

N° d'ordre : 3080

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Cédric WOLF**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique**

**Modélisation et analyse mathématique de la propagation d'un microparasite dans
une population structurée en environnement hétérogène**

Soutenue le : 6 Décembre 2005

Après avis de Messieurs :

Mostafa ADIMY
Michel PIERRE

Maître de Conférences (HDR), Université de Pau
Professeur, ENS Cachan, Antenne de Bretagne

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

Claude-Michel BRAUNER
Bedr'eddine AINSEBA
Mostafa ADIMY
Alain FRANC
Michel LANGLAIS
Michel PIERRE

Professeur, Université Bordeaux 1
Professeur, Université Victor Segalen Bordeaux 2
Maître de Conférences (HDR), Université de Pau
Directeur de Recherche, INRA, excusé
Professeur, Université Victor Segalen Bordeaux 2
Professeur, ENS Cachan, Antenne de Bretagne

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur
Examineur

Remerciements

Je remercie pour commencer Michel Langlais pour sa grande disponibilité malgré un emploi du temps chargé, sa patience, ses conseils avisés et également son soutien lors des très pénibles épreuves que représentent encore pour moi la rédaction (en anglais correct!) d'articles. Sur ce plan là comme sur le plan des connaissances et de la recherche il est à l'origine de mes progrès lors des 3 dernières années.

Je remercie Mostafa Adimy, de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour et Michel Pierre de l'E.N.S. Cachan d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et d'y consacrer une part de leur temps. Je les remercie également, ainsi que Bedr'eddine Ainseba, Claude-Michel Brauner et Alain Franc pour leur participation au jury malgré des emplois du temps chargés.

Merci également à l'ensemble de l'équipe de Dynamique des Populations et du personnel (secrétaires, personnel d'entretien) de l'U.F.R. de Sciences et Modélisation à l'université de Bordeaux 2 pour leur accueil, leur aide et leurs conseils en particulier pour mes enseignements. Je remercie aussi l'ensemble des personnes avec qui j'ai partagé 4 années dans la salle des doctorants pour leur compagnie quotidienne. Merci en particulier à Sébastien, Cécile et Wilfried pour leur amitié et leur bonne humeur!

Enfin je remercie ma famille et mes amis, qui même à distance ont participé activement à la réussite de cette thèse par leur soutien constant et leurs conseils. Merci donc à mes parents, mes grand-parents, ma soeur Sandra et mon neveu Alexis; merci à Guillaume et Caroline (et Eloïse;)), à Georges, David et tous mes amis du groupe Dixsous et bien entendu à Elise sans qui je ne serais pas ce que je suis actuellement.

Introduction générale

Parvenir à une meilleure compréhension de phénomènes biologiques observés par la mise en place et l'étude de modèles mathématiques, telle est l'ambition des biomathématiques. Cette science est interdisciplinaire par excellence puisque association de trois sciences, les sciences de la vie, les mathématiques et parfois également l'informatique. En effet, elle permet l'intervention et la collaboration de scientifiques de formations biologiques diverses (biologistes, épidémiologistes, vétérinaires, ...) comme de formations mathématiques (modélisateurs, théoriciens, statisticiens, numériciens, ...). Deux approches différentes peuvent exister pour le principe de modélisation : Soit on part d'une théorie pour aboutir à un modèle puis on essaye d'appliquer ce modèle à des situations existantes, soit on tente d'établir un modèle à partir d'une situation existante puis on étudie ce modèle. Dans les deux cas, un biomathématicien aboutit à la formulation de problèmes biologiques par des équations mathématiques dans le but d'étudier les problèmes biologiques via leur formulation mathématique.

Dans ce travail, l'approche retenue est la seconde évoquée plus haut. A partir d'une situation concrète proposée par les biologistes, nous avons établi des modèles mathématiques prenant en compte les variables significatives proposées par les biologistes ; le cadre mathématique est ainsi un peu plus général que le seul problème biologique qui nous motive. Puis nous avons étudié ces modèles, d'une part d'un point de vue théorique, afin de vérifier leur validité mathématique, et d'autre part d'un point de vue qualitatif afin de vérifier qu'ils permettent de reproduire les phénomènes observés, du moins en partie.

Nous nous intéressons donc à l'étude d'un système Hôte-Microparasite modélisant la propagation d'une épidémie à l'intérieur d'une population structurée. Les modèles biologiques et épidémiologiques inspirant ce travail proviennent de collaborations pluridisciplinaires en cours depuis plusieurs années entre M. Langlais (UMR CNRS 5466, Mathématiques Appliquées de Bordeaux), D. Pontier (UMR 5558, Biométrie, Biologie Evolutive, Lyon 1), et M. Artois (E.N.V. Lyon) ; voir [7], [33], [34], [75] et [80]. Le modèle considéré correspond à l'étude du système Hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre - Homme et comprend notamment une structuration sociale pour le campagnol roussâtre, dont l'importance sur la propagation d'un parasite est mise en évidence dans Fromont et al. [33]. La propagation du Hantavirus se faisant essentiellement à travers les populations de campagnols roussâtres, nous étudierons particulièrement le système Hantavirus - Campagnol roussâtre. Mais l'intérêt principal de l'étude d'un point de vue sanitaire est que le hantavirus considéré peut-être létal pour l'Homme (même si le nombre de cas reste faible pour le moment) alors qu'il est bénin pour le campagnol. De plus il existe de nombreux autres hantavirus se propageant dans d'autres espèces de rongeurs (et pouvant également se transmettre à l'Homme) qui présentent des caractéristiques similaires.

Ce travail s'articule en quatre parties.

Dans la première partie, nous commencerons par présenter dans un premier chapitre le problème biologique et épidémiologique qui nous est posé, ainsi que les variables et données qui semblent les plus importantes ou du moins les plus caractéristiques. Ce premier chapitre reprend et synthétise l'ensemble des données fournies par les biologistes, s'articulant notamment autour de la thèse effectuée par Frank Sauvage au Laboratoire de Biométrie et Biologie Evolutive de Lyon sous la direction de Dominique Pontier et soutenue en 2004 à propos de l'étude biologique du système Hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre, voir [74]. Le second chapitre présentera la construction des trois modèles que nous étudierons par la suite : le modèle JA (Juveniles - Adultes) qui est un modèle démographique destiné à étudier la dynamique des populations de campagnols roussâtres sans la présence du hantavirus, le modèle JASIG qui est un modèle épidémique destiné à étudier la propagation du virus dans les populations de campagnols roussâtres, et enfin le modèle JASIGH pour lequel nous prendrons également en compte la transmission du virus à l'Homme. Nous expliquerons comment et pourquoi nous avons construit ces modèles à partir de modèles existants en dynamique des populations et en épidémiologie.

La seconde partie est consacrée à l'étude des modèles précédemment construits, dans un cas où nous considérerons des modèles fortement structurés. En plus de la structuration sociale déjà évoquée et présente dans l'ensemble de ce travail qui induit une structuration discrète en âge en divisant la population en deux classes d'âges, les juvéniles et les adultes, nous incluons dans cette partie une structuration continue en trois variables : le temps, l'âge chronologique et l'âge de l'infection au sein des individus infectés (voir Fitzgibbon et Langlais [25]). Ceci nous conduira à l'étude mathématique de systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles non linéaires faiblement hyperboliques, avec des non-linéarités non locales. Le Chapitre 3 sera ainsi consacré à l'étude mathématique du modèle démographique JA à travers l'obtention de résultats d'existence globale et d'unicité, tandis que le Chapitre 4 aura pour objet l'étude du modèle épidémique JASIG. Dans le Chapitre 5 nous présenterons des modèles discrets correspondant au système hôte - parasite considéré ainsi que quelques simulations numériques pour ces modèles discrets.

Dans la troisième partie, nous nous intéresserons à des systèmes d'Equations Différentielles Ordinaires puisque nous considérerons cette fois-ci des modèles structurés discètement en âge chronologique et non structurés en âge de l'infection, dans le but d'obtenir des résultats plus qualitatifs. Ces études seront principalement consacrées à la recherche d'états stationnaires non-triviaux (en particulier endémiques) de ces systèmes dans le cas de coefficients constants, et à comprendre comment peut se faire la transition entre états stationnaires dans le cas de coefficients constants et états périodiques dans le cas de coefficients périodiques (en temps). Cette question est intéressante du fait que les populations de campagnols roussâtres ont des dynamiques distinctes selon leur localisation géographique, allant justement de dynamiques péri-

diques fortement oscillantes à des dynamiques quasi stationnaires ; la propagation du virus semblant de plus être affectée par ces disparités. Des simulations numériques complètent les études mathématiques menées dans cette partie. Le Chapitre 6 sera consacré à l'étude du modèle JA, puis le Chapitre 7 à celle du modèle JASIG. Finalement, dans le Chapitre 8 nous introduirons puis étudierons un modèle multi-sites, c'est à dire avec structuration discrète en espace, destiné à étudier l'influence que peut avoir la structuration en colonies des campagnols roussâtres, avec migration des juvéniles, sur la persistance du virus dans certaines régions.

Enfin, dans la quatrième partie, nous étudierons de nouveau des systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles non linéaires puisque nous nous intéresserons comme dans la deuxième partie à des modèles avec plusieurs variables structurantes. En plus de la structuration continue en âge chronologique, nous considèrerons dans cette partie une structuration continue en espace afin de modéliser la dispersion des individus. Nous obtiendrons ainsi des systèmes de réaction-diffusion avec structuration continue en âge. De plus une hétérogénéité spatiale sera considérée afin de correspondre aux colonies de la population hôte et à la différence de dispersion entre juvéniles et adultes. Le Chapitre 9 sera consacré à l'étude du modèle JA et présentera des résultats d'existence globale, d'unicité et de majoration uniforme des solutions. Le même type d'étude sera faite dans le Chapitre 10 pour les modèles JASIG et JASIGH. Pour ces modèles, nous considèrerons en outre une structuration discrète en âge de l'infection.

En annexe se trouvera un article (en anglais) de Fitzgibbon, Langlais, Morgan, Pontier et Wolf présentant des résultats d'existence globale et de comportement asymptotique en temps pour un modèle dépendant en âge concernant un système virus leucémogène félin (FeLV) - Chat, voir [32].

Table des matières

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction générale | 3 |
| | |
| Partie I Présentation du problème biologique, épidémiologique et construction de modèles mathématiques déterministes | 15 |
| Introduction | 17 |
| | |
| 1 Le système Puumala - Campagnol roussâtre - Homme | 19 |
| 1.1 Une maladie émergente | 19 |
| 1.1.1 Généralités sur les hantavirus | 19 |
| 1.1.2 Le hantavirus Puumala | 20 |
| 1.2 Structure et dynamique des populations de campagnols roussâtres . . . | 21 |
| 1.2.1 Les dynamiques démographiques observées | 21 |
| 1.2.2 La structuration sociale et spatiale | 22 |
| 1.3 Circulation du virus | 23 |
| 1.3.1 Etat de l'infection humaine | 23 |
| 1.3.2 Propagation dans les populations de campagnols roussâtres . . . | 24 |
| 1.4 Bilan des principales caractéristiques à retenir | 26 |
| | |
| 2 Description des modèles utilisés | 27 |
| 2.1 Le modèle Juvéniles-Adultes (JA) | 27 |
| 2.1.1 Historique des modèles démographiques en dynamique des populations | 28 |
| 2.1.1.1 La croissance exponentielle ou dynamique malthusienne | 28 |
| 2.1.1.2 La croissance logistique : modèles densité-dépendants . | 28 |
| 2.1.2 Structuration des modèles | 29 |
| 2.1.2.1 Structuration continue en âge | 30 |

| | | |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------|
| 2.1.2.2 | Structuration continue en espace | 31 |
| 2.1.3 | Elaboration du modèle JA | 33 |
| 2.1.4 | Modèle générique JA | 35 |
| 2.2 | Le modèle JASIG | 36 |
| 2.2.1 | Le modèle SEIRS | 36 |
| 2.2.2 | Détermination de l'incidence | 38 |
| 2.2.3 | Elaboration du modèle JASIG | 39 |
| 2.2.4 | Modèle générique JASIG | 42 |
| 2.3 | Le modèle JASIGH | 43 |
| Conclusion et perspectives | | 47 |
| | | |
| Partie II Modèles avec structuration en âges continue | | 49 |
| | | |
| Introduction | | 51 |
| | | |
| 3 | Etude du modèle JA | 53 |
| 3.1 | Mise en place du modèle | 53 |
| 3.2 | Notations et hypothèses | 54 |
| 3.3 | Résultats | 55 |
| 3.4 | Preuve du Théorème 3.3.1 | 56 |
| 3.4.1 | Résultats préliminaires | 56 |
| 3.4.2 | 1ère Etape | 59 |
| 3.4.3 | 2ème étape | 62 |
| 3.4.4 | Fin de la démonstration | 69 |
| | | |
| 4 | Etude du modèle JASIG | 71 |
| 4.1 | Mise en place du modèle | 71 |
| 4.2 | Notations et hypothèses | 73 |
| 4.3 | Résultats | 75 |
| 4.4 | Preuve du Théorème 4.3.1 | 76 |
| 4.4.1 | Résultats préliminaires | 76 |
| 4.4.2 | 1ère Etape | 78 |
| 4.4.3 | 2ème étape | 84 |
| 4.4.4 | Fin de la démonstration | 98 |

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------|------------|
| 5 | Modèle discret et simulations numériques | 99 |
| 5.1 | Modèle discret sans virus | 99 |
| 5.1.1 | Modélisation | 99 |
| 5.1.2 | Resultats | 101 |
| 5.2 | Modèle discret avec virus | 103 |
| 5.3 | Passage du modèle discret au modèle continu | 107 |
| 5.4 | Simulations numériques | 108 |
| | Conclusion et perspectives | 113 |

Partie III Modèles avec 2 classes d'âge, à coefficients constants et/ou périodiques en temps, à structuration discrète en espace 115

Introduction 117

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| 6 | Etude du modèle JA | 119 |
| 6.1 | Mise en place du modèle | 119 |
| 6.2 | Cas de coefficients constants | 120 |
| 6.2.1 | Existence d'un état stationnaire non trivial | 120 |
| 6.2.2 | Permanence | 124 |
| 6.2.3 | Stabilité de l'état non trivial | 126 |
| 6.3 | Cas à coefficients périodiques | 128 |
| 6.4 | Simulations numériques | 129 |
| 7 | Etude du modèle JASIG | 133 |
| 7.1 | Mise en place du modèle | 133 |
| 7.2 | Cas de coefficients constants | 134 |
| 7.2.1 | Stabilité de l'état trivial | 134 |
| 7.2.2 | Etude des états stationnaires semi-triviaux et non triviaux | 136 |
| 7.3 | Cas à coefficients périodiques | 141 |
| 7.4 | Simulations numériques | 142 |
| 8 | Etude du modèle multi-sites | 147 |
| 8.1 | Le modèle pour n patchs | 147 |
| 8.2 | Modèle multi-sites à coefficients constants | 148 |
| 8.3 | Modèle multi-sites à coefficients périodiques | 152 |
| 8.4 | Simulations numériques | 152 |

| | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.4.1 | Cas courants | 152 |
| 8.4.2 | Cas particuliers | 154 |
| Conclusion et perspectives | | 159 |
| | | |
| Partie IV Modèle avec structurations en âge chronologique et en espace continues | | 161 |
| | | |
| Introduction | | 163 |
| | | |
| 9 | Etude du modèle JA structuré en âge et en espace | 165 |
| 9.1 | Cadre de la structuration spatiale | 165 |
| 9.2 | Mise en place du modèle | 166 |
| 9.3 | Hypothèses | 167 |
| 9.4 | Résolution de problèmes auxiliaires | 169 |
| 9.4.1 | Premier problème auxiliaire | 169 |
| 9.4.2 | Second problème auxiliaire | 173 |
| 9.5 | Résolution du cas général | 173 |
| 9.6 | Majoration uniforme des solutions | 180 |
| | | |
| 10 | Etude des modèle JASIG et JASIGH structurés en âge et en espace | 189 |
| 10.1 | Le modèle JASIG | 189 |
| 10.2 | Hypothèses et notations | 192 |
| 10.3 | Résultat d'existence globale | 193 |
| 10.4 | Majoration uniforme des solutions | 198 |
| 10.5 | Le modèle JASIGH | 199 |
| | | |
| Conclusion et perspectives | | 201 |

Annexe : An age-dependent model describing the spread of pan-

leucopenia virus within feline populations 203

Conclusion générale 217

Première partie

**Présentation du problème biologique,
épidémiologique et construction de
modèles mathématiques déterministes**

Introduction

Le campagnol roussâtre (*Clethrionomys glareolus*) est un petit rongeur forestier présent à travers toute l'Europe. Si les choses avaient été différentes, il aurait pu vivre tranquillement comme tant d'autres espèces de petits rongeurs, intéressant seulement quelque rares spécialistes dans le monde et dérangé uniquement par les renards, furets et autres chouettes hulottes. Mais pour son malheur, le campagnol roussâtre représente un danger mortel pour l'homme... Pas de quoi en avoir peur tout de même car ce n'est pas un dangereux prédateur mais juste l'espèce réservoir du Hantavirus Puumala. Ce virus ne menace pas le campagnol roussâtre car il n'a aucun effet apparent sur lui mais il peut se transmettre indirectement à l'Homme chez qui il cause des troubles pouvant aller dans de rares cas jusqu'à la mort. Nul besoin de désertier pour autant nos belles forêts car pour ne parler que de la France, seuls quelques travailleurs ruraux et agricoles ont été touché par le Hantavirus et la mortalité reste très faible (moins de 1%). Toutefois, ceci est suffisant pour attirer sur le campagnol roussâtre de nombreux regards afin de mieux comprendre, et donc éventuellement combattre la propagation de cette maladie émergente.

Le Chapitre 1 est consacré à la présentation sous ses aspects biologiques du problème qui motive la suite de ce travail : Celui du système Hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre - Homme, avec transmission indirecte. Il se termine avec une liste des principales caractéristiques du système considérées dans la suite.

Dans le Chapitre 2, nous construisons des modèles mathématiques. En partant des premiers modèles étudiés en dynamique des populations par Graunt en 1662 [39], puis Euler [22] et Bernoulli [6] en 1760, puis en incorporant les données et variables dont nous souhaitons tenir compte, nous construisons tout d'abord un modèle Juvéniles - Adultes destiné à reproduire la dynamique d'un hôte, en l'absence de virus. Ceci est un préliminaire nécessaire pour ensuite établir à l'aide de modèles « classiques » de propagation d'épidémies un modèle épidémique, que nous avons baptisé modèle JASIG, pour étudier la propagation d'un virus dans les populations hôtes. En nous inspirant notamment des travaux de Sauvage [74] et de Fitzgibbon, Langlais et Morgan [31], nous établissons enfin un modèle, baptisé modèle JASIGH, prenant également en compte les interactions avec l'Homme.

Chapitre 1

Le système Puumala - Campagnol roussâtre - Homme

Dans ce chapitre, nous présentons les principales caractéristiques biologiques et épidémiologiques du système Puumala - Campagnol roussâtre - Homme qui nous intéressera par la suite. Nous commençons par décrire comment ce système a émergé pour devenir un sujet conduisant à une étude pluridisciplinaire, puis nous verrons quelles sont les principales caractéristiques des populations de campagnols roussâtres, avant de nous intéresser à la façon dont se propage le hantavirus Puumala, tant pour ce qui est de la propagation au sein des populations hôtes, que pour la transmission à l'Homme (voir Sauvage [74] et les références incluses).

1.1 Une maladie émergente

1.1.1 Généralités sur les hantavirus

Appartenant à la famille des *Bunyaviridae* les hantavirus ont tous pour hôte principal une espèce de rongeur, chaque hantavirus semblant être spécifique à une espèce donnée (voir Schmaljohn & Hjelle [78]). Ils sont présents depuis plusieurs milliers d'années, et répandus chez de nombreux rongeurs, mais on ne les a identifiés qu'il y a à peine un demi siècle, lorsque le risque pour la santé humaine s'est fait sentir. Lors de la guerre de Corée (1950-1953), il y eut trois cent décès pour trois mille cas déclarés dans les troupes des Nations Unies (voir Sauvage [74]). La cause de ces décès était une nouvelle souche virale baptisée virus Hantaan, du nom d'une rivière coréenne proche du premier lieu d'infection recensé. De là vient également par extension le nom de hantavirus. On a observé depuis de nouvelles régions affectées par des cas humains de hantaviruses et de nouvelles espèces de hantavirus (voir Schmaljohn & Hjelle [78]). En particulier le virus Sin Nombre, premier hantavirus répertorié sur le sol américain a

causé la mort de plusieurs dizaines de personnes aux Etats-Unis depuis une épidémie de syndromes pulmonaires aigus en 1993 (voir Calisher et al. [13], Grady [38]). L'Europe est, elle, touchée par quatre souches de hantavirus connues (voir McCaughey & Hart [64]).

On estime entre 100 000 et 200 000 le nombre annuel de cas humains touchés par les différentes souches de hantavirus du continent Eurasiatique, essentiellement en Chine. Ces hantavirus sont responsables de la FHRS, fièvre hémorragique à syndrome rénal, dont la mortalité varie de 0,1% à 20% selon les souches. Pour ce qui est des souches du continent américain, elles provoquent l'hantavirose à syndrome pulmonaire, HPS, mortelle dans 40% à 60% des cas humains (voir Schmaljohn et Hjelle [78]).

1.1.2 Le hantavirus Puumala

Le hantavirus auquel nous nous intéressons plus particulièrement est le hantavirus Puumala, présent en Europe de l'Ouest, et responsable de la néphropathie épidémique (NE), maladie représentant la forme la moins sévère de fièvre hémorragique à syndrome rénal, mais néanmoins la plus répandue en Europe occidentale. Si le hantavirus Puumala n'a été identifié que relativement récemment (1980), les symptômes de la néphropathie épidémique ont été décrits dans les années trente en Scandinavie et également dans d'autres régions, notamment dans les années 60 (voir Sauvage [74]).

Bien que n'étant pas une pathologie très préoccupante en France, du fait du peu de cas (quelques dizaines par an en France, environ 10 000 pour l'Europe entière) et du faible taux de mortalité (0,1%) observé (voir Schmaljohn et Hjelle [78]), l'étude de l'émergence de ce virus dans notre pays est importante pour plusieurs raisons. Tout d'abord, son incidence et son aire de répartition semblent être croissantes à l'échelle européenne ces dernières années. La France n'était pas touchée il y a encore un quart de siècle, et nous sommes actuellement dans une position charnière : Alors que le campagnol roussâtre, réservoir principal du hantavirus Puumala est présent partout en France, la limite Sud-Ouest de la zone d'endémie se situe dans le Nord-Est du pays (voir figure Fig. 1.1.1). Nous cumulons donc la présence de zones endémiques, de zones indemnes et de zones de cas sporadiques, ce qui peut être utile pour l'étude des mécanismes d'émergence (voir Sauvage [74]). De plus, le faible taux de mortalité permet des études sans mesures de sécurité trop contraignantes, alors que des mesures drastiques s'avèreraient obligatoires pour des études portant sur des souches plus dangereuses. Néanmoins, les informations obtenues doivent pouvoir se généraliser aux autres hantavirus. Pour ces différentes raisons, la circulation du hantavirus Puumala a été très étudiée en France, souvent de manière pluridisciplinaire : Sauvage [74], Sauvage et al. [75] [76] [77], et aussi [91] [87] [88].



FIG. 1.1.1: La zone d'endémie du hantavirus Puumala en France

1.2 Structure et dynamique des populations de campagnols roussâtres

Une première étape pour étudier l'émergence d'un parasite est de connaître comment évolue et comment se comporte la population réservoir du parasite. Chaque caractéristique de l'organisation sociale de la population réservoir peut avoir un impact plus ou moins important sur la transmission du virus, dans cette population d'une part, mais également à l'Homme d'autre part. Dans le cas du hantavirus Puumala, l'espèce réservoir principale est le campagnol roussâtre, *Clethrionomys glareolus*, petit rongeur forestier présent à travers toute l'Europe appartenant à la famille des *Muridae*. Nous allons détailler ici la structuration géographique des populations de campagnols roussâtres, mais également leur structuration sociale en fonction de la période de l'année. Voir Sauvage [74], Sauvage et al. [77], Yoccoz et al. [89] [90], ou encore Artois et Paillat [4].

1.2.1 Les dynamiques démographiques observées

La dynamique démographique des populations de campagnols roussâtres varie grandement selon leur localisation géographique. Les populations nordiques - de la Scandinavie aux Ardennes - présentent des dynamiques pluriannuelles plus ou moins cycliques avec des périodes de 3 à 4 ans, et des densités de populations variant grandement non seulement au cours d'une année, mais également d'une année à l'autre lors du cycle (voir Yoccoz et al. [89]). De plus l'amplitude des variations et la régularité des cycles décroissent selon un vecteur nord-sud. Ainsi, alors qu'il existe un rapport d'un facteur 500 à 100 entre les densités les plus élevées et les plus faibles atteintes en Scandinavie, ce facteur n'est plus que de quelques dizaines en Belgique et dans les Ardennes. Parmi les explications proposées pour expliquer cette cyclicité (prédation,

variations de la disponibilité des ressources alimentaires,...), aucun consensus n'est établi pour le moment (voir Yoccoz et al. [90]). La dynamique typique observable est du type de celle présentée dans la figure Fig. 1.2.1. Les populations méridionales sont beaucoup plus stables, avec une variation annuelle basée sur les saisons de reproduction : l'espérance de vie du campagnol est suffisamment courte (moins d'un an, voir Tkadlek et Zejda [81]) pour que la période hivernale, sans reproduction, fasse diminuer la population.

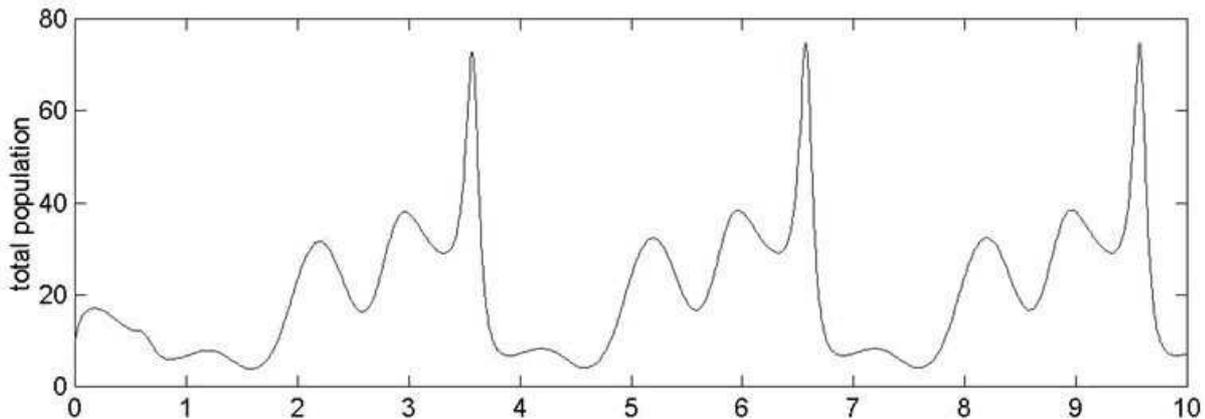


FIG. 1.2.1: La dynamique typique des populations de campagnols roussâtres

1.2.2 La structuration sociale et spatiale

Au cours d'une année le comportement social des campagnols varie grandement, notamment en raison de la différence entre la saison de reproduction et la période hivernale (voir Verhagen et al. [83]).

Lors de la saison de reproduction, du mois de mars au mois d'octobre environ, les populations de campagnols roussâtres sont organisées en petites colonies de reproduction, pouvant comporter une douzaine d'individus (voir Bujalska [9] [10]). Jusqu'à une demi douzaine de femelles défendent chacune leurs propres territoires respectifs, mais les territoires de femelles d'une même colonie peuvent se chevaucher dans certains cas, auquel cas elles s'évitent au lieu de s'affronter (donc il n'y a pas contact). Chaque femelle peut avoir 3 ou 4 portées de 4 à 6 petits en un été. Jusqu'à une demi douzaine de mâles matures sont tolérants entre eux et peuvent se déplacer sur l'ensemble du territoire de la colonie, mais ils rejettent tout mâle appartenant à un autre clan. Cette structure favorise un effet de régulation de la population reproductrice. Les jeunes sevrés peuvent entamer leur cycle de reproduction dès l'âge de quatre à huit semaines (voir Gliwicz [37]), mais ils doivent attendre à la périphérie du territoire

maternel qu'un territoire se libère dans la colonie, ce qui conduit à une maturation sexuelle retardée. Une autre alternative pour ces jeunes est de se déplacer vers d'autres territoires moins densément peuplés où ils pourront se reproduire, ce qui induit donc un phénomène de dispersion (voir Bujalska [9] [10]). Le choix de disperser ou de retarder la maturation sexuelle dépend fortement de la période de l'année : plus on avance dans la saison, moins la dispersion est privilégiée car la probabilité de trouver un territoire libre et la probabilité de survie de jeunes qui naîtraient diminuent. Le taux de maturation sexuelle peut ainsi varier de 1% à 100% et dépend fortement de la densité d'individus reproducteurs (voir également Mazurkiewicz [67], Ishibashi et al. [53] ou Verhagen et al. [83]).

Lors de la période hivernale, la structuration sociale change. Un phénomène d'agrégation des campagnols dans un même terrier a lieu, favorisé par le fait que très peu de jeunes de l'automne ont acquis leur maturité sexuelle (voir Artois et Paillat [4] ou Bujalska [10]). Lorsque les conditions sont favorables, il y a possibilité d'une reproduction hivernale, avec une structure mixte de femelles s'établissant autour du terrier partagé. Ceci est observé l'hiver précédent les grands pics de population.

1.3 Circulation du virus

Nous avons vu plus haut que les pays les plus touchés par les hantavirus, en terme de cas humains, sont la Chine et la Russie, où l'incidence (i.e. le nombre de cas) est de 30 à 168 cas annuels pour 100 000 habitants. Pour ce qui est de la néphropathie épidémique, l'incidence varie en Scandinavie de 1,3 à 20 cas pour 100 000 habitants suivant qu'il s'agit d'une année de creux ou de pic de densité des populations de campagnols roussâtres. Nous allons voir ici, quel est l'état actuel de l'infection humaine, et, puisque les deux choses sont liées, comment le virus se propage dans les populations de campagnols roussâtres. Voir Sauvage [74] et les références incluses.

1.3.1 Etat de l'infection humaine

La transmission des hantavirus à l'Homme se fait quasi exclusivement par inhalation d'aérosols contaminés par des excréta séchés de rongeurs infectés. Quelques rares cas de contamination par morsure ou par transmission directe entre humains ont peut-être eu lieu, mais il est admis que ces cas ne sont pas significatifs. De ce fait, les personnes les plus exposées sont celles qui sont amenées à être en contact étroit avec le rongeur réservoir et/ou ses déjections. Les rongeurs hébergeant les hantavirus étant essentiellement des espèces rurales et forestières, la plupart des cas observés le sont parmi les professions suivantes : bûcherons, ouvriers du bois ou du nettoyage, et agriculteurs.

Les symptômes qui apparaissent environ trois semaines après l'exposition se traduisent par un soudain accès de fièvre, des maux de têtes, des courbatures et des problèmes gastro-intestinaux. Des manifestations hémorragiques sont possibles, ainsi que des complications sévères pouvant prendre une forme pulmonaire proche du HPS qui sont heureusement très rares mais peuvent conduire à la mort du patient. A ce jour, aucun traitement spécifique ou vaccin n'est connu contre le hantavirus Puumala.

On observe une cyclicité de trois ou quatre ans des occurrences d'épidémies humaines dans la plupart des régions infectées, et il est important de noter que cela semble être en relation avec la périodicité des pics de densité des populations de campagnols roussâtres, particulièrement dans le nord de l'Europe. De même, dans les régions plus au sud, les cas humains apparaissent lors de ces pics de densité. Enfin, plus on descend vers le sud, plus les populations de campagnols roussâtres sont stables, et moins il y a de cas humains. D'ailleurs la pathologie humaine n'est endémique en France que dans le quart nord-est du pays (voir figure Fig. 1.1.1 précédemment), alors que le campagnol roussâtre est présent sur tout le territoire métropolitain.

1.3.2 Propagation dans les populations de campagnols roussâtres

La structure des populations de campagnols roussâtres joue naturellement un rôle important dans la fréquence et la nature des contacts et donc dans la propagation du virus puisque contrairement à ce qui est vrai pour l'Homme, la transmission de campagnol à campagnol est possible, notamment par la salive (voir Verhagen et al. [82]). C'est ce que l'on appelle la transmission directe, c'est à dire la contamination d'un individu sain par contact direct avec un individu infecté. Mais il apparaît que comme pour la transmission à l'Homme, la transmission par inhalation d'aérosols infectés est également possible pour la transmission entre campagnols roussâtres, et elle semble même jouer un rôle important dans la persistance du virus (voir Sauvage [74] ou Berthier et al. [7] pour un virus concernant les chats). En effet, si la propagation par contact direct est efficace lorsque la densité de population est élevée, elle l'est beaucoup moins lorsque la population est faible car, alors, le nombre de contacts diminue grandement. Néanmoins, dans ce cas, il est toujours possible pour un individu sain d'être infecté par contact avec l'environnement contaminé précédemment par un individu infecté. Ce mode de transmission est appelé transmission indirecte. Les deux modes de transmission, directe et indirecte, interviennent tous les deux pour la propagation du hantavirus.

Ainsi par exemple nous avons vu que lors de la saison de reproduction, des clans de mâles rivaux se forment. Les mâles de clans différents vont soit s'éviter, soit se

battre s'ils se rencontrent auquel cas il y a contact direct et donc risque de contamination. Les femelles vont faire de même avec les autres femelles. De plus, les individus d'une colonie vont marquer leur territoire avec leurs urines, ce qui peut entraîner une transmission indirecte lors du passage d'autres individus, appartenant ou non à la colonie, du fait que le campagnol comme tout animal marquant son territoire a tendance à « lire » le marquage de ses congénères. Les jeunes qui dispersent sont eux une bonne occasion pour le virus de diffuser d'une population à une autre et donc d'infecter de nouvelles zones. Lors de la période hivernale, beaucoup d'individus se regroupent dans le même terrier, ce qui favorise naturellement les contacts directs. Puis lorsque la saison de reproduction revient, les adultes matures vont partir chercher des territoires où se reproduire, beaucoup ayant été laissés vaquants par les adultes de l'année précédente qui ont peu de chances de survivre à l'hiver. Il y a là encore un risque pour des individus sains de se faire contaminer par l'environnement, dans lequel le virus semble pouvoir rester quelques temps (voir Sauvage [74]).

La nature du hantavirus entre également en jeu dans sa propagation. Dans le cas du hantavirus Puumala, après une courte période d'incubation, le virus est excrété de façon beaucoup plus abondante lors du premier mois d'infection que durant la phase chronique qui prévaut le reste de la vie du rongeur (voir Verhagen et al. [82]). Les contacts pendant cette période sont donc beaucoup plus infectieux. Il semble aussi que le hantavirus Puumala soit excrété beaucoup plus abondamment dans la salive lors de la phase hivernale, alors qu'il est davantage excrété dans les urines lors de la phase de reproduction. Cela favorise grandement sa transmission car lors la phase de reproduction, les individus marquent fréquemment leurs territoires et s'évitent, alors que lors de la phase hivernale, ils ont beaucoup plus de contacts directs mais préfèrent généralement aller uriner loin du terrier, afin de limiter les risques d'attirer les prédateurs capables d'anéantir tout le terrier.

Pour ce qui est de l'impact du hantavirus sur les campagnols roussâtres, toutes les études montrent qu'il est nul. C'est à dire que le virus n'influence pas le comportement des campagnols infectés, qui ont la même espérance de vie, la même maturation et la même fécondité que leurs congénères sains (voir Verhagen et al. [82]). Il n'influence donc pas non plus la dynamique des rongeurs, même en cas d'infection chronique pour une grande partie de la population. Par ailleurs, les campagnols infectés le restent toute leur vie (voir Schmaljohn et Hjelle [78]) et il n'y a pas de transmission verticale du virus (voir Escutenaire et al. [21]), c'est à dire que les jeunes d'une mère infectée sont sains à la naissance. Ils acquièrent même une immunité transitoire via les anticorps maternels.

1.4 Bilan des principales caractéristiques à retenir

Nous retiendrons principalement quatre caractéristiques du système Hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre dans la suite de ce travail.

La première caractéristique est que les dynamiques observées peuvent être de quasi constantes à très oscillantes. Cette caractéristique est plus particulièrement étudiée dans la partie III.

La seconde caractéristique, que nous nous efforcerons d'intégrer dans tous nos modèles est la dépendance de la maturation sexuelle des juvéniles en la densité d'adultes. Cette dépendance peut-être prise en compte en prenant un taux de maturation décroissant en fonction de la densité d'adultes ou en intégrant des termes de dispersion des juvéniles sous la pression des adultes.

Le caractère bénin du hantavirus pour la population hôte (campagnols roussâtre) sera aussi pris en compte dans tous nos modèles. Ainsi, les paramètres démographiques seront identiques pour les individus sains et infectés.

Enfin nous considérerons tout au long de ce travail deux modes de transmission du virus : Transmsission directe par les contacts entre individus sains et infectieux ; et transmission indirecte via la contamination de l'environnement par les individus infectieux.

Chapitre 2

Description des modèles utilisés

Dans ce chapitre, nous élaborons à partir de modèles classiques démographiques et de propagation d'épidémies, plusieurs modèles prenant en compte au maximum les caractéristiques du système Puumala - Campagnol roussâtre - Homme que nous avons vues dans le Chapitre 1. Toute la difficulté est de savoir quels éléments prendre en considération, et lesquels on peut occulter pour avoir le meilleur modèle possible, tout en sachant gérer sa complexité.

Cela nous conduira principalement aux trois modèles suivants : un modèle purement démographique Juvéniles-Adulte pour modéliser la démographie de la population hôte ; un modèle épidémique que nous appellerons JASIG (Juvéniles, Adultes, Sains, Infectés et **G** pour la proportion d'environnement contaminé) prenant en compte la propagation d'un virus dans une population hôte, avec transmission directe et indirecte du virus ; et enfin le modèle JASIGH qui rajoute au modèle précédent une transmission à l'Homme. Bien que l'ensemble des modèles décrits ici puissent être dérivés en modèles discrets et/ou stochastiques, nous avons restreint notre étude à des modèles déterministes continus. C'est donc uniquement l'élaboration de ceux-ci que nous développons dans ce chapitre.

2.1 Le modèle Juvéniles-Adultes (JA)

Une première étape pour étudier la propagation d'un parasite dans une population hôte est d'étudier la dynamique de la population hôte. Notons que lorsque le virus n'a pas d'impact sur la démographie du campagnol, la dynamique globale sera la même avec ou sans le virus. Nous commençons donc par mettre en place un modèle démographique (noté modèle JA), tenant compte de la compétition entre Juvéniles et Adultes qui est une caractéristique principale du système Hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre qui nous motive.

2.1.1 Historique des modèles démographiques en dynamique des populations

Nous nous intéressons ici à l'évolution dans le temps, représenté par la variable $t \geq 0$, d'une population de densité $P(t)$. Naturellement, s'agissant de populations, les modèles se doivent de respecter la positivité ; c'est à dire que l'évolution d'une population positive au temps initial $t = 0$ se doit d'être positive en tout temps d'existence. Les premiers modèles ont été proposés par Graunt en 1662 [39], puis Euler [22] et Bernoulli [6] en 1760 qui présenta un modèle pour étudier la mortalité causée par la petite vérole. Nous présentons ici les deux types de croissance communément utilisées, même si d'autres peuvent occasionnellement être utilisées.

2.1.1.1 La croissance exponentielle ou dynamique malthusienne

C'est le modèle le plus simple basé sur l'idée proposée en 1798 par Malthus [65] : « Si elle n'est pas freinée, une population croît géométriquement ». En introduisant un taux de croissance λ constant, le modèle malthusien continu s'écrit alors :

$$\begin{cases} P'(t) = \lambda \cdot P(t) & \text{pour } t > 0 \\ P(0) = P_0 > 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Cette équation se résoud facilement en $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$ ce qui permet de conclure pour la dynamique de la population P :

- $P(t)$ croît vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ si $\lambda > 0$,
- $P(t) = P_0 \forall t$ si $\lambda = 0$,
- $P(t)$ décroît vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ si $\lambda < 0$.

On obtient cette équation en supposant que la population se reproduit avec un taux de fertilité b et meurt avec un taux de mortalité m , en posant $\lambda = b - m$.

2.1.1.2 La croissance logistique : modèles densité-dépendants

Une des limites du modèle précédent vient du fait que cela suppose des ressources infinies puisque la population, si elle est viable et non constante, croît infiniment sans qu'aucun phénomène de régulation n'intervienne. L'idée introduite par Verhulst [84] en 1838 est celle de la compétition intra-spécifique. Cela signifie que les individus vont être en compétition (pour la nourriture ou les territoires par exemple) ce qui va réguler la population lorsque celle-ci deviendra trop importante. Il s'agit d'un modèle dit « densité-dépendant » qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} P'(t) = (\lambda - k P(t)) \cdot P(t) & \text{pour } t > 0 \\ P(0) = P_0 > 0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

où $\lambda = b - m$ est toujours le taux de croissance ; $k > 0$ et $m + kP$ est le taux de mortalité densité dépendant. En notant $K = \frac{\lambda}{k} = \frac{b - m}{k}$, on a le résultat d'évolution suivant :

Proposition 2.1.1

Considérant l'équation 2.1.2, alors :

- Si $\lambda \leq 0$, alors $P(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$,
- Si $\lambda > 0$, alors $P(t) \rightarrow K$ quand $t \rightarrow +\infty$,
- De plus, $P(t) = K$ est une solution stationnaire.

Preuve. L'équation 2.1.2 peut se résoudre explicitement pour aboutir à la solution suivante :

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}, \quad t \geq 0. \quad (2.1.3)$$

Le résultat est alors immédiat. ■

En résumé, si une population est viable, elle tend vers un état d'équilibre K , qui est appelé la **capacité d'accueil** du milieu, et qui représente donc la densité d'individus qui peuvent vivre simultanément sans nuire de la compétition intra-spécifique.

On peut généraliser cette notion de croissance logistique densité-dépendante à des formes un peu plus complexes. On peut par exemple considérer un taux de fertilité $b(P)$ et de mortalité $m(P)$ dépendant de la densité de population P et il y aura un « effet logistique » si par exemple le taux de fertilité est borné par une constante b_∞ et si $m(P)$ vérifie $m(P) \geq b_\infty$ pour P plus grand qu'un \bar{P} donné. On ne considèrera pas d'effet Allee dans ce travail (voir Hilker et al. [49] ou Courchamp et al. [17])

2.1.2 Structuration des modèles

Il est bien sûr possible, et même couramment utilisé, de considérer des coefficients dépendants du temps, afin par exemple de prendre en compte le fait que la mortalité ne sera pas la même toute l'année, mais sera plus grande en hiver à cause du froid, ou en été car il y a plus de prédateurs. Mais pour plus de réalisme, on peut aussi considérer qu'il existe également une dépendance en d'autres paramètres, comme par exemple l'âge des individus, leur taille ou encore leur localisation. De nombreux ouvrages traitent de la structuration des modèles en dynamique des populations, citons parmi d'autres Anița [3], Cushing [18], Iannelli [52] et Webb [86]. Pour nos modèles, nous aurons à considérer des structurations en âges et en espace et nous allons expliquer ici comment cela se passe sur des populations « simples ».

2.1.2.1 Structuration continue en âge

Nous considérons ici l'âge comme une variable structurante, au même titre que le temps. Cette idée est apparue dans la première moitié du XXème siècle et ce que nous présentons est une équation basée sur l'idée de Kermack et McKendrick [52] [86]. Les travaux originaux de Kermack et McKendrick contenaient des modèles incluant le temps depuis l'infection [12] [54], dont nous reparlerons dans la section suivante.

Pour la structuration continue en âge, nous considérons donc une densité de population $P(t, a)$ dépendant du temps $t \geq 0$ et de l'âge $a \in [0, a_+]$ où $0 < a_+ \leq +\infty$ est l'âge maximal que peuvent atteindre les individus. Nous considérons ici un taux de mortalité $\mu(a)$ dépendant uniquement de l'âge, bien que pour des modèles plus évolués il puisse dépendre également du temps et de la densité de population. De même on considère un taux de fertilité naturelle $\beta(a)$ dépendant uniquement de l'âge. L'âge s'écoulant à la même vitesse que le temps, l'évolution de la population est alors donnée par le système suivant, avec la notation $\partial_t = \partial/\partial t$:

$$\begin{cases} \partial_t P(t, a) + \partial_a P(t, a) = -\mu(a) P(t, a) & \text{pour } t > 0 \text{ et } 0 < a < a_+ \\ P(0, a) = P_0(a) \geq 0 & \text{pour } 0 < a < a_+ \\ P(t, 0) = \int_0^{a_+} \beta(a) P(t, a) da & \text{pour } t > 0. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

La dernière équation donnant la condition en $a = 0$ est appelée **équation de renouvellement**. Pour ce problème hyperbolique simple, les résultats suivants sont connus (Voir Hoppensteadt [51], Webb [86], Iannelli [52] ou Anița [3] par exemple) :

Proposition 2.1.2

Considérons le système (2.1.4) avec les hypothèses que $\beta, \mu \in C([0, a_+))$, à valeurs positives et $P_0 \in L^\infty(0, a_+)$ est aussi à valeurs positives. Alors, pour tout $T > 0$:

- Il existe une unique solution globale $P \in L^\infty((0, T) \times (0, a_+))$ positive.
- Nous avons le résultat de comparaison suivant : Si P_1 et P_2 sont solutions du système 2.1.4 avec $0 \leq P_{01} \leq P_{02}$ pp, $0 \leq \beta_1(a) \leq \beta_2(a)$ pp et $0 \leq \mu_2(a) \leq \mu_1(a)$ pp, alors on a $P_1(t, a) \leq P_2(t, a)$ pp.
- On a continuité sur $t = a$ si et seulement si $P_0(0) = \int_0^{a_+} \beta(a) P_0(a) da$.
- On a $\lim_{a \rightarrow a_+} P(t, a) = 0 \Leftrightarrow \mu \notin L^1(0, a_+)$.

La démonstration se fait en utilisant la méthode des caractéristiques sur un modèle auxiliaire, puis une méthode de point fixe. Nous utiliserons cette méthode, dans un cadre bien plus complexe dans les parties II et IV.

Dans le cas énoncé ci-dessus où β et μ sont indépendants du temps et de la population totale, on peut de plus expliciter les solutions stationnaires du modèle (2.1.4), en imposant les hypothèses biologiquement raisonnables suivantes (voir Naulin [71] où les références citées plus haut) :

HYP 2.1

- $\mu, \beta : [0, a_{\dagger}[\rightarrow [0, +\infty[$ sont mesurables,
- $0 \leq \beta(a) \leq \beta_{\infty} < +\infty, \forall a > 0; \int_0^{a_{\dagger}} \beta(a) da < +\infty$ si $a_{\dagger} = +\infty$,
- si $a_{\dagger} < +\infty$, alors $\mu \in L_{loc}^{\infty}([0, a_{\dagger}))$ et $\int_0^{a_{\dagger}} \mu(a) da = +\infty$,
- si $a_{\dagger} = +\infty$, alors $\mu \in L^{\infty}(0, +\infty)$ et $\int_0^{\infty} \mu(a) da = +\infty$.

Ces hypothèses signifient qu'un individu, au cours de vie, donnera naissance à un nombre fini d'individus :

$$\int_0^{a_{\dagger}} \beta(a) \pi(a) da < +\infty \quad \text{avec} \quad \pi(a) = e^{\int_0^a \mu(\alpha) d\alpha},$$

$\pi(a)$ représentant la probabilité d'un individu de survivre jusqu'à l'âge a .

Une solution stationnaire de (2.1.4) est alors une solution de :

$$\begin{cases} d_a P(a) = -\mu(a) P(a) & \text{pour } 0 < a < a_{\dagger} \\ P(0) = \int_0^{a_{\dagger}} \beta(a) P(a) da \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Une étude rapide donne le résultat suivant :

Proposition 2.1.3

Sous l'hypothèse Hyp 2.1, soit $P \equiv 0$ est la seule solution possible de (2.1.5), soit il existe une infinité de solutions non triviales positives ou nulles ssi $\int_0^{a_{\dagger}} \beta(a) \pi(a) da = 1$

Un résultat similaire peut-être obtenu lorsque β et μ sont densité-dépendants (voir Naulin [71]).

2.1.2.2 Structuration continue en espace

Nous allons cette fois considérer une variable structurante en espace, que nous noterons $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$ et Ω ouvert à frontière $\partial\Omega$ régulière. En pratique, dans le cas qui nous intéresse, celui d'une population terrestre de rongeurs nous aurons $N = 2$. Les modèles structurés en espace en dynamique des populations conduisent généralement à des systèmes de réaction-diffusion. Voir par exemple Smoller [79], Henry [44],

Rothe [73] ou dans des articles de Hollis et al. [50], Kubo et Langlais [59] [60], Morgan [68] [69], Murray [70], Capasso [14] ou Fitzgibbon et al. [24] [26]-[31]. Nous présentons ici un modèle générique de population structurée en espace.

On notera alors $P(t, x)$ la densité de population à un instant $t > 0$ et à la position $x \in \Omega$. Nous considérons un taux de fertilité $\beta(t, x, P(t, x))$ et un taux de mortalité $\mu(t, x, P(t, x))$ densité-dépendants a priori pour ce qui est des termes purement démographiques. On considère également un flux de population $q(t, x, P(t, x))$ ainsi qu'un terme $f = f_g - f_p$ représentant pour $f_g \geq 0$ les gains de populations (immigration, recrutement, ...) et pour $f_p \geq 0$ les pertes de populations (émigration, prélèvements, ...).

En utilisant la loi de conservation : « la variation de la population est égale à la somme algébrique du flux sortant et des apports extérieurs », on arrive finalement à l'équation suivante (voir Murray [70]) :

$$\partial_t P = -\operatorname{div} q + (\beta - \mu) P + f \quad \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \quad (2.1.6)$$

où $\operatorname{div} = \partial_{x_1} + \partial_{x_2} + \dots + \partial_{x_N}$ est la divergence dans \mathbb{R}^N , avec $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$.

Les flux les plus couramment utilisés ont la forme suivante :

$$q(t, x, P(t, x)) = -\mathbf{D}(t, x) \cdot \nabla P(t, x) + P(t, x) \cdot \mathbf{C}(t, x), \quad (2.1.7)$$

où \mathbf{D} est une matrice de diffusion pouvant modéliser une dispersion normale des individus et \mathbf{C} un vecteur d'advection pouvant représenter des mouvements de population plus irréguliers. Dans les cas simples où l'on considère que \mathbf{D} est une constante D et que $\mathbf{C} = 0$, alors on a simplement $\operatorname{div} q = -D \Delta P$.

Enfin, on considère sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω des conditions aux limites homogènes qui peuvent être soit de type Dirichlet :

$$P(t, x) = 0 \quad \text{sur } (0, +\infty) \times \partial\Omega, \quad (2.1.8)$$

soit de type Neumann :

$$(\mathbf{D}(t, x) \cdot \nabla P(t, x) - P(t, x) \cdot \mathbf{C}(t, x)) \cdot \eta(x) = 0 \quad \text{sur } (0, +\infty) \times \partial\Omega, \quad (2.1.9)$$

où $\eta(x)$ est la normale unitaire extérieure à Ω le long de $\partial\Omega$.

Une condition de type Dirichlet correspond à un bord inhospitalier, et une condition de type flux nul - ou Neumann - correspond à une population isolée.

2.1.3 Elaboration du modèle JA

Notre idée ici est mettre en place une équation, ou un système d'équations permettant de modéliser l'évolution d'une population hôte. Nous présentons dans cette section ce qui sera le modèle générique Juvéniles-Adultes (JA) que nous étudierons sous plusieurs formes dans les parties suivantes, en fonction de la structuration et la dépendance des coefficients en ces structurations. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, une particularité des populations de campagnols roussâtre est leur structuration sociale qui fait que la maturation des juvéniles va dépendre de la densité d'adultes. Ces deux catégories de populations, les juvéniles et les adultes, vont donc avoir des comportements différents et il convient donc de les distinguer. Or une structuration continue en âge n'est pas suffisante car l'âge de passage au stade adulte n'est pas fixé. Certains juvéniles deviendront matures à 4 semaines tandis que d'autres ne le seront peut-être jamais. C'est pourquoi nous allons structurer notre modèle de façon discrète en âge, c'est à dire que nous avons considéré deux classes de populations comme le montre le schéma compartimental présenté dans la figure Fig. 2.1.1.

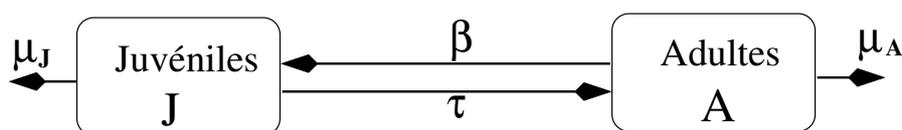


FIG. 2.1.1: Le système Juvéniles-Adultes

β est le taux de fertilité, τ le taux de maturation des juvéniles et μ_J , μ_A sont les taux de mortalités respectifs des juvéniles et des adultes. Ces coefficients pourront dépendre des différentes variables structurantes incluses dans les modèles et aussi des densités de population. En particulier nous considérerons que le taux de maturation dépend de la densité d'adultes, et est décroissant par rapport à cette densité.

Nous avons ensuite voulu structurer nos deux classes de populations en âge. Cette structuration ne s'est pas faite aussi aisément que ce que l'on peut penser dans un premier temps. Pour cela, nous avons introduit un âge maximal pour les individus, noté a_{\dagger} , et nous avons considéré que les juvéniles avaient une densité $J(t, a)$ dépendant du temps, $t \geq 0$ et de l'âge chronologique $a \in (0, a_{\dagger})$. Nous avons noté a_1 l'âge à partir duquel les juvéniles sont susceptibles de devenir matures, et donc de passer dans la classe des adultes. Il nous a ensuite fallu considérer que la densité d'adultes $\tilde{A}(t, a, a')$ était elle aussi dépendante du temps, $t \geq 0$, de l'âge chronologique $a \in (a_1, a_{\dagger})$ cette fois-ci, mais aussi de ce que nous avons appelé « l'âge adulte », c'est à dire le temps depuis lequel un individu est adulte, $a' \in (0, a_{\dagger} - a_1)$. Nous avons introduit cette notion d'âge adulte afin d'éviter que des individus puissent devenir matures à un âge proche de a_{\dagger} , âge maximal de vie, et puissent ensuite « vivre » une seconde vie au stade

adulte. Il est en effet possible d'avoir des juvéniles et des adultes ayant le même âge.

Considérant que les différents coefficients démographiques dépendent de toutes les variables structurantes possibles et de la densité de population, le premier système auquel nous arrivons est le suivant :

Pour $t \geq 0$ et $0 < a < a_{\dagger}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t J(t, a) + \partial_a J(t, a) = -\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) \cdot J(t, a) - \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) \cdot J(t, a), \\ J(0, a) = J_0(a), \\ J(t, 0) = \int_{a_1}^{a_{\dagger}} \int_0^{a-a_1} \beta(t, a, a', \mathbb{P}(t)) \cdot \tilde{A}(t, a, a') da' da, \end{array} \right. \quad (2.1.10)$$

et pour $t \geq 0$, $a_1 < a < a_{\dagger}$ et $0 < a' < a_{\dagger} - a_1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{A}(t, a, a') + \partial_a \tilde{A}(t, a, a') + \partial_{a'} \tilde{A}(t, a, a') = -\mu_A(t, a, a', \mathbb{P}(t)) \cdot \tilde{A}(t, a, a') \\ \tilde{A}(0, a, a') = \tilde{A}_0(a, a'), \\ \tilde{A}(t, a, 0) = \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) \cdot J(t, a), \\ \tilde{A}(t, a_1, a') = 0 \text{ et } \tilde{A}(t, a, a') = 0 \text{ si } a < a' + a_1, \end{array} \right. \quad (2.1.11)$$

où J_0 et \tilde{A}_0 sont les conditions initiales, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(t) &= \int_{a_1}^{a_{\dagger}} A(t, a) da = \int_{a_1}^{a_{\dagger}} \int_0^{a-a_1} \tilde{A}(t, a, a') da' da, \\ \mathbb{J}(t) &= \int_0^{a_{\dagger}} J(t, a) da \text{ et } \mathbb{P}(t) = \mathbb{J}(t) + \mathbb{A}(t). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

La structuration en âge adulte a été nécessaire à prendre en compte, mais nous avons pu nous débarrasser de cette variable structurante moyennant l'hypothèse que le taux de mortalité des adultes, μ_A , et le taux de fertilité, β , étaient indépendants de a' . Biologiquement, l'hypothèse que le taux de mortalité soit dépendant uniquement de l'âge chronologique est tout à fait acceptable, tout comme il est acceptable que le taux de fertilité soit bien plus dépendant de l'âge chronologique que de l'âge adulte. En faisant cette hypothèse et en intégrant (2.1.11) par rapport à la variable a' , en considérant que $\tilde{A}(t, a, a_{\dagger}) = 0$, on obtient le système suivant :

Pour $t \geq 0$ et $0 < a < a_{\dagger}$,

$$\begin{cases} \partial_t J(t, a) + \partial_a J(t, a) = -\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) \cdot J(t, a) - \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) \cdot J(t, a), \\ J(0, a) = J_0(a), \\ J(t, 0) = \int_{a_1}^{a_{\dagger}} \beta(t, a, \mathbb{P}(t)) \cdot A(t, a) da, \end{cases} \quad (2.1.13)$$

et pour $t \geq 0$ et $a_1 < a < a_{\dagger}$,

$$\begin{cases} \partial_t A(t, a) + \partial_a A(t, a) = -\mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) \cdot A(t, a) + \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) \cdot J(t, a), \\ A(0, a) = A_0(a), \\ A(t, a_1) = 0. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

L'étape suivante a été de structurer notre modèle en espace. Nous considérons donc des densités $J(t, a, x)$ pour les juvéniles et $A(t, a, x)$ pour les adultes, avec $x \in \Omega$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ à bord régulier. Nous considérons également que le flux ne contient qu'un terme de diffusion $d_J(t, a, x)$ pour les juvéniles et $d_A(t, a, x)$ pour les adultes, mais pas de terme d'advection. Pour ce qui est des conditions sur $\partial\Omega$, nous considérerons les populations comme isolées et donc nous imposerons à notre modèle des conditions de type Neumann. Pour simplifier les écritures, on utilisera les notations suivantes par la suite :

$$\begin{aligned} Q_J &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega, & Q_A &= \mathbb{R}_+ \times (a_1, a_{\dagger}) \times \Omega, \\ Q_{J,\partial} &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_{\dagger}) \times \partial\Omega, & Q_{A,\partial} &= \mathbb{R}_+ \times (a_1, a_{\dagger}) \times \partial\Omega, \\ Q_{J,a} &= (0, a_{\dagger}) \times \Omega, & Q_{A,a} &= (a_1, a_{\dagger}) \times \Omega, \\ Q_{J,t} &= \mathbb{R}_+ \times \Omega, & Q_{A,t} &= \mathbb{R}_+ \times \Omega. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

2.1.4 Modèle générique JA

Le modèle « générique » JA pour une population théorique structurée en Juvéniles - Adultes avec maturation dépendant des adultes est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t J + \partial_a J - \operatorname{div}(d_J(t, a, x) \cdot \nabla J) + \mu_J(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot J \\ \quad + \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J = 0 & \text{dans } Q_J \\ J(t, 0, x) = \int_{a_1}^{a_+} \beta(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A(t, a, x) da & \text{dans } Q_{J,t} \\ J(0, a, x) = J_0(a, x) & \text{dans } Q_{J,a} \\ (d_J(t, a, x) \cdot \nabla J(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{J,\partial} \end{array} \right. \quad (2.1.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t A + \partial_a A - \operatorname{div}(d_A(t, a, x) \cdot \nabla A) + \mu_A(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A \\ \quad - \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J = 0 & \text{dans } Q_A \\ A(t, a_1, x) = 0 & \text{dans } Q_{A,t} \\ A(0, a, x) = A_0(a, x) & \text{dans } Q_{A,a} \\ (d_A(t, a, x) \cdot \nabla A(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{A,\partial} \end{array} \right. \quad (2.1.17)$$

et nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(t, x) &= \int_{a_1}^{a_+} A(t, a, x) da, \\ \mathbb{J}(t, x) &= \int_0^{a_+} J(t, a, x) da, \\ \mathbb{P}(t, x) &= \mathbb{J}(t, x) + \mathbb{A}(t, x). \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

2.2 Le modèle JASIG

Le modèle démographique n'est qu'une première étape dans le but de modéliser la propagation d'un parasite dans une population hôte. Il s'agit maintenant, à partir du modèle JA présenté dans la section précédente, d'établir un modèle de propagation d'épidémie prenant en compte les principales caractéristiques du système Hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre qui nous motive (voir section 1.4).

2.2.1 Le modèle SEIRS

Nous allons présenter ici quelques modèles historiques de propagation d'épidémie. Le premier modèle date de Bernoulli [6] qui présenta un modèle pour lutter contre la

petite vérole. Puis Kermack et McKendrick [54] ont étudié un modèle suite à une épidémie de peste à Calcutta basé sur l'idée que l'épidémie s'arrête lorsqu'il n'y a plus assez d'individus sains à infecter. La modélisation de propagation d'épidémies a ensuite été très étudiée, citons parmi d'autres Brauer et Castillo-Chavez [8] [15], Busenberg et Cooke [11], Diekmann et Heesterbeek [20] ou les travaux de Hethcote [45]-[48]. Cependant, l'approche déterministe par compartiments désormais classiquement employée a été formalisée par Anderson et May [2] en 1979. Nous allons nous intéresser ici à une forme généralisée et générique de ce modèle, le modèle SEIRS. Nous essayons de tenir compte du maximum de paramètres possibles pouvant intervenir dans les systèmes microparasites/macroparasites ou parasites/hôtes, sans tenir compte de la démographie des populations. Il s'agit de séparer la population initiale P en quatre classes de populations suivant le schéma compartimental de la figure Fig. 2.2.1.

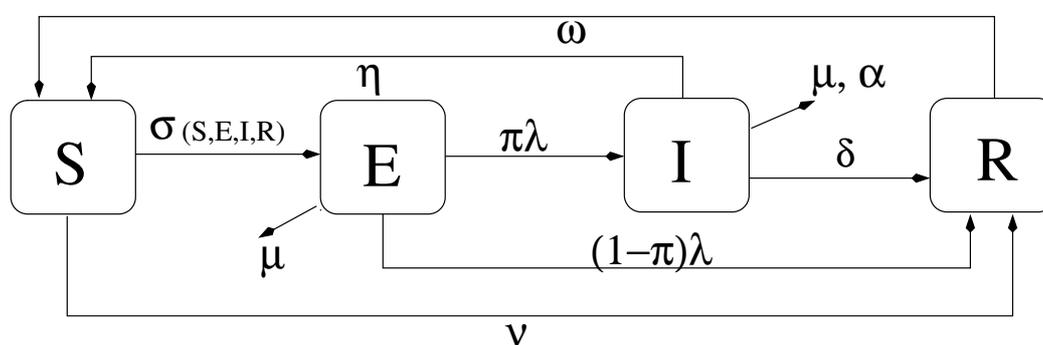


FIG. 2.2.1: Le modèle SEIRS

S représente la densité d'individus Sensibles c'est à dire sains mais susceptibles d'être infectés ; E représente les individus Exposés, c'est à dire infectés mais non infectieux ; I est la densité d'individus Infectieux pouvant propager l'épidémie ; et R représente les Remis, qui contient l'ensemble des individus sortis de la population active pour l'infection : ceux qui ont guéri et sont immunisés provisoirement ou définitivement, ceux qui ont été vacciné, et pour certains modèles ceux qui sont morts. L'interprétation des coefficients est la suivante :

- μ représente le taux d'élimination des infectés,
- α représente une surmortalité pour les infectieux,
- π représente la probabilité de passer du stade exposé au stade infectieux,
- $1/\lambda$ représente la durée du stade exposé,
- δ représente le taux de guérison du stade infectieux,
- ν représente le taux de vaccination des individus sensibles,
- ω représente le taux de perte d'immunité,
- et σ représente ce que l'on appelle l'incidence, dont la question est débattue plus loin.

La mise en équation de ce modèle aboutit au système suivant, en considérant uniquement une structuration en temps :

$$\begin{cases} S'(t) = -\sigma(S, E, I, R) & +\eta I & +\omega R & -\nu S \\ E'(t) = \sigma(S, E, I, R) & -\lambda E & & -\mu E \\ I'(t) = & +\pi\lambda E & -\delta I & -\eta I & -\mu I - \alpha I \\ R'(t) = & +(1-\pi)\lambda E & +\delta I & -\omega R & +\nu S. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Dans ce type de modèle, une grandeur qui est couramment étudiée est le R_0 qui représente le nombre d'infections secondaires produites par un individu infecté dans une population au cours de sa vie. Son calcul correspond à l'étude de la stabilité de l'état d'équilibre correspondant à la disparition de l'épidémie. Il est exprimé de telle sorte que si le R_0 a une valeur supérieure à 1, l'épidémie se développe et si sa valeur est inférieure à 1, le parasite (ou le virus) disparaît. Une étude de ce type est faite dans la partie III.

Un point essentiel dans la modélisation des problèmes épidémiologiques sera donc la détermination de l'incidence, ce que nous allons maintenant détailler.

2.2.2 Détermination de l'incidence

La représentation de l'incidence est un des points clés de la modélisation en épidémiologie, car c'est elle qui traduit dans le modèle le processus de transmission directe du virus.

