

N° d'ordre : 2819

THÈSE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

En cotutelle avec

L'Université Technique de Cluj-NAPOCA (Roumanie)

Par **Romulus Mircea TEREBES**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Automatique, Productique, Signal et Image

DIFFUSION DIRECTIONNELLE.

**APPLICATIONS À LA RESTAURATION ET À L'AMÉLIORATION
D'IMAGES DE DOCUMENTS ANCIENS**

Soutenue le 28 Mai 2004 :

Après avis de :

Mme Adelaïda MATEESCU	Professeur - Université Polytechnique de Bucarest (Roumanie)	Rapporteurs
MM. Philippe BOLON	Professeur - Université de SAVOIE	
Ioan NAFORNITA	Professeur - Université Polytechnique de TIMISOARA (Roumanie)	

.....
Devant la commission d'examen formée de :

MM. Aurel VLAICU	Vice-Recteur - Université Technique de Cluj-Napoca (Roumanie)	Président
Olivier LAVIALLE	Maître de Conférences - ENITA de Bordeaux	Rapporteur
Mme Monica BORDA	Professeur - Université Technique de Cluj-Napoca (Roumanie)	Examineurs
MM. Pierre BAYLOU	Professeur - ENSEIRB Bordeaux	
Philippe BOLON	Professeur - Université de SAVOIE	
Ioan NAFORNITA	Professeur - Université Polytechnique de TIMISOARA (Roumanie)	

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire est issu d'une collaboration entre l'Université Technique de Cluj-Napoca, Roumanie et l'Université Bordeaux I, France, sous la forme d'une convention de cotutelle de thèse. L'activité de recherche s'est déroulée au sein de l'Equipe Signal et Image de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electronique, Informatique et de Radiocommunications de Bordeaux (ENSEIRB) et au laboratoire de la Théorie de Transmission de l'Information de l'Université Technique de Cluj-Napoca.

Je tiens en premier lieu à remercier vivement Madame M. Borda, professeur à l'Université Technique de Cluj-Napoca et Monsieur P. Baylou professeur à l'ENSEIRB, qui m'ont encadré et conseillé judicieusement durant ces 4 années. Je leur suis particulièrement reconnaissant pour le soutien toujours pertinent, pour leur disponibilité et l'intérêt manifesté envers mon travail. Les nombreuses discussions que nous avons eues m'ont beaucoup apporté tout au long de ces activités de recherche. Mis à part l'aspect scientifique, je leur exprime également toute ma gratitude pour avoir assuré le meilleur cadre pour le déroulement de ce travail. De ce point de vue, en acceptant mes fréquents déplacements en France, en me remplaçant dans les tâches d'enseignement en Roumanie et en me soutenant toujours, Madame M.Borda a été beaucoup plus que mon encadrant et je la remercie profondément.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur M. Najim, professeur à l'ENSEIRB et directeur de l'Equipe Signal et Image pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, pour m'avoir offert les meilleures conditions de travail durant les stages de préparation de la thèse en France.

Je tiens à remercier spécialement Monsieur I. Naforniță, professeur à l'Université Politehnica de Timisoara. Monsieur Naforniță a été mon premier encadrant, je le remercie pour m'avoir fait découvrir ce domaine, pour être l'initiateur de cette collaboration.

Tout particulièrement, j'exprime ma reconnaissance à Monsieur O. Lavalie, maître de Conférences à l'ENITA de Bordeaux et membre de l'Equipe Signal et Image, qui, mis à part l'amitié dont il a toujours fait preuve, a été mon collaborateur le plus proche. Je le remercie pour ses conseils pertinents, sa disponibilité, pour ses remarques toujours très profitables. Monsieur O. Lavalie a su être présent quand j'en ai eu besoin durant ces 4 années et durant la rédaction de ce mémoire.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur A. Vlaicu, professeur à l'Université Technique de Cluj-Napoca, vice-recteur de université, pour m'avoir fait l'honneur d'être le président de mon jury.

Que Madame A. Mateescu, professeur à l'Université Politehnica de Bucarest, Monsieur P. Bolon, professeur à l'Université de Savoie, et Monsieur I. Naforniță, tous les trois rapporteurs de ma thèse, trouvent ici l'expression de ma gratitude pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce mémoire.

Je remercie également la société *I2S* de Pessac, France qui m'a permis de valoriser les techniques exposées dans ce mémoire en les validant sur des images réelles de gravures et de documents anciens.

Je n'oublierai pas de remercier mes collègues de l'Equipe Signal et Image et de l'Université Technique de Cluj-Napoca, permanents ou doctorants, pour leur aide, leurs encouragements et les fructueuses discussions que nous avons eues ensemble.

J'exprime aussi ma gratitude envers les divers organismes qui ont soutenu financièrement mes séjours en France : l'ENSEIRB, l'Agence Universitaire de la Francophonie et la Communauté européenne à travers le programme ERASMUS.

Je ne peux pas omettre ceux qui par leur amour et leur confiance ont soutenu moralement ce travail : ma femme et ma famille.

A Bianca et à ma famille

Table des matières

INTRODUCTION.....	1
1. EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES POUR L'AMÉLIORATION ET LA RESTAURATION D'IMAGES.....	5
1.1 INTRODUCTION	5
1.2 EDP ET TRAITEMENT MULTI-ECHELLE.....	6
1.3 FILTRES BASÉS SUR LA DIFFUSION LINÉAIRE.....	7
1.4 FILTRES NON- LINÉAIRES	9
1.4.1 <i>Modèle de Perona Malik</i>	10
1.4.1.1 Equation de diffusion anisotrope.....	10
1.4.1.2 Choix des paramètres	13
1.4.1.3 Limitations du modèle.....	15
1.4.1.4 Diffusion en avant et en arrière (FAB).....	18
1.4.2 <i>Versions régularisées du modèle Perona-Malik</i>	20
1.4.2.1 Modèle de Catté et al.	20
1.4.2.2 Modèle de Whitaker et Pizer	21
1.4.2.3 Modèle de Nitzberg-Shiota.....	22
1.4.3 <i>Filtres de choc</i>	23
1.5 APPROCHES VARIATIONNELLES	24
1.5.1 <i>Modèle de Nordstrom</i>	25
1.5.2 <i>Minimisation de la variation totale</i>	26
1.5.3 <i>Approche variationnelle unificatrice</i>	29
1.6 FILTRES BASÉS SUR LA COURBURE ET ENSEMBLES DE NIVEAUX	31
1.6.1 <i>EMSS (Euclidean Morphological Scale Space) et Equation de diffusion géométrique</i>	32
1.6.2 <i>Modèle de Alvarez et al. - lissage sélectif et détection des contours par diffusion non linéaire</i>	34
1.6.3 <i>AMSS (Affine Morphological Scale Space)</i>	35
1.6.4 <i>Mouvement sous la courbure moyenne modifiée</i>	36
1.6.5 <i>Combinaisons des filtres de choc et lissage sélectif</i>	38
1.6.5.1 <i>Modèle de Kornprobst et al.</i>	38
1.6.5.2 <i>Self-Snakes</i>	40
1.7 DIFFUSION TENSORIELLE	42
1.7.2 <i>Modèle de Cottet Germain</i>	42
1.7.3 <i>Filtre de type Volterra</i>	43
1.7.4 <i>Modèles de Weickert</i>	45
1.7.4.1 <i>Diffusion pour le rehaussement de contours (EED)</i>	45
1.7.4.2 <i>Diffusion pour l'augmentation de la cohérence (CED)</i>	49

1.8 RÉSOLUTIONS NUMÉRIQUES	52
1.8.1 <i>Approximations par différences finies</i>	52
1.8.1.1 Notations.....	52
1.8.1.2 Approximations des dérivées partielles.....	53
1.8.1.3 Approximations des opérateurs de la géométrie différentielle.....	54
1.8.1.4 Méthodes de résolution.....	58
1.8.1.5 Consistance, convergence et stabilité des schémas numériques.....	60
1.9 CONCLUSION	62
2. LISSAGE DIRECTIONNEL ADAPTATIF PAR DIFFUSION ANISOTROPE	63
2.1 INTRODUCTION.....	63
2.2 ESTIMATION D'ORIENTATION.....	64
2.2.1 <i>Notion d'orientation</i>	64
2.2.2 <i>Confiance et cohérence</i>	65
2.2.3 <i>Choix d'un opérateur gradient</i>	66
2.2.4 <i>Filtrage des orientations</i>	67
2.2.5 <i>Filtrage des orientations par Analyse en Composantes Principales</i>	70
2.2.5.1 Principe.....	70
2.2.5.2 Equivalence avec les formulations de Rao, Mardia et Kass-Witkin	71
2.2.5.3 Support de calcul	71
2.2.5.4 Orientations multiples	73
2.2.5.5 Indicateurs de confiance, de cohérence et d'anisotropie.....	74
2.2.5.6 Analyse en Composantes Principales multi –échelle	77
2.2.5.7 Conclusions	80
2.3 DIFFUSION DIRECTIONNELLE	80
2.3.1 <i>Motivation</i>	80
2.3.2 <i>Lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions</i>	81
2.3.2.1 Introduction	81
2.3.2.2 Modèle général	82
2.3.2.3 Versions régularisées.....	85
2.3.2.4 Résolution numérique.....	86
2.3.2.5 Comparaisons des deux schémas. Choix des paramètres.....	96
2.3.3 <i>Lissage directionnel 2D avec rehaussement des jonctions et des contours</i>	106
2.3.3.1 Introduction	106
2.3.3.2 Modèle général	107
2.3.3.3 Schéma numérique	108
2.3.3.4 Comparaison entre les méthodes de lissage 2D et 1D.....	109
2.4 DIFFUSION FLUX COHÉRENCE	112
2.4.1 <i>Introduction</i>	112
2.4.2 <i>Motivation</i>	112
2.4.3 <i>Travaux antérieurs</i>	112
2.4.4 <i>Modèle à base d'EDP</i>	114
2.4.4.1 Equation proposée	114
2.4.4.1 Choix des paramètres. Schéma numérique.....	115
2.5 CONCLUSIONS.....	118
3. COMPARAISON DES APPROCHES FONDÉES SUR LES EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES POUR LE LISSAGE ET LE REHAUSSEMENT DE TEXTURES ORIENTÉES	119
3.1 MOTIVATION	119

3.2	PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL	120
3.2.1	Types d'images analysées.....	120
3.2.2	Mesures quantitatives	123
3.2.3	Choix des méthodes	124
3.3	RÉSULTATS.....	126
3.3.1	Valeurs quantitatives optimales. Paramètres optimaux.....	127
3.4	ANALYSE DES RÉSULTATS	129
3.4.1	Comparaison visuelle des résultats	129
3.4.1.1	Perona Malik (PM).....	129
3.4.1.2	Catte et al. (CAT).....	129
3.4.1.3	Alvarez et al. (ALV).....	130
3.4.1.4	Mouvement sous la courbure moyenne modifiée (MCMm).....	130
3.4.1.5	Diffusion TV (DTv).....	131
3.4.1.6	Restauration TV –version numérique (RTv).....	133
3.4.1.7	Diffusion pour le rehaussement de contours (EED).....	133
3.4.1.8	Diffusion pour l'augmentation de la cohérence (CED).....	134
3.4.1.9	Minimisation demi quadratique (HC)	135
3.4.1.10	Flux cohérence (FC).....	135
3.4.1.11	Flux cohérence linéaire (FCL).....	136
3.4.1.12	Lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions – version numérique par interpolation des dérivées des fonctions flux (IDid).....	137
3.4.1.13	Lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions– version numérique par interpolation des intensités en niveaux de gris (IDin)	138
3.4.1.14	Lissage directionnel 2D avec rehaussement des jonctions et des contours(ID/2D).....	139
3.4.2	Robustesse vis à vis du choix des paramètres	140
3.4.3	Interprétation statistique des résultats	143
3.4.3.1	ANOVA sur les PSNR's. Image faiblement bruitées	143
3.4.3.2	Résultats sur les SNR's. Images faiblement bruitées.....	145
3.4.3.3	Résultats sur les PSNR's. Images fortement bruitées.....	146
3.4.3.4	Résultats sur les SNR's, images fortement bruitées.....	146
3.5	EXTENSIONS À D'AUTRES TYPES D'IMAGES ET DE BRUITS	147
3.5.1	Résultats quantitatifs	149
3.6	CONCLUSIONS.....	154
4.	RESTAURATION ET AMÉLIORATION DE DOCUMENTS ANCIENS NUMERISÉS	155
4.1	INTRODUCTION	155
4.2	MOTIVATION	155
4.3	NATURE DES IMAGES TRAITÉES	156
4.4	APPROCHES DE TYPE DIFFUSION ET RESTAURATION /AMÉLIORATION DES ANCIENS DOCUMENTS	160
4.5	RÉSULTATS SUR DES IMAGES REPRÉSENTANT DES GRAVURES ANCIENNES EN NIVEAUX DE GRIS	162
4.6	RÉSULTATS SUR DES IMAGES DE TEXTES MANUSCRITS OU DACTYLOGRAPHIÉS	176
4.7	RÉSULTATS SUR DES IMAGES REPRÉSENTANT DES GRAVURES EN COULEURS.....	182
4.8	CONCLUSIONS.....	189
	CONCLUSIONS	191
	ANNEXE 1	
	FILTRAGE DES ORIENTATIONS PAR ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES	199

ANNEXE 2 RÉSULTATS OPTIMAUX (PSNR ET SNR) OBTENUS SUR LES 30 IMAGES DE SYNTHÈSE - CHAPITRE 3	201
ANNEXE 3 PARAMÈTRES OPTIMAUX POUR LES MÉTHODES ANALYSÉES AU CHAPITRE 3 (BASE DE DONNÉES DE 30 IMAGES).....	205
ANNEXE 4 RÉSULTATS VISUELS OPTIMAUX OBTENUS PAR LES 14 MÉTHODES ANALYSÉES SUR LES IMAGES <i>IM4FA</i>, <i>IM4FB</i>, <i>IM14FA</i> ET <i>IM14FB</i> DU CHAPITRE 3	211
ANNEXE 5 RAPPELS THÉORIQUES SUR L'ANALYSE DE VARIANCES (ANOVA) ET LE TEST DE COMPARAISONS MULTIPLES DE STUDENT-NEWMAN-KEULS (SNK)	217
BIBLIOGRAPHIE	221

Introduction

Le sujet de ce mémoire est l'amélioration et la restauration d'images contenant des structures *orientées*, *allongées* selon certaines directions et pouvant être caractérisées en tout point par une orientation dominante.

Au départ, cette problématique a été inspirée par une application particulière : l'*amélioration* et la *restauration* des images représentant des gravures ou des manuscrits anciens numérisés. Ces deux types d'images sont d'ailleurs de nature différente : les gravures sont constituées de traits fins et parallèles et sont caractérisées par des contrastes variables, des fréquences spatiales différentes et par la présence de nombreuses jonctions entre structures d'orientation différente. Les manuscrits ont un contenu informationnel moins riche étant composé essentiellement de traits entourés par des régions plus ou moins homogènes.

En partant d'un problème classique en *restauration d'images* : *l'élimination du bruit* – introduit par les dispositifs d'acquisition ou induit par l'empreinte du temps- les travaux ont porté sur le développement d'un cadre théorique unitaire, dédié - mais non limité – à ce type d'images. Pour éliminer le bruit nous proposerons des méthodes *non – linéaires et adaptatives* qui produisent de faibles modifications topologiques du signal utile. Nous traiterons également du problème de l'*amélioration* des images en proposant des approches originales qui nous permettront d'accentuer de manière uniforme et indépendante des variations locales de contraste, les structures unidimensionnelles présentes avec ou sans *rehaussement des contours*.

La méthodologie adoptée tout au long de ce mémoire est centrée autour de l'utilisation des *équations aux dérivées partielles* (EDP) qui deviennent des outils classiques et très utiles en traitement d'images. En nous fondant sur la notion d'*orientation* définie en tout point comme étant orthogonale au vecteur gradient, nous analyserons le comportement des filtres à base d'EDP en décomposant leur action selon l'orientation des structures et de la normale aux structures.

Le mémoire est organisé en 4 parties et 5 annexes.

Le Chapitre 1 traite de manière unitaire les principaux types d'EDP utilisées actuellement en traitement d'images pour la restauration ou l'amélioration. En complément du cadre théorique exposé explicitement pour l'ensemble des méthodes, le chapitre inclut aussi les interprétations et les observations de l'auteur concernant les implantations pratiques de chaque EDP. Nous soulignerons en particulier les avantages et les défauts de chaque approche à travers des développements théoriques et des exemples choisis. Tous les exemples ont été implantés en utilisant les algorithmes numériques proposés par les auteurs.

Le Chapitre 2 est centré autour de nos nouveaux opérateurs de diffusion. En nous fondant sur l'analyse des principaux modèles d'EDP présentés dans la première partie nous proposerons deux classes d'approches originales qui utilisent des informations directionnelles robustes. Les deux approches que nous allons proposer utilisent une information directionnelle des contours obtenue par des moyens statistiques à travers une analyse en composantes principales dont les principes théoriques sont brièvement présentés en annexe 1.

En traitant des images de gravures anciennes une différence nette existe entre l'existence d'une orientation dominante et sa pertinence. Sur les traits, la notion d'orientation est bien définie, elle indique la tendance directionnelle semi locale. Par contre dans le voisinage des jonctions, l'orientation est mal définie, représentant un mélange des directions. La différence entre les deux méthodes réside dans la manière avec laquelle cette information d'orientation est prise en compte.

La première classe d'opérateurs utilise des mesures de type *dérivées directionnelles* pour quantifier la justesse de l'information directionnelle. Ces mesures, déterminées à partir du contenu en niveaux de gris nous permettront de décider localement si l'orientation estimée est unique ou si elle provient d'un mélange de population ayant des orientations différentes. L'indication fournie par ces dérivées sera utilisée dans un *modèle de diffusion directionnelle non linéaire* qui induira un *lissage unidirectionnel* dans la direction estimée dans le premier cas et un *rehaussement* dans le second. Ce comportement sélectif nous permettra à la fois de lisser efficacement et de manière directionnelle les motifs ayant une seule orientation et de rehausser les zones à orientations multiples, notamment les jonctions présentes dans une image. Le modèle sera ensuite généralisé en lui ajoutant une deuxième direction de diffusion, orthogonale aux contours. Ce nouveau modèle nous permettra d'induire localement des comportements de type *lissage passe bas* – pour des régions relativement homogènes- et de *rehaussement des contours*. Nous nous intéressons également aux aspects pratiques, notamment au coût calculatoire de ces opérateurs. Nous proposerons deux schémas numériques pour cette famille de filtres : un schéma optimisé vis à vis du temps de calcul et un autre, plus lent, mais optimisé vis à vis de l'invariance aux rotations.

La deuxième classe d'opérateurs, fondée sur une approche de type *diffusion tensorielle* utilise un indicateur de pertinence de l'orientation déduit de la notion de *cohérence* des orientations estimées. Nous généraliserons en particulier une mesure de cohérence existante et nous montrerons que ce nouvel indicateur est indépendant du rapport signal bruit local et que ces minima locaux correspondent aux régions ayant des orientations multiples. Le modèle de diffusion tensorielle fondé sur cette mesure nous permettra de lisser des structures de type lignes efficacement et indépendamment du contenu énergétique local. Dans le voisinage des jonctions le processus de lissage sera diminué fortement, cette action nous permettra de lisser sélectivement une image tout en préservant les jonctions. En développant cette classe d'opérateurs nous proposerons aussi une version lente, mais plus exacte, et une version rapide fondée sur une approche de *diffusion linéaire*. Le jeu de paramètres pour ces modèles est établi par des moyens expérimentaux pour la partie diffusion et il est basé sur un jugement théorique pour la partie orientation.

Le Chapitre 3 est dédié à l'étude des performances des approches présentées aux chapitres 1 et 2. Nous positionnerons nos approches en terme de performances obtenues dans des tâches classiques de restauration de structures orientées. En étudiant la restauration sur des images de synthèse, perturbées par des bruits blancs gaussiens, nous montrerons statistiquement que, indépendamment du niveau de bruit considéré, les modèles proposés se comportent très bien par rapport aux EDP classiques. De manière complémentaire à *l'interprétation statistique* effectuée à l'aide d'une *analyse de variance* -annexe 5- nous commenterons les résultats obtenus – annexes 2 et 4- tout en soulignant les principaux défauts et avantages de chaque méthode. Nous nous intéresserons également à la variabilité du jeu des paramètres pour chaque approche –annexe 3- pour étudier la robustesse vis à vis de tout changement par rapport au jeu optimal.

La partie finale de ce chapitre est dédiée à une étude complémentaire effectuée sur des images mixtes, ayant des régions orientées et non orientées et pour des dégradations de type *flou* et bruits non gaussiens. Dans cette partie nous montrerons que le modèle généralisé de lissage 2D du chapitre 2 se montre supérieur aux EDP orientées « régions ».

La partie finale de la thèse - Chapitre 4- est orientée essentiellement vers les *applications* des méthodes proposées pour la restauration des gravures et des documents anciens. Ces applications sont issues d'une problématique soulevée par la société *I2S* de Pessac (France) dont le principal domaine d'activité est la numérisation et la restauration des documents anciens. Nous montrerons à travers plusieurs exemples, sur des images en niveaux de gris et en couleur, les performances de nos approches comparées aux meilleures approches classiques sélectionnées à la lumière des résultats du Chapitre 3.

Chapitre 1

Equations aux dérivées partielles pour l'amélioration et la restauration d'images

1.1 Introduction

Depuis quelques temps les méthodes non-linéaires sont considérées comme des outils puissants dans le domaine de traitement du signal et de l'image. Les raisons d'un tel intérêt sont multiples : les effets non-linéaires inclus dans le système visuel humain (SVH), le comportement fortement non-linéaire des systèmes optiques d'acquisition d'images [MiS01]. Bien que les filtres linéaires occupent encore un rôle important dans le traitement des images, étant intrinsèquement très faciles à implanter, les limitations de ce type de filtres sont bien connues : les images et les signaux, en général, ne respectent pas les hypothèses de stationnarité, les filtres linéaires sont incapables d'éliminer des bruits impulsionnels sans rendre les contours flous. Les avancées technologiques en termes de puissance, vitesse de calcul et coût ont permis l'implantation pratique d'algorithmes plus complexes. Ces algorithmes, issus des approches non-linéaires, peuvent s'affranchir des limitations citées plus haut ; l'application de ces méthodes au lissage avec préservation de contours, au rehaussement de contours ou encore à la segmentation des images montre de façon évidente leur supériorité.

Une étude des articles les plus récents qui illustrent cette nouvelle tendance montre qu'une grande partie de ces techniques s'appuient sur l'utilisation d'équations aux dérivées partielles (EDP).

Ce chapitre constitue un état de l'art sur l'utilisation des EDP dans les domaines du traitement des images et celui de la vision par ordinateur. Nous allons présenter les méthodes les plus récentes fondées sur les EDP en traitement des images, en particulier celles fondées sur la diffusion linéaire et non-linéaire et celles qui utilisent la notion de courbure.

Classiquement, en restauration et amélioration d'images à travers les EDP, une image plane est modélisée par une surface constituée d'un ensemble discret de points (*pixels*). En considérant l'intensité en niveaux de gris (la luminance) comme une fonction des coordonnées spatiales (x,y) et du temps t , les propriétés de l'image restaurée ou améliorée que l'on cherche à obtenir sont obtenues par l'intermédiaire d'une EDP ayant comme arguments la fonction luminance et ses dérivées partielles ; la solution de cette EDP, à un certain instant t , représente l'image restaurée (améliorée).

Mathématiquement, soit $U_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ l'image à traiter avec $U_0(x,y)$ le niveau de gris associé à un pixel de coordonnées (x,y) . Le modèle général d'évolution de l'image peut être mis sous la forme [CMST98]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U(x,y,t)) \quad (1.1)$$

En (1.1) F est un opérateur caractérisant un algorithme et dépendant de l'image

originale et de ses dérivées spatiales premières et secondes ; $U(x, y, t) : \mathbf{R}^2 \times [0, \tau] \rightarrow \mathbf{R}$ représente l'image qui évolue. Finalement, la solution de l'équation (1.1) n'est que l'image traitée à une échelle t ; la solution à un temps donné représente une version simplifiée de l'image. Au fur et à mesure que le temps augmente, la transformation d'une image à l'aide d'une EDP conduit à l'élimination du bruit tout en gardant les structures importantes. En conséquences, certaines EDP sont introduites comme des outils *d'analyse multi-échelle*. Nous allons présenter ces liaisons dans le paragraphe suivant.

1.2 EDP et traitement multi-échelle

L'un des plus importants paramètres dans le domaine de la vision par ordinateur est la notion d'échelle. Une propriété inhérente des objets ou des détails dans une image est qu'ils n'existent comme des entités significatives qu'à une certaine échelle d'observation. Un système de vision doit permettre l'analyse, l'extraction et la caractérisation des objets de tailles différentes en contrôlant l'échelle d'observation à travers un paramètre libre : *l'échelle t*.

Une analyse multi échelle est définie par une famille des transformations $(T_t)_{t \geq 0}$ qui, appliquées à une image originale U_0 , donne une famille d'images dépendantes du paramètre t . L'image originale correspond à l'échelle $t=0$. Aux échelles $t>0$, l'image est une version simplifiée de l'image originale dont on espère qu'elle ne contient pas de fausses structures. La famille des images obtenues en faisant varier t permet d'obtenir une *représentation multi-échelle* de l'image originale.

Les propriétés fondamentales qui doivent être satisfaites par une analyse multi échelle sont résumées par Morel [MoS95] :

1. Fidélité : $T_t(U_0) = U_0 \quad t \rightarrow 0$
2. Causalité : $T_t(U_0)$ ne dépend que de $T_{t'}(U_0)$ avec $t' < t$
3. Invariance Euclidienne : si A est une isométrie
 $T_t(U_0 \circ A) = T_t(U_0) \circ A$
4. Causalité forte (pour la détection des contours) : soit K_t l'ensemble des contours à l'échelle t . $K_t \subset K_{t'}$ pour $t' < t$.

La représentation des images sous la forme d'un lissage multi-échelle a été formalisée par les travaux de Marr et Hildreth [MaH80], Witkin [Wit83] et développée ensuite par Koenderink [Koe84].

La méthode proposée par Witkin permet d'obtenir des images à des échelles de plus en plus grossières en faisant des convolutions entre l'image originale et des noyaux Gaussiens avec des variances σ^2 croissantes. Dans le contexte de détection de contours, Witkin propose de faire varier le paramètre d'échelle σ^2 de manière continue ; les échelles élevées sont utilisées pour identifier les structures, le but étant de les suivre à des échelles plus petites pour obtenir leur localisation précise. A une échelle t , un pixel (x, y) appartient à un contour selon la théorie de Marr et Hildreth si le laplacien $\Delta U(x, y, t)$ de l'image convoluée avec une Gaussienne change de signe et le gradient $|\nabla U(x, y, t)|$ est "grand". En procédant de cette manière une représentation arborescente de l'image permet l'identification des structures intéressantes.

Koenderink [Koe84] a remarqué l'équivalence entre la solution de l'EDP de diffusion de la chaleur à un temps t et la convolution avec un noyau Gaussien d'écart type $\sqrt{2t}$. Il a formalisé les principes de *causalité*, *d'homogénéité* et *d'isotropie*. Le principe de causalité stipule que chaque caractéristique de l'image à une échelle grossière a des causes à une échelle plus petite, les critères d'homogénéité et d'isotropie imposent quant à eux une

invariance spatiale. Remarquons que les principes de Koenderink ont été formalisés dans un cadre axiomatique en [AGLM93]. Par contre, la principale limitation de ce modèle est qu'il ne respecte pas l'axiome de causalité forte : la diffusion isotrope déplace les contours. Nous allons détailler les propriétés de l'espace multi-échelle linéaire issu de cette approche et ses limitations en §1.3.

La méthode de lissage adaptatif avec rehaussement de contours de Perona et Malik [PeM90] est peut être l'une des plus importantes dans le contexte dans la théorie de détection de contours. Une interaction entre différentes échelles est incluse dans l'algorithme de lissage à travers une fonction de diffusion non-linéaire. Le lissage est important dans les zones de faibles gradients et faible autour des contours. Comme nous allons voir au paragraphe §1.4.1, les résultats obtenus par l'EDP de diffusion anisotrope sont impressionnants, les contours obtenus sont stables à travers les différentes échelles, l'espace *multi-échelle non-linéaire* issu de cette méthode respecte le principe de causalité.

En partant de l'équation de Perona et Malik, Rudin, Osher et Fatemi [ROF92] ont proposé un modèle de lissage fondé sur une minimisation d'énergie. L'EDP proposée, permet aussi l'élimination du bruit tout en gardant les contours. La méthode sera présentée en §1.5.2.

Alvarez, Lions et Morel [ALM92] ont proposé une classe d'équations paraboliques de diffusion fondée sur la notion de courbure moyenne (*MCM*). Leur équation de lissage sélectif, conduit à une diffusion principalement orientée dans la direction orthogonale au vecteur gradient. Le modèle et les liaisons avec les modèles de Osher et Rudin et Perona-Malik seront détaillés au paragraphe §1.6.2.

Une approche axiomatique formalisant les 4 principes d'une analyse multi-échelle a été proposée dans [AGLM93]. Les espaces multi-échelle non-linéaires issus de cette axiomatique sont appelés *EMSS (Euclidian Morphological Scale Space)* et *AMSS (Affine Morphological Scale Space)*. Nous présenterons leurs propriétés en §1.6.1 et §1.6.3. De manière indépendante, la même approche pour l'évolution affine des courbes des niveaux a été développée par Sapiro et Tannenbaum [SaT94].

Weickert a étendu dans [Wei94] l'approche multi-échelle issue de l'EDP de diffusion anisotrope pour le cas des fonctions de diffusion matricielles. Nous allons montrer les propriétés des EDP associées en §1.7.4.

1.3 Filtres basés sur la diffusion linéaire

Une approche classique dans le domaine de la restauration d'images utilise une opération de convolution linéaire afin de réduire l'effet du bruit considéré comme étant de haute fréquence.

Soit U_0 la fonction luminance de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , définie sur $\Omega = [0, a] \times [0, b]$. L'image restaurée $U(x, y, \sigma)$ est donnée par :

$$U(x, y, \sigma) = U_0(x, y) * G_\sigma(x, y) = \int_{\Omega} G_\sigma(x - u, y - v) U_0(u, v) du dv \quad (1.2)$$

Le produit de convolution présenté en (1.2) peut se généraliser pour des fonctions de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} . σ est un paramètre qui contrôle l'intensité de l'opérateur G . Un opérateur souvent utilisé est l'opérateur Gaussien. Pour $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbf{R}^n$ l'opérateur Gaussien d'écart type σ et de moyenne nulle est défini par :

$$G_\sigma(x_1, x_2 \dots x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.3)$$

L'expression d'une fonction gaussienne dans l'espace de Fourier est toujours une gaussienne ; le produit de convolution (1.2) se traduit par le lissage de U_0 en supprimant

l'information qui présente des variations spatiales sur des échelles inférieures à σ ; le paramètre σ est donc un paramètre d'échelle qui contrôle la taille spatiale du voisinage.

Koenderink [Koe84] était le premier à publier un résultat concernant l'équivalence entre le produit de convolution (1.2) et l'évolution de l'équation de propagation de la chaleur

jusqu'à une échelle $t = \frac{\sigma^2}{2}$:

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = U_0(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U =: U_{xx}(x, y, t) + U_{yy}(x, y, t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Si l'image initiale est bornée, la solution est unique.

Cette équation peut être écrite sous la forme de divergence :

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = U_0(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[\nabla U(x, y, t)] \end{cases} \quad (1.5)$$

L'expression permet de montrer la conservation de l'intensité en niveaux de gris. Les propriétés de la solution dépendent fortement des conditions aux limites. Si des conditions aux limites de type Neumann sont rajoutées au (1.5):

$$\nabla U(x, y, t)|_{(x,y) \in \partial\Omega, t \in (0, \infty)} = 0 \quad (1.6)$$

en notant \vec{n} la normale à $\partial\Omega$ orientée vers l'extérieur de Ω , par le théorème de la divergence on obtient:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \text{div}[\nabla U(x, y, t)] d\Omega = \int_{S=\partial\Omega} \nabla U(x, y, t) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.7)$$

Une conséquence directe de (1.7) est la conservation de l'intensité moyenne de l'image $\mu(t) =: \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} U(x, y, t) d\Omega$; en effet :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mu(t)] = \frac{1}{|\Omega|} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\Omega} U(x, y, t) d\Omega \right] = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega \xrightarrow{(1.7)} = 0 \quad (1.8)$$

L'équation parabolique linéaire (1.4) induit une diffusion isotrope. Cette diffusion s'opère ainsi de manière identique dans toutes les directions et ne possède aucune direction privilégiée.

La discrétisation de (1.4) est obtenue en général en utilisant pour la version discrète du laplacien des schémas utilisant les différences finies de type FTCS (*Forward Time Centered Space*). Comme nous allons le voir au paragraphe §1.8, dans ce cas la diffusion isotrope peut s'exprimer comme un processus itératif qui, pour chaque pixel, consiste à opérer des convolutions avec un masque 3x3 construit en prenant les dérivées secondes de $U(x, y)$ selon les axes x et y .

Dans [KKR97] et [Kam99], les auteurs posent le problème de l'invariance en rotation des implantations discrètes du laplacien (1.4), et proposent un masque discret prenant en compte des orientations à $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$. Finalement, les auteurs proposent le masque optimal donné par :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Pour des tâches de restauration d'images bruitées, la diffusion isotrope permet effectivement d'éliminer le bruit, mais les zones présentant des discontinuités en niveaux de gris sont aussi lissées. Pour illustrer ce problème, considérons l'image bruitée présentée à la Figure 1.1.a qui représente deux objets superposés. La figure 1.1.b montre la norme du vecteur gradient. Malgré le bruit, le contour de la zone de superposition entre les deux objets est facilement discernable pour l'observateur humain. Pour des échelles différentes nous présentons les solutions de l'équation de diffusion isotrope avec les normes associées : pour $t=0.5$ Fig.1.1.c et d; pour $t=22.5$. (Fig.1.1.e et f) et pour $t=500$ (Fig.1.1.g et h). Plus l'échelle est grande plus les effets du bruit aléatoire diminuent, les images des normes du gradient deviennent plus cohérentes mais il est de plus en plus compliqué de cerner la position exacte des contours. Les valeurs des normes des vecteurs gradients diminuent, la solution de l'équation pour $t \rightarrow \infty$ étant un niveau de gris constant égal à la moyenne de l'image bruitée.

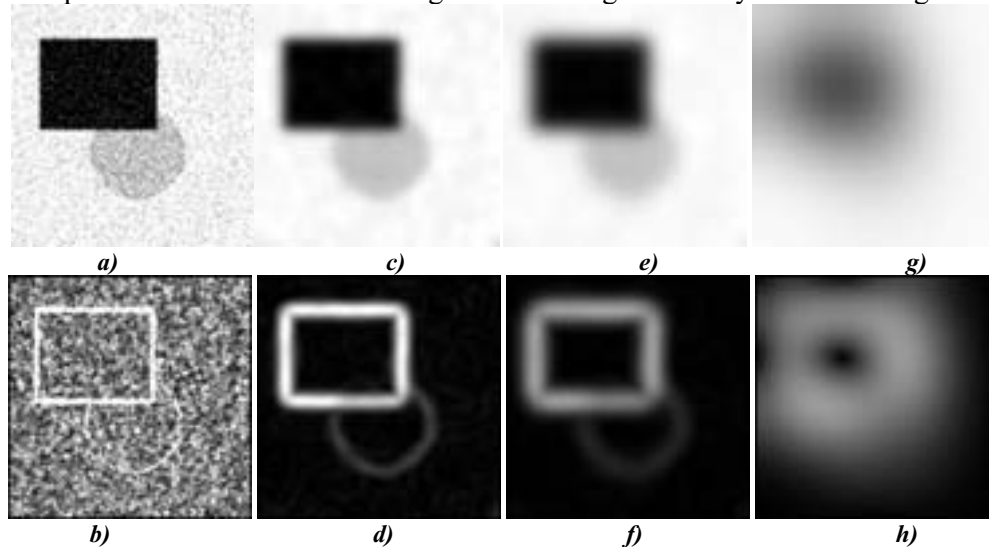


Fig1.1-Resultats d'une diffusion isotrope. a) Image bruitée. c) $t=0.5$. e) $t=22.5$. g) $t=500$.
b)-h) : normes des vecteurs gradients associés .

Comme nous venons de le voir, la convolution avec un noyau Gaussien (ou l'équation de diffusion isotrope), ne permet pas de lisser proprement une image, mais elle conduit à une simplification progressive de l'image permettant d'obtenir des informations pour des traitements ultérieurs. Parmi les modèles qui utilisent ce principe on retrouve :

- le filtre de Marr et Hildreth [MaH80] : le filtre utilise le laplacien de l'image convoluée avec un noyau Gaussien. La convolution est utilisée pour régulariser l'image originale et obtenir des dérivées secondes robustes, utilisées ensuite pour la détection des contours par la recherche des zéros du laplacien. Notons que la méthode peut détecter de faux contours dans les zones trop lissées.
- le modèle de Witkin [Wit83] qui fait varier l'écart type du noyau (équivalent au temps t de l'équation de diffusion isotrope) pour détecter les contours à une échelle élevée et les suivre de manière inverse.
- le filtre passe-bas de Canny [Can83] , [Can86] qui consiste à localiser les contours en utilisant l'orientation des gradients de l'image régularisée par une Gaussienne.

1.4 Filtres non- linéaires

Dans cette section, nous nous intéressons aux modifications introduites dans l'équation de diffusion de la chaleur pour combiner ses avantages (élimination efficace du bruit, simplification de l'image) avec l'un des objectifs de la restauration d'images : *le rehaussement des contours flues*. Nous présentons, dans un premier temps, le travail originel

de Perona et Malik, puis les différentes régularisations de ce modèle pour conclure avec la méthode fondée sur les filtres de choc de Osher et Rudin qui tend à s'approcher de l'équation inverse de la chaleur.

1.4.1 Modèle de Perona Malik

La première idée pour résoudre les problèmes liés à une diffusion isotrope a été proposée par Perona et Malik dans [PeM90]. Partant du problème de délocalisation des contours issu d'une analyse multi-échelle linéaire, les auteurs proposent une approche non-linéaire reposant sur trois principes :

- causalité
- localisation immédiate : à chaque échelle les contours doivent être nets et coïncider avec la position des frontières significantes pour cette échelle
- le lissage intra-région est préféré au lissage inter-régions.

La méthode de lissage sélectif avec rehaussement des contours consiste à effectuer une diffusion conditionnelle : le lissage est fort à l'intérieur des régions homogènes et faible dans les régions non- homogènes.

1.4.1.1 Equation de diffusion anisotrope

La méthode consiste à faire évoluer une image sous l'EDP suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[c(x, y, t)\nabla U(x, y, t)] \quad (1.10)$$

avec les conditions initiales :

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y) \quad (1.11)$$

Le nom proposé par les auteurs pour leur méthode est « *diffusion anisotrope* ». Nous garderons ce nom dans ce mémoire, même si le même nom est revendiqué par Weickert [Wei96], [Wei97a], [Wei98] pour ses méthodes de diffusion fondées sur des conductivités tensorielles.

Dans un souci de clarté, nous utilisons les notations allégées : à l'échelle t , $U(x, y, t) = U$ et pour le gradient $\nabla U(x, y, t) = \nabla U$.

En développant la divergence de (1.10), celle-ci devient:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c\Delta U + \nabla c \cdot \nabla U \quad (1.12)$$

Si $c(x, y, t)$ est une constante, on retrouve l'équation de diffusion isotrope (1.4).

La conductivité $c(x, y, t)$ est construite de manière à favoriser le lissage intra-région et à pénaliser la diffusion inter-régions à travers l'utilisation d'une fonction décroissante, dépendante de la norme du vecteur gradient :

$$c(x, y, t) = g(|\nabla U|) \quad (1.13)$$

Les fonctions proposées initialement par Perona-Malik sont :

$$g(|\nabla U|) = \exp[-(|\nabla U|/K)^2] \quad (1.14)$$

et :

$$g[|\nabla U|] = \frac{1}{1 + \left[\frac{|\nabla U|}{K} \right]^2} \quad (1.15)$$

Le paramètre K est appelé « seuil ou barrière de diffusion » ; comme nous allons voir, il joue un rôle important dans le comportement de la diffusion.

- Interprétation directionnelle : une interprétation de (1.10) qui permet de saisir plus facilement les différences avec la diffusion isotrope est obtenue en écrivant l'équation en

terme de dérivées secondes directionnelles dans la direction du gradient $\vec{\eta} = \left(\frac{U_x}{|\nabla U|}, \frac{U_y}{|\nabla U|}\right)^T$ et dans la direction orthogonale $\vec{\xi} = \left(-\frac{U_y}{|\nabla U|}, \frac{U_x}{|\nabla U|}\right)^T$ (Fig 1.2). Cette notation, classique, est présentée dans plusieurs travaux [DeF95-96], [KMA96], [KDA97a] ou [Whi93].

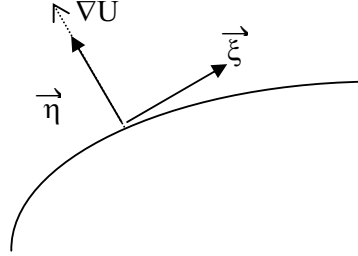


Fig 1.2- Direction du gradient et direction orthogonale.

Proposition 1

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla U|)\nabla U) = g(|\nabla U|)U_{\xi\xi} + [g(|\nabla U|) + |\nabla U|g'(|\nabla U|)]U_{\eta\eta} \quad (1.16)$$

Démonstration :

Soit $\nabla U = (U_x, U_y)^T$, le vecteur gradient de norme $|\nabla U| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$.

Dans le repère orthonormé (\vec{i}, \vec{j}) , le développement de (1.12) conduit à :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c\Delta U + \nabla c \cdot \nabla U = g(|\nabla U|)(U_{xx} + U_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x} g(|\nabla U|)U_x + \frac{\partial}{\partial y} g(|\nabla U|)U_y \quad (1.17)$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(|\nabla U|)U_x + \frac{\partial}{\partial y} g(|\nabla U|)U_y &= g'(|\nabla U|)\frac{\partial}{\partial x} |\nabla U|U_x + g'(|\nabla U|)\frac{\partial}{\partial y} |\nabla U|U_y = \\ &= \frac{g'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}(U_{xx}U_x + U_{yx}U_y)U_x + \frac{g'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}(U_{xy}U_x + U_{yy}U_y)U_y = \\ &= \frac{g'(|\nabla U|)}{|\nabla U|}(U_{xx}U_x^2 + 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_y^2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dans le repère $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ la dérivée première directionnelle selon $\vec{\eta}$ s'exprime par :

$$U_{\eta} = \nabla U \cdot \vec{\eta} = |\nabla U|$$

La dérivée seconde s'écrit :

$$\begin{aligned} U_{\eta\eta} &= \nabla U_{\eta} \cdot \vec{\eta} = \frac{1}{|\nabla U|} \left[\frac{\partial}{\partial x} (|\nabla U|)U_x + \frac{\partial}{\partial y} (|\nabla U|)U_y \right] \\ &= \frac{(U_{xx}U_x + U_{yx}U_y)U_x + (U_{xy}U_x + U_{yy}U_y)U_y}{|\nabla U|^2} = \\ &= \frac{U_{xx}U_x^2 + 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_y^2}{|\nabla U|^2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le laplacien étant invariant au changement de base, le premier terme de (1.17) peut s'écrire :

$$c\Delta U = g(|\nabla U|)(U_{xx} + U_{yy}) = g(|\nabla U|)(U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}) \quad (1.20)$$

En combinant (1.18), (1.19) et (1.20) nous obtenons :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla U|)\nabla U) = g(|\nabla U|)(U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}) + |\nabla U|g'(|\nabla U|)U_{\eta\eta} \text{ c.q.f.d}$$

Réécrivons (1.16) sous une autre forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = c_{\xi}U_{\xi} + c_{\eta}U_{\eta\eta} \\ c_{\xi} = g(|\nabla U|) \\ c_{\eta} = g|\nabla U| + |\nabla U|g'(|\nabla U|) = \phi'(|\nabla U|) \end{array} \right. \quad (1.21)$$

La fonction $\phi(s) = s \cdot g(s)$ est appelée fonction flux, elle gère la diffusion selon la direction du gradient.

La figure 1.3 représente les fonctions de diffusion et les fonctions flux associées aux deux fonctions de diffusion proposées par Perona et Malik.

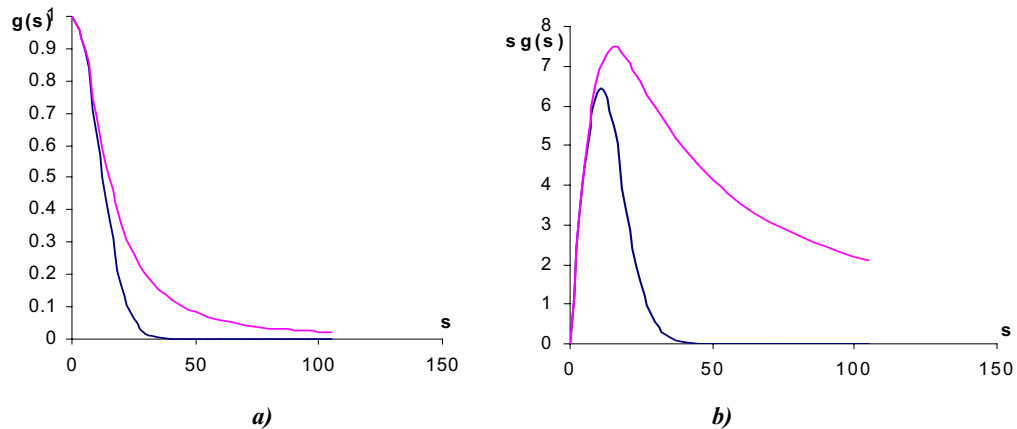


Fig 1.3- a) Fonctions de diffusion Perona Malik . b) Fonctions flux associées ($K=15$).

$$g(s) = \exp(-s^2/K^2) \quad \text{—} \quad g(s) = 1/(1+s^2/K^2) \quad \text{—}$$

Le comportement de l'équation de diffusion est maintenant plus facile à interpréter :

- dans la direction orthogonale au gradient, la diffusion anisotrope induit un lissage modulé par la norme du vecteur gradient.

- la diffusion anisotrope peut également rehausser les contours. Pour des valeurs du gradient $\nabla U > K$ (pour la fraction rationnelle) et $\nabla U > K/\sqrt{2}$ pour la fonction gaussienne, la fonction flux devient décroissante, sa dérivée est négative conduisant à un rehaussement dans la direction $\vec{\eta}$.

Perona et Malik ont montré ce dernier aspect pour des profils 1D en écrivant l'équation de diffusion:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \phi'(U_x)U_{xx} \quad (1.22)$$

La variation de la pente par rapport au temps devient [PeM90] :

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \phi''(U_x)U_{xx}^2 + \phi'(U_x)U_{xxx} \quad (1.23)$$

L'argumentation est fondée sur le fait qu'au point d'inflexion, $U_{xx} = 0$; en supposant que le contour est orienté de telle sorte que $U_x > 0$ ($U_{xxx} \ll 0$) la pente du profil augmente

si $\phi'(U_x) < 0$ et elle diminue pour $\phi'(U_x) > 0$.

Il est évident que ce résultat peut se généraliser à (1.16) pour des contours définis au sens de Canny ($U_{\eta\eta} = 0$).

Le rehaussement des contours est un phénomène recherché dans ce modèle. Malheureusement, la présence de ce rehaussement ne permet pas de démontrer – en même temps – l'existence et l'unicité de la solution de l'équation. Le modèle peut conduire à des oscillations non bornées. D'ailleurs, Perona et Malik ne revendiquent pas cette existence de solution. Par contre, ils introduisent un principe de maximum pour garantir le principe de causalité et l'absence d'oscillations pour leur modèle numérique. Pour des fonctions $U(x, y, t)$ deux fois différentiables sur $\Omega \times [0, t)$ qui respectent [PeM90]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - c\Delta U - \nabla c \nabla U = 0 \quad (1.24)$$

avec des conditions aux limites de type Neumann les maxima et les minima appartiennent à l'image originale :

$$\inf_{\Omega} U_0 \leq U \leq \sup_{\Omega} U_0 \quad (1.25)$$

Ce principe peut être ensuite étendu au cas discret: si à une échelle t $U_{\min|^{(i,j)}^t} = \min_{(k,l) \in N(i,j)} (U_{k,l})$, $U_{\max|^{(i,j)}^t} = \max_{(k,l) \in N(i,j)} (U_{k,l})$ ($N(i,j)$ représente le 4 ou le 8-voisinage du pixel (i,j)) et si le schéma discret est stable, alors :

$$U_{\min|^{(i,j)}^t} \leq U_{(i,j)}^{t+1} \leq U_{\max|^{(i,j)}^t} \quad (1.26)$$

Malgré le principe de maximum, les principes de causalité et de causalité forte d'une analyse multi échelle ne sont validés qu'expérimentalement. Les auteurs remarquent notamment que la présence du terme de rehaussement peut introduire de nouveaux maxima et minima.

Les améliorations apportées par l'approche anisotrope sont illustrées à la figure 1.4. En comparaison avec la méthode de diffusion isotrope (Fig. 1.4 b), la diffusion anisotrope permet de restaurer l'image originale en supprimant le bruit tout en préservant (rehaussant) les contours (Fig. 1.4 c). Les résultats ont été obtenus avec la fonction gaussienne comme fonction de diffusion.

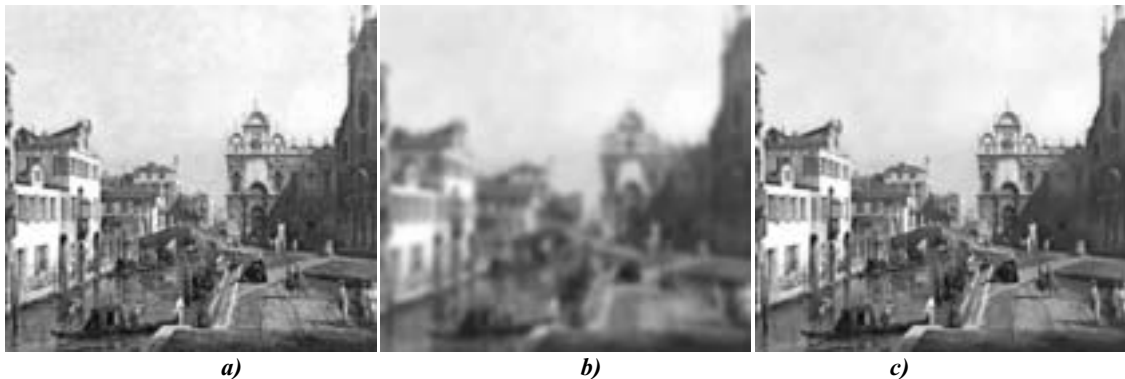


Fig 1.4- Effets de la diffusion isotrope b) et anisotrope c) pour l'image Canaletto a) [Can1740] $t=25$, $K=10$.

1.4.1.2 Choix des paramètres

La diffusion anisotrope nécessite le réglage de deux paramètres libres K et t . Le choix du temps d'arrêt t influence de manière forte les résultats de la diffusion : cependant, dans le cadre d'un traitement multi-échelle, la tendance est de choisir une valeur grande pour t et

d'observer l'évolution du processus vers une image constante ; dans le cadre de la restauration d'images, t est choisi plus faible, la solution souhaitée étant proche de l'image originale. Il n'existe pas de critère universel pour déterminer t de manière optimale.

La barrière de diffusion contrôle la manière avec laquelle les contours interviennent dans le processus de diffusion. Si K est élevé, les résultats s'approchent de ceux d'une diffusion isotrope ; pour des valeurs faibles, les contours correspondant à un gradient de norme supérieure à K seront conservés et même rehaussés. Perona et Malik proposent deux manières de choisir K :

- en se fondant sur une connaissance a priori, K est alors choisi par l'utilisateur.
- en se fondant sur l'estimateur du bruit de Canny [Can86], K est choisi comme un pourcentage p ($p=90\%$ par exemple) de l'intégrale de l'histogramme des gradients. Les $(100-p)\%$ contours les plus marqués ne seront pas affectés par la diffusion. Pour le cas des images fortement bruitées, ou pour des images où le bruit varie d'une région à l'autre, il est possible de lier K à un estimateur local du bruit.

Depuis la publication de l'article original, plusieurs auteurs se sont intéressés au choix du paramètre K dans le modèle de base Perona-Malik. Black et al. [BSMH97] et [BSMH98] suggèrent de choisir K en utilisant une statistique robuste :

$$K = 1.4826 MAD(\nabla U) \quad (1.27)$$

où MAD est la déviation médiane absolue :

$$MAD(\nabla U) = \text{médiane}_v[(\|\nabla U\| - \text{médiane}_v(\|\nabla U\|))] \quad (1.28)$$

Le terme 1.4826 correspond à la déviation médiane absolue d'une distribution normale de variance unitaire.

Expérimentalement Whitaker [Whi93] suggère de lier K à la racine de la valeur moyenne quadratique des normes des gradients :

$$K = \beta \sqrt{\text{moyenne}(\|\nabla U\|^2)} \quad (1.29)$$

avec $\beta \in [0.6; 1.2]$

Une approche similaire à celle de Perona et Malik est introduite dans [MoB98] et [MoB99]; les auteurs proposent de déterminer la barrière de diffusion en utilisant seulement un nombre α de blocs homogènes disjoints. L'image est divisée en N blocs, en calculant sur chaque bloc une mesure d'homogénéité et seuls les blocs les plus homogènes ($\alpha = 0.1 \cdot N$) sont retenus. La barrière K est déterminée ensuite à chaque itération en utilisant l'approche issue de l'estimateur de bruit de Canny. De plus les auteurs montrent qu'en faisant varier K de cette manière, un défaut de la méthode originale (*effet de trou - pinhole effect*) peut être corrigé.

Withaker et Pizer [WiP93], [Whi93] montrent dans leurs travaux que d'autres contraintes doivent être imposées à la barrière de diffusion pour éviter un autre défaut de l'équation originale : *l'effet escalier*. Nous aborderons les méthodes proposées pour éliminer les effets de trou et d'escalier dans le prochain paragraphe.

D'autres auteurs se sont intéressés en même temps au temps d'arrêt et au choix de K . Li et Chen [LiC94] proposent de faire décroître K au fil des itérations mais sans rendre la barrière de diffusion dépendante de l'image. L'idée est reprise dans [GZS01] : en se fondant sur une analogie avec les phénomènes physiques, les auteurs proposent deux versions des coefficients de diffusion dépendants du temps (1.30 et 1.31):

$$K(t) = \frac{1}{\varepsilon + \alpha t} \quad (1.30)$$

où $\varepsilon \approx 0$. Pour $t=0$, la diffusion est linéaire ($K \rightarrow \infty, c(x, y, 0) \rightarrow 1$). Lorsque l'EDP évolue avec le temps, K devient de plus en plus faible. Pour $t \rightarrow \infty$ la solution converge vers

un état stable puisque $K \rightarrow 0, c(x, y, 0) \rightarrow 0$. Le paramètre α_1 contrôle la vitesse de décroissance de K : plus α_1 est grand et plus le système évolue rapidement vers l'état stable induisant une moindre élimination du bruit et des contours mieux conservés.

La deuxième approche consiste à modifier la fonction de diffusion (1.15) :

$$g(|\nabla U|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla U|}{K}\right)^{\alpha_2 t}} \quad (1.31)$$

où α_2 contrôle la pente de la fonction de diffusion. Pour $t=0$ la diffusion est linéaire en tout point ; lorsque t augmente, la diffusion s'effectue pour des gradients inférieurs à K et s'annule pour des gradients supérieurs à K . Les images filtrées avec ce coefficient de diffusion sont constantes par morceaux.

Même si les résultats montrent que l'image originale tend à évoluer vers une image stable, les auteurs ne donnent pas de critère de choix pour α_1 et α_2 . Le problème de choix du temps d'arrêt optimal est simplement remplacé par le problème du choix des deux paramètres libres.

1.4.1.3 Limitations du modèle

Malgré les résultats expérimentaux plutôt convaincants (Fig. 1.4), plusieurs auteurs ont soulevé les inconvénients de l'approche originelle de Perona-Malik. Un premier défaut peut se comprendre de manière intuitive : si le niveau du bruit dans l'image originale est élevé, il est rehaussé par le processus. Pour s'affranchir de ce problème Perona et Malik proposent dans leur article de remplacer les conditions initiales avec une version lissée de l'image originale.

A partir du modèle 1D (1.22) Whitaker et Pizer [WiP93],[Whi93] ont montré que, pour des profils abrupts, certains choix pour la barrière de diffusion peuvent introduire une instabilité nommée *effet d'escalier*. Pour étudier le rehaussement, ils analysent aussi le voisinage du point d'inflexion et montrent que les contours abrupts peuvent se transformer en rampe si la dérivée de la pente du profil dans un voisinage x du point d'inflexion x_0 vérifie :

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} \geq \frac{\partial U_{x_0}}{\partial t} \quad (1.32)$$

Les rampes ainsi créées peuvent se "fracturer" et former des profils plus abrupts séparés par des zones constantes.

A partir de cette analyse les auteurs établissent une limite pour la barrière de diffusion à travers la fonction flux :

$$\phi''(U_x) \leq 0 \quad (1.33)$$

Après des calculs simples que nous ne détaillons pas ici, (1.33) conduit aux limites $U_x \leq \sqrt{1.5K}$ pour la fonction gaussienne et $U_x \leq \sqrt{3K}$ pour la fraction rationnelle.

Cela limite en pratique les choix de la barrière K (Fig. 1.5) :

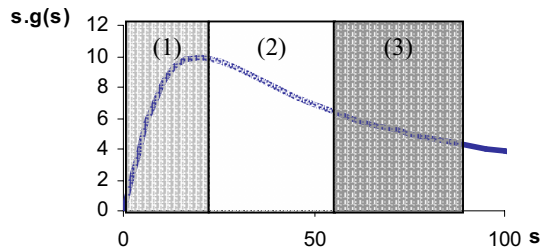


Fig 1.5- Fonction flux : lissage (1) , rehaussement (2) , effet escalier (3).

Nous allons montrer cet effet sur une image de synthèse de 64x64 pixels représentant un profil 1D $U(x) = A \tanh(fx + d) + B$ (Fig.1.6 a) bruité avec un bruit Gaussien blanc d'écart type $\sigma = 5$ (Fig.1.6 b). Le résultat est montré en Fig. 1.6.c ; Fig. 1.6.d représente les lignes 40 de l'image originale et du résultat.

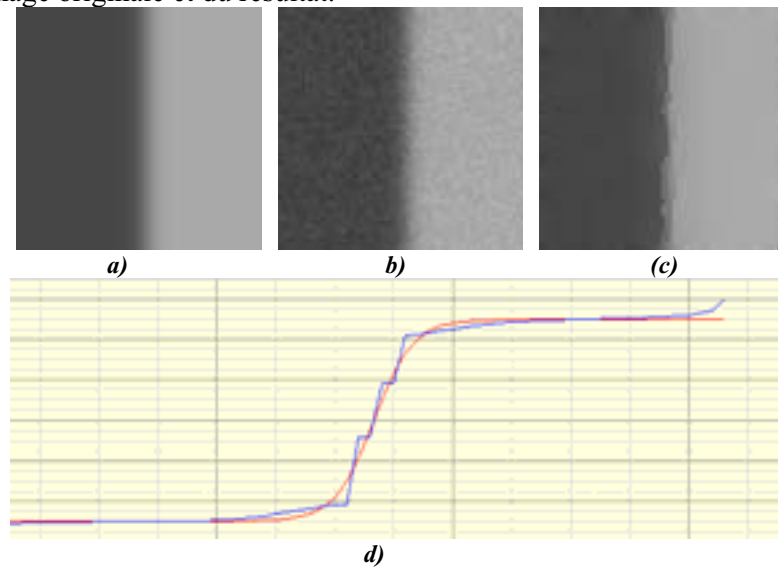


Fig 1.6- Effet escalier. a) Image originale. b) Image bruitée.

c) Résultat de la diffusion anisotrope $k=6, t=25$. d) Profil horizontal- lignes 40 de a) et c).

Dans la pratique cet effet est rarement observable. Il se manifeste surtout pour des contours épais séparés par des zones de transition abruptes.

You et al. [YKXT94] soulignent le même phénomène. En étudiant plusieurs fonctions de diffusion à travers une optique d'optimisation, ils introduisent dans [YXTK96] une fonction de diffusion qui permet de supprimer cet effet [Act98] :

$$\begin{cases} g(s) = \frac{1}{K} + p(K + \varepsilon)^{p-1}, & \text{si } s < K \\ g(s) = \frac{1}{s} + p(s + \varepsilon)^{p-1}, & \text{si } s \geq K \end{cases} \quad (1.34)$$

La fonction de diffusion et la fonction flux sont illustrées en Fig. 1.7.

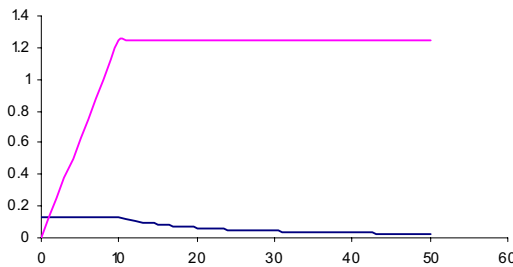


Fig 1.7- Fonction de diffusion — et fonction flux de You et al. — $K=10, p=0.25, \varepsilon=1$.

En regardant (1.21), nous remarquons qu'une diffusion fondée sur (1.34) ne peut pas rehausser les contours : la fonction flux n'est jamais décroissante. Par contre, sa dérivée est nulle pour des gradient supérieurs à K ; dans ce cas, la diffusion s'arrête.

Une autre situation dans laquelle la méthode originelle présente des défauts est illustrée en Fig.1.8. Nous utilisons l'image de synthèse présentée en Fig 1.6 avec une zone de transition plus abrupte entre les deux régions. Le « bruit » introduit se manifeste sous la forme d'une zone des pixels avec un niveau de gris intermédiaire. La barrière de diffusion K a été choisie fixe; nous montrons l'évolution de l'image en utilisant l'équation de diffusion

anisotrope pour $t=0$ (image originale), $t=40$ –Fig1.8.b et $t=80$ Fig. 1.8.c. Le phénomène de « mélange » observé entre les deux régions a été étudié par Monteil et Beghdadi [MoB97], [MoB98] : ils l'ont nommé « effet de trou » (*pinhole effect*).

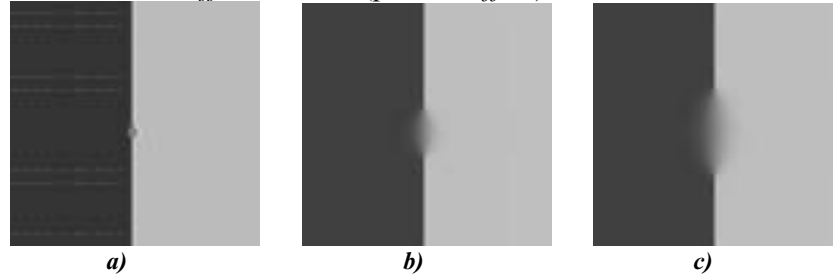


Fig 1.8- Effet de trou. a) Image originale. b) Résultats de la diffusion anisotrope: $t=40$). c) $t=80$. K est fixée à 100.

La zone intermédiaire centrale joue le rôle de jonction entre les deux zones ; elle n'est pas détectée par la diffusion si la barrière de diffusion est supérieure à la norme du gradient sur sa frontière. Lorsque le processus évolue, les gradients ont tendance à diminuer ; par suite, ils influencent de moins en moins le processus, entraînant une diffusion toujours plus importante de la zone.

La solution proposée par les auteurs consiste en utiliser une barrière adaptative. Cette solution a été évoquée au paragraphe §1.4.1.2 ; en utilisant seulement 10 % des zones les plus homogènes de l'image, la barrière calculée est inférieure au gradient de la zone de transition qui sera donc conservée.

Dans le même article les auteurs analysent les fonctions de diffusion de Perona et Malik, et ils introduisent une autre fonction de diffusion qui a la propriété de conserver la largeur de la zone de transition comprise entre le maximum et le minimum de la fonction de diffusion pour n'importe quelle valeur de la barrière de diffusion :

$$g(|\nabla U|) = \frac{1}{2} \{ \tanh[\gamma(K_s - |\nabla U|)] + 1 \} \quad (1.35)$$

Cette fonction a la même propriété que les fonctions de Perona et Malik : la fonction flux $\phi(s) = s.g(s)$ est décroissante pour certaines valeurs de s : elle est donc capable de rehausser les contours.

Les auteurs montrent les avantages de cette fonction à l'aide d'une technique de flot optique. Pour notre part, nous allons les montrer à travers les fonctions flux associées. Nous montrons sous forme graphique en Fig. 1.9 a et b la fonction de diffusion et la fonction flux de Perona - Malik (1.15) et la fonction de Monteil-Beghdadi (1.35) pour les mêmes valeurs de K ou K_s : 10 et 30.

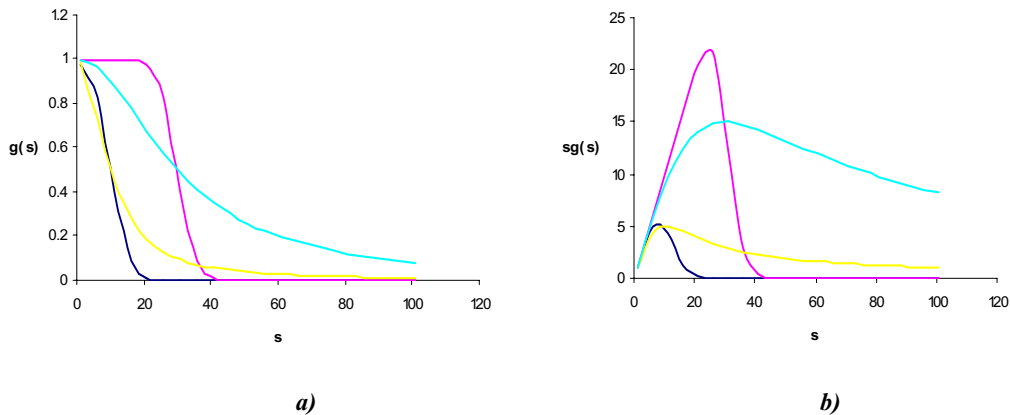


Fig 1.9 - a) Fonctions de diffusion de Perona Malik (PM) et Monteil-Beghdadi (MB) .
 b) Fonctions flux associées $\gamma = 0.2$
 PM $K=10$, — PM $K=30$, — MB $K=10$, — MB $K=30$ —

Le paramètre γ contrôle la pente de la fonction de diffusion. Par rapport à la fonction de diffusion rationnelle de Perona-Malik, la fonction (1.35) est plus sélective pour certains choix de γ , ce qui conduit à lisser de manière plus importante les régions homogènes ; le rehaussement de contours est plus important autour de la barrière de diffusion, conduisant à des contours plus nets.

Pour $\gamma=0.2$ et $K_s=30$, nous remarquons que la fonction de Monteil-Beghdadi bloque la diffusion pour des normes des gradients supérieures à 40 (Fig. 1.9), les modifications entre itérations successives sont quasi-nulles d'où une moindre sensibilité au temps d'arrêt t .

La pente plus abrupte de la fonction flux induit un effet d'escalier moins important. Pour cette fonction, l'interprétation de la barrière de diffusion dans le sens de Perona Malik est plus difficile : le maximum de la fonction flux est délocalisé et dépend de K_s , et γ .

Dans un autre contexte, Black et al. [BSMH97], [BSMH98] proposent des fonctions de diffusion qui présentent des propriétés similaires à celles de la fonction de Monteil et Beghdadi. Les auteurs analysent les liaisons entre la statistique robuste et la diffusion anisotrope ; ils montrent que la diffusion anisotrope peut être vue comme une approche statistique qui estime une image constante par morceaux à partir d'une image bruitée par un bruit Gaussien blanc de variance faible.

Leur fonction de diffusion est :

$$g(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - (\frac{s}{K})^2]^2 & \text{si } s \leq K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.36)$$

Le comportement de la fonction de Black et al. est sensiblement équivalent à celui de la fonction de diffusion de Monteil et Beghdadi : un rehaussement fort pour des valeurs du gradient légèrement supérieures au seuil ; les discontinuités fortes ne seront pas affectées par la diffusion. Le comportement est encore plus « tranché » que celui de la fonction de Monteil : la diffusion devient nulle à partir d'un certain seuil. Lorsque l'évolution de l'équation de diffusion produit des zones constantes par morceaux séparées par des zones de transition avec une norme de gradient supérieure au seuil, la diffusion s'arrête.

Le choix du seuil est un problème important pour ce type de fonction ; des valeurs trop petites conduisent à des rehaussements du bruit. Le choix de la barrière pour cette méthode a été indiqué en §1.4.1.2.

1.4.1.4 Diffusion en avant et en arrière (FAB)

Un autre approche intéressante fondée sur le modèle de Perona-Malik est proposée dans [GZS00] et [GSZ02]. La méthode de diffusion sélective (*FAB-Forward and Backward diffusion*) permet de choisir localement le type de diffusion : en avant, l'équivalent de la diffusion anisotrope pour des normes du gradient inférieures au K ; en arrière (ou inverse) en changeant le signe du coefficient de diffusion. La diffusion en avant agit sur les zones caractérisées par des gradients relativement faibles ; la diffusion en arrière agit, quant à elle, sur les zones de gradients moyens, elle est obtenue en changeant le signe d'un coefficient de diffusion type Perona Malik :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[-c\nabla U], \quad c > 0 \quad (1.37)$$

L'inversion du signe se fait à travers les fonctions de diffusion:

$$g_1(|\nabla U|) = \begin{cases} 1 - (|\nabla U|/K_f)^n, & \text{si } 0 \leq |\nabla U| \leq K_f \\ \alpha \{ [(|\nabla U| - K_b) / w]^{2m} - 1 \}, & \text{si } K_b - w \leq |\nabla U| \leq K_b + w \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.38)$$

$$g_2(|\nabla U|) = \frac{1}{1 + (|\nabla U| / K_f)^n} - \frac{\alpha}{1 + (|\nabla U| - K_b) / w)^{2m}} \quad (1.39)$$

Les équations (1.38) et (1.39) font intervenir plusieurs paramètres : K_f est l'équivalent de la barrière K d'un processus anisotrope classique, K_b est la barrière de la diffusion arrière, w est la largeur du domaine de diffusion inverse, α est le rapport entre la diffusion directe et inverse. Finalement, K_f représente la limite supérieure des gradients qui seront lissés, K_b et w déterminent les gradients qui seront rehaussés. Les exposants n et m contrôlent la vitesse de variation de la fonction g . Les fonctions de diffusion g_1 et g_2 produisent des résultats proches ; par contre, g_2 a de meilleures propriétés : elle est moins sensible au bruit et plus simple à implémenter ; leur représentation graphique est donnée à la figure 1.10.

En introduisant des coefficients de diffusion négatifs pour le domaine $[K_b - w, K_b + w]$ les auteurs renoncent au principe de maximum de Perona Malik (1.25) : pour des gradients appartenant à ce domaine, des valeurs de maxima et de minima peuvent être créés pendant l'évolution de l'EDP. Le résultat est un rehaussement de contraste plus efficace que dans le cas de la diffusion anisotrope classique. La diffusion en arrière peut introduire des oscillations ; dans le cas 1D, pour limiter la formation d'extremums dans des régions continues, les auteurs imposent comme condition que le flux en avant soit supérieur au flux en arrière. Les rapports $\alpha = K_f / 2K_b$ pour (1.38) et $\alpha = K_f / 2(K_b + w)$ pour (1.39) garantissent cette condition dans le cas 1D ; les auteurs ne donnent pas de condition dans le cas 2D.

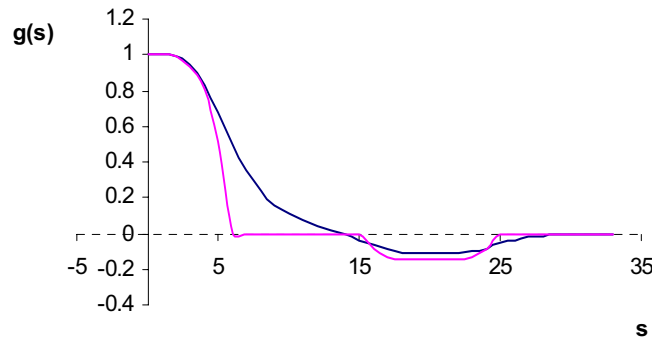


Fig 1.10- Fonctions de diffusion FAB $K_f=6$, $K_b=20$, $w=5$ g_1 — g_2 —

Même si les résultats donnés dans [GSZ02] montrent l'efficacité de l'approche pour supprimer le flou en éliminant aussi le bruit relativement faible et en conservant les détails pertinents, son principal défaut est son incapacité à traiter les zones fortement bruitées ou fortement texturées.

Les propriétés de lissage et rehaussement de cette approche sont comparées à celles de la méthode de Perona et Malik en Fig 1.11 sur une région de l'image standard du cameraman en absence de bruit. Les résultats sont comparés à la même échelle $t=60$; les barrières de diffusion sont $K = K_f = 10$, $K_b=25$, $w=10$. Pour FAB, la fonction g_2 a été utilisée. Les différences entre les deux résultats sont évidentes sur les régions avec des gradients moyens : les bâtiments, le gant et le camera. Ces régions sont rehaussées par la diffusion en arrière et deviennent plus nettes. Les défauts apparaissent sur la zone texturée du bas caractérisée aussi par des gradients moyens ; en se basant sur une analyse locale de la valeur du gradient, la zone est rehaussée aussi. Pour des images bruitées le comportement est similaire.

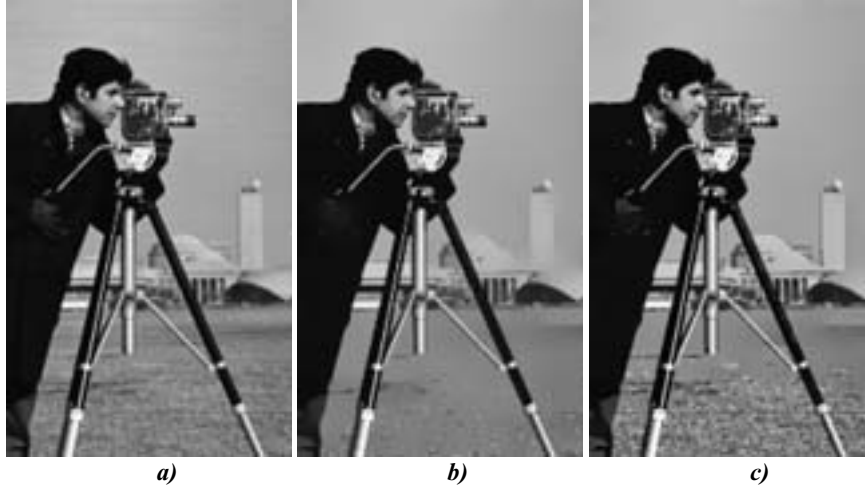


Fig 1.11- FAB. a) Image de cameraman. b) Diffusion Perona Malik. c) FAB.

1.4.2 Versions régularisées du modèle Perona-Malik

En raison de l'existence du processus de diffusion inverse engendré par l'utilisation de l'équation de diffusion anisotrope continue de Perona et Malik, il est impossible de garantir l'existence et la stabilité d'une solution. Les principales contributions théoriques sur ce sujet sont résumées par Weickert et Benhamouda [WeB97]. En reprenant les travaux de Hollig [Hol83], Kichenassamy [Kic97] et You et al [YXTK96] - tous indiquant le manque de justification théorique du filtre continu pour des fonctions flux non monotones - les auteurs montrent que des discrétisations spatiales sur une grille fixe et explicites en temps sont suffisantes pour rendre la version numérique de la diffusion anisotrope bien posée ; nous reprendrons cette idée au paragraphe §1.8.

Une solution différente est l'introduction de régularisations dans les fonctions de diffusion de type Perona Malik dans le modèle continu qui garantissent l'existence et l'unicité d'une solution. Dans cette section, nous allons présenter les approches les plus classiques qui opèrent sur l'équation continue en mettant en évidence leurs avantages et inconvénients.

1.4.2.1 Modèle de Catté et al.

Catté et al. [CLMC92] soulignent l'absence de justification mathématique permettant de garantir en même temps l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation de diffusion anisotrope (1.10) et les fonctions de diffusion (1.14) ou (1.15) dont les fonctions flux sont non monotones. Pour des valeurs du gradient supérieures à la barrière de diffusion, l'EDP de diffusion anisotrope devient localement une équation de diffusion inverse susceptible de développer des singularités à n'importe quel moment t . Cette équation est connue pour son instabilité et l'existence d'une solution unique qui respecte les théorèmes de régularité est improbable. A partir de cette idée les auteurs discutent le principe de maximum de Perona et Malik, en stipulant que, à l'échelle t , l'hypothèse de la continuité de la solution U et de ses dérivées n'est pas utilisable ; en effet, la stabilité de l'équation ne peut pas être justifiée de manière théorique, elle dépend fortement de la discrétisation utilisée.

Les auteurs proposent l'utilisation de l'équation de diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[g(|\nabla G_\sigma * U|)\nabla U] = 0, \text{ sur } (0, T) \times \Omega \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (1.40)$$

avec :

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{4\sigma^2}\right] \quad (1.41)$$

La modification apportée au modèle de base Perona-Malik consiste donc à utiliser une version lissée de l'image $-U_{\sigma} =: G_{\sigma} * U$ pour l'estimation du coefficient de diffusion. Le schéma de diffusion (1.40) complété par une condition aux limites de type Neumann conduit à une solution unique.

En ce qui concerne le choix des paramètres, les auteurs mentionnent qu'une limite inférieure pour le temps d'arrêt est de l'ordre de σ ; la barrière de diffusion peut être choisie comme pour le filtre de Perona Malik.

Le choix du temps d'arrêt, et de σ jouent un rôle important dans ce modèle de diffusion. L'interprétation du produit de convolution dans le domaine de Fourier indique que l'utilisation d'une version régularisée de l'image dans l'estimation des coefficients de diffusion introduit un lissage différent des zones de fréquences spatiales distinctes, tout en favorisant les régions larges au détriment des petits détails. Afin de conserver ces détails la méthode nécessite un temps d'arrêt faible.

Notons que pour des noyaux gaussiens d'écart-type relativement faible, ce filtre peut conduire à un rehaussement de contour. Par suite, l'EDP devient une équation inverse de diffusion et la théorie ne peut plus garantir la stabilité du modèle.

Cette capacité de rehaussement de contours est illustrée à la figure 1.12 sur une image de 64x64 pixels qui représente une gaussienne d'écart type 20. Le résultat de la diffusion pour $\sigma=0.5$ et $K=3$ à $t=100$ est donné en Fig. 1.12.b; le profil horizontal de la ligne 30 est représenté en Fig. 1.12.c.

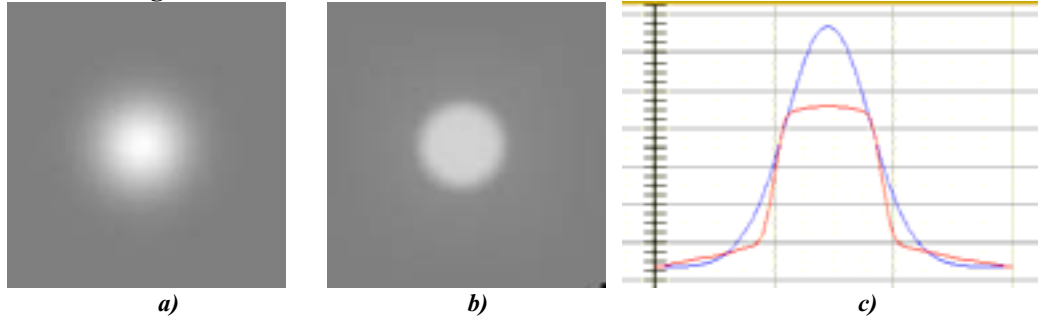


Fig 1.12- Diffusion de Catté et al. a) Image originale[64x64] – gaussienne d'écart- type 20. b) Rehaussement des contours. c) Profil horizontal de la ligne 30.

1.4.2.2 Modèle de Whitaker et Pizer

Whitaker et Pizer généralisent en [WiP93],[Whi93] l'approche de Catté et al. en faisant varier le paramètre d'échelle σ par rapport au temps t : $\sigma = \sigma(t)$. L'équation proposée est fondée sur l'utilisation d'une version lissée de l'image $U_{\sigma(t)} =: G_{\sigma(t)} * U$:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[g(|\nabla U_{\sigma(t)}|)\nabla U] = 0, \text{ sur } (0, T) \times \Omega \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (1.42)$$

Dans (1.42), l'écart type du noyau gaussien est défini comme une fonction du temps ; les auteurs introduisent ce paramètre de manière intuitive : au fur et à mesure que l'EDP évolue l'estimation du gradient dans la fonction de diffusion doit devenir plus confiante. Par suite l'écart type doit être choisi comme une fonction décroissante du temps [Whi93] :

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \alpha t \quad (1.43.a)$$

ou :

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 - 2\alpha t} \quad (1.43.b)$$

α est une constante qui règle la vitesse de décroissance de l'écart type. Le choix de K a été discuté au paragraphe §1.4.1.2.

En utilisant (1.43.a) ou (1.43.b), les auteurs imposent un temps d'arrêt implicite par la condition $\sigma \geq 0$.

L'introduction du paramètre d'échelle $\sigma(t)$ conduit à des résultats dans lesquels, pour des objets suffisamment grands, la position des contours est plus précise. Par contre, comme dans la méthode de Catté et al., les détails sont supprimés dès lors que leur taille est inférieure au paramètre d'échelle en début de diffusion.

Nous proposons de comparer les deux approches sur l'image du cameraman (Fig. 1.13). Les méthodes ont été « poussées » au-delà de la limite inférieure de Catté et al. à $t=2.0$; la barrière $K=10$ a été choisie suivant (1.29) avec $\beta=0.6$, l'écart type du noyau gaussien pour Catté est égal à la valeur d'origine du paramètre d'échelle de Whitaker $\sigma_0 = 0.75$. La Figure 1.13, illustre la capacité de la méthode de Whitaker à conserver les petits détails ; ce résultat s'explique par la décroissance du paramètre d'échelle : au temps d'arrêt, $\sigma(t) \rightarrow 0$ et la diffusion s'arrête.

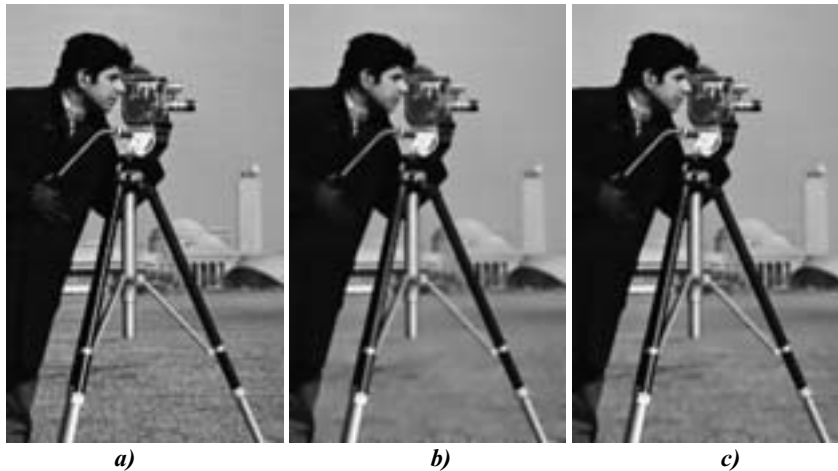


Fig 1.13- Diffusion de Catté et al. et Whitaker et Pizer . a) Image originale. b) Résultat Catté et al. c) Résultat Whitaker.

1.4.2.3 Modèle de Nitzberg-Shiota

Dans [NiS92], les auteurs présentent une méthode de lissage adaptatif. Une régularisation du modèle Perona Malik est également proposée. Nous présentons ici seulement la deuxième approche.

La régularisation du modèle Perona Malik consiste à faire évoluer l'image originale suivant l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[g(\sqrt{v(x,y,t)})\nabla U(x,y,t)] \\ \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t} = G_\sigma * |\nabla U(x,y,t)|^2 - v(x,y,t) \end{cases} \quad (1.44)$$

Le paramètre ajouté $v(\cdot)$ introduit une régularisation spatio-temporelle du processus de diffusion ; à l'équilibre de la deuxième équation $(G_\sigma * |\nabla U(x,y,t)|^2 = v(x,y,t))$, (1.44) est équivalente à l'équation de Catté et al. en remplaçant les normes des gradients de l'image lissée par une moyenne de ces valeurs.

1.4.3 Filtres de choc

En utilisant des techniques issues de l'analyse numérique des équations hyperboliques non linéaires, Rudin a été le premier à introduire les filtres de choc. En comparaison avec les filtres paraboliques de diffusion, ces équations s'appliquent surtout pour le rehaussement des contours affectés par le flou. Le modèle 1D consiste à faire évoluer l'EDP suivante [OsR90]:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + F(U_{xx})|U_x| = 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \end{cases} \quad (1.45)$$

La fonction F joue le rôle d'un détecteur des contours ; elle doit respecter les conditions $F(0)=0$ et $F(s).signe(s) \geq 0$. Du choix de F dépend la qualité du rehaussement obtenu. En prenant $F(U_{xx}) = U_{xx}$ l'interprétation du (1.45) est immédiate : dans le voisinage d'un point d'inflexion du signal (1.45) devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -|U_x|U_{xx} \quad (1.46)$$

A une constante près, (1.46) représente l'équation de diffusion inverse de la chaleur dans le cas 1D (équation de diffusion avec le temps inversé). Par analogie avec la diffusion de la chaleur qui introduit du flou au fur et à mesure de son évolution, l'évolution inverse supprime le flou en rehaussant les contours.

L'équation classique des filtres de choc s'obtient en prenant $F(U_{xx}) = signe(U_{xx})$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -signe(U_{xx})|U_x| \quad (1.47)$$

La généralisation pour les cas 2D, en termes des dérivées secondes directionnelles est [OsR90] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -signe(U_{\eta\eta})|\nabla U| \quad (1.48)$$

(1.48) introduit des discontinuités tout en gardant les points d'inflexion de l'image originale ($U_{\eta\eta} = 0$), le résultat est une image constante par morceaux séparés par des discontinuités aux points d'inflexions.

Une implantation discrète directe des équations (1.46) à (1.48), avec les techniques utilisées pour les équations paraboliques type diffusion, n'est pas envisageable dans la mesure où elle correspond à l'inversion de l'équation de la chaleur connue pour son instabilité. Pour s'affranchir de ce problème, les auteurs utilisent des schémas discrets explicites qui préservent la variation totale de l'image et la position des extrema locaux. Nous détaillerons cette approche au paragraphe 1.8 en illustrant les principes de ces schémas numériques.

Les équations des filtres de choc, telle qu'elles ont été proposées par Osher et Rudin, sont efficaces pour l'élimination du flou ; dans les cas des images bruitées, le bruit peut introduire une infinité de points d'inflexion, perturbant le processus de rehaussement. La sensibilité au bruit limite l'utilisation de ces filtres de choc pour des applications pratiques. Plusieurs auteurs ont étudié ce problème [AlM94], [KDA97b], une des solutions consistant à utiliser une convolution de la dérivée seconde avec un noyau gaussien dans la direction du gradient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -signe(G * U)_{\eta\eta}|\nabla U| \quad (1.49)$$

Cependant, (1.49) pose également des problèmes : l'utilisation d'un noyau de dimension trop faible conduit à une élimination seulement partielle du bruit dans l'estimation de la dérivée seconde ; une taille de noyau plus grande conduit à une élimination plus efficace du bruit mais conduit à introduire un flou important (par analogie avec la diffusion isotrope)

qui déplace les positions des points d'inflexion, ceci se traduisant par la détection de faux contours.

Nous montrons ces effets sur l'image originale de la figure 1.14.a. L'image est rendue floue, en opérant une convolution avec un noyau gaussien d'écart type $\sigma = 1$ (Fig. 1.14.b), et ensuite bruitée avec un bruit blanc gaussien ($SNR=22.86$ dB) (Fig. 1.14.c). La figure 1.14.d montre le résultat du filtre de choc (1.48) sur l'image non bruitée. En Fig.1.14.e et f nous avons représenté, respectivement, les résultats de (1.48) et (1.49) - $\sigma = 1.5$ - appliquées à l'image bruitée. Les résultats sont comparés après le même temps d'évolution ($t=5.0$).

Dans le cadre d'applications pratiques, l'utilisation des filtres de choc se fait généralement, en combinaison avec des équations paraboliques de diffusion. Le terme de réaction agit sur la direction du gradient et le terme de diffusion se manifeste dans la direction orthogonale. Nous reprendrons cet aspect en §1.6.5.

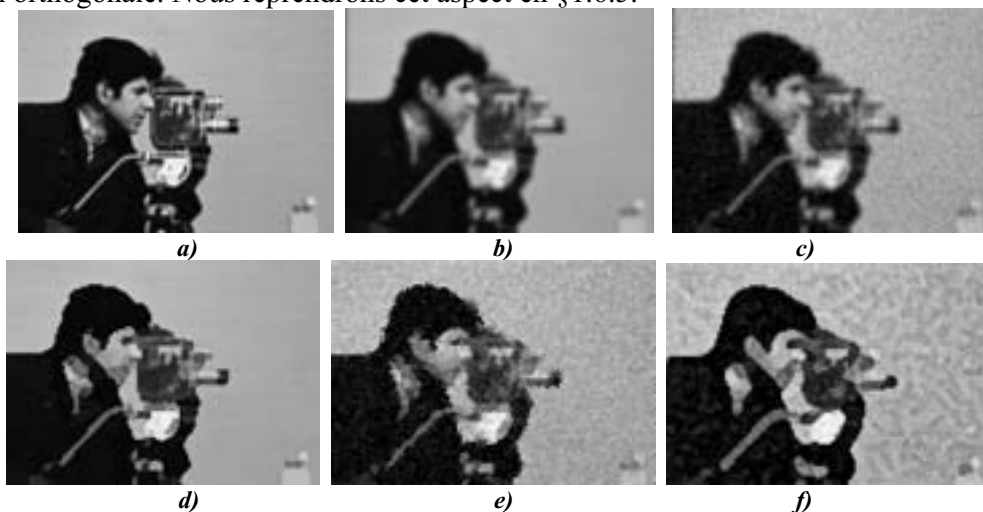


Fig 1.14- Résultats des filtres de choc. a) Image originale. b) Image floue. c) Image floue bruitée. d) Résultat de (1.74) appliquée à (b). e) Résultat de (1.74) appliquée à (c). f) Résultat de (1.49) appliquée à (c) ($\sigma=2.0$).

1.5 Approches variationnelles

Dans cette section, nous présentons les liaisons entre les équations aux dérivées partielles et la minimisation d'une énergie. L'évolution d'une image selon une EDP donnée peut être interprétée comme la solution d'un problème variationnel. Cette approche est notamment développée dans [Mor95] au travers de l'exploitation des liaisons entre les principales EDP de diffusion et le modèle général de segmentation Mumford-Shah [MuS89] ; Deriche et Faugeras introduisent dans [DeF95-96] une méthode variationnelle qui permet d'unifier les équations de diffusion les plus classiques.

Après avoir illustré le principe de ces approches, nous présenterons et commenterons le modèle variationnel de Nordstrom et ses liaisons avec l'équation de diffusion isotrope. Nous exposerons ensuite la méthode de diffusion par minimisation de la variation totale développée par Rudin, Osher et Fatemi [ROF92] et, finalement, nous introduirons l'approche unificatrice de Deriche et Faugeras [DeF95-96]

L'idée fondamentale de toutes ces méthodes est la construction d'une d'énergie E à travers une fonction F , imposée par le problème à traiter. Pour une image 2D définie sur $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ la forme générale de l'énergie est définie par :

$$E = \iint_{\Omega} F(U, \partial U / \partial x, \partial U / \partial y) dx dy \quad (1.50)$$

Classiquement, le problème consistant à trouver un extremum pour E peut se réduire à une équation différentielle. Si nous supposons que $U_0(x, y)$ est un extremum de U la fonction $U(x, y)$ peut s'écrire:

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \varepsilon \eta(x, y) \quad (1.51)$$

où $\eta(x, y)$ est une fonction différentiable continûment dérivable. La condition d'extremum est vérifiée pour $\varepsilon = 0$; les conditions aux limites sont $\eta(0, y) = \eta(a, y) = \eta(x, 0) = \eta(x, b) = 0$.

En tenant compte que U est une fonction de x et y ; l'intégrale (1.50) est une fonction de ε :

$$E(\varepsilon) = \iint_{\Omega} F(U, \partial U / \partial x, \partial U / \partial y) dx dy \quad (1.52)$$

et son extremum est atteint pour $E'(\varepsilon) = 0$.

$$E'(\varepsilon) = \iint_{\Omega} \frac{dF}{d\varepsilon} dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \eta + \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial U_y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.53)$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \eta \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) + \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.54)$$

et en tenant compte de la relation similaire pour y , (1.53) devient :

$$E'(\varepsilon) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} \right) \eta dx dy + \iint_{\Omega} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \eta \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \eta \right) \right] dx dy \quad (1.55)$$

Les conditions aux limites imposent l'annulation de la dernière intégrale. Pour que (1.55) soit valable quelque soit $\eta(x, y)$, on obtient l'équation différentielle de Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} = 0 \quad (1.56)$$

(1.56) représente une condition nécessaire à respecter par le minimum de (1.50).

Dans la plupart des applications une résolution directe de l'équation de Euler-Lagrange n'est pas possible, une solution numérique s'obtient en déterminant l'état stable de l'EDP :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} \quad (1.57)$$

(1.57) peut être interprétée comme un processus de descente du gradient opérant sur la surface énergétique donnée par E . Si E est convexe le processus de minimisation est stable et converge vers le minimum ; par contre si E possède plusieurs minima locaux il faut que la condition initiale soit proche du minimum global. L'équation peut se généraliser pour des énergies qui dépendent de plusieurs fonctions ; dans ce cas (1.53) devient un système d'équations correspondant à chaque fonction.

1.5.1 Modèle de Nordstrom

Dans [Nor90], Nordstrom propose de minimiser l'énergie :

$$E_{U_0}(U, w) = \iint_{\Omega} [\beta(U - U_0)^2 + w |\nabla U|^2 + \lambda^2 (w - \ln w)] dx dy \quad (1.58)$$

La fonction w , définie sur Ω , joue le rôle d'une représentation floue des contours : à l'intérieur d'une région homogène $w \approx 1$, et $w \approx 0$ le long des contours. Le premier terme pénalise la déviation de la solution U par rapport à U_0 , le tout pondéré par un coefficient β . Le

deuxième terme contrôle le lissage dans les régions homogènes. Enfin, le dernier terme est un terme de pénalisation des contours .

Soit $F(U, U_x, U_y, w) = [\beta(U - U_0)^2 + w|\nabla U|^2 + \lambda^2(w - \ln w)]$. L'équation d'Euler Lagrange qui correspond à la fonction luminance U est :

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} = 2\beta(U - U_0) - 2 \frac{d}{dx} (wU_x) - 2 \frac{d}{dy} (wU_y) = 0.$$

Cette relation conduit à :

$$\beta(U - U_0) - \text{div}(w\nabla U) = 0 \quad (1.59)$$

En procédant de manière similaire pour la fonction w on obtient :

$$|\nabla U|^2 + \lambda^2 \left(1 - \frac{1}{w}\right) = 0 \quad (1.60)$$

(1.60) peut être résolue de manière directe ; nous obtenons la fonction de diffusion de Perona

$$(1.16) : w = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla U|^2}{\lambda^2}}$$

La minimisation de (1.58) se réduit donc à l'EDP :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[g(|\nabla U|)\nabla U] + \beta(U - U_0) \quad (1.61)$$

(1.61) est appelée par Nordstrom « *équation de diffusion biaisée* » : cette équation combine le terme de diffusion de Perona-Malik et un terme de réaction dont le but est de rendre le traitement moins sensible au choix de temps d'arrêt.

Cependant toutes les caractéristiques de la diffusion anisotrope (§1.4.1) restent valables pour (1.61) ; plusieurs auteurs indiquent que le problème de choisir un temps d'arrêt est simplement transformé en un problème de choix du paramètre β . Comme nous allons le montrer dans la partie expérimentale, le choix du temps d'arrêt est encore plus complexe pour des images ayant un contenu énergétique relativement variable spatialement.

L'énergie (1.58) n'étant pas convexe, la méthode peut converger vers un minimum local.

1.5.2 Minimisation de la variation totale

Osher, Rudin et Fatemi s'intéressent à la minimisation d'une fonction d'énergie sous contraintes [ROF92]. En particulier, ils proposent de minimiser :

$$E(U) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy \quad (1.62)$$

avec des contraintes imposées par la nécessité de garder la valeur moyenne de l'image (1.63.a) et par la connaissance de l'écart type σ du bruit (supposé blanc de moyenne nulle)(1.63.b).

Si U_0 représente l'image originale et U la solution, les contraintes s'écrivent :

$$\iint_{\Omega} U dx dy = \iint_{\Omega} U_0 dx dy \quad (1.63.a)$$

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{2} (U - U_0)^2 dx dy = \sigma^2 \quad (1.63.b)$$

Pour des fonctions différentiables (1.62) représente la *variation totale* de U :

$$TV(U) = : \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy \quad (1.64)$$

L'utilisation de la norme L_1 du gradient dans le processus de minimisation (par rapport à la norme L_2 issue des processus de type moindres carrés) offre un avantage essentiel

[ROF92] : le minimum de la fonction énergie dans l'espace des fonctions de variation bornée peut être une fonction monotone qui n'est pas nécessairement continue. Ceci permet l'élimination du bruit tout en gardant une localisation exacte des discontinuités. Nous reprendrons cette idée en présentant les approches de type courbure moyenne.

Les auteurs remarquent que la condition (1.63.a) est automatiquement induite et transforment le problème de minimisation sous contraintes en un problème de minimisation sans contraintes à l'aide des multiplicateurs de Lagrange :

$$E'(U) = E(U) + \lambda \left[\iint_{\Omega} \frac{1}{2} (U - U_0)^2 dx dy - \sigma^2 \right] \quad (1.65)$$

Dans des conditions aux limites de type Neumann, le minimum de (1.62), est obtenue par une équation parabolique :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) - \lambda (U - U_0) \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.66)$$

L'EDP (1.66) n'étant pas une équation de diffusion, (1.7) n'est plus valable et la contrainte (1.63.a) n'est automatiquement respectée que pour une condition initiale du type :

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y) + \sigma \frac{U_0(x, y) - \overline{U_0}}{\sigma(U_0)} \quad (1.67)$$

Le multiplicateur de Lagrange est dépendant du temps :

$$\lambda = \lambda(t) = -\frac{1}{2\sigma} \iint_{\Omega} \left(|\nabla U| - \frac{\nabla U \cdot \nabla U_0}{|\nabla U|} \right) dx dy \quad (1.68)$$

Cette méthode a été généralisée pour le cas des images en couleurs de type RGB par Blomgren et Chan en [BIC98]. La généralisation pour des images en couleurs dans l'espace HSV est présentée dans [CKS00].

