 2$  (comme auto-intersection de diviseur).

On obtient alors le lemme en prenant  $S_1 = \{O, P_1, -P_2\}$  et  $S_2 = \{O, -P_1, P_2\}$  : on sait que  $r = 3$  dans ce cas grâce aux hypothèses sur  $P_1$  et  $P_2$ , il vient donc par contraposée :

$$S_1 + S_2 = \{O, P_1, P_2, P_1 + P_2, -P_1, -P_2, -P_1 - P_2\} \not\subseteq C(k).$$

Il suffit de remarquer que  $O \in C(k)$  pour conclure. □

*Remarque :*

On peut déduire de ce lemme une nouvelle preuve de la propriété 2.4.2. Soit  $Q$  un point d'ordre 3 exactement. On pose dans le lemme précédent  $S_1 = S_2 = \{O, Q, -Q\}$ . Alors le lemme permet d'affirmer :

$$\{O, Q, -Q\} + \{O, Q, -Q\} = \{O, \pm Q, \pm[2]Q\} = \{O, \pm Q\} \not\subseteq C(k),$$

ce qui permet de conclure :  $Q \notin C(k)$ .

**Proposition 2.5.2.** *Soit  $k$  un corps de nombres, on pose  $m = |M_k^\infty|$ . Soit  $C/k$  une courbe de genre 2, on note  $A = \text{Jac}(C)$  sa jacobienne. On pose  $M = 240$ . Soit  $P \in A(k)$  un point tel que ses multiples  $\{[n]P, n \in \llbracket 0, 2M^{4m} \rrbracket\}$  soient tous distincts. Il vient alors :*

$$\exists n \in \llbracket 0, 2M^{4m} \rrbracket, [n]P \notin \Theta, \forall v \in M_k^\infty,$$

$$\Lambda_{2\Theta, v}([n]P) \geq 0, 245\pi \left( \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) - 2 \text{Im } \tau_{12, v} \right) - \log \left( 4 + \frac{3}{2} \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right).$$

*Démonstration.* On a les applications :

$$A(\bar{k}_v) \longrightarrow \mathbb{C}^2 / (\mathbb{Z}^2 + \tau_v \mathbb{Z}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

$$P \longmapsto Z_v(P) = X_v(P) + \tau_v Y_v(P) \longmapsto (X_v(P), Y_v(P)).$$

Soit alors l'application  $F : A(k) \longrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{4m}$  définie par :

$$F(P) = (X_v(P), Y_v(P))_{v \in M_k^\infty}.$$

On divise alors  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{4m}$  en  $M^{4m}$  boîtes de taille  $\frac{1}{M}$ . On considère alors l'ensemble  $\{F([n]P), n \in \llbracket 0, 2M^{4m} \rrbracket\}$  : il contient  $2M^{4m} + 1$  points à répartir dans  $M^{4m}$  boîtes. Par le principe des tiroirs il existe donc trois entiers  $n_1, n_2$  et  $n_3$  tels que, avec  $i > j$  :

$$0 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq 2M^{4m}, \quad n_i - n_j \leq 2M^{4m},$$

$$\|X_v([n_i - n_j]P)\| \leq \frac{1}{M}, \quad \|Y_v([n_i - n_j]P)\| \leq \frac{1}{M}.$$

Posons  $P_1 = [n_3 - n_2]P$  et  $P_2 = [n_2 - n_1]P$ . Alors  $P_1 + P_2 = [n_3 - n_1]P$ . En appliquant le lemme 2.5.1, on sait que dans l'ensemble de points  $\{P_1, P_2, P_1 + P_2, -P_1, -P_2, -P_1 - P_2\}$  il y en a au moins un qui n'est pas sur le diviseur  $\Theta$ . C'est ce point qu'on choisit : on le note  $[n]P$  (ou peut-être  $[n](-P)$ , le fait de prendre éventuellement l'opposé n'est pas gênant car la hauteur locale est paire).

Or on a  $M = 240$ . Alors  $\|(X, Y)\| \leq 1/240$  et  $d(1/2 + y_i, \mathbb{Z})^2 \geq (1/2 - 1/240)^2 \geq 0,245$ . On obtient alors, en reportant ces approximations dans la proposition 2.4.9 :

$$\Lambda_{2\Theta, v}([n]P) \geq 0,245\pi \left( \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) - 2 \text{Im } \tau_{v,12} \right) - \log \left( 4 + \frac{3}{2} \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right).$$

□

## 2.5.2 Minoration globale

On réunit les résultats des parties précédentes dans le théorème suivant. On rappelle que pour une courbe  $C/k$  de genre 2 on note  $D = 2^8 \text{disc}(F)$ , et  $\text{Tr}(A)$  la trace archimédienne de la variété abélienne  $A$ . On rappelle qu'on a défini, pour tout choix de  $\varepsilon > 0$ , un sous-ensemble de l'espace de module  $F_2$  :

$$F_{2,\varepsilon} = \left\{ \tau \in F_2 \mid \left[ \begin{array}{l} \text{Im } \tau_{12} \geq \varepsilon > 0 \\ \text{Im } \tau_1 \geq \max\{1/\varepsilon, \sqrt{3}/2\} \\ \text{Im } \tau_2 \geq 31 \end{array} \right] \right\}.$$

Alors on obtient :

**Théorème 2.5.3.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soient  $C/k$  une courbe de genre 2 donnée par  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  et  $A$  sa jacobienne. On suppose que  $A$  vérifie  $\tau_v \in F_{2,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ . Alors il existe une constante  $c_1(d) > 0$  telle que pour tout point  $P \in A(k)$  l'une des deux assertions suivantes est vraie :*

$$(1) \quad [n]P = O \text{ pour un entier } 1 \leq n \leq 2 \cdot 240^{4 \cdot 3^{16}d},$$

$$(2) \quad \widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c_1 \left( \text{Tr}(A) - 63 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) \right),$$

où on peut prendre  $c_1 = \frac{1}{160d \cdot 240^{8 \cdot 3^{16}d}}$ .

*Démonstration.* Soit  $k' = k(A[3])$ . Posons  $m' = |M_{k'}^\infty|$  et  $d' = [k' : \mathbb{Q}]$ . Écrivons l'égalité-clef 2.4.3 sur  $k'$  en choisissant pour  $n$  l'entier donné par le principe des tiroirs de 2.5.2 :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) = \frac{1}{80n^2} \sum_{R \in \mathcal{T}_3} \left[ \sum_{v \in M_{k'}^0} n_v \left( \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) \right) + \sum_{v \in M_{k'}^\infty} n_v \left( 2\Lambda_{\Theta,v}([n]P) - 2\Lambda_{\Theta,v}(R) \right) \right].$$

Il suffit alors d'appliquer les minoration locales des propositions 2.2.6, 2.4.6, 2.4.15 et 2.5.2 avec  $n \leq 2 \cdot 240^{4d'}$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{A,2\Theta}(P) &\geq \frac{1}{80 \cdot 4 \cdot 240^{8d'}} \sum_{v \in M_{k'}^0} n_v \left( -\left(\frac{80}{3} + 36\right) \text{ord}_v(D) + 24 \text{ord}_v(3) + 4 \text{ord}_v(2) \right) \log N_{k/\mathbb{Q}}(v) \\ &\quad + \frac{2}{320 \cdot 240^{8d'}} \sum_{v \in M_{k'}^\infty} n_v \left( (80 \times 0, 245 - 8) \pi \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) + (16 - 160 \times 0, 245) \pi \text{Im } \tau_{12} \right) \\ &\quad + \frac{2}{320 \cdot 240^{8d'}} \sum_{v \in M_{k'}^\infty} n_v \left( -80 \log \left( 4 + \frac{3}{2} \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right) - 10 \log \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, 15 \right\} \right), \end{aligned}$$

donc en utilisant :

$$\text{Tr}(\text{Im } \tau) \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, 15 \right\} \implies -10 \log \left( \frac{1}{2} \text{Tr}(\text{Im } \tau) \right) \leq -10 \log \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, 15 \right\},$$

et  $\text{Tr}(\text{Im } \tau) \geq 4 \text{Im } \tau_{12}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{A,2\Theta}(P) &\geq -\frac{1}{160d' 240^{8d'}} \left( 63 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) - 24 \log 3 - 4 \log 2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{160d' 240^{8d'}} \sum_{v \in M_{k'}^\infty} d_v \left( 18, 72 \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) - 80 \log \left( 4 + \frac{3}{2} \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right) - 10 \log \left( \frac{1}{2} \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right) \right) \\ &\geq \frac{1}{160d' 240^{8d'}} \text{Tr}(A) - \frac{63}{160d' 240^{8d'}} \log N_{k'/\mathbb{Q}}(D). \end{aligned}$$

Les dernières inégalités étant vraies en vertu de  $\text{Im } \tau_1 \geq \max \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\varepsilon} \right\}$  et  $\text{Im } \tau_2 \geq 31$ .

On conclut cette preuve en redescendant sur le corps de base. On sait que la variété est définie sur  $k$ . De plus les quantités  $\frac{1}{d} \text{Tr}(A)$  et  $\frac{1}{d} \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$  sont invariantes par extension de corps : pour la trace archimédienne c'est montré dans le corollaire 2.8.4, pour le discriminant c'est une conséquence directe de la multiplicativité des normes et de la multiplicativité des degrés. On a donc :

$$\frac{1}{d'} \left( \text{Tr}(A) - 63 \log N_{k'/\mathbb{Q}}(D) \right) = \frac{1}{d} \left( \text{Tr}(A) - 63 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) \right).$$

Enfin par multiplicativité des degrés à nouveau :  $d' = [k' : k]d \leq 3^{16}d$ . □

*Remarque importante* : L'espace des modules de courbes de genre 2 est de dimension 3, cela laisse suffisamment de liberté pour obtenir des familles de jacobiniennes vérifiant des conditions sur le discriminant. C'est une différence notable par rapport au cas des courbes elliptiques (voir la remarque succédant au théorème 2.7.4). L'exemple suivant donne une infinité de courbes ayant bonne réduction en dehors des places divisant 5 et dont au moins l'un des invariants d'Igusa tend vers l'infini. Notons que ces courbes ne peuvent être toutes définies sur un même corps de nombres (à cause de la conjecture de Shafarevitch démontrée par Faltings), mais des extensions de corps de degré inférieur ou égal à 4 permettent d'agrandir la famille. Pour tout  $\alpha > 0$ , voici une famille infinie d'équations hyperelliptiques de degré 5 définies par  $y^2 = F(x)$  et telles que  $J_6(F) > \text{disc}(F)^\alpha$ , où  $J_6$  est un invariant d'Igusa. Considérons pour  $B$  un paramètre entier strictement positif :

$$y^2 = F(x) = x^5 - 5Bx + (1 + 256B^5)^{\frac{1}{4}}.$$

Alors (les formules des invariants d'Igusa sont rappelées dans l'annexe 5.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{disc}(F) = 5^5, \\ J_2 = -25B, \\ J_4 = 48,875B^2, \\ J_6 = 39,0625B^3. \end{array} \right.$$

A partir de là, pour un  $\alpha > 0$  fixé :

$$\left( J_6 > \text{disc}(F)^\alpha \right) \iff \left( B^3 \gg 5^{5\alpha} \right) \iff \left( B \gg 5^{\frac{5}{3}\alpha} \right).$$

Les invariants d'Igusa décrivent l'espace de modules des courbes de genre 2 (voir [Igu62] p. 638 et suivantes), l'inégalité  $\log |J_6| \geq \alpha \log N_{k/\mathbb{Q}}(\text{disc}(F))$  est donc un argument indiquant qu'il existe des familles infinies de jacobiniennes  $A$  de dimension 2 vérifiant la condition  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ , contrairement (conjecturalement) au cas de la dimension 1.

## 2.6 La hauteur de Faltings

### 2.6.1 Expression dans le modèle d'Igusa

Soit  $k$  un corps de nombres. Soient  $C/k$  une courbe lisse de genre 2 et  $A = \text{Jac}(C)$  sa jacobienne. Notons  $h_{\mathbb{F}}(A/k)$  la hauteur de Faltings de la variété abélienne  $A/k$ . On

suppose de plus que la courbe localisée  $C_p$  est lisse de genre 2 en toute place  $v$  divisant 2. On note  $\Delta_{\min}$  le discriminant minimal associé aux modèles d'Igusa de la courbe  $C$ , lequel est utilisé dans [Uen88] et défini dans le paragraphe suivant. On notera  $\mathcal{Z}_2$  l'ensemble des caractéristiques paires de dimension 2. En se référant aux travaux de K. Ueno de l'article [Uen88] p. 765 on a :

$$h_{\mathbb{F}}(A/k) = \frac{1}{10d} \left[ \sum_{p \in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12} \Delta_{\min}) \log N_{k/\mathbb{Q}}(p) - \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log \left| 2^{-12} \prod_{m \in \mathcal{Z}_2} \theta_m^2(0, \tau_v) \det(\operatorname{Im} \tau_v)^5 \right| \right].$$

La formule obtenue pour la hauteur de Faltings augmentée est donc :

$$h'_{\mathbb{F}}(A/k) = \frac{1}{10d} \left[ \sum_{p \in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12} \Delta_{\min}) \log N_{k/\mathbb{Q}}(p) - \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log \left| 2^{-12} \prod_{m \in \mathcal{Z}_2} \theta_m^2(0, \tau_v) \right| \right].$$

## 2.6.2 Comparaison entre discriminants

**Lemme 2.6.1.** *Soit  $C/k$  une courbe de genre 2 donnée dans le modèle  $y^2 = F(x)$  hyperelliptique entier sur  $k$  (comme dans l'article [FS97]), avec bonne réduction en toute place divisant 2. Le discriminant  $\Delta_{\min}$  introduit dans l'article [Uen88] du modèle d'Igusa de  $C$  vérifie :*

$$\sum_{p \in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12} \Delta_{\min}) \log N_{k/\mathbb{Q}}(p) \leq \sum_{p \in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^8 \operatorname{disc}(F)) \log N_{k/\mathbb{Q}}(p).$$

*Démonstration.* Le modèle d'Igusa est donné par une équation du type :

$$xy^2 + (1 + ax + bx^2)y + x^2(c + dx + x^2) = 0.$$

Son discriminant est défini dans [Uen88] comme étant le discriminant de l'équation hyperelliptique :

$$y^2 = (1 + ax + bx^2)^2 - 4x^3(c + dx + x^2),$$

corrigé par une puissance de 2, afin de tenir compte du comportement aux places de  $k$  divisant 2.

Le discriminant minimal donné dans [Uen88] est donc de norme inférieure ou égale au discriminant minimal de la courbe hyperelliptique  $C$  (car il est plus petit pour la valuation en 2). Ce discriminant sera en particulier de norme inférieure ou égale à celle du discriminant du modèle hyperelliptique de Flynn-Smart (qui n'est pas forcément minimal), on consultera par exemple [Liu96] p. 4581 et suivantes.

□

### 2.6.3 Constantes thêta

Soit  $v$  une place archimédienne. On note ici  $\tau = \tau_v$ . Il y a dix constantes thêta  $\theta_{ab}(0, \tau)$  non nulles en dimension 2 ; elles correspondent exactement aux caractéristiques paires :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \theta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \theta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}.$$

On a donc  $\mathcal{Z}_2 = \theta_1 \cup \theta_2$ .

On rappelle la relation :

$$\left| \theta_{ab}(0, \tau) \right| = \left| \theta_{00}(\tau a + b, \tau) e^{i\pi {}^t a \tau a + 2i\pi {}^t a b} \right| = \left| \theta_{00}(\tau a + b, \tau) \right| e^{-\pi {}^t a \operatorname{Im} \tau a}.$$

**Proposition 2.6.2.** *Pour les caractéristiques  $[a, b] \in \theta_1$  (donc vérifiant  $a = 0$ ) on a la minoration (positive lorsque  $\operatorname{Im} \tau_1 \geq 2$ ) :*

$$\left| \theta_{ab}(0, \tau) \right| \geq 2 - \left( 1 + \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_1}} \right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{2}} \right) \left( 1 + \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}} \right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2}} \right).$$

*Démonstration.* On minore par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \theta_{ab}(0, \tau) \right| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{i\pi ({}^t n \tau n + 2 {}^t n b)} \right| \\ &\geq 1 - \left| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^2 \\ n \neq (0,0)}} e^{i\pi ({}^t n \tau n + 2 {}^t n b)} \right| \\ &\geq 2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi {}^t n \operatorname{Im} \tau n}, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
|\theta_{ab}(0, \tau)| &\geq 2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\pi}{2}(n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2)} \\
&\geq 2 - \left( \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n_1^2 \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{2}} \right) \left( \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n_2^2 \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2}} \right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat en appliquant deux fois le lemme 2.4.12. □

**Lemme 2.6.3.** *Soit  $\tau$  une matrice du domaine de Siegel en dimension 2. On a alors les minoration pour  $n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$  et  $n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  :*

$$n_1^2 (\operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12}) + n_1 \operatorname{Im} \tau_1 \geq \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{6} \right) n_1^2,$$

$$n_2^2 (\operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}) + n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \geq \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{4} \right) n_2^2,$$

pour  $n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$  :

$$n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 - 3n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \geq \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{4} \right) n_2^2,$$

et pour  $n_2 \in \mathbb{Z}$  :

$$n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 - n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \geq \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2} \right) n_2^2$$

*Démonstration.* On démontre la dernière inégalité,  $n_2 \in \mathbb{Z}$ . Pour  $n_2 = 0$  l'inégalité est une égalité simple, on peut donc supposer  $n_2 \neq 0$ . Soit :

$$E := n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 - n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} - \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2} \right) n_2^2,$$

alors :

$$E \geq n_2^2 \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2} \right) - |n_2| \operatorname{Im} \tau_{12},$$

donc :

$$E \geq \min_{\substack{n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_2 \neq 0}} \left\{ n_2^2 \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2} \right) - |n_2| \operatorname{Im} \tau_{12} \right\} \geq \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2} - \operatorname{Im} \tau_{12} \geq 0.$$

□

**Proposition 2.6.4.** Soit  $[a, b] = [1/2, 0, 0, 0]$ . On a la minoration (positive lorsque l'on suppose  $\text{Im } \tau_1 \geq 4$ ) :

$$\begin{aligned} \left| \theta_{ab}(0, \tau) \right| e^{\pi {}^t a \text{Im } \tau a} &\geq 4 - \left( 1 + \left( 1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\text{Im } \tau_1}} \right) e^{-\pi \frac{\text{Im } \tau_1}{6}} \right) \left( 2 + \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{\text{Im } \tau_2}} \right) e^{-\pi \frac{\text{Im } \tau_2}{4}} \right) \\ &\quad - \left( 1 + \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Im } \tau_2}} \right) e^{-\pi \frac{\text{Im } \tau_2}{2}} \right) - e^{-\pi \text{Im } \tau_2} \\ &\quad - \left( 1 + \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Im } \tau_2}} \right) e^{-\pi \frac{\text{Im } \tau_2}{2}} \right) e^{-2\pi \text{Im } \tau_1}. \end{aligned}$$

De plus on déduit le minorant pour la caractéristique  $[a, b] = [0, 1/2, 0, 0]$  en échangeant  $\tau_1$  et  $\tau_2$  dans cette dernière expression.

*Démonstration.* On fait le calcul pour la caractéristique  $[1/2, 0, 0, 0]$ , le deuxième calcul se déduit du premier en changeant  $n_1$  en  $n_2$ . On a tout d'abord :

$$\left| \theta_{ab}(0, \tau) \right| = \left| \theta_{00}(\tau a + b, \tau) e^{i\pi {}^t a \tau a + 2i\pi {}^t ab} \right| = \left| \theta_{00}(\tau a + b, \tau) \right| e^{-\pi {}^t a \text{Im } \tau a}.$$

Calculons (avec  $b = 0$  ici) :

$$\begin{aligned} \left| \theta_{00}(\tau a, \tau) \right| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{2i\pi \left( \frac{1}{2} {}^t n \tau n + {}^t n \tau a \right)} \right| \\ &= \left| \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{i\pi \left( n_1^2 \tau_1 + n_2^2 \tau_2 + 2n_1 n_2 \tau_{12} + n_1 \tau_1 + n_2 \tau_{12} \right)} \right| \\ &\geq 2 - \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ n \neq (0,0), (-1,0)}} e^{-\pi \left( n_1^2 \text{Im } \tau_1 + n_2^2 \text{Im } \tau_2 + 2n_1 n_2 \text{Im } \tau_{12} + n_1 \text{Im } \tau_1 + n_2 \text{Im } \tau_{12} \right)} \\ &\geq 4 - \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi \left( n_1^2 \text{Im } \tau_1 + n_2^2 \text{Im } \tau_2 + 2n_1 n_2 \text{Im } \tau_{12} + n_1 \text{Im } \tau_1 + n_2 \text{Im } \tau_{12} \right)}. \end{aligned}$$



Posons :

$$A := \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi \left( n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 + 2n_1 n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} + n_1 \operatorname{Im} \tau_1 + n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \right)}.$$

Décomposons :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ n_1 \neq -2, -1}} e^{-\pi \left( n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 + 2n_1 n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} + n_1 \operatorname{Im} \tau_1 + n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \right)} \\ &+ \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ n_1 = -1}} e^{-\pi \left( n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 - n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \right)} + \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ n_1 = -2}} e^{-\pi \left( n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 - 3n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} + 2 \operatorname{Im} \tau_1 \right)}. \end{aligned}$$

Alors comme  $2n_1 n_2 \geq -n_1^2 - n_2^2$  :

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ n_1 \neq -2, -1}} e^{-\pi \left( n_1^2 (\operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12}) + n_1 \operatorname{Im} \tau_1 + n_2^2 (\operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}) + n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \right)} \\ &+ \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \left( n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 - n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} \right)} + \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \left( n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 - 3n_2 \operatorname{Im} \tau_{12} + 2 \operatorname{Im} \tau_1 \right)}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} A &\leq \left( \sum_{n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}} e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{6} n_1^2} \right) \left( 1 + \sum_{n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{4} n_2^2} \right) + \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2} n_2^2} \\ &+ \left( e^{-\pi \left( \operatorname{Im} \tau_2 - 3 \operatorname{Im} \tau_{12} + 2 \operatorname{Im} \tau_1 \right)} + \sum_{n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}} e^{-\pi \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{4} n_2^2 + 2 \operatorname{Im} \tau_1 \right)} \right). \end{aligned}$$

Donc en utilisant le lemme 2.6.3 et par une application répétée du lemme 2.4.12 :

$$\begin{aligned}
A &\leq \left(1 + \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_1}}\right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{6}}\right) \left(2 + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{4}}\right) \\
&\quad + \left(1 + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2}}\right) \\
&\quad + e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_2} + \left(1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2}}\right) e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau_1}.
\end{aligned}$$

La proposition en découle. □

**Proposition 2.6.5.** *Soit  $[a, b] = [1/2, 0, 0, 1/2]$ . On a la minoration (positive lorsque  $\operatorname{Im} \tau_1 \geq 4$ ) :*

$$\begin{aligned}
|\theta_{ab}(0, \tau)| e^{\pi^t a \operatorname{Im} \tau a} &\geq 4 - \left(1 + \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_1}}\right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{6}}\right) \left(2 + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{4}}\right) \\
&\quad - \left(1 + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2}}\right) - e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_2} \\
&\quad - \left(1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-\pi \frac{\operatorname{Im} \tau_2}{2}}\right) e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau_1}
\end{aligned}$$

*De plus si  $[a, b] = [0, 1/2, 1/2, 0]$  on a une minoration similaire (positive lorsque l'on suppose  $\operatorname{Im} \tau_1 \geq 4$ ) quitte à changer  $\tau_1$  en  $\tau_2$ .*

*Démonstration.* On fait le calcul pour la caractéristique  $[1/2, 0, 0, 1/2]$ , le deuxième calcul se déduit du premier en changeant  $n_1$  en  $n_2$ . Or le calcul pour  $[1/2, 0, 0, 1/2]$  est en fait le même que pour  $[1/2, 0, 0, 0]$ . En effet :

$$\begin{aligned}
\left| \theta_{00}(\tau a + b, \tau) \right| &= \left| \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{i\pi \left( n_1^2 \tau_1 + n_2^2 \tau_2 + 2n_1 n_2 \tau_{12} + n_1 \tau_1 + n_2 \tau_{12} + n_2 \right)} \right| \\
&\geq 2 - \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ n \neq (0,0), (-1,0)}} \left| e^{i\pi \left( n_1^2 \tau_1 + n_2^2 \tau_2 + 2n_1 n_2 \tau_{12} + n_1 \tau_1 + n_2 \tau_{12} + n_2 \right)} \right|, \\
&\geq 2 - \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ n \neq (0,0), (-1,0)}} \left| e^{i\pi \left( n_1^2 \tau_1 + n_2^2 \tau_2 + 2n_1 n_2 \tau_{12} + n_1 \tau_1 + n_2 \tau_{12} \right)} \right|,
\end{aligned}$$

et le minorant est donc le même que pour la caractéristique  $[1/2, 0, 0, 0]$  dans la proposition 2.6.4. □

**Lemme 2.6.6.** *Soit  $\tau$  une matrice du domaine de Siegel en dimension 2. On a alors les minorations pour  $n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  :*

$$n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_1 \left( \operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12} \right) \geq \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{2} \right) n_1^2,$$

$$n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_1 \left( \operatorname{Im} \tau_1 - 3 \operatorname{Im} \tau_{12} \right) \geq \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{2} \right) n_1^2,$$

pour  $n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1, 1\}$  :

$$n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_1 \left( \operatorname{Im} \tau_1 - 5 \operatorname{Im} \tau_{12} \right) \geq \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{4} \right) n_1^2,$$

pour  $n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1\}$  :

$$n_1^2 \left( \operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12} \right) + n_1 \left( \operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_{12} \right) \geq \left( \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{8} \right) n_1^2,$$

et pour  $n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1\}$  :

$$n_1^2 \left( \operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12} \right) + n_1 \left( \operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_{12} \right) \geq \left( \frac{5 \operatorname{Im} \tau_1}{8} \right) n_1^2,$$

et les mêmes minorations sont valables en remplaçant partout  $\tau_1$  par  $\tau_2$ .

**Proposition 2.6.7.** *Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soit  $[a, b] = [1/2, 1/2, 0, 0]$ . On a la minoration :*

$$\begin{aligned}
|\theta_{ab}(0, \tau)| e^{\pi^t a \operatorname{Im} \tau a} &\geq 4e^{\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} - \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_1}}\right) e^{\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} \\
&\quad - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_1}}\right) e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_1} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-\pi \operatorname{Im} \tau_2} \\
&\quad - \left(2 + \frac{2}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_1}}\right) e^{-4\pi \operatorname{Im} \tau_1} - \left(2 + \frac{2}{\sqrt{\operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-4\pi \operatorname{Im} \tau_2} \\
&\quad - \left(1 + \left(1 + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5 \operatorname{Im} \tau_1}}\right) e^{-\pi \frac{5 \operatorname{Im} \tau_1}{8}}\right) \left(1 + \left(1 + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5 \operatorname{Im} \tau_2}}\right) e^{-\pi \frac{5 \operatorname{Im} \tau_2}{8}}\right) \\
&\quad - 1 + e^{-2\pi(\operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_2 + 2 \operatorname{Im} \tau_{12})} + e^{-6\pi(\operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_2 + 2 \operatorname{Im} \tau_{12})}.
\end{aligned}$$

En supposant que  $\operatorname{Im} \tau_{12} \geq \varepsilon > 0$  et  $\operatorname{Im} \tau_1 \geq \max\{\frac{1}{\varepsilon^2}, 5\}$  on peut alors affirmer :

$$|\theta_{ab}(0, \tau)| e^{\pi^t a \operatorname{Im} \tau a} \geq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}; 0, 31\right\}.$$

De plus si  $[a, b] = [1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$  on a la même minoration sous les mêmes conditions.

*Remarque 1 :* Pour que le minorant soit strictement positif (lorsque  $\operatorname{Im} \tau_1$  est grand) on doit donc imposer  $\operatorname{Im} \tau_{12} > 0$ , ce qui souligne le fait qu'un produit de deux courbes elliptiques ( $\tau_{12} = 0$ ) est un cas dégénéré de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 2. Cette remarque est à relier avec le paragraphe 2.3.2. On remarquera cependant que la seule caractéristique qui doit nécessiter un traitement « epsilon » est  $[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$ , puisque c'est la seule qui se décompose en deux caractéristiques impaires lorsque  $\tau_{12} = 0$ . Il est donc théoriquement possible d'être plus fin sur la caractéristique  $[1/2, 1/2, 0, 0]$ .

*Remarque 2 :* On mène le calcul pour la première caractéristique (avec  $b = 0$ ). La deuxième caractéristique considérée n'introduit qu'un décalage n'affectant pas les modules.

*Démonstration.* On procède comme pour la proposition précédente, les termes dominants sont cette fois en  $(-1, 0)$  et en  $(0, -1)$ ; on utilise le lemme 2.6.6. On rappelle :

$$|\theta_{ab}(0, \tau)| = \left| \theta_{00}(\tau a + b, \tau) e^{i\pi^t a \tau a + 2i\pi^t ab} \right| = \left| \theta_{00}(\tau a + b, \tau) \right| e^{-\pi^t a \operatorname{Im} \tau a},$$

et on calcule donc :

$$\begin{aligned}
|\theta_{00}(\tau a, \tau)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{2i\pi \left( \frac{1}{2} {}^t n \tau n + {}^t n \tau a \right)} \right| \\
&= \left| \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{i\pi \left( n_1^2 \tau_1 + n_2^2 \tau_2 + 2n_1 n_2 \tau_{12} + n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 + (n_1 + n_2) \tau_{12} \right)} \right| \\
&\geq \left| 2e^{-i\pi \tau_{12}} \right| - \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ n \neq (-1, 0), (0, -1)}} A(n_1, n_2) \\
&\geq 4e^{\pi \operatorname{Im} \tau_{12}} - \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} A(n_1, n_2)
\end{aligned}$$

où on a noté :

$$A(n_1, n_2) = e^{-\pi \left( n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 + (2n_1 n_2 + n_1 + n_2) \operatorname{Im} \tau_{12} + n_1 \operatorname{Im} \tau_1 + n_2 \operatorname{Im} \tau_2 \right)}$$

On décompose alors la somme indexée par  $\mathbb{Z}^2$  selon une technique proche de celle expliquée sur la figure 2.4.3 :

$$\begin{aligned}
\sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} A(n_1, n_2) &= \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_2 = -1}} e^{-\pi \left( n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_1 (\operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12}) - \operatorname{Im} \tau_{12} \right)} \\
&+ \sum_{\substack{n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 = -1}} e^{-\pi \left( n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 + n_2 (\operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}) - \operatorname{Im} \tau_{12} \right)} \\
&+ \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ n_2 = -2}} e^{-\pi \left( n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_1 (\operatorname{Im} \tau_1 - 3 \operatorname{Im} \tau_{12}) + 2(\operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}) \right)} \\
&+ \sum_{\substack{n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ n_1 = -2}} e^{-\pi \left( n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 + n_2 (\operatorname{Im} \tau_2 - 3 \operatorname{Im} \tau_{12}) + 2(\operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12}) \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\} \\ n_2 = -3}} e^{-\pi \left( n_1^2 \operatorname{Im} \tau_1 + n_1 (\operatorname{Im} \tau_1 - 5 \operatorname{Im} \tau_{12}) + 3(2 \operatorname{Im} \tau_2 - \operatorname{Im} \tau_{12}) \right)} \\
& + \sum_{\substack{n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\} \\ n_1 = -3}} e^{-\pi \left( n_2^2 \operatorname{Im} \tau_2 + n_2 (\operatorname{Im} \tau_2 - 5 \operatorname{Im} \tau_{12}) + 3(2 \operatorname{Im} \tau_1 - \operatorname{Im} \tau_{12}) \right)} \\
& + \sum_{(n_1, n_2) \in (\mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1\})^2} A(n_1, n_2) \\
& + (-1) - e^{-2\pi (\operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_2 + 2 \operatorname{Im} \tau_{12})} - e^{-6\pi (\operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_2 + 2 \operatorname{Im} \tau_{12})}.
\end{aligned}$$

Les trois derniers termes viennent du fait qu'on compte  $A(-1, -1) = 1$ ,  $A(-2, -2)$  et  $A(-3, -3)$  une fois de trop dans la décomposition de la somme qu'on majore. On utilise alors  $2n_1n_2 \geq -n_1^2 - n_2^2$  pour l'exposant de la somme double. On utilise ensuite le lemme d'exposant 2.6.6. On prendra garde au fait que deux termes  $-1$  vont sortir des premières sommes simples avant d'appliquer le lemme 2.6.6, impliquant  $-1 - 1 + 1 = -1$  comme contribution pour le minorant de l'énoncé.  $\square$

## 2.6.4 Majoration de $h'_F(A/k)$

Dans cette partie nous allons majorer la hauteur de Faltings augmentée (relative) qui est un majorant de la hauteur de Faltings (relative). Elle s'exprime, comme on l'a vu en 2.6.1, comme suit :

$$h'_F(A/k) = \frac{1}{10d} \left[ \sum_{p \in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12} \Delta_{\min}) \log N_{k/\mathbb{Q}}(p) - \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log \left| 2^{-12} \prod_{m \in \mathbb{Z}_2} \theta_m^2(0, \tau_v) \right| \right].$$

On réunit ici les résultats sur les constantes thêta pour minorer le produit des constantes thêta paires et ainsi majorer le terme archimédien de la hauteur de Faltings exprimée en 2.6.1 dans le modèle d'Igusa.

