$N°$d'ordre : 3172

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **M. Martin WEIMANN**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques pures**

****

LA TRACE EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE ET TORIQUE

****

Soutenue le : 22 Juin 2006

Après avis de :

A. DICKENSTEIN	Professeur, Université de Buenos Aires	**Rapporteur**
A. VIDRAS	Professeur, Université de Chypre	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen formée de :

J.E. BJÖRK	Professeur, Université de Stockholm	**Examinateur**
M. BRION	Professeur, Université de Grenoble	**Examinateur**
A. HÉNAUT	Professeur, Université de Bordeaux	**Président du jury**
A. VIDRAS	Professeur, Université de Chypre	**Rapporteur**
A.YGER	Professeur, Université de Bordeaux	**Directeur de thèse**

- 2006 -

La trace en géométrie projective et torique

Martin Weimann

20 Juin 2006

Préface

La notion de trace trouve ses origines dans les travaux d'Abel. Dans son article [1], Abel considère l'intégrale

$$\int_{p_0}^{p} r(x,y)dx$$

d'une 1-forme rationnelle $rdx = r(x,y)dx$ le long d'une courbe algébrique C de $\mathbb{C}^2$. Ces intégrales, dites abéliennes, sont des fonctions transcendantes en les coordonnées de p que l'on ne peut *a priori* pas exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Cependant, des liens peuvent être établis entre plusieurs intégrales de ce type, généralisant à d'autres classes de fonctions transcendantes les formules additives classiques des fonctions logarithmes et trigonométriques [23]. L'idée d'Abel est d'utiliser un polynôme Q_t en (x,y) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de variables indépendantes $t = (t_1, \ldots, t_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$, puis de considérer des sommes de telles intégrales

$$I(t) = \sum_{p \in C \cap D_t} \int_{p_0}^{p} r(x,y)dx$$

sur les points d'intersection de C avec une courbe générique $D_t = \{Q_t = 0\}$. Il prouve le théorème suivant :

Théorème d'Abel : la fonction $t \mapsto I(t)$ est de la forme $I(t) = Q(t) + log\, R(t)$ où R et Q sont des fonctions rationnelles de t.

Si l'intersection $V \cap D_{t_0} = \{p_1(t_0), \ldots, p_N(t_0)\}$ est transverse, avec de plus $N = d\,\mathrm{deg} Q_t$, les applications $t \mapsto p_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ sont holomorphes en t_0 et

$$dI(t) = \sum_{r=1}^{N} (x_r(t), y_r(t))dx_r(t) = \sum_{r=1}^{N} p_r^*(\Phi)(t)$$

au voisinage de t_0, où $\Phi = r(x,y)dx$. On appelle la 1-forme dI la trace de Φ sur C, notée $\mathrm{Tr}_C\Phi$. Le Théorème d'Abel se reformule sous la forme :

La 1*-forme* $\mathrm{Tr}_C\Phi$ *est rationnelle en* t.

Les théories fécondes des fonctions elliptiques, hyperelliptiques et jacobiennes issues des travaux d'Abel (et d'autres) ont trouvé de nombreuses applications en géométrie algébrique et en théorie des nombres.

Dans leurs articles fondateurs, Griffiths [23] en 1976 et Henkin et Passare [31] en 1999 prouvent le Théorème d'Abel-inverse :

Si un ouvert U *de* $\mathbb{P}^n$ *est réunion de droites projectives, le prolongement à* $\mathbb{P}^n$ *d'un ensemble analytique fermé* C *de* U *et d'une* q*-forme méromorphe* Φ *sur* C *équivaut à la rationalité de la trace* $\mathrm{Tr}_C\Phi$ [1].

L'objectif de cette thèse est de revisiter la théorie de la trace et les problèmes d'inversion à l'aide de l'utilisation systématique du calcul résiduel, qui apparaît déjà dans les deux articles cités ci-dessus. Ce travail se décompose en deux parties, l'une dans le cadre projectif et l'autre dans le cadre torique.

Dans la première partie, on montre comment la théorie des résidus permet le calcul effectif de la trace d'une forme méromorphe sur une hypersurface analytique et on obtient une caractérisation algébrique des formes traces en se ramenant au cadre élémentaire du calcul résiduel d'une variable. En conséquence, une version plus forte du théorème d'Abel-inverse que celle donnée dans [31] est prouvée : un germe de trace de forme méromorphe sur une hypersurface analytique est rationnel en les variables ne correspondant pas à la pente si et seulement s'il se prolonge en la trace d'une forme rationnelle sur une hypersurface algébrique. La preuve s'appuie sur des mécanismes algébriques d'inversion et sur une équation différentielle de type "onde de choc" vérifiée par les coefficients de la trace. Le théorème de Wood [39] donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une collection de germes d'hypersurfaces soit incluse dans une hypersurface algébrique. On établit le lien logique de cet énoncé avec le théorème d'Abel-inverse. Enfin, on obtient une nouvelle méthode pour calculer la dimension de l'espace des formes abéliennes de degré maximal sur une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ (voir [30]).

[1] Griffiths montre ce théorème dans le cas $\mathrm{Tr}_C\Phi = 0$ et Henkin et Passare dans le cas local, obtenant le cas rationnel en corollaire.

Dans la seconde partie, on étend certains des résultats obtenus au cadre torique. Si U est un ouvert de $\mathbb{P}^n$ qui n'est plus concave, il est nécessaire de considérer une famille rationnelle $\{C_t,\ t \in \mathbb{C}^\nu\}$ de courbes de degré suffisament élevé pour que l'intersection d'une hypersurface algébrique $V \subset \mathbb{P}^n$ avec une courbe C_t puisse être incluse dans U, condition nécessaire pour les théorèmes d'Abel et d'Abel-inverse. Ce type de généralisations est développé par Bruno Fabre dans [18]. Cependant, la compactification projective de $\mathbb{C}^n$ n'est pas toujours appropriée si les supports (fixés) des polynômes définissant la courbe C_t sont quelconques. De plus, pour les problèmes d'inversion, l'espace projectif ne permet qu'une caractérisation grossière du comportement asymptotique de V en terme des traces. Ces considérations m'ont motivé à généraliser la théorie de la trace dans les variétés toriques complètes lisses, compactifications de $\mathbb{C}^n$ ou $(\mathbb{C}^*)^n$ plus fines que $\mathbb{P}^n$.

Si X est une variété torique lisse complète [20], on associe à toute famille de fibrés en droites $(L_1, \dots, L_k)$ un espace dual $X^* = X^*(L_1, \dots, L_k)$ paramétrant l'espace des sous-variétés C de X de type $(L_1, \dots, L_k)$, *i.e* de la forme

$$C = H_1 \cap \cdots \cap H_k, \quad H_i \in |L_i|$$

où $|L_i|$ est le système linéaire complet associé au fibré L_i. L'espace X^* est isomorphe à un produit d'espaces projectifs et remplace la grassmanienne utilisée dans le cas projectif. Les notions de variété d'incidence, de concavité, d'espace dual et de trace abordées dans la première partie trouvent naturellement leur généralisation à ce cadre plus étendu, faisant toutefois apparaître des sous-variétés $(L_1, \dots, L_k)$-dégénérées V pour lesquels l'application trace

$$\mathrm{Tr}_V : \mathbb{C}(V) \longrightarrow \mathbb{C}(X^*)$$

est triviale. La condition de dégénérescence d'une variété k-dimensionnelle $V \subset X$ ne dépend que de sa classe dans le groupe de Chow $A_k(X)$ (et de celle des fibrés L_i) et se caractérise grâce à la géométrie combinatoire (Théorème 2.1, page 74 et Théorème 2.3, page 78). L'utilisation systématique des courants résiduels permet d'étendre au cadre torique les résultats de la première partie : équations d'onde de chocs, lemme de prolongement, rôle des coefficients extrémaux, degré des traces, réduction au calcul résiduel d'une variable. Si la famille $(L_1, \dots, L_{n-1})$ est très ample, on obtient finalement la version torique des théorèmes de Wood et d'Abel-inverse dans le cas d'une hypersurface V qui permet une description plus précise du support du polynôme définissant la restriction de V à $\mathbb{C}^n$.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus grande gratitude à mon directeur de thèse Alain Yger qui m'a accompagné et guidé pour mes premiers pas dans la recherche. Sans son soutien et son attention, tant humains que mathématiques, cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Peut-être plus que tout, sa passion, son humilité, sa confiance m'ont permis de surmonter les passages difficiles qui peuvent jalonner le parcours d'un jeune chercheur.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Alain Hénaut. Au même titre que mon directeur de thèse, ses qualités d'enseignant et de chercheur m'ont sans aucun doute donné goût dès la maîtrise pour cette merveilleuse discipline qu'est la géométrie.

Je remercie Alicia Dickenstein et Alekos Vidras d'avoir accepté la charge d'être les rapporteurs de cette longue thèse et de leur lecture attentive. Pour les discussions enrichissantes et pour leur présence dans mon jury de thèse, un grand merci à Jan-Erik Björk, Michel Brion et Alekos Vidras. Pour leur accueil ou leur écoute, je remercie Pierre Parent, Mikaël Passare, Mats Andersson, August Tsikh, pour ne citer qu'eux.

Je ne remercierai pas assez mon inoubliable professeur de Lycée Robert Tassan, qui a su éveiller ma curiosité pour les mathématiques. Un grand merci à l'équipe de Limoges, en particulier Abdelkader Naser, Jean-Pierre Matthias et Jacques-Arthur Weil, qui ont tant partagé avec moi.

Mes dernières pensées sont pour Aude, Bapt, Cocotte, Dan, David, Ivan, JB, Joce, Krassi, Mag, Montse, Nao, Niki, Tom, Yann, mon frêre Théo et tous les autres pour leur grande amitié. Enfin, les creusois, famille et amis, si présents dans mon coeur...Je dédicace cette thèse à mes parents.

Table des matières

Première partie

La trace en géométrie projective

Introduction

Soit X une variété analytique complexe de dimension n de faisceau structural $\mathcal{O}_X$. On note Ω_X^q (resp. M_X^q) le faisceau des $(q,0)$-formes holomorphes (resp. méromorphes) sur X.
Pour tout ouvert U de X, on note $C^{\infty,c}_{(r,s)}(U)$ l'espace des formes-test $\mathcal{C}^\infty$ de bidegré (r,s) à support compact dans U. Le courant d'intégration associé à un sous-ensemble analytique fermé V de U de dimension k, est un courant noté $[V]$, supporté par V, positif, fermé, de bidegré $(n-k,n-k)$, qui agit sur $C^{\infty,c}_{(k,k)}(U)$ par intégration sur la partie régulière de V.

Une q-forme méromorphe Φ de U définit une forme méromorphe sur V si son lieu polaire $\mathrm{pol}\,(\Phi)$ intersecte V proprement. On note M_V^q le faisceau sur V correspondant. Le courant

$$T : \theta \mapsto \int_{V \setminus V\cap \mathrm{pol}\,(\Phi)} \Phi \wedge \theta$$

est naturellement défini sur $C^{\infty,c}_{(k-q,k)}(U \setminus V \cap \mathrm{pol}\,(\Phi))$. Si g est une fonction holomorphe dans U qui vérifie $V \cap \mathrm{pol}\,(\Phi) \subset \{g=0\}$ avec de plus $\dim(\{g=0\}\cap V) < \dim V$, il est montré dans [10], [32] que Φ est méromorphe sur V si et seulement si le courant valeur principal

$$\theta \mapsto \lim_{\epsilon\to 0} \int_{(V\setminus V\cap \mathrm{pol}\,(\Phi))\cap\{|g|>\epsilon\}} \Phi \wedge \theta$$

existe et prolonge T à U indépendamment de g en un courant $[V]\wedge\Phi$ supporté par V. On dit que Φ est régulière ou abélienne en $p \in V$ si ce courant est $\bar\partial$-fermé en p et on note ω_V^q le faisceau sur V correspondant [2]. Si V est lisse, on a $\omega_V^q = \Omega_V^q$, mais en général, une forme régulière sur V est restriction à V d'une forme méromorphe Φ dans l'espace ambient qui peut ne pas être holomorphe au voisinage de V : les singularités de V compensent dans certains cas les pôles de Φ ([2, 31]).

On note $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif complexe. Un ouvert $U \subset \mathbb{P}^n$ est dit linéairement concave (ou 1-concave) si par chacun de ses points passe une droite incluse dans U. Dans ce cas, le dual U^* est un ouvert non vide de la grassmanienne $\mathbb{G}(1,n)$ constitué des droites incluses dans U et on peut définir la variété d'incidence au-dessus de U

$$I_U := \{(z,L) \in U \times U^* \; ; \; z \in L\},$$

munie des projections naturelles p_U et q_U sur U et U^*. Puisque p_U est une submersion et q_U est propre (la propreté de q_U, cruciale ici, est liée à la compacité de l'espace projectif), on peut définir pour tout sous-ensemble analytique fermé V de U et toute q-forme méromorphe Φ sur V le courant sur U^*

$$\mathcal{A}(\Phi \wedge [V]) := q_{U*}(p_U^*(\Phi \wedge [V])),$$

que l'on appelle la transformée d'Abel-Radon de $\Phi \wedge [V]$.

Si V est de codimension 1, une droite L_0 générique coupe V transversalement en d points distincts $p_1(L_0), \dots, p_d(L_0)$ (ces derniers sont en nombre fini localement constant, grâce à la compacité de l'espace projectif). Dans ce cas, les applications $L \mapsto p_j(L)$ sont holomorphes au voisinage de L_0 et on a l'égalité

$$\mathcal{A}(\Phi \wedge [V])(L) = \sum_{j=1}^{d} p_j^*(\Phi)(L).$$

Par le théorème d'Abel généralisé [31], ce courant est une q-forme méromorphe sur U^*, que l'on appellera *la trace de* Φ *sur* V, notée $\mathrm{Tr}_V(\Phi)$ [2].

Soit $(X_1 : X_2 : \cdots : X_{n-1} : Y : Z)$ un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^n$ pour lequel la droite $L_0 := \{X_1 = \cdots = X_{n-1} = 0\}$ est incluse dans U et coupe V transversalement en une collection finie de points n'appartenant pas à l'hyperplan à l'infini $Z = 0$. On peut dans ce cas utiliser les coordonnées affines $(x,y) = (x_1, \dots, x_{n-1}, y) := (\frac{X_1}{Z}, \dots, \frac{X_{n-1}}{Z}, \frac{Y}{Z})$ au voisinage de $V \cap L_0$. Toute droite voisine de L_0 est définie par l'annulation des fonctions affines

$$l_i(x,y,a,b) := x_i - a_i y - b_i \, , \; i = 1, \dots, n-1.$$

[2] en général la trace d'un courant désigne son image directe par une application propre sur son support. La trace de Φ sur V correspond ici à l'image directe *via* q_U du courant $p_U^*(\Phi \wedge [V])$ sur U^*.

On note $(a,b) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1})$ les coordonnées dans l'ouvert de $\mathbb{G}(1,n)$ correspondant et $L_{(a,b)}$ la droite projective ainsi définie.

On rappelle au Chapitre 1 certains outils de la théorie des résidus : courants résiduels, résidus de Grothendieck, théorème de dualité. L'équation de Lelong-Poincaré, liant courant d'intégration et courant résiduel permet d'obtenir une formule résiduelle pour la trace qui motive l'utilisation du théorème de dualité pour les problèmes d'inversion.

Au Chapitre 2, on caractérise les germes de $(n-1)$-formes méromorphes en $L_0 \in \mathbb{G}(1,n)$ qui sont la trace d'un germe de $(n-1)$-forme méromorphe Φ sur une collection (encore notée V) de germes d'hypersurfaces analytiques le long de la droite L_0. On se ramène pour cela au cadre polynômial pour tester le théorème de dualité sur un nombre fini de fonctions-tests. On montre que la donnée du couple (V, Φ) équivaut à la donnée d'un couple de polynômes (F, H) à une variable de degrés respectifs d et $d-1$, à coefficients dans le corps des germes de fonctions méromorphes en $(a,b) = (0,0) \in \mathbb{G}(1,n)$, vérifiant une équation différentielle du type *onde de choc*. Les coefficients des polynômes F et H sont uniquement déterminés par un système linéaire non dégénéré dont les coefficients sont des sommes complètes de résidus. Cette équivalence donne deux résultats importants. D'une part, le couple (F, H) permet de caractériser uniquement le couple (V, Φ) en terme des traces $\mathrm{Tr}_V(y^k)$ et $\mathrm{Tr}_V(y^k\Phi)$, pour $k = 0, \ldots, 2d-1$ (où $d := \mathrm{Tr}_V 1$), *calculées suivant une famille de droites de même direction.* [3] D'autre part on obtient une formule résiduelle algébrique de la trace de Φ sur V qui caractérise les germes de traces. Les coefficients s'obtiennent par des calculs de résidus de fonctions rationnelles d'une variable, c'est-à-dire un calcul de reste dans une division euclidienne (cette approche se trouvait déjà esquissée dans l'article de P.A. Griffiths [23]).

Le chapitre 3 est consacré aux applications de ces résultats. Le théorème d'Abel-inverse, prouvé par Henkin et Passare (1999, [31]), stipule dans sa version globale qu'il faut et il suffit que la trace de Φ sur V soit rationnelle pour que V soit incluse dans une hypersurface algébrique $\widetilde{V}$ (de degré $d = \mathrm{Tr}_V 1$) et que Φ se prolonge en une forme rationnelle sur $\widetilde{V}$. Ce résultat est prouvé par Griffiths dans le cas de la trace nulle dans [23], auquel cas la forme Φ se prolonge en une forme abélienne sur $\widetilde{V}$. On dégage les mécanismes mis

[3] En restreignant à une seule projection, on retombe sur le concept de trace usuel originellement développé par Barlet [2].

en jeu dans les problèmes d'inversion et on montre que la rationalité de la trace en $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ pour tout a voisin de 0 suffit pour aboutir aux mêmes conclusions. On montre ensuite le lien avec le théorème de Wood [39] qui affirme qu'il est équivalent que V soit algébrique de degré d et que la trace de y soit affine en b. On prouve que la rationalité en b de la trace d'une $n-$forme méromorphe quelconque implique que la trace de y est affine en b. Pour finir, la caractérisation résiduelle des formes traces permet de retrouver la dimension de l'espace ω_V^{n-1} des $n-1$-formes abéliennes (*i.e.* de trace nulle) sur une hypersurface algébrique V (voir [30] pour une preuve *via* les tissus).

La majorité des démonstrations et des mécanismes mis en oeuvre s'appuient uniquement sur des calculs de résidus de polynômes, c'est-à-dire des restes de divisions euclidiennes dans l'anneau des polynômes. En ce sens, on peut parler de l'aspect algébrique du théorème d'Abel et de son inversion, et plus généralement du concept de trace. Les résultats présentés dans cette première partie s'inspirent des travaux d'Alain Yger [40], [41]. Des idées similaires ont été développées récemment et indépendamment par Bruno Fabre dans le cas plus général des courants localement résiduels [19].

Chapitre 1

Généralités

1.1 Calcul résiduel

On garde les notations de l'introduction. Soit U un ouvert de X et $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Le courant valeur principale $[\frac{1}{f}]$ (voir [32]) agit sur $\psi \in C^{\infty,c}_{(n,n)}(U)$ par :

$$< \Big[\frac{1}{f}\Big], \psi >:= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|f|>\epsilon} \frac{\psi}{f}.$$

Par le théorème de Stokes, le courant résiduel $\bar{\partial}\Big[\frac{1}{f}\Big]$ agit sur $\psi \in C^{\infty,c}_{(n,n-1)}(U)$ par :

$$< \bar{\partial}\Big[\frac{1}{f}\Big], \psi >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|f|=\epsilon} \frac{\psi}{f}.$$

Plus généralement, si $f_1, ..., f_k$ est une suite quasi-regulière de l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ (ce qui équivaut à l'exactitude du complexe de Koszul associé, sauf éventuellement au degré 0, ou encore au fait que $f_1, ..., f_k$ définisse une intersection complète dans U, [41]), on peut définir (voir par exemple [10], [32], [34]) le courant résiduel de Coleff-Herrera

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} \cdot \\ f_1, \ldots, f_k \end{bmatrix} := \frac{1}{(2i\pi)^k} \bar{\partial}\Big[\frac{1}{f_1}\Big] \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\Big[\frac{1}{f_k}\Big],$$

où l'on utilise ici les notations standard. Ce courant est $\bar{\partial}$-fermé, supporté par $V := \{f_1 = \cdots = f_k = 0\}$ et nul sur les formes-test à coefficients anti-holomorphes. Il est lié au courant d'intégration $[V]$ par la formule de

Lelong-Poincaré

$$[V] = \frac{1}{(2i\pi)^k}\bar\partial\Big[\frac{1}{f_1}\Big] \wedge \cdots \wedge \bar\partial\Big[\frac{1}{f_k}\Big] \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k.$$

Un outil majeur du calcul résiduel est le théorème de dualité : si U est un domaine d'holomorphie et $g, f_1, \ldots, f_k$ une suite quasi-régulière dans $\mathcal{O}_X(U)$, alors $h \in \mathcal{O}_X(U)$ est dans l'idéal $(f_1, \ldots, f_k)$ si et seulement si le courant

$$h\Big[\frac{1}{g}\Big]\bar\partial\Big[\frac{1}{f_1}\Big] \wedge \cdots \wedge \bar\partial\Big[\frac{1}{f_k}\Big]$$

est nul sur les formes-test $\overline{\partial}$-fermées au voisinage de V. Ce théorème s'applique notamment dans les anneaux locaux des germes de fonctions holomorphes. Le pendant algébrique de ce résultat dans le cadre élémentaire du calcul résiduel en une variable est une conséquence de l'algorithme de division euclidienne : si $F \in \mathbb{C}[Y]$, alors $H \in \mathbb{C}[Y]$ est divisible par F si et seulement si

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} Y^k\, H\, dY \\ F \end{bmatrix} = 0\,, \qquad \forall k = 0, \ldots, \deg F - 1\,.$$

Soit $p = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \in X$ et $f_1, \ldots, f_n$ une suite régulière dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,p}$ des germes de fonctions holomorphes en p. Pour tout $h \in \mathcal{O}_{X,p}$, on appelle résidu ponctuel ([24], Chapitre 6) en p de la n-forme méromorphe $\omega = \frac{hdx\wedge dy}{f_1\cdots f_n}$ (où $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$) le complexe

$$\mathrm{res}_p(\omega) := \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{|f_1|=\epsilon_1,\ldots,|f_n|=\epsilon_n} \frac{hdx \wedge dy}{f_1 \cdots f_n}$$

(ce nombre ne dépend pas de $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ pour les ϵ_j suffisamment petits par le théorème de Stokes). Plus généralement, si $h \in \mathcal{O}_X(U)$ et $f_1, \ldots, f_n$ est une suite quasi-régulière dans l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ ayant pour zéros en commun $p_1, \ldots, p_r$, le résidu global (dans U) de la n-forme méromorphe $\omega := \frac{hdx\wedge dy}{f_1\cdots f_n}$ est le complexe $\sum_{i=1}^r \mathrm{res}_{p_i}\omega$. Résidus ponctuels et courants résiduels sont liés par l'égalité :

$$\sum_{i=1}^r \mathrm{res}_{p_i}\omega = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} hdx \wedge dy \\ f_1, f_2, \ldots, f_n \end{bmatrix}.$$

1.2 Lien avec la trace

On suppose maintenant $X = \mathbb{P}^n$ et on garde les notations de l'introduction. Soit $U \subset \mathbb{P}^n$ un ouvert linéairement concave contenant la droite $L_0 := \{x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0\}$, V une hypersurface analytique de U coupant proprement L_0 et Φ une q-forme méromorphe sur V. On note $[I_U]$ le courant d'intégration sur $U \times U^*$ associé à la variété d'incidence I_U. On peut expliciter dans des cartes affines de la grassmannienne les coefficients de la q-forme méromorphe

$$\mathrm{Tr}_V \Phi := q_{U*}(p_U^*([V] \wedge \Phi)).$$

Pour toute forme-test $\varphi \in C^{\infty,c}_{(2(n-1)-q,2(n-1))}(U^*)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Tr}_V(\Phi), \varphi\rangle &= \int_{U^*} \mathrm{Tr}_V(\Phi)(a,b) \wedge \varphi(a,b)\\ &= \int_{\mathrm{I}_U} ([p_U^{-1}(V)(a,b)] \wedge p_U^*[\Phi]) \wedge {q_U}^*(\varphi)(x,y,a,b)\\ &= \int_{U\times U^*} ([V](x,y) \wedge [I_U](x,y,a,b)) \wedge \Phi(x,y) \wedge \varphi(a,b)\end{aligned}$$

Le courant $T := [V(x,y)] \wedge [I_U(x,y,a,b)] \wedge \Phi(x,y)$ est un $(q+n,n)$-courant sur $U \times U^*$ d'image directe $q_{U*}T = \mathrm{Tr}_V\Phi$. On note $\{f(x,y) = 0\}$ l'équation de V au voisinage de $V \cap L_0$ (f est holomorphe au voisinage de $V \cap L_{(a,b)}$ pour (a,b) proches de $(0,0) \in U^*$). La formule de Lelong-Poincaré donne au voisinage de $(0,0) \in U^*$ l'expression locale de T

$$T = \frac{1}{(2i\pi)^n}\Phi \wedge df \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n-1} d_{(x,y,a,b)} l_i\Big) \wedge \bar\partial\Big[\frac{1}{f}\Big] \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bar\partial_{(x,y,a,b)}\Big[\frac{1}{l_i}\Big]\Big).$$

Ces calculs se généralisent naturellement pour les intersections complètes de codimension plus grande que 1. Examinons deux cas particuliers.

1. Φ *est une fonction sur* V

On suppose que $\Phi = \left(\frac{h}{g}\right)_{|V}$ est une 0-forme méromorphe sur V où h et g sont holomorphes au voisinage de V, avec $\dim V \cap \{g = 0\} < \dim V$ et $V \cap \{g = 0\} \cap L_0 = \emptyset$. Le courant $\mathrm{Tr}_V\Phi$ agit sur des formes-tests de U^* de degré maximal, d'où l'égalité

$$\langle \mathrm{Tr}_V\Phi, \varphi\rangle = \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{U\times U^*} \Big[\frac{h}{g}\Big] \wedge \bar\partial\Big[\frac{1}{f}\Big] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bar\partial_{(x,y)}\Big[\frac{1}{l_i}\Big] \wedge df \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n-1} d_{(x,y)} l_i\Big) \wedge q_U^*\varphi.$$

Par le théorème de Fubini, puis par dualité, l'expression de la trace de Φ au voisinage de $(0,0) \in U^*$ devient

$$\mathrm{Tr}_V \Phi = \left\langle \frac{1}{(2i\pi)^n} \left[\frac{1}{g}\right] \bar{\partial} \left[\frac{1}{f}\right] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \overline{\partial}_{(x,y)} \left[\frac{1}{l_i}\right] \, , \, h\, J(f,l) dx \wedge dy \right\rangle$$

où $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$ et $J(f,l) := \sum_1^{n-1} a_i \partial_{x_i} f + \partial_y f$ désigne le jacobien de l'application $(x,y) \mapsto (f, l_1, \ldots, l_{n-1})(x,y)$. Pour (a,b) voisins de $(0,0) \in U^*$, les fonctions holomorphes $(f, l_1, \ldots, l_{n-1})$ définissent un ensemble fini de points $\{p_1(a,b), \ldots, p_d(a,b)\}$ dépendant holomorphiquement des paramètres (a,b) qui ne rencontre pas l'ensemble $\{g = 0\}$; pour de tels (a,b), la trace de $\frac{h}{g}$ sur V coïncide avec le résidu global de Grothendieck dans U de la n-forme méromorphe

$$\omega_{(a,b)} := \frac{\frac{h}{g} J(f,l) dx \wedge dy}{f l_1 \cdots l_{n-1}}.$$

Seules les équations de V au voisinage des $p_i(a,b)$ interviennent dans le calcul des résidus ponctuels, ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{Tr}_V \Phi = \mathrm{Res} \begin{bmatrix} \frac{h}{g}\, J(f,l) dx \wedge dy \\ f, l_1, \ldots, l_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

pour tout (a,b) voisins de $(0,0)$.

2. Φ *est une forme méromorphe de degré maximal sur* V

Puisque V ne contient pas la droite verticale $x = 0$, la fonction $\partial_y f$ n'est pas identiquement nulle sur V, ce qui permet de supposer $\Phi = m(x,y)dx$ pour une fonction m méromorphe sur V. Dans ce cas, on fait agir le courant T sur des formes-test de $U \times U^*$ de bidegré $(n-1, 2(n-1))$ (en les variables (a,b) ici) et on a

$$\mathrm{Tr}_V\,(\Phi) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Res} \begin{bmatrix} m\, y^k\, \partial_y f\; dx \wedge dy \\ f, l_1, \ldots, l_{n-1} \end{bmatrix} \Big(\sum_{|I|=k\,,\,|J|=n-1-k\,,\,I\cap J=\emptyset} \pm da_I \wedge db_J \Big) \tag{1.2}$$

où $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ et $J = \{j_1, \ldots, j_{n-1-k}\}$ sont des multi-indices ordonnés de $\{1, \ldots, n-1\}$, $|I|$, $|J|$ leurs cardinaux et $da_I \wedge db_J := \wedge_{l=1}^k da_{i_l} \wedge_{l'=1}^{n-1-k} db_{j_{l'}}$.

Remarque 1.1 On retrouve une formule prouvée par P.A. Griffiths dans [23].

Chapitre 2

Caractérisation résiduelle des formes traces

On note $\mathcal{O}$ l'anneau factoriel (resp. $\mathcal{M}$ le corps) des germes de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) à l'origine $(a, b) = (0, 0)$ de $\mathbb{C}^{2(n-1)}$ et $L_0 \subset \mathbb{P}^n$ la droite projective correspondante.

Définition 2.1 *On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des cycles effectifs (combinaisons formelles finies à coefficients entiers positifs) de germes d'hypersurfaces analytiques γ irréductibles le long de $L_0 \cap \{Z \neq 0\}$ (i.e en différents points $P = (0, y_P) \in L_0 \cap \mathbb{C}^n$), avec $\dim(\gamma \cap L_0) = 0$. Tout élément $V \in \mathcal{V}$ admet une décomposition unique $V = \sum_{P \in L_0} V_P$ où $V_P = \sum_i k_{i,P} V_{P,i}$ est une combinaison $\mathbb{N}$-linéaire de germes d'hypersurfaces analytiques irréductibles distincts en P. On note $|V|$ le support du cycle V et $\mathcal{V}_{\mathrm{red}} \subset \mathcal{V}$ le sous-ensemble des cycles réduits, pour lesquels $k_{i,P} \in \{0, 1\}$ pour tout i et tout P.*

Définition 2.2 *Pour $V \in \mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ on note $\mathbb{C}(V)$ l'anneau des fonctions méromorphes sur V et $M^q(V)$, $q \in \{1, \ldots, n-1\}$ l'ensemble des $(q, 0)$-formes méromorphes sur V.*

Soit $V \in \mathcal{V}$ un germe irréductible en un point $P = (0, y_P)$ de L_0. Dans ce cas, $V = \{f = 0\}$ où $f \in \mathbb{C}\{x, y - y_P\}$ est un germe de fonction holomorphe réduit en P. Puisque $\dim(V \cap L_0) = 0$, la fonction $y \mapsto f(0, y)$ n'est pas identiquement nulle. Son ordre d'annulation d en $y = y_P$ est par continuité, le nombre de zéros de la fonction holomorphe $y \mapsto f(x, y)$ pour x voisin de zéro. On appelle $d := \deg(V)$ le *degré* de V, notion que l'on étend naturellement à $\mathcal{V}$ par linéarité. L'ensemble $\mathcal{V}$ est ainsi muni d'une structure de semi-groupe gradué (on rajoute l'ensemble vide de degré 0 pour avoir un élément neutre). On suppose que l'équation $\{f = 0\}$ d'un germe V prend en compte les multiplicités de chacune des branches de V.

Remarque 2.1 Si $V \in \mathcal{V}_{red}$, l'entier d est le degré du revêtement analytique (V, π, I) où I est un ouvert suffisamment petit de $\mathbb{C}^{n-1}$ centré en $x = 0$ et π est la projection verticale $(x, y) \mapsto x$. Si $V = \{f = 0\}$ où f est un polynôme, d ne coïncide *a priori* pas avec le degré de f : le degré du germe en 0 de l'ensemble $V = \{y^2 - x^3 = 0\}$ est 2 alors que le degré de f est 3 (correspondant ici au degré de la projection $(x, y) \mapsto y$).

Ce chapitre a pour but, d'une part de caractériser les éléments de $\mathcal{V}$ en termes de traces de monômes (Théorème 2.1), d'autre part de donner une caractérisation résiduelle des germes de $n-1$-formes méromorphes en $(0, 0) \in \mathbb{G}(1, n)$ qui sont la trace de germes de $(n-1)$-formes méromorphes sur un cycle réduit V (Théorème 2.2).

2.1 Construction du polynôme F

Soit $V = \{f = 0\} \in \mathcal{V}$ un germe irréductible en $P \in L_0$, de degré d et $\widetilde{f}(y, a, b) = f(ay + b, y) \in \mathcal{O}\{y - y_P\}$. La fonction $\widetilde{f}$ est irréductible et régulière de degré d en $y - y_P$. Par le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un unique polynôme unitaire irréductible $Q \in \mathcal{O}[Y]$ de degré d et $u \in \mathcal{O}\{y - y_p\}$ inversible tels que :

$$\widetilde{f}(y, a, b) = Q(y, a, b)u(y, a, b)$$

avec $Q(y, 0, 0) = (y - y_P)^d$ et $u(y_P, 0, 0) \neq 0$.

Lemme 2.1 *Soit $h \in \mathbb{C}(V)$. Sous les hypothèses précédentes, on a l'égalité*

$$\mathrm{Tr}_V(h) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} h(ay + b, y)\, \partial_y Q(y, a, b)\, dy \\ Q(y, a, b) \end{bmatrix}.$$

En particulier, on a l'égalité $\deg V = \mathrm{Tr}_V(1)$.

Preuve. On introduit une fonction plateau θ valant 1 au voisinage de V. Par (1.1), l'expression de la trace devient

$$\mathrm{Tr}_V(h) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta(x, y)\, h(x, y)\, J(f, l)\, dy \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \\ f, x_1 - a_1 y - b_1, \ldots, x_{n-1} - a_{n-1} y - b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

La fonction

$$(x,y,a,b) \mapsto \theta\, h\, J(f,l)\,(x,y,a,b) - \theta\, h\, J(f,l)(ay+b,y,a,b)$$

est combinaison linéaire des l_i à coefficients semi-méromorphes en $(0,y_P,0,0)$. Par le théorème de dualité, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_V\,(h) &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix}\theta\, h(x,y)\, J(f,l)(x,y,a,b)\, dy\wedge dx\\ f, l_1,\dots,l_{n-1}\end{bmatrix}\\
&= \mathrm{Res}\begin{bmatrix}\theta(ay+b,y)\, h(ay+b,y)\, J(f,l)(ay+b,y,a,b)\, dy\wedge dx\\ f(ay+b,y), x_1-a_1y-b_1,\dots,x_{n-1}-a_{n-1}y-b_{n-1}\end{bmatrix}\\
&= \mathrm{Res}\begin{bmatrix}\theta(ay+b,y)\, h(ay+b,y)\, J(f,l_1,\dots,l_{n-1})(ay+b,y,a,b)\, dy\\ f(ay+b,y)\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

où les égalités sont dans $\mathcal{M}$. De l'égalité

$$J(f,l)(ay+b,y,a,b) = \Big(\sum_1^{n-1} a_i\partial_{x_i} f + \partial_y f\Big)(y,a,b) = \partial_y \widetilde{f}\,(y,a,b),$$

où $\widetilde{f}(y,a,b) = Q(y,a,b)u(y,a,b)$, on déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_V\,(h) &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix}\theta(ay+b,y)\, h(ay+b,y)\, \partial_y\widetilde{f}(y,a,b)dy\\ \widetilde{f}(y,a,b)\end{bmatrix}\\
&= \mathrm{Res}\begin{bmatrix}\theta\, h(ay+b,y)\, \partial_y Q\, dy\\ Q\end{bmatrix} + \mathrm{Res}\begin{bmatrix}\theta\, h(ay+b,y)\, \partial_y u\, dy\\ u\end{bmatrix};
\end{aligned}$$

la fonction u est inversible sur le support de $y \mapsto p(ay+b,y)$ et le deuxième terme de la somme est nul ; les zéros de Q sont localisés au voisinage de l'origine et la fonction plateau devient inutile dans le premier terme de la somme, ce qui fournit la formule souhaitée pour la trace $\mathrm{Tr}_V\,(h)$. □

Si maintenant $V = V_1 + \cdots + V_k \in \mathcal{V}$ est une somme de germes irréductibles $V_i = \{f_i(x,y) = 0\}$ distincts deux à deux, on définit comme précédemment les fonctions $Q_i \in \mathcal{O}[Y]$ associées aux f_i et, en posant $Q = Q_1\cdots Q_k$, on obtient :

$$\mathrm{Tr}_V\,(y^k) = \sum_i \mathrm{Res}\begin{bmatrix}y^k\,\partial_y\, Q_i\, dy\\ Q_i\end{bmatrix} = \mathrm{Res}\begin{bmatrix}y^k\,\partial_y Q\, dy\\ Q\end{bmatrix}.$$

Par le théorème d'Abel, les germes $u_k := \mathrm{Tr}_V\,(y^k)$ sont holomorphes en $(a,b) = (0,0)$, avec l'égalité $u_0 = deg\, Q = d$.

Lemme 2.2 *La matrice $d \times d$ suivante A à coefficients dans $\mathcal{M}$*

$$A = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{d-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{d-1} & u_d & \cdots & u_{2d-2} \end{pmatrix}$$

est non dégénérée sur le corps $\mathcal{M}$. Plus précisément, on a $\operatorname{Det} A(a,b) = \operatorname{Disc} Q(a,b)$*, où* $\operatorname{Disc} Q$ *est le discriminant de* Q*.*

Preuve. Soit E l'endomorphisme associé à A et $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}) \in \mathcal{M}^d$ un d-uplet solution de $E(\sigma) = 0$. Cette condition se traduit par

$$\operatorname{Res} \begin{bmatrix} Y^k(\sigma_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + \sigma_1 Y + \sigma_0)\, \partial_y Q(Y,a,b)\, dY \\ Q(Y,a,b) \end{bmatrix} = 0\,, \; k = 0, \ldots, d-1.$$

Par le théorème de dualité, on a $(\sigma_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + \sigma_1 Y + \sigma_0)\partial_y Q \in (Q)$, soit $\sigma = (0, \ldots, 0)$ par le lemme de Gauss puisque Q est sans facteurs multiples et $\deg Q = d$; on voit par ce biais que $\operatorname{Det} A(a_0, b_0) = 0$ si et seulement si les polynômes $\partial_y Q(Y, a_0, b_0)$ et $Q(Y, a_0, b_0)$ ont une racine commune. Pour (a,b) génériques, le polynôme Q a d racines $y_1(a,b), \ldots, y_d(a,b)$ distinctes et on a $A = S^t S$ où $S = (y_i^j)_{0 \le i,j \le d-1}$ est la matrice de Vandermonde des racines de Q, d'où $\operatorname{Det} A(a,b) = \operatorname{Disc} Q(a,b)$. □

Remarque 2.2 Le germe holomorphe $\operatorname{Det} A$ s'annule en (a,b) si et seulement si l'application $y \mapsto f(ay+b, y)$ a une racine multiple. Géométriquement, la droite $L_{(a,b)}$ est tangente à V ou contient un point singulier de V.

On note $\mathcal{U}[Y] \subset \mathcal{O}[Y]$ l'ensemble des polynômes unitaires vérifiant les n relations

$$\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F)\,, \qquad i = 1, \cdots, n-1. \tag{2.1}$$

Lemme 2.3 *L'ensemble $\mathcal{U}[Y]$ admet une structure de semi-groupe (multiplicatif) gradué avec la graduation naturelle qui hérite de la factorialité de l'anneau $\mathcal{O}[Y]$.*

Preuve. Si F_1 et F_2 sont deux facteurs de F vérifiant

$$\partial_{a_i} F_j - Y\partial_{b_i} F_j \in (F_j) \quad j = 1, 2\,,$$

leur produit vérifie

$$\partial_{a_i}(F_1F_2) - Y\partial_{b_i}(F_1F_2) = F_2(\partial_{a_i}F_1 - Y\partial_{b_i}F_1) + F_1(\partial_{a_i}F_2 - Y\partial_{b_i}F_2) \in (F_1F_2)$$

pour tout $i = 1, \cdots, n-1$, ce qui donne à $\mathcal{U}[Y]$ une structure de semi-groupe (multiplicatif) gradué avec la graduation naturelle. Il reste à montrer la factorialité. Soit $F \in \mathcal{U}[Y]$ et soit $F = F_1^{k_1} \cdots F_s^{k_s}$ sa décomposition dans l'anneau factoriel $\mathcal{O}[Y]$. Il suffit de montrer que tout facteur irréductible F_i de F vérifie (2.1). En posant $F = F_1^{k_1}P$, on a

$$\partial_{a_i}F - Y\partial_{b_i}F = F_1^{k_1}(\partial_{a_i}P - Y\partial_{b_i}P) + kF_1^{k_1-1}P(\partial_{a_i}F_1 - Y\partial_{b_i}F_1) \in (F_1^{k_1}P).$$

Ceci implique $k_1F_1^{k_1-1}P(\partial_{a_i}F_1 - Y\partial_{b_i}F_1) \in (F_1^{k_1})$ pour tout i. Or, P est premier avec F_1 d'où $\partial_{a_i}F_1 - Y\partial_{b_i}F_1 \in (F_1)$, ce qui achève la preuve du Lemme 2.3. □

Proposition 2.1 *Il existe un isomorphisme de semi-groupes gradués*

$$\Pi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}[Y].$$

Preuve. Soit $V = \{f = 0\} \in \mathcal{V}$ irréductible de degré d. On définit

$$\Pi(V) := Y^d - \sigma_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + (-1)^{d-1}\sigma_0\,,$$

où $(\sigma_{d-1}, \ldots, \sigma_0) \in \mathcal{M}^d$ est l'unique solution du système linéaire (S)

$$\begin{array}{ccccc} u_{d-1}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}u_0\sigma_0 = u_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{2d-2}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}u_{d-1}\sigma_0 = u_{2d-1}, \end{array}$$

système de Cramer d'après le Lemme 2.2. Le polynôme $F = \Pi(V)$ vérifie donc

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, F\partial_y Q dy \\ Q \end{bmatrix} = 0\,, \quad k = 0, \cdots, d-1,$$

et $F\,\partial_y Q \in (Q)$ par le théorème de dualité. Or Q est irréductible (car V l'est), unitaire, et $\deg Q = \deg F$, d'où $Q = F$. Pour $\widetilde{f} = uQ$ définie précédemment, on a

$$0 = \partial_{a_i}\widetilde{f} - Y\partial_{b_i}\widetilde{f} = u(\partial_{a_i}F - Y\partial_{b_i}F) + F(\partial_{a_i}u - Y\partial_{b_i}u), \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1$$

et F divise $\partial_{a_i}F - Y\partial_{b_i}F$ dans $\mathcal{O}[Y]$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, soit $F \in \mathcal{U}[Y]$. Cette construction s'étend par multiplicativité au cas de $V \in \mathcal{V}$ quelconque et l'application $\Pi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}[Y]$ est un homomorphisme de semi-groupes gradués.

Surjectivité de Π. Soit $F \in \mathcal{U}[Y]$, irréductible de degré d. Le polynôme $F(Y,0,0)$ a dans ce cas une unique racine y_P de multiplicité d : $F(Y,0,0) = (Y - y_P)^d$. La fonction $(x,y,a) \mapsto G(x,y,a) := F(y,a,x-ay) \in \mathbb{C}\{x, y-y_P, a\}$, est régulière de degré d en $y - y_P$. Puisque F est unitaire et vérifie (2.1) , on a $G \in (\partial_{a_i}G)$ et l'ordre d'annulation en $a_i = 0$ de $a_i \mapsto G(x,y,a)$, donné par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|a_i|=\epsilon} \frac{\partial_{a_i}G\,(x,y,a)}{G(x,y,a)}\, da_i,$$

est nul pour (x,y) voisin de $(0,y_P)$ puisque la fonction sous l'intégrale est holomorphe pour ϵ suffisamment petit. Par utilisations successives du théorème de préparation de Weierstrass (on élimine les variables a_i, $i = 1, \ldots, n-1$), on montre l'existence d'un germe unique (à inversible près) $f \in \mathbb{C}\{x, y-y_P\}$ régulière de degré d en y et d'un germe inversible $q \in \mathbb{C}\{x, y-y_P, a\}$ tels que $G(x,y,a) = f(x,y)q(x,y,a)$. On a

$$\widetilde{f}(y,a,b) = G(ay+b,y,a)q^{-1}(ay+b,y,a) = F(y,a,b)q^{-1}(ay+b,y,a)$$

et le germe $V = \{f = 0\} \in \mathcal{V}$ vérifie $F = \Pi(V)$, irréductible puisque F l'est.

Injectivité de Π. Soient $V_1 = \{f_1 = 0\}$ et $V_2 = \{f_2 = 0\}$ deux germes irréductibles en deux points $P_1 = (0, y_{P_1})$ et $P_2 = (0, y_{P_2})$, de même image F par Π. Dans ce cas, $\widetilde{f}_1(y,a,b) = F(y,a,b)u_1(y,a,b)$ dans $\mathcal{O}\{y - y_{P_1}\}$ et $\widetilde{f}_2(y,a,b) = F(y,a,b)u_2(y,a,b)$ dans $\mathcal{O}\{y - y_{P_2}\}$. Puisque F est irréductible, $F(y,0,0) = (y-y_0)^d$, d'où $P_1 = P_2$. Les fonctions $\widetilde{f}_1$ et $\widetilde{f}_2$ sont définies au voisinage d'un même point et sont égales à un inversible près ; par conséquent $f_1(x,y)$ et $f_2(x,y)$ également, et $V_1 = V_2$. $\square$

Remarque 2.3 Si $V = \{f = 0\}$ (les multiplicités prises en compte), les coefficients de $F = \Pi(V)$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les racines de $y \mapsto \widetilde{f}(y,a,b)$, polynômes en les traces $u_k = \mathrm{Tr}_V y^k$, $k = 0, \cdots, d$.

Remarque 2.4 L'intersection $V \cap L_0$ est impropre si et seulement si $f \in (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Dans ce cas $F = \Pi(V)$ est dans l'idéal engendré par $Y + b_i/a_i$, $i = 1, \ldots, n-1$; ce polynôme vérifie (2.1) mais ses coefficients ne sont plus holomorphes en $(a,b) = (0,0)$. Cependant, on verra au Chapitre 3 que le lieu polaire des coefficients d'un élément de $\mathcal{M}[Y]$ vérifiant les conditions (2.1) ne dépend pas de b.

2.2 Construction du polynôme H

Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ un cycle réduit de degré d et $F = \Pi(V)$. On note $\mathcal{M}_F\,[Y]$ l'ensemble des polynômes $H \in \mathcal{M}\,[Y]$ de degré $d-1$ vérifiant les relations

$$\partial_{a_i} H - Y \partial_{b_i} H \in (F) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1\,. \tag{2.2}$$

Proposition 2.2 *Il existe une bijection*

$$\rho : \mathbb{C}(V) \to \mathcal{M}_F\,[Y].$$

Preuve. On suppose dans un premier temps que V est constitué d'un seul germe en $P = (0, y_P)$. Soit $h \in \mathbb{C}(V)$. La construction de ρ est analogue à celle de Π mais on considère cette fois le système (S_h) suivant (les τ_i sont les inconnues) :

$$\begin{array}{ccccc} u_0\tau_0 & + & \cdots & + & u_{d-1}\tau_{d-1} = v_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{d-1}\tau_0 & + & \cdots & + & u_{2d-2}\tau_{d-1} = v_{d-1} \end{array}$$

où $v_k := \mathrm{Tr}_V\,(y^k\,h) \in \mathcal{M}$, $k = 0, \ldots, d-1$. L'unique solution $\tau := (\tau_0, \ldots, \tau_{d-1})$ de ce système de Cramer (Lemme 2.2) est un vecteur de $\mathcal{M}^d$. On pose

$$H(Y, a, b) := \tau_{d-1}(a,b) Y^{d-1} + \cdots + \tau_1(a,b) Y + \tau_0(a,b) \in \mathcal{M}[Y].$$

Par construction, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} H(y,a,b)\, y^k\, \partial_y F(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} &= \sum_0^{d-1} \tau_i \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^{k+i}\, \partial_y F(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} \\ &= \sum_0^{d-1} \tau_i u_{k+i} = v_k \\ &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, h(ay+b, y)\, \partial_y F\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pour $k = 0, \ldots, d-1$. Puisque $d = \deg_Y F$, la division euclidienne de y^k par F et le théorème de dualité permettent d'étendre cette égalité à tout $k \in \mathbb{N}$, égalité restant donc valable si on multiplie les deux numérateurs par un élément quelconque de $\mathcal{O}\,\{y - y_P\}$. La fonction h est restriction à V d'un germe de fonction méromorphe en P qui admet un dénominateur $\xi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, P}$ (puissance d'un dénominateur universel δ ne dépendant que de V d'après le théorème d'Oka [31]) ; si l'on pose $r(y,a,b) = \xi(ay+b,y)$, il résulte du théorème de dualité que la fonction $(y,a,b) \mapsto r(y,a,b)(H(y,a,b) - h(ay+b,y))\partial_y F$ est dans l'idéal (F) dans $\mathcal{O}\{y-y_P\}$ et il existe $q \in \mathcal{O}\{y-y_P\}$ telle que

$$H(y,a,b) = h(ay+b,y) + \frac{q(y,a,b)}{r(y,a,b)} F(y,a,b) \in \mathcal{M}\{y-y_P\}. \tag{2.3}$$

Puisque F vérifie (2.1) et $(\partial_{a_i} - y\partial_{b_i})(r) = (\partial_{a_i} - y\partial_{b_i})(h(ay+b,y)) \equiv 0$ pour $i = 1,\dots,n-1$ on a $\partial_{a_i} H - y\partial_{b_i} H \in (F)$ dans l'anneau $\mathcal{M}[Y]$ et on peut définir $\rho(h) := H$.
D'aprés l'égalité (2.3), la restriction à V de l'application $(x,y) \mapsto H(y,a,x-ay)$ pour a générique voisin de 0 est égale à h, ce qui montre l'injectivité de ρ.
Si un polynôme unitaire $H \in \mathcal{M}[Y]$ vérifie (2.2), on a

$$\partial_{a_i} H - Y\partial_{b_i} H = q_i(a,b) F(Y,a,b)$$

avec l'égalité $q_i = -\partial_{b_i} \tau_{d-1}$ pour tout i. Ainsi

$$\begin{aligned} \partial_{a_i}[H(y,a,x-ay)] &= q_i(a,x-ay)F(y,a,x-ay) \\ &= q_i(a,x-ay)\, u(a,x,y) f(x,y) \end{aligned}$$

où u est un inversible de l'anneau local $\mathbb{C}\{a,x,y\}$ et $V = \{f=0\}$. Le lieu polaire de la fonction méromorphe $(x,y) \mapsto q_i(a,x-ay)$ ne contient aucune branche de V, sinon $q_i(a,b)$ serait divisible (dans $\mathcal{M}[Y]$) par un facteur de $F(Y,a,b)$, ce qui est absurde. On peut donc restreindre à V les deux membres de cette dernière égalité :

$$\partial_{a_i}[H(y,a,x-ay)]_{|V} = \partial_{a_i}[H(y,a,x-ay)_{|V}] = 0\,, \quad i = 1,\dots,n-1\,.$$

La fonction $H(y,a,x-ay)_{|V}$ ne dépend donc pas de a et définit un germe $h \in \mathbb{C}(V)$. Les coefficients de H étant solutions du système de Cramer (S_h), on a $H = \rho(h)$, ce qui montre la surjectivité de l'application ρ dans le cas d'un germe.

Montrons le cas général. Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ un cycle réduit de degré d qui se décompose sous la forme $V = V_1 + \cdots + V_s$, où $V_j \cap L_0 = \{P_j\}$ et les points P_j sont deux à deux distincts. On pose $F_j = \Pi(V_j)$, $j = 1,\dots,s$ et $F = \Pi(V)$, de degrés respectifs d_j, $j = 1,\dots,s$ et d, et on note $F_{[j]} = \prod_{l\neq j} F_l$, $j = 1,\dots,s$. Puisque les germes n'ont aucune branche commune, les polynômes F_j sont premiers deux à deux et il existe d'après le théorème de Bézout s polynômes $U_1,\dots,U_s \in \mathcal{O}[Y]$ tels que $U_1F_{[1]} + \cdots + U_sF_{[s]} = 1$. Soit $h \in \mathbb{C}(V)$ une fonction méromorphe définie par $h_{|V_j} =: h_j \in \mathbb{C}(V_j)$ et $H_j = \rho(h_j)$ comme défini ci-dessus. On pose

$$H' := H_1U_1F_{[1]} + \cdots + H_sU_sF_{[s]} \in \mathcal{M}[Y]\,.$$

Par le théorème de dualité, on remarque que, pour $k = 0, \dots, d-1$,

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H'\, \partial_y F\, dy \\ F \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H'\, \partial_y F_j\, dy \\ F_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H_j U_j F_{[j]}\, \partial_y F_j\, dy \\ F_j \end{bmatrix}$$

et en exploitant les relations $U_j F_{[j]} = 1 - \sum_{l \neq j} U_l F_{[l]}$, $j = 1, \dots, k$, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H'\, \partial_y F\, dy \\ F \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H_j\, \partial_y F_j\, dy \\ F_j \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Tr}_{V_1} y^k h_1 + \cdots + \mathrm{Tr}_{V_s} y^k h_s = \mathrm{Tr}_V y^k h. \end{aligned}$$

Le polynôme H' ainsi construit coïncide donc modulo (F) avec l'unique polynôme H de degré $d-1$ à coefficients dans $\mathcal{M}$ dont les coefficients $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{d-1})$ satisfont le système (S_h). On voit ainsi (en se reportant au cas $V \cap L_0 = \{P\}$) que l'on a les trois propriétés suivantes :

1. le polynôme H vérifie $\partial_{a_i} H - Y \partial_{b_i} H \in (F)$ pour $i = 1, \dots, n-1$;
2. pour $j = 1, \dots, s$,
$$H(y, a, x - ay)_{|V_j} = H_j(y, a, x - ay)_{|F_j(y,a,x-ay)=0} = h_j(x, y);$$
3. $H = 0 \Leftrightarrow h_{|V} \equiv 0$; en effet, $H = 0$ implique que F_j divise $H_j U_j F_{[j]}$; or F_j est premier avec $U_j F_{[j]}$, donc F_j divise H_j et $H_j \equiv 0$ pour raisons de degré, soit encore $h_{j|V_j} \equiv 0$ et ce pour tout $j = 1, \dots, s$, donc $h_{|V} \equiv 0$.