Pour que le virus se transmette, il faut tout d'abord qu'il y ait contact entre un individu sain et un individu infecté, et ensuite que le contact soit contaminant. Une première approche pour exprimer l'incidence serait donc de définir :

$$\sigma(S, E, I, R) = \varepsilon_t \varepsilon_d C(P) \frac{I}{P} S. \quad (2.2.2)$$

ε_t est la probabilité que le virus (ou le parasite) se transmette lors d'un contact, ε_d est la probabilité qu'il puisse se développer, $C(P)$ est le nombre de contacts entre deux individus dans une population de taille P et I/P est la proportion de la population susceptible d'infecter un individu sain.

C'est donc la détermination du taux de contact qui va donner la forme de l'incidence. Il existe deux façons principales de modéliser l'incidence : L'incidence de type **mélange proportionné** (ou en **fréquence**) qui correspond à un taux de contact constant et qui aura donc la forme suivante :

$$\sigma(S, E, I, R) = \sigma_{pm} \frac{S I}{P}, \quad (2.2.3)$$

et l'incidence de type **action de masse** (ou en **densité**) qui correspond à un taux de contact linéaire par rapport à la population P et est donc de la forme :

$$\sigma(S, E, I, R) = \sigma_{ma} S I. \quad (2.2.4)$$

L'intérêt majeur de ces deux formes est qu'elles reposent sur des hypothèses intuitives relativement simples et qu'elles sont souvent d'un bon réalisme biologique, mais elles se révèlent insuffisantes lorsque la démographie ou l'hétérogénéité des populations deviennent plus complexes. Par exemple l'incidence de type mélange proportionné avec une hypothèse de taux de contact constant quelle que soit la taille de la population n'est pas crédible à faible densité de population. L'incidence de type action de masse a elle des faiblesses pour des taux de densité élevés car le taux de contact ne peut augmenter indéfiniment lorsque la population augmente.

Le choix de l'une de ces deux formes d'incidences n'est pas toujours évident, et d'autres formes d'incidences ont été proposées en considérant des taux de contacts différents, par exemple de la forme $C(P) = \frac{C_{1n} P^n}{C_{2n} + P^n}$, ce qui permet d'approcher des incidences de type action de masse à faibles densités, et de type mélange proportionné à hautes densités (voir Busenberg et Cooke [11]).

2.2.3 Elaboration du modèle JASIG

Nous allons tenir compte dans notre modèle épidémiologique des faits suivants :

- Le virus ne semble pas avoir d'impact sur la démographie de l'hôte,
- La période d'incubation est courte (quelques jours),
- Les individus infectés le restent toute leur vie,
- Les individus nés de parents infectés sont sensibles après une immunité transitoire par les anticorps maternels,
- Le virus est excrété plus abondamment en début d'infection que par la suite,
- Deux modes de transmission sont à considérer : transmission directe et transmission indirecte.

Ceci est motivé par le système Puumala - Campagnol roussâtre. Ainsi, pour notre modèle, nous allons négliger la période d'incubation, ce qui nous permettra de nous restreindre uniquement aux classes de susceptibles (ou sains) et d'infectés (qui seront donc infectieux). Bien entendu, nous gardons également la structuration discrète en âge introduite pour le modèle JA, ce qui nous donne 4 classes de populations : J_s pour la densité de juvéniles sains, J_i pour la densité de juvéniles infectés, A_s pour la densité

d'adultes sains et A_i pour la densité d'adultes infectés. Les individus qu'ils soient sains ou infectés auront des paramètres démographiques identiques s'ils sont dans la même classe d'âge. Nous négligerons également la courte période transitoire à la naissance, et nous considérerons que tous les juvéniles sont sains à la naissance : il n'y a pas de transmission verticale du virus.

Pour ce qui est de la transmission horizontale, nous avons vu qu'il faut distinguer la transmission directe, par contact entre un individu sain et un individu infecté, et la transmission indirecte, par contact entre un individu sain et l'environnement contaminé. Pour ce qui est de la transmission directe, un individu sain, juvénile ou adulte pourra être infecté indifféremment par un juvénile ou un adulte infecté, mais les incidences pourront être différentes. Pour la transmission indirecte, il nous faudra également considérer une quantité que nous noterons G et qui représentera la proportion de l'environnement qui sera contaminée. Pour une population non structurée, l'équation de $G(t)$ aura la forme suivante (voir Berthier et al. [7]) :

$$\partial_t G(t) = \alpha(t) \mathbb{I}(t) \cdot (1 - G(t)) - \delta(t) G(t), \quad (2.2.5)$$

où α représente la contamination de l'environnement par les infectés \mathbb{I} , et δ est le taux de décontamination. Enfin, les individus sains sont infectés via l'environnement avec un taux γ . Le schéma compartimental pour ce modèle, que nous appellerons modèle JASIG, est alors donné par la figure Fig. 2.2.2.

Passons maintenant à la structuration de notre modèle. Pour les versions les plus simples (par exemple dans la partie III), nous pouvons négliger le fait que le virus ne se transmet pas en quantité identique au début de l'infection et par la suite. Toutefois, il est plus satisfaisant de prendre en compte ce fait. Pour cela il convient de structurer le modèle en « âge de l'infection », voir Diekmann et Heesterbeek [20]. Afin de ne pas multiplier les variables structurantes, et donc de simplifier les calculs, nous avons considéré une structuration continue en âge de l'infection dans la partie II où il n'y a pas de structuration en espace, et une structuration discrète en âge de l'infection dans la partie IV où il y a déjà une structuration continue en espace. La structuration discrète consiste à séparer les classes d'individus infectés en les individus nouvellement infectés, J_n et A_n d'une part, et en les individus « chroniquement » infectés, J_c et A_c d'autre part. Le schéma compartimental est alors légèrement différent, et nous renvoyons le lecteur à la partie IV pour plus de détails. Nous nous concentrons ici sur la structuration continue en âge de l'infection.

L'utilisation de deux variables structurées d'âges pour l'épidémiologie a été introduite par Hoppensteadt il y a 30 ans [51], mais des modèles contenant l'âge depuis l'infection étaient déjà présents dans des modèles de Kermack et McKendrick [54] [12]. Plus récemment, un modèle semblable a été étudié par Fitzgibbon et Langlais [25]. Nous noterons b la variable représentant l'âge de l'infection. Puisque les individus in-

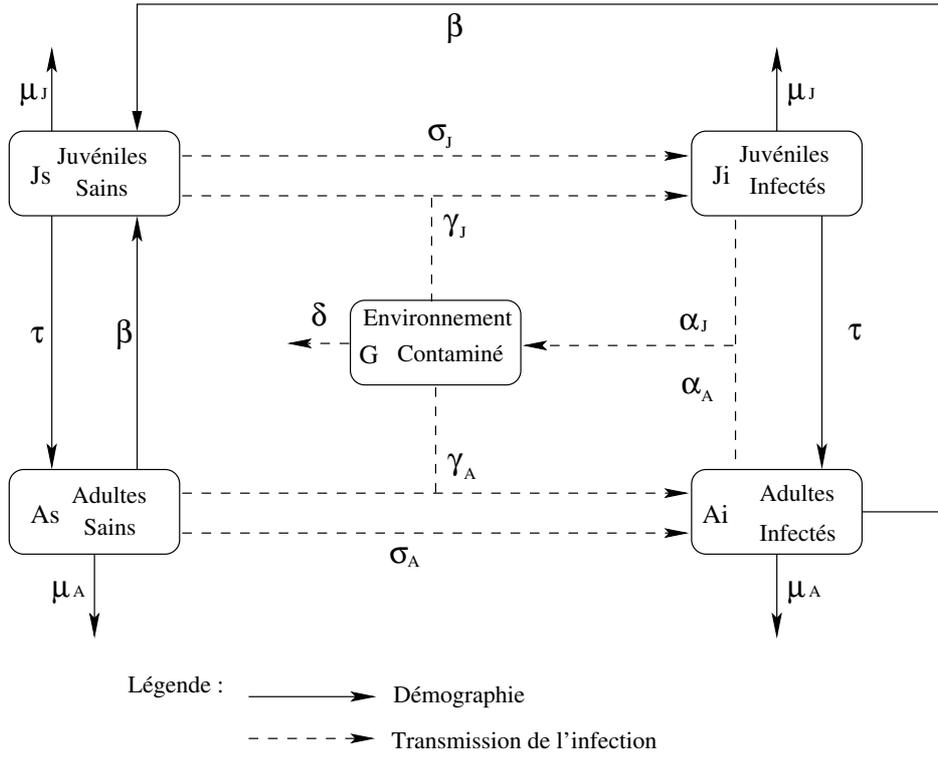


FIG. 2.2.2: Le modèle JASIG

fectés le restent toute leur vie, nous aurons $b \in (0, a_{\dagger})$. Notons que cette variable n'interviendra que dans les densités J_i et A_i d'individus infectés. Les conditions initiales en $b = 0$ pour ces deux densités seront égales aux individus nouvellement infectés et correspondront donc à des termes de pertes pour les équations en J_s et A_s .

En ce qui concerne l'incidence utilisée, nous considèrerons une incidence de type action de masse lorsque le modèle ne sera pas structuré en âge de l'infection. Lorsque le modèle est structuré en âge de l'infection, nous avons considéré une incidence de type action de masse au début de l'infection, et une incidence de type mélange proportionné par la suite (pour $b > b^*$ dans le cas d'une structuration continue). Cela nous donne, pour $Z = J, A$, une incidence de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_Z = \int_0^{b^*} & \left(\int_0^{a_{\dagger}} \sigma_{j,Z}^{ma} J_i(t, a', b) da' + \int_{a_1}^{a_{\dagger}} \sigma_{a,Z}^{ma} A_i(t, a', b) da' \right) db \\ & + \int_{b^*}^{a_{\dagger}} \left(\int_0^{a_{\dagger}} \sigma_{j,Z}^{pm} \frac{J_i(t, a', b)}{J(t, a')} da' + \int_{a_1}^{a_{\dagger}} \sigma_{a,Z}^{pm} \frac{A_i(t, a', b)}{A(t, a')} da' \right) db. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Enfin nous considèrerons ici une structuration spatiale continue, de façon similaire à ce que nous avons fait pour le modèle JA. Nous avons également mis en place une version avec une structuration discrète en espace, que nous avons appelée le « modèle multi-patches » qui est détaillé dans la partie III. En plus des notations définies en (2.1.15), nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
Q'_J &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_\dagger)^2 \times \Omega, & Q'_A &= \mathbb{R}_+ \times (a_1, a_\dagger) \times (0, a_\dagger) \times \Omega, \\
Q'_{J,\partial} &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_\dagger)^2 \times \partial\Omega, & Q'_{A,\partial} &= \mathbb{R}_+ \times (a_1, a_\dagger) \times (0, a_\dagger) \times \partial\Omega, \\
Q'_{J,a,b} &= (0, a_\dagger)^2 \times \Omega, & Q'_{A,a,b} &= (a_1, a_\dagger) \times (0, a_\dagger) \times \Omega, \\
Q'_{J,t,b} &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_\dagger) \times \Omega, & Q'_{A,t,b} &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_\dagger) \times \Omega, \\
Q'_{J,t,a} &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_\dagger) \times \Omega, & Q'_{A,t,a} &= \mathbb{R}_+ \times (a_1, a_\dagger) \times \Omega.
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

2.2.4 Modèle générique JASIG

Sans noter, pour plus de simplicité, les dépendances des coefficients en les diverses variables et densités, le système que nous obtenons alors pour le modèle JASIG est le suivant (2.2.8)-(2.2.12) :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\partial_t J_s + \partial_a J_s - \operatorname{div}(d_J \cdot \nabla J_s) = -(\mu_J + \tau + \sigma_J + \gamma_J G) \cdot J_s & \text{dans } Q_J \\
J_s(0, a, x) = J_s^0(a, x) & \text{dans } Q_{J,a} \\
J_s(t, 0, x) = \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta (A_s(t, a, x) + \int_0^{a_\dagger} A_i(t, a, b, x) db) da & \text{dans } Q_{J,t} \\
(d_J(t, a, x) \cdot \nabla J_s(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{J,\partial}
\end{array} \right. \tag{2.2.8}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\partial_t J_i + \partial_a J_i + \partial_b J_i - \operatorname{div}(d_J \cdot \nabla J_i) = -(\mu_J J_i + \tau) \cdot J_i & \text{dans } Q'_J \\
J_i(0, a, b, x) = J_i^0(a, b, x) & \text{dans } Q'_{J,a,b} \\
J_i(t, 0, b, x) = 0 & \text{dans } Q'_{J,t,b} \\
J_i(t, a, 0, x) = \sigma_J J_s(t, a, x) + \gamma_J G(t, x) J_s(t, a, x) & \text{dans } Q'_{J,t,a} \\
(d_J(t, a, b, x) \cdot \nabla J_i(t, a, b, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q'_{J,\partial}
\end{array} \right. \tag{2.2.9}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t A_s + \partial_a A_s - \operatorname{div}(d_A \cdot \nabla A_s) = \tau J_s - (\mu_A + \sigma_A + \gamma_A G) \cdot A_s & \text{dans } Q_A \\ A_s(0, a, x) = A_s^0(a, x) & \text{dans } Q_{A,a} \\ A_s(t, a_1, x) = 0 & \text{dans } Q_{A,t} \\ (d_A(t, a, x) \cdot \nabla A_s(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{A,\partial} \end{array} \right. \quad (2.2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t A_i + \partial_a A_i + \partial_b A_i - \operatorname{div}(d_A \cdot \nabla A_i) = \tau J_i - \mu_A A_i & \text{dans } Q'_A \\ A_i(0, a, b, x) = A_i^0(a, b, x) & \text{dans } Q'_{A,a,b} \\ A_i(t, a_1, b, x) = 0 & \text{dans } Q'_{A,t,b,x} \\ A_i(t, a, 0, x) = \sigma_A A_s(t, a, x) + \gamma_A G(t, x) A_s(t, a, x) & \text{dans } Q'_{A,t,a} \\ (d_A(t, a, x) \cdot \nabla A_i(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q'_{A,\partial} \end{array} \right. \quad (2.2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} G'(t, x) = \int_0^{a_1} \left(\int_0^{a_1} \alpha_J J_i da + \int_{a_1}^{a_1} \alpha_A A_i da \right) db \cdot (1 - G) - \delta G & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ G(0, x) = G_0(x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.2.12)$$

Les conditions initiales en $b = 0$ correspondent aux individus nouvellement infectés. On a utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(t, x) &= \int_0^{a_1} A_s(t, a, x) da + \int_0^{a_1} \int_0^{a_1} A_i(t, a, b, x) db da, \\ \mathbb{J}(t, x) &= \int_0^{a_1} J_s(t, a, x) da + \int_0^{a_1} \int_0^{a_1} J_i(t, a, b, x) db da, \\ \mathbb{P}(t, x) &= \mathbb{J}(t, x) + \mathbb{A}(t, x), \quad \text{et } Z(t) = \int_{\Omega} Z(t, x) dx, \quad Z = \mathbb{J}, \mathbb{A}, \mathbb{P}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Rappelons que les taux de mortalité μ_J et μ_A seront considérés comme dépendants de la densité $\mathbb{P}(t, x)$ afin de tenir compte de l'effet logistique, et que le taux de maturation τ sera dépendant de la densité $\mathbb{A}(t, x)$ de façon décroissante : Plus il y a d'adultes, moins les jeunes ont de possibilités de devenir matures.

2.3 Le modèle JASIGH

Le dernier modèle que nous présentons dans ce chapitre est le modèle que nous appellerons JASIGH, qui est une extension du modèle précédent avec transmission à l'Homme. Nous considérons que la transmission du virus se fait uniquement de l'environnement contaminé à l'Homme et qu'en retour l'Homme ne contamine pas l'environnement. En particulier, il n'y a également pas de transmission du virus d'homme à

homme. Ainsi, dans ce modèle, les équations (2.2.8)-(2.2.12) représentant les différentes classes de population hôte réservoir et l'environnement contaminé sont inchangées. Il reste uniquement à modéliser les équations pour l'homme. La modélisation que nous utilisons ici est inspirée des travaux de Sauvage [74] et de Fitzgibbon, Langlais et Morgan [31].

Nous considérons trois classes de population pour les Hommes : H_s représentant les individus susceptibles d'être infectés, H_i représentant les individus infectés (mais non infectieux) et H_r représentant les individus guéris, que nous considérerons comme immunisés. Nous noterons γ_H le taux de contamination par le sol, λ le taux de sortie de la maladie et ε le taux de survie à la maladie. Etant donné la petitesse des temps considérés pour la démographie du campagnol, la transmission et l'incubation du virus, nous négligeons toute démographie pour les équations sur les hommes. Ainsi, nous obtenons le schéma compartimental de la figure Fig. 2.3.1.

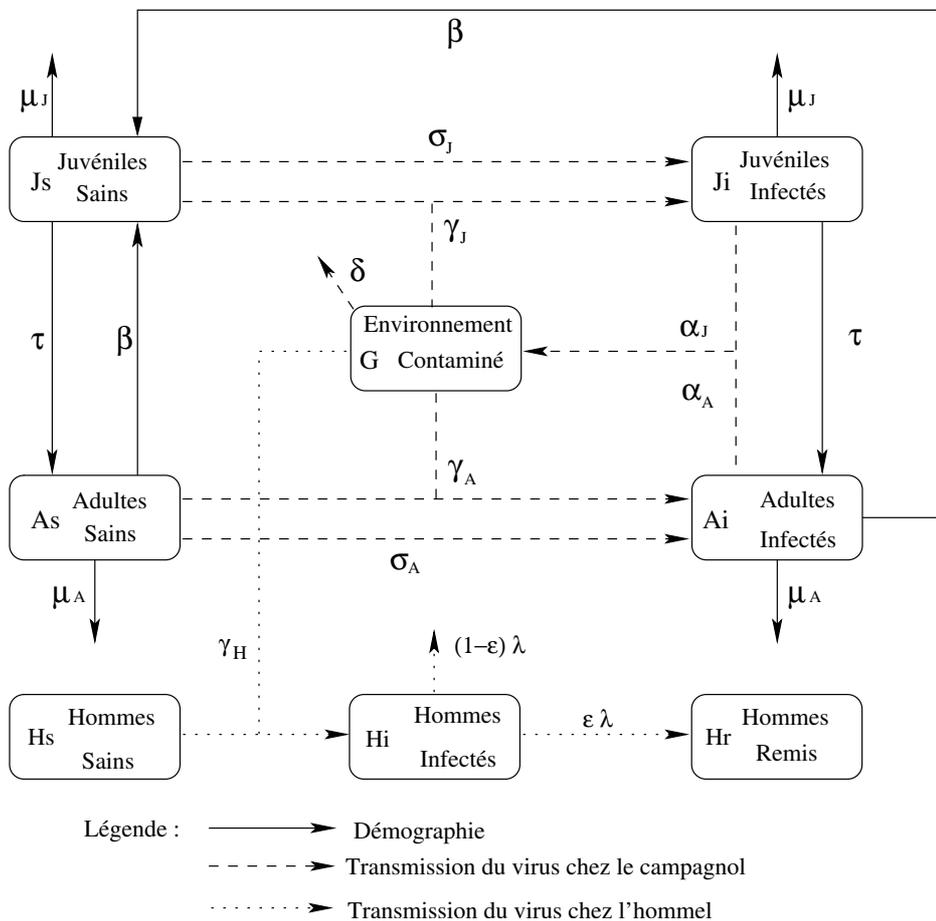


FIG. 2.3.1: Le modèle JASIGH

Il est également inutile d'introduire une structuration en âge et/ou en âge de l'infection pour les humains. Nous structurerons donc ces équations uniquement en temps et en espace. Nous supposons que les hommes également sont isolés dans le domaine Ω , de sorte que les équations régissant les densités de populations humaines sont, dans les espaces appropriés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t H_s(t, x) - \operatorname{div}(d_{H,s}(t, x) \cdot \nabla H_s(t, x)) = -\gamma_H(t, x) G(t, x) H_s(t, x), \\ H_s(0, x) = H_s^0(x), \\ (d_{H,s}(t, x) \cdot \nabla H_s(t, x)) \cdot \eta(x) = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t H_i(t, x) - \operatorname{div}(d_{H,i}(t, x) \cdot \nabla H_i(t, x)) = \gamma_H(t, x) G(t, x) H_s(t, x) - \lambda H_i(t, x), \\ H_i(0, x) = H_i^0(x), \\ (d_{H,i}(t, x) \cdot \nabla H_i(t, x)) \cdot \eta(x) = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t H_r(t, x) - \operatorname{div}(d_{H,r}(t, x) \cdot \nabla H_r(t, x)) = \varepsilon \lambda H_i(t, x), \\ H_r(0, x) = H_r^0(x), \\ (d_{H,r}(t, x) \cdot \nabla H_r(t, x)) \cdot \eta(x) = 0. \end{array} \right. \quad (2.3.3)$$

Le système JASIGH sera donc celui constitué des équations (2.2.8)- (2.2.12) et (2.3.1)-(2.3.3).

Conclusion et perspectives

En rappelant les différents aspects du système hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre - Homme, du point de vue démographique comme épidémiologique, nous avons mis en évidence ses particularités et en particulier quatre caractéristiques principales : La variété des dynamiques observées (de quasi constantes à périodiques avec de grandes oscillations), la dépendance de la maturation sexuelle des juvéniles en la densité d'adultes, le caractère bénin du virus pour la population hôte et les deux modes de transmission du virus (directe et indirecte).

Dès lors, nous avons élaboré des modèles démographiques et épidémiologiques prenant en compte ces caractéristiques. Il convient, avant de s'intéresser à la propagation du virus, de s'intéresser à la dynamique de la population hôte (campagnol roussâtre pour le hantavirus Puumala). Du fait des différences comportementales et des interactions entre juvéniles et adultes, nous distinguons ces deux classes de populations. Nous avons ainsi considéré comme modèle démographique le modèle Juvéniles - Adultes (JA), présenté ici de façon générique.

Le virus n'ayant pas d'impact sur la démographie de l'hôte, le modèle JA régira également la dynamique des populations en présence du virus. Dès lors, le modèle JASIGH que nous avons mis en place servira uniquement à établir comment le virus se comporte dans les populations : s'il persiste, disparaît, se propage, etc.... Notre modèle épidémiologique considère dans chacune de nos études deux modes de transmission : Un mode de propagation directe, par contacts entre individus, et un mode de transmission indirecte, par contamination de l'environnement (puis des individus sains par contact avec l'environnement contaminé). Dans la mesure du possible, dans les études à venir nous tiendrons également compte de la différence d'excrétion du virus entre les individus nouvellement infectés, et les individus infectés depuis plus longtemps.

Enfin, nous avons considéré un modèle JASIGH, dans lequel nous intégrons une transmission à l'Homme. Toutefois, cette transmission se faisant uniquement par contact avec l'environnement contaminé (transmission indirecte), seule la proportion d'environnement contaminé est importante pour les équations régissant la transmission à l'Homme (voir Partie IV).

Deuxième partie

Modèles avec structuration en âges continue

Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'analyse mathématique de modèles présentés dans la partie I, dans le cas d'une structuration continue en âges. En effet, en plus de la structuration discrète en âge chronologique (on distingue les juvéniles des adultes) considérée tout au long de ce travail, nous considérons dans cette partie une structuration continue en âge chronologique. Cette structuration est communément utilisée en dynamique des populations (voir Anița [3], Gurtin [40], Gurtin et Mac Camy [41], Iannelli [52], Webb [86]). En plus du temps et de l'âge chronologique, nous considérons également une troisième variable structurante que nous appellerons « l'âge de l'infection » et correspondant au temps écoulé depuis qu'un individu est infecté (voir Fitzgibbon et Langlais [25]). L'utilisation de cette structuration était déjà présente dans des modèles de Kermack et McKendrick [54] mais l'utilisation conjointe de deux variables structurées d'âge a été introduite par Hoppensteadt [51]. Nous aboutissons à des systèmes faiblement hyperboliques d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires avec des nonlinéarités nonlocales. La transmission indirecte rajoute par ailleurs une équation différentielle ordinaire.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude du modèle démographique JA pour lequel nous présentons un résultat d'existence globale et d'unicité.

Le Chapitre 4 présente l'étude du modèle JASIG. Il s'agit d'un modèle épidémique de type SI, basé sur le modèle démographique JA pour lequel nous considérons deux modes de transmission du virus : Transmission directe par contact entre individus et transmission indirecte par interaction avec l'environnement (voir Chapitre 2). Pour ce modèle également nous établissons un résultat d'existence globale et d'unicité.

Les travaux présentés dans les Chapitres 3 et 4 ont fait l'objet d'une publication, voir Wolf [87].

Enfin, dans le Chapitre 5, nous présentons brièvement des modèles discrets correspondants aux modèles continus étudiés dans les deux chapitres précédents. Nous donnons quelques résultats concernant les matrices ainsi obtenues, puis nous faisons heuristiquement le lien avec les modèles continus et nous terminons par quelques simulations numériques.

Chapitre 3

Etude du modèle JA

3.1 Mise en place du modèle

Le modèle JA que nous considérons ici est le modèle générique JA, (2.1.16)-(2.1.17) présenté dans le Chapitre 2 mais sans la structuration spatiale. Cela correspond donc au système suivant :

Pour $t \geq 0$ et $0 < a < a_{\dagger}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t J(t, a) + \partial_a J(t, a) = -\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) \cdot J(t, a) - \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) \cdot J(t, a) \\ J(0, a) = J_0(a) \\ J(t, 0) = \int_{a_1}^{a_{\dagger}} \beta(t, a, \mathbb{P}(t)) \cdot A(t, a) da \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

Pour $t \geq 0$ et $a_1 < a < a_{\dagger}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A(t, a) + \partial_a A(t, a) = -\mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) \cdot A(t, a) + \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) \cdot J(t, a) \\ A(0, a) = A_0(a) \\ A(t, a_1) = 0, \end{array} \right. \quad (3.1.2)$$

avec, représentant les densités totales d'adultes, de juvéniles et de population :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(t) &= \int_{a_1}^{a_{\dagger}} A(t, a) da \\ \mathbb{J}(t) &= \int_0^{a_{\dagger}} J(t, a) da \\ \mathbb{P}(t) &= \mathbb{J}(t) + \mathbb{A}(t). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Rappelons brièvement la signification des différents coefficients :

- μ_J (respectivement μ_A) représente le taux de mortalité des juvéniles (resp. des adultes), que nous considérons dépendant de la densité de population (compétition entre individus).
- τ représente le taux de maturation, c'est à dire le taux de passage du stade juvénile au stade adulte. Il dépend de la densité d'adultes car les adultes nuisent à la maturation des juvéniles.
- Enfin, β représente le taux de fertilité (ou de natalité). Nous le considérons lui aussi comme dépendant de la densité totale de population pour plus de généralité.

3.2 Notations et hypothèses

Commençons par définir l'espace dans lequel nous allons considérer nos solutions. Nous allons chercher $J(t, \cdot)$ et $A(t, \cdot)$ dans L^1 . Aussi, nous utiliserons les notations suivantes :

Définition 3.2.1

On définit pour $t > 0$, $a \in (0, a_+)$ pour les juvéniles et $a \in (a_1, a_+)$ pour les adultes :

$$U(t, a) = (J(t, a), A(t, a))$$

et les espaces de Banach : $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ et pour $T > 0$ $(\mathcal{H}_T, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_T})$ avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= L^1(0, a_+) \times L^1(a_1, a_+) \\ \|U(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} &= \|J(t, \cdot)\|_{L^1(0, a_+)} + \|A(t, \cdot)\|_{L^1(a_1, a_+)} \\ \mathcal{H}_T &= L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \\ \|U\|_{\mathcal{H}_T} &= \sup_{0 \leq t \leq T} (\|U(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

Nous supposerons que $(J_0, A_0) \in \mathcal{H}$.

HYP 3.1

On a :

- $\beta \in L^\infty((0, \infty)) \times (a_1, a_+) \times \mathbb{R}^+$ et est à valeurs positives ou nulles,
- $\tau \in L^\infty((0, \infty)) \times (0, a_+) \times \mathbb{R}^+$ et est à valeurs positives ou nulles,
- $\mu_J \in L^\infty((0, \infty)) \times (0, a_+) \times [0, R]$, $\forall R > 0$ et est à valeurs positives ou nulles,
- $\mu_A \in L^\infty((0, \infty)) \times (0, a_+) \times [0, R]$, $\forall R > 0$ et est à valeurs positives ou nulles,

On notera par la suite, $\beta_\infty = \|\beta\|_\infty$, $\tau_\infty = \|\tau\|_\infty$ et

$$\mu_\infty(R) = \max\{\|\mu_J\|_{\infty, (0, \infty) \times (0, a_+) \times [0, R]}, \|\mu_A\|_{\infty, (0, \infty) \times (a_1, a_+) \times [0, R]}\}.$$

HYP 3.2

Nous supposons également que $A \rightarrow \tau(t, a, A)$ est décroissant. De même, on considèrera que $P \rightarrow \mu_J(t, a, P)$ et $P \rightarrow \mu_A(t, a, P)$ sont croissants.

Nous ferons également l'hypothèse suivante, qui « contrôle » la démographie :

HYP 3.3

On suppose que $(t, a, P) \rightarrow \mu_J(t, a, P)$, $\mu_A(t, a, P)$, $\beta(t, a, P)$ et $(t, a, A) \rightarrow \tau(t, a, A)$ sont continues, localement lipschitziennes par rapport à la 3ème variable : $\forall T > 0$, $\forall U, \tilde{U} \in \mathcal{H}_T$,

- $\exists K_J \geq 0 / \forall (t, a) \in (0, T) \times (0, a_+)$, $|\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) - \mu_J(t, a, \tilde{\mathbb{P}}(t))| \leq K_J \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}$,
- $\exists K_A \geq 0 / \forall (t, a) \in (0, T) \times (a_1, a_+)$, $|\mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) - \mu_A(t, a, \tilde{\mathbb{P}}(t))| \leq K_A \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}$,
- $\exists K_\beta \geq 0 / \forall (t, a) \in (0, T) \times (0, a_+)$, $|\beta(t, a, \mathbb{P}(t)) - \beta(t, a, \tilde{\mathbb{P}}(t))| \leq K_\beta \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}$,
- $\exists K_\tau \geq 0 / \forall (t, a) \in (0, T) \times (0, a_+)$, $|\tau(t, a, \mathbb{A}(t)) - \tau(t, a, \tilde{\mathbb{A}}(t))| \leq K_\tau \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}$.

L'hypothèse suivante de croissance logistique sera utile pour énoncer un résultat d'existence un peu plus fort :

HYP 3.4

On suppose que μ_J et μ_A satisfont :

$$\begin{aligned} \forall (t, a) \in \mathbb{R} \times (0, a_+), \quad \mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) &\geq \mu_{n,J}(a) + \mu_e(\mathbb{P}(t)) \\ \forall (t, a) \in \mathbb{R} \times (a_1, a_+), \quad \mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) &\geq \mu_{n,A}(a) + \mu_e(\mathbb{P}(t)), \end{aligned}$$

où $\mu_{n,J} \geq 0$, $\mu_{n,A} \geq 0$ et $x \rightarrow \mu_e(x)$ est croissant et vérifie :

$$\mu_e(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_e(x) > \beta_\infty.$$

En particulier, il existe $\bar{\mathbb{P}}$ tel que $\mu_e(\bar{\mathbb{P}}) = \beta_\infty$.

3.3 Résultats

Nous allons démontrer les résultats suivants, sous les hypothèses Hyp. 3.1 à Hyp. 3.3 :

Théorème 3.3.1

Soit $(J_0, A_0) \in \mathcal{H}$. Alors le problème (3.1.1)-(3.1.2) possède une unique solution à composantes positives, $(J(t, a), A(t, a))$ dans \mathcal{H}_{T^*} , $\forall T^* > 0$.

En supposant de plus l'hypothèse Hyp 3.4 vérifiée, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3.2

Soit $(J_0, A_0) \in \mathcal{H}$. Alors le problème (3.1.1)-(3.1.2) possède une unique solution à composantes positives, $(J(t, a), A(t, a))$ dans \mathcal{H}_∞ .

Remarque 3.3.1

La notion de solution sera précisée plus loin (voir la Définition 3.4.1). Elle correspond à la notion de « mild solution » présentée dans Fitzgibbon et Langlais [25]; voir aussi Wolf [87]

Dans la prochaine section, nous détaillons la preuve du Théorème 3.3.1. Le passage au Théorème 3.3.2 se fait en utilisant le Corollaire 3.4.1.

L'idée de la preuve est de résoudre un problème auxiliaire linéaire par la méthode des caractéristiques et le Théorème du point fixe de Banach. Puis nous utiliserons des estimations a priori et de nouveau le Théorème du point fixe de Banach pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution dans $\mathcal{H}_{T_{\max}}$ avec $T_{\max} > 0$. Pour conclure, nous étendrons ce résultat sur l'intervalle entier $[0, T^*]$.

3.4 Preuve du Théorème 3.3.1

3.4.1 Résultats préliminaires

On considère le système linéaire suivant : Pour $t \geq 0$ et $0 < a < a_{\dagger}$,

$$\begin{cases} \partial_t u(t, a) + \partial_a u(t, a) = -(\mu(t, a) + \tau(t, a)) \cdot u(t, a) \\ u(0, a) = u_0(a) \\ u(t, 0) = B(t), \end{cases} \quad (3.4.1)$$

et pour $t \geq 0$ et $a_1 < a < a_{\dagger}$:

$$\begin{cases} \partial_t v(t, a) + \partial_a v(t, a) = -\nu(t, a) \cdot v(t, a) + \tau(t, a) \cdot u(t, a) \\ v(0, a) = v_0(a) \\ v(t, a_1) = 0, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

avec $(u_0, v_0) \in \mathcal{H}$ et $t \rightarrow B(t) \in L^\infty(0, +\infty)$. On a alors les résultats suivants :

Proposition 3.4.1

Soit $u(t, a)$ solution de (3.4.1), on a :

$$u(t, a) = \begin{cases} B(t - a) e^{-\int_0^a (\mu + \tau)(t - a + s, s) ds} & \text{si } 0 < a < t \\ u_0(a - t) e^{-\int_0^t (\mu + \tau)(s, a - t + s) ds} & \text{si } 0 < t < a. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Preuve. La démonstration utilise la méthode des caractéristiques.

1. Pour $0 < a < t$:

Soit $g(c) = u(t - a + c, c)$. Alors on a $g(0) = B(t - a)$ et $g'(c) = -(\mu + \tau)(t - a + c, c) g(c)$. Ainsi, on a $g(c) = B(t - a) e^{-\int_0^c (\mu + \tau)(t - a + s, s) ds}$, et $u(t, a) = g(a)$, donc :

$$u(t, a) = B(t - a) e^{-\int_0^a (\mu + \tau)(t - a + s, s) ds} \quad \text{si } 0 < a < t.$$

2. Pour $0 < t < a$:

Soit $g(c) = u(c, a - t + c)$. Alors on a $g(0) = u_0(a - t)$ et $g'(c) = -(\mu + \tau)(c, a - t + c) g(c)$. Ainsi, on a $g(c) = u_0(a - t) e^{-\int_0^c (\mu + \tau)(s, a - t + s) ds}$, et $u(t, a) = g(t)$, d'où :

$$u(t, a) = u_0(a - t) e^{-\int_0^t (\mu + \tau)(s, a - t + s) ds} \quad \text{si } 0 < t < a.$$

ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 3.4.2

Soit $v(t, a)$ solution de (3.4.2), on a :

$$v(t, a) = \begin{cases} \text{Pour } 0 < a < t, \\ B(t - a) \left(\int_{a_1}^a \tau(t - a + l, l) e^{\int_0^l (\nu - \mu - \tau)(t - a + s, s) ds} dl \right) e^{-\int_0^a \nu(t - a + s, s) ds} \\ \text{pour } 0 < t < a, \\ \left(u_0(a - t) \int_0^t \tau(l, a - t + l) e^{\int_0^l (\nu - \mu - \tau)(s, a - t + s) ds} dl \right. \\ \left. + v_0(a - t) \right) e^{-\int_0^t \nu(s, a - t + s) ds}. \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Preuve. La preuve utilise la méthode des caractéristiques.

1. Pour $0 < a < t$:

On définit $g(c) = v(t - a + c, c)$. Alors, on a :

$$g'(c) = -\nu(t - a + c, c) g(c) + \tau(t - a + c, c) u(t - a + c, c),$$

mais on a $t - a + c > c$, on a donc à résoudre :

$$g'(c) = -\nu(t - a + c, c) g(c) + \tau(t - a + c, c) B(t - a) e^{-\int_0^c (\mu + \tau)(t - a + s, s) ds}. \quad (3.4.5)$$

La solution de l'équation homogène est $g(c) = K e^{-\int_0^c \nu(t - a + s, s) ds}$. Alors, en utilisant la méthode de variation de la constante, on cherche g sous la forme : $g(c) = K(c) e^{-\int_0^c \nu(t - a + s, s) ds}$. Soit donc à résoudre :

$$K'(c) = \tau(t - a + c, c) B(t - a) e^{\int_0^c (\nu - \mu - \tau)(t - a + s, s) ds}.$$

La solution est :

$$K(c) = B(t - a) \int_0^c \tau(t - a + l, l) e^{\int_0^l (\nu - \mu - \tau)(t - a + s, s) ds} dl + K,$$

et donc :

$$g(c) = B(t - a) \int_0^c \tau(t - a + l, l) e^{\int_0^l (\nu - \mu - \tau)(t - a + s, s) ds} dl e^{-\int_0^c \nu(t - a + s, s) ds} + K e^{-\int_0^c \nu(t - a + s, s) ds},$$

et si de plus $g(a_1) = 0$, on a :

$$K = -B(t-a) \int_0^{a_1} \tau(t-a+l, l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(t-a+s, s) ds} dl.$$

D'où,

$$g(c) = B(t-a) \left(\int_{a_1}^c \tau(t-a+l, l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(t-a+s, s) ds} dl \right) e^{-\int_0^c \nu(t-a+s, s) ds},$$

et, puisque $v(t, a) = g(a)$, on a pour $0 < t < a$:

$$v(t, a) = B(t-a) \left(\int_{a_1}^a \tau(t-a+l, l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(t-a+s, s) ds} dl \right) e^{-\int_0^a \nu(t-a+s, s) ds}.$$

Pour $0 < t < a$:

Soit $g(c) = v(c, a-t+c)$. Alors $g(0) = v_0(a-t)$ et :

$$g'(c) = -\nu(c, a-t+c) g(c) + \tau(c, a-t+c) u(c, a-t+c).$$

Mais on a $a-t+c > c$, d'où à résoudre :

$$g'(c) = -\nu(c, a-t+c) g(c) + \tau(c, a-t+c) u_0(a-t) e^{-\int_0^c (\mu+\tau)(s, a-t+s) ds}. \quad (3.4.6)$$

La solution de l'équation homogène est $g(c) = K e^{-\int_0^c \nu(s, a-t+s) ds}$. En utilisant de nouveau la méthode de variation de la constante, on cherche g sous la forme : $g(c) = K(c) e^{-\int_0^c \nu(s, a-t+s) ds}$.

Soit donc à résoudre :

$$K'(c) = \tau(c, a-t+c) u_0(a-t) e^{\int_0^c (\nu-\mu-\tau)(s, a-t+s) ds}.$$

La solution est :

$$K(c) = u_0(a-t) \int_0^c \tau(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(s, a-t+s) ds} dl + K,$$

d'où :

$$g(c) = u_0(a-t) \int_0^c \tau(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(s, a-t+s) ds} dl e^{-\int_0^c \nu(s, a-t+s) ds} + K e^{-\int_0^c \nu(s, a-t+s) ds}.$$

On a de plus $g(0) = v_0(a-t) = K$, d'où :

$$g(c) = \left(u_0(a-t) \int_0^c \tau(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(s, a-t+s) ds} dl + v_0(a-t) \right) e^{-\int_0^c \nu(s, a-t+s) ds},$$

et, puisque $v(t, a) = g(t)$, on a si $0 < a < t$:

$$v(t, a) = \left(u_0(a-t) \int_0^t \tau(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(s, a-t+s) ds} dl + v_0(a-t) \right) e^{-\int_0^t \nu(s, a-t+s) ds}.$$

d'où le résultat. ■

3.4.2 1ère Etape

Le but de cette première étape est de résoudre un système linéarisé. Pour cela, on introduit les notations suivantes :

Pour $U = (u_1, u_2) \in \mathcal{H}_T$, on définit :

$$\begin{aligned}\mathbb{U}(t) &= \int_0^{a_\dagger} u_1(t, a) da + \int_{a_1}^{a_\dagger} u_2(t, a) da \\ \mathbb{A}_U(t) &= \int_{a_1}^{a_\dagger} u_2(t, a) da \\ \mu_U(t, a) &= \mu_J(t, a, \mathbb{U}(t)) \\ \tau_U(t, a) &= \tau(t, a, \mathbb{A}_U(t)) \\ \nu_U(t, a) &= \mu_A(t, a, \mathbb{U}(t)) \\ \beta_U(t, a) &= \beta(t, a, \mathbb{U}(t)) \\ B_{U,V}(t) &= \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta_U(t, a) v_2(t, a) da.\end{aligned}$$

On suppose que $U = (u_1(t, a), u_2(t, a))$ est donné dans \mathcal{H}_T . On considère l'application $\Psi : V = (v_1, v_2) \in \mathcal{H}_T \rightarrow W = (w_1, w_2)$ où W est solution du système suivant :

Pour $t \geq 0$ et $0 < a < a_\dagger$,

$$\begin{cases} \partial_t w_1(t, a) + \partial_a w_1(t, a) = -(\mu_U(t, a) + \tau_U(t, a)) \cdot w_1(t, a) \\ w_1(0, a) = J_0(a) \\ w_1(t, 0) = B_{U,V}(t), \end{cases} \quad (3.4.7)$$

et pour $t \geq 0$ et $a_1 < a < a_\dagger$,

$$\begin{cases} \partial_t w_2(t, a) + \partial_a w_2(t, a) = -\nu_U(t, a) \cdot w_2(t, a) + \tau_U(t, a) \cdot w_1(t, a) \\ w_2(0, a) = A_0(a) \\ w_2(t, a_1) = 0. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

En utilisant les Propositions 3.4.1 et 3.4.2, on a les formules suivantes pour w_1 et w_2 :

$$w_1(t, a) = \begin{cases} B_{U,V}(t-a) e^{-\int_0^a (\mu_U + \tau_U)(t-a+s, s) ds} & \text{si } 0 < a < t \\ J_0(a-t) e^{-\int_0^t (\mu_U + \tau_U)(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a, \end{cases}$$

$$w_2(t, a) = \begin{cases} \text{Si } 0 < a < t, \\ B_{U,V}(t-a) \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t-a+l, l) e^{\int_0^l (\nu_U - \mu_U - \tau_U)(t-a+s, s) ds} dl \right) e^{-\int_0^a \nu_U(t-a+s, s) ds} \\ \text{si } 0 < t < a, \\ \left(J_0(a-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu_U - \mu_U - \tau_U)(s, a-t+s) ds} dl \right. \\ \left. + A_0(a-t) \right) e^{-\int_0^t \nu_U(s, a-t+s) ds}. \end{cases}$$

Remarque 3.4.1

En utilisant ces formules, on remarque que $(v_1, v_2) \geq 0 \Rightarrow (w_1, w_2) \geq 0$.

Proposition 3.4.3

Il existe T_1 dépendant de $\|U\|_{\mathcal{H}_T}$ tel que pour $T \leq T_1$, l'application $\Psi : \mathcal{H}_T \rightarrow \mathcal{H}_T$ est strictement contractante.

Preuve.

1. On considère $W = \Psi(V)$. Nous allons montrer que $W \in \mathcal{H}_T$.

Utilisant les formules précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{a^\dagger} w_1(t, a) da &= \int_0^t w_1(t, a) da + \int_t^{a^\dagger} w_1(t, a) da \\ &\leq \int_0^t \int_{a_1}^{a^\dagger} \beta_U(t-a, \alpha) v_2(t-a, \alpha) d\alpha + \int_t^{a^\dagger} J_0(a-t) da \\ &\leq \beta_\infty T \|v_2\|_{L^\infty L^1} + \|J_0\|_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Et, pour w_2 , en utilisant $t \wedge a_1 = \max(t, a_1)$:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a^\dagger} w_2(t, a) da &= \int_{a_1}^{t \wedge a_1} w_2(t, a) da + \int_{t \wedge a_1}^{a^\dagger} w_2(t, a) da \\ &\leq \int_0^{t \wedge a_1} \int_{a_1}^{a^\dagger} \beta_U(t-a, \alpha) v_2(t-a, \alpha) d\alpha \\ &\quad \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t-a+l, l) e^{-\int_0^l (\mu_U + \tau_U)(t-a+s, s) ds} e^{-\int_0^a \nu_U(t-a+s, s) ds} dl \right) \\ &\quad + \int_{t \wedge a_1}^{a^\dagger} \left(J_0(a-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{-\int_0^l (\mu_U + \tau_U)(s, a-t+s) ds} e^{-\int_0^t \nu_U(s, a-t+s) ds} dl \right. \\ &\quad \left. + A_0(a-t) e^{-\int_0^t \nu_U(s, a-t+s) ds} \right) da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_\dagger} w_2(t, a) da &\leq \int_0^{t \wedge a_1} \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta_U(t-a, \alpha) v_2(t-a, \alpha) d\alpha \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t-a+l, l) dl \right) \\
&\quad + \int_{t \wedge a_1}^{a_\dagger} (J_0(a-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) dl + A_0(a-t)) da \\
&\leq \beta_\infty \max(T, a_1) \|v_2\|_{L^\infty L^1} (a_\dagger - a_1) \tau_\infty + \tau_\infty \|J_0\|_1 + \|A_0\|_1 < +\infty.
\end{aligned}$$

D'où $W \in \mathcal{H}_T$.

2. Maintenant, nous allons montrer que Ψ est strictement contractante pour T petit.

Soient $W = \Psi(V)$ et $\widetilde{W} = \Psi(\widetilde{V})$. U étant fixé, on a :

$$(w_1 - \widetilde{w}_1)(t, a) = \begin{cases} \text{Si } 0 < a < t, \\ \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta_U(t-a, \alpha) (v_2 - \widetilde{v}_2)(t-a, \alpha) d\alpha e^{-\int_0^a (\mu_U + \tau_U)(t-a+s, s) ds} \\ 0 \text{ si } 0 < t < a. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\|(w_1 - \widetilde{w}_1)(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \int_0^t \beta_\infty \|(v_2 - \widetilde{v}_2)(t-a, \cdot)\|_{L^1} da,$$

et,

$$\|w_1 - \widetilde{w}_1\|_{L^\infty L^1} \leq \beta_\infty T \|v_2 - \widetilde{v}_2\|_{L^\infty L^1}.$$

De la même façon, on a :

$$(w_2 - \widetilde{w}_2)(t, a) = \begin{cases} \text{Si } 0 < a < t, \\ \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta_U(t-a, \alpha) (v_2 - \widetilde{v}_2)(t-a, \alpha) d\alpha \cdot \\ \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t-a+l, l) e^{\int_0^l (\nu_U - \mu_U - \tau_U)(t-a+s, s) ds} dl \right) e^{-\int_0^a \nu_U(t-a+s, s) ds} \\ 0 \text{ si } 0 < t < a \end{cases}$$

d'où

$$\|(w_2 - \widetilde{w}_2)(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \int_{a_1}^{t \wedge a_1} \beta_\infty \|(v_2 - \widetilde{v}_2)(t-a, \cdot)\|_{L^1} (\tau_\infty (a_\dagger - a_1))$$

et,

$$\|w_2 - \widetilde{w}_2\|_{L^\infty L^1} \leq \beta_\infty \tau_\infty a_\dagger T \|v_2 - \widetilde{v}_2\|_{L^\infty L^1}$$

Alors nous avons :

$$\|W - \widetilde{W}\|_{\mathcal{H}_T} \leq (1 + \tau_\infty a_\dagger) \beta_\infty T \|V - \widetilde{V}\|_{\mathcal{H}_T}$$

Ainsi, si $T < \frac{1}{(1 + \tau_\infty a_\dagger) \beta_\infty} := T_1$, Ψ est strictement contractante. ■

En utilisant le Théorème du point fixe de Banach, on a alors prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.4.1

Il existe $T_1 > 0$ tel que pour $0 < T < T_1$, pour $U \in \mathcal{H}_T$, il existe un unique $V = (v_1, v_2) \in \mathcal{H}_T$ tel que pour $0 \leq t \leq T$,

Pour $0 < a < a_\dagger$:

$$\begin{cases} \partial_t v_1(t, a) + \partial_a v_1(t, a) = -(\mu_U(t, a) + \tau_U(t, a)) \cdot v_1(t, a) \\ v_1(0, a) = J_0(a) \\ v_1(t, 0) = B_{U,V}(t), \end{cases} \quad (3.4.9)$$

et pour $a_1 < a < a_\dagger$:

$$\begin{cases} \partial_t v_2(t, a) + \partial_a v_2(t, a) = -\nu_U(t, a) \cdot v_2(t, a) + \tau_U(t, a) \cdot v_1(t, a) \\ v_2(0, a) = A_0(a) \\ v_2(t, a_1) = 0. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

De plus, V vérifie les formules intégrales suivantes :

$$v_1(t, a) = \begin{cases} B_{U,V}(t-a) e^{-\int_0^a (\mu_U + \tau_U)(t-a+s, s) ds} & \text{si } 0 < a < t \\ J_0(a-t) e^{-\int_0^t (\mu_U + \tau_U)(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a, \end{cases}$$

$$v_2(t, a) = \begin{cases} \text{Si } 0 < a < t, \\ B_{U,V}(t-a) \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t-a+l, l) e^{\int_0^l (\nu_U - \mu_U - \tau_U)(t-a+s, s) ds} dl \right) e^{-\int_0^a \nu_U(t-a+s, s) ds} \\ \text{si } 0 < t < a, \\ \left(J_0(a-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu_U - \mu_U - \tau_U)(s, a-t+s) ds} dl \right. \\ \left. + A_0(a-t) \right) e^{-\int_0^t \nu_U(s, a-t+s) ds} \end{cases}$$

Définition 3.4.1

On appellera solution du problème (3.1.1)-(3.1.2) un $U \in \mathcal{H}_T$ vérifiant les formules intégrales ci-dessus avec $V = U$.

3.4.3 2ème étape

Nous allons maintenant résoudre le problème principal. Pour cela, on définit $\Phi : U = (u_1, u_2) \in \mathcal{H}_T \rightarrow V = (v_1, v_2)$ de sorte que V vérifie (3.4.9)-(3.4.10). Le Théorème 3.4.1 nous prouve que Φ est bien définie et est une application : $\mathcal{H}_T \rightarrow \mathcal{H}_T$ pourvu que $T \leq T_1$. Notre but est maintenant de montrer que pour T suffisamment petit, Φ est strictement contractante.

Nous aurons besoin de l'estimation a priori suivante :

Proposition 3.4.4

Si $U \in \mathcal{H}_T$ et $V = \Phi(U)$, alors on a :

$$\forall 0 \leq t \leq T, \quad \mathbb{V}(t) \leq P_0 e^{\beta_\infty t}, \quad (3.4.11)$$

avec $P_0 = \|J_0(\cdot)\|_{L^1} + \|A_0(\cdot)\|_{L^1}$.

Preuve. En utilisant (3.4.9) et (3.4.10), on a pour $v(t, a) = v_1(t, a) + v_2(t, a)$ (on prolongera pour $0 < a < a_1, v_2(t, a) = 0$) :

Pour $t \geq 0$ et $0 < a < a_\dagger$:

$$\begin{cases} \partial_t v(t, a) + \partial_a v(t, a) = -\mu_U(t, a) \cdot v_1(t, a) - \nu_U(t, a) \cdot v_2(t, a) \\ v(0, a) = J_0(a) + A_0(a) \\ v(t, 0) = \int_0^{a_\dagger} \beta_U(t, a) v_2(t, a) da. \end{cases} \quad (3.4.12)$$

Ainsi, on a pour $\mathbb{V}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}'(t) &= - \int_0^{a_\dagger} (\mu_U(t, a) \cdot v_1(t, a) - \nu_U(t, a) \cdot v_2(t, a)) da + \int_0^{a_\dagger} \beta_U(t, a) v_2(t, a) da - v(t, a_\dagger) \\ &\leq \int_0^{a_\dagger} \beta(t, a) v(t, a) da \\ &\leq \beta_\infty \mathbb{V}(t), \end{aligned}$$

ainsi $\mathbb{V}(t) \leq \mathbb{V}(0) e^{\beta_\infty t}$ ce qui achève la démonstration car $\mathbb{V}(0) = P_0$. ■

On peut remarquer que ces estimations ne dépendent pas de U . Pour la preuve du Théorème 3.3.2 (pour le cas d'une existence sur \mathbb{R}_+), nous avons besoin d'une estimation uniforme, donc du corollaire suivant :

Corollaire 3.4.1

Si de plus, μ_J et μ_A vérifient l'hypothèse Hyp 3.4, alors $V \in \mathcal{H}_\infty$.

Preuve. En utilisant l'hypothèse Hyp 3.4, on déduit de (3.4.12) :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}'(t) &= v(t, 0) - v(t, a_\dagger) - \int_0^{a_\dagger} (\mu_{n,J}(a) v_1(t, a) + \mu_{n,A}(a) v_2(t, a)) da - \mu_e(\mathbb{V}(t)) \int_0^{a_\dagger} v(t, a) da \\ &\leq v(t, 0) - \mu_e(\mathbb{V}(t)) \mathbb{V}(t) \leq \beta_\infty \mathbb{V}(t) - \mu_e(\mathbb{V}(t)) \mathbb{V}(t). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{V}(t) \leq y(t)$ où $y(t)$ est solution de $y'(t) = \beta_\infty y(t) - \mu_e(y(t)) y(t)$ et $y(0) = \mathbb{P}(0) \geq 0$. Alors, on montre facilement par une application du Théorème de Cauchy-Lipschitz que $y(t) \leq \text{Max}(y(0), \bar{\mathbb{P}})$, avec $\mu_e(\bar{\mathbb{P}}) = \beta_\infty$ d'où $\mathbb{V}(t) \leq \text{Max}(\mathbb{P}(0), \bar{\mathbb{P}})$. ■

Revenons à la Proposition 3.4.4, on peut faire la remarque suivante :

Remarque 3.4.2

En particulier, pour tout $V \in \text{Im}(\Phi)$, on aura $\|v_i(t, \cdot)\|_{L^1} \leq P_0 e^{\beta_\infty t}$ pour $i = 1, 2$.

D'où :

Corollaire 3.4.2

Supposons que T^* et P_0 sont fixés. Alors pour $T \leq T^*$ on a $\Phi : B_{T^*}(\mathcal{H}_T) \rightarrow B_{T^*}(\mathcal{H}_T)$ avec :

$$B_{T^*}(\mathcal{H}_T) = \{U \in \mathcal{H}_T, \|U\|_{\mathcal{H}_T} \leq P_0 e^{\beta_\infty T^*}\}.$$

Proposition 3.4.5

Il existe $T_2 \leq T_1$ tel que pour $T \leq T_2$, $\Phi : B_{T^*}(\mathcal{H}_T) \rightarrow B_{T^*}(\mathcal{H}_T)$ est strictement contractante.

Preuve. Soient $U, \tilde{U} \in B_{T^*}(\mathcal{H}_T)$ et $V = \Phi(U), \tilde{V} = \Phi(\tilde{U})$ (alors $V, \tilde{V} \in B_{T^*}(\mathcal{H}_T)$).

1. Estimation de $|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)|$ pour $0 < a < t$.

On a, pour $0 < a < t$:

$$(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a) = B_V(t - a) \left(e^{-\int_0^a (\mu_U + \tau_U)(t-a+s, s) ds} - e^{-\int_0^a (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(t-a+s, s) ds} \right) \\ + e^{-\int_0^a (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(t-a+s, s) ds} \left(B_{U, V}(t - a) - B_{\tilde{U}, \tilde{V}}(t - a) \right),$$

alors, puisque $|e^x - e^y| \leq |x - y|$ (Théorème des valeurs intermédiaires) :

$$|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)| \leq B_V(t - a) \left| \int_0^a (\mu_U - \mu_{\tilde{U}})(t - a + s, s) + (\tau_U - \tau_{\tilde{U}})(t - a + s, s) ds \right| \\ + |(B_{U, V} - B_{\tilde{U}, \tilde{V}})(t - a)|.$$

En utilisant l'hypothèse Hyp 3.3, on a :

$$\left| \int_0^a (\mu_U - \mu_{\tilde{U}})(t - a + s, s) + (\tau_U - \tau_{\tilde{U}})(t - a + s, s) ds \right| \leq a_{\dagger} (K_J + K_\tau) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}.$$

On a également :

$$B_{U, V}(t - a) = \int_{a_1}^{a_{\dagger}} \beta(t - a, \alpha, \mathbb{U}) v_2(t - a, \alpha) d\alpha \leq \beta_\infty P_0 e^{\beta_\infty (t-a)},$$

et

$$|(B_{U, V} - B_{\tilde{U}, \tilde{V}})(t - a)| = \left| \int_{a_1}^{a_{\dagger}} (\beta(t - a, \alpha, \mathbb{U}) (v_2 - \tilde{v}_2)(t - a, \alpha) \right. \\ \left. + \tilde{v}_2(t - a, \alpha) (\beta(t - a, \alpha, \mathbb{U}) - \beta(t - a, \alpha, \tilde{\mathbb{U}})) d\alpha \right|$$

$|(B_{U,V} - B_{\tilde{U},\tilde{V}})(t - a)| \leq \beta_\infty \cdot \|(V - \tilde{V})(t - a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} + \beta_\infty K_\beta P_0 e^{\beta_\infty (t-a)} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}$,
alors, pour $0 < a < t$,

$$|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)| \leq \beta_\infty P_0 (a_\dagger (K_J + K_\tau) + K_\beta) e^{\beta_\infty (t-a)} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + \beta_\infty \|(V - \tilde{V})(t - a, \cdot)\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.4.13)$$

2. Estimation de $|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)|$ pour $0 < t < a$.

On a pour $0 < t < a$:

$$(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a) = J_0(a - t) \left(e^{-\int_0^t (\mu_U + \tau_U)(s, a-t+s) ds} - e^{-\int_0^t (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(s, a-t+s) ds} \right),$$

alors,

$$|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)| \leq J_0(a - t) (K_J + K_\tau) T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}. \quad (3.4.14)$$

3. Estimation de $\|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, \cdot)\|_1$.

On a :

$$\|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, \cdot)\|_1 = \int_0^t |(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)| da + \int_t^{a_\dagger} |(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)| da,$$

d'où en utilisant (3.4.13) et (3.4.14) :

$$\begin{aligned} \|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, \cdot)\|_1 &\leq \int_0^t \beta_\infty P_0 (a_\dagger (K_J + K_\tau) + K_\beta) e^{\beta_\infty (t-a)} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \beta_\infty \|(V - \tilde{V})(t - a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da + \int_t^{a_\dagger} J_0(a - t) (K_J + K_\tau) T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} da \\ &\leq \beta_\infty P_0 (a_\dagger (K_J + K_\tau) + K_\beta) \left(\int_0^t e^{\beta_\infty (t-a)} da \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \beta_\infty \int_0^t \|(V - \tilde{V})(a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da + \|J_0\|_1 (K_J + K_\tau) T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\leq P_0 (a_\dagger (K_J + K_\tau) + K_\beta) (e^{\beta_\infty t} - 1) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \beta_\infty \int_0^t \|(V - \tilde{V})(a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da + \|J_0\|_1 (K_J + K_\tau) T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, \cdot)\|_1 &\leq (P_0 (a_\dagger (K_J + K_\tau) + K_\beta) (e^{\beta_\infty t} - 1) + T \|J_0\|_1 (K_J + K_\tau)) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \beta_\infty \int_0^t \|(V - \tilde{V})(a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da. \quad (3.4.15) \end{aligned}$$

4. Estimation de $|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, a)|$ pour $0 < a < t$.

On a pour $0 < a < t$:

$$(v_2 - \tilde{v}_2)(t, a) = (i) + (ii) + (iii),$$

avec :

$$(i) = B_{U,V}(t-a) \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t-a+l, l) e^{-\int_0^l (\mu_U + \tau_U)(t-a+s, s) ds} \left(e^{-\int_0^a \nu_U(t-a+s, s) ds} - e^{-\int_0^a \nu_{\tilde{U}}(t-a+s, s) ds} \right) \right),$$

$$(ii) = B_{U,V}(t-a) \int_{a_1}^a \left(\tau_U(t-a+l, l) e^{-\int_0^l (\mu_U + \tau_U)(t-a+s, s) ds} - \tau_{\tilde{U}}(t-a+l, l) e^{-\int_0^l (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(t-a+s, s) ds} \right) e^{-\int_0^a \nu_{\tilde{U}}(t-a+s, s) ds} dl,$$

$$(iii) = \left(\int_{a_1}^a \tau_{\tilde{U}}(t-a+l, l) e^{-\int_0^l (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(t-a+s, s) ds} e^{-\int_0^a \nu_{\tilde{U}}(t-a+s, s) ds} dl \right) (B_{U,V} - B_{\tilde{U}, \tilde{V}})(t-a).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} |(i)| &\leq (\beta_\infty P_0 e^{\beta_\infty (t-a)}) \left(\tau_\infty \int_{a_1}^a \int_l^a |(\nu_U - \nu_{\tilde{U}})(t-a+s, s)| ds dl \right) \\ &\leq \beta_\infty \tau_\infty P_0 e^{\beta_\infty (t-a)} K_A a_\dagger^2 \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} |(ii)| &\leq (\beta_\infty P_0 e^{\beta_\infty (t-a)}) \int_{a_1}^a \left(\tau_U(t-a+l, l) \left(e^{-\int_0^l (\mu_U + \tau_U)(t-a+s, s) ds} - e^{-\int_0^l (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(t-a+s, s) ds} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\tau_U - \tau_{\tilde{U}})(t-a+l, l) e^{-\int_0^l (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(t-a+s, s) ds} \right) dl \\ &\leq (\beta_\infty P_0 e^{\beta_\infty (t-a)}) (\tau_\infty (K_J + K_\tau) a_\dagger^2 + K_\tau (a_\dagger - a_1)) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}, \end{aligned}$$

et, en utilisant l'estimation obtenue précédemment sur $B_{U,V} - B_{\tilde{U}, \tilde{V}}$:

$$|(iii)| \leq (\tau_\infty \beta_\infty (a_\dagger - a_1)) \left(\|(V - \tilde{V})(t-a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} + K_\beta P_0 e^{\beta_\infty (t-a)} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \right).$$

Donc, pour $0 < a < t$,

$$|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, a)| \leq \beta_\infty P_0 e^{\beta_\infty (t-a)} ((K_J + K_A + K_\tau) \tau_\infty a_\dagger^2 + (K_\tau + \tau_\infty K_\beta)(a_\dagger - a_1)) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + \beta_\infty \tau_\infty (a_\dagger - a_1) \|(V - \tilde{V})(t - a, \cdot)\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.4.16)$$

5. Estimation de $|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, a)|$ pour $0 < t < a$.

On a pour $0 < t < a$:

$$(v_2 - \tilde{v}_2)(t, a) = (i) + (ii) + (iii) + (iv),$$

avec :

$$(i) = J_0(a-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{-\int_0^l (\mu_U + \tau_U)(s, a-t+s) ds} \left(e^{-\int_l^t \nu_U(s, a-t+s) ds} - e^{-\int_l^t \nu_{\tilde{U}}(s, a-t+s) ds} \right) dl,$$

$$(ii) = J_0(a-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) \left(e^{-\int_0^l (\mu_U + \tau_U)(s, a-t+s) ds} - e^{-\int_0^l (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(s, a-t+s) ds} \right) e^{-\int_l^t \nu_{\tilde{U}}(s, a-t+s) ds} dl,$$

$$(iii) = J_0(a-t) \int_0^t (\tau_U - \tau_{\tilde{U}})(l, a-t+l) e^{-\int_0^l (\mu_{\tilde{U}} + \tau_{\tilde{U}})(s, a-t+s) ds} e^{-\int_l^t \nu_{\tilde{U}}(s, a-t+s) ds} dl,$$

$$(iv) = A_0(a-t) \left(e^{-\int_0^t \nu_U(s, a-t+s) ds} - e^{-\int_0^t \nu_{\tilde{U}}(s, a-t+s) ds} \right).$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} |(i)| &\leq J_0(a-t) \tau_\infty K_A \left(\int_0^t (t-l) dl \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\leq J_0(a-t) \tau_\infty K_A \frac{T^2}{2} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ |(ii)| &\leq J_0(a-t) \tau_\infty (K_J + K_\tau) \frac{T^2}{2} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ |(iii)| &\leq J_0(a-t) K_\tau T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ |(iv)| &\leq A_0(a-t) K_A T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}, \end{aligned}$$

d'où, pour $0 < t < a$,

$$|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, a)| \leq \left(J_0(a-t) \left(K_\tau T + \tau_\infty (K_J + K_A + K_\tau) \frac{T^2}{2} \right) + A_0(a-t) K_A T \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}. \quad (3.4.17)$$

6. Estimation de $\|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, \cdot)\|_1$.

En utilisant (3.4.16) et (3.4.17), on obtient :

$$\begin{aligned} \|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, \cdot)\|_1 &\leq \left(\beta_\infty P_0 \left(\int_{a_1}^{t \wedge a_1} e^{\beta_\infty (t-a)} da \right) \left((K_J + K_A + K_\tau) \tau_\infty a_\dagger^2 + (\tau_\infty K_\beta + K_\tau)(a_\dagger - a_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + T \int_{t \wedge a_1}^{a_\dagger} \left(J_0(a-t) \left(K_\tau + \tau_\infty (K_J + K_A + K_\tau) \frac{T}{2} \right) + A_0(a-t) K_A \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} da \right. \\ &\quad \left. + \beta_\infty \tau_\infty (a_\dagger - a_1) \int_{a_1}^{t \wedge a_1} \|(V - \tilde{V})(t-a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, \cdot)\|_1 &\leq P_0 (e^{\beta_\infty t} - 1) \left((K_J + K_A + K_\tau) \tau_\infty a_\dagger^2 + (\tau_\infty K_\eta + K_\tau)(a_\dagger - a_1) \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + T \left(\|J_0\|_1 \left(K_\tau + \tau_\infty (K_J + K_A + K_\tau) \frac{T}{2} \right) + \|A_0\|_1 K_A \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \beta_\infty \tau_\infty (a_\dagger - a_1) \int_{a_1}^{t \wedge a_1} \|(V - \tilde{V})(t-a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, \cdot)\|_1 &\leq \left(\tau_\infty \left(P_0 (e^{\beta_\infty t} - 1) a_\dagger^2 + \frac{T^2}{2} \|J_0\|_1 \right) (K_J + K_A + K_\tau) \right. \\ &\quad \left. + T (\|A_0\|_1 K_A + \|J_0\|_1 K_\tau) + P_0 (e^{\beta_\infty t} - 1) (\tau_\infty K_\beta + K_\tau)(a_\dagger - a_1) \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \beta_\infty \tau_\infty (a_\dagger - a_1) \int_0^t \|(V - \tilde{V})(a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da. \quad (3.4.18) \end{aligned}$$

7. Estimation de $\|(V - \tilde{V})(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}}$.

A partir des inéquations (3.4.15) et (3.4.18), on obtient pour $0 < t < T$:

$$\|(V - \tilde{V})(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq (\lambda_0 (e^{\beta_\infty T} - 1) + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + \lambda \int_0^t \|(V - \tilde{V})(a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da,$$

avec $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et λ indépendants de t et T . Ainsi, on a par le Lemme de Gronwall :

$$\|(V - \tilde{V})(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq (\lambda_0 (e^{\beta_\infty T} - 1) + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} e^{\lambda t},$$

et,

$$\begin{aligned} \|(V - \tilde{V})(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} &\leq (\lambda_0 (e^{\beta_\infty T} - 1) + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2) e^{\lambda T} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &< \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}, \end{aligned}$$

pour T suffisamment petit. ■

3.4.4 Fin de la démonstration

La Proposition 3.4.5 donne l'existence globale et l'unicité d'une solution du problème (3.1.1)-(3.1.2) sur un intervalle $[0, T_2)$. Supposons maintenant que $T^* < \infty$ est donné. En utilisant la Proposition 3.4.4 et les notations précédemment utilisées, on peut voir que pour $t < T^*$ tel que $\mathbb{V}(t)$ est défini, on a :

$$\mathbb{V}(t) \leq P_0 e^{\beta t} = P_0 e^{\beta T^*} e^{\beta(t-T^*)} \leq P_0 e^{\beta T^*} e^{\beta t}. \quad (3.4.19)$$

Définissons alors $\tilde{P}_0 = P_0 e^{\beta T^*}$. On a alors :

$$\|J_0\|_1 \text{ et } \|A_0\|_1 \leq \tilde{P}_0. \quad (3.4.20)$$

Alors en utilisant cette inégalité dans (3.4.15) et (3.4.18), on obtient pour $0 < t < T$:

$$\|(V - \tilde{V})(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\tilde{\lambda}_0 (e^{\beta_\infty T} - 1) + \tilde{\lambda}_1 T + \tilde{\lambda}_2 T^2 \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + \lambda \int_0^t \|(V - \tilde{V})(a, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da.$$

Ainsi, on obtient \tilde{T}_2 tel que :

$$\begin{aligned} \|(V - \tilde{V})(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} &\leq \left(\tilde{\lambda}_0 (e^{\beta_\infty T} - 1) + \tilde{\lambda}_1 T + \tilde{\lambda}_2 T^2 \right) e^{\lambda T} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &< \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \text{ for } T \leq \tilde{T}_2. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Notons alors $T_3 = \min(T^*, \tilde{T}_2)$. On a prouvé l'existence locale et l'unicité d'une solution $(J_1(t, a), A_1(t, a))$ au système (3.1.1)-(3.1.2) sur $(0, a_+) \times (0, T_3)$.

