

N° d'ordre : 3186

THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Jean STARYNKÉVITCH**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PROBLÈMES D'ASYMPTOTIQUE EN TEMPS EN FERROMAGNÉTISME

Soutenue le : 29 juin 2006

Après avis de Messieurs

François	ALOUGES	Professeur, Université Paris-Sud	Rapporteurs
Olivier	GUÈS	Professeur, Université de Provence	

Devant la commission d'examen formée de

Pierre	FABRIE	Professeur, Université Bordeaux 1	Président
François	ALOUGES	Professeur, Université Paris-Sud	Rapporteur
Gilles	CARBOU	Maître de Conférences HdR, Université Bordeaux 1	Examineur
Olivier	GUÈS	Professeur, Université de Provence	Rapporteur
Stéphane	LABBÉ	Maître de Conférences, Université Paris-Sud	Examineur
Guy	MÉTIVIER	Professeur, Université Bordeaux 1	Directeur

*Douter de tout ou tout croire
sont deux solutions également commodes,
qui l'une et l'autre
nous dispensent de réfléchir.*

Henri Poincaré
Extrait de *La science et l'hypothèse*

Remerciements

Je remercie en premier lieu mon Directeur de thèse, Guy Métivier qui a su me lancer sur mon sujet en début de thèse, et m'a toujours laissé libre de développer les pistes de recherche que je proposais. J'ai progressivement compris la chance que j'avais d'être encadré par un tel savant, qui avait toujours la porte de son bureau ouverte, quasiment toujours disposé à être dérangé pour parler de maths, et surtout, capable de répondre systématiquement et précisément à la quasi-totalité des questions et autres « os » que peut rencontrer un jeune thésard (même si je n'ai peut-être pas toujours su en profiter).

Je remercie aussi Olivier Guès et François Alouges qui m'ont fait l'honneur de rapporter mon travail, ainsi que Pierre Fabrie et Gilles Carbou qui, non seulement m'ont fait la joie d'accepter d'être membres de mon jury, mais aussi celle d'avoir avec eux de fructueuses et intéressantes discussions tout au long de ma thèse. Je remercie également Stéphane Labbé, qui m'a encadré dès un stage de magistère deux ans avant le début de ma thèse, d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais témoigner particulièrement de ma gratitude envers Jean-François Bony, qui a su me soutenir et me pousser à un moment où les difficultés rencontrées et les échecs avaient pris l'avantage sur ma persévérance.

Je ne peux pas ne pas mentionner l'environnement scientifique de Bordeaux. L'Institut Mathématiques de Bordeaux offre des conditions matérielles proches de l'idéal, tant sur le confort des bureaux que sur les ordinateurs du personnel (thésards compris), sans oublier l'efficacité et la disponibilité des membres de la cellule informatique.

Je remercie également les collègues, thésards et plus avancés, que j'ai pu côtoyer, qui ont permis de rendre plus agréables ces années de recherche, par une bonne ambiance quasi-permanente pour le quotidien, parmi lesquels (dans le désordre le plus total) : David Lannes, Cédric Galusinsky, Vincent Bruneau, Charles-Henri Bruneau, Thierry Colin, Laurent Michel, François Dufour, Thomas Alazard, Vincent Lescarret, David Sanchez, Matthieu Gendulphe, Mazen Saad, Oswaldo Velasquez, Mathieu Colin, Héroïse Beaugendre, et tous les autres que j'aurais oubliés.

Enfin, les amis et la famille restent un soutien incontournable à beaucoup de choses dans la vie, et la thèse n'y fait pas exception. Je termine donc ces remerciements à Karel, Sylvain, Vincent, Gabriel, Jérôme, Carole, Fanny, Thibaut, Aurore, Laura, Lucile, Catherine, Wladimir, Cyrille, et tant d'autres, ma grand-mère « Dame », mes parents, ainsi que mon frère Matthieu et mes sœurs Anne & Marie, mon beau-frère Jérémie et mon neveu Élie.

Table des matières

Table des matières	0
1 Introduction	3
1.1 Une approche de l'électromagnétisme	3
1.2 Propriétés immédiates des équations de Maxwell-Landau-Lifshitz	5
1.2.1 Conservation du module du moment magnétique \mathbf{M}	5
1.2.2 Contributions au champ \mathbf{H}_T et énergies associées	6
1.2.3 Adimensionnement	8
1.3 Qu'est-ce qu'un problème asymptotique?	9
1.4 Un peu de littérature en ferromagnétisme	10
1.4.1 Une approche de minimisation d'énergie	10
1.4.2 Approche EDP	10
1.5 Énoncé des résultats obtenus	12
1.5.1 Estimation de l'énergie locale pour le système de Maxwell-Landau-Lifshitz et Applications	12
1.5.2 Estimations en milieu inhomogène	13
1.5.3 Asymptotique en cas de variations lentes du champ appliqué	14
2 Local Energy Estimates for Maxwell-Landau-Lifshitz System and Applications	15
2.1 Introduction	15
2.1.1 Presentation of the Maxwell-Landau-Lifshitz system	15
2.1.2 Main results	16
2.2 Transformation and non-dimensionalization	19
2.2.1 Transformation	19
2.2.2 Non-dimensionalization	19
2.2.3 Classical energy estimates	20
2.3 Local energy for the wave equation	21
2.3.1 An L^2 orthogonal decomposition	21
2.3.2 L^2 local estimates for the non-homogeneous linear wave equation	22
2.3.3 Estimates for the Cauchy problem for the homogeneous linear wave equation	28

2.4	Application to the Maxwell-Landau-Lifshitz system	31
2.4.1	Boundedness of \mathbf{h}_\perp and \mathbf{e} with respect to η	31
2.4.2	Bounds for the curl fields	33
2.5	Convergence toward quasistationary system	35
2.5.1	Convergence of $\mathbf{h}_{\eta\perp}$ and \mathbf{e}_η to 0	35
2.5.2	Convergence of \mathbf{m}_η	36
2.5.2.1	Weak convergence	36
2.5.2.2	First estimates	37
2.5.3	Uniqueness of the Cauchy problem	39
2.5.4	Proof of Proposition 2.11	41
2.6	The damping parameter	43
3	Strong quasi-stationary limit in inhomogeneous media	45
3.1	Introduction	45
3.2	Resolvent estimates	48
3.2.1	Main results	48
3.2.2	Estimates on Δ	49
3.2.3	$H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+2}$ and $H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+1}$ estimates	50
3.2.4	Low and medium frequencies L^2 estimates	51
3.2.5	$H^\gamma \rightarrow H^\gamma$ estimates	52
3.3	Estimates for the wave equation (3.7) : proof of Theorem 3.2	53
3.3.1	Estimates for the right hand side of the wave equation	54
3.3.2	Estimates for the initial data	54
3.4	Application	56
4	Asymptotique en cas de variations lentes du champ appliqué	63
4.1	Motivation	63
4.1.1	Descriptions physique et mathématique du phénomène d'hystérésis	63
4.1.2	Description de l'opérateur de Presach	64
4.1.3	Asymptotique étudiée	65
4.2	Convergence sur les points d'équilibre stables	66
4.3	Cas d'une équation de Landau-Lifshitz	70
4.3.1	Recherche des ensembles ω -limites de l'équation	70
4.3.2	Recherche des points critiques en cas d'anisotropie quadratique	72
4.3.3	Exemple d'application	73
4.4	Étude d'un cas particulier 1D	76

Chapitre 1

Introduction

1.1 Une approche de l'électromagnétisme

Le ferromagnétisme – champ disciplinaire auquel appartient le sujet de ce travail – peut être vu comme une branche de l'électromagnétisme, qui est l'étude du champ électromagnétique dans une situation donnée. Le modèle le plus standard régissant le champ électromagnétique est donné par les équations de Maxwell qui, dans un milieu non chargé, s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \\ \partial_t \mathbf{B} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$

où $t \geq 0$ désigne la variable de temps, $x \in \mathbb{R}^3$ la variable d'espace et, à t fixé :

- $\mathbf{D} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'induction électrique ;
- $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ magnétique ;
- $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'induction magnétique ;
- $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ électrique ;
- $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ la perméabilité ;
- $\mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ la permittivité ;
- $\mathbf{j} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la densité de courant.

On peut parfois être amené à considérer les équations statiques de Maxwell (on parle alors de régime stationnaire)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$

Dans le vide, il n'y a pas de courant ($\mathbf{j} = 0$), et les champs \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{H} et \mathbf{B} sont reliés par deux relations très simples :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

si bien que, lorsqu'on n'est plus dans le vide, il semble légitime de concevoir des modèles formés à partir des équations de Maxwell dans le vide (dont les seules inconnues ne sont plus que (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , ou bien (\mathbf{E}, \mathbf{H})), et présenté comme étant des perturbations de celui-ci. Pour cela, on introduit deux champs supplémentaires : la polarisation \mathbf{P} et le moment magnétique \mathbf{M} défini par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{cases}$$

Remarque 1.1 *En principe, l'aimantation \mathbf{M} n'est pas définie dans l'espace entier \mathbb{R}^3 , mais uniquement sur le domaine Ω du matériau ferromagnétique. Néanmoins, dans toute la suite, on considérera \mathbf{M} comme un champ défini sur tout \mathbb{R}^3 , en l'identifiant avec son prolongement par 0 hors de Ω , ce qui permet de donner un sens aux diverses équations.*

Certains matériaux ont un comportement de sorte que :

- la polarisation \mathbf{P} dépend linéairement (et ponctuellement) de \mathbf{E} , de sorte qu'on a $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{P}$ où ε est un scalaire (le cas échéant une matrice 3×3 , symétrique), dépendant le cas échéant de x (la variable d'espace, dans \mathbb{R}^3),
- le moment magnétique est proportionnel au champ magnétique, de sorte qu'on peut écrire $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ (où μ est un scalaire, ou bien une matrice 3×3 , éventuellement fonction de x).

Les équations de Maxwell correspondantes sont alors des équations aux dérivées partielles linéaires. Pour cela, on dit qu'on a affaire à des matériaux linéaires.

Il existe d'autres situations donnant lieu à les équations linéaires. Ainsi en est-il de la loi d'Ohm qui s'écrit $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, où σ est une constante (ou une fonction réelle défini sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) qui dépend du matériau considéré.

Cependant, tous les phénomènes physiques observés vis-à-vis de l'évolution du champ électromagnétique ne peuvent se modéliser uniquement de cette manière, et il est nécessaire de perturber le système de Maxwell dans le vide d'une autre manière (ce qui rajoute une difficulté considérable sur la justification mathématique des équations). Ainsi par exemple, nous avons les équations de Kerr qui régissent le comportement du champ électromagnétique dans certains milieux cristallins, et dans lesquelles la polarisation polarisation suivante

$$\mathbf{P} = K |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}$$

(on parle alors de perturbation à non-linéarité cubique)

Dans le même esprit (mais en insistant sur un autre aspect de l'évolution, qui domine dans l'étude la la propagation d'ondes dans certains cristaux), les équations de Maxwell-Bloch déterminent la polarisation \mathbf{P} par l'intermédiaire d'une sorte d'hamiltonien dépendant du champ \mathbf{E} (voir par exemple [23] pour la présentation exacte de ces équations).

En ferromagnétisme (« discipline » de cette thèse), c'est le moment magnétique \mathbf{M} qui ne peut être modélisé par une application linéaire par rapport au champ magnétique \mathbf{H} , au point que l'aimantation \mathbf{M} peut même être non nulle (en régime stationnaire) lorsque le champ \mathbf{H} l'est quand même. Différents modèles mathématiques régissent ce type de comportement. Le premier que nous allons étudier a été établie par Landau et Lifshitz, et prend la forme d'une équation différentielle (couplée aux équations de Maxwell, stationnaires ou non) :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma_0 \left(\mathbf{M} \times \mathbf{H}_T - \alpha \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_T) \right) \quad (1.1)$$

où \mathbf{H}_T représente un champ magnétique « efficace » comportant plusieurs contributions (en particulier le champ \mathbf{H} des équations de Maxwell, appelé « champ démagnétisant » en régime quasi-stationnaire) qui seront explicitées plus bas, et la croix \times désigne le produit vectoriel de deux vecteurs dans \mathbb{R}^3 .

Le premier terme $-\gamma_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_T$ de l'équation (1.1) a une origine physique, mais présente un inconvénient majeur lorsqu'il est le seul présent au second membre de l'équation : dans ce cas, l'équation ne converge pas du tout, mais au contraire donne systématiquement des solutions périodiques en temps (lorsque \mathbf{H}_T est constant). Landau et Lifshitz ont donc eu l'idée, pour y remédier, d'introduire un autre terme phénoménologique d'amortissement, qui fut d'abord introduit sous la forme suivante (Landau-Lifshitz-Gilbert) :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \alpha \mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M} = -\gamma_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_T \quad (1.2)$$

mais, par quelques manipulations formelles classiques (en prenant le produit vectoriel de (1.2) avec \mathbf{M} , puis en utilisant le fait que, on a $\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M}) = -|\mathbf{M}|^2 \partial_t \mathbf{M}$ du fait que $\partial_t \mathbf{M}$ et \mathbf{M} sont perpendiculaires dans \mathbb{R}^3), on montre que ces deux modèles sont équivalents (quitte à changer la valeur de α en tant que fonction positive définie sur \mathbb{R}^3).

1.2 Propriétés immédiates des équations de Maxwell-Landau-Lifshitz

1.2.1 Conservation du module du moment magnétique \mathbf{M}

L'équation de Landau-Lifshitz a son second membre qui s'écrit sous la forme $\mathbf{M} \times \dots$, si bien qu'en prenant le produit scalaire de cette équation avec $2\mathbf{M}$, on trouve que $|\mathbf{M}(t, x)|^2$ est indépendant du temps t . En général, on rajoute à l'équation (1.1) la contrainte que le module de \mathbf{M} (défini uniquement sur le domaine Ω du matériau regardé) est constant et égal à une valeurs M_s de saturation.

$$|\mathbf{M}| = M_s \quad (1.3)$$

et il suffit que cette condition soit vérifiée à l'instant initial pour qu'elle le soit pour tout temps t . De même, en l'absence de courant \mathbf{j} , les équations de Maxwell portant sur la divergence des champs \mathbf{D} et \mathbf{B} sont vérifiées à partir du moment où elles le sont pour les données initiales.

Une autre conséquence de la préservation du module de \mathbf{M} est que l'équation de Landau-Lifshitz est équivalente à l'équation suivante (plus simple à analyser, dans la mesure où son second membre est polynomial, et donc ne présente plus de singularité lorsque $\mathbf{M} = 0$)

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_T - \alpha \frac{\mathbf{M}}{M_s} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_T) \quad (1.4)$$

Dorénavant, c'est donc cette équation que nous considérerons.

1.2.2 Contributions au champ \mathbf{H}_T et énergies associées

Le champ \mathbf{H}_T qui intervient dans l'équation de Landau-Lifshitz (1.1) est constitué de plusieurs termes.

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H} + \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_e$$

où

- \mathbf{H} est le champ qui intervient dans les équations de Maxwell ;
- \mathbf{H}_{ext} est le champ extérieur appliqué ;
- $\mathbf{H}_e = -K \Delta \mathbf{M}$ est le champ d'échange ;
- $\mathbf{H}_a = -(\nabla \Phi)(\mathbf{M})$ est le champ d'anisotropie (Φ est une fonction convexe paire donnée).

Remarquons que chacun de ces champs, à l'exception du champ \mathbf{H} en régime non stationnaire, correspond au gradient d'une énergie $\mathcal{E}(\mathbf{M})$, où le mot gradient est à prendre au sens suivant :

$$\mathbf{M} \longmapsto -\frac{1}{\mu_0} \mathcal{E}(\mathbf{M})$$

est une application de $L^2(\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans \mathbb{R} , et différentiable. Sa différentielle en un point \mathbf{M} , $-D\mathcal{E}(\mathbf{M})/\mu_0$, est donc une forme linéaire sur l'espace de Hilbert L^2 , et donc est canoniquement identifiable (via le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^3)$) avec un élément de $L^2(\mathbb{R}^3)$, qui est par définition le gradient de l'énergie en \mathbf{M} .

Ainsi,

- l'énergie d'anisotropie est définie par

$$\mathcal{E}_a(\mathbf{M}) = \mu_0 \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{M}) dx \quad .$$

Remarquons que la fonction Φ est définie modulo une fonction du module $|\mathbf{M}|$ du champ \mathbf{M} (du fait que la contribution de cette énergie n'intervient que sous la forme $\mathbf{M} \times (\nabla \Phi)(\mathbf{M})$). En particulier, la contribution de cette énergie ne dépend pas du module de l'aimantation mais seulement de sa direction. Elle caractérise donc la présence de directions privilégiées de l'aimantation. C'est donc pour cela qu'elle est appelée énergie d'anisotropie¹.

¹ Bien évidemment, avec une approche physique, il s'agit plutôt de la réciproque : c'est en introduisant une telle énergie $\mathcal{E}_e(\mathbf{M})$ qu'on a réussi à établir un modèle qui prenne en compte l'existence de directions d'aimantation privilégiées.

- l'énergie d'échange est définie par

$$\mathcal{E}_e(\mathbf{M}) = \frac{K\mu_0}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{M}|^2 dx \ .$$

Cette contribution prend en compte la tendance à ce que le gradient de \mathbf{M} soit petit, c'est-à-dire que \mathbf{M} ne bouge pas beaucoup en espace.

- Lorsque l'on considère les équations de Maxwell quasi-stationnaires, le champ \mathbf{H} est appelé champ démagnétisant, et est défini par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}_d) &= -\operatorname{div}(\mu \mathbf{M}) \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H}_d) &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où μ est constant sur \mathbb{R}^3 , sachant que $L^2(\mathbb{R}^3)$ est la somme directe orthogonale de $L^2_{\perp}(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Ker} \operatorname{div}$ et de $L^2_{\parallel}(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Ker} \operatorname{rot}$, l'application linéaire $\mathbf{M} \mapsto -\mathbf{H}_d$ est en fait le projecteur orthogonal P_{\parallel} sur les champs à rotationnel nul. De fait, on a

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{M}) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{M} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{H}_d|^2 dx$$

Nous remarquerons dans nos travaux que l'introduction du champ démagnétisant \mathbf{H}_d garde un intérêt pour l'étude du système de Maxwell-Landau-Lifshitz y compris dans le cas où l'on utilise les équations de Maxwell non stationnaires ; car alors, le complément de \mathbf{H}_d , c'est-à-dire, $\mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_d$ vérifie l'équation de propagation suivante :

$$\square \mathbf{H}_{\perp} = -\partial_t^2 P_{\perp} \mathbf{M}$$

- Lorsque le champ extérieur est indépendant du temps, il est également associé à une énergie :

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}(\mathbf{M}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{M} dx$$

Du fait que le module de \mathbf{M} reste constant au cours du temps (et que l'énergie n'est intrinsèquement définie qu'à une constante près), il peut être commode de choisir plutôt l'énergie suivante pour énergie extérieure :

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{H}_{\text{ext}} - \mathbf{M}|^2 dx$$

qui met en évidence que ce terme tend à faire aligner le champ \mathbf{M} avec le champ extérieur \mathbf{H}_{ext} (dans la même direction).