Ces trois considérations montrent que l'application ρ qui associe à h l'unique polynôme $\rho(h) := H$ dont les coefficients sont solutions du système (S_h) reste définie et bijective dans le cas de germes en plusieurs points. □

Remarque 2.5 Le polynôme H est le polynôme d'interpolation de Lagrange prenant les valeurs de la fonction $h(ay + b, y)$ en les racines de l'équation $f(ay + b, y) = 0$; l'équation d'onde $\partial_a y_i = y_i \partial_b y_i$ vérifiée par les racines de F implique que H vérifie les conditions (2.2) ; la construction de ρ a l'avantage d'être plus algébrique (on ne soucie plus des singularités).

2.3 Caractérisation des formes traces

Les Propositions 2.1 et 2.2 permettent de retrouver $V \in \mathcal{V}_{red}$ et $h \in \mathbb{C}(V)$ à partir des traces d'un nombre fini de fonctions restreintes au sous-espace $\{a = 0\} \subset \mathbb{G}(1, n)$. On obtient le

Théorème 2.1 *La donnée d'un cycle $V \in \mathcal{V}$ équivaut à la donnée des germes en 0 des fonctions*

$$b \mapsto \mathrm{Tr}_V\,(y^k)(0,b)\,, \qquad k = 0, \ldots, \mathrm{Tr}_V\,(1) - 1\,;$$

si $V \in \mathcal{V}_{red}$, la donnée de $h \in \mathbb{C}(V)$ équivaut à la donnée des germes en 0

$$b \mapsto \mathrm{Tr}_V\,(y^k\,h)(0,b)\,, \quad k = 0, \ldots, \mathrm{Tr}_V\,(1) - 1\,.$$

Preuve. Un sens est évident. A l'inverse, si l'on connaît les traces $\mathrm{Tr}_V\,(y^k)(0,b)$ pour $k = 0, \ldots, \mathrm{Tr}_V\,(1) - 1$ on connaît le degré $d = \mathrm{Tr}_V\,1$ de V et on peut construire le polynôme $F(Y,0,b)$ à partir des formules de Newton (on peut aussi se passer de ces formules en utilisant le système de Cramer (S), mais il faut dans ce cas connaître les fonctions $b \mapsto \mathrm{Tr}_V\,(y^k)(0,b)$ jusqu'à $k = 2d-1$). Si $a = 0$, le système (S_h) reste non dégénéré sur le corps des germes méromorphes en b d'après la Remarque 2.5 (sinon toutes les droites "verticales" couperaient "mal" V ce qui est absurde). De même, les traces $v_k(0,b) = \mathrm{Tr}_V y^k h(0,b)$ ont un sens pour b générique voisin de 0 et permettent de déterminer les traces $\mathrm{Tr}_V y^k h(0,b)$ pour $k \geq d-1$ par division euclidienne de y^k par $F(y,0,b)$. On peut alors définir le polynôme $H(Y,0,b)$ via le système (S_h) restreint à $a = 0$. On a alors $V = \{F(y,0,x) = 0\}$ et la fonction méromorphe $(x,y) \mapsto H(y,0,x) \in \mathbb{C}(V)$ coïncide avec $h \in \mathbb{C}(V)$. $\square$

Le théorème suivant permet une nouvelle caractérisation des formes traces (autre que celle donnée par exemple dans [28]) en termes cette fois de sommes complètes de résidus de fractions rationnelles en une variable à coefficients dans $\mathcal{M}$.

Théorème 2.2 *Un germe de $(n-1)$-forme méromorphe ϕ en $(a,b) = (0,0) \in \mathbb{G}(1,n)$ est la trace d'une $(n-1)$-forme méromorphe $\Phi \in M^{n-1}(V)$ sur un cycle réduit $V \in \mathcal{V}_{red}$ de degré d si et seulement s'il existe deux polynômes $F \in \mathcal{U}\,[Y]$ et $H \in \mathcal{M}_F\,[Y]$ de degrés d et $d-1$ tels que*

$$\phi(a,b) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} H\,(\partial_y F - \sum_j a_j \partial_{b_j} F)(y,a,b)\,dy \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} (db_i + y da_i) \\ \\ F(y,a,b) \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

On a alors $\phi = \mathrm{Tr}_V \Phi$ où $V = \{F(y,0,x) = 0\}$ et $\Phi = H(y,0,x)dx$.

Preuve. Pour $V \in \mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ et $\Phi \in M^{n-1}(V)$, on montre d'abord que $\mathrm{Tr}_V\,\Phi$ se représente sous la forme (2.4). Si $V = V_1 + \cdots + V_s$, où les germes V_j sont en des points $P_j \in L_0$ distincts deux à deux, il existe $h \in \mathbb{C}(V)$, avec $h_j := h_{|V_j} \in \mathbb{C}(V_j)$, telle que $\Phi(x,y) = h(x,y)dx$. On pose $F_j = \Pi(V_j)$, $F = \Pi(V)$, $H_j = \rho(h_j)$ et $H = \rho(h)$. D'après l'expression (1.2) dans la Section 1.2, la forme $\mathrm{Tr}_V(\Phi)$ admet n coefficients $w_0, \ldots, w_{n-1}$ distincts

$$w_k(a,b) := \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta_j\, y^k\, h_j\, \partial_y f_j(x,y)\, dx \wedge dy \\ f_j(x,y), x_1 - a_1 y - b_1, \ldots, x_{n-1} - a_{n-1}y - b_{n-1}\end{bmatrix},$$

$k = 0, \cdots n-1$, où θ_j est une fonction plateau valant 1 au voisinage de P_j. Puisque $f_j(x,y) = u_j(a,x,y)F_j(y,a,x-ay)$ avec $u_j \in \mathbb{C}\{x, y - y_{P_j}, a\}$ inversible, on peut remplacer $f_j(x,y)$ par $F_j(y,a,x-ay)$ dans l'expression ci-dessus. Or,

$$\partial_y(F_j(y,a,x-ay)) = \Big(\partial_y F_j - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F_j\Big)(y,a,x-ay)\ , j = 1, \cdots, s$$

et, par l'argument de la preuve du Lemme 2.2, on obtient les égalités

$$w_k(a,b) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, h_j(ay+b,y)\,\Big(\partial_y F_j - \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F_j\Big)(y,a,b)\, dy \\ F_j(y,a,b)\end{bmatrix}$$

pour $k = 0, \ldots, n-1$. D'après la formule (2.3) appliquée à h_j et F_j, la fonction $h_j(ay+b,y) - H_j(y,a,b)$ est dans l'idéal $(F_j(y,a,b))$ de $\mathcal{M}\{y - y_{P_j}\}$ et

$$w_k(a,b) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H_j(y,a,b)\,\Big(\partial_y F_j - \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F_j\Big)(y,a,b)\, dy \\ F_j(y,a,b)\end{bmatrix}\ k = 0, \ldots, n-1.$$

En calquant la construction de ρ (cas de plusieurs germes), on obtient

$$w_k(a,b) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H(y,a,b)\,\Big(\partial_y F - \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F\Big)(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b)\end{bmatrix}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

ce qui montre que $\mathrm{Tr}_V[h\,dx]$ est de la forme voulue.

Réciproquement, si ϕ s'écrit sous la forme (2.4), on peut poser $V = \Pi^{-1}(F)$ et $h = \rho^{-1}(H)$ pour constater (en prenant les calculs à l'envers) que l'on a $\phi = \mathrm{Tr}_V(h\,dx)$. $\square$

Les sommes complètes de résidus de la formule (2.4) s'obtiennent *via* l'algorithme de division euclidienne dans l'anneau $\mathcal{M}[Y]$. On remarque que les coefficients de la trace s'expriment sous la forme de l'action d'opérateurs différentiels non linéaires à coefficients polynomiaux en les coefficients σ_l de F et linéaires en les coefficients τ_l de H et les dérivées partielles des σ_j.

Chapitre 3

Applications

3.1 Le théorème d'Abel-inverse

On se propose dans cette section d'exploiter les résultats établis au Chapitre 2 pour démontrer une version plus forte du théorème d'Abel-inverse version rationnelle que celle obtenue dans [31] :

Théorème 3.1 *Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ de degré d et $\Phi \in M^{n-1}(V)$ qui ne s'annule identiquement sur aucune des composantes de V. Le cycle V est inclus dans une hypersurface algébrique $\widetilde{V}$ de $\mathbb{P}^n$ de degré d et Φ se prolonge en une $(n-1)$-forme rationnelle sur $\widetilde{V}$ si et seulement si le germe de forme méromorphe $\mathrm{Tr}_V\Phi$ est le germe d'une forme rationnelle en b.*

Remarque 3.1 Il est essentiel de supposer que Φ n'est identiquement nulle sur aucune des composantes irréductibles du cycle analytique V. Sinon, on n'obtient aucune information relative aux composantes de V sur lesquelles Φ est nulle ; on peut seulement conclure que les autres composantes sont algébriques.

Preuve du Théorème 3.1. Le sens direct est une conséquence immédiate du théorème d'Abel. On montre le sens inverse. On peut toujours supposer que $\Phi = h(x,y)dx$, où $h \in \mathbb{C}(V)$. Soit $H = \rho(h)$ et $F = \Pi(V)$, où

$$F(Y,a,b) = Y^d - \sigma_{d-1}(a,b)Y^{d-1} + \cdots + (-1)^{d-1}\sigma_0(a,b).$$

On introduit les germes $w_k \in \mathcal{M}$

$$w_k(a,b) := \mathrm{Res}\left[\begin{matrix} y^k\, H(y,a,b)\left(\partial_y F - \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F\right)(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b)\end{matrix}\right],\ k = 0,\ldots,n-1\,.$$

D'après le Théorème 2.2, la rationalité en b supposée de la trace équivaut à la rationalité en b des germes w_k, $k = 0, \ldots, n-1$. On a besoin du lemme de prolongement suivant, concernant le comportement de la suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Lemme 3.1 *La suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obéit aux trois règles suivantes :*

1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a*

$$\partial_{a_i}(w_k) = \partial_{b_i}(w_{k+1}).$$

2. *La fonction w_k est rationnelle en b pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
3. *Les fonctions w_k, $k = 0, \ldots, 2d-1$ vérifient le système linéaire $(\widetilde{S}_h)$ suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} w_{d-1}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}w_0\sigma_0 = w_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{2d-2}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}w_{d-1}\sigma_0 = w_{2d-1} \end{array}$$

Preuve. Pour le point 1, il suffit de faire le calcul directement à partir de l'écriture des w_k de l'introduction (formule (1.2)) :

$$w_k(a,b) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, h\, \partial_y f(x,y)\, dx \wedge dy \\ f(x,y), x_1 - a_1 y - b_1, \ldots, x_{n-1} - a_{n-1}y - b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

L'écriture explicite du résidu sous forme de représentation intégrale impliquant le noyau de Cauchy (voir par exemple [24], chapitre 6) permet de différentier les symboles résiduels par rapport aux paramètres (a,b) :

$$\begin{aligned} \partial_{a_i}(w_k) &= -\mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, h\, \partial_y f(x,y)\, \partial_{a_i}(l_i)\, dx \wedge dy \\ f(x,y), l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^{k+1}\, h\, \partial_y f(x,y)\, dx \wedge dy \\ f(x,y), l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= -\mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^{k+1}\, h\, \partial_y f(x,y)\, \partial_{b_i}(l_i)\, dx \wedge dy \\ f(x,y), l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \partial_{b_i}(w_{k+1}) \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \ , \forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

On montre le point 2 par récurrence sur k. C'est vrai pour $k = 0, \ldots, n-1$ par hypothèse. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang $k-1$.

On suppose d'abord que $w_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On reprend ici l'astuce utilisée par G. Henkin et M. Passare [31] pour éviter les pôles simples (ce point, directement inspiré de l'article fondateur d'Abel [1, 4], paraît être le point clef de la démonstration). On pose pour cela $w'_k = w_k + cw_{k-1}$ où $c \in \mathbb{C}^*$. D'après le point 1, on a, pour $i = 1, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned} \partial_{b_i}(w'_k) &= \partial_{b_i}(w_k + cw_{k-1}) = \partial_{a_i}(w_{k-1} + cw_{k-2}) = \partial_{a_i}(w'_{k-1}) \\ \partial_{b_i}(w'_k) &= (\partial_{a_i} + c\partial_{b_i})(w_{k-1}) . \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\partial_{b_i}(w'_k)$ admet-elle les deux primitives distinctes w_{k-1} et w'_{k-1} dans les deux directions linéairement indépendantes ∂_{a_i} et $\partial_{a_i} + c\partial_{b_i}$ (car $w_{k-2} \neq 0$ par l'hypothèse faite pour l'instant). Par hypothèse $\partial_{b_i}(w'_k) = (\partial_{a_i} + c\partial_{b_i})(w_{k-1})$ est rationnelle en b_i ; le fait que cette fonction méromorphe ait deux primitives distinctes dans deux directions linéairement indépendantes exclut que l'on puisse rencontrer un terme du type

$$\frac{\alpha_{a,\hat{b}_i}}{b_i - \beta(a, \hat{b}_i)}$$

dans la décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle dans la clôture intégrale du corps des germes de fonctions méromorphes en les variables $a, b_1, \ldots, \widehat{b_i}, \ldots, b_{n-1}$ à l'origine de $\mathbb{C}^{2n-3}$ (la notation $\widehat{b_i}$ désigne l'omission de la variable b_i). On peut donc intégrer selon la variable b_i : on obtient une nouvelle fraction rationnelle en b_i puisqu'il ne peut plus y avoir de pôles simples et donc de logarithme dans la primitive. De l'égalité $w_k = w'_k - cw_{k-1}$, on déduit alors que la fonction w_k est rationnelle en b_i puisque les fonctions w'_k et w_{k-1} le sont.

Si maintenant $w_k = 0$ pour un $k \in \mathbb{N}$ (on prend le plus petit k pour lequel ceci se produit), puisque $0 = \partial_{a_i}(w_k) = \partial_{b_i}(w_{k+1})$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, la fonction w_{k+1} ne dépend pas de b ; comme $\partial_{b_i}(w_{k+2}) = \partial_{a_i}(w_{k+1})$, la fonction w_{k+2} est polynômiale de degré 1 en b ; de proche en proche, on montre ainsi que w_{k+j} est polynômiale de degré $\leq j$ en b.

Le point 3 résulte des identités

$$\operatorname{Res}\left[\frac{y^k\, H(y,a,b)\, F(y,a,b)\left(\partial_y F - \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F\right)(y,a,b)\, dy}{F(y,a,b)}\right] = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ (propriété du calcul résiduel), qui, une fois F développé au numérateur, montre par linéarité que les w_k vérifient le système $(\widetilde{S}_h)$. $\square$

Remarque 3.2 A partir de l'expression (1.2), la clause 1 du Lemme 3.1 montre que la trace d'une $(n-1)$-forme est fermée en dehors de son lieu polaire. Ceci est une conséquence du fait que

$$d(\Phi \wedge [V]) = d\Phi \wedge [V] = 0$$

si Φ est une forme de degré maximal sur V et que d commute avec le *pull-back* et l'image directe.

Avant de reprendre la preuve du théorème 3.1, on prouve le

Lemme 3.2 *Le système $(\widetilde{S}_h)$ est un système de Cramer.*

Preuve. On raisonne par l'absurde. Si $(\widetilde{S}_h)$ est un système dégénéré, il existe un polynôme $Q \in \mathcal{M}[Y]$, unitaire de degré d, différent de F, tel que

$$\operatorname{Res}\left[\begin{matrix} y^k\, H(y,a,b)Q(y,a,b)\left(\partial_y F - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F\right)(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{matrix}\right] = 0$$

pour $k = 0, \ldots, d-1$. Le théorème de dualité implique que le polynôme $Q\, H\,(\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F)$ est dans l'idéal engendré par F dans $\mathcal{M}[Y]$. Puisque $Q \neq F$ et que F est réduit, il existe un facteur irréductible F_j de F (une fois F décomposé dans $\mathcal{M}[Y]$) qui divise $H(\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F)$. Deux situations sont envisageables :

1. le polynôme F_j divise H, auquel cas $H(y,0,x)_{|\{F_j(y,0,x)=0\}} = 0$: c'est le cas pathologique exclu où la forme Φ est nulle sur une composante de V ;
2. le polynôme F_j divise $\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F$; en notant $F = F_j \widetilde{F}$ (F_j et $\widetilde{F}$ étant premiers entre eux), on a :

$$\partial_y F - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F = \widetilde{F}\left(\partial_y F_j - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F_j\right) + F_j\left(\partial_y \widetilde{F} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} \widetilde{F}\right),$$

   ce qui implique que F_j divise $\partial_y F_j - \sum_i a_i \partial_{b_i} F_j$ par le lemme de Gauss. Pour des raisons de degré, on a $\partial_y F_j - \sum_i a_i \partial_{b_i} F_j = 0$ et $\partial_y(F_j(y,a,x-ay)) = 0$: l'équation de la branche $V_j = \Pi(F_j)$ ne dépend pas de y et $V_j \subset L_0$, situation elle aussi exclue.

Le système $(\widetilde{S}_h)$ est donc de Cramer. □

Suite et fin de la preuve du Théorème 3.1. En combinant les Lemmes 3.1 et 3.2, on voit que $\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}$ s'expriment rationnellement en fonction des w_k, $k = 0, \ldots, 2d-1$. Les coefficients de F sont donc rationnels en b. Le Lemme 3.3 (voir plus loin) assure que les coefficients de F sont automatiquement polynômiaux en b et l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}\,;\, F(y,0,x) = 0\}$$

définit une hypersurface algébrique $\widetilde{V} \subset \mathbb{P}^n$, contenant V, de degré

$$\deg \widetilde{V} = \operatorname{Tr}_{\widetilde{V}}(1) = \operatorname{Res}\left[\begin{matrix} \partial_y F(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{matrix}\right] = d.$$

En particulier, $\widetilde{V} \cap L_0 = V \cap L_0$.

On montre maintenant la rationalité de Φ. On introduit les coefficients holomorphes $\xi_k \in \mathcal{O}$, $k \in \mathbb{N}$ des traces $\mathrm{Tr}_V\,(y^l\,dx)$, $l \in \mathbb{N}$

$$\xi_k := \mathrm{Res}\left[\frac{y^k \left(\partial_y F - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{b_i} F\right)(y,a,b)\,dy}{F(y,a,b)}\right], \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Les coefficients de H vérifient (on le voit en développant H) le système

$$(\check{S}_h) \qquad \begin{array}{ccccccc} \xi_{d-1}\tau_{d-1} & + & \cdots & + & \xi_0\tau_0 & = & w_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{2d-2}\tau_{d-1} & + & \cdots & + & \xi_{d-1}\tau_0 & = & w_{d-1} \end{array}$$

Comme pour la preuve du Lemme 3.2, on montre que ce système est de Cramer. Puisque les coefficients de F sont rationnels en b, les fonctions ξ_l, donc les coefficients τ_k de H, le sont. D'après la preuve du Théorème 2.1, la forme $H(y,0,x)\,dx$ définit une forme $\widetilde{\Phi}$ rationnelle sur $\widetilde{V} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ prolongeant la forme Φ. $\square$

Cette preuve pourrait s'adapter à la version locale d'Abel-inverse : si la trace de Φ sur V se prolonge à un ouvert dual connexe $\widetilde{U}^*$ contenant U^*, l'ensemble V se prolonge en une hypersurface analytique fermée $\widetilde{V}$ de l'ouvert 1-concave $\widetilde{U}$ (contenant U) dont le dual est $\widetilde{U}^*$ et Φ se prolonge en une forme $\widetilde{\Phi}$ méromorphe sur $\widetilde{V}$ telle que $\widetilde{\Phi}_{|V} = \Phi$.

Remarque 3.3 Les bijections Π et ρ permettent de montrer que toute propriété vérifiée par $\mathrm{Tr}_V\,(h(x,y)dx)$ se répercute en une propriété (en les variables $b_1,\ldots,b_{n-1}$) pour les coefficients des polynômes $F = \Pi(V)$ et $H = \rho(V)$. Le fait que les applications Π^{-1} et ρ^{-1} ne se soucient pas du comportement en a permet de basculer les propriétés de $\mathrm{Tr}_V\,(h(x,y)dx)$ en des propriétés relatives à V et h. Ce principe semble pouvoir être utilisé pour démontrer le théorème d'Abel-inverse dans le cas trace algébrique présenté dans [9].

Il semble intéressant de souligner qu'une fois le degré d précisé, ce théorème d'Abel inverse combiné avec le Lemme 3.3 suivant permet d'affirmer que toutes les solutions $(\sigma_0,\ldots,\sigma_{d-1},\tau_0,\ldots,\tau_{d-1}) \in \mathcal{M}^{2d}$ du système linéaire du premier ordre en les inconnues τ_j, $j = 0,\ldots,d-1$, différentiel polynomial du premier ordre en les inconnues σ_j, $j = 0,\ldots,d-1$, avec second membre donné Ψ, s'écrivant :

$$\begin{aligned}
F &= Y^d - \sigma_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + (-1)^d\sigma_0 \in \mathcal{U}[Y] \\
H &= \tau_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + \tau_1 Y + \tau_0 \in \mathcal{M}_F\,[Y] \\
\mathrm{Res} & \begin{bmatrix} H\,(\partial_y F - \sum_j a_j \partial_{b_j} F)(y,a,b)\,dy \wedge \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1}(db_i + y da_i) \\ \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} = \Psi(a,b)
\end{aligned}$$

sont des solutions rationnelles si F et H sont supposés premiers entre eux (ou algébriques si cette dernière restriction n'est pas imposée) dès que le second membre (c'est-à-dire la $(n-1)$-forme Ψ) est une forme rationnelle. Cette remarque indique que l'on peut concevoir le théorème d'Abel inverse comme un résultat de *rigidité* relatif à un système différentiel non linéaire d'un type très particulier (linéaire d'ordre 0 en τ, d'ordre 1 en les dérivées de σ, polynômial en σ). Il paraît dès lors important de formuler de manière identique (c'est-à-dire en terme de rigidité d'un certain système différentiel du même type) des théorèmes du type Abel inverse quand la grassmannienne est remplacée par une famille de courbes (voir [18] pour une généralisation du théorème classique d'Abel inverse dans ce cadre) ou en remplaçant la variété ambiante $\mathbb{P}^n$ par une variété torique lisse complète (voir [11], [14]) de dimension n.

3.2 Le lien avec le théorème de Wood

Le théorème de Wood [39] affirme que l'existence d'une hypersurface algébrique de degré d interpolant $V \in \mathcal{V}_{red}$ équivaut au fait que la trace de y soit affine en $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})$. Si la trace d'une forme quelconque est rationnelle, cette hypersurface existe, donc la trace de y doit être affine en b. On montre ici que ce résultat s'explique par la rigidité du système différentiel vérifié par les coefficients de F.

Lemme 3.3 *Si $F(Y,a,b) \in \mathcal{M}[Y]$ vérifie (2.1), ses coefficients sont holomorphes en b.*

Preuve. On suppose $n = 1$. On peut toujours écrire F sous la forme

$$F = Y^d - \frac{c_{d-1}}{p_{d-1}}(a,b)Y^{d-1} + \cdots \pm \frac{c_0}{p_0}(a,b),$$

où $p_{d-1}, \ldots, p_0, c_{d-1}, \ldots, c_0$ sont dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $(0,0)$, avec p_i, c_i premiers entre eux et $p_{d-i} = a^{k_{d-i}} P_{d-i}$ où P_{d-i} est un polynôme de Weierstrass en b. On veut montrer P_{d-i} est de degré nul. Puisque F vérifie (2.1), on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \partial_a(\frac{c_{d-i}}{p_{d-i}}) + \partial_b(\frac{c_{d-i-1}}{p_{d-i-1}}) &= \frac{c_{d-i}}{p_{d-i}} \partial_b(\frac{c_{d-1}}{p_{d-1}}), \quad i = 1, \ldots, d-1 \quad (d-i) \\ \partial_a(\frac{c_0}{p_0}) &= \frac{c_0}{p_0} \partial_b(\frac{c_{d-1}}{p_{d-1}}). \qquad (0) \end{aligned}$$

On montre par récurrence sur i que toute racine de p_{d-i-1} est racine de p_{d-1}. Pour $i = 1$, l'équation $(d-1)$ se réécrit

$$\begin{aligned} p_{d-2}^2 p_{d-1}(p_{d-1}\partial_a c_{d-1} - c_{d-1}\partial_a p_{d-1}) + p_{d-1}^3(p_{d-2}\partial_b c_{d-2} - c_{d-2}\partial_b p_{d-2}) \\ = p_{d-2}^2 c_{d-1}(p_{d-1}\partial_b c_{d-1} - c_{d-1}\partial_b p_{d-1}). \end{aligned}$$

Par le lemme de Gauss, on en déduit que l'on a

$$p_{d-1} \quad \text{divise} \quad p_{d-2}^2 \partial_b p_{d-1}$$

$$p_{d-2} \quad \text{divise} \quad p_{d-1}^3 \partial_b p_{d-2}$$

dans l'anneau des germes à l'origine et $p_{d-1} = 0$ si et seulement si $p_{d-2} = 0$. Pour $0 < i < d$, l'équation $(d-i)$ se réécrit

$$\begin{aligned} p_{d-i-1}^2 p_{d-1}^2(p_{d-i}\partial_a c_{d-i} - c_{d-i}\partial_a p_{d-i}) + p_{d-i}^2 p_{d-1}^2(p_{d-i-1}\partial_b c_{d-i-1} - c_{d-i-1}\partial_b p_{d-i-1}) \\ = p_{d-i-1}^2 p_{d-i} c_{d-i}(p_{d-1}\partial_b c_{d-1} - c_{d-1}\partial_b p_{d-1}). \qquad (d-i)' \end{aligned}$$

Pour $i = 0$, l'équation (0) se réécrit sous la forme

$$p_{d-1}^2(p_0\partial_a c_0 - c_0\partial_a p_0) = p_0 c_0(p_{d-1}\partial_b c_{d-1} - c_{d-1}\partial_b p_{d-1}). \qquad (0)'$$

Par $(d-i)'$, on constate que

$$p_{d-i-1} \quad \text{divise} \quad p_{d-i}^2 p_{d-1}^2 c_{d-i-1} \partial_b p_{d-i-1}, \quad \forall i = 1, \ldots, d-1.$$

Or toute racine $b^{(j)}$ de p_{d-i-1} d'ordre $\nu_{d-i-1,j} > 0$ est racine de $\partial_b p_{d-i-1}$ d'ordre $\nu_{d-i-1,j} - 1$ et doit donc être racine de $p_{d-i}^2 p_{d-1}^2 c_{d-i-1}$, donc de p_{d-1} grâce aux hypothèses faites. On a donc l'implication

$$\nu_{d-i,j} > 0 \Longrightarrow \nu_{d-1,j} > 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, d, \quad \forall\, j = 1, \ldots, s.$$

En regardant l'ordre d'annulation des deux membres de l'équation $(0)'$ en $b^{(j)}$, on obtient l'inégalité

$$2\nu_{d-1,j} + \nu_{0,j} - 1 \leq \nu_{d-1,j} + \nu_{0,j} - 1;$$

d'où $\nu_{d-1,j} = 0$. Les autres exposants $\nu_{d-i,j}, i = 2, \ldots, d$ sont nuls par ce qui précède, ce pour tout $j = 1, \ldots, s$ ce qui finit la preuve. Le cas $n > 1$ se traite de la même manière variable par variable. $\square$

Si les coefficients de $F = Y^d - \sigma_{d-1}(a,b)Y^{d-1} + \cdots + (-1)^{d-1}\sigma_0(a,b)$ sont rationnels en b, ils sont donc automatiquement polynômiaux en b. Or toujours à cause de l'équation différentielle vérifiée par F, on a :

$$\partial_{a_i}\sigma_0 = -\sigma_0 \partial_{b_i}\sigma_{d-1} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Le degré en b_i du polynôme $\partial_{a_i}\sigma_0$ étant inférieur ou égal à celui de σ_0, le polynôme en b_i $\partial_{b_i}\sigma_{d-1}$ est de degré nul, ce pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. La fonction σ_{d-1} est donc affine en b. Cette fonction est la somme des racines de F et correspond à la trace de y. L'équation différentielle (2.1), (semblable à l'équation d'onde de choc) permet donc d'établir la trame logique qui relie les théorèmes d'Abel-inverse et de Wood.

3.3 Calcul de $\dim \omega_V^{n-1}$

Soit V une hypersurface algébrique de $\mathbb{P}^n$ de degré d. On veut caractériser l'espace vectoriel ω_V^{n-1} des formes abéliennes sur V. Si Φ est abélienne sur V, sa trace est une forme holomorphe sur la grassmanienne $\mathbb{G}(1,n)$, donc nulle. On peut toujours choisir un système de coordonnées pour lequel l'hypersurface V est coupée proprement par la droite $L_0 = \{x = 0\}$ dans l'espace affine $\mathbb{C}^n$ et définit un élément de $\mathcal{V}_{\text{red}}$ de degré d. Par unicité du prolongement analytique et d'après le Théorème 2.1, toute forme $\Phi = hdx$ méromorphe sur V est uniquement déterminée par les d fonctions $b \mapsto v_k(0,b) = \mathrm{Tr}_V y^k h(0,b)$, $k = 0, \ldots, d-1$ pour b voisin de 0. Or pour $a = 0$, on remarque que l'on a $v_k(0,b) = w_k(0,b)$ et si Φ est abélienne les fonctions $w_0, \ldots, w_{n-1}$ sont nulles et les fonctions w_{n+j}, $j \in \mathbb{N}$ sont polynômiales en b de degré $\leq j$ d'après la preuve de la propriété 3 du Lemme 3.1. Une forme abélienne de degré maximal sur V est donc uniquement déterminée par la collection de $d-n$ polynômes à $n-1$ variables $P_i(b_1, \ldots, b_{n-1}) := w_{n+i}(0,b)$, $i = 0, \ldots, d-n-1$ avec $\deg P_i \leq i$, d'où la majoration

$$\dim \omega_V^{n-1} \leq \binom{d-1}{n},$$

avec $\omega_V^{n-1} = \{0\}$ si $d < n+1$.

On considère maintenant, sous leur écriture affine, les formes rationnelles

$$\Phi(x,y) = \frac{P(x,y)}{\partial_y f(x,y)} dx$$

où

$$P(x,y) = a_0 y^{d-n-2} + a_1(x) y^{d-n-3} + \cdots + a_{d-n-2}(x), \quad deg\ a_i \leq i$$

est un polynôme en (x,y) de degré total inférieur ou égal à $d-n-2$ et f est un polynôme de degré d (non divisible par x, comme dans le cas des germes) donnant l'équation affine de V. Dans ce cas,

$$\mathrm{Tr}_V \Phi(a,b) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(w_k(a,b) \big(\sum_{|I|=k} da_I \wedge db_{I^c} \big) \Big)$$

et en utilisant la formule (1.2) du Chapitre 1 et le Lemme 2.1, on obtient

$$w_k(a,b) = \mathrm{Res} \begin{bmatrix} y^k\, P(ay+b,y)\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix}.$$

Si $k \leq n$, on a $\deg (y^k\, P(ay+b,y)) \leq deg\, F - 2$ et $w_k(a,b) = 0$ par le théorème d'Abel-Jacobi. Toute forme ainsi définie est donc abélienne.

En particulier, les formes

$$\frac{x_1^{i_1} \cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} y^{i_n}}{\partial_y f(x,y)} dx, \quad i_1 + \cdots + i_n \leq d-n-2$$

sont abéliennes, $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes sur V (sinon il existe un polynôme non nul de degré $d-n-2$ qui s'annule sur V) d'où l'égalité

$$\dim \omega_V^{n-1} = \binom{d-1}{n}.$$

L'utilisation de la trace permet de ne pas se soucier du comportement de Φ à l'infini (contrairement aux caractérisations des formes abéliennes en général, par exemple [30]). Le fait que Φ n'ait pas de pôles sur l'hyperplan à l'infini $\{Z = 0\}$ (sauf éventuellement sur $\mathrm{Sing}(V)$) est une conséquence de l'annulation de la trace : on évite ainsi les changements de carte de $\mathbb{P}^n$. Pour $q < n-1$, il semble réaliste d'utiliser à nouveau le Théorème 2.1 pour trouver la borne de Castelnuovo optimale de $\dim \omega_V^q$ obtenue par Alain Hénaut dans [30].

Deuxième partie

La trace en géométrie torique

Introduction

La première partie suggère de nouvelles démonstrations pour des généralisations du théorème d'Abel-inverse en remplaçant la grassmanienne $\mathbb{G}(k,n)$ (on travaillait avec $k=1$) par l'espace des sous-variétés C de type

$$C = \{q_1 = \cdots = q_k = 0\} \subset \mathbb{C}^n$$

où les supports $\mathcal{A}_i \subset \mathbb{N}^n, i = 1, \ldots, q$ des polynômes $q_i \in \mathbb{C}[t_1, , \ldots, t_n]$ sont fixés [1]. Considérons l'exemple $\mathcal{A} = \{(0,0,), (1,0), (0,1), (1,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$. Si q_1, q_2 sont supportés par $\mathcal{A}$, l'ensemble $\{q_1 = q_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ est fini (de cardinal 2) pour les coefficients de q_i génériques. La variété projective $\{Q_1 = Q_2 = 0\}$ (Q_i est l'homogénéïsé de q_i) consiste en quatre points distincts et rencontre l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^1$ pour les coefficients des q_i génériques. Elle ne coïncide donc pas avec la clôture de Zariski dans $\mathbb{P}^2$ de l'ensemble $\{q_1 = q_2 = 0\}$ (qui est elle-même).

Une compactification X de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle l'intersection $\{q_1 = \cdots = q_k = 0\}$ reste génériquement de codimension k à "l'infini" (c'est-à-dire sur $X \setminus \mathbb{C}^n$) est donc nécessaire. Dans notre exemple, la variété compacte $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, munie des coordonnées bihomogènes naturelles est cette fois adaptée au support fixé $\mathcal{A}$.

Une telle compactification X existe en général : c'est une variété torique, construite à partir des supports des polynômes (*cf.* [14] et [11], chapitre 6). Si l'on travaille avec des polynômes de Laurent ($\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$), la variété compacte

[1] Le support d'un polynôme de Laurent

$$q = \sum_{d=(d_1,\ldots,d_n) \in \mathbb{Z}^n} c_d x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n},$$

est le sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^n$ constitué des d pour lesquels $c_d \neq 0$.

X est une compactification du tore $(\mathbb{C}^*)^n$, quotient géométrique

$$X = \frac{\mathbb{C}^{n+s} \setminus Z(I)}{G},$$

de $\mathbb{C}^{n+s}$ privé des zéros d'un idéal binomial $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+s}]$ (dépendant de la géométrie convexe des $\mathcal{A}_i$) par un sous-groupe algébrique $G \subset (\mathbb{C}^*)^{n+s}$ approprié. La variété X, similaire à l'espace projectif $\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*}$, est ainsi munie d'un anneau de coordonnées homogènes S (*cf.* [13]), et toute hypersurface algébrique $H \subset X$ admet une équation homogène globale $H = \{F = 0\}$ (*cf.* [12]). La transposition des résultats de cette première partie précisément à ce cadre torique, pensé de manière "intrinsèque" et non "plongé" dans un cadre projectif, constitue le sujet de la seconde partie [2].

Le Chapitre 1 propose un rappel (sans démonstrations, jusqu'à la Section 1.5) des définitions, constructions et résultats basiques en géométrie torique, que l'on pourra trouver, sauf mention spéciale, dans [26, 14, 17, 20]. On insistera plus particulièrement (Section 1.2) sur la notion de diviseur. La théorie des résidus utilisée dans la première partie se transpose au cadre torique (Section 1.4, *cf.* [7, 6, 8, 12, 35]), intimement liée à la notion de résultants (Section 1.5, [8, 22, 36, 38]). La Section 1.6 met en valeur le rôle des cartes affines dans une variété torique compacte (*cf.* [16]), qui offrent en particulier une caractérisation des fibrés globalement engendrés ou très amples.

Soit X une variété torique lisse compacte (non nécessairement projective) associée à un éventail complet régulier Σ de $\mathbb{R}^n$. A toute famille de fibrés en droites $(L_1, \ldots, L_k)$ sur X est associé un espace dual $X^* = X^*(L_1, \ldots, L_k)$ paramétrant l'espace des sous-variétés algébriques de X de type $(L_1, \ldots, L_k)$, *i.e* de la forme

$$C = H_1 \cap \cdots \cap H_k, \quad H_i \in |L_i|$$

où $|L_i|$ est le système linéaire complet associé au fibré L_i (en fait on considère plutôt l'espace des cycles de type $(L_1, \ldots, L_k)$, mais les restrictions faites sur les fibrés impliqueront que les intersections seront génériquement transverse et les cycles seront génériquement réduits). L'espace X^* est isomorphe à un

[2] Une telle généralisation existe dans le cas des supports de type

$$\{d \in \mathbb{N}^{n+1} \ \ d_1 + \cdots + d_{n+1} \leq N\}$$

(*cf.* [18]), hors du cadre torique cependant puisque dans ce cas $X = \mathbb{P}^n$ est une compactification adéquate.

produit d'espaces projectifs et remplace le rôle joué par la grassmanienne dans le cas projectif. Pour avoir une théorie non triviale de la trace, les sous-variétés de type $(L_1, \ldots, L_k)$ doivent être "suffisamment mobiles" dans X, conditions qui ne dépendent que de la classe des fibrés dans le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$. Le théorème de décomposition (Section 2.1) permet la caractérisation des familles de fibrés satisfaisantes en fonction de la géométrie des polytopes associés aux fibrés L_i (utilisant des résultats établis dans [35, 38], pour $k = n$ et X projective).

On définit dans la Section 2.2 les notions de $(L_1, \ldots, L_k)$-concavité, d'espace $(L_1, \ldots, L_k)$-dual et de variété d'incidence, notions indépendantes d'un éventuel plongement projectif $X \subset \mathbb{P}^N$. Contrairement au cas projectif, des cas pathologiques peuvent apparaître si les fibrés ne sont pas très amples, ce qui amène à la notion d'ensembles analytiques $(L_1, \ldots, L_k)$-dégénérés, d'intersection génériquement impropre avec les sous-variétés de type $(L_1, \ldots, L_k)$. On étend la notion d'ensemble dual au cas des cycles analytiques, donnant lieu à un morphisme entre les groupes de cycles de X et celui de X^*. Dans le cas algébrique, ce morphisme passe au quotient modulo équivalence rationnelle et induit un morphisme de groupes entre le groupe de Chow $A(X)$ et $A(X^*)$. Dans le cas très ample on trouve l'équation explicite du $(L_1, \ldots, L_k)$-dual V^* d'une sous-variété algébrique $V \subset X$ intersection complète de dimension pure $k - 1$ grâce aux résultants mixtes.

Etant donné un sous-ensemble analytique fermé V de dimension pure r d'un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave $U \subset X$ et $\Phi \in M^q(V)$, on définit dans la Section 3.1 la transformée d'Abel-Radon du courant $[V] \wedge \Phi$. Si $r = k$, on l'appelle la trace de Φ sur V, notée $\mathrm{Tr}_V \Phi$. Le théorème d'Abel se généralise : le courant $\mathrm{Tr}_V \Phi$ est une $(q, 0)$-forme méromorphe sur le $(L_1, \ldots, L_k)$-dual U^* de U, de lieu polaire dual du lieu polaire de Φ sur V, identiquement nulle si V est dégénéré.

Comme dans le cas projectif, on montre dans la Section 3.2 que les coefficients des formes traces sont des résidus de Grothendieck dépendant méromorphiquement des paramètres $a \in U^*$, les calculs s'effectuant dans les cartes affines de X ou dans le tore $(\mathbb{C}^*)^n$ si le contexte le permet. Dans le cas d'une intersection complète $V \subset X$, l'application résidu torique [12] permet le calcul explicite des coefficients de la trace, utilisant des résultats de [6].

La Section 3.3 traite le cas des fonctions ($q = 0$). La trace d'une fonction rationnelle sur une sous-variété algébrique V de dimension pure k non dégénérée est une fonction méromorphe sur le produit d'espaces projectifs X^*, donc rationnelle. Si les fibrés L_i sont très amples et V est intersection complète, on montre à l'aide de la formule du produit [36] que l'application trace induit un morphisme de groupe gradué

$$\mathrm{TR}_{V,D} : H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(X^*, \mathcal{O}_{X^*}((V.D)^*))$$

pour tout diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}(X)$ d'intersection propre avec V, où $(V.D)^* \in \mathrm{Div}(X^*)$ est le diviseur dual du $k-1$-cycle algébrique $D.C$, dont le multidegré dans le produit d'espaces projectifs X^* se calcule à partir des polytopes des diviseurs D_i et de la classe du cycle $V.D$. La théorie des résidus toriques, (*cf.* [6] et [8]), permet de borner le degré du numérateur de la trace d'un monôme de Laurent t^m en les différentes variables. A tout cône maximal $\sigma \in \Sigma(n)$ correspond une carte affine $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^n$ de X. Motivé par l'importance du comportement de la trace en $(b_1, \ldots, b_n)$ dans le cas projectif pour les problèmes d'inversions (*cf.* Chapitre 3, Partie I), on obtient, grâce au théorème d'Abel-Jacobi torique [33], une borne optimale sur le degré de la trace d'une fonction f régulière sur U_σ en les coefficients σ-extrémaux des fibrés L_i (coefficients constants des équations polynômiales de $C \in X^*$ dans la carte affine U_σ), en fonction du degré du diviseur polaire $\mathrm{div}_\infty(f)$.

Dans la section Section 3.4, on généralise au cadre torique l'équation d'onde de choc, fortement utilisée dans l'article [31] dont s'inspire notre travail, confortant l'idée que les mécanismes d'inversions résultent de la rigidité d'un système différentiel canoniquement associé à la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ (*cf.* remarque en fin de Section 3.1). Utilisant des techniques similaires, on met en évidence des équations différentielles reliant les coefficients de la trace d'une forme méromorphe Φ de degré maximal, traduisant le fait que la forme $\mathrm{Tr}_V \Phi$ est fermée en dehors de son lieu polaire. En conséquence, on prouve le lemme de prolongement similaire au Lemme 3.1, point clé dans la preuve du théorème d'Abel-inverse dans le cas projectif, mettant à nouveau en valeur le rôle particulier joué par les coefficients extrémaux.

De la même manière qu'au chapitre 2, on utilise dans la Section 3.5 le théorème des fonctions implicites, le théorème de dualité et l'algèbre linéaire (inspiré par [11]) pour réduire les calculs de traces à un calcul résiduel d'une variable, grâce aux concepts de polynôme caractéristique, de forme bilinéaire trace et d'endomorphisme de multiplication.

On démontre au Chapitre 4 deux théorèmes d'inversion dans le cas hypersurface ($k = n-1$), une famille très ample de fibrés en droites $(L_1, \ldots, L_{n-1})$

sur X de diviseurs $(D_1, ..., D_{n-1})$ étant fixée. On note $\alpha := \alpha(L_1, \ldots, L_{n-1})$ la classe dans $A_1(X)$ d'une courbe générique de type $(L_1, \ldots, L_{n-1})$.

Soit C_0 une courbe irréductible lisse de type $(L_1, \ldots, L_{n-1})$ et v une collection de germes d'hypersurfaces analytiques lisses en N points distincts de C_0, d'intersection $v \cap C_0$ transverse, incluse dans une carte affine $U_\sigma \subset X$. Le Théorème 4.1 est l'analogue torique du théorème de Wood [39] :

Il faut et il suffit que les traces des fonctions coordonnées affines soient affines en les coefficients σ-extrémaux de chacun des fibrés L_i pour qu'il existe une hypersurface algébrique V de X contenant v, telle que le degré d'intersection $V \cdot \alpha$ soit N (en particulier $V \cap C_0 = v \cap C_0$).

Contrairement au cas projectif, le critère précédent ne suffit pas à déterminer la classe de V dans $A_{n-1}(X)$. On considère pour cela $E_1, \ldots, E_s$ une famille de diviseurs très amples dont les classes engendrent le groupe de Chow $A_{n-1}(X)$ et D un diviseur effectif tel que le degré d'intersection $D \cdot \alpha$ soit N. On fixe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et on note α_i la classe dans $A_2(X)$ d'une sous-variété générique de type $((L_1, \ldots L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots L_{n-1})$.

Sous l'hypothèse précédente, $V \in |L(D)|$ si et seulement si pour tout $j = 1, \ldots, s$, il existe $f_j \in \mathcal{O}_X(E_j)$ telle que le germe méromorphe en C_0

$$C \mapsto \prod_{p \in v \cap C} f_j(p)$$

soit de degré $D \cdot E_j \cdot \alpha_i$ en le coefficient σ-extrémal du fibré L_i.

En général, V est d'intersection propre avec les orbites de codimension 2 et on obtient un critère analogue en remplaçcant les fonctions f_j par les fonctions coordonnées. On note que les fonctions produits ci-dessus sont polynômiales de degré N en les traces

$$(\mathrm{Tr}_v 1, \ldots, \mathrm{Tr}_v f_j^N), \quad j = 1, \ldots, s$$

qui s'obtiennent elles comme des sommes complètes de résidus. De ce point de vue, le théorème de Wood torique peut s'interpréter comme une inversion du théorème d'Abel-Jacobi torique.

Le Théorème 4.2 est l'analogue torique du théorème d'Abel-inverse (sous sa version proposée dans la première partie), où les coefficients $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ sont remplacés par les coefficients σ-extrémaux. La preuve s'appuie essentiellement sur l'équation d'onde de choc et le lemme de prolongement (Section 3.4) et utilise des techniques similaires au cas projectif.

Chapitre 1

Variétés toriques

La littérature concernant les variétés toriques est très fournie. Sauf mention spéciale, les définitions et les résultats (non démontrés) du Chapitre 1 sont issus de l'ouvrage fondateur de Fulton [20]. On cite également les articles [16, 14], ainsi qu'une série de lectures [26] offrant une introduction claire à la géométrie torique.

1.1 Premiers rappels

1.1.1 Construction

Soit $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ le tore complexe et $t = (t_1, \ldots, t_n)$ les coordonnées canoniques. On considère le groupe des 1-paramètres $N = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{T})$, $\mathbb{Z}$-module libre de rang n et $M = \mathrm{Hom}\,(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$ son dual, groupe des caractères du tore $\mathbb{T}$.

Soit Σ un éventail complet régulier [20] de $N \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. On note $\Sigma(k)$ l'ensemble des cônes de dimension k de Σ et, pour tout cône $\sigma \in \Sigma$, $\sigma(k)$ l'ensemble des cônes de dimension k de Σ inclus dans σ. Tout cône $\sigma \in \Sigma(k)$ est régulier : il est engendré sur $\mathbb{R}^+$ par k vecteurs primitifs $\eta_1, \ldots, \eta_k$ de N qui engendrent sur $\mathbb{N}$ le semi-groupe libre $\sigma \cap N$. Le dual de σ est le cône régulier

$$\check{\sigma} = \{m \in M \otimes \mathbb{R}\,;\, \langle m, \eta_i \rangle \geq 0 \,\forall i = 1, \ldots, k\}.$$

Les cônes maximaux $\sigma \in \Sigma(n)$ définissent des variétés toriques affines

$$U_\sigma := \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$$

isomorphes à $\mathbb{C}^n$ (*cf.* [16]) compatibles avec les conditions de recollement. La variété $X = X(\Sigma)$ obtenue en recollant les variétés affines U_σ, $\sigma \in \Sigma(n)$, est une variété lisse compacte, que l'on appelle la variété torique associée à Σ. Elle est munie (sur le modèle de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) d'un jeu de cartes affines isomorphes à $\mathbb{C}^n$, les changements de cartes étant des transformations monoïdales.

1.1.2 Orbites

L'action naturelle du tore $\mathbb{T}$ sur lui-même se prolonge à X et la variété torique X est constituée d'un nombre fini d'orbites sous l'action de ce tore [20]. Chaque 1-paramètre $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in N$ definit une courbe paramétrée

$$u \in \mathbb{C}^* \mapsto \lambda_\zeta(u) := (u^{\zeta_1}, \ldots, u^{\zeta_n}) \in \mathbb{T}.$$

Pour $\sigma \in \Sigma(n)$, la variété U_σ est construite en "ajoutant" à $\mathbb{T}$ les points limites $\lambda_\zeta(0) := \lim_{u \to 0} \lambda_\zeta(u)$ et leurs orbites sous l'action de $\mathbb{T}$, pour tout $\zeta \in \sigma$.

On peut établir une correspondance biunivoque entre les orbites de dimension $n-k$ de U_σ et les cônes $\tau \in \sigma(k)$: on a $\lambda_{\zeta_1}(0) = \lambda_{\zeta_2}(0)$ si et seulement si ζ_1 et ζ_2 sont dans l'intérieur relatif du même cône $\tau \in \sigma(k)$. L'orbite $n-k$-dimensionnelle $\mathcal{O}(\tau, \sigma) \subset U_\sigma$ associée à $\tau \in \sigma(k)$ est la plus petite orbite contenant les points limites $\lambda_\zeta(0)$ pour tout $\zeta \in \tau$. On obtient par recollement des sous-variétés affines $\mathcal{O}(\tau, \sigma)$, $\sigma \supset \tau$, une sous-variété compacte lisse $V(\tau) \subset X$ de dimension $n-k$, clôture de Zariski dans X de $\mathcal{O}(\tau, \sigma)$. Si $\tau \not\subseteq \sigma$, on a $V(\tau) \cap U_\sigma = \emptyset$. Si $\tau \in \Sigma(n-1)$, la sous-variété $V(\tau)$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Si $\tau = \{0\}$, on a $V(\{0\}) = \bigcup_{\Sigma(n)} U_\sigma = X$.

Les plus importantes des orbites sont celles $n-1$-dimensionelles $\mathcal{O}(\rho)$ associées aux cônes 1-dimensionnels (les rayons) $\rho \in \Sigma(1)$. On suppose

$$\Sigma(1) = \{\rho_1, \ldots, \rho_{n+s}\}$$

et on note η_i le générateur du semi-groupe $\rho_i \cap N$. Alors $\mathcal{O}(\rho_i)$ est la $\mathbb{T}$-orbite du point limite $\lambda_{\eta_i}(0)$, sous-variété affine de dimension $n-1$ de la carte U_σ si σ contient ρ_i, disjointe de U_σ sinon. La clôture de Zariski D_{ρ_i} de $\mathcal{O}(\rho_i)$ dans X est le support d'un diviseur de Cartier effectif irréductible, invariant sous l'action du tore. Le support du diviseur D_{ρ_i} est disjoint de l'orbite dense $\mathbb{T}$ associée à $0 \in \Sigma(0)$ et on a la représentation

$$X = \mathbb{T} \cup D_{\rho_1} \cup \cdots \cup D_{\rho_{n+s}}.$$

Puisque X est lisse, les notions de diviseurs de Cartier et de Weil coïncident. On note $\mathrm{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de X. On appelle $\mathbb{T}$-diviseur tout diviseur invariant sous l'action de $\mathbb{T}$. Ils correspondent aux diviseurs supportés dans $X \setminus \mathbb{T}$ et s'écrivent $D = \sum_1^{n+s} k_i D_{\rho_i}$, $k_i \in \mathbb{Z}$. On note $A_{n-1}(X)$ le groupe de Chow des diviseurs de X modulo équivalence rationnelle et $[D] \in A_{n-1}(X)$ la classe d'un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$.

1.1.3 Coordonnées homogènes

On peut utiliser d'autres systèmes de coordonnées que les coordonnées "toriques" $(t_1, \ldots, t_n)$, en prenant en compte la représentation de X comme quotient géométrique. On renvoie à l'article [12] pour cette sous-section.

A chaque cône $\rho_i \in \Sigma(1)$, on associe une variable x_i. On note S l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+s}]$ associée et $A = \mathbb{C}^{n+s}$ l'espace affine correspondant. Pour chaque cône maximal $\sigma \in \Sigma(n)$, on note $\hat{x}_\sigma$ le monôme $\prod_{\rho_i \notin \sigma(1)} x_i$ et

$$B(\Sigma) = \Big\langle \hat{x}_\sigma \, ; \, \sigma \in \Sigma(n) \Big\rangle \subset S$$

l'idéal (dit irrelevant) engendré par les $\hat{x}_\sigma$. Cet idéal définit la sous-variété affine de A

$$Z(\Sigma) = \{(x_1, \ldots, x_{n+s}), \ \hat{x}_\sigma = 0, \ \forall \sigma \in \Sigma(n)\}.$$

L'homomorphisme injectif $\alpha : M \to \mathbb{Z}^{n+s}$ defini par

$$\alpha(m) = \Big(\langle m, \eta_1 \rangle, \ldots, \langle m, \eta_{n+s} \rangle \Big)$$

donne l'isomorphisme

$$A_{n-1}(X) \simeq \frac{\mathbb{Z}^{n+s}}{\alpha(M)} \simeq \mathbb{Z}^s.$$

On considère $G = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[A_{n-1}(X)] = \mathrm{Hom}\,(A_{n-1}(X), \mathbb{C}^*)$. De l'isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}^{n+s}, \mathbb{C}^*) \simeq (\mathbb{C}^*)^{n+s}$, on déduit que G s'identifie au sous-groupe algébrique de A d'équations

$$G = \Big\{ \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{n+s}) \in A \, ; \, \prod_1^{n+s} \nu_i^{\langle m, \eta_i \rangle} = 1 \ \forall \, m \in M \Big\}.$$

Ce groupe agit sur l'ensemble $A \setminus Z(\Sigma)$ par multiplication composante par composante et donne la représentation de $X = X(\Sigma)$ comme quotient géométrique

$$X = \frac{(A \setminus Z(\Sigma))}{G}.$$

Un point de X est la G-orbite d'un point $(x_1, \dots, x_{n+s}) \in A \setminus Z(\Sigma)$, que l'on note $[x_1, \dots, x_{n+s}]$ en analogie avec l'espace projectif. On appelle S l'anneau de coordonnées homogènes. Il est gradué sous l'action de G : le degré est un élément du groupe de Chow $A_{n-1}(X)$ et on note S_β le sous-groupe des éléments de degré β. Tout hypersurface $H \subset X$ a une équation globale

$$H = \{F(x_1, \dots, x_{n+s}) = 0\}$$

où $F \in S_\beta$ est un polynôme homogène de degré $\beta = [H] \in A_{n-1}(X)$.