Dans le cadre d'une implantation pratique la variance du bruit doit être estimée. Des valeurs élevées minimiseront l'importance du terme de réaction tout en favorisant le processus de diffusion. Comme pour l'approche de Nordstrom un choix global de σ peut poser des problèmes pour des images ayant un contenu énergétique non homogène. Dans le voisinage des contours épais, par exemple, un choix de σ trop faible favorisera la préservation du bruit.

Si les contraintes sont éliminées, (1.66) devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) \quad (1.69)$$

Cette équation est connue sous le nom de *mouvement sous la courbure moyenne pondérée* ou *diffusion anisotrope par minimisation de la variation totale*. Nous allons exploiter les liaisons avec le mouvement sous la courbure moyenne au paragraphe §1.6.

Les liaisons avec l'équation de diffusion anisotrope de Perona Malik sont directes : (1.69) est un cas particulier de l'équation originelle avec une fonction de diffusion :

$$g(|\nabla U|) = \frac{1}{|\nabla U|} \quad (1.70)$$

et son interprétation directionnelle est :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = c_{\xi} U_{\xi\xi} \\ c_{\xi} = \frac{1}{|\nabla U|} \end{cases} \quad (1.71)$$

La diffusion anisotrope par minimisation de la variation totale produit un lissage en tout point de l'image ; la diffusion est effectuée le long des contours, la diffusion dans la direction du gradient est nulle. D'un point de vue théorique l'équation de diffusion est parabolique. L'existence, unicité et régularité de la solution peuvent être démontrées [ALM92].

Chan, Osher et Shen présentent en [C0S99-01] une version discrète de la méthode de minimisation de la variation totale. Le filtre numérique obtenu, (*filtre numérique TV*), peut être vu comme une version simplifiée du modèle continu obtenue par différences finies.

Le support de ce filtre est le 4-voisinage local du pixel courant α :

$$N_\alpha = N(i, j) = \{(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)\}$$

Les pixel voisins, notés par β interviennent dans le calcul de la variation totale

locale $|\nabla_\alpha U| = \sqrt{\sum_{\beta \in N_\alpha} (U_\beta - U_\alpha)^2}$ et sa version régularisée : $|\nabla_\alpha U|_a = \sqrt{|\nabla_\alpha U|^2 + a^2}$.

En introduisant les poids :

$$\omega_{\alpha,\beta}(U) = \frac{1}{|\nabla_\alpha U|_a} + \frac{1}{|\nabla_\beta U|_a} \text{ les auteurs montrent que (1.66) est remplacée par :}$$

$$\sum_{\beta \in N_\alpha} \omega_{\alpha,\beta} (U_\beta - U_\alpha) + \lambda (U - U_0) = 0$$

Le filtre TV numérique $F : U \rightarrow V$ est un filtre passe bas qui opère de manière itérative :

$$\begin{cases} V_{\alpha,t-1} = F_\alpha(U_{t-1}) = \sum_{\beta \in N_\alpha} \frac{\omega_{\alpha,\beta}}{\lambda + \sum_{\gamma \in N_\alpha} \omega_{\alpha,\gamma}} U_{\beta,t-1} + \sum_{\beta \in N_\alpha} \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{\gamma \in N_\alpha} \omega_{\alpha,\gamma}} U_{\beta,0} \\ U_t = F(V_{t-1}) \end{cases} \quad (1.72)$$

- a (appelé paramètre de régularisation) permet d'éviter la division par 0 pour des zones de gradient nul
- λ (appelé paramètre d'adéquation) joue le rôle du multiplicateur de Lagrange présent en (1.66). Son choix influence, comme pour le cas continu, le résultat obtenu. Cependant les auteurs proposent un calcul optimal. Ils mentionnent aussi que des valeurs fixées pour l'ensemble du processus donnent des résultats expérimentaux comparables.

Nous allons montrer les effets de ces trois méthodes de lissage par minimisation de la variation totale sur un détail de l'image de cameraman (*Fig.1.15.a*), sur laquelle nous avons ajouté de bruit blanc gaussien ($\sigma = 25$, $SNR=9.95$ dB) *Fig.1.15.b* ; les résultats sont montrés à $t=40$: *Fig.1.15.c* –régularisation TV ($\sigma = 25$), *Fig1.15.d* -diffusion TV, *Fig1.15.e* –filtre TV discret $\lambda = 25$, $\alpha = 0.0001$. Les résultats ont été déterminés en utilisant, pour chaque filtre, les implémentations discrètes telles qu'introduites par les auteurs.

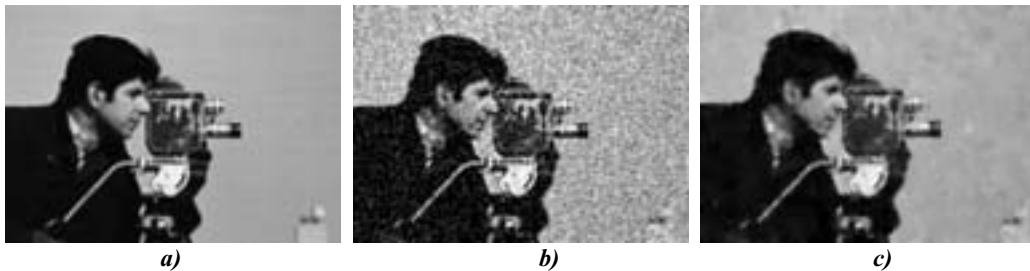


Fig 1.15- Résultats des méthodes basées sur la variation totale. a) Image originale. b) Image bruitée. c) Régularisation TV .

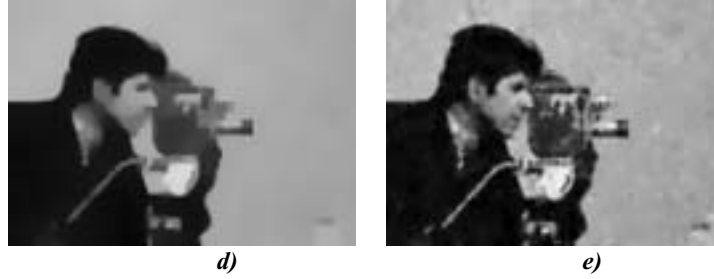


Fig 1.15 (cont.)-d) Diffusion TV. e) Filtre TV discret.

Du fait de la présence du terme de réaction liée aux données initiales, la régularisation TV (continue ou discrète) est moins sensible au temps d'arrêt, l'image filtrée est proche de l'image originale. Les contraintes imposées sur le bruit conduisent à des arrière-plans irréguliers, ce qui peut passer pour une caractéristique de ce type de filtres. L'élimination du bruit est plus efficace pour la diffusion TV, mais la méthode tend à éliminer plus des détails à cause des erreurs d'estimation des directions du gradient en présence du bruit.

1.5.3 Approche variationnelle unificatrice

Deriche et Faugeras [DeF95-96] proposent une approche variationnelle unificatrice pour les EDP les plus classiquement utilisées en restauration d'images. Les auteurs montrent qu'un certain nombre de méthodes antérieures peuvent être interprétées sous la forme d'une minimisation d'une fonction d'énergie.

Notamment les auteurs s'intéressent à des modèles linéaires des images bruitées :

$$V = PU + N \quad (1.73)$$

P est un opérateur linéaire - convolution (pour les images floues,) opérateur identité, ...-, le bruit N est considéré comme étant Gaussien de variance σ^2 et moyenne nulle.

Le problème de la recherche de U à partir de V est formulé comme celui de la recherche de U qui minimise l'énergie $E(U)$:

$$E(U) = \underbrace{\frac{1}{2} \|V - PU\|^2}_{E_1(U)} + \underbrace{\iint_{\Omega} \varphi(|\nabla U|) dx dy}_{E_2(U)} \quad (1.74)$$

Les deux énergies représentent, respectivement, un terme de fidélité aux données $E_1(U)$ et un terme de régularisation $E_2(U)$. En recherchant le minimum de la fonction d'énergie, les auteurs s'intéressent aux conditions qui doivent être remplies par la fonction de régularisation $\varphi(\cdot)$. L'équation d'Euler-Lagrange associée est :

$$\begin{cases} P^*(V - PU) + \lambda \operatorname{div}[\varphi'(|\nabla U|) \frac{\nabla U}{|\nabla U|}] = 0, & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\varphi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} \nabla U \cdot \bar{n} = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.75)$$

En (1.75) P^* est l'opérateur adjoint de P , \bar{n} le vecteur unitaire normal à la frontière de l'image et λ un paramètre de régularisation.

En développant (1.75) de manière similaire à (1.16) et en recherchant l'état stable de l'équation d'Euler-Lagrange l'EDP suivante est obtenue :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varphi''(|\nabla U|) U_{\eta\eta} + \frac{\varphi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} U_{\xi\xi} \quad (1.76)$$

Les conditions imposées par les auteurs sur la fonction de régularisation $\varphi(s)$ sont :

- $\phi''(|\nabla U|) \geq 0$ et $\phi'(|\nabla U|) \geq 0$ - pour assurer la convexité de la fonction énergie $E_2(U)$ et, de manière implicite, la stabilité du processus de minimisation.
 $\lim_{|\nabla U| \rightarrow 0} \frac{\phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} = \lim_{|\nabla U| \rightarrow 0} \phi''(|\nabla U|) = \phi''(0) \geq 0$ - le lissage pour des faibles gradients doit être isotrope.
- $\lim_{|\nabla U| \rightarrow \infty} \frac{\phi'(|\nabla U|)}{|\nabla U|} = ct \geq 0$, $\lim_{|\nabla U| \rightarrow \infty} \phi''(|\nabla U|) = 0$ - pour des gradients forts le lissage doit être unidirectionnel dans la direction orthogonale au gradient

Parmi les fonctions étudiées dans [DF95-96] nous retrouvons les fonctions de diffusion de Perona Malik, de Rudin et deux fonctions avec des fonctions flux non décroissantes : celle de Green [Gre90] et celle d'Aubert [CABB94].

Tableau 1.1 : Fonctions de régularisation [DeF95-96]

Auteur	$\phi(s)$	$\phi'(s)/s$	$\phi''(s)$
Perona Malik	$-\frac{K^2}{2} [e^{-\frac{s}{K}} - 1]$	$e^{-\frac{s}{K}}$	$e^{-\frac{s}{K}} [1 - 2(\frac{s}{K})^2]$
	$\frac{K^2}{2} \log[1 + (\frac{s}{K})^2]$	$\frac{1}{1 + (\frac{s}{K})^2}$	$\frac{K^2(K^2 - s^2)}{(K^2 + s^2)^2}$
Rudin	s	$\frac{1}{s}$	0
Green [Gre90]	$\log \cosh(s/K)$	$\tanh(s/K)$	$K^2 [\cosh(\frac{s}{K})]^{-2}$
Aubert [CABB94]	$\sqrt{1 + (\frac{s}{K})^2} - 1$	$\frac{K^{-2}}{\sqrt{K^2 + s^2}}$	$\frac{ K }{(K^2 + s^2)^{3/2}}$

L'équivalence entre les fonctions de régularisation et les fonction de diffusion (et flux), introduites par Perona et Malik se fait en posant $g(s) = \phi'(s)/s$, $\phi'(s) = \phi''(s)$ La condition $\phi''(|\nabla U|) \geq 0$ imposée pour assurer la stabilité du processus de minimisation se réduit à imposer la condition que la fonction flux soit monotone, ce qui est équivalent à l'idée présentée dans les travaux de Catté et al. Dans cette optique les fonctions de Perona –Malik sont instables dans les zones du rehaussement, la fonction de Rudin, quoique convexe, ne respecte pas la condition d'isotropie du lissage pour les faibles gradients. Nous remarquons ici que les deux dernières fonctions ne permettent pas de donner une interprétation physique à K (barrière de diffusion); K joue le rôle d'un coefficient de pondération mais ne détermine plus les gradients qui seront conservés dans l'image lissée.

Le même formalisme est repris et développé dans l'EDP proposée par Kornprobst, Deriche et Aubert en [KDA96], [KDA97a], [KDA99]. Les auteurs considèrent que l'opérateur P de (1.73) est l'opérateur identité; ils posent l'énergie à minimiser sous la forme :

$$E(U) = \iint_{\Omega} [(U - V)^2 + \lambda \phi(|\nabla U|)] dx dy \quad (1.77)$$

L'équation d'Euler Lagrange associée est :

$$2(U - V) - \lambda \operatorname{div}[\varphi'(|\nabla U|) \frac{\nabla U}{|\nabla U|}] = 0 \quad (1.78)$$

Notons que (1.78) est proche de l'équation de diffusion anisotrope de Nordstrom.

Pour trouver le minimum de (1.77), avec la condition nécessaire (1.78), plusieurs méthodes numériques sont présentées. Cependant les auteurs indiquent la possibilité de trouver le minimum de (1.77), en résolvant (1.78) de manière implicite ou explicite ; les meilleurs résultats sont rapportés avec une minimisation de type demi-quadratique (*half quadratic minimization*).

L'algorithme consiste à effectuer une minimisation alternée en U et dans une variable duale b avec des conditions aux limites de type Neumann.

$$b^{n+1} = \frac{\varphi'(|\nabla U|)}{2|\nabla U|} \quad \text{et} \quad \lambda \operatorname{div}(b^{n+1} \nabla U) = U - V \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.79)$$

En ce qui concerne la fonction de régularisation, des fonctions flux non monotones et monotones sont étudiées. Les auteurs indiquent que les meilleurs résultats sont obtenus en utilisant des fonctions de type Perona Malik.

1.6 Filtres basés sur la courbure et ensembles de niveaux

Nous nous intéressons dans cette section au lissage des images par l'utilisation d'un terme de diffusion qui dépend de la courbure des lignes de niveaux. La motivation principale de ce type de filtre est la construction d'un opérateur de diffusion non-linéaire agissant de manière préférentielle dans la direction parallèle aux objets significatifs.

Soit l'équation de diffusion isotrope de la chaleur (1.5) et son expression en terme de dérivées secondes directionnelles :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla U) = \Delta U = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} \quad (1.80)$$

L'idée fondamentale de ces approches est de remplacer (1.80) par une EDP agissant dans la direction orthogonale au vecteur gradient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = U_{\xi\xi} = \Delta U - U_{\eta\eta} \stackrel{(1.19)}{=} U_{xx} + U_{yy} - \frac{U_{xx}U_x^2 + 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_y^2}{|\nabla U|^2} = \\ \quad = \frac{U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2}{|\nabla U|^2} \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{array} \right. \quad (1.81)$$

L'équation (1.81) a été introduite –comme méthode de lissage sélectif– par Alvarez, Lions et Morel [ALM92]; plusieurs chercheurs se sont penchés plus récemment sur son interprétation géométrique et ses liaisons avec la théorie de la déformation des courbes, notamment avec l'équation de diffusion géométrique euclidienne ([KiS93-96], [Sap00]). Les EDP que nous allons présenter dans ce chapitre utilisent, soit le terme présenté ci-dessus, soit une version modifiée. Au paragraphe suivant (§1.6.1), nous illustrerons les principales propriétés de cette équation à travers la théorie des déformations des courbes fermées. Ensuite, nous présenterons le filtre de lissage sélectif d'Alvarez, Lions et Morel [ALM92]. Une modification de (1.81), permettant de rendre le processus invariant aux transformations affines, sera discutée au paragraphe §1.6.3. D'autres évolutions de (1.81) dues à Yezzi [Yez98] sont illustrées au §1.6.4. Enfin, des approches combinant un terme de lissage analogue à (1.81) et des termes de réaction seront présentés au paragraphe §1.6.5.

1.6.1 EMSS (Euclidean Morphological Scale Space) et Equation de diffusion géométrique

Alvarez, Guichard, Lions et Morel formalisent en [AGLM93] les principes de (§1.2) à travers plusieurs axiomes. Ils montrent que la seule analyse continue (*axiome de régularité*) qui respecte les principes de causalité et fidélité (*axiomes de comparaison locale et de structure pyramidale*), invariante par isométrie (*axiome d'invariance euclidienne*) et qui commute avec toute redistribution croissante des niveaux de gris (*axiome d'invariance morphologique*) est obtenue à l'échelle t par l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = |\nabla U| F(\kappa, t) \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (1.82)$$

où $\kappa = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|}\right)$ désigne la courbure des lignes de niveaux et $F(s, t)$ est une fonction non décroissante par rapport à s . Pour des applications pratiques, la condition initiale est parfois remplacée par une version lissée de l'image originale $U(x, y, 0) = G_\sigma * U_0(x, y)$ afin de garantir un cadre mathématique robuste en assurant la continuité et dérivabilité.

La forme sous laquelle cette équation intervient le plus souvent dans le traitement des images correspond au cas particulier : $F(s, t) = s \cdot t$.

Dans ce cas (1.82) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= t |\nabla U| \kappa = t |\nabla U| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|}\right) = t |\nabla U| \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_x}{|\nabla U|} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U_y}{|\nabla U|} \right) \right] = \\ &= t |\nabla U| \frac{U_{xx}(U_x^2 + U_y^2) - U_x(U_x U_{xx} + U_y U_{xy}) + U_{yy}(U_x^2 + U_y^2) - U_y(U_x U_{xy} + U_y U_{yy})}{|\nabla U|^{3/2}} = \\ &= t |\nabla U| \frac{U_x^2 U_{yy} - 2U_x U_y U_{xy} + U_y^2 U_{xx}}{|\nabla U|^{3/2}} = t \frac{U_x^2 U_{yy} - 2U_x U_y U_{xy} + U_y^2 U_{xx}}{|\nabla U|^2} \end{aligned} \quad (1.83)$$

En faisant un changement d'échelle $t_1 = 0.5 t^2$, nous retrouvons l'équation (1.81).

Cependant l'équation est très proche de celle de la diffusion anisotrope, correspondant à un lissage unidirectionnel, l'absence de paramètre de contraste assure l'invariance morphologique. L'équation est aussi très proche de l'équation de diffusion par minimisation de la variation totale (1.68), son interprétation directionnelle peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = c_\xi U_{\xi\xi} \\ c_\xi = 1 \end{cases} \quad (1.84)$$

Le lissage agit seulement dans la direction orthogonale au contour avec une vitesse constante, l'absence du terme de pondération par la norme du vecteur gradient (proposé en (1.68)) favorise l'arrondissement des structures, l'apparition des structures fausses du fait des directions erronées des vecteurs gradients.

La même équation peut être obtenue par des moyens géométriques. Soit $C(x, y, t)$ une courbe plane fermée décrite par le vecteur de position \vec{C} . En adoptant, par convention, pour

le vecteur unitaire normal $\vec{N} = -\frac{\nabla U}{|\nabla U|}$, la déformation de C sous l'équation de diffusion

géométrique euclidienne correspond à une déformation de cette courbe en tout point dans la direction normale avec une vitesse proportionnelle à la courbure k :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \vec{N} \quad (1.85)$$

avec la condition initiale $C(x,y,0)$.

Cette équation devenue classique dans le cadre de la théorie des déformations des courbes a été minutieusement étudiée par plusieurs auteurs. Ses principales propriétés sont expliquées en [Gag84], [GaH86], [KiS93-96]. La seule propriété que nous mentionnons ici est qu'elle transforme toute courbe non convexe en une courbe convexe [Gra84] sans développer des intersections et elle finira par disparaître en un temps fini [GH86].

Elle peut s'étendre dans le cas des surfaces pour des flux qui préservent l'aire ou le volume ; nous nous référons à [Sap2000] pour une étude complète.

L'équation de diffusion géométrique peut être aussi étendue à l'évolution des isocontours d'une image. Pour tout point $(x_0, y_0) \in \Omega$ et pour $t \geq 0$, un isocontour $C(x_0, y_0, t)$ de la fonction luminance U à l'instant t , est une courbe implicite composée de points $(x, y) \in \Omega$ qui vérifient $U(x, y, t) = U(x_0, y_0, t)$.

La courbe $C(x_0, y_0, t)$ peut être paramétrée par l'ensemble des points :

$$C(x_0, y_0, t) = (X(p, t), Y(p, t)) \quad (1.86)$$

ce qui conduit à une représentation de l'isocontour sous la forme :

$$U(x_0, y_0, t) = U(C(x_0, y_0, t), t) = U(X(p, t), Y(p, t), t) \quad (1.87)$$

Une différentiation de (1.87) par rapport au temps t donne :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla U \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla U \cdot (\kappa \vec{N}) = 0 \quad (1.88)$$

En tenant compte de l'expression du vecteur unitaire normal et de l'expression de la courbure des lignes de niveaux ; (1.88) peut s'écrire : $\frac{\partial U}{\partial t} = |\nabla U| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right)$; nous retrouvons donc (1.81).

Ces liaisons avec la théorie de déformation des courbes permettent de donner une interprétation géométrique à (1.81) : tous les iso contours de l'image se déforment dans leur direction orthogonale avec une vitesse proportionnelle à la courbure moyenne (courbure dans l'espace 2D). L'équation est connue dans la littérature sous le nom de *mouvement sous la courbure moyenne (MCM- mean curvature motion)*.

Nous nous intéressons ici à l'application directe de (1.81) pour les images. L'utilisation de cette équation pour le lissage directionnel des images, a été étudiée par Kimia et Siddiqi [KiS93-96]. Ils montrent de manière théorique et pratique que chaque iso contour de l'image originale U_0 évolue de manière indépendante aux autres, en respectant les propriétés de l'équation de diffusion géométrique.

La *figure 1.16* permet d'illustrer les résultats obtenus avec ce type de diffusion sur l'image standard de triangle. L'image originale de [128x128] pixels (*Fig.1.16.a*) est bruitée avec un bruit uniforme, en remplaçant 30 % des pixels de l'image par des valeurs aléatoires comprises entre 0 et 255. La *figure 1.16.c* représente le résultat obtenu à $t=5.0$; la *figure 1.16.d* montre l'image diffusée à $t=15.0$.

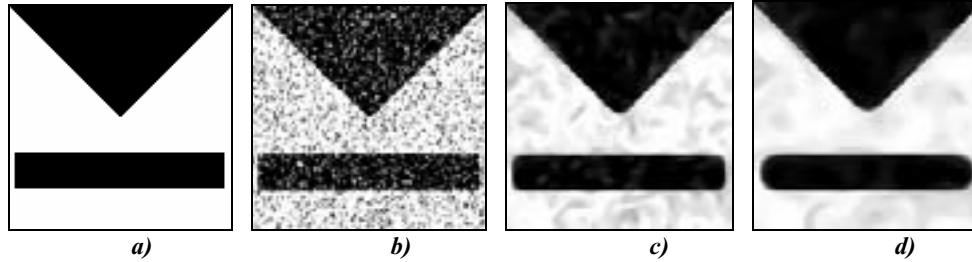


Fig 1.16- Evolution sous la courbure moyenne. a) Image originale. b) Image bruitée. c) Résultat à $t=1.0$. d) Résultat à $t=15.0$.

La méthode est capable d'éliminer le bruit de manière efficace; les zones bruitées étant caractérisées par des fortes courbures, le lissage est fort. L'utilisation de ce type d'EDP reste par contre limitée, particulièrement pour des temps de diffusion grands : dans ce cas les structures sont réduites à des courbes convexes, devenant de plus en plus circulaires. La méthode peut conserver les coins, mais seulement pour des valeurs de t faibles. Le rehaussement est interdit par l'action de la diffusion, toujours parallèle aux contours.

1.6.2 Modèle de Alvarez et al. - lissage sélectif et détection des contours par diffusion non linéaire

Le type d'EDP étudié par Alvarez, Lions et Morel en [ALM92] est :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = g(|\nabla U_\sigma|) |\nabla U| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (1.89)$$

avec des conditions aux frontières de type Neumann. ; U_σ est l'image lissée avec un noyau Gaussien d'écart type σ .

(1.89) est une version modifiée de l'équation de mouvement sous la courbure moyenne ; le terme supplémentaire $g()$, similaire à la fonction qui contrôle la diffusion anisotrope, pénalise le processus de diffusion dans la direction orthogonale aux contours. Les auteurs indiquent que ce terme est utilisé pour le "rehaussement" des contours : si la moyenne des normes des vecteurs gradients est petite dans le voisinage d'un pixel, la diffusion unidirectionnelle est forte, le point étant considéré comme appartenant à une zone homogène. Par contre si la moyenne est grande le point appartient à un contour et la diffusion est abaissée.

Notons que le sens du terme rehaussement n'est pas le même que celui utilisé pour la diffusion anisotrope ; un contour est lissé d'un coté et de l'autre sans être pour autant modifié de manière forte ; cela conduit à une augmentation apparente du contraste.

Ce type d'équation est très proche aussi de l'équation de diffusion par minimisation de la variation totale ; dans le cas particulier $\sigma = 0$ et $g(s)=1/s$ on retrouve (1.68).

En utilisant les mêmes idées que l'approche variationnelle de Deriche et Faugeras les auteurs ajoutent à (1.89) un terme de diffusion conditionnelle :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g(|\nabla U_\sigma|) [(1 - h(|\nabla U|)) \Delta U + h(|\nabla U|) |\nabla U| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right)] \quad (1.90)$$

La fonction floue $h(s)$ introduite en (1.90) est conçue de manière à obtenir $h(s) = 0$ pour $s \leq K$ et $h(s) = 1$ pour $s \geq 2K$: alors que la diffusion est unidirectionnelle pour des gradients forts, dans le cas des gradients faibles (1.90) s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g(|\nabla U_\sigma|) \Delta U \quad (1.91)$$

qui correspond à une diffusion isotrope modulée par la valeur de la fonction de diffusion.

L'équation permet aussi une interprétation directionnelle ; en écrivant le laplacien et le terme de diffusion directionnelle en fonction des dérivées secondes dans la direction du gradient et dans la direction orthogonale :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g(|\nabla U|) [(1 - h(|\nabla U|))(U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}) + h(|\nabla U|)U_{\xi\xi}] \quad (1.92)$$

En identifiant les coefficients :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = c_{\xi}U_{\xi\xi} + c_{\eta}U_{\eta\eta} \\ c_{\xi} = g(|\nabla U|) \\ c_{\eta} = g(|\nabla U|)[1 - h(|\nabla U|)] \end{cases} \quad (1.93)$$

L'existence et l'unicité de la solution sont montrées à travers la théorie des solutions de viscosité [CIL92].

En ce qui concerne la fonction $g()$, les auteurs ne mentionnent pas de choix particulier. Cependant $g()$ doit être une fonction décroissante dépendant d'un paramètre de contraste choisi de manière à correspondre à la limite supérieure de l'intervalle de diffusion isotrope. Le choix de la fonction h n'est pas non plus explicité dans l'article ; d'autres auteurs ont d'ailleurs rapporté de meilleurs résultats avec une fonction seuil binaire [KDA96], [KDA97a] [Kor98] ou avec des seuils indépendants pour la diffusion isotrope et le paramètre de contraste. Nous avons repris cette méthodologie dans nos expériences.

Nous représentons à la *figure 1.17 b) et c)* les résultats obtenus à partir de l'image bruitée (*Fig.1.17.a)* (identique à *Fig.1.16.b)*. Les temps d'arrêt correspondent à ceux utilisés en *Fig.1.16* pour l'évolution sous la courbure moyenne. Les résultats ont été obtenus en utilisant la fonction de diffusion proposée dans [Kor98] : $g(s) = \exp[-(2s)^2 / K_g^2]$ et une fonction seuil binaire $h(s) = 0$ si $s < K_h$ et $h(s) = 1$ si $s \geq K_h$.

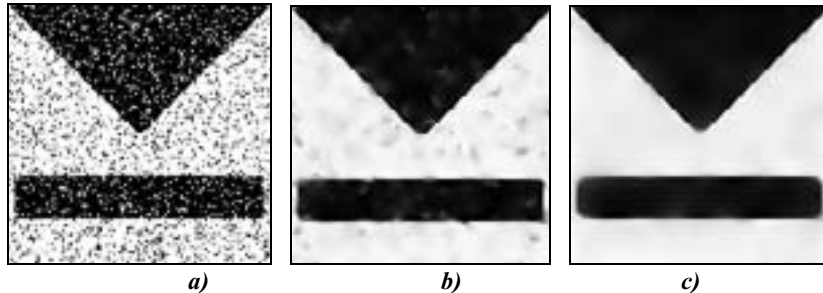


Fig 1.17- Lissage sélectif et détection des contours par diffusion non linéaire. a) Image bruitée. b) Résultat à $t=5.0$. Résultat à $t=15.0$. c) $\sigma=2.0, K_g=100, K_h=10$.

Les résultats montrent que la méthode est très efficace pour l'élimination des bruits forts, en diminuant aussi la déformation des structures inhérente à la diffusion sous la courbure moyenne. De plus la diffusion isotrope pour des gradients faibles permet le lissage plus efficace des zones constantes.

1.6.3 AMSS (Affine Morphological Scale Space)

L'AMSS (*analyse multi-échelle par invariance affine*) a été introduite pour le traitement d'images par Alvarez, Guichard, Morel [AGLM93] et, expliquée de manière indépendante à travers la théorie de déformation des courbes, par Sapiro et Tannenbaum [SaT94], [Sap00].

Dans [AGLM93] –similairement à l'EMSS- les auteurs analysent aussi le cas des transformations affines. Une telle transformation peut intervenir dans le cas des objets planaires observés depuis une grande distance selon différents angles d'observation.

D'une manière similaire à l'EMSS, en remplaçant l'axiome d'invariance euclidienne par un axiome d'invariance affine, Alvarez Gichard et Morel montrent que la seule analyse

multi-échelle qui respecte les axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, de régularité et d'invariance affine et morphologique est donnée par l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = |\nabla U| (t \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right))^{1/3} \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (1.94)$$

En développant l'équation (1.94) on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = |\nabla U| \left[t \left(\frac{U_x^2 U_{yy} - 2U_x U_y U_{xy} + U_x^2 U_{yy}}{(U_x^2 + U_y^2)^{3/2}} \right) \right]^{1/3} = t^{1/3} (U_x^2 U_{yy} - 2U_x U_y U_{xy} + U_x^2 U_{yy})^{1/3} \quad (1.95)$$

En comparaison avec l'EMSS, notons l'absence de la norme du gradient au dénominateur de (1.95) qui rend l'évolution des courbes de niveaux plus stables. Par analogie avec l'EMSS un changement d'échelle $t_1 = 3/4t^{4/3}$ permet l'élimination du terme t en (1.95) :

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = (U_x^2 U_{yy} - 2U_x U_y U_{xy} + U_x^2 U_{yy})^{1/3} \quad (1.96)$$

(1.94) (ou (1.96)) est connue dans la littérature sous le nom *d'équation fondamentale en traitement d'images*.

Une interprétation similaire à l'EMSS, à travers la théorie d'évolution des courbes, peut être donnée aussi pour l'AMSS. Sapiro et Tannenbaum [SaT94],[Sap00] analysent le mouvement des courbes sous l'équation :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa^{1/3} \vec{N} \quad (1.97)$$

L'équivalence entre (1.97) et (1.96) peut être montrée en utilisant la même approche qu'au paragraphe précédent. Notons que cette équivalence permet une interprétation géométrique de l'évolution d'une image selon (1.97) : les courbes de niveaux se déforment dans la direction orthogonale avec une vitesse proportionnelle à la courbure affine.

(1.97) permet aussi une interprétation directionnelle :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = c_\xi U_{\xi\xi\xi} \\ c_\xi = |\nabla U|^{2/3} U_{\xi\xi\xi} \end{cases} \quad (1.98)$$

Les propriétés de cette équation sont identiques aux celles de EMSS : une courbe non convexe évolue en un temps fini vers une courbe convexe ; les courbes fermées évoluent vers des points elliptiques, les ellipses maintiennent leur excentricité pendant l'évolution. D'un point de vue pratique, en utilisant l'AMSS, l'élimination du bruit est efficace, mais des temps de diffusion grands produisent, comme pour l'EMSS, des déformations des structures présentes dans l'image originale.

1.6.4 Mouvement sous la courbure moyenne modifiée

Nous allons présenter et commenter dans ce paragraphe une équation de diffusion qui utilise toujours l'idée de mouvement sous la courbure moyenne.

Proposée de manière indépendante en [Yez98] et [SKM96],[SKM98],[KMS 00], l'équation est développée en paramétrant une image 2D $U: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ comme une surface en 3D $S(x, y) = (x, y, U(x, y)) \subset \mathbf{R}^3$. Cependant les auteurs utilisent des approches différentes, les équations obtenues sont presque identiques ; nous avons choisi de suivre le formalisme introduit en [Yez98]. Les deux méthodes peuvent se généraliser pour les cas des images en

couleurs ou pour des images 3D. Nous nous intéressons ici seulement au cas des images en niveaux de gris.

Soit un contour de l'image qui, dans un plan orthogonal au plan (x,y) , peut être vue comme une courbe C . Au lieu d'imposer un mouvement des vecteurs de positions de cette courbe par une équation de diffusion géométrique qui peut arrondir les zones à forte courbure,

l'auteur limite ce mouvement seulement à la direction $\vec{Z} = (0,0,1)^T$ en projetant les vecteurs $k\vec{N}$ sur cet axe. Cela conduit à imposer un mouvement des points de la surface dans la direction \vec{Z} avec une vitesse proportionnelle à la courbure moyenne H :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (H \vec{N} \cdot \vec{Z}) \vec{Z} = \frac{U_{xx}(1+U_y^2) - 2U_x U_y U_{xy} + U_{yy}(1+U_x^2)}{2(1+U_x^2 + U_y^2)^2} (0,0,1)^T \quad (1.99)$$

Si le paramétrage de S est fixe pour les coordonnées spatiales ($x = ct; y = ct$) on obtient :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (0,0, \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t})^T \quad (1.100)$$

L'évolution de la surface S selon (1.100) est donc équivalente à l'évolution de l'image originale U selon l'EDP suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{xx}(1+U_y^2) - 2U_x U_y U_{xy} + U_{yy}(1+U_x^2)}{2(1+U_x^2 + U_y^2)^2} \\ U(x,y,0) = U_0(x,y) \end{cases} \quad (1.101)$$

La même équation est présentée en [SKM96], [SKM98], [KMS 00] dans un cadre géométrique général. L'idée est la même : représenter une image comme une surface et dériver l'équation de mouvement à travers la minimisation d'une fonctionnelle définie sur cette surface. Le flot issu est connu sous le nom de *flot Beltrami* qui peut se généraliser pour des surfaces n -D.

Yezzi développe en [Yez98] une forme modifiée de (1.101). En considérant des modifications de niveaux de gris de l'image de type $U \rightarrow \alpha U$, avec α une constante positive, (1.101) devient:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\Delta U + \alpha^2 (U_y^2 U_{xx} - 2U_x U_y U_{xy} + U_x^2 U_{yy})}{[1 + \alpha^2 |\nabla U|^2]^2} \quad (1.102)$$

Notons que ni (1.101), ni (1.102) ne permettent des interprétations directionnelles directes. Si des valeurs aux limites sont considérées pour le paramètre α l'interprétation directionnelle pour (1.102) est [Yez98] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} \text{ si } \alpha \rightarrow 0 \quad (1.103)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\alpha^2 |\nabla U|^2} |\nabla U| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) = \frac{1}{\alpha^2 |\nabla U|^2} U_{\xi\xi} \text{ si } \alpha \rightarrow \infty \quad (1.104)$$

Pour des valeurs élevées de α , la diffusion est très lente et le traitement nécessite *donc* un grand nombre d'itérations. D'autre part, la pondération de l'équation de mouvement sous la courbure moyenne par le dénominateur de (1.104) a pour effet de limiter la déformation des structures; (1.104) est également proche de l'équation de diffusion anisotrope par minimisation de la variation totale (1.71). La *figure 1.18* illustre l'effet de l'approche proposée par Yezzi. Notons que l'auteur ne s'intéresse pas à la capacité d'élimination du bruit de la méthode.

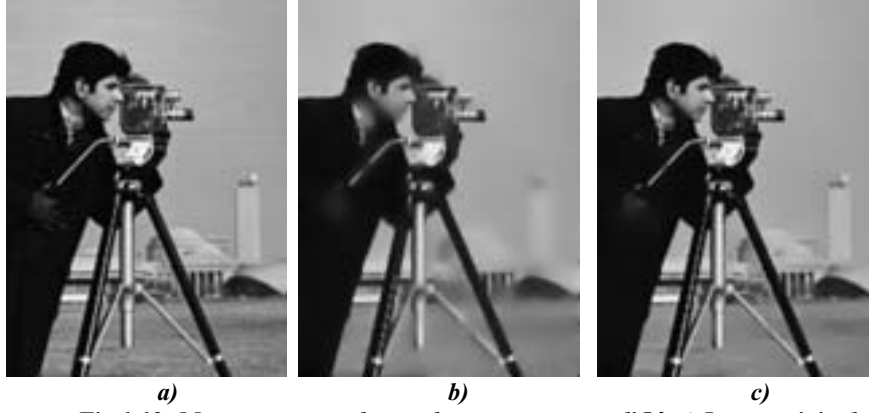


Fig 1.18- Mouvement sous la courbure moyenne modifié .a) Image originale.
b) Résultat à $t=10.0$, $\alpha=0.1$. c) Résultat à $t=40.0$, $\alpha=0.6$.

En regardant la figure 1.18, nous notons des résultats proches de la diffusion isotrope pour des valeurs faibles de α ; des valeurs plus grandes permettent une simplification progressive de l'image, nécessitant un plus grand nombre d'itérations. Pour des valeurs suffisamment grandes la déformation des structures est diminuée. Les capacités d'élimination du bruit de cette méthode seront analysées au chapitre 3.

1.6.5 Combinaisons des filtres de choc et lissage sélectif

Dans cette section, nous nous intéressons à un type particulier d'EDP : celles qui combinent des termes de diffusion ($T_{diffusion}$), de choc (T_{choc}) et, éventuellement, des termes d'attache aux données ($T_{données}$). Même si les équations ont été développées dans des contextes différents, le modèle général peut s'écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = T_{diffusion} + T_{choc} + T_{données} \quad (1.105)$$

En (1.105), le terme de diffusion permet l'élimination du bruit, celui de choc est utilisé pour éliminer le flou ; enfin, le terme d'attache aux données diminue la sensibilité au temps d'arrêt. Notons que le modèle de base Perona -Malik peut s'exprimer aussi sous cette forme pour des normes des vecteurs gradients supérieurs à K et pour $T_{données} = 0$.

Alvarez et Mazorra [ALM94] ont été les premiers à proposer l'utilisation d'une équation de ce type : la particularité de leur modèle consiste à utiliser un terme de choc de type (1.49) et un terme de diffusion modulable de type (1.89). Le modèle a ensuite été enrichi par un terme d'attache aux données dans les travaux de Kornprobst et al. (§1.6.5.1). Développée dans un autre contexte, l'équation des « self snakes » (§1.6.5.2) peut également s'exprimer avec ce formalisme.

1.6.5.1 Modèle de Kornprobst et al.

Le modèle le plus général de combinaison d'un filtre de choc et d'un lissage sélectif est proposé par Kornprobst et al [KDA97b], [Kor98]. L'EDP qui contrôle le processus de restauration est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha_f (U - U_0) + \alpha_r [h_\tau(|\nabla U_\sigma|) U_{\eta\eta} + U_{\xi\xi}] - \alpha_e [1 - h_\tau(|\nabla U_\sigma|)] \text{signe}(G_- * U)_{\eta\eta} |\nabla U| \quad (1.106)$$

En identifiant les termes à partir de (1.106) :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{données} = \alpha_f (U - U_0) \\ T_{choc} = -\alpha_e [1 - h_\tau(|\nabla U_\sigma|)] \text{signe}(G_- * U)_{\eta\eta} |\nabla U| \\ T_{diffusion} = \alpha_r [h_\tau(|\nabla U_\sigma|) U_{\eta\eta} + U_{\xi\xi}] \end{array} \right. \quad (1.107)$$

Les principaux paramètres sont :

- $(\alpha_f, \alpha_r, \alpha_e)$: paramètres qui pondèrent l'influence du terme d'attache aux données, du terme de lissage et du terme de choc.

- τ : paramètre de contraste

- $h_\tau(x) = 1$ si $x < \tau$, et 0 sinon –fonction de seuil binaire

- σ et $\bar{\sigma}$: écarts type des noyaux gaussiens utilisés respectivement pour le pré lissage dans le terme de diffusion et pour l'estimation robuste de la dérivée seconde directionnelle $U_{\eta\eta}$.

Notons le caractère très général de ce modèle : pour certains jeux de paramètres, nous retrouvons presque toutes les méthodes présentées antérieurement :

- si $\alpha_f = 0, \alpha_e = 0$ (1.107) est équivalente au lissage sélectif d'Alvarez, Lions et Morel pour un choix particulier de $g(\cdot)=1$

- si $\alpha_f = 0, \alpha_r = 0$ (1.107) est une équation de type Alvarez Mazorra

- si $\alpha_f = 0, \alpha_e = 0$ et pour $|\nabla U| < \tau$ (1.107) n'est que l'équation de diffusion isotrope.

- si $\alpha_e = 0$ (1.107) est une combinaison du modèle de Nordstrom (§1.5.1) et du lissage sélectif d'Alvarez Lions et Morel (§1.6.2).

Nous avons commenté le comportement de cette équation en fonction des paramètres en absence du terme de réaction. Ce terme est insensible aux zones bruitées de dimension inférieure à la taille du noyau de lissage et il produit des solutions constantes par morceaux, séparées par choc dans les zones correspondant au passage par 0 de la dérivée seconde directionnelle dans la direction du vecteur gradient. Il est à noter que le déplacement des contours induit par l'utilisation des noyaux gaussiens peut créer de fausses structures dans l'image restaurée.

Nous présentons quelques résultats illustrant le comportement de l'approche (Fig.1.19). La méthode hérite la puissance d'élimination du bruit des approches de type courbure moyenne ; elle favorise aussi les zones constantes par morceaux (Fig.1.19. a et b). De plus, comme la plupart des méthodes qui utilisent un terme de courbure, elle introduit des distorsions géométriques (Fig.1.19.d).

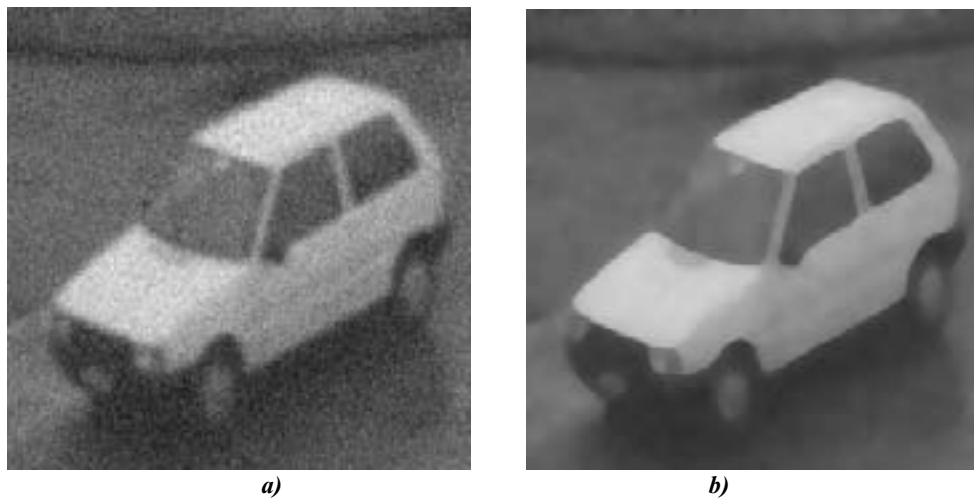


Fig 1.19-Lissage et rehaussement de Kornprobst et al. a) Image originale.

(<http://www.inria.fr/robotvis/pkornp>). b) Résultat à $t=2.0$ $\alpha_f = 0.25$, $\alpha_r = 2$, $\alpha_e = 1$, $\tau=4$, $\bar{\sigma} = 2.0$, $\sigma = 1.0$.

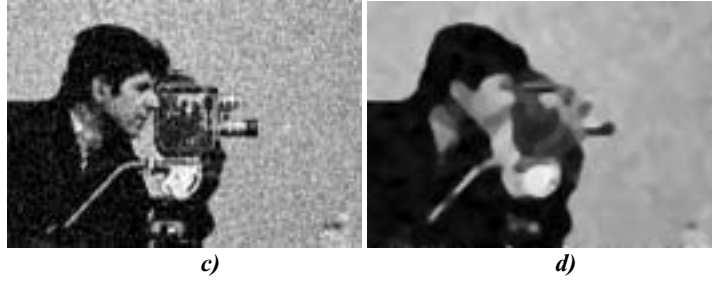


Fig 1.19 (cont.)- c) Image originale. d) Résultat à $t=1.5$ $\alpha_f = 0$, $\alpha_r = 2$, $\alpha_e = 1$, $\tau=4$, $\bar{\sigma} = \sigma = 1.0$

Finalement notons que cette équation a été généralisée au cas des images en couleurs par Tschumperlé et Deriche [TsD01].

1.6.5.2 Self-Snakes

Ce type d'équation est dérivé de la théorie des contours actifs de Kass et al. [KWT88]. L'idée fondamentale des contours actifs est la déformation d'un contour initial C vers la frontière d'un objet. Cette déformation se fait en minimisant une fonction d'énergie. La différence essentielle entre ces types de contours et les contours actifs géodésiques - introduits de manière indépendante par Casseles et al. [CKS95-97] et Kichenassamy et al. [KKOTA95] - est que ces derniers correspondent à la minimisation du périmètre d'une courbe initiale $C = C(0)$. Parmi les avantages des contours actifs géodésiques mentionnons seulement qu'ils permettent une reconstruction plus exacte des objets à segmenter, tout en permettant des modifications topologiques de la courbe initiale [KKB97], [Sap2000].

L'évolution de la courbe initiale correspondant à la minimisation du périmètre s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = [g(U)\kappa - \nabla g(U) \cdot \vec{N}] \vec{N} \quad (1.108)$$

Notons que le premier terme est équivalent, à une constante près, à l'équation de diffusion géométrique ; les points de la courbe C se déplacent dans la direction de la normale \vec{N} avec une vitesse proportionnelle à la courbure. La fonction $g(\cdot)$ -de type Catté et al. dépendante d'une version lissée de l'image - diminue la vitesse dans le voisinage des frontières. Le deuxième terme $\nabla g(U) \cdot \vec{N}$ est un terme d'advection dont l'intérêt se manifeste quand la courbe qui évolue C dépasse la frontière d'un objet- dans ce cas $\nabla g(U)$ et \vec{N} ont le même signe et la courbe recule sur la frontière.

L'approche a été généralisée par Sapiro [Sap95-97], [Sap96] pour le lissage et la simplification des images. Pour ces tâches, Sapiro montre que l'équation correspondante est :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = |\nabla U| \operatorname{div} \left(g(U) \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (1.109)$$

Une interprétation de cette équation est donnée par (1.108) : les courbes de niveaux de l'image se déplacent dans la direction orthogonale avec une vitesse proportionnelle à la courbure et reculent sur les frontières significatives.

Notons aussi que cette équation conduit à une interprétation directionnelle : en prenant $\hat{g}(|\nabla U|) = g(U)$, et en considérant que l'image originale est non lissée (1.109) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= |\nabla U| \operatorname{div} \left(\hat{g}(|\nabla U|) \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) = \hat{g}(|\nabla U|) |\nabla U| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) + \nabla \hat{g}(|\nabla U|) \cdot \nabla U = \\ &\stackrel{(1.18), (1.19)}{=} \hat{g}(|\nabla U|) U_{\xi\xi} + \hat{g}'(|\nabla U|) |\nabla U| U_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (1.110)$$

Pour des fonctions g (ou \hat{g}) décroissantes, $\hat{g}'(\cdot)$ est toujours négative, (1.110) se traduit donc par une diffusion dans la direction du contour et un rehaussement dans la direction des vecteurs gradients. Notons aussi que, dans la direction du vecteur gradient, le deuxième terme est très proche de l'EDP générale des filtres de choc (1.48). Si $g(\cdot)=1$ nous retrouvons le mouvement sous la courbure moyenne. La généralisation pour les images en couleur est donnée aussi en [Sap95-97]

La même idée est présente dans les travaux de Sarti et al. [SOLM00]. Le modèle de lissage utilise une EDP du type (1.105) pour le pré traitement et post traitement des images cytologiques. L'EDP de lissage consiste en :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g(|\nabla(G * U_0)|) \kappa |\nabla U| + \beta \nabla g(|\nabla(G * U_0)|) \cdot \nabla U \quad (1.111)$$

Au facteur constant β près, cette équation est très proche de l'EDP des self-snakes ; ce facteur contrôle la force du terme de réaction dans le résultat. Nous remarquons aussi l'utilisation d'une fonction $g(\cdot)$ statique ; la justification des auteurs est qu'à travers la variance du noyau gaussien ils fixent la taille minimale des objets à garder dans l'image lissée.

Les résultats expérimentaux de [Sap95-97] et [SOLM00] montrent que la méthode est capable de rehausser le contraste, les maxima et minima n'étant plus identiques à ceux de l'image originale. Ce phénomène est dû au schéma de discrétisation utilisé ; nous avons choisi d'utiliser le schéma numérique fondé sur les moyennes harmoniques [Wei00] qui permet d'assurer le principe discret de maximum.

La figure 1.20 illustre l'influence du choix des paramètres pour ces méthodes. Les résultats sont comparés à la même échelle $t=2.0$. En partant de l'image bruitée (Fig. 1.20.a), nous représentons en Fig.1.20.b et c les résultats qui correspondent à $K=3$, $\sigma=0.25$ et $\sigma=1.0$. Fig.1.20.d est obtenue en utilisant $\sigma=1.0$ et $K=10$.

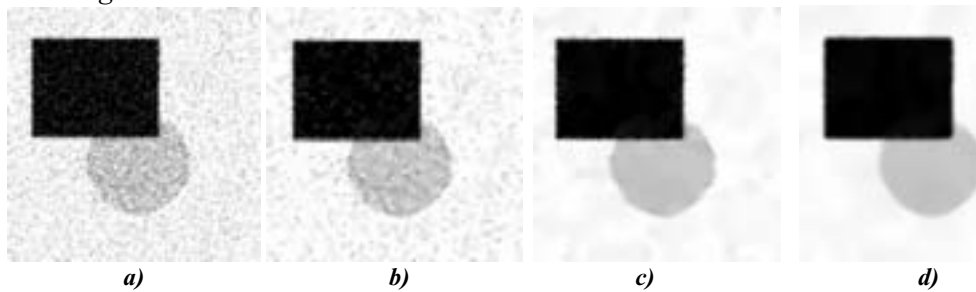


Fig 1.20-Self snakes. a) Image originale. b) Résultat à $t=2.0$, $K=3$, $\sigma=0.25$. c) Résultat à $t=2.0$, $K=3$, $\sigma=1.0$. d) Résultat à $t=2.0$, $K=10$, $\sigma=1.0$.

La variance du noyau gaussien de pré lissage contrôle la capacité d'élimination du bruit de la méthode sur des zones caractérisées par des gradients faibles. Des valeurs grandes pour cette variance produisent des zones d'un aspect plus continu et régulier. Pour des zones de forts gradients, la variance du noyau retarde le lissage sur les contours. Cependant, le lissage isotrope entraîne un déplacement des contours d'où l'aspect irrégulier des frontières.

Le paramètre de contraste K pondère l'influence du terme de diffusion. Des valeurs grandes ($K \rightarrow \infty$) produisent des résultats proches du mouvement sous la courbure moyenne ($g(\cdot) \rightarrow 1, \nabla g \cong 0$).

1.7 Diffusion tensorielle

Nous présentons dans cette section des méthodes utilisant des matrices de diffusion au lieu de fonctions de diffusion scalaires. Le modèle général est donné par l'EDP :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(D\nabla U) \quad (1.112)$$

Les conditions aux limites sont : $U(x, y, 0) = U_0(x, y)$ dans Ω ; $U(x, y) = 0$ ou $D\nabla U \cdot \vec{n} = 0$ sur la frontière du domaine $\partial\Omega$ dont la normale extérieure est \vec{n} .

Les tenseurs de diffusion que nous allons analyser sont des matrices symétriques dont les valeurs propres réelles λ_1, λ_2 permettent une décomposition dans la base des vecteurs orthonormaux \vec{v}_1, \vec{v}_2 [Bra96] :

$$D = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

Une telle décomposition permet de décrire le comportement de la diffusion selon les directions des vecteurs propres. Le choix de D et des fonctions de diffusion influencent fortement les résultats obtenus. Des choix habituels pour les fonctions de diffusion incluent des fonctions du gradient lissé de l'image (§1.7.2, §1.7.3, §1.7.4.1) ou des fonctions qui dépendent d'une notion de cohérence de l'orientation (§1.7.4.2). Les directions des vecteurs propres \vec{v}_1, \vec{v}_2 correspondent aux directions du gradient lissé et à la direction orthogonale au gradient (§1.7.2, §1.7.3, §1.7.4.1), ou aux vecteurs propres de structures plus élaborées (tenseur de structure) (§1.7.4.2).

1.7.2 Modèle de Cottet Germain

Le modèle de diffusion réaction proposé par Cottet et Germain [CoG93] consiste à faire évoluer l'image initiale sous l'EDP :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \alpha \sigma^2 \text{div}[(D_\sigma(U)\nabla U)] = f(U) \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), (x, y) \in \Omega \\ U(x, y, t) = 0, (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.114)$$

Le tenseur de diffusion correspond à une matrice de projection orthogonale sur la direction du gradient de l'image lissée par un noyau gaussien d'écart type σ : $\nabla U_\sigma = \nabla(G_\sigma * U)$, $D_\sigma(U) = P_{\nabla U_\sigma^\perp}$:

$$D_\sigma(U) = \frac{1}{|\nabla U_\sigma|^2 + \sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U_\sigma}{\partial y^2} & -\frac{\partial U_\sigma}{\partial x} \frac{\partial U_\sigma}{\partial y} \\ -\frac{\partial U_\sigma}{\partial x} \frac{\partial U_\sigma}{\partial y} & \frac{\partial^2 U_\sigma}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (1.115)$$

Le paramètre σ est un paramètre d'échelle ; on peut lui donner la même interprétation que pour la diffusion isotrope : il détermine la taille minimale d'un objet que l'on désire conserver dans l'image.

Le modèle a été conçu plutôt comme un méthode de segmentation : le nombre de valeurs distinctes de la fonction de réaction est paramétrable et induit le nombre des niveaux de gris présents dans l'image segmentée.

Les auteurs expliquent le comportement de la diffusion en analysant la cohérence spatiale entre ∇U_σ et ∇U . Nous allons donner une interprétation selon (1.113).

Les deux valeurs propres de $D_\sigma(U)$ sont :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{|\nabla U_\sigma|^2}{|\nabla U_\sigma|^2 + \sigma^2}$$

Les valeurs propres étant réelles, les vecteurs propres peuvent

être choisis orthonormaux $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})^T, \vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})^T, \left| \vec{v}_1 \right| = \left| \vec{v}_2 \right| = 1$ et $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

En simplifiant les notations $U_{\sigma_x} = \frac{\partial U_\sigma}{\partial x}$ et $U_{\sigma_y} = \frac{\partial U_\sigma}{\partial y}$:

l'expression du premier vecteur propre de norme unitaire est donnée par :

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{U_{\sigma_x}}{|\nabla U_\sigma|}, \frac{U_{\sigma_y}}{|\nabla U_\sigma|} \right)^T \quad (1.116)$$

Une expression similaire peut s'obtenir pour \vec{v}_2 :

$$\vec{v}_2 = \left(\frac{U_{\sigma_y}}{|\nabla U_\sigma|}, -\frac{U_{\sigma_x}}{|\nabla U_\sigma|} \right)^T \quad (1.117)$$

La matrice de diffusion s'écrit ensuite :

$$D_\sigma(U) = \begin{pmatrix} \frac{U_{\sigma_x}}{|\nabla U_\sigma|} & \frac{U_{\sigma_y}}{|\nabla U_\sigma|} \\ \frac{U_{\sigma_y}}{|\nabla U_\sigma|} & -\frac{U_{\sigma_x}}{|\nabla U_\sigma|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\nabla U_\sigma|^2}{|\nabla U_\sigma|^2 + \sigma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{U_{\sigma_x}}{|\nabla U_\sigma|} & \frac{U_{\sigma_y}}{|\nabla U_\sigma|} \\ \frac{U_{\sigma_y}}{|\nabla U_\sigma|} & -\frac{U_{\sigma_x}}{|\nabla U_\sigma|} \end{pmatrix} \quad (1.118)$$

Notons que $\vec{v}_1 \parallel \nabla U_\sigma$ et $\vec{v}_2 \perp \nabla U_\sigma$, (1.118) se traduit donc par une diffusion nulle dans la direction des vecteurs gradients lissés, la diffusion étant seulement réalisée le long des contours. Les directions de diffusion sont obtenues par des moyennes spatiales des directions de vecteurs gradients.

Les résultats illustrés par les auteurs [CoG93] montrent la capacité de la méthode à conserver les objets mono dimensionnels, particulièrement quand la fonction de réaction est non nulle.

Le choix du paramètre σ est essentiel pour cette méthode ; pour des images bruitées sa valeur doit être suffisamment grande pour permettre l'élimination du bruit afin de déterminer les directions de diffusion d'une manière robuste. Cela peut conduire à l'élimination de structures fines dans l'image. Finalement, notons que les auteurs proposent comme critère d'arrêt un certain seuil de distance (utilisant la norme L_2) entre deux itérations successives.

1.7.3 Filtre de type Volterra

Une approche similaire au modèle précédent est proposée par Cottet et El Ayyadi. Le modèle de diffusion (initialement introduit en [CoE96]) correspond à une équation de type Volterra [CoE98]:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[D(U)\nabla U] \\ \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{\tau}D = \frac{1}{\tau}F(\nabla U) \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (1.119)$$

Globalement, l'esprit de la méthode est le même que pour le modèle précédent : pour des gradients forts la diffusion se produit seulement le long des contours. La particularité de

cette approche réside dans les choix des directions de diffusion : l'idée des auteurs est d'utiliser un tenseur de diffusion qui « apprend » les directions de diffusion.

La deuxième équation, déduite par analogie avec les réseaux de neurones de Hopfield, permet d'obtenir des directions de diffusion via une moyenne temporelle. Pour une matrice de projection orthogonale dans les directions orthogonales aux vecteurs gradients – identique à (1.118) pour une deuxième valeur propre $\lambda_2 = |\nabla U|^2$ - et en partant d'une matrice de diffusion isotrope $D_0 = I_2$ et d'une fonction d'apprentissage du processus de diffusion [CoA98] :

$$F(\nabla U) = \begin{cases} P_{\nabla U^\perp} & \text{si } |\nabla U| \geq K \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{|\nabla U|^2}{K^2}\right) I_2 + \frac{|\nabla U|^2}{K^2} P_{\nabla U^\perp} & \text{si } |\nabla U| < K \end{cases} \quad (1.120)$$

Les auteurs montrent que la direction de diffusion est une moyenne temporelle des directions de diffusion. Le temps de relaxation τ joue un rôle important : des valeurs faibles augmentent l'influence du terme isotrope dans la détermination de la direction moyenne.

Après avoir montré que (1.120) produit des solutions stables, les auteurs indiquent aussi la possibilité de réinitialiser le processus : en partant de $D_0 = I_2$ le système (1.119) produit une solution dès que le résidu entre deux itérations successives

$R^t = \sum_{i,j} (U_{i,j}^{t+1} - U_{i,j}^t)^2$ devient inférieur à un certain seuil. Le processus de diffusion est repris avec les conditions initiales $D_0 = D^t$ et $U(x,y,0) = U_0(x,y)$. Nous nous référons à [CoE98] pour plus de détails.

La méthode semble particulièrement bien adaptée pour la segmentation des objets mono dimensionnels ; elle converge vers des états stables sans avoir besoin d'une fonction de réaction.

Nous allons montrer les effets des deux derniers modèles sur une zone de l'image classique de théière (Fig 1.21.a) bruitée avec un bruit blanc gaussien ($SNR = 11.54dB$) nous montrons les résultats obtenus en utilisant le modèle de Cottet et Germain en absence de réaction (Fig 1.21.c) et avec une fonction de réaction avec 4 niveaux de gris (Fig 1.21. d) Ensuite nous présentons des résultats obtenus en utilisant (1.119) sans réinitialisation (Fig 1.19. e) et avec une seule réinitialisation. Pour les deux méthodes nous avons choisi comme critère d'arrêt une valeur du résidu de 10^{-3} (en considérant les images comprises entre -1 et $+1$). Le choix des autres paramètres est indiqué dans la légende de la figure 1.29 .

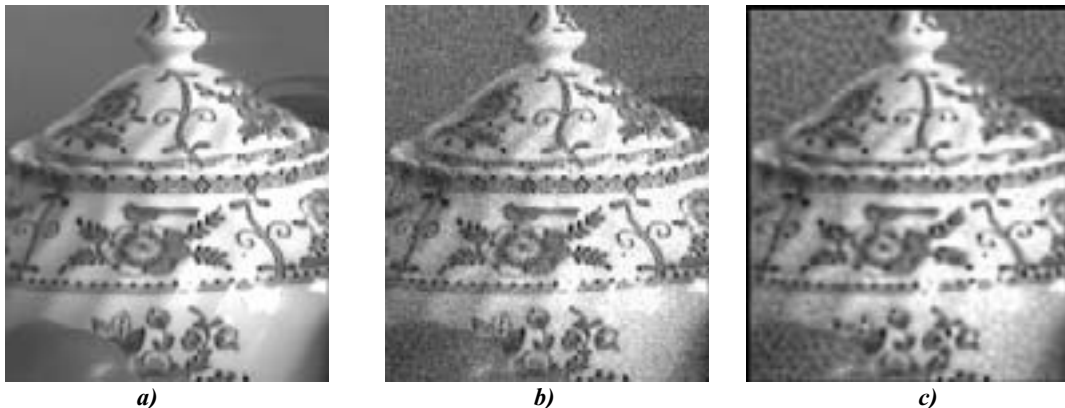


Fig 1.21- Diffusion tensorielle. a) Image originale. b) Image bruitée. c) Modèle de Cottet et Germain sans réaction $\sigma=0.75$.

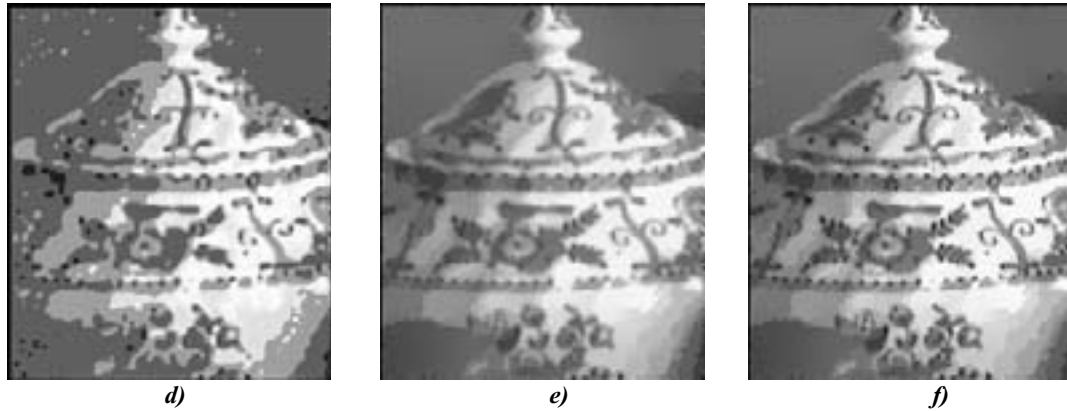


Fig 1.21(cont.)- d) Modèle de Cottet et Germain $\sigma=1$, quantifié sur 4 niveaux de gris, $\alpha=12$, $\sigma=0.75$.
 e) Filtre Volterra sans réinitialisation $K=8, \tau=3dt$.
 f) Filtre Volterra avec réinitialisation $K=8, \tau=3dt$.

Le filtre de Cottet et al. sans réaction favorise les objets mono dimensionnels au détriment des zones avec des niveaux relativement contrastés (Fig. 1.19.c). Ce phénomène s'explique par le caractère unidirectionnel de la diffusion : conformément à (1.118) la diffusion n'a lieu que dans une seule direction, d'où l'incapacité de la méthode à éliminer le bruit sur le fond de l'image tout en gardant les structures fines. Nous remarquons la capacité du même filtre de produire des images de type « segmentation » quand la méthode est équipée d'une fonction de réaction non nulle (Fig. 1.19.d). La méthode produit des zones constantes par morceaux mais le choix du nombre des niveaux de quantification reste difficile. Ce phénomène peut s'observer dans la partie gauche de l'image (Fig. 1.19.d) : l'amplitude en niveau de gris dans cette zone est faible, par suite, tous les pixels sont considérés comme appartenant à une même région.

Le filtre de Cottet et Ayaddi produit des résultats plus nets. La matrice de diffusion conduit à une diffusion isotrope pour les zones avec des gradients inférieurs au seuil K . Pour des zones de gradient forts, la diffusion est unidirectionnelle (Fig. 1.19.e) ; la réinitialisation conduit à des résultats encore plus nets grâce aux directions des vecteurs propres précalculées (Fig. 1.19.f) qui évitent le lissage isotrope initial dans les zones de forts gradients.

1.7.4 Modèles de Weickert

Les méthodes de diffusion qui utilisent des matrices de diffusion à la place de fonction scalaires ont été étudiées de manière intensive par Weickert. La famille des filtres de Weickert -initialement proposée dans [Wei94]- utilise une information directionnelle qui guide le processus de diffusion dont l'intensité dépend d'une information de la norme du vecteur gradient ou d'une notion de cohérence spatiale. Les deux filtres issus de ces idées :

- edge enhancing diffusion (EED)
- coherence enhancing diffusion (CED)

se sont avérés être des outils puissants pour le traitement d'images ; l'EED permet un lissage des images avec rehaussement sélectif des contours [Wei94], [Wei96], la CED est utile dans des tâches de reconstruction d'objets tels que les empreintes digitales, ou dans des tâches de détection de défauts [Wei95], [Wei97b], [Wei99]. Pour une présentation de ces méthodes nous nous référons aussi à [Wei97a].

1.7.4.1 Diffusion pour le rehaussement de contours (EED)

Initialement proposée en [Wei94], l'EED appartient à une classe plus générale de filtres de diffusion. Notamment Weickert s'intéresse au modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[D(\nabla U_\sigma)\nabla U] \quad (x, y) \in \Omega \times (0, \infty) \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \\ D(\nabla U_\sigma)\nabla U \cdot \vec{n} = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \end{array} \right. \quad (1.121)$$

$D(\nabla U_\sigma)$ est une fonction du gradient de l'image lissée ($\nabla U_\sigma = \nabla(G_\sigma * U)$), insensible au bruit inférieur à l'échelle σ et qui satisfait les propriétés suivantes :

-continuité : D dépend de manière continue de son paramètre ∇U_σ

-symétrie : $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ avec $d_{12} = d_{21}$

-la matrice D est définie positive : indépendamment de ∇U_σ , il existe une limite inférieure positive pour les valeurs propres.

En utilisant ces hypothèses, Weickert établi une série de propriétés pour l'analyse multi échelle issue de (1.121). Les plus importantes sont [Wei94] :

- (1.121) est bien posée : l'équation admet une solution unique qui dépend de manière continue de l'image originale $U_0(x,y)$. La démonstration est une extension de celle de Catté et al.

-la solution respecte le principe de maximum :

$$\inf_{(x,y) \in \Omega} U_0(x, y) \leq U(x, y, t) \leq \sup_{(x,y) \in \Omega} U_0(x, y)$$

-l'intensité moyenne de l'image μ est préservée $\mu = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} U(x, y, t) d\Omega = cte, \forall t$

-la solution converge vers une valeur constante : $\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, y, t) = \mu$

-les extremums locaux ne sont pas rehaussés : si la solution à l'échelle t $U(x,y,t)$ possède un extremum en (x,y) , alors :

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} < 0 \text{ si } (x, y) \text{ correspond à un maximum}$$

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} > 0 \text{ si } (x, y) \text{ correspond à un minimum}$$

- l'opérateur multi échelle $T_t[U_0(x, y)] = U(x, y, t)$ est invariant par ajout d'une constante aux niveaux de gris et par isométrie

La construction de la matrice de diffusion se fait en lui imposant des vecteurs propres orthonormés $\vec{v}_1 \parallel \nabla U_\sigma$ et $\vec{v}_2 \perp \nabla U_\sigma$. En utilisant les notations $U_{\sigma_x} = \frac{\partial U_\sigma}{\partial x}$ et $U_{\sigma_y} = \frac{\partial U_\sigma}{\partial y}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \left(\frac{U_{\sigma_x}}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}, \frac{U_{\sigma_y}}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}} \right)^T \\ \vec{v}_2 = \left(-\frac{U_{\sigma_y}}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}, \frac{U_{\sigma_x}}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}} \right)^T \end{array} \right. \quad (1.122)$$

Les valeurs propres sont choisies comme des fonctions de la norme du gradient lissé $\lambda_1 = f_1(|\nabla U_\sigma|)$ et $\lambda_2 = f_2(|\nabla U_\sigma|)$.

La matrice de diffusion s'obtient ensuite :

$$D = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \end{pmatrix} = \frac{1}{(U_{\sigma_x})^2 + (U_{\sigma_y})^2} \begin{pmatrix} \lambda_1(U_{\sigma_x})^2 + \lambda_2(U_{\sigma_y})^2 & (\lambda_2 - \lambda_1)U_{\sigma_x}U_{\sigma_y} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)U_{\sigma_x}U_{\sigma_y} & \lambda_1(U_{\sigma_y})^2 + \lambda_2(U_{\sigma_x})^2 \end{pmatrix} \quad (1.123)$$

Les valeurs propres contrôlent la diffusion selon les directions des vecteurs propres ; le choix initial de Weickert [Wei94] est :

$$\begin{cases} \lambda_1 = g(|\nabla U_\sigma|) \\ \lambda_2 = g(0) \\ g(s) = \exp\left(-\frac{s^\alpha}{\alpha K^\alpha}\right) \end{cases} \quad (1.124)$$

où K est un paramètre de contraste et $\alpha \geq 1$ un paramètre qui contrôle la vitesse de décroissance de la fonction de diffusion $g(s)$ autour de K .

Un autre choix proposé plus récemment dans [Weik96] est :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nabla U_\sigma| = 0 \\ 1 - \exp(-1/(|\nabla U_\sigma|/K)^{2m}) & \text{si } |\nabla U_\sigma| > 0 \end{cases} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad (1.125)$$

Les fonctions de diffusion qui correspondent à la plus grande valeur propre $\lambda_1(s) = g(s)$ et les fonctions flux associées sont représentées à la *figure 1.22*. Nous représentons aussi la fonction de diffusion exponentielle de Perona Malik pour une analyse comparative.

La première fonction de diffusion a un comportement identique à la fonction exponentielle de Perona Malik. Le paramètre α induit un comportement plus sélectif pour des valeurs grandes. La fonction flux associée est non convexe. Par suite, la méthode peut rehausser les contours.

La deuxième fonction a une vitesse de décroissance plus grande – croissante avec m – qui favorise le lissage autour des objets. La fonction flux correspondante indique que dans ce cas aussi, un rehaussement des contours peut se produire.

Notons que ce filtre peut être vu comme une régularisation du modèle Perona Malik ; pour $\sigma \rightarrow 0$ et $\lambda_1 = \lambda_2$ le modèle (1.121) se rapproche de (1.10).

En comparaison avec le modèle (1.10) ou le modèle régularisé de Catté et al. (1.40) l'EED permet une meilleure élimination du bruit. (1.10) ou (1.40) diminuent la diffusion sur les bords des objets significatifs. Selon l'interprétation directionnelle de (1.10), dans ces zones, la diffusion dans la direction des contours est faible : $c_\xi \stackrel{(1.16)}{=} g(|\nabla U|) \rightarrow 0$; en

considérant $\sigma \rightarrow 0$ ce formalisme peut s'étendre à (1.40). Si dans la direction du gradient lissé, la diffusion est fortement réduite par l'EED, la diffusion dans les directions des contours reste forte : elle est contrôlée par la deuxième valeur propre. Par contre, à cause de ce terme, l'EED produit un arrondissement plus fort des coins anguleux ; dans ces zones à forte courbure, les pré - lissages isotropes avec des noyaux Gaussiens produisent de fausses directions de diffusion.

Nous allons montrer les différences entre ces méthodes sur une image bruitée par un bruit uniforme. Dans l'image originale de la *figure 1.23.a* nous remplaçons 55% des pixels par des valeurs aléatoires comprises entre 0 et 255 (*Fig. 1.23.b*). Afin de comparer les deux méthodes dans les mêmes conditions, nous avons utilisé pour la méthode de Catté et al. la fonction de diffusion (1.124) qui correspond à la première valeur propre ($\alpha = 1, m = 1$).

Il est à noter la différence nette entre les contours produits par les deux approches, explicable par les différences de comportements mentionnées précédemment.

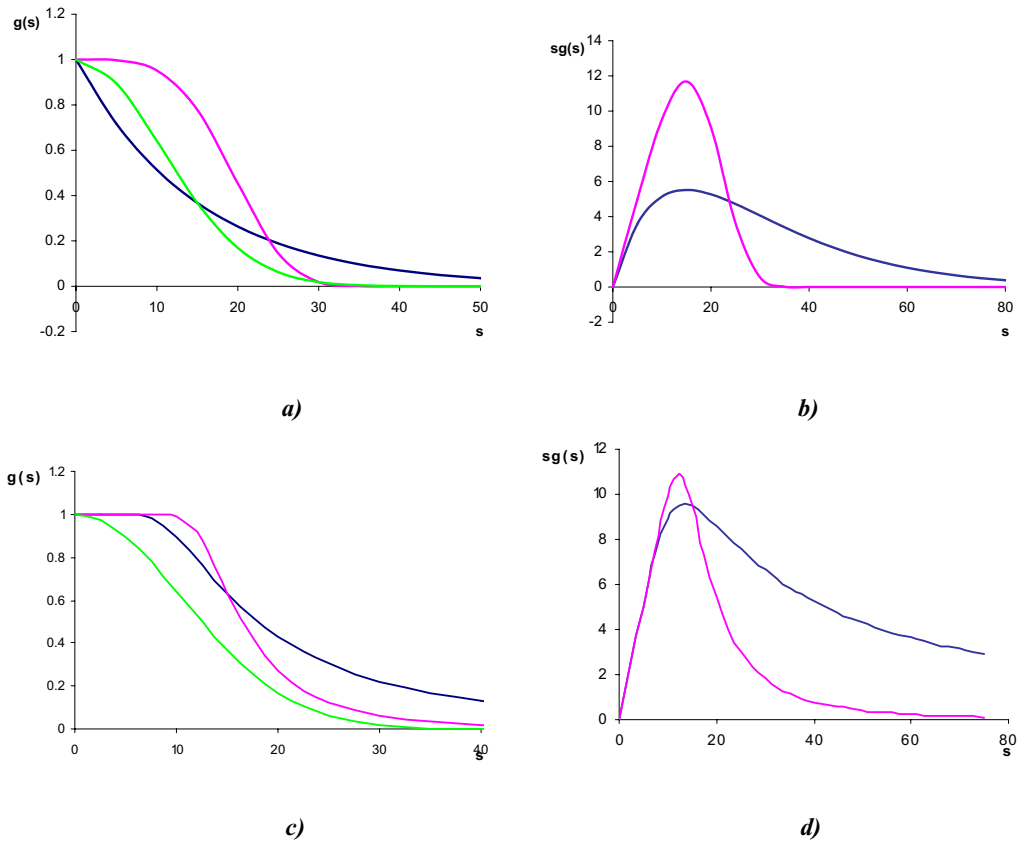


Fig. 1.22- Fonctions de diffusion et fonctions flux de Weickert.
 a) Fonction de diffusion (1.124) — $\alpha=1$, — $\alpha=4$, Fonction de Perona Malik — $K=15$.
 b) Fonction flux (1.124) — $\alpha=1$, — $\alpha=4$ $K=15$.
 c) Fonction de diffusion (1.124) — $m=1$, — $m=2$; Fonction de Perona Malik — $K=15$.
 d) Fonction flux (1.125) — $m=1$, — $m=2$ $K=15$.

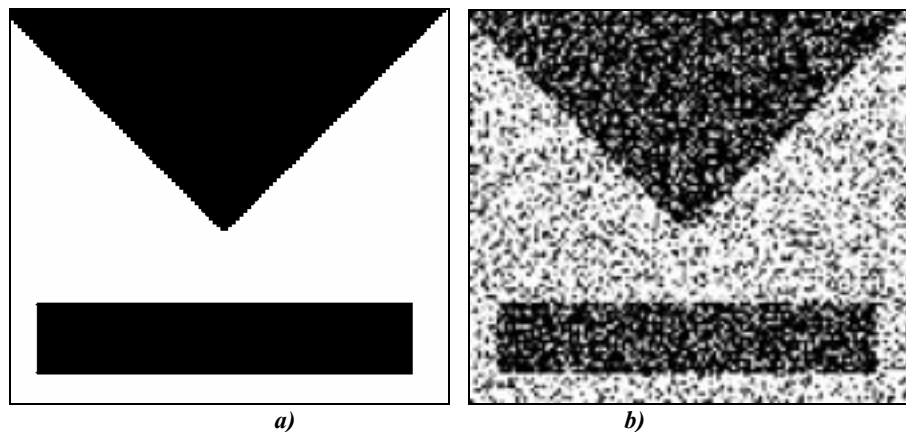


Fig 1.23- EED. a) Image originale ;b) Image bruitée- bruit uniforme 55% ;

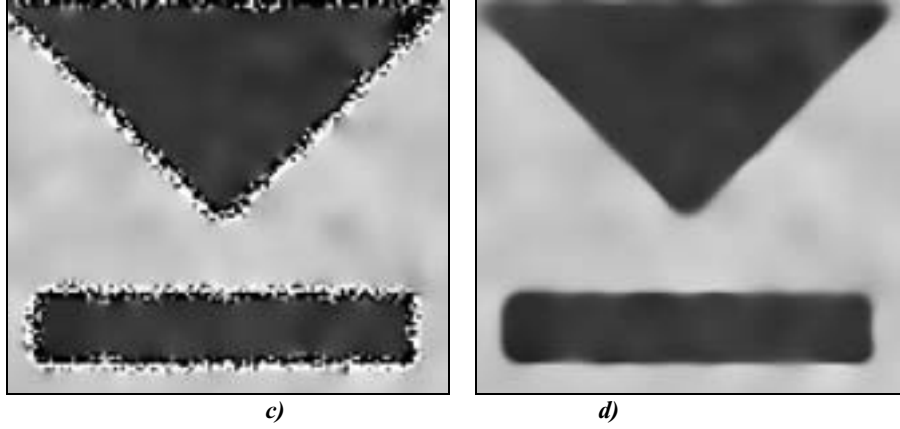


Fig. 1.23(cont.)- c) Résultat Catté et al. $\sigma=2.0$, $K=14$, $t=1.0$. d) Résultat EED $\sigma=2.0$, $K=10$, $t=1.0$.

1.7.4.2 Diffusion pour l'augmentation de la cohérence (CED)

Une autre méthode a été proposée par Weickert pour l'augmentation de la cohérence des textures 1D. Dans l'approche initialement introduite en [Wei95] et développée en [Wei97b] [Wei99], un rôle central est joué par le tenseur de structure. Ce tenseur a été par ailleurs utilisé avec succès pour extraire une information d'orientation dans des images contenant des nombreuses structures allongées et rapprochées [KaW87], [Rao90] ou [RaS91]. Nous reparlerons de ces notions au moment d'introduire les opérateurs d'orientations utilisés dans nos méthodes au chapitre 2.

L'équation de diffusion est toujours (1.112). Ce qui diffère dans cette approche est la manière de construire la matrice de diffusion D .

En partant de la matrice symétrique $J_0(\nabla U_\sigma)$ qui correspond au produit tensoriel des vecteurs gradient lissés à une échelle σ ($\nabla U_\sigma = G_\sigma * \nabla U$) :

$$J_0(\nabla U_\sigma) = \nabla U_\sigma \cdot \nabla U_\sigma^T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial U_\sigma}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial U_\sigma}{\partial x} \frac{\partial U_\sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial U_\sigma}{\partial x} \frac{\partial U_\sigma}{\partial y} & \left(\frac{\partial U_\sigma}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}, \quad (1.126)$$

Le tenseur de structure est défini en effectuant une convolution de chaque composante de $J_0(\nabla U_\sigma)$ avec une Gaussienne d'écart type ρ (G_ρ):

$$J_\rho(\nabla U_\sigma) = G_\rho * J_0(\nabla U_\sigma) = \begin{pmatrix} G_\rho * \left(\frac{\partial U_\sigma}{\partial x}\right)^2 & G_\rho * \frac{\partial U_\sigma}{\partial x} \frac{\partial U_\sigma}{\partial y} \\ G_\rho * \frac{\partial U_\sigma}{\partial x} \frac{\partial U_\sigma}{\partial y} & G_\rho * \left(\frac{\partial U_\sigma}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (1.127)$$

La matrice $J_0(\nabla U_\sigma)$ possède les vecteurs propres orthonormés $\vec{v}_1 \parallel \nabla U_\sigma$ et $\vec{v}_2 \perp \nabla U_\sigma$. Elle est identique, aux valeurs propres près, à la matrice de diffusion de l'EED.

Le tenseur de structure $J_\rho(\nabla U_\sigma)$ est une matrice symétrique dont les vecteurs propres donnent l'orientation moyenne (\vec{w}_1) des vecteurs gradients et l'orientation des structures (\vec{w}_2), correspondant à l'échelle ρ . Les valeurs propres dénotent le contraste moyen selon la direction de l'orientation moyenne des vecteurs gradients. Avec la notation $J = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{12} & j_{22} \end{pmatrix}$ les deux valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2}(j_{11} + j_{22} + \sqrt{(j_{11} - j_{22})^2 + 4j_{12}^2}) \\ \mu_2 = \frac{1}{2}(j_{11} + j_{22} - \sqrt{(j_{11} - j_{22})^2 + 4j_{12}^2}) \end{cases} \quad (1.128)$$

La différence entre les deux valeurs propres :

$$\mu_1 - \mu_2 = \sqrt{(j_{11} - j_{22})^2 + 4j_{12}^2} \quad (1.129)$$

est utilisée par Weickert comme un indicateur de cohérence : les zones constantes sont caractérisées par $\mu_1 = \mu_2 = 0$; les structures linéaires par $\mu_1 \gg \mu_2 = 0$ et les intersections par $\mu_1 \geq \mu_2 \gg 0$.

Les valeurs propres sont choisies de manière à induire une diffusion prépondérante dans la direction moyenne des structures :

$$\lambda_1 =: \alpha$$

$$\lambda_2 =: \begin{cases} \alpha & \text{si } j_{11} = j_{22} \text{ et } j_{12} = 0 \\ \alpha + (1 - \alpha) \exp\left[-\frac{C}{(j_{11} - j_{22})^2 + 4j_{12}^2}\right] & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.130)$$

La matrice de diffusion est construite ensuite :

$$D = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w}_1^T \\ \vec{w}_2^T \end{pmatrix} \quad (1.131)$$

L'interprétation de (1.131) est directe : pour des zones constantes la diffusion est isotrope avec une vitesse donnée par la constante positive α ; pour des textures allongées la diffusion est fortement anisotrope, l'anisotropie pouvant se caractériser par le rapport des deux valeurs propres λ_2 / λ_1 . Pour des textures unidirectionnelles $\mu_1 - \mu_2 \rightarrow 0$ ce rapport est borné par $1/\alpha$.

En ce qui concerne le choix des paramètres, l'échelle σ est nommée par Weickert *échelle locale* ; l'interprétation de σ est similaire à celle de la diffusion anisotrope : elle établit la taille minimale des objets qui seront gardés dans l'image lissée. L'échelle ρ est nommée *échelle d'intégration* et elle doit correspondre à la taille des objets significatifs. α contrôle la diffusion selon la direction des vecteurs gradients lissés : des valeurs faibles induisent un comportement anisotrope et des valeurs proches de 1 conduisent à des résultats proches de la diffusion isotrope. Le facteur C –choisi égal à 1 par Weickert- joue le rôle d'un seuil : pour $\mu_1 - \mu_2 \gg C$ le processus de diffusion est essentiellement unidirectionnel.

Notons que Kimmel et al. proposent de modifier dans [KMS98] les valeurs propres de la matrice de diffusion, et renoncent au pré lissage à l'échelle locale σ ($\sigma = 0$ en 1.126). Pour augmenter le contraste, leur choix est de diffuser de manière inverse dans les directions orthogonales aux contours. Pour une constante positive α les valeurs propres de (1.131) sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\alpha^{-1} \\ \lambda_2 &= \alpha \end{aligned} \quad (1.132)$$

Du fait de l'instabilité inhérente à la diffusion inverse, les auteurs limitent l'utilisation de la méthode pour des échelles t faibles.

Notons aussi l'existence de l'approche récente de régularisation tensorielle de Tschumperlé et Deriche [TsD03]. En partant de (1.131) l'auteur propose une EDP :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{trace} \left[\left(\begin{array}{cc} \vec{} & \vec{}^T \\ w_1 & w_1 \end{array} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + 1} + \begin{array}{cc} \vec{} & \vec{}^T \\ w_2 & w_2 \end{array} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}} \right) \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{xy} & U_{yy} \end{pmatrix} \right] \quad (1.133.a)$$

dont l'interprétation directionnelle est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + 1} U_{w_1 w_1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}} U_{w_2 w_2} \quad (1.133.b)$$

L'équation produit un lissage en tout point de l'image ; le lissage est modulé par des fonctions dépendantes du rapport signal-bruit semi-local.

Le comportement de la CED sera illustré sur une image d'empreinte digitale (*Fig. 1.24.a*). La CED avec rehaussement de contraste de Kimmel et al. est arrêtée avant que la diffusion inverse n'introduise d'oscillations importantes (*Fig. 1.24.b*). Pour la méthode originale de Weickert nous représentons deux résultats correspondant à deux schémas numériques différents. Le premier (*Fig. 1.24.c*) correspond à une discrétisation non négative de (1.112) et permet d'assurer le principe de maximum sous des contraintes imposées sur l'anisotropie induite dans la diffusion ; le deuxième (*Fig. 1.24.d*) est obtenu à travers une optimisation permettant une invariance aux rotations. Pour plus de détails nous nous référons à [ScW00]. Notons la capacité remarquable de la méthode à lisser ce type d'image tout en reliant les textures 1D voisines qui manifestent la même tendance directionnelle. Cependant les résultats des figures *1.24.b* et *1.24.d* montrent que les approches de Kimmel et al. et celle de Weickert optimisée conservent mieux les petits détails. Par contre, ces deux méthodes ne sont pas appropriées pour le lissage des images bruitées. Dans le cas de la méthode de Kimmel, le bruit, même de faible niveau est amplifié (comme le contraste) par la diffusion inverse ; dans le cas de la CED optimisée, Weickert et Scharr renoncent de manière délibérée au principe de maximum et à la capacité d'élimination du bruit.

Malgré l'interprétation directionnelle, la dépendance de l'intensité du processus de lissage de Tschumperlé-Deriche, même pour de faibles variations de l'énergie locale, est évidente dans les résultats de *Fig 1.24.e* ; notons l'aspect plus flou de l'image restaurée à cause de la diffusion importante dans la direction moyenne des vecteurs gradient.

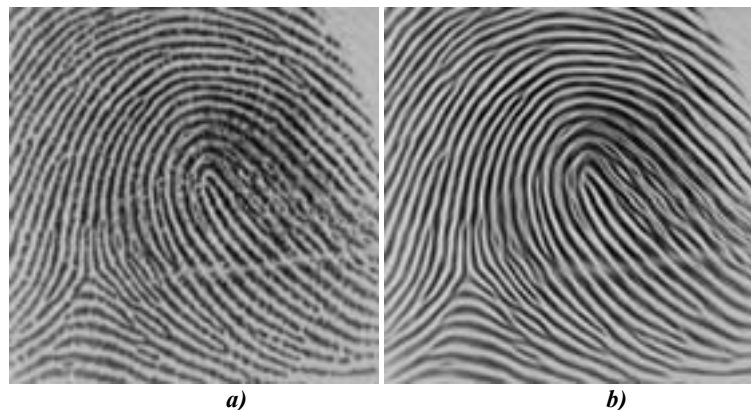


Fig 1.24 -CED. a) Image originale. b) CED - Kimmel et al. $\alpha=0.35$, $\rho=4.0$, $t=0.6$.

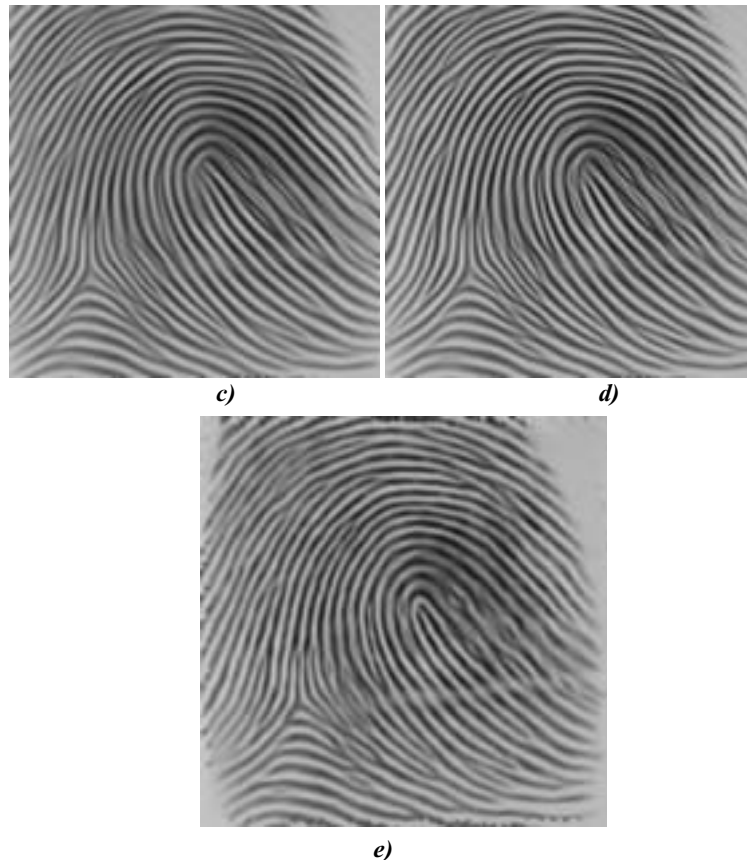


Fig 1.24(cont.)- c) CED-Weickert, discrétisation non- négative $\alpha=0.001, \sigma=0.5, \rho=4.0, t=1.0$.
d) CED-Weickert, discrétisation optimisée aux rotations $\alpha=0.001, \sigma=0.5, \rho=4.0, t=1.0$.
e) Methode de Tschumperlé-Deriche $\sigma=0, \rho=4.0 t=5.0$.

1.8 Résolutions numériques

La littérature relative aux équations aux dérivées partielles est très abondante tant du point de vue théorique que du point de vue numérique. Les EDP que nous avons présenté ne permettent pas une résolution directe, elles nécessitent d'habitude des techniques d'approximation. Ces techniques constituent elles mêmes un domaine très vaste, nous nous référons à [SiM94] pour un traitement complet. Parmi les techniques d'approximation les approximations par différences finies sont utilisées de manière prépondérante. En réalité, les images étant définies sur des grilles fixes, l'analyse numérique des modèles à travers des méthodes de différences finies, est la mieux adaptée.

Nous allons revoir dans un premier temps le cadre général de ces approches et, ensuite, exposer les principes théoriques des schémas utilisés pour les EDP présentées aux paragraphes précédents.

1.8.1 Approximations par différences finies

1.8.1.1 Notations

Toutes les EDP analysées nécessitent la connaissance d'un domaine $\Omega=[0,a] \times [0,b]$, et des conditions initiales et aux limites.

La discrétisation du domaine est implicite, dans la plupart des situations une image est représentée sur une grille de points. Nous considérons dans ce chapitre des grilles régulières avec un espacement identique h selon les directions horizontale x et verticale y ; les valeurs de

la fonction initiale sont données pour des échantillons (pixels) dans les deux directions. La dimension de l'image (en pixels) est $M \times N$; avec $M=a/h$ et $N=b/h$.

Mathématiquement, la fonction continue $U : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow R$ est remplacée par :

$$U(x, y, t) \rightarrow U(ih, jh, t) = U(i, j, t), \quad i = \{0, 1, \dots, N\}, \quad j = \{0, 1, \dots, M\} \quad (1.134)$$

Toutes les équations présentées sont des processus récursifs nécessitant une discrétisation en temps ; nous considérons des temps discrets uniformément distribués, multiples d'un pas de discrétisation en temps, noté dt . La représentation à l'instant t de l'image numérique qui évolue est donnée par :

$$U(i, j, t) \rightarrow U(i, j, ndt) = U_{i,j}^n \quad (1.135.a)$$

En (1.135.a) nous notons par n le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre l'échelle t .

Le même raisonnement s'applique pour les conditions initiales :

$$U(x, y, 0) \rightarrow U_{i,j}^0 \quad (1.135.b)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, d'un point de vue pratique, dans le traitement des images par ordinateur, elles ne sont pas très importantes. Elles ne sont imposées que pour s'affranchir des problèmes liés aux effets de bords.

1.8.1.2 Approximations des dérivées partielles

Les dérivées spatiales et temporelles sont déduites en partant des développements en série de Taylor en des points $(x+k, y+l, t+m)$. Afin de ne pas modifier le caractère local des EDP, les dérivées premières sont remplacées par des approximations d'ordre 2 ou 1. La *méthode des différences centrales* utilise des approximations symétriques :

$$\frac{\partial}{\partial x}(U(x, y, t)) = D_x^0[U(x, y, t)] = \frac{U(x+k, y, t) - U(x-k, y, t)}{2|k|} \quad (1.136)$$

et des formules similaires pour y et t .

En considérant $x=ih, y=jh, t=ndt$ et de déplacements de type $k = \pm h, l = \pm h, m = \pm dt$, ces formules s'expriment - pour les dérivées spatiales - sous la forme simplifiée :

$$D_x^0(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h}, \quad D_y^0(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h} \quad (1.137)$$

Des approximations d'ordre 1 *progressives et régressives* peuvent également être utilisées :

$$D_x^+(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{h}, \quad D_x^-(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{h}$$

$$D_y^+(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{h}, \quad D_y^-(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n}{h} \quad (1.138)$$

Certains auteurs se sont intéressés à l'estimation des dérivées premières par des masques de convolutions optimisés. Notons ici l'approche de Weickert et Scharf [ScW00] qui utilisent des masques 3×3 F_x, F_y optimisés par rapport aux rotations. Les dérivées premières s'expriment dans ce cas :

$$\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} = F_x * U_{i,j}^n, \quad \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} = F_y * U_{i,j}^n \quad (1.139)$$

Même si cette approche n'est pas très développée dans le cas des EDP que nous avons présentées, elle semble favoriser l'invariance aux rotations au détriment de la capacité d'élimination du bruit.

Dans toutes les méthodes la dérivée par rapport au temps est remplacée par une approximation d'ordre 1 progressive :

$$D_t^+(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{dt} \quad (1.140)$$

Certains méthodes utilisent des dérivées selon des axes diagonaux. Si nous notons respectivement par \vec{dx} et \vec{dy} des vecteurs de norme h selon les directions de l'axe horizontal et vertical $\vec{du} = \vec{dx} + \vec{dy}$, $\vec{dv} = \vec{dx} - \vec{dy}$ avec $|\vec{du}| = |\vec{dv}| = \sqrt{2}h$:

$$D_u^0(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j-1}^n}{2\sqrt{2}h}, \quad D_v^0(U_{i,j}^n) = \frac{U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n}{2\sqrt{2}h} \quad (1.141)$$

et :

$$\begin{aligned} D_u^+(U_{i,j}^n) &= \frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}h}, & D_u^-(U_{i,j}^n) &= \frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j-1}^n}{\sqrt{2}h} \\ D_v^+(U_{i,j}^n) &= \frac{U_{i+1,j-1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}h}, & D_v^-(U_{i,j}^n) &= \frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j+1}^n}{\sqrt{2}h} \end{aligned} \quad (1.142)$$

Les dérivées secondes se déduisent de manière similaire en utilisant des approximations d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} &= \frac{U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n}{h^2} = D_x^-[D_x^+(U_{i,j}^n)] \\ \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} &= \frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n}{h^2} = D_y^-[D_y^+(U_{i,j}^n)] \\ \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x \partial y} &= \frac{U_{i+1,j+1}^n + U_{i-1,j-1}^n - U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n}{4h^2} \end{aligned} \right. \quad (1.143)$$

Des approximations similaires peuvent être déduites pour les directions diagonales $\frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial u \partial v}$.

En ce qui concerne le calcul des dérivées secondes directionnelles $U_{\eta\eta}$ et $U_{\xi\xi}$, (1.19 et 1.81), nous notons l'existence de plusieurs approches. La méthode la plus simple consiste à remplacer les dérivées secondes horizontales, verticales et mixtes par (1.143). Cette approche peut introduire des instabilités dans les zones de faibles gradients et n'est pas invariante aux rotations. Le problème est traité par Lucido et al.; les auteurs calculent les dérivées secondes directionnelles par des convolutions optimisées par rapport aux rotations avec des noyaux locaux en 4,6 ou 8 voisinages. Des comparaisons quantitatives entre plusieurs approches classiques sont présentées ; nous nous référons au [LDAR97] pour plus de détails.

1.8.1.3 Approximations des opérateurs de la géométrie différentielle

Les approximations précédentes s'utilisent pour développer des formules numériques pour les opérateurs classiques de la géométrie différentielle.

Des approximations typiques pour le vecteur gradient sont :

$$\nabla U_{i,j}^n = \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} \vec{dx} + \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} \vec{dy} = \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial u} \vec{du} + \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial v} \vec{dv}$$

En fonction de l'approximation des dérivées premières les normes des vecteurs gradient se déduisent :

$$|\nabla U_{i,j}^n| = \sqrt{(D_x^0(U_{i,j}^n))^2 + (D_y^0(U_{i,j}^n))^2} = \sqrt{(D_u^0(U_{i,j}^n))^2 + (D_v^0(U_{i,j}^n))^2} \quad (1.144)$$

ou :

$$|\nabla U|_{i,j}^n = \sqrt{(F_x * U_{i,j}^n)^2 + (F_y * U_{i,j}^n)^2} \quad (1.145)$$

Ce type d'approximation est utilisé pour des équations de type diffusion ou mouvement sous la courbure moyenne.

Pour les filtres de choc d'autres approximations sont proposées ; en utilisant des fonctions « minmod » :

$$m(x,y) = \begin{cases} \text{signe}(x) \min(|x|, |y|) & \text{si } xy > 0 \\ 0 & \text{si } xy \leq 0 \end{cases} \quad (1.146)$$

Osher et Rudin proposent [OsR90] des approximations de type :

$$|\nabla U|_{i,j}^n = \sqrt{\{m[D_x^+(U_{i,j}^n), D_x^-(U_{i,j}^n)]\}^2 + \{m[D_y^+(U_{i,j}^n), D_y^-(U_{i,j}^n)]\}^2} \quad (1.147)$$

En tout pixel la fonction *minmod* permet de sélectionner la direction de diffusion selon la variation minimale pour ne pas introduire d'oscillations et produire ainsi une image constante avec des sauts aux points d'inflexion.