On a :

$$\left| \prod_{m=ab \in \mathbb{Z}_2} \theta_m^2(0, \tau_v) \right| = \left| \prod_{ab \in \mathbb{Z}_2} \theta_{00}(\tau a + b, \tau_v) e^{i\pi {}^t a \tau a + 2i\pi {}^t ab} \right|^2 = \prod_{ab \in \mathbb{Z}_2} \left| \theta_{00}(\tau a + b, \tau_v) \right|^2 e^{-2\pi {}^t a \operatorname{Im} \tau a},$$

donc en notant  $C_{\text{thêta}}$  le produit des dix minorants apparaissant dans les propositions 2.6.2, 2.6.4, 2.6.5 et 2.6.7, on obtient :

$$\left| \prod_{m=ab \in \mathbb{Z}_2} \theta_m^2(0, \tau_v) \right| \geq C_{\text{thêta}}^2 e^{-\frac{2\pi}{4} (4 \operatorname{Im} \tau_1 + 4 \operatorname{Im} \tau_2 + 4 \operatorname{Im} \tau_{12})},$$

donc :

$$-\log \left( \left| \prod_{m=ab \in \mathcal{Z}_2} \theta_m^2(0, \tau_v) \right| \right) \leq 2\pi(\operatorname{Im} \tau_1 + \operatorname{Im} \tau_2 + \operatorname{Im} \tau_{12}) - 2 \log(C_{\text{th\^eta}}).$$

On d\^efinit le sous-ensemble du domaine de Siegel  $F_2$  :

**D\^efinition 2.6.8.** Soit  $\varepsilon$  un r\^eel strictement positif. On pose :

$$G_{2,\varepsilon} = \left\{ \tau \in F_2 \mid \left[ \begin{array}{l} \operatorname{Im} \tau_{12} \geq \varepsilon > 0 \\ \operatorname{Im} \tau_1 \geq \max\{1/\varepsilon^2, 31\} \end{array} \right] \right\}.$$

On peut donc \^enoncer :

**Th\^eor\^eme 2.6.9.** Soit  $k$  un corps de nombres de degr\^e  $d$ . Soit  $\varepsilon$  un r\^eel strictement positif. Soit  $C/k$  une courbe de genre 2, lisse en toute place divisant 2 et donn\^ee dans un mod\^ele hyperelliptique  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$ . On note  $D = 2^8 \operatorname{disc}(F)$ . On suppose que  $A = \operatorname{Jac}(C)$  sa jacobienne v\^erifie  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archim\^edienne. Alors il existe des constantes  $c_3(d) > 0$  et  $c_4(d) > 0$  telles que :

$$h'_F(A/k) \leq c_3 \operatorname{Tr}(A) + c_4 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D),$$

et on peut prendre :  $c_3 = \frac{5\pi + 2}{20d}$  et  $c_4 = \frac{1}{10d}$ .

*D\^emonstration.* Pour le terme non archim\^edien on a en utilisant le lemme 2.6.1 :

$$\sum_{p \in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12} \Delta_{\min}) \log N_{k/\mathbb{Q}}(p) \leq \sum_{p \in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^8 \operatorname{disc}(F)) \log N_{k/\mathbb{Q}}(p),$$

donc :

$$\begin{aligned} 10d h'_F(A/k) &\leq \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) + \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \left( 2\pi(\operatorname{Im} \tau_{v,1} + \operatorname{Im} \tau_{v,2} + \operatorname{Im} \tau_{v,12}) \right) \\ &\quad + \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \left( 12 \log 2 - \log(C_{\text{th\^eta}}^2) \right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$h'_F(A/k) \leq \frac{1}{10d} \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) + \frac{1}{10} \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left( 2\pi(\operatorname{Im} \tau_{v,1} + \operatorname{Im} \tau_{v,2} + \operatorname{Im} \tau_{v,12}) + 12 \log 2 - \log(C_{\text{th\^eta}}^2) \right).$$

On majore alors, en utilisant les propriétés du domaine  $F_2$  :

$$\operatorname{Im} \tau_{v,1} + \operatorname{Im} \tau_{v,2} + \operatorname{Im} \tau_{v,12} \leq \frac{5}{4} \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau_v).$$

Il suffit ensuite d'approcher la constante  $C_{\text{th\^eta}}$  en réunissant les calculs précédents sur les dix constantes th\^eta paires en dimension 2. Un calcul donne, sous les hypothèses  $\operatorname{Im} \tau_{12} \geq \varepsilon > 0$  et  $\operatorname{Im} \tau_1 > \max\{1/\varepsilon^2, 31\}$  :

$$C_{\text{th\^eta}} > (0,99)^4 \times (0,99)^4 \times (\min\{\varepsilon/2; 0,31\})^2 \geq 0,92 \min\{\varepsilon/2; 0,31\}^2.$$

Il suffit alors d'utiliser :

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) \geq 2 \max\{1/\varepsilon^2, 31\} > 12 \log 2 + 2 \log(0,92) - 4 \log(\min\{\varepsilon/2; 0,31\}),$$

donc :

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) > 12 \log 2 - \log(C_{\text{th\^eta}}^2).$$

□

## 2.7 Produit de courbes elliptiques

On traite dans ce chapitre du cas des produits de courbes elliptiques. Les résultats obtenus sont plus faibles que le résultat de M. Hindry et J. Silverman rappelé comme théorème 1 de l'introduction générale. On mène ces calculs pour montrer qu'on peut trouver exactement la même forme d'estimation que celles obtenues dans les paragraphes précédents, faisant intervenir la trace archimédienne et un discriminant, et ainsi obtenir un énoncé plus homogène pour les variétés abéliennes de dimension 2.

### 2.7.1 Hauteur de Néron-Tate et hauteurs locales

Soient  $k$  un corps de nombres et  $E/k$  une courbe elliptique. La hauteur de Néron-Tate sur  $E$  se décompose de la manière suivante (voir [Sil94] p. 461) :

$$\forall P \in E(k) \setminus \{O\}, \widehat{h}(P) = \frac{1}{d} \sum_{v \in M_k} d_v \widehat{\lambda}_v(P).$$

Les hauteurs locales  $\widehat{\lambda}_v$  sont définies ainsi :

- Si  $v$  est une place finie et qu'on se donne un modèle entier de Weierstrass avec discriminant  $\Delta$  de la courbe  $E$ , on peut alors définir pour un point  $P$  de bonne réduction en  $v$  :

$$\widehat{\lambda}_v(P) = \frac{1}{2} \max\{v(x(P)^{-1}), 0\} + \frac{1}{12} v(\Delta).$$



- Si  $v$  est une place archimédienne on a un isomorphisme du type  $E(\bar{k}_v) \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau_v \mathbb{Z})$  pour un certain  $\tau_v$  tel que  $\text{Im}(\tau_v) > 0$ . Posons :  $q = \exp(2i\pi\tau_v)$  et  $u = \exp(2i\pi z)$ . On peut alors définir :

$$\widehat{\lambda} : \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} + \tau_v \mathbb{Z}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

par la formule suivante, lorsque  $z(P) = \alpha + \beta\tau$  avec  $0 \leq \beta < 1$  :

$$\widehat{\lambda}_v(P) = \widehat{\lambda}(z, \tau_v) = -\frac{1}{2}B_2(\beta) \log |q| - \log |1 - u| - \sum_{n \geq 1} \log |(1 - q^n u)(1 - q^n u^{-1})|.$$

$B_2(T)$  est le deuxième polynôme de Bernoulli défini par :

$$B_2(T) = \begin{cases} T^2 - T + \frac{1}{6} \\ \text{périodique en } T, \text{ de période } 1 \end{cases}$$

- Enfin si  $v$  est une place finie de mauvaise réduction on utilise la courbe de Tate  $E_q$  : pour un corps  $k_v$   $p$ -adique il existe un élément  $q \in k_v^*$  tel que  $|q|_v < 1$  et un isomorphisme  $\phi : k_v^*/q^{\mathbb{Z}} \rightarrow E_q(k_v)$ . On pose de plus  $v(\cdot) := -\log |\cdot|_v$ . On définit alors la hauteur locale de la même manière que pour les places archimédiennes, i.e. :

$$\widehat{\lambda} \circ \phi : (k_v^*/q^{\mathbb{Z}}) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec :

$$\widehat{\lambda}_v(P) = \widehat{\lambda}(\phi(u)) = \frac{1}{2}B_2\left(\frac{v(u)}{v(q)}\right) v(q) + v(1 - u) + \sum_{n \geq 1} v\left((1 - q^n u)(1 - q^n u^{-1})\right).$$

## 2.7.2 Minorations

On reprend ici la proposition 2.3 de l'article [HS88] en exprimant le minorant sous une autre forme :

**Proposition 2.7.1.** *Soit  $v$  une place archimédienne de  $k$ . Soit  $z = \alpha + i\beta$ . On suppose que  $\delta = \max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq \frac{1}{2}$ . Soit  $\tau_v = s + it$  avec  $|s| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|t| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Alors on a :*

$$\widehat{\lambda}_v(z, \tau_v) \geq \pi \left( \frac{1}{6} - \delta \right) \text{Im } \tau_v - \log \left( \text{Im } \tau_v + \frac{3}{2} \right) + \log \frac{1}{2\pi\delta} - 0,0665.$$

*Démonstration.* On sait d'après le lemme 2.2 de l'article [HS88] que l'on a :

$$\sum_{n \geq 1} \log \left| (1 - q^n u)(1 - q^n u^{-1}) \right| \leq 0,0665,$$

et :

$$\log |1 - u| \leq \log \left( t + \frac{3}{2} \right) + \log(2\pi\delta).$$

Il suffit alors d'utiliser dans l'expression de la hauteur locale archimédienne donnée dans le paragraphe précédent les relations simples :

$$B_2(\beta) \geq -\beta + \frac{1}{6}$$

et :

$$-\log |q| = 2\pi \operatorname{Im} \tau.$$

□

Nous allons à présent mettre en place un principe des tiroirs :

**Proposition 2.7.2.** *Soient  $k$  un corps de nombres,  $v$  une place archimédienne. On pose  $m = |M_k^\infty|$ . Soient  $P \in E(k)$  un point d'ordre plus grand que  $20^{2m}$  et  $z(P) = \alpha + i\beta$  une coordonnée complexe de  $P$ . Soit  $\delta = \max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq \frac{1}{2}$ . Alors on a :*

$$\exists n \in \{1, \dots, 20^{2m}\}, \widehat{\lambda}_v([n]P) \geq 0, 3 \operatorname{Im} \tau_v.$$

*Démonstration.* On considère ici l'application  $F : E(k) \longrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2m}$  définie par :

$$F(Q) = (\alpha_v(Q), \beta_v(Q))_{v \in M_k^\infty}.$$

On divise  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2m}$  en boîtes de taille  $\frac{1}{M}$ . Soit  $P \in E(k)$  un point qui n'est pas de torsion. On regarde l'ensemble :

$$\{F([n]P) \mid n = 0, \dots, M^{2m}\}.$$

C'est un ensemble contenant  $M^{2m} + 1$  points à répartir dans  $M^{2m}$  boîtes, par le principe des tiroirs on obtient donc deux entiers  $n_1 < n_2$  tels que  $F([n_1]P) = F([n_2]P)$ . Donc le point  $P_1 = [n_2 - n_1]P$  vérifie :

$$\max(|\alpha_v(P_1)|, |\beta_v(P_1)|) \leq \frac{1}{M}.$$

Posons alors  $M = 20$ . Alors  $\delta \leq \frac{1}{20} = 0,05$ . Il suffit d'évaluer les termes de la proposition précédente pour obtenir le minorant annoncé.

□

On donne dans la proposition suivante une minoration simple pour les hauteurs locales aux places finies :

**Proposition 2.7.3.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $E/k$  une courbe elliptique donnée dans un modèle de Weierstrass de discriminant  $\Delta_E$ . Soit  $v$  une place finie de  $k$ . Alors la hauteur locale associée à la place  $v$  peut être minorée de la façon suivante, pour tout point  $P$  non nul :*

$$\widehat{\lambda}_v(P) \geq -\frac{1}{24} \operatorname{ord}_v(\Delta_E) \log N_{k/\mathbb{Q}}(v).$$

*Démonstration.* Par définition des hauteurs locales, on sait que  $\widehat{\lambda}_v(P) \geq 0$  lorsque  $v$  est une place de bonne réduction.

Pour la mauvaise réduction, on se réfère au théorème 4.2 de [Sil94] p. 473 pour affirmer que  $v(q) = v(\Delta(q))$  et par un argument de périodicité sur la courbe de Tate, il suffit ensuite d'utiliser  $B_2(x) \geq -\frac{1}{12}$  pour tout  $x$  réel. On peut aussi utiliser l'équation (23) p. 431 et p. 432 de l'article [HS88]. □

On peut alors réunir les informations locales pour obtenir :

**Théorème 2.7.4.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . On note  $m = |M_k^\infty|$ . Alors il existe une constante  $c_1(d) > 0$  telle que pour toute courbe elliptique  $E/k$  de discriminant minimal  $\Delta_E$  et de trace archimédienne  $\operatorname{Tr}(E)$ , et pour tout point  $P \in E(k)$  d'ordre infini :*

$$\widehat{h}_E(P) \geq c_1 \left( \operatorname{Tr}(E) - \frac{1}{7,2} \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E) \right),$$

où on peut prendre  $c_1 = \frac{0,3}{d 20^{4m}}$ .

*Démonstration.* Il suffit d'écrire, pour  $n$  l'entier donné par le principe des tiroirs de 2.7.2 :

$$\widehat{h}_E(P) = \frac{1}{n^2} \widehat{h}_E([n]P) \geq \frac{1}{20^{4m}} \sum_{v \in M_k} n_v \widehat{\lambda}_v([n]P),$$

puis d'utiliser les minoration 2.7.2 et 2.7.3. □

*Remarque à propos d'une conjecture de Hall :* On va être amené dans la suite du texte à imposer  $\operatorname{Tr}(E) \geq \frac{1}{7} \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)$ . Fixons une courbe elliptique  $E/\mathbb{Q}$  et supposons  $|j(E)| \gg 1$ . Alors :

$$\operatorname{Tr}(E) = \operatorname{Im} \tau_E = -\frac{1}{2\pi} \log |q_E| \simeq \frac{1}{2\pi} \log |j(E)|.$$

Donc l'hypothèse  $\text{Tr}(E) \geq \frac{1}{7} \log |\Delta_E|$  équivaut à  $|j(E)| \gg |\Delta_E|^{\frac{2\pi}{7}}$ . Or on a la relation  $j(E) = 1728c_4^3/\Delta_E$ , où  $c_4$  est un polynôme en les coefficients de la courbe elliptique (voir [Sil92] p. 46). On a donc :

$$|c_4|^3 \gg |\Delta_E|^{1+\frac{2\pi}{7}}.$$

La conjecture de Hall (voir [Sil92] p. 268) donne l'inégalité :

$$|\Delta_E| \gg |c_4|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Comme  $3 > \frac{1}{2} + \frac{\pi}{7}$ , ces inégalités sont compatibles, mais il est important de garder à l'esprit que la constante de comparaison entre la trace archimédienne et le logarithme du discriminant ne saurait être trop grande dans le cas de la dimension 1.

### 2.7.3 Majoration de la hauteur de Faltings

Nous allons montrer dans cette partie la majoration suivante :

**Théorème 2.7.5.** *Soit  $E/k$  une courbe elliptique donnée dans un modèle de Weierstrass de discriminant  $\Delta_E$  et de trace archimédienne  $\text{Tr}(E)$ . Alors on a :*

$$h'_F(E/k) \leq c_3 \text{Tr}(E) + c_4 \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E),$$

où on peut prendre  $c_3 = \frac{32}{12d}$  et  $c_4 = \frac{1}{12d}$ .

*Démonstration.* On connaît une expression explicite de la hauteur de Faltings d'une courbe elliptique  $E$  définie sur un corps de nombres  $k$  (voir par exemple [CS86] p. 254) :

$$h_F(E/k) = \frac{1}{12d} \left( \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E) - \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log \left( \Delta(\tau_v) (\text{Im } \tau_v)^6 \right) \right).$$

Ceci donne :

$$h'_F(E/k) = \frac{1}{12d} \left( \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E) - \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log(\Delta(\tau_v)) \right).$$

Partant de cette expression il suffit donc de relier la fonction  $\Delta(\tau_v)$  à la quantité  $\text{Im } \tau_v$ . On note  $q = \exp(2i\pi\tau_v)$ ; on a la formule :

$$\Delta(\tau_v) = \frac{q}{(2\pi)^{12}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24},$$

donc :

$$-\log |\Delta(\tau_v)| \leq 2\pi \text{Im } \tau_v + 12 \log 2\pi + |A_{\tau_v}|,$$

où :

$$|A_{\tau_v}| \leq 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \log |1 - q^n| \leq 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau_v n}) \leq 24 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau_v n},$$

donc :

$$|A_{\tau_v}| \leq 24 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau_v n} = 24 \frac{e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau_v}}{1 - e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau_v}} \leq 24 \frac{e^{-\sqrt{3}\pi}}{1 - e^{-\sqrt{3}\pi}} \leq \frac{1}{9}.$$

Il suffit d'injecter cette majoration dans l'expression de la hauteur de Faltings et d'utiliser :

$$2\pi \operatorname{Im} \tau_v + \frac{1}{9} + 12 \log 2\pi \leq 32 \operatorname{Im} \tau_v$$

pour conclure. □

## 2.8 Corollaires

On présente dans cette partie plusieurs énoncés. Les premiers corollaires constituent une avancée en direction de la conjecture de Lang et Silverman en dimension 2. Par la suite on présente une borne uniforme explicite pour la torsion d'une famille de variétés abéliennes de dimension 2. Enfin on obtient une borne explicite sur le nombre de points rationnels pour des familles de courbes de genre 2.

### 2.8.1 Conjecture de Lang et Silverman en dimension 2

Soit  $(A, \mathcal{L})$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension 2. Comme expliqué dans l'introduction, il y a alors deux possibilités (on pourra aussi consulter [Wei57]) :

$$\begin{cases} (A, \mathcal{L}) \simeq (E_1 \times E_2, E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2), \\ \text{ou} \\ (A, \mathcal{L}) \simeq (\operatorname{Jac}(C), \Theta), \end{cases}$$

où  $C$  est une courbe algébrique de genre 2.

Dans le premier cas, on a les relations :

$$\begin{cases} \widehat{h}_{E_1 \times E_2, \mathcal{L}}((P_1, P_2)) = \widehat{h}_{E_1}(P_1) + \widehat{h}_{E_2}(P_2), \\ h_{\mathbb{F}}(E_1 \times E_2/k) = h_{\mathbb{F}}(E_1/k) + h_{\mathbb{F}}(E_2/k). \end{cases}$$

*Remarque :*

On peut éventuellement translater le diviseur  $(E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2)$  par un point  $Q$  de 2-torsion, ce qui ne change pas le calcul en vertu du fait que  $\widehat{h}_E(P + Q) = \widehat{h}_E(P)$  pour tout point  $P$  de  $E$ .

Ceci permet donc d'utiliser les théorèmes 2.7.4 et 2.7.5 pour obtenir un énoncé dans la direction de la conjecture de Lang et Silverman :

**Corollaire 2.8.1.** *Soient  $E_1/k$  et  $E_2/k$  deux courbes elliptiques. On considère la variété abélienne  $E_1 \times E_2$  munie de la polarisation  $E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2$ . On pose pour  $i = 1, 2$  :*

$$\mathrm{Tr}(E_i) = \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \mathrm{Im} \tau_v^{(i)}.$$

*On suppose que  $\mathrm{Tr}(E_i) \geq \frac{1}{7} \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{E_i})$ . Alors pour tout  $P_1 \in E_1(k)$  et  $P_2 \in E_2(k)$  points d'ordre infini :*

$$\widehat{h}_{E_1 \times E_2}(P_1, P_2) \geq c_E h_F(E_1 \times E_2/k),$$

où on peut prendre :

$$c_E = \frac{0,0025}{20^{4m}}.$$

*Démonstration.* En utilisant les théorèmes 2.7.4 et 2.7.5 on a les estimations pour chacune des courbes  $E_i, i = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{E_i}(P) &\geq c_1 \mathrm{Tr}(E_i) - c_2 \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{E_i}), \\ h_F(E_i/k) &\leq c_3 \mathrm{Tr}(E_i) + c_4 \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{E_i}), \end{aligned}$$

où on peut prendre :

$$c_1 = \frac{0.3}{d 20^{4m}}, \quad c_2 = \frac{1}{24d 20^{4m}}, \quad c_3 = \frac{32}{12d}, \quad c_4 = \frac{1}{12d}.$$

En utilisant de plus l'hypothèse  $\mathrm{Tr}(E_i) \geq \frac{1}{7} \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{E_i})$  il vient :

$$\widehat{h}_{E_1 \times E_2}(P_1, P_2) = \widehat{h}_{E_1}(P_1) + \widehat{h}_{E_2}(P_2) \geq c_E h_F(E_1/k) + c_E h_F(E_2/k) = c_E h_F(E_1 \times E_2/k),$$

où on a noté :

$$c_E = \left( c_1 - \frac{c_2}{1/7} \right) \left( c_3 + \frac{c_4}{1/7} \right)^{-1} = \frac{c_1 - 7c_2}{c_3 + 7c_4}.$$

□

Il reste donc à étudier le cas des jacobiniennes de courbes de genre 2. Or nous sommes à présent en mesure de construire un énoncé de théorème répondant partiellement à la conjecture de Lang et Silverman pour ces variétés abéliennes particulières.

En réunissant les résultats des théorèmes 2.5.3 et 2.6.9 on obtient, en considérant toujours  $D = 2^8 \mathrm{disc}(F)$  si  $C : y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  et  $\mathrm{Tr}(A)$  la trace archimédienne de  $A$  :

**Corollaire 2.8.2.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Alors il existe une constante  $c_{\text{Jac}}(d) > 0$  ne dépendant que de  $d$  telle que pour toute jacobienne  $A = \text{Jac}(C)$ ,  $C/k$  courbe de genre 2 avec bonne réduction en 2, de modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$ , vérifiant  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$  et  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ , et pour tout point  $P$  tel que  $\mathbb{Z} \cdot P$  est Zariski-dense dans  $A$  :*

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c_{\text{Jac}} h'_F(A/k),$$

et on peut prendre :

$$c_{\text{Jac}} = \frac{0,00005}{240^{8 \cdot 3^{16}d}}.$$

*Démonstration.* En utilisant les théorèmes 2.5.3 et 2.6.9 on a les estimations :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq \frac{1}{240^{8 \cdot 3^{16}d}} \left( \frac{1}{160d} \text{Tr}(A) - \frac{63}{160d} \log N_{k/\mathbb{Q}}(D) \right),$$

et :

$$h'_F(A/k) \leq \frac{5\pi + 2}{20d} \text{Tr}(A) + \frac{1}{10d} \log N_{k/\mathbb{Q}}(D).$$

En notant :

$$c_1 = \frac{1}{160d 240^{8 \cdot 3^{16}d}} \quad c_2 = \frac{63}{160d 240^{8 \cdot 3^{16}d}} \quad c_3 = \frac{5\pi + 2}{20d} \quad c_4 = \frac{1}{10d}$$

et en supposant :  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ , on obtient alors :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq \left( c_1 - \frac{c_2}{64} \right) \left( c_3 + \frac{c_4}{64} \right)^{-1} h'_F(A/k).$$

□

On déduit de ces énoncés le corollaire suivant :

**Corollaire 2.8.3.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Alors il existe une constante  $c = c(d) > 0$  ne dépendant que du degré de  $k$  telle que pour toute variété abélienne  $(A, \Theta)$  sur  $k$ , principalement polarisée de dimension 2, vérifiant les hypothèses des énoncés 2.8.1 ou 2.8.2 et pour tout point  $P \in A(k)$  tel que  $\mathbb{Z} \cdot P$  est Zariski-dense on a :*

$$\widehat{h}_{A,\Theta}(P) \geq c h'_F(A/k),$$

et on peut prendre  $c = \min\{c_E, c_{\text{Jac}}\} = c_{\text{Jac}}$ , avec  $c_E$  et  $c_{\text{Jac}}$  les constantes données respectivement dans les énoncés 2.8.1 et 2.8.2.

*Remarque :*

On obtient la conjecture de Lang et Silverman (sous les hypothèses des énoncés utilisés) en remarquant que  $h'_F(A/k) \geq h_F(A/k)$  est valable.

On peut de plus déduire de 2.8.2 le cas particulier suivant :

**Corollaire 2.8.4.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soit  $C/k$  une courbe de genre 2 donnée dans un modèle hyperelliptique entier  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  et telle que  $C/k$  a potentiellement bonne réduction partout. Soit  $A$  la jacobienne de  $C$ , vérifiant  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne. Alors pour tout point  $P \in A(k)$  tel que  $\mathbb{Z} \cdot P$  est Zariski-dense on a :*

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq \frac{0,0007}{240 \cdot 320 \cdot 15^{16} d} h'_{\text{st}}(A).$$

*Démonstration.* On sait que si le modèle de la courbe est à bonne réduction partout et est globalement minimal on obtient  $N_{k/\mathbb{Q}}(D) = 1$ . Or il existe une extension  $k'$  de  $k$  telle que  $A/k'$  est à bonne réduction partout. On va voir qu'en faisant une autre extension bien choisie on peut de plus obtenir l'existence d'un modèle globalement minimal : donnons-nous tout d'abord un modèle hyperelliptique entier sur  $\mathcal{O}_k$  de  $C$ , dont le discriminant sera noté  $\Delta_C$ . En se reportant par exemple à [Loc94] p. 736, on sait que pour toute place finie  $v$ , il existe un entier  $u_v$  tel que  $\Delta_C = u_v^{40} \Delta_v$ , où  $\Delta_v$  est le discriminant minimal local. L'exposant 40 vient du fait qu'on est ici en dimension  $g = 2$ , et  $4g(2g + 1) = 40$  dans ce cas.

On pose alors  $\mathfrak{a}_C := \prod_v \mathfrak{p}_v^{-\text{ord}_v(u_v)}$ . On obtient facilement les faits suivants (voir [Loc94]) :

$\Delta_{\min} = \Delta_C(\mathfrak{a}_C)^{40}$ , où  $\Delta_{\min}$  est le discriminant minimal de la courbe hyperelliptique  $C$ . De plus la classe d'idéaux de  $\mathfrak{a}_C$  ne dépend pas du modèle hyperelliptique de  $C$ . Enfin il existe un modèle minimal global si et seulement si  $\mathfrak{a}_C$  est principal.

Or sur  $k'$ , on a bonne réduction partout, ce qui impose  $\Delta_{\min}/k' = \mathcal{O}_{k'}$ . En particulier on obtient que l'idéal  $\mathfrak{a}_C^{40}$  est principal sur  $k'$ . Il existe donc  $\alpha \in k'$  tel que  $\mathfrak{a}_C^{40} = \alpha \mathcal{O}_{k'}$ . Considérons alors  $k'' = k'[\beta]$ , avec  $\beta^{40} = \alpha$ . Alors  $\mathfrak{a}_C = \beta \mathcal{O}_{k''}$  est principal sur  $k''$ , et le degré de l'extension  $[k'' : k']$  est inférieur ou égal à 40.

La variété abélienne  $A$  étant définie sur  $k$ , elle l'est aussi sur  $k'$  et  $k''$ . De plus on a les relations :

$$\forall w \in M_{k''}^{\infty}, w|v \Rightarrow \tau_w = \tau_v.$$

Ces relations viennent du fait que  $A_v(\mathbb{C}) = A_w(\mathbb{C})$  : en effet on a  $A_v(\mathbb{C}) = \text{Mor}_k(\text{Spec}(\mathbb{C}), A)$  et  $A_w(\mathbb{C}) = \text{Mor}_{k''}(\text{Spec}(\mathbb{C}), A_{k''})$  ; or les diagrammes suivants commutent :



$$\begin{array}{ccc}
& & \text{Spec}(k'') \\
& \nearrow & \uparrow \\
\text{Spec}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & A \otimes_k k'' \\
& \searrow & \downarrow \\
& & A
\end{array}$$

On peut donc appliquer les théorèmes 2.5.3 et 2.6.9 à  $A/k''$  puisque les  $\tau_w$  vérifient les mêmes conditions que les  $\tau_v$ , donc :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq \frac{1}{240^{8[k'':\mathbb{Q}]}} \frac{1}{80(5\pi + 2)} h'_{\text{st}}(A).$$

Or  $[k'' : \mathbb{Q}] = [k'' : k'][k' : k][k : \mathbb{Q}]$  et on peut déduire de [Sil81] p. 400, en choisissant  $k' = k[A[15]]$  que  $[k' : k] \leq 15^{4 \times 4}$ . Remarquons qu'il suffit de redescendre sur le corps de base à la fin, d'où la présence du terme  $15^{16}$  et non de  $3^{16} \cdot 15^{16}$ . □

*Remarque 1 :* On aurait pu essayer de se placer sur l'extension  $k'$  de  $k$  sur laquelle la variété admet bonne réduction partout, puis monter jusqu'à  $H_{k'}$  le corps de classes de Hilbert de  $k'$  sur lequel le modèle est globalement minimal (par principalité) et a toujours bonne réduction partout. Cependant la constante obtenue dépendra alors du corps  $k'$  aussi.

*Remarque 2 :* A propos de la condition  $\tau \in G_{2,\varepsilon}$ .

La première condition définissant l'ensemble  $G_{2,\varepsilon}$ , donnée par  $\text{Im } \tau_{12} \geq \varepsilon > 0$ , est naturelle ici car les variétés abéliennes de dimension 2 dont la matrice du domaine de Siegel vérifie  $\tau_{12} = 0$  ne sont pas des jacobiniennes de courbes de genre 2 mais des produits de deux courbes elliptiques ; la hauteur de Faltings n'a pas la même expression qu'en 2.6.1 (puisque le produit des constantes thêta est nul dans ce cas). Ce phénomène ne se produit pas si  $\tau_{12} \neq 0$ , on consultera par exemple [Igu62] p. 178 et [Wei57].

La deuxième condition du domaine  $G_{2,\varepsilon}$ , qui consiste à imposer  $\text{Im } \tau_1 \geq \max\{1/\varepsilon^2, 31\}$ , est un peu moins naturelle et provient directement de la minoration des constantes thêta. (On peut d'ailleurs remplacer 31 par 5 dans la majoration de la hauteur de Faltings.) On explique dans les annexes comment améliorer cela en utilisant une isogénie et ainsi parvenir à obtenir un énoncé plus large.

## 2.8.2 Borne pour la torsion d'une jacobienne de dimension 2.

Le principe des tiroirs utilisé dans le théorème 2.5.2 montre le fait suivant : si on peut obtenir suffisamment de multiples distincts d'un point  $P$ , alors la hauteur de Néron-Tate de ce point est minorée par une quantité non nulle, donc ce point n'est pas un point de torsion.

Inversement on va donc obtenir une borne sur la torsion des jacobiniennes sur lesquelles on a travaillé dans le théorème 2.5.3 :

**Corollaire 2.8.5.** *(du théorème 2.5.3)*

Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $C/k$  une courbe de genre 2 de modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$  et  $A/k$  sa jacobienne, vérifiant les hypothèses du théorème 2.5.3. Soient  $\text{Tr}(A)$  sa trace archimédienne et  $D = 2^8 \text{disc}(F)$ . On suppose de plus que :

$$\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D).$$

Alors on a :

$$\forall P \in A(k)_{\text{tors}}, \exists n \in \{1, 2, \dots, 2 \cdot 240^{4 \cdot 3^{16}d}\}, [n]P = 0,$$

ce qui permet d'obtenir :

$$|A(k)_{\text{tors}}| \leq 2^4 \cdot 240^{16 \cdot 3^{16}d}.$$

### 2.8.3 Borne pour les points rationnels d'une courbe de genre 2.

On va chercher dans cette partie des informations sur le nombre de points  $k$ -rationnels sur une courbe de genre 2. On sait par le théorème de Faltings (ex-conjecture de Mordell) que ce nombre est fini. On s'intéresse donc à une majoration de ce nombre fini de points. On propose deux approches différentes, qui font toutes deux appel à la structure de la jacobienne. La première est un raisonnement en famille qui fournit une borne qui n'est pas totalement explicite. La seconde utilise des outils très proches de la première mais évite de travailler en famille.

#### Raisonnement en famille

On trouve dans l'article de T. de Diego [dD97] un théorème donnant un majorant du nombre de points rationnels pour une famille de courbes de genre  $g \geq 2$ . Soient  $C/k$  une courbe de genre 2 et  $A$  sa jacobienne. On notera dans ce paragraphe  $|\cdot| = \sqrt{\widehat{h}_\Theta(\cdot)}$  la norme euclidienne (associée au diviseur  $\Theta$ ) sur  $A(\bar{k}) \otimes \mathbb{R}$ . On pose alors :

$$\delta(C, k) = \min_{x \in A(k)/A(k)_{\text{tors}}} |x|.$$

**Théorème 2.8.6.** *(de Diego) Soit  $k$  un corps de nombres, soit  $\mathcal{C}$  une famille plate de courbes de genre  $g \geq 2$  paramétrée par une variété projective  $T$  définie sur  $k$  et telle que la fibre générique soit lisse et projective sur  $k(T)$ . Soit  $T^0$  l'ouvert au-dessus duquel la famille est lisse. Alors il existe une constante positive  $\gamma_1(\mathcal{C})$  ne dépendant que de la famille et du choix de la hauteur  $h_{\mathcal{D}}$  associée à un diviseur ample  $\mathcal{D}$ , telle que pour tout point  $t \in T^0(\bar{k})$  et pour toute extension finie  $k'$  de  $k(t)$  on ait :*

$$\text{Card}(\mathcal{C}_t(k')) \leq \text{Card}(A_t(k')_{\text{tors}}) \left( 1 + \frac{2\gamma_1(\mathcal{C})(\sqrt{h_{\mathcal{D}}(t)} + 1)}{\delta(\mathcal{C}_t, k')} \right)^{r_{t,k'}} + \frac{55}{2} 7^{r_{t,k'}},$$

où  $r_{t,k'}$  est le rang de la variété abélienne  $A_t(k')$ .

**Notation 2.8.7.** On note  $\bar{\mathcal{M}}_{g,d,r} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{dr}])$  le schéma de modules de variétés abéliennes de dimension  $g$ , de polarisation de degré  $d^2$  et de niveau  $r$ . On note :

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,d,r}$$

le schéma abélien universel, qui existe dès que  $r \geq 3$ .

**Lemme 2.8.8.** En choisissant pour base  $T = \bar{\mathcal{M}}_{2,1,24}$ , et un diviseur ample  $\mathcal{D}$  sur  $T$ , il existe des constantes  $c_1(k, g) > 0$  et  $c_2(k, g) > 0$  telles que pour tout  $t \in T^0(\bar{k})$  :

$$h'_{\text{st}}(A_t) \geq c_1 h_{\mathcal{D}}(t) - c_2.$$

*Démonstration.* Ce lemme est directement issu des travaux de Faltings. On utilise ici le théorème 1.1 de Moret-Bailly donné dans [MB85a]. Il est déjà utilisé (pour  $g$  quelconque) dans l'introduction de [Dav91], plus précisément dans la partie de « réduction du problème ». Notons que l'inégalité est aussi vérifiée pour la hauteur relative augmentée puisque  $h'_{\mathbb{F}}(A_t/k) \geq h'_{\text{st}}(A_t)$ . □

*Remarque :* Notons qu'on peut expliciter les constantes en utilisant un résultat de J.-B. Bost et S. David comparant la hauteur de Faltings stable et la hauteur thêta et apparaissant dans l'article de G. Rémond [Ré99] ; celui-ci donne ensuite une interprétation de la hauteur thêta comme hauteur sur la base de la famille des variétés abéliennes considérées. Si on note  $h_{\Theta}^r(A)$  la hauteur thêta de  $A$  (associée à la polarisation  $\Theta$ ), alors leur résultat donne pour  $t \in T$  :

$$\frac{1}{2} h_{\text{st}}(A_t) + \frac{1}{4} \sum_{v \in M_k^{\infty}} n_v \log(\det(\text{Im } \tau_v)) \geq h_{\Theta}^r(A_t) + M(r, g),$$

$$\text{où } M(r, g) = \frac{g}{4} \log(4\pi) + g \log(r) + \frac{g}{2} \log\left(2 + \frac{2}{3^{1/4}} 2^{g^3/4}\right).$$

De plus, d'après la proposition 4.2 de [Ré99] on a :

$$h_{\mathcal{D}}(t) = r^2 h_{\Theta}^r(A_t),$$

(où  $\mathcal{D}$  est défini par les sections globales de  $(f_*\Theta)^{\otimes -r^2}$ ).

