

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Claude VANROYEN**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

**INTERACTIONS HYDRODYNAMIQUES ENTRE SPHÈRES DURES EN RÉGIME
FAIBLEMENT INERTIEL : MODÉLISATION ET EXPÉRIMENTATIONS
APPLIQUÉES À LA SÉDIMENTATION**

Date de soutenance : 23 Juillet 2004

Après avis de :

MM. J. MAGNAUDET, Directeur de Recherche CNRS, IMFT
R. BOUARD, Professeur, Université de Poitiers

Rapporteur
Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

MM. P. GUIRAUD, Professeur, INSA-TOULOUSE
J.P. CALTAGIRONE, Professeur, Université Bordeaux 1
R. BOUARD, Professeur, Université de Poitiers
J. MAGNAUDET, Directeur de Recherche CNRS, IMFT
A. OMARI, Professeur, Université Bordeaux 1
D. REUNGOAT, Maître de conférence, Université Bordeaux 1

Président du jury
Examineur
Rapporteur
Rapporteur
Directeur de thèse
Co-directeur de thèse

À mes parents

Sommaire

Nomenclature	5
Introduction générale	8
Chapitre 1 : Considérations théoriques	18
1. Régime de Stokes	19
1.1. Sédimentation d'une particule sphérique	20
1.1.1. Solutions singulières des équations de Stokes	20
1.1.2. Ecoulement engendré par le mouvement d'une sphère solide	23
1.1.3. Force de traînée appliquée à une sphère en translation	27
1.2. Interactions hydrodynamiques sphère-sphère et sphère-paroi	31
1.2.1. Interactions sphère-sphère	31
1.2.1.1. Contribution en champs lointains	31
1.2.1.2. Contribution en champs proches	38
1.2.2. Interactions sphère-paroi	41
1.2.2.1. Contribution en champs lointains	41
1.2.2.2. Contribution en champs proches	42
2. Régime inertiel	45
2.1. Sédimentation d'une particule sphérique	45
2.1.1. Approximation d'Oseen	45
2.2. Interactions hydrodynamiques en régime inertiel	51
2.2.1. Approche analytique	51
2.2.1.1. Interactions entre particules	51
2.2.1.2. Interactions particule-paroi	54
2.2.2. Approche numérique basée sur la méthode des réflexions	54

Chapitre 2 : Résolution numérique du problème	57
1. Formulation du modèle Lagrangien	58
1.1. Sédimentation d'une sphère isolée en milieu infini	59
1.1.1. Modèles de forces	59
1.1.2. Résolution analytique des équations du mouvement dans le cas d'une particule isolée	61
1.2. Sédimentation de plusieurs particules entre deux parois	63
1.2.1. Interactions hydrodynamiques entre n particules en milieu infini	63
1.2.1.1. Approximation multi-corps aux champs lointains	63
1.2.1.2. Description à deux corps aux champs proches	66
1.2.2. Interactions entre une particule et deux parois	67
1.2.2.1. Contribution en champs lointains	67
1.2.2.2. Contribution en champs proches	69
1.2.3. Interactions entre n particules et deux parois	69
1.2.4. Formulation générale du problème	70
2. Résolution numérique des équations du mouvement	71
2.1. Adimensionnement des équations du mouvement	71
2.2. Principe de la méthode de résolution	71
2.3. Résultats préliminaires	74
2.3.1. Sédimentation d'une particule isolée	74
2.3.1.1. Sédimentation d'une particule soumise aux forces gravitationnelles et hydrodynamique	74
2.3.1.2. Influence de la force de masse ajoutée	76
2.3.2. Triplets de particules	78
2.3.2.1. Triplet régulier	78
2.3.2.2. Triplet irrégulier	81
2.3.3. Quadruplets de particules	82

2.3.3.1. Quatre particules alignées horizontalement.....	82
2.3.3.2. Quatre particules aux sommets d'un carré.....	86
2.3.4. Six particules alignées horizontalement.....	89
2.3.5. Une sphère et deux parois.....	92
Chapitre 3 : Analyse expérimentale.....	96
1. Dispositif expérimental.....	100
1.1. Configuration expérimentale.....	100
1.2. Dispositif de libération des particules.....	101
1.3. Fluide et particules.....	103
1.4. Description des matériels utilisés.....	104
2. Traitement numérique des images expérimentales.....	105
2.1. Quelques généralités sur le filtrage des signaux bidimensionnels.....	105
2.2. Les différentes étapes du traitement.....	107
2.2.1. Elimination des signaux parasites de basses fréquences.....	107
2.2.2. Procédure de filtrage passe-bas des images.....	108
2.2.3. Recherche du centre.....	111
2.3. Précision du traitement.....	112
2.3.1. Génération d'images synthétiques.....	112
2.3.2. Précision du traitement et influence du bruit de fond.....	112
2.3.3. Précision du traitement sur une séquence d'images réelles.....	114
2.4. Répétabilité de la mesure.....	117
Chapitre 4 : Validation du modèle et confrontations aux résultats expérimentaux.....	123
1. Considération de quelques configurations simples.....	124
1.1. Résultats préliminaires.....	124
1.1.1. Doublet vertical.....	124
1.1.2. Doublet horizontal.....	127

1.1.3. Doublet incliné	129
1.2. Confrontations des résultats de simulations aux résultats expérimentaux	132
1.2.1. Doublet vertical	132
1.2.2. Doublet horizontal	139
1.2.3. Doublet incliné	144
2. Configurations à plus grand nombre de particules	149
2.1. Triplet horizontal	149
2.1.1. Description du cas traité	149
2.1.2. Confrontation des résultats de simulation aux résultats expérimentaux	150
2.2. Quadruplet horizontal	154
2.2.1. Description du cas traité	154
2.2.2. Confrontation des résultats de simulation aux résultats expérimentaux	155
Conclusion générale et perspectives	160
 Annexes	
Annexe A : Mesures de viscosité	164
Annexe B : Evaluation de la sensibilité vis-à-vis des conditions initiales ...	166
Annexe C : Correction empirique	171
Annexe D : Triplet horizontal : évolution des distances relatives particule-particule	175
Annexe E : Quadruplet horizontal : évolution des distances relatives particule-particule	179
Bibliographie	184

Nomenclature

Symboles mathématiques

∇	gradient
$(\nabla \cdot)$	divergence
\otimes	produit tensoriel
\wedge	produit vectoriel
$:$	produit scalaire de deux tenseurs
$\frac{D}{Dt}$	dérivée particulaire
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle par rapport au temps
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	dérivée partielle par rapport à la direction x_i
δ_{ij}	symbole de Kronecker

Lettres grecques

α	intensité du Stokeslet
β	intensité du dipôle de sources
γ	vecteur accélération
ϵ	distance inter-particules (surface-surface) adimensionnée
ϵ'	distance particule-paroi (surface-surface) adimensionnée
μ	viscosité dynamique
ρ	masse volumique
σ	tenseur des contraintes
Σ	tenseur des taux de déformation
τ	temps caractéristique
Φ	fraction volumique de particules
Ψ	fonction de courant
Ω	vecteur rotation

Lettres latines

a	rayon de particule
A_{ij}	fonctions de mobilité inter-particules le long de la ligne de centres
A	fonction de mobilité particule-paroi (mouvement perpendiculaire)
\mathbf{b}	vecteur position arbitraire constant
B_{ij}	fonctions de mobilité inter-particules perpendiculaire à la ligne de centres
B	fonction de mobilité particule-paroi (mouvement parallèle)
C_I	constante empirique (particule isolée)
C_{II}	constante empirique (doublet vertical)
\mathbf{L}	moment
\mathbf{f}	résultante de force adimensionnée
\mathbf{F}	force
\mathbf{F}^B	force d'histoire ou de Basset
\mathbf{F}^{lub}	forces de lubrification inter-particules
$\mathbf{F}^{\text{p}^{\text{lub}}}$	forces de lubrification particule-paroi
\mathbf{F}^H	force hydrodynamique
\mathbf{F}^M	forces de masse ajoutée
\mathbf{F}^T	traînée
\mathbf{F}^V	forces de volume
\mathbf{g}	vecteur gravité
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	fonction arbitraire
$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$	transformée de Fourier d'une fonction $\mathbf{g}(\mathbf{x})$
\mathbf{I}	matrice identité
$\mathbf{J}(\mathbf{x})$	tenseur d'Oseen
n	indice de réfraction
\mathbf{M}	matrice de mobilité inter-particules
\mathbf{M}^∞	matrice de mobilité inter-particules à deux corps tronquée en point force
$p(\mathbf{x})$	champ de pression dans le fluide
\mathbf{r}	vecteur inter-centres
\mathbf{R}	matrice de résistance inter-particules à deux corps
\mathbf{R}^{lub}	matrice des contributions inter-particules en champs proches
Re	nombre adimensionnel de Reynolds basé sur le diamètre d'une des particules
Re_a	nombre adimensionnel de Reynolds basé sur le rayon d'une des particules
S	surface
$\frac{S}{B}$	rapport de l'intensité du signal sur l'intensité de bruit

\mathbf{t}	force ponctuelle
\mathbf{u}	vitesse d'une particule adimensionnée
\mathbf{U}	vitesse d'une particule
\mathbf{U}_{St}	vitesse limite de Stokes
\mathbf{U}_{Os}	vitesse limite d'Oseen
$\mathbf{v}(\mathbf{x})$	champ de vitesse dans le fluide
\mathbf{v}^{S}	solution analytique de Stokes en champ de vitesse
\mathbf{v}^{O}	solution analytique d'Oseen en champ de vitesse
V_{s}	vitesse de sédimentation d'une suspension
\mathbf{W}_{ij}	tenseurs de mobilité particule-particule
\mathbf{W}_{p}	tenseur de mobilité particule-paroi
X_{ij}	fonctions scalaires de résistance inter-particules

Introduction générale

Généralités sur les dispersions

Une dispersion est un mélange de plusieurs phases distinctes dans lequel l'une de ces phases est la phase continue, appelée aussi fluide suspendant ou fluide porteur. L'autre phase est discontinue et constitue la phase dispersée qui est répartie sous forme d'éléments de volume distincts ou particules. Le terme particule, pris au sens large, recouvre tout objet fluide dont la dimension est supérieure à 10 Angströms (10^{-7}m) et inférieure à 10 cm [1].

Si le fluide porteur est généralement un liquide ou un gaz, la phase dispersée peut être solide, liquide ou gazeuse. Selon les combinaisons, ces fluides chargés portent les noms spécifiques suivants [2] :

- lorsque la phase continue est un gaz, elle peut contenir :
 - des gouttes liquides : la dispersion est un "brouillard" ou un "spray".
 - des particules solides : la dispersion est une "fumée" ou une "suspension de poussières".
- lorsque la phase continue est un liquide, elle peut contenir :
 - des bulles de gaz : la dispersion est une "mousse".
 - des gouttes d'un autre liquide non miscible avec la phase continue : la dispersion est une "émulsion".
 - des particules solides dispersées dans le liquide : la dispersion est une "suspension".

De nombreux procédés industriels impliquent la mise en œuvre de ces dispersions, c'est pourquoi la compréhension de leur physique constitue un challenge important en mécanique des fluides comme dans d'autres disciplines [3]. En mécanique des fluides, la recherche expérimentale et théorique s'oriente plus spécifiquement vers des problématiques liées à la dynamique des écoulements de ces fluides complexes. Ces études sont notamment nécessaires à la compréhension des interactions intra et inter-phases, qui occasionnent des réarrangements locaux pouvant influencer globalement l'écoulement de la

dispersion. Dans l'industrie agroalimentaire par exemple, outre les aspects de formulation, l'intérêt porte plus particulièrement sur le transport de mousses ou d'émulsions ou encore sur les problèmes comme la "démixtion" entraînant la perte de leurs propriétés spécifiques et l'engorgement des machines. Des études sont ainsi réalisées afin de maîtriser les procédés de fabrication des dispersions, leur stabilité physique et leur processabilité. Ces dispersions industrielles peuvent être obtenues par des procédés comme la fragmentation pour les mousses et les émulsions ou encore par mélange dans le cas des suspensions.

Si les exemples sont nombreux dans le domaine industriel, ils le sont tout autant dans le domaine environnemental avec des problématiques très diverses qui vont de la dynamique de création des nuages et des brouillards jusqu'à l'étude des transports de polluants urbains (gaz d'échappement, fumées d'usines).

Suivant le type de dispersion considéré, des hypothèses spécifiques aux différentes phases sont utilisées pour appréhender le comportement de la dispersion dans son ensemble.

En ce qui concerne la phase continue, lorsqu'elle est gazeuse et selon les conditions d'écoulement, on est amené à prendre en compte sa compressibilité et son équation d'état. A l'inverse, lorsqu'elle est liquide on suppose valide son incompressibilité mais on doit prendre en compte sa rhéologie particulière.

Tout comme les propriétés du fluide porteur, la nature des particules, leurs formes ainsi que leurs dimensions font également partie des paramètres qui conditionnent les interactions entre la phase dispersée et la phase continue. Les conditions limites aux interfaces sont naturellement différentes qu'il s'agisse de particules liquides, solides ou gazeuses.

Ces particularités peuvent engendrer l'existence d'un grand nombre de phénomènes physiques distincts d'un type de dispersion à l'autre. Certains phénomènes liés aux forces de cohésions à l'échelle moléculaire comme la tension interfaciale pour les émulsions (ou superficielle pour des gouttes dans un gaz) peuvent être d'une grande importance. Ajouter à cela l'influence des conditions physico-chimiques telles que la température, le pH, etc.

Par ailleurs, lorsqu'une longueur caractéristique des particules est inférieure à $0,1 \mu\text{m}$ typiquement, on peut négliger les forces de volume devant les forces surfaciques agissant sur une inclusion; ces dispersions sont dites "colloïdales". Alors, il vient naturellement que toutes les forces telles que le poids et la poussée d'Archimède sont négligées devant les forces surfaciques comme les frottements visqueux fluide-particule (force hydrodynamique). A ces échelles, les phénomènes liés à l'agitation thermique sont à prendre en compte en terme de diffusion des particules qui vient s'ajouter à leur convection.

Lorsqu'on ne peut plus négliger les forces de volume agissant sur les inclusions, les dispersions sont dites non-colloïdales. Dans ce cas, les effets volumiques (flottabilité et effets inertiels) sont prédominants. L'avantage de ce type de dispersions est qu'elles peuvent être étudiées simplement, dans des conditions d'écoulement gravitaire (sédimentation ou

crémage).

Tous les phénomènes cités ci-dessus, peuvent influencer à des degrés divers sur le comportement d'une dispersion. Il faut ajouter à ceux-ci les conditions aux limites imposées par la topologie de l'écoulement et par conséquent l'étude devient très complexe si l'on veut s'attaquer au problème dans sa globalité. C'est pour cette raison qu'une analyse dimensionnelle est souvent réalisée afin de ne tenir compte que des principaux phénomènes en présence. Dans le reste de ce mémoire il sera exclusivement question de suspensions non colloïdales pour lesquelles on s'attachera à comprendre la dynamique des interactions dont elles sont le siège.

Les suspensions

La mécanique des suspensions est un chapitre à part entière de l'étude générale des dispersions. Dans le cas particulier de la sédimentation, les hypothèses simplificatrices généralement utilisées sont les suivantes : la phase continue est newtonienne et incompressible. Les particules sont des sphères dures, parfaitement lisses et chimiquement inertes. De plus, la diffusion brownienne est considérée comme négligeable en première approximation devant les interactions hydrodynamiques intra et inter-phases.

S'agissant des propriétés macroscopiques de la suspension, la distribution spatiale des particules dans le fluide porteur conditionne ses propriétés. Ainsi, la viscosité apparente varie localement et le plus souvent de façon complexe en fonction du taux de présence des particules ou de la fraction volumique Φ . A l'inverse, la densité locale suit simplement la loi des mélanges.

Une des premières approches consiste à décrire la suspension comme un fluide homogène. Pour un écoulement de cisaillement simple et sous les hypothèses d'une suspension monodisperse et diluée ($\Phi < 1\%$), la viscosité apparente dépend linéairement de Φ . Dans ce régime de concentrations les particules sont suffisamment espacées pour considérer que seules les interactions fluide-particule sont à prendre en compte. Pour établir cette relation, on néglige l'influence des interactions particule-particule malgré la lente décroissance des perturbations hydrodynamiques qu'elles induisent [4]. Dans ces conditions, la viscosité spécifique ; $\mu_{sp} = (\frac{\mu_a}{\mu_f} - 1)$; est proportionnelle à la fraction volumique et s'écrit quelle que soit la nature des phases, sous la forme suivante :

$$\mu_{sp} = \phi \frac{\mu_f + \frac{5}{2}\mu_d}{\mu_f + \mu_d} \quad (1)$$

où μ_a , μ_f , μ_d représentent respectivement la viscosité apparente de la suspension, la viscosité dynamique de la phase continue et la viscosité de la phase dispersée.

Dans le cas d'une suspension cette relation se réduit à :

$$\mu_a = \mu_f(1 + 2,5\Phi) \quad (2)$$

Lorsque la fraction volumique augmente les interactions inter-particules ne peuvent être négligées. Tenant compte des interactions à deux corps par exemple (ce qui revient à faire la somme des effets dus à toutes les paires de particules), on obtient une contribution supplémentaire en Φ^2 dans l'expression de la viscosité apparente. La relation (2) devient alors :

$$\mu_a = \mu_f(1 + 2,5\Phi + k\Phi^2) \quad (3)$$

où k est un coefficient qui dépend notamment de l'état de surface des particules.

Lorsque la valeur de la fraction volumique en particule dépasse 20%, la suspension est considérée comme étant concentrée et les seules interactions à deux corps ne suffisent plus pour décrire son comportement. Les interactions multi-corps (doublets, triplets, quadruplets etc.) sont à considérer [5, 6, 7].

Outre la description de la suspension elle-même, l'intérêt de la recherche réside actuellement dans l'étude du transport et donc de la dynamique de ces fluides chargés dans diverses configurations d'écoulement. Parmi ces configurations, il en est certaines où la dimension caractéristique de la particule est non négligeable devant la dimension géométrique de l'écoulement et la suspension est alors dite confinée. Un des premiers enjeux de cette recherche est de comprendre les réarrangements de la phase dispersée, occasionnés par les différentes interactions fluide-particule, particule-particule et particule-paroi. Ceci dans le but de déterminer des grandeurs macroscopiques comme les taux de sédimentation, le comportement rhéologique de la suspension ainsi que les longueurs caractéristiques des inhomogénéités spatiales.

La sédimentation de suspensions

Le transport de suspensions par sédimentation est l'un des écoulements les plus étudiés dans la littérature du fait de son faible coût de mise en œuvre et de la parfaite connaissance du moteur de l'écoulement : la gravité. Cependant, cet écoulement reste assez complexe du point de vue de sa modélisation car certains phénomènes n'existent que dans le cas particulier de la sédimentation. Par exemple, pour deux particules en sédimentation leur interaction induit une augmentation de leurs vitesses respectives, mais cet effet est masqué par l'existence d'un écoulement de retour ou "back flow" pour une suspension homogène. Cet écoulement de retour assure la conservation du débit volumique dans toute section perpendiculaire au mouvement de sédimentation.

Ainsi, en l'absence d'effets inertiels et si la suspension est suffisamment diluée pour ne

considérer que les interactions hydrodynamiques à deux corps, la vitesse de sédimentation V_s de cette suspension est plus faible que la vitesse d'une particule isolée [8] :

$$V_s = U_{St}(1 - 6,55\Phi) \quad (4)$$

où U_{St} est la vitesse limite d'une particule isolée. Cette expression est un développement au premier ordre de la vitesse de sédimentation par rapport à la concentration Φ . Si l'on s'intéresse à l'organisation locale de la suspension, le réarrangement des particules est occasionné par les perturbations créées par ces mêmes particules qui sont le moteur de l'écoulement. Une attention particulière doit donc être portée à la représentation de la perturbation de champ de vitesse générée par le mouvement des particules dans la phase continue.

Pour une fraction volumique plus importante, la description de l'écoulement de la suspension nécessite la prise en compte des interactions multi-corps. Les développements pour obtenir la vitesse de sédimentation deviennent alors très complexes et, qui plus est, ne sont pas généralisables vu sa dépendance vis-à-vis de la configuration géométrique de l'écoulement (interactions particule-paroi).

Pour de très fortes valeurs de la concentration, l'écoulement est à rapprocher de celui dans un milieu poreux (à un mouvement de translation global près) où l'ensemble des particules reste fixe avec l'existence d'un écoulement interstitiel.

Les principales approches des écoulements de suspensions

Les méthodes analytiques

Une première catégorie de ces méthodes se base sur le couplage entre une équation de transport en fraction volumique, construite sur la base d'un bilan de migration des particules et le calcul de l'écoulement dans la phase continue. La présence des particules dans l'écoulement se traduit par des modifications locales des propriétés (viscosité et densité) de la suspension.

La méthode de Phillips [9], par exemple, permet de déterminer la distribution des particules au sein d'une suspension à partir du calcul du champ de vitesse d'un écoulement sous les hypothèses de Stokes et en utilisant une équation de transport basée sur un bilan de flux de migration de particules. Ces flux représentent les différentes interactions hydrodynamiques en jeu au cœur de la suspension. L'accumulation des particules dans un volume donné est la somme d'un flux représentant les migrations des particules des zones

de forts taux de cisaillement vers les zones de faibles taux de cisaillement (interaction fluide-particule) et d'un flux collisionnel prenant en compte les migrations vers les zones de faibles fréquences de collision (interaction particule-particule).

Ce type de méthodes nécessite la connaissance de l'évolution des propriétés physiques de la suspension en fonction de la valeur de la fraction volumique locale. L'utilisation d'une expression du type Kriegger-Dougherty [10], reliant la viscosité et la fraction volumique locale montre que pour un écoulement de cisaillement simple, une bonne corrélation existe entre les résultats expérimentaux et théoriques s'agissant de la répartition spatiale de la fraction volumique. Cependant, l'utilisation de cette méthode implique la connaissance de l'écoulement que subit la suspension, ce qui pose un problème important dans le cas de la sédimentation où l'écoulement est lui même créé par le mouvement de la phase dispersée.

La méthode des collocations est basée quant à elle sur la détermination des écoulements autour d'inclusions. C'est la résolution de l'écoulement (conditions d'adhérences) qui englobe les interactions hydrodynamiques subies par les particules. L'intégration de la contrainte sur la surface des particules permet de calculer la force de traînée subie par chaque particule tenant compte de l'ensemble des interactions hydrodynamiques. Ganatos *et al.* [11] recommandent d'utiliser 4 à 12 points sur la surface d'une sphère pour une représentation correcte de cette inclusion dans le fluide. Néanmoins, lorsque deux particules se rapprochent, le nombre de points nécessaire pour une bonne représentation des interfaces devient important et les calculs qui en découlent deviennent très coûteux. Cela conduit les utilisateurs de ces techniques à empêcher l'interpénétration des sphères plutôt que de prendre en compte les effets de lubrification. Cela explique pourquoi cette méthode est peu utilisée, notamment pour l'étude d'écoulements de suspensions à grand nombre de particules.

Les méthodes analytiques les plus utilisées sont basées sur le calcul direct des perturbations de champ de vitesse dans la phase continue que provoque le mouvement des particules. Ce calcul est généralement effectué pour des nombres de Reynolds suffisamment faibles pour supposer valides les équations de Stokes. A partir de ces équations, des relations linéaires entre les vitesses des particules et les forces auxquelles elles sont soumises sont établies. A cet effet, diverses méthodes sont proposées dans littérature :

- la méthode des réflexions [10, 12],
- les coordonnées bipolaires [1],
- où encore la méthode des développements asymptotiques raccordés lorsqu'il s'agit de déterminer les forces d'interactions hydrodynamiques en champs proches [13, 14].

En régime faiblement inertiel, la méthode des développements asymptotiques raccordés

peut être utilisée pour déterminer les interactions hydrodynamiques entre deux sphères par exemple. A partir des solutions asymptotiques déterminées à proximité de la particule et loin de celle-ci, on peut obtenir par raccordement les expressions des forces d'interactions quelle que soit la distance de séparation particule-particule dans le cas présent. Cette méthode permet non seulement de déterminer avec précision les forces d'interactions entre deux sphères, mais en tenant compte également de la présence d'une paroi plane. Malgré cela, son utilisation pour décrire la sédimentation d'un grand nombre de particules est d'une grande complexité.

Grâce à ces différentes techniques il est possible de modéliser les interactions inter-particules comme les interactions particule-paroi. Quelle que soit l'approche utilisée, celle-ci permet le couplage des effets dus aux perturbations de champ de vitesse ("champs lointains") et des forces de lubrification ("champs proches"). Enfin, comme nous le verrons plus loin, il est possible d'obtenir à partir de ces modèles une description approximative des effets multi-corps et de là l'étude de l'écoulement de suspensions non-diluées. Une présentation plus détaillée de ces méthodes est donnée dans le premier chapitre de ce mémoire.

Méthodes numériques

Récemment, grâce aux progrès de la simulation numérique directe des écoulements diphasiques, les chercheurs tentent par ce biais de décrire le plus fidèlement possible le comportement des suspensions. L'enjeu principal, qui représente le cœur du problème, est la résolution des équations de Navier-Stokes avec des conditions aux limites mobiles. Ce moyen de calcul permet une résolution précise de l'écoulement (champ de vitesse et de pression), incluant les effets inertiels. Toutefois, la prise en compte de la présence des particules solides dans le fluide nécessite encore quelques efforts.

Ici le domaine occupé par la suspension est discrétisé (fluide + inclusions) et les particules solides sont considérées comme des inclusions d'un fluide dont la viscosité diverge. Le principal problème dans la mise en œuvre de cette méthode est la diffusion numérique des interfaces. Cette diffusion numérique, associée au transport d'une interface, interfère avec la physique de l'écoulement, mais peut cependant être atténuée en utilisant des schémas numériques et des méthodes spécifiques. Les méthodes "Volume Of Fluid" par exemple [17], sont utilisées pour améliorer les simulations car elles permettent une reconstruction de la géométrie de l'interface, ce qui minimise la diffusion numérique.

Pour palier à ce type de problèmes, il est possible de ne discrétiser que le domaine occupé par le fluide porteur pour ne plus avoir à considérer la phase solide comme un fluide particulier. Pour cela on doit utiliser un maillage non-structuré pour qu'il puisse s'insé-

rer au mieux autour des inclusions (sphériques par exemple). De plus, les positions des particules évoluant dans le fluide suspendant, il est nécessaire d'effectuer régulièrement des reconstructions du maillage, ce qui représente un coût important quant au temps de calcul.

D'autres types de méthodes, comme celle appelée "unit-cell", consistent à faire évoluer les particules de la suspension dans des emplacements situés sur une grille en utilisant des lois probabilistes. Pour cela, on découpe le domaine en cellules identiques, chaque cellule ne pouvant contenir qu'une seule particule. En considérant chaque particule individuellement et, moyennant une approche probabiliste, on détermine le mouvement d'une particule vers une case voisine de celle où elle se trouve [18]. Il faut donc introduire un paramètre représentant le ratio de probabilité que le mouvement de la particule considérée soit dû à une force plutôt qu'à une autre (par exemple le ratio de probabilité que le mouvement soit dû aux forces de volume ou à la diffusion Brownienne) et dont la valeur conditionne le mouvement de la particule en question. Cependant si le mouvement de cette particule la conduit vers une case déjà occupée, le déplacement de cette particule est annulé sur le pas de temps courant et elle reste à la même position jusqu'à l'instant suivant.

Si cette méthode est assez simple dans sa conception, elle nécessite cependant des moyens de calculs importants et n'est pas adaptée à la modélisation des interactions particule-paroi.

Méthodes expérimentales

Certains auteurs, se basant sur des observations expérimentales globales, ont tenté de mettre en évidence des comportements macroscopiques caractéristiques parmi lesquels, des relations empiriques entre le taux de sédimentation (ou taux d'agrégation etc.) et la fraction volumique. L'effet Boycott par exemple [19], se manifeste par la variation du taux de sédimentation pour une suspension confinée en fonction de l'inclinaison des parois par rapport à la verticale. Ainsi, dans une cuve parallélépipédique, le taux de sédimentation augmente quand l'angle d'inclinaison augmente du fait de la ségrégation gravitaire; les remontées de fluide ont lieu dans les zones où il y a peu de particules, freinant d'autant moins la sédimentation dans les autres zones [20].

Peysson *et al.* [21], Segrè *et al.* [22], en mesurant la convection intrinsèque, ont mis en évidence une relation entre la dimension caractéristique des tourbillons, la fraction volumique locale et le taux de confinement. Ces études utilisent des techniques de mesures

optiques (visualisation directe ; P.I.V.¹ ; P.S.V.²), non-intrusives. Ces moyens expérimentaux sont aussi utilisés pour déterminer certains coefficients ou grandeurs macroscopiques nécessaires à la validation des modèles numériques. Ils sont aussi utilisés dans d'autres cas pour mesurer toute grandeur physique qui ne dépend que du champ de vitesse, comme les distances de corrélation des trajectoires de particules dans un fluide, qui sont directement liées à la portée des interactions.

Il est parfois nécessaire de mesurer directement les positions et les vitesses des particules, mettant en jeu des techniques de visualisation directe. Le couplage des moyens d'acquisition et des algorithmes de traitement d'images permettent alors de reconstituer leurs trajectoires au cours de la sédimentation. Ces données expérimentales, qui intègrent l'historique des forces subies par les particules, sont souvent utilisées pour valider des approches prédictives, en particulier pour les modèles de forces hydrodynamiques [11, 15, 23, 24, 25, 26].

Le présent travail vise deux objectifs principaux :

- proposer un outil numérique permettant de décrire la sédimentation de plusieurs particules en régime faiblement inertiel.
- réaliser des expériences de sédimentation dans des conditions maîtrisées servant à cerner les contours du domaine de validité de l'outil numérique.

Pour développer notre outil numérique, nous tirons profit de la simplicité de mise en œuvre de la superposition des champs de vitesse telle qu'elle est utilisée par Durlofsky *et al.* [5] en régime de Stokes. Elle est ici étendue aux régimes d'écoulements faiblement inertiels, avec pour objectif de décrire avec une précision acceptable la sédimentation de sphères dures. Pour juger de la pertinence de nos choix, les résultats de nos simulations sont comparés aux résultats analytiques dus à Vasseur *et al.* [15] dans le cas de configurations simples. A la suite de ces comparaisons, quelques pistes seront dégagées pour étayer la discussion de la validité de notre approche.

Les moyens expérimentaux dont nous disposons sont essentiellement des techniques de mesure bidimensionnelles (vélocimétrie laser et visualisation directe) qui autorisent l'acquisition de données expérimentales pour des configurations où les particules évoluent dans un plan.

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous présentons les fondements théoriques sur lesquels se basent la représentation de la force hydrodynamique subie par une particule en présence d'autres particules et de parois. La première partie de ce chapitre porte sur les conditions d'écoulement de Stokes, c'est à dire lorsque le nombre de Reynolds particulaire

1. Particle Image Velocimetry
2. Particle Streak Velocimetry

Re est nul. La seconde partie est consacrée à la représentation des effets inertiels dans le fluide dans une gamme de $Re < 1$.

Le second chapitre de ce mémoire est dédié à la mise en œuvre de l’outil numérique. Dans une première partie nous proposons une méthode pour représenter les forces d’interactions hydrodynamiques appliquées à n particules sédimentant entre deux parois planes et parallèles, pour des nombres de Reynolds petits devant l’unité. La seconde partie concerne plus spécifiquement la formulation et la résolution numérique des équations du mouvement des particules. Enfin, nous proposons dans la troisième et dernière partie de ce chapitre les premiers tests de l’outil numérique utilisé. Ce travail est effectué dans des configurations simples décrites d’un point de vue analytique (sphère isolée) et dans des configurations plus complexes déjà étudiées dans la littérature, sous les hypothèses de Stokes. Ces premières comparaisons permettent notamment de vérifier la faible influence des rotations des particules, ignorées dans le présent travail.

Le troisième chapitre est une description du matériel et des méthodes utilisées pour l’acquisition des données expérimentales dans le but de les confronter ultérieurement aux résultats du modèle numérique adopté. La première partie de ce chapitre est consacrée à la description du dispositif expérimental. La deuxième partie de ce chapitre porte sur la technique de mesure utilisée pour nos expériences. Dans un premier temps, nous présentons le mode de traitement des images acquises et l’évaluation de l’incertitude de la mesure. Dans un deuxième temps, nous proposons quelques résultats afin d’apprécier la répétabilité des expériences d’une manipulation à l’autre.

Dans le quatrième et dernier chapitre de ce mémoire, nous proposons une confrontation des résultats de simulation à des résultats de la littérature mais aussi aux résultats de nos propres expériences afin d’apprécier la validité de la méthode proposée en régime inertiel. La première partie de ce chapitre concerne l’étude de plusieurs configurations simples de doublets de particules pour des orientations spécifiques (doublet vertical, doublet horizontal etc.). Dans la seconde partie de ce chapitre nous abordons des configurations à plus grand nombre de particules. La confrontation des simulations aux expériences permet d’éprouver la méthode proposée et de montrer son intérêt lors de l’étude de la sédimentation de particules pour des nombres de Reynolds $Re < 1$. Ceci en soulignant les avantages et les inconvénients de notre approche tout en délimitant son domaine de validité.

Une conclusion générale reprendra les principaux points de la présente étude tout en se plaçant dans une perspective des améliorations qui peuvent y être apportées.

Chapitre 1

Considérations Théoriques

Dans ce chapitre nous présentons les outils théoriques qui nous ont permis de mettre en œuvre un code numérique simulant le comportement dynamique d'un nuage de particules en sédimentation.

Lors du transport de suspensions, la structuration de la phase dispersée au sein de la phase fluide dépend des interactions entre la phase dispersée et l'écoulement. Dans le cas de la sédimentation, l'écoulement est engendré par le mouvement des particules dans la phase continue. De ce fait, pour comprendre les réarrangements entre particules au sein d'une suspension en sédimentation, on doit en premier lieu s'intéresser à la perturbation engendrée par le mouvement d'une particule isolée puis quantifier l'influence de cette perturbation sur le comportement d'une particule voisine etc.

Le point de départ de ce type d'étude est le système d'équations du mouvement de la phase fluide, obtenu par conservation du flux de quantité de mouvement. Lorsque la vitesse du fluide \mathbf{v} reste faible devant la vitesse du son dans le même fluide, on peut alors utiliser les équations de Navier-Stokes, valables pour les fluides newtoniens. Alors, l'écoulement incompressible d'un tel fluide est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

où ρ et μ sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide et p représente le champ de pression dans le fluide.

Comme nous le verrons plus loin, ce système d'équations est généralement dégénéré selon les conditions d'écoulement pour obtenir analytiquement des solutions approximées [4].

Les approximations les plus souvent rencontrées dans la littérature sont les suivantes :

- l'approximation de Stokes : sous l'hypothèse d'une influence négligeable de tous les effets inertiels dans le fluide, elle représente "parfaitement" la physique de tout écoulement incompressible dans la limite d'un nombre de Reynolds nul ;
- l'approximation d'Oseen : elle permet de calculer la perturbation de champ de vitesse autour d'une sphère, lorsque l'écoulement est stationnaire et pour des nombres de Reynolds variables selon le degré d'approximation [27, 28, 29, 30, 31].

Dans la première partie de ce chapitre nous faisons une description de quelques outils théoriques établis sous les hypothèses de Stokes. La première section concerne la sédimentation d'une particule isolée en milieu infini. Nous y présentons plus spécifiquement une des techniques permettant de déterminer la perturbation de champ de vitesse générée par le déplacement d'une sphère solide, puis l'expression de la force de traînée découlant des interactions avec l'écoulement. La seconde section de cette première partie concerne les modifications de l'écoulement dues à la présence d'une particule ou d'une paroi dans le voisinage d'une autre particule.

Dans la seconde partie de ce chapitre nous mettons en évidence les différences induites par la prise en compte des effets inertiels lors de la sédimentation de particules. La première section de cette seconde partie comporte une description de la perturbation engendrée par le mouvement d'une particule isolée, ainsi que l'expression modifiée de la force de traînée. Dans une deuxième section nous présentons quelques travaux bibliographiques dans lesquels l'influence des effets inertiels est prise en compte pour exprimer les forces d'interactions hydrodynamiques entre particules.

1. Régime de Stokes

Dans cette section nous adoptons les hypothèses simplificatrices généralement employées pour l'étude de la sédimentation de particules sphériques à faibles nombres de Reynolds. Nous supposons que les effets inertiels sont négligeables devant les effets visqueux pour obtenir les équations du mouvement de la phase fluide. Cette simplification est justifiée lorsque les particules sont "petites" et ce même si leur vitesse par rapport aux parois est grande, elle demeure faible d'une part par rapport au fluide les entourant et d'autre part relativement à une autre particule [10]. Ce comportement fortement visqueux est gouverné par le système d'équations de Stokes [1, 4] dont la forme est donnée en (1.2). Dans la pratique, pour la plupart des problèmes correspondant à un nombre de Reynolds très

faible devant l'unité, la résolution du système de Stokes donne une bonne approximation de l'écoulement réel.

$$\begin{aligned}\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

1.1. Sédimentation d'une particule sphérique

La force qu'oppose le fluide au déplacement d'une particule est appelée traînée. Son calcul passe obligatoirement par la résolution des équations du mouvement de la phase fluide. Il existe plusieurs façons de résoudre le système d'équations de Stokes (1.2) pour calculer la perturbation générée par un objet en mouvement dans un fluide visqueux. La méthode de séparation des variables par exemple, conduit à la solution générale de Lamb où les champs hydrodynamiques (vitesse et pression) sont représentés par des harmoniques sphériques. Cette méthode est décrite en détails par Happel *et al.* [1]. Une autre méthode se base sur le développement en série de Taylor d'une fonction de Green appelée tenseur d'Oseen, qui constitue le propagateur de l'écoulement de Stokes. Cette méthode appelée expansion multi-polaire nécessite cependant un bref rappel des solutions singulières ou solutions fondamentales des équations de Stokes.

1.1.1. Solutions singulières des équations de Stokes

La linéarité des équations de Stokes permet d'appliquer le principe de superposition pour résoudre un problème complexe. La solution générale du problème est construite par addition des différentes contributions élémentaires. Dans le cas présent, ces dernières sont les solutions singulières des équations du mouvement qui sont combinées pour vérifier les conditions aux limites du problème considéré. Dans les paragraphes suivants, nous présentons la solution en point force ou Stokeslet ainsi que la solution en dipôle de force. Les solutions singulières d'ordres supérieurs ne sont pas prises en compte par la suite, à l'exception d'une contribution quadripolaire appelée solution en dipôle de sources dans le cas d'une sphère.

1.1.1. a) Solution en point force ou Stokeslet

Afin d'obtenir la solution du système (1.2) pour la propagation de la perturbation causée par une force ponctuelle \mathbf{t} dans un fluide visqueux initialement au repos, il est commode d'utiliser les propriétés de la transformée de Fourier. La force ponctuelle exercée à l'origine

(cf. figure 1.1) est alors définie grâce aux propriétés de la fonction de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ et les équations à résoudre sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\nabla p &= \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{t} \delta(\mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\end{aligned}\tag{1.3}$$

Soit $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ une fonction vectorielle et $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$ sa transformée dans l'espace de Fourier, alors :

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{q}\tag{1.4}$$

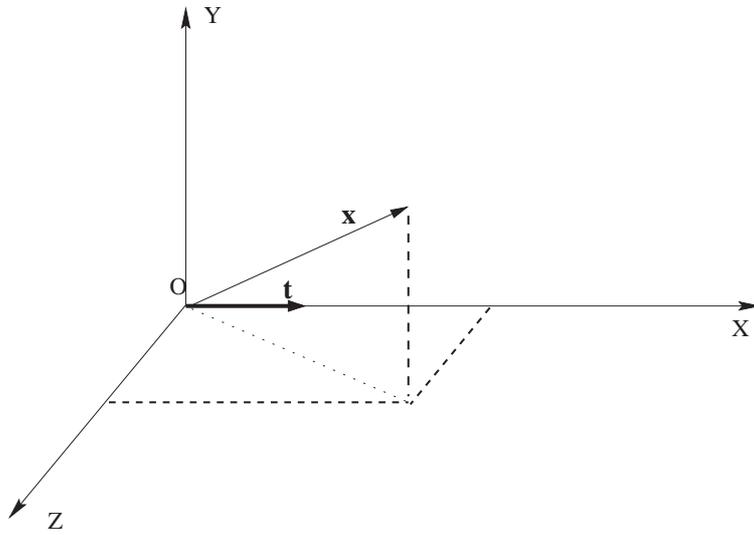


Figure 1.1 *Système de coordonnées*

Si nous effectuons la transformée de Fourier du système (1.3), les équations du mouvement et de la conservation de la masse deviennent algébriques et prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}-\mu q^2 \hat{\mathbf{v}} + i\mathbf{q} \hat{p} + \mathbf{t} &= 0 \\ i\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{v}} &= 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

où $\hat{\mathbf{v}}$ et \hat{p} sont respectivement les transformées des champs de vitesse et de pression dont les expressions sont :

$$\hat{p}(\mathbf{q}) = -i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{t}}{q^2} \quad \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{\mu q^2} \cdot \mathbf{t}\tag{1.6}$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité.

On effectue alors la transformée inverse pour retrouver les expressions du champ de pression et du champ de vitesse que produit la propagation de la perturbation due à \mathbf{t} . Pour cela on utilise les expressions suivantes, déduites du théorème de Green [10] :

$$\delta(\mathbf{x}) = -\nabla^2 \frac{1}{4\pi x} = -\nabla^2 \nabla^2 \frac{x}{8\pi} \quad (1.7)$$

où $x = \|\mathbf{x}\|$.

La solution en point force fait apparaître le tenseur d'Oseen ; noté $\mathbf{J}(\mathbf{x})$; qui constitue le propagateur de l'écoulement de Stokes. Son expression est la suivante :

$$J_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ij}}{x} + \frac{x_i x_j}{x^3} \right) \quad (1.8)$$

Alors, les champs hydrodynamiques correspondant au Stokeslet ont la forme suivante :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}}{4\pi x^3} \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} \quad (1.9)$$

La perturbation $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ représente le champ de vitesse engendré par la force ponctuelle d'intensité \mathbf{t} , exercée à l'origine et transportée par l'intermédiaire du tenseur $\mathbf{J}(\mathbf{x})$. Cette solution singulière est utilisée comme approximation des champs hydrodynamiques engendrés par le déplacement d'une particule de très petite dimension ou à très grande distance d'une particule de dimension quelconque. Dans ce cas, on parle d'approximation aux champs lointains.

1.1.1. b) Solution en dipôle de force

Comme précédemment pour le Stokeslet, on peut exprimer la perturbation induite par la propagation d'un dipôle de force ponctuel. Comme le montre la figure 1.2, la perturbation engendrée par le dipôle de force comprend :

- une contribution symétrique ; le Stresslet ; qui correspond à un mouvement de déformation pure ;
- une contribution antisymétrique ; le Rotlet ; qui exprime un couple ponctuel appliqué au fluide et représente un mouvement de rotation pure.

Soit \mathbf{b} un vecteur arbitraire constant, alors le champ de vitesse représentant la propagation du dipôle de force est défini par [10] : $\mathbf{v}^d(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{t}) : \nabla(\mathbf{J})$.

Si on note \mathbf{v}^{dS} et \mathbf{v}^{dR} les champs de vitesse correspondant respectivement au Stresslet et au Rotlet, alors :

$$\mathbf{v}^{dS} = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{1}{x^3} \mathbf{S} : \mathbf{I} \mathbf{x} - \frac{3}{x^5} \mathbf{x} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \right) \quad \mathbf{v}^{dR} = \frac{\mathbf{L} \wedge \mathbf{x}}{8\pi\mu x^3} \quad (1.10)$$

avec $\mathbf{S} = \frac{1}{2}[(\mathbf{b} \otimes \mathbf{t}) + (\mathbf{t} \otimes \mathbf{b})]$ et $\mathbf{L} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}$.

Des techniques s'appuyant sur des distributions surfaciques de forces ponctuelles et de singularités d'ordres supérieurs sont utilisées pour déterminer l'écoulement autour d'obstacles solides [5, 32]. L'intérêt de ce type de technique réside dans le fait que chaque contribution vérifie à la fois la condition de continuité (car $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0$) et s'annule à l'infini. De ce fait, ces contributions sont superposables sans aucune restriction supplémentaire. Dans la partie suivante nous présentons l'application de cette technique dans le cas d'une sphère isolée en mouvement.

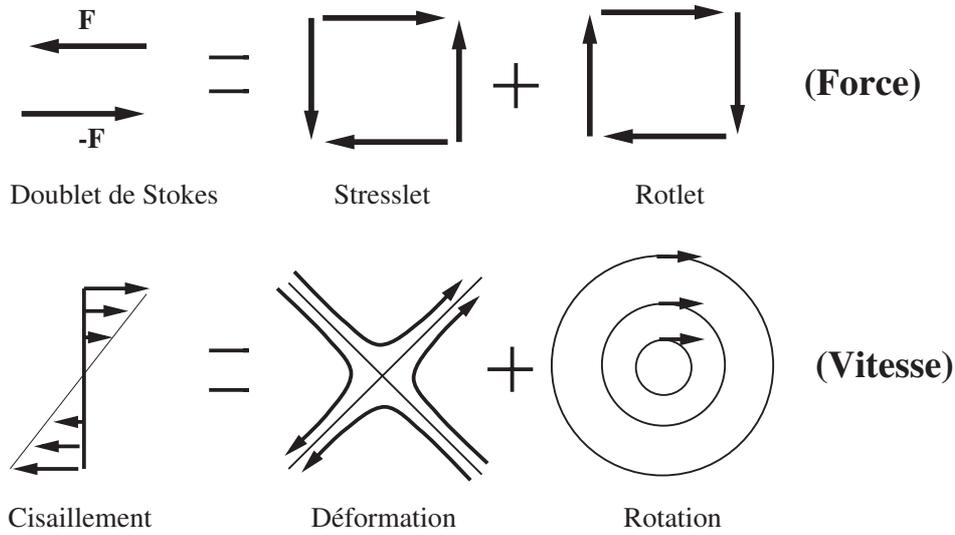


Figure 1.2 *Dipôle de Stokes*

1.1.2. Écoulement engendré par le mouvement d'une sphère solide

Le mouvement d'une sphère centrée en \mathbf{x}^0 est exprimé comme la combinaison de la vitesse de translation \mathbf{U}^0 et de sa vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}$. De par son déplacement la particule affecte le mouvement du fluide au travers d'une densité surfacique de force \mathbf{t} distribuée sur sa surface ; S^0 . Ces forces sont alors propagées dans le fluide pour exprimer le champ de vitesse résultant tel que :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}) - \int_{S^0} \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_y \quad (1.11)$$

où \mathbf{y} décrit la surface de la sphère et $\mathbf{v}^\infty(\mathbf{x})$ représente en un point la vitesse dans le fluide en l'absence de la particule.

Par ailleurs, l'hypothèse de sphère solide implique qu'à la surface de celle-ci la condition d'adhérence soit vérifiée. Alors en tout point \mathbf{x} de sa surface S^0 on a :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^0 + \Omega \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \quad (1.12)$$

Pour exprimer $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ on écrit le tenseur d'Oseen (1.8) à l'aide de la fonction $G_{ij}(\mathbf{x})$, telle que :

$$J_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} G_{ij}(\mathbf{x}) \quad G_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\delta_{ij}}{x} + \frac{x_i x_j}{x^3} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}) - \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S^0} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_y \quad (1.14)$$

Puis on effectue le développement en série de Taylor de la fonction $G_{ij}(\mathbf{x})$ autour de $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$. Donc, en posant $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, il vient :

$$G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (y_{k_1} - x_{k_1}^0)(y_{k_2} - x_{k_2}^0) \dots (y_{k_n} - x_{k_n}^0) \left(\frac{\partial^n G_{ij}(\mathbf{s})}{\partial s_{k_1} \partial s_{k_2} \dots \partial s_{k_n}} \right)_{\mathbf{s}=\mathbf{x}-\mathbf{x}^0} \quad (1.15)$$

Pour simplifier les expressions, nous utiliserons la notation suivante :

$$G_{ij,k_1,k_2,\dots,k_n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n G_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_n}} \quad (1.16)$$

L'expression (1.15) est injectée dans la relation (1.14) afin d'écrire le développement multipolaire de l'écoulement de Stokes :

$$v_i(x) - v_i^\infty(x) = \frac{-1}{8\pi\mu} \left(G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \int_{S^0} t_j(\mathbf{y}) dS + G_{ij,k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \int_{S^0} (y_k - x_k^0) t_j(\mathbf{y}) dS + \dots \right) \quad (1.17)$$

Chaque contribution $Q_{ij}^{(n)} = - \int_{S^0} (y_k - x_k^0)^n t_j(\mathbf{y}) dS$ est appelée moment multipolaire d'ordre n . On peut remarquer que le premier terme de la relation (1.17) qui représente la contribution monopolaire ($n = 0$), correspond à l'expression de la force totale exercée par la particule sur le fluide, dont l'intensité est donnée par :

$$F_j = - \int_{S^0} t_j(\mathbf{y}) dS \quad (1.18)$$

Le second terme correspond à la contribution dipolaire. Le moment dipolaire D_{jk} est la résultante des deux contributions suivantes :

$$D_{jk} = - \int_{S^0} (y_k - x_k^0) t_j dS = S_{jk} + R_{o_{jk}} \quad (1.19)$$

Le Stresslet (partie symétrique) :

$$S_{jk} = - \frac{1}{2} \int_{S^0} \left((y_j - x_j^0) t_k + (y_k - x_k^0) t_j - \frac{2}{3} \delta_{jk} \sum_l (y_l - x_l^0) t_l \right) dS \quad (1.20)$$

Le Rotlet (partie antisymétrique) :

$$Ro_{jk} = -\frac{1}{2} \int_{S^0} \left((y_k - x_k^0)t_j - (y_j - x_j^0)t_k \right) dS \quad (1.21)$$

De la même façon que la solution en point force est transportée par $G_{ij}(\mathbf{x})$ dans l'écoulement, la propagation des contributions dipolaire et quadripolaire est effectuée par l'intermédiaire des dérivées de la fonction $G_{ij}(\mathbf{x})$. Dans le cas présent les relations utilisées par la suite sont les suivantes :

$$G_{ij,k}(\mathbf{x}) = -\frac{x_k \delta_{ij}}{R^3} + \frac{x_j \delta_{ik}}{R^3} + \frac{x_i \delta_{jk}}{R^3} - \frac{3x_i x_j x_k}{R^5} \quad (1.22)$$

$$G_{ij,kk}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial_{ij}}{R^3} + \frac{3x_i x_j}{R^5} \quad (1.23)$$

où $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|$.

Le Stresslet et le Rotlet sont respectivement propagés par les parties symétrique et antisymétrique de la fonction $G_{ij,k}(\mathbf{x})$.

$$G_{ij,k}^{Sym} = \frac{1}{2}(G_{ij,k}(\mathbf{x}) + G_{ik,j}(\mathbf{x})) = \frac{x_i \delta_{jk}}{R^3} - \frac{3x_i x_j x_k}{R^5} \quad (1.24)$$

$$G_{ij,k}^{Antisym} = \frac{1}{2}(G_{ij,k}(\mathbf{x}) - G_{ik,j}(\mathbf{x})) = \frac{x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij}}{R^3} \quad (1.25)$$

Grâce à ces relations nous pouvons représenter le champ de vitesse issu de chaque contribution. On note :

- $\mathbf{v}^m(\mathbf{x})$ la contribution monopolaire (Stokeslet) ;
- $\mathbf{v}^{dS}(\mathbf{x})$ le champ de vitesse correspondant au Stresslet ;
- $\mathbf{v}^{dR}(\mathbf{x})$ le champ de vitesse correspondant au Rotlet.

$$v_i^m(\mathbf{x}) = \frac{F_j}{8\pi\mu} G_{ij}(\mathbf{x}) \quad v_i^{dS}(\mathbf{x}) = \frac{S_{jk}}{8\pi\mu} G_{ij,k}^{Sym}(\mathbf{x}) \quad v_i^{dR}(\mathbf{x}) = \frac{Ro_{jk}}{8\pi\mu} G_{ij,k}^{Antisym}(\mathbf{x})$$

Translation uniforme d'une sphère dans un fluide au repos

Dans le cas de la translation d'une sphère dans un fluide visqueux initialement au repos on a : $\mathbf{v}^\infty(\mathbf{x}) = 0$. De plus, le Stresslet n'exerce aucune force sur le fluide car l'intégrale du vecteur contrainte sur une surface entourant la singularité $\|\mathbf{x}\| = 0$ s'annule [10]. La condition d'adhérence est remplie grâce à une contribution quadripolaire qui dépend de la taille et de la forme de la particule considérée. Tous les termes d'ordres supérieurs appelés moments irréductibles sont nuls [5].

En conséquence, une particule agit comme un point force plus une contribution quadripolaire $\mathbf{v}^q(\mathbf{x})$ appelée solution en dipôle de sources dans le cas d'une sphère. Le champ de vitesse autour d'une sphère est alors exprimé par superposition de ces deux contributions telles que :

$$v_i(\mathbf{x}) = v_i^m(\mathbf{x}) + v_i^q(\mathbf{x}) = v_i^m(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\nabla^2 v_i^m(\mathbf{x}) \quad (1.26)$$

Pour résoudre le problème, on réécrit (1.26) à l'aide des relations (1.22 et 1.23) et on a :

$$v_i(\mathbf{x}) = \alpha_j \left(\frac{\delta_{ij}}{R} + \frac{x_i x_j}{R^3} \right) + \beta_j \left(-\frac{\delta_{ij}}{R^3} + \frac{3x_i x_j}{R^5} \right) \quad (1.27)$$

où α_j et β_j sont respectivement l'intensité du Stokeslet et celle du dipôle de sources. A la surface de la sphère ($R = a$), la condition d'adhérence est remplie par :

$$\frac{\alpha_i}{a} + \frac{\alpha_j x_i x_j}{a^3} - \frac{\beta_i}{a^3} + \frac{3\beta_j x_i x_j}{a^5} = U_i \quad (1.28)$$

On peut alors déduire les coefficients α_i et β_i :

$$\alpha_i = \frac{3a}{4}U_i \quad \beta_i = -\frac{a^3}{4}U_i \quad (1.29)$$

Il vient donc l'expression suivante :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{3a}{4R} \left(1 + \frac{a^2}{3R^2} \right) \mathbf{U} + \frac{3a}{4R} \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right) \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \otimes \mathbf{R}}{R^2} \quad (1.30)$$

Cette relation représente dans un repère fixe, l'expression du champ de vitesse dû à la translation uniforme d'une sphère dans un fluide visqueux initialement au repos. En coordonnées sphériques (R, θ, φ) (cf. figure 1.3), ce champ de vitesse axisymétrique (de composante azimutale identique quel que soit φ) s'écrit :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_R \mathbf{e}_R + v_\theta \mathbf{e}_\theta = U \left[\cos\theta \left(\frac{3a}{2R} - \frac{a^3}{2R^3} \right) \mathbf{e}_R - \sin\theta \left(\frac{3a}{4R} + \frac{a^3}{4R^3} \right) \mathbf{e}_\theta \right] \quad (1.31)$$

La topologie de cette perturbation est visualisée sur la figure 1.4 où sont tracées les lignes de courant de l'écoulement. On peut constater sur cette figure que l'écoulement présente une symétrie amont-aval par rapport au plan médian $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On retrouve cette même symétrie sur les figures 1.5 et 1.6, où les lignes représentent respectivement les isovaleurs des composantes v_x et v_y de la vitesse dans le fluide.

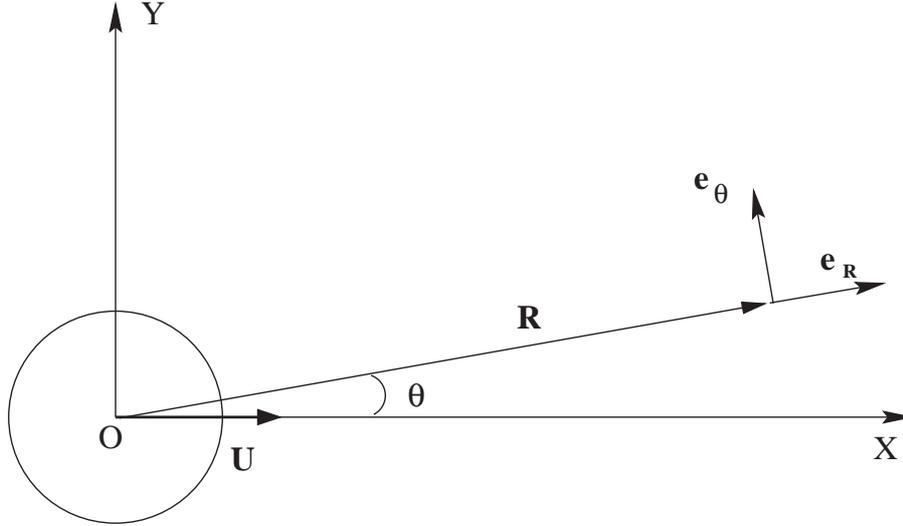


Figure 1.3 *Système de coordonnées pour une sphère en translation*

1.1.3. Force de traînée appliquée à une sphère en translation

Comme nous l'avons vu précédemment, la présence de la sphère dans le fluide est décrite au travers d'une distribution surfacique de forces. En intégrant ces contraintes sur la surface d'une particule on peut exprimer une force \mathbf{F} et un couple \mathbf{L} qui représentent respectivement la force totale et le couple total exercés par la particule sur le fluide tels que :

$$\mathbf{F} = \int_{S^0} \mathbf{t} dS \quad \mathbf{L} = \int_{S^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \wedge \mathbf{t} dS \quad (1.32)$$

La force de traînée \mathbf{F}^T représente la résultante des contraintes visqueuses et de pression exercée par le fluide sur la surface de la particule et par conséquent $\mathbf{F}^T = -\mathbf{F}$. Le calcul de la traînée est alors effectué en exprimant les contraintes dans le fluide de la façon suivante :

$$\mathbf{F}^T = \int_{S^0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (1.33)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes tel que : $\boldsymbol{\sigma} = -p\delta_{ij} + \Sigma_{ij}$.