La forme numérique du laplacien la plus utilisée correspond à :

$$\Delta U(i,j,n) = \Delta U_{i,j}^n = \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} = D_x^-[D_x^+(U_{i,j}^n)] + D_y^-[D_y^+(U_{i,j}^n)] \quad (1.148)$$

En tenant compte de l'invariance aux rotations du laplacien, des formules équivalentes s'obtiennent en remplaçant le repère (x, y) par n'importe quel système d'axes orthogonal (u, v) ou (ξ, η) .

Notons également l'existence d'approches qui optimisent l'invariance aux rotations du laplacien, notamment la méthode de Kamgar [KKR97], [Kam99] :

$$\Delta U_{i,j}^n = L(w) * U_{i,j}^n, \quad (1.149)$$

avec le masque optimal donné par (1.9).

Parmi la multitude des algorithmes dédiés au calcul de la courbure moyenne, la formule la plus utilisée pour la courbure moyenne correspond aux remplacements des dérivées secondes dans la relation $(k = \frac{U_x^2 U_{yy} - 2U_x U_y U_{xy} + U_x^2 U_{yy}}{(U_x^2 + U_y^2)^{3/2}})$ par des différences

centrales.

La divergence est l'opérateur auquel correspond la plus grande diversité en terme d'approximations. Dans certains cas, comme nous l'avons illustré, cet opérateur peut se réduire à des estimations des dérivées secondes directionnelles. Nous allons maintenant décrire quatre approches représentatives pour toutes les EDP de diffusion analysées.

Concernant l'approche classique de Perona Malik, l'approximation de cet opérateur est obtenue en partant de l'équation de diffusion 1D pour une certaine échelle t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i^n}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial U_i^n}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{\partial U_i^n}{\partial x} \right] \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial U_i^n}{\partial x} \right| \right) \frac{U_{i+h/2}^n - U_{i-h/2}^n}{h} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[g \left(\left| \frac{\partial U_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i+h/2} \frac{U_{i+h/2+h/2}^n - U_{i-h/2+h/2}^n}{h} - g \left(\left| \frac{\partial U_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i-h/2} \frac{U_{i+h/2-h/2}^n - U_{i-h/2-h/2}^n}{h} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[g \left(\left| \frac{\partial U_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i+h/2} D_x^+ U_{i,j}^n - g \left(\left| \frac{\partial U_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i-h/2} \frac{U_i^n - U_{i-h}^n}{h} \right] \end{aligned} \quad (1.150)$$

La valeur de la fonction de diffusion au milieu de l'intervalle séparant deux pixels est remplacée par une approximation progressive ou régressive de la première dérivée :

$$\begin{aligned} g\left(\left|\frac{\partial U_i^n}{\partial x}\right|\right)_{|i+h/2} &\approx g\left(\left|\frac{\partial U_i^n}{\partial x}\right|\right)_{|i+h/2} = g\left[|D_x^+(U_i^n)|\right] \\ g\left(\left|\frac{\partial U_i^n}{\partial x}\right|\right)_{|i-h/2} &\approx g\left(\left|\frac{\partial U_i^n}{\partial x}\right|\right)_{|i-h/2} = g\left[|D_x^-(U_i^n)|\right] \end{aligned} \quad (1.151)$$

(1.150) s'écrit ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i^n}{\partial t} &= \frac{1}{h} \{g[|D_x^+(U_i^n)|]D_x^+(U_i^n) - g[|D_x^-(U_i^n)|]D_x^-(U_i^n)\} = \\ &= D_x^- \{g[|D_x^+(U_i^n)|]D_x^+(U_i^n)\} = \phi_{droite} - \phi_{gauche} \end{aligned} \quad (1.152)$$

Par ϕ_{droite} , ϕ_{gauche} nous avons noté les fonctions flux associées aux pixels voisins du pixel courant (i,j) .

La diffusion 2D est une simple extension de (1.150) en ajoutant une autre dimension et en considérant la fonction de diffusion comme une matrice diagonale:

$$c(\nabla U_{i,j}^n) = \begin{bmatrix} g\left(\left|\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x}\right|\right) & 0 \\ 0 & g\left(\left|\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y}\right|\right) \end{bmatrix} :$$

L'extension est immédiate :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[g\left(\left|\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x}\right|\right) \cdot \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g\left(\left|\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y}\right|\right) \cdot \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} \right] = \\ &= D_x^- \{g[|D_x^+(U_{i,j}^n)|]D_x^+(U_{i,j}^n)\} + D_y^- \{g[|D_y^+(U_{i,j}^n)|]D_y^+(U_{i,j}^n)\} \\ &= \phi_{est} - \phi_{ouest} + \phi_{sud} - \phi_{nord} \end{aligned} \quad (1.153)$$

L'implantation numérique classique de l'opérateur de diffusion anisotrope est donc simulée par un réseau ; la contribution des 4 voisins du pixel courant est quantifiée par une fonction de diffusion qui prend comme argument l'approximation d'une dérivée directionnelle par une différence finie progressive ou régressive. Notons aussi que ce schéma peut se généraliser au cas 8 voisinage [Kor98], [KDA97a].

En critiquant l'absence d'invariance aux rotations d'un tel schéma, Weickert, s'inspirant également des travaux de Catté et al. propose en [Wei98] un autre schéma numérique pour l'opérateur de divergence. Nous allons l'illustrer en considérant le cas général de la méthode de Catté et al. avec une fonction de diffusion $g(|\nabla(G_\sigma * U)|) = g(|\nabla U_\sigma|)$; pour $\sigma = 0$, le noyau Gaussien se réduit à un seul pixel, nous retrouvons le schéma de Weickert. L'idée est la même, la diffusion est simulée par un réseau de points :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[g(|\nabla U_\sigma|) \cdot \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(|\nabla U_\sigma|) \cdot \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{1}{h} \{g(|\nabla U_\sigma|)_{|i+h/2,j} D_x^+ U_{i,j}^n - g(|\nabla U_\sigma|)_{|i-h/2,j} D_x^- U_{i,j}^n\} + \\ &+ \frac{1}{h} \{g(|\nabla U_\sigma|)_{|i,j+h/2} D_y^+ U_{i,j}^n - g(|\nabla U_\sigma|)_{|i,j-h/2} D_y^- U_{i,j}^n\} \end{aligned} \quad (1.154)$$

La difficulté réside dans l'estimation des fonctions de diffusion au milieu de l'intervalle ; la solution proposée [CLMC92] et [Wei98] consiste à utiliser des moyennes :

$$\begin{aligned}
 g(|\nabla U_\sigma|)|_{i\pm h/2,j} &= \frac{g(|\nabla U_\sigma|)|_{i\pm h,j} + g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j}}{2} \\
 g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j\pm h/2} &= \frac{g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j\pm h} + g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j}}{2}
 \end{aligned} \tag{1.155}$$

Le filtre numérique devient donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{[g(|\nabla U_\sigma|)|_{i+h,j} + g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j}]}{2} D_x^+ U_{i,j}^n - \frac{[g(|\nabla U_\sigma|)|_{i-h,j} + g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j}]}{2} D_x^- U_{i,j}^n \right\} + \\
 &+ \frac{1}{h} \left\{ \frac{[g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j+h} + g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j}]}{2} D_y^+ U_{i,j}^n - \frac{[g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j-h} + g(|\nabla U_\sigma|)|_{i,j}]}{2} D_y^- U_{i,j}^n \right\}
 \end{aligned} \tag{1.156}$$

L'approche de Rudin, Osher et Fatemi [ROF92] est différente. Même si l'équation de diffusion anisotrope par minimisation de la variation totale peut s'interpréter comme un cas particulier de l'équation de Perona Malik et qu'une approche identique au (1.153) pourrait être employée, l'approche numérique est différente. Les auteurs proposent un schéma inspiré de la théorie des filtres de choc :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} &= D_x^- \left[\frac{D_x^+(U_{i,j}^n)}{\sqrt{[D_x^+(U_{i,j}^n)]^2 + \{m[D_y^+(U_{i,j}^n), D_y^-(U_{i,j}^n)]\}^2}} \right] + \\
 &D_y^- \left[\frac{D_y^+(U_{i,j}^n)}{\sqrt{[D_y^+(U_{i,j}^n)]^2 + \{m[D_x^+(U_{i,j}^n), D_x^-(U_{i,j}^n)]\}^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{1.157}$$

Comme nous l'avons illustré en §1.5.2, cette méthode correspond à une diffusion unidirectionnelle dans la direction orthogonale aux contours. L'utilisation des fonctions de type *minmod* permet, en tout pixel, la sélection de la direction appropriée. Prenons par exemple un profil 2D vertical bruité tel que pour tout pixel appartenant à sa frontière $D_x^+(U_{i,j}^n) > 0$ et $D_x^-(U_{i,j}^n) < 0$. Dans ce cas pour tout point de la frontière $m[D_y^+(U_{i,j}^n), D_y^-(U_{i,j}^n)] = 0$ et le premier terme de (1.157) s'annule. Cela correspond à une diffusion unidirectionnelle verticale. Notons qu'une implantation directe en utilisant (1.153) ou (1.156) et en remplaçant $g(|\nabla U_\sigma|)$ par $1/|\nabla U_\sigma|$, ne permettra pas un tel comportement.

Finalement prenons le cas d'une diffusion matricielle. La discrétisation classique de $div(D\nabla U_{i,j}^n)$ [Wei95] est réalisée de manière à obtenir un noyau de diffusion local, de dimensions 3x3 pixels.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} &= div(D\nabla U_{i,j}^n) = div \left[\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} \\ \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} \end{pmatrix} \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} + b \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} + c \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} \right) = \\
 &\approx \frac{1}{2} \{ D_x^+ [a D_x^- (U_{i,j}^n)] + D_x^- [a D_x^+ (U_{i,j}^n)] \} + D_x^0 [b D_y^c (U_{i,j}^n)] + \\
 &+ D_y^0 [b D_x^c (U_{i,j}^n)] + \frac{1}{2} \{ D_y^+ [c D_y^- (U_{i,j}^n)] + D_y^- [c D_y^+ (U_{i,j}^n)] \}
 \end{aligned} \tag{1.158}$$

(1.158) se réduit à un noyau de convolution :

$$L = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{-(b_{i-1,j} + b_{i,j+1})/4h^2}{(a_{i-1,j} + a_{i,j})/2h^2} & \frac{(c_{i,j+1} + c_{i,j})/2h^2}{-(a_{i-1,j} + 2a_{i,j} + a_{i+1,j})/2h^2} & \frac{(b_{i+1,j} + b_{i,j+1})/4h^2}{(a_{i+1,j} + a_{i,j})/2h^2} \\ \hline & \frac{-(c_{i,j-1} + 2c_{i,j} + c_{i,j+1})/2h^2}{(c_{i,j-1} + c_{i,j})/2h^2} & \\ \hline \frac{(b_{i-1,j} + b_{i,j-1})/4h^2}{(c_{i,j-1} + c_{i,j})/2h^2} & & \frac{-(b_{i+1,j} + b_{i,j-1})/4h^2}{(c_{i,j-1} + c_{i,j})/2h^2} \\ \hline \end{array}$$

Pour une certaine échelle n l'équation de diffusion s'écrit $\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} = L * U_{i,j}^n$.

Des problèmes apparaissent concernant les coefficients de pondération du masque L .

Pour des vecteurs propres $\vec{v}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ et $\vec{v}_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ les éléments de la matrice de diffusion se calculent en partant de (1.113) :

$$\begin{cases} a = \lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_2 \sin^2 \alpha \\ b = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \alpha \sin \alpha \\ c = \lambda_2 \cos^2 \alpha + \lambda_1 \sin^2 \alpha \end{cases} \quad (1.159)$$

Des raisonnements sur la stabilité (§1.8.1.5) ne peuvent pas être développés du fait des contributions négatives des termes diagonaux.

La solution proposée par Weickert [Wei95] consiste à utiliser une discrétisation non-négative qui, pour $\lambda_1 / \lambda_2 \leq 3 + 2\sqrt{2}$, assure la positivité des coefficients du noyau de convolution. Pour une grille de points régulière avec un espacement identique $h=1$, Weickert montre que cette condition se réduit à une contrainte imposée sur le rapport λ_1 / λ_2 qui doit être inférieur à $3 + 2\sqrt{2}$. Dans ce cas le schéma de discrétisation limite les nombres de directions, et, pour un noyau de diffusion 3×3 , se réduit à :

$$\text{div}(D\nabla U_{i,j}^n) \approx \frac{\partial}{\partial x} [\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} (U_{i,j}^n)] + \frac{\partial}{\partial y} [\alpha_y \frac{\partial}{\partial y} (U_{i,j}^n)] + \frac{\partial}{\partial u} [\alpha_u \frac{\partial}{\partial u} (U_{i,j}^n)] + \frac{\partial}{\partial v} [\alpha_v \frac{\partial}{\partial v} (U_{i,j}^n)] \quad (1.160)$$

Les coefficients de diffusion selon les 4 directions $\alpha_x = a - |b|$, $\alpha_y = c - |b|$, $\alpha_u = b + |b|$ et $\alpha_v = b - |b|$ sont positifs si $\lambda_1 / \lambda_2 \leq 3 + 2\sqrt{2}$.

Le dernier schéma de Weickert utilise des approximations du type (1.139) - optimisées vis à vis des rotations - pour les composantes du vecteur gradient. L'opérateur de divergence est calculé ensuite de manière analytique:

$$\begin{aligned} \text{div}(D\nabla U_{i,j}^n) &= \frac{\partial}{\partial x} (a \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} + b \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (b \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} + c \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y}) = \\ &\approx F_x * (aF_x * U_{i,j}^n + bF_y * U_{i,j}^n) + F_y * (bF_x * U_{i,j}^n + cF_y * U_{i,j}^n) \end{aligned} \quad (1.161)$$

Le noyau de diffusion est de dimension 5×5 pixels, l'invariance aux rotations est améliorée mais, comme Weickert le remarque aussi, des coefficients de diffusion négatifs peuvent apparaître pour les dérivées mixtes et aucune théorie ne permet de garantir la stabilité du schéma numérique.

Nous nous référons à [ScW00] pour une comparaison de ces schémas numériques.

1.8.1.4 Méthodes de résolution

Dans ce paragraphe nous allons voir les méthodes utilisées pour le calcul de la solution d'une EDP, à une échelle t donnée. La plupart des méthodes de résolution utilisent un

discrétisation progressive en temps $\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{dt}$ où dt est le pas de discrétisation en temps. Les méthodes sont des processus itératifs : la solution à l'instant ndt est utilisée pour déterminer la solution à l'instant $(n+1)dt$. Les méthodes diffèrent par le type

d'approximations des dérivées spatiales aux échelles ndt et $(n+1)dt$ qui interviennent dans l'équation.

Nous allons illustrer les diverses méthodes sur l'équation classique de Perona et Malik en 1D. En utilisant une discrétisation progressive en temps en (1.10) l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U^{n+1} - U^n}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] \quad (1.162)$$

Si les dérivées spatiales sont calculées à l'échelle ndt le schéma s'appelle *explicite en temps* (ou Euler) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U^{n+1} - U^n}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial U^n}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial U^n}{\partial x} \right] \quad (1.163.a)$$

Dans ce cas la solution à l'échelle $(n+1)dt$ est complètement déterminée par les valeurs calculées à l'instant ndt :

$$U^{n+1} = U^n + dt \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial U^n}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial U^n}{\partial x} \right] \quad (1.163.b)$$

Ce type de schéma est utilisé de manière prépondérante pour la résolutions des EDP. Son principal avantage est la simplicité, même si, en général, il nécessite un grand nombre d'itérations pour converger.

Le schéma est dit *semi-implicite* si la solution U^{n+1} est calculée en résolvant un système d'équations avec des coefficients qui dépendent seulement de la solution à l'instant ndt [Wei98]. Pour l'exemple (1.162) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U^{n+1} - U^n}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial U^n}{\partial x} \right] \quad (1.164)$$

En discrétisant les dérivées spatiales (1.164) peut être ramené à une forme similaire à (1.153) :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{dt} = \frac{1}{h} \{ g[D_x^+(U_i^n)]D_x^+(U_i^{n+1}) - g[D_x^-(U_i^n)]D_x^-(U_i^{n+1}) \}$$

En considérant $h=1$ et en regroupant les termes :

$$U_i^{n+1} \{ 1 + dt \{ g(D_x^+(U_i^n)) + g(D_x^-(U_i^n)) \} \} - dt g(D_x^+(U_i^n)) U_{i+1}^{n+1} - dt g(D_x^-(U_i^n)) U_{i-1}^{n+1} = U_{i,j}^n \quad (1.165)$$

Pour une longueur fixe de la suite numérique (N) ; en introduisant les notations

$$U^j = [U_0^j \ U_1^j \ \dots \ U_N^j]^T$$

$$A[U^n]_{N \times N} = [a_{i,j}(U^n)] = \begin{cases} -g(D_x^-(U_i^n)) & \text{pour } j = i-1 \\ -g(D_x^+(U_i^n)) & \text{pour } j = i+1 \\ g(D_x^-(U_i^n)) + g(D_x^+(U_i^n)) & \text{pour } j = 0 \\ 0 & \text{en reste} \end{cases}$$

(1.165) se réduit au système linéaire :

$$U^{n+1} \{ I_N + dt A[U^n] \} = U^n \quad (1.166)$$

La résolution du système est généralement réalisée en utilisant des méthodes de relaxation [PTVF92] telles que les méthodes Jacobi ou Gauss – Seidel, ou des algorithmes plus rapides –algorithme de Thomas [Wei98]. L'avantage de ces méthodes est relatif : même si elles sont stables pour n'importe quel pas dt ; en partant d'une solution initiale, plusieurs itérations sont nécessaires pour converger vers la solution du système et, de plus, le nombre de calculs nécessaires pour chaque itération est plus grand que celui d'une méthode explicite.

Une comparaison intéressante entre les schémas explicite et semi-implicite est réalisée par Weickert [Wei98]. En comparant les erreurs introduites par les approximations, les

résultats montrent qu'en terme d'erreur, le schéma explicite –sous des contraintes de stabilité– est meilleur.

Finalement notons le schéma AOS (additive operating splitting) proposé dans le même article. L'avantage de ce schéma- toujours implicite- est la possibilité de séparer le processus de diffusion en un ensemble de processus 1D. Cela se traduit par un gain de temps de calcul, le prix à payer est une plus grande erreur d'approximation.

1.8.1.5 Consistance, convergence et stabilité des schémas numériques

Dans ce paragraphe nous allons rappeler quelques définitions relatives aux propriétés quantitatives des schémas d'approximations des EDP et revoir quelques critères de stabilité. Les EDP analysées sont des problèmes à conditions initiales qui en partant d'une image initiale donnent une image filtrée à une certaine échelle qui correspond à la solution de l'EDP à la même échelle.

Une approximation par différences finies est *consistante* si l'erreur de troncation (i.e. la différence entre l'EDP et son approximation numérique) devient nulle quand l'espacement h et le pas de discrétisation en temps dt tendent vers 0.

Une approximation est *convergente* si sa solution approche la solution de l'EDP continue pour $h \rightarrow 0, dt \rightarrow 0$.

Une approximation par différences finie est *stable* si toutes les erreurs (d'approximation, erreurs dans les conditions initiales etc.) restent bornées dans le temps.

Un résultat classique de Lax [Lax72] permet de relier les trois notions : pour une EDP à conditions initiales linéaire, bien posé, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence du schéma numérique est qu'elle soit stable et consistante. La plupart des EDP présentées dans ce chapitre sont fortement non linéaires ; la stabilité, convergence et consistance doivent donc être traitée de manière indépendante.

Dans le reste de ce paragraphe nous allons nous intéresser au problème de stabilité de l'approximation d'une EDP. Dans la plupart des situations du traitement des images assisté par ordinateur, les dérivées partielles spatiales sont remplacées par des différences finies sur une grille régulière de points avec un écart spatial h fixe. Dans ce contexte l'aspect qui apparaît essentiel est la stabilité de l'approximation numérique.

Les contraintes imposées sur la stabilité d'une approximation numérique sont étroitement liées aux pas de discrétisation en temps dt et celui de discrétisation spatiale h . Pour un h fixé, les contraintes s'imposent seulement sur dt .

La nature non linéaire des équations ne permet pas d'utiliser de méthodes classiques telles que l'analyse de von Neumann [PTVF92]. En fonction du type de l'EDP les contraintes de stabilité s'imposent de manière différente. Nous allons illustrer la manière de déterminer ces contraintes seulement pour des schémas explicites. Les schémas implicites sont connus pour leur stabilité indépendante du dt ou h .

Prenons le cas 1D d'une équation de diffusion anisotrope. Pour tout dt positif :

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U^{n+1} - U^n}{dt} \rightarrow U^{n+1} \approx U^n + dt \frac{\partial U}{\partial t} \quad (1.167)$$

En développant le terme droit de (1.167) pour chaque point discret $x=ih$ et en notant par $N(i)$ l'ensemble de ses voisins:

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &\underset{(1.153)}{\approx} U_i^n + \frac{dt}{h} \{g[|D_x^+(U_i^n)|]D_x^+(U_i^n) - g[|D_x^-(U_i^n)|]D_x^-(U_i^n)\} = \\ &= U_i^n + \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g(|U_j^n - U_i^n|)(U_j^n - U_i^n) \\ &= U_i^n [1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g(|U_j^n - U_i^n|)] + \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g(|U_j^n - U_i^n|)U_j^n \end{aligned} \quad (1.168)$$

La stabilité de ce schéma est assurée si une quantité positive telle que $\sum_i |U_i^n|$ où $\sum_i (U_i^n)^2$ est bornée pour tout n . L'avantage de cette méthode énergétique [Dur99] est qu'elle peut s'appliquer pour tout problème linéaire ou non- linéaire.

Réécrivons (1.168) en notant par $g_{i,j}^n = g(U_j^n - U_i^n)$; en tenant compte de l'inégalité triangulaire :

$$|U_i^{n+1}| \leq \left| U_i^n \left[1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right] + \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n U_j^n \right| \leq |U_i^n| \left(1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right) + \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n |U_j^n|$$

En sommant sur l'ensemble des points i :

$$\sum_i |U_i^{n+1}| \leq \sum_i |U_i^n| \left(1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right) + \frac{dt}{h^2} \sum_i \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n |U_j^n| \quad (1.169)$$

Le deuxième terme de (1.169) peut se développer ensuite:

$$\sum_i \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n |U_j^n| = \sum_i (g_{i,i+1}^n |U_{i+1}^n| + g_{i,i-1}^n |U_{i-1}^n|) \quad (1.170)$$

Les fonctions de diffusion sont des fonctions paires : $g_{i,i+1}^n = g(U_{i+1}^n - U_i^n) = g(U_i^n - U_{i+1}^n) = g_{i+1,i}^n$ et $g_{i,i-1}^n = g_{i-1,i}^n$. En supposant des conditions aux limites périodiques :

$$\sum_i \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n |U_j^n| = \sum_i (g_{i+1,i}^n |U_{i+1}^n| + g_{i-1,i}^n |U_{i-1}^n|) = \sum_i |U_i^n| \sum_{j \in N(i)} g_{j,i}^n = \sum_i |U_i^n| \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \quad (1.171)$$

Nous pouvons donc réécrire (1.169) sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_i |U_i^{n+1}| &\leq \sum_i |U_i^n| \left(1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right) + \frac{dt}{h^2} \sum_i |U_i^n| \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n = \\ &= \sum_i |U_i^n| \left(\left| 1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right| + \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right) \end{aligned} \quad (1.172)$$

Afin que la condition de stabilité $\sum_i |U_i^{n+1}| \leq \sum_i |U_i^n|$ soit remplie, les coefficients de pondération du terme droit doivent être inférieurs à 1 :

$$\left| 1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right| + \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \leq 1 \quad (1.173)$$

qui se réduit à :

$$dt \leq \frac{h^2}{\sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n} \quad (1.174)$$

(1.174) doit être vérifiée pour n'importe quelles valeurs de l'intensité en niveaux de gris. Le cas le plus défavorable s'obtient pour $g_{i,j}^n$ de valeurs maximales égales à 1. Dans ce cas nous retrouvons une limite supérieure pour le pas de discrétisation en temps dt et le nombre de voisins du pixel courant :

$$dt \leq \frac{h^2}{2} \quad (1.175)$$

La généralisation pour le cas 2D est immédiate. Si N représente le nombre de pixels dans le voisinage 3x3 considéré nous retrouvons la limite $dt \leq h^2 / N$;

Notons que (1.175) est une condition suffisante pour que la stabilité du schéma numérique (1.167) soit assurée.

De plus, sous ces contraintes de stabilité un schéma de type (1.167) impose un principe discret de maximum. La positivité des coefficients de pondération permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= U_i^n \left[1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right] + \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n U_j^n \leq \\ &\leq \max_{k=i, j \in N(i)} (U_k^n) \left(1 - \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n + \frac{dt}{h^2} \sum_{j \in N(i)} g_{i,j}^n \right) \leq \max_{k=i, j \in N(i)} (U_k^n) \end{aligned} \quad (1.176)$$

La relation reste valable pour les minima et elle peut se généraliser pour le cas 2D. Finalement sous les contraintes de stabilité et pour une image initiale avec les intensités en niveaux de gris bornées $m \leq \max_{(i,j) \in \Omega} U_{i,j}^0 \leq M$:

$$m \leq \min_{(i,j) \in \Omega} (U_{i,j}^n) \leq U_{i,j}^{n+1} \leq \max_{(i,j) \in \Omega} (U_{i,j}^n) \leq M \quad (1.177)$$

Ce type de raisonnement peut s'appliquer pour n'importe quel type d'EDP ; pour des équations hyperboliques des conditions Courant, Fredericks et Levy [CFL67] s'appliquent.

1.9 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, un large panorama des méthodes fondées sur les équations aux dérivées partielles permettant d'obtenir une restauration ou une amélioration des images. Chacune des approches présente des caractéristiques qui la rendent opérationnelle pour une certaine classe d'images. Nous avons énoncé ces caractéristiques et présenté, pour chaque méthode, son comportement général ainsi que ces éventuels limites telles que rapportées dans la littérature.

Dans le chapitre 2, nous présenterons les approches originales que nous avons développées pour la restauration d'images présentant des structures orientées. En considérant cette classe d'images, nous compléterons, au chapitre 3, l'étude des approches décrites dans ce premier chapitre en observant et en quantifiant leurs performances par rapport à nos propres approches.

Chapitre 2

Lissage directionnel adaptatif par diffusion anisotrope

2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'étude du lissage des structures qui présentent une tendance directionnelle forte. Plus particulièrement, nous nous intéressons à des motifs dont les dimensions dans une certaine direction de l'espace sont sensiblement plus importantes que dans les autres.

Bien que le champ d'application principal de ce mémoire concerne le lissage des structures présentes dans les gravures anciennes, les méthodes que nous développerons peuvent tout aussi bien s'appliquer à l'amélioration des images ayant des structures similaires : empreintes digitales, images sismiques etc.

Le chapitre est organisé de la manière suivante :

Dans un premier temps, nous présenterons quelques notions liées à l'estimation de l'orientation et les principales méthodes utilisées pour lisser un champ d'orientations (§2.2). En analysant de façon critique ces approches nous proposerons à la fin de ce paragraphe une méthode adaptative de lissage d'un champ d'orientations qui prend en compte une notion de confiance sensible aux mélanges d'orientations.

En nous basant sur une interprétation directionnelle en tout pixel, nous introduirons notre modèle de diffusion 1D. Même si l'équation du filtre proposé ne peut être écrite sous la forme d'une divergence, nous proposons le nom de diffusion directionnelle pour notre méthode en considérant l'action du filtre qui agit localement comme une EDP de diffusion unidirectionnelle. La force de diffusion est modulée par une fonction flux monotone ou non monotone, sa direction étant contrôlée par l'information directionnelle (§2.3). Dans le même paragraphe nous aborderons la problématique de l'approximation du modèle continu en utilisant deux approches numériques : un schéma numérique rapide, particulièrement adapté pour des structures orientées selon les directions principales d'une image numérisée et un nouveau schéma numérique, plus lent, mais invariant en rotation. L'opérateur est essentiellement dédié à des applications de lissage d'images avec rehaussement des jonctions.

Ensuite nous généraliserons cette approche dans un modèle de diffusion 2D –toujours adaptatif -qui élargit le champ d'applications de cette méthode originelle. Le modèle est conçu comme une méthode de restauration pour des images mixtes contenant des structures orientées et non orientées. Dans les chapitres 3 et 4 nous montrerons à travers plusieurs exemples ses applications dans des tâches de restauration d'images.

La partie finale de ce chapitre (§2.4) est dédiée à la proposition et l'analyse d'une nouvelle approche de diffusion tensorielle qui, par rapport au modèle antérieur, peut être utilisée préférentiellement pour des tâches d'amélioration des images contenant des textures linéaires.

2.2 Estimation d'orientation

2.2.1 Notion d'orientation

Le domaine d'estimation de l'orientation constitue, en lui-même, un domaine de recherche important dans le cadre de la vision par ordinateur. Plusieurs chercheurs ont développé des modèles mathématiques élaborés pour l'estimation précise de l'orientation en tout point de l'image. Pour une analyse pertinente de ces modèles nous nous référons à [LeP03].

Nous nous intéressons seulement aux zones de l'image où l'action de l'opérateur de diffusion à une signification, c'est à dire les zones où les normes des vecteurs gradients sont non nulles. Par suite, nous introduirons dans ce paragraphe les seules méthodes d'estimation de l'orientation fondées sur le vecteur gradient.

Le champ des vecteurs gradients est représenté par un champ directionnel dont chaque élément quantifie l'intensité et la direction de la plus grande variation locale. En caractérisant la tendance directionnelle de ce champ de vecteurs, nous ignorons la notion de sens de parcours pour nous intéresser uniquement à la notion d'*orientation*.

Soit $\nabla U = (U_x, U_y)^T$ le vecteur gradient associé au pixel de coordonnées (x, y) . Pour définir l'orientation nous supposons que l'image originale est continue ou continue par morceaux, la fonction luminance étant donc différentiable. L'orientation unique associée à (x, y) est définie par une variable circulaire modulo π :

$$\theta(x, y) = \left(\text{Arg}(\nabla U) + \frac{\pi}{2} \right) \bmod \pi = \left(\arctan \frac{U_y}{U_x} + \frac{\pi}{2} \right) \bmod \pi, \theta(x, y) \in [0, \pi) \quad (2.1)$$

Il est à noter que l'orientation, telle que définie par (2.1) n'a de sens que si le vecteur gradient est non nul. Sur les lignes de crête le problème de l'estimation d'orientation en utilisant (2.1) est mal posé mais, du point de vue de la diffusion des niveaux de gris, des gradients nuls signifient des régions homogènes sur lesquelles le processus de diffusion est nul. Par conséquent nous utiliserons (2.1) pour l'estimation d'orientation en tout point de l'image ; une orientation quelconque sera associée -par convention- aux zones de gradient nul.

Notons aussi que la notion d'orientation semble mal définie dans les zones présentant des mélanges d'orientations. C'est le cas par exemple des jonctions où, en raison de son caractère très local, l'orientation fournie par (2.1) ne peut pas s'interpréter de manière intuitive. L'estimation de l'orientation dans ces zones nécessite des échelles plus grandes et des techniques de plus haut niveau. Cette problématique ne sera pas abordée et nous utiliserons (2.1) pour estimer la tendance locale (ou semi-locale) de la structure orientée.

Pour une image non bruitée, l'orientation donnée par (2.1) peut s'interpréter comme l'orientation d'une ligne d'isoniveau de gradient non nul qui passe par le pixel de coordonnées (x, y) . Si, par contre, l'image est bruitée, il est difficile de lui associer un sens physique et une opération de pré lissage de l'image est nécessaire [Rao90], [RaS91]. L'orientation s'exprime dans ce cas par :

$$\theta(x, y) = \text{Arg}[\nabla(G_\sigma * U)] + \frac{\pi}{2} \bmod \pi = \left(\arctan \frac{U_{\sigma_y}}{U_{\sigma_x}} + \frac{\pi}{2} \right) \bmod \pi \quad (2.2)$$

Dans (2.2), G_σ est un noyau gaussien d'écart type σ . Le pré lissage peut s'interpréter à travers la diffusion isotrope : il est efficace pour éliminer le bruit blanc. Effectuer un pré

lissage (ou de manière équivalente, une diffusion isotrope) augmente donc la robustesse au bruit de l'opérateur d'estimation d'orientation.

2.2.2 Confiance et cohérence

La pertinence de l'orientation estimée peut être qualifiée en utilisant des indicateurs de *confiance* et de *cohérence*. La notion de confiance est parfois liée à la valeur de l'opérateur gradient :

$$conf[\theta(x, y)] = |\nabla U| \quad (2.3)$$

Elle permet de quantifier la tendance directionnelle de la texture qui passe par le pixel (x, y) . Notons que cette mesure est étroitement liée à la notion d'anisotropie locale. Plus la norme du vecteur gradient est grande, plus l'anisotropie est grande et par suite la confiance aussi.

Pour des textures orientées idéales, en absence de bruit, ce choix de quantifier la pertinence de l'orientation, par la valeur de l'opérateur qui la mesure, semble un choix naturel. Pour des images réelles, notons que (2.3) peut introduire une ambiguïté, pour un niveau de bruit important, comparable avec le signal utile. Dans ce cas, les orientations locales sont altérées et ne correspondent plus aux orientations dominantes du signal. Les bruits de niveau important induisent des anisotropies locales fortes, correspondant à des confiances élevées.

Une autre mesure semble plus appropriée pour caractériser la qualité de l'orientation estimée : la *cohérence*. Cet opérateur comportant plusieurs définitions dans la littérature, nous avons repris dans ce paragraphe la notion de confiance telle qu'elle a été définie par Rao [RaS91],[Rao90]. La définition de Rao a été donnée pour des champs d'orientations lissés mais peut être étendue au cas de données brutes. Pour un fenêtrage spatial $W(x, y)$ de dimension $n \times m$ pixels centré en (x, y) , la cohérence en (x, y) est définie par :

$$coh[\theta(x, y)] = \frac{\sum_{(i,j) \in W(x,y)} \left| \nabla U(x_i, y_j) \right| \cos[\theta(x_i, y_j) - \theta(x, y)]}{\sum_{(i,j) \in W(x,y)} \left| \nabla U(x_i, y_j) \right|} \quad (2.4)$$

En comparaison avec (2.3) la cohérence est un indicateur multi-échelle qui intègre les variations des niveaux de gris et des orientations dans un voisinage semi-local. Notons que (2.4) peut être rendu indépendant du contenu énergétique du signal en considérant des gradients de normes unitaires $|\nabla U(x_i, y_j)| = 1, \forall i, j$:

$$coh[\theta(x, y)] = \frac{1}{card(W(x, y))} \sum_{(i,j) \in W(x,y)} \left| \cos[\theta(x_i, y_j) - \theta(x, y)] \right| \quad (2.5)$$

Dans ce cas la cohérence est une mesure de l'homogénéité des orientations dans le support de calcul.

Nous utiliserons une version modifiée de la cohérence de Rao qui permet une analyse de type extremum :

$$coh[\theta(x, y)] = \frac{\sum_{(i,j) \in W(x,y)} \left| \nabla U(x_i, y_j) \right| \cos^2[\theta(x_i, y_j) - \theta(x, y)]}{\sum_{(i,j) \in W(x,y)} \left| \nabla U(x_i, y_j) \right|} \quad (2.6)$$

Les extremums de la valeur de la confiance (2.6), par rapport à $\theta(x, y)$, correspondent à la condition d'extremum $\frac{\partial coh[\theta(x, y)]}{\partial \theta} = 0$. S'il existe une seule orientation dominante $\theta(x_i, y_j) = \theta + \varepsilon_{i,j}$, la recherche d'un maximum pour la fonction de cohérence

conduit à l'estimation de l'orientation moyenne des vecteurs gradients dirigés selon la direction principale.

Pour des pixels localisés aux jonctions et intersections et caractérisés par des orientations multiples dans le support de calcul, il est facile à vérifier que, même si le point est un point de maximum, la valeur de la cohérence est plus faible que dans le cas d'une seule orientation dominante.

2.2.3 Choix d'un opérateur gradient

L'estimation de l'orientation à partir des vecteurs gradients nécessite l'utilisation de masques numériques optimisés pour l'invariance en rotations. Le problème principal est le *biais* défini comme l'erreur existante entre l'orientation estimée $\theta(x, y)$ et l'orientation réelle $\theta_r(x, y)$:

$$\theta_b(x, y) = \theta(x, y) - \theta_r(x, y) \quad (2.7)$$

L'étude du biais et la construction de masques numériques appropriés ont suscité récemment l'intérêt de plusieurs chercheurs [DaS90], [LeP03], [FaS97]. Dans le cadre des EDP, le problème est traité dans [LDAR97] pour les approches de diffusion de type mouvement sous la courbure moyenne euclidienne (§1.6.1) ou affine (§1.6.3) et dans [ScW00] pour la méthode de diffusion pour l'augmentation de la cohérence de Weickert (§1.7.4.2).

Dans tous ces travaux des approximations des composantes des vecteurs gradients se construisent à travers des opérateurs à réponse impulsionnelle finie, qui correspondent à l'estimation des dérivées premières par des convolutions avec des masques définis sur un voisinage centré sur le pixel courant :

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{i,j}}{\partial x} = M_x * U_{i,j} \\ \frac{\partial U_{i,j}}{\partial y} = M_y * U_{i,j} \end{cases} \quad (2.8)$$

Pour des coordonnées numériques $(x, y) = (ih, jh)$ l'orientation estimée en (2.1) s'exprime ensuite par : $\theta_{i,j} = (\arctan[\frac{\partial U_{i,j} / \partial y}{\partial U_{i,j} / \partial x}] + \frac{\pi}{2}) \bmod \pi$.

Les masques de convolution sont optimisés de manière différente : Danielsson [Dan90] propose d'estimer l'orientation d'une ligne orientée selon une direction θ en minimisant dans le domaine de Fourier les distorsions introduites par les masques numériques ; l'idée de Weickert est similaire : le masque optimal par rapport à l'invariance en rotation est également déterminé dans le domaine de Fourier en imposant un lissage identique dans la direction du gradient et la direction orthogonale. Les travaux décrits dans [FaS97] concernent le même problème : la nécessité d'un pré lissage dans la direction orthogonale antérieur à la détermination d'une dérivée directionnelle. Le problème est posé de manière différente par LePouliquen [LeP03] : le masque optimal est obtenu dans le domaine spatial, en utilisant les développements en série de Taylor des fonctions représentant des surfaces orientées idéales. L'auteur montre que, pour certains types de surfaces, il est possible de construire des masques qui permettent l'estimation d'une orientation sans biais ($\theta_b(x, y) = 0$). Finalement notons que pour des fréquences spatiales connues les coefficients du masque peuvent être optimisés afin que le biais soit minimal [DaC01].

Pour la suite nous avons retenu le masque développé en [LeP03] qui présente un biais minimal :

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & -16 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

2.2.4 Filtrage des orientations

Ce sous-chapitre est consacré à un autre problème lié à l'estimation d'une orientation pertinente en tout pixel : celle de la *sensibilité au bruit*. Le filtre gradient étant un opérateur de type différentiel, il est sensible aux variations du signal : de faibles variations induites par la présence de bruit peuvent introduire des erreurs dans l'estimation de l'orientation. Prenons le cas d'une image originale $U_{i,j}^0$, bruitée par un bruit aditif $N_{i,j}$:

$$U_{i,j} = U_{i,j}^0 + N_{i,j} \quad (2.10)$$

Une estimation de l'orientation en utilisant (2.1) nécessite l'estimation des dérivées premières de l'image :

$$(U_{i,j})_x = (U_{i,j}^0)_x + (N_{i,j})_x \text{ et } (U_{i,j})_y = (U_{i,j}^0)_y + (N_{i,j})_y \quad (2.11)$$

L'erreur d'estimation est d'autant plus forte que le bruit est important ; de plus, pour des zones correspondant à des normes de vecteurs gradients proches de 0, l'orientation est principalement définie par les valeurs du bruit (*Fig.2.1*). Les vecteurs représentés à la *figure 2.1b*, correspondent à l'orientation estimée localement et leur module est proportionnel à la valeur de la confiance.

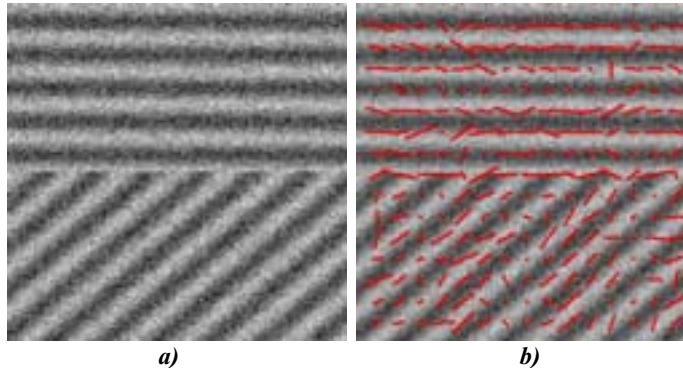


Fig.2.1-Orientations locales estimées b) sur une image affectée par un bruit blanc gaussien d'écart type 20 a).

Le processus d'estimation de l'orientation peut être rendu plus robuste en lissant préalablement l'image avant l'estimation des vecteurs gradients pour diminuer l'influence du bruit .

Prenons le cas d'une texture orientée et d'un filtre gaussien à voisinage limité G_σ , dont l'écart type est σ . Le filtrage obtenu avec G_σ supprime l'information qui présente des variations spatiales sur des échelles inférieures à σ . Ainsi, si la taille spatiale du noyau est inférieure à la période de la texture et pour des bruits de niveau relativement faible, le pré lissage rend le processus d'estimation d'orientation plus robuste.

Si la taille du noyau est plus grande que la période, l'information directionnelle fournie par les vecteurs gradients est atténuée.

Un autre effet négatif du pré lissage isotrope de l'image est le déplacement des contours (§1.3). En termes d'orientation, pour des images réelles, l'effet de cette technique de « moyennage » est l'attribution d'une orientation dans des zones où elle n'existe pas. Si des jonctions sont présentes dans l'image originale, la diffusion isotrope peut créer aussi de

faux contours (ainsi que de fausses orientations) d'autant plus importants que l'écart type du noyau est plus grand.

La détermination d'une valeur optimale pour σ semble un choix assez difficile dans des applications pratiques. Dans ce paragraphe, nous allons le considérer lié à la taille minimale des objets à conserver dans l'image. Ce choix correspond à l'approche présentée en [RaS91]. Signalons aussi que des techniques adaptatives peuvent être employées pour la détermination de σ [Gal96], [Lin93].

Nous illustrons ces effets sur l'orientation estimée de l'image de *Fig.2.1* en utilisant (2.2). Nous représentons en *Fig.2.2.a* l'orientation de l'image originale sans aucun lissage, en *Fig.2.2.b* et *c*, l'orientation estimée en utilisant des lissages gaussiens avec des noyaux d'écart type $\sigma = 1.0$ et $\sigma = 2.0$.

Notons que la méthode de visualisation utilise une palette demi-circulaire qui associe une couleur à chaque orientation comprise entre $[-\pi/2, \pi/2]$ (*Fig. 2.2.d*).

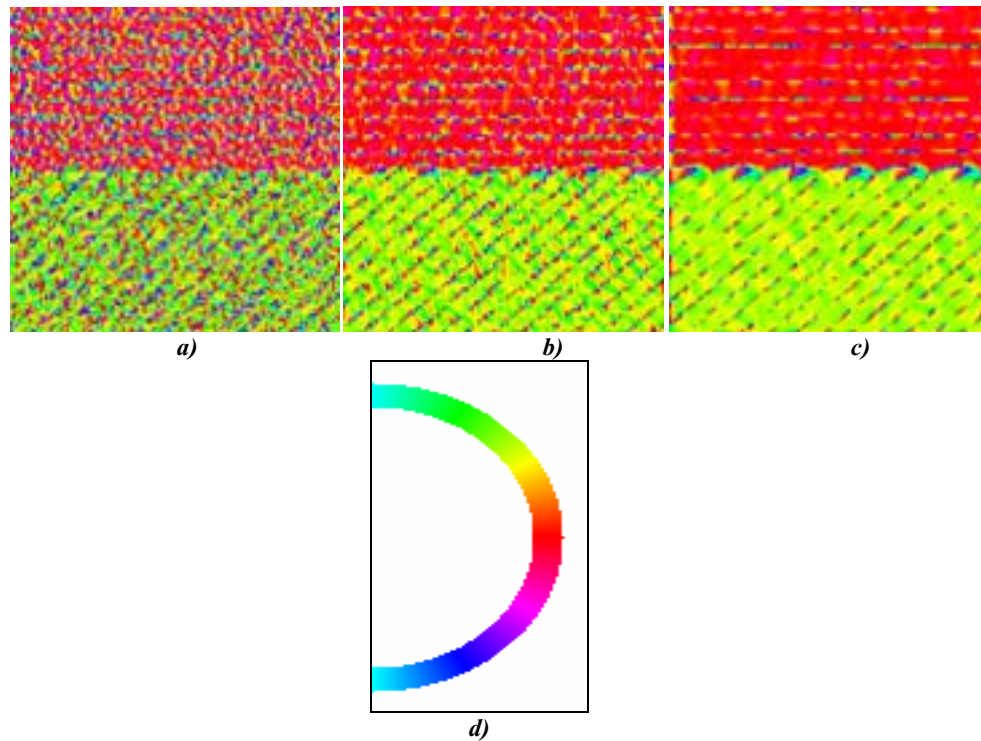


Fig.2.2- a) Orientation mesurée sur l'image de la Figure 2.1 en utilisant (2.1). b) Orientation de l'image de Fig. 2.1.b en utilisant (2.2) $\sigma=1.0$. c) Orientation de l'image de Fig. 2.1.b en utilisant (2.2) $\sigma=2.0$. d) Palette demi circulaire des couleurs.

L'utilisation d'une telle technique, pour le filtrage des données π périodiques, est limitée seulement à des opérations de pré-lissage des données et n'est en aucun cas dédiée au filtrage direct des orientations.

L'approche classique utilisée pour lisser l'information directionnelle est issue des travaux de Mardia [Mar72]. Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$ un champ des vecteurs de normes unitaires et d'orientations respective $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N \in [0, \pi]$.

L'idée de Mardia est de représenter ces données vectorielles comme des points sur le cercle unité en utilisant le double de chaque angle:

$$\vec{u}_i \rightarrow (\cos 2\theta_i, \sin 2\theta_i) \quad (2.12)$$

L'intérêt de l'angle double est de représenter par le même point les vecteurs colinéaires de même sens ou de sens opposé.

Les notions classiques de valeur moyenne et de variance pour le champ vectoriel s'expriment par la suite sur le cercle unité. Toute distribution des vecteurs est transformée ainsi en une distribution de données π -périodiques définie sur le cercle unité. La valeur moyenne est définie ensuite par rapport au centre de gravité des données circulaires, dont les coordonnées sont:

$$\begin{cases} x_c = \sum_{i=1}^N \cos 2\theta_i, \\ y_c = \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \end{cases} \quad (2.13)$$

L'orientation moyenne correspond à l'angle de la représentation polaire du centre de gravité:

$$\theta_m = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i}{\sum_{i=1}^N \cos 2\theta_i}\right) \quad (2.14)$$

La généralisation de (2.14) pour l'estimation de l'orientation pour des vecteurs gradients de norme non unitaire est issue de travaux classiques de Rao et Schunck [RaS91] et Kass et Witkin [KaW87]. Les deux approches sont différentes mais conduisent à l'obtention de l'orientation moyenne par des formules très proches. L'approche de Rao et Schunck maximise la somme des projections des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$, élevée au carré, de normes $|\vec{u}_i|$ quelconques, sur une droite orientée selon l'orientation moyenne :

$$\theta_m = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sum_{i=1}^N |\vec{u}_i|^2 \sin 2\theta_i}{\sum_{i=1}^N |\vec{u}_i|^2 \cos 2\theta_i}\right) \quad (2.15)$$

en associant à chaque pixel un poids identique égal à $1/N$.

L'approche de Kass et Witkin est différente ; les vecteurs \vec{u}_i sont représentés par des nombres complexes et une somme pondérée de ces complexes élevée au carré est calculée. L'intérêt de l'élevation au carré permet, là encore, de traiter le cas spécial des données π périodiques. En considérant le cas 2D avec une décomposition des vecteurs $\vec{u}_i = (u_{i_x}, u_{i_y})^T$ l'expression de l'orientation moyenne s'écrit par suite :

$$\theta_m = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 \sum_{i=1}^N w_i u_{i_x} u_{i_y}}{\left(\sum_{i=1}^N w_i u_{i_x}^2 - \sum_{i=1}^N w_i u_{i_y}^2\right)}\right) \quad (2.16)$$

Dans le cas 2D, les coefficients normalisés $w_i \in (0,1]$, correspondent à des masques de pondération spatiale de type gaussien qui associent un poids inversement proportionnel à la distance entre le centre du support de calcul et le pixel dont le vecteur gradient est considéré.

En considérant $w_i = \frac{1}{N}$, (2.16) est identique à (2.15) [Don99].

Notons aussi l'existence d'autres approches dédiées à l'estimation d'une orientation moyenne. Une méthode classique est basée sur le filtrage de Gabor [Gab46]. Des approches se sont également développées dans le cadre de traitement des images par EDP : notons l'existence des méthodes de diffusion isotrope d'orientations [Per98], [Ter01] et de diffusion isotrope ou anisotrope des directions [TSC00], [Sap00]. Ce type d'approches est apparu récemment dans la littérature comme extension des méthodes de diffusion isotrope et anisotrope pour les images en niveaux de gris. Malgré leur efficacité démontrée dans des tâches de filtrage d'orientations pour des images d'empreintes digitales par exemple (diffusion isotrope d'orientations) ou dans le cadre de la restauration des images en couleurs (diffusion anisotrope des directions), le temps de calcul prohibitif, l'absence d'un critère objectif d'arrêt, empêchent l'utilisation de ces algorithmes pour l'estimation de l'orientation à chaque pas de lissage utilisant des EDP classiques.

Les méthodes d'estimation d'orientation de Mardia d'un part, et de Rao et Schunck, d'autre part, présentent l'avantage de permettre l'estimation d'une orientation moyenne en un seul passage et sont donc peu gourmandes en temps de calcul. De plus elles ont aussi une interprétation statistique robuste que nous illustrons dans le paragraphe suivant.

2.2.5 Filtrage des orientations par Analyse en Composantes Principales

2.2.5.1 Principe

Le filtrage des orientations à l'aide d'une *Analyse en Composantes Principales (ACP)* est souvent mentionnée dans la littérature comme une méthode tensorielle. L'acceptation de tenseur -définie par l'extension d'un espace vectoriel pour l'algèbre multilinéaire – se réduit, pour les images 2D, à une matrice 2x2 dont les valeurs et les vecteurs propres caractérisent l'orientation et l'anisotropie locale.

Le principe du calcul est détaillé en annexe 1.

Les directions des vecteurs propres définissent les directions principales du champ vectoriel.

La matrice de covariance étant symétrique :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

par des calculs mathématiques classiques on retrouve les expressions des valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} - \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}) \end{cases} \quad (2.18)$$

L'orientation du premier vecteur propre (θ_1) est donnée par :

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctg\left(\frac{v_{1y}}{v_{1x}}\right) \\ v_{1x} = \frac{2m_{12}}{\sqrt{[m_{22} - m_{11} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}]^2 + 4m_{12}^2}} \\ v_{1y} = \frac{m_{22} - m_{11} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}}{\sqrt{[m_{22} - m_{11} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}]^2 + 4m_{12}^2}} \end{cases} \quad (2.19)$$

θ_1 s'exprime ensuite par :

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{m_{22} - m_{11} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}}{2m_{12}}\right) \quad (2.20)$$

L'orientation des objets s'exprime ensuite par :

$$\theta = (\theta_1 + \frac{\pi}{2}) \bmod \pi \quad (2.21)$$

Il est à noter que l'orientation des objets, défini par (2.21), n'est autre que l'orientation du deuxième vecteur propre.

2.2.5.2 Equivalence avec les formulations de Rao, Mardia et Kass-Witkin

L'équivalence de (2.20) et (2.15) est immédiate ; l'orientation moyenne donnée par (2.15) est déduite en maximisant la somme des projections des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$ élevée au carré sur une droite d'orientation θ_m . Soit \vec{v}_1 un vecteur unitaire dirigé selon cette droite; la somme des projections, au carré, peut s'écrire $\sum_{i=1}^N (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_i)^2$ qui, à un facteur $1/N$ près, n'est autre que la variance de la première composante principale. Nous retrouvons ainsi la formulation originelle de Rao pour le cas 2D, qui considère l'orientation moyenne comme étant donnée par l'orientation du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice d'inertie :

$$M = \sum_{i=1}^N \vec{u}_i \vec{u}_i^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N u_{ix}^2 & \sum_{i=1}^N u_{ix} u_{iy} \\ \sum_{i=1}^N u_{ix} u_{iy} & \sum_{i=1}^N u_{iy}^2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

La concordance de (2.21) avec la formule de Mardia est également immédiate : elle s'obtient en considérant les vecteurs gradients comme étant normalisés.

En considérant des poids non uniformes $w_i \in [0,1]$, associés à chaque vecteur, la formulation de Kass et Witkin (2.16) maximise la somme des projections des vecteurs $w_1 \vec{u}_1, w_2 \vec{u}_2, \dots, w_n \vec{u}_n$, au carré, sur une droite d'orientation $\theta_m : \sum_{i=1}^N (\vec{v}_1 \cdot w_i \vec{u}_i)^2$. Cette somme, pour un champ vectoriel de moyenne nulle, n'est autre que la variance de la première composante du champ : $w_1 \vec{u}_1, w_2 \vec{u}_2, \dots, w_n \vec{u}_n$.

2.2.5.3 Support de calcul

Le support de calcul de l'ACP est défini par sa *forme* et le *nombre* des vecteurs du voisinage pour lesquels l'orientation est estimée. Typiquement, dans des applications 2D, deux formes de voisinage s'utilisent : rectangulaire ou circulaire ; indépendamment de ces formes, pour l'estimation de l'orientation correspondante au pixel de coordonnées (x,y) le voisinage est une fenêtre glissante, symétrique, centrée en (x,y) , de dimension $m \times n = N$ pixels. Les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$ dénotent les vecteurs gradients, en leur associant un poids identique égal à $1/N$ (2.22), la forme du voisinage est donc rectangulaire (Fig.2.3.a).

Pour des pondérations spatiales qui pénalisent l'éloignement au pixel central, la forme du voisinage peut être modifiée (lissage gaussien par exemple). Pour un lissage gaussien, composante par composante, la matrice de covariance est remplacée par:

$$M^* = \begin{pmatrix} G_\rho * U_x^2 & G_\rho * (U_x U_y) \\ G_\rho * (U_x U_y) & G_\rho * U_y^2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Dans ce cas, la forme du voisinage est circulaire (Fig.2.3.b). Le nombre des vecteurs considérés dans le calcul de l'orientation est identique au celui d'un voisinage rectangulaire si le noyau gaussien est considéré à voisinage limité. Par exemple, si 90% de l'énergie de la fonction gaussienne est considérée, l'écart type du noyau peut être lié au nombre de vecteurs N par la relation $4\rho + 1 = N$.

A part l'avantage de l'invariance aux rotations, issu d'une pondération gaussienne, le choix du support (rectangulaire ou circulaire) nous paraît une question délicate, en liaison directe avec le niveau de bruit. Cependant le noyau gaussien favorise l'estimation pertinente de l'orientation pour des fenêtres centrées sur des pixels non bruités, le support rectangulaire, en utilisant le même poids pour tous les pixels, élimine de manière plus efficace l'influence des pixels bruités isolés.

Le choix de N pour des applications pratiques peut s'avérer délicat. Prenons le cas d'une image représentant une texture idéale contenant plusieurs raies parallèles dont les vecteurs gradient sont, soit nuls, soit indiquent tous la même direction (Fig.2.4.a). La figure 2.4.b montre l'orientation de la texture mesurée selon (2.1). Sur les lignes de crête l'orientation n'étant pas définie, nous avons choisi une valeur par convention (les zones noires sur l'image d'orientation). En regardant l'image à une plus grande échelle il semble judicieux de caractériser l'image comme ayant une seule direction.

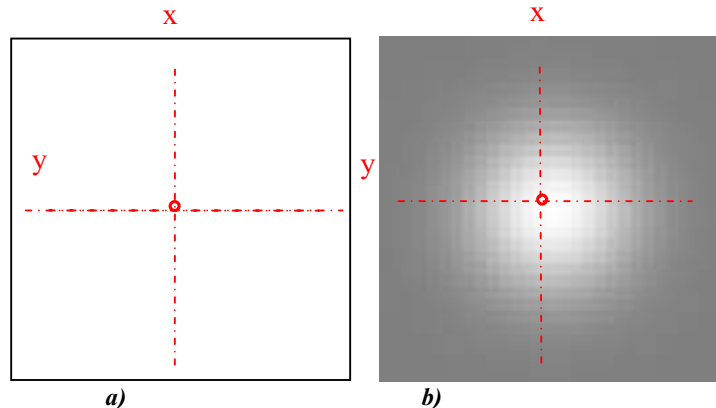


Fig.2.3- Support de calcul de l'ACP. a) Support carré. b) Support circulaire.

Prenons le cas d'une ACP, dont le support $W(x,y)$ est centré sur un pixel de coordonnées (x,y) . Pour une période de la texture T définie dans la direction des vecteurs gradients non nuls (Fig.2.4 .a), si $N = \text{card}W(x,y) \geq T$ par des calculs mathématiques simples, il est facile de vérifier que l'orientation moyenne fournie par l'ACP en tout pixel de l'image est donnée par l'orientation des vecteurs gradients non nuls (Fig.2.4 .c).

Pour un support de calcul $W'(x,y)$ avec $N' = \text{card}W'(x,y) < T$, centré sur un pixel appartenant à une ligne de crête, tous les vecteurs gradients sont nuls et l'orientation reste indéfinie.

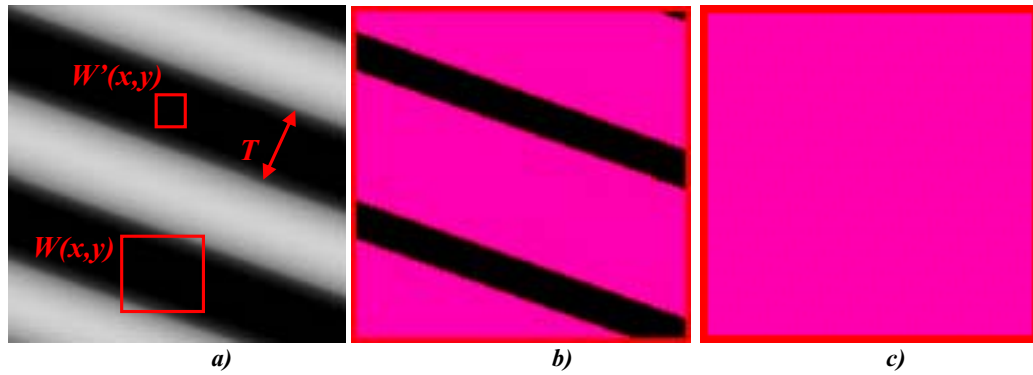


Fig.2.4-Caractere multi échelle de l'orientation fournie par l'ACP.

L'ACP confère donc à l'orientation estimée un caractère multi échelle à travers les dimensions de son support. L'orientation moyenne obtenue peut être vue comme une *tendance directionnelle* semi-locale de la texture. La taille du support, N est souvent mentionnée dans la littérature comme échelle d'intégration [Wei95], [Gal96], [Lin93]; elle est liée à la taille d'un objet caractéristique présent dans l'image à analyser.

Un autre aspect qui doit être considéré en choisissant N est la capacité d'élimination du bruit. Jahne considère en [Jah97] le cas d'un bruit blanc gaussien additif, isotrope, de moyenne nulle. Il montre de façon théorique que pour un écart type du bruit donné σ_n , (2.23) peut se mettre sous la forme :

$$M^{**} = M^* + \sigma_n^2 I_2 \quad (2.24)$$

M^{**} est la matrice de covariance correspondante au champ vectoriel bruité, lissé par une convolution gaussienne. M^* est la matrice de covariance correspondante au champ initial, décrivant une texture idéale.

Le deuxième terme étant isotrope, M^{**} et M^* possèdent les mêmes vecteurs propres, mais des valeurs propres différentes. Cette relation permet d'obtenir en tout point une information directionnelle indépendante du bruit, identique à celle du champ non bruité. L'idée fondamentale de l'approche de Jahne est de considérer que toutes les moyennes spatiales des dérivées partielles du bruit et des produits des dérivées partielles du bruit et du signal s'annulent. Pour des applications pratiques, ces hypothèses ne sont généralement pas valides mis à part dans le cas de supports de calcul de taille infinie et pour des vecteurs gradients de normes plus grandes que σ_n . En théorie, (2.24) ne peut pas être approchée pour des supports de taille faible et induit un choix de support tendant vers l'infini. Notons que cette observation est en concordance avec les résultats expérimentaux de Donias [Don99] qui montrent que la capacité d'élimination du bruit est étroitement liée à la taille du support.

Nous reprendrons cette idée en §2.2.5.6 en décrivant un algorithme pour le choix automatique de N en tout point de l'image.

2.2.5.4 Orientations multiples

Comme toute technique de moyennage, la valeur de l'orientation calculée par l'Analyse en Composantes Principales dépend de la distribution des orientations, des vecteurs gradients et de la taille du support de calcul.

Considérons la présence de plusieurs orientations au sein du support de calcul. Pour alléger les calculs nous utiliserons les hypothèses suivantes : le support de calcul est carré, le champ des vecteur gradients est non bruité, composé de deux champs d'orientations disjoints. Nous considérons un modèle de textures linéaires : les variations d'orientation, si elles existent, correspondent à la frontière de démarcation entre le deux champs. Chaque champ est composé des vecteurs gradients identiques ∇U_1 et ∇U_2 , l'orientation de chaque champ étant donnée par :

$$\theta_{1(2)} = \text{Arg}(\nabla U_{1(2)}) = \arctan\left(\frac{U_{1(2),y}}{U_{1(2),x}}\right) \quad (2.25)$$

Pour le cas 2D soient N_1, N_2 les nombres des représentants de chaque champ inclus dans le support de calcul ($N_1 + N_2 = N$).

Si le support de calcul est situé dans le voisinage de la frontière des deux champs, l'orientation fournie par l'ACP est l'orientation moyenne issue du mélange des deux orientations. Dans le cas général $N_1 \neq N_2$ l'orientation du premier vecteur propre est une moyenne pondérée des orientations correspondantes aux deux champs des vecteurs. L'écart entre l'orientation théorique et celle issue de l'ACP est d'autant plus grand que le support de calcul glissant contient un nombre plus grand de pixels appartenant au champ complémentaire.

L'erreur dépend aussi de la distribution des normes des vecteurs gradients. En considérant le cas particulier $\frac{|\nabla U_1|}{|\nabla U_2|} \rightarrow 0, N_2 \neq 0$, dans le voisinage de la frontière entre les deux champs, l'orientation fournie par l'ACP est donnée par l'orientation du champ de plus forte énergie.

2.2.5.5 Indicateurs de confiance, de cohérence et d'anisotropie

Les situations analysées dans le paragraphe précédent montrent que la caractérisation d'un champ vectoriel par l'orientation moyenne induite par ses composantes n'est pas suffisante. Les extensions des notions de cohérence et de confiance de §2.2.2 sont utilisées classiquement pour quantifier la pertinence de l'orientation moyenne. La notion d'*anisotropie* est souvent liée dans ce cas avec les indicateurs de confiance ; comme nous allons le voir, certains auteurs caractérisent la pertinence de l'orientation en fonction de l'allongement relatif selon les axes principaux (l'anisotropie du champ).

Dans ce paragraphe nous allons revoir les descripteurs de cohérence les plus utilisés et commenter leur capacité à fournir un indicateur relatif à la qualité de l'information estimée.

Considérons le cas général de N vecteurs gradients $\nabla U_i = (U_{i_x}, U_{i_y})^T$ dont les orientations définies par rapport à l'abscisse sont $\theta_i = \arctan \frac{U_{i_y}}{U_{i_x}}$. Sans perte de généralité,

nous allons considérer que l'orientation est définie en tout point ; cette condition se réduit à la supposition que les vecteurs du champ sont de normes non nulles.

Pour des champs d'orientation non bruités, l'incohérence des orientations peut se manifester seulement dans le cas d'orientations multiples. Il nous semble donc judicieux de caractériser les descripteurs d'anisotropie, confiance ou cohérence par leur capacité à fournir une indication dans ces zones. Notamment nous utilisons un modèle de textures linéaires et nous nous intéressons aux valeurs des divers indicateurs pour des zones homogènes et pour des zones situées dans le voisinage d'un changement d'orientation.

L'un des premiers descripteurs d'anisotropie est celui de Kass et Witkin. Il revient à faire la différence entre les variances des composantes principales :

$$\mu = \lambda_1 - \lambda_2 \quad (2.26)$$

Il est à noter que cet indicateur, élevée au carré, est utilisé par Weickert comme mesure de confiance pour la CED (§1.7.4.2).

Le maximum de (2.26) est atteint lorsque le support ne regroupe qu'une seule orientation. μ est alors la plus grande valeur propre de l'ACP effectuée sur un champ des vecteurs gradients indiquant la même direction.

Le minimum de (2.26) est atteint pour $\lambda_1 = \lambda_2$ et correspond au cas des données qui ne manifestent aucune tendance directionnelle.

Selon les auteurs, l'indicateur μ^2 est utilisé comme indicateur de cohérence [Wei95], [Wei97b], [Wei98],[ScW00] ou d'anisotropie [Gal96]. Le nom d'indicateur d'anisotropie nous semble plus approprié car il traduit l'allongement relatif selon les deux axes principaux et non l'homogénéité locale en termes d'orientation. Une texture ayant une seule direction dominante ($\theta_i = ct.$), dont la variance selon cette direction a une certaine valeur est équivalente, à travers la valeur de cet indicateur, à toutes les textures conduisant à une différence identique entre les deux valeurs propres. La dépendance de μ vis à vis de l'énergie du signal empêche son utilisation directe pour la caractérisation de la pertinence de l'orientation estimée.

Prenons maintenant le cas des images bruitées. En reprenant les hypothèses de Jahne (2.24) il est facile de montrer que les deux valeurs propres s'expriment par $\lambda'_1 = \lambda_1 + \sigma_n^2$ $\lambda'_2 = \lambda_2 + \sigma_n^2$ et $\mu = \lambda'_1 - \lambda'_2 = \lambda_1 - \lambda_2$ ne dépend donc pas du niveau de bruit.

Une version normalisée de cet indicateur est utilisée par Bigun [BGW91], Donias [Don99], et Jahne [Jah97]. L'indicateur de confiance est :

$$\mu = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (2.27)$$

Cet opérateur varie sur l'intervalle [0,1] ; son avantage majeur est que, pour des images non bruitées, il est un indicateur de la présence d'orientations multiples. Pour des textures idéales avec une orientation définie en tout pixel et indépendamment de l'énergie du signal, les jonctions peuvent être détectées : dans leur voisinage, λ_1 et λ_2 sont comparables et μ s'approche de 0. L'égalité stricte $\mu = 0$ est réservée au cas où les données ne présentent aucune tendance directionnelle.

Par contre, dans le cas d'une image bruitée, cet indicateur s'exprime par :

$$\mu' = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\sigma_n^2} \quad (2.28)$$

Le désavantage majeur de cet indicateur est qu'il est dépendent du niveau de bruit présent dans l'image. Pour des zones ayant un contraste faible et manifestant en même temps une tendance directionnelle ($\lambda_1 > \lambda_2$) la valeur de la confiance dépend du niveau de bruit présent dans l'image même si les orientations sont cohérentes dans le support de calcul. La distinction entre les diverses valeurs minimales de l'opérateur est rendue difficile par la dépendance au niveau de bruit.

La notion de cohérence (2.6) que nous avons présenté en §2.2.2 peut se généraliser de manière directe pour un champ d'orientations lissé par une ACP. En notant par $\hat{\theta}(x_i, y_j)$ les orientations issues d'une ACP dans le support de calcul $W(x, y)$, par $\hat{\theta}(x, y)$ l'orientation qui correspond au centre du support :

$$coh[\hat{\theta}(x, y)] = \frac{\sum_{(i,j) \in W(x,y)} |\nabla U(x_i, y_j)| \cos^2[\hat{\theta}(x_i, y_j) - \hat{\theta}(x, y)]}{\sum_{(i,j) \in W(x,y)} |\nabla U(x_i, y_j)|} \quad (2.29)$$

La dépendance de l'indicateur (2.29) par rapport au niveau de bruit est relative : si -afin de retrouver les orientations théoriques des textures en absence du bruit -des tailles du support $card(W(x, y))$ grandes sont utilisées pour n'importe quelle distribution de

vecteurs $\nabla U(x_i, y_j)$ l'indicateur ne dépend pas du niveau de bruit. Si, par contre, – pour des tailles moins importantes – les orientations $\hat{\theta}(x_i, y_j)$ varient dans $W(x, y)$, l'opérateur est sensible à la distribution des vecteurs gradients.

L'indicateur est sensible aux orientations multiples dans le support de calcul : les valeurs fournies dans ces régions sont plus faibles $coh[\hat{\theta}(x_i, y_j)] < 1$ que celles qui caractérisent une texture avec une seule orientation dominante : $\hat{\theta}(x_i, y_j) = \hat{\theta}(x, y) \rightarrow coh[\hat{\theta}(x, y)] = 1$

La *figure 2.5* illustre les résultats d'une ACP de taille fixe $N=9$ pixels (support carré). L'image originale (*Fig.2.5.a*), non bruitée, représente plusieurs textures idéales d'orientation, période et amplitude différentes. Pour chaque texture les vecteurs pointent dans la même direction ; l'image originale contient 128×128 pixels. Nous représentons en *Fig.2.5.b* l'orientation du deuxième vecteur propre issue de l'ACP et, en *Fig.2.5.c, d* et *e*, respectivement, les indicateurs de cohérence (2.26), (2.27) et (2.29). Les indicateurs de cohérence sont représentés en utilisant une palette de 255 niveaux de gris, l'orientation est représentée par la palette circulaire de couleurs.

Les résultats confirment les développements théoriques précédents. L'orientation estimée à travers l'ACP est identique à l'orientation de la texture sauf dans les voisinages des jonctions où elle fournit une orientation moyenne fautive (*Fig.2.5.b*). L'information dépendante de l'énergie du signal (2.26) est moins judicieuse que celle fournie par les deux indicateurs de cohérence qui permettent la mise en évidence des « ruptures » d'orientations.

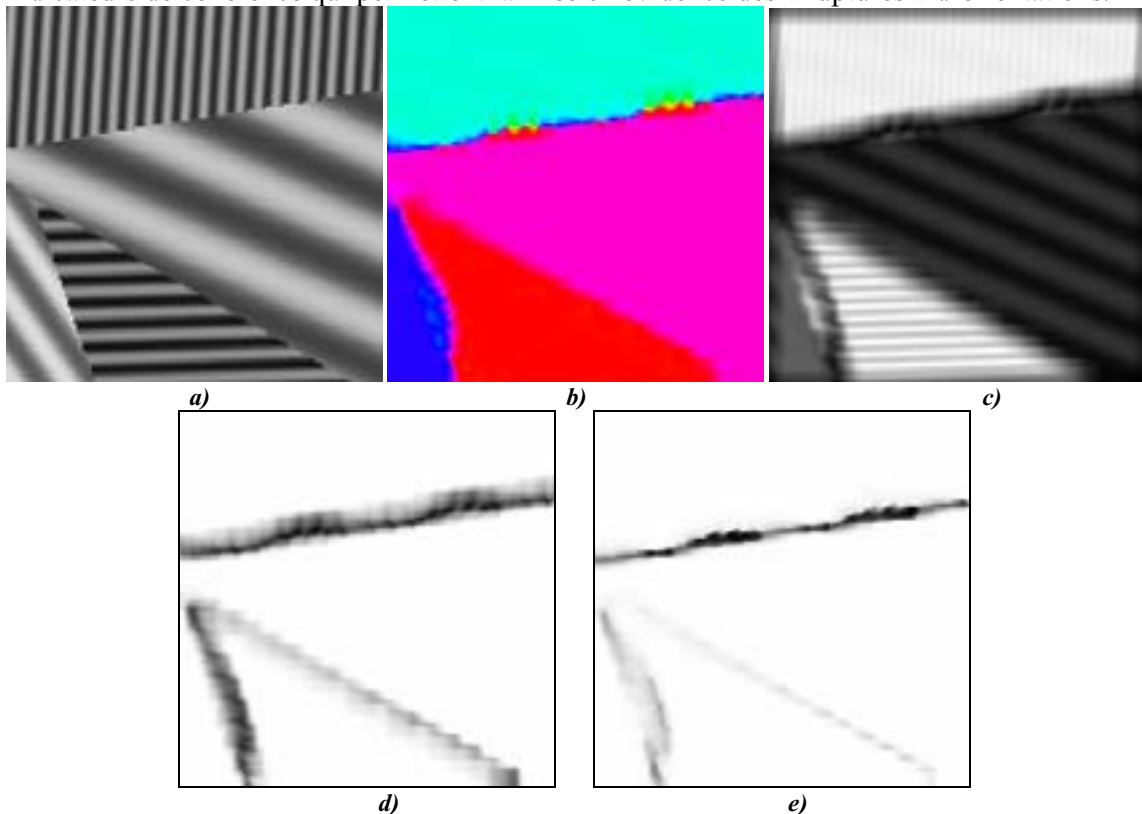


Fig.2.5- Mesures de confiance et cohérence. a) Image originale. b) Orientation (ACP- N=9). c) Cohérence (2.26). d) Cohérence (2.27). e) Cohérence(2.29).

Nous répétons la même expérience pour une image bruitée obtenue à partir de l'image originale en ajoutant un bruit blanc gaussien d'écart type $\sigma_n = 20$ (*Fig 2.6.a*). Dans tous les cas, le champ des vecteurs a été préalablement lissé par une convolution gaussienne ($\sigma = 0.8$)

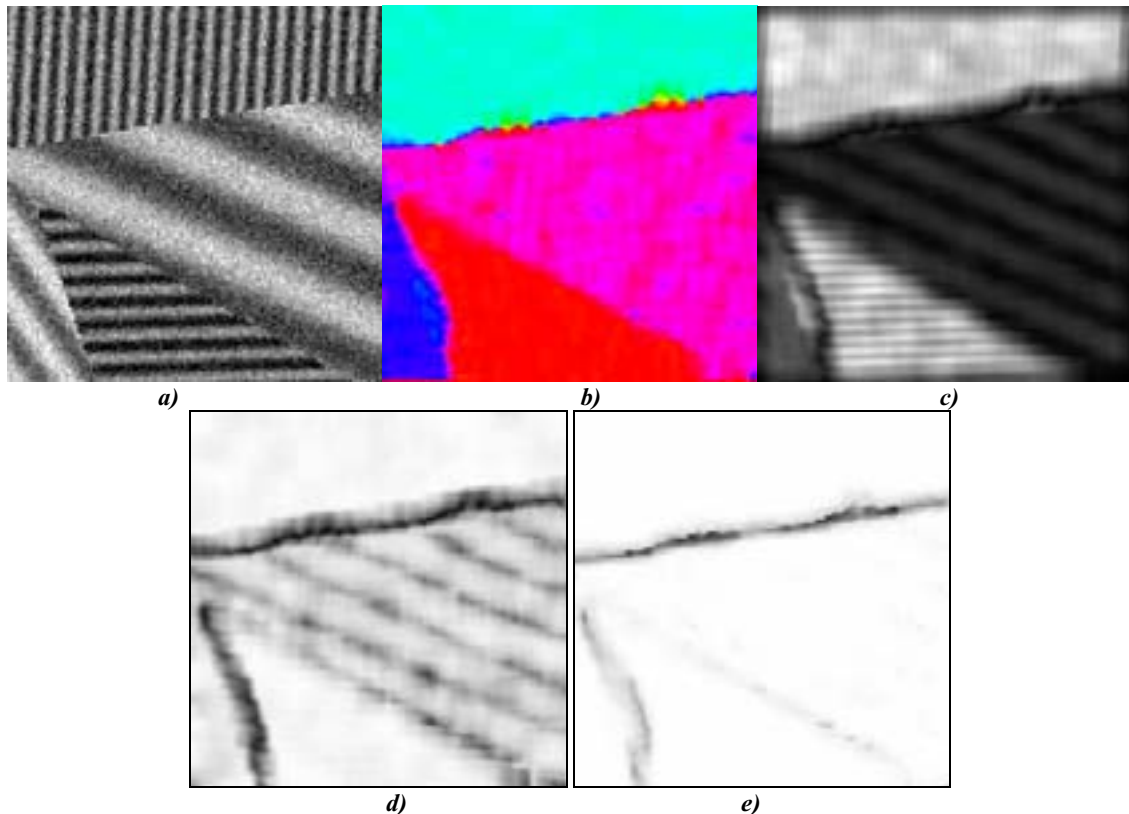


Fig.2.6-- Mesures de confiance et cohérence. a) Image bruitée. b) Orientation (ACP- $N=9$). c) Cohérence(2.26). d) Cohérence (2.27). e) Cohérence (2.29).

Notons la capacité de l'ACP de fournir une orientation proche de l'originale. Les erreurs d'estimations sont dues à la taille relativement faible du support. Afin de diminuer ces erreurs, N peut être augmenté, mais, dans ce cas, de fortes déviations d'orientations se produisent dans le voisinages des jonctions.

Les valeurs prises par les indicateurs de confiance reflètent l'approche théorique ; notons les indépendances relatives des indicateurs (2.26) et (2.29) au niveau de bruit ; ce n'est pas le cas de (2.27) qui, pour des zones des faibles contrastes, présente des minimums.

2.2.5.6 Analyse en Composantes Principales multi –échelle

Pour conclure cette section, nous analysons l'influence de la taille de l'ACP sur l'orientation estimée. Rao mentionne dans ses travaux que l'orientation estimée peut varier de manière importante seulement si N varie de manière significative ; mais, il ne développe aucune approche théorique permettant l'estimation de N . D'autre part, les travaux de Jahne montrent de façon théorique que l'orientation optimale n'est obtenue que pour une taille du noyau suffisamment grande.

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la possibilité d'utiliser une taille du support variable. A part le caractère multi- échelle de l'orientation fournie par l'ACP pour un N fixe, nous nous proposons de donner un algorithme qui permet de déterminer N de manière automatique en tout point de l'image.

Un problème similaire a été traité par Garding et Lindeberg [Gal96] dans le contexte de détection des structures elliptiques et circulaires à travers l'information fournie par la matrice de covariance. La méthode de Garding et Lindeberg permet de sélectionner en tout point de l'image la taille du noyau de pré lissage gaussien σ et l'échelle d'intégration N qui maximise :

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \quad (2.30.a)$$

ou –par des calculs mathématiques simples -l'expression équivalente :

$$J = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N |\nabla U_i|^2 |\nabla U_j|^2 \sin^2(\theta_i - \theta_j) \quad (2.30.b)$$

En utilisant ce critère dans le cas de textures directionnelles, la taille du support peut, théoriquement, approcher l'infini, J étant toujours nul. L'effet pour ces zones se traduit par une orientation fiable. Dans le cas de ruptures d'orientation, J favorise les anisotropies et, par conséquent, de grandes tailles pour $W(x,y)$. Dans la pratique cela se traduit par des valeurs fausses de l'orientation affectant tous les pixels dans le support de l'ACP.

Au lieu de (2.30), nous proposons donc l'utilisation d'un indicateur dédié à la pertinence de l'orientation tels que les trois indicateurs définis au paragraphe §2.2.5.5.

Prenons tout d'abord le cas de (2.26). Suite à l'analyse que nous avons menée en §2.2.5.5 les maxima de cet opérateur s'obtiennent pour des anisotropies maximales $\lambda_1 \gg 0$ et $\lambda_2 \cong 0$. Dans le cas d'images non bruitées, la taille optimale du support N correspond à un choix qui maximise l'anisotropie locale. En considérant un bruit non nul, l'indépendance de (2.26) au niveau de bruit n'est valable que pour des tailles du support grandes. En faisant varier N le maximum de (2.26) peut donc correspondre localement à un maximum d'anisotropie induit par le bruit. Dans le cas des jonctions, l'opérateur ne favorise pas les supports de grandes tailles, néanmoins, pour certaines situations, les valeurs maximales de (2.26) peuvent être induites seulement par des valeurs fortes des vecteurs gradients, indépendamment de la distribution des orientations dans le support.

L'indicateur (2.27) présente l'avantage de n'être pas dépendant de l'énergie du signal. Il limite donc le désavantage majeur de (2.26) en limitant la taille du support dans le voisinage des jonctions. Néanmoins, sa dépendance au niveau de bruit, même pour des tailles (N) grandes favorise les anisotropies locales induites par la présence du bruit. C'est le cas des zones manifestant une faible tendance directionnelle et une variance du bruit élevée.

Le descripteur (2.29) présente un avantage évident, pour des zones ayant une orientation dominante, sa valeur est d'autant plus grande que les orientations moyennes sont cohérentes. Le même comportement est observé pour des images bruitées ; l'élimination de l'effet du bruit est d'autant plus efficace que la taille du noyau est grande, permettant de retrouver les orientations de la texture non bruitée. Dans ces zones, l'opérateur ne pénalise donc pas les tailles de support importantes. Dans le voisinage des ruptures d'orientations, il est possible de trouver une taille de support n'incluant que des orientations proches ; (2.29) présentant alors un maximum. Finalement, ce dernier opérateur nous semble le mieux adapté pour estimer une taille optimale du support de calcul de l'ACP.

Même si des algorithmes très complexes peuvent être employés pour optimiser la taille du support de l'ACP [Gal96], nous utiliserons dans la suite un algorithme relativement simple : pour un σ fixe nous faisons varier N pour un support carré et nous détectons le maximum du descripteur de cohérence (2.29). Ensuite l'orientation issue d'une ACP de taille correspondante à ce maximum est associée au pixel courant. Cet algorithme peut ensuite se généraliser de manière très simple à un support circulaire.

La figure 2.7 illustre quelques résultats introduits dans ce paragraphe. Nous utilisons l'image bruitée de la figure 2.6.a. Afin de montrer les différences entre les divers critères nous représentons les orientations déterminées en le maximisant. Pour chaque image nous avons fait varier N en partant d'une valeur de 3x3 pixels et nous avons établi une limite supérieure de 21x21 pixels. L'écart type du noyau gaussien de pré lissage a été fixé $\sigma = 0.8$.

Pour alléger les notations, dans le reste du mémoire, nous utiliserons

$\theta(x,y) = \hat{\theta}(x,y)$ pour dénoter l'orientation des textures fournie par l'ACP multi-échelle.

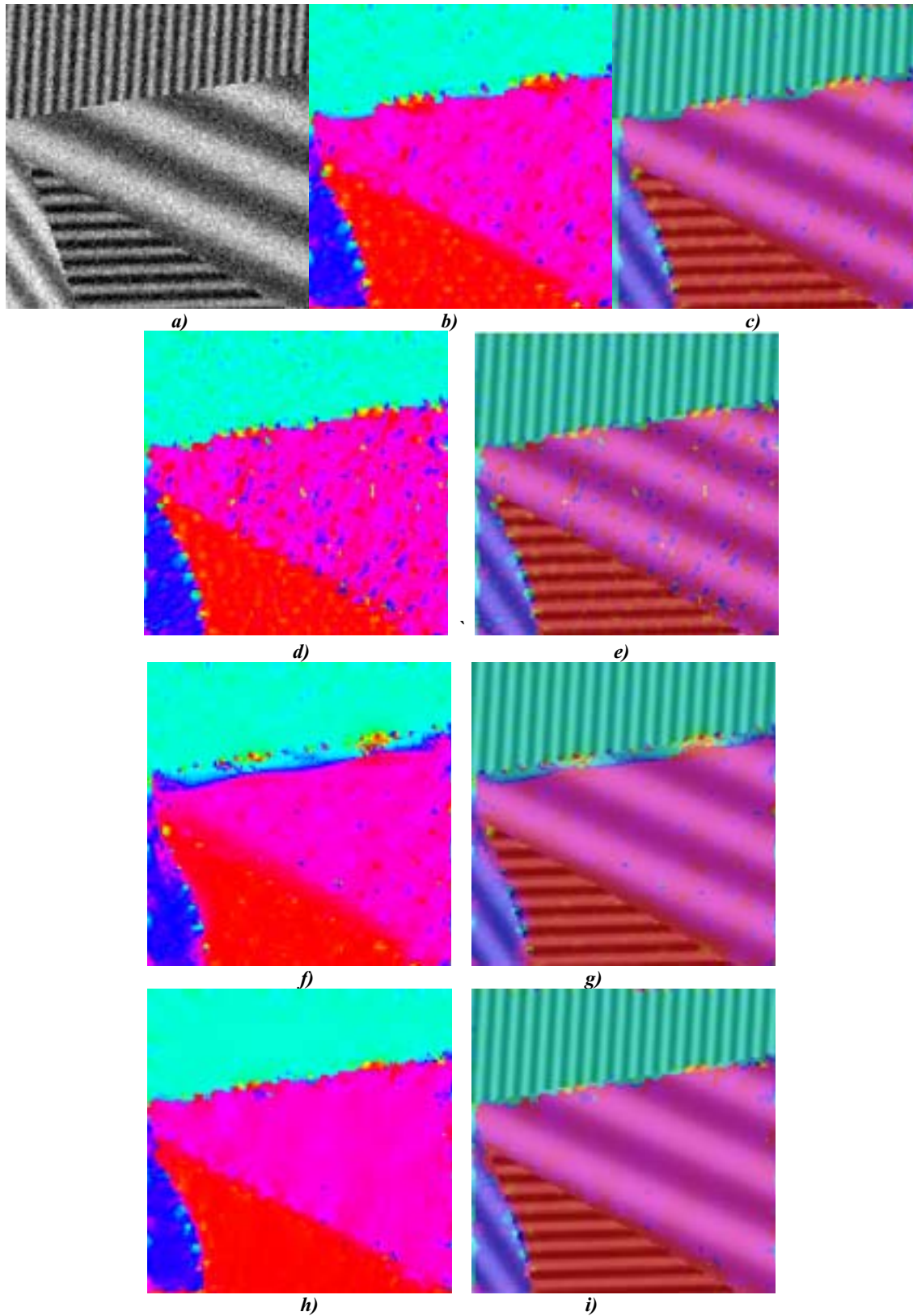


Fig.2.7- ACP à taille adaptative en utilisant les divers indicateurs de confiance. *a) Image originale. b) Orientation ACP multi échelle basée sur Eq. 2.26. c) Superposition de Fig.2.5.a et Fig.2.7.b. d) Orientation ACP multi échelle basée sur Eq. 2.27. e) Superposition de Fig.2.5.a et Fig.2.7.d. f) Orientation ACP multi échelle fondée sur Eq. 2.30. g) Superposition de Fig.2.5.a et Fig.2.7.f. h) Orientation ACP multi échelle basée sur Eq. 2.29. i) Superposition de Fig.2. 5.a et Fig.2.7.h.*

Les résultats montrent ce que nous avons exposé de manière théorique : l'utilisation des indicateurs de confiance (2.26) et (2.27), pour déterminer une taille optimale du support de calcul n'est pas souhaitable : (2.26) produit des déviations fortes pour des zones ayant plusieurs orientations dominantes (*Fig.2.7.b* et *c*); le défaut majeur de (2.27) réside dans le fait que la taille optimale issue de son optimisation est dépendante du bruit, c'est essentiellement l'effet observé sur l'image de (*Fig.2.7.d*).

Pour ce type d'images, l'indicateur de Garding et Lindeberg ne conduit pas non plus à une estimation pertinente de l'orientation, spécialement pour des orientations multiples (*Fig.2.7.f* et *g*).

(2.29) permet l'estimation d'une orientation pertinente pour les zones de faibles gradient et, dans le voisinage des jonctions, il limite les effets de moyennage de l'ACP (*Fig.2.7.h* et *i*).

2.2.5.7 Conclusions

L'avantage essentiel de l'ACP, est sa capacité à fournir une orientation robuste pour des textures présentant une seule orientation dominante. Dans ce cas l'erreur d'estimation d'orientation peut s'approcher de 0, en considérant des supports des tailles infinies. Le point faible réside dans l'introduction des orientations fausses pour les mélanges des textures présentant plusieurs orientations dominantes. Nous avons présenté les principaux indicateurs utilisés pour la quantification de la pertinence de l'orientation estimée. En analysant le comportement pour des images idéales et, ensuite, sur des images bruitées, nous avons retenu comme descripteur de confiance la généralisation de la mesure de confiance de Rao (2.29). Nous avons comparé cet opérateur avec plusieurs descripteurs de confiance et nous avons montré de manière théorique et expérimentale que l'indication fournie est moins sensible au bruit et que le minimum de cet indicateur peut être rencontré de manière naturelle dans les régions où l'ACP n'est pas optimale dans le sens où elle introduit de fausses orientations. C'est le principal résultat de §2.2.5.5.

Ensuite nous avons utilisé cet indicateur pour proposer un algorithme automatique de calcul de l'ACP en tout point de l'image. La taille du support ACP est déterminée en maximisant l'indication de confiance. Les résultats de §2.2.5.6 montrent que la maximisation de (2.29) par rapport à N est un choix naturel.

2.3 Diffusion directionnelle

2.3.1 Motivation

L'analyse en composantes principales, adaptée au cas des données π périodiques, est un outil puissant qui permet l'obtention d'une information directionnelle robuste, même en présence du bruit. Néanmoins une distinction claire existe entre la robustesse de l'orientation calculée, au sens statistique, et sa justesse. Pour des échantillons caractérisant un seul phénomène, une texture avec une seule orientation dominante par exemple, les deux notions peuvent être confondues ; ce n'est plus le cas des échantillons qui décrivent deux phénomènes physiques différents. Dans ce dernier cas, la justesse de l'information obtenue, caractérisée par des indicateurs mathématiques (§2.2.5.5), est faible, même si l'information est robuste au sens statistique. L'orientation issue de l'ACP peut être vue, au plus, comme un descripteur de la tendance directionnelle semi locale et non comme une information exacte.

Nous proposons un nouveau modèle de diffusion qui intègre l'information directionnelle sans pour autant que cette information ne caractérise complètement le comportement du filtre. Nous pourrions, par exemple, obtenir un rehaussement dans la direction issue de l'ACP si le contexte local le réclame.

En comparaison avec les modèles de diffusion tensorielle, le modèle général de lissage que nous proposons nous permet de quantifier, de manière exacte –mis à part les erreurs

numériques- le comportement du processus de diffusion en chaque pixel de l'image. Notamment, en reprenant des notations évoquées au chapitre 1, nous nous intéressons au modèle général de diffusion de type :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c_{\xi} U_{\xi\xi} + c_{\eta} U_{\eta\eta} \quad (2.31)$$

En (2.31) nous avons noté c_{ξ} et c_{η} , respectivement les deux coefficients de diffusion dans les directions des vecteurs propres issues d'une ACP à taille adaptative, \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . Nous notons $\vec{\xi}$ la direction de (\vec{v}_2), i.e. la direction des objets, et $\vec{\eta}$ la direction moyenne des vecteurs gradients (\vec{v}_1). Le repère $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ est mobile, il représente les axes principaux calculés par une ACP.

L'écriture d'une équation de diffusion sous la forme (2.31) et non sous la forme d'une divergence nous permettra une plus grande souplesse dans l'expression du filtre de lissage.

La connaissance des coefficients c_{ξ} et c_{η} est supposée suffisante pour définir le comportement local de la diffusion et l'approche doit permettre également d'introduire un processus de rehaussement :

$$c_{\xi}, c_{\eta} \in [-1,1] \quad (2.32)$$

L'équation (2.31) est très générale, nous allons expliciter les formes des coefficients c_{ξ} et c_{η} dans les paragraphes qui suivent.

2.3.2 Lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions

2.3.2.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous adapterons le modèle général (2.31) pour le lissage directionnel des images contenant des structures très fines qui manifestent une forte tendance directionnelle et qui peuvent être approchées localement par des lignes orientées. Cette approche a été inspirée par une application très précise : le lissage des gravures anciennes numérisées. La figure 2.8 montre un exemple d'image de ce type :



Fig.2.8- Image contenant des structures assimilables à des lignes.

Les structures présentes dans ce type d'image peuvent être assimilées localement à des objets unidimensionnels. Nous recherchons un lissage s'effectuant uniquement dans les directions de ces objets, d'où le nom de *lissage directionnel 1D*. Ce filtre est issu des travaux que nous avons présentés en [TLBB02a],[TLBB02b] et dans une version invariante aux rotations en [TBBLB04] et [DTLB04].

Le modèle général sera présenté en §2.3.2.2, ensuite, nous proposerons une version régularisée (§2.3.2.3). La résolution numérique est proposée en §2.3.2.4 ; nous analyserons deux types de schémas :

- une version rapide particulièrement adaptée au lissage des structures dont les orientations correspondent aux directions principales d'une image numérique.
- une version plus lente invariante aux rotations,

Finalement les deux schémas seront comparés en §2.3.2.5. Le choix des paramètres pour le modèle de §2.3.2.2 sera également discuté.

2.3.2.2 Modèle général

Le modèle général auquel nous nous intéressons est un processus itératif donné par [TBBLB04], [DTLB04] :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = c_{\xi} U_{\xi\xi} \\ \vec{\xi} = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta, |\xi| = 1 \\ c_{\xi} \in [-1,1] \\ \theta(x, y) = \theta, (x, y) \in W(x, y) \end{cases} \quad (2.33)$$

En (2.33) le vecteur de norme unitaire $\vec{\xi}$ indique la direction θ (2.21) des objets présents dans l'image analysée ; elle est obtenue en utilisant une ACP effectuée sur le champ des vecteurs gradients. La dernière hypothèse, sur l'invariance de l'orientation dans le voisinage $W(x,y)$, nous permet de quantifier localement le processus de diffusion sans tenir compte de changements locaux du champ d'orientations. Par la suite nous quantifierons dans $W(x,y)$ les valeurs de la fonction luminance par $U(\xi, \eta)$ où ξ et η représentent les coordonnées respectivement selon les directions du deuxième et du premier vecteur propre d'une ACP centrée sur (x,y) .

Dans ces conditions, le comportement du processus est contrôlé essentiellement par l'orientation θ et par la force de diffusion paramétrée par c_{ξ} ; ces propriétés induisent le comportement local de (2.33).

Toutes les méthodes analysées au Chapitre 1 utilisent comme paramètre de la force de diffusion une fonction de la norme du gradient qui limite le lissage dans les zones de forts gradients et, éventuellement, introduit un rehaussement.

Notre approche est différente, nous choisissons de contrôler la force du lissage par la valeur absolue de la dérivée directionnelle dans la direction de la structure U_{ξ} :

$$c_{\xi} = f(|U_{\xi}|) \quad (2.34)$$

où $f(\cdot)$ est une fonction dont la forme exacte sera explicitée par la suite. Pour l'instant posons seulement $f(0)=1$.

Les principales propriétés de U_{ξ} que nous allons exploiter sont :

- sa capacité à fournir une indication de la pertinence de l'orientation estimée,
- sa sensibilité au bruit réduite par rapport à $|\nabla U|$.

Nous allons montrer ces propriétés et définir la forme de la fonction $f(\cdot)$ sur un modèle de textures idéales dont l'orientation est définie en tout point.

Considérons une surface sinusoïdale d'orientation θ , de période T , avec une amplitude des oscillations égale à $\pm U_A$ et un niveau centré sur une valeur moyenne U_M :

$$\begin{cases} U(x, y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \\ U(x, y) = U_M + U_A \sin\left[\frac{2\pi}{T}(x \sin \theta - y \cos \theta)\right] \end{cases} \quad (2.35)$$

Considérons tout d'abord que la surface est non bruitée ; dans ce cas, la dérivée directionnelle de cette surface selon la direction fixe θ , s'exprime par :

$$\begin{aligned} U_\xi &= \frac{\partial U}{\partial \xi} = \nabla U \cdot \vec{\xi} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \theta = \\ &= \frac{2\pi}{T} U_A \sin \theta \cos \theta \cos\left[\frac{2\pi}{T}(x \sin \theta - y \cos \theta)\right] - \frac{2\pi}{T} U_A \sin \theta \cos \theta \cos\left[\frac{2\pi}{T}(x \sin \theta - y \cos \theta)\right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

U_ξ vaut donc 0 indépendamment de la norme du vecteur gradient. L'utilisation d'une fonction de type $c_\xi = f(U_\xi)$, ne modifie pas l'image car $U_{\xi\xi} = 0$.

Si par contre l'image est affectée par un bruit additif de valeur efficace inférieure à l'amplitude de l'oscillation sinusoïdale :

$$U^B(x, y) = U(x, y) + N(x, y) \quad (2.37)$$

il est toujours possible de retrouver l'orientation de la surface idéale en utilisant une ACP sur un support de taille suffisamment grande (§2.2.5.3).

La dérivée directionnelle s'exprime alors par :

$$U_\xi^B = \nabla(U + N) \cdot \vec{\xi} = \nabla U \cdot \vec{\xi} + \nabla N \cdot \vec{\xi} = 0 + \frac{\partial N}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial N}{\partial y} \sin \theta = N_\xi \quad (2.38)$$

La norme du vecteur gradient est supérieure à $|U_\xi^B|$:

$$|\nabla U^B| = \sqrt{(U_\xi^B)^2 + (U_\eta^B)^2} \geq |U_\xi^B| \quad (2.39)$$

Cependant l'utilisation de (2.39) comme argument de $f(\cdot)$ produira un lissage « sélectif » caractérisé par l'élimination préférentielle du bruit affectant des zones de faible gradient ; (2.38) permet un lissage identique en tout point, indépendamment de la position du pixel considéré, (point d'inflexion ou voisinage des lignes de crête), la force de diffusion étant essentiellement modulée par le niveau du bruit. Pour des valeurs faibles du bruit, afin de produire un lissage efficace, il semble donc naturel de choisir $f(\cdot)$ comme une fonction pratiquement constante et positive.