1.2.3 Adimensionnement

Afin de diminuer le nombre paramètres physiques dans les équations, on effectue les changements de variables (homothétiques) suivants. Les coordonnées spatio-temporelles (x, t) seront notées ici avec des tildes dans le monde physique, et sans tilde dans le monde adimensionné. On pose donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{e} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathbf{E}}{M_s} & \Phi(m) = \frac{\tilde{\Phi}(M_s m)}{M_s^2} \\ \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{M_s} & \mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{M_s} \\ x = \frac{\tilde{x}}{R} & t = |\gamma_0| M_s \tilde{t} \end{array} \right.$$

On pose :

$$\begin{aligned} \eta &= R|\gamma_0| M_s \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \\ \nu &= \sqrt{K}/R \end{aligned}$$

où R représente une longueur du matériau occupant le volume Ω , par exemple le diamètre de Ω . Sous réserve de rajouter des conditions initiales (en $t = 0$), le système à étudier devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \partial_t \mathbf{e} - \mathbf{curl} \mathbf{h} = 0 \\ \eta \partial_t (\mathbf{h} + \mathbf{m}) + \mathbf{curl} \mathbf{e} = 0 \\ \partial_t \mathbf{m} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_T - \alpha \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_T) \\ (\mathbf{e}|_{t=0}, \mathbf{h}|_{t=0}) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0) \\ \mathbf{m}|_{t=0} = \mathbf{m}_0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{e}) = 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{h} + \mathbf{m}) = 0 \\ |\mathbf{m}| = \mathbf{1}_\Omega \quad \Omega \subset B \\ \mathbf{h}_T = \mathbf{h} + \mathbf{h}_{\text{ext}} \underbrace{-\nabla \Phi(\mathbf{m})}_{\mathbf{h}_a(\mathbf{m})} + \underbrace{\nu^2 \Delta \mathbf{m}}_{\mathbf{h}_e(\mathbf{m})} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

On constate alors que, formellement (grâce aux deux premières équations du système, équation de propagation du champ électromagnétique), les deux équations sur la divergence sont satisfaites dès lors qu'elles le sont au temps $t = 0$ (c'est-à-dire que les données initiales vérifient ces équations).

Dorénavant, lorsque nous évoquerons le système de Maxwell-Landau-Lishitz, nous parlerons du système adimensionné ci-dessus.

1.3 Qu'est ce qu'un problème asymptotique en mathématiques ? Pourquoi se poser ce type de questions ?

Lorsque l'on essaye d'étudier un phénomène physique, le plus couramment, on en fait une modélisation mathématique, c'est-à-dire qu'on transforme le problème en un système de plusieurs équations et/ou inéquations. Les résultats obtenus sur les équations donnent alors des informations sur le phénomène physique qu'elles modélise. Ici, la modélisation mathématique du ferromagnétisme est donnée par un système d'équations (qui couple les équations de Maxwell pour l'évolution des champs électromagnétiques à l'équation de Landau-Lifshitz pour l'évolution de l'aimantation). Mais tout modèle est, par définition, simplificateur, ce qui a de grandes conséquences.

Ainsi, dans un modèle, l'une des premières choses à vérifier, c'est la cohérence interne (les équations et conditions données par le modèle ne doivent pas donner lieu à une ambiguïté de l'analyse) : on dit que le problème est bien posé. Concrètement, cela signifie que, étant donné des conditions (données par des équations, et éventuellement d'autres contraintes, comme des conditions initiales et/ou des conditions aux limites), il faut avoir l'existence et l'unicité de la solution du problème regardé. Ce type de condition donne lieu à un certain nombre de travaux mathématiques (il est par exemple nécessaire de préciser dans quel ensemble mathématique on recherche les solutions).

Lorsque deux modèles mathématiques bien posés sont proches (dans un sens à préciser dans chaque cas), il est intéressant de regarder s'ils donnent des solutions proches. Ceci se traduit par diverses propriétés de stabilités de problèmes étudiés. Le cas principal étudié dans cette thèse concerne l'approximation quasi-stationnaire des équations de Maxwell. Il est très fréquent qu'un physicien présuppose que les propriétés de stabilité des équations regardées sont intuitives, et laissera au mathématicien le soin de les étudier. Ici, le physicien dirait : « dans l'évolution d'un petit matériau ferromagnétique, la vitesse d'évolution des équations de Maxwell est beaucoup plus grande que celle de l'équation de Landau-Lifshitz » ou encore « les paramètres ε et μ de perméabilité et permittivité sont négligeables devant les autres grandeurs de même nature qui apparaissent dans le système, si bien que, pour simplifier, on peut les considérer comme nulles. »

En tenant une telle affirmation, le physicien sous-entend en particulier que, plus les constantes ε et μ sont petites, plus on est proche du régime où les constantes sont effectivement nulle. Dit autrement, si on note $(\mathbf{e}^\eta, \mathbf{h}^\eta, \mathbf{m}^\eta)$ la solution du système complet de Maxwell-Landau-Lifshitz adimensionné (1.5), et que l'on note $(\mathbf{e}^0, \mathbf{h}^0, \mathbf{m}^0)$ la solution de l'équation de Landau-Lifshitz jointe aux équations de Maxwell stationnaires,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{h} + \mathbf{m}) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} &= 0 \quad \mathbf{e} = 0 \end{cases}$$

alors, dans un espace de solutions à préciser, $(\mathbf{e}^\eta, \mathbf{h}^\eta, \mathbf{m}^\eta)$ converge vers $(\mathbf{e}^0, \mathbf{h}^0, \mathbf{m}^0)$ dans un sens à préciser lorsque η tend vers 0. C'est dans le but d'établir une telle propriété qu'ont été réalisés les deux premiers travaux de cette thèse.

1.4 Un peu de littérature en ferromagnétisme

Le ferromagnétisme a donné lieu à de nombreux travaux numériques et théoriques en mathématiques. Pour une présentation, on pourra consulter l'article d'Halpern-Labbé [29] publié en 2001 dans *Matapli*, qui fait une excellente synthèse sur le sujet.

En ce qui concerne les différents types de problèmes d'ordre qualitatif étudiés touchant au domaine du ferromagnétisme, deux catégories en constituent une proportion significative : une approche de minimisation d'énergie, et une approche EDP, donnée par l'équation de Landau-Lifshitz.

1.4.1 Une approche de minimisation d'énergie

Dans le paragraphe précédent, une énergie comportant plusieurs termes semble jouer un rôle important dans le ferromagnétisme. C'est ainsi que plusieurs personnes ont cherché à travailler à partir de problèmes de minimiseurs d'une énergie. Il s'agit donc de déterminer des fonctions \mathbf{m} réalisant le minimum de

$$\mathcal{E}(\mathbf{m}) = \mathcal{E}_{\text{ext}}(\mathbf{m}) + \mathcal{E}_d(\mathbf{m}) + \mathcal{E}_a(\mathbf{m}) + \mathcal{E}_e(\mathbf{m})$$

Une des difficultés de ce problème réside dans le manque de convexité de ce problèmes. (la contrainte $|\mathbf{m}| = 1$ ne décrit pas un ensemble convexe). En particulier, l'unicité des minimiseurs reste souvent un problème encore ouvert. Dans [13], G. Carbou obtient un résultat de régularité partielle des minimiseurs de l'énergie.

Sur ce point de vue de la minimisation d'énergie (qui met plusieurs termes de nature différentes en compétition) plusieurs problèmes ont été traités, notamment sur les régimes limites lorsque l'une des énergie devient prépondérante devant une autre. Il s'agit souvent de regarder la limite dans un sous-espace topologique de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (espace vectoriel des distributions sur Ω) d'une suite (\mathbf{m}^ε) de minimiseurs d'une énergie $\mathbf{m} \mapsto \mathcal{E}_\varepsilon(\mathbf{m})$. Peuvent y être ajoutés des conditions de plaques minces (ou bien très épaisses), la mise en forme de la contrainte $|\mathbf{M}| = M_s$ sous une forme affaiblie également par un terme de l'énergie à minimiser. Pour des exemples de problèmes de ce type, on pourra consulter des articles de Alouges-Labbé [2], Aviles-Giga [3], Rivière-Serfaty [44], et Alouges-Rivière-Serfaty [4].

1.4.2 Approche EDP

L'approche mathématique du ferromagnétisme dans ce travail repose uniquement sur la modélisation par le système d'EDP d'évolution précédemment décrit, qui fait donc intervenir une équation de Landau-Lifshitz comme celle évoquée plus haut.

En ce qui concerne le champ total (ou champ effectif), l'intervention du champ d'anisotropie et du champ extérieur posent peu de problèmes théoriques supplémentaires. C'est la présence du champ démagnétisant qui introduit l'une des caractéristiques de l'équation de Landau-Lifshitz. Enfin, les problèmes avec la présence du champ d'échange sont, d'un point de vue mathématique, très différents de ceux sans échange.

En ce qui concerne les questions qui se posent en présence du terme d'échange (qui, lorsque le domaine Ω du matériau n'est pas égal à l'espace entier, nécessitent l'introduction d'une condition aux limites de type Neumann $\partial_n \mathbf{m} = 0$ sur $\partial\Omega$) :

- Alouges et Soyeur ont démontré dans [5] un résultat d'existence et de non unicité lorsque l'on considère l'équation de Landau-Lifshitz seule et, avec pour champ \mathbf{h}_T , le seul champ d'échange $-\nu^2 \mathbf{1}_\Omega \Delta \mathbf{m}$ (avec $\nu = 1$, bien que ceci n'ait pas d'incidence).
- Carbou et Fabrie ont démontré dans [15] l'existence globale de solutions faibles² à système (1.5) avec $\mathbf{h}_T = \mathbf{h} - \Delta \mathbf{m}$, donc avec champ d'échange. On a donc existence avec

$$(\mathbf{e}, \mathbf{h}) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))^2, \quad |\nabla \mathbf{m}| \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \partial_t \mathbf{m} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$$

sous l'hypothèse que $\mathbf{m} \in H^1(\Omega)$.

- L'existence locale et l'unicité de solutions fortes ont également été établies par Carbou-Fabrie, où \mathbf{m} est de module 1, soit en domaine borné, soit sur \mathbb{R}^3 (voir [17] et [18]) :

$$(\mathbf{e}, \mathbf{b}) \in L^\infty((0, T); H^1(\mathbb{R}^3)), \quad \nabla \mathbf{m} \in L^\infty((0, T); H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2((0, T); H^2(\mathbb{R}^3))$$

- Une étude de l'asymptotique à faible champ d'échange ($\nu \rightarrow 0$) a été également faite par Carbou-Fabrie-Gues dans [19] et [20]. Il y est établi l'apparition d'une couche limite au bord du matériau, du fait que la condition à la limite $\partial_n \mathbf{m} = 0$ n'a pas de raison d'être vérifiée.

Dans toute la suite (sauf précision contraire), on se place dans le cas d'une absence d'énergie d'échange. Lorsque l'on parle de problème en dimension $d = 1$ ou $d = 2$, (au lieu de $d = 3$), il faut comprendre que les champs \mathbf{e} , \mathbf{h} et \mathbf{m} , à t fixé, sont définis sur un domaine Ω de \mathbb{R}^d (au lieu de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$), et toujours à valeurs dans \mathbb{R}^3 . L'identification canonique de telles application avec des fonctions $\Omega \times \mathbb{R}^{3-d} \rightarrow \mathbb{R}^3$ indépendantes des $3 - d$ dernière variable permet de donner un sens aux différents opérateurs différentiels \mathbf{rot} , \mathbf{div} . L'absence de régularisation dans les équations (du à l'absence du terme d'échange) offre des démonstrations différentes lorsque $d = 1, 2$ ou 3 (qui utilisent les injections de Sobolev, qui ne sont pas les mêmes selon la dimension).

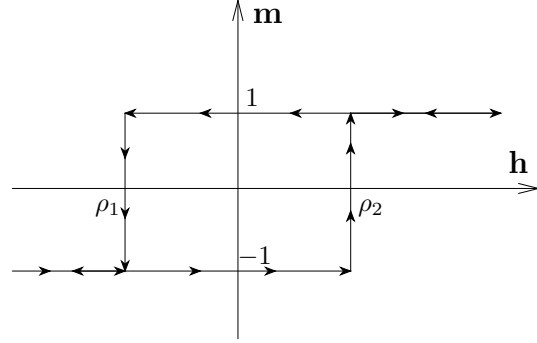
- En dimension 1, Vacus et P. Joly ont démontré l'existence et l'unicité de solutions fortes [39] comme de solutions faibles [38] à l'équation de Landau-Lifshitz.
- Haddar ([26] et [27]) a montré l'existence et l'unicité de solutions fortes en 2D.
- Joly-Métivier-Rauch [37] ont démontré l'existence et l'unicité de solutions fortes au système de Maxwell-Landau-Lifshitz.
- Jochmann [32] a élargi le résultat de Joly-Métivier-Rauch avec des perméabilité et permittivité variables (et non régulières). Dans le même papier, Jochmann a démontré une asymptotique faible vers le régime quasi-stationnaire.

²De manière imprécise, une solution d'une EDP est dite « solution faible » lorsqu'elle est vraie au sens des distributions (ce qui impose en particulier que chaque terme ait un sens). Elle est dite « solution forte » lorsque toutes les manipulations naturelles et formelles – comme la préservation d'une quantité – sont justifiables. Cette « définition » montre en particulier que la définition de solution faible ou forte sera sensiblement différente, en présence, ou non, du terme d'échange, qui comporte un laplacien, donc des dérivées du deuxième ordre en espace.

Les deux premiers travaux que nous avons effectués considèrent des solutions fortes en 3D de Joly-Métivier-Rauch (pour le premier travail) et de Jochmann (pour le second travail).

Enfin, Visintin ([52], [51], [50]) a étudié des phénomènes intervenant en ferromagnétisme, en considérant une évolution selon un modèle d'hystérésis (qui n'est pas décrit par une équation différentielle d'évolution). Par exemple, le modèle de Presach fournit une application fortement non linéaire (qui serait ici $\mathbf{h}_{\text{ext}} \mapsto \mathbf{m}$, ou alors $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{m}$), d'un espace de fonctions $BV(0, T) \cap C^0(0, T)$ dans $BV(0, T)^3$, dont la description peut se formuler de la manière suivante (pour des champs à valeurs dans \mathbb{R}) :

\mathbf{m} est au départ à une certaine valeur, par exemple -1 , et garde cette valeur jusqu'à ce que \mathbf{h} franchisse un seuil ρ_2 . Alors \mathbf{m} prend pour valeur 1 , et gardera cette valeur, jusqu'à ce que \mathbf{h} redescende à une valeur $\rho_1 < \rho_2$, etc.



D'autres opérateurs d'hystérésis ont été étudiés par Visintin, et ont donné lieu à des couplages avec des équations de Maxwell ([53], [52]).

1.5 Énoncé des résultats obtenus

1.5.1 Estimation de l'énergie locale pour le système de Maxwell-Landau-Lifshitz et Applications

Le premier chapitre de la thèse est la justification de l'approximation quasi-stationnaire des équations de Maxwell dans le cas d'une perméabilité électrique constante. On y établit le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Soit $(\mathbf{e}^\eta, \mathbf{h}^\eta, \mathbf{m}^\eta)$ l'unique solution du problème (1.5) (donnée par [37]) dans l'espace*

$$C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \times C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \times (C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^3))) .$$

Alors, lorsque η tend vers 0, $(\mathbf{e}^\eta, \mathbf{h}^\eta, \mathbf{m}^\eta)$ converge fortement vers $(0, \mathbf{h}^d(\mathbf{m}^0), \mathbf{m}^0)$, où \mathbf{m}^0 est la solution de l'équation de Landau-Lifshitz quasi-stationnaire.

³ $BV(0, T)$ désigne l'espace des fonctions à variation bornée sur $[0, T]$, c'est-à-dire dont la dérivée-distribution est une mesure de Radon.

L'ingrédient important dans cette démonstration réside dans une estimation locale en espace de la partie propagée $(\mathbf{e}^\eta, \mathbf{h}_\perp^\eta)$ du champ électromagnétique. Cette estimation s'obtient à l'aide d'une estimation de l'énergie locale sur l'équation des ondes, via la proposition suivante.

Proposition 1.1 *Soit u la solution dans $C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$ de l'équation des ondes :*

$$\begin{cases} \square u &= Pf \\ u|_{t=0} &= u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

où $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est à support dans $\mathbb{R}_+ \times B(0, 1)$, et P est un multiplicateur de Fourier, dont le symbole $p(\xi)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et homogène de degré 0.

Alors, on a l'estimation suivante (pour tout $p \geq 2$) :

$$\|(u, \partial_t u)\|_{L^p(\mathbb{R}_+; \dot{H}^1(B(0, R)) \times L^2(B(0, R)))} \lesssim R \|(u_0, u_1)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+; L^2_{comp}(\mathbb{R}^3))} \quad (1.7)$$

La preuve de cette proposition repose principalement sur l'écriture de la solution explicite de l'équation des ondes.

D'autre part, le reste de la preuve du théorème 1.1 se déduit d'une adaptation de la méthode de démonstration de l'existence de solutions de Joly-Métivier-Rauch.

Enfin, l'unicité de l'équation de Landau-Lifshitz repose essentiellement sur un contrôle du défaut de bornitude de l'application linéaire $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{h}_d$ de L^∞ dans L^∞ (la présence d'un tel contrôle permettrait de conclure quant à l'unicité par une application directe du lemme de Gronwall).

Par ailleurs, nous avons également établi la stabilité des équations par rapport au paramètre d'amortissement α (ce qui a été fait par Hamdache-Tilioua [30], en présence du terme d'échange)

1.5.2 Estimations en milieu inhomogène

La seconde partie de la thèse généralise les résultats de la première, dans le cas où les coefficients de perméabilité et permittivité (des équations de Maxwell) sont variables, mais réguliers et constants hors d'un compact. Le principe de la démonstration reste essentiellement le même, et repose également sur une estimation de l'énergie locale de l'équation de propagation. Cette fois, l'estimation est établie, d'une part grâce à une estimation de la résolvante (1.8) ci-dessous pour une perturbation compacte et matricielle du Laplacien (qui provient du système de Maxwell), d'autre part par un argument de type $T-T^*$, déjà utilisé par Burq dans [12].

Proposition 1.2 *Soit $P = P(x, D)$ un opérateur différentiel matriciel sur \mathbb{R}^3 auto-adjoint, uniformément elliptique et positif d'ordre 2, dont le symbole de la forme*

$$p(x, \xi) = a(x)|\xi|^2 + \sum_{j=1}^3 b_j(x)\xi_j + V(x)$$

où a est une fonction à valeurs réelles (définie sur \mathbb{R}^3), et les b_j et V sont des fonctions à valeurs matricielles. Alors pour tout $s > 1/2$ et toute fonction $\chi(x)$ régulière et à support compact, la formule

$$R(z) = \chi (P - z^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}$$

qui définit une fonction continue sur $\mathbb{C}_+ := \{Im z > 0\}$ à valeurs dans l'espace des opérateurs continus de $H^\gamma(\mathbb{R}^3)$ dans $H^{\gamma+2}(\mathbb{R}^3)$ pour tout γ , se prolonge continûment à $\overline{\mathbb{C}_+}$; en outre, nous avons l'estimation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \|\chi (P - z^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+j}} \lesssim \langle z \rangle^{j-2}, \quad j = 0, 1, 2 \quad (1.8)$$

L'estimation hautes fréquences ($z \rightarrow \pm\infty$) est due à D. Robert [45], et la preuve utilise la théorie des commutateurs de Mourre (voir [36]). Notre estimation pour les basses fréquences s'obtient par des opérations sur la résolvante utilisant entre autres le calcul pseudo-différentiel.