Ceci donne donc dans notre contexte où  $g = 2$  et  $r = 24$ , avec  $k = k(A[24])$  :

$$h'_{\mathbb{F}}(A_t/k) \geq \frac{2}{24^2} h_{\mathcal{D}}(t) - \left( \log(4\pi) + 4 \log(24) + 2 \log\left(2 + \frac{8}{3^{1/4}}\right) \right).$$

On peut donc prendre  $c_1 = \frac{2}{24^2}$  et  $c_2 = \log(4\pi) + 4 \log(24) + 2 \log\left(2 + \frac{8}{3^{1/4}}\right)$ .

En utilisant le corollaire 2.8.5 pour majorer le cardinal du groupe de torsion de la jacobienne dans le cas particulier des courbes de genre 2 on obtient alors le nouveau corollaire :

**Corollaire 2.8.9.** (du théorème 2.8.2, du théorème 2.8.6 et du lemme 2.8.8) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . On considère la famille  $\{A_t\}_{t \in T}$  des jacobiniennes de courbes de genre 2 paramétrées par la base  $T = \bar{\mathcal{M}}_{2,1,24}$ .

Soit  $C/k$  une courbe de genre 2 (dont on prend un modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$ ) avec bonne réduction en 2. Soit  $A/k$  sa jacobienne, vue comme fibre de cette famille. On suppose que :

- (1)  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne,
- (2)  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ ,

alors il existe une constante  $\alpha(k) > 0$  telle que :

$$\text{Card}(C(k)) \leq \alpha(k) \text{rang } A(k) + 1.$$

*Démonstration.* On note dans la suite  $r_k$  pour le rang sur  $k$  de la jacobienne  $A$ . On applique d'abord le théorème 2.8.6 pour la famille universelle des jacobiniennes de dimension 2 (avec structure de niveau 24). Ensuite on applique à chaque fibre le théorème 2.8.2 sur le corps  $k' = k(A[24])$  pour obtenir :

$$\text{Card}(\mathcal{C}_t(k)) \leq 2^4 240^{16 \cdot 3^{16}d} \left( 1 + \frac{2\gamma_1(\mathcal{C})(\sqrt{h_{\mathcal{D}}(t)} + 1)}{c_{\text{Jac}}(k(A[24]))\sqrt{h_{\mathbb{F}}'(A/k')}} \right)^{r_k} + \frac{55}{2} 7^{r_k}. \quad (*)$$

On remarque alors que  $[k(A[24]) : k] \leq 24^{4g^2}$ , donc :

$$c_{\text{Jac}}(k(A[24])) = \frac{0,00005}{240^8 [k(A[24]) : \mathbb{Q}]} = \frac{0,00005}{240^8 [k(A[24]) : k][k : \mathbb{Q}]} \geq \frac{0,00005}{240^8 \cdot 24^{4g^2} [k : \mathbb{Q}]}.$$

On veut ensuite appliquer le lemme 2.8.8. Il faut prendre une précaution supplémentaire puisqu'on va diviser par le terme  $c_1 h_{\mathcal{D}}(t) - c_2$ .

- ou bien  $h_{\mathcal{D}}(t) > \frac{c_2}{c_1} + 1$  et on peut appliquer le lemme 2.8.8 dans (\*) et obtenir une borne  $\alpha_1(k)$ .
- ou bien  $h_{\mathcal{D}}(t) \leq \frac{c_2}{c_1} + 1$ , ce qui permet de borner le dénominateur. On utilise alors le théorème 2.5.3 pour obtenir une autre borne  $\alpha_2(k)$ .

On obtient alors le corollaire en prenant  $\alpha(k) = \max\{\alpha_1(k), \alpha_2(k)\}$ . On obtient donc une borne non explicite car on ne connaît pas la constante  $\gamma_1(\mathcal{C})$ .

□

## Seconde méthode

On va utiliser dans ce paragraphe la proposition 3.7 p. 527 de l'article de G. Rémond [Rém00] que l'on rappelle ici. Il y a beaucoup de notations, on les reprend en totalité mais les définitions précises sont dans [Rém00] (ou dans ses références).

**Proposition 2.8.10.** (*G. Rémond*)

Soit  $A/\bar{\mathbb{Q}}$  une variété abélienne de dimension  $g$ , plongée dans  $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^n$ . Soit  $X$  un sous-schéma fermé de  $A$  et  $\Gamma$  un sous-groupe de rang fini de  $A(\bar{\mathbb{Q}})$ . On note  $Z_X$  l'union des translatés de sous-variétés abéliennes non nulles inclus dans  $X$ . On note  $\widehat{h}$  la hauteur de Néron-Tate sur  $A$  associée au plongement sous-jacent. On note  $c_{NT}$  la constante de comparaison entre la hauteur naïve et la hauteur de Néron-Tate. On note  $h_1$  la hauteur de la famille de polynômes définissant l'addition sur  $A$ . On pose  $m = \dim(X) + 1$  et on définit :

$$\gamma^2 = \left( \max\{\deg(X), (6m)^{2m}\} \right)^{m^{3m^2}} \cdot (n+2)^{(m-1)^{3+m}} \deg(X),$$

$$c_5^2 = \gamma^2 \max\{c_{NT} + 3 \log(n+1), h_1\}.$$

Alors on peut trouver explicitement des entiers  $M$  et  $N$  tels que :

- ou bien :

$$\text{Card} \left( (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \right) \leq (4\gamma + 1)^r M + N,$$

- ou bien il existe un point  $y \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma$  tel que :

$$\text{Card} \left\{ x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid \widehat{h}(x - y) \geq 4c_5^2 \right\} \leq N.$$

**Lemme 2.8.11.** (*G. Rémond, « cas des courbes »*)

Posons  $B = \max\{\deg(X), 2^{14}\}$ . Lorsque  $X = C$  est une courbe de genre  $g \geq 2$  on a  $Z_X = \emptyset$  et :

$$(4\gamma + 1)^r M + N \leq (3(n+1)^2 B^{12})^r.$$

**Lemme 2.8.12.** Soit  $C$  une courbe de genre  $g = 2$ . On note  $h_{\Theta}(A)$  la hauteur thêta de la variété abélienne  $A = \text{Jac}(C)$ . On considère  $c_5$  pour le plongement de  $A$  dans  $\mathbb{P}^{15}$ . Alors on a, en gardant les notations précédentes :

$$c_5^2 \leq 12^{2^{16}} h_{\Theta}(A).$$

*Démonstration.* Dans le cas des courbes de genre 2 on a :

$$c_5^2 = \left( \max\{\deg(C), (12)^4\} \right)^{2^{12}} (n+2)^3 \deg(C) \max\{c_{NT} + 3 \log(n+1), h_1\},$$

et on trouve dans [DP02] les majorations (p. 652, p. 662 et p. 665), en rappelant que  $\deg(C) = g = 2$  dans notre cas :

$$h_1 \leq 2(4^g - 1)h_{\Theta}(A), \quad c_{NT} \leq 4^{g+1}h_{\Theta}(A) + 3g \log 2.$$

Donc pour  $g = 2$  :

$$h_1 \leq 30h_\Theta(A), \quad c_{NT} \leq 64h_\Theta(A) + 6 \log 2.$$

On déduit donc la majoration, avec  $n = 15$  ici :

$$c_5^2 \leq 12^{2^{16}} h_\Theta(A).$$

□

**Corollaire 2.8.13.** (des théorèmes 2.8.2 et 2.5.3 et de 2.8.10, 2.8.11 et 2.8.12) Soient  $k$  un corps de nombres et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $C/k$  une courbe de genre 2 avec bonne réduction en 2, donnée dans un modèle  $y^2 = F(x)$  avec  $\deg(F) = 5$ . Soit  $A/k$  la jacobienne de  $C$ . On suppose que pour toute place archimédienne  $v$ , la matrice de périodes  $\tau_v \in G_{2,\varepsilon}$ . On suppose de plus que  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$ . Alors il existe une constante  $c_2(d)$  ne dépendant que de  $d = [k : \mathbb{Q}]$  telle que :

$$\text{Card}(C(k)) \leq c_2 \text{rang } A(k) + 1,$$

et on peut choisir :

$$c_2 = 240(d+1)2^{35}.$$

*Démonstration.* On notera dans tout ce qui suit  $r_k$  le rang de  $A$  sur  $k$ . On commence par  $C(k) = C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A(k)$ , donc :

$$C(k) \subset \left\{ x \in A(k) \mid \widehat{h}(x-y) \leq 12^{2^{17}} h_\Theta(A) \right\} \cup \left\{ x \in A(k) \mid \widehat{h}(x-y) \geq 12^{2^{17}} h_\Theta(A) \right\},$$

d'où en utilisant un lemme euclidien classique pour le premier ensemble (voir par exemple [dD97] p. 109), suivi de la proposition 2.8.10 et du lemme 2.8.11 pour le deuxième :

$$\text{Card } C(k) \leq \text{Card } A(k)_{\text{tors}} \left( 1 + \frac{12^{2^{17}} h_\Theta(A)}{\min_{x \in A(k) \setminus A_{\text{tors}}} \widehat{h}(x)} \right)^{r_k} + (3.17^2 B^{12})^{r_k},$$

d'où avec la borne 2.8.5 et en notant  $d = [k : \mathbb{Q}]$  :

$$\text{Card } C(k) \leq 2^4 240^{16 \cdot 3^{16} d} \left( 1 + \frac{12^{2^{17}} h_\Theta(A)}{\min_{x \in A(k) \setminus A_{\text{tors}}} \widehat{h}(x)} \right)^{r_k} + (2^{180})^{r_k}. \quad (*)$$

Appliquons alors le théorème de minoration de la hauteur de Néron-Tate 2.8.2 sur le corps  $k' = k(A[4])$  :

$$\text{Card } C(k) \leq 2^4 240^{16 \cdot 3^{16} d} \left( 1 + 240^{8 \cdot 3^{16} d'} \frac{12^{2^{17}} h_\Theta(A)}{0,00005 h'_F(A/k')} \right)^{r_k} + (2^{180})^{r_k}.$$

On a tout d'abord  $h'_F(A/k') \geq h'_{\text{st}}(A)$ . Il nous faut ici encore utiliser le résultat de J.-B. Bost et S. David, que l'on trouve énoncé dans [Rém99], qui compare la hauteur thêta et la hauteur de Faltings stable. On obtient ici pour la variété abélienne  $A$  :

$$h'_{\text{st}}(A) \geq 2h_{\Theta}^r(A) + 2M(r, g),$$

$$\text{où : } M(r, g) = \frac{g}{4} \log(4\pi) + g \log(r) + \frac{g}{2} \log \left( 2 + \frac{2}{3^{1/4}} 2^{g^{3/4}} \right).$$

On peut choisir  $r = 2$ , ce qui impose de travailler sur  $k' = k(A[4])$ . On utilisera donc de plus la borne  $[k(A[4]) : k] \leq 4^{16}$ . On trouve alors :

$$h'_F(A/k') \geq 2h_{\Theta}(A) - \log \left( 2^8 \pi \left( 1 + \frac{4}{3^{1/4}} \right)^2 \right) \geq 2h_{\Theta}(A) - 19/2.$$

Il y a deux possibilités :

1er cas : Si on a :  $2h_{\Theta}(A) > 10$ .

On injecte dans le majorant :

$$\text{Card } C(k) \leq 2^4 \cdot 240^{16 \cdot 3^{16}d} \left( 1 + 240^{8d12^{16}} \frac{12^6 12^{2^{17}} h_{\Theta}(A)}{2h_{\Theta}(A) - 19/2} \right)^{r_k} + (2^{180})^{r_k},$$

donc :

$$\text{Card } C(k) \leq 2^4 \cdot 240^{16 \cdot 3^{16}d} \left( 1 + 240^{8d12^{16}} \frac{12^6 12^{2^{17}}}{2 - \frac{19}{10}} \right)^{r_k} + (2^{180})^{r_k},$$

d'où :

$$\text{Card } C(k) \leq 240^{16 \cdot 3^{16}d+1} \left( 1 + 240^{8(d+1)12^{16}} 12^7 12^{2^{17}} \right)^{r_k} \leq \left( 240^{(d+1)2^{35}} \right)^{r_k+1}.$$

2e cas : Si on a :  $2h_{\Theta}(A) \leq 10$ .

On obtient dans la borne (\*) :

$$\text{Card } C(k) \leq 2^4 \cdot 240^{16 \cdot 3^{16}d} \left( 1 + \frac{12^{2^{17}} 9}{\min_{x \in A(k) \setminus A_{\text{tors}}} \widehat{h}(x)} \right)^{r_k} + (2^{180})^{r_k}.$$

On peut alors appliquer directement le théorème 2.5.3 et affirmer, puisqu'on a supposé  $\text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)$  :

$$\min_{x \in A(k) \setminus A_{\text{tors}}} \widehat{h}(x) \geq \frac{1}{160 \cdot 240^{8 \cdot 3^{16}d}} \text{Tr}(A) - \frac{63}{160 \cdot 240^{8 \cdot 3^{16}d}} N_{k/\mathbb{Q}}(D) \geq \frac{1}{160 \cdot 64 \cdot 240^{8 \cdot 3^{16}d}} \text{Tr}(A),$$

donc, comme  $A$  a une matrice de période  $\tau \in G_{2,\varepsilon}$  on a  $\text{Tr}(A) \geq 62$  et :

$$\min_{x \in A(k) \setminus A_{\text{tors}}} \widehat{h}(x) \geq \frac{62}{160 \cdot 64 \cdot 240^{8 \cdot 3^{16}d}},$$

d'où la borne :

$$\text{Card } C(k) \leq 2^4 \cdot 240^{16 \cdot 3^{16}d} \left( 1 + \frac{160 \cdot 64 \cdot 9}{62} 240^{8 \cdot 3^{16}d} 12^{2^{17}} \right)^{r_k} + (12^{2^{14}})^{r_k},$$

que l'on peut simplifier en :

$$\text{Card } C(k) \leq 240^{16 \cdot 3^{16}d+1} \left( 1 + 240^{8 \cdot 3^{16}d+2} 12^{2^{17}} \right)^{r_k}.$$

On remarque ensuite que la borne du 1er cas est plus grande que la borne du second, d'où le résultat. □





## Chapitre 3

Minoration de la hauteur de Néron-Tate  
pour les variétés abéliennes de  
dimension  $g \geq 2$



## 3.1 Introduction

Dans les deux premières parties on décompose la hauteur de Néron-Tate en hauteurs locales, en utilisant les coordonnées de Mumford avec caractéristiques. La normalisation choisie n'aboutit pas directement à des minoration positives des hauteurs locales, on applique donc une technique de différences de hauteurs locales. On obtient finalement un théorème de minoration de la hauteur de Néron-Tate sur des variétés abéliennes vérifiant certaines conditions, lesquelles sont regroupées dans la définition de l'ensemble  $F_{g,\varepsilon}$  au paragraphe suivant. On verra que la première condition semble inhérente à la méthode. Pour ce qui est de la seconde, un effort de raffinement des calculs donnerait probablement une condition plus faible et éventuellement permettrait de l'ôter.

### 3.1.1 Cadre

On souhaite étudier les variétés abéliennes  $A$  définies sur un corps de nombres  $k$  et munies d'un diviseur  $\Theta$  associé à une polarisation principale. On notera dans toute cette partie  $g = \dim(A)$ . On travaillera avec  $\mathcal{D} = [4]^*\Theta$  pour pouvoir utiliser les coordonnées de Mumford modifiées comme dans l'article [DP02].

**Notation 3.1.1.** Soit  $s$  le plus petit entier strictement supérieur à  $\log(4^g g!)/\log 2$ . Posons  $N = 2^s - 1$ . On note  $\mathcal{T}_N = A[N] \setminus \mathcal{D}$  et  $t_N = \text{Card}(\mathcal{T}_N)$ .

On verra que ce choix de niveau de torsion  $N = 2^s - 1$  fournit des symétries très utiles dans toute la suite. L'inégalité  $N \geq 4^g g!$  permet d'affirmer, *via* le lemme 3.2.4 que l'ensemble  $A[N] \setminus \mathcal{D}$  possède beaucoup de points complexes.

On va définir des sous-ensembles de l'espace de module des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension  $g$ . On se reportera à l'introduction générale pour les propriétés du domaine fondamental de Siegel noté  $F_g$ . On note  $[\delta', \delta'']$  le vecteur caractéristique donné dans la partie 3.2.5, qui est fixé une fois pour toutes, et  $\tilde{\theta}_{\delta', \delta''}$  la fonction thêta modifiée associée à cette caractéristique, dont la définition précise est donnée en 3.2.6. Pour un point  $Q \in A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$ , on note  $Z(Q) = X(Q) + \tau Y(Q)$  une coordonnée complexe de  $Q$ , avec  $X(Q), Y(Q) \in \mathbb{R}^g$ . Alors on pose :

**Définition 3.1.2.** (ensemble  $F_{g,\varepsilon}$ )

Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit le sous-ensemble  $F_{g,\varepsilon}$  du domaine de Siegel  $F_g$  comme l'ensemble des matrices  $\tau = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$  vérifiant les deux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \forall Q \in \mathcal{T}_N, \quad \left| \tilde{\theta}_{\delta', \delta''}(Q) \right| \geq e^{-\pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \left( \text{Im } \tau[n + \delta' + 4Y(Q)] \right)} \quad \varepsilon, \\ (2) \quad \text{Im } \tau_{11} \geq 2\pi(4^g g!)^{2g+2} \sum_{j \neq i} |\text{Im } \tau_{ij}|_v + 4(4^g g!)^{2g+2} \log \left( \frac{g}{\varepsilon} \right). \end{array} \right.$$

La condition (1) de l'ensemble  $F_{g,\varepsilon}$  revient à exclure un voisinage tubulaire d'un nombre fini d'hypersurfaces analytiques dans l'espace  $A_g$ . La condition (2) impose aux modules des coefficients diagonaux des matrices de périodes d'être d'autant plus grand que le voisinage tubulaire est petit. On demande de plus que ces termes diagonaux dominant nettement les autres termes de la matrice.

Le sous-ensemble de  $F_g$  suivant est construit de la même manière ; il nous permettra de travailler avec les points de 2-torsion qui s'écrivent, dans les coordonnées du tore analytique  $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau_v\mathbb{Z}^g : P_{a,b} = a + \tau_v b$ , avec  $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ .

**Définition 3.1.3.** (*ensemble  $G_{g,\varepsilon}$* )

Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit le sous-ensemble  $G_{g,\varepsilon}$  du domaine de Siegel  $F_g$  comme l'ensemble des matrices  $\tau_v = (\tau_{ij})_{1 \leq i,j \leq g}$  vérifiant les deux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \forall P_{ab} \in A[2] \setminus \Theta, \quad \left| \theta_{a,b}(0, \tau_v) \right| \geq e^{-\pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \operatorname{Im} \tau [n + a]} \varepsilon, \\ (2) \quad \operatorname{Im} \tau_{11} \geq \sum_{j \neq i} |\operatorname{Im} \tau_{ij}| + \frac{1}{g} \log \left( \frac{1}{\varepsilon} \right). \end{array} \right.$$

La première condition, là aussi, exclut un voisinage tubulaire d'un nombre fini d'hypersurfaces analytiques de  $A_g(\mathbb{C})$ . La seconde, comme pour l'ensemble  $F_{g,\varepsilon}$ , permet de réduire la taille des voisinages à exclure au prix d'une condition sur les coefficients diagonaux de la matrice de périodes.

### 3.1.2 Résultats

On présente dans ce troisième chapitre les deux théorèmes qui suivent. Le premier est un résultat de minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les variétés abéliennes, le second est un résultat de majoration de la hauteur de Faltings concernant uniquement les jacobiniennes de courbes hyperelliptiques. On rappelle que  $\operatorname{Tr}(A)$  est la trace archimédienne de  $A$  et que  $h_{\text{fini}}(A)$  est la somme des contributions des places finies à la hauteur thêta de la variété abélienne  $A$ . Le terme  $S_{\text{fini}}(A)$  est issu des formes décrivant la multiplication par  $[2^g]$  et est défini par la notation 3.2.10. Alors on a :

**Théorème 3.1.4.** *Soient  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ ,  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe des constantes  $c_1(d, g) > 0$  et  $c_2(d, g) > 0$  telles que pour toute variété abélienne de dimension  $g$  principalement polarisée  $(A, \Theta)/k$  admettant des matrices  $\tau_v \in F_{g,\varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne, et pour tout point  $P \in A(k)$  qui n'est pas de torsion modulo toute sous-variété abélienne, on a :*

$$\widehat{h}_{A,\Theta}(P) \geq c_1 \operatorname{Tr}(A) - c_2 \left( h_{\text{fini}}(A) + S_{\text{fini}}(A) \right).$$

On rappelle pour le second théorème que  $h'_{\text{st}}(A)$  est la hauteur de Faltings augmentée stable de la variété abélienne  $A$  et  $\text{Tr}(A)$  sa trace archimédienne.

**Théorème 3.1.5.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe des constantes  $c_3(k, g) > 0$  et  $c_4(k, g) > 0$  telles que : pour toute courbe  $C/k$  hyperelliptique définie sur  $k$  de genre  $g$ , de discriminant minimal  $\Delta_{\min}$ , si la jacobienne  $(\text{Jac}(C), \Theta)$ , principalement polarisée par le diviseur  $\Theta$ , admet des matrices  $\tau_v \in G_{g,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ , on a :*

$$h'_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) \leq c_3 \text{Tr}(\text{Jac}(C)) + c_4 \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}).$$

De ces deux théorèmes on déduira alors le corollaire suivant, en direction de la conjecture de Lang et Silverman :

**Corollaire 3.1.6.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $C/k$  une courbe hyperelliptique définie sur  $k$  de genre  $g$ , de discriminant minimal  $\Delta_{\min}$ . On suppose que sa jacobienne  $(A, \Theta)$ , principalement polarisée par le diviseur  $\Theta$ , admet des matrices  $\tau_v \in G_{g,\varepsilon} \cap F_{g,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ . Alors il existe deux constantes  $c_5 = c_5(g) > 0$  et  $c = c(d, g) > 0$  telles que si on suppose :*

$$\text{Tr}(A) \geq c_5 \max \left\{ h_{\text{fmi}}(A) + S_{\text{fmi}}(A), \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) \right\},$$

alors pour tout point  $P \in \text{Jac}(C)(k)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne :

$$\widehat{h}_{A,\Theta}(P) \geq c h'_{\text{st}}(A).$$

*Remarque :* En copiant la démarche entreprise en dimension 2, on peut alors déduire des énoncés partiels sur le nombre de points de torsion d'une variété abélienne de dimension  $g$  et sur le nombre de points rationnels d'une courbe hyperelliptique de genre  $g$ . Par souci de concision, nous laissons au lecteur le soin de formuler ces corollaires (voir les énoncés des corollaires 1 et 3 dans le cas  $g = 2$  de l'introduction générale).

## 3.2 Hauteur de Néron-Tate et hauteurs locales

On propose dans cette partie une décomposition de la hauteur de Néron-Tate en hauteurs locales normalisées pour les variétés abéliennes de dimension  $g \geq 2$ . Cette démarche généralise l'approche de Flynn-Smart en dimension 2 rappelée en 2.1.2.

### 3.2.1 Décomposition en hauteurs locales

Soit  $A/k$  une variété abélienne sur un corps de nombres  $k$ , principalement polarisée par un diviseur  $\Theta$ . On note  $\mathcal{M}$  le fibré associé. On va travailler avec  $\mathcal{L} = \mathcal{M}^{\otimes 4}$ . Nous voulons

fixer une décomposition de la hauteur de Néron-Tate. Nous allons pour cela utiliser les coordonnées de D.Mumford dans leur version modifiée comme dans l'article [DP02] de S. David et P. Philippon. On utilise dans toute la suite les notations de la partie 1.4 sans rappel. On a tout d'abord le plongement :

$$A \xrightarrow{\Theta_{\mathcal{L}^{\otimes 4}}} \mathbb{P}^{4g-1}$$

$$P \longmapsto (\dots : \Delta_{(a,l)}^{(2)}(P) : \dots)_{a \in \mathcal{Z}_2, l \in \widehat{K_2(4)}}.$$

On notera dans la suite  $P = (x_0(P) : \dots : x_{4g-1}(P))$  pour simplifier la notation.

Lorsqu'on regarde la variété sur  $\mathbb{C}$ , ce plongement correspond au plongement thêta avec caractéristique. Pour normaliser les coordonnées du point  $P$ , on va choisir une coordonnée,  $x_0$ , par laquelle on va diviser.

Prenons tout d'abord une place  $v$  archimédienne, et regardons les points complexes  $A_v(\mathbb{C})$ . La théorie des fonctions thêta fournit des coordonnées projectives pour les points complexes, indexées par les caractéristiques. Choisissons la caractéristique  $[\delta', \delta'']$ , définie en 3.2.5. Cette caractéristique correspond à une coordonnée  $(a_0, l_0)$  dans les coordonnées de Mumford modifiées et on conviendra de la fixer comme étant  $x_0$ . On fixera ainsi le diviseur associé au plongement :

$$\mathcal{D} = (x_0 = 0).$$

Comme la caractéristique est impaire, ce choix impose en particulier  $O \in \mathcal{D}$ . C'est la raison pour laquelle on doit prendre des précautions lorsqu'on normalise les parties finies et infinies de la hauteur thêta de  $A$ . Rappelons qu'il existe, par le lemme 3.5 p. 654 de [DP02], un couple  $(b_0, k_0)$  associé à  $(a_0, l_0)$  et tel que  $\Delta_{(b_0, k_0)}^{(2)}(O) \neq 0$ . Ce couple  $(b_0, k_0)$  est fixé une fois pour toutes.

**Notation 3.2.1.** Pour tout couple  $(a, l) \in \mathcal{Z}_2 \times \widehat{K(4)}$ , on pose :

$$\theta(a, l) = \frac{\Delta_{(a,l)}^{(2)}(O)}{\Delta_{(b_0, k_0)}^{(2)}(O)}.$$

Soit  $(a, l) \in \mathcal{Z}_2 \times \widehat{K(4)}$ . Fixons un élément  $(b, k) \in K_2 \times \widehat{K(4)}$  tel que  $b \equiv a \pmod{2K_2}$  et  $k = l\kappa^2$  pour un certain  $\kappa \in \widehat{K(4)}$  tel que  $\theta(b, k) \neq 0$ . Comme dit plus haut, l'existence d'un tel  $(b, k)$  est assurée par le lemme 3.5 p. 654 de [DP02].

**Notation 3.2.2.** On notera  $\mathbf{G} = (G_{(a,l)})_{(a,l) \in \mathcal{Z}_2 \times \widehat{K(4)}}$  le système de formes représentant la multiplication par [2] sur  $A$  (introduit dans [DP02] p. 665 et p. 666) donné par :

$$G_{(a,l)} = \frac{1}{2^g \theta(b, k)^3} \sum_{\substack{d \in K(4)/K(2) \\ u \in \widehat{K(2)}}} l(d) \Delta_{\left(\frac{a+3b+d}{2}, l^2 \cdot \kappa^{-1} \cdot 2u\right)}^{(2)} \left( \Delta_{\left(\frac{a-b+d}{2}, \kappa^{-1} \cdot 2u\right)}^{(2)} \right)^3.$$

Plus généralement, pour un entier  $s \geq 2$  on notera  $\mathbf{G}^{(s)} = \mathbf{G} \circ \mathbf{G}^{(s-1)}$  et  $\mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{G}$  le système de formes représentant la multiplication par  $[2^s]$  sur  $A$ .

Soit  $v$  une place de  $k$ . La hauteur locale naïve associée à  $v$  est alors :

$$\lambda_{4\mathcal{D},v}(P) = \log \max_{i \in \{0..N\}} \left| \frac{x_i(P)}{x_0(P)} \right|_v.$$

On définit à présent un quotient qui ne dépend pas de la normalisation du point  $P$  choisie :

$$E_{v,s}(P) = \frac{\max |\mathbf{G}^{(s)}_i(P)|_v}{\max |x_i(P)|_v^{4^s}},$$

et la série suivante, dont la convergence est assurée en remarquant par exemple que le quotient  $E_{v,s}$  est uniformément borné par le 3.11 p. 666 de [DP02] :

$$\mu_{4\mathcal{D},v}(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4^s)^{n+1}} \log E_{v,s}([(2^s)^n]P).$$

**Proposition 3.2.3.** *Soit  $A/k$  une variété abélienne sur un corps de nombres  $k$ . Soit  $\widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}$  la hauteur de Néron-Tate associée au diviseur  $4\mathcal{D}$ . Alors on a la décomposition pour  $P$  hors du support du diviseur  $\mathcal{D}$  :*

$$\widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}(P) = \sum_{v \in M_k} n_v \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P)$$

où :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) = \lambda_{4\mathcal{D},v}(P) + \mu_{4\mathcal{D},v}(P).$$

*Démonstration.* Écrivons :

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}([2^s]P) - 4^s \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) &= \log \frac{\max \left| \frac{x_i([2^s]P)}{x_0([2^s]P)} \right|}{\max \left| \frac{x_i(P)}{x_0(P)} \right|^{4^s}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4^s)^{n+1}} \log \frac{\max |\mathbf{G}^{(s)}_i([(2^s)^{n+1}]P)|}{\max |x_i([(2^s)^{n+1}]P)|^{4^s}} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4^s)^n} \log \frac{\max |\mathbf{G}^{(s)}_i([(2^s)^n]P)|}{\max |x_i([(2^s)^n]P)|^{4^s}}. \end{aligned}$$

Alors la série étant télescopique :



$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}([2^s]P) - 4^s \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) &= -\log \frac{\max |G^{(s)}_i(P)| |x_0([2^s]P)|}{\max |x_i([2^s]P)| |x_0(P)|^{4^s}} \\
&= -\log \frac{\max \left| G^{(s)}_i\left(\frac{P}{x_0(P)}\right) \right|}{\max |x_i([2^s]P)| / |x_0([2^s]P)|}, \\
&= -\log |G^{(s)}_0\left(\frac{P}{x_0(P)}\right)|_v, \\
&= v(f(P)),
\end{aligned}$$

avec  $\text{div}(f) = [2^s]^*(4\mathcal{D}) - 4^s(4\mathcal{D})$ .

Posons :

$$L(P) = \sum_{v \in M_k} n_v \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
L(P) &= \sum_{v \in M_k} n_v \left( \lambda_{4\mathcal{D},v}(P) + \mu_{4\mathcal{D},v}(P) \right) \\
&= h_{A,4\mathcal{D}}(P) + \sum_{v \in M_k} n_v \mu_{4\mathcal{D},v}(P) \\
&= h_{A,4\mathcal{D}}(P) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4^s)^{n+1}} \sum_{v \in M_k} n_v \log E_v([2^s]^n P).
\end{aligned}$$

Donc d'après [DP02] lemme 3.11 p. 666,  $|L - h_{A,4\mathcal{D}}|$  est borné.

Dans un deuxième temps, en utilisant la formule du produit on obtient :

$$\begin{aligned}
L([2^s]P) &= \sum_v n_v \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}([2^s]P) \\
&= \sum_v n_v \left( 4^s \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) + v(f(P)) \right) \\
&= 4^s L(P).
\end{aligned}$$

On peut conclure de ces deux faits que  $L(P) = \widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}(P)$  pour tout  $P$  hors du support du diviseur  $\mathcal{D}$ .

□

### 3.2.2 Différences de hauteurs locales et niveau de torsion

Nous allons à présent mettre en place une stratégie de minoration semblable à celle utilisée dans le cas des variétés abéliennes de dimension 2. La normalisation ci-dessus permet de minorer les hauteurs locales aux places finies par des contributions négatives. On se contente de cela pour les places finies et on utilise une autre définition aux places archimédiennes pour contre-balancer ce fait.

Supposons que l'on dispose d'une autre hauteur locale  $\Lambda_{\mathcal{D},v}$  aux places archimédiennes (nous verrons laquelle choisir dans la partie suivante grâce à l'utilisation des fonctions thêta, voir 3.2.11). En appliquant le théorème 1.2.1 on peut donc dire qu'il existe une constante  $C_{\infty,v}$  telle que, pour tout  $P \in A_{\mathcal{D}}(k)$  :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) = 4\Lambda_{\mathcal{D},v}(P) + C_{\infty,v}.$$

Pour pouvoir minorer la hauteur locale  $\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}$ , il suffit donc de minorer  $\Lambda_{\mathcal{D},v}$  et  $C_{\infty,v}$ . On peut aussi exploiter le fait suivant : pour tout couple  $(P, Q) \in A_{\mathcal{D}}(k)^2$ ,

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) - 4\Lambda_{\mathcal{D},v}(P) = \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) - 4\Lambda_{\mathcal{D},v}(Q).$$

C'est la stratégie que nous allons mettre en place. Nous commençons par remarquer qu'il existe un niveau de torsion ne dépendant que de  $g$  avec beaucoup de points hors du support du diviseur  $\mathcal{D}$ . Posons tout d'abord, pour  $N \geq 2$  :

$$\mathcal{T}_N = (A[N] \setminus \mathcal{D})(\mathbb{C}), \quad t_N = \text{Card}(\mathcal{T}_N).$$

**Proposition 3.2.4.** *Soit  $g \geq 2$  un entier. Si  $N \geq 4^g g!$  alors pour toute variété abélienne polarisée  $(A, \mathcal{D})$  de dimension  $g$  on a  $t_N > N^{2g-1}$ .*

*Démonstration.* On utilise un énoncé qui figure dans le livre de D.Mumford [MF82] p. 138. On en trouve une version semblable dans le livre de L.Moret-Bailly [MB85b] p. 167. Le résultat est le suivant : soit  $A$  une variété abélienne sur  $\mathbb{C}$ , polarisée par un diviseur  $\mathcal{D}$ , plongée dans un espace projectif *via* le fibré  $\mathcal{L}$ . Alors :

$$\text{Card}(A[N] \cap \mathcal{D}) \leq \deg_{\mathcal{L}}(A) N^{2g-2}.$$

Dans notre cadre, on obtient donc :

$$t_N = N^{2g} - \text{Card}(A[N] \cap \mathcal{D}) \geq N^{2g} - 4^g 4^g g! N^{2g-2}.$$

Or, si  $N \geq 4^g g!$ , on a  $N^{2g} - 16^g g! N^{2g-2} > N^{2g-1}$  dès que  $g \geq 2$ . Cela suffit pour montrer la proposition.  $\square$

Sachant cela, on se donne maintenant un entier  $n \geq 1$  paramètre libre, qui sera fixé ultérieurement par un principe des tiroirs. Alors on écrit notre égalité-clef en dimension  $g$ . A noter qu'on suppose ici que  $k = k(A[N])$ .