Répétant cette démonstration avec $J_0(a) = J_1(T_3, a)$ et $A_0(a) = A_1(T_3, a)$, les estimations (3.4.19) et (3.4.20) existent encore, de sorte que (3.4.21) reste vrai. On a alors l'existence et l'unicité sur $(0, a_+) \times (T_3, T_3 + \tilde{T}_2)$, et en itérant ceci, on l'obtient finalement sur $(0, a_+) \times (0, T^*)$.

Chapitre 4

Etude du modèle JASIG

4.1 Mise en place du modèle

Le modèle que nous considérons ici est celui que nous avons vu dans le Chapitre 2. Nous en rappelons ici les variables et équations. Comme pour le modèle présenté dans le chapitre précédent, nous avons donc une structuration discrète en classe d'âges (juvéniles et adultes) ainsi qu'une structuration continue en temps (variable t), en âge chronologique (variable a) et pour les individus infectés en âge de l'infection (variable b). Nous travaillerons avec les densités suivantes :

- $J_s(t, a)$ pour $t \geq 0$ et $a \in (0, a_+)$, représente les juvéniles sains,
- $A_s(t, a)$ pour $t \geq 0$ et $a \in (a_1, a_+)$, représente les adultes sains,
- $J_i(t, a, b)$ pour $t \geq 0$, $a \in (0, a_+)$, et $b \in (0, a_+)$ représente les juvéniles infectés,
- $A_i(t, a, b)$ pour $t \geq 0$, $a \in (a_1, a_+)$, et $b \in (0, a_+)$ représente les adultes infectés,
- enfin $G(t)$ représente la proportion d'environnement contaminé.

Nous serons également amenés à utiliser les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 J(t, a) &= J_s(t, a) + \int_0^{a_+} J_i(t, a, b) db, \\
 A(t, a) &= A_s(t, a) + \int_0^{a_+} A_i(t, a, b) db, \\
 P(t, a) &= J(t, a) + A(t, a), I(t, b) = \int_0^{a_+} J_i(t, a, b) da + \int_{a_1}^{a_+} A_i(t, a, b) da,
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}(t) &= \int_0^{a_\dagger} J(t, a) da, \\
\mathbb{A}(t) &= \int_{a_1}^{a_\dagger} A(t, a) da, \\
\mathbb{P}(t) &= \mathbb{J}(t) + \mathbb{A}(t), \\
\mathbb{I}(t) &= \int_0^{a_\dagger} \left(\int_0^{a_\dagger} J_i(t, a, b) da + \int_{a_1}^{a_\dagger} A_i(t, a, b) da \right) db.
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Les équations régissant le modèle JASIG que nous étudions, sont alors pour $t > 0$, $a \in (0, a_\dagger)$ ((a_1, a_\dagger) pour les adultes) et $b \in (0, a_\dagger)$:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left(\partial_t J_s + \partial_a J_s \right) (t, a) = - \left(\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) + \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) + \sigma_J(t, a) \right) J_s(t, a), \\
& J_s(0, a) = J_s^0(a), \\
& J_s(t, 0) = \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta(t, a, \mathbb{P}(t)) \left(A_s(t, a) + \int_0^{a_\dagger} A_i(t, a, b) db \right) da,
\end{aligned} \right. \tag{4.1.3}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left(\partial_t J_i + \partial_a J_i + \partial_b J_i \right) (t, a, b) = - \left(\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) + \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) \right) J_i(t, a, b), \\
& J_i(0, a, b) = J_i^0(a, b), \\
& J_i(t, 0, b) = 0, \\
& J_i(t, a, 0) = \sigma_J(t, a) J_s(t, a),
\end{aligned} \right. \tag{4.1.4}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left(\partial_t A_s + \partial_a A_s \right) (t, a) = - \left(\mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) + \sigma_A(t, a) \right) A_s(t, a) \\
& \hspace{15em} + \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) J_s(t, a), \\
& A_s(0, a) = A_s^0(a), \\
& A_s(t, a_1) = 0,
\end{aligned} \right. \tag{4.1.5}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left(\partial_t A_i + \partial_a A_i + \partial_b A_i \right) (t, a, b) = - \mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) A_i(t, a, b), \\
& \hspace{15em} + \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) J_i(t, a, b), \\
& A_i(0, a, b) = A_i^0(a, b), \\
& A_i(t, a_1, b) = 0, \\
& A_i(t, a, 0) = \sigma_A(t, a) A_s(t, a),
\end{aligned} \right. \tag{4.1.6}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{dG}{dt}(t) = \int_0^{a_\dagger} \alpha(t, b) \cdot I(t, b) db (1 - G(t)) - \delta(t) G(t), \\
& G(0) = G_0,
\end{aligned} \right. \tag{4.1.7}$$

avec :

Définition 4.1.1

On note :

$$\begin{aligned} \sigma_J(t, a) = & \gamma(t) G(t) + \\ & \int_0^{b^*} \left(\int_0^{a_\dagger} \sigma_{j,J}^{ma}(t, a, a', b) J_i(t, a', b) da' + \int_{a_1}^{a_\dagger} \sigma_{a,J}^{ma}(t, a, a', b) A_i(t, a', b) da' \right) db \\ & + \int_{b^*}^{a_\dagger} \left(\int_0^{a_\dagger} \sigma_{j,J}^{pm}(t, a, a', b) \frac{J_i(t, a', b)}{J(t, a')} da' + \int_{a_1}^{a_\dagger} \sigma_{a,J}^{pm}(t, a, a', b) \frac{A_i(t, a', b)}{A(t, a')} da' \right) db, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_A(t, a) = & \gamma(t) G(t) + \\ & \int_0^{b^*} \left(\int_0^{a_\dagger} \sigma_{j,A}^{ma}(t, a, a', b) J_i(t, a', b) da' + \int_{a_1}^{a_\dagger} \sigma_{a,A}^{ma}(t, a, a', b) A_i(t, a', b) da' \right) db \\ & + \int_{b^*}^{a_\dagger} \left(\int_0^{a_\dagger} \sigma_{j,A}^{pm}(t, a, a', b) \frac{J_i(t, a', b)}{J(t, a')} da' + \int_{a_1}^{a_\dagger} \sigma_{a,A}^{pm}(t, a, a', b) \frac{A_i(t, a', b)}{A(t, a')} da' \right) db. \end{aligned}$$

Les coefficients μ_J , μ_A , β et τ sont les mêmes que dans le chapitre précédent, et nous avons en plus les coefficients :

- $\sigma_{z,Z}^{ma}$ (respectivement $\sigma_{z,Z}^{pm}$) avec $z = j, a$ et $Z = J, A$ représentent les taux d'infection des individus sains par les individus infectés avec une incidence de type action de masse ou densité (resp. de type mélange proportionné ou fréquence). Plus de précisions sont apportées dans le Chapitre 2.
- γ représente le taux d'infection des individus sains par l'environnement contaminé. Nous considérons ici pour simplifier les écritures qu'il est identique pour les juvéniles et les adultes, mais les résultats restent vrais s'ils diffèrent.
- α représente le taux de contamination du sol par les individus infectés. Nous considérons ici pour simplifier les écritures qu'il est identique pour les juvéniles et les adultes pourvu qu'ils soient infectés depuis le même temps, mais les résultats restent vrais s'ils diffèrent.
- Enfin, δ représente le taux de décontamination de l'environnement contaminé.

4.2 Notations et hypothèses

Commençons par définir l'espace dans lequel nous allons considérer nos solutions. Nous allons chercher des densités de population L^1 en âge. Aussi, nous introduisons les espaces suivants :

Définition 4.2.1

On définit

$$\mathcal{H} = L^1(0, a_\dagger) \times L^1((a_1, a_\dagger) \times (0, a_\dagger)) \times L^1(0, a_\dagger) \times L^1((a_1, a_\dagger) \times (0, a_\dagger)) \times \mathbb{R},$$

que l'on munit de la norme usuelle : Pour $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in \mathcal{H}$,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = \|u_1\|_{L^1} + \|u_2\|_{L^1} + \|u_3\|_{L^1} + \|u_4\|_{L^1} + |u_5|$$

Alors pour $T > 0$ (éventuellement $T = +\infty$), on définit $\mathcal{H}_T = L^\infty(0, T; \mathcal{H})$, muni de la norme :

$$\|U\|_{\mathcal{H}_T} = \sup_{0 \leq t \leq T} (\|U(t, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}})$$

On se donne des conditions initiales positives $(J_s^0, J_i^0, A_s^0, A_i^0, G_0) \in \mathcal{H}$. Par ailleurs, on a $J_i^0(a, b) = 0$ pour $a < b$, car la maladie n'est pas transmise verticalement (de la mère à sa descendance).

Nous faisons les hypothèses suivantes :

HYP 4.1

On suppose que les coefficients, γ, α, δ ainsi que tous les $\sigma_{z,Z}^{pm}$ ou am sont positifs et dans L^∞ .

Pour simplifier les notations, on notera $f_\infty = \|f\|_\infty$ pour $f = \gamma, \alpha, \delta$ et on introduit également σ_∞^{pm} ou $am = \max(\|\sigma_{z,Z}^{pm}$ ou $am\|_\infty)$, et $\sigma_\infty = \max(\sigma_\infty^{pm}, \sigma_\infty^{am})$.

Nous considérons également :

HYP 4.2

Nous supposons également que lorsque les individus deviennent trop âgés, c'est à dire pour $a' > \bar{A}$ avec $\bar{A} < a_\dagger$ mais proche de a_\dagger , ils sont trop faibles pour intervenir efficacement dans les contacts avec les autres individus, et ne participent donc pas à la transmission directe du virus. Mathématiquement, on supposera que pour $z = j, a, Z = J, A$ et $a' > \bar{A}$, on a $\sigma_{z,Z}^{pm}$ ou $am(t, a, a', b) = 0$.

Pour ce qui est des hypothèses contrôlant la démographie, nous aurons besoin, en plus de l'hypothèse Hyp 3.3 de :

HYP 4.3

On suppose également que : $\forall x_\infty > 0, \forall T > 0$,

- $\exists M_J(x_\infty) \geq 0 / \forall (t, a, x) \in (0, T) \times (0, \bar{A}) \times (0, x_\infty), \int_0^a \mu_J(t - a + s, s, x) ds \leq M_J(x_\infty)$,
- $\exists M_A(x_\infty) \geq 0 / \forall (t, a, x) \in (0, T) \times (a_1, \bar{A}) \times (0, x_\infty), \int_0^a \mu_A(t - a + s, s, x) ds \leq M_A(x_\infty)$,
- $\exists M_\beta(x_\infty) \geq 0 / \forall (t, a, x) \in (0, T) \times (0, \bar{A}) \times (0, x_\infty), \int_0^a \beta_J(t - a + s, s, x) ds \leq M_\beta(x_\infty)$,
- $\exists M_\tau \geq 0 / \forall (t, a) \in (0, T) \times (0, \bar{A}), \int_0^a \tau(t - a + s, s, 0) ds \leq M_\tau$.

Remarque 4.2.1

Cette dernière hypothèse, ainsi que la suivante sont uniquement nécessaires pour traiter la partie mélange proportionné des incidences σ_J et σ_A ; et elles sont inutiles si on considère que $\sigma_{z,Z}^{pm} = 0$. Elles sont utilisées pour prouver le Lemme 4.4.3. Dans l'hypothèse Hyp 4.4, il n'est pas important, mais plus simple pour les calculs de considérer le même ε pour les trois inégalités.

HYP 4.4

Pour $x_\infty > 0$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} J_s^0(a) &\geq \varepsilon, \quad \forall a \in (0, a_\dagger) \quad A_s^0(a) \geq \varepsilon, \quad \forall a \in (0, a_\dagger) \\ \exists 0 < \beta_m < \beta_M < a_\dagger / \beta(t, a) &\geq \varepsilon, \quad \forall t, \forall a \in (\beta_m, \beta_M) \\ \exists 0 < \tau_m < \tau_M < a_\dagger / \tau(t, a, x) &\geq \varepsilon > 0, \quad \forall t, \forall a \in (\tau_m, \tau_M), \forall x \in (0, x_\infty). \end{aligned}$$

4.3 Résultats

Nous allons démontrer les résultats suivants sous les hypothèses Hyp 3.1 à Hyp 3.3 ainsi que Hyp 4.1 à Hyp 4.4 :

Théorème 4.3.1

Soit $(J_s^0, J_i^0, A_s^0, A_i^0, G_0) \in \mathcal{H}$. Alors le problème (4.1.3)-(4.1.7) possède une unique solution à composantes positives $(J_s(t, a), J_i(t, a, b), A_s(t, a), A_i(t, a, b), G(t))$ dans $\mathcal{H}_{T^*}, \forall T^* > 0$.

En supposant de plus l'hypothèse Hyp 3.4 vérifiée, on a le résultat suivant :

Théorème 4.3.2

Soit $(J_s^0, J_i^0, A_s^0, A_i^0, G_0) \in \mathcal{H}$. Alors le problème (4.1.3)-(4.1.7) a une unique solution à composantes positives $(J_s(t, a), J_i(t, a, b), A_s(t, a), A_i(t, a, b), G(t))$ dans \mathcal{H}_∞ .

Remarque 4.3.1

La notion de solution est similaire à celle présentée dans le chapitre précédent (voir Définition 3.4.1). Elle est reprécisée dans la Définition 4.4.1 plus loin.

Dans la prochaine section, nous nous intéresserons à la preuve du Théorème 4.3.1. Le passage au Théorème 4.3.2 se fait comme dans le chapitre précédent en utilisant le Corollaire 4.4.1.

L'idée de la preuve est la même que pour le système JA : résoudre un problème auxiliaire linéaire par la méthode des caractéristiques et le Théorème du point fixe de Banach, puis utiliser des estimations a priori et de nouveau le Théorème du point fixe de Banach pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution dans $\mathcal{H}_{T_{\max}}$ avec $T_{\max} > 0$, et enfin étendre ce résultat sur l'intervalle entier $[0, T^*]$.

4.4 Preuve du Théorème 4.3.1

4.4.1 Résultats préliminaires

Pour $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ et $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ dans \mathcal{H}_T , on pose :

$$\begin{aligned} A_U(t, a) &= u_3(t, a) + \int_0^{a_\dagger} u_4(t, a, b) db, & \mathbb{A}_U(t) &= \int_{a_1}^{a_\dagger} A_U(t, a) da, \\ J_U(t, a) &= u_1(t, a) + \int_0^{a_\dagger} u_2(t, a, b) db, & \mathbb{J}_U(t) &= \int_0^{a_\dagger} J(t, a) da, & \mathbb{U}(t) &= \mathbb{J}_U(t) + \mathbb{A}_U(t), \\ \sigma_{J,U}(t, a) &= \gamma(t) u_5(t) + \\ &\int_0^{b^*} \left(\int_0^{a_\dagger} \sigma_{j,J}^{ma}(t, a, a', b) u_2(t, a', b) da' + \int_{a_1}^{a_\dagger} \sigma_{a,J}^{ma}(t, a, a', b) u_4(t, a', b) da' \right) db + \\ &\int_{b^*}^{a_\dagger} \left(\int_0^{a_\dagger} \sigma_{j,J}^{pm}(t, a, a', b) \frac{u_2(t, a', b)}{J(t, a')} da' + \int_{a_1}^{a_\dagger} \sigma_{a,J}^{pm}(t, a, a', b) \frac{u_4(t, a', b)}{A(t, a')} da' \right) db, \end{aligned}$$

avec une définition analogue pour $\sigma_{A,U}$

$$\begin{aligned} \mu_{U,1}(t, a) &= \mu_J(t, a, \mathbb{U}(t)) + \sigma_{J,U}(t, a), & \mu_{U,2}(t, a) &= \mu_J(t, a, \mathbb{U}(t)), \\ \tau_U(t, a) &= \tau(t, a, \mathbb{A}_U(t)), \\ \nu_{U,3}(t, a) &= \mu_A(t, a, \mathbb{U}(t)) + \sigma_{A,U}(t, a), & \nu_{U,4}(t, a) &= \mu_A(t, a, \mathbb{U}(t)), \\ B_{U,V}(t) &= \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta(t, a, \mathbb{U}(t)) \left(v_3(t, a) + \int_0^{a_\dagger} v_4(t, a, b) db \right) da, \\ M_{U,V,1}(t, a) &= \sigma_{J,U}(t, a) v_1(t, a), & M_{U,V,2}(t, a) &= \sigma_{A,U}(t, a) v_3(t, a), \\ f_V(t) &= \int_0^{a_\dagger} \alpha(t, b) \cdot \left(\int_0^{a_\dagger} v_2(t, a, b) da + \int_{a_1}^{a_\dagger} v_4(t, a, b) da \right) db, \\ g_U(t) &= \delta(t) + f_U(t). \end{aligned}$$

Nous considérons les systèmes linéaires suivants : Pour $t \geq 0$, $0 < a < a_\dagger$ et $0 < b < a_\dagger$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, a, b) + \partial_a u(t, a, b) + \partial_b u(t, a, b) = -(\mu(t, a) + \tau(t, a)) \cdot u(t, a, b) \\ u(0, a, b) = u_0(a, b) \\ u(t, 0, b) = 0 \\ u(t, a, 0) = M_1(t, a), \end{cases} \quad (4.4.1)$$

pour $t \geq 0$, $a_1 < a < a_\dagger$ et $0 < b < a_\dagger$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_a + \partial_b) v(t, a, b) = -\nu(t, a) \cdot v(t, a, b) + \tau(t, a) \cdot u(t, a, b) \\ v(0, a, b) = v_0(a, b) \\ v(t, a_1, b) = 0 \\ v(t, a, 0) = M_2(t, a), \end{cases} \quad (4.4.2)$$

et pour $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt}(t) = f(t) - g(t) \cdot G(t) \\ G(0) = G_0. \end{cases} \quad (4.4.3)$$

On a alors les résultats suivants :

Proposition 4.4.1

Soit $u(t, a, b)$ solution de (4.4.1), on a :

$$u(t, a, b) = \begin{cases} u_0(a-t, b-t) e^{-\int_0^t (\mu+\tau)(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a, b \\ M_1(t-b, a-b) e^{-\int_0^b (\mu+\tau)(t-s, a-s) ds} & \text{si } 0 < b < a, t \\ 0 & \text{if } 0 < a < t, b. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Preuve. La preuve est basée sur la méthode des caractéristiques et est similaire à celle de la Proposition 3.4.1, en séparant les cas $0 < t < a, b$, $0 < b < a, t$ et $0 < a < t, b$. ■

Proposition 4.4.2

Soit $v(t, a, b)$ solution de (4.4.2), on a :

$$v(t, a, b) = \begin{cases} \left(u_0(a-t, b-t) \int_0^t \tau(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(s, a-t+s) ds} dl \right. \\ \quad \left. + v_0(a-t, b-t) \right) \cdot e^{-\int_0^t \nu(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a, b \\ \left((M_1(t-b, a-b) \int_0^b \tau(t-b+l, a-b+l) e^{\int_0^l (\nu-\mu-\tau)(t-s, a-s) ds} dl \right. \\ \quad \left. + M_2(t-b, a-b) \right) \cdot e^{-\int_0^b \nu(t-s, a-s) ds} & \text{si } 0 < b < t, a \\ 0 & \text{if } 0 < a < t, b. \end{cases} \quad (4.4.5)$$

Preuve. La preuve est basée sur la méthode des caractéristiques et est similaire à celle de la Proposition 3.4.2, en séparant les cas $0 < t < a, b$, $0 < b < a, t$ et $0 < a < t, b$. ■

Proposition 4.4.3

Soit $G(t)$ solution de (4.4.3). On a pour $t > 0$:

$$G(t) = G_0 e^{-\int_0^t g(s) ds} + \int_0^t f(l) e^{-\int_l^t g(s) ds}. \quad (4.4.6)$$

Preuve. La preuve utilise la méthode de variation de la constante. ■

4.4.2 1ère Etape

Nous résolvons ici le système linéarisé. Soit U donné dans \mathcal{H}_T à composantes positives, on définit l'application $\Psi : V \in \mathcal{H}_T \rightarrow W$ où W est solution du système linéaire suivant pour $t \geq 0$:

Pour $0 < a < a_\dagger$,

$$\begin{cases} (\partial_t w_1 + \partial_a w_1)(t, a) = -(\mu_{U,1}(t, a) + \tau_U(t, a)) \cdot w_1(t, a) \\ w_1(0, a) = J_s^0(a) \\ w_1(t, 0) = B_{U,V}(t), \end{cases} \quad (4.4.7)$$

pour $0 < a < a_\dagger$ et $0 < b < a_\dagger$,

$$\begin{cases} (\partial_t w_2 + \partial_a w_2 + \partial_b w_2)(t, a, b) = -(\mu_{U,2}(t, a) + \tau_U(t, a)) \cdot w_2(t, a, b) \\ w_2(0, a, b) = J_i^0(a, b) \\ w_2(t, 0, b) = 0 \\ w_2(t, a, 0) = M_{U,V,1}(t, a), \end{cases} \quad (4.4.8)$$

pour $a_1 < a < a_\dagger$,

$$\begin{cases} (\partial_t w_3 + \partial_a w_3)(t, a) = -\nu_{U,3}(t, a) \cdot w_3(t, a) + \tau_U(t, a) \cdot w_1(t, a) \\ w_3(0, a) = A_s^0(a) \\ w_3(t, a_1) = 0, \end{cases} \quad (4.4.9)$$

pour $a_1 < a < a_\dagger$ et $0 < b < a_\dagger$,

$$\begin{cases} (\partial_t w_4 + \partial_a w_4 + \partial_b w_4)(t, a, b) = -\nu_{U,4}(t, a) \cdot w_4(t, a, b) + \tau_U(t, a) \cdot w_2(t, a, b) \\ w_4(0, a, b) = A_i^0(a, b) \\ w_4(t, a_1, b) = 0 \\ w_4(t, a, 0) = M_{U,V,2}(t, a), \end{cases} \quad (4.4.10)$$

et :

$$\begin{cases} \frac{dw_5}{dt}(t) = f_V(t) - g_U(t) \cdot w_5(t) \\ w_5(0) = G_0. \end{cases} \quad (4.4.11)$$

En utilisant les Propositions 3.4.1, 3.4.2, 4.4.1, 4.4.2 et 4.4.3, on obtient les formules suivantes pour w_i $1 \leq i \leq 5$:

$$w_1(t, a) = \begin{cases} B_{U,V}(t-a) e^{-\int_0^a (\mu_{U,1} + \tau_U)(t-a+s, s) ds} & \text{si } 0 < a < t \\ J_s^0(a-t) e^{-\int_0^t (\mu_{U,1} + \tau_U)(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a, \end{cases}$$

$$w_2(t, a, b) = \begin{cases} J_i^0(a-t, b-t) e^{-\int_0^t (\mu_{U,2} + \tau_U)(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a, b \\ M_{U,V,1}(t-b, a-b) e^{-\int_0^b (\mu_{U,2} + \tau_U)(t-s, a-s) ds} & \text{si } 0 < b < a, t \\ 0 & \text{si } 0 < a < t, b, \end{cases}$$

$$w_3(t, a) = \begin{cases} B_{U,V}(t-a) \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t-a+l, l) e^{-\int_0^l (\mu_{U,1} + \tau_U)(t-a+s, s) ds} \right. \\ \quad \left. \cdot e^{-\int_l^a \nu_{U,3}(t-a+s, s) ds} dl \right) \text{ si } 0 < a < t \\ \left(A_s^0(a-t) + J_s^0(a-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{-\int_0^l (\mu_{U,1} + \tau_U)(s, a-t+s) ds} \right) \\ \quad \cdot e^{-\int_l^t \nu_{U,3}(s, a-t+s) ds} dl \text{ si } 0 < t < a, \end{cases}$$

$$w_4(t, a, b) = \begin{cases} \left(J_i^0(a-t, b-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu_{U,4} - \mu_{U,2} - \tau_U)(s, a-t+s) ds} dl \right. \\ \quad \left. + A_i^0(a-t, b-t) \right) \cdot e^{-\int_0^t \nu_{U,4}(s, a-t+s) ds} \text{ si } 0 < t < a, b \\ \left(M_{U,V,1}(t-b, a-b) \int_0^b \tau_U(t-b+l, a-b+l) \right. \\ \quad \left. \cdot e^{\int_0^l (\nu_{U,4} - \mu_{U,2} - \tau_U)(t-s, a-s) ds} dl + M_{U,V,2}(t-b, a-b) \right) \\ \quad \cdot e^{-\int_0^b \nu_{U,4}(t-s, a-s) ds} \text{ si } 0 < b < t, a \\ 0 \text{ si } 0 < a < t, b, \end{cases}$$

$$w_5(t) = G_0 e^{-\int_0^t g_U(s) ds} + \int_0^t f_V(l) e^{-\int_l^t g_U(s) ds} dl \text{ pour } t > 0.$$

Remarque 4.4.1

On remarque alors que : $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \geq 0 \Rightarrow (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \geq 0$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 4.4.4

Il existe $T_1 > 0$, dépendant de $\|U\|_{\mathcal{H}_T}$, tel que pour $T \leq T_1$, l'application $\Psi : \mathcal{H}_T \rightarrow \mathcal{H}_T$ est strictement contractante.

Preuve.

1. Nous commençons par montrer avec des estimations a priori en utilisant les représentations intégrales ci-dessus que $W \in \mathcal{H}_T$. Pour w_1 nous avons, en procédant de la même façon que pour la Proposition 3.4.3 :

$$\begin{aligned} \|w_1(t, \cdot)\|_1 &\leq \beta_\infty T (\|v_3\|_{L^\infty L^1} + \|v_4\|_{L^\infty L^1}) + \|J_s^0\|_1 \\ &\leq 2\beta_\infty T \|V\|_{\mathcal{H}_T} + \|J_s^0\|_1. \end{aligned}$$

Pour w_2 , comme $w_2(t, a, b) = 0$ si $a < t, b$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|w_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 &= \int_0^{a_\dagger} \int_0^{a_\dagger} w_2(t, a, b) db da \\
&= \int_0^t \int_b^{a_\dagger} w_2(t, a, b) da db + \int_t^{a_\dagger} \int_t^{a_\dagger} w_2(t, a, b) da db \\
&\leq \int_0^t \int_b^{a_\dagger} M_{U,V,1}(t-b, a-b) da db + \int_t^{a_\dagger} \int_t^{a_\dagger} J_i^0(a-t, b-t) da db \\
&\leq \|v_1\|_{L^\infty L^1} \int_0^T \int_b^{a_\dagger} \sigma_{J,U}(t-b, a-b) da db + \|J_i^0\|_1.
\end{aligned}$$

Or on a (voir le Lemme 4.4.1 après cette démonstration) :

$$\begin{aligned}
\sigma_{J,U}(t-b, a-b) \sigma_\infty^{ma} (\|u_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 + \|u_4(t, \cdot, \cdot)\|_1) + 2a_\dagger \sigma_\infty^{pm} + \gamma_\infty u_5(t) \\
\leq 2(\sigma_\infty^{ma} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} + a_\dagger \sigma_\infty^{pm}) + \gamma_\infty \|U(t)\|_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^T \int_b^{a_\dagger} \sigma_{J,U}(t-b, a-b) da db \leq T a_\dagger (2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger + (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) \|U(t)\|_{\mathcal{H}}).$$

Ainsi on a :

$$\|w_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 \leq T a_\dagger (2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger + (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) \|U(t)\|_{\mathcal{H}}) \cdot \|V\|_{\mathcal{H}_T} + \|J_i^0\|_1.$$

Pour w_3 , on obtient de façon similaire ce qu'on avait obtenu dans la démonstration de la Proposition 3.4.3 :

$$\|w_3(t, \cdot)\|_1 \leq \beta_\infty \max(T, a_1) \tau_\infty (a_\dagger - a_1) \|V\|_{\mathcal{H}_T} + \tau_\infty \|J_s^0\|_1 + \|A_s^0\|_1.$$

Pour w_4 , on a :

$$\|w_4(t, \cdot, \cdot)\|_1 = \int_0^{a_\dagger} \int_{a_1}^{a_\dagger} w_4(t, a, b) db da,$$

et, en notant $a_1 \wedge b = \max(a_1, b)$:

$$\begin{aligned}
\|w_4(t, \cdot, \cdot)\|_1 &= \int_0^t \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} w_4(t, a, b) da db + \int_t^{a_\dagger} \int_{a_1 \wedge t}^{a_\dagger} w_4(t, a, b) da db \\
&\leq \int_0^t \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} \left(M_{U,V,1}(t-b, a-b) \int_0^b \tau(t-b+l, a-b+l) dl \right. \\
&\quad \left. + M_{U,V,2}(t-b, a-b) \right) da db \\
&\quad + \int_t^{a_\dagger} \int_{a_1 \wedge t}^{a_\dagger} \left(J_i^0(a-t, b-t) \cdot \int_0^t \tau(l, a-t+l) dl + A_i^0(a-t, b-t) \right) da db \\
&\leq a_\dagger \tau_\infty \|v_1\|_{L^\infty L^1} \int_0^T \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} \sigma_J(t-b, a-b) da db + \tau_\infty T \|J_s^0\|_1 + \|A_s^0\|_1 \\
&\quad + \|v_3\|_{L^\infty L^1} \int_0^T \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} \sigma_A(t-b, a-b) da db,
\end{aligned}$$

et :

$$\|w_4(t, \cdot, \cdot)\|_1 \leq T a_\dagger (1 + a_\dagger \tau_\infty) (2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger + (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) \|U(t)\|_{\mathcal{H}}) \cdot \|V\|_{\mathcal{H}_T} + \tau_\infty T \|J_s^0\|_1 + \|A_s^0\|_1.$$

Enfin, pour w_5 , on a :

$$\begin{aligned}
\|w_5\|_\infty &\leq G_0 + \int_0^T f_V(l) dl \leq G_0 T \alpha_\infty (\|v_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 + \|v_4(t, \cdot, \cdot)\|_1) \\
&\leq G_0 T \alpha_\infty \|V(t)\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Par conséquence, on a $W \in \mathcal{H}_T$ et $\|W\|_{\mathcal{H}_T} \leq C(\|U\|_{\mathcal{H}_T}, \|V\|_{\mathcal{H}_T}) < +\infty$.

2. Nous allons maintenant montrer que Ψ est strictement contractante pour T suffisamment petit. U étant fixé, soient $W = \psi(V)$ et $\tilde{W} = \phi(\tilde{V})$.

Nous avons :

$$(w_1 - \tilde{w}_1)(t, a) = \begin{cases} (B_{U,V} - B_{U,\tilde{V}})(t-a) e^{-\int_0^a (\mu_{U,1} + \tau_V)(t-a+s, s) ds} & \text{si } 0 < a < t \\ 0 & \text{si } 0 < t < a. \end{cases}$$

Ainsi, comme dans la preuve de la Proposition 3.4.3, on observe que :

$$\|w_1 - \tilde{w}_1\|_{L^\infty L^1} \leq \beta_\infty T \cdot \|V - \tilde{V}\|_{\mathcal{H}_T},$$

et pour w_3 :

$$\|w_3 - \tilde{w}_3\|_{L^\infty L^1} \leq \beta_\infty \tau_\infty a_\dagger T \cdot \|V - \tilde{V}\|_{\mathcal{H}_T}.$$

Pour w_2 , on a :

$$(w_2 - \tilde{w}_2)(t, a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < a, b \\ (M_{U,V,1} - M_{U,\tilde{V},1})(t - b, a - b) e^{-\int_0^b (\mu_{U,2} + \tau_U)(t-s, a-s) ds} & \text{si } 0 < b < a, t \\ 0 & \text{si } 0 < a < t, b. \end{cases}$$

Or, $M_{U,V,1}(t - b, a - b) = \sigma_{J,U}(t - b, a - b) v_1(t - b, a - b)$, donc :

$$\begin{aligned} \|(w_2 - \tilde{w}_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1} &\leq \int_0^t \int_b^{a_\dagger} \sigma_{J,U}(t - b, a - b) \cdot (v_1 - \tilde{v}_1)(t - b, a - b) dadb \\ &\leq t \|(v_1 - \tilde{v}_1)(t - b, \cdot)\|_{L^1} \cdot \max_{0 \leq b \leq t \text{ et } b \leq a \leq a_\dagger} \sigma_{J,U}(t - b, a - b). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant de nouveau le Lemme 4.4.1 ci-dessous :

$$\begin{aligned} \|w_2 - \tilde{w}_2\|_{L^\infty L^1} &\leq T \left(2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger + (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) \|U(t)\|_{\mathcal{H}} \right) \cdot \|v_1 - \tilde{v}_1\|_{L^\infty L^1} \\ &\leq T \left(2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger + (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) \|U(t)\|_{\mathcal{H}} \right) \cdot \|V - \tilde{V}\|_{\mathcal{H}_T}. \end{aligned}$$

Des arguments similaires conduisent aux estimations suivantes pour w_4 et w_5 :

$$\begin{aligned} \|w_4 - \tilde{w}_4\|_{L^\infty L^1} &\leq T \left(2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger + (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) \|U(t)\|_{\mathcal{H}} \right) (1 + \tau_\infty a_\dagger) \cdot \|V - \tilde{V}\|_{\mathcal{H}_T} \\ \|w_5 - \tilde{w}_5\|_\infty &\leq \alpha_\infty T \cdot \|V - \tilde{V}\|_{\mathcal{H}_T}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\|W - \tilde{W}\|_{\mathcal{H}_T} \leq (C_1 + C_2 \|U(t)\|_{\mathcal{H}}) \cdot T \cdot \|V - \tilde{V}\|_{\mathcal{H}_T}, \quad (4.4.12)$$

où C_1 et C_2 ne dépendent pas des conditions initiales, mais seulement des coefficients et de a_\dagger . Ainsi, en prenant $T_1 = \frac{1}{C_1 + C_2 \|U\|_{\mathcal{H}_T^*}}$, Ψ est strictement contractante sur \mathcal{H}_T pour $T < T_1$. ■

Dans cette démonstration, nous avons utilisé le résultat suivant :

Lemme 4.4.1

Soit $\sigma = \sigma_{J,U}$ ou $\sigma_{A,U}$. Alors, $\forall (t, a) \in (0, +\infty) \times (0, a_\dagger)$, on a :

$$\sigma(t, a) \leq \sigma_\infty^{ma} (\|u_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 + \|u_4(t, \cdot, \cdot)\|_1) + 2a_\dagger \sigma_\infty^{pm} + \gamma_\infty u_5(t). \quad (4.4.13)$$

Preuve. Par définition de σ_∞^{ma} et σ_∞^{pm} , on remarque que :

$$\begin{aligned}
\sigma(t, a) &\leq \sigma_\infty^{ma} \cdot \int_0^{b^*} \left(\int_0^{a_\dagger} u_2(t, a', b) da' + \int_{a_1}^{a_\dagger} u_4(t, a', b) da' \right) db \\
&\quad + \sigma_\infty^{pm} \cdot \int_{b^*}^{a_\dagger} \left(\int_0^{a_\dagger} \frac{u_2(t, a', b)}{J(t, a')} da' + \int_{a_1}^{a_\dagger} \frac{u_4(t, a', b)}{A(t, a')} da' \right) db + \gamma(t) u_5(t) \\
&\leq \sigma_\infty^{ma} (\|u_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 + \|u_4(t, \cdot, \cdot)\|_1) + \sigma_\infty^{pm} \left(\int_0^{a_\dagger} \frac{\int_{b^*}^{a_\dagger} u_2(t, a', b) db}{J(t, a')} da' \right. \\
&\quad \left. + \int_{a_1}^{a_\dagger} \frac{\int_{b^*}^{a_\dagger} u_4(t, a', b) db}{A(t, a')} da' \right) + \gamma_\infty u_5(t) \\
&\leq \sigma_\infty^{ma} (\|u_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 + \|u_4(t, \cdot, \cdot)\|_1) + \sigma_\infty^{pm} \int_0^{a_\dagger} da' + \sigma_\infty^{pm} \int_{a_1}^{a_\dagger} da' + \gamma_\infty u_5(t) \\
&\leq \sigma_\infty^{ma} (\|u_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 + \|u_4(t, \cdot, \cdot)\|_1) + 2a_\dagger \sigma_\infty^{pm} + \gamma_\infty u_5(t),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Ainsi, en utilisant le Théorème du point fixe de Banach, le Théorème suivant est prouvé :

Théorème 4.4.1

Pour $U \in \mathcal{H}_T$, il existe $T_1 > 0$ tel que pour $0 < T < T_1$, il existe un unique $V \in \mathcal{H}_T$ solution pour $0 \leq t \leq T$ de :

pour $0 < a < a_\dagger$, et $0 < b < a_\dagger$,

$$\begin{cases} (\partial_t v_1 + \partial_a v_1)(t, a) = -(\mu_{U,1}(t, a) + \tau_U(t, a)) \cdot v_1(t, a) \\ v_1(0, a) = J_s^0(a) \\ v_1(t, 0) = B_{U,V}(t), \end{cases} \quad (4.4.14)$$

$$\begin{cases} (\partial_t v_2 + \partial_a v_2 + \partial_b v_2)(t, a, b) = -(\mu_{U,2}(t, a) + \tau_U(t, a)) \cdot v_2(t, a, b) \\ v_2(0, a, b) = J_i^0(a, b) \\ v_2(t, 0, b) = 0 \\ v_2(t, a, 0) = M_{U,V,1}(t, a), \end{cases} \quad (4.4.15)$$

pour $a_1 < a < a_\dagger$ et $0 < b < a_\dagger$,

$$\begin{cases} (\partial_t v_3 + \partial_a v_3)(t, a) = -\nu_{U,3}(t, a) \cdot v_3(t, a) + \tau_U(t, a) \cdot v_1(t, a) \\ v_3(0, a) = A_s^0(a) \\ v_3(t, a_1) = 0, \end{cases} \quad (4.4.16)$$

$$\begin{cases} (\partial_t v_4 + \partial_a v_4 + \partial_b v_4)(t, a, b) = -\nu_{U,4}(t, a) \cdot v_4(t, a, b) + \tau_U(t, a) \cdot v_2(t, a, b) \\ v_4(0, a, b) = A_i^0(a, b) \\ v_4(t, a_1, b) = 0 \\ v_4(t, a, 0) = M_{U,V,2}(t, a), \end{cases} \quad (4.4.17)$$

et :

$$\begin{cases} \frac{dv_5}{dt}(t) = f_V(t) - g_U(t) \cdot v_5(t) \\ v_5(0) = G_0 \end{cases} \quad (4.4.18)$$

De plus, V vérifie les représentations intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} v_1(t, a) &= \begin{cases} B_{U,V}(t-a) e^{-\int_0^a (\mu_{U,1} + \tau_U)(t-a+s, s) ds} & \text{si } 0 < a < t \\ J_s^0(a-t) e^{-\int_0^t (\mu_{U,1} + \tau_U)(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a \end{cases} \\ v_2(t, a, b) &= \begin{cases} J_i^0(a-t, b-t) e^{-\int_0^t (\mu_{U,2} + \tau_U)(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a, b \\ M_{U,V,1}(t-b, a-b) e^{-\int_0^b (\mu_{U,2} + \tau_U)(t-s, a-s) ds} & \text{si } 0 < b < a, t \\ 0 & \text{si } 0 < a < t, b \end{cases} \\ v_3(t, a) &= \begin{cases} B_{U,V}(t-a) \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t-a+l, l) e^{-\int_0^l (\mu_{U,1} + \tau_U)(t-a+s, s) ds} \right. \\ \quad \left. \cdot e^{-\int_0^a \nu_{U,3}(t-a+s, s) ds} dl \right) & \text{si } 0 < a < t \\ A_s^0(a-t) + J_s^0(a-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{-\int_0^l (\mu_{U,1} + \tau_U)(s, a-t+s) ds} \\ \quad \cdot e^{-\int_0^t \nu_{U,3}(s, a-t+s) ds} dl & \text{si } 0 < t < a \end{cases} \\ v_4(t, a, b) &= \begin{cases} \left(J_i^0(a-t, b-t) \int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{\int_0^l (\nu_{U,4} - \mu_{U,2} - \tau_U)(s, a-t+s) ds} dl \right. \\ \quad \left. + A_i^0(a-t, b-t) \right) \cdot e^{-\int_0^t \nu_{U,4}(s, a-t+s) ds} & \text{si } 0 < t < a, b \\ \left(M_{U,V,1}(t-b, a-b) \int_0^b \tau_U(t-b+l, a-b+l) \right. \\ \quad \left. \cdot e^{\int_0^l (\nu_{U,4} - \mu_{U,2} - \tau_U)(t-s, a-s) ds} dl + M_{U,V,2}(t-b, a-b) \right) \\ \quad \cdot e^{-\int_0^b \nu_{U,4}(t-s, a-s) ds} & \text{si } 0 < b < t, a \\ 0 & \text{si } 0 < a < t, b \end{cases} \\ v_5(t) &= G_0 e^{-\int_0^t g_U(s) ds} + \int_0^t f_V(l) e^{-\int_0^l g_U(s) ds} dl. \end{aligned}$$

Définition 4.4.1

On appellera solution du problème (4.1.3)-(4.1.7) un $U \in \mathcal{H}_T$ vérifiant les formules intégrales ci-dessus avec $V = U$.

4.4.3 2ème étape

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du problème principal. Pour cela, on définit l'application

$$\Phi : U(t, a, b) \geq 0 \in \mathcal{H}_T \rightarrow V(t, a, b) \in \mathcal{H}_T,$$

D'où, en substituant $\mu_{U,1}$, $\mu_{U,2}$, $\nu_{U,3}$, $\nu_{U,4}$, $M_{U,V,1}$, $M_{U,V,2}$ et $B_{U,V}$ par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$\begin{cases} \left(\partial_t v + \partial_a v \right) (t, a) = -\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) v_1(t, a) - \mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) \tilde{v}_2(t, a) \\ -\mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) v_3(t, a) - \mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) \tilde{v}_4(t, a) - v_2(t, a, a_\dagger) - v_4(t, a, a_\dagger) \\ v(0, a) = J_s^0(a) + A_s^0(a) + \int_0^{a_\dagger} \left(J_i^0(a, b) + A_i^0(a, b) \right) db \\ v(t, 0) = \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta(t, a) \left(v_3(t, a) + \int_0^{a_\dagger} v_4(t, a, b) db \right) da. \end{cases} \quad (4.4.22)$$

Donc, si $\bar{V}(t) = \int_0^{a_\dagger} v(t, a) da + v_5(t)$, on obtient en intégrant (4.4.22) :

$$\begin{aligned} \bar{V}'(t) &= v(t, 0) - v(t, a_\dagger) - \int_0^{a_\dagger} \left(\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) v_1(t, a) + \mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) \tilde{v}_2(t, a) \right. \\ &\quad \left. + \mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) v_3(t, a) + \mu_A(t, a, \mathbb{P}(t)) \tilde{v}_4(t, a) + v_2(t, a, a_\dagger) + v_4(t, a, a_\dagger) \right) da \\ &\quad + f_V(t) - g_U(t) \cdot v_5(t) \leq f_V(t) + v(t, 0) \\ &\leq \int_0^{a_\dagger} \alpha(t, b) \cdot \left(\int_0^{a_\dagger} v_2(t, a, b) da + \int_{a_1}^{a_\dagger} v_4(t, a, b) da \right) db \\ &\quad + \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta(t, a) \left(v_3(t, a) + \int_0^{a_\dagger} v_4(t, a, b) db \right) da \leq \beta_\infty \bar{V}(t) + \alpha_\infty \bar{V}(t), \end{aligned}$$

d'où, en utilisant le Lemme de Gronwall : $\bar{V}(t) \leq \bar{V}(0) e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty) t}$ avec $\bar{V}(0) = P_0$. ■

On peut remarquer que ces estimations ne dépendent pas de U .

Pour le Théorème 4.3.2 (dans le cas où $T^* = +\infty$), on utilise le corollaire suivant :

Corollaire 4.4.1

Si de plus μ_J et μ_A vérifient l'hypothèse Hyp 3.4, alors $V \in \mathcal{H}_\infty$.

Preuve. Il est aisé de remarquer qu'en ajoutant les équations en juvéniles sains et infectés d'une part, et celles des adultes sains et infectés d'autre part, nous retrouvons les équations (3.1.1)-(3.1.2). Ainsi le ce résultat découle immédiatement du Corollaire 3.4.1. ■

Remarque 4.4.2

Pour tout V dans $Im(\Phi)$, on a pour $1 \leq i \leq 5$, $\|v_i(t, \cdot)\|_1 \leq P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty) t}$.

Ainsi, on a le :

Corollaire 4.4.2

Supposons que T^* et P_0 sont fixés. Alors pour $T \leq T^*$ on a $\Phi : B_{T^*}(\mathcal{H}_T) \rightarrow B_{T^*}(\mathcal{H}_T)$ avec :

$$B_{T^*}(\mathcal{H}_T) = \left\{ U \in \mathcal{H}_T, \|U\|_{\mathcal{H}_T} \leq P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty) T^*} \right\}. \quad (4.4.23)$$

Nous présentons maintenant une série de lemmes qui nous seront utiles pour terminer la preuve. En fait, les Lemmes 4.4.2 et 4.4.3 sont inutiles si on suppose que la transmission directe se fait uniquement par une incidence de type action de masse (c'est à dire si $\sigma_{z,Z}^{pm} = 0$).

Lemme 4.4.2

Pour $T \leq T^*$, $\exists M = M(T^*) > 0$ tel que pour $U \in B_{T^*}(\mathcal{H}_T)$:

$$\int_0^a (\mu_{U,1} + \tau_U)(t - a + s, s) ds \leq M \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall a \leq t, \bar{A}$$

$$\int_{a_1}^a \nu_{U,3}(t - a + s, s) ds \leq M \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall a \leq t, \bar{A}.$$

Preuve. Par définition, on a $\mu_{U,1}(t, a) = \mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) + \sigma_J(t, a)$.

En utilisant l'hypothèse Hyp 4.3 avec $x_\infty = P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty) \cdot T^*}$, il vient :

$$\int_0^a (\mu_J(t - a + s, s, \mathbb{P}(t)) + \tau(t - a + s, s, \mathbb{A}(t))) ds \leq M_J(x_\infty) + M_\tau.$$

De plus, en utilisant le Lemme 4.4.1 et la Proposition 4.4.5, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^a \sigma_J(t - a + s, s) ds &\leq \int_0^a \left((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) \|V(t - a + s)\|_{\mathcal{H}} + 2a_\dagger \sigma_\infty^{pm} \| \mathcal{H} \right) ds \\ &\leq (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 \cdot \int_0^a e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-a+s)} ds + 2\sigma_\infty^{pm} (a_\dagger)^2 \\ &\leq (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 \cdot \frac{e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)t} - e^{(\beta_\infty - \alpha_\infty)(t-a)}}{\beta_\infty + \alpha_\infty} + 2\sigma_\infty^{pm} (a_\dagger)^2 \\ &\leq (2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 \cdot \frac{e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T^*} - 1}{\beta_\infty + \alpha_\infty} + 2\sigma_\infty^{pm} (a_\dagger)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe M_1 et M_2 tel que $\forall t \in [0, T], \forall a \leq t, \bar{A}$ (en utilisant l'hypothèse Hyp 4.2) :

$$\int_0^a (\mu_{U,1} + \tau_U)(t - a + s, s) ds \leq M_1,$$

$$\int_{a_1}^a \nu_{U,3}(t - a + s, s) ds \leq M_2,$$

ainsi $M = \max(M_1, M_2)$ convient. ■

Remarque 4.4.3

Un simple changement de variable montre que :

$$\int_0^t (\mu_{U,1} + \tau_U)(s, a - t + s) ds \leq M \quad \forall a \leq \bar{A}, \quad \forall 0 \leq t \leq a, T$$

$$\int_0^t \nu_{U,3}(s, a - t + s) ds \leq M \quad \forall a \leq \bar{A}, \quad \forall 0 \leq a, T.$$

Alors pour $T \leq T_1$:

Lemme 4.4.3

Supposons que les conditions initiales vérifient l'hypothèse Hyp 4.4, et que $Z \in \mathcal{H}_T$ vérifie (4.4.19). Soit $U = \Phi(Z)$, alors il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall(t, a) \in [0, T] \times [0, \bar{A}], \quad J(t, a) &\geq \eta \\ \forall(t, a) \in [0, T] \times [a_1, \bar{A}], \quad A(t, a) &\geq \eta. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Preuve. On montre juste qu'il existe η tel que $u_1(t, a) \geq \eta$ et $u_3(t, a) \geq \eta$, ce qui est suffisant.

Pour $0 < t < a$, on remarque, en utilisant les représentations intégrales du Théorème 4.4.1 :

$$u_1(t, a) = J_s^0(a - t) \exp\left(-\int_0^t (\mu_{W,1} + \tau_W)(s, a - t + s) ds\right) \geq \varepsilon \cdot e^{-M},$$

en utilisant l'hypothèse Hyp 4.4 et le lemme précédent. De la représentation de u_3 , on a :

$$u_3(t, a) \geq A_s^0(a - t) e^{-\int_0^t \nu_{U,3}(s, a - t + s) ds} \geq \varepsilon \cdot e^{-M}.$$

Supposons maintenant que $a < t \leq T$.

On trouve alors $B_{Z,U}(t - a) \geq \int_0^{A_t} \beta(t - a, \alpha; \mathbb{P}(t)) u_3(t - a, \alpha) d\alpha$.

Mais $\beta(t - a, \alpha, \mathbb{P}(t)) \geq \varepsilon$ pour $\beta_m < a < \beta_M$ et $u_3(t, a) \geq \varepsilon \cdot e^{-M}$ pour $t - a < \alpha$. Ainsi, en particulier pour $a < t < a + \beta_m$, on a $B_{Z,U}(t - a) \geq \varepsilon^2 \cdot e^{-M}$. Alors pour $a < t < a + \beta_m$, comme $u_1(t, a) = B_{Z,U}(t - a) \exp\left(-\int_0^a (\mu_{W,1} + \tau_W)(t - a + s, s) ds\right)$, il vient que $u_1(t, a) \geq (\varepsilon \cdot e^{-M})^2$, et de la représentation de u_3 :

$$\begin{aligned} u_3(t, a) &\geq B_{Z,U}(t - a) \left(\int_{a_1}^a \tau_U(t - a + l, l) (e^{-M})^2 dl \right) \\ &\geq \varepsilon^2 (e^{-M})^3 \cdot \int_{\tau_m}^{\tau_M} \tau_U(t - a + l, l) dl \geq \varepsilon^3 (e^{-M})^3, \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse Hyp 4.4.

En itérant ceci, on a $u_1(t, a) \geq (\varepsilon \cdot e^{-M})^{2k}$ et $u_3(t, a) \geq (\varepsilon \cdot e^{-M})^{2k+1}$ pour $a < t < a + k \cdot \beta_m$. Ainsi, si p est assez grand et $\eta = (\varepsilon \cdot e^{-M})^{p+1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall(t, a) \in [0, T] \times [0, \bar{A}], \quad u_1(t, a) &\geq (\varepsilon \cdot e^{-M})^p \geq \eta \\ \forall(t, a) \in [0, T] \times [a_1, \bar{A}], \quad u_3(t, a) &\geq (\varepsilon \cdot e^{-M})^{p+1} \geq \eta, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 4.4.3

On a $\Phi : E_T \rightarrow E_T$ où, pour $T \leq T^*$ on a posé :

$$E_T = \{U \in B_{T^*}(\mathcal{H}_T) \cap \{J(t, a), A(t, a) \geq \min(\eta, \varepsilon)\}\}. \quad (4.4.25)$$

Lemme 4.4.4

Si $U \in E_T$, alors il existe $C_k > 0$ pour $1 \leq k \leq 4$, dépendant uniquement de $K_A, K_J, K_\tau, \sigma_\infty, \gamma_\infty$ et η tel que $\forall(t, a)$:

$$\begin{aligned} |(\mu_{U,k} + \tau_U - \mu_{\tilde{U},k} - \tau_{\tilde{U}})(t, a)| &\leq C_k \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}, \quad k = 1, 2 \\ |(\nu_{U,k} - \nu_{\tilde{U},k})(t, a)| &\leq C_k \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}, \quad k = 3, 4. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Preuve. On a $\mu_{U,2}(t, a) = \mu_J(t, a, \mathbb{P}(t))$ et $\nu_{U,4} = \mu_A(t, a, \mathbb{P}(t))$ donc l'existence de C_2 et C_4 provient directement de l'hypothèse Hyp 3.3. Nous allons maintenant estimer $|(\sigma_J - \sigma_{\tilde{J}})(t, a)|$ (en considérant que $\sigma_{\tilde{J}}$ correspond à σ_J avec \tilde{U}). On a :

$$\sigma_{U,J}(t, a) - \sigma_{\tilde{U},J}(t, a) = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) \quad \text{avec :}$$

$$\begin{aligned} (1) &= \int_0^{b^*} \int_0^{A_\dagger} \sigma_{j,J}^{ma}(t, a, a', b)(u_2(t, a', b) - \tilde{u}_2(t, a', b)) da' db, \\ (2) &= \int_0^{b^*} \int_{a_1}^{A_\dagger} \sigma_{a,J}^{ma}(t, a, a', b)(u_4(t, a', b) - \tilde{u}_4(t, a', b)) da' db, \\ (3) &= \int_{b^*}^{A_\dagger} \int_0^{A_\dagger} \sigma_{j,J}^{pm}(t, a, a', b) \left(\frac{u_2(t, a', b)}{J(t, a')} - \frac{\tilde{u}_2(t, a', b)}{\tilde{J}(t, a')} \right) da' db, \\ (4) &= \int_{b^*}^{A_\dagger} \int_{a_1}^{A_\dagger} \sigma_{a,J}^{pm}(t, a, a', b) \left(\frac{u_4(t, a', b)}{A(t, a')} - \frac{\tilde{u}_4(t, a', b)}{\tilde{A}(t, a')} \right) da' db, \\ (5) &= \gamma(t)(u_5 - \tilde{u}_5)(t). \end{aligned}$$

Alors

$$|(1)| \leq \sigma_\infty^{ma} \cdot \|(u_2 - \tilde{u}_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1} \leq \sigma_\infty^{ma} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T},$$

et

$$|(2)| \leq \sigma_\infty^{ma} \|(u_4 - \tilde{u}_4)(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1} \leq \sigma_\infty^{ma} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}.$$

En utilisant le Lemme 4.4.3, on remarque que :

$$\begin{aligned} |(3)| &\leq \sigma_\infty^{pm} \cdot \int_{b^*}^{A_\dagger} \int_0^{\bar{A}} \frac{u_2(t, a', b) \tilde{J}(t, a') - \tilde{u}_2(t, a', b) J(t, a')}{J(t, a') \tilde{J}(t, a')} da' db \\ &\leq \sigma_\infty^{pm} \cdot \int_{b^*}^{A_\dagger} \int_0^{\bar{A}} \left(\frac{u_2(t, a', b) (\tilde{J} - J)(t, a')}{\eta J(t, a')} + \frac{J(t, a') (u_2 - \tilde{u}_2)(t, a', b)}{\eta J(t, a')} \right) da' db \\ &\leq \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta} \left(\|(u_2 - \tilde{u}_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1} + \int_0^{\bar{A}} \left(\int_{b^*}^{A_\dagger} \frac{u_2(t, a', b)}{J(t, a')} db \right) (\tilde{J} - J)(t, a') da' \right). \end{aligned}$$

Mais par définition de $J(t, a')$, on a $\int_{b^*}^{A^\dagger} \frac{u_2(t, a', b)}{J(t, a')} db \leq 1$, ainsi :

$$|(3)| \leq \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta} \left(\|(u_2 - \tilde{u}_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1} + \|(J - \tilde{J})(t, \cdot)\|_{L^1} \right) \leq 2 \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}.$$

De façon similaire,

$$|(4)| \leq 2 \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}.$$

Pour (5), on a simplement

$$dsp|(5)| \leq \gamma_\infty |(u_5 - \tilde{u}_5)(t)| \leq \gamma_\infty \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |(\sigma_{U,J} - \sigma_{\tilde{U},J})(t, a)| &\leq |(1)| + |(2)| + |(3)| + |(4)| + |(5)| \\ &\leq \left(2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \leq C_\sigma \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}. \end{aligned}$$

Une estimation similaire vaut pour $\sigma_{U,A} - \sigma_{\tilde{U},A}$.

Or, puisque $\mu_{U,1}(t, a) = \mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) + \sigma_J(t, a)$, on peut prendre $C_1 = C_\sigma + K_J + K_\tau$ (voir l'hypothèse Hyp 3.3), et $C_3 = C_\sigma + K_A$. ■

En démontrant le résultat précédent, on a aussi montré le résultat suivant :

Corollaire 4.4.4

$\forall t, a$ dans leurs intervalles respectifs de définition :

$$\begin{aligned} |(\sigma_{U,J} - \sigma_{\tilde{U},J})(t, a)| &\leq \left(2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ |(\sigma_{U,A} - \sigma_{\tilde{U},A})(t, a)| &\leq \left(2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}. \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant :

Proposition 4.4.6

Il existe $T_2 < T_1$ tel que pour $T \leq T_2$, l'application $\Phi : E_T \rightarrow E_T$ est strictement contractante.

Preuve. On considère $T < T_1$. Soient U et \tilde{U} dans E_T , et $V = \Phi(U)$, $\tilde{V} = \Phi(\tilde{U})$. Nous cherchons à estimer $\|V - \tilde{V}\|_{\mathcal{H}_T}$. Pour une raison de concision, nous nous contenterons ici de détailler l'estimation de $\|(v_4 - \tilde{v}_4)(t, \cdot, \cdot)\|_1$, puisqu'elle reprend la plupart des difficultés présentes dans les autres estimations, ainsi que celle de $|(v_5 - \tilde{v}_5)(t)|$.