1.5.3 Asymptotique en cas de variations lentes du champ appliqué

La troisième partie constitue le début d'une étude asymptotique des variations lentes du champ extérieur en dimension 1 (de sorte que l'équation de Landau-Lifshitz sans échange n'est plus qu'une équation différentielle ordinaire). Elle se ramène donc à l'étude de la limite lorsque ε tend vers zéro d'une suite de solutions (\mathbf{m}^ε) d'une équation de la forme :

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{m}}{dt}(t) = F(\mathbf{m}(t), t)$$

Formellement, \mathbf{m}^ε devrait donc converger vers des points $\mathbf{m}^0(t)$ tels que $F(\mathbf{m}^0(t), t) = 0$. Nous démontrons ce résultat dans le cas général, lorsque $\mathbf{m}^0(t)$ (bien défini localement en t comme fonction régulière par le théorème des fonctions implicites) est un point attractif de l'équation autonome :

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{m}}{ds}(s) = F(\mathbf{m}(s), t)$$

Nous mettons en évidence de larges cas où ce théorème général peut s'appliquer à une équation de Landau-Lifshitz (équation différentielle ordinaire). Enfin, dans le seul cas où le théorème obtenu ne peut s'appliquer, l'une des trois composantes de \mathbf{m} vérifie une équation différentielle (ne faisant pas intervenir les autres composantes), qui est traitée plus en détail. Il y est notamment montré, non seulement la convergence vers le point d'équilibre (qui reste ici constant, indépendant de t) lorsque celui-ci est stable, mais également le fait que le « décollage » éventuel du point, lorsque celui-ci devient instable à partir d'un temps t_1 , ne se fait qu'à un temps t_2 strictement supérieur à t_1 .

Chapitre 2

Local Energy Estimates for Maxwell-Landau-Lifshitz System and Applications

Abstract. We study the Maxwell-Landau-Lifshitz system without exchange energy. First, we prove an $L^p(L^2_{loc})$ estimate for the linear wave equation and apply this local energy estimate to obtain a bound on the curl of the electromagnetic field, uniformly in time and locally in space. Next, we prove strong convergence results, when the time t tends to ∞ or when the speed of light tends to ∞ (which corresponds to the quasi-stationary approximation). Finally, we establish a stability result with respect to the damping parameter of the Landau-Lifshitz equation.

2.1 Introduction

2.1.1 Presentation of the Maxwell-Landau-Lifshitz system

The Maxwell-Landau-Lifshitz system reads

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_T(\varepsilon_0 \mathbf{E}) - \mathbf{curl} \mathbf{H} = 0 \\ \partial_T(\mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})) + \mathbf{curl} \mathbf{E} = 0 \\ \partial_T \mathbf{M} = \gamma_0 \left(\mathbf{M} \times \mathbf{H}_T + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_T) \right) \\ (\mathbf{E}(0), \mathbf{H}(0)) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \\ \mathbf{M}(0) = \mathbf{M}_0 \\ \operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = 0 \\ \operatorname{div}(\mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})) = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

where the electric field \mathbf{E} , the magnetic field \mathbf{H} and the magnetization \mathbf{M} depend on the time $T \in \mathbb{R}_+$ and the space-variable $X \in \mathbb{R}^d$ and take values into \mathbb{R}^3 . Here, the dielectric and magnetic permittivities ε_0 and μ_0 are constants.

Although in most physical applications $d = 3$, the cases $d = 1, 2$ are also of interest. $\mathbf{M}(T)$ is assumed to be supported in a compact $\bar{\Omega}$ included in B_R . $|\mathbf{M}|$ is assumed to be a constant M_s on $\bar{\Omega}$. α is a non-dimensional constant called the damping parameter, between 0 and 1. Physically, we have α of order 10^{-1} or 10^{-2} . Here and below we denote by $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq \rho\}$ the ball in \mathbb{R}^d centered in 0 with radius ρ , and $B = B_1$.

The effective magnetic field \mathbf{H}_T , is defined by

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H} + \mathbf{H}_a(\mathbf{M}) + \mathbf{H}_e(\mathbf{M}) + \mathbf{H}_{\text{ext}} ,$$

where, (see also [40], [26])

- for M in \mathbb{R}^3 , $\mathbf{H}_a(M) = -\nabla_M \tilde{\Phi}(M)$, where the datum $\tilde{\Phi}$ is a non-negative convex function from \mathbb{R}^3 which vanishes at 0. $\mathbf{H}_a(\mathbf{M})$ is called the anisotropy energy.
- $\mathbf{H}_e(\mathbf{M}) = -K \mathbf{1}_\Omega \Delta \mathbf{M}$, is the exchange energy.
- and \mathbf{H}_{ext} the Zemann energy or exterior energy, is given and does not depend on T .

Here, we consider the case $K = 0$. Mathematical results are very different in the other case (see, for instance, [14]). Note that the last two equations in (2.1) are satisfied for all times if they hold at $T = 0$. The non-dimensionalized system is :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \partial_t \mathbf{e} - \mathbf{curl} \mathbf{h} = 0 \\ \eta \partial_t (\mathbf{h} + \mathbf{m}) + \mathbf{curl} \mathbf{e} = 0 \\ \partial_t \mathbf{m} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_T - \alpha \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_T) \\ (\mathbf{e}(0), \mathbf{h}(0)) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0) \\ \mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{e}) = 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{h} + \mathbf{m}) = 0 \\ |\mathbf{m}| = \mathbf{1}_\Omega \quad \Omega \subset B \\ \mathbf{h}_T = \mathbf{h} + \mathbf{h}_{\text{ext}} - \nabla \Phi(\mathbf{m}) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

where $\eta = v/c$ is the quotient of two characteristic speeds of the system, i.e. the giromagnetic ratio in the Landau-Lifshitz equation $v = R|\gamma_0| M_s$, and the speed of light $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$.

2.1.2 Main results

In the case with no exchange energy, the system was studied by Joly-Métivier-Rauch in [37]. They established the existence of energy solutions, i.e. weak solutions satisfying natural energy estimates.

Theorem 2.1 (Joly-Métivier-Rauch) *For $d \leq 3$, assume that $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0$ are in $L^2(\mathbb{R}^d)$, and that $\mathbf{m}_0, \mathbf{h}_{\text{ext}} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ and $\operatorname{supp} \mathbf{m}_0$ is compact. Then there exists an energy solution of (2.2), such that the fields $\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m}$ are in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^d))$. Moreover, if we assume that $\mathbf{curl} \mathbf{e}_0$ and $\mathbf{curl} \mathbf{h}_0$ are in $L^2(\mathbb{R}^d)$, then the energy solution is unique and the fields $\mathbf{curl} \mathbf{e}, \mathbf{curl} \mathbf{h}$ are also in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^d))$.*

The proof of this theorem can be found in [37]. The term $\Phi(\mathbf{m})$ does not appear there, but its addition does not modify the proof substantially.

When $d = 2$, Haddar ([26]) has generalized the above result to variable ε in (2.1). When $d = 3$, Jochmann ([32]) proved the existence of weak energy solution of (2.1) in a more general situation, when ε and μ are non-constant and the first equation is replaced with

$$\partial_T(\varepsilon \mathbf{E}) - \mathbf{curl} \mathbf{H} = -\sigma \mathbf{E} - \mathbf{J}, \quad (2.3)$$

where σ is a bounded non-negative function from \mathbb{R}^3 , and \mathbf{J} belongs to $L^1(L^2(\mathbb{R}^3))$. No other result is known in the literature for strong solutions without exchange term.

Other results are available in the presence of the exchange term $\mathbf{h}_e(\mathbf{m})$ (see [15]).

We are interested in the strong solution of the problem (2.2) given by Theorem 2.1. We consider only the spatial dimensions $d = 1, 2, 3$, in order for the system (2.2) to be physically meaningful. However, the results on the wave equation are clearly true in any dimension.

We use the orthogonal decomposition of $L^2(\mathbb{R}^d)$: for $\mathbf{h} \in L^2$, \mathbf{h}_\perp (resp. \mathbf{h}_\parallel) is the orthogonal projection on Ker div (resp. Ker curl). The orthogonal component of \mathbf{h} satisfies the following wave equation :

$$(\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) \mathbf{h}_\perp = -\eta^2 \partial_t^2 \mathbf{m}_\perp. \quad (2.4)$$

Consider a function P which is \mathcal{C}^∞ on $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ and homogeneous of degree 0, and denote by $P(D)v$ the function such that $\widehat{P(D)v}(\xi) = P(\xi)\widehat{v}(\xi)$, where $\widehat{f}(\xi)$ is the Fourier transform of f defined by

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

This work is based on a local energy estimate for solution of (2.4). Our first result is :

Theorem 2.2 *Let v be a real-valued function from \mathbb{R}_+ to \mathbb{R}^d and let $1 \leq p \leq +\infty$. Let us assume that $\text{supp } v \subset \mathbb{R}_+ \times B$, and $v \in L^p(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))$, and $d \geq 2$. Denote by u_{Pv} the solution of the Cauchy problem*

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t^2 - \Delta)u &= P(D)v = Pv \\ u|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t u|_{t=0} &= 0 \end{cases}.$$

Then $\nabla_{t,x} u_{Pv} \in L^p(\mathbb{R}_+, L^2_{\text{loc}}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2_{\text{loc}})$, and there exists a constant $C > 0$ depending only on P , such that for $v \in L^p(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))$ α, q with $p \leq q \leq +\infty$ and $\rho \geq 1$

$$\eta \|\partial_t u_{Pv}\|_{L^q(L^2(B_\rho))} + \|\nabla u_{Pv}\|_{L^q(L^2(B_\rho))} \leq C \rho^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(L^2(\mathbb{R}^d))}.$$

This theorem can be used to prove for the system (2.2) :

Proposition 2.1 *Assume that $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{m}_0, \mathbf{curl} \mathbf{e}_0, \mathbf{curl} \mathbf{h}_0$ are in $L^2(\mathbb{R}^d)$, \mathbf{h}_{ext} is in $L^\infty(B)$ and let $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ be the strong solution of (2.2). Then, when $\alpha > 0$ the fields \mathbf{e} and \mathbf{h}_\perp are in $L^2(\mathbb{R}_+; L^2_{\text{loc}})$.*

We can obtain :

Theorem 2.3 *Assume that $\alpha > 0$ and $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0$ are in $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{h}_{\text{ext}} \in L^\infty(B)$; then*

$$\mathbf{e}(t), \mathbf{h}_\perp(t) \rightarrow 0 \text{ when } t \rightarrow +\infty \text{ in } L^2(L^2_{\text{loc}}) .$$

Next, we derive a uniform bound on first derivatives when η is sufficiently small.

Theorem 2.4 *Assume that $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{m}_0, \mathbf{curl} \mathbf{e}_0, \mathbf{curl} \mathbf{h}_0$ are in $L^2(\mathbb{R}^d)$, \mathbf{h}_{ext} is in $L^\infty(B)$. Then for η sufficiently small, $\mathbf{curl} \mathbf{e}$ and $\mathbf{curl} \mathbf{h}$ are in $L^\infty(L^2_{\text{loc}})$.*

This improves the results of [37], giving uniform estimates with respect to t of first derivatives of the electromagnetic field.

In [33], when $t \rightarrow +\infty$, the weak convergence in L^2 of $\mathbf{E}(t)$ and $\mathbf{H}_\perp(t)$ is established in (2.1)-(2.3), even in the case of variable ε and μ . A strong convergence result on $\mathbf{E}(t)$ is proved only when $\sigma \geq \sigma_0 > 0$. The description of the ω -limit set is only obtained with an exchange term which leads to an H^1 bound for \mathbf{m} ; cf. [16, 15].

We prove next the following quasi-stationary convergence result :

Theorem 2.5 *The Cauchy problem*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{m} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_T - \alpha \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_T) \\ \mathbf{curl} \mathbf{h} = 0 \\ \text{div}(\mathbf{h} + \mathbf{m}) = 0 \\ \mathbf{m}|_{t=0} = \mathbf{m}_0 \end{array} \right.$$

has a unique solution $\mathbf{m} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; L^2)$. Moreover, denoting by $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{h}_\eta, \mathbf{m}_\eta)$ the solution of (2.2) for $\alpha \geq 0$ fixed, the fields \mathbf{e}_η and $\mathbf{h}_{\eta\perp}$ converge as $\eta \rightarrow 0$ to 0 in $L^2(\mathbb{R}_+; L^2_{\text{loc}})$ while \mathbf{m}_η converges strongly to \mathbf{m} in $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^2)$.

Whithout damping term (i.e. when $\alpha = 0$) the uniqueness has been proved by Jochmann [32], assuming that μ is non-constant. Again in [32], the weak quasi-stationary limit has been established.

In the last section of this paper, η being fixed and $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{m}_\alpha)$ being the solution of (2.2), we prove :

Proposition 2.2 *When α tends to 0, $(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{h}^\alpha, \mathbf{m}^\alpha)$ converges in $L^2_{\text{loc}}(L^2_{\text{loc}}) \times L^2_{\text{loc}}(L^2_{\text{loc}}) \times \mathcal{C}(L^2)$ to a strong solution $(\mathbf{e}^0, \mathbf{h}^0, \mathbf{m}^0)$ of the system (2.2) with $\alpha = 0$.*

2.2 Transformation and non-dimensionalization

2.2.1 Transformation

We consider the system (2.1). We assume that

- $\text{supp } \mathbf{M}_0 \subset B_R$;
- $\forall x \in \text{supp } \mathbf{M}_0, \quad |\mathbf{M}_0(x)| = M_s \in \mathbb{R}_+^*$;

Let $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$ be an energy solution of this system. Then we have

$$\partial_t \mathbf{M}(t, x) \mathbf{M}(t, x) = 0 \quad f.a.e. \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

This implies that :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |\mathbf{M}(t, \cdot)| = M_s \mathbf{1}_{\text{supp } \mathbf{M}_0}.$$

In particular, $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$ is a solution of the (polynomial) PDE system :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_T \varepsilon_0 \mathbf{E} - \mathbf{curl} \mathbf{H} = 0 \\ \partial_T \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) + \mathbf{curl} \mathbf{E} = 0 \\ \partial_T \mathbf{M} = \gamma_0 \left(\mathbf{M} \times \mathbf{H} + \frac{\alpha}{M_0} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right) \\ (\mathbf{E}(0), \mathbf{H}(0)) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \\ \mathbf{M}(0) = \mathbf{M}_0 \\ \text{div} (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = 0 \\ \text{div} \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0 \end{array} \right. .$$

Conversely, by the same method, a solution of this PDE system is also solution of the system (2.1).

2.2.2 Non-dimensionalization

Make the following scalings :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{e} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathbf{E}}{M_s} & \Phi(m) = \frac{\tilde{\Phi}(M_s m)}{M_s^2} \\ \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{M_s} & \mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{M_s} \\ x = \frac{X}{R} & t = |\gamma_0| M_s T \end{array} \right. .$$

Define

$$\eta = R |\gamma_0| M_s \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} .$$

Remark 2.1 η is nothing but the quotient v/c of two characteristic system speed : first, the giromagnetic ratio in Landau-Lifshitz equation $v = R|\gamma_0| M_s$, next, the speed of light $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. In particular, the limit $\eta \rightarrow 0$ corresponds to the quasi-stationary approximation of the electromagnetic field.

The non-dimensionalized system is now exactly (2.2), and we know that $\text{supp } \mathbf{m}_0 \subset B$ and $|\mathbf{m}_0| = 1$ on $\text{supp } \mathbf{m}_0$.

Remark 2.2 We do not see the geometry of $\text{supp } \mathbf{m}_0$; we only use that it is bounded, so has a finite Lebesgue measure.

Notation 2.1 Let $f(m, h) = -m \times h - \alpha m \times (m \times h)$.

Properties 2.1 The function f satisfies :

- $f(0, h) = 0, \quad h \in \mathbb{R}^3$;
- f is linear with respect to h ;
- f is locally Lipschitzian with respect to m ;
- $f(m, h) \cdot m = 0 \quad h, m \in \mathbb{R}^3$;
- $f(m, h) \cdot h = \alpha |m \times h|^2 \quad h, m \in \mathbb{R}^3$;
- $|f(m, h)|^2 = (1 + \alpha^2 |m|^2) |m \times h|^2$.

2.2.3 Classical energy estimates

Notation 2.2 Let $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ be a weak solution of system (2.2). We note

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (\|\mathbf{e}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\mathbf{h}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2) + \int_B \Phi(\mathbf{m}(t)) + \frac{1}{2} |\mathbf{h}_{\text{ext}} - \mathbf{m}(t)|^2 dx .$$

\mathcal{E} is the usual electromagnetic energy in the Maxwell system, completed with the different energies coming from Landau-Lifshitz equation.

Let $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ be a strong solution of system (2.2). Recall that

$$|\mathbf{m}(t, x)| = |\mathbf{m}_0(x)| \quad a.e . \tag{2.5}$$

Take the $L^2(\mathbb{R}^d)$ scalar product of the first (resp. second) equation in (2.2) with $\mathbf{e}(t)$ (resp. $\mathbf{h}(t)$). Add the two expressions. Because \mathbf{curl} is self-adjoint, we find

$$\eta \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \eta \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \mathbf{m}(t) \cdot \mathbf{h}(t) dx = 0 .$$

Now, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_T + \nabla \Phi(\mathbf{m}) - \mathbf{h}_{\text{ext}}$. Thus,

$$\partial_t \mathbf{m} \cdot \mathbf{h} = \partial_t \mathbf{m} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{m}) - \partial_t \mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{ext}} + \partial_t \mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_T = \partial_t \Phi(\mathbf{m}) - \partial_t \mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{ext}} + f(\mathbf{m}, \mathbf{h}_T) \cdot \mathbf{h}_T .$$

Then, with (2.5), we have $-\partial_t \mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{ext}} = \partial_t \frac{1}{2} |\mathbf{h}_{\text{ext}} - \mathbf{m}|^2$. Now, thanks to the two last properties in 2.1,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \|\partial_t \mathbf{m}(t)\|_{L^2}^2 &\leq 0, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \alpha \|\mathbf{m}(t) \times \mathbf{h}(t)\|_{L^2}^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

With a time-integration, we obtain :

Proposition 2.3 *Assume that $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ is an energy solution of system (2.2) ; then for all $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \int_0^t \|\partial_t \mathbf{m}(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \mathcal{E}(0), \\ \mathcal{E}(t) + \alpha \int_0^t \|\mathbf{m}(s) \times \mathbf{h}(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \mathcal{E}(0). \end{aligned}$$

In particular , $\mathbf{m} \times \mathbf{h}$ and $\partial_t \mathbf{m}$ belong to $L^2(\mathbb{R}_+^{1+d})$

Definition 2.1 *Let $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ be a weak solution, that is a solution in the distribution sense, of the system (2.2). We say that it is an energy solution if $\mathcal{E}(0) < +\infty$ and if the estimates (2.5), and Proposition 2.3 are satisfied.*

2.3 Local energy for the wave equation

2.3.1 An L^2 orthogonal decomposition

The system (2.2) uses the curl and div operators. We decompose the system, taking the curl part and the div part. Introduce the orthogonal decomposition of $L^2(\mathbb{R}^d)$:

Notation 2.3 *Define*

$$\begin{aligned} L_{\perp}^2(\mathbb{R}^d) &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{div} u = 0 \right\} \\ \text{and } L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^d) &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{curl} u = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.4 *We have an orthogonal sum*

$$L^2(\mathbb{R}^d) = L_{\perp}^2(\mathbb{R}^d) \oplus L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^d).$$

We denote by $P_{\perp} : u \mapsto P_{\perp} u = u_{\perp}$ and $P_{\parallel} : u \mapsto P_{\parallel} u = u_{\parallel}$ the two projectors associated to this decomposition.