**Egalité Clef 3.2.5.** Soit  $P \in A(k)$  et soit  $n \geq 1$  tel que  $[n]P \in A(k) \setminus \mathcal{D}$ . Alors :

$$\widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}(P) = \frac{1}{t_N n^2} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \left[ \sum_{v \in M_k^0} n_v \left( \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) \right) + 4 \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left( \Lambda_{\Theta,v}([n]P) - \Lambda_{\Theta,v}(Q) \right) \right].$$

*Démonstration.* On mène le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}(P) &= \frac{1}{n^2} \widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}([n]P) - \frac{1}{t_N n^2} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}(Q) \\ &= \frac{1}{t_N n^2} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \left( \widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}([n]P) - \widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}(Q) \right) \\ &= \frac{1}{t_N n^2} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \sum_{v \in M_k} n_v \left( \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) \right) \\ &= \frac{1}{t_N n^2} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \left[ \sum_{v \in M_k^0} n_v \left( \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) \right) + 4 \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left( \Lambda_{\Theta,v}([n]P) - \Lambda_{\Theta,v}(Q) \right) \right] \end{aligned}$$

□

Dans la partie 3.2.3 on va commencer par minorer les hauteurs locales aux places finies au point  $P$  et les majorer au point  $Q \in \mathcal{T}_N$ . On traitera les places archimédiennes dans la partie 3.2.5, après avoir défini une nouvelle hauteur locale archimédienne.

### 3.2.3 Minoration aux places finies

Les notations employées ici sont les mêmes que celles du chapitre 1, partie 1.4. On se base dans ce paragraphe sur un lemme figurant dans [DP02] (lemme 3.11 p. 666) que l'on reprend ici. Une relecture attentive de ce lemme permet de donner cette version légèrement plus précise. On rappelle qu'on a choisi une coordonnée  $x_0 = \Delta_{(a_0, l_0)}^{(2)}$  ainsi qu'un couple  $(b_0, k_0)$  tel que  $\Delta_{(b_0, k_0)}^{(2)}(O) \neq 0$ . On note le plongement projectif :

$$\Theta(P) = \Theta_{\mathcal{L}^{\otimes 4}}(P) = \left( \dots : \Delta_{(a,l)}^{(2)}(P) : \dots \right)_{a \in \mathcal{Z}_2, l \in \widehat{K_2(4)}},$$

et l'image par  $\Theta_{\mathcal{L}^{\otimes 4}}$  du point  $P$  normalisée en divisant par la première coordonnée, pour  $P$  hors du support du diviseur  $\mathcal{D}$ , sera notée :

$$\tilde{\Theta}(P) = \left( 1, \dots, \frac{\Delta_{(a,l)}^{(2)}(P)}{x_0(P)}, \dots \right)_{a \in \mathcal{Z}_2, l \in \widehat{K_2(4)}}.$$

On définit de plus :

$$\mathcal{B}_P = \left( 1, \dots, \frac{x_0(P)}{\Delta_{(a,l)}^{(2)}(P)}, \dots \right)_{a \in \mathbb{Z}_2, l \in \widehat{K_2(4)}},$$

où on ne garde que les inverses de coordonnées non nulles. On rappelle de plus qu'on a normalisé :

$$\tilde{\Theta}(O) = \left( 0, \dots, 1, \dots, \frac{\Delta_{(a,l)}^{(2)}(O)}{\Delta_{(b_0,k_0)}^{(2)}(O)}, \dots \right).$$

On utilisera enfin :

$$\mathcal{B}_O = \left( 1, \dots, \frac{\Delta_{(b_0,k_0)}^{(2)}(O)}{\Delta_{(a,l)}^{(2)}(O)}, \dots \right)_{a \in \mathbb{Z}_2, l \in \widehat{K_2(4)}},$$

où on ne prend que les inverses de coordonnées non nulles.

Alors :

**Lemme 3.2.6.** (*David-Philippon*)

Soit  $A$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $k$ . Soit  $\mathbf{G}^{(s)}$  le système de formes représentant la multiplication par  $[2^s]$  sur  $A$ . Alors pour toute place finie  $v$  et tout point  $P \in A(\bar{k}_v)$ , en notant  $\mathbf{x} = \Theta(P)$  on a les inégalités :

$$|2|_v^{\frac{g(4^s-1)}{3}} \|\tilde{\Theta}(O)\|_v^{-(4^s-1)} \leq \frac{\|\mathbf{G}^{(s)}(\mathbf{x})\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v^{4^s}} \leq \left| \frac{1}{2} \right|_v^{\frac{g(4^s-1)}{3}} \|\mathcal{B}_O\|_v^{(4^s-1)}.$$

*Démonstration.* Tout d'abord terme central ne dépend pas de la normalisation du point projectif. Il suffit ensuite de remarquer que l'itération des inégalités numérotées (11) dans [DP02] (lemme 3.11 p. 666) donne :

$$\frac{\|\mathbf{G}^{(s)}(\mathbf{x})\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v^{4^s}} = \frac{\|\mathbf{G}^{(s)}(\mathbf{x})\|_v}{\|\mathbf{G}^{(s-1)}(\mathbf{x})\|_v^4} \times \dots \times \left( \frac{\|\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{x})\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v^4} \right)^{4^{s-1}} \geq \frac{|2|_v^g}{\|\tilde{\Theta}(O)\|_v^3} \times \dots \times \left( \frac{|2|_v^g}{\|\tilde{\Theta}(O)\|_v^3} \right)^{4^{s-1}},$$

donc :

$$\frac{\|\mathbf{G}^{(s)}(\mathbf{x})\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v^{4^s}} \geq \left( \frac{|2|_v^g}{\|\tilde{\Theta}(O)\|_v^3} \right)^{1+4+\dots+4^{s-1}} \geq |2|_v^{\frac{g(4^s-1)}{3}} \|\tilde{\Theta}(O)\|_v^{-(4^s-1)}.$$

On procède de même pour la majoration. □

L'utilisation de ce lemme donne :

**Proposition 3.2.7.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $v$  une place finie de  $k$ . Soit  $A/k$  une variété abélienne munie du diviseur  $\mathcal{D}$ . Alors la hauteur locale définie dans la proposition 3.2.3 est minorée, pour tout  $P \in A_{\mathcal{D}}(k)$  :*

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) \geq \frac{g}{3} \log |2|_v - \log \|\tilde{\Theta}(O)\|_v.$$

*Démonstration.* En reprenant la définition de la hauteur locale et en utilisant le lemme 3.2.6 il vient :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) \geq \mu_{4\mathcal{D},v}(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4^s)^{n+1}} \log \frac{\max |\mathbf{G}^{(s)}_i([(2^s)^n]P)|_v}{\max |x_i([(2^s)^n]P)|_v^{4^s}},$$

donc :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4^s)^{n+1}} \log \left( |2|_v^{\frac{g(4^s-1)}{3}} \|\tilde{\Theta}(O)\|_v^{-(4^s-1)} \right),$$

d'où :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(P) \geq \frac{1}{4^s-1} \log \left( |2|_v^{\frac{g(4^s-1)}{3}} \|\tilde{\Theta}(O)\|_v^{-(4^s-1)} \right).$$

□

### 3.2.4 Majoration aux places finies

On rappelle les notations :  $\mathcal{T}_N = (A[N] \setminus \mathcal{D})(\mathbb{C})$  et  $t_N = \text{Card}(\mathcal{T}_N)$ . On note de plus pour tout point  $Q \in A(\mathbb{C})$  :  $Z(Q) = X(Q) + \tau Y(Q)$ . Le but de cette partie est de majorer la quantité :

$$\frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q).$$

On peut majorer terme à terme en utilisant comme dans le paragraphe précédent le lemme 3.2.6. On va voir que cela ne suffit pas pour ce que l'on souhaite obtenir. L'application du lemme 3.2.6 donne :

**Proposition 3.2.8.** *Soit  $v$  une place finie. La hauteur locale  $\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}$  vérifie la propriété :*

$$\frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) \leq \frac{g}{3} \log \left| \frac{1}{2} \right|_v + \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \log \left( C_v(\Theta, Q) \right),$$

où on a posé :  $C_v(\Theta, Q) = \|\tilde{\Theta}(Q)\|_v \|\mathcal{B}_O\|_v$ .

*Démonstration.* En appliquant la partie majoration du lemme 3.2.6 on a :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) \leq \lambda_{4\mathcal{D},v}(Q) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4^s)^{n+1}} \log \left( \left| \frac{1}{2} \right|_v \frac{g(4^s - 1)}{3} \|\mathcal{B}_O\|_v^{(4^s - 1)} \right),$$

donc :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) \leq \log \|\tilde{\Theta}(Q)\|_v + \frac{1}{4^s - 1} \log \left( \left| \frac{1}{2} \right|_v \frac{g(4^s - 1)}{3} \|\mathcal{B}_O\|_v^{(4^s - 1)} \right),$$

d'où :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) \leq \frac{g}{3} \log \left| \frac{1}{2} \right|_v + \log \left( \|\tilde{\Theta}(Q)\|_v \|\mathcal{B}_O\|_v \right).$$

Il suffit de poser  $C_v(\Theta, Q) = \|\tilde{\Theta}(Q)\|_v \|\mathcal{B}_O\|_v$  pour conclure. □

On peut donner un résultat plus précis en utilisant la forme particulière du niveau  $N$ . On obtient une formule close pour la hauteur locale au point de  $N$ -torsion :

**Proposition 3.2.9.** *Soit  $A/k$  une variété abélienne sur un corps  $k$ . Soit  $N = 2^s - 1$  le niveau de torsion privilégié. Alors pour tout point  $Q \in A[N] \setminus \mathcal{D}$  (dont la première coordonnée vaut 1) et toute place  $v$  de  $k$  on a :*

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) = \frac{1}{4^s - 1} \log \left| \mathbf{G}^{(s)}_0(Q) \right|_v.$$

*Démonstration.* Commençons par la remarque suivante :

$$[N]Q = O \Leftrightarrow [2^s]Q = Q \Rightarrow \widehat{\lambda}_v([2^s]Q) = \widehat{\lambda}_v(Q).$$

On va écrire l'équation fonctionnelle de la hauteur locale. Remarquons tout d'abord :

$$Q \notin \Theta \Rightarrow [2^s]Q \notin \Theta.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}([2^s]Q) = 4^s \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) + v(f(Q)),$$

ce qui donne en vertu de l'hypothèse sur le niveau de torsion  $N$  :

$$\widehat{\lambda}_{4\mathcal{D},v}(Q) = -\frac{1}{4^s - 1} v(f(Q)) = \frac{1}{4^s - 1} \log \left| \mathbf{G}^{(s)}_0(Q) \right|_v.$$

□

*Remarque* : En prenant pour  $s$  le plus petit entier vérifiant  $s > \log(4^g g!)/\log 2$  on assure aussi les conditions de la proposition 3.2.4.

On utilisera dans la suite la notation suivante :

**Notation 3.2.10.** Soit  $A$  une variété abélienne sur un corps de nombres  $k$ , de dimension  $g$  et munie du diviseur  $\mathcal{D}$ . Soit  $s \geq 2$  le plus petit entier tel que  $s > \log(4^g g!)/\log 2$  et posons  $N = 2^s - 1$ . Soit  $\mathbf{G}^{(s)}_0$  la première forme normalisée décrivant la multiplication par  $[2^s]$  sur  $A$  dans les coordonnées de Mumford modifiées. On rappelle que  $\mathcal{T}_N = A[N] \setminus \mathcal{D}$  est de cardinal  $t_N$ . Alors on pose :

$$S_{\text{fini}}(A) = \frac{1}{t_N(4^s - 1)} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \sum_{v \in M_k^0} d_v \log \left| \mathbf{G}^{(s)}_0(Q) \right|_v.$$

*Remarque* :

Cette quantité est estimable *via* le lemme 3.2.8. On peut penser qu'il est possible d'obtenir mieux en exploitant par exemple le fait que l'ensemble  $\mathcal{T}_N$  est stable sous l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ .

### 3.2.5 Minoration aux places archimédiennes

#### Hauteur locale archimédienne et fonctions thêta

Soient  $\tau \in F_g$  et  $Z \in \mathbb{C}^g$ . On peut écrire  $Z = X + \tau Y$  avec  $X, Y \in \mathbb{R}^g$ .

On rappelle de plus la définition des fonctions thêta :

$$\theta_{a,b}(Z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{2i\pi \left( \frac{1}{2} {}^t(n+a)\tau(n+a) + {}^t(n+a)(Z+b) \right)},$$

où  $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$  forment le *vecteur caractéristique* de la fonction thêta.

On va fixer le vecteur caractéristique comme étant  $[a, b] = [\delta', \delta'']$ , avec  $\delta' = [1/2, \dots, 1/2]$  et  $\delta'' = [0, 0, \dots, 0, 1/2]$ . Cette caractéristique est impaire, la fonction thêta considérée vérifie en particulier  $\theta_{\delta', \delta''}(0) = 0$ . On appelle  $\Theta = \Theta(\mathbb{C})$  son diviseur; il contient  $O$  dans son support.

Soit  $k$  un corps de nombres. Soit  $(A, \Theta)/k$  une variété abélienne principalement polarisée. Soit  $v$  une place archimédienne et soit  $\tau_v$  l'élément de  $F_g$  correspondant à  $A(\bar{k}_v)$ . On peut alors donner la définition suivante (dont l'idée vient de Néron, voir par exemple [Nér65]) :

**Proposition-Définition 3.2.11.** *A une constante près, la hauteur locale associée au diviseur  $\Theta$  pour la place  $v \in M_k$  archimédienne peut s'exprimer comme suit, pour tout point  $P \in A(k)$  hors du support du diviseur  $\Theta$  :*

$$\Lambda_{\Theta, v}(P) = -\log \left( \left| \theta_{\delta', \delta''}(Z(P)) \right|_v e^{-\pi {}^t \text{Im } Z (\text{Im } \tau)^{-1} \text{Im } Z} \right).$$

Cette hauteur locale vérifie de plus l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda_{\Theta,v}([2^s]P) - 4^s \Lambda_{\Theta,v}(P) = -\log \frac{|\theta_{\delta',\delta''}(Z([2^s]P))|}{|\theta_{\delta',\delta''}(Z(P))|^{4^s}} = v(f(P)),$$

où  $\operatorname{div}(f) = [2^s]^*\Theta - 4^s\Theta$ .

*Remarque importante* : Il faut à présent faire attention à la forme particulière de notre diviseur  $\mathcal{D}$ . On peut faire le lien avec le diviseur  $\Theta = (\theta_{\delta',\delta''} = 0)$  : ces diviseurs vérifient l'égalité  $\mathcal{D} = [4]^*\Theta$ . On pourra consulter [DP02] p. 656 où on trouve la formule :

$$\theta_{a,b}(\tau, 4z) = \exp(2i\pi {}^t ab) \Delta_{\left(\frac{a}{4}, 4b\right)}^{(2)}(z).$$

On travaillera donc toujours avec la fonction  $Z \mapsto \theta_{\delta',\delta''}(4Z)$ .

### Lemmes analytiques

On commence par montrer des lemmes importants pour les estimations de fonctions thêta. Dans toute la suite on notera :

$$T[x] = {}^t x T x,$$

pour  $T$  une matrice carrée et  $x$  un vecteur colonne,  ${}^t x$  son transposé.

**Lemme 3.2.12.** *Soit  $T = (t_{ij})_{ij}$  une matrice symétrique carrée de taille  $g \times g$  dont les coefficients diagonaux sont positifs. Alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}^g$  et tout  $a \in \mathbb{R}^g$  on a :*

$$T[n+a] \geq \sum_{i=1}^g (n_i + a_i)^2 \left[ t_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^g |t_{ij}| \right],$$

$$\min_{n \in \mathbb{Z}^g} T[n+a] \leq \sum_{i=1}^g d(a_i, \mathbb{Z})^2 \left[ t_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^g |t_{ij}| \right].$$

*Démonstration.* Il suffit d'écrire :

$$T[n+a] = \sum_{i=1}^g (n_i + a_i)^2 t_{ii} + \sum_{1 \leq j \neq i \leq g} (n_i + a_i)(n_j + a_j) t_{ij}$$

et d'encadrer en utilisant que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $2xy \geq -x^2 - y^2$  :

$$- \sum_{1 \leq j \neq i \leq g} \left( (n_i + a_i)^2 + (n_j + a_j)^2 \right) |t_{ij}| \leq 2 \sum_{1 \leq j \neq i \leq g} (n_i + a_i)(n_j + a_j) t_{ij},$$



et pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $2xy \leq x^2 + y^2$  :

$$2 \sum_{1 \leq j \neq i \leq g} (n_i + a_i)(n_j + a_j)t_{ij} \leq \sum_{1 \leq j \neq i \leq g} \left( (n_i + a_i)^2 + (n_j + a_j)^2 \right) |t_{ij}|.$$

On calcule alors :

$$\sum_{1 \leq j \neq i \leq g} \left( (n_i + a_i)^2 + (n_j + a_j)^2 \right) |t_{ij}| = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1, j \neq i}^g (n_i + a_i)^2 |t_{ij}| + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1, j \neq i}^g (n_j + a_j)^2 |t_{ij}|,$$

et comme  $t_{ij} = t_{ji}$  pour tout couple d'entiers  $(i, j)$  il vient :

$$\sum_{1 \leq j \neq i \leq g} \left( (n_i + a_i)^2 + (n_j + a_j)^2 \right) |t_{ij}| = 2 \sum_{i=1}^g (n_i + a_i)^2 \sum_{j=1, j \neq i}^g |t_{ij}|,$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^g (n_i + a_i)^2 \left[ t_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^g |t_{ij}| \right] \leq {}^t(n+a)T(n+a) \leq \sum_{i=1}^g (n_i + a_i)^2 \left[ t_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^g |t_{ij}| \right].$$

Il suffit de prendre le minimum pour obtenir le lemme. □

**Lemme technique et long mais utile 3.2.13.** Soient  $a \in [0, 1]^g$  et  $T = \text{Im } \tau$  avec  $\tau$  une matrice du domaine de Siegel  $F_g$ . On suppose qu'elle vérifie la condition :

$$t_{11} \geq 1 + \frac{10}{3} \sum_{1 \leq i \neq j \leq g} |t_{ij}|.$$

Alors il existe une constante  $c_2(g) > 0$  telle que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{-\pi T[n+a]} \leq c_2(g) e^{-\pi \min_{e \in \mathbb{Z}^g} T[e+a]},$$

et on peut choisir  $c_2(g) = 5^g$ .

*Démonstration.* La preuve de ce lemme s'inspire directement de la méthode mise en place en dimension 2, voir la figure 2.4.3. Donnons-nous un ensemble fini noté  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_g$  de points du réseau  $\mathbb{Z}^g$  (les points « proches » du minimum) défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, g \rrbracket, \mathcal{C}_i = \{m_i \in \mathbb{Z} \mid 1 > |m_i + a_i|\}.$$

On a donc  $\text{Card } \mathcal{C} \leq 2^g$ .

Posons, pour  $A_1, \dots, A_g$  et  $B_1, \dots, B_g$  des sous-ensembles de  $\mathbb{Z}$  :

$$f_g(T, A_1 \times \dots \times A_g, B_1 \times \dots \times B_g) = \sum_{n \in A_1 \times \dots \times A_g} e^{-\pi \left[ T[n+a] - \min_{e \in B_1 \times \dots \times B_g} T[e+a] \right]}$$

On va estimer  $f_g(T, \mathbb{Z}^g, \mathbb{Z}^g)$  en décomposant (on peut penser à la figure 2.4.3) :

$$f_g\left(T, \mathbb{Z}^g, \mathbb{Z}^g\right) = \sum_{k=0}^g \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g} f_g\left(T, \mathcal{C}_1 \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \times \dots \times \mathcal{C}_g, \mathbb{Z}^g\right)$$

Fixons  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \llbracket 1, g \rrbracket$  et  $J = \llbracket 1, g \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ . Dans la suite du calcul, pour tout indice  $i \in I$  on aura  $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_i$  et pour tout  $j \in J$  on aura  $n_j \in \mathcal{C}_j$ .

Ecrivons pour  $n \in \mathcal{C}_1 \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \times \dots \times \mathcal{C}_g$  :

$$T[n+a] = \sum_{i \in I} (n_i + a_i)^2 t_{ii} + \sum_{j \in J} (n_j + a_j)^2 t_{jj} + \sum_{\substack{(j,l) \notin I^2 \\ l \neq j}} (n_j + a_j)(n_l + a_l) t_{jl} + \sum_{\substack{(i,l) \in I^2 \\ l \neq i}} (n_i + a_i)(n_l + a_l) t_{il}.$$

On a donc :

$$T[n+a] \geq \sum_{j \in J} (n_j + a_j)^2 \left( t_{jj} - \sum_{l \neq j} |t_{jl}| \right) + \sum_{i \in I} (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{l \in J} |t_{il}| \right) + \sum_{\substack{(i,l) \in I^2 \\ l \neq i}} (n_i + a_i)(n_l + a_l) t_{il}.$$

Posons, avec  $n' = [n_{i_1}, \dots, n_{i_k}]$  le sous-vecteur de  $n$  adapté et  $a' = [a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$  :

$$T_I[n' + a'] = \sum_{i \in I} (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{l \in J} |t_{il}| \right) + \sum_{\substack{(i,l) \in I^2 \\ l \neq i}} (n_i + a_i)(n_l + a_l) t_{il}.$$

On a donc obtenu :

$$T[n+a] \geq \sum_{j \in J} (n_j + a_j)^2 \left( t_{jj} - \sum_{l \neq j} |t_{jl}| \right) + T_I[n' + a'].$$

Poursuivons :

$$T[n+a] - \min_{e \in \mathbb{Z}^g} T[e+a] \geq \sum_{j \in J} (n_j + a_j)^2 \left( t_{jj} - \sum_{l \neq j} |t_{jl}| \right) + T_I[n' + a'] - \min_{e \in \mathbb{Z}^g} T[e+a].$$

On cherche alors une condition suffisante sur  $T$  afin que le membre de droite soit minoré par :

$$T_I[n' + a'] - \min_{n' \in (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k})} T_I[n' + a'].$$

Ceci revient à montrer :

$$\min_{n' \in (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k})} T_I[n' + a'] + \sum_{j \in J} (n_j + a_j)^2 \left( t_{jj} - \sum_{l \neq j} |t_{jl}| \right) \geq \min_{e \in \mathbb{Z}^g} T[e + a],$$

ce qui est impliqué par :

$$\sum_{i \in I} d(-a_i, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{l \neq i} |t_{il}| \right) + \sum_{j \in J} (n_j + a_j)^2 \left( t_{jj} - \sum_{l \neq j} |t_{jl}| \right) \geq \sum_{i=1}^g d(-a_i, \mathbb{Z})^2 \left( t_{ii} + \sum_{l \neq i} |t_{il}| \right),$$

inégalité elle-même impliquée par :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left( d(-a_i, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_i)^2 - d(-a_i, \mathbb{Z})^2 \right) t_{ii} + \sum_{j \in J} \left( (n_j + a_j)^2 - d(-a_j, \mathbb{Z})^2 \right) t_{jj} \\ & \geq \left[ \sum_{i \in I} \left( d(-a_i, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_i)^2 + d(-a_i, \mathbb{Z})^2 \right) \sum_{l \neq i} |t_{il}| + \sum_{j \in J} \left( (n_j + a_j)^2 + d(-a_j, \mathbb{Z})^2 \right) \sum_{l \neq j} |t_{lj}| \right]. \end{aligned}$$

Or, par définition de  $\mathcal{C}_i$  on a les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq d(-a_i, \mathbb{Z})^2 \leq \frac{1}{4}, \\ 1 \leq d(-a_i, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_i)^2 \leq \frac{9}{4}, \\ \forall j \in J, 0 \leq (n_j + a_j)^2 \leq 1. \end{cases}$$

Il suffit donc d'avoir :

$$\sum_{i \in I} \frac{3}{4} t_{ii} \geq \left[ \sum_{i \in I} \frac{10}{4} \sum_{l \neq i} |t_{il}| + \sum_{j \in J} \frac{5}{4} \sum_{l \neq j} |t_{lj}| \right],$$

ce qui est impliqué, indépendamment du choix de  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  (avec  $I$  non vide), par :

$$\forall i \in \llbracket 1, g \rrbracket, t_{ii} \geq \frac{10}{3} \sum_{l \neq m} |t_{lm}|.$$

Les hypothèses de l'énoncé implique cette dernière inégalité. On peut donc affirmer que pour tout vecteur  $n \in \mathcal{C}_1 \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \times \dots \times \mathcal{C}_g$  :

$$T[n + a] - \min_{e \in \mathbb{Z}^g} T[e + a] \geq T_{i_1, \dots, i_k}[n' + a'] - \min_{n' \in (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k})} T_{i_1, \dots, i_k}[n' + a'],$$

ce qui implique donc que :

$$f_g \left( T, \mathcal{C}_1 \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \times \dots \times \mathcal{C}_g, \mathbb{Z}^g \right) \leq 2^{g-k} f_k \left( T_{i_1, \dots, i_k}, (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}), (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \right).$$

Il reste donc à majorer les sommes de ce type. Posons à présent :

$$S = f_k \left( T_{i_1 \dots i_k}, (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}), (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \right).$$

En utilisant les deux inégalités du lemme 3.2.12, on obtient :

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{n \in (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k})} e^{-\pi \sum_{i \in I} \left[ (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) - d(a_i, \mathbb{Z})^2 \left( t_{ii} + \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) \right]} \\ &\leq \sum_{n \in (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k})} \prod_{i \in I} e^{-\pi \left[ (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) - d(a_i, \mathbb{Z})^2 \left( t_{ii} + \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) \right]} \\ &\leq \prod_{i \in I} \sum_{n_i \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_i} e^{-\pi \left[ (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) - d(a_i, \mathbb{Z})^2 \left( t_{ii} + \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) \right]} \end{aligned}$$

On cherche alors des conditions sur  $T$  telles que pour tout  $i \in I$  :

$$\begin{aligned} (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) - d(a_i, \mathbb{Z})^2 \left( t_{ii} + \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) &\geq \frac{1}{2} \left( (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) \right) &\geq d(a_i, \mathbb{Z})^2 \left( t_{ii} + \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) \\ \Leftarrow \frac{1}{2} \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) &\geq \frac{1}{4} \left( t_{ii} + \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) \\ \Leftrightarrow t_{ii} &\geq 3 \sum_{j \neq i} |t_{ij}|. \quad (*) \end{aligned}$$

On a utilisé la condition  $|n_i + a_i| \geq 1$ , car  $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_i$ , ainsi que les inégalités précédentes sur la distance des  $a_i$  au réseau. La condition (\*) est impliquée par l'hypothèse de l'énoncé, on peut donc poursuivre :

$$S \leq \prod_{i \in I} \sum_{n_i \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_i} e^{-\frac{\pi}{2} \left[ (n_i + a_i)^2 \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right) \right]}.$$

Donc en appliquant le lemme unidimensionnel (une légère variante pour être exact) 2.4.12 :

$$S \leq \prod_{i \in I} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}|}} \right) e^{-\frac{\pi}{2} \left( t_{ii} - \sum_{j \neq i} |t_{ij}| \right)} d(a_i, \mathbb{Z})^2.$$

On peut donc conclure, grâce une fois encore à l'hypothèse de l'énoncé et au fait que  $\text{Card}(I) = k$  :

$$f_k \left( T_{i_1 \dots i_k}, (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}), (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \right) = S \leq 3^k.$$

On réunit à présent les informations récoltées au long de ces calculs :

$$\begin{aligned} f_g \left( T, \mathbb{Z}^g, \mathbb{Z}^g \right) &= \sum_{k=0}^g \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g} f_g \left( T, \mathcal{C}_1 \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \times \dots \times \mathcal{C}_g, \mathbb{Z}^g \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^g \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g} 2^{g-k} f_k \left( T_{i_1 \dots i_k}, (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}), (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_1}) \times \dots \times (\mathbb{Z} \setminus \mathcal{C}_{i_k}) \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^g \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g} 2^{g-k} 3^k \\ &\leq \sum_{k=0}^g C_g^k 2^{g-k} 3^k \\ &\leq 5^g. \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.2.14.** Soient  $a \in [0, 1]^g$  et  $T = \text{Im } \tau$  avec  $\tau$  une matrice du domaine de Siegel  $F_g$ . On suppose qu'elle vérifie la condition :

$$t_{11} \geq 1 + \frac{10}{3} \sum_{1 \leq j \neq i \leq g} |t_{ij}|.$$

Soit  $k \in \{1, \dots, g\}$ . Alors il existe une constante  $c_3(g) > 0$  telle que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \left| n_k + \frac{1}{2} \right| e^{-\pi T[n+a]} \leq c_3(g) e^{-\pi \min_{e \in \mathbb{Z}^g} T[e+a]},$$

et on peut choisir  $c_3(g) = 240 \cdot 5^g$

*Démonstration.* Ce lemme se démontre comme le précédent, on utilise la même décomposition et on conclut en appliquant le lemme unidimensionnel 2.4.13.  $\square$

**Proposition 3.2.15.** *Soit  $P \in A_{\mathcal{D}}(\mathbb{C})$  un point non nul de coordonnées  $Z(P) = X + \tau Y$ , avec  $\|4Y\| \leq \frac{1}{2}$ . On suppose que la matrice de période  $\tau_v$  vérifie :*

$$\operatorname{Im} \tau_{11} \geq 1 + \frac{10}{3} \sum_{j \neq i} |\operatorname{Im} \tau_{ij}|.$$

Alors il existe une constante  $c_4(g) > 0$  telle que :

$$\Lambda_{\mathcal{D},v}(P) \geq \pi \min_{u \in [0,1]} \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau [n + \delta' + 4Y u] \right) - \log \left[ c_4(g) \left( \frac{g^2}{2} + g + \sum_{i,j=1}^g |\operatorname{Im} \tau_{ij}| \right) \right] + \log \frac{1}{\|(X, Y)\|},$$

où on peut prendre  $c_4(g) = 240\pi 5^g$ .

*Démonstration.* Ecrivons  $Z = X + \tau Y$  et posons  $t(X, Y) = \theta_{\delta', \delta''}(4(X + \tau Y))$ . On a alors :

$$\Lambda_{\mathcal{D},v}(P) = -\log \left| t(X, Y) e^{-\pi \operatorname{Im} \tau [4Y]} \right|.$$

Par l'inégalité des accroissements finis on a :

$$|t(X, Y) - t(0, 0)| \leq \max_{(X', Y') \in [(0,0), (X,Y)]} \|d_{(X', Y')} t\| \cdot \|(X, Y) - (0, 0)\|,$$

soit :

$$|t(X, Y)| \leq \max_{u \in [0,1]} \|d_{(X,Y)u} t\| \cdot \|(X, Y)\|.$$

Calculons les dérivées partielles ; on note  $X = [x_1, \dots, x_g]$  et  $Y = [y_1, \dots, y_g]$ . Posons :

$$\zeta_n(X, Y) = 2i\pi \left( \frac{1}{2} \tau [n + \delta'] + {}^t(n + \delta')(4X + \tau 4Y + \delta'') \right).$$

Soit  $j \in \{1, \dots, g\}$  :

$$\frac{\partial t}{\partial x_j}(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} 8\pi i \left( n_j + \frac{1}{2} \right) e^{\zeta_n(X, Y)},$$

$$\frac{\partial t}{\partial y_j}(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} 8\pi i \left( \sum_{k=1}^g \left( n_k + \frac{1}{2} \right) \tau_{kj} \right) e^{\zeta_n(X, Y)},$$

Donc en posant  $F_n(X, Y) = -\pi \operatorname{Im} \tau [n + \delta'] - 2\pi {}^t(n + \delta') \operatorname{Im} \tau 4uY$ , il vient :

$$\left| \frac{\partial t}{\partial x_j}(uX, uY) \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} 8\pi \left| n_j + \frac{1}{2} \right| e^{F_n(X, Y)},$$

$$\left| \frac{\partial t}{\partial y_j}(uX, uY) \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} 8\pi \left( \sum_{k=1}^g \left| n_k + \frac{1}{2} \right| \cdot |\tau_{kj}| \right) e^{F_n(X, Y)},$$

Or  $F_n(X, Y) \leq -\pi \operatorname{Im} \tau[n + \delta' + 4Y u] + \pi \operatorname{Im} \tau[4Y]$  pour tout  $u \in [0, 1]$ , d'où finalement comme  $(X, Y) \neq (0, 0)$  :

$$\frac{|t(X, Y)| e^{-\pi \operatorname{Im} \tau[4Y]}}{8\pi \|(X, Y)\|} \leq \max_{u \in [0, 1]} \sum_{l=1}^g \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \left( 1 + \sum_{k=1}^g |\tau_{lk}| \right) \cdot \left| n_l + \frac{1}{2} \right| e^{-\pi \operatorname{Im} \tau[n + \delta' + 4Y u]}.$$

L'utilisation du lemme 3.2.14 donne :

$$\frac{|t(X, Y)| e^{-\pi \operatorname{Im} \tau[4Y]}}{\|(X, Y)\|} \leq \max_{u \in [0, 1]} \left[ c_4(g) \left( g + \sum_{i,j=1}^g |\tau_{ij}| \right) e^{-\pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \operatorname{Im} \tau[n + \delta' + 4Y u]} \right],$$

avec  $c_4(g) = 8\pi c_3 > 0$ . On utilise ensuite les inégalités :

$$|\tau_{ij}| \leq |\operatorname{Re} \tau_{ij}| + |\operatorname{Im} \tau_{ij}| \leq \frac{1}{2} + |\operatorname{Im} \tau_{ij}|.$$

Il vient alors :

$$\frac{|t(X, Y)| e^{-\pi \operatorname{Im} \tau[4Y]}}{2\pi \|(X, Y)\|} \leq c_4(g) \left( \frac{g^2}{2} + g + \sum_{i,j=1}^g |\operatorname{Im} \tau_{ij}| \right) e^{-\pi \min_{u \in [0, 1]} \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \operatorname{Im} \tau[n + \delta' + 4Y u]}.$$

Il suffit de prendre le logarithme pour obtenir la proposition.  $\square$

### 3.2.6 Majoration aux places archimédiennes

On rappelle les notations :  $\mathcal{T}_N = \{Q \in (A[N] \setminus \mathcal{D})(\mathbb{C})\}$  et  $t_N = \operatorname{Card}(\mathcal{T}_N)$ . On note de plus  $Z(Q) = X(Q) + \tau Y(Q)$  une coordonnée complexe d'un point  $Q \in A(\mathbb{C})$ . Le but de cette partie est de majorer la quantité :

$$\frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \Lambda_{\mathcal{D}, v}(Q) = -\frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \log \left( \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi(\tau[n + \delta'] + 2^t(n + \delta')(4Z(Q) + \delta''))} \right| e^{-\pi \operatorname{Im} \tau[4Y(Q)]} \right).$$

Ecrivons pour  $Z = Z(Q)$ ,  $X = X(Q)$  et  $Y = Y(Q)$  :

$$\begin{aligned} \tau[n + \delta'] + 2^t(n + \delta')(4Z + \delta'') &= \operatorname{Re} \tau[n + \delta'] + 2^t(n + \delta')(4X + 4 \operatorname{Re} \tau Y + \delta'') \\ &\quad + i \left( \operatorname{Im} \tau[n + \delta'] + 2^t(n + \delta') \operatorname{Im} \tau 4Y \right). \end{aligned}$$

On notera dorénavant :

**Notation 3.2.16.**

$$\tilde{\theta}_{\delta'\delta''}(Q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi \left( \operatorname{Re} \tau[n + \delta'] + 2^t(n + \delta')(4X + \operatorname{Re} \tau 4Y + \delta'') \right)} e^{-\pi \operatorname{Im} \tau[n + \delta' + 4Y]}.$$

On cherche donc à minorer la somme :

$$S_{\mathcal{T}_N} = -\frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \Lambda_{\mathcal{D},v}(Q) = \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \log \left| \tilde{\theta}_{\delta'\delta''}(Q) \right|.$$

**Proposition 3.2.17.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Soient  $(A, \Theta)/k$  une variété abélienne principalement polarisée et  $v \in M_k^\infty$ . On appelle  $\tau_v$  la matrice de périodes associée à  $A(\bar{k}_v)$ . On suppose que  $\tau_v$  vérifie :*

$$\forall Q \in \mathcal{T}_N, \left| \tilde{\theta}_{\delta'\delta''}(Q) \right| \geq e^{-\pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau[n + \delta' + 4Y(Q)] \right)} \varepsilon$$

La hauteur locale archimédienne  $\Lambda_{\mathcal{D},v}$  vérifie alors la propriété :

$$-\frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \Lambda_{\mathcal{D},v}(Q) \geq \log(\varepsilon) - \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau[n + \delta' + 4Y(Q)] \right).$$

*Démonstration.* Il suffit de prendre l'opposé du logarithme de la première propriété, puis de faire la moyenne des inégalités. L'hypothèse de l'énoncé est exactement la première condition définissant l'ensemble  $F_{g,\varepsilon}$ . □

### 3.3 Minoration de la hauteur de Néron-Tate

On réunit dans cette partie les informations locales obtenues grâce aux calculs effectués jusqu'ici.