Analysons maintenant le cas de plusieurs surfaces d'orientations différentes. Sans perte de généralité, nous considérons que dans le voisinage du pixel étudié, il existe deux types de surfaces telles que définies en (2.35) $U_{1(2)}$, dont les orientations sont θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 \neq \theta_2$. En utilisant une ACP pour trouver l'orientation dominante (θ), nous obtenons une moyenne pondérée de $\theta_{1(2)}$ (§2.2.5.4). Pour un pixel placé sur l'une des deux textures, la dérivée directionnelle selon la direction fixe θ s'écrit par suite :

$$\begin{aligned} U_\xi &= \frac{\partial U_{1(2)}}{\partial \xi} = \nabla U_{1(2)} \cdot \vec{\xi} = \frac{\partial U_{1(2)}}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial U_{1(2)}}{\partial y} \sin \theta = \\ &= \frac{2\pi}{T} U_A \sin \theta_{1(2)} \cos \theta \cos\left[\frac{2\pi}{T}(x \sin \theta_{1(2)} - y \cos \theta_{1(2)})\right] \\ &\quad - \frac{2\pi}{T} U_A \sin \theta \cos \theta_{1(2)} \cos\left[\frac{2\pi}{T}(x \sin \theta_{1(2)} - y \cos \theta_{1(2)})\right] \\ &= \frac{2\pi}{T} U_A \cos\left[\frac{2\pi}{T}(x \sin \theta_{1(2)} - y \cos \theta_{1(2)})\right] \sin(\theta_{1(2)} - \theta) \end{aligned} \quad (2.40)$$

La dérivée directionnelle dépend donc de l'écart angulaire entre l'orientation estimée et l'orientation théorique. En valeur absolue, à part la dépendance de la position spatiale (crête ou contour) sa valeur est d'autant plus grande que l'erreur d'estimation d'orientation est grande. Par suite, nous pouvons penser faire le lien entre dérivée directionnelle et indicateurs de pertinence de l'orientation estimée. Néanmoins l'indication fournie par la dérivée directionnelle est inverse à celle fournie par les indicateurs de cohérence. Le choix d'une fonction $f(\cdot)$ non croissante doit permettre d'obtenir un lissage moins important dans les zones d'orientations multiples, limitant ainsi le mélange des structures au voisinage des frontières.

Il est à noter que cette discussion peut s'étendre au cas général des profils orientés de forme quelconque, bruités ou non.

Les deux contraintes imposées sur la fonction $f(\cdot)$ (pratiquement constante pour $|U_\xi|$ faible et non croissante pour des valeurs grandes de $|U_\xi|$), nous conduisent à rechercher le même comportement que la dérivée d'une fonction flux $\phi(s) = sg(s)$ dont la fonction $g(\cdot)$ est décroissante et paire.

Soit $U(x, y, t) = U$, le modèle de diffusion 1D que nous proposons en partant d'une image initiale U_0 consiste donc en :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} [g(U_\xi) U_\xi] \quad (2.41)$$

sous la condition initiale :

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y) \quad (2.42)$$

et avec l'interprétation directionnelle pour une orientation fixe θ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \underbrace{[g(U_\xi) + g'(U_\xi) U_\xi]}_{c_\xi} U_{\xi\xi} \quad (2.43)$$

En (2.41) et (2.42), le scalaire ξ représente la coordonnée selon la direction du deuxième vecteur propre de l'ACP $\vec{\xi} = (\cos \theta, \sin \theta)^T$.

Les choix possibles pour la fonction de diffusion $g(\cdot)$ incluent les fonctions discutées au Chapitre 1. Toutes les observations et les discussions présentées dans ce chapitre introductif restent ainsi valables. Nous allons retenir par la suite deux types de fonctions :

- fonctions de type Perona Malik dont les fonctions flux sont non monotones (§1.4.1.1).
- fonctions de type Green ou Aubert (§1.5.3) caractérisées par des fonctions flux non décroissantes.

Les premières permettent l'existence d'un rehaussement dans le processus de lissage contrairement aux dernières qui se traduisent par un lissage en tout point. Le modèle (2.41) correspond alors, en tout pixel, à une EDP mal posée ou bien posée, selon le type de fonction choisie.

Pour des valeurs faibles de U_ξ , indépendamment du choix de la fonction de diffusion, l'action du filtre de lissage directionnel se traduit par un lissage le long des directions fournies par l'ACP ; ce comportement est surtout observé dans les zones dont les variations d'orientations sont faibles. La différence essentielle correspond au mode de traitement des jonctions ; comme nous l'avons illustré plus haut, elles sont caractérisées par de fortes variations d'orientations et donc par des valeurs de dérivées directionnelles importantes. Pour une fonction de type Perona Malik, avec un seuil K_ξ , des valeurs $|U_\xi| > K_\xi$ conduisent à des coefficients de diffusion négatifs $c_\xi < 0$ et, donc, à un rehaussement. Le comportement du

filtre, pour des fonctions de type Green est différent, le coefficient reste positif en s'approchant de 0 ($c_\xi \cong 0$), limitant ainsi fortement le processus de lissage.

Le filtre (2.41) a donc un caractère général, le choix de la fonction $g(\cdot)$ dépend de l'application envisagée : lissage directionnel avec rehaussement ou préservation des jonctions.

2.3.2.3 Versions régularisées

Les hypothèses utilisées dans le paragraphe précédent ne sont pas toujours valables pour des images réelles. Des problèmes liés au biais de l'estimation de l'orientation et l'impossibilité de choisir des supports d'ACP de tailles infinies font apparaître les dérivées locales du signal dans U_ξ .

L'influence du biais se traduit par des orientations de structures qui ne sont pas toujours orthogonales aux vecteurs gradients. Par suite, l'action du filtre de lissage directionnel dépend aussi de la norme des vecteurs gradients en étant plus forte sur le bord des objets. L'utilisation des masques appropriés (§2.2.3) est donc primordiale pour retrouver les orientations correctes de diffusion et ne pas mélanger des structures voisines.

Dans le cas d'images bruitées, l'influence combinée du biais et de la taille finie de l'ACP ne permet pas, en général, de retrouver l'orientation exacte de l'image originale. La dérivée directionnelle U_ξ dépend ainsi des dérivées du signal et du bruit. Pour des bruits de niveau important cela se traduit par des valeurs de U_ξ importantes qui ne peuvent plus être associées de manière systématique aux ruptures d'orientations. Avec un filtre de lissage directionnel (2.41), dont la fonction flux est non monotone, un processus de rehaussement parasite peut être introduit pour des valeurs fortes de U_ξ .

La régularisation de l'image originale est donc nécessaire. Nous proposons l'utilisation de la même technique classique de pré lissage de Catté et al. antérieurement au calcul de l'argument de la fonction de diffusion. En notant par :

$$U_{\sigma_\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (G_\sigma * U)$$

la dérivée directionnelle de l'image lissée par un noyau gaussien d'écart type σ l'équation associée à la version régularisée est donc :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} [g(U_{\sigma_\xi}) U_\xi] \quad (2.44)$$

L'importance du lissage gaussien est liée à l'écart type mais également au temps d'arrêt de la diffusion isotrope.

L'interprétation directionnelle de type (2.44) n'est plus valide ($U_\xi \neq G * U_\xi$). En contrepartie, l'utilisation du pré lissage gaussien rend le filtre plus robuste au bruit, mais n'interdit pas le rehaussement (§1.4.2.1). Prenons le cas de la fraction rationnelle de Perona ; un développement simple de (2.44) conduit à :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{K^2}{U_{\sigma_\xi}^2 + K^2} U_{\xi\xi} - \frac{2K^2}{(U_{\sigma_\xi}^2 + K^2)^2} U_{\sigma_\xi\xi} U_\xi U_{\sigma_\xi} \quad (2.45.a)$$

Localement, en supposant que la dérivée seconde directionnelle de l'image lissée est proportionnelle à celle de l'image non lissée ($U_{\sigma_\xi\xi} = \alpha U_{\xi\xi}$) l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{K^2 + U_{\sigma_\xi}^2 - 2\alpha U_\xi U_{\sigma_\xi}}{(U_{\sigma_\xi}^2 + K^2)^2} U_{\xi\xi} \quad (2.45.b)$$

Dans le voisinage des jonctions, pour des noyaux de pré-lissage des tailles limitées, les dérivées directionnelles du premier et deuxième ordre sont élevées et possèdent le même signe et le coefficient de $U_{\xi\xi}$ en (2.45.b) peut être négatif et conduire à un rehaussement.

La capacité d'élimination du bruit est aussi étroitement liée à l'écart type σ . Pour des σ importants $U_{\sigma\xi\xi} \cong 0$ et le filtre a un comportement de type diffusion (2.45.a). Des précautions doivent être prises pour des images contenant des textures de fréquences différentes. Nous avons illustré en (§1.3) le fait que l'écart type doit être lié à la taille minimale des objets à conserver dans l'image lissée. De plus le déplacement des contours et des jonctions produit des structures qui n'existent pas dans l'image originale. Ce phénomène est d'autant plus important que la courbure locale est grande et σ important (Fig.2.9).

Le choix de σ doit être fondé sur un compromis entre la capacité d'élimination du bruit et l'existence de phénomènes de type rehaussement, avec pour objectif, l'obtention de modifications structurelles minimales dans l'image restaurée.

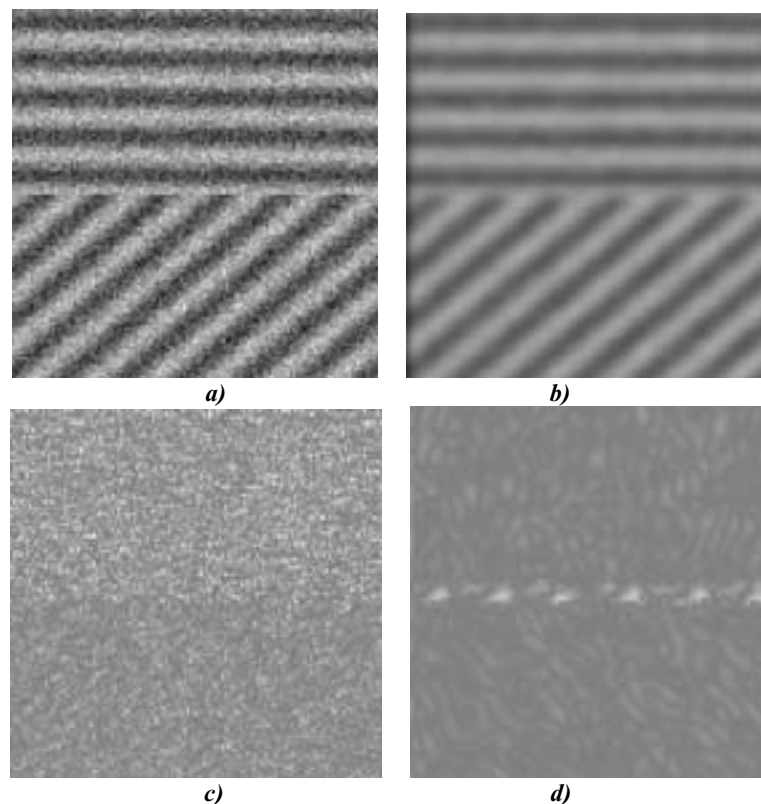


Fig.2.9- Dérivées directionnelles d'une image bruitée. a) Image originale. b) Lissage gaussien isotrope $\sigma=2.0$. c) Dérivées directionnelles de l'image originale. d) Dérivées directionnelles de l'image lissée.

2.3.2.4 Résolution numérique

Nous présentons deux types de schéma numérique pour l'implémentation du filtre de lissage directionnel avec rehaussement des jonctions. Nous traiterons le filtre présenté en (2.43) ; la généralisation à la version régularisée (2.44) est immédiate.

En considérant des fonctions flux non monotones, pour un seuil K_ξ donné et pour $|U_\xi| > K_\xi$, (2.41) produit un rehaussement ; afin de contrôler l'amplitude des oscillations induites, nous proposons des schémas numériques qui incluent un principe discret de maximum. Nous avons illustré au paragraphe §1.8 que ces types de schéma sont implicitement stables.

Le premier schéma est issu des nos travaux présentés en [TLBB02a], [TLBB02b] (4 voisinage) et [LTGDG03] (8 voisinage); il favorise les motifs orientés selon les directions principales d'une image numérique mais n'est pas invariant aux rotations. Nous proposons ensuite un nouveau schéma optimisé vis à vis de cette invariance.

Schéma numérique par interpolation des dérivées des fonctions flux

En [TLBB02b] et [LTGDG03] nous avons utilisé un formalisme différent pour le filtre de lissage 1D. L'équation correspondante est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[c(x, y, t)\nabla U^\theta] \tag{2.46}$$

En (2.46), nous notons $\nabla U^\theta = (U_x^{(\xi)}, U_y^{(\xi)})^T$ un vecteur gradient modifié dont les composantes sont construites en prenant les projections des composantes du vecteur gradient $\nabla U = (U_x, U_y)^T$ sur l'axe donnant la direction de la structure dont la construction est issue d'une Analyse en Composantes Principales.

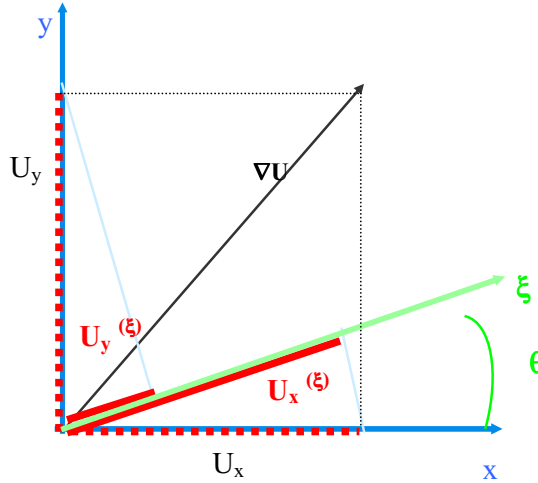


Fig.2.10- Projection des composantes du vecteur gradient.

La figure 2.10 permet l'interprétation géométrique des composantes du vecteur ∇U^θ pour des orientations de la structure $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dans ce cas $\nabla U^\theta = (U_x \cos \theta, U_y \sin \theta)^T$; ses composantes sont pondérées par des fonctions qui dépendent de l'orientation du deuxième vecteur propre de l'ACP. La norme de ∇U^θ penalise les vecteurs gradients qui ne sont pas en adéquation avec cette orientation.

(2.45) est ensuite développé en considérant une conductivité matricielle identique à celle utilisée par Perona et Malik:

$$c(x, y, t) = \begin{bmatrix} g\left(\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, t)\right) & 0 \\ 0 & g\left(\frac{\partial}{\partial y} U(x, y, t)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(U_x) & 0 \\ 0 & g(U_y) \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[c(x, y, t)\nabla U^\theta] = \frac{\partial}{\partial x}[g(U_x)U_x \cos \theta] + \frac{\partial}{\partial x}[g(U_y)U_y \sin \theta] \tag{2.48.a}$$

En considérant une orientation θ fixe dans le voisinage $W(x, y)$ du pixel courant, (2.48.a) conduit à :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} [g(U_x)U_x] + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} [g(U_y)U_y] \quad (2.48.b)$$

L'influence des deux axes sur le processus de diffusion est pondérée par des fonctions non linéaires.

Considérons à présent l'écriture présentée en (2.41). Supposons infini le nombre des orientations possibles sur une grille numérique. En identifiant chacune de ces orientations par un vecteur unitaire :

$$\vec{\xi}_k = \cos \theta_k \vec{i} + \sin \theta_k \vec{j} \quad (2.49)$$

(2.41) peut être approchée de manière directe par :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} [g(U_\xi)U_\xi] = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_k f_k(\theta_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} [g(U_{\xi_k})U_{\xi_k}] \quad (2.50)$$

où les fonctions $f_k(\theta)$ sont construites de manière à valoir 1 seulement si l'orientation estimée est proche de $\theta_k = \frac{\pi}{k} \bmod \pi$ et 0 pour des valeurs éloignées.

Il est à noter qu'un tel choix de décomposition d'un opérateur différentiel selon un nombre fixe de directions a également été employé par Alvarez et al., au niveau de la méthode numérique originale associée à leur filtre de lissage sélectif (§1.6.2) [ALM92].

Si le nombre de directions est fini et égal à M , l'égalité précédente n'est plus valable et (2.41) peut être approchée par une combinaison de dérivées des fonctions flux selon le nombre M fixe des directions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} [g(U_\xi)U_\xi] \approx \sum_{k=1}^M f_k(\theta_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} [g(U_{\xi_k})U_{\xi_k}] \\ \theta_k = k \frac{\pi}{M}, k \in \{0, 1, \dots, M-1\} \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Dans le cas particulier où $M=2$, $\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $f_0 = \cos \theta$ et $f_1 = \sin \theta$ nous retrouvons donc (2.48) ; ce modèle n'est donc qu'un cas particulier de l'approximation (2.51) de l'équation générale (2.41).

Si $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, les développements précédents sont identiques en considérant $\theta^* = \pi - \theta$, qui assure la positivité des fonctions d'interpolation $f_0 = \cos \theta^*$, $f_1 = \sin \theta^*$; une formulation équivalente pour le cas général $\theta \in [0, \pi) \bmod \pi$ revient à choisir $f_0 = |\cos \theta|$, $f_1 = |\sin \theta|$ [TLBB02a].

L'approximation (2.51) permet une extension immédiate à un plus grand nombre de directions. Considérons une discrétisation de type 8 voisinage : $M = 4, \theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$ et des fonctions d'interpolations de type non linéaires $f_k(\theta) = |\cos(a_k \theta + b_k)|$. Nous construisons les fonctions $f_k(\theta)$ pour qu'elles pénalisent l'éloignement de l'orientation estimée θ par rapport aux orientations θ_k . Pour une plus grande clarté nous allons représenter les orientations entre $[0, 2\pi]$ en tenant compte de leur caractère π -périodique.

Pour f_0 , nous imposons $f_0(0) = |\cos(b_0)| = 1$ et l'annulation de f_0 pour des écarts angulaires plus grands que les orientations $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$;

$f_0(\frac{\pi}{4}) = \left| \cos(a_0 \frac{\pi}{4} + b_0) \right| = 0$, $f_0(\frac{7\pi}{4}) = \left| \cos(a_0 \frac{7\pi}{4} + b_0) \right| = 0$. Ce système d'équations admet plusieurs solutions dont une consiste à choisir $f_0(\theta) = |\cos 2\theta|$. Pour des orientations plus éloignées la fonction vaut 0 en ramenant les orientations entre $[0, \pi]$:

$$f_0(\theta) = \begin{cases} |\cos 2\theta|, & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52.a)$$

En ce qui concerne le choix de f_1 , les conditions qui doivent être remplies sont : $f_1(\frac{\pi}{4}) = \left| \cos(a_1 \frac{\pi}{4} + b_1) \right| = 1$ et $f_1(0) = |\cos(b_1)| = 0$, $f_1(\frac{\pi}{2}) = \left| \cos(a_1 \frac{\pi}{2} + b_1) \right| = 0$. Une solution possible est :

$$f_1(\theta) = \begin{cases} \left| \cos(2\theta + \frac{\pi}{2}) \right|, & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52.b)$$

Un raisonnement similaire pour f_2 et f_3 conduit à :

$$f_2(\theta) = \begin{cases} |\cos(2\theta + \pi)|, & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52.c)$$

et:

$$f_3(\theta) = \begin{cases} \left| \cos(-2\theta + \frac{\pi}{2}) \right|, & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52.d)$$

Les fonctions d'interpolation respectant les conditions énoncées peuvent prendre différentes formes ; l'utilisation de fonctions de type sinusoïdal présente un intérêt particulier car en prenant la valeur absolue, le caractère π périodique des données directionnelles est traité de manière naturelle. Le filtre peut également être rendu plus sélectif en utilisant des puissances des fonctions d'interpolation.

La Figure 2.11 présente les fonctions d'interpolation (2.52) sous la forme d'un diagramme polaire.

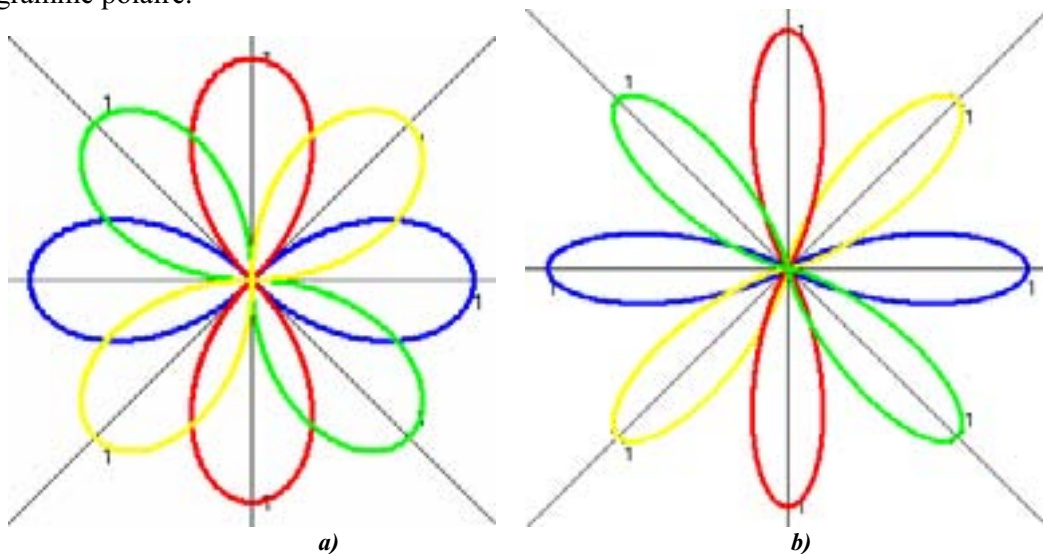


Fig.2.11- Fonctions d'interpolations non linéaires - cas de huit directions.

a) — f_0 — f_1 — f_2 — f_3
 b) — f_0^4 — f_1^4 — f_2^4 — f_3^4

L'approximation du filtre de lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions (2.51÷2.52) est donc exacte pour des motifs et textures orientées selon les directions principales d'une image représentée sur une grille carrée. Le filtre favorise ce type de configurations en détriment des objets dont les orientations sont de type $(2k+1)\frac{\pi}{8}$.

Dans le chapitre consacré aux résultats expérimentaux, nous illustrerons l'intérêt de ce type de discrétisation pour la restauration des gravures anciennes. En effet, comme l'exemple de la figure 2.8 le montre, ce type d'images contient la plupart du temps des structures orientées selon les directions principales.

Nous obtenons l'expression du filtre numérique en utilisant le schéma classique de la diffusion anisotrope :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} g(U_{\xi}) U_{\xi} \cong \sum_{k=1}^M f_k(\theta) \frac{\partial}{\partial \xi_k} [g(U_{\xi_k}) U_{\xi_k}] \\
 &\stackrel{(1.150)}{\cong} \sum_{k=1}^M f_k(\theta) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[g(U_{\xi_k}) \frac{U(\xi_k + d\xi_k/2, \eta) - U(\xi_k - d\xi_k/2, \eta)}{d\xi_k} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^M f_k(\theta) \left[g(U_{\xi_k}) \Big|_{\xi_k + d\xi_k/2} \frac{U(\xi_k + d\xi_k, \eta) - U(\xi_k, \eta)}{d\xi_k} - g(U_{\xi_k}) \Big|_{\xi_k - d\xi_k/2} \frac{U(\xi_k, \eta) - U(\xi_k - d\xi_k, \eta)}{d\xi_k} \right] \\
 &\cong \sum_{k=1}^M f_k(\theta) \{ g[U(\xi_k + d\xi_k, \eta) - U(\xi_k, \eta)] D_{\xi_k}^+(U) - g[U(\xi_k, \eta) - U(\xi_k - d\xi_k, \eta)] D_{\xi_k}^-(U) \} = \\
 &= \sum_{k=1}^M f_k(\theta) \{ g[D_{\xi_k}^+(U)] D_{\xi_k}^+(U) - g[D_{\xi_k}^-(U)] D_{\xi_k}^-(U) \}
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

En (2.53) $d\xi_k$ constitue un déplacement infinitésimal dans la direction de l'axe $\vec{\xi}_k$ et $D_{\xi_k}^+$ et $D_{\xi_k}^-$ sont les opérateurs d'approximation par différences progressives et régressives (1.138) et, respectivement, (1.141).

La méthode de résolution est explicite (§1.8.1.4).:

$$\begin{cases} U^{n+1} = U^n + dt \sum_{k=1}^M f_k(\theta) \{ g[D_{\xi_k}^+(U^n)] D_{\xi_k}^+(U^n) - g[D_{\xi_k}^-(U^n)] D_{\xi_k}^-(U^n) \} \\ U^0 = U_0 \end{cases} \tag{2.54}$$

En considérant $M=4$, le schéma numérique peut se mettre sous la forme d'un noyau de convolution. Dans ce cas : $d\xi_0 = d\xi_2 = 1$, $d\xi_1 = d\xi_3 = \sqrt{(d\xi_0)^2 + (d\xi_1)^2} = \sqrt{2}$ et par développement limité en série de Taylor :

$$U_{\xi_k \xi_k} = \frac{U_{\xi_k + d\xi_k} + U_{\xi_k - d\xi_k} - 2U_{\xi_k}}{d\xi_k^2} \tag{2.55}$$

pour que l'approximation soit consistante dans les directions diagonales, les fonctions d'interpolation suivant les directions $\vec{\xi}_1$ et $\vec{\xi}_3$ doivent être mise à l'échelle par une division supplémentaire par $\sqrt{2}$. Dans ce cas (2.54) s'écrit:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n * \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{dt f_3(\theta)}{2} g\left(\frac{U_{i-1,j-1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}}\right) & dt f_2(\theta) g(U_{i,j-1}^n - U_{i,j}^n) & \frac{dt f_1(\theta)}{2} g\left(\frac{U_{i+1,j-1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}}\right) \\ \hline dt f_0(\theta) g(U_{i-1,j}^n - U_{i,j}^n) & \alpha_c & dt f_0(\theta) g(U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n) \\ \hline \frac{dt f_1(\theta)}{2} g\left(\frac{U_{i-1,j+1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}}\right) & dt f_2(\theta) g(U_{i,j-1}^n - U_{i,j}^n) & \frac{dt f_3(\theta)}{2} g\left(\frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i,j}^n}{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

où le poids central α_c est donné par :

$$\begin{aligned} \alpha_c = & 1 - dt \{ 0.5 f_3(\theta) [g(\frac{U_{i-1,j-1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}}) + g(\frac{U_{i+1,j-1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}})] + 0.5 f_1(\theta) [g(\frac{U_{i+1,j-1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}}) + g(\frac{U_{i-1,j+1}^n - U_{i,j}^n}{\sqrt{2}})] \\ & + f_0(\theta) [g(U_{i-1,j}^n - U_{i,j}^n) + g(U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n)] + f_2(\theta) [g(U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n) + g(U_{i,j-1}^n - U_{i,j}^n)] \} \end{aligned} \quad (2.56)$$

L'intérêt de cette expression est d'assurer une condition de stabilité.

Proposition 1

Si $dt \leq \frac{1}{2[f_0(\theta) + f_2(\theta)] + [f_1(\theta) + f_3(\theta)]}$ le schéma (2.54) respecte un principe discret de maximum. Pour une image originale bornée sur son domaine de définition Ω si $m \leq \max_{(i,j) \in \Omega} U_{i,j}^0 \leq M$ alors pour tout n , $m \leq \min_{(i,j) \in \Omega} (U_{i,j}^{n+1}) \leq U_{i,j}^{n+1} \leq \max_{(i,j) \in \Omega} (U_{i,j}^n) \leq M$

Preuve :

La condition $dt \leq \frac{1}{2[f_0(\theta) + f_2(\theta)] + [f_1(\theta) + f_3(\theta)]}$ assure la positivité du coefficient de pondération du terme central. En effet, en considérant le cas le plus défavorable – fonctions de diffusion de valeur 1 : $\alpha_c = 1 - dt \{ 2[f_0(\theta) + f_2(\theta)] + [f_1(\theta) + f_3(\theta)] \}$ est toujours positif.

Pour $dt > 0$, en notant $\alpha_{m,l}$ les poids associés aux pixels voisins $m \in \{-1,1\}, l \in \{-1,1\}$, la valeur de l'intensité en niveaux de gris d'un pixel de coordonnées (i,j) s'exprime par :

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n \alpha_c + \sum_{p \in \{-1,1\}} \sum_{q \in \{-1,1\}} \alpha_{p,q} U_{p,q}^n \quad (2.57.a)$$

Soit $U_M^n = \max_{(p,q) \in W(i,j)} U_{p,q}$ la valeur maximale de la fonction luminance dans le 8 voisinage centrée en (i,j) . Pour des poids positifs :

$$U_{i,j}^{n+1} \leq [\alpha_c + \sum_{p \in \{-1,1\}} \sum_{q \in \{-1,1\}} \alpha_{p,q}] U_M^n \leq U_M^n \quad (2.57.b)$$

Une condition équivalente se déduit pour les minima U_m^n :

$$U_m^n \leq U_{i,j}^{n+1} \leq U_M^n \quad (2.58)$$

En sommant sur l'ensemble des pixels la démonstration de la proposition 1 est alors évidente. Elle garantit que le processus de rehaussement est stable, n'introduisant pas d'oscillation.

En pratique, pour des choix particuliers de fonctions de diffusion, une valeur exacte peut se déduire pour la valeur maximale de dt permettant d'assurer la condition de stabilité.

Seulement deux fonctions étant « actives » à un moment donné – une selon la direction horizontale ou verticale, l'autre selon l'une des directions diagonales- pour le choix présenté à la figure 2.11.a, la condition de stabilité s'impose pour le cas le plus défavorable, pour des textures orientées à $(2k+1)\frac{\pi}{8}$. Dans ce cas les valeurs des fonction

d'interpolation étant égales, la condition de stabilité est obtenue pour $dt \leq \frac{1}{3 \cos \frac{\pi}{8}} = 0.36$.

Dans le cas illustré à la figure 2.11.b, la condition de stabilité est déduite par un raisonnement similaire $dt \leq 0.45$.

Pour les versions régularisées du filtre de lissage nous employons le même schéma numérique en remplaçant les arguments de la fonction de diffusion par les versions lissées de l'image.

L'avantage essentiel de ce schéma est sa simplicité et sa rapidité ; elle donne par ailleurs des résultats de très bonne qualité dès lors que les objets sont orientés verticalement horizontalement ou diagonalement.

Schéma numérique par interpolation des intensités en niveaux de gris

Afin de rechercher un schéma numérique présentant de meilleures propriétés vis a vis de l'invariance aux rotations, nous exploitons dans ce paragraphe les liaisons entre les approximations par différences finies et la technique d'interpolation.

En dérivant ce schéma nous avons choisi de ne plus limiter les nombres des directions existantes par une approximation de type (2.51). Nous nous intéressons à des approximations de type :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g[D_{\xi}^+(U)]D_{\xi}^+(U) - g[D_{\xi}^-(U)]D_{\xi}^-(U) \tag{2.59}$$

avec:

$$D_{\xi}^+(U) = \frac{U(\xi + d\xi, \eta) - U(\xi, \eta)}{d\xi}; D_{\xi}^-(U) = \frac{U(\xi, \eta) - U(\xi - d\xi, \eta)}{d\xi} \tag{2.60}$$

Nous estimons en tout point la tangente à la surface dont l'orientation est donnée par une ACP. Ce choix correspond à des développements limités en série de Taylor selon la direction de la tangente à la surface calculée au niveau du pixel courant (Fig.2.12.a).

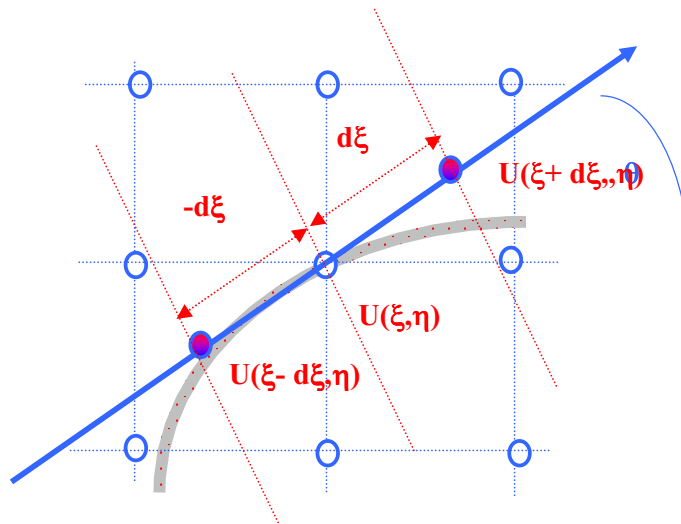


Fig.2.12.a- Profil orientée. Tangente au profil.

En considérant la direction $\vec{\xi}$ quelconque, l'estimation des valeurs $U(\xi + d\xi, \eta)$ et $U(\xi - d\xi, \eta)$ qui correspondent à un déplacement positif et négatif $d\xi$, nécessite une précision sub-pixel.

Les valeurs de la fonction luminance étant connues pour les nœuds de la grille rectangulaire, le problème est classique et il peut être résolu par interpolation.

Les techniques d'interpolation sont nombreuses dans la littérature, une classification et présentation complète pour les méthodes classiques peuvent être trouvées en [PTVF92].

L'utilisation des interpolations dans un processus itératif, nous conduit à nous intéresser à des schémas peu coûteux en temps de calcul avec une précision acceptable. De plus la préservation des discontinuités est une caractéristique intrinsèque de notre filtre.

Nous proposons une approche fondée sur des interpolations polynomiales . Ce type d'interpolation peut s'interpréter aisément dans le cadre des EDP's : prenons par exemple le cas 1D d'une fonction $U(x)$ connue par ses échantillons $U_1, U_2, \dots, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, \dots, U_N$ (Fig.2.12..b)

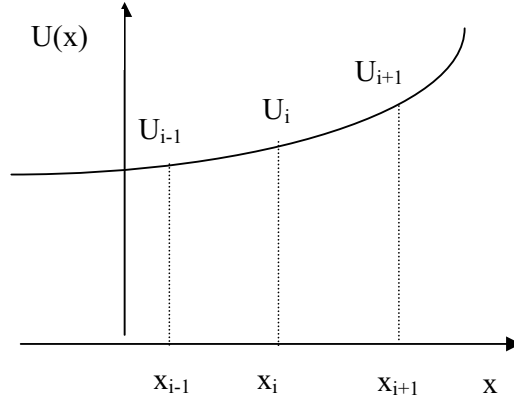


Fig.2.12.b - Interpolation polynomiale 1D.

La valeur interpolée pour un certain point x dépend de l'ordre du polynôme d'interpolation. En considérant une interpolation d'ordre 2, équivalent à un modèle de courbe parabolique en x_i :

$$U(x) = a + bx + cx^2 \quad (2.61)$$

la valeur de la fonction au point x peut se calculer par la formule classique de Lagrange [PTVF92].

Pour les trois échantillons de la figure 2.12b en connaissant les valeurs $U(x_{i-1}) = U_{i-1}; U(x_i) = U_i; U(x_{i+1}) = U_{i+1}$, elle s'exprime par :

$$U(x) = U_{i-1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} + U_i \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + U_{i+1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})} \quad (2.62 a)$$

En considérant un espacement uniforme des échantillons $\Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$, (2.62) se simplifie :

$$U(x) = U_{i-1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2\Delta x^2} - U_i \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{\Delta x^2} + U_{i+1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{2\Delta x^2} \quad (2.62 b)$$

La dérivée de la fonction $U(x)$ par rapport à x peut se développer par :

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x^2} [U_{i-1} \cdot (x-x_i + x-x_{i+1}) - 2U_i(x-x_{i-1} + x-x_{i+1}) + U_{i+1}(x-x_i + x-x_{i-1})] \quad (2.63)$$

sa valeur en x_i n'est que l'approximation de la dérivée de $U(x)$ par des différences centrales :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x)}{\partial x} \Big|_{x_i} &= \frac{1}{2\Delta x^2} [U_{i-1} \cdot (x_i - x_i + x_i - x_{i+1}) - 2U_i(x_i - x_{i-1} + x_i - x_{i+1}) + U_{i+1}(x_i - x_i + x_i - x_{i-1})] = \\ &= \frac{1}{2\Delta x^2} [-U_{i-1}\Delta x + U_{i+1}\Delta x] = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.64)$$

L'approximation est exacte, autant pour la fonction U que pour ses dérivées si la fonction d'interpolation est de même degré que le polynôme d'interpolation.

Pour l'extension dans le cas 2D nous utilisons la technique classique décrite en [PTVF92]; pour un polynôme d'interpolation d'ordre m , elle revient à effectuer $m+1$ interpolations monodimensionnelles dans une direction suivi par une interpolation de même ordre dans la direction orthogonale. :

En utilisant cette technique, pour un polynôme d'interpolation de type $f(x) = f(0) + 0.5 \cdot [f(1) - f(-1)]x + 0.5 \cdot [f(1) - 2 \cdot f(0) + f(-1)]x^2$ nous retrouvons les expressions des valeurs de la fonction luminance $U(\xi + d\xi, \eta)$ et $U(\xi - d\xi, \eta)$ pour des orientations positives et négatives (Tableau 2.1).

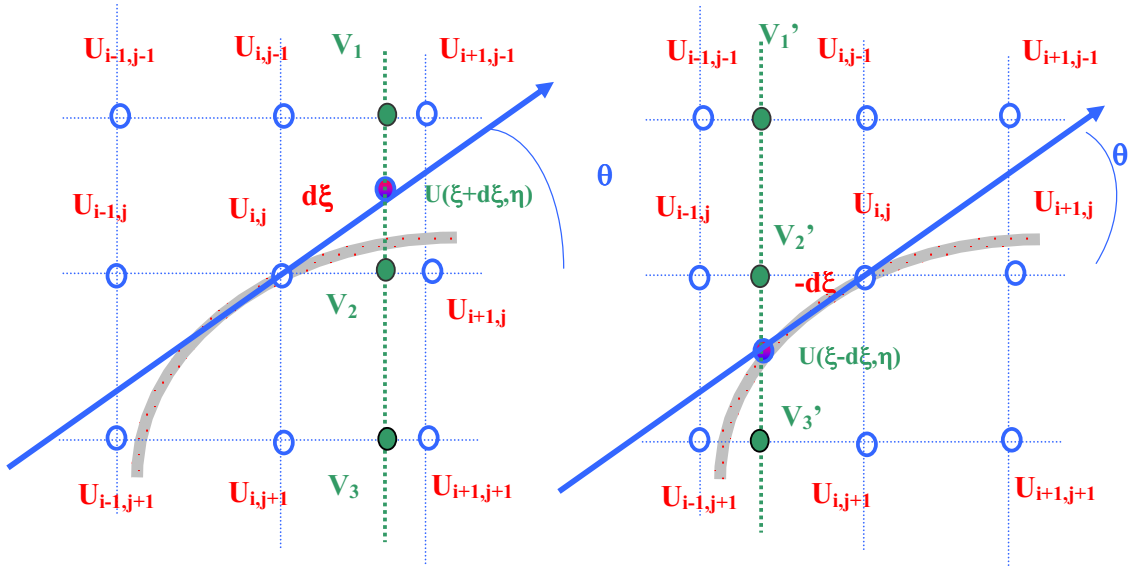


Fig.2.13- Estimation de la dérivée directionnelle U_{ξ} par interpolation des niveaux de gris. Orientations positives.

Tableau 2.1 Expressions de la fonction luminance en $(\xi + d\xi, \eta)$ et $(\xi - d\xi, \eta)$ [TBBLB04]

$V_1 = U_{i,j-1} + 0.5 \cdot [U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j-1}]d\xi \cos \theta$ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j-1} - 2 \cdot U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1}](d\xi \cos \theta)^2$	$V_1' = U_{i,j-1} - 0.5 \cdot [U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j-1}]d\xi \cos \theta$ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j-1} - 2 \cdot U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1}](d\xi \cos \theta)^2$
$V_2 = U_{i,j} + 0.5 \cdot [U_{i+1,j} - U_{i-1,j}](d\xi \cos \theta)$ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i+1,j}](d\xi \cos \theta)^2$	$V_2' = U_{i,j} - 0.5 \cdot [U_{i+1,j} - U_{i-1,j}](d\xi \cos \theta)$ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i+1,j}](d\xi \cos \theta)^2$
$V_3 = U_{i,j+1} + 0.5 \cdot [U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}](d\xi \cos \theta)$ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j+1} - 2 \cdot U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}](d\xi \cos \theta)^2$	$V_3' = U_{i,j+1} - 0.5 \cdot [U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}](d\xi \cos \theta)$ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j+1} - 2 \cdot U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}](d\xi \cos \theta)^2$
$U(\xi + d\xi) = V_2 + 0.5(V_1 - V_3)(d\xi \sin \theta)$ $+ 0.5(V_1 + V_3 - 2V_2)(d\xi \sin \theta)^2$	$U(\xi - d\xi) = V_2' - 0.5(V_1' - V_3')(d\xi \sin \theta)$ $+ 0.5(V_1' + V_3' - 2V_2')(d\xi \sin \theta)^2$

La figure 2.13 montre la signification des variables qui interviennent dans les calculs des dérivées de la fonction luminance pour des orientations positives. Les niveaux de gris V_1, V_2, V_3 nécessaires pour le calcul de $U(\xi + d\xi, \eta)$ s'obtiennent par des interpolations horizontales suivies par une interpolation verticale ayant comme support les valeurs V_1, V_2, V_3 . Un jugement similaire s'applique pour $U(\xi - d\xi, \eta)$.

Pour des orientations correspondantes aux orientations principales de la grille rectangulaire la différence $U(\xi + d\xi, \eta) - U(\xi - d\xi, \eta)$ et pour un déplacement $d\xi$ qui vaut 1 n'est que l'approximation de U_{ξ} par des différences centrales, à une multiplication près ; les valeurs de $D_{\xi}^{+}(U)$; $D_{\xi}^{-}(U)$ correspondent aux approximations progressives et régressives. Avec ces notations l'expression du filtre (2.41) peut s'écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g[U(\xi + d\xi, \eta) - U(\xi, \eta)][U(\xi + d\xi, \eta) - U(\xi, \eta)] - g[U(\xi, \eta) - U(\xi - d\xi, \eta)][U(\xi, \eta) - U(\xi - d\xi, \eta)] \quad (2.65)$$

Si l'orientation est quelconque, l'erreur d'approximation est étroitement liée à la qualité de l'interpolation effectuée. Pour des approches polynomiales, la qualité dépend de l'ordre. Dans [Lep03], pour des surfaces sinusoïdales, l'auteur utilise un ordre d'interpolation égal à 3. Nous considérons aussi ce cas et nous montrons à la figure 2.14 les diverses approximations de la dérivée directionnelle pour une image représentant des horizons concentriques de profil sinusoïdal. La figure 2.14.b montre la carte des orientations mesurées (représentation par une palette circulaire); La figure 2.14.c représente la dérivée directionnelle calculée en utilisant la définition (2.36), les figures Fig.2.14.d et e représentent respectivement les valeurs obtenues par une interpolation d'ordre 3 et 2. Les dérivées directionnelles ont été représentées en utilisant la valeur absolue et un gain de 4192 pour les images c) à e). L'orientation utilisée a été obtenue par une ACP à support carré de 7x7 pixels.

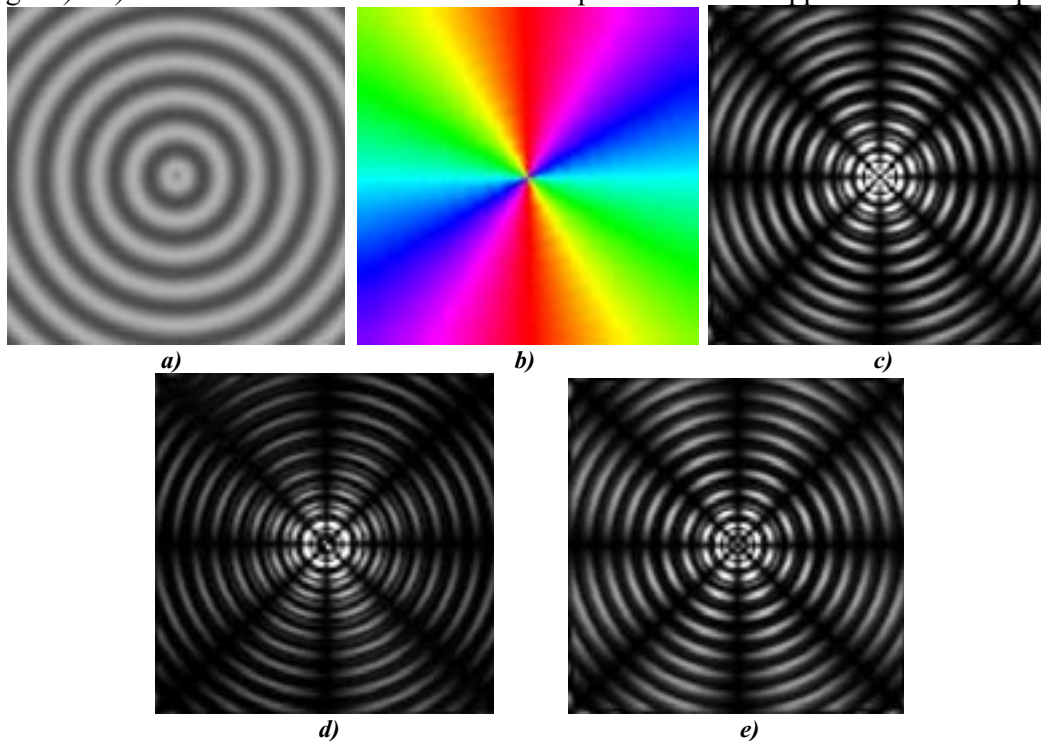


Fig.2.14- a) Horizons concentriques. b) Orientation. c) Dérivée directionnelle –définition d) Dérivée directionnelle –interpolation d'ordre 3. e) Dérivée directionnelle –interpolation d'ordre 2.

Pour obtenir le résultat présenté en figure 2.14.c nous avons utilisé des approximations par différences centrales finies pour les diverses composantes qui interviennent dans le calcul de la dérivée directionnelle ; par rapport à une interpolation d'ordre 3, celle d'ordre 2 permet une interprétation à travers ce type d'approximation (2.65) tout en expliquant la similarité des images Fig.2.14.c et Fig.2.14.e.

Nous jugeons que cet ordre est suffisant pour l'approximation de la dérivée directionnelle. De plus l'utilisation des ordres supérieurs augmente le temps de calcul, sans produire un gain considérable en terme de précision.

Pour résoudre (2.65) nous proposons toujours un schéma explicite en temps. Pour ce modèle numérique une relation d'ordre, entre les valeurs interpolées et les valeurs exactes données par les pixels placées sur la grille rectangulaire, n'est pas en général garantie ; cet aspect conduit à l'impossibilité d'imposer de manière automatique un principe de maximum. Néanmoins, en imposant une condition supplémentaire sur la valeur interpolée en la forçant à être inférieure au maximum des intensités des pixels appartenant au quadrant correspondant, aucun maxima autres que ceux de l'image originale ne peut être créé pour un pas de discrétisation en temps inférieur à 0.5. Le raisonnement est similaire pour les minima.

Pour la version non régularisée du filtre (2.41), ce schéma numérique nécessite 8 interpolations par pixel et est donc plus coûteux en temps de calcul. L'extension pour la version régularisée du filtre (2.42) est immédiate ; nous procédons de la même manière pour l'estimation des valeurs de l'image lissée, avec une résolution sub-pixel. Le nombre des interpolations devient ainsi égal à 16 par pixel analysé.

2.3.2.5 Comparaisons des deux schémas. Choix des paramètres

Mis à part les comparaisons liées au temps de calcul et à l'invariance aux rotations, nous nous intéressons à la capacité de chaque schéma à produire un résultat optimal au sens d'un critère objectif. Le choix des paramètres étant étroitement lié à cet optimum, nous traiterons simultanément ces deux aspects. Le nombre des paramètres et les liaisons non-linéaires existantes entre eux nous interdit toute étude analytique. Nous allons donc déduire de manière expérimentale des plages de variation optimales pour chacun des paramètres.

Un des paramètres les plus importants est la fonction de diffusion ; les principales fonctions ont été explicitées au Chapitre 1. En nous fondant sur la littérature, nous nous focalisons principalement sur les fonctions de type Perona Malik et notamment sur la fonction rationnelle (1.15) ; tous les développements qui suivent peuvent être généralisés aux autres types de fonctions.

Les autres paramètres mis en jeu sont :

- la taille du support de l'ACP : N
- la taille du noyau gaussien de pré-lissage : σ
- la barrière de diffusion : K_ξ
- le temps d'arrêt ou – équivalent - le nombre d'itérations

Le choix du temps d'arrêt est important. Comme nous l'avons illustré dans le premier chapitre, un temps d'arrêt élevé induit des simplifications de l'image. Or, nous cherchons à restaurer les images et donc à conserver les structures, voire à les rehausser. Afin de rendre le processus moins sensible au temps d'arrêt nous utilisons une barrière de diffusion décroissante définie à chaque itération comme le $\beta^{\text{ème}}$ quantile de la distribution des valeurs absolues des dérivées directionnelles. Pour une image donnée nous calculons –en tout point de l'image- les dérivées directionnelles dans les directions des deuxièmes vecteurs propres des ACP puis nous considérons la distribution des valeurs absolues des dérivées directionnelles. Pour β égal à 1, la barrière de diffusion est identique à la valeur maximale ; pour $\beta=0.5$, en supposant une distribution normale des dérivées directionnelles, la barrière de diffusion n'est que la valeur moyenne des valeurs absolues des dérivées directionnelles. Nous notons ce choix par :

$$K_\xi = K_\xi(t) = \inf \left\{ K : \frac{\text{Card} \left((x, y) \in \Omega / \left| \frac{\partial}{\partial \xi} U(x, y, t) \right| < K \right)}{\text{Card}(\Omega)} \geq \beta \right\} \quad (2.66)$$

Ce choix est fondé sur l'observation suivante : dans le cas des images pour lesquelles nous développons notre modèle, les variations principales des orientations se produisent pour

des intersections et des jonctions ; la surface occupée par ces zones est généralement négligeable par rapport à la surface de l'image qui présente des dérivées directionnelles plus élevées. Cette discussion est valable seulement si le bruit est relativement négligeable devant l'énergie du signal (dans le cas contraire, on peut penser que son effet est atténué par le pré lissage gaussien). Au fur et à mesure du processus de diffusion, l'influence du bruit est éliminée, la valeur de la barrière diminue et la force de diffusion également. Un modèle basé sur une barrière fixe est, par opposition, plus dissipatif, la force de diffusion étant constante avec le temps.

Nous déterminons la taille de l'ACP (N) de manière automatique en utilisant la méthode présentée au paragraphe §2.2.5.6 ; ce choix nous permet d'utiliser des tailles grandes pour des zones homogènes ; nous retrouvons ainsi les orientations de la texture en éliminant l'influence du bruit. De plus, comme nous l'avons montré, pour des zones qui contiennent des variations fortes d'orientation, la méthode permet de limiter l'arrondissement des coins. Nous utilisons une image d'orientation déterminée en partant de l'image originale sans l'actualiser dans le cadre du processus itératif. Une autre stratégie consiste à actualiser l'information directionnelle à chaque itération en utilisant des ACP de taille fixe.

Pour comparer nos deux schémas numériques, nous proposons le protocole expérimental suivant :

- soit une image de synthèse $U_0(x, y)$ de dimensions $M \times N$ pixels, nous la bruitons avec un bruit blanc gaussien additif $B(x, y)$: $U^B(x, y, 0) = U_0(x, y) + B(x, y)$. Soient U_M et U_m , respectivement, la valeur maximale et minimale de l'image originale.
- nous estimons l'orientation en utilisant la méthode du paragraphe §2.2.5.6 ou nous l'estimons à chaque itération
- nous implémentons le modèle général d'évolution (2.44) en utilisant les deux schémas numériques avec l'image bruitée comme condition initiale. Il est à noter que la version non régularisée du filtre est retrouvée en utilisant $\sigma = 0$.
- nous faisons varier tous les paramètres en recherchant une image filtrée $U(x, y, ndt)$ dont la valeur du rapport signal crête/ bruit ($PSNR$) soit maximal :

$$PSNR = 20 \log \frac{U_M - U_m}{RMSE} \quad (2.67)$$

En (2.67) nous avons dénoté par $RMSE$ la racine de l'erreur moyenne quadratique dont l'expression est :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{m.n} \sum_i \sum_j [U(x, y, ndt) - U_0(x, y)]^2}$$

Ce choix est motivé par les travaux présentés en [ASS02] : le $PSNR$ est un critère qui permet d'approcher la qualité de l'image perçue à travers le système visuel humain ; en général, on considère dans la littérature qu'une différence de 0.5dB en termes de $PSNR$ est perceptible. Nous reparlerons de ce critère dans le chapitre 3, consacré aux résultats expérimentaux.

Des centaines d'expériences sur des images de synthèse présentant des structures orientées de divers profils et orientations ont été menées. En partant d'un pavage de Voronoi avec un nombre préétabli de germes, nous avons généré des textures en faisant varier aléatoirement 3 paramètres : la période, l'amplitude et l'orientation. Les surfaces générées n'ont pas de profil particulier, la seule condition que nous avons imposée est l'existence de l'orientation en tout pixel. Le critère d'arrêt correspond simplement au nombre d'itérations conduisant à la maximisation du $PSNR$.

Les figures et tableaux suivants illustrent les résultats représentatifs du comportement des processus de lissage.

Le premier exemple concerne une image présentant trois textures d'amplitudes, de périodes et d'orientations aléatoires. Nous considérons tout d'abord un bruit blanc gaussien d'écart -type $\sigma_b = 20$; pour ce cas nous représentons en Fig.2.15 a) b),c),d) sous la forme d'une surface 3D le meilleur PSNR obtenu pour les deux schémas numériques en faisant varier les différents paramètres de la méthode. Chaque schéma présente le PSNR en fonction des valeurs du paramètre β et de l'écart type du noyau gaussien de pré lissage.

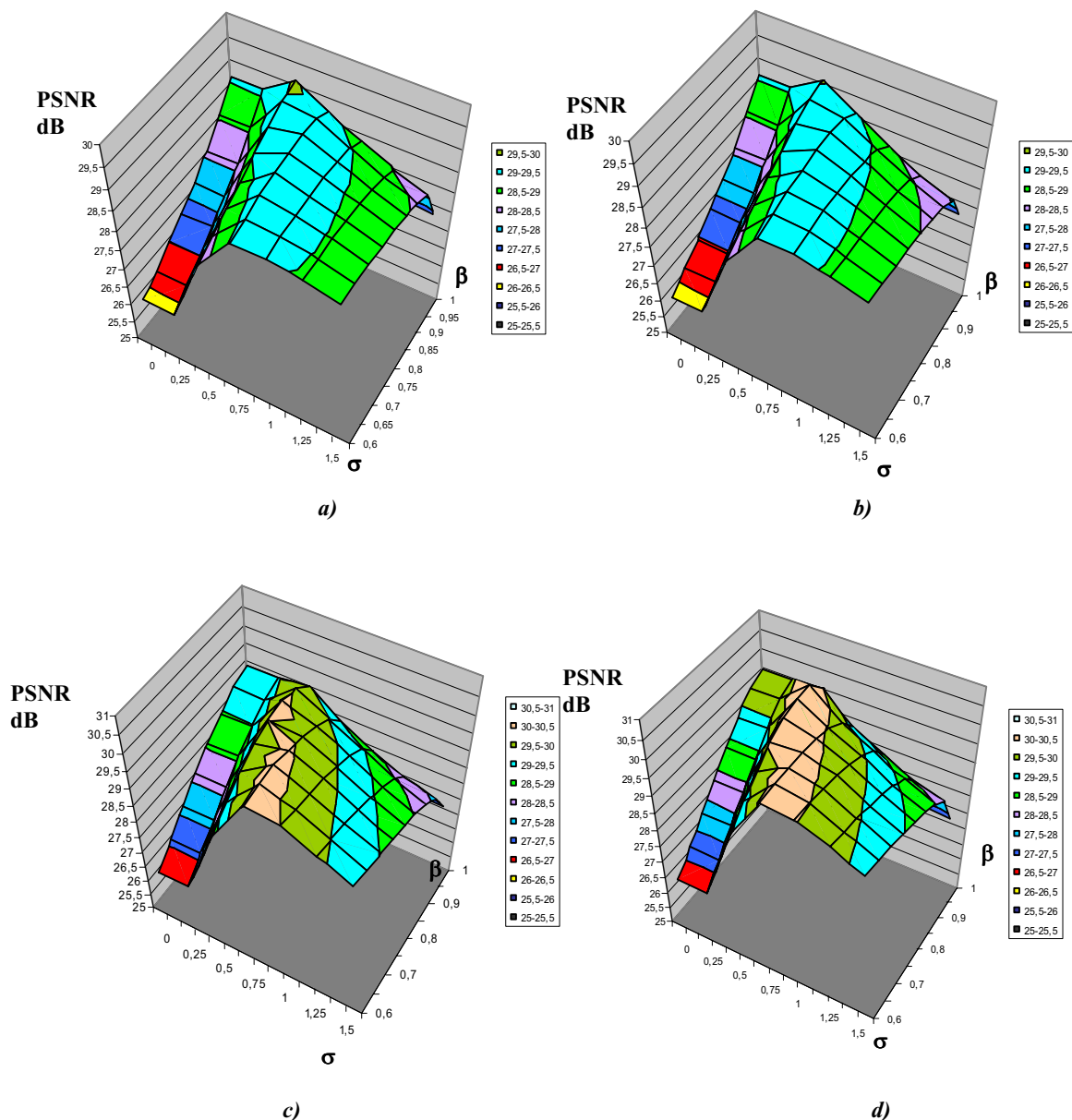


Fig.2.15-Choix des paramètres- exemple 1-bruit blanc d'écart type $\sigma_b = 20.0$ - Variation du PSNR en fonction des paramètres -ACP de taille 7x7
 a)-b) Schéma par interpolation des dérivées des fonctions flux :
 Image d'orientation fixe(a) et image d'orientation calculée à chaque itération (b) ;
 c)-d) Schéma par interpolation des niveaux de gris :
 image d'orientation fixe (c) et image d'orientation calculée à chaque itération (d) ;

Nous répétons la même expérience en considérant un niveau du bruit plus fort $\sigma_b = 30$.

La variation du PSNR pour chaque schéma numérique et pour chaque méthode d'estimation d'orientation est illustrée en Fig.2.15 e)-h)

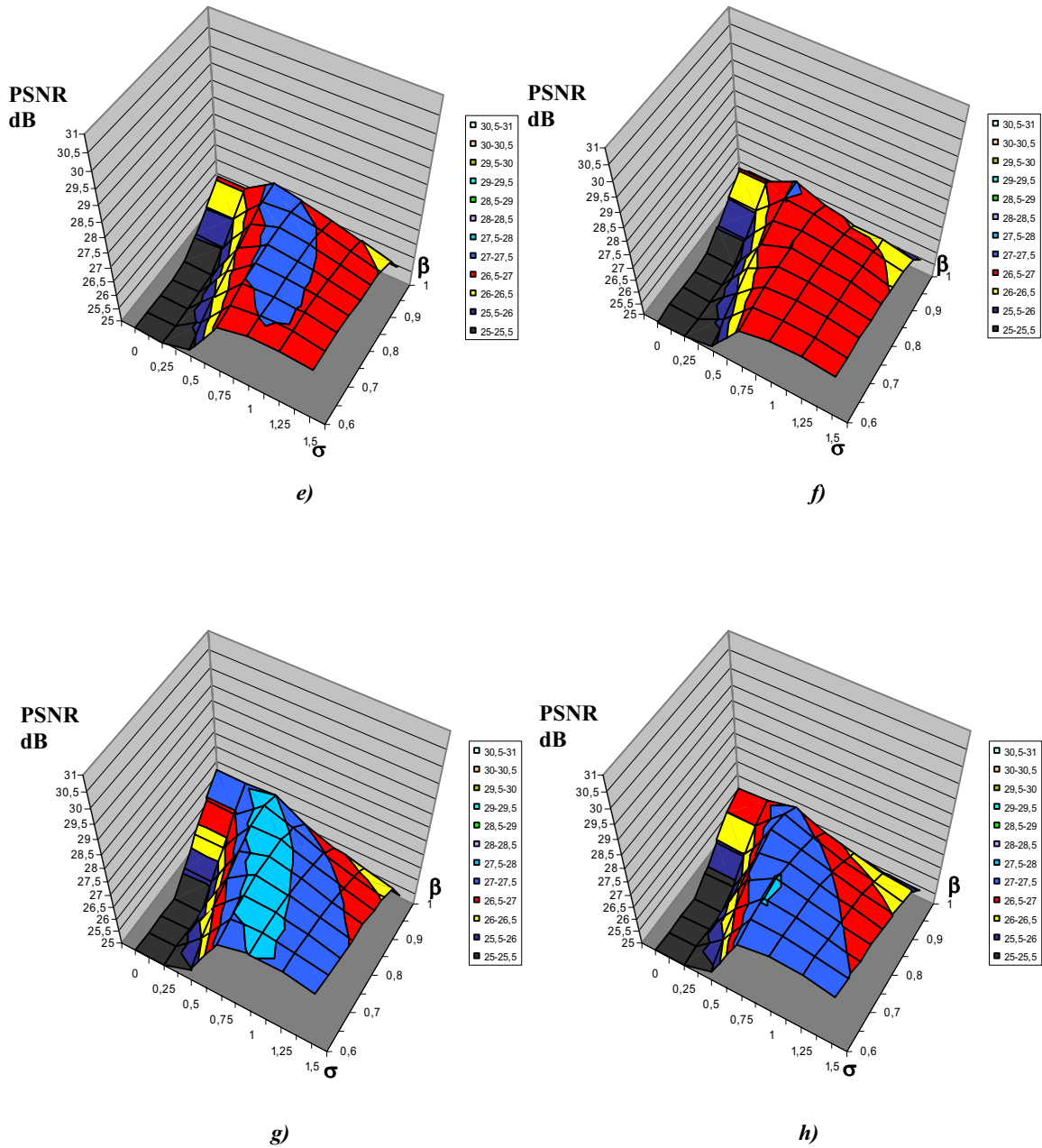


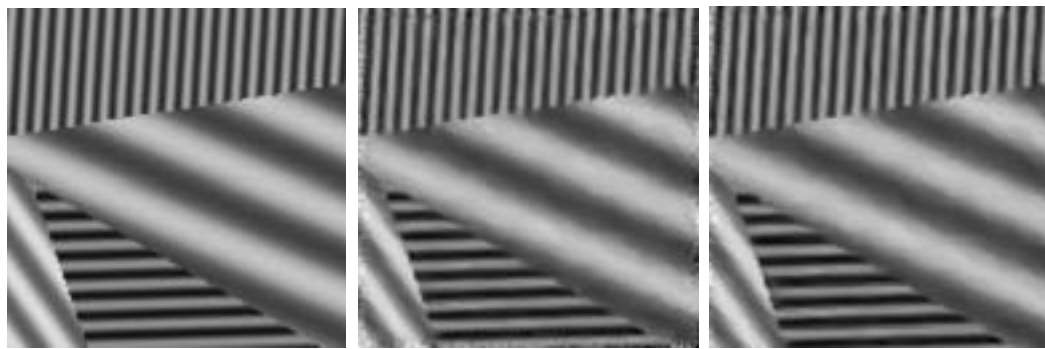
Fig.2.15 (cont.) -Choix des paramètres-exemple1-bruit blanc $\sigma_b=30.0$.
e)-f)Schéma par interpolation des dérivées des fonctions flux :
Image d'orientation fixe (e) et image d'orientation calculée à chaque itération -ACP de
taille 7x7 (f).
g)-h) Schéma par interpolation des niveaux de gris :
Image d'orientation fixe (g) et image d'orientation calculée à chaque itération -ACP
de taille 7x7 (h).

Le *Tableau 2.2* présente les meilleures valeurs obtenues dans les deux situations de bruits et les paramètres correspondant. La figure.2.16 permet de visualiser les images utilisées et les meilleurs résultats obtenus.

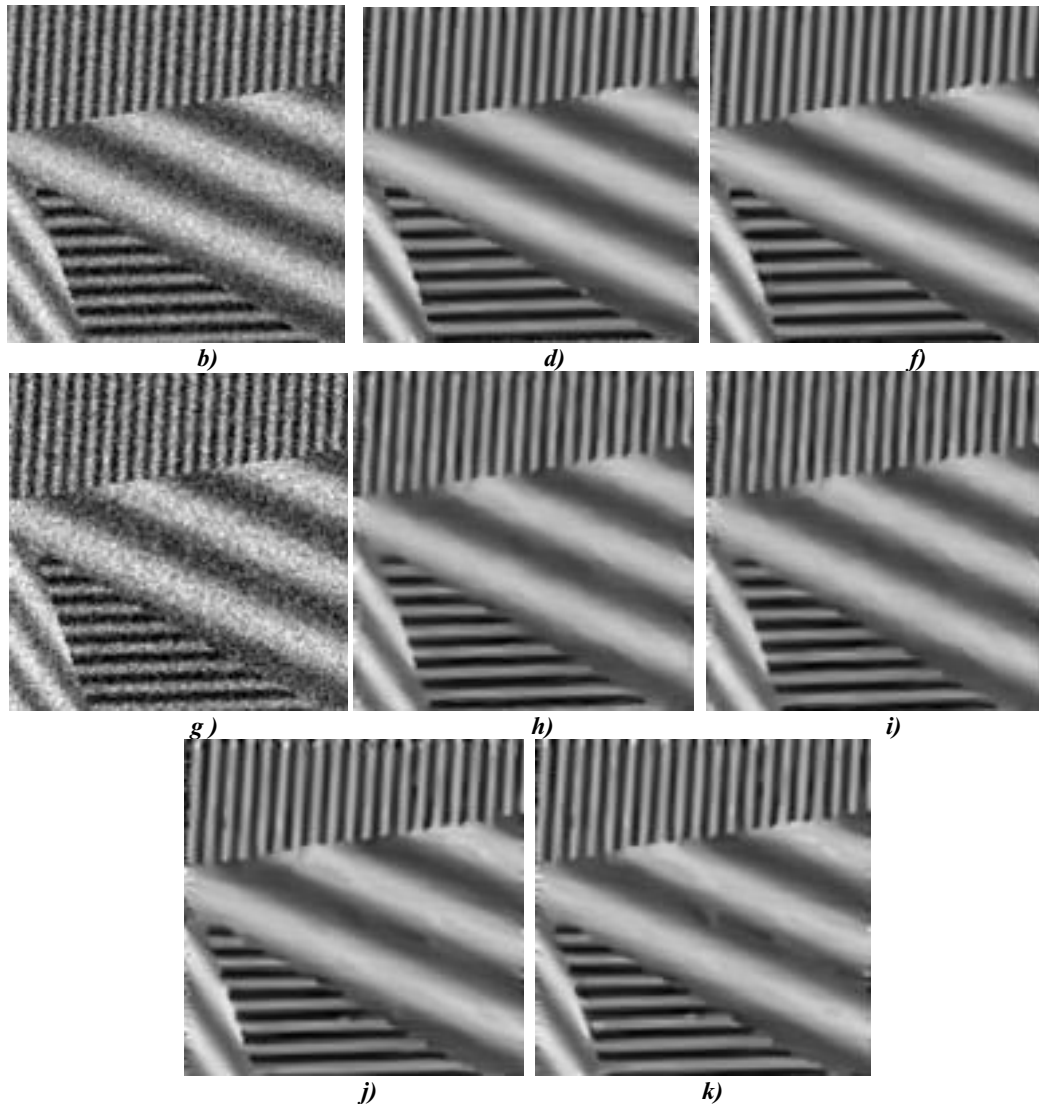
L'exemple illustre les principales propriétés des approches numériques proposées. Pour les textures verticales et horizontales, les résultats sont très proches, le gain du deuxième schéma numérique – presque de 1dB pour l'image légèrement bruitée et de 0.5 dB pour l'image avec un bruit plus fort - est essentiellement lié à la meilleure reconstruction de la zone centrale des images, contenant un texture orientée à -22 degrés. Ce cas est critique pour le premier schéma qui produit une légère irrégularité ; néanmoins le gain en temps de calcul (dernière colonne du *Tableau 2.2*) est important, ce schéma étant trois fois plus rapide que le schéma par interpolation des niveaux de gris. Les valeurs effectives du temps de calcul n'ont pas une signification physique, mais la comparaison des deux valeurs est une indication de la rapidité des algorithmes associés. Les temps de calcul sont donnés pour une implantation sur un processeur Intel Pentium 3 à 1GHz.

Tableau 2.2. Paramètres optimaux

<i>Image</i>	<i>Schéma par interpolation de :</i>	<i>No.</i>	<i>Méthode d'estimation d'orientation</i>	<i>Nombre d'itérations</i>	<i>Facteur β</i>	<i>Ecart - type du noyau gaussien</i>	<i>PSNR</i>	<i>Temps de calcul / temps par itération</i>
<i>bruit - $\sigma=20$ PSNR=20.69 dB 128x128</i>	<i>-dérivées fonction flux</i>	-1-	<i>fixe</i>	19	0.95	0.5	29.57 dB	1.17s / 0.06 s
		-2-	<i>estimée à chaque itération</i>	19	0.95	0.5	29.51 dB	2.28 s / 0.12 s
	<i>-niveaux de gris</i>	-3-	<i>fixe</i>	55	0.85	0.5	30.45 dB	12.34 s / 0.23 s
		-4-	<i>estimée à chaque itération</i>	61	0.75	0.75	30.17 dB	16.4 s / 0.27 s
<i>bruit - $\sigma=30$ PSNR=17.12 dB 128x128</i>	<i>-dérivées fonction flux</i>	-5-	<i>fixe</i>	25	0.95	0.5	27.14 dB	1.5 s / 0.06 s
		-6-	<i>estimée à chaque itération</i>	26	0.95	0.5	27.06 dB	3.04 s / 0.12 s
	<i>-niveaux de gris</i>	-7-	<i>fixe</i>	65	0.75	0.75	27.81 dB	14.64 s / 0.23 s
		-8-	<i>estimée à chaque itération</i>	65	0.75	0.75	27.53 dB	17.60 / 0.27 s



*a) Image originale 128x128 pixels.
c) Résultat - 1. e) Résultat - 2.*



*Fig.2.16(cont.)- b) Image bruitée –bruit blanc gaussien $\sigma=20.0$.
 d) Résultat - 3. f) Résultat – 4. g) Image bruitée – bruit blanc gaussien $\sigma=30.0$.
 h) Résultat- 5. i) Résultat – 6. j) Résultat - 7 ; k) Résultat – 8.*

Analysons maintenant l'influence des divers paramètres. Pour ce type d'images qui contiennent un nombre relativement faible d'intersections, les valeurs absolues des dérivées directionnelles sont faibles ; par suite, nous obtenons des valeurs grandes pour le pourcentage β . L'influence du choix de β est illustré directement par les représentation graphiques de la *Figure 2.15*. Notons l'aspect de type plateau des surfaces représentant le meilleur PSNR obtenu pour des pourcentages $\beta \in [0.75,1)$. Les variations du PSNR sont inférieures à 0.5 dB, produisant des valeurs, donc, très proches.

L'influence de l'écart -type du noyau gaussien de pré -lissage peut être aussi quantifiée par l'allure des graphiques. Les maximums s'obtiennent de manière prépondérante pour des valeurs faibles de ce paramètre. Les valeurs typiques sont comprise entre 0,5 et 0,75 correspondant à des voisinages de 3x3 ou 5x5 pixels : des noyaux de dimension plus importante éliminent les détails de l'image.

Les graphiques et les résultats du *Tableau 2.2* montrent également que l'actualisation de l'information directionnelle à chaque itération n'est pas vraiment nécessaire. Nous avons

choisi une taille de 7x7 pixels pour l'ACP pour montrer comment une taille qui n'est pas adaptée à la fréquence des textures peut produire des résultats moins bons que ceux obtenus en utilisant une approche dédiée pour traiter cet aspect (§2.2.5.6). La taille de 7x7 pixels est inférieure à la moitié de la période de la texture centrale, et conduit à produire de fausses orientations au milieu des motifs présentant des PSNR faibles. Ce phénomène, essentiellement observé pour le schéma par interpolation des niveaux de gris, peut se corriger en utilisant des tailles plus grandes, mais, dans ce cas, l'effet d'arrondissement des coins sera plus important. Notons aussi que l'actualisation de l'information directionnelle à chaque itération augmente le temps de calcul. Cette augmentation est importante pour le premier schéma et négligeable pour le deuxième. Cette relative indépendance de l'actualisation de l'information directionnelle correspond aux travaux présentés dans [SaA01] sur le comportement de la CED.

Enfin, les résultats du *Tableau 2.2* confirment un résultat attendu : le temps d'arrêt optimal est lié au niveau de bruit présent dans l'image. Les valeurs plus faibles associées au schéma par interpolation des fonctions flux s'expliquent aussi par la présence d'une texture dont l'orientation est critique. Dans cette zone le deuxième schéma, en retrouvant une valeur proche de la dérivée directionnelle (presque nulle pour cette région), nécessite un plus grand nombre d'itérations.

En ce qui concerne l'évolution de la barrière de diffusion et son influence sur le PSNR, la figure 2.17 montre les valeurs maximales du PSNR obtenues pour les approches 1 et 3 (*Tableau 2.2*) en utilisant à la fois un barrière fixe et une barrière adaptative. Le paramètre β est celui donné par la valeur optimale du PSNR.

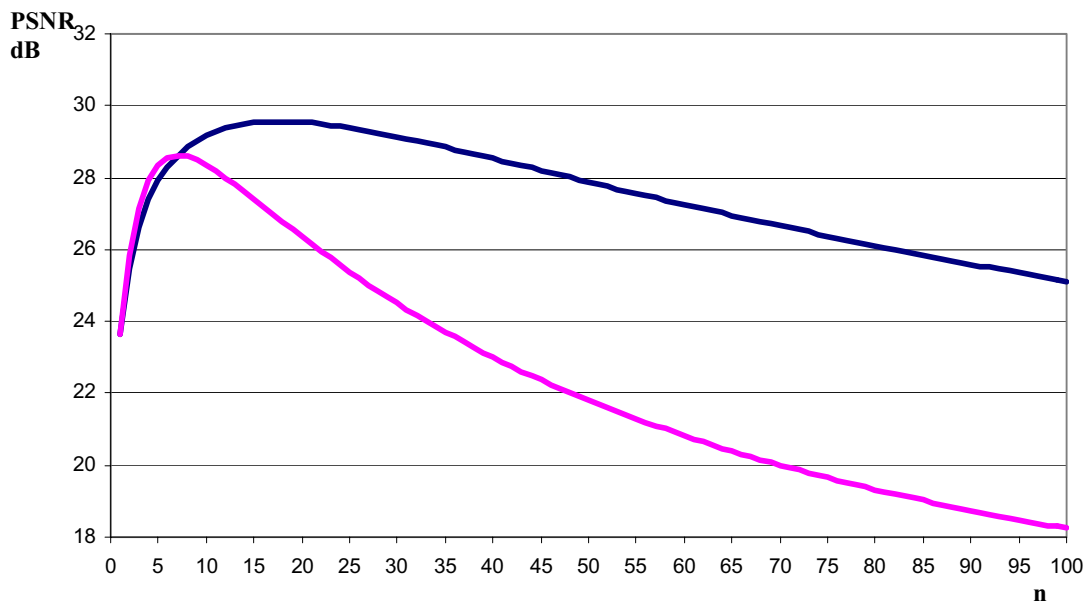


Fig.2.17.a- Evolution du PSNR pour une barrière fixe — et dépendante — du temps. Schéma par interpolation des dérivées des fonctions flux- résultat 1 du Tableau 2.2.

Les graphiques justifient notre choix d'une barrière de diffusion adaptative et montrent un autre avantage du schéma par interpolation des niveaux de gris : il converge vers un état stable correspondant à une plage relativement large du nombre d'itérations. En utilisant une barrière adaptative dont l'évolution est présentée en Fig2.17.c, les deux modèles sont moins sensibles au choix du temps d'arrêt.

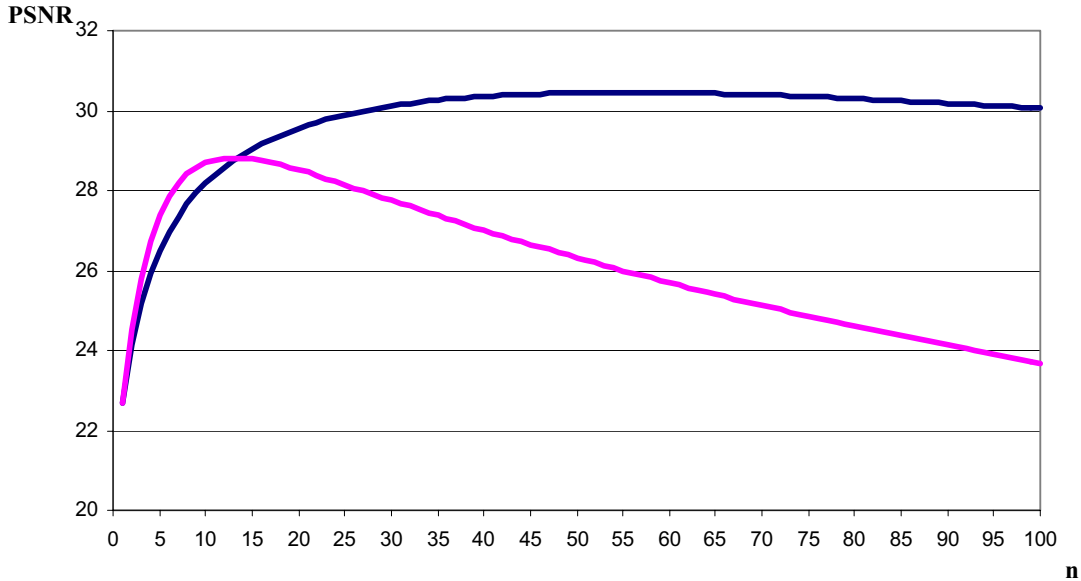


Fig.2.17.b - Evolution du PSNR pour une barrière fixe — et dépendante — du temps. Schéma par interpolation des niveaux de gris - résultat 3 du Tableau 2.2.

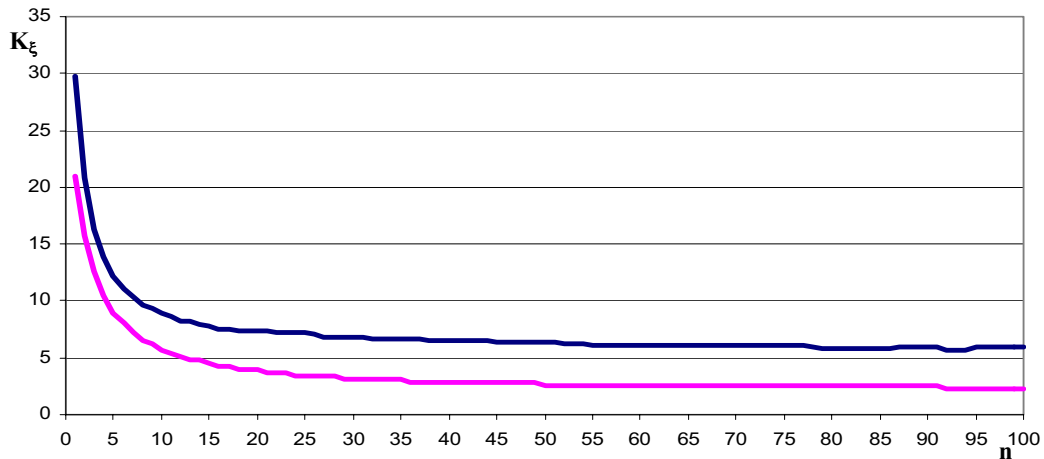


Fig.2.17.c - Evolution en temps de la barrière de diffusion — schéma par interpolation des dérivées des fonctions flux — schéma par interpolation des niveaux de gris.

Nous présentons un deuxième exemple, proche des situations rencontrées dans le cas d'images réelles. Nous avons synthétisé une image non différentiable sur ses contours et qui n'accepte pas de modèles de surfaces dont la dérivée directionnelle $U_\xi \neq 0$ même pour des zones avec des orientations constantes. Le comportement des deux schémas sera observé sur une version bruitée de l'image originale avec un bruit additif gaussien d'écart type $\sigma_b = 50.0$ (Fig. 2.18). Les contours présents dans cette figure sont irréguliers (Fig. 2.18.b) et par conséquent de dérivées directionnelles non nulles.

Le protocole expérimental est similaire au précédent à la différence que nous utilisons uniquement le calcul d'orientation décrit au paragraphe §2.2.5.6 sans recalculer l'orientation à chaque itération. Le lien entre la qualité du résultat (PSNR) et les paramètres est représenté, respectivement pour les deux méthodes aux figures 2.19.a et b. Les valeurs optimales sont données au Tableau 2.3. Finalement nous montrons en Fig.2.20.a et b les meilleurs résultats.

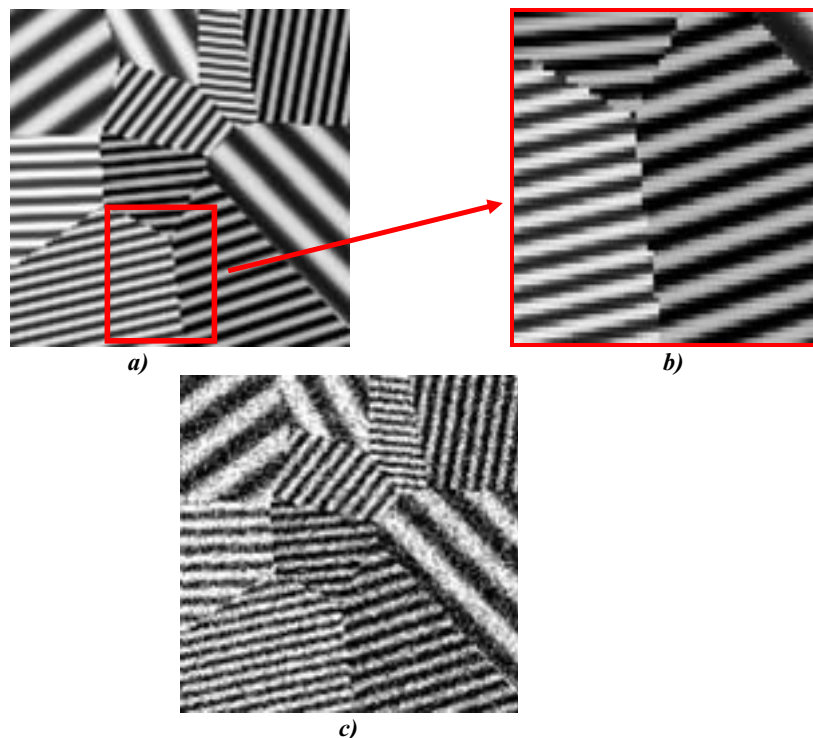


Fig.2.18- a)Image originale 128x128. b)Détail. c) Image bruitée- bruit blanc gaussien $\sigma=50.0$.

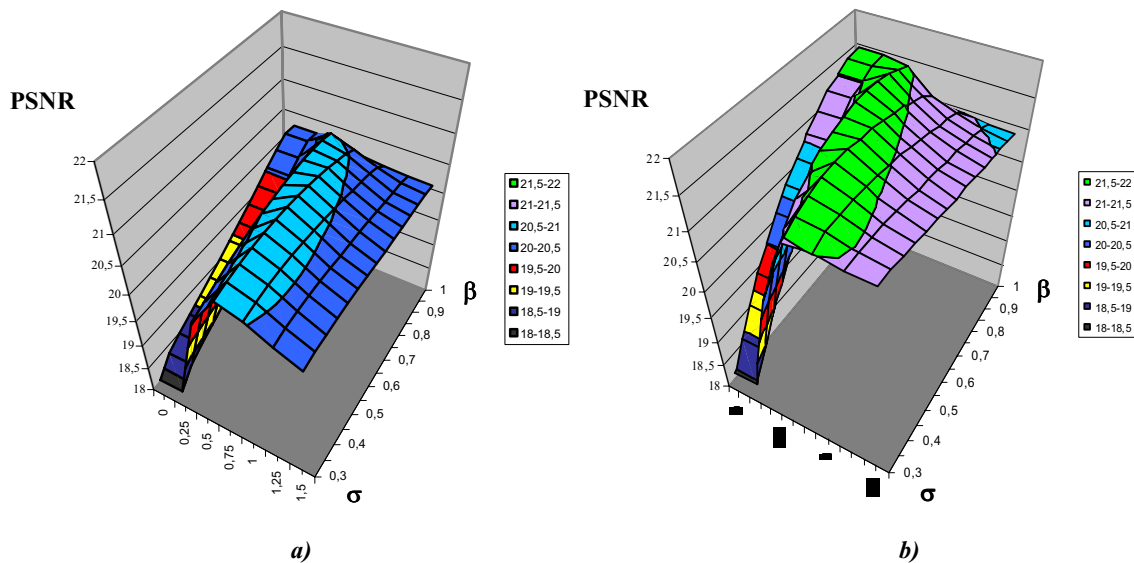


Fig.2.19- Choix des paramètres-exemple2-bruit blanc $\sigma=50.0$

a)Variation du PSNR en fonction des paramètres –schéma par interpolation des dérivées des fonctions flux.
 b)Variation du PSNR en fonction des paramètres –schéma par interpolation des niveaux de gris.

Tableau 2.3. Paramètres optimaux

Schéma par interpolation de :	Nombre d'itérations	Facteur β	Ecart - type du noyau gaussien	PSNR
-dérivées fonction flux	14	0.5	0.75	20.78 dB
-niveaux de gris	19	0.5	0.75	21.78 dB

Les paramètres optimaux sont différents de ceux observés pour le premier exemple. Si l'écart type optimal du noyau gaussien est pratiquement identique, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le maximum est plus faible. Cela peut s'expliquer par la nature de l'image traitée : les dérivées directionnelles non nulles sur les bords des objets induisent un lissage de ces bords, la diffusion directionnelle ayant tendance à produire des contours lissés qui s'éloignent des contours originaux caractérisés par des discontinuités (Fig.2.18.b). Le lissage non nul des bords peut être limité par une diminution de la barrière de diffusion, mais , dans ce cas, la méthode aura tendance à préserver les régions caractérisées par des rapports signal/bruit faibles.

Ce phénomène, associé au plus grand nombre d'intersections entre textures conduit à des valeurs de β plus faibles que précédemment : $\beta \in [0.4, 0.75]$ pour un écart type $\sigma \in [0.5, 0.75]$.

Les résultats illustrés à la figure 2.19 sont en concordance avec ceux du *Tableau 2.3* : la différence de 1 dB est clairement visible entre les deux images. Ce résultat est explicable par le fait que la plupart des motifs de l'image ne sont pas orientés selon les directions de la grille de points. Une autre conclusion que nous jugeons importante est que, pour ce type d'images, la convergence du processus vers un état stable n'est pas généralement garantie (Fig. 2.21).

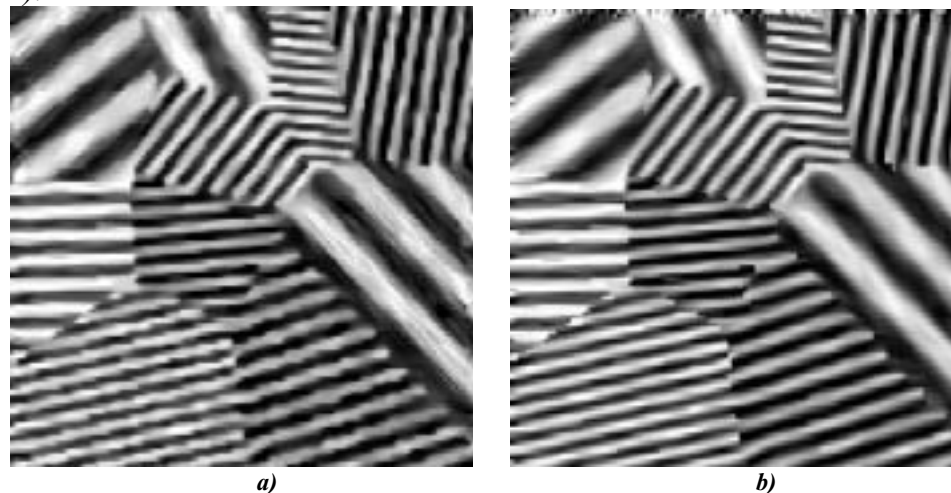


Fig.2.20- a) Résultat optimal en utilisant le schéma par interpolation des dérivées des fonctions flux a).
 b) Résultat optimal en utilisant le schéma par interpolation des niveaux de gris (taille réelle).

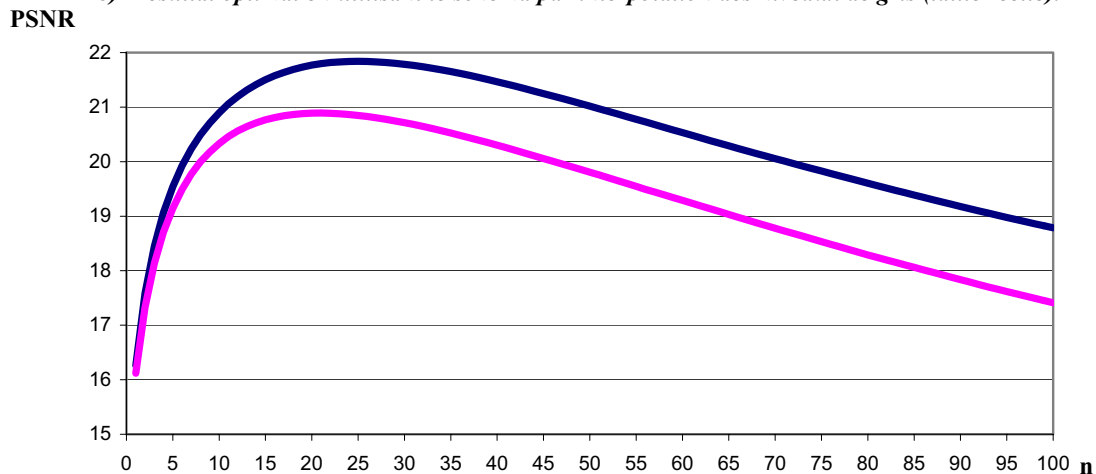


Fig.2.21- Evolution du PSNR pour une barrière dépendante du temps — schéma par interpolation des dérivées des fonctions flux ; — schéma par interpolation des niveaux de gris

2.3.3 Lissage directionnel 2D avec rehaussement des jonctions et des contours

2.3.3.1 Introduction

Nous proposons une méthode dédiée à la fois au lissage et au rehaussement des images ne contenant pas uniquement des structures 1D. C'est le cas, par exemple, des images qui contiennent des structures filaires mais aussi des fonds bruités. Nous montrons un exemple d'une telle image et l'effet du lissage présenté dans le paragraphe précédent à la figure 2.22. L'approche numérique par interpolation des niveaux de gris a été utilisée.

La méthode restaure les structures allongées en supprimant le bruit et en conservant les intersections ; par contre, le fond de l'image est moins bien filtré. Le fond est caractérisé par des orientations aléatoires ce qui induit au cours du filtrage la création de structures filaires cohérentes de plus en plus perceptibles en fonction du temps de diffusion.

Nous cherchons à corriger ce défaut de la méthode 1D en utilisant la même approche générale (2.31) mais en ajoutant une « dimension » de diffusion –selon la direction du premier vecteur propre de l'ACP-. Finalement, pour chaque pixel, nous utilisons 2 directions de diffusion d'où le nom proposé pour cette méthode. Nous présenterons au paragraphe §2.3.3.2 le modèle général de diffusion, puis le schéma numérique employé et finalement nous concluons au §2.3.3.4 par une rapide comparaison entre cette approche et la méthode de base 1D.

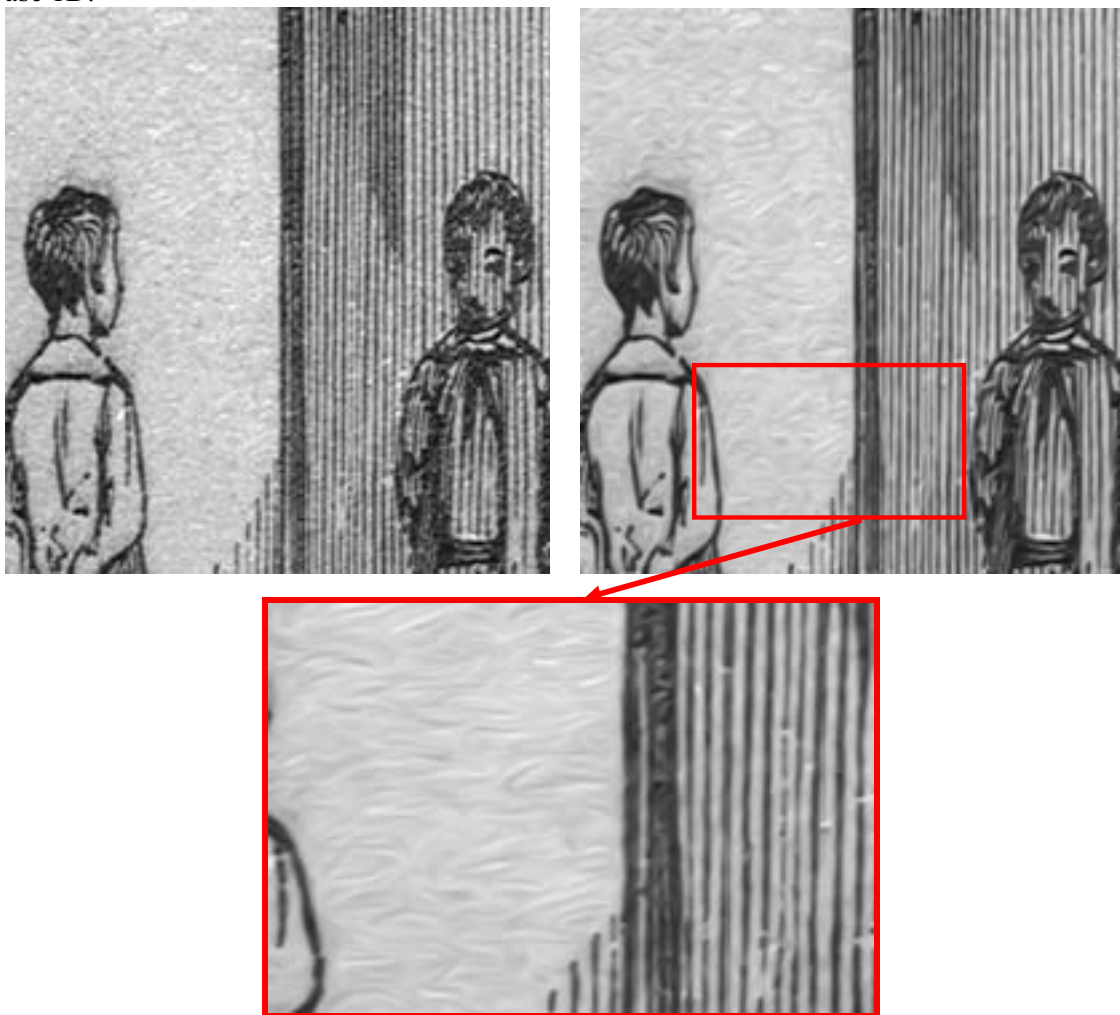


Fig.2.22- Image originale et résultat du filtre de lissage 1D. Paramètres : $\sigma=0.75$, $\beta=0.95$, $t=240.0$.

2.3.3.2 Modèle général

L'équation de diffusion que nous proposons n'est que la généralisation du modèle 1D auquel nous ajoutons un terme de diffusion selon la direction du premier vecteur propre de l'ACP [TBBLB04] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c_{\xi} U_{\xi\xi} + c_{\eta} U_{\eta\eta} \quad (2.68.a)$$

avec :

$$\begin{cases} c_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} g^{\xi} [(U_{\xi}) U_{\xi}] \\ c_{\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} [g^{\eta} (U_{\eta}) U_{\eta}] \end{cases} \quad (2.68.b)$$

A part les paramètres présentés au §2.3.2.2, ce modèle fait intervenir la dérivée directionnelle $U_{\eta} = \nabla U \cdot \vec{\eta}$ dont le vecteur $\vec{\eta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ est orienté selon la direction du premier vecteur propre issue de l'ACP; η étant la coordonnée le long de cet axe. Dans le cas particulier qui correspond à un support de l'ACP réduit à un point, U_{η} n'est que la norme du vecteur gradient pour le pixel considéré. Le modèle permet la sélection des fonctions de diffusion $g^{\xi}(\cdot)$ $g^{\eta}(\cdot)$: leurs formes induisent le comportement du filtre. Même si les fonctions peuvent prendre des formes différentes, nous nous placerons dans le cas particulier où ces fonctions sont identiques. Nous considérons les deux fonctions [TBBLB04] :

$$\begin{cases} g^{\xi}(s) = \frac{1}{1 + (s/K_{\xi})^2} \\ g^{\eta}(s) = \frac{1}{1 + (s/K_{\eta})^2} \end{cases} \quad (2.69)$$

Nous introduisons de manière délibérée un comportement différent selon les deux axes en utilisant un paramètre supplémentaire :

$$\alpha = \frac{K_{\eta}}{K_{\xi}} \quad (2.70)$$

Une valeur de α proche de 1 favorisera un comportement identique – mais non isotrope dans l'acceptation du Chapitre 1 -de l'équation (2.68). Dans la mesure où nous nous intéressons plutôt à un comportement différent en imposant une force de diffusion plus forte dans la direction des structures et une intensité plus faible dans la direction orthogonale, nous choisissons des valeurs $\alpha \in (0,1)$. Pour une barrière de diffusion donnée K_{ξ} , le choix de $\alpha = 0$ permet de retrouver le modèle de lissage 1D.

Des rapports non nuls introduisent un lissage ou –éventuellement- un rehaussement dans les directions orthogonales aux contours ; de ce point de vue ce modèle doit être considéré comme un modèle mixte de restauration et d'amélioration d'images. Le filtre peut corriger le flou, éliminer le bruit et améliorer le contraste visuel des images.

Même si l'expression de ce filtre ne peut pas se déduire par la minimisation d'une fonction d'énergie, ses propriétés peuvent être expliquées en reprenant le formalisme de Deriche et Faugeras (§1.5.3) :

-pour de faibles vecteurs gradients et pour des barrières $K_{\xi}, K_{\eta} \neq 0$
 $\lim_{|\nabla U| \rightarrow 0} c_{\xi} = \lim_{|\nabla U| \rightarrow 0} c_{\eta} \geq 0$, le filtre agit localement de façon isotrope.

-sur des motifs unidirectionnels ayant des gradients forts $c_\xi \geq 0$ et $\lim_{|\nabla U| \rightarrow \infty} c_\eta < 0$; son action se traduit par un lissage dans la direction des motifs et un rehaussement dans la direction orthogonale.

-dans le cas d'orientations multiples, le filtre agit comme un filtre de rehaussement.

La version régularisée du filtre se déduit de manière similaire à §2.3.2.3 . En prenant comme arguments des fonctions de diffusion les dérivées directionnelles de l'image lissée par un noyau gaussien d'écart type σ :

$$U_{\sigma\xi(\eta)} = \frac{\partial}{\partial \xi(\eta)} (G * U) \quad (2.71)$$

l'expression de la version régularisée est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} [g^\xi (U_{\sigma\xi}) U_\xi] + \frac{\partial}{\partial \eta} [g^\eta (U_{\sigma\eta}) U_\eta] \quad (2.72)$$

L'interprétation directionnelle de (2.72) est similaire au modèle 1D : le filtre peut rehausser les contours pour de faibles valeurs de σ .