Pour une sphère en translation, la perturbation est axisymétrique et la force de traînée n'a qu'une composante selon la direction de la vitesse de déplacement de la particule :

$$\mathbf{F}^T \cdot \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\cos\theta(-p + \Sigma_{RR}) - \sin\theta\Sigma_{R\theta} \right] \Big|_{R=a} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (1.34)$$

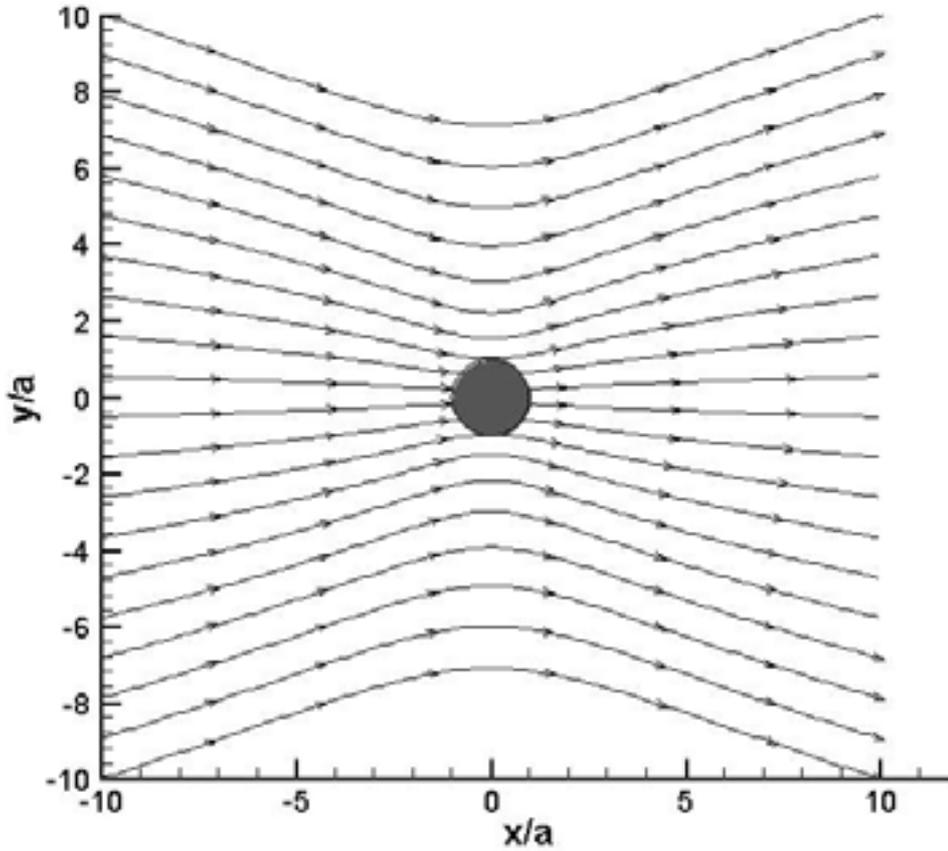


Figure 1.4 *Topologie de l'écoulement de Stokes autour d'une sphère solide en translation*

avec :

$$\Sigma_{RR} = 2\mu \frac{\partial v_R}{\partial r} \qquad \Sigma_{R\theta} = \mu \left(R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v_\theta}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right)$$

Le champ de pression autour de la sphère [19] est de la forme suivante :

$$p(R, \theta) = \frac{3}{2} \mu a \frac{\cos \theta}{R^2} \qquad (1.35)$$

Après intégration de la relation (1.34) on obtient l'expression de la force de traînée de Stokes. Lorsque la sphère évolue à vitesse constante \mathbf{U} dans un fluide immobile à l'infini, cette force prend la forme suivante :

$$\mathbf{F}^T = -6\pi\mu a \mathbf{U} \qquad (1.36)$$

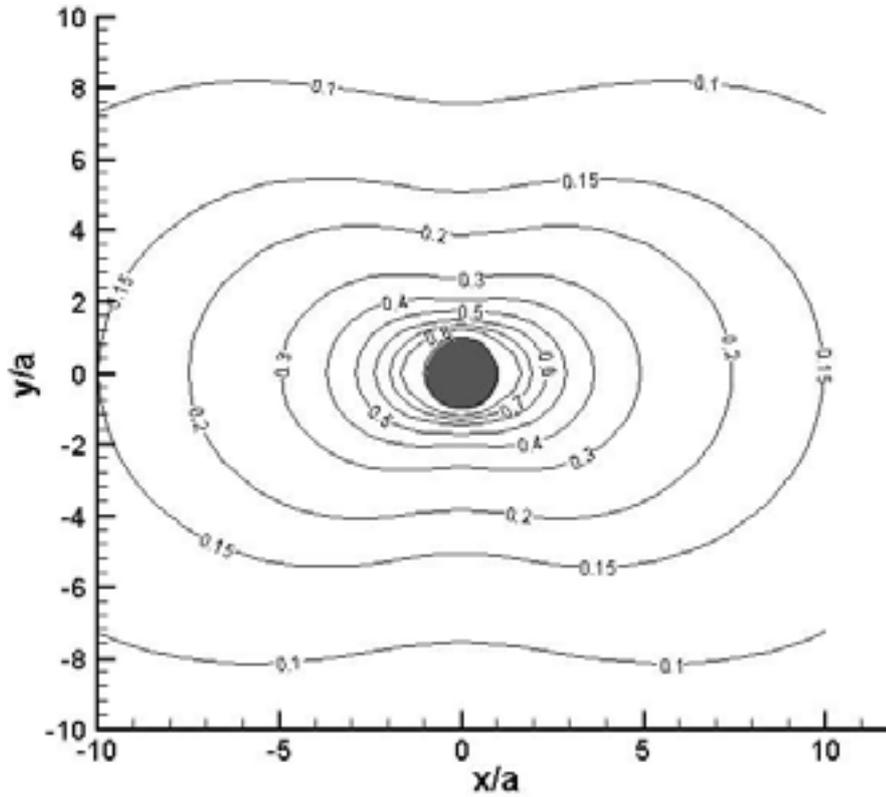


Figure 1.5 *Écoulement de Stokes : lignes isovaleurs de v_x/U*

L'expression de \mathbf{F}^T sous forme adimensionnelle fait apparaître le coefficient de traînée noté C_D et tel que :

$$C_D = \frac{F^T}{\frac{1}{2}\rho U^2 S_x} = \frac{24}{Re} \quad (1.37)$$

où $S_x = \pi a^2$ est la surface projetée ou surface apparente de la sphère dans l'écoulement et Re est le nombre adimensionnel de Reynolds : $Re = \frac{2a\rho U}{\mu}$.

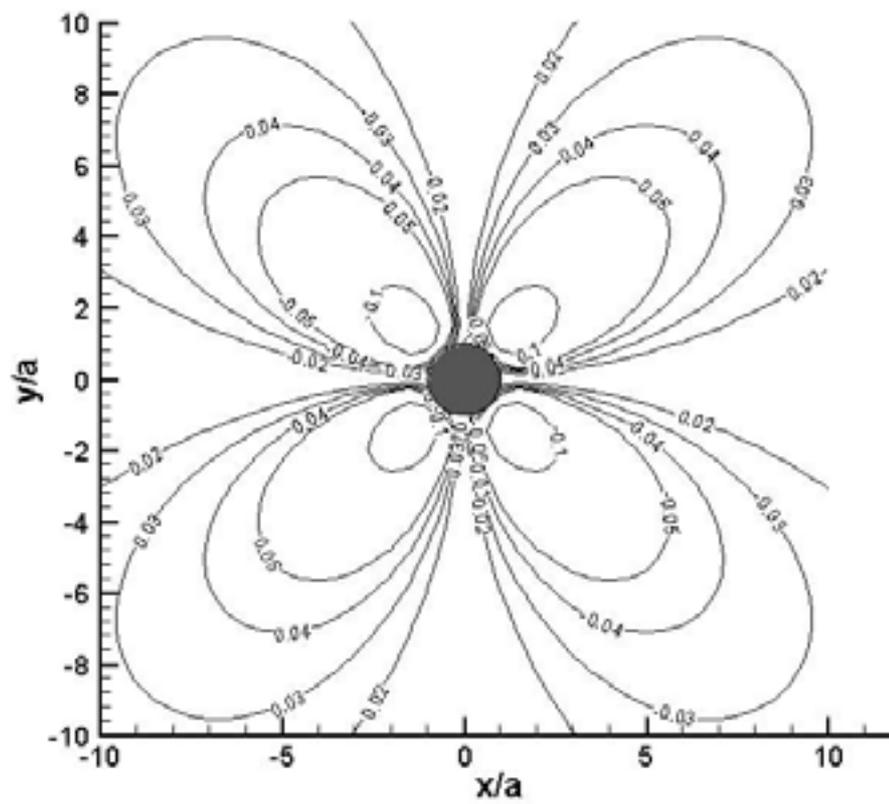


Figure 1.6 *Ecoulement de Stokes : lignes isovaleurs de v_y/U*

1.2. Interactions hydrodynamiques sphère-sphère et sphère-paroi

Dans le cas présent, la description des interactions hydrodynamiques consiste à exprimer les forces appliquées à chaque particule connaissant leurs vitesses respectives. En général, on considère que les phénomènes hydrodynamiques à courte et longue portées sont découplés, ce qui permet de représenter la force hydrodynamique entre deux particules ou une particule et une paroi comme la somme de deux contributions :

- une contribution aux champs lointains qui rend compte des effets d'entraînement dus aux perturbations de champ de vitesse ;
- une contribution aux champs proches (ou de lubrification) qui représente les effets relatifs au drainage du fluide visqueux situé dans l'interstice entre deux surfaces solides très proches l'une de l'autre.

L'écoulement de Stokes autour d'une particule en déplacement au voisinage d'une paroi ou d'une autre particule est un problème pour lequel on trouve de nombreux résultats dans la littérature. Pour résoudre ce problème lorsque la distance particule-paroi ou particule-particule n'est pas trop faible (champs lointains), il existe essentiellement trois méthodes :

- l'utilisation du théorème de réciprocité de Lorentz [13] ;
- la méthode des coordonnées bipolaires [1] ;
- la méthode des réflexions qui est présentée plus spécifiquement par la suite [1, 10].

Dans le cas contraire, les expressions des efforts de lubrification sont généralement obtenues par la méthode des développements asymptotiques raccordés [13, 33].

1.2.1. Interactions sphère-sphère

1.2.1.1. Contribution en champs lointains

Lorsque l'on considère la sédimentation de deux particules dans un fluide visqueux on observe une interaction coopérative qui conduit à une augmentation de la vitesse des deux particules. L'intensité de ces interactions hydrodynamiques est généralement conditionnée par les paramètres suivants :

- La dimension caractéristique des particules ;
- leur distance inter-centres ;
- leur orientation relative ;
- leurs vitesses de translation et de rotation par rapport à la vitesse du fluide à l'infini.

Pour représenter ces interactions hydrodynamiques, on est amené à déterminer les vitesses de chaque particule en fonction des forces appliquées connues, ou inversement, à déduire

des vitesses connues les forces appliquées aux particules. Pour cela on doit respectivement résoudre le problème dans sa formulation "directe" en termes de mobilités ou "inverse" en terme de résistances.

La linéarité du problème direct permet d'exprimer les vitesses de déplacement des sphères en fonction des forces qui leurs sont appliquées. Pour cela, on utilise la première loi de Faxèn afin d'exprimer la vitesse de déplacement d'une particule engendrée par une perturbation de champ de vitesse due à une autre sphère [5, 12].

Soient deux sphères 1 et 2 de même rayon a sédimentant librement dans un fluide visqueux initialement au repos. La vitesse de déplacement de la particule 1, soumise à une force \mathbf{F}_1 , est la somme de sa vitesse $\frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a}$, si elle était isolée et de la perturbation causée par la présence de la particule 2, exprimée en son centre ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$) :

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a} + (\mathbf{I} + \frac{a^2}{6}\nabla^2)\mathbf{v}_2(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} \quad (1.38)$$

où $\mathbf{v}_2(\mathbf{x})$ est dans le cas présent la perturbation de champ de vitesse générée par le déplacement de la sphère 2. Généralement, on écrit le problème sous forme tensorielle où la vitesse d'une particule i est exprimée en fonction des forces appliquées aux centres des deux particules en interaction :

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^2 \mathbf{W}_{ij} \cdot \mathbf{F}_j \quad (1.39)$$

On appelle les \mathbf{W}_{ij} les tenseurs de mobilité qui expriment en terme de vitesse la réponse de la sphère i envers une force agissant sur la sphère j . Ces tenseurs ont la forme suivante :

$$\mathbf{W}_{ij} = \frac{1}{6\pi\mu a} [A_{ij} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} + B_{ij} (\mathbf{I} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2})] \quad (1.40)$$

où \mathbf{r} est le vecteur inter-centres et où les coefficients A_{ij} et B_{ij} , appelés fonctions de mobilité, ne dépendent que de la distance inter-centres. Les expressions de ces fonctions scalaires font l'objet des paragraphes suivants.

1.2.1.1. a) Détermination des fonctions de mobilité

Sédimentation parallèle au vecteur inter-centres

Considérons le cas de deux particules telles que \mathbf{r} soit parallèle à l'axe vertical Y et que la sphère 1 soit située au dessus de la sphère 2 (cf. figure 1.7).

L'application de la première loi de Faxèn [34, 35] conduit à la relation (1.38). Dans cette configuration l'expression du Laplacien sphérique (1.42) selon \mathbf{e}_R suffit pour décrire les

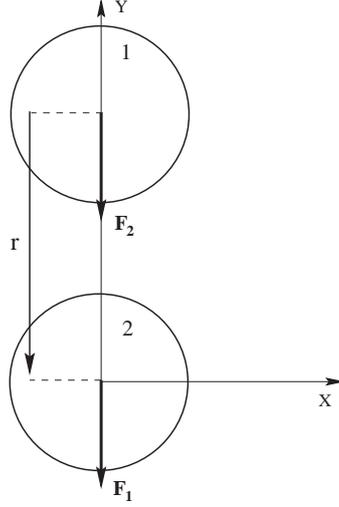


Figure 1.7 *Sédimentation parallèle au vecteur inter-centres*

interactions entre les deux particules :

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a} + \left(1 + \frac{a^2}{6}\nabla_R^2\right)\mathbf{v}_2(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} \quad (1.41)$$

avec :

$$\nabla_R^2\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2v_R)\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_R}{\partial\theta}\right) - \frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) \quad (1.42)$$

Pour une distance $R = r$ et un angle $\theta = \pi$, on a : $\nabla_R^2\mathbf{v}_2(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} = -U\frac{3a}{r^3}\mathbf{e}_R$.

U représente ici le module de la vitesse de la particule 2 considérée isolée, dont l'expression est : $\frac{F_2}{6\pi\mu a}$. Alors, on peut exprimer la vitesse de la sphère 1 de la façon suivante :

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a} + \left[\left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3}\right) - \frac{a^2}{6}\left(\frac{3a}{r^3}\right)\right]\frac{\mathbf{F}_2}{6\pi\mu a} = \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a} + \left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{r^3}\right)\frac{\mathbf{F}_2}{6\pi\mu a} \quad (1.43)$$

On déduit de cette dernière relation les expressions de deux fonctions caractéristiques de la mobilité des sphères le long de la ligne des centres telles que :

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 \\ A_{12} &= \frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{r^3} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Il faut noter que ce calcul est rigoureusement symétrique pour deux particules identiques, de par la symétrie amont-aval de l'écoulement de Stokes (cf. figure 1.4), ce qui entraîne que $A_{12} = A_{21}$ et $A_{11} = A_{22}$.

Sédimentation perpendiculaire au vecteur inter-centres

Cette configuration, présentée sur la figure 1.8, permet d'obtenir les expressions des fonctions caractéristiques de la mobilité des particules selon un mouvement perpendiculaire à la ligne des centres, notées B_{11} et B_{12} .

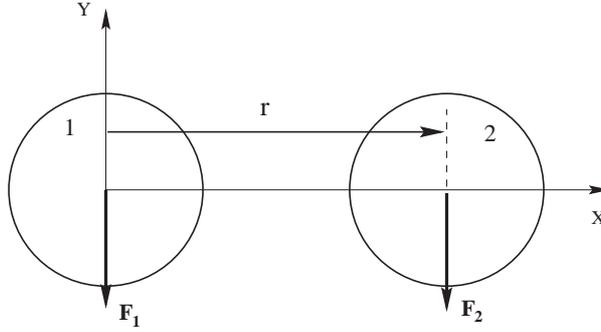


Figure 1.8 *Sédimentation perpendiculaire au vecteur inter-centres*

Comme précédemment, la vitesse de la particule 1 s'écrit :

$$U_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a} + \left(1 + \frac{a^2}{6}\nabla_\theta^2\right)\mathbf{v}_2(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} \quad (1.45)$$

avec :

$$\nabla_\theta^2(v(x)) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial v_\theta}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)\right) + \frac{2}{R^2}\frac{\partial v_R}{\partial\theta} \quad (1.46)$$

Pour un couple $(R, \theta) = (r, -\frac{\pi}{2})$: $\nabla_\theta^2\mathbf{v}_2(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} = -U\frac{3a}{2r^3}\mathbf{e}_\theta$; et comme précédemment on peut exprimer la vitesse de la particule 1 comme suit :

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a} + \left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{2r^3}\right)\frac{\mathbf{F}_2}{6\pi\mu a} \quad (1.47)$$

On déduit de cette dernière relation les fonctions de mobilité suivantes :

$$\begin{aligned} B_{11} &= 1 \\ B_{12} &= \frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{2r^3} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Dans le cas présent les sphères sont identiques donc ces fonctions sont telles que : $B_{12} = B_{21}$ et $B_{11} = B_{22}$.

Dans tous les cas, quelle que soit la configuration géométrique on réécrit (1.39), pour les deux particules, à l'aide des relations (1.40), (1.44) et (1.48). Rappelons également que pour des sphères identiques on a : $\mathbf{W}_{11} = \mathbf{W}_{22}$ et $\mathbf{W}_{12} = \mathbf{W}_{21}$.

Une matrice de mobilité \mathbf{M} , construite à partir des expressions des tenseurs de mobilités \mathbf{W}_{ij} , permet d'exprimer les vitesses des deux particules en fonction des forces qui leurs sont appliquées de la façon suivante :

$$\mathbf{U} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} \quad (1.49)$$

avec : $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1; \mathbf{U}_2]$ et $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1; \mathbf{F}_2]$.

Cette dernière relation correspond à l'écriture du problème direct. Cependant, le calcul des fonctions de mobilité proposé plus haut ne tient pas compte des réflexions des perturbations induites par la présence simultanée des particules dans le fluide. Pour résoudre avec une bonne précision le problème direct, il est nécessaire de prendre en compte les réflexions des champs de vitesse propagés dans le fluide. Nous présentons dans le paragraphe suivant quelques généralités sur la méthode des réflexions même si, comme nous le verrons plus loin, la détermination des forces d'interactions hydrodynamiques passe par la résolution du problème inverse pour lequel il n'est pas nécessaire de tenir compte explicitement des réflexions.

1.2.1.1. b) Méthode des réflexions

Considérons le cas de deux sphères 1 et 2 en sédimentation avec pour vitesses respectives \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 (cf. figure 1.9). Dans cette situation, la force exercée par le fluide sur la sphère 1 résulte de la superposition de plusieurs contributions de champs de vitesse $\mathbf{v}_i(\mathbf{x})$ vérifiant chacune les équations de Stokes. On considère tout d'abord le champ de vitesse initial dû au mouvement de la particule 1 ; noté $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$; en l'absence de la particule 2. Cette contribution vérifie la condition d'adhérence sur la sphère 1 : $\mathbf{v}_1(\mathbf{x} = \mathbf{a}) = \mathbf{U}_1$; et s'annule à l'infini. On peut alors calculer $\mathbf{v}_1(\mathbf{x} = \mathbf{x}_2)$ en fonction des coordonnées de la sphère 2. La seconde contribution $\mathbf{v}_2(\mathbf{x})$ est déterminée en supposant que la sphère 1 est absente. On corrige alors l'erreur faite sur la première contribution en imposant $\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_2 - \mathbf{v}_1(\mathbf{x} = \mathbf{x}_2)$ sur la sphère 2. Cette contribution permet de satisfaire la condition d'adhérence sur la sphère 2. Ainsi, l'effet au premier ordre des réflexions provenant de la présence de la particule 2 dans le voisinage de la première est représenté par $\mathbf{v}_3(\mathbf{x})$ telle que $\mathbf{v}_3(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}_2(\mathbf{x} = \mathbf{x}_1)$ sur la sphère 1.

Puis, on exprime à nouveau une perturbation $\mathbf{v}_4(\mathbf{x})$ telle que $\mathbf{v}_4(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}_3(\mathbf{x} = \mathbf{x}_2)$ sur la sphère 2. L'influence de cette perturbation déterminée au centre de la sphère 1 donne

lieu au second ordre des réflexions qui est représenté par une contribution notée $\mathbf{v}_5(\mathbf{x})$ et telle que $\mathbf{v}_5(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}_4(\mathbf{x} = \mathbf{x}_1)$ sur la sphère 1. Selon le degré d'approximation désiré, cette opération peut être réitérée pour prendre en considération les réflexions d'ordres supérieurs.

Les réflexions de la perturbation émise par la particule 1 sont données par les contributions d'ordre impair : $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_3(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_5(\mathbf{x}) \dots$. La force totale exercée sur la sphère 1 est exprimée en ajoutant individuellement les contributions issues de chacune des perturbations [1].

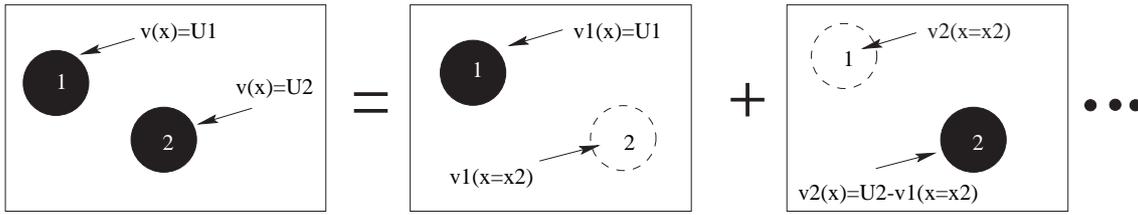


Figure 1.9 *Méthode des réflexions*

L'application de cette méthode permet de déterminer les expressions des fonctions de mobilité tenant compte d'un nombre important de réflexions, qui sont utiles pour la résolution du problème direct. Donnons pour exemple les résultats obtenus par Jeffrey et Onishi [36, 37, 40] :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= 1 - \frac{15 a^4}{4 r^4} + \frac{11 a^6}{2 r^6} + \frac{21 a^8}{2 r^8} - \frac{167 a^{10}}{2 r^{10}} + O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{12}\right) \\
 A_{12} &= \frac{3 a}{2 r} - \frac{a^3}{r^3} + \frac{75 a^7}{2 r^7} - \frac{15 a^9}{2 r^9} + O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{11}\right) \\
 B_{11} &= 1 - \frac{17 a^6}{16 r^6} - \frac{5 a^8}{4 r^8} - \frac{69 a^{10}}{16 r^{10}} + O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{12}\right) \\
 B_{12} &= \frac{3 a}{4 r} + \frac{1 a^3}{2 r^3} + O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{11}\right)
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Cependant, il peut être intéressant d'exprimer les forces déduites des interactions hydrodynamiques, ce qui constitue le problème inverse. Alors, on exprime ces force par inversion de la relation (1.49) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{U} \tag{1.51}$$

Dans ces conditions, il n'est pas nécessaire de prendre en compte explicitement les réflexions des perturbations car inverser la matrice de mobilité revient à sommer l'infinité

des réflexions [5].

1.2.1.1. c) Equivalence entre inversion de la matrice de mobilité et sommation des interactions réfléchies

Pour montrer cette équivalence, il est nécessaire de considérer le calcul des interactions par la méthode classique des réflexions, pour le comparer ensuite au résultat obtenu par inversion de \mathbf{M} . Ce calcul est effectué pour deux sphères identiques et uniquement pour la solution en point force même si il est généralisable pour les solutions singulières d'ordres supérieurs [5].

Soient deux sphères 1 et 2, la sphère 1 est fixe et la sphère 2 est en mouvement le long de la ligne reliant les centres des deux particules. Nous allons déterminer dans un premier temps la force totale que l'on doit exercer sur la sphère 1 pour empêcher son mouvement. Si \mathbf{F}_2 est la force appliquée par la sphère 2 sur le fluide, le champ de vitesse créé par cette sphère est de la forme :

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{F}_2 \quad (1.52)$$

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = U_O \mathbf{v}^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U} = U_O \mathbf{u}, \quad \mathbf{F} = 6\pi\mu a U_O \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a} \mathbf{G}^*(\mathbf{x}),$$

la perturbation générée par la sphère 2 devient :

$$\mathbf{v}_2^*(\mathbf{x}) = \frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{f}_2 \quad (1.53)$$

Ce champ de vitesse induit pour la sphère 1 (fixe) une force de résistance au mouvement dont l'expression est donnée par la première loi de Faxén. En première approximation, cette force est proportionnelle à la vitesse générée par la sphère 2 au centre de la sphère 1 et sous forme adimensionnelle on a :

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{f}_2 \quad (1.54)$$

Cette force appliquée au fluide propage un champ de vitesse de la forme :

$$\mathbf{v}_1^* = \frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{f}_1 = \frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \left(-\frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{f}_2 \right) \quad (1.55)$$

Ce champ de vitesse génère à son tour une force sur la sphère 2 etc.

Alors la force exercée sur le fluide par la particule 1, due au mouvement de la sphère 2 est :

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{f}_2 - \frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \left(\frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \left(\frac{3}{4} \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{f}_2 \right) \right) - \dots \quad (1.56)$$

En projetant les composantes sur la droite colinéaire au vecteur inter-centres chaque terme G_{ij} se réduit à $2/r$ où r représente la norme du vecteur inter-centres. Si on note X_{12} la fonction scalaire de résistance le long de la ligne des centres (notations de Jeffrey *et al.* [36]), X_{12} représente en terme de force, la réponse de la sphère 1 envers la vitesse de déplacement de la sphère 2. Alors X_{12} s'écrit de la façon suivante :

$$X_{12} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2r} \right)^{2n-1} = - \frac{\frac{3}{2}r^{-1}}{1 - \left(\frac{3}{2}r^{-1}\right)^2} \quad (1.57)$$

où n représente le nombre de réflexions.

Les expressions des fonctions scalaires de mobilité obtenues pour l'ordre d'approximation retenu sont : $A_{11} = A_{22} = 1$ et $A_{12} = A_{21} = \frac{3}{2r}$. Les fonctions scalaires de résistance (X_{11}, X_{12} , etc.) peuvent être reliées aux fonctions scalaires de mobilité (A_{11}, A_{12} , etc.) par simple inversion matricielle :

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

Dans ce cas, l'inversion de la matrice des fonctions de mobilité donne précisément l'expression (1.57) pour X_{12} .

Cet exemple simple permet de montrer l'équivalence entre l'inversion de la matrice de mobilité et la sommation des perturbations réfléchies. Quelles que soient les contributions utilisées pour construire la matrice de mobilité (point force, dipôle, quadripôle, etc.), toutes les interactions réfléchies sont sommées.

1.2.1.2. Contribution en champs proches

Lorsque la distance entre deux sphères est faible, tout déplacement d'une particule très proche de l'autre nécessite l'expulsion de la phase continue de la zone interstitielle (cf. figure 1.10), générant de ce fait des efforts dits de champs proches ou de lubrification. Ces efforts sont infinis au contact, interdisant en conséquence l'interpénétration des particules et s'évanouissent lorsque la distance de séparation augmente.

Plusieurs auteurs ont mis en œuvre des méthodes pour modéliser les forces de lubrification [5, 14, 38]. Dans l'approche proposée par Durlofsky *et al.* [5], ces efforts sont exprimés en combinant les formulations en mobilité et en résistance. Une autre méthode, qui est due à Kim *et al.* [14], [33], est basée sur la résolution des équations issues de la théorie de la lubrification. Ces deux méthodes permettent d'exprimer les efforts dus au drainage du fluide visqueux entre deux particules très proches l'une de l'autre.

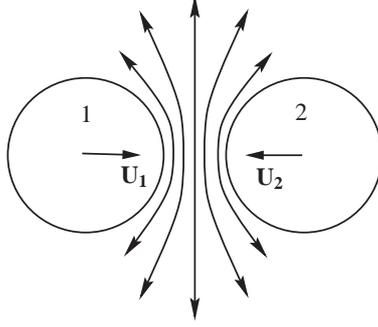


Figure 1.10 *Expulsion du fluide lors du rapprochement de deux sphères*

Une première méthode proposée par Durlofsky *et al.* [5] consiste à rajouter les effets de lubrification dans une formulation en résistance à deux corps. Pour deux particules, la matrice de résistance \mathbf{R}^{lub} est construite à partir de la matrice de résistance conventionnelle, notée \mathbf{R} [36, 37] et d'une autre matrice de résistance \mathbf{R}^∞ ne tenant compte que de l'approximation en champs lointains des interactions hydrodynamiques (point force). Cette dernière est obtenue en inversant une matrice de mobilité; notée \mathbf{M}^∞ ; dont toutes les fonctions scalaires sont tronquées en $\frac{1}{r}$. Alors, la matrice \mathbf{R}^{lub} , ne tenant compte que des effets dus à la lubrification, est donnée par :

$$\mathbf{R}^{\text{lub}} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}^\infty) \quad (1.58)$$

Puis, les forces d'interactions en champs proches \mathbf{F}^{lub} sont déterminées comme suit :

$$\mathbf{F}^{\text{lub}} = \mathbf{R}^{\text{lub}}\mathbf{U} \quad (1.59)$$

Le principal avantage de cette méthode est de pouvoir représenter les interactions en champs proches sans aucune restriction sur la distance inter-particules. Cependant, la matrice \mathbf{R} construite à l'aide des fonctions scalaires exactes de Jeffrey *et al.* [36], ne contient qu'un nombre fini de réflexions correspondant à l'ordre d'approximation des fonctions de résistances. A l'inverse, nous avons vu au paragraphe 1.2.1.1.e que l'inverse de \mathbf{M}^∞ peut être représentée par une matrice de résistance contenant la somme de toutes les réflexions. De ce fait, il est nécessaire d'utiliser les développements de ces fonctions scalaires à des ordres élevés pour que cette méthode soit suffisamment précise. De plus, elle nécessite l'inversion d'une matrice supplémentaire par doublet de particules, ce qui rend plus lourd le calcul.

Un autre moyen pour exprimer les forces de lubrification agissant sur un doublet de particules est de considérer pour des distances inter-surfaces ϵ très petites la force déduite

du mouvement relatif d'une sphère par rapport à l'autre. Lorsque les particules sont suffisamment proches, ce mouvement génère un écoulement qui peut être décrit par la théorie de la lubrification.

Cette méthode, due à Kim *et al.* [14], que l'on retrouve dans de nombreux articles de la littérature [33], s'applique lorsque deux particules sont très proches contrairement au modèle précédent. Dans le cas le plus général, lorsqu'une sphère vient au quasi-contact d'une autre sphère, il est utile d'exprimer la force sous forme d'un développement par rapport au paramètre $\epsilon = \frac{r-2a}{a} = r^* - 2$, qui représente la distance adimensionnée entre les surfaces de deux particules. Par ailleurs, ces forces sont exprimées en considérant le mouvement d'une particule par rapport à l'autre. On note par la suite \mathbf{V}_{ij} la vitesse relative entre 2 particules i et j telle que $\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i$. Dans les paragraphes suivant nous donnons les expressions obtenues par Kim et Karrila pour deux particules sphériques, identiques, dans la limite où $\epsilon < 1$.

Translation parallèle au vecteur inter-centres

Soient deux particules 1 et 2 en mouvement relatif le long de la ligne reliant leurs centres. Sur la figure 1.11 on considère que la sphère 1 est fixe et que la sphère 2 évolue à la vitesse \mathbf{V}_{12} . Si ce mouvement conduit les sphères à se rapprocher, la lubrification génère une force de répulsion. Au contraire, lorsque les sphères s'éloignent, la lubrification génère une force d'attraction qui freine l'écartement des particules.

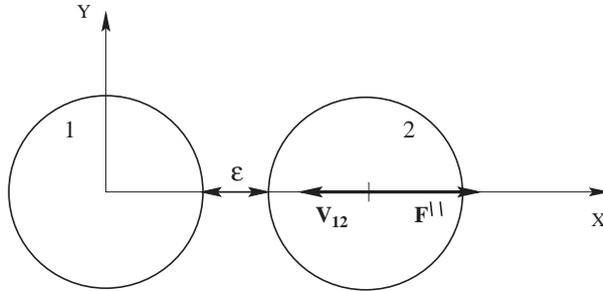


Figure 1.11 *Translation parallèle au vecteur inter-centres*

Dans la configuration présente, les effets de lubrification donnent lieu à une force unique \mathbf{F}^{\parallel} donnée par :

$$\frac{\mathbf{F}^{\parallel}}{6\pi\mu V_{12}a} = -\frac{1}{4\epsilon} - 0,225\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) - \frac{3\epsilon}{112}\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad (1.60)$$

où $V_{12} = \|\mathbf{V}_{12}\|$.

Translation perpendiculaire au vecteur inter-centres

Lorsque les particules évoluent perpendiculairement au vecteur inter-centres, les effets de lubrification génèrent, en plus d'une force d'attraction/répulsion \mathbf{F}^\perp , un couple \mathbf{L} dû au gradient de vitesse existant de part et d'autre de la sphère. Ces efforts sont montrés schématiquement sur la figure 1.12 où la sphère 1 est encore supposée fixe.

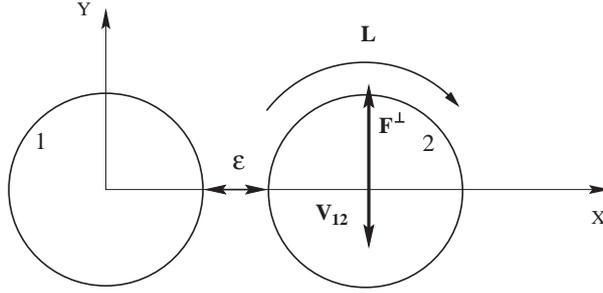


Figure 1.12 *Translation perpendiculaire au vecteur inter-centres*

Pour deux particules 1 et 2, leurs expressions sont les suivantes :

$$\frac{\mathbf{F}^\perp}{6\pi\mu V_{12}a} = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (1.61)$$

$$\frac{\mathbf{L}}{8\pi\mu V_{12}a^2} = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{\epsilon}{16} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (1.62)$$

1.2.2. Interactions sphère-paroi

Lorsqu'on s'intéresse à l'influence d'une paroi fixe sur le mouvement d'une particule, on utilise en général les mêmes méthodes que celles employées pour représenter les interactions entre deux particules (méthode des réflexions etc.). Dans le cas d'une paroi plane considérée comme un plan infini, on peut utiliser l'approximation d'une sphère de rayon infini. De ce fait, les modèles de force particule-paroi peuvent être obtenus par extrapolation des résultats représentant les interactions entre deux sphères de rayons différents [10, 33].

1.2.2.1. Contribution en champs lointains

La contribution en champs lointains des interactions entre une sphère et une paroi peut

être obtenue à partir des relations établies pour représenter les interactions entre deux sphères distinctes. Pour deux particules 1 et 2 de rayons a_1 et a_2 , la forme générale des tenseurs de mobilité est la suivante :

$$\mathbf{W}_{ij} = \frac{1}{3\pi\mu(a_i + a_j)} \left[A_{ij} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} + B_{ij} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right] \quad (1.63)$$

où les coefficients A_{ij} et B_{ij} sont donnés par [39] :

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 - \frac{60\lambda^3}{(1+\lambda)^4\eta^4} + O(\eta^{-6}) \\ A_{12} &= \frac{3}{2\eta} - \frac{2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^2\eta^3} + O(\eta^{-7}) \\ B_{11} &= 1 + O(\eta^{-6}) \\ B_{12} &= \frac{3}{4\eta} - \frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2\eta^3} + O(\eta^{-7}) \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{a_2}{a_1}$ et $\eta = \frac{2r}{a_1+a_2}$.

Les expressions des coefficients de mobilité entre une sphère et une paroi plane immobile sont calculées moyennant des développements asymptotiques ($\lambda \rightarrow \infty$) des expressions précédentes [10]. Les coefficients A et B représentant respectivement la mobilité selon un mouvement perpendiculaire à la paroi et la mobilité selon un mouvement parallèle à celle-ci sont :

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{9a}{8h} \\ B &= 1 - \frac{9a}{16h} \end{aligned} \quad (1.64)$$

où \mathbf{h} est perpendiculaire à la paroi et $\|\mathbf{h}\| = h$ représente la distance du centre de la particule à la paroi (cf. figure 1.13).

De façon analogue au cas de deux particules, on exprime la vitesse \mathbf{U} d'une particule en translation à proximité d'une paroi en fonction de la force \mathbf{F} appliquée en son centre, sous la forme tensorielle suivante :

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{6\pi\mu a} \left(A \left(\frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{h}}{h^2} \right) + B \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{h}}{h^2} \right) \right) \cdot \mathbf{F} \quad (1.65)$$

où $\mathbf{W}_{\mathbf{p}}$ est le tenseur de mobilité sphère-paroi. Comme précédemment, la force d'interaction est obtenue par inversion de la relation (1.65).

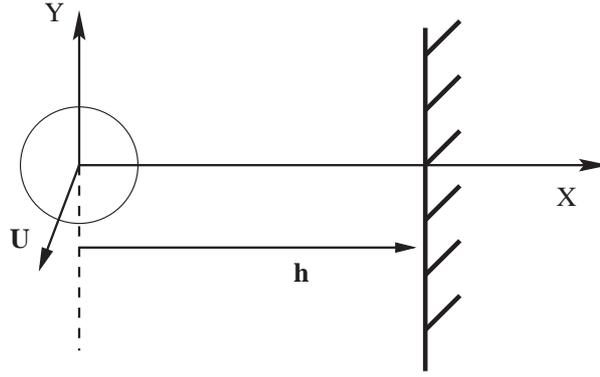


Figure 1.13 Une sphère à proximité d'une paroi plane

1.2.2.2. Contribution en champs proches

Lorsque une particule est très proche d'une paroi plane la théorie de la lubrification permet d'obtenir une solution approchée, pour des distances à la paroi telles que $\epsilon' < 1$ où $\epsilon' = \frac{h-a}{a}$ [33].

Ainsi, dans les configurations simples visualisées sur la figure 1.14 on obtient les expressions suivantes :

- une translation à vitesse \mathbf{U} , perpendiculaire à la paroi génère une force unique \mathbf{Fp}^\perp donnée par :

$$\frac{\mathbf{Fp}^\perp}{6\pi\mu Ua} = \frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{\epsilon'}\right) + \frac{\epsilon'}{21}\ln\left(\frac{1}{\epsilon'}\right) \quad (1.66)$$

- une translation à vitesse \mathbf{U} , parallèle à la paroi génère en plus d'une force \mathbf{Fp}^\parallel , un couple noté \mathbf{Lp} tels que :

$$\frac{\mathbf{Fp}^\parallel}{6\pi\mu Ua} = \frac{8}{15}\ln\left(\frac{1}{\epsilon'}\right) \quad (1.67)$$

$$\frac{\mathbf{Lp}}{8\pi\mu Ua^2} = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{1}{\epsilon'}\right) \quad (1.68)$$

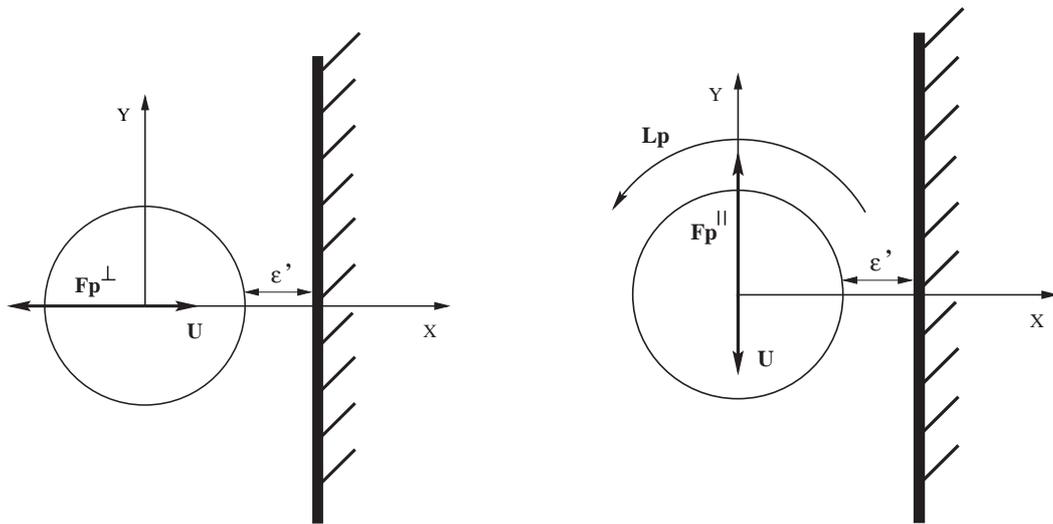


Figure 1.14 *Translation d'une particule très proche d'une paroi : on représente les efforts engendrés par un mouvement perpendiculaire à la paroi sur la figure de gauche et à droite ceux engendrés par un mouvement parallèle à celle-ci*

2. Régime inertiel

Dans cette partie nous nous intéressons aux forces inertielles qui ont pour origine la mise en mouvement du fluide que produit le déplacement des particules. L'intensité de ces forces est estimée grâce au nombre de Reynolds Re qui représente le ratio entre effets inertiels (advection) et effets visqueux (diffusion). Ce paramètre peut être considéré comme le rapport de deux temps caractéristiques $\frac{\tau_A}{\tau_V}$:

- un temps caractéristique de l'advection due aux effets inertiels (τ_A);
- un temps caractéristique de la diffusion due aux effets visqueux (τ_V).

Si U et d sont respectivement la vitesse et la dimension caractéristique de l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité μ , alors τ_A et τ_V sont donnés par :

$$\tau_A = \frac{d}{U} \quad \tau_V = \frac{\rho d^2}{\mu} \quad (1.69)$$

Le mouvement de sphères à faibles nombres de Reynolds dans un fluide visqueux est souvent traité théoriquement sous les hypothèses de Stokes. Cependant, les effets inertiels, généralement représentés par les termes instationnaires dans les équations du mouvement (1.1), affectent qualitativement et quantitativement l'écoulement autour d'une particule en mouvement même pour des valeurs faibles du nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$ [4].

2.1. Sédimentation d'une particule sphérique

2.1.1. Approximation d'Oseen

Pour appréhender l'écoulement autour d'une sphère en régime inertiel, nous basons notre analyse sur l'approximation d'Oseen. Nous présentons dans les paragraphes suivants, d'une part l'analyse dimensionnelle qui conduit aux équations du mouvement approximées et d'autre part, une solution de ces équations, obtenue pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à l'unité.

2.1.1. a) Analyse dimensionnelle

Nous considérons ici la translation uniforme d'une sphère dans un fluide visqueux immobile. Dans un référentiel fixe, même si la vitesse U de la particule est constante, l'écoulement n'est pas stationnaire [19]. En effet, un observateur situé dans ce référentiel voit une variation temporelle de la vitesse du fluide, au passage de la particule. Une analyse dimensionnelle est donc nécessaire afin d'estimer l'ordre de grandeur des différents termes des équations du mouvement de la phase fluide.

L'ordre de grandeur de la vitesse dans le fluide à une distance D de la sphère est $\|\mathbf{v}\| \simeq \frac{Ua}{D}$ (1.31). De plus, si la fluctuation de la vitesse dans le fluide est simplement due au changement de position de la sphère lorsque D est suffisamment grand, la dérivée temporelle de la vitesse du fluide ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$) peut être approchée par le terme $-\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Ainsi, les équations de conservation de la quantité de mouvement prennent la forme suivante :

$$\rho(-\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.70)$$

Un observateur situé à la distance D mesure localement une variation de la vitesse telle que :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\| \simeq U \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right\| \simeq U \left(U \frac{a}{D} \right) \frac{1}{D} = \frac{U^2 a}{D^2} \quad (1.71)$$

Le terme convectif non linéaire est tel que :

$$\rho \|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\| \simeq \rho \frac{U^2 a^2}{D^3} \quad (1.72)$$

Le rapport entre le terme de non stationnaire et le terme convectif varie alors comme :

$$\frac{\|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}\|} \simeq \frac{a}{D} \quad (1.73)$$

Donc, à proximité de la sphère ces deux termes sont du même ordre alors que loin de celle-ci le terme de non stationnaire ($\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}$) est prépondérant devant le terme convectif. Evaluons maintenant le rapport entre le terme de non-stationnarité et le terme associé à la dissipation visqueuse. Ce dernier est tel que :

$$\mu \|\nabla^2 \mathbf{v}\| \simeq \mu \frac{Ua}{D^3} \quad (1.74)$$

On obtient alors :

$$\frac{\rho \|\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}\|}{\mu \|\nabla^2 \mathbf{v}\|} \simeq \frac{\rho U D}{\mu} = Re \frac{D}{2a} \quad (1.75)$$

Ce rapport évolue en $\frac{\rho U D}{\mu}$ car contrairement au terme convectif, le terme de non stationnarité décroît en $\frac{1}{D^2}$. De ce fait, à proximité de la surface de la particule ($D \simeq a$) on a :

$$\frac{\rho \|\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}\|}{\mu \|\nabla^2 \mathbf{v}\|} \simeq \frac{Re}{2} \quad (1.76)$$

où $Re = \frac{\rho 2aU}{\mu}$ est le nombre de Reynolds associé à la particule. Donc, lorsque $Re \ll 1$ les effets visqueux prédominent ($\mu \|\nabla^2 \mathbf{v}\| \gg \rho \|\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}\| \simeq \rho \|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\|$) et les hypothèses de Stokes sont valides. Par ailleurs, à une distance de la sphère telle que : $\frac{D}{a} \simeq \frac{2}{Re}$; on a : $\frac{\rho U D}{\mu} \simeq 1$; et l'hypothèse de quasi-stationnarité cesse d'être valable. Pour des distances D suffisamment importantes, i.e., là où le terme convectif peut être négligé devant le terme de non stationnarité, ce dernier ne peut plus être négligé devant le terme visqueux.

En conclusion, pour un nombre de Reynolds faible, si les hypothèses de Stokes restent valides à proximité de la sphère, loin de celle-ci les effets inertiels décrits au travers du terme $(\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v})$ ne peuvent plus être négligés. En d'autres termes, pour un Re donné il existe une distance D telle que $Re \frac{D}{a} \simeq 1$, au-delà de laquelle le premier terme du premier membre de la relation (1.70) doit être retenu. Les équations découlant de cette analyse dimensionnelle sont les équations d'Oseen. Ces dernières permettent de représenter l'écoulement autour d'une particule à l'ordre de Re [4] et elles ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} -\rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (1.77)$$

Dans la pratique, on considère que le domaine de validité de ce système d'équations linéaires par rapport aux variables dépendantes \mathbf{v} et p correspond à des distances $\frac{D}{a}$ telles que $\frac{D}{a} > \frac{2}{Re}$.

2.1.1. b) Solution d'Oseen

En coordonnées sphériques (R, θ, φ) , le champ de vitesse axisymétrique autour d'une sphère en translation, est donné en terme de fonction de courant ψ par :

$$\psi = Ua^2 \left[-\frac{a}{4R} \sin^2 \theta + 3(1 - \cos \theta) \frac{1 - \exp(-\frac{1}{4} Re (1 + \cos \theta) \frac{R}{a})}{Re} \right] \quad (1.78)$$

Cette approximation vérifie la condition à la limite à l'infini : $\mathbf{v} \rightarrow 0$ quand $\frac{R}{a} \rightarrow \infty$. De plus, à proximité de la sphère (quand $\frac{R}{a} \simeq 1$) et avec $Re \ll 1$, la relation (1.78) devient :

$$\psi = Ua^2 \sin^2 \theta \left[-\frac{a}{4R} + \frac{3R}{4a} + O\left(Re \frac{R}{a}\right) \right], \quad (1.79)$$

et on retrouve la solution de Stokes (1.31), avec une différence de l'ordre de $(Re \frac{R}{a})$. Ceci entraîne en particulier une erreur de l'ordre de Re pour satisfaire la condition d'adhérence. Notons que quelle que soit la distance, la solution d'Oseen est valable à Re près [4]. Les figures 1.15, 1.16 et 1.17 permettent de visualiser le champ de vitesse correspondant à la relation (1.78). Sur la figure 1.15, où sont tracées les lignes de courant, on peut constater que ce champ de vitesse présente, à l'inverse du champ de Stokes (1.31), une dissymétrie amont-aval par rapport au plan médian $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Cette dissymétrie est attribuée à l'advection anisotrope de la vorticité, dans le sillage de la particule [4]. D'un point de vue quantitatif, on peut observer sur la figure 1.16 que la décroissance de la vitesse dans le fluide est plus rapide devant la particule que derrière elle. On peut également constater que dans le plan $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ la composante de la vitesse selon \mathbf{e}_y n'est pas nulle, ce qui était le cas sous les hypothèses de Stokes (cf. figure 1.6).

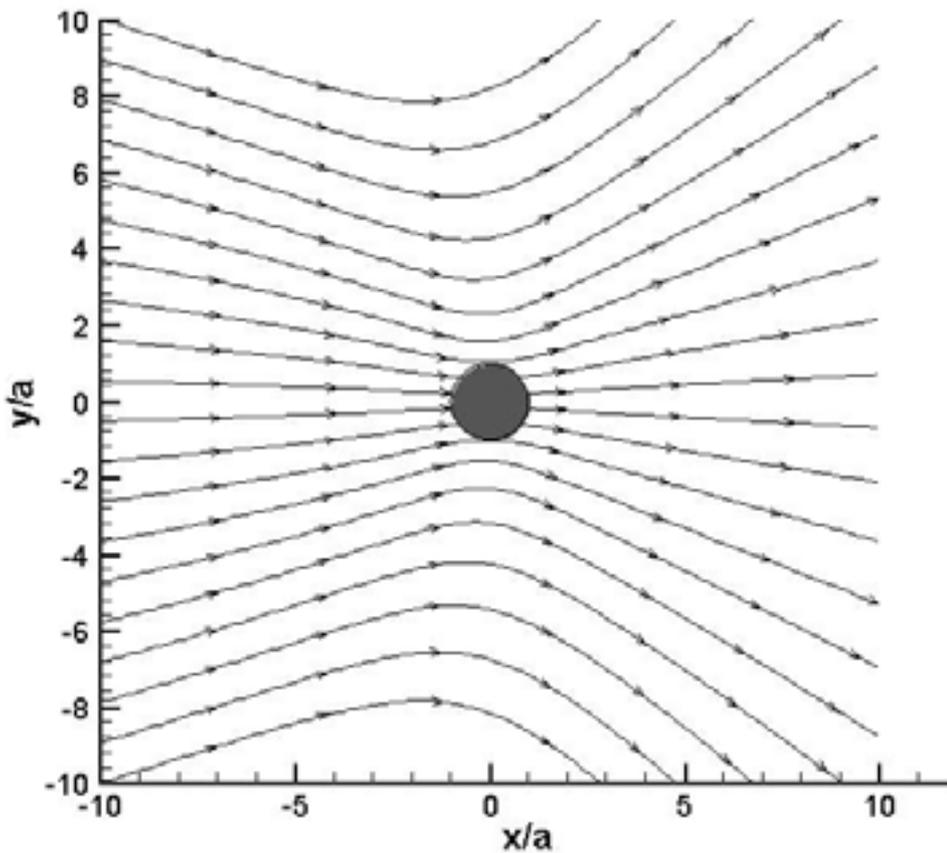


Figure 1.15 *Topologie de l'écoulement d'Oseen autour d'une sphère solide en translation*

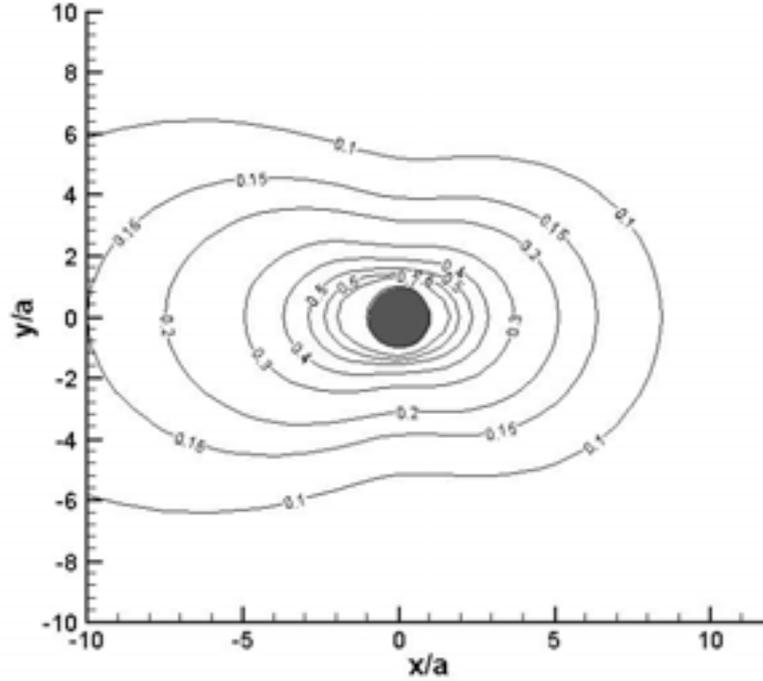


Figure 1.16 *Ecoulement d'Oseen : lignes isovaleurs de v_x/U*

Par ailleurs, la prise en compte de l'inertie du fluide a pour effet d'augmenter quantitativement les frottements visqueux fluide-particule à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Donc, en première approximation on montre que le coefficient de traînée s'exprime en fonction du nombre de Reynolds sous la forme suivante :

$$C_D = \frac{\|\mathbf{F}^T\|}{\pi a^2 \frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re\right) \quad (1.80)$$

Ce résultat conduit à une nouvelle expression de la force de traînée appliquée à une particule, qui dépend linéairement du nombre de Reynolds :

$$\mathbf{F}^T = -6\pi\mu a \mathbf{U} \left(1 + \frac{3}{16} Re\right) \quad (1.81)$$

Cette expression est utilisée par la suite pour représenter le comportement d'une particule en sédimentation pour des valeurs de Re inférieures à 1.

Il est néanmoins possible de résoudre les équations d'Oseen pour des valeurs de Re supérieures à 1, en utilisant un développement en série de Goldstein [27]. Cette méthode

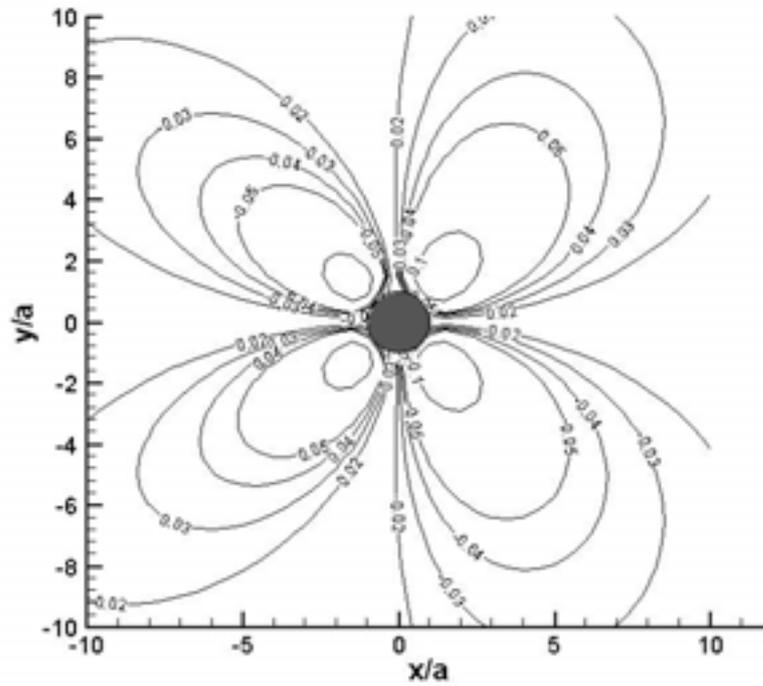


Figure 1.17 *Ecoulement d'Oseen : lignes isovaleurs de v_y/U*

revient à déterminer les coefficients de la série en considérant que dans le repère lié à la particule, la moyenne quadratique de la vitesse est minimale à la surface de la sphère (condition d'adhérence). Elle permet de calculer numériquement les champs hydrodynamiques autour d'une sphère en translation pour des valeurs de Re allant jusqu'à 30. Sa mise en place pour la simulation s'avère cependant trop coûteuse lorsqu'on veut calculer le champ de vitesse basé sur le nombre de Reynolds instantané de la particule. C'est pourquoi cette méthode n'est pas présentée en détail dans ce mémoire.

2.2. Interactions hydrodynamiques en régime inertiel

Lorsqu'on s'intéresse à l'influence des forces inertielles dans le fluide sur le comportement de particules en sédimentation, on constate en premier lieu un ralentissement de l'ensemble des particules ainsi qu'une dynamique particulière. En effet, nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que sous les hypothèses de Stokes les forces déduites des interactions entre deux particules identiques sont égales, ce qui est dû à la symétrie amont/aval du champ de vitesse (1.31). Dans le cas présent, la perturbation générée par le mouvement des particules n'est plus symétrique par rapport au plan médian (cf. figure 1.15), ce qui modifie leur comportement en sédimentation.

Dans cette section nous présentons dans un premier temps les résultats analytiques issus des travaux de Vasseur et Cox [15], qui permettent de représenter les interactions entre particules et particule-paroi dans la limite d'un faible nombre de Reynolds.

Dans un deuxième temps, nous donnons les fondements d'une approche numérique basée sur une méthode conventionnelle de réflexion appliquée à la solution d'Oseen. Cette technique proposée par Kumagai [42], est susceptible d'être étendue à la détermination des interactions hydrodynamiques entre un grand nombre de particules en sédimentation, sous réserve de la validité d'une superposition des champs hydrodynamiques pour reconstituer, dans son ensemble, l'écoulement engendré par le mouvement des particules.