Those projectors are both Fourier multipliers, with a symbols defined, respectively by

$$\widehat{P_{\perp} f}(\xi) = -\frac{\xi \times (\xi \times \widehat{f}(\xi))}{|\xi|^2} \text{ and } \widehat{P_{\parallel} f}(\xi) = \frac{\xi \cdot (\xi \cdot \widehat{f}(\xi))}{|\xi|^2}.$$

The equation $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ implies that $\mathbf{e}_\perp = \mathbf{e}$, that $\mathbf{e}_\parallel = 0$. We also have $\mathbf{h}_\parallel + \mathbf{m}_\parallel = 0$. We know that \mathbf{m} has a bounded and time-invariant support in space, and $|\mathbf{m}| = 1$ where $\mathbf{m} \neq 0$. Moreover, $\partial_t \mathbf{m} = f(\mathbf{m}, \mathbf{h})$. This implies that $\operatorname{supp} \partial_t \mathbf{m} \subset \mathbb{R}_+ \times B$.

This provides some information about $\mathbf{h}_\parallel = -\mathbf{m}_\parallel$. In order to know \mathbf{h}_\perp , write the wave equation satisfied by \mathbf{h} :

$$(\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) \mathbf{h} = -\eta^2 \partial_t^2 \mathbf{m} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{m} .$$

Take the projection on $L^2_\perp(\mathbb{R}^d)$:

$$(\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) \mathbf{h}_\perp = -\eta^2 \partial_t^2 \mathbf{m}_\perp .$$

We obtain similarly

$$(\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) \mathbf{e} = -\eta \operatorname{curl} \partial_t \mathbf{m}_\perp .$$

We can consider for the moment \mathbf{m} as a datum. We know that $\partial_t \mathbf{m} \in L^2(\mathbb{R}_+^{1+d})$ thanks to the equation (2.3). Next, we note that, if u is a solution of $(\eta^2 \partial_t^2 - \Delta)u = -\partial_t \mathbf{m}_\perp$, then $\mathbf{e} - \operatorname{curl} u$ and $\mathbf{h}_\perp - \partial_t u$ are solutions of the linear homogeneous wave equation $(\eta^2 \partial_t^2 - \Delta)g = 0$.

2.3.2 L^2 local estimates for the non-homogeneous linear wave equation

In this section, d is any positive integer (not necessary less or equal than 3).

Notations 2.1 We denote by $S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = \rho\}$ the sphere centered in 0 with radius ρ , and $\Gamma_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leq |x| \leq b\}$ the annulus with radii a and b .

Notation 2.4 We denote by $E = E(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ the fundamental solution of the wave equation ($\square E = \delta_{t,x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$, where $\square = \partial_t^2 - \Delta$) supported in $\{t \geq 0\}$, and $\mathbf{E} : t \mapsto \mathbf{E}(t)$ the fundamental solution valued at the time t , ie, $\mathbf{E} \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$ is defined by :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{1+d}), \quad \langle E, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d}), \mathcal{D}(\mathbb{R}^{1+d})} = \int_{\mathbb{R}_+} \langle \mathbf{E}(t), \phi(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} dt .$$

We have for $t \geq 0$

$$\widehat{\mathbf{E}(t)}(\xi) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} .$$

This formula implies that

Proposition 2.5 For $t \geq 0$, $\mathbf{E}'(t)$ defines by convolution in \mathbb{R}_x^d a continuous mapping from $L^2(\mathbb{R}^d)$ to $L^2(\mathbb{R}^d)$ with norm equal to 1. Similarly, $\nabla \mathbf{E}(t)$ defines a continuous mapping from $L^2(\mathbb{R}^d)$ to $L^2(\mathbb{R}^d)$ with norm equal to 1.

When d is even, $\mathbf{E}(t)$ is a smooth distribution outside S_t , defined by (see [46] and [24])

$$\mathbf{E}(t)(x) = E(t, x) = \frac{\left(\frac{d}{2} - 1\right)!}{2 \pi^{d/2} (d-1)!} \frac{\mathbf{1}_{\{|x| < t\}}}{\left(\sqrt{t^2 - |x|^2}\right)^{d-1}} = \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{d-2}{2}} \frac{t^d \mathbf{1}_{\{|x| < t\}}}{\left(\sqrt{t^2 - |x|^2}\right)^{1/2}} .$$

This implies :

$$\begin{aligned} \text{for } |x| < t, \quad \partial_t E(t, x) &= \mathbf{E}'(t)(x) = -\frac{\left(\frac{d}{2} - 1\right)!}{2 \pi^{d/2} (d-2)!} \frac{t}{\left(\sqrt{t^2 - |x|^2}\right)^{d+1}}, \\ \text{for } |x| < t, \quad \nabla_x E(t, x) &= \nabla \mathbf{E}(t)(x) = -\frac{\left(\frac{d}{2} - 1\right)!}{2 \pi^{d/2} (d-2)!} \frac{x}{\left(\sqrt{t^2 - |x|^2}\right)^{d+1}}. \end{aligned}$$

When d is odd, the distributions $\mathbf{E}'(t)$ and $\nabla \mathbf{E}(t)$ are supported in S_t (Huygens principle). We consider the solution u of the Cauchy problem :

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t^2 - \Delta)u &= v \\ u|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t u|_{t=0} &= 0 \end{cases} . \quad (2.6)$$

When $\eta = 1$, u is given by

$$u(t) = \int_0^t \mathbf{E}(t-s) *_x v(s) \, ds := E *_t *_x v(t) .$$

Therefore,

$$\partial_t u(t) = \int_0^t \mathbf{E}'(t-s) *_x v(s) \, ds = \partial_t E *_t *_x v(t) .$$

For locally integrable functions supported in $\{t \geq 0\}$, we use the notation

$$f *_t g(t) = \int_0^t f(t-s) g(s) \, ds .$$

First, we prove the following theorem :

Theorem 2.6 *Let $1 \leq p \leq +\infty$. Assume that $\text{supp } v \subset \mathbb{R}_+ \times B$, and $v \in L^p(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))$. Let u_v be the solution of the Cauchy problem (2.6). Then $\partial_t u$ and ∇u_v are in $L^p(\mathbb{R}_+, L^2_{\text{loc}}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2_{\text{loc}})$. More precisely, there exists a constant C which depends only on d , such that for $v \in L^p(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))$ with $\text{supp } v \subset \mathbb{R}_+ \times B$, for all q with $p \leq q \leq +\infty$, for all $T \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ and $\rho \geq R$, one has :*

$$\eta \|\partial_t u\|_{L^q(L^2(B_\rho))} + \|\nabla u_v\|_{L^q(L^2(B_\rho))} \leq C \rho^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(L^2(\mathbb{R}^d))} .$$

Notation 2.5 *Let P be a smooth function outside the origin, homogeneous with a degree 0 on \mathbb{R}^d . Let*

$$\|P\|_{C^d(S^{d-1})} = \sum_{j=0}^d \|P^{(j)}\|_{L^\infty(S^{d-1})} .$$

Proof of Theorem 2.6. Consider \tilde{u} defined by $\tilde{u}(t, x) = u(\eta \rho t, \rho x)$; we can check that :

- u is solution of $\square \tilde{u} = \rho^2 \tilde{v}$ where $\tilde{v}(t, x) = v(\rho t, \rho x)$.
- $\text{supp } \tilde{v} \supset \mathbb{R}_+ \times B$.
- $\|\tilde{v}\|_{L^p(L^2)} = \eta^{-\frac{1}{p}} \rho^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(L^2)}$.
- $\|\nabla \tilde{u}\|_{L^q(L^2(B_r))} = \eta^{-\frac{1}{p}} \rho^{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^q(L^2(B_{\rho r}))}$.
- $\|\partial_t \tilde{u}\|_{L^q(L^2(B_r))} = \eta^{1 - \frac{1}{p}} \rho^{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|\partial_t u\|_{L^q(L^2(B_{\rho r}))}$.

Hence, it suffices to prove the Theorem for $R = \rho = 1$ and $\eta = 1$, which we now assume.

The principle is to decompose v into several pieces, and next to bound each of them by the convolution of $t \mapsto \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ with a function of $[L^1 \cap L^\infty](\mathbb{R}_+)$.

We write the details of the proof for $\partial_t u$. The estimates for ∇u are similar ; in particular, we use in even dimension, that

$$|\nabla_x E(t, x)| \leq |\partial_t E(t, x)| \quad |x| < t .$$

First with $(t-4)^+ := \max\{t-4, 0\}$ write

$$u_v(t) = \int_0^{(t-4)^+} \mathbf{E}'(t-s) *_x v(s) ds + \int_{(t-4)^+}^t \mathbf{E}'(t-s) *_x v(s) ds .$$

The second integral in the right hand side can be bounded :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{(t-4)^+}^t \mathbf{E}'(t-s) *_x v(s) ds \right\|_{L^2(B)} \\ & \leq \left\| \int_{(t-4)^+}^t \mathbf{E}'(t-s) *_x v(s) ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \int_{(t-4)^+}^t \|\mathbf{E}'(t-s) *_x v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} ds \\ & \leq \int_{(t-4)^+}^t \|v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} ds \\ & \leq (\mathbf{1}_{[0,4]} *_t \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})(t) . \end{aligned}$$

Let's consider $\mathbf{E}'(t-s) *_x v(s)$ on B when $t-s \geq 4$. In odd dimension, the support property of convolution shows that, when $t-s \geq 4$:

$$\mathbf{E}'(t-s) *_x v(s) = 0 \text{ on } B_3 \quad \text{thus on } B .$$

This completes the proof in this case. In even dimension, $\mathbf{E}'(t-s) *_x v(s)$ is on B a smooth function, and for $x \in B$:

$$[\mathbf{E}(t-s) *_x v(s)](x) = \int_B \frac{C_d(t-s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |x-y|^{2d+1}}} \cdot v(s, y) dy ds$$

The Schwarz inequality yields thanks to the fact that $(t-s)^2 - |x-y|^2 \geq \frac{1}{2}(t-s)^2$ for $x \in B$ and $t-s \geq 4$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}'(t-s) *_x v(s)\|_{L^2(B)} &\leq \sqrt{\sigma_d} \|\mathbf{E}'(t-s) *_x v(s)\|_{L^\infty(B)} \\ &\leq C_d \sigma_d \cdot (t-s)^{-d} \cdot \|v(s)\|_{L^2(B)} \\ &\leq C_d \sigma_d \cdot (t-s)^{-d} \cdot \|v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} . \end{aligned}$$

where σ_d is the Lebesgue measure of the unit ball in \mathbb{R}^d .

Noting that $t \mapsto t^{-d} \mathbf{1}_{[4,+\infty[}(t)$ belongs to $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$, this completes the proof. \square

Proof of Theorem 2.2. The scheme of the proof is the same as the proof of Theorem 2.6. Write

$$u_{Pv}(t) = \int_0^{(t-6)^+} \mathbf{E}'(t-s) *_x Pv(s) ds + \int_{(t-6)^+}^t \mathbf{E}'(t-s) *_x Pv(s) ds .$$

The second term in the left hand side is bounded by $\mathbf{1}_{[0,6]} *_t \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. Write, for $t-s \geq 6$,

$$Pv(s) = \underbrace{P(v(s) \mathbf{1}_{B_2})}_{v_1(t,s)} + \underbrace{P(v(s) \mathbf{1}_{\Gamma_{2,t-s-4}})}_{v_2(t,s)} + \underbrace{P(v(s) \mathbf{1}_{\Gamma_{t-s-4,t-s+1}})}_{v_3(t,s)} + \underbrace{P(v(s) \mathbf{1}_{B_{t-s+1}^c})}_{v_4(t,s)} .$$

We want to show that $\|\mathbf{E}'(t-s) *_x v_j(t,s)\|_{L^2(B)} \leq f_j(t-s) \|v(s)\|_{L^2}$ where $f_j \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $j = 1, 2, 3, 4$. The support properties imply :

$$[\mathbf{E}'(t-s) *_x v_4(t,s)]|_B = 0$$

and, in odd space dimension,

$$[\mathbf{E}'(t-s) *_x v_1(t,s)]|_B = [\mathbf{E}'(t-s) *_x v_2(t,s)]|_B = 0 .$$

Moreover, because $\mathbf{E}'(t-s) *_x : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ is continuous,

$$\|[\mathbf{E}'(t-s) *_x v_3(t,s)]\|_{L^2(B)} \leq \|v_3(t,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|Pv(s)\|_{L^2(\Gamma_{t-s-4,t-s+1})} . \quad (2.7)$$

In order to bound the last quantity, we use the following theorem :

Theorem 2.7 *Let $P = P(D)$ be a Fourier multiplier, with symbol $P(\xi)$ smooth on $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ and homogeneous of degree 0. The inverse Fourier transform of $P(\xi)$, denoted $\tilde{P}(x)$ is a smooth function outside the origin, homogeneous of degree $-d$, and there exists a constant γ (which does not depend of P) such that*

$$\forall x \neq 0, \quad |\tilde{P}(x)| \leq \frac{\gamma \|P\|_{C^d(S^{d-1})}}{|x|^d} .$$

For a proof of this result, see [49]. From now on, γ will be the constant given by this theorem.

Corollary 2.1 *Let $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ supported in B , and P as above. Then Pf is smooth on $\mathbb{R}^d \setminus B$, and, when $|x| > 1$, we have :*

$$|Pf(x)| \leq \frac{\gamma \|P\|_{C^d(S^{d-1})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{(|x| - 1)^d}.$$

Proof. Since the singular support of \tilde{P} is contained in $\{0\}$ the singular support of Pf is contained in the support of f and therefore in B (see for instance Chapter 4 of [31]). The inequality is a consequence of Theorem 2.7 and of the following equality

$$Pf(x) = \int_B \tilde{P}(x - y) f(y) dy. \quad \square$$

Corollary 2.2 *There is a constant C which depends only of d such that for all $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ with $\text{supp } f \in B$ and $t \geq 6$,*

$$\|Pf\|_{L^2(\Gamma_{t-4,t})} \leq \frac{C\gamma \|P\|_{C^d(S^{d-1})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{t^{\frac{d+1}{2}}}.$$

Proof. We have $\|Pf\|_{L^2(\Gamma_{t-4,t})} = \|\mathbf{1}_{\Gamma_{t-4,t}} P \mathbf{1}_B f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. The kernel of $\mathbf{1}_{\Gamma_{t-4,t}} P \mathbf{1}_B$ is

$$K(x, y) = \mathbf{1}_{\Gamma_{t-4,t}}(x) \tilde{P}(x - y) \mathbf{1}_B(y).$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} M_1 &:= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|K(x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \sup_{x \in \Gamma_{t-4,t}} \|\tilde{P}(x - \cdot)\|_{L^1(B)} \leq \frac{C_d \gamma \|P\|_{C^d(S^{d-1})}}{(t-5)^d}, \\ M_2 &:= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \|K(\cdot, y)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \sup_{y \in B} \|\tilde{P}(\cdot - y)\|_{L^1(\Gamma_{t-4,t})} \\ &\leq \frac{C \gamma \|P\|_{C^d(S^{d-1})} [t^d - (t-5)^d]}{(t-5)^d} \leq \frac{\gamma \|P\|_{C^d(S^{d-1})} C'_d}{t-5}. \end{aligned}$$

The operator is bounded on $L^2(\mathbb{R}^d)$ with norm smaller than $\sqrt{M_1 M_2}$ thanks to Schur's lemma, implying the corollary. \square

The last Corollary bounds the second member in the inequality (2.7) by $\frac{\|v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{(t-s)^{\frac{d+1}{2}}}$. This finishes the proof of Theorem 2.2 in odd dimension.

It remains to study contributions of v_1 and v_2 in even dimension. In this case :

$$\text{for } x \in B, \quad [\mathbf{E}'(t-s) *_x v_1(t, s)](x) = \int_{B_{\frac{t-s}{2}-1}} \frac{C_d \mathbf{1}_{B_{t-s}}(x-y) (t-s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |x-y|^2}^{d+1}} P v(s, y) dy.$$

Use the inequality $(t-s)^2 - |x-y|^2 \geq \frac{3}{4}(t-s)^2$ on the domain of integration

$$|[\mathbf{E}'(t-s) *_x v_1(t,s)](x)| \leq \frac{C_d}{(t-s)^d} \int_{B_{\frac{t-s}{2}-1}} |Pv(s,y)| dy.$$

Schwarz inequality and the boundedness of P in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$ imply :

$$\|\mathbf{E}'(t-s) *_x v_1(t,s)\|_{L^\infty(B)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_d} C_d \cdot (t-s)^{-d} \cdot \|v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

which concludes for the contribution of v_1 .