1.2 Diviseurs

1.2.1 Diviseurs associés à un polynôme de Laurent et le procédé d'homogénéïsation

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de M et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale ($e_i^* \in N$). Dans l'ouvert dense $\mathbb{T} \subset X$, coordonnées homogènes et coordonnées toriques sont liées par la relation

$$x_i = \prod_{j=1}^{n} t^{\langle e_j, \eta_i \rangle} = \prod_{j=1}^{n} t^{\eta_{ij}}$$

où $\eta_i = \sum_{j=1}^n \eta_{ij} e_j^*$, avec l'égalité $D_{\rho_i} = \mathrm{div}_0(x_i)$, pour $i = 1, \dots, n+s$.

Le diviseur associé à la fonction rationnelle définie par un polynôme de Laurent $f \in \mathbb{C}[t, t^{-1}] := \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}] \subset \mathbb{C}(X)$ est lié au comportement de f à "l'infini" (en dehors du tore), c'est-à-dire sur les supports des diviseurs D_{ρ_i}. On considère la courbe paramétrée

$$u \in \mathbb{C}^* \mapsto \lambda_{\eta_i}(u) := (u^{\eta_{i1}}, \dots, u^{\eta_{in}}) \in \mathbb{T}$$

définie par $\eta_i = (\eta_{i1}, \dots, \eta_{in}) \in N \simeq \mathbb{Z}^n$. Puisque X est construite en ajoutant à $\mathbb{T}$ les points limites $\lambda_{\eta_i}(0)$ pour tout $\rho_i \in \Sigma(1)$, il est naturel de définir l'ordre d'annulation d'un polynôme de Laurent sur le diviseur D_{ρ_i} par

$$\mathrm{ord}_{D_{\rho_i}}(f) := \mathrm{ord}_{u=0}(f(\lambda_{\eta_i}(u)))$$

(si cet entier est négatif, on dit que f a un pôle d'ordre $-\mathrm{ord}_{D_{\rho_i}}(f)$ sur D_{ρ_i}). Pour un monôme de Laurent t^m, on trouve

$$\mathrm{ord}_{D_{\rho_i}}(t^m) = \mathrm{ord}_0(u^{\langle m,\eta_i\rangle}) = \langle m, \eta_i\rangle,$$

entier fixé par l'action de $\mathbb{T}$ sur $\lambda_{\eta_i}(u)$. Puisque $\mathrm{div}\,(t^m)_{|\mathbb{T}} = 0$, on a :

$$\mathrm{div}\,(t^m) = \sum_1^{n+s} \langle m, \eta_i\rangle\, D_{\rho_i},$$

avec l'égalité $t^m = \prod_1^{n+s} x_i^{\langle m,\eta_i\rangle}$.

On peut associer à tout polynôme de Laurent $f = \sum c_m t^m \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ un polytope convexe $P(f) \subset M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ contenant l'enveloppe convexe de son support $\mathrm{supp}\,(f) := \{m \in M \,;\, c_m \neq 0\}$. On pose pour cela

$$k_i := -\min\{\langle m, \eta_i\rangle \,;\, m \in \mathrm{supp}\,(f)\}\,, \qquad i = 1, \dots, n+s.$$

et on définit

$$P(f) := \{m \in M_{\mathbb{R}} \,;\, \langle m, \eta_i\rangle \geq -k_i, \quad \forall\, i = 1, \dots, n+s\}.$$

Les pôles (respectivement les zéros) de f sur le support de D_{ρ_i} sont d'ordre inférieur à k_i si $k_i \geq 0$ (respectivement supérieur à $-k_i$ si $k_i \leq 0$). Puisque f est de support inclus dans $P(f)$, le diviseur

$$E(f) := \mathrm{div}\,(f) + \sum_1^{n+s} k_i D_{\rho_i} \geq 0$$

est un diviseur de Cartier effectif, linéairement équivalent au diviseur $\sum_1^{n+s} k_i D_{\rho_i}$.

Tout polynôme de Laurent $f = \sum_{m\in P(f)} c_m t^m$ définit une fonction rationnelle sur X à laquelle est associée le polynôme homogène

$$F(x) := \Big(\prod_1^{n+s} x_i^{k_i}\Big) \times \sum_{m\in P(f)} c_m \prod_1^{n+s} x_i^{\langle m,\eta_i\rangle},$$

élément du sous-groupe $S_\beta \subset S$, où $\beta = [\sum k_i D_{\rho_i}]$. Ce dernier ne définit pas une fonction sur X, mais on peut considérer le lieu de ses zéros :

$$E(f) = \{[x_1, \dots, x_{n+s}] \in X \,;\, F(x_1, \dots, x_{n+s}) = 0\}\,.$$

Sous certaines conditions sur le polytope $P(f)$, l'hypersurface $E(f)$ est le support du diviseur $\mathrm{div}_0(f)$ associé aux zéros de f, clôture de Zariski dans X de l'hypersurface $\{f = 0\} \subset \mathbb{T}$ (ceci n'est pas le cas par exemple pour un monôme t^m non constant), auquel cas le diviseur polaire $\mathrm{div}_\infty(f)$ de f coïncide avec $\sum_1^{n+s} k_i D_{\rho_i}$.

1.2.2 Faisceau et polytope associés à un diviseur

Soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural des fonctions holomorphes sur X. A tout diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$ est associé un faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ de $\mathcal{O}_X$-modules sur X ([26], lecture 9, [20]), défini par ses sections au-dessus d'un ouvert de Zariski $U \subset X$:

$$H^0(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in \mathbb{C}(X)^* \mid (\mathrm{div}\,(f) + D)_{|U} \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Si deux diviseurs D_1 et D_2 sont linéairement équivalents, c'est-à-dire $D_1 = D_2 + \mathrm{div}\,(g)$ pour $g \in \mathbb{C}(X)^*$, la multiplication par g définit un isomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X(D_1) \simeq \mathcal{O}_X(D_2)$. Puisque l'on est dans le cas lisse, tous les diviseurs sont de Cartier, et on a la réciproque :

$$[D_1] = [D_2] \iff \mathcal{O}_X(D_1) \simeq \mathcal{O}_X(D_2).$$

Qui plus est, X est une variété normale et tous les faisceaux inversibles sur X sont de la forme $\mathcal{O}_X(D)$ pour un diviseur de Cartier D de X. Ainsi, le groupe de Chow $A_{n-1}(X)$ est isomorphe au groupe de Picard $\mathrm{Pic}\,(X)$ des classes d'isomorphismes des faisceaux inversible sur X.

Tous les diviseurs D sur X admettent un représentant $\mathbb{T}$-invariant (non unique) de la forme $\sum_1^{n+s} k_i D_{\rho_i}$.

Soit $D = \sum_1^{n+s} k_i D_{\rho_i}$ un diviseur $\mathbb{T}$-invariant ; on lui associe le polyèdre

$$P_D := \{m \in M_\mathbb{R}\,;\, \langle m, \eta_i \rangle + k_i \geq 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n+s\}$$

et on note $\mathcal{L}(P_D)$ l'ensemble des polynômes de Laurent de support inclus dans P_D. Si D' est un autre diviseur $\mathbb{T}$-invariant linéairement équivalent à D, alors P_D et $P_{D'}$ sont les mêmes à translation par un élément du réseau M près et la P_D-homogénéïsation est indépendante du représentant du degré $\beta = [D]$. On l'appelle la β-homogénéïsation.

D'après la sous-section précédente, on a l'isomorphisme :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \simeq \oplus_{m \in P_D \cap M} \mathbb{C}\, t^m = \mathcal{L}(P_D).$$

En particulier, $P_D \cap M$ est borné et P_D est un polytope.

1.2.3 Fibrés en droites et diviseurs de Cartier

Soit D un diviseur de Cartier de données locales $\{U_i, f_i\}$, où f_i est un élément non nul du corps $\mathbb{C}(U_i) = \mathbb{C}(X)$ des fonctions rationnelles sur l'ouvert de Zariski U_i de X. On a alors $D_{|U_i} = \mathrm{div}\,(f_i)_{|U_i}$ où les fonctions $g_{ij} := f_i/f_j$ sont inversibles dans l'anneau $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ et satisfont les conditions de cocycle : on peut recoller les ouverts $U_i \times \mathbb{C}$ et $U_j \times \mathbb{C}$ en identifiant (x, λ) et $(x, g_{ij}(x)\lambda)$ pour $x \in U_i \cap U_j$. On obtient ainsi un fibré en droites $\pi : L(D) \to X$ donné par la projection naturelle de $U_i \times \mathbb{C}$ sur U_i.

Le faisceau des sections du fibré $L(D)$ est isomorphe au faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$.

Le lien naturel entre ces deux objets est le suivant : à chaque section globale $s : X \to L$ est associée une fonction rationnelle sur X définie sur U_i par la fonction $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, restriction de s à U_i composée avec la projection $U_i \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. Les diviseurs locaux sur U_i définis par s_i se recollent pour former un diviseur de Cartier $\mathrm{div}_0(s) \in \mathrm{Div}\,(X)$, effectif puisque les s_i sont régulières sur U_i. On a alors l'interprétation suivante en termes des sections globales du faisceau $\mathcal{O}_X(D)$:

Si $L(D)$ correspond à $\mathcal{O}_X(D)$, la section globale $s \in \Gamma(X, L(D)) \setminus \{0\}$ correspondant à $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\}$ vérifie

$$\mathrm{div}_0(s) = \mathrm{div}\,(f) + D.$$

Localement , on a $s_i = f f_i$, où f_i définit $D_{|U_i}$.

1.2.4 Systèmes linéaires complets

Si $D \in \mathrm{Div}(X)$ est effectif, les f_i définissent une section globale s' du fibré $L(D)$ et on a $D = \mathrm{div}_0(s')$. Puisque X est compacte, $\Gamma(X, L(D))$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ engendré disons par $\{s_1, \ldots, s_r\}$. Deux sections non nulles $s = \sum c_i s_i$ et $s' = \sum c'_i s_i$ définissent le même diviseur si et seulement si $(c_0, \ldots, c_r)$ et $(c'_0, \ldots, c'_r)$ sont proportionnels. On peut donc identifier l'espace $|L(D)|$ des diviseurs effectifs dans la classe $[D]$ avec l'espace projectif $\mathbb{P}(\Gamma(X, L(D))) \simeq \mathbb{P}^r$. Cet ensemble s'appelle le *système linéaire complet associé à D*. On a les équivalences

$$\begin{aligned} E \in |L(D)| &\iff E = \mathrm{div}_0(s),\ s \in \Gamma(X, L(D)) \setminus \{0\} \\ &\iff E = E(f) := \mathrm{div}(f) + D,\ f \in \mathcal{L}(P_D)\,, \end{aligned}$$

d'où l'isomorphisme ([20] et [26], lecture 9)

$$|L(D)| = \mathbb{P}(\Gamma(X, L(D))) \simeq \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))).$$

Le quotient de deux sections $s, s' \in \Gamma(X, L(D))$ avec s' non nulle, défini localement par s_i/s'_i, où $s_j/s'_j = s_i/s'_i$ sur $U_i \cap U_j$, définit une fonction rationnelle $s/s' \in \mathbb{C}(X)^*$. Si s et s' correspondent à $f, f' \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\}$, on a $s/s' = f/f'$. On peut illustrer cette remarque par l'utilisation des coordonnées homogènes.

Soit $D = \sum_1^{n+s} k_i D_{\rho_i}$ un $\mathbb{T}$-diviseur et

$$P_D = \{m \in M_{\mathbb{R}}\,;\, \langle m, \eta_i \rangle \geq -k_i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n+s\}$$

son polytope. Si $f \in \mathcal{L}(P_D)$, les coordonnées homogènes donnent une équation globale pour l'hypersurface $E(f)$: on peut penser la section définissant $E(f)$ comme étant le polynôme homogène $F(x_1, \ldots, x_{n+s})$ de degré $[D]$, P_D-homogénéïsé de f. Ainsi, les sections globales du faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ sont les fonctions rationnelles

$$\frac{F(x_1, \ldots, x_{n+s})}{x_1^{k_1} \cdots x_{n+s}^{k_{n+s}}}, \quad F \in S_{[D]}$$

et $\dim|L(D)| = l(D) - 1$ où $l(D) := \mathrm{Card}(P_D \cap M)$ puisque deux polynômes homogènes défnissent la même hypersurface si et seulement si leurs coefficients sont proportionnels.

1.2.5 Restriction aux sous-variétés $\mathbb{T}$-invariantes

A tout cône $\tau \in \Sigma(k)$ est associée une variété torique projective lisse X_τ et un plongement naturel

$$i_\tau : X_\tau \to X$$

d'image $V(\tau)$. Tout fibré en droites L sur X peut être tiré en arrière par i_τ et détermine un fibré en droites $i_\tau^*(L)$ sur X_τ. Puisque i_τ est un plongement, on peut identifier ce fibré avec la restriction de L à $V(\tau)$ que l'on notera L^τ. Si L est globalement engendré, les sections globales de L^τ sont les restrictions des sections globales de L à $V(\tau)$. Ainsi, $\Gamma(X_\tau, L^\tau)$ s'identifie au complémentaire dans $\Gamma(X, L)$ du sous-espace vectoriel des sections globales de L nulles sur $V(\tau)$. Les sections (resp. leurs coefficients) de L correspondant à $\Gamma(X_\tau, L^\tau)$ s'appellent les sections (resp. les coefficients) de face associés τ.

Soit $E = \sum_{i=1}^{n+s} k_i D_{\rho_i}$ un $\mathbb{T}$-diviseur et $\tau \in \Sigma$. On appelle

$$P_E^{(\tau)} := \{m \in P_E\,;\, \langle m, \eta_i \rangle = k_i\ \forall\, i \text{ tel que } \rho_i \subset \tau\}$$

la face de E associée à τ. Si $L = L(E)$, l'application linéaire de restriction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(P_E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(P_E^{(\tau)}) \\ f = \displaystyle\sum_{m \in P_E} a_m t^m & \longmapsto & f^\tau = \displaystyle\sum_{m \in P_E^{(\tau)}} a_m t^m \end{array}$$

correspond à la projection orthogonale de $\Gamma(X, L)$ sur $\Gamma(X_\tau, L^\tau)$ et on a l'isomorphisme naturel $\mathcal{L}(P_E^{(\tau)}) \simeq \Gamma(X_\tau, L^\tau)$.

1.2.6 Fonction support associée à un $\mathbb{T}$-diviseur

Il existe un langage combinatoire pour la théorie des diviseurs de Cartier $\mathbb{T}$-invariants sur une variété torique (ou, de manière équivalente, la théorie des fibrés en droites). L'idée clé est la notion de fonction support linéaire sur l'éventail Σ (voir [20]).

Une fonction support linéaire Ψ est une fonction réelle définie sur le support $|\Sigma|$ de Σ ($\mathbb{R}^n$ dans notre cas), linéaire sur chaque cône σ de l'éventail et à valeurs entières sur les points du réseau $N \simeq \mathbb{Z}^n$.

Chaque point $\zeta \in |\Sigma|$ admet une unique représentation $\zeta = \sum_{j \in J} a_{i_j} \eta_{i_j}$ où le cône $\langle \eta_{i_j}\,;\, j \in J \rangle$ est le plus petit cône de Σ contenant ζ. Une fonction support linéaire est uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs primitifs η_i générateurs des cônes 1-dimensionnels ρ_i. On associe à Ψ son polytope

$$P_\Psi := \{m \in M\,;\, \langle m, \eta_i \rangle \geq \Psi_D(\eta_i), \quad \forall\, i = 1, \ldots, n+s\}.$$

L'ensemble des fonctions supports est en bijection avec l'ensemble des $\mathbb{T}$-diviseurs : à $D = \sum k_i D_{\rho_i}$ est associée la fonction support linéaire Ψ_D définie par

$$\Psi_D(\eta_i) = -k_i.$$

Si D' est un $\mathbb{T}$-diviseur dans la classe de D, la fonction $\Psi_D - \Psi_{D'}$ est linéaire et les polytopes P_D et $P_{D'}$ définis par Ψ_D et $\Psi_{D'}$ sont identiques à translation par un élément de $M \simeq \mathbb{Z}^n$ près.

Pour $\sigma \in \Sigma(n)$, disons $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n \rangle$, on définit $s_\sigma := -\sum_1^n k_i m_i$ où $(m_1, \ldots, m_n)$ est la base duale de $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. On a alors

$$\Psi_D(\zeta) = \langle s_\sigma, \zeta \rangle \quad \forall\, \zeta \in \sigma,$$

avec, si $\zeta = \sum_1^n a_i \eta_i \in \sigma$, $\Psi_D(\zeta) = -\sum a_i k_i$. Si $\sigma' \in \Sigma(n)$ contient ζ, on a $\langle s_\sigma, \zeta \rangle = \langle s'_\sigma, \zeta \rangle$. L'ensemble $\{s_\sigma \,;\, \sigma \in \Sigma(n)\}$ détermine donc Ψ_D de manière unique et le polytope P_D associé à D est intersection des cônes affines n-dimensionnels $s_\sigma + \check{\sigma}$:

$$P_D = P_{\Psi_D} = \{m \in M \,;\, \langle m, \eta_i \rangle \geq \Psi_D(\eta_i),\ \forall\, i = 1, \ldots, n{+}s\} = \bigcap_{\sigma \in \Sigma(n)} \{s_\sigma {+} \check{\sigma}\}.$$

1.2.7 Degrés semi-amples, amples et très amples

On dit qu'un diviseur D est semi-ample si une puissance tensorielle du fibré en droites $L(D)$ est globalement engendrée, c'est-à-dire telle que chacune de ses sections locales sur U soit combinaison $\mathcal{O}_X(U)$-linéaire de sections globales. Dans le cas d'une variété torique lisse complète, cette puissance peut-être choisie égale à 1 et on dira que le fibré $L(D)$ est semi-ample.

Le lieu de base d'un fibré en droites L sur X est l'ensemble

$$\mathrm{BS}\,(L) := \{x \in X \,;\, s(x) = 0 \quad \forall\, s \in \Gamma(X, L)\}\,.$$

Un diviseur D est semi-ample si et seulement si le lieu de base $\mathrm{BS}\,(L(D))$ de $L(D)$ est vide : pour tout $x \in X$, il existe un élément $s \in \Gamma(X, L(D))$ tel que $s(x) \neq 0$. Puisque $L(D) \simeq L(D')$ si $[D] = [D']$, la semi-amplitude d'un diviseur D ne dépend que de son degré $\beta = [D]$. On dit dans ce cas que le degré β est semi-ample.

Le critère combinatoire pour caractériser les degrés semi-amples est le suivant [20] :

Un degré β est semi-ample si et seulement si la fonction support linéaire associée Ψ_D ($[D] = \beta$) est convexe, c'est-à-dire :

$$\Psi_D(u + v) \geq \Psi_D(u) + \Psi_D(v) \quad \forall u, v \in N \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n\,.$$

Il est équivalent de dire que pour chaque cône maximal σ, le vecteur s_σ definissant Ψ dans σ est un sommet de P_D.

L'espace des sections globales $V = \Gamma(X, L(D))$ est un espace vectoriel de dimension finie engendré par les sections globales s_m associées aux monômes t^m, où $m \in P_D$. On peut associer à tout $x \in X$ l'application linéaire $\epsilon_x \in V^*$ qui à s associe son évaluation en x. Si $L(D)$ est globalement engendré, le lieu de base est vide et l'ensemble $\mathrm{Ker}\,(\epsilon_x)$ des sections globales s'annulant en x définit un hyperplan de $V = \Gamma(X, L(D))$, c'est-à-dire un point du projectivisé $\mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}(\Gamma(X, L(D))^*) = \mathbb{P}^r$, $r = \dim_{\mathbb{C}} V - 1$. On peut alors définir un morphisme projectif

$$\begin{aligned} \Phi_{L(D)} : X &\rightarrow \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}^r \\ x &\mapsto \mathrm{Ker}\,(\epsilon_x). \end{aligned}$$

On dit que le fibré $L(D)$ est très ample si cette application est un plongement. Dans ce cas, X est isomorphe à une sous-variété projective de $\mathbb{P}^r$ et

$$\mathcal{O}_X(D) = \Phi^*_{L(D)}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)).$$

Le diviseur D est une section hyperplane de X, intersection de X (vue dans $\mathbb{P}^r$) avec un hyperplan de $\mathbb{P}^r$. On dit que le degré associé $[D]$ est très ample.

On dit que le fibré $L(D)$ est ample s'il existe une puissance tensorielle $L(D)^{\otimes k}$ très ample.

Un $\mathbb{T}$-diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$ est ample si et seulement si sa fonction support Ψ_D est strictement convexe :

$$\Psi_D(u + v) \geq \Psi_D(u) + \Psi_D(v) \quad \forall\, u, v \in N \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n\,,$$

avec égalité si et seulement si u et v appartiennent au même cône.

Il est équivalent de dire que P_D est l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\{s_\sigma\,;\, \sigma \in \Sigma(n)\}\,,$$

avec cette fois les s_σ distincts. De manière équivalente, Σ est l'éventail normal de P_D : chaque cône $\rho \in \Sigma(1)$ est déterminé par la face de P_D qui lui est normale.

Un $\mathbb{T}$-diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$ est très ample si et seulement s'il est ample et le semi-groupe $S_\sigma = \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$ est engendré par l'ensemble

$$\{m - s_\sigma\,;\, m \in P_D\}$$

Puisque X est lisse, cette dernière condition est automatiquement vérifiée pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$ dès que le diviseur est ample et ample équivaut à très ample.

1.3 Eléments basiques de la théorie torique de l'intersection

1.3.1 Groupes de Chow

On considère l'ensemble $\mathcal{C}_k(X)$ des k-cycles de X, c'est-à-dire les sommes formelles finies

$$C = \sum c_i C_i$$

où les C_i sont des sous-variétés fermées irréductibles de X de dimension k et les c_i des entiers. Le k-ème groupe de Chow $A_k(X)$ est le groupe des classes des k-cycles modulo équivalence rationnelle. On a [20] :

Les classes des sous-variétés $\mathbb{T}$-invariantes $V(\tau)$ associées aux cônes $\tau \in \Sigma(n-k)$ engendrent le k-ième groupe de Chow $A_k(X)$.

1.3.2 Dualité entre courbes et diviseurs

Soit D un $\mathbb{T}$-diviseur sur X et $L(D)$ le fibré en droitesassocié. Soit C une courbe lisse fermée (donc irréductible) de X. Toute section rationnelle non triviale s de la restriction $L(D)_{|C}$ de $L(D)$ à C définit un diviseur sur C, $\mathrm{div}\,(s) = \sum a_i p_i$, où a_i est l'ordre d'annulation de s en $p_i \in C$. Le quotient de deux sections sur $L(D)_{|C}$ définit une fonction rationnelle et le degré $\sum a_i$ du diviseur $\mathrm{div}\,(s)$ ne dépend que de D et C. On l'appelle le degré d'intersection de D et C, noté $D \cdot C$ ou $\mathrm{Deg}\,(\mathcal{O}_X(D)_{|C})$.

Si D est semi-ample, $L(D)$ est globalement engendré et sa restriction $L(D)_{|C}$ l'est aussi pour toute courbe iréductible lisse fermée. Dans ce cas, tous les a_i sont positifs et on a $D \cdot C \geq 0$.

Si C et le support de D sont lisses et se coupent transversalement, alors $D \cdot C = \mathrm{card}\,(D \cap C)$.

Si le diviseur D est principal, le fibré en droites $L(D)$ est trivial et le degré d'intersection est nul pour toute courbe ; ainsi, le nombre $D \cdot C$ ne dépend que de la classe $[D]$ de D. D'un autre côté, si C_1 et C_2 définissent la même classe dans $A_1(X)$, alors $D \cdot C_1 = D \cdot C_2$. On obtient ainsi la fonction degré

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{deg} : A_{n-1}(X) \times A_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ ([D],[C]) & \longmapsto & [D].[C] = [D.C] = D.C\,. \end{array}$$

Les courbes irréductibles $V(\tau)$, $\tau \in \Sigma(n-1)$ engendrent $A_1(X)$, et les diviseurs $D_{\rho_1}, \ldots, D_{\rho_{n+s}}$ engendrent $A_{n-1}(X)$; il est donc naturel de calculer les degrés $D_{\rho_i} \cdot V(\tau)$.

Puisque Σ est régulier, le $(n-1)$-cône $\tau = \langle \rho_1, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ est inclus dans deux cônes maximaux $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n \rangle$ et $\sigma' = \langle \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_{n+1} \rangle$ et il existe des entiers uniques $a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que $\eta_n + \eta_{n+1} + \sum_1^{n-1} a_i \eta_i = 0$. On a le résultat suivant [20] :

1. $V(\tau) \cdot D_{\rho_i} = 0, \; i \notin \{1, \ldots, n+1\}$,
2. $V(\tau) \cdot D_{\rho_n} = V(\tau) \cdot D_{\rho_{n+1}} = 1$,
3. $V(\tau) \cdot D_{\rho_i} = a_i, \; i = 1, \ldots, n-1$,

résultat duquel on déduit le degré d'intersection $V(\tau) \cdot D$ pour un $\mathbb{T}$-diviseur quelconque $D = \sum_1^{n+1} k_i D_{\rho_i}$:

$$V(\tau) \cdot D = k_n + k_{n+1} + \sum a_i k_i$$

quantité égale à

$$\langle s_\sigma, \eta_{n+1} \rangle - \Psi_D(\eta_{n+1}) \,,$$

où Ψ_D est la fonction support associée à D et s_σ est l'unique vecteur déterminant Ψ_D dans σ. Utilisant les sections précédentes, on en déduit les propriétés suivantes ([20], [26], lecture 11) :

1. le diviseur D est principal (le fibré $L(D)$ est trivial) si et seulement si $V(\tau) \cdot D = 0$ pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$;
2. le diviseur D est semi-ample (le fibré $L(D)$ globalement engendré) si et seulement si $V(\tau) \cdot D \geq 0$ pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$.
3. Le diviseur D est ample si et seulement si $V(\tau) \cdot D > 0$ pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$.

En particulier, la propriété (1) implique que la fonction degré définie ci-dessus est non dégénérée : les deux $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $A_1(X) \otimes \mathbb{Q}$ et $A_{n-1} \otimes \mathbb{Q}$ sont duaux. Notamment, on a rang $A_1(X) =$ rang $A_{n-1}(X) = s$.

1.4 Calcul résiduel sur une variété torique

1.4.1 L'application résidu torique

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de M ; pour tout sous-ensemble $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ de $\{1, \ldots n+s\}$, on note

$$\det(\eta_I) = \det\Big(\langle e_l, \eta_{i_j}\rangle \,;\, 1 \leq l, j \leq n\Big), \quad dx_I = \bigwedge_j dx_{i_j}, \quad \hat{x}_I = \prod_{i \notin I} x_i.$$

La forme d'Euler sur X est la n-forme [3] :

$$\Omega = \sum_{|I|=n} \det(\eta_I)\hat{x}_I dx_I.$$

Etant donnés $F_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 0, \ldots, n$, $n+1$ polynômes homogènes, on définit le degré critique de l'application $(F_0, \ldots, F_n)$:

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{j=1}^{n+1} \deg(x_j).$$

Tout polynôme H de degré critique ν induit une n-forme rationnelle sur X :

$$\omega_F(H) = \frac{H\Omega}{F_0 \cdots F_n},$$

où F désigne la liste $(F_0, \ldots, F_n)$. Si les F_i ne s'annulent pas simultanément, les $n+1$ ouverts $\{x \in X \; : \; F_i(x) \neq 0\}$ définissent un recouvrement de X et $\omega_F(H)$ définit une classe $[\omega_F(H)] \in H^n(X, \Omega_X^n)$ dans la cohomologie de Čech, où Ω_X^n est le faisceau de Zariski des n-formes sur X. Cette classe est nulle dès que H appartient à l'idéal engendré par les F_i. On obtient ainsi une application

$$\mathrm{Res}_F : S_\nu/(F_0, \ldots, F_n)_\nu \to \mathbb{C}$$

definie par $\mathrm{Res}_F(H) = \mathrm{Tr}_X([\omega_F(H)])$, où Tr_X est l'application trace sur X (à ne pas confondre avec la trace dont on parle en général, il s'agit ici de la trace au sens de la dualité de Poincaré). On appelle cette application le résidu torique [7, 6].

Le résidu torique de $H \in S_\nu$ dépend rationnellement des coefficients des F_i.

1.4.2 Familles essentielles de polytopes et résidus

Définition 1.1 *Une famille de polytopes $P_0, \ldots, P_n$ est dite essentielle si pour tout $I \subsetneq \{0, \ldots, n\}$, la dimension de la somme de Minkowski $\sum_{i \in I} P_i$ est au moins $|I|$. Une collection de degrés $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in A_{n-1}(X)$ est dite essentielle si la famille des polytopes correspondants $P_0, \ldots, P_n$ est essentielle.*

L'importance de ce type de familles tient au fait suivant [35] :

Si les α_i sont semi-amples, le résidu torique, vu comme fonction rationnelle des coefficients de $F_i \in S_{\alpha_i}$, est identiquement nul si et seulement si la famille $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ n'est pas essentielle.

Une famille est inessentielle si et seulement si n des $n+1$ polynômes associés n'ont aucun zéro en commun (lorsque les coefficients sont pris génériquement), auquel cas il n'existe pas de résidus locaux dans la somme et l'application résidu torique est identiquement nulle.

On veut maintenant être sûr que les $n+1$ polynômes F_i, $i = 0, \ldots, n$, ne s'annulent pas simultanément sur X pour des coefficients génériques. Si la famille des degrés $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ est essentielle, la codimension dans S_ν de l'idéal $(F_0, \ldots, F_n)$ est 1 (et les F_i ne s'annulent pas simultanément) pour les coefficients de $(F_0, \ldots, F_n)$ en dehors d'une hypersurface dans le produit d'espaces projectifs $\mathbb{P}^{l_0} \times \cdots \times \mathbb{P}^{l_n}$ ($l_j = \#P_j - 1$) ; cette hypersurface est définie par un polynôme multihomogène $\mathcal{R}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}$ associé aux degrés $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, appelé resultant mixte (voir la section suivante).

En résumé, le résidu torique définit un isomorphisme

$$\mathrm{Res}_F : S_\nu/(F_0, \ldots, F_n)_\nu \to \mathbb{C}.$$

si et seulement si

1. La famille $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ est essentielle.
2. Le résultant $\mathcal{R}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}$ évalué en les coefficients des polynômes $F_0, \ldots, F_n$ est non nul.

La clause 1 est réalisée si les diviseurs sont tous amples ; lorqu'ils sont semi-amples et leurs polytopes P_{α_j} sont de dimension n, le résidu torique attaché au système $(F_0, \ldots, F_n)$, où les les polynômes $F_j \in S_{\alpha_j}$ n'ont aucun zéro commun dans X, est un isomorphisme [15]. Le résidu torique dans le cadre semi-ample se prête à une règle importante [7], la loi de transformation globale : si $G_0, \dots, G_n$ respectivement dans $S_{\beta_0}, \dots, S_{\beta_n}$ n'ont aucun zéro en commun dans X et s'écrivent

$$G_j = \sum_{i=0}^{n} A_{ij} F_j$$

avec A_{ij} homogène de degré $\beta_j - \alpha_j$, alors :

$$\forall\, H \in S_\nu, \quad H \det A \in S_{\tilde{\nu}} \text{ et } \mathrm{Res}_F(H) = \mathrm{Res}_G(H \det A),$$

où $\tilde{\nu}$ est le degré critique correspondant cette fois à $(\beta_0, \dots, \beta_n)$.

Puisque l'application résidu est linéaire, il est intéressant de trouver un élément (dépendant des coefficients des F_i) de résidu torique 1. Si les α_j sont amples, ils définissent une famille essentielle et on peut exhiber un tel élément : on choisit un cône n-dimensionel σ engendré par $\rho_1, \dots, \rho_n$ tels que $\det(\eta_I) = 1$, $I = (1, \dots, n)$. Il existe alors une matrice $(n+1) \times (n+1)$ $A = (A_{ij})$ de polynômes homogènes tels que

$$F_j = A_{0j} \prod_{i>n} x_i + \sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_i.$$

Du fait de la loi de transformation globale, le déterminant $\Delta_\sigma = \det(A)$ est dans S_ν et détermine un élément de résidu torique 1.

Dans le cas semi-ample, Khetan et Soprounov [35] ont construit dans plusieurs cas des réalisations explicites de ± 1 par des résidus toriques.

1.4.3 Lien avec les résidus de Grothendieck

Soit $F_j \in S_{\alpha_j}$, $j = 0, \dots, n$ une famille de polynômes homogènes qui ne s'annulent pas simultanément sur X et soit ν le degré critique. Si l'ensemble $V(F_1, \dots, F_n) := \{x \in X\,;\, F_1(x) = \dots = F_n(x)\}$ est fini, pour tout $H \in S_\nu$, on a [7]

$$\mathrm{Res}_F(H) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} (H/F_0)\Omega \\ F_1(x), F_2(X), \cdots, F_n(x) \end{bmatrix}$$

où le terme de droite désigne la somme des résidus de Grothendieck locaux associés aux $F_1, \dots, F_n$ sur l'ensemble fini $V(F_1, \dots, F_n)$.

1.4.4 Résidu torique exprimé dans le tore

Si les degrés $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ sont amples, pour tout sous-ensemble $I \subset \{0, \ldots, n\}$ les suites $(F_i)_{i\in I}$ définissent génériquement des intersections complètes de codimension $|I|$ dans X. En particulier :

$$\{F_0 = \cdots = F_n = 0\} = \emptyset \Rightarrow \{F_j = 0\,;\, j \neq k\} \text{ est fini.}$$

Si de plus $\{F_0 = 0\} \subset X \setminus \mathbb{T}$ alors $\{F_1 = \cdots = F_n = 0\}$ est fini, inclus dans $\mathbb{T}$, pour $F_1 \in S_{\alpha_1}, \ldots, F_n \in S_{\alpha_n}$ génériques. Dans cette situation, l'application rationnelle résidu torique est entièrement déterminée par un calcul dans l'orbite dense $\mathbb{T}$ et, pour tout $H \in S_\nu$, (ν étant le degré critique), on a [6]

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_F(H) &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} (H/F_0)\Omega \\ F_1(x), F_2(X), \cdots, F_n(x)\end{bmatrix} \\
&= \sum_{t\in\{F_1=\cdots=F_n=0\}\subset\mathbb{T}} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} h\frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} \\ f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où les polynômes de Laurent $f_1, \ldots, f_n, h$ sont les déshomogénéïsés des polynômes homogène $F_1, \ldots, F_n, H$.

1.5 Résultants

1.5.1 Le résultant mixte

Soit $(L_0, \ldots, L_n)$ une collection de fibrés en droites très amples sur une variété torique projective lisse X de dimension n, $V_i = \Gamma(X, L_i) = \mathbb{C}^{l_i}$ et $V = \bigoplus_i V_i = \mathbb{C}^N$. On note

$$I_{X\times V} = \{(x, (s_0, \ldots, s_n)) \in X \times V\,;\, s_i(x) = 0,\, i = 0, \ldots, n\}$$

la variété d'incidence associée. La projection $p_1 : I_{X\times V} \to X$ est une submersion dont les fibres sont isomorphes à des produits d'hyperplans vectoriels $H_i \subset V_i$. La sous-variété $I_{X\times V} \subset X \times V$ est donc de dimension

$$\dim(I_{X\times V}) = \dim X + \dim V - (n+1) = \dim V - 1,$$

irréductible lisse puisque X l'est. La projection $p_2 : I_{X\times V} \to V$ est holomorphe, propre, dont l'image

$$p_2(I_{X\times V}) = \{s = (s_0, \ldots, s_n) \in V;\, \{s = 0\} \neq \emptyset\}$$

est une sous-variété W de V par le théorème de Remmert. Puisque les fibrés sont très amples, la fibre au-dessus d'un point générique $s \in V$ est constituée d'un seul point et l'application $p_2 : I_{X\times V} \to W$ est birationnelle. Ainsi, W est une sous-variété irréductible de V de dimension

$$\dim W = \dim I_{X\times V} = \dim V - 1,$$

donc une hypersurface irréductible de V. Il est clair que l'on a

$$(s_0, \dots, s_n) \in W \iff (\lambda_0 s_0, \dots, \lambda_n s_n) \in W$$

pour tout $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{C}^*)^{n+1}$. Ainsi, W définit une hypersurface irréductible $\mathbb{P}(W)$ dans le produit d'espaces projectifs $\mathbb{P}(V_0) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_n)$.

Soient $D_0, \dots, D_n$ des diviseurs très amples sur X tels que $L_i = L(D_i)$ et $P_0, \dots, P_n$ les polytopes associés. On note a_i les coordonnées canoniques dans V_i (c'est-à-dire associées à la base naturelle de V_i donnée par les sections s_{im}, $m \in P_i$). Il existe au signe près un unique polynôme irréductible $\mathcal{R}^X_{(L_0,\dots,L_n)} \in \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_n]$ tel que

$$W = \{\mathcal{R}^X_{(L_0,\dots,L_n)} = 0\}.$$

On appelle ce polynôme le $(L_0, \dots, L_n)$-résultant [22, 38]. Il est multi-homogène de degré partiel

$$\deg_{a_i} \mathcal{R}^X_{(L_0,\dots,L_n)} = \mathrm{MV}_n\left(P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n\right) \quad i = 0, \dots, n,$$

où MV_n désigne la prise de volume mixte de Minkowski (polarisation de la forme volume normalisée de manière à ce que le volume du n-simplexe élémentaire dans $\mathbb{R}^n$ vaille 1). Notamment, le degré de $\mathcal{R}^X_{(L_0,\dots,L_n)}$ ne dépend que des degrés des fibrés L_i.

Si L_0' est un autre fibré en droites très ample sur X, on a la propriété multiplicative

$$\mathcal{R}^X_{(L_0\otimes L_0',\dots,L_n)}(s_0 \otimes s_0', s_1, \dots) = \mathcal{R}^X_{(L_0,\dots,L_n)}(s_0, s_1, \dots)\mathcal{R}^X_{(L_0',\dots,L_n)}(s_0', s_1, \dots)$$

pour toutes sections $s_0 \in \Gamma(X, L_0)$ et $s_0' \in \Gamma(X, L_0')$ (bien que le polynôme $\mathcal{R}^X_{(L_0\otimes L_0',\dots,L_n)}$ soit irréductible).

1.5.2 Résultants et résidus toriques

On garde les hypothèses de la section précédente. Soit $S_{[D_i]}$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $[D_i]$. On note F_i l'image de s_i sous l'isomorphisme $\Gamma(X, L_i) \simeq S_{[D_i]}$.

Soit ν le degré critique des diviseurs D_i et $F = (F_0, \ldots, F_n)$. Pour tout polynôme homogène $H \in S_\nu$, l'application

$$(F_0, \ldots, F_n) \mapsto \mathrm{Res}_F(H)$$

définit une application rationnelle sur $\mathbb{P}(V_0) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_n)$ et admet $\mathcal{R}^X_{(L_0,\ldots,L_n)}$ comme dénominateur “universel”, et c'est le meilleur dénominateur (c'est-à-dire de plus petit multidegré) ; voir [8].

On peut plus généralement définir les résultants mixtes associés à une famille de fibrés globalement engendrés, et encore plus généralement le résultant creux mixte associé à une famille de $(n + 1)$ sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^n$ (correspondant aux points entiers des polytopes P_i dans notre cas), comme dans [22, 38, 11].

1.5.3 Résultants de facettes et formule du produit

Soit $\rho \in \Sigma(1)$ et X_ρ la variété torique projective lisse associée (correspondant au support du diviseur D_ρ). La restriction à X_ρ des n fibrés L_i définit n fibrés en droites$L_1^\rho, \ldots, L_n^\rho$ sur la variété $n-1$-dimensionnelle X^ρ, très amples puisque les L_i le sont.

On appelle résultant de facette associé à ρ et à $(L_1, \ldots, L_n)$ le polynôme irréductible

$$\mathcal{R}^\rho_{(L_1,\ldots,L_n)} := \mathcal{R}^{X_\rho}_{(L_1^\rho,\ldots,L_n^\rho)}.$$

C'est un polynôme multihomogène de degré partiel

$$\deg_{a_i} \mathcal{R}^\rho_{(L_1,\ldots,L_n)} = \mathrm{MV}_{n-1}\,(P_1^{(\rho)}, \ldots, P_{i-1}^{(\rho)}, P_{i+1}^{(\rho)}, \ldots P_n^{(\rho)}),$$

qui ne dépend que des coefficients de facettes $a_{1,\rho}, \ldots, a_{n,\rho}$ associés à ρ (codant l'ensemble des sections $s_1^\rho \in \Gamma(X_\rho, L_1^\rho), \ldots, s_n^\rho \in \Gamma(X_\rho, L_n^\rho)$, correspondant aux facettes $P_1^\rho, \ldots, P_n^\rho$).

On suppose que $D_0 = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} k_i D_{\rho_i}$ et $s_0 = \prod_{\rho\in\Sigma(1)} x_i^{k_i}$. On a l'égalité [37] :

$$\mathcal{R}_X(s_0, \ldots, s_n) = \prod_{i=1}^{n+s} \left(\mathcal{R}^{\rho_i}(s_1^{\rho_i}, \ldots, s_n^{\rho_i})\right)^{k_i}$$

(par commodité, on omet la dépendance en $(L_0, \ldots, L_n)$). Toute section $s'_0 \in \Gamma(X, L_0)$ s'écrit $s'_0 = f_0 s_0$ où $f_0 \in \mathbb{C}(X)$. Pour $(s_1, \ldots, s_n)$ génériques, l'ensemble $Z = \{s_1 = \cdots = s_n = 0\}$ est fini inclus dans le tore, défini par un système de n polynômes de Laurent à n inconnues. La fonction de $(s_1, \ldots, s_n)$

$$\prod_{P \in Z} f_0(P)$$

est symétrique en les racines communes de ce système et définit une fonction rationnelle sur $\mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_n)$.

On a la "formule du produit" suivante [37] :

$$\mathcal{R}_X(s'_0, s_1, \ldots, s_n) = \Big(\prod_{P \in Z} f_0(P) \Big) \times \prod_{i=1}^{n+s} \big(\mathcal{R}^{\rho_i}(s_1^{\rho_i}, \ldots, s_n^{\rho_i}) \big)^{k_i}.$$

1.6 Coordonnées locales dans une variété torique complète lisse

On démontre maintenant les résultats de cette section qui ne se trouvent *a priori* pas dans la littérature.

1.6.1 Définitions-Propriétés

On note $\sigma = \rho_1 + \cdots + \rho_n \in \Sigma(n)$ le cône maximal engendré par les rayons $\rho_1, \ldots, \rho_n$. La famille $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ des vecteurs primitifs η_i associés aux 1-cônes ρ_i est une base pour le $\mathbb{Z}$-module libre $N \simeq \mathbb{Z}^n$. Soit $m_1, \ldots, m_n$ la base duale correspondante : $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n = \oplus_i \mathbb{N} m_i$. Les fonctions rationnelles t^{m_i} sont régulières sur la carte $U_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n] \simeq \mathbb{C}^n$ et définissent un système de coordonnées affines locales $(x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma)$.

Lemme 1.1 *Les coordonnées locales vérifient, en accord avec les coordonnées homogènes $x_1, \ldots, x_{n+s}$, les propriétés suivantes :*

1. *L'ouvert U_σ est le quotient géométrique (cf. Sous-section 1.1.3) :*

$$U_\sigma = \frac{\{(x_1, \ldots, x_{n+s}) \in \mathbb{C}^{n+s} \setminus Z(\Sigma),\ \prod_{j=1}^{s} x_{n+j} \neq 0\}}{G}$$

et les x_i^σ *sont les uniques fonctions rationnelles qui vérifient*

$$[x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma, 1, \ldots, 1] = [x_1, \ldots, x_{n+s}] \in U_\sigma$$

2. *Pour tout* $m \in M$*, on note* $\lambda(m) = (\lambda_1(m), \ldots, \lambda_n(m)) \in \mathbb{Z}^n$ *les coordonnées de* m *dans la base* $(m_1, \ldots, m_n)$ *du* $\mathbb{Z}$*-module libre* $M \simeq \mathbb{Z}^n$*. On a les égalités*

$$t^m = (x^\sigma)^{\lambda(m)} = \prod_{j=1}^{n+s} x_j^{\langle m, \eta_j \rangle}.$$

3. *Les équations affines des* $\mathbb{T}$*-diviseurs* $D_{\rho_1}, \ldots, D_{\rho_n}$ *sont :*

$$D_{\rho_i | U_\sigma} = \{x_i^\sigma = 0\}\,, \;\; i = 1, \ldots, n\,.$$

Preuve. 1. On a $X \setminus U_\sigma = \cup_{j=1}^s D_{\rho_{n+j}}$, et pour $x \in U_\sigma = \{x_{n+1} \cdots x_{n+s} \neq 0\}$, le vecteur

$$(\nu_1, \ldots, \nu_{n+s}) := \Big(\prod_{j=1}^s x_{n+j}^{\langle m_1, \eta_{n+j} \rangle}, \ldots, \prod_{j=1}^s x_{n+j}^{\langle m_n, \eta_{n+j} \rangle}, \frac{1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{1}{x_{n+s}} \Big)$$

est bien défini. De l'égalité $x_i^\sigma = t^{m_i} = x_i \prod_{j=1}^s x_{n+j}^{\langle m_i, \eta_{n+j} \rangle}$, on déduit l'égalité $[x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma, 1, \ldots, 1] = [\nu_1 x_1, \ldots, \nu_{n+s} x_{n+s}]$. On vérifie que $\nu_i \displaystyle\prod_{j=1}^s \nu_{n+j}^{\langle m_i, \eta_{n+j} \rangle} = 1$, donc $\nu \in G$ (Sous-section 1.1.3) puisque $(m_1, \ldots, m_n)$ est une base de M et

$$[x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma, 1, \ldots, 1] = [x_1, \ldots, x_{n+s}].$$

Il est facile de vérifier l'unicité des x_i^σ.

2. On étend par linéarité les égalités $x_i^\sigma = t^{m_i}$ à tout $m \in M$.

3. On a $D_{\rho_i} = \operatorname{div}(x_i)$. Or $x_i^\sigma = x_i \displaystyle\prod_{j=1}^s x_{n+j}^{\langle m_i, \eta_{n+j} \rangle}$ et $\displaystyle\prod_{j=1}^s x_{n+j}^{\langle m_i, \eta_{n+j} \rangle} \neq 0$ sur U_σ. □

1.6.2 Equation locale d'une hypersurface

Lemme 1.2 *L'équation locale d'un* $\mathbb{T}$*-diviseur de Cartier* $D = \sum_1^{n+s} k_i D_{\rho_i}$ *dans la carte* U_σ *correspondant au cône* $\sigma = \rho_1 + \cdots + \rho_n \in \Sigma(n)$ *est :*

$$D_{|U_\sigma} = \operatorname{div}_0\Big(\prod_1^n (x_i^\sigma)^{k_i} \Big).$$

Preuve. On a la représentation

$$U_\sigma = X \setminus (D_{\rho_{n+1}} \cup \cdots \cup D_{\rho_{n+s}}).$$

Ainsi $D_{|U_\sigma} = (k_1 D_{\rho_1} + \cdots + k_n D_{\rho_n})_{|U_\sigma}$ et le lemme se déduit de l'assertion 3 du lemme précédent. □

On note que $m_\sigma = \sum_1^n k_i m_i = -s_\sigma$, où s_σ est le vecteur définissant la fonction support Ψ_D associée à D dans le cône σ.

Soit D un diviseur effectif de polytope P_D et E une hypersurface de degré $[D]$ d'équation homogène $E = \{F = 0\}$.

Lemme 1.3 *L'équation affine de E dans la carte U_σ est :*

$$E_{|U_\sigma} = \{F(x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma, 1, \ldots, 1) = 0\}.$$

On note $f^\sigma \in \mathbb{C}[x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma]$ ce polynôme. Si F est le P_D-homogénéïsé d'un polynôme de Laurent f supporté par P_D, on a

$$f(t_1, \ldots, t_n) = t^{s_\sigma} f^\sigma(t^{m_1}, \ldots, t^{m_n}), \ \forall\, \sigma \in \Sigma(n),$$

où $s_\sigma = -(k_1 m_1 + \cdots + k_n m_n)$.

Preuve. Puisque $E(f)_{|U_\sigma} = \{x \in U_\sigma\,;\, F([x_1, \ldots x_{n+s}]) = 0\}$, la première partie est une conséquence de l'assertion 1 du Lemme 1.1. Le P_D-homogénéïsé F d'un polynôme de Laurent $f = \sum_{m \in P_D} c_m t^m$ supporté par P_D s'écrit

$$F(x_1, \ldots x_{n+s}) = \prod_1^{n+s} x_i^{k_i} \times \sum_{m \in P_D} c_m \prod_1^{n+s} x_i^{\langle m, \eta_i \rangle},$$

soit

$$F(x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma, 1 \ldots) = \prod_1^n (x_i^\sigma)^{k_i} \times \sum_{m \in P_D} c_m \prod_1^n [x_i^\sigma]^{\langle m, \eta_i \rangle} = \sum_{m \in P_D} c_m \prod_1^n [x_i^\sigma]^{\lambda_i(m) + k_i}.$$

En remplaçant les x_i^σ par t^{m_i}, on obtient la relation voulue. □

On note v_j le vecteur η_{n+j} exprimé dans la base $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$; on définit

$$\nu_j = k_{n+j} + \langle s_\sigma, \eta_{n+j} \rangle = k_{n+j} - \langle (k_1, \ldots, k_n), v_j \rangle, \ j = 1, \ldots, s.$$

Lemme 1.4 *Le support de f^σ est inclus dans le polytope*

$$\Delta_{D,\sigma} := \{\lambda \in (\mathbb{R}^+)^n \,;\, \langle \lambda, v_j \rangle \geq -\nu_j \,, j = 1, \ldots, s\},$$

projection du support de F (inclus dans $(\mathbb{R}^+)^n \times (\mathbb{R}^+)^s$) sur le n-plan $(\mathbb{R}^+)^n$. Ce polytope est image du polytope translaté $P_D - s_\sigma$ via le changement de base de $\mathbb{Z}^n$ transformant la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ en la base $(m_1, \ldots, m_n)$.

Preuve. On a l'égalité

$$\mathrm{supp}\,(f^\sigma(t^{m_1}, \ldots, t^{m_n})) = -s_\sigma + \mathrm{supp}\,(f),$$

ensemble inclus dans le polytope

$$\begin{aligned}&\{m\,;\, \langle m + s_\sigma, \eta_i \rangle \geq -k_i \,;\, i = 1, \cdots, n+s\} = \\ &\{m\,;\, \langle m, \eta_i \rangle \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\,;\, \langle m, \eta_{n+j} \rangle \geq \langle -s_\sigma, \eta_{n+j} \rangle - k_{n+j},\, j = 1, \ldots, s\}.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la base $(m_1, \ldots, m_n)$. □

On note que le diviseur D est effectif si et seulement si le polytope P_D contient l'origine, c'est-à-dire si et seulement si $\Delta_{D,\sigma}$ contient les vecteurs $(k_1, \ldots, k_n)$ pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$.

On pose $\nu_j := k_{n+j} + \langle s_\sigma, \eta_{n+j} \rangle$ pour $j = 1, \ldots, s$. On appelle le vecteur $\nu^\sigma = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{Z}^s$ le *degré σ-directionnel* de f. On note

$$D_\sigma := \mathrm{div}\,(t^{s_\sigma}) + D = \sum_1^s \nu_j D_{\rho_{n+j}}$$

l'unique diviseur supporté par $X \setminus U_\sigma$ rationnellement équivalent à D.

1.6.3 Nouveaux critères pour qu'un $\mathbb{T}$-diviseur de Cartier soit semi-ample, ample et très ample

Un $\mathbb{T}$-diviseur D est semi-ample si et seulement si pour tout $\sigma \in \Sigma$, le vecteur σ-extrémal s_σ associé à D appartient au polytope P_D (ce qui correspond au fait que la fonction support Ψ_D soit convexe). Les points s_σ sont dans ce cas des sommets de P_D et on a

$$\langle s_\sigma, \eta_{n+j} \rangle + k_{n+j} \geq 0$$

pour tout cône $\sigma \in \Sigma(n)$ de dimension maximale. On en déduit le lemme suivant :

Lemme 1.5 *Un $\mathbb{T}$-diviseur D est semi-ample si et seulement si le diviseur D_σ est effectif pour tout cône maximal $\sigma \in \Sigma(n)$ ($\nu^\sigma \in \mathbb{N}^s$), ou encore si et seulement si le polytope $\Delta_{D,\sigma}$ contient l'origine pour tout cône $\sigma \in \Sigma(n)$. De manière équivalente, dans chaque carte U_σ, l'équation affine d'une hypersurface $H \in L(D)$ générique a un terme constant non nul,*

Le cas ample correspond au cas où les vecteurs $s_\sigma \in P_D$, $\sigma \in \Sigma(n)$ sont distincts deux à deux, soit

$$\langle s_\sigma, \eta_{n+j} \rangle + k_{n+j} \geq 0,\ j = 1, \ldots, s\ \forall \sigma \in \Sigma(n).$$

On obtient le

Lemme 1.6 *Un diviseur D est ample si et seulement si le diviseur D_σ est strictement effectif ($\nu^\sigma \in (\mathbb{N}^*)^s$) pour tout cône maximal $\sigma \in \Sigma(n)$.*

Le cas très ample correspond au cas ample avec la condition supplémentaire : $S_\sigma := \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$ est engendré par l'ensemble $\{m - s_\sigma\, ;\, m \in P_D\}$, *i.e.* les générateurs $m_1, \ldots, m_n$ de S_σ appartiennent au polytope $-s_\sigma + P_D$.