2.2.1. Approche analytique

2.2.1.1. Interactions entre particules

Lorsque deux particules identiques sédimentent librement dans un fluide illimité, on observe invariablement un mouvement relatif de l'une par rapport à l'autre. Ce comportement naturellement absent dans les conditions de Stokes, est à mettre à l'actif des effets inertiels dans le fluide, qui engendrent une dissymétrie de l'écoulement créé par le déplacement de chaque sphère. Pour étudier ces interactions hydrodynamiques d'un point de vue analytique, une méthode alternative à la résolution complète des équations de Navier-Stokes, dans la limite d'un faible Re , a été proposée par Saffman [43] dans le cas d'une sphère dans un écoulement de cisaillement simple. Plus récemment, Vasseur et Cox [15] ont utilisé cette technique pour les cas de sédimentation libre. Cette technique connue sous la dénomination de "développements asymptotiques raccordés" est utilisée pour de multiples applications en mécanique des fluides [44].

Pour une sphère évoluant à vitesse constante, l'écoulement est permanent dans le référen-

tiel solidaire de la sphère. Mises sous forme adimensionnelle, les équation de Navier-Stokes se réduisent alors à :

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p = Re_a \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (1.82)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.83)$$

où Re_a est le nombre de Reynolds basé sur le rayon de particule. La technique de développements asymptotiques raccordés consiste à exprimer la solution des équations précédentes comme un développement à l'ordre de Re et cela dans deux zones distinctes. Le premier développement est effectué dans le voisinage proche de la sphère (zone intérieure), là où les effets visqueux sont prépondérants. On écrit dans cette zone les solutions de 1.82 ; $\mathbf{v}(Re_a, \mathbf{r}), p(Re_a, \mathbf{r})$; comme suit :

$$\mathbf{v}(Re_a, \mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + Re_a \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + O(Re_a) \quad (1.84)$$

$$p(Re_a, \mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r}) + Re_a p_1(\mathbf{r}) + O(Re_a) \quad (1.85)$$

Puis, dans une zone située suffisamment loin de la sphère (zone extérieure) on effectue un développement analogue en considérant que la variable contrainte de position est $\hat{\mathbf{r}} = Re_a \mathbf{r}$. Dans cette région les solutions de 1.82 s'écrivent :

$$\mathbf{v}(Re_a, \mathbf{r}) = \mathbf{e}_1 + Re_a \hat{\mathbf{v}}_1(\hat{\mathbf{r}}) + O(Re_a) \quad (1.86)$$

$$p(Re_a, \mathbf{r}) = Re_a^2 \hat{p}_1(\hat{\mathbf{r}}) + O(Re_a) \quad (1.87)$$

où \mathbf{e}_1 représente le champ de vitesse adimensionné à l'infini.

Pour un calcul rigoureux, les conditions imposées sur les différents champs $\mathbf{v}_0, p_0, \mathbf{v}_1 \dots$ sont insuffisantes pour pouvoir les déterminer directement. C'est pourquoi cette technique se base dans un premier temps sur la détermination des solutions asymptotiques d'une part à proximité de la sphère et d'autre part loin de celle-ci. Puis, les informations permettant de lever les problèmes d'indétermination des champs hydrodynamiques sont obtenues par raccordement des solutions asymptotiques dans une zone où elles sont supposées valides. Ce raccordement nécessite d'exprimer la solution intérieure en fonction des variables extérieures et il revient à évaluer les solutions asymptotiques lorsque $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ pour la solution intérieure et $\hat{\mathbf{r}} \rightarrow 0$ pour la solution extérieure. Cette technique permet alors de reconstruire une solution valable quelle que soit la distance \mathbf{r} . Les détails concernant la mise en œuvre de cette technique sont largement présentés dans l'ouvrage *Perturbation methods in fluid mechanics* pour des applications diverses [44].

Les résultats de Vasseur et Cox [15] permettent notamment de décrire le comportement de deux sphères en interaction dans un fluide illimité initialement au repos, quelle que

soit la position relative de l'une par rapport à l'autre. En fonction de la configuration géométrique, chaque sphère subit une force dont la composante verticale est notée F_d et la composante horizontale est notée F_l . Pour deux sphères identiques on exprime ces forces de la façon suivante :

$$F_d = 6\pi\mu aU \left[1 + \frac{3}{8}Re_a - \frac{3}{4} \frac{a}{r} \frac{1}{r^*} \sin(\theta) \left\{ 2 - (r^* + 2 - \frac{r^*}{\sin(\theta)}) e^{-\frac{1}{2}r^*(\sin(\theta)+1)} \right\} + \dots \right] \quad (1.88)$$

$$F_l = -\frac{9}{2}\pi\mu aU \frac{a}{r} \frac{1}{r^*} \cos(\theta) \left\{ 2 - (r^* + 2) e^{-\frac{1}{2}(\sin(\theta)+1)} \right\} + \dots \quad (1.89)$$

où θ est l'angle entre le vecteur inter-centres \mathbf{r} et l'axe horizontal, $r^* = \frac{Ur}{\nu}$ et U est la vitesse verticale instantanée de la sphère considérée.

Pour deux sphères disposées sur un axe perpendiculaire à l'axe de sédimentation ($\theta=0$) on peut, à partir des relations précédentes, prédire la force de dérive des sphères tendant à les faire s'écarter. La vitesse de dérive U_l est alors obtenue par la relation suivante : $U_l = \frac{F_l}{6\pi\mu a}$. Son expression est la suivante :

$$U_l = -\frac{3}{4}U \frac{a}{r} \frac{1}{r^*} \left[2 - (r^* + 2) e^{-\frac{1}{2}r^*} \right] \quad (1.90)$$

Pour deux sphères sédimentant à la verticale l'une de l'autre ($\theta = \frac{\pi}{2}$) la vitesse de la sphère qui suit étant plus grande que celle de la sphère qui la précède on peut prédire, à partir des mêmes expressions, le différentiel de vitesse ΔU entre les deux sphères. Cette vitesse relative s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta U = \frac{3}{2} \frac{a}{r} U^\infty \frac{1}{r^*} (e^{-r^*} - 1 + r^*) \quad (1.91)$$

où U^∞ représente la vitesse limite d'une sphère isolée.

Par le passé d'autres auteurs [41] se sont intéressés à ce type de configurations simples dans le but de valider expérimentalement certaines relations théoriques. Ces travaux ont montré que les relations issues des équations d'Oseen, concernant la sédimentation d'une sphère isolée et d'un doublet vertical, représentaient au moins qualitativement les comportements expérimentalement observés. Cependant, des écarts quantitatifs entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux ont été mis en évidence. Pour palier à ces écarts, ces mêmes auteurs ont proposé une correction empirique du coefficient de traînée permettant de retrouver un bon accord sur une large gamme de Re . Dans cette section nous ne détaillerons pas plus ces résultats mais nous y reviendrons dans le dernier chapitre de ce mémoire, lors de la confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux.

2.2.1.2. Interactions particule-paroi

Lorsqu'on étudie la sédimentation d'une particule parallèlement à une paroi plane, qu'elle soit libre de tourner sur elle-même ou non, on observe une migration perpendiculaire à l'axe de sédimentation. Vasseur et Cox [15, 16] se sont également intéressés à cette configuration en utilisant la technique des développements asymptotiques raccordés. Dans le cas le plus général, la présence de la paroi a pour effet le ralentissement de la particule du fait de l'augmentation de sa traînée. De plus, elle engendre une force de dérive dirigée perpendiculairement à la paroi, qui tend à repousser la sphère. Les expressions asymptotiques de cette force de dérive obtenues par la méthode précédemment citée sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}^1\| &= 6\pi\mu a \left[\frac{3}{32} \frac{a\rho U^2}{\mu} \left(1 - \frac{11}{32} \left(\frac{h\rho U}{\mu} \right)^2 + \dots \right) \right] \\ \|\mathbf{F}^2\| &= 6\pi\mu a \left[\frac{3}{8} \frac{a\rho U^2}{\mu} \left(\left(\frac{\mu}{h\rho U} \right)^2 + 2,21901 \left(\frac{\mu}{h\rho U} \right)^{\frac{5}{2}} + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (1.92)$$

où h représente la distance du centre de la sphère à la paroi, U est la vitesse de la particule, \mathbf{F}^1 est l'expression obtenue en considérant la paroi très proche de la sphère et \mathbf{F}^2 est celle obtenue en considérant la paroi loin de la sphère.

S'agissant de configurations impliquant un plus grand nombre de sphères cette méthode nécessite des développements très complexes, d'autant plus si elles évoluent en présence de parois. C'est pourquoi, par souci de simplification, nous ne tenons pas compte par la suite de l'influence de l'inertie du fluide pour la représentation des interactions particule-paroi. Notons néanmoins que cette méthode peut également être étendue à l'étude d'une bulle ou d'une goutte évoluant à proximité d'une paroi plane par exemple [23, 45].

2.2.2. Approche numérique basée sur la méthode des réflexions

Cette méthode consiste à propager des perturbations de type Oseen (1.78) dans le fluide pour représenter les forces d'interactions hydrodynamiques entre particules. La perturbation engendrée par le déplacement de chaque particule est réfléchiée par les autres particules dans le fluide et la somme de ces perturbations est traduite en terme de vitesse de déplacement qui vient modifier la vitesse de la particule considérée. Dans ce calcul on suppose qu'une particule se déplace instantanément à la vitesse du fluide calculée en son centre [42]. Les interactions hydrodynamiques sont alors prises en compte explicitement en terme de vitesse relative fluide-particule. Ainsi, la force de traînée est calculée en tenant compte de la présence des autres particules dans le fluide et du régime d'écoulement.

Pour représenter la force appliquée à chaque particule j du système et évoluant à la vitesse \mathbf{U}_j , on utilise l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_j = 6\pi\mu a\mathbf{V}_j\left(1 + \frac{3}{16}Re_j\right) \quad (1.93)$$

où le nombre de Reynolds est noté Re_j pour signifier qu'il est calculé sur la base de la vitesse instantanée \mathbf{V}_j laquelle représente la vitesse relative fluide-particule et dont la forme est donnée par :

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{U}_j - \mathbf{V}'_j = \mathbf{U}_j - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{U}_{kj} \quad (1.94)$$

où \mathbf{U}_{kj} représente la contribution en vitesse de déplacement de la particule j due au déplacement de la particule k , déterminée par la méthode des réflexions. \mathbf{V}'_j représente donc la perturbation de la vitesse de déplacement de la sphère j , occasionnée par les déplacements des $n-1$ autres sphères dans le fluide. L'expression (1.93) est ensuite injectée dans les équations du mouvement des particules pour déterminer les vitesses et les positions des particules en fonction du temps. Ces équations, issues de l'écriture du Principe Fondamental de la Dynamique, sont présentées dans le second chapitre de ce mémoire. Les résultats obtenus par cette approche sont comparés à des résultats expérimentaux afin de s'assurer que la dite approche permet de reproduire la dynamique de doublets de particules [42]. Cependant, le calcul numérique des réflexions devient très coûteux lorsqu'un nombre conséquent de particules interagissent, ce qui constitue une des limites de cette méthode.

Conclusion partielle

Dans ce chapitre nous avons dans un premier temps décrit la méthode utilisée pour représenter les interactions hydrodynamiques particule-particule et particule-paroi dans les conditions de Stokes. Pour cela, nous avons présenté une technique de résolution des équations de Stokes pour calculer la perturbation engendrée par le déplacement d'une particule isolée. Puis, nous avons choisi parmi les méthodes de la littérature permettant de représenter les interactions hydrodynamiques, celles qui sont adaptées à notre problème. Par la suite, nous utilisons l'approche due à Durlofsky *et al.* [5, 6, 46] pour représenter les interactions multi-corps en champs lointains par additivité des vitesses. Les effets de lubrification sont introduits suivant Kim *et al.* [14] en termes de forces et au travers d'une description à deux corps de la suspension.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés aux modifications à apporter lorsqu'on désire tenir compte des forces inertielles dans le fluide. Nous avons présenté l'ap-

proximation d'Oseen qui permet de prendre en compte les effets inertiels pour représenter la perturbation due à une particule en translation uniforme dans un fluide initialement au repos. Enfin, nous avons brièvement présenté différentes approches permettant de représenter le comportement de particules en sédimentation en régime faiblement inertiel et en présence de parois.

Ces outils théoriques sont utilisés dans les chapitres suivants pour mettre en œuvre un outil de simulation basé sur la résolution numérique des équations du mouvement des particules.

Chapitre 2

Résolution numérique du problème

Pour appréhender la sédimentation d'une suspension, la méthode choisie est basée sur l'application de la seconde loi de Newton ou Principe Fondamental de la Dynamique. Cette méthode Lagrangienne permet de déterminer la vitesse et la position de chaque particule du système, connaissant les efforts mis en jeu à chaque instant. De plus, cette approche est fiable et peu coûteuse, comparée à d'autres méthodes de la littérature (collocations, simulation directe).

Dans les conditions physiques retenues pour cette étude, la suspension n'est pas suffisamment diluée pour négliger les interactions hydrodynamiques entre particules. De plus, lors du processus de sédimentation, on observe expérimentalement des réarrangements entre particules pouvant conduire à des hétérogénéités de concentration. De ce fait, en plus des forces d'interactions en champs lointains, prépondérantes dans les zones de faible concentration, on doit tenir compte des efforts de lubrification qui prédominent dans les zones de forte concentration. En outre, les distances inter-particules sont telles que la description à deux corps de ces interactions ne suffit plus pour représenter correctement le comportement des particules. Pour ces raisons, nous avons choisi d'utiliser une approximation multi-corps des interactions hydrodynamiques particule-particule en champs lointains [5]. Les forces de lubrification sont quant à elles représentées au travers d'une description à deux corps de la suspension [33].

Par ailleurs, les parois qui bornent la suspension peuvent également influencer la sédimentation des particules. L'influence de ce confinement est représentée en utilisant le principe d'additivité en vitesse pour la contribution en champs lointains, ce qui revient à les inclure au travers d'une vitesse relative fluide-particule. L'additivité en force est toutefois conservée pour représenter les forces de lubrification entre une particule et chacune des

parois [6].

Dans la première partie de ce chapitre nous présentons la forme générale des équations du mouvement obtenues par application du Principe Fondamental de la Dynamique. L'écriture de ces équations passe par la modélisation des forces appliquées au centre de masse de chaque particule du système. La première section de cette partie porte sur la sédimentation d'une sphère isolée. Après une brève description des forces prises en compte, nous présentons les solutions analytiques des équations du mouvement obtenues en régime de Stokes et en régime inertiel. La seconde section concerne la sédimentation de plusieurs particules dans un domaine fluide borné par deux parois planes, parallèles entre elles et parallèles à l'axe de sédimentation. Afin de discuter des problèmes liés aux couplages des interactions hydrodynamiques particules-particules et particules-parois, nous passons successivement en revue le cas de n particules en milieu infini, puis une particule évoluant entre deux parois, pour finir par le cas plus général de n particules entre deux parois. Enfin, nous précisons dans la troisième section de cette partie la forme des équations résolues numériquement.

La seconde partie de ce chapitre porte sur la résolution numérique des équations du mouvement. Dans la première section nous présentons l'adimensionnement des équations ainsi que les fondements de la méthode de résolution utilisée. Dans la seconde section nous effectuons quelques comparaisons préliminaires entre les résultats issus des simulations numériques et d'autres résultats bibliographiques obtenus sous les hypothèses de Stokes. A cet effet, plusieurs configurations sont étudiées pour valider les modèles utilisés dans la limite d'un nombre de Reynolds nul.

1. Formulation du modèle Lagrangien

Le point de départ de la modélisation du problème consiste à écrire les équations générales obtenues par application de la seconde loi de Newton. Pour cette étude nous choisissons de négliger l'influence des rotations des sphères ($O(Re^2)$) devant les effets dus aux translations ($O(Re)$) pour représenter le comportement dynamique de particules en sédimentation. Cette simplification est souvent effectuée dans la littérature [26] et des travaux effectués dans les conditions de Stokes ont montré qu'elle est justifiée [11]. Par conséquent, pour une particule, les équations du mouvement se restreignent à :

$$m_p \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}^V + \mathbf{F}^H + \mathbf{F}^M + \mathbf{F}^B \quad (2.1)$$

où m_p est la masse d'une particule, $\boldsymbol{\gamma}$ est son accélération, \mathbf{F}^V représente la résultante des forces de volume, \mathbf{F}^H est la force d'interaction hydrodynamique, \mathbf{F}^M est la force

de masse ajoutée et \mathbf{F}^B est la force d'histoire.

1.1. Sédimentation d'une sphère isolée en milieu infini

1.1.1. Modèles de forces

1.1.1. a) Forces gravitationnelles

Considérons une particule sphérique isolée et immergée dans un fluide. Cette sphère est alors soumise à une force dite de flottabilité qui initie son mouvement. Ce terme également appelé force de volume \mathbf{F}^V , représente la somme des forces proportionnelles à la gravité \mathbf{g} , appliquées au centre de la particule que sont le Poids \mathbf{F}^P et la Poussée d'Archimède \mathbf{F}^A :

$$\mathbf{F}^P = m_p \cdot \mathbf{g} = \rho_p v_p \cdot \mathbf{g} \qquad \mathbf{F}^A = -\rho v_p \cdot \mathbf{g} \qquad (2.2)$$

où $v_p = \frac{4}{3}\pi a^3$ est le volume de la particule et $m_p = v_p \rho_p$ représente sa masse. On notera \mathbf{F}^V la résultante des forces volumiques telle que :

$$\mathbf{F}^V = \mathbf{F}^P + \mathbf{F}^A = v_p(\rho_p - \rho) \cdot \mathbf{g} = v_p \Delta \rho \cdot \mathbf{g} \qquad (2.3)$$

Soumise à cette force, la particule se met donc en mouvement suivant un axe colinéaire à \mathbf{g} (Sédimentation : dans le sens de \mathbf{g} ; Crémage : dans le sens opposé à \mathbf{g}).

1.1.1. b) Force hydrodynamique

Dans le cas d'une seule particule en sédimentation (en translation pure ici), la force hydrodynamique \mathbf{F}^H est la force de traînée. Pour modéliser cette force, on utilise la relation issue des développements d'Oseen (1.81). Cette expression est utilisée dans la limite d'un nombre de Reynolds sensiblement inférieur à 1. Par ailleurs, lorsqu'on se place dans les conditions de Stokes ($Re=0$) ce modèle permet de retrouver l'expression de la traînée de Stokes (1.36).

1.1.1. c) Force de masse ajoutée

On appelle force de masse ajoutée la contribution inertielle associée à la masse du fluide entraînée par le mouvement d'une particule. Cette force est non-nulle lorsque ce mouvement est accéléré, c'est à dire dans une situation instationnaire. Le volume de fluide entraîné dépend de la dimension et de la forme de la particule considérée. Dans le cas d'une particule sphérique on peut montrer que ce volume de fluide correspond à la moitié du volume de la sphère [19]. Dans le cas de la sédimentation dans un fluide initialement

au repos, ce fluide étant soumis à la même accélération que la particule, cette force est de la forme :

$$\mathbf{F}^M = -\frac{1}{2}\rho v_p \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (2.4)$$

Ce terme qui s'oppose à l'accélération de la particule vient s'ajouter à l'inertie de la particule.

1.1.1. d) Force d'histoire

Toujours dans le cas d'un mouvement instationnaire, la force d'histoire ; \mathbf{F}^B ; est une force d'origine visqueuse qui tient compte du temps nécessaire pour que la contrainte exercée par la particule sur le fluide atteigne l'état stationnaire. Ce retard ou effet d'histoire provient du temps que met la condition à la limite sur la particule à diffuser dans tout le fluide. Pour une particule en sédimentation dans un fluide initialement au repos, cette force prend la forme suivante :

$$\mathbf{F}^B = -6a^2(\pi\mu\rho)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{\frac{d\mathbf{U}}{d\tau}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \quad (2.5)$$

La force d'histoire apparaît être prépondérante parmi les termes instationnaires à prendre en considération, même dans le cas d'écoulements gravitaires à faible nombre de Reynolds [11]. Son influence sur une particule peut être évaluée en faisant intervenir le nombre de Strouhal; $Sl = \frac{wa}{U}$; où w est une fréquence caractéristique de croisement des trajectoires dans le cas de la sédimentation. Elle varie comme $(ReSl)^{\frac{1}{2}}$ [49]. Cette force peut aussi être mesurée expérimentalement en supposant que tous les autres efforts sont connus. Du point de vue expérimental, si aux temps courts elle se comporte en \sqrt{t} , comme le prédisent les équations de Stokes instationnaires, son comportement aux temps longs est plus fidèlement représenté par une décroissance exponentielle [48].

La prise en compte de cette force d'histoire dans les équations du mouvement des particules suppose sa connaissance, or il a été constaté que sa représentation par la relation (2.5) entraîne une surestimation de cette force, hormis dans une courte phase initiale lors de laquelle les effets d'accélération sont importants [48]. En outre, compte tenu de l'expression complexe de cette force qui nécessite la connaissance des accélérations passées de chaque particule, elle est bien souvent négligée dans la littérature lorsqu'on étudie les interactions entre un plus grand nombre de particules [11, 26].

Par ailleurs, l'omission de cette force qui peut être à l'origine d'écarts en termes de positions verticales des particules de l'ordre de $tU_{St}Re$, préserve néanmoins qualitativement les réarrangements entre particules [11]. De plus, pour notre problème les différences occasionnées par l'omission de la force d'histoire ne devrait influencer que faiblement la

dérive horizontale des particules, du fait des faibles accélérations mises en jeu dans cette direction. Nous verrons par la suite que même d'un point de vue quantitatif l'accord entre des résultats expérimentaux et une approche ne tenant pas compte de cette force reste raisonnable, spécialement pour de courtes durées et lorsque Re est de l'ordre de 0, 1.

1.1.2. Résolution analytique des équations du mouvement dans le cas d'une sphère isolée

Dans cette sous-section on se soucie uniquement de la vitesse $\mathbf{U}(t)$ d'une particule isolée sans considérer sa trajectoire. En effet, il est connu qu'en régime de Stokes aussi bien qu'en régime faiblement inertiel, sa trajectoire est toujours rectiligne. Ainsi nous donnons dans les paragraphes suivants les expressions analytiques concernant l'évolution de sa vitesse selon les conditions d'écoulement. Pour cela on résout les équations du mouvement (2.1) en tenant compte des forces de volume de la force de traînée et de la force de masse ajoutée mais sans tenir compte de la force d'histoire, comme dans le reste de ce mémoire.

1.1.2. a) Régime de Stokes

Pour une particule, la forme générale des équations du mouvement est la suivante :

$$v_p \rho_p \frac{d\mathbf{U}}{dt} = v_p \Delta \rho \cdot \mathbf{g} - 6\pi\mu a \mathbf{U} - \frac{1}{2} \rho v_p \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (2.6)$$

Pour résoudre ce problème on peut se ramener à l'équation scalaire suivante :

$$\frac{dU}{dt} = AU + B \quad (2.7)$$

$$\text{où } A = \frac{6\pi\mu a}{v_p(\rho_p + \frac{1}{2}\rho)} \text{ et } B = \frac{\Delta\rho g}{\rho_p + \frac{1}{2}\rho}.$$

Pour une sphère sans vitesse initiale, cette équation linéaire du premier ordre admet pour solution :

$$U(t) = U_{St}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.8)$$

avec $\frac{B}{A} = U_{St}$, $\tau = \frac{1}{A}$. τ est le temps caractéristique de sédimentation de la sphère isolée et U_{St} est souvent appelée "vitesse de Stokes" et représente la vitesse limite de chute de la particule :

$$U_{St} = \frac{2}{9} \frac{\Delta\rho a^2 g}{\mu} \quad (2.9)$$

Notons ici que la force de masse ajoutée intervient dans la solution (2.8) au niveau de la constante de temps du problème. En effet, si on tient compte de cette force on a :

$$\tau = \frac{(\rho_p + \frac{1}{2}\rho)v_p}{6\pi\mu a} \quad (2.10)$$

Dans le cas où cette force est négligée on a :

$$\tau = \frac{\rho_p v_p}{6\pi\mu a} \quad (2.11)$$

1.1.2. b) Régime inertiel

En régime inertiel, seul le modèle de force de traînée (1.81) est différent et les équations à résoudre sont les suivantes :

$$v_p \rho_p \frac{d\mathbf{U}}{dt} = v_p (\rho_p - \rho) \cdot \mathbf{g} - 6\pi\mu a \mathbf{U} \left(1 + \frac{3}{16} Re\right) - \frac{1}{2} \rho v_p \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (2.12)$$

$$\text{où } Re = \frac{\rho U 2a}{\mu}.$$

On peut alors se ramener à l'équation scalaire suivante :

$$\frac{dU}{dt} + AU + BU^2 = C \quad (2.13)$$

$$\text{où } A = \frac{6\pi\mu a}{(\rho_p + \frac{1}{2}\rho)v_p}, B = \frac{9}{4} \frac{\pi a^2 \rho}{(\rho_p + \frac{1}{2}\rho)v_p} \text{ et } C = \frac{\Delta\rho g}{\rho_p + \frac{1}{2}\rho}.$$

Cette équation de Bernoulli admet pour solution analytique :

$$U(t) = \frac{1}{2B} \left[D \tanh \left(\frac{tD}{2} + [\tanh]^{-1} \left(\frac{A}{D} \right) \right) - A \right] \quad (2.14)$$

$$\text{où } D = \sqrt{4BC + A^2}.$$

Dans ces conditions, l'expression de la vitesse limite de la particule, notée U_{Os} , est :

$$U_{Os} = \frac{D - A}{2B} = \frac{1}{3\pi a \rho} \left(-4\pi\mu + 2\sqrt{4\pi^2\mu^2 + \pi\rho(\Delta\rho)v_p g} \right) \leq U_{St} \quad (2.15)$$

1.2. Sédimentation de plusieurs particules entre deux parois

Lorsque plusieurs particules interagissent, les modèles de forces de volume (2.3) et de force de masse ajoutée (2.4) sont conservés. La difficulté principale réside dans la modélisation de la force d'interaction hydrodynamique \mathbf{F}^H appliquée au centre de chaque particule. On entend par force hydrodynamique la résultante des efforts engendrés par le mouvement du fluide sur la particule considérée. Par conséquent, cette force dépend de l'écoulement autour de la particule qui dépend non seulement de la présence de parois ou d'autres particules dans le fluide, mais aussi du régime.

Dans cette partie nous procédons à une description des interactions hydrodynamiques pour différentes configurations de sédimentation en milieu infini et confiné. Cette description est effectuée en premier lieu dans la limite d'un nombre de Reynolds nul avant d'envisager la prise en compte des effets inertiels.

1.2.1. Interactions hydrodynamiques entre n particules en milieu infini

1.2.1.1. Approximation multi-corps aux champs lointains

1.2.1.1. a) Régime de Stokes

Pour représenter les effets multi-corps au sein d'une suspension, Durlofsky *et al.* [5] proposent d'utiliser le principe d'additivité en vitesse pour coupler les interactions hydrodynamiques entre particules. Cette technique passe par l'inversion d'une matrice de mobilité globale qui permet de rendre compte de l'ensemble des perturbations réfléchies sur toutes les particules en interaction dans la suspension.

La matrice de mobilité globale \mathbf{M} est construite pour les n particules du système à partir des expressions des tenseurs de mobilités \mathbf{W}_{ij} (1.40) et ne dépend donc que de la configuration spatiale du système. Lorsque les expressions des fonctions de mobilité ne tiennent pas compte des réflexions des perturbations, on a :

$$\mathbf{M}_{ii} = \frac{\mathbf{I}}{6\pi\mu a} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{ij} = \mathbf{W}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (2.16)$$

où \mathbf{r}_{ij} est le vecteur inter-centres correspondant au doublet (i,j).

Alors, on peut exprimer la vitesse de chaque particule i, telle que :

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_{ij} \mathbf{F}_j \quad (2.17)$$

Par ailleurs, la matrice \mathbf{M} est symétrique dans le cas d'une distribution monomodale de sphères. De plus, cette matrice est définie positive, ce qui est dû à la nature dissipative du système [5, 6]. De ce fait, \mathbf{M} est toujours inversible. Les forces \mathbf{F} appliquées aux particules sont alors déterminées, connaissant les vitesses des particules \mathbf{U} , par inversion matricielle comme suit :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{M}^{-1}) \cdot \mathbf{U} \quad (2.18)$$

1.2.1.1. b) Régime inertiel

Pour représenter la sédimentation de particules en régime inertiel nous avons choisi d'appliquer un raisonnement analogue à celui présenté au chapitre 1 (cf. Chapitre 1 §1.2.1.1), lequel se base sur l'additivité en vitesse pour tenir compte des interactions hydrodynamiques entre n particules. Pour cela il est nécessaire de supposer dans un premier temps que le champ de vitesse dans la phase continue peut être représenté par une superposition de perturbations de type Oseen. De plus, nous supposons que la première loi de Faxen permet de représenter correctement l'influence d'un champ de vitesse généré par une particule, en terme de vitesse de déplacement de la particule considérée, tant que le nombre de Reynolds associé est petit devant 1. Alors, **sous ces deux hypothèses**, il est possible de conserver une représentation des interactions hydrodynamiques similaire à celle utilisée dans les conditions de Stokes. Par rapport à notre étude bibliographique, cette méthodologie présentée plus en détail par la suite, apparaît être originale et constitue un des intérêts principaux de ce travail.

Considérons deux particules 1 et 2 en interaction dans un fluide visqueux. La particule 1 évolue à une vitesse donnée par $\frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a(1+\frac{3}{16}Re_1)}$ lorsqu'elle est considérée isolée. De même, la particule 2 évolue à une vitesse $\frac{\mathbf{F}_2}{6\pi\mu a(1+\frac{3}{16}Re_2)}$. Pour exprimer la vitesse de la sphère 1 en présence de la seconde, on ajoute les deux contributions suivantes :

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a(1+\frac{3}{16}Re_1)} + (\mathbf{I} + \frac{a^2}{6}\nabla^2)\mathbf{v}_2^{\mathbf{O}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} \quad (2.19)$$

où $\mathbf{v}_2^{\mathbf{O}}(\mathbf{x})$ représente la solution de champ de vitesse d'Oseen en un point \mathbf{x} du fluide, pour une sphère en translation à la vitesse $\frac{\mathbf{F}_2}{6\pi\mu a(1+\frac{3}{16}Re_2)}$. La décomposition de $\mathbf{v}_2^{\mathbf{O}}(\mathbf{x})$ en $\mathbf{v}_2^{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) + (\mathbf{v}_2^{\mathbf{O}}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_2^{\mathbf{S}}(\mathbf{x}))$, permet de dégager une partie stokesienne du champ de vitesse ; $\mathbf{v}_2^{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$; et une contribution inertielle nette ; $(\mathbf{v}_2^{\mathbf{O}}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_2^{\mathbf{S}}(\mathbf{x}))$. Ainsi il est permis de réécrire (2.19) comme suit :

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a(1+\frac{3}{16}Re_1)} + (\mathbf{I} + \frac{a^2}{6}\nabla^2)\mathbf{v}_2^{\mathbf{S}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} + (\mathbf{I} + \frac{a^2}{6}\nabla^2)(\mathbf{v}_2^{\mathbf{O}}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_2^{\mathbf{S}}(\mathbf{x}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} \quad (2.20)$$

A ce niveau, le terme de Faxen appliqué à $\mathbf{v}_2^S(\mathbf{x})$ fait apparaître les expressions des tenseurs de mobilité \mathbf{W}_{ij} définis au paragraphe 1.2.1.1. du premier chapitre. Rappelons ici que ce travail concerne des sphères identiques et afin d'éviter les éventuelles confusions au niveau des indices on utilise par la suite les notations suivantes :

$$\mathbf{W}_{11} = \mathbf{W}_{22} = \mathbf{W}_{\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_{12} = \mathbf{W}_{21} = \mathbf{W}_{\alpha\beta}$$

Puis, en notant $\boldsymbol{\nu}_i = (\mathbf{I} + \frac{a^2}{6}\nabla^2)(\mathbf{v}_j^O(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_j^S(\mathbf{x}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$, il vient :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^* \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a(1 + \frac{3}{16}Re_1)} + \mathbf{W}_{\alpha\beta}^* \frac{\mathbf{F}_2}{6\pi\mu a(1 + \frac{3}{16}Re_2)} + \boldsymbol{\nu}_1 \quad (2.21)$$

$$\text{où } \mathbf{W}_{\alpha\beta}^* = 6\pi\mu a \mathbf{W}_{\alpha\beta}.$$

On réécrit alors (2.21) en séparant les contributions inertielles comme suit :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{F}_1 + \mathbf{W}_{\alpha\beta}\mathbf{F}_2 - \frac{3}{16} [Re_1 \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^* \frac{\mathbf{F}_1}{6\pi\mu a(1 + \frac{3}{16}Re_1)} + Re_2 \mathbf{W}_{\alpha\beta}^* \frac{\mathbf{F}_2}{6\pi\mu a(1 + \frac{3}{16}Re_2)}] + \boldsymbol{\nu}_1 \quad (2.22)$$

Après quelques aménagements les vitesses des deux particules sont exprimées sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\cdot\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{\alpha\alpha} & \mathbf{W}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{W}_{\alpha\beta} & \mathbf{W}_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\mathbf{I} + \frac{3}{16} \begin{pmatrix} Re_1 \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^* & Re_2 \mathbf{W}_{\alpha\beta}^* \\ Re_1 \mathbf{W}_{\alpha\beta}^* & Re_2 \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^* \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

De façon analogue on peut appliquer cette méthode à un système de n particules. Pour obtenir la vitesse d'une particule i on superpose les n contributions suivantes :

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{W}_{ij}^* \frac{\mathbf{F}_j}{6\pi\mu a(1 + \frac{3}{16}Re_j)} + \boldsymbol{\nu}_i \quad (2.24)$$

où $\boldsymbol{\nu}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\mathbf{I} + \frac{a^2}{6}\nabla^2)(\mathbf{v}_j^O(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_j^S(\mathbf{x}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ et avec $\mathbf{W}_{ii} = \mathbf{W}_{jj} = \mathbf{W}_{\alpha\alpha}$ et $\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{W}_{ji} = \mathbf{W}_{\alpha\beta}$.

Sous forme matricielle, on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{M}\mathbf{F} = (\mathbf{I} + \frac{3}{16}\mathbf{Z})\mathbf{U} - \boldsymbol{\nu} \quad (2.25)$$

où \mathbf{Z} est une matrice de la forme suivante :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Re_1 \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^* & Re_2 \mathbf{W}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{r}_{12}) & \dots & Re_n \mathbf{W}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{r}_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Re_1 \mathbf{W}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{r}_{n1}) & \dots & \dots & Re_n \mathbf{W}_{\alpha\alpha}^* \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Les termes représentant les effets inertiels sont homogènes à des vitesses et sont explicitement pris en compte en terme de vitesse relative fluide-particule dans les équations du mouvement. Les forces appliquées à chaque particule sont alors obtenues par inversion de la matrice de mobilité dans (2.25).

Ce modèle présente le premier avantage de retrouver une formulation analogue à celle obtenue dans les conditions de Stokes lorsque $Re=0$. Il permet également de retrouver le comportement de sphères isolées lorsque la distance entre sphères tend vers l'infini.

Par la suite nous nous attachons à valider cette représentation des forces d'interaction hydrodynamiques en comparant les résultats obtenus avec des résultats issus de la littérature et des expériences réalisées dans le cadre du présent travail.

1.2.1.2. Description à deux corps aux champs proches

En général, les méthodes utilisées pour exprimer les forces d'interaction en champs proches reviennent à décrire la suspension comme une collection de doublets de sphères. Dans ce cas la force de lubrification agissant sur une particule résulte de la somme des $n-1$ forces correspondant aux $n-1$ doublets en présence. Pour la simplicité de sa mise en œuvre, la méthode présentée au chapitre 1 (cf. Chapitre 1 §1.2.1.2.b) a été retenue. En effet, si les deux méthodes présentées sont équivalentes lorsque deux particules sont très proches, celle employée par Durlofsky *et al.* [5] nécessite l'inversion d'une matrice supplémentaire par doublet de particules ce qui rend encore plus lourd le calcul. Néanmoins rappelons que cette dernière méthode permet de représenter les interactions en champ proche sans restrictions sur la distance entre particules. De ce fait, cette méthode ne génère pas de discontinuités spatiales autour de la particule, contrairement à la méthode utilisée par la suite.

1.2.1.2.a) Régime de Stokes

Pour une particule i du système on détermine la résultante des forces de lubrification telles qu'elles sont décrites dans le premier chapitre (1.60, 1.61) :

$$\mathbf{F}_i^{\text{lub}} = \sum_{j=1 \neq i}^n [\mathbf{F}^\perp(V_{ij}^\perp, \epsilon_{ij}) + \mathbf{F}^\parallel(V_{ij}^\parallel, \epsilon_{ij})] \quad (2.27)$$

avec $\epsilon_{ij} = \frac{r_{ij}-2a}{a}$ et où V_{ij}^\parallel et V_{ij}^\perp représentent respectivement les composantes de \mathbf{V}_{ij} parallèle au vecteur inter-centres et perpendiculaire à celui-ci. Notons que ces expressions sont considérées non-nulles dans une zone telle que $\epsilon_{ij} < 1$.

1.2.1.2.b) Régime inertiel

Pour ce travail nous faisons le choix de négliger l'influence des effets inertiels devant les effets visqueux pour représenter les forces de lubrification. Ce choix se justifie du fait que les vitesses de rapprochement mises en jeu lors de la sédimentation sont très faibles dans la gamme de Re qui nous intéresse. Nous conservons donc les expressions (1.60, 1.61) pour exprimer la contribution en champs proches \mathbf{F}^{lub} (2.27) en régime inertiel.

1.2.2. Interactions entre une particule et deux parois

1.2.2.1. Contribution en champs lointains

1.2.2.1. a) Régime de Stokes

Dans le cas présent, le confinement est celui occasioné par deux parois planes, parallèles et fixes. Les résultats analytiques sont nombreux dans ce domaine [1, 13]. Cependant, ces développements sont coûteux et les calculs sont généralement effectués dans des situations figées, ne permettant pas d'obtenir de relations généralisables quelle que soit la position de la particule.

Donnons pour exemple les résultats obtenus par application de la méthode des réflexions dans le cas d'une sphère en translation parallèle aux parois espacées de $4h$ [1] (cf. figure 2.1). Lorsque la sphère est centrée ($X=0$) par rapport aux parois, on a :

$$F = \frac{-6\pi a\mu U}{1 - 1,004\frac{a}{h} + 0,418(\frac{a}{h})^3 + 0,21(\frac{a}{h})^4 - 0,169(\frac{a}{h})^5} \quad (2.28)$$

Pour un décalage de h par rapport au plan médian on a :

$$F = \frac{-6\pi a\mu U}{1 - 0,6526\frac{a}{h} + 0,1475(\frac{a}{h})^3 - 0,131(\frac{a}{h})^4 - 0,0644(\frac{a}{h})^5} \quad (2.29)$$

Néanmoins, une technique plus simple consiste à considérer individuellement les effets dus à chaque paroi. Ceux-ci sont superposés pour représenter l'influence du confinement quelle que soit la position de la particule. Cette méthode suggérée par Oseen [1], donne dans le cas décrit plus haut (sédimentation parallèle aux parois) une force d'intensité :

$$F = \frac{-6\pi a\mu U}{1 - \frac{9}{16}(\frac{a}{h_1} + \frac{a}{h_2})} \quad (2.30)$$

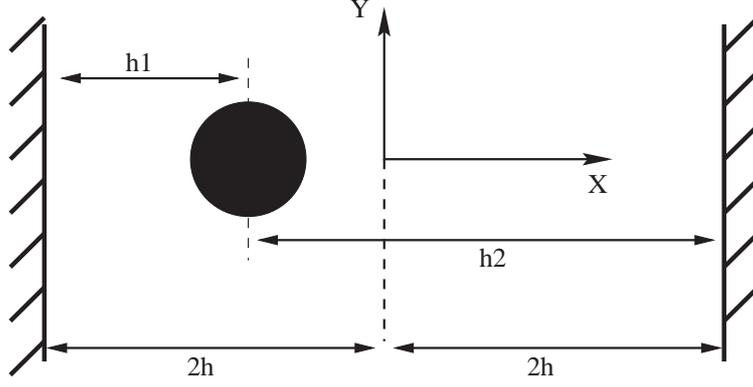


Figure 2.1 Une sphère sédimentant entre deux parois planes parallèles

où h_1 et h_2 représentent respectivement les distances du centre de la sphère à la paroi 1 et à la paroi 2 (cf. figure 2.1). Cette dernière expression correspond à la force déduite de l'additivité des interactions hydrodynamiques en vitesse. En effet, la vitesse d'une particule peut s'écrire comme la somme de sa vitesse en milieu infini et des contributions dues à la présence des deux parois, sous la forme suivante :

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{F}}{6\pi\mu a} + [\mathbf{W}_{\mathbf{p}_1}(\mathbf{h}_1) + \mathbf{W}_{\mathbf{p}_2}(\mathbf{h}_2) - 2\frac{\mathbf{I}}{6\pi\mu a}] \cdot \mathbf{F} \quad (2.31)$$

où $\mathbf{W}_{\mathbf{p}_1}$ et $\mathbf{W}_{\mathbf{p}_2}$ sont respectivement les tenseurs de mobilité des parois 1 et 2 (1.65). Notons ici qu'il est nécessaire de retrancher la contribution de la sphère isolée contenue dans l'expression (1.65).

En posant $\mathbf{W}_{\mathbf{p}_{12}}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \mathbf{W}_{\mathbf{p}_1}(\mathbf{h}_1) + \mathbf{W}_{\mathbf{p}_2}(\mathbf{h}_2) - 2\frac{\mathbf{I}}{6\pi\mu a}$, la relation (2.31) peut encore s'écrire :

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{F}}{6\pi\mu a} + [\mathbf{W}_{\mathbf{p}_{12}}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)] \cdot \mathbf{F} \quad (2.32)$$

On peut alors exprimer la force appliquée à la particule en inversant cette dernière relation, ce qui permet de retrouver la relation scalaire (2.30) dans le cas d'une particule en translation parallèle aux parois.

Une autre possibilité proposée par Durlofsky *et al.* [6] est de conserver la relation (2.32) pour prendre en compte l'influence des parois en termes de vitesse. Pour cela on pose : $\mathbf{U}_{\mathbf{P}} = (\mathbf{W}_{\mathbf{p}_{12}}) \cdot \mathbf{F}$. Ce terme représente la contribution due aux parois en terme de vitesse de déplacement de la particule. Donc, en introduisant ce terme dans (2.32), la force déduite des interactions avec les parois prend la forme suivante :

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu a(\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\mathbf{P}}) \quad (2.33)$$

Cette dernière méthode est utilisée par la suite pour introduire les effets du confinement dans la simulation numérique. Elle permet un couplage en vitesse des interactions

particule-particule et particule-paroi.

1.2.2.1. b) Régime inertiel

En modifiant l'écoulement autour d'une particule (cf. figure 1.15), les forces inertielles dans le fluide affectent son mouvement à proximité d'une paroi. Par exemple, la translation d'une sphère parallèlement à une paroi génère une force de dérive qui a tendance à l'écartier de la paroi. Dans ce domaine, les travaux de Vasseur et Cox [15] permettent d'exprimer cette force en fonction de la distance à la paroi et du régime d'écoulement. Cependant, le calcul analytique des expressions de ces forces hydrodynamiques lorsque plusieurs sphères interagissent dans un fluide borné par deux parois parallèles est très complexe. Néanmoins, tant que la distance moyenne entre particules est petite comparée à la distance particule-paroi, on peut s'attendre à une plus faible influence des parois. C'est pourquoi la contribution en champs lointains exprimée dans les conditions de Stokes est conservée ici pour représenter les interactions particule-paroi.

1.2.2.2. Contribution en champs proches

Dans la configuration géométrique choisie (cf. figure 2.1), une particule ne peut interagir aux champs proches avec les deux parois simultanément. Par conséquent, pour une particule i évoluant à la vitesse \mathbf{U}_i et des distances du centre de la sphère à une des parois inférieures à deux rayons ($\epsilon' < 1$) on exprime grâce aux relations (1.66,1.67) la force de lubrification, qui prend la forme suivante :

$$\mathbf{Fp}_i^{\text{lub}} = [\mathbf{Fp}^{\parallel}(U_i^{\parallel}, \epsilon'_i)] + [\mathbf{Fp}^{\perp}(U_i^{\perp}, \epsilon'_i)] \quad (2.34)$$

où U_i^{\parallel} représente la composante de la vitesse \mathbf{U}_i dans la direction parallèle à la paroi et U_i^{\perp} sa composante dans la direction perpendiculaire à celle-ci.

1.2.3. Interactions entre n particules et deux parois

Comme nous l'avons vu précédemment, nous ne tenons pas compte des modifications engendrées par les effets inertiels sur les interactions hydrodynamiques particule-parois. C'est pourquoi, dans cette section, nous présentons une méthode généralement utilisée dans les conditions de Stokes, pour coupler les interactions entre particules et parois.

Ce problème a déjà été étudié dans le cadre de la remise en suspension de particules [6]. En utilisant encore une fois le principe d'additivité en vitesse, le problème en champs lointains s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{U} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Mp} \cdot \mathbf{F} \quad (2.35)$$

où \mathbf{M}_p est la matrice des mobilités associées aux parois.

Chaque particule i subie l'influence des parois, situées respectivement à h_1 et h_2 de celle-ci, au travers du tenseur $\mathbf{W}_{p12}^{(i)} = \mathbf{W}_{p12}(\mathbf{h}_1^{(i)}, \mathbf{h}_2^{(i)})$ défini en (2.32), où $h_j^{(i)}$ représente la distance du centre de la sphère i à la paroi j . La matrice \mathbf{M}_p est par nature diagonale et : $\mathbf{M}_{p_{ii}} = \mathbf{W}_{p12}^{(i)}$

Alors, le terme $(\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{F})$, homogène à une vitesse, est pris en compte en terme de vitesse relative fluide-particule \mathbf{U}_p [6]. Les forces hydrodynamiques appliquées aux particules sont alors obtenues par inversion de la matrice de mobilité \mathbf{M} et on a :

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}_p) \quad (2.36)$$

1.2.4. Formulation générale du problème

Sous les hypothèses simplificatrices énoncées dans cette première partie, le problème peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} m_p \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} &= v_p \Delta \rho \mathbf{g} \\ &- \sum_{j=1}^n [\mathbf{M}_{ij}]^{-1} \cdot (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{p_j} + \frac{3}{16} \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}_{jk} \mathbf{U}_k - \boldsymbol{\nu}_j) + \mathbf{F}_i^{\text{lub}} + \mathbf{F}_{p_i}^{\text{lub}} \\ &- \frac{1}{2} \rho v_p \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Rappelons que si l'on se place dans les conditions de Stokes ($Re=0$), on a : $\boldsymbol{\nu}_i = 0$ et les termes $Re_j \mathbf{W}_{ij}^*$ dans \mathbf{Z} sont nuls; ce qui conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} m_p \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} &= v_p \Delta \rho \mathbf{g} \\ &- \sum_{j=1}^n [\mathbf{M}_{ij}]^{-1} \cdot (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{p_j}) + \mathbf{F}_i^{\text{lub}} + \mathbf{F}_{p_i}^{\text{lub}} \\ &- \frac{1}{2} \rho v_p \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ces dernières équations sont celles utilisées pour étudier le comportement des particules dans les conditions de Stokes [6].

2. Résolution numérique des équations du mouvement

Dans cette partie nous présentons dans un premier temps l'adimensionnement des équations proposées dans la première partie. Puis, dans un deuxième temps, le principe général de la méthode de résolution numérique retenue pour cette étude. Enfin, nous vérifions la validité du calcul des interactions hydrodynamiques dans la limite d'un nombre de Reynolds nul. Cette étape nous permet également d'éprouver la méthode numérique choisie pour résoudre notre problème.

2.1. Adimensionnement des équations du mouvement

Afin de traiter le problème (2.1) sous forme adimensionnelle on notera :

$$\begin{aligned} \mathbf{om}_i &= \frac{\mathbf{OM}_i}{a} & \mathbf{u}_i &= \frac{\mathbf{U}_i}{U_{St}} & \mathbf{up}_i &= \frac{\mathbf{Up}_i}{U_{St}} & t' &= \frac{t}{\tau} & \mathbf{f} &= \frac{\mathbf{F}}{6\pi\mu a U_{St}} \\ & & \boldsymbol{\nu}_i^* &= \frac{\boldsymbol{\nu}_i}{U_{St}} & \mathbf{M}^* &= 6\pi\mu a \mathbf{M} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Avec ce nouveau jeu de variables, les équations du mouvement pour une particule i ont désormais la forme suivante :

$$\frac{d^2 \mathbf{om}_i}{dt'^2} = \mathbf{f}_i^V + \mathbf{f}_i^H = \mathbf{f}_i \quad (2.40)$$

où \mathbf{f}_i représente la résultante des forces de volume et hydrodynamique. $\mathbf{f}_i^V = [0; -1]$ et la force hydrodynamique adimensionnée \mathbf{f}_i^H est de la forme suivante :

$$\mathbf{f}_i^H = - \sum_{j=1}^n [\mathbf{M}_{ij}^*]^{-1} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{up}_j + \frac{3}{16} \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}_{jk} \cdot \mathbf{u}_k - \boldsymbol{\nu}_j^*) + \mathbf{f}_i^{\text{lub}} + \mathbf{fp}_i^{\text{lub}} \quad (2.41)$$

Rappelons qu'il est très simple d'introduire la force de masse ajoutée dans notre problème. En effet, cette force intervient dans l'expressions de la constante de temps τ du problème (cf. Chapitre 2 §1.1.2.a)

L'adimensionnement du système d'équations est effectué pour ramener l'ensemble des variables dans l'intervalle $[0,1]$, ce qui permet par la suite de résoudre le problème avec une meilleure précision.

2.2 Principe de la méthode de résolution

La méthode de résolution des équations du mouvement des particules repose sur un schéma de Gear [50]. C'est une méthode de type prédicteur-correcteur, à ordre et pas

de temps adaptatifs, qui est réputée pour sa robustesse ainsi que sa précision. Le principe de cette méthode consiste à transformer le système d'équations différentielles en un système d'équations purement algébrique.

L'outil que nous utilisons permet de résoudre les problèmes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{y}' &= \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t = t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

avec :

- \mathbf{D} , la matrice des coefficients des termes différentiels ;
- \mathbf{y} , le vecteur des variables ;
- t , le temps (variable indépendante) ;
- \mathbf{g} , une fonction de la variable \mathbf{y} et de t .

Souvent ce type de problème n'admet pas de solutions analytiques (lorsque $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ est non linéaire, par exemple) ou du moins celles-ci sont souvent difficilement accessibles (systèmes de grandes tailles). L'utilisation d'un solveur basé sur la principe de Gear s'avère nécessaire lorsque les équations sont non linéaires et fortement couplées, ce qui est le cas dans cette étude.

Sur le plan algorithmique, cette méthode fonctionne de la façon suivante :

- à partir du point courant connu, (t_m, \mathbf{y}_m) , une phase de prédiction permet d'estimer l'état des variables au temps (t_{m+1}) . Pour cela, on exprime la dérivée de \mathbf{y} en ce point, qui est donnée par :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{1}{h \cdot \beta} (\mathbf{y} - \Psi) \tag{2.43}$$

avec :

- h , le pas de temps courant ;
 - β , un paramètre de la méthode dépendant de l'ordre courant ;
 - Ψ , une fonction des états précédents de \mathbf{y} .
- la phase de correction, quant à elle, utilise cette information pour initialiser un processus itératif de type Newton-Raphson pour résoudre le problème algébrique suivant :

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) - \frac{1}{h \cdot \beta} \mathbf{D}(\mathbf{y}, t) \cdot (\mathbf{y} - \Psi) = 0 \tag{2.44}$$

Cette dernière équation est obtenue en introduisant l'expression (2.43) dans l'équation différentielle (2.42) [50, 51].

A terme, on dispose des valeurs de toutes les variables au temps (t_{m+1}). Par ailleurs, l'utilisation de tolérances (absolue ou relative) garantie la qualité du résultat.

Afin d'exploiter au mieux les possibilités du solveur, il nous a semblé judicieux de poser notre problème en ces termes :

- le vecteur des variables s'écrit pour l'ensemble des particules de la façon suivante :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{om} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

avec :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{om} = \begin{pmatrix} \mathbf{om}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{om}_n \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

- $\mathbf{D}(\mathbf{y}, \mathbf{t})$ est la matrice suivante :

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{a}{\tau U_{St}} \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

- la fonction $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$ est telle que :

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Finalement, les équations du mouvement des particules sont écrites sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{a}{\tau U_{St}} \mathbf{I} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{om} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Ce système d'équations est alors résolu globalement pour obtenir les vitesses et les positions de chaque particule à chaque instant. Nous ne rentrons pas plus dans les détails de la résolution des équations mais nous nous attachons par la suite à valider le choix de cette méthode pour résoudre notre problème.

2.3. Résultats préliminaires

Dans cette dernière section, les résultats de nos simulations sont comparés à des résultats obtenus analytiquement et à d'autres résultats issus de la littérature. Nous débutons par l'étude d'une particule en sédimentation afin de mettre en évidence l'influence de la force de masse ajoutée dans les conditions physiques retenues pour ce travail. Pour cela, nos résultats numériques sont confrontés aux résultats analytiques donnés dans ce chapitre (cf. Chapitre 2 §1.1.2. a et b). Puis, nous passons en revue différentes configurations déjà étudiées par le passé [5, 6, 11, 26], afin de valider l'approche utilisée dans les conditions de Stokes ($Re=0$). Pour ce faire, diverses configurations à plusieurs particules (de trois à six) sont étudiées en milieu infini, ce qui permet notamment de discuter de l'influence des rotations des particules. Enfin, le cas d'une particule évoluant entre deux parois nous permet de vérifier la bonne prise en compte des effets de confinement.

2.3.1. Sédimentation d'une particule isolée

2.3.1.1. Sédimentation d'une particule soumise aux forces gravitationnelles et hydrodynamiques

Nous considérons ici le cas d'une sphère isolée sans vitesse initiale et soumise aux forces gravitationnelles (2.3) à $t=0$, qui initie son mouvement. Alors, la vitesse de la particule augmente jusqu'à atteindre un palier, lorsque la force de traînée équilibre exactement les forces gravitationnelles.

Sur les figures 2.2 et 2.3 nous reportons d'une part les résultats obtenus analytiquement (2.8 et 2.14) et d'autre part ceux obtenus par la simulation numérique. Ces figures représentent respectivement l'évolution temporelle de la vitesse d'une particule isolée pour deux valeurs du nombre de Reynolds : $Re=0,1$ et $Re=0,5$. Dans chaque cas on compare les approches analytique et numérique sous les hypothèses de Stokes et en régime inertiel.

Ces résultats montrent que la phase initiale de mise en régime de la particule n'est pas affectée par le régime de l'écoulement. Cependant, la vitesse limite d'une particule en régime inertiel est évidemment plus faible que celle calculée sous les hypothèses de Stokes. Par ailleurs, l'accord entre les résultats analytiques et numériques montre que la méthode numérique choisie est capable de résoudre très précisément nos équations.

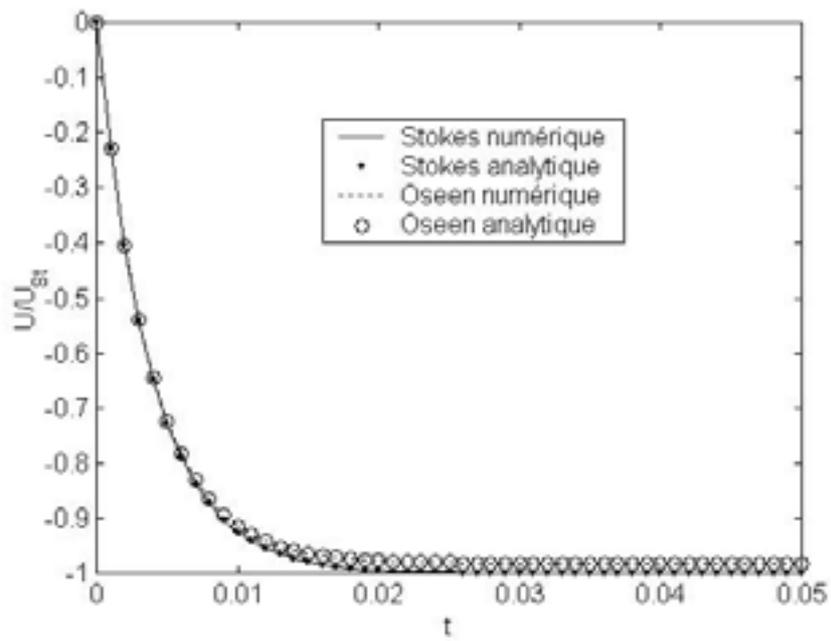


Figure 2.2 Evolution temporelle de la vitesse de sédimentation d'une particule pour $Re=0,1$

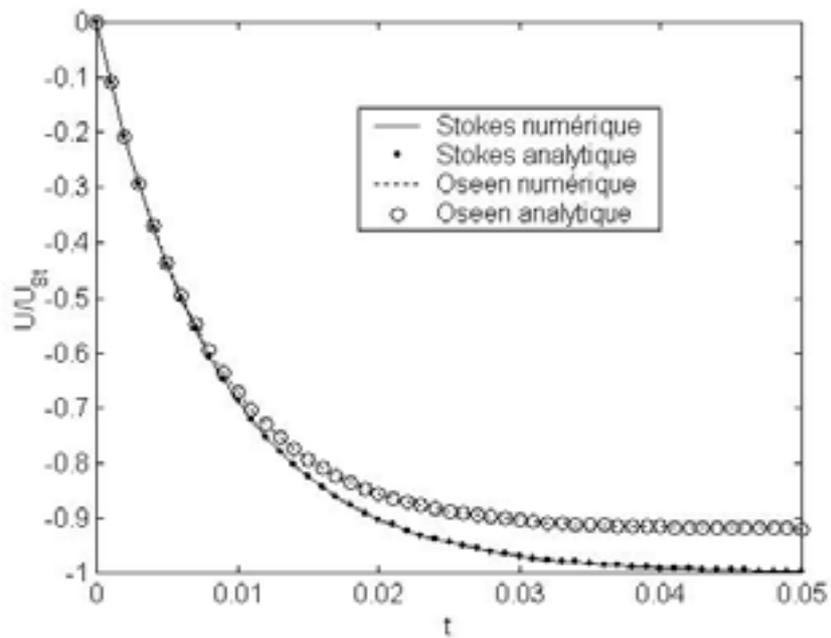


Figure 2.3 Evolution temporelle de la vitesse de sédimentation d'une particule pour $Re=0,5$

2.3.1.2. Influence de la force de masse ajoutée

Nous reconsidérons ici le même cas que précédemment en prenant également en compte la force de masse ajoutée \mathbf{F}^M (2.4). Rappelons que prendre en compte cette force revient à considérer l'influence de l'inertie de la masse de fluide entraînée par la sphère. Alors, cette force opposée à l'accélération de la particule tend à augmenter le temps nécessaire pour atteindre sa vitesse terminale (2.10).