### 3.3.1 Lemme de zéros et principe des tiroirs

Ce paragraphe présentent des lemmes utiles pour éviter le diviseur. On commence par un lemme préparatoire au lemme de zéros. Quelques conventions : soit  $A$  une variété abélienne et  $\mathcal{D}$  un diviseur définissant une polarisation principale sur  $A$ . Pour toute sous-variété  $V$  on note  $\deg(V) = \deg_{\mathcal{D}}(V) := \deg_0(V \cdot \mathcal{D}^{\dim(V)})$ . Pour  $V$  un sous-ensemble algébrique, on note  $\deg(V)$  la somme des degrés de ses composantes irréductibles. Enfin on note  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}$  l'équivalence numérique (ou algébrique) des diviseurs.

**Lemme 3.3.1.** *Soient  $A$  une variété abélienne,  $V$  une sous-variété algébrique de  $A$  et  $\mathcal{D}$  un diviseur définissant une polarisation sur  $A$ . Soit  $\mathcal{D}'$  tel que  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}$ . Alors :*

$$\deg(V \cap \mathcal{D}') \leq \deg(V).$$

Plus généralement, si  $\mathcal{D}_t \equiv \mathcal{D}$  pour tout  $t \in T$  :

$$\deg\left(V \cap \left(\bigcap_{t \in T} \mathcal{D}_t\right)\right) \leq \deg(V).$$

*Démonstration.* Si  $V \subset \mathcal{D}'$  l'énoncé est trivial. Sinon  $V \cap \mathcal{D}'$  est l'union de composantes irréductibles  $V_1, \dots, V_n$  toutes de dimension  $\dim(V) - 1$ . En tant que cycle on a :

$$V \cdot \mathcal{D}' = e_1 V_1 + \dots + e_n V_n, \text{ avec } e_i \geq 1.$$

Ainsi :

$$\deg(V \cap \mathcal{D}') = \deg_0\left((V \cap \mathcal{D}') \cdot \mathcal{D}^{\dim(V)-1}\right) \leq \deg_0\left((V \cdot \mathcal{D}') \cdot \mathcal{D}^{\dim(V)-1}\right) = \deg(V).$$

La deuxième inégalité découle directement de la première.  $\square$

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $k$  un corps de nombres. Soit  $(A, \Theta)/k$  une variété abélienne de dimension  $g$  principalement polarisée et simple. Soit  $\mathcal{D} = [4]^* \Theta$ . Soient  $S_1, S_2, \dots, S_g$  des ensembles finis de points de  $A$  possédant chacun  $r$  éléments. On impose de plus que  $O \in S_i$  pour tout indice  $1 \leq i \leq g$ . Supposons que  $S_1 + S_2 + \dots + S_g \subset \mathcal{D}$ . Alors  $r \leq (4^g g!)^2$ .*

*Démonstration.* On calculera les degrés par rapport à  $\mathcal{D}$ , i.e. pour une sous-variété  $V$ , on a  $\deg V = \deg_0(V \cdot \mathcal{D}^{\dim(V)})$ . On sait qu'on a :

$$\deg \mathcal{D} = \deg [4]^* \Theta = 4^{2g} \deg \Theta = 4^{2g} g!.$$

On pose à présent :

$$Z_j = \bigcap_{\substack{x_1 \in S_1 \\ \vdots \\ x_j \in S_j}} \left( \mathcal{D} - (x_1 + x_2 + \dots + x_j) \right).$$

On a donc :

$$Z_{j+1} = \bigcap_{x \in S_{j+1}} (Z_j - x),$$

ce qui entraîne :

$$\mathcal{D} = Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \dots \supset Z_{g-1}.$$

On peut remarquer de plus que  $S_g + \dots + S_{j+1} \subset Z_j$ . Deux cas se présentent :

*1er cas* :  $\dim(Z_{g-1}) = 0$ .

Dans ce cas on a :

$$r = \text{Card}(S_g) \leq \text{Card}(Z_{g-1}) = \deg(Z_{g-1}) \leq \deg(\mathcal{D}) = 4^{2g}g!,$$

la dernière inégalité étant une application du lemme 3.3.1.

*2e cas* :  $\dim(Z_{g-1}) > 0$ .

Si la dimension n'a pas chuté complètement c'est qu'il existe un indice  $i$  tel que :

$$\dim(Z_i) = \dim(Z_{i+1}).$$

Comme on a  $Z_i \supset Z_{i+1}$ , il existe une composante de  $Y \subset Z_i$  de dimension maximale qui reste une composante de  $Z_{i+1}$ . Donc l'ensemble :

$$\bigcup_{x \in S_{j+1}} (Y + x)$$

est une union de composantes de  $Z_i$  de dimension maximale. Introduisons  $G_Y$  le stabilisateur de  $Y$  :

$$G_Y = \bigcap_{y \in Y} (Y - y).$$

Alors :

$$\frac{\text{Card } S_{j+1}}{\text{Card } G_Y} \leq \text{Card} \left( (S_{j+1} + G_Y) / G_Y \right) \deg(Y) = \deg \left( \bigcup_{x \in S_{j+1}} (Y + x) \right) \leq \deg(Z_i) \leq 4^{2g}g!.$$

Or la variété abélienne  $A$  est supposée simple, donc  $G_Y$  est fini. On observe que  $\bigcap_{y \in Y} (Z_i - y)$  est de dimension 0 car sinon une composante irréductible  $W$  de cette intersection vérifierait  $Y + W \subset Z_i$ , ce qui forcerait le stabilisateur de  $Y$  à être de dimension strictement positive. On en tire par une nouvelle application du lemme 3.3.1 :

$$\text{Card } G_Y = \text{Card} \bigcap_{y \in Y} (Y - y) \leq \text{Card} \bigcap_{y \in Y} (Z_i - y) \leq \deg(\mathcal{D}),$$

ce qui donne  $\text{Card}(G_Y) \leq 4^{2g}g!$ . On déduit donc :

$$r = \text{Card}(S_{j+1}) \leq (4^g g!)^2.$$

□

**Lemme 3.3.3.** *Supposons que  $t_N > N^{2g-1}$ . Posons :*

$$\alpha_N = \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2N^{2g+1}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)} \right)^{-1}.$$

Alors, si on note  $y_{P_i}$  les coordonnées du vecteur  $Y(P)$  on a l'implication :

$$\forall i \in \llbracket 1, g \rrbracket, |4y_{P_i}| \leq \frac{1}{\alpha_N}$$

↓

$$\min_{e \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau[e + \delta' + 4Y(P)] \right) - \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \min_{e \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau[e + \delta' + 4Y(Q)] \right) \geq \frac{N-1}{2N^{2g+2}} \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) - \frac{g}{2} \sum_{i \neq j} |\operatorname{Im} \tau_{ij}|.$$

*Démonstration.* Commençons par nommer le membre de gauche :

$$\mathcal{M} = \min_{e \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau[e + \delta' + 4Y(P)] \right) - \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \min_{e \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau[e + \delta' + 4Y(Q)] \right).$$

D'après les deux inégalités du lemme 3.2.12, on a :

$$\mathcal{M} \geq \sum_{i=1}^g d\left(\frac{1}{2} + 4y_{P_i}, \mathbb{Z}\right)^2 \left( \operatorname{Im} \tau_i - \sum_{l \neq j} |\operatorname{Im} \tau_{lj}| \right) - \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \sum_{i=1}^g d\left(\frac{1}{2} + 4y_{Q_i}, \mathbb{Z}\right)^2 \left( \operatorname{Im} \tau_i + \sum_{l \neq j} |\operatorname{Im} \tau_{lj}| \right),$$

donc :

$$\mathcal{M} \geq \sum_{i=1}^g \left[ d\left(\frac{1}{2} + 4y_{P_i}, \mathbb{Z}\right)^2 - \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} d\left(\frac{1}{2} + 4y_{Q_i}, \mathbb{Z}\right)^2 \right] \operatorname{Im} \tau_i - \frac{1}{2} \sum_{l \neq j} |\operatorname{Im} \tau_{lj}|. \quad (*)$$

Fixons un entier  $i \in \llbracket 1, g \rrbracket$  quelconque. On a supposé que  $t_N > N^{2g-1}$ , et cette condition est équivalente à :

$$\operatorname{Card}(\mathcal{T}_N) > \operatorname{Card} \left\{ (X, Y) \in \left( \frac{1}{N} \mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g \right) \times \left( \frac{1}{N} \mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g \right) \mid y_i = 0 \right\}.$$

On sait donc que pour tout indice  $i \in \llbracket 1, g \rrbracket$ , il existe au moins un point  $Q \in \mathcal{T}_N$  tel que  $y_{Q_i} \neq 0$ . On aura même :  $4y_{Q_i} \geq \frac{1}{N}$ . Fort de cela, calculons :

$$\frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} d\left(\frac{1}{2} + 4y_{Q_i}, \mathbb{Z}\right)^2 \leq \frac{(t_N - 1)}{t_N} \frac{1}{4} + \frac{1}{t_N} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{t_N} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \right)^2 \right].$$

Donc comme  $t_N \leq N^{2g}$  :

$$\frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} d\left(\frac{1}{2} + 4y_{Q_i}, \mathbb{Z}\right)^2 \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{N^{2g+1}} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \quad (**)$$

Il suffit donc de rendre les coordonnées du point  $P$  suffisamment petites pour dominer le majorant de (\*\*). Supposons donc que :

$$\forall i \in \llbracket 1, g \rrbracket, |4y_{Pi}| \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2N^{2g+1}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)}.$$

Alors :

$$d\left(\frac{1}{2} + 4y_{Pi}, \mathbb{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - 4|y_{Pi}|\right)^2 \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2N^{2g+1}} \left(1 - \frac{1}{N}\right). \quad (***)$$

On injecte alors (\*\*) et (\*\*\*) dans (\*) et on obtient :

$$\mathcal{M} \geq \sum_{i=1}^g \frac{1}{2N^{2g+1}} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \operatorname{Im} \tau_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} |\operatorname{Im} \tau_{jl}|.$$

□

On rajoute un petit lemme de majoration de  $\alpha_N$  qui permettra de majorer l'entier  $M$  du principe des tiroirs ci-après.

**Lemme 3.3.4.** *Soit  $g \geq 2$  un entier et soit  $N$  un entier tel que  $4^{g+1}g! \geq N \geq 4^g g!$ . Alors :*

$$\alpha_N \leq 16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2}.$$

*Démonstration.* Reprenons l'expression :

$$\alpha_N = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2N^{2g+1}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)}\right)^{-1}.$$

On utilise tout d'abord l'estimation, valable pour tout réel  $x \in [0, 1]$  :

$$\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2},$$

donc :

$$\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1-x}\right) \geq \frac{x}{4},$$

et pour tout  $x \in ]0, 1]$  :

$$\left(\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1-x}\right)\right)^{-1} \leq \frac{4}{x},$$

ce qui donne pour  $x = \frac{2(N-1)}{N^{2g+2}}$  :

$$\alpha_N \leq \frac{2N^{2g+2}}{N-1} \leq N^{2g+2},$$

d'où, comme  $4^{g+1}g! \geq N$  :

$$\alpha_N \leq 16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2}.$$

□

**Proposition 3.3.5.** *Soit  $k$  un corps de nombres, on pose  $m = |M_k^\infty|$ . Soit  $g \geq 2$  un entier. Il existe un entier  $M$  et une constante  $c_5(g) > 0$  tels que pour toute variété abélienne  $(A, \Theta)/k$  de dimension  $g$  principalement polarisée dont les matrices de périodes vérifie :*

$$\forall v \in M_k^\infty, \operatorname{Im} \tau_{11,v} \geq 1 + \frac{10}{3} \sum_{j \neq i} |\operatorname{Im} \tau_{ij,v}|,$$

et pour tout point  $P \in A(k)$  dont les multiples  $\{[n]P, n \in [0, (4^{2g}g!)^2 M^{2gm}]\}$  sont deux à deux distincts, en notant  $Z_v(P) = X_v(P) + \tau_v Y_v(P)$  les coordonnées complexes, on a :

$$\exists n \in [0, g(4^{2g}g!)^2 M^{2gm}], [n]P \notin \mathcal{D}, \forall v \in M_k^\infty, \|(X_v([n]P), Y_v([n]P))\|_v \leq g/M,$$

$$\Lambda_{\mathcal{D},v}([n]P) \geq \pi \min_{u \in [0,1]} \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau_v[n + \delta' + 4uY_v([n]P)] \right) - \log \left( 1 + c_5 \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau_v) \right) + \frac{g}{16} \log 2,$$

et on peut prendre  $M \leq g120\pi(2g^2 + g)5^g 2^{g/16}$  et  $c_5(g) = \frac{10g + 3}{10g^3 + 5g^2}$ .

*Remarque :* De plus, si on prend  $M = \max\{g120\pi(2g^2 + g)5^g 2^{g/16}, 4g\alpha_N\}$ , le point  $[n]P$  obtenu vérifiera aussi la propriété du lemme 3.3.3. Or en vertu du lemme 3.3.4, on a  $\alpha_N \leq 16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2}$ , et cette constante domine  $g120\pi(2g^2 + g)5^g 2^{g/16}$ . On prendra donc dans les énoncés ultérieurs :

$$M = 4g16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2}.$$

*Démonstration.* On a les applications :

$$\begin{aligned} A(\bar{k}_v) &\longrightarrow \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \tau_v \mathbb{Z}^g) \longrightarrow \mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g \times \mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g \\ P &\longmapsto Z_v(P) = X_v(P) + \tau_v Y_v(P) \longmapsto (X_v(P), Y_v(P)) \end{aligned}$$

Soit alors l'application  $F : A(k) \longrightarrow (\mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g \times \mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g)^m$  définie par :

$$F(P) = (X_v(P), Y_v(P))_{v \in M_k^\infty}.$$

On divise  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2gm}$  en  $M^{2gm}$  boîtes de taille  $\frac{1}{M}$ . L'ensemble  $\{F([n]P), n \in [0, (4^{2g}g!)^2 M^{2gm}]\}$  contient  $(4^{2g}g!)^2 M^{2gm} + 1$  points à répartir dans  $M^{2gm}$  boîtes. Par le principe des tiroirs il existe  $(4^{2g}g!)^2 + 1$  entiers  $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{(4^{2g}g!)^2 + 1} \leq (4^{2g}g!)^2 M^{2gm}$  tels que les points  $[n_1]P, \dots, [n_{(4^{2g}g!)^2 + 1}]P$  sont dans la même boîte. Alors l'ensemble des points  $\{[n_i - n_1]P, i \in [1, (4^{2g}g!)^2 + 1]\}$  sont dans la boîte proche de l'origine, i.e. pour tout  $i \in [1, (4^{2g}g!)^2 + 1]$  et toute place  $v$  :

$$0 \leq n_i - n_1 \leq (4^{2g}g!)^2 M^{2gm},$$

$$\left| X_v([n_i - n_1]P) \right| \leq \frac{1}{M}, \quad \left| Y_v([n_i - n_1]P) \right| \leq \frac{1}{M}.$$

Nous allons nous servir du lemme 3.3.2 pour montrer qu'on peut en déduire l'existence d'un petit point hors du support du diviseur  $\mathcal{D}$ . Posons :

$$S_1 = S_2 = \dots = S_g = \left\{ O, [n_2 - n_1]P, \dots, [n_{(g!)^2+1} - n_1]P \right\}.$$

Alors par le lemme 3.3.2 on sait que  $S_1 + S_2 + \dots + S_g \not\subseteq \mathcal{D}$ . On déduit qu'il existe  $g$  entiers  $i_1, \dots, i_g \in \llbracket 1, (4^{2g}g!)^2 + 1 \rrbracket$  tels que  $[n_{i_1} + \dots + n_{i_g} - gn_1]P$  ne soit pas sur le diviseur  $\mathcal{D}$ .

On a de plus, puisque les points sont tous dans la même boîte proche de l'origine :

$$(0 < n_2 - n_1 < \dots < n_{(4^{2g}g!)^2+1} - n_1 \leq (4^{2g}g!)^2 M^{2gm}) \Rightarrow (n_{i_1} + \dots + n_{i_g} - gn_1 \leq g(4^{2g}g!)^2 M^{2gm}),$$

$$\left| X_v([n_{i_1} + \dots + n_{i_g} - gn_1]P) \right| \leq \frac{g}{M}, \quad \left| Y_v([n_{i_1} + \dots + n_{i_g} - gn_1]P) \right| \leq \frac{g}{M}.$$

Posons alors  $M = g \lfloor c_4 \pi (g^2 + \frac{g}{2}) 2^{\frac{g}{16}} \rfloor + 1$ ; ceci implique  $\|(X, Y)\| \leq 1 / \lfloor c_4 \pi (g^2 + \frac{g}{2}) 2^{\frac{g}{16}} \rfloor$ . On obtient alors le résultat en appliquant 3.2.15 et en observant, pour le calcul de  $c_5(g)$  :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq g} |\operatorname{Im} \tau_{ij}| = \sum_{l=1}^g \operatorname{Im} \tau_{ll} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq g} |\operatorname{Im} \tau_{ij}| \leq \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau) + \frac{3}{10g} \sum_{i=1}^g \operatorname{Im} \tau_{ii} = \left(1 + \frac{3}{10g}\right) \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau).$$

□

**Définition 3.3.6.** (*ensemble  $F_{g,\varepsilon}$* )

Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit le sous-ensemble  $F_{g,\varepsilon}$  du domaine de Siegel  $F_g$  comme l'ensemble des matrices  $\tau = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$  vérifiant de plus les deux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \forall Q \in \mathcal{T}_N, \quad \left| \tilde{\theta}_{\delta'\delta''}(Q) \right| \geq e^{-\pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} (\operatorname{Im} \tau [n + \delta' + Y(Q)])} \varepsilon, \\ (2) \quad \operatorname{Im} \tau_{11} \geq 2\pi (4^g g!)^{2g+2} \sum_{j \neq i} |\operatorname{Im} \tau_{ij}| + 4(4^g g!)^{2g+2} \log \left( \frac{g}{\varepsilon} \right). \end{array} \right.$$

*Remarque :* A propos des conditions définissant  $F_{g,\varepsilon}$

La condition (1) est une condition suffisante pour  $Q \notin \mathcal{D}$ . On « épaisit » ici en quantifiant la non-annulation du module de cette somme, ce qui revient à exclure un petit voisinage d'un nombre fini d'hypersurfaces analytiques. La méthode des différences de hauteurs locales employée ici semble imposer cette condition.

La condition (2) est une condition plus « souple », i.e. elle est présente pour faciliter un certain nombre de passages techniques dans la voie de preuve choisie ici. Il n'est cependant

pas évident de voir comment s'en départir. Elle s'interprète ainsi : la matrice de période doit avoir ses termes diagonaux très grands devant les autres. De plus on impose que lorsqu'on s'approche d'une situation dégénérée (condition rigide (1)), i.e. lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, alors ces termes diagonaux deviennent d'autant plus grands.

On vérifiera facilement que les conditions (1) et (2) impliquent les conditions des énoncés 3.2.13, 3.2.14, 3.2.15, 3.2.17 et 3.3.5, nécessaires à l'établissement du théorème global.

### 3.3.2 Minoration globale

**Théorème 3.3.7.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ , notons  $m = |M_k^\infty|$ . Soient  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe des constantes  $c_1(d, g) > 0$  et  $c_2(d, g) > 0$  telles que pour toute variété abélienne simple de dimension  $g$  principalement polarisée  $(A, \Theta)/k$  vérifiant que  $\tau_v \in F_{g, \varepsilon}$  pour toute place  $v$  archimédienne, et telles que pour tout point  $P \in A(k)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne :*

$$\widehat{h}_{A, 4\mathcal{D}}(P) \geq c_1 \operatorname{Tr}(A) - c_2 \left( h_{\text{fini}}(A) + S_{\text{fini}}(A) \right),$$

et on peut prendre :

$$c_1 = \frac{\pi 4^g g!}{d g^2 (4^{2g} g!)^4 (16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2})^{4gm+1}}, \quad c_2 = \frac{1}{d g^2 (4^{2g} g!)^4 (16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2})^{4gm}}.$$

*Démonstration.* On choisit tout d'abord un niveau de torsion  $N = 2^s - 1$  avec  $s$  le plus petit entier vérifiant  $s > \log(4^g g!)/\log 2$ . On remarque que les choix de  $s$  et de  $N$  nous placent dans les conditions d'application du lemme 3.3.3 en vertu de la proposition 3.2.4.

On commence alors le travail de réunification en reprenant l'égalité 3.2.5 :

$$\widehat{h}_{4\mathcal{D}, v}(P) = \frac{1}{t_N n^2} \sum_{Q \in \mathcal{I}_N} \left[ \sum_{v \in M_k^0} n_v \left( \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D}, v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{4\mathcal{D}, v}(Q) \right) + 4 \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left( \Lambda_{\mathcal{D}, v}([n]P) - \Lambda_{\mathcal{D}, v}(Q) \right) \right].$$

L'application des propositions 3.2.7, 3.2.9, 3.2.15 et 3.2.17 donne alors :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{4\mathcal{D}, v}(P) &\geq -\frac{g}{n^2} \log 2 - \frac{1}{n^2 t_N} \sum_{Q \in \mathcal{I}_N} \sum_{v \in M_k^0} n_v \log \left( \|\tilde{\Theta}(O)\|_v \right) - \frac{1}{n^2 t_N (4^s - 1)} \sum_{Q \in \mathcal{I}_N} \sum_{v \in M_k^0} n_v \log |\mathbf{G}^{(s)}_0(Q)|_v \\ &+ \frac{4}{n^2} \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left[ \pi \min_{u \in [0, 1]} \min_{e \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau_v [e + \delta' + 4uY([n]P)] \right) - \log \left( 1 + c_5 \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau_v) \right) + \frac{g}{16} \log 2 \right] \\ &+ \frac{4}{n^2} \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left[ \log(\varepsilon) - \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{I}_N} \pi \min_{e \in \mathbb{Z}^g} \left( \operatorname{Im} \tau_v [e + \delta' + 4Y(Q)] \right) \right]. \end{aligned}$$

On obtient donc en utilisant la définition 1.4.6 et la notation 3.2.10 :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{4\mathcal{D},v}(P) &\geq -\frac{1}{dn^2} \left( h_{\text{fini}}(A) + S_{\text{fini}}(A) \right) \\ &+ \frac{4\pi}{n^2} \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left[ \min_{u \in [0,1]} \min_{e \in \mathbb{Z}^g} \left( \text{Im } \tau_v[e + \delta' + 4uY([n]P)] \right) - \frac{1}{t_N} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} \min_{e \in \mathbb{Z}^g} \left( \text{Im } \tau_v[e + \delta' + 4Y(Q)] \right) \right] \\ &+ \frac{4}{n^2} \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left[ \log(\varepsilon) - \log \left( 1 + c_5 \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right) \right]. \end{aligned}$$

On applique alors le lemme 3.3.3 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{4\mathcal{D},v}(P) &\geq -\frac{1}{dn^2} \left( h_{\text{fini}}(A) + S_{\text{fini}}(A) \right) \\ &+ \frac{4}{n^2} \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left[ \pi \frac{N-1}{2N^{2g+2}} \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) - \frac{\pi g}{2} \sum_{i \neq j} |\text{Im } \tau_{v,ij}| \right] \\ &+ \frac{4}{n^2} \sum_{v \in M_k^\infty} n_v \left[ \log(\varepsilon) - \log \left( 1 + c_5 \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right) \right], \end{aligned}$$

d'où en utilisant l'hypothèse (2) de l'ensemble  $F_{g,\varepsilon}$  :

$$\widehat{h}_{4\mathcal{D},v}(P) \geq -\frac{1}{dn^2} \left( h_{\text{fini}}(A) + S_{\text{fini}}(A) \right) + \frac{4}{dn^2} \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \left[ \pi \frac{N-1}{4N^{2g+2}} \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right].$$

Il suffit alors de majorer  $n \leq g(4^{2g}g!)^2(16^{(g+1)^2}(g!)^{2g+2})^{2gm}$  pour obtenir le théorème. On calcule à présent les constantes. Les valeurs sont à ce point du calcul :

$$c_1 = \frac{4\pi(N-1)}{4dN^{2g+2}g^2(4^{2g}g!)^4(16^{(g+1)^2}(g!)^{2g+2})^{4gm}}, \quad c_2 = \frac{1}{dg^2(4^{2g}g!)^4(16^{(g+1)^2}(g!)^{2g+2})^{4gm}}.$$

Sachant que  $4^{g+1}g! \geq N > 4^g g!$  on a  $16^{(g+1)^2}(g!)^{2g+2} \geq N^{2g+2}$  et :

$$\begin{aligned} c_1 &\geq \frac{\pi 4^g g!}{d 16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2} g^2 (4^{2g} g!)^4 (16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2})^{4gm}}, \\ c_2 &\leq \frac{1}{d g^2 (4^{2g} g!)^4 (16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2})^{4gm}}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$c_1 \geq \frac{\pi 4^g g!}{d g^2 (4^{2g} g!)^4 (16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2})^{4gm+1}},$$



$$c_2 \leq \frac{1}{d g^2 (4^{2g} g!)^4 (16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2})^{4gm}}.$$

On gardera à l'esprit que  $c_1 < c_2$ .

□

## 3.4 Hauteur de Faltings d'une jacobienne hyperelliptique

On s'intéresse dans cette partie aux jacobiniennes de courbes hyperelliptiques. On donne dans un premier temps une formule explicite pour la hauteur de Faltings d'une telle jacobienne  $A$ , généralisant ainsi la démarche de K. Ueno présentée dans [Uen88] pour la dimension 2, puis on exhibe un majorant de cette hauteur de Faltings faisant intervenir la trace archimédienne de  $A$  et le discriminant minimal de la courbe sous-jacente.

### 3.4.1 Hauteur de Faltings

Soient  $k$  un corps de nombres,  $\mathcal{O}_k$  son anneau d'entiers et  $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ . Soient  $C/k$  une courbe hyperelliptique et  $A = \text{Jac}(C)$  sa jacobienne. C'est une variété abélienne de dimension notée  $g$ . Soient  $\pi : \mathbb{A} \rightarrow S$  son modèle de Néron,  $s : S \rightarrow \mathbb{A}$  sa section neutre et  $\Omega_{\mathbb{A}/S}^g$  le faisceau localement libre de rang 1 des  $g$ -formes différentielles. On pose alors  $\omega_{\mathbb{A}/S} = s^*(\Omega_{\mathbb{A}/S}^g)$ . C'est un fibré en droites dont on peut calculer le degré d'Arakelov. C'est la quantité qu'on cherche à calculer dans la suite de cette partie :

$$h_F(A/k) := \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \widehat{\deg}(\omega_{\mathbb{A}/S}).$$

Si on choisit un élément  $\alpha$  non nul de  $\omega_{\mathbb{A}/S}$  on peut exprimer cette hauteur de la manière suivante :

$$h_F(A/k) = \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \left( \log \left( \text{Card}(\omega_{\mathbb{A}/S}/\alpha \mathcal{O}_k) \right) - \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log \|\alpha\|_v \right), \quad (1)$$

où on a noté  $d_v = [k_v : \mathbb{Q}_v]$  et :

$$\|\alpha\|_v^2 = \frac{1}{2g} \int_{A(\bar{k}_v)} |\alpha \wedge \bar{\alpha}|.$$

On va donc s'intéresser aux deux quantités à l'intérieur des logarithmes. On va voir que la première peut être exprimée grâce à un discriminant et la seconde est liée à la matrice  $\tau$  (du domaine de Siegel) associée à la jacobienne que l'on étudie.

### 3.4.2 Équations de Weierstrass et discriminants

Soient  $g \geq 2$  et  $k$  un corps de nombres. Une équation de Weierstrass ( $E$ ) pour une courbe hyperelliptique ( $C$ ) est une équation du type :

$$(E) : y^2 + Q(x)y = P(x),$$

avec  $P$  et  $Q$  des polynômes à coefficients dans  $k$  tels que  $\deg Q \leq g$  et  $\deg P = 2g + 1$ ,  $P$  unitaire. Une telle équation est unique modulo les changements de variables du type :

$$(*) \begin{cases} x = u^2x' + r \\ y = u^{2g+1}y' + t(x') \end{cases}$$

avec  $u \in k^*$ ,  $r \in k$  et  $t$  un polynôme à coefficients dans  $k$  de degré inférieur ou égal à  $g$  (voir proposition 1.2 p. 730 de [Loc94]).

On définit alors le discriminant d'une équation ( $E$ ) en posant :

$$\Delta_E = 2^{4g} \operatorname{disc} \left( P(x) + \frac{1}{4} Q(x)^2 \right).$$

Lorsqu'on passe d'une équation  $E$  à une équation  $E'$  par le changement de coordonnées  $(*)$  on obtient la relation  $\Delta_E = u^{4g(2g+1)} \Delta_{E'}$ .

**Proposition 3.4.1.** *Le discriminant  $\Delta_E$  d'une équation entière est un polynôme à coefficients entiers. Il vérifie de plus la propriété :*

$$E \text{ est singulière si et seulement si } \Delta_E = 0.$$

*Démonstration.* On se réfère ici à l'article [Loc94].

□

### 3.4.3 Formes différentielles

Soit  $C$  une courbe hyperelliptique donnée par un modèle de Weierstrass  $E$ . On peut alors exhiber une base de  $H^0(C, \Omega_{C/k}^1)$ , donnée par les formes :

$$\omega_i = \frac{x^{i-1} dx}{2y + q(x)}, \quad 1 \leq i \leq g.$$

Considérons alors la  $g$ -forme  $\alpha = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g$ . On vérifie que lorsqu'on change de coordonnées en utilisant  $(*)$  dans le modèle de Weierstrass pour passer de  $E$  à  $E'$  on obtient la relation  $\alpha = u^{-g^2} \alpha'$ . Ceci va nous permettre de trouver une  $g$ -forme différentielle  $\eta$  ne dépendant pas du modèle de Weierstrass. On va chercher  $\eta$  de la forme :

$$\eta = \Delta_E^a (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g)^b, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Un changement de modèle de  $E$  vers  $E'$  de la forme (\*) conduit alors à :

$$\eta = u^{4g(2g+1)}a - g^2b\eta'.$$

On fait le choix  $a = g$  et  $b = 4(2g+1)$  et on obtient :

**Proposition 3.4.2.** *La  $g$ -forme  $\eta = \Delta_E^g(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g)^{\otimes 4(2g+1)}$  est indépendante du modèle de Weierstrass  $E$  choisi.*

On va donc utiliser la section  $\eta$  pour calculer la hauteur de Faltings en (1). On a besoin pour cela du résultat de la proposition suivante. On commence par définir :

**Définition 3.4.3.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $C/k$  une courbe algébrique lisse définie sur  $k$ . On note  $p : C \rightarrow S$  un modèle entier sur  $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$  semi-stable de la courbe  $C$ . On appelle hauteur de Faltings de  $C/k$  la quantité :*

$$h_{\text{st}}(C) = \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \widehat{\deg}(\det p_*\omega_{C/S}).$$

*Remarque :* Il s'agit bien de la hauteur stable car on prend un modèle semi-stable de  $C$ .