Lemme 1.7 *Un diviseur D est très ample si et seulement le diviseur D_σ est strictement effectif et si de plus le polytope $\Delta_{D,\sigma}$ contient les extrémités des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ pour tout cône maximal $\sigma \in \Sigma(n)$. De manière équivalente, l'équation affine dans la carte U_σ d'une hypersurface générique $E = E(f)$ de degré $[D]$ est de la forme :*

$$f^\sigma(x^\sigma) = c_0 + c_1 x_1^\sigma + \cdots + c_n x_n^\sigma + g(x^\sigma)$$

avec les c_i non nuls, et g un polynôme de degré (classique) au moins deux.

Définition 1.2 *Etant donné un diviseur D globalement engendré et $E(f)$ une hypersurface de degré $[D]$, on appelle le coefficient constant (c_0 ci-dessus) de f^σ le coefficient σ-extrémal de $E(f)$. Il affecte le monôme $t^{s_\sigma} \in \mathcal{L}(P_D)$ que l'on appelle monôme σ-extrémal de la classe $[D]$.*

1.6.4 Résidu torique exprimé dans les cartes affines

Ceci est une remarque complémentaire aux rappels sur les résidus toriques. On se place exactement avec les mêmes hypothèses et notations que la Sous-section 1.4.4, où l'on suppose cette fois $H/F_0 = t^m$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Soit $\sigma \in \Sigma(n)$. On peut exprimer, sous certaines conditions, le résidu torique $\mathrm{Res}_F(H)$ en coordonnées affines.

Lemme 1.8 *On a l'égalité*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_F(H) &= \sum_{t\in V(F_1,\ldots,F_n)\subset\mathbb{T}} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} t^m \frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} \\ f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)\end{bmatrix} \\
&= \sum_{x^\sigma\in\{f_1^\sigma=\cdots=f_n^\sigma=0\}} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} (x^\sigma)^{\lambda(m)} \frac{dx_1^\sigma\wedge\cdots\wedge dx_n^\sigma}{x_1^\sigma\cdots x_n^\sigma} \\ f_1^\sigma(x^\sigma), f_2^\sigma(x^\sigma), \ldots, f_n^\sigma(x^\sigma)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dès que les polynômes f_i^σ ne s'annulent pas simultanément sur les axes de coordonnées $x_i^\sigma = 0$.

Preuve. On remplace x_i^σ par son expression t^{m_i} en $(t_1,\ldots,t_n)$; le jacobien torique correspondant au changement de coordonnées $(t^{m_1},\ldots,t^{m_n}) \to (t_1,\ldots,t_n)$ vaut $\det(m_1,\ldots,m_n) = 1$, ce qui permet de conclure à la validité du résultat dans le tore. Ce résultat reste vrai dans U_σ dès que les polynômes f_i^σ ne s'annulent pas simultanément sur les axes. $\square$

Si les degrés sont semi-amples, les polynômes f_i^σ, $i = 1,\ldots,n$ associés aux F_i, $i = 1,\ldots,n$ ont un terme constant génériquement non nul et ne s'annulent génériquement pas simultanément sur les axes de coordonnées $x_i^\sigma = 0$, auquel cas l'égalité ci-dessus est une égalité de fonctions rationnelles en les coefficients de $F_1,\ldots F_n$.

Chapitre 2

Concavité et dualité dans une variété torique

On s'intéresse aux familles de sous-variétés de X intersections d'hypersurfaces de degré fixé. Sous certaines hypothèses, ces sous-variétés sont génériquement intersections complètes et suffisamment mobiles pour définir des notions non triviales de concavité torique (analogue de la k-concavité quand $X = \mathbb{P}^n$) et d'espace dual.

2.1 Problèmes d'intersection

Dans cette section, X désigne une variété torique compacte, lisse, de dimension n, associée à un éventail régulier complet Σ de $N \otimes \mathbb{R}$. Pour $\rho \in \Sigma(1)$, on note x_ρ la coordonnée homogène associée.

2.1.1 Facettes virtuelles et semi-amplitude

Soit $E = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} k_\rho D_\rho$ un $\mathbb{T}$-diviseur effectif sur X. On décrit dans cette section l'espace des sections globales du fibré en droites $L(E)$ associé à E en fonction de la géométrie de son polytope,

$$P_E := \{m \in M \otimes \mathbb{R}\,;\, \langle m, \eta_\rho \rangle \geq -k_\rho \ \forall \rho \in \Sigma(1)\}.$$

On utilise pour cela la notion de face virtuelle du polytope P_E. On définit $k'_\rho := -\min_{m \in P_E} \langle m, \eta_\rho \rangle$. Puisque E est supposé effectif, son polytope contient l'origine et $0 \leq k'_\rho \leq k_\rho$. Pour tout cône $\tau \in \Sigma$, on note

$$\begin{aligned} P_E^{(\tau)} &:= \{m \in P_E\,;\, \langle m, \eta_\rho \rangle = -k_\rho \ \forall \rho \in \tau(1)\} \\ P_E^{\tau} &:= \{m \in P_E\,;\, \langle m, \eta_\rho \rangle = -k'_\rho \forall \rho \in \tau(1)\}\,, \end{aligned}$$

Ce sont des polytopes convexes inclus dans des espaces affines translatés du sous-espace vectoriel de dimension $n - \dim(\tau)$

$$\tau^\perp := \{m \in \mathbb{R}^n\,;\, \langle m, \eta_\rho \rangle = 0 \ \forall \rho \in \tau(1)\},$$

avec l'inclusion $P_E^{(\tau)} \subset P_E^\tau$. Le polytope $P_E^{(\tau)}$ peut-être vide, tandis que le polytope P_E^τ ne l'est jamais par construction.

Définition 2.1 *On appelle P_E^τ la face de P_E associée à τ et $P_E^{(\tau)}$ la face virtuelle de P_E associée à τ.*

On associe à E les $\mathbb{T}$-diviseurs

$$E' := \sum_{\rho \in \Sigma(1)} k'_\rho D_\rho \quad \text{et} \quad E" = E - E'.$$

Lemme 2.1 *Les diviseurs E' et $E"$ sont effectifs. Le support du diviseur $E"$ coïncide avec le lieu de base* $\mathrm{BS}\,(L(E))$ *du fibré $L(E)$. Le diviseur E' est semi-ample et les espaces vectoriels $\Gamma(X, L(E))$ et $\Gamma(X, L(E'))$ sont isomorphes.*

Preuve. Les diviseurs E' et $E"$ sont effectifs par construction. L'espace vectoriel $\Gamma(X, L(E))$ admet pour base les sections globales s_m associées aux points m de $P_E \cap \mathbb{Z}^n$ et $x \in \mathrm{BS(L(E))} \iff s_m(x) = 0 \ \forall m \in P_E \cap \mathbb{Z}^n$ où la section s_m correspond au monôme de degré $[E]$

$$x^{(m)} := \prod_{\rho \in \Sigma(1)} x_\rho^{\langle m, \eta_\rho \rangle + k_\rho}.$$

Ainsi, $x \in \mathrm{BS}\,(L(E))$ si et seulement s'il existe $\rho \in \Sigma(1)$ tel que $x \in D_\rho$ et $\langle m, \eta_\rho \rangle + k_\rho > 0$ pour tout $m \in P_E \cap \mathbb{Z}^n$. Le lieu de base de $L(E)$ est donc la réunion des diviseurs D_ρ pour lesquels la face virtuelle $P_E^{(\rho)}$ est vide, c'est-à-dire $E - E'$ (on compte ici les multiplicités d'annulation des s_m en $x \in \mathrm{BS}\,(L))$. Notamment, le diviseur E' est semi-ample puisqu'aucune de ses faces virtuelles $P_{E'}^{(\rho)}$ $\rho \in \Sigma(1)$ n'est vide. L'application qui à $s_m \in \Gamma(L(E))$ associe la section $s'_m \in \Gamma(L(E'))$ correspondant au monôme $\prod_{\rho \in \Sigma(1)} x_\rho^{\langle m, \eta_\rho \rangle + k'_\rho}$ définit bien un isomorphisme entre les deux espaces de sections (bien que les deux fibrés ne soient pas isomorphes). $\square$

Lemme 2.2 *Soit $\tau \in \Sigma$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $V(\tau) \subset \mathrm{BS}\,(L(E))$
2. $P_E^{(\rho)} = \emptyset \ \forall \rho \in \tau(1)$
3. $k_\rho > k'_\rho \ \forall \rho \in \tau(1)$
4. $P_E^{(\tau)} \neq P_E^\tau$
5. $P_E^{(\tau)} = \emptyset$.

Preuve. La sous-variété $V(\tau)$ est intersection des supports des $\mathbb{T}$-diviseurs D_ρ qui la contiennent, c'est-à-dire

$$V(\tau) = \bigcap_{\rho \in \tau(1)} \mathrm{Supp}\,(D_\rho).$$

La preuve du Lemme 2.1 induit les équivalences

$$\mathrm{Supp}\,(D_\rho) \not\subseteq \mathrm{BS}\,(L(E)) \iff P_E^{(\rho)} \neq \emptyset \iff k_\rho = k_{\rho'} \iff P_E^\rho = P_E^{(\rho)},$$

et $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$. L'équivalence $3 \Leftrightarrow 4$ est évidente, et $4 \Rightarrow 5$ puisque P_E^τ n'est jamais vide. L'égalité $P_E^{(\tau)} = \bigcap_{\rho \in \tau(1)} P_E^{(\rho)}$ montre $5 \Rightarrow 3$. □

Pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, le vecteur σ-extrémal $s_{E,\sigma} \in \mathbb{Z}^n$ de E, défini par $\langle m, \eta_\rho \rangle + k_\rho = 0 \ \forall \rho \in \sigma(1)$, caractérise sur σ la fonction support Ψ_E :

$$\Psi_E(\zeta) = \langle s_{E,\sigma}, \zeta \rangle \ \forall \zeta \in \sigma.$$

Remarque 2.1 En particulier, l'assertion (1) $\Leftrightarrow$ (5) (pour $\tau = \sigma \in \Sigma(n)$) implique que $s_{E,\sigma} \in P_E$ si et seulement si le point fixe x_σ (orbite fermée de dimension 0 associée à σ) n'appartient pas au lieu de base du fibré $L(E)$, ce qui correspond au fait qu'une hypersurface générique $H \in |E|$ ne contient pas l'origine de la carte U_σ.

Lemme 2.3 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *E est semi-ample ;*
2. *$P_E^{(\tau)} \neq \emptyset$ pour tout $\tau \in \Sigma$;*
3. *il existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $P_E^{(\tau)} \neq \emptyset$ pour tout $\tau \in \Sigma(k)$;*
4. *$s_{E,\sigma} = P_E^{(\sigma)}$, $\forall \sigma \in \Sigma(n)$;*
5. *$s_{E,\sigma} = P_E^\sigma$, $\forall \sigma \in \Sigma(n)$.*

Preuve. Les implications (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) sont conséquences du lemme précédent. Le point 3 implique l'égalité $k_\rho = k'_\rho$ pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ et $E = E'$, impliquant 1 d'aprés le Lemme 2.1. Par définition $P_E^{(\sigma)} \subset s_{E,\sigma}$ et E est semi-ample si et seulement si $s_{E,\sigma} \in P_E, \forall\, \sigma \in \Sigma(n)$, d'où (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) d'après le lemme précédent. □

Lemme 2.4 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *E est très ample ;*
2. $\dim\ P_E^{(\rho)} = n-1$ *pour tout* $\rho \in \Sigma(1)$ *;*
3. $\dim\ P_E^{(\tau)} = n - \dim(\tau)$ *pour tout* $\tau \in \Sigma$ *;*
4. *il existe* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *tel que* $\dim\ P_E^{(\tau)} = n - \dim(\tau)$ *pour tout* $\tau \in \Sigma(k)$ *;*
5. $\dim\ P_E^{(\tau)} = 1$ *pour tout* $\tau \in \Sigma(n-1)$ *.*

Preuve. Le polytope d'un diviseur très ample E permet de retrouver Σ et chaque face virtuelle $P_E^{(\rho)}$ normale à $\rho \in \Sigma(1)$ est de dimension $n-1$, soit (1) $\Rightarrow$ (5). Le polytope $\Delta_{E,\sigma}$ associé à P_E pour un cône maximal σ contenant τ permet de se convaincre de (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) (la dimension des faces est préservée par translation et changement de base). L'assertion (5) implique en particulier que les polytopes $\Delta_{E,\sigma}$ contiennent les vecteurs de la base canonique des espaces vectoriels dans lesquels ils sont plongés et le Lemme 1.7 montre que (5) $\Rightarrow$ (1). □

2.1.2 Décomposition d'une sous-variété générique de type $(L_1, \ldots, L_k)$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $L_1, \ldots, L_k$ des fibrés en droites associés à une collection $E_1, \ldots, E_k$ de diviseurs effectifs $\mathbb{T}$-invariants sur X et $P_{E_1}, \ldots, P_{E_k}$ les polytopes associés.

Définition 2.2 *On appelle sous-variété de type* $(L_1, \ldots, L_k)$ *toute sous-variété de la forme*

$$C = C(s) := \{s_1 = 0\} \cap \cdots \cap \{s_k = 0\}$$

définie par $s = (s_1, \ldots, s_k)$*, où* $s_i \in \Gamma(X, L_i)$*. On dira que C vérifie génériquement une propriété si elle la vérifie pour* $s = (s_1, \ldots, s_k)$ *dans un ouvert de Zariski de l'espace vectoriel* $\bigoplus_1^k \Gamma(X, L_i)$*.*

Le théorème principal de cette section concerne la structure générique des sous-variétés de type $(L_1, \ldots, L_k)$.

Pour $J \subset \{1, \ldots, k\}$ et $\tau \in \Sigma$, on définit l'indice

$$c_{J,\tau} = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j \in J} P_{E_j}^{(\tau)} = \emptyset \text{ et } \sum_{j \in J} P_{E_j}^{(\tau')} \neq \emptyset \ \forall \tau' \subset \tau \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On obtient le lemme de décomposition suivant :

Lemme 2.5 *Soit $J \subset \{1, \ldots, k\}$. La décomposition ensembliste de la sous-variété $\bigcap\limits_{j \in J} \mathrm{BS}\,(L_j) \subset X$ en composantes irréductibles est*

$$\bigcap_{j \in J} \mathrm{BS}\,(L_j) = \bigcup_{\tau \in \Sigma} c_{J,\tau} V(\tau)$$

Preuve. En vertu du Lemme 2.2, $V(\tau)$ est une composante de $\bigcap_{j \in J} \mathrm{BS}\,(L_j)$ si et seulement si $\sum_{j \in J} P_{E_j}^{(\tau)} = \emptyset$ et cette composante (irréductible) n'est pas immergée si et seulement si elle n'est pas incluse dans une sous-variété $\mathbb{T}$-invariante $V(\tau')$ contenue dans $\bigcap_{j \in J} \mathrm{BS}\,(L_j)$. □

Définition 2.3 *On dira qu'une famille de polytopes $(P_1, \ldots, P_r)$ de $\mathbb{R}^n$ est essentielle si elle vérifie la condition suivante :*

$$\forall I \subset \{1, \ldots, r\},\ \dim\Big(\sum_{i \in I} P_i\Big) \geq |I|.$$

Pour $I \subset \{1, \ldots, k\}$ et $\tau \in \Sigma$, on associe la famille de polytopes

$$\mathcal{F}_{I,\tau} := \{P_{E_i}^{(\tau)},\, i \in I\},$$

et on définit le nouvel indice

$$\nu_{I,\tau} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{F}_{I,\tau} \text{ n'est pas essentielle} \\ c_{I^c,\tau} \text{ sinon,} \end{cases}$$

où I^c désigne le complémentaire de I dans $\{1, \ldots, k\}$.

Théorème 2.1 *Une sous-variété générique $C = C(s)$ de type $(L_1, \dots, L_k)$ se décompose de manière unique en composantes non immergées :*

$$C = \bigcup_{\substack{I \subset \{1,\dots,k\} \\ \tau \in \Sigma}} \nu_{I,\tau} C_{I,\tau}$$

où $C_{I,\tau}$ est une intersection complète lisse, de codimension $|I|$ de $V(\tau)$, d'intersection transverse ou vide avec les orbites incluses dans $V(\tau)$.

La preuve sera donnée plus loin. Elle s'appuie sur le

Théorème 2.2 *Si les fibrés $L_1, \dots, L_k$ sont globalement engendrés sur X, une sous-variété générique de type $(L_1, \dots, L_k)$ est intersection complète lisse d'intersection transverse ou vide avec les orbites de X si la famille $P_{E_1}, \dots, P_{E_k}$ est essentielle, vide sinon.*

Preuve. Pour $s = (s_1, \dots, s_k) \in \bigoplus \Gamma(X, L_i)$, et $\sigma \in \Sigma(n)$, on a

$$C(s) \cap U_\sigma = \{f_1^\sigma = \cdots = f_k^\sigma = 0\}$$

où $C(s) = \{s_1 = \cdots = s_k = 0\}$ et les polynômes $f_i^\sigma \in \mathbb{C}[x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma]$ sont les équations affines des diviseurs $\mathrm{div}_0(s_i)$. Ces derniers sont supportés par les polytopes convexes $\Delta_{i,\sigma} := \Delta_{E_i,\sigma}$ associés aux diviseurs E_i, définis dans la Sous-section 1.6.2. Ils sont de même dimension que les polytopes P_{E_i} et contiennent l'origine puisque les fibrés L_i sont globalement engendrés (Lemme 1.4). L'essentialité de la famille $(P_{E_1}, \dots, P_{E_k})$ équivaut donc à l'essentialité de la famille $(\Delta_{1,\sigma}, \dots, \Delta_{k,\sigma})$, pour un cône $\sigma \in \Sigma(n)$ quelconque.

On remarque (ceci sera utile ultérieurement) que si $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ sont r polytopes convexes de $[0, +\infty[^m$ (à sommets dans $\mathbb{N}^m$) définissant une famille non essentielle, il existe (par définition de la non-essentialité) un sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, r\}$ tel que $\dim(\sum_{i \in I} \Delta_i) < \#I$; l'annulation simultanée de $\#I$ polynômes p_i de supports respectifs Δ_i, $i \in I$ se traduit par l'annulation d'un système de $\#I$ polynômes en strictement moins que $\#I$ inconnues ; si les coefficients des p_i sont génériques, un tel système n'a aucune solution et l'ensemble des zéros communs des p_i dans $\mathbb{C}^m$ est vide. Cette remarque (appliquée avec $m = n$ et $r = k$) assure que si $P_{E_1}, \dots, P_{E_k}$ définissent une famille non essentielle, alors, pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, l'ensemble des zéros communs de $f_1^\sigma, \dots, f_k^\sigma$ dans $\mathbb{C}^n$ est vide (lorsque les coefficients sont génériques) et $C = C(s)$ est génériquement vide.

La famille $(\Delta_{1,\sigma},\ldots,\Delta_{k,\sigma})$ est essentielle si et seulement si chaque polytope $\Delta_{i,\sigma}$ contient un vecteur $e_i^\sigma \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$, de manière à ce que la famille $(e_1^\sigma,\ldots,e_k^\sigma)$ soit libre. Si la famille $(P_{E_1},\ldots,P_{E_k})$ est essentielle, la forme différentielle $df_1^\sigma \wedge \cdots \wedge df_k^\sigma$ est donc génériquement non identiquement nulle pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, ; d'après le théorème de Sard, le système $(f_1^\sigma - \epsilon_1,\ldots,f_k^\sigma - \epsilon_k)$ définit pour ϵ générique une intersection complète lisse dans $\mathbb{C}^n$; comme $0 \in \Delta_i^\sigma$, les s_i, $i = 1,\ldots,k$, définissent bien une intersection complète lisse dans X.

Reste à examiner la transversalité avec les orbites. Considérons pour fixer les idées l'orbite définie dans U_σ par $V = \{x_1 = \cdots = x_q = 0\}$. Si $q > n-k$, l'intersection $\{f_1^\sigma = \cdots = f_k^\sigma = 0\} \cap V$ est vide (lorsque les coefficients des f_i^σ sont génériques) et ce cas n'a donc pas à être retenu. D'après la remarque faite ci dessus, on peut supposer en fait non seulement que $q \le n-k$, mais encore que les intersections $\Delta_{i,V}^\sigma$ des polytopes $\Delta_1^\sigma,\ldots,\Delta_k^\sigma$ avec le sous-espace $\{\xi_1 = \cdots = \xi_q = 0\}$ de $\mathbb{R}^n$ constituent une famille essentielle de polytopes dans $\mathbb{R}^{n-q}$. D'après ce qui précède, la restriction de la forme différentielle $df_1^\sigma \wedge \cdots \wedge df_k^\sigma$ au sous-espace V n'est pas identiquement nulle et le théorème de Sard assure encore, puisque les polytopes $\Delta_{i,V}^\sigma$, $i = 1,\ldots,k$ ont toujours l'origine pour sommet, que, pour des coefficients génériques, l'ensemble $\{f_1^\sigma = \cdots = f_k^\sigma = 0\}$ intersecte V transversalement. $\square$

Corollaire 2.1 *Si les fibrés $L_1,\cdots,L_k$ sont globalement engendrés, alors pour $s \in \bigoplus_1^k \Gamma(X,L_i)$ générique et $\tau \in \Sigma(r)$, l'intersection*

$$C_\tau(s) := C(s) \cap V(\tau)$$

est une sous-variété lisse de X de codimension $r+k$ (vide si $r+k>n$), d'intersection transverse ou vide avec les orbites incluses dans $V(\tau)$ si et seulement si la famille $P_{E_1}^{(\tau)},\ldots,P_{E_k}^{(\tau)}$ est essentielle, génériquement vide sinon.

Preuve. On applique le théorème précédent aux fibrés $L_1^\tau,\ldots,L_k^\tau$ sur la variété torique $V(\tau)$, où la restriction L_i^τ du fibré L_i à $V(\tau)$ est définie par le polytope $P_{E_i}^\tau = P_{E_i}^{(\tau)}$ (Sous-section 1.2.5, et Lemme 2.2). $\square$

Preuve du Théorème 2.1 :
Preuve. Soient $s = (s_1,\ldots,s_k) \in \bigoplus_1^k \Gamma(X,L_i)$. En accord avec le Lemme 2.1, on note L_i' le fibré $L(E_i')$ et $s_i' \in \Gamma(X,L_i')$ la section correspondante à s_i sous

l'isomorphisme $\Gamma(X, L_i) \simeq \Gamma(X, L_i')$. On a donc

$$\operatorname{div}(s_i) = \operatorname{div}(s_i') + E_i - E_i', \quad \forall s_i \in \Gamma(X, L_i), \ \forall i = 1, \ldots, k,$$

et l'ensemble $C = C(s)$ se décompose (génériquement) sous la forme

$$C(s) = \bigcup_{I \subset \{1,\ldots,k\}} \Big(\bigcap_{i \in I} \{s_i' = 0\} \bigcap_{j \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} \mathrm{BS}\,(L_j) \Big).$$

On pose

$$C_{I,\tau} = C_{I,\tau}(s) := \Big(\bigcap_{i \in I} \{s_i' = 0\} \Big) \cap V(\tau).$$

Les s_i' sont des sections de fibrés semi-amples associés aux diviseurs E_i', de polytopes P_{E_i}. D'après le Corollaire 2.1, la sous-variété $C_{I,\tau}$ est une sous-variété lisse, donc localement irréductible, incluse dans $V(\tau)$ de codimension $|I|$, d'intersection transverse (ou vide) avec les orbites incluses dans $V(\tau)$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}_{I,\tau} = (P_{E_i}^{(\tau)})_{i \in I}$ est essentielle. D'après le Lemme 2.5 de décomposition des lieux de bases, $C_{I,\tau}$ est une composante non immergée de C si et seulement si $c_{I^c,\tau} \neq 0$, ce qui montre le théorème. Le fait que les sous-variétés $C_{I,\tau}$ soient génériquement lisses implique qu'elles sont réunions disjointes de sous-variétés irréductibles, d'où l'unicité de la décomposition. □

On verra à la fin de cette section un exemple de sous-variété lisse union disjointe de branches irréductibles.

Remarque 2.2 Les indices $\nu_{I,\tau}$ sont définis par :

$$\nu_{I,\tau} \neq 0 \iff \begin{cases} V(\tau) \subset \bigcap_{i \in I^c} \mathrm{BS}\,(L_i) \\ \{P_{E_i}^{(\tau)}\,;\, i \in I\} \text{ essentielle} \\ L^\tau(E_j) \text{ globalement engendré sur } V(\tau), j = 1, \ldots, k, \end{cases}$$

Définition 2.4 *L'éventuelle composante génériquement lisse, intersection complète de codimension k de $X = V(\{0\})$ et d'intersection transverse ou vide avec les orbites de X correspond à $I = \{1, \ldots, k\}$ et $\tau = \{0\}$. C'est l'unique composante qui passe par tous les points de X, (quand s varie), que l'on appelle la composante mobile (ou semi-ample) de C. On la note C^{mob}. Si son intersection avec les orbites de dimension k est génériquement non vide, on dira que C^{mob} est très mobile (ou très ample).*

Corollaire 2.2 *On a les trois assertions suivantes :*

1. *C admet une composante mobile si et seulement si la famille de polytopes $(P_{E_1}, \ldots, P_{E_k})$ est essentielle.*
2. *$C = C^{\mathrm{mob}}$ dès que la famille $(P_{E_1}, \ldots, P_{E_k})$ est essentielle et les diviseurs $E_1, \ldots, E_k$ sont semi-amples ; on dira dans ce cas que la famille de fibrés $(L_1, \ldots, L_k)$ est essentielle semi-ample.*
3. *C est très mobile dès que les diviseurs $E_1, \ldots, E_k$ sont très amples. On dira dans ce cas que la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ est très ample.*

Preuve. 1. La composante C^{mob} correspond à l'intersection

$$C^{\mathrm{mob}} = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\}} \{s'_i = 0\}$$

des hypersurfaces semi-amples $\{s'_i = 0\}$. Les polytopes correspondant aux supports des s'_i sont exactement les polytopes P_{E_i}. Cette composante est donc non vide si et seulement si la famille $(P_{E_1}, \ldots, P_{E_k})$ est essentielle d'après le Théorème 2.2.

2. C'est clair.

3. C'est une conséquence du Corollaire 2.1 et du Lemme 2.4. □

Exemple. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$; la variété torique associée à l'éventail Σ engendré par les cônes 1-dimensionnels $\rho_{\pm e_i}$ engendrés par les $\pm e_i$ $i = 1, 2, 3$ est $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, munie des coordonnées homogènes classiques $([x_1 : y_1], [x_2 : y_2], [x_3 : y_3])$. Les $\mathbb{T}$-diviseurs $E_1 = \{x_1 = 0\}$ et $E_2 = \{x_2 = 0\}$ associés aux cônes ρ_{-e_1} et ρ_{-e_2} ont pour polytopes respectifs $P_1 = [0, e_1^*]$ et $P_2 = [0, e_2^*]$, où (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est la base duale de (e_1, e_2, e_3). Les sous-variétés C_s de type $L(E_1), L(E_2)$, $s \in \Gamma(X, L(E_1) \oplus L(E_2))$ s'écrivent

$$C_s = \{a_1 x_1 + b_1 y_1 = 0\} \cap \{a_2 x_2 + b_2 y_2 = 0\} = [-b_1 : a_1] \times [-b_2 : a_2] \times \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^1;$$

Cette courbe est irréductible, lisse ; elle est mobile, coupe génériquement en un seul point les orbites $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times [0 : 1]$ et $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times [0 : 1]$ associées aux cônes $\rho_{\pm e_3}$, et est d'intersection génériquement vide avec les autres orbites 2-dimensionnelles. Cela concorde avec le fait que la famille $(P_1^{\pm \rho_i}, P_2^{\pm \rho_i})$ n'est essentielle que pour $i = 3$, les faces étant réduites à l'origine pour $i = 1, 2$.

L'exemple suivant montre que contrairement au cas $X = \mathbb{P}^n$, une sous-variété de type $(L_1, \ldots, L_k)$ peut-être génériquement lisse sans être globalement irréductible.

Exemple. Soit $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, munie des coordonnées homogènes $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$. Soit D le diviseur semi-ample associé à la sous-variété $\{x_0 = 0\}$. Le fibré $L = L(2D)$

est globalement engendré, et son polytope est de dimension 1, L est donc une "famille essentielle". Une sous-variété C_a générique de type $L(2D)$ (ici un élément du système linéaire $|2D|$) a pour équation :

$$C_a = \{a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2 = 0\} = (\{P_1(a)\} \times \mathbb{P}^1) \cup (\{P_2(a)\} \times \mathbb{P}^1);$$

où $P_1(a)$ et $P_2(a)$ sont les solutions (dans $\mathbb{P}^1$) de l'équation $a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2 = 0$. C'est une sous-variété lisse qui a génériquement deux composantes irréductibles. Ce phénomène est dû au fait que $\dim A_{n-1}(X) > 1$. *Le fait que la variété C_a soit lisse implique seulement l'irréductibilité locale de C_a.* On peut penser qu'il y a équivalence entre irréductibilité locale et globale si les fibrés L_i ont suffisamment de sections.

2.1.3 Degré d'intersection, positivité, semi-amplitude

Définition 2.5 *Pour toute famille $L_1 = \dots, L_k$ de fibrés en droites sur X, la classe dans le groupe de Chow de X d'une sous-variété générique de type $(L_1, \dots, L_k)$ ne dépend que des classes dans $\mathrm{Pic}(X) \simeq A_{n-1}(X)$ des fibrés $L_1, ..., L_k$. On la note $\alpha(L_1, \dots, L_k)$.*

On rappelle le théorème de Bernstein, analogue "torique" du théorème de Bézout :

Proposition 2.1 *Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de n polytopes à sommets entiers. La sous-variété*

$$\{f_1(t) = \cdots = f_n(t) = 0\} \subset \mathbb{T}$$

définie par les zéros d'une famille de polynômes de Laurent f_i de supports respectifs $P_i \cap \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, n$, est génériquement zéro-dimensionnelle, de cardinal le volume mixte $\mathrm{MV}_n(P_1, \dots, P_n)$.

Soit $L_1 = L(E_1), \dots, L_k = L(E_k)$ une famille de fibrés en droitessur X. Le théorème suivant est une traduction combinatoire du Théorème 2.1.

Théorème 2.3 *On a les trois assertions suivantes :*

1. *$\alpha(L_1, \dots, L_k) \in A_{n-k}(X)$ dès que les fibrés vérifient la condition :*

$$\operatorname{codim} \bigcap_{i \in I} \mathrm{BS}\,(L_i) \geq |I| \quad \forall\, I \subset \{1, \dots, k\};$$

on dira qu'ils sont dans ce cas en bonne position au-dessus de X.

2. *Si les fibrés $L_1, \ldots, L_k$ sont globalement engendrés, on a l'égalité*

$$V(\tau) \cdot \alpha(L_1, \ldots, L_k) = \mathrm{MV}_k(P_{E_1}^{(\tau)}, \ldots, P_{E_k}^{(\tau)}) \in A_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

pour tout $\tau \in \Sigma(n-k)$, *quantité égale à* $\mathrm{Card}(C \cap V(\tau))$ *pour* C *de type* $(L_1, \ldots, L_k)$ *générique ; en particulier,*

$$V(\tau) \cdot \alpha(L_1, \ldots, L_k) \geq 0 \qquad \forall \tau \in \Sigma(k)\,;$$

3. *Sous les mêmes hypothèses, on a* $V(\tau) \cdot \alpha(L_1, \ldots, L_k) > 0$ *pour tout* $\tau \in \Sigma(k)$ *si et seulement si les familles* $P_{E_1}^{(\tau)}, \ldots, P_{E_k}^{(\tau)}$ *sont essentielles pour tout* $\tau \in \Sigma(k)$. *C'est en particulier le cas si la famille* $(L_1, \ldots, L_k)$ *est très ample.*

Preuve. 1. Si les fibrés sont en bonne position au-dessus de X, une sous-variété générique C de type $(L_1, \ldots, L_k)$ ne peut pas avoir de composante irréductible de codimension inférieure à k d'après le Théorème 2.1. D'un autre côté, une composante irréductible de C ne peut pas être de dimension plus petite que $n-k$ (à moins d'être vide). Ainsi, une sous-variété générique de type $(L_1, \ldots, L_k)$ est k-dimensionnelle (ou vide), ce qui prouve le premier point.

2. Soit $\sigma = \rho_1 + \cdots + \rho_n \in \Sigma(n)$ et $x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma$ les coordonnées affines correspondantes. Si $\tau \in \sigma(n-k)$ est engendré par $\rho_{k+1}, \ldots, \rho_n$, les fonctions $x_1^\sigma, \ldots, x_k^\sigma$ offrent un système de coordonnées pour l'ouvert affine $V(\tau) \cap U_\sigma = \{x_{k+1}^\sigma = \cdots = x_n^\sigma = 0\}$ de la variété torique $V(\tau)$. Soit $f_1^\sigma = \cdots = f_k^\sigma = 0$ les équations locales d'une sous-variété C de type $(L_1, \ldots, L_k)$ et $f_i^{\sigma,\tau} := f_{i|V(\tau)\cap U_\sigma}^\sigma = f_i^\sigma(x_1^\sigma, \ldots, x_k^\sigma, 0, \ldots, 0)$. Les fibrés L_i^τ, restriction des fibrés L_i à $V(\tau)$ sont globalement engendrés sur $V(\tau)$. D'après le Théorème 2.2, la sous-variété $C \cap V(\tau)$ est donc génériquement d'intersection transverse ou vide avec les orbites de $V(\tau)$. Pour des raisons de dimensions, elle est zéro-dimensionnelle et incluse dans l'ouvert affine $V(\tau) \cap U_\sigma$. On a donc

$$C \cap V(\tau) = \{f_1^{\sigma,\tau}(x_1^\sigma, \ldots, x_k^\sigma) = \cdots = f_k^{\sigma,\tau}(x_1^\sigma, \ldots, x_k^\sigma) = 0\}$$

pour C générique. Le support $\Delta_{i,\sigma}^\tau \subset (\mathbb{R}^+)^k$ du polynôme $f_i^{\sigma,\tau}$ est l'intersection du polytope $\Delta_{i,\sigma}$ avec le k-plan de coordonnées $x_{k+1}^\sigma = \cdots = x_n^\sigma = 0$, d'où l'égalité

$$\mathrm{Card}\,(C_s \cap V(\tau)) = \mathrm{MV}_k(\Delta_{1,\sigma}^\tau, \ldots, \Delta_{k,\sigma}^\tau)$$

d'après le théorème de Bernstein. Si $(m_1, \ldots, m_n)$ est la base duale de $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$, le changement de variable $(x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma) \to (t_1, \ldots, t_n)$ est de déterminant 1 et préserve les volumes, d'où l'égalité

$$MV_k(\Delta_{1,\sigma}^\tau, \ldots, \Delta_{k,\sigma}^\tau) = \mathrm{MV}_k(P_{E_1}^\tau, \ldots, P_{E_k}^\tau).$$

Puisque l'intersection $V(\tau) \cap C$ est génériquement transverse, on a $C.V(\tau) = \mathrm{Card}\, C \cap V(\tau)$ d'après la théorie de l'intersection [27], ce qui montre le deuxième point.

3. Ce point est une conséquence du point 2 et du lemme qui suit. □

Lemme 2.6 *On a les deux assertions suivantes :*

1. *Une famille de n polytopes $(P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est essentielle si et seulement si $\mathrm{MV}_n(P_1, \ldots, P_n) > 0$.*
2. *Si les P_i sont associés à des diviseurs semi-amples E_i de X, on a la formule*

$$\mathrm{MV}_n(P_1, \ldots, P_n) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} k_\rho \mathrm{MV}_{n-1}(P_2^\rho, \ldots, P_n^\rho)$$

où $k_\rho = -\min_{m \in P_1} \langle m, \eta_\rho \rangle$.

Preuve. On renvoie à [17]. □

Remarque 2.3 On peut conjecturer la réciproque au théorème précédent :

$$V(\tau).\alpha(L_1, \ldots, L_k) \geq 0 \; \forall \tau \in \Sigma(k) \Longrightarrow (L_1, \ldots, L_k) \quad \mathit{semi-ample}$$

et

$$V(\tau).\alpha(L_1, \ldots, L_k) > 0 \; \forall \tau \in \Sigma(k) \Longrightarrow \begin{cases} (L_1, \ldots, L_k) \; \mathit{essentielle\ semi-ample}, \\ L_1 \otimes \cdots \otimes L_k \; \mathit{tr\grave{e}s\ ample}. \end{cases}$$

Définition 2.6 *On appelle cône orthogonal de $(L_1, \ldots, L_k)$ le sous-module libre de $A_k(X)$ défini par :*

$$\mathrm{Ort}\,(L_1, \ldots, L_k) = \{\beta \in A_k(X)\,;\, \beta.\alpha(L_1, \ldots, L_k) = 0\}.$$

Soit $V \subset X$ une sous-variété algébrique de dimension pure k dont la classe $[V] \in A_k(X)$ s'écrit $\sum_{\tau \in \Sigma(n-k)} \nu_\tau [V(\tau)]$, $\nu_\tau \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 2.3 *Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ une famille essentielle semi-ample de fibrés sur X et $P_1, \ldots, P_k$ les polytopes associés. Alors pour une sous-variété générique C de type $(L_1, \ldots, L_k)$, la sous-variété $V \cap C$ est finie, de cardinal*

$$\mathrm{Card}\,(V \cap C) = [V].\alpha(L_1, \ldots, L_k) = \sum_{\tau \in \Sigma(n-k)} \nu_\tau \mathrm{MV}_{n-k}(P_1^\tau, \ldots, P_k^\tau).$$

Notamment l'intersection est vide si et seulement si $[V] \in \mathrm{Ort}\,(L_1, \ldots, L_k)$.

Preuve. C'est une conséquence du Théorème 2.3 et de la définition du cône orthogonal. □

Exemple fondamental :

Soit $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ une famille de n polytopes de $M \otimes \mathbb{R}$ non vides dont la somme de Minkowski $\Delta = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n$ est n-dimensionnelle. On suppose que l'éventail Σ_Δ normal associé à Δ est régulier ; il définit dans ce cas une variété torique projective X_Δ lisse qui ne dépend que des polytopes Δ_i modulo translation ce qui permet de supposer que $0 \in \Delta_i$, $i = 1, \ldots, n$. On note η_ρ les générateurs simples des cônes 1-dimensionnels $\rho \in \Sigma_\Delta(1)$ de l'éventail associé à Δ et D_ρ les diviseurs correspondants. Les fibrés L_i associés aux diviseurs

$$E_i := \sum_{\rho \in \Sigma_\Delta(1)} k_{i,\rho} D_\rho\,, \quad k_{i,\rho} := -\min\{\langle m, \eta_\rho >; m \in \Delta_i\}\,,\ i = 1, \ldots, n$$

sont globalement engendrés et le fibré $L_\Delta := L_1 \otimes \cdots \otimes L_n$ est très ample. Dans ce cas l'ensemble $\{s_1 = \cdots = s_n = 0\}$ est génériquement inclus dans le tore, donc fini et de cardinal générique $\mathrm{MV}_n(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$; il est non vide si et seulement si la famille est essentielle.

Le cas de l'exemple ci-dessus est le plus naturel à traiter si l'on veut faire des calculs de traces le long de sous-variétés données par les zéros de polynômes de Laurent de supports prescrits. Cependant, le fait que les variétés toriques lisses compactes ne soient pas toutes projectives ([26], lecture 14) motive l'approche plus intrinsèque générale proposée jusque là.

2.1.4 Le cas projectif

Dans le cas d'une variété torique lisse projective, on peut construire beaucoup de familles de fibrés très amples dont le cône orthogonal est réduit à zéro. On prouve ici la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Soit X une variété torique projective lisse. Les $\mathbb{Q}$-espaces-vectoriels $A_k(X) \otimes \mathbb{Q}$ admettent une base formée de classes de sous-variétés intersections complètes d'hypersurfaces très amples.*

La preuve s'appuie sur les lemmes suivants :

Lemme 2.7 *Soit $\sigma \in \Sigma(n)$. Le $\mathbb{Z}$-module libre $A_{n-1}(X) \simeq \mathbb{Z}^s$ a pour base la famille $\mathcal{B}_\sigma := \{[D_\rho],\ \rho \notin \sigma(1)\}$.*

Preuve. Le groupe de Chow $A_{n-1}(X)$ est engendré par les classes des $\mathbb{T}$-diviseurs $D_\rho, \rho \in \Sigma(1)$ (Sous-section 1.3.1). Soit $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} k_\rho D_\rho$ et $s_{D,\sigma}$ son vecteur σ-extrémal. Alors

$$D + \mathrm{div}\,(t^{s_{D,\sigma}}) = \sum_{\rho \notin \sigma(1)} \Big(k_\rho + \langle s_{D,\sigma}, \eta_\rho\rangle\Big)\, D_\rho$$

et $[D]$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des classes $[D_\rho]$, $\rho \notin \sigma(1)$. $\square$

N.B : l'ouvert affine $U_\sigma := \mathrm{Spec}\,[\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n] = X \setminus \cup_{\rho \notin \sigma(1)} D_\rho$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n$; son groupe de Chow est donc trivial, ce qui explique que $A_{n-1}(X)$ est engendré par la classe des diviseurs de support inclus dans $X \setminus U_\sigma$.

Lemme 2.8 *Si X est projective, il existe une base $\beta_1 = [E_1], \ldots, \beta_s = [E_s]$ de $A_{n-1}(X) \otimes \mathbb{Q}$, où les $\beta_i \in A_{n-1}(X)$ sont très amples. Les E_i peuvent être choisis effectifs à support dans $X \setminus U_\sigma$.*

Preuve. Soit D un diviseur très ample (X est supposée projective, il en existe donc) à support dans $X \setminus U_\sigma$. Pour $N \in \mathbb{N}$ suffisament grand, les diviseurs $D_\rho + ND$, $\rho \notin \sigma(1)$ sont tous trés amples et forment la base recherchée. $\square$

Remarque 2.4 C'est un fait général qu'il existe une base de $A_{n-1}(X) \otimes \mathbb{Q}$ formée de classes de diviseurs très amples pour une variété projective lisse quelconque. Le cône engendré par les classes des diviseurs très amples est toujours ouvert dans le cône engendré par les classes des diviseurs effectifs et contient donc une $\mathbb{Q}$-base de $A_{n-1}(X)$.

Remarque 2.5 Si l'on se restreint à une base semi-ample, on peut espérer obtenir une $\mathbb{Z}$-base pour $A_{n-1}(X)$. C'est le cas pour les produits d'espaces projectifs $X = \mathbb{P}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{d_r}$ munis de la graduation naturelle, pour lesquels les degrés semi-amples $\beta_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 est à la i-ème place, $i = 1, \ldots, r$) constituent une base de $A_{n-1}(X)$ en tant que $\mathbb{Z}$-module ; de plus, dans ce cas, la sommes des degrés est ample et permet de reconstruire X (ce qui est intéressant au vu des théorèmes de type Wood évoqués dans la première partie).

On peut d'autre part se poser les questions suivantes : si le diviseur $D = \sum_1^s \nu_j D_{\rho_{n+j}}$ est très ample, les diviseurs $D_{\rho_{n+j}} + D$ sont semi-amples pour tout $j = 1, \ldots, s$ et constituent une base de $(\sum_1^s \nu_j) A_{n-1}(X)$; la somme $\sum_{j=1}^s (D_{\rho_{n+j}} + D)$ est-elle très ample ? qu'en est-il de $\sum_{i=1}^{n+s} (D_{\rho_i} + D)$?

Preuve. On prouve maintenant la Proposition 2.2. Si $\tau = \rho_{i_1} + \cdots + \rho_{i_{n-k}}$, on a

$$V(\tau) = D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_{n-k}}.$$

D'après le lemme précédent, les classes des diviseurs $\mathrm{Det}\, M \times D_{i_j}$ sont combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires des classes $[E_j]$, $j = 1, \ldots, s$. Si $J = (j_1, \ldots, j_{n-k})$ est un $(n-k)$-uplet de $\{1, \ldots, s\}^{n-k}$, des hypersurfaces génériques $H_{j_1} \in [E_{j_1}], \ldots, H_{j_{n-k}} \in [E_{j_{n-k}}]$ se coupent transversalement pour former une intersection complète très ample lisse C_J, et la classe $[V(\tau)]$ est combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire des classes $[C_J]$:

$$[V(\tau)] = \sum_{J \in \{1,\ldots,s\}^{n-k}} c_J^{(\tau)} [C_J]$$

(les $c_J^{(\tau)} \in \mathbb{Q}$ ont $\mathrm{Det}\,(M)^{n-k}$ comme plus petit dénominateur commun). Puisque les classes $[V(\tau)]$, $\tau \in \Sigma(n-k)$ engendrent $A_k(X)$, on peut extraire une $\mathbb{Q}$-base dans l'ensemble des C_J qui apparaissent, ce qui finit la preuve. □

Remarque 2.6 La classe de tout k-cycle effectif est combinaison effective des classes des $\mathbb{T}$-sous-variétés irréductibles $V(\tau)$, ce qui n'est *a priori* plus le cas si on l'exprime dans une base très ample.

2.2 Concavité torique

2.2.1 Espaces des paramètres

Soit $E_1, \ldots, E_k$ une famille de $\mathbb{T}$-diviseurs effectifs sur X. On suppose que les polytopes associés $P_{E_1}, \ldots, P_{E_k}$ sont de dimension au moins 1 et on note $L_1 = L(E_1), \ldots, L_k = L(E_k)$ les fibrés correspondants.

Le système linéaire complet $|L_i|$ associé à L_i est isomorphe à l'espace quotient des sections globales du fibré L_i modulo les sections inversibles (*i.e* qui ne s'annulent pas sur X)

$$|L_i| \simeq \frac{\Gamma(X, L_i) \setminus \{0\}}{\Gamma(X, L_i)^{inv}} = \{[s_i], \quad s_i \in \Gamma(X, L_i) \setminus \{0\}\}.$$

Le quotient de deux sections inversibles définit une fonction rationnelle régulière sur la variété compacte X, donc définie par un polynôme de Laurent de support inclus dans l'intersection

$$\bigcap_{\sigma \in \Sigma(n)} \check{\sigma} \cap M,$$

intersection réduite à $\{0\}$ puisque l'éventail Σ est complet. On a donc les isomorphismes $\Gamma(X, L_i)^{inv} \simeq \mathbb{C}^*$ et $|L_i|$ s'identifie à l'ensemble $\mathbb{P}(\Gamma(X, L_i))$ des droites vectorielles de $\Gamma(X, L_i)$. C'est l'espace projectif de dimension $l_i - 1$ où

$$l_i = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, L_i) = \mathrm{card}\,(P_{E_i} \cap M).$$

Toute section globale de $\Gamma(X, L_i)$ est représentée par le vecteur $(a_{im})_{m \in P_{E_i} \cap M}$ de ses coefficients dans la base $(s_{im})_{m \in P_{E_i} \cap M}$ définie par les monômes de Laurent t^m, $m \in P_{E_i} \cap M$. On note $a_i \in \mathbb{P}(\Gamma(X, L_i)$ la classe du vecteur $(a_{im})_{m \in P_{E_i} \cap M}$ et

$$C_{a_i} = \{x \in X\,;\ \sum_{m \in P_{E_i} \cap M} a_{im} s_{im}(x) = 0\} \in |L_i|$$

l'hypersurface correspondante (qui ne dépend pas du choix du représentant (a_{im}) de a_i).

Définition 2.7 *On appelle le produit d'espaces projectifs*

$$X^* = X^*(L_1, \ldots, L_k) := \mathbb{P}(\Gamma(X, L_1)) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Gamma(X, L_k)),$$

muni des coordonnées multi-homogènes $a = (a_1, \ldots, a_k)$, l'espace des paramètres de l'ensemble $\mathcal{C}_X(L_1, \ldots, L_k)$ des sous-variétés de type $(L_1, \ldots, L_k)$ ou encore l'espace $(L_1, ..., L_k)$-dual de X. Si $a \in X^*$, on note

$$C_a = C_{a_1} \cap \cdots \cap C_{a_k} = \{s_{a_1} = \cdots = s_{a_k} = 0\}$$

la sous-variété de X correspondant (s_{a_i} est un représentant quelconque de la classe $[s_{a_i}]$ associée à a_i).

Remarque 2.7 L'application $a \mapsto C_a$ de $X^*(L_1, \ldots, L_k)$ dans $\mathcal{C}_X(L_1, \ldots, L_k)$ est surjective par définition. Elle n'est en général injective que dans le cas hypersurface ($k = 1$). Dans le cas particulier où

$$X = X_1 \times \cdots \times X_k,$$

le choix de k fibrés semi-amples L_1 sur X_1,...,L_k sur X_k permet de fabriquer une famille essentielle de fibrés semi-amples sur X (en tensorisant L_i par les fibrés constants sur les variétés X_j, $j \neq i$) pour laquelle la correspondance $a \mapsto C_a$ est bijective. Dans ce cas, C_a est intersection complète pour tout a et $\mathcal{C}_X(L_1, \ldots, L_k)$ est un produit d'espaces projectifs. En général, on utilise *a priori* plus de paramètres que la dimension éventuelle de l'ensemble des sous-variétés de type $(L_1, \ldots, L_k)$.

En analogie avec les Grassmaniennes ($X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$; $L_i = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(1)$), il serait intéressant dans le cas d'une variété torique projective X d'étudier la structure de l'espace $\mathcal{C}_X(L_1, \ldots, L_k)$ (structure de variété, dimension, singularités, irréductibilité, *etc.*). Par exemple, pour quelles familles de fibrés l'ensemble $\mathcal{C}_X(L_1, \ldots, L_k)$ est il une sous-variété fermée irréductible de l'espace de Chow de X (ou, en plus grande généralité, du schéma de Hilbert de X). Comment se traduisent les propriétés d'essentialité, de semi-amplitude, d'amplitude, de fibrés en bonne position, *etc.* ?

Définition 2.8 *On dira que $a \in X^*$ est un point régulier s'il définit une sous-variété $C_a \subset X$ intersection complète lisse. On note* $\mathrm{Reg}\,(X^*)$ *l'ensemble des points réguliers de X^*.*

Lemme 2.9 *Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ une famille semi-ample essentielle. L'ensemble* $\mathrm{Reg}\,(X^*)$ *est un ouvert de Zariski non vide de X^*.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du Théorème 2.2. □

2.2.2 Variété d'incidence

Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ une famille de fibrés en droites.

Définition 2.9 *On appelle*

$$I_X := \{(x, a) \in X \times X^* \ ; \ x \in C_a\}$$

la variété d'incidence sur X associée à la famille $(L_1, \ldots, L_k)$. On note p_X et q_X les projections naturelles respectives de I_X sur X et X^*.

La variété d'incidence I_X est une sous-variété algébrique de $X \times X^*$, non vide si et seulement si aucun des espaces vectoriels $\Gamma(X, L_i)$ n'est réduit à 0 (*i.e.* si l'espace $\mathcal{C}_X(L_1, \ldots, L_k)$ est non trivial).

Théorème 2.4 *On a l'énoncé en deux volets suivant :*

A. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *les fibrés $L_1, \ldots, L_k$ sont globalement engendrés ;*
2. *I_X est un fibré en produit d'espaces projectifs $\mathbb{P}^{l_1-2} \times \cdots \times \mathbb{P}^{l_k-2}$ au-dessus de X, avec $l_i = \dim \Gamma(X, L_i) \geq 2$;*

3. I_X est une intersection complète irréductible lisse de codimension k de $X \times X^*$ et l'application $q_X : I_X \to X$ est une submersion ;

4. I_X est la clôture de Zariski dans $X \times X^*$ de l'ensemble $p_X^{-1}(\mathbb{T})$.

B. *La famille $(L_1, \ldots, L_k)$ est semi-ample essentielle si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. I_X est lisse et la projection $p_X : I_X \to X$ est une submersion holomorphe ;

2. Reg (X^*) *est un ouvert de Zariski de X^* et l'application $q_X : I_X \to X^*$ est holomorphe propre, surjective, submersion de $q_X^{-1}(Reg(X^*))$ sur* Reg $(X^*) \subset X^*$.

Preuve.

Assertion **A**. Soit $V_i = \Gamma(X, L_i)$. Le projectivisé de V_i est l'ensemble des hyperplans de V_i, c'est-à-dire l'espace projectif $\mathbb{P}(V_i^*)$ des droites du dual V_i^* de V_i. Soit $(T_i, \mathbb{P}(V_i^*), p_i)$ le fibré projectif tautologique "point-hyperplans" défini par

$$T_i = \{(P, H) \in \mathbb{P}(V_i) \times \mathbb{P}(V_i^*) \, ; \, P \in H\}$$

où $p_i : T_i \to \mathbb{P}(V_i^*)$ est la projection naturelle. Le point $P \in \mathbb{P}(V_i)$ correspond à la classe $[s]$ (modulo les sections inversibles) d'une section globale s de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_i)}(1)$ et $P \in H$ signifie $H = \{s = 0\}$.

On note $(T, \mathbb{P}(V^*), p)$ le fibré produit d'espaces projectifs $T = T_1 \times \cdots \times T_k$ muni de la projection naturelle $p = (p_1, \ldots, p_k)$ sur sa base $\mathbb{P}(V_1^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$.