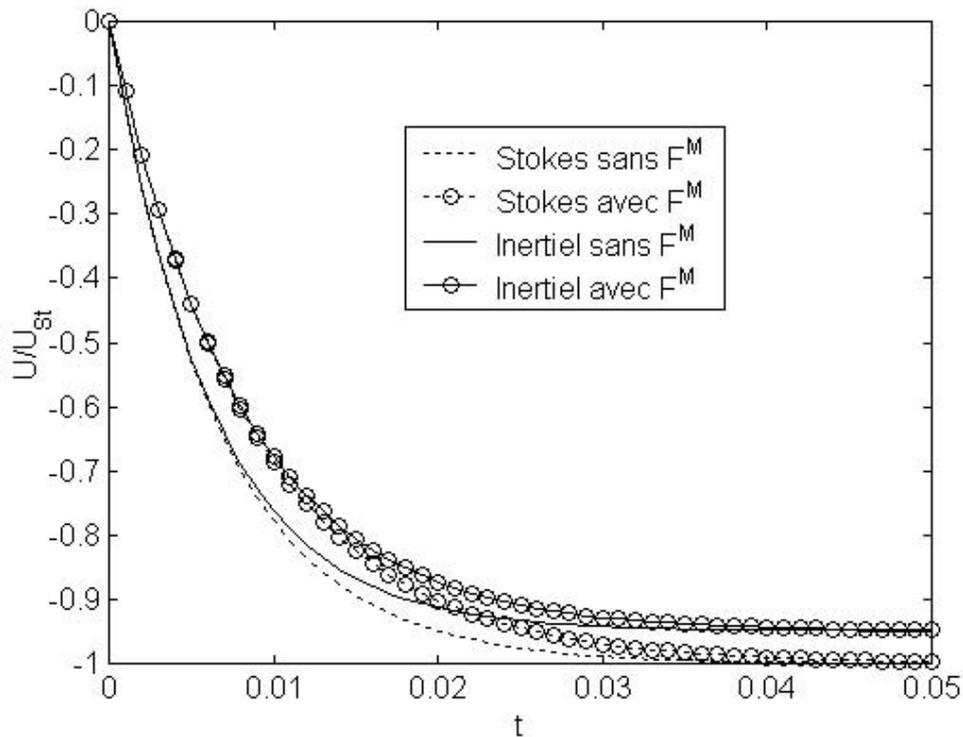


Figure 2.4 Evolution temporelle de la vitesse de sédimentation d'une particule pour $Re=0,3$

Pour mettre en évidence l'influence de la masse ajoutée on compare sur la figure 2.4 les résultats obtenus numériquement en tenant compte de cette force, à ceux obtenus précédemment pour une valeur intermédiaire de Re ($Re=0,3$). On peut constater que dès les premiers instants les écarts sont importants et que le temps nécessaire pour atteindre la vitesse limite est plus important. Cependant, la valeur de cette vitesse reste inchangée et rapidement les courbes convergent vers la même valeur limite.

Dans la présente étude, nous négligeons par la suite la force de masse ajoutée pour les

raisons suivantes :

- en premier lieu, lorsqu'on étudie les interactions hydrodynamiques entre une sphère et une autre sphère ou une paroi, les modèles utilisés sont basés sur la résolution de systèmes d'équations quasi-statiques. De ce fait, tout se passe comme si les perturbations émises par les particules étaient propagées instantanément à l'infini. C'est pourquoi la méthode utilisée pour ce travail ne permet pas de reproduire correctement les comportements initiaux de plusieurs particules en sédimentation.
- de plus, la gamme de variation des vitesses des particules est extrêmement faible hormis dans la phase initiale de mise en régime. Cette phase initiale ne faisant pas l'objet du présent travail, la force de masse ajoutée est donc négligée devant les effets gravitationnels et hydrodynamiques.

2.3.2. Triplets de particules

Parmi les cas de référence de la littérature on trouve de nombreux résultats concernant la sédimentation de triplets de particules disposées initialement de façon régulière ou irrégulière [11, 5, 26]. Ces configurations sont reconsidérées ici pour montrer non seulement la bonne prise en compte des interactions hydrodynamiques dans les conditions de Stokes mais aussi que négliger les rotations des sphères n'entraîne que de faibles différences par rapport au calcul complet.

2.3.2.1. Triplet régulier

Dans la configuration choisie ici, les trois sphères sont initialement alignées sur l'horizontale ($Y=0$). Les centres des particules placées aux extrémités du triplet sont situés à 6 rayons de celui de la sphère placée au centre du motif.

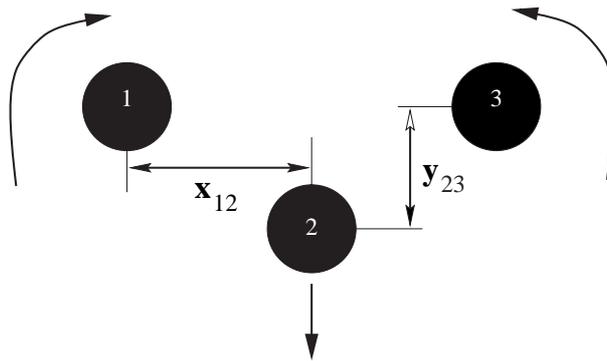


Figure 2.5 *Triplet régulier*

Dès le début de la sédimentation, la sphère centrale évolue à une vitesse plus grande que les deux autres. Comme le montre schématiquement la figure 2.5, cette particule passe devant et s'éloigne des deux sphères situées aux extrémités. Ces dernières se rapprochent l'une de l'autre dans le sillage de la première. En se rapprochant, les particules 1 et 3 voient leur vitesse de sédimentation augmenter jusqu'à ce que les trois sphères aient la même vitesse verticale. Cependant, les sphères 1 et 3 continuent de se rapprocher et leur vitesse devient plus grande que celle de la sphère 2. Alors, le doublet constitué des particules 1 et 3 se rapproche, d'abord rapidement puis très lentement, de la sphère 2 jusqu'à ce qu'une distance critique soit atteinte [11].

Ce cas est traité numériquement avec l'outil développé dans le cadre de ce mémoire. Les

évolutions des distances inter-particules x_{12} et y_{23} (cf. figure 2.5) sont représentées en fonction du temps adimensionnel $t^* = \frac{tU_{St}}{a}$ sur les figures 2.6 et 2.7. Sur ces dernières on reporte également les résultats précédemment obtenus par Ganatos *et al.* [11], en utilisant la méthode des collocations. Pour effectuer cette comparaison nous avons dû contraindre les sphères de ne pas se rapprocher à une distance entre surfaces inférieure à $0,2a$, ce qui correspond à une valeur de $x_{12} = 1.1a$ [11].

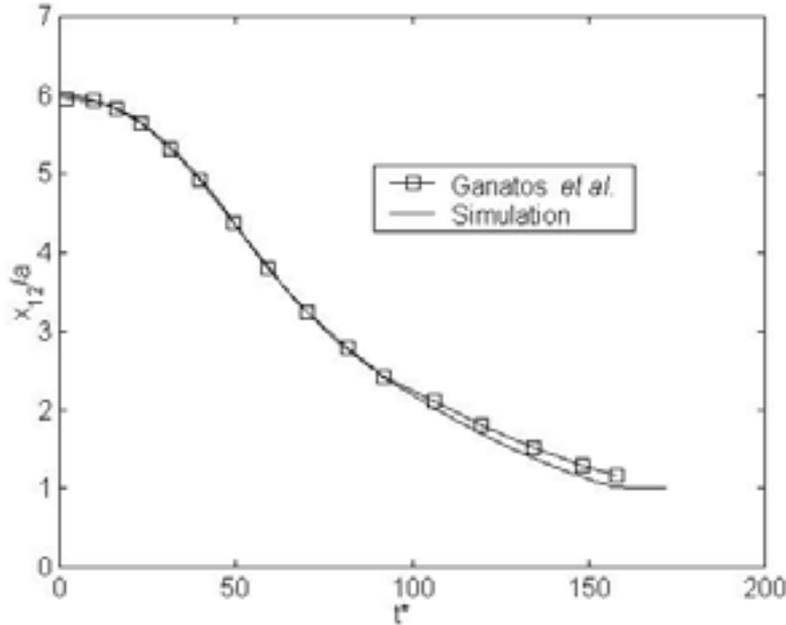


Figure 2.6 Triplet régulier: évolution de $\frac{x_{12}}{a}$ en fonction de t^*

La confrontation des résultats telle qu'elle apparaît sur les figures 2.6 et 2.7 montre que dans une première phase ($t^* \leq 80$) les courbes sont confondues, ce qui présage de la bonne prise en compte des interactions entre particules en régime de Stokes. A partir de $t^* = 80$, les valeurs de x_{12} issues de notre simulation sont légèrement inférieures à celles obtenues par Ganatos *et al.*, pour une même valeur de t^* . Ces différences sont au maximum de 10% pour les faibles valeurs de x_{12} . Les particules 1 et 3 se rapprochent donc plus rapidement dans notre simulation. De ce fait, pour un même temps adimensionnel, les particules 1 et 3 se déplacent à une vitesse plus importante, ce qui explique les écarts observés sur les valeurs de y_{23} . En effet, les résultats de notre simulation montrent que le doublet constitué des particules 1 et 3 se rapprochent plus rapidement de la particule 2 et les écarts

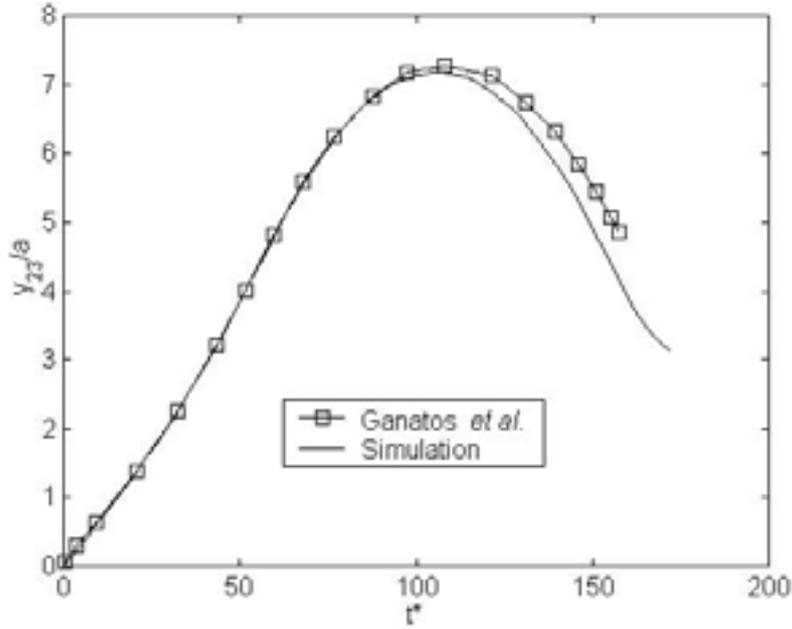


Figure 2.7 *Triplet régulier* : évolution de $\frac{y_{23}}{a}$ en fonction de t^*

observés sont là encore au maximum de 10%. De plus, Ganatos *et al.* [11] notent que par la méthode des collocations à quatre points, la distance critique atteinte correspond à $\frac{y_{23}}{x_{12}} = 3,567$ alors que la valeur de référence pour $x_{12}=1,1a$ est $\frac{y_{23}}{x_{12}} = 2,715$. On peut constater sur la figure 2.7 que la valeur de y_{23} pour $t^* = 172$ est telle que $\frac{y_{23}}{x_{12}} = 2,83$, pour $x_{12}=1,1a$ et qu'elle continue à décroître plus lentement.

Par ailleurs, nous avons reporté sur la figure 2.8 l'évolution des vitesses verticales des particules en fonction de t^* . Ce résultat permet de visualiser les différentes phases précédemment décrites. Dans un premier temps la sphère 2 évolue à une vitesse plus grande que les sphère 1 et 3. Puis, pour une valeur de $t^* = 106$ les trois particules ont une même vitesse verticale. Cette valeur de t^* est ici comparée à celle obtenue par Ganatos *et al.* [11], qui est de $t^* = 107,8$, ce qui représente une différence de l'ordre de 1,7%. A partir de cet instant les sphères 1 et 3 ont une vitesse plus grande que celle de la sphère 2 et se rapprochent d'elle. Enfin, les vitesses des trois sphères tendent vers une valeur limite identique $\frac{U_{lim}}{U_{St}} \simeq 1,8$, signifiant que dans ce cas les sphères tendent vers une configuration stable.

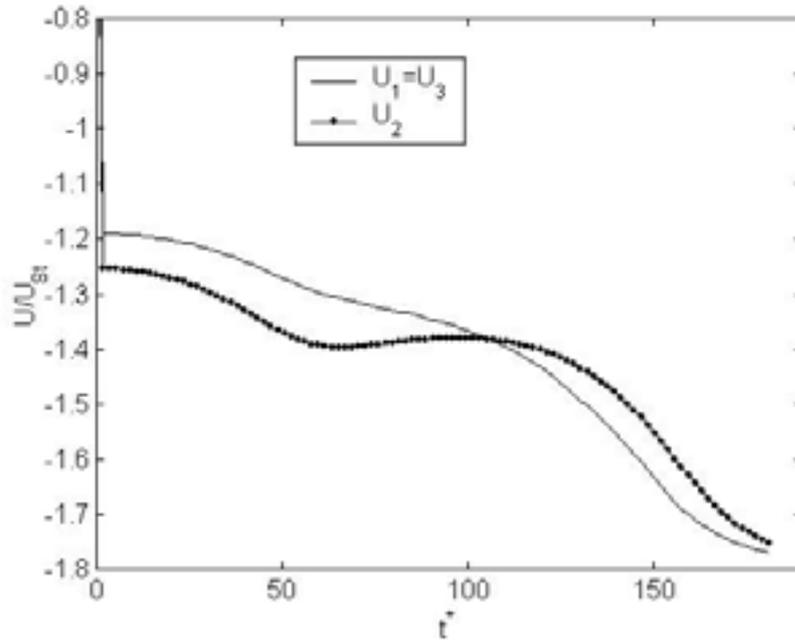


Figure 2.8 *Triplet régulier*: évolution des vitesses verticales des particules, U_1 et $U_2 = U_3$ en fonction de t^*

2.3.2.2. Triplet irrégulier

Contrairement au cas précédent, lorsqu'on étudie la sédimentation d'un triplet de particules disposées irrégulièrement, on ne tend généralement pas vers une configuration stable. Les réarrangements entre particules sont souvent complexes et ils peuvent être étudiés sur de grandes distances de sédimentation.

Pour cette configuration, trois particules sont initialement disposées sur l'horizontale $Y=0$ à $X_1 = -5a$; $X_2 = 0$; $X_3 = 7a$ et leur sédimentation est observée sur une distance y d'environ 800 rayons de particule. Les résultats obtenus sont montrés sur la figure 2.9 où ont été reportés également les résultats précédemment obtenus dans les mêmes conditions par Durlofsky *et al.* [5]. Ces derniers utilisent une méthode similaire à la notre mais en prenant également en compte l'influence des rotations des sphères en fonction des couples qui leurs sont appliqués. Comme nous pouvons le constater, un bon accord existe entre les résultats de notre simulation et ceux incluant les rotations des sphères. Ganatos *et al.* ont eux aussi relevé dans une précédente publication [11] que l'influence des rotations des sphères reste constamment faible devant les effets dus aux translations et il faut attendre

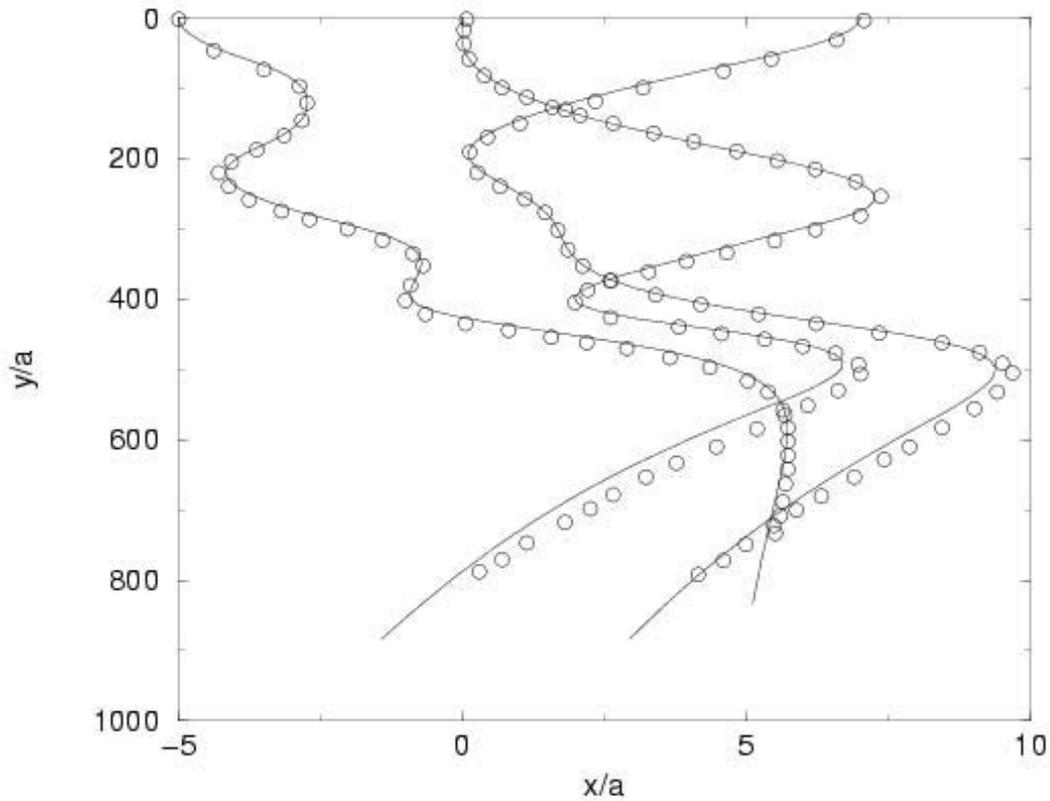


Figure 2.9 *Triplet irrégulier*: (—) trajectoires calculées numériquement et (O) résultats de Durlofsky et al. [5] (points numérisés)

de grandes distances de sédimentation pour les voir se manifester.

2.3.3. Quadruplets de particules

Sous certaines conditions initiales de configurations symétriques, on peut observer des réarrangements périodiques entre particules durant le processus de sédimentation [52]. Les configurations de quatre particules, qu'elles soient initialement alignées horizontalement ou aux sommets d'un carré permettent de mettre en évidence ce type de comportements.

2.3.3.1. Quatre particules alignées horizontalement

Dans ce premier cas, les quatre sphères sont initialement placées sur l'axe $Y=0$ et dispo-

sées de façon à ce que la distance entre deux particules consécutives soit de quatre rayons centre à centre (cf. figure 2.10).

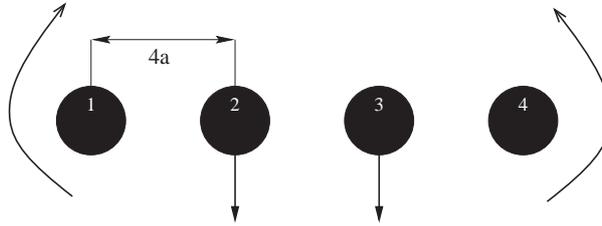


Figure 2.10 *Quatre particules alignées horizontalement*

Les trajectoires obtenues numériquement sont montrées sur la figure 2.11 où deux points consécutifs représentant nos résultats sont espacés d'un $\delta t^* = 4,33$. Nous montrons également les résultats précédemment obtenus par Chauvin [26] en utilisant une technique similaire sur la figure 2.12, où les positions des particules sont données sur le système d'axes : $(\frac{X}{2a}, \frac{Y}{2a})$.

Dès les premiers instants, les deux particules centrales sédimentent plus rapidement que celles situées aux extrémités. Lorsque les particules 1 et 4 sont dépassées, elles ont tendance à migrer latéralement dans le sillage des deux sphères centrales. La vitesse des sphères 1 et 4 augmente du fait de leur rapprochement, sous l'effet du sillage des particules 2 et 3. A un instant donné, lorsque les sphères 1 et 4 sont respectivement à l'aplomb des sphères 2 et 3, les quatre sphères ont la même vitesse verticale. Cependant les sphères 1 et 4 continuent de se rapprocher. Alors, la vitesse des sphères 1 et 4 devient plus grande que celle des sphères 2 et 3. Les particules 2 et 3 s'écartent lors du passage des deux autres jusqu'à prendre la place des sphères situées initialement aux extrémités. On retrouve alors une disposition analogue à la configuration initiale où l'ordre des sphères n'est pas conservé, ce qui correspond à une demi-période. Comme attendu, on peut constater sur des temps plus longs (cf. figure 2.11) que les réarrangements entre particules se reproduisent périodiquement en conservant la symétrie des trajectoires par rapport à l'axe $X=0$. La demi-période correspond à un temps adimensionnel $t^* = 122.14$, ce qui représente une différence de 1% en comparaison avec les résultats de Chauvin [26].

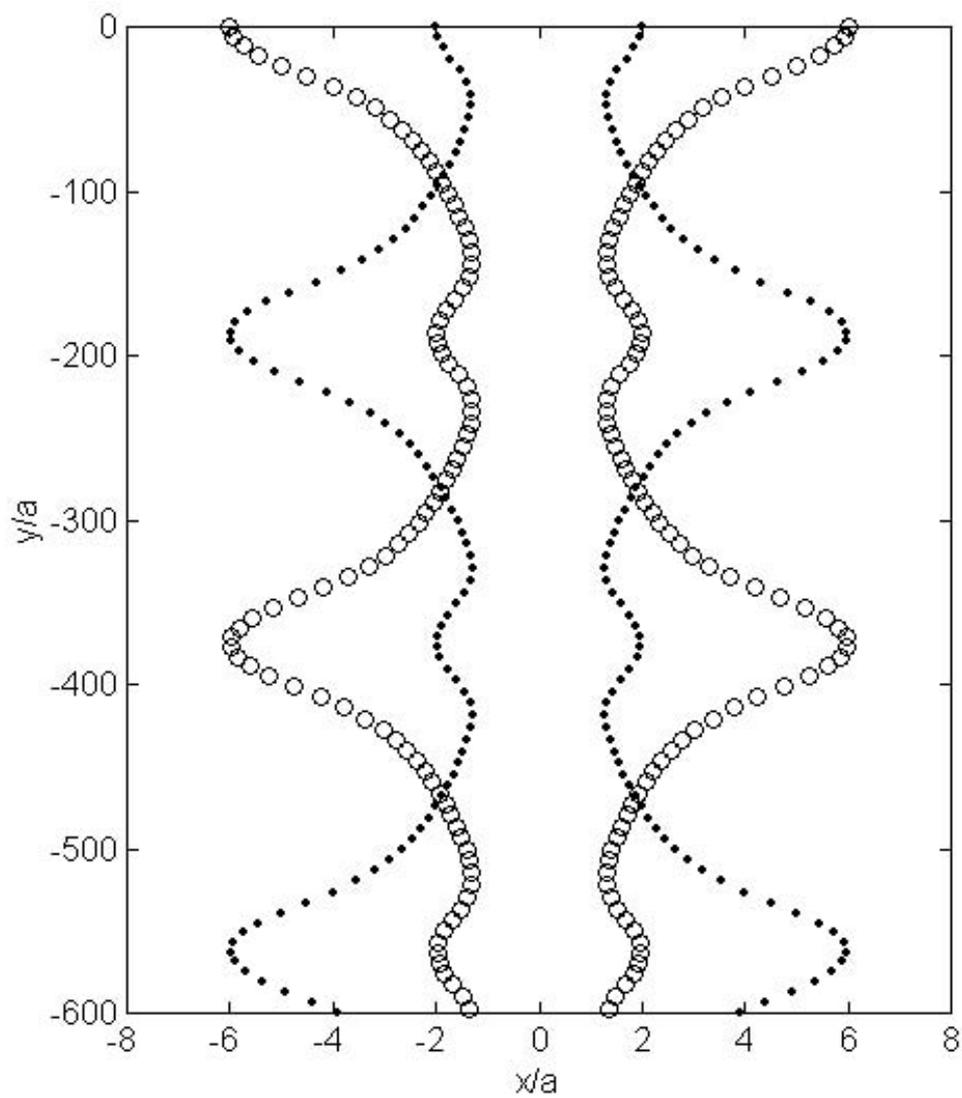


Figure 2.11 *Trajectoires de quatre particules alignées horizontalement : résultat numérique*

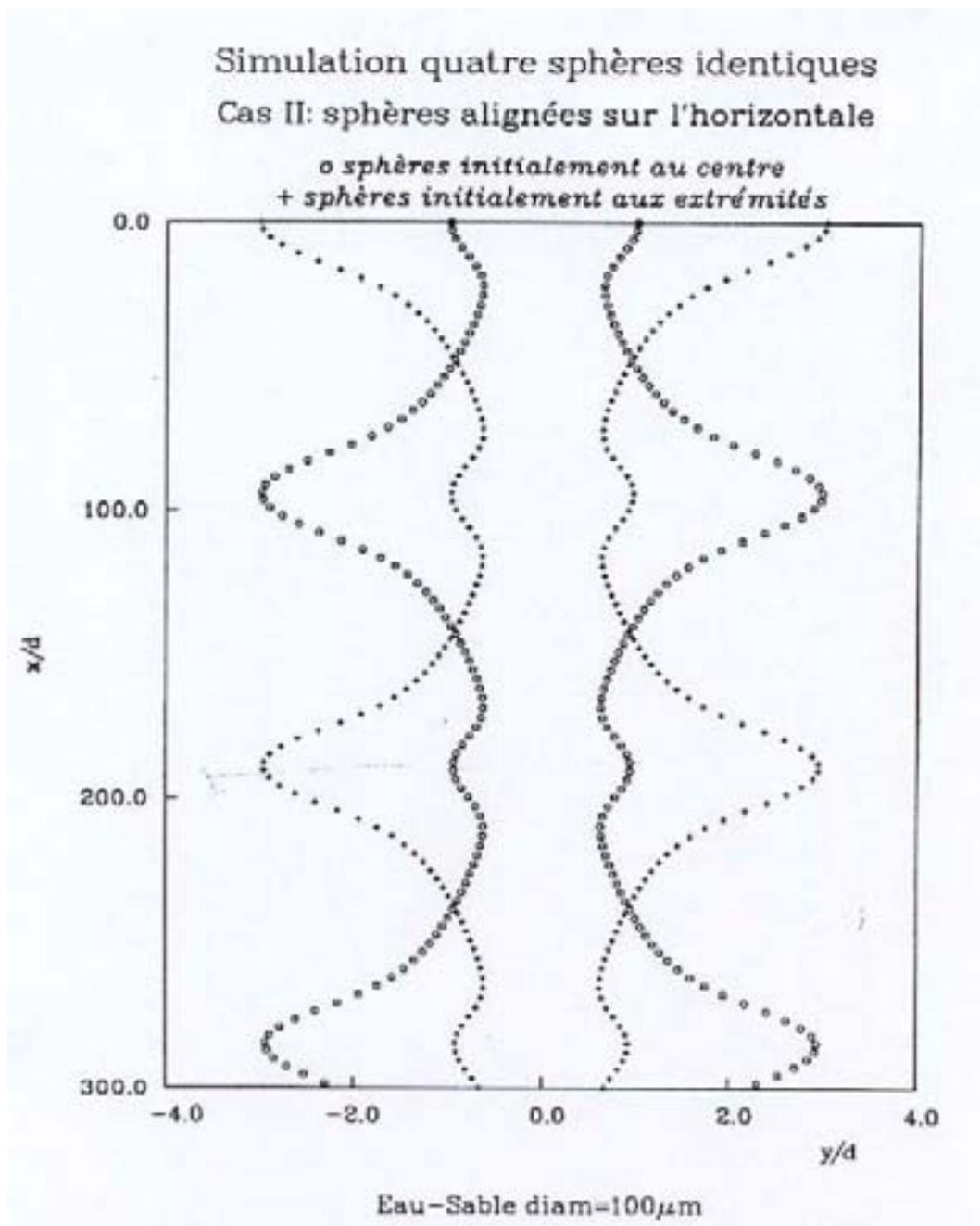


Figure 2.12 Trajectoires de quatre particules alignées horizontalement, selon Chauvin [26]

2.3.2.2. Quatre particules aux sommets d'un carré

Pour cette configuration les quatre sphères sont initialement disposées dans un plan vertical, comme l'indique la figure 2.13.

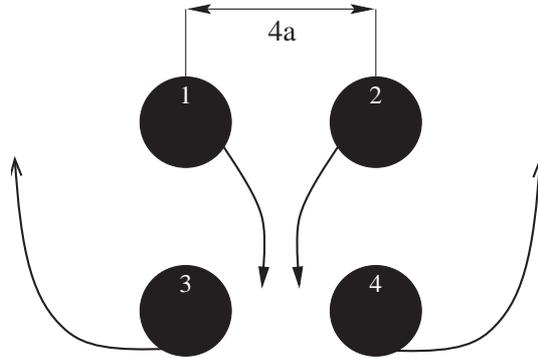


Figure 2.13 *Quatre particules aux sommets d'un carré de coté $4a$*

Comme précédemment, les trajectoires obtenues numériquement sont reportées sur la figure 2.14 où deux points consécutifs représentant nos résultats sont espacés d'un $\delta t^* = 4,33$. Les résultats antérieurs obtenus par Chauvin [26] sont également donnés sur la figure 2.15.

Dans ce cas, les sphères 1 et 2 sont dès les premiers instants sous l'effet du sillage des sphères 3 et 4. En se rapprochant, les sphères 1 et 2 repoussent les sphères 3 et 4 vers l'extérieur. Ces dernières ayant une vitesse plus faible que la vitesse des sphères 1 et 2, elles sont dépassées puis attirées dans le sillage des particules 1 et 2. On retrouve alors le motif initial où l'ordre des sphères n'est plus le même (demi-période). On peut constater aux temps longs que les trajectoires sont encore parfaitement symétriques par rapport à l'axe $X=0$ et on retrouve la périodicité attendue du motif initial. Le temps adimensionnel correspondant à une demi-période est $t^* = 104,74$ ce qui représente un écart inférieur à 2% avec les résultats de Chauvin [26].

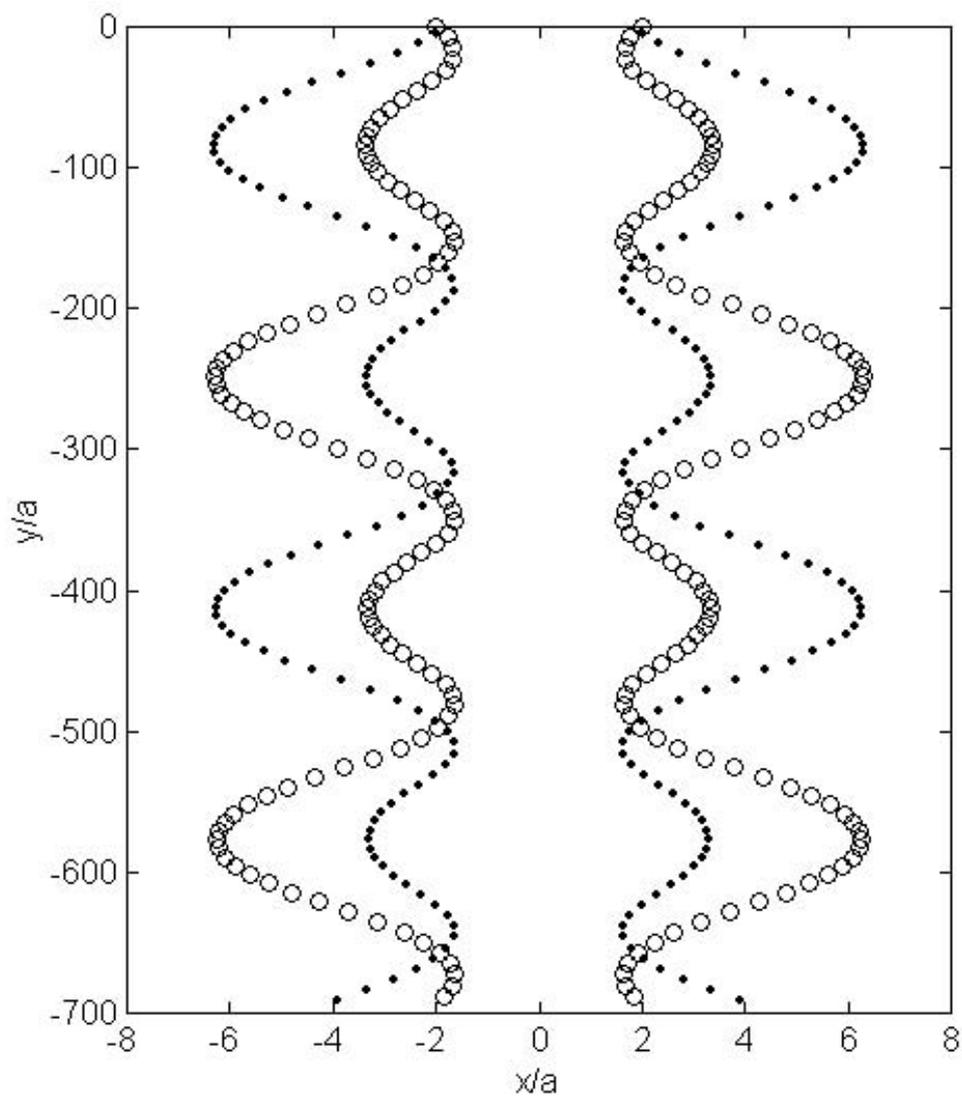


Figure 2.14 *Trajectoires de quatre particules aux sommets d'un carré : résultat numérique*

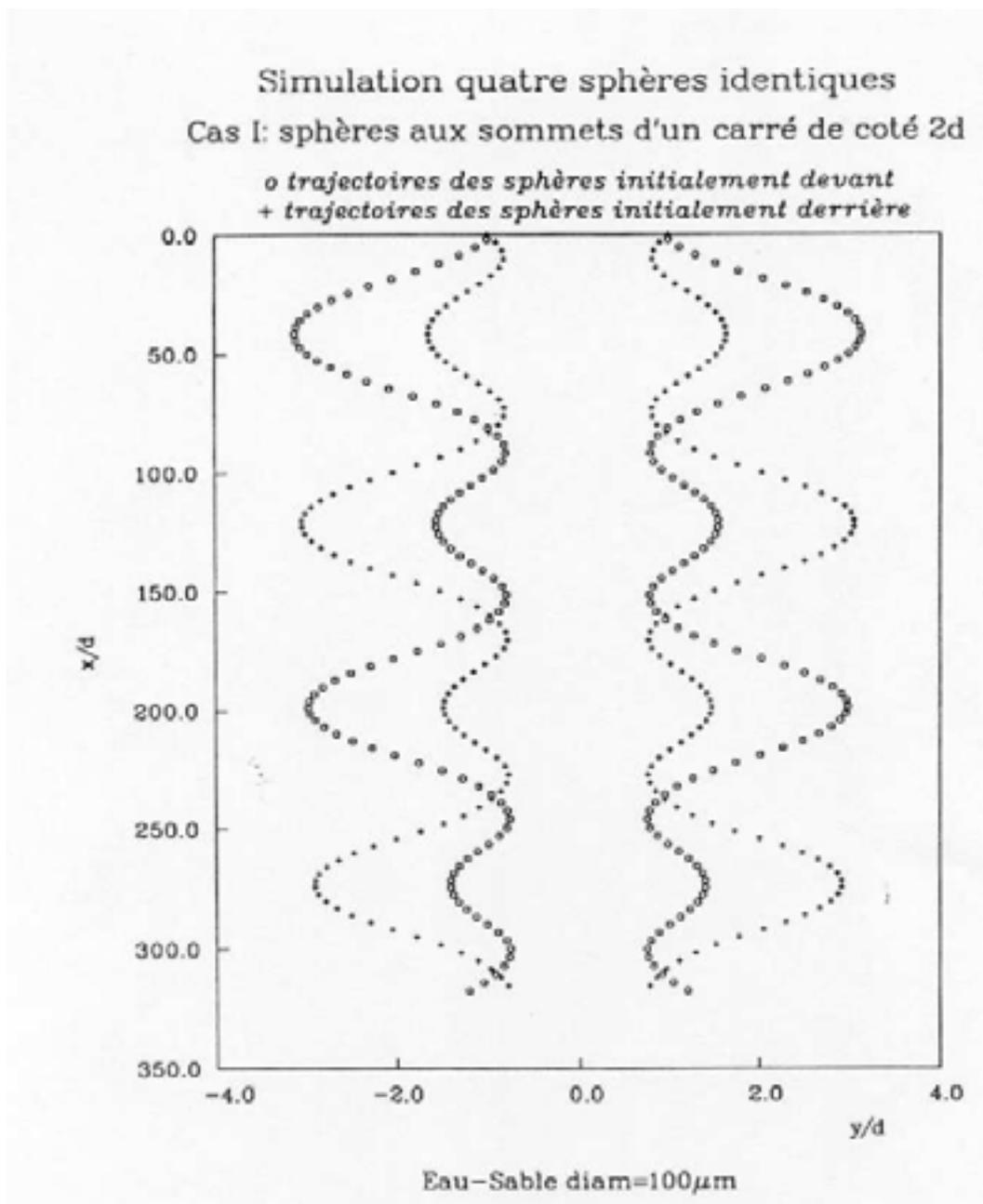


Figure 2.15 Trajectoires de quatre particules aux sommets d'un carré, selon Chauvin [26]

2.3.4. Six particules alignées horizontalement

Dans la configuration initiale choisie ici, les particules sont disposées sur l'axe $Y=0$ et la distance entre deux centres consécutifs est encore de quatre rayons (cf. figure 2.16). Les trajectoires obtenues numériquement sont montrées sur la figure 2.17 où deux points consécutifs représentant nos résultats sont espacés d'un $\delta t^* = 2,66$. Les trajectoires obtenues par Chauvin [26] sont données sur la figure 2.18



Figure 2.16 *Six particules alignées horizontalement*

Si dans cette disposition on retrouve un comportement quasi-périodique pour les quatre sphères centrales, les deux particules situées initialement aux extrémités sont rapidement distancées. Ceci traduit qu'elles n'interagissent que faiblement avec les autres particules du système. En effet, dès les premiers instants les deux particules centrales sédimentent plus rapidement que les autres. Puis, rapidement la vitesse des particules 2 et 5 augmente sous l'effet du sillage des premières, entraînant leur rapprochement l'une de l'autre. A cet instant, les particules situées aux extrémités subissent les effets de sillage et migrent latéralement. Cependant, la vitesse de ces dernières étant constamment plus faible que celles des quatre particules centrales, elles sont irrémédiablement distancées et leurs trajectoires deviennent finalement rectilignes.

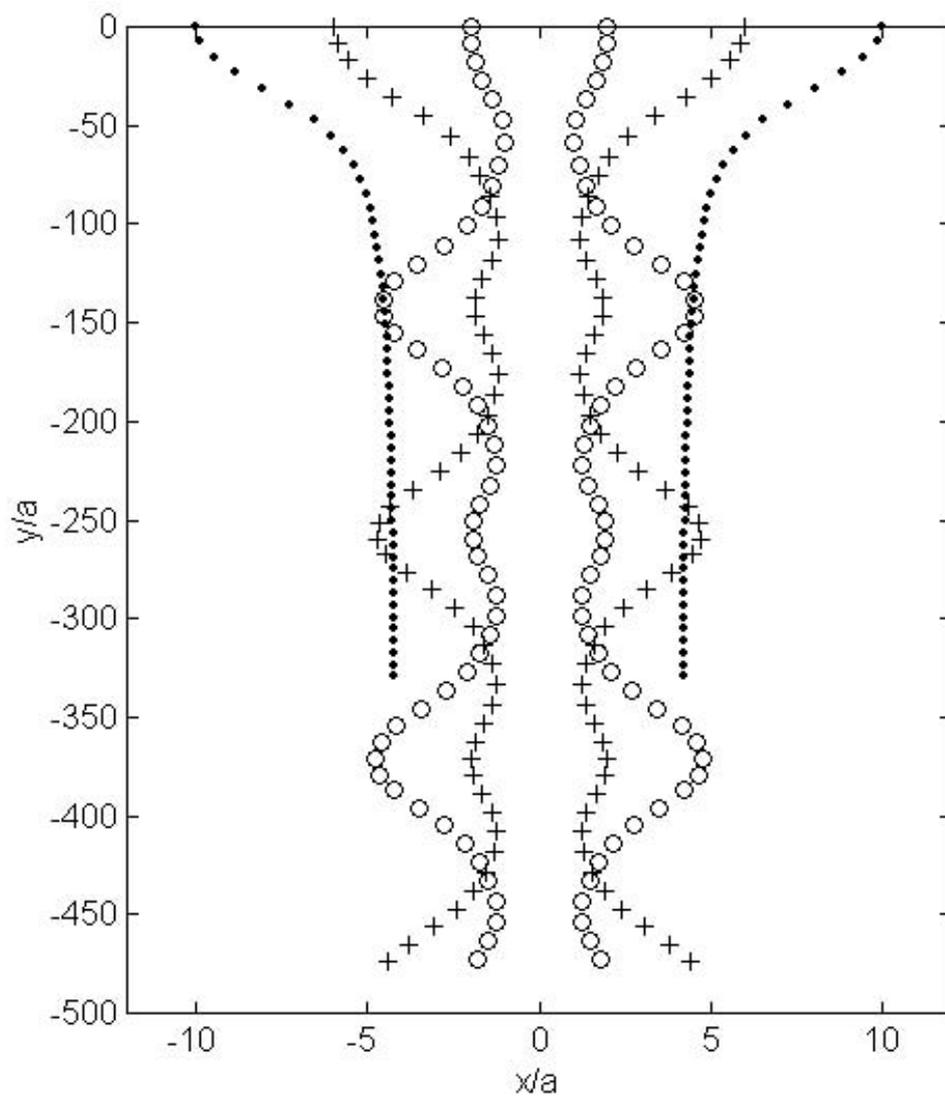


Figure 2.17 *Trajectoires de six particules : résultats numériques*

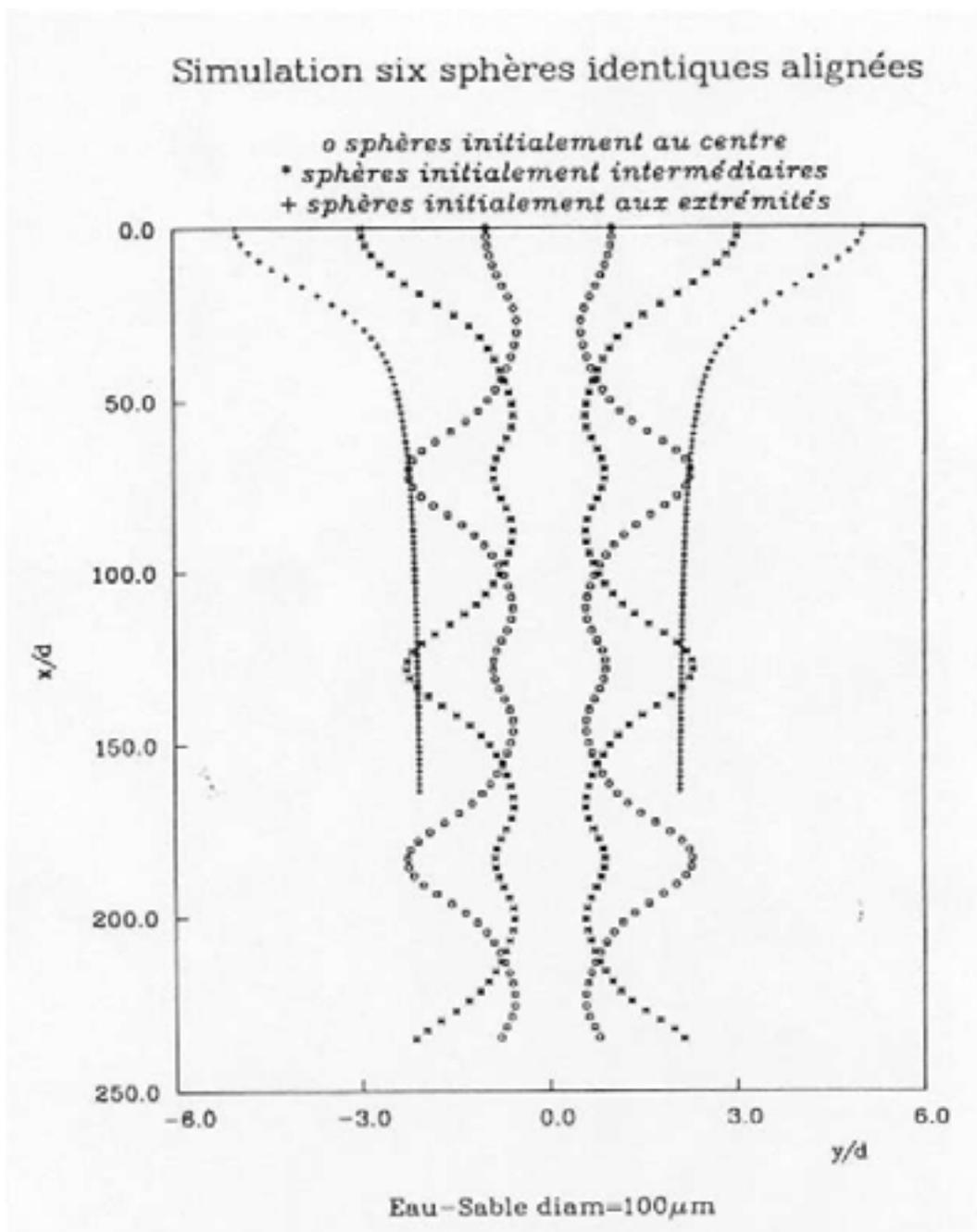


Figure 2.18 Trajectoires de six particules, selon Chauvin [26]

2.3.5. Une sphère et deux parois

Afin de vérifier que l'influence du confinement est correctement représentée dans la simulation, nous utilisons comme résultats de référence ceux obtenus par Ganatos *et al.* [11] par la méthode des collocations et ceux obtenus par Durlofsky *et al.* [5] par la méthode "Stokesian Dynamics". Ces auteurs ont étudié le comportement d'une particule en translation entre deux parois planes parallèles espacées de 10 rayons. Leurs résultats sont montrés sur les figures 2.19 et 2.20, où sont également reportés les résultats de nos simulations numériques. La première de ces figures concerne le cas d'une translation perpendiculaire aux parois sur laquelle on reporte l'évolution de $\frac{U_x}{U_{St}}$ en fonction de la distance $\frac{x}{a}$ qui représente la distance adimensionnée entre le centre de la sphère et l'axe central du confinement. La seconde figure correspond à une translation parallèle aux parois, sur laquelle on reporte l'évolution de $\frac{U_y}{U_{St}}$ en fonction de $\frac{x}{a}$.

On peut constater sur ces deux figures que lorsque la distance à la paroi est suffisamment grande ($x \leq 2a$), l'accord entre nos résultats et ceux de la littérature est très bon. Les différences observées concernent en particulier le cas d'une translation perpendiculaire aux parois et sont au maximum de 4% pour U_x en comparaison des résultats obtenus par Ganatos *et al.* (cf. figure 2.19).

Cependant, pour des valeurs de $x > 2a$ les résultats divergent si on ne tient pas compte des effets de lubrification. Si la lubrification est introduite au travers des expressions (1.66, 1.67), on remarque que dès l'instant où la particule entre dans le périmètre dans lequel cette force prend une valeur non-nulle ($x > 3a$), une importante discontinuité de la dérivée de la vitesse de la particule est observée, en particulier pour U_x (cf. figure 2.19). Ce problème est dû à l'intervention des forces de lubrification qui entrent en jeu pour une valeur de $\epsilon < 1$ et comme on peut le constater sur ces figures, il est plus important dans le cas d'une translation perpendiculaire aux parois que dans le cas d'une translation parallèle à celles-ci. Or dans le cas de la sédimentation l'effet majoritaire est dû à un mouvement de translation parallèle aux parois. On peut néanmoins s'attendre à voir apparaître des discontinuités de l'accélération d'une particule si le confinement est très important.

Un moyen simple pour palier à ce type de problème consiste à effectuer une interpolation entre les potentiels d'interaction en champs lointains et en champs proches dans la zone intermédiaire: $3,8 > \frac{x}{a} > 3$. Cependant, ce travail ne concerne pas la présente étude mais pourra néanmoins constituer une des perspectives à court terme en vue de simuler le comportement de suspensions de fraction volumique importante. Par la suite, l'outil numérique développé sera confronté à des résultats expérimentaux dans une gamme de distances particule-paroi suffisamment grandes pour ne pas voir intervenir les effets en

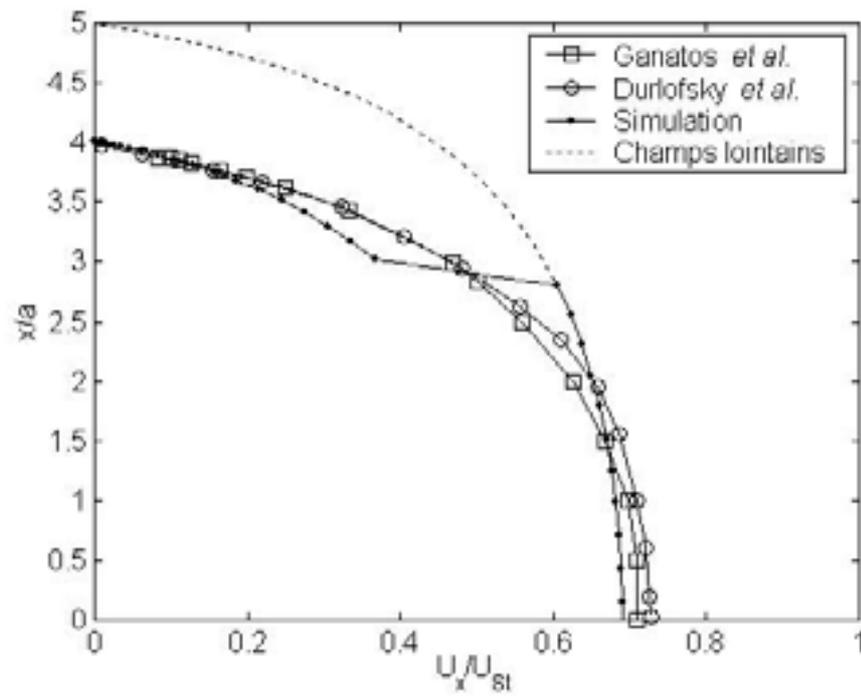


Figure 2.19 Evolution de la vitesse d'une particule en translation perpendiculaire aux parois

champs proches.

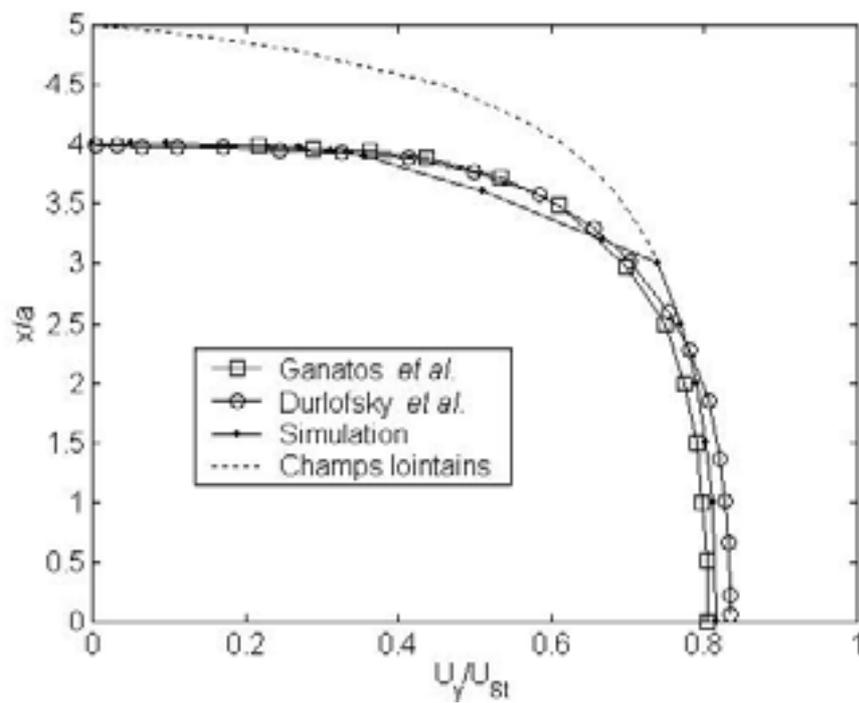


Figure 2.20 Evolution de la vitesse d'une particule en translation parrallèle aux parois

Conclusion partielle

Dans ce chapitre nous avons donné les fondements de la méthode employée pour simuler le comportement dynamique de plusieurs particules en interaction dans un domaine fluide borné par deux parois parallèles et fixes. Nous avons présenté les modèles de forces utilisés afin d'appliquer le PFD au centre de masse de chaque particule du système. Puis, nous avons mis en place une méthode permettant de calculer les interactions hydrodynamiques dans une gamme de Re faibles mais non nuls. Le modèle de forces d'interactions hydrodynamiques est basé sur les deux hypothèses suivantes :

- l'écoulement dans la phase continue est approché par une superposition de champs hydrodynamiques d'Oseen.
- l'utilisation de la première loi de Faxen dans une gamme de $Re < 1$.

Enfin, nous avons vérifié que la méthode utilisée permet de simuler précisément le comportement de particules en sédimentation, dans la limite d'un nombre de Reynolds nul. De ce point de vue, l'accord entre les résultats de nos simulations et ceux de la littérature est très bon excepté pour les interactions particule-paroi en champs proches. En effet, la prise en compte de la force de lubrification entraîne une discontinuité de l'accélération lorsque les particules entrent dans le périmètre d'interaction en champs proches. De ce fait, dans des configurations de fort confinement ou de fraction volumique importante, on doit s'attendre à voir intervenir ce problème.

Dans ce chapitre, comme dans la suite de ce mémoire, la force d'histoire ou de Basset n'est pas prise en compte du fait de la surestimation de la véritable force qui s'exerce sur une particule par les expressions proposées dans la littérature. Nous avons également vérifié que l'influence de la force de masse ajoutée était faible hormis dans une courte période initiale qui n'est pas étudiée ici. De plus, l'hypothèse qui consiste à négliger l'influence des rotations des sphères devant les effets de translation semble pertinente dans les conditions physiques retenues pour cette étude.

Chapitre 3

Analyse expérimentale

Ce chapitre porte sur l'étude expérimentale nécessaire à la confrontation de nos résultats de simulations numériques à des observations physiques fiables. Rappelons que dans l'approche numérique du chapitre précédent nous avons mis en œuvre une modélisation des effets inertiels dans le fluide pour tenir compte des interactions hydrodynamiques entre particules. Le domaine de validité des outils théoriques employés est orienté vers une configuration d'écoulement très dilué et pour des nombres de Reynolds particuliers instantanés faibles.

Parmi les écoulements qui satisfont aux hypothèses du modèle proposé au chapitre précédent, la sédimentation est l'un de ceux les plus étudiés dans la littérature du fait de la parfaite connaissance du moteur de l'écoulement : la gravité. Pour ce type d'écoulement, les techniques de mesure utilisées sont généralement basées sur l'acquisition et le traitement d'images afin de pouvoir accéder aux données expérimentales sans interférer avec l'écoulement déjà très complexe [53, 54, 55]. Dans un premier temps, il convient donc de choisir parmi l'ensemble des techniques expérimentales celle qui est la mieux adaptée selon que l'on se situe à un niveau global ou local pour appréhender les phénomènes mis en jeu lors de la sédimentation de particules.

On peut classer les travaux expérimentaux traitant des suspensions en sédimentation en deux catégories :

- l'étude de suspensions homogènes plus ou moins concentrées (mesures globales);
- l'étude discrète d'un faible nombre de particules en interaction (mesures discrètes).

Mesures globales

Dans le domaine des suspensions homogènes, les premiers travaux ont concerné la mesure de données globales, par visualisation directe. Dans le but de valider des modèles macroscopiques, on s'intéresse à des données caractéristiques comme les taux de sédimentation ou de rétention en fonction de paramètres comme la fraction volumique ou encore le confinement [19]. Plus récemment, les progrès en ce qui concerne les méthodes de mesures par imagerie ont permis d'accéder aux réarrangements des particules au coeur de suspensions en sédimentation. Citons pour exemple les travaux de Segre *et al.* [22], qui mesurent par P.I.V.¹ la convection intrinsèque dans une suspension de particules colloïdales en sédimentation, mettant en évidence une dépendance entre la dimension caractéristique des tourbillons, la fraction volumique locale et le confinement. Cependant, les phénomènes rencontrés lors de l'étude de suspensions homogènes sont tridimensionnels, or les techniques citées précédemment se limitent aux mesures dans une coupe plane de l'écoulement. De plus, si ces mesures permettent une étude de la microstructure de la suspension, elles sont en général issues d'analyses statistiques sur un nombre de particules relativement important.

Mesures discrètes

Le comportement de quelques particules en sédimentation est expérimentalement décrit par l'évolution de leurs vitesses et de leurs positions en fonction du temps. Pour obtenir ces données expérimentales, plusieurs techniques de mesure sont employées comme la visualisation directe, la P.I.V. ou des méthodes acoustiques [48].

Les mesures des trajectoires sont souvent plus facilement accessibles que les mesures des vitesses instantanées des particules. En effet, les positions peuvent être enregistrées sur une séquence temporelle d'images, puis un traitement plus ou moins complexe permet de reconstituer les trajectoires de chacune d'entre elles. Cependant, si la visualisation directe est bien adaptée à ce type de problème, la précision de la mesure liée à la résolution de l'image dépend de l'étendue du domaine sur lequel elle est effectuée. De ce fait, l'acquisition de données expérimentales fiables sur un grand champ d'observation nécessite un post-traitement des images expérimentales pour améliorer la précision de la mesure.