Now, we can apply Corollary 2.1 to have an estimate for the contribution of v_2 .

$$[\mathbf{E}'(t-s) *_x v_2(t,s)](x) = \int_{\Gamma_{2,t-s-4}} \frac{C_d(t-s) \mathbf{1}_{\{t-s \geq |x-y|\}}}{\sqrt{(t-s)^2 - |x-y|^2}^{d+1}} Pv(s,y) dy$$

$$|[\mathbf{E}'(t-s) *_x v_2(t,s)](x)| \leq \int_{\Gamma_{2,t-s-4}} \frac{C_d(t-s)}{\sqrt{(t-s)^2 - (1+|y|)^2}^{d+1}} \frac{\|v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{|y|^d} dy$$

On the domain of integration, $t-s+1+|y| \geq t-s$, so in polar coordinates :

$$\begin{aligned} |[\mathbf{E}'(t-s) *_x v_2(t,s)](x)| &\leq \int_{\Gamma_{2,t-s-4}} \frac{C_d(t-s) \|v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{((t-s) - (1+|y|))(t-s+1+|y|)}^{d+1}} \frac{dy}{|y|^d} \\ &\leq C'_d \|v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \int_2^{t-s-4} \frac{1}{(t-s)^{\frac{d-1}{2}} (t-s-(1+r))^{\frac{d+1}{2}}} \frac{dr}{r} \\ &\leq C''_d \|v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \int_3^{t-s-3} \frac{1}{(t-s)^{\frac{d-1}{2}} (t-s-r)^{\frac{d+1}{2}}} \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Thus, taking $u = t-s$, it is sufficient to prove the integrability and the boundedness of the function $u \mapsto \frac{1}{u^{\frac{d-1}{2}}} \int_3^{u-3} \frac{1}{(u-r)^{\frac{d+1}{2}}} \frac{dr}{r}$ on $[6, +\infty[$. To do this, note that $u-r \geq u/2$ when $r \leq u/2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^{\frac{d-1}{2}}} \int_3^{u-3} \frac{1}{(u-r)^{\frac{d+1}{2}}} \frac{dr}{r} &\leq \frac{2^{\frac{d+1}{2}}}{u^{\frac{d-1}{2}}} \int_3^{u/2} \frac{1}{u^{\frac{d+1}{2}}} \frac{dr}{r} + \frac{2}{u^{\frac{d-1}{2}}} \int_{u/2}^{u-3} \frac{1}{u} \frac{dr}{(u-r)^{\frac{d+1}{2}}} \\ &\leq \frac{2^{\frac{d+1}{2}} \ln u}{u^d} + \frac{2}{u^{\frac{d+1}{2}}} \int_3^{u/2} \frac{dr}{r^{\frac{d+1}{2}}} \\ &\leq \frac{2^{\frac{d+1}{2}} \ln u}{u^d} + \frac{2}{u^{\frac{d+1}{2}}} \frac{1}{\left(\frac{d+3}{2}\right) 3^{\frac{d+3}{2}}}. \end{aligned}$$

The last member is a sum of two functions of u integrable on $[6, +\infty[$ when $d \geq 2$, this finishes the proof of Theorem 2.2. \square

2.3.3 Estimates for the Cauchy problem for the homogeneous linear wave equation

Proposition 2.6 *Let $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ and $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ be two data supported in B_R , and u such that*

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t^2 - \Delta)u &= 0 \\ u|_{t=0} &= u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1 . \end{cases}$$

Then exists a constant C which depends only on d such that for all $1 \leq p \leq +\infty$, and $\rho \geq R$, we have :

$$\sqrt{\eta} (\eta \|\partial_t u\|_{L^p(\mathbb{R}_+; L^2(B_\rho))} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}_+; L^2(B_\rho))}) \leq C \rho^{1+\frac{1}{p}} [\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \eta \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}] .$$

Proof. After rescaling, it suffices to prove the Theorem for $R = \rho = \eta = 1$.

Choose a function $\chi(t)$, smooth on \mathbb{R}_+ , vanishing when $t \leq 1/2$, equal to 1 when $t \geq 1$. Let $w(t, x) = \chi(t)u(t, x)$. The function w is the solution of the following Cauchy problem :

$$\begin{cases} \square w &= \chi'' u + \chi' \partial_t u \\ w|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t w|_{t=0} &= 0 \end{cases} .$$

The function $\chi'' u + \chi' \partial_t u$ is supported by $[\frac{1}{2}, 1] \times B_2$, and

$$\|\chi'' u + \chi' \partial_t u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2)} \leq \|\chi''\|_{L^\infty} \|u\|_{L^\infty((0,1); L^2)} + \|\chi'\|_{L^\infty} \|\partial_t u\|_{L^\infty((0,1); L^2)} .$$

Since $u(t) = u_0 + \int_0^t \partial_t u(s) ds$, we have, when $t \in [0, 1]$,

$$\|u\|_{L^\infty((0,1); L^2)} \leq \|u_0\|_{L^2} + \int_0^t \|\partial_t u(s)\|_{L^2} ds \leq \|u_0\|_{L^2} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2)} .$$

With the energy conservation for the wave equation

$$\|\partial_t u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\nabla_x u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 ,$$

this implies that

$$\|\chi'' u + \chi' \partial_t u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C (\|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) .$$

Moreover, $\chi'' u + \chi' \partial_t u$ is compactly supported in time, and for all $p \geq 1$,

$$\|\chi'' u + \chi' \partial_t u\|_{L^p(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|\chi'' u + \chi' \partial_t u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^d))} .$$

Thus, by Theorem 2.6,

$$\|\partial_t w\|_{L^p(\mathbb{R}_+; L^2(B_\rho))} \leq C \rho^{1+\frac{1}{p}} \left(\|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) .$$

To conclude, use the estimate :

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u\|_{L^p(\mathbb{R}_+; L^2(B_\rho))}^p &= \int_0^\infty \|\partial_t u(s)\|_{L^2(B_\rho)}^p ds \\
&= \int_0^1 \|\partial_t u(s)\|_{L^2(B_\rho)}^p ds + \int_1^\infty \|\partial_t w(s)\|_{L^2(B_\rho)}^p ds \\
&\leq \int_0^1 (\|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\nabla_x u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2)^{p/2} ds + \|\partial_t w\|_{L^p(\mathbb{R}_+; L^2(B_\rho))}^p. \quad \square
\end{aligned}$$

Remark 2.3 We have analogous results for initial data of the form Pu_0 and Pu_1 . Indeed, let v the solution of homogeneous wave equation with initial data Pu_0 and Pu_1 . The new $w = \chi v$ satisfies $\square w = \chi''v + \chi'v = P[\chi''u + \chi'u]$ because P commutes with differential operators. The remainder of the proof is exactly the same, using Theorem 2.2 instead of Theorem 2.6.

Remark 2.4 For the case $p = +\infty$, the conservation of energy $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|\nabla_{t,x}u(t)\|_{L^2}^2$ gives already the result, with no restriction on the localization of the initial values, nor on the evaluation.

In the case $p = 2$, for non-compactly supported initial data, we use the following estimate :

Theorem 2.8 Let $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ such that $\nabla u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Let u the solution of $(\eta^2 \partial_t^2 - \Delta)u = 0$ such that $u|_{t=0} = u_0$ and $\partial_t u|_{t=0} = u_1$. Then, for all ball B_R , there is a constant $C = C(R) > 0$ such that

$$\eta^2 \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L^2(B_R))}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L^2(B_R))}^2 \leq C(\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \eta^2 \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2).$$

Proof. Once again, it suffices to prove Theorem when $\eta = 1$.

When d is odd, the idea is to write explicitly the integral to be calculated, and to use firstly Huygens principle ($\|\nabla_{t,x}u(t)\|_{L^2(B_R)} \leq \|\nabla_{t,x}u(0)\|_{L^2(\Gamma_{t-R, t+R})}$), secondly Fubini's theorem.

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{t,x}u\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^2(B_R))}^2 &= \int_{\mathbb{R}_+} \|\nabla_{t,x}u(t)\|_{L^2(B_R)}^2 dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+} \|\nabla_{t,x}u(0)\|_{L^2(\Gamma_{t-R, t+R})}^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{t-R \leq |x| \leq t+R} |\nabla_{t,x}u(0, x)|^2 dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{t,x}u(0, x)|^2 dx \int_{|x|-R \leq t \leq |x|+R} dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{t,x}u(0, x)|^2 dx 2R \\
&= 2R(\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2).
\end{aligned}$$

When d is even, write

$$\begin{aligned}
u(t) &= \mathbf{E}'(t) *_x u_0 + \mathbf{E}(t) *_x u_1 \\
\nabla u(t) &= \mathbf{E}'(t) *_x \nabla u_0 + \nabla \mathbf{E}(t) *_x u_1 \\
\partial_t u(t) &= \mathbf{E}''(t) *_x u_0 + \mathbf{E}'(t) *_x u_1 \\
&= \Delta \mathbf{E}(t) *_x u_0 + \mathbf{E}'(t) *_x u_1 \\
&= -\nabla \mathbf{E}(t) *_x \nabla u_0 + \mathbf{E}'(t) *_x u_1 .
\end{aligned}$$

We only give details for the contribution of $\mathbf{E}'(t) *_x u_1$. The other terms are similar.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{E}'(t) *_x u_1\|_{L^2(B)}^2 &\leq \|\mathbf{E}'(t) *_x u_1 \mathbf{1}_{B_{t-2}}\|_{L^2(B)}^2 + \|\mathbf{E}'(t) *_x u_1 \mathbf{1}_{B_{t-2}^c}\|_{L^2(B)}^2 \\
&\leq \|\mathbf{E}(t) *_x u_1 \mathbf{1}_{B_{t-2}}\|_{L^2(B)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Gamma_{t-2,t+1})} .
\end{aligned} \tag{2.8}$$

The second term of the right hand side can be bounded as in odd dimension. Consider the first term. For $|x| \leq 1$, one has :

$$|\mathbf{E}'(t) *_x u_1 \mathbf{1}_{B_{t-2}}(x)|^2 = C_d \left(\int_{|y| \leq t-2} \frac{t}{\sqrt{t^2 - |x-y|^{2d+1}}} u(y) dy \right)^2 .$$

Using Schwarz inequality, and the inequality $|x-y| \leq |y| + 1$,

$$|\mathbf{E}'(t) *_x u_1 \mathbf{1}_{B_{t-2}}(x)|^2 \leq C t^{d-1} \int_{|y| \leq t-2} \frac{|u_1(y)|^2 t^2}{(t^2 - (|y| + 1)^2)^{d+1}} dy .$$

So, integrating in $x \in B$,

$$\|\mathbf{E}'(t) *_x u_1 \mathbf{1}_{B_{t-2}}\|_{L^2(B)}^2 \leq C \int_{|y| \leq t-2} \frac{|u_1(y)|^2 t^{d+1}}{(t - (|y| + 1))^{d+1} (t + |y| + 1)^{d+1}} dy .$$

Let us denote $v_1(t) = \mathbf{E}'(t) *_x u_1 \mathbf{1}_{B_{t-2}}$. We want to prove $\|v_1\|_{L^2(L^2(B))} \leq C \|u_1\|_{L^2}$. A time integration and Fubini's theorem, give :

$$\|v_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L^2(B))}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |u_1(y)|^2 dy \int_{t=|y|+2}^{+\infty} \frac{t^{d+1}}{(t - (|y| + 1))^{d+1} (t + |y| + 1)^{d+1}} dt .$$

Thus, we just need to bound uniformly in $r = |y|$ the following integral

$$F(r) = \int_{t=r+2}^{+\infty} \frac{t^{d+1}}{(t - (r + 1))^{d+1} (t + r + 1)^{d+1}} dt .$$

We have (with $u = t - r + 1$)

$$F(r) = \int_{u=1}^{+\infty} \frac{1}{u^{d+1}} \left(\frac{u+r+1}{u+2r+2} \right)^{d+1} du$$

$$F(r) \leq \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{d+1}} = \frac{1}{d} < +\infty .$$

This finishes the proof. \square

2.4 Application to the Maxwell-Landau-Lifshitz system

In this section, we apply to the system (2.2) the new results on the wave equation proved in the previous section. Let $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ be a strong solution of the system (2.2). The key point is the fact that \mathbf{h}_\perp and \mathbf{e} are solutions of the following Cauchy problems.

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t - \Delta) \tilde{\mathbf{h}} &= -\eta^2 \partial_t^2 \mathbf{m}_\perp \\ \tilde{\mathbf{h}}|_{t=0} &= P_\perp \mathbf{h}_0 \\ \partial_t \tilde{\mathbf{h}}|_{t=0} &= -\frac{1}{\eta} \mathbf{curl} \mathbf{e}_0 - f(\mathbf{m}_0, \mathbf{h}_0 - \nabla \Phi(\mathbf{m}_0) + \mathbf{h}_{\text{ext}})_\perp \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t - \Delta) \tilde{\mathbf{e}} &= -\mathbf{curl} \eta \partial_t \mathbf{m}_\perp \\ \tilde{\mathbf{e}}|_{t=0} &= \mathbf{e}_0 \\ \partial_t \tilde{\mathbf{e}}|_{t=0} &= -\frac{1}{\eta} \mathbf{curl} \mathbf{h}_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

2.4.1 Boundedness of \mathbf{h}_\perp and \mathbf{e} with respect to η

In order to study \mathbf{h}_\perp and \mathbf{e} , decompose the problem in three independent problems : let u , ϕ and ψ be the solutions of the following Cauchy problems :

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) u &= -\eta \partial_t \mathbf{m}_\perp \\ u|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t u|_{t=0} &= 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) \phi &= 0 \\ \phi|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t \phi|_{t=0} &= \frac{1}{\eta} P_\perp \mathbf{h}_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) \psi &= 0 \\ \psi|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t \psi|_{t=0} &= \frac{1}{\eta} \mathbf{e}_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Lemma 2.1 *Define u , ϕ , ψ as solutions of the Cauchy problems (2.11), (2.12) and (2.13). Then $\mathbf{h}_\perp = \eta \partial_t u + \eta \partial_t \phi - \mathbf{curl} \psi$ and $\mathbf{e} = \mathbf{curl} u + \mathbf{curl} \phi - \partial_t \psi$.*

Proof. Denote $\tilde{\mathbf{h}} = \eta \partial_t u + \eta \partial_t \phi - \mathbf{curl} \psi$. Clearly, $\tilde{\mathbf{h}}$ is solution of wave equation in (2.9), and $\tilde{\mathbf{h}}|_{t=0} = P_\perp \mathbf{h}_0$. It remains to check that $\partial_t \tilde{\mathbf{h}}|_{t=0} = \eta f(\mathbf{m}_0, \mathbf{h}_0 - \nabla \Phi(\mathbf{m}_0) + \mathbf{h}_{\text{ext}})_\perp - \mathbf{curl} \mathbf{e}_0$. Indeed,

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\mathbf{h}}|_{t=0} &= \partial_t^2 u|_{t=0} + \partial_t^2 \phi|_{t=0} + \partial_t \mathbf{curl} \psi|_{t=0} \\ &= (\Delta u)|_{t=0} - P_\perp (\partial_t \tilde{\mathbf{m}})|_{t=0} + (\Delta \phi)|_{t=0} + [\mathbf{curl} (\partial_t \psi)]|_{t=0} \\ &= \Delta(u|_{t=0}) - \eta f(\mathbf{m}_0, \mathbf{h}_0 - \nabla \Phi(\mathbf{m}_0) + \mathbf{h}_{\text{ext}})_\perp + \Delta(\phi|_{t=0}) - \mathbf{curl} \mathbf{e}_0 \\ &= \eta f(\mathbf{m}_0, \mathbf{h}_0 - \nabla \Phi(\mathbf{m}_0) + \mathbf{h}_{\text{ext}})_\perp - \mathbf{curl} \mathbf{e}_0 . \end{aligned}$$

The proof for \mathbf{e} is similar. \square

Proposition 2.7 *Let $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ be a solution of the system (2.2). Then for all $R \geq 1$, there is a constant C_R which does not depend of \mathbf{m} and η such that :*

$$\|\mathbf{h}_\perp\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L^2(B_R))} + \|\mathbf{e}\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L^2(B_R))} \leq C_R \sqrt{\eta} (\sqrt{\mathcal{E}(0)} + \sqrt{\eta} \|\partial_t \mathbf{m}\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^d))})$$

Proof. By Theorem 2.2, the solution u of (2.11) satisfies :

$$\|\eta \partial_t u\|_{L^2(L^2(B_R))} + \|\nabla u\|_{L^2(L^2(B_R))} \leq C_R \eta \|\partial_t \mathbf{m}\|_{L^2(L^2)}$$

By Theorem 2.8, the solutions ϕ and ψ of (2.12) and (2.13) satisfies :

$$\|\eta \partial_t \phi\|_{L^2(L^2(B_R))} + \|\nabla \phi\|_{L^2(L^2(B_R))} \leq C_R \sqrt{\eta} \|\mathbf{h}_0\|_{L^2}$$

$$\|\eta \partial_t \psi\|_{L^2(L^2(B_R))} + \|\nabla \psi\|_{L^2(L^2(B_R))} \leq C \sqrt{\eta} \|\mathbf{e}_0\|_{L^2}$$

We conclude by using Lemma 2.1. \square

Proof. [Proof of Theorem 2.3] It suffices again to prove Theorem with $\eta = 1$.

We showed in the proof of Theorem 2.2 that there exists $h_R \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+) \subset L^2(\mathbb{R}_+)$ such that the solution u of (2.11) satisfies

$$\|\nabla_{t,x} u(t)\|_{L^2(B_R)} \leq h_R *_{t} \|\partial_t \mathbf{m}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^d)} .$$

The property of convolution $L^2 * L^2$ implies that the right hand side is continuous and tends to 0 at infinity. Thus, when $t \rightarrow +\infty$,

$$\|\nabla_{t,x} u(t)\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0 . \quad (2.14)$$

By Huygens principle, for $t > R$, and Φ, Ψ solutions of (2.12) and (2.13),

$$\begin{aligned} \|\nabla_{t,x}(\Phi, \Psi)(t)\|_{L^2(B_R)} &\leq \|\nabla_{t,x}(\Phi, \Psi)(0)\|_{L^2(\Gamma_{t-R, t+R})} \\ &= \|\mathbf{1}_{\Gamma_{t-R, t+R}} \nabla_{t,x}(\Phi, \Psi)(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} . \end{aligned}$$

Thus, by Lebesgue's theorem, when $t \rightarrow +\infty$,

$$\|\nabla_{t,x}(\Phi, \Psi)(t)\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0 . \quad (2.15)$$

We conclude again by using (2.14) and (2.15) with Lemma 2.1. \square

2.4.2 Bounds for the curl fields

Notation 2.6 We denote $\mathcal{E}_{\text{curl}}(t) = \|\mathbf{curl} \mathbf{e}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\mathbf{curl} \mathbf{h}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$.