Pour $x \in X$, soit $\varepsilon_{ix} : V_i \to \mathbb{C}$ l'application linéaire évaluation en x qui à s associe $s(x)$. Si le fibré L_i est semi-ample, ses sections globales ne s'annulent simultanément en aucun point de x et l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi_i : X & \longrightarrow & \mathbb{P}(V_i^*) \\ x & \longmapsto & H = \operatorname{Ker} \varepsilon_{ix} \end{array}$$

est bien définie (mais n'est pas nécessairement un plongement, ni même une immersion). L'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) : X & \longrightarrow & \mathbb{P}(V_1^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*) \\ x & \longmapsto & (\operatorname{Ker} \varepsilon_{1x}, \ldots, \operatorname{Ker} \varepsilon_{kx}) \, , \end{array}$$

permet de définir sur X le fibré $\Phi^*(T)$ *via* :

$$\Phi^*(T)_x := T_{\Phi(x)} = \{(P_1, \ldots, P_k) \in \mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k) \, ; \, P_i \in \Phi_i(x)\} \, ,$$

soit encore

$$\Phi^*(T)_x = \{([s_1], \ldots, [s_k]) \in \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\Gamma(X, L_i));\ s_1(x) = \cdots = s_k(x) = 0\};$$

ainsi $\Phi^*(T)_x = p_X^{-1}(x)$ et le triplet (I_X, X, p_X) est le tiré en arrière par Φ du fibré projectif $(T, \mathbb{P}(V^*), p)$ ce qui montre (1) $\Rightarrow$ (2) (les dimensions sont claires). C'est un fait classique qu'un fibré projectif sur une variété lisse irréductible est lui aussi lisse irréductible. Il est intersection complète pour des raisons de dimension et la projection d'un produit de fibrés projectifs sur sa base est une submersion, d'où (2) $\Rightarrow$ (3). Puisque toutes les fibres ont même dimension, l'image réciproque d'un ouvert dense (pour la topologie usuelle) de X est dense dans I_X et la clôture de Zariski de $p_X^{-1}(\mathbb{T})$ coïncide avec la clôture au sens usuel d'où (3) $\Rightarrow$ (4).

(4) $\Rightarrow$ (1). Les fibres au-dessus de $\mathbb{T}$ sont isomorphes à

$$p_X^{-1}(x) \simeq \{([s'_1], \ldots, [s'_k]) \in \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\Gamma(X, L_i))\ ;\ s'_1(x) = \cdots = s'_k(x) = 0\}$$

où, si $L_i = L(E_i)$, le fibré L'_i est le fibré globalement engendré associé au diviseur E'_i (voir Lemme 2.1). Puisque (1) $\Rightarrow$ (4), la clôture de Zariski de $p_X^{-1}(\mathbb{T})$ est isomorphe à

$$\{(x, ([s'_1], \ldots, [s'_k])) \in X \times \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\Gamma(X, L'_i))\ ;\ s'_1(x) = \cdots = s'_k(x) = 0\}$$

et définit un fibré en produits d'hyperplans projectifs sur X. Si l'un des fibrés n'est pas globalement engendré, la fibre $p_X^{-1}(x)$ au-dessus d'un point $x \in X \setminus \mathbb{T}$ annule toutes ses sections ; la fibre correspondante est de codimension supérieure à k et ne peut être contenue dans la clôture de Zariski de $p_X^{-1}(\mathbb{T})$, ce qui montre **A**.

Assertion **B**. Si la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ n'est pas semi-ample, le point (1) n'est pas vérifié d'après l'assertion **A**. Si la famille est semi-ample mais n'est pas essentielle, la sous-variété C_a est génériquement vide d'après le Théorème 2.2, ce qui contredit le point (2). À l'inverse, si la famille est essentielle semi-ample, le point (1) est vérifié d'après l'asertion **A** et $\mathrm{Reg}(X^*)$ est un ouvert de Zariski d'après le Lemme 2.9. Il est clair que q_X est holomorphe, propre (car I_X est compacte) et surjective. L'application $q_X : q_X^{-1}(\mathrm{Reg}\,(X^*)) \to \mathrm{Reg}\,(X^*)$ a ses fibres lisses et définit donc une submersion. □.

2.2.3 Concavité et dualité dans une variété torique compacte

Définition 2.10 *Un ouvert $U \subset X$ est dit $(L_1, \ldots, L_k)$-concave si par chacun de ses points passe une sous-variété de type $(L_1, \ldots, L_k)$ incluse dans U. Si U est concave, on appelle l'ensemble*

$$U^* := \{a \in X^* \,;\, C_a \subset U\} \subset X^*$$

le $(L_1, \ldots, L_k)$-dual de U. On dira que U est un ouvert concave régulier si on a l'inclusion $U^* \subset \mathrm{Reg}\,(X^*)$.

La variété X est un ouvert concave pour toute famille de fibrés telle que $\dim |L_i| \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$. Il est clair qu'un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave contient l'intersection des points de base des fibrés L_i.

Définition 2.11 *Si U est $(L_1, \ldots, L_k)$-concave, on note*

$$I_U = \{(x, a) \in U \times U^* \,;\, x \in C_a \text{ et } C_a \subset U\},$$

l'ensemble d'incidence au-dessus de U et p_U et q_U les projections naturelles sur U et U^*.

Dans le cas semi-ample essentiel, on a la

Proposition 2.3 *Si la famille est semi-ample essentielle, le dual d'un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave $U \subset X$ est un ouvert non vide de X^* pour la topologie produit, réunion des ouverts $U' \subset X^*$ pour lesquels $U = p_X(q_X^{-1}(U'))$. Tout ouvert concave $U \subset X$ est de la forme*

$$U = p_X(q_X^{-1}(U'))$$

où $U' \subset X^*$ est un ouvert non vide.

Preuve. Montrons que U^* est ouvert dès que U est un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave de X. D'après le Théorème 2.4, p_X est une submersion et I_U est un ouvert de I_X si et seulement si pour tout $x \in U$, chacune des fibres $p_U^{-1}(x) = p_X^{-1}(x) \cap I_U$ est ouverte dans $p_X^{-1}(x)$. Soit $F = X \setminus U$ et

$$W_x = \{(z, a) \in F \times q_X(p_X^{-1}(x)) \,;\, z \in C_a\} \subset p_X^{-1}(x) \subset I_X;$$

l'ensemble $q_X(p_X^{-1}(x))$ est isomorphe à un produit d'hyperplans projectifs, donc fermé dans X^* ; la condition $z \in C_a$ étant une condition fermée, l'ensemble W_x est un fermé de $p_X^{-1}(x) \subset I_X$; chaque fibre $p_U^{-1}(x) = p_X^{-1}(x) \setminus W_x$ est donc ouverte dans $p_X^{-1}(x)$ et $I_U = p_U^{-1}(U)$ est un ouvert de $p_X^{-1}(U)$, donc de I_X. La projection $q_X : I_X \to X^*$ étant holomorphe, elle est ouverte et $U^* = q_X(I_U)$ est un ouvert de X^* pour la topologie produit. Le fait que U^* soit la réunion des ouverts non vides U' de X^* tels que $U = p_X(q_X^{-1}(U'))$ est une conséquence de la définition du dual.

À l'inverse, l'image réciproque de tout ouvert $U' \subset X^*$ par l'application continue q_X est un ouvert de I_U, dont l'image

$$U = \bigcup_{a \in U'} C_a = p_X(q_X^{-1}(U')) \subset X$$

par la submersion p_X est un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave de X. □

Dans le cas essentiel semi-ample, on a donc les propriétés de dualité

$$q_U(p_U^{-1}(U)) = U^*; \quad p_U(q_U^{-1}(U^*)) = U$$

pour tout ouvert concave $U \subset X$. L'application $p_U : I_U \to U$ est une submersion de l'ouvert I_U de la variété lisse I_X sur l'ouvert U de X. En vertu du Théorème 2.4, le morphisme $q_U : I_U \to U^*$ est une submersion au-dessus de l'ouvert $\mathrm{Reg}\,(U^*) = \mathrm{Reg}\,(X^*) \cap U^*$ (dense dans U^*). On note que si $a \mapsto C_a$ définit un isomorphisme $X^* \simeq \mathcal{C}_X(L_1, \ldots, L_k)$ (c'est le cas des situations “produit”, voir la Remarque 2.7), tous les ouverts non vides U' de X^* tels que $U = p_X(q_X^{-1}(U')$ coïncident avec U^*.

Lemme 2.10 *Si la famille est semi-ample essentielle, le dual d'un ouvert qui est $(L_1, \ldots, L_k)$-concave régulier, connexe, est aussi connexe. Si les fibres $q_X^{-1}(a) \simeq C_a$ sont connexes, la réciproque est vraie.*

Preuve. Soit U un ouvert concave régulier connexe : $U^* \subset \mathrm{Reg}\,(X^*)$. Comme I_U est un fibré en produits d'hyperplans projectifs au dessus de l'ouvert connexe U, I_U est connexe et son image $U^* = q_U(I_U)$ par l'application continue q_U l'est aussi.

Si maintenant U^* est connexe et $x \in U$, l'ensemble U_x^* des points $a \in U^*$ tels que x puisse être relié à un point de C_a par un chemin continu de U est ouvert dans U^*. En effet, si y_0 est un point de C_{a_0} reliable à x par un chemin continu de U, on peut utiliser le fait que C_{a_0} soit lisse en y_0 et le théorème des fonctions implicites pour construire un disque analytique $t \in D(0, \epsilon) \longmapsto y(t) \in C_{a_0+t}$ avec $y(0) = y_0$. Cet ensemble U_x^* est aussi fermé dans U^* : si une suite de points $(a_n)_n$ converge vers

a_0 et s'il existe sur chaque C_{a_n} un point y_n que l'on peut relier à x par un chemin continu de U, on peut supposer (par compacité de X) que la suite $(y_n)_n$ converge (dans X) vers un élément $y \in C_{a_0}$ que (toujours en utilisant la lissité de C_{a_0} en y et le théorème des fonctions implicites) l'on peut relier à x *via* y_N (pour N assez grand) par un chemin continu de U. Puisque U^* est supposé connexe, $U^*_x = U^*$ et, si $x_1, x_2 \in U$, on peut relier par un chemin continu de U le point x_1 à un point y d'une sous-variété lisse connexe $C_a \subset U$ passant par x_2, ce qui prouve la connexité de U. □

Définition 2.12 *Soit $V \subset U$ un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave $U \subset X$. On appelle l'ensemble*

$$V^* := q_U(p_U^{-1}(V)) \subset U^*$$

le $(L_1, \ldots, L_k)$-dual de V. On note

$$I_V := p_U^{-1}(V) = \{(x, a) \in V \times U^* \,;\, x \in C_a\}.$$

l'ensemble d'incidence associé à V, que l'on munit des projections naturelles p_V et q_V.

Explicitement, on a $V^* = \{a \in U^* \,;\, \ C_a \cap V \neq \emptyset\}$. On a la proposition fondamentale suivante :

Proposition 2.4 *Si $(L_1, \ldots, L_k)$ est une famille essentielle semi-ample et U un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave de X, alors :*

1. *Le dual V^* d'un sous-ensemble analytique fermé $V \subset U$ est un sous-ensemble analytique fermé de U^*, et, pour tout $a_0 \in V^*$*

$$\mathrm{codim}_{a_0} V^* = k - r + \min\{\dim(V \cap C_a)\,;\, a \in V^*\,, \text{voisin de } a_0\},$$

   où r est le maximum des dimensions des composantes irréductibles de V rencontrant C_{a_0}.

2. *Si V est irréductible et s'il existe $a \in \mathrm{Reg}\,(U^*)$ pour lequel l'intersection $V \cap C_a$ est propre, V^* est irréductible de codimension pure*

$$\mathrm{codim} V^* = \begin{cases} k - \dim V, & \text{si } \dim V < k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Dans le second cas, $V^* = U^*$ si U est connexe.

Preuve. 1. Puisque p_U est une submersion, I_V est un sous-ensemble analytique fermé de I_U de codimension $n - \dim(V)$, irréductible si et seulement si V l'est. La projection $q_V : I_V \to U^*$ est une application holomorphe, propre, d'image V^*. Par le théorème de l'application propre (voir par exemple [25], dont on s'inspire ici), V^* est un sous-ensemble analytique fermé de U^*, irréductible si I_V l'est. De plus, pour tout $a_0 \in V^*$, on a :

$$\dim_{a_0} V^* = \max\{\dim_{(x,a)} q_V\,;\,(x,a) \in I_V,\ a \in V^* \text{ voisin de } a_0\}$$

où $\dim_{(x,a)} q_V := \dim_{(x,a)} I_V - \dim_{(x,a)}(q_V^{-1}(a))$ est la codimension en (x,a) dans I_V de la fibre $q_V^{-1}(a)$. Puisque p_U est une submersion et $p_U(q_V^{-1}(a)) = V \cap C_a \subset U$, on a $\operatorname{codim}_{I_V,(x,a)} q_V^{-1}(a) = \operatorname{codim}_{U,x} V \cap C_a$.

Puisque la famille est semi-ample essentielle, la variété d'incidence I_U est intersection complète de codimension k dans $U \times U^*$. Si $U^*_{a_0}$ est un voisinage ouvert arbitrairement petit de a_0, l'ouvert concave correspondant U_{a_0} est inclus dans U et contient $C_{a_0} \cap V$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\max\{\dim_{(x,a)} I_V\,;\,(x,a) \in I_V\,,\, a \in V^* \cap U^*_{a_0}\} &= \dim I_U - (n - \dim(V \cap U_{a_0})\\
&= n + \dim X^* - k\\
&\qquad -(n - \dim(V \cap U_{a_0})\\
&= \dim(V \cap U_{a_0}) + \dim X^* - k\,.
\end{aligned}$$

En choisissant $U^*_{a_0}$ suffisamment petit, on a , compte tenu de la définition de r,

$$\max\{\dim_{(x,a)} I_V\,;\,(x,a) \in I_V\,,\, a \in V^* \cap U^*_{a_0}\} = r + \dim X^* - k$$

et par conséquent, du fait de la relation 5.3,

$$\dim_{a_0} V^* = r + \dim X^* - k - \min\{\dim(V \cap C_a)\,;\, a \text{ voisin de } a_0\}\,,$$

soit encore

$$\operatorname{codim}_{a_0} V^* = k - r + \min\{\dim(V \cap C_a)\,;\, a \text{ voisin de } a_0\}\,.$$

Ceci achève la preuve du point (1).

2. Puisque la famille est essentielle semi-ample, q_U est une submersion de l'ouvert dense $I_U^0 := q_U^{-1}(\operatorname{Reg}(U^*)) \subset I_U$ sur $\operatorname{Reg}(U^*)$. Par hypothèse, il existe $a_0 \in \operatorname{Reg}(U^*) \cap V^*$ tel que C_{a_0} intersecte proprement V. L'image de l'ouvert non vide $I_V \cap I_U^0 \subset I_V$ par q_U est donc une sous-variété irréductible de $\operatorname{Reg} U^*$ dont l'adhérence dans U^* coïncide avec V^* (qui est irréductible). D'autre part, puisque C_{a_0}, lisse, de dimension $n-k$ intersecte proprement V on a

$$\begin{aligned}
\dim(V \cap C_{a_0}) &= \dim V + \dim C_{a_0} - n \text{ si } \dim V \geq k\\
\dim(V \cap C_{a_0}) &= 0 \text{ si } \dim V < k\,.
\end{aligned}$$

D'après le point (1), on a donc

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_{a_0} V^* &= k - \dim V + \dim V + \dim C_{a_0} - n = 0 \text{ si } \dim V \geq k \\ \operatorname{codim}_{a_0} V^* &= k - \dim V \text{ si } \dim V < k\,.\end{aligned}$$

Puisque V^* est irréductible et a_0 générique, on a $\operatorname{codim} V^* = \operatorname{codim}_{a_0} V^*$. Si U est connexe, U^* l'est par le Lemme 2.10 et $V^* = U^*$ dès que $\operatorname{codim} V^* = 0$. □

Les ensembles analytiques duaux ont des structures en fibrés très particulières : si V est un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert concave $U \subset X$, son dual

$$V^* = \cup_{x\in V}\, q_U(p_U^{-1}(x))$$

est la réunion sur $x \in V$ des restrictions à U^* des produits d'hyperplans projectifs $q_X(p_X^{-1}(x)) = \mathbb{P}^{l_1-2} \times \cdots \times \mathbb{P}^{l_k-2} \subset X^*$ correspondant à l'ensemble des sections globales de $(L_1, \ldots, L_k)$ qui s'annulent simultanément en x.

2.2.4 Dégénérescence

On fixe $(L_1, \ldots, L_k)$ une famille essentielle semi-ample et U un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave connexe.

Définition 2.13 *Soit $V \subset U$ un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure. On dira que V est $(L_1, \ldots, L_k)$-dégénéré s'il contient une branche irréductible V_0 telle que*

$$\begin{cases}\dim V_0^* < \dim I_{V_0} \text{ si } \dim V \leq k \\ \dim V_0^* < \dim U^* \text{ si } \dim V > k.\end{cases}$$

Lemme 2.11 *Soit $V \subset U$ un sous-ensemble analytique irréductible fermé de dimension pure $r \leq k$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est non dégénéré ;*
2. $\operatorname{codim} V^* = k - \dim V$ *;*
3. *L'ensemble analytique*

   $$\Upsilon_{V^*} := \{a \in V^*\,;\, \dim(V \cap C_a) > 0\}$$

   vérifie $\dim \Upsilon_{V^*} \leq \dim V^* - 2$ *;*
4. *L'ensemble $\{a \in V^*\,;\, \dim(C_a \cap V) = 0\}$ est dense dans V^* ;*

5. *Il existe* $a \in \mathrm{Reg}\,(U^*)$ *tel que* $\dim(C_a \cap V) = \ 0.$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). On a $\dim I_V = \dim V + \dim U^* - k$. Puisque $\dim I_V \geq \dim V^*$, pour tout V, V non dégénéré équivaut à $\dim I_V = \dim V^*$, soit $\mathrm{codim} V^* = k - \dim V$,

(2) $\Rightarrow$ (3) On suppose V non dégénéré et $\dim \Upsilon_{V^*} \geq \dim V^* - 1$. On a alors

$$\dim q^{-1}_{U|I_V}(\Upsilon_{V^*}) = \dim(C_a \cap V) + \dim \Upsilon_{V^*} \geq 1 + \dim V^* - 1$$

pour $a \in \Upsilon_{V^*}$ générique. Or, $\dim V^* = \dim I_V$ par hypothèse et l'irréductibilité de V^* implique $V^* = \Upsilon_{V^*}$. On a alors $\min\{\dim(V \cap C_a)\,;\, a \in V^*\} \geq 1$ et par conséquent, en utilisant l'assertion (1) de la Proposition 2.4, $\mathrm{codim} V^* > k - \dim V$, soit encore $\dim\, V^* \ < \ \dim\, I_V$, ce qui est absurde.

(3) $\Rightarrow$ (4). On a $V^* = \{a \in U^*\,;\, \dim(V \cap C_a) \geq 0\}$ et cette implication est triviale.

(4) $\Rightarrow$ (5). Pour tout $x \in X$ (donc pour $x \in V$), l'ensemble des sous-variétés C_a intersections complètes lisses est dense dans le produit d'hyperplans projectifs $q_X(p_X^{-1}(x)) \subset X^*$, donc l'ouvert de V^* $q_U(p_U^{-1}(V) \cap \mathrm{Reg}(U^*)$ est dense dans V^* et rencontre $V^* \setminus \Upsilon_{V^*}$ sous l'hypothèse 4.

(5) $\Rightarrow$ (1). C'est une conséquence du point (2) de la Proposition 2.4. □

Lemme 2.12 *Soit* $V \subset U$ *un sous-ensemble analytique fermé irréductible de dimension pure* $r \geq k$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est non dégénéré ;*
2. $\mathrm{codim} V^* > 0$ *;*
3. *L'ensemble analytique*

$$\Upsilon_{V^*} := \{a \in V^*\,;\, \dim(V \cap C_a) > r - k\}$$

vérifie $\dim \Upsilon_{V^*} \ \leq \ \dim V^* - 2$ *;*

4. *L'ensemble* $\{a \in V^*\,;\, \dim(C_a \cap V) = r - k\}$ *est dense dans* U^* *;*
5. *Il existe* $a \in \mathrm{Reg}\,(U^*)$ *tel que* $\dim(C_a \cap V) = \ r - k.$

Preuve. La preuve est analogue à la preuve précédente. □

En particulier, la variété X est non dégénérée d'après le point (5), et l'ensemble

$$\Upsilon_{X^*} = \{a \in X^*\ ,\, \dim C_a > n - k\} \subset X^* \setminus \mathrm{Reg} X^*$$

est de codimension au moins deux dans X^*.

Définition 2.14 *Pour tout sous-ensemble analytique fermé $V \subset U$ de dimension pure k, on dira que l'intersection $V \cap C_a$ est transverse si elle est non vide et vérifie :*

1. $\mathrm{Sing}\,(V) \cap C_a = \emptyset$ *;*
2. *pour tout $x \in V \cap C_a$, on a les espaces tangents T_xV et T_xC_a sont complémentaires dans T_xX.*

On note alors

$$\mathrm{Reg}_V(U^*) = \{a \in \mathrm{Reg}(U^*)\,;\, V \cap C_a \text{ transverse}\}.$$

Lemme 2.13 *Si* $\dim V = k$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est non dégénéré ;*
2. $\mathrm{Reg}_V(U^*)$ *est non vide ;*
3. $\mathrm{Reg}_V(U^*)$ *est dense dans U^*.*

Preuve. L'implication (3) $\Rightarrow$ (2) est triviale. Si $a \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$, on a en particulier $\dim V \cap C_a = 0$ et l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) suit du lemme précédent. Montrons (1) $\Rightarrow$ (3). Puisque $\dim \mathrm{Sing}\,(V) < k$, on a $\dim(\mathrm{Sing}\,V)^* < \dim U^*$ d'après la Proposition 2.4. Puisque V est non dégénéré, $U^* = V^*$ puisque U est connexe (Lemme 2.10). L'intersection $V \cap C_a$ est génériquement finie, évite $\mathrm{Sing}(V)$, avec C_a lisse. Si la condition de transversalité n'était pas génériquement vérifiée, l'intersection $V \cap C_a$ serait génériquement impropre, contredisant l'assertion (4) du Lemme 2.11. □

En conséquence de ce lemme, on obtient la

Proposition 2.5 *Soit $V \subset X$ une sous-variété irréductible de dimension pure k de classe $[V] \in A_k(X)$.*

1. *On a l'équivalence*

$$V \text{ est } (L_1, \ldots, L_k) - \text{dégénéré} \iff [V] \in \mathrm{Ort}(L_1, \ldots, L_k).$$

2. *Si $V = V(\tau)$, $\tau \in \Sigma(n-k)$, on a l'équivalence*

$$V(\tau) \text{ est } (L_1, \ldots, L_k) - \text{dégénéré} \iff (P_1^\tau, \ldots, P_k^\tau) \text{ non essentielle}$$

3. *Pour tout ouvert concave $U \subset X$, on a*

$$\mathrm{Card}\,(V \cap C_a \cap U) = [V] \cdot \alpha(L_1, \ldots, L_k)$$

pour $a \in U^*$ générique et $[V] \notin \mathrm{Ort}\,(L_1, \ldots, L_k) \Rightarrow V \cap U \neq \emptyset$.

Preuve. Les points 1 et 2 sont conséquences du Corollaire 2.3 et du lemme précédent. Puisque U est concave, U^* est ouvert dans X^* pour la topologie produit et le cardinal générique $[V].\alpha(L_1, \ldots, L_k)$ de l'intersection $V \cap C_a$ est atteint pour $a \in U^*$ (auquel cas $C_a \cap V \cap U = C_a \cap V$), ce qui prouve le point 3. $\square$

L'isomorphisme $V \cap C_a \simeq q_V^{-1}(a)$ motive la

Proposition 2.6 *Soit V un sous-ensemble analytique fermé de U de dimension pure $r \leq k$, non $(L_1, \ldots, L_k)$-dégénéré.*

1. *Le morphisme*
$$q_V \;:\; q_V^{-1}(V^* \setminus \Upsilon_{V^*}) \longrightarrow V^* \setminus \Upsilon_{V^*}$$
est un revêtement de degré $N = [\mathbb{C}(I_V) : \mathbb{C}(V^*)]$.
2. *Si $r = k$, $V^* = U^*$ et ce revêtement est non ramifié au-dessus de*
$$\mathrm{Reg}_V\,(U^*) \subset \mathrm{Reg}\,(U^*) \setminus \Upsilon_{V^*}$$
de degré $\mathrm{Card}(V \cap C_a)$ *pour $a \in \mathrm{Reg}_V\,(U^*)$ quelconque.*
3. *Si la famille est très ample et $r < k$, le revêtement précédent est à un seul feuillet et les sous-variétés I_V et V^* sont biméromorphiquement équivalentes ; si de plus V est lisse, la projection $q_V : I_V \longrightarrow V^*$ réalise une désingularisation de V^*.*

Preuve. Le morphisme q_V est fini au-dessus de $V^* \setminus \Upsilon_{V^*}$, donc un revêtement de degré $N = [\mathbb{C}(q_V^{-1}(V^* \setminus \Upsilon_{V^*})) : \mathbb{C}(V^* \setminus \Upsilon_{V^*})]$. La codimension de Υ_{V^*} dans V^* étant au moins deux, on a $\mathbb{C}(V^*) = \mathbb{C}(V^* \setminus \Upsilon_{V^*})$ d'après le théorème de prolongement de Hartogs. Puisque q_U est une submersion propre au-dessus de $\mathrm{Reg}(U^*)$ (Théorème 2.4), la clôture analytique dans I_U du sous-ensemble analytique (ouvert) $q_U^{-1}(\Upsilon_{V^*} \cap \mathrm{Reg}(U^*))$ coïncide avec $q_U^{-1}(\Upsilon_{V^*}) \subset I_V$ de codimension dans I_V égale à la codimension de Υ_{V^*} dans V^*, donc au moins deux. Par conséquent $\mathbb{C}(I_V) = \mathbb{C}(q_U^{-1}(V^* \setminus \Upsilon_{V^*}))$ ce qui montre le point (1). Le point (2) est immédiat en vertu du Lemme 2.12 (le degré du revêtement est le cardinal d'une fibre générique). Si la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ est très ample, les sous-variétés de type $(L_1, \ldots, L_k)$ peuvent être infinitésimalement perturbées et l'intersection $V \cap C_a$, lorsqu'elle est non vide, est génériquement réduite à un point (on peut s'en convaincre en utilisant le plongement de Veronese associé au fibré $L = \otimes L_i$), auquel cas le degré du revêtement est 1 et les sous-variétés I_V et V^* sont biméromorphiquement équivalentes. Si V est lisse, la sous-variété I_V l'est et est en conséquent une désingularisation de V^*. $\square$

Remarque 2.8 Dans le cas d'un ensemble analytique V irréductible non dégénéré de dimension $r < k$ pour lequel $\dim V \cap C_a = 0$ pour $a \in V^*$ générique, on est tenté, pour des raisons de dimension, de penser que l'intersection $C_a \cap V$ est réduite à un point. Il n'en est rien, en général comme le montre l'exemple suivant. Soit $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ munie des coordonnées homogènes $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1], [z_0 : z_1])$. On considère la famille essentielle semi-ample $(L_1, L_2) = (L(2D_1), L(D_2))$, où les diviseurs D_1 et D_2 sont associés respectivement aux sous-variétés irréductibles $\{x_0 = 0\}$ et $\{y_0 = 0\}$. Il n'est pas difficile de voir qu'une sous variété générique C_a de type (L_1, L_2) s'écrit

$$C_a = (\{P_1(a)\} \times \{P(a)\} \times \mathbb{P}^1) \cup (\{P_2(a)\} \times \{P(a)\} \times \mathbb{P}^1)\,,$$

où les points $P_1(a)$ et $P_2(a)$ sont génériquement distincts et parcourent le premier facteur $\mathbb{P}^1$ tandis que $P(a)$ parcourt le deuxième facteur $\mathbb{P}^1$. L'intersection de C_a avec la sous-variété irréductible lisse de dimension 1 $V = \mathbb{P}^1 \times \{[0:1]\} \times \{[0:1]\}$ est génériquement vide ; ainsi, $\dim V^* = 1 = \dim I_V$ comme le stipule la proposition. Cependant, pour $a \in V^*$ générique, l'intersection

$$V \cap C_a = (\{P_1(a)\} \times \{[0:1]\} \times \{[0:1]\}) \cup (\{P_2(a)\} \times \{[0:1]\} \times \{[0:1]\})$$

est composée de deux points distincts et le revêtement $q_V \ : q_V^{-1}(V^* \setminus \Upsilon_{V^*}) \longrightarrow V^* \setminus \Upsilon_{V^*}$ est ici de degré 2.

Voici un exemple simple pour illustrer les différents résultats énoncés :

Exemple. Soit $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, muni des coordonnées homogènes $[x_0 : x_1], [y_0 : y_1], [z_0 : z_1]$. Soit $L(E)$ le fibré globalement engendré associé au $\mathbb{T}$-diviseur

$$E = \{x_0 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

On considère la "famille" essentielle semi-ample $\{L_1\}$ où $L_1 = L(E)^{\otimes 2} = L(2E)$. L'espace des paramètres correspondant est $X^* = \mathbb{P}^2$, muni des coordonnées homogènes $[a_0 : a_1 : a_2]$, avec

$$C_a = \{p \in X\,;\, a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_0 x_1 = 0\}\,.$$

Soit $V = \{x_0 = 0\}$. Alors $C_a \cap V = \emptyset$ si $a_1 \neq 0$ et $C_a \cap V = \{0\} \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sinon. Ainsi, $V^* = \{a_1 = 0\}$ et

$$\min\{\dim(V \cap C_a)\,;\, a \in V^* \text{ voisin de } [a_0 : 0 : a_2]\} = 2\,.$$

On retrouve bien, suivant la formule établie dans la Proposition 2.4

$$\mathrm{codim}_{[a_0:0:a_2]} V^* = 1 - 2 + 2 = 1.$$

Bien que $\dim V = 2 > k = 1$, l'intersection $V \cap C_a$ est pourtant ici génériquement vide, ce que traduit bien $\mathrm{codim}_{X^*} V^* > 0$. Il n'existe aucun a régulier pour lequel V et C_a se coupent transversalement et V est bien une variété L_1-dégénérée.

La différence majeure entre les familles essentielles semi-amples et les familles très amples réside dans le lemme suivant :

Lemme 2.14 *Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ une famille très ample de fibrés en droites sur X et U un ouvert concave. Aucune sous-variété fermée de U n'est dégénérée.*

Preuve. Par hypothèse, X se plonge dans le produit d'espaces projectifs

$$\mathbb{P}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_k} := \mathbb{P}(\Gamma(X, L_1)^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Gamma(X, L_k)^*)\,.$$

L'ouvert concave U est la trace sur X d'un produit d'ouverts non vides $U_1 \times \cdots \times U_k$, où U_i est $n-1$-concave dans $\mathbb{P}^{N_i}$, c'est-à-dire réunion d'hyperplans. La trace sur U_i de l'image de V dans $\mathbb{P}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_k}$ est un sous-ensemble analytique fermé de U_i. On est ramené au cas classique du produit d'espaces projectifs, cas où l'on voit immédiatement qu'aucune sous-variété fermée d'un produit d'ouverts $n-1$ concaves n'est dégénérée. □

Remarque 2.9 En vertu de la Proposition 2.6, la conjecture proposée dans la Remarque 2.3 de la Sous-section 2.1.2 sous-entend qu'il existe des familles de fibrés plus générales que les familles très amples pour lesquelles aucune variété k-dimensionnelle n'est dégénérée, ceci étant à rapprocher de la Remarque 2.5.

2.2.5 Cycles analytiques et traces de cycles

Soit X une variété analytique sur $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{C}(X)$ (resp. $\mathcal{C}_r(X)$) le *groupe des cycles de* X, groupe abélien libre engendré par les sous-ensembles analytiques fermés de X (resp. de dimension pure r). Un élément $V \in \mathcal{C}(X)$ s'appelle un cycle analytique. Il s'écrit de manière unique $V = \sum_{\text{finie}} n_i V_i$, où $n_i \in \mathbb{Z}$ et $V_i \subset X$ est un sous-ensemble analytique irréductible fermé.

Soit

$$\pi : X \to Y$$

un morphisme de variétés. Soit $V \subset X$ une sous-variété analytique fermée irréductible de X et $\overline{\pi(V)}$ la plus petite sous-variété analytique fermée de Y contenant $\pi(V)$. Si $\dim V \leq \dim \overline{\pi(V)}$, il y a égalité des dimensions (la dimension ne pouvant pas chuter) et le corps de fonctions $\mathbb{C}(V)$ est une extension algébrique finie de $\mathbb{C}(\pi(V))$ de degré $[\mathbb{C}(V) : \mathbb{C}(\pi(V))] \in \mathbb{N}$. On peut donc définir l'image directe (totale) $p_*(V)$ du cycle V par π de la manière suivante :

$$p_*(V) = \begin{cases} 0 \in \mathcal{C}(Y) \text{ si} \dim V > \dim \overline{\pi(V)}, \\ [\mathbb{C}(V) : \mathbb{C}(\pi(V))]\ \overline{\pi(V)} \in \mathcal{C}(Y) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette application s'étend par linéarité en un morphisme de groupe

$$p_* : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$$

que l'on appelle l'*image directe*.

Soient maintenant X une variété torique compacte lisse, $(L_1, \ldots, L_k)$ une famille essentielle semi-ample, $U \subset X$ un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave et $X^* = X^*(L_1, \ldots, L_k)$ le dual de X. Si $V \subset U$ est un sous-ensemble analytique fermé de U, on rappelle la notation $I_V := p_U^{-1}(V)$. L'application p_U^{-1} s'étend naturellement en un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} p_U^* : \mathcal{C}(U) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I_U) \\ V = \sum n_i V_i & \longmapsto & I_V := \sum n_i I_{V_i}. \end{array}$$

Définition 2.15 *On appelle morphisme trace associé à $(L_1, \ldots, L_k)$ l'application $\mathbb{Z}$-linéaire :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{TR}_U : \mathcal{C}(U) & \longrightarrow & \mathcal{C}(U^*) \\ V & \longmapsto & q_{U*}(p_U^*(V)); \end{array}$$

l'image d'un cycle $V \in \mathcal{C}(U)$ s'appelle sa trace (relativement à $(L_1, \ldots, L_k)$). Si $V = \sum n_i V_i \in \mathcal{C}_k(U)$, on appelle l'entier

$$\deg_U V := \sum n_i [\mathbb{C}(I_{V_i}) : \mathbb{C}(V_i^*)]$$

le $(L_1, \ldots, L_k)$-degré de V.

2.2.6 Le cas des germes

On note $\mathcal{C}(X; x)$ le groupe des cycles de germes d'ensembles analytiques en x. Pour tout $a \in \mathrm{Reg}\,(X^*)$, on définit :

$$\mathcal{C}(X\,;\, C_a) := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ a \in U'}} \mathcal{C}(p_X(q_X^{-1}(U'))) \,.$$

C'est précisément l'ensemble des collections finies de cycles de germes d'ensembles analytiques le long de C_a. Tout élément $v \in \mathcal{C}(X\,;\, C_{a_0})$ se décompose de manière unique sous la forme

$$v = \sum_{P \in C_a} (\sum_i n_{P,i} v_{P,i}) \;\; n_{P,i} \in \mathbb{Z}$$

où les sommes sont finies, $v_{P,i} \in \mathcal{C}(X;P)$ est irréductible et $v_{P,i} \neq v_{P,j}$ pour $i \neq j$. On note $\mathcal{C}^0(X\,;\,C_a)$ le sous-groupe engendré par les germes irréductibles intersectant proprement C_a, $\mathcal{C}_r(X\,;\,C_a)$ le sous-groupe des r-cycles de germes le long de C_a (la dimension est supposée pure) et $\mathcal{C}^0_r(X\,;\,C_a)$ leur intersection.

Soit $v = \sum v_i \in \mathcal{C}^0_r(X\,;\,C_a)$ et (V_i, U_i) un représentant de v_i ; puisque V_i intersecte proprement C_a, il existe un ouvert concave régulier U contenant C_a ($i.e$ $a \in U^*$) tel que $(V_i, U_i \cap U)$ soit un représentant de v_i. Notamment, le sous-ensemble analytique $V_i \cap U \subset U$ est fermé pour tout i. On appelle le couple (V,U) un représentant concave de v.

On définit alors

$$\mathrm{TR}_a(v) := \bigoplus_i \lim_{\substack{\rightarrow \\ a \in U'}} \mathrm{TR}_{p_X(q_X^{-1}(U'))}(V_i)$$

On a ainsi construit un morphisme de groupe

$$\mathrm{TR}_a : \mathcal{C}^0(X\,;\,C_a) \longrightarrow \mathcal{C}(X^*\,;\,a)$$

que l'on prolonge (par 0) en un morphisme entre $\mathcal{C}(X\,;\,C_a)$ et le groupe $\mathcal{C}(X^*\,;\,a)$ des germes de cycles analytiques au point a. On utilise ici bien sûr fortement que la famille $(L_1,\ldots,L_k)$ est essentielle semi-ample.

Définition 2.16 *Soit $v \in \mathcal{C}_k(X\,;\,C_{a_0})$; l'entier $\deg_U(V)$ ne dépend pas du représentant concave (V,U) de v ; on l'appelle degré de v (relatif à $(L_1,\ldots,L_k)$) et on le note $\deg_a(v)$.*

On obtient ainsi une application $\mathbb{Z}$-linéaire

$$\deg_a : \mathcal{C}_k(X\,;\,C_a) \longrightarrow \mathbb{Z}\,,$$

que l'on prolonge par 0 en un morphisme de $\mathcal{C}(X\,;\,C_a)$ dans $\mathbb{Z}$.

Lemme 2.15 *Soit $a_0 \in \mathrm{Reg}(X^*)$, $v = \sum_{P\in C_{a_0}}(\sum_i n_{P,i}v_{P,i}) \in \mathcal{C}^0_k(X\,;\,C_{a_0})$ un cycle d'intersection propre avec C_{a_0} et (U,V) (resp. $(U,V_{P,i})$) un représentant concave de v (resp. $v_{P,i}$). On a l'égalité*

$$\deg_{a_0}(v) = \sum_{P\in C_{a_0}} \sum_i n_{P,i}[\mathcal{O}_{(P,a_0),I_{V_{P,i}}} : \mathcal{O}_{a_0,X^*}]$$

où $I_{V_{P,i}} := p_U^{-1}(V_{P,i})$*, avec de plus*

$$[\mathcal{O}_{(P,a_0),I_{V_{P,i}}} : \mathcal{O}_{a_0,X^*}] = \sup\{\mathrm{Card}\,(V_{P,i} \cap C_a)\,;\, a \text{ voisin de } a_0\}\,.$$

Preuve. Il suffit par linéarité de montrer ce lemme pour v irréductible, d'intersection propre avec C_{a_0}. On a $[\mathcal{O}_{(P,a_0),I_V} : \mathcal{O}_{a_0,X^*}] = [\mathbb{C}(I_V) : \mathbb{C}(U^*)]$. Le représentant (U,V) de v n'est pas dégénéré en vertu du Lemme 2.11 et on conclut grâce au Lemme 2.15 et à la Proposition 2.4. □

2.2.7 Cas algébrique : lien avec les résultants

Lemme 2.16 *Le morphisme* $\mathrm{TR}_X = \mathrm{TR}$ *est identiquement nul sur l'ensemble des sous-variétés irréductibles* $(L_1,\dots,L_k)$*-dégénérées. Si* V *est irréductible non dégénérée, on a :*

1. $\mathrm{TR}\,(V) = 0$ *si* $\dim V > k$ *;*
2. $\mathrm{TR}\,(V) = [V].\alpha(L_1,\dots,L_k)\cdot X^* = \deg_X(V).X^*$ *si* $\dim V = k$ *;*
3. $\mathrm{TR}\,(V) = [\mathbb{C}(I_V) : \mathbb{C}(V^*)]\cdot V^*$ *si* $\dim V < k$.

Preuve. C'est immédiat en vertu de la section précédente. □

Proposition 2.7 *Soit* $l = \dim X^*$*. Si la famille* $(L_1,\dots,L_k)$ *est semi-ample essentielle, le morphisme* TR *induit un morphisme de groupes gradués*

$$\mathrm{TR} : A_j(X) \longrightarrow A_{l-k+j}(X^*),$$

pour tout $j = 0,\dots,k$.

Preuve. Si la famille $(L_1,\dots,L_k)$ est semi-ample essentielle, l'application $p_X : I_X \to X$ est une submersion (Théorème 2.4). La proposition est une conséquence immédiate des théorèmes 1.4 et 1.7 de [21]. □

Pour toute famille $(L_0, L_{k+1},\dots,L_n)$ de fibrés globalement engendrés sur X, le résultant mixte [22] $\mathcal{R}_{(L_0,L_1,\dots,L_n)}$ est un polynôme multihomogène sur le produit d'espaces projectifs

$$\mathbb{P}(\Gamma(X,L_0)) \times \mathbb{P}(\Gamma(X,L_{k+1})) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Gamma(X,L_n)) \times X^*.$$

Soit $V = \{F_{k+1} = \cdots = F_n = 0\}$ une intersection complète de type $(L_{k+1}, \ldots, L_n)$ et $H = \{F_0 = 0\} \in |L_0|$ une hypersurface d'intersection propre avec V. Si $V \cap H$ est dégénérée, son dual $(V \cap H)^*$ est de codimension strictement supérieure à 1 (Lemme 2.11). On définit donc naturellement le polynôme multihomogène sur X^*,

$$\mathcal{R}_{V,H} : a \mapsto \begin{cases} \mathcal{R}_{(L_0,\ldots,L_n)}(F_0, a_1, \ldots, a_k, F_{k+1}, \ldots, F_n) \text{ si } V \cap H \text{ non dégénéré} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque 2.10 Le volume mixte $\mathrm{MV}_n\,(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_{n+1})$ est nul si et seulement si la famille $(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots P_{n+1})$ n'est pas essentielle. Si, c'est le cas pour tout $i = 1, \ldots, k$, le résultant ne dépend pas de a_i et il n'existe aucune sous-variété non $(L_1, \ldots, L_k)$-dégénérée de type $(L_0, L_{k+1}, \ldots, L_n)$.

De la même manière, pour tout $\rho \in \Sigma(1)$, on note $\mathcal{R}_V^\rho$ le résultant de face $\mathcal{R}^\rho$ associé aux fibrés $(L_1, \ldots, L_n)$, évalué en les coefficients des polynômes $F_{k+1}, \ldots, F_n$ définissant V (en lui-donnant la valeur 1 si $V \cap D_\rho$ est $(L_1^\rho, \ldots, L_k^\rho)$-dégénéré). La proposition suivante résume les résultats classiques sur la théorie des résultants mixtes (voir les rappels de la Section 1.5) qui s'appliquent directement aux polynômes $\mathcal{R}_{V,H}$ et $\mathcal{R}_V^\rho$.

Proposition 2.8 *On note P_i les polytopes des fibrés L_i, $i = 0, \ldots, n$. Le polynôme $R_{V,H}$ est multihomogène en les variables $(a_1, \ldots, a_k)$, de degré partiel*

$$N_i := \deg_{a_i} \mathcal{R}_{V,H} = \mathrm{MV}_n\,(P_0, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n) \quad i = 1, \ldots, k.$$

Le polynôme $\mathcal{R}_V^\rho$ est multihomogène de degré partiel

$$N_{i,\rho} := \deg_{a_i} \mathcal{R}_V^\rho = \mathrm{MV}_{n-1}(P_1^\rho, \ldots, P_{i-1}^\rho, P_{i+1}^\rho, \ldots, P_n^\rho).$$

Ces résultants sont liés par la formule du produit. On suppose $L_0 = L(D)$, où D est le $\mathbb{T}$-diviseur effectif

$$D = \sum_{\rho \in \sigma(1)} k_\rho D_\rho.$$

Le polynôme F_0 est le P_0-homogénéïsé d'un polynôme de Laurent f_0 supporté par P_0. Pour a générique, le produit $\prod_{P(a) \in V \cap C_a} f_0(P(a))$ est une fonction rationnelle sur X^* et on a

$$\mathcal{R}_{V,H} = \Big(\prod_{P(a) \in V \cap C_a} f_0(P(a)) \Big) \times \mathcal{R}_{V,D}$$

où

$$\mathcal{R}_{V,D} := \prod_{\rho\in\sigma(1)} [\mathcal{R}_V^\rho]^{k_\rho}.$$

On a en particulier la relation $N_i = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} k_\rho N_{i,\rho}$*, pour tout* $i = 1, \ldots, k$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de résultats classiques de la théorie des résultants mixtes (voir rappels Section 1.5 et [22, 37]). □

On suppose la variété X projective et la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ très ample. Dans ce cas, on a la

Proposition 2.9 *Tout* $\mathbb{T}$*-diviseur* $D = \sum k_\rho D_\rho \in \mathrm{Div}(X)$ *dont le support intersecte* V *proprement définit un diviseur* $V \cdot D$ *sur* V *et on a l'égalité*

$$\mathrm{TR}\,(V \cdot D) = (V \cdot D)^* = \{\mathcal{R}_{V,D} = 0\}$$

où $\mathcal{R}_{V,D} := \prod_{\rho\in\sigma(1)} [\mathcal{R}_V^\rho]^{k_\rho}$.

Preuve. On peut toujours supposer que D est effectif. L'égalité $\mathrm{TR}\,(V.D) = (V\cdot D)^*$ est immédiate en vertu de la Proposition 2.6. Puisque les fibrés $L_{k+1}, \ldots, L_n$ sont supposés globalement engendrés, le cycle $V\cdot D$ est effectif et son dual $\mathrm{TR}\,(V\cdot D)$ l'est aussi. Du fait que X^* est un produit d'espaces projectifs, il existe donc un polynôme multihomogène R tel que

$$\mathrm{TR}\,(V \cdot D) = \mathrm{div}_0(R)$$

Par définition du résultant, les supports des diviseurs $\mathrm{TR}\,(V \cdot D)$ et $\{\mathcal{R}_{V,D} = 0\}$ coïncident, et il suffit de montrer l'égalité des degrés

$$\deg_{a_i} R = \deg_{a_i} \mathcal{R}_{V,D} \qquad \forall i = 1, \ldots, k\,.$$

Les classes des clôtures des orbites $k-1$-dimensionnelles de X engendrent $A_{k-1}(X)$, et on a

$$[V \cdot D] = \sum_{\tau\in\Sigma(k-1)} \nu_\tau [V(\tau)]$$

où $\nu_\tau \in \mathbb{Z}$. Les restrictions L_i^τ, $i = 1, \ldots, k$ des fibrés L_i à la variété torique $X_\tau \simeq V(\tau)$ restent très amples et le résultant

$$\mathcal{R}^\tau = \mathcal{R}^{X_\tau}_{(L_1^\tau, \ldots, L_k^\tau)}$$

est un polynôme irréductible (Section 1.5, ici intervient le fait que les fibrés soient très amples) qui s'annule en a si et seulement si $V(\tau) \cap C_a \neq \emptyset$. Puisque $V(\tau)$ est irréductible, son dual $(V(\tau))^* = \mathrm{TR}\,(V(\tau))$ l'est (Proposition 2.4), d'où l'égalité de diviseurs :

$$\mathrm{TR}\,(V(\tau)) = \mathrm{div}_0(\mathcal{R}^\tau).$$

D'aprés la proposition précédente, $\mathcal{R}^\tau$ est multihomogène de degré partiel

$$\deg_{a_{i,\tau}} \mathcal{R}^\tau \quad = \quad \mathrm{MV}_{n-\dim\tau}(P_1^{(\tau)}, \ldots, P_{i-1}^{(\tau)}, P_{i+1}^{(\tau)}, \ldots, P_k^{(\tau)})$$

Puisque les fibrés L_i sont très amples, cet entier représente le cardinal de $V(\tau)$ avec une sous-variété générique de type $(L_1, \cdots L_{i-1}, L_{i+1} \cdots L_k)$ et on a

$$\deg_{a_{i,\tau}} \mathcal{R}^\tau = [V(\tau)].\alpha(L_1, \cdots L_{i-1}, L_{i+1} \cdots L_k)$$

(Définition 2.5). Par linéarité, on en déduit

$$\mathrm{TR}\Big(\sum_{\tau\in\Sigma(k-1)} \nu_\tau [V(\tau)]\Big) = \mathrm{div}_0(R'), \ \text{ avec } \ R' = \prod_{\tau\in\Sigma(k-1)} [\mathcal{R}^\tau]^{\nu_\tau},$$

polynôme multihomogène de degré partiel

$$\begin{aligned} \deg_{a_i} R' \quad &= \quad \sum_{\tau\in\Sigma(k-1)} \nu_\tau [V(\tau)].\alpha(L_1, \cdots L_{i-1}, L_{i+1} \cdots L_k) \\ &= \quad [V.D].\alpha(L_1, \cdots L_{i-1}, L_{i+1} \cdots L_k) \\ &= \quad \deg_{a_i} \mathcal{R}_{V,D}\,. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.7, la classe de $\mathrm{TR}\,(V\cdot D)$ dans $A_{l-1}(X^*)$ ne dépend que de la classe de $V\cdot D$ dans $A_{k-1}(X)$, d'où l'égalité

$$\deg_{a_i} R = \deg_{a_i} R' = \deg_{a_i} \mathcal{R}_{V,D}$$

ce qui montre la proposition. □

Corollaire 2.4 *Pour tout $H \in |L(D)|$, on a sous les mêmes hypothèses l'égalité*

$$\mathrm{TR}\,(V\cdot H) = \mathrm{div}_0(\mathcal{R}_{V,H})$$

Preuve. Puisque $[H] = [D]$, les diviseurs $\mathrm{TR}\,(V\cdot H)$ et $\mathrm{TR}\,(V\cdot D)$ sont rationnellement équivalents. Les polynômes $\mathcal{R}_{V,H}$ et $\mathcal{R}_{V,D}$ ayant le même multidegré, on a forcément $\mathrm{TR}\,(V\cdot H) = \mathrm{div}_0(\mathcal{R}_{V,H})$ puisque ces deux diviseurs sont effectifs et ont même support. □

Remarque 2.11 Les résultants de faces $\mathcal{R}^\rho$ (donc $\mathcal{R}_V^\rho$) peuvent être généralisés au cas essentiel semi-ample de la manière suivante [7] : on peut définir, *via* la variété torique D_ρ, le résultant mixte $\mathcal{R}_{(L_1^\rho,\dots,L_n^\rho)}$ associé à la famille de fibrés semi-amples **sur** D_ρ. Soit $\mathrm{Aff}_{i,\rho}$ le réseau affine engendré par $P_i^\rho \cap \mathbb{Z}^n$. Puisque la famille $(L_1,\dots,L_n)$ est essentielle, on a

$$\dim\left(\mathrm{Aff}_{1,\rho}+\cdots+\mathrm{Aff}_{n,\rho}\right)=n-1$$

et $\mathrm{Aff}_{1,\rho}+\cdots+\mathrm{Aff}_{n,\rho}$ est un sous-réseau du réseau affine Aff_ρ engendré par $(P_1+\cdots+P_n)^\rho \cap \mathbb{Z}^n$, d'indice disons l_ρ. Le résultant de face associé à ρ de la famille essentielle semi-ample $(L_1,\dots,L_n)$ est alors défini par

$$\mathcal{R}^\rho=\left(\mathcal{R}_{(L_1^\rho,\dots,L_n^\rho)}\right)^{l_\rho}.$$

La formule du produit est encore valable ainsi que la formule reliant les degrés partiels des résultants de faces en terme des volumes mixtes. Il est probable que l'indice l_ρ soit intimement lié au $(L_1,\dots,L_k)$-degré des diviseurs sur V.

Chapitre 3

La trace torique

3.1 La transformée d'Abel torique

Dans toute cette section, $(L_1, \ldots, L_k)$ est une famille essentielle de fibrés en droites globalement engendrés sur une variété torique lisse compacte X, de polytopes $P_1, \ldots, P_k$ et $X^* = X^*(L_1, \ldots, L_k)$ est la variété duale. Soit U un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave connexe de X, U^* son dual et I_U la variété d'incidence au-dessus de U. On note $\mathcal{E}_r(U)$ l'ensemble des sous-ensembles analytiques fermés de dimension pure r de U. On garde les notations de la première partie.

3.1.1 Définition

Soit $r \geq k$ et $V \in \mathcal{E}_r(U)$. Pour toute q-forme $\Phi \in M^q(V)$, on note W_Φ le support du courant

$$\bar{\partial}(\Phi \wedge [V]),$$

sous-ensemble analytique fermé de U inclus dans l'intersection $V \cap \mathrm{pol}\,(\Phi)$ du lieu polaire de Φ (vue comme forme méromorphe au voisinage de V) avec V. Si le courant $\Phi \wedge [V]$ est $\bar{\partial}$-fermé en dehors d'un sous-ensemble analytique de V de codimension au moins deux (dans V), il est $\bar{\partial}$-fermé sur U par le théorème d'Hartogs. Ainsi, W_Φ est vide si $\Phi \in \omega_V^q$ et W_Φ est un sous-ensemble analytique de U de dimension exactement $\dim V + 1$ sinon.

On peut définir en dehors de $p_U^{-1}(W_\Phi)$ le *pull-back* de $[V] \wedge \Phi$ par p_U *via*

$$(p_U^*([V] \wedge \Phi))_{|I_U \setminus p_U^{-1}(W_\Phi)} := [p_U^{-1}(V \setminus W_\Phi)] \wedge p_U^* \Phi.$$

Les ensembles $p_U^{-1}(V)$ et $p_U^{-1}(\mathrm{pol}\,(\Phi))$ sont des sous-ensembles analytiques fermés dans l'ouvert d'incidence dont l'intersection $p_U^{-1}(W_\Phi)$ est propre. Ainsi, la forme $p_U^*\Phi$ définit une forme méromorphe sur la variété $p_U^{-1}(V)$ et le courant précédent admet un unique prolongement à l'ouvert d'incidence I_U en un courant $p_U^*([V]\wedge\Phi)$, de bidegré $(n-r+q, n-r)$ supporté par $p_U^{-1}(V)$.