2.3.3.3 Schéma numérique

En nous fondant sur les résultats obtenus au paragraphe précédent et qui ont clairement démontré l'avantage du schéma numérique par interpolation des niveaux de gris, nous proposons une extension de ce type de schéma pour le filtre (2.68) et sa version régularisée (2.72). La manière de discrétiser le premier terme de chaque équation a été présentée ; nous allons présenter dans ce paragraphe la discrétisation du second terme.

Considérons le modèle de base (2.68) . En reprenant les idées de §2.3.2.4, nous utilisons un schéma d'interpolation fondé sur le 8 voisinage du pixel courant. Nous utilisons des formules identiques à (2.59) et (2.60) pour l'estimation des dérivées selon la direction η :

$$D_\eta^+(U) = \frac{U(\xi, \eta + d\eta) - U(\xi, \eta)}{d\eta}; D_\eta^-(U) = \frac{U(\xi, \eta) - U(\xi, \eta - d\eta)}{d\xi} \quad (2.73)$$

Comme au paragraphe §2.3.2.4, nous présentons les résultats sous une forme synthétique ; nous illustrons le principe de la méthode à la Figure 2.23 et nous montrons la forme explicite de calcul au Tableau 2.4

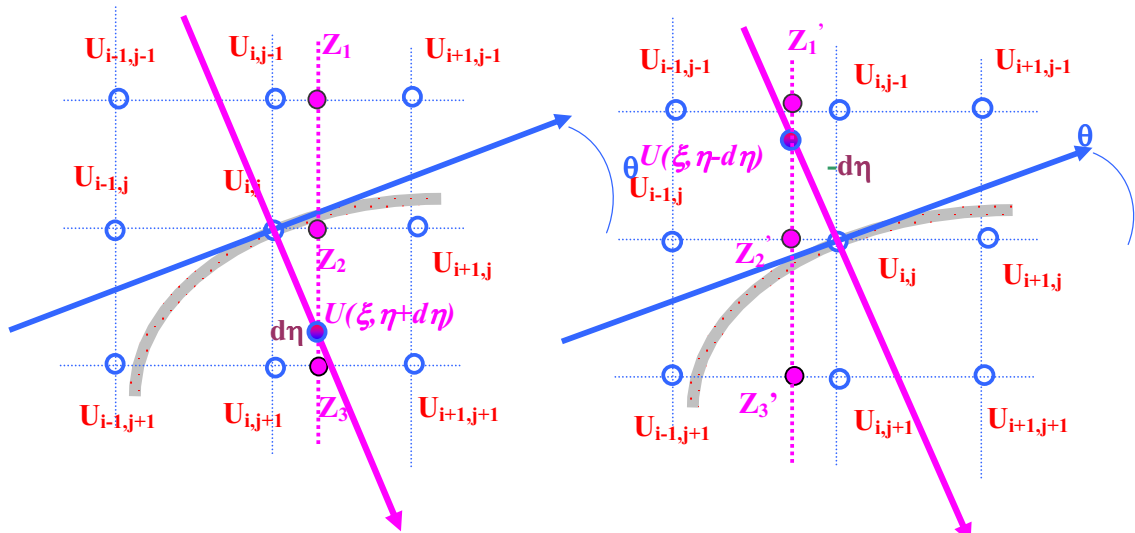


Fig.2.23- Estimation de la dérivée directionnelle U_η par interpolation des niveaux de gris . Orientations positives.

Avec les formulations explicites des *Tableaux 2.1 et 2.4* le schéma numérique par interpolations des niveaux de gris associé à (2.71) est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g^\xi [D_\xi^+(U)]D_\xi^+(U) - g^\xi [D_\xi^-(U)]D_\xi^-(U) + g^\eta [D_\eta^+(U)]D_\eta^+(U) - g^\eta [D_\eta^-(U)]D_\eta^-(U) \quad (2.74)$$

Nous utilisons une méthode de résolution de type explicite dont le critère de stabilité est donné par :

$$dt \leq 0.25 \quad (2.75)$$

Pour chaque pixel, en imposant comme condition supplémentaire le fait que les valeurs interpolées doivent être comprises entre les minima et les maxima des intensités des points de la grille, nous garantissons un principe de maximum.

Tableau 2.4 Expressions de la fonction luminance en $(\xi, \eta + d\eta)$ et $(\xi, \eta - d\eta)$

$Z_1 = U_{i,j-1} + 0.5 \cdot [U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j-1}]d\eta \sin \theta $ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j-1} - 2 \cdot U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1}](d\eta \sin\theta)^2$	$Z_1' = U_{i,j-1} - 0.5 \cdot [U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j-1}]d\eta \sin \theta $ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j-1} - 2 \cdot U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1}](d\eta \sin\theta)^2$
$Z_2 = U_{i,j} + 0.5 \cdot [U_{i+1,j} - U_{i-1,j}]d\eta \sin \theta $ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i+1,j}](d\eta \sin\theta)^2$	$Z_2' = U_{i,j} - 0.5 \cdot [U_{i+1,j} - U_{i-1,j}]d\eta \sin \theta $ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i+1,j}](d\eta \sin\theta)^2$
$Z_3 = U_{i,j+1} + 0.5 \cdot [U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}]d\eta \sin \theta $ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j+1} - 2 \cdot U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}](d\eta \sin\theta)^2$	$Z_3' = U_{i,j+1} - 0.5 \cdot [U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}]d\eta \sin \theta $ $+ 0.5 \cdot [U_{i-1,j+1} - 2 \cdot U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}](d\eta \sin\theta)^2$
$\theta > 0$ $U(\xi, \eta + d\eta) = Z_2 - 0.5(Z_1 - Z_3)(d\eta \cos\theta)$ $+ 0.5(Z_1 + Z_3 - 2Z_2)(d\eta \cos\theta)^2$	$\theta > 0$ $U(\xi, \eta - d\eta) = Z_2' + 0.5(Z_1' - Z_3')(d\eta \cos\theta)$ $+ 0.5(Z_1' + Z_3' - 2Z_2')(d\eta \cos\theta)^2$
$\theta < 0$ $U(\xi, \eta + d\eta) = Z_2 + 0.5(Z_1 - Z_3)(d\eta \cos\theta)$ $+ 0.5(Z_1 + Z_3 - 2Z_2)(d\eta \cos\theta)^2$	$\theta < 0$ $U(\xi, \eta - d\eta) = Z_2' - 0.5(Z_1' - Z_3')(d\eta \cos\theta)$ $+ 0.5(Z_1' + Z_3' - 2Z_2')(d\eta \cos\theta)^2$

2.3.3.4 Comparaison entre les méthodes de lissage 2D et 1D

Pour comparer les deux approches, nous reprenons l'exemple de *Fig.2.18* et nous étudions notamment la sensibilité de la méthode au temps d'arrêt. Nous menons la même expérience : pour les paramètres optimaux, nous représentons l'évolution du PSNR en poussant (2.41) et (2.72) à la limite. La *figure 2.24.a* montre l'évolution du PSNR pour un facteur α égal à 0.5.

Le terme supplémentaire, couplé à une barrière relativement faible pour cette direction, agit comme un terme de rehaussement en renforçant les contours. Cela se traduit par une indépendance relative du temps d'arrêt (*Fig.2.24.a*). En termes de qualité subjective, les résultats (*Fig.2.24.b*) illustrent la supériorité du modèle 2D. Il est à noter que dans ce cas l'indication fournie par le PSNR n'a pas la même pertinence que dans le cas du filtrage 1D : pour des faibles valeurs, non nulles, de α , la méthode est plutôt une approche de type amélioration et toutes les mesures basées sur des opérateurs mathématiques de type erreur moyenne absolue, quadratique et les opérateurs dérivées n'ont aucune signification physique. En absence d'un autre critère nous le conservons comme indicateur de la qualité du résultat obtenu.

Le modèle 2D nécessitant un nombre double d'interpolations par pixel, le temps de calcul est, par suite, le double du temps de calcul utilisé par le modèle 1D.

Finalement la figure 2.25 montre le résultat obtenu par la diffusion 2D sur l'image présentée en Fig.2.22. Les paramètres utilisés sont les mêmes que ceux utilisés en 1D avec un facteur α égal à 0.5.

La méthode permet une meilleure reconstruction du fond de l'image tout en conservant une très bonne qualité de rehaussement des structures filaires présentes dans la partie droite. Néanmoins ce modèle a tendance à supprimer les structures filaires dont la norme des vecteurs gradients est inférieure à la barrière K_η .

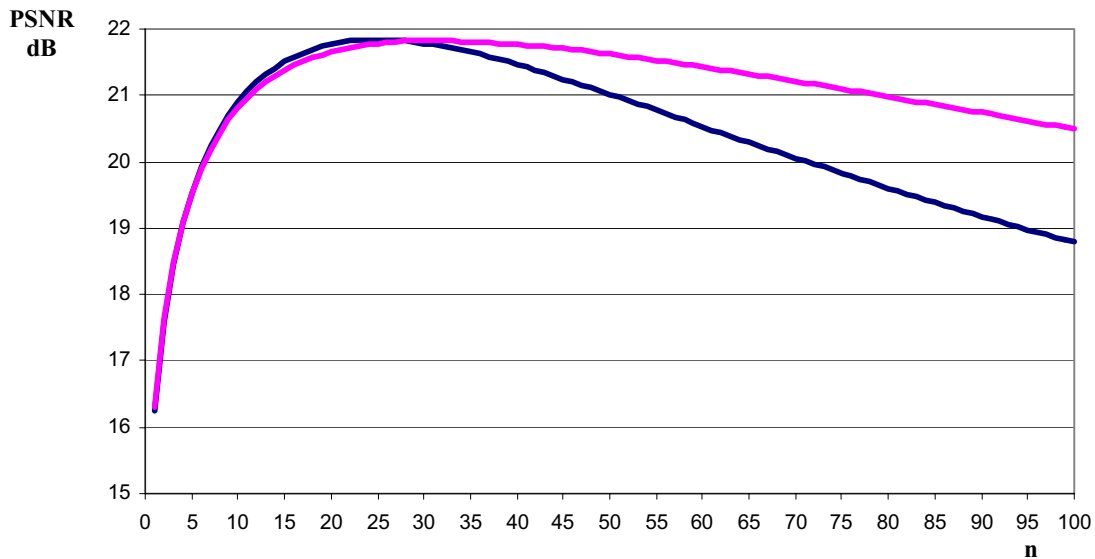


Fig.2.24. a- Evolution du PSNR du modèle 2D — ; Evolution du PSNR du modèle 1D —

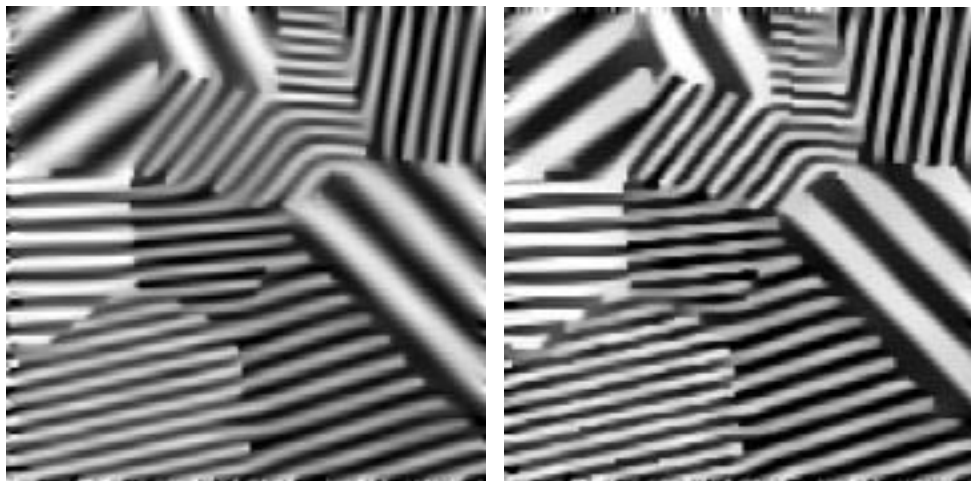


Fig.2.24. b- Résultat lissage 1D à $t=20$. Résultat lissage 2D à $t=20$ (Paramètres du Tableau 2.3, $\alpha=0.5$).

En comparaison avec le modèle 1D qui peut être considéré comme une approche « lissage », le modèle 2D peut être vu aussi comme une approche de type segmentation qui, pour des choix particuliers des paramètres, produit des résultats caractérisés par des régions constantes séparées par morceaux grâce au double effet de rehaussement des jonctions et des contours.

En introduisant un rehaussement des contours, ce modèle est susceptible d'induire des phénomènes de type escalier (§1.4.1.3). Ce phénomène est encore plus important pour des

contours éloignés des modèles théoriques dont les dérivées U_η sont maximales aux points d'inflexions.

L'interpolation - même en absence du pré lissage gaussien- en régularisant l'image originale, élimine les points isolés situés dans les voisinages de ces points d'inflexion.

D'autre part (pour $\sigma = 0$) des développements mathématiques simples de (2.68) conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{U_\xi}{K_\xi}\right)^2} U_\xi \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{U_\eta}{K_\eta}\right)^2} U_\eta \right] = K_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{K_\xi^2 + U_\xi^2} U_\xi \right] + \alpha^2 K_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\alpha^2 K_\xi^2 + U_\eta^2} U_\eta \right] = \\ &= K_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{K_\xi^2 + U_\xi^2} U_\xi \right] + \frac{\alpha^2 K_\xi^2}{(\alpha^2 K_\xi^2 + U_\eta^2)^2} (\alpha^2 K_\xi^2 - U_\eta^2) U_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Pour des valeurs α inférieures à 1, le poids associé au deuxième terme de (2.76) – responsable du rehaussement des contours- est plus faible que celui associé au premier terme. Pour des U_η correspondants à des phénomènes d'escalier (i.e. $|U_\eta| \geq \sqrt{3}\alpha K_\xi$ pour la fonction rationnelle - §1.4.1.3), la contribution de ce terme est d'autant plus faible.

Les considérations antérieures expliquent donc la quasi absence de phénomènes d'escalier dans les résultats produits par le modèle de lissage 2D avec rehaussement des jonctions et des contours.

Un autre effet susceptible d'apparaître est l'effet de trou (§1.4.1.3). Pour des choix des α inférieures à 1, les barrières de diffusion K_η sont faibles – inférieures aux normes des vecteurs gradients sur les contours – et le modèle 2D est capable de contrôler ce phénomène.

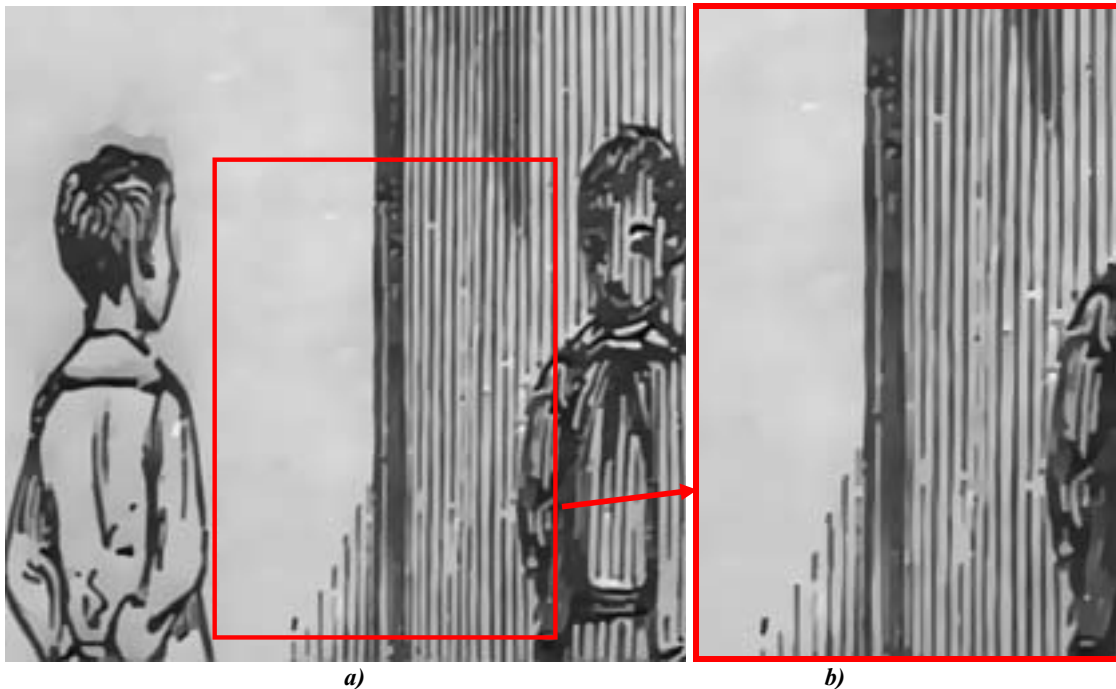


Fig.2.25-a) Résultat du filtre de lissage 2D. Paramètres : $\sigma=0.5$, $\beta=0.95$, $t=16.0$, $\alpha=0.5$
 b) Détail en taille réelle.

2.4 Diffusion Flux Cohérence

2.4.1 Introduction

Une caractéristique commune des approches proposées au paragraphe §2.3 est qu'elles sont toutes sensibles aux variations fortes du signal dans les directions des structures. La distinction jonctions – micro coupures dans la continuité des traits, n'est pas très bien gérée par les modèles fondés sur les dérivées directionnelles du signal. Nous présenterons dans ce paragraphe un modèle de diffusion directionnelle qui, dans certaines situations, nous permettra de mieux reconstituer des objets avec des structures composées des traits fins et parallèles dont les continuités sont affectées par le bruit .

Le modèle que nous proposons est une version modifiée de la *CED*, mieux adaptée pour le lissage des images présentant des structures filaires et caractérisées par des variations fortes d'orientations. L'équation de diffusion de Weickert ne sera pas modifiée ; par contre, suite aux développements du paragraphe §2.2.5.5 , nous proposons l'utilisation d'une autre mesure de confiance mieux adaptée au lissage de ce type d'images.

Au paragraphe §2.4.4 nous reprendrons l'approche présentée dans [TLBB02c] et, nous la généraliserons pour proposer un modèle de diffusion tensorielle fondé sur la mesure de confiance de Rao généralisée (2.29) [TLBB03]. Le paragraphe §2.4.5 sera consacré à l'étude d'une approche linéaire pour l'EDP proposée en montrant ses avantages et inconvénients.

2.4.2 Motivation

Malgré son manque d'interprétation directionnelle, la *CED* est un outil puissant dédié à la restauration des structures filaires sans variation forte d'orientation. Des applications typiques de cette méthode concernent par exemple le rehaussement des empreintes digitales ou le traitement des images représentant des défauts dans des matériels industriels, etc. [Wei99]. Sur ce type d'images la capacité de la méthode à mettre en évidence des structures cohérentes est remarquable. Par contre, la méthode est nettement moins adaptée au lissage des images du type de celle présentée à la figure 2.8, ou encore, pour l'élimination du bruit dans des images de type mosaïque. Un point important de la *CED* réside dans le choix des fonctions de diffusion ; la cohérence de Kass et Witkin (2.26) jouant un rôle principal :

$$\mu = \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2} \quad (2.77)$$

En partant d'une analyse des points faibles de cette mesure et en particulier de la dépendance au rapport signal/bruit (§2.2.5.5), nous proposerons une méthode capable de restaurer des images présentant des contrastes locaux variables et, par conséquent des valeurs propres issues des ACP variables également.

2.4.3 Travaux antérieurs

En comparaison avec les autres mesures de confiance, fondées sur les valeurs propres d'une ACP, (2.77) présente l'avantage de ne pas dépendre du niveau du bruit présent dans l'image (§2.2.6.5). En utilisant cette mesure comme paramètre de la fonction de diffusion le long de la direction du second vecteur propre de l'ACP :

$$g(\mu) = ct. + (1 - ct.) \exp\left[-\frac{C}{\mu^2}\right] , \quad (2.78)$$

la *CED* produit un lissage qui ne dépend pas du niveau du bruit présent dans l'image.

Néanmoins, la force de diffusion dépend du contraste local, la différence $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ n'étant que la différence entre les contrastes moyens mesurés dans les directions de la cohérence maximale et minimale. Pour des images contenant des structures de périodes variables, cela se traduit par un lissage préférentiel des zones à fort contraste.

Un autre effet connu de la CED est l'arrondissement des coins, conséquence de l'utilisation d'une mesure de confiance qui s'annule très rarement. Cet effet peut être diminué en augmentant le paramètre C qui joue le rôle d'un seuil de diffusion. Pour $\mu \gg C$ la fonction de diffusion (2.78) tend vers 1 et pour $\mu \ll C$ $g(\mu) \approx ct$. L'utilisation d'une valeur C élevée limitera l'effet d'arrondissement des coins mais, en même temps, produira un lissage moins efficace du bruit sur des zones à contraste faible.

Ces limitations nous ont conduit à proposer une approche fondée sur la cohérence de Rao en [TLBB02c]. Soit le modèle mixte de lissage :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = h_\tau[\text{coh}(\theta)]\text{div}[D(J_\rho(\nabla U_\sigma))\nabla U] + \{1 - h_\tau[\text{coh}(\theta)]\}\text{div}[g(|\nabla U|)\nabla U^\theta] \quad (2.79)$$

(2.79) contient deux termes de diffusion : le premier est identique à la CED (1.121) (où le tenseur de diffusion est donné par 1.123 et 1.124) et le deuxième est un terme de lissage directionnel dont la signification a été donnée au paragraphe §2.3. La fonction floue $h_\tau[\text{coh}(\theta)]$ est non décroissante avec $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$; elle dépend d'un seuil τ qui nous permet de sélectionner le modèle de diffusion le plus approprié pour la zone considérée. Comme mesure de confiance nous avons utilisé la confiance de Rao (2.4) en prenant comme orientations $\theta(x_i, y_j)$ et $\theta(x, y)$, les orientations du deuxième vecteur propre, pour des ACP centrées respectivement en (x_i, y_j) et (x, y) . Les avantages de l'utilisation de la mesure de Rao, ou de sa version modifiée (2.6), ont été illustrés précédemment (§2.2.5.5) :

1. ses minimums correspondent aux zones qui se caractérisent par des variations d'orientations lissées; elle est donc étroitement liée aux zones qui manifestent des « ruptures d'orientations ».
2. pour des images bruitées, des tailles de masques d'ACP plus importantes rendent les orientations estimées insensibles au niveau de bruit.
3. sa valeur est normalisée et relativement indépendante au contraste local.

L'action du filtre (2.79) se caractérise donc par des lissages de type CED pour des textures cohérentes (dont la confiance est grande) et par une action de type lissage directionnel avec rehaussement des jonctions dans les zones de faible confiance. Pour les jonctions caractérisées par des orientations fausses, le deuxième terme est plus important que le premier ; pour des barrières de diffusion relativement faibles, ce terme introduit un processus de rehaussement.

(2.79) est une approche plutôt pratique dédiée à la restauration des gravures anciennes. Nous allons reprendre ici un résultat de [TLBB02c] (Fig.2.26) afin de montrer l'efficacité de cette approche et d'illustrer les propriétés mentionnées précédemment.

Le lissage des structures linéaires est efficace et la restauration du fond de l'image est assurée pour des barrières relativement grandes pour le modèle scalaire ($K=20$ - Fig.2.26.e). (2.79) peut produire aussi un rehaussement des jonctions pour des barrières moins importantes ($K=10$ - Fig.2.26.d).

Malgré son efficacité cette approche reste une approche pratique, le modèle (2.79) n'est une EDP qu'en posant des hypothèses relativement fortes : pour des confiances qui tendent vers 0, si nous supposons que les variations d'orientations sont faibles dans le voisinage du pixel considéré, nous pouvons écrire le modèle sous la forme d'une divergence.

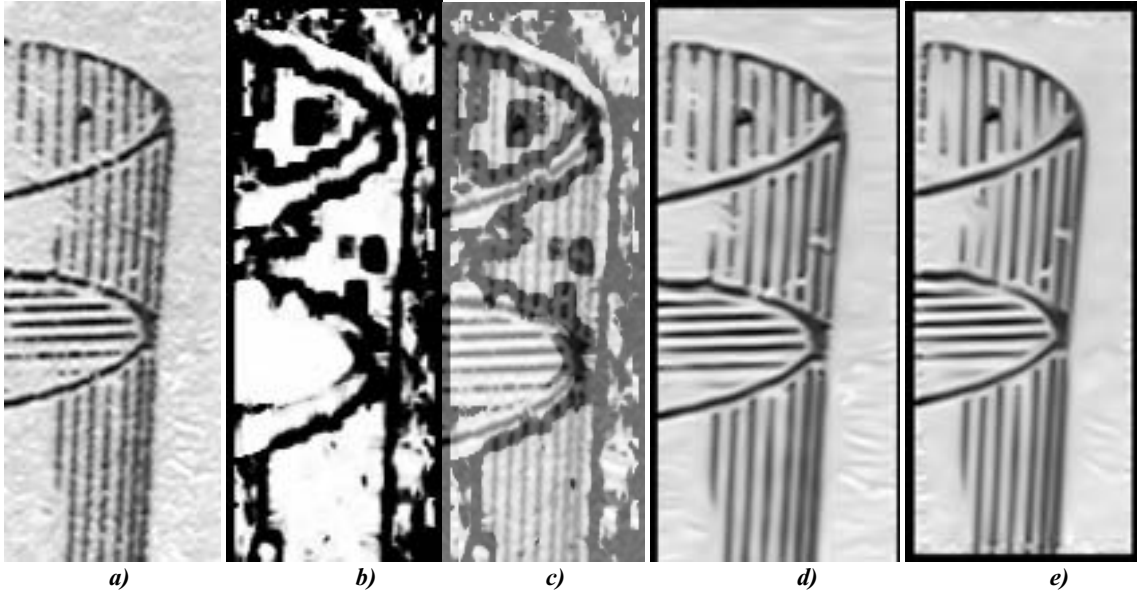


Fig.2.26- Résultats de [TLBB02c]. a) Image originale. b) Confiance initiale ($\tau=0.85$). c) Superposition de l'image de confiance sur l'image originale. d) Résultats du processus ($K=10$ pour le modèle scalaire). e) Résultats du processus ($K=20$ pour le modèle scalaire).

2.4.4 Modèle à base d'EDP

2.4.4.1 Equation proposée

Nous proposons un modèle de diffusion tensorielle ; en utilisant les notations de Weickert, l'équation aux dérivées partielles qui correspond à notre filtre est [TLBB03] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[D(J_\rho(\nabla U_\sigma))\nabla U] \quad (2.80)$$

dont la matrice de diffusion est construite à partir du tenseur de structure :

$$J_\rho(\nabla U_\sigma) \stackrel{(1.157)}{=} \begin{pmatrix} G_\rho * \left(\frac{\partial U_\sigma}{\partial x}\right)^2 & G_\rho * \frac{\partial U_\sigma}{\partial x} \frac{\partial U_\sigma}{\partial y} \\ G_\rho * \frac{\partial U_\sigma}{\partial x} \frac{\partial U_\sigma}{\partial y} & G_\rho * \left(\frac{\partial U_\sigma}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

en imposant qu'il possède les mêmes vecteurs propres et des valeurs propres modifiées :

$$\lambda_1 =: \alpha$$

$$\lambda_2 =: \begin{cases} \alpha & \text{si } j_{11} = j_{22} \text{ et } j_{12} = 0 \\ \alpha + (1-\alpha)h_\tau[\text{coh}(\theta)] & \text{si } j_{11} \text{ ou } j_{22} \text{ ou } j_{12} \neq 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

avec la cohérence donnée par (2.39).

Le modèle est donc similaire au modèle de Weickert ; afin de le rendre insensible aux variations locales de contraste, nous modifions uniquement la deuxième valeur propre. La fonction seuil correspond à celle que nous avons utilisée en [TLBB02c] et [TLBB03] :

$$h_\tau(s) = \frac{\tanh[\gamma(s - \tau)] + 1}{\tanh[\gamma(1.0 - \tau)] + 1} \quad (2.83)$$

En (2.83) la division par la valeur maximale de $h(\cdot)$ permet de normaliser la fonction ; la sommation avec 1 assure la positivité de la fonction pour tout s . Ce type de fonction est proche des choix de Monteil (1.35) ; elle permet de contrôler à la fois la zone de transition

(τ) et la pente de passage (γ) d'une zone à l'autre. La figure 2.27 représente l'allure de cette fonction pour un choix particulier des paramètres. Plus γ est grand, plus la sélectivité de la fonction est augmentée ; le paramètre τ déplace la zone de transition : pour $s = \tau$ nous avons $h_\tau(\tau) \cong 0.5$.

En comparaison avec le modèle mixte (2.79), nous renonçons au lissage directionnel fondé sur les modèles du paragraphe §2.3 et, implicitement au lissage du fond et au lissage ou rehaussement des jonctions. Le comportement du modèle (2.80) est donc différent : la force de diffusion est fortement diminuée pour des zones de confiance faible. Néanmoins, le changement des valeurs propres ne modifie pas les propriétés citées par Weickert [Wei99] : le tenseur de diffusion dépend de manière continue de l'image analysée, il est symétrique et défini positif. Dans ces conditions, le *Théorème 1* de [Wei99] reste valable, et (2.80) a une solution unique tout en respectant un principe de maximum. La continuité du tenseur de diffusion est assurée seulement pour des supports de calcul gaussiens. Par rapport à la CED, la méthode que nous proposons est, de plus, invariante aux changements de contraste de l'image originale.

Similairement à la CED, ce filtre est un filtre de diffusion dont l'expression sous la forme d'une divergence nous permet de garantir la préservation de la valeur moyenne de l'image.

Un autre choix pour l'argument de la fonction de seuil consiste à prendre comme mesure de confiance la valeur normalisée $\mu = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ (2.27). Etant normalisée, ce type de

mesure est invariant aux variations locales de contraste et, pour des images affectées par un niveau faible de bruit, ses minima peuvent être mis en correspondance avec les intersections et avec des zones caractérisées par des anisotropies locales faibles. Néanmoins, un désavantage de (2.27), illustrée en §2.2.5.5, est sa dépendance au rapport signal/bruit local. Pour des zones sourdes, de faible énergie (λ_1, λ_2 petites), des bruits importants peuvent induire des minima (2.28) au dessus du seuil τ , en introduisant un lissage isotrope qui dépend de la valeur de α . Afin d'empêcher la diffusion sur la direction orthogonale aux contours, pour des applications pratiques, ce paramètre est choisi comme ayant des faibles valeurs (choix typique $\alpha = 0.001$). Finalement cela se traduit par un lissage moins efficace des textures orientées de faible contraste, contrairement au modèle (2.80÷2.83).

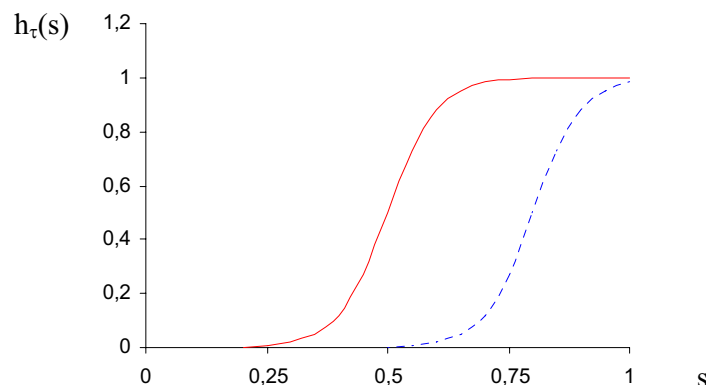


Fig. 2.27- Fonction de seuil floue $\tau=0.5$ — $\tau=0.8$ - - - , $\gamma=10$.

2.4.4.2 Choix des paramètres. Schéma numérique

- La méthode utilise comme paramètres :
- l'échelle locale σ

- l'échelle d'intégration ρ qui impose automatiquement la taille de l'ACP
- le seuil τ
- la pente de la zone de transition γ

L'échelle locale contrôle essentiellement le pré-lissage gaussien nécessaire afin de rendre le processus d'estimation d'orientation plus immun au bruit. De manière expérimentale, nous avons constaté que, en comparaison avec le modèle de lissage directionnel, cette méthode nécessite des pré-lissages plus importants. Cela s'explique par le choix de noyaux gaussiens comme support de calcul : en pénalisant l'éloignement au centre de la fenêtre de calcul, les noyaux accordent une plus grande importance au pixel central ; pour des bruits forts, des pixels situés dans des zones de faible énergie peuvent donner de fausses orientations. Des valeurs typiques pour notre méthode sont $\sigma = [0.75, 1.25]$ qui correspondent à des voisinages limités à des tailles de 5x5 à 7x7 pixels.

La taille du support de calcul de l'ACP induit aussi la qualité de l'orientation estimée. De façon théorique ρ doit avoir des valeurs relativement grandes afin de permettre de retrouver l'orientation originale. Cependant, pour les images auxquelles nous nous intéressons, les valeurs de ρ doivent être limitées afin de réduire le mélange d'orientations dans des zones présentant des jonctions. La plupart des résultats que nous allons produire correspondent des valeurs $\rho \in [\sigma, 2.0]$; les tailles correspondantes vont de 5x5 jusqu'à 13x13 pixels.

Le seuil τ qui contrôle la part des diffusions isotropes et anisotropes introduite dans le processus de lissage doit être liée aux caractéristiques de la mesure de cohérence d'orientation. Pour les choix des paramètres précédents, pour des valeurs d'orientations lissées, les valeurs de la cohérence normalisée (2.6) tendent à être proches de la valeur maximale 1. Une approche théorique pour la détermination τ nous semble impossible ; par des moyens expérimentaux nous avons constaté que des valeurs comprises entre 0.7-0.9 produisent des résultats optimaux.

La pente de la zone de transition n'est pas un choix critique de la méthode ; des valeurs comprises entre 5 et 10 produisent des résultats comparables.

Le schéma numérique qui correspond à notre filtre est équivalent à celui proposé en §1.8.1.4, notamment il correspond à la discrétisation non négative de Weickert (1.160).

2.4.5 Version linéaire

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à une extension linéaire de (2.80). Ce modèle correspond à une matrice de diffusion qui dépend seulement de l'image originale :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}[D(\nabla U_\sigma^0)\nabla U] \quad (2.84)$$

avec :

$$\nabla U_\sigma^0 = \nabla[U(x, y, 0) * G_\sigma] \quad (2.85)$$

Nous construisons la matrice de diffusion en partant de la méthode d'Analyse en Composantes Principales multi échelle de §2.2.5.6. Pour chaque pixel, θ et $\text{coh}_{\max}(\theta)$ sont respectivement l'orientation du deuxième vecteur propre et la confiance maximale issue d'une telle analyse. La matrice de diffusion à donc pour vecteurs propres :

$$\begin{cases} v_1 = (-\sin \theta, \cos \theta)^t \\ v_2 = (\cos \theta, \sin \theta)^t, \end{cases} \quad (2.86)$$

et pour valeurs propres :

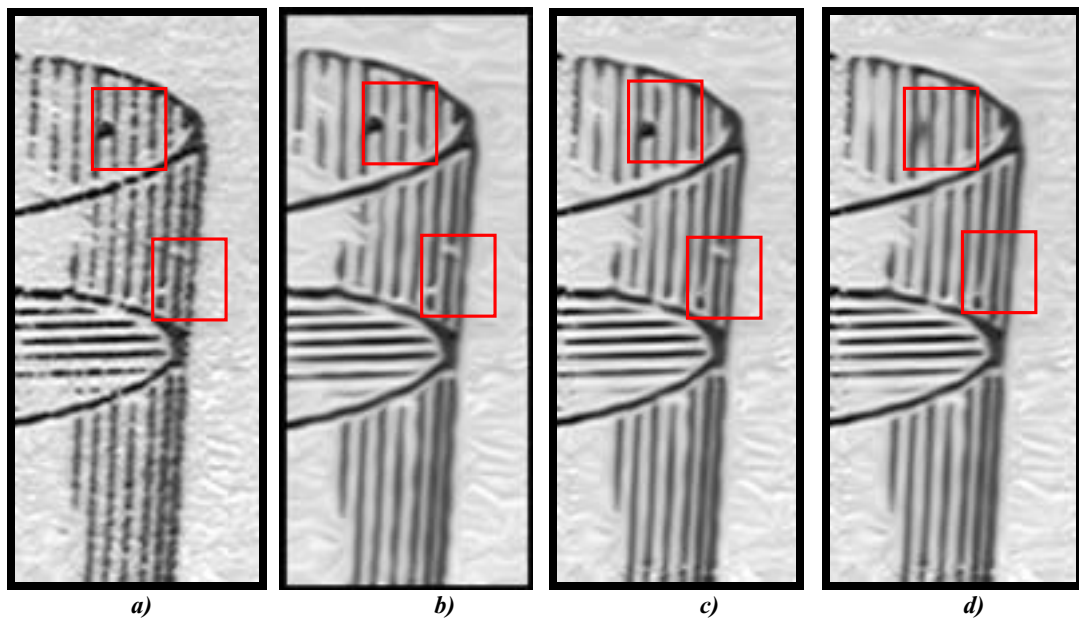
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 =: \alpha \\ \lambda_2 =: \begin{cases} \alpha & \text{si } j_{11} = j_{22} \text{ et } j_{12} = 0 \\ \alpha + (1-\alpha)h_\tau[\text{coh}_{\max}(\theta)] & \text{si } j_{11} \text{ ou } j_{22} \text{ ou } j_{12} \neq 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.87)$$

La méthode hérite donc des avantages de l'ACP multi échelle : pour des zones orientées fortement bruitées elle permet de sélectionner une taille maximale pour le support de l'ACP afin de retrouver l'orientation théorique. La diffusion est essentiellement unidirectionnelle dans ces zones. De plus, l'utilisation d'une ACP multi échelle avec une taille maximale variable permet l'obtention des résultats très différents en favorisant la conservation des petits détails ou leur élimination par un lissage unidirectionnel.

En comparaison avec la méthode de base, la version linéaire permet aussi un gain important en termes de temps de calcul. Après le calcul de la matrice de diffusion, le processus de diffusion se réduit à des convolutions successives avec un noyau de type (1.158) (modifié selon Eq.1.160 pour des discrétisations non négatives) dont les valeurs a, b et c sont fixes. En prenant par exemple une image de 128x128 pixels, en limitant le domaine de recherche du maximum de l'ACP à un support de 15x15 pixels, pour 100 itérations (2.84) nécessite seulement 10s. Par comparaison, la méthode non linéaire (2.80), pour $\sigma = 0.75$ et $\rho = 1.5$ nécessite environ 110s. Le gain du temps est dans ce cas de l'ordre 10.

Néanmoins, comme nous allons l'illustrer au Chapitre 3, le prix à payer pour ce gain de temps est la diminution de la qualité de reconstruction des jonctions. Les jonctions présentant une faible variation en terme d'orientations produisent des confiances maximales proches de celles obtenues pour des zones manifestant une seule orientation. Le filtre a donc tendance à les lisser, en produisant un faible arrondissement des coins. Ce phénomène peut être limité en imposant des temps de diffusion faibles.

Nous allons illustrer ici seulement deux résultats de cette méthode sur l'image originale de la figure 2.28. Pour des résultats objectifs sur des textures de synthèse, nous vous renvoyons au Chapitre 3. La figure 2.28 illustre également les résultats obtenus en utilisant la diffusion non linéaire.



**Fig.2.28- Résultats en utilisant la diffusion flux cohérence. a) Image originale.
 b) Diffusion non linéaire $\sigma=0.75, \rho=1.75, \gamma=7.0, \tau=0.85, t=2.0$.
 c) Diffusion linéaire $\gamma=7.0, \tau=0.95, t=2.0$ –taille maximale de l'ACP multi échelle $N=9$.
 d) Diffusion linéaire $\gamma=7.0, \tau=0.95, t=2.0$ –taille maximale de l'ACP multi échelle $N=15$.**

Pour des tailles maximales de l'ACP multi échelle identiques à celles de la diffusion non linéaire les résultats obtenus sont très proches (*Fig.2.28.b et c*). En augmentant la taille maximale admissible les résultats sont différents. Cependant les jonctions sont préservées grâce à la capacité de l'ACP multi échelle à limiter les effets de moyennage et à fournir des confiances maximales faibles, les détails non cohérents sont éliminés par un lissage unidirectionnel (la région encadrée en rouge de chaque image). Les temps de calcul pour chaque image ont été 65s pour *Fig.2.28.b*, 7s pour *Fig.2.28.c* et 10s pour *Fig.2.28.d*; les dimensions de l'image sont de 99x210 pixels.

2.5 Conclusions

Nous avons proposé dans ce chapitre deux classes des filtres particulièrement adaptés pour la restauration des structures linéaires orientées. Le point commun entre les deux approches est l'utilisation d'une information directionnelle semi locale (§2.2.2.1) obtenue en utilisant le principe de lissage d'orientations de §2.5. La différence essentielle entre les méthodes est donnée par la modalité dont la pertinence de cette information est prise en compte.

Les modèles de §2.3 sont fondés sur un combinaison des informations :

- semi locales – les directions de diffusion.
- locales- les dérivées directionnelles.

La pertinence de l'information directionnelle est caractérisée en tout pixel par la valeur absolue de la dérivée directionnelle. Le modèle de §2.3.2 va s'avérer, dans les chapitres qui suivent, le mieux adapté pour la restauration des motifs filaires avec préservation des détails.

L'extension 2D de §2.3.3 nous permettra de traiter, d'une manière unitaire, dans le cadre de restauration des images, des structures orientées et non orientées.

En comparaison avec les approches tensorielles de diffusion, ces modèles permettent un interprétation directionnelle qui explique le comportement du processus induit en tout point de l'image traitée.

Les approches de §2.4 relèvent d'une démarche différente. Elles utilisent une information semi locale pour caractériser la pertinence de l'information directionnelle. En utilisant les développements théoriques de §2.2.5.5 nous proposons un nouveau modèle de diffusion tensorielle basé sur un mesure de confiance invariante par rapport au rapport signal bruit local et qui présente des minimums dans les régions caractérisées par des orientations lissées multiples. Malgré l'absence d'interprétation directionnelle, le comportement de ce filtre est explicable par les propriétés de la mesure de confiance utilisée. Conçu plutôt comme une approche de type amélioration d'images, les méthodes de §2.4 permettront un meilleure reconstruction des motifs filaires ; la reconstruction est indépendante du contraste locale et, par rapport aux approches déjà existantes, elle introduit les moindres modifications topologiques des jonctions présentes dans les image analysées.

Pour les deux types d'approches, à part l'aspect théorique, nous nous sommes intéressés aussi à des problèmes issus des implantations pratiques. Le problème principal pour des approches itératives étant le temps de calcul, nous avons proposé des versions rapides de ces filtres : §2.3.2.4 pour la méthode de lissage directionnel et §2.4.5 pour l'approche de diffusion tensorielle.

Chapitre 3

Comparaison des approches fondées sur les Equations aux Dérivées Partielles pour le lissage et le rehaussement de textures orientées

3.1 Motivation

Dans ce chapitre nous comparons les méthodes présentées au Chapitre 1 et considérées comme des méthodes classiques dans la littérature tout en positionnant les approches que nous avons proposées au Chapitre 2.

Comparer des méthodes de filtrage demande, en premier lieu, de définir un critère objectif de qualité de l'image lissée ou restaurée. C'est un problème non résolu à l'heure actuelle par la communauté des traiteurs d'images, et ce, malgré l'abondance des mesures de qualité dans la littérature. Le juge le plus pertinent de la qualité d'une image étant l'œil humain, des mesures de type « notes moyennes obtenues auprès d'un jury » (*Mean Opinion Score*) sont, peut être, les mieux adaptées pour cette tâche [WBL02]. Cette procédure étant coûteuse et lente, elle est pratiquement impossible à mettre en place pour juger de méthodes réclamant le réglage d'un nombre important de paramètres.

En nous fondant sur des analyses récentes concernant la pertinence des indicateurs mathématiques vis à vis de la qualité de l'image, nous utiliserons des méthodes de type rapport signal/bruit. Malgré leur manque de corrélation avec la perception du système visuel humain, plusieurs ouvrages illustrent l'utilité de ces approches dans la quantification de la qualité des images et/ou des séquences vidéo. Les travaux de [VQEG00] montrent, par exemple, l'équivalence statistique entre la pertinence de l'indication fournie par le *PSNR* (2.67) et plusieurs indicateurs beaucoup plus élaborés dans le domaine de l'attestation de la qualité des séquences vidéo. Notons aussi que cette même mesure est utilisée pour la quantification des distorsions dans des systèmes de type MPEG, des dégradations de 0.5 dB étant considérées comme perceptibles [NeH95]. A part cette mesure, nous allons également nous référer au rapport signal/bruit (*SNR*), utilisé classiquement dans des tâches de restauration d'images [KDA96], [Kor98], [CoA98], [Wei98]. Il est à noter que même si le *SNR* ou le *PSNR* ne sont pas utilisés de manière explicite dans [CoA98] et [Wei98], les auteurs utilisent une mesure de type erreur quadratique moyenne pour montrer l'efficacité de leur méthode [CoA98], et respectivement, pour quantifier la précision des diverses méthodes de résolution des EDP's [Wei98]. Par des résultats classiques nous savons que cette mesure peut être liée aux indicateurs de *PSNR* et *SNR* [ASS02].

A notre connaissance, à part les résultats de [KDA96], [Kor98], [KDA97b], le nombre des travaux traitant de la comparaison des méthodes de diffusion est limité. Les résultats de ces auteurs concernent de plus un nombre faible d'images et de méthodes. Nous allons étendre ces analyses au cas des images contenant des structures orientées tout en multipliant le nombre d'images considérées et le nombre des méthodes analysées. Nous comparerons les capacités des méthodes pour le filtrage d'images. Nous allons ensuite interpréter les divers

résultats à partir d'une Analyse de Variance (*ANOVA*) qui nous permettra à la fois de classer de manière robuste les approches analysées et d'analyser les influences du bruit – supposé comme étant gaussien, de type additif - et des types d'image sur les résultats.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons également à la robustesse des méthodes vis-à-vis de leurs paramètres. Toutes les approches présentées utilisent un nombre assez important de paramètres et un maximum en terme de *PSNR* ou de *SNR* s'obtient en général pour un choix particulier de ces variables. Nous allons donc essayer d'étudier la sensibilité de la qualité du résultat en fonction des choix opérés.

La partie finale de ce chapitre est dédiée à des études complémentaires concernant le comportement de notre approche de lissage 2D pour d'autres types de bruits et d'images.

3.2 Protocole expérimental

Comme nous l'avons mentionné dans le point précédent, nous cherchons à tester les principales méthodes de diffusion pour des tâches de filtrage d'images. Nous analyserons donc la capacité d'élimination du bruit des différentes approches et par conséquent nous ne sélectionnons que des méthodes clairement dédiées à cette tâche.

Par suite, en partant d'une image de synthèse sur laquelle un bruit est ajouté, nous mesurerons la capacité des méthodes à fournir une image lissée proche de l'originale. Cette proximité sera quantifiée par des mesures objectives (*SNR* et *PSNR*). L'optimum est recherché dans l'espace des paramètres de chaque méthode.

3.2.1 Types d'images analysées

La base d'images sur laquelle nous construisons notre étude est composée de 15 images contenant des textures orientées selon diverses fréquences, amplitudes et orientations. Elles sont générées en partant d'une partition du plan de l'image en pavages de Voronoi. Des profils sinusoïdaux théoriques de fréquence, orientation et amplitude différentes sont définis dans chaque pavé. La partition par des pavages de Voronoi nous permettra d'étudier le comportement de chaque méthode sur les frontières des polygones caractérisées par des variations fortes d'orientation.

L'étude de la variabilité de comportement des méthodes pour différents niveaux de bruit est réalisée en considérant deux classes d'images bruitées : la première correspondant à des bruits faibles ($SNR=7.5-9.5dB$) et la deuxième contenant des images fortement bruitées ($SNR=3.5-5.5dB$). L'étude porte uniquement sur des bruits blancs gaussiens ; ce type de bruit est par exemple couramment rencontré au cours du processus de numérisation de livres anciens. En fin de chapitre, le comportement de nos approches pour d'autres types de bruit (non blanc et non gaussien) sera étudié. Les niveaux de bruit correspondant aux images testées sont donnés dans le *Tableau 3.1*.

La base d'images est finalement constituée de 30 images (15 images x 2 niveaux de bruits). Mis à part les images de synthèse déjà utilisées au Chapitre 2, les figures 3.1 à 3.3 donnent d'autres exemples d'images originales utilisées dans cette étude et les images bruitées associées. Les dimensions des images ont été fixées tout au long de ces expériences à 128x128 pixels.

Les trois images des figures 3.1 à 3.3 présentent chacune des caractéristiques susceptibles d'influencer le comportement des méthodes de diffusion. La première image est caractérisée par des intersections nettes avec de fortes ruptures d'orientations ; elle contient également des textures ayant des fréquences très différentes. La différence de fréquences contraint à imposer des limitations sur les tailles de noyaux gaussiens, conduisant à réduire parfois l'intérêt des filtres de pré lissage.

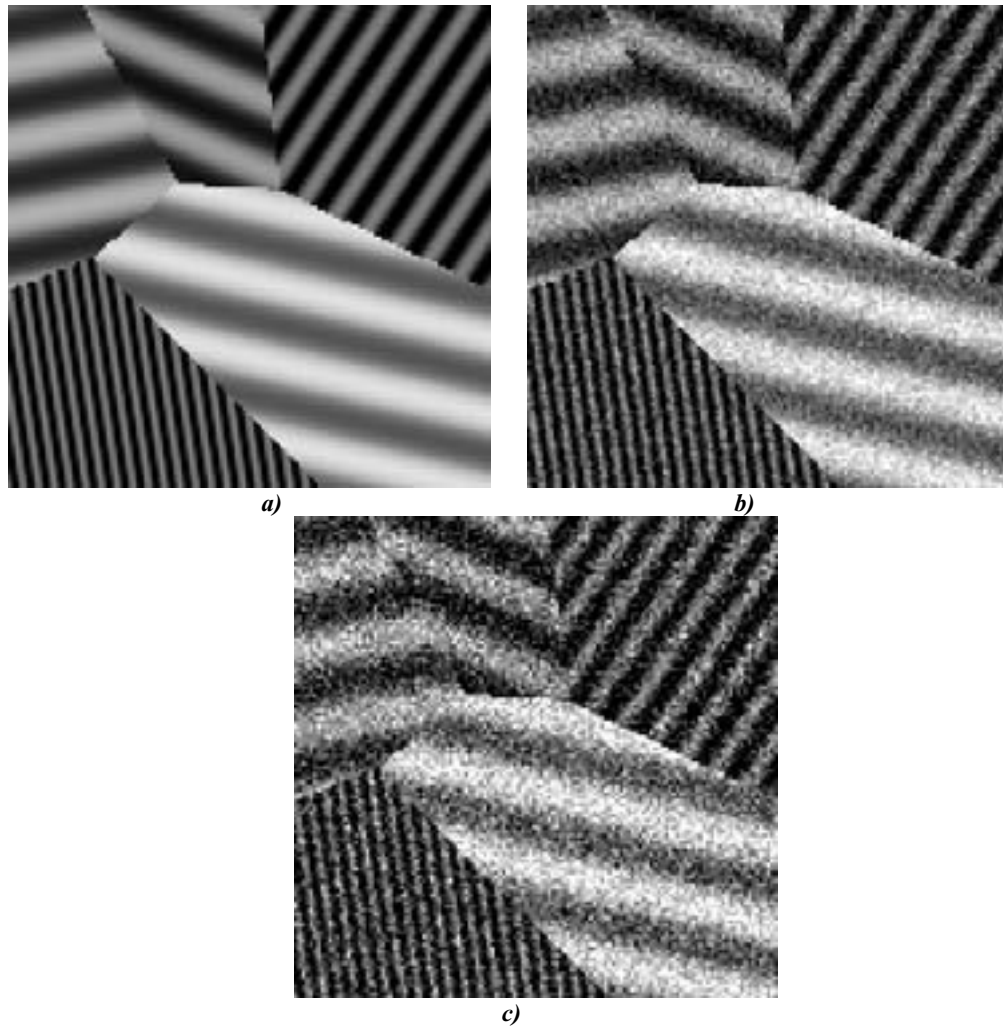


Fig.3.1 -Image test 1. a) Image originale. b) Image bruitée SNR=9.50dB (Im7fa-Tab.3.1). c) Image bruitée SNR=4.37dB (Im7fo-Tab.3.2).

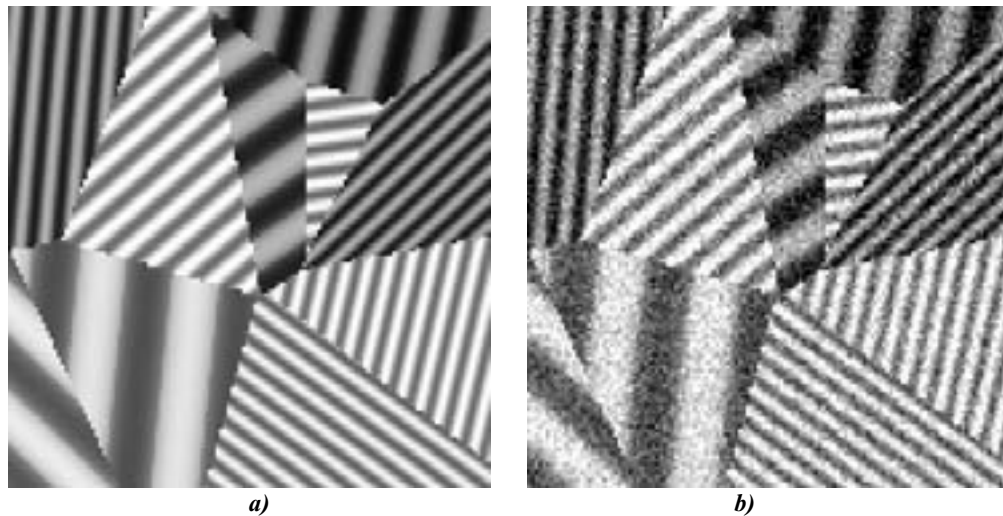
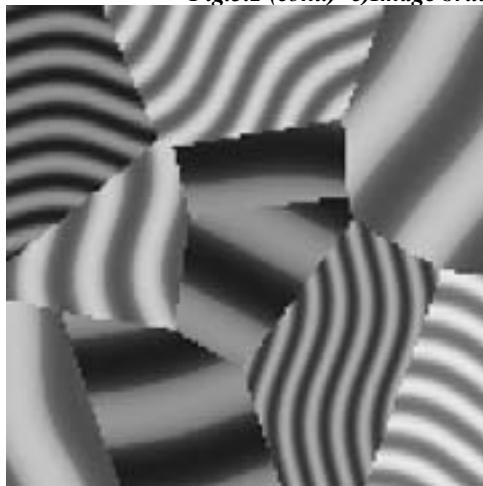


Fig.3.2- Image test 2. a) Image originale. b) Image bruitée SNR=8.45dB (Im4fa-Tab.3.1).



c)

Fig.3.2 (cont.)- c) Image bruitée SNR=4.39dB (Im4fo-Tab.3.1).



a)



b)



c)

Fig.3.3- Image test 3. a) Image originale. b) Image bruitée SNR=8.83dB (Im14fa-Tab.3.1). c) Image bruitée SNR=5.33dB (Im14fo-Tab.3.1).

La deuxième image (Fig. 3.2) contient des textures dont les variations d'orientation sur la frontière des pavages sont moins nettes. La frontière entre deux textures de même orientation, présentes dans la partie centrale de l'image, est susceptible de ne pas être détectée par les mesures de confiance des ACP, en particulier pour des masques de grande taille.

Enfin, la troisième image présente des textures d'orientation variable dans chaque pavé de Voronoi. Ce type d'image est utile pour étudier l'invariance aux rotations des versions discrètes des filtres continus et les modifications en terme de mesures quantitatives induites.

Tableau 3.1 Base d'images - Niveaux des bruits blancs gaussiens

Image	Libellé		Bruit faible		Bruit fort	
			PSNR (dB)	SNR*(dB)	PSNR(dB)	SNR*(dB)
1.	Im1fa	Im1fo	20.21	8.38	16.66	4.83
2.	Im2fa	Im2fo	18.51	8.47	14.07	4.03
3.	Im3fa	Im3fo	18.27	7.84	14.67	4.25
4.	Im4fa	Im4fo	19.65	8.45	15.60	4.39
5.	Im5fa	Im5fo	19.26	8.84	15.16	4.73
6.	Im6fa	Im6fo	17.98	8.46	13.68	4.34
7.	Im7fa	Im7fo	20.16	9.50	15.00	4.37
8.	Im8fa	Im8fo	19.10	8.73	14.95	4.58
9.	Im9fa	Im9bfo	19.79	9.08	14.64	3.59
10.	Im10fa	Im10fo	18.49	8.67	14.39	4.57
11.	Im11fa	Im11fo	18.89	7.64	14.85	3.60
12.	Im12fa	Im12fo	19.43	8.72	16.10	5.39
13.	Im13fa	Im13fo	18.60	9.11	13.27	3.78
14.	Im14fa	Im14fo	20.15	8.83	16.65	5.33
15.	Im15fa	Im15fo	18.60	8.77	14.14	4.31

3.2.2 Mesures quantitatives

Pour chaque méthode sélectionnée et pour chaque jeu de paramètres, deux mesures quantitatives sont calculées. En reprenant les notations du Chapitre 2, soit une image de synthèse non bruitée U_0 et une image bruitée U_B , nous recherchons U_t image lissée à une échelle t qui maximise le $PSNR$:

$$PSNR(U_0, U_t) = 20 \log_{10} \frac{\max U_0 - \min U_0}{RMSE(U_0, U_t)} \quad (3.1)$$

Nous nous intéressons aussi à la valeur du rapport signal bruit (SNR):

$$SNR(U_0, U_t) = 10 \log_{10} \frac{\sigma^2(U_t)}{\sigma^2(U_0 - U_t)} \quad (3.2)$$

utilisé par Kornprobst et al. [KDA96], [Kor98] dans leur analyse des différentes méthodes de diffusion.

* Le SNR pour les images bruitées est défini par $SNR(U_0, U_B) = 10 \log_{10} \frac{\sigma^2(U_0)}{\sigma^2(U_0 - U_B)}$ [KDA96]

3.2.3 Choix des méthodes

Des méthodes jugées représentatives de chaque classe d'approches présentées au Chapitre 1 seront analysées. La sélection a été effectuée selon les critères suivants :

- La méthode de Perona et Malik est considérée généralement comme la méthode de référence dans tous les ouvrages qui traitent la diffusion anisotrope. Pour la version numérique du filtre la version 8V de Kornprobst et al. sera utilisée.
- La version régularisée de Catté et al. sera également testée dans le but d'étudier l'apport du pré lissage gaussien. A notre connaissance, il n'existe pas d'étude incluant cette méthode.
- Les diverses versions de la diffusion anisotrope qui ne sont pas adaptées aux tâches d'élimination du bruit ou qui produisent des résultats de type segmentation ne seront pas étudiées. Dans cette classe nous incluons la diffusion avant et arrière et la méthode de Black et al.
- Les méthodes qui utilisent -sous diverses formes- un terme de choc ne seront pas non plus analysées. Ces approches sont dédiées à la restauration et à l'élimination du flou ; elles seront par contre analysées en fin de chapitre.
- Parmi les approches énergétiques, la diffusion TV est sélectionnée. Pour étudier l'influence d'un terme d'attache aux données, la version numérique de l'approche de restauration TV est également utilisée.
- Sur la base de l'analyse de Kornprobst et al. [KDA96], une autre approche énergétique est également introduite : la minimisation demi quadratique.
- Parmi les approches fondées sur la notion de courbure et les ensembles de niveaux, nous incluons dans notre étude la méthode de lissage sélectif d'Alvarez et al. Pour des choix particuliers de paramètre, elle correspond à l'équation de mouvement sous la courbure moyenne.
- Nous considérons aussi le mouvement sous la courbure moyenne modifiée de Yezzi comme une méthode susceptible de limiter la déformation des structures – phénomène classique pour des approches de type courbure moyenne.
- Parmi les diverses approches de diffusion tensorielle, l'analyse des approches de Cottet et Germain et de Cottet et El Ayyadi est négligée car ces méthodes sont dédiées plutôt à la segmentation d'images. Les autres approches sont conservées : l'EED et la CED. Les deux premières approches seront par contre analysées en fin de chapitre. Nous incluons aussi dans la partie finale une analyse sur la méthode récente de Tschumperlé et Deriche.
- Finalement toutes les approches que nous avons proposées au Chapitre 2 sont, bien entendu, incluses dans cet essai.

Le *Tableau 3.2* résume le choix des méthodes. Il indique aussi, pour chaque méthode, les divers paramètres susceptibles de varier au cours de la recherche du résultat optimal. Pour des approches permettant l'utilisation de diverses fonctions de diffusion, nous indiquons aussi la forme analytique de la fonction utilisée. Pour certaines méthodes, quelques paramètres jugés non essentiels par les auteurs ont été fixés arbitrairement et correspondent aux choix des auteurs ; nous les représentons en italique dans le *Tableau 3.2*. Un sigle est associé à chaque méthode dans le but de simplifier les notations.

Tableau 3.2 Récapitulatif des méthodes et des paramètres

No	Méthode	Paragraphe	Fonction de diffusion	Paramètres
1	Perona Malik (PM)	§1.4.1	$g(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{K}\right)^2}$	K - barrière de diffusion t - échelle d'observation
2	Catté et al (CAT)	§1.4.2.1	$g(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{K}\right)^2}$	K - barrière de diffusion σ - écart type du noyau gaussien de pré lissage t - échelle d'observation
3	Diffusion TV (DTv)	§1.5.2	-	t - échelle d'observation
4	Restauration TV version numérique (RTv)	§1.5.2	-	a – paramètre de régularisation; fixé $a = 0.001$ λ -paramètre d'adéquation terme attachée aux données t - échelle d'observation
5	Minimisation demi quadratique (HC)	§1.5.3	$g(s) = \frac{1}{1 + 49\left(\frac{s}{K}\right)^2}$	K –seuil de diffusion λ - multiplicateur de Lagrange –contrôle l'importance du terme de diffusion t - échelle d'observation
6	Alvarez et al. (ALV)	§1.6.2	$g(s) = \exp[-(2s)^2 / K_g^2]$	K_g - barrière de diffusion K_h - seuil de diffusion isotrope - anisotrope σ - écart type du noyau gaussien de pré lissage $h(s)$ - fonction binaire $K_h=0, K_g \rightarrow \infty$ EMSS t - échelle d'observation
7	Yezzi (MCMm)	§1.6.4	-	α - contrôle la balance diffusion directionnelle/ isotrope t - échelle d'observation
8	EED	§1.7.4.1	$1 - \exp(-1/(\nabla U_\sigma /K)^{2n})$	K -seuil de diffusion σ -écart type du noyau gaussien de pré lissage t - échelle d'observation m - contrôle le pente de décroissance
9	CED	§1.7.4.2	$\alpha + (1-\alpha) \exp\left[-\frac{C}{(j_1 - j_2)^2 + 4j_2^2}\right]$	α - constante fixée égale à 0.001 σ -écart type du noyau gaussien de pré lissage ρ - taille de l'ACP à support gaussien C - seuil de cohérence t - échelle d'observation

Tableau 3.2(cont.) Récapitulatif des méthodes et des paramètres

10	Lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions– schéma numérique par interpolation des dérivées fonctions flux (1D_{id})	§2.3.2	$g(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{K}\right)^2}$	K –seuil de diffusion $N=21$ - taille maximale de l'ACP multi échelle - fixée t - échelle d'observation
11	Lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions 1D – schéma numérique par interpolation des niveaux de gris (1D_{in})	§2.3.2	$g(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{K}\right)^2}$	K –seuil de diffusion $N=21$ - taille maximale de l'ACP multi échelle - fixée t - échelle d'observation
12	Lissage directionnel 2D avec rehaussement des jonctions et des contours 2D (1D/2D)	§2.3.3	$g(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{K_{\xi(\eta)}}\right)^2}$	K –seuil de diffusion $N=21$ - taille maximale de l'ACP multi échelle - fixée t - échelle d'observation $\alpha = \frac{K_{\eta}}{K_{\xi}}$ rapport de diffusion dans les deux directions, fixe (0.3)
14	Flux cohérence (FC)	§2.4.4	$h_{\tau}(s) = \frac{\tanh[\gamma(s - \tau)] + 1}{\tanh[\gamma(1.0 - \tau)] + 1}$	$\tau=0.85$ - seuil de confiance fixé γ - sélectivité du filtre σ - écart type du noyau gaussien de pré lissage ρ - taille de l'ACP à support gaussien t - échelle d'observation
15	Flux cohérence linéaire (FCL)	§2.4.5	$h_{\tau}(s) = \frac{\tanh[\gamma(s - \tau)] + 1}{\tanh[\gamma(1.0 - \tau)] + 1}$	τ - seuil de confiance choisi par rapport à la distribution de confiances γ - sélectivité du filtre $N=9$ – taille maximale du support de calcul de l'ACP multi échelle - fixée t - échelle d'observation

3.3 Résultats

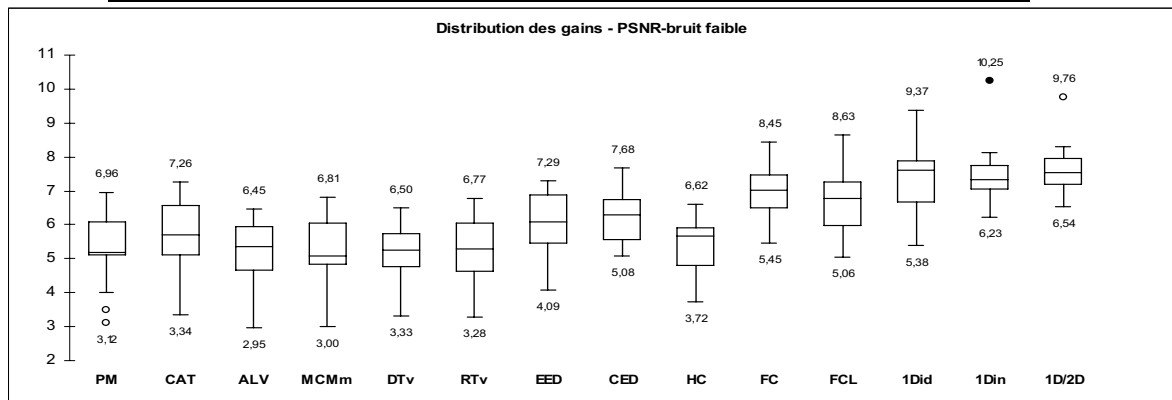
Dans un premier temps, les meilleures valeurs obtenues en termes de *PSNR* et *SNR* et les jeux des paramètres correspondant seront présentées. Pour les deux mesures quantitatives, dans le paragraphe suivant (§3.4) nous interpréterons la signification statistique de ces résultats. En montrant aussi les résultats visuels sur quelques images (§3.4 et Annexe 4) nous nous étudierons les propriétés des approches considérées et nous commenterons les différences entre leur comportement.

3.3.1 Valeurs quantitatives optimales. Paramètres optimaux

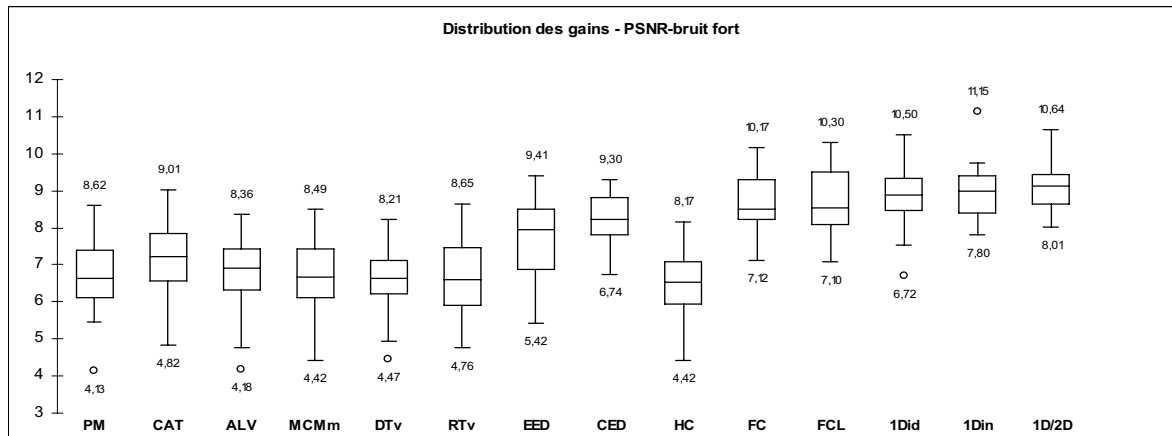
Le *Tableau 3.3* donne les résultats moyens en terme de gain en *PSNR* et *SNR*. Les résultats étant bien entendu très liés à l'image testée, les résultats d'ensemble image par image sont fournis en l'annexe 2. La *figure 3.4* résume les performances de l'ensemble des méthodes ; dans la mesure où il existe une influence de l'image testée sur le résultat, nous avons choisi de considérer pour chaque méthode la distribution du gain en *PSNR* ou *SNR* obtenu sur les 15 images entre image filtrée et image bruitée.

Tableau 3.3 Moyenne des gains obtenus par méthode et type de bruit

méthode	Moyenne PSNR - bruit faible	Moyenne PSNR - bruit fort	Moyenne SNR - bruit faible	Moyenne SNR - bruit fort
PM	5,3	6,7	4,7	6,0
CAT	5,7	7,2	5,2	6,6
ALV	5,1	6,7	4,7	6,0
MCMm	5,2	6,7	4,6	6,1
DTv	5,1	6,5	4,4	5,8
RTv	5,2	6,8	4,7	6,2
EED	6,1	7,7	5,8	7,5
CED	6,3	8,2	6,1	8,1
HC	5,3	6,5	5,0	6,1
FC	6,9	8,7	6,8	8,6
FCL	6,7	8,7	6,6	8,5
1Ddid	7,4	8,8	7,1	8,5
1Din	7,5	9,0	7,3	8,8
1D/2D	7,7	9,1	7,6	9,1

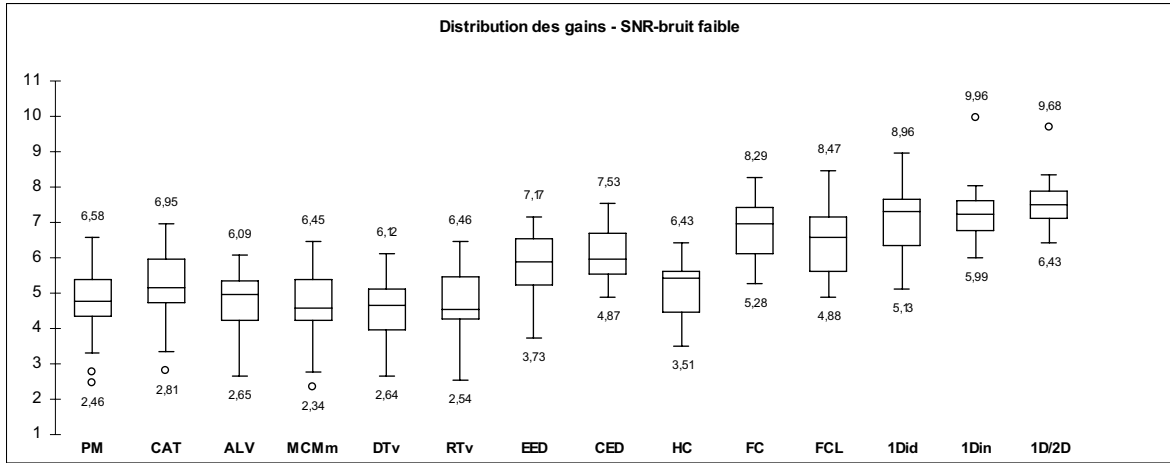


a)

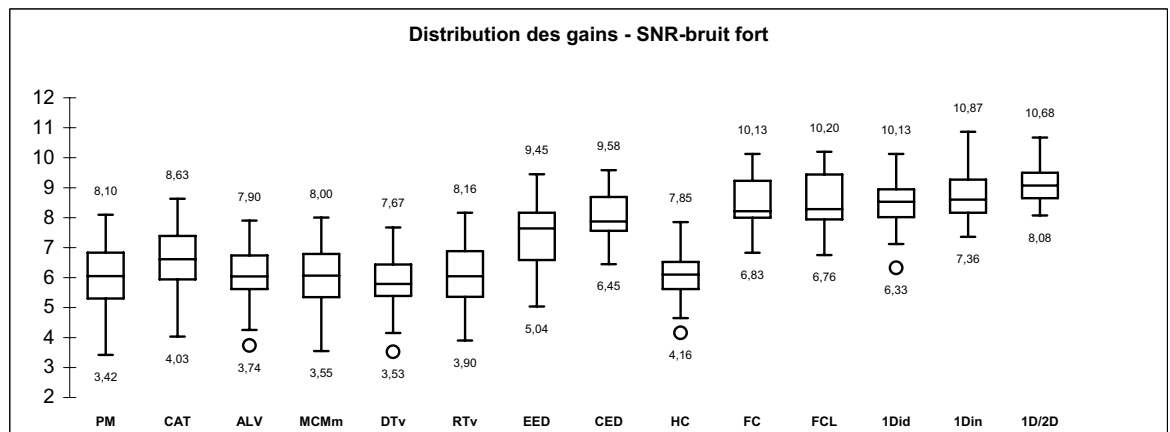


b)

Fig.3.4- Comparaison graphique des performances obtenues. a) PSNR bruit faible. b) PSNR bruit fort.



c)



d)

Fig 3.4 (cont.)- c) SNR bruit faible .d) SNR bruit fort.

Les paramètres optimaux sont, eux aussi, très dépendants de l'image (annexe 3). Nous indiquons au tableau 3.4 les paramètres médians obtenus pour chacune des méthodes. Les paramètres optimaux correspondant à chaque méthode et chaque image sont donnés en annexe 3. Pour l'ensemble des méthodes, le nombre d'itération correspondant à la solution optimale a été indiqué en lieu et place de l'échelle d'observation t . Chaque méthode a été implantée en utilisant une méthode explicite qui permet de s'affranchir des différentes erreurs introduites par les schémas implicites ; ainsi l'échelle d'observation est déterminée en multipliant le pas de discrétisation en temps ($dt=0.2$ pour toutes les méthodes de diffusion – $PM, CAT, EED, CED, FC, FCL, 1DId, 1DIn, 1D/2D$), ($dt=0.1$ pour $DTv, ALV, MCMm$). Pour HC , une méthode implicite de résolution ($dt=1.0$) de type Jacobi avec 20 pas par itération a été utilisée pour assurer la convergence.

Tableau 3.4 Paramètres estimés en utilisant une approche de type médiane sur les colonnes des tableaux A3.1.a à A3.1.d de l'annexe 3

Méthode						
PM	CAT	ALV	MCMm	DTv	RTv	EED
$n=3$ $K=54$	$N=3$ $\sigma=0.5$ $K=66$	$n=4$ $\sigma=1.5$ $K_h=55$ $K_e=70$	$n=5$ $\alpha=0.02$	$N=132$	$N=2$ $\lambda=13.5$	$n=4$ $\sigma=0.75$ $K=14$ $m=1$
Méthode						
CED	HC	FC	FCL	1DId	1DIn	1D/2D
$n=19$ $\sigma=0.5$ $\rho=1.25, C=0$	$n=3$ $\alpha=10$ $K=36$	$n=28$ $\sigma=1.0$ $\rho=1.25, \gamma=7$	$n=28$ $\tau=0.95$ $\gamma=14$	$n=20$ $\sigma=0.5$ $\beta=0.7$	$N=31$ $\sigma=0.5$ $\beta=0.725$	$n=24$ $\sigma=0.5$ $\beta=0.8$

3.4 Analyse des résultats

Les résultats obtenus par les différentes méthodes seront tout d'abord étudiés à travers une comparaison visuelle. Cette comparaison concernera les images présentées au paragraphe §3.2.1 et permettra de saisir les points forts et les limitations de chaque approche. La deuxième partie de cette section sera dédiée à l'étude de la robustesse des méthodes face au choix des paramètres ; la variabilité des paramètres en fonction de l'image traitée est assez importante ; sans rechercher l'optimum dans l'espace des paramètres, nous allons nous intéresser au comportement de chaque méthode pour un choix fixe des paramètres.

Finalement, la signification statistique des résultats sera étudiée. Les différences entre les valeurs moyennes des *PSNR* (et *SNR*) par groupe d'images et méthodes de traitement sont importantes : nous montrerons que ces différences ne sont pas le fait du hasard et qu'elles sont le reflet d'une différence réelle de niveau de débruitage entre les méthodes.

3.4.1 Comparaison visuelle des résultats

La figure 3.6 montre les images lissées correspondant aux résultats optimaux (en terme de *PSNR*) obtenus sur une des images introduites au paragraphe §3.2.1. Les résultats concernant les autres images sont données en annexe 4 (*Fig.A4.1 à Fig.A4.4*).

3.4.1.1 Perona Malik (*PM*)

Il est à noter que, indépendamment du type d'image et de niveau de bruit, la méthode réclame des barrières de diffusion relativement grandes. Cependant, pour des bruits faibles (dont l'amplitude est inférieure aux normes des vecteurs gradients des contours), la méthode est capable de fournir une image proche l'image non bruitée. Par contre, pour des images fortement détériorées l'approche ne peut pas faire une distinction nette entre contours et bruit. Dans ce cas l'élimination du bruit est effectuée par une augmentation de la barrière de diffusion tout en favorisant une diffusion isotrope qui conduit à un aspect flou pour les images fortement bruitées. Pour les deux niveaux de bruit, les barrières importantes empêchent l'apparition des effets de type escalier qui sont, quasiment, absents.

La méthode permet un gain en terme de *PSNR* de l'ordre 5 à 7dB, spécialement pour des images ayant des contours avec des normes de vecteurs gradients comparables (*Im7fa*, *Im7fo*, *Im14fa* et *Im14fo*). Pour des images ayant des contours correspondant à des gradients de normes très différentes (*Im4fa* et *Im4fo*), le gain moins important (4-5.5dB) s'explique par le choix d'une barrière globale de diffusion qui, n'étant pas adaptée localement, induit des vitesses de lissage de contours différentes. Le nombre d'itérations relativement faible, limite, dans ce cas, l'apparition des phénomènes de type « effet de trou ».

3.4.1.2 Catté et al. (*CAT*)

En comparaison avec la méthode de base de Perona-Malik, l'utilisation d'un pré lissage Gaussien n'apporte pas systématiquement un gain en terme de qualité des résultats. Sur l'image *Im7fo*, les résultats de la méthode de Catté (*Fig. 3.6.c*) sont équivalents à ceux obtenus par l'approche de Perona Malik (*Fig. 3.6.b*). La région de forte fréquence située en bas de l'image, dans la partie gauche, limite la taille du noyau gaussien. Afin d'être préservée, cette région impose une valeur réduite pour l'écart type du noyau ($\sigma=0.25$) ; par conséquent le pré lissage faible ne permet pas une élimination efficace du bruit et le filtre se comporte de manière très proche de celui de Perona Malik. Pour réduire le bruit la méthode nécessite une barrière *K* plus importante tout en favorisant ainsi des résultats de type lissage isotrope.

Les fréquences moins élevées des diverses régions de l'image *Im4* imposent des contraintes moins fortes sur l'écart type du noyau ($\sigma=0.5$) ; par conséquent l'estimation des diffusivités est plus robuste toute en conduisant à des résultats supérieurs à la méthode de

Perona Malik : un gain de 0.6 dB sur $Im4fa$ et 0.4 dB sur $Im4fo$. Des résultats nets peuvent être observés en comparant visuellement les résultats sur les images $Im4$ et $Im14$ en annexe 4.

3.4.1.3 Alvarez et al. (ALV)

La méthode de lissage sélectif d'Alvarez et al. est la première approche analysée qui utilise un lissage directionnel. Théoriquement, la combinaison lissage directionnel (pour les forts gradients) et diffusion isotrope (pour des faibles gradients), peut apporter une efficacité accrue dans des tâches de filtrage. Sur les images analysées nous observons cet effet seulement sur l'image 7. Le bruit placé sur les textures de faible fréquence, caractérisé en même temps par des faibles normes des vecteurs gradients est éliminé efficacement par une diffusion isotrope. Le gain de 0.3 dB (par rapport à Perona Malik) est principalement due à ces régions. La zone de forte fréquence située en bas, dans la partie gauche de l'image est quasiment non lissée. Etant une zone à fort vecteurs gradients, le lissage directionnel est très important par rapport à la diffusion isotrope, mais, les directions de diffusion, étant liées aux vecteurs gradients, sont fausses (Fig.3.5). Le temps d'arrêt, relativement faible, limite la création de fausses structures dans ces régions.

En ce qui concerne les deux autres images, des résultats inférieurs en terme de $PSNR$ s'expliquent par le fait que les textures présentes ont des vecteurs gradients forts sur leurs bords. Le lissage est essentiellement directionnel sur ces contours ; mis à part le phénomène qui vient d'être illustré, la proportionnalité en tout pixel entre le lissage directionnel et la courbure produit des distorsions géométriques dans les zones à forte courbure (§1.6.2). Des temps d'arrêt, toujours de valeur faible, limitent l'arrondissement dans ces régions en limitant aussi l'effet du lissage isotrope, responsable de l'élimination du bruit à l'intérieur des motifs filaires.

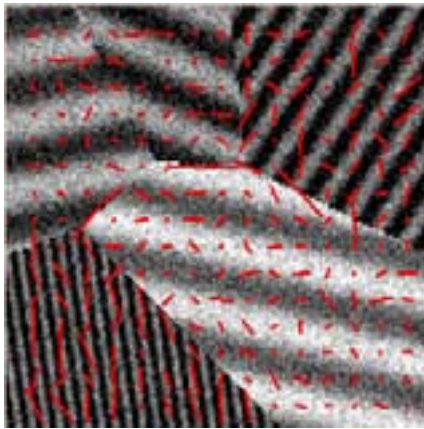


Fig.3.5- Directions fausses de diffusion pour l'approche d'Alvarez et al.

En ce qui concerne la taille du noyau gaussien de pré lissage, la méthode réclame des valeurs relativement grandes. Les normes robustes des vecteurs gradients interviennent dans le processus de lissage comme un facteur de pondération, mais elles n'arrivent pas à compenser les défauts de la méthode, notamment la tendance à introduire des distorsions géométriques.

3.4.1.4 Mouvement sous la courbure moyenne modifiée (MCMm)

En prenant une approche surfacique, l'idée essentielle de l'approche de Yezzi était de forcer un mouvement dans la direction orthogonale à une surface qui modélise localement l'image analysée, en assurant donc une préservation des contours. Cette discussion n'est valable que pour des valeurs importantes du paramètre de recalage α . En fait, le lissage est unidirectionnel dans la direction tangente aux contours seulement pour des valeurs $\alpha \rightarrow \infty$. Ce type de lissage est moins efficace pour l'élimination du bruit, surtout quand son niveau est important. Les valeurs optimales de $\alpha \in [0.01; 0.02]$ indiquent une préférence pour un lissage

plutôt isotrope, plus efficace (1.102). Les résultats montrent cette préférence. Les avantages mentionnés par Yezzi, à savoir, la préservation des contours et la limitation des distorsions géométriques en comparaison avec les méthodes de type MCM ne sont pas mis en évidence. Les résultats en terme de *PSNR* et *SNR* sont finalement très voisins de ceux obtenus par la méthode de Alvarez et al.

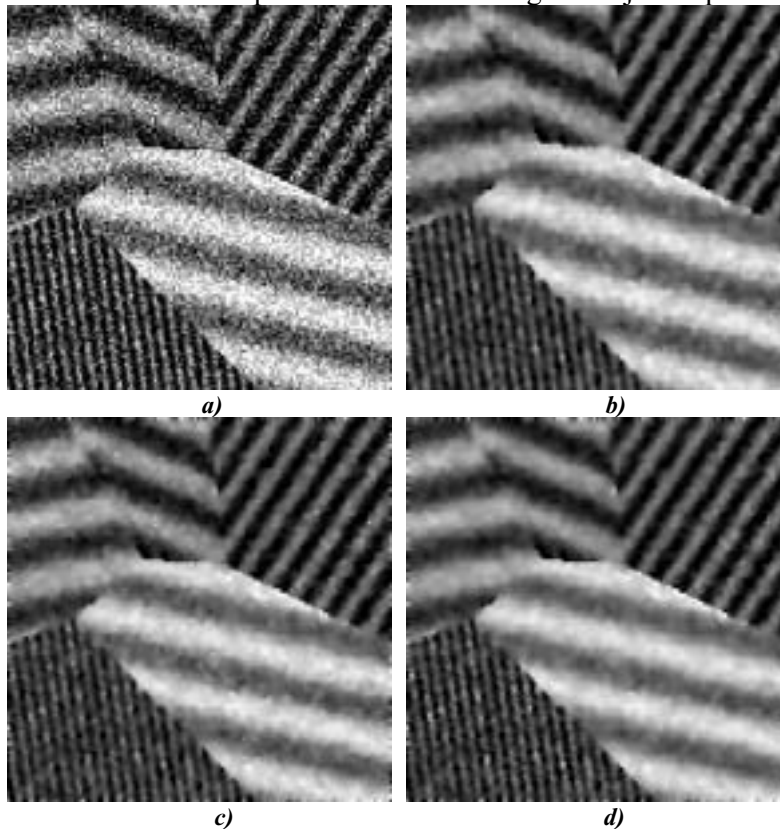
3.4.1.5 Diffusion TV (*DTv*)

Cette méthode impose en tout pixel de l'image un lissage unidirectionnel. Le mouvement sous la courbure moyenne pondérée interdit tout lissage isotrope, les résultats illustrent cet aspect.

En comparaison avec les autres approches, la diffusion TV de Rudin-Osher-Fatemi nécessite un grand nombre d'itérations ; cela s'explique par la présence de la norme des vecteurs gradients comme dénominateur en (1.69), les modifications en terme d'intensité en niveaux de gris par itération sont, par conséquent, faibles. Les distorsions géométriques induites par des approches de type MCM dans des zones à forte courbure sont limitées par le même terme. Il est à noter l'irrégularité des contours obtenus d'autant plus importante que le niveau de bruit est grand. Cela peut s'expliquer de manière similaire à l'approche de lissage sélectif d'Alvarez et al. Les directions de diffusion fausses (*Fig.3.5*) et le grand nombre d'itérations altèrent localement la continuité des contours. Notons qu'une explication mathématique peut être également avancée : la minimisation par variation totale minimise le périmètre d'un iso contour, la solution n'étant pas, nécessairement, continue.

Même si les résultats quantitatifs en terme de *PSNR* et *SNR* sont, globalement, inférieurs à ceux obtenus par les méthodes présentées avant et mis à part le phénomène d'irrégularité des contours, notons la netteté des résultats. En utilisant d'autres critères de comparaison (*MOS* par exemple), cette méthode pourrait parfaitement être classée comme étant supérieure aux deux méthodes précédentes.

La méthode présente aussi l'avantage d'un jeu de paramètres réduit.



*Fig.3.6 - Résultats obtenus par les diverses approches sur Im7fo.
a)Image originale. b) PM.
c)Catté et al). d)Alvarez et al.*

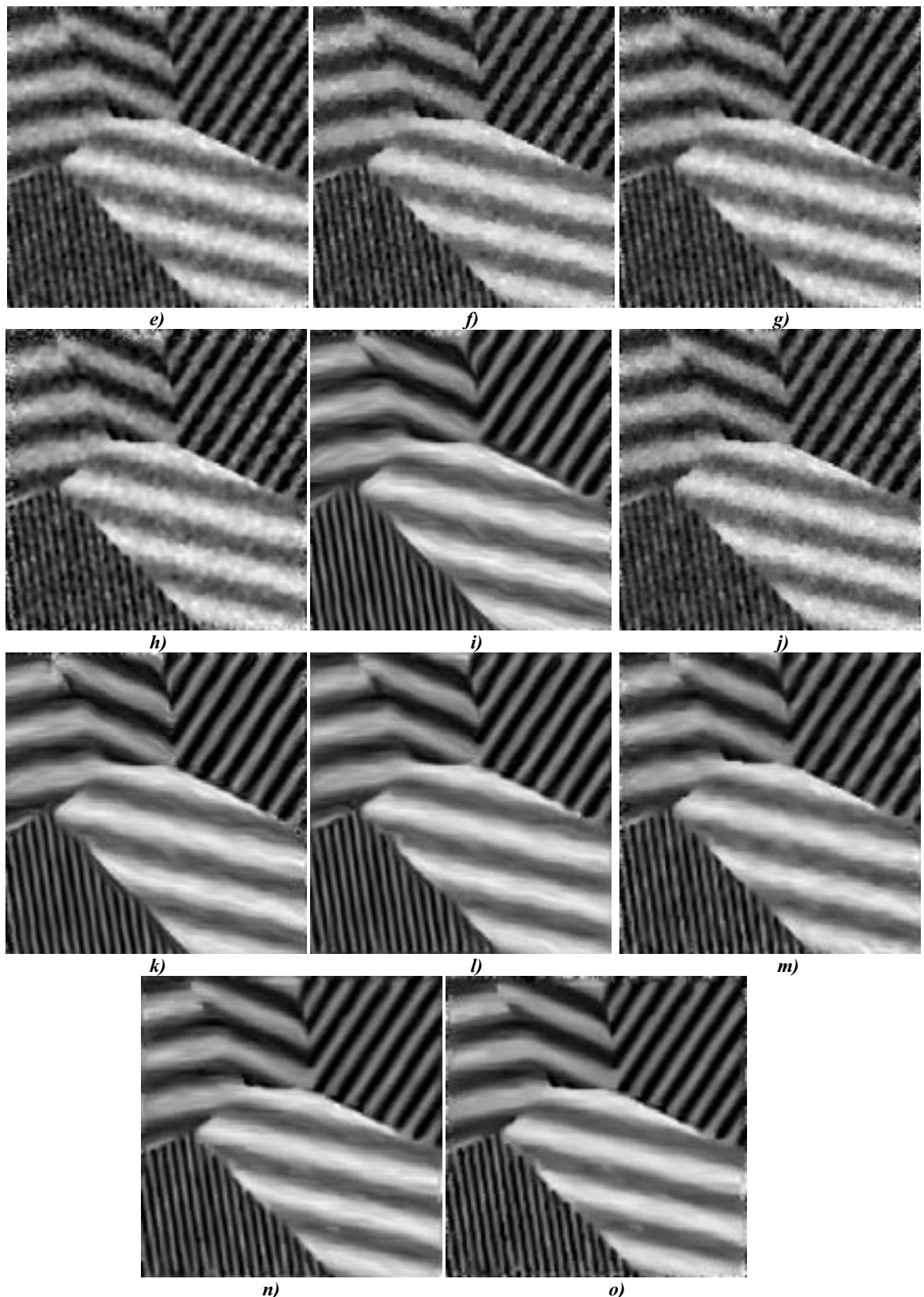


Fig.3.6 (cont.)- e) MCMm . f) DTv. g) RTv. h) EED. i) CED. j) HC. k) FC. l) FCL. m) 1Did. n) 1Din. o) 1D/2D.

3.4.1.6 Restauration TV –version numérique (RTv)

Parmi les méthodes étudiées, ce filtre est un cas spécial : en comparaison avec les autres approches il produit des modifications plus importantes en une seule itération, ces modifications n'étant pas limitées par des propriétés liées aux notions de stabilité définies lors de l'implémentation numérique. Par conséquent le nombre optimal d'itérations donné au *Tableau A3.1.b* ne peut pas être comparé, par exemple, au temps d'arrêt optimal de la diffusion par minimisation de la variation totale. La *Figure 3.7* permet de comparer le résultat d'une diffusion TV en 5 itérations et le résultat de cette approche numérique avec le paramètre de régularisation $\lambda = 0$.

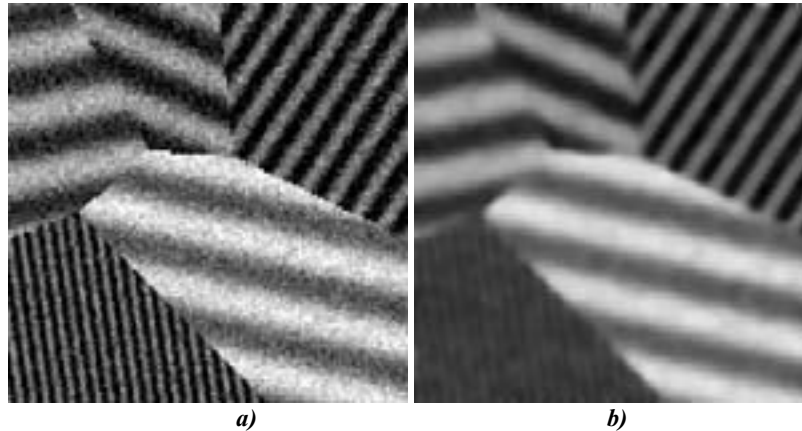


Fig.3.7 - Résultats comparatifs DTv et RTv, n=5.

Afin de limiter cet effet de lissage trop important, le paramètre de régularisation doit être choisi non nul. Pour une image présentant une énergie locale variable en tout pixel, le choix global du paramètre de régularisation conduit à des surfaces non homogènes dépendantes du niveau du bruit. Néanmoins la méthode est jugée, globalement meilleure que la diffusion TV sur l'ensemble des images. Nous avons constaté que la méthode réclame un nombre relativement faible d'itérations. Contrairement à l'observation des auteurs qui indiquent que leur méthode est insensible au temps d'arrêt nous avons observé que les valeurs de *PSNR* et *SNR* à la convergence sont inférieures aux valeurs optimales.

3.4.1.7 Diffusion pour le rehaussement de contours (EED)

La première méthode de diffusion tensorielle de Weickert utilise des fonctions de diffusion différentes. La diffusion toujours forte ($g_{\xi}(\cdot)=1$) dans la direction des contours associée à une fonction de diffusion de type Perona Malik sur la direction orthogonale, produit un lissage efficace, même pour des pixels placés sur des contours à forts gradients. En comparaison avec la méthode de Catté et al qui diminue fortement le lissage dans le voisinage des contours, la diffusion unidirectionnelle induite par le choix de fonctions différentes remplace les intensités en niveaux de gris bruitées, par des moyennes pondérées, calculées sur des supports allongés dans les directions des contours. Les résultats sont facilement observables sur les images analysées, spécialement pour les images données en annexe : les contours sont plus nets. La réduction du bruit est également importante sur les zones planes de l'image ; dans ces zones, en utilisant un pré lissage gaussien, la méthode s'approche d'un lissage isotrope : $g_{\xi}(\cdot)=1$ et $g_{\eta}(\cdot)=1$.

La principale limitation de la méthode est liée à la modalité d'estimation de l'orientation. Pour obtenir des estimations robustes, l'influence du bruit doit être réduite. La méthode utilise donc un lissage Gaussien (Chapitre 2) et l'estimation de l'orientation à partir des vecteurs gradients lissés ne permet pas l'obtention d'une orientation pertinente en tout pixel. Nous allons illustrer ce phénomène sur l'image *Im7fa*. Comme pour la méthode de

Catté et al., la texture de forte fréquence située dans la partie en bas à gauche de l'image limite la taille du noyau. Pour des valeurs faibles ($\sigma=0.5$) les orientations estimées sont fausses (Fig.3.8.b) ; dans ce cas le lissage fort dans ces directions détruira les structures filaires. D'autre part, l'utilisation d'un noyau plus grand (Fig.3.8.c) éliminera ces structures, et produira des orientations toujours fausses.

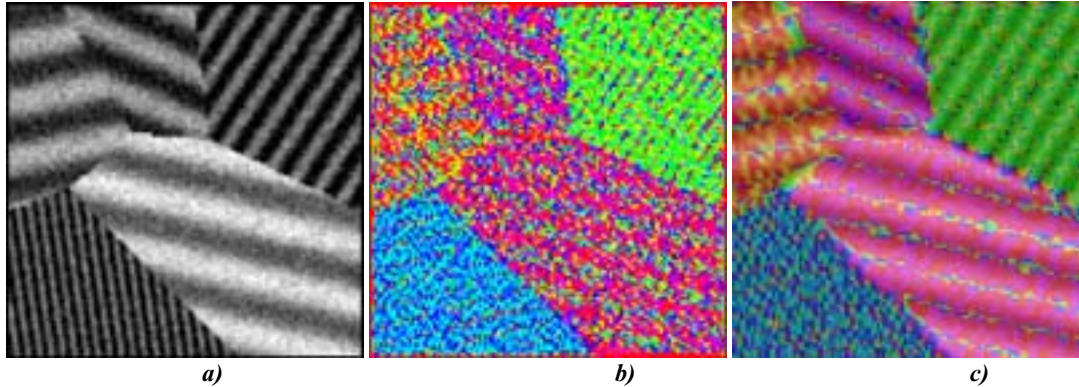


Fig.3.8- EED et estimation de l'orientation. a) *Im7a* lissée par un noyau gaussien $\sigma=0.5$. b) Orientation des contours estimée. c) Superposition de *Im7a* lissée par un noyau gaussien $\sigma=1.0$ et de l'image d'orientation.

Globalement, la méthode est supérieure aux méthodes précédentes. Les meilleurs résultats (amélioration ≈ 7 dB en *PSNR* sur des bruits faibles et ≈ 8.3 dB sur des bruits forts) s'obtiennent pour des images ne contenant pas de zones de fréquence élevée (*Im14fa* et *Im14fo*).

3.4.1.8 Diffusion pour l'augmentation de la cohérence (CED)

L'utilisation d'une information directionnelle pertinente associée à une modulation de l'intensité du processus de diffusion à travers un paramètre (théoriquement) indépendant du niveau du bruit, apporte un gain important en terme de qualité de l'image traitée. L'information directionnelle robuste fournie par une ACP à support gaussien permet un traitement correct, même pour les zones de fréquence élevée. En analysant les résultats sur *Im7fo* (Fig.3.6.i), il est à noter, par exemple, la reconstruction presque parfaite de la zone critique, mentionnée pour les autres approches. Le résultat supérieur (amélioration proche d'1 dB en *PSNR*) par rapport à l'EED illustre cette différence de qualité.

La faiblesse de la méthode se manifeste spécialement pour des images contenant des textures de fréquences et de contrastes différents. La mesure de confiance utilisée est dépendante de la différence entre les deux valeurs propres d'une ACP dont le support est de taille fixe. N'étant pas normalisée cette mesure est une fonction du rapport signal/bruit local et il traduit un lissage préférentiel des zones à forts gradients (*Im7a* et *b* – les textures à faible fréquence). Le phénomène est d'autant plus important que la taille du support est petite, or, en analysant les résultats du *Tableau A3.1.c*, il est à noter qu'elle est relativement faible. Par conséquent, l'influence du bruit ne peut pas être éliminée et, sur des zones à faible énergie, il induit des orientations fausses tout en créant des micro structures cohérentes (*Im14fa,fo* et *Im14fa,fo*- les textures à faible fréquence – *Annexe 4*-). Elle peuvent être éliminées en utilisant deux approches : soit en augmentant le poids de la diffusion isotrope (par une constante α de valeur plus grande), soit en augmentant le nombre d'itérations. La première modalité conduit à des pertes de dynamique de l'image lissée. Pour illustrer l'effet de l'augmentation du nombre d'itérations, nous avons utilisé sur l'image 14 les paramètres optimaux en portant le nombre d'itérations de 16 à 50 (Fig3.9.). Les micro structures sont éliminées mais la méthode produit un arrondissement des zones à forte courbure (Fig3.9.b). Théoriquement ce phénomène

peut s'éliminer en augmentant le seuil C mais des seuils C non nuls, peuvent limiter la diffusion sur des zones à faibles vecteurs gradients (Fig3.9.c).