**Proposition 3.4.4.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $C/k$  une courbe algébrique lisse. On a alors :*

$$h_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) = h_{\text{st}}(C).$$

*Démonstration.* Notons  $S = \text{Spec } \mathcal{O}_k$  et soit  $p : C \rightarrow S$  un modèle entier semi-stable de la courbe  $C$ , de section neutre  $\varepsilon$ . On considère  $A = \text{Pic}_{C/S}^0$ . On a alors :

$$\text{Lie}(A) \simeq R^1p_*\mathcal{O}_C.$$

De plus par dualité de Grothendieck (on pourra consulter le paragraphe 6.4.3 p. 243 de [Liu02]) :

$$(R^1p_*\mathcal{O}_C)^\vee \simeq p_*\omega_{C/S}.$$

On calcule alors :

$$\varepsilon^*\Omega_{A/S}^1 \simeq \text{Lie}(A)^\vee \simeq p_*\omega_{C/S},$$

d'où :

$$\varepsilon^*\Omega_{A/S}^g \simeq \det p_*\omega_{C/S}.$$

Il suffit alors de prendre le degré d'Arakelov de chaque côté pour obtenir la proposition.  $\square$

### 3.4.4 Partie non-archimédienne

On garde les notations des paragraphes précédents. La section  $\eta$  correspond au choix de section  $\Lambda$  fait dans [Kau99]. Dans cet article, I. Kausz analyse les contributions en chaque place finie et il est important de souligner qu'on obtient pas exactement le discriminant minimal, contrairement au cas des courbes elliptiques. En effet il existe des courbes hyperelliptiques telles que pour tout choix de modèle  $y^2 = F(x)$ , on a  $\text{ord}_v(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g) < 0$ .

Cependant en reprenant les calculs (voir par exemple l'équation (1) de la preuve de la proposition 5.5) on peut déduire que pour toute place finie  $v$  il existe un entier  $e_v \in \mathbb{N}$  dépendant du modèle hyperelliptique et tel que :

$$\text{ord}_v(\eta) = g \text{ord}_v(\Delta_{\min}) - (8g + 4)e_v.$$

On déduit donc :

$$\log \left( \text{Card}(\det p_* \omega_{C/S} / \eta \mathcal{O}_k) \right) = g \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) - \sum_{v|\Delta_{\min}} (8g + 4)e_v \log N_{k/\mathbb{Q}}(v).$$

Les entiers  $e_v$  sont des nombres d'intersection entre la section  $\eta$  et le bord de l'espace de modules des courbes de genre  $g$ . Lorsque  $g > 1$  il y a plusieurs cas de figure : on peut rencontrer le produit d'une courbe de genre  $g - i$  et d'une courbe de genre  $i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, g - 1\}$ .

*Remarque :* Notons qu'en combinant avec l'article de S.Maugeais [Mau03], on peut supprimer l'hypothèse de bonne réduction en 2 faite dans [Kau99].

### 3.4.5 Partie archimédienne

On se base ici sur les travaux de P. Lockhart [Loc94], dont les calculs s'appuient en bonne partie sur [Mum84].

Tout d'abord pour  $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g}$  on pose :

$$\varphi_m(\tau) = \theta_m(0, \tau)^8,$$

où  $\theta_m(z, \tau)$  est la fonction thêta de caractéristique  $m$  associée au réseau de dimension  $g$  dont la définition est rappelée en 2.3.1.

Si  $S$  est un sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, 2g + 1\}$  on définit alors  $m_S = \sum_{i \in S} m_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g}$  avec :

$$m_{2i-1} = \begin{bmatrix} {}^t(0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0) \\ {}^t(\frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq g + 1,$$

$$m_{2i} = \begin{bmatrix} {}^t(0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0) \\ {}^t(\frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq g,$$

où le coefficient non nul de la première ligne est en  $i$ -ème position. Soit alors  $\mathcal{T}$  la collection des sous-ensembles de  $\{1, \dots, 2g+1\}$  de cardinal  $g+1$ . Soit  $U = \{1, 3, \dots, 2g+1\}$  et notons  $\circ$  l'opérateur de différence symétrique. On définit alors :

$$\varphi(\tau) = \prod_{T \in \mathcal{T}} \varphi_{m_{T \circ U}}(\tau).$$

On pose enfin  $r = \binom{2g+1}{g+1}$  et  $n = \binom{2g}{g+1}$ . On a alors la proposition suivante dont la preuve figure dans [Loc94] :

**Proposition 3.4.5.** (Lockhart) *Soient  $C/k$  une courbe hyperelliptique et  $P \in C(k)$ . Soit  $E$  un modèle de Weierstrass de  $(C, P)$ . On uniformise  $\text{Jac}(C)(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda_E$  avec le réseau  $\Lambda_E = \Omega_1\mathbb{Z}^g + \Omega_2\mathbb{Z}^g$  et  $\tau_E = \Omega_2\Omega_1^{-1}$ . Soit  $V(\Lambda_E)$  le covolume du réseau  $\Lambda_E$  dans  $\mathbb{C}^g$ . Alors la quantité  $|\Delta_E|V(\Lambda_E)^{4+\frac{2}{g}}$  ne dépend pas du choix de  $E$  et on a de plus :*

$$|\Delta_E|V(\Lambda_E)^{4+\frac{2}{g}} = 2^{4g}\pi^{8g+4} \left( |\varphi(\tau_E)| \det(\text{Im } \tau_E)^{2r} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Nous allons ainsi pouvoir calculer la contribution archimédienne à la hauteur de Faltings :

**Proposition 3.4.6.** *Soient  $C/k$  une courbe de genre  $g$  donnée dans un modèle hyperelliptique  $E$  de discriminant  $\Delta_E$  et  $\omega_i = \frac{x^{i-1}dx}{2y+q(x)}$ ,  $i = 1..g$  une base des formes différentielles sur  $C$ . Notons  $A = \text{Jac}(C)$  sa jacobienne. Soit  $v \in M_k^\infty$ . Soit  $\eta = \Delta_E^g(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g)^{\otimes 8g+4}$ . Alors on a :*

$$\log \|\eta\|_v = \log \left( 2^{4g^2 - \frac{g}{2}} \pi^{g(8g+4)} (|\varphi(\tau_E)| \det(\text{Im } \tau_E)^{2r})^{\frac{g}{n}} \right).$$

*Démonstration.* Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} \|\eta\|_v^2 &= \frac{1}{2^g} \int_{A_v(\mathbb{C})} |\eta \wedge \bar{\eta}| \\ &= \frac{1}{2^g} |\Delta_E|^{2g} (\|\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g\|_v^2)^{8g+4} \\ &= \frac{1}{2^g} |\Delta_E|^{2g} V(\Lambda_E)^{8g+4} \\ &= 2^{8g^2 - g} \pi^{2g(8g+4)} (|\varphi(\tau_E)| \det(\text{Im } \tau_E)^{2r})^{\frac{2g}{n}}. \end{aligned}$$

□

On déduit :

**Proposition 3.4.7.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $C/k$  une courbe hyperelliptique définie sur  $k$  de genre  $g$ . On note  $\text{Jac}(C)$  sa jacobienne. On pose  $r = \binom{2g+1}{g+1}$  et  $n = \binom{2g}{g+1}$ . La hauteur de Faltings de  $\text{Jac}(C)$  est donnée par la formule :*

$$h_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) = \frac{1}{d(8g+4)} \left( g \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) - \sum_{v|\Delta_{\min}} (8g+4)e_v \log N_{k/\mathbb{Q}}(v) - g \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log \left( 2^{4g-\frac{1}{2}} \pi^{8g+4} (|\varphi(\tau_v)| \det(\text{Im } \tau_v)^{2r})^{\frac{1}{n}} \right) \right).$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser les calculs des deux paragraphes précédents. □

On va se servir de cette formule explicite pour donner une majoration de la hauteur de Faltings d'une jacobienne de courbe hyperelliptique.

### 3.4.6 Majoration de la hauteur de Faltings

On commence par une définition :

**Définition 3.4.8.** *(ensemble  $G_{g,\varepsilon}$ )*

Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit le sous-ensemble  $G_{g,\varepsilon}$  du domaine de Siegel  $F_g$  comme l'ensemble des matrices  $\tau = (\tau_{ij})_{1 \leq i,j \leq g}$  vérifiant de plus les deux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \forall P_{ab} \in A[2] \setminus \Theta, \quad |\theta_{a,b}(0, \tau)| \geq e^{-\pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \text{Im } \tau[n+a]} \varepsilon, \\ (2) \quad \text{Im } \tau_{11} \geq \sum_{j \neq i} |\text{Im } \tau_{ij}| + \frac{1}{g} \log \left( \frac{1}{\varepsilon} \right). \end{array} \right.$$

On montre ici le théorème suivant :

**Théorème 3.4.9.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe des constantes  $c_3(d, g) > 0$  et  $c_4(d, g) > 0$  telles que : pour toute courbe  $C/k$  hyperelliptique définie sur  $k$  de genre  $g$ , de discriminant minimal  $\Delta_{\min}$ , si la jacobienne  $(\text{Jac}(C), \Theta)$ , principalement polarisée par le diviseur  $\Theta$ , admet des matrices  $\tau_v \in G_{g,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ , on a :*

$$h'_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) \leq c_3 \text{Tr}(\text{Jac}(C)) + c_4 \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}),$$

et on peut prendre  $c_3 = \frac{4\pi + 2}{d}$  et  $c_4 = \frac{g}{(8g+4)d}$ .

*Démonstration.* On commence par réduire un peu la formule de la proposition 3.4.7 en remarquant que :

$$\frac{g}{8g+4} \frac{2r}{n} = \frac{g}{8g+4} \frac{2(2g+1)!(g+1)!(g-1)!}{(g+1)!g!(2g)!} = \frac{1}{2}.$$

On peut donc écrire, comme  $e_v \geq 0$  et  $4g - 1/2 \geq 3g$  :

$$h'_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) \leq \frac{g}{(8g+4)d} \left( \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) - \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log \left( 2^{3g} \pi^{(8g+4)} |\varphi(\tau_v)|^{\frac{1}{n}} \right) \right).$$

Il suffit donc de minorer  $|\varphi(\tau_v)|$ . On a tout d'abord :

$$|\varphi(\tau_v)| = \prod_{T \in \mathcal{T}} |\theta_{m_{T \circ U}}(0, \tau_v)|^8 \geq \left( \min_{T \in \mathcal{T}} |\theta_{m_{T \circ U}}(0, \tau_v)|^8 \right)^r.$$

Soit  $(a, b)$  une caractéristique telle que :

$$\min_{T \in \mathcal{T}} |\theta_{m_{T \circ U}}(0, \tau_v)| = |\theta_{a,b}(0, \tau_v)|.$$

On utilise la condition (1) de l'ensemble  $G_{g,\varepsilon}$  :

$$|\theta_{a,b}(0, \tau_v)| \geq e^{-\pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \text{Im } \tau[n+a]} \varepsilon.$$

On obtient donc :

$$\log |\varphi(\tau_v)| \geq 8r \log(\varepsilon) - 8r\pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \text{Im } \tau[n+a],$$

d'où :

$$\begin{aligned} h'_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) &\leq \frac{g}{(8g+4)d} \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) \\ &+ \frac{g}{(8g+4)d} \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \left( -\log(2^{3g} \pi^{8g+4}) + \frac{8r}{n} \pi \min_{n \in \mathbb{Z}^g} \text{Im } \tau[n+a] - \frac{8r}{n} \log(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Donc en utilisant le lemme 3.2.12 :

$$\begin{aligned} h'_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) &\leq \frac{g}{(8g+4)d} \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) \\ &+ \frac{g}{(8g+4)d} \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \left( \frac{8r}{n} \pi \sum_{i=1}^g d(a_i, \mathbb{Z})^2 \left( \text{Im } \tau_{ii} + \sum_{j \neq i} |\text{Im } \tau_{ij}| \right) - \frac{8r}{n} \log(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Donc d'après l'inégalité (2) de l'ensemble  $G_{g,\varepsilon}$  :

$$h'_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) \leq \frac{g}{(8g+4)d} \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) + \frac{g}{(8g+4)d} \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \left( \frac{8r}{n} \pi \sum_{i=1}^g (\text{Im } \tau_{ii} + \text{Im } \tau_{ii}) + \frac{8r}{n} \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right),$$

et finalement :

$$h'_{\text{st}}(\text{Jac}(C)) \leq \frac{g}{(8g+4)d} \left( \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) + \frac{8r}{n} (2\pi + 1) \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \text{Tr}(\text{Im } \tau_v) \right).$$

Pour obtenir la valeur des constantes il suffit de remarquer que :

$$\frac{8r}{n} = \frac{2(8g+4)}{g}.$$

□

On peut déduire des théorèmes 3.3.7 et 3.4.9 le corollaire suivant en direction de la conjecture de Lang et Silverman :

**Corollaire 3.4.10.** *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $g \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $C/k$  une courbe hyperelliptique définie sur  $k$  de genre  $g$ , de discriminant minimal  $\Delta_{\min}$ . On suppose que sa jacobienne  $(A, \Theta)$  est simple, principalement polarisée par le diviseur  $\Theta$  et admet des matrices  $\tau_v \in G_{g,\varepsilon} \cap F_{g,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$ . On suppose, pour  $c_5 = c_5(g)$  une constante donnée :*

$$\text{Tr}(A) \geq c_5 \max \left\{ (h_{\text{fmi}}(A) + S_{\text{fmi}}(A)), \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) \right\},$$

alors il existe une constante  $c = c(d, g) > 0$  ne dépendant que de  $d$  et  $g$  telle que pour tout point  $P \in \text{Jac}(C)(k)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne :

$$\widehat{h}_{A,16\Theta}(P) \geq c h'_{\text{st}}(A).$$

De plus on peut prendre :

$$c_5 = \frac{16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+1}}{\pi 4^g} + 1 \quad \text{et} \quad c = \left( 16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2} \right)^{-5gd}.$$

*Démonstration.* Les théorèmes 3.3.7 et 3.4.9 nous fournissent sous les hypothèses de l'énoncé :

$$\widehat{h}_{A,16\Theta}(P) = \widehat{h}_{A,4\mathcal{D}}(P) \geq c_1 \text{Tr}(A) - c_2 (h_{\text{fmi}}(A) + S_{\text{fmi}}(A)),$$



et :

$$h'_{\text{st}}(A) \leq c_3 \text{Tr}(A) + c_4 \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}).$$

Sous l'hypothèse  $\text{Tr}(A) \geq c_5 \max \left\{ h_{\text{fini}}(A) + S_{\text{fini}}(A), \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}) \right\}$ , avec  $c_5$  à fixer ultérieurement on obtient :

$$\widehat{h}_{A,16\Theta}(P) \geq \left( c_1 - \frac{c_2}{c_5} \right) \text{Tr}(A) \geq \left( c_1 - \frac{c_2}{c_5} \right) \left( c_1 + \frac{c_3}{c_5} \right)^{-1} h'_{\text{st}}(A).$$

En reprenant les valeurs des constantes données dans l'énoncé 3.3.7 on obtient :

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2}}{\pi 4^g g!},$$

donc en posant  $c_5 = c_2/c_1 + 1$  et en minorant violemment le quotient :

$$\frac{c_1 c_5 - c_2}{c_3 c_5 + c_4} = \frac{c_1}{c_3 c_5 + c_4} \geq \frac{1}{\left( 16^{(g+1)^2} (g!)^{2g+2} \right)^{5gd}}.$$

□

# Chapitre 4

## Étude d'exemples



## 4.1 Variation du corps et restriction des scalaires à la Weil

On présente dans cette partie l'effet de la variation du corps, vue sous deux angles différents, sur l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman.

### 4.1.1 Variation du corps

Nous commençons notre étude par la remarque suivante : soient  $k$  un corps de nombres et  $(A, \Theta)/k$  une variété abélienne polarisée par un diviseur  $\Theta$ . Soit  $P \in A(k)$  un point d'ordre infini. Pour tout  $N \geq 1$  posons  $P_N = \frac{1}{N}P$  et  $k_N = k[P_N]$ . Alors :

$$\widehat{h}_{A, \Theta}(P_N) = \frac{1}{N^2} \widehat{h}_{A, \Theta}(P).$$

On a donc :

**Fait 4.1.1.** (classique) Soient  $k$  un corps de nombres et  $A/k$  une variété abélienne. Il existe une suite d'extensions  $k_N/k$  et une suite de points  $P_N \in A(k_N)$  telles que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{h}_{A, \Theta}(P_N) = 0.$$

Ce fait souligne la nécessité d'avoir une constante dépendant du corps  $k$  dans l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman.

### 4.1.2 Restriction des scalaires à la Weil

Nous exploitons ici la même idée de division de points, mais présentée différemment. Nous allons nous intéresser à la restriction des scalaires, appelée aussi foncteur norme. On consultera [Mil72] et [Wei48] pour une définition plus générale et les preuves des propriétés utilisées ci-après.

Soient  $k$  un corps de nombres et  $L/k$  une extension finie de degré  $m$ . Soit  $A/L$  une variété abélienne définie sur  $L$  de dimension  $g$ . On s'intéresse à la variété obtenue par restriction des scalaires  $A_* = N_{L/k} A$  définie sur  $k$  par restriction des scalaires. C'est une variété abélienne car pour toute extension galoisienne  $k'$  de  $k$  contenant  $L$  on a l'isomorphisme :

$$\psi : (N_{L/k} A)_{k'} \longrightarrow A_{k'}^{\sigma_1} \times \dots \times A_{k'}^{\sigma_m}, \quad (*)$$

où les  $\sigma_i$  sont les plongements de  $L$  dans  $k'$  au-dessus de  $k$ . Elle arrive de plus équipée d'un morphisme surjectif :

$$p : (N_{L/k} A)_L \longrightarrow A.$$

Soit  $b \in \text{Pic}^0(A)$ . On lui associe l'élément  $b_* = p^{\sigma_1^*}(b^{\sigma_1}) + \dots + p^{\sigma_m^*}(b^{\sigma_m})$ . Alors la proposition 4 de [Mil72] nous donne un isomorphisme :

$$\text{Pic}^0(A) \longrightarrow \text{Pic}^0(A_*), \quad b \longmapsto b_*.$$

On associera à la variété abélienne polarisée  $(A, \Theta)/L$  sa restriction  $(A_*, \Theta_*)/k$  via cet isomorphisme. La proposition 5 de [Mil72] nous donne alors :

**Proposition 4.1.2.** (Milne)

On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \text{Pic}^0(A) \times A(L) \rightarrow \mathbb{R}$  l'accouplement de Néron-Tate. Soient  $a \in A_*(k)$  et  $b \in \text{Pic}^0(A)$ , alors :

$$\langle b_*, a \rangle_k = \langle b, p(a) \rangle_L .$$

Considérons l'application (surjective, voir par exemple [HS00] p. 208) suivante :

$$\Phi_\Theta : A \longrightarrow \text{Pic}^0(A)$$

$$Q \longmapsto t_Q^* \Theta - \Theta .$$

Nous choisissons alors dans l'énoncé de Milne :  $b = \Phi_\Theta(p(a))$ , image du point  $p(a) \in A$  dans  $\text{Pic}^0(A)$ . On sait alors que  $\langle \Phi_\Theta(p(a)), p(a) \rangle_L = \widehat{h}_{A/L, \Theta}(p(a))$  et on déduit de ce qui précède :

$$\widehat{h}_{A_*/k, \Theta_*}(a) = \widehat{h}_{A/L, \Theta}(p(a)) .$$

Considérons alors le cas de figure suivant. On choisit un point  $P_1 \in A(k)$  d'ordre infini et on forme, pour  $N \geq 1$ , une suite de points  $P_N = \frac{1}{N}P_1 \in A(k_N)$ , avec  $k_N = k[P_N]$ . On note  $m_N = [k_N : k]$ . On peut donc définir une suite de variétés abéliennes  $A_N = N_{k_N/k} A$  définies sur  $k$  telles que, en notant  $P'_N$  un antécédent de  $P_N$  par  $p$  dans  $A_N(k)$  :

$$\widehat{h}_{A_N/k, \Theta_N}(P'_N) = \widehat{h}_{A/k_N, \Theta}(P_N) = \frac{1}{N^2} \widehat{h}_{A/k_N, \Theta}(P_1) = \frac{1}{N^2} \widehat{h}_{A/k, \Theta}(P_1) .$$

Dans le même temps, grâce à l'isomorphisme  $(*)$  on peut déduire les relations suivantes sur les dimensions et les hauteurs stables :

$$\dim(A_N) = m_N \dim(A), \quad h_{st}(A_N) = m_N h_{st}(A) .$$

On doit enfin calculer l'adhérence de  $\mathbb{Z}P'_N$ . Or comme  $P_N = \frac{1}{N}P_1$ , on aura  $\mathbb{Z}P_N = \frac{1}{N}\mathbb{Z}P_1$ , donc :

$$\overline{\mathbb{Z} \cdot P'_N} = \{(P, \dots, P) \in A^{\sigma_1} \times \dots \times A^{\sigma_{m_N}}\} \subsetneq A^{\sigma_1} \times \dots \times A^{\sigma_{m_N}}$$

On peut donc garder à l'esprit :

**Fait 4.1.3.** Soit  $k$  un corps de nombres. Il existe une suite de variétés abéliennes  $A_N/k$  définies sur  $k$  et une suite de points d'ordre infini  $Q_N \in A_N(k)$  telles que  $(\dim(A_N))_{N \geq 1}$  est croissante et :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{h}_{A_N}(Q_N) = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} h_{st}(A_N) = +\infty,$$

$$\dim(\overline{\mathbb{Z} \cdot Q_N}) = \dim(A_1) .$$

Ce fait souligne le caractère crucial de l'hypothèse  $\overline{\mathbb{Z} \cdot P} = A$  dans l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman.

*Remarque :* Une variante consiste à considérer la situation  $A = A_1 \times A_2$  et un point  $P = (P_1, O) \in A(k)$ , avec  $h_F(A_2/k)$  très grand.

## 4.2 Points de Heegner et courbes modulaires

On s'intéresse dans cette partie aux jacobiniennes de courbes modulaires et aux points particuliers que sont les points de Heegner sur ces jacobiniennes.

Soit  $k$  un corps quadratique imaginaire dont le discriminant  $D$  est sans facteur carré et est tel que  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . On s'intéresse dans un premier temps à l'ensemble  $\mathbb{N}_k$  des entiers  $N$  tels qu'il existe un point de Heegner associé à  $k$  sur la courbe modulaire  $X_0(N)$ . On estime ensuite, pour de tels  $N$ , la hauteur du point de Heegner sur la jacobienne  $J_0(N) = \text{Jac}(X_0(N))$ . On montre le résultat suivant, en notant  $h_k$  le nombre de classe associé à  $k$  et  $u_k$  la moitié du nombre de ses unités :

**Théorème 4.2.1.** *Soit  $k$  un corps quadratique dont le discriminant  $D$  vérifie les conditions :  $D < 0$ ,  $D$  est sans facteur carré et  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . Soit  $x_D \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$  et posons :  $c_D = (x_D) - (\infty)$ . Alors on a :*

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D) \sim h_k u_k \log(N)$$

lorsque  $N \in \mathbb{N}_k$  tend vers l'infini.

On en déduit ensuite des conséquences sur la conjecture de Lang et Silverman et sur la torsion des jacobiniennes de courbes modulaires.

### 4.2.1 Cadre général

**La courbe modulaire  $X_0(N)$**

Soit  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$  le demi-plan de Poincaré et  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Le groupe

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

agit sur  $\mathcal{H}^*$  et  $\mathcal{H}^*/\Gamma_0(N)$  est une surface de Riemann compacte ; c'est la compactifiée de  $Y_0(N) := \mathcal{H}/\Gamma_0(N)$  laquelle paramètre les paires  $(E_\tau, G_\tau)$  où  $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$  est une courbe elliptique sur  $\mathbb{C}$  et  $G_\tau$  est un sous-groupe de  $E_\tau(\mathbb{C})$  cyclique d'ordre  $N$ . Sur un corps de caractéristique 0 un point de  $Y_0(N)$  correspond à une paire  $(E, E')$  de courbes elliptiques munies d'une isogénie  $\phi : E \rightarrow E'$ .

Cela permet d'identifier  $\mathcal{H}^*/\Gamma_0(N)$  à la courbe modulaire  $X_0(N)$  définie sur  $\mathbb{Q}$ .

## Points de Heegner

Soit  $k$  un corps quadratique imaginaire. Le point  $x = (E \rightarrow E') \in X_0(N)$  est appelé point de Heegner associé à  $k$  lorsque les deux courbes elliptiques  $E$  et  $E'$  sont à multiplication complexe par  $\mathcal{O}_k$ .

On peut décrire les points de Heegner sur  $\mathbb{C}$  (on pourra se référer par exemple à [GZ86] p. 235 et [Gro84]) :

$$\{(\mathcal{A}, \mathfrak{n}), \mathcal{A} \in Cl_k, \mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_k, \mathcal{O}_k/\mathfrak{n} \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\} \leftrightarrow \{x_{\text{Heegner}} \in X_0(N)(\mathbb{C})\}$$

$$([\mathfrak{a}], \mathfrak{n}) \longmapsto (\mathbb{C}/\mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}/\mathfrak{a}\mathfrak{n}^{-1}).$$

La condition d'existence d'un point de Heegner est donc l'existence d'un idéal  $\mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_k$  tel que  $\mathcal{O}_k/\mathfrak{n} \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Un tel idéal existe si et seulement s'il existe  $\beta \in \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}$  vérifiant  $\beta^2 \equiv D \pmod{4N}$ . On a alors  $\mathfrak{n} = \mathbb{Z}N + \mathbb{Z}\frac{\beta + \sqrt{D}}{2}$ .

Un point  $\tau \in \mathcal{H}$  correspondant à une courbe à multiplication complexe par  $\mathcal{O}_k$  est racine d'une équation quadratique de la forme  $A\tau^2 + B\tau + C = 0$  avec  $A, B$  et  $C$  entiers et de discriminant  $B^2 - 4AC = D = \text{disc}(k)$ . Or  $N\tau$  doit avoir la même propriété. Ceci implique que d'une part  $N|A$ , d'autre part  $B^2 \equiv D \pmod{4N}$ . A toute classe de formes quadratiques de discriminant  $\text{disc}(k)$  correspond un point de Heegner différent associé à  $k$ .

## L'ensemble $\mathbb{N}_k$

On considère un discriminant de la forme  $D = -d_1 \dots d_r$  avec les  $d_i$  des entiers naturels premiers impairs deux à deux distincts. Le corps  $k$  donnera lieu à des points de Heegner sur une courbe  $X_0(N)$  pour les entiers  $N \in \mathbb{N}_k$  avec :

$$\mathbb{N}_k := \left\{ N \in \mathbb{N} \mid \exists d \in \mathbb{N}, d \wedge 4N = 1, D \equiv d^2 \pmod{4N}, D \equiv 1 \pmod{4} \right\}.$$

**Proposition 4.2.2.** *L'ensemble  $\mathbb{N}_k$  est de cardinal infini.*

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas  $N = p$  premier. Prenons donc  $p$  un nombre premier différent des  $d_i$ . Le discriminant  $D$  doit être un carré modulo  $4p$ , ce qui est équivalent aux conditions  $D \equiv 1 \pmod{4}$  et  $(D/p) = 1$ . On obtient pour la seconde :

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \prod_{i=1}^r \left(\frac{d_i}{p}\right) = 1.$$

Une telle équation en  $p$  admet comme ensemble type de solutions un nombre non nul et fini de progressions arithmétiques (on pourra consulter [IR90] p. 55), ceci étant une application directe répétée de la loi de réciprocité quadratique. Le cardinal de  $\mathbb{N}_k$  est donc infini.  $\square$

*Exemple* : On peut traiter un exemple simple pour illustrer ce propos. Si  $D = -3$  on a tout d'abord  $D \equiv 1 \pmod{4}$  et de plus pour  $p$  premier et  $p \neq 3$  :

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{3-1}{2}} = \left(\frac{p}{3}\right).$$

On a donc comme solution la progression arithmétique  $\{p \equiv 1 \pmod{3}\} \subset \mathbb{N}_k$ . Ceci permet d'ailleurs de donner une minoration de la densité  $d(\mathbb{N}_k)$  des premiers de  $\mathbb{N}_k$  (au sens de Dirichlet) grâce à la forme forte du théorème de progression arithmétique de Dirichlet :  $d(\mathbb{N}_k) \geq \frac{1}{\varphi(3)} = \frac{1}{2}$  avec  $\varphi$  l'indicateur d'Euler.

## 4.2.2 La formule de Gross-Zagier

### Accouplement global

On va reprendre ici l'expression de l'accouplement global des points de Heegner sur  $J_0(N) \times J_0(N)$  obtenu par Gross et Zagier dans [GZ86] page 307 et valable pour  $(m, N) = 1$ . On rappelle que les calculs menés dans l'article [GZ86] sont faits place par place, mais qu'*a priori* le symbole  $\langle c, c \rangle_v$  n'est pas bien défini. On peut cependant calculer  $\langle c, d \rangle_v$  avec  $c \neq d$  et utiliser le fait que globalement  $\langle c, d \rangle = \langle c, c \rangle$  car  $c - d$  est de torsion (c'est ici qu'on applique le théorème de Manin-Drinfeld). C'est la démarche qu'adoptent B. Gross et D. Zagier dans cet article.

On rappelle ici le cadre dans lequel on se place :

- $x_D$  étant une coordonnée d'un point de Heegner associé au corps quadratique imaginaire  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ , on considère le point  $c_D = (x_D) - (\infty) \in J_0(N)(H)$  et le point  $d_D = (x_D) - (0) \in J_0(N)(H)$  avec  $H$  le corps de classe de Hilbert associé à  $k$ .
- $T_m$  est le  $m$ -ième opérateur de Hecke. Son action sur  $x = (\phi: E \rightarrow E') \in X_0(N)$  est donnée par  $T_m(x) = \sum_C (x_C)$ , la somme portant sur tous les sous-groupes  $C$  d'ordre  $m$  dans  $E$  tels que  $C \cap \ker(\phi) = \{0\}$  avec  $x_C := (E/C \rightarrow E'/\phi(C))$ .
- Enfin  $\sigma \in \text{Gal}(H|k)$ , avec  $H$  le corps de classe de Hilbert de  $k$ , correspond *via* l'application d'Artin à la classe d'idéaux  $\mathcal{A}$  de  $k$ .

Alors l'article de B. Gross et D. Zagier [GZ86] nous donne, en notant  $c = c_D$  et  $d = d_D$  :



$$\begin{aligned}
\langle c, T_m d^\sigma \rangle_\infty &= \lim_{s \rightarrow 1} \left[ -2u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\mathcal{A}}(n) r_{\mathcal{A}}(m|D| + nN) Q_{s-1} \left( 1 + \frac{2nN}{m|D|} \right) - \frac{h\kappa\sigma_1(m)}{s-1} \right] \\
&\quad + h\kappa \left[ \sigma_1(m) \left( \log \frac{N}{|D|} + 2 \sum_{p|N} \frac{\log(p)}{p^2-1} + 2 + 2 \frac{\zeta'}{\zeta}(2) - 2 \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) \right) \right] \\
&\quad + h\kappa \left[ \sum_{d|m} d \log \frac{m}{d^2} \right] \\
&\quad + hur_{\mathcal{A}}(m) \left[ 2 \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) - 2\gamma - 2 \log 2\pi + \log |D| \right] \\
\langle c, T_m d^\sigma \rangle_{\text{fini}} &= -u^2 \sum_{1 \leq n \leq m|D|/N} \sigma'_{\mathcal{A}}(n) r_{\mathcal{A}}(m|D| - nN) + hur_{\mathcal{A}}(m) \log \frac{N}{m}.
\end{aligned}$$

Pour les membres de droite on a :

- $r_{\mathcal{A}}(n)$  représente le nombre d'idéaux dans la classe  $\mathcal{A}$  de norme égale à  $n$ .
- $\sigma_{\mathcal{A}}(n) = \sum_{d|n} \varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d)$  et  $\sigma'_{\mathcal{A}}(n) = \sum_{d|n} \varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d) \log \frac{n}{d}$ . On rappelle que  $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d)$  est nul si  $\text{pgcd}(d, n/d, D) > 1$ . Dans le cas où  $\text{pgcd}(d, n/d, D) = 1$ , en notant  $\text{pgcd}(d, D) = |D_2|$ ,  $D_1 D_2 = D$ ,  $\varepsilon_{D_i}(d) = \left(\frac{D_i}{d}\right)$  et  $\chi_{D_1 D_2}$  un certain caractère de  $Cl_k$  (voir [GZ86] p. 277 et p. 268) :

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d) = \varepsilon_{D_1}(d) \varepsilon_{D_2} \left( -N \frac{n}{d} \right) \chi_{D_1 D_2}(\mathcal{A}).$$

- $h = h_k$  est le nombre de classes associé à  $K$ ,  $D = D_k$  est son discriminant,  $u = u_k$  la moitié du nombre de ses unités. On sait que  $u = 1$  sauf dans les cas  $D = -3$  où  $u = 3$  et  $D = -4$  où  $u = 2$ .

$$- \kappa = \kappa_N = -12 / \left( N \prod_{p|N} \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \right).$$

$$- \sigma_1(m) = \sum_{d|m} d.$$

-  $\gamma \simeq 0.57$  la constante d'Euler.

-  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  est la fonction zeta de Riemann.

–  $L(s, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon(n)}{n^s}$  est la fonction  $L$  de Dirichlet, avec  $\varepsilon(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$ .

–  $Q_{s-1}(t)$  est la fonction de Legendre de seconde espèce. On a plusieurs expressions de cette quantité spectrale ([GZ86] p. 238), par exemple pour  $t > 1$  et  $s > 0$  :

$$Q_{s-1}(t) = \int_0^\infty \frac{du}{(t + \sqrt{t^2 - 1} \cosh(u))^s}.$$

On utilisera dans la suite la fonction  $g_s(z, w) = -2Q_{s-1}\left(1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}\right)$ . C'est en particulier une fonction holomorphe sur le domaine  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Ses propriétés sont détaillées dans [GZ86] p. 239.

### Particularisations

La première partie du travail consiste à évaluer cette formule pour se ramener à l'expression de la hauteur du point  $c \in J_0(N)(H)$ .