L'application holomorphe q_U est propre et permet de définir l'image directe sur le dual $U^* = q_U(I_U)$ de tout courant T défini sur I_U par la relation de transport :

$$\langle q_{U*}T, \theta\rangle := \langle T, q_U^*\theta\rangle$$

en en conservant le type.

Définition 3.1 *On appelle la transformée d'Abel de $[V]\wedge\Phi$ relativement aux fibrés $(L_1, \ldots, L_k)$, le courant sur U^**

$$q_{U*}(p_U^*([V]\wedge\Phi)).$$

On le note $\mathcal{A}([V]\wedge\Phi)$.

Lemme 3.1 *On a les trois propriétés suivantes :*

1. *le courant $\mathcal{A}([V]\wedge\Phi)$ est un courant de bidegré $(k+q-r, k-r)$, supporté par l'ensemble $V^* = q_U(p_U^{-1}(V))$, sous-ensemble analytique fermé de U^* de codimension au moins $k-r$ ($V^* = U^*$ si $k \le r$) ;*
2. *les opérateurs $d, \partial, \bar\partial$ commutent avec p_U^* et q_{U*} ; en particulier, on a :*
$$\mathcal{A}(\bar\partial([V]\wedge\Phi)) = \bar\partial(\mathcal{A}([V]\wedge\Phi)).$$
3. *soit $V = \bigcup_{i=1}^l V_i$ la décomposition en composantes irréductibles d'un élément $V \in \mathcal{E}_r(U)$; alors pour toute q-forme $\Phi \in M^q(V)$, on a :*
$$\mathcal{A}(\Phi\wedge[V]) = \sum_{i=1}^{l}\mathcal{A}(\Phi\wedge[V_i]).$$

Preuve. -1. Le courant $p_U^*([V]\wedge\Phi)$ est supporté par $p_U^{-1}(V)$. Son image directe par q_U est un courant supporté par $q_U(p_U^{-1}(V)) = V^*$. Puisque l'image directe conserve le type, le courant $\mathcal{A}([V]\wedge\Phi)$ est de type $(\mathrm{dim} I_U - (n+q-r), \mathrm{dim} I_U - (n+q-r))$, soit de bidegré $(k+q-r, k-r)$.

-2. C'est une propriété classique des applications images directes et image réciproque associées à des applications holomorphes.

-3. Le courant d'intégration $[V]$ est égal à la somme des courants d'intégration $[V_i]$. Ainsi, $\Phi\wedge[V] = \sum_{i=1}^r \Phi\wedge[V_i]$ et par conséquent $\mathcal{A}(\Phi\wedge[V]) = \sum_{i=1}^r \mathcal{A}(\Phi\wedge[V_i])$. $\square$

3.1.2 Théorème d'Abel généralisé

On s'intéresse au cas limite $r = k$.

Définition 3.2 *Si* $V \in \mathcal{E}_k(U)$ *et* $\Phi \in M^q(V)$ *; le courant* $\mathcal{A}([V] \wedge \Phi)$ *est un* $(q,0)$*-courant sur* U^**, supporté par* V^* *que l'on appelle trace de* Φ *sur* V *relativement à* $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$*. On le note*

$$\mathrm{Tr}_V \Phi := \mathrm{Tr}_{V,L_1,\ldots,L_k} \Phi = q_{U^*}(p_U^*([V] \wedge \Phi)).$$

Si V n'est pas dégénéré, il existe $a_0 \in \mathrm{Reg}\,(X^*)$ tel que, pour a voisin de a_0 la sous-variété lisse C_a coupe V transversalement en N points $\{p_1(a), \ldots, p_N(a)\}$ n'appartenant pas à W_Φ (*i.e.* $a \in \mathrm{Reg}_V(X^*) \setminus W_\Phi^*$). Par le théorème des fonctions implicites, chaque point $p_i(a)$ dépend holomorphiquement de a et définit une application analytique d'un voisinage de a_0 dans un voisinage de $(p_i(a_0), a_0) \in I_V \subset I_U$. Comme dans le cas projectif, on a l'égalité

$$\mathrm{Tr}_V \Phi = \sum_{i=1}^{N} p_i(a)^*(\Phi)$$

au voisinage de a_0. Si Φ est une fonction, sa transformée d'Abel sur V en a est la somme de ses valeurs en les points d'intersection de V avec C_a (comptés avec multiplicités), ce qui motive la terminologie de trace. On verra que cette terminologie est particulièrement bien choisie puisqu'elle correspond avec la trace d'une matrice associée à la fonction Φ.

Proposition 3.1 (Théorème d'Abel) *On a les implications suivantes :*

$$\begin{aligned} \Phi \in M^q(V) &\implies \mathrm{Tr}_V \Phi \in M^q(U^*); \\ \Phi \in \omega_V^q &\implies \mathrm{Tr}_V \Phi \in \Omega^q(U^*). \end{aligned}$$

Preuve. D'après les propriétés 1 et 2 énoncées au Lemme 3.1, la trace de Φ sur V est un $(q,0)$-courant $\bar\partial$-fermé en dehors de W_Φ^*. Ce dernier ensemble est un sous-ensemble analytique fermé de U^* de codimension au moins $\dim V - \dim W_\Phi$, supérieure ou égale à 1 si $\Phi \in M^q(V)$. Par l'hypoellepticité de l'opérateur $\bar\partial$, le $(q,0)$-courant $\mathrm{Tr}_V \Phi$ coïncide donc avec une q-forme méromorphe sur U^*.

Si $\Phi \in \omega_V^q$, la trace $\mathrm{Tr}_V \Phi$ est une $(q,0)$-forme méromorphe $\bar\partial$-fermée sur l'ouvert U^*, donc holomorphe. □

Corollaire 3.1 *Si V est un sous-ensemble algébrique de X, la transformée d'Abel d'une $(q,0)$-forme rationnelle sur V est une $(q,0)$-forme rationnelle sur le produit d'espaces projectifs $X^* = \mathbb{P}^{l_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{l_k}$. La transformée d'Abel d'une forme abélienne sur V est identiquement nulle, ou constante si $q = 0$.*

Preuve. On pose $U = X$ et le corollaire est une conséquence du principe GAGA, appliqué dans le produit d'espaces projectifs $X^* = \mathbb{P}^{l_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{l_k}$. □

Le lemme suivant montre que seules les branches irréductibles non dégénérées de V apportent une contribution à la trace :

Lemme 3.2 *Si $V \in \mathcal{E}_k(U)$ est irréductible et $(L_1, \ldots, L_k)$-dégénérée, l'application Tr_V est identiquement nulle sur $M^q(V)$, ce pour tout $q \leq k$.*

Preuve. Si $\Phi \in M^q(V)$, la forme $\mathrm{Tr}_V\Phi$ est méromorphe sur U^*, nulle sur $U^* \setminus V^*$ d'après la propriété 1 du Lemme 3.1. Si V est irréductible et dégénéré, le "dual" V^* est par définition de codimension au moins 1 dans U^* et $\mathrm{Tr}_V\Phi$ est identiquement nulle par unicité du prolongement analytique (et ce quel que soit q). □

3.1.3 Lieu polaire de la trace

Lemme 3.3 *Soit $V \in \mathcal{E}_k(U)$, non dégénéré et $\Phi \in M^q(V)$. Le lieu polaire de la forme méromorphe $\mathrm{Tr}_V\Phi$, support du courant résiduel*

$$\bar{\partial}(\mathrm{Tr}_V\Phi) = \mathrm{Tr}_V(\bar{\partial}\Phi),$$

coïncide avec le sous-ensemble analytique fermé $W_\Phi^* \subset U^*$.

Preuve. Une forme méromorphe $\Psi \in M^q(U^*)$ a un pôle fictif en a si et seulement si le courant résiduel $\bar{\partial}(\Psi) = 0$ est nul en a. La transformée d'Abel commute avec l'opérateur différentiel $\bar{\partial}$ et on a (d'après le Lemme 3.1, assertion 2) :

$$\mathcal{A}(\bar{\partial}(\Phi \wedge [V])) = \bar{\partial}[\mathcal{A}(\Phi \wedge [V])] = \bar{\partial}(\mathrm{Tr}_V\Phi);$$

ce courant a pour support le sous-ensemble analytique fermé $q_U(p_U^{-1}(W_\Phi))$, d'où l'égalité $\mathrm{Supp}\,[\bar{\partial}(\mathrm{Tr}_V\Phi)] = W_\Phi^*$. □

Au vu de la remarque en fin de Sous-section 2.2.3, ce lemme donne une condition sur la structure du lieu polaire d'une q-forme méromorphe Ψ de U^* pour qu'il existe $V \in \mathcal{E}_k(U)$ et $\Phi \in M^q(V)$ tels que $\Psi = \mathrm{Tr}_V(\Phi)$.

On suppose que W^*_Φ est de codimension 1 dans U^*. Soit $a_0 \in W^*_\Phi$. On note $\mathcal{R}_{V,\Phi,a_0} \in \mathcal{O}_{X^*,a_0}$ le germe holomorphe en a_0 (ou $\mathcal{R}_{V,\Phi} \in \mathcal{O}_{X^*}(U^*)$ dans le cas global) donnant l'équation (les multiplicités étant prises en compte) du lieu polaire de la trace de Φ sur V au voisinage de $a_0 \in W^*_\Phi$. Cette fonction, définie à un inversible prés, engendre l'idéal principal

$$\mathcal{I}_{a_0,V,\Phi} := \{h \in \mathcal{O}_{X^*,a_0}\,;\ \ (h\bar{\partial}(\mathrm{Tr}_V\Phi)) \equiv 0 \text{ en } a_0\}.$$

Pour tout cône maximal $\sigma \in \Sigma(n)$, on note $H_\sigma := X \setminus U_\sigma$. C'est l'hypersurface à "l'infini", vue de l'origine $(0,\ldots,0)$ de la carte affine U_σ correspondant au point fixe $x_\sigma = V(\sigma)$.

Lemme 3.4 *Soit $V \subset U$ un sous-ensemble analytique fermé transverse à H_σ. Pour toute forme $\Phi \in M^q(V)$, abélienne sur $V \cap U_\sigma$, la fonction holomorphe $\mathcal{R}_{V,\Phi,a_0}$ ne dépend que des coefficients des faces P_i^ρ, pour $\rho \notin \sigma(1)$ et $i = 1,\ldots,k$. En conséquence, on a*

$$\bar{\partial}_{a_{im}}\mathrm{Tr}_V(\Phi) = 0\,, \quad \forall m \notin \bigcup_{\rho\notin\sigma(1)} P_i^\rho\,,$$

ce pour tout $i = 1,\ldots,k$.

Preuve. Soient

$$k_{i,\rho} = -\min_{m\in P_i}\langle m,\eta_\rho\rangle\,, \qquad i = 1,\ldots,k.$$

Les seules sections monomiales $s_{im} \in \Gamma(X, L_i)$ non identiquement nulles sur $H_\sigma = \bigcup_{\rho\notin\sigma(1)} D_\rho$ sont les sections s_{im} correspondant aux $m \in P_i \cap \mathbb{Z}^n$ tels que $\langle m,\eta_\rho\rangle + k_{i,\rho} > 0$. Ainsi, pour tout $x \in H_\sigma$, on a

$$\begin{aligned} x \in C_a \iff & \sum_{m\in P_i} a_{im}s_{im}(x) = 0\,, \quad i = 1,\ldots,k \\ \iff & \sum_{m\in\bigcup_{\rho\notin\sigma(1)} P_i^\rho} a_{im}s_{im}(x) = 0\,, \quad i = 1,\ldots,k. \end{aligned}$$

Les fonctions s'annulant sur l'ensemble analytique $(V\cap H_\sigma)^* = q_U(p_U^{-1}(V\cap H_\sigma))$ (de codimension au moins 1 par hypothèse sur V) ne dépendent que des coefficients des faces $P_i^\rho, \rho \notin \sigma(1)$. Puisque Φ est abélienne sur $V \cap U_\sigma$, l'ensemble W^*_Φ défini précédemment est inclus dans $(V \cap H_\sigma)^*$, ce qui termine la preuve de la première assertion ; la seconde en résulte immédiatement. □

Corollaire 3.2 *On a les deux assertions suivantes :*

1. *Soit $\sigma \in \Sigma(n)$. Pour toute sous-variété algébrique $V \subset X$ de dimension pure k, transverse à l'hypersurface à l'infini $H_\sigma = \cup_{\rho \notin \sigma(1)} D_\rho$, on a :*

$$f \in \mathcal{O}_X(U_\sigma) \Rightarrow \mathrm{Tr}_V f \text{ polynomiale en } a_{im}$$

   pour tout $m \in P_i \cap \mathbb{Z}^n$ qui n'appartient pas à l'une des facettes P_i^ρ, $\rho \notin \sigma(1)$, ce pour tout $i = 1, \ldots, k$.

2. *Soit $m_0 \in M = \mathbb{Z}^n$; le dénominateur de la fonction rationnelle $\mathrm{Tr}_V t^{m_0}$ est un polynôme qui ne dépend que des coefficients des facettes P_i^ρ, $\rho \in \Sigma(1)$, $i = 1, \ldots, k$ pour lesquelles $\langle m_0, \eta_\rho \rangle < 0$; en particulier la trace d'un monôme de Laurent est toujours polynômiale en les coefficients a_{im}, $i = 1, \ldots, k$, pour les m dans l'intérieur relatif P_i^0 de P_i.*

Preuve. La première partie est claire d'après le lemme précédent (l'anneau $\mathcal{O}_X(U_\sigma) = \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$ est l'anneau des polynômes en les coordonnées affines de la carte U_σ). La deuxième partie est une conséquence du Lemme 3.4 et du fait que la trace de t^m a un pôle en $a \in X^*$ si et seulement si C_a passe par l'intersection de V avec le lieu polaire de t^{m_0}, qui est exactement la réunion des diviseurs D_ρ pour lesquels $\langle m_0, \eta_\rho \rangle < 0$; ces diviseurs D_ρ correspondent précisément aux facettes P_i^ρ, $\rho \in \Sigma(1)$, telles que $\langle m_0, \eta_\rho \rangle < 0$. $\square$

3.2 Trace et calcul résiduel

3.2.1 Cas analytique

On s'intéresse au calcul explicite de la trace à l'aide du calcul résiduel. De manière générale, les coefficients se calculent comme des sommes globales de résidus de Grothendieck que l'on pourra exprimer dans des cartes affines adéquates. Dans le cas particulier où V est transverse aux orbites, on pourra faire les calculs dans le tore $\mathbb{T} \subset X$. On garde les mêmes notations et hypothèses que dans la section précédente.

Soit $V \in \mathcal{E}_k(U)$. D'après le Lemme 3.2 et l'additivité de la trace, il suffit d'effectuer les calculs de trace pour un ensemble analytique V irréductible non dégénéré (auquel cas $V^* = U^*$), ce que l'on suppose désormais.

Soit $\Phi \in M^q(V)$ $(q \leq k)$. La trace de Φ sur V est l'image directe par q_U du courant $[p_U^{-1}(V)] \wedge p_U^* \Phi$. Ce courant s'identifie au courant

$$E = [p_U^{-1}(V)] \wedge [I_U] \wedge p_U^* \Phi$$

défini sur $U \times U^*$. L'ensemble $\mathrm{Reg}_V(U^*) \setminus W_\Phi^*$ des éléments de X^* pour lesquels l'intersection $V \cap C_a$ est transverse (donc finie et non vide ici) et ne rencontre pas pol(Φ) est un ouvert dense de U^*.

Cas où V intersecte proprement les orbites non denses de X : calcul résiduel dans le tore

Soit $W^* \subset U^*$ le sous-ensemble analytique $W^* \subset U^*$ défini par :

$$W^* = q_U(p_U^{-1}(W_\Phi \cup \Big(V \cap (X \setminus \mathbb{T})\Big) \cup \mathrm{sing}\,(V))).$$

Si $a \in U^* \setminus W^*$, l'intersection $V \cap C_a$ a lieu dans le tore, en dehors du lieu polaire de Φ et du lieu singulier sing$\,(V)$ de V. L'intersection est dans ce cas finie (si elle infinie, elle est forcément de dimension > 0 et rencontre $X \setminus \mathbb{T}$).

Si l'on suppose que V intersecte proprement l'hypersurface $X \setminus \mathbb{T}$, W^* est de codimension au moins 1 dans U^* et l'ouvert

$$U_0^* = \mathrm{Reg}_V\,(U^*) \setminus W^* \subset U^* \setminus W^*$$

est dense dans U^*. Si $a \in U_0^*$, le zéro-cycle de U $\{(p_1(a), \ldots, p_N(a))\} = V \cap C_a$ défini par l'intersection transverse de V et C_a dépend holomorphiquement du paramètre a. Pour tout $a_0 \in U_0^*$, il existe un ouvert $U_{a_0}^* \subset U_0^*$ et un ouvert $U_{a_0} \supset V \cap C_{a_0}$ de U, union disjointe de N voisinages $U_{a_0,i}$ des points $p_i(a),\ a \in U_0^*,\ \ i = 1, \ldots, N$.

Dans ce cas, V est localement intersection complète réduite dans U_{a_0}, définie par $n - k$ fonctions holomorphes en les coordonnées toriques $t = (t_1, \ldots, t_n)$

$$V = \{f_{k+1}(t) = \cdots = f_n(t) = 0\}$$

(on définit f_j par sa restriction à chacun des ouverts $U_{a_0,i}$) et la q-forme Φ est holomorphe sur $V_{|U_{a_0}}$.

La variété d'incidence $I_U \subset U \times U^*$ associée à la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ est définie dans $\mathbb{T} \times U_0^*$ par les fonctions

$$(t, a) \mapsto l_i(a_i, t) = \sum_{m \in P_i} a_{im} t^m \quad i = 1, \ldots, k.$$

où $t \mapsto l_i(a_i, t)$ est le polynôme de Laurent associé à la section $s_{a_i} \in \Gamma(X, L_i)$ définie par a_i.

Proposition 3.2 *Pour tout $a \in U^*_{a_0}$, on a l'égalité de q-formes holomorphes :*

$$\mathrm{Tr}_V \Phi = \sum_{|J|=q\,,\,J\subset\{1,\dots,k\}} \; \sum_{m_J \in \sum_{j\in J} P_j} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} t^{m_J} h_J(a,t) \frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} \\ l_1(a_1,t), \dots, l_k(a_k,t), f_{k+1}(t), \dots, f_n(t)\end{bmatrix} da_{J,m_J}\,, \qquad (3.1)$$

où les fonctions h_J, déterminées par

$$h_J(a,t) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n = t_1 \cdots t_n \Phi \times \Big(\bigwedge_{i=1}^{n-k} d_t f_{k+i}(t)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j\in\{1,\dots,k\}\setminus J} d_t l_j(a_j,t)\Big)\,,$$

sont holomorphes en t au voisinage de $C_{a_0} \cap V$; h_J dépend de manière multihomogène (de degré 1) des blocs de variables a_j, $j \notin J$ et est indépendante des blocs a_j lorsque $j \in J$, et

$$da_{J,m_J} := \sum_{\substack{(m_{j_1},\dots,m_{j_q}) \in \Pi_{j\in J} P_j \\ m_{j_1}+\cdots+m_{j_q} = m_J}} \bigwedge_{r=1}^{q} da_{j_r, m_{j_r}}.$$

Preuve. Par hypothèses $C_a \cap V$ est inclus dans $U_{a_0} \subset U$ pour tout a dans $U^*_{a_0}$ et on peut faire les calculs en coordonnées "toriques" $(t_1, \dots, t_n)$. Grâce aux formules de Lelong-Poincaré, le courant E de l'introduction admet dans $U_{a_0} \times U^*_{a_0}$ la représentation "résiduelle"

$$E = \pm \bigwedge_{i=1}^{k} \bar\partial_{t,a}\Big(\frac{1}{l_i}\Big) \bigwedge_{i=1}^{n-k} \bar\partial_t\Big(\frac{1}{f_{k+i}}\Big) \wedge \Phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} d_{(t,a)} l_i \bigwedge_{i=1}^{n-k} d_t f_{k+i}\,.$$

L'image directe de ce courant dans U^*_0 agit sur des formes-test de type $(l, l-q)$ où $l = \dim U^*$, ($l = \sum_{i=1}^{k}(l_i - 1)$, avec $l_i = \mathrm{card}\, P_i \cap \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, k$). Certains termes de la somme résultant de ce développement n'apportent aucune contribution. Plus précisément, on a $q_{U^*}(E) = q_{U^*}(E')$ où E' est le courant

$$E' = \pm \bigwedge_{i=1}^{k} \bar\partial_t\Big(\frac{1}{l_i}\Big) \bigwedge_{i=1}^{n-k} \bar\partial_t\Big(\frac{1}{f_{k+i}}\Big) \wedge \Bigg(\Phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-k} d_t f_{k+i} \wedge \Big(\sum_{|J|=q, J\subset\{1,\dots,k\}} \bigwedge_{j\in J^c} d_t l_j \bigwedge_{j\in J} d_{a_j} l_j\Big)\Bigg)\,.$$

(J^c est le complémentaire de J dans $\{1,\ldots,k\}$). L'expression entre les grandes parenthèses est une $(n,0)$-forme en t et une $(q,0)$-forme en a. L'égalité

$$\bigwedge_{j\in J} d_{a_j} l_j = \sum_{(m_{j_1},\ldots,m_{j_q})\in\prod_{j\in J} P_j} t^{m_{j_1},\ldots,m_{j_q}} \bigwedge_{r=1}^{q} da_{j_r,m_{j_r}}$$

peut se réécrire (en utilisant les notations de la proposition)

$$\bigwedge_{j\in J} d_{a_j} l_j = \sum_{m_J\in\sum_{j\in J} P_j} t^{m_J} da_{J,m_J}.$$

Par dualité et grâce au théorème de Fubini l'expression de la trace devient

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_V\Phi = \sum_{|J|=q\,,\,J\subset\{1,\ldots,k\}} \sum_{m_J\in\sum_{j\in J} P_j}\\ &\left\langle \bigwedge_{i=1}^{k} \bar\partial_t\Big(\frac{1}{l_i}\Big) \bigwedge_{i=1}^{n-k} \bar\partial_t\Big(\frac{1}{f_{k+i}}\Big), t^{m_J}\Phi\wedge \bigwedge_{i=1}^{n-k} d_t f_{k+i}\wedge\Big(\sum_{|J|=q}\bigwedge_{j\in J^c} d_t l_j\Big)\right\rangle da_{J,m_J}.\end{aligned}$$

En regardant attentivement la différentielle $\bigwedge_{j\in J^c} d_t l_j$, on constate que la fonction h_J définie par

$$h_J(t,a)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n = t_1\cdots t_n\Phi \bigwedge_{i=1}^{n-k} d_t f_{k+i}(t)\wedge_{j\in J^c} d_t l_j(t,a_j)$$

satisfait aux conditions de la proposition. □

Remarque 3.1 On remarque que le courant E' est identiquement nul pour tout $V\in\mathcal{E}_k(U)$ et toute q-forme $\Phi\in M^q(V)$ si et seulement si la forme

$$\sum_{|J|=q\,,\,J\subset\{1,\ldots,k\}} \bigwedge_{j\in J^c} d_t l_j \bigwedge_{j\in J} d_{a_j} l_j$$

est identiquement nulle, c'est-à-dire

$$\bigwedge_{j\in K} d_t l_j = 0 \qquad \forall K\subset\{1,\ldots,k\}\ |K| = k-q.$$

Cette dernière condition se traduit par la dépendance linéaire de n'importe quelle collection de $k-q$ multi-exposants pris dans n'importe quelle somme de Minkovski de $k-q$ des k polytopes $P_1,\ldots,P_k$. On retrouve ainsi que l'essentialité de la famille $L_1,\ldots,L_k$ est une condition nécessaire pour que l'application trace soit non triviale.

Corollaire 3.3 *Sous les mêmes hypothèses, la trace d'une fonction* $h \in \mathbb{C}(V)$ *sur* V *admet l'écriture résiduelle :*

$$\mathrm{Tr}_V h = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} h(t)J_V^{\mathbb{T}}(t,a)\frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} \\ l_1(a_1,t),\ldots,l_k(a_k,t),f_{k+1}(t),\ldots,f_n(t)\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

où $J_V^{\mathbb{T}}$ *est le jacobien torique de l'application*

$$t \mapsto (l_1(a_1,t),\ldots,l_k(a_k,t),f_{k+1}(t),\ldots,f_n(t)\,.$$

Preuve. Le jacobien torique est uniquement déterminé par la relation

$$J_V^{\mathbb{T}}\frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} = \bigwedge_{i=1}^{n-k} d_t f_{k+i}\bigwedge_{j=1}^{k} d_t l_j;$$

Le corollaire est alors une conséquence immédiate de la formule (3.1), appliquée au cas $q=0$ et $\Phi = h$. □

Corollaire 3.4 *Soit* $V \in \mathcal{C}_k(U)$ *un cycle analytique de dimension pure* k. *Alors*

$$\deg_U V = \mathrm{Tr}_V(1), \quad \text{et} \;\; \mathrm{TR}_U(V) = \mathrm{Tr}_V(1).V^*.$$

Si $a \in \mathrm{Reg}\, X^*$ *et* $v \in \mathcal{C}_k^0(X;C_a)$*, on a*

$$\deg_a v = \mathrm{Tr}_v(1), \quad \text{et} \;\; \mathrm{TR}_U(v) = \mathrm{Tr}_v(1).v^*$$

pour tout $v \in \mathcal{C}_k^0(X;C_a)$ *et* $a \in \mathrm{Reg}\, X^*$ *et le degré d'un ensemble analytique non dégénéré de dimension pure* k *est donc le nombre de points d'intersection avec une sous-variété* C_a *générique.*

Preuve. Si $h_1,\ldots,h_n$ sont n germes de fonctions analytiques en $P \in X$ ayant un zéro commun isolé, un résultat classique de la théorie des résidus affirme que la multiplicité d'intersection des diviseurs $h_i = 0$ est égale à

$$\mathrm{mult}_{P,(h_1,\ldots,h_n)} := \dim \frac{\mathcal{O}_{P,X}}{(h_1,\ldots,h_n)} = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} dh_1\wedge\cdots\wedge dh_n \\ h_1,\ldots,h_n\end{bmatrix}.$$

En vertu de la représentation (3.2), le germe de trace de 1 en a_0 est donc constant pour tout $a_0 \in \mathrm{Reg}(X^*)$, égal au degré $\deg_{a_0} v$ de v en a_0. Dans le cas d'un cycle analytique, la trace de 1 est localement constante d'après le cas des germes, donc constante sur l'ouvert connexe U^* : il suffit de calculer le degré d'un cycle analytique $V \in \mathcal{C}_k(U)$ en un unique point $a \in \mathrm{Reg}_V\, U^*$, ce qui ramène au cas des germes. □

Cas général : calcul dans les cartes affines

Si V n'est plus supposé intersecter proprement les orbites non denses, il n'est plus possible d'utiliser les coordonnées $(t_1, \ldots, t_n)$ pour effectuer les calculs de trace. Cependant, le recours aux coordonnées affines permet à nouveau d'obtenir des formules résiduelles closes ($i.e$ ne faisant intervenir qu'un seul système de coordonnées) pour chacune des branches irréductibles de V.

Lemme 3.5 *Si $V \in \mathcal{E}_k(U)$ est irréductible, il existe une carte U_σ, $\sigma \in \Sigma(n)$ dans laquelle l'intersection $C_a \cap V$ a génériquement lieu.*

Preuve. D'après le Théorème 2.4 l'intersection $C_a \cap V$ n'a génériquement lieu dans aucune des cartes U_σ si et seulement si $\dim V \cap (X \setminus U_\sigma) = k \ \forall \sigma \in \Sigma(n)$, ce qui implique

$$\dim(V \cap D_\rho) = \dim V \qquad \forall \rho \in \Sigma(1).$$

C'est impossible du fait de l'irréductibilité de V. □

Soit $V \in \mathcal{E}_k(U)$ irréductible et U_σ une carte dans laquelle l'intersection $V \cap C_a$ a génériquement lieu, munie des coordonnées affines $x^\sigma = (x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma)$. Dans ce cas, la sous-variété C_a, restreinte à U_σ a pour équations

$$C_a \cap U_\sigma = \{x^\sigma \in U_\sigma \,;\, l_1^\sigma(a_1, x^\sigma) = \cdots = l_k^\sigma(a_k, x^\sigma) = 0\}$$

où les fonctions $x^\sigma \mapsto l_i^\sigma(a_i, x^\sigma)$, $i = 1, \ldots, k$, sont les équations polynômiales affines des diviseurs $\operatorname{div}_0(s_{a_i})$ associés respectivement aux sections $s_{a_i} \in \Gamma(X, L_i)$.

Remarque 3.2 Les l_i^σ sont obtenus dans la Sous-section 1.6.1 en divisant le polynôme homogène $F_i(a_i, x)$ associé à s_{a_i} par son monôme σ-extrémal, opération licite dans la carte U_σ. Puisque les degrés sont semi-amples, on peut trouver l'expression des l_i^σ à partir des polynômes de Laurent

$$t \mapsto l_i(a_i, t) = \sum_{m \in P_i} a_{im} t^m.$$

Attention aux notations ! Les polynômes l_i^σ ne sont pas les expressions des polynômes de Laurent l_i en les coordonnées affines, mais les expressions en ces coordonnées affines des polynômes $t^{-s_{i,\sigma}} l_i(t)$, où $s_{i,\sigma}$ est le monôme σ-extrémal associé au fibré L_i.

Soit $\Phi \in M^q(V)$. D'après le lemme précédent, l'ensemble

$$U_{V,\Phi,\sigma}^* := \operatorname{Reg}_V(U^*) \setminus [W_\Phi^* \cup (V \cap H_\sigma)^*]$$

des paramètres a pour lesquels l'intersection $V \cap C_a$ est lisse transverse, finie, en dehors du lieu polaire de Φ, et incluse dans U_σ est un ouvert dense de U^*.

On note Φ^σ la restriction de Φ à $V \cap U_\sigma$, exprimée dans le système de coordonnées $(x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)$.

Proposition 3.3 *L'expression de la trace dans $U^*_{V,\Phi,\sigma}$ est donnée par*

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_V \Phi(a) = &\sum_{|J|=q\,;\, J\subset\{1,\dots,k\}} \times \sum_{m_J \in \sum_{j\in J} P_j} \\ &\mathrm{Res}\begin{bmatrix} x^{\sigma\lambda(m_J)} h_J^\sigma(x^\sigma, a) dx_1^\sigma \wedge \cdots \wedge dx_n^\sigma \\ l_1^\sigma(a_1, x^\sigma), \dots, l_k^\sigma(a_k, x^\sigma), f_{k+1}^\sigma(x^\sigma), \dots, f_n^\sigma(x^\sigma)\end{bmatrix} da_{J,m_J}\,,\end{aligned} \tag{3.3}$$

où les fonctions f_{k+i}^σ sont les équations holomorphes locales de V au voisinage de $V \cap C_a$ et les fonctions h_J^σ sont déterminées par

$$h_J^\sigma(a, x^\sigma)\, dx_1^\sigma \wedge \cdots \wedge dx_n^\sigma = \Phi^\sigma \bigwedge_{i=1}^{n-k} d_{x^\sigma} f_{k+i}^\sigma(x^\sigma) \bigwedge_{j\in J^c} d_{x^\sigma} l_j(a_j, x^\sigma).$$

Preuve. Puisque $\mathrm{Tr}_V \Phi \in M^q(U^*)$ et $U^*_{V,\Phi,\sigma}$ est dense dans U^*, on peut par unicité du prolongement analytique effectuer les calculs de traces avec les variables affines $(x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)$. Grâce aux formules de Lelong-Poincaré, on a :

$$\begin{aligned}[I_U]_{|q_U^{-1}(U^*_{V,\Phi,\sigma})} &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \bigwedge_{i=1}^{k} \partial\bar\partial_{(x^\sigma, a_i)} \log |l_i^\sigma(a_i, x^\sigma)|^2 \\ &= \bigwedge_{i=1}^{k} \bar\partial_{(x^\sigma, a_i)}\left(\frac{1}{l_i^\sigma}\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} d_{(x^\sigma, a_i)} l_i^\sigma\,.\end{aligned}$$

Le même raisonnement et le même calcul que précédemment, conduits cette fois avec les coordonnées affines, donnent l'expression voulue de la trace. □

Les deux calculs ne coïncident *a priori* pas si V n'est pas supposée intersecter proprement les supports des diviseurs D_ρ, $\rho \in \Sigma(1)$. Il peut très bien exister des pôles sur les axes de coordonnées de U_σ pour tout $a \in X^*$, donnant lieu à des résidus qui ne sont pas pris en compte si l'on se restreint à la somme des résidus dans le tore.

3.2.2 Cas algébrique

Soit V une sous-variété algébrique de X irréductible intersection complète de dimension pure k et $\Phi \in M^q(V)$. Sous certaines conditions sur V, la q-forme rationnelle $\mathrm{Tr}_V \Phi \in M^q(X^*)$ se calcule, grâce à l'application rationnelle résidus toriques, par des calculs cohomologiques globaux (Sous-section 1.4.1).

On note $F_1(a_1, \cdot), \dots, F_k(a_k, \cdot)$ les homogénéïsés des polynômes de Laurent $l_i(a_i, \cdot)$ associés aux sections $s_{a_i} \in \Gamma(X, L_i)$.

Soit $(L_{k+1}, \dots, L_n)$ une famille essentielle semi-ample de fibrés en droites sur X associés à $n-k$ diviseurs effectifs $E_{k+1}, \dots, E_n$ de degrés $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$. On note $P_{k+1}, \dots, P_n$ les polytopes associés. On suppose la famille $(P_1, \dots, P_n)$ essentielle et on note $P = P_1 + \cdots + P_n$. D'après le Théorème 2.2, une sous-variété $V = \{F_{k+1} = \cdots = F_n = 0\}$ de type $(L_{k+1}, \dots, L_n)$ générique est une intersection complète intersectant transversalement l'hypersurface à l'infini $X \setminus \mathbb{T}$, non $(L_1, \dots, L_k)$-dégénérée.

Soit $\Phi \in M^q(V)$ et g le polynôme de Laurent définissant son lieu polaire dans $\mathbb{T}$. Le lieu polaire $\mathrm{pol}(\Phi) \subset X$ de Φ (vue comme forme rationnelle dans X) est l'union de l'hypersurface $\{G = 0\}$ et d'éventuels diviseurs à l'infini. Les fonctions h_J de la proposition précédente sont dans ce cas des fractions rationnelles sur X, ayant pour dénominateur commun g. Pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, \dots, k\}$, pour tout multi-exposant $m_J \in \sum_{j \in J} P_j$, on note q_{J,m_J} le polynôme de Laurent :

$$q_{J,m_J} := g h_J t^{m_J} .$$

On rappelle que Ω désigne la forme d'Euler de la variété torique X et $\beta_0 = [-K_X]$ la classe anti-canonique de X, somme des degrés des variables : $\beta_0 = \sum_1^{n+s} [D_{\rho_i}]$. On note $X_0^* \subset X^*$ l'ouvert de Zariski des a pour lesquels l'intersection $V \cap C_a$ est tranverse, incluse dans le tore, et ne rencontre pas le lieu polaire de Φ.

Proposition 3.4 *Sous les hypothèses et notations introduites précédemment, il existe :*

1. *un polynôme G' homogène, multiple de G, n'ayant aucun zéro commun avec $F_1(a_1, \cdot), \dots, F_k(a_k, \cdot), F_{k+1}, \dots, F_n$ pour tout $a \in X_0^*$,*
2. *pour tout $J \subset \{1, \dots, k\}$ et tout $m_J \in \sum_{j \in J} P_j$, un polynôme homogène $Q'_{J,m_J} \in \mathbb{C}[a_{J,m_J}][x]$ multiple de l'homogénéïsé Q_{J,m_J} de q_{J,m_J}, tel que*

la n-forme

$$\Psi_{J,m_J} := \frac{Q'_{J,m_J}\Omega}{G'F_1(a_1,\cdot)\cdots F_k(a_k,\cdot)F_{k+1}\cdots F_n}$$

soit rationnelle sur X pour tout $a\in X_0^*$,
avec l'égalité

$$\mathrm{Tr}_V\Phi = \sum_{|J|=q\,,\,J\subset\{1,\dots,k\}}\ \sum_{m_J\in\sum_{j\in J}P_j} \mathrm{Res}_{(G',F_1,\dots,F_n)}(Q'_{J,m_J})da_{J,m_J}\,, \qquad (3.4)$$

où l'expression de droite exprime le résidu torique associé à l'application $(G',F_1,\dots,F_n)$ du polynôme homogène Q'_{J,m_J}.

Preuve. Elle est calquée sur celle du théorème 4 de [6]. Soit $\lambda=[\sum_\rho\lambda_\rho D_\rho]$ le degré du polynôme homogène $GF_1(a_1,\cdot)\cdots F_k(a_k,\cdot)F_{k+1}\cdots F_n$ (ce degré ne dépend pas de a) ; on a donc :

$$\begin{aligned}&G\,F_1(a_1,x)\cdots F_k(a_k,x)F_{k+1}(x)\cdots F_n(x)\\ =\ &\Big(\prod_\rho x_\rho^{\lambda_\rho}\Big)g(t)l_1(a_1,t)\cdots l_k(a_k,t)f_{k+1}(t)\cdots f_n(t)\,,\end{aligned}$$

avec les relations coordonnées affines/coordonnées homogènes :

$$t_j=\prod_\rho x_\rho^{\eta_{\rho j}}\ ,\ j=1,\dots,n\,,$$

où $\eta_\rho=\sum_1^n\eta_{\rho j}e_j$ dans la base canonique de $N\otimes\mathbb{R}=\mathbb{R}^n$. Soit $r_{J,m_J}=[\sum_\rho r_{J,m_J,\rho}D_\rho]$ le degré de l'homogénéïsé Q_{J,m_J} de q_{J,m_J} et

$$b_\rho=-\min_{m\in P}\langle m,\eta_\rho\rangle\ ,\quad \rho\in\Sigma(1).$$

Soit $m_0\in\mathrm{int}\,P\cap\mathbb{Q}^n$ (l'intérieur coïncide ici avec l'intérieur relatif car $(P_1,\dots,P_n)$ est supposée essentielle). Alors $\langle m_0,\eta_\rho\rangle+b_\rho>0$ pour tout ρ dans $\Sigma(1)$ et il existe un entier positif ou nul k_0 pour lequel $k_0m_0\in\mathbb{Z}^n$ et

$$e_{J,m_J,\rho}:=-1+\lambda_\rho-r_{J,m_J,\rho}+k_0(b_\rho+\langle m_0,\eta_\rho\rangle)\geq 0$$

pour tout $J\subset\{1,\dots,k\}$, pour tout $m_J\in\sum_{j\in J}P_j$, pour tout $\rho\in\Sigma(1)$. Pour k_0 le plus petit de ces entiers, on pose

$$G':=G\prod_\rho x_\rho^{k_0(b_\rho+\langle m_0,\eta_\rho\rangle)}\quad\text{et}\quad Q'_{J,m_J}:=Q_{J,m_J}\prod_\rho x_\rho^{e_{J,m_J,\rho}}.$$

Par le choix des exposants $e_{J,m_J,\rho}$, Q'_{J,m_J} est polynômial en x de degré

$$\deg Q'_{J,m_J} = \deg(G' F_1(a_1,\cdot)\cdots F_k(a_k,\cdot)F_{k+1}\cdots F_n) - \beta_0 \,.$$

Ainsi, la forme

$$\Psi_{J,m_J} := \frac{Q'_{J,m_J}\Omega}{G' F_1(a_1,\cdot)\cdots F_k(a_k,\cdot)F_{k+1}\cdots F_n}$$

définit une forme rationnelle sur la variété torique pour tout $J \subset \{1,\ldots,k\}$ et $m_J \in \sum_{j\in J} P_j$ comme annoncé dans la proposition. Puisque le support du diviseur effectif associé au monôme $\prod_\rho x_\rho^{k_0(b_\rho+\langle m_0,\eta_\rho\rangle)}$ ne rencontre pas le tore, pour tout $a \in X_0^*$, les polynômes $G', F_1(a_1,\cdot),\ldots F_k(a_k,\cdot), F_{k+1},\ldots,F_n$ ne s'annulent pas simultanément et on peut appliquer le théorème 1 de [6] :

$$\mathrm{Res}_{(G',F_1(a_1,\cdot),\ldots,F_{k+1},\ldots)}(Q'_{J,m_J}) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \frac{Q_{J,m_J}}{G'}\Omega \\ F_1(a_1,\cdot),\ldots,F_k(a_k,\cdot),F_{k+1},\ldots,F_n\end{bmatrix}.$$

L'égalité

$$\Psi_{J,m_J} = \frac{q_{J,m_J}(\prod_\rho x_\rho^{\eta_{\rho 1}},\ldots,\prod_\rho x_\rho^{\eta_{\rho n}})}{\Big(g l_1(a_1,\cdot)\cdots l_k(a_k,\cdot)f_{k+1}\cdots f_n\Big)(\prod_\rho x_\rho^{\eta_{\rho 1}},\ldots,\prod_\rho x_\rho^{\eta_{\rho n}})}\frac{\Omega}{\prod_\rho x_\rho}$$

montre que la restriction de la forme Ψ_{J,m_J} au tore est exactement la forme

$$\phi_{J,m_J} = \frac{q_{J,m_J}}{g\, l_1(a_1,\cdot)\cdots l_k(a_k,\cdot)f_{k+1}\cdots f_n}\frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n}\,,$$

d'où l'égalité

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\begin{bmatrix} \frac{Q_{J,m_J}}{G'}\Omega \\ F_1(a_1,\cdot),\ldots,F_{k+1},\ldots,F_n\end{bmatrix} &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \frac{q_{J,m_J}}{g}\frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} \\ l_1(a_1,\cdot),\ldots,f_{k+1},\ldots,f_n\end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} h_J t^{m_J}\frac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} \\ l_1(a_1,\cdot),\ldots,f_{k+1},\ldots,f_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On conclut avec la Proposition 3.2, appliquée au cas $U = X$. $\square$

3.3 Cas des fonctions

On suppose la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ très ample. On décrit dans cette section la trace de fonctions rationnelles sur une intersection complète semi-ample

$$V = \{F_{k+1} = \cdots = F_n = 0\}$$

de type $(L_{k+1}, \ldots, L_n)$.

Proposition 3.5 *Tout $\mathbb{T}$-diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}(X)$ d'intersection propre avec V induit un morphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}_{V,D} : H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) & \longrightarrow & H^0(X^*, \mathcal{O}_{X^*}((D.V)^*)) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Tr}_V(f) \end{array}$$

Preuve. Si $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} k_\rho D_\rho$, on note $x^D = \Pi x_\rho^{k_\rho}$ l'équation monômiale homogène de D. On a l'équivalence

$$f \in \mathcal{O}_X(D) \Longleftrightarrow f = \frac{F}{x^D}, \quad F \in S_{[D]}$$

où $S_{[D]}$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré $[D]$. Pour tout a dans $\mathrm{Reg}_V(X^*)$, on note $\{p_1(a), \ldots, p_N(a)\} = V \cap C_a$, où $N = [V].\alpha(L_1, \ldots, L_k)$. Les fonctions $p_r(a)$ sont des germes de fonctions holomorphes en a et pour tout f appartenant à $\mathcal{O}_X(D)$, on a :

$$\mathrm{Tr}_V(f)(a) = \sum_{r=1}^{N} \frac{F}{x^D}(p_r(a)) \quad \forall a \in \mathrm{Reg}_V(X^*).$$

Soit $H = \{F = 0\}$. Les diviseurs

$$(D.V)^* = \mathrm{TR}(V.D) = \mathrm{div}_0(\mathcal{R}_{V,D}) \text{ et } (D.H)^* = \mathrm{TR}(V.H) = \mathrm{div}_0(\mathcal{R}_{V,H})$$

(*cf.* Sous-section 2.2.7, Proposition 2.9) sont liés par la formule du produit :

$$\prod_{r=1}^{N} \left(\frac{F}{x^D}(p_r)\right) = \frac{\mathcal{R}_{V,H}}{\mathcal{R}_{V,D}}.$$

Ainsi, on a l'égalité des fonctions rationnelles

$$\mathrm{Tr}_V(f).\frac{\mathcal{R}_{V,D}}{\mathcal{R}_{V,H}}(a) = \sum_{j=1}^{N} \prod_{r \neq j} \frac{x^D}{F}(p_r(a)).$$

Par définition du résultant, $\mathcal{R}_{V,D}(a) \neq 0$ (respectivement $\mathcal{R}_{V,H}(a) \neq 0$) implique que l'intersection $V \cap C_a \cap D$ (respectivement $V \cap C_a \cap H$) est vide. La trace est donc holomorphe en dehors de $\{\mathcal{R}_{V,D} = 0\}$. Si le support de f rencontre toutes les facettes de P_D, l'intersection $H \cap X \setminus \mathbb{T}$ est propre, et

$$\mathrm{codim}_{X^*}(\{\mathcal{R}_{V,D} = 0\} \cap \{\mathcal{R}_{V,H} = 0\}) \geq 2.$$

Vue comme fonction dans le cône affine $\mathbb{C}^{l_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{l_k}$ de X^*, on peut donner un sens à l'expression $\mathrm{Tr}_V(f)\mathcal{R}_{V,D}$. La variété affine au-dessus de la sous-variété $\{\mathcal{R}_{V,D} = 0\} \cap \{\mathcal{R}_{V,H} = 0\}$ est de codimension au moins 2 et le théorème d'Hartogs implique l'égalité :

$$\bar{\partial}[\mathrm{Tr}_V(f)\mathcal{R}_{V,D}] \equiv 0.$$

Le polynôme homogène $\mathcal{R}_{V,D}$ est donc dénominateur de la fonction rationnelle $\mathrm{Tr}_V(f)$. Si l'intersection $H \cap D$ n'est pas propre, il existe un diviseur effectif D' tel que $D - D' \geq 0$, et $f = \frac{F}{x^D} = \frac{F'}{x^{D'}}$ où F' est homogène de degré $[D']$, premier avec $x^{D'}$. D'après le cas précédent, le résultant $\mathcal{R}_{V,D'}$ est dénominateur de la fonction rationnelle $\mathrm{Tr}_V(f)$. Puisque $D - D' \geq 0$ le résultant $\mathcal{R}_{V,D'}$ divise $\mathcal{R}_{V,D}$, ce qui finit de montrer la proposition. $\square$

Remarque 3.3

1. Si les fibrés L_i sont puissances tensorielles d'un même fibré très ample (cas non mixte), cette proposition est une conséquence de la représentation (3.4) (cas $q = 0$) et du théorème 1.4 de [8].
2. Il semble que cette proposition puisse s'étendre dans certains cas aux familles essentielles semi-amples ; il apparaît alors des exposants aux résultants de facettes ([7], et Remarque 2.11) qui semblent intimement liés aux degré de l'extension $[\mathbb{C}(I_{V\cap D}) : \mathbb{C}(V \cap D)^*]$; ces exposants sont 1 dans notre cas puisque la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ est supposée très ample.
3. On a l'isomorphisme
$$\mathcal{O}_{X^*}((D.V)^*) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{l_1-1}}(N_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{l_k-1}}(N_k)$$
avec $N_i = [V.D].\alpha(L_1, \ldots L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_k)$, $i = 1, \ldots, k$.

Corollaire 3.5 *Soit $m \in \mathbb{Z}^n$. On a l'égalité :*

$$\mathrm{Tr}_V(t^m) = \frac{Q_m}{R_m}$$

où

$$R_m = \prod_{\rho \in \Sigma(1)} \left(\mathcal{R}_V^\rho\right)^{\alpha_\rho(m)}, \qquad \alpha_\rho(m) := -\min\{0, \langle m, \eta_\rho \rangle\}$$

et Q_m est un polynôme homogène de degré $\deg_{a_i} Q_m = \deg_{a_i} R_m$.

Preuve. On a
$$\operatorname{div}(t^m) = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} \langle m, \eta_\rho\rangle D_\rho = E - D$$
où $D = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} \alpha_\rho(m) D_\rho \geq 0$ et $E \geq 0$. Ainsi, $t^m \in \mathcal{O}_X(D)$, et la proposition précédente permet de conclure que $R_m = \mathcal{R}_{V,D}$ est dénominateur de $\mathrm{Tr}_V t^m$. Cette fonction est rationnelle sur un produit d'hyperplans projectifs, d'où l'égalité $\deg_{a_i} Q_m = \deg_{a_i} R_m$. □

Pour tout polytope $P \subset \mathbb{Z}^n$, on note $\operatorname{int} P$ son intérieur relativement au plus petit sous-espace affine de $\mathbb{Z}^n$ qui contient P.

Lemme 3.6 *si $m' \in \operatorname{int} P_i$, le degré partiel de Q_m en $a_{im'}$ est majoré par $\delta_{i,m'}(m)$, avec*

$$\delta_{i,m'}(m) = \inf\{\delta \in \mathbb{N}\,;\, m + \delta m' \in \operatorname{int}[\delta P_i]\}$$

Preuve. On note P_i les polytopes associés aux fibrés L_i, $P = P_1 + \cdots + P_n$, $b_{i\rho} := -\min_{m\in P_i}\langle m, \eta_\rho\rangle$ et $b_\rho := -\min_{m\in P}\langle m, \eta_\rho\rangle$ pour tout $\rho \in \Sigma(1)$.

Le jacobien torique $J_V^{\mathbb{T}}$ s'écrit :

$$J_V^{\mathbb{T}}(t,a) = \sum_{q\in P_1+\cdots+P_n} C_q(a) t^q$$

où les C_q sont des polynômes multihomogènes de degré 1 (ou éventuellement $-\infty$) en chaque variable a_i (ceci se voit facilement) ; pour chaque collection de monômes $(q_1,\ldots,q_n) \in P_1 \times \cdots \times P_n$, on a

$$d(t^{q_1}) \wedge \cdots \wedge d(t^{q_n}) = \det(q_1,\ldots,q_n) t^{q_1+\cdots+q_n} \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n}{t_1 \cdots t_n}$$

et, en additionnant, on constate que $J_V^{\mathbb{T}}$ est supporté par P. On peut noter qu'il existe nécessairement $q \in P \setminus \operatorname{int} P$ pour lequel $C_q \not\equiv 0$, sinon le support du jacobien torique serait strictement inclus dans P et la trace de 1 serait nulle par le théorème de Jacobi torique (Corollaire 5 dans [6]), ce qui est exclus puisque $\mathrm{Tr}_V(1) = \mathrm{MV}_n(P_1,\ldots,P_n) > 0$ dans notre situation.

D'après le Corollaire 3.3, la trace de t^m s'exprime donc, par linéarité du résidu

$$\mathrm{Tr}_V(t^m) = \sum_{q\in P} C_q(a) \mathrm{Res}\begin{bmatrix} t^{m+q}\dfrac{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n}{t_1\cdots t_n} \\ l_1(a_1,t),\ldots,l_k(a_k,t), f_{k+1}(t),\cdots,f_n(t)\end{bmatrix}.$$

D'après le théorème 8 de [6], pour tout $m' \in \operatorname{int} P_i$, la fonction rationnelle

$$u(m+q) := \operatorname{Res}\begin{bmatrix} t^{m+q}\dfrac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n}{t_1 \cdots t_n} \\ l_1(a_1, t), \dots, l_k(a_k, t), f_{k+1}(t), \cdots, f_n(t) \end{bmatrix}$$

est polynômiale en $a_{im'}$ de degré borné par l'entier positif

$$\inf\{\delta \in \mathbb{N}\,;\, m+q+(\delta+1)m' \in \operatorname{int}(P+(\delta+1)P_i)\}\,,$$

qui est le plus petit des entiers δ pour lesquels

$$\langle m+q, \eta_\rho\rangle + b_\rho + (\delta+1)(\langle m', \eta_\rho\rangle + b_{i\rho}) > 0 \quad \forall \rho \in \Sigma(1).$$

Du fait que $\inf_{q \in P, \rho \in \Sigma(1)} \langle q, \eta_\rho\rangle + b_\rho = 0$, que le dénominateur de $u(m+q)$ ne dépende pas de $a_{im'}$ quand $m' \in \operatorname{int} P_i$, **et** que les $C_q(a_1, \dots, a_k)$ soient de degré 1 en a_i, permet d'obtenir $\inf\{\delta \in \mathbb{N}\,;\, m+\delta m' \in \operatorname{int}[\delta P_i]\}$ comme majoration du degré de P en $a_{im'}$. $\square$

Remarque 3.4 Dans le contexte plus général d'une famille $(L_1, \dots, L_k)$ essentielle semi-ample, le théorème 3.2 de [8] et le théorème 8 de [6] sont valables et permettent d'obtenir une description similaire de la trace d'un polynôme de Laurent sur V (*cf.* Remarque 2.10).

D'après le théorème 3.2 de [8], le polynôme

$$\prod_{\rho \in \Sigma(1)} \left(\mathcal{R}_V^\rho\right)^{\gamma_\rho(m+q)}, \qquad \gamma_\rho(m+q) := -\min\{0, < m+q, \eta_\rho > + b_\rho - 1\}$$

est dénominateur de la fonction rationnelle $u(m+q)$ définie ci-dessus. Il faut donc élever chaque $\mathcal{R}_V^\rho$ à la puissance le maximum des $\gamma_\rho(m+q)$ quand q parcourt P pour avoir le meilleur dénominateur pour la trace de t^m. Or $\langle q\,,\,\eta_\rho\rangle + b_\rho \geq 0$ pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ puisque $q \in P$ (il existe ρ pour lequel il y a égalité, sinon, $\operatorname{Tr}_V(1) = 0$, ce qui, on l'a vu, est impossible), ce qui donne naissance aux exposants $-\min\{0, \langle m, \eta_\rho\rangle - 1\}$, qui diffèrent de 1 des exposants trouvés au corollaire. De plus, la borne sur les degrés partiels de Q_m ne concerne que les coefficients $a_{im'}$ pour m' intérieur à P_i, bien que $\operatorname{Tr}_V(t^m)$ soit polynômiale en certains des coefficients de facettes de P_i. La section suivante permet de comprendre ce fait.