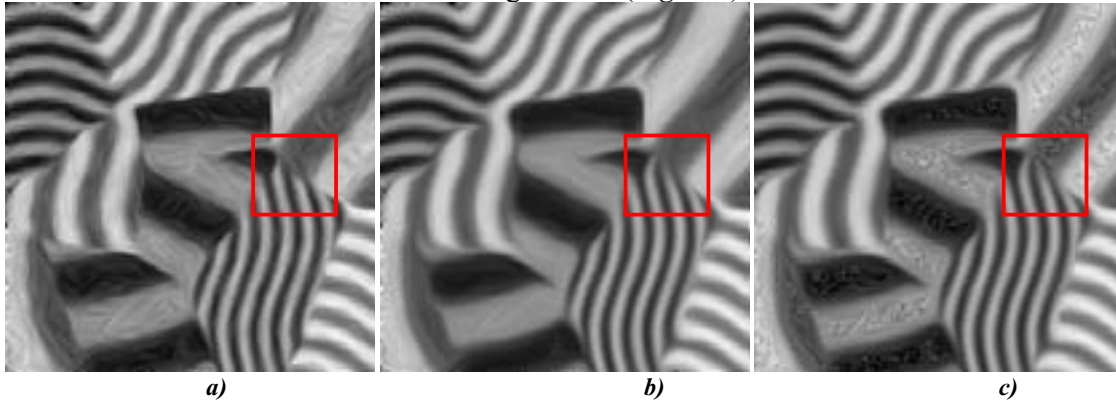


Fig.3.9 - CED- divers choix des paramètres. a) Résultat pour les paramètres optimaux du Tableau A3.1.c. b) Résultat pour les paramètres optimaux du Tableau A3.1.c et $n=50$, $C=0$. c) Résultat pour les paramètres optimaux du Tableau A3.1.c et $n=50$, $C=0.2$.

Même si les résultats visuels sont sensiblement différents, les deux méthodes de Weickert produisent, globalement, des mesures quantitatives très proches, spécialement pour des niveaux de bruit faibles. Pour des images fortement bruitées, la CED est meilleure en terme de PSNR et de SNR.

3.4.1.9 Minimisation demi quadratique (HC)

Notons tout d'abord la similarité - à une multiplication par une constante près- du modèle continu avec l'équation de diffusion anisotrope biaisée de Nordstrom (§1.5.1). Pour le type d'images traitées, le terme de réaction, attaché aux données, a une influence plus importante que celle mentionnée dans la littérature où il n'est question que de réduire l'influence du temps d'arrêt. En fonction du contenu énergétique d'une région de l'image analysée le jeu des deux termes- diffusion et de réaction- influence fortement les résultats. Les approches de type diffusion anisotrope se caractérisent par une forte diminution du processus de lissage dans le voisinage des contours. Dans ces régions, le terme de réaction prend le pas sur le terme de diffusion et les modifications sont très faibles. Dans les régions sourdes, la réduction du bruit réclame la multiplication du terme de diffusion par une constante ($\alpha \geq 1$) augmentant ainsi sa contribution par rapport à celle du terme d'attache aux données. Malgré une meilleure conservation des contours par rapport à l'approche de Perona-Malik, il est généralement difficile d'établir un choix global pour α et, par suite, un poids adapté localement à l'énergie du signal. Pratiquement des valeurs trop faibles garderont les contours non modifiés, mais en même temps, produiront des arrières-plans bruités; des valeurs de $\alpha \rightarrow \infty$ favoriseront des résultats de type Perona-Malik.

Du fait du rehaussement, le bruit présent sur les contours est amplifié et des phénomènes de type escalier produisent des contours plus irréguliers que dans les cas de la CED et la EED.

3.4.1.10 Flux cohérence (FC)

En comparaison avec la CED l'utilisation d'une mesure de confiance normalisée permet l'obtention de résultats visuels de meilleure qualité. Du fait de l'insensibilité relative de la mesure au rapport signal/bruit local, la diffusion est réalisée avec une vitesse relativement constante. Par conséquent, la méthode permet un lissage plus efficace que la CED, spécialement pour des images avec un contenu fréquentiel différent et avec un spectre large des amplitudes. Pourvu que le support de calcul de l'ACP soit suffisamment grand, les effets de type « micro-structures » sont moins visibles dans les résultats obtenus avec ce filtre. La diffusion est fortement diminuée pour les minima de la mesure de confiance; or, pour les

images de type mosaïque que nous analysons, nous avons montré au Chapitre 2 que ces minima correspondent à des supports d'ACP contenant des orientations multiples. Ces effets peuvent s'observer sur l'ensemble des résultats.

En ce qui concerne le choix des paramètres, le contenu structurel des images introduit des limitations sur les tailles des noyaux gaussiens qui interviennent dans le calcul de l'ACP. Pour certaines images, fortement bruitées, il est impossible de retrouver les orientations idéales des textures non bruitées. Dans ce cas la mesure de confiance est dépendante de la valeur du rapport signal/bruit et la méthode peut diminuer la diffusion pour des régions qui ne contiennent pas d'intersection. Parmi les images analysées, cet effet est le plus visible sur *Im4fo* sur la texture de basse fréquence située en bas de l'image. Dans cette région les résultats sont proches de celles de la *CED* ; néanmoins, les autres textures présentes dans l'image sont mieux lissées tout en conduisant à un gain de 0.5dB en termes de *SNR* et de *PSNR*. Ce phénomène est moins important sur *Im4fo* ; globalement la taille de l'ACP peut être choisie plus grande ($\rho = 2.25$) tout en permettant une estimation de l'orientation proche de l'orientation théorique, donc une moindre sensibilité au bruit de la mesure de confiance.

Finalement il est à noter que la méthode s'adapte à certain niveau de bruit par le jeu des paramètres. Pour des bruit forts, mis à part l'augmentation du temps d'arrêt, observé pour toutes les méthodes, une taille plus grande du support de l'ACP est nécessaire pour s'approcher de l'orientation théorique ; la pente plus faible de la zone de transition de la fonction de diffusion (γ) compense la diminution globale des mesures de confiance induite par le bruit.

3.4.1.11 Flux cohérence linéaire (*FCL*)

Même si la *FCL* appartient à la même classe d'opérateurs que la *FC*, les résultats issus de cette approche linéaire sont différents. En utilisant une information supplémentaire d'échelle dans l'estimation de la mesure de confiance, la *FCL* permet un lissage plus efficace des zones ayant un faible rapport signal bruit. L'ACP multi échelle fournit en tout pixel la cohérence la plus grande calculée autour du point considéré ; cette confiance, plus grande que dans le cas de la *FC*, conduit à des lissage directionnels plus puissants. Les minima de la cohérence sont les minima de l'ACP multi échelle et correspondent à des ruptures d'orientation ; par conséquent la méthode permet de conserver les intersections des textures.

Par contre un défaut de cette approche peut être illustré sur l'image *Im8fa* issue de la base testée (*Fig.3.10*). Cette image présente deux textures ayant des orientations très proches. La rupture d'orientation n'est pas réellement franche dans la zone encadrée en rouge. A une certaine échelle elle peut être saisie et la *FC* (*Fig.3.10.e*) produit des résultats corrects tout en gardant la frontière entre les deux textures. L'ACP multi échelle utilisée dans la *FCL* conduit autour de la frontière entre les deux textures à une taille élevée du support permettant ainsi d'atteindre une cohérence maximale (*Fig.3.10.c*). Finalement, les valeurs de cohérence pour cette région ne peuvent pas être classées comme des minima globaux induisant une tendance à fusionner les deux régions en prolongeant ces structures cohérentes (*Fig.3.10.e*) à l'échelle de l'ACP adaptatif.

Ce phénomène représente le principal défaut de ce type de filtre ; afin de le limiter, la taille maximale de l'ACP est bornée à $N=9$. Pour compenser le lissage moins efficace des orientations nous utilisons dans tous les expériences une taille relativement grande du noyau gaussien de pré lissage ($\sigma = 1.0$).

Comme pour la méthode précédente une interprétation intuitive du choix des paramètres est possible. Le nombre d'itérations dépend du niveau du bruit : pour chaque image une valeur plus grande du temps d'arrêt est observée pour la version la plus bruitée. Le seuil de la fonction de diffusion doit permettre la mise en évidence des régions ayant de multiples orientations théoriques ; l'aire relative de ces régions par rapport à l'aire de l'image étant faible, la méthode réclame des seuil relativement importants. A part quelques cas isolés

($Im3fo-SNR$ et $Im15fo-PSNR$) les seuils sont égaux à 0.95 (les seuils sont donnés par rapport à l'histogramme des cohérences de l'image).

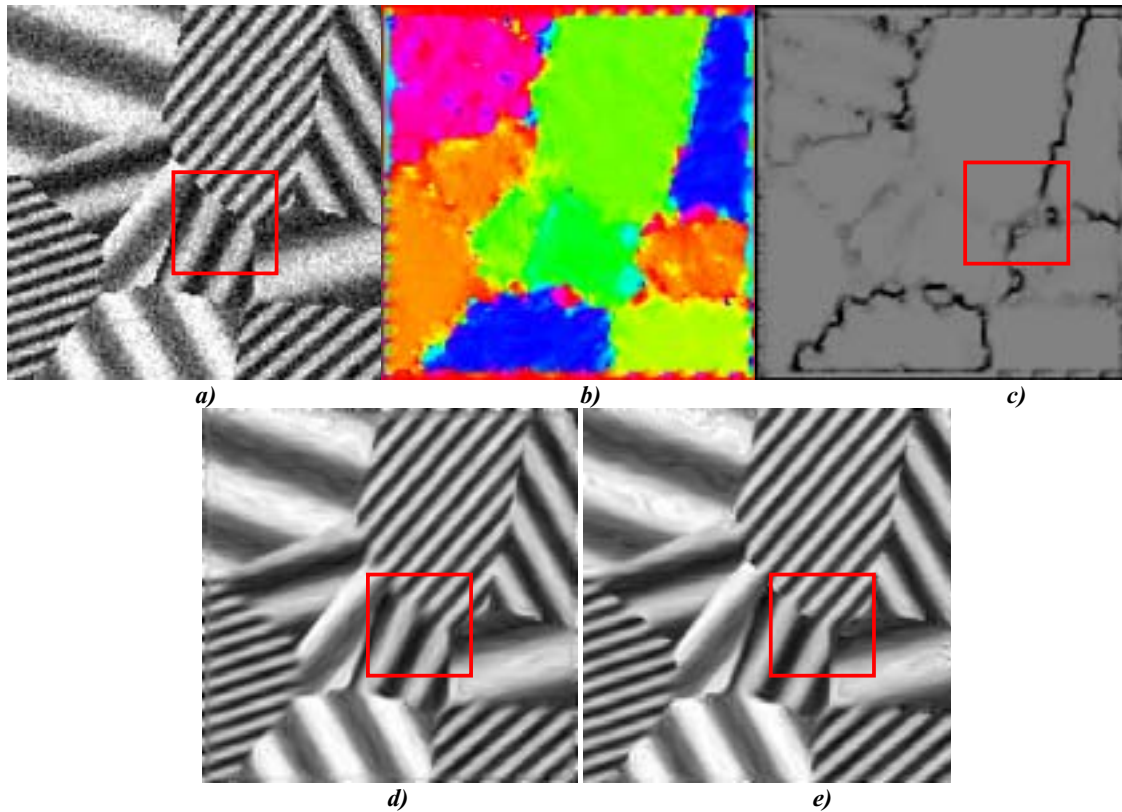


Fig.3.10 -Différence de comportement entre la FC et la FCL. a) $Im8fa$. b) ACP multi échelle $N=9$. c) Cohérence de l'ACP multi échelle. d) Résultat optimal FCL. e) Résultat optimal FC.

La valeur de la pente de la zone de transition de la fonction de diffusion peut être liée de manière intuitive au contenu fréquentiel des images et au niveau du bruit. Sur des images de type $Im7$ et $Im4$ contenant des textures de fréquence relativement élevée, la limitation du support de l'ACP ne modifie pas de manière significative les cohérences maximales sur les zones de faible rapport signal bruit et de grandes valeurs pour γ permettent de réduire la diffusion des jonctions. Par contre, pour des images de type $Im8$ et $Im14$ les tailles maximales faibles des ACP fournissent des cohérences comparables dans les régions de faible rapport signal bruit et au niveau des jonctions du type analysé en *Fig.3.10* ; le maximum global en terme de SNR et $PSNR$ est alors obtenu pour des valeurs plus faibles de γ induisant parallèlement des lissages plus forts des jonctions.

3.4.1.12 Lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions – version numérique par interpolation des dérivées des fonctions flux ($IDid$)

L'écriture de l'équation du filtre de lissage directionnel directement au niveau des coordonnées correspondantes à la direction des contours et à la direction orthogonale (estimées à une certaine échelle) associée à l'utilisation des indicateurs de cohérence fondés sur les dérivées directionnelles du signal permet l'obtention de résultats supérieurs qui se traduisent par des gains importants en SNR et $PSNR$ par rapport aux autres méthodes. Ces résultats sont observables pour les trois dernières méthodes.

Les résultats obtenus par un lissage qui utilise le premier filtre de cette catégorie, le $IDid$, sont différents par rapport aux approches de diffusion tensorielle précédentes. La combinaison des information semi locales (les directions de différenciation) et locales (les dérivées dans ces directions) induit une meilleure restauration des jonctions. En comparaison

avec les diverses mesures de confiance (*CED*) ou de cohérence (*FC* et *FCL*), et pourvu que l'influence du bruit soit diminuée par un pré lissage gaussien et qu'une information directionnelle robuste soit obtenue en utilisant une ACP, les dérivées directionnelles du signal fournissent une meilleure indication de la région traitée : jonction ou texture directionnelle. Les valeurs de dérivées, plus grandes dans le premier cas induisent la diminution du processus de diffusion tout en permettant un processus de rehaussement. Les valeurs faibles correspondant à des motifs unidirectionnels induisent un lissage plus fort, à travers des fonctions de diffusion décroissantes. La dépendance de l'intensité du processus de lissage vis à vis du contenu fréquentiel de la texture analysée étant diminué, tous les motifs directionnels sont lissés avec une vitesse comparable ; par conséquent les artefacts de type micro textures sont pratiquement absents des résultats.

La principale limitation de la méthode réside dans le fait qu'elle n'est pas invariante aux rotations. Des artefacts se manifestent par des contours irréguliers pour des textures n'ayant pas l'une des orientations principales de la grille numérique. La variance aux rotations produit par exemple un léger impression de flou sur *Im7fo* (Fig.3.6.m) et un effet de type escalier sur *Im4fa*, *Im4fo*, *Im14fa* et *Im14fo* (Annexe 4). Dans le cas de l'image *Im7fo*, le choix des paramètres le mieux adapté pour la restauration de l'image favorise un processus de diffusion pour la plupart des pixels de l'image ; sur la texture centrale de l'image, orientée à $\pi/8$, le lissage se fait par des diffusions alternées selon l'axe horizontal et celui orienté le long de la bissectrice principale. Localement la diffusion sur un axe peut prendre le pas sur la diffusion sur l'autre induisant cet aspect flou. L'origine du deuxième effet est la même : si la texture n'a pas une orientation correspondant à l'un des axes principaux et si les dérivées directionnelles selon l'un des deux axes est inférieure à la barrière de diffusion, le processus de diffusion peut avoir localement un comportement de rehaussement.

En ce qui concerne le choix des paramètres, la méthode s'adapte au niveau de bruit en jouant sur le nombre d'itérations (plus grand pour des bruits plus forts), sur la taille du noyau de pré lissage (globalement plus grand pour des images plus altérées) et sur la barrière de diffusion (plus importante pour des bruit faibles). Comme illustré au Chapitre 2 la méthode est sensible au choix du temps d'arrêt et un dépassement de la valeur optimale affaiblit rapidement la qualité de l'image filtrée.

3.4.1.13 Lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions– version numérique par interpolation des intensités en niveaux de gris (*IDin*)

Appartenant à la même classe d'opérateurs que le filtre précédent, les résultats obtenus par ce filtre sont très voisins. Néanmoins quelques différences dans le comportement subsistent.

Pourvu que l'interpolation des intensités en niveaux de gris conduise à une modélisation parfaite des textures qui composent l'image, cette version numérique est invariante aux rotations d'un point de vue théorique. Dans tous les résultats présentés, l'utilisation d'une interpolation polynomiale d'ordre 3, implémentée de la manière décrite au Chapitre 2, s'avère suffisante. Aucun défaut d'invariance en rotation n'a été détecté.

L'utilisation d'une ACP multi échelle permet, en tout pixel, de retrouver des orientations proches des orientations théoriques ; le processus de diffusion se fait de manière unidirectionnelle le long de ces orientations ; la précision suffisante de l'interpolation polynomiale d'ordre 2 permet d'approcher numériquement les valeurs analytiques et, par conséquent, de fournir des résultats avec des contours très réguliers. L'action unidirectionnelle empêche l'apparition des artefacts observés lors de l'utilisation de la méthode précédente.

Néanmoins, en agissant en tout pixel sur une seule direction, le lissage par cette méthode est moins puissant que celui conduit par *IDid* dans le cas de régions présentant un faible rapport signal bruit et avec des orientations différentes de celles des axes principaux.

Dans ce type de régions, la *1Did*, par l'alternance de deux directions de diffusion, semble capable d'éliminer le bruit. La *1Din* compense cette vitesse moins élevée de filtrage par un nombre plus grand d'itérations, mais, pour des barrières de diffusion décroissantes en fonction du temps, les zones ayant une faible énergie sont moins homogènes spécialement pour des bruit forts. L'aire relative de ces régions étant plus grande que celle occupée par les contours mieux restaurés explique sur quelques images la légère supériorité de la *1Did* en terme de mesures quantitatives.

Finalement, en comparaison avec la *1Did*, qui sur certaines images (*Im1fa* et *Im1fo*, *Im2fa* et *Im2fo* - les images analysées en Chapitre 2, et *Im13fa* et *Im13fo*) est nettement inférieure, la méthode *1Din* se caractérise par une plus grande cohérence des résultats.

Le choix des paramètres relève d'une discussion identique à celle menée pour la *1Did*.

3.4.1.14 Lissage directionnel 2D avec rehaussement des jonctions et des contours(*1D/2D*)

Le rôle principal de l'utilisation d'une deuxième direction de diffusion est d'augmenter la capacité de la *1Din* à lisser les zones de faible énergie. Cet effet est observable sur tous les résultats.

L'utilisation d'une barrière de diffusion plus faible dans les directions orthogonales aux contours introduit aussi un effet de rehaussement pénalisant les valeurs de *PSNR*, mais augmentant par contre le *SNR*.

Globalement la méthode s'avère meilleure que toutes les autres approches discutées. Notons de plus que les performances pourraient être améliorées dans la mesure où les barrières de diffusion sur les deux directions sont, ici, dépendantes entre elles ; des améliorations peuvent être obtenues en utilisant, par exemple, des approches similaires mais indépendantes sur les deux directions, ou des valeurs de α adaptées aux natures des images traitées.

Cette méthode peut être utilisée comme un pré lissage antérieur à des taches de segmentation d'images. L'utilisation de la méthode sur une autre image de la base (*Im16fa*) permet d'illustrer cette particularité (*Fig.3.11*). Dans cet exemple nous n'avons pas recherché l'image la plus proche de celle originale, mais une image avec des zones homogènes et avec des contours nets. A titre de comparaison, le résultat d'un lissage directionnel de type *1Did* est également illustré ; le choix des paramètres pour cette méthode est déterminé en recherchant l'image la plus proche - en termes de l'erreur moyenne quadratique, ou équivalent le *PSNR*- du résultat du lissage *1D/2D*.

La qualité des contours obtenus par la méthode *1D/2D* est nettement supérieure. Il est à noter le rehaussement introduit par l'augmentation du poids de la diffusion dans la direction orthogonale aux contours ($\alpha=0.95$). Nous allons reprendre cette idée en essayant de positionner cette approche parmi des méthodes orientées plutôt « régions » en §3.5.

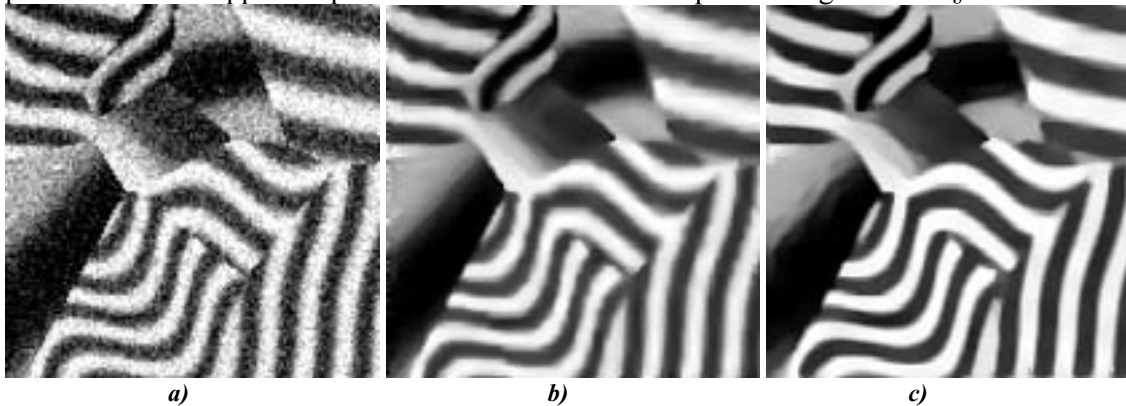


Fig.3.11 -Diffusion 1D/2D. a) Image bruitée. b) Résultat 1Did n=54, $\beta=0.6$, $\sigma=1.0$. c) Résultat 1D/2D n=50, $\alpha=0.95$, $\sigma=1.0$, $\beta=0.65$.

Au contraire, dans le cadre de l'expérience décrite dans cette section, nous avons recherché un optimum en termes de lissage d'images et la valeur du paramètre α a volontairement été fixée à un niveau faible ($\alpha=0.3$) pour limiter le processus de rehaussement.

Finalement notons que dans la plupart des situations, à part le nombre d'itérations plus grand, la présence d'un bruit plus fort ne nécessite pas une modification importante des autres paramètres.

3.4.2 Robustesse vis à vis du choix des paramètres

Dans l'analyse menée dans le paragraphe précédent nous avons souligné les points forts, les limitations principales et les possibles extensions pour chaque méthode sélectionnée (§3.2.3). Les discussions sont valables seulement en partant de l'hypothèse que les paramètres optimaux sont connus ou bien dans le cas où leur détermination ne pose pas de problème majeur. Pour des applications réelles, l'image originale n'est, bien entendu, pas disponible et la recherche de ces paramètres peut s'avérer difficile. Au plus, ces paramètres peuvent être estimés en menant des simulations ou, le cas échéant, en utilisant les techniques mentionnées en Chapitre 1 pour certaines méthodes.

En suivant les modalités présentées au paragraphe §2.4.2.5, une étude complète de robustesse vis à vis de chaque paramètre pourra être menée pour chaque méthode. Cependant la pertinence d'une telle approche nous semble discutable, notamment, lorsque les méthodes ont un nombre différent de paramètres. De plus, lorsque deux paramètres varient en même temps la robustesse est relative, des résultats proches peuvent être produits par plusieurs jeux de paramètres. Par exemple, pour l'approche de Perona et Malik, un résultat issu d'un grand nombre d'itérations et une barrière faible peut s'avérer comparable avec un nombre faible d'itérations et une barrière plus grande. Le problème est rendu encore plus difficile pour des méthodes avec un plus grand nombre des paramètres.

Nous allons juger la robustesse de chaque approche par rapport à un jeu complet de paramètres et non par rapport à chacun d'entre eux. En utilisant un choix de paramètres différent du choix optimal, nous nous intéressons à la réponse de chaque méthode par rapport au cas idéal. Notamment une question posée concerne la hiérarchie des méthodes, à savoir si un choix non optimal des paramètres peut modifier sensiblement l'ordre des performances.

Sur les 15 images faiblement bruitées nous estimons pour chaque méthode le jeu optimal de paramètres en prenant les médianes présentées au *Tableau 3.4*. Dans ces conditions expérimentales le lissage des images de la base donne lieu à un calcul de *PSNR*. Les résultats obtenus sont regroupés au *Tableau 3.5*. sous la forme des pertes en terme de *PSNR* par rapport aux *PSNR* optimaux. L'écart moyen sur l'ensemble des images et le *PSNR* correspondant sont également indiqués.

Pour ce choix global des paramètres- l'effet image peut être mis en évidence plus clairement. Même si, globalement, sur l'ensemble des images, ces résultats sont comparables aux résultats optimaux, sur certaines images et pour certaines méthodes les écarts sont importants. Les méthodes qui semblent présenter la plus grande sensibilité vis à vis de ce choix global des paramètres sont : *1Did*, *1Din* et la *1D/2D*. Pour *1Din* et *1D/2D* les écarts les plus importants sont observables sur les images *Im1fa*, *Im2fa*, *Im4fa* et *Im13fa*.

La caractéristique commune aux images *Im2*, *Im4* et *Im13* est qu'elles contiennent des motifs avec des contours non continus (*Fig.3.12*). Nous avons déjà présenté ce phénomène au §2.4.2.5. Sur ce type de contours, les dérivées directionnelles ne sont pas nulles (*Fig.3.13*).

La principale cause de variation du *PSNR* entre le jeu médian et le jeu optimal est la barrière de diffusion trop grande qui produit un lissage trop puissant de ces régions. Néanmoins, ces résultats sont relatifs ; malgré le manque d'adaptation des paramètres, les résultats restent supérieurs aux autres méthodes. Nous allons montrer seulement un exemple sur *Im2fa* (*Fig.3.14*).

Tableau 3.5 Pertes en PSNR enregistrées en utilisant le jeu des paramètres médians. Méthodes PM, CAT, ALV, MCMm, DTv, RTv et EED

Méthode							
Image	PM	CAT	ALV	MCMm	DTv	RTv	EED
Im1fa	0.482	0.418	0.842	0.193	0.196	0.252	0.482
Im2fa	0.107	0.182	0.751	0.361	0.019	0.041	0.107
Im3fa	0.161	0.186	0.446	0.375	0.332	0.013	0.161
Im4fa	0.355	0.206	0.510	0.313	0.094	0.995	0.355
Im5fa	0.159	0.093	0.352	0.003	0.035	0.212	0.159
Im6fa	0.068	0.137	0.012	0.120	0.100	0.095	0.068
Im7fa	0.478	0.848	0.765	0.158	0.101	0.717	0.478
Im8fa	0.080	0.119	0.091	0.003	0.008	0.145	0.080
Im9fa	0.040	0.096	0.082	0.477	0.094	0.106	0.040
Im10fa	0.340	0.180	0.114	0.003	0.010	0.648	0.340
Im11fa	0.042	0.046	0.209	0.009	0.006	0.031	0.042
Im12fa	0.009	0.025	0.300	0.053	0.050	0.093	0.009
Im13fa	0.088	0.078	0.524	0.272	0.004	0.731	0.088
Im14fa	0.239	0.238	0.421	0.008	0.074	0.027	0.239
Im15fa	0.415	0.573	0.480	0.595	0.621	0.244	0.415
Ecart moyen [dB]	0.204	0.228	0.393	0.196	0.116	0.290	0.324
PSNR Moyen [dB]	24.228	24.573	23.857	24.064	24.113	24.090	24.919

Tableau 3.5.(cont) Pertes en PSNR enregistrées en utilisant le jeu des paramètres médians Méthodes CED, HC, FC, FCL, 1Did, 1Din et 1D/2D

Méthode							
Image	CED	HC	FC	FCL	1Did	1Din	1D/2D
Im1a	0.229	0.136	0.333	0.284	1.916	1.901	1.404
Im2a	0.970	0.063	0.941	0.599	1.209	1.423	1.413
Im3a	0.644	0.545	0.073	0.132	1.092	0.378	0.077
Im4a	0.272	0.017	0.069	0.243	0.312	1.877	1.483
Im5a	0.120	0.068	0.009	0.025	0.518	0.043	0.007
Im6a	0.017	0.274	0.026	0.054	0.536	0.015	0.005
Im7a	0.111	0.318	0.382	0.217	0.693	0.096	0.093
Im8a	0.048	0.112	0.025	0.191	0.037	0.780	0.643
Im9a	0.020	0.407	0.120	0.195	0.485	0.019	0.020
Im10a	0.202	0.012	0.139	0.346	0.580	0.136	0.112
Im11a	0.010	0.009	0.183	0.053	0.537	0.148	0.204
Im12a	0.038	0.204	0.117	0.082	0.309	0.013	0.006
Im13a	0.566	0.181	0.682	0.596	0.809	2.007	1.549
Im14a	0.017	0.000	0.275	0.176	0.472	0.097	0.104
Im15a	0.043	0.270	0.343	0.430	0.780	0.020	0.216
Ecart moyen [dB]	0.221	0.175	0.248	0.242	0.686	0.597	0.489
PSNR Moyen [dB]	25.179	24.307	25.814	25.629	25.840	26.019	26.302

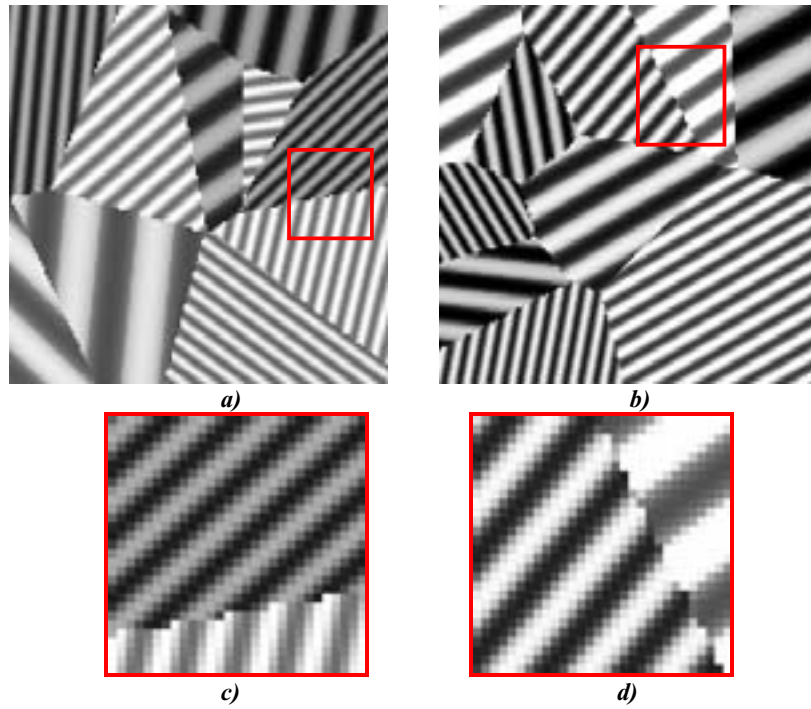


Fig.3.12- Robustesse vis à vis du choix des paramètres. a) Im4. b) Im13. c) et d) détails.



Fig.3.13- Dérivées directionnelles de Im2 (image de Fig.2.18.a).

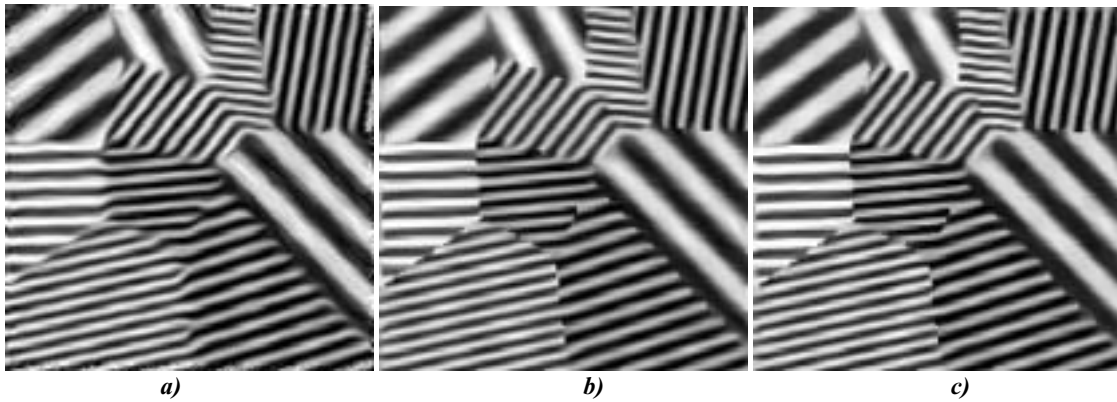


Fig.3.14- Sur lissage d'image. a) CED. b) 1Din. c) 1D/2D.

Par rapport à la *CED*, qui, en utilisant les paramètres de *Tableau A3.1.c (annexe 3)*, introduit des distorsions géométriques, la perte de qualité de l'image pour la *1Din* et la *1D/2D* est principalement explicable par la perte globale de la dynamique de l'image lissée.

Les résultats du *Tableau 3.5* montre que la perte de qualité pour la méthode *1Din* est plus importante. Le phénomène n'est pas isolé et la méthode nécessite une adaptation des paramètres pour chaque image traitée.

En ce qui concerne nos approches tensorielles les écarts sont comparable à celles de la *CED*, les différences image par image étant explicables par la proximité du jeu global vis à vis du jeu optimal.

Cependant dans la dernière partie du classement des inversions se produisent ; la partie supérieure est non modifiée, malgré les écart moins importants entre les approches.

3.4.3 Interprétation statistique des résultats

La question de la significativité des différences de performance observées entre les méthodes est posée : « *les différences entre les méthodes analysées relèvent elles du hasard ou sont elles représentatives de réelles différences de performance ?* »

Nous allons montrer que le choix d'une méthode a une influence significative sur la qualité de résultats obtenus. Nous montrerons que cette conclusion est valable indépendamment du niveau de bruit considéré et de la mesure de qualité utilisée (*PSNR* ou *SNR*). L'utilisation d'une Analyse de Variances (*ANOVA*) permet - tout en tenant compte de l'effet image- d'apprécier les effets de chaque méthode [HeH93] sur les mesures des tableaux *A2.1* et *A2.2 (Annexe 2)*

Par suite, les diverses approches étudiées seront regroupées en groupes homogènes dont les performances sont non significativement différentes par l'intermédiaire d'un test de comparaison multiple : *le test de Student-Newman-Keuls*.

Les principes théoriques de ces méthodes sont brièvement présentés à l'annexe 5.

3.4.3.1 ANOVA sur les *PSNR*'s. Image faiblement bruitées

Le principe et les calculs de l'ANOVA non paramétrique sont illustrés en détail sur la première moitié du *Tableau A2.1 (Annexe 2) (PSNR-bruit faible)*; pour les autres expériences, une présentation plus synthétique des résultats sera utilisée.

L'utilisation de l'ANOVA réclame la vérification d'un certain nombre d'hypothèses. En particulier, l'estimation d'une variance résiduelle commune à l'ensemble de l'expérimentation n'est valide que si les variabilités de résultats au sein des méthodes et des images sont similaires. Or, dans notre cas, indépendamment du type de bruit considéré ou de la mesure, les variances observées sur chaque bloc (image) ne sont pas homogènes. Certaines images conduisent à une variabilité de résultats beaucoup plus importante que d'autres. Sans doute cet écart de variabilité peut il être mis sur le compte de la difficulté du travail de filtrage et dépend donc de la complexité plus ou moins grande des images à traiter.

Par suite, nous proposons l'utilisation d'une ANOVA sur les rangs [Col81]. Au lieu d'utiliser les valeurs numériques, nous rangeons par ordre croissant les performances sur l'ensemble des expériences. La première démarche consiste donc à attribuer un rang à chaque résultat; cette transformation est illustrée au *Tableau 3.6*.

Le *Tableau 3.7* présente de manière synthétique les résultats de l'ANOVA sur les rangs. Nous remarquons que plus de 91 % de la variabilité totale des données s'explique par un effet des images et des méthodes. En ce qui concerne les méthodes, la probabilité extrêmement faible ($p=3.09.10^{-60}$) associée au test de Fisher Snédécour (*Annexe 5*) nous conduit à conclure que la méthode de diffusion a une influence hautement significative sur la qualité de l'image lissée.

Tableau 3.6 Transformation en rangs des premières 15 lignes du Tableau A2.1-annexe 2

image	PM	CAT	ALV	MCMm	DTv	RTv	EED	CED	HC	FC	FCL	1Did	1Din	1D/2D
Im1a	108	151	129	114	118	126	185	195	146	206	207	208	210	209
Im2a	4	7	1	2	6	5	15	22	11	35	21	31	79	97
Im3a	52	80	46	54	38	55	106	145	47	161	165	158	141	143
Im4a	24	49	20	23	19	39	73	86	33	128	112	164	182	186
Im5a	59	81	53	56	66	45	107	84	92	136	115	179	167	172
Im6a	61	77	41	51	36	43	85	71	32	95	75	132	111	122
Im7a	104	103	116	93	100	82	130	178	91	192	197	204	203	205
Im8a	48	83	26	37	29	42	101	90	58	127	88	181	166	177
Im9a	159	171	137	148	119	154	184	174	140	194	191	198	199	202
Im10a	27	34	28	18	25	17	65	64	30	134	133	147	150	170
Im11a	74	99	72	70	57	76	123	131	67	168	153	175	189	193
Im12a	68	89	60	63	50	78	109	125	62	144	121	152	169	176
Im13a	10	14	3	9	8	13	16	40	12	87	69	44	94	105
Im14a	163	180	149	160	155	157	190	173	162	187	188	200	196	201
Im15a	124	139	96	113	98	110	142	117	102	135	120	183	138	156
Rang moyen	$R_1=$ 72.33	$R_2=$ 90.47	$R_3=$ 65.13	$R_4=$ 67.4	$R_5=$ 61.6	$R_6=$ 69.47	$R_7=$ 108.7	$R_8=$ 113	$R_9=$ 72.33	$R_{10}=$ 141.9	$R_{11}=$ 130.3	$R_{12}=$ 157.1	$R_{13}=$ 159.6	$R_{14}=$ 167.6

Tableau 3.7 ANOVA non paramétrique sur les PSNR's- images faiblement bruitées

	Sommes des carrés des écarts	Degrés de liberté	Carrés moyens	F	Probabilité
SCTotale	771732.5	209	3692.5		
SCB	401790.4	14	28699.3		
SCT	302788.1	13	23291.4	63.1	3.09 E-60
SCR	67154.0	182	369.0		

Une fois détecté l'effet très significatif des méthodes, il est évident que l'intérêt est de classer l'ensemble des 14 méthodes par performances décroissantes et de détecter les méthodes effectivement différentes.

Le test de Student Newman Keuls (Annexe 5) permet d'obtenir la partition de l'ensemble des méthodes dans des groupes homogènes (Tableau 3.8).

Le principe est d'attribuer une lettre à chaque groupe de méthodes; deux méthodes qui ne possèdent pas de lettre en commun sont jugées statistiquement différentes.

Tableau 3.8 Groupes homogènes. PSNR, images faiblement bruitées

Méthode	PSNR moyen [dB]	Rang Moyen					
1D/2D	26.79	167.6	a				
1Din	26.62	159.60	a				
1Did	26.53	157.07	a				
FC	26.06	141.93		b			
FCL	25.87	130.33		b			
CED	25.40	113.00			c		
EED	25.24	108.73			c		
CAT	24.80	90.47				d	
PM	24.43	72.33					e
HC	24.48	72.33					e
RTv	24.38	69.47					e
MCMm	24.30	67.40					e
ALV	24.25	65.13					e
DTv	24.23	61.60					e

En terme de moyennes de *PSNR*, cette partition en groupes homogènes produit des sous-ensembles de méthodes dont la variation du *PSNR* moyen ne dépasse pas 0.5dB : pour le premier groupe, l'écart entre la meilleure approche et la moins bonne est de 0.27dB ; pour le deuxième 0.19dB ; 0.16dB pour le troisième et finalement 0.2dB pour le cinquième.

Le premier groupe, composé de nos approches de lissage directionnel, conduit à de meilleures performances que tous les autres approches ; cette supériorité avait déjà été notée en comparant la qualité visuelle des résultats (§3.4.1). Le deuxième groupe est composé de nos approches de diffusion tensorielle. Les deux approches, la version linéaire et non linéaire sont supérieure à la *CED* sur ce type d'images et pour ce niveau de bruit. Même si les résultats produits par la *EED* sont visuellement différents de ceux produits par la *CED*, les deux méthodes sont jugées équivalentes.

Visuellement et quantitativement la méthode de Catté et al. est inférieure à la *EED*, elle est classée seule dans la quatrième catégorie.

Concernant le dernier groupe des méthodes (, constatons que des approches théoriques différentes produisent des résultats ayant des degrés de proximité par rapport aux images originales très proches, ne pouvant pas être distinguées par des moyens statistiques. Nous pouvons imaginer que le niveau des résultats et les rangs respectifs de ces méthodes varient d'une image à l'autre.

3.4.3.2 Résultats sur les *SNR*'s. Images faiblement bruitées

Le *PSNR* défini en (3.1) est sensible à la dynamique des intensités en niveaux de gris de l'image originale. Pour une même dynamique et pour le même niveau de bruit, le *SNR* (3.2), favorise plutôt les images fortement texturées, caractérisées par des vecteurs gradients importants. Ainsi, les résultats liés au *PSNR* d'une part et au *SNR* d'autre part ne sont pas nécessairement complètement corrélés.

Comme dans le cas des *PSNR* nous concluons à un effet très hautement significatif des traitements sur les *SNR* ($p=9.8.10^{-76}$).

Les groupes homogènes sont donnés au *Tableau 3.9*.

Tableau 3.9 Groupes homogènes. *SNR*- images faiblement bruitées

Méthode	<i>SNR</i> Moyen [dB]	Rang Moyen																
1D/2D	16.19	182	a															
1Din	15.89	169.9	a	b														
1Did	15.73	163.3		b	c													
FC	15.42	152.5			c	d												
FCL	15.20	141.4				d												
CED	14.75	123.5					e											
EED	14.45	108.5							f									
CAT	13.81	80.93																
HC	13.68	72.6																
PM	13.33	61.47																
RTv	13.35	59.6																
ALV	13.28	58.2																
MCMm	13.24	55.8																
DTv	13.06	47.4																

Le *SNR* ne permet pas de discerner autant que le *PSNR* les différences entre les traitements. Néanmoins, même si nous ne pouvons pas distinguer nos approches, la différence est confirmée entre ces méthodes et toutes celles analysées au Chapitre 1.

Notons également que la *CED* est significativement plus performante que la *EED*. Ce phénomène est explicable par le fait que le *SNR* est plus sensible que le *PSNR* vis à vis de la qualité des contours lissés. En particulier, pour des images contenant des textures de fréquence élevée, la *CED* est clairement supérieure ; nous avons illustré ce phénomène en

§3.4.1, il est également observable sur les résultats du *Tableau A2.1* de l'annexe 2 : sur certaines images le gain en *SNR* de la *CED* par rapport à l'*EED* est supérieur à 1dB.

La *EED* et la méthode de Catté et al. sont significativement différentes ; par contre le *SNR* ne permet pas de conclure sur une différence significative entre l'approche de Catté et les 6 méthodes les moins performantes.

3.4.3.3 Résultats sur les *PSNR*'s. Images fortement bruitées

L'intérêt de cette expérimentation est, en considérant un niveau de bruit plus important, d'observer son influence sur les performances relatives des méthodes.

Là encore, l'analyse de variance sur les rangs nous conduit à une distinction très significative des méthodes ($p = 5,7 \cdot 10^{-65}$). La partition en groupes homogènes est fournie au *Tableau 3.10*

Tableau 3.10 Groupes homogènes. *PSNR*- images fortement bruitées

Méthode	<i>PSNR</i> moyen [dB]	Rang Moyen					
1D/2D	24.06	158.9	a				
1Din	23.95	152.7	a				
1Did	23.71	145.4	a				
FC	23.63	143.7	a				
FCL	23.66	142.8	a				
CED	23.16	125.3		b			
EED	22.66	109.9			c		
CAT	22.12	89.67				d	
PM	21.67	72.2					e
RTv	21.70	71.87					e
MCMm	21.66	71.67					e
ALV	21.60	70					e
DTv	21.45	63.2					e
HC	21.38	59.73					e

Par rapport aux résultats du paragraphe §3.4.3.1 la distribution des rangs moyens est différente. Cela peut s'expliquer par un comportement différent de certaines méthodes en présence d'un bruit plus fort.

Nous constatons un regroupement de nos approches. Cette conclusion est en concordance avec le niveau plus faible des écarts constatés entre les *PSNR* moyen. Un écart de 0.5dB semble encore une fois correspondre au seuil de discrimination entre les groupes. Par exemple, l'écart de 0.5dB en défaveur de la *CED* par rapport à la *FCL* est significatif ; des écarts comparables marquent la distinction entre la *EED* et la *CED*, entre la *EED* et la méthode de Catté et al. et, finalement, entre cette approche et le dernier groupe. Ce groupe inclut les mêmes méthodes que dans le cas des images faiblement bruitées.

3.4.3.4 Résultats sur les *SNR*'s, images fortement bruitées

L'ANOVA sur les valeurs de *SNR* sur les images fortement bruitées est encore largement significative ($p=3.5 \cdot 10^{-87}$). Les groupes homogènes au sens de Newman-Keuls sont présentés au *Tableau 3.11*.

Plusieurs modifications sont observables ; par exemple, pour ces images, la méthode de Perona Malik est inférieure aux méthodes de Alvarez, *MCMm* et *RTv* ; les résultats de la *1Did* sont inférieures à ceux produits par *FC* et *FCL*. Ces modifications sont sans doute à relativiser par le caractère non significatif des écarts concernés.

La partition en groupes homogènes est très proche de celle issue du test sur les *PSNR*. Une nette différence peut cependant être soulignée : la méthode *1D/2D* est jugée clairement supérieure au reste des approches. En autorisant un rehaussement des contours dans la *1D/2D*,

nous favorisons l'obtention de contours correspondants à des transitions abruptes, et par conséquent, des *SNR* de valeurs fortes.

La méthode de Catté et al. est, comme lors de l'analyse menée sur le *SNR* pour des bruits faibles, pénalisée par la perte de dynamique qu'elle induit au niveau des contours. Elle n'est finalement pas jugée supérieure aux méthodes du dernier groupe.

Les inversions du classement de certaines méthodes dans ce classement ne sont pas statistiquement significatives.

Tableau 3.11 Groupes homogènes. *SNR*- images fortement bruitées

Méthode	SNR Moyen [dB]	Rang Moyen							
1D/2D	13.54	179	a						
1Din	13.17	163		b					
FC	12.96	156		b					
FCL	12.94	154		b					
1DId	12.88	151		b					
CED	12.47	136			c				
EED	11.90	113				d			
CAT	11.03	80.7					e		
RTv	10.56	61					e	f	
MCMm	10.46	60.3							f
ALV	10.45	59.6							f
HC	10.48	58.7							f
PM	10.42	57.2							f
DTv	10.19	48.7							f

3.5 Extensions à d'autres types d'images et de bruits

La supériorité des approches proposées par rapport aux principales méthodes existantes dans la littérature a été démontrée. Ces résultats sont valables pour une certaine classe d'images et pour des bruits gaussiens. Dans cette partie, nous étendons ces comparaisons à d'autres types d'images et de bruits.

Les approches que nous avons proposées sont dédiées à la restauration des textures orientées ; elle n'ont d'intérêt que dans ce cas. Cependant, nous pouvons faire une exception avec la *1D/2D* qui peut être utilisée pour des tâches de restauration d'images complexes, contenant des textures orientées mais aussi des régions non orientées. Sans mener un protocole expérimental aussi complet que précédemment, nous cherchons à positionner cette approche parmi les méthodes classiques, en utilisant une seule image sur laquelle divers types de dégradations seront simulés.

L'image de la figure 3.15.a contient en proportion quasi-égales des textures orientées et des régions constantes. Dans une première expérience nous nous intéressons à un type de dégradation mixte composé d'un flou (Fig.3.15.b) qui affecte les contours de l'image originale et un bruit blanc, toujours gaussien (Fig. 3.15c). Ce choix correspond au protocole expérimental de [KDA97b].

Dans la deuxième expérience nous modifions le type de bruit, en considérant un bruit de type uniforme, qui se manifeste par un remplacement de $p\%$ valeurs des intensités en niveaux de gris par des valeurs aléatoires comprises entre 0 et 255 (Fig3.15.d). ([KDA97a] et [KDA96]).

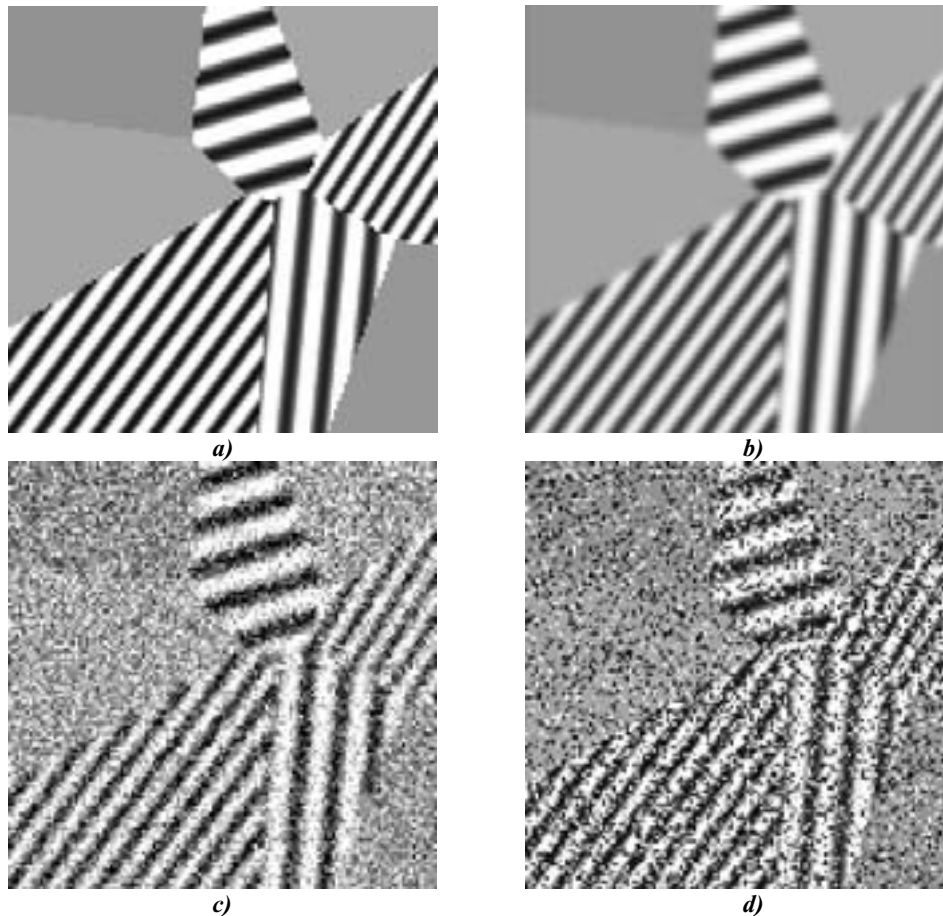


Fig.3.15- Types des dégradations. a) Image originale. b) Image floue –convolution de l'image originale par un noyau gaussien avec $\sigma=1.0$. c) Bruit blanc gaussien rajouté sur l'image floue (SNR=3.18dB, PSNR=13.48dB). d) Bruit uniforme rajouté sur l'image originale $p=40\%$ (SNR=0.25dB, PSNR=10.33dB).

Nous nous intéressons à la capacité de chaque méthode à restaurer les deux types d'informations présentes.

Les méthodes étudiées sont :

- la méthode de lissage de Kornprobst et al (§1.6.5.2.) dédiée à l'élimination du bruit et du flou [KDA97b], [Kor98]. Dans la suite, cette méthode sera désignée par *KOR*.
- le filtre de type Volterra avec réinitialisation de Cottet et Ayadi (§1.7.3). En [CoE96] et [CoE98] cette approche est présentée comme une approche intéressante pour l'élimination du bruit uniforme et pour des pré lissages en vue d'une segmentation (*VOLT*)
- la minimisation demi quadratique de Kornprobst et al. (§1.5.3) – les résultats de [KDA97a] et [KDA99] montrent qu'elle est efficace pour la restauration d'images comportant plutôt des régions constantes (*HC*).
- la méthode de diffusion tensorielle pour le rehaussement des contours de Weickert (*EED*) – comme nous l'avons montré précédemment, elle est supérieure aux autres approches orientées régions.
- la méthode de lissage de Tschumperlé et Deriche (1.133)- la méthode nous semble orientée plutôt régions ; les résultats de [TsD03] montre la capacité de débruitage de l'approche (*TsD*).
- la *1D/2D* et, par comparaison, la *1Din*.

Nous n'étudierons pas les approches de type diffusion tensorielle fondées sur une notion de confiance ou de cohérence (la *CED*, *FC*, *FCL*). Clairement, elles ne sont pas adaptées pour la restauration de ce type d'images.

3.5.1 Résultats quantitatifs

Nous gardons la même approche expérimentale que dans le paragraphe §3.4 : nous disposons de l'image originale et nous faisons varier la plupart des paramètres pour chaque méthode en recherchant une image restaurée qui maximise le *PSNR* (3.1) ou le *SNR* (3.2). Mis à part les méthodes déjà présentées, les principaux paramètres de chaque méthode sont donnés au *tableau 3.12*.

Tableau 3.12 Principaux paramètres des approches analysées

No.	Méthode	Paramètres
1	Kornprobst et al. (KOR)	τ - seuil de diffusion isotrope/ directionnelle/ réaction - $(\alpha_f, \alpha_r, \alpha_e)$ jeu de poids contrôlant, respectivement, le terme attaché aux données, le terme de lissage et le terme de rehaussement. Les écart types des noyaux gaussiens utilisés pour l'estimation du terme de diffusion et de rehaussement sont fixés respectivement à $\sigma = 1.0$, $\bar{\sigma} = 2.0$. Ce choix correspond au choix des auteurs [KDA97b]. t - échelle d'observation
2	Filtre de type Volterra avec réinitialisation (VOLT)	K - seuil de diffusion τ - temps de relaxation $\tau = \beta dt$; des valeurs grandes pour β augmentent la robustesse des estimations des vecteurs propres de la matrice de diffusion R^t - valeur du résidu ; utilisée pour réinitialiser ou arrêter le processus. Nous avons utilisé une valeur $R^t \leq 10^{-3}$
3	Tschumperlé et Deriche (TsD)	ρ - taille du noyau gaussien utilisé pour l'estimation de l'orientation. t - échelle d'observation

En ce qui concerne l'approche *1D/2D* nous chercherons à optimiser également le rapport $\alpha = \frac{K_\eta}{K_\xi}$ qui contrôle le poids de la diffusion sur les deux axes.

Les résultats optimisés pour chacune des méthodes, ainsi que le jeu de paramètres correspondant sont donnés - pour les deux types de dégradations- au *tableau 3.13*.

Ces résultats réclament quelques commentaires. Premièrement, la nature de l'image conduit à un optimum global sensiblement différent suivant la mesure effectuée (*PSNR* ou *SNR*). Les deux critères ne mesurent pas la même chose : le *PSNR* étant lié à l'erreur moyenne quadratique, est sensible aux modifications globales apportées par une méthode sur l'ensemble de l'image. Le *SNR*, en mesurant des variances, pénalise les méthodes qui lissent trop les zones à forte énergie. Nous allons analyser les résultats en observant pour chaque méthode l'effet d'une mesure et de l'autre sur la qualité de l'image obtenue. Les résultats pour le premier type de dégradation sont présentés à la figure 3.16 et la figure 3.17 présente les résultats pour l'image affectée par un bruit uniforme. Les résultats de l'approche *1Din* ne sont pas présentés, cette méthode n'étant incluse dans cette analyse que pour montrer l'avantage de rajouter une deuxième dimension pour la restauration de ce type d'images.

Tableau 3.13 Mesures quantitatives .Paramètres optimaux

Méthode	Type de dégradation	Mesures quantitatives		Paramètres	
		PSNR [dB]	SNR [dB]	PSNR	SNR
HC	Flou + bruit gaussien	16.75	4.24	$n=4, \alpha=17, K=40$	$n=4, \alpha=15, K=37$
	Bruit uniforme	13.59	0.920	$n=3, \alpha=13, K=43$	$n=3, \alpha=11, K=34$
EED	Flou + bruit gaussien	18.915	5.322	$n=14, \sigma=0.75, K=16, m=8$	$n=8, \sigma=1.0, K=14, m=8$
	Bruit uniforme	14.776	0.84	$n=13, \sigma=1.0, K=14, m=8$	$n=3, \sigma=1.0, K=14, m=8$
KOR	Flou + bruit gaussien	17.265	5.906	$n=11, (\alpha_f, \alpha_r, \alpha_e) = (0, 0.75, 1.0) \tau = 15$	$n=14, (\alpha_f, \alpha_r, \alpha_e) = (0, 0.5, 1.25) \tau = 5$
	Bruit uniforme	15.012	3.70	$n=18, (\alpha_f, \alpha_r, \alpha_e) = (0, 0.75, 1.0) \tau = 5$	$n=25, (\alpha_f, \alpha_r, \alpha_e) = (0, 0.5, 1.0) \tau = 5$
VOLT	Flou + bruit gaussien	17.412	4.848	$\tau = 11dt, K=11$	$\tau = 8dt, K=11$
		14.255	1.16	$\tau = 14dt, K=8$	$\tau = 7dt, K=11$
TsD	Flou + bruit gaussien	17.876	5.00	$\rho=1.75, n=389$	$\rho=1.0, n=283$
	Bruit uniforme	14.69	0.91	$\rho=2.5, n=456$	$\rho=0.75, n=172$
1Din	Flou + bruit gaussien	17.88	5.06	$n=18, \sigma=1.0, \beta=0.6$	$n=11, \sigma=1.0, \beta=0.6$
	Bruit uniforme	14.79	0.74	$n=15, \sigma=1.0, \beta=0.95$	$n=5, \sigma=1.0, \beta=0.95$
1D/2D	Flou + bruit gaussien	20.297	8.935	$n=72, \sigma=1.0, \beta=0.6 \alpha=0.7$	$n=110, \sigma=1.0, \beta=0.55 \alpha=0.7$
	Bruit uniforme	16.16	3.14	$n=125, \sigma=1.0, \beta=0.65, \alpha=0.55$	$n=200, \sigma=1.0, \beta=0.55 \alpha=0.55$

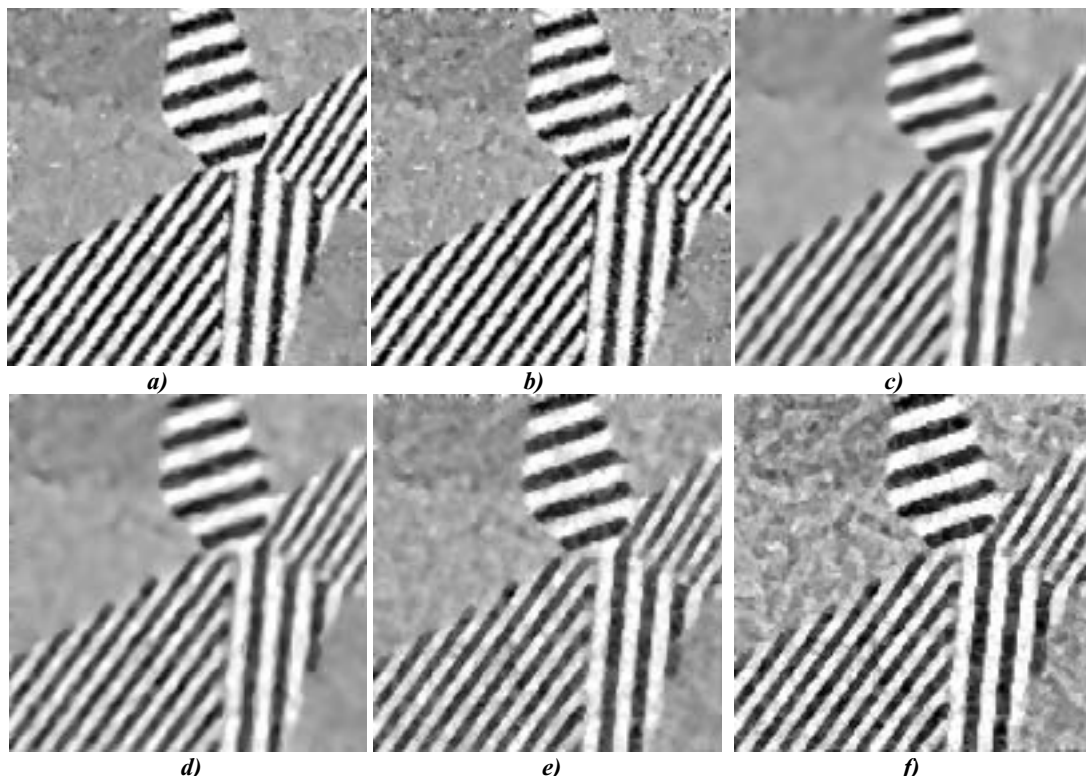


Fig.3.16- Résultats optimaux sur l' image de Fig.3.15.c. a) Optimum -HC- PSNR. b) Optimum -HC- SNR). c) Optimum -EED- SNR). d) Optimum -EED- PSNR. e) Optimum -KOR- PSNR. f) Optimum -KOR- SNR).

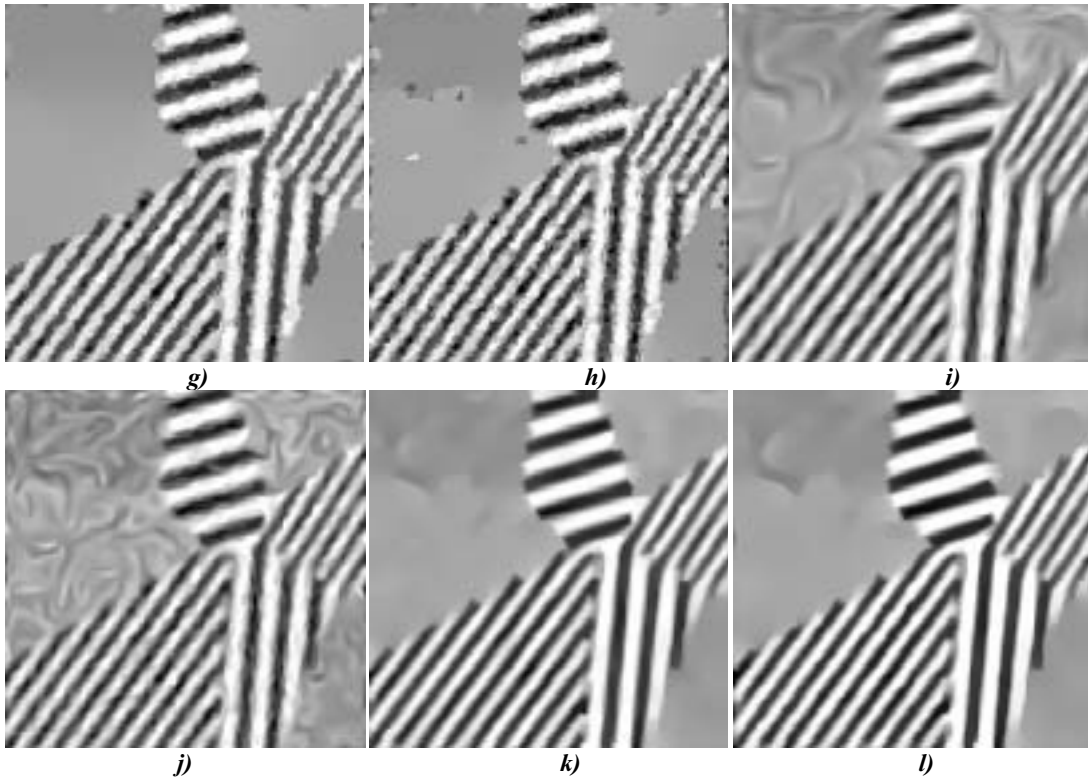


Fig.3.16 (cont.)- g) Optimum -VOLT- PSNR. h) Optimum -VOLT- SNR ; i) Optimum -TsD- PSNR. j) Optimum -TsD- SNR. k) Optimum -1D/2D- PSNR. l) Optimum -1D/2D- SNR.

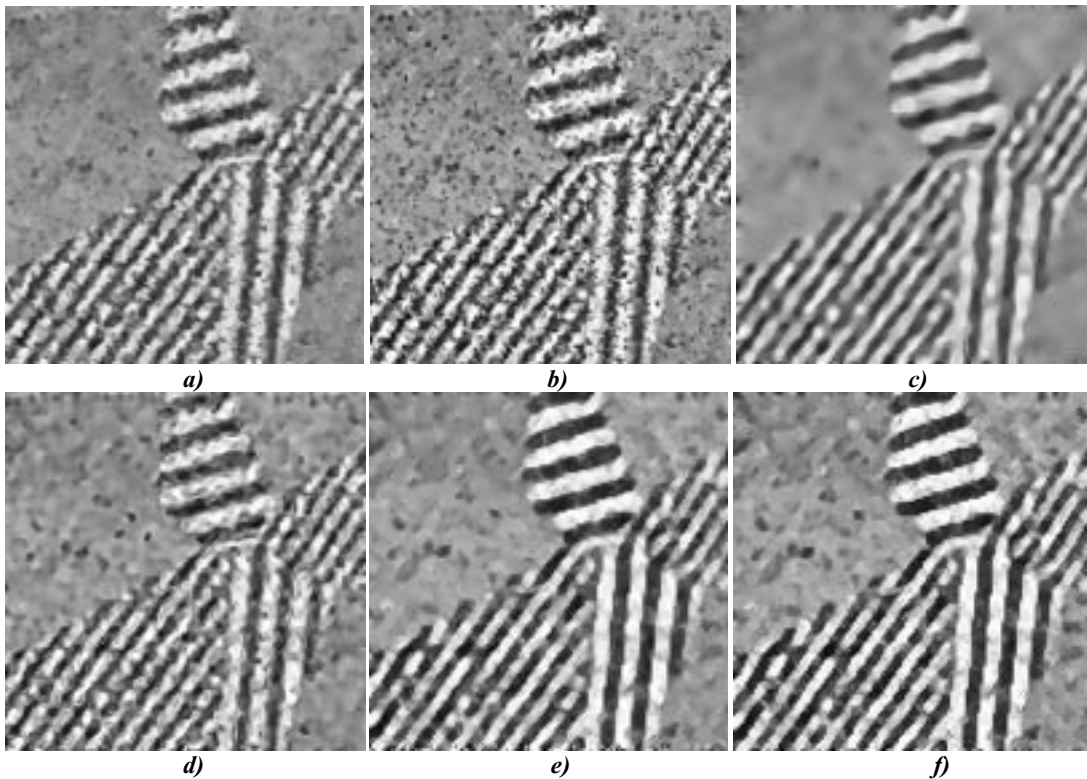


Fig.3.17- Résultats optimaux sur l'image de Fig.3.15.d. a) Optimum -HC- PSNR. b) Optimum -HC- SNR. c) Optimum -EED- PSNR. d) Optimum -EED- SNR. e) Optimum -KOR- PSNR. f) Optimum -KOR- SNR.

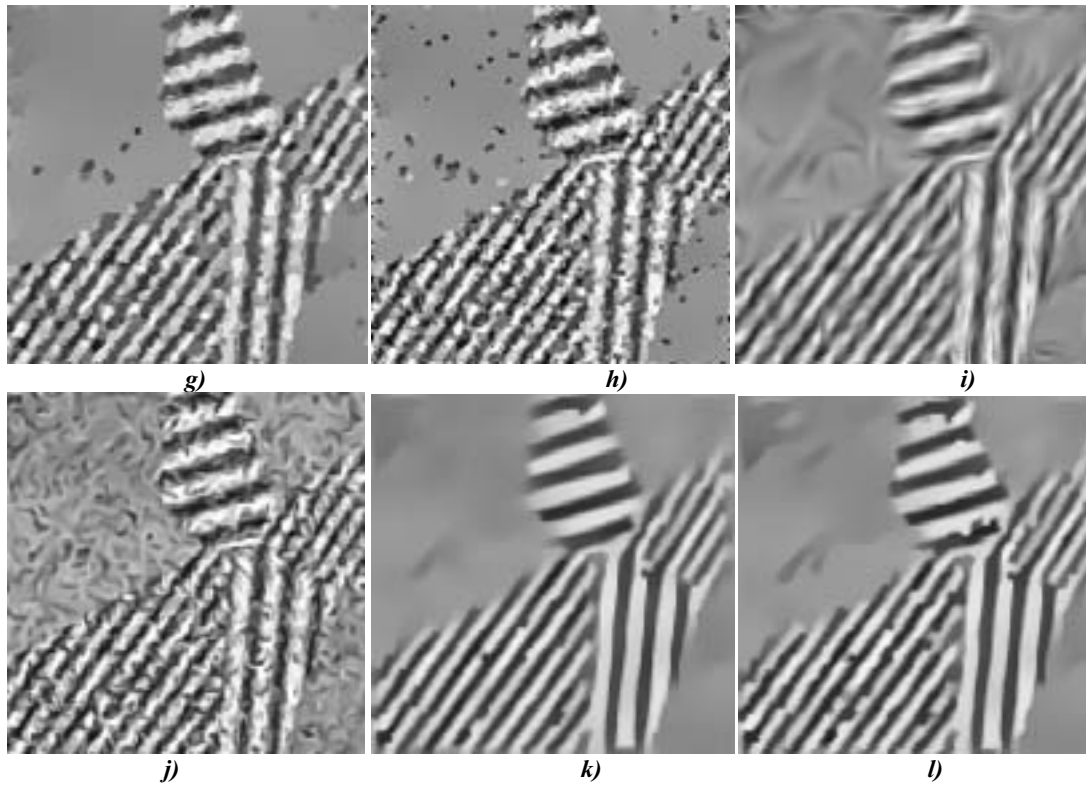


Fig.3.17(cont.)-g) Optimum -VOLT- PSNR. h) Optimum -VOLT- SNR. i) Optimum -TsD- PSNR. j) Optimum -TsD- SNR. k) Optimum -1D/2D- PSNR. l) Optimum - 1D/2D - SNR.

Malgré la dernière position occupée dans un classement virtuel des méthodes, la minimisation demi quadratique est appropriée au lissage de ce type d'images, mais uniquement pour des bruits gaussiens. Dans ce cas, notons le rehaussement des contours visible sur les images (Fig.3.16.a et b). Le rehaussement obtenu est plus sensible sur l'optimum en terme de *SNR*, mais nous notons dans ce cas une restauration moins bonne du fond de l'image. Ce phénomène est observable sur l'ensemble des résultats présentés. Les contours rehaussés sont néanmoins irréguliers ; le terme attaché aux données induit une tendance à garder le bruit présent sur les bords. Le même terme induit un comportement chaotique sur des bruits forts, la méthode ayant tendance à conserver trop de bruit dans le résultat final (Fig.3.17. a et b).

La *EED*, malgré son nom, nous semble une méthode plutôt dédiée au lissage avec préservation de contours. Pour des bruit gaussiens l'absence de rehaussement (Fig.3.16. c. et d) se traduit par un *SNR* faible par rapport à l'approche de Kornprobst et al et par rapport à la *1D/2D*. La méthode est néanmoins capable de lisser de manière efficace les contours et le fond d'image ; cela explique le deuxième résultat en termes de *PSNR*. Sur des bruit uniformes les directions non robustes de diffusion, à base des vecteurs gradients –même lissés-, détruisent le contenu structurel de l'image (Fig.3.17. c. et d). Ce phénomène est mis en évidence sur l'optimum fourni par le *SNR* classé en dernier.

L'approche de Kornprobst et al, en incluant un terme de réaction, accomplit un vrai rehaussement des contours. Le phénomène est observable sur l'ensemble des résultats (Fig.3.16. e. f et Fig.3.17. e. f). La principale limitation de ce modèle est la présence du terme de diffusion dépendant de la courbure locale. Sur les zones fortement bruitées la présence de ce terme est bénéfique en induisant un processus fort de diffusion. Les intersections, par contre, sont lissées avec une vitesse accrue, la méthode ayant tendance à modifier la topologie

de l'image en introduisant des distorsions géométriques. Indépendamment de la mesure quantitative utilisée, le nombre d'itérations est fortement limité à cause de cet effet. Par conséquent le maximum global s'obtient comme un compromis : afin de limiter les distorsions géométriques le maximum global correspond à une restauration moins bonne des arrières plans des images.

L'approche de Cottet et Ayadi nous semble une approche orientée plutôt segmentation. Indépendamment du type de distorsion considéré, la méthode produit des fonds d'images qui, à part quelques défauts, sont très réguliers. En utilisant des moyennes temporelles des vecteurs gradients, spécialement pour des bruit importants (*Fig.3.17. g. et h*), la méthode utilise des directions fausses de diffusion. La méthode n'est pas dissipative et l'influence de ces directions non robuste est limitée par les états stables vers lesquels la méthode converge. Le *SNR* est par conséquent supérieur à la méthode de Weickert (*EED*). Malgré l'homogénéité des arrières plans, le *PSNR* est pénalisé par les erreurs de restauration des contours.

Le lissage effectué par l'approche de Tschumperlé et Deriche et essentiellement unidirectionnel sur les contours des images analysées et la méthode a une action presque isotrope sur les zones relativement constantes. Néanmoins, en interdisant tout rehaussement, les résultats de ce filtre se caractérisent par une perte de dynamique assez importante. Malgré l'utilisation des directions de diffusion robustes, les fonctions de diffusion proposées par les auteurs produisent un lissage moins efficace des contours (observable surtout sur *Fig.3.17.j*) et un arrondissement prononcé des jonctions. Les arguments de ces fonctions -la somme des contrastes moyens dans les directions d'une ACP à noyau gaussien - ne nous semble pas appropriés pour caractériser un processus de lissage car ils induisent une forte dépendance au rapport signal bruit local.

En ce qui concerne la *1D/2D* -en comparaison avec la *1Din*- l'utilisation d'une deuxième direction de diffusion (ou rehaussement) apporte un gain important en termes de *PSNR* et *SNR*. Sur les fonds des images caractérisés essentiellement par des dérivées directionnelles relativement faibles, le processus de diffusion est effectué dans les deux directions : la direction du premier vecteur propre de l'ACP et celle du deuxième. Par conséquent la méthode permet une meilleure restauration de ces régions (nous présentons en *Fig.3.18* l'optimum de la *1Din* sur l'image de *Fig.3.15.*). Cette amélioration se traduit par un gain de plus de 2dB en termes de *PSNR*.

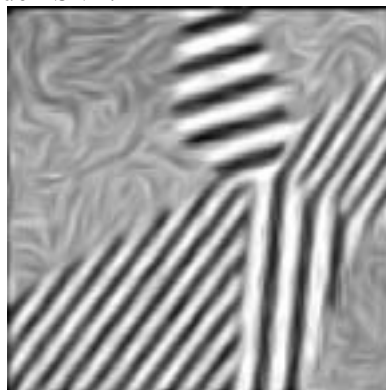


Fig.3.18 Optimum -1Din- PSNR.

En ce qui concerne le *SNR*, la méthode étant capable de rehausser les contours (le phénomène est observable en *Fig.3.16. k. et l*), ceci se traduit par un gain de presque 4dB en comparaison avec la *1Did* qui lisse seulement le long des contours. La valeur du *SNR* est la plus grande de l'ensemble des méthodes analysées. Nous pouvons d'ailleurs observer que la qualité des contours obtenus est en concordance avec cette observation. La méthode semble bien être la plus apte à lisser de manière efficace aussi bien le fond de l'image que les

contours, indépendamment de la mesure quantitative utilisée. Notons tout de même la perte de dynamique moins importante correspondante à l'utilisation du *SNR* comme mesure de qualité.

Même si l'ACP n'est pas robuste vis à vis du bruit uniforme (§2.2.6.3), la méthode permet également le traitement des images affectées par ce type de bruit. Son élimination nécessite par contre un très grand nombre d'itérations et la méthode produit un résultat caractérisé par une perte de dynamique relativement importante. Un autre aspect important des résultats sur les bruit uniformes est le fait que la méthode introduit des modifications topologiques moins importantes dans l'image lissée : dans ces conditions, il est évident que la perte de dynamique peut être compensée par une augmentation de contraste. Par conséquent, le *SNR* plus grand obtenu en utilisant l'approche de Kornprobst et al. doit être relativisé en remarquant que cette approche altère le contenu informationnel de l'image.

3.6 Conclusions

Sur la classe particulière des images composées de structures orientées, nous avons montré que, indépendamment du type de jugement considéré -objectif ou subjectif-, les approches développées au Chapitre 2 sont supérieures aux méthodes à base d'EDP analysées au Chapitre 1. Une analyse de variance sur les rangs permet de montrer que cette supériorité est significative.

Les opérateurs de diffusion directionnelle présentés en §2.3 s'avèrent être les plus performants pour des tâches de restauration de textures orientées. L'utilisation des informations directionnelles semi locales couplée à des mesures locales de type valeurs absolues des dérivées directionnelles conduit à des résultats très intéressants. L'extension de ces approches pour des images mixtes –la méthode *ID/2D*- se prête à des tâches de pré lissage d'image en vue d'une segmentation (§3.5).

La classe d'opérateurs fondés sur le principe de la diffusion tensorielle – *FC* et *FCL* – est supérieure au modèle de base : la *CED*. En comparaison avec l'approche de Weickert, la modulation du processus de diffusion par une mesure de confiance moins sensible aux variations locales de l'énergie du signal et permettant une meilleure détection des jonctions conduit à une restauration plus précise des zones à contraste variable et des jonctions.

Ces conclusions restent aussi valables si des informations a priori sur le jeu des paramètres sont disponibles (§3.4.2) ou si des contraintes pratiques de type vitesse de calcul existent (*IDid* et *FCL*).

Chapitre 4

Restauration et amélioration de documents anciens numérisés

4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'utilisation des opérateurs de lissage directionnel dans le cadre du filtrage et de la restauration d'un type particulier d'images : des documents et gravures numérisées. Il est bien entendu que l'ensemble des opérateurs décrits dans ce mémoire et en particulier ceux que nous avons introduits au chapitre 2, peuvent s'appliquer à d'autres types d'images ayant un contenu informationnel de même type : images sismiques, images SAR etc.

L'organisation du chapitre est la suivante : dans un premier temps nous allons présenter brièvement le principe de numérisation des documents anciens et la nature de ces images ; ensuite, nous exposerons les avantages d'une approche anisotrope pour le traitement des images de gravures. Nous soulignerons les éventuels artefacts introduits par l'utilisation des techniques classiques en montrant l'intérêt de nos approches du Chapitre 2. La dernière et la plus importante partie de ce chapitre est dédiée à la présentation de résultats pratiques dans des tâches d'amélioration et de restauration.

4.2 Motivation

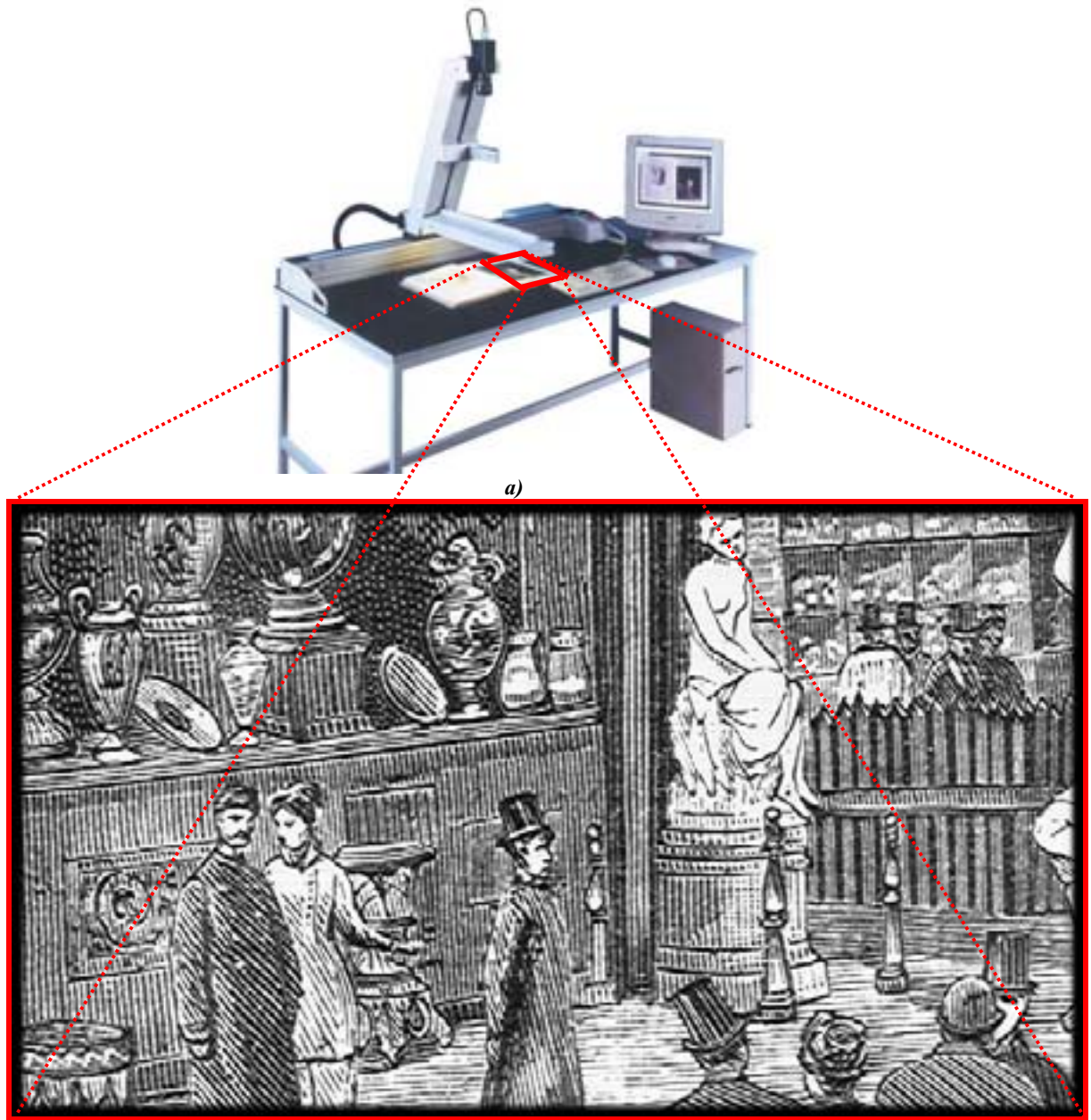
Les travaux présentés dans ce mémoire ont été initiés dans le cadre d'une collaboration avec la société *I2S* de Pessac dont le principal domaine d'activité est le traitement d'images. Une division de cette société - *i2S DigiBook* – est spécialisée dans la fabrication de solutions hardware et software dédiées à la restauration de documents anciens, pour la consultation et l'archivage dans des bibliothèques publiques ou privées.

Le processus de numérisation est réalisé par des scanners performants (*Fig.4.1.a*) qui optimisent le processus d'acquisition. En utilisant des résolutions très grandes les erreurs d'acquisition sont faibles, ce qui paraît essentiel pour des images ayant un contenu informationnel extrêmement riche, spécialement dans le cas de gravures anciennes (*Fig.4.1.b*).

Le cas échéant, des traitements spécifiques d'analyse, de restauration et d'amélioration adaptés pour ce cas particulier d'images sont nécessaires. Nous avons conçu les opérateurs de lissage directionnel comme une solution intégrée capable d'éliminer le bruit ou simplement de fournir de nouvelles images, améliorées.

La nature des images étant très différente, nos différentes classes d'approches sont naturellement dédiées à une tâche spécifique. Par exemple les opérateurs fondés sur la notion de confiance dans le flot d'orientation élimineront le bruit et accentueront les diverses structures filaires présentes en *Fig.4.1.b* mais ils ne pourront pas être utilisés avec succès sur des images dont les structures contiennent aussi des arrières plan non orientés. Les modèles monodimensionnels qui utilisent des dérivées directionnelles du signal produiront des résultats visuels comparables ; enfin, l'opérateur 1D/2D pourra, lui, être utilisé sans limitation

sur des images composées de zones très différentes (zones orientées, zones lisses) en jouant seulement sur un seul paramètre.



b)
Fig.4.1-Numérisation des documents anciens. a) Equipement utilisée par I2S. b)Gravure numérique.

Indépendamment du type d'opérateur utilisé, et du type de traitement envisagé – amélioration ou restauration – l'objectif essentiel est de fournir une image améliorée ou restaurée proche de l'original avec de faibles modifications topologiques des structures significatives. Ce critère va nous guider dans la présentation des résultats de ce chapitre.

4.3 Nature des images traitées

La Fig.4.1.b. représente un exemple typique de gravure ancienne numérisée en niveaux de gris. La nature de ces images est très particulière : la plupart de l'information est concentrée dans des régions de forte fréquence composées de traits fins et parallèles.

Des approches de type diffusion isotrope ne peuvent être utilisées pour améliorer de telles images : leur comportement de filtres passe bas détruiront les informations de hautes fréquences. De plus, comme on peut aisément le noter en *Fig.4.2*, l'information fournie par les normes des vecteurs gradients n'est pas robuste : les contours ne sont pas nettement marqués et ils sont caractérisés par des normes vecteurs gradients fortement variables.

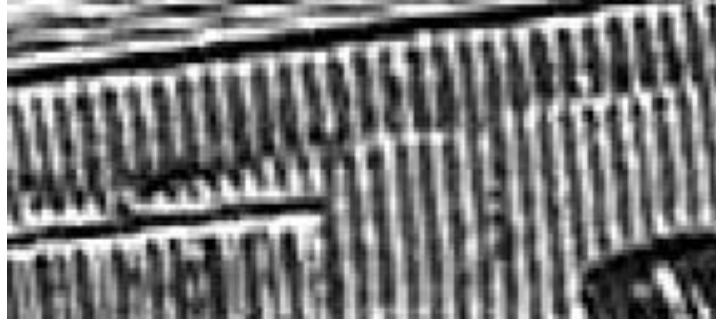
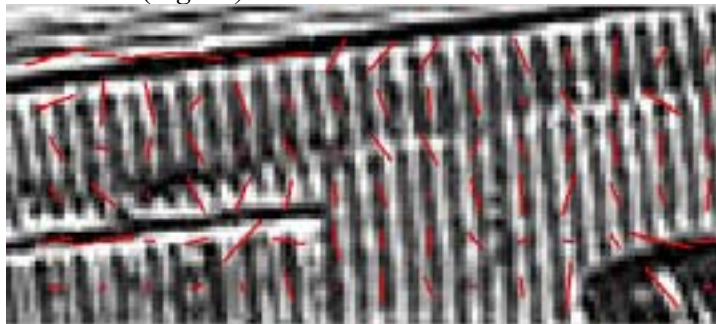


Fig.4.2 -Détail de Fig.4.1.b.

Une information qui semble être pertinente pour la caractérisation de ces régions est l'information directionnelle. Globalement ces textures manifestent une tendance directionnelle forte, spécialement quand des techniques semi locales sont utilisées pour l'estimation de l'orientation (*Fig.4.3*).



a)

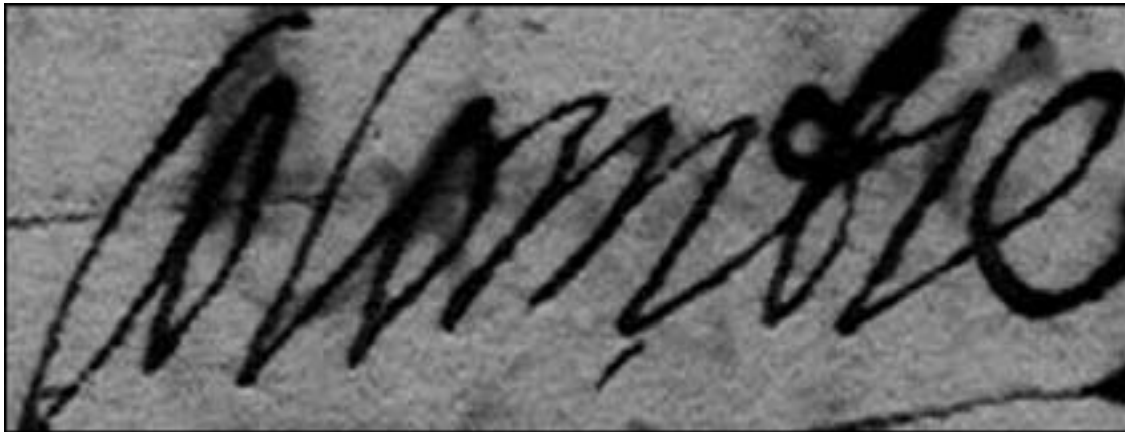


b)

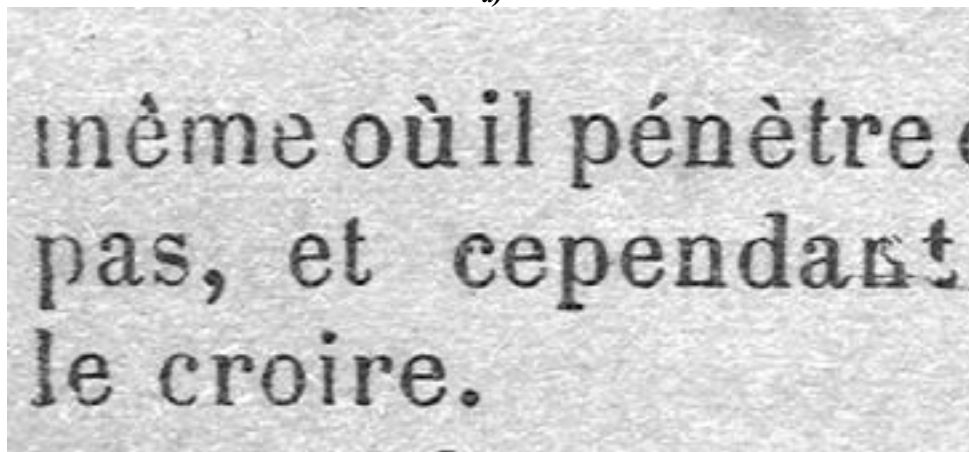
Fig.4.3-Information directionnelle. a)Orientation à partir des vecteurs gradients. b)Orientation en utilisant une ACP de taille 7x7 pixels.

Notons l'importance de l'utilisation d'une ACP pour ces images : l'orientation fournie par les vecteurs gradients (*Fig.4.3.a*) est incapable de donner les tendances directionnelles des structures ; l'orientation du deuxième vecteur propre de l'ACP est plus robuste tout en ignorant les faibles variations des intensités en niveaux des gris induites par le bruit (*Fig.4.3.b*).

Sur ce type d'image le bruit se manifeste sous la forme de micro coupures de la continuité des traits. Notons aussi l'existence de lignes en pointillées ; l'efficacité des méthodes pourra être jugée, pour une élimination comparable du bruit sur les traits continus, par la capacité à garder ces régions non modifiées.



a)



b)

Fig.4.4 -Images représentant des documents anciens. a) Texte manuscrit. b) Texte dactylographié.

La figure 4.4 montre des images de textes numérisés (manuscrits ou non). La nature de ces images est très différente de celles représentant des gravures. Le contenu informationnel est moins important, le bruit affectant les caractères aussi bien que le fond de l'image est aussi bien le résultat de l'empreinte du temps sur ces documents que des erreurs introduites par l'équipement d'acquisition. L'information directionnelle est importante sur les contours des caractères. Pour ces images notre objectif principal est leur restauration et amélioration : nous souhaitons éliminer le bruit du fond tout en conservant les caractères avec un rehaussement des contours pour une plus grande lisibilité.

Finalement nous nous intéressons aussi aux gravures en couleurs (*Fig.4.5* et *Fig.4.6*). Ces images ont des dimensions importantes (600 x 1000 pixels). Malgré la complexité de l'équipement d'acquisition, la résolution optique s'avère insuffisante et conduit à l'apparition d'effets de moiré sur les textures de haute fréquence (*Fig.4.5.b*) et d'effets de pixellisation (*Fig.4.5.c*). Pour ces images aussi, la plupart des contours ont des normes de vecteurs gradients fortement variables et l'utilisation d'une information directionnelle robuste s'avéra essentielle.

Certaines images en couleur ont la même nature que celle de la figure 4.1.b : une partie de l'image de la figure 4.6. est composée de traits fins parallèles. Par suite, nous rencontrons essentiellement la même problématique d'amélioration ou de restauration sans perte du contenu de haute fréquence.

Pour restaurer ces images en couleurs, nous allons utiliser une approche triviale, de type canal par canal : nous décomposerons l'image en composantes R,G et B puis nous restaurerons chaque composante pour finalement recomposer l'image finale à partir des trois images rehaussées.



Fig.4.5- a) Image représentant une gravure en couleurs. b) et c) Détails.



4.4 Approches de type diffusion et restauration /amélioration des anciens documents

La diffusion anisotrope est généralement consacrée à des tâches d'élimination du bruit avec préservation des contours. Malgré l'absence d'une interprétation mathématique explicite sous la forme d'une fonction de transfert dans le domaine de Fourier, dans le voisinage des contours, les diverses interprétations directionnelles permettent d'expliquer le comportement de filtre passe haut de ces approches. En modulant l'intensité du processus de lissage dans la direction des contours et en arrêtant la diffusion ou en l'inversant dans la direction orthogonale, ces méthodes sont capables de préserver les zones à haute fréquence à travers les diverses échelles d'observation. Néanmoins, certaines limitations existent ; nous allons les exposer.

Considérons tout d'abord les approches de type Perona-Malik. Les images de type *Fig.4.1.b* et *4.6* ont la même nature que les images de synthèse du Chapitre 3. Pour ce type d'images, le principal problème est la forte sensibilité vis à vis des effets de trou : du fait de la fluctuation des intensités des contours, le choix d'une valeur globale pour la barrière de diffusion est difficile, et localement, le choix peut favoriser des diffusions isotropes, en détruisant le contenu informationnel des images. Le même effet est susceptible de se produire pour des images « plus simples » (*Fig.4.4*), la cause principale en est la même : la frontière entre les caractères et le fond de l'image présente de fortes variations. Pour les deux types d'images cet effet peut être diminué en utilisant des barrières de diffusion faibles, mais, dans ce cas, des effets de type escalier apparaissent.

En ce qui concerne les approches de type Catté et al. et *EED*, leur utilisation est pratiquement impossible sur les images du type de celle de la figure *4.1.b* : l'utilisation d'un pré-lissage passe bas de type gaussien, couplé à la détection de fausses directions de diffusion détruiront très vite les contours en introduisant des effets assimilables à l'effet de trou. Les contraintes imposées sur l'utilisation de ces filtres sont moins fortes sur les images de type texte ou sur l'image de *Fig. 4.5*. La problématique principale dans ce cas réside dans le choix du seuil de diffusion qui devra permettre en même temps l'élimination du bruit du fond d'image et la préservation des contours. Comme nous l'illustrerons, ce choix est délicat et ces méthodes produisent des résultats inférieurs à l'approche 1D/2D en terme de qualité visuelle.

La principale limitation des méthodes fondées sur la courbure moyenne réside dans la modalité de détermination de la direction de diffusion. Pour des vecteurs gradients importants l'idée fondamentale de ces approches est d'utiliser une seule dimension pour le processus de diffusion. Dès lors que les directions sont erronées (*Fig.4.3 a*), le contenu de haute fréquence est détruit et des distorsions géométriques apparaissent de manière d'autant plus importante que la courbure est élevée. Par exemple, les lignes en pointillés et les jonctions des images (*Fig.4.1.b* et *Fig.4.6*) s'estomperont plus vite que le reste de l'image et disparaîtront complètement pour des temps de diffusion importants. Ces distorsions géométriques représentent aussi la principale limitation sur des images mixtes contenant des zones orientées et non orientées (*Fig.4.4*).

La diffusion par minimisation de la variation totale, comme nous avons vu, est capable de limiter ces distorsions géométriques. Intuitivement cette méthode pourra être utilisée pour le lissage des images contenant seulement des textures orientées. La principale limitation est toujours induite par l'utilisation de directions de diffusion erronées.

Parmi les approches classiques de diffusion tensorielle, la *CED* semble la plus adaptée pour la restauration des images de type *Fig.4.1.b*. L'utilisation d'une orientation robuste en tout pixel associée à un processus de diffusion essentiellement uni directionnel est susceptible de restaurer/ améliorer ce type d'images. Néanmoins, le choix de l'argument de la fonction de diffusion est inapproprié pour ce type d'images. La dépendance de la mesure de cohérence de Weickert au contenu énergétique local se traduit par des lissages différents dans les diverses

régions de l'image. Nous avons représenté ce phénomène symboliquement à la figure 4.7a. L'intensité du processus de lissage est donnée par la mesure de confiance.



Fig.4.7 -Mesure de cohérence de la CED imposée sur Fig.4.1.b.

Afin d'obtenir une élimination efficace du bruit le processus nécessite donc un plus grand nombre d'itérations pour certaines textures. Les minima de l'opérateur de cohérence ne sont pas liés uniquement aux jonctions et l'image obtenue contient des jonctions arrondies.

Cet opérateur, essentiellement dédié à des structures orientées ne peut servir à améliorer les images des figures 4.4 et 4.5.

Une limitation similaire pour ce type d'images existe aussi pour nos approches de diffusion tensorielle. Néanmoins, l'utilisation d'une mesure de confiance indépendante du rapport signal bruit, avec des minima prononcés dans des zones correspondantes à des orientations multiples, permet l'obtention de résultats supérieurs. L'intensité du processus de lissage pour les deux approches, linéaire et non linéaire est sensiblement la même sur toute l'image (Fig.4.8).



Fig.4.8- Mesure de cohérence de la FC imposée sur Fig.4.1.b.

En ce qui concerne les opérateurs de lissage fondés sur les dérivées directionnelles du signal, l'intégration de l'information directionnelle à une échelle semi locale conduit à une moindre sensibilité aux fluctuations des contours. Pour des images composées uniquement de structures orientées, l'utilisation d'une deuxième direction de diffusion (dans la direction orthogonale aux contours) n'est pas nécessaire ; elle s'avéra utile pour des images de type Fig.4.4,4.5 et 4.6.

4.5 Résultats sur des images représentant des gravures anciennes en niveaux de gris

Nous présentons dans cette partie des résultats sur des images de type *Fig.4.1b* en considérant toutes nos approches et la meilleure des méthodes concurrentes : selon l'analyse de Chapitre 3 menée sur des images de synthèse dont l'aspect se voulait proche des gravures en niveaux de gris, la *CED* est clairement la plus intéressante des méthodes concurrentes.