Tout d'abord par le théorème de Manin-Drinfeld,  $c$  et  $d$  représentent la même classe dans  $J_0(N)(H) \otimes \mathbb{Q}$ . On en déduit l'égalité suivante :

$$\langle c, T_m d^\sigma \rangle = \langle c, T_m c^\sigma \rangle.$$

On prend de plus  $m = 1$ . On obtient alors  $T_1 c = c$ . Enfin on prend  $\sigma = \operatorname{Id} \in \operatorname{Gal}(H|K)$ , ce qui impose donc de prendre  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_k$  l'anneau des entiers du corps  $K$ . Ceci étant posé on calcule alors le membre de droite pour obtenir,  $\widehat{h}_{J_0(N)}$  étant la hauteur de Néron-Tate associée au diviseur  $2\Theta$  de la variété abélienne  $J_0(N)$  :

### Proposition 4.2.3.

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c) = \langle c, c \rangle = \langle c, c \rangle_\infty + \langle c, c \rangle_{\text{fini}},$$

avec :

$$\langle c, c \rangle_\infty = \lim_{s \rightarrow 1} \left[ -2u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\mathcal{O}_k}(n) r_{\mathcal{O}_k}(|D| + nN) Q_{s-1} \left( 1 + \frac{2nN}{|D|} \right) - h \frac{\kappa}{s-1} \right] \quad (i)$$

$$+ h\kappa \left( \log \frac{N}{|D|} + 2 \sum_{p|N} \frac{\log(p)}{p^2 - 1} + 2 + 2 \frac{\zeta'}{\zeta}(2) - 2 \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) \right) \quad (ii)$$

$$+ hu \left[ 2 \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) - 2\gamma - 2 \log 2\pi + \log |D| \right] \quad (iii)$$

$$\langle c, c \rangle_{\text{fini}} = -u^2 \sum_{1 \leq n \leq |D|/N} \sigma'_{\mathcal{O}_k}(n) r_{\mathcal{O}_k}(|D| - nN) + hu \log(N) \quad (iv)$$

### 4.2.3 Un équivalent

On se place toujours dans le même cadre, le discriminant  $D$  du corps  $K$  est fixé avec les conditions de l'introduction. D'après la proposition 4.2.2 l'ensemble  $\mathbb{N}_k$  est infini, on peut donc faire tendre  $N$  vers l'infini. On s'efforce alors dans cette troisième partie de trouver un équivalent, lorsque  $N$  tend vers l'infini, de la hauteur  $\widehat{h}_{J_0(N)}(c)$ . Nous allons donc étudier la contribution de chaque terme de la proposition 4.2.3. On commence par donner quelques majorations utiles.

#### Majorations

**Lemme 4.2.4.** *Si on note  $\tau(n)$  le nombre de diviseurs de  $n$ , alors on a les majorations  $|\sigma_{\mathcal{O}_k}(n)| \leq \tau(n)$  et  $|\sigma'_{\mathcal{O}_k}(n)| \leq \tau(n) \log(n)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de voir que  $|\varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d)|$  est borné par 1. □

**Lemme 4.2.5.** *On rappelle la majoration :  $\tau(n) = O_{\varepsilon}(n^{\varepsilon})$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

*Démonstration.* On introduit un paramètre  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $2 \leq t \leq n$  :

$$\tau(n) = \prod_{p^{\nu} \parallel n} (\nu + 1) \leq \prod_{\substack{p^{\nu} \parallel n \\ p \leq t}} (\nu + 1) \prod_{\substack{p^{\nu} \parallel n \\ p > t}} 2^{\nu}.$$

- Comme  $n = \prod p^{\nu}$  on a  $\log(n) = \sum \nu \log(p)$  donc pour tout  $\nu$  :  $(\nu + 1) \leq 1 + \frac{\log(n)}{\log(2)}$ .
- D'autre part on a la majoration :

$$\prod_{\substack{p^{\nu} \parallel n \\ p > t}} (2^{\nu}) \leq \left( \prod_{p^{\nu} \parallel n} p^{\nu} \right)^{\frac{\log(2)}{\log(t)}},$$

en effet en prenant le logarithme il vient :

$$\sum_{\substack{p^{\nu} \parallel n \\ p > t}} \nu \log(2) \leq \sum_{p^{\nu} \parallel n} \nu \frac{\log(p)}{\log(t)} \log(2).$$

En réunissant ces deux résultats on obtient :

$$\tau(n) \leq \left( 1 + \frac{\log(n)}{\log(2)} \right)^t \left( \prod_{p^{\nu} \parallel n} p^{\nu} \right)^{\frac{\log(2)}{\log(t)}},$$

donc :

$$\tau(n) \leq \exp \left( t(2 + \log \log(n)) + \frac{\log(2) \log(n)}{\log(t)} \right).$$

On fait alors le choix  $t = \frac{\log(n)}{(\log \log(n))^3}$  pour obtenir finalement :

$$\tau(n) \leq \exp \left[ \frac{\log(2) \log(n)}{\log \log(n)} \left( 1 + O \left( \frac{\log \log \log(n)}{\log \log(n)} \right) \right) \right].$$

□

**Lemme 4.2.6.** *On peut majorer :  $r_{O_k}(n) = O_\varepsilon(n^\varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

*Démonstration.* Dans un anneau d'entiers, un idéal se décompose en produit d'idéaux premiers. Soient  $n \geq 1$  et  $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{P}_l^{\alpha_l}$  un idéal de norme  $n$ . En prenant la norme on obtient une égalité du type  $n = p_1^{\beta_1} \dots p_l^{\beta_l}$  avec les  $p_i$  des entiers naturels premiers. Les possibilités pour l'idéal  $\mathcal{I}$  sont donc fonction du nombre d'idéaux au-dessus de chaque premier  $p_i | n$ . Puisque  $k$  est un corps quadratique, il y a au plus deux idéaux au-dessus d'un entier premier  $p$  de  $\mathbb{Z}$  (auquel cas  $p$  est totalement décomposé), ceci donne donc lieu à au plus  $2^l$  idéaux  $\mathcal{I}$  de norme  $n$ . Or  $l = \sum_{p|n} 1 = \omega(n)$  et par définition de  $\tau(n)$  on a :  $2^{\omega(n)} \leq \tau(n)$ . On conclut donc par le lemme précédent. □

**Lemme 4.2.7.** *Si  $s > 1$  on a les propriétés asymptotiques suivantes :*

$$Q_{s-1}(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(t^{-s}),$$

$$Q_{s-1}(t) = -\frac{1}{2} \log(t-1) + O_{t \rightarrow 1}(1).$$

*Démonstration.* On pourra par exemple se référer à [EMOT53] à partir de la page 155. □

**Lemme 4.2.8.** *On a l'encadrement  $1 \leq \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ll \log \log(N)$  et ainsi :  $\kappa = O\left(\frac{1}{N}\right)$ .*

*Démonstration.* En partant de l'estimation asymptotique ( $\alpha > 0$  est une constante) :  $\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim \alpha \log(x)$  et de  $\log(N) \sim x$  lorsque  $N = \prod_{p \leq x} p$  (il suffit de traiter ce cas), on obtient :

$$\prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim \frac{6}{\pi^2} \alpha \log \log(N).$$

□

**Lemme 4.2.9.** *On rappelle enfin :  $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O_{s \rightarrow 1}(1)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de faire une comparaison série-intégrale. □

### Les termes (ii), (iii), (iv)

Le traitement des trois derniers termes est assez rapide. En effet à  $D$  fixé  $h = h_k$  est constant, on obtient donc directement que le terme (iii) est un  $O_{N \rightarrow +\infty}(1)$ . De plus en utilisant le lemme 4.2.8 on a immédiatement que (ii) est un  $O(\frac{\log(N)}{N})$ .

Pour (iv) on remarque que  $-u^2 \sum_{1 \leq n \leq |D|/N} \sigma'_{\mathcal{A}}(n) r_{\mathcal{A}}(|D| - nN) = 0$  si  $N > |D|$ . Sinon en utilisant les lemmes 4.2.5 et 4.2.6 on obtient dans tous les cas que le terme dominant est  $hu \log(N)$ .

Jusqu'ici on a donc montré que le terme principal des contributions (ii), (iii) et (iv) est  $hu \log(N)$ . Il nous reste maintenant à étudier le terme (i) issu (comme (ii) et (iii)) des places archimédiennes.

### Le terme (i)

Le but de toute cette partie est de généraliser la démarche de P. Michel et E. Ullmo dans [MU98] pour montrer une majoration du terme (i) par un  $O_{\varepsilon}(N^{\varepsilon-1})$ .

Commençons par poser :

$$\tilde{H}(s) := -2u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\mathcal{O}_k}(n) r_{\mathcal{O}_k}(|D| + nN) Q_{s-1} \left( 1 + \frac{2nN}{|D|} \right).$$

Les lemmes 4.2.5, 4.2.6 et 4.2.7 assurent que  $\tilde{H}$  converge absolument pour  $\text{Re}(s) > 1$  et définit une fonction holomorphe.

On va utiliser plusieurs fonctions introduites dans l'article de B. Gross et D. Zagier pour étudier la fonction  $\tilde{H}$  au voisinage de 1. La fonction  $g_s$  est définie en 2.1. On rappelle donc :

Pour  $z, z' \in \mathcal{H}$ , on pose ([GZ86] p. 251 et 252) :

$$G_{N,s}^1(z, z') := \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N)/\{\pm 1\} \\ \gamma z' \neq z}} g_s(z, \gamma z') + 2hu \left[ \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log(2\pi) + \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) + \frac{1}{2} \log(|D|) \right].$$

Pour  $\mathcal{A} \in Cl_k$ , on pose ([GZ86] p. 243) :

$$\gamma_{N,s}^1(\mathcal{A}) := \sum_{\substack{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in Cl_k \\ \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{A}}} G_{N,s}^1(\tau_{\mathcal{A}_1}, \tau_{\mathcal{A}_2}).$$

Les calculs de B. Gross et D. Zagier montrent alors que ([GZ86] p. 243 et p. 247 combinée

avec p. 285) :

$$\tilde{H}(s) = \gamma_{N,s}^1(\mathcal{O}_k) = \sum_{\substack{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in Cl_k \\ \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{O}_k}} G_{N,s}^1(\tau_{\mathcal{A}_1}, \tau_{\mathcal{A}_2}) = \sum_{\mathcal{A}_1 \in Cl_k} G_{N,s}^1(\tau_{\mathcal{A}_1}, \tau_{\mathcal{A}_1}).$$

On peut alors trouver dans l'article de P. Michel et E. Ullmo ([MU98] p. 673) une étude d'un terme  $G_{N,s}^1(\tau, \tau)$  ( $= H(s)$  dans leur notation) pour un point de Heegner  $\tau$ . Leur résultat est le suivant :

**Proposition 4.2.10.** *On a la majoration suivante, valable pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left( G_{N,s}^1(\tau, \tau) - \frac{\kappa}{s-1} \right) = O_\varepsilon(N^{\varepsilon-1}).$$

*Démonstration.* Nous allons suivre [MU98] en remarquant que leur preuve reste valide pour tout point de Heegner  $\tau$  lorsque  $D$  est fixé. On introduit le noyau automorphe pour  $\Gamma_0(N)/\{\pm 1\}$  :

$$G_{N,s}(z, z') = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N)/\{\pm 1\} \\ \gamma z' \neq z}} g_s(z, \gamma z').$$

On a alors l'égalité pour  $a > 1$  :

$$G_{N,s}^1(\tau, \tau) - G_{N,a}^1(\tau, \tau) = G_{N,s}(\tau, \tau) - G_{N,a}(\tau, \tau) - 2hu \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) \right). \quad (1)$$

On utilise pour conclure le lemme la proposition suivante, dont la preuve figure dans le livre de H.Iwaniec [Iwa02] p. 105, théorème 7.5.

**Proposition 4.2.11.** *Soient  $a > 1$  et  $\text{Re}(s) > 1$ . On note  $s_j(1 - s_j)$  la  $j$ -ième valeur propre du laplacien sur  $X_0(N)$ . On prend de plus  $(u_j)_j$  une base orthonormale de fonctions propres associées à ces valeurs propres. On note de plus  $E_\rho$  la série d'Eisenstein associée à la pointe  $\rho$ . On pose enfin :*

$$\chi_{sa}(v) = \frac{1}{(s-v)(1-s-v)} - \frac{1}{(a-v)(1-a-v)}.$$

On a alors l'égalité :

$$G_{N,s}(z, z') - G_{N,a}(z, z') = \sum_j \chi_{sa}(s_j) u_j(z) \bar{u}_j(z') + \sum_{\rho \in \{\text{Pointes}\}} \frac{1}{4\pi i} \int_{\frac{1}{2} + i\mathbb{R}} \chi_{sa}(v) E_\rho(z, v) \bar{E}_\rho(z', \bar{v}) dv,$$

et la série et l'intégrale convergent absolument et uniformément sur tout compact.

□

Cette proposition permet de prolonger la fonction  $G_{N,s}(z, z') - G_{N,a}(z, z')$  en une fonction méromorphe (que l'on notera de la même manière) sur le domaine  $\Re(s) > 1/2$  avec un pôle simple en  $s = 1$  de résidu égal à  $\kappa$  (voir aussi [GZ86] p. 239). Cette fonction est même holomorphe sur le domaine  $\Re(s) > 3/4$  privé du point  $s = 1$  (voir [MU98] p. 672).

On va choisir une bande verticale dans le plan complexe contenant l'abscisse  $s = 1$  dans le but d'appliquer le principe de Phragmen-Lindelöf à la fonction :

$$G_{N,s}(\tau, \tau) - G_{N,a}(\tau, \tau) - \frac{\kappa}{s-1}.$$

On en déduira une majoration au voisinage de  $s = 1$  de celle-ci et donc par l'égalité (1) de  $G_{N,s}^1(\tau, \tau) - \kappa/(s-1)$ .

Tout d'abord par application des lemmes 4.2.5, 4.2.6, 4.2.7 et 4.2.9 on a la majoration valable pour  $\Re(s) > 1$  et  $\varepsilon > 0$  :

$$G_{N,s}^1(\tau, \tau) = O_\varepsilon \left( N^{\varepsilon-1} \left( 1 + \frac{1}{|s-1|} \right) \right).$$

On va à présent étudier la croissance de la fonction  $G_{N,s}^1(\tau, \tau) - \kappa/(s-1)$  (toujours par l'intermédiaire de l'égalité (1)) dans une bande du type  $b \leq s \leq 1 + \varepsilon$  avec  $3/4 < b < 1$ . On prend par exemple  $b = 7/8$ . On utilise alors  $t = \text{Im}(s)$  et on a :

**Proposition 4.2.12.** *Il existe un  $A > 0$  tel que pour tout  $s$  dans la bande  $7/8 \leq s \leq 1 + \varepsilon$  on a la majoration, avec  $t = \text{Im}(s)$  et  $\tau$  un point de Heegner :*

$$G_{N,s}(\tau, \tau) - G_{N,a}(\tau, \tau) - \frac{\kappa}{s-1} \ll (N(1+|t|))^A,$$

et la constante implicite est indépendante de  $N$ .

*Démonstration.* On se reportera à [MU98] p. 673. □

On a donc une croissance suffisamment faible de la fonction  $G_{N,s}^1(\tau, \tau) - \kappa/(s-1)$  dans la bande  $7/8 \leq \Re(s) \leq 1 + \varepsilon$  pour pouvoir conclure par le principe de Phragmen-Lindelöf en utilisant l'équation fonctionnelle de [MU98] p. 654. Ceci achève la preuve du théorème 4.2.10.

Il suffit alors d'appliquer ce théorème à chacune des  $h$  classes associées à  $k$  pour obtenir :

**Proposition 4.2.13.** *On a la majoration valable pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left( \tilde{H}(s) - h \frac{\kappa}{s-1} \right) = O_\varepsilon(N^{\varepsilon-1}).$$

## Equivalent de la hauteur

Conjuguant les résultats des sections 3.2 et 3.3, on arrive à la conclusion suivante :

**Théorème 4.2.14.** *Soit  $k$  un corps quadratique dont le discriminant  $D$  vérifie les conditions :  $D < 0$ ,  $D$  est sans facteur carré et  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . Soit  $x_D \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$  et posons :  $c_D = (x_D) - (\infty)$ . On note  $h_k$  le nombre de classes associé à  $k$  et  $u_k$  la moitié du nombre de ses unités. Alors on a :*

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D) \sim h_k u_k \log(N)$$

lorsque  $N \in \mathbb{N}_k$  tend vers l'infini.

Ces calculs généralisent le calcul de [MU98] mené alors pour  $D = -3, -4$ . Pour  $D$  fixé avec  $|D| > 4$  on sait de plus que  $u_k = 1$ . Il suit deux corollaires :

**Corollaire 4.2.15.** *Sous les hypothèses du théorème, avec  $|D| > 4$ , on a l'estimation de  $h_k$  suivante :*

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in \mathbb{N}_k}} \frac{\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D)}{\log(N)} = h_k.$$

**Corollaire 4.2.16.** *Pour tout discriminant  $D \equiv 1 \pmod{4}$  négatif et sans facteur carré il existe un entier  $N_0(D)$  et un certain ensemble  $\mathbb{N}_k$  de congruences modulo  $D$  tels que pour tout  $N \geq N_0(D)$  et  $N \in \mathbb{N}_k$  les points de Heegner  $c_D$  sont d'ordre infini dans  $J_0(N)(H)$ .*

*Remarque :* Pour certains petits  $N$  on sait que le corps de définition est nécessairement strictement plus gros que  $\mathbb{Q}$ . Par exemple on a  $c_D \in J_0(N)(H) \setminus J_0(N)(\mathbb{Q})$  pour tout  $N \in \{11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49\}$ . En effet on connaît les courbes modulaires  $X_0(N)$  de genre 1, il y en a douze et elles correspondent aux niveaux  $N$  ci-avant. Ces courbes sont des courbes elliptiques et on a donc dans ce cas un isomorphisme entre  $J_0(N)$  et  $X_0(N)$ . On sait de plus que pour ces douze courbes le groupe  $X_0(N)(\mathbb{Q})$  est fini, i.e. leur rang sur  $\mathbb{Q}$  est égal à zéro. (On se base ici sur une étude des courbes modulaires de genre 1 dont la référence est [Lig75].)

### 4.2.4 Remarques sur la conjecture de Lang et Silverman

On note dans la suite  $h_F(A/k)$  pour la hauteur de Faltings (relative) d'une variété abélienne  $A$ . La hauteur de Néron-Tate associée à  $2\Theta$  sera notée  $\widehat{h}_A(\cdot)$ .

Rappelons l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman sur les variétés abéliennes :

**Conjecture 4.2.17.** *Soit  $g \geq 1$  et soit  $k$  un corps. Il existe une constante  $c = c(k, g) > 0$  telle que pour toute variété abélienne  $A/k$  de dimension  $g$ , tout diviseur ample  $\mathcal{D} \in \text{Div}(A)$  et tout point  $P \in A(k)$  tel que  $\overline{\mathbb{Z} \cdot P} = A$  on a :*

$$\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) \geq c h_F(A/k).$$



On trouve dans l'article [JK08] (à paraître dans « Annals of Maths ») l'équivalent suivant, obtenu par des techniques de géométrie hyperbolique complexe :

**Théorème 4.2.18.** *Pour tout  $N$  sans facteur carré on a, lorsque  $N$  tend vers l'infini :*

$$h_{\text{st}}(J_0(N)) = \frac{g}{3} \log(N) + o(g \log(N)).$$

Or la dimension de  $J_0(N)$  est égale au genre de  $X_0(N)$  et ce dernier s'exprime comme suit lorsque  $N$  est sans facteur carré (voir [Shi94]) :

$$g(X_0(N)) = 1 + \frac{N}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{4} \prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) - \frac{1}{3} \prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right) - \frac{1}{2} \tau(N),$$

et donc en particulier on a l'équivalent lorsque  $N \rightarrow +\infty$  :

$$g(X_0(N)) \sim \frac{N}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

avec l'encadrement pour une certaine constante  $\alpha > 0$  :

$$1 \leq \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \alpha \log \log(N).$$

*Remarque :* Les points de Heegner vérifient la condition  $\overline{\mathbb{Z} \cdot P} = J_0(N)$  au moins lorsque le discriminant  $D$  est choisi suffisamment grand. Cela découle de l'étude menée par J. Nekovář et N. Schappacher dans [NS99].

On a donc :

**Fait 4.2.19.** *Si nous réunissons ici les résultats obtenus dans les théorèmes 3.11 et 3.17 :  $\widehat{h}_{J_0(N)}(c) \sim hu \log(N)$  et  $h_{\text{st}}(J_0(N)) \sim g(N) \log(N)/3$ , on voit que la conjonction de ces théorèmes constitue un exemple indiquant que la constante présente dans la conjecture de Lang et Silverman doit nécessairement dépendre de la dimension  $g$  des variétés abéliennes considérées. On peut même affirmer pour un corps quadratique imaginaire  $k$  donné et  $H$  son corps de classe de Hilbert :*

$$c(H, g) \leq \frac{3h_k}{g} = \frac{3[H : k]}{g}.$$

On déduit de plus de la comparaison des deux asymptotiques le corollaire suivant :

**Corollaire 4.2.20.** *Soit  $k$  un corps quadratique dont le discriminant  $D$  vérifie les conditions :  $D < 0$ ,  $D$  est sans facteur carré et  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . Soit  $x_D \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$  et posons :  $c_D = (x_D) - (\infty)$ . Alors on a :*

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D) \sim \frac{3h_k u_k}{g(N)} h_{\text{st}}(J_0(N)),$$

lorsque  $N \in \mathbb{N}_k$  tend vers l'infini.

### 4.2.5 Torsion sur la jacobienne

On compare ici le résultat asymptotique montré précédemment avec un résultat existant pour les petites valeurs du niveau  $N$ . On pourra se référer à l'article de H.Nakazato [Nak96]. On se place dorénavant dans la situation suivante : soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$ . D'après le théorème de Wiles étendu par Breuil, Conrad, Diamond, Taylor elle est munie d'un morphisme non constant :

$$\varphi : X_0(N) \longrightarrow E(\mathbb{C}).$$

On note de plus  $E_l$  l'ensemble des points de  $l$ -torsion de  $E$ . Si  $E$  n'est pas à multiplication complexe on pose :

$$S_E = \{l \mid \text{Gal}(\mathbb{Q}(E_l)|\mathbb{Q}) \neq \text{Aut}_{\mathbb{F}_l}(E_l)\} \cup \{l|N\} \cup \{2, 3\}.$$

Si  $E$  est à multiplication complexe on posera seulement :

$$S_E = \{l|N\} \cup \{2, 3\}.$$

Fixons alors un discriminant  $D \equiv 1 \pmod{4}$  négatif et sans facteur carré tel que les facteurs premiers de  $D$  ne soient pas inclus dans  $S_E$ . L'ensemble  $S_E$  est fini et il y a une infinité de tels  $D$  (voir [Nak96]). Soit alors  $N \in \mathbb{N}_k$ . Dans ces conditions on a :

**Théorème 4.2.21.** (Nakazato) *Soit  $\tau \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$ . Si on a  $h_k > \deg(\varphi)$  alors  $\varphi(\tau)$  est un point d'ordre infini sur  $E$ .*

*Remarque :* On peut minorer le degré de  $\varphi$  en fonction de  $N$ , par exemple en suivant [Wat02] :

$$\deg(\varphi) \geq N^{\frac{7}{6}-\varepsilon}.$$

En utilisant cette remarque et les théorèmes 4.2.16 et 4.2.21 on pourra garder à l'esprit que les points de Heegner sur la jacobienne  $J_0(N)$  sont génériquement des points d'ordre infini.



# Chapitre 5

## Annexes



## 5.1 Extension en dimension 2 par isogénies

Nous allons montrer dans cette partie qu'il est possible d'étendre le domaine de validité du théorème 2.8.2 en utilisant des isogénies. Nous allons pour cela travailler le domaine de Siegel  $F_2$  associé aux variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 2.

### Lemme calculatoire

**Lemme 5.1.1.** *Soit  $v$  une place archimédienne. Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  tel que  $a_\varepsilon = (\max\{1/\varepsilon^2, 36\})^{\frac{1}{2}}$  est un entier. Soit  $\tau = \tau_v$  une matrice de  $F_2$  vérifiant de plus :*

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \tau_{12} \geq \varepsilon > 0, \\ \operatorname{Im} \tau_1 \leq a_\varepsilon, \\ \operatorname{Im} \tau_2 > a_\varepsilon^4 \operatorname{Im} \tau_1. \end{cases}$$

Alors la matrice :

$$\tau' = \begin{bmatrix} a_\varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\varepsilon^2 \tau_1 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \frac{1}{a_\varepsilon^2} \tau_2 \end{bmatrix}$$

est un élément de  $F_2$  et vérifie les conditions :

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \tau'_1 > \max\{1/\varepsilon^2, 36\}, \\ \operatorname{Im} \tau'_{12} = \operatorname{Im} \tau_{12} \geq \varepsilon > 0. \end{cases}$$

On remarquera de plus que  $\det(\tau_v) = \det(\tau'_v)$ .

### Fonctorialité

**Proposition 5.1.2.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $v$  une place archimédienne de  $k$ . Soient  $A_\tau$  et  $A_{\tau'}$  deux jacobiniennes de courbes de genre 2 définies sur  $k$  munies de leur diviseur thêta respectif avec  $\tau'$  une matrice de  $F_2$  vérifiant les conditions du théorème 2.8.2 (On a  $A_\tau(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}^2 + \tau\mathbb{Z}^2)$  et  $A_{\tau'}(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}^2 + \tau'\mathbb{Z}^2)$ ). Soit :*

$$\Phi : A_\tau \longrightarrow A_{\tau'}$$

une isogénie telle que  $\det(\tau) = \det(\tau')$ . Alors il existe une constante  $c_1(k, \Phi) > 0$  telle que pour tout point  $P \in A_\tau(k)$  d'ordre infini :

$$\widehat{h}_{A_\tau, \Theta}(P) \geq c_1(k, \Phi) \left( h'_{\text{st}}(A_\tau) - \frac{1}{2} \log(\deg \Phi) \right).$$

*Démonstration.* Il y a deux structures concurrentes sur  $A_\tau$  : on peut construire une première hauteur de Néron-Tate associée au diviseur  $\Theta$  et une seconde associée au diviseur  $\Phi^*(\Theta')$ . Afin d'obtenir l'énoncé pour  $A_\tau$  il suffit d'utiliser successivement les faits suivants :

1. Il existe un entier  $m = m(\Phi)$  tel que  $m\Theta - \Phi^*(\Theta')$  soit un diviseur ample sur  $A_\tau$ , ce qui implique l'inégalité pour  $P \in A_\tau(k)$  :

$$m\widehat{h}_{A_\tau, \Theta}(P) \geq \widehat{h}_{A_\tau, \Phi^*(\Theta')}(P).$$

2. On a l'égalité  $\widehat{h}_{A_\tau, \Phi^*(\Theta)}(P) = \widehat{h}_{A_{\tau'}, \Theta}(\Phi(P))$ .

3. Comme  $\tau'$  vérifie les hypothèses du théorème 2.8.2 on sait qu'il existe une constante  $c(k) > 0$  telle que pour tout point  $P \in A_{\tau'}(k)$  :

$$\widehat{h}_{A_{\tau'}, \Theta'}(P) \geq c(k) h'_{\text{st}}(A_{\tau'}).$$

4. On trouve dans [HS00] p. 467 l'inégalité suivante (ici adaptée à notre situation) :

$$\left| h_{\text{st}}(A_\tau) - h_{\text{st}}(A_{\tau'}) \right| < \frac{1}{2} \log(\deg \Phi).$$

5. Comme  $\det(\tau) = \det(\tau')$  on peut remplacer  $h_{\text{st}}$  par  $h'_{\text{st}}$  dans l'inégalité précédente.

On trouve donc  $c_1(k, \Phi) = c(k)/m$ .

□

## Calcul de $m(\Phi)$ et $\deg(\Phi)$

On explicite ici le point (1) de la preuve du théorème précédent.

**Proposition 5.1.3.** *Pour l'isogénie  $\Phi$  donnée par le lemme 5.1.1 on a  $m(\Phi) = a_\varepsilon^2 + 1$  et  $\deg(\Phi) = a_\varepsilon^4$ .*

*Démonstration.* L'entier  $m$  recherché peut être identifié en comparant les polarisations sur la variété abélienne  $A_\tau$  : l'isogénie  $\Phi$  est donnée par une matrice  $M \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z})$ .

Posons :

$$M = \begin{bmatrix} a_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{M} & \mathbb{C}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_\tau & \xrightarrow{\Phi} & A_{\tau'} \end{array}$$

On peut calculer  $\tau' = \frac{1}{a_\varepsilon^2} M \tau {}^t M$ . Alors  $M\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2$  et  $M\tau = a_\varepsilon^2 \tau' {}^t M^{-1} \in \tau' \mathbb{Z}^2$ .

On veut comparer  $H_1(Z) = {}^t \bar{Z} (\text{Im } \tau)^{-1} Z$  et  $H_2(MZ) = {}^t \bar{Z} {}^t M (\text{Im } \tau')^{-1} MZ$ .

On a :

$$H_2(MZ) = {}^t \bar{Z} {}^t M (\text{Im } \tau')^{-1} MZ = a_\varepsilon^2 {}^t Z (\text{Im } \tau)^{-1} Z = a_\varepsilon^2 H_1(Z).$$

On cherche alors  $m$  tel que  $mH_1 - H_2 \circ M > 0$ ; il suffit de prendre  $m = a_\varepsilon^2 + 1$ .

De plus on a :

$$\begin{aligned} \deg(\Phi) &= (\mathbb{Z}^2 + \tau' \mathbb{Z}^2 : M(\mathbb{Z}^2 + \tau \mathbb{Z}^2)) = (\mathbb{Z}^2 : M\mathbb{Z}^2)(\tau' \mathbb{Z}^2 : M\tau \mathbb{Z}^2) \\ &= \det(M) \det(a_\varepsilon^2 {}^t M^{-1}) = a_\varepsilon^4. \end{aligned}$$

□

*Remarque :* On peut donc étendre un peu l'énoncé 2.8.2 en utilisant une décomposition de l'ensemble des places de  $k$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  choisi tel que  $a_\varepsilon = (\max\{1/\varepsilon^2, 36\})^{\frac{1}{2}}$  est un entier. Pour une variété abélienne principalement polarisée, on note  $(\tau_v)_{v \in M_k^\infty}$  les matrices de périodes associées aux différents plongements complexes. Décomposons :

$$M_k^\infty = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4,$$

avec :

- $N_1 = \{v \in M_k^\infty \mid \text{Im } \tau_{1,v} \leq a_\varepsilon^2, \text{Im } \tau_{2,v} \leq a_\varepsilon^6\}$ ,
- $N_2 = \{v \in M_k^\infty \mid \text{Im } \tau_{1,v} \leq a_\varepsilon^2, \text{Im } \tau_{2,v} > a_\varepsilon^6\}$ ,
- $N_3 = \{v \in M_k^\infty \mid \text{Im } \tau_{1,v} > a_\varepsilon^2, \text{Im } \tau_{2,v} \leq a_\varepsilon^4 \text{Im } \tau_{1,v}\}$ ,
- $N_4 = \{v \in M_k^\infty \mid \text{Im } \tau_{1,v} > a_\varepsilon^2, \text{Im } \tau_{2,v} > a_\varepsilon^4 \text{Im } \tau_{1,v}\}$ .

La conjecture de Lang et Silverman sera donc vérifiée pour des familles de jacobienes de courbes de genre 2 vérifiant, à la place de l'hypothèse de l'énoncé 2.8.2 «  $\tau_v \in F_{2,\varepsilon}$  pour toute place archimédienne  $v$  » une des trois assertions suivantes :

1.  $M_k^\infty = N_1$ ,
2.  $N_1 = N_2 = \emptyset$



3.  $N_1 = N_3 = \emptyset$ .

*Démonstration.* Dans le premier cas, on va utiliser un raisonnement par compacité. Définissons l'ensemble :

$$F = \{A/k \mid A = \text{Jac}(C), \dim(A) = 2, \text{Im } \tau_{v,2} \leq a_\varepsilon^6, \text{Tr}(A) \geq 64 \log N_{k/\mathbb{Q}}(D)\}.$$

La hauteur de Faltings des éléments de  $F$  est bornée : en effet le discriminant est borné par  $\text{Tr}(A)$  qui lui-même est borné, donc la contribution des places finies est bornée. Pour les places infinies, les fonctions  $\tau_v \mapsto \log(\theta(0, \tau_v)^2)$  étant continues sur des compacts, elles sont bornées elles aussi, donc leur contribution est bornée.

Cet ensemble est donc un ensemble de variétés abéliennes définies sur un corps de nombres fixé, de dimension fixée et de hauteur de Faltings bornée. Par le théorème de Faltings (voir par exemple [Bos96]) cet ensemble est donc un ensemble fini. Il suffit alors de considérer ces deux ensembles de réels :

$$F_1 = \left\{ \min_{\substack{P \in A(k) \\ \overline{\mathbb{Z}P} = A}} \{\widehat{h}_{A,\Theta}(P)\} \mid A \in F \right\},$$

et :

$$F_2 = \{h_{\text{st}}(A) \mid A \in F\}.$$

Ces deux ensembles sont finis, en particulier bornés, on obtient donc la conjecture de Lang et Silverman dans ce cas avec une constante (non explicite) égale à  $\inf F_1 / \sup F_2$ .

Dans le deuxième cas il suffit d'appliquer les théorèmes précédents.

Dans le troisième cas, on utilise le lemme d'isogénie pour ramener des matrices  $\tau_v$  dans le domaine sur lequel on sait écrire notre minoration, et se ramener ainsi au cas précédent.  $\square$

## 5.2 Duplication sur la surface de Kummer

On reproduit dans cette partie l'équation de la surface de Kummer et les formules explicites de duplication cette surface. Les notations sont les mêmes que dans le chapitre 2. Ces formules sont disponibles en ligne à l'adresse :

<http://www2.maths.ox.ac.uk/~flynn/genus2/kummer/duplication>.