En conclusion, les mesures globales restent mal adaptées à une confrontation pertinente entre nos simulations numériques et des résultats expérimentaux. L'observation des réar-

1. Particle Image Velocimetry

rangements complexes des particules d'une suspension débute par l'étude des interactions entre un faible nombre de particules. C'est pourquoi, pour appréhender finement les interactions hydrodynamiques, nous choisissons de nous placer dans la catégorie des études discrètes du comportement de quelques particules en sédimentation.

Revue bibliographique des études expérimentales à l'échelle de la particule

Les travaux de la littérature qui se situent à l'échelle d'un faible nombre de particules en interaction concernent pour la plupart des écoulements en conditions de Stokes [11, 26]. Chauvin [26] par exemple, mesure des trajectoires de particules afin de mettre en évidence expérimentalement des réarrangements périodiques, prédits théoriquement en régime de Stokes. Cependant, ces expériences sont réalisées dans une gamme de Re de l'ordre de 10^{-7} pour reproduire au mieux les conditions de Stokes et ne permettent pas d'être confrontées à notre approche numérique en vue de valider le modèle proposé.

Concernant l'influence des effets inertiels sur la sédimentation de particules, une expérience est réalisée par Kumagai [42] dans une configuration de doublet, pour $Re=0,4$, afin de valider son approche numérique. Cependant, confronté au problème de la résolution de mesure, fonction du champ d'observation, la mesure des trajectoires des particules se limite à une distance relativement faible ($y=80a$). De ce fait, la confrontation des résultats expérimentaux aux résultats numériques reste qualitative et ne permet pas là encore une comparaison pertinente avec notre travail.

Les problèmes liés à la résolution de la mesure par visualisation directe sont très contraignants, à tel point que pour certaines expériences la suspension est photographiée sur un champ d'observation réduit. Jayaweera *et al.* [56, 57] choisissent cette solution pour l'étude de la stabilité des agrégats hydrodynamiques, pour laquelle le suivi des particules n'est pas absolument nécessaire. En effet, un agrégat stable peut être étudié en fonction des conditions initiales du lâcher qui sont le nombre de particules et leurs positions. Avec cette solution on obtient une bonne précision de la mesure des positions relatives des particules et on peut ainsi parvenir ponctuellement à des informations sur des configurations particulières comme la vitesse moyenne d'un agrégat en fonction du nombre de sphères qui le constituent par exemple. Cependant, sans connaissance de l'historique, ces mesures sont pauvres en informations sur les interactions hydrodynamiques qui nous intéressent en particulier.

Concernant plus spécifiquement les mesures de vitesses de particules, différentes méthodes sont employées. Les premières vitesses ont été mesurées dans le cadre de la sédimentation d'une seule sphère. Un observateur déduit la vitesse limite d'une particule après avoir

mesurer le temps nécessaire pour qu'elle parcourt une distance connue [58]. La mesure de l'évolution temporelle de la vitesse instantanée requiert d'autres techniques. Citons pour exemple les travaux de Mordant [48], qui utilise une méthode acoustique basée sur l'effet Doppler pour mesurer l'évolution de la vitesse instantanée d'une particule dans la phase initiale de mise en régime. Cependant, si ce type de méthode est efficace pour une sphère unique, elle reste délicate lorsque plusieurs particules interagissent.

Dans une configuration de doublet vertical, Happel *et al.* [41] proposent d'utiliser la première méthode citée afin de déterminer la vitesse de rapprochement des particules en mesurant la variation de la distance inter-particules pendant le temps de mesure. Cette expérience est réalisée dans le cas spécifique où les variations de la vitesse de rapprochement sont faibles et en supposant que cette vitesse est indépendante de la distance inter-centres. La confrontation de nos résultats de simulations à ce type de mesure est difficile car la distance inter-centres est un des paramètres prépondérants dans notre approche. Néanmoins, ces expériences fournissent avec une précision acceptable l'ordre de grandeur du résultat dans une gamme de distances inter-centres spécifique.

Devant le peu de données expérimentales proposées dans la littérature permettant une confrontation pertinente avec notre outil numérique, nous avons décidé de réaliser une campagne de mesures adaptée à la gamme de Re étudiée. Ces expériences apportent des données précises sur les réarrangements entre plusieurs particules en sédimentation pour des valeurs faibles de Re . Pour ce travail, nous avons choisi d'étudier différentes configurations à deux, trois puis quatre sphères plutôt que de faire varier les conditions physiques. Dans la première partie de ce chapitre nous précisons les conditions opératoires des expériences réalisées grâce à un banc expérimental constitué d'une cuve, d'un dispositif de lâcher de particules, du matériel d'acquisition d'images et d'un seul couple fluide-particule. La seconde partie de ce chapitre porte sur la méthode de traitement d'images utilisée afin d'améliorer la précision de mesure des positions lors du suivi des particules sur un grand champ d'observation. Cette précision est évaluée à l'aide d'images synthétiques et une illustration sur un cas réel est présentée par la suite. Enfin, dans la dernière section de cette partie, nous présentons quelques résultats sur lesquels on peut apprécier la répétabilité des expériences. En effet, pour ce type d'expérience on observe en général une grande sensibilité aux conditions initiales. De ce fait, il faut être en mesure de maîtriser les positions et les vitesses initiales des particules tout comme les conditions physiques pour minimiser la dispersion des résultats.

1. Dispositif expérimental

Une vue globale du banc expérimental utilisé est présentée sur le schéma de principe en figure 3.1. Pour nos expériences, nous avons choisi un éclairage frontal du champ de sédimentation afin d'obtenir un rendu homogène en ce qui concerne la visualisation des particules. Pour chaque lâcher, l'enregistrement des positions des particules est effectué en visualisation directe grâce à une caméra CCD de résolution (640×480 pixels), connectée à un microordinateur. La sédimentation des particules est observée sur une distance pouvant excéder 220 rayons et leurs positions sont enregistrées sur une séquence d'images. La séquence temporelle d'acquisition des images est contrôlée à l'aide d'un logiciel du commerce (Insight TSI). L'ensemble des expériences réalisées a lieu dans une pièce contrôlée en température ($\pm 0,5^\circ\text{C}$).

Nous avons également utilisé un Laser à Argon afin de matérialiser le plan de visualisation par une nappe Laser, disponible en sortie d'une fibre optique, ainsi qu'une web-cam connectée à un second micro ordinateur. Cette seconde caméra est positionnée suivant l'axe X pour enregistrer le mouvement des particules dans le plan perpendiculaire au plan de sédimentation. Ces derniers éléments ont été utilisés ponctuellement afin d'effectuer certaines vérifications préliminaires décrites ci-dessous.

1.1. Configuration expérimentale

L'ensemble des expérimentations consiste à suivre la sédimentation des particules dans un plan de visualisation vertical. En effet, lorsque des particules sont initialement disposées dans un plan collinéaire au vecteur gravité, tous les efforts transmis d'une particule à l'autre sont colinéaires au plan. De ce fait, les particules restent dans le plan de visualisation au cours de la sédimentation [56]. Afin de vérifier cette condition durant le temps de mesure on règle une nappe Laser qui matérialise la trajectoire idéale dans le plan (YZ). La web-cam nous a permis d'enregistrer des séquences vidéo attestant de ce comportement.

La géométrie de cuve est choisie dans le but d'étudier la sédimentation de particules en milieu confiné par deux plans parallèles et pour sa simplicité de représentation dans l'outil numérique développé.

Cette cuve est en plexiglass, d'indice de réfraction ($n_p=1,49$) très proche de celui du fluide utilisé pour nos expériences. Elle est parallélépipédique, de section droite rectangulaire ($L=100\text{mm}$) \times ($D=500\text{mm}$) et de hauteur $H=1600\text{mm}$. Les particules sont initialement

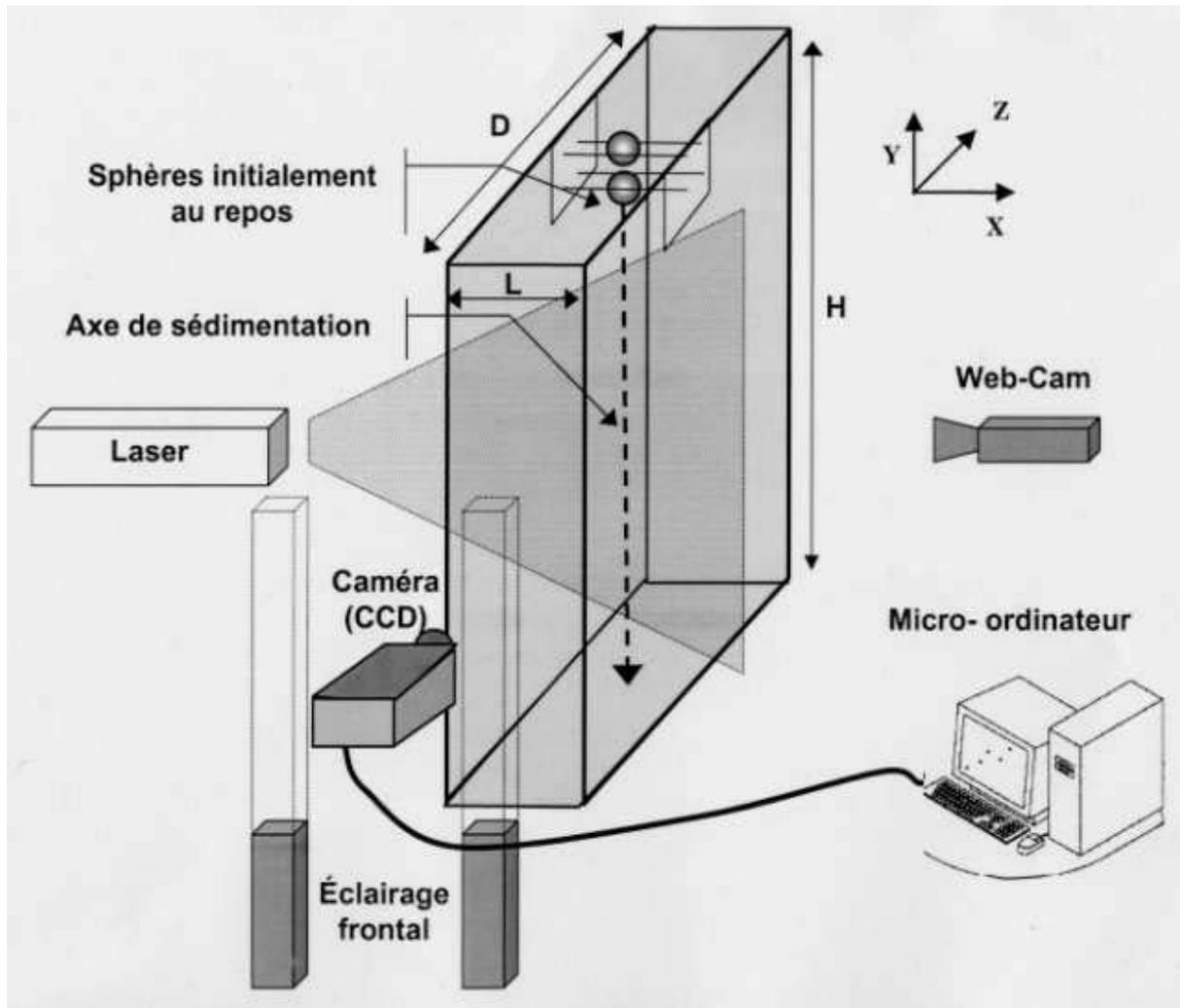


Figure 3.1 *Vue schématique du dispositif expérimental*

disposées dans le plan matérialisé en figure 3.1 et on suppose que les parois avant, arrière (situées à 250mm des particules), tout comme la paroi de fond de cuve (située à 1500mm du dispositif de lâcher de particules) n'influent pas sur le comportement des particules lors de la sédimentation. Cette géométrie expérimentale est assimilée par la suite à celle présentée sur la figure 3.2.

1.2. Dispositif de libération des particules

Pour s'assurer de la libération des particules sans vitesse initiale, un dispositif a été spécialement conçu pour cette étude (cf. figures 3.3 et 3.4), basé sur le principe d'un dispositif

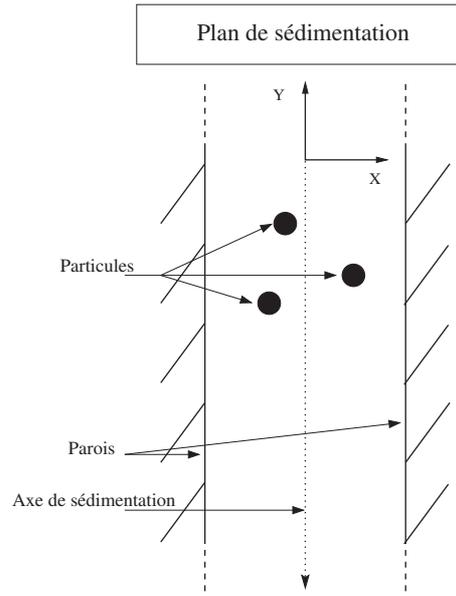


Figure 3.2 *Géométrie de l'écoulement étudié*

préexistant dans le laboratoire mais inadapté aux petites particules. Les particules sont initialement disposées sur des fils tendus espacés d'une fraction du diamètre de particule. Un mécanisme externe fixé aux extrémités permet d'écarter symétriquement ces fils de part et d'autre des sphères pour les libérer. Ce système a pour principal intérêt de présenter un faible volume immergé dans le fluide suspendant et permet donc de minimiser les interactions hydrodynamiques entre les particules et le dispositif.

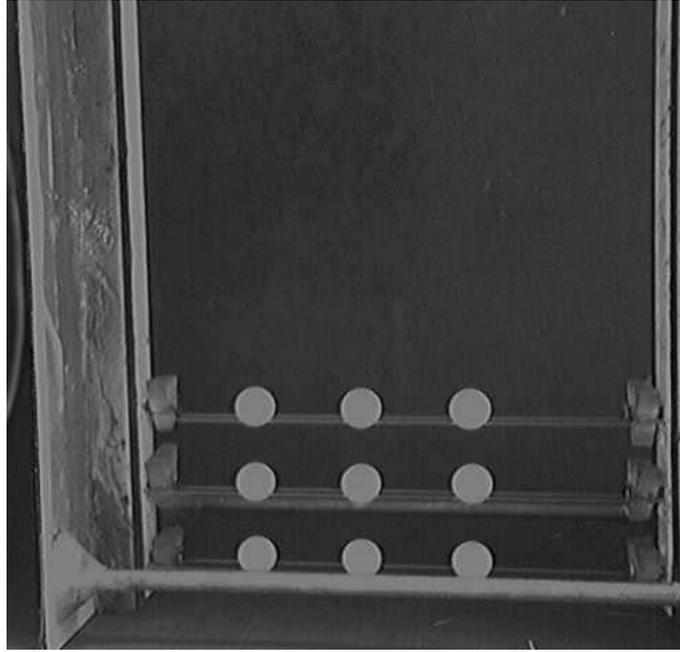


Figure 3.3 *Dispositif de libération des particules : vue 1, plan (xy)*

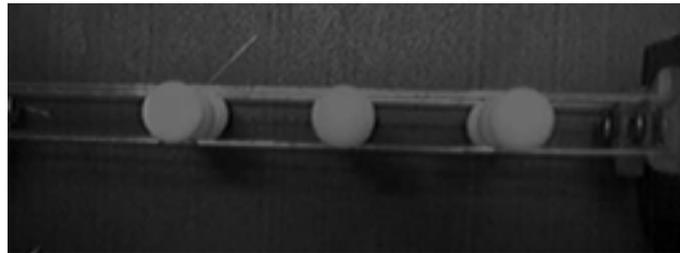


Figure 3.4 *Dispositif de libération des particules : vue 2, plan (xz)*

1.3. Fluide et particules

Dans nos expériences le fluide utilisé avec précautions est de la glycérine, de densité $1,25 \pm 0,2\%$ et de viscosité $\mu=0,85 \text{ Pa}\cdot\text{s} \pm 5\%$ à la température $T=22^\circ\text{C} \pm 0,5\%$. Ce fluide est choisi pour son indice de réfraction ($n_g=1,47$) qui très proche de celui du plexiglass, ce qui permet par la suite de négliger les phénomènes de dioptré [59]. Lors de chaque expérience, la température est mesurée et la viscosité correspondante est déterminée au moyen d'une courbe d'étalonnage préalablement établie (cf. Annexe A).

Les particules choisies sont des particules de Téflon de diamètre $2a=6,35 \text{ mm} \pm 0,4\%$

et de densité $2,15 \pm 1\%$. Ces particules sont calibrées et testées en sédimentation isolée, s'assurant ainsi de leur homogénéité. La dimension des particules rapportée à la distance entre les parois représente un coefficient de confinement $(2a/L)=0,0635$.

1.4. Description des matériels utilisés

Le logiciel d'acquisition utilisé est employé pour le traitement en P.I.V. et les paramètres nécessaires à la configuration de ce logiciel sont décrits à la référence suivante [60]. Ce système permet un contrôle du temps entre chaque image d'une séquence et la durée d'une expérience est choisie pour qu'elle n'excède jamais 30s. La séquence d'acquisition est alors composée d'une série de 40 à 50 doublets d'images espacés d'un $\Delta t > 0,5s$. Le temps d'acquisition d'une image est fixe et vaut 30ms. Or, pour avoir une image dite instantanée de l'écoulement pendant ce temps d'acquisition, il est nécessaire que le déplacement d'une particule soit inférieur à la résolution de la caméra (inférieur au pixel). Compte tenu de la fréquence de la caméra et des vitesses des particules, leur dimension sur les images expérimentales doit être d'environ 7×7 pixels. Cependant, si cette dimension apparente d'une particule permet de respecter la condition d'instantanéité des clichés, elle dégrade la résolution de la mesure en position. C'est pourquoi dans la partie suivante nous proposons une méthode simple permettant d'améliorer la précision de la mesure dans la configuration choisie.

Caractéristiques des matériels utilisés

- Camera : T.S.I. 630044 RS-170 Cross-corrélation CCD Image Capture Système ;
- Génération laser : Spectra-Physics 2550-2016-05, Argon/Krypton de classe 4, avec pour longueur d'onde : $\lambda = 650nm$;
- Rhéomètre à contrainte imposée : CARRI-MED CSL100, utilisé en configuration cône-plan.

2. Traitement numérique des images expérimentales

Comme nos prédécesseurs, nous sommes confrontés au choix entre une bonne résolution de mesure et un grand champ d'observation pour le suivi des particules. Or, pour appréhender quantitativement l'influence des effets inertiels sur les trajectoires de particules, il est nécessaire d'effectuer la mesure sur un champ d'observation important. Par conséquent, le choix d'une grande étendue de mesure implique la mise en œuvre d'un post-traitement des images expérimentales afin d'améliorer la précision de la détection des positions des particules.

Les images obtenues par visualisation directe présentent l'inconvénient d'une faible résolution comparée à la dimension du champ d'observation. En effet, si les particules apparaissent sur 6 à 8 pixels, elles peuvent être suivies sur une zone d'observation pouvant aller jusqu'à 640 pixels. Dans le cas présent, la précision accessible par lecture directe de l'image n'est pas satisfaisante pour repérer les positions des particules au cours de la sédimentation. De ce fait nous devons effectuer un traitement numérique systématique des images afin d'obtenir une mesure avec une précision "sub-pixel".

Un grand nombre de techniques sont développées dans le domaine du traitement numérique d'images pour des applications comme le suivi en temps réel de chaînes de production ou encore la détection radar. Selon la précision requise, les coûts de calcul varient avec les techniques utilisées.

Dans cette partie et après avoir rappelé quelques généralités sur les signaux bidimensionnels, nous proposons une description de la technique utilisée pour ce travail, basée sur un filtrage passe-bas du signal original.

2.1. Quelques généralités sur le filtrage des signaux bidimensionnels

Le signal obtenu expérimentalement qui enregistre les positions des particules est celui d'une caméra CCD. Ce signal est proportionnel à l'image du plan objet de la caméra (plan de sédimentation). En effet, les signaux lumineux émis du plan de sédimentation vers la caméra subissent une transformation au travers des optiques puis une quantification sur la matrice de capteurs CCD. Rappelons qu'une image peut être représentée par une fonction continue de l'intensité lumineuse dans des zones séparées par des frontières où elle peut présenter des discontinuités. Cette distribution de l'information est ensuite discrétisée pour être quantifiée sur la matrice CCD.

Sur la figure 3.5 est présenté un cas typique qui illustre notre problème [61]. Soit une image de départ représentant un cercle de niveau constant auquel est rajouté un bruit

aléatoire (cf. figure 3.5.a). Sur cette figure est représentée en perspective la distribution de l'intensité lumineuse (niveaux de gris). Si l'on effectue un filtrage basé sur une transformée de Fourier 2D de l'image afin de seuiller le signal en fréquence et si f_s est la fréquence de seuillage, un filtrage passe-bas consiste à éliminer toutes les composantes du signal originel dont les fréquences sont supérieures à la fréquence f_s . Les figures 3.5.b et 3.5.c représentent respectivement la composante "basse fréquence" et "haute fréquence" après filtrage du signal originel.

Comme on peut le constater sur l'image 3.5.b, le filtrage passe-bas permet de reconstruire un signal continu et centré sur la position du centre du motif initial. De plus, ce type de filtre minimise l'influence d'un bruit de haute fréquence souvent présent sur nos images expérimentales.

A l'inverse, sur l'image 3.5.c qui correspond au signal reconstitué après filtrage passe-haut, on peut constater que les contours du cercle initial sont réhaussés mais l'intensité du bruit aléatoire présent sur l'image initiale est également amplifié, brouillant de ce fait la détection du centre.

Comme l'illustre cet exemple, la détection du centre du cercle initial est favorisée par un filtrage passe-bas qui atténue l'influence du bruit de fond tout en conservant la quasi-symétrie du motif initial. Ce type de traitement est donc le mieux adapté à notre problème. Cependant, le filtrage des images brutes n'est pas suffisant pour une détection précise du centre des particules. Dans la section suivante nous décrivons en quelques étapes la procédure de traitement utilisée pour nos expériences, avant d'en évaluer la précision.

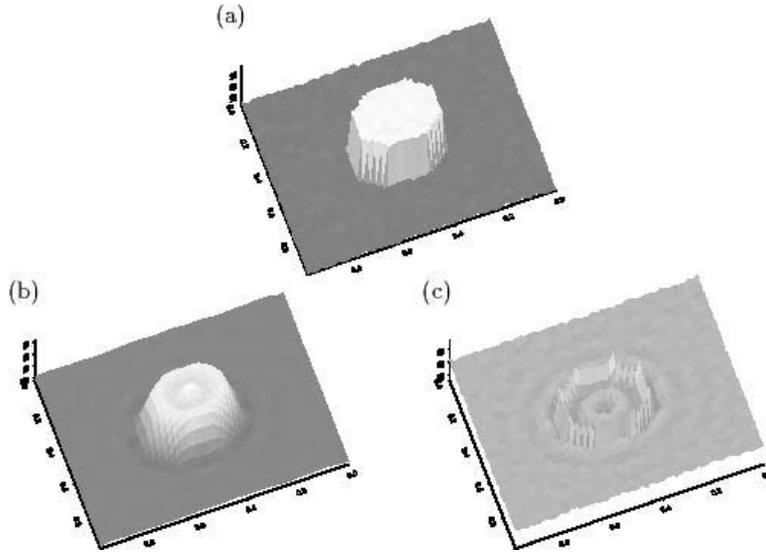


Figure 3.5 *Illustration du filtrage sur un cercle lumineux de niveau constant. L'image (a) représente le signal initial, l'image (b) représente le signal après filtrage passe-bas et l'image (c) le signal après filtrage passe-haut*

2.2. Les différentes étapes du traitement

Dans cette section nous abordons dans un premier temps les étapes de traitement qui permettent d'optimiser la détection des positions des particules durant la sédimentation. Puis, nous présentons dans un deuxième temps la procédure de recherche de centre utilisée.

2.2.1. Elimination des signaux parasites de basses fréquences

Le mode de traitement des images employé étant basé sur un filtrage passe-bas, il est nécessaire que seule la présence des particules soit associée à un signal de basse fréquence sur les images expérimentales. En effet, en réhaussant l'intensité des signaux de basses fréquences contenus dans ces images, les réflexions parasites sur la cuve ou tout autre signal de basse fréquence sera amplifié, ce qui peut influencer par la suite le traitement.

Ce type de signal parasite, présent sur les images expérimentales, est éliminé par simple soustraction de l'intensité lumineuse contenue dans une image "noire", c'est à dire hors présence des particules. La figure 3.6, permet de visualiser ce pré-traitement. La première image est un exemple typique d'une image expérimentale brute à traiter. On constate no-

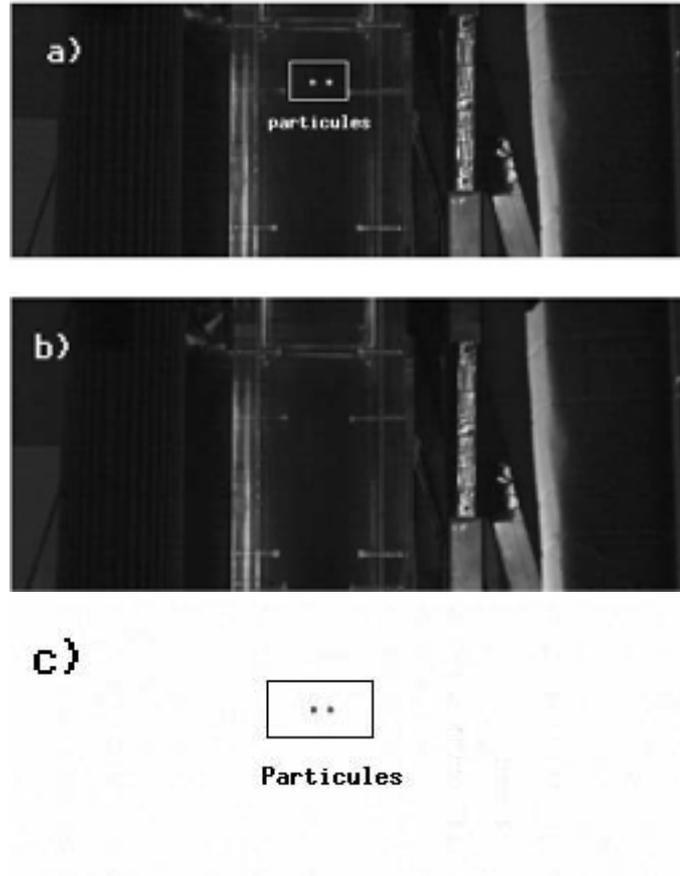


Figure 3.6 *Visualisation du pré-traitement des images expérimentales : (a) image de départ, (b) image "noire", (c) image finale*

tamment la présence des réflexions parasites qui représentent un signal de basse fréquence. La seconde image (image "noire" cf. figure 3.6 b) permet de sélectionner l'ensemble de ces signaux parasites à éliminer (réflexions aux parois, dispositif de lâcher de particules etc.). Puis, par simple "soustraction" de ces deux images, on obtient une image sur laquelle seules les sphères apparaissent nettement (cf. figure 3.6 c). Ce pré-traitement répété pour l'ensemble des images expérimentales, ne permet cependant pas d'éliminer le bruit de haute fréquence, dont l'influence sera minimisée à l'étape suivante.

2.2.2. Procédure de filtrage passe-bas des images

La méthode présentée ici est souvent utilisée pour reconstituer un signal numérique continu à partir d'un signal analogique discret [61]. Elle consiste à sommer des fonctions "Sinus Cardinal" dont les amplitudes sont les intensités lumineuses de chaque pixel

de l'image à traiter (cf. figure 3.7). Pour obtenir un résultat de bonne qualité, cette opération doit être effectuée sur une grille plus fine que la grille initiale (résolue au pixel), appelée grille haute résolution et choisie ici dans un rapport de un sur dix. On remplace donc chaque pixel de l'image initiale par un Sinus Cardinal de révolution dont l'amplitude varie entre 1 (noir) et 256 (blanc) suivant l'intensité du niveau de gris enregistrée par le capteur CCD.

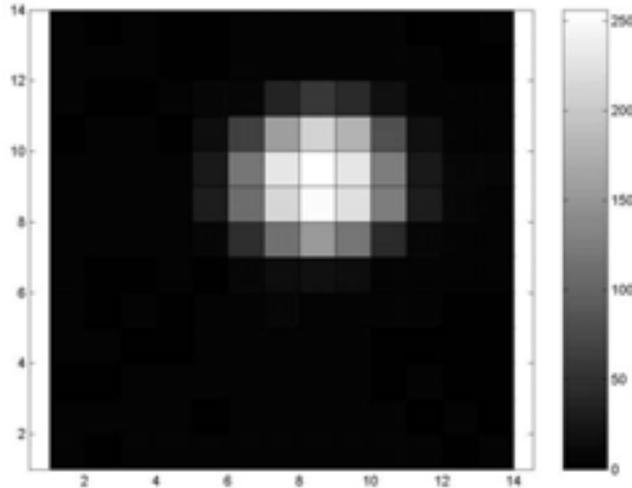


Figure 3.7 *Exemple de l'image d'une particule à filtrer*

Si P est la matrice de dimension $(np_x \times np_y)$ contenant l'information originelle, avec $np_x \times np_y$ les dimensions de l'image en pixel, et si F est celle contenant le résultat après reconstitution du signal (de dimension $10np_x \times 10np_y$), l'opération effectuée est la suivante :

$$F_{kl} = \sum_i \sum_j P_{ij} \text{sinc}(Ar_{kl}) \quad (3.1)$$

où i et j représentent les indices des pixels de l'image expérimentale, k et l représentent les indices de la grille de haute résolution, $r_{kl} = \sqrt{(\mathbf{x}_k - X_i)^2 + (\mathbf{y}_l - Y_j)^2}$, X_i et Y_j sont les coordonnées du centre du pixel considéré et \mathbf{x} et \mathbf{y} représentent les points de la grille de haute résolution. La constante A , qui modifie la pulsation du Sinus Cardinal, est calibrée en fonction de la dimension des particules sur l'image, rapportée à la dimension de la zone à analyser.

Afin de visualiser le résultat issu de ce mode de filtrage, on utilise l'image expérimentale

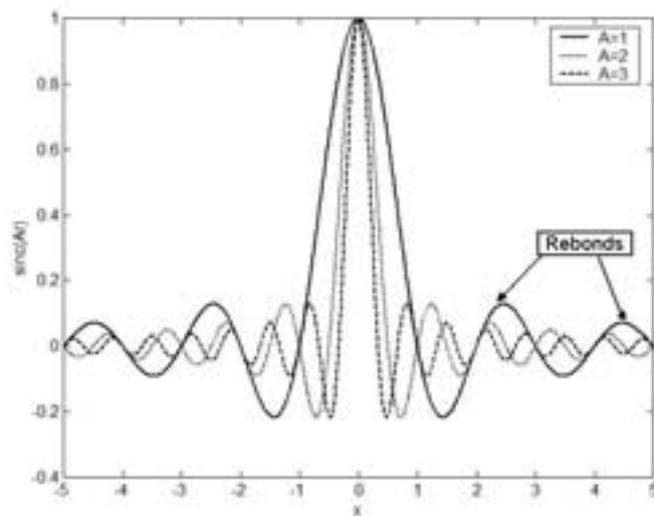


Figure 3.8 *Fonction sinus cardinal*: $\text{sinc}(Ar) = \frac{\sin(\pi Ar)}{\pi Ar}$

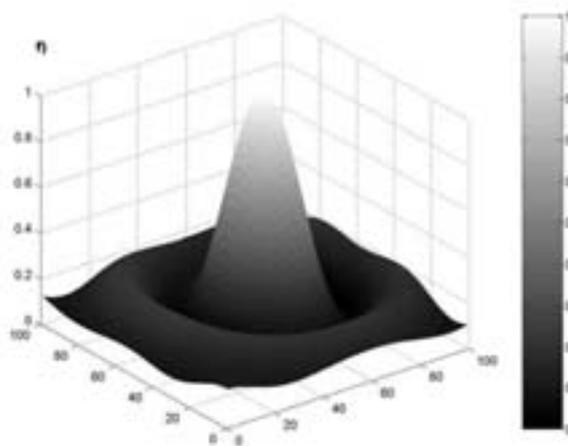


Figure 3.9 *Visualisation du signal reconstitué après filtrage*

précédente (cf. figure 3.7). Sur la figure 3.9 le signal est reconstitué après traitement de l'image. La combinaison de l'ensemble des sinus cardinaux permet d'obtenir un signal quasi-symétrique. Les rebonds secondaires de faible intensité, dus à l'utilisation de la fonction sinus cardinal (cf. figure 3.8), n'interfèrent pas avec la procédure de recherche de centre du motif comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

2.2.3. Recherche du centre

Les deux étapes précédentes n'ont pour principal objet que de faciliter la procédure de recherche de centre du motif. En effet, à partir du signal reconstitué (continu et quasi-symétrique), on peut appliquer des techniques différentes qui reviennent pour la plupart à un calcul barycentrique.

La procédure choisie ici passe en premier lieu par un seuillage du signal reconstitué pour éliminer les rebonds secondaires. Puis, l'image est binarisée et le centre du motif est déterminé en calculant la moyenne des coordonnées des points dont l'intensité est à 1. Ce procédé simple permet de trouver le centre du motif avec une précision qui reste à déterminer.

2.3. Précision du traitement

La détermination de la précision du traitement numérique des images est basée sur une étude des erreurs obtenues à partir de la génération d'images synthétiques les plus représentatives des images expérimentales. Les courbes d'erreurs sont alors obtenues par analyse statistique des résultats issus de la procédure de traitement, sur un nombre de cas suffisamment important.

2.3.1. Génération d'images synthétiques

Afin de créer des images synthétiques qui soient représentatives des images expérimentales on choisit de simuler le fonctionnement d'un capteur CCD. Pour cela on génère une première image binaire résolue sur une grille de haute résolution, sur laquelle la particule est représentée par un disque d'intensité maximale (cf. figure 3.10). A ce niveau on peut ajouter un bruit aléatoire qui représente assez bien le bruit expérimental. Puis on effectue l'intégration de l'intensité lumineuse sur une grille grossière qui représente la résolution au pixel fourni par un capteur CCD. Le résultat obtenu est montré en figure 3.11. On peut constater sur cette figure que l'image synthétique obtenue est assez représentative de l'information enregistrée expérimentalement (cf. figure 3.7), même si dans le cas présent l'amplitude du bruit numérique est volontairement supérieur à celui sur l'image expérimentale. En effet, l'intensité du bruit de fond sur la figure 3.10 est donnée par le rapport signal sur bruit tel que $\frac{S}{B} = 2$ dans le cas présent. Dans la section suivante nous évaluons l'incertitude du traitement sur les images synthétiques ainsi que l'influence du bruit de fond aléatoire.

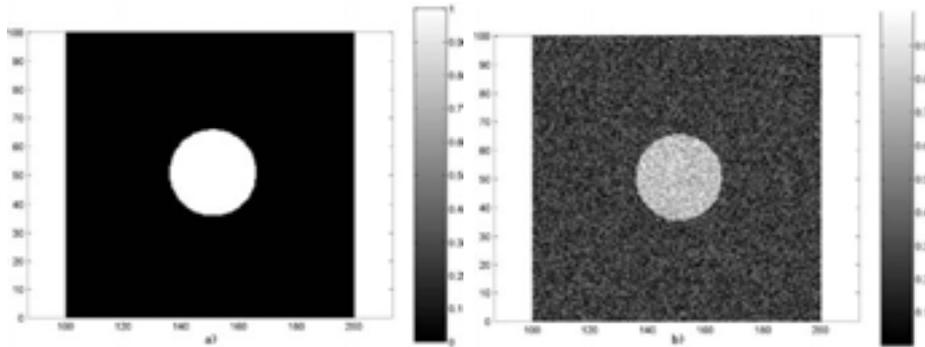


Figure 3.10 *Génération d'un disque haute résolution: (a) sans bruit de fond et (b) avec un bruit de fond aléatoire*

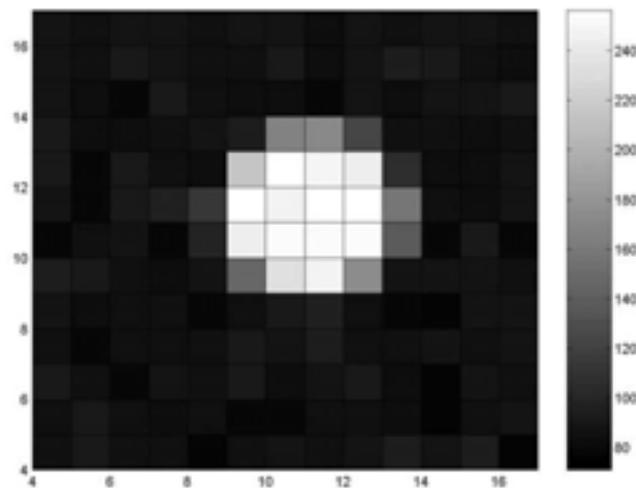


Figure 3.11 *Image synthétique pixelisée*

2.3.2. Précision du traitement et influence du bruit de fond

Pour déterminer la précision globale du traitement, on génère des images synthétiques sur lesquelles la position du centre d'une particule est aléatoire. Puis, on compare la position connue à celle déduite du traitement numérique. Cette procédure est répétée un grand nombre de fois pour permettre de tracer une courbe de répartition d'erreur.

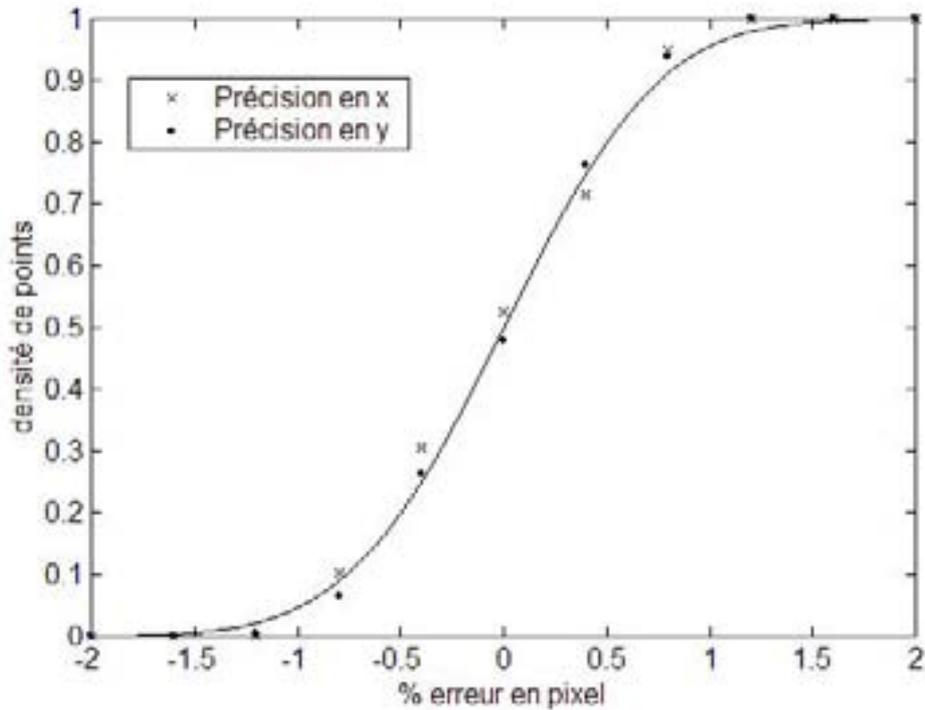


Figure 3.12 Répartition de l'erreur d'analyse sur des images synthétiques faiblement bruitées

Les figures 3.12 et 3.13 représentent les répartitions d'erreurs d'analyse calculées à l'aide des images synthétiques pour différentes intensités du bruit de fond. La première figure correspond à une intensité quasi-nulle du bruit de fond. La seconde figure correspond à une forte valeur du bruit ($\frac{S}{B} = 2$). Ces courbes sont tracées pour plus de 300 essais, dans un système d'axes qui sont : le pourcentage d'erreur en pixel en abscisse et la densité de points en ordonnée. Comme attendu, on peut constater que la répartition d'erreur d'analyse suit l'allure d'une fonction Erreur. On peut donc déduire de cette allure que la distribution des erreurs a une allure gaussienne.

Pour le cas où l'intensité du bruit est quasi-nulle la précision est de l'ordre de 1% en pixel (cf. figure 3.12). Tandis que pour les images fortement bruitées on constate une précision de l'ordre de 5% en pixel (cf. figure 3.13).

Cependant, si la précision est très bonne dans le cas d'images synthétiques, il est préférable de tester le traitement sur des séquences d'images expérimentales, comme nous allons le voir dans la sous-section suivante.

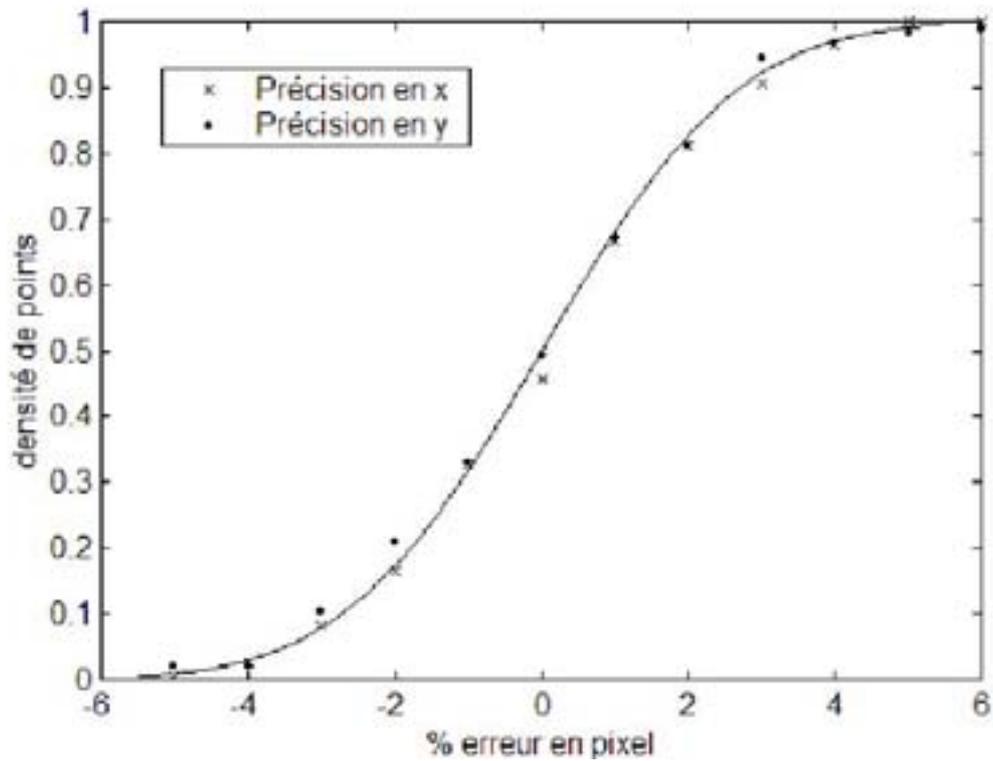


Figure 3.13 Répartition de l'erreur d'analyse sur des images synthétiques fortement bruitées

2.3.3. Précision du traitement sur une séquence d'images réelles

Afin d'évaluer expérimentalement l'incertitude liée au traitement des images expérimentales nous nous intéressons ici au cas d'une sphère seule en sédimentation au centre de la cuve. Dans cette configuration la trajectoire de la particule est linéaire, ce qui nous permet d'évaluer l'incertitude expérimentale en mesurant l'écart à cette droite.

Les résultats sont montrés en figure 3.14 sur laquelle on peut constater que l'erreur maximale est de l'ordre de 2,5% de pixel. Cet ordre de grandeur est cohérent par rapport à l'évaluation effectuée sur les images synthétiques du fait que l'intensité du bruit expérimental est bien moindre que celui simulé numériquement pour tester la procédure de traitement.

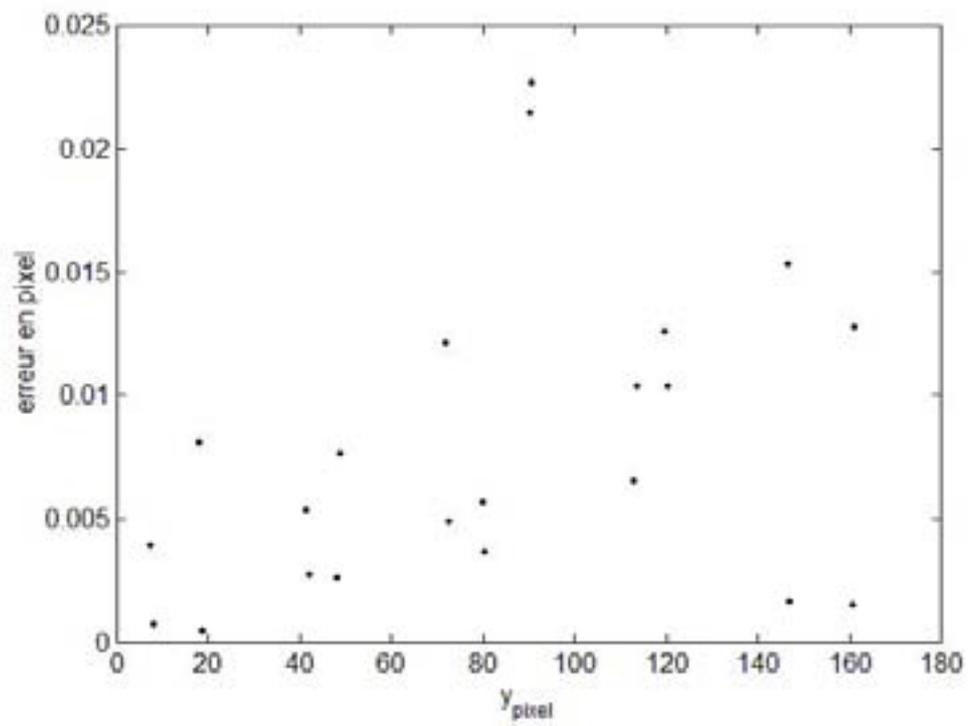


Figure 3.14 *Incertitude déterminée sur une séquence d'images réelles*

2.4. Répétabilité de la mesure

Pour vérifier la répétabilité de la mesure on effectue plusieurs manipulations pour chaque configuration étudiée. Ainsi, en superposant les différentes mesures on s'assure que le comportement est le même d'une manipulation à l'autre. Le principal problème intervenant dans nos manipulations concerne les interactions entre les particules et le dispositif de lâcher.

Sur la figure 3.15 sont reportés les résultats concernant l'évolution de la distance entre les sphères d'un doublet horizontal, en fonction de la distance verticale parcourue par le doublet. Dans cette configuration la dispersion des mesures est raisonnable ($\simeq 0,15a$) et on peut constater :

- que la présence des fils n'est pas décelée et n'altère pas les trajectoires des particules;
- une bonne reproductibilité de la mesure permettant une analyse du comportement du doublet.

Dans le cas d'un doublet de particules alignées verticalement et disposées sur deux des étages du dispositif, des différences sont observées d'un lâcher à l'autre. Nous donnons en figure 3.16 l'évolution de la distance entre les sphères en fonction de la distance verticale parcourue par la sphère située au dessus. On peut constater sur cette figure, qu'en superposant les mesures d'une manipulation à l'autre on obtient un panache de points trop important.

Rappelons que nous cherchons à représenter la variation de la distance relative en fonction de la distance parcourue par le doublet. De ce fait, il est possible d'effectuer une translation des points expérimentaux suivant l'axe de sédimentation. On observe alors rigoureusement le même comportement d'un lâcher à l'autre, montrant une très bonne reproductibilité des mesures, même pour les configurations de doublets verticaux (cf. figure 3.17). Les résultats concernant les doublets horizontaux sont conservés en l'état.

La reproductibilité d'un lâcher peut également être observée sur les trajectoires des particules. Les trajectoires d'un doublet incliné initialement à $\frac{\pi}{4}$ sont données sur la figure 3.18 et on peut là encore constater une bonne reproductibilité. Les trajectoires mesurées sont représentées par un nuage de points dont l'épaisseur est de l'ordre de $0,2a$.

Sur le cas du triplet de particules la répétabilité de la mesure est encore satisfaisante (cf. figure 3.19). On observe néanmoins des différences qui s'amplifient au cours du temps et

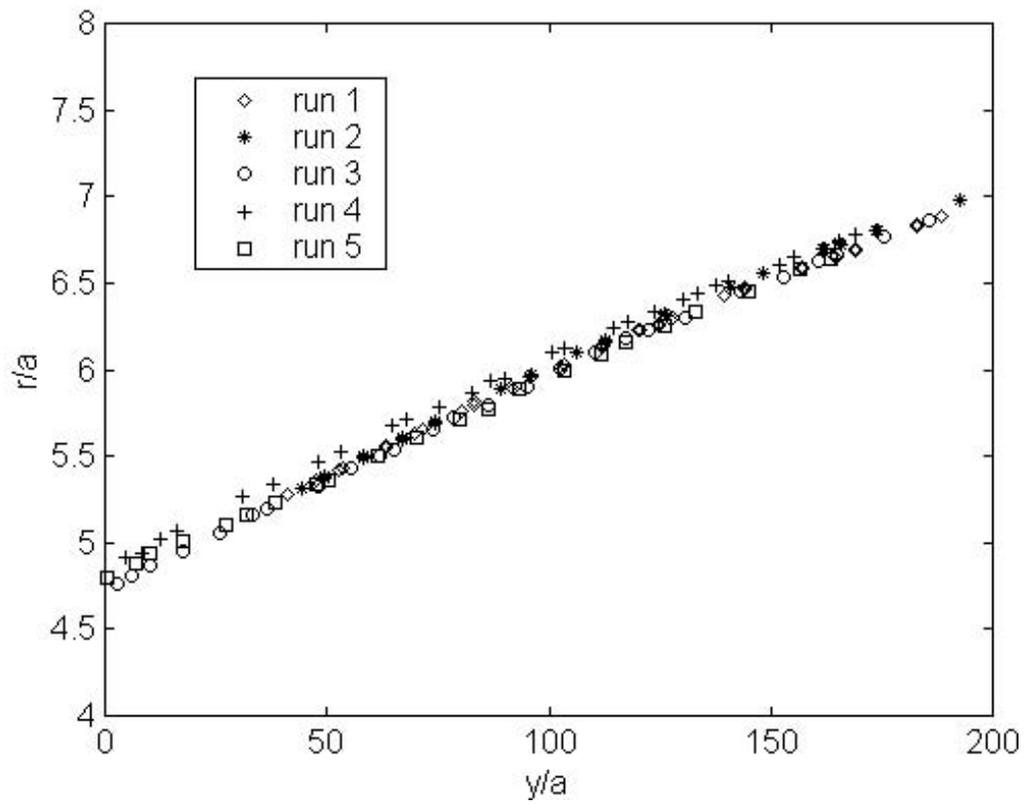


Figure 3.15 *Mesures de l'écartement progressif de deux particules alignées horizontalement*

qui sont principalement dues à la sensibilité vis-à-vis des conditions initiales (cf. Annexe B).

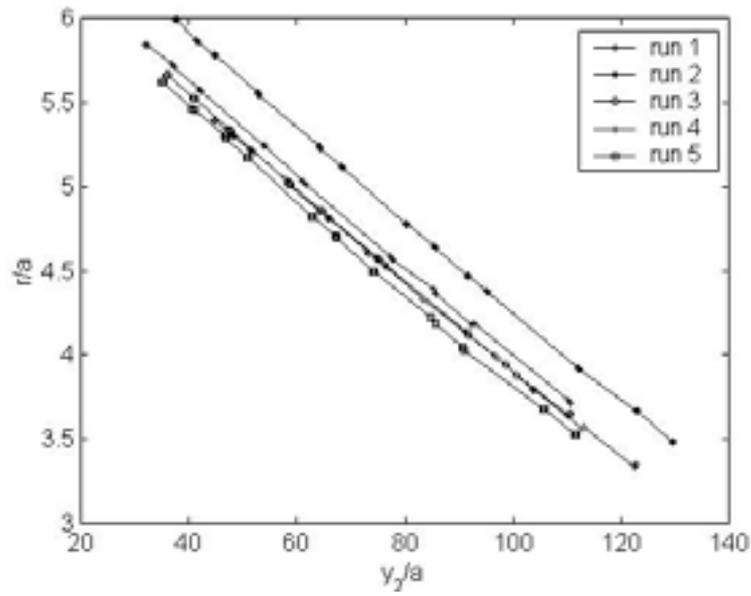


Figure 3.16 *Mesures du rapprochement progressif de deux particules alignées verticalement*

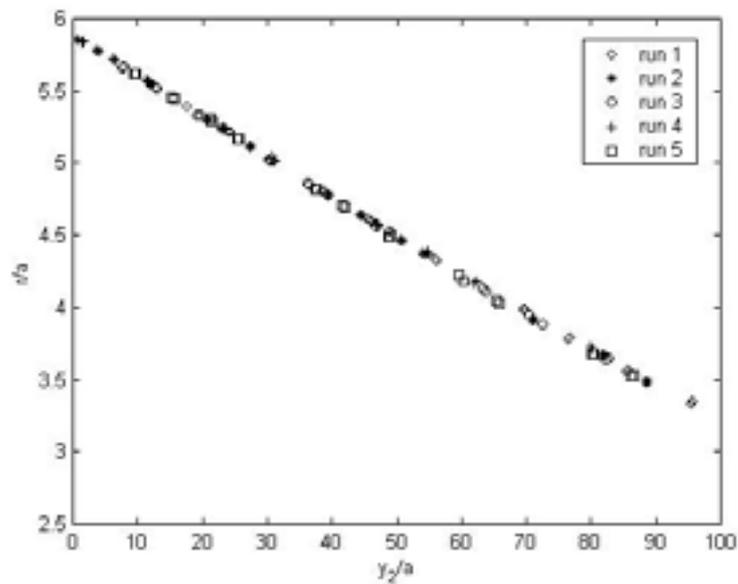


Figure 3.17 *Mesures du rapprochement progressif de deux particules alignées verticalement après translation sur l'axe de sédimentation*

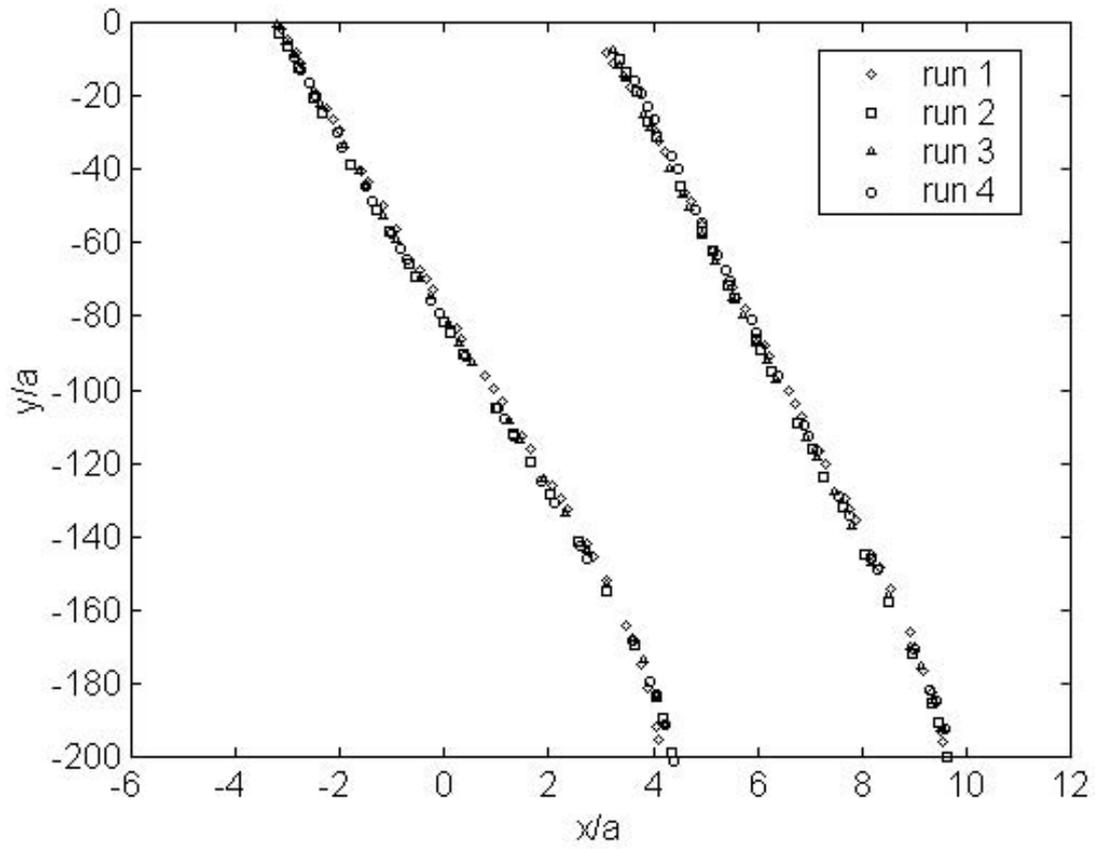


Figure 3.18 *Trajectoires expérimentales d'un doublet de particules incliné initialement à $\frac{\pi}{4}$*

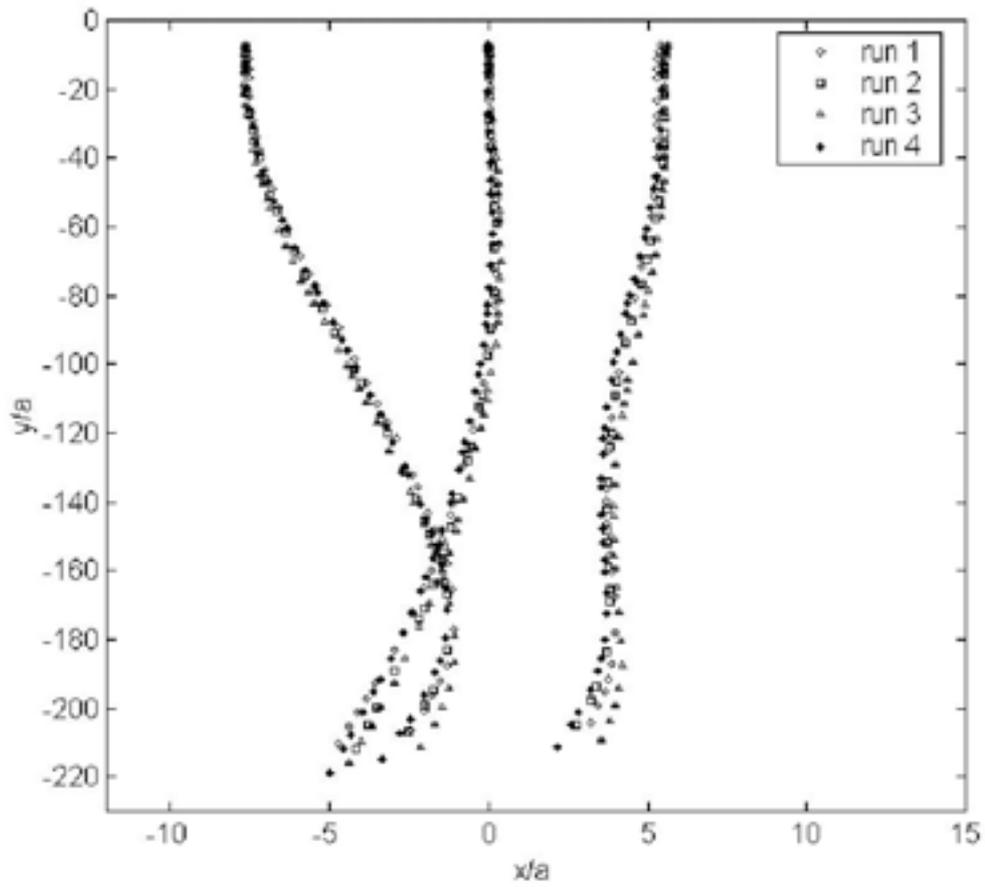


Figure 3.19 Trajectoires expérimentales d'un triplet de particules alignées horizontalement

Conclusion partielle

Dans ce chapitre, dédié à la présentation de la procédure expérimentale, nous avons décrit en premier lieu le dispositif expérimental utilisé ainsi que le déroulement des mesures. Le mode opératoire est le suivant :

- Dans un premier temps, après avoir brassé le fluide on le laisse reposer. Afin de vérifier la tenue des propriétés de la phase continue dans le temps, un échantillon du fluide est prélevé.
- Dans un deuxième temps et pour une configuration choisie au préalable, les particules sont placées sur les fils du dispositif de lâcher. Puis, on laisse reposer le fluide un instant.
- Enfin, la mesure qui consiste à enregistrer sur des séquences d'images les positions des particules débute lorsque le mécanisme de libération des particules est actionné manuellement.
- Une fois la première mesure terminée, on laisse reposer le fluide puis la procédure est répétée sur la même configuration afin d'évaluer la reproductibilité du banc expérimental. Par ailleurs, tout au long des expériences la température est mesurée pour vérifier que les conditions expérimentales sont identiques d'une manipulation à l'autre.