The aim of this paragraph is to prove Theorem 2.4. More precisely, we establish the the following result :

Proposition 2.8 *There is a constant K such that, for all positive real fixed \mathcal{E}_r , there exists $\eta_0 > 0$ such that for all $0 < \eta \leq \eta_0$ and all solution of the problem (2.2) such that $\mathcal{E}_{\text{curl}}(0) \leq \mathcal{E}_r$, we have*

$$\mathcal{E}_{\text{curl}}(t) \leq \mathcal{E}_{\text{curl}}(0) + K(\mathcal{E}(0)^4 + 1) .$$

Proof. We search to estimate $\partial_t \mathbf{h}_\perp$. Decompose $\mathbf{h}_\perp = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$, where \mathbf{h}_1 and \mathbf{h}_2 are the solutions of the following Cauchy problems :

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) \mathbf{h}_1 &= -\eta^2 \partial_t^2 \mathbf{m}_\perp \\ \mathbf{h}_1|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{h}_1|_{t=0} &= 0 \end{cases} , \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} (\eta^2 \partial_t^2 - \Delta) \mathbf{h}_2 &= 0 \\ \mathbf{h}_2|_{t=0} &= \mathbf{h}_{0\perp} \\ \partial_t \mathbf{h}_2|_{t=0} &= \frac{1}{\eta} \mathbf{curl} \mathbf{e}_0 + f(\mathbf{m}_0, \mathbf{h}_0 - \nabla \Phi(\mathbf{m}_0) + \mathbf{h}_{\text{ext}})_\perp \end{cases} . \quad (2.17)$$

In order to apply Theorem 2.2 to \mathbf{h}_1 solution of (2.16), estimate $\partial_t^2 \mathbf{m}_\perp$. We have

$$\partial_t^2 \mathbf{m} = \partial_t f(\mathbf{m}, \mathbf{h}_T) = D_m f(\mathbf{m}, \mathbf{h}_T) \partial_t \mathbf{m} + f(\mathbf{m}, \partial_t \mathbf{h}_T) \quad (2.18)$$

$$|D_m f(\mathbf{m}, \mathbf{h}_T) \partial_t \mathbf{m}| \leq 2|\mathbf{h}_T| |\partial_t \mathbf{m}| \leq 4|\mathbf{h}_T|^2 |\mathbf{m}| = 4|\mathbf{h}_\perp - \mathbf{m}_\parallel - \nabla \Phi(\mathbf{m}) + \mathbf{h}_{\text{ext}}|^2 \mathbf{1}_B$$

$$|D_m f(\mathbf{m}, \mathbf{h}_T) \partial_t \mathbf{m}|^2 \lesssim [|\mathbf{h}_\perp|^4 + |\mathbf{m}_\parallel|^4 + |\nabla \Phi(\mathbf{m})|^4 + |\mathbf{h}_{\text{ext}}|^4] \mathbf{1}_B \quad (2.19)$$

where we wrote $f \lesssim g$ in order to say that there is a constant C which is independent of η and $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$, such that $f \leq Cg$. Since $\mathbf{m}(t)$ is supported in B ,

$$\|\mathbf{m}_\parallel(t)\|_{L^4(\mathbb{R}^d)}^4 \lesssim \|\mathbf{m}(t)\|_{L^4(\mathbb{R}^d)}^4 \lesssim \|\mathbf{m}\|_{L^\infty} = 1 .$$

Next, because $\nabla \Phi$ is continuous, $\|\Phi(\mathbf{m})\|_{L^\infty} \leq \sup_{m \in B} |\Phi(m)| < +\infty$. Moreover, $\Phi(0) \leq \Phi(m)$ for $m \in \mathbb{R}^3$. Thus, $\nabla \Phi(0) = 0$ and $\text{supp} \nabla \Phi(\mathbf{m})$ is supported in B . Consequently,

$$\|\nabla \Phi(\mathbf{m}(t))\|_{L^4(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\nabla \Phi(\mathbf{m}(t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim 1 .$$

Integrate in x on B in (2.19), then

$$\|D_m f(\mathbf{m}(t), \mathbf{h}(t)) \partial_t \mathbf{m}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|\mathbf{h}_\perp(t)\|_{L^4(B)}^4 + 1 .$$

Now, because $d \leq 3$, by Sobolev inequality, (see [11]) :

$$\|h\|_{L^4(B)} \lesssim \|h\|_{L^2(B)} + \|\nabla h\|_{L^2(B)} .$$

Thus

$$\|D_m f(\mathbf{m}(t), \mathbf{h}_T(t)) \partial_t \mathbf{m}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|\nabla_x \mathbf{h}_\perp(t)\|_{L^2(B)}^4 + \|\mathbf{h}_\perp(t)\|_{L^2(B)}^4 + 1 .$$

Similarly for the second term in (2.18),

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{m}, \partial_t \mathbf{h}_T)| &\leq 2|\mathbf{m}| |\partial_t \mathbf{h}_T| \leq 2|\partial_t \mathbf{h}_T| \mathbf{1}_B , \\ |f(\mathbf{m}, \partial_t \mathbf{h}_T)|^2 &\lesssim (|\partial_t \mathbf{h}_\perp|^2 + |\partial_t \mathbf{m}|^2 + |\nabla \Phi(\mathbf{m})|) \mathbf{1}_B , \\ \|f(\mathbf{m}(t), \partial_t \mathbf{h}_T(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\lesssim \|\partial_t \mathbf{h}_\perp(t)\|_{L^2(B)}^2 + \|\partial_t \mathbf{m}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + 1 \\ &\lesssim \|\partial_t \mathbf{h}_\perp(t)\|_{L^2(B)}^2 + \|\mathbf{h}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + 1 . \end{aligned}$$

Taking the essential supremum in t on $(0, T)$:

$$\begin{aligned} \|\partial_t f(\mathbf{m}, \mathbf{h})\|_{L^\infty((0, T); L^2(\mathbb{R}^d))}^2 &\lesssim \left[\|\nabla_x \mathbf{h}_\perp\|_{L^\infty((0, T); L^2(B))}^4 \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_t \mathbf{h}_\perp\|_{L^\infty((0, T); L^2(B_R))}^2 + C(\mathbf{h}_\perp, \partial_t \mathbf{m}) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

with

$$C(\mathbf{h}_\perp, \partial_t \mathbf{m}) = \|\mathbf{h}_\perp\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(B))}^4 + 1 + \|\mathbf{h}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \lesssim \mathcal{E}(0)^2 + 1 < +\infty . \quad (2.21)$$

By Theorem 2.2,

$$\|(\eta \partial_t \mathbf{h}_1, \nabla \mathbf{h}_1)\|_{L^\infty((0, T); L^2(B))} \lesssim \eta^2 \|\partial_t f(\mathbf{m}, \mathbf{h})\|_{L^\infty((0, T); L^2(\mathbb{R}^d))} .$$

We have also conservation of energy for the linear wave equation

$$\begin{aligned} \|(\eta \partial_t \mathbf{h}_2, \nabla \mathbf{h}_2)\|_{L^\infty((0, T); L^2(B))} &\leq \|(\eta \partial_t \mathbf{h}_2(0), \nabla \mathbf{h}_2(0))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^4} \\ &\leq \sqrt{\|\mathbf{curl} \mathbf{h}_0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{curl} \mathbf{e}_0\|_{L^2}^2} . \end{aligned}$$

Adding the last two inequalities yields :

$$\begin{aligned} \|(\eta \partial_t \mathbf{h}_\perp, \nabla \mathbf{h}_\perp)\|_{L^\infty((0, T); L^2(B))}^4 &\lesssim \eta^2 \|\partial_t f(\mathbf{m}, \mathbf{h})\|_{L^\infty((0, T); L^2)}^4 \\ &\quad + \sqrt{\mathcal{E}_{\mathbf{curl}}(0)} . \end{aligned}$$

Finally, we use the inequalities (2.20) and (2.21). There is a constant C_1 such that

$$\begin{aligned} & \|(\eta\partial_t\mathbf{h}_\perp, \nabla\mathbf{h}_\perp)\|_{L^\infty((0,T);L^2(B))^4} \\ & \leq C_1\eta^2 \left[\|\nabla_x\mathbf{h}_\perp\|_{L^\infty((0,T);L^2(B))}^2 + \|\partial_t\mathbf{h}_\perp\|_{L^\infty((0,T);L^2(B_R))} + \mathcal{E}(0)^2 + 1 \right] \\ & \quad + \sqrt{\mathcal{E}_{\text{curl}}(0)}. \end{aligned}$$

In order to put the term $\|\partial_t\mathbf{h}_\perp\|_{L^\infty((0,T);L^2(B_R))}$ in (2.20) in the left hand side, assume that $\eta \leq \frac{1}{2C_1}$.
Let

$$X(T) = \|(\eta\partial_t\mathbf{h}_\perp, \nabla\mathbf{h}_\perp)\|_{L^\infty((0,T);L^2(B_R))}.$$

Then we have, with $C_2 = 4C_1$:

$$X(T) \leq \eta^2 C_2 (X(T)^2 + \mathcal{E}(0)^2 + 1) + \sqrt{\mathcal{E}_{\text{curl}}(0)}.$$

Now, remark that $\|\nabla_x\mathbf{h}_\perp(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathbf{curl}\mathbf{h}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. Now, because we are looking for solution of the (2.2) with regularity $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^d))$, we obtain that X is a continuous function. Thus, if $X(0) \leq X_1$, where X_1 is the smaller root of the quadratic polynomial $\eta^2 C_2 (X^2 + \mathcal{E}(0)^2 + 1) - X$, then $X(t) \leq X_1$ for all $t \geq 0$. We are in this case when :

$$\eta \leq \frac{1}{4C_2 \left(C_2(\mathcal{E}(0)^2 + 1) + \sqrt{\mathcal{E}_{\text{curl}}(0)} \right)}.$$

To conclude, remark that $\|\nabla\mathbf{h}_\perp(t)\|_{L^2} = \|\mathbf{curl}\mathbf{h}(t)\|_{L^2}$ and, thanks to the second equation and the condition $\text{div}(\mathbf{h} + \mathbf{m}) = 0$ in (2.2), $\|\mathbf{curl}\mathbf{e}(t)\|_{L^2} \leq \|\eta\partial_t\mathbf{h}_\perp(t)\| + \eta\|\mathbf{h}(t)\|_{L^2}$. \square

Remark 2.5 *The L^2 estimates so obtained on $\mathbf{curl}\mathbf{e}$ and $\mathbf{curl}\mathbf{h}$ does not depend on the parameter $\alpha \in [0, 1]$ in the definition of $f(m, h)$. So, we can obtain a convergence result, in the next section, when $\alpha \rightarrow 0$.*

2.5 Convergence toward quasistationary system ; existence and uniqueness of weak solutions in quasistationary problem

We prove a convergence result when η tends to 0 in (2.2), which is the quasi-stationary limit. In [32], Jochmann proved a weak quasi-stationary limit for weak energy solution of (2.1). Here, we consider a strong limit for strong solution. We first study $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\eta$ and $\mathbf{h}_{\eta\perp}$ using Proposition 2.7, next we study the convergence of $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\eta$.

2.5.1 Convergence of $\mathbf{h}_{\eta\perp}$ and \mathbf{e}_η to 0

Proposition 2.9 *For fixed $\alpha \geq 0$ Let $(\mathbf{h}_\eta, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{m}_\eta)$ be the solution of the Cauchy problem (2.2). Then, for all $R > 0$, when $\alpha > 0$*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \|\mathbf{h}_{\eta\perp}\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L^2(B_R))} + \|\mathbf{e}_\eta\|_{L^2(\mathbb{R}_+; L^2(B_R))} = 0.$$

When $\alpha = 0$, we have, for all $T > 0$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \|\mathbf{h}_{\eta\perp}\|_{L^2((0,T);L^2(B_R))} + \|\mathbf{e}_\eta\|_{L^2((0,T);L^2(B_R))} = 0 .$$

Proof. First, recall Proposition 2.7 (when $0 < T \leq +\infty$)

$$\|\mathbf{h}_{\eta\perp}\|_{L^2(\mathbb{R}_+;L^2(B_R))} + \|\mathbf{e}_\eta\|_{L^2(\mathbb{R}_+;L^2(B_R))} \leq C_R \sqrt{\eta} (\sqrt{\mathcal{E}(0)} + \sqrt{\eta} \|\partial_t \mathbf{m}\|_{L^2(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^d))}) .$$

By Corollary 2.3, when $\alpha > 0$,

$$\|\partial_t \mathbf{m}_\eta\|_{L^2(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \mathcal{E}(0) .$$

This gives the proof in this case. When $\alpha = 0$, the proof follows from the inequality

$$\|\partial_t \mathbf{m}(t)\|_{L^\infty((0,T);L^2)} \leq \|\mathbf{h}(t)\|_{L^\infty((0,T);L^2)} \leq 2\mathcal{E}(0)$$

given by the Landau-Lifshitz equation. \square

2.5.2 Convergence of \mathbf{m}_η

In this section, we prove the following result in several steps :

Theorem 2.9 *There exists a unique solution in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+;L^2)$ of the following Cauchy problem :*

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{m} &= f(\mathbf{m}, -\mathbf{m}_\parallel) \\ \mathbf{m}(0) &= \mathbf{m}_0 \end{cases} . \quad (2.22)$$

Moreover, if $(\mathbf{h}_\eta, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{m}_\eta)$ is a weak solution of (2.2), then as $\eta \rightarrow 0$ $\mathbf{m}_\eta \rightarrow \mathbf{m}$ strongly in $\mathcal{C}([0, T]; L^2)$.

2.5.2.1 Weak convergence

Proposition 2.10 *There exists $\mathbf{m} \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ and a subsequence of $(\mathbf{m}_\eta)_\eta$ such that :*

- \mathbf{m}_η converges *-weakly in L^∞ to \mathbf{m} .
- \mathbf{m} is continuous from \mathbb{R}_+ to $L^2_{\text{weak}}(\mathbb{R}^d)$.
- for all $t \geq 0$, $\mathbf{m}_\eta(t)$ converges weakly in $L^2(\mathbb{R}^d)$ to $\mathbf{m}(t)$.

Proof. $(\mathbf{m}_\eta)_{\eta>0}$ is bounded in $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, so, extracting a subsequence, converges *-weakly to a $\mathbf{m} \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. Moreover, we know that

$$\partial_t \mathbf{m}_\eta = f(\mathbf{m}_\eta, \mathbf{h}_{\eta\perp} - \mathbf{m}_{\eta\parallel} - \nabla \Phi(\mathbf{m}_\eta) + \mathbf{h}_{\text{ext}}) ,$$

so

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{m}_\eta\|_{L^\infty([0,T];L^2)} &\leq \|\mathbf{m}_\eta\|_{L^\infty} (\|\mathbf{h}_{\eta\perp}\|_{L^\infty([0,T];L^2)} + \|\mathbf{m}_{\eta\parallel}\|_{L^\infty([0,T];L^2)} \\ &\quad + \|\nabla \Phi(\mathbf{m}_\eta)\|_{L^\infty([0,T];L^2)} + \|\mathbf{h}_{\text{ext}}\|_{L^2(B)}) \\ &\leq \sqrt{\mathcal{E}(0)} + C . \end{aligned}$$

Consequently, the set $(\mathbf{m}_\eta)_\eta$ is equi-continuous from $[0, T]$ to L^2 .

L^2 with its weak topology is a metric space such that bounded sets are compact. According to Ascoli's theorem, \mathbf{m}_η converges, extracting further a subsequence, in $C([0, T]; L^2_{\text{weak}})$, necessarily to \mathbf{m} by uniqueness of the limit in the distribution sense. In particular, for all $t \in [0, T]$, $\mathbf{m}_\eta(t)$ converges weakly to $\mathbf{m}(t)$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$. \square

2.5.2.2 First estimates

Let $\eta_1, \eta_2 > 0$ two positive reals, intended to converge to 0.

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{m}_{\eta_1} - \partial_t \mathbf{m}_{\eta_2} &= f(\mathbf{m}_{\eta_1}, \mathbf{h}_{\eta_1 \perp} - \mathbf{m}_{\eta_1 \parallel} - \nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_1}) + \mathbf{h}_{\text{ext}}) \\
&\quad - f(\mathbf{m}_{\eta_2}, \mathbf{h}_{\eta_2 \perp} - \mathbf{m}_{\eta_2 \parallel} - \nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_2}) + \mathbf{h}_{\text{ext}}) \\
&= (f(\mathbf{m}_{\eta_1}, -\mathbf{m}_{\parallel} - \nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_1}) + \mathbf{h}_{\text{ext}}) \\
&\quad - f(\mathbf{m}_{\eta_2}, -\mathbf{m}_{\parallel} - \nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_2}) + \mathbf{h}_{\text{ext}})) \\
&\quad + f(\mathbf{m}_{\eta_2}, \nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_1}) - \nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_2})) \\
&\quad + f(\mathbf{m}_{\eta_1}, \mathbf{h}_{\eta_1 \perp}) - f(\mathbf{m}_{\eta_2}, \mathbf{h}_{\eta_2 \perp}) \\
&\quad + f(\mathbf{m}_{\eta_1}, P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_1})) - f(\mathbf{m}_{\eta_2}, P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_2})) .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Take the scalar product of this equality by $\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}$, to find a bound, using the fact that $|\mathbf{m}_{\eta_1}|, |\mathbf{m}_{\eta_2}| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}|^2 &\leq 2|\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}|^2 (|\mathbf{m}_{\parallel}| + |\nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_1})| + |\mathbf{h}_{\text{ext}}|) \\
&\quad + 2|\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}| |\nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_1}) - \nabla \Phi(\mathbf{m}_{\eta_2})| |\mathbf{m}_{\eta_2}| \\
&\quad + 2|\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}| |\mathbf{m}_{\eta_1}| |\mathbf{h}_{\eta_1 \perp}| + 2|\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}| |\mathbf{m}_{\eta_2}| |\mathbf{h}_{\eta_2 \perp}| \\
&\quad + |f(\mathbf{m}_{\eta_1}, P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_1})) \cdot (\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2})| \\
&\quad + |f(\mathbf{m}_{\eta_2}, P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_2})) \cdot (\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2})| \\
&\leq 2|\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}|^2 (|\mathbf{m}_{\parallel}| + C) \\
&\quad + 8(|\mathbf{h}_{\eta_1 \perp}| + |\mathbf{h}_{\eta_2 \perp}|) \\
&\quad + |f(\mathbf{m}_{\eta_1}, P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_1})) \cdot (\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2})| \\
&\quad + |f(\mathbf{m}_{\eta_2}, P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_2})) \cdot (\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2})| .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

We use a Gronwall's lemma to absorb the first term in the left hand side. \mathbf{m} is bounded, and supported in B , hence in $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$, thus \mathbf{m}_{\parallel} is in $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$, therefore in $L^1([0, T] \times B)$. By Fubini's theorem, the function $x \mapsto \|\mathbf{m}_{\parallel}(\cdot, x)\|_{L^1([0, T])}$ is integrable, thus finite almost everywhere. Hence, we can define, for almost every $x \in B$:

$$a(t, x) = |x|^2 + 2 \int_0^t (|\mathbf{m}_{\parallel}(s, x)| + C) ds .$$

Remark 2.6 We need the term $|x|^2$ in order to have $e^{-a(t)} \in L^4(\mathbb{R}^d)$, which is used later.

There holds

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t |e^{-2a}(\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2})|^2 &\leq 8e^{-2a}(|\mathbf{h}_{\eta_1 \perp}| + |\mathbf{h}_{\eta_2 \perp}|) \\ &\quad + |f(\mathbf{m}_{\eta_1}, e^{-a} P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_1})) \cdot (e^{-a}(\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}))| \\ &\quad + |f(\mathbf{m}_{\eta_2}, e^{-a} P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_2})) \cdot (e^{-a}(\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}))|. \end{aligned}$$

Integrate on $[0, t] \times B$. Because $\mathbf{m}_{\eta_1}(0) = \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_{\eta_2}(0)$, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t))\|_{L^2}^2 &\leq 8 \|e^{-2a}(|\mathbf{h}_{\eta_1 \perp}| + |\mathbf{h}_{\eta_2 \perp}|)\|_{L^1([0, T] \times B)} \\ &\quad + \int_0^t \int_B |f(\mathbf{m}_{\eta_1}, e^{-a} P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_1})) \cdot (e^{-a}(\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}))| \, dx \, dt \\ &\quad + \int_0^t \int_B |f(\mathbf{m}_{\eta_2}, e^{-a} P_{\parallel}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_2})) \cdot (e^{-a}(\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}))| \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Assume for the moment the following result, which is proved in the next section.