Soit  $C$  une courbe donnée dans le modèle :

$$C : y^2 = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Pour tout diviseur donné par  $\{(x, y), (u, v)\}$ , on note  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$  les coordonnées normalisées du point associé sur la surface de Kummer :  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = x + u$ ,  $k_3 = xu$  et  $k_4 = (M(x, u) - 2yv)/(x - u)^2$ , où  $M(x, u)$  est défini par :

$$M(x, u) = 2a_0 + a_1(x + u) + 2a_2(xu) + a_3(x + u)(xu) + 2a_4(xu)^2 + a_5(x + u)(xu)^2 + 2a_6(xu)^3.$$

### 5.2.1 Équation de la surface de Kummer

L'équation en  $K_P = (k_1 : k_2 : k_3 : k_4)$  de la surface de Kummer est :

$$R(k_1, k_2, k_3) k_4^2 + S(k_1, k_2, k_3) k_4 + T(k_1, k_2, k_3) = 0,$$

où on a posé :

$$R = k_2^2 - 4k_1k_3,$$

$$S = -4k_1^3a_0 - 2k_1^2k_2a_1 - 4k_1^2k_3a_2 - 2k_1k_2k_3a_3 - 4k_1k_3^2a_4 - 2k_2k_3^2a_5 - 4k_3^3a_6,$$

$$\begin{aligned} T = & -4k_1^4a_0a_2 + k_1^4a_1^2 - 4k_1^3k_2a_0a_3 - 2k_1^3k_3a_1a_3 - 4k_1^2k_2^2a_0a_4 + 4k_1^2k_2k_3a_0a_5 \\ & - 4k_1^2k_2k_3a_1a_4 - 4k_1^2k_3^2a_0a_6 + 2k_1^2k_3^2a_1a_5 - 4k_1^2k_3^2a_2a_4 + k_1^2k_3^2a_3^2 \\ & - 4k_1k_2^3a_0a_5 + 8k_1k_2^2k_3a_0a_6 - 4k_1k_2^2k_3a_1a_5 + 4k_1k_2k_3^2a_1a_6 - 4k_1k_2k_3^2a_2a_5 \\ & - 2k_1k_3^3a_3a_5 - 4k_2^4a_0a_6 - 4k_2^3k_3a_1a_6 - 4k_2^2k_3^2a_2a_6 - 4k_2k_3^3a_3a_6 - 4k_3^4a_4a_6 + k_3^4a_5^2. \end{aligned}$$

### 5.2.2 Formules explicites de duplication sur la surface de Kummer

Soit  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \delta(k_1, k_2, k_3, k_4)$  les formes de duplication. Alors  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  sont données par des quartiques en  $k_1, k_2, k_3, k_4$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}[a_0, \dots, a_6]$ . Les termes sont ordonnés en blocs de degrés croissants en  $a_0, \dots, a_6$ .

$$\begin{aligned} \delta_1 = & 4k_1k_4^3 + 4k_4^2(k_1^2a_2 - k_2k_3a_5 - 3k_3^2a_6) + 4k_4(-4k_1^3a_0a_4 + k_1^3a_1a_3 - 8k_1^2k_2a_0a_5 - 2k_1^2k_3a_1a_5 - \\ & 12k_1k_2^2a_0a_6 - k_1k_2^2a_1a_5 - 6k_1k_2k_3a_1a_6 - 2k_1k_2k_3a_2a_5 - 4k_1k_3^2a_2a_6 - k_1k_3^2a_3a_5 - 2k_2^3a_1a_6 - \\ & 4k_2^2k_3a_2a_6 - 6k_2k_3^2a_3a_6 - 8k_3^3a_4a_6 + 2k_3^3a_5^2) + 4k_3^4a_4a_5^2 + 4k_1^4a_1^2a_4 + 4k_1^4a_0a_3^2 - 16k_3^4a_2a_6^2 + 4k_2^4a_0a_5^2 - \\ & 16k_3^4a_4^2a_6 - 16k_2k_3^3a_3a_4a_6 - 16k_1^4a_0^2a_6 - 16k_1^4a_0a_2a_4 - 4k_1^2k_2k_3a_1a_3a_5 + 4k_2^3k_3a_1a_5^2 + 4k_2k_3^3a_3a_5^2 + \\ & 4k_2^2k_3^2a_2a_5^2 - 16k_1^3k_2a_0a_1a_6 - 32k_1^3k_2a_0a_2a_5 + 8k_1^3k_2a_1^2a_5 + 32k_1^3k_3a_0a_2a_6 - 16k_1^3k_3a_0a_3a_5 - \\ & 16k_1^3k_3a_1^2a_6 - 64k_1^2k_2^2a_0a_2a_6 - 8k_1^2k_2^2a_0a_3a_5 + 12k_1^2k_2^2a_1^2a_6 - 16k_1^2k_2k_3a_0a_4a_5 - 16k_1^2k_2k_3a_1a_2a_6 - \\ & 48k_1^2k_3^2a_0a_4a_6 + 16k_1^2k_3^2a_0a_5^2 + 24k_1^2k_3^2a_1a_3a_6 - 8k_1^2k_3^2a_1a_4a_5 - 16k_1^2k_3^2a_2^2a_6 - 32k_1k_2^3a_0a_3a_6 - \\ & 16k_1k_2^2k_3a_0a_5^2 - 24k_1k_2^2k_3a_1a_3a_6 - 16k_1k_2k_3^2a_0a_5a_6 - 8k_1k_2k_3^2a_1a_5^2 - 16k_1k_2k_3^2a_2a_3a_6 + 32k_1k_3^3a_0a_6^2 - \\ & 16k_1k_3^3a_1a_5a_6 - 8k_1k_3^3a_2^2a_6 - 16k_2^4a_0a_4a_6 - 16k_2^3k_3a_0a_5a_6 - 16k_2^3k_3a_1a_4a_6 - 48k_2^2k_3^2a_0a_6^2 - \\ & 8k_2^2k_3^2a_1a_5a_6 - 16k_2^2k_3^2a_2a_4a_6 - 32k_2k_3^3a_1a_6^2 + 8k_3^4a_3a_5a_6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = & 4k_2k_4^3 + k_4^2(4k_1^2a_1 + 8k_1k_2a_2 - 8k_1k_3a_3 + 5k_2^2a_3 + 8k_2k_3a_4 + 4k_3^2a_5) + 2k_4(2k_1^3a_0a_3 + \\ & 8k_1^2k_2a_0a_4 + k_1^2k_2a_1a_3 - 8k_1^2k_3a_0a_5 + 8k_1^2k_3a_1a_4 - 6k_1^2k_3a_2a_3 + 4k_1k_2^2a_0a_5 + 4k_1k_2^2a_1a_4 - \\ & 24k_1k_2k_3a_0a_6 + 8k_1k_2k_3a_1a_5 + 8k_1k_2k_3a_2a_4 - 5k_1k_2k_3a_3^2 - 8k_1k_3^2a_1a_6 + 8k_1k_3^2a_2a_5 - 6k_1k_3^2a_3a_4 + \\ & 2k_2^3a_1a_5 + 4k_2^2k_3a_1a_6 + 4k_2^2k_3a_2a_5 + 8k_2k_3^2a_2a_6 + k_2k_3^2a_3a_5 + 2k_3^3a_3a_6) + k_1^4a_1^2a_3 + 5k_1^2k_3^2a_3^2 + \\ & 16k_3^4a_1a_6^2 + k_3^4a_3a_5^2 + 16k_1^4a_0^2a_5 - 8k_1k_2^2k_3a_1a_3a_5 + 32k_1^2k_2k_3a_1^2a_6 - 20k_1k_2k_3^2a_1a_3a_6 - 4k_1^4a_0a_2a_3 + \\ & 32k_1^3k_2a_0^2a_6 + 16k_1^3k_2a_0a_1a_5 - 4k_1^3k_2a_0a_3^2 - 32k_1^3k_3a_0a_2a_5 + 16k_1^3k_3a_0a_3a_4 + 16k_1^3k_3a_1^2a_5 - \\ & 6k_1^3k_3a_1a_3^2 + 32k_1^2k_2^2a_0a_1a_6 - 4k_1^2k_2^2a_0a_3a_4 + 4k_1^2k_2^2a_1^2a_5 - 64k_1^2k_2k_3a_0a_2a_6 - 20k_1^2k_2k_3a_0a_3a_5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 32k_1^2k_2k_3a_0a_4^2+16k_1^2k_2k_3a_1a_2a_5-12k_1^2k_2k_3a_1a_3a_4-20k_1^2k_3^2a_0a_3a_6-14k_1^2k_3^2a_1a_3a_5+16k_1^2k_3^2a_1a_4^2+ \\
& 16k_1^2k_3^2a_2^2a_5-20k_1^2k_3^2a_2a_3a_4-4k_1k_2^3a_0a_3a_5+8k_1k_2^3a_1^2a_6-56k_1k_2^3k_3a_0a_3a_6+32k_1k_2^3k_3a_0a_4a_5+ \\
& 32k_1k_2^3k_3a_1a_2a_6-64k_1k_2k_3^2a_0a_4a_6+32k_1k_2k_3^2a_0a_5^2+16k_1k_2k_3^2a_1a_4a_5+32k_1k_2k_3^2a_2^2a_6- \\
& 12k_1k_2k_3^2a_2a_3a_5-32k_1k_3^3a_1a_4a_6+16k_1k_3^3a_1a_5^2+16k_1k_3^3a_2a_3a_6-6k_1k_3^3a_3^2a_5-4k_1^4a_0a_3a_6+ \\
& 8k_2^3k_3a_0a_5^2-4k_2^3k_3a_1a_3a_6+32k_2^2k_3^2a_0a_5a_6+4k_2^2k_3^2a_1a_5^2-4k_2^2k_3^2a_2a_3a_6+32k_2k_3^3a_0a_6^2+16k_2k_3^3a_1a_5a_6- \\
& 4k_2k_3^3a_2^2a_6-4k_3^4a_3a_4a_6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_3 = & 4k_3k_4^3+4k_4^2(-3k_1^2a_0-k_1k_2a_1+k_3^2a_4)+4k_4(-8k_1^3a_0a_2+2k_1^3a_1^2-6k_1^2k_2a_0a_3- \\
& 4k_1^2k_3a_0a_4-k_1^2k_3a_1a_3-4k_1k_2^2a_0a_4-6k_1k_2k_3a_0a_5-2k_1k_2k_3a_1a_4-2k_1k_3^2a_1a_5-2k_2^3a_0a_5- \\
& 12k_2^2k_3a_0a_6-k_2^2k_3a_1a_5-8k_2k_3^2a_1a_6-4k_3^3a_2a_6+k_3^3a_3a_5)+4k_4^4a_1^2a_6-16k_4^4a_0^2a_4-16k_4^4a_0a_2^2+ \\
& 4k_3^4a_2a_5^2+4k_1^4a_1^2a_2+4k_3^4a_3^2a_6-16k_3^4a_0a_6^2-8k_1^2k_3^2a_1a_2a_5+4k_1^3k_2a_1^2a_3+4k_1^2k_2^2a_1^2a_4+4k_1k_2^3a_1^2a_5+ \\
& 8k_1^4a_0a_1a_3-32k_1^3k_2a_0^2a_5-4k_1k_2k_3^2a_1a_3a_5-16k_1^3k_2a_0a_2a_3+32k_1^3k_3a_0^2a_6-16k_1^3k_3a_0a_1a_5- \\
& 8k_1^3k_3a_0a_3^2-48k_1^2k_2^2a_0^2a_6-8k_1^2k_2^2a_0a_1a_5-16k_1^2k_2^2a_0a_2a_4-16k_1^2k_2k_3a_0a_1a_6-16k_1^2k_2k_3a_0a_3a_4- \\
& 8k_1^2k_2k_3a_1^2a_5-48k_1^2k_3^2a_0a_2a_6+24k_1^2k_3^2a_0a_3a_5-16k_1^2k_3^2a_0a_4^2+16k_1^2k_3^2a_1^2a_6-16k_1k_2^3a_0a_1a_6- \\
& 16k_1k_2^3a_0a_2a_5-24k_1k_2^3k_3a_0a_3a_5-16k_1k_2^3k_3a_1^2a_6-16k_1k_2k_3^2a_0a_4a_5-16k_1k_2k_3^2a_1a_2a_6+32k_1k_3^3a_0a_4a_6- \\
& 16k_1k_3^3a_0a_5^2-16k_1k_3^3a_1a_3a_6-16k_2^4a_0a_2a_6-32k_2^3k_3a_0a_3a_6-64k_2^2k_3^2a_0a_4a_6+12k_2^2k_3^2a_0a_5^2- \\
& 8k_2^2k_3^2a_1a_3a_6-16k_2k_3^3a_0a_5a_6-32k_2k_3^3a_1a_4a_6+8k_2k_3^3a_1a_5^2-16k_3^4a_2a_4a_6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_4 = & k_4^4+0+2k_4^2(4k_1^2a_0a_4-k_1^2a_1a_3+4k_1k_2a_0a_5+8k_1k_3a_0a_6+4k_2^2a_0a_6+4k_2k_3a_1a_6+ \\
& 4k_3^2a_2a_6-k_3^2a_3a_5)+4k_4(-2k_3^3a_3^2a_6-2k_1^3a_0a_3^2-2k_3^3a_2a_5^2+8k_1^2k_3a_0a_2a_6-2k_1^3a_1^2a_4+16k_1k_2^2a_0a_2a_6- \\
& 4k_1k_2^2a_1^2a_6+k_1k_2k_3a_1a_3a_5+8k_1^3a_0a_2a_4+12k_1^2k_2a_0a_2a_5-3k_1^2k_2a_1^2a_5+4k_1^2k_3a_0a_3a_5-2k_1^2k_3a_1^2a_6+ \\
& 2k_1k_2^2a_0a_3a_5+20k_1k_2k_3a_0a_3a_6+8k_1k_3^2a_0a_4a_6-2k_1k_3^2a_0a_5^2+4k_1k_3^2a_1a_3a_6+4k_2^3a_0a_3a_6+ \\
& 16k_2^2k_3a_0a_4a_6-4k_2^2k_3a_0a_5^2+2k_2^2k_3a_1a_3a_6+12k_2k_3^2a_1a_4a_6-3k_2k_3^2a_1a_5^2+8k_3^3a_2a_4a_6)+16k_4^3a_2^2a_6^2+ \\
& k_3^4a_3^2a_5^2-2k_1^4a_1^3a_5+16k_4^2a_0^2a_6^2+k_1^4a_1^2a_3^2+16k_4^4a_0^2a_4^2-4k_1^4a_0a_1^2a_6+16k_1^4a_0a_2^2a_4+16k_1^2k_2k_3a_0a_1a_5^2- \\
& 16k_3^4a_1a_3a_6^2-8k_1k_2k_3^2a_0a_3a_5^2-2k_3^4a_1a_5^3+16k_3^4a_0a_4a_6^2+16k_1^4a_0^2a_2a_6+k_2^4a_1^2a_5^2-16k_1^4a_0^2a_3a_5+ \\
& 8k_1^4a_0a_1a_2a_5-8k_1^4a_0a_1a_3a_4-4k_1^4a_0a_2a_3^2-4k_1^4a_1^2a_2a_4-32k_1^3k_2a_0^2a_3a_6+32k_1^3k_2a_0^2a_4a_5+32k_1^3k_2a_0a_1a_2a_6- \\
& 16k_1^3k_2a_0a_1a_3a_5+32k_1^3k_2a_0a_2^2a_5-8k_1^3k_2a_1^3a_6-8k_1^3k_2a_1^2a_2a_5-64k_1^3k_3a_0^2a_4a_6+32k_1^3k_3a_0^2a_5^2+ \\
& 16k_1^3k_3a_0a_1a_3a_6+16k_1^3k_3a_0a_2a_3a_5-4k_1^3k_3a_1^2a_3a_5+32k_1^2k_2^2a_0^2a_4a_6+16k_1^2k_2^2a_0^2a_5^2-24k_1^2k_2^2a_0a_1a_3a_6+ \\
& 64k_1^2k_2^2a_0a_2^2a_6+8k_1^2k_2^2a_0a_2a_3a_5-16k_1^2k_2^2a_1^2a_2a_6-2k_1^2k_2^2a_1^2a_3a_5+64k_1^2k_2k_3a_0^2a_5a_6-32k_1^2k_2k_3a_0a_1a_4a_6+ \\
& 64k_1^2k_2k_3a_0a_2a_3a_6+8k_1^2k_2k_3a_0a_3^2a_5-8k_1^2k_2k_3a_1^2a_3a_6+64k_1^2k_3^2a_0^2a_6^2+96k_1^2k_3^2a_0a_2a_4a_6-32k_1^2k_3^2a_0a_2a_5^2- \\
& 16k_1^2k_3^2a_0a_3^2a_6+8k_1^2k_3^2a_0a_3a_4a_5-32k_1^2k_3^2a_1^2a_4a_6+12k_1^2k_3^2a_1^2a_5^2+8k_1^2k_3^2a_1a_2a_3a_6+32k_1k_2^3a_0^2a_5a_6+ \\
& 32k_1k_2^3a_0a_2a_3a_6-8k_1k_2^3a_1^2a_3a_6+64k_1k_2^3k_3a_0^2a_6^2+32k_1k_2^3k_3a_0a_1a_5a_6+48k_1k_2^3k_3a_0a_3^2a_6+64k_1k_2k_3^2a_0a_1a_6^2- \\
& 32k_1k_2k_3^2a_0a_2a_5a_6+64k_1k_2k_3^2a_0a_3a_4a_6+16k_1k_2k_3^2a_1^2a_5a_6+8k_1k_2k_3^2a_1a_3^2a_6-64k_1k_3^3a_0a_2a_6^2+ \\
& 16k_1k_3^3a_0a_3a_5a_6+32k_1k_3^3a_1^2a_6^2+16k_1k_3^3a_1a_3a_4a_6-4k_1k_3^3a_1a_3a_5^2+16k_4^2a_0a_2a_4a_6-4k_2^4a_0a_2a_5^2- \\
& 4k_2^4a_1^2a_4a_6+32k_2^3k_3a_0a_1a_6^2+32k_2^3k_3a_0a_3a_4a_6-8k_2^3k_3a_0a_3a_5^2+32k_2^2k_3^2a_0a_2a_6^2-24k_2^2k_3^2a_0a_3a_5a_6+ \\
& 64k_2^2k_3^2a_0a_4^2a_6-16k_2^2k_3^2a_0a_4a_5^2+16k_2^2k_3^2a_1^2a_6^2+8k_2^2k_3^2a_1a_3a_4a_6-2k_2^2k_3^2a_1a_3a_5^2-32k_2k_3^3a_0a_3a_6^2+ \\
& 32k_2k_3^3a_0a_4a_5a_6-8k_2k_3^3a_0a_5^3+32k_2k_3^3a_1a_2a_6^2-16k_2k_3^3a_1a_3a_5a_6+32k_2k_3^3a_1a_4^2a_6-8k_2k_3^3a_1a_4a_5^2- \\
& 4k_3^4a_0a_5^2a_6+8k_3^4a_1a_4a_5a_6-8k_3^4a_2a_3a_5a_6+16k_3^4a_2a_4^2a_6-4k_3^4a_2a_4a_5^2-4k_3^4a_3^2a_4a_6.
\end{aligned}$$

### 5.3 Invariants d'Igusa des courbes de genre 2

On donne ici les formules des trois invariants d'Igusa que l'on reprend directement de [Igu60] p. 623 (en changeant simplement le nom des coefficients). On se donne un polynôme :

$$F(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

On définit alors les trois invariants  $J_2$ ,  $J_4$  et  $J_6$ , dont l'indice donne le degré en les coefficients de  $F$  :

$$J_2 = 5a_1a_5 - 2a_2a_4 + \frac{3}{4}a_3^2.$$

$$J_4 = -\frac{1}{8} \left[ 25a_0a_2a_5^2 - 15a_1^2a_5^2 - 15a_0a_3a_4a_5 + 7a_1a_2a_4a_5 + \frac{1}{2}a_1a_3^2a_5 - a_2^2a_3a_5 + 4a_0a_4^3 - a_1a_3a_4^2 - a_2^2a_4^2 + a_2a_3^2a_4 - \frac{3}{16}a_3^4 \right].$$

$$J_6 = -\frac{1}{16} \left[ \frac{125}{2}a_0^2a_3a_5^3 - 25a_0a_1a_2a_5^3 + 5a_1^3a_5^3 - 25a_0^2a_4^2a_5^2 - 10a_0a_1a_3a_4a_5^2 + 10a_0a_2^2a_4a_5^2 - a_1^2a_2a_4a_5^2 - \frac{5}{4}a_0a_2a_3^2a_5^2 - \frac{11}{4}a_1^2a_3^2a_5^2 + \frac{7}{2}a_1a_2^2a_3a_5^2 - a_2^4a_5^2 + 6a_0a_1a_4^3a_5 - 3a_0a_2a_3a_4^2a_5 + \frac{7}{2}a_1^2a_3a_4^2a_5 - 2a_1a_2^2a_4^2a_5 + \frac{3}{4}a_0a_3^3a_4a_5 - \frac{7}{4}a_1a_2a_3^2a_4a_5 + a_2^3a_3a_4a_5 + \frac{7}{16}a_1a_3^4a_5 - \frac{1}{4}a_2^2a_3^3a_5 - a_1^2a_4^4 + a_1a_2a_3a_4^3 - \frac{1}{4}a_1a_3^3a_4^2 - \frac{1}{4}a_2^2a_3^2a_4^2 + \frac{1}{8}a_2a_3^4a_4 - \frac{1}{64}a_3^6 \right].$$



# Bibliographie

- [Aut06] Pascal AUTISSIER : Hauteur de Faltings et hauteur de Néron-Tate du diviseur thêta. *Compos. Math.*, 142(6):1451–1458, 2006.
- [BG00] John BOXALL et David GRANT : Examples of torsion points on genus two curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(10):4533–4555, 2000.
- [BGL01] John BOXALL, David GRANT et Franck LEPRÉVOST : 5-torsion points on curves of genus 2. *J. London Math. Soc. (2)*, 64(1):29–43, 2001.
- [BM88] Jean-Benoît BOST et Jean-François MESTRE : Moyenne arithmético-géométrique et périodes des courbes de genre 1 et 2. *Gaz. Math.*, (38):36–64, 1988.
- [BMMB90] Jean-Benoît BOST, Jean-François MESTRE et Laurent MORET-BAILLY : Sur le calcul explicite des “classes de Chern” des surfaces arithmétiques de genre 2. *Astérisque*, (183):69–105, 1990. Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques (Paris, 1988).
- [Bos96] Jean-Benoît BOST : Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d’après D. Masser et G. Wüstholz). *Astérisque*, (237):Exp. No. 795, 4, 115–161, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.
- [Box95] John BOXALL : Une propriété des hauteurs locales de Néron-Tate sur les variétés abéliennes. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 7(1):111–119, 1995. Les Dix-huitièmes Journées Arithmétiques (Bordeaux, 1993).
- [BP05] Matthew BAKER et Clayton PETSCHKE : Global discrepancy and small points on elliptic curves. *Int. Math. Res. Not.*, (61):3791–3834, 2005.
- [CF96] J. W. S. CASSELS et E. V. FLYNN : *Prolegomena to a middlebrow arithmetic of curves of genus 2*, volume 230 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [CHM97] Lucia CAPORASO, Joe HARRIS et Barry MAZUR : Uniformity of rational points. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(1):1–35, 1997.
- [CS86] Gary CORNELL et Joseph H. SILVERMAN, éditeurs. *Arithmetic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1986. Papers from the conference held at the University of Connecticut, Storrs, Connecticut, July 30–August 10, 1984.
- [CS93] Gregory S. CALL et Joseph H. SILVERMAN : Canonical heights on varieties with morphisms. *Compositio Math.*, 89(2):163–205, 1993.

- [Dav91] Sinnou DAVID : Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes. *Compositio Math.*, 78(2):121–160, 1991.
- [Dav92] Sinnou DAVID : Autour d’une conjecture de S. Lang. *In Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990)*, pages 65–98. de Gruyter, Berlin, 1992.
- [Dav93] Sinnou DAVID : Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 121(4):509–544, 1993.
- [dD97] Teresa de DIEGO : Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2. *J. Number Theory*, 67(1):85–114, 1997.
- [DP02] Sinnou DAVID et Patrice PHILIPPON : Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. II. *Comment. Math. Helv.*, 77(4):639–700, 2002.
- [EMOT53] Arthur ERDÉLYI, Wilhelm MAGNUS, Fritz OBERHETTINGER et Francesco G. TRICOMI : *Higher transcendental functions. Vols. I, II.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953. Based, in part, on notes left by Harry Bateman.
- [Fay73] John D. FAY : *Theta functions on Riemann surfaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1973. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 352.
- [Fly95] E. V. FLYNN : An explicit theory of heights. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(8):3003–3015, 1995.
- [Fre83] E. FREITAG : *Siegelsche Modulfunktionen*, volume 254 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [FS97] E. V. FLYNN et N. P. SMART : Canonical heights on the Jacobians of curves of genus 2 and the infinite descent. *Acta Arith.*, 79(4):333–352, 1997.
- [Gro84] Benedict H. GROSS : Heegner points on  $X_0(N)$ . *In Modular forms (Durham, 1983)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl. : Statist. Oper. Res., pages 87–105. Horwood, Chichester, 1984.
- [GZ86] Benedict H. GROSS et Don B. ZAGIER : Heegner points and derivatives of  $L$ -series. *Invent. Math.*, 84(2):225–320, 1986.
- [HM98] Joe HARRIS et Ian MORRISON : *Moduli of curves*, volume 187 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Hri87] Paul HRILJAC : Splitting fields of principal homogeneous spaces. *In Number theory (New York, 1984–1985)*, volume 1240 de *Lecture Notes in Math.*, pages 214–229. Springer, Berlin, 1987.
- [HS88] M. HINDRY et J. H. SILVERMAN : The canonical height and integral points on elliptic curves. *Invent. Math.*, 93(2):419–450, 1988.
- [HS99] Marc HINDRY et Joseph SILVERMAN : Sur le nombre de points de torsion rationnels sur une courbe elliptique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(2):97–100, 1999.

- [HS00] Marc HINDRY et Joseph H. SILVERMAN : *Diophantine geometry*, volume 201 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction.
- [Igu60] Jun-ichi IGUSA : Arithmetic variety of moduli for genus two. *Ann. of Math. (2)*, 72:612–649, 1960.
- [Igu62] Jun-ichi IGUSA : On Siegel modular forms of genus two. *Amer. J. Math.*, 84:175–200, 1962.
- [Igu72] Jun-ichi IGUSA : *Theta functions*. Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 194.
- [IR90] Kenneth IRELAND et Michael ROSEN : *A classical introduction to modern number theory*, volume 84 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1990.
- [Iwa02] Henryk IWANIEC : *Spectral methods of automorphic forms*, volume 53 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second édition, 2002.
- [JK08] J. JORGENSON et J. KRAMER : Bounds on faltings' delta function through covers. *Ann. of Math.*, 2008.
- [Kau99] Ivan KAUSZ : A discriminant and an upper bound for  $\omega^2$  for hyperelliptic arithmetic surfaces. *Compositio Math.*, 115(1):37–69, 1999.
- [Kri01] Mohamed KRIR : À propos de la conjecture de Lang sur la minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les courbes elliptiques sur  $\mathbb{Q}$ . *Acta Arith.*, 100(1):1–16, 2001.
- [Lan78] Serge LANG : *Elliptic curves : Diophantine analysis*, volume 231 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [LB92] Herbert LANGE et Christina BIRKENHAKE : *Complex abelian varieties*, volume 302 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Lig75] Gérard LIGOZAT : *Courbes modulaires de genre 1*. Société Mathématique de France, Paris, 1975. Bull. Soc. Math. France, Mém. 43, Supplément au Bull. Soc. Math. France Tome 103, no. 3.
- [Liu94] Qing LIU : Conducteur et discriminant minimal de courbes de genre 2. *Compositio Math.*, 94(1):51–79, 1994.
- [Liu96] Qing LIU : Modèles entiers des courbes hyperelliptiques sur un corps de valuation discrète. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(11):4577–4610, 1996.
- [Liu02] Qing LIU : *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, volume 6 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [Loc94] P. LOCKHART : On the discriminant of a hyperelliptic curve. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 342(2):729–752, 1994.



- [Mas87] D. W. MASSER : Small values of heights on families of abelian varieties. In *Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985)*, volume 1290 de *Lecture Notes in Math.*, pages 109–148. Springer, Berlin, 1987.
- [Mas93] D. W. MASSER : Large period matrices and a conjecture of Lang. In *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–92*, volume 116 de *Progr. Math.*, pages 153–177. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [Mau03] Sylvain MAUGEAIS : Relèvement des revêtements  $p$ -cycliques des courbes rationnelles semi-stables. *Math. Ann.*, 327(2):365–393, 2003.
- [MB85a] Laurent MORET-BAILLY : Compactifications, hauteurs et finitude. *Astérisque*, (127):113–129, 1985. Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell (Paris, 1983/84).
- [MB85b] Laurent MORET-BAILLY : Pinceaux de variétés abéliennes. *Astérisque*, (129):266, 1985.
- [MF82] David MUMFORD et John FOGARTY : *Geometric invariant theory*, volume 34 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 1982.
- [Mil72] J. S. MILNE : On the arithmetic of abelian varieties. *Invent. Math.*, 17:177–190, 1972.
- [MU98] P. MICHEL et E. ULLMO : Points de petite hauteur sur les courbes modulaires  $X_0(N)$ . *Invent. Math.*, 131(3):645–674, 1998.
- [Mum66] D. MUMFORD : On the equations defining abelian varieties. I. *Invent. Math.*, 1:287–354, 1966.
- [Mum67a] D. MUMFORD : On the equations defining abelian varieties. II. *Invent. Math.*, 3:75–135, 1967.
- [Mum67b] D. MUMFORD : On the equations defining abelian varieties. III. *Invent. Math.*, 3:215–244, 1967.
- [Mum75] David MUMFORD : *Curves and their Jacobians*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1975.
- [Mum83] David MUMFORD : *Tata lectures on theta. I*, volume 28 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1983. With the assistance of C. Musili, M. Nori, E. Previato and M. Stillman.
- [Mum84] David MUMFORD : *Tata lectures on theta. II*, volume 43 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984. Jacobian theta functions and differential equations, With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato, M. Stillman and H. Umemura.
- [MZ72] Ju. I. MANIN et Ju. G. ZARHIN : Height on families of abelian varieties. *Mat. Sb. (N.S.)*, 89(131):171–181, 349, 1972.
- [Nak96] Hajime NAKAZATO : Heegner points on modular elliptic curves. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(10):223–225, 1996.

- [Nér65] A. NÉRON : Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes. *Ann. of Math. (2)*, 82:249–331, 1965.
- [NS99] Jan NEKOVÁŘ et Norbert SCHAPPACHER : On the asymptotic behaviour of Heegner points. *Turkish J. Math.*, 23(4):549–556, 1999.
- [Pac97] Patricia L. PACELLI : Uniform boundedness for rational points. *Duke Math. J.*, 88(1):77–102, 1997.
- [Pet06] Clayton PETSCHKE : Small rational points on elliptic curves over number fields. *New York J. Math.*, 12:257–268 (electronic), 2006.
- [Rém99] Gaël RÉMOND : Hauteurs thêta et construction de Kodaira. *J. Number Theory*, 78(2):287–311, 1999.
- [Rém00] Gaël RÉMOND : Décompte dans une conjecture de Lang. *Invent. Math.*, 142(3):513–545, 2000.
- [Shi94] Goro SHIMURA : *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, volume 11 de *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. Reprint of the 1971 original, Kano Memorial Lectures, 1.
- [Sil81] Joseph H. SILVERMAN : Lower bound for the canonical height on elliptic curves. *Duke Math. J.*, 48(3):633–648, 1981.
- [Sil84] Joseph H. SILVERMAN : Lower bounds for height functions. *Duke Math. J.*, 51(2):395–403, 1984.
- [Sil92] Joseph H. SILVERMAN : *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. Corrected reprint of the 1986 original.
- [Sil94] Joseph H. SILVERMAN : *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, volume 151 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Sto99] Michael STOLL : On the height constant for curves of genus two. *Acta Arith.*, 90(2):183–201, 1999.
- [Sto02] Michael STOLL : On the height constant for curves of genus two. II. *Acta Arith.*, 104(2):165–182, 2002.
- [Ten95] Gérald TENENBAUM : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, volume 1 de *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, second édition, 1995.
- [Uen88] Kenji UENO : Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces. *In Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II*, pages 749–770. Kinokuniya, Tokyo, 1988.
- [Ull00] Emmanuel ULLMO : Hauteur de Faltings de quotients de  $J_0(N)$ , discriminants d’algèbres de Hecke et congruences entre formes modulaires. *Amer. J. Math.*, 122(1):83–115, 2000.

- [Wat02] Mark WATKINS : Computing the modular degree of an elliptic curve. *Experiment. Math.*, 11(4):487–502 (2003), 2002.
- [Wei48] André WEIL : *Variétés abéliennes et courbes algébriques*. Actualités Sci. Ind., no. 1064 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 8 (1946). Hermann & Cie., Paris, 1948.
- [Wei57] André WEIL : Zum Beweis des Torellischen Satzes. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. IIa.*, 1957:33–53, 1957.
- [Yos98] Kentaro YOSHITOMI : On height functions on Jacobian surfaces. *Manuscripta Math.*, 96(1):37–66, 1998.

## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude d'une conjecture de Lang et Silverman de minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes sur les corps de nombres. Le premier chapitre décrit le matériel nécessaire à l'étude des chapitres suivants et fixe les notations et normalisations. On montre dans le second chapitre que la conjecture est vraie pour certaines classes de variétés abéliennes de dimension 2, en particulier pour les jacobiniennes ayant potentiellement bonne réduction et restant loin des produits de courbes elliptiques dans l'espace de modules. Le second chapitre renferme aussi des corollaires allant dans la direction de la conjecture de borne uniforme sur la torsion et de majoration uniforme du nombre de points rationnels d'une courbe de genre 2. Le troisième chapitre généralise les résultats de minoration du second chapitre aux jacobiniennes de courbes hyperelliptiques de genre  $g \geq 2$ . Le quatrième chapitre contient une étude de la restriction des scalaires à la Weil et une étude asymptotique de la hauteur des points de Heegner sur les jacobiniennes de courbes modulaires. Le cinquième chapitre est une annexe contenant des formules explicites utiles pour la dimension 2 et un paragraphe sur un raisonnement par isogénies.

**Mots-clés : hauteur de Néron-Tate, hauteurs locales, hauteur de Faltings, jacobiniennes, courbes hyperelliptiques, torsion, points rationnels, fonctions thêta, coordonnées de Mumford, points de Heegner.**

## Abstract

This thesis concentrates on a conjecture made by Lang and Silverman which gives a uniform lower bound for the Néron-Tate height on abelian varieties over number fields. The first chapter provides a background for the understanding of the following chapters and fixes the notations and normalisations used throughout the text. It is proven in the second chapter that the conjecture is true for some classes of abelian surfaces, in particular jacobians with potentially good reduction that lie outside an  $\varepsilon$ -neighbourhood of the elliptic curve product locus. This chapter also includes statements towards the uniform torsion bound conjecture and uniform bounds on the number of rational points on curves of genus 2. The third chapter generalizes the previous bounds for heights to jacobians of hyperelliptic curves of greater genus. The fourth chapter studies the restriction of scalars à la Weil and gives an asymptotic result for the height of Heegner points on jacobians of modular curves. The fifth chapter includes explicit formulas useful in dimension 2 and a short study involving isogenies.

**Keywords : Néron-Tate height, local heights, Faltings height, jacobians, hyperelliptic curves, torsion, rational points, theta functions, Mumford coordinates, Heegner points.**