Dans la dernière partie, nous avons abordé la méthode employée dans ce travail afin de traiter l'information brute permettant d'obtenir une précision de l'ordre de quelques centièmes de pixel pour la mesure des positions des particules. Enfin, nous avons montré que le dispositif de libération des particules conçu pour ce travail est adapté à notre étude. De plus, si on a constaté une interaction entre les particules et le dispositif, les mesures des trajectoires débutent effectivement lorsque les particules sont en dehors de ce dispositif. L'ensemble des mesures effectuées est à l'origine des confrontations expérimentales et numériques présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Validation du modèle et confrontations aux résultats expérimentaux

Dans ce chapitre nous nous proposons de tester la méthode présentée au chapitre 2 pour modéliser les interactions hydrodynamiques en régime inertiel. Pour cela, nous passons successivement en revue des configurations à deux, trois puis quatre particules. Rappelons que cette méthode a été éprouvée et validée dans les conditions de Stokes ($Re=0$) à la fin du chapitre 2.

S'agissant du comportement en régime inertiel, plusieurs configurations de doublets sont considérées dans la première partie de ce chapitre.

Dans une première section, on s'attachera à discuter l'aptitude du modèle à rendre compte des comportements connus dans ces configurations simples. A cet effet, pour chaque configuration étudiée nous comparons nos résultats numériques aux prédictions théoriques de Vasseur et Cox [15] telles qu'elles sont présentées dans la sous-section 2.2.1.1 du premier chapitre de ce mémoire.

Dans la seconde section, ces configurations simples sont reconsidérées pour confronter nos simulations numériques à nos résultats expérimentaux ainsi qu'à ceux disponibles dans la littérature. Ces différentes étapes nous permettent d'examiner dans quelles limites l'outil numérique mis en œuvre est à même de décrire les phénomènes réellement observés.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la comparaison des résultats expérimentaux et numériques impliquant un plus grand nombre de particules en interaction. Deux configurations typiques pour lesquelles il n'existe pas de résultats expérimentaux en régime inertiel sont étudiées afin d'éprouver la méthode proposée dans le cas de n particules en interaction. Par ailleurs, les résultats numériques en régime inertiel sont comparés à

ceux obtenus dans les conditions de Stokes afin de mettre en évidence l'influence significative des effets inertiels lors de la sédimentation de n particules même à faibles nombres de Reynolds.

1. Considération de quelques configurations simples

Cette première partie porte sur des configurations à deux particules qui sont souvent traitées dans la littérature [1, 15, 40, 41, 42, 56, 62]. Si les travaux sont très nombreux en régime de Stokes, on trouve assez peu de résultats quantitatifs en régime inertiel. C'est pourquoi, outre les observations qualitatives souvent mentionnées dans la littérature, nous effectuons une analyse quantitative dans chacune des configurations considérées.

1.1. Résultats préliminaires

Lorsque deux particules identiques et pas trop éloignées l'une de l'autre sédimentent dans des conditions telles que Re ne peut plus être considéré comme nul, on observe invariablement un mouvement relatif entre elles, les conduisant à se rapprocher ou au contraire à s'écarter selon l'orientation du vecteur inter-centre \mathbf{r} par rapport au vecteur gravité. En effet, en milieu infini, le champ de vitesse axisymétrique généré par le déplacement d'une particule sphérique présente une dissymétrie amont/aval en régime inertiel, contrairement au champ de vitesse calculé sous les hypothèses de Stokes. La nature de ce champ de vitesse est à l'origine des mouvements relatifs entre deux particules, qui sont inexistantes sous les hypothèses de Stokes. Dans les sous-sections suivantes, nous désirons montrer que l'outil de simulation développé est à même de reproduire qualitativement et quantitativement les interactions entre deux particules dans une gamme de $Re < 1$. Pour cela, nous passons successivement en revue les configurations de doublet vertical, horizontal et incliné à $\frac{\pi}{4}$ par rapport au vecteur gravité.

1.1.1. Doublet vertical

Des observations expérimentales ont montré que pour $Re \simeq 0, 1$, deux particules sédimentant parallèlement au vecteur inter-centres \mathbf{r} , se rapprochent inéluctablement jusqu'à former un agrégat hydrodynamiquement stable [41]. Par ailleurs, il paraît évident que lorsque la distance de séparation tend vers l'infini le comportement de chaque particule doit tendre vers celui d'une sphère isolée. Ces comportements limites ont fait l'objet de vérifications préliminaires qui ne sont pas présentées dans ce chapitre.

Afin de nous assurer de la bonne représentation des interactions hydrodynamiques lorsque $Re \neq 0$, les résultats de simulations numériques sont comparés aux résultats analytiques de

Vasseur et Cox [15]. Cette confrontation permet d'apprécier d'un point de vue quantitatif les différences entre les deux approches mais aussi de vérifier si le domaine de validité de la méthode proposée correspond, comme attendu, à celui de la solution d'Oseen (1.78). Dans la configuration présente, les travaux de Vasseur et Cox [15] permettent de prédire la vitesse de rapprochement des particules à l'aide de la relation (1.91). Pour comparer ce résultat à ceux des simulations, nous reportons nos résultats dans le système d'axes suivant : $\frac{2\Delta U}{U_\infty Re} = f(r^*)$; où $r^* = \frac{rU}{\nu}$ et où Re est le nombre de Reynolds basé sur le diamètre d'une particule. Sur la figure 4.1 nous traçons les résultats de simulations pour plusieurs valeurs de Re encadrant notre gamme expérimentale qui sont comparés aux prédictions données par la relation (1.91).

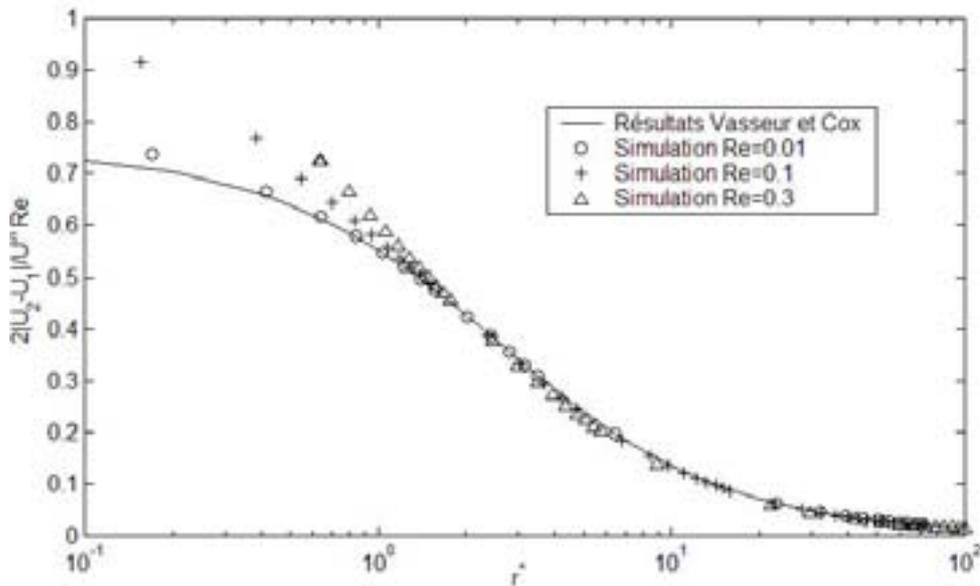


Figure 4.1 *Doublet vertical: évolution de $\frac{2\Delta U}{U_\infty Re}$ en fonction de r^* . Comparaison entre les résultats de simulations numériques et la prédiction théorique (1.91)*

Une première remarque concerne le comportement de sphères isolées retrouvé lorsque $r^* \rightarrow \infty$ où $\Delta U \rightarrow 0$. D'un point de vue quantitatif, on constate que quelle que soit la valeur de Re , l'accord entre les résultats numériques et les résultats théoriques est bon tant que $r^* > 1$. On peut alors constater sur la figure 4.2, où sont présentées les écarts relatifs simulations/calculs exacts, que pour ces valeurs de r^* , les écarts n'excèdent pas 10% et sont naturellement d'autant plus faibles que Re est faible. Ce comportement perdure jusqu'à ce que $r^* \simeq 1$. A l'inverse pour $r^* < 1$ les écarts sont plus significatifs quel

que soit la valeur de Re considérée.

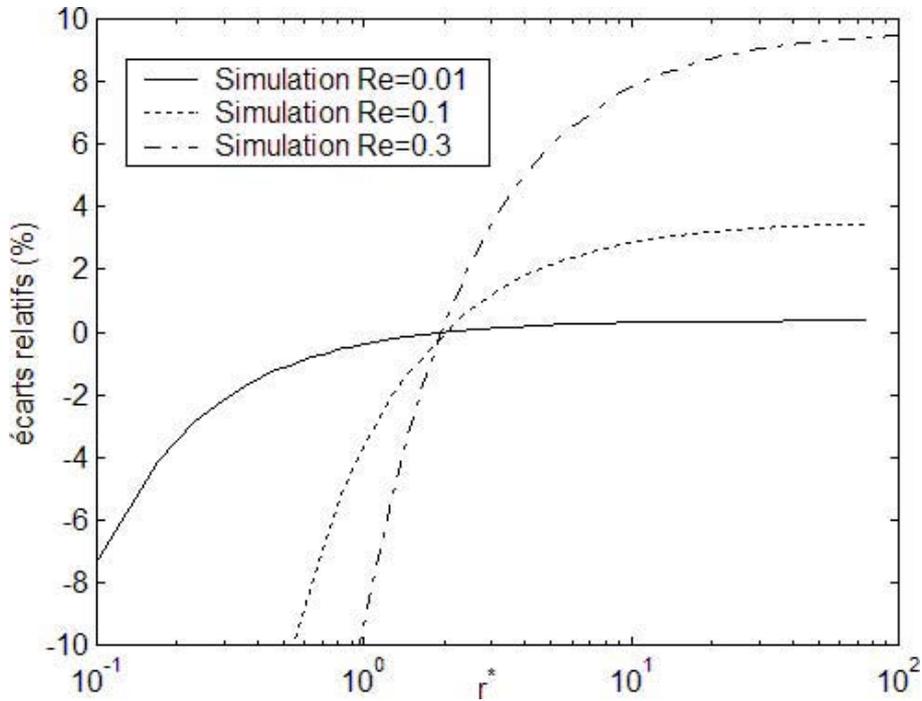


Figure 4.2 *Doublet vertical: évolution des écarts relatifs entre les résultats de simulations numériques et la prédiction théorique (1.91) en fonction de r^**

De notre point de vue, les écarts observés entre simulations/calculs exacts sont principalement dus à l'erreur commise sur la condition d'adhérence du fluide à la surface des particules, inhérente à l'utilisation des expressions issues de l'équation d'Oseen. Nous nous attendons donc à des écarts plus faibles lorsque $Re \ll 1$. En effet, si on se place dans des conditions où $Re=0,01$, c'est à dire lorsque l'erreur sur la condition d'adhérence est faible, l'accord entre les simulation numériques est bon même dans la zone où $r^* \simeq 1$.

1.1.2. Doublet horizontal

Pour cette configuration, les effets inertiels dans le fluide induisent encore un mouvement relatif entre deux particules, qui se traduit ici par un écartement horizontal progressif des particules. Ce comportement est encore attribué à la dissymétrie amont/aval du champ de vitesse et l'existence d'une composante non nulle de la vitesse dans le plan médian, tel que cela a été relevé au premier chapitre (§2.1.1 b).

Comme dans la sous-section précédente les résultats numériques obtenus dans cette configuration sont comparés à ceux de Vasseur et Cox [15]. La prédiction théorique concernant la vitesse de dérive horizontale U_l d'une des particules est donnée par la relation (1.90). Pour comparaison les résultats numériques et analytiques sont présentés sur la figure 4.3, dans le système d'axes suivant : $\frac{2U_l}{URe} = f(r^*)$.

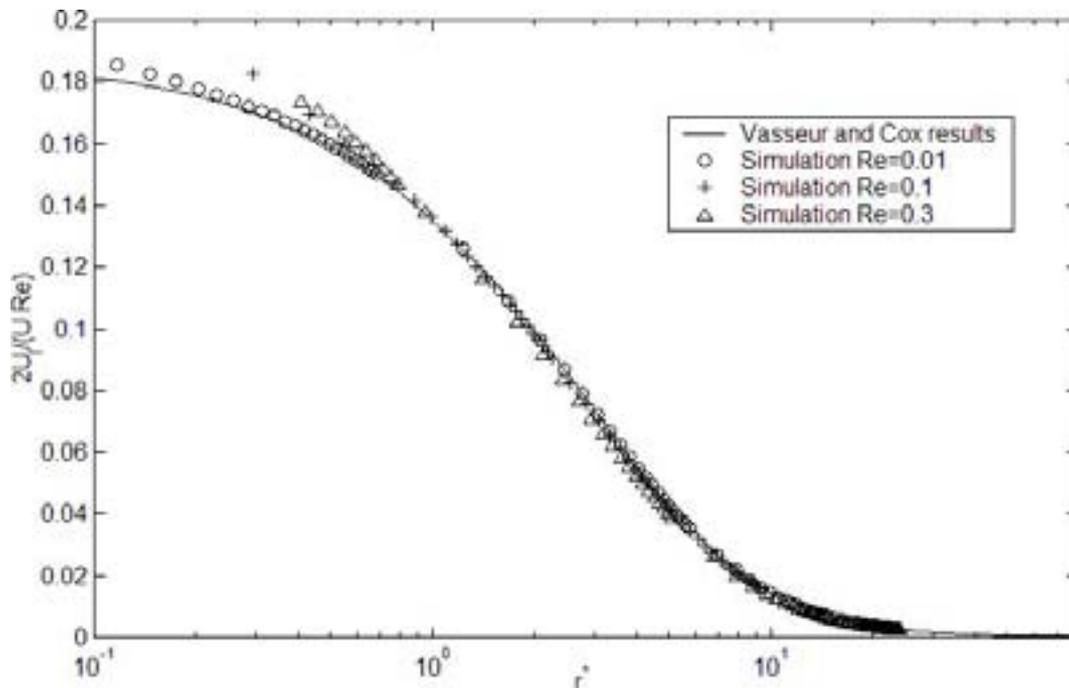


Figure 4.3 *Doublet horizontal: évolution de $\frac{2U_l}{URe}$ en fonction de r^* . Comparaison entre les résultats de simulations numériques et la prédiction théorique (1.90)*

Comme pour la configuration précédente l'accord entre simulations/calculs exacts est encore bon dans une gamme de distances telles que $r^* > 1$. Dans la zone où $r^* \simeq 1$ cet accord reste bon tant que Re reste faible. Sur la figure 4.4, où sont tracées les écarts

relatifs entre simulations/calculs exacts, on constate que ces écarts sont plus significatifs lorsque $r^* < 1$. Dans cette dernière zone les écarts constatés sont d'autant plus faibles que Re est faible. Là encore ils sont principalement attribués aux erreurs inhérentes à l'utilisation de la représentation d'Oseen. Si l'on effectue une simulation dans des conditions de Re faible, l'accord entre simulations/calculs exacts est bon, même lorsque $r^* < 1$.

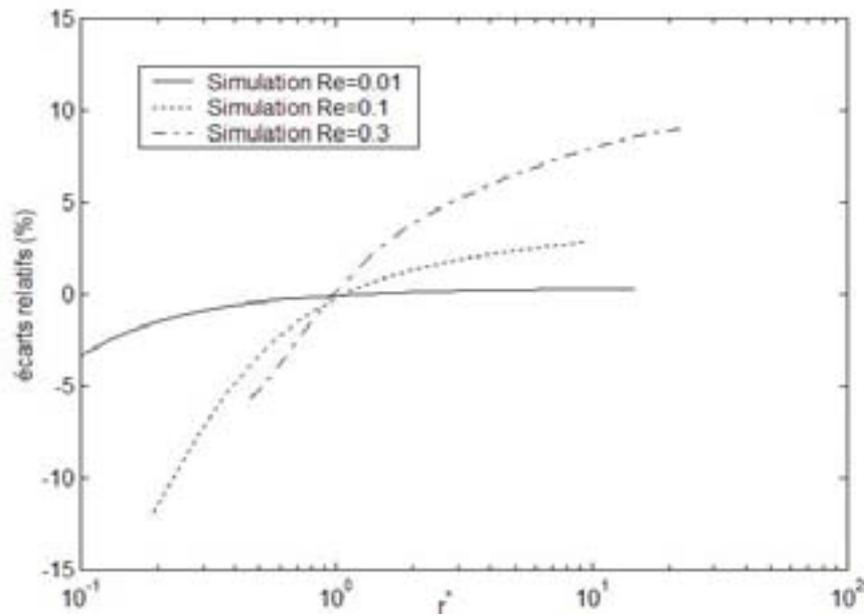


Figure 4.4 *Doublet horizontal*: évolution des écarts relatifs entre les résultats de simulations numériques et la prédiction théorique (1.90) en fonction de r^*

1.1.3. Doublet incliné

Une configuration plus générale, dont les deux précédentes constituent des cas limites, est celle d'un doublet incliné. Dans cette configuration on observe d'une part une dérive latérale des particules ; la sphère 2 située au dessus étant attirée dans le sillage de la sphère 1. D'autre part, la sphère 2 se rapproche de la sphère 1 sous l'effet de son sillage et le doublet tend vers une configuration où les sphères se retrouvent sur un même axe horizontal. Une fois le doublet de particules dans la configuration horizontale, sa destruction s'ensuit selon le processus décrit dans la sous-section précédente. Afin de visualiser ce comportement, les trajectoires des particules calculées numériquement sont montrées sur la figure 4.6. Comme nous le verrons plus loin, ces trajectoires sont différentes lorsqu'on tient compte de la présence de parois qui confinent l'écoulement.

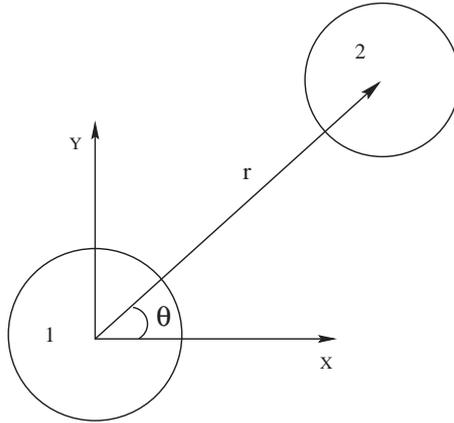


Figure 4.5 *Doublet initialement incliné d'un angle θ par rapport à \mathbf{Ox}*

Pour cette configuration et en milieu infini, il est encore possible de confronter les résultats de notre approche à ceux obtenus par Vasseur et Cox [15], en termes de vitesse de dérive U_l de la sphère 1 par exemple (cf figure 4.5). En effet, cette vitesse peut être exprimée à partir de la relation 1.89 et l'on a :

$$U_l = -U \frac{3a}{4} \frac{1}{r^*} \cos(\theta) [2 - (r^* + 2)e^{-\frac{1}{2}r^*(\sin(\theta)+1)}] \quad (4.1)$$

Les simulations numériques sont initialisées à $\theta > \frac{\pi}{4}$ et lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$ la vitesse de dérive calculée numériquement est comparée à la prédiction donnée par (4.1). Les résultats sont exprimés dans le système d'axes suivant : $\frac{2U_l}{URe} = f(r^*)$.

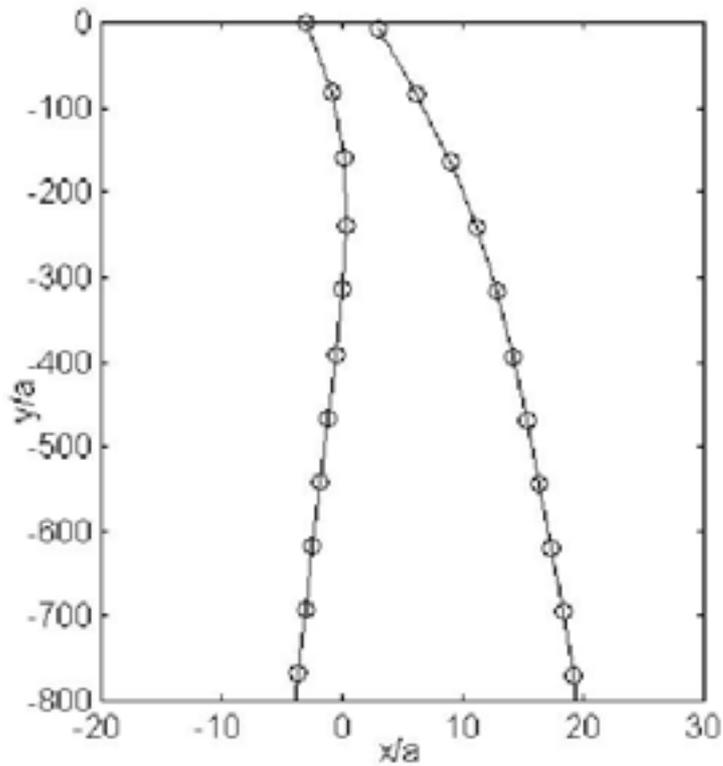


Figure 4.6 *Doublet incliné : trajectoires numériques des particules d'un doublet initialement incliné à $\frac{\pi}{4}$ par rapport à \mathbf{OX} en milieu infini*

La figure 4.7 représente les résultats numériques et ceux issus de (4.1) pour comparaison. La figure 4.8 quant à elle représente les écarts relatifs entre simulations/calculs exacts, nous pouvons faire les mêmes remarques que pour les deux configurations précédentes. On observe encore un bon accord lorsque $r^* > 1$ quelle que soit la valeur de Re et lorsque $r^* < 1$ l'accord est d'autant meilleur que Re est faible.

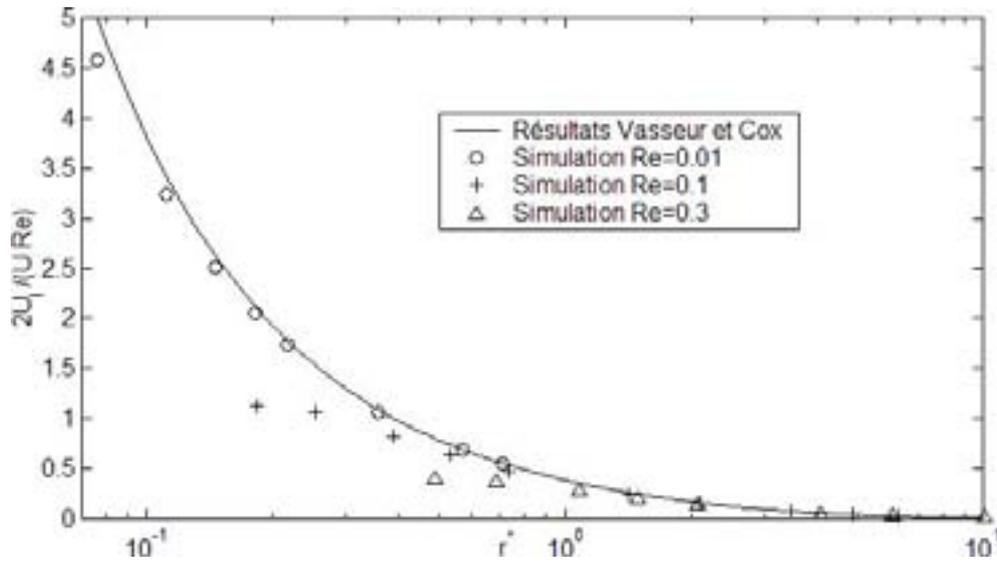


Figure 4.7 *Doublet incliné à $\frac{\pi}{4}$: évolution de $\frac{2U_1}{U Re}$ en fonction de r^* . Comparaison entre les résultats de simulations numériques et la prédiction théorique (4.1)*

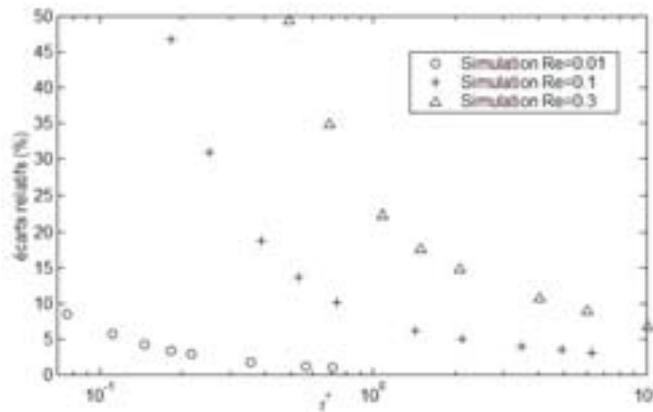


Figure 4.8 *Doublet incliné à $\frac{\pi}{4}$: évolution des écarts relatifs entre les résultats de simulations numériques et la prédiction théorique (4.1) en fonction de r^**

Conclusion partielle

Dans cette première section nous avons montré que la méthode utilisée et qui consiste à introduire les effets inertiels au travers de la différence nette ($\mathbf{v}^{\mathbf{O}} - \mathbf{v}^{\mathbf{S}}$) permet de reproduire qualitativement les interactions entre deux particules d'un doublet, quelle que soit son orientation par rapport au vecteur gravité [1, 42, 56]. D'un point de vue quantitatif notre approche numérique permet de retrouver les résultats analytiques de Vasseur et Cox [15], en particulier pour de faibles valeurs de Re et pour des distances de séparation telles que $r^* \geq 1$, ce qui devrait constituer le domaine de validité de la méthode proposée. Il est à noter que ce domaine de validité est cohérent avec celui de l'équation d'Oseen elle-même et dont la solution est utilisée dans nos simulations. En outre, même pour les valeurs de Re de l'ordre de 0,3 les écarts constatés sont tout au plus de l'ordre de 20% dans la gamme de distances rencontrées dans nos expériences.

1.2. Confrontations des résultats de simulations aux résultats expérimentaux

Même si les résultats de nos simulations semblent en accord avec les résultats de la littérature [15], il est important de les confronter à des résultats expérimentaux. Pour cela, nous reconsidérons les configurations simples vues précédemment.

1.2.1. Doublet vertical

Parmi les travaux expérimentaux de la littérature, peu d'entre eux abordent d'un point de vue quantitatif la confrontation expérimentation-théorie dans le cas de plusieurs particules en interaction. Les travaux de Happel *et al.* [41] ont montré que dans une large gamme de Re , les relations théoriques déduites des équations d'Oseen permettaient de reproduire qualitativement la sédimentation d'une sphère isolée ou d'un doublet de particule. Cependant, d'un point de vue quantitatif ils ont noté des écarts importants entre la théorie et les expériences.

Les principaux résultats rapportés dans la publication de Happel *et al.* [41] concernent la sédimentation d'une sphère isolée et celle d'un doublet vertical. Pour la sphère isolée, la relation (1.81) permet de reproduire qualitativement leurs expériences. En effet, dans toute la gamme de Re explorée ($0,2 < Re < 0,7$) ils retrouvent une variation linéaire du coefficient de traînée en fonction de Re . Cependant, ils relèvent que pour reproduire quantitativement leurs mesures, il est nécessaire de remplacer la constante théorique $\frac{3}{16}$, affectée au Re dans l'expression de la traînée, par une constante empirique $C_I=0,05$ dé-

terminée suite à un grand nombre de manipulations.

De la même façon, pour le doublet vertical ils utilisent une relation approximative, ignorant la dépendance vis-à-vis de la distance de séparation, pour évaluer l'écart de vitesse entre les deux sphères. Cette relation est la suivante :

$$\Delta U = \frac{3}{8} Re U_{St} \quad (4.2)$$

En comparant les prédictions de la relation (4.2) et leurs mesures, ils constatent encore que si qualitativement la dépendance linéaire est retrouvée, un bon accord quantitatif est observé lorsque la constante $\frac{3}{8}$ est remplacée par une constante empirique $C_{II}=0,11$.

Par ailleurs, Happel *et al.* font remarquer que la constante empirique C_{II} est très proche du double de celle mesurée pour une sphère seule (C_I). Cela confirme l'hypothèse conduisant à la relation (4.2), qui implique que dans cette configuration, la sphère basse du doublet subit une influence des effets inertiels deux fois plus importante que si elle était isolée.

En vue de confronter le modèle numérique à nos propres expériences et après avoir constaté que sans cette correction les résultats numériques surestiment l'influence des effets inertiels (cf. figure 4.9), il nous a semblé nécessaire de l'introduire dans notre outil de simulation. Pour cela, la relation (4.2) est réécrite sous la forme suivante :

$$\Delta U = C_{II} Re U_{St} = \frac{3}{8} Re^* U_{St}, \quad (4.3)$$

on déduit le paramètre $Re^* = \frac{C_{II}}{3/8} Re \simeq \frac{C_I}{3/16} Re$ qui est introduit au niveau de la **particule individuelle** et vient corriger son coefficient de traînée. Cette correction a pour principal intérêt de pouvoir être utilisée quelle que soit la configuration étudiée, même si *a priori* elle n'a été éprouvée que dans le cas d'un doublet vertical. Ce choix étant fait, il est difficile de justifier d'un point de vue théorique cette correction plutôt qu'une autre. C'est pourquoi nous abordons une discussion de sa validité dans l'annexe C.

Dans cette configuration de doublet vertical nous avons effectué de notre côté deux séries de manipulations pour deux valeurs initiales de la distance inter-centres. La première série correspond à des distances initiales de l'ordre de 12 rayons, qui nous situe vraisemblablement dans la même gamme de distances que Happel *et al.* [41]. La seconde série est réalisée pour une gamme de distances inférieures à 6a, ce qui nous permet d'encadrer le domaine de validité de la méthode employée. Ces deux séries d'expériences sont effectuées pour une valeur de $Re=0,25$.

Par ailleurs, pour cette configuration nous supposons négligeables les effets des parois situées à plus de 15 rayons de part et d'autre des particules. Si la présence des parois

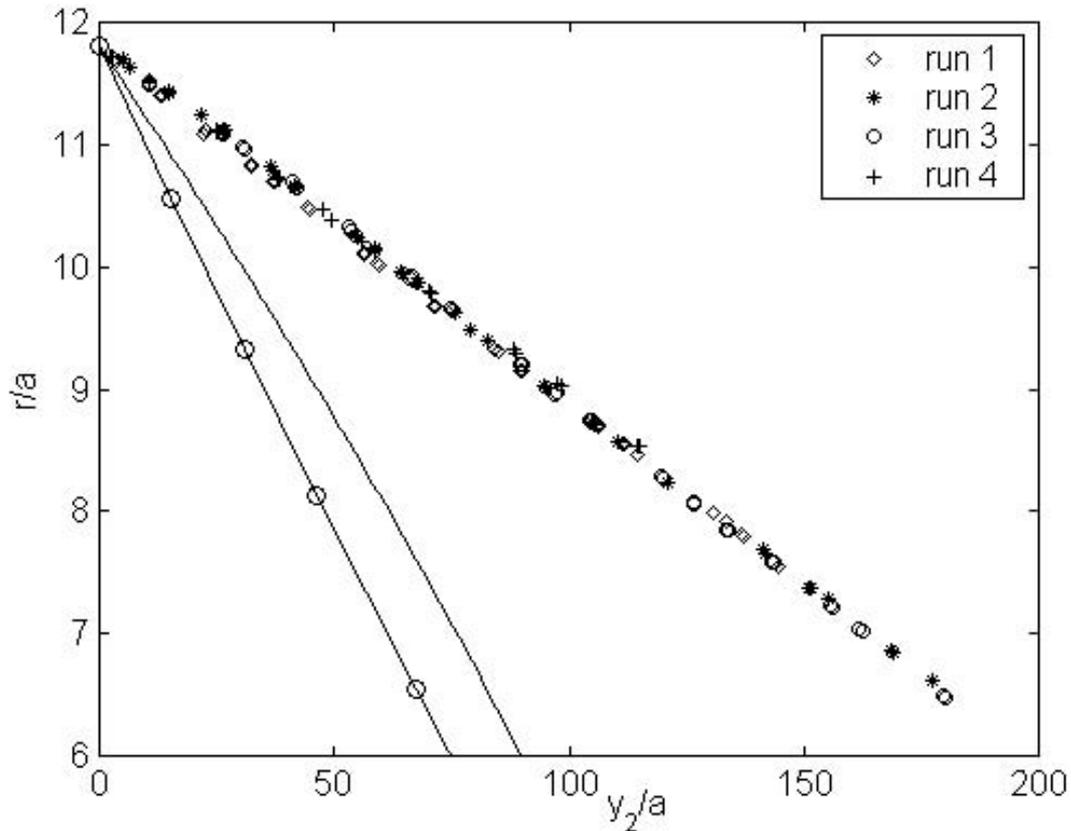


Figure 4.9 *Doublet vertical*: évolution de $\frac{r}{a}$ en fonction de la distance de sédimentation $\frac{y_2}{a}$, (—) simulation numérique sans correction empirique, (O) relation (4.2) et les symboles représentent les résultats expérimentaux

entraîne une dérive latérale des particules en régime inertiel, leur position centrée par rapport aux parois permet de s'affranchir des effets dus aux parois puisque les forces de dérive s'annulent mutuellement.

Nous représentons sur la figure 4.9 les résultats expérimentaux de la première série où les différents symboles représentent les points expérimentaux et où r est mesuré en fonction de la distance de sédimentation de la sphère 2; notée y_2 . Sur cette figure, la première observation qualitative est l'augmentation progressive bien que légère de la pente expérimentale locale. Ceci traduit le fait que plus la distance entre les sphères diminue, plus le rapprochement est rapide. Ce comportement également reproduit par simulation, est dû à l'augmentation de la vitesse de chaque particule lorsque r diminue, entraînant une

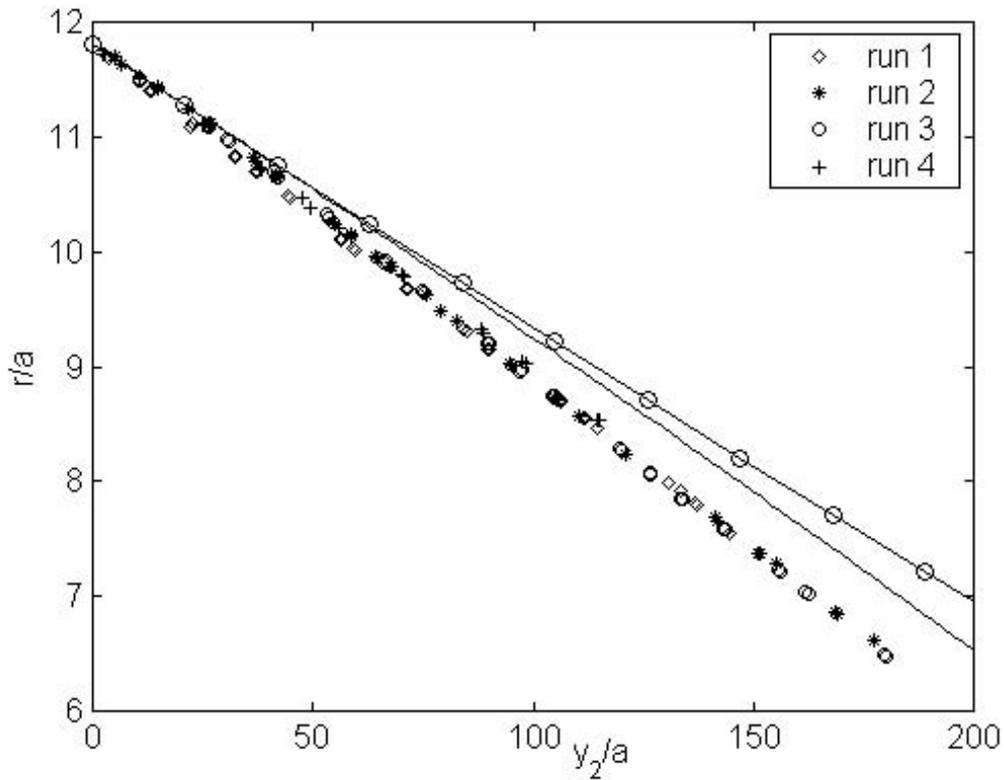


Figure 4.10 *Doublet vertical*: évolution de $\frac{r}{a}$ en fonction de $\frac{y_2}{a}$, (—) simulation numérique avec C_I , (---) relation 4.3 et les symboles représentent les résultats expérimentaux

augmentation de la valeur du nombre de Reynolds instantané et accentue donc le rapprochement des particules.

D'un point de vue quantitatif, nous comparons sur la figure 4.10 les résultats expérimentaux précédents (symboles) aux résultats des simulations tenant compte de la correction empirique. Sur cette même figure nous traçons également les prédictions de la relation (4.3). Cette figure montre alors que les résultats numériques incluant le facteur correctif C_I reproduisent plus fidèlement l'expérience. Par ailleurs, les résultats de la simulation telle qu'elle est modifiée sont plus représentatifs des expériences que ne l'est la relation approximative (4.3), du fait de la prise en compte des variations de la distance de séparation. En effet, alors que la courbe représentant (4.3) est quasi-linéaire dans cette gamme de distances r , la simulation reproduit au moins qualitativement la variation progressive de la pente locale expérimentalement observée. La correction empirique apportée, permet quant à elle de reproduire convenablement l'expérience d'un point de vue quantitatif.

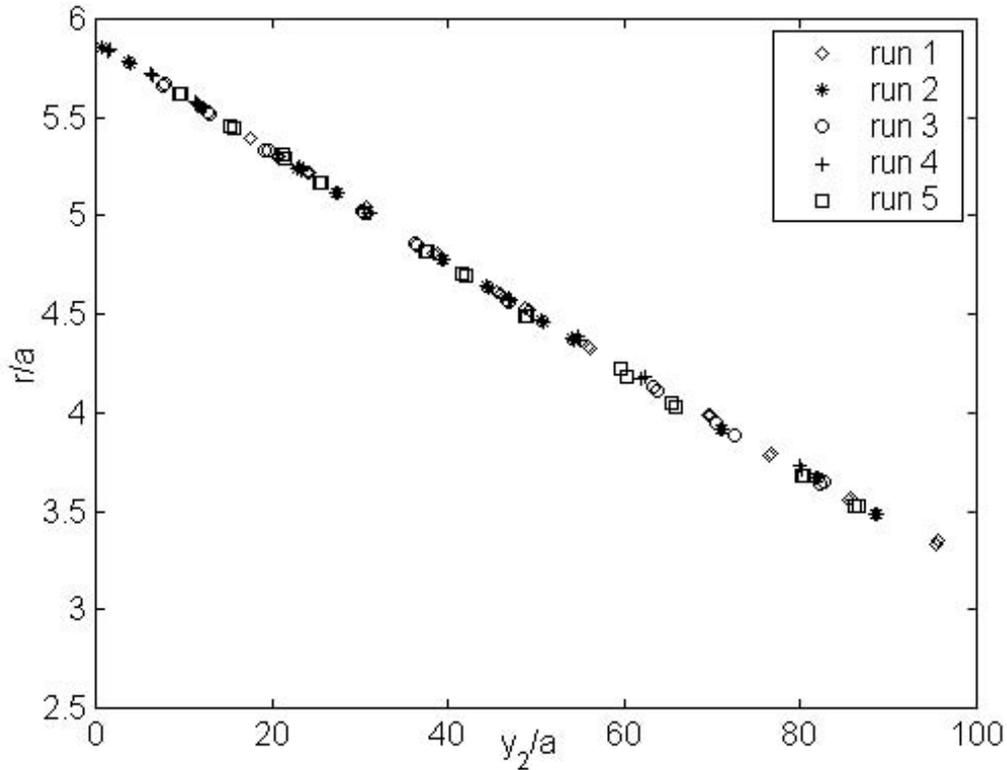


Figure 4.11 *Doublet vertical: résultats expérimentaux montrant l'évolution de $\frac{r}{a}$ en fonction de $\frac{y_2}{a}$ pour des valeurs faibles de $\frac{r}{a}$*

Une seconde série d'expériences pour la même configuration a été réalisée pour de plus faibles distances de séparation. Les résultats correspondants sont montrés sur la figure 4.11 où les symboles représentent les données expérimentales. Pour cette gamme de distances on peut distinguer deux types de comportements :

- lorsque les sphères ne sont pas trop proches, la distance inter-centres semble décroître linéairement avec la distance de sédimentation.
- puis, pour une valeur de r d'environ $4a$, un décrochage de la linéarité plus significatif que pour la gamme de distances précédente est observé, indiquant comme attendu l'existence d'une asymptote horizontale pour des distances de séparation très faibles.

A cette distance ($r \simeq 4a$), il est peu probable que l'influence des forces de lubrification soit l'effet dominant à l'origine de ce comportement. L'explication de ce comportement serait que proche l'une de l'autre les particules se trouvent dans une zone où l'écoulement n'est plus correctement décrit par la solution d'Oseen.

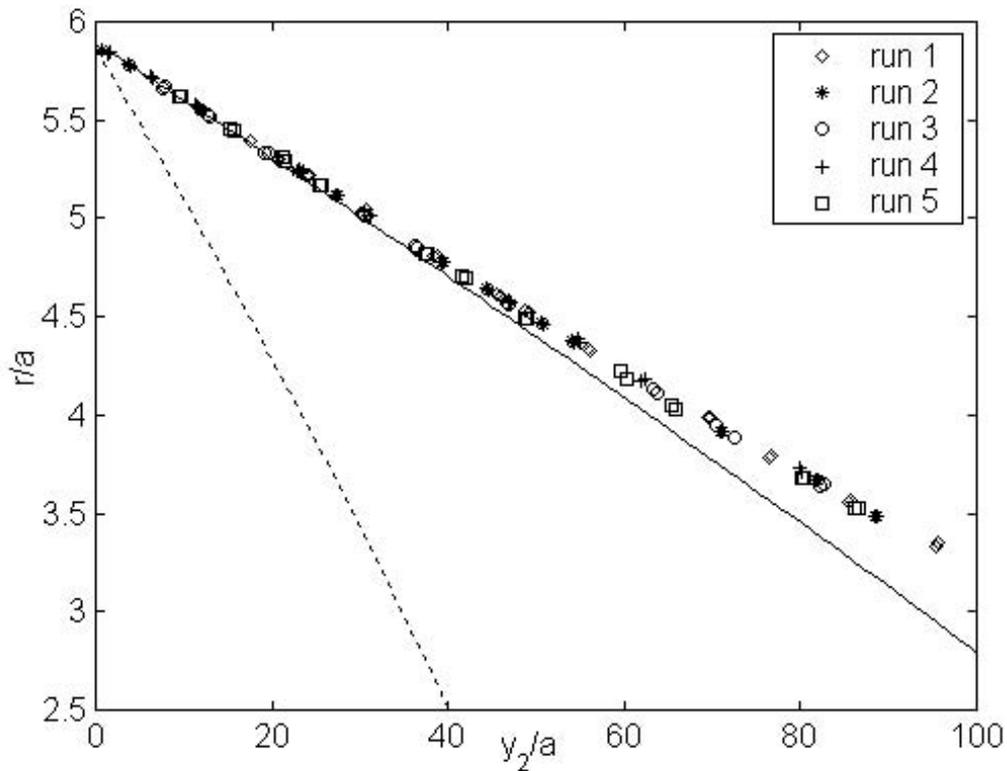


Figure 4.12 *Doublet vertical*: évolution de $\frac{r}{a}$ en fonction de $\frac{y_2}{a}$, (—) simulation numérique avec C_I , (---) simulation numérique sans C_I et les symboles représentent les résultats expérimentaux

Pour comparer les résultats expérimentaux à ceux de la simulation, les résultats de la figure 4.11 sont repris dans la figure 4.12. On constate encore une fois que la simulation corrigée est à même de reproduire quantitativement, avec un accord acceptable, les expériences lorsque les sphères ne sont pas trop proches. Puis, pour des valeurs de $r < 4a$ les écarts sont plus importants du fait que la solution d'Oseen ne permet pas de représenter précisément le champ de vitesse lorsque $\frac{r}{a} < \frac{1}{Re}$. Ce dernier point confirme que lorsque les particules sont trop proches la méthode proposée n'est plus à même de reproduire qualitativement et quantitativement les résultats expérimentaux. Pour un Re donné, cette méthode se limite donc à la description des interactions hydrodynamiques lorsque les distances inter-particules ne sont pas trop faibles.

Cette première confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux montre

d'une part que si d'un point de vue qualitatif les simulations numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux, il existe un écart quantitatif important entre ces résultats. D'autre part, la confrontation de nos résultats numériques et expérimentaux avec les travaux de Happel *et al.* [41] montre que nous retrouvons un écart similaire entre les prédictions théoriques ou numériques et les expérimentations dans la gamme de distances inter-centres cohérente avec les hypothèses d'Oseen. Cela nous conduit, comme d'autres auteurs avant nous, à apporter une correction empirique au niveau de la particule individuelle. Une fois notre modèle corrigé, nous avons montré que l'outil de simulation permet de reproduire quantitativement et de façon satisfaisante les résultats expérimentaux. Par ailleurs, nous rappelons que la correction empirique proposée par Happel *et al.* [41] correspond à la configuration d'un doublet vertical de particules. Dans la sous-section suivante, nous désirons éprouver le modèle corrigé dans une configuration de doublet horizontal.

1.2.2. Doublet horizontal

Nous avons vu dans ce chapitre (cf. Chapitre 4 §1.1.2.) que le modèle numérique proposé rend compte d'un point de vue qualitatif du comportement d'un doublet horizontal [41, 42, 56]. Cependant, les écarts rencontrés entre les approches prédictives et les expériences dans la configuration de doublet vertical semblent indiquer qu'une correction doit être apportée pour décrire quantitativement le processus. La confrontation de nos prédictions numériques à nos résultats expérimentaux dans cette nouvelle configuration nous permet non seulement d'éprouver notre outil numérique mais aussi de conforter l'utilisation de la correction phénoménologique proposée dans la sous-section précédente.

Comme pour le cas du doublet vertical nous avons effectué, pour le cas présent, plusieurs séries de manipulations afin de mesurer l'écartement progressif des particules au cours de la sédimentation, pour $Re=0,22$. Une première série de manipulations concerne une gamme de distances inter-centres se situant entre $4,5a$ et $6,5a$ (cf. figure 4.13). La seconde série de manipulations (cf. figure 4.15), concerne une gamme de distances r comprises entre $6,5a$ et $8,5a$. Dans cette configuration, les parois situées à $\pm 15a$ de part et d'autre de l'axe central de la cuve ont naturellement une influence qui se fait sentir à mesure que r augmente. En effet, contrairement au doublet vertical, chaque sphère repousse sa voisine perpendiculairement aux parois et se rapprochent donc de celles-ci. Cette influence reste cependant faible devant les effets d'interactions entre particules tant que la distance particule-paroi est supérieure à $11a$. A partir de cette distance il apparaît que l'effet répulsif des parois contraint les particules à s'écarter moins rapidement [15, 23].

Sur la figure 4.13 nous reportons les résultats expérimentaux (symboles) de la première série de manipulations lors de laquelle l'évolution de la distance r est mesurée en fonction de la distance de sédimentation du doublet ; notée y . On remarque sur cette figure que la pente locale diminue progressivement au cours de la sédimentation. Ce comportement est également retrouvé par le calcul, ce qui montre encore une fois que, même en l'absence de la correction empirique l'outil numérique développé permet de reproduire qualitativement les comportements expérimentalement observés.

Sur la figure 4.14 les résultats expérimentaux sont comparés aux résultats des simulations tenant compte de la correction empirique. Nous pouvons ainsi remarquer que d'un point de vue quantitatif un bon accord existe entre la simulation avec correction empirique et l'expérience. Cela laisse à penser que la correction phénoménologique est encore nécessaire dans la configuration présente.

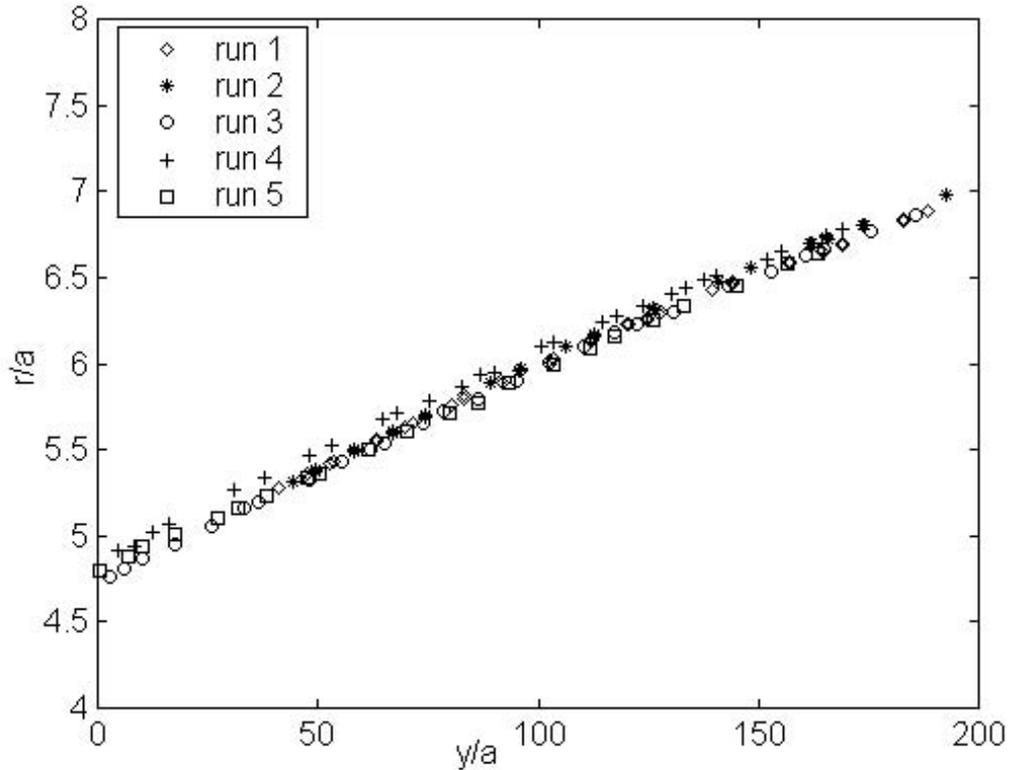


Figure 4.13 *Doublet horizontal: résultats expérimentaux montrant l'évolution de $\frac{r}{a}$ en fonction de $\frac{y}{a}$ pour des valeurs de $\frac{r}{a}$ faibles*

La figure 4.15 quant à elle présente les résultats expérimentaux de la seconde série d'expérimentations pour : $6,5 < \frac{r}{a} < 8,5$. Dans cette gamme de distances de séparation particule-particule, étant donnée la gamme de distances particule-parois, on observe deux types de comportements :

- lorsque $\frac{r}{a} < 7,5$ environ, nous observons le même comportement que pour la première série ; à savoir une diminution progressive de la pente locale au fur et à mesure que la distance de sédimentation y augmente.
- lorsque $\frac{r}{a} \geq 7,5$ environ, nous constatons une nette diminution de la pente locale.

Tout se passe alors comme si la répulsion des particules était contrebalancée par un autre effet s'opposant à leur éloignement progressif. En effet, nous pouvons relever sur la figure 4.16, où on compare les résultats de simulations aux résultats expérimentaux, que ce comportement n'est pas reproduit numériquement. Une explication possible de ces différences

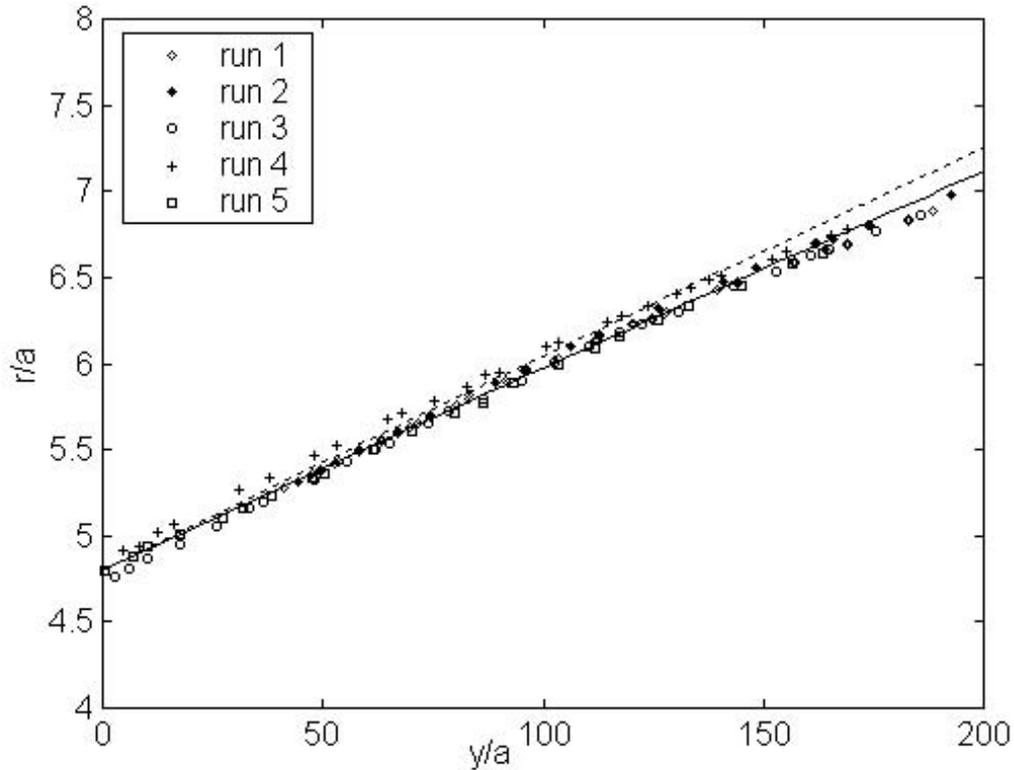


Figure 4.14 *Doublet horizontal: évolution de $\frac{r}{a}$ en fonction de $\frac{y}{a}$, (—) simulation numérique en milieu confiné avec C_I , (---) simulation numérique en milieu infini avec C_I et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

concerne les effets répulsifs (dérive latérale) subits par une particule en translation parallèlement à une paroi [15, 23]. Les travaux de Vasseur et Cox [15] par exemple, permettent de quantifier l'influence de ces effets répulsifs dans différentes configurations (une sphère et deux parois; deux sphères et une paroi...). Même si la méthode des développements asymptotiques raccordés peut être étendue à l'étude de la configuration présente, elle nécessite des développements très complexes et ne permet vraisemblablement pas de décrire les interactions entre grand nombre de particules et deux parois.