1. Estimation de $|(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)|$ pour $0 < t < a, b$.

Du Théorème 4.4.1, on a $(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b) = (i) + (ii) + (iii) + (iv)$, avec :

$$(i) = J_i^0(a-t, b-t) \left(\int_0^t \tau_U(l, a-t+l) e^{-\int_0^l (\mu_{U,2} + \tau_U)(s, a-t+s) ds} \cdot \left(e^{-\int_l^t \nu_{U,4}(s, a-t+s) ds} - e^{-\int_l^t \nu_{\tilde{U},4}(s, a-t+s) ds} \right) dl \right),$$

$$(ii) = J_i^0(a-t, b-t) \left(\int_0^t \tau_U(l, a-t+l) \left(e^{-\int_0^l (\mu_{U,2} + \tau_U)(s, a-t+s) ds} - e^{-\int_0^l (\mu_{\tilde{U},2} + \tau_{\tilde{U}})(s, a-t+s) ds} \right) e^{-\int_l^t \nu_{\tilde{U},4}(s, a-t+s) ds} dl \right),$$

$$(iii) = J_i^0(a-t, b-t) \left(\int_0^t (\tau_U - \tau_{\tilde{U}})(l, a-t+l) e^{-\int_0^l (\mu_{\tilde{U},2} + \tau_{\tilde{U}})(s, a-t+s) ds} e^{-\int_l^t \nu_{\tilde{U},4}(s, a-t+s) ds} dl \right),$$

$$(iv) = A_i^0(a-t, b-t) \left(e^{-\int_0^t \nu_{U,4}(s, a-t+s) ds} - e^{-\int_0^t \nu_{\tilde{U},4}(s, a-t+s) ds} \right).$$

Ainsi, on a puisque $|e^x - e^y| \leq |x - y|$ (Théorème des valeurs intermédiaires) :

$$|(i)| \leq J_i^0(a-t, b-t) \left(\int_0^t \tau_U(l, a-t+l) \left(\int_l^t |(\nu_{U,4} - \nu_{\tilde{U},4})(s, a-t+s)| ds \right) dl \right)$$

$$\leq J_i^0(a-t, b-t) \tau_\infty C_4 \left(\int_0^t (t-l) dl \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \quad (\text{Lemme 4.4.4})$$

$$\leq J_i^0(a-t, b-t) \tau_\infty C_4 \frac{T^2}{2} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T},$$

$$|(ii)| \leq J_i^0(a-t, b-t) \left(\int_0^t \tau_U(l, a-t+l) \left(\int_0^l |(\mu_{U,2} + \tau_U - \mu_{\tilde{U},2} - \tau_{\tilde{U}})(s, a-t+s)| ds \right) dl \right)$$

$$\leq J_i^0(a-t, b-t) \tau_\infty C_2 \left(\int_0^t l dl \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}$$

$$\leq J_i^0(a-t, b-t) \tau_\infty C_2 \frac{T^2}{2} \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T},$$

$$|(iii)| \leq J_i^0(a-t, b-t) \left(\int_0^t |(\tau_U - \tau_{\tilde{U}})(l, a-t+l)| dl \right)$$

$$\leq J_i^0(a-t, b-t) K_\tau T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T},$$

et

$$|(iv)| \leq A_i^0(a-t, b-t) C_4 T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T},$$

d'où, pour $0 < t < a, b$:

$$\begin{aligned} |(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)| \leq T \left(J_i^0(a-t, b-t) \left(\tau_\infty \frac{T}{2} (C_2 + C_4) + K_\tau \right) \right. \\ \left. + A_i^0(a-t, b-t) C_4 \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T}. \quad (4.4.27) \end{aligned}$$

2. Estimation de $|(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)|$ pour $0 < b < a, t$.

Du Théorème 4.4.1, on obtient après un changement de variable ($l := b - l$) :

$$(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b) = (i) + (ii) + (iii) + (iv) + (v) + (vi),$$

avec :

$$\begin{aligned} (i) = M_{U,V,1}(t-b, a-b) \int_0^b \tau_U(t-l, a-l) e^{-\int_0^{b-l} (\mu_{U,2} + \tau_U)(t-s, a-s) ds} \\ \left(e^{-\int_{b-l}^b \nu_{U,4}(t-s, a-s) ds} - e^{-\int_{b-l}^b \nu_{\tilde{U},4}(t-s, a-s) ds} \right) dl, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) = M_{U,V,1}(t-b, a-b) \int_0^b \tau_U(t-l, a-l) \left(e^{-\int_0^{b-l} (\mu_{U,2} + \tau_U)(t-s, a-s) ds} \right. \\ \left. - e^{-\int_0^{b-l} (\mu_{\tilde{U},2} + \tau_{\tilde{U}})(t-s, a-s) ds} \right) e^{-\int_{b-l}^b \nu_{\tilde{U},4}(t-s, a-s) ds} dl, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) = M_{U,V,1}(t-b, a-b) \int_0^b (\tau_U - \tau_{\tilde{U}})(t-l, a-l) e^{-\int_0^{b-l} (\mu_{\tilde{U},2} + \tau_{\tilde{U}})(t-s, a-s) ds} \\ e^{-\int_{b-l}^b \nu_{\tilde{U},4}(t-s, a-s) ds} dl, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iv) = (M_{U,V,1} - M_{\tilde{U},\tilde{V},1})(t-b, a-b) \int_0^b \tau_{\tilde{U}}(t-l, a-l) e^{-\int_0^{b-l} (\mu_{\tilde{U},2} + \tau_{\tilde{U}})(t-s, a-s) ds} \\ e^{-\int_{b-l}^b \nu_{\tilde{U},4}(t-s, a-s) ds} dl, \end{aligned}$$

$$(v) = M_{U,V,2}(t-b, a-b) \left(e^{-\int_0^b \nu_{U,4}(t-s, a-s) ds} - e^{-\int_0^b \nu_{\tilde{U},4}(t-s, a-s) ds} \right),$$

$$(vi) = (M_{U,V,2} - M_{\tilde{U},\tilde{V},2})(t-b, a-b) e^{-\int_0^b \nu_{\tilde{U},4}(t-s, a-s) ds}.$$

Alors, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
|(i)| &\leq |M_{U,V,1}(t-b, a-b)| \tau_\infty \left(\int_0^b \int_{b-l}^b |(\nu_{U,4} - \nu_{\tilde{U},4})(t-s, a-s)| ds dl \right) \\
&\leq |M_{U,V,1}(t-b, a-b)| \tau_\infty C_4 \left(\int_0^b l dl \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T} \\
&\leq |M_{U,V,1}(t-b, a-b)| \tau_\infty C_4 a_\dagger^2 \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(ii)| &\leq |M_{U,V,1}(t-b, a-b)| \tau_\infty \left(\int_0^b \int_0^{b-l} |(\mu_{U,2} + \tau_U - \mu_{\tilde{U},2} - \tau_{\tilde{U}})(t-s, a-s)| ds dl \right) \\
&\leq |M_{U,V,1}(t-b, a-b)| \tau_\infty C_2 \left(\int_0^b (b-l) dl \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T} \\
&\leq |M_{U,V,1}(t-b, a-b)| \tau_\infty C_2 a_\dagger^2 \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(iii)| &\leq |M_{U,V,1}(t-b, a-b)| \left(\int_0^b |(\tau_U - \tau_{\tilde{U}})(t-l, a-l)| dl \right) \\
&\leq |M_{U,V,1}(t-b, a-b)| K_\tau a_\dagger \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T},
\end{aligned}$$

$$|(iv)| \leq |(M_{U,V,1} - M_{\tilde{U},\tilde{V},1})(t-b, a-b)| \tau_\infty a_\dagger,$$

$$\begin{aligned}
|(v)| &\leq |M_{U,V,2}(t-b, a-b)| \left(\int_0^b |(\nu_{U,4} - \nu_{\tilde{U},4})(t-s, a-s)| ds \right) \\
&\leq |M_{U,V,2}(t-b, a-b)| C_4 a_\dagger \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T},
\end{aligned}$$

$$|(vi)| \leq |(M_{U,V,2} - M_{\tilde{U},\tilde{V},2})(t-b, a-b)|.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)| &\leq \tau_\infty a_\dagger |(M_{U,V,1} - M_{\tilde{U},\tilde{V},1})(t-b, a-b)| + |(M_{U,V,2} - M_{\tilde{U},\tilde{V},2})(t-b, a-b)| \\
&+ a_\dagger \left(|M_{U,V,1}(t-b, a-b)| ((C_4 + C_2)\tau_\infty a_\dagger + K_\tau) + C_4 |M_{U,V,2}(t-b, a-b)| \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T}.
\end{aligned}$$

Mais $M_{U,V,1}(t, a) = \sigma_{JU}(t, a) v_1(t, a)$ et en utilisant le Lemme 4.4.1 :

$$\begin{aligned}
|M_{U,V,1}(t, a)| &\leq (\sigma_\infty^{ma} (\|u_2(t, \cdot, \cdot)\|_1 + \|u_4(t, \cdot, \cdot)\|_1) + 2a_\dagger \sigma_\infty^{pm} + \gamma_\infty u_5(t)) |v_1(t, a)| \\
&\leq (2\sigma_\infty^{ma} P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)t} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger + \gamma_\infty P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)t}) |v_1(t, a)| \\
&\leq ((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)t} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger) |v_1(t, a)|.
\end{aligned}$$

D'où avec le Corollaire 4.4.4 :

$$\begin{aligned} |(M_{U,V,1} - M_{\tilde{U},\tilde{V},1})(t, a)| &\leq \sigma_{J,U}(t, a)|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)| + |(\sigma_{J,U} - \sigma_{J,\tilde{U}})(t, a)||\tilde{v}_1(t, a)| \\ &\leq ((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty)P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)t} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger) |(v_1 - \tilde{v}_1)(t, a)| \\ &\quad + (2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty)|\tilde{v}_1(t, a)| \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}, \end{aligned}$$

et également :

$$\begin{aligned} |M_{U,V,2}(t, a)| &\leq ((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty)P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)t} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger) |v_3(t, a)|, \\ |(M_{U,V,2} - M_{\tilde{U},\tilde{V},2})(t, a)| &\leq ((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty)P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)t} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger) |(v_3 - \tilde{v}_3)(t, a)| \\ &\quad + (2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty)|\tilde{v}_3(t, a)| \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}. \end{aligned}$$

Ainsi pour $0 < b < a, t$:

$$\begin{aligned} |(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)| &\leq a_\dagger ((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty)P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger) \\ &\quad \left(C_4|v_3(t-b, a-b)| + ((C_4 + C_2)\tau_\infty a_\dagger + K_\tau) |v_1(t-b, a-b)| \right) \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + (2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty) (\tau_\infty a_\dagger |\tilde{v}_1| + |\tilde{v}_3|) (t-b, a-b) \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + ((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty)P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger) (\tau_\infty a_\dagger |(v_1 - \tilde{v}_1)(t-b, a-b)| \\ &\quad \quad + |(v_3 - \tilde{v}_3)(t-b, a-b)|). \quad (4.4.28) \end{aligned}$$

3. Estimation de $|(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)|$ pour $0 < a < b, t$.

On a $v_4(t, a, b) = \tilde{v}_4(t, a, b) = 0$ pour $0 < a < b, t$ d'où $|(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)| = 0$.

4. Estimation de $\|(v_4 - \tilde{v}_4)(t, \cdot, \cdot)\|_1$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{a_\dagger} \int_{a_1}^{a_\dagger} |(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)| db da &= \int_0^t \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} |(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)| da db \\ &\quad + \int_t^{a_\dagger} \int_{a_1 \wedge t}^{a_\dagger} |(v_4 - \tilde{v}_4)(t, a, b)| da db = (i) + (ii). \end{aligned}$$

De (4.4.27), on observe que

$$|(ii)| \leq T \left(\|J_i^0\|_1 (\tau_\infty \frac{T}{2} (C_2 + C_4) + K_\tau) + \|A_i^0\|_1 C_4 \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T},$$

de (4.4.28), on trouve

$$\begin{aligned} |(i)| &\leq a_\dagger \int_0^t \left((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \cdot \\ &\left(C_4 \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} |v_3(t-b, a-b)| da + ((C_4 + C_2)\tau_\infty a_\dagger + K_\tau) \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} |v_1(t-b, a-b)| da \right) db \\ &\quad + \int_0^t \left(2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty \right) (\tau_\infty a_\dagger \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} |\tilde{v}_1(t-b, a-b)| da \\ &\quad + \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} |\tilde{v}_3(t-b, a-b)| da) db \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + \int_0^t \left((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger \right) (\tau_\infty a_\dagger \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} |(v_1 - \tilde{v}_1)(t-b, a-b)| da + \int_{a_1 \wedge b}^{a_\dagger} |(v_3 - \tilde{v}_3)(t-b, a-b)| da) db, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(i)| &\leq a_\dagger \int_0^t \left((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger \right) \left(C_4 P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} \right. \\ &\quad \left. + ((C_4 + C_2)\tau_\infty a_\dagger + K_\tau) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} \right) db \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \int_0^t \left(2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty \right) \left((1 + \tau_\infty a_\dagger) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} \right) db \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \left((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger \right) \left(\tau_\infty a_\dagger \int_0^t \|(V - \tilde{V})(t-b, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} db \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|(V - \tilde{V})(t-b, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} db \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(i)| &\leq a_\dagger P_0 (C_4 + (C_4 + C_2)\tau_\infty a_\dagger + K_\tau) \left((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 \int_0^t e^{2(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} db \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger \int_0^t e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} db \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + P_0 \left(2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty \right) (1 + \tau_\infty a_\dagger) \left(\int_0^t e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)(t-b)} db \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\ &\quad + \left((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger \right) (1 + \tau_\infty a_\dagger) \int_0^t \|(V - \tilde{V})(b, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} db, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
|(i)| &\leq \frac{a_{\dagger} P_0 ((1 + \tau_{\infty} a_{\dagger}) C_4 + \tau_{\infty} a_{\dagger} C_2 + K_{\tau})}{\beta_{\infty} + \alpha_{\infty}} \left(2\sigma_{\infty}^{pm} a_{\dagger} + \frac{(2\sigma_{\infty}^{ma} + \gamma_{\infty}) P_0}{2} \right) \\
&(e^{2(\beta_{\infty} + \alpha_{\infty})T} - 1) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + \frac{P_0(1 + \tau_{\infty} a_{\dagger})}{\beta_{\infty} + \alpha_{\infty}} \left(2(\sigma_{\infty}^{ma} + \frac{\sigma_{\infty}^{pm}}{\eta}) + \gamma_{\infty} \right) \\
&(e^{(\beta_{\infty} + \alpha_{\infty})T} - 1) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + ((2\sigma_{\infty}^{ma} + \gamma_{\infty}) P_0 e^{(\beta_{\infty} + \alpha_{\infty})T} + 2\sigma_{\infty}^{pm} a_{\dagger}) \\
&\quad (1 + \tau_{\infty} a_{\dagger}) \int_0^t \|(V - \tilde{V})(b, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} db.
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
\|(v_4 - \tilde{v}_4)(t, \cdot, \cdot)\|_1 &\leq T \left(\|J_i^0\|_1 (\tau_{\infty} \frac{T}{2} (C_2 + C_4) + K_{\tau}) + \|A_i^0\|_1 C_4 \right) \|U - \tilde{U}\|_{H_T} \\
&+ \frac{a_{\dagger} P_0 ((1 + \tau_{\infty} a_{\dagger}) C_4 + \tau_{\infty} a_{\dagger} C_2 + K_{\tau})}{\beta_{\infty} + \alpha_{\infty}} \left(2\sigma_{\infty}^{pm} a_{\dagger} + \frac{(2\sigma_{\infty}^{ma} + \gamma_{\infty}) P_0}{2} \right) \\
&(e^{2(\beta_{\infty} + \alpha_{\infty})T} - 1) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + \frac{P_0(1 + \tau_{\infty} a_{\dagger})}{\beta_{\infty} + \alpha_{\infty}} \left(2(\sigma_{\infty}^{ma} + \frac{\sigma_{\infty}^{pm}}{\eta}) + \gamma_{\infty} \right) \quad (4.4.29) \\
&(e^{(\beta_{\infty} + \alpha_{\infty})T} - 1) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + ((2\sigma_{\infty}^{ma} + \gamma_{\infty}) P_0 e^{(\beta_{\infty} + \alpha_{\infty})T} + 2\sigma_{\infty}^{pm} a_{\dagger}) \\
&\quad (1 + \tau_{\infty} a_{\dagger}) \int_0^t \|(V - \tilde{V})(b, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} db.
\end{aligned}$$

5. Estimation de $|(v_5 - \tilde{v}_5)(t)|$.

D'après les estimations du Théorème 4.4.1, on a :

$$\begin{aligned}
(v_5 - \tilde{v}_5)(t) &= G_0 \left(e^{-\int_0^t g_U(s) ds} - e^{-\int_0^t g_{\tilde{U}}(s) ds} \right) \\
&+ \int_0^t \left(f_V(l) e^{-\int_l^t g_U(s) ds} - f_{\tilde{V}}(l) e^{-\int_l^t g_{\tilde{U}}(s) ds} \right) dl = (i) + (ii),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|(i)| &\leq G_0 \int_0^t |(g_U - g_{\tilde{U}})(s)| ds = G_0 \int_0^t |(f_U - f_{\tilde{U}})(s)| ds \\
&\leq G_0 \alpha_{\infty} \left(\int_0^t \left(\int_0^{a_{\dagger}} \int_0^{a_{\dagger}} |(u_2 - \tilde{u}_2)(s, a, b)| da db ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^{a_{\dagger}} \int_{a_1}^{a_{\dagger}} |(u_4 - \tilde{u}_4)(s, a, b)| da db \right) ds \right) \\
&\leq 2 G_0 \alpha_{\infty} T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(ii)| &\leq \int_0^t \left(|f_V(l)| \int_l^t |(g_U - g_{\tilde{U}})(s)| ds \right) dl + \int_0^t |(f_V - f_{\tilde{V}})(l)| dl \\
&\leq 2 \alpha_\infty \left(\int_0^t (t-l) |f_V(l)| dl \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + 2 \alpha_\infty T \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
|f_V(l)| &= |\alpha(t) \cdot \int_0^{a_\dagger} \left(\int_0^{a_\dagger} u_2(l, a, b) da + \int_{a_1}^{a_\dagger} u_4(l, a, b) da \right) db \\
&\leq \alpha_\infty (\|u_2(l, \cdot, \cdot)\|_1 + \|u_4(l, \cdot, \cdot)\|_1) \\
&\leq 2 \alpha_\infty P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)l} \leq 2 \alpha_\infty P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T},
\end{aligned}$$

d'où

$$|(ii)| \leq 2 \alpha_\infty (\alpha_\infty P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} T^2 + T) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T},$$

et

$$|(v_5 - \tilde{v}_5)(t)| \leq 2 \alpha_\infty (\alpha_\infty P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} T^2 + (1 + G_0)T) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}. \quad (4.4.30)$$

6. Autres estimations.

Avec des arguments similaires, on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\|(v_1 - \tilde{v}_1)(t, \cdot)\|_1 &\leq \left(T \|J_s^0\|_1 + \frac{2\beta_\infty a_\dagger P_0}{\beta_\infty + \alpha_\infty} (e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} - 1) \right) C_1 \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T} \\
&\quad + 2\beta_\infty \cdot \int_0^t \|(V - \tilde{V})(a, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} da, \quad (4.4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(v_3 - \tilde{v}_3)(t, \cdot)\|_1 &\leq \left(\frac{2\beta_\infty a_\dagger P_0}{\beta_\infty + \alpha_\infty} (e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} - 1) (\tau_\infty a_\dagger (C_1 + C_3) + K_\tau) \right. \\
&\quad \left. + (\|J_s^0\|_1 ((C_1 + C_3) \tau_\infty \frac{T^2}{2} + K_\tau T) + \|A_s^0\|_1 T C_3) \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T} \\
&\quad + 2\beta_\infty \tau_\infty a_\dagger \left(\int_0^t \|(V - \tilde{V})(s, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} ds \right), \quad (4.4.32)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\|(v_2 - \tilde{v}_2)(t, \cdot)\|_1 &\leq \left(\|J_i^0\|_1 C_2 T + P_0 \left(2(\sigma_\infty^{ma} + \frac{\sigma_\infty^{pm}}{\eta}) + \gamma_\infty \right) \right. \\
&\quad \left. (e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} - 1) \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} \\
&+ \frac{C_2 a_\dagger P_0}{\beta_\infty + \alpha_\infty} \left(\left(\frac{(2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0}{2} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger \right) (e^{2(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} - 1) \right) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{H_T} \\
&\quad + ((2\sigma_\infty^{ma} + \gamma_\infty) P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} + 2\sigma_\infty^{pm} a_\dagger) \cdot \int_0^t \|(V - \tilde{V})(b, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} db.
\end{aligned} \quad (4.4.33)$$

7. Estimation de $\|(V - \tilde{V})\|_{\mathcal{H}_T}$.

En utilisant (4.4.31), (4.4.32), (4.4.33), (4.4.29) et (4.4.30), on a :

$$\|(V - \tilde{V})(t, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq h_1(T) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} + h_2(T) \int_0^t \|(V - \tilde{V})(s, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} ds,$$

avec :

$$\begin{aligned} h_1(T) &= \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 (e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} - 1) + \lambda_4 (e^{2(\beta_\infty + \alpha_\infty)T} - 1), \\ h_2(T) &= \lambda_0 + \lambda_5 T + \lambda_6 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T}, \end{aligned}$$

où λ_i , $0 \leq i \leq 6$ ne dépendent pas de t ni de T . En remplaçant $\|J_s^0\|_1$, $\|J_i^0\|_1$, $\|A_s^0\|_1$, $\|A_i^0\|_1$, G_0 et P_0 par $P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T^*}$ (qui est plus grand), on obtient des estimations similaires. Notons \tilde{h}_1 et \tilde{h}_2 les quantités ainsi obtenues.

Alors le Lemme de Gronwall donne :

$$\|(V - \tilde{V})(t, \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq \tilde{h}_1(T) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} e^{\tilde{h}_2(T) \cdot t},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|(V - \tilde{V})\|_{\mathcal{H}_T} &\leq \tilde{h}_1(T) \cdot \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T} e^{\tilde{h}_2(T) \cdot T} \\ &< \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_T}. \end{aligned}$$

pour T suffisamment petit, de sorte que $\Phi : E_T \rightarrow E_T$ est strictement contractante. ■

4.4.4 Fin de la démonstration

La fin de la démonstration est similaire à celle du Théorème 3.3.1 vu dans le chapitre précédent.

En utilisant le Théorème du point fixe de Banach, la Proposition 4.4.6 nous donne l'existence d'un unique point fixe U de Φ dans E_{T_2} . Ce point fixe est solution de (4.1.3)-(4.1.7) dans \mathcal{H}_{T_2} . Alors, on a $U \in B_{T^*}(\mathcal{H}_{T_2})$, de sorte que si

$$\tilde{P}_0 = \|u_1(T_2, \cdot)\|_{L^1} + \|u_2(T_2, \cdot, \cdot)\|_{L^1} + \|u_3(T_2, \cdot)\|_{L^1} + \|u_4(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1} + u_5(T_2),$$

on a $\tilde{P}_0 \leq P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T_2} \leq P_0 e^{(\beta_\infty + \alpha_\infty)T^*}$. Ainsi, répétant la même preuve (depuis le début de la 2ème étape), avec $U(T_2, \cdot, \cdot)$ comme condition initiale dans Φ , on obtiendra l'existence d'une unique solution de (4.1.3)-(4.1.7) pour $T_2 \leq t \leq 2T_2$. En itérant ceci, on a existence et unicité d'une solution sur \mathcal{H}_{T^*} .

Chapitre 5

Modèle discret et simulations numériques

Les modèles discrets ne prennent pas une part importante dans ce travail. Nous avons néanmoins mis en place un modèle discret que nous utilisons pour faire des simulations numériques. Cela conduit à des matrices creuses de grande dimension, voir Naulin [71]. Après avoir établi ce modèle discret, nous expliquerons heuristiquement, sans le démontrer rigoureusement, comment il est possible de passer des modèles discrets vus ici aux modèles continus vus dans les chapitres précédents. Nous terminerons par quelques simulations numériques.

5.1 Modèle discret sans virus

5.1.1 Modélisation

Le modèle discret que nous présentons ici est basé sur un modèle de type « Leslie » (voir Caswell [16]). Pour cela, nous allons considérer deux pas de temps et d'âge égaux : $\Delta t = \Delta a = h$. Nous allons décomposer les deux classes d'âges « principales » (juvéniles et adultes) en classes d'âges de longueur h . Supposons que l'âge maximal des jeunes est $n \cdot h$ et celui pour les adultes est $m \cdot h$. On note ensuite pour $k \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq m$:

$J(k, j)$ = nombre de jeunes d'âge compris entre $(j - 1)h$ et jh au temps kh ,

$A(k, i)$ = nombre d'adultes d'âge compris entre $(i - 1)h$ et ih au temps kh ,

$s_J(k, j)$ = taux de survie des jeunes d'âge entre $(j - 1)h$ et jh entre les temps $(k - 1)h$ et kh , pouvant dépendre des valeurs de $J(k, l_1)$ et $A(k, l_2)$, $1 \leq l_1 \leq n$ et $1 \leq l_2 \leq m$,

$s_A(k, i)$ = taux de survie des adultes d'âge entre $(i - 1)h$ et ih entre les temps $(k - 1)h$ et kh , pouvant dépendre des valeurs de $J(k, l_1)$ et $A(k, l_2)$, $1 \leq l_1 \leq n$ et $1 \leq l_2 \leq m$,

$\tau(k, j)$ = taux de maturation des jeunes d'âge entre $(j - 1)h$ et jh entre les temps $(k - 1)h$

et kh , pouvant dépendre des valeurs des $A(k, l_2)$, $1 \leq l_2 \leq m$
 et $b(k, i) =$ taux de fertilité des adultes d'âge entre $(i-1)h$ et ih entre les temps $(k-1)h$
 et kh , pouvant dépendre des valeurs de $J(k, l_1)$ et $A(k, l_2)$, $1 \leq l_1 \leq n$ et $1 \leq l_2 \leq m$.
 Les différents taux considérés sont naturellement compris entre 0 et 1.

Au temps $k+1$, les juvéniles d'âge $j+1$ seront donc ceux qui étaient juvéniles d'âge j au temps k et qui auront survécu mais ne seront pas devenus adultes, tandis que les juvéniles d'âge 1 seront ceux nés des adultes au temps k . De la même façon, les adultes d'âge $i+1$ seront les adultes d'âge i au temps k qui auront survécu, tandis que les adultes d'âge 1 seront les juvéniles du temps k qui auront survécu et qui seront devenus adultes. La mise en équations de ceci conduit au système suivant :

$$\begin{cases} J(k+1, j+1) = s_J(k, j) (1 - \tau(k, j)) \cdot J(k, j) \\ J(k+1, 1) = \sum_{i=1}^m b(k, i) A(k, i), \\ A(k+1, i+1) = s_A(k, i) \cdot A(k, i) \\ A(k+1, 1) = \sum_{j=1}^n s_J(k, j) \tau(k, j) \cdot J(k, j). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Avec des conditions initiales données en $k=0$.

On a alors un système du type : $U(k+1) = M(k, U(k)) \cdot U(k)$, avec :

$U(k) = {}^t (J(k, 0), J(k, 1), \cdot, \cdot, \cdot, J(k, n), A(k, 0), A(k, 1), \cdot, \cdot, \cdot, A(k, m))$,
 et $M(k, U(k))$ est de la forme :

$$M(k, U(k)) = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \times & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \times & 0 & \cdot & \cdot & 0 & | & \cdot \\ 0 & 0 & \times & 0 & \cdot & 0 & | & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \times & 0 & 0 & | & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \times & 0 & | & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ - & - & - & - & - & - & | & - & - & - & - & - & - & - & - \\ ** & ** & ** & ** & ** & \otimes & | & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & \times & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & 0 & \times & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & 0 & 0 & \times & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & 0 & \cdot & 0 & \times & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \times & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \times & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

où :

- Les $*$ sont des $b(k, i)$,
- les $**$ sont des $s_J(k, j) \tau(k, j)$,
- les \times sont soit des $s_J(k, j) (1 - \tau(k, j))$, soit des $s_A(k, i)$,
- $\otimes = s_J(k, n) \tau(k, n)$, et
- les $|$ et les $-$ servent à séparer les blocs.

5.1.2 Resultats

Rappelons tout d'abord les définitions et résultats suivants (voir Cushing [18], Gantmacher [35]) :

Définition 5.1.1

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **réductible** s'il existe une matrice de permutation P telle que :

$$P M P^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A et C sont des matrices carrées. Autrement dit, il existe une partition (I, J) de $1, \dots, n$ telle que $I \neq \emptyset, J \neq \emptyset$, et $(i \in I, j \in J) \Rightarrow m_{i,j} = 0$. Une matrice non réductible est dite **irréductible**.

Théorème 5.1.1

(Frobenius) Une matrice M positive ($m_{i,j} \geq 0$) et irréductible admet une valeur propre dominante simple, strictement positive associée à un vecteur propre à composantes strictement positives.

Définition 5.1.2

Si de plus cette valeur propre est strictement dominante, M est dite **primitive**. Une matrice primitive est donc a fortiori irréductible.

Remarque 5.1.1

Une condition nécessaire et suffisante pour une matrice positive d'être primitive est qu'il existe $k > 0$ tel que M^k soit strictement positive (c'est à dire telle que M^k ait tous ses coefficients strictement positifs). De plus si une matrice M est irréductible alors M^q est irréductible pour tout $q > 0$ (voir Gantmacher [35] ou Marcus et Minc [66]).

Théorème 5.1.2

(Perron-Frobenius) Si une matrice positive est primitive, alors elle admet une valeur propre strictement dominante, simple et strictement positive et associée à un vecteur propre strictement positif. De plus, il ne peut exister deux vecteurs propres positifs indépendants.

Cette valeur propre strictement dominante (qui est le rayon spectral de la matrice) permet alors de déterminer la dynamique de $X(t+1) = M \cdot X(t)$, et le vecteur propre normalisé permet d'avoir un profil de la distribution de population (voir Caswell [16], Cushing [18]). Si $\rho(M) < 1$, la population disparaît, et si $\rho(M) > 1$, la population augmente exponentiellement. Il s'agit donc de voir sous quelles conditions il est possible d'appliquer le Théorème 5.1.2 à notre modèle.

1. Cas linéaire autonome :

Dans le cas où les coefficients s_J, s_A, τ et b sont indépendants du temps et des classes de populations au temps précédent, on se retrouve avec le système suivant : $U(k+1) = M \cdot U(k)$, et on a le résultat :

Proposition 5.1.1

Si pour $1 \leq j \leq n$, et $1 \leq i \leq m$, les coefficients $s_J(j), s_A(i), \tau(j), 1 - \tau(j)$ et $b(i)$ sont strictement positifs, alors la matrice M définie par (5.1.2) est primitive.

Remarque 5.1.2

En fait il suffit que les termes sous-diagonaux ainsi que $b(k, m)$ soient strictement positifs pour que la matrice M soit irréductible.

2. Cas linéaire périodique :

On considère maintenant le cas où les coefficients sont périodiques en temps avec $T = Kh = \text{pgcd des périodes}$. Alors en faisant $M(K) * M(K-1) * \dots * M(1) = \widetilde{M}$, on obtient une matrice correspondant à une période. On peut alors étudier le système suivant : $U(k+K) = \widetilde{M} \cdot U(k)$.

Proposition 5.1.2

*Si pour $1 \leq k \leq K, 1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq m$, les coefficients $s_J(k, j), s_A(k, i), \tau(k, j), 1 - \tau(k, j)$ et $b(k, i)$ sont strictement positifs, alors la matrice $\widetilde{M} = M(K) * M(K-1) * \dots * M(1)$ est primitive.*

Pour les matrices positives, l'irréductibilité et la primitivité sont déterminées par l'arrangement des coefficients nuls et strictement positifs (voir Caswell [16]). Or chaque $M(k), 1 \leq k \leq K$ est primitive et de même forme (coefficients nuls et strictement positifs aux mêmes endroits). Donc \widetilde{M} sera de même forme que $M(k)^K$ (quelque soit $1 \leq k \leq K$). Or $M(k)^K$ est primitive (voir la remarque 5.1.1) donc \widetilde{M} également.

3. Cas non linéaire :

Dans le cas où les coefficients dépendent également des classes de populations, nous n'avons pas fait d'étude autre que celle des simulations numériques présentées ultérieurement.

5.2 Modèle discret avec virus

Comme pour le cas continu, nous allons séparer juvéniles sains et infectés, ainsi que adultes sains et infectés. Pour les classes infectées, nous allons également tenir compte de l'âge de l'infection, avec un pas de temps toujours égal à $h = \Delta b$, décrit par une variable discrète $1 \leq l \leq n + m - 1$. Le pas de temps h sera pris égal au temps d'incubation, si bien qu'il n'y aura pas de jeunes infectés dans la première classe d'âge ; il est donc inutile de la considérer. Cependant, les jeunes infectés ne peuvent pas l'être depuis plus longtemps qu'ils ne sont nés, de même que des adultes d'âge ih ne peuvent pas être infectés depuis plus de $(n + i - 1)$ pas de temps. Il faut donc supprimer certaines classes qui ne feraient que rajouter des lignes de 0 dans la matrice. On garde alors les classes suivantes :

- $J_s(k, j)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq j \leq n$ pour les jeunes sains,
- $J_i(k, j, l)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq j \leq n$ et $1 \leq l \leq j - 1$ pour les jeunes infectés,
- $A_s(k, i)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq i \leq m$ pour les adultes sains,
- $A_i(k, i, l)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq l \leq n + i - 1$ pour les adultes infectés.

On introduit également les taux de contamination des jeunes, $\sigma_J(k, j)$ et des adultes $\sigma_A(k, i)$ (dépendant des nombres d'individus sains et infectés). On obtient alors le système suivant pour le modèle discret, pour $k \geq 0$:

$$\begin{cases} J_s(k+1, j+1) = s_J(k, j) (1 - \tau(k, j)) (1 - \sigma_J(k, j)) \cdot J_s(k, j) & \text{pour } 1 \leq j \leq n-1 \\ J_s(k+1, 1) = \sum_{i=1}^m b(k, i) \left(A_s(k, i) + \sum_{l=1}^{n+i-1} A_i(k, i, l) \right), \end{cases} \quad (5.2.1)$$

$$\begin{cases} J_i(k+1, j+1, l+1) = s_J(k, j) (1 - \tau(k, j)) \cdot J_i(k, j, l) & \text{pour } 1 \leq l < j \leq n-1 \\ J_i(k+1, j+1, 1) = s_J(k, j) (1 - \tau(k, j)) \sigma_J(k, j) \cdot J_s(k, j) & \text{pour } 1 \leq j \leq n-1, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

$$\begin{cases} A_s(k+1, i+1) = s_A(k, i) (1 - \sigma_A(k, i)) \cdot A_s(k, i) & \text{pour } 1 \leq i \leq m-1 \\ A_s(k+1, 1) = \sum_{j=1}^n s_J(k, j) \tau(k, j) (1 - \sigma_J(k, j)) \cdot J_s(k, j), \end{cases} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{cases} A_i(k+1, j+1, l+1) = s_A(k, j) \cdot A_i(k, j, l) \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } 1 \leq l \leq n+i-1 \\ A_i(k+1, 1, 1) = \sum_{j=1}^n s_J(k, j) \tau(k, j) \sigma_J(k, j) \cdot J_s(k, j) \\ A_i(k+1, i+1, 1) = s_A(k, i) \sigma_A(k, i) \cdot A_s(k, i) \text{ pour } 1 \leq i \leq m-1 \\ A_i(k+1, 1, l+1) = \sum_{j=l+1}^n s_J(k, j) \tau(k, j) \cdot J_i(k, j, l) \text{ pour } 1 \leq l \leq n-1. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Si l'on tient compte de la contamination du sol, il faut rajouter une équation, avec $G(k)$ représentant la proportion de sol contaminé. On introduit également le taux de contamination du sol $\alpha(k)$ et de décontamination du sol $\delta(k)$. La contamination est alors décrite par l'équation suivante :

$$G(k+1) = \alpha(k) \left(\sum_{j=2}^n \sum_{l=1}^{j-1} J_i(k, j, l) + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{n+i-1} A_i(k, i, l) \right) \cdot (1 - G(k)) - \delta(k) \cdot G(k). \quad (5.2.5)$$

Remarque 5.2.1

La contamination des individus due au sol doit être prise en compte dans σ_J et σ_A . Ces coefficients prendront donc en compte d'une part la transmission directe par contacts entre individus et d'autre part la transmission indirecte via la contamination de l'environnement (voir le Chapitre 2).

En posant :

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_s(k) &= {}^t(J_s(k, 1), J_s(k, 2), \cdot, \cdot, \cdot, J_s(k, n)), \\ \mathbb{J}_i(k) &= {}^t(J_s(k, 2, 1), J_i(k, 2, 2), \cdot, \cdot, \cdot, J_i(k, n, n-1)), \\ \mathbb{A}_s(k) &= {}^t(A_s(k, 1), A_s(k, 2), \cdot, \cdot, \cdot, A_s(k, m)), \\ \mathbb{A}_i(k) &= {}^t(A_i(k, 1, 1), A_i(k, 1, 2), \cdot, \cdot, \cdot, A_i(k, m, m+n-1)), \end{aligned}$$

on obtient un système du type :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{J}_s(k+1) \\ \mathbb{J}_i(k+1) \\ \mathbb{A}_s(k+1) \\ \mathbb{A}_i(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & 0 & 0 \\ M_6 & 0 & M_7 & 0 \\ M_8 & M_9 & M_{10} & M_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{J}_s(k) \\ \mathbb{J}_i(k) \\ \mathbb{A}_s(k) \\ \mathbb{A}_i(k) \end{pmatrix} = M(k, U(k)) \cdot U(k).$$

On a $M(k, U(k)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}}(\mathbb{R}^+)$, où :

$$\mathcal{N} = n + \sum_{j=2}^n (j-1) + m + \sum_{i=1}^m (n+i-1) = \frac{n(n+1)}{2} + nm + \frac{m(m+1)}{2}.$$

- $M_4 \left(1 + \sum_{\ell=1}^{j-1} \ell, j \right) = s_J(k, j+1) (1 - \tau(k, j+1)) \sigma_J(k, j+1) := m_{4,j}$ pour $1 \leq j \leq n-1$,
- $M_5 \left(l+1 + \sum_{\ell=1}^j \ell, l + \sum_{\ell=1}^{j-1} \ell \right) = s_J(k, j+1) (1 - \tau(k, j+1)) := m_{5,j}$ pour $1 \leq l \leq j \leq n-2$,
- $M_6(1, j) = s_J(k, j) \tau(k, j) := m_{6,j}$ pour $1 \leq j \leq n$,
- $M_7(i+1, i) = s_A(k, i) (1 - \sigma_A(k, i)) := m_{7,i}$ pour $1 \leq i \leq m-1$,
- $M_8(1, j) = s_J(k, j) \tau(k, j) \sigma_J(k, j) := m_{8,j}$ pour $1 \leq j \leq n$,
- $M_9 \left(j+1, j + \sum_{\ell=1}^{j+l-2} \ell \right) = s_J(k, j+1) \tau(k, j+1) := m_{9,j}$ pour $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq l \leq n-j$,
- $M_{10} \left(1 + \sum_{\ell=1}^i (\ell + n - 1), i \right) = s_A(k, i) \sigma_A(k, i) := m_{10,i}$ pour $1 \leq i \leq m-1$,
- $M_{11} \left(l+1 + \sum_{\ell=1}^i (\ell + n - 1), l + \sum_{\ell=1}^{i-1} (\ell + n) \right) = s_A(k, i) := m_{11,i}$ pour $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq l \leq n+i-1$.

Dans le cas linéaire autonome, on a le résultat suivant :

Proposition 5.2.1

Si tous les coefficients $m_{n,i}$ ou j pour $1 \leq n \leq 11$ sont strictement positifs, la matrice M est irréductible et primitive.

Pour ce qui est du caractère primitif de la matrice, celui-ci n'est pas établi dans le cas général mais un calcul numérique reposant sur un programme Matlab donnant k tel que $M^k > 0$ en fonction de la taille de la matrice nous l'a assuré pour les valeurs considérées dans les simulations numériques, ainsi que toutes les autres valeurs testées.

C'est pour avoir le résultat d'irréductibilité que l'on a pris soin de « réduire » le modèle en faisant en sorte de ne pas inclure de classes de population n'intervenant pas pour l'évolution du système. Par exemple, il aurait été tentant de considérer des classes de populations $J_i(k, j, l)$ pour $1 \leq j, l \leq n$ puisque cela simplifiait le modèle et ne rajoutait que des « 0 » dans la matrice. Cependant la matrice n'aurait alors pas été

irréductible. Toutefois les matrices obtenues sont tout de même très creuses (beaucoup de coefficients nuls).

On peut donner un résultat similaire pour le cas linéaire périodique :

Corollaire 5.2.1

Si tous les coefficients $m_{n,k,i}$ ou j pour $1 \leq n \leq 11$ sont strictement positifs, la matrice \widetilde{M} correspondant au problème linéaire périodique est irréductible et primitive.

5.3 Passage du modèle discret au modèle continu

Dans cette partie, on va expliquer comment l'on peut heuristiquement retrouver le modèle continu à partir du modèle discret (voir Cushing [18]). Pour cela, il faut voir qu'en faisant tendre le pas de temps h vers 0, et pourvu que les coefficients aient une « bonne » dépendance en h , on retrouvera un modèle similaire au modèle continu décrit dans les chapitres précédents. On travaille pour simplifier sur les modèles « sans l'environnement contaminé ».

Supposons que les coefficients soient de la forme :

- $s_J(k, j; h) = 1 - \mu_J(kh, jh, \mathbb{P}(kh)) \cdot h + o(h)$,
- $s_A(k, i; h) = 1 - \mu_A(kh, ih, \mathbb{P}(kh)) \cdot h + o(h)$,
- $\tau(k, j; h) = \tau(kh, jh, \mathbb{A}(kh)) \cdot h + o(h)$,
- $\sigma_J(k, j; h) = \sigma_J(kh, jh) \cdot h + o(h)$,
- $\sigma_A(k, i; h) = \sigma_A(kh, ih) \cdot h + o(h)$,
- $b(k, i; h) = \beta(kh, ih) \cdot h + o(h)$.

Supposons qu'il existe une fonction de densité telle que : $J_s(k, j) \approx J_s(t, a) = \int_{a-h}^a u_1(t, \alpha) d\alpha$, avec $t \leftrightarrow kh$ et $a \leftrightarrow jh$. On identifiera par la suite t et k ainsi que a et j . Formellement, on a :

$$J_s(t+h, a+h) = s_J(t, a; h)(1 - \tau(t, a; h))(1 - \sigma_J(t, a; h)) \cdot J_s(t, a),$$

donc

$$\int_a^{a+h} u_1(t+h, \alpha) d\alpha = s_J(t, a; h)(1 - \tau(t, a; h))(1 - \sigma_J(t, a; h)) \cdot \int_{a-h}^a u_1(t, \alpha) d\alpha.$$

En retranchant $\int_{a-h}^a u_1(t, \alpha) d\alpha$ et en divisant par h^2 , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{a-h}^a \left(\frac{u_1(t+h, \alpha+h) - u_1(t, \alpha)}{h} \right) d\alpha = \\ - \left(\frac{1 - s_J(t, a; h)(1 - \tau(t, a; h))(1 - \sigma_J(t, a; h))}{h} \right) \frac{1}{h} \int_{a-h}^a u_1(t, \alpha) d\alpha. \quad (5.3.1) \end{aligned}$$

Or, à supposer que tout est bien défini, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1(t+h, \alpha+h) - u_1(t, \alpha)}{h} = Du_1(t, \alpha) = \partial_t u_1(t, \alpha) + \partial_a u_1(t, \alpha),$$

et, avec les hypothèses faites :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - s_J(t, a; h)(1 - \tau(t, a; h))(1 - \sigma_J(t, a; h))}{h} = -(\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) + \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) + \sigma_J(t, a)).$$

D'où, en faisant $h \rightarrow 0$ dans (5.3.1) :

$$\partial_t u_1(t, a) + \partial_a u_1(t, a) = -(\mu_J(t, a, \mathbb{P}(t)) + \tau(t, a, \mathbb{A}(t)) + \sigma_J(t, a)) \cdot u_1(t, a).$$

On peut retrouver par un travail similaire toutes les autres équations qui mènent au système continu.

5.4 Simulations numériques

Dans cette section, nous présentons quelques simulations numériques obtenues à partir du modèle discret présenté ci-dessus.

Pour tenter de retrouver le profil périodique observé dans les populations « du nord », voir le Chapitre 1, nous avons considéré des coefficients démographiques (taux de survie, de fertilité et de maturation) périodiques de période 3 ans. Le pas de temps (ainsi que d'âges) est de une semaine, ce qui correspond à la durée d'incubation du virus. Précisons que les coefficients à considérer pour ce modèle n'étant pas encore déterminés pour être en rapport avec les données biologiques, nous avons utilisé des coefficients qui nous semblaient pertinents, que nous avons ensuite modulés afin d'obtenir des résultats proches de ceux observés avec d'autres modèles (voir Sauvage [74] et Sauvage et al. [75]).

Considérons tout d'abord la figure Fig. 5.4.1 montrant le type de dynamique que nous obtenons pour le modèle sans virus.

Comme il fallait s'y attendre, nous obtenons une dynamique périodique de période 3 ans, avec des pics de populations de plus en plus grands durant les 3 étés successifs. Les représentations ci-dessus représentent le nombre de juvéniles (ou d'adultes) total en fonction du temps, indépendamment de la classe d'âge dans laquelle ils se trouvent. Précisons également que le profil obtenu n'est pas sensible aux conditions initiales : On retrouve le même profil avec des conditions initiales raisonnables, et la convergence vers le régime périodique observé est très rapide.

Intéressons nous maintenant à la figure Fig. 5.4.2 montrant ce que l'on obtient pour le modèle avec virus, mais sans l'influence de la contamination indirecte par le sol.

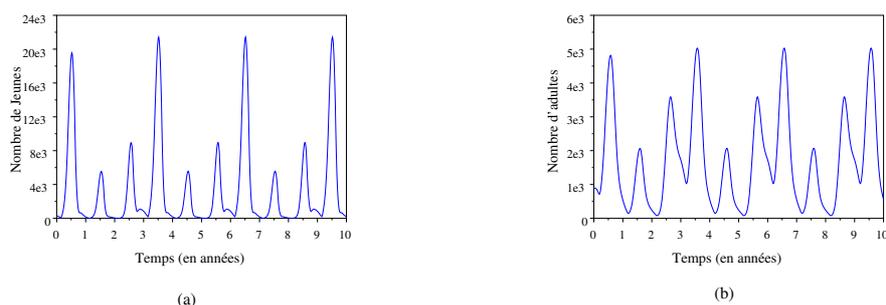


FIG. 5.4.1: Evolution des jeunes (a) et des adultes (b) pour le modèle sans virus.

Comme l'on pouvait là aussi s'y attendre, le profil des juvéniles (respectivement des adultes) sains est proche du profil que l'on avait obtenu précédemment pour les juvéniles (resp. adultes). Cela est dû au fait que les paramètres démographiques du campagnol ne sont pas influencés par la maladie. Ainsi, l'évolution du nombre de juvéniles total (sains et infectés confondus) doit être la même que celle des juvéniles dans le modèle sans virus. Le nombre des individus infectés, surtout chez les jeunes étant très faible comparativement à la population totale, le profil pour les individus sains est similaire à celui pour une population saine. On remarque aussi que les profils des individus infectés sont eux aussi périodiques et ont également trois pics successifs croissants pendant une période, même si ceux-ci semblent plus larges que chez les individus sains. On observe également que le nombre d'individus infectés en hiver dépasse le nombre d'individus sains, ce qui peut s'expliquer par le fait que la maladie continue à se propager alors qu'il n'y a pas de nouveaux individus sains arrivant. En revanche, au printemps, les individus sains redeviennent prédominants puisque tous les jeunes naissent sains, la maladie ne se propageant pas verticalement.

Enfin la figure Fig. 5.4.3 reprend les simulations obtenues à partir du modèle avec virus, en prenant en compte l'influence de la contamination indirecte via l'environnement :

Avec les mêmes conditions initiales et les mêmes coefficients démographiques que pour le cas précédent, on remarque que le profil est quasiment identique que si l'on ne tient pas compte de cette contamination indirecte. Cependant, le nombre d'individus infectés est supérieur, ce qui est logique car il y a un moyen de plus d'être contaminé. On peut également remarquer une très grande similitude entre les profils des adultes infectés (qui sont bien plus nombreux que les juvéniles infectés, ayant vécu plus longtemps pour être contaminés) et de la proportion d'environnement contaminé. Même si l'influence de la contamination de l'environnement ne semble pas être déterminante avec les coefficients considérés ici, on s'aperçoit tout de même que la proportion d'environnement contaminé ne tombe jamais à 0. Ainsi, même si le nombre

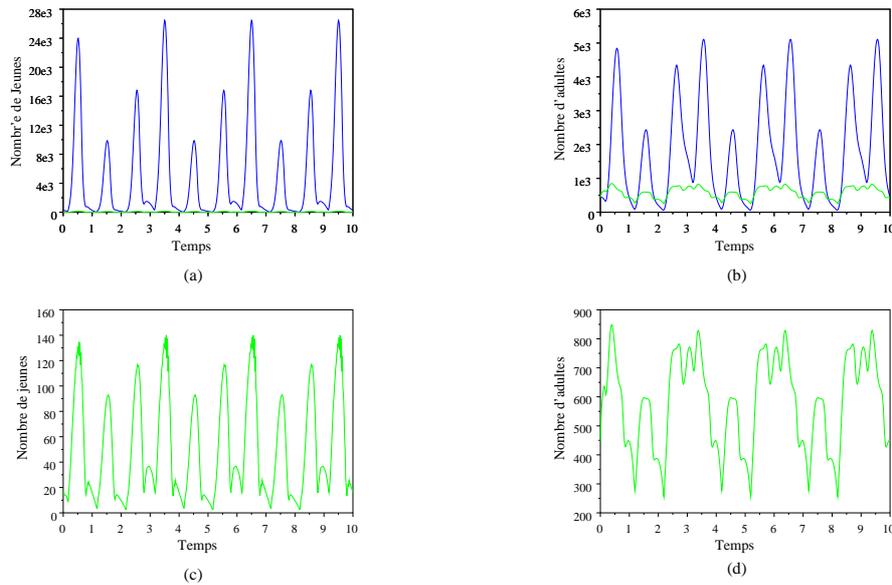


FIG. 5.4.2: Evolution des jeunes (a), des adultes (b), des jeunes infectés (c) et des adultes infectés (d) pour le modèle avec virus, mais sans le sol. Les individus sains sont en traits pleins et les individus infectés sont en pointillés.

d'individus infectés tombe à 0 à un moment ou à un autre dans un endroit donné, ce qui est envisageable vu le nombre très faible d'individus en hiver, le sol pourrait jouer un rôle de réservoir pour recontaminer des individus sains revenant ensuite sur ce lieu. Enfin nous retrouvons également des pics de contamination de l'environnement, qui correspondrait aux périodes où la transmission se transmet à l'Homme.

Rappelons enfin que ces simulations ont été effectuées avec des coefficients qui ne sont certainement pas ceux observés en réalité, du fait que nous n'en disposons pas à l'époque. Toutefois, le but était de vérifier que le modèle développé et étudié dans les chapitres précédents, permettait au moins de retrouver des dynamiques du type de celles observées, ce qui est le cas.

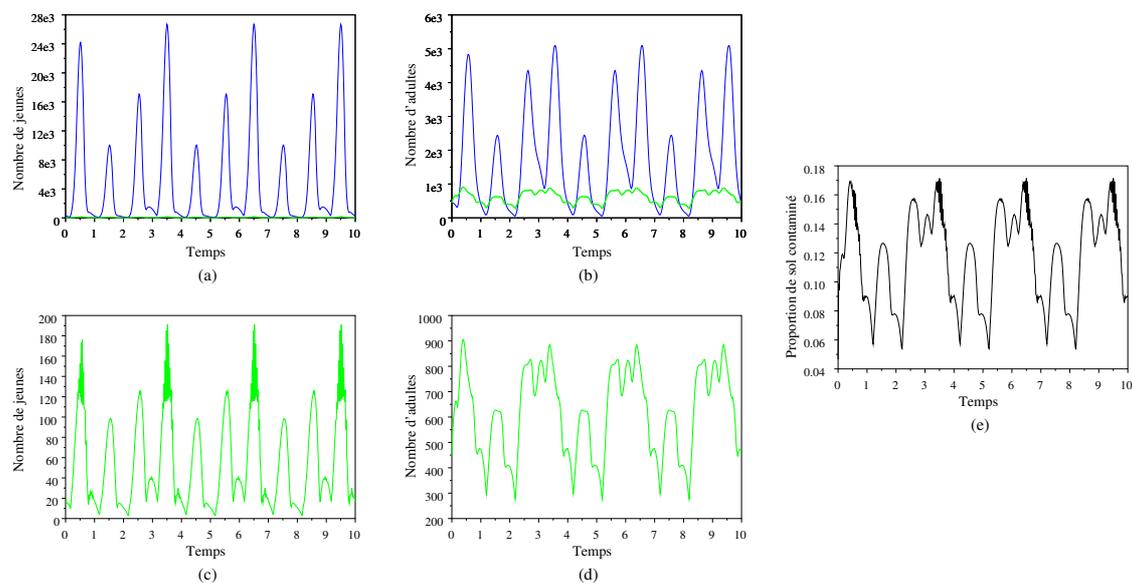


FIG. 5.4.3: Evolution des jeunes (a), des adultes (b), des jeunes infectés (c), des adultes infectés (d) et de la proportion d'environnement contaminé pour le modèle avec virus et en tenant compte de la contamination indirecte. Les individus sains sont en traits pleins et les individus infectés sont en pointillés.

Conclusion et perspectives

Nous avons présenté dans les Chapitres 3 et 4 des résultats d'existence et d'unicité concernant les modèles JA et JASIG dans le cas de systèmes très structurés (3 variables structurantes). Même si nous n'avons pas réussi à le faire pour le moment, il serait intéressant de voir s'il est possible d'obtenir les mêmes résultats en assouplissant certaines hypothèses, dont certaines, contraignantes et sans importance biologique, doivent pouvoir être affaiblies (par exemple, dans l'hypothèse Hyp 4.4, faire tendre ε vers 0).

Concernant le devenir en temps long et les états stationnaires, une étude a été menée et publiée dans un cas proche, elle est disponible en annexe, voir Fitzgibbon et al. [32].

Le modèle discret présenté dans le Chapitre 5 pourrait également être étudié plus en profondeur, mais nous n'avons pas voulu nous aventurer dans cette voie pour ce travail. Elle reste donc à explorer.

L'étude menée ici ne donne que des résultats d'existence globale et d'unicité mais aucune indication sur le comportement qualitatif (ou quantitatif) des solutions. Du fait de la forte structuration de ce modèle, il est complexe d'espérer des résultats sur ce comportement qualitatif. Dans la partie III, nous pourrions répondre plus facilement à ces questions, en étudiant des modèles moins structurés (sans structuration continue en âges).

Un autre prolongement de l'étude menée ici est de structurer ce modèle en espace, dans le but d'étudier sa dispersion. Cela conduit à des systèmes de réaction-diffusion, ce qui modifie quelque peu les méthodes de résolution. Néanmoins il est toujours possible de démontrer l'existence globale et l'unicité de solutions pour ces systèmes. C'est ce que nous ferons dans la partie IV, mais en abandonnant la structuration continue en âge de l'infection pour la remplacer par une structuration discrète en cette variable.

Troisième partie

Modèles avec 2 classes d'âge, à coefficients constants et/ou périodiques en temps, à structuration discrète en espace

Introduction

Nous nous intéressons à des systèmes d'équations différentielles ordinaires correspondant aux modèles JA et JASIG (voir partie I). Le but est d'étudier par des techniques de bifurcation comment des petites perturbations de modèles à coefficients constants conduisent à l'apparition de solutions périodiques à partir d'états stationnaires. Cette transition de dynamiques stationnaires à des dynamiques périodiques est observée dans les populations de campagnols roussâtres, lorsque l'on va du sud vers le nord de l'Europe, voir Chapitre 1. L'essentiel du travail présenté dans cette partie a fait l'objet d'une présentation à la conférence « Computational and Mathematical Population Dynamics » à Trento, Italie en Juin 2004, et un article est soumis, voir Wolf et al. [88].

Dans le Chapitre 6 nous analysons un système d'équations différentielles correspondant au modèle JA, c'est à dire représentant une population isolée séparée en deux classes d'âges, juvéniles et adultes. Nous établissons la condition d'existence et de stabilité d'un état stationnaire non trivial dans le cas de coefficients constants, puis nous étudions comment des dynamiques périodiques peuvent émerger de ce système à coefficients constants, avant de présenter quelques simulations numériques.

Dans le Chapitre 7, nous considérons un système de cinq équations différentielles correspondant au système JASIG. Nous faisons une analyse de l'existence et de la stabilité des états stationnaires dans le cas de coefficients constant. Comme pour le système JA, nous étudions l'existence d'états endémiques périodiques lors de petites oscillations autour de coefficients périodiques, et nous présentons quelques simulations numériques. En particulier, nous voyons que le fait d'avoir des coefficients périodiques peut être plus favorable pour la survie du virus que d'avoir des coefficients constants.

Dans le Chapitre 8, nous prenons en compte une structuration discrète en espace, c'est à dire que nous étudions un modèle multi-sites, le passage d'un patch aux autres se faisant lorsque les juvéniles dispersent afin de pouvoir se reproduire. Nous prouvons l'existence d'états stationnaires endémiques localement asymptotiquement stables pour de petits coefficients de dispersion, puis nous nous intéressons à l'influence de petites perturbations périodiques et quelques simulations numérique présentant diverses situations envisageables dans le cas de deux patches.

Nous remarquons notamment que la dispersion peut favoriser la persistance du virus.

Chapitre 6

Etude du modèle JA

6.1 Mise en place du modèle

Le modèle de base est celui décrit dans le Chapitre 2, avec deux classes d'âges, juvéniles et adultes, correspondant au schéma compartimental présenté dans la figure Fig. 2.1.1. Par contre, nous ne considérons ici ni structuration en espace, ni structuration continue en âge. Le système que nous étudierons est donc décrit pour $t \geq 0$ par les équations :

$$\begin{cases} J'(t) = \beta(t) \cdot A(t) - (\mu_J(t) + k_J(t)P(t)) \cdot J(t) - \tau(t, A) \cdot J(t), \\ A'(t) = \tau(t, A) \cdot J(t) - (\mu_A(t) + k_A(t)P(t)) \cdot A(t), \end{cases} \quad (6.1.1)$$

avec $P(t) = J(t) + A(t)$. On se donne des conditions initiales $J(0) = J_0 \geq 0$ et $A(0) = A_0 \geq 0$.

Nous supposons que le taux de fertilité vérifie $0 \leq \beta(t) \leq \beta_\infty$, et que le taux de maturation des juvéniles, $0 \leq \tau(t, A) \leq \tau_\infty$ est dépendant de la densité d'adultes au temps t . Nous considérons des taux de mortalité naturelle $0 \leq \mu_J(t) \leq \mu_\infty$ pour les juvéniles et $0 \leq \mu_A(t) \leq \mu_\infty$ pour les adultes ainsi qu'un effet de densité dépendance sur la mortalité induit par les coefficients $0 \leq k_J(t) \leq k_\infty$ et $0 \leq k_A(t) \leq k_\infty$. Tous ces coefficients sont supposés réguliers lorsqu'ils dépendent du temps, et nous supposons en outre que pour chaque $t \geq 0$, $A \rightarrow \tau(t, A)$ est décroissant.

Remarque 6.1.1

Une hypothèse biologiquement raisonnable, notamment dans le cadre du système Hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre qui motive ce travail serait de considérer que pour $t \geq 0$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \tau(t, A) = 0$. Dans un premier temps nous avons donc consi-

déré également cette hypothèse pour le système (6.1.1) mais il est apparu qu'elle n'est nullement nécessaire pour démontrer les résultats présentés ici.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 6.1.1

Le système 6.1.1 a une unique solution globale $(J(t), A(t))$ pour $t \geq 0$, à composantes positives ou nulles.

Preuve. L'existence locale est due au Théorème de Cauchy-Lipschitz. La positivité est due au fait que \mathbb{R}_+^2 est positivement invariant (voir Hale et Koçak [42]) : on a $J'(t) \geq 0$ pour $J = 0$ et $A \geq 0$, et de même $A'(t) \geq 0$ pour $A = 0$ et $J \geq 0$. Pour montrer l'existence globale, il nous suffit de montrer que $P(t)$ n'explose pas en temps fini. Or en additionnant les deux équations, en J et en A , on a :

$$P'(t) \leq (\beta_\infty + \tau_\infty)P(t),$$

ce qui assure que $0 \leq P(t) \leq e^{(\beta_\infty + \tau_\infty)t}$. ■

6.2 Cas de coefficients constants

Les résultats que nous donnons ici sont également présentés et démontrés dans un cadre plus général dans Kostova et al. [58].

6.2.1 Existence d'un état stationnaire non trivial

On s'intéresse maintenant au cas particulier où les coefficients sont constants, c'est à dire au système suivant :

$$\begin{cases} J'(t) = \beta \cdot A(t) - (\mu_J + k_J P(t)) \cdot J(t) - \tau(A) \cdot J(t), \\ A'(t) = \tau(A) \cdot J(t) - (\mu_A + k_A P(t)) \cdot A(t), \end{cases} \quad (6.2.1)$$

avec des conditions initiales positives $J(0) \geq 0$ et $A(0) \geq 0$.

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude des états stationnaires. On a le résultat suivant :

Théorème 6.2.1

On suppose que tous les coefficients β, μ_J, μ_A, k_J et k_A sont constants et strictement positifs, et que $A \rightarrow \tau(A)$ est une fonction décroissante et positive indépendante du temps. On définit :

$$C = \frac{\beta \tau(0)}{(\mu_J + \tau(0)) \mu_A}. \quad (6.2.2)$$

Alors :

1. Si $C < 1$, l'état trivial $(0, 0)$ est le seul état stationnaire et il est globalement asymptotiquement stable.
2. Si $C > 1$, l'état trivial $(0, 0)$ est instable et il existe un unique état stationnaire (J^*, A^*) , à composantes positives, qui est localement asymptotiquement stable.

Preuve. Une première remarque est que si $\beta \leq \mu_A$, alors d'après (6.2.1) on a $P'(t) \leq -cP^2(t)$ avec $c = \min(k_J, k_A)$. Ainsi, on a $P(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$. Nous supposons donc dans la suite que $\beta - \mu_A > 0$.

Il est également facile de vérifier que l'état trivial $(0, 0)$ est toujours un état stationnaire. Nous allons donc commencer par étudier l'existence d'un état stationnaire non-trivial, avant de nous intéresser à la stabilité des états stationnaires dans les différents cas.

1. Existence d'un état stationnaire non-trivial.

On cherche un couple (J, A) , à composantes positives, vérifiant :

$$\begin{cases} 0 = \beta A - (\mu_J + k_J(J + A))J - \tau(A)J \\ 0 = \tau(A)J - (\mu_A + k_A(J + A))A. \end{cases} \quad (6.2.3)$$

On peut déjà remarquer que si (J, A) vérifie (6.2.3), alors $J = 0 \iff A = 0$. Puisque l'on cherche un état non-trivial, nous supposons donc que $J > 0$ et $A > 0$. De ces équations, on obtient :

$$\begin{aligned} J &= \theta(A) := \frac{\mu_A + k_A A}{\tau(A) - k_A A} A, \\ A &= \frac{\mu_J + k_J J + \tau(A)}{\beta - k_J J} J. \end{aligned}$$

On peut remarquer en particulier que nécessairement $\tau(A) - k_A A > 0$. Alors, on a :

$$A = \frac{\mu_J + k_J \theta(A) + \tau(A)}{\beta - k_J \theta(A)} \theta(A), \quad (6.2.4)$$

que l'on peut écrire $\phi(A) = \psi(A)$ avec :

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \frac{\beta A}{\theta(A)} - \tau(A), \\ \psi(A) &= \mu_J + k_J \theta(A) + k_J A. \end{aligned}$$

$\tau(A)$ étant décroissant et $\tau(A) - k_A A > 0$, on peut vérifier que $\theta(A)$ est croissant pour $A \geq 0$. Ainsi, $\psi(\cdot)$ est strictement croissant de $\psi(0) = \mu_J$ à $\lim_{A \rightarrow +\infty} \psi(A) = +\infty$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \phi'(A) &= \frac{\beta \theta(A) - \tau'(A) \theta^2(A) - \beta A \theta'(A)}{\theta^2(A)} \\ &\iff \theta^2(A) \phi'(A) = \beta \theta(A) - \beta \theta'(A) A - \tau'(A) \theta^2(A), \end{aligned}$$

d'où, en posant $D = \tau(A) - k_A A$:

$$\phi'(A) \frac{(\mu_A + k_A A)^2 A^2}{D^2} = \beta \frac{(\mu_A + k_A A) A}{D} - \tau'(A) \frac{(\mu_A + k_A A)^2 A^2}{D^2} - \beta A \frac{D(\mu_A + 2k_A A) - (\mu_A + k_A A)A(\tau'(A) - k_A)}{D^2}$$

$$\Leftrightarrow \phi'(A)(\mu_A + k_A A)A = \beta D - \frac{\beta D k_A}{\mu_A + k_A A} - \beta D + \beta A(\tau'(A) - k_A) - \tau'(A)(\mu_A + k_A A)A,$$

et

$$(\mu_A + k_A A)A \phi'(A) = A \tau'(A)(\beta - \mu_A - k_A A) - \beta k_A A - \frac{\beta k_A A D}{\mu_A + k_A A}.$$

Puisque l'on a supposé $\beta - \mu_A > 0$, on a $\phi'(A) < 0$ si $\beta - \mu_A - k_A A > 0$, c'est à dire pour $A \leq \frac{\beta - \mu_A}{k_A} := \bar{A}$.

Ainsi, ϕ est décroissante de $\phi(0) = \frac{\beta \tau(0)}{\mu_A} - \tau(0)$ à $\phi(\bar{A}) = \mu_A - \beta < 0$. De plus, en reprenant la définition de ϕ , on a :

$$\phi(A) = 0 \Leftrightarrow \beta A = \tau(A)\theta(A) \Leftrightarrow \tau(A)(\beta - \mu_A - k_A A) = \beta k_A A,$$

ce qui n'est pas possible quand $\beta - \mu_A - k_A A < 0$. Donc pour $A > \bar{A}$, $\phi(A)$ reste négatif. Finalement, l'équation $\phi(A) = \psi(A)$ ne peut avoir qu'une seule solution non nulle, et ceci est possible si et seulement si :

$$\phi(0) > \psi(0) \Leftrightarrow \frac{\beta \tau(0)}{\mu_A} - \tau(0) > \mu_J \Leftrightarrow C > 1.$$

Ainsi, il existe un unique état stationnaire non trivial (J^*, A^*) si et seulement si $C > 1$.

2. Stabilité de l'état trivial $(0, 0)$.

La matrice Jacobienne du système (6.2.1) est :

$$Jac(J, A) = \begin{pmatrix} -(\mu_J + k_J P + \tau(A)) - k_J J & \beta - (k_J + \tau'(A))J \\ \tau(A) - k_A A & \tau'(A)J - (\mu_A + k_A P) - k_A A \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour l'état trivial $(0, 0)$, on a :

$$Jac(0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu_J - \tau(0) & \beta \\ \tau(0) & -\mu_A \end{pmatrix}.$$

La trace de la matrice est clairement négative, de sorte que cette matrice a deux valeurs propres strictement négatives si et seulement si son déterminant est strictement positif, i.e. si et seulement si $C < 1$. Ainsi, si $C \geq 1$ l'état trivial est instable, et il est localement asymptotiquement stable si $C < 1$.

De plus, nous allons montrer que $(0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable. Pour cela, considérons $\varepsilon > 0$ posons $V(J, A) = (\tau(0) + \varepsilon)J + (\mu_J + \tau(0))A$. Il nous suffit de montrer que $V(\cdot)$ est une fonction de Lyapunov pour le système (6.2.1), pourvu que $C < 1$ (voir Hale et Koçak [42]).

On a bien $V(J, A) > 0$ si (J, A) est à composante positives et différent de $(0, 0)$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial J} J' + \frac{\partial V}{\partial A} A' \\ &= (\tau(0) + \varepsilon)\beta A - (\tau(0) + \varepsilon)(\mu_J + k_J P + \tau(A))J \\ &\quad + (\tau(0) + \mu_J)\tau(A)J - (\tau(0) + \mu_J)(\mu_A + k_A P)A \\ &= (\beta\tau(0) - \mu_A(\mu_J + \tau(0)))A + \mu_J(\tau(A) - \tau(0) - \varepsilon)J \\ &\quad - ((\tau(0) + \varepsilon)k_J J + (\tau(0) + \mu_J)k_A A)P - \varepsilon\tau(A)J.\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $C < 1$ on a $\dot{V} < 0$ si $(J, A) \neq (0, 0)$ ce qui assure que $(0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

3. Stabilité de l'état non-trivial (J^*, A^*) .

Regardons maintenant la matrice $Jac(J^*, A^*)$. La trace de cette matrice est également négative car $\tau'(A) \leq 0$. De plus, (J^*, A^*) étant un état stationnaire, on déduit de (6.2.3) que :

$$\begin{aligned}(\mu_J + k_J P^* + \tau(A^*)) &= \frac{\beta A^*}{J^*}, \\ (\mu_A + k_A P^*) &= \frac{\tau(A^*) J^*}{A^*}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a (pour simplifier les écritures, on note ici $J^* = J$ et $A^* = A$) :

$$\begin{aligned}Det(Jac(J, A)) &= -\left(\mu_J + k_J P + \tau(A) + k_J J\right) \cdot \tau'(A)J + \left(\frac{\beta A}{J} + k_J J\right) \left(\frac{\tau(A)J}{A} + k_A A\right) \\ &\quad - \left(\tau(A) - k_A A\right) \left(\beta - k_J J - \tau'(A)J\right) \\ &= -\left(\mu_J J + k_J(J + P)J + k_A A J\right) \tau'(A) + \frac{\beta k_A A^2}{J} + \frac{\tau(A)k_J J^2}{A} + \beta k_A A \\ &\quad + k_J \tau(A)J,\end{aligned}$$

d'où $Det(Jac(J, A)) > 0$ car $\tau'(A) \leq 0$. Ainsi, dès lors qu'il existe, c'est à dire dès que $C > 1$ l'état stationnaire non trivial (J^*, A^*) est localement asymptotiquement stable. ■

L'interprétation du Théorème 6.2.1 est intuitive. Dans le cas d'un taux de maturation constant ($\tau(A) = \tau$), β représente l'apport de juvéniles et $(\mu_J + \tau)$ la perte naturelle de juvéniles en l'absence d'adultes alors que τ est l'apport d'adultes et μ_A leur perte. Ainsi, le Théorème 6.2.1 affirme que l'on peut avoir un état stationnaire non trivial, qui est alors localement asymptotiquement stable si et seulement si « l'apport » est supérieur à la « perte ». Le paramètre C représente donc la possibilité ou non de persistance de la population.