Proposition 2.11 *There is a constant C and a function $D(\eta_1, \eta_2)$ converging to 0 when (η_1, η_2) tends to $(0, 0)$ such that, for η which is η_1 or η_2 , and all $t \in [0, T]$,*

$$\begin{aligned} \int_B |f(\mathbf{m}_{\eta}(t), e^{-a(t)} P_{\parallel}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta}(t))) \cdot (e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t)))| \, dx \\ \leq C \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t))\|_{L^2} \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta}(t))\|_{L^2} \\ + D(\eta_1, \eta_2). \end{aligned}$$

Let $D'(\eta_1, \eta_2) = D(\eta_1, \eta_2) + 8 \|e^{-2a}(|\mathbf{h}_{\eta_1 \perp}| + |\mathbf{h}_{\eta_2 \perp}|)\|_{L^1([0, T] \times B)}$. Then, by Proposition 2.9.

$$\lim_{\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0} D'(\eta_1, \eta_2) = 0.$$

Hence,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t))\|_{L^2}^2 &\leq \\ D'(\eta_1, \eta_2) + C \int_0^t \|e^{-a(s)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(s) - \mathbf{m}_{\eta_2}(s))\|_{L^2} \|e^{-a(s)}(\mathbf{m}(s) - \mathbf{m}_{\eta}(s))\|_{L^2} \, ds. \end{aligned} \quad (2.25)$$

We use the following nonlinear Gronwall's lemma (for a proof, see for instance the annex.C in [26]),

Lemma 2.2 (square Gronwall) *Let y be a function in $H^1(0, T)$, $C \geq 0$ and f in $L^1(0, T)$ such that :*

$$\forall t \in [0, T], \quad y^2(t) \leq C + \int_0^t f(s) y(s) \, ds.$$

Then

$$\forall t \in [0, T], \quad y(t) \leq \sqrt{C} + \frac{1}{2} \int_0^t f(s) \, ds.$$

Applying this lemma to $y(t) = \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t))\|_{L^2}$ and $f(t) = \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_\eta(t))\|_{L^2}$ in (2.25), we obtain

$$\frac{1}{2} \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t))\|_{L^2} \leq \sqrt{D'(\eta_1, \eta_2)} + \frac{1}{2} \int_0^t \|e^{-a(s)}(\mathbf{m}(s) - \mathbf{m}_\eta(s))\|_{L^2} ds .$$

We take the limit for $\eta = \eta_1$ fixed and $\eta_2 \rightarrow 0$. Because the norm is lower semi-continuous for the weak topology we have

$$\|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}(t))\|_{L^2} \leq 2 \liminf_{\eta_2 \rightarrow 0} \sqrt{D'(\eta_1, \eta_2)} + \int_0^t \|e^{-a(s)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(s) - \mathbf{m}(s))\|_{L^2} ds .$$

The usual Gronwall's lemma implies

$$\|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}(t))\|_{L^2} \leq 2 \liminf_{\eta_2 \rightarrow 0} \sqrt{D(\eta_1, \eta_2)} e^T$$

thus, the convergence of $(e^{-a} \mathbf{m}_\eta)_\eta$ to $e^{-a} \mathbf{m}$ in $L^\infty([0, T]; L^2)$.

Because $e^{-a} > 0$ a.e, modulo a subsequence, we can further assume that $\mathbf{m}_\eta(t, x)$ converges to $\mathbf{m}(t, x)$ almost everywhere in $[0, T] \times B$. Using the boundedness in $L^\infty(\mathbb{R}_+^{1+d})$ of the family $(\mathbf{m}_\eta)_\eta > 0$, the Lebesgue theorem prove the convergence of \mathbf{m}_η to \mathbf{m} in $L^p([0, T] \times B)$, $p < +\infty$.

This convergence implies in particular the convergence of $\Phi(\mathbf{m}_\eta)$ to $\Phi(\mathbf{m})$, in L^2 . Finally, we obtain a strong convergence in $L^1([0, T] \times B)$ of $f(\mathbf{m}_\eta, \mathbf{h}_{\eta\perp} - \mathbf{m}_{\eta\parallel})$ of $f(\mathbf{m}, -\mathbf{m}_\parallel)$. Moreover, $\partial_t \mathbf{m}_\eta$ converge to $\partial_t \mathbf{m}$ (in the distribution sense), we obtain that \mathbf{m} is a solution of (2.22).

Remark 2.7 *This proves also the existence of solution of the Cauchy problem (2.22).*

2.5.3 Uniqueness of the Cauchy problem

We show the uniqueness of the solution to this Cauchy problem. This shows that there is only one limit of (\mathbf{m}_η) (the solution), so the full sequence (\mathbf{m}_η) converges to \mathbf{m} .

Let \mathbf{m}_1 and \mathbf{m}_2 be two solutions in $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d) \cap H^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ of the Cauchy problem (2.22). The computations are similar to (2.23) and (2.24).

$$\partial_t \mathbf{m}_1 - \partial_t \mathbf{m}_2 = f(\mathbf{m}_1, -\mathbf{m}_{1\parallel} - \nabla \Phi(\mathbf{m}_1) + \mathbf{h}_{\text{ext}}) - f(\mathbf{m}_2, -\mathbf{m}_{2\parallel} - \nabla \Phi(\mathbf{m}_2) + \mathbf{h}_{\text{ext}}) .$$

We have

$$\frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2 \leq 2 |\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2| |P_\parallel(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)| + (|\mathbf{m}_{1\parallel}| + C) |\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2 . \quad (2.26)$$

If $\mathbf{m}_{1\parallel}$ were bounded, the Cauchy Schwarz inequality and Gronwall's lemma would yield that $\mathbf{m}_1(t) = \mathbf{m}_2(t)$ for all $t \geq 0$. Unfortunately, this is not the case, but we use the following substitute (see [49] for a proof) :

Proposition 2.12 *There exists a constant C such that for all $p \in]2, +\infty[$, the operator P_{\parallel} is bounded from $L^p(\mathbb{R}^d)$ into $L^p(\mathbb{R}^d)$ with norm less than Cp .*

We cut $P_{\parallel} \mathbf{m}_1$ in a bounded part, and a small remainder in L^1 .

Definition 2.2 *For $M > 0$, let P_{\parallel}^M be defined in $\bigcup_p L^p(\mathbb{R}^d)$ by :*

$$P_{\parallel}^M(f) = f_{\parallel} \times \mathbf{1}_{\{|f_{\parallel}| > M\}} .$$

Let also $P'_{\parallel}{}^M(f) = f_{\parallel} \times \mathbf{1}_{\{|f_{\parallel}| \leq M\}}$, so that $\|P'_{\parallel}{}^M(f)\|_{L^\infty} \leq M$ and $P_{\parallel} = P_{\parallel}^M + P'_{\parallel}{}^M$

We use Proposition 2.12 to prove

Lemma 2.3 *Let $f \in [L^1 \cap L^\infty](\mathbb{R}^d)$. Then exists two constants $c, C > 0$ such that for all $M > 1/c$, we have :*

$$\|P_{\parallel}^M(f)\|_{L^1} \leq C \exp(-cM) .$$

Proof. Let $C_1 = [\|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}]$, so that $\|f\|_{L^p} \leq C_1$ for all p . For a borelian Ω in \mathbb{R}^d , note $|\Omega|$ its Lebesgue's measure. First, we have, thanks to the Bienaymé-Tchebytchev inequality

$$|\{|f_{\parallel}| > M\}| \leq \left(\frac{\|f_{\parallel}\|_{L^r}}{M} \right)^r .$$

By Proposition 2.12, $\|f_{\parallel}\|_{L^r} \lesssim r \|f\|_{L^r} \lesssim r$. Thus, for all $r \geq 1$,

$$|\{|f_{\parallel}| > M\}| \leq \left(\frac{rC_1}{M} \right)^r .$$

If we assume M sufficiently large, we can choose $r = \frac{M}{C_e}$ so that :

$$|\{|f_{\parallel}| > M\}| \lesssim e^{-cM}$$

where $c = \frac{1}{C_e}$. Secondly, Hölder's inequality implies that for all q (with $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$) :

$$\begin{aligned} \|P_{\parallel}^M(f)\|_{L^1} &\leq \|f_{\parallel}\|_{L^q} \|\mathbf{1}_{\{|f_{\parallel}| > M\}}\|_{L^{q'}} \\ &\leq q C_1 |\{|f_{\parallel}| > M\}|^{1-\frac{1}{q}} \\ &\leq q C_1 C^{1-\frac{1}{q}} e^{-\frac{cM}{q}} e^{-cM} . \end{aligned}$$

Choose $q = cM$ (assuming that $M > \frac{1}{c}$). Thus,

$$\|P_{\parallel}^M(f)\|_{L^1} \lesssim M e^{-cM} \lesssim e^{-c'M}$$

with c' such that $0 < c' < c$.

We now finish the proof of uniqueness in problem (2.22). In Inequality (2.26), decompose $\mathbf{m}_{1\parallel} = P_{\parallel}^M(\mathbf{m}_1) + P_{\parallel}^{\prime M}(\mathbf{m}_1)$. Using $\|P_{\parallel}^{\prime M}(\mathbf{m}_1)\|_{L^\infty} \leq M$, we obtain

$$\frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2 \leq 2(M + C) |\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2 + 2|\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_2| |\mathbf{m}_{1\parallel} - \mathbf{m}_{2\parallel}| + 4|P_{\parallel}^M(\mathbf{m}_2)|.$$

Integrate on B (using Cauchy Schwarz inequality for the second term in the right hand side, and the fact that $\|P_{\parallel}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = 1$).

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{m}_1(t) - \mathbf{m}_2(t)\|_{L^2}^2 \leq 2(M + C + 1) \|\mathbf{m}_1(t) - \mathbf{m}_2(t)\|_{L^2}^2 + 4Ce^{-cM}.$$

Using Gronwall's lemma, we obtain that, for $T > 0$, which will be fixed later, for all $t \in [0, T]$,

$$\|\mathbf{m}_1(t) - \mathbf{m}_2(t)\|_{L^2}^2 \lesssim e^T \exp\left(M(T - c)\right).$$

Fix $T < c$, and let M tend to $+\infty$. There holds $\mathbf{m}_1(t) = \mathbf{m}_2(t)$ for all $t < T$. We have uniqueness on $[0, T[$, therefore, global uniqueness since it is an autonomous system. \square

2.5.4 Proof of Proposition 2.11

The aim of this subsection is to prove Proposition 2.11. We start by giving another formulation which is equivalent because of the symmetry of the indices η_1 and η_2 .

Proposition 2.13 *There is a constant C which only depends of T such that for all $\varepsilon > 0$, exists $\eta_0 > 0$ such that for all $\eta_1, \eta_2 \leq \eta_0$ and $t \in [0, T]$, we have*

$$\begin{aligned} \int_B |f(\mathbf{m}_{\eta_1}(t), e^{-a(t)} P_{\parallel}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))) \cdot (e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t)))| dx \\ \leq C \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t))\|_{L^2} \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))\|_{L^2} \\ + \varepsilon \end{aligned}$$

Proof. The first step is to write $e^{-a(t)} P_{\parallel} = P_{\parallel} e^{-a(t)} + [e^{-a(t)}, P_{\parallel}]$ and use the linearity of f with respect to its second argument. So we have

$$\begin{aligned} \int_B |f(\mathbf{m}_{\eta_1}(t), e^{-a(t)} P_{\parallel}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))) \cdot (e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t)))| dx \\ \leq \int_B |f(\mathbf{m}_{\eta_1}(t), P_{\parallel} e^{-a(t)}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))) \cdot (e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t)))| dx \\ + \int_B |f(\mathbf{m}_{\eta_1}(t), [e^{-a(t)}, P_{\parallel}](\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))) \cdot (e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t)))| dx \end{aligned}$$

Using the fact that $|f(m, h)| \leq 2|h|$ when $|m| \leq 1$, the first term in the right hand side is bounded by

$$\begin{aligned} 2 \int_B (P_{\parallel} e^{-a(t)}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))) \cdot (e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t))) dx \\ \leq 2 \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))\|_{L^2} \|e^{-a(t)}(\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}_{\eta_2}(t))\|_{L^2} \end{aligned}$$

according to Cauchy Schwarz inequality and the property $\|P_{\parallel}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = 1$.

For the second term, we show the strong convergence of $[e^{-a(t)}, P_{\parallel}](\mathbf{m}_{\eta_1}(t) - \mathbf{m}(t))$ to 0, uniformly in $t \in [0, T]$. Since P_{\parallel} is a linear continuous map from L^4 to itself (and from L^2 to itself), we have, for $G \in L^2 \cap L^4$,

$$\|[G, P_{\parallel}](\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))\| \leq C\|G\|_{L^2 \cap L^4} \|\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t)\|_{L^4} \leq C'\|G\|_{L^2 \cap L^4} \quad (2.27)$$

Since $a(t, x) \geq 0$ almost everywhere,

$$|e^{-a(t,x)} - e^{-a(t',x)}| \leq 2e^{-|x|^2} \left| \int_t^{t'} |\mathbf{m}(s, x)| + C \, ds \right|^p$$

Use Hölder's inequality for the last term.

$$|e^{-a(t,x)} - e^{-a(t',x)}|^p \leq C_p^1 |t - t'|^{p-1} e^{-p|x|^2} \int_0^t (|\mathbf{m}_{\parallel}(s, x)|^p + C_p^2) \, ds$$

So, $\|e^{-a(t)} - e^{-a(t')}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_p |t - t'|^{(p-1)/p}$. In particular, $t \mapsto e^{-a(t)}$ is uniformly continuous from $[0, T]$ to L^p for $p > 1$.

Let ϕ and χ be two non-negative smooth functions supported in a compact on \mathbb{R}^+ , equal to 1 near 0. Let, for $\rho > 0$, $\chi^\rho(x) = \frac{1}{\rho^d} \chi\left(\frac{x}{\rho}\right)$ and $X^\rho f(x) = \phi(\rho x) \chi * f(x)$. Then, for all $t \in [0, T]$, $X^\rho e^{-a(t)}$ converges in $L^4 \cap L^2$ to $e^{-a(t)}$ when $\rho \rightarrow 0$.

Secondly, as the family of operators (X^ρ) is bounded on $\mathcal{L}(L^4)$, we have the following result : $(t \mapsto X^\rho e^{-a(t)})_\rho$ is an equicontinuous family from $[0, T]$ to L^4 . By Ascoli's theorem, the sequence $X^\rho e^{-a}$ converges to e^{-a} in $L^\infty([0, T]; L^4 \cap L^2)$.

Fix ρ such that $C'\|e^{-a(t)} - X^\rho e^{-a(t)}\|_{L^4} \leq \varepsilon/2$ for all $t \in [0, T]$. Use inequality (2.27), then we have $\|[e^{-a(t)} - X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}](\mathbf{m}(t) - \mathbf{m}_{\eta_1}(t))\|_{L^2} \leq \varepsilon/2$

Now, $\rho > 0$ being fixed, note that the function $t \mapsto [X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}]$ is continuous from $[0, T]$ to the space of compact operators in L^2 , so uniformly continuous thanks to Heine's theorem. Hence we have, for $t, t' \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & [X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}]\mathbf{m}^{\eta_1}(t) - [X^\rho e^{-a(t')}, P_{\parallel}]\mathbf{m}^{\eta_1}(t') \\ &= [X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}](\mathbf{m}^{\eta_1}(t) - \mathbf{m}^{\eta_1}(t')) + ([X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}] - [X^\rho e^{-a(t')}, P_{\parallel}])\mathbf{m}^{\eta_1}(t') \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} & \|[X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}]\mathbf{m}^{\eta_1}(t) - [X^\rho e^{-a(t')}, P_{\parallel}]\mathbf{m}^{\eta_1}(t')\|_{L^2 \cap L^4} \\ & \leq \|[X^\rho e^{-a}, P_{\parallel}]\|_{L^\infty([0, T]; \mathcal{L}(L^2; L^2 \cap L^4))} \|(\mathbf{m}^{\eta_1}(t) - \mathbf{m}^{\eta_1}(t'))\|_{L^2} \\ & \quad + \|[X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}] - [X^\rho e^{-a(t')}, P_{\parallel}]\|_{\mathcal{L}(L^2 \cap L^4; L^2)} \cdot C \end{aligned}$$

Therefore, the sequence $(t \mapsto [X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}] \mathbf{m}^{\eta_1}(t))_{\eta_1}$ is equicontinuous, and strongly converges to $t \mapsto [X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}] \mathbf{m}(t)$; the convergence is uniform in t by Ascoli's theorem. Therefore, there exists η_0 such that for all $\eta_1 \leq \eta_0$, we have $\|[X^\rho e^{-a(t)}, P_{\parallel}](\mathbf{m}^{\eta_1}(t) - \mathbf{m}(t))\|_{L^2} < \varepsilon/2$ for all $t \in [0, T]$.

Finally, we obtain that $\|[e^{-a(t)}, P_{\parallel}](\mathbf{m}^{\eta_1}(t) - \mathbf{m}(t))\|_{L^2} \leq \varepsilon$ for all $\eta_1 \leq \eta_0$. Therefore we have strong convergence to 0 in $L^\infty([0, T]; L^2)$ of $t \mapsto [e^{-a(t)}, P_{\parallel}](\mathbf{m}^{\eta_1}(t) - \mathbf{m}(t))$ \square

2.6 The damping parameter

We prove here a strong convergence result of the system (2.2) when the parameter α tends to 0. In [30], Hamdache and Tiloua establish a weak convergence result for the system, with an exchange term.

Theorem 2.10 *Assume that $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{m}_0, \mathbf{curl} \mathbf{e}_0, \mathbf{curl} \mathbf{h}_0$ are in $L^2(\mathbb{R}^D)$, \mathbf{h}_{ext} is in $L^\infty(B)$ and η is small. Let, for a damping parameter α not fixed $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{m}_\alpha)$ be the solution of the system (2.2). Then $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{m}_\alpha)$ converges strongly in $\mathcal{C}^0(L^2) \times \mathcal{C}^0(L^2) \times \mathcal{C}^0(L^2)$ to the solution $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ of the system (2.2) with $\alpha = 0$ when α tends to 0.*

Proof. First, we can assume, after extracting a subsequence, that \mathbf{e}^α and \mathbf{h}^α converge weakly in $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$. Now the uniform estimates in t on \mathbf{h}_\perp in Propositions 2.7 and 2.8 are independant of α . Consequently, because $\eta > 0$ is fixed, the family $(\nabla_{t,x} \mathbf{h}_\perp^\alpha)$ is bounded in $L^\infty((0, T); L^2(B)) \subset L^2((0, T) \times B)$, so $(\mathbf{h}_\perp^\alpha)$ is bounded $H^1((0, T) \times B)$ and, after extracting a subsequence, converges strongly in $L^1((0, T) \times B)$.