Comportement des traces en les coefficients σ-extrémaux

Les coefficients σ-extrémaux des polynômes de Laurent l_i, notés $a_{i\sigma}$, codent les monômes σ-extrémaux associés aux sommets $s_{i\sigma}$ du polytope P_i correspondant aux divers cônes $\sigma \in \Sigma(n)$. Ce sont les cofficients constants des polynômes l_i^σ (ils jouent le rôle des coefficients b_i, utilisés au Chapitre 2 de la première partie dans le cadre projectif). Pour tout polytope P, et tout cône $\sigma \in \Sigma$, on note

$$\mathrm{int}_\sigma(P) = P \setminus \bigcup_{\rho \notin \sigma(1)} P^\rho$$

l'intérieur de P relatif au cône σ. Si $\sigma \in \Sigma(n)$, le "σ-bord" $P \setminus \mathrm{int}_\sigma P$ est l'union des facettes de P ne contenant pas le sommet s_σ de P. On rappelle qu'à tout diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$ est associé une fonction support Ψ_D et un unique diviseur D_σ de support inclus dans $H_\sigma = X \setminus U_\sigma$ de degré $[D_\sigma] = [D]$ (Sous-section 1.6.2). On a le résultat suivant :

Proposition 3.6 *1. Soit $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\dim(V \cap H_\sigma) < \dim V$. Pour tout $m \in \check{\sigma}$,*

$$\deg_{a_{i\sigma}} \mathrm{Tr}_V(t^m) \leq \delta_{i\sigma}(m)$$

où

$$\delta_{i\sigma}(m) = \inf\{\delta \in \mathbb{N}\,;\, m \in \delta \times \mathrm{int}_\sigma(P_i - s_{i\sigma})\} - 1$$

2. Pour tout diviseur effectif D globalement engendré sur X, on a l'implication

$$f \in \mathcal{O}_X(D_\sigma) \Longrightarrow \deg_{a_{i\sigma}} \mathrm{Tr}_V(f) \leq \delta_{i\sigma}(D)$$

où

$$\delta_{i\sigma}(D) = \inf\{\delta \in \mathbb{N}\,;\, \Psi_{D_\sigma} > (\delta+1)\Psi_{D_{i,\sigma}} \text{ sur } |\Sigma| \setminus \sigma\}.$$

Preuve. Soit $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ une famille essentielle de polytopes contenus dans $(\mathbb{R}^+)^n$, contenant l'origine, de somme $\Delta = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n$ n-dimensionnelle, contenant un segment non réduit à un point sur chaque axe de coordonnée. Soit $g_1, \ldots, g_n$ une famille de polynômes $g_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ supportés respectivement par $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. D'après le théorème d'Abel-Jacobi torique [33, 6],

$$\lambda \in \mathrm{int}\, \Delta \cap \mathbb{N}^n \Rightarrow \mathrm{Res} \begin{bmatrix} x^\lambda \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_1 \cdots x_n} \\ g_1, \cdots, g_n \end{bmatrix} = 0.$$

On note $J(g)$ le jacobien de l'application $g = (g_1, \ldots, g_n)$ et $\operatorname{supp}(J(g))$ son support. Alors

$$(\lambda + \operatorname{supp}(J(g)) + (1, \ldots, 1)) \subset \operatorname{int}(\Delta + \delta\Delta_i) \Rightarrow \operatorname{Res}\begin{bmatrix} x^{\lambda} dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n \\ g_1, \cdots, g_i^{\delta+1}, \cdots, g_n \end{bmatrix} = 0.$$

Le polytope $\operatorname{supp}(J(g)) + (1, \ldots, 1)$ est précisément le support du jacobien torique $J^{\mathbb{T}}(g) = x_1 \cdots x_n J(g)$, donc inclus dans Δ comme vu dans la preuve du Lemme 3.6. Puisque les g_i sont des polynômes (c'est ici qu'apparaît la différence coordonnées affines-coordonnée toriques), le polytope $\operatorname{supp}(J(g)) + (1, \ldots, 1)$ ne rencontre pas les axes de coordonnées. Il suffit donc que $\lambda \in \delta\Delta_i$ et ne rencontre pas les facettes de $\delta\Delta_i$ ne contenant pas l'origine pour que l'égalité précédente soit réalisée. Dans notre situation, V est d'intersection propre avec H_σ et

$$\operatorname{Tr}_V t^m = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} x^{\sigma\lambda(m)} dl_1^\sigma \wedge \cdots \wedge df_n^\sigma \\ l_1^\sigma, \ldots, l_k^\sigma, f_{k+1}^\sigma, \ldots, f_n^\sigma \end{bmatrix}$$

d'après la Proposition 3.3, où $\lambda(m)$ désigne le vecteur des coordonnées de m dans la base de $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$. Puisque les degrés sont très amples (semi-ample essentiel suffirait), le raisonnement précédent s'applique aux polytopes $\Delta_{1,\sigma}, \ldots, \Delta_{n,\sigma}$ associés aux polynômes en x^σ que sont $l_1^\sigma, \ldots, f_n^\sigma$. On peut montrer (voir la Sous-section 3.4.2 ci-après) l'égalité

$$\partial_{a_{i\sigma}}^{(\delta)} \operatorname{Tr}_V(t^m) = \pm \operatorname{Res}\begin{bmatrix} x^{\sigma\lambda(m)} dl_1^\sigma \wedge \cdots \wedge df_n^\sigma \\ l_1^\sigma, \ldots, [l_i^\sigma]^{\delta+1}, \ldots, l_k^\sigma, f_{k+1}^\sigma(x^\sigma), \ldots, f_n^\sigma(x^\sigma) \end{bmatrix}.$$

On a donc $\partial_{a_{i\sigma}}^{(\delta)}[\operatorname{Tr}_V(t^m)] = 0$ dès que $\lambda(m) \in \delta\Delta_{i,\sigma}$ et ne rencontre pas les facettes ne contenant pas l'origine. Ceci ce se traduit par

$$m \in \delta \times (P_i - s_{i\sigma}) \setminus \bigcup_{\rho \notin \sigma(1)} \delta \times (P_i^\rho - s_{i\sigma}),$$

soit encore

$$m \in \delta \times \operatorname{int}_\sigma(P_i - s_{i\sigma}),$$

ce qui finit la preuve du point 1 puisque $\partial_{a_{i\sigma}}^{(\delta)} \operatorname{Tr}_V(t^m) = 0 \Rightarrow \deg_{a_{i\sigma}} \operatorname{Tr}_V(t^m) \leq \delta - 1$.

Par définition la fonction support du diviseur $D_m := \operatorname{div}(t^m)$ (Sous-section 1.2.6) est définie par $\Psi_{D_m}(\eta_\rho) = < m, \eta_\rho >$, $\forall \rho \in \Sigma(1)$ et

$$m \in \delta \times \operatorname{int}_\sigma(P_i - s_{i\sigma}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \Psi_{D_m}(\eta_\rho) \geq \Psi_{\delta D_i}(\eta_\rho) - < \delta s_{i\sigma}, \eta_\rho >, \ \rho \in \sigma(1) \\ \Psi_{D_m}(\eta_\rho) > \Psi_{\delta D_i}(\eta_\rho) - < \delta s_{i\sigma}, \eta_\rho >, \ \rho \notin \sigma(1). \end{cases}$$

Si $\rho \in \sigma(1)$, on a $\Psi_{D_i}(\eta_\rho) - s_{i\sigma}(\eta_\rho) = 0$ et la première condition est vérifié pour tout $m \in \check{\sigma}$. L'entier $\delta_{i\sigma}(m)$ est donc le plus petit des entiers pour lequel

$$\Psi_{D_m} > (\delta+1)\Psi_{D_{i,\sigma}} \quad \text{sur } |\Sigma| \setminus \sigma.$$

(puisque D_i est très ample, l'entier δ existe puisque Ψ_{D_i} prend des valeurs strictement négatives sur $|\Sigma| \setminus \sigma$). Si D est effectif et globalement engendré sur X son représentant D_σ est effectif, à support dans H_σ (Lemme 1.5). Toute section globale $f \in \mathcal{O}_X(D_\sigma)$ a son support inclus dans le polytope $P_{D_\sigma} \subset \check{\sigma}$ associé à D_σ et la condition

$$\Psi_{D_\sigma} > (\delta+1)\Psi_{D_{i,\sigma}} \quad \text{sur } |\Sigma| \setminus \sigma$$

implique $\Psi_{D_m}(\eta_\rho) > (\delta+1)[\Psi_{D_i}(\eta_\rho) - < s_{i\sigma}, \eta_\rho >]$, $\rho \notin \sigma(1)$ pour tout $m \in P_{D_\sigma}$, ce qui montre le point 2. On peut noter que l'entier $\delta_{i\sigma}(m)$ est le plus petit entier δ tel que le $(\delta+1)P_i$-homogénéïsé de $t^{m+(\delta+1)s_{i\sigma}}$ soit divisible par $\prod_{\rho\notin\sigma(1)} x_\rho$, c'est-à-dire identiquement nul sur l'hypersurface à l'infini $H_\sigma = X \setminus U_\sigma$. □

Proposition 3.7 *On a les assertions suivantes :*

1. *soit $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\dim(V \cap H_\sigma) < \dim V$. Pour tout $i = 1, \ldots, k$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout cône maximal $\sigma' \in \Sigma(n)$, la fonction rationnelle $\mathrm{Tr}_V(t^{r(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})})$ est polynômiale en $a_{i\sigma}$ de degré au plus r :*

$$\deg_{a_{i\sigma}} \mathrm{Tr}_V(t^{r(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})}) \leq r;$$

   en particulier, la trace des monômes σ-extrémaux de P_i est affine en les coefficients σ'-extrémaux de L_i ;

2. *il y a égalité si l'intersection $V \cap \mathrm{div}_0(t^{(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})}) \cap H_\sigma$ est de dimension $k-2$; c'est en particulier le cas si V intersecte proprement toutes les orbites de X.*

Preuve. Pour le point 1, il suffit de constater que $\delta_{i\sigma}(r(s_{i\sigma'} - s_{i\sigma})) = r$. On montre le point 2. Il suffit de trouver $a_0 \in \mathrm{Reg}_V(X^*)$ pour lequel

$$\partial^{(r)}_{a_{i\sigma}}[\mathrm{Tr}_V(t^{r(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})})](a_0) \neq 0$$

pour que le degré soit r. On considère le paramètre $a_i^0 := (0, \ldots, 0, a_{i\sigma'}, 0, \ldots, 0)$ correspondant à la section $l_i^\sigma(a_i^0) = a_{i\sigma'} t^{r(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})}$ de $\mathcal{O}_X(D_{i\sigma})$. On a alors

$$t^{r(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})} dl_i^\sigma(a_{i0}) = \frac{1}{r+1} d(l_i^\sigma)^{r+1}(a_{i0}),$$

et l'hypothèse
$$\dim(V \cap \mathrm{div}_0(t^{(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})}) \cap H_\sigma) = k-2$$
implique que l'intersection $V \cap C_{(a_1,\dots,a_i^0,\dots,a_k)}$ est incluse dans U^σ (donc finie) pour $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots a_k$ génériques, de cardinal $N = MV(P_1,\dots,P_n)$ en prenant les multiplicités en compte. En calquant la preuve de la Proposition 3.9 à venir, on a l'égalité

$$\partial^{(r)}_{a_{i\sigma}}[\mathrm{Tr}_V(t^{r(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})})] = (-1)^r r! \begin{bmatrix} t^{r(s_{i\sigma'}-s_{i\sigma})} dl_1^\sigma \wedge \cdots \wedge d(l_i^\sigma) \wedge \cdots \wedge df_n^\sigma \\ l_1^\sigma,\dots,(l_i^\sigma)^{r+1},\dots,l_k^\sigma, f_{k+1}^\sigma,\dots,f_n^\sigma \end{bmatrix}.$$

Evaluée en $a_i = a_i^0$, cette expression est définie pour $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots a_k$ génériques et vaut

$$\frac{(-1)^r r!}{r+1}\mathrm{Res}\begin{bmatrix} dl_1^\sigma \wedge \cdots \wedge d(l_i^\sigma)^{r+1}(a_i^0) \wedge \cdots \wedge df_n^\sigma \\ l_1^\sigma,\dots,(l_i^\sigma)^{r+1}(a_i^0),\dots,l_k^\sigma,\dots,f_n^\sigma \end{bmatrix} = \frac{(-1)^r r!}{r+1} \times N(r+1) = (-1)^r r! N,$$

où $N \neq 0$, ce qui termine la preuve. $\square$

Corollaire 3.6 *Soit $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(rD_i))$. Si l'intersection $V \cap (X \setminus \mathbb{T})$ est propre, on a la majoration*

$$\deg_{a_{i\sigma}} \mathrm{Tr}_V(f^\sigma) \leq r$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout cône maximal σ, où $f^\sigma := t^{-rs_{i\sigma}} f \in \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n]$, avec égalité pour f générique.

Preuve. Le polynôme de Laurent f^σ est supporté par $r \times (P_i - s_{i\sigma})$. Or

$$\sup\{\delta_{i\sigma}(m)\,;\, m \in r \times (P_i - s_{i\sigma})\} = r,$$

ce qui donne l'inégalité d'après la proposition précédente. Toujours d'après cette même proposition, il suffit que $rs_{i\sigma'} \in \mathrm{supp}\,(f)$ pour un cône maximal $\sigma' \neq \sigma$ et que l'intersection $\mathrm{div}_0 h \cap V$ soit propre pour avoir égalité, ce qui est bien une condition générique si V intersecte proprement les orbites de X. $\square$

Avant d'en venir aux problèmes d'inversion du théorème d'Abel, il semble important de s'intéresser aux équations différentielles qui interviennent dans les calculs de traces.

3.4 Equations différentielles associées à une famille de fibrés

Les coefficients des formes traces sont liés par des équations différentielles du type “équations d'onde de choc” déjà fortement impliquées dans le cas $X = \mathbb{P}^n$.

On fixe une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ essentielle semi-ample sur une variété torique compacte lisse X. On note X^* le $(L_1, \ldots, L_k)$-dual de X.

3.4.1 Les équations d'onde de choc

Soit $a_0 \in \mathrm{Reg}\,(X^*)$ et $V \in \mathcal{C}_r^0(X\,;\,C_{a_0})$ un unique germe irréductible lisse d'ensemble analytique de dimension $r \leq k$ et de $(L_1, \ldots, L_k)$-degré 1. Quitte à perturber a_0, on peut supposer que le germe dual $V^* \in \mathcal{C}^0(X^*, a_0)$ (de codimension $k - r$, Proposition 2.4) est lisse. On peut dans ce cas définir l'application holomorphe

$$\begin{array}{rcl} \phi_V : V^* & \longrightarrow & X \\ a & \longmapsto & p(a) := V \cap C_a. \end{array}$$

Puisque $\deg_{a_0} V = 1$, on a $\mathbb{C}(I_V) \simeq \mathbb{C}(V^*)$ (Proposition 2.6) et

$$q_V^*(p_{V^*}(\mathcal{O}_{p(a_0),V})) \simeq \phi_V^*(\mathcal{O}_{p(a_0),X}) \subset \mathcal{O}_{a_0,V^*}.$$

La proposition suivante permet de caractériser ce sous-anneau. On note

$$p(a) = (T_1(a), \ldots, T_n(a))$$

les coordonnées toriques de $p(a)$, où $T_j(a) = t_j(p(a)) = \phi_V^*(t_j)$.

Proposition 3.8 *Si $V \subset \mathbb{T}$, on a la caractérisation :*

$$\widetilde{f} \in q_{V*}(p_V^*(\mathcal{O}_{p(a_0),V})) \Longleftrightarrow (T^m \partial_{a_{im'}} \widetilde{f} - T^{m'} \partial_{a_{im}} \widetilde{f})_{|V^*} = 0 \tag{3.5}$$

pour tout $i = 1, \ldots, k$, tout m, $m' \in P_i$.

La preuve s'appuie sur le lemme qui suit, extension au cas torique du lemme de Darboux (équation d'onde de choc) utilisé dans le cas projectif.
Si $V \subset U_\sigma$, $\sigma \in \Sigma(n)$ on note

$$p(a) = (X_1^\sigma(a), \ldots, X_n^\sigma(a)) := (x_1^\sigma(p(a)), \ldots, x_n^\sigma(p(a)))$$

les coordonnées affines de $p(a)$ avec, pour $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$(X^\sigma)^\xi(a) := (X_1^\sigma)^{\xi_1}(a) \cdots (X_n^\sigma)^{\xi_n}(a)\,.$$

L'application $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ associe à $m \in M$ ses coordonnées dans la $\mathbb{Z}$-base du semi-groupe libre $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$.

Lemme 3.7 *On a les deux assertions suivantes.*

1. *Si $V \subset U_\sigma$, les germes analytiques $X_j^\sigma \in \mathcal{O}_{a_0,X^*}$, $j = 1, \dots, n$, vérifient sur V^* le système différentiel suivant :*

$$\forall\, i = 1, \dots, k,\ \forall\, m \in P_i, \qquad \partial_{a_{im}} X_j^\sigma = X^{\sigma\lambda(m - s_{i\sigma})} \partial_{a_{i\sigma}} X_j^\sigma. \tag{3.6}$$

2. *Si $V \subset \mathbb{T}$, les germes analytiques $T_j \in \mathcal{O}_{a_0,X^*}$, $j = 1, \dots, n$, vérifient sur V^* le système différentiel suivant :*

$$\forall\, i = 1, \dots, k,\ \forall\, m,\, m' \in P_i \cap \mathbb{Z}^n, \quad T^m \partial_{a_{im'}} T_j - T^{m'} \partial_{a_{im}} T_j = 0. \tag{3.7}$$

Preuve. 1. L'expression (3.6) a un sens puisque

$$a \in V^* \Rightarrow p(a) \in U_\sigma \quad \text{et} \quad m \in P_i \Rightarrow x^{\sigma\lambda(m - s_{i\sigma})} \in \mathcal{O}_X(U_\sigma).$$

Pour $p = (x_1^\sigma(p), \dots, x_n^\sigma(p)) \in U_\sigma$, on a

$$a \in q_X(p_X^{-1}(p)) \Longleftrightarrow a_{i\sigma} = - \sum_{m \in P_i\,,\, m \neq s_{i\sigma}} a_{im} (x^\sigma)^{\lambda(m - s_{i\sigma})}(p) \ \ \forall i = 1, \dots, k.$$

On note $a_{i,[\sigma]}$ le vecteur $(a_{im})_{m \in P_i\,,\, m \neq s_{i\sigma}}$, $i = 1, \dots, k$. Si $p \in V$, la fonction

$$\begin{aligned} X_{p,j} : a \quad \longmapsto \quad & X_j^\sigma\Big(a_{1,[\sigma]}\,,\, - \sum_{m \in P_1, m \neq s_{1\sigma}} a_{1m} (x^\sigma)^{\lambda(m - s_{1\sigma})}(p), \cdots \\ & \qquad \cdots\,,\, a_{k,[\sigma]}\,,\, - \sum_{m \in P_k, m \neq s_{k\sigma}} a_{km} (x^\sigma)^{\lambda(m - s_{k\sigma})}(p)\Big) \end{aligned}$$

associe à $a \in V^*$ voisin de a_0 la j-ème coordonnée (exprimée dans la carte U^σ) de l'unique point de l'intersection $V \cap C_a$, ce avec la condition $p \in C_a$. Si $p \in V$, cette fonction est donc constante sur V^* :

$$X_{p,j}(a) = x_j^\sigma(p) \quad \forall\, a \in V^*, \quad \forall p \in V;$$

en dérivant par rapport à a_{im}, on obtient les égalités :

$$\partial_{a_{im}} X_j^\sigma - (x^\sigma)^{\lambda(m - s_{i\sigma})}(p)\, \partial_{a_{i\sigma}} X_j^\sigma = 0, \quad \forall\, p \in V.$$

Or, $a \in V^* \Rightarrow (X_1^\sigma(a), \cdots, X_n^\sigma(a)) \in V$ et on peut remplacer $(x^\sigma)^{\lambda(m-s_{i\sigma})}(p)$ par $(X^\sigma)^{\lambda(m-s_{i\sigma})}(a)$ dans l'expression précédente ce qui montre 1.
2. Soient $m, m' \in P_i \cap \mathbb{Z}^n$. Des deux équations

$$\partial_{a_{im}} X_j^\sigma = (X^\sigma)^{\lambda(m-s_{i\sigma})} \partial_{a_{i\sigma}} X_j^\sigma \quad \text{et} \quad \partial_{a_{im'}} X_j^\sigma = (X^\sigma)^{\lambda(m'-s_{i\sigma})} \partial_{a_{i\sigma}} X_j^\sigma\,,$$

on déduit la relation

$$(X^\sigma)^{\lambda(m')} \partial_{a_{im}} X_j^\sigma - (X^\sigma)^{\lambda(m)} \partial_{a_{im'}} X_j^\sigma\,, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Puisque $V \subset \mathbb{T}$, on a $t^m \in \mathcal{O}_{p(a_0),X}$ et l'égalité $(x^\sigma)_{|\mathbb{T}}^{\lambda(m)} = t^m$ donne (3.7). □

On prouve maintenant la Proposition 3.8.

Preuve. Si $f = f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{O}_{p(a_0),X}$, son *pull-back* $\phi_V^*(f) = f(T_1, \ldots, T_n)$ par l'application holomorphe ϕ_V est un élément de l'anneau $\mathcal{O}_{a_0,V^*}$ qui vérifie

$$\begin{aligned} T^m \partial_{a_{im'}}[\phi_V^*(f)] &= \sum_{j=1}^n T^m \partial_{a_{im'}}[T_j] \times \partial_{t_j} \widetilde{f} \\ &= \sum_{j=1}^n T^{m'} \partial_{a_{im}}[T_j] \times \partial_{t_j} \widetilde{f} = T^{m'} \partial_{a_{im}}[\phi_V^*(f)]\,, \end{aligned}$$

ce qui montre le sens direct.
Soit $\widetilde{f} \in \mathcal{O}_{a_0,V^*}$ qui vérifie 3.5. Le germe holomorphe $q_V^*(\widetilde{f}) \in \mathcal{O}_{(p(a_0),a_0)}(I_V)$ admet comme représentant la fonction obtenue en remplaçant a_{im} par sa valeur modulo $l_i(a,t)$ dans l'expression locale de $\widetilde{f}$. Le fait que $\widetilde{f}$ vérifie 3.5 sur V^* équivaut à ce que le germe $q_V^*(\widetilde{f})$ soit constant sur les fibres de p_V et redescende en une fonction $f \in \mathcal{O}_{p(a_0),V}$ qui vérifie $\widetilde{f} = \phi_V^*(f) = q_{V*}(p_V^* f)$ par construction. □

On appelle les équations aux dérivées partielles 3.5 les *équations d'onde de choc* associées aux fibrés $L_1, \ldots, L_k$.

3.4.2 Le lemme de prolongement

Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ une famille semi-ample essentielle, U un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave connexe et $V \in \mathcal{E}_k(U)$ un sous-ensemble analytique fermé irréductible, non dégénéré, localement intersection complète. On fixe Φ une k-forme méromorphe sur V.

D'après le Lemme 3.5), on peut choisir une carte U_σ dans laquelle l'intersection $V \cap C_a$ a lieu pour a générique (en dehors d'un sous-ensemble analytique de U^* de codimension au moins 1). On note

$$U^*_{V,\Phi,\sigma} := \mathrm{Reg}_V(U^*) \setminus \{(W_\Phi)^* \cup (V \cap H_\sigma)^*\}$$

l'ouvert dense de U^* dans lequel l'expression de la trace est donnée par (3.3). On note Φ^σ l'expression locale de Φ en x^σ, $f^\sigma_{k+1}, \ldots, f^\sigma_n$ les équations locales de V au voisinage de $V \cap C_a$. Puisque Φ est de degré maximal sur V, on peut définir, pour $m \in M$ les fonctions

$$w_m = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} (x^\sigma)^{\lambda(m)}\Phi^\sigma \bigwedge_{j=k+1}^n df^\sigma_j \\ l^\sigma_1(a_1, x^\sigma), \ldots, l^\sigma_k(a_k, x^\sigma), f^\sigma_{k+1}, \ldots, f^\sigma_n \end{bmatrix}$$

et l'expression (3.3) devient

$$\mathrm{Tr}_V \Phi = \sum_{m=(m_1,\ldots,m_k)\in P_1\times\cdots\times P_k} w_{m_1+\cdots+m_k} da_m$$

où da_m désigne la k-forme $\wedge_{i=1}^k da_{im_i}$.

Lemme 3.8 *Si $m \in ((P_1 + \cdots + P_k) + \check{\sigma}) \cap \mathbb{Z}^n$, on a $w_m \in \mathbb{C}(U^*)$. Si $\dim(V \cap X \setminus \mathbb{T}) < \dim V$, on a $w_m \in \mathbb{C}(U^*)$ pour tout $m \in M$.*

Preuve. On a $w_m \in \mathbb{C}(U^*)$ pour tout $m \in P_1 + \cdots + P_k$ d'après la Proposition 3.1 et la représentation précédente. Si $m' \in \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$, la fonction rationnelle $t^{m'}$ est holomorphe sur U_σ et $t^{m'}\Phi \in M^k(V)$ par hypothèse sur V. Or, on a :

$$\mathrm{Tr}_V t^{m'}\Phi = \sum_{m=(m_1,\ldots,m_k)\in P_1\times\cdots\times P_k} w_{m_1+\cdots+m_k+m'} da_m$$

et les fonctions $w_{m_1+\cdots+m_k+m'}$ sont méromorphes d'après la Proposition 3.1, et ce pour tout $m' \in \check{\sigma}\cap\mathbb{Z}^n$, ce qui montre la première partie. Si V intersecte proprement $X \setminus \mathbb{T}$, les formes $t^{m'}\Phi$ sont méromorphes sur V pour tout $m' \in M$, et le théorème d'Abel permet à nouveau de conclure. □

Proposition 3.9 *Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, tout $m \in P_i$, et pour tout m' dans la somme $(P_1 + \cdots + P_k + \check{\sigma}) \cap \mathbb{Z}^n$, les fonctions w_m vérifient les équations différentielles suivantes :*

$$\partial_{a_{im}} w_{m'} = \partial_{a_{i\sigma}}[w_{m+m'-s_{i\sigma}}]. \tag{3.8}$$

Preuve. Les fonctions $w_{m'}$ et $w_{m+m'-s_{i\sigma}}$ sont méromorphes d'après la proposition précédente. D'après la définition des courants résiduels, on a

$$w_{m'} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma(\epsilon)} \frac{\Phi^\sigma \bigwedge_{j=k+1}^n df_j^\sigma}{l_1^\sigma(a_1, x^\sigma) \cdots l_k^\sigma(a_k, x^\sigma) f_{k+1}^\sigma \cdots f_n^\sigma}$$

où $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ et $\Gamma(\epsilon) = \{|l_1^\sigma| = \epsilon_1, \ldots, |l_k^\sigma| = \epsilon_k, |f_{k+1}^\sigma| = \epsilon_{k+1}, \ldots, |f_n^\sigma| = \epsilon_n\}$. Puisque le numérateur est par hypothèse holomorphe au voisinage de $V \cap C_a$ pour tout $a \in U^*_{V,\Phi,\sigma}$, cette intégrale ne dépend pas de ϵ pour les ϵ_i suffisament petits par le théorème de Stokes, et converge uniformément pour tout a dans un compact suffisament petit de $U^*_{V,\Phi,\sigma}$. On peut donc dériver sous le signe intégral et on a :

$$\partial_{a_{im}} w_{m'} = -\int_{\Gamma(\epsilon)} \frac{\partial_{a_{im}}[l_i^\sigma] \Phi^\sigma \bigwedge_{j=k+1}^n df_j^\sigma}{l_1^\sigma \cdots (l_i^\sigma)^2, \ldots, l_k^\sigma f_{k+1}^\sigma \cdots f_n^\sigma}$$

Puisque les degrés sont semi-amples, on a $l_i^\sigma = \sum_{m \in P_i} a_{im} (x^\sigma)^{\lambda(m - s_{i\sigma})}$; ainsi,

$$\partial_{a_{im}} w_{m'} = -\int_{\Gamma(\epsilon)} \frac{(x^\sigma)^{\lambda(m-s_{i\sigma})} \Phi^\sigma \bigwedge_{j=k+1}^n df_j^\sigma}{l_1^\sigma \cdots (l_i^\sigma)^2 \cdots l_k^\sigma f_{k+1}^\sigma, \ldots, f_n^\sigma} = \partial_{a_{i\sigma}}[w_{m+m'-s_{i\sigma}}]$$

puisque $\partial_{a_{i\sigma}}[l_i^\sigma] = 1$. □

Remarque 3.5 La forme Φ étant de degré maximal sur V, le courant $\Phi \wedge [V]$ est d-fermé en dehors de W_Φ. Puisque la trace commute avec d, on a

$$d(\mathrm{Tr}_V \Phi) = 0 \qquad \forall a \in U^* \setminus W_\Phi^*.$$

Les équations différentielles (3.8) sont l'interprétation de cette condition de fermeture, dans l'ouvert dense $U^*_{V,\Phi,\sigma} \subset U^* \setminus W_\Phi^*$.

L'intérêt majeur de la proposition précédente est le *Lemme de prolongement* suivant :

Lemme 3.9 *Si la k-forme $\mathrm{Tr}_V(\Phi)$ est rationnelle en $a_{i\sigma}$, alors pour tout $K \in \mathbb{N}$ et pour tout polynôme de Laurent $f \in \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}]$ supporté par $K \times (P_i - s_{i\sigma})$, la trace*

$$\mathrm{Tr}_V(f\Phi) \in M^k(U^*)$$

est rationnelle en $a_{i\sigma}$.

Preuve. Par hypothèse, V intersecte proprement $H_\sigma = X \setminus U_\sigma$ et $\mathrm{Tr}_V(f\Phi) \in M^k(U^*)$ pour tout polynôme de Laurent supporté dans $K(P_i - s_{i\sigma}) \subset \check{\sigma}$.

Pour prouver la seconde assertion, on peut se restreindre par linéarité au cas monômial $f = t^m$. En gardant les notations précédentes, on obtient l'égalité

$$\mathrm{Tr}_V(t^m\Phi) = \sum_{(m_1,\ldots,m_k)\in P_1\times\cdots\times P_k} w_{m_1+\cdots+m_k+m} \bigwedge_{i=1}^{k} da_{im_i}.$$

On montre par récurrence sur K que les fonctions w_{M+m} sont rationnelles en $a_{i\sigma}$, pour tout $M \in P_1 + \cdots + P_k$ et tout $m \in K(P_i - s_{i\sigma}) \cap \mathbb{Z}^n$. Pour $K = 0$, c'est notre hypothèse de départ. Soit $m \in (K+1)(P_i - s_{i\sigma})$. Par hypothèse, on a :

$$m = m' + m_i - s_{i\sigma}, \quad m' \in K(P_i - s_{i\sigma}) \cap \mathbb{Z}^n, \;\; m_i \in P_i;$$

Soit $M \in P_1 + \cdots + P_k$. D'après (3.8), on a :

$$\partial_{a_{i\sigma}}[w_{m+M}] = \partial_{a_{i\sigma}}[w_{M+m'+m_i-s_{i\sigma}}] = \partial_{a_{im_i}} w_{m'+M}\,.$$

Puisque $m' \in K(P_i - s_{i\sigma})$, la fonction $w_{m'+M}$ est coefficient de la forme $\mathrm{Tr}_V(t^{m'}\Phi)$, donc un élément de $\mathbb{C}(U^*)$ rationnel en $a_{i\sigma}$ par hypothèse de récurrence. Il reste à montrer que la fonction w_{m+M} ne peut pas avoir de pôles simples en $a_{i\sigma}$. On utilise la même astuce que dans le cas projectif : si $\partial_{a_{i\sigma}}[w_{m+M}] = 0$, c'est fini. Dans le cas contraire, on peut trouver $c \in \mathbb{C}^*$ tel que les fonctions w_{m+M} et $w_{m'+M} + c\,w_{m+M}$ soient $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes. On a :

$$\partial_{a_{i\sigma}}[w_{m'+M} + cw_{m+M}] = \partial_{a_{i\sigma}}[w_{m'+M}] + c\,\partial_{a_{im_i}}[w_{m'+M}] = \partial_{a_{i\sigma}+ca_{im_i}}[w_{m'+M}]$$

et la fonction $\partial_{a_{i\sigma}}[w_{m'+M} + cw_{m+M}]$ admet deux primitives linéairement indépendantes ($w_{m'+M} + cw_{m+M}$ et $w_{m'+M}$) dans deux directions linéairement indépendantes ($a_{i\sigma}$ et $a_{i\sigma} + c\,a_{im_i}$). Elle ne peut donc avoir de pôles d'ordre 1 en $a_{i\sigma}$ dans sa décomposition en éléments simples. La primitive d'une fonction rationnelle ayant un pôle d'ordre au moins 2 étant encore rationnelle, la fonction $w_{m'+M} + cw_{m+M}$ est rationnelle en $a_{i\sigma}$. Ainsi w_{m+M} l'est, ce qui conclut à la validité de la seconde assertion du lemme au rang $K+1$. □

Remarque 3.6 Il est important que f soit supportée dans le sous-réseau engendré par P_i. C'est seulement dans ce cas que les variations des formes $\mathrm{Tr}_V(f\Phi)$ et $\mathrm{Tr}_V\Phi$ en les coefficients a_{im_i} peuvent être mises en relation.

Corollaire 3.7 *Sous les mêmes hypothèses, si la forme* $\mathrm{Tr}_V\Phi$ *est rationnelle en* $a_{i\sigma}$ *pour tout* $i = 1, \ldots, k$*, alors* $\mathrm{Tr}_V f\Phi$ *est rationnelle en* $a_{i\sigma}$ *pour tout* $i = 1, \ldots, k$ *dès que*

$$\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+ \times \bigcap_{i=1}^{k} (P_i - s_{i\sigma}).$$

Si $\dim(V \cap X \setminus \mathbb{T}) < \dim V$*, la rationalité de* $\mathrm{Tr}_V\Phi$ *en les coefficients* σ*-extrémaux pour tout cône* $\sigma \in \Sigma(n)$ *entraîne la rationalité de* $\mathrm{Tr}_V(f\Phi)$ *en les coefficients* σ*-extrémaux pour tout polynôme de Laurent*

$$f \in \bigcap_{i=1}^{k} \Big(\bigoplus_{K=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(KD_i)) \Big), \qquad K \in \mathbb{N},$$

où D_i *est le* $\mathbb{T}$*-diviseur associé au fibré* L_i*.*

Preuve. Si $m \in \bigcap_{i=1}^{k}(P_i - s_{i\sigma})$, on a $m + s_{i\sigma} \in P_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, et le lemme précédent permet de conclure à la rationalité des traces $\mathrm{Tr}_V f\Phi$ en les coefficients σ-extrémaux pour chacun des fibrés $L_1, \ldots, L_k$ pour tout polynôme de Laurent f supporté par $\bigcap_{i=1}^{k}(P_i - s_{i\sigma})$. On étend facilement par récurrence ce résultat pour tout f supporté par $\mathbb{R}^+ \times \bigcap_{i=1}^{k}(P_i - s_{i\sigma}) \cap \mathbb{Z}^n$.

Si V intersecte proprement $X \setminus \mathbb{T}$, la restriction à U de tout polynôme de Laurent est méromorphe sur V. Dans ce cas le Lemme 3.9 de prolongement est valide pour tout f de support inclus dans $\mathbb{Z} \times (P_1 \cap \cdots \cap P_k)$; pour un tel f, il existe des entiers $K_1, \ldots, K_k$ tels $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K_iD_i))$, $i = 1, \ldots, k$. $\square$

3.5 Algèbre linéaire

Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ une famille semi-ample essentielle et $U \subset X$ un ouvert $(L_1, \ldots, L_k)$-concave connexe. On fixe $V \in \mathcal{E}_k(U)$ un sous-ensemble analytique fermé de dimension k de U, de degré

$$N = [\mathbb{C}(I_V) : \mathbb{C}(V^*)]$$

relativement à $(L_1, \ldots, L_k)$.

3.5.1 Polynôme caractéristique

Définition

Pour tout $a_0 \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$, l'intersection $V \cap C_{a_0}$ est transverse, constituée de N points distincts $\{p_1(a_0), \ldots, p_N(a_0)\}$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $U^*_{a_0}$ de a_0, N voisinages $U_i \subset U$ de $p_i(a_0)$, $i = 1, \ldots, N$ et N germes d'applications analytiques

$$\begin{array}{rcl} \phi_i : U^*_{a_0} & \longrightarrow & U_i \\ a & \longmapsto & p_i(a) := (V \cap U_i) \cap C_a; \end{array}$$

pour $i = 1, \ldots, N$.

À toute fonction f holomorphe au voisinage de $C_a \cap V$ peut-être associé le polynôme :

$$P_f = Y^N - \sigma_{N-1}(f)Y^{N-1} + \cdots + (-1)^N \sigma_0(f) \in \mathcal{O}_{a_0,X^*}[Y]$$

défini par

$$P_f(Y) = \prod_{i=1}^{N} (Y - \phi_i^* f).$$

Lemme 3.10 *Soit $f \in \mathbb{C}(V)$. On a les deux points suivants :*

1. *le polynôme P_f est un élément de $\mathbb{C}(U^*)[Y]$ et ne dépend pas du choix de $a_0 \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$ pour le définir ;*
2. *la fonction $P_f(f) \in \mathbb{C}(U \times U^*)$ est nulle sur la sous-variété $I_V \subset U \times U^*$.*

On appelle P_f le polynôme caractéristique de f.

Preuve. D'après la théorie des polynômes symétriques, les germes holomorphes $\sigma_j \in \mathcal{O}_{a_0,X^*}$ sont des polynômes de degré j en les sommes des puissances $l^{ième}$ des racines de P_f, pour $l = 0, \ldots, j$. Or on a

$$\sum_{i=1}^{N} (\phi_i^* f)^l = \sum_{P_i \in V \cap C_a} f^l(p_i) = \mathrm{Tr}_V\,(f^l) \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Si $f \in \mathbb{C}(V)$, ces fonctions sont méromorphes dans U^* par le théorème d'Abel, d'où $P_f \in \mathbb{C}(U^*)[Y]$. La construction de P_f ne dépend pas du choix de a_0 par unicité du prolongement analytique.

D'après le point précédent, on a bien $P_f(f) \in \mathbb{C}(U \times U^*)$. Pour tout $a \in U^*_{a_0}$, on a

$$(x,a) \in I_V \Longleftrightarrow \exists i \in \{1,\ldots,N\} \;\; x = p_i(a)$$

et la fonction $P_f(f)$ est par construction identiquement nulle sur $q_U^{-1}(U^*_{a_0}) \cap I_V$. Par hypothèse, l'ensemble $q_U^{-1}(U^*_{a_0}) \cap I_V$ est un ouvert de I_V rencontrant chacune des branches irréductibles de I_V. On a donc $P_f(f) = 0$ sur I_V par unicité du prolongement analytique. □

Si $f, g \in \mathbb{C}(V)$, on a $P_f = P_g$ si et seulement si $(f-g)_{|V \cap C_a} = 0$ pour tout a dans un ouvert de U^*. Ceci implique que $f - g$ s'annule sur un ouvert de V, donc sur V puisque U est concave connexe et C_a rencontre toutes les branches irréductibles de V. On peut ainsi définir une application injective

$$\begin{array}{rcl} \Psi_V : \mathbb{C}(V) & \longrightarrow & \mathbb{C}(U^*)[Y] \\ f & \longmapsto & P_f \,. \end{array}$$

Lien avec les équations d'onde de choc

Les coefficients de P_f sont solutions d'un système différentiel particulier, lié aux équations différentielles (3.5) vérifiées par les germes holomorphes $\phi_i^*(f)$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$, on note P_m le polynôme caractéristique de t^m et $\sigma_0(m), \ldots, \sigma_{N-1}(m)$ ses coefficients.

Proposition 3.10 *Pour tout $m, m' \in P_j$, le polynôme caractéristique $P_{m-m'}$ vérifie le système différentiel suivant :*

$$\partial_{a_{jm}}[P_{m-m'}(Y)] - Y\partial_{a_{jm'}}[P_{m-m'}(Y)] = -\partial_{a_{jm'}}(\mathrm{Tr}_V(t^{m-m'}))\, P_{m-m'}(Y). \quad (3.9)$$

Preuve. D'après l'équation (3.5), on a l'égalité

$$\left[t^{m'}(p_r(a))\right]\partial_{a_{jm}}\left[t^{m-m'}(p_r(a))\right] = \partial_{a_{jm'}}\left[t^{m-m'}(p_r(a))\right] \times \left[t^{m}(p_r(a))\right]$$

pour tout $a \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$, puisque $m, m' \in P_j$. On en déduit la relation

$$\partial_{a_{jm}}[Y - t^{m-m'}(p_r)] - Y\partial_{a_{jm'}}[Y - t^{m-m'}(p_r)] = -\partial_{a_{jm}}\left[t^{m-m'}(p_r)\right](Y - t^{m-m'}(p_r))$$

pour tout $r = 1, \ldots, N$. Cette relation s'étend au produit

$$P_{m-m'}(Y) = \prod_{r=1}^{N}(Y - t^{m-m'}(p_r(a)))$$

et on trouve

$$\partial_{a_{jm}}[P_{m-m'}(Y)] - Y\partial_{a_{jm'}}[P_{m-m'}(Y)] \in \big(P_{m-m'}(Y)\big)$$

Il n'est pas dur de voir que le coefficient de proportionalité entre ces deux polynômes en Y (qui sont de même de degré) est $-\partial_{a_{jm'}}[\sigma_{N-1}(m-m')]$. Le coefficient $\sigma_{N-1}(m-m')$ correspond à la somme des racines de $P_{m-m'}$, c'est-à-dire la trace de $t^{m-m'}$ sur V. □

Corollaire 3.8 *Pour tout $m, m' \in P_j$, les fonctions rationnelles*

$$\sigma_0(m-m') = \prod_{p\in V\cap C_a} t^{m-m'}(p)$$

et

$$\sigma_{N-1}(m-m') = \sum_{p\in V\cap C_a} t^{m-m'}(p) = \mathrm{Tr}_V(t^{m-m'})$$

sont reliées par les équations différentielles

$$\partial_{a_{jm}}[\sigma_0(m-m')] = \sigma_0(m-m')\,\partial_{a_{jm'}}[\sigma_{N-1}(m-m')]$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$.

Preuve. Ceci résulte de l'identification des coefficients constants dans l'égalité des polynômes (3.9). □

Réduction au calcul résiduel d'une variable

L'application $q_V : I_V \to V^*$ est surjective, revêtement ramifié de degré N en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins deux dans U^*. Ainsi, le morphisme de corps

$$q_V^* : \mathbb{C}(V^*) \to \mathbb{C}(I_V)$$

est injectif et on peut identifier le corps de fonctions $\mathbb{C}(V^*)$ avec $q_V^*(\mathbb{C}(V^*))$.

Le corps $\mathbb{C}(I_V)$ est une extension algébrique de degré N de $\mathbb{C}(V^*)$, avec l'égalité $V^* = U^*$, puisque V est supposé non dégénéré de dimension k dans l'ouvert connexe U.

Lemme 3.11 *Pour tout $f \in \mathbb{C}(V)$, on a l'égalité*

$$\mathrm{Tr}_V(f^l) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} Y^l \partial_Y[P_f]\, dY \\ P_f \end{bmatrix}.$$

Preuve. On a l'égalité

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} Y^l \partial_Y[P_f]\, dY \\ P_f \end{bmatrix} = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} Y^l d_Y[P_f] \\ P_f \end{bmatrix}.$$

Cette expression est égale à la somme des valeurs de la fonction Y^l en les zéros de P_f. Si $a \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$, les zéros de P_f sont précisément les valeurs de f en les points de $V \cap C_a$, d'où

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} Y^l d_Y(P_f) \\ P_f \end{bmatrix} = \sum_{p \in V \cap C_a} f(p)^l = \mathrm{Tr}_V(f^l)$$

ce qui montre le lemme par unicité du prolongement analytique. $\square$.

Le polynôme caractéristique de f permet de se ramener au calcul résiduel d'une variable.

Si $f \in \mathbb{C}(V)$, on note $[f] := p_V^* f \in \mathbb{C}(I_V)$ la classe de $p_U^*(f) \in \mathbb{C}(I_X)$ dans $\mathbb{C}(I_V)$. Il est clair que $[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2]$ et $[f_1 f_2] = [f_1][f_2]$.

Lemme 3.12 *Si P_f est sans facteur multiple dans sa décomposition en éléments irréductibles dans $\mathbb{C}(U^*)[Y]$, la famille*

$$[1], [f], \ldots, [f^{N-1}]$$

est une base du $\mathbb{C}(U^*)$-espace vectoriel $\mathbb{C}(I_V)$, avec l'isomorphisme

$$\mathbb{C}(I_V) \simeq \mathbb{C}(U^*)[Y]/P_f(Y).$$

Preuve. Toute relation

$$\alpha_0 + \alpha_1[f] + \cdots + \alpha_{N-1}[f^{N-1}] = 0$$

pour $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}) \in \left[\mathbb{C}(V^*)\right]^N \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ implique l'égalité

$$\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \mathrm{Tr}_V(f^j) = 0\,, \tag{3.10}$$

soit encore

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j Y^j\partial_Y(P_f)dY\\ P_f\end{bmatrix}=0$$

d'après le lemme précédent. La condition $P_f(f)_{|I_V}\equiv 0$ (Lemme 3.10) se traduit par

$$[f^N]=\sum_0^{N-1}(-1)^{N-j+1}\sigma_j(f)\times[f^j],$$

ce qui, combiné avec (3.10), donne

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix}Y^r\sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j Y^j\partial_Y(P_f)dY\\ P_f\end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j\mathrm{Tr}_V(f^{j+r})=0,\ \ \forall r\in\mathbb{N}.$$

Par le théorème de dualité, on a $\sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j Y^j\partial_Y(P_f)\in(P_f)$. Puisque $P_f\in\mathbb{C}(U^*)[Y]$ est sans facteur multiple, on a forcément $\sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j Y^j\in(P_f)$, d'où $\alpha=(0,\ldots,0)$. Les vecteurs $[1],[f],\ldots,[f^{N-1}]$ forment donc un système libre sur $\mathbb{C}(U^*)=\mathbb{C}(V^*)$ et constituent une base pour des raisons de dimension.

D'après le Lemme 3.10, le polynôme P_f est dans le noyau du morphisme d'algèbre

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{C}(V^*)[Y] & \longrightarrow & \mathbb{C}(I_V)\\ Q(Y) & \longmapsto & Q([f]).\end{array}$$

D'après le point précédent, cette application est surjective puisque $[f]$ engendre $\mathbb{C}(I_V)$ en tant que $\mathbb{C}(V^*)$-algèbre. Le $\mathbb{C}(V^*)$-espace vectoriel $\mathbb{C}(V^*)[Y]/P_f(Y)$ étant de dimension N, il est isomorphe à $\mathbb{C}(I_V)$. □

Le polynôme caractéristique d'une fonction f prenant des valeurs distinctes (finies) en les points

$$p_1(a_0),\ldots,p_N(a_0)$$

est réduit sur $\mathcal{O}_{a_0,X^*}[Y]$, donc *a fortiori* sur $\mathbb{C}(V^*)[Y]$, et permet de définir une base $[1],\ldots,[f^{N-1}]$ de $\mathbb{C}(I_V)$ sur $\mathbb{C}(V^*)$. On se fixe désormais un tel élément $f\in\mathbb{C}(V)$.

3.5.2 La forme bilinéaire trace

L'application $\mathbb{C}$-bilinéaire

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{C}(V)\times\mathbb{C}(V): & \longrightarrow & \mathbb{C}(V^*)\\ (h_1,h_2) & \longmapsto & \mathrm{Tr}_V(h_1h_2)\end{array}$$

s'étend naturellement en une application $\mathbb{C}(V^*)$-bilinéaire

$$b : \mathbb{C}(I_V) \times \mathbb{C}(I_V) \longrightarrow \mathbb{C}(V^*)$$

définie par :

$$b([f^i],[f^j]) := \mathrm{Tr}_V(f^{i+j}), \quad 0 \leq i,j \leq N-1.$$

On appelle b la forme bilinéaire trace associée à la famille $(L_1, \dots, L_k)$. On note

$$B_f := (\mathrm{Tr}_V(f^i f^j))_{0\leq i,j \leq N-1} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}(U^*))$$

la matrice de b dans la base $[1], \dots, [f^{N-1}]$.

Lemme 3.13 *On a les deux points suivants concernant la matrice B_f :*

1. *B_f se factorise dans $\mathcal{M}_N(\mathcal{O}_{a_0,X^*})$ sous la forme $B_f = D_f \cdot D_f^t$, où*

$$D_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f(p_1(a)) & f(p_2(a)) & \dots & f(p_N(a)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{N-1}(p_1(a)) & f^{N-1}(p_2(a)) & \dots & f^{N-1}(p_N(a)) \end{pmatrix}$$

et D_f^t désigne la matrice transposée de D_f.

2. *On a la relation :*

$$B_f \cdot \begin{pmatrix} \sigma_0(f) \\ \vdots \\ \sigma_{N-1}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}_V(f^N) \\ \vdots \\ \mathrm{Tr}_V(f^{2N-1}) \end{pmatrix}$$

Preuve. 1. C'est un calcul immédiat.
2. On a

$$B_f \cdot \begin{pmatrix} \sigma_0(f) \\ \vdots \\ \sigma_{N-1}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{Tr}_V(\sigma_j f^j) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{Tr}_V(\sigma_j f^{N-1+j}) \end{pmatrix} ;$$

or $\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j f^j_{|V} = f^N_{|V}$ (Lemme 3.10), d'où les égalités $\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{Tr}_V(\sigma_j f^{r+j}) = \mathrm{Tr}_V f^{N+r}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. $\square$

Corollaire 3.9 *L'application bilinéaire trace est non dégénérée.*

Preuve. La matrice D_f est la matrice de Vandermonde du polynôme P_f, de déterminant $\prod_{0 \leq i < j \leq N-1}(f(p_i) - f(p_j)) \in \mathcal{O}_{a_0,X^*}$, d'où l'égalité (dans $\mathcal{O}_{a_0,X^*}$)

$$\det B_f = \Pi_{0 \leq i < j \leq N-1}(f(p_i) - f(p_j))^2$$

avec $\det B_f \in \mathbb{C}(V^*)$. Ainsi, $\det B_f = 0$ si et seulement si P_f n'est pas réduit dans $\mathcal{O}_{a,X^*}$ pour $a \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$ quelconque, ou, de manière équivalente, si et seulement si $p_U^*(f)$ est constante sur une des branches irréductibles de I_V. Puisque V n'est pas dégénéré, il existe une fonction méromorphe $f \in \mathbb{C}(V)$ prenant des valeurs distinctes en les N points distincts $p_1(a), \ldots, p_N(a)$, pour a voisin de $a_0 \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$. On a alors $\det B_f \in \mathbb{C}(U^*) \setminus \{0\}$ et b n'est pas dégénérée sur $\mathbb{C}(V^*)$.

3.5.3 L'endomorphisme de multiplication

Toute fonction $g \in \mathbb{C}(V)$ induit un endomorphisme $m_g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}(I_V))$ sur le $\mathbb{C}(V^*)$-espace vectoriel $\mathbb{C}(I_V)$ *via*

$$\begin{array}{rcl} m_g : \mathbb{C}(I_V) & \longrightarrow & \mathbb{C}(I_V) \\ \sum \alpha_i [f^i] & \longmapsto & \sum \alpha_i [g f^i] \end{array}$$

que l'on appelle l'endomorphisme de multiplication induit par g. On note $M_{g,f}$ la matrice de m_g dans la base $([1], \ldots, [f^{N-1}])$.

Lemme 3.14 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_f : \mathbb{C}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}_N(\mathbb{C}(V^*)) \\ g & \longmapsto & M_{g,f} \end{array}$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres.

Preuve. Soient $h_1, g_1, h_2, g_2 \in \mathbb{C}(V)$. On a naturellement

$$m_{h_1 g_1 + h_2 g_2}([f^i]) = [(h_1 g_1 + h_2 g_2) f^i] = [h_1].([g_1][f^i]) + [h_2].([g_2][f^i]) \,,$$

ce qui fait de Φ_f un morphisme d'algèbres. On a $M_{g_1,f} = M_{g_2,f}$ si et seulement si

$$[g_1][f^j] = [g_2][f^j] \quad j = 0, \ldots, N-1 \,,$$

ce qui implique $\mathrm{Tr}_V((g_1 - g_2) f^j) = 0$, $j = 0, \ldots, N-1$, soit $g_1 - g_2 = 0$ (dans $\mathbb{C}(V)$) d'après le Corollaire 3.9. □

Remarque 3.7 On peut remarquer les deux points suivants :

1. $\Phi_f(\mathbb{C}(V))$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C}(V^*))$ puisque $m_{g_1} \circ m_{g_2} = m_{g_1 g_2} = m_{g_2 g_1} = m_{g_2} \circ m_{g_1}$;
2. si $f' \in \mathbb{C}(V)$ définit une autre base de $\mathbb{C}(I_V)$, les sous-algèbres $\Phi_f(\mathbb{C}(V))$ et $\Phi_{f'}(\mathbb{C}(V))$ sont conjuguées dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C}(V^*))$:
$$M_{g,f} = P M_{g,f'} P^{-1} \quad \forall g \in \mathbb{C}(V),$$
où $P \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}(V^*))$ est la matrice de changement de base.