Le problème du choix des paramètres pour chaque méthode reste posé. Ne disposant pas d'image originale, il nous est a priori impossible d'optimiser une quelconque mesure subjective. Nous avons contourné le problème en présélectionnant le meilleur des résultats obtenus par tous les algorithmes avec un jeu de base. Ensuite, en considérant cette image comme l'originale, nous avons optimisé le jeu de paramètres pour chaque méthode : les paramètres optimaux sont ceux qui produisent une erreur moyenne quadratique minimale, ou de manière équivalente, qui maximisent le *PSNR*.

La figure 4.9.a montre l'image originale utilisée pour illustrer l'apport de chaque méthode. L'orientation obtenue en utilisant une ACP multi-échelle ($N_{\max}=9$) est représentée en *Fig.4.9.b*. Ensuite nous présentons les résultats respectifs de la *IDid* (*Fig.4.9.c*), *IDin* (*Fig.4.9.d*), *FC*(*Fig.4.9.e*), *FCL*(*Fig.4.9.f*) et *CED* (*Fig.4.9.g*). Parmi toutes ces images, le résultat produit par la *IDin* a été jugé supérieur ; le choix des paramètres pour chaque méthode (indiqués dans chaque légende) a donc été optimisé en fonction de cette image.

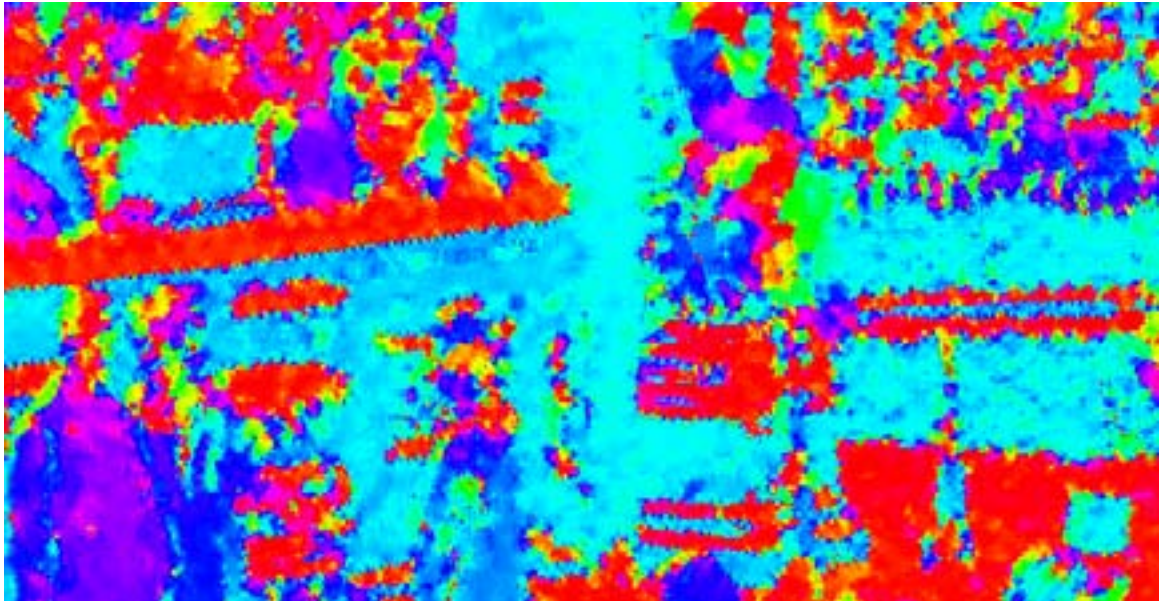


Fig.4.9- Gravure numérique. Résultats comparatifs. Image originale. a) Taille réelle.

Pour ce type d'image possédant des textures orientées très majoritairement le long des axes principaux la *IDid* (*Fig. 4.9.c*) produit des résultats comparables à la *IDin* (*Fig. 4.9.d*). Malgré l'aspect de flou et l'irrégularité des contours, légèrement plus prononcée, la méthode est capable de conserver les objets et les structures dans l'image filtrée en utilisant comme direction de filtrage l'orientation fournie par l'ACP. En ce qui concerne le temps de calcul, malgré un nombre d'itérations plus important, la méthode est quatre fois plus rapide que la *IDin* (747x428 pixels $t=40s$; $t=155s$ pour la *IDin*).

L'utilisation d'un processus d'interpolation directement sur les intensités en niveaux de gris (*IDin* - *Fig. 4.9.d*) permet l'obtention de résultats supérieurs visuellement, et, présente

l'avantage essentiel d'être invariant aux rotations. Ce résultat a été jugé comme étant le meilleur de tous les résultats obtenus car l'image restaurée est la plus proche topologiquement de l'image bruitée. Pour une élimination du bruit comparable, notons la présence dans l'image filtrée de presque tous les détails de l'image originale. En particulier, la qualité du résultat est observable sur les lignes en pointillés placées sur le pied de la statue au centre de l'image et sur la zone non orientée située à gauche et en haut des trois vases.



b)



c)

Fig.4.9(cont.)- b) ACP multi échelle $N_{max}=9$. c) Résultat 1Did- $\sigma=0.5$, $\beta=0.75$, $n=35$.

En analysant seulement les structures filaires (Fig.4.9.e) la FC semble avoir une meilleure capacité à lisser ces régions. Cependant, sur l'ensemble de l'image, notons la mauvaise reconstruction des zones en pointillés : la méthode -comme toutes les autres approches utilisant un tenseur de diffusion – a tendance à former des lignes dans ces régions. Ces approches, dédiées à des tâches d'amélioration d'image, accentuent et en mettent en évidence les structures filaires.



d)



e)

Fig.4.9 (cont.)- d) Résultat 1Din- $\sigma=0.5$, $\beta=0.65$, $n=25$. e) FC - $\sigma=0.5$, $\rho=1.25$, $\gamma=14$, $\tau=0.85$, $n=14$.

L'utilisation de la version linéaire de la FC (Fig.4.9.f) apporte un important gain en terme de temps de calcul (FCL $n=60$, $t=30s$ – FC $n=14$, $t=84s$). Dans certaines régions de l'image – autour de l'homme au centre de l'image- l'estimation d'une mesure de confiance et de la direction de diffusion s'avère importante. Par contre, l'influence de la mesure de confiance maximale de l'ACP multi échelle est visible sur les zones texturées de l'image qui contiennent des traits parallèles ; ici la force de diffusion est maximale et produit une amélioration plus efficace que dans le cas de la FC.

En ce qui concerne la CED (Fig.4.9.g), malgré les directions de diffusion robustes ($\rho=2.25$), des modifications très visibles du contenu structurel de l'image sont introduites. Les jonctions sont arrondies, les zones en pointillés deviennent des lignes ; ce sont typiquement des effets visibles dans tous les travaux de Weickert.



f)

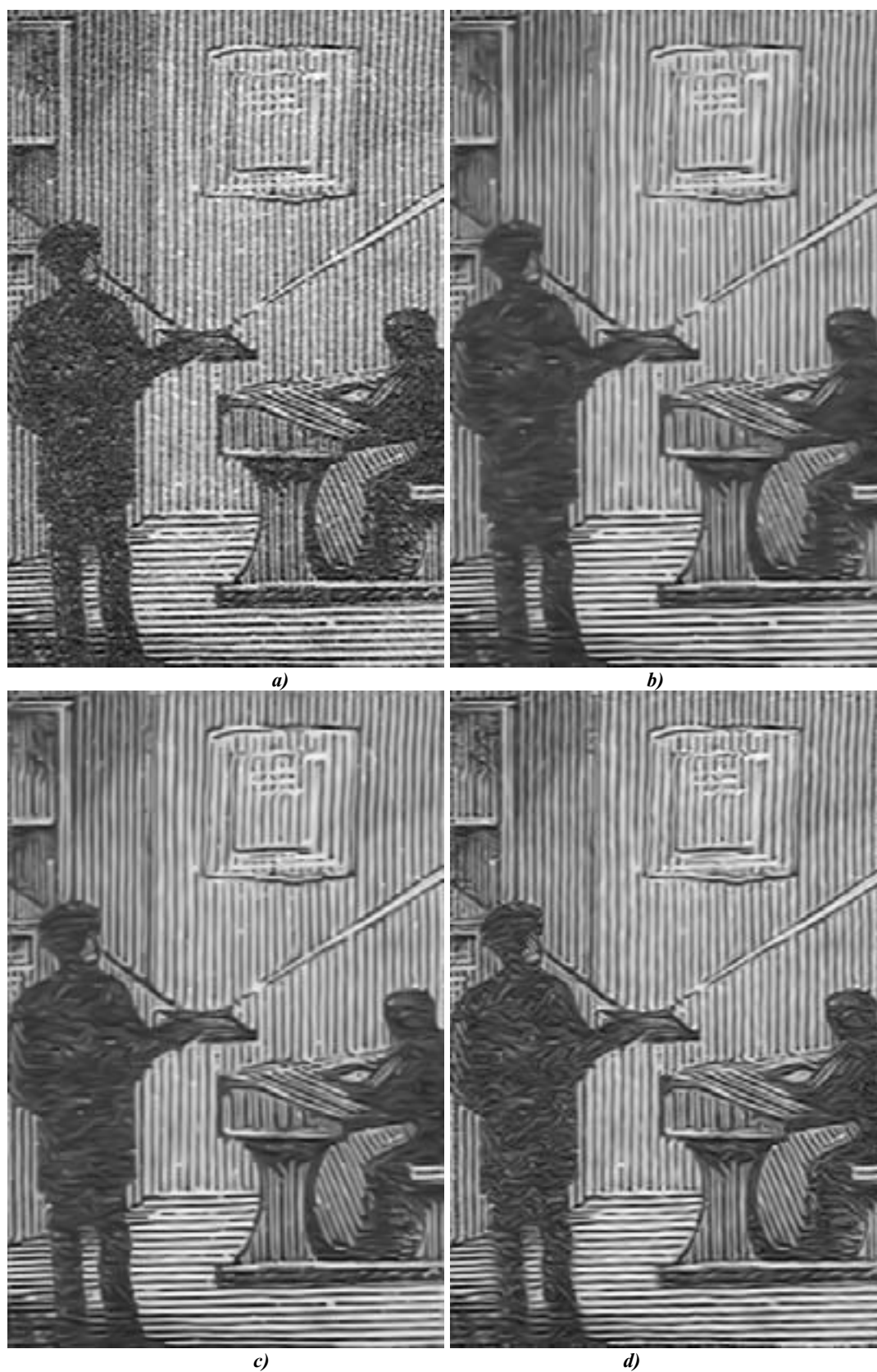


g)

Fig.4.9 (cont.)- f)Résultat FCL - $\gamma=15$, $\tau=0.65$, $n=60$. g)CED - $\sigma=0.5$, $\rho=2.25$, $C=1.0$, $n=8$.

Nous présentons d'autres résultats comparatifs entre ces méthodes (Fig.4.10). Cette fois ci, pour la CED et la FC nous utilisons comme image de référence le résultat de la FCL car il traduit la plus grande régularité de traits parallèles. Ce résultat a été obtenu pour le choix des paramètres : $n=25$, $\gamma=14$, $\tau=0.95$. Les choix des paramètres pour ces deux méthodes ont été : FC- $\sigma=0.75$, $\rho=2.25$, $\gamma=20$, $\tau=0.85$, CED - $\sigma=0.75$, $\rho=1.75$, $C=1.0$, $n=11$.

En ce qui concerne les méthodes de lissage directionnel *IDid* et *IDin*, il est à noter que, pour ce type d'images, nous ne pouvons pas utiliser « l'original » fourni par FCL ; malgré la continuité des traits mentionnée, les micros structures présentes sur l'homme à gauche de l'image sont susceptibles d'être accentuées d'avantage par les approches tensorielles ; cette région ayant une aire importante, il est clair que nous ne pouvons forcer les méthodes *IDid* et *IDin* à s'approcher de ce type de résultat. Nous avons donc recherché la meilleure image lissée en essayant d'obtenir une restauration comparable des traits ; le choix des paramètres correspondant est le même pour les deux approches $n=50$, $\sigma=0.5$, $\beta=0.85$.



*Fig.4.10- Gravures anciennes. Résultats comparatifs.
a) Image originale. b) 1Did. c) 1Din. d) FC.*

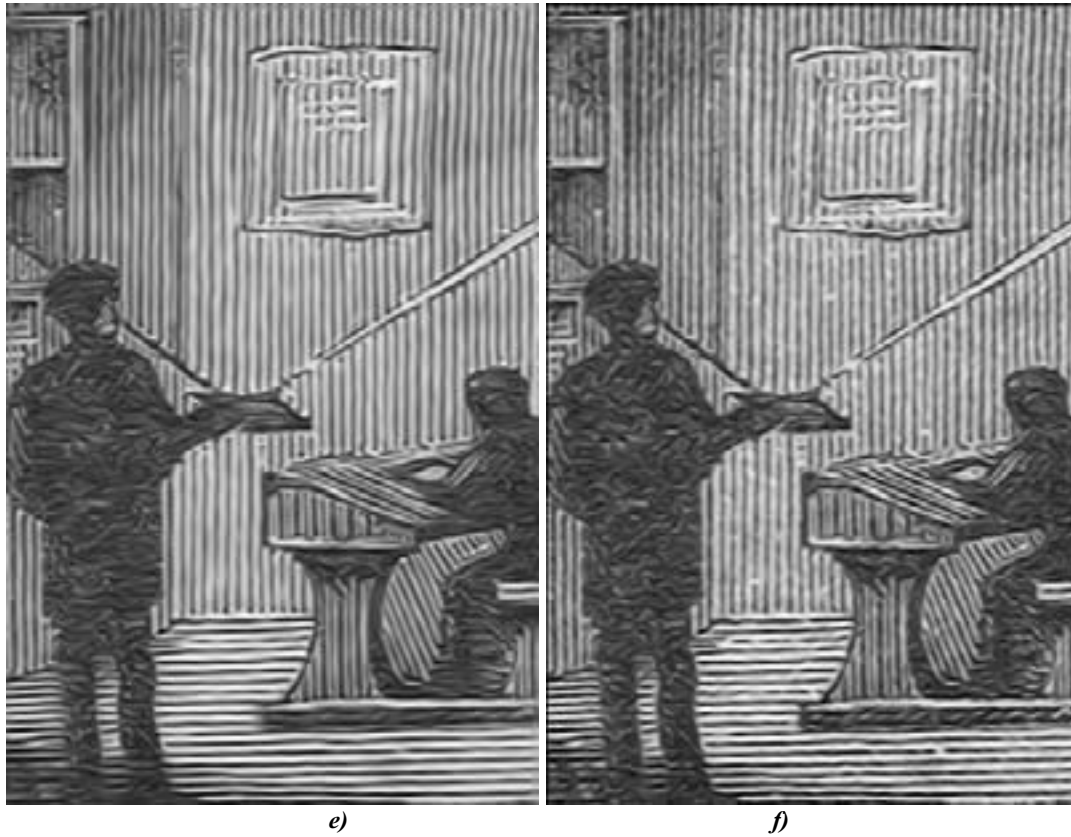


Fig.4.10(cont.)- e)FCL. f)CED.

Comme pour l'image précédente, les approches fondées sur les dérivées directionnelles du signal ont tendance à conserver les micro coupures qui affectent la continuité des traits mais aussi les petits détails. En utilisant le même choix de paramètres les résultats de la *IDid* et *IDin* sont équivalents avec un avantage visible pour la *IDin* concernant les textures orientées selon une direction différente des axes de la grille numérique.

Par rapport à la *FCL*, la version non linéaire produit des résultats comparables ; une légère supériorité est observable au niveau de la qualité des traits produits par la *FCL*.

La *CED* doit être stoppée relativement vite afin de limiter les distorsions géométriques ; la conséquence directe est observable sous la forme des fluctuations des contours.

La dernière image sur laquelle nous allons montrer des résultats comparatifs est caractérisée par une énergie du signal relativement constante dans les régions d'intérêt (*Fig.4.11*). Les traits parallèles du fond de l'image originale ont un contenu fréquentiel relativement constant ; la plupart des minima de la mesure de confiance de Weickert correspondent aux jonctions, la force du processus de lissage étant fortement diminuée dans ces régions. Par conséquent les résultats obtenus par la *CED* (*Fig.4.11.b*) sont proches de ceux qui correspondent à la méthode *FC* (*Fig.4.11.c*).

Le choix des paramètres a été effectué en référence aux résultats de la *FCL* (*Fig.4.11.d*). Cette approche permet encore une fois l'obtention de la meilleure amélioration des structures linéaires de l'arrière plan.

Cette image est un cas limite d'utilisation des approches tensorielles ; sur les régions sans orientation dominante, ces approches produisent des structures totalement artificielles. Ce phénomène est également observable dans l'image précédente (*Fig.4.10*).



a)



b)

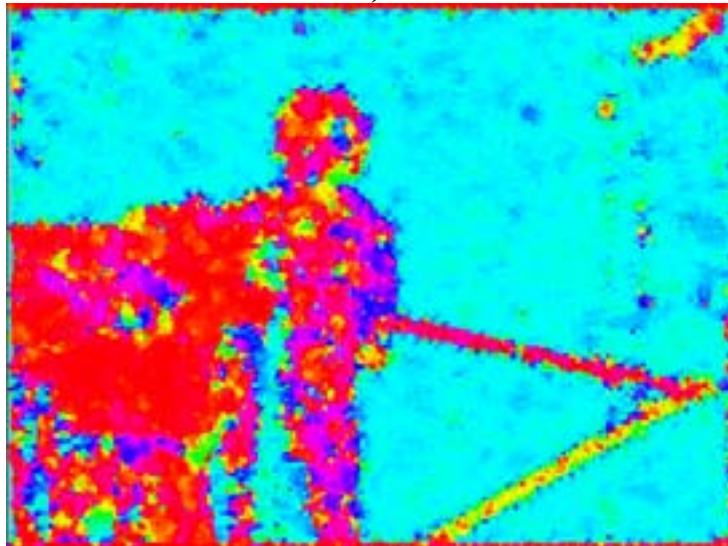


c)

*Fig.4.11- Gravure ancienne. a)Image originale. b) Résultat CED - $\sigma=0.5$, $\rho=2.25$, $C=1.0$, $n=23$.
c) Résultat FC $\sigma=0.75$, $\rho=2.25$, $\gamma=8.0$, $\tau=0.85$, $n=46$.*



d)

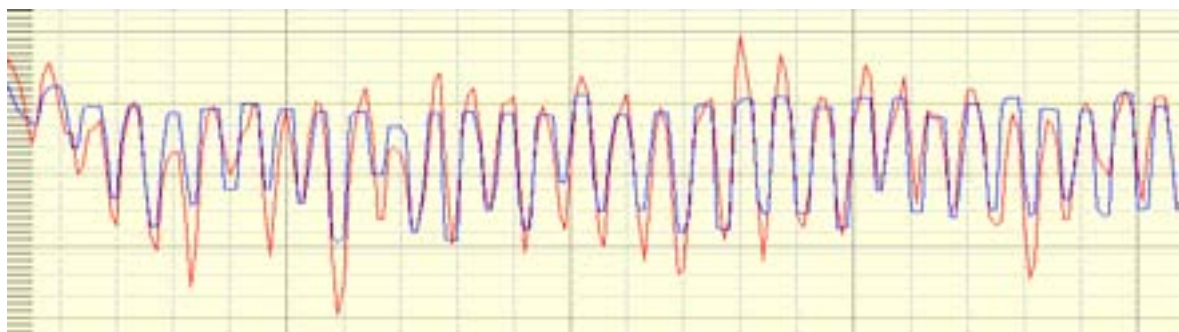


e)



f)

Fig.4.11(cont.)- d) Résultat FCL $\gamma=14$, $\tau=0.95$, $n=60$. e) ACP multi échelle $N_{max}=11$.
f) Résultat 1D/2D.



g)
Fig.4.11(cont.) -g) Profil de la ligne 32 :
image originale en rouge, image restaurée en bleu.

Parmi les approches de diffusion fondées sur les dérivées directionnelles, nous présentons uniquement le résultat obtenu par la 1D/2D. Par rapport à l'approche 1Din, l'ajout d'une deuxième dimension doit favoriser la restauration de la partie non orientée de l'image. En produisant le résultat de Fig.4.11.f nous avons pris plutôt une approche de type restauration : nous nous intéressons à l'élimination du bruit qui affecte l'image sans rechercher à améliorer les structures filaires.

En utilisant l'image d'orientation (Fig.4.11.e), les résultats de la 1D/2D sont représentés en Fig.4.11.f. (paramètres : $n=80$, $\sigma=0.85$, $\beta=0.85$, $\alpha=0.4$).

La différence entre ce résultat et ceux obtenus par les approches tensorielles est nette : on note en particulier le rehaussement des contours (image restaurée -Fig.4.11.f- et profil de la ligne 32- Fig.4.11.g) induit par le processus de rehaussement dans les directions orthogonales aux orientations des structures et la meilleure restauration des régions non orientées situées à gauche et en bas de l'image originale.

Nous concluons la présentation des résultats sur cette image avec l'approche de Tschumperlé et Deriche. La méthode utilise des directions robustes et est également dédiée au lissage des régions non orientées ; elle est donc susceptible de produire de bons résultats. Nous illustrons à la Figure 4.11.h le résultat de cette approche. Il correspond au jeu de paramètres qui produit le résultat le plus proche de la 1D/2D : $n=400$, $\rho=1.75$.

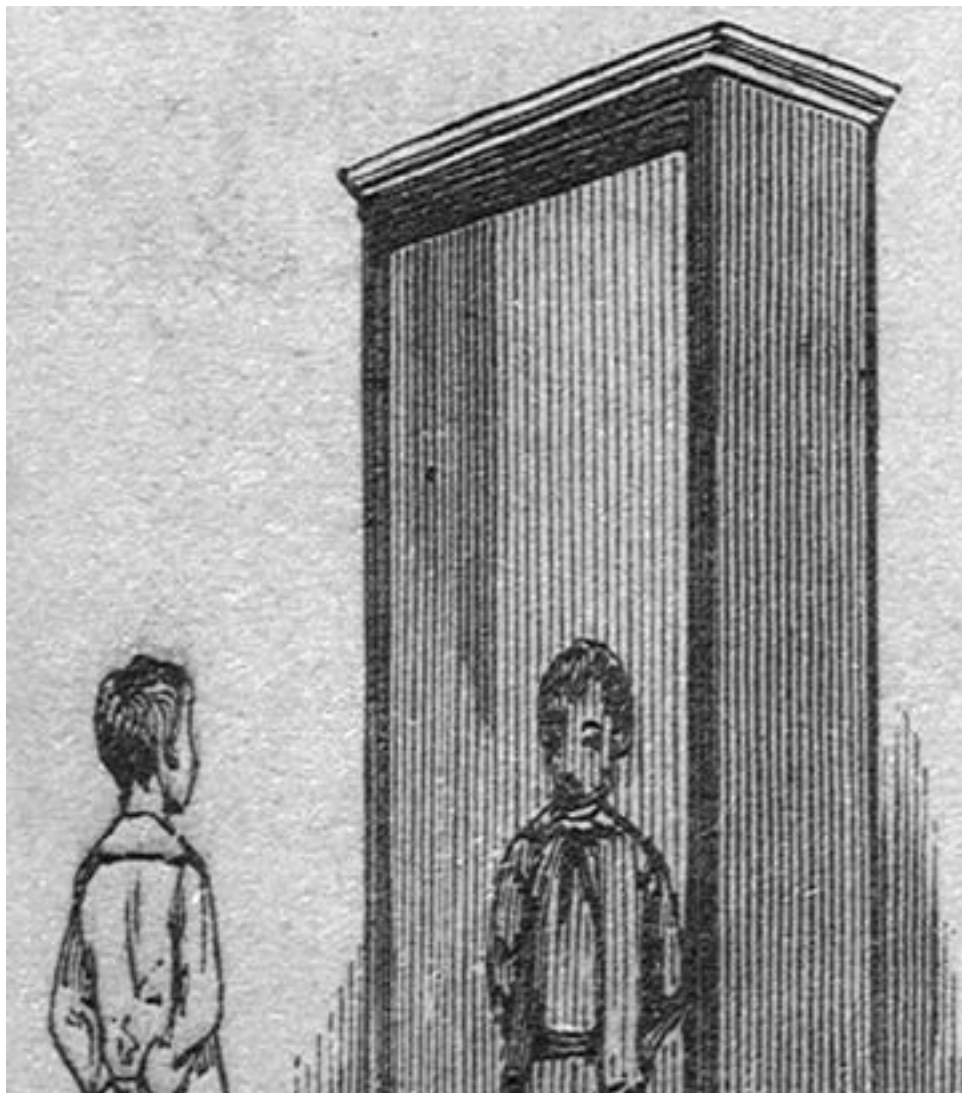


h)
Fig.4.11(cont.)-
i)Résultat Tschumperlé- Deriche.

Le principal défaut de la méthode réside dans le choix des fonctions de diffusion. Toutes les deux dépendent – à travers les valeurs propres – du contraste local et du niveau de bruit local. Les conséquences directes, sur l'image de la figure 4.11 sont un lissage plus fort des régions présentant un faible contraste ainsi que la diffusion non nulle dans la direction moyenne des vecteurs gradient ; cette diffusion introduit un léger effet de flou.

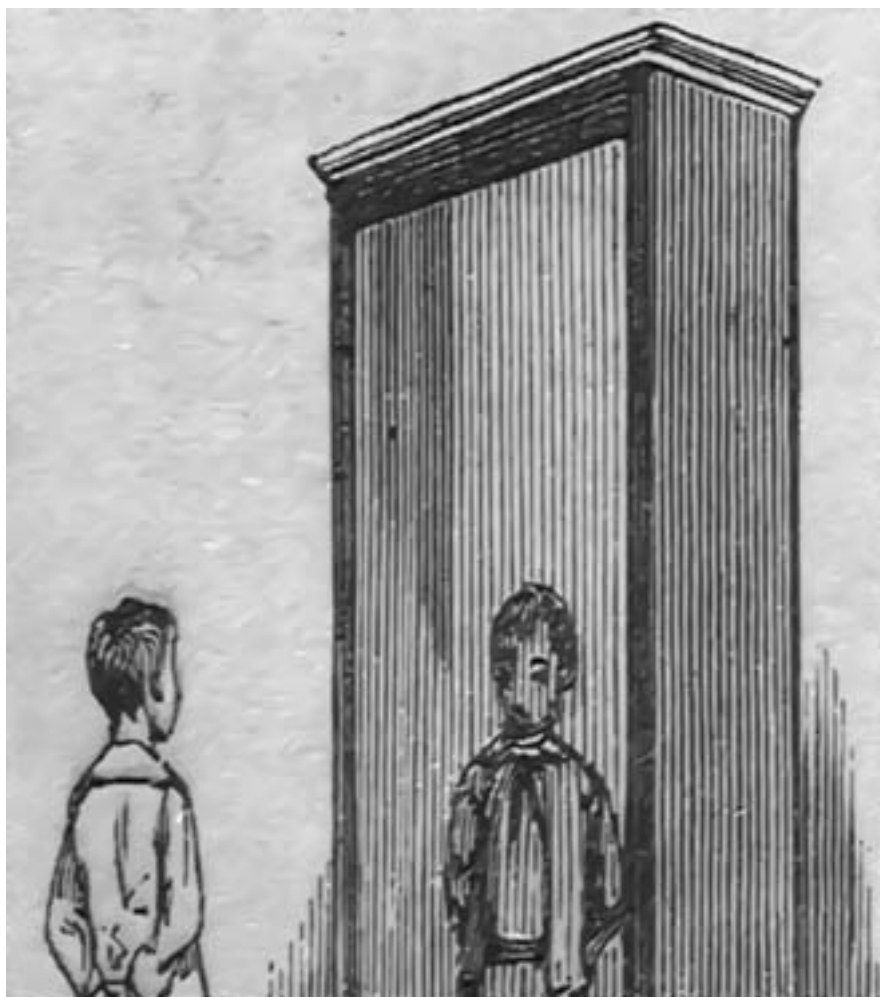
En comparaison avec la $1D/2D$ notons aussi l'aspect moins régulier des traits restaurés. La force du processus de lissage - dépendante du contraste local- est variable, même pour des pixels proches spatialement et correspondants à une même structure.

Nous montrons le même aspect dans les trois exemples qui suivent. La nature des images (Fig.4.12, Fig.4.13 et Fig.4.14) est différente : les structures filaires occupent une surface relativement faible. Notre objectif dans ce cas est double : rehaussement des contours et meilleure restauration des régions relativement homogènes n'ayant pas une direction dominante. Pour la première image (Fig.4.12) nous montrons les résultats comparatifs entre les approches $1D$ et $1D/2D$ (clairement les approches tensorielles ne sont pas adaptées pour la restauration des zones non orientées). Pour les deux approches le choix des paramètres favorise la restauration des lignes : $1D/2D$ $n=160$, $\sigma=0.75$, $\beta=0.8$, $\alpha=0.7$ (Fig.4.12.b), $1D$ - $n=160$, $\sigma=0.75$, $\beta=0.8$ (Fig.4.12.c).

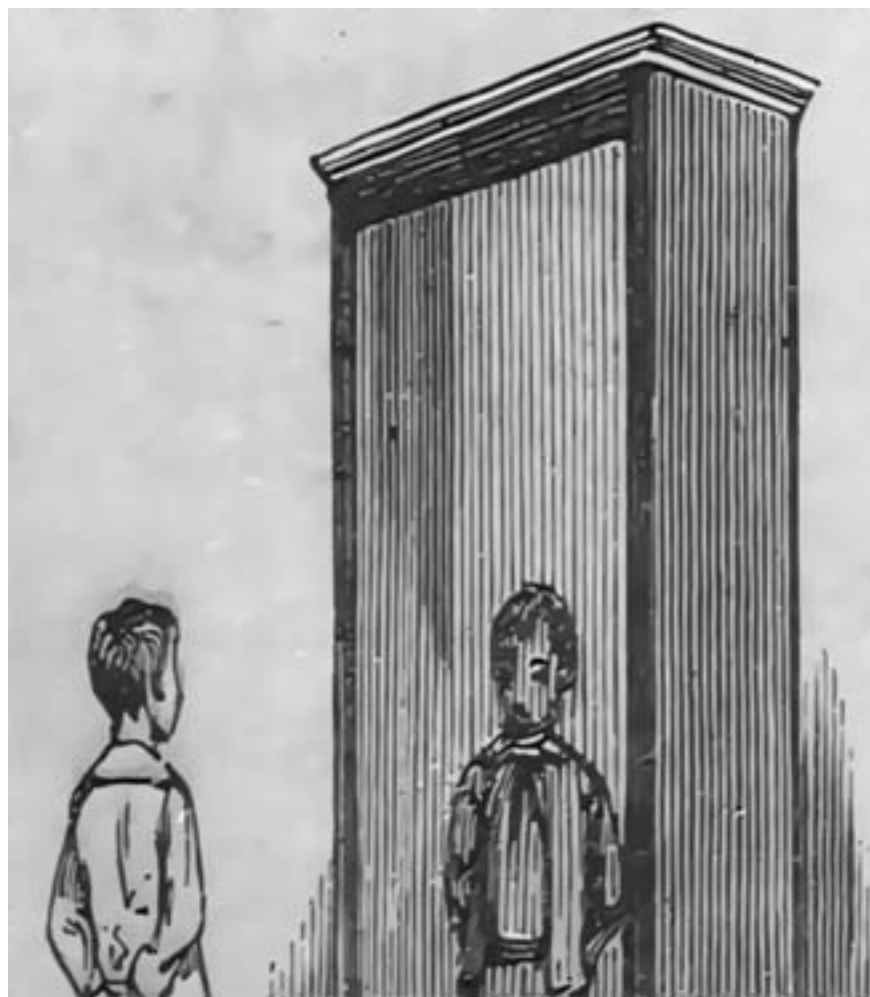


a)

Fig.4.12 -Gravure ancienne. Intérêt de la deuxième direction de diffusion. a) Image originale.

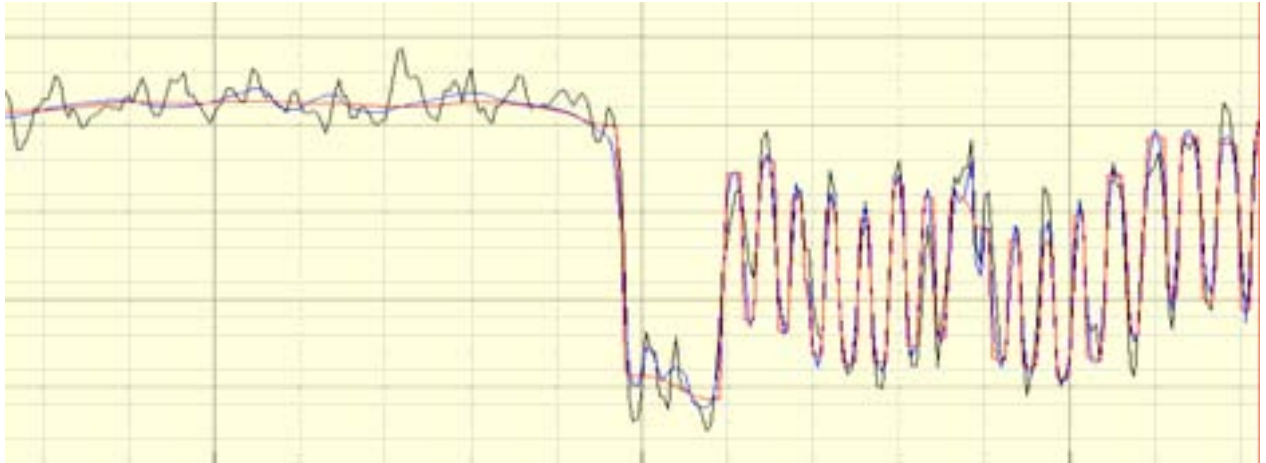


b)



c)

Fig.4.12(cont.)- b) Résultat 1Di. c)Résultat 1D/2D.



d)
 Fig.4.12(cont.)- d) Profils d'une portion des lignes 248 de chaque image.
 — Image originale
 1D/2D — 1D/2D

Visiblement les résultats sont différents : le fond de l'image restaurée par la 1D/2D est plus homogène (le plateau de l'image de Fig.4.12.d) ; la 1D/2D produit également un processus de rehaussement nettement visible sur la moitié droite de l'image.

L'image suivante (Fig.4.13) est de même nature que la précédente. Nous présentons uniquement le résultat de la 1D/2D. La qualité de filtrage est très satisfaisante sur les zones orientées comme sur les zones homogènes.

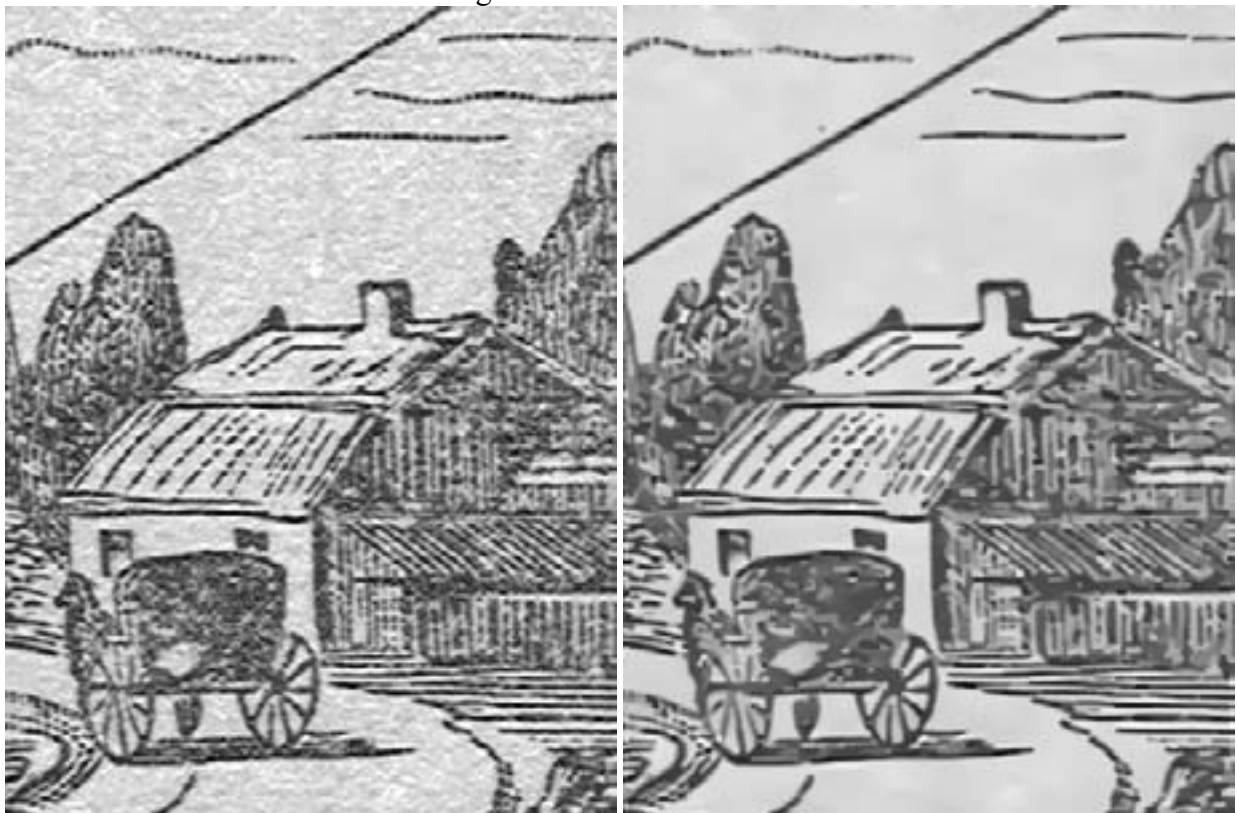


Fig.4.13- Gravure ancienne. a) Image originale.
 b) Résultat 1D/2D $n=125$, $\sigma=0.5$, $\beta=0.65$, $\alpha=0.5$.

Enfin, nous concluons cette partie en présentant des résultats obtenus sur une image composée de traits et de lignes en pointillés (Fig.4.14).

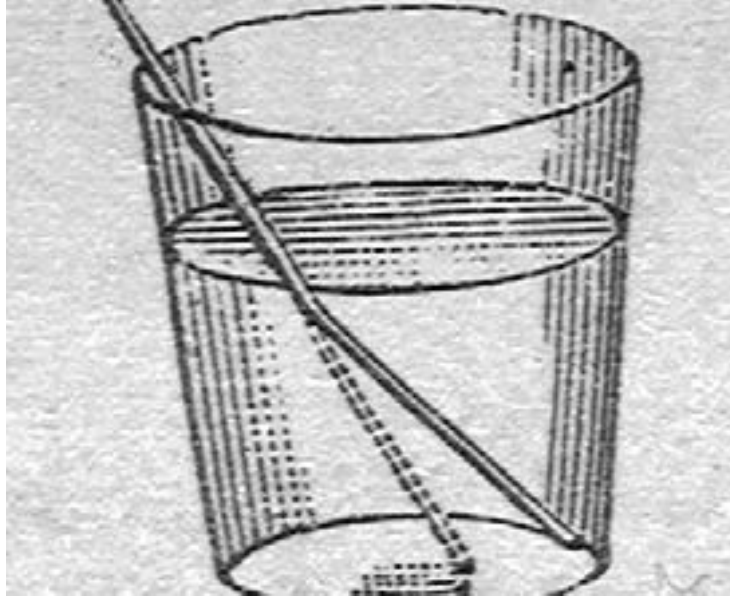


Fig.4.14- a) Image contenant des traits, lignes en pointillés et des régions non orientées.

Sur une telle image un algorithme de restauration doit permettre la reconstruction du fond de l'image, des motifs filaires et préserver dans le même temps les lignes en pointillés.

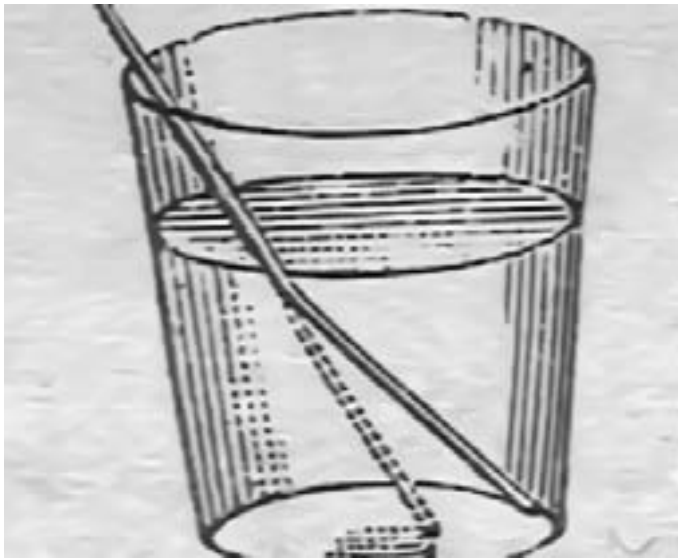
Un premier résultat (Fig.4.14.b) a été obtenu en utilisant la *IDid*. Le choix des paramètres ($\sigma=0.75$, $\beta=0.85$, $n=50$) nous permet d'atteindre les deux derniers des trois objectifs précédents. Le lissage du fond, même si il apparaît non négligeable, n'est pas efficace du fait de l'utilisation d'une seule direction de diffusion.

En utilisant deux directions de diffusion en tout point de l'image, l'approche de Tschumperlé et Deriche permet une meilleure restauration du fond de l'image (Fig.4.14.c). Le prix payé est encore une fois une perte globale de dynamique, surtout pour un nombre aussi grand d'itérations ($n=295$). Ce problème est aussi la cause de la destruction des lignes en pointillés. Les directions robustes de diffusion ($\rho=2.0$ pour l'ACP) assurent la préservation des structures filaires.

La *FCL* n'est pas dédiée à la restauration des régions non orientées. Le fond de l'image est quasiment non lissé et sur les lignes en pointillés, la méthode nécessite des fonctions de diffusion quasi binaires ($\gamma=40.0$, $\tau=0.99$). Par contre la restauration et l'amélioration de la continuité des lignes est évidente sur le résultat produit en 25 itérations (Fig.4.14.c).

Le résultat obtenu par l'utilisation de la *ID/2D* (jeu de paramètres : $n=135$, $\sigma=0.75$, $\beta=0.85$, $\alpha=0.65$) est illustré à la Figure 4.14.d. L'effet de la deuxième direction de diffusion est perceptible sur le fond de l'image et sur les contours de l'objet. Comparativement aux autres approches, la méthode est la seule capable d'atteindre les trois objectifs : le fond de l'image est homogène, la préservation des jonctions, le rehaussement des contours et des lignes en pointillés conduisent à un aspect naturel de l'image restaurée. La méthode est orientée plutôt rehaussement : les dérivées directionnelles prises dans les directions des deuxièmes vecteurs propres des ACP sont sensibles aux micro coupures qui affectent les continuités des traits et, par conséquent, induisent un processus de rehaussement dans ces régions tout en empêchant la reconstruction de la continuité.

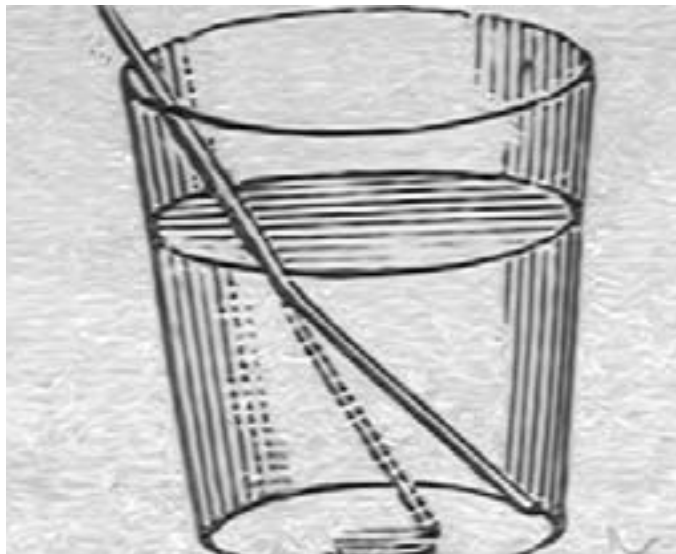
Parmi tous ces résultats nous jugeons encore une fois que celui issu du traitement de l'image par la *ID/2D* est le plus intéressant.



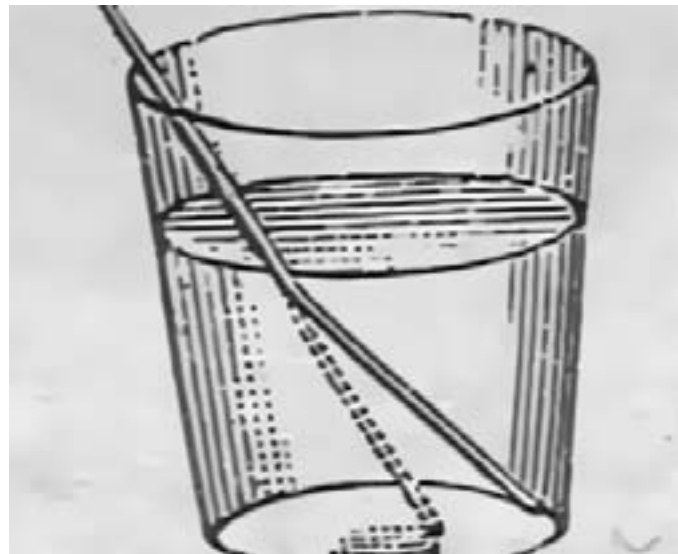
b)



c)



d)



e)

Fig.4.14 (cont.)- b) Résultat 1D. c) Résultat TsD. d) Résultat FCL. e) Résultat 1D/2D.

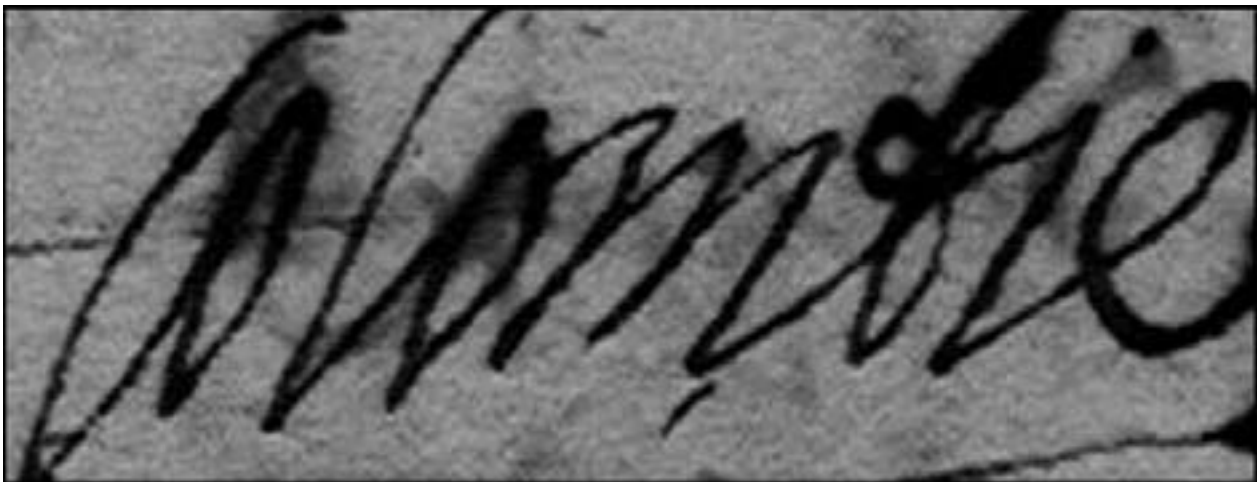
4.6 Résultats sur des images de textes manuscrits ou dactylographiés

Nous étudions des images contenant des textes aux contours irréguliers entourés d'arrière-plans texturés. Au sens de la diffusion, ces images sont plus « classiques » : les contraintes imposées par le contenu fréquentiel sont moins fortes que dans les cas des gravures. Des approches de type Catté et al., *EED* et des méthodes plus complexes combinant plusieurs termes de diffusion, réaction et couplage (Kornprobst et al.) peuvent être employées.

Nous allons présenter des résultats comparatifs entre ces approches et la *1D/2D* qui, parmi les méthodes que nous avons développées, est la mieux adaptée à la restauration de ce type d'images.

La comparaison reste subjective : ne disposant pas d'une image originale, nous utiliserons comme au paragraphe précédent, le résultat jugé de meilleure qualité comme résultat de référence. Par suite, nous rechercherons, pour chaque méthode, le résultat qui s'en approche le plus.

Considérons l'image de la figure 4.4.a et les résultats obtenus par les trois approches testées : *EED*, Kornprobst et *1D/2D* (Fig.4.15). Le meilleur résultat est obtenu pour la *1D/2D* (Fig.4.15.b) avec pour paramètres : $n=300$, $\sigma=0.75$, $\beta=0.95$, $\alpha=0.65$. Par rapport aux résultats du paragraphe précédent, la contribution de l'axe orthogonal aux contours a été augmentée ce qui induit un lissage plus efficace du fond de l'image. Sur l'arrière plan texturé de l'image le processus induit par la *1D/2D* est essentiellement un processus de lissage, même si pour ce choix de paramètres la contribution des deux axes de diffusion n'est pas la même. Sur les frontières un fort processus de rehaussement est observable. L'explication est simple : les dérivées directionnelles dans les directions orthogonales aux contours sont, globalement, plus grandes que celles dans les directions des contours et le rehaussement est automatiquement induit.



a)

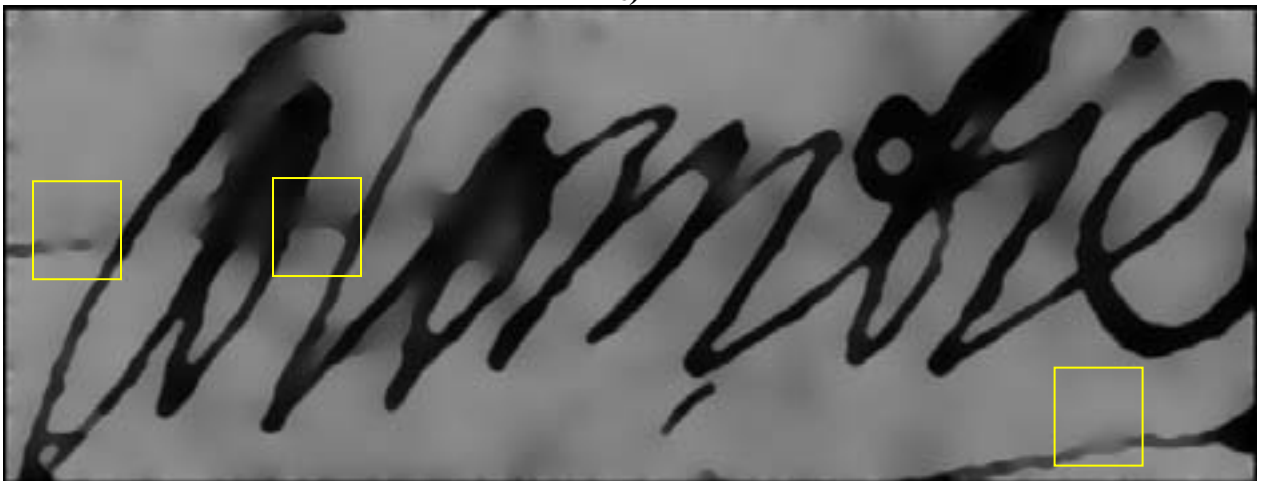
Fig.4.15-Image manuscrit. a) Image originale.

Un comportement similaire est observé sur le résultat le plus proche produit par la *EED* (Fig.4.15.c). Dans cette image les contours du texte sont aisément discernables de l'arrière plan et les limitations principales de la méthode – induites par des directions de diffusion erronées – ne se manifestent pas. Un pré lissage gaussien relativement faible ($\sigma=0.75$) s'avère suffisant pour retrouver les bonnes directions de diffusion ; le résultat obtenu avec $n=173$ itérations, une barrière $K=8$ et une fonction de diffusion très sélective ($m=4$), est proche de celui produit par la *1D/2D*. En analysant ces résultats comparativement il est à noter, à part l'effet de régularisation

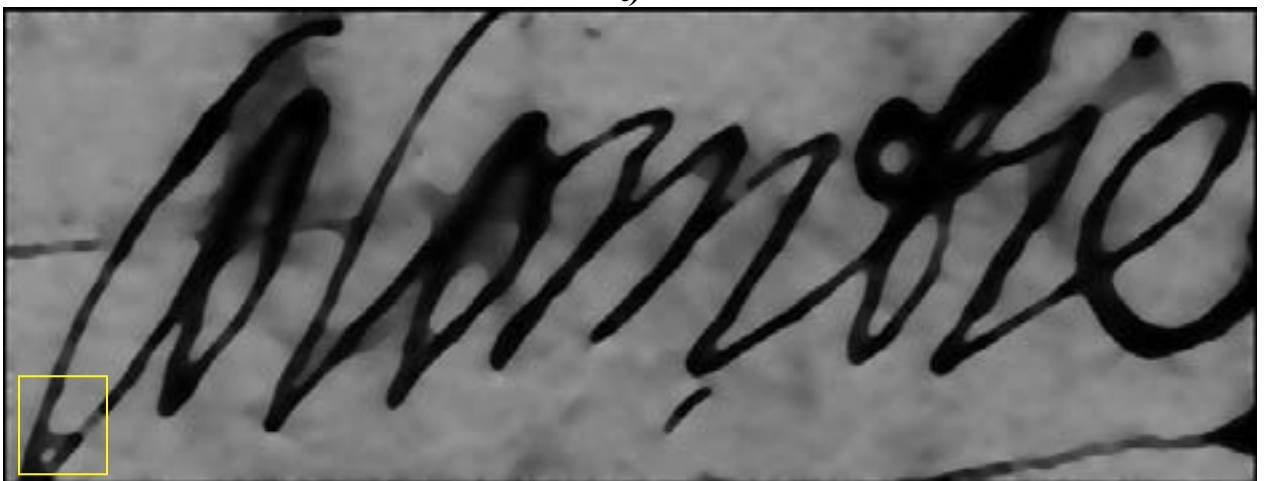
de l'ACP sur les directions de diffusion, la meilleure reconstruction des contours ayant des normes des vecteurs gradients faibles. Ce phénomène, assimilable à l'effet de trou de Perona , est observable dans les régions repérées par les fenêtres jaunes (*Fig.4.15.c*)



b)



c)



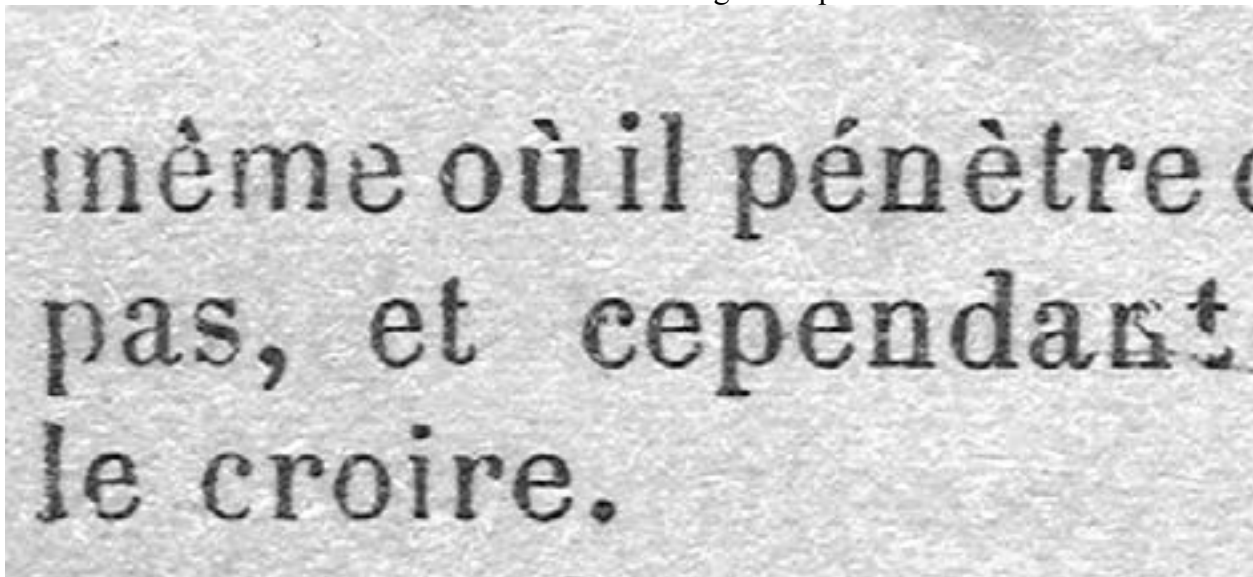
d)

*Fig.4.15 (cont.)-b) Résultat 1D/2D.
c) Résultat EED. d) Résultat KOR.*

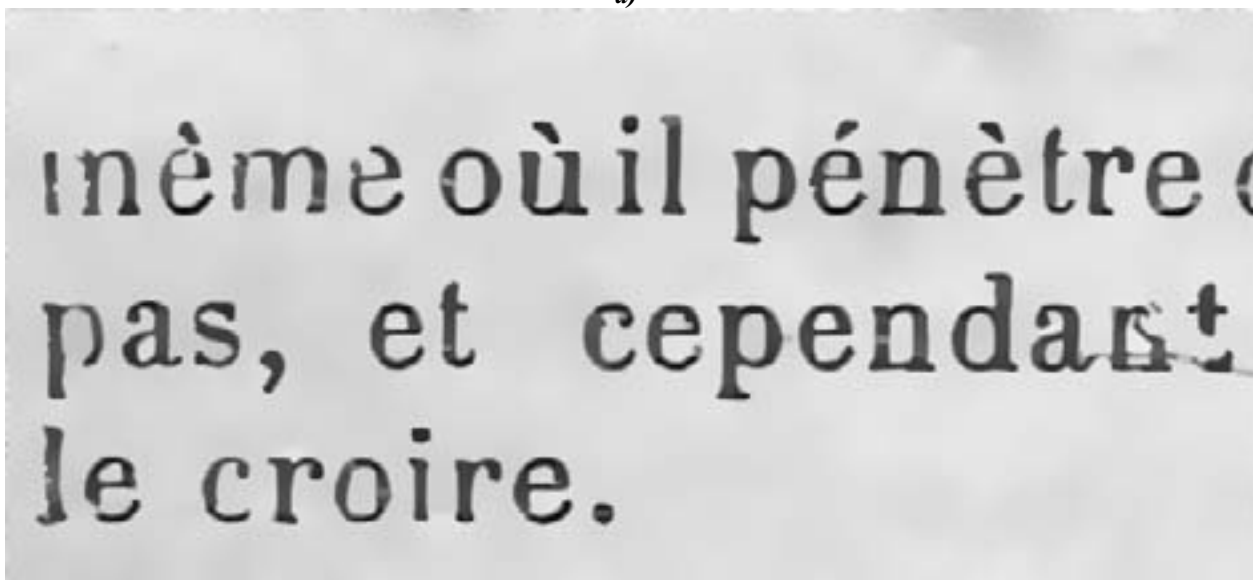
Le résultat de l'approche de Kornprobst (*Fig.4.15.d*) correspond à un choix des poids

relativement faible pour le processus de rehaussement $(\alpha_f, \alpha_r, \alpha_e) = (0, 1.5, 0.5)$. Pour autant, ce phénomène de rehaussement est observable et le processus n'est presque jamais isotrope. La conséquence directe est le nombre relativement faible d'itérations lié à la présence du terme de lissage proportionnel à la courbure. Les régions à forte courbure diffusent plus vite que les autres (par exemple la région entourée par la fenêtre jaune en *Fig.4.15.d*), ce qui induit des distorsions géométriques. L'arrière plan de l'image est donc également moins bien restauré.

Considérons maintenant un deuxième exemple (*Fig.4.4.b*). Le niveau de bruit plus important affectant l'arrière plan de cette image peut poser des problèmes : les contours ne sont pas aussi nets que dans le cas précédent et un seuil de diffusion trop grand nécessaire pour la restauration du fond peut induire un effet de flou sur l'image. Pour cette image, nous présentons également des résultats correspondant à l'approche de Tschumperlé -Deriche qui est susceptible de donner des résultats corrects dans le cadre d'un lissage avec préservation des contours.



a)



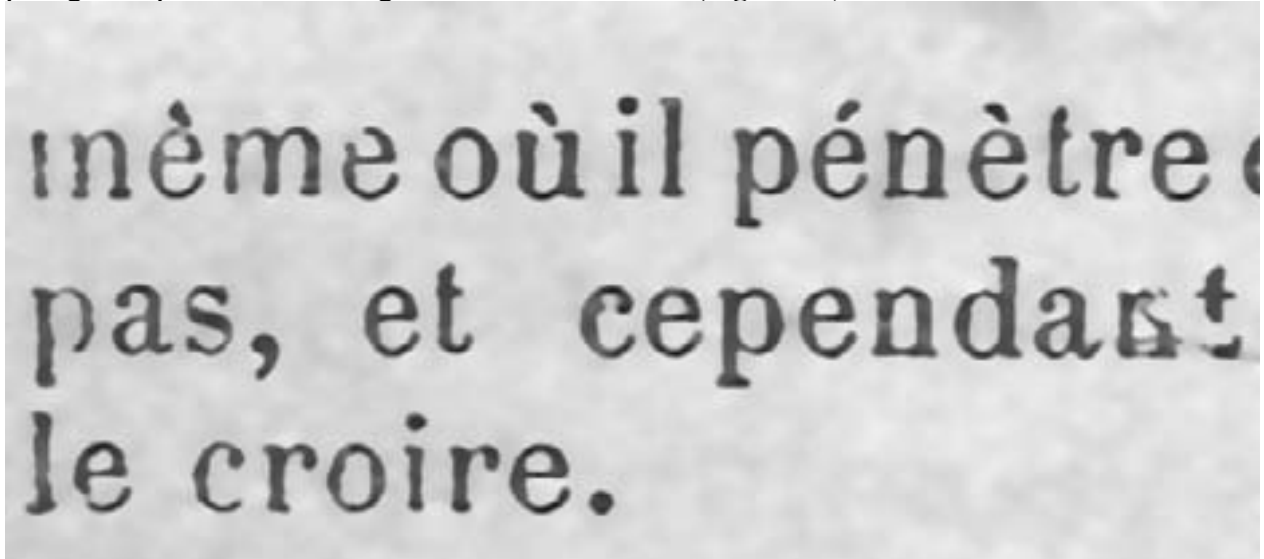
b)

Fig.4.16-Image contenant des textes et textures non orientées. a) Image originale. b) Résultat 1D/2D.

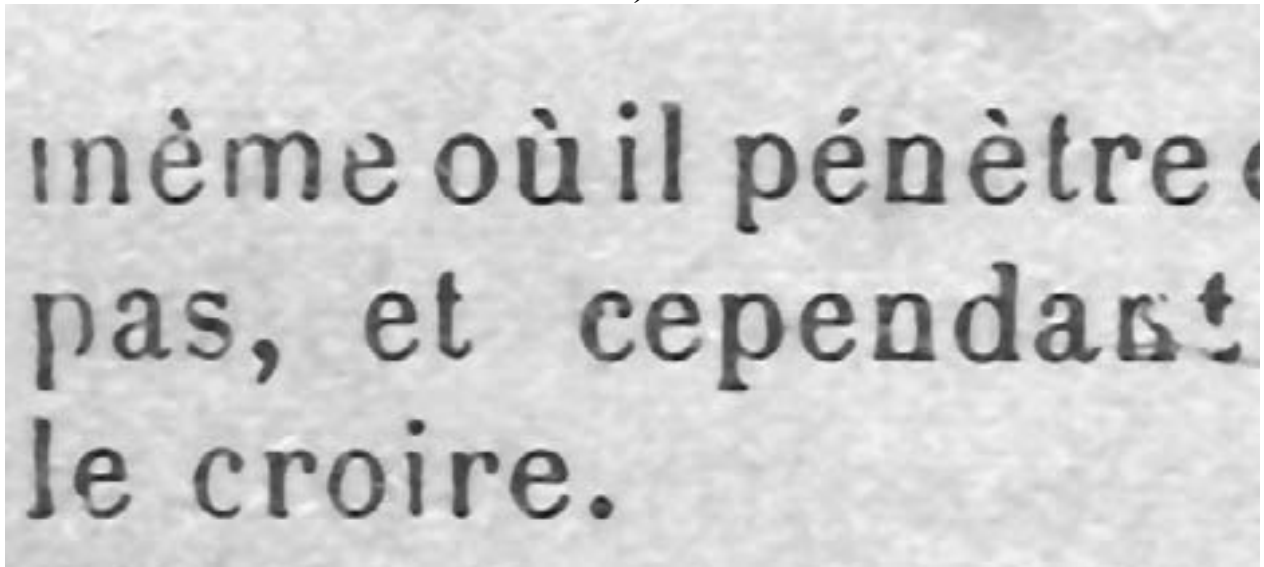
Le meilleur résultat de la 1D/2D (*Fig.4.16.b*) montre que la méthode est insensible au niveau de bruit important et permet l'obtention de résultats supérieurs aux autres approches

discutées. Les paramètres optimaux sont $n=200$, $\sigma=0.75$, $\beta=0.95$, $\alpha=0.85$. Le dernier paramètre, plus grand que dans l'exemple précédent, traduit la nécessité d'obtenir un lissage plus efficace sur l'arrière plan.

Le résultat de la *EED*, correspondant au choix des paramètres $n=32$, $\sigma=0.75$, $K=14$, $m=8$ est en concordance avec ce qui a été dit précédemment : le bruit, plus important, impose un seuil plus grand qui introduit un léger flou sur les contours (*Fig.4.16.c*).



c)



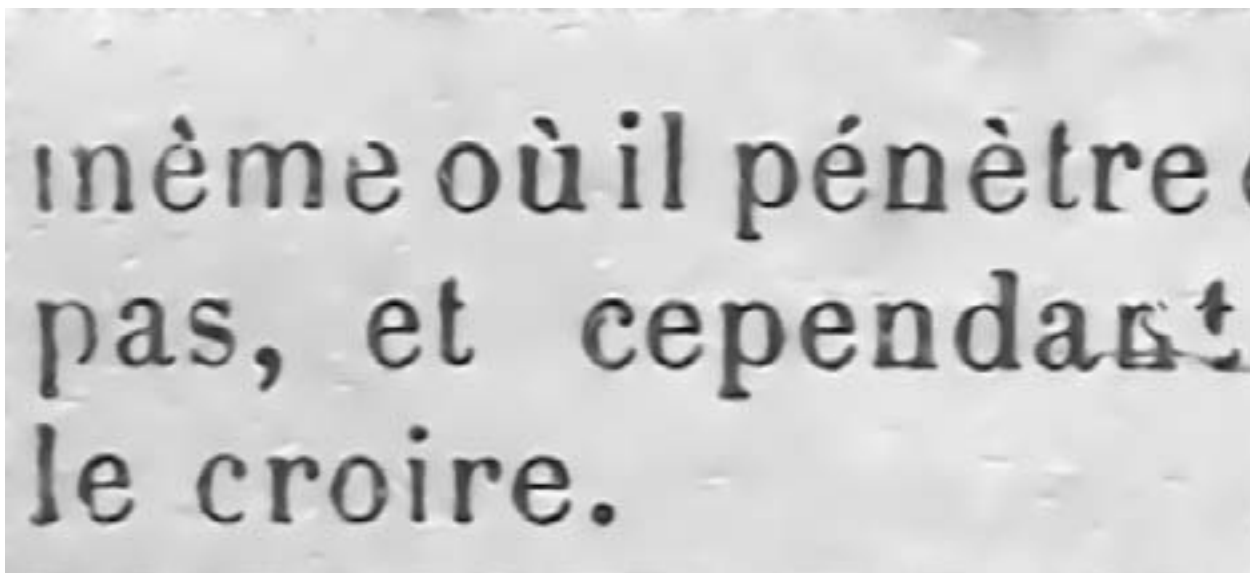
d)

Fig.4.16 (cont.) - c) Résultat EED.

d) Résultat Kornprobst et al.

La présence d'un nombre plus important de motifs à forte courbure induit des contraintes encore plus importantes sur le nombre d'itérations de l'approche de Kornprobst. S'ensuit une très mauvaise reconstruction de l'arrière plan, malgré le poids important du terme de diffusion. Ce résultat correspond au choix suivant des paramètres : $n=10$, $(\alpha_f, \alpha_r, \alpha_e) = (0, 2.0, 0.5)$, $\tau=10$,

$\sigma = 1.0$, $\bar{\sigma} = 2.0$.



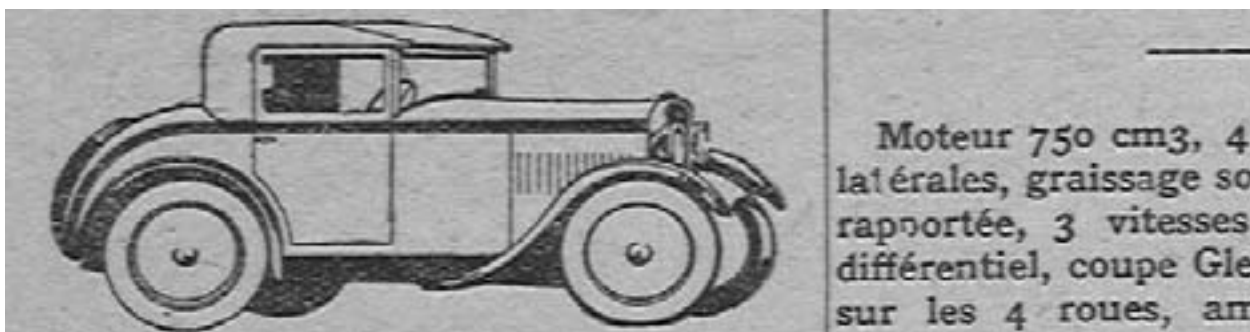
e)

Fig.4.16 (cont.)- e) Résultat Tschumperlé –Deriche.

Malgré la reconstitution assez correcte du fond de l'image, le résultat issu de l'approche de Tschumperlé et Deriche est flou ; la diffusion est dépendante du contenu énergétique tout en induisant une reconstruction inégale des diverses régions.

Nous concluons cette partie avec un dernier exemple sur une image contenant à la fois des gravures et du texte (Fig.4.17.a). Malgré le niveau du bruit inférieur à l'exemple précédent, la présence des petits détails impose des contraintes sur le nombre d'itérations admissible ($n=4$) pour la EED. En utilisant un pré lissage gaussien de taille $\sigma=0.75$ le texte et les traits fins parallèles -placés sur le dessin représentant la voiture devront disparaître les premiers. Le processus est donc rapidement stoppé avant destruction de ces structures. Les autres paramètres de la méthode sont : $K=8$, $m=2$ (Fig.4.17.d).

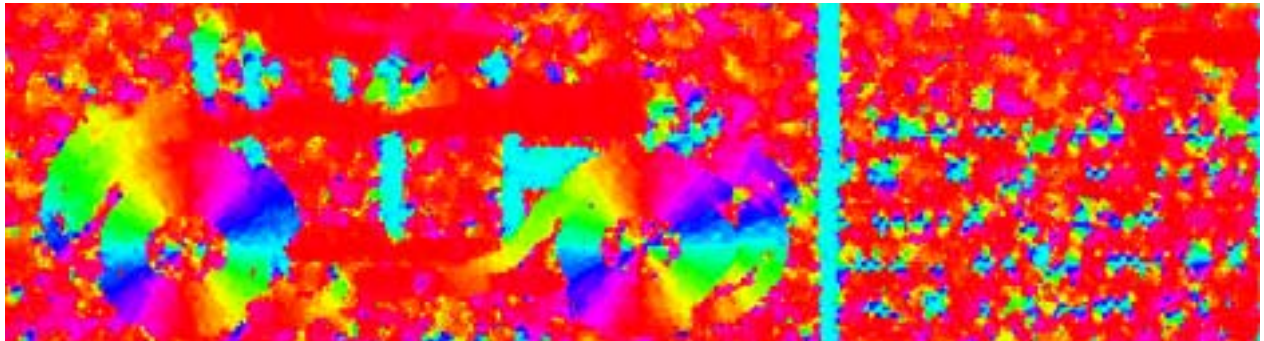
Les contraintes imposées sur l'approche de Kornprobst sont encore plus fortes. Malgré l'influence forte du terme de couplage $\alpha_c = 1.0$ compensé par un terme de diffusion important $\alpha_r = 2.0$ qui assure le lissage du fond de l'image, les distorsions géométriques sur la zone de texte sont visibles. Cette région, caractérisée par des courbures importantes, est l'endroit où la diffusion s'opère le plus rapidement. Les autres paramètres sont $\alpha_e = 0.5$, $K = 5$, $n = 4$ (Fig.4.17.e).



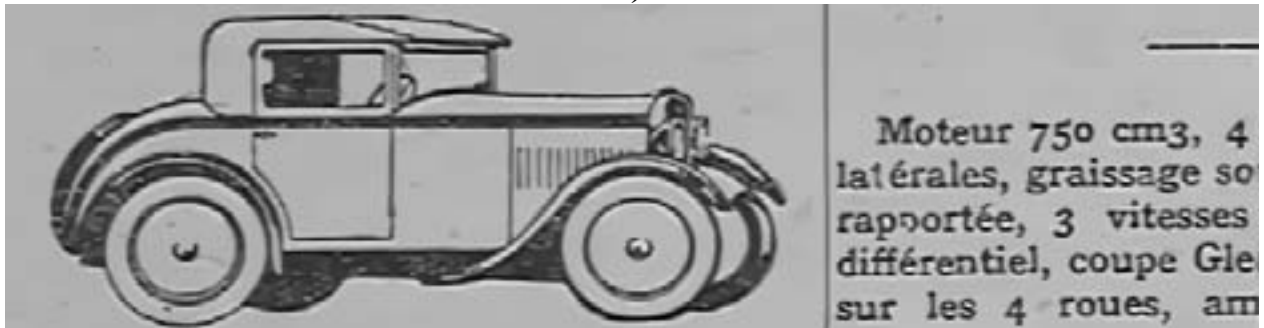
a)

Fig.4.17-Image contenant des textes et gravures. a)Image originale.

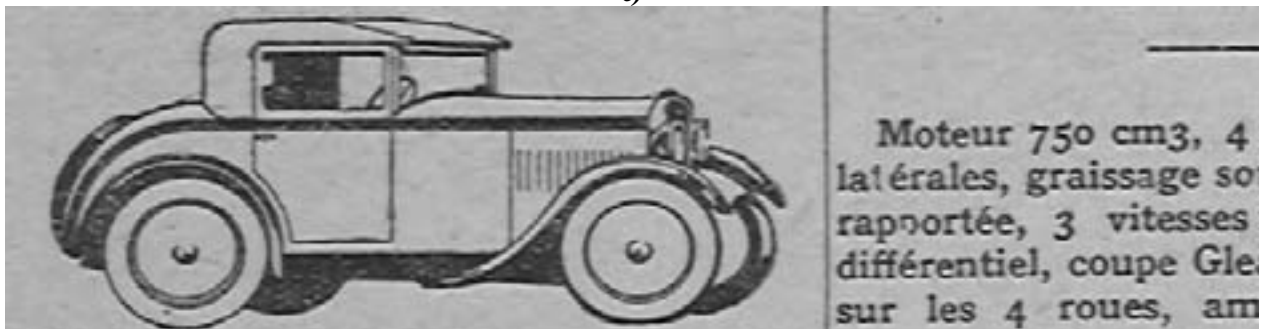
En ce qui concerne notre approche, elle permet - pour le choix de paramètres : $n = 200$, $\beta = 0.7$, $\sigma = 0.75$, $\alpha = 0.65$ - l'obtention d'un arrière plan homogène, une restauration efficace de la zone de texte et de la gravure. L'image d'orientation est représentée en (Fig.4.17.b) et le résultat final en (Fig. 4.17.c).



b)



c)



d)



e)

Fig.4.17(cont.)- b)Orientation ACP multi échelle $N_{max}=19$.
c) Resultat 1D/2D. d) Résultat EED. e)Résultat Kornprobst et al.

4.7 Résultats sur des images représentant des gravures en couleurs

Nous consacrons la dernière partie de ce chapitre à l'amélioration et restauration des gravures en couleurs. Les approches classiques considèrent une image en couleurs comme une fonction vectorielle représentée soit dans l'espace des trois couleurs fondamentales *RGB*, soit dans l'espace *HSV*. Nous allons nous référer seulement au premier cas, le passage d'un espace à l'autre pouvant se faire par des techniques classiques de conversion.

Dans les cas des images *RGB*, deux techniques peuvent se distinguer. Une première approche construit une fonction – ou un tenseur- de diffusion commun(e) pour les trois composantes ; le processus de diffusion est ensuite effectué sur chaque composante avec cette fonction commune. Mentionnons ici seulement l'extension de la *CED* pour le cas des images en couleurs [Wei99] comme un représentant de cette classe. En considérant chaque composante comme étant indépendante des autres, la deuxième technique – *approche canal par canal*- opère sur les trois composantes avec des fonctions de diffusion spécifiques pour chaque canal. Dans les deux situations l'image restaurée est recomposée à partir des trois composantes de couleur traitées.

Nous ne présenterons que les résultats de la *1D/2D* sachant que cette méthode s'est révélée supérieure à toutes les autres sur le type d'images traitées dans cette section. Même si l'extension de cette méthode peut être envisagée, en considérant le bruit comme étant stationnaire sur les trois canaux, nous allons prendre la deuxième approche pour restaurer les gravures en couleurs. Pratiquement, nous décomposons l'image en trois canaux : rouge, vert et bleu ; sur chaque canal nous estimons l'orientation – comme pour le cas des images en niveaux de gris - en utilisant une *ACP* multi-échelle ; ensuite nous restaurons chaque image en utilisant le même jeu de paramètres ; finalement nous recomposons l'image de sortie en partant de chaque composante restaurée.

Considérons tout d'abord l'image présentée *Fig 4..5.a* : elle est fortement bruitée avec un léger effet de flou. Nous la représentons en *Fig.4.18.c* en taille réelle.

L'effet de moiré sur un canal – *B* en *Fig.4.18.b*- se manifeste par l'apparition de fausses structures orientées superposées à l'image originale. Les amplitudes de ces structures sont plus grandes que celles des structures sur lesquelles elles se manifestent - les traits horizontaux en *Fig.4.18.a* et *b* -. Par suite, la reconstruction des textures originales est impossible. Nous avons réglé les paramètres de la méthode pour éliminer ces artefacts tout en sachant que nous perdrons le contenu de haute fréquence. Le résultat de *Fig.4.18.d* correspond aux paramètres : $n = 50, \beta = 0.95, \sigma = 1.0, \alpha = 0.9$. Comme attendu, le contenu de haute fréquence dans les zones affectées par l'effet de moiré a été perdu. Par contre, les défauts liés au dispositif d'acquisition (moirés, rehaussement évident des contours) ont été éliminés et la reconstruction de l'arrière plan de l'image est presque parfaite. L'image de sortie est simplifiée permettant à des approches de type compression d'être utilisées de manière plus efficace.

Nous présentons un deuxième exemple (*Fig.4.6.a - Fig.4.19.a*). Les déviations introduites par le dispositif d'acquisition sont nettement plus faibles dans ce cas. Le problème de restauration consiste à effectuer une tâche d'élimination du bruit affectant les zones homogènes de l'image – la coiffe - et le léger effet de fluctuation des traits parallèles. Le choix des paramètres - $n = 15, \beta = 0.25, \sigma = 0.5, \alpha = 0.5$ - correspond à un compromis entre la restauration de l'arrière plan et la préservation des traits parallèles. Malgré la légère perte de dynamique sur la région orientée qui entoure le personnage, son aspect est plus régulier et la reconstruction des zones non orientées est correcte. Enfin la plupart des points situés sur le visage ont été conservés permettant la préservation de l'effet de relief.



Fig.4.18- Gravure en couleurs. a) Détail. b)Détail dans le canal B

Nous concluons cette partie avec un troisième exemple sur une image contenant des régions et des traits fins parallèles (*Fig.4.20.a et b*). Ces images sont de taille importante (elles sont représentées à 70% de leur taille originale). Nous cherchons une simplification de l'image originale –comme pour le premier exemple- tout en préservant les détails- comme pour le deuxième exemple.

Les deux objectifs sont atteints (*Fig.4.20.b*) : les structures orientées significatives sont conservées et les régions non orientées sont homogénéisées. Aucune déviation importante de chrominance n'est à signaler et l'image restaurée conserve le contenu colorimétrique de saturation et teinte. Cette dernière observation est valable pour l'ensemble des résultats produits dans ce paragraphe.



c)

Fig.4.18 (cont.)- c)Image originale.



d)

Fig.4.18(cont.)- d) Image restaurée.



a)

b)



Fig.4.19- Gravure en couleurs contenant des traits fins et parallèles. a) Image originale. b)Résultat 1D/2D.



Fig.4.20 a) Gravure en couleurs contenant des traits fins et parallèles et régions non orientées.



Fig.4.20 (cont.) - b)Résultat 1D/2D.

4.8 Conclusions

Le but de ce chapitre était de montrer de façon pratique que les approches originales développées au Chapitre 2 peuvent être utilisées avec succès dans des tâches de restauration et amélioration des images contenant des structures orientées. Ces résultats étendent et confirment ceux obtenus au Chapitre 3 sur des images de synthèse : les approches proposées dans ce mémoire se révèlent performantes par rapport aux approches dites « classiques » pour la restauration et l'amélioration. La combinaison d'informations « semi-locales »-orientation- et « locales » -dérivées directionnelles- s'avère appropriée pour le traitement de ce type d'images. Elle permet de saisir une tendance générale des motifs orientés ; la pertinence de cette tendance, quantifiée par les valeurs des dérivées directionnelles permet une restauration efficace avec une perte minimale de détails.

Nous tenons à remercier la société *I2S* de Pessac pour nous avoir fourni ces images et pour leur intérêt manifesté tout au long de ces travaux.

Conclusions

L'activité de recherche présentée dans ce mémoire est centrée autour de l'amélioration et de la restauration des textures présentant un caractère directionnel prononcé, possédant des contrastes locaux variables et exhibant de multiples jonctions caractérisées par de fortes variations d'orientation. Les objectifs principaux sont la proposition de nouvelles méthodes, adaptées à ce type d'images, l'étude des performances des approches développées et, enfin, l'application de ces nouveaux opérateurs pour des tâches spécifiques. Le champ principal d'application des travaux présentés est la restauration et l'amélioration des images représentant des gravures et des documents anciens numérisés. Néanmoins, le cadre théorique développé confère un caractère général aux opérateurs proposés et, déjà, d'autres domaines d'applications, dont l'imagerie sismique ont fait l'objet de travaux au sein de notre équipe de recherche.

Nous proposons nos nouveaux opérateurs dans le cadre d'un formalisme de type équations aux dérivées partielles (EDP). L'avantage essentiel -exploité dans ce mémoire- d'un opérateur développé dans ce cadre est la connaissance, en tout point de l'image, de son comportement. Localement, de fortes anisotropies de comportement peuvent être induites si l'équation est définie en terme de dérivées secondes directionnelles. Des processus apparemment complémentaires en traitement d'images : lissage et rehaussement peuvent caractériser l'action d'un filtre pour la même région de l'image. Une simplification progressive d'une certaine image avec préservation ou rehaussement des contours est, par exemple, aisément explicable à travers ce formalisme.

Dans le premier chapitre nous exposons le cadre théorique et pratique de l'utilisation des EDP en amélioration et restauration d'images. Nous nous sommes concentrés sur la présentation des principales approches existantes dans la littérature pour le traitement des images en niveaux de gris. L'abondance des travaux nous a forcé à effectuer une présentation synthétique et sélective des travaux que nous jugeons représentatifs du domaine. Même si les approches analysées sont toutes fondées sur des EDP, elles ont été développées en partant de principes théoriques différents : équations linéaires ou non linéaires, filtres de diffusion isotrope ou anisotrope, filtres scalaires ou tensoriels, filtres de choc, filtres par minimisation d'une fonction énergie, filtres fondés sur la théorie de déformation des courbes, etc. Nous utilisons une structuration conceptuelle de toutes ces approches et nous illustrons les liaisons entre ces principes théoriques. Pour chaque méthode nous présentons le modèle continu d'évolution, ces principales propriétés, et, le cas échéant, l'interprétation directionnelle à travers les dérivées secondes. L'analyse est menée aussi d'un point de vue pratique, des études de cas soulignant les points forts et faibles de chaque approche tout au long de ce chapitre. Tous les exemples utilisés pour l'illustration des concepts théoriques ont été implantés avec les algorithmes numériques présentés par les auteurs. Les images étant représentées sur des grilles fixes pour lesquelles les EDP doivent être transformées en équations utilisant les différences finies qui doivent respecter les principes imposés par les modèles continus ou qui induisent de nouvelles propriétés, non explicables sur les modèles continus. Dès lors, il est évident que l'aspect lié à l'implantation numérique des méthodes est essentiel : c'est pourquoi nous incluons à la fin du chapitre 1 une présentation synthétique du passage continu – numérique.

Notons que, suite à l'analyse théorique des travaux existants, une approche originale de diffusion anisotrope reposant sur une régularisation à base de filtres médians a été proposée en [TLBBT03], pour le rehaussement des images floues, fortement bruitées. Même si les résultats montrent que la méthode est supérieure à un certain nombre d'approches classiques, ses concepts théoriques n'ont pas été exposés dans la mesure où cette méthode est une méthode orientée régions et ne s'inscrit donc pas exactement dans le cadre de ce mémoire.

Le deuxième chapitre est entièrement dédié à la présentation de nos nouveaux opérateurs. Le point commun de la plupart des images traitées est l'existence -en tout pixel- d'une information directionnelle. Définie simplement comme étant orthogonale aux vecteurs gradients (§2.2.1), l'orientation des structures allongées caractérise localement le contenu informationnel de l'image. Étant fondée sur des opérateurs différentiels, l'orientation est extrêmement sensible aux oscillations locales de contraste dues aux bruits induits par les équipements d'acquisition ou par tout autre phénomène altérant la qualité des images. Une technique de filtrage d'orientations s'avère donc nécessaire. Les techniques déjà existantes dans la littérature sont nombreuses (§2.2.4) ; par des développements classiques nous montrons (§2.2.5.2 et Annexe 1) que la plupart des techniques de moyennage de l'information directionnelle peuvent se ramener à un cadre statistique robuste en utilisant une Analyse en Composantes Principales (ACP). L'orientation du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre d'une ACP effectuée sur la matrice de covariance des vecteurs gradients n'est que l'orientation moyenne des structures, définie comme orthogonale à l'orientation moyenne des vecteurs gradients. Cette information a un caractère multi échelle, elle dépend fortement du nombre des vecteurs gradient qui définissent le support de l'ACP (§2.2.5.3). Elle est robuste si l'image est dégradée par des bruits additifs, isotropes, de moyenne nulle. Tout en étant robuste, l'orientation estimée par cette technique peut être erronée : dans le voisinage des jonctions, pour des supports de calcul contenant des orientations multiples, l'erreur d'estimation dépend de la distribution des vecteurs gradients -normes et orientations- et de la taille du support (§2.2.5.5). Une modalité classique pour quantifier les erreurs d'estimation d'orientation est l'utilisation des indicateurs de confiance ou de cohérence (§2.2.5.5).

Sur cette partie concernant l'estimation de l'orientation, notre principale contribution est la proposition d'un modèle original, multi - échelle, d'analyse en composantes principales (§2.2.5.6). En nous intéressant aux erreurs commises au niveau du calcul de l'orientation, nous proposons un algorithme simple de détermination de la taille du support. Nous formalisons l'algorithme à travers un critère de maximisation : nous recherchons en tout point la taille du support pour lequel un indicateur de confiance est maximal. Dans ce but, nous généralisons un indicateur de confiance (Eq.2.6 et Eq.2.29) déjà existant dans la littérature

Cette technique est utilisée pour toutes nos approches de lissage directionnel ; elle est validée expérimentalement dans le troisième chapitre.

Même minimisées, les erreurs d'estimation d'orientation sont non nulles dès que la notion d'orientation est mal définie. Dans le voisinage des jonctions, des notions de type direction ou orientation, lissées ou non lissées n'ont, à notre sens, aucune signification. C'est cette constatation qui nous a guidé dans la proposition de nos approches : nous considérons l'information directionnelle comme une tendance et non comme une information exacte. Nos nouvelles approches se distinguent par la modalité dont cette tendance est prise en compte.

Une première approche de lissage directionnel avec rehaussement des jonctions est proposée en §2.3. Le modèle de diffusion directionnelle est complètement nouveau, la force de diffusion est modulée en intensité par les dérivées directionnelles de l'image ; par rapport aux approches existantes il permet l'existence d'un processus de rehaussement qui peut améliorer

les jonctions de l'image. Le filtre est basé sur les travaux présentés en [TLBB02a], [TLBB02b] et [LTGCG03]. Le modèle de base [TLBB02a] est présenté au paragraphe §2.3.2.4 et consiste à écrire un filtre sous la forme d'une divergence avec une fonction de diffusion classique et des vecteurs gradient modifiés dont les composantes sont construites en prenant les projections des composantes des vecteurs gradients originaux sur les axes donnant les orientations correspondantes des textures. Ce filtre est basé sur une interprétation géométrique : les normes des vecteurs gradients modifiés pénalisent les vecteurs gradients originaux qui ne sont pas en adéquation avec les orientations estimées. En prenant des fonctions de diffusion matricielles nous montrons en (§2.3.2.4) que ce type de filtre s'inscrit dans un formalisme plus général qui utilise les dérivées premières de l'image dans les directions des structures pour caractériser la pertinence de l'information d'orientation (eq.2.33-2.34). Ce nouveau formalisme, dont le cadre théorique est développé dans le mémoire et proposé en [TBBLB04] et [DTLB04], nous permet de mieux caractériser le comportement directionnel de cette approche et de la généraliser pour des tâches de lissage directionnel avec rehaussement des jonctions et des contours.

Pour des modèles de dégradation de type bruits gaussiens, additifs, de moyenne nulle, l'utilisation des descripteurs de pertinence fondés sur les valeurs absolues des dérivées directionnelles premières dans les directions des textures offre certains avantages : pour des textures idéales unidirectionnelles, dégradées ou non par des bruits additifs, isotropes, ces descripteurs ne dépendent pas de l'énergie locale et dans les voisinages proches des jonctions ils présentent des maxima locaux. Sous l'hypothèse que les valeurs efficaces du bruit sont inférieures aux amplitudes en niveaux des gris des contours, le choix de ces descripteurs est donc naturel.

Nous proposons une équation de diffusion non- linéaire, fondée sur des descripteurs de pertinence de ce type (eq.2.33-2.34). Ses principales propriétés sont :

- Le choix de la fonction de diffusion, à travers sa fonction flux associée, décrit complètement le comportement du filtre dans les directions des textures. Des fonctions flux non décroissantes produisent un lissage en tout point, des fonctions non monotones peuvent induire des processus de rehaussement.
- Indépendamment du choix de la fonction de diffusion, dans les directions des textures, l'EDP induit un lissage indépendant du contenu énergétique local ; l'intensité est modulée essentiellement par le niveau de bruit.
- L'interprétation directionnelle de l'équation montre de façon directe que –pour des fonctions flux non monotones- le filtre de lissage directionnel peut rehausser les régions caractérisées par des maxima locaux des dérivées directionnelles. Pour des bruits faibles, ces maxima caractérisent les zones à forte rupture d'orientation, notamment les jonctions et -à une échelle donnée- les micro coupures affectant la continuité des traits. Ce phénomène est imposé pour notre modèle tout en conduisant à un choix d'une fonction non monotone.
- La distinction lissage/rehaussement se fait à travers un seul paramètre : la barrière de diffusion.

La contrainte imposée sur les valeurs efficaces du bruit est assez forte et des bruits forts peuvent induire des maxima locaux qui seront rehaussés. La version régularisée du filtre de lissage directionnel avec rehaussement des jonctions (eq.2.44) permet de s'affranchir de ce problème. En nous basant sur l'interprétation classique des noyaux gaussiens dans le domaine de Fourier nous proposons de remplacer les dérivées premières directionnelles dans les directions des textures de l'image originale par leurs équivalents calculés sur des versions lissées de l'image. L'objectif est double :

- Les noyaux gaussiens éliminent les oscillations locales inférieures à la taille de leur support ; l'influence du bruit dans l'estimation des dérivées directionnelles est diminuée tout en rendant le processus de lissage plus homogène.
- Dans le voisinage des jonctions les maxima locaux sont conservés.

La version régularisée admet toujours une interprétation directionnelle [TBBLB04] ; elle est plus générale, des tailles nulles des noyaux gaussiens correspondant à la version non régularisée. Le choix des paramètres est réduit au maximum : une ACP multi échelle permet de retrouver l'orientation qui décrit la tendance directionnelle ; la méthode prend pour paramètres l'échelle d'observation, ou de manière équivalente, le temps d'arrêt, une barrière de diffusion et la taille du noyau gaussien de pré lissage.

Indépendamment de la version considérée, régularisée ou non, l'équation inclut un terme de rehaussement et les schémas numériques permettent de garantir la stabilité du processus.

Nous proposons (§2.3.2.4) deux schémas numériques originaux : le premier est optimisé vis à vis de l'effort de calcul ; il a été déjà présentée en [TLBB02a] dans une version 4 voisinage et en [LTGDG03] pour un nombre de 8 voisins du pixel courant. Le deuxième schéma est optimisé vis à vis l'invariance aux rotations. Le nombre des directions n'est plus limité et le schéma est une approximation plus exacte de (2.44). Ce dernier schéma nécessite des résolutions sub-pixel en utilisant un schéma d'interpolation polynomial.

Pour les deux schémas, nous identifions les conditions dans lesquelles le processus de rehaussement est stable puis nous les comparons vis à vis de leur capacité à produire un résultat optimal en partant d'une image dégradée. Le choix des paramètres étant étroitement lié à cet optimum, nous traitons simultanément ces deux aspects (§2.3.2.5). Malgré le gain impressionnant en terme de temps de calcul (environ 400 % sur un processeur Pentium 3 à 1Ghz-pour une détermination unique de l'orientation) le schéma rapide produit des résultats moins performants, spécialement pour des textures non orientées selon les directions principales de la grille rectangulaire. Le modèle régularisé permet l'obtention de meilleurs résultats avec des noyaux gaussiens de taille relativement faible.

Dans les chapitres dédiés aux résultats expérimentaux et aux applications nous montrerons que ce type de filtre est efficace dans des tâches d'élimination du bruit affectant des textures essentiellement unidirectionnelles. Dans le cadre du formalisme développé en (§2.3.1) nous généralisons ce modèle pour des images quelconques. Ce nouveau formalisme nous permet de rajouter un terme de diffusion dans la direction moyenne des vecteurs gradients (§2.3.3.2). Nous proposons un modèle de diffusion directionnelle avec rehaussement des jonctions et des contours (eq.2.68). Le processus de diffusion sur la direction orthogonale est modulé par la dérivée première dans cette direction. Le nouveau terme peut donc agir localement comme un filtre de lissage, ou comme un filtre de rehaussement pour des fonctions de diffusion non convexes et des vecteurs gradients locaux des normes importantes. Néanmoins, l'équation est plus générale : pour des tâches spécifiques elle permet de choisir les fonctions de diffusion sur les deux directions. Pour le type d'images analysées dans ce mémoire nous désirons des processus de rehaussement dans les deux directions, cela nous conduit au choix d'une fonction non convexe, similaire à celle du modèle précédent. Nous induisons l'anisotropie par les choix des barrières de diffusion. Le choix indiqué en §2.3.3.2 nous permet d'induire à la fois un comportement isotrope dans les régions relativement homogènes de l'image, un lissage dans les directions des motifs unidirectionnels couplé avec un rehaussement des contours pour des gradients forts et enfin un rehaussement dans les régions présentant des maxima locaux des dérivées premières directionnelles. Une version régularisée du filtre (eq.2.72) permet d'accroître la robustesse au bruit.

L'EDP décrivant ce filtre est la plus générale : pour une barrière de diffusion nulle dans les directions moyennes des vecteurs gradients, le filtre de lissage directionnel 1D avec rehaussement des jonctions est retrouvé. Le passage en numérique est proposée en (§2.3.3.3) par une généralisation du schéma optimisé vis à vis de l'invariance aux rotations.

Une comparaison synthétique entre les deux modèles de lissage directionnel est proposée en (§2.3.3.4). Le filtre de lissage directionnel 2D avec rehaussement des jonctions et des contours produit des résultats du type segmentation avec des régions constantes séparées par des contours nets. L'introduction de la deuxième direction de diffusion diminue la sensibilité vis à vis du temps d'arrêt pour un effort calculatoire double.

En fin de chapitre 2, nous proposons des modèles de diffusion tensorielle dédiés à l'amélioration de la continuité des structures monodimensionnelles. Ces approches présentent aussi des propriétés de restauration.

Une caractéristique commune des approches précédentes est leur sensibilité aux dégradations de type « micro-coupures » affectant la continuité des motifs unidirectionnels. Pour des supports de calcul d'ACP suffisamment grands, l'orientation estimée peut être rendue relativement insensible aux oscillations très locales et l'homogénéité des orientations augmente. Dans le voisinage des jonctions, l'effet de l'augmentation de la taille sur l'homogénéité des orientations est inverse. Nous quantifions ces informations par la mesure semi-locale de cohérence des orientations déjà proposée (Eq.2.39). Ce descripteur est ensuite utilisé pour le modèle de diffusion tensorielle.

Les modèles de diffusion (§2.4) sont développés en partant d'une approche originale proposée en [TLBB02c]. Pour des orientations homogènes le filtre agit comme un filtre de lissage unidirectionnel basé sur une diffusivité matricielle ; les arrières plans et les jonctions sont lissés/rehaussés par un filtre de lissage directionnel avec rehaussement des jonctions.

En renonçant à la restauration du fond de l'image et au rehaussement des jonctions nous proposons en (§2.4.4) un modèle mathématique non linéaire plus rigoureux, fondé sur une EDP de diffusion tensorielle (eq.2.80). Ce modèle a été également publié en [TLBB03]. L'utilisation d'une mesure de cohérence normalisée rend le filtre insensible aux variations locales de contraste tout en traduisant un lissage homogènes des motifs unidirectionnels. Les minima locaux de la mesure de confiance sont étroitement liés aux régions présentant des orientations multiples et, par suite, le filtre agit comme un filtre de lissage avec préservation des jonctions.

L'effort calculatoire est important pour cette approche ; afin de le minimiser nous proposons aussi une version linéaire (§2.4.5). L'EDP (eq.2.84) utilise une mesure d'orientation obtenue une fois pour toute sur l'image originale en maximisant la cohérence des orientations. La conséquence directe est un nombre faible de paramètres et une réduction importante du temps de calcul. Les versions numériques de ces filtres sont développées classiquement suivant les principes évoqués au chapitre 1 (§1.8).

Le troisième chapitre est dédié entièrement à l'étude des performances des approches proposées. Les performances de nos approches sont comparées avec celles des méthodes classiques présentées au chapitre 1.