6.2.2 Permanence

Nous allons montrer ici que lorsque l'état trivial est instable, le système JA est permanent (voir Définition 6.2.2), c'est à dire qu'il est asymptotiquement « loin des bords ». Cela nous servira à montrer que l'état stationnaire non trivial (J^*, A^*) est alors globalement asymptotiquement stable. Le résultat nous permettant de conclure à la permanence du système est dû à R. Kon (voir Théorème 6.2.2) et nous à été présenté lors de la conférence « International Workshop on differential equations in mathematical biology » au Havre en juillet 2005 (un article est en préparation, voir Kon [55]). Nous n'avons pas pu trouver de référence écrite publiée pour ce résultat mais des résultats proches ont déjà été publiés pour des systèmes discrets par Kon [56] et Kon et al. [57].

Commençons par introduire quelques notations et définitions :

Définition 6.2.1

Un système $X' = F(X)$ (en dimension n) est dit **dissipatif** dans \mathbb{R}_+^n si pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$ dans \mathbb{R}_+^n .

On considère le système

$$(S) : X' = \mathcal{A}(X) \cdot X$$

où $\mathcal{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et les $a_{i,j}$ sont réguliers et ne changent pas de signe sur $\partial\mathbb{R}_+^n$.

Définition 6.2.2

Le système (S) est **permanent** dans \mathbb{R}_+^n si il est dissipatif dans \mathbb{R}_+^n et :

$$\exists \eta > 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}_+^n - \{0\} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n x_i(t) > \eta$$

Un système permanent dans \mathbb{R}_+^n sera donc tel qu'une trajectoire ne partant pas du point d'origine aura des composantes asymptotiquement strictement positives, voir figure Fig. 6.2.1.

Rappelons enfin les définitions suivantes sur les matrices :

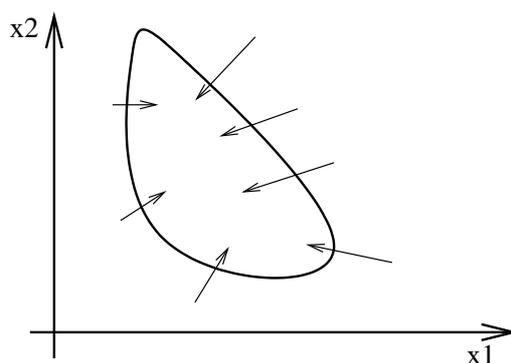


FIG. 6.2.1: Système permanent en dimension 2

Définition 6.2.3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à laquelle on associe un graphe de n sommets S_1, \dots, S_n . On a les définitions suivantes :

Un **arc** du graphe $S_i \leftrightarrow S_j$ relie S_i à S_j si $m_{i,j} \neq 0$.

Un **chemin** du graphe $S_i \leftrightarrow S_{i_1} \leftrightarrow S_{i_2} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow S_{i_p} \leftrightarrow S_j$ allant de S_i à S_j est une suite d'arcs existants.

Un graphe est dit **fortement connexe** s'il existe au moins un chemin allant de tout sommet S_i à tout sommet S_j , $i, j = 1, \dots, n$.

On dira que la matrice M est **exponentiellement positive** si la matrice e^M est positive, ce qui est équivalent à avoir $m_{i,j} \geq 0$ pour $i \neq j$.

On renvoie le lecteur à la Définition 5.1.1 pour la notion de matrice irréductible, et à la remarque 5.1.1 concernant une condition nécessaire pour qu'une matrice soit irréductible. On a également le résultat suivant :

Lemme 6.2.1

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est irréductible si et seulement si son graphe associé est fortement connexe.

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème suivant dû à Kon, voir Kon [55] :

Théorème 6.2.2

On suppose (S) dissipatif sur \mathbb{R}_+^n . Si $A(0)$ est irréductible et exponentiellement positive, alors (S) est permanent si et seulement si l'état trivial 0_n est instable.

Pour notre modèle nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 6.2.1

Si $C > 1$, alors l'état trivial $(0, 0)$ est instable et le système (6.2.1) est permanent.

Preuve. Nous avons déjà vu que si $C > 1$, alors l'état trivial est instable. Il nous reste donc à montrer que le système (6.2.1) est dissipatif et que $\mathcal{A}(0)$ est irréductible et exponentiellement positive. Or, on a :

$$\begin{aligned} (J, A)' &= F(J, A) \text{ avec :} \\ f_1(J, A) &= \beta A - (\mu_J + k_J P + \tau(A)) J, \\ f_2(J, A) &= \tau(A) J - (\mu_A + k_A P) A \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial J} &= -\mu_J - k_J P - \tau(A) - k_J J < 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial A} &= -\mu_A - k_A P - k_A A + \tau'(A) J < 0 \end{aligned}$$

et le système est donc dissipatif. D'autre part, on a :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -(\mu_J + k_J P + \tau(A)) & \beta \\ \tau(A) & -(\mu_A + k_A P) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathcal{A}(0) = \begin{pmatrix} -(\mu_J + \tau(0)) & \beta \\ \tau(0) & -\mu_A \end{pmatrix}.$$

Puisque $\beta > 0$ et $\tau(0) > 0$, $\mathcal{A}(0)$ est exponentiellement positive et elle est irréductible puisque tous les coefficients sont non nuls. Ainsi, le système (6.2.1) est permanent. ■

6.2.3 Stabilité de l'état non trivial

Nous avons vu dans le Théorème 6.2.1 que l'état non trivial (J^*, A^*) était localement asymptotiquement stable (L.A.S.) lorsqu'il existe (i.e. lorsque $C > 1$). Nous allons maintenant voir qu'en fait il est globalement asymptotiquement stable (G.A.S.). Pour cela, nous allons utiliser le Théorème de Poincaré-Bendixson, que nous rappelons ici (voir Hartman [43], ou Dang-Vu et Delcarte [19]) :

Théorème 6.2.3

Supposons qu'une orbite $x(x_0, t)$ du système de deux équations

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = {}^t(x_1, x_2), \quad f = {}^t(f_1, f_2) \quad (6.2.5)$$

reste dans un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^2$ pour tout $t \geq 0$, alors :

- soit $x(x_0, t)$ est une solution périodique de (6.2.5),
- soit $x(x_0, t)$ tend vers une solution périodique de (6.2.5),
- soit $x(x_0, t)$ tend vers un point fixe de (6.2.5).

Pour le système (6.2.1), nous avons déjà vu que les solutions restent positives. De plus, on a en sommant les équations en J et en A :

$$\begin{aligned} P' &= (J + A)' = \beta A - (\mu_J + k_J P) J - (\mu_A + k_A P) A \\ &\leq \beta P - \min(k_J, k_A) P^2, \end{aligned}$$

ce qui assure que P reste borné (voir Proposition 2.1.1). De plus, le système (6.2.1) étant permanent dans le cas où l'état trivial est instable, il n'existe pas d'orbite homocline autour de $(0, 0)$. Ainsi, il nous suffit de montrer qu'il n'y a pas de solution périodique pour montrer que nécessairement toute orbite tend vers l'état non-trivial (J^*, A^*) , ce qui assure que cet état est G.A.S.. Pour cela, nous utiliserons le critère de Bendixson-Dulac (voir Farkas [23]) :

Proposition 6.2.2

Le système (6.2.1) n'a pas de solutions périodiques.

Preuve. En reprenant les notations introduites dans la démonstration de la Proposition 6.2.1, on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial J} + \frac{\partial f_2}{\partial A} = -\mu_J - k_J P - \tau(A) - k_J J - \mu_A - k_A P - k_A A + \tau'(A) J < 0$$

ce qui assure le résultat d'après le critère de Bendixson-Dulac. ■

On a ainsi démontré que :

Corollaire 6.2.1

Si $C > 1$, alors l'état non-trivial (J^, A^*) est globalement asymptotiquement stable.*

L'étude des états stationnaires du système (6.2.1) est donc résumée par le tableau suivant, avec $C = \frac{\beta\tau(0)}{(\mu_J + \tau(0))\mu_A}$:

| Etat stationnaire | Cas $C < 1$ | Cas $C > 1$ |
|-------------------|-------------|-------------|
| $(0, 0)$ | G.A.S. | Instable |
| (J^*, A^*) | - | G.A.S. |

TAB. 6.1: Analyse de stabilité du modèle JA

6.3 Cas à coefficients périodiques

Dans cette section, nous allons expliquer comment de petites perturbations de coefficients constants peuvent conduire à l'apparition de solutions périodiques pour le système. Nous nous intéressons au système (6.1.1) avec des coefficients T -périodiques de la forme :

$$\text{Pour } x \in \{\beta, \tau, \mu_J, \mu_A, k_J, k_A\}, \text{ on considère } x(t) = \langle x \rangle + \varepsilon \bar{x}(t) \quad (6.3.1)$$

où $\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(s) ds$ est la valeur moyenne de x sur une période, et $\langle \bar{x} \rangle = 0$, $\varepsilon > 0$.

Le Théorème suivant est dû à Poincaré (voir Hartman [43]) :

Théorème 6.3.1

On considère l'équation (E) : $x'(t) = F(t, x(t), \varepsilon)$ avec F fonction régulière de période T pour (x, ε) fixés. On suppose que (E) a une solution périodique $x_0(t)$ de période T pour $\varepsilon = 0$. On suppose également que l'équation linéarisée $Y'(t) = \text{Jac } F(t, x_0(t), 0) Y(t)$ n'a pas de solution non triviale de période T . Alors, pour ε petit, (E) a une unique solution $x = x(t, \varepsilon)$ de période T avec une condition initiale $x(0, \varepsilon)$ près de $x_0(0)$.

De plus, $x(t, \varepsilon)$ est une fonction continue de (t, ε) et $x(t, 0) = x_0(t)$.

Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Proposition 6.3.1

On suppose que les coefficients du système (6.1.1) sont positifs et de la forme de (6.3.1) pour $T > 0$. On suppose également que $\langle \beta \rangle$, $\langle \mu_J \rangle$, $\langle \mu_A \rangle$, $\langle k_J \rangle$ et $\langle k_A \rangle$ sont strictement positifs et que $A \rightarrow \langle \tau(A) \rangle$ est une fonction décroissante positive. On définit

$$C = \frac{\langle \beta \rangle \langle \tau(0) \rangle}{(\langle \mu_J \rangle + \langle \tau(0) \rangle) \langle \mu_A \rangle}.$$

Alors si $C > 1$, pour ε suffisamment petit il existe une solution T -périodique au système (6.1.1), à composantes positives.

Preuve. La preuve est essentiellement basée sur le Théorème de Poincaré 6.3.1. En effet, si $C > 1$, en utilisant le Théorème 6.2.1, on a existence d'un état stationnaire non trivial (J^*, A^*) qui est à fortiori une solution périodique du système à coefficients constants (i.e. pour $\varepsilon = 0$). La matrice Jacobienne en (J^*, A^*) a des valeurs propres strictement négatives, et donc l'équation linéarisée n'a pas de solutions non triviales de période T . Ainsi, d'après le Théorème 6.3.1, il existe une unique solution de période T avec une condition initiale près de (J^*, A^*) . J^* et A^* étant strictement positifs, la solution est à composantes positives en utilisant la Proposition 6.1.1. ■

Ainsi en perturbant légèrement des coefficients constants (vérifiant $C > 1$), on obtient des solutions périodiques pour le système (6.1.1). Le problème restant ouvert est de pouvoir estimer la taille des perturbations possibles.

6.4 Simulations numériques

Nous présentons ici quelques simulations numériques obtenues avec le logiciel Scilab, en utilisant les données provenant de Sauvage et al. [75]. Les simulations numériques présentent l'évolution en temps (l'unité de temps est l'année) des densités de population (rongeurs $\times \text{ha}^{-1}$). Pour les coefficients dépendant du temps, nous considérons une période de un an pour le taux de fertilité, correspondant à une saison de reproduction de six mois par an (voir Verhagen et al. [83]), et une période de trois ans pour les capacités d'accueil, comme observé dans les populations nordiques de campagnols roussâtre (voir Yoccoz et al. [89]).

Dans la figure Fig. 6.4.1 ci-dessous, on considère un taux de maturation, dépendant de la densité d'adulte de la forme :

$$\tau(A) = \frac{\tau}{1 + \theta A}, \quad (6.4.1)$$

avec $\tau = 12$ est le taux auquel les juvéniles deviennent adulte (les juvéniles peuvent acquérir leur maturité sexuelle en un mois dans des conditions favorables) et $\theta = 0.04$ est l'influence de la densité d'adultes sur la maturation sexuelle des juvéniles (voir Sauvage et al. [75]).

Nous considérons des taux de mortalité constants, $\mu_J = 6$ et $\mu_A = 2$ (espérance de vie de 6 mois pour les adultes et 2 mois pour les juvéniles). Pour le taux de fertilité, β , on considère une périodicité annuelle de la forme $\beta(t) = |20 * \sin(2\pi(t - 0.15))| + 20 * \sin(2\pi(t - 0.15))$ de sorte que la période de reproduction représente six mois, de Mars à Août environ. Pour le modèle à coefficient constant, on prendra $\beta = 12.73$, qui est la valeur moyenne du $\beta(t)$ défini plus haut.

Ensuite, nous considérons des effets de densité sur la mortalité de la forme :

$$k_J(t) = \frac{10 - \mu_J}{K_J(t)},$$

$$k_A(t) = \frac{10 - \mu_A}{K_A(t)},$$

où K_J et K_A sont les capacités d'accueil, et ont les valeurs suivantes :

$$K_J(t) = 3 * \left(10 + \left(\cos \left(\frac{2\pi t}{3} \right) \right)^2 - 9.5 * \left(\sin \left(\frac{2\pi t}{3} \right) \right) \right),$$

$$K_A(t) = 6 * \left(10 + \left(\cos \left(\frac{2\pi(t + 0.35)}{3} \right) \right)^2 - 8 * \left(\sin \left(\frac{2\pi(t + 0.35)}{3} \right) \right) \right).$$

Les valeurs sont différentes car les juvéniles et les adultes n'ont pas les mêmes besoins, et le décalage dans le temps s'explique par le fait que les besoins ne sont pas aux mêmes moments.

Enfin, nous supposons une population initiale composée d'une densité de 10 adultes par hectare ayant passé l'hiver et une densité nulle pour les juvéniles (les juvéniles de l'année précédente étant devenus matures).

Ainsi, pour le cas à coefficients constants, on a $C \simeq 4.24 > 1$ (voir (6.2.2) pour la définition de C). Nous voyons sur la figure Fig. 6.4.1 que les densités convergent rapidement vers l'état stationnaire. Dans le cas périodique, c'est une dynamique périodique de période 3 ans qui est observée.

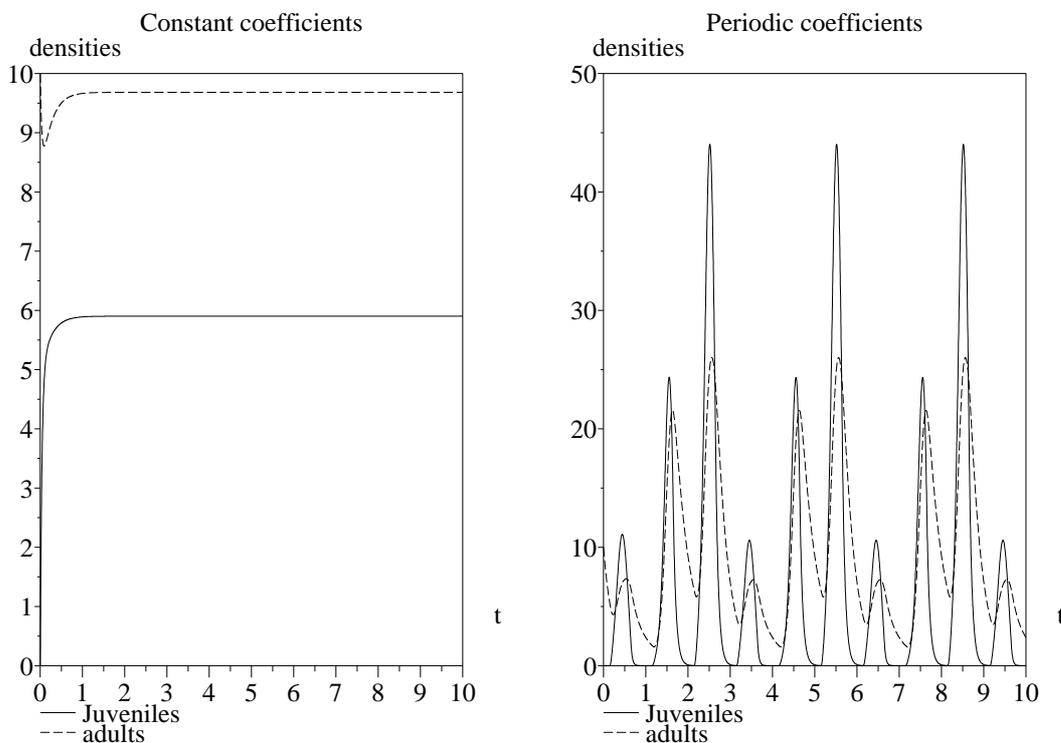


FIG. 6.4.1: Dynamique pour le modèle JA : Convergence vers un état stationnaire ou périodique

Dans la Figure Fig. 6.4.2, nous considérons cette fois-ci des taux de mortalité supérieurs : $\mu_J = 9$ et $\mu_A = 8$. Ainsi $C \simeq 0.90 < 1$ et la population disparaît dans les deux cas.

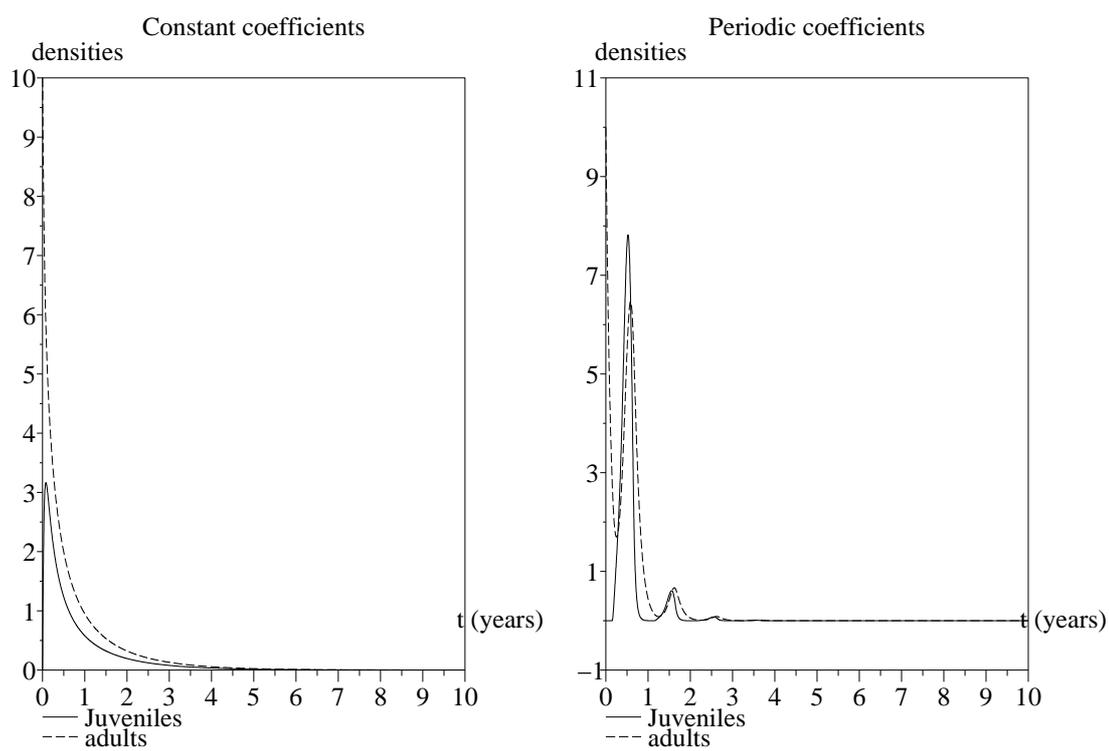


FIG. 6.4.2: Dynamique pour le modèle JA : Extinction

Chapitre 7

Etude du modèle JASIG

7.1 Mise en place du modèle

Nous considérons ici le modèle JASIG tel que décrit dans le Chapitre 2, structuré en 4 classes (juvéniles sains, juvéniles infectés, adultes sains et adultes infectés) plus une variable représentant la proportion d'environnement contaminé, correspondant au schéma compartimental présenté dans la figure Fig. 2.2.2. Pour $t \geq 0$, les équations que nous considèrerons sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} J'_s(t) = \beta(t) \cdot A(t) - \left(\mu_J(t) + \tau(t, A) + k_J(t)P(t) \right) \cdot J_s(t) \\ \qquad \qquad \qquad - \left(\gamma_J(t)G(t) + \sigma_J(t)I(t) \right) \cdot J_s(t), \\ J'_i(t) = \left(\gamma_J(t)G(t) + \sigma_J(t)I(t) \right) \cdot J_s(t) - \left(\mu_J(t) + \tau(t, A) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + k_J(t)P(t) \right) \cdot J_i(t), \\ A'_s(t) = \tau(t, A) \cdot J_s(t) - \left(\mu_A(t) + k_A(t)P(t) \right) \cdot A_s(t) \\ \qquad \qquad \qquad - \left(\gamma_A(t)G(t) + \sigma_A(t)I(t) \right) \cdot A_s(t), \\ A'_i(t) = \tau(t, A) \cdot J_i(t) + \left(\gamma_A(t)G(t) + \sigma_A(t)I(t) \right) \cdot A_s(t) \\ \qquad \qquad \qquad - \left(\mu_A(t) + k_A(t)P(t) \right) \cdot A_i(t), \\ G'(t) = \alpha(t) \cdot I(t) \cdot (1 - G(t)) - \delta(t) \cdot G(t) \end{array} \right. \quad (7.1.1)$$

avec $I(t) = J_i(t) + A_i(t)$, et nous nous donnons des conditions initiales dans \mathbb{R}_+^5 , $(J_s(0), J_i(0), A_s(0), A_i(0), G(0))$, avec $G(0) \leq 1$. Tous les coefficients sont considérés suf-

fisament réguliers et positifs, et ceux correspondant à la démographie (β , τ , μ_J , μ_A , k_J et k_A) vérifient les conditions énoncées dans le chapitre précédent. Notons enfin que nous considérons dans cette partie uniquement une incidence de type action de masse (densité).

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 7.1.1

Le système (7.1.1) a une unique solution globale $(J_s(t), J_i(t), A_s(t), A_i(t), G(t))$ pour $t \geq 0$, à composantes positives. De plus, on a $0 \leq G(t) \leq 1, \forall t \geq 0$.

Preuve. L'existence et l'unicité proviennent du Théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour la positivité, on vérifie que $R_+^4 \times [0, 1]$ est positivement invariant par le système (7.1.1). ■

7.2 Cas de coefficients constants

Nous nous intéressons maintenant au système (7.1.1) dans le cas où tous les coefficients sont indépendants du temps, c'est à dire que nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} J'_s(t) = \beta \cdot A(t) - (\mu_J + \tau(A) + k_J P(t)) \cdot J_s(t) - (\gamma_J G(t) + \sigma_J I(t)) \cdot J_s(t), \\ J'_i(t) = (\gamma_J G(t) + \sigma_J I(t)) \cdot J_s(t) - (\mu_J + \tau(A) + k_J P(t)) \cdot J_i(t), \\ A'_s(t) = \tau(A) \cdot J_s(t) - (\mu_A + k_A P(t)) \cdot A_s(t) - (\gamma_A G(t) + \sigma_A I(t)) \cdot A_s(t), \\ A'_i(t) = \tau(A) \cdot J_i(t) + (\gamma_A G(t) + \sigma_A I(t)) \cdot A_s(t) - (\mu_A + k_A P(t)) \cdot A_i(t), \\ G'(t) = \alpha \cdot I(t) \cdot (1 - G(t)) - \delta \cdot G(t) \end{cases} \quad (7.2.1)$$

Nous nous intéressons à la recherche des états stationnaires de ce système et à leur stabilité.

7.2.1 Stabilité de l'état trivial

Remarquons tout d'abord que l'état trivial $(0, 0, 0, 0, 0)$ est un état stationnaire du système (7.2.1) ; nous avons le résultat suivant :

Proposition 7.2.1

Supposons que tous les coefficients du système (7.2.1) sont constants et strictement positifs et que $A \rightarrow \tau(A)$ est une fonction décroissante à valeurs positives indépendante du temps. Soit $C = \frac{\beta\tau(0)}{(\mu_J + \tau(0))\mu_A}$. Alors l'état trivial est globalement asymptotiquement stable si $C < 1$ et instable si $C > 1$.

Preuve. La matrice jacobienne pour le point trivial est :

$$Jac(0) = \begin{pmatrix} -\mu_J - \tau(0) & 0 & \beta & \beta & 0 \\ 0 & -\mu_J - \tau(0) & 0 & 0 & 0 \\ \tau(0) & 0 & -\mu_A & 0 & 0 \\ 0 & \tau(0) & 0 & -\mu_A & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha & -\delta \end{pmatrix}$$

On peut calculer explicitement les valeurs propres de cette matrice qui sont $-\delta, -\mu_A, -\mu_J - \tau(0), \lambda_1 = \frac{-(\mu_J + \tau(0) + \mu_A) - \sqrt{\Delta}}{2} < 0$ et $\lambda_2 = \frac{-(\mu_J + \tau(0) + \mu_A) + \sqrt{\Delta}}{2}$, où $\Delta = (\mu_J + \tau - \mu_A)^2 + 4\beta\tau$ est positif.

Ainsi, toutes les valeurs propres sont strictement négatives si et seulement si $\lambda_2 < 0$, ce qui est équivalent à $Det(Jac(0)) < 0$ (les quatres autres étant négatives). Or, on a $Det(Jac(0)) = (\mu_J + \tau(0))\mu_A\delta(\beta\tau(0) - \mu_A(\mu_J + \tau(0)))$, donc l'état trivial est localement asymptotiquement stable si et seulement si $\beta\tau(0) - \mu_A(\mu_J + \tau(0)) < 0$, c'est à dire si et seulement si $C < 1$.

De plus, nous allons montrer que $(0, 0, 0, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable. Pour cela, comme dans la démonstration du Théorème 6.2.1 nous considérons $\varepsilon, \eta > 0$ et la fonction :

$$V(J_s, J_i, A_s, A_i, G) = (\tau(0) + \varepsilon)(J_s + J_i) + (\mu_J + \tau(0))(A_s + A_i) + \eta G$$

et nous allons montrer que $V(\cdot)$ est une fonction de Lyapunov pour le système (7.2.1), pourvu que $C < 1$.

On a bien $V(J_s, J_i, A_s, A_i, G) > 0$ si (J_s, J_i, A_s, A_i, G) est à composante positives et différent de $(0, 0, 0, 0, 0)$. Enfin, on a :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial J_s} J'_s + \frac{\partial V}{\partial J_i} J'_i + \frac{\partial V}{\partial A_s} A'_s + \frac{\partial V}{\partial A_i} A'_i + \frac{\partial V}{\partial G} G.$$

D'où, puisque en ajoutant les équations en J_s et J_i on obtient l'équation en J du système (6.2.1) (et de même en ajoutant les équations en A_s et A_i on obtient l'équation en A), en utilisant le calcul fait dans la démonstration du Théorème 6.2.1, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\beta\tau(0) - \mu_A(\mu_J + \tau(0)))A + \mu_J(\tau(A) - \tau(0) - \varepsilon)J \\ &\quad - ((\tau(0) + \varepsilon)k_J J + (\tau(0) + \mu_J)k_A A)P - \varepsilon\tau(A)J + \eta(\alpha I(1 - G) - \delta G). \end{aligned}$$

Or $I \leq J + A$ d'où :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & (\beta\tau(0) - \mu_A(\mu_J + \tau(0)) + \eta\alpha)A + \mu_J(\tau(A) - \tau(0) - \varepsilon + \eta\alpha)J \\ & - ((\tau(0) + \varepsilon)k_J J + (\tau(0) + \mu_J)k_A A)P - \varepsilon\tau(A)J - \eta\delta G. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $C < 1$ on a $\dot{V} < 0$ si $(J_s, J_i, A_s, A_i, G) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ pourvu que η soit suffisamment petit ce qui assure que $(0, 0, 0, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable. ■

7.2.2 Etude des états stationnaires semi-triviaux et non triviaux

Nous allons maintenant rechercher les états stationnaires non triviaux. En additionnant les équations pour J_s et J_i d'une part, et A_s et A_i d'autre part, on obtient pour $J = J_s + J_i$ et $A = A_s + A_i$ exactement le système (6.2.1). Or nous avons vu dans le chapitre précédent que lorsque $C < 1$, le seul état stationnaire de ce système est l'état trivial. On ne peut donc espérer trouver d'autres états stationnaires pour le système (7.2.1) dans ce cas là.

Nous supposons donc dans la suite que $C > 1$. Dans ce cas, le système (6.2.1) à un unique état stationnaire non trivial, (J^*, A^*) , qui est stable. Nous nous plaçons donc dans le cas où $J(t) = J_s(t) + J_i(t) = J^*$ et $A(t) = A_s(t) + A_i(t) = A^*$, et nous allons rechercher les états stationnaires pour le sous-système suivant :

$$\begin{cases} J'_i(t) = (\gamma_J G(t) + \sigma_J I(t)) \cdot (J^* - J_i(t)) - (\mu_J + \tau(A^*) + k_J P^*) \cdot J_i(t), \\ A'_i(t) = \tau(A^*) \cdot J_i(t) + (\gamma_A G(t) + \sigma_A I(t)) \cdot (A^* - A_i(t)) \\ \quad - (\mu_A + k_A P^*) \cdot A_i(t), \\ G'(t) = \alpha \cdot I(t) \cdot (1 - G(t)) - \delta \cdot G(t) \end{cases} \quad (7.2.2)$$

Un Théorème de séparation, (voir Vidysaagar [85]) affirme que les états stationnaires de ce sous-système conduisent à des états stationnaires pour le système initial. On peut déjà remarquer que les taux de mortalité de ce sous-système, $\mu_J + \tau(A^*) + k_J P^*$ et $\mu_A + k_A P^*$ sont constants.

Pour commencer, nous nous intéressons à la stabilité de l'état stationnaire trivial $(0, 0, 0)$ du système (7.2.2) : Il correspond à l'état stationnaire sans maladie $(J^*, 0, A^*, 0, 0)$ pour le système initial (7.2.1). On a la proposition suivante :

Proposition 7.2.2

On suppose que tous les coefficients du système (7.2.2) sont constants et strictement positifs, et que $C > 1$. On pose $m_J := \mu_J + \tau(A^*) + k_J P^*$ et $m_A := \mu_A + k_A P^*$. Soit

$$R := \frac{m_J (\delta \sigma_A + \alpha \gamma_A) \cdot A^* + (m_A + \tau(A^*)) (\delta \sigma_J + \alpha \gamma_J) \cdot J^*}{\delta m_J m_A}. \quad (7.2.3)$$

Alors l'état trivial $(0, 0, 0)$ du système (7.2.2) et l'état sans épidémie $(J^*, 0, A^*, 0, G)$ du système (7.2.1) sont localement asymptotiquement stable si $R < 1$ et instable si $R > 1$.

Preuve. La matrice Jacobienne $\mathcal{J} = Jac(J_i, A_i, G)$ du système (7.2.2) est :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\gamma_J G + \sigma_J (J^* - J_i - I) - m_J & \sigma_J (J^* - J_i) & \gamma_J (J^* - J_i) \\ \tau(A^*) + \sigma_A (A^* - A_i) & -\gamma_A G + \sigma_A (A^* - A_i - I) - m_A & \gamma_A (A^* - A_i) \\ \alpha(1 - G) & \alpha(1 - G) & -\delta - \alpha I \end{pmatrix},$$

d'où, pour l'état trivial :

$$\mathcal{J}(0) = Jac(0) = \begin{pmatrix} \sigma_J J^* - m_J & \sigma_J J^* & \gamma_J J^* \\ \tau(A^*) + \sigma_A A^* & \sigma_A A^* - m_A & \gamma_A A^* \\ \alpha & \alpha & -\delta \end{pmatrix}. \quad (7.2.4)$$

Nous allons utiliser le critère de Routh-Hurwitz (voir Proposition 7.2.3 plus loin) pour déterminer quand cette matrice possède trois valeurs propres négatives. Nous utiliserons aussi les résultats du Lemme 7.2.1 énoncé et démontré plus loin.

Le critère de Routh-Hurwitz demande de calculer les signes de trois quantités. D'abord :

$$Tr := Tr(\mathcal{J}(0)) = (\sigma_J J^* - m_J) + (\sigma_A A^* - m_A) - \delta,$$

d'où $Tr(\mathcal{J}(0)) < 0$ pour $R < 1$ d'après le Lemme 7.2.1. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \Delta = Det(\mathcal{J}(0)) &= -\delta(\sigma_J J^* - m_J)(\sigma_A A^* - m_A) + \alpha \sigma_J \gamma_A J^* A^* + \alpha \sigma_A \gamma_J J^* A^* + \alpha \tau(A^*) \gamma_J J^* \\ &\quad - \alpha \gamma_A A^* (\sigma_J J^* - m_J) - \alpha \gamma_J J^* (\sigma_A A^* - m_A) + \delta \sigma_J J^* (\tau(A^*) + \sigma_A A^*), \end{aligned}$$

d'où, après simplification :

$$\Delta = -\delta m_J m_A + (\alpha \gamma_A + \delta \sigma_A) m_J A^* + (\alpha \gamma_J + \delta \sigma_J) (\tau(A^*) + m_A) J^*,$$

donc $\Delta < 0 \iff R < 1$.

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} m &= (-\delta(\sigma_A A^* - m_A) - \alpha \gamma_A A^*) + (-\delta(\sigma_J J^* - m_J) - \alpha \gamma_J J^*) \\ &\quad + ((\sigma_J J^* - m_J)(\sigma_A A^* - m_A) - \sigma_J J^* (\sigma_A A^* + \tau(A^*))), \end{aligned}$$

d'où après calculs :

$$m = (\delta m_J - (\delta \sigma_J + \alpha \gamma_J) J^*) + (\delta m_A - (\delta \sigma_A + \alpha \gamma_A) A^*) + m_A m_J - \sigma_A m_J A^* - \sigma_J (m_A + \tau(A^*)) J^*.$$

Après de (laborieux !) calculs, on obtient le résultat suivant :

$$(m \cdot Tr - \Delta) = (p_J + p_A) \cdot Tr + (s_J + s_A)(m_J m_A - \sigma_J (m_A + \tau(A^*)) J^* - \sigma_A m_J A^*) + (m_A + \tau(A^*))(\sigma_J s_A - \alpha \gamma_J) J^* + m_J(\sigma_A s_J - \alpha \gamma_A) A^*, \quad (7.2.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} p_J &:= (\delta m_J - (\delta \sigma_J + \alpha \gamma_J) J^*), \\ p_A &:= (\delta m_A - (\delta \sigma_A + \alpha \gamma_A) A^*), \\ s_J &:= \sigma_J J^* - m_J, \quad s_A := \sigma_J A^* - m_A. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 7.2.1, si $R < 1$, on a $p_J < 0$, $p_A < 0$, $s_J < 0$ et $s_A < 0$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} R < 1 &\iff \delta m_J m_A - m_J (\delta \sigma_A + \alpha \gamma_A) \cdot A^* + (m_A + \tau(A^*)) (\delta \sigma_J + \alpha \gamma_J) \cdot J^* > 0 \\ &\iff m_J m_A - \sigma_J (m_A + \tau(A^*)) J^* - \sigma_A m_J A^* > \frac{m_J \alpha \gamma_A A^* + (m_A + \tau(A^*)) \alpha \gamma_J J^*}{\delta} > 0. \end{aligned}$$

ainsi, on tire de (7.2.5) que si $R < 1$ alors $(m \cdot Tr - \Delta) < 0$ et donc $\frac{(m \cdot Tr - \Delta)}{Tr} > 0$. Ainsi, en utilisant le critère de Routh-Hurwitz, l'état trivial du système (7.2.2) est localement asymptotiquement stable si $R < 1$ et instable si $R > 1$ (car alors on a au moins $\Delta > 0$). ■

Nous avons utilisé dans cette démonstration le critère de Routh-Hurwitz (voir par exemple Farkas [23]) qui s'énonce de la façon suivante en dimension 3 :

Proposition 7.2.3

(Critère de Routh-Hurwitz)

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on introduit les quantités :

$$\begin{aligned} Tr &= a + e + i \quad (\text{Trace}) \\ Det &= aei + bgf + cdh - afh - cge - bdi \quad (\text{Déterminant}) \\ m &= (ei - fh) + (ai - gc) + (ae - bd), \end{aligned}$$

et on considère les quantités $1, -Tr, m - \frac{Det}{Tr}$ et $-Det$, dans cet ordre. Alors :

- Toutes les valeurs propres de M sont à parties réelles strictement négatives si et seulement si toutes les quantités ci-dessus sont strictement positives.
- Par ailleurs, il y a autant de valeurs propres à partie réelle positive que de changements de signes dans la série des quantités ci-dessus.

D'autre part, on a utilisé dans la preuve de la Proposition 7.2.2 le lemme suivant :

Lemme 7.2.1

En utilisant les notations précédemment introduites, on a l'équivalence suivante :

$$R < 1 \iff (\delta\sigma_J + \alpha\gamma_J) \cdot J^* < \delta m_J \text{ et } (\delta\sigma_A + \alpha\gamma_A) \cdot A^* < \delta m_A. \quad (7.2.6)$$

En particulier, on a alors $\sigma_J J^* < m_J$ et $\sigma_A A^* < m_A$.

Preuve. Un calcul rapide donne :

$$R < 1 \iff \left(\delta m_J - (\delta\sigma_J + \alpha\gamma_J) \cdot J^* \right) \left(\delta m_A - (\delta\sigma_A + \alpha\gamma_A) \cdot A^* \right) - (\alpha\gamma_J + \sigma_J\delta) \cdot J^* \cdot \left(\delta\tau(A^*) + (\alpha\gamma_A + \sigma_A\delta) \cdot A^* \right) > 0.$$

Donc si l'une des deux inégalités dans (7.2.6) n'est pas vérifiée, on a $R > 1$. Il suffit donc de voir que si les deux ne sont pas vérifiées, alors on a également $R > 1$. On suppose donc que :

$$\delta m_J \leq (\delta\sigma_J + \alpha\gamma_J) \cdot J^* \implies -(\delta\sigma_J + \alpha\gamma_J)(m_A + \tau(A^*)) J^* \leq -\delta m_J(m_A + \tau(A^*)),$$

et

$$\delta m_A \leq (\delta\sigma_A + \alpha\gamma_A) \cdot A^* \implies -(\delta\sigma_A + \alpha\gamma_A)m_J A^* \leq -\delta m_J m_A.$$

Ainsi,

$$\delta m_J m_A - m_J \left(\delta\sigma_A + \alpha\gamma_A \right) \cdot A^* + (m_A + \tau(A^*)) \left(\delta\sigma_J + \alpha\gamma_J \right) \cdot J^* \leq -\delta m_J (m_A + \tau(A^*)) < 0,$$

donc $R > 1$. ■

On cherche maintenant les conditions d'existence d'un état stationnaire non trivial pour le système (7.2.2) :

Proposition 7.2.4

Supposons que tous les coefficients du système (7.2.2) sont constant et strictement positifs et que $C > 1$. Posons $m_J := \mu_J + \tau(A^*) + k_J P^*$ et $m_A := \mu_A + k_A P^*$. Soit R défini comme dans (7.2.3). Le système (7.2.2) a un unique état stationnaire non trivial si et seulement si $R > 1$. Dans ce cas, cet état stationnaire (J_i^*, A_i^*, G^*) est localement asymptotiquement stable, avec $0 < J_i^* < J^*$, $0 < A_i^* < A^*$ et $0 < G^* < 1$.

Preuve. On cherche un état stationnaire non trivial, donc on cherche $(J_i, A_i, G) \neq (0, 0, 0)$ tels que :

$$\begin{cases} (\gamma_J G + \sigma_J I) \cdot (J^* - J_i) - (\mu_J + \tau(A^*) + k_J P^*) \cdot J_i = 0, \\ \tau(A^*) \cdot J_i + (\gamma_A G + \sigma_A I) \cdot (A^* - A_i) - (\mu_A + k_A P^*) \cdot A_i = 0, \\ \alpha \cdot I \cdot (1 - G) - \delta \cdot G = 0. \end{cases} \quad (7.2.7)$$

De la 3ème équation, on obtient $G = \frac{\alpha I}{\delta + \alpha I}$. Alors, des deux équations restantes, on a respectivement :

$$J_i = \frac{\alpha \gamma_J + \sigma_J (\delta + \alpha I)}{\alpha \gamma_J I + (m_J + \sigma_J I) (\delta + \alpha I)} J^* I := f(I) \cdot I,$$

et

$$J_i = \frac{m_a (\delta + \alpha I) + (\alpha \gamma_A + \sigma_A (\delta + \alpha I)) (I - A^*)}{\alpha \gamma_A I + (m_A + \tau(A^*) + \sigma_A I) (\delta + \alpha I)} I := g(I) \cdot I.$$

On vérifie alors que $f(I)$ est strictement décroissante de $f(0)$ à $\lim_{I \rightarrow +\infty} f(I) = 0$ et que $g(I)$ est strictement croissante de $g(0)$ à $\lim_{I \rightarrow +\infty} g(I) = 1$. Ainsi, il y a un unique I^* tel que $f(I) = g(I)$ si et seulement si $f(0) > g(0)$. Or on a :

$$\begin{aligned} f(0) > g(0) &\iff \frac{\delta \sigma_J + \alpha \gamma_J}{m_J \delta} J^* > \frac{m_a \delta - (\delta \sigma_A + \alpha \gamma_A) A^*}{(m_A + \tau(A^*)) \delta} \\ &\iff R > 1. \end{aligned}$$

De plus, on peut vérifier que $f(P^*) - g(P^*) < 0$, donc $I < P^*$ et par suite on vérifie que $J_i < J^*$ et $A_i < A^*$.

On a également $0 < f(I^*) = g(I^*) < 1$ et donc $J_i^* < I^*$ et de même $A_i^* < I^*$.

Alors pour $R > 1$, il existe un unique $0 < G^* < 1$, un unique J_i^* et un unique A_i^* car P^* est connu, et donc un unique état stationnaire non trivial.

De plus, on peut vérifier que $f(P^*) - g(P^*) < 0$, donc $I < P^*$ et par suite on vérifie que $J_i < J^*$ et $A_i < A^*$.

En utilisant de nouveau le critère de Routh-Hurwitz et l'égalité $f(I^*) = g(I^*)$, on vérifie que cet état stationnaire est localement asymptotiquement stable. ■

Nous pouvons alors conclure pour l'étude des états stationnaires du système (7.2.1) :

Théorème 7.2.1

Supposons que tous les coefficients du système (7.2.1) sont constants strictement positifs et que $A \rightarrow \tau(A)$ est une fonction décroissante et positive indépendante du temps.

Soit $C = \frac{\beta\tau(0)}{(\mu_J + \tau(0))\mu_A}$. Si (J^*, A^*) est l'état stationnaire non trivial du système (6.2.1), soient $m_J := \mu_J + \tau(A^*) + k_J P^*$ et $m_A := \mu_A + k_A P^*$, et :

$$R := \frac{m_J \left(\delta\sigma_A + \alpha_A \gamma_A \right) \cdot A^* + (m_A + \tau(A^*)) \left(\delta\sigma_J + \alpha_J \gamma_J \right) \cdot J^*}{\delta m_J m_A}.$$

Trois états stationnaires sont possibles $(0, 0, 0, 0, 0)$, $(J^*, 0, A^*, 0, 0)$ et $(J^* - J_i^*, J_i^*, A^* - A_i^*, A_i^*, G^*)$.

Les conditions d'existence et de stabilité sont résumées dans le tableau suivant :

| (J, A) | (J_i, A_i, G) | $C < 1$ | $C > 1 \ \& \ R < 1$ | $C > 1 \ \& \ R > 1$ |
|--------------|-----------------------|---------|----------------------|----------------------|
| $(0, 0)$ | $(0, 0, 0)$ | G.A.S. | Instable | Instable |
| (J^*, A^*) | $(0, 0, 0)$ | — | L.A.S. | Instable |
| (J^*, A^*) | (J_i^*, A_i^*, G^*) | — | — | L.A.S. |

TAB. 7.1: Analyse de stabilité du modèle JASIG

On peut donc attendre trois comportements différents, selon la valeur des coefficients. Soit on a extinction totale de la population, correspondant à l'état stationnaire trivial $(0, 0, 0, 0, 0)$, soit on a une situation dans laquelle le virus ne survit pas correspondant à l'état stationnaire $(J^*, 0, A^*, 0, 0)$, soit enfin un état endémique dans lequel il y a à la fois des individus infectés et des individus sains, correspondant à l'état stationnaire $(J_s^*, J_i^*, A_s^*, A_i^*, G^*)$.

Remarque 7.2.1

Une étude similaire peut-être menée en considérant que $\alpha_J \neq \alpha_A$, cela complexifie simplement les calculs. On a dans ce cas :

$$R := \frac{m_J \left(\delta\sigma_A + \alpha_A \gamma_A \right) \cdot A^* + (m_A + \tau(A^*)) \left(\delta\sigma_J + \alpha_J \gamma_J \right) \cdot J^* + (\alpha_A - \alpha_J) (\sigma_A \gamma_J - \sigma_J \gamma_A) J^* A^*}{\delta m_J m_A}.$$

7.3 Cas à coefficients périodiques

Comme pour le modèle JA, on considère de petites perturbations T-périodiques de coefficients constants, de la forme :

$$\text{Pour } x \in \{\beta, \tau, \mu_J, \mu_A, k_J, k_A, \alpha, \sigma_J, \sigma_A, \gamma_J, \gamma_A, \delta\}, \text{ on pose } x(t) = \langle x \rangle + \varepsilon \bar{x}(t) \quad (7.3.1)$$

où $\langle x \rangle = \frac{A}{T} \int_0^T x(s) ds$ est la valeur moyenne de x sur une période, $\langle \bar{x} \rangle = 0$ et $\varepsilon > 0$.

Alors, en se basant sur le Théorème de Poincaré 6.3.1, et de façon similaire à la Proposition 6.3.1, on a le résultat suivant :

Proposition 7.3.1

Supposons que les coefficients du système (7.1.1) sont positifs et de la forme (7.3.1) pour $T > 0$. On suppose également que les valeurs moyennes des coefficients sont strictement positives et que $A \rightarrow \langle \tau(A) \rangle$ est décroissant et à valeurs positives.

Soit $C = \frac{\langle \beta \rangle \langle \tau(0) \rangle}{(\langle \mu_J \rangle + \langle \tau(0) \rangle) \langle \mu_A \rangle}$, et si (J^*, A^*) est l'état non-trivial du système (6.2.1) avec les valeurs moyennes des coefficients, soient $m_J := \langle \mu_J \rangle + \langle \tau(A^*) \rangle + \langle k_J \rangle P^*$, $m_A := \langle \mu_A \rangle + \langle k_A \rangle P^*$, et :

$$R := \frac{1}{\langle \delta \rangle m_J m_A} \left(m_J \left(\langle \delta \rangle \langle \sigma_A \rangle + \langle \alpha \rangle \langle \gamma_A \rangle \right) \cdot A^* + (m_A + \langle \tau(A^*) \rangle) \left(\langle \delta \rangle \langle \sigma_J \rangle + \langle \alpha \rangle \langle \gamma_J \rangle \right) \cdot J^* \right).$$

Alors si $C > 1$, pour ε suffisamment petit il existe une solution T -périodique du système (7.1.1) à composantes positives si $R > 1$ et une solution T -périodique du système (7.1.1) à composantes $J_s(t)$ et $A_s(t)$ positives si $R < 1$.

Ainsi, pour de petites perturbations périodiques autour de coefficients constants, on aura des solutions périodiques autour des états stationnaires localement asymptotiquement stables obtenus dans le Théorème 7.2.1. Le problème (encore ouvert) est alors d'avoir une estimation de la taille des perturbations possibles. Nous allons voir dans les simulations numériques de la prochaine section, qu'il existe des situations où le virus disparaît dans le cas de coefficients constants, mais qui conduit à des états périodiques endémiques dans le cas de coefficients périodiques de même valeur moyenne. Ainsi, la périodicité de la dynamique des populations de campagnols roussâtres peut expliquer la persistance du virus dans certaines régions.

7.4 Simulations numériques

Dans les simulations présentées ci-dessous, les paramètres démographiques sont les mêmes que dans le modèle JA (cf figure Fig. 6.4.1, cas où la population ne disparaît pas). Les coefficients prenant en compte l'interaction entre les individus et l'environnement sont ici indépendants du temps. On supposera que : $\gamma_J = \gamma_A = 9$, $\alpha = 0.3$ et $\delta = 52$, (ainsi l'environnement se décontamine en une semaine, voir Sauvage et al. [75]).

Peu de données sont connues pour l'incidence du Hantavirus Puumala dans les populations de campagnols roussâtres. Nous avons utilisé des données sur l'incidence du système Cowpox - Campagnol roussâtre (voir Begon et al. [5]) extrapolées pour être adaptées au hantavirus Puumala (voir Sauvage et al. [75]). Les taux de transmission directe entre individus sont $\sigma_J = \sigma_A = 0.35$ pour la figure Fig. 7.4.1, $\sigma_J = \sigma_A = 0.15$ dans la figure Fig. 7.4.2 et $\sigma_J = \sigma_A = 0.28$ dans les figures Fig. 7.4.3 et Fig. 7.4.4. Nous considérons des densités initiales de populations de 10 pour les adultes sains et 2 pour les adultes infectés, mais pas de juvéniles. Pour les systèmes à coefficients périodiques (de période 3 ans), l'équilibre est un peu plus long à atteindre, donc nous montrons les simulations pour des temps entre 14 et 20 ans après le temps initial.

La figure Fig. 7.4.1 montre une situation dans laquelle on a convergence vers un état endémique périodique, comme attendu : pour le système à coefficients constants correspondants, on a $C \simeq 4.24$ et $R \simeq 1.15$.

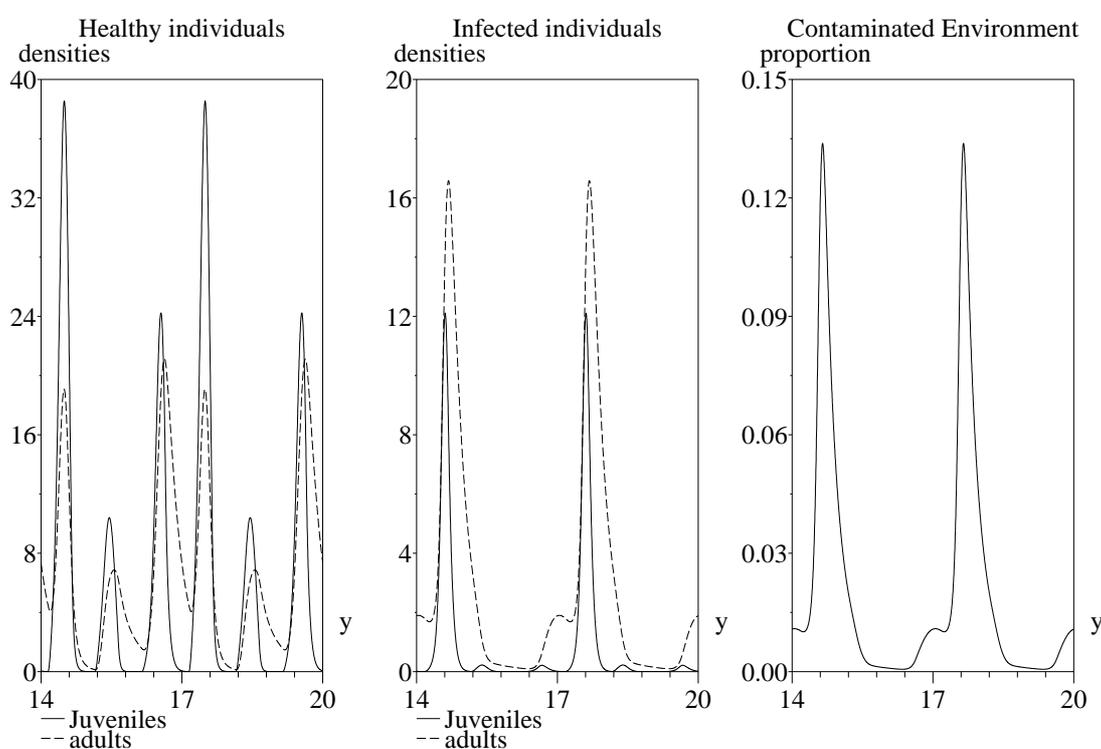


FIG. 7.4.1: Dynamique pour le système (7.1.1) à coefficients périodiques : convergence vers un état endémique périodique

Dans la figure Fig. 7.4.2 on a convergence vers un état périodique dans lequel le virus disparaît, comme attendu : pour le système à coefficients constants correspondants, on a $C \simeq 4.24$ et $R \simeq 0.58$.

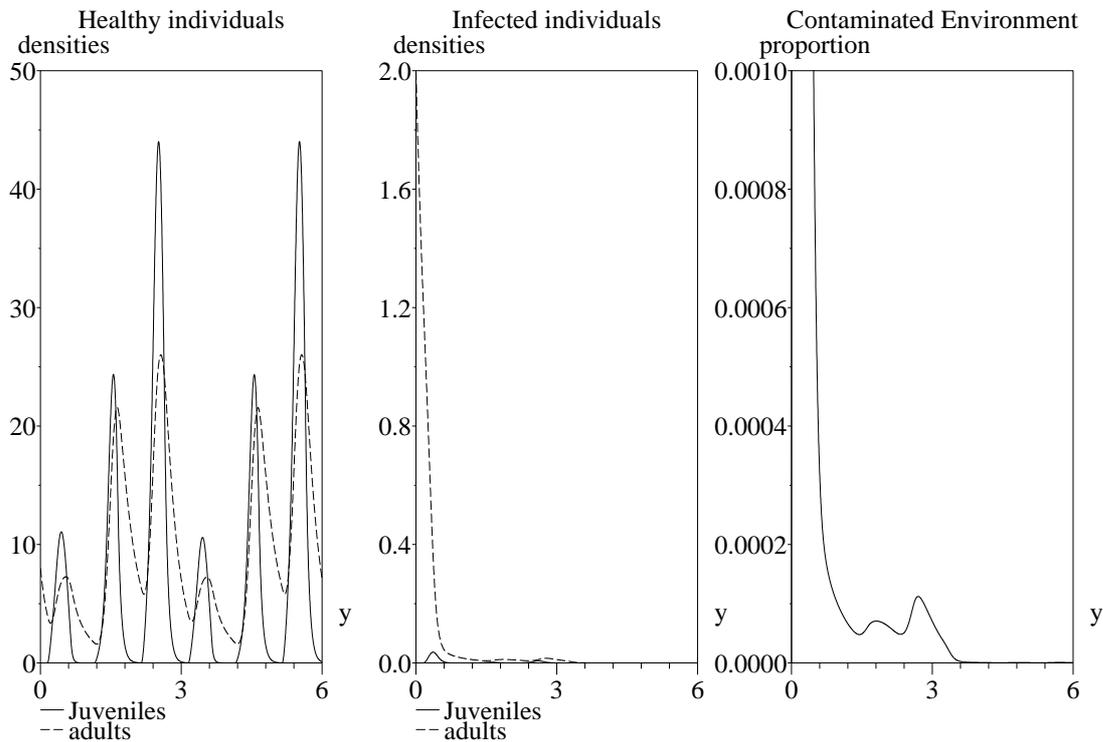


FIG. 7.4.2: Dynamique pour le système (7.1.1) à coefficients périodiques : convergence vers un état périodique avec disparition du virus

Les simulations numériques présentées dans les figures Fig. 7.4.3 et Fig. 7.4.4 sont étroitement liées : les coefficients constants utilisés pour la figure Fig. 7.4.3 sont les valeurs moyennes des coefficients périodiques de période 3 ans utilisés pour la figure Fig. 7.4.4.

Dans la figure Fig. 7.4.3, on a convergence vers un état stationnaire avec disparition du virus, comme prévu puisque $C \simeq 4.24$ et $R \simeq 0.95$. Mais pour le cas de coefficients périodiques, on a convergence vers un état endémique périodique. En fait, si on calcule la moyenne de $R(t)$ avec $R(t)$ défini comme dans (7.2.3) avec les coefficients périodiques, on obtient $\langle R \rangle \simeq 1.20 > 1$. Nous n'avons pu confirmer que cette condition, $\langle R \rangle > 1$ est nécessaire et/ou suffisante pour l'existence d'un état périodique endémique, mais les valeurs testées lors de nombreuses simulations numériques n'ont pas contredit cette hypothèse non plus.

Remarquons enfin que dans nos simulations les adultes sont plus souvent infectés que les adultes, comme c'est observé dans plusieurs études (voir Calisher et al. [13], Escutenaire et al. [21], Olsson et al. [72] ou Verhagen et al. [82]).

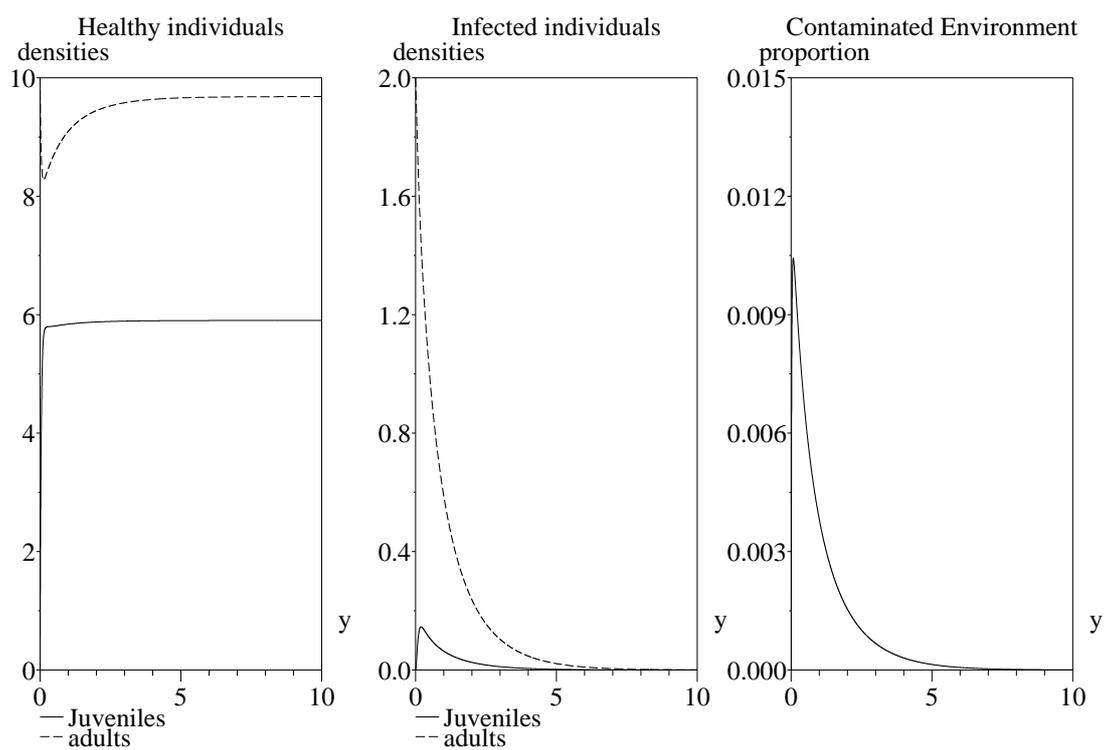


FIG. 7.4.3: Dynamique du système (7.1.1) à coefficients constants : convergence vers un état stationnaire avec éradication du virus

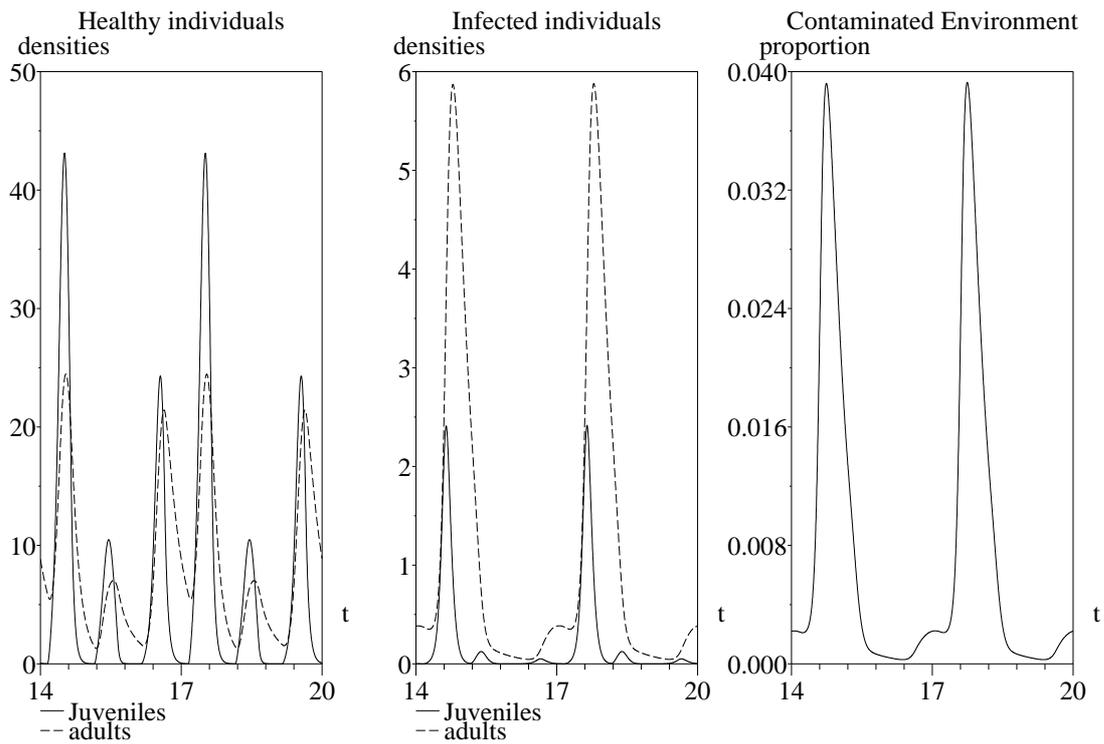


FIG. 7.4.4: Dynamique du système (7.1.1) à coefficients périodiques (correspondants au cas constant de la figure Fig. 7.4.3 : convergence vers un état endémique périodique

Chapitre 8

Etude du modèle multi-sites

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un modèle avec des populations réparties sur plusieurs sites. Comme c'est observé sur le terrain, les campagnols roussâtres ne vivent pas partout dans une forêt, mais ils se regroupent en colonies dans les endroits les plus favorables, particulièrement en période de reproduction (voir le Chapitre 1). De plus, si sur un site donné, les adultes sont trop nombreux, les juvéniles ne peuvent pas se reproduire et sont donc susceptibles de migrer vers un autre site plus favorable (voir Bujalska [9] [10] ou Sauvage [74]).

8.1 Le modèle pour n patches

Nous présentons ici un modèle général pour une situation avec n sites (ou patches). Pour le k ème site, nous noterons $J_{s,k}$, $J_{i,k}$, $A_{s,k}$ et $A_{i,k}$ les densités de populations et G_k la proportion d'environnement contaminé. On considère que les juvéniles ont un taux de maturation $\tau_k(t)$ indépendant de la densité d'adultes. La pression des adultes se fera sur la dispersion des juvéniles : plus la densité d'adultes sera grande, plus les juvéniles migreront sur un autre site. Ainsi, dans ce modèle, la densité d'adulte n'a pas d'influence sur l'âge de maturation des juvéniles mais modifie l'endroit où les juvéniles deviendront adultes.