Dans cette section, la confrontation des résultats expérimentaux avec les résultats des simulations numériques permet de dégager les conclusions suivantes :

- d'une part les résultats des simulations incluant ou non la correction empirique sont en accord qualitatif avec les observations expérimentales.
- d'autre part, la correction phénoménologique déjà employée dans la configuration pré-

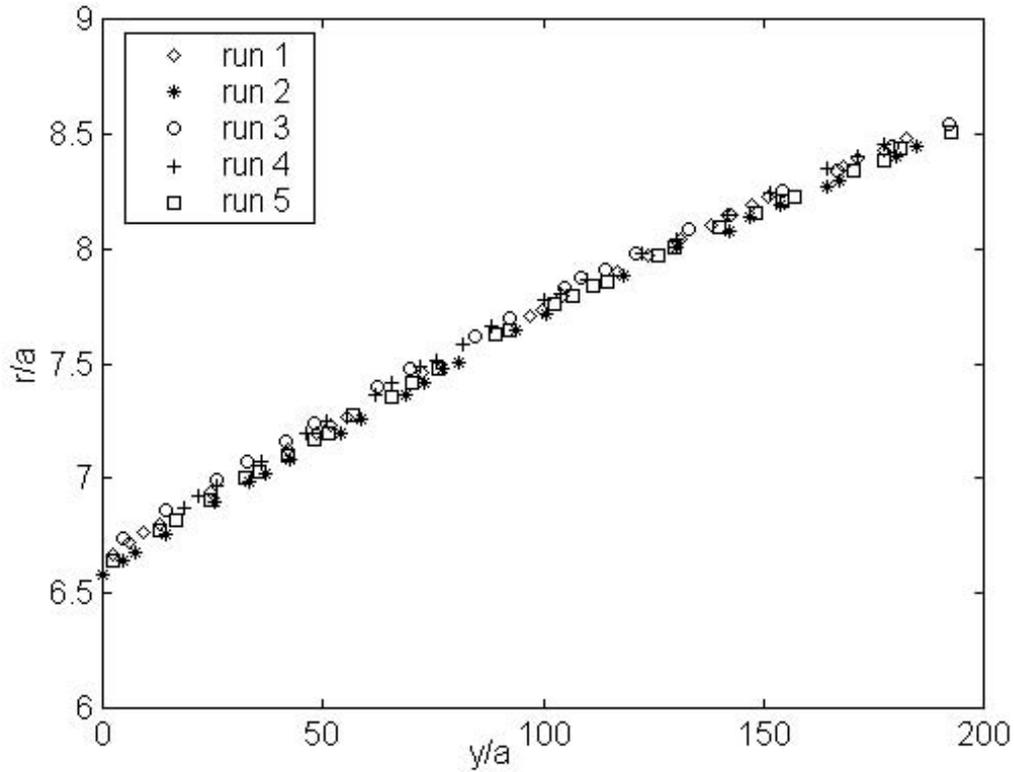


Figure 4.15 *Doublet horizontal: résultats expérimentaux montrant l'évolution de $\frac{r}{a}$ en fonction de $\frac{y}{a}$ pour des valeurs de $\frac{r}{a}$ intermédiaires*

cédente (doublet vertical) permet, dans cette nouvelle disposition, de représenter quantitativement le comportement du doublet tant que les particules sont suffisamment loin des parois. Cependant, pour de faibles séparations particule-paroi, il paraît nécessaire de tenir également compte de l'influence de l'inertie du fluide pour représenter notamment les effets répulsifs des parois. Néanmoins, dans la gamme de distances particule-parois impliquées dans nos expériences pour la présente configuration, leur influence devrait rester limitée.

Par ailleurs, le bon accord quantitatif entre le résultat issu de la simulation incluant la correction empirique permet d'escompter que cette correction phénoménologique reste valide quel que soit l'angle d'inclinaison $\theta = (\mathbf{r}, \widehat{\mathbf{OX}})$ du doublet par rapport à l'horizontal. Ce point particulier fait l'objet de la sous-section suivante, dans laquelle est étudié le cas d'un doublet de particules ayant initialement un angle d'inclinaison de $\theta = \frac{\pi}{4}$.

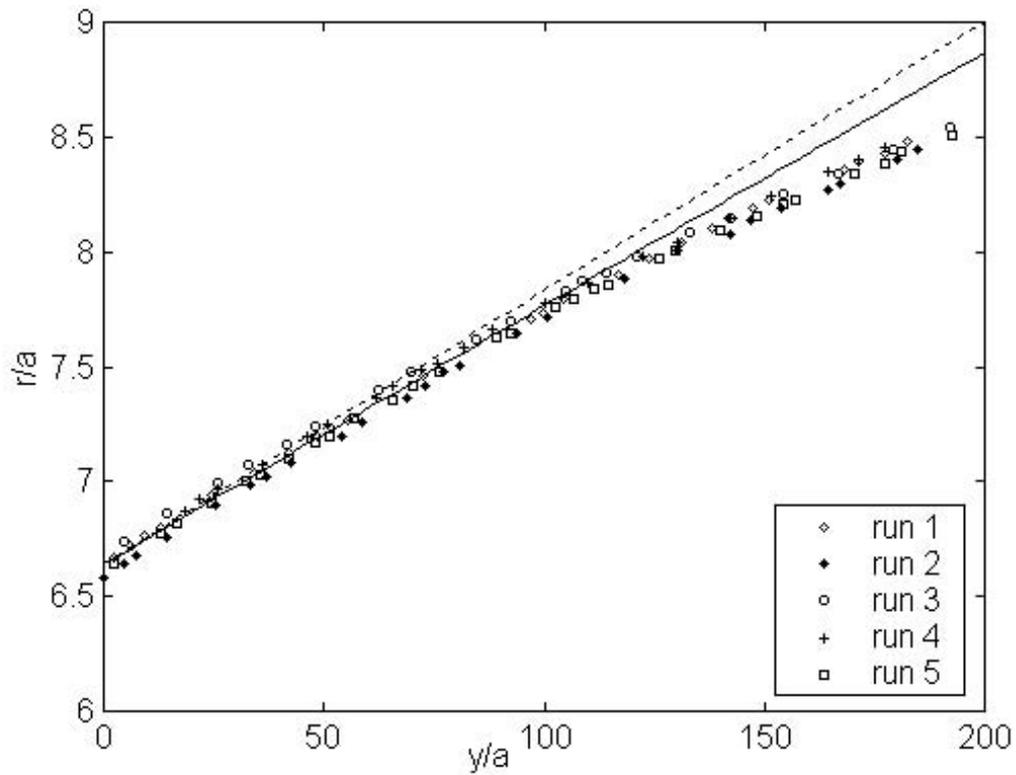


Figure 4.16 *Doublet horizontal: évolution de $\frac{r}{a}$ en fonction de $\frac{y}{a}$, (—) simulation numérique en milieu confiné avec C_I , (---) simulation numérique en milieu infini avec C_I et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

1.2.3. Doublet incliné

Cette configuration a déjà été étudiée expérimentalement par Kumagai [42] mais la confrontation de ses résultats expérimentaux à son approche numérique reste uniquement qualitative. Son travail montre néanmoins que la méthode de réflexion telle qu'elle a été sommairement décrite dans le premier chapitre, peut rendre compte au moins qualitativement du comportement d'un doublet incliné en régime inertiel. En ce qui nous concerne, nous utilisons cette nouvelle configuration afin de s'assurer que la correction phénoménologique utilisée est réellement valide quelle que soit la position relative d'une particule par rapport à l'autre.

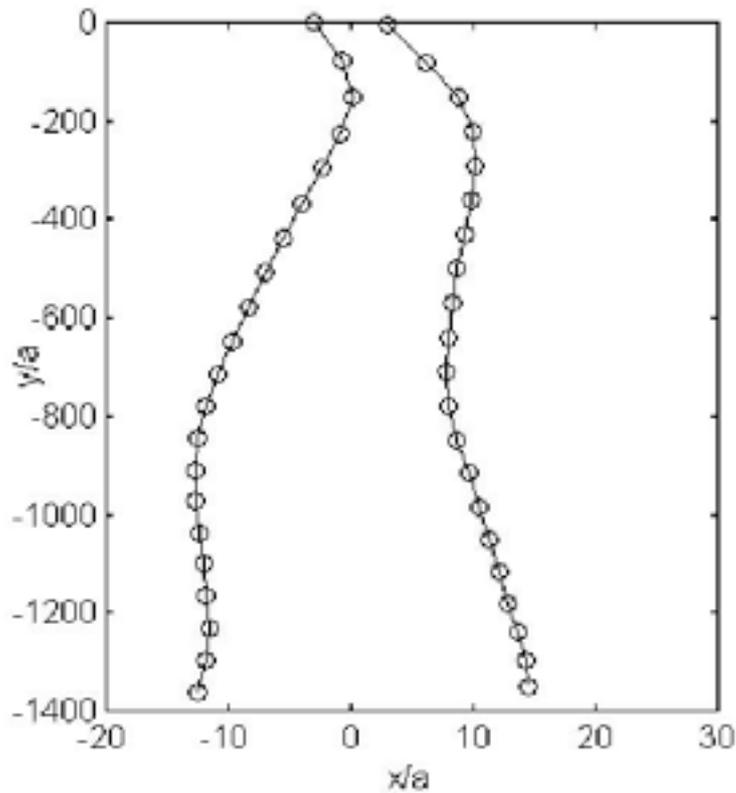


Figure 4.17 *Doublet incliné : influence du confinement sur les trajectoires simulées d'un doublet initialement incliné à $\frac{\pi}{4}$ par rapport à \mathbf{OX}*

En présence de parois, la phénoménologie du problème est sensiblement différente de celle

présentée dans la sous-section 1.1.3. de ce chapitre, qui correspond au cas du milieu infini. Considérons un doublet incliné (cf. figure 4.5) et initialement centré par rapport aux parois. Nous avons vu précédemment que dans une première phase les particules migrent latéralement, se rapprochant alors de l'une des parois. De ce fait, lorsque le doublet de particules se retrouve sur l'axe horizontal, il n'est plus centré. Alors, une des particules étant plus ralentie que l'autre, la sphère la plus éloignée de la paroi passe devant l'autre. Ainsi le doublet de particules incliné nouvellement formé migre de la même manière vers l'autre paroi et ainsi de suite. Ce comportement est montré en figure 4.17 où sont tracées les trajectoires des particules. On peut également remarquer sur cette figure que la distance entre les particules augmente durant le processus.

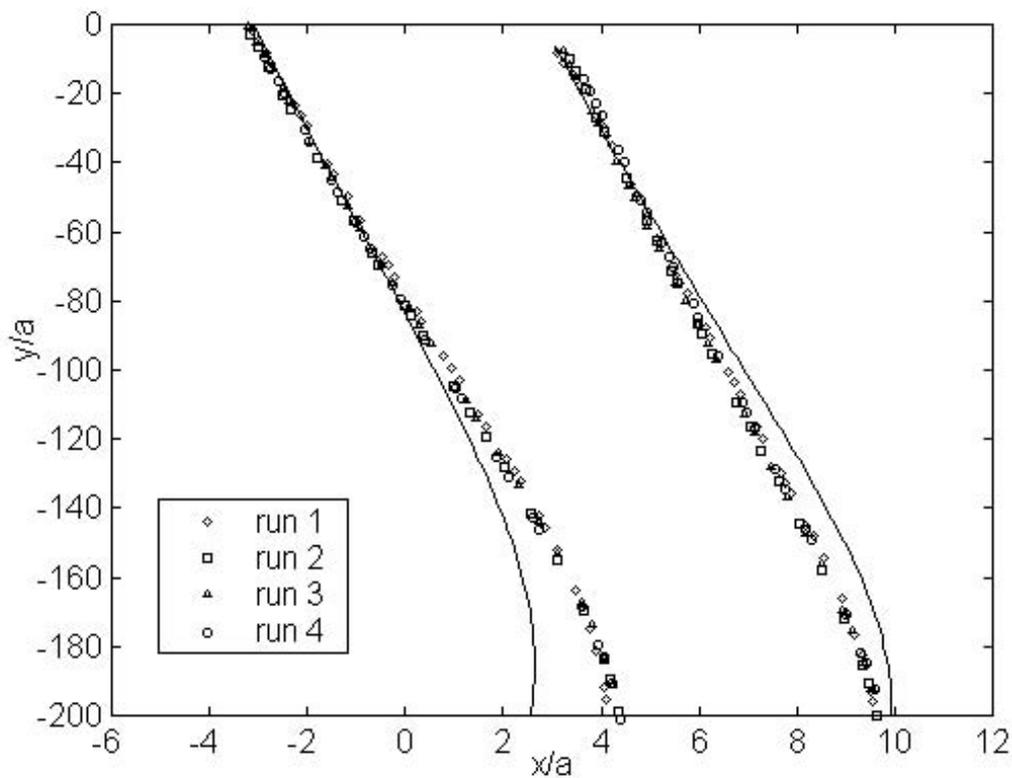


Figure 4.18 *Doublet incliné : trajectoires des particules d'un doublet initialement incliné à $\frac{\pi}{4}$ par rapport à Ox , (—) simulation numérique avec C_1 et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

Pour cette configuration, nous avons également effectué plusieurs expériences ($Re=0.22$)

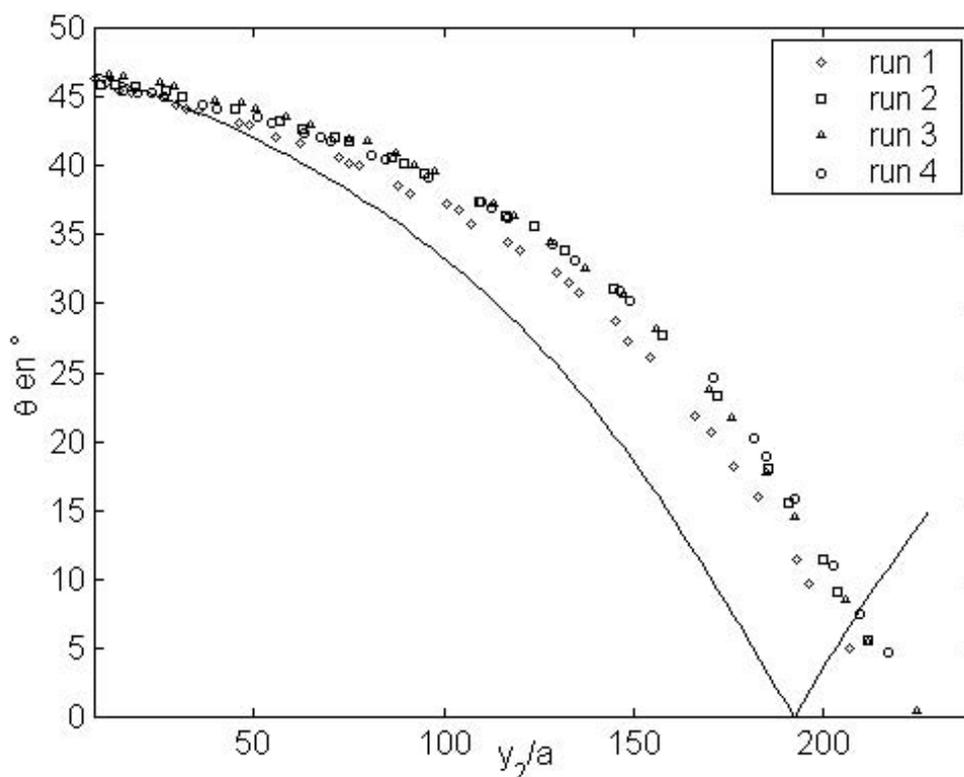


Figure 4.19 *Doublet incliné*: évolution de l'angle θ au cours de la sédimentation, (—) simulation numérique avec C_1 et les symboles représentent les résultats expérimentaux

et les trajectoires obtenues (symboles) sont données en figure 4.18 où sont également reportés les résultats issus des simulations avec correction empirique.

On peut noter que dans une première phase (pour $-100a < y < 0$) les trajectoires sont quasi-rectilignes et les particules migrent vers la paroi de droite faisant de ce cas la configuration la plus défavorable en ce qui concerne les effets répulsifs dus aux parois. Rappelons que l'influence des parois en régime inertiel n'est pas prise en compte dans ce travail. Dans cette première phase, les trajectoires calculées numériquement en incluant la correction (en trait plein) sont en bon accord avec les trajectoires expérimentales (cf. figure 4.18). Cependant, dans la gamme $-200a < y < -100a$ l'accord entre les résultats numériques et l'expérience est beaucoup moins bon même si les différences observées sur les trajectoires n'excèdent pas $2a$. Ces différences sont ici à nouveau attribuées aux effets répulsifs occasionnés par la proximité de la paroi de droite. En fin de sédimentation, la distance entre cette paroi et la sphère 1 qui est la plus proche, est de l'ordre de $5a$. A cette distance, la paroi de droite semble repousser cette sphère ce qui tend, dans un premier temps, à réduire

davantage la distance entre les particules selon l'axe **OX**. La dérive latérale de la sphère 1 est ralentie et de ce fait le basculement du doublet s'en trouve retardé. Ainsi, lorsque les sphères se retrouvent sur l'axe horizontal la distance r est plus faible. Ceci explique en partie les différences observées sur la figure 4.19 sur laquelle est reportée l'évolution de l'angle θ au cours de la sédimentation. En effet, il est bien visible que du point de vue de la simulation, le basculement du doublet a lieu plus tôt que ne le montre l'expérience.

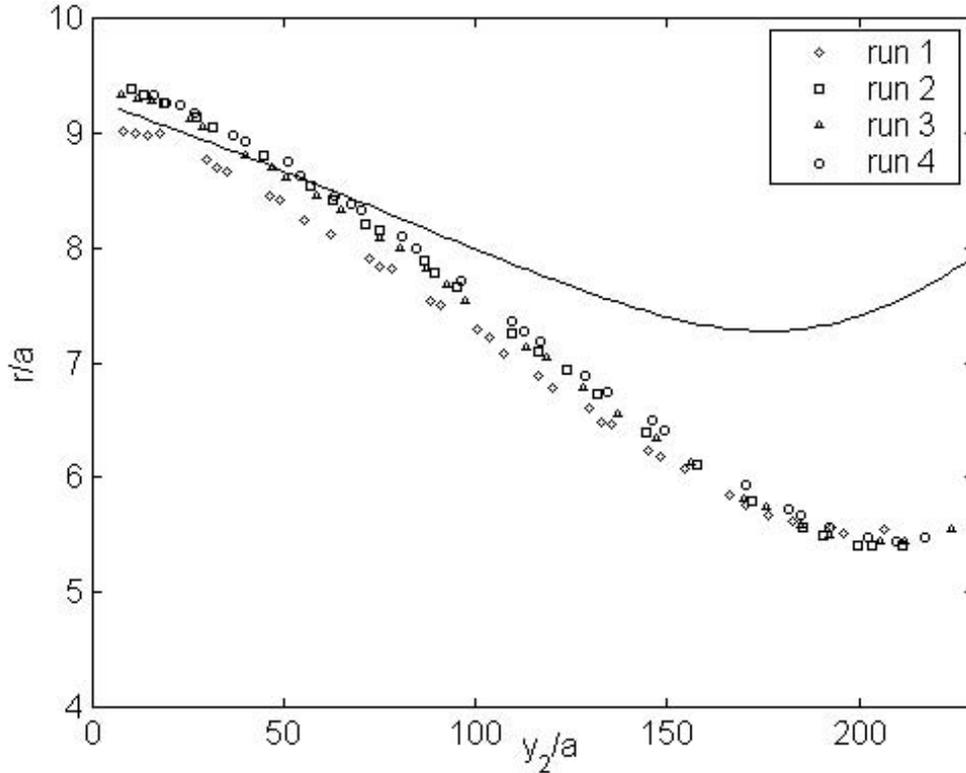


Figure 4.20 *Doublet incliné : évolution de la distance inter-centres $\frac{r}{a}$ en fonction de la distance de sédimentation $\frac{y_2}{a}$, (—) simulation numérique avec C_1 et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

Sur la figure 4.20, qui représente quant à elle l'évolution de la distance r au cours de la sédimentation, on peut observer qu'après environ $200a$ de sédimentation et pour les mêmes raisons que précédemment, la distance de séparation mesurée expérimentalement est beaucoup plus faible que celle calculée numériquement ($2,5a$ d'écart environ).

Cependant, globalement l'accord qualitatif entre simulation et expérience est encore une fois très satisfaisant. En outre, par rapport au résultat de la simulation sans facteur cor-

rectif on peut relever que l'accord quantitatif simulation/expérimentation est nettement meilleur lorsque la correction empirique est utilisée, indiquant la validité de cette correction phénoménologique dans les gammes de distances inter-centres et de nombres de Reynolds considérés. Précisons néanmoins que ce cas est défavorable en ce qui concerne l'influence des parois du fait des faibles distances paroi-particules mises en jeu. De plus, pour des distances aux parois encore plus faibles il faut s'attendre à une augmentation importante de cette influence. Nous sommes conscients qu'une prise en compte des effets de parois en régime inertiel est nécessaire pour une meilleure représentation des évidences expérimentales.

Conclusion partielle

Nous avons pu montrer dans cette première partie que l'outil de simulation mis en place pour ce travail permet de représenter qualitativement le comportement de doublets de particules sédimentant en régime inertiel dans trois configurations typiques. De plus, pour reproduire quantitativement les expériences nous avons montré qu'il était possible d'apporter à la modélisation une correction phénoménologique unique quelle que soit la configuration initiale du doublet étudiée. Rappelons que cette correction est effectuée sur la base d'une constante empirique tirée de travaux expérimentaux de la littérature. Dans toutes les configurations étudiées ici nous avons mis en évidence un accord globalement satisfaisant entre les simulations mettant en jeu cette correction et nos propres résultats expérimentaux, pour des distances de séparation r typiquement de $3a < r < 20a$ et pour $Re \simeq 0,25$.

Cependant, les expériences menées ont permis de constater l'influence des effets répulsifs dus aux parois qui devient nette lorsque la distance de séparation particule-paroi est plus faible que la distance de séparation particule-particule. Dans ces conditions les écarts constatés entre les simulations numériques, ne tenant pas compte de la force de dérive engendrée par la présence de chaque paroi, et les résultats expérimentaux sont plus importants.

Après avoir éprouvé notre outil numérique dans des configurations à deux particules, il reste à vérifier si cette méthode est adaptée à la représentation des interactions hydrodynamiques lorsque qu'un plus grand nombre de particules interagissent. Ceci fait l'objet de la partie suivante.

2. Configurations à plus grand nombre de particules

Cette partie porte sur l'étude de deux configurations similaires à celles rencontrées dans la littérature (cf. chapitre 2 §2.3.2.1. et §2.3.3.1.). La première configuration proposée est celle d'un triplet où les trois particules sont disposées irrégulièrement sur un axe horizontal. Puis, nous nous proposons d'étudier une configuration symétrique de quatre particules alignées horizontalement. Ces configurations sont étudiées dans le but d'éprouver l'outil numérique employé et de montrer l'intérêt de son utilisation lorsqu'on étudie la sédimentation de n particules.

2.1. Triplet horizontal

2.1.1. Description du cas traité

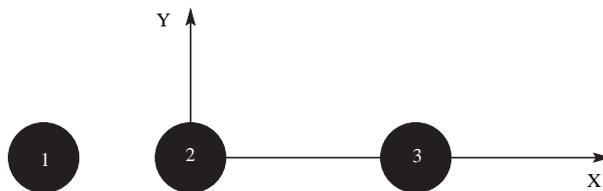


Figure 4.21 *Triplet horizontal*

La première configuration étudiée est celle d'un triplet de particules initialement disposé sur un axe horizontal et telle que les positions des particules situées aux extrémités sont asymétriques par rapport à la sphère centrale. Cette configuration a déjà été considérée par le passé d'un point de vue numérique sous les hypothèses de Stokes [5, 11]. Nous reconsidérons ce cas ici pour montrer les différences notables qui existent, même pour un régime faible ($Re=0,25$), lorsque les effets inertiels sont pris en compte.

Sur la figure 4.22 sont reportées les trajectoires obtenues expérimentalement (symboles) pour quatre expériences indépendantes où les positions initiales sont les suivantes :

- sphère 1 : $x_1=-7,72a$; $y_1=0$
- sphère 2 : $x_2=0$; $y_2=-1a$
- sphère 3 : $x_3=5,37a$; $y_3=-0,7a$

Cette configuration dissymétrique est relativement favorable du point de vue expérimental (cf. Annexe B). La superposition des trajectoires expérimentales permet d'apprécier la sensibilité attendue vis-à-vis des conditions initiales, en particulier pour des distances

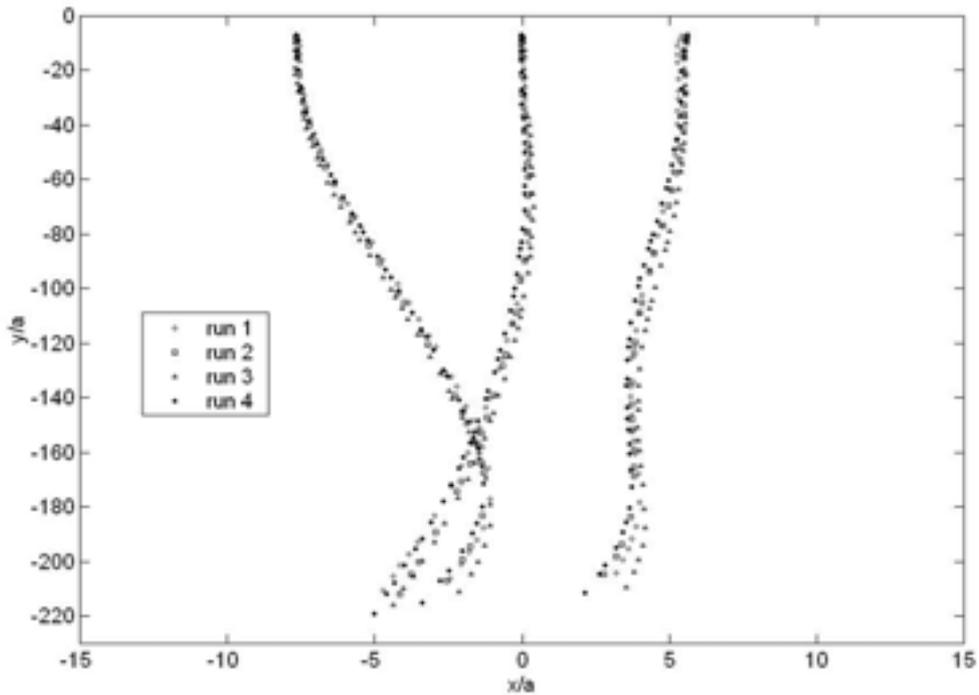


Figure 4.22 *Triplet horizontal: trajectoires expérimentales des particules pour $Re=0,25$*

de sédimentation importantes. Le motif est très similaire d'une manipulation à l'autre, montrant alors une reproductibilité acceptable.

Des simulations non données ici ont montré qu'en l'absence du facteur correctif, les trajectoires diffèrent notablement des trajectoires obtenues expérimentalement. La surestimation des effets répulsifs entre particules en l'absence de la correction empirique empêche notamment tout croisement des trajectoires des particules notées 1 et 2 (cf. figure 4.21). Par la suite nous envisageons une configuration symétrique pour laquelle la dépendance des trajectoires vis-à-vis des conditions initiales est plus importante (cf. Annexe B).

2.1.2. Confrontation des résultats de simulation aux résultats expérimentaux

Sur la figure 4.23, nous reportons les trajectoires obtenues numériquement en utilisant la correction empirique. Sur cette même figure, les résultats obtenus sous les hypothèses de Stokes sont représentés par des points successifs pour comparaison. Il est à remarquer en premier lieu que comparé à la simulation effectuée sous les hypothèses de Stokes, le motif expérimental est plus fidèlement reproduit lorsqu'on tient compte des effets inertiels. Sous l'effet du sillage de la sphère 2, la sphère 1 se rapproche de cette dernière,

modifiant considérablement les trajectoires des particules pour des distances de sédimentation importantes. Les différences entre les résultats expérimentaux et le résultat issu de la simulation incluant le facteur correctif sont au maximum de l'ordre de 2 à 3 rayons de particules. De notre point de vue, ces différences sont dues à la mauvaise représentation des effets de parois. En effet, la figure 4.24 où nous comparons la simulation précédente à celle effectuée en milieu infini et en incluant le facteur C_I , montre que dans une première phase la trajectoire de la sphère 2 est en bon accord avec le résultat expérimental. Tout se passe comme si cette sphère ne subissait pas l'influence des parois telles qu'elles sont représentées dans la simulation. Il semble que les sphères situées de part et d'autre de la sphère 2 font écran à ces interactions dans les premiers instants. Cependant, sans tenir compte des parois on voit clairement que la trajectoire de la sphère 1 est rapidement différente, ce qui occasionne une divergence des trajectoires des sphères 1 et 2 par rapport à l'expérience. Par ailleurs, la sphère 3 étant assez loin des parois et s'éloignant de la paroi la plus proche, elle se trouve faiblement affectée par leur présence.

Sur les figures D.1, D.2 et D.3, données en annexe D, sont tracées les évolutions des distances relatives entre particules en fonction de la distance de sédimentation de la sphère 1 ; y_1 . On peut faire sur ces figures les mêmes remarques que précédemment en observant encore une fois un bon accord qualitatif entre les résultats de la simulation et les résultats expérimentaux. De plus, la correction phénoménologique proposée permet de reproduire quantitativement la sédimentation des particules avec des différences qui sont encore de l'ordre du rayon et comparables à l'épaisseur du nuage de points expérimental.

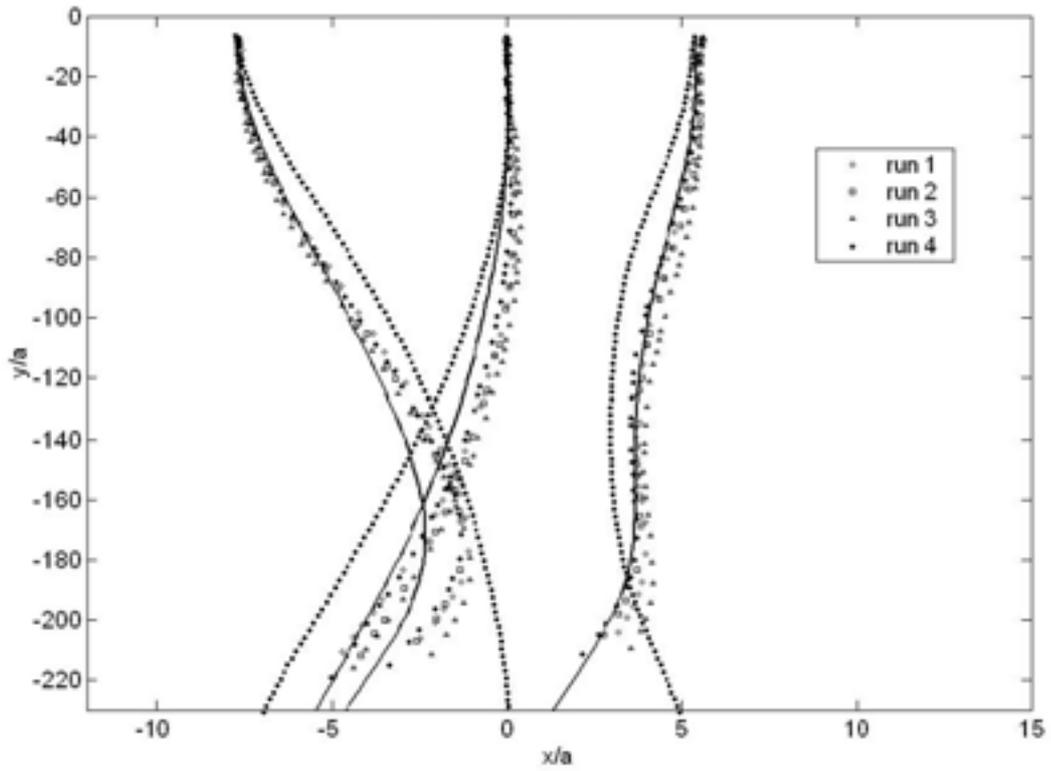


Figure 4.23 *Triplet horizontal: trajectoires des particules, (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

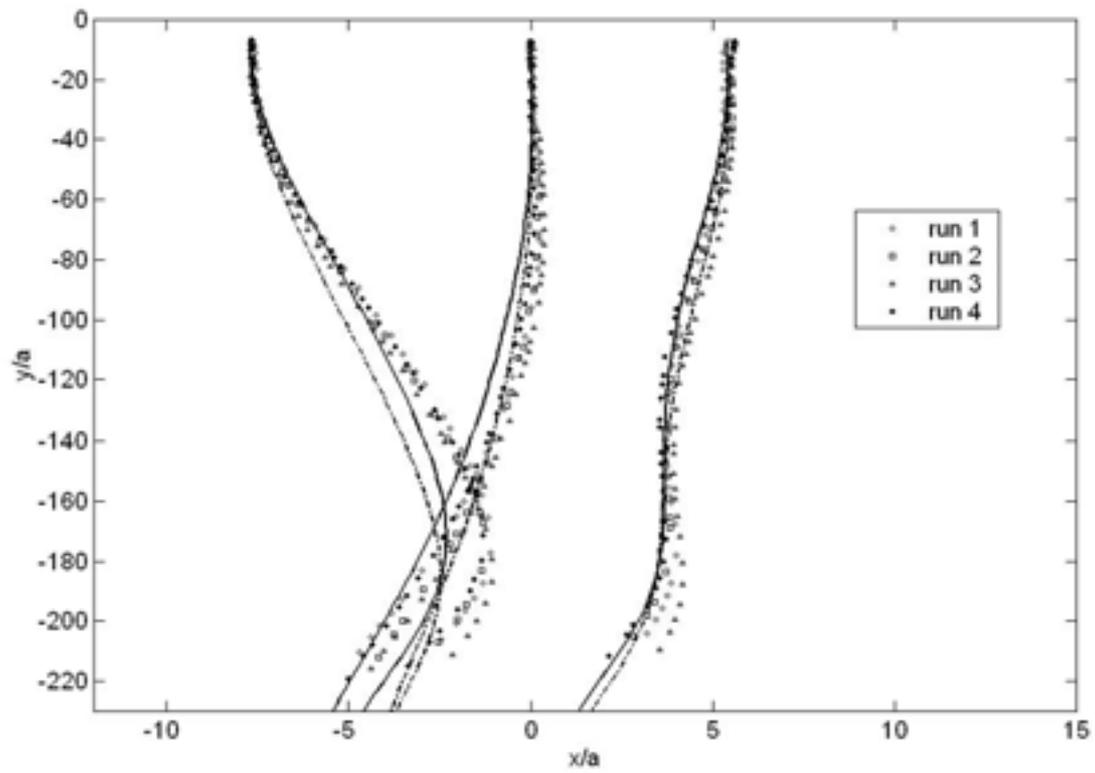


Figure 4.24 *Triplet horizontal: trajectoires des particules, (—) simulation numérique en milieu confiné avec C_I , (---) simulation numérique en milieu infini avec C_I et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

2.2. Quadruplet horizontal

Les configurations symétriques de quatre particules initialement disposées horizontalement ou aux sommets d'un carré ont souvent été traitées par le passé [26, 5]. Cependant, tous les résultats de la littérature concernant ce type de dispositions ont été obtenus sous les hypothèses de Stokes. Dans ces conditions les simulations prédisent un comportement périodique durant la sédimentation des particules, oscillant entre la formation d'un alignement horizontal et d'un rectangle parfait avec conservation des distances caractéristiques sur une période. Nous allons voir dans cette section que même pour un nombre de Reynolds faible ($Re=0,22$), le comportement périodique attendu n'est pas retrouvé lorsqu'on tient compte de l'influence de l'inertie du fluide.

2.2.1. Description du cas traité

Nous nous intéressons ici à la sédimentation de quatre particules disposées régulièrement sur l'axe horizontal à l'instant initial, comme le montre la figure 4.25. D'un point de vue expérimental, cette disposition est très défavorable quant à la sensibilité des trajectoires aux conditions initiales. En effet, une légère dissymétrie des positions initiales s'amplifie au cours de la sédimentation et rapidement la symétrie par rapport au plan médian de la cuve est rompue.

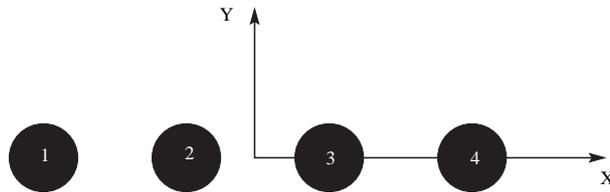


Figure 4.25 *Quadruplet horizontal*

Les conditions initiales expérimentales sont les suivantes :

- sphère 1 : $x_1=-7,22a$; $y_1=0$
- sphère 2 : $x_2=-2,36a$; $y_2=-1,1a$
- sphère 3 : $x_3=2,36a$; $y_3=-1,1a$
- sphère 4 : $x_4=7,22a$; $y_4=0$

Contrairement au motif des trajectoires obtenues sous les hypothèses de Stokes (cf. Chapitre 2, §2.3.3.1.), nous constatons ici (figure 4.26) que lorsque les particules se retrouvent

à nouveau sur l'axe horizontal, les distances relatives ne sont pas conservées. En effet, sous les hypothèses de Stokes on s'attend à retrouver une égalité entre les distances r_{12} initiale et lorsqu'elles sont à nouveau alignées horizontalement. Or, dans le cas présent cette distance est initialement de l'ordre de $7,3a$ alors qu'elle ne vaut guère que $5a$ au bout de $220a$ de sédimentation. En outre, si l'on ne tient pas compte des effets de confinement, la distance moyenne entre les particules augmente au cours de la sédimentation, le motif initial n'est jamais retrouvé bien que les effets de sillage des particules en aval entraînent toujours les sphères situées en amont vers le centre de la cuve et repoussent les sphères centrales vers les extrémités.

Par ailleurs, comme dans le cas du triplet, les trajectoires obtenues en utilisant l'outil de simulation en l'absence de correction phénoménologique sont très différentes de celles déterminées expérimentalement et ne permettent pas en conséquence une analyse comparative pertinente.

2.2.2. Confrontation des résultats de simulation aux résultats expérimentaux

Sur la figure 4.27, les résultats expérimentaux sont comparés aux résultats d'une simulation prenant en compte les effets inertiels et le facteur correctif empirique (trait plein). Sur cette même figure les résultats obtenus sous les hypothèses de Stokes (pointillés) sont donnés pour comparaison. On constate encore une fois d'un point de vue phénoménologique qu'il est important de tenir compte des effets inertiels dans le fluide pour représenter plus fidèlement le comportement des particules en sédimentation. Les ignorer conduit à un motif répétitif alors que l'expérience montre un comportement apériodique. Malheureusement les limitations expérimentales ne nous ont pas permis de réaliser des expériences sur une plus grande distance de sédimentation. Nous aurions alors pu montrer que l'écart par rapport à un calcul effectué sous les hypothèses de Stokes devient encore plus flagrant à des distances de sédimentation élevées.

Sur les figures E.1, E.2, E.3 et E.4, données en annexe E, nous reportons l'évolution des distances relatives entre particules au cours de la sédimentation en fonction de la distance de sédimentation de la sphère 1 ; y_1 . La comparaison des résultats de la simulation incluant la correction empirique avec les résultats expérimentaux montre à nouveau qu'il existe globalement un bon accord quantitatif entre simulation et expérimentation avec des différences là encore de l'ordre de a . Cependant, comme dans le cas du triplet, il semble que les effets des parois subis par les sphères 1 et 4 sont légèrement sous-estimés au début du processus. Ces petites différences s'amplifient au cours de la sédimentation pour devenir non négligeables en fin de processus. Par ailleurs, pour des distances y_1 de l'ordre

de $200a$, on constate que les distances des sphères 2 et 3 aux parois gauche et droite, sont respectivement de l'ordre $5a$. Pour cette gamme de distances on peut supposer que l'influence des effets répulsifs dus aux parois n'est plus négligeable devant la vitesse de dérive latérale de ces particules vers les parois. Néanmoins, cette influence reste d'un ordre inférieur par rapport aux interactions entre particules puisque l'accord quantitatif entre la simulation corrigée et l'expérience est satisfaisant même si on ne tient pas compte des effets inertiels qui modifient les interactions sphères-parois.

Les évolutions des distances relatives entre particules permettent également d'expliquer les différences observées en fin de processus sur la figure 4.26. En effet, par rapport aux expériences, le résultat numérique montre que les particules se retrouvent plus tôt sur un axe horizontal. Cette différence de comportement peut s'expliquer par le fait que du point de vue numérique les distances relatives entre les particules des doublets constitués des sphères (1;2) et (3;4) sont toujours plus faibles que celles mesurées expérimentalement. Il semble également que ce comportement soit à l'origine des différences observées en termes de positions verticales. En effet, les distances relatives numériques étant plus faibles, cela entraîne une augmentation de la vitesse de l'ensemble des particules et donc une plus grande distance parcourue dans un même temps. Dans le cas présent, on trouve une différence en positions verticales entre le résultat numérique et le résultat expérimental d'environ $6a$ pendant le temps de mesure.

Enfin, l'omission de la force d'histoire ne semble pas affecter la confrontation des résultats expérimentaux aux résultats numériques. Au vue des différences en termes de positions verticales en fin de sédimentation, il n'est pas évident qu'elles soient liées à l'absence de cette force.

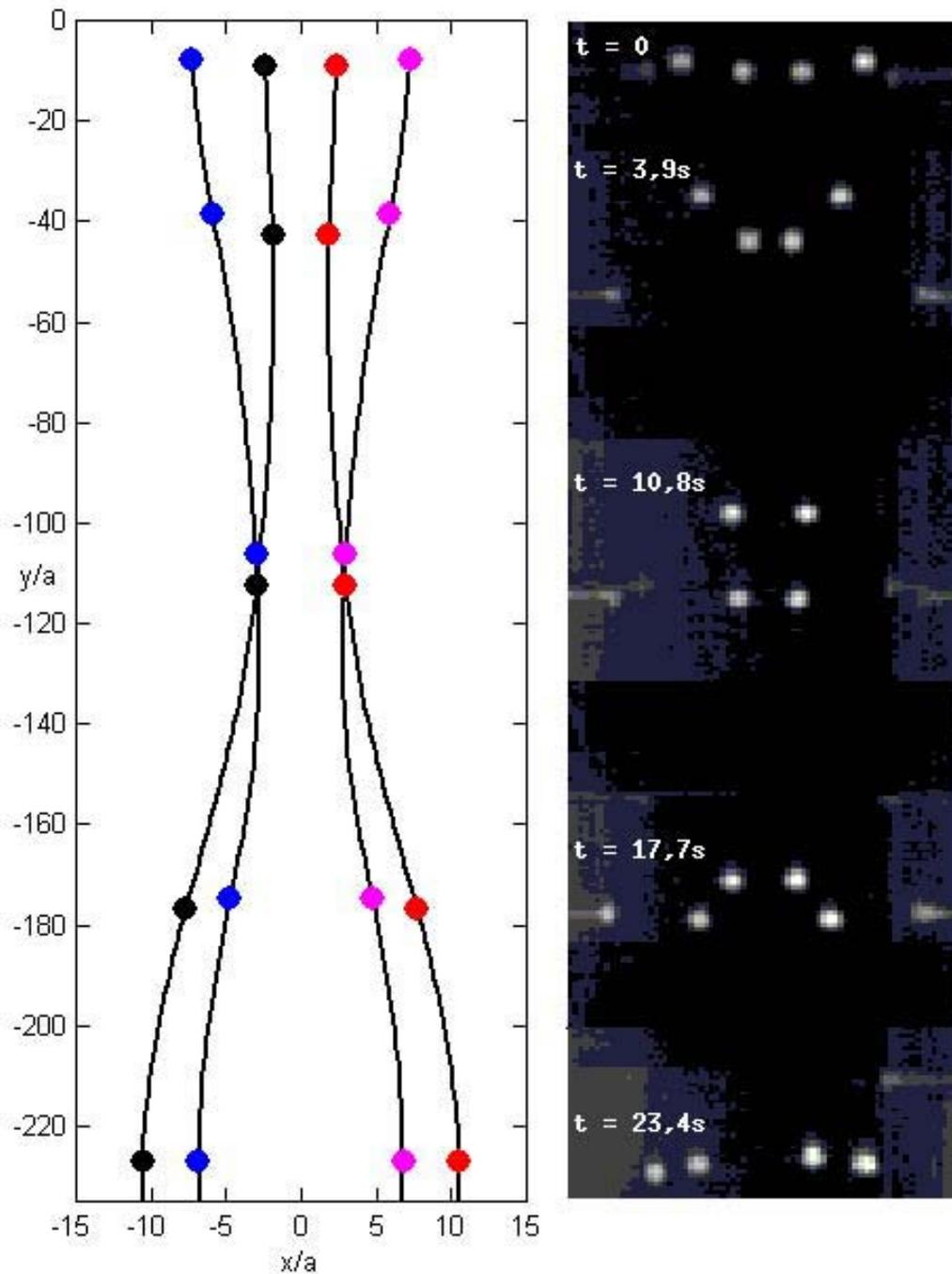


Figure 4.26 *Quadruplet horizontal: visualisation des réarrangements entre les particules durant la sédimentation. A droite sont présentées des images extraites d'une séquence expérimentale et à gauche on représente aux mêmes instants les positions des particules calculées numériquement avec la constante C_I .*

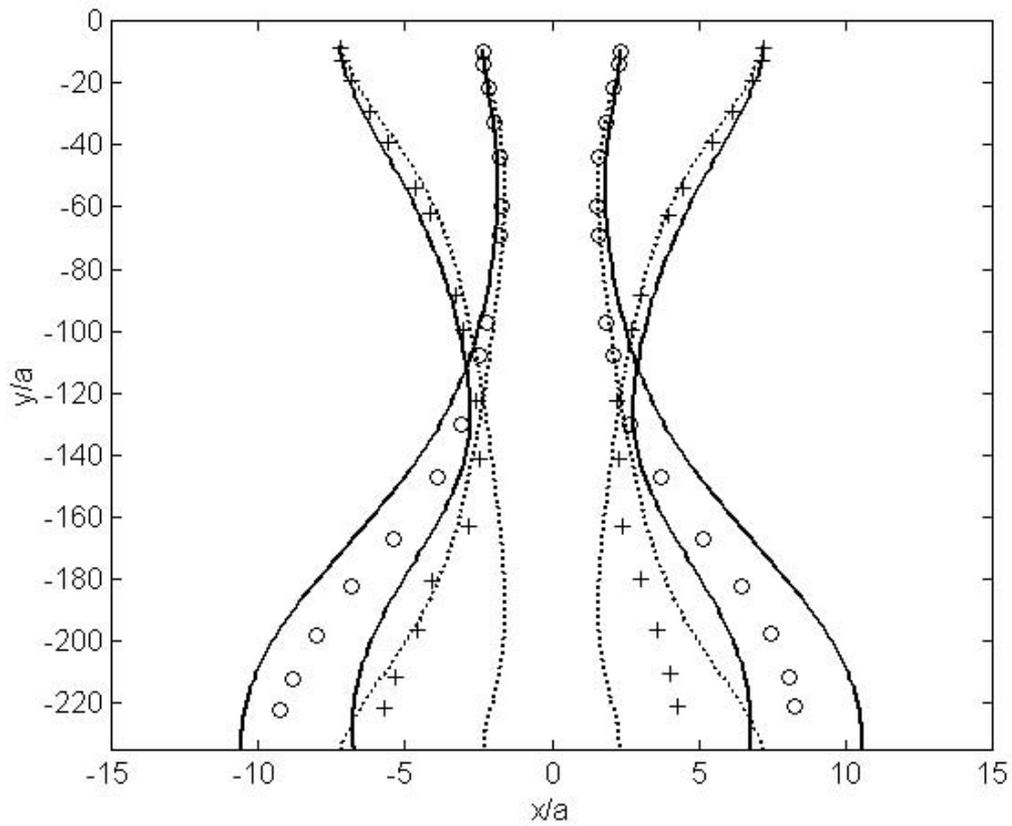


Figure 4.27 *Quadruplet horizontal : trajectoires des particules, (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

Conclusion partielle

Dans ce chapitre nous avons effectué une comparaison entre les résultats de simulations et des résultats expérimentaux pour des configurations dans lesquelles on peut qualitativement et quantitativement observer l'influence des effets inertiels.

Les premières comparaisons qualitatives pour les cas de doublets ont permis de montrer que l'outil numérique proposé était en accord avec les comportements attendus. Cependant, comme d'autres auteurs, nous avons introduit une correction empirique dans l'outil de simulation afin d'obtenir un accord quantitatif satisfaisant entre les résultats expérimentaux et numériques, quelle que soit la configuration de doublet étudiée.

Concernant des configurations à plus grand nombre de particules, il semble que la correction empirique prise en compte au niveau de la particule individuelle soit encore valable. Nous avons pu vérifier que pour les deux configurations étudiées, l'outil de simulation était capable de représenter avec une précision acceptable le comportement de plusieurs particules en sédimentation avec des différences de l'ordre du rayon (de l'ordre de a) sur les trajectoires. Ces différences peuvent être attribuées à la présence des parois et une meilleure représentation des interactions hydrodynamiques particule-paroi est à prévoir si l'on se trouve dans des gammes de distances aux parois faibles ou si le mouvement d'ensemble des particules vers une paroi est important. Dans le cas présent (sédimentation) le mouvement global des particules est parallèle aux parois et les effets répulsifs engendrés semblent être d'un ordre inférieurs comparés aux migrations provoquées par les interactions entre particules. C'est pourquoi on constate globalement un bon accord avec les résultats de simulation bien que l'influence des effets inertiels sur les forces d'interaction particule-paroi ne soit pas prise en compte.

Conclusion générale et perspectives

Les objectifs affichés au commencement du présent travail étaient les suivants :

- proposer un modèle simple représentant les interactions hydrodynamiques entre particules afin de décrire le comportement d'une suspension de sphères dures sédimentant en régime faiblement inertiel;
- obtenir des résultats expérimentaux permettant de rendre compte qualitativement et quantitativement de l'influence des effets inertiels sur le comportement de particules en sédimentation.

A cet effet et s'agissant du modèle, nous avons entrepris une extension de la méthode proposée par Durlofsky *et al.* [5, 6] qui permet de décrire la sédimentation de suspensions chargées en régime de Stokes. Cette extension vise à adopter une démarche similaire pour décrire la sédimentation de ces suspensions en régime faiblement inertiel.

La méthode due à Durlofsky *et al.* [5, 6] est décrite en détail dans le premier chapitre de ce mémoire (cf. Chapitre 1 §1.2.) et ses principales caractéristiques sont les suivantes :

- les interactions hydrodynamiques entre particules sont représentées par la somme d'une contribution multi-corps en champs lointains obtenue par inversion de la matrice de mobilité globale et d'une contribution en champs proches déduite d'une description à deux corps de la suspension;
- le couplage des interactions particule-particule et particule-paroi est effectué par additivité des vitesses, s'agissant de la contribution en champs lointains;
- la lubrification est quant à elle introduite directement au travers d'une force supplémentaire.

Le modèle proposé dans ce travail est restreint aux faibles nombres de Reynolds. Une des principales hypothèses simplificatrices consiste à représenter le champ de vitesse engendré par les particules en sédimentation par une superposition de champs de vitesse de type Oseen, dus à chaque particule individuellement. Formellement, la propagation de ces champs de vitesse est écrite comme la propagation d'une contribution de type Stokes et d'une contribution inertielle nette. En supposant ensuite qu'en première approximation la première loi de Faxen est valable tant que Re reste suffisamment faible, la méthode rigoureuse en régime de Stokes, proposée par Durlofsky *et al.* [5, 6], peut être utilisée pour

obtenir les forces d'interactions hydrodynamiques en régime faiblement inertiel. L'introduction de ces efforts dans les équations du mouvement des particules permet d'accéder à la vitesse et à la position des particules de la suspension, à chaque instant.

Les premiers tests du modèle proposé ont montré que celui-ci rendait compte qualitativement de la phénoménologie des comportements généralement observés. Néanmoins, étant données les hypothèses simplificatrices citées plus haut, il était nécessaire de comparer les résultats du modèle à des calculs analytiques exacts, disponibles dans la littérature pour des configurations simples. Cette comparaison a révélé que les écarts entre les résultats analytiques et ceux du modèle sont limités tant que la distance inter-particules n'est pas trop faible. Cela montre que pour des valeurs faibles de Re , le modèle proposé devrait rendre compte du comportement de suspensions de particules où les distances inter-particules ne sont pas trop faibles.

Il est à remarquer que les méthodes analytiques ne peuvent être facilement étendues à la description de la sédimentation lorsque plusieurs particules sont en présence. Le présent modèle constitue ainsi une alternative à ces méthodes et peut être aisément utilisé pour un grand nombre de particules.

Concernant les expériences menées dans le cadre de ce travail, nous avons pu vérifier dans un premier temps que le dispositif de libération des particules, conçu spécifiquement pour cette étude, était satisfaisant. Il est, entre autres, suffisamment précis pour assurer un lâcher reproductible d'une manipulation à l'autre, tant au niveau des vitesses et positions initiales des particules que de la planéité de leurs trajectoires. Nous avons aussi mis en place une méthode simple de traitement numérique des images expérimentales qui nous a permis d'obtenir les trajectoires des particules pour diverses configurations, avec une précision très satisfaisante.

Les premières confrontations entre les résultats expérimentaux et les résultats de simulation pour les configurations de doublets, telles qu'elles sont présentées au chapitre 4, ont montré que même si la phénoménologie était correctement prédite par notre modèle, il en est tout autrement d'un point de vue quantitatif. Ainsi, par exemple pour un doublet sédimentant parallèlement au vecteur inter-centres, le rapprochement des particules pour un Reynolds de l'ordre de 0,25 est numériquement surestimé. Bien que peu de résultats quantitatifs sont disponibles dans la littérature, cette surestimation a été relevée par d'autres auteurs, qu'il s'agisse de la sphère isolée ou d'un doublet de particule. Suivant ces mêmes auteurs, nous avons opté pour l'introduction d'une correction empirique tendant à corriger la surestimation des effets inertiels. Cette correction empirique affecte aussi bien le coefficient de traînée de la **particule individuelle** que le champ de vitesse qu'elle génère. Cela revient formellement à substituer au nombre de Reynolds usuel, un nombre de

Reynolds corrigé. De cette manière, un accord quantitatif expérimentations-simulations est retrouvé dans les cas de doublets de particules pour toutes les orientations étudiées. De plus, pour les configurations à plus grand nombre de particules (triplet, quadruplet) l'accord entre la simulation et l'expérimentation est maintenant aussi bien qualitatif que quantitatif. Les écarts constatés au terme du processus de sédimentation (sur environ 200 rayons) n'excèdent guère quelques rayons de particules. Ainsi, dans certaines situations, lorsque les distances particule-paroi deviennent telles que la sédimentation ne peut plus être considérée comme dans un milieu infini, l'influence des parois se fait sentir et des écarts expériences/simulations sont observés. L'origine de ces écarts réside dans la non prise en compte de la présence des parois en régime inertiel. En effet, les interactions paroi/particule telles qu'elles sont introduites dans le modèle, sont calculées sur la base d'un écoulement de Stokes. Afin d'améliorer le modèle proposé, il convient d'examiner dans quelle mesure les résultats obtenus par la méthode des développements asymptotiques raccordés peuvent être utilisés à cet effet. La configuration de doublet horizontal où chaque particule interagit de façon privilégiée avec l'une des parois est bonne candidate pour en évaluer la pertinence. Dans une première approche, il serait possible de calculer la vitesse de dérive nette de chaque particule en considérant ses interactions avec les deux parois. Ces vitesses seraient alors introduites, par exemple, au niveau de la relation (2.35) du chapitre 2. Dans tous les cas, considérer la présence des parois, en s'appuyant sur des expérimentations plus poussées, est un verrou à lever pour une meilleure description de la sédimentation de suspensions, même diluées, en milieu confiné.

Néanmoins, pour des suspensions faiblement confinées, il semble possible d'étendre notre approche à des fractions volumiques significatives afin de se rapprocher au mieux des conditions réelles d'application. Pour cela, il convient dans un premier temps d'améliorer la représentation des forces de lubrification. Le problème de discontinuité spatiale de ces forces telles qu'elles sont introduites dans le modèle, peut être éliminé en utilisant un raccordement approprié entre les potentiels d'interaction en champs lointains et ceux en champs proches. Au terme de ces améliorations, le comportement de suspensions homogènes pourrait être appréhendé en appliquant des conditions de périodicité aux bornes du domaine considéré [6]. Ceci devrait permettre de dégager certaines propriétés macroscopiques comme les profils de concentration et leurs évolutions en fonction du confinement, du nombre de Reynolds et de la distance de sédimentation. Ces différentes améliorations permettront de reproduire au mieux les conditions industrielles de mise en œuvre de suspensions.

D'un point de vue expérimental, il convient d'améliorer le système de lâcher de particules afin de rendre possible l'étude de sédimentation de configurations complexes comme des particules en réseau.

Néanmoins, en cohérence avec nos hypothèses, le modèle proposé permet en l'état d'étudier le comportement d'une suspension faiblement confinée, tant que la distance interparticules n'est pas trop faible et pour un mouvement d'ensemble faiblement accéléré.

Annexe A

Mesures de viscosité de la phase continue

Avant d'effectuer nos expériences nous nous sommes attachés à mesurer les caractéristiques du fluide employé. Des mesures préliminaires ont montré que la viscosité μ de la glycérine est indépendante du cisaillement appliqué, ce qui est représentatif d'un comportement de fluide newtonien.

Dans cette annexe nous montrons les résultats concernant l'évolution de μ en fonction de la température T . La figure A.1 représente l'évolution de la viscosité dynamique en fonction de la température en Kelvin.

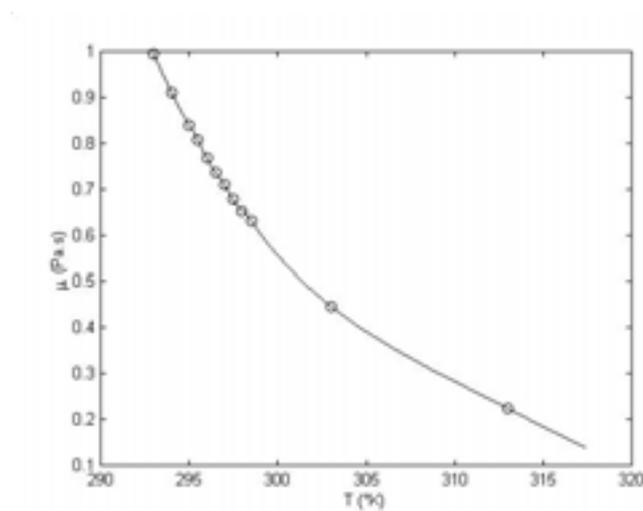


Figure A.1 *Evolution de la viscosité μ en fonction de T*

Sur la figure A.2 on représente l'évolution de la viscosité dynamique (échelle logarithmique) en fonction de $\frac{1}{T}$. L'allure linéaire de cette courbe montre que μ se comporte comme $\mu = Ae^{\frac{B}{T}}$ (comportement Andrade).