Dans la première partie nous proposons une étude complète des performances sous la forme d'un dispositif expérimental portant sur des images de synthèse proches de celles qui constituent le champ principal d'application de nos méthodes. La base d'images est composée de 15 images indépendantes générées aléatoirement et contenant des textures de diverses fréquences et orientations (§3.2.1). Les images sont dégradées par des bruits gaussiens additifs de valeurs efficaces variables. En fonction de ces valeurs, l'étude est structurée en deux classes contenant les 15 images affectées respectivement par des bruits faibles et forts. Sur chaque classe d'images nous nous intéressons de la capacité des méthodes à fournir un

résultat optimal à travers deux mesures quantitatives : le rapport signal crête/bruit et le rapport signal/bruit. Pour chaque approche/image nous recherchons un résultat optimal en faisant varier tous les paramètres. Pour les jeux des paramètres de l'Annexe 3, un certain nombre de résultats sont montrés en Annexe 4 et les performances chiffrées sont indiquées en Annexe 2.

Tous ces résultats sont commentés et analysés (§3.4.1) ; pour chaque méthode nous indiquons la problématique induite par la nature de ces images sur le principe théorique, les limitations principales et les possibles extensions.

Pour un jeu optimal de paramètres, les performances des approches proposées dans ce mémoire sont supérieures aux méthodes classiques sélectionnées dans cette étude. La significativité statistique des différences de performances est démontrée par l'utilisation d'une Analyse de Variance sur les rangs (Annexe 5). Par suite, l'ensemble des méthodes est hiérarchisé par un test de comparaisons multiples : indépendamment du niveau de bruit considéré et de la mesure quantitative toutes nos approches sont les plus performantes. Pour des bruits faibles, nos approches fondées sur les dérivées directionnelles de l'image produisent les résultats les plus proches de l'image non bruitée. De ce point de vue elles sont meilleures que les approches tensorielles. Pour des bruits forts ils n'existent pas de différences significatives. En terme de restauration des contours et jonctions, sur des images faiblement bruitées, toutes les approches proposées au chapitre 2 sont équivalentes. Si de bruits forts sont considérés, le filtre de lissage directionnel avec rehaussement des jonctions et des contours est le plus performant.

Une extension de cette étude pour d'autres types de dégradations - flou et bruits gaussiens ou non - et des images contenant des textures orientées et non orientées est abordée à la fin de ce chapitre (§3.5). Même si ce type de dégradation n'est pas particulièrement rencontré dans le cadre des applications proposées dans ce mémoire, nous positionnons notre seule approche appropriée –le filtre de lissage directionnel avec rehaussement des jonctions et des contours- parmi d'autres méthodes classiques sélectionnées en partant de l'analyse théorique du chapitre 1. Le protocole expérimental est similaire ; nous montrons, là encore, que notre approche est supérieure aux autres méthodes. Le deuxième type de dégradation contredit fortement les hypothèses autour desquelles nos approches ont été développées : les valeurs efficaces du bruit sont comparables aux amplitudes des contours, le bruit n'est pas additif, sa moyenne n'est pas nulle. Dans ce cas, au niveau restauration des contours, notre filtre est classé deuxième ; néanmoins, en terme de modifications visuelles, le résultat est plus discutable et notre approche peut être considérée comme très intéressante.

La dernière partie de ce mémoire est entièrement dédiée au champ principal d'application des opérateurs développés : la restauration et le rehaussement de gravures (§4.2). Pour des natures d'images très différentes (§4.3) les algorithmes ont été conçus comme un solution intégrée capable d'éliminer le bruit ou simplement de fournir de nouvelles images, améliorées.

Par rapport au chapitre précédent, une image originale n'est pas disponible ; par conséquent en produisant ces résultats sur des images réelles une certaine dose de subjectivité existe. L'esprit qui nous a guidé tout au long de ce chapitre a été fondé sur l'utilisation d'un jeu des paramètres qui améliore / restaure une image en lui apportant les moindres modifications topologiques.

En présentant ces résultats nous avons gardé aussi l'optique comparative du chapitre 3. Par nature d'image nous présentons des résultats des approches concurrentes les plus performantes. Pour chaque image améliorée/ restaurée par nos approches nous essayons de produire la même image en utilisant des approches classiques. Comme attendu, les principes théoriques différents des diverses approches nous empêchent d'obtenir des résultats identiques. Le juge final de la qualité des images restaurées reste l'œil humain : par les

exemples présentés nous espérons convaincre l'observateur que nos résultats sont les plus naturels.

En illustrant les résultats nous utilisons une structuration par la nature de l'image analysée. Tout d'abord nous présentons des résultats sur des images représentant des gravures anciennes (§4.5). Les structures linéaires caractérisant cette classe d'images sont améliorées / restaurées en utilisant toutes nos méthodes : les approches tensorielles sont dédiées à l'amélioration de la continuité des lignes et les approches fondées sur les dérivées directionnelles permettent de traiter de manière plus efficace les régions non orientées présentes dans ce type d'images ; la préférence pour un résultat ou l'autre dépend de l'objectif suivi. Des résultats concernant des textes manuscrits ou dactylographiés sont ensuite montrés (§4.6). L'intérêt de l'utilisation d'une deuxième direction de diffusion est automatiquement illustré par la nature de ces images ; par conséquent, dans cette section, nous ne présentons que des résultats obtenus avec le filtre de lissage directionnel avec rehaussement des jonctions et des contours.

La même idée est valable pour la partie consacré au gravures en couleurs (§4.7). Ces résultats sont les plus récents ; ils sont obtenus par une généralisation de nos approches de type composante par composante de couleur.

Parmi les perspectives de ce travail, un premier point concerne la généralisation de toutes les approches développées pour le cas des images vectorielles. Par rapport à des approches de type composante par composante, une approche unifiée sur l'ensemble des informations fourni par une image vectorielle apportera un gain en terme de précision. Une deuxième perspective de ce travail est l'utilisation des modèles d'interpolation plus élaborés pour les schémas numériques. Par rapport au modèle utilisé, qui contient un terme de lissage inhérent qui agit essentiellement sur les points d'intérêt, notamment points triples et points d'inflexions des contours non idéaux, des schémas d'interpolation fondés sur des connaissances de la géométrie locale apporteront un gain en terme de qualité de reconstruction de ces zones.

La dynamique du domaine, le champ d'application pratiquement illimité, nous impose de continuer ces travaux aussi bien dans des activités de recherche que dans la proposition des solutions pour des problèmes spécifiques.

Annexe 1

Filtrage des orientations par Analyse en Composantes Principales

Le filtrage des orientations par *Analyse en Composantes Principales (ACP)* est souvent mentionné dans la littérature comme une méthode tensorielle.

Nous considérerons uniquement le cas des images en niveaux de gris, même si la méthode peut être étendue dans le cas général de données m -dimensionnelles.

En regardant $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$ comme des réalisations particulières d'un vecteur aléatoire \vec{v} de moyenne nulle¹, les composantes principales sont définies comme des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$ dont les variances sont maximales.

Sous la contrainte $\left| \vec{v}_1 \right| = \vec{v}_1^T \vec{v}_1 = 1$, la première composante principale est définie par une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$:

$$\vec{y}_1 = (y_{1,1} \ y_{1,2} \ \dots \ y_{1,N})^T = \vec{v}_1^T \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_N \end{pmatrix} \quad (\text{A1.1})$$

afin que la variance :

$$\sigma_{y_1}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{1,i})^2 \quad (\text{A1.2})$$

soit maximale [MoS00].

En développant (A1.2) :

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{1,i})^2 \stackrel{(2.13)}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{v}_1^T \vec{u}_i)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{v}_1^T \vec{u}_i)(\vec{u}_i^T \vec{v}_1) = \\ &= \vec{v}_1^T \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{u}_i \vec{u}_i^T \right) \vec{v}_1 = \vec{v}_1^T M^* \vec{v}_1 \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

¹ Le cas général d'un champs vectoriel de moyenne non nulle peut se ramener à cette situation en utilisant l'approche de Donias [Don99].

En (A1.3) M^* représente la matrice de covariance de l'ensemble des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$:

$$M^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{u}_i \vec{u}_i^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i)_x^2 & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i)_x (u_i)_y \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i)_x (u_i)_y & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i)_y^2 \end{pmatrix} \quad (A1.4)$$

La maximisation de (A1.3) sous la contrainte $\left| \vec{v}_1 \right| = 1$ est réalisée en utilisant une approche fondée sur les multiplicateurs de Lagrange (λ), présentée au chapitre 1.

Le critère à maximiser est : $J(\vec{v}_1) = \vec{v}_1^T M^* \vec{v}_1$. Une condition nécessaire pour l'existence d'un maximum est $\frac{\partial J(\vec{v}_1)}{\partial \vec{v}_1} = 0$. Cette condition se réduit à :

$$M^* \vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_1 \quad (A1.5)$$

\vec{v}_1 est donc le vecteur propre de la matrice de covariance associé à la valeur propre λ .

Le maximum de $\vec{v}_1^T M^* \vec{v}_1 = \lambda$ s'obtient si λ est choisie comme la plus grande valeur propre.

La deuxième composante principale s'obtient de la même façon, en imposant la condition supplémentaire qu'elle soit non corrélée avec la première composante. Elle peut se développer de manière similaire à (A1.2) en prenant le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre.

En utilisant ces résultats, les variances des deux composantes propres s'expriment :

$$\sigma_{y1(2)}^2 = \vec{v}_{1(2)}^T M^* \vec{v}_{1(2)} = \lambda_{1(2)} \quad (A1.6)$$

Les directions des deux vecteurs propres définissent les directions principales du champ vectoriels [Don99].

Annexe 2

Résultats optimaux (PSNR et SNR) obtenus sur les 30 images de synthèse - Chapitre 3

Annexe 2 -Résultats optimaux (PSNR et SNR) obtenus sur les 30 images de synthèse - Chapitre 3

Tableau A2.1 Résultats optimaux – PSNR[dB]

image	PM	CAT	ALV	MCMm	DTv	RTv	EED	CED	HC	FC	FCL	1DId	1Din	1D/2D
Im1fa	25.3617	26.0983	25.6023	25.4226	25.4957	25.5825	26.8415	27.3994	25.9956	28.6634	28.8445	29.5764	30.4611	29.9738
Im2fa	21.6275	21.8516	21.4911	21.5107	21.8391	21.7891	22.5985	23.5905	22.2331	23.9613	23.569	23.8891	24.7432	25.0527
Im3fa	24.2511	24.7459	24.1758	24.2754	24.0119	24.3231	25.3348	25.9544	24.195	26.2327	26.2916	26.1522	25.8878	25.9169
Im4fa	23.6651	24.2461	23.5395	23.6426	23.4238	24.0751	24.6245	24.8516	23.9068	25.5993	25.3928	26.2523	26.7267	26.8825
Im5fa	24.4292	24.7928	24.262	24.3429	24.5249	24.1617	25.3592	24.8401	24.9784	25.7593	25.4453	26.6885	26.3235	26.4366
Im6fa	24.4584	24.6673	24.0778	24.2503	23.9899	24.1353	24.8403	24.5975	23.9038	25.0263	24.6538	25.6362	25.3846	25.5245
Im7fa	25.2881	25.2781	25.4647	24.9883	25.1812	24.7973	25.6112	26.6712	24.9775	27.1918	27.5866	28.063	27.8959	28.1027
Im8fa	24.2299	24.7989	23.7811	24.0026	23.8685	24.1351	25.1822	24.9483	24.4217	25.5847	24.8907	26.7167	26.3201	26.6528
Im9fa	26.1899	26.4262	25.7624	26.0372	25.4959	26.1064	26.7448	26.4805	25.877	27.3696	27.0548	27.6148	27.689	27.8596
Im10fa	23.8604	23.9401	23.864	23.3829	23.7602	23.2276	24.5031	24.4916	23.872	25.719	25.6664	26.0305	26.0956	26.4225
Im11fa	24.6417	25.1262	24.5987	24.5891	24.4161	24.6607	25.5478	25.6202	24.5492	26.3426	26.103	26.5366	27.0079	27.194
Im12fa	24.5689	24.9448	24.4504	24.4833	24.2499	24.7025	25.3708	25.568	24.4742	25.9373	25.5222	26.0993	26.4134	26.6165
Im13fa	22.0977	22.5382	21.5542	21.9716	21.9337	22.4813	23.1712	24.0755	22.3807	24.8624	24.5865	24.1488	25.0166	25.3188
Im14fa	26.2491	26.7077	26.0808	26.2082	26.1436	26.1465	27.0293	26.4372	26.2362	26.9348	26.9361	27.7419	27.4969	27.7637
Im15fa	25.5648	25.8635	25.0497	25.4146	25.1007	25.3743	25.8901	25.4734	25.2196	25.7428	25.5095	26.7398	25.7799	26.1457
Moyenne	24.43224	24.8017	24.2503	24.30149	24.22901	24.37989	25.2433	25.39995	24.4814	26.06181	25.87019	26.52574	26.61615	26.79088
Im1fo	23.12058	23.83946	23.362	23.29597	23.20833	22.99631	24.662	25.67996	23.1978	26.82621	26.9634	27.15972	27.81181	27.30151
Im2fo	18.1999	18.8928	18.25339	18.49131	18.53837	18.83146	19.48746	20.81219	18.4912	21.19285	21.16698	20.78542	21.86925	22.07795
Im3fo	22.04696	22.51184	22.05495	22.11204	21.68584	22.12816	23.27541	23.49707	21.6249	23.97254	24.24443	23.79454	23.66792	23.63712
Im4fo	21.05912	21.43659	20.92632	21.03132	20.54537	21.09762	21.95431	22.65379	20.6136	23.15798	23.16356	23.35407	23.77873	23.96328
Im5fo	21.66222	22.11371	21.48826	21.6345	21.63023	21.59309	22.70581	22.64653	21.5613	23.23814	23.25276	23.88942	23.48909	23.56116
Im6fo	21.56811	21.90788	21.339	21.41779	21.16098	21.43781	22.19151	22.50154	21.0075	22.78201	22.75901	22.7667	22.96749	22.97435
Im7fo	21.65172	21.84849	22.12172	21.67775	21.63235	21.49654	21.89273	23.74538	21.03	24.02237	24.42807	24.32391	24.50783	24.74932
Im8fo	21.51639	22.18173	21.29185	21.37541	21.15836	21.55857	22.82565	22.96993	21.4569	23.3488	22.937	23.82558	23.71625	23.98171
Im9fo	22.93013	23.29265	22.83613	22.89841	22.43588	23.02242	23.89563	23.9439	22.3836	24.46515	24.30819	24.31768	24.37791	24.40719
Im10fo	20.50428	20.95416	20.71766	20.48971	20.68956	20.30565	21.39066	22.2376	20.3416	22.79918	22.94494	23.01	23.35006	23.83832
Im11fo	22.2324	22.5998	22.27359	22.2668	21.8121	22.2267	23.0874	23.3992	21.59214	23.9798	23.9383	23.7493	24.2388	24.1302
Im12fo	23.0277	23.4541	22.99705	23.0284	22.7313	23.0575	24.0483	24.3268	22.7836	24.6058	24.5806	24.579	25.1103	25.2838
Im13fo	18.7808	19.1916	18.0374	18.6811	18.4135	18.9967	20.027	21.0839	18.591	21.5093	21.4642	20.8101	21.6688	21.9084
Im14fo	23.9377	24.4135	23.8335	23.9197	23.7631	23.9026	24.9	24.6496	23.7389	25.0269	25.18447	25.4692	25.4808	25.7894
Im15fo	22.7646	23.1547	22.4982	22.6289	22.3535	22.7894	23.5511	23.2455	22.3106	23.5412	23.6359	23.8211	23.1761	23.2738
Moyenne	21.6668	22.1195	21.6021	21.6633	21.4506	21.696	22.6597	23.1595	21.3816	23.6312	23.6648	23.7104	23.9474	24.0585

Annexe 2 -Résultats optimaux (PSNR et SNR) obtenus sur les 30 images de synthèse - Chapitre 3

Tableau A2.2 Résultats optimaux – SNR[dB]

image	PM	CAT	ALV	MCMm	DTv	RTv	EED	CED	HC	FC	FCL	1DId	1Din	1D/2D
Im1fa	12.8831	13.7352	13.3249	12.949	13.0412	13.2683	14.685756	15.4955	13.7996	16.6665	16.8517	17.3381	18.3422	18.0619
Im2fa	10.9271	11.2805	11.2037	10.8113	11.1073	11.0057	12.204135	13.3445	11.9795	13.7469	13.3506	13.6025	14.4552	14.9007
Im3fa	13.177	13.7862	13.0735	13.1845	12.9471	13.3173	14.652807	15.3712	13.4226	15.7108	15.7182	15.4996	15.2785	15.5485
Im4fa	11.747	12.4914	11.7939	11.9139	11.6099	12.2794	13.085127	13.534	12.4374	14.258	14.0478	14.7885	15.2262	15.583
Im5fa	13.5132	13.9904	13.6109	13.456	13.6158	13.3975	14.724623	14.3615	14.3404	15.2814	14.9501	16.1087	15.7936	16.0793
Im6fa	14.3512	14.6912	14.0532	14.174	13.9251	14.1187	15.006483	14.9974	14.0979	15.4347	15.0478	15.8185	15.76	16.0135
Im7fa	14.2653	14.3335	14.4738	13.9862	14.1341	13.8699	14.749396	15.9188	14.1991	16.582	16.8459	17.1615	17.0966	17.3923
Im8fa	13.1574	13.8874	12.9828	12.9789	12.8403	13.1482	14.527711	14.4252	13.6769	15.0047	14.2698	15.9465	15.625	16.0702
Im9fa	14.9328	15.2761	14.5383	14.7856	13.0408	14.908	15.823658	15.6674	14.8255	16.5424	16.2499	16.7136	16.8639	17.1402
Im10fa	13.4579	13.6399	13.587	13.0268	13.3517	12.9499	14.323363	14.5277	13.8007	15.7508	15.6726	15.9865	16.0583	16.551
Im11fa	12.9734	13.5426	12.9827	12.9786	12.7467	13.0059	14.13271	14.3389	13.09	15.0623	14.778	15.1476	15.6834	15.9822
Im12fa	13.06605	13.46711	12.94176	12.97664	12.69222	13.2275	14.137038	14.40845	13.1666	14.77957	14.3337	14.87072	15.1767	15.49143
Im13fa	11.87445	12.46878	11.76235	11.88139	11.81991	12.35945	13.427468	14.41796	12.6625	15.20736	14.9337	14.30162	15.2386	15.65833
Im14fa	14.2229	14.79062	14.07999	14.22799	14.13012	14.18228	15.277759	14.806	14.4525	15.29151	15.29117	15.94927	15.83808	16.17841
Im15fa	15.3475	15.7239	14.8557	15.2219	14.8941	15.2315	15.938551	15.6591	15.201	15.9315	15.6801	16.7679	15.9883	16.2587
Moyenne	13.32642	13.80698	13.28429	13.23685	13.05975	13.3513	14.446439	14.75157	13.67682	15.4167	15.20141	15.73341	15.89496	16.19397
Im1fo	10.4703	11.4075	10.7894	10.7156	10.6121	10.7272	12.540658	13.6724	10.9327	14.9295	15.029	14.9591	15.6957	15.5069
Im2fo	7.44901	8.06378	7.76831	7.57947	7.55605	7.93315	9.065953	10.4787	8.18901	10.8593	10.7855	10.3569	11.3893	12.1052
Im3fo	10.9941	11.5304	10.9125	11.0403	10.5127	11.0362	12.704938	12.9402	10.7712	13.4777	13.6877	13.1169	13.0532	13.4832
Im4fo	8.94554	9.55284	8.87071	9.01186	8.54517	9.2977	10.423466	11.2593	9.03947	11.7509	11.6634	11.8068	12.175	12.6876
Im5fo	10.5714	11.2039	10.5378	10.6454	10.5186	10.5524	12.102059	12.1092	10.8243	12.7278	12.6738	13.2287	12.8923	13.3289
Im6fo	11.1729	11.7315	11.0774	11.1192	10.8232	11.227	12.335748	12.7927	11.0086	13.1083	13.0122	12.9174	13.1915	13.4149
Im7fo	10.5011	10.8054	11.0264	10.6093	10.4565	10.4172	10.954843	12.9374	10.0592	13.2348	13.6127	13.3157	13.6386	14.0066
Im8fo	10.3074	11.1922	10.2073	10.2751	9.96749	10.4293	12.22194	12.4187	10.6397	12.7949	12.3012	13.1102	13.0034	13.4848
Im9fo	11.5661	12.0688	11.4927	11.5848	11.0291	11.7536	13.039819	13.1743	11.2065	13.7179	13.5039	13.4069	13.5927	13.7061
Im10fo	9.87521	10.5124	10.1871	9.91739	10.0436	9.92933	11.211409	12.1309	10.189	12.7281	12.8528	12.828	13.1723	13.8303
Im11fo	10.4633	10.99	10.5669	10.5206	10.0394	10.5429	11.764033	12.1317	10.087	12.6901	12.566	12.3153	12.8767	13.1017
Im12fo	11.4402	12.0086	11.43159	11.4583	11.1287	11.5287	12.969329	13.263	11.5318	13.5502	13.4739	13.4071	13.9458	14.3179
Im13fo	8.31713	8.98822	8.03397	8.33597	8.04934	8.79557	10.369208	11.3859	8.74095	11.8489	11.7419	10.8981	11.8532	12.4307
Im14fo	11.7517	12.3887	11.7201	11.7907	11.5491	11.7291	13.169938	12.9255	11.8333	13.2927	13.39908	13.6448	13.7198	14.114
Im15fo	12.4109	12.94	12.187	12.3144	11.9815	12.472	13.644811	13.4472	12.162	13.729	13.7664	13.9183	13.405	13.5329
Moyenne	10.4157	11.0256	10.4539	10.4612	10.1875	10.5581	11.9012101	12.4711	10.481	12.9627	12.938	12.882	13.1736	13.5368

Annexe 3

Paramètres optimaux pour les méthodes analysées au Chapitre 3

(base de données de 30 images)

Annexe 3 -Paramètres optimaux pour les méthodes analysées au Chapitre 3
(base de données de 30 images)

Tableau A3.1.a Paramètres optimaux (PSNR, SNR)- Méthodes PM, CAT, ALV, MCMm et DTv

image	PM				CAT						ALV						MCMm				DTv			
	n		K		n		σ		K		N		K_h		K_g		σ		n		α		N	
Im1fa	3	3	48	44	3	2	0.75	0.75	39	51	5	24	25	0	55	40	1.5	2.0	4	4	0.02	0.02	107	98
Im2fa	3	4	59	40	2	1	0.5	0.5	78	120	11	10	0	5	90	80	2.75	3.0	2	2	0.01	0.01	129	107
Im3fa	3	2	82	123	3	3	0.5	0.5	81	75	4	3	70	70	70	80	1.75	1.75	4	3	0.01	0.01	175	158
Im4fa	2	2	83	72	2	2	0.5	0.5	78	69	2	18	70	0	90	50	2.0	1.5	2	2	0.01	0.01	114	68
Im5fa	4	5	46	36	4	4	0.5	0.5	48	42	6	25	30	0	60	50	2.75	1.5	4	4	0.02	0.02	134	124
Im6fa	4	4	54	50	4	4	0.25	0.25	66	60	4	4	60	55	60	60	1.75	1.75	5	4	0.02	0.02	154	139
Im7fa	3	3	50	48	2	2	0.25	0.25	78	72	4	30	50	0	50	40	3.0	2.25	4	4	0.02	0.02	115	107
Im8fa	4	3	47	55	6	6	0.5	0.5	39	36	3	27	70	0	70	50	3.0	1.5	4	3	0.02	0.02	130	116
Im9fa	4	3	54	37	6	5	0.25	0.5	66	54	3	3	65	60	70	80	1.25	1.5	4	4	0.02	0.02	108	97
Im10fa	5	5	38	36	3	3	0.25	0.25	66	63	5	4	50	45	60	70	2.75	3.0	5	4	0.02	0.02	135	123
Im11fa	2	2	109	98	3	3	0.5	0.5	60	54	3	3	60	60	70	60	1.5	2.0	5	3	0.02	0.01	136	126
Im12fa	3	2	71	100	3	3	0.25	0.5	81	63	3	46	70	0	80	40	1.5	1.5	3	3	0.01	0.01	148	132
Im13fa	2	2	96	80	2	2	0.25	0.2	114	81	14	16	5	0	70	70	1.25	1.5	3	2	0.01	0.01	134	112
Im14fa	3	3	54	50	5	4	0.5	0.5	36	39	4	3	50	50	50	60	1.75	1.5	5	4	0.02	0.02	118	109
Im15fa	4	4	67	63	6	6	0.25	0.25	60	57	4	4	70	70	80	70	1.5	1.75	8	7	0.02	0.02	194	180
Im1fo	3	3	80	72	4	3	0.75	0.75	45	51	3	4	65	60	65	60	3.0	3.0	4	4	0.01	0.01	172	151
Im2fo	6	2	58	120	2	1	0.5	0.75	120	120	17	17	0	0	100	80	2.75	3.0	4	3	0.01	0.01	231	175
Im3fo	5	3	79	128	3	4	0.75	0.75	63	66	3	4	70	70	80	90	2.75	2.75	6	5	0.01	0.01	275	244
Im4fo	2	2	150	130	2	2	0.5	0.75	120	75	3	3	70	70	100	80	3.0	3.0	4	4	0.01	0.01	191	158
Im5fo	4	4	76	70	5	6	0.75	0.75	45	36	5	29	70	0	80	100	2.75	1.5	5	4	0.01	0.01	225	200
Im6fo	5	4	71	82	9	7	0.5	0.5	45	48	5	5	70	60	70	70	2.75	2.5	10	9	0.02	0.02	257	227
Im7fo	4	3	77	96	3	2	0.25	0.5	105	111	5	5	60	60	60	60	3.0	3.0	5	4	0.01	0.01	216	196
Im8fo	4	3	78	94	10	14	0.5	0.75	39	24	5	29	70	5	70	60	2.75	1.5	5	4	0.01	0.01	224	195
Im9fo	5	4	84	98	9	8	0.75	0.75	42	42	6	4	70	70	70	110	2.5	2.0	7	6	0.01	0.01	300	263
Im10fo	5	4	60	65	4	3	0.5	0.5	63	72	5	30	70	5	70	50	3.0	2.75	4	4	0.01	0.01	217	192
Im11fo	3	3	124	109	4	3	0.75	0.75	54	63	3	3	70	70	80	70	3.0	3.0	5	5	0.01	0.01	225	203
Im12fo	3	3	116	104	6	5	0.5	0.5	57	60	5	4	70	70	70	80	2.75	3.0	5	4	0.01	0.01	238	213
Im13fo	3	2	137	150	3	2	0.5	0.75	120	114	18	17	10	10	120	90	3.0	3.0	5	4	0.01	0.01	278	221
Im14fo	4	3	63	80	10	11	0.75	0.75	24	21	4	4	55	55	70	60	1.75	2.25	7	6	0.02	0.02	182	163
Im15fo	5	5	94	87	10	13	0.5	0.75	54	36	6	5	70	70	90	100	2.25	2.0	7	6	0.01	0.01	334	305

Annexe 3 -Paramètres optimaux pour les méthodes analysées au Chapitre 3
(base de données de 30 images)

Tableau A3.1.b Paramètres optimaux (PSNR, SNR) - Méthodes RTV, EED, CED et HC

Image	RTv		EED						CED						HC									
	N	λ	n	σ	K		N	σ	ρ		C	N	α	K										
Im1fa	1	1	10	10	4	5	0.75	0.75	10(m=1)	6 (m=1)	34	27	0.25	0.5	0.75	0.75	0.0	0.0	3	3	11	11	27	27
Im2fa	1	1	16	22	3	2	0.5	0.5	14 (m=1)	26(m=2)	67	30	1.25	1.25	2.5	2.25	0.5	0.5	3	3	11	10	36	36
Im3fa	2	2	11	13	7	9	0.75	0.75	10(m=1)	10 (m=2)	70	70	1.5	1.5	4.0	4.0	0.3	0.3	3	3	11	11	45	42
Im4fa	1	1	13	16	3	3	0.75	0.75	14(m=1)	10 (m=1)	12	12	0.25	0.5	1.0	0.75	0.0	0.0	3	3	11	11	30	27
Im5fa	1	1	12	13	3	3	0.5	0.5	26(m=2)	22(m=2)	13	11	0.5	0.5	1.25	1.25	0.0	0	3	3	11	11	36	33
Im6fa	4	3	16	18	3	3	0.5	0.5	30 (m=2)	28 (m=2)	17	16	0.5	0.5	1.25	1.25	0.0	0.0	3	3	9	10	54	42
Im7fa	1	1	14	16	2	2	0.5	0.5	26 (m=2)	24(m=2)	13	13	0.5	0.5	1.5	1.5	0.0	0.0	3	3	10	10	30	27
Im8fa	2	1	19	13	4	5	0.75	0.75	14 (m=1)	14 (m=2)	15	16	0.75	0.5	1.25	1.0	0.0	0.0	3	3	10	11	42	33
Im9fa	3	3	15	17	5	6	0.75	0.75	12(m=1)	10 (m=1)	20	18	0.25	0.25	1.25	1.25	0.0	0.0	2	2	7	7	36	33
Im10fa	1	1	12	14	3	2	0.5	0.5	26(m=2)	30 (m=2)	54	46	1.25	1.25	4.0	4.0	0.5	0.5	3	3	11	10	31	36
Im11fa	2	2	13	15	4	5	0.75	0.75	12 (m=1)	8 (m=1)	18	17	0.25	0.25	1.25	1.25	0.0	0.0	3	3	10	9	37	32
Im12fa	2	2	10	11	5	6	0.75	0.75	10 (m=1)	12(m=2)	19	17	0.5	0.5	1.0	1.0	0.0	0.0	2	3	6	9	39	45
Im13fa	1	1	14	17	4	5	0.75	0.75	12 (m=1)	12 (m=2)	21	19	1.25	1.25	2.25	2.25	0.2	0.2	3	2	12	11	36	34
Im14fa	3	2	19	17	4	4	0.5	0.75	14 (m=1)	10 (m=1)	15	16	0.5	0.5	1.75	1.25	0.0	0.0	3	3	10	10	36	33
Im15fa	3	3	14	16	5	6	0.5	0.75	20 (m=1)	12 (m=1)	21	20	0.5	0.5	1.5	1.5	0.0	0.0	3	3	10	10	60	54
Im1fo	3	2	19	12	15	12	0.75	0.75	4(m=1)	4 (m=1)	60	54	0.5	0.5	0.75	0.75	0.0	0.0	3	3	12	12	36	30
Im2fo	1	1	8	11	4	4	0.75	0.75	14 (m=1)	16(m=2)	31	16	1.0	0.5	2.25	1.25	0.1	0.0	3	3	14	13	39	36
Im3fo	3	2	8	7	18	17	0.75	1.0	6 (m=1)	8 (m=2)	51	44	0.5	0.5	1.5	1.0	0.0	0.0	2	3	10	12	33	51
Im4fo	1	1	8	10	6	7	0.75	0.75	10 (m=1)	12 (m=2)	32	26	0.5	0.5	0.75	0.75	0.0	0.0	2	3	8	13	27	33
Im5fo	2	2	10	13	8	9	0.75	0.75	10 (m=1)	12 (m=2)	31	23	0.5	0.75	1.25	1.25	0.0	0.0	3	3	12	13	45	36
Im6fo	2	3	9	10	9	12	0.75	0.75	12(m=1)	12(m=2)	41	30	0.5	0.75	1.25	1.5	0.0	0.0	3	3	12	12	54	48
Im7fo	3	2	16	13	3	3	0.5	0.5	26 (m=1)	22 (m=1)	27	24	0.5	0.5	2.0	2.0	0.0	0.0	2	2	8	8	36	27
Im8fo	3	2	12	11	10	11	0.75	0.75	10 (m=1)	12 (m=2)	34	29	0.75	0.75	1.25	1.25	0.0	0.0	3	3	13	12	45	42
Im9fo	4	3	9	8	17	25	0.75	0.75	8(m=1)	8(m=2)	68	61	0.5	0.5	1.0	1.0	0.0	0.0	2	2	9	9	45	36
Im10fo	2	1	12	7	4	5	0.5	0.75	28(m=2)	14(m=2)	24	31	0.5	0.5	1.5	1.5	0.0	0.0	3	3	12	12	42	36
Im11fo	3	2	11	9	13	14	0.75	0.75	10 (m=2)	10 (m=4)	32	31	0.75	0.75	1.75	1.25	0.0	0.0	2	2	9	9	27	24
Im12fo	3	2	12	10	12	14	0.75	0.75	8 (m=1)	10 (m=2)	38	33	0.5	0.5	1.25	1.25	0.0	0.0	3	3	12	12	51	45
Im13fo	2	1	10	8	9	10	0.75	0.75	10 (m=1)	16(m=4)	61	34	1.25	1.25	2.5	2.25	0.1	0.1	2	3	10	13	30	45
Im14fo	3	3	12	13	9	11	0.75	1.0	10 (m=2)	8(m=2)	35	31	0.5	0.5	1.25	1.25	0.0	0.0	3	3	12	12	39	33
Im15fo	5	4	9	10	14	20	1.0	1.0	10(m=1)	10 (m=2)	60	59	0.5	0.5	1.25	1.0	0.0	0.0	3	3	12	12	72	63

Annexe 3 -Paramètres optimaux pour les méthodes analysées au Chapitre 3
(base de données de 30 images)

Tableau A3.1.c Paramètres optimaux (PSNR, SNR) - Méthodes FC, FCL, 1DId, 1Din

Image	FC								FCL						1DId						1Din					
	N		ρ		σ		γ		N		τ		γ		N		σ		β		n		σ		β	
Im1fa	48	45	1.25	1.25	1.25	1.25	8	8	59	57	0.95	0.95	26	26	19	19	0.5	0.5	0.95	0.95	55	52	0.5	0.5	0.85	0.85
Im2fa	16	13	0.75	0.75	0.75	0.75	7	7	12	10	0.95	0.95	18	18	9	10	0.75	0.75	0.45	0.35	9	8	0.5	0.5	0.65	0.65
Im3fa	49	45	1.0	1.0	1.25	1.25	10	10	43	41	0.95	0.95	12	14	49	44	0.75	0.75	0.65	0.65	56	51	0.75	0.75	0.55	0.55
Im4fa	21	19	1.0	1.0	1.25	1.25	7	7	28	24	0.95	0.95	30	30	22	28	0.5	0.75	0.6	0.4	15	14	0.5	0.5	0.65	0.65
Im5fa	35	32	1.0	1.0	1.25	1.25	10	10	23	23	0.95	0.95	10	12	37	33	0.5	0.5	0.75	0.75	42	37	0.5	0.5	0.7	0.7
Im6fa	28	25	0.75	0.75	1.25	1.25	7	7	22	21	0.95	0.95	14	16	15	12	0.5	0.5	0.9	0.9	37	28	0.5	0.5	0.7	0.75
Im7fa	18	17	0.75	0.75	1.75	1.75	6	6	26	25	0.95	0.95	30	30	12	14	0.5	0.5	0.95	0.9	31	27	0.5	0.5	0.8	0.8
Im8fa	27	24	1.25	1.25	1.25	1.25	7	7	16	14	0.95	0.95	6	6	20	19	0.5	0.5	0.7	0.7	23	18	0.5	0.5	0.6	0.65
Im9fa	40	45	1.0	1.0	1.25	1.25	7	7	37	34	0.95	0.95	14	14	21	56	0.5	0.75	0.85	0.5	32	32	0.5	0.5	0.75	0.75
Im10fa	24	22	1.0	1.0	1.25	1.25	8	8	31	27	0.95	0.95	30	30	34	38	0.75	0.75	0.65	0.6	37	34	0.5	0.5	0.75	0.75
Im11fa	43	39	1.0	1.0	1.25	1.25	7	7	33	29	0.95	0.95	12	12	22	22	0.75	0.75	0.7	0.7	33	30	0.5	0.5	0.8	0.8
Im12fa	29	26	1.0	1.0	1.25	1.25	5	5	20	18	0.95	0.95	8	8	25	34	0.75	0.75	0.6	0.5	26	24	0.5	0.5	0.75	0.75
Im13fa	21	19	0.75	0.75	0.75	0.75	10	10	17	15	0.95	0.95	30	30	11	11	0.75	0.75	0.55	0.5	16	13	0.5	0.5	0.55	0.6
Im14fa	27	25	1.0	1.0	2.25	2.25	5	5	29	26	0.95	0.95	8	8	15	29	0.5	0.75	0.9	0.6	20	19	0.5	0.5	0.85	0.85
Im15fa	40	38	0.75	0.75	1.75	1.75	6	6	34	30	0.95	0.95	6	6	20	18	0.5	0.5	0.9	0.9	31	27	0.5	0.5	0.75	0.75
Im1fo	88	81	1.25	1.25	1.75	1.75	10	10	60	60	0.95	0.95	10	12	35	30	0.75	0.75	0.85	0.85	65	50	0.75	0.75	0.75	0.75
Im2fo	31	24	0.75	0.75	1.0	1.0	6	6	28	22	0.95	0.95	10	12	14	15	0.75	0.75	0.5	0.4	15	12	0.75	0.5	0.6	0.75
Im3fo	66	70	1.0	1.0	1.5	1.25	6	6	60	60	0.95	0.45	6	60	57	57	0.75	1.0	0.7	0.6	68	58	0.75	0.75	0.65	0.65
Im4fo	47	40	0.75	1.25	1.0	1.75	5	5	48	38	0.95	0.95	14	14	40	45	0.75	0.75	0.45	0.4	22	18	0.75	0.75	0.6	0.6
Im5fo	50	43	1.25	1.25	1.75	1.75	6	6	48	39	0.95	0.95	6	12	56	47	0.75	0.75	0.65	0.65	53	44	0.75	0.75	0.65	0.65
Im6fo	58	51	1.0	1.0	1.25	1.25	6	6	46	39	0.95	0.95	6	6	34	52	0.75	0.75	0.7	0.75	56	48	0.75	0.75	0.65	0.65
Im7fo	36	33	0.75	0.75	1.75	1.75	5	5	42	37	0.95	0.95	8	8	17	20	0.5	0.5	0.95	0.9	45	41	0.5	0.5	0.85	0.85
Im8fo	57	50	1.25	1.25	1.25	1.25	6	6	37	31	0.95	0.95	4	4	37	39	0.75	0.75	0.55	0.5	29	24	0.75	0.75	0.6	0.6
Im9fo	85	81	1.25	1.25	1.75	1.75	5	5	60	60	0.95	0.95	4	4	56	59	0.75	0.75	0.65	0.6	70	64	0.75	1.0	0.6	0.5
Im10fo	37	34	0.75	1.0	1.25	1.25	6	6	49	43	0.95	0.95	24	24	41	44	0.75	0.75	0.65	0.6	48	41	0.75	0.75	0.7	0.7
Im11fo	61	54	1.0	1.0	1.25	1.25	4	4	53	44	0.95	0.95	6	6	25	31	0.75	0.75	0.75	0.65	53	51	0.75	1.0	0.65	0.5
Im12fo	60	57	1.0	1.0	1.25	1.25	5	5	44	37	0.95	0.95	6	6	39	53	0.75	0.75	0.6	0.5	62	54	0.75	0.75	0.55	0.55
Im13fo	44	36	1.0	1.0	1.25	1.25	7	7	42	34	0.95	0.95	12	14	18	23	0.75	0.75	0.6	0.45	24	20	0.75	0.75	0.55	0.55
Im14fo	45	40	0.75	1.0	2.25	1.75	4	4	49	42	0.95	0.95	4	4	43	57	0.75	0.75	0.65	0.55	41	35	0.5	0.5	0.8	0.8
Im15fo	84	78	0.75	0.75	1.75	1.75	4	4	60	60	0.15	0.95	2	2	58	51	0.75	0.75	0.65	0.65	57	59	1.0	1.0	0.55	0.5

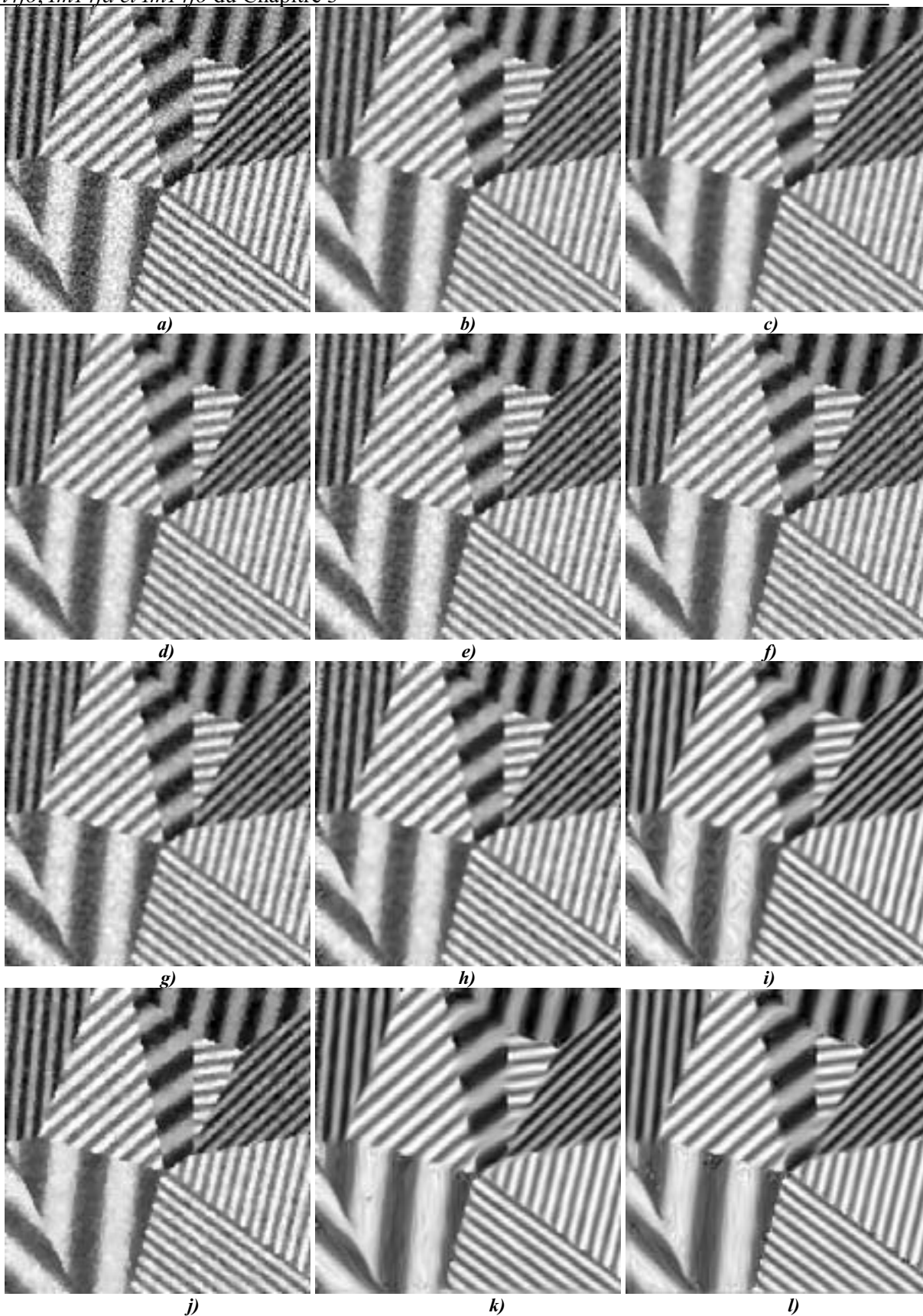
Annexe 3 -Paramètres optimaux pour les méthodes analysées au Chapitre 3
(base de données de 30 images)

Tableau A3.1.d paramètres optimaux (PSNR, SNR) - Méthode 1D/2D

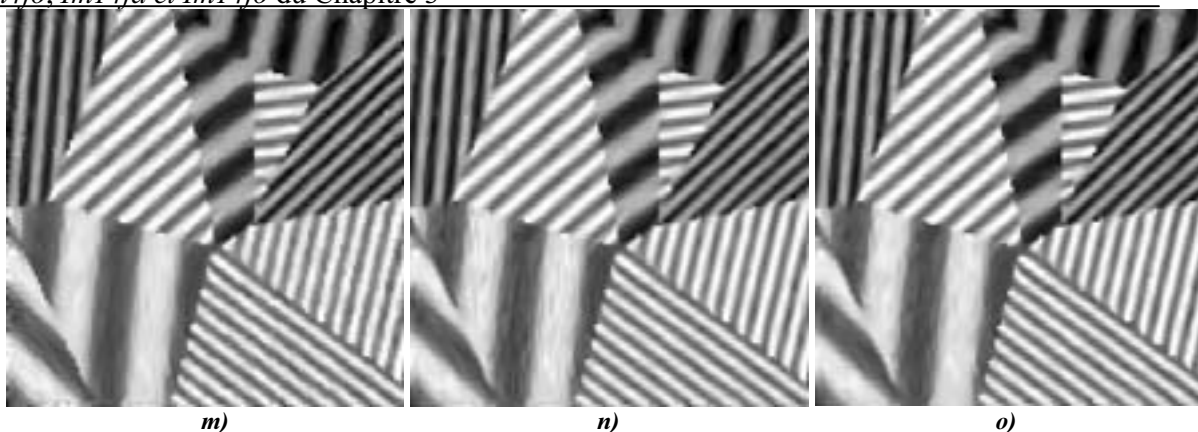
Image	1D/2D					
	N		σ		β	
Im1fa	72	70	0.5	0.5	0.85	0.85
Im2fa	15	14	0.5	0.5	0.65	0.65
Im3fa	23	52	0.5	0.75	0.85	0.6
Im4fa	15	15	0.5	0.5	0.65	0.65
Im5fa	32	31	0.5	0.5	0.75	0.75
Im6fa	24	23	0.5	0.5	0.8	0.8
Im7fa	31	30	0.5	0.5	0.8	0.8
Im8fa	21	20	0.5	0.5	0.65	0.65
Im9fa	26	31	0.5	0.5	0.8	0.75
Im10fa	41	39	0.5	0.5	0.75	0.75
Im11fa	34	33	0.5	0.5	0.8	0.8
Im12fa	26	31	0.5	0.75	0.75	0.6
Im13fa	15	14	0.5	0.5	0.6	0.6
Im14fa	16	15	0.5	0.5	0.9	0.9
Im15fa	15	17	0.25	0.5	0.95	0.85
Im1fo	85	85	0.5	0.5	0.85	0.85
Im2fo	24	22	0.5	0.75	0.75	0.6
Im3fo	52	66	0.5	0.75	0.8	0.7
Im4fo	24	25	0.5	0.5	0.7	0.6
Im5fo	34	56	0.5	0.75	0.85	0.7
Im6fo	39	48	0.5	0.75	0.85	0.7
Im7fo	56	52	0.5	0.5	0.8	0.8
Im8fo	21	24	0.5	0.75	0.85	0.7
Im9fo	35	32	0.5	0.5	0.9	0.9
Im10fo	42	50	0.5	0.75	0.85	0.8
Im11fo	43	60	0.5	0.75	0.85	0.7
Im12fo	41	38	0.5	0.5	0.8	0.8
Im13fo	25	25	0.5	0.5	0.75	0.75
Im14fo	27	30	0.5	0.5	0.9	0.85
Im15fo	8	28	0.75	0.5	0.95	0.9

Annexe 4

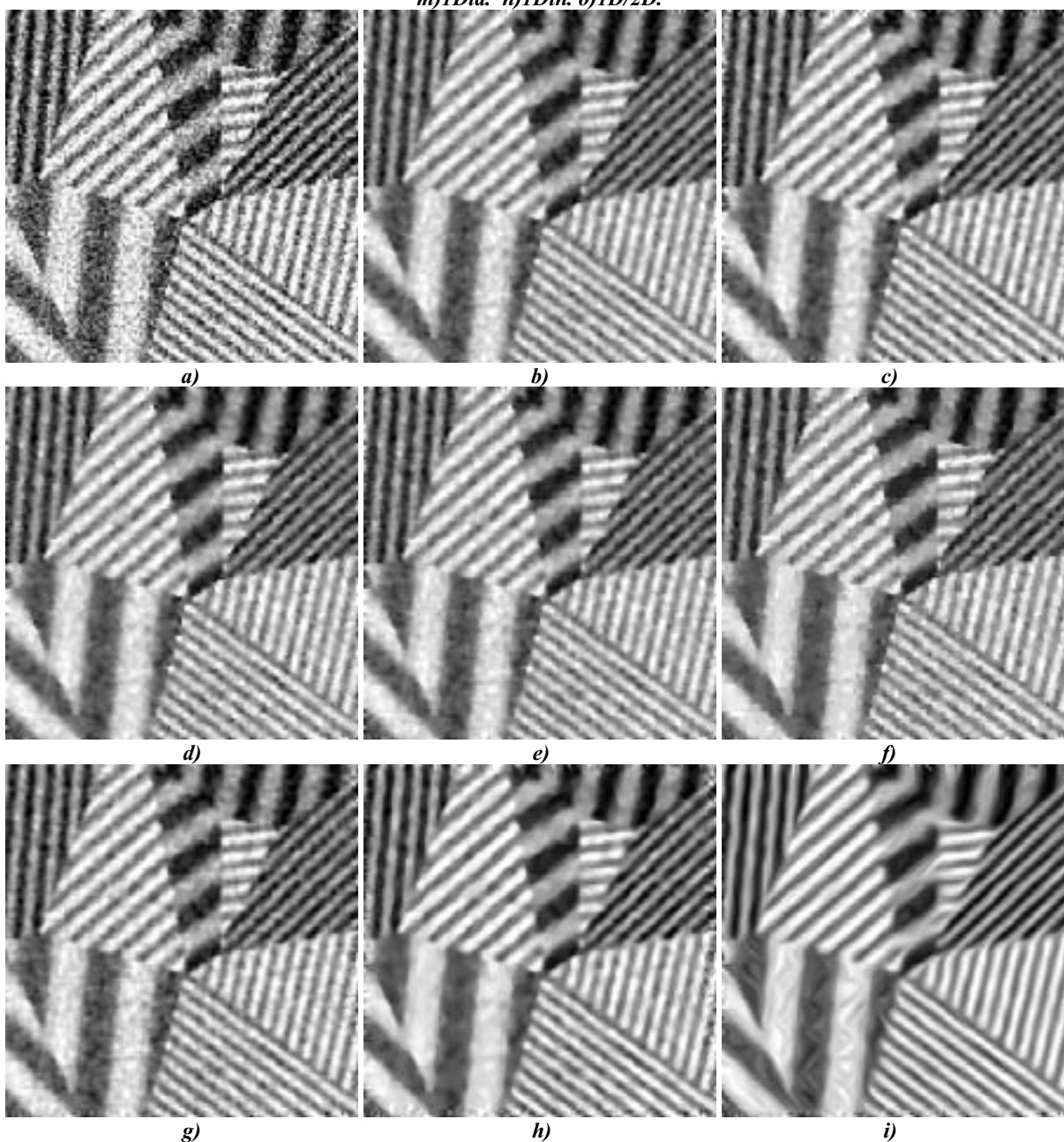
Résultats visuels optimaux obtenus par les 14 méthodes analysées sur les images *Im4fa*, *Im4fo*, *Im14fa* et *Im14fo* du Chapitre 3



*Fig.A4.1 -Résultats obtenus par les diverses approches sur Im4fa de la base des données du Chapitre 3-
a)Image originale. b) PM. c) CAT d) ALV. e)MCMm. f) DTv.
g)RTv. h) EED. i) CED. j) HC. k) FC. l)FCL.*



*Fig.A4.1 (cont.) - Résultats obtenus par les diverses approches sur *Im4fa* de la base des données du Chapitre 3- m)1DId. n)1Din. o)1D/2D.*



*Fig.A4.2- Résultats obtenus par les diverses approches sur *Im4fo* de la base des données du Chapitre 3- a)Image originale. b)PM. c) CAT d) ALV e)MCMm. f) DTv. g)RTv. h) EED. i) CED.*

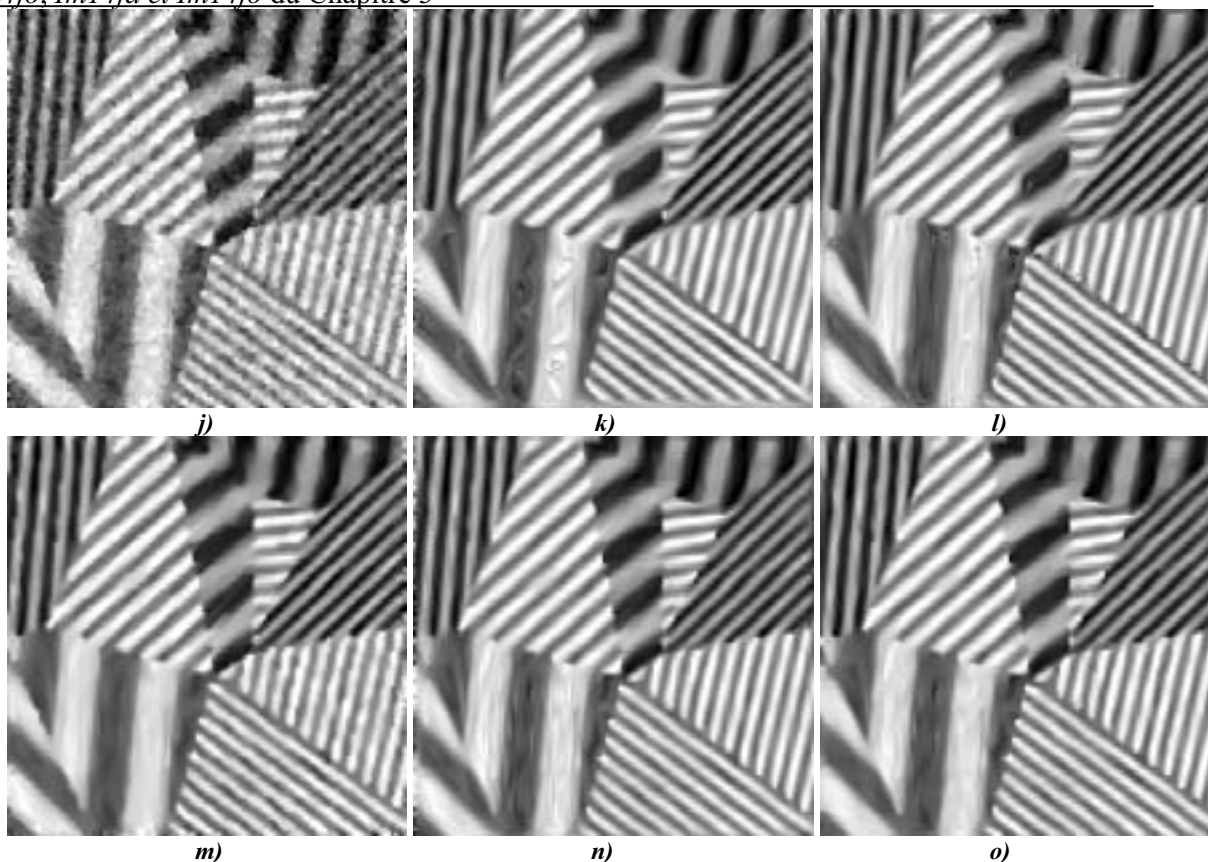


Fig.A4.2(cont.)- Résultats obtenus par les diverses approches sur Im4fo de la base des données du Chapitre 3- j)HC. k)FC. l)FCL. m)1DId. n)1Din. o)1D/2D.

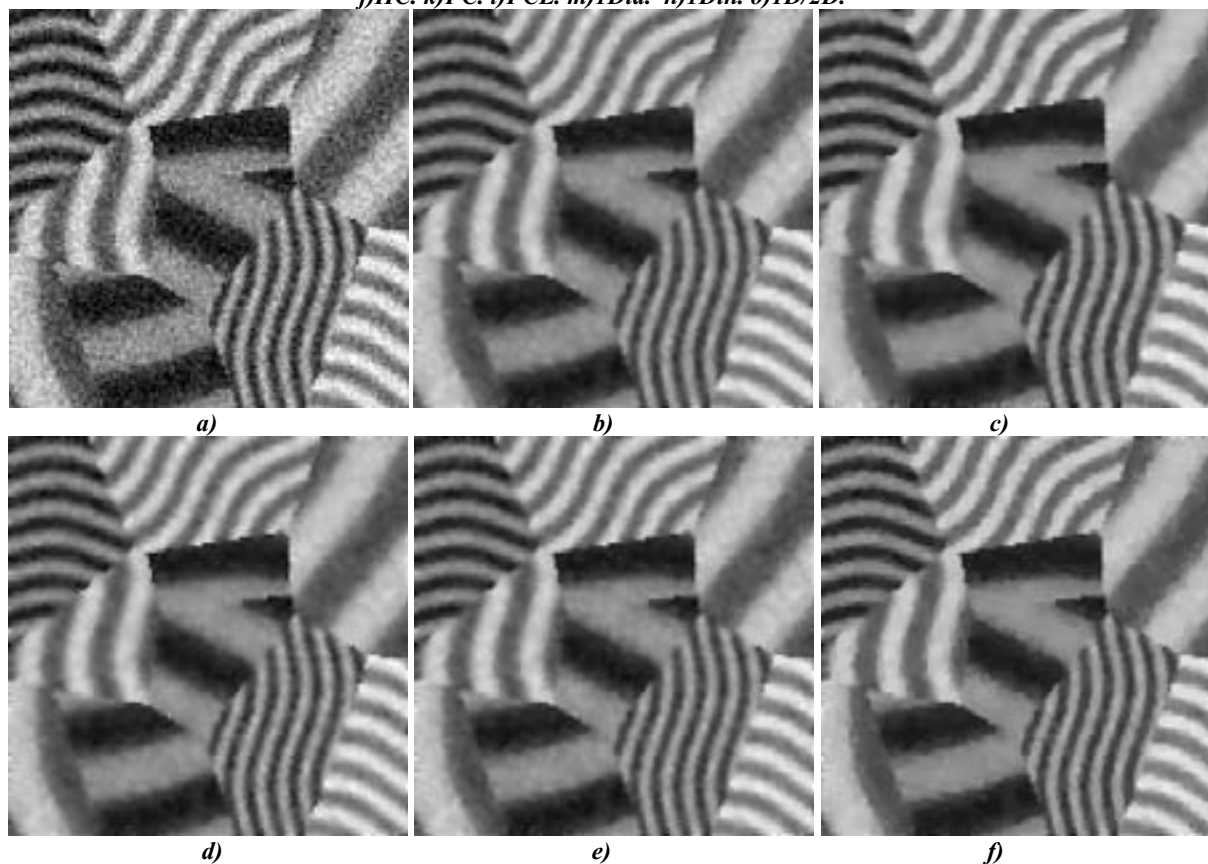


Fig.A4.3- Résultats obtenus par les diverses approches sur Im14fa de la base des données du Chapitre 3- a)Image originale. b) PM. c) CAT. d)ALV. e)MCMm. f)DTv.

Annexe 4 - Résultats visuels optimaux obtenus par les 14 méthodes analysées sur les images *Im4fa*, *Im4fo*, *Im14fa* et *Im14fo* du Chapitre 3



Fig.A4.3(cont.)- Résultats obtenus par les diverses approches sur Im14fa de la base des données du Chapitre 3- g)RTv. h)EED. i)CED. j)HC. k)FC. l) FCL. m)1Did. n)1Din. o)1D/2D.

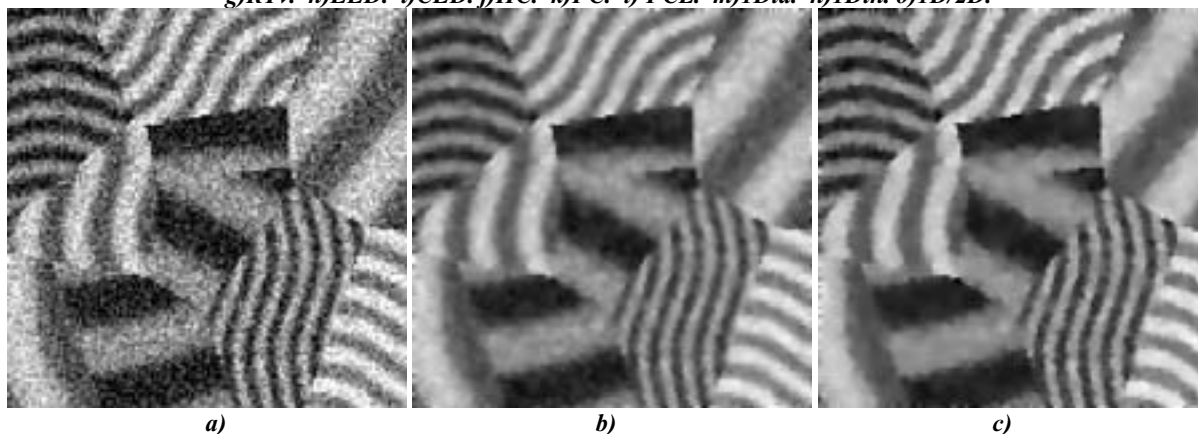
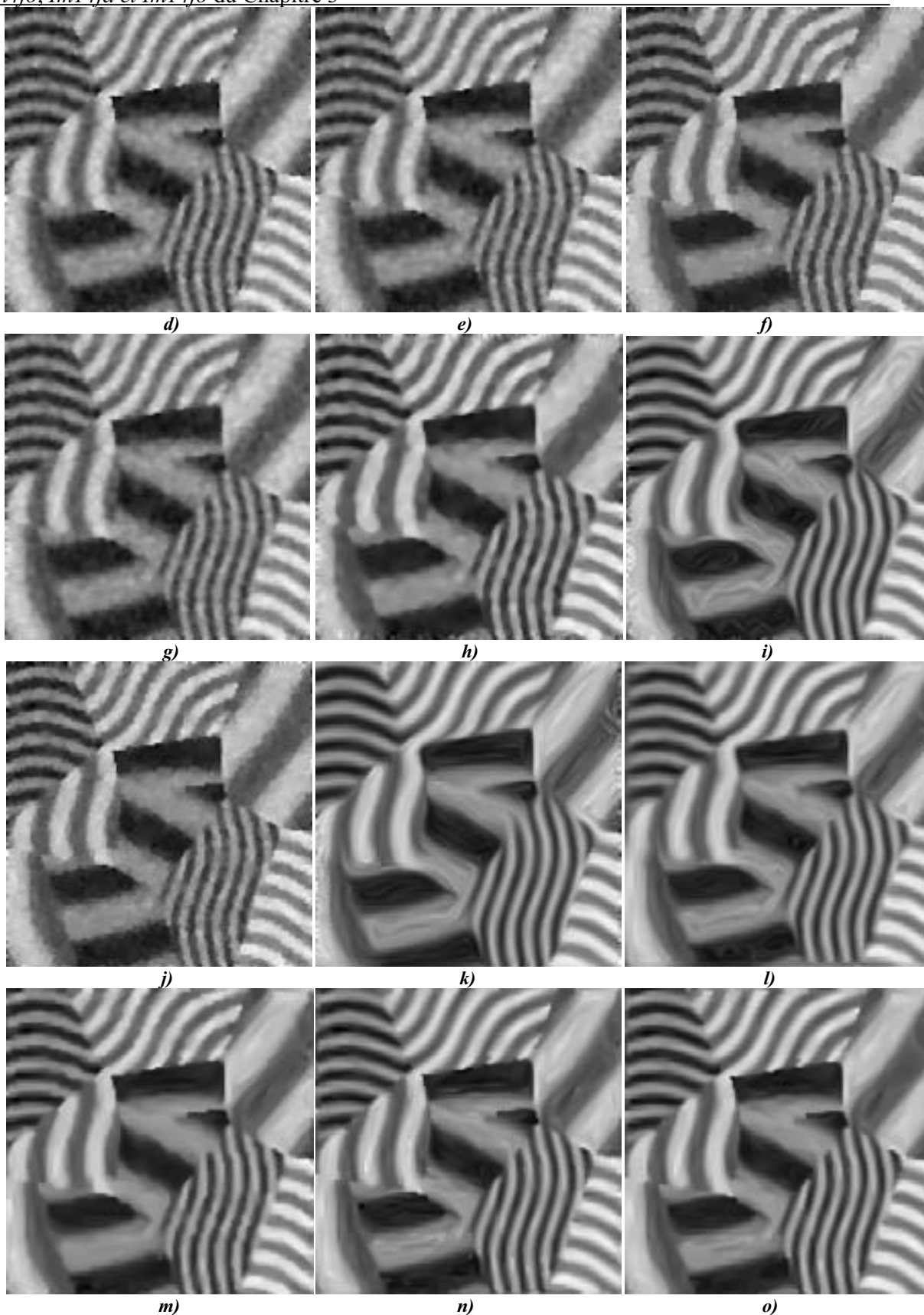


Fig.A4.4 - Résultats obtenus par les diverses approches sur Im14fo de la base des données du Chapitre 3- a)Image originale. b)PM. c)CAT.



*Fig.A4.4(cont.) - Résultats obtenus par les diverses approches sur Im14fo de la base des données du Chapitre 3-
d) ALV. e)MCMm. f)DTv. g) RTv. h)EED. i)CED. j) HC. k) FC. l)FCL.
m)IDid. n) IDin. o)ID/2D.*

Annexe 5

Rappels théoriques sur l'Analyse de Variances (ANOVA) et le test de comparaisons multiples de Student-Newman-Keuls (SNK)

A5.1 ANOVA

Même si l'ANOVA est une technique classique bien connue, ses principes sont rappelés dans cette annexe pour une plus grande clarté de l'exposé.

Considérons les données des *Tableaux A2.1* et *A2.2* de l'annexe 2 en les dissociant selon la variable analysée et le type de bruit : PSNR- bruit faible, PSNR- bruit fort, SNR- bruit faible et SNR- bruit fort. Nous disposons d'un certain nombre de mesures dont les différences sont potentiellement explicables par deux facteurs : le facteur méthode (*traitement*- dans le langage des statisticiens) et le facteur image (*bloc*). L'organisation des données correspond à un dispositif de type *bloc randomisé* [HeH93] ; l'avantage d'un tel dispositif est de permettre d'étudier les éventuelles différences dues aux méthodes, tout en tenant compte de l'effet bloc (l'effet image dans notre cas) qui est susceptible de masquer le premier s'il n'est pas pris en compte.

Soit b le nombre des blocs, p le nombre des traitements, et μ_i la performance théorique moyenne obtenue par l'utilisation de la méthode i sur un nombre infini d'images pour une variable Y donnée (le PSNR ou le SNR dans notre cas). La réponse à la question concernant l'effet significatif des méthodes est obtenue en testant deux hypothèses :

H_0 - il n'y a pas de différences entre les traitements i.e. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_p$

H_1 - au moins deux traitements sont différents i.e. $\exists i, k, i \neq k$ tel que : $\mu_i \neq \mu_k$

En se fondant sur un modèle linéaire additif, l'idée fondamentale de l'ANOVA est d'expliquer les variations entre les valeurs y_{ij} mesurées sur l'image j en utilisant la méthode i et la performance moyenne générale des valeurs \bar{y} par l'addition des déviations dues au facteur traitement, aux blocs et aux variations résiduelles (par définition, variation non expliquées) :

$$(y_{ij} - \bar{y}) = (\bar{y}_i - \bar{y}) + (\bar{y}_j - \bar{y}) + e_{ij} \quad (A5.1)$$

où \bar{y}_i est la moyenne de performance de la méthode i (estimation de μ_i) et \bar{y}_j la moyenne obtenue sur l'image j . e_{ij} est la partie inexpliquée du résultat, appelée « résidu ».

L'influence des différentes sources de variation est mesurée par la somme des carrés des écarts mesurée sur l'ensemble des observations :

$$SCT = \sum_{i,j} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad (A5.2)$$

$$SCB = \sum_{i,j} (\bar{y}_j - \bar{y})^2 \quad (A5.3)$$

La Somme des Carrés des Ecarts Totale se décompose par la suite par :

$$SCTotale = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (y_{ij} - \bar{y})^2 = SCT + SCB + SCR \quad (A5.4)$$

où SCR est la somme des carrés des écarts résiduelle due aux fluctuations inexplicables.

Les *Carrés Moyens*, estimateurs des variances associées aux différents effets, sont obtenus en divisant les SCE par le nombre des valeurs indépendantes utilisées pour les calculer (*degrés de liberté - ddl*) :

$$\begin{cases} CMT = \frac{SCT}{(p-1)} \\ CMR = \frac{SCR}{(p-1)(b-1)} \end{cases} \quad (A5.5)$$

Sous l'hypothèse H_0 d'absence « d'effet méthode » la variance due aux méthodes et la variance résiduelle sont deux estimations différentes de la même variabilité d'où :

$E\left(\frac{CMT}{CMR}\right) = 1$. Par contre, dans le cas d'un effet, la variance liée aux traitements est significativement plus importante..

Sous H_0 le rapport des deux variances :

$$f_{obs} = \frac{CMT}{CMR} \quad (A5.6)$$

suit une distribution de Fisher-Snédecor à $(p-1)$ et $(p-1)(b-1)$ degrés de liberté (*ddl*). L'hypothèse H_0 sera rejetée et l'effet méthode mis en évidence lorsque le rapport sera très supérieur à 1. La limite de décision est donné en se fixant un *niveau de signification* α (typiquement $\alpha=0.05$) qui quantifie le risque de rejeter l'hypothèse H_0 lorsqu'elle est vraie.

Dans la pratique, la probabilité associée au test est : $p=P[F > f_{obs}]$ où F est la loi de Fischer-Snédecor à $(p-1 ; (p-1)(b-1))$ ddl. L'effet est jugé significatif dès que $p < \alpha$.

A5.2 Conditions d'utilisation de l'ANOVA. Transformation en rang

L'utilisation de l'ANOVA réclame la vérification d'un certain nombre d'hypothèses. En particulier, l'estimation d'une variance résiduelle commune à l'ensemble de l'expérimentation n'est valide que si les variabilités de résultats au sein des méthodes et des images sont similaires. Or, dans notre cas, indépendamment du type de bruit considéré ou de la mesure, les variances observées sur chaque bloc (image) ne sont pas homogènes. Certaines images conduisent à une variabilité de résultats beaucoup plus importante que d'autres. Sans doute cet écart de variabilité peut il être mis sur le compte de la difficulté du travail de filtrage et dépend donc de la complexité plus ou moins grande des images à traiter.

Par suite, nous proposons l'utilisation d'une ANOVA sur les rangs. Au lieu d'utiliser les valeurs numériques présentées aux *Tableaux A2.1* et *A2.2*, nous rangeons par ordre croissant les performances sur l'ensemble du tableau.

Cette approche est mentionnée en [CoI81] comme une alternative non paramétrique puissante d'une ANOVA, utilisée en particulier lorsque les données ne remplissent pas les conditions de normalité ou d'homogénéité des variances. Le test SNK n'est pas modifié, il opère sur les résultats de cette approche non paramétrique.

A5.3 Le test de comparaisons multiples Student Newman Keuls

Lorsque le test global de l'ANOVA nous pousse à rejeter l'hypothèse H_0 , donc si des différences entre les traitements sont mises en évidence, la méthode est incapable d'indiquer spécifiquement quels traitements sont différents des autres. Dans ce cas, des tests de *comparaisons multiples* sont préconisés. En utilisant les résultats de l'ANOVA l'idée fondamentale de ces tests est de comparer chaque paire de moyennes.

Le test que nous avons utilisé dans ce mémoire est le test de *Student-Newman-Keuls*. Le résultat de ce test est, classiquement, un rangement des différentes moyennes en groupes homogènes.

Le test est fondé sur un calcul itératif. La première étape consiste à comparer l'ensemble des p méthodes : l'amplitude existante entre la première et la dernière moyenne est comparée à la Plus Petite Amplitude Significative (PPAS) susceptible de permettre la mise en évidence de différences au sein du groupe. Si la PPAS est dépassée par l'Amplitude observée au sein du groupe, le processus est réitéré avec des groupes de $p-1$ moyennes ($1^{\text{ère}} - p-1^{\text{ème}}$ et $2^{\text{ème}} - p^{\text{ème}}$). Le test se poursuit tant que des différences sont mises en évidence. A chaque étape et pour un groupe de l moyennes, la PPAS est :

$$PPAS_l = q_{(\alpha, (p-1)(b-1), l)} \cdot \sqrt{\frac{CMR}{b}} \quad (A5.7)$$

où $q_{(\dots)}$ est un seuil proposé par les auteurs du test et qui tient compte du nombre de ddl associés à l'estimation du CMR, du risque α choisi, ainsi que du nombre de moyennes comparées.

Finalement, le résultat du test se présente assez classiquement et permet de répartir les traitements en groupes homogènes représentés par des lettres (a, b, ...). Deux méthodes n'appartenant pas au même groupe (i.e. n'ayant pas de lettre en commun) sont jugées significativement différentes. C'est de cette manière que les résultats du chapitre 3 sont présentés.

Bibliographie

[Act98] S. Acton – “ Multigrid anisotropic diffusion”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp.280-291, 1998.

[Act00] S. Acton – “ Diffusion based edge detectors”, *Handbook of Image and Video Processing* (Ed. A. Bovik), Academic-Press,2000.

[AGLM93] L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions, J.M.Morel –“ Axioms and fundamental equations of image processing”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol..123, pp. 199-257, 1993.

[ALM92] L. Alvarez, P. L. Lions, J. M. Morel – “Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.29, no.3, pp. 845-866, 1992.

[ALM94] L. Alvarez, L. Mazorra – “Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.31, no.2, pp. 590-605, 1994.

[ASS02] I. Avcibas, B. Sankur, K. Sayood – “ Statistical evaluation of image quality measures”, *Journal of Electronic Imaging*, vol.11 no.2, pp.206-223,2002.

[BGW91] J. Bigün, G. H. Granlung, J.Wiklund – “Multidimensional orientation estimation with applications to texture analysis and optical flow”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.13, no. 8, pp.775-790,1991.

[BIC98] P. Blomgren, T. Chan –“Color TV: Total Variation Methods for restoration of vector valued images”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp. 304-309, 1998.

[BSMH97] M. Black, G. Sapiro, D. Marimont, D. Heeger – “ Robust anisotropic diffusion and sharpening of scalar and vector images”, *In: Proceedings of the International Conference on Image Processing- ICIP'97*, Santa –Barbara, California, vol. 3, pp. 263-266, 1997.

[BSMH98] M. Black, G. Sapiro, D. Marimont, D. Heeger – “Robust anisotropic diffusion”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp. 421-432, 1998.

[Bra96] G. Brandt – *Linear algebra and its applications*, Harcourt College Publishers, 1996.

[CABB94] P. Charbonnier, G. Aubert, M. Blanc-Ferraud, M. Barlaud – “Two deterministic half quadratic regularization algorithms for computed imaging”, *In:*

Proceedings IEEE International Conference on Image Processing- ICIP'94, Austin, Texas, vol.2, pp.168-172,1994.

[Can83] J. F. Canny – *Finding edges and lines in images*, Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1983.

[Can86] J.F. Canny – “A computational approach to edge detection”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.8, no. 6, pp. 679-698, 1986.

[Can1740] Canaletto – “*View in Venice*”, National Gallery of art, Washington DC, 1740.

[CFL67] R. Courant, K.O. Friderichs, H. Lewy – “On the partial differential equations of mathematical physics”, *IBM Journal*, vol.11, pp.215-234, 1967.

[CIL92] M. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions – “User guide to viscosity solutions of second order partial differential equations”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol.27, no.1, pp.1-67, 1992.

[CKS95-97] V. Casseles, R. Kimmel, G. Sapiro – “Geodesic active contours”, *In: Proceedings of the International Conference on Vision'95*, 1995; une version plus complète a apparu en *International Journal of Computer Vision*, vol.22, pp.61-79, 1997.

[CKS00] T.F. Chan, S.H. Kang, J. Shen – “Total variation denoising and enhancement of color images based on the cb and hsv color models”, *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol.12, no.4, 2000.

[CLMC92] F. Catte, P.L Lions, J.M. Morel, T Coll – “Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion I”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.29, no.1, pp. 182-193, 1992.

[CMST98] V. Caselles, J. M. Morel, G. Sapiro, A. Tannenbaum – “Introduction to the special issue on partial differential equations and geometry driven diffusion in image processing and analysis”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp. 269-271, 1998.

[CoE96] G.H Cottet, M. El Ayyadi – “Nonlinear PDE operators with memory terms for image processing, ”, *In: Proceedings IEEE International Conference on Image Processing- ICIP'96*, Laussane, Switzerland, vol.1, pp. 481-484, 1996.

[CoE98] G.H Cottet, M. El Ayyadi – “A Volterra type model for image processing”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp.292-303,1998.

[CoG93] G.H. Cottet, L. Germain – “Image processing through reaction combined with nonlinear diffusion”, *Mathematics of computation*, vol. 61, no.204, pp.659-673, 1993.

[CoI81] W. J. Conover, R. L. Imam –“ Rank transformations as a Bridge Between Parametric and Nonparametric Statistics”, *The American Statistician*, vol.35, no. 35, pp. 124-129, 1981.

[C0S99-01] T.F. Chan, S.Osher, J. Shen – “The digital TV filter and nonlinear denoising”, *Technical Report*, CAM 99-34, Department of Mathematics, UCLA, USA,

1999, une version plus complète a apparu en *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, no.2, 2001.

[DaC01] J.P. DaCosta – *Analyse statistique de textures directionnelles : Application a la caractérisation des matériaux composites*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2001.

[DaS90] P.E . Danielsson, O. Segger – “Rotation invariance and higher order derivatives detectors”, *Computer Vision , Graphics and Image Processing*, vol.49, pp.198-221, 1990.

[DeF95-96] R. Deriche, O. Faugeras – “Les EDP’s en traitement d’images et vision par ordinateur “, *Rapport de recherche INRIA- 2697*, <http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-2697.html>, 1995, une version plus complète a apparu en *Traitement du Signal*, vol. 13. no.6, pp.551-578, 1996.

[Don99] M. Donias – *Caractérisation de champs d’orientations par analyse en composantes principales et estimation de la courbure* , Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1999.

[DTLB04] R Dargent, **R. Terebes**, O.Lavialle, P. Baylou –“ 3D Tangential Diffusion”, acceptée à *XII-th European Signal Processing Conference- EUSIPCO 2004*, Vien, Autriche, 2004.

[Dur99] D. R. Durran – *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 1999.

[FaS97] H. Farid, E. P. Simoncelli –“ Optimally rotation–equivalent directional derivative kernels”, *In: Proceedings of the 7th Int’l Conf. Computer Analysis of Images and Patterns*, Kiel, Germany, 1997.

[Gab46] D. Gabor – “Theory of communication”, *The Journal of the Institute of Electrical Engineers*, vol.93, pp. 429-457, 1946.

[Gag84] M. Gage –“The heat equation shrinks embedded plane curves to round points”, *Inventiones Mathematicae*, vol.76, pp. 357-364, 1984.

[GaH86] M. Gage, R.S. Hamilton – “The heat equation shrinking convex plane curves”, *Journal of Differential Geometry*, vol.23, pp.69-96, 1986.

[GaL96] J. Garding, T. Lindeberg –“Direct computation of shape cues using scale-adapted spatial derivative operators”, *International Journal of Computer Vision*, vol. 17, no.2, pp. 163-191, 1996.

[Gre90] P. J. Green –“Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-9(1), pp.84-93, 1990.

[GSZ02] G. Gilboa, N. Sochen, Y. Zeevi - “Forward-and-backward diffusion processes for adaptive image enhancement and denoising”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.11, no.7, pp.689-703, 2002.

- [GZS00] G. Gilboa, Y. Zeevi, N. Sochen- “Signal and image enhancement by a generalized forward-and-backward adaptive diffusion process”, *In: Proceedings of the X European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2000*, Tampere, Finland, 2000.
- [GZS01] G. Gilboa, Y. Zeevi, N. Sochen – “Image enhancement, segmentation and denoising by time dependent nonlinear diffusion processes”, *In: Proceedings of the International Conference on Image Processing-ICIP’01*, Thessalonik, Greece, vol. 3, pp. 134-137, 2001.
- [HeH93] D. R Helsel, R.M Hirsch – *Statistical Methods in Water Resources*, Elsevier Science, 1993; disponible aussi à <http://water.usgs.gov/pubs/twri443.html>
- [Hol83] K. Hollig –“Existence of infinitely many solutions for a forward – backward heat equation”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol.278, pp.299-316, 1983.
- [Jah97] B. Jahne –“Performance characteristics of low –level motion estimators in spatiotemporal images”, *In: W. Forstner (Eds.), DAGM Workshop Performance Characteristics and Quality of Computer Vision Algorithms*, Braunschweig, Germany, 1997.
- [Kam99] Behzad Kamgar-Parsi, Behrooz Kamgar-Parsi – “Optimally isotropic laplacian operator”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.8, no.10, pp.1467-1472, 1999.
- [KaW87] M. Kass, A . Witkin – “ Analyzing oriented patterns”, *Computer Graphics and Image Processing*, vol.37, pp. 362-385, 1987.
- [KDA96] P. Kornprobst, R. Deriche, G.Aubert –“Image restoration via PDE”, *In: Proceedings of the First Annual Symposium on Enabling Technologies for Law Enforcement and Security, SPIE Conf.2942: Investigative Image Processing*, Boston USA, 1996.
- [KDA97a] P. Kornprobst, R. Deriche, G.Aubert –“Nonlinear operators in image restoration”, *In: Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Puerto-Rico, pp. 325-331, 1997.
- [KDA97b] P. Kornprobst, R. Deriche, G.Aubert –“Image coupling, restoration and enhancement via PDE’s”, *In: Proceedings of the International Conference in Image Processing- ICIIP’97*, Santa –Barbara, California, pp. 458-461, 1997.
- [KDA99]P. Kornprobst, R. Deriche, G.Aubert –“Image sequence analysis via partial differential equations”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 11, no.1, pp.5-26, 1999.
- [Kic97] S. Kichenassamy – “The Perona Malik paradox”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol.57, no.5, pp.1328-1342,1997.
- [KiS93-96] B.B Kimia, K. Siddiqi –“ Geometrical heat equation and nonlinear diffusion of shapes and images”, *Technical Report LEMS-124, Division of Engineering, Brown University*, une version plus complète a apparu en *Computer Vision and Image Understanding*, vol.64, pp.305-322, 1996.

- [KKB97] R. Kimmel, N. Kiryati, A. Bruckstein – “Analyzing and synthesizing images by evolving curves with the Osher-Sethian method”, *International Journal of Computer Vision*, vol.24, no.1, pp.37-55, 1997.
- [KKR97] Behzad Kamgar-Parsi, Behrooz Kamgar-Parsi, A.Rosenfeld – “ Optimum laplacian for digital image processing”, In: *Proceedings of the International Conference in Image Processing ICIP'97*, Santa –Barbara, California, vol. 2, pp. 728-732, 1997.
- [KKOTA95] S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver , A. Tannenbaum, A Yezzi -“ Gradient flows and geometric active contour models ”, In: *Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, Los-Alamitos, California, pp.810-815, 1995.
- [KMA96] K. Krissian, G. Malandain, N.Ayache –“Directional anisotropic diffusion applied to segmentation of vessels in 3D images”, *Rapport technique 3064 INRIA Sophia Antipolis*, <http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-3064.html>, 1996.
- [KMS 98] N. Sochen, R. Kimmel, R. Malladi, -“ Image Proceesing via the Beltrami operator”, In: *Proceedings of 3-rd Asian Conf. on Computer Vision*. Hong Kong, Jan. 8-11, 1998.
- [KMS 00] R. Kimmel, R. Malladi, N. Sochen-“ Images as embedding maps and minimal surfaces: Movies, color, texture and volumetric medical images”, *International Journal of Computer Vision*, vol.39, no.2, pp.11-129,2000.
- [Koe84] J. Koenderink – “The structure of images”, *Biological Cybernetics*, Vol.50, pp. 363-370,1984.
- [Kor98] P. Kornprobst, -*Contribution a la restauration d'images et analyse de séquences : approches variationnelles et solutions de viscosité*, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [KWT88] M. Kass, A. Witkin, D.Terzopolous – “ Snakes: Active contour models”, *International Journal of Computer Vision*, vol.1, pp.321-331,1988.
- [Lax72] P.D. Lax – “ Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves”, *SIAM Regional Conference in Applied, Mathematics*, Philadelphia,vol.11, 1972.
- [LDAR97] L. Lucido, R. Deriche, L. Alvarez, V. Rigaud- “Sur quelques schémas numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles pour le traitement d'images “, *Rapport de recherche RR-3192, INRIA-Sophia Antipolis*, 1997.
- [LeP03] F. Le Pouliquen- *Opérateurs discrets pour l'estimation adaptative et optimale de l'orientation. Application a l'imagerie sismique*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2003.
- [LiC94]X. Li, T. Chen – “Nonlinear diffusion with multiple edginess thresholds”, *Pattern Recognition*, vol.27, no.8, pp.1029-1037, 1994.

- [Lin93]- T. Lindeberg – “ On scale selection for differential operators”, *In: Proceedings of the 8th Scandinavian Conference on Image Analysis*, Tromse , Norway, pp.857-866, 1993.
- [LTGDG03] O. Laviolle, **R. Terebes**, C. Germain, J.P Da Costa, G. Grenier –“ Diffusion orientée pour le filtrage d’images: application à l’amélioration d’images aériennes de parcelles de vignes” *In Proceedings of the 19-th GRETSI Symposium on Signal and Image Processing, Paris, France*, vol.1, pp.245-248, 2003.
- [MaH80] D. Marr, E. Hildreth – “Theory of Edge Detection”, *In: Proceedings of the Royal Society of London, Series B, Vol.207*, pp. 187-217, 1980.
- [Mar72] K. V. Mardia – *Statistics of Directional Data*, Academic Press, 1972.
- [MiS01] S. Mitra, G. Sicuranza – *Nonlinear image processing*, Academic Press Series in Communications, Networking and Multimedia, 2001.
- [MoB98] J. Monteil, A. Beghdadi – “A new adaptive nonlinear anisotropic diffusion for noise smoothing”, *In: Proceedings of the International Conference in Image Processing-ICIP ’98*, Chicago, Illinois, vol. 3, pp. 254-258, 1998.
- [MoB99] J. Monteil, A. Beghdadi – “A new interpretation and improvement of the nonlinear anisotropic diffusion for image enhancement”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.21, no.9, pp.940-946, 1999.
- [MoS95] J. M Morel, S. Solimini – *Variational methods in image segmentation*, Birkhausser-Boston, 1995.
- [MoS00] T.K Moon, W. Stirling – *Mathematical methods and algorithms for signal processing*, Prentice-Hall, 2000.
- [MuS89] D. Mumford, J. Shah- “Optimal approximations by piecewise smooth functions and variational problems”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol.42, pp.577-685, 1989.
- [NeH95] A.N. Netravali, B.G. Haskell – *Digital Pictures: Representation, Compression, and Standards (2nd Ed)*, Plenum Press, New York, 1995.
- [Nor90] N. Nordstrom – “Biased anisotropic diffusion: a unified regularization and diffusion approach to edge detection”, *Image and Vision Computing.*, vol. 8, no.11, pp.318-327, 1990.
- [NiS92] M. Nitzberg, T. Shiota – “ Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.14, no.8, pp. 826-833,1992.
- [OsR90] S. Osher, L. Rudin – “Feature-oriented image enhancement with shock filters”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.27, no.3, pp. 919-940, 1990.
- [PeM90] P. Perona, J. Malik –“Scale space and edge detection using anisotropic diffusion”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.12, no.7, pp.629-639, 1990.

- [Per98] P. Perona –“ Orientation diffusions”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp.457-467,1998.
- [PTVF92] W. H. Press, S.A Teukolsky, W.T Vetterling, B.P Flannery – *Numerical Recipes in C* , Cambridge University Press, 1992.
- [Rao90] A. R. Rao – *A taxonomy for texture description and identification*, Springer Verlag, New York, 1990.
- [RaS91] A.R. Rao, B.G. Schunck – “Computing oriented texture fields”, *Graphical Models and Image Processing*, vol. 53, pp.157-185, 1991.
- [ROF92] L. Rudin, S.Osher, E. Fatemi – “ Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, vol. 60, pp.259-268, 1992.
- [SaA01] T. Sams, F.T. Agerkvist – “Coherence enhancing diffusion filtering linear versus nonlinear”, *submitted to IEEE Transactions on image processing*, <http://www.nbi.dk/~sams/> October 19, 2001.
- [Sap95-97] G. Sapiro- “Color snakes”, *Hewlett Packard Technical Report 113*, 1995, une version plus complète a apparu en : *Computer Vision and Image Understanding*, no. 68, pp.247-253, 1997.
- [Sap96] G. Sapiro- “From active contours to anisotropic diffusion: connections between basic PDE’s in image processing”, *In: Proc. IEEE International Conference on Image Processing- IICIP’96*, Laussane, Switzerland, Vol.1 pp. 447-480, 1996.
- [Sap00] G. Sapiro –*Geometric partial differential equations and image analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- [SaT94] G. Sapiro, A. Tannenbaum – “On affine plane curve evolution”, *Journal of Functional Analysis*, vol.119, pp. 79-120, 1994.
- [SOLM00] A.Sarti, C. Ortiz, C. Locket, R. Malladi – “A geometric model for 3D confocal image analysis”, *IEEE Transactions of Biomedical Engineering*, vol.47, no.12, pp.1600-1609, 2000.
- [SiM84] M. Sibony, J.Cl. Mardon – *Approximations et équations différentielles*, Hermann –Éditeurs de Sciences et des Arts, 1984.
- [ScW00] H. Scharr, J. Weickert, – “An anisotropic diffusion algorithm with optimized rotation invariance”, *In: G. Sommer, N. Kruger, C.Perwass (Eds.), Mustererkennung*, Springer, Berlin, pp.460-467; disponible aussi comme *Technical Report 4/2000, Computer Science Series, University of Manheim, Germany*, 2000.
- [SKM96] N. Sochen, R. Kimmel, R. Malladi – “From high energy to low level vision”, *Technical Report 39243*, Lawrence Berkeley Labs, 1996.
- [SKM98] – N. Sochen, R. Kimmel, R. Malladi – “A general framework for low level vision”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7., no.3, pp. 310-318, 1998 .

[Ter01] **R. Terebes** –“ Recunoașterea statistică a formelor”, *Referat II in cadrul pregatirii de doctorat*, Universitatea Tehnica din Cluj Napoca, 2001.

[TLBB02a]- **R. Terebes**, O. Laviaille, P. Baylou, M. Borda – “Directional anisotropic diffusion”, *In Proceedings of the XI-th European Signal Processing Conference EUSIPCO2002* vol. II., pp. 266-269, Toulouse, France, 2002.

[TLBB02b]- **R. Terebes**, O. Laviaille, M. Borda, P. Baylou, – “Anisotropic diffusion of strongly oriented patterns”, *In Proceedings of the IEEE International Workshop “ Trends and Recent Achievements in Information Technology”*, pp.102-108, Cluj-Napoca, Romania, 2002.

[TLBB02c]- **R. Terebes**, O. Laviaille, P. Baylou, M. Borda – “Mixed anisotropic diffusion”, *In Proceedings of the International Conference in Pattern Recognition- ICPR 2002*, vol.3, pp. 30760-30764, Quebec, Canada, 2002.

[TLBBT03]- **R. Terebes**, O. Laviaille, P. Baylou, M. Borda, A. Tihamer – “Adaptive smoothing using anisotropic diffusion and median filter based diffusivities”, *In Proceedings of the 4th Workshop on European Scientific and Industrial Collaboration Wesic 2003*, Miskolc, Hungary, pp. 121-126, 2003.

[TLBB03]- **R. Terebes**, O. Laviaille, P. Baylou, M. Borda, – “Flow coherence diffusion”, *In Proceedings of the 2003 International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing -SMSP 2003*, pp. 197-202, Barcelona, Spain, 2003.

[TBBLB04]- **R. Terebes**, M. Borda , Y. Baozong, O. Laviaille, P. Baylou, – “A new PDE based approach for image restoration and enhancement using robust diffusion directions and directional derivatives based diffusivities”, acceptée à *The 7th International Conference on Signal Processing, ICSP’04*, Beijing, Chine, 2004.

[TSC00] B Tang, G. Sapiro, V. Casselles – “Diffusion of general data on non-flat manifolds via harmonic maps theory: the direction diffusion case”, *International Journal of Computer Vision*, vol. 36., no.2, pp.149-161, 2000.

[TsD01] D. Tschumperle, R. Deriche –“Constrained and unconstrained pde’s for vector image restoration”, *In: Proceedings of the 10th Scandinavian Conference on Image Analysis*, Bergen, Norway, pp.153-160, 2001.

[TsD03] D. Tschumperle, R. Deriche –“Vector valued image regularization with PDE’s: A common framework for different applications”, *In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition- CVPR2003*, Madison, USA, 2003.

[Vla97] A. Vlaicu – *Prelucrarea digitală a imaginilor*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 1997.

[VQEG00] “Final report from the video quality experts group on the validation of objective models of video quality assessment”, disponible sur <http://www.its.bldrdoc.gov/vqeg/>,2000.

- [Yez98] A. Yezzi – “Modified curvature motion for image smoothing and enhancement”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp.345-352, 1998.
- [YKXT94] Y.L. You, M. Kaveh, W. Xu, A. Tannenbaum –“ Analysis and design of anisotropic diffusion for image processing”, *In: Proc. IEEE International Conference on Image Processing, ICIP'94*, Austin, Texas, 1994.
- [YXTK96] Y.L. You, W. Xu, A. Tannenbaum, M. Kaveh –“ Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.5, pp.1539-1553,1996.
- [WBL02] Z. Wang, A. C. Bovik, L. Lu – “Why is image quality assessment so difficult”, *In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, & Signal Processing*, Orlando ,USA, 2002.
- [Wit83] A. Witkin – “Scale–space filtering”, *In: Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*, New-York, pp. 1019-1021, 1983.
- [WeB97] J. Weickert, B. Benhamouda – “Why the Perona Malik filter works?” , *Technical Report DIKU- TR97/22*, University of Copenhagen, 1997.
- [Wei94] J. Weickert –“Scale-space properties of nonlinear diffusion filtering with a diffusion tensor”, *Report No.110, Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern*, Oct., 1994.
- [Wei95] J. Weickert –”Multiscale texture enhancement”, *In: Hlavac V., Sara R.(Eds.) Computer analysis of images and patterns*, Springer, Berlin, pp.230-237, 1995.
- [Wei96] J. Weickert –”Conservative image transforms with restoration and scale-space properties”, *In: Proc. IEEE International Conference on Image Processing, ICIP'96*, Laussane, Switzerland, Vol.1, pp. 465-468, 1996.
- [Wei97a] J. Weickert –“A review of nonlinear diffusion filtering”, -B. ter Haar Romeny, L. Florack, J. Koenderink, M. Vierger (Eds.), *Scale Space Theory in Computer Vision, Lecture notes on Computer Science*, vol.1252, Springer, Berlin, pp. 3-28, 1997.
- [Wei97b] J. Weickert –“Coherence enhancing diffusion of colour images”, *In: Proceedings of the VII National Symposium on Pattern Recognition and Image Analysis, NSPRIA*, Barcelona, vol.1, pp239-244, 1997.
- [Wei98] J. Weickert – “Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp. 398-410, 1998.
- [Wei99] J. Weickert – “Coherence enhancing diffusion”, *International Journal of Computer Vision* , no.31, pp. 111-127, 1999.
- [Wei00] J. Weickert – “ Applications of nonlinear diffusion in image processing and computer vision”, *In Proceedings of Algoritmy Acta Math Univ. Comenianae*, vol. LXX, pp. 33-50, 2000.

[Whi93] R. Whitaker – *Geometry limited diffusion*, Thèse de doctorat, Department of Computer Science, University of North Carolina, 1993.

[WiP93] R. Whitaker, S.M. Pizer –“A multi-scale approach to nonuniform diffusion”, *C Graphical Model and Image Processing: Image Understanding*, vol.57, pp.111-120, 1993.

Publications de l’auteur non référencées dans la bibliographie

[BTB00] A.Z. Bodo, **R. Terebes**, M. Borda – “A watershed algorithm and its applications in image segmentation”, *Acta Technica Napocensis-Electronics and Telecommunications*, Cluj-Napoca, vol.40, no.2, pp. 9.-13,2000.

[Ter98] **R. Terebes** –“Metode și tehnici în recunoașterea formelor”, *Referat I in cadrul pregatirii de doctorat*, Universitatea Politehnica din Timisoara, 1998.

[TLBB02d] –**R. Terebes**, O. Laviaille, P. Baylou, M. Borda- “Orientation driven diffusion”, *Acta Technica Napocensis-Electronics and Telecommunications*, Cluj-Napoca, vol. 42, no.2, pp. 20-24, 2002.

[TLBBN00] –**R. Terebes**, O. Laviaille, P. Baylou, M. Borda, I. Naforita - “Adaptive directional morphological operators”, *In Proceedings of the X-th European Signal Processing Conference EUSIPCO2000*, Tampere, Finland, 2000.

[TLBBN01] –**R. Terebes**, O. Laviaille, P. Baylou, M. Borda, I. Naforita - “Erosion adaptative pour les images en niveaux de gris”, *In: Proceedings of the 18-th Symposium on Signal and Image processing- GRETSI2001*, Toulouse, France, 2001.

[TLBB01a] –**R. Terebes**, O. Laviaille, P. Baylou, M. Borda, - “Gradient based curvature estimation ”, *Image Analysis and Stereology*, vol.20, suppl.1, pp.287-292, 2001.

[TLBB01b] –**R. Terebes**, O. Laviaille, M. Borda, P. Baylou - “Normal field curvature estimation ”, *In Proceedings of the IEEE International Conference on Telecommunications ICT 2001*, vol.1/3, pp.193-199, Bucarest, Roumanie, 2001

[TBBLB02] –**R. Terebes**, , M. Borda, Y.Baozong, O.Laviaille, P. Baylou - “Adaptive filtering using morphological operators and genetic algorithms ”, *In Proceedings of the 6’th International Conference on Signal Processing*, vol.1, pp.853-858, Beijing, China, 2002.

Le sujet du mémoire est l'amélioration et la restauration d'images contenant des structures caractérisées en tout point par une orientation dominante. En particulier, nous traitons les approches fondées sur l'utilisation des équations aux dérivées partielles en intégrant la notion d'orientation définie en tout point comme étant orthogonale au vecteur gradient. Après une revue des principaux types d'EDP utilisés pour la restauration d'images, nous proposons deux approches originales utilisant des informations directionnelles robustes. Nous démontrons l'intérêt de nos méthodes vis à vis des approches classiques au travers d'un plan d'expérience mettant en jeu des images de synthèse. La dernière partie du mémoire est consacrée aux applications de nos méthodes pour la restauration des gravures et des documents anciens numérisés.

Mots-clés :

Equations aux Dérivées Partielles
Mesures d'orientation

Diffusion anisotrope
Amélioration d'images

Restauration d'images

The topic of this document is the enhancement and restoration of images containing oriented structures. Particularly, we deal with approaches based on Partial Derivative Equations (PDE). We introduce an orientation information characterized in each pixel as being orthogonal to the gradient vector. After a presentation of the most important PDE's used in image restoration tasks, we propose two original approaches using robust directional information. The interest of our methods when compared with classical approaches is demonstrated through the use of an experimental design on synthesized images. The last part of the thesis is devoted to the presentation of applications of the proposed methods for digitized ancient engraving and document images restoration tasks.

Keywords :

Partial Derivative Equations
Measures of orientation

Anisotropic Diffusion
Image Enhancement

Image restoration