Par conséquent on introduit des poids $0 \leq \lambda_{k,l} \leq \lambda_\infty$ distribuant spatialement la migration des juvéniles d'un site k vers un site l , et modélisant les sites plus ou moins favorables (voir la Section 8.4 plus bas). On pose ensuite $\lambda_k(t) = \sum_{1 \leq l \leq n, l \neq k} \lambda_{k,l}(t)$. Ainsi,

considérant $\tau_k \cdot J_{s,k}$ juvéniles sains dans le site k sur le point d'acquérir leur maturité sexuelle, alors une quantité $\frac{\tau_k J_{s,k}}{1 + \lambda_k A_k}$ s'installera dans un territoire du site k et une quantité $\frac{\tau_k \lambda_{k,l} A_k \cdot J_{s,k}}{1 + \lambda_k A_k}$ ira s'installer dans un territoire du site l ; la dispersion des juvéniles infectés se faisant de façon similaire. De plus, nous supposons qu'il n'y a pas de

Preuve. La matrice Jacobienne pour l'état trivial est :

$$Jac(0) = \begin{pmatrix} Jac_1(0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & Jac_k(0) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & Jac_n(0) \end{pmatrix},$$

avec :

$$Jac_k(0) = \begin{pmatrix} -\mu_{J,k} - \tau_k & 0 & \beta_k & \beta_k & 0 \\ 0 & -\mu_{J,k} - \tau_k & 0 & 0 & 0 \\ \tau_k & 0 & -\mu_{A,k} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_k & 0 & -\mu_{A,k} & 0 \\ 0 & \alpha_k & 0 & \alpha_k & -\delta_k \end{pmatrix}.$$

Toutes les valeurs propres de la matrice $Jac_k(0)$ sont strictement négatives si et seulement si $\beta_k \tau_k - \mu_{A,k}(\mu_{J,k} + \tau_k) < 0 \iff C_k < 1$ (voir la preuve de la Proposition 7.2.1). Ainsi, toutes les valeurs propres de la matrice $Jac(0)$ sont strictement négatives si et seulement si $C_k < 1, \forall 1 \leq k \leq n$. ■

Si $\lambda_k = 0$ pour chaque k , (et donc nécessairement $\lambda_{k,l} = 0, \forall k, l$), alors la dynamique sur un site donné est indépendante de celles des autres sites, de sorte que les résultats du chapitre précédent s'appliquent, avec un taux de maturation constant. Ainsi, pour $\lambda_k = 0$, on peut établir l'existence et l'unicité d'un état stationnaire localement asymptotiquement stable, dépendant de la valeur de $C_k \neq 1$ et $R_k \neq 1$ sur chaque patch (voir Théorème 7.2.1), correspondant au système suivant :

$$\begin{cases} J'_{s,k} = \beta_k \cdot A_k - (\mu_{J,k} + k_{J,k} P_k) \cdot J_{s,k} - \tau_k \cdot J_{s,k} - (\gamma_{J,k} G_k + \sigma_{J,k} I_k) \cdot J_{s,k}, \\ J'_{i,k} = (\gamma_{J,k} G_k + \sigma_{J,k} I_k) \cdot J_{s,k} - (\mu_{J,k} + k_{J,k} P_k) \cdot J_{i,k} - \tau_k J_{i,k}, \\ A'_{s,k} = \tau_k J_{s,k} - (\mu_{A,k} + k_{A,k} P_k) \cdot A_{s,k} - (\gamma_{A,k} G_k + \sigma_{A,k} I_k) \cdot A_{s,k}, \\ A'_{i,k} = \tau_k J_{i,k} + (\gamma_{A,k} G_k + \sigma_{A,k} I_k) \cdot A_{s,k} - (\mu_{A,k} + k_{A,k} P_k) \cdot A_{i,k}, \\ G'_k = \alpha_k \cdot I_k \cdot (1 - G_k) - \delta_k \cdot G_k. \end{cases} \quad (8.2.1)$$

Comme $\lambda_k = \sum_{1 \leq l \leq n, l \neq k} \lambda_{k,l}$, on identifiera λ_k et $(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{k-1,k}, \lambda_{k+1,k}, \dots, \lambda_{n,k}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pour $\lambda_k \neq 0$.

Le résultat suivant, basé sur le Théorème des Fonctions Implicites, établit que nous aurons toujours des états stationnaires endémiques L.A.S. à composantes strictement positives, pour au moins de petites valeurs de λ_k si $R_k > 1$:

variables (v_1, \dots, v_n) évaluée en $(0, v_1^*, \dots, v_n^*)$ s'écrit :

$$M^* = \begin{pmatrix} Jac_1(v_1^*) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & Jac_k(v_k^*) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & Jac_n(v_n^*) \end{pmatrix},$$

où $Jac_k(v_k^*)$ est la Jacobienne du système (8.2.1) en v_k^* . Ainsi, $Det(Jac_k(v_k^*)) < 0$ et $Det(M^*) \neq 0$.

Alors en utilisant le Théorème des Fonctions Implicites, on a l'existence de deux voisinages U de 0 dans $\mathbb{R}^{n(n-1)}$ et V de (v_1^*, \dots, v_n^*) dans $(\mathbb{R}_+^*)^{5n}$, ainsi que d'une fonction continue $\phi : U \rightarrow V$ telle que $\phi(0) = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ et

$$\forall (\Lambda, v_1, \dots, v_n) \in U \times V, F(\Lambda, v_1, \dots, v_n) = 0 \iff (v_1, \dots, v_n) = \phi(\Lambda).$$

En particulier, pour $\Lambda \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$, $w^* = \phi(\Lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^{5n}$ est un état stationnaire du système (8.1.1).

2ème étape : Stabilité de l'état stationnaire w^* .

Ce résultat provient du fait que les valeurs propres d'une matrice dépendent continuellement des coefficients de la matrice. Du Théorème 7.2.1, il vient que les valeurs propres de la matrice Jacobienne du système (8.1.1) en (v_1^*, \dots, v_n^*) sont strictement négatives. Ainsi, quitte à réduire les ouverts U et V si nécessaire, elles restent strictement négatives pour (w_1^*, \dots, w_n^*) avec $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. ■

Si on ne suppose pas $C_k > 1$ et $R_k > 1$ mais seulement $C_k \neq 1$ et $R_k \neq 1$ alors certaines composantes de v_k^* peuvent s'annuler (correspondant à un état trivial ou à un état stationnaire avec disparition du virus). On peut alors toujours appliquer le Théorème des Fonctions Implicites et obtenir l'existence d'un état stationnaire L.A.S. w_k^* pour chaque patch, mais on ne peut pas conclure que w_k^* ne serait-ce que des composantes positives. Cependant, dans toutes les simulations numériques effectuées, pour $\lambda_{l,k}$ positif, on obtient des états stationnaires positifs.

De plus, on peut avoir $v_k^* = 0$ et $w_k^* \neq 0$. Cela signifie qu'une population sur un site devrait s'éteindre si elle n'était pas connectée aux autres sites, mais avec l'apport de juvéniles d'autres sites, elle survit. De même, on peut avoir $v_k^* = (J_k^*, 0, A_k^*, 0, 0)$ correspondant à une situation dans laquelle le virus disparaîtrait d'un site sans migration, mais un état stationnaire w_k^* endémique car des juvéniles infectés migrant permettent de maintenir le virus partout. Ces situations, entre autres, sont observées dans les simulations numériques présentées plus loin.

8.3 Modèle multi-sites à coefficients périodiques

Comme pour les situations de sites isolés, en utilisant le Théorème de Poincaré 6.3.1, on peut montrer que de petites perturbations périodiques de coefficients constants conduisent à l'émergence de solutions périodiques à partir des états localement asymptotiquement stables du système (8.1.1) à coefficients constants. La difficulté est toujours de pouvoir estimer la taille des perturbations permises, et comme pour le modèle JA-SIG, les simulations montrent que cette taille est limitée.

8.4 Simulations numériques

8.4.1 Cas courants

Les simulations présentées ici sont pour un modèle avec deux patches. Dans les figures Fig. 8.4.1 et Fig. 8.4.2 ci-dessous, les lignes continues représentent les densités de juvéniles et les lignes pointillées les densités d'adultes.

Nous considérerons des paramètres démographiques comme dans le cas du modèle JA dans chaque patch, mis à part la capacité d'accueil sur le second site qui sera

$$K_A(t) = 4 * \left(10 + \left(\cos \left(\frac{2\pi(t + 0.35)}{3} \right) \right)^2 - 8 * \left(\sin \left(\frac{2\pi(t + 0.35)}{3} \right) \right) \right).$$

De plus, les taux de transmission entre individus sont $\sigma_J = \sigma_A = 0.28$, et on considère $\lambda_1 = 0.1$ et $\lambda_2 = 0.2$ de sorte que le patch 1 sera le patch « optimal » et le patch 2 sera le patch « sous-optimal ». On considère des densités de populations initiales de 5 pour les adultes sains et 2 pour les adultes infectés dans le premier patch, et de 5 pour les adultes sains mais pas d'adultes infectés dans le second patch.

Dans la figure Fig. 8.4.1 on prend $\gamma_J = \gamma_A = 9$, $\alpha = 0.3$ et $\delta = 52$ pour chacun des deux sites et on a convergence vers un état périodique endémique comme attendu (on a $C_1, C_2 > 1$ et $R_1, R_2 > 1$). Les juvéniles infectés provenant du site optimal ont contaminé le second site. De plus, on voit bien que comme attendu la densité totale de population est plus grande dans le premier site que dans le second.

Dans la figure Fig. 8.4.2 on prend $\gamma_{J,2} = \gamma_{A,2} = 5$, $\alpha_2 = 0.1$ et $\delta_2 = 156$: les conditions sont moins favorables pour le virus sur le second site. Ainsi, avec ces valeurs, les simulations pour le second patch isolé montrent une situation dans laquelle le virus disparaît. Pour le modèle à deux patches, on voit que la migration permet un état endémique périodique, avec persistance du virus dans chacun des deux sites.

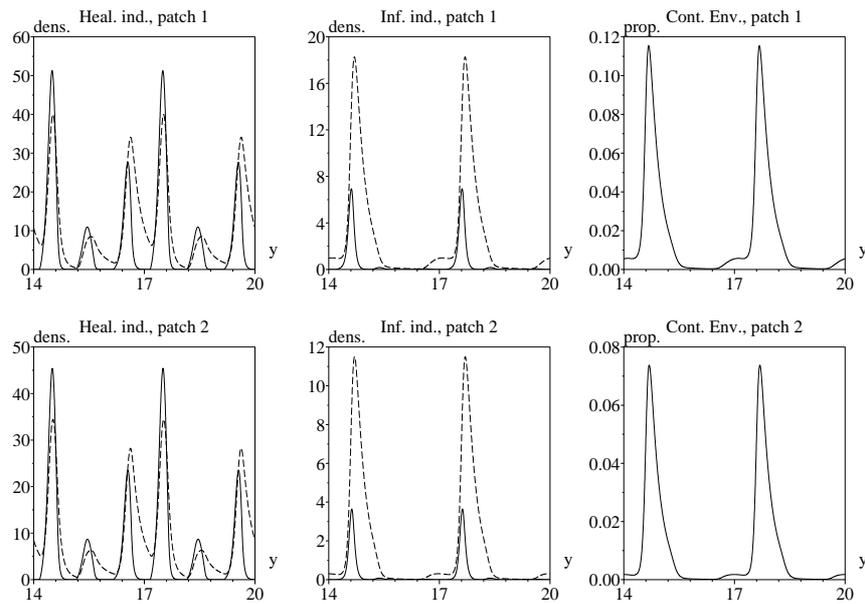


FIG. 8.4.1: Dynamique pour un modèle à 2 patches : convergence vers un état endémique

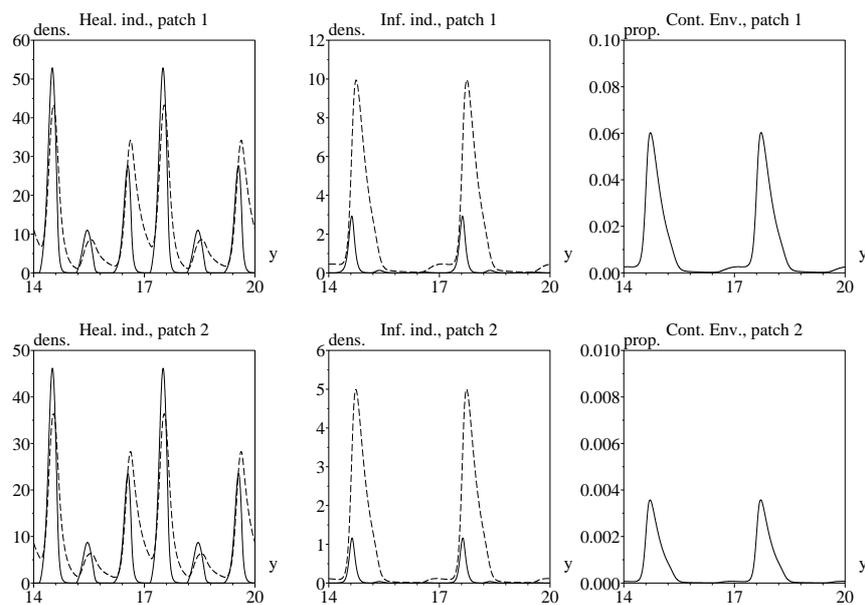


FIG. 8.4.2: Dynamique pour un modèle à 2 patches : convergence vers un état endémique, même si dans le second site isolé, le virus aurait disparu

8.4.2 Cas particuliers

Nous présentons ici quelques cas particuliers, dans le cas du modèle à deux patches à coefficients constants, montrant que ce modèle permet d'expliquer plusieurs situations insolites.

Dans les simulations qui vont suivre et sans indications contraires, les valeurs des coefficients seront celles présentées dans la table Tab. 8.1, et nous considérerons des densités de population initiales de 8 adultes sains et 2 infectés dans chaque site.

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------|----------|-------------|-------------|-----------|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------|------------|-------------|
| β_1 | τ_1 | $\mu_{J,1}$ | $\mu_{A,1}$ | $k_{J,1}$ | $k_{A,1}$ | $\gamma_{J,1}$ | $\gamma_{A,1}$ | $\sigma_{J,1}$ | $\sigma_{A,1}$ | α_1 | δ_1 | λ_1 |
| 12.73 | 12 | 6 | 2 | 0.4 | 0.21 | 9 | 9 | 0.28 | 0.28 | 0.3 | 52 | 0.1 |
| β_2 | τ_2 | $\mu_{J,2}$ | $\mu_{A,2}$ | $k_{J,2}$ | $k_{A,2}$ | $\gamma_{J,2}$ | $\gamma_{A,2}$ | $\sigma_{J,2}$ | $\sigma_{A,2}$ | α_2 | δ_2 | λ_2 |
| 12.73 | 12 | 6 | 2 | 0.4 | 0.14 | 9 | 9 | 0.28 | 0.28 | 0.3 | 52 | 0.1 |

TAB. 8.1: Coefficients constants pour les figures Fig. 8.4.3 à Fig. 8.4.7

Pour plus de clarté, les juvéniles ne sont pas distingués des adultes dans les simulations de cette section, et les individus sains seront représentés par des traits pleins alors que les individus infectés sont représentés par des traits pointillés. Nous présentons de gauche à droite pour chaque simulation : Les densités de populations (sains et infectés) lorsque les sites ne sont pas connectés, les densités de populations lorsque les sites sont connectés et enfin la proportion d'environnement contaminé (sites connectés).

La figure Fig. 8.4.3 est obtenue à partir des valeurs données dans la table Tab. 8.1, et représente une situation similaire à la figure Fig. 8.4.2 : Lorsque les deux sites sont isolés, le virus disparaît sur l'un et pas sur l'autre et lorsqu'ils sont connectés, on obtient un état stationnaire endémique sur les deux sites.

Dans la figure Fig. 8.4.4 nous présentons un cas inverse où on a également lorsqu'ils sont isolés un site où le virus persiste et un site où il disparaît. Mais cette fois-ci la migration est néfaste au virus car lorsqu'on les deux sites sont connectés le virus disparaît des deux sites. Les coefficients qui ont changé sont : $\sigma_{J,1} = \sigma_{J,2} = \sigma_{A,1} = \sigma_{A,2} = 0.25$, $\alpha_2 = 0.1$ et $\delta_2 = 156$.

Dans la Figure Fig. 8.4.5 nous voyons une situation où la migration permet aux campagnols de coloniser et de rester dans des territoires où ils disparaîtraient sinon, et par la même occasion au virus de se propager. En effet, dans cette simulation, lorsque les deux sites sont isolés, les campagnols disparaissent complètement du site 1 alors qu'un équilibre endémique s'installe sur le second site. En ajoutant la migration, les campagnols et le virus sont présents sur les deux sites. Les coefficients différents de

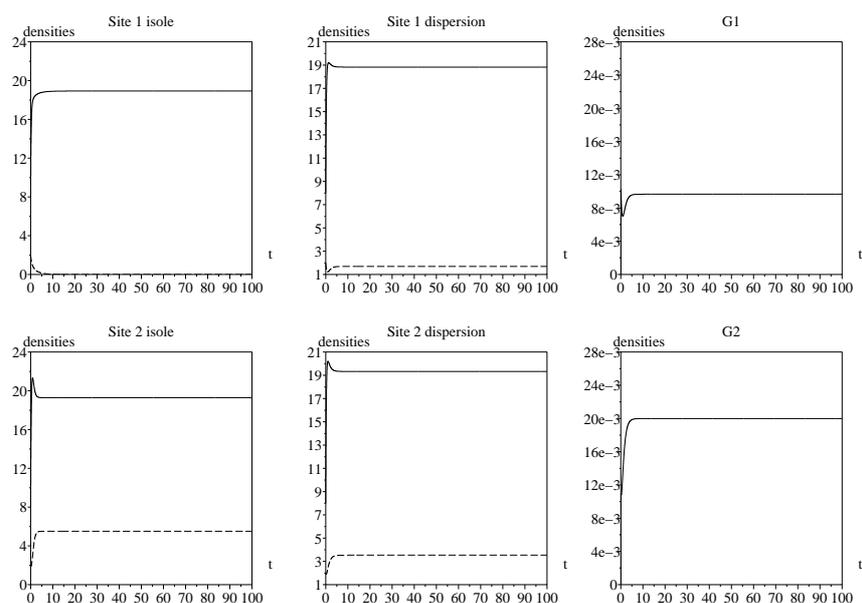


FIG. 8.4.3: Cas où la migration permet au virus de persister sur les deux sites

ceux de la table Tab. 8.1 sont : $\sigma_{J,1} = \sigma_{J,2} = \sigma_{A,1} = \sigma_{A,2} = 0.35$, $\beta_1 = 9$, $\mu_{J,1} = 10$ et $\mu_{A,1} = 5$.

Le figure Fig. 8.4.6 présente une situation dans laquelle la migration permet aux campagnols de survivre sur les deux sites, mais où par contre le virus disparaît. En effet, comme dans le cas précédent, lorsque les deux sites sont isolés, les campagnols disparaissent du site 1 alors qu'un équilibre endémique s'installe sur le site 2. En revanche cette fois-ci, lorsque l'on ajoute la migration, les campagnols sont présents sur les 2 sites mais le virus disparaît des deux sites. Les coefficients différents de ceux de la table Tab. 8.1 sont : $\sigma_{J,1} = \sigma_{J,2} = \sigma_{A,1} = \sigma_{A,2} = 0.28$, $\beta_1 = 9$, $\mu_{J,1} = 10$ et $\mu_{A,1} = 5$.

Enfin, le dernier cas que nous présentons ici dans la figure Fig. 8.4.7 est une situation favorable au virus dans laquelle la migration permet la survie du virus, non pas dans un, mais dans les deux sites. En effet, en l'absence de migration le virus disparaît des deux sites. Mais lorsque l'on ajoute la migration, le virus persiste sur les deux sites. Nous considérons ici que $\sigma_{J,1} = \sigma_{J,2} = \sigma_{A,2} = 0.24$, $\sigma_{A,1} = 0.315$, $k_{A,2} = 0.138$, $\alpha_2 = 0.1$, $\delta_2 = 156$ et $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.3$ (une migration beaucoup plus forte du site 2 vers le site 1, site sur lequel le virus se propage mieux).

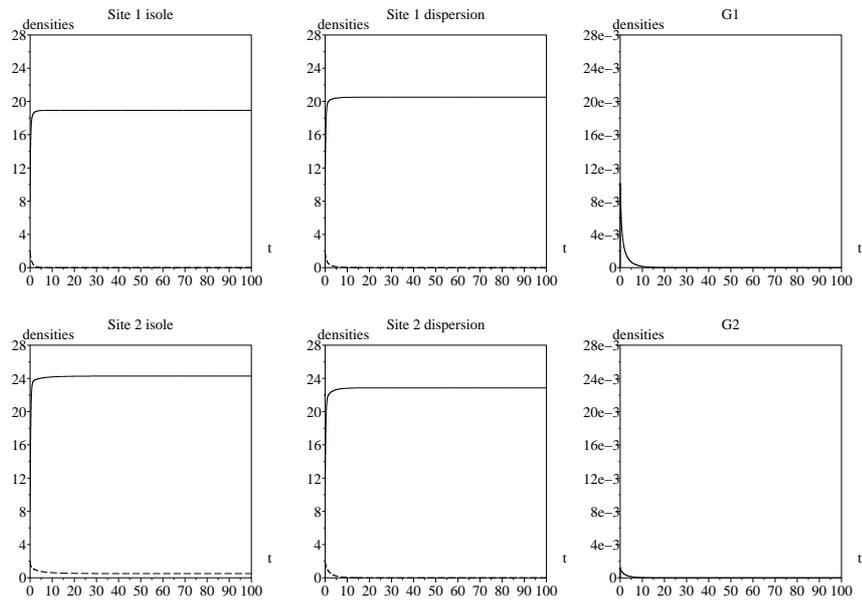


FIG. 8.4.4: Cas où la migration induit une disparition globale du virus

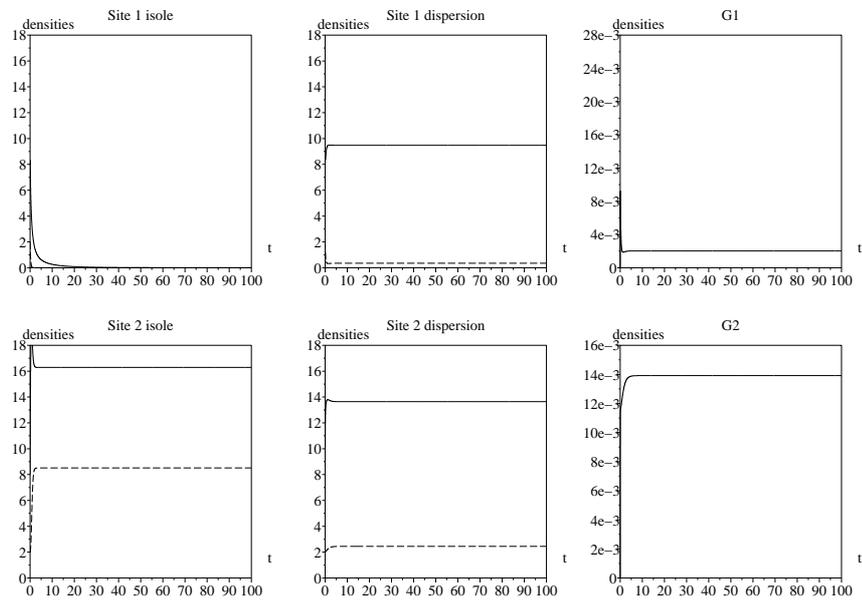


FIG. 8.4.5: Cas où la migration permet la survie globale des campagnols et du virus

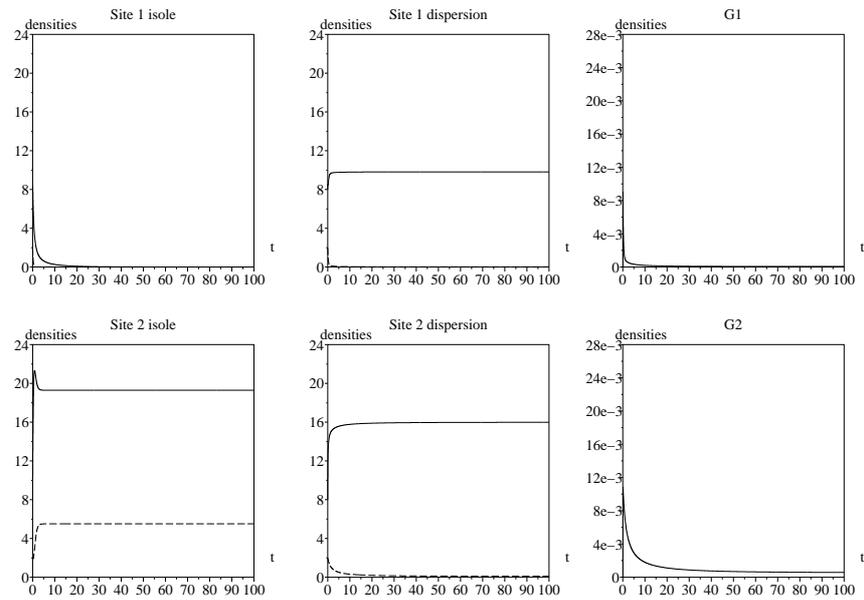


FIG. 8.4.6: Cas où la migration permet la survie globale des campagnols mais en entraînant la disparition du virus

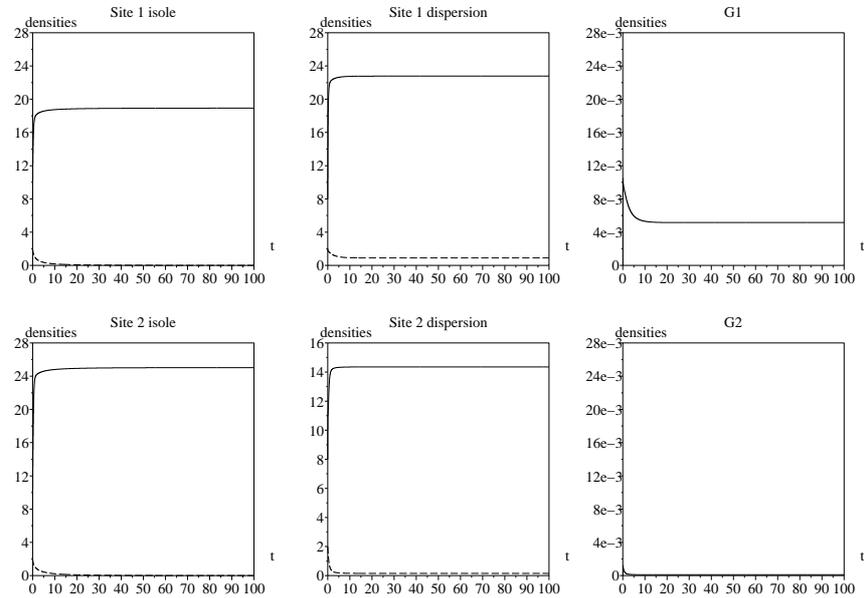


FIG. 8.4.7: Cas où la migration permet la persistance du virus sur les deux sites

Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressé dans cette partie à des modèles bien moins structurés que dans les autres parties. De ce fait, nous avons pu mener des études analytiques et numériques plus précises sur les comportements des solutions des systèmes étudiés.

Nous avons dans les Chapitres 6 et 7 analysé deux modèles pour une population fermée et isolée : Un modèle JA sans virus et un modèle épidémique, JASIG. Dans les deux cas, nous avons fait une analyse de stabilité lorsque les coefficients sont constants et nous avons mis en évidence un paramètre C afin de prévoir l'existence et la stabilité d'un état stationnaire non-trivial en l'absence de virus. Pour le modèle épidémique, nous avons également mis en évidence un paramètre R pour déterminer l'existence et la stabilité d'états stationnaires semi-trivial et non trivial correspondant respectivement à la disparition du virus si $R < 1$ et à sa persistance si $R > 1$.

Avec de petites perturbations périodiques autour des coefficients constants, nous avons établi l'émergence de solutions périodiques pour chacun des deux modèles. Un problème restant ouvert étant de pouvoir obtenir une estimation de la taille des perturbations autorisées. De plus, les simulations numériques ont montré que les dynamiques périodiques peuvent être favorables à la persistance du virus, conformément à ce qui est observé sur le terrain.

Nous avons ensuite mis en place un modèle épidémique multi-sites correspondant à des populations hôtes établies en colonies, avec dispersion des juvéniles sous la pression des adultes afin de se reproduire. Pour le cas à coefficients constants, nous avons fait une étude de stabilité de l'état trivial, et prouvé l'existence d'états endémiques stationnaires localement asymptotiquement stables pour de petits coefficients de dispersion lorsque la situation est favorable au virus sur chaque patch (i.e. $R_k > 1, \forall k$). Dans le cas contraire, nous avons aussi établi l'existence d'un état stationnaire localement asymptotiquement stable, mais nous ne pouvons assurer que cet état est biologiquement acceptable (c'est à dire à composantes positives), même si les simulations numériques montrent qu'il l'est effectivement. Enfin, comme pour les populations sur un seul site, nous avons établi l'émergence de solutions périodiques pour de petites perturbations de coefficients constants favorables. Des simulations numériques montrent que la dispersion peut jouer un rôle important dans la transmission et la persistance du virus, même sur des sites a priori défavorables.

Quatrième partie

Modèle avec structurations en âge chronologique et en espace continues

Introduction

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude des modèles JA, JASIG et JASIGH établis dans le Chapitre 2, avec structuration continue en âge chronologique, comme dans la partie II, mais également une structuration en espace. Contrairement au modèle multi-sites étudié dans la partie III, la structuration spatiale que nous considérons ici est continue. Nous allons donc étudier des systèmes de réaction-diffusion, mêlant systèmes hyperboliques et systèmes paraboliques. Nous nous inspirons notamment pour l'étude de ces systèmes de réaction-diffusion structurés également en âge de travaux présentés dans Garroni et Langlais [36], Fitzgibbon et al. [29], Kubo et Langlais [59] ou Naulin [71].

Le cadre mathématique considéré est plus général que celui du seul modèle hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre. En particulier, certaines hypothèses précédemment utilisées, comme la croissance du taux de mortalité par rapport à la densité de population ou la décroissance du taux de maturation par rapport à la densité d'adultes ne sont pas considérées ici, car inutile pour démontrer les résultats obtenus.

Dans le Chapitre 9, nous commençons par présenter le cadre de la structuration spatiale que nous considérons dans cette partie. En particulier, nous considérons une population hôte établie en colonie, ce qui conduit à une structuration spatiale hétérogène. Ainsi, les coefficients de diffusion sont considérés discontinus en espace. Nous établissons pour le modèle JA des résultats d'existence globale, d'unicité puis de majoration uniforme lorsque les coefficients de diffusion sont indépendants de l'âge.

Dans le Chapitre 10, le modèle JASIG que nous étudions présente la particularité d'être structuré en âge de l'infection, non pas de façon continue comme dans la partie II, mais de façon discrète. Cela permet de limiter le nombre de variables structurantes, au prix d'augmenter le nombre de classes de populations et donc le nombre d'équations. Les juvéniles (respectivement les adultes) infectés seront séparés en deux classes de populations, les juvéniles (respectivement adultes) nouvellement infectés et les juvéniles (respectivement adultes) infectés de façon chronique, i.e. depuis plus longtemps. Pour ce modèle également nous établissons des résultats d'existence globale, d'unicité et puis de majoration uniforme des solutions.

Enfin, nous finissons en traitant le cas du modèle JASIGH, pour lequel nous prenons en compte également la transmission à l'Homme.

Chapitre 9

Etude du modèle JA structuré en âge et en espace

9.1 Cadre de la structuration spatiale

Nous considèrerons que la population hôte est isolée dans un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ régulier, de sorte que localement, Ω se trouve d'un seul côté de $\partial\Omega$. Nous noterons $\eta(x)$ la normale extérieure unitaire en $x \in \partial\Omega$. Comme décrit dans la première partie, nous ne considérons aucun apport algébrique sur la population hôte (immigration, émigration, prélèvement, introduction, . . .); seule la diffusion permet un déplacement des individus (pas de mouvements autres).

Pour tenir compte de l'organisation des hôtes adultes en colonies, nous introduisons des ouverts réguliers θ_i $1 \leq i \leq n_\theta$ avec $\bar{\theta}_i \subset \Omega$, à frontière régulière et disjoints les uns des autres, tels que présentés dans la figure Fig. 9.1.1

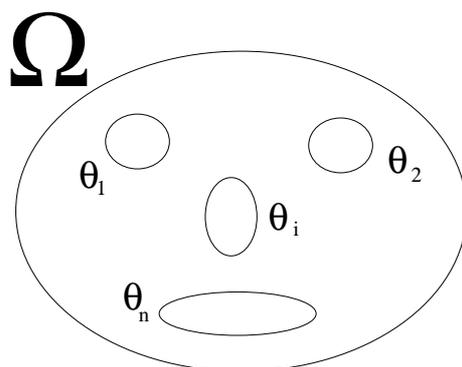


FIG. 9.1.1: Le domaine spatial

Nous noterons :

$$\Theta = \bigcup_{1 \leq i \leq n_\theta} \theta_i \quad \text{et} \quad \theta_0 = \Omega \setminus \bar{\Theta} \quad (9.1.1)$$

Nous avons envisagé deux approches différentes :

La première approche est de considérer que les adultes et les juvéniles se déplacent sur tout le domaine Ω , mais que l'hétérogénéité spatiale est due à des variations sur les coefficients de diffusion et/ou sur les capacités d'accueil. On considèrera donc une capacité d'accueil des adultes importantes (une mortalité plus faible) dans les ouverts θ_i , $1 \leq i \leq n_\theta$ et une capacité d'accueil faible (une mortalité plus forte) sur θ_0 . Les taux de maturations seront également pris faibles sur θ_0 , sites très peu favorables pour prendre un territoire. La capacité d'accueil sera moins hétérogène pour les juvéniles, qui ont moins de besoins (pas de territoire).

La seconde approche est de supposer que les adultes restent uniquement dans les colonies prédéfinies (habitat et ressources appropriées), et seront donc isolés dans ces colonies : un adulte installé dans une colonie y restera jusqu'à sa mort. On traduira cela par une hypothèse de flux nul sur les bords de Θ pour les adultes, et une population adulte initiale nulle sur θ_0 . Cela garantira que la population adulte restera nulle en dehors des colonies. En ce qui concerne les juvéniles, on aura une condition de flux nul sur le domaine Ω , mais par contre, dans le domaine θ_0 , il n'y aura pas de naissance ($\beta = 0$), ni de maturation ($\tau = 0$) possibles : les juvéniles doivent trouver un site approprié pour se reproduire, ces sites étant dans les colonies.

Le choix de l'approche retenue n'ayant pas d'importance pour les résultats donnés dans cette partie, nous nous contenterons de suivre la première approche afin de simplifier les écritures (on a ainsi des domaines spatiaux identiques pour les équations de jeunes et d'adultes). Le choix précis d'une approche serait sans doute plus important dans le cadre de simulations numériques, mais ce travail ne comporte pas une telle étude.

Les coefficients de diffusion et démographiques seront donc « essentiellement » continus par rapport à x sur chaque θ_i , $1 \leq i \leq n_\theta$, mais discontinus le long de chaque $\partial\theta_i$, $1 \leq i \leq n_\theta$.

9.2 Mise en place du modèle

Le modèle JA que nous considérons ici est le modèle générique JA, (2.1.16)-(2.1.17) présenté dans le Chapitre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t J + \partial_a J - \operatorname{div}(d_J(t, a, x) \cdot \nabla J) + \mu_J(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot J \\ \quad + \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J = 0 & \text{dans } Q_J, \\ J(t, 0, x) = \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A(t, a, x) da & \text{dans } Q_{J,t}, \\ J(0, a, x) = J_0(a, x) & \text{dans } Q_{J,a}, \\ (d_J(t, a, x) \cdot \nabla J(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{J,\partial}, \end{array} \right. \quad (9.2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t A + \partial_a A - \operatorname{div}(d_A(t, a, x) \cdot \nabla A) + \mu_A(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A \\ \quad - \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J = 0 & \text{dans } Q_A, \\ A(t, a_1, x) = 0 & \text{dans } Q_{A,t}, \\ A(0, a, x) = A_0(a, x) & \text{dans } Q_{A,a}, \\ (d_A(t, a, x) \cdot \nabla A(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{A,\partial}, \end{array} \right. \quad (9.2.2)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} Q_J &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_\dagger) \times \Omega, & Q_A &= \mathbb{R}_+ \times (a_1, a_\dagger) \times \Omega, \\ Q_{J,\partial} &= \mathbb{R}_+ \times (0, a_\dagger) \times \partial\Omega, & Q_{A,\partial} &= \mathbb{R}_+ \times (a_1, a_\dagger) \times \partial\Omega, \\ Q_{J,a} &= (0, a_\dagger) \times \Omega, & Q_{A,a} &= (a_1, a_\dagger) \times \Omega, \\ Q_{J,t} &= \mathbb{R}_+ \times \Omega, & Q_{A,t} &= \mathbb{R}_+ \times \Omega, \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

avec $a_\dagger \leq +\infty$, et aussi :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(t, x) &= \int_{a_1}^{a_\dagger} A(t, a, x) da, \\ \mathbb{J}(t, x) &= \int_0^{a_\dagger} J(t, a, x) da, \\ \mathbb{P}(t, x) &= \mathbb{J}(t, x) + \mathbb{A}(t, x). \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

9.3 Hypothèses

Nous supposons que J_0 et A_0 sont continues, positives (ou nulles) et L^∞ sur $Q_{J,a}$ et $Q_{A,a}$, et nous faisons en outre les hypothèses suivantes :

HYP 9.1

On a :

- $\beta \in L^\infty(Q_A \times \mathbb{R}^+)$ et est à valeurs positives ou nulles,
- $\tau \in L^\infty(Q_J \times \mathbb{R}^+)$ et est à valeurs positives ou nulles,
- $\mu_J \in L^\infty(Q_J \times [0, R])$, $\forall R > 0$ et est à valeurs positives ou nulles,
- $\mu_A \in L^\infty(Q_A \times [0, R])$, $\forall R > 0$ et est à valeurs positives ou nulles,

On notera par la suite, $\beta_\infty = \|\beta\|_{\infty, Q_A \times \mathbb{R}^+}$, $\tau_\infty = \|\tau\|_{\infty, Q_J \times \mathbb{R}^+}$ et

$$\mu_\infty(R) = \max\{\|\mu_J\|_{\infty, Q_J \times [0, R]}, \|\mu_A\|_{\infty, Q_A \times [0, R]}\}.$$

Remarque 9.3.1

On peut considérer aussi μ_J et μ_A continues et tendant vers l'infini en a_\dagger lorsque $a_\dagger < +\infty$ ce qui assure que les densités tendent vers 0 en a_\dagger , voir Chapitre 2 ou Naulin [71]. Il suffit pour cela de rajouter une étape de troncature dans les démonstrations à venir.

Les coefficients β , τ , μ_J et μ_A sont localement lipschitziens par rapport à la 4ème variable (celle de densité), uniformément en (t, a, x) :

HYP 9.2

Pour tout $R > 0$,

- Il existe $K_\beta(R) > 0$ tel que pour $0 \leq |\xi|, |\tilde{\xi}| \leq R$,

$$\forall (t, a, x) \in Q_A, |\beta(t, a, x, \xi) - \beta(t, a, x, \tilde{\xi})| \leq K_\beta(R)|\xi - \tilde{\xi}|$$

- Il existe $K_\tau > 0$ tel que $0 \leq |\xi|, |\tilde{\xi}| \leq R$,

$$\forall (t, a, x) \in Q_J, |\tau(t, a, x, \xi) - \tau(t, a, x, \tilde{\xi})| \leq K_\tau(R)|\xi - \tilde{\xi}|$$

- Pour $Z = J, A$, il existe $K_Z(R) > 0$ tel que $0 \leq |\xi|, |\tilde{\xi}| \leq R$,

$$\forall (t, a, x) \in Q_Z, |\mu_Z(t, a, x, \xi) - \mu_Z(t, a, x, \tilde{\xi})| \leq K_Z(R)|\xi - \tilde{\xi}|$$

Et concernant les coefficients de diffusion, nous supposons :

HYP 9.3

Pour $Z = J, A$, on suppose que :

- $\forall (t, a, x) \in Q_Z$, $0 < \underline{d} \leq d_Z(t, a, x) \leq \bar{d} < +\infty$,
- $d_Z \in C(\overline{Q}_{Z,i})$ pour $0 \leq i \leq n_\theta$, où $\overline{Q}_{Z,i} = \mathbb{R}_+ \times (0, a_\dagger) \times \overline{\theta}_i$.

Remarque 9.3.2

La discontinuité des coefficients de diffusion fait que l'on ne peut pas espérer la régularité en x que l'on obtient par des processus de diffusion « normaux ». Des systèmes avec des coefficients de diffusion de ce type sont notamment étudiés dans Fitzgibbon et al. [26] [27] [29] [31].

Remarque 9.3.3

Dans les hypothèses précédentes, il n'est pas nécessaire d'avoir des bornes identiques pour les coefficients relatifs aux jeunes, et ceux relatifs aux adultes, mais cela simplifie les écritures dans les démonstrations à venir.

9.4 Résolution de problèmes auxiliaires

Dans cette section, nous nous intéressons à deux problèmes auxiliaires, que nous utiliserons pour la résolution du cas général.

9.4.1 Premier problème auxiliaire

Nous nous intéressons ici à la résolution du problème linéaire auxiliaire, donné par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + \partial_a u - \operatorname{div}(d(t, a, x) \cdot \nabla u) + \mu(t, a, x) \cdot u = f(t, a, x) & \text{dans } Q_J, \\ u(t, 0, x) = b(t, x) & \text{dans } Q_{J,t}, \\ u(0, a, x) = u_0(a, x) & \text{dans } Q_{J,a}, \\ (d(t, a, x) \cdot \nabla u(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{J,\partial}, \end{array} \right. \quad (9.4.1)$$

avec les hypothèses :

HYP 9.4

- $u_0 \in L^2((0, a_{\dagger}) \times \Omega)$ et est à valeurs positives ou nulles,
- $\mu \in L^\infty((0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega)$ et est à valeurs positives ou nulles,
- $b \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ et est à valeurs positives,
- $f \in L^2((0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega) \cap L^\infty((0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega)$, avec $f(t, a, x) \geq 0$,
- d vérifie l'hypothèse Hyp 9.3

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 9.4.1

Supposons l'hypothèse Hyp 9.4 vérifiée. Alors le problème (9.4.1) possède une unique solution faible u dans $(0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega$ positive ou nulle et vérifiant :

$$u \in L^\infty((0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (0, a_{\dagger}); H^1(\Omega)), \\ (\partial_t + \partial_a)u \in L^2((0, T) \times (0, a_{\dagger}); (H^1(\Omega))'),$$

solution au sens faible de (9.4.1), c'est à dire vérifiant :

$$\begin{aligned} \int_{(0,T) \times (0,a_+)} \langle (\partial_t + \partial_a)u, v \rangle \, da dt + \int_{(0,T) \times (0,a_+) \times \Omega} (d\nabla u \cdot \nabla v + \mu uv) \, dx da dt \\ = \int_{(0,T) \times (0,a_+) \times \Omega} f(t, a, x) v \, dx da dt \end{aligned}$$

pour tout $v \in L^\infty((0, T) \times (0, a_+) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (0, a_+); H^1(\Omega))$; et vérifiant les conditions initiales de (9.4.1).

Preuve. Une démonstration repose sur une méthode de Galerkin utilisant une base régulière de $H^1(\Omega)$ adaptée et les technique de Garroni et Langlais [36].

On peut aussi utiliser la méthode des caractéristiques et les résultats classiques pour les problèmes hyperboliques (voir par exemple Smoller [79]). Nous traitons ici le cas $a_+ < +\infty$, le cas $a_+ = +\infty$ pouvant être traité de manière similaire.

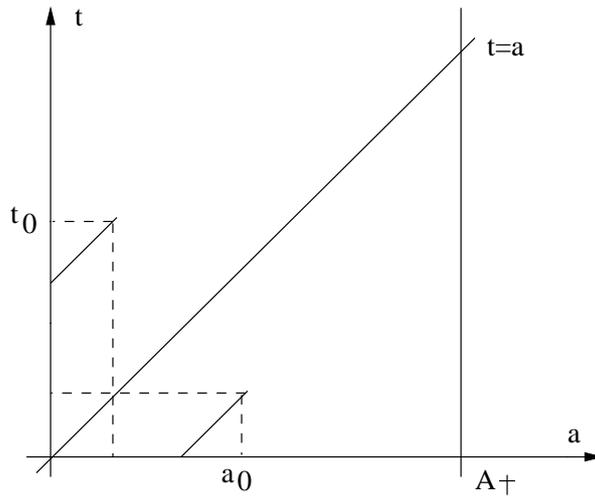


FIG. 9.4.1: Caractéristique $t = a$

Commençons par le cas $0 < t < a$, c'est à dire que nous nous plaçons sous la caractéristique $t = a$, voir figure Fig. 9.4.1. On considère $0 < a_0 < a_+$ et $c \in (0, a_+ - a_0)$, et on pose $t = c$, $a = a_0 + c$ et $w(c, x) = u(c, a_0 + c, x)$. Alors on montre que w est solution du problème parabolique linéaire suivant, pour $c \in (0, a_+ - a_0)$ et $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \partial_c w - \operatorname{div}(d(c, a_0 + c, x) \cdot \nabla w) + \mu(c, a_0 + c, x) \cdot w = f(c, a_0 + c, x), \\ w(0, x) = u_0(a_0, x), \\ (d(c, a_0 + c, x) \cdot \nabla w(c, x)) \cdot \eta(x) = 0. \end{cases} \quad (9.4.2)$$

La théorie classique des problèmes paraboliques linéaires nous assure l'existence, l'unicité et la positivité de w , donc de u sous la caractéristique $t = a$.

Pour le cas $0 < a < t$, c'est à dire au-dessus de la caractéristique $t = a$, on considère $t_0 > 0$ et $c \in (0, a_+)$ et on pose $a = c$, $t = t_0 + c$ et $w(c, x) = u(t_0 + c, c, x)$. Alors w est solution du problème parabolique linéaire suivant, pour $c \in (0, a_+)$ et $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \partial_c w - \operatorname{div}(d(t_0 + c, c, x) \cdot \nabla w) + \mu(t_0 + c, c, x) \cdot w = f(t_0 + c, c, x), \\ w(0, x) = b(t_0, x), \\ (d(t_0 + c, c, x) \cdot \nabla w(c, x)) \cdot \eta(x) = 0. \end{cases} \quad (9.4.3)$$

Là encore, la théorie classique des problèmes paraboliques linéaires nous assure l'existence, l'unicité et la positivité de w , donc de u au dessus de la caractéristique $t = a$. ■

Il existe également un Théorème de comparaison pour les équations paraboliques, duquel on peut tirer à partir de la démonstration précédente le corollaire suivant :

Corollaire 9.4.1

Si $f_1 \geq f_2 \geq 0$ dans Q_J , $u_{01} \geq u_{02} \geq 0$ dans $Q_{J,a}$, $b_1 \geq b_2 \geq 0$ dans Q_J et $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2$ dans Q_J alors les solutions correspondantes du système (9.4.1) sont telles que $u_1 \geq u_2 \geq 0$ dans Q_J .

Nous allons maintenant établir un résultat de majoration de la solution de (9.4.1) :

Proposition 9.4.2

Supposons l'hypothèse Hyp 9.4 vérifiée pour tout $T > 0$. Alors :

Si $a_+ < +\infty$, pour tout $T > 0$ il existe une constante $M_0(T) > 0$ dépendant de \underline{d} , $\|u_0\|_{\infty, (0, a_+) \times \Omega}$, $\|b\|_{\infty, (0, T) \times \Omega}$, $\|f\|_{\infty, (0, T) \times (0, a_+) \times \Omega}$ telle que u , solution de (9.4.1), vérifie :

$$\|u(t, \cdot, \cdot)\|_{\infty, (0, a_+) \times \Omega} \leq M_0(T), \quad 0 < t < T.$$

Si $a_+ = +\infty$, pour tout $T > 0$ et tout $\bar{a} > 0$, il existe une constante $M_0(T, \bar{a}) > 0$ dépendant de \underline{d} , $\|u_0\|_{\infty, (0, +\infty) \times \Omega}$, $\|b\|_{\infty, (0, T) \times \Omega}$, $\|f\|_{\infty, (0, T) \times (0, +\infty) \times \Omega}$ telle que u , solution de (9.4.1), vérifie :

$$\|u(t, \cdot, \cdot)\|_{\infty, (0, \bar{a}) \times \Omega} \leq M_0(T, \bar{a}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < \bar{a} < +\infty.$$

Preuve. Nous traitons ici uniquement le cas $a_+ < +\infty$. On sait déjà que $u \geq 0$ et d'après le Corollaire 9.4.1 il suffit d'établir le Théorème lorsque $\mu(t, a, x) = 0$. On utilise de nouveau la méthode des caractéristiques, et nous utiliserons des résultats d'Alikakos [1] et de Ladyzenskaya et al. [61] (chapitre III).

Commençons par nous placer en $0 < t < a$. On effectue le même changement de variable que dans la démonstration de la Proposition 9.4.1 pour obtenir que $w(c, x)$ est solution pour $c \in (0, a_{\dagger} - a_0)$ et $x \in \Omega$ de :

$$\begin{cases} \partial_c w - \operatorname{div}(d(c, a_0 + c, x) \cdot \nabla w) = f(c, a_0 + c, x), \\ w(0, x) = u_0(a_0, x), \\ (d(c, a_0 + c, x) \cdot \nabla w(c, x)) \cdot \eta(x) = 0. \end{cases} \quad (9.4.4)$$

Dans le cas où $f \equiv 0$, en intégrant sur $(0, c) \times \Omega$ on obtient :

$$\|w(c, \cdot)\|_{1, \Omega} \leq \|u_0(a_0, \cdot)\|_{1, \Omega}.$$

Une variante d'un résultat d'Alikakos [1] ou le principe du maximum nous donne l'existence de $M_1(T) > 0$ dépendant de \underline{d} , $\|u_0\|_{\infty, (0, a_{\dagger}) \times \Omega}$ telle que :

$$\|w(c, \cdot)\|_{\infty, \Omega} \leq M_1(T) < +\infty \quad 0 < c < a_{\dagger} - a_0, \quad 0 < a_0 < a_{\dagger}.$$

Si $f \neq 0$, il nous faut utiliser un résultat de Ladyzhenskaya et al. [61] pour obtenir l'existence de M_1 dépendant cette fois-ci également de $\|f\|_{\infty, (0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega}$ telle que $\|w(c, \cdot)\|_{\infty, \Omega} \leq M_1 < +\infty$.

Maintenant considérons $0 < a < t$. Le même changement de variable que dans la démonstration de la Proposition 9.4.1 nous permet d'obtenir que $w(c, x)$ est solution pour $c \in (0, a_{\dagger})$ et $x \in \Omega$ de :

$$\begin{cases} \partial_c w - \operatorname{div}(d(t_0 + c, c, x) \cdot \nabla w) \cdot w = f(t_0 + c, c, x), \\ w(0, x) = b(t_0, x), \\ (d(t_0 + c, c, x) \cdot \nabla w(c, x)) \cdot \eta(x) = 0. \end{cases} \quad (9.4.5)$$

Dans le cas où $f \equiv 0$, en intégrant sur $(0, c) \times \Omega$ on obtient :

$$\|w(c, \cdot)\|_{1, \Omega} \leq \|b\|_{\infty, (0, T) \times \Omega} |\Omega|.$$

De même que pour le premier cas, une variante d'un résultat d'Alikakos [1] ou le principe du maximum nous donne l'existence de $M_2(T) > 0$ dépendant de \underline{d} , $\|b\|_{\infty, (0, T) \times \Omega}$ telle que :

$$\|w(c, \cdot)\|_{\infty, \Omega} \leq M_2(T) < +\infty \quad 0 < c < a_{\dagger}.$$

Si $f \neq 0$, on obtient de même que précédemment l'existence de M_2 dépendant cette fois-ci également de $\|f\|_{\infty, (0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega}$ telle que $\|w(c, \cdot)\|_{\infty, \Omega} \leq M_2 < +\infty$. ■

9.4.2 Second problème auxiliaire

Nous nous intéressons maintenant aux solutions (J^*, A^*) du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t J^*(t, a) + \partial_a J^*(t, a) = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, a_\dagger), \\ J^*(t, 0) = \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta_\infty A^*(t, a) da & \text{pour } t \in (0, T), \\ J^*(0, a) = \|J_0\|_{\infty, \Omega} & \text{pour } a \in (0, a_\dagger), \end{cases} \quad (9.4.6)$$

$$\begin{cases} \partial_t A^*(t, a) + \partial_a A^*(t, a) = \tau_\infty J^*(t, a) & \text{dans } (0, T) \times (a_1, a_\dagger), \\ A^*(t, a_1) = 0 & \text{pour } t \in (0, T), \\ A^*(0, a) = \|A_0\|_{\infty, \Omega} & \text{pour } a \in (a_1, a_\dagger). \end{cases} \quad (9.4.7)$$

Proposition 9.4.3

Pour tout $T > 0$, pour tout $0 < A < a_\dagger$, le système (9.4.6)-(9.4.7) possède une unique solution $(J^*, A^*) \in L^\infty((0, T) \times (0, A)) \times L^\infty((0, T) \times (a_1, A))$ à composantes positives ou nulles. De plus, si $P^* = J^* + A^*$, on a l'estimation suivante :

$$\int_0^{a_\dagger} P^*(t, a) da \leq \left(\int_0^{a_\dagger} P_0(a) da \right) \cdot e^{(\beta_\infty + \tau_\infty)t}. \quad (9.4.8)$$

Preuve. Nous renvoyons le lecteur à la partie II pour l'existence et l'unicité des solutions dans L^∞ pour ce système linéaire d'équations structurées continument en âge. D'autre part, en additionnant les deux systèmes, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t P^*(t, a) + \partial_a P^*(t, a) \leq \tau_\infty P^*(t, a), \\ P^*(t, 0) \leq \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta_\infty P^*(t, a) da, \\ P^*(0, a) = \|P_0\|_{\infty, \Omega}, \end{cases}$$

et en intégrant la première équation en âge de 0 à a_\dagger , puis en utilisant le Lemme de Gronwall, on obtient l'estimation (9.4.8). ■

9.5 Résolution du cas général

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du cas général, c'est à dire le système (9.2.1)-(9.2.2). Nous allons montrer l'existence de solutions faibles, dont nous

définissons la notion ci-dessous (voir aussi Garroni et Langlais [36], Langlais [62] et Naulin [71]).

Définition 9.5.1

Pour $a_{\dagger} < +\infty$, un couple (J, A) est solution faible de (9.2.1)-(9.2.2) dans $\left((0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega\right) \times \left((0, T) \times (a_1, a_{\dagger}) \times \Omega\right)$ si

$$\begin{aligned} J &\in L^\infty((0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (0, a_{\dagger}); H^1(\Omega)), \\ (\partial_t + \partial_a)J &\in L^2((0, T) \times (0, a_{\dagger}); (H^1(\Omega))'), \\ A &\in L^\infty((0, T) \times (a_1, a_{\dagger}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (a_1, a_{\dagger}); H^1(\Omega)), \\ (\partial_t + \partial_a)A &\in L^2((0, T) \times (a_1, a_{\dagger}); (H^1(\Omega))'), \\ \mathbb{P} &\in L^\infty((0, T) \times \Omega) \text{ avec } \mathbb{P} \text{ défini en (9.2.4),} \\ \mu_J(\mathbb{P}) \cdot J &\in L^1((0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega), \\ \mu_A(\mathbb{P}) \cdot A &\in L^1((0, T) \times (a_1, a_{\dagger}) \times \Omega), \end{aligned}$$

solution au sens faible de (9.2.1)-(9.2.2), c'est à dire vérifiant :

$$\begin{aligned} \int_{(0, T) \times (0, a_{\dagger})} \langle (\partial_t + \partial_a)J, u \rangle \, dadt + \int_{(0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega} (d_J \nabla J \cdot \nabla u + (\mu_J + \tau)Ju) \, dx \, dadt &= 0 \\ \int_{(0, T) \times (a_1, a_{\dagger})} \langle (\partial_t + \partial_a)A, u \rangle \, dadt + \int_{(0, T) \times (a_1, a_{\dagger}) \times \Omega} (d_A \nabla A \cdot \nabla v + (\mu_A A - \tau J)v) \, dx \, dadt &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $u \in L^\infty((0, T) \times (0, a_{\dagger}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (0, a_{\dagger}); H^1(\Omega))$ et tout $v \in L^\infty((0, T) \times (a_1, a_{\dagger}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (a_1, a_{\dagger}); H^1(\Omega))$; et vérifiant les conditions initiales de (9.2.1) et (9.2.2).

et une définition équivalente pour $a_{\dagger} = +\infty$:

Définition 9.5.2

Pour $a_{\dagger} < +\infty$, un couple (J, A) est solution faible de (9.2.1)-(9.2.2) dans $\left((0, T) \times (0, \bar{a}) \times \Omega\right) \times \left((0, T) \times (a_1, \bar{a}) \times \Omega\right)$ si

$$\begin{aligned} J &\in L^\infty((0, T) \times (0, \bar{a}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (0, \bar{a}); H^1(\Omega)), \\ (\partial_t + \partial_a)J &\in L^2((0, T) \times (0, \bar{a}); (H^1(\Omega))'), \\ A &\in L^\infty((0, T) \times (a_1, \bar{a}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (a_1, \bar{a}); H^1(\Omega)), \\ (\partial_t + \partial_a)A &\in L^2((0, T) \times (a_1, \bar{a}); (H^1(\Omega))'), \\ \mathbb{P} &\in L^\infty((0, T) \times \Omega) \text{ avec } \mathbb{P} \text{ défini en (9.2.4),} \\ \mu_J(\mathbb{P}) \cdot J &\in L^1((0, T) \times (0, \bar{a}) \times \Omega), \\ \mu_A(\mathbb{P}) \cdot A &\in L^1((0, T) \times (a_1, \bar{a}) \times \Omega), \end{aligned}$$

solution au sens faible de (9.2.1)-(9.2.2), c'est à dire vérifiant :

$$\begin{aligned} \int_{(0, T) \times (0, \bar{a})} \langle (\partial_t + \partial_a)J, u \rangle \, dadt + \int_{(0, T) \times (0, \bar{a}) \times \Omega} (d_J \nabla J \cdot \nabla u + (\mu_J + \tau)Ju) \, dx \, dadt &= 0 \\ \int_{(0, T) \times (a_1, \bar{a})} \langle (\partial_t + \partial_a)A, u \rangle \, dadt + \int_{(0, T) \times (a_1, \bar{a}) \times \Omega} (d_A \nabla A \cdot \nabla v + (\mu_A A - \tau J)v) \, dx \, dadt &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $u \in L^\infty((0, T) \times (0, \bar{a}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (0, \bar{a}); H^1(\Omega))$ et tout $v \in L^\infty((0, T) \times (a_1, \bar{a}) \times \Omega) \cap L^2((0, T) \times (0, \bar{a}); H^1(\Omega))$; et vérifiant les conditions initiales de (9.2.1) et (9.2.2).

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 9.5.1

Supposons que les hypothèses Hyp 9.1 à Hyp 9.3 sont vérifiées et que les conditions initiales de (J_0, A_0) sont positives. Alors pour tout $T > 0$ le problème (9.2.1)-(9.2.2) possède une unique solution faible globale (J, A) à composantes positives définie sur $\left((0, T) \times (0, a_\dagger) \times \Omega \right) \times \left((0, T) \times (a_1, a_\dagger) \times \Omega \right)$.

Preuve. On traite ici le cas $a_\dagger < +\infty$, le cas $a_\dagger = +\infty$ pouvant être traité de manière similaire en tronquant l'intervalle d'âges.

On note (J^*, A^*) la solution de (9.4.6)-(9.4.7).

Notons également \mathcal{K} le domaine convexe fermé défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \{ (J, A) \in L^2((0, T) \times (0, a_\dagger) \times \Omega) \times L^2((0, T) \times (a_1, a_\dagger) \times \Omega), \\ 0 \leq J(t, a, x) \leq J^*(t, a) \text{ dans } (0, T) \times (0, a_\dagger) \times \Omega, \\ \text{et } 0 \leq A(t, a, x) \leq A^*(t, a) \text{ dans } (0, T) \times (a_1, a_\dagger) \times \Omega \}. \end{aligned} \quad (9.5.1)$$

Définissons enfin $\Phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ définie par $\Phi(\tilde{J}, \tilde{A}) = (J, A)$ où J, A est solution du problème linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t J + \partial_a J - \operatorname{div}(d_J(t, a, x) \cdot \nabla J) + \mu_J(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot J \\ \quad + \tau(t, a, x, \tilde{\mathbb{A}}(t, x)) \cdot J = 0 & \text{dans } Q_J, \\ J(t, 0, x) = \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot \tilde{A}(t, a, x) da & \text{dans } Q_{J,t}, \\ J(0, a, x) = J_0(a, x) & \text{dans } Q_{J,a}, \\ (d_J(t, a, x) \cdot \nabla J(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{J,\partial}, \end{array} \right. \quad (9.5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t A + \partial_a A - \operatorname{div}(d_A(t, a, x) \cdot \nabla A) + \mu_A(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot A \\ \quad - \tau(t, a, x, \tilde{\mathbb{A}}(t, x)) \cdot J = 0 & \text{dans } Q_A, \\ A(t, a_1, x) = 0 & \text{dans } Q_{A,t}, \\ A(0, a, x) = A_0(a, x) & \text{dans } Q_{A,a}, \\ (d_A(t, a, x) \cdot \nabla A(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0 & \text{sur } Q_{A,\partial}. \end{array} \right. \quad (9.5.3)$$

La Proposition 9.4.1 nous assure l'existence de (J, A) .

En comparant J à la solution de (9.4.1) avec $\mu = 0$, $f = 0$ et $b(t, x) = \int_{a_1}^{a_+} \beta_\infty A^*(t, a) da$ et en utilisant le Corollaire 9.4.1, on a

$$0 \leq J(t, a, x) \leq J^*(t, a) \quad \text{pour } t \in (0, T), a \in (0, a_+), x \in \Omega. \quad (9.5.4)$$

De la même façon en comparant A à la solution de (9.4.1) avec $\mu = 0$, $f = \tau_\infty J^*(t, a)$ et $b(t, x) = \int_{a_1}^{a_+} \beta_\infty A^*(t, a) da$ et en utilisant le Corollaire 9.4.1, on a

$$0 \leq A(t, a, x) \leq A^*(t, a) \quad \text{pour } t \in (0, T), a \in (0, a_+), x \in \Omega. \quad (9.5.5)$$

Ainsi $\Phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ est bien définie.

Il reste à prouver que Φ est une fonction strictement contractante pour montrer l'existence d'un point fixe, puis montrer que ce point fixe est solution faible.