Endomorphisme de multiplication, polynôme caractéristique et forme bilinéaire trace sont liés par la

Proposition 3.11 *Le polynôme caractéristique de m_g coïncide avec le polynôme caractéristique de g :*
$$\det(Y\mathrm{Id}_N - M_{g,f}) = P_g(Y).$$

Preuve. On considère la matrice suivante
$$B_{g,f} := \Big(\mathrm{Tr}_V(gf^{i+j})\Big)_{0\le i,j\le N-1} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}(V^*)).$$
D'après les égalités
$$\mathrm{Tr}_V(gf^{i+j}) = b([f^i],[gf^j]) = b([f^i], m_g([f^j])\,, \quad 0 \le i,j \le N-1\,,$$
la matrice $B_{g,f}$ est la matrice de l'application bilinéaire b_g, composée de l'application bilinéaire trace avec l'endomorphisme de multiplication induit par g dans la base $([1],\ldots,[f^{N-1}])$ d'où l'égalité
$$B_{g,f} = B_f \cdot M_{g,f}$$
(l'ordre est important). Quitte à perturber a_0, on peut supposer g holomorphe au voisinage de $V \cap C_{a_0}$. Dans ce cas, la matrice $B_{g,f}$ se factorise dans $\mathcal{M}_N(\mathcal{O}_{a_0,X^*})$:
$$B_{g,f} = D_f \cdot D_{g,f}$$
où
$$D_{g,f} := \begin{pmatrix} g(p_1) & g(p_1)f(p_1) & \ldots & g(p_1)f^{N-1}(p_1) \\ g(p_2) & g(p_2)f(p_2) & \ldots & g(p_2)f^{N-1}(p_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(p_N) & g(p_N)f(p_N) & \ldots & g(p_N)f^{N-1}(p_N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathcal{O}_{a_0,X^*})\,.$$

On en déduit l'égalité

$$D_{f,g} = D_f^t \cdot M_{g,f}$$

puisque $B_f = D_f \cdot D_f^t$ (Lemme 3.13) et D_f est inversible ($\det(D_f)^2 = \det B_f \neq 0$, Corollaire 3.9). On a donc

$$\det(YI - M_{g,f}) = \det(D_f^t Y - D_{g,f}) \times \left[\det(D_f^t)\right]^{-1}.$$

Or

$$D_f^t Y - D_{g,f} = \begin{pmatrix} Y - g(p_1) & (Y - g(p_1))f(p_1) & \dots & (Y - g(p_1))f^{N-1}(p_1) \\ Y - g(p_2) & (Y - g(p_2))f(p_2) & \dots & (Y - g(p_2))f^{N-1}(p_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y - g(p_N) & (Y - g(p_N))f(p_N) & \dots & (Y - g(p_N))f^{N-1}(p_N) \end{pmatrix},$$

d'où l'égalité

$$\det(YI - M_{g,f}) = \prod_{i=1}^{N}(Y - g(p_i)) \times \det(D_f^t) \times \left[\det(D_f^t)\right]^{-1},$$

soit encore $\det(YI - M_{g,f}) = P_g(Y)$. □

Corollaire 3.10 *On a les deux assertions suivantes :*

1. *pour a en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension 2 de U^*, les valeurs propres de m_g (comptées avec multiplicités) coïncident avec les valeurs de g en les points de $V \cap C_a$ (comptés avec multiplicité) ;*
2. *on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_V g &= \mathrm{tr}\,(M_{g,f}) \\ \prod_{p \in V \cap C_a} g(p) &= \det M_{g,f} \end{aligned}$$

où $\mathrm{tr}\,(M_{g,f})$ désigne la trace de la matrice $M_{g,f}$.

Preuve. Puisque V n'est pas dégénéré, l'ensemble $V \cap C_a$ est fini pour a en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins deux d'après le Lemme 2.11. Le corollaire découle alors immédiatement de la proposition précédente. □

Remarque 3.8 Le générateur de l'idéal principal

$$I := \{Q \in \mathbb{C}(V^*)[Y]\,;\, Q(m_g) = 0 \text{ comme élément de } \mathrm{End}(\mathbb{C}(I_V))\}$$

est le polynôme minimal associé à l'endomorphisme m_g ; il coïncide avec P_g si et seulement si les valeurs propres de m_g sont distinctes, c'est-à-dire si

$$g(p_i(a)) \neq g(p_j(a)) \quad \forall i, j\,,\ 1 \leq i, j \leq N\,,\ i \neq j\,,$$

pour a dans un ouvert arbitrairement petit de l'ouvert connexe U^*. Il est équivalent de dire que le polynôme P_g est réduit dans $\mathcal{M}_N(\mathcal{O}_{a,X^*})$ pour un $a \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$ quelconque pour lequel g est holomorphe au voisinage de $V \cap C_a$. Le polynôme minimal de la fonction multivaluée $g(p_j)$ (vue comme élément dans la clôture algébrique du corps $\mathbb{C}(V^*)$) divise évidemment P_g. Ces deux polynômes coïncident si et seulement si $g(p_j)$ est un élément primitif pour l'extension $[\mathbb{C}(I_V) : \mathbb{C}(V^*)]$, ou encore si et seulement si P_g est irréductible dans $\mathbb{C}(V^*)[Y]$.

Proposition 3.12 *On a les deux propriétés suivantes :*

1. *pour tout $h \in \mathbb{C}(V)$, on a la relation*

$$\begin{aligned} &\Big(\mathrm{Tr}_V(h), \mathrm{Tr}_V(hf), \ldots, \mathrm{Tr}_V(hf^{N-1})\Big) \cdot M_{g,f} \\ = \quad &\Big(\mathrm{Tr}_V(gh), \mathrm{Tr}_V(ghf), \ldots, \mathrm{Tr}_V(ghf^{N-1})\Big); \end{aligned}$$

2. *si $a_0 \in \mathrm{Reg}_V(U^*)$ et g est holomorphe au voisinage de l'ensemble fini $C_{a_0} \cap V$, la matrice $M_{g,f}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathcal{O}_{a_0,X^*})$ et admet les vecteurs*

$$w = (1, f(p_i), \ldots, f^{N-1}(p_i)) \quad i = 1, \ldots, N$$

pour vecteurs propres à gauche ($M_{g,f} w^t = \lambda w^t$) associés aux valeurs propres $\lambda = g(p_1), \ldots, g(p_N)$.

Preuve. 1. De l'égalité $B_{g,f} = B_f \cdot M_{g,f}$ (voir preuve de la Proposition 3.11), on déduit les relations

$$\Big(\mathrm{Tr}_V(gf^i), \ldots, \mathrm{Tr}_V(gf^{i+N-1})\Big) = \Big(\mathrm{Tr}_V(f^i), \ldots, \mathrm{Tr}_V(f^{i+N-1})\Big) \cdot M_{g,f},$$

entre les vecteurs lignes de $B_{g,f}$ et ceux de B_f pour $i = 0, \ldots, N-1$. Si $h \in \mathbb{C}(V)$, on a une écriture unique $[h] = \sum_0^{N-1} \alpha_i [f^i]$, où $\alpha_i \in \mathbb{C}(V^*)$ et

$$\Big(\mathrm{Tr}_V(h), \mathrm{Tr}_V(hf), \ldots, \mathrm{Tr}_V(hf^{N-1})\Big) = \sum_0^{N-1} \alpha_i \Big(\mathrm{Tr}_V(hf^i), \ldots, \mathrm{Tr}_V(hf^{i+N-1})\Big)$$

En utilisant les relations précédentes, on obtient l'égalité voulue par linéarité.

2. On reprend les notations de la preuve de la Proposition 3.11. Un calcul rapide montre l'égalité de matrices (dans $\mathcal{M}_N(\mathcal{O}_{a_0,X^*})$)

$$M'_{g,f} \cdot D_f^t = D_{g,f}$$

où $M'_{g,f}$ est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} g(p_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g(p_N) \end{pmatrix}.$$

En multipliant l'égalité précédente par $(D_f^t)^{-1}$, on obtient

$$M'_{g,f} = D_{g,f} \cdot (D_f^t)^{-1} = D_f^t \cdot M_{g,f} \cdot (D_f^t)^{-1}.$$

La matrice de l'endomorphisme m_g est donc diagonale dans la base constituée des vecteurs lignes de D_f^t ce qui montre le point 2. □

Remarque 3.9 Comme dans la preuve du Lemme 3.13 (volet 2), il n'est pas difficile de montrer l'égalité

$$\Big(\sigma_0(f), \dots, \sigma_{N-1}(f)\Big) \cdot B_{g,f} = \Big(\mathrm{Tr}_V(gf^N), \dots, \mathrm{Tr}_V(gf^{2N-1})\Big).$$

3.5.4 Cas algébrique

Base monomiale mixte associée à une famille de n polytopes

Soit $(L_1, \dots, L_n)$ une famille essentielle semi-ample de fibrés sur X de polytopes $P_1, \dots, P_n$, et $P := P_1 + \dots + P_n$. On fixe une sous-variété irréductible $V = \{F_{k+1} = \dots = F_n = 0\}$ de type $(L_{k+1}, \dots, L_n)$ que l'on suppose transverse aux orbites de codimension 1. Pour $a \in X^* = X^*(L_1, \dots, L_k)$ générique, l'ensemble $V \cap C_a$ est inclus dans $(\mathbb{C}^*)^n$. Il est fini, de cardinal $N := \mathrm{MV}_n(P_1, \dots, P_n)$.

On montre ici qu'il existe une base de $\mathbb{C}(I_V)$, intrinsèque à la famille de fibrés $(L_1, \dots, L_n)$, qui ne dépend donc que du type de V.

L'algèbre quotient

$$E = \frac{\mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]}{(f_1, \dots, f_n)}$$

est un $\mathbb{C}$-espace-vectoriel de dimension N pour des polynômes de Laurent génériques f_i supportés par les P_i. On note I l'idéal $(f_1, \dots, f_n)$ et $V(I)$ la sous-variété qu'il définit.

Lemme 3.15 *Il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ de E formée de N monômes $e_1 = t^{m_1}, \dots, e_N = t^{m_N}$, qui ne dépend que de la donnée des polytopes $P_1, \dots, P_n$; on appelle une telle base base monomiale mixte associée aux fibrés $(L_1, \dots, L_n)$.*

Preuve. Voir [37]. La preuve (tout à fait constructive et implémentable algorithmiquement) s'appuie essentiellement sur la construction de sous-divisions mixtes cohérentes de P, associées à la décomposition $P = P_1 + \cdots + P_n$. □

Corollaire 3.11 *La famille $([t^{m_1}], \dots, [t^{m_N}]) \in (\mathbb{C}(I_V))^N$ est une base du $\mathbb{C}(X^*)$-espace vectoriel $\mathbb{C}(I_V)$.*

Preuve. Une relation du type

$$\sum \alpha_j [t^{m_j}] = 0 \quad \alpha_j \in \mathbb{C}(X^*)$$

implique que le déterminant de la matrice des traces $B = (\mathrm{Tr}_V(t^{m_i+m_j}))_{1 \leq i,j \leq N}$ est nul. De manière analogue au Lemme 3.13, B se factorise dans $\mathcal{M}_N(\mathcal{O}_{a_0, X^*})$ sous la forme $B = D \cdot D^t$, où

$$D = (t^{m_i}(p_j(a)))_{1 \leq i,j \leq N}$$

et D^t est la transposée de D. Mais alors $\mathrm{Det}B = 0 \implies \mathrm{Det}D = 0$ pour tout $a \in X^*$, contredisant le lemme précédent. □

Pour tout $f \in \mathbb{C}(V)$, on note M_f la matrice respective de l'endomorphisme de multiplication par f dans cette nouvelle base et

$$B_f = B.M_f = \Big(\mathrm{Tr}\,(t^{m_i} h t^{m_j}\Big)_{i,j \in \{1, \dots, N\}}.$$

Proposition 3.13 *Soit λ une valeur propre de M_f et p un point de $V(I)$ pour lequel $f(p) = \lambda$. Le vecteur propre à droite w_λ qui vérifie*

$$w_\lambda \cdot M_f = \lambda w_\lambda$$

est égal au vecteur

$$w_\lambda = (p^{m_1}, \ldots, p^{m_N})$$

dont la i-ème coordonnée est égale à la valeur du i-ème vecteur de la base t^{m_i} au point $p \in V(I)$.

Preuve. Voir [11], Proposition 4.7 page 59. □

Ainsi, on obtient le

Lemme 3.16 *Pour des f_i génériques, la donnée d'un élément $[h] \in E$ est équivalente à la donnée des traces*

$$\mathrm{Tr}(t^{m_i}t^{m_j}), \quad \mathrm{Tr}\,(t^{m_i}ht^{m_j}), \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Preuve. Pour les f_i génériques, la matrice B est inversible. La matrice M_h est déterminée par les traces citées ci-dessus :

$$M_h = B^{-1} \cdot B_h$$

et détermine uniquement les coordonnées de $[h]$ dans la base $([t^{m_1}], \ldots, [t^{m_N}])$. □

On note que la relation $M_{hg} = M_h \cdot M_g$ permet d'établir la relation suivante :

$$B_{h+g} = B_h \cdot B^{-1} \cdot B_g.$$

Une formule d'inversion

On suppose la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ très ample et

$$V = \{F_{k+1} = \cdots = F_n = 0\}$$

une intersection complète semi-ample de type $(L_{k+1}, \ldots, L_n)$.

Lemme 3.17 *Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$ un $\mathbb{T}$-diviseur effectif d'intersection propre avec V. On a l'implication :*

$$f \in \mathcal{O}_X(D) \Longrightarrow P_f \in \mathcal{O}_{X^*}((D.V)^*)[Y]$$

Preuve. On note x^D l'équation homogène de D. Toute fonction rationnelle f de $\mathcal{O}_X(D)$ s'écrit $f = \frac{F}{x^D}$, où F est homogène de degré $[D]$. Soit

$$P_f = Y^N - \sigma_{N-1}(f) + \cdots + (-1)^{N-1}\sigma_0(f).$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, et $a \in \mathrm{Reg}_V(X^*)$ générique, on a :

$$\sigma_{N-j}(f)(a) = \sum_{J \subset \{1,\dots,N\}, |J|=j} \prod_{r \in J} \frac{F}{x^D}(p_r(a)).$$

La preuve de la Proposition 3.5 (qui traite le cas $j = 1$) s'adapte aux cas $j = 1, \dots, N$ et $\sigma_{N-j}(f) \in \mathcal{O}_{X^*}((D.V)^*)$ pour tout j. □

Proposition 3.14 *Pour tout $f \in \mathbb{C}(V)$, on a la formule d'inversion suivante :*

$$P_{\frac{1}{f}}(Y) = (-1)^{N-1} Y^N P_f(\frac{1}{Y})\sigma_0(\frac{1}{f}).$$

Preuve. Toute fonction rationnelle $f \in \mathbb{C}(V)$ est restriction à V d'une fonction rationnelle $f = \frac{F_1}{F_2} \in \mathbb{C}(X)$ où F_1 et F_2 sont homogènes de même degré. L'égalité

$$\sum_{J \subset \{1,\dots,N\}, |J|=j} \prod_{r \in J} \frac{F_1}{F_2}(p_r(a)) \times \prod_{r=1}^{N} \frac{F_2}{F_1}(p_r(a)) = \sum_{J \subset \{1,\dots,N\}, |J|=j} \prod_{r \notin J} \frac{F_2}{F_1}(p_r(a))$$

implique les relations

$$\sigma_{N-j}(f) = \sigma_0(f)\sigma_j(\frac{1}{f})$$

pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(-1)^{N-1} Y^N P_f(\frac{1}{Y}) &= \sigma_0(f) Y^N - \sigma_1(f) Y^{N-1} + \cdots + (-1)^{N-1} \\
&= \sigma_0(f) Y^N - \sigma_0(f)\sigma_{N-1}(\frac{1}{f}) Y^{N-1} + \cdots + (-1)^{N-1} \\
&= \sigma_0(f) P_{\frac{1}{f}}(Y),
\end{aligned}$$

soit $P_{\frac{1}{f}}(Y) = (-1)^{N-1} Y^N P_f(\frac{1}{Y})\sigma_0(\frac{1}{f})$. □

Chapitre 4

Deux théorèmes d'inversion

On rappelle les deux théorèmes d'inversion de la partie 1. Soit $X = \mathbb{P}^2$, muni des coordonnées homogènes $[X_0 : X_1 : X_2]$. Toute droite projective intersectant proprement la droite à l'infini $X_0 = 0$ est la clôture de Zariski dans $\mathbb{P}^2$ d'une droite affine C_a d'équation

$$C_a = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\, ;\, x = a_1 y + a_0\}$$

où $(x = X_1/X_0, y = X_2/X_0)$ sont les coordonnées affines dans la carte affine $U_0 = \{X_0 \neq 0\}$, et $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2$.

Soit

$$v = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

une collection de d germes d'hypersurfaces analytiques lisses transverses à la droite "verticale" $C_0 = \{x = 0\}$ (donc incluse dans la carte U_0) en N points $p_1, \ldots, p_N$ distincts de C_0.

Théorème (J. Wood, [39]) : Il existe une unique courbe algébrique $V \subset \mathbb{P}^2$ de degré N contenant v si et seulement si $\mathrm{Tr}_v y$ est affine en a_0.

Théorème (Henkin-Passare, [31]) : Soit $\Phi \in \Omega^1(v)$ une 1-forme holomorphe sur v. Il existe une unique courbe algébrique $V \subset \mathbb{P}^2$ de degré N contenant v et $\Psi \in M^1(V)$ avec $\Psi_{|v} = \Phi$, si et seulement si $\mathrm{Tr}_v \Phi$ est rationnelle.

On a vu dans la partie I comment le calcul résiduel offrait une démonstration particulièrement algébrique de ces deux théorèmes dans le cas projectif, mettant en valeur le rôle joué par le coefficient constant a_0 (la rationalité de la trace en le coefficient constant a_0 suffit pour conclure à la validité du théorème précédent, *cf. Théorème 3.1*). Ce chapitre est consacré à la généralisation au cadre torique de ces deux théorèmes.

Soit X une variété torique projective lisse de dimension n, $(L_1, \ldots, L_{n-1})$ une famille de fibrés en droites très amples sur X associés à une famille de diviseurs $D_1, \ldots, D_{n-1}$ de polytopes $P_1, \ldots, P_{n-1}$ et $X^* = X^*(L_1, \ldots, L_{n-1})$ la variété duale. On note $\alpha := \alpha(L_1, \ldots, L_{n-1}) \in A_1(X)$ la classe d'une courbe générique de type $(L_1, \ldots, L_{n-1})$ et, pour $i = 1, \ldots, n-1$, $\alpha_i := \alpha(L_1, \ldots L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots L_{n-1}) \in A_2(X)$ (Définition 2.5).

4.1 Le théorème de Wood torique

Ce théorème donne un critère simple pour déterminer si une collection de germes d'hypersurfaces analytiques est algébrique et permet de calculer son degré (dans $A_{n-1}(X)$). Soit $a_0 \in \mathrm{Reg}\,(X^*)$ et $v \in \mathcal{C}^0_{n-1}(X\,;\,C_{a_0})$, de $(L_1, \ldots, L_{n-1})$-degré $N := \deg_{a_0} v$ (Sous-section 2.2.6). Si $f \in \mathbb{C}(v)$, l'application

$$a \longmapsto \prod_{p \in v \cap C_a} f(p).$$

est un germe de fonction méromorphe en a_0, polynôme de degré N à coefficients dans $\mathbb{Q}$ en les germes de traces

$$\mathrm{Tr}_v(1), \ldots, \mathrm{Tr}_v(f^N).$$

On suppose $v \subset U_\sigma$, où $\sigma \in \Sigma(n)$ et on note x^σ_ρ, $\rho \in \sigma(1)$ les coordonnées affines canoniques de U_σ. On fixe $E_1, \ldots, E_s$ une famille de $\mathbb{T}$-diviseurs effectifs très amples de supports inclus dans $H_\sigma = X \setminus U_\sigma$, dont les classes forment une base de $A_{n-1}(X) \otimes \mathbb{Q}$ (Lemme 2.8).

On obtient le théorème de Wood torique :

Théorème 4.1 *1. Il existe une unique hypersurface algébrique $V \subset X$ contenant v, de $(L_1, \dots, L_{n-1})$-degré $[V] \cdot \alpha = N$ si et seulement si*

$$\deg_{a_{i\sigma}} \mathrm{Tr}_v x_\rho^\sigma \leq 1, \quad \forall\, \rho \in \sigma(1), \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{4.1}$$

2. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$ un diviseur effectif, $[D] \cdot \alpha = N$ et $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Sous l'hypothèse 1, $V \in |L(D)|$ si et seulement si pour tout $j = 1, \dots, s$, il existe $f_j \in \mathcal{O}_X(E_j)$ telle que

$$\deg_{a_{i\sigma}} \Big(\prod_{p \in v \cap C_a} f_j(p) \Big) = [D \cdot E_j] \cdot \alpha_i. \tag{4.2}$$

3. Sous l'hypothèse 1, $V \in |L(D)|$ est d'intersection propre avec toute sous-variété $\mathbb{T}$-invariante de codimension deux si et seulement s'il existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que

$$\deg_{a_{i\sigma}} \Big(\prod_{p \in v \cap C_a} x_\rho^\sigma(p) \Big) = [D \cdot D_\rho] \cdot \alpha_i \tag{4.3}$$

pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$ et tout $\rho \in \sigma(1)$.

Preuve. Preuve de 1.

Le sens direct est une conséquence immédiate de la Proposition 3.6. Notre argument pour montrer la réciproque s'inspire des idées développées par J. Wood dans [39], le contexte étant cette fois torique et non plus projectif.

Soit $m_1, \dots, m_n$ la base usuelle du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$ et y_k les coordonnées affines de la carte U_σ définies par $t^{m_k} \in \mathbb{C}(X)$. On suppose que $v = v_1 \cup \dots \cup v_N$. Puisque v est réduit, on peut supposer, quitte à perturber a_0, que les germes sont lisses et d'intersection vide deux à deux, avec $v_r = \{f_r = 0\} \subset U_\sigma$, $r = 1, \dots, N$ où $f_r = f_r(y_1, \dots, y_n)$.

Les fibrés L_i sont supposés très amples, donc $m_{i,k} := m_k + s_{i,\sigma} \in P_i$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Pour a voisin de a_0, l'intersection $v \cap C_a$ est transverse et définit une famille de germes holomorphes $\{p_1(a), \dots, p_N(a)\} = \{v \cap C_a\}$. D'après l'équation d'onde de choc (Lemme 3.7), on a

$$\partial_{a_{i,m_{i,k}}} [y_k^l(p_r)] = y_k(p_r) \partial_{a_{i,\sigma}} [y_k^l(p_r)], \quad \forall\, l \in \mathbb{N}, \quad k = 1, \dots, n,$$

induisant les relations

$$(l+1)\, \partial_{a_{i,m_{i,k}}} [\mathrm{Tr}_v\, y_k^l] = l\, \partial_{a_{i,\sigma}} [\mathrm{Tr}_v\, y_k^{l+1}]\,, \; l \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n.$$

Utilisant l'hypothèse (4.1), on montre ainsi par récurrence la majoration

$$\deg_{a_{i,\sigma}}[\mathrm{Tr}_v\, y_k^l] \leq l\,,\ \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

D'après la Proposition 3.6, plus le degré d'intersection $[V(\tau)]\cdot[D_i]$ est élevé, où $\tau = \{\rho \in \sigma(1)\,,\, \langle m_k, \eta_\rho\rangle = 0\}$, plus cette majoration est grossière, mais seul le caractère polynômial des traces importe pour l'instant.

Puisque les germes v_r sont lisses et distincts, il existe une combinaison linéaire

$$u = u(y) := \sum u_k y_k \quad (u_1,\ldots,u_k) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

pour laquelle $\partial_u f_r \neq 0$ sur $v_r \cap C_{a_0}$ pour tout $r = 1,\ldots,N$. Les germes $\mathrm{Tr}_v u^l \in \mathcal{O}_{a_0,X^*}$ étant de degré au plus l en $a_{i\sigma}$ pour $i = 1,\ldots,n-1$, les coefficients $\sigma_{N-j}(u)$ du polynôme caractéristique P_u de u le sont également. On note

$$a_1 = (a_{1,\sigma}, a_1'),\ldots, a_{n-1} = (a_{n-1,\sigma}, a_{n-1}')$$

où $a_i' = (a_{i,m})_{m\in P_i\setminus s_{i\sigma}}$ et $X^{*'} \subset X^*$ désigne le produit d'hyperplans projectifs

$$X^{*'} = X_1^{*'} \times \cdots \times X_{n-1}^{*'}, \quad X_i^{*'} = \{a_{i,\sigma} = 0\}\,, \qquad i = 1,\ldots,n-1\,,$$

$X_i^{*'}$ étant muni des coordonnées homogènes naturelles a_i'. L'application

$$\begin{array}{rcl} U_\sigma \times X^{*'} & \longrightarrow & p_X^{-1}(U_\sigma) \\ (y,a') & \longmapsto & \Big(y, -\displaystyle\sum_{\substack{m\in P_1\cap\mathbb{Z}^n \\ m\neq s_{1\sigma}}} a_{1,m} y^{\lambda(m)}\,, a_1',\ldots, -\sum_{\substack{m\in P_{n-1}\cap\mathbb{Z}^n \\ m\neq s_{n-1,\sigma}}} a_{n-1,m} y^{\lambda(m)}\,, a_{n-1}'\Big) \end{array}$$

est un difféomorphisme ($\lambda(m)$ représente les coordonnées de $m \in \mathbb{Z}^n$ dans la base $(m_1,\ldots,m_n)$) et la fonction

$$(y,a') \longmapsto R_{a'}(y) := P_u\Big(u, -\sum_{\substack{m\in P_1\cap\mathbb{Z}^n \\ m\neq s_{1,\sigma}}} a_{1,m} y^{\lambda(m)}\,, a_1',\ldots\Big)$$

est un élément de $\mathbb{C}[\check{\sigma}\cap\mathbb{Z}^n]\otimes\mathbb{C}(X^{*'}\cap U^*) \simeq p_U^*(\mathcal{O}_X(U_\sigma))$, où (W,U) est un représentant concave de v (Sous-section 2.2.6). Par le Lemme 3.10, on a $P_u(u)_{|p_U^{-1}(W)} \equiv 0$, soit $R_{a'|v} = 0$ pour a voisin de a_0 et la clôture algébrique $V_{a'}$ dans X de l'hypersurface affine $\{R_{a'} = 0\} \subset U_\sigma$ interpole v. Par hypothèse, on a

$$df_r \wedge dl_1^\sigma \wedge \cdots \wedge dl_{n-1}^\sigma \neq 0, \quad \frac{\partial f_r}{\partial u} \neq 0$$

pour $a \in X^*$ voisin de a_0 et $r = 1, \ldots, N$. Par le théorème des fonctions implicites, on a donc

$$R_{a'}(y) = 0,\ y \text{ voisin de } p_r \iff u = u(p_r(a)) \iff y \in v_r, \quad r = 1, \ldots, N.$$

Ainsi,

$$V_{a'} \cap C_a = v \cap C_a$$

pour a voisin de a_0 et $[V_{a'}]\cdot\alpha = N$ d'après la Proposition 2.5. Si $a" \in U^* \cap X^{*'}$ est générique, la restriction des hypersurfaces $V_{a'}$ et $V_{a"}$ à l'ouvert concave U coïncident. Si $V_{a'} \neq V_{a"}$, il existe une branche irréductible de l'une ou l'autre des deux hypersurfaces ne rencontrant pas U, ce qui est impossible puisque $\mathrm{Ort}(L_1, \ldots, L_{n-1}) = \{0\}$ (Proposition 2.5 et Lemme 2.14). Cette construction ne dépend donc de a'. L'intersection $V \cap (X \setminus U_\sigma)$ est propre puisqu'elle l'est dans l'ouvert concave U.

Preuve de 2. On montre le sens direct. Soit $f_j \in \mathcal{O}_X(E_j)$ et $H_j \in |L(E_j)|$ l'hypersurface associée. D'après la formule du produit, on a

$$\mathcal{R}_{V,H_j} = \prod_{p \in v \cap C_a} f_j(p) \times \mathcal{R}_{V,E_j}.$$

Puisque E_j est supporté par $X \setminus U_\sigma$, le résultant $\mathcal{R}_{V,E_j}$ ne dépend pas de $a_{i\sigma}$ et

$$\deg_{a_{i\sigma}}\Big(\prod_{p \in v \cap C_a} f_j(p)\Big) = \deg_{a_{i\sigma}} \mathcal{R}_{V,H_j} \leq \deg_{a_i} \mathcal{R}_{V,E_j} = [V \cdot E_j] \cdot \alpha_i.$$

Puisque E_j est supporté par H_σ, $\mathrm{codim} V \cap E_j = 2$ et $[D \cdot E_j] \cdot \alpha_i = [V \cdot E_j] \cdot \alpha_i > 0$. L'homogénéïté en a_i du polynôme $\mathcal{R}_{V,H_j}$ implique alors

$$\begin{aligned}
\deg_{a_{i\sigma}}\Big(\prod_{p \in v \cap C_a} f_j(p)\Big) < [D \cdot E_j] \cdot \alpha_i \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}_{V,H_j}(a_1, \ldots, (a_{i\sigma}, 0, \ldots, 0), \cdots a_{n-1}) \equiv 0 \\
&\Leftrightarrow \quad V \cap H_j \cap |D_{i,\sigma}| \cap C_{a[i]} \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{codim}_X(V \cap H_j \cap |D_{i,\sigma}|) \geq 2
\end{aligned}$$

où $D_{i,\sigma}$ est l'unique représentant (effectif) de D_i de support $|D_{i,\sigma}| = X \setminus U_\sigma$ et $C_{a[i]}$ est une sous-variété générique de type $(L_1, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_{n-1})$. Puisque E_j est très ample (globalement engendré suffirait), on a $\bigcup_{H_j \in |L_j|} H_j \cap |D_{i,\sigma}| = X \setminus U_\sigma$ et la condition (4.2) n'est pas vérifiée si et seulement si

$$\mathrm{codim}_X(V \cap X \setminus U_\sigma) \geq 1,$$

ce qui montre le sens direct. A l'inverse, si l'égalité est atteinte avec $f_j \in \mathcal{O}_X(E_j)$, pour $j = 1, \ldots, s$, le polynôme homogène $\mathcal{R}_{V,H_j}$ est de degré $[D \cdot E_j] \cdot \alpha_i$ en $a_{i\sigma}$, d'où l'inégalité :

$$\deg_{a_i} \mathcal{R}_{V,H_j} = [V \cdot E_j] \cdot \alpha_i \geq [D \cdot E_j] \cdot \alpha_i, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{4.4}$$

Puisque $[E_1], \ldots, [E_s]$ est une base de $A_{n-1}(X) \otimes \mathbb{Q}$ et D_i est très ample, il existe $k \in \mathbb{N}$ (suffisamment grand), pour lequel $[kD_i] = \sum_{j=1}^{s} \nu_{ij}[E_j]$ est combinaison effective des classes $[E_j]$. Par linéarité, on déduit de (4.4) l'inégalité

$$\begin{aligned} kN = [V] \cdot k\alpha &= \sum_{j=1}^{s} \nu_{ij}[V \cdot E_j] \cdot \alpha_i \\ &\geq \sum_{j=1}^{s} \nu_{ij}[D \cdot E_j] \cdot \alpha_i = [D] \cdot k\alpha = kN \end{aligned}$$

et $\nu_{ij} \geq 0$ implique que (4.4) est une égalité. Puisque le fibré $\oplus_{j=1, j\neq i}^{n-1} L_j$ est ample (sur X), la multiplication par $\alpha_i \in A_2(X)$ est injective de $A_{n-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ dans $A_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ d'aprés [5] (Proposition 1.1). Puisque ces deux espaces vectoriels sont de même dimension, ce morphisme est un isomorphisme et la famille $[E_1] \cdot \alpha_i, \ldots, [E_s] \cdot \alpha_i$ est une base de $A_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. La dualité $A_1(X) \simeq A_{n-1}(X)$ implique alors $[V] = [D]$, soit $V \in |L(D)|$.

Preuve de 3. On prouve d'abord le sens direct (toujours sous l'hypothèse 1). Par hypothèse, $V \cap C_a \subset \mathbb{T}$ pour a générique et les fonctions $\prod_{p \in v \cap C_a} x_\rho^\sigma(p)$ sont rationnelles pour tout $\rho \in \sigma(1)$ et tout $\sigma \in \Sigma(n)$. Par le même raisonnement qu'au point 2, on a

$$\deg_{a_{i\sigma}}\Big(\prod_{p \in v \cap C_a} x_\rho^\sigma(p)\Big) = \deg_{a_{i\sigma}} \mathcal{R}_V^\rho \leq \deg_{a_i} \mathcal{R}_V^\rho = [V \cdot D_\rho] \cdot \alpha_i = [D \cdot D_\rho] \cdot \alpha_i,$$

où l'inégalité est stricte si et seulement si une sous-variété générique de type $(L_1, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots L_{n-1})$ (de dimension 2) rencontre $V \cap |D_\rho| \cap (X \setminus U_\sigma)$. Puisque les fibrés L_j sont très amples, ceci entraîne

$$\operatorname{codim}_X(V \cap |D_\rho| \cap (X \setminus U_\sigma)) \geq 2,$$

auquel cas V contient une sous-variété $\mathbb{T}$-invariante de codimension deux (incluse dans $D_\rho \cap (X \setminus U_\sigma)$).

Pour la réciproque, le raisonnement utilisé au point 2 s'applique à nouveau en remplaçant la base $[E_1], \ldots, [E_s]$ par la famille $\{[D_\rho], \rho \in \Sigma(1)\}$ génératrice du $\mathbb{Z}$-module libre $A_{n-1}(X)$. On obtient les égalités

$$[V \cdot D_\rho] \cdot \alpha_i = [D \cdot D_\rho] \cdot \alpha_i, \quad \forall \rho \in \Sigma(1),$$

et $V \in |L(D)|$ par le même raisonnement qu'au point 2. $\square$

Remarque 4.1 Les fonctions produits s'expriment à partir des fonctions traces et s'obtiennent comme une somme complète de résidus de Grothendieck dépendant du paramètre a. Vu sous cet angle, le théorème de Wood torique (conditions 4.1, 4.2 et 4.3) s'interprète comme une inversion du théorème d'Abel-Jacobi torique, généralisant au cas torique la remarque en fin d'article dans [23].

4.2 Le théorème d'Abel-inverse torique

Soit $a_0 \in \mathrm{Reg}\,(X^*)$, $v \in \mathcal{C}^0_{n-1}(X\,;\,C_{a_0})$ et $N := \deg_{a_0} v$. Comme précédemment on peut supposer $v = v_1 \cup \cdots \cup v_N \subset U_\sigma$ où les germes $v_r = \{f_r = 0\}$ sont lisses, transverses à C_{a_0} et d'intersection vide deux à deux. On note $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées affines dans U_σ et on suppose que v est en position suffisamment générale pour qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ (disons $i = n$) tel que $\partial_{y_n} f_r \neq 0$ au point $p_r = v_r \cap C_{a_0}$, pour $r = 1, \ldots, N$.

On suppose donnée $\Phi \in \Omega^{n-1}(v)$, où $\Phi_{|v_r} := \Phi_r$ est restriction à v_r d'un germe de $(n-1)$-forme holomorphe en p_r non nul sur v_r, pour $r = 1, \ldots, N$.

On obtient le théorème d'Abel-inverse torique :

Théorème 4.2 *Il existe une hypersurface algébrique V de X contenant v, où $[V] \cdot \alpha = N$, et une forme rationnelle $\Psi \in M^{n-1}(V)$ avec $\Psi_{|v} = \Phi$ si et seulement si les coefficients du germe trace $\mathrm{Tr}_v\Phi \in \Omega^{n-1}_{a_0, X^*}$ sont rationnels en $a_{i,\sigma}$, pour $i = 1, \ldots, n-1$.*

La preuve est analogue à celle conduite dans le cas projectif.

Preuve. Le sens direct est évident d'après la Proposition 3.1.

Première étape : existence de V. Par hypothèses $\partial_{y_n} f_r \in \mathcal{O}_{p_r, X}$ est inversible et les relations

$$dy_{n|v_r} = -\frac{1}{\partial_{y_n} f_r}\Big[\sum_{j=1}^{n-1} (\partial_{y_j} f_r dy_j)_{|v_r}\Big], \quad r = 1, \ldots, N$$

permettent de supposer que $\Phi_r = \frac{h_r}{\partial_{y_n} f_r} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1}$. En vertu de la Proposition 3.3 (voir également Sous-section 3.4.2), on a la représentation résiduelle :

$$\mathrm{Tr}_v\Phi = \sum_{M \in P_1 \times \cdots \times P_{n-1}} \sum_{r=1}^{N} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^{\lambda(|M|)} h_r dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ f_r(y), l_1^\sigma(a_1, y), \ldots, l_{n-1}^\sigma(a_{n-1}, y) \end{bmatrix} da_M$$

où si $M = (M_1, \dots, M_{n-1})$, $da_M = \wedge_{i=1}^{n-1} da_{iM_i}$, $|M| = M_1 + \cdots + M_{n-1}$. D'après le Lemme 1.7, on a $m_n \in P_i - s_{i\sigma}$, $i = 1, \dots, n-1$ (où $y_n = t^{m_n}$) et les germes holomorphes

$$w_k := \sum_{r=1}^{N} \operatorname{Res} \begin{bmatrix} y_n^k h_r dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ f_r(x), l_1^\sigma(a_1, y), \dots, l_{n-1}^\sigma(a_{n-1}, y) \end{bmatrix}$$

sont coefficients de la n-forme $\mathrm{Tr}_V \Phi$ pour $k = 0, \dots, n-1$ (au moins), rationnels en $a_{i\sigma}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ par hypothèse. Le Lemme 3.9 assure de fait la rationalité des w_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. En vertu du Lemme 3.10 et du théorème de dualité, les coefficients du polynôme caractéristique de y_n

$$P(Y, a) := Y^N - \sigma_{N-1}(a) Y^{N-1} + \cdots + (-1)^{N-1} \sigma_0(a) \in \mathcal{O}_{a_0, X^*}[Y]$$

vérifient le système (S)

$$\begin{array}{ccccc} w_{N-1}\sigma_{N-1} & + & \cdots & + & (-1)^{N-1} w_0 \sigma_0 = w_N \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{2N-2}\sigma_{N-1} & + & \cdots & + & (-1)^{N-1} w_{N-1}\sigma_0 = w_{2N-1} \end{array}$$

Ce système est dégénéré si et seulement s'il existe $H(Y, a) \in \mathcal{O}_{a_0, X^*}[Y]$ non nul, de degré au plus $N-1$ tel que

$$\sum_{r=1}^{N} \operatorname{Res} \begin{bmatrix} H(y_n, a) y_n^k h_r dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ f_r(y), l_1^\sigma(a_1, y), \dots, l_{n-1}^\sigma(a_{n-1}, y) \end{bmatrix} = 0 \tag{4.5}$$

Soit (W, U) un représentant concave de v, où $W = \cup_{r=1}^N W_r$, $v_r \subset W_r$. Puisque

$$(y_n^N)_{|I_W} \equiv (\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N-j} y^{N-j})_{|I_W}$$

(Lemme 3.10), les relations (4.5) s'étendent par linéarité à tout $k \in \mathbb{N}$. On peut multiplier le numérateur par la fonction $\prod_{i=1, i\neq r}^N (y_n - y_n(p_i(a))) \in \mathcal{O}_{a_0, X^*}[y_n]$, et

$$\operatorname{Res} \begin{bmatrix} H(y_n, a) y_n^k h_r dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ f_r(y), l_1^\sigma(a_1, y), \dots, l_{n-1}^\sigma(a_{n-1}, y) \end{bmatrix} = 0 \quad r = 1, \dots, N \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Par le théorème de dualité $H(y_n, a)_{|I_{W_r}} \equiv 0$ pour $r = 1, \dots, N$, soit encore $H(y_n, a)_{|I_W} \equiv 0$, contredisant le degré de l'extension $N = [\mathbb{C}(I_W) : \mathbb{C}(W^*)]$.

Le système (S) étant non dégénéré, les coefficients de P en sont l'unique N-uplet solution et sont rationnels en $a_{i\sigma}$. D'après le Corollaire 3.8, on a l'équation différentielle

$$\partial_{a_{imn}}(\sigma_0) = \sigma_0\, \partial_{a_{i\sigma}}\,[\sigma_{N-1}]. \tag{4.6}$$

On suppose $\sigma_0 = P_0/Q_0$ et $\sigma_{N-1} = P_1/Q_1$ où

$$P_j, Q_j \in \mathcal{O}_{a_0, X_1^* \times \cdots \times X_i^{*\prime} \times \cdots \times X_{n-1}^*}[a_{i\sigma}]$$

sont des polynômes en $a_{i\sigma}$ dont les coefficients sont des germes holomorphes en $a_{im}, m \neq s_{i\sigma}$ et a_l, $l \neq i$ que l'on suppose premiers entre eux, et ce pour $j = 0, 1$. L'équation (4.6) devient

$$(Q_0\partial_{a_{imn}}P_0 - P_0\partial_{a_{imn}}Q_0)Q_1^2 \;=\; Q_0P_0(Q_1\partial_{a_{i\sigma}}P_1 - P_1\partial_{a_{i\sigma}}Q_1)$$

Si l'on suppose $Q_0P_0 = Q_1^{\alpha}R$, où R est un polynôme en $a_{i\sigma}$ premier avec Q_1, il existe R', polynôme en $a_{i\sigma}$ pour lequel on a l'égalité

$$Q_1^{\alpha+2}R' = RQ_1^{\alpha+1}\partial_{a_{i\sigma}}P_1 - RQ_1^{\alpha}P_1\partial_{a_{i\sigma}}Q_1.$$

Par le lemme de Gauss, on a $RP_1\partial_{a_{i\sigma}}Q_1 \in (Q_1)$, soit $\partial_{a_{i\sigma}}Q_1 = 0$ puisque RP_1 et Q_1 sont supposés premiers entre eux. L'équation (4.6) devient alors

$$\partial_{a_{i\sigma}}P_1.Q_0P_0 = Q_1(Q_0\partial_{a_{imn}}P_0 - P_0\partial_{a_{imn}}Q_0).$$

Puisque

$$\deg_{a_{i\sigma}}(P_0Q_0) \geq \deg_{a_{i\sigma}}Q_1(Q_0\partial_{a_{imn}}P_0 - P_0\partial_{a_{imn}}Q_0)$$

(Q_1, on l'a vu ne dépend pas de $a_{i\sigma}$), on a

$$\deg_{a_{i\sigma}}\partial_{a_{i\sigma}}P_1 \leq 0,$$

ce raisonnement pouvant être répété pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. Le coefficient $\sigma_{N-1} = \mathrm{Tr}_v(y_n)$ de P est donc une fonction affine de $a_{i\sigma}$, pour $i = 1, \ldots, n-1$. Il suffit alors de choisir $u = y^n$ dans la preuve du théorème de Wood, ce qui montre l'existence de V.

Deuxième étape : existence de Ψ. On rappelle que pour a voisin de a_0 et pour $i = 1, \ldots, N$, l'intersection $v_i \cap C_a$ est réduite à un point $p_i(a)$ dont les coordonnées affines sont des éléments de l'anneau local $\mathcal{O}_{a_0,X^*}$. On définit le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$H(Y,a) := \sum_{j=1}^{N} \prod_{r=1, r\neq j}^{N} \frac{Y - y_n(p_r(a))}{y_n(p_j(a)) - y_n(p_r(a))} h_j(p_j(a)) \in \mathcal{O}_{a_0,X^*}[X].$$

Ce polynôme, de degré $N-1$, vérifie

$$H(y_n, a)_{|I_{W_j}} = h_r(p_r(a)), \quad \forall r = 1, \ldots, N, \tag{4.7}$$

pour tout a voisin de a_0. Le N-uplet $(\tau_0, \ldots, \tau_{N-1}) \in (\mathcal{O}_{a_0, X^*})^N$ constitué des coefficients du polynôme $H(Y, a) = \sum_0^{N-1} \tau_i(a) Y^i$ est donc l'unique vecteur solution du système de Cramer

$$\begin{array}{ccccc} w_{N-1}\tau_{N-1} & + & \cdots & + & (-1)^{N-1} w_0 \tau_0 = w_0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{2N-2}\tau_{N-1} & + & \cdots & + & (-1)^{N-1} w_{N-1}\tau_0 = w_{N-1} \end{array}$$

et les τ_j sont par hypothèse rationnels en $a_{i\sigma}$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ et tout $j = 0, \ldots, N-1$. La fonction

$$\widetilde{h}(y, a') := H\Big(y_n, -\sum_{\substack{m \in P_1 \cap \mathbb{Z}^n \\ m \neq s_{1,\sigma}}} a_{1,m} y^{\lambda(m)}, a'_1, \ldots, -\sum_{\substack{m \in P_{n-1} \cap \mathbb{Z}^n \\ m \neq s_{n-1,\sigma}}} a_{n-1,m} y^{\lambda(m)}, a'_{n-1}\Big)$$

est un élément bien défini de $\mathbb{C}(U_\sigma) \otimes \mathcal{O}_{a'_0, X^{*\prime}}$ (*cf.* la notation de la preuve du théorème de Wood) qui, en vertu de (4.7), vérifie

$$\widetilde{h}(y, a')_{|I_{W_r}} = p^*_{W_r}(h_r), \quad \forall r = 1, \ldots, N,$$

(avec la notation classique $p_{W_r} : I_{W_r} \longrightarrow W_r$) pour a voisin de a_0. Pour $h(y) := \widetilde{h}(y, a'_0) \in \mathbb{C}(U_\sigma)$, la $(n-1)$-forme rationnelle sur X définie en coordonnées affines

$$\Psi := h(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1}$$

vérifie donc $\Psi_{|v} = \Phi$. Si l'intersection W_Ψ du lieu polaire de Ψ avec V n'était pas propre, la sous-variété $(n-1)$-dimensionnelle W_Ψ rencontrerait U (Proposition 2.5), contredisant $\Psi_{|V \cap U} = \Phi$. Ainsi $\Psi \in M^{n-1}(V)$, ce qui achève la preuve. $\square$

Bibliographie

[1] N.H. Abel, Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions trancendantes, note présentée à L'Académie des sciences à Paris le 30 Octobre 1826, *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Christiania, vol 1 (1881), pp. 145-211.

[2] D. Barlet, Le faisceau $\omega_X^\bullet$ sur un espace analytique X de dimension pure, Lecture Notes in Math. 670, Springer-Verlag (1978), pp. 187-204.

[3] V. Batyrev, D. Cox, On the hodge structure of projective hypersurface in toric varieties, Duke Math J. 75 (1994), pp. 293-338.

[4] J.E. Björk, Residues and $\mathcal{D}$-modules, dans *The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial*, Oslo 2002 Laudal, Olav Arnfinn ; Piene, Ragni (Eds.), Springer-Verlag (2004), pp. 605-652.

[5] S. Bloch, D. Gieseker, The positivity of the Chern Classes of an ample Vector Bundle, Inventiones math. 12 (1971), pp. 112-117.

[6] E. Cattani, A. Dickenstein, A global view of residues in the torus, Journal of Pure and Applied Algebra 117 & 118 (1997), pp. 119-144.

[7] E. Cattani, D. Cox, A. Dickenstein, Residues in toric varieties, Compositio Math. 108, no. 1 (1997), pp. 35-76.

[8] E. Cattani, A. Dickenstein, B. Sturmfels, Residues and resultants, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 5, no. 1 (1998), pp. 119-148.

[9] S. Collion, Transformation d'Abel et formes différentielles algébriques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 323, no. 12 (1996), pp. 1237-1242.

[10] N. Coleff, M. Herrera, Les courants résiduels associés à une forme méromorphe, Springer Lectures Notes 633 (1978).

[11] D. Cox, J.Little, D.O'Shea, *Using algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 185. Springer-Verlag, New York (1998).

[12] D. Cox, Toric residues, Ark Mat. 34 (1996), pp. 73-96.

[13] D. Cox, The homogeneous coordinate ring of a toric variety, J. Algebraic Geom. 4 , no. 1 (1995), pp. 17-50.

[14] D. Cox, What is a toric variety ? Topics in algebraic geometry and geometric modeling, Contemp. Math., 334, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003), pp. 203-223.

[15] D. Cox, A. Dickenstein, Codimension theorems for complete toric varieties, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 11, pp. 3153-3162.

[16] V. Danilov, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33 (1978), pp. 97-154.

[17] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 168, Springer-Verlag, New York (1996).

[18] B. Fabre, Nouvelles variations sur les théorèmes d'Abel et Lie, Thèse soutenue le 04/12/2000, Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris 6.

[19] B. Fabre, Sur la transformation d'Abel-Radon des courants localement résiduels, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. IV (2005), pp. 27-57.

[20] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton U. Press, Princeton, NJ (1993).

[21] W. Fulton, *Intersection theory*, second edition, Springer (1998).

[22] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser, Boston (1994).

[23] P.A. Griffiths, Variations on a therorem of Abel, Inventiones math. 35 (1976), pp. 321-390.

[24] P.A. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and applied mathematics, Wiley-Intersciences (1978).

[25] R.C. Gunning & H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1965).

[26] Série de lectures données en 2000 à l'école d'été de Grenoble : *Géométrie des variétés toriques.*

[27] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977).

[28] G. Henkin La transformation de Radon pour la cohomologie de Dobeault et un théorème d'Abel-inverse, C. R. Acad. sci.Paris, t.315, série I (1992), pp. 973-978.

[29] G. Henkin, Abel-Radon transform and applications, dans *The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial*, Oslo 2002 Laudal, Olav Arnfinn ; Piene, Ragni (Eds.), Springer-Verlag (2004), pp. 567-584.

[30] A. Hénaut, formes différentielles abéliennes, bornes de Castelnuovo et géométrie des tissus, Comment. Math. Helv. 79 (2004), pp. 25-57.

[31] G. Henkin, M. Passare, Abelian differentials on singular varieties and variation on a theorem of Lie-Griffiths, Inventiones math. 135 (1999), pp. 297-328.

[32] M. Herrera, D. Liebermann, Residues and principal values on a complex space, Math. Ann. 194 (1971), pp.259-294.

[33] A. Khovanskii, Newton polyedra and the Euler-Jacobi formula, Russian Math. Surveys 33 (1978), pp. 237-238.

[34] M. Passare, Residues, currents, and their relation to ideals of meromorphic functions, Math. Scand. 62 (1988), pp. 75-152.

[35] A. Khetan, I. Soprounov, Combinatorial construction of toric residues, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), pp. 511-548.

[36] P. Pedersen, B. Sturmfels, Product formulas for resultants and Chow forms, Math. Z. 214, no. 3 (1993), pp. 377-396.

[37] P. Pedersen, B. Sturmfels, Mixed monomial bases, in *Algorithms in algebraic geometry and applications*, Proceedings of the MEGA-94 conference, Santander, Spain, April 1994, (L. González-Vega *ed.*), Birkhäuser. Prog. Math. 143 (1996), pp. 307-316.

[38] B. Sturmfels, Sparse elimination theory, in *Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Sympos. Math. XXXIV, Cortona, 1991, Cambridge University Press (1993), pp. 264-298.

[39] J.A. Wood, a simple criterion for an analytic hypersurface to be algebraic, Duke Mathematical Journal 51, 1 (1984), 235-237.

[40] A. Yger, La transformée de Radon sous ses différents aspects, Notes d'un cours de DEA, Bordeaux, *notes manuscrites* (2002).

[41] Berenstein, Carlos A. et Yger, Alain, Residue calculus and effective Nullstellensatz, in *American Journal of Mathematics*, Vol. 121, (1999), pp. 723-796.

Résumé: On étudie la notion de trace et les problèmes d'Abel-inverse à l'aide de l'utilisation systématique du calcul résiduel dans les cadres projectifs et toriques.

Dans la première partie, on obtient une caractérisation algébrique des formes traces sur une hypersurface analytique à l'aide du calcul résiduel élémentaire d'une variable. En conséquence, une version plus forte du théorème d'Abel-inverse de Henkin et Passare est prouvée. On montre que ce théorème est conséquence de la rigidité d'un système différentiel particulier lié à une équation de type "onde de choc" et on établit le lien avec le théorème de Wood sur l'algébricité d'une famille de germes d'hypersurfaces analytiques. Enfin, on obtient une nouvelle méthode pour calculer la dimension de l'espace des formes abéliennes de degré maximal sur une hypersurface projective.

Dans la seconde partie, on caractérise de manière combinatoire les familles de fibrés en droites permettant de définir une notion intrinsèque de concavité dans une variété torique complète lisse et on étudie les ensembles analytiques dégénérés correspondants. On étend ainsi la notion de trace au cas torique. Courants résidus, résidus toriques et résultants donnent une borne optimale sur le degrés des traces en les différents paramètres. Si la variété torique est projective, on obtient finalement une version torique des théorèmes de Wood et d'Abel-inverse, permettant une description plus précise du support du polynôme construit dans le cas hypersurface.

Mots-Clés: Concavité; Dualité; Incidence; Transformée d'Abel; Trace; Courants résiduels; Résidus de Grothendieck; Formes abéliennes; Abel-inverse; Géométrie torique; Résidus toriques; Résultants; Fibrés en droites; Groupes de Chow.

Abstract: We present in the first part an algebraic residual characterization of usual trace-forms on local analytic hypersurfaces. We thus obtain a stronger version of the Abel-inverse theorem by Passare and Henkin in projective space and we relate it to the theorem by Wood on the algebraicity of local analytic hypersurfaces. We show how those inversion theorems can be anderstood as a rigidity propriety of a particular differential system linked to the wave choc equation and we obtain a new method to compute the dimension of the vector space of abelian forms of maximal degree on a projective hypersurface.

The second part starts with a combinatorial characterization of satisfactory families of line bundles on a smooth complete toric variety to obtain an intrinsec notion of toric concavity allowing a toric generalisation of the trace. The use of toric residues and residue currents permits to show a toric version of Wood's and inverse Abel's theorem, providing a more precise description of the defining polynomial in the hypersurface case.

Key-Words: Concavity; Duality; Incidence; Trace; Abel Transform; Residue currents; Abelian forms; Abel-Inverse; Toric varieties; Toric residues; Resultants; Line bundles; Chow Groups.