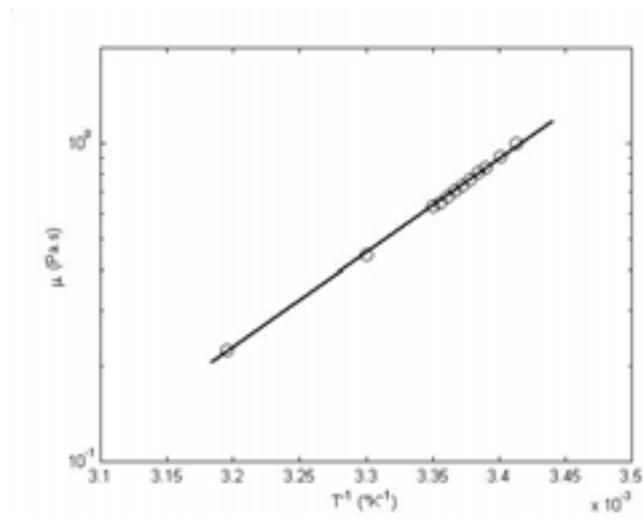


Figure A.2 *Evolution de la viscosité μ en fonction de $\frac{1}{T}$*

Annexe B

Evaluation de la sensibilité vis-à-vis des conditions initiales

Tout résultat expérimental comporte une sensibilité plus ou moins importante aux conditions initiales. Afin d'évaluer les modifications des résultats expérimentaux engendrées par les imprécisions des manipulations (positions approximatives des particules etc.), nous nous proposons d'en quantifier les effets sur les résultats des simulations numériques dans les conditions de Stokes. Pour cela, nous effectuons plusieurs simulations dans des configurations similaires à celles présentées dans les chapitre 2 et 4, en perturbant dans un premier temps la position d'une des particules, puis sa vitesse dans un deuxième temps.

B.1. Sensibilité vis-à-vis des positions initiales

Pour illustrer la sensibilité par rapport aux positions initiales, on se place tout d'abord dans une configuration dissymétrique de triplet horizontal. Les trajectoires des particules sont calculées pour un temps total de sédimentation de 25 secondes. Les conditions initiales sont les suivantes :

$$- U_1 = U_2 = U_3 = 0$$

$$- x_1 = -8a; y_1 = 0; x_2 = 0; y_2 = 0; x_3 = 5,5a; y_3 = 0$$

Puis, pour évaluer la sensibilité aux positions initiales nous perturbons la position d'une sphère test. Dans le cas présent la position de la sphère 2 est perturbée d'une valeur correspondant à un dixième de son rayon.

Sur la figure B.1 nous montrons la superposition des trajectoires obtenues lorsque cette perturbation est appliquée dans les quatre directions suivantes : sens x positif, x négatif,

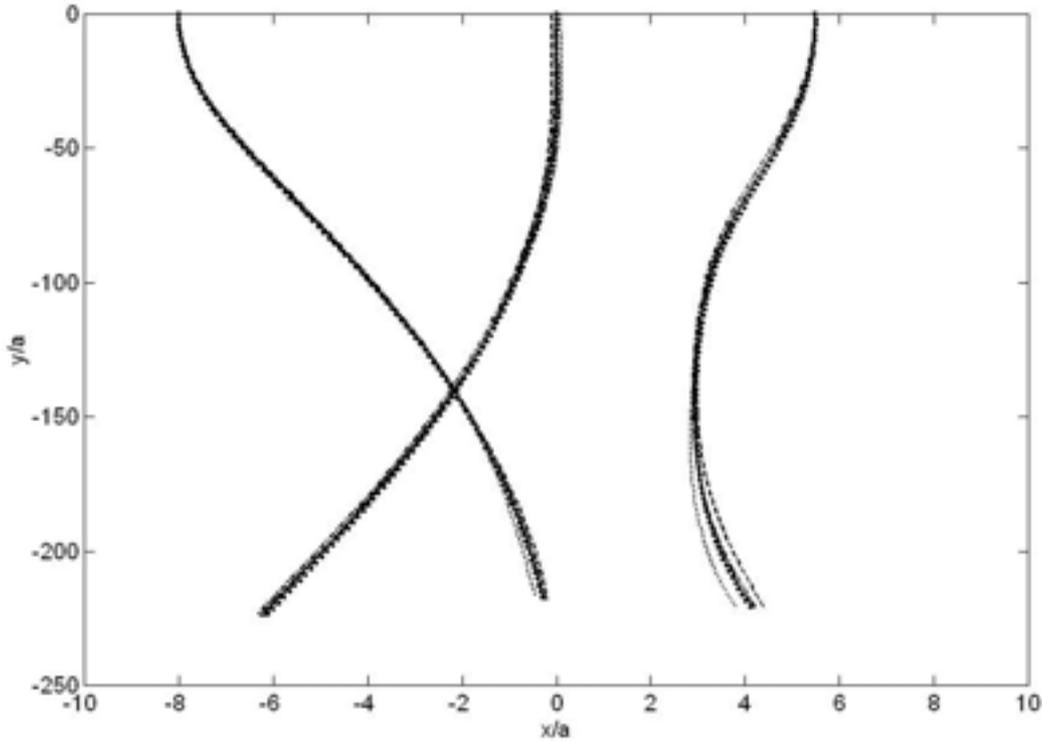


Figure B.1 *Triplet horizontal, test de sensibilité vis-à-vis d'une perturbation d'intensité $0,1a$ de la position initiale d'une sphère test (sphère 2) : (—) positions initiales non perturbées, (···) perturbation vers les x positifs, (---) perturbation vers les x négatifs, (•••) perturbation vers les y positifs, (-·-) perturbation vers les y négatifs*

y positif et y négatif. Nous pouvons remarquer sur cette figure que la perturbation de la position de la sphère 2 a des répercussions sur les trajectoires de toutes les particules en présence. De plus, même si cette perturbation s'amplifie au cours de la sédimentation, les différences observées pour une distance de $230a$ sont au maximum de $0,5a$, faisant de cette configuration un cas relativement favorable pour obtenir une bonne répétabilité de la mesure.

Intéressons nous maintenant à une configuration de quatre particules régulièrement alignées initialement sur un axe horizontal. Ici encore les trajectoires sont calculées pour un temps total de $25s$. Les conditions initiales sont les suivantes :

- $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$

- $x_1 = -7,5a; y_1 = 0; x_2 = -2,5; y_2 = 0; x_3 = 2,5a; y_3 = 0; x_4 = 7,5a; y_4 = 0$

Puis, on perturbe la position de la sphère 2 dans les quatre directions mentionnées précé-

demment mais cette fois d'un centième de rayon seulement.

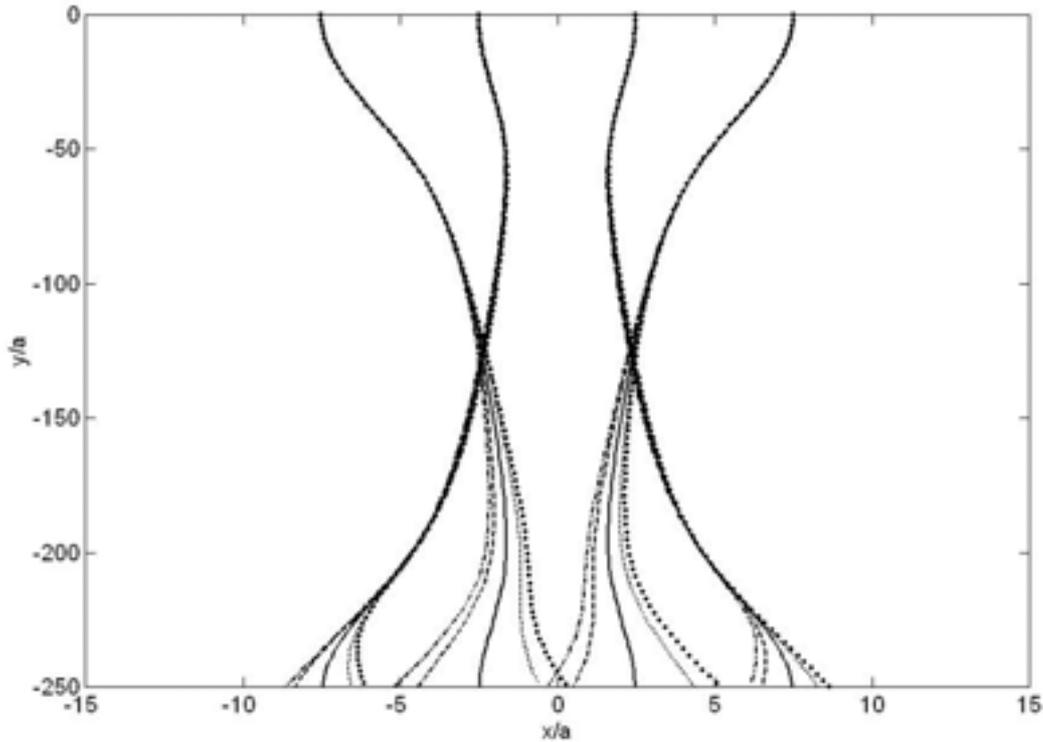


Figure B.2 *Quadruplet horizontal, test de sensibilité vis-à-vis d'une perturbation d'intensité $0,01a$ de la position initiale d'une sphère test (sphère 2) : (—) positions initiales non perturbées, (···) perturbation vers les x positifs, (---) perturbation vers les x négatifs, (· · ·) perturbation vers les y positifs, (- · -) perturbation vers les y négatifs*

Comme nous pouvons le constater sur la figure B.2, dans une première phase (environ $120a$), les trajectoires sont très similaires d'un cas à l'autre. Par la suite, les écarts observés augmentent jusqu'à atteindre des valeurs de l'ordre de $3a$. Dans cette configuration symétrique, la plus petite perturbation de la position d'une des particules engendre des écarts importants en fin de processus. Pour cette configuration très sensible vis-à-vis des positions initiales, il faut donc s'attendre à observer une importante dispersion des résultats expérimentaux.

B.2. Sensibilité vis-à-vis des vitesses initiales

On désire évaluer maintenant la sensibilité des trajectoires par rapport aux vitesses initiales des particules. Pour ce faire, on agit comme dans le paragraphe précédent sur la vitesse d'une des sphères du triplet horizontal puis de la même façon dans le cas du quadruplet horizontal. Dans ces deux configurations, dont les conditions initiales sont les mêmes que précédemment, on applique une perturbation sur la vitesse de la sphère 2 dont l'intensité est d'un dixième de la vitesse de référence U_{St} dans les quatre directions mentionnées plus haut.

La figure qui représente la superposition des trajectoires obtenues pour la configuration de triplet n'est pas présentée ici. En effet, pour cette disposition nous n'observons pas de différences notables occasionnées par les perturbations de la vitesse de la sphère test, ce qui montre encore une fois que cette configuration est favorable quant à la sensibilité vis-à-vis des conditions initiales.

En ce qui concerne le quadruplet de particules, les trajectoires calculées sont montrées sur la figure B.3. Comme attendu, on peut encore remarquer une sensibilité plus importante vis-à-vis d'une perturbation de même intensité que celle utilisée pour le triplet. Néanmoins, pour le quadruplet symétrique, la sensibilité vis-à-vis des vitesses initiales est plus limitée que celle concernant les positions initiales. En effet, sur une distance de l'ordre de $150a$ les trajectoires sont très similaires d'un cas à l'autre. Les écarts observés après $250a$ de sédimentation sont au maximum de $2,5a$.

En conclusion il semble que la configuration initialement dissymétrique est moins sensible vis-à-vis des conditions initiales par rapport à la configuration du quadruplet symétrique. On peut donc s'attendre à une meilleure répétabilité de la mesure pour des configuration dissymétriques. En outre, il apparaît, dans les deux cas proposés, une plus forte sensibilité vis-à-vis des positions initiales comparée à la sensibilité par rapport aux vitesses initiales. Cependant, la sensibilité du modèle quant aux vitesses initiales est discutable en raison de la mauvaise représentation des instants initiaux de mise en régime des particules dans les simulations. En effet, les modèles de forces d'interactions hydrodynamiques utilisés sont issus de solutions théoriques en champs de vitesse, elles mêmes issues d'un système d'équations quasi-statiques. Ceci peut expliquer pourquoi la sensibilité du modèle par rapport aux perturbations des vitesses initiales est moins importante que celle due aux perturbations des positions initiales.

Par ailleurs, nous retiendrons que la précision minimale requise doit être inférieure au

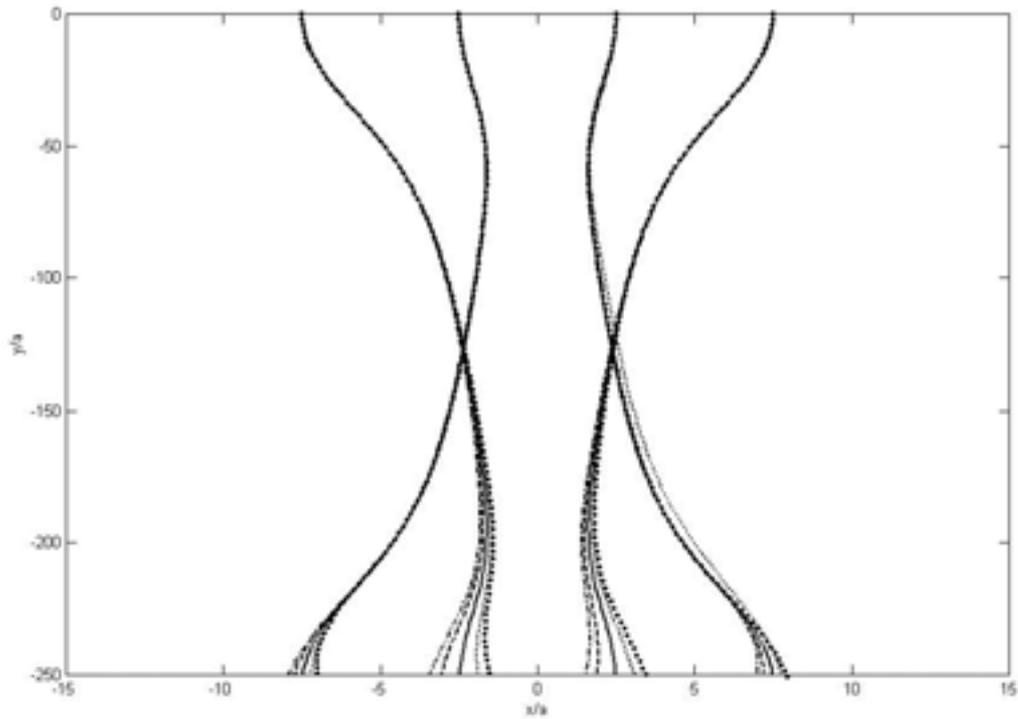


Figure B.3 *Quadruplet horizontal, test de sensibilité vis-à-vis d'une perturbation d'intensité $0,1U_{St}$ de la vitesse initiale d'une sphère test (sphère 2): (—) vitesse initiale non perturbée, (···) perturbation vers les x positifs, (--) perturbation vers les x négatifs, (•••) perturbation vers les y positifs, (-·-) perturbation vers les y négatifs*

dixième de rayon pour le positionnement des particules. Une telle précision devrait permettre d'obtenir une bonne reproductibilité de l'expérience au moins pour la configuration du triplet dissymétrique. S'agissant du quadruplet symétrique, nous avons montré dans cette annexe qu'une perturbation en position de l'ordre du centième de rayon sur la position d'une particule peut engendrer des différences importantes en fin de processus. On peut donc prévoir pour cette configuration une forte dispersion des résultats expérimentaux.

Annexe C

Correction empirique

Dans cette annexe nous désirons vérifier que la correction empirique employée au niveau de la particule individuelle dans nos simulations est cohérente avec les résultats de Happel *et al.* [41]. Leur étude porte plus particulièrement sur l'approximation de la vitesse de rapprochement des particules en fonction du régime d'écoulement (C.1). Malheureusement, dans ce travail la dépendance de cette vitesse de rapprochement vis-à-vis de la distance inter-centres n'est pas prise en compte pour représenter l'influence des effets inertiels sur le comportement du doublet. Les auteurs supposent néanmoins que leur approximation est valide dans la limite de distances *pas trop grandes*¹ entre les particules. La confrontation de nos résultats à ceux de Happel *et al.* [41] ne peut donc être effectuée que dans une gamme de distances intermédiaires qui n'est cependant pas explicitement précisée dans cet article. Néanmoins, on peut estimer qu'elle couvre vraisemblablement des distances allant d'une dizaine de rayons à quelques unités. Ce résultat de référence permet en tous cas une évaluation de la vitesse de rapprochement des particules pour des nombres de Reynolds compris entre 0,2 et 0,7 et pour une gamme de distances inter-centres comparables.

A partir des relations théoriques données par Happel *et al.* [41] dans le cas d'un doublet vertical, on peut prédire le rapprochement des sphères sous les hypothèses suivantes :

- la sphère 2 (située au dessus) ne voit aucune influence de l'inertie dans le fluide du fait que ce fluide ait déjà été mis en mouvement par la première particule;
- la sphère 1 voit un fluide au repos devant elle et subit une influence de l'inertie du fluide deux fois plus importante qu'une sphère seule.

1. "when the spheres are not too far apart" cf. [41]

Dans ces conditions, on peut établir la relation suivante :

$$\Delta U \cong U_{st} \frac{3}{8} Re \quad (C.1)$$

Cependant, afin de comparer l'approximation théorique précédente aux résultats expérimentaux, il est utile de représenter la relation (C.1) en termes de trajectoires. Pour cela, la méthode employée revient à calculer l'évolution de la distance entre les particules au cours de la sédimentation à partir de la vitesse relative entre particules. En posant $r = ||(\mathbf{OM}_2 - \mathbf{OM}_1)||$, la relation (C.1) peut être formulée de la façon suivante :

$$\frac{dr}{dt} = \Delta U = \frac{3}{8} Re U_{st} \quad (C.2)$$

Nous choisissons ici de représenter l'évolution de la distance inter-centres en fonction de la distance parcourue par la sphère la plus haute (sphère 2) et l'on écrit :

$$\frac{dOM_2}{dt} = U_2(t) = U \left(1 + \frac{3a}{2r}\right) \quad (C.3)$$

où U est le module de la vitesse limite d'une sphère.

$$dt = \frac{dOM_2}{U_2(t)} \quad (C.4)$$

Puis, on injecte (C.4) dans (C.2) pour obtenir l'équation suivante :

$$\frac{dr}{dOM_2} = \frac{\Delta U}{U \left(1 + \frac{3a}{2r}\right)} \quad (C.5)$$

Enfin, cette dernière équation est résolue numériquement pour obtenir $r(OM_2)$.

Sur la figure C.1, où $y_2 = ||\mathbf{OM}_2||$, nous représentons en pointillés le résultat obtenu en résolvant (C.5) pour une valeur de $Re=0,2$. A titre d'exemple, nous reportons sur cette même figure en trait continu le résultat obtenu par simulation numérique. Nous retrouvons comme attendu, pour un Re donné, une gamme de distances pour laquelle le résultat numérique est en bon accord avec l'approximation (C.5). Cette représentation a pour principal intérêt de pouvoir être comparée directement aux résultats expérimentaux en termes de trajectoires, dans le chapitre 4.

Après avoir constaté dans un premier temps que l'introduction de la correction empirique dans l'outil numérique permettait de reproduire plus fidèlement les résultats expérimentaux d'un point de vue quantitatif, nous désirons montrer qu'elle est équivalente à celle employée par Happel *et al.* [41]. La relation (C.5) est utilisée pour valider le choix de cette correction phénoménologique en la comparant aux résultats issus des simulations.

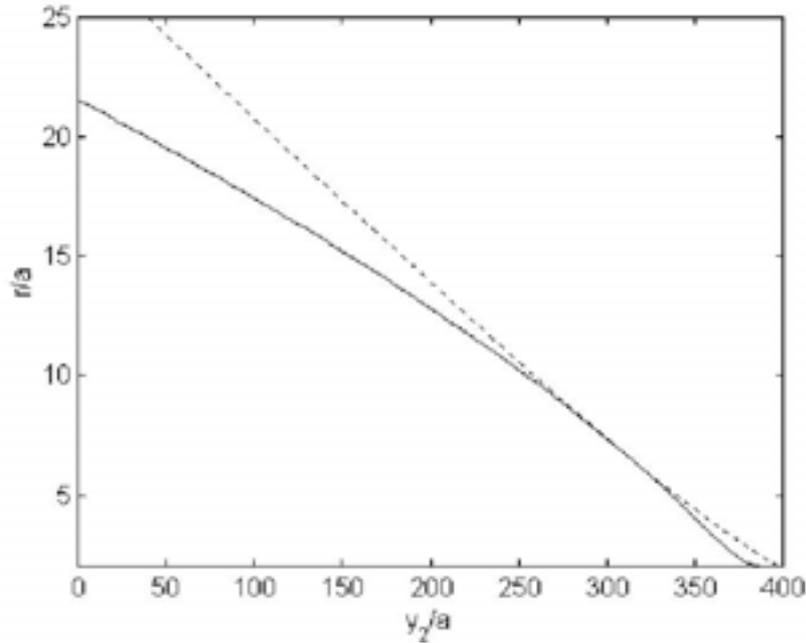


Figure C.1 *Doublet vertical: évolution de la distance inter-centres adimensionnée ($\frac{r}{a}$) en fonction de la distance de sédimentation adimensionnée ($\frac{y_2}{a}$), (—) le résultat d'une simulation numérique, (---) le résultat déduit de la relation (C.5)*

Pour cela, on perturbe la valeur des deux constantes empiriques C_I et C_{II} respectivement dans la simulation et dans la relation (C.5). Pour chaque valeur de la perturbation on représente l'écart entre le résultat perturbé et le résultat de référence (non perturbé) afin d'effectuer un test en sensibilité vis-à-vis des valeurs des constantes correctives.

Ces courbes sont montrées sur la figure C.2 pour quatre valeurs de la perturbation. Cette figure montre qu'une modification de 10% (par exemple) de la constante C_{II} dans la relation (C.5) engendre un écart du même ordre de grandeur qu'une modification de 10% de la constante C_I dans la simulation. Cette comparaison entre deux méthodes différentes pour tenir compte de la correction phénoménologique semble indiquer que celle introduite dans la simulation est similaire à celle utilisée par Happel *et al.* [41].

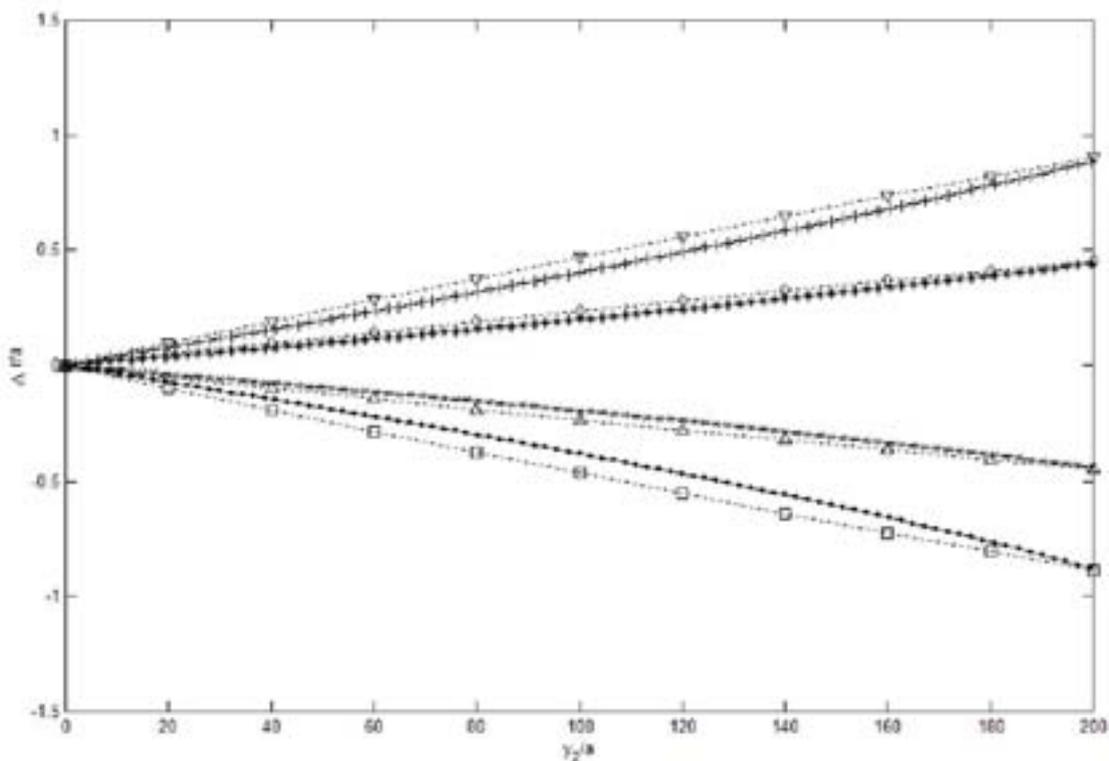


Figure C.2 *Test de sensibilité vis-à-vis de la correction empirique sur la configuration de doublet vertical: écarts engendrés par une modification des constantes C_I et C_{II} , respectivement dans la simulation et dans la relation approchée (C.5). (∇) relation (4.3) avec $C_{II} + 20\%$, (+) simulation avec $C_I + 20\%$, (\diamond) relation (4.3) avec $C_{II} + 10\%$, (*) simulation avec $C_I + 10\%$, (\triangle) relation (4.3) avec $C_{II} - 10\%$, (\times) simulation avec $C_I - 10\%$, (\square) relation (4.3) avec $C_{II} - 20\%$, (\cdot) simulation avec $C_I - 20\%$*

Annexe D

Triplet horizontal : évolution des
distances relatives particule-particule

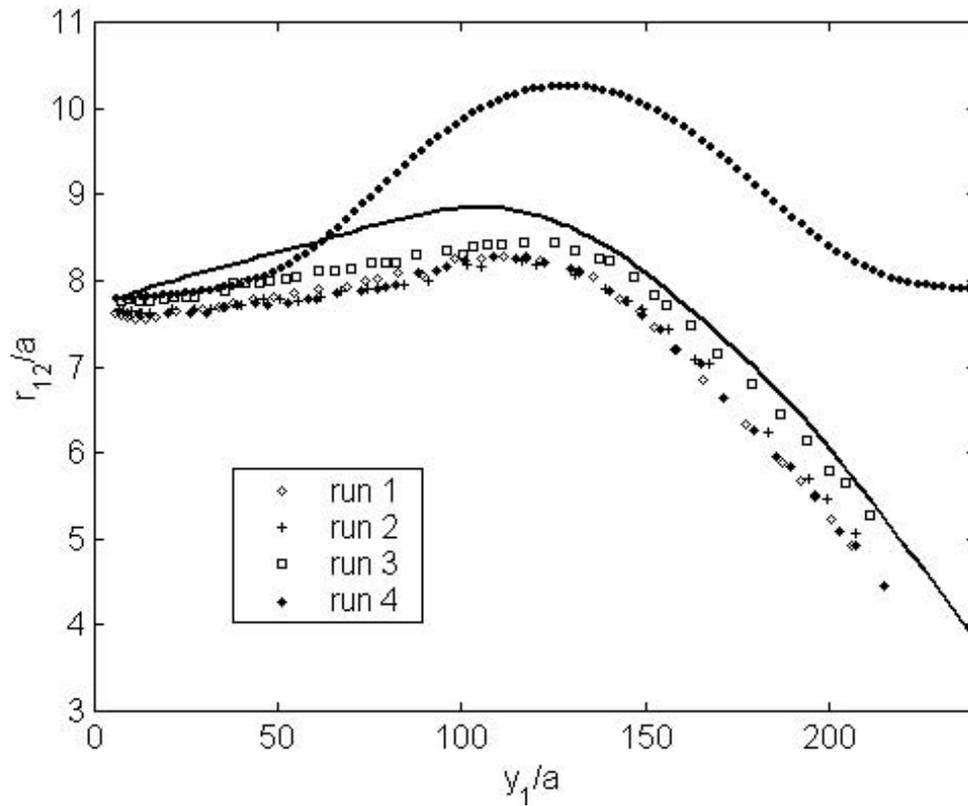


Figure D.1 *Triplet horizontal*: évolution de la distance entre les sphères 1 et 2 en fonction de y_1 , (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les résultats expérimentaux

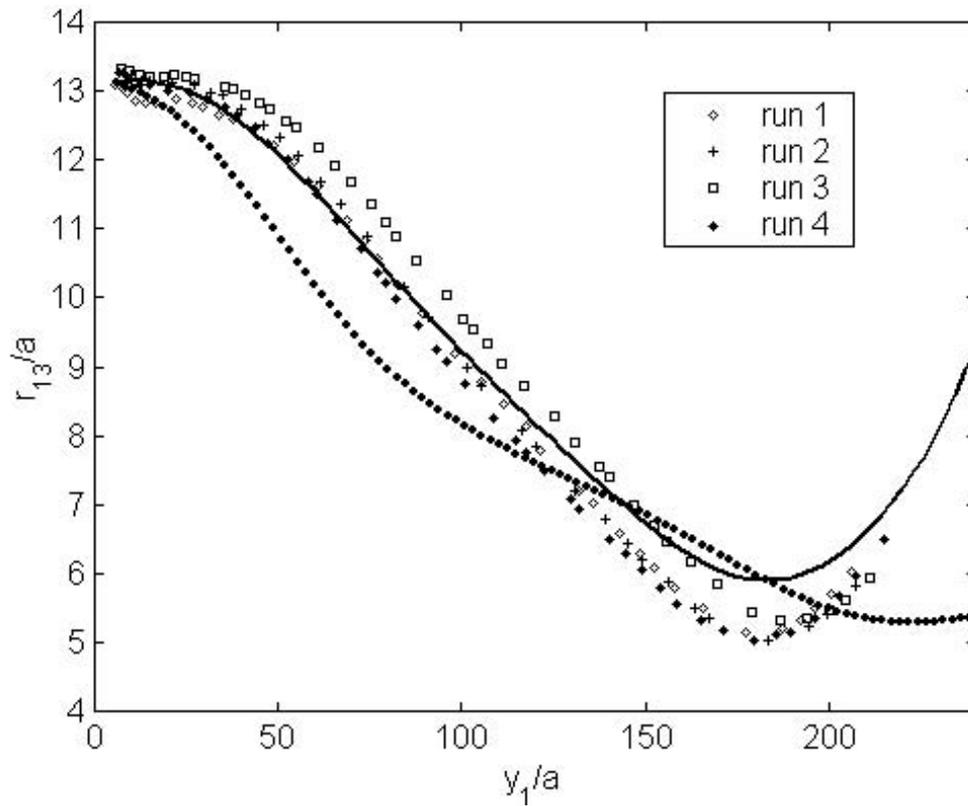


Figure D.2 *Triplet horizontal*: évolution de la distance entre les sphères 1 et 3 en fonction de y_1 , (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les expériences

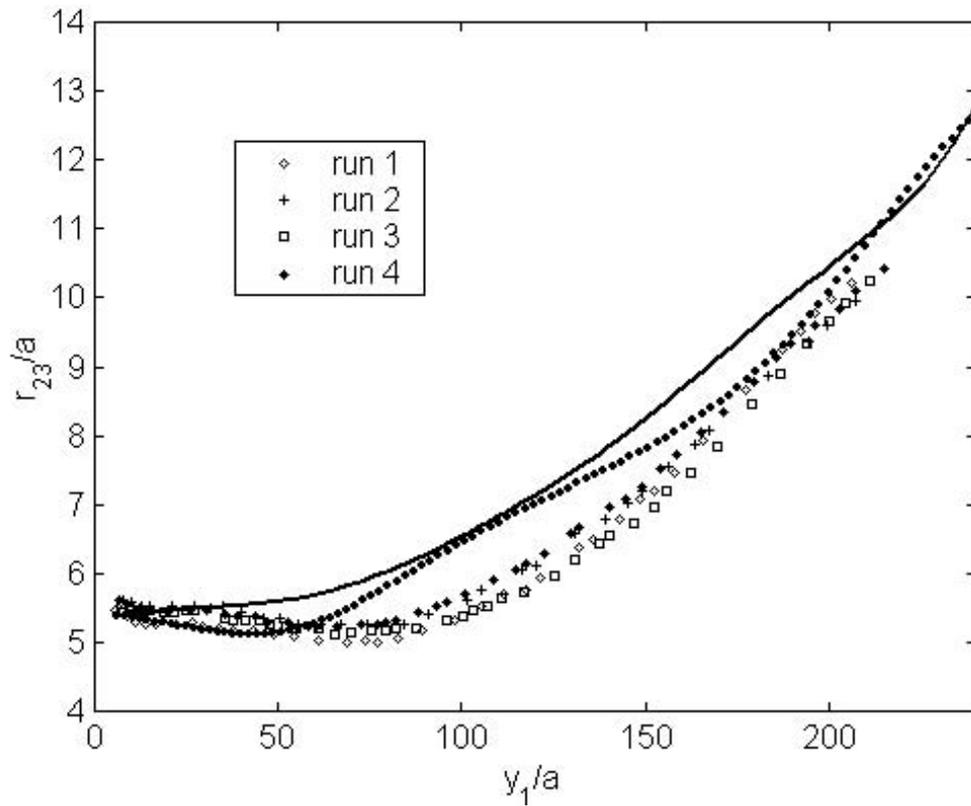


Figure D.3 *Triplet horizontal*: évolution de la distance entre les sphères 2 et 3 en fonction de y_1 , (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les expériences

Annexe E

Quadruplet horizontal : évolution des distances relatives particule-particule

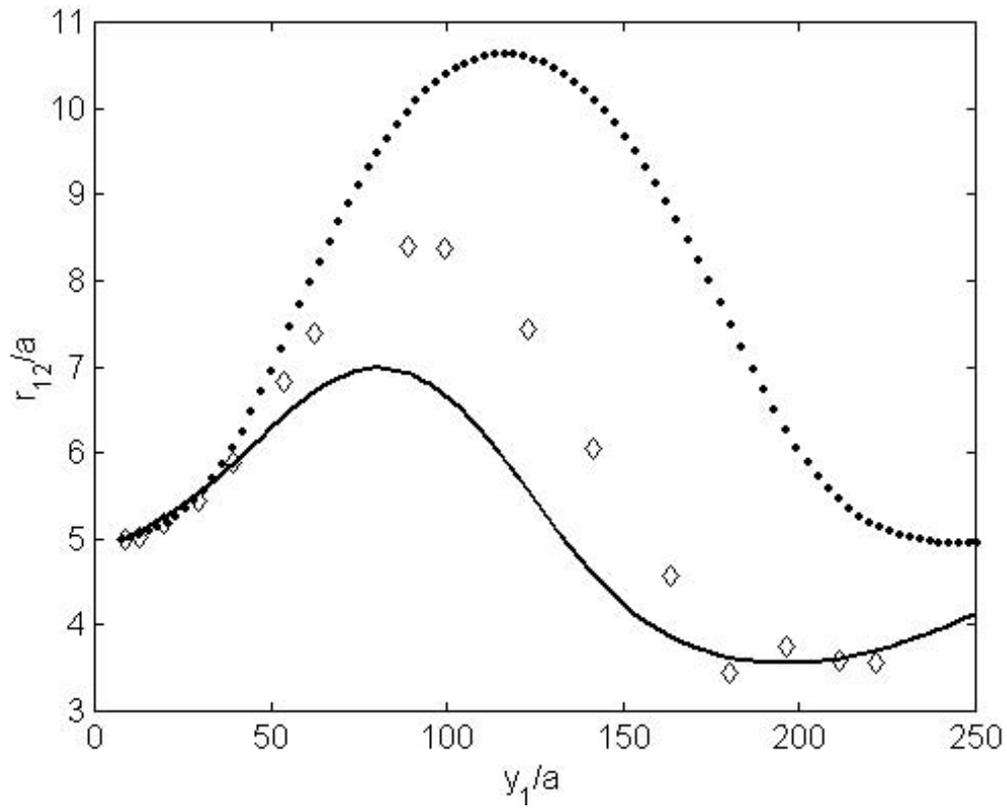


Figure E.1 *Quadruplet horizontal: évolution de la distance entre la sphère 1 et la sphère 2 en fonction de y_1 , (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

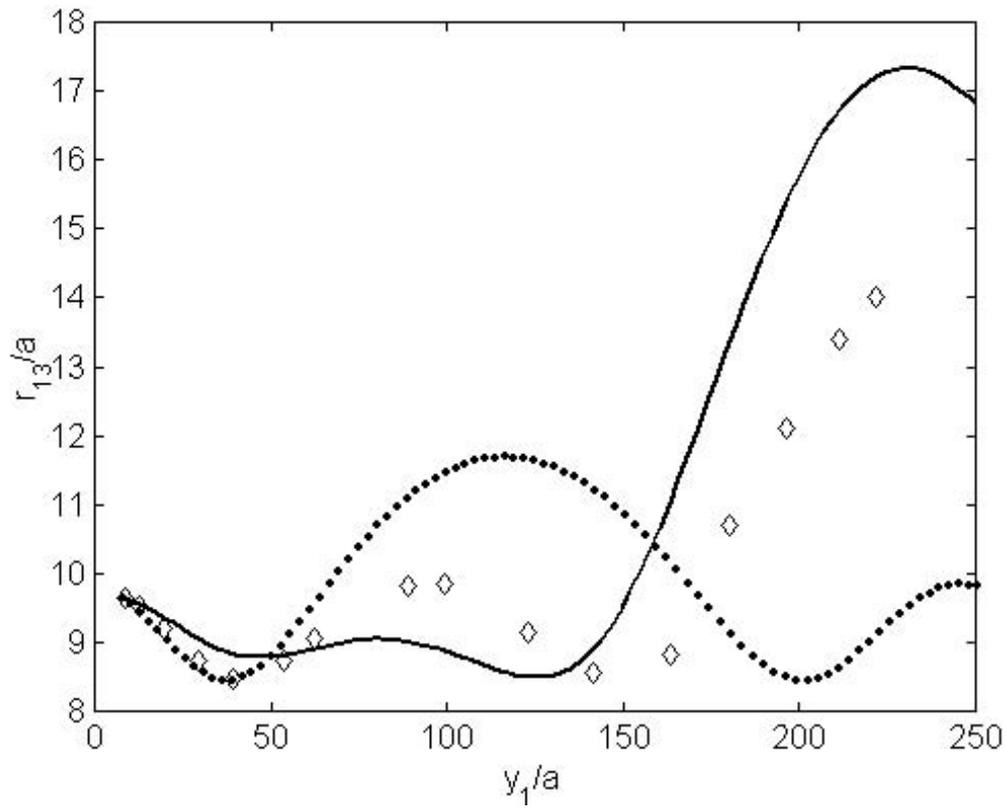


Figure E.2 *Quadruplet horizontal: évolution de la distance entre les sphères 1 et 3 en fonction de y_1 , (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

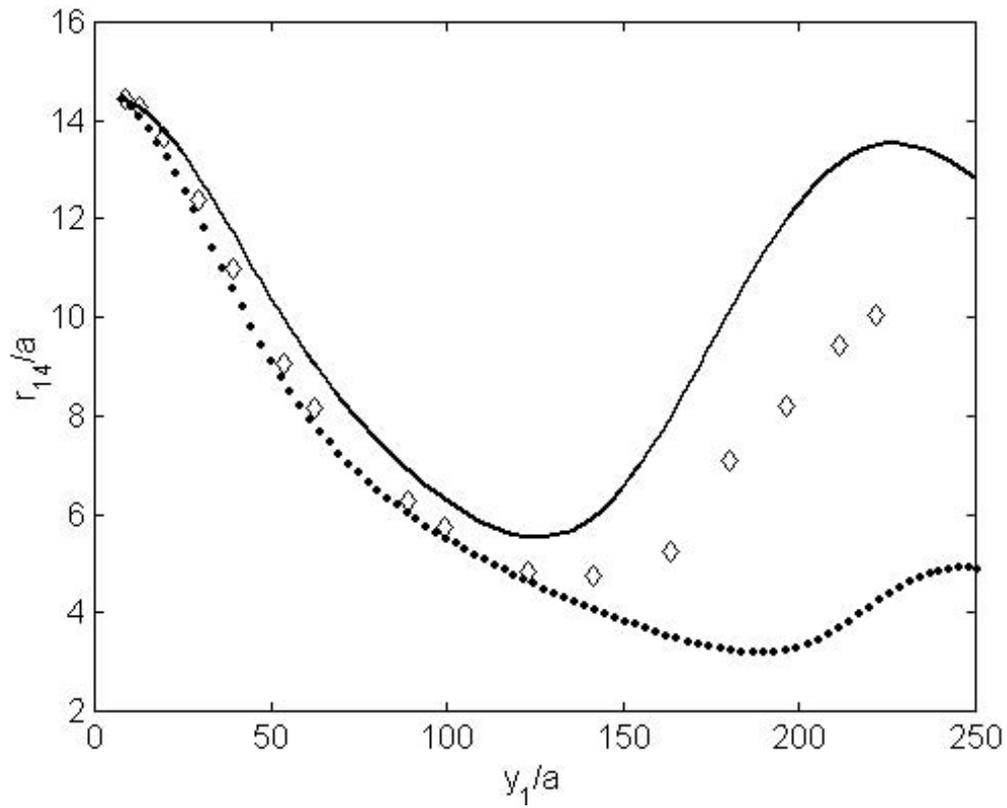


Figure E.3 *Quadruplet horizontal: évolution de la distance entre la sphère 1 et la sphère 4 en fonction de y_1 , (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

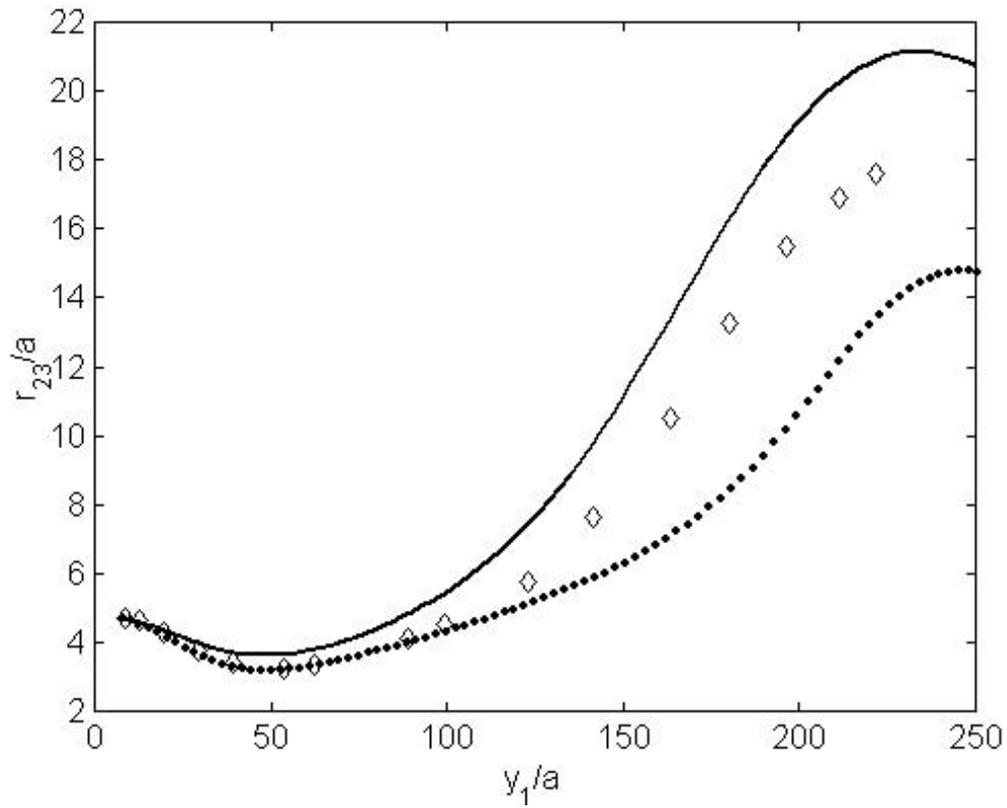


Figure E.4 *Quadruplet horizontal: Evolution de la distance entre la sphère 2 et la sphère 3 en fonction de y_1 , (—) simulation numérique avec C_I , (···) simulation numérique pour $Re=0$ et les symboles représentent les résultats expérimentaux*

Bibliographie

- [1] Happel J., Brenner H. : *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall (1965).
- [2] Batchelor G.K. : *A Brief Guide To Two-Phase Flow*, Theoretical and Applied Mech. pp27-40 (1989).
- [3] Fortier A. : *Mécanique Des Suspensions*, Masson & Cie (1967).
- [4] Batchelor G.K. : *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967).
- [5] Durlofsky L., Brady J.F., Bossis G. : *Dynamic Simulation of Hydrodynamically Interacting Particles*, J. Fluid Mech., Vol. 180, pp21-49 (1987).
- [6] Durlofsky L., Brady J.F. : *Dynamic Simulation of Bounded Suspension*, J. Fluid Mech., Vol. 200, pp39-67 (1989).
- [7] Kynch G.J. : *The Slow Motion of Two or More Spheres through a Viscous Fluid*, J. Fluid Mech., Vol. 5, pp193-208 (1959).
- [8] Batchelor G.K. : *Sedimentation in a Dilute Dispersion of Spheres*, J. Fluid Mech., Vol. 52, pp245-268 (1972).
- [9] Phillips R.J., Armstrong R.C., Brown B.A. : *A Constitutive Equation for Concentrated Suspensions that account Shear-Induced Particle Migration*, Phys. Fluids, Vol. 4, pp30-40 (1992).
- [10] Russel W.B., Saville D.A., Schowalter W.R. : *Colloidal Dispersions*, Cambridge University Press, first published 1989 (Reprinted 1995).
- [11] Ganatos P., Pfeffer R., Weinbaum S. : *A Numerical Solution Technique for Three-Dimensional Stokes Flows with Application to the Motion of Strongly Interacting Spheres in Plane*, J. Fluid Mech., Vol. 84, pp79-111 (1978).
- [12] Glendinning A.B., Russel W.B. : *A Pairwise Additive Description of Sedimentation and Diffusion in Concentrated Suspension of Hard Spheres*, J. Colloid. Interface Sci., Vol. 89, pp124-143 (1982).
- [13] Feuillebois F. : *Certains Problèmes d'Écoulements Mixtes Fluide-Particules Solides*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (1980).

- [14] Kim S., Karrila S.J. : *Microhydrodynamics : Principle and Selected Application*, Butterworth-Heinmann, Stoneham, MA (1991).
- [15] Vasseur P., Cox R.G. : *The Lateral Migration of Spherical Particles in Two Dimensional Shear Flows*, J. Fluid Mech., Vol. 78, pp385-413 (1976).
- [16] Vasseur P., Cox R.G. : *The Lateral Migration of Spherical Particles Sedimenting in a Stagnant Bounded Fluid*, J. Fluid Mech., Vol. 80, part 3 pp561-591 (1977).
- [17] Breil J. : *Modélisation du Remplissage en Propergol de Moteur à Propulsion Solide*, Thèse de l'Université Bordeaux I (2001).
- [18] Quispe J., Concha F., Toledo P.G. : *Discrete Sedimentation Model for Ideal Suspensions*, Chem. Eng. J., Vol. 80, pp135-140 (2000).
- [19] Guyon E., Hulin J.P., Petit L. : *Hydrodynamique Physique*, Inter-Editions, (1991).
- [20] Kapoor B., Acrivos A. : *Sedimentation and Sediment Flow in Settling Tanks with Inclined Walls*, J. Fluid Mech., Vol. 290, pp39-66 (1995).
- [21] Peysson Y., Guazzelli E. : *An Experimental Investigation of the Intrinsic Convection in a Sedimenting Suspension*, Phys. Fluids, Vol. 10, pp44-54 (1998).
- [22] Segre P.N., Herbolzheimer E., Chaikin P.M. : *Long Ranged Correlations in Sedimentation*, Phys. Rev. Letters, Vol. 79, pp2574-2577 (1997).
- [23] Takemura F., Takagi S., Magnaudet J., Matsumoto Y. : *Drag and Lift Forces on a Bubble Rising Near a Vertical Wall in a Viscous Fluid*, J. Fluid Mech., Vol. 461, pp277-300 (2002).
- [24] Ambari A., Gauthier-Manuel B., Guyon E. : *Wall Effects on a Sphere Translating at Constant Velocity*, J. Fluid Mech., Vol. 149, pp235-253 (1984).
- [25] Dingman S.E., Ingber M.S., Mondy L.A., Abbott J.R., Brenner H. : *Particle Tracking in Three-Dimensional Stokes Flow*, J. Rheology, Vol. 36 No 3, pp413-440 (1992).
- [26] Chauvin C. : *Influence des Forces d'Interactions Particulaires dans la Simulation Lagrangienne du Comportement de Particules en Sédimentation et Ecoulements Turbulents*, Thèse de l'Université de Rouen (1991).
- [27] Bourot J.M. : *Sur le Calcul Numérique des Champs Hydrodynamiques d'Oseen autour d'une Sphère pour différents nombres de Reynolds*, Journal de Mécanique, Vol. 9, No 4, pp135-140 (1970).
- [28] Van Dyke M. : *Extension of Goldstein's Series for the Oseen Drag of a Sphere*, J. Fluid Mech., Vol. 44, No 2, pp365-372 (1970).

- [29] Goldstein S.: *The Steady Flow of Viscous Fluid past a Fixed Spherical Obstacle at Small Reynolds Numbers*, Proc. Roy. Soc., A 123, pp225-235 (1929).
- [30] Chadwick E.: *The Far-Field Oseen Velocity Expansion*, Proc. Roy. Soc., A 454, pp2059-2082 (1998).
- [31] Bouard R.: *Etude Critique de la Méthode de Troncature des Séries Appliquée à la Résolution de l'Equation d'Oseen, pour un Ecoulement de Révolution*, Thèse de l'Université de Poitiers (1972).
- [32] Batchelor G.K.: *The Hydrodynamic interaction of Two Small Freely-Moving Spheres in a Linear Flow Field*, J. Fluid Mech., Vol. 56, pp375-400 (1972).
- [33] Bilodeau R.R., Bousfield D.W.: *Shear-Thinning Predictions from Particle Motion Modeling*, J. Rheology, pp743-764 (1998).
- [34] Rallison J.M.: *Note on the Faxén Relations for a Particle in Stokes Flow*, J. Fluid Mech., Vol. 88, pp529-533 (1978).
- [35] Mei R., Adrian R.J., Hanratty T.: *Particle Dispersion in Isotropic Turbulence Under Stokes Drag and Basset Force with Gravitational Settling*, J. Fluid Mech., Vol. 225, pp481-495 (1991).
- [36] Jeffrey D.J., Onishi Y.: *Calculation of the Resistance and Mobility Functions for Two Unequal Rigid Spheres in Low-Reynolds-Number Flow*, J. Fluid Mech., Vol. 139, pp261-290 (1984).
- [37] Jeffrey D.J., Onishi Y.: *The Forces and Couples Acting on Two Nearly Touching Spheres in Low-Reynolds-Number Flow*, J. of Applied Math. and Phys., Vol. 35, pp634-641 (1984).
- [38] Nir A., Acrivos A.: *On the Creeping Motion of Two Arbitrary-Sized Touching Spheres in a Linear Shear Field*, J. Fluid Mech., Vol. 59, pp209-223 (1973).
- [39] Batchelor G.K.: *Sedimentation in a Dilute Polydisperse System of Interacting Spheres. Part 1. General theory*, J. Fluid Mech., Vol. 119, pp379-408 (1982).
- [40] Feuillebois F.: *Sedimentation in a Dispersion with Vertical Inhomogeneities*, J. Fluid Mech., Vol. 139, pp145-171 (1984).
- [41] Happel J., Pfeffer R.: *The Motion of Two Spheres Following Each Other in a Viscous Fluid*, A.I.Ch.E. Journal, Vol. 6, No. 1, pp129-133 (1960).
- [42] Kumagai T.: *Numerical Analysis of Equation of Motion for a Cluster of Spheres in Fluid at Low Reynolds Number*, J.S.M.E. Journal, Serie B, Vol. 38, No. 4, pp563-569 (1995).

- [43] Saffman P.G.: *The Lift on a Small Sphere in a Slow Shear Flow*, J. Fluid Mech., Vol. 22, No 2, pp385-400 (1965).
- [44] Van Dyke M.: *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press (1975).
- [45] Magnaudet J.: *Small Inertial Effects on a Spherical Bubble, Drop or Particle Moving Near a Wall in a Time-Dependent Linear Flow*, J. Fluid Mech., Vol. 485, pp115-142 (2003).
- [46] Sierou A., Brady J.F.: *Accelerated Stokesian Dynamics Simulation*, J. Fluid Mech., Vol. 448, pp115-146 (2001).
- [47] Brady J.F., Phillips R.J., Lester J.C., Bossis G.: *Dynamic Simulation of Hydrodynamically Interacting Suspensions*, J. Fluid Mech., Vol. 195, pp257-280 (1988).
- [48] Mordant N. and Pinton J.F.: *Velocity Measurement of a Settling Sphere*, Eur. Phys. J. B, Vol. 18, pp343-352 (2000).
- [49] Lovalenti P.M. and Brady J.F.: J. Fluid Mech., Vol. 256, pp561 (1993).
- [50] Gear C.W., Petzold L.R.: *ODE Methods for the Solution of Differential Algebraic Systems*, J. Numer. Anal., Vol. 21, No 4, pp716 (1984).
- [51] Shampine L.F and Reichelt M.W.: *The MATLAB ODE suite*, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 18-1 (1997).
- [52] Caffish R.E., Lim C., Luke J.H.C., Sangani A.S.: *Periodic Solutions for Three Sedimenting Spheres*, Phys. Fluids, Vol. 31, No 11, pp3175-3179 (1998).
- [53] Nicolai H., Hinch E.J., Oger L., Guazzelli E.: *Particle Velocity Fluctuations and Hydrodynamic Self-Diffusion of Sedimenting Non-Brownian Spheres*, Phys. Fluids, Vol. 7, No 1, pp12-23 (1995).
- [54] Ekiel-Jezewska M.L., Feuillebois F., Lecoq N., Masmoudi K., Anthore R., Bostel F., Wajnryb E.: *Hydrodynamic Interactions Between Two Spheres at Contact*, Phys. Review E, Vol. 59, No 3, pp3182-3191 (1999).
- [55] Ten Cate A., Nieuwstad C.H., Derksen J.J., Van Den Akker H.E.A.: *Particle Imaging Velocimetry Experiments and Lattice-Boltzmann Simulations on a Single Sphere Settling Under Gravity*, Phys. Fluids, Vol. 14, No 11, pp4012-4025 (2002).
- [56] Jayaweera K.L.O.F., Mason B.J. and Slack G.W.: *The Behaviour of Clusters of Spheres Falling in a Viscous Fluid, part 1*, J. Fluid Mech., Vol. 20, pp121-128 (1964).
- [57] Hocking L.M.: *The Behaviour of Clusters of Spheres Falling in a Viscous Fluid, part 2*, J. Fluid Mech., Vol. 20, pp129-139 (1964).

- [58] Maxworthy T.: *Accurate Measurements of Sphere Drag at Low Reynolds Numbers*, J. Fluid Mech., Vol. 23, pp369-372 (1965).
- [59] Texier A.: *Etude Théorique et Expérimentale du Mouvement d'une Goutte dans une Veine Liquide Verticale*, Thèse de l'Université de Poitiers (1984).
- [60] Vanroyen C.: *Etude Expérimentale de la Sédimentation d'une Goutte en Milieu Confiné*, Mémoire de stage de DEA de l'Université Bordeaux 1 (2000).
- [61] Le Roux J.: *Traitement Numérique des Signaux Bidimensionnels*, Cours de l'Université de Nice (en ligne), (<http://www.essi.fr/~leroux/crim2/>).
- [62] Wu J., Manasseh R.: *Dynamics of Dual-Particle Settling under Gravity*, Preprint (<http://resources.dbce.csiro.au/rmanasseh/a971/a971.html>).

INTERACTIONS HYDRODYNAMIQUES ENTRE SPHÈRES DURES EN RÉGIME FAIBLEMENT INERTIEL : MODÉLISATION ET EXPÉRIMENTATIONS APPLIQUÉES À LA SÉDIMENTATION

Résumé

Le présent travail porte sur la sédimentation de particules non colloïdales suspendues dans un fluide visqueux initialement au repos. Il constitue une contribution à l'étude expérimentale et numérique des interactions hydrodynamiques entre sphères dures sédimentant à faible nombre de Reynolds ($Re < 1$). Le modèle numérique proposé est basé sur la séparation du champ de vitesse réel en une partie Stokesienne symétrique et une partie non symétrique représentant la contribution inertielle nette. D'une part et comme attendu, les résultats obtenus sont en accord avec les résultats de la littérature dans la limite d'un écoulement rampant. D'autre part, en régime inertiel, la confrontation de nos résultats numériques aux prédictions analytiques de Vasseur et Cox dans le cas de doublets de particules nous a permis de cerner le domaine de validité du modèle proposé. Lorsque la distance inter-centres n'est pas trop petite, l'accord entre ces résultats analytiques et les simulations numériques est bon pour de faibles Re . Cependant, dans toutes les configurations étudiées expérimentalement et comme l'ont observé d'autres auteurs avant nous, les résultats de simulations numériques surestiment quantitativement les effets inertiels réels. Néanmoins, si un coefficient empirique proposé dans la littérature est introduit pour corriger la vitesse de la particule individuelle, l'outil numérique proposé devient capable de déterminer avec précision le comportement en sédimentation de suspension de plusieurs particules et ce dans diverses configurations. Ainsi, l'accord entre les résultats de simulations et les résultats expérimentaux est alors très satisfaisant.

Mots clés : Sédimentation ; Interactions hydrodynamiques ; Effets inertiels ; Modélisation ; Expérimentations.

HYDRODYNAMICALLY INTERACTING HARD SPHERES WITH LOW INERTIAL EFFECTS : MODEL AND EXPERIMENTS APPLIED TO SÉDIMENTATION

Abstract

This work deals with the sedimentation of non-colloidal particles suspended in a viscous fluid initially at rest. In that purpose, hydrodynamic interaction forces between hard spheres settling at low Reynolds number ($Re < 1$) are numerically and experimentally studied. The proposed model is formally based on separation of the actual velocity field in a symmetrical Stokesian part and a non-symmetrical part which represent the net inertial contribution of the velocity field. Firstly, obtained results are in agreement with analytical and numerical results available in literature in the limit of creeping flow conditions. Secondly, in inertial regime the sedimentation of two particles is considered as a first step and the comparison between our results and analytical predictions of Vasseur and Cox allows us to determine the range of validity of the proposed model. When the center-to-center distance is not too small, the agreement between analytical predictions and our results is good at low Re . However, for all configurations experimentally studied simulation results are shown to overestimate the actual influence of inertial effects as it has been observed earlier by other authors. Nevertheless, when an empirical coefficient available in literature is introduced to correct the individual velocity of particles, the proposed numerical tool is then able to precisely determine the behavior of several settling particles whatever the configurations studied and the agreement between simulations and experiments is very satisfactory.

Key words : Sedimentation ; Hydrodynamic interactions ; Inertial effects ; Model ; Experiments.