Pour cela, on considère $(J_1, A_1) = \Phi(\tilde{J}_1, \tilde{A}_1)$ et $(J_2, A_2) = \Phi(\tilde{J}_2, \tilde{A}_2)$ et nous montrons le lemme suivant :

Lemme 9.5.1

Il existe deux constantes k_1 et k_2 dépendant uniquement de $\underline{d}, \beta_\infty, a_+, K_\beta, K_\tau, K_Z$ et $\|Z^*\|_{\infty, (0, T) \times (0, a_+)}$, pour $Z^* = J^*, A^*$ telles que pour $t \in (0, T)$, on ait :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|(J_1 - J_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (0, a_+) \times \Omega} + \|(A_1 - A_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (a_1, a_+) \times \Omega}) \leq \\ k_1 (\|(J_1 - J_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (0, a_+) \times \Omega} + \|(A_1 - A_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (a_1, a_+) \times \Omega}) \\ + k_2 (\|(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (0, a_+) \times \Omega} + \|(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (a_1, a_+) \times \Omega}). \end{aligned} \quad (9.5.6)$$

Preuve. On notera par $k_i, i \geq 3$ des constantes ayant les mêmes propriétés que k_1 et k_2 . On commence par estimer l'équation correspondant à la différence $J_1 - J_2$, que l'on multiplie par $J_1 - J_2$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_t + \partial_a) (J_1 - J_2)^2 - \operatorname{div}(d_J \nabla (J_1 - J_2)) (J_1 - J_2) + (\mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_1) J_1 - \mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_2) J_2) (J_1 - J_2) \\ + (\tau(\tilde{A}_1) J_1 - \tau(\tilde{A}_2) J_2) (J_1 - J_2) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_t + \partial_a) (J_1 - J_2)^2 - \operatorname{div}(d_J \nabla (J_1 - J_2)) (J_1 - J_2) + (\mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_1) + \tau(\tilde{A}_1)) (J_1 - J_2)^2 \\ = -J_2 (J_1 - J_2) ((\mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_1) - \mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_2)) + (\tau(\tilde{A}_1) - \tau(\tilde{A}_2))). \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

En intégrant sur Ω , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_a) \int_{\Omega} (J_1 - J_2)^2 dx + \int_{\Omega} d_J |\nabla(J_1 - J_2)|^2 dx + \int_{\Omega} (\mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_1) + \tau(\tilde{A}_1))(J_1 - J_2)^2 dx \\ = - \int_{\Omega} J_2(J_1 - J_2)((\mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_1) - \mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_2)) + (\tau(\tilde{A}_1) - \tau(\tilde{A}_2))) dx, \end{aligned}$$

d'où, en utilisant le fait que $0 \leq J_2 \leq J^*$, que $J^* \in L^\infty((0, T) \times (0, a_+))$ ainsi que les hypothèses Hyp 9.1- Hyp 9.3 et la majoration (9.5.4), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_a) \int_{\Omega} (J_1 - J_2)^2 dx + \underline{d} \int_{\Omega} |\nabla(J_1 - J_2)|^2 dx \leq \\ k_3 \int_{\Omega} |J_1 - J_2| \cdot |\tilde{\mathbb{P}}_1 - \tilde{\mathbb{P}}_2| dx + k_4 \int_{\Omega} |J_1 - J_2| \cdot |\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2| dx. \quad (9.5.8) \end{aligned}$$

En intégrant en âge sur $(0, a_+)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_a) \| (J_1 - J_2)(t, \cdot, \cdot) \|_{2, (0, a_+) \times \Omega} + \underline{d} \| \nabla(J_1 - J_2)(t, \cdot, \cdot) \|_{2, (0, a_+) \times \Omega} \\ \leq I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \quad (9.5.9) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} I_1(t) &= k_3 \int_{(0, a_+) \times \Omega} |J_1 - J_2| \cdot |\tilde{\mathbb{P}}_1 - \tilde{\mathbb{P}}_2| dx da \quad (9.5.10) \\ &= k_3 \int_{(0, a_+) \times \Omega} |J_1 - J_2| \cdot \left| \int_0^{a_+} (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2) da + \int_{a_1}^{a_+} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) da \right| dx da \\ &\leq k_3 \int_{(0, a_+) \times \Omega} |J_1 - J_2| \cdot \left(\int_0^{a_+} |\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2| da + \int_{a_1}^{a_+} |\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2| da \right) dx da \\ &\leq k_3 \int_{\Omega} \left(\int_0^{a_+} |J_1 - J_2| da \right) \cdot \left(\int_0^{a_+} |\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2| da \right) dx \\ &\quad + k_3 \int_{\Omega} \left(\int_0^{a_+} |J_1 - J_2| da \right) \cdot \left(\int_{a_1}^{a_+} |\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2| da \right) dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Hölder pour une fonction f implique que

$$\int_0^{a_+} f da \leq \sqrt{a_+} \left(\int_0^{a_+} f^2 da \right)^{1/2},$$

d'où, en utilisant également l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} 0 \leq I_1(t) \leq k_3 a_+ \left(\int_{(0, a_+) \times \Omega} (J_1 - J_2)^2 dadx + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_{(0, a_+) \times \Omega} (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2)^2 dadx + \frac{1}{2} \int_{(a_1, a_+) \times \Omega} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)^2 dadx \right). \quad (9.5.11) \end{aligned}$$

On a également :

$$I_2(t) = k_4 \int_{(0, a_\dagger) \times \Omega} |J_1 - J_2| \cdot |\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2| dx da. \quad (9.5.12)$$

D'où, de la même façon que pour I_1 :

$$0 \leq I_2(t) \leq \frac{k_4 a_\dagger}{2} \left(\int_{(0, a_\dagger) \times \Omega} (J_1 - J_2)^2 dadx + \int_{(a_1, a_\dagger) \times \Omega} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)^2 dadx \right). \quad (9.5.13)$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_{(a_1, a_\dagger) \times \Omega} (\beta(\tilde{\mathbb{P}}_1) \tilde{A}_1 - \beta(\tilde{\mathbb{P}}_2) \tilde{A}_2) da \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_{a_1}^{a_\dagger} (\beta(\tilde{\mathbb{P}}_1)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) + \tilde{A}_2(\beta(\tilde{\mathbb{P}}_1) - \beta(\tilde{\mathbb{P}}_2))) da \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (9.5.14)$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_3(t) &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{a_1}^{a_\dagger} \beta(\tilde{\mathbb{P}}_1)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) da \right)^2 + \left(\int_{a_1}^{a_\dagger} \tilde{A}_2(\beta(\tilde{\mathbb{P}}_1) - \beta(\tilde{\mathbb{P}}_2)) da \right)^2 dx \\ &\leq \beta_\infty^2 \int_{\Omega} \left(\int_{a_1}^{a_\dagger} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) da \right)^2 dx + k_5 \int_{\Omega} \left(\int_{a_1}^{a_\dagger} (\beta(\tilde{\mathbb{P}}_1) - \beta(\tilde{\mathbb{P}}_2)) da \right)^2 dx \\ &\leq \beta_\infty^2 a_\dagger \int_{(a_1, a_\dagger) \times \Omega} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)^2 dx da + k_5 K_\beta a_\dagger^2 \int_{\Omega} |\tilde{\mathbb{P}}_1 - \tilde{\mathbb{P}}_2| dx, \end{aligned}$$

et on en déduit que :

$$0 \leq I_3(t) \leq k_6 \int_{(0, a_\dagger) \times \Omega} (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2)^2 dadx + k_7 \int_{(a_1, a_\dagger) \times \Omega} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)^2 dadx. \quad (9.5.15)$$

En travaillant de manière similaire sur l'équation en A , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_t + \partial_a) \| (A_1 - A_2)(t, \cdot, \cdot) \|_{2, (a_1, a_\dagger) \times \Omega} + \underline{d} \| \nabla (A_1 - A_2)(t, \cdot, \cdot) \|_{2, (a_1, a_\dagger) \times \Omega} \\ \leq I_4(t) + I_5(t) + 0, \end{aligned} \quad (9.5.16)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_4(t) &= k_8 \int_{(a_1, a_\dagger) \times \Omega} |A_1 - A_2| \cdot |\tilde{\mathbb{P}}_1 - \tilde{\mathbb{P}}_2| dx da \\ &\leq k_8 a_\dagger \left(\int_{(0, a_\dagger) \times \Omega} (A_1 - A_2)^2 dadx + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \int_{(0, a_\dagger) \times \Omega} (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2)^2 dadx + \frac{1}{2} \int_{(a_1, a_\dagger) \times \Omega} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)^2 dadx \right), \end{aligned} \quad (9.5.17)$$

et

$$\begin{aligned} I_5(t) &= k_9 \int_{(a_1, a_\dagger) \times \Omega} |J_1 - J_2| \cdot |\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2| dx da \\ &\leq \frac{k_9 a_\dagger}{2} \left(\int_{(0, a_\dagger) \times \Omega} (J_1 - J_2)^2 dadx + \int_{(a_1, a_\dagger) \times \Omega} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)^2 dadx \right). \end{aligned} \quad (9.5.18)$$

En substituant les inégalités (9.5.11), (9.5.13) et (9.5.15) dans (9.5.9) ainsi que (9.5.17) et (9.5.18) dans (9.5.16), on obtient finalement le résultat désiré. ■

On en déduit le :

Lemme 9.5.2

L'application Φ est strictement contractante sur $L^2((0, \tau^) \times (0, a_\dagger) \times \Omega) \times L^2((0, \tau^*) \times (a_1, a_\dagger) \times \Omega)$ avec τ^* petit, i.e. il existe $\rho(\tau^*) < 1$ tel que :*

$$\begin{aligned} &(\|(J_1 - J_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (0, a_\dagger) \times \Omega} + \|(A_1 - A_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (a_1, a_\dagger) \times \Omega}) \leq \\ &\rho(\tau^*) (\|(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (0, a_\dagger) \times \Omega} + \|(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (a_1, a_\dagger) \times \Omega}). \end{aligned} \quad (9.5.19)$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que si $y(t)$ est solution du système :

$$\begin{cases} y'(t) \leq k_1 y(t) + k_2 z(t), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

avec $k_1, k_2 \geq 0$. Alors on a :

$$0 \leq y(t) \leq k_2 \int_0^t e^{k_1(t-s)} z(s) ds,$$

d'où, lorsque $t \rightarrow z(t)$ est croissant :

$$0 \leq y(t) \leq k_2 \left(\int_0^t e^{k_1(t-s)} ds \right) z(t) \leq \frac{k_2}{k_1} (e^{k_1 t} - 1) z(t).$$

En utilisant la relation (9.5.6) pour utiliser ceci avec :

$$y(t) = \|(J_1 - J_2)\|_{2, (0, a_\dagger) \times (0, t) \times \Omega} + \|(A_1 - A_2)\|_{2, (a_1, a_\dagger) \times (0, t) \times \Omega},$$

$$z(t) = \|(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2)\|_{2, (0, a_\dagger) \times (0, t) \times \Omega} + \|(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)\|_{2, (a_1, a_\dagger) \times (0, t) \times \Omega},$$

on obtient la relation (9.5.19) avec $\rho(t) = \frac{k_2}{k_1} (e^{k_1 t} - 1)$, inférieur à 1 pour t petit. ■

Φ étant contractante sur un espace de Banach, il existe un unique point fixe $(\widehat{J}, \widehat{A}) \in L^2((0, a_+) \times (0, \tau^*) \times \Omega) \times L^2((a_1, a_+) \times (0, \tau^*) \times \Omega)$ tel que $\Phi(\widehat{J}, \widehat{A}) = (\widehat{J}, \widehat{A})$. De plus, on sait d'après (9.5.4) que

$$\text{Pour } Z = J, A, \quad 0 \leq \widehat{Z}(t, a, x) \leq Z^*(t, a). \quad (9.5.20)$$

D'autre part, par convergence dominée on montre que si (J_n, A_n) tend vers (J, A) dans \mathcal{K} alors $(\mathbb{J}_n, \mathbb{A}_n)$ tend vers (\mathbb{J}, \mathbb{A}) dans $(L^1((0, T) \times \Omega))^2$. Par suite, on vérifie par convergence dominée, continuité de τ, β, μ_J et μ_A en la dernière variable et convergence forte dans L^2 que $(\widehat{J}, \widehat{A})$ est solution faible de (9.2.1)-(9.2.2) (voir par exemple Naulin [71] pour une démonstration détaillée dans un cas similaire). On peut ensuite recommencer l'opération pour obtenir le résultat sur $(0, T)$. ■

9.6 Majoration uniforme des solutions

Dans cette section, nous allons obtenir une borne L^∞ globale pour les solutions du système (9.2.1)-(9.2.2). Plus précisément, nous allons pour cela faire des estimations sur les quantités $\|\mathbb{J}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega}$ et $\|\mathbb{A}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega}$, et montrer que l'on peut borner ces quantités indépendamment de t .

Pour cela, nous faisons l'hypothèse suivante :

HYP 9.5

Les coefficients de diffusion, d_J et d_A , sont indépendants de l'âge a .

Cette hypothèse est raisonnable car dans notre problème de dynamique des populations c'est bien la classe d'âge (juvéniles ou adultes) des individus qui influence leur diffusion, plus que leur âge lui-même.

Afin de justifier les calculs ci-dessous, on a besoin du résultat suivant, corollaire de la Proposition 9.4.1 afin d'obtenir de la régularité sur \mathbb{J} et \mathbb{A} :

Corollaire 9.6.1

Supposons les hypothèses Hyp 9.1 à Hyp 9.3 et Hyp 9.5 vérifiées. Alors l'unique solution faible positive ou nulle u dans $(0, T) \times (0, a_+) \times \Omega$ du problème (9.4.1) vérifie de plus :

$$\int_0^{a_+} u(t, a, x) da \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Preuve. En reprenant la preuve de la Proposition 9.4.1, lorsque le coefficient de diffusion d est indépendant de la variable $a \in (0, a_+)$ on peut obtenir de la régularité sur $\int_0^{a_+} u(t, a, x) da$.

Pour cela, on travaille sur les solutions approchées par la méthode de Galerkin qui ont la bonne régularité : $\int_0^{a_\dagger} u_l(t, a, x) da \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Prenant $v_l = \int_0^{a_\dagger} u_l(t, a, x) da$ dans la formulation faible, on obtient :

$$\int_{(0, T) \times \Omega} d(t, x) |\nabla \int_0^{a_\dagger} u_l(t, a, x) da|^2 dt dx \leq C,$$

où C dépend de b , u_0 et f , d'où le résultat par l'hypothèse Hyp 9.3. ■

Nous faisons l'hypothèse de croissance suivante, de type logistique, voir Chapitre 2 :

HYP 9.6

Pour $Z = J, A$, on a une minoration de la forme : il existe $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$ tels que

$$\mu_0 + \mu_1 \xi \leq \mu_Z(\cdot, \cdot, \cdot, \xi).$$

En intégrant l'équation (9.2.1) en âge de 0 à a_\dagger , i.e. en prenant $u = 1$ comme fonction test, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{J} + J(t, a_\dagger, x) - \operatorname{div}(d_J(t, x) \cdot \nabla \mathbb{J}) + \int_0^{a_\dagger} \mu_J(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot J da \\ + \int_0^{a_\dagger} \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J da = \int_0^{a_\dagger} \beta(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A(t, a, x) da, \end{aligned}$$

d'où une première inégalité aux dérivées partielles :

$$\partial_t \mathbb{J}(t, x) - \operatorname{div}(d_J(t, x) \cdot \nabla \mathbb{J}(t, x)) + (\mu_0 + \mu_1 \mathbb{P}(t, x)) \cdot \mathbb{J}(t, x) \leq \beta_\infty \mathbb{A}. \quad (9.6.1)$$

De la même façon, on obtient une deuxième inégalité aux dérivées partielles pour \mathbb{A} :

$$\partial_t \mathbb{A}(t, x) - \operatorname{div}(d_A(t, x) \cdot \nabla \mathbb{A}(t, x)) + (\mu_0 + \mu_1 \mathbb{P}(t, x)) \cdot \mathbb{A}(t, x) \leq \tau_\infty \mathbb{J}. \quad (9.6.2)$$

Notre but est donc de montrer l'existence d'une constante $M_0 > 0$, indépendante de t telle que :

$$\max_{t > 0} \{ \|\mathbb{J}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega}, \|\mathbb{A}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega} \} \leq M_0.$$

Pour cela, nous adaptons une technique tirée de Fitzgibbon et al. [29]. Nous commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 9.6.1

Si $\mathbb{J}(t, x)$, $\mathbb{A}(t, x)$ sont des solutions classiques positives de (9.6.1)-(9.6.2) sur $[0, +\infty] \times \Omega$, alors :

$$\|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} \leq \max(\|\mathbb{P}_0\|_{1,\Omega}, ((b_\infty - \mu_0)/\mu_1)|\Omega|) = C_1 \quad b_\infty = \max(\beta_\infty, \tau_\infty). \quad (9.6.3)$$

En outre

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} \leq (\beta_\infty/\mu_1)|\Omega|. \quad (9.6.4)$$

En outre, pour l et l^* positifs il existe une contante C_{l,l^*} dépendant de β_∞ , μ_1 et $\|\mathbb{P}_0\|_{1,\Omega}$ telle que si $Q(l, l+l^*) = (l, l+l^*) \times \Omega$, on ait :

$$\|\mathbb{P}\|_{2,Q(l,l+l^*)} \leq C_{l,l^*}. \quad (9.6.5)$$

De plus, si l est choisi suffisamment grand, alors C_{l,l^*} peut-être choisi indépendant de $\|\mathbb{P}_0\|_{1,\Omega}$, et de l .

Preuve. En intégrant l'inégalité en \mathbb{J} sur Ω , on a :

$$\partial_t \int_{\Omega} \mathbb{J}(t, x) dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(d_J(t, x) \cdot \nabla \mathbb{J}(t, x)) dx + \int_{\Omega} ((\mu_0 + \mu_1 \mathbb{P}(t, x)) \cdot \mathbb{J}(t, x) \leq \beta_\infty \cdot \mathbb{A}(t, x)) dx.$$

Or, $\int_{\Omega} \operatorname{div}(d_J(t, x) \cdot \nabla \mathbb{J}(t, x)) dx = 0$ d'après la condition de bord sur $\partial\Omega$ d'où :

$$\frac{d}{dt} \|\mathbb{J}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} \leq \beta_\infty \|\mathbb{A}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} - \mu_0 \|J_0(t, \cdot)\|_{1,\Omega} - \mu_1 \int_{\Omega} \mathbb{P}(t, x) \cdot \mathbb{J}(t, x) dx. \quad (9.6.6)$$

De la même façon, on a pour l'équation en \mathbb{A} :

$$\frac{d}{dt} \|\mathbb{A}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} \leq \tau_\infty \|\mathbb{J}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} - \mu_0 \|A_0(t, \cdot)\|_{1,\Omega} - \mu_1 \int_{\Omega} \mathbb{P}(t, x) \cdot \mathbb{A}(t, x) dx, \quad (9.6.7)$$

d'où, en sommant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} &\leq (b_\infty - \mu_0) \|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} - \mu_1 \int_{\Omega} \mathbb{P}^2(t, x) dx \\ &\leq (b_\infty - \mu_0) \|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} - \frac{\mu_1}{|\Omega|} \|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (9.6.8)$$

Ainsi, $\|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{1,\Omega}$ est borné pour $0 < t < \infty$ par la solution du problème :

$$y'(t) = (b_\infty - \mu_0)y - \frac{\mu_1}{|\Omega|}y^2, \quad y(0) = \|\mathbb{P}_0\|_{1,\Omega},$$

ce qui assure (9.6.3) et (9.6.4) (voir la Proposition 2.1.1).

Pour prouver (9.6.5), rappelons que pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on a l'inégalité suivante (inégalité de Young) :

$$a \cdot b \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

En appliquant ceci au membre de droite de la première inégalité de (9.6.8), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{1,\Omega} \leq c_1 - c_2 \|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2, \quad (9.6.9)$$

d'où en intégrant en temps sur $l, l + l^*$:

$$\|\mathbb{P}\|_{2,Q(\tau,\tau+\tau^*)}^2 \leq \frac{1}{c_2} (c_1 \tau^* + \|\mathbb{P}(l, \cdot)\|_{1,\Omega}) := C_{l,l^*}, \quad (9.6.10)$$

ce qui assure la preuve par (9.6.4). ■

Nous avons maintenant le résultat suivant, apportant de la régularité :

Lemme 9.6.2

Supposons les conditions initiales (J_0, A_0) positives et continues sur $\bar{\Omega}$, et les hypothèses Hyp 9.1 à Hyp 9.6 vérifiées. Alors on a existence de $C_7 \in C(\mathbb{R}_+)$ tel que pour $0 \leq l < T$:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}, \mathbb{A} \in L^6((0, T) \times \Omega) \quad \text{et} \quad \|\mathbb{J}\|_{6,(0,T) \times \Omega}, \|\mathbb{A}\|_{6,(0,T) \times \Omega} \leq C_7(T) \\ |\nabla \mathbb{J}|, |\nabla \mathbb{A}| \in L^5((0, T) \times \Omega) \quad \text{et} \quad \|\nabla \mathbb{J}\|_{5,(0,T) \times \Omega}, \|\nabla \mathbb{A}\|_{5,(0,T) \times \Omega} \leq C_7(T). \end{aligned} \quad (9.6.11)$$

Preuve. D'après le Lemme 9.6.1, nous savons déjà que \mathbb{P} , et donc \mathbb{J} et \mathbb{A} sont bornées dans $L^2(Q(0, T))$.

On multiplie l'inégalité (9.6.1) par \mathbb{J} et on intègre sur Ω pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} \mathbb{J}^2(t, x) \, dx + \underline{d} \int_{\Omega} |\nabla \mathbb{J}|^2(t, x) \, dx + \mu_1 \int_{\Omega} \mathbb{J}^3(t, x) \, dx \\ \leq \beta_{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{J}(t, x) \mathbb{A}(t, x) \, dx \\ \leq \frac{\beta_{\infty}}{2} \left(\int_{\Omega} \mathbb{J}^2(t, x) \, dx + \int_{\Omega} \mathbb{A}^2(t, x) \, dx \right). \end{aligned} \quad (9.6.12)$$

En faisant de même pour l'inégalité en \mathbb{A} , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} \mathbb{A}^2(t, x) \, dx + \underline{d} \int_{\Omega} |\nabla \mathbb{A}|^2(t, x) \, dx + \mu_1 \int_{\Omega} \mathbb{A}^3(t, x) \, dx \\ \leq \frac{\tau_{\infty}}{2} \left(\int_{\Omega} \mathbb{J}^2(t, x) \, dx + \int_{\Omega} \mathbb{A}^2(t, x) \, dx \right). \end{aligned} \quad (9.6.13)$$

D'où, en sommant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx + \underline{d} \int_{\Omega} (|\nabla \mathbb{J}|^2 + |\nabla \mathbb{A}|^2)(t, x) dx \\ + \mu_1 \int_{\Omega} (\mathbb{J}^3 + \mathbb{A}^3)(t, x) dx \leq k_1 \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx. \end{aligned} \quad (9.6.14)$$

Ceci nous assure l'existence de $C_2 \in C(\mathbb{R}^+)$ telle que pour $t < T$:

$$\mathbb{J}(t, \cdot), \mathbb{A}(t, \cdot) \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \|\mathbb{J}(t, \cdot)\|_{2,\Omega}, \|\mathbb{A}(t, \cdot)\|_{2,\Omega} \leq C_2(t), \quad (9.6.15)$$

puis, en intégrant (9.6.14) en temps et en utilisant le Lemme 9.6.1, on obtient l'existence de $C_3 \in C(\mathbb{R}^+)$ telle que pour $0 \leq l < T$:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}, \mathbb{A} \in L^3((0, T) \times \Omega) \quad \text{et} \quad \|\mathbb{J}\|_{3,(0,T) \times \Omega}, \|\mathbb{A}\|_{3,(0,T) \times \Omega} \leq C_3(T) \\ |\nabla \mathbb{J}|, |\nabla \mathbb{A}| \in L^2((0, T) \times \Omega) \quad \text{et} \quad \|\nabla \mathbb{J}\|_{2,(0,T) \times \Omega}, \|\nabla \mathbb{A}\|_{2,(0,T) \times \Omega} \leq C_3(T). \end{aligned} \quad (9.6.16)$$

Reprenons l'inégalité en \mathbb{J} , que nous multiplions par \mathbb{J}^2 et intégrons sur Ω :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \partial_t \int_{\Omega} \mathbb{J}^3(t, x) dx + 2\underline{d} \int_{\Omega} |\nabla \mathbb{J}|^2(t, x) \mathbb{J}(t, x) dx + \mu_1 \int_{\Omega} \mathbb{J}^4(t, x) dx \\ \leq \beta_{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{J}^2(t, a) \mathbb{A}(t, x) dx \\ \leq \beta_{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \mathbb{J}^4(t, x) dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \mathbb{A}^2(t, x) dx \right), \end{aligned}$$

d'où, pour ε suffisamment petit l'existence de $\tilde{\mu}_1 > 0$ et $\tilde{\beta}_{\infty} > 0$ tels que :

$$\frac{1}{3} \partial_t \int_{\Omega} \mathbb{J}^3(t, x) dx + \tilde{\mu}_1 \int_{\Omega} \mathbb{J}^4(t, x) dx \leq \tilde{\beta}_{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{A}^2(t, x) dx. \quad (9.6.17)$$

En faisant de même pour l'équation en \mathbb{A} , on obtient :

$$\frac{1}{3} \partial_t \int_{\Omega} \mathbb{A}^3(t, x) dx + \tilde{\mu}_1 \int_{\Omega} \mathbb{A}^4(t, x) dx \leq \tilde{\tau}_{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{J}^2(t, x) dx. \quad (9.6.18)$$

D'où, en sommant :

$$\frac{1}{3} \partial_t \int_{\Omega} (\mathbb{J}^3 + \mathbb{A}^3)(t, x) dx + \tilde{\mu}_1 \int_{\Omega} (\mathbb{J}^4 + \mathbb{A}^4)(t, x) dx \leq k_2 \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx. \quad (9.6.19)$$

Ceci nous assure l'existence de $C_4 \in C(\mathbb{R}^+)$ telle que pour $t < T$:

$$\mathbb{J}(t, \cdot), \mathbb{A}(t, \cdot) \in L^3(\Omega) \quad \text{et} \quad \|\mathbb{J}(t, \cdot)\|_{3,\Omega}, \|\mathbb{A}(t, \cdot)\|_{3,\Omega} \leq C_3(t), \quad (9.6.20)$$

puis, en intégrant (9.6.18) en temps, on obtient l'existence de $C_5 \in C(\mathbb{R}^+)$ telle que pour $0 \leq l < T$:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}, \mathbb{A} \in L^4((0, T) \times \Omega) \quad \text{et} \quad \|\mathbb{J}\|_{4,(0,T) \times \Omega}, \|\mathbb{A}\|_{4,(0,T) \times \Omega} \leq C_5(T) \\ |\nabla \mathbb{J}|, |\nabla \mathbb{A}| \in L^3((0, T) \times \Omega) \quad \text{et} \quad \|\nabla \mathbb{J}\|_{3,(0,T) \times \Omega}, \|\nabla \mathbb{A}\|_{3,(0,T) \times \Omega} \leq C_5(T). \end{aligned} \quad (9.6.21)$$

De façon similaire, en multipliant les inégalités en \mathbb{J} et \mathbb{A} respectivement par \mathbb{J}^3 et \mathbb{A}^3 , on obtient des estimations de $\mathbb{J}(t, \cdot)$ et $\mathbb{A}(t, \cdot)$ dans $L^4(\Omega)$, ainsi que de \mathbb{J} et \mathbb{A} dans $L^5((0, T) \times \Omega)$. Puis en les multipliant par \mathbb{J}^4 et \mathbb{A}^4 , on obtient l'existence de C_7 et des estimations de $\mathbb{J}(t, \cdot)$ et $\mathbb{A}(t, \cdot)$ dans $L^5(\Omega)$, ainsi que de \mathbb{J} et \mathbb{A} dans $L^6((0, T) \times \Omega)$ ■

Ainsi puisque \mathbb{J} et \mathbb{A} sont bornées dans $L^6(Q(0, T))$ chaque composante de

$$F(t, x, \mathbb{J}, \mathbb{A}) = \begin{pmatrix} -(\mu_0 + \mu_1 \mathbb{P}(t, x)) \cdot \mathbb{J}(t, x) + \beta_\infty \cdot \mathbb{A}(t, x) \\ -(\mu_0 + \mu_1 \mathbb{P}(t, x)) \cdot \mathbb{A}(t, x) + \tau_\infty \cdot \mathbb{J}(t, x) \end{pmatrix} \quad (9.6.22)$$

sera bornée dans $L^3(Q(0, T))$ et ainsi nous avons existence de $M(t) \geq 0$ continue sur \mathbb{R}^+ tel que pour $t > T$:

$$\max\{\|\mathbb{J}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega}, \|\mathbb{A}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega}\} \leq M(t). \quad (9.6.23)$$

Nous avons ensuite le lemme suivant, qui complète les estimations obtenues dans le Lemme 9.6.1

Lemme 9.6.3

Si $\mathbb{J}(t, x)$, $\mathbb{A}(t, x)$ sont des solutions classiques positives de (9.6.1)-(9.6.2) sur $[0, +\infty) \times \Omega$, alors :

$$\|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{2, \Omega} \leq C(\|\mathbb{P}_0\|_{2, \Omega}). \quad (9.6.24)$$

En outre

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbb{P}(t, \cdot)\|_{2, \Omega} \leq C, \quad (9.6.25)$$

où C est indépendant des conditions initiales

Preuve. Pour $u \in L^2(\Omega)$, on a en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega} u^3(x) dx \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ainsi en particulier, on a pour $u, v \in (L^2(\Omega))^2$ à valeurs positives, on a :

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega} (u^3(x) + v^3(x)) dx \right)^{\frac{2}{3}},$$

et donc par suite

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u^2(x) + v^2(x)) dx &\leq 2|\Omega|^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega} u^3(x) + v^3(x) dx \right)^{\frac{2}{3}} \\ \left(\int_{\Omega} (u^2(x) + v^2(x)) dx \right)^{\frac{3}{2}} &\leq 2^{\frac{3}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} u^3(x) + v^3(x) dx. \end{aligned} \quad (9.6.26)$$

Par ailleurs, de (9.6.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx &\leq k_1 \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx \\ &\quad - \mu_1 \int_{\Omega} (\mathbb{J}^3 + \mathbb{A}^3)(t, x) dx, \end{aligned} \quad (9.6.27)$$

d'où en utilisant (9.6.26) avec $u = \mathbb{J}$ et $v = \mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx &\leq k_1 \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx \\ &\quad - \frac{\mu_1}{2^{\frac{3}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (9.6.28)$$

Ainsi, $\int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx \leq y(t)$ où $y(t)$ est solution d'une équation logistique du type :

$$y'(t) = c_1 y - c_2 y^{\frac{3}{2}}, \quad y(0) = \|\mathbb{P}_0\|_{2,\Omega},$$

ce qui assure (9.6.24) et (9.6.25). ■

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 9.6.1

Soit l suffisamment grand fixé et $l^* > 0$; il existe une contante $C(6, l^*)$ indépendante des conditions initiales $\|\mathbb{J}_0\|_{1,\Omega}$ et $\|\mathbb{A}_0\|_{1,\Omega}$ telle que pour $Z = J, A$,

$$\|Z\|_{6,Q(l,l+l^*)} \leq C(6, l^*).$$

Preuve. En reprenant l'estimation (9.6.14) et en l'intégrant en temps de l à $l + l^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(l + l^*, x) dx &+ \underline{d} \int_{(l,l+l^*) \times \Omega} (|\nabla \mathbb{J}|^2 + |\nabla \mathbb{A}|^2)(t, x) dx dt \\ &+ \mu_1 \int_{(l,l+l^*) \times \Omega} (\mathbb{J}^3 + \mathbb{A}^3)(t, x) dx dt \\ &\leq k_1 \int_{(l,l+l^*) \times \Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(t, x) dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbb{J}^2 + \mathbb{A}^2)(l, x) dx. \end{aligned} \quad (9.6.29)$$

Or en utilisant le Lemme 9.6.3, pour l assez grand le deuxième terme du côté droit de (9.6.29) est contrôlé d'où l'existence de $C(3, l^*) \in C(\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathbb{J}, \mathbb{A} \in L^3((l, l+l^*) \times \Omega) \text{ et } \|\mathbb{J}\|_{3, (l, l+l^*) \times \Omega}, \|\mathbb{A}\|_{3, (l, l+l^*) \times \Omega} \leq C(3, l^*) \\ |\nabla \mathbb{J}|, |\nabla \mathbb{A}| \in L^2((l, l+l^*) \times \Omega) \text{ et } \|\nabla \mathbb{J}\|_{2, (l, l+l^*) \times \Omega}, \|\nabla \mathbb{A}\|_{2, (l, l+l^*) \times \Omega} \leq C(3, l^*). \end{aligned} \quad (9.6.30)$$

De la même façon que dans la démonstration du Lemme 9.6.1, en poursuivant les estimations on obtient le Lemme 9.6.3 ■

Enfin, nous pouvons obtenir les estimations $L^\infty(\Omega)$ uniformes souhaitées :

Théorème 9.6.1

Supposons les hypothèses Hyp 9.1 à Hyp 9.6 vérifiées et $(J_0, A_0) \in C(\bar{\Omega})$ à composantes positives. Si (J, A) est solution du système (9.2.1)-(9.2.2), alors il existe une constante strictement positive $M_0 = M_0(J_0, A_0)$ indépendante de t telle que :

$$\max_{t>0} \{ \|\mathbb{J}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega}, \|\mathbb{A}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega} \} \leq M_0. \quad (9.6.31)$$

Preuve. D'après la Proposition 9.6.1, on a l'existence pour l (soit $l \geq l_0$) suffisamment grand de $C(6, l^*)$ telle que :

$$\max \{ \|\mathbb{J}\|_{6, Q(l, l+l^*)}, \|\mathbb{A}\|_{6, Q(l, l+l^*)} \} \leq C(6, l^*).$$

On introduit \bar{J} et \bar{A} solutions dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ de :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{J}(t, x) - \operatorname{div}(d_J(t, x) \cdot \nabla \bar{J}(t, x)) = \beta_\infty \mathbb{A}(t, x), \\ \bar{J}(0, x) = \mathbb{J}_0(x), \\ (d_J(t, x) \cdot \nabla \bar{J}(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0, \end{cases} \quad (9.6.32)$$

$$\begin{cases} \partial_t \bar{A}(t, x) - \operatorname{div}(d_A(t, x) \cdot \nabla \bar{A}(t, x)) = \tau_\infty \mathbb{J}(t, x), \\ \bar{A}(0, x) = \mathbb{A}_0(x), \\ (d_A(t, x) \cdot \nabla \bar{A}(t, a, x)) \cdot \eta(x) = 0. \end{cases} \quad (9.6.33)$$

Le principe du maximum (voir Smoller [79]) nous assure alors que pour $t \geq 0$ et $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{J}(t, x) \leq \bar{J}(t, x), \\ 0 \leq \mathbb{A}(t, x) \leq \bar{A}(t, x). \end{aligned} \quad (9.6.34)$$

En utilisant les résultats de régularité dans Ladyzhenskaya et al. [61], on a alors :

$$\max \{ \|\bar{J}\|_{\infty, Q(0, l_0)}, \|\bar{A}\|_{\infty, Q(0, l_0)} \} \leq C(l_0, \|\mathbb{J}_0(x)\|_\infty, \|\mathbb{A}_0(x)\|_\infty),$$

et pour $l \geq l_0$ et $l^* > 0$:

$$\max\{\|\bar{J}\|_{\infty, Q(l, l+l^*)}, \|\bar{A}\|_{\infty, Q(l, l+l^*)}\} \leq C(l^*, \|\bar{J}(l, x)\|_{\infty}, \|\bar{A}(l, x)\|_{\infty}).$$

Or on voudrait que cette dernière estimation soit indépendante des valeurs de \bar{J} et \bar{A} au temps l .

Pour cela, on fixe $l^* = 1$, $l \geq l_0 - 1$ et on construit une fonction auxiliaire $\phi(t)$ positive, de classe C^1 sur \mathbb{R} et telle que :

$$\begin{aligned} \phi(s) &= 0 & \text{pour } s \leq 0, \\ \phi(s) &= 1 & \text{pour } s > 1, \\ \phi'(s) &\geq 0 & \text{pour } s \in (0, 1). \end{aligned} \tag{9.6.35}$$

On définit ensuite la fonction $\rho(t, x) = \phi(t - l) \bar{J}(t, x)$. Alors si $l \geq 0$, on a $\rho(t, x) = \bar{J}(t, x)$ pour $t \in [l + 1, l + 2]$ et $\rho(l, x) = 0$. Si on dérive ρ par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= \phi'(t - l) \bar{J} + \operatorname{div}(d_J(t, x) \nabla \rho) + \phi(t - l) \beta_{\infty} \mathbb{A} \\ &= \operatorname{div}(d_J(t, x) \nabla \rho) + g(t, x), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(l, x) &= 0 \\ (d_J(t, x) \cdot \nabla \rho(t, x)) \cdot \eta(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0. \end{aligned}$$

Nous avons des estimations uniformes de \mathbb{J}, \mathbb{A} dans $L^3(Q(l, l + 2))$, qui fournissent en utilisant les résultats de régularité dans Ladyzhenskaya et al. [61] une estimation uniforme dans $L^\infty(Q(l, l + 2))$ pour $\rho(t, x)$, et par la suite une estimation uniforme dans $L^\infty(Q(l + 1, l + 2))$ pour $\bar{J}(t, x)$.

On a donc pour tout intervalle $(l, l + 1)$ avec $l \geq l_0$ une estimation de

$$\|\bar{J}\|_{\infty, Q(l, l+1)} \leq C$$

avec C indépendante de $\|\bar{J}(l, x)\|_{\infty}$ et de l . Ainsi, puisque :

$$\|\bar{J}\|_{\infty, Q(0, \infty)} \leq \max\{\|\bar{J}\|_{\infty, Q(0, l_0)}, \|\bar{J}\|_{\infty, Q(l_0, \infty)}\},$$

on a une majoration uniforme pour \bar{J} , et par la suite pour \mathbb{J} . Les mêmes arguments donnent le même résultat pour \mathbb{A} ■

Remarque 9.6.1

Les estimations a priori permettant les estimations du Lemme 9.6.1 et la détermination de $M(t)$ dans la preuve de la Proposition 9.6.2 peuvent être obtenues directement à partir des équations du système (9.2.1)-(9.2.2) en intégrant également les équations en âge. Cependant, nous ne disposons alors pas des résultats concernant la théorie des équations paraboliques développés notamment par Smoller [79] ou Ladyzhenskaya et al. [61] pour conclure à l'existence globale du système.

Chapitre 10

Etude des modèle JASIG et JASIGH structurés en âge et en espace

10.1 Le modèle JASIG

Dans cette partie, nous considérons une structuration discrète en âge de l'infection. De ce fait, en plus de l'équation pour l'environnement contaminé représenté par la variable $G(t, x)$, nous aurons cette fois-ci six classes de population :

- $J_s(t, a, x)$ représentant les juvéniles sains,
- $J_n(t, a, x)$ représentant les juvéniles nouvellement infectés,
- $J_c(t, a, x)$ représentant les juvéniles infectés chroniques,
- $A_s(t, a, x)$ représentant les adultes sains,
- $A_n(t, a, x)$ représentant les adultes nouvellement infectés,
- et $A_c(t, a, x)$ représentant les adultes infectés chroniques.

Les individus nouvellement infectés deviennent chroniques avec un taux $\rho > 0$ ($1/\rho$ étant le temps pour devenir chronique) et les individus chroniques le restent à vie. De plus, le virus n'a pas d'impact sur la démographie de la population hôte. Nous avons donc un modèle basé sur le schéma compartimental de la figure Fig. 10.1.1.

Notant $U(t, a, x) = {}^t (J_s(t, a, x), J_n(t, a, x), J_c(t, a, x), A_s(t, a, x), A_n(t, a, x), A_c(t, a, x))$, le système correspondant à ce modèle s'écrit avec l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \forall t > 0, \forall a \in (0, a_+), \forall x \in \Omega, \\ (\partial_t + \partial_a)U(t, a, x) - \operatorname{div}(D(t, a, x) \cdot \nabla U(t, a, x)) = (\Phi(U) + \Psi(U))(t, a, x), \end{cases} \quad (10.1.1)$$

ainsi que l'équation différentielle ordinaire

$$G'(t, x) = \left(\int_0^{a_+} \Upsilon(t, a, x) \cdot U(t, a, x) da \right) \cdot (1 - G(t, x)) - \delta(t, x) \cdot G(t, x), \quad (10.1.2)$$

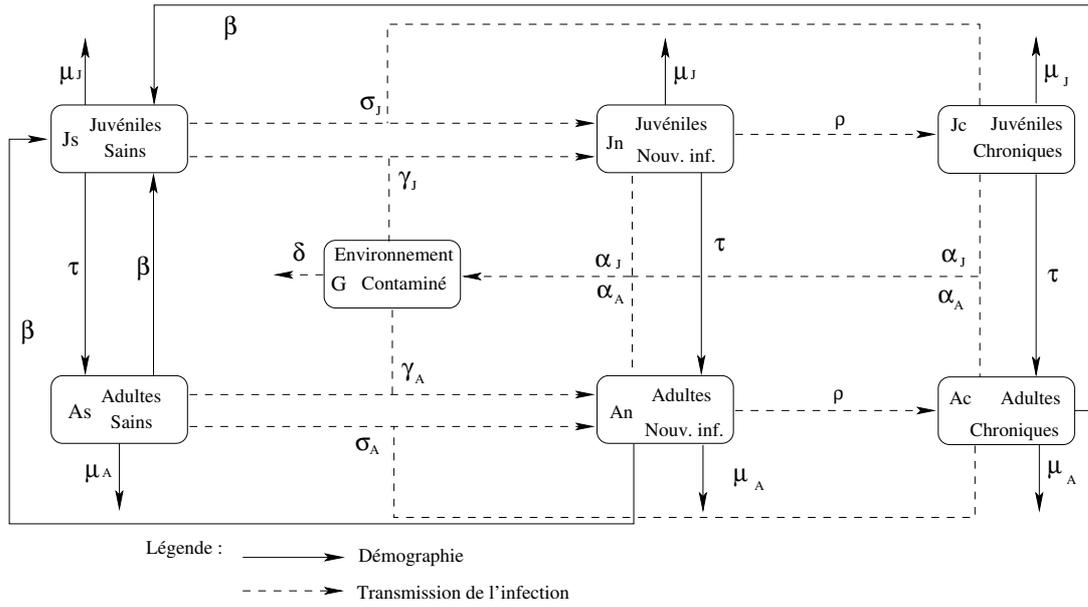


FIG. 10.1.1: Le modèle JASIG structuré discrètement en âge de l'infection

en considérant les conditions initiales

$$\begin{cases} J_s(t, 0, x) = \int_{a_1}^{a_+} \beta(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A(t, a, x) da, \\ J_n(t, 0, x) = J_c(t, 0, x) = 0, \\ A_s(t, a, x) = A_n(t, a, x) = A_c(t, a, x) = 0 \text{ pour } a \leq a_1, \\ Z(0, a, x) = Z_0(a, x) \text{ pour } Z = J_s, J_n, J_c, A_s, A_n, A_c, \\ G(0, x) = G_0(x), \end{cases} \quad (10.1.3)$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \forall t > 0, \forall a \in (0, a_+), \forall x \in \partial\Omega, \\ d_J \nabla Z(t, a, x) \cdot \eta(x) = 0 \text{ pour } Z = J_s, J_n, J_c, \\ d_A \nabla Z(t, a, x) \cdot \eta(x) = 0 \text{ pour } Z = A_s, A_n, A_c. \end{cases} \quad (10.1.4)$$

La matrice des coefficients de diffusion D et les vecteurs $\Phi(U)$, prenant en compte la démographie, $\Psi(U)$ pour la transmission du virus dans les populations de campagnols, et Υ représentant la contamination du sol par les campagnols sont définis par :

$$D(t, a, x) = \begin{pmatrix} d_J(t, a, x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_J(t, a, x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_J(t, a, x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_A(t, a, x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_A(t, a, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_A(t, a, x) \end{pmatrix}, \quad (10.1.5)$$

$$\Upsilon(t, a, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_J^n(t, a, x) \\ \alpha_J^c(t, a, x) \\ 0 \\ \alpha_A^n(t, a, x) \\ \alpha_A^c(t, a, x) \end{pmatrix}, \quad (10.1.6)$$

$$\Phi(U)(t, a, x) = \begin{pmatrix} -\mu_J(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot J_s(t, a, x) - \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J_s(t, a, x) \\ -\mu_J(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot J_n(t, a, x) - \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J_n(t, a, x) \\ -\mu_J(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot J_c(t, a, x) - \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J_c(t, a, x) \\ \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J_s(t, a, x) - \mu_A(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A_s(t, a, x) \\ \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J_n(t, a, x) - \mu_A(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A_n(t, a, x) \\ \tau(t, a, x, \mathbb{A}(t, x)) \cdot J_c(t, a, x) - \mu_A(t, a, x, \mathbb{P}(t, x)) \cdot A_c(t, a, x) \end{pmatrix}, \quad (10.1.7)$$

$$\Psi(U)(t, a, x) = \begin{pmatrix} -\sigma_J(t, a, x) \cdot J_s(t, a, x) - \gamma_J(t, a, x) \cdot G(t, x) \cdot J_s(t, a, x) \\ \sigma_J(t, a, x) \cdot J_s(t, a, x) + \gamma_J(t, a, x) \cdot G(t, x) \cdot J_s(t, a, x) - \rho \cdot J_n(t, a, x) \\ \rho \cdot J_n(t, a, x) \\ -\sigma_A(t, a, x) \cdot A_s(t, a, x) - \gamma_A(t, a, x) \cdot G(t, x) \cdot A_s(t, a, x) \\ \sigma_A(t, a, x) \cdot A_s(t, a, x) + \gamma_A(t, a, x) \cdot G(t, x) \cdot A_s(t, a, x) - \rho \cdot A_n(t, a, x) \\ \rho \cdot A_n(t, a, x) \end{pmatrix}, \quad (10.1.8)$$

avec, pour $Z = J, A$:

$$\begin{aligned} \sigma_Z(t, a, x) = & \int_0^{a^\dagger} \sigma_{j,Z}^{ma}(t, a, a', x) \cdot J_n(t, a', x) + \sigma_{a,Z}^{ma}(t, a, a', x) \cdot A_n(t, a', x) \\ & + \frac{\sigma_{j,Z}^{pm}(t, a, a', x) \cdot J_c(t, a', x)}{\mathbb{J}(t, x)} + \frac{\sigma_{a,Z}^{pm}(t, a, a', x) \cdot A_c(t, a', x)}{\mathbb{A}(t, x)} da'. \end{aligned} \quad (10.1.9)$$

Enfin, on a noté :

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(t, x) &= \int_0^{a_+} A_s(t, a, x) + A_n(t, a, x) + A_c(t, a, x) da, \\ \mathbb{J}(t, x) &= \int_0^{a_+} J_s(t, a, x) + J_n(t, a, x) + J_c(t, a, x) da, \\ \mathbb{P}(t, x) &= \mathbb{J}(t, x) + \mathbb{A}(t, x).\end{aligned}\tag{10.1.10}$$

Remarque 10.1.1

En additionnant les équations en J_s, J_n et J_c d'une part et celles en A_s, A_n et A_c d'autre part, nous obtenons les équations (9.2.1)-(9.2.2).

10.2 Hypothèses et notations

Nous supposons que les conditions initiales en $t = 0$ $J_s^0, J_n^0, J_c^0, A_s^0, A_n^0$ et A_c^0 sont continues, positives (ou nulles) et L^∞ . Les hypothèses Hyp 9.1 à Hyp 9.3 considérées dans la partie précédente concernant les paramètres démographiques et de diffusion sont supposées vérifiées, et on fait de plus l'hypothèse suivante concernant les paramètres de transmission du virus :

HYP 10.1

- $\rho > 0,$

- pour $Z = J, A,$ on a $\gamma_Z \in L^\infty(Q_Z)$ à valeurs positives, avec :

$$0 \leq \gamma_Z(t, a, x) \leq \gamma_\infty \quad \forall t, a, x$$

- pour $Z = J, A$ et $z = n, c,$ on a $\alpha_Z^z \in L^\infty(Q_Z)$ à valeurs positives, avec :

$$0 \leq \alpha_Z^z(t, a, x) \leq \alpha_\infty \quad \forall t, a, x$$

- et pour $Z, Z' = J, A$ et $z = n, c,$ on a $\sigma_{Z, Z'}^z \in L^\infty(Q_Z)$ à valeurs positives, avec :

$$0 \leq \sigma_{Z, Z'}^z(t, a, x) \leq \sigma_\infty \quad \forall t, a, x$$

HYP 10.2

On $J_s^0(a, x) > 0$ sur $(0, \underline{a}) \times \Omega$ et $A_s^0(a, x) > 0$ sur $(a_1, a_1 + \underline{a}) \times \Omega$ avec $\underline{a} > 0.$

Cette dernière hypothèse est utile pour prouver le Lemme 10.3.2 qui sert lui même à pouvoir traiter le cas de la partie « mélange proportionné » dans la suite.

Pour simplifier les notations, nous noterons :

$$\mathcal{H}^2(T) = \left(L^2((0, T) \times (0, a_+) \times \Omega) \right)^3 \times \left(L^2((0, T) \times (a_1, a_+) \times \Omega) \right)^3, \tag{10.2.1}$$

et :

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}^2} = \sum_{Z=J_s, J_n, J_c} \|Z(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (0, a_+) \times \Omega} + \sum_{Z=A_s, A_n, A_c} \|Z(t, \cdot, \cdot)\|_{2, (a_1, a_+) \times \Omega}. \quad (10.2.2)$$

10.3 Résultat d'existence globale

Comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, nous nous intéressons à prouver l'existence d'une unique solution faible globale pour le système (10.1.1)-(10.1.4). Nous renvoyons le lecteur aux définitions 9.5.1 et 9.5.2 pour la notion de solutions faibles, et aux Propositions 9.4.1 et 9.4.2 ainsi que le Corollaire 9.4.1 concernant la résolution du cas linéaire, pour une équation de réaction-diffusion linéaire, structurée en âge en en espace.

Afin de prouver le Théorème 10.3.1 énoncé plus loin, il nous reste à rappeler le résultat suivant, que l'on montre par variation de la constante :

Lemme 10.3.1

La solution de l'équation

$$\begin{cases} G'(t) = f(t) - g(t) \cdot G(t) \\ G(0) = G_0, \end{cases}$$

avec $f, g \in L^\infty$ est donnée par :

$$G(t) = G_0 e^{-\int_0^t g(s) ds} + \int_0^t f(l) e^{-\int_l^t g(s) ds} dl, \quad t > 0.$$

Nous avons alors le Théorème suivant :

Théorème 10.3.1

Supposons que les hypothèses Hyp 9.1 à Hyp 9.3 ainsi que Hyp 10.1 et Hyp 10.2 sont vérifiées, et que les conditions initiales $(J_s^0, J_n^0, J_c^0, A_s^0, A_n^0, A_c^0, G(0))$ sont positives. Alors pour tout $T > 0$ le problème (10.1.1)-(10.1.4) possède une unique solution faible globale $(J_s, J_n, J_c, A_s, A_n, A_c, G)$ à composantes positives, avec $0 \leq G(t, x) \leq 1$ et définie sur $\left((0, T) \times (0, a_+) \times \Omega\right)^3 \times \left((0, T) \times (a_1, a_+) \times \Omega\right)^3 \times \left((0, T) \times \Omega\right)$.

La démonstration est similaire à celle du Théorème 9.5.1. Nous allons la reprendre en détaillant les points qui la complexifie.

Preuve. On note (J^*, A^*) la solution de (9.4.6)-(9.4.7).

Notons également \mathcal{K} le domaine convexe inclus dans $\mathcal{H}^2 \times L^\infty$ défini par :

$$\mathcal{K} = \{(U, G) \in \mathcal{H}^2(T) \times L^2((0, T) \times \Omega), \quad 0 \leq G \leq 1, \quad 0 \leq Z \leq J^*, \quad Z = J_s, J_n, J_c, \\ \text{et } 0 \leq Z \leq A^*, \quad Z = A_s, A_n, A_c\}. \quad (10.3.1)$$

Notons que nous avons alors le lemme suivant, qui servira pour traiter la partie de l'incidence correspondant au mélange proportionné :

Lemme 10.3.2

On définit w_j (respectivement w_a) la solution positive ou nulle du problème linéaire (9.4.1) avec $d = d_J$ (resp. $d = d_A$), $\mu = \mu_\infty + \tau_\infty + \gamma_\infty + \sigma_\infty(\mathbb{J}^* + \mathbb{A}^* + 2a_\dagger)$ (resp. $\mu = \mu_\infty + \gamma_\infty + \sigma_\infty(\mathbb{J}^* + \mathbb{A}^* + 2a_\dagger)$), $f = 0, \beta = 0$ et $w_{j,0} = \mathbb{J}_s(0)$ (resp. $w_{j,0} = \mathbb{A}_s(0)$). Alors il existe une constante $m(T) > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} 0 < m(T) \leq w_j(t, a, x) \leq J_s(t, a, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < a < \underline{a}, \quad x \in \Omega, \\ 0 < m(T) \leq w_a(t, a, x) \leq A_s(t, a, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad a_1 < a < a_1 + \underline{a}, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Preuve. En écrivant :

$$\frac{\sigma_{j,Z}^{pm}(t, a, a', x) \cdot J_c(t, a', x)}{\mathbb{J}(t, x)} = \sigma_{j,Z}^{pm}(t, a, a', x) - \frac{\sigma_{j,Z}^{pm}(t, a, a', x) \cdot (J_s + J_n)(t, a', x)}{\mathbb{J}(t, x)},$$

et de façon similaire la partie $\frac{\sigma_{a,Z}^{pm}(t, a, a', x) \cdot A_c(t, a', x)}{\mathbb{A}(t, x)}$, les inégalités $w_j(t, a, x) \leq J_s(t, a, x)$

et $w_a(t, a, x) \leq J_a(t, a, x)$ proviennent du résultat de comparaison (Corollaire 9.4.1). La borne $m(T)$ est un résultat d'intégration le long des caractéristiques de $(\partial_t + \partial_a)$, comme présenté dans Langlais [63] en utilisant l'Hypothèse Hyp 10.2, de façon similaire à ce que nous avons vu dans la partie II, également pour traiter le morceau en mélange proportionné. ■

Définissons enfin $\Phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ définie par $\Phi(\tilde{J}, \tilde{A}) = (J, A)$ où (J, A) est solution du problème linéaire :

$$\begin{cases} \forall t > 0, \forall a \in (0, a_\dagger), \forall x \in \Omega, \\ (\partial_t + \partial_a)U(t, a, x) - \text{div}(D(t, a, x) \cdot \nabla U(t, a, x)) \\ = (\tilde{\Phi}(U, \tilde{U}) + \tilde{\Psi}(U, \tilde{U}))(t, a, x), \end{cases} \quad (10.3.2)$$

$$G'(t, x) = \left(\int_0^{a_\dagger} \Upsilon(t, a, x) \cdot \tilde{U}(t, a, x) da \right) \cdot (1 - G(t, x)) - \delta(t, x) \cdot G(t, x), \quad (10.3.3)$$

$$\begin{cases} J_s(t, 0, x) = \int_{a_1}^{a_\dagger} \beta(t, a, x, \tilde{P}(t, x)) \cdot \tilde{A}(t, a, x) da, \\ J_n(t, 0, x) = J_c(t, 0, x) = 0, \\ A_s(t, a, x) = A_n(t, a, x) = A_c(t, a, x) = 0 \quad \text{pour } a \leq a_1, \\ Z(0, a, x) = Z_0(a, x) \quad \text{pour } Z = J_s, J_n, J_c, A_s, A_n, A_c, \\ G(0, x) = G_0(x), \end{cases} \quad (10.3.4)$$

$$\begin{cases} \forall t > 0, \forall a \in (0, a_+), \forall x \in \partial\Omega, \\ d_J \nabla Z(t, a, x) \cdot \eta(x) = 0 & \text{pour } Z = J_s, J_n, J_c, \\ d_A \nabla Z(t, a, x) \cdot \eta(x) = 0 & \text{pour } Z = A_s, A_n, A_c, \end{cases} \quad (10.3.5)$$

avec D et Υ comme en (10.1.5) et (10.1.6), et :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(U, \tilde{U})(t, a, x) = & \\ & \left(\begin{array}{l} -\mu_J(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot J_s(t, a, x) - \tau(t, a, x, \tilde{\mathbb{A}}(t, x)) \cdot J_s(t, a, x) \\ -\mu_J(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot J_n(t, a, x) - \tau(t, a, x, \tilde{\mathbb{A}}(t, x)) \cdot J_n(t, a, x) \\ -\mu_J(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot J_c(t, a, x) - \tau(t, a, x, \tilde{\mathbb{A}}(t, x)) \cdot J_c(t, a, x) \\ \tau(t, a, x, \tilde{\mathbb{A}}(t, x)) \cdot J_s(t, a, x) - \mu_A(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot A_s(t, a, x) \\ \tau(t, a, x, \tilde{\mathbb{A}}(t, x)) \cdot J_n(t, a, x) - \mu_A(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot A_n(t, a, x) \\ \tau(t, a, x, \tilde{\mathbb{A}}(t, x)) \cdot J_c(t, a, x) - \mu_A(t, a, x, \tilde{\mathbb{P}}(t, x)) \cdot A_c(t, a, x) \end{array} \right), \end{aligned} \quad (10.3.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(U, \tilde{U})(t, a, x) = & \\ & \left(\begin{array}{l} -\tilde{\sigma}_J(t, a, x) \cdot J_s(t, a, x) - \gamma_J(t, a, x) \cdot \tilde{G}(t, x) \cdot J_s(t, a, x) \\ \tilde{\sigma}_J(t, a, x) \cdot J_s(t, a, x) + \gamma_J(t, a, x) \cdot \tilde{G}(t, x) \cdot J_s(t, a, x) - \rho \cdot J_n(t, a, x) \\ \rho \cdot J_n(t, a, x) \\ -\tilde{\sigma}_A(t, a, x) \cdot A_s(t, a, x) - \gamma_A(t, a, x) \cdot \tilde{G}(t, x) \cdot A_s(t, a, x) \\ \tilde{\sigma}_A(t, a, x) \cdot A_s(t, a, x) + \gamma_A(t, a, x) \cdot \tilde{G}(t, x) \cdot A_s(t, a, x) - \rho \cdot A_n(t, a, x) \\ \rho \cdot A_n(t, a, x) \end{array} \right), \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

avec, pour $Z = J, A$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_Z(t, a, x) = & \sigma_{j,Z}^{ma}(t, a, x) \cdot \tilde{J}_n(t, a, x) + \sigma_{a,Z}^{ma}(t, a, x) \cdot \tilde{A}_n(t, a, x) \\ & + \frac{\sigma_{j,Z}^{pm}(t, a, x) \cdot \tilde{J}_c(t, a, x)}{\tilde{\mathbb{J}}(t, x)} + \frac{\sigma_{a,Z}^{pm}(t, a, x) \cdot \tilde{A}_c(t, a, x)}{\tilde{\mathbb{A}}(t, x)}. \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

Notons qu'en sommant les 3 équations en J_s, J_n et J_c d'une part et celles en A_s, A_n et A_c d'autre part, nous obtenons les équations (9.5.2)-(9.5.3). On a donc $\mathbb{J} \geq 0$ et $\mathbb{A} \geq 0$. L'équation en J_s est de la forme de (9.4.1) avec $\mu = \mu_J + \tau + \tilde{\sigma}_J + \gamma_J \tilde{G}$ et $f = 0$, ce qui assure la positivité de J_s .

L'équation en J_n est de la forme de (9.4.1) avec $\mu = \mu_J + \tau + \rho$ et $f = \tilde{\sigma}_J \cdot J_s + \gamma_J \tilde{G} J_s$, ce qui assure la positivité de J_n .

L'équation en J_c est de la forme de (9.4.1) avec $\mu = \mu_J + \tau$ et $f = \rho J_n$, ce qui assure la

positivité de J_c .

Les équations en A_s , A_n et A_c se traitent de la même manière. De plus, on a alors nécessairement $0 \leq G(t) \leq 1$ pour tout t , car les différents coefficients sont positifs. Ainsi en utilisant les résultats sur les équations linéaires du chapitre précédent et le Lemme 10.3.1, $\Phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ est bien définie.

Il reste à montrer que Φ est une fonction contractante. On considère donc $(U_1, G_1) = \Phi(\tilde{U}_1, \tilde{G}_1)$ et $(U_2, G_2) = \Phi(\tilde{U}_2, \tilde{G}_2)$.

Lemme 10.3.3

Il existe des constantes k_1 et k_2 dépendant uniquement de $\underline{d}, \beta_\infty, \alpha_\infty, \gamma_\infty, \sigma_\infty, a_\dagger, K_\beta, K_\tau, K_Z$ et $\|Z^*\|_{\infty, (0, T) \times (0, a_\dagger) \times \Omega}$, pour $Z = J, A$ telles que pour $t \in (0, T)$, on ait :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|(U_1 - U_2)(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|(G_1 - G_2)(t, \cdot)\|_{2, \Omega}) \leq \\ k_1 (\|(U_1 - U_2)(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|(G_1 - G_2)(t, \cdot)\|_{2, \Omega}) \\ + k_2 (\|(\tilde{U}_1 - \tilde{U}_2)(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|(\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2)(t, \cdot)\|_{2, \Omega}). \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

Preuve. On notera par k_i , $i \geq 3$ des constantes ayant les mêmes propriétés que k_1 . La principale différence avec la démonstration du Lemme 9.5.1 est qu'il nous faut traiter également les termes prenant en compte la transmission de l'infection, et l'équation en G . Nous nous contenterons donc ici de traiter le cas de l'équation en J_s et de l'équation en G .

On commence donc par multiplier l'équation correspondant à la différence $J_{s,1} - J_{s,2}$ que l'on multiplie par $J_{s,1} - J_{s,2}$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_t + \partial_a) (J_{s,1} - J_{s,2})^2 - \operatorname{div}(d_J \nabla (J_{s,1} - J_{s,2})) (J_{s,1} - J_{s,2}) + (\mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_1) J_{s,1} - \mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_2) J_{s,2}) (J_{s,1} - J_{s,2}) \\ + (\tau(\tilde{A}_1) J_{s,1} - \tau(\tilde{A}_2) J_{s,2}) (J_{s,1} - J_{s,2}) + (\tilde{\sigma}_{J_1} J_{s,1} - \tilde{\sigma}_{J_2} J_{s,2}) (J_{s,1} - J_{s,2}) \\ + \gamma_J (\tilde{G}_1 J_{s,1} - \tilde{G}_2 J_{s,2}) (J_{s,1} - J_{s,2}) = 0, \end{aligned}$$

et en intégrant sur Ω :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_t + \partial_a) \int_{\Omega} (J_{s,1} - J_{s,2})^2 dx + \int_{\Omega} d_J |\nabla (J_{s,1} - J_{s,2})|^2 dx \\ + \int_{\Omega} (\mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_1) + \tau(\tilde{A}_1) + \tilde{\sigma}_{J_1} + \gamma_J \tilde{G}_1) (J_{s,1} - J_{s,2})^2 dx \\ = - \int_{\Omega} J_{s,2} (J_{s,1} - J_{s,2}) ((\mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_1) - \mu_J(\tilde{\mathbb{P}}_2)) + (\tau(\tilde{A}_1) - \tau(\tilde{A}_2)) \\ + (\tilde{\sigma}_{J_1} - \tilde{\sigma}_{J_2}) + \gamma_J (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2)) dx. \end{aligned}$$

En intégrant ensuite en âge sur $(0, a_+)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_a) \| (J_{s,1} - J_{s,2})(t, \cdot, \cdot) \|_{2, (0, a_+) \times \Omega} + \underline{d} \| \nabla (J_{s,1} - J_{s,2})(t, \cdot, \cdot) \|_{2, (0, a_+) \times \Omega} \\ \leq I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t), \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

avec I_1, I_2 et I_3 comme dans la démonstration du Lemme 9.5.1, et :

$$I_4(t) = k_3 \int_{(0, a_+) \times \Omega} |J_{s,1} - J_{s,2}| \cdot |\widetilde{\sigma}_{J_1} - \widetilde{\sigma}_{J_2}| dx da, \quad (10.3.11)$$

d'où, en utilisant notamment le résultat de positivité, Lemme 10.3.2 :

$$\begin{aligned} I_4(t) &\leq k_4 \int_{(0, a_+) \times \Omega} |\mathbb{J}_{s,1} - \mathbb{J}_{s,2}| (|\widetilde{J}_{n,1} - \widetilde{J}_{n,2}| + |\widetilde{A}_{n,1} - \widetilde{A}_{n,2}| + |\widetilde{J}_{c,1} - \widetilde{J}_{c,2}| + |\widetilde{A}_{c,1} - \widetilde{A}_{c,2}|) dx da \\ &\leq k_5 (\| (U_1 - U_2)(t) \|_{\mathcal{H}^2} + \| (\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_2)(t) \|_{\mathcal{H}^2}). \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} I_5(t) &= k_6 \int_{(0, a_+) \times \Omega} |J_{s,1} - J_{s,2}| \cdot |\widetilde{G}_1 - \widetilde{G}_2| dx da \\ &\leq k_7 (\| (U_1 - U_2)(t) \|_{\mathcal{H}^2} + \| (G_1 - G_2)(t, \cdot) \|_{2, \Omega} \\ &\quad + \| (\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_2)(t) \|_{\mathcal{H}^2} + \| (\widetilde{G}_1 - \widetilde{G}_2)(t, \cdot) \|_{2, \Omega}). \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

On considère maintenant l'équation correspondant à la différence $G_1 - G_2$ que l'on multiplie par $G_1 - G_2$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (G_1 - G_2)^2 &= \left(\int_0^{a_+} \Upsilon \cdot (\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_2) da \right) (G_1 - G_2) \\ &\quad - \left(\int_0^{a_+} \Upsilon \cdot (\widetilde{U}_1 G_1 - \widetilde{U}_2 G_2) da \right) \cdot (G_1 - G_2) - \delta (G_1 - G_2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (G_1 - G_2)^2 &\leq \left(\int_0^{a_+} \Upsilon \cdot (\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_2) da \right) (G_1 - G_2) \\ &\quad + k_8 \left(\int_0^{a_+} |\widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_2| \cdot |G_1 - G_2| da + |G_1 - G_2|^2 \right), \end{aligned}$$

d'où là encore, en intégrant en espace et en utilisant les inégalités de Hölder, de Cauchy-Schwarz, et l'hypothèse Hyp 10.1 :

$$\frac{1}{2}\partial_t(G_1 - G_2)^2 \leq k_9(\|(\tilde{U}_1 - \tilde{U}_2)(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|(G_1 - G_2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}). \quad (10.3.13)$$

En travaillant de même sur les équations en J_n, J_c, A_s, A_n et A_c , on montre le Lemme 10.3.3. ■

De la même façon que l'on a montré le Lemme 9.5.2, on montre le lemme suivant :

Lemme 10.3.4

L'application Φ est strictement contractante sur $\mathcal{H}^2(\tau^) \times L^2((0, T) \times \Omega)$ avec τ^* petit, i.e. il existe $\rho(\tau^*) < 1$ tel que :*

$$\begin{aligned} & (\|(U_1 - U_2)(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|(G_1 - G_2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}) \\ & \leq \rho(\tau^*)(\|(\tilde{U}_1 - \tilde{U}_2)(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|(\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2)(t, \cdot)\|_{2,\Omega}). \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

La fin de la démonstration du Théorème 10.3.1 est alors similaire à celle du Théorème 9.5.1 ■

10.4 Majoration uniforme des solutions

De la même façon que pour le cas du système JA, en supposant l'hypothèse Hyp 9.5 vérifiée, nous avons le résultat suivant :

Théorème 10.4.1

Supposons les hypothèses Hyp 9.1 à Hyp 9.6 ainsi que Hyp 10.1 et Hyp 10.2 vérifiées. Si $(U, G) = (J_s, J_n, J_c, A_s, A_n, A_c, G)$ est solution du système (10.1.1)-(10.1.4) avec $U_0 \in C(\bar{\Omega})$ positif et $0 \leq G_0 \leq 1$, $G_0 \in C(\bar{\Omega})$, alors il existe une constante strictement positive $M_0 = M_0(U_0, G_0)$ indépendante de t telle que :

$$\max_{t>0} \{\|J(t, \cdot)\|_{\infty,\Omega}, \|A(t, \cdot)\|_{\infty,\Omega}\} \leq M_0. \quad (10.4.1)$$

Preuve. On a déjà vu que $\forall x \in \Omega, \forall t > 0, 0 \leq G(t, x) \leq 1$. De plus, il est facile de vérifier en regardant la situation au bord du domaine que \mathbb{R}_+^7 est invariant par le système (10.1.1)-(10.1.4) (voir Smoller [79]).

Enfin, en faisant la somme des 3 équations en J_s, J_n et J_c d'une part et celles en A_s, A_n et A_c d'autre part, nous obtenons les équations (9.2.1)-(9.2.2). Le Théorème 9.6.1 nous assure alors le résultat. ■

10.5 Le modèle JASIGH

Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 2 pour les explications concernant le passage du modèle JASIG au modèle JASIGH. Le modèle JASIGH, que nous étudierons sera donc composé du système (10.1.1)-(10.1.4), auquel on ajoute les équations suivantes relatives aux hommes : Pour $t > 0$, et $x \in \Omega$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t H_s(t, x) - \operatorname{div}(d_{H,s}(t, x) \cdot \nabla H_s(t, x)) = -\gamma_H(t, x) G(t, x) H_s(t, x), \\ H_s(0, x) = H_s^0(x), \\ (d_{H,s}(t, x) \cdot \nabla H_s(t, x)) \cdot \eta(x) = 0 \text{ pour } t > 0, x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (10.5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t H_i(t, x) - \operatorname{div}(d_{H,i}(t, x) \cdot \nabla H_i(t, x)) = \gamma_H(t, x) G(t, x) H_s(t, x) - \lambda H_i(t, x), \\ H_i(0, x) = H_i^0(x), \\ (d_{H,i}(t, x) \cdot \nabla H_i(t, x)) \cdot \eta(x) = 0 \text{ pour } t > 0, x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (10.5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t H_r(t, x) - \operatorname{div}(d_{H,r}(t, x) \cdot \nabla H_r(t, x)) = \varepsilon \lambda H_i(t, x), \\ H_r(0, x) = H_r^0(x), \\ (d_{H,r}(t, x) \cdot \nabla H_r(t, x)) \cdot \eta(x) = 0 \text{ pour } t > 0, x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (10.5.3)$$

Nous faisons également l'hypothèse suivante :

HYP 10.3

- On a $\lambda > 0$, et $0 < \varepsilon < 1$,
- $\gamma_H \in L^\infty((0, +\infty) \times \Omega)$ à valeurs positives,
- et pour $x \in \Omega$, on suppose que $0 < \underline{d} \leq d_H(t, a, x) \leq \bar{d} < +\infty$.

La différence avec le système JASIG précédemment étudié réside donc dans le fait que l'on a ajouté des équations modélisant l'évolution des populations humaines. Toutefois, ces populations ne sont influencées que par l'équation représentant le pourcentage d'environnement contaminé et n'influencent en retour aucune des équations du modèle JASIG (ni celles représentant les différentes classes de campagnols, ni même celle représentant le pourcentage de sol contaminé). Les résultats établis jusqu'à présent restent donc vrais. Nous pouvons également étudier le système (10.5.1)-(10.5.3), avec l'hypothèse minimaliste que $G \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ pour tout T .

Nous avons alors le résultat suivant, (voir Fitzgibbon, Langlais & Morgan [31]) :

Théorème 10.5.1

Supposons que les conditions initiales (H_s^0, H_i^0, H_r^0) sont positives et continues sur Ω . Alors il existe une unique solution globale classique au système (10.5.1)-(10.5.3), à composantes positives et uniformément bornée sur $(0, +\infty) \times \Omega$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|H_s(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega} &\leq \|H_s^0\|_{\infty, \Omega}, \\ \|H_i(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega} + \|H_r(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega} &\leq C(\|H_s^0\|_{\infty, \Omega}, \|H_i^0\|_{\infty, \Omega}, \|H_r^0\|_{\infty, \Omega}). \end{aligned} \quad (10.5.4)$$

Preuve. L'existence locale provient classiquement du Théorème du point fixe de Banach. L'existence globale est garantie par des estimations a priori et les résultats de régularité dans Ladyzhenskaya et al. [61]. Pour le système qui nous intéresse ici, ces estimations a priori sont obtenues par le principe du maximum et le fait que $0 \leq G(t, x) \leq 1$ qui conduisent en les appliquant successivement aux 3 équations en H_s, H_i et H_r aux inégalités dans (10.5.4) ; voir Fitzgibbon et al. [29] [30] [31]. ■

Remarque 10.5.1

Si on intègre les 3 équations (10.5.1)-(10.5.3) en espace et que l'on somme, on obtient :

$$H'(t) = \int_{\Omega} (H_s' + H_i' + H_r')(t, x) dx = -(1 - \varepsilon)\lambda \cdot \int_{\Omega} H_i(t, x) dx \leq 0,$$

ainsi la population totale d'humains décroît, ce qui est logique car il n'y a aucun apport démographique dans nos équations, et seulement une mortalité des individus infectés.

Conclusion et perspectives

Nous avons présenté dans cette partie des résultats d'existence et d'unicité concernant les modèles JA, JASIG et JASIGH dans le cas de systèmes structurés continument en temps, espace et âge chronologique ; nous avons également utilisé une structuration discète en âge de l'infection. Des majorations uniformes des solutions pour ces modèles ont aussi été démontrées. Pour obtenir ces résultats, nous avons pu considérer un cadre mathématique plus général que celui du modèle hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre qui nous motive. Une perspective à ce travail est donc d'inclure également des hypothèses « naturelles » de ce système, comme par exemple la croissante du taux de mortalité par rapport à la densité de population ou la décroissance du taux de maturation par rapport à la densité d'adultes, et de tenter d'obtenir avec ces hypothèses supplémentaires des résultats plus qualitatifs que ceux présentés ici.

Une autre perspective à l'étude faite dans cette partie est de s'intéresser à la réalisation et à l'étude de simulations numériques pour les systèmes considérés ici. Cela nous permettra d'avoir des indications sur la propagation du virus induite par ces systèmes, et de vérifier si cela correspond aux propagations observées sur le terrain. Les simulations numériques sont certainement aussi le meilleur moyen d'étudier les effets de l'hétérogénéité spatiale considérée du fait de la structuration en colonies des populations hôtes. En effet, dans l'étude que nous avons faite dans cette partie, cette hétérogénéité ne fait que rajouter des hypothèses sur les coefficients de diffusion, sans apporter de résultats supplémentaires par rapport à une situation homogène.

**Annexe : An age-dependent model
describing the spread of panleucopenia
virus within feline populations**

MATHEMATICAL MODELLING OF
POPULATION DYNAMICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 63
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 2004

AN AGE-DEPENDENT MODEL DESCRIBING
THE SPREAD OF PANLEUCOPENIA VIRUS
WITHIN FELINE POPULATIONS

W. E. FITZGIBBON

Department of Mathematics, University of Houston, Houston, Texas 77204-3476, U.S.A.

E-mail: fitz@math.uh.edu

M. LANGLAIS

UMR CNRS 5466, case 26, V. Segalen Bordeaux 2 University, 33076 Bordeaux Cedex, France

E-mail: langlais@sm.u-bordeaux2.fr

J. J. MORGAN

Department of Mathematics, Texas A & M University

College Station, Texas 77843-3368, U.S.A.

E-mail: jmorgan@math.tamu.edu

D. PONTIER

UMR CNRS 5558, C. Bernard Lyon 1 University, 69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail: dpontier@biomserv.univ-lyon1.fr

C. WOLF

UMR CNRS 5466, case 26, V. Segalen Bordeaux 2 University, 33076 Bordeaux Cedex, France

E-mail: wolf@sm.u-bordeaux2.fr

Abstract. Global existence results and long time behavior are provided for a mathematical model describing the propagation of Feline Panleucopenia Virus (FPLV) within a domestic cat population; two transmission modes are involved: a direct one from infective cats to susceptible ones, and an indirect one from the contaminated environment to susceptible cats. A more severe impact of the virus on young cats requires an age-structured model.

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 92D30; Secondary 35L45, 35B40, 35B45.

This work is partially supported by a joint N.S.F.-C.N.R.S. grant DMS 0089590, "Heterogeneous Reaction Diffusion Advection Systems" and by the French Polar Institute (IPEV, Program n°279).

The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

1. Introduction. We shall be concerned by models describing the spread of infectious disease through distributed populations. In recent times there has been much activity concerning the development and analysis of mathematical models describing the transmission of infectious disease, cf Busenberg and Cooke [5], Brauer and Castillo-Chavez [4], Diekmann and Heesterbeek [7] and the references contained therein. However, the vast majority of this work concerns the direct transmission of disease (horizontal, vertical, or both) among populations. In the work at hand we account both for the direct horizontal spread of the disease from infected individuals to susceptible individuals within the population and the indirect spread of the disease to the host population via a contact with a contaminated environment. A prime example of such a disease is Feline Panleucopenia Virus FPLV. FPLV, a member of the parvoviridae family, infects all Felidae and some other carnivore species as well. One of the distinguishing features of the disease is its ability to survive outside the host for a long period of time. Indeed studies show that it remains infectious outside of the host for over a year. Clinically the virus is described as highly contagious with severe gastroenteritis with fever, anorexia, vomiting, diarrhoea and marked leucopenia leading to the death of the animal, cf Berthier *et al.* [1]. The incubation is short (one to four days) and the infection lasts approximately two weeks. Infected cats are viremic for a few days and can excrete the virus in their feces, vomit, urine, saliva, and nasal and ocular discharges. The mortality is quite high for kittens (80%) and lower but significant for adults (20%). There is no sexual differentiation in receptivity. Recovered cats do not become excreting carriers and develop immunity lasting at least six years (effectively lifelong). Transmission of the disease to susceptible cats from infected cats occurs via normal social contact or by mechanical transmission with an infected environment (primarily feces). Vertical transmission between parents and offspring does not appear to be a factor.

FLPV was recently involved in a recent experiment in animal control. The virus was introduced on Marion Island with the aim of eradicating or drastically reducing a population of feral cats that was having a devastating impact on the indigenous avian population. Marion is an island of 290 m² located in the sub-Antarctic area of the Southern Indian Ocean. In the absence of natural predators, five cats introduced gave rise to a population estimated to be 3400 in 1977. In 1997, 96 cats were trapped and inoculated with FLPV and released into the population [2]. Six years later (in 1982) the population had dropped to an estimated 615 with a corresponding annual rate of decline of 29%. Subsequent to 1982, the rate of decline slowed to 8%. In 1991, the remaining cats were eliminated with an intensive culling effort [3].

2. A simple model. Once the virus has been introduced our total population P can be subdivided into three classes S , I , and R , with $P = S + I + R$, representing the sub-populations of susceptible, infective, and removed individuals. Susceptibles are individuals who have not contracted but are capable of contracting the disease. Infectives are individuals fully infected and capable of transmitting the disease. The removed class consists of individuals who have recovered from the disease thereby gaining immunity. As such they affect the population dynamics but are not involved in the transmission of the disease.

We model the horizontal transmission of the disease from infectives to susceptible individuals by an incidence term. Two forms of incidence terms are standard, although their choice is somewhat problematic, [5], [6], [11]. The first type is a so called mass action term of the form

$$(1) \quad \sigma(S, I, R) = \sigma SI,$$

with $\sigma > 0$ a constant. The second choice is a proportionate mixing term

$$(2) \quad \sigma(S, I, R) = \sigma_{pm}SI/P = \sigma_{pm}SI/(S + I + R)$$

with $\sigma > 0$. The analysis in [1] shows that an appropriate choice for FPLV direct transmission in the Marion Island environment is a mass action term; we choose the form of the incidence term given by (1).

The final state variable, C , represents the proportion of the habitat that is infected. In the case of FPLV the following equation is derived in [1]

$$(3) \quad dC/dt = \phi(1 - C)I - \delta C.$$

Here $\phi > 0$ is a scaling constant and $\delta > 0$ is the decontamination rate of the environment. Because C is a proportion we can assume that $0 \leq C(0) \leq 1$. Given this assumption, one can readily employ the comparison principle to observe that $0 \leq C(t) \leq 1$ for all $t > 0$. Finally we let $\rho > 0$ denote the rate of indirect transmission of the disease from the environment to susceptible individuals. This produces a loss term for the susceptible class of the form ρCS . Along the lines of [1], we employ Malthusian dynamics, corresponding to the actual demography of the feral cat population before introduction of FPLV on Marion Island. In the absence of disease we assume that the population satisfies the equation

$$(4) \quad dP/dt = bP - mP$$

This incorporates a natural birth rate, b , and a natural mortality rate, m . For present purposes, we assume no vertical disease transmission with a natural birth of susceptible individuals from all three classes, reduced by a fraction θ , $0 \leq \theta \leq 1$, in the infective class. This assumption is consistent with FPLV, cf. [1] where $\theta = 1$; here, a $0 \leq \theta < 1$ takes into account early death of infective mothers caused by FPLV. We let $\alpha > 0$ be the inverse of the length of the infectious period and ε , $0 < \varepsilon < 1$, be the proportion of individuals surviving the infection. This yields a disease induced mortality rate of $\alpha(1 - \varepsilon)$. The foregoing considerations produce the following four-component system of ordinary differential equations:

$$(5) \quad \begin{aligned} dS/dt &= b(S + \theta I + R) - mS - \sigma SI - \rho CS, \\ dI/dt &= -(m + \alpha)I + \sigma SI + \rho CS, \\ dR/dt &= -mR + \varepsilon \alpha I, \\ dC/dt &= \phi(1 - C)I - \delta C, \end{aligned}$$

with initial conditions

$$(6) \quad S(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0, P(0) > 0; 0 \leq C(0) \leq 1.$$

We readily obtain the following result:

PROPOSITION 1. *System (5)-(6) admits a globally defined solution on $[0, \infty)$. Each of the solution components remains nonnegative, $0 \leq C(t) \leq 1$, for all $t > 0$.*

Proof. Local existence of solutions having nonnegative components is guaranteed by Picard Theorem and the fact the vector field defined by the righthand side of the system of differential equations (5) points outwards from the positive cone of \mathbb{R}^4 . Then, from the nonnegativity of I it follows that the interval $[0, 1]$ is forward invariant by (3). If we add the first three components and set $P = S + I + R$ we obtain

$$(7) \quad dP/dt = bP - mP - [(1 - \varepsilon)\alpha + (1 - \theta)b]I \leq (b - m)P;$$

we obtain a uniform exponential growth for $P(t)$ and we conclude our proof. ■

Questions concerning the longtime behavior are considerably more difficult. Based on numerical simulations, some partial results are outlined in [1]. More precisely, when $b > m$ only two dynamics are numerically observed: either a regulation of the host population by FPLV, or no impact of the virus on the malthusian growth. The goal of the remaining part of this section is to supply analytical evidences supporting these numerical observations. From (7) one gets that $b - m < 0$ implies $P(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$; hence one may now assume

$$(8) \quad b - m > 0.$$

PROPOSITION 2. *Assume (6) and (8) hold. Then,*

- (i) *when $m(\alpha + m) < b(\varepsilon\alpha + \theta m)$ one has $P(t) \rightarrow +\infty$ as $t \rightarrow \infty$, exponentially;*
- (ii) *when $m(\alpha + m) > b(\varepsilon\alpha + \theta m)$ there exists a unique stationary state $(S^\#, I^\#, R^\#, C^\#)$ with positive components and $0 < C^\# < 1$.*

Proof. We first look at case (i). Let η and ϖ be small positive numbers. A linear combination of the first three equations in (5) yields

$$\begin{aligned} & ((m - \eta)S + mI + (b - \varpi)R)' \geq \\ & (m - \eta)(b - m)S + [b(\varepsilon\alpha + \theta m) - m(\alpha + m) - (\varepsilon\alpha\varpi + b\theta\eta)]I + (m\varpi - b\eta)R; \end{aligned}$$

choosing $\eta = m\varpi/2b$, and next

$$\varpi < \varpi_0 = \max\left(\frac{b(\varepsilon\alpha + \theta m) - m(\alpha + m)}{\theta m + 2\varepsilon\alpha}, b\right),$$

one gets $m - \eta > 0$, $b - \varpi > 0$ and finds a $\lambda = \lambda(\varpi) > 0$ such that

$$[(m - \eta)S + mI + (b - \varpi)R]' \geq \lambda [(m - \eta)S + mI + (b - \varpi)R].$$

As a consequence, $P(t)$ experiences an exponential growth as $t \rightarrow \infty$.

Next, we look at case (ii). Let $(S^\#, I^\#, R^\#, C^\#)$ be a stationary state for (5) with nonnegative components. From the equation for C one gets $C^\# = \frac{\phi I^\#}{\delta + \phi I^\#}$, and from the equation for R it follows that $R^\# = \frac{\varepsilon\alpha}{m} I^\#$. Looking at (7) one also has

$$P^\# = \frac{(1 - \varepsilon)\alpha + (1 - \theta)b}{b - m} I^\#,$$

where $P^\# = S^\# + I^\# + R^\#$. One may now compute $S^\#$ as a function of $I^\#$, and find

$$S^\# = P^\# - I^\# - R^\# = \frac{m(\alpha + m) - b(\varepsilon\alpha + \theta m)}{m(b - m)} I^\#.$$

Substituting these relations into the equation for S^\sharp in (5), after some algebra one gets that I^\sharp is a solution to a nonlinear equation, namely $f(I^\sharp) = T^\sharp$ with

$$f(I^\sharp) = m + \sigma I^\sharp + \rho \frac{\phi I^\sharp}{\delta + \phi I^\sharp}, \quad T^\sharp = \frac{(1 - \varepsilon)\alpha + (1 - \theta)m}{m(\alpha + \theta m) - b(\varepsilon\alpha + m)}bm.$$

Now, f is increasing over $[0, \infty)$, $f(0) < T^\sharp$ and $f(I^\sharp) \rightarrow +\infty$ as $I^\sharp \rightarrow +\infty$. This completes the proof of **(ii)**. ■

REMARK 1. We point out that one could obtain analogous results in the case of proportionate mixing. Recall in this case we have an incidence of the form (2).

3. Age dependent models. The system of ordinary differential equations model of the previous section omits many pertinent features. For example in the introduction we indicated that disease induced mortality rate for kittens was much greater than that of adults, approximately four times as much. We should also expect that the natural mortality rate and the birth rate would be highly dependent upon the age of a given cat. These comments argue for the inclusion of another independent variable, a . In this case we represent the time dependent age density individuals by the dependent variable $p(a, t) \geq 0$. The total population at time t is given by

$$P(t) = \int_0^\infty p(a, t)da, \quad t \geq 0.$$

From a practical standpoint one can assume the existence of an A_\dagger so that $p(a, t) \equiv 0$ for $a > A_\dagger$. However, theoretically we find it convenient to let $A_\dagger = +\infty$ and assume an infinite age interval of the form $[0, +\infty)$.

The birth rate is given by $b(a) \geq 0$ for $a \geq 0$ and natural mortality is given by an expression $m(a) \geq 0$ for $a \geq 0$. The time evolution of $p(a, t)$ is governed by the celebrated Sharpe, Lotka and McKendrick equation, [13], [14], [15], [18],

$$(9) \quad \partial p / \partial t + \partial p / \partial a = -m(a)p, \quad a \geq 0, \quad t \geq 0,$$

subject to the age boundary condition

$$(10) \quad p(0, t) = \int_0^\infty b(a)p(a, t)da, \quad t \geq 0,$$

and the initial condition

$$(11) \quad p(a, 0) = p_0(a), \quad t \geq 0.$$

To put things in perspective, we can assume our birth rate and natural mortality term do not depend upon a , make the assumption $P(\infty) = 0$, and obtain equation (4) by integrating (9)-(10)-(11) with respect to the variable a on $[0, +\infty)$.

The longtime dynamics of solutions to (9), (10) and (11) is well-known since the work of [8], see [15], [18]. Set

$$(12) \quad \begin{aligned} \pi(a) &= \exp\left(-\int_0^a m(a') da'\right), \quad a > 0; \\ a_\dagger &= \max(\text{supp}(b)). \end{aligned}$$

Then,

$$(13) \quad \begin{aligned} & \text{if either } \text{supp}(p_0) \subset [a_{\dagger}, +\infty) \text{ or } \int_0^{\infty} b(a)\pi(a) da < 1, \\ & \text{then } p(\cdot, t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow +\infty, \text{ uniformly on } [0, A] \text{ for each } A > 0; \\ & \text{if both } \text{supp}(p_0) \subset [0, a_{\dagger}] \text{ and } \int_0^{\infty} b(a)\pi(a) da > 1, \\ & \text{then } p(\cdot, t) \rightarrow +\infty \text{ as } t \rightarrow +\infty, \text{ uniformly on } [0, A] \text{ for each } A > 0. \end{aligned}$$

An age dependent model describing the circulation of FPLV will define time dependent age densities $s(a, t)$, $i(a, t)$, $r(a, t)$ as state variables. As before, $C(t)$ denotes the proportion of infected habitat. We can compute the time dependent susceptible, infective and removed classes by integrating on $[0, +\infty)$ with respect to a , i.e. we have

$$S(t) = \int_0^{\infty} s(a, t) da, \quad I(t) = \int_0^{\infty} i(a, t) da, \quad R(t) = \int_0^{\infty} r(a, t) da.$$

The total population is given by $P(t) = S(t) + I(t) + R(t)$.

We introduce an age dependent incidence term $(\sigma(a)I(t))s$ and an age dependent environmental incidence term $(\rho(a)C(t))s$. In order to differentiate between the recovery rates of adults and juveniles we introduce an age dependent recovery rate $\varepsilon(a)$, $0 \leq \varepsilon(a) \leq 1$; $\alpha > 0$ is still the inverse of the length of the infectious period. We should expect a lowered birth rate from the class of infectives. The function $\theta(a)$ will represent the fractional lowering of the birth rate from infective class. We will have $0 \leq \theta(a) \leq 1$, for $a \geq 0$.

We make the following assumptions on coefficient functions and initial data:

- (A1) the functions $b, \theta, m, \sigma, \rho, \varepsilon$ are nonnegative, and belong to $L_{\infty}(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$; also $0 \leq \theta(a) \leq 1, 0 \leq \varepsilon(a) \leq 1$.
- (A2) the initial functions s_0, i_0, r_0 are nonnegative, and belong to $L_{\infty}(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$; $0 \leq C_0 \leq 1$.

The foregoing conditions yield the following coupled semilinear system of differential equations:

$$(14) \quad \begin{cases} \partial s / \partial t + \partial s / \partial a = -m(a)s - \sigma(a)I(t)s - \rho(a)Cs, \\ \partial i / \partial t + \partial i / \partial a = -[m(a) + \alpha]i + \sigma(a)I(t)s + \rho(a)Cs, \\ \partial r / \partial t + \partial r / \partial a = -m(a)r + \alpha\varepsilon(a)i, \\ \partial C / \partial t = \phi(1 - C)I(t) - \delta C, \end{cases}$$

subject to boundary conditions

$$(15) \quad \begin{cases} s(0, t) = \int_0^{A_{\dagger}} (b(a)s(a, t) + \theta(a)b(a)i(a, t) + b(a)r(a, t)) da, \\ i(0, t) = r(0, t) = 0, \end{cases}$$

and initial conditions

$$(16) \quad \begin{cases} s(a, 0) = s_0(a) \geq 0, \quad i(a, 0) = i_0(a) \geq 0, \quad r(a, 0) = r_0(a) \geq 0, \\ 0 \leq C(0) = C_0 \leq 1. \end{cases}$$

We point out that the assumption of no hereditary transmission of the disease is incorporated in the age boundary condition (15). Moreover if we assume the functions

$b, \theta, m, \sigma, \rho, \alpha, \varepsilon$ are positive constants then (14)-(15)-(16) may be formally integrated for age $a \in [0, \infty)$ to produce a system of ordinary differential equations of the form (5).

We specify the birth function

$$B(t) = \int_0^{A_+} [b(a)s(a, t) + \theta(a)b(a)i(a, t) + b(a)r(a, t)] da,$$

and introduce functional notations

$$\begin{aligned} H(a, t) &= m(a) + \sigma(a)I(t) + \rho(a)C(t), \\ K_1(a, t) &= m(a) + \alpha, \\ K_2(a, t) &= m(a), \\ F(a, t) &= \sigma(a)I(t)s(a, t) + \rho(a)C(t)s(a, t), \\ J(a, t) &= \alpha\varepsilon(a)i(a, t), \\ L(a, t) &= \phi I(t) + \delta. \end{aligned}$$

If we adapt the characteristic methods outlined in [18], [15], [9] we may observe that solutions to (14)-(15)-(16) have integrated forms

$$(17) \quad s(a, t) = \begin{cases} s_0(a-t) \exp\left(-\int_0^t H(a-t+s, s) ds\right), & \text{for } a > t, \\ B(t-a) \exp\left(-\int_0^a H(s, t-a+s) ds\right), & \text{for } t > a, \end{cases}$$

$$(18) \quad i(a, t) = \begin{cases} i_0(a-t) \exp\left(-\int_0^t K_1(a-t+s, s) ds\right) + \int_0^t \exp\left(-\int_s^t K_1(a-t+u, u) du\right) F(a-t+s) ds, & \text{for } a > t, \\ 0, & \text{for } t > a, \end{cases}$$

$$(19) \quad r(a, t) = \begin{cases} r_0(a-t) \exp\left(-\int_0^t K_2(a-t+s, s) ds\right) + \int_0^t \exp\left(-\int_s^t K_2(a-t+u, u) du\right) J(a-t+s) ds, & \text{for } a > t, \\ 0, & \text{for } t > a, \end{cases}$$

and

$$(20) \quad C(t) = C_0 \exp\left(-\int_0^t L(s) ds\right) + \phi \int_0^t \exp\left(-\int_s^t L(u) du\right) I(s) ds, \text{ for } t > 0.$$

A quadruple of functions $(s(a, t), i(a, t), r(a, t), C(t))$ is said to be a mild solution to (14)-(15)-(16) if it satisfies the system of integral equations (17)-(18)-(19)-(20). We have the following result:

THEOREM 3. *If conditions (A1) and (A2) are satisfied, then there exists a unique non-negative quadruple of functions providing a mild solution to (14)-(15)-(16). These functions are continuous except possibly along the line $t = a$, continuously differentiable for $a > t$ and $a < t$, and satisfy the differential equations and the boundary conditions.*

Proof. The arguments establishing this result are quite lengthy, involving a concatenation of semigroup theory and fixed point arguments. Indeed over a chapter of [18] is devoted to the case of a scalar Gurtin and McCamy equation. For this reason we shall not include a

proof of this result but we shall briefly overview arguments establishing solution positivity and a priori bounds; see [19] for details on a related problem.

Arguments appearing in [16] develop comparison principles for age dependent operators of the form $\partial\psi/\partial t + \partial\psi/\partial a$ and the comparison principle in turn allows us to establish a theory of invariant rectangles for age transport systems which parallels the theory of invariant rectangles in [17] for reaction diffusion systems. With this in mind we can imagine the vector field defined by the right hand side of (14)-(15)-(16) in \mathfrak{R}_+^4 , (s, i, r, C) state space. We may readily observe that this vector field does not point out of the positive cone \mathfrak{R}_+^4 and conclude that if the initial data is nonnegative the functions remain nonnegative.

From the nonnegativity of $i(a, t)$ and $I(t)$ one may conclude that $0 \leq C(t) \leq 1$ provided $0 \leq C_0 \leq 1$.

If we add the differential equations for s, i and r , and set $p = s + i + r$ we may observe that $p(a, t)$ satisfies a differential inequality of the form

$$(21) \quad \begin{aligned} \partial p/\partial t + \partial p/\partial a &\leq -m(a)p, \quad t > 0, \quad a > 0, \\ p(a, 0) &= p_0(a) = s_0(a) + i_0(a) + r_0(a), \quad a > 0, \\ p(0, t) &\leq \int_0^\infty b(a)p(a, t) da, \quad t > 0. \end{aligned}$$

If we integrate (21) on $[0, +\infty)$ with respect to a we have for $P(t) = \|p(\cdot, t)\|_{1, [0, \infty)}$

$$P'(t) \leq (b_{\max} - m_{\min})P(t), \quad t > 0; \quad P(0) = \int_0^\infty p_0(a) da,$$

wherein $b_{\max} = \max(b(a), a > 0)$ and $m_{\min} = \min(m(a), a > 0)$. We have an exponential growth estimate for $P(t)$. Going back to (21) one gets an exponential growth estimate for $\|p(\cdot, t)\|_{\infty, [0, \infty)}$; this together with nonnegativity produces uniform exponential growth estimates for $\|s(\cdot, t)\|_{\infty, [0, \infty)}$, $\|i(\cdot, t)\|_{\infty, [0, \infty)}$, $\|r(\cdot, t)\|_{\infty, [0, \infty)}$ and $I(t)$. ■

We have obtained some preliminary results concerning the longtime behavior of solutions to (14)-(15)-(16). From the set of inequalities in (21) and a comparison principle, it follows that when

$$\text{either } \int_0^\infty b(a)\pi(a) da < 1, \text{ or } \text{supp}(p_0) \subset [a_\dagger, +\infty)$$

then, $p(\cdot, t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$, uniformly on $[0, A]$ for $A > 0$; see (13), [18], [15]. Hence, one may now assume

$$(22) \quad \int_0^\infty b(a)\pi(a) da > 1.$$

Set

$$(23) \quad \mathcal{T}_0(\varepsilon, \theta) = \int_0^\infty b(a)\pi(a) \left[e^{-\alpha a} \theta(a) + \alpha \int_0^a \varepsilon(a') e^{-\alpha a'} da' \right] da.$$

THEOREM 4. *Assume (22) hold. Then,*

- (iii) *when $\mathcal{T}_0(\varepsilon, \theta) < 1$, then there exists an age dependent stationary state with positive components, $(s^\sharp(a), i^\sharp(a), r^\sharp(a), C^\sharp)$, and $0 < C^\sharp < 1$.*

Proof. Along the lines of the proof of Proposition 2, the idea is to compute stationary states. First, one still has

$$C^\# = \frac{\phi I^\#}{\delta + \phi I^\#}, \quad I^\# = \int_0^\infty i^\#(a) da.$$

Second, at equilibrium, one gets

$$d_a s^\# + m(a) s^\# = -\varphi_1(a, I^\#) s^\#, \quad \varphi_1(a, I^\#) = \sigma(a) I^\# + \rho(a) \frac{\phi I^\#}{\delta + \phi I^\#},$$

so that for some positive initial condition $s^\#(0)$

$$(24) \quad s^\#(a) = s^\#(0) \pi(a) \Phi_1(a, I^\#), \quad \Phi_1(a, I^\#) = \exp\left(-\int_0^a \varphi_1(a', I^\#) da'\right).$$

The equation for $i^\#$ reads $d_a i^\# + m(a) i^\# = -\alpha i^\# + \varphi_1(a, I^\#) s^\#$; therefore,

$$(25) \quad i^\#(a) = s^\#(0) \pi(a) e^{-\alpha a} \Phi_2(a, I^\#), \quad \Phi_2(a, I^\#) = \int_0^a e^{\alpha a'} \varphi_1(a', I^\#) \Phi_1(a', I^\#) da',$$

because $i^\#(0) = 0$. The equation for $r^\#$ reads $d_a r^\# + m(a) r^\# = \alpha \varepsilon(a) i^\#$; therefore,

$$(26) \quad r^\#(a) = \alpha s^\#(0) \pi(a) \Phi_3(a, I^\#), \quad \Phi_3(a, I^\#) = \int_0^a e^{-\alpha a'} \varepsilon(a') \Phi_2(a', I^\#) da',$$

because $r^\#(0) = 0$. At age $a = 0$ one must have

$$s^\#(0) = \int_0^\infty b(a) (s^\#(a) + \theta(a) i^\#(a) + r^\#(a)) da.$$

Using (24), (25) and (26), and simplifying by $s^\#(0)$ yields a nonlinear equation for $I^\#$

$$(27) \quad F(I^\#) \equiv \int_0^\infty b(a) \pi(a) [\Phi_1(a, I^\#) + e^{-\alpha a} \theta(a) \Phi_2(a, I^\#) + \alpha \Phi_3(a, I^\#)] = 1.$$

Now, one may check that $F(0) > 1$ by (22), and $F(I^\#) \rightarrow \mathcal{T}_0(\varepsilon, \theta)$ as $I^\# \rightarrow +\infty$. Hence there is at least a positive $I^\#$, a solution of $F(I^\#) = 1$ if $\mathcal{T}_0(\varepsilon, \theta) < 1$; then $s^\#(0)$ is evaluated from (25) upon integrating with respect to age to get

$$I^\# = s^\#(0) \int_0^\infty \pi(a) e^{-\alpha a} \Phi_2(a, I^\#) da.$$

REMARK 2. For constant b , m , ε and $\theta(a) \equiv 1$, a direct computation of $\mathcal{T}_0(\varepsilon, \theta)$ shows that (ii) and (iii) are equivalent.

4. Conclusion. The unstructured model, (5), with a mass action type incidence was shown to be a more appropriate a choice than the analogous model with a proportionate mixing incidence to understand a recent experiment in animal control on Marion Island; see [1]. This was established through numerical simulations using field data. Our results in the present work are in the continuation of [1].

From a dynamical point of view numerical simulations of (5) were also showing that as soon as a stationary state with positive entries was existing then it was numerically stable, else the host population was recovering an exponential growth. Although we do not prove any local stability result for the stationary state, Proposition 2 supports these observations upon supplying a threshold parameter yielding the existence of a unique stationary state with positive entries, indicating whether the virus can control (case (ii)) or not control (case (i)) the exponential growth.

Numerical simulations also showed more complex dynamics for the proportionate mixing incidence model (see (2)): extinction of the host population for large σ_{pm} , an exponential growth for small σ_{pm} and ρ , and a unique stationary state with positive entries at intermediate values for σ_{pm} and ρ ; see [1]. Obviously the first part of Proposition 2 (case (i)) still holds for a proportionate mixing incidence; but this is not the case anymore for the second part (case (ii)). Reworking the proof of Proposition 2, (ii), when $m(m + \alpha) > b(\theta m + \varepsilon\alpha)$ a secondary bifurcation parameter must be introduced, namely

$$\mathcal{S}_{pm} = \frac{m(m + \alpha)}{m(m + \alpha) - b(\theta m + \varepsilon\alpha)};$$

there exists a unique stationary state if and only if $\frac{\sigma_{pm}}{(1-\varepsilon)\alpha} < \mathcal{S}_{pm} < \frac{\sigma_{pm}}{(1-\varepsilon)\alpha} + \frac{\rho}{b-m}$. To be consistent with numerical simulations this threshold parameter also indicates whether the virus can drive the host population to extinction, case $\mathcal{S}_{pm} \leq \frac{\sigma_{pm}}{(1-\varepsilon)\alpha}$, or not control its exponential growth, case $\frac{\sigma_{pm}}{(1-\varepsilon)\alpha} + \frac{\rho}{b-m} \leq \mathcal{S}_{pm}$. As a consequence indirect transmission, $\rho > 0$, is required to get regulation of the host population in the proportionate mixing incidence model.

The age dependent model was introduced to take into account a more severe impact of FPLV on young individuals than on adults ones, a fact supporting the choice of FPLV to eradicate a cat population having about 40% of juveniles. Again we show the existence of at least one positive age dependent stationary state when $\mathcal{T}_0(\varepsilon, \theta) < 1$. We conjecture it is unique and stable when $\mathcal{T}_0(\varepsilon, \theta) < 1$, and that no such stationary state exists when $\mathcal{T}_0(\varepsilon, \theta) \geq 1$ in which case the host population resumes an exponential growth; this is related to the likely monotonicity of $I^\# \rightarrow F(I^\#)$ in (27).

This is consistent with our results for the unstructured model. This is also consistent with the field observation that FPLV was not able to drive the host population to extinction, but instead a positive stable age dependent stationary state emerged.

In the age dependent case the proportionate mixing incidence poses much more complex mathematical problems.

An intermediate situation is a model with only two age classes, made of juvenile and adult individuals. It would supply a good qualitative and reliable picture of the dynamics of this host-parasite system when the parasite has a more severe impact on young hosts than on adult ones.

REMARK 3. Spatial effects for FPLV models can be considered as well, cf. [10] [12]. In this case Fickian diffusion is introduced into the models to describe the dispersion of the Feline population. Finally we point out that environmentally supported pathogens arise in other contexts as well, two very important are the anthrax and staphylococcus bacteria.

References

- [1] K. Berthier, M. Langlais, P. Auger and D. Pontier, *Dynamics of a feline virus with two transmission modes within exponentially growing host populations*, Proc. R. Soc. Lond. B 267 (2000), 2049–2056.

- [2] M. N. Bester, *Eradication of cats from sub-antarctic Marion Island*, in: Proc. 6th International Theoretical Congress, M. L. Augée (ed.), University of New South Wales, Sydney, 1993, 24.
- [3] J. P. Bloomer and Bester. *Effects of hunting on the population on the population characteristics of feral cats on Marion Island*, S. Afr. J. Wildl. Res. 21 (1992), 97–102.
- [4] F. Brauer and C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Texts in Applied Mathematics 40, Springer, 2001.
- [5] S. Busenberg and K. C. Cooke, *Vertically Transmitted Diseases*, Biomathematics 23, Springer, New York, 1993.
- [6] O. Diekmann, M. C. M. De Jong, A. A. De Koeijer and P. Reijnders, *The force of infection in populations of varying size: a modelling problem*, J. Biol. Systems 3 (1995), 519–529.
- [7] O. Diekmann and J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*, Mathematical and Computational Biology, Wiley, Chichester, 2000.
- [8] W. Feller, *On the integral equation of renewal theory*, Ann. Math. Statist. 12 (1941), 243–267.
- [9] W. E. Fitzgibbon and M. Langlais, *Weakly coupled hyperbolic systems modeling the circulation of infectious disease in structured populations*, Math. Biosci. 165 (2000), 79–95.
- [10] W. E. Fitzgibbon, M. Langlais and J. J. Morgan, *A reaction-diffusion system modeling direct and indirect transmission of diseases*, manuscript.
- [11] E. Fromont, D. Pontier and M. Langlais, *Dynamics of a feline retrovirus (FeLV) in host populations with variable structure*, Proc. R. Soc. Lond. B 265 (1998), 1097–1104.
- [12] S. Gaucel and M. Langlais, *Some mathematical problems arising in heterogeneous insular ecological models*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat., in press.
- [13] M.-E. Gurtin, *A system of equations for age dependent population diffusion*, J. Theor. Biol. 40 (1972), 389–392.
- [14] M.-E. Gurtin and R. C. McCamy, *Nonlinear age-dependent population dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal. 54 (1974), 281–300.
- [15] M. Iannelli, *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*, Appl. Math. Monogr. 7, C.N.R. Pisa, 1994.
- [16] M. Langlais, *Large time behavior in a non-linear age dependent population dynamics problem with diffusion*, J. Math. Biol. 26 (1988), 319–346.
- [17] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, Springer, New York, 1983.
- [18] G. F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Dekker, New York, 1985.
- [19] C. Wolf, *Sur un modèle de propagation d’une épidémie dans une population structurée*, DEA Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique, Université Bordeaux 1, 2002.

Conclusion générale

L'étude de la propagation du Hantavirus Puumala dans les populations de campagnols rousâtres ne représente certes pas une importance cruciale si on tient compte uniquement du faible nombre de cas rencontrés dans nos régions, et de la mortalité somme toute assez faible qui en résulte. Toutefois, l'émergence depuis un demi-siècle sur divers continents de nombreux autres hantavirus parfois bien plus dangereux pour l'Homme donne plus d'intérêts à l'étude et à la compréhension des facteurs et paramètres qui favorisent la propagation de ces hantavirus. De ce fait, les similitudes entre le système Hantavirus Puumala - Campagnol rousâtre et ceux impliquant d'autres hantavirus et d'autres espèces de rongeurs, couplées avec la situation épidémiologique et géographique de la France, font de ce système un cadre favorable à l'étude de systèmes épidémiologiques.

La première partie de ce travail a été consacrée à l'étude biologique du système Hantavirus Puumala - Campagnol Roussâtre - Homme et à la construction de différents modèles mathématiques le modélisant en tenant compte des principales caractéristiques retenues comme étant déterminantes : La variété des dynamiques observées (allant de quasi stationnaire dans le sud de L'Europe à périodiques avec de grandes oscillations en Scandinavie), la dépendance de la maturation sexuelle (et de la dispersion) des juvéniles en la densité d'adultes, le caractère bénin du hantavirus pour la population hôte (dont il ne modifie donc pas la démographie) et les deux modes de transmission du virus considérés (transmission directe entre individus et transmission indirecte via la contamination de l'environnement).

Nous nous sommes ainsi attaché à considérer des modèles distinguant les juvéniles des adultes, avec des taux de maturations dépendant de la densité d'adultes. Pour les modèles épidémiques nous avons introduit une variable représentant la proportion d'environnement contaminé pour tenir compte de la transmission indirecte du virus ; la transmission du hantavirus à l'Homme se faisant également par l'intermédiaire de l'environnement contaminé. Le modèle démographique JA, ainsi que les modèles épidémiques JASIG et JASIGH construits dans la première partie de ce travail, ont ensuite été étudiés sous plusieurs formes et structurations différentes dans les autres parties.

Dans la seconde partie, nous avons considéré ces modèles dans le cadre d'une structuration continue en temps, en âge chronologique et en âge de l'infection (pour le modèle épidémique). Nous avons donc étudié des systèmes faiblement hyperboliques d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires avec des nonlinéarités non-locales. Avec également la structuration en classes sociales (juvéniles et adultes) et en stage infectieux (sains et infectés), et l'équation différentielle régissant l'évolution de la proportion d'environnement contaminé, nous avons pour ces systèmes complexes établi l'existence et l'unicité de solutions en tout temps, et fait des simulations numériques sur les modèles discrets correspondants, qui nous ont permis d'observer des dynamiques du type de celles observées en Scandinavie, avec des coefficients adaptés (périodiques de période 3 ans).

Dans la troisième partie, nous avons restreint la structuration des modèles en ne tenant pas compte de la structuration continue en âge chronologique, ni de celle en âge de l'infection. Nous avons ainsi pu mener des études plus qualitatives et nous nous sommes intéressé à l'existence et la stabilité des états stationnaires triviaux, semi-triviaux et non-triviaux dans le cas de coefficients constants, en mettant en évidence les paramètres déterminant les différents comportements possibles (extinction de la population, état d'équilibre avec disparition du virus, état endémique). Nous avons également pu établir l'émergence de solutions périodiques lorsque l'on perturbe légèrement le cas à coefficients constants. Ce passage de solutions stationnaires à des solutions périodiques est observé dans les populations de campagnols roussâtres lorsque l'on remonte du Sud vers le Nord de l'Europe. À l'aide de simulations numériques, nous avons pu constater l'influence bénéfique de la périodicité sur la persistance du virus. C'est intéressant du fait que les observations sur le terrain montrent que la limite actuelle de la zone endémique se situe actuellement au nord-est de la France, alors que les variations périodiques des populations diminuent. Enfin, dans cette partie nous avons également mis en place un modèle multi-sites correspondant à une structuration en colonies de la population hôte, dans lequel les juvéniles dispersent et migrent afin de devenir matures, sous la pression des adultes. Nous avons fait pour ce modèle une étude similaire à celle effectuée pour les modèles précédents et en étudiant les simulations numériques sur ce modèle multi-sites, nous avons vu notamment que la dispersion pouvait permettre la propagation et la persistance du virus dans des zones a priori non favorables à des situations endémiques.

Enfin, dans la quatrième partie, nous avons considéré en plus de la structuration continue en âge chronologique, une structuration continue en espace. Nous avons ainsi obtenu des systèmes de réaction-diffusion mêlant hyperbolicité et parabolicité. En étudiant ces systèmes, nous avons pu établir des résultats d'existence globale et d'unicité des solutions, ainsi que des résultats de majoration uniforme des solutions pour les trois modèles considérés : JA, JASIG et JASIGH. La perspective de ce travail sur ces systèmes de réaction-diffusion est de les étudier numériquement afin notamment de voir l'influence de l'hétérogénéité spatiale considérée sur la propagation du virus. Nous pourrions également comparer ces résultats à ceux obtenus dans le cadre du modèle multi-sites afin de se faire une idée de la complexité de la structuration spatiale à considérer pour une bonne évaluation de la propagation de l'épidémie.

Finalement, la suite logique de ce travail serait de s'intéresser plus particulièrement à la transmission d'un hantavirus à l'Homme et aux meilleurs moyens pour l'éviter : Comment minimiser les risques de transmission à l'Homme ?, Quel serait l'efficacité d'un contrôle sur les populations de campagnols roussâtres ?, Quel moyen serait le plus efficace pour un tel contrôle ?, etc...

Bibliographie

- [1] N.D. Alikakos. 1979. An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations. *J. Diff. Eq.*, 33 :201-225.
- [2] R.M. Anderson et R.M. May. 1979. Population biology of infectious diseases : Part 1. *Nature*, 280 : 361-367.
- [3] S. Anița. 2000. *Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [4] M. Artois et G. Paillat. 1999. La fièvre hémorragique à syndrome rénal (FHSR) en France. *BEH*, 33 :137-139.
- [5] M. Begon, S.M. Feore, K. Brown, J. Chantrey, T. Jones et M. Bennett. 1998. Population and transmission dynamics of cowpox in bank voles : testing fundamental assumptions. *Ecology letters*, 1, 82-86.
- [6] D. Bernoulli. 1760. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. *Mem. Math. Phys. Acad. Roy. Sci.*, pages 1-45
- [7] K. Berthier, M. Langlais, P. Auger et D. Pontier. 2000. Dynamics of a feline virus with two transmission modes within exponentially growing host populations. *Proc. R. Soc. London, series B*, 267, 2049-2056.
- [8] F. Brauer et C. Castillo Chávez. 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Texts in Applied Mathematics 40. Springer.
- [9] G. Bujalska. 1988. Life history consequences of territoriality in the bank vole, in *Evolution of Life Histories : Theories and Patterns from Mammals* (Ed M.S. Boyce), pp. 75-90, Yale University Press, Yale.
- [10] G. Bujalska. 1990. Social system of the bank vole, *Clethrionomys glareolus*. *Social system and Populations cycles in Voles* (eds R. Tamarin, R. Ostfeld, S. Pugh & G. Bujalska), pp. 155 - 167, ALS Verlag.
- [11] S. Busenberg et K. C. Cooke. 1993. *Vertically transmitted diseases*. Biomathematics Volume 23. Springer Verlag, New York.
- [12] S. Busenberg, M. Iannelli et H. Thieme. 1991. Global behavior of an age-structured epidemics S-I-S model. *SIAM J. Math. Anal.* 22 1065.

- [13] C. Calisher, W. Sweeney, J. Mills et B. Beaty. 1999. Natural history of Sin Nombre virus in western Colorado. *Emerg. Infect. Dis.*, 5, 126 - 134.
- [14] V. Capasso. 1993. *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, volume 93 of *Bio-mathematics*. Springer-Verlag.
- [15] C. Castillo-Chavez. 1989. *Some applications of Structured Models in Population Dynamics*. Applied Mathematical Ecology. Springer-Verlag, pp 450-467. Suisse.
- [16] H. Caswell. 2001. *Matrix Population Models*. Sinauer Associates Inc., Sunderland, Massachusetts, 2nd edition.
- [17] F. Courchamp, T. Clutton-Brock et B. Grenfell. 1999. Inverse density dependence and the Allee effect. *Trends in Ecology & Evolution* 14 (10), 405-410.
- [18] J.M. Cushing. 1998. An Introduction to Structured Population Dynamics. *Regional Conference Series in Applied Mathematics* 71, SIAM, Philadelphia, PA.
- [19] H. Dang-Vu et C. Delcarte. 2000. *Bifurcations et chaos*. Ellipses.
- [20] O. Diekmann et J.A.P. Heesterbeek. 2000. *Mathematical Epidemiology of infectious diseases*. Mathematical and computational biology. J. Wiley & Sons, Chichester.
- [21] S. Escutenaire, P. Chalon, R. Verhagen, P. Heyman, I. Thomas, L. Karelle-Bui, T. Avsic-Zupanc, A. Lundkvist, A. Plyusnin, et P.P. Pastoret. 2000. Spatial and temporal dynamics of Puumala hantavirus infection in red bank vole (*Clethrionomys glareolus*) populations in Belgium. *Virus Research*, 67(1) : 91-107.
- [22] L. Euler. 1770. A general investigation into the mortality and multiplication of the human species. *Theoretical Population Biology*, 1 :307-314. (Originally published 1760).
- [23] Farkas, M. 1994. *Periodic Motions*. Applied Mathematical Sciences 104, Springer-Verlag.
- [24] W.E. Fitzgibbon et M. Langlais. 1997. Diffusive SEIR Models with Logistic population controle. *Com. on Applied Nonlinear Analysis*, 4, 1-16.
- [25] W.E. Fitzgibbon et M. Langlais. 2000. Weakly coupled hyperbolic systems modeling the circulation of infectious disease in structured populations. *Mathematical Biosciences*, 165, 79-95.
- [26] W.E. Fitzgibbon et J.J. Morgan. 1994. Diffractive diffusion systems with locally defined reactions, *Evolution Equation*, ed. G. Goldstein et al., M. Dekker, New York, 177-186.
- [27] W.E. Fitzgibbon, S. Hollis et J.J. Morgan. 1999. Steady-state solutions for balanced reaction diffusion systems on heterogeneous domains. *J. Diff. and Integral Equations*, 12, 225-241.
- [28] W.E. Fitzgibbon, M. Langlais et J.J. Morgan. 1999. Eventually uniform bounds for a quasipositive Reaction Diffusion system, *Japan J. of Industrial and Applied Mathematics*, 16 225-241.

- [29] W.E. Fitzgibbon, M. Langlais et J.J. Morgan. 2001. A mathematical model of the spread of Feline Leukemia Virus (FeLV) through a highly heterogeneous spatial domain. *SIAM J. Math. Analysis*, 33, 570-588.
- [30] W.E. Fitzgibbon, M. Langlais et J.J. Morgan. 2004. A reaction-diffusion system modelling direct and indirect transmission of a disease. *DCDS-B*, 893-910.
- [31] W.E. Fitzgibbon, M. Langlais et J.J. Morgan. 2005. A mathematical model for indirectly transmitted disease. Manuscript.
- [32] W.E. Fitzgibbon, M. Langlais, J.J. Morgan, D. Pontier and C. Wolf. 2004. An age-dependent model describing the spread of panleucopenia virus within feline populations. *Mathematical Modelling of Population dynamics*, Banach Center Publications, Vol. 63, 197-207.
- [33] E. Fromont, D. Pontier et M. Langlais. 1998. Dynamics of a feline retrovirus (FeLV) in hosts populations with variable structure. *Proc. R. Soc. London, série B*, 265, p. 1097-1104.
- [34] E. Fromont, M. Langlais et D. Pontier. Effect of spatial heterogeneity at the inter-population scale on the dynamics of FeLV. Soumis à *J. Theoretical Biology*, 19 pages, 6 figures.
- [35] F.R. Gantmacher. 1960. *The Theory of Matrices*, Vol.2.
- [36] M.G. Garroni et M. Langlais. 1982. Age dependent population diffusion with external constraints. *J. Math. Biol.* 14, 77-94.
- [37] J. Gliwicz. 1993. Dispersal in bank vole : benefits to emigrants or residents ? *Acta Theriologica*, 38, (1), 31-38.
- [38] D. Grady. 1994. Un étrange virus fait trembler l'Amérique. *Sci. Avenir*, 584 : 62-66.
- [39] J. Graunt. 1777. *Observations naturelles et politiques répertoriés dans l'index ci-après et faites sur les bulletins de mortalité par John Graunt citoyen de Londres en rapport avec le gouvernement, la religion, le commerce, l'accroissement, l'atmosphère, les maladies et les divers changemens de ladite cité (1662)*, volume IV. ed critique et trad. par eric vilquin. -paris :institut national d'études démographiques edition, 173p.
- [40] M.E. Gurtin. 1973. A system of equations for age dependent population diffusion. *J. Theoret. Biol.*, 40 :389-392.
- [41] M.E. Gurtin et R.C. Mac Camy. 1974. Nonlinear age-dependent population dynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 54, p. 281.
- [42] J. Hale et H. Koçak. 1992. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag.
- [43] P. Hartman. 1964. *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York.
- [44] D. Henry. 1989. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag. 2nd Edition

- [45] H.W. Hethcote. 1989. Three basic epidemiological models. *Applied Mathematical Ecology*. Springer-Verlag, pp 119-142. Suisse.
- [46] H.W. Hethcote. 1993. A thousand and one epidemic models. *Frontier in mathematical biology*. Springer-Verlag, pp 504-515. Suisse.
- [47] H.W. Hethcote. 2000. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Rev.*, **42** (4) : 599-653.
- [48] H.W. Hethcote et J.W. Van Ark. 1987. Epidemiological models for heterogeneous populations : proportionate mixing, parameter estimation, and immunization programs. *Mathematical Biosciences*, **84**, 85-118.
- [49] F. M. Hilker, M. Langlais, S. Petrovskii et H. Malchow. 2005. A diffusive SI model with Allee effect and application to FIV. Submitted to *Math. Biosci.*
- [50] S. Hollis, R.H. Martin et M. Pierre. 1987. Global existence and boundedness in reaction diffusion systems. *SIAM J. Math. Anal.* 18, 744-761.
- [51] F. Hoppensteadt. 1974. An age dependent epidemic model. *J. Franklin Inst.* 197, 325.
- [52] M. Iannelli. 1994. *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*. Applied Mathematics Monographs No 7, C.N.R. Pisa.
- [53] Y. Ishibashi, T. Saitoh et M. Kawata. 1998. Social organisation of the vole *Clethrionomys rufocanus* and its demographic and genetic consequences : a review. *Researches on Population Ecology*, 40, (1), 39-50.
- [54] W.O. Kermack et A.C. McKendrick. 1927. Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. London A* 115. Reprinted *Bull. Math. Biol.* 51 (1991) 33.
- [55] R. Kon. 2005. Permanence of structured population models and instability of the extinction equilibrium point. Manuscript.
- [56] R. Kon. 2004. Permanence of discrete-time Kolmogorov systems for two species and saturated fixed points. *J. Math. Biol.*, 48 :57-81.
- [57] R. Kon, Y. Saito et Y. Takeuchi. 2004. Permanence of single-species stage-structured models. *J. Math. Biol.*, 48 :515-528.
- [58] T. Kostova, J. Li et M. Friedman. 1999. Two models for competition between age classes. *Math. Biosciences* 157, 65-89.
- [59] M. Kubo et M. Langlais. 1991. Periodic solutions for a population dynamics problem with age-dependence and spatial structure. *J. Math. Biol.*, 29 :363-378.
- [60] M. Kubo et M. Langlais. 1994. Periodic solutions for nonlinear population dynamics models with random diffusion. *J. Diff. Eq.*, 109(2).
- [61] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov et N.N. Ural'ceva. 1968. Linear and quasilinear equations of parabolic type. *Translations of mathematical Monographs*, 23.

- [62] M. Langlais. 1985. A nonlinear problem in age dependent population diffusion. *SIAM J. Math Anal* 16, 510-529.
- [63] M. Langlais. 1988. Large time behavior in a nonlinear age-dependant population dynamics problem with spatial diffusion. *J. Math Biol*, 26 :319-346.
- [64] C. McCaughey et C.A. Hart. 2000. Hantaviruses. *J. Med. Microbiol.*, 49 (7) : 587-599.
- [65] T.R. Malthus. 1992. *Essai sur le principe de population*, volume 2 (5e). Edition de Jean-Paul Maréchal. Paris, Garnier-Flammarion, Traduit de l'anglais par P. et G. Prévost en 1823 sur l'édition de 1817.
- [66] M. Marcus et H. Minc. 1969. *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Dover Publications, Inc. New York.
- [67] M. Mazurkiewicz. 1994. Factors influencing the distribution of the bank vole in forest habitats. *Acta Theriologica*, 39, (2), 113-126.
- [68] J.J. Morgan. 1989. Global existence for semilinear parabolic systems. *SIAM J. Math Anal* 20, 1128-1144.
- [69] J.J. Morgan. 1990. Boundedness and decay results for reaction diffusion systems. *SIAM J. Math Anal* 21, 1172-1184.
- [70] J.D. Murray. 1989. *Mathematical Biology*, volume 19. Springer Verlag, *Biomathematics*.
- [71] J.M. Naulin. 2001. *Simulations numériques et analyse mathématique de modèles de viroses dans des populations structurées*. Thèse, Université Bordeaux I.
- [72] G.E. Olsson, N. White, C. Ahlm, F. Elgh, A.C. Verlemyr et P. Juto. 2002. Demographic factors associated with hantavirus infection in bank voles (*Clethrionomys glareolus*). *Emerg. Infect. Dis.* 8, 924.
- [73] F. Rothe. 1984. *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems*. Springer Verlag.
- [74] F. Sauvage. 2004. *La synergie entre dynamique des populations réservoirs de campagnols roussâtres et excrétion du hantavirus Puumala : mise en évidence du mécanisme d'émergence de la néphropathie épidémique humaine*. Thèse, Université Claude Bernard - Lyon I
- [75] F. Sauvage, M. Langlais, N.G. Yoccoz et D. Pontier. 2003. Modelling Hantavirus in cyclic bank voles : the role of indirect transmission on virus persistence. *Journal of Animal Ecology* 72, 1-13.
- [76] F. Sauvage, M. Langlais, et D. Pontier. 2005. Predicting the emergence of human hantavirus disease using a combination of viral dynamics and rodent demographic patterns. Manuscript.
- [77] F. Sauvage, C. Penalba, P. Vuillaume, F. Boue, D. Coudrier, D. Pontier et M. Artois. 2002. Puumala hantavirus infection in humans and in the reservoir host, Ardennes region, France, *Emerging infectious diseases*, 8(12) : 1509-1511

- [78] C. Schmaljohn et B. Hjelle. 1997. Hantaviruses : a global disease problem. *Emerg. Infect. Dis.*, 3 (2) 95-104.
- [79] J. Smoller. 1983. *Shock waves and reaction diffusion equations*. Springer Verlag New York.
- [80] C. Suppo, J.-M. Naulin, M. Langlais et M. Artois. 2000. A modelling approach to vaccination and contraception programmes for rabies control in fox populations. *Proc. R. Soc. London B*, 267 (2000), pp 1575-1582.
- [81] E. Tkadlec et J. Zejda. 1998. Dendity-dependent life histories in female bank voles from fluctuating populations. *Journal of Animal Ecology*, 67, (6), 863-873.
- [82] R. Verhagen, H. Leirs, E. Tkachenko et G. Van der Groen. 1986. Ecological and epidemiological data on hantavirus in bank vole populations in Belgium. *Arch. Virol.*, 91 : 193-205.
- [83] R. Verhagen, H. Leirs, et W. Verheyen. 2000. Demography of *Clethrionomys glareolus* in Belgium. *Polish Journal of Ecology*, 48 : 113-123.
- [84] P.F. Verhulst. 1838. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10 :113-121.
- [85] M. Vidysaagar. 1993 *Nonlinear system analysis*, 2nd edition, Prentice Hall international.
- [86] G.F. Webb. 1985. *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker, New York.
- [87] C. Wolf. 2004. A mathematical model for the propagation of a hantavirus in structured populations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, Vol.4, Number 4, 1065-1089.
- [88] C. Wolf, F. Sauvage, D. Pontier, et M. Langlais. 2005. A multi-patch model with periodix demograhay for a bank vole - hantavirus system with variable maturation rate. Manuscript.
- [89] N.G. Yoccoz, L. Hansson et R.A. Ims. 2000. Geographical differences in size, reproduction and behaviour of bank voles in relation to density variations. *Polish Journal of Ecology* 48, 63-72.
- [90] N.G. Yoccoz, N.C. Stenseth, H. Henttonen et A.C. Prevoit-Julliard. 2001. Effects of food addition on the seasonal density-dependent structure of bank vole populations. *Journal of Animal Ecology*, 70, 713-720.
- [91] Rapport d'activité 2000/2001 du projet "Circulation du virus Puumala, prédiction et prévention de la FHRS". AFSSA-Nancy

Table des figures

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1.1 La zone d'endémie du hantavirus Puumala en France | 21 |
| 1.2.1 La dynamique typique des populations de campagnols roussâtres | 22 |
| 2.1.1 Le système Juvéniles-Adultes | 33 |
| 2.2.1 Le modèle SEIRS | 37 |
| 2.2.2 Le modèle JASIG | 41 |
| 2.3.1 Le modèle JASIGH | 44 |
| 5.4.1 Evolution des jeunes (a) et des adultes (b) pour le modèle sans virus. | 109 |
| 5.4.2 Evolution des jeunes (a), des adultes (b), des jeunes infectés (c) et des adultes infectés (d) pour le modèle avec virus, mais sans le sol. Les individus sains sont en traits pleins et les individus infectés sont en pointillés. | 110 |
| 5.4.3 Evolution des jeunes (a), des adultes (b), des jeunes infectés (c), des adultes infectés (d) et de la proportion d'environnement contaminé pour le modèle avec virus et en tenant compte de la contamination indirecte. Les individus sains sont en traits pleins et les individus infectés sont en pointillés. | 111 |
| 6.2.1 Système permanent en dimension 2 | 125 |
| 6.4.1 Dynamique pour le modèle JA : Convergence vers un état stationnaire ou périodique | 130 |
| 6.4.2 Dynamique pour le modèle JA : Extinction | 131 |
| 7.4.1 Dynamique pour le système (7.1.1) à coefficients périodiques : convergence vers un état endémique périodique | 143 |
| 7.4.2 Dynamique pour le système (7.1.1) à coefficients périodiques : convergence vers un état périodique avec disparition du virus | 144 |
| 7.4.3 Dynamique du système (7.1.1) à coefficients constants : convergence vers un état stationnaire avec éradication du virus | 145 |
| 7.4.4 Dynamique du système (7.1.1) à coefficients périodiques (correspondants au cas constant de la figure Fig. 7.4.3 : convergence vers un état endémique périodique | 146 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.4.1 Dynamique pour un modèle à 2 patchs : convergence vers un état endémique | 153 |
| 8.4.2 Dynamique pour un modèle à 2 patchs : convergence vers un état endémique, même si dans le second site isolé, le virus aurait disparu | 153 |
| 8.4.3 Cas où la migration permet au virus de persister sur les deux sites | 155 |
| 8.4.4 Cas où la migration induit une disparition globale du virus | 156 |
| 8.4.5 Cas où la migration permet la survie globale des campagnols et du virus | 156 |
| 8.4.6 Cas où la migration permet la survie globale des campagnols mais en entraînant la disparition du virus | 157 |
| 8.4.7 Cas où la migration permet la persistance du virus sur les deux sites . . . | 157 |
| 9.1.1 Le domaine spatial | 165 |
| 9.4.1 Caractéristique $t = a$ | 170 |
| 10.1.1 Le modèle JASIG structuré discrètement en âge de l'infection | 190 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 | Analyse de stabilité du modèle JA | 127 |
| 7.1 | Analyse de stabilité du modèle JASIG | 141 |
| 8.1 | Coefficients constants pour les figures Fig. 8.4.3 à Fig. 8.4.7 | 154 |

Modélisation et analyse mathématique de la propagation d'un microparasite dans une population structurée en environnement hétérogène

Résumé

L'objet de cette thèse est la modélisation et l'étude mathématique d'un système Hôte-Microparasite modélisant la propagation d'une épidémie à l'intérieur d'une population structurée. Ce travail est inspiré par le système Hantavirus Puumala - Campagnol roussâtre dont nous commençons par déterminer les principales caractéristiques à considérer dans les modèles construits par la suite : maturation sexuelle des juvéniles dépendant de la densité d'adultes, dynamiques allant de quasi stationnaire à périodiques, virus bénin sur l'hôte et transmission directe et indirecte du virus. Dans chacune des parties suivantes nous étudierons les modèles démographique (comprenant 2 classes de populations : juvéniles et adultes) et épidémiologique (distinguant individus sains et infectés et incluant une équation pour l'environnement contaminé).

La deuxième partie est consacrée à l'étude de modèles structurés en âge chronologique et en âge de l'infection. Nous obtenons pour ces systèmes d'E.D.P. non linéaires faiblement hyperboliques, avec des non linéarités non locales des résultats d'existence et d'unicité.

La troisième partie présente pour des systèmes d'E.D.O. des analyses de stabilité des états stationnaires dans le cas de coefficients constants, ainsi que l'émergence de solutions périodiques en introduisant de perturbations périodiques. Un modèle multi-sites (structuration discrète en espace) est également étudié et des simulations numériques complètent ces études.

Enfin la quatrième partie présente le cas d'une structuration spatiale continue. Pour les systèmes non-linéaires de réaction-diffusion avec structuration continue en âge ainsi obtenus, nous présentons des résultats d'existence globale, d'unicité et de majoration globale des solutions. Un modèle avec transmission à l'Homme est également étudié dans cette partie.

Mots-clefs : dynamique des populations, structuration en âges, structuration en espace, modèle épidémique SI, analyse mathématique, stabilité, états endémiques, transmission indirecte.

Modelling and mathematical analysis of the propagation of a microparasite in a structured population in heterogeneous environment

Abstract

This thesis deals with the derivation and the mathematical analysis of a deterministic mathematical model describing the propagation of a virus within a structured host population. This work is motivated by the Puumala Hantavirus (PUU) - bank vole system. We first exhibit the main features in our models : constant to time oscillating vital dynamics, maturation and dispersion of juveniles depending on the density of adult individuals, the virus is benign in the host population and virus propagation occurs through direct transmission and indirect contamination. We distinguished juveniles and adult individual and study both demographic and epidemiologic models (with an equation for contaminated environment).

In part two our models include the chronological age of individuals and the time elapsed since an individual is infected. This leads to a weakly coupled system of hyperbolic equations featuring nonlocal nonlinearities and we give a global existence and uniqueness result.

In part three we are interested in O.D.E.s systems. Using bifurcation techniques we show how small periodic perturbations of constant coefficients lead to the emergence of periodic endemic states from locally asymptotically stable stationary states. A multi-patch model is also derived and numerical simulations illustrate our results.

The last part deals with continuous spatial structure and we have reaction-diffusion systems with age structure. We give global existence, uniqueness and global boundedness results. A model with transmission to humans is also studied here.

Key words : population dynamics, ages structure, spatial structure, SI epidemic model, mathematical analysis, stability, endemic states, indirect transmission. age structure, dynamical systems, Hantavirus.