Let $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ intended to tend to 0. We have

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{m}^{\alpha_1} - \partial_t \mathbf{m}^{\alpha_2} &= (\mathbf{m}^{\alpha_1} - \mathbf{m}^{\alpha_2}) \times (\mathbf{h}^{\alpha_1} + \mathbf{h}_{\text{ext}} + \nabla \Phi(\mathbf{m}^{\alpha_1})) \\ &\quad + \mathbf{m}^{\alpha_1} \times (\nabla \Phi(\mathbf{m}^{\alpha_1}) - \nabla \Phi(\mathbf{m}^{\alpha_2})) \\ &\quad + \mathbf{m}^{\alpha_1} \times (\mathbf{m}_{\parallel}^{\alpha_1} - \mathbf{m}_{\parallel}^{\alpha_2}) \\ &\quad + \mathbf{m}^{\alpha_1} \times (\mathbf{h}_{\perp}^{\alpha_1} - \mathbf{h}_{\perp}^{\alpha_2}) \\ &\quad + \alpha_1 \mathbf{m}^{\alpha_1} \times (\mathbf{m}^{\alpha_1} \times \mathbf{h}^{\alpha_1}) \\ &\quad - \alpha_2 \mathbf{m}^{\alpha_2} \times (\mathbf{m}^{\alpha_2} \times \mathbf{h}^{\alpha_2}) \end{aligned}$$

So, the estimate on $|\mathbf{m}^{\alpha_1} - \mathbf{m}^{\alpha_2}|$ is written as :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{m}^{\alpha_1} - \mathbf{m}^{\alpha_2}|^2 &\leq 0 \\ &\quad + C |\mathbf{m}^{\alpha_1} - \mathbf{m}^{\alpha_2}|^2 \\ &\quad + |\mathbf{m}^{\alpha_1} - \mathbf{m}^{\alpha_2}| |P_{\parallel}(\mathbf{m}^{\alpha_1} - \mathbf{m}^{\alpha_2})| \\ &\quad + 2 |\mathbf{h}_{\perp}^{\alpha_1} - \mathbf{h}_{\perp}^{\alpha_2}| \\ &\quad + \alpha_1 |\mathbf{h}^{\alpha_1}| + \alpha_2 |\mathbf{h}^{\alpha_2}| \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{m}^{\alpha_1}(t) - \mathbf{m}^{\alpha_2}(t)\|_{L^2}^2 &\leq (C+1) \|\mathbf{m}^{\alpha_1}(t) - \mathbf{m}^{\alpha_2}(t)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \|\mathbf{h}_\perp^{\alpha_1}(t) - \mathbf{h}_\perp^{\alpha_2}(t)\|_{L^2(B)} \\ &\quad + D(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

which gives, after an integration in time,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{m}^{\alpha_1}(t) - \mathbf{m}^{\alpha_2}(t)\|_{L^2}^2 &\leq (C+1) \int_0^t \|\mathbf{m}^{\alpha_1}(s) - \mathbf{m}^{\alpha_2}(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &\quad + \|\mathbf{h}^{\alpha_1} - \mathbf{h}^{\alpha_2}\|_{L^1((0,T \times B))} \\ &\quad + T D(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

We conclude with Gronwall's lemma that the subsequence $(\mathbf{m}^\alpha)_\alpha$ is a Cauchy sequence in $L_{\text{loc}}^\infty(L^2)$. It has a strong limit, which makes to take the limit in the nonlinear terms; consequently, the limit is a solution of the Landau-Lipschitz equation without damping parameter \square

Remark 2.8 *In fact, we can prove with the arguments developed in these two last sections, that $(\alpha, \eta) \mapsto (\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ is continuous from $[0, 1] \times [0, 1]$ to $L^2([0, T]; L_{\text{loc}}^2) \times L^2([0, T]; L_{\text{loc}}^2) \times \mathcal{C}([0, T]; L^2)$.*

Acknowledgments

The author wishes to warmly thank Guy Métivier and Stéphane Labbé for their help and their advise.

Chapitre 3

Strong quasi-stationary limit for Maxwell-Landau-Lifshitz system in inhomogeneous media

Abstract. The purpose of this paper is to generalise [1] on inhomogeneous media. The new key point is to obtain resolvent estimates for Maxwell system with smooth coefficients.

3.1 Introduction

The purpose of this article is to obtain local decay on the electromagnetic field in the Maxwell-Landau-Lifshitz system, which reads (in its non-dimensionalized form) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\varepsilon \mathbf{e}) - \mathbf{curl} \mathbf{h} = 0 \\ \partial_t(\mu(\mathbf{h} + \mathbf{m})) + \mathbf{curl} \mathbf{e} = 0 \\ \partial_t \mathbf{m} = f(\mathbf{m}, \mathbf{h}_T, x) \\ (\mathbf{e}(0), \mathbf{h}(0)) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0) \\ \mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{e}) = 0 \\ \operatorname{div}(\mu(\mathbf{h} + \mathbf{m})) = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

where

$$f : (m, h, x) \in \mathbb{R}^{3+3+d} \mapsto -\gamma(x) \left(m \times h - \frac{\alpha(x)}{|m|} m \times (m \times h) \right) \in \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

and

$$\mathbf{h}_T = \mathbf{h} - (\nabla \Phi)(\mathbf{m}) + \mathbf{h}_{\text{ext}}(x) . \quad (3.3)$$

In (3.1), for $d = 1, 2, 3$, $\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m} : (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^3$ ε, μ depend on $x \in \mathbb{R}^d$ and are uniformly positive and constant (equal to $\eta > 0$) on $\{|x| \geq R\}$ for some $R > 0$. The damping α depends on x (or not), and is uniformly positive, as well as the gyromagnetic ratio $\gamma(x)$.

In (3.2), the sign \times is the vectorial product in \mathbb{R}^3 ; in (3.3), $\Phi : m \mapsto \Phi(m)$ is a convex function on \mathbb{R}^3 , and the exterior magnetic field \mathbf{h}_{ext} is a datum.

The magnetic moment $|\mathbf{m}(t, x)|$ is independant of t and vanishes on $\{|x| \geq R\}$ (note that these conditions are formally preserved by the equation on $\partial_t \mathbf{m}$). Moreover, one has the decay of the energy $\mathcal{E}(t)$ defined by

$$\mathcal{E}(t) = \int \varepsilon |\mathbf{e}|^2 + \mu |\mathbf{h}|^2 + \Phi(\mathbf{m}) + |\mathbf{m} - \mathbf{h}_{\text{ext}}|^2 dx \quad (3.4)$$

since one has the formal identity (see [1])

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \int \gamma \alpha |\partial_t \mathbf{m}|^2 dx = 0$$

Our goal is to prove the strong quasi-stationary approximation in (3.1), in the sense that, for $\varepsilon(x) = \eta \tilde{\varepsilon}(x)$ and $\mu(x) = \eta \tilde{\mu}(x)$, whenever $\eta > 0$ goes to 0 ($\tilde{\varepsilon}$ and $\tilde{\mu}$ being fixed), then the solution $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ of (3.1) tends to a solution of the system obtained by remplacing η by 0, that is :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e} = 0 \\ \partial_t \mathbf{m} = f(\mathbf{m}, \mathbf{h}_T) \\ \mathbf{curl} \mathbf{h} = 0 \\ \text{div}(\tilde{\mu}(\mathbf{h} + \mathbf{m})) = 0 \\ \mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

The principal result reads

Theorem 3.1 *Let $(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{m}_0)$ being fixed in $L^2 \times L^2 \times L^\infty_{\text{comp}}$, and $\tilde{\varepsilon}$ and $\tilde{\mu}$ fixed such that $\tilde{\mu} - 1, \tilde{\varepsilon} - 1$ are in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Denote by $(\mathbf{e}^\eta, \mathbf{h}^\eta, \mathbf{m}^\eta)$ a solution of the system (3.1) with $(\varepsilon, \mu) = (\eta \tilde{\varepsilon}, \eta \tilde{\mu})$. Then, when $\eta > 0$ goes to 0, $(\mathbf{e}^\eta, \mathbf{h}^\eta, \mathbf{m}^\eta)$ tends to $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ a solution of the system (3.5) in $L^2(L^2_{\text{loc}}) \times L^2(L^2_{\text{loc}}) \times L^\infty_{\text{loc}}(L^p_{\text{comp}})$ for $p < \infty$. Moreover, the solution of (3.5) is unique.*

In [32], F. Jochmann proved the existence of solution of (3.1) and the weak convergence when ε and μ are just in L^∞ and bounded from below. In [1], we proved the strong converge when ε and μ are constant. The key of the proof is based on an local estimate for the free wave equation, obtained using an expression of the fundamental solution.

In this present paper, we show a similar result on a matricial compact perturbation of the wave operator, but here the proof is strongly different, and based on a resolvent estimate, which we now explain.

We denote by χ and ϕ cut-off functions in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ such that $\phi = 1$ on $\text{supp} \chi$. We denote $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, and $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$.

Let $P(x, D)$ be a self-adjoint, elliptic, positive, matrix-differential operator of the following form

$$P(x, D) = -a(x)\Delta \text{Id} + \sum_j B_j(x)D_j + V(x) \quad (3.6)$$

such that $a - 1$ belongs to $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, and B_j and V belong to $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3; M_m(\mathbb{R}))$, (implying the fact that $P = -\Delta \text{Id}$ out of a compact in \mathbb{R}^3). Here, the ellipticity is equivalent to $a(x) \geq c_0 > 0$.

Consider the following ‘‘wave equation’’ :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Pu = f \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

This equation is well-posed for u_0 in \dot{H}_P^1 (where \dot{H}_P^γ is the homogeneous Sobolev space associated to the elliptic operator P , which is here also the completion of \mathcal{D} for the norm $\|u\|_{\dot{H}_P^\gamma} = \|P^{\gamma/2}u\|_{L^2}$ (remark that $P^{\gamma/2}$ is well-defined by spectral theorem for a symmetric operator, because P is a positive operator); recall that $H_P^\gamma(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ whenever $\gamma < d/2$), u_1 in L^2 and f in $L_{\text{loc}}^1(L^2)$.

The result is

Theorem 3.2 *Let be $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, (u_0, u_1) belonging to $\dot{H}_P^{\gamma+1}(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}_P^\gamma(\mathbb{R}^3)$, and f such that $\langle x \rangle^s P^{\gamma/2} f(t, x)$ belongs to $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ for $s > 1/2$ fixed. Let u be the solution of equation (3.7). Then, under Assumptions 3.2 and 3.3 below, one has, for $-3/2 < \gamma < 1/2$ and all $R > 0$*

$$\|(u, \partial_t u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}_P^{\gamma+1}(B_R) \times \dot{H}_P^\gamma(B_R))} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}_P^{\gamma+1}} + \|u_1\|_{\dot{H}_P^\gamma} + \|\langle x \rangle^s P^{\gamma/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2)}$$

Here, when v belongs to $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, we denote by $B_R = \{|x| \leq R\} \subset \mathbb{R}^3$ the ball of radius R centered in 0, and $\|v\|_{\dot{H}_P^\gamma(B_R)} = \|P^{\gamma/2}v\|_{L^2(B_R)}$.

Remark 3.1 *This result was (almost) proved for the unperturbed wave operator in [1], Theorem 1.2.*

Remark 3.2 *It was also proved in the case of a scalar wave operator by Nicolas Burq in [12], and f supported in $\{|x| \leq R\}$.*

Remark 3.3 *Assumptions 3.2 and 3.3 are necessary, in the sense that the resolvent estimates are true only under these assumptions.*

Remark 3.4 *Theorem 3.2 establishes the principal step to prove Theorem 3.1, which will be proved in the last section.*

3.2 Resolvent estimates

The goal of this section is to obtain resolvent estimates for P in order to prove Theorem 3.2 in the next section. We start by recalling some results on the resolvent.

3.2.1 Main results

Assumption 3.1 P est elliptic, that is $a(x) \geq c_0 > 0$

Under this assumption, we can define the resolvent $(P - \lambda)^{-1}$ from L_{comp}^2 to L_{loc}^2 . Moreover, we will use the following result :

Proposition 3.1 (Sjostrand-Zworski - 91 - Theorem 1.1 in [48]) For χ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, the operator $\chi(P - z^2)^{-1}\chi$, defined on the half-plane $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$ has a meromorphic extension on \mathbb{C} . Its poles are called resonance.

Using Mourre's theory (cf. Theorem 2.2.i in [36] and Section 5 in [45]), one has the well-known

Proposition 3.2 Let be $s > 1/2$ and $\lambda > 0$. Then

$$\langle x \rangle^{-s} (P - \lambda \pm i0) \langle x \rangle^{-s} := \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \langle x \rangle^{-s} (P - \lambda \pm i\varepsilon) \langle x \rangle^{-s}$$

exists as a bounded operator from L^2 to L^2 .

To run details of Mourre's theory in an other case, see also Part 2 in [34] and [35].

Remark 3.5 As a consequence of Proposition 3.2 the only one possible resonance for $\chi(x)(P - z^2)^{-1}\chi(x)$ is 0.

The following assumption is necessary to bound the low frequencies (z small).

Assumption 3.2 0 is not a resonance of P .

The next assumption is necessary for high frequencies.

Assumption 3.3 P is non-trapping, that is for all $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, the solution $(x(t), \xi(t))$ of the hamiltonian system :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \nabla_{\xi} p_0(x, \xi) \\ \dot{\xi} &= -\nabla_x p_0(x, \xi) \end{cases}$$

is such that $x(t) \rightarrow \infty$ when t goes to infinity.

First, we prove the following estimate :

Proposition 3.3 *Assume that Assumptions 3.2 and 3.3 are satisfied. Then, for $s > 1/2$ and all z , one has $\|\chi(x)(P - z^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim \frac{1}{\langle z \rangle}$.*

D. Robert proved this result for high frequencies in [45], Theorem 5.1 :

Proposition 3.4 (D. Robert) *Under Assumption 3.3, one has*

$$\|\chi(x)(P - z^2 \pm i0)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim \frac{1}{|z|}$$

when z goes to ∞ .

Now, we prove the same estimate for low and medium frequencies. First, see the unperturbed operator :

3.2.2 Estimates on Δ

Lemma 3.1 *Let $P_0 = -\Delta$. Then*

$$\|\chi(x)(P_0 - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1 .$$

Proof. In fact, $\chi(x)(P_0 - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}$ is an Hilbert-Schmidt operator. Indeed, the distribution kernel of $\chi(x)(P_0 - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}$ is

$$K(x, y) = \chi(x) \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{2\pi|x-y|} \langle y \rangle^{-s} .$$

Thus, using Peetre's inequality $\langle x - z \rangle^{-2s} \leq \langle x \rangle^{2s} \langle z \rangle^{-2s}$, one has

$$\begin{aligned} \|\chi(x)(P_0 - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{HS}^2 &= \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \chi(x)^2 \frac{1}{4\pi^2|x-y|^2} \langle y \rangle^{-2s} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \chi(x)^2 \frac{1}{4\pi^2|z|^2} \langle x - z \rangle^{-2s} dx dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \chi(x)^2 \frac{1}{4\pi^2|z|^2} \langle x \rangle^{2s} \langle z \rangle^{-2s} dx dz \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \chi(x)^2 \langle x \rangle^{2s} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle z \rangle^{-2s}}{4\pi^2|z|^2} dz \right) \\ &\lesssim 1 \end{aligned}$$

Thus, $\chi(x)(P_0 - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}$ is an Hilbert-Schmidt operator uniformly bounded in λ . \square

3.2.3 $H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+2}$ and $H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+1}$ estimates

Lemma 3.2 Assume that for all cut-off χ (with γ fixed in \mathbb{R}),

$$\|\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \lesssim \langle \lambda \rangle^{-1}.$$

Then, for all χ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$,

$$\|\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+2}} \lesssim \langle \lambda \rangle$$

Proof. Fix χ , and let be ϕ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ equal to 1 when $\chi \neq 0$. Since P is elliptic with coefficients uniformly bounded, one has $\|u\|_{H^{\gamma+2}} \lesssim \|(P + i)u\|_{H^\gamma}$ for all u . It remains to estimate the operator $(P + i)\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}$.

$$\begin{aligned} (P + i)\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} &= \chi(P + i)(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + [P, \chi](P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \\ &= \chi(Id + (i + \lambda^2)(P - \lambda^2)^{-1}) \langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + (P + i)^{-1}(P + i)[P, \chi](P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \\ &= \chi Id \langle x \rangle^{-s} + (i + \lambda^2)\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + (P + i)^{-1}[P, \chi](P + i)(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + (P + i)^{-1}[P, [P, \chi]](P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \\ &= \chi Id \langle x \rangle^{-s} + (i + \lambda^2)\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + (P + i)^{-1}[P, \chi] \langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + (i + \lambda^2)(P + i)^{-1}[P, \chi]\phi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + (P + i)^{-1}[P, [P, \chi]]\phi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \end{aligned}$$

Since P is elliptic, the following operators are bounded :

$$\begin{aligned} (P + i)^{-1}[P, \chi] &: H^\gamma \longrightarrow H^\gamma \\ (P + i)^{-1}[P, [P, \chi]] &: H^\gamma \longrightarrow H^\gamma \end{aligned}$$

Thus, one has

$$\begin{aligned} &|\chi(x)(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}|_{H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+2}} \\ &\leq \|\chi Id \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} + \langle \lambda \rangle^2 \|\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \\ &\quad + \|(P + i)^{-1}[P, \chi]\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \|\langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \\ &\quad + \langle \lambda \rangle^2 \|(P + i)^{-1}[P, \chi]\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \|\phi(x)(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \\ &\quad + \|(P + i)^{-1}[P, [P, \chi]]\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \|\phi(x)(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \\ &\lesssim \langle \lambda \rangle \end{aligned}$$

□

Since $\|u\|_{H^{\gamma+1}}^2 \lesssim \|u\|_{H^\gamma} \|u\|_{H^{\gamma+2}}$, one has also

Lemma 3.3 *If for all χ , $\|\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \lesssim \langle \lambda \rangle^{-1}$, then, one has*

$$\|\chi(P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+1}} \lesssim 1 .$$

Similarly to Lemma 3.2, one has also

Lemma 3.4 *Assume that for all cut-off χ (with γ fixed in \mathbb{R}),*

$$\|\langle x \rangle^{-s} (P - \lambda^2)^{-1} \chi\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \lesssim \langle \lambda \rangle^{-1} .$$

Then, for all χ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$,

$$\|\langle x \rangle^{-s} (P - \lambda^2)^{-1} \chi\|_{H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+2}} \lesssim \langle \lambda \rangle$$

Proof. Since P is elliptic, one has $\|u\|_{H^{\gamma+2}} \lesssim \|(P + i)u\|_{H^\gamma}$ for all u . It remains to estimate the operator $(P + i)\langle x \rangle^{-s} (P - \lambda^2)^{-1} \chi$. But

$$\begin{aligned} (P + i)\langle x \rangle^{-s} (P - \lambda^2)^{-1} \chi &= S \langle x \rangle^{-s} (P + i) (P - \lambda^2)^{-1} \chi \\ &= S \langle x \rangle^{-s} (\lambda + i) (P - \lambda^2)^{-1} \chi \\ &= (\lambda + i) S \langle x \rangle^{-s} (P - \lambda^2)^{-1} \chi \end{aligned}$$

where $S = ((P + i)\langle x \rangle^{-s} (P + i)^{-1} \langle x \rangle^s)$ is bounded on H^s . □

Since $\|u\|_{H^{\gamma+1}}^2 \lesssim \|u\|_{H^\gamma} \|u\|_{H^{\gamma+2}}$, one has also

Lemma 3.5 *If for all χ , $\|\langle x \rangle^{-s} (P - \lambda^2)^{-1} \chi\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \lesssim \langle \lambda \rangle^{-1}$, then, one has*

$$\|\langle x \rangle^{-s} (P - \lambda^2)^{-1} \chi\|_{H^\gamma \rightarrow H^{\gamma+1}} \lesssim 1$$

3.2.4 Low and medium frequencies L^2 estimates

Lemma 3.6 *Under Assumption 3.2, for all $\lambda_0 > 0$ and $|\lambda| \leq \lambda_0$, one has*

$$\|\chi(x) (P - \lambda^2)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_{\lambda_0}$$

Proof. Let $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ such that $\phi = 1$ on the support of $P - P_0$, that is

$$(1 - \phi)P = (1 - \phi)P_0 .$$

Thus, $(P_0 - z^2) = (1 - \phi)(P - z^2) + \phi(P_0 - z^2)$ and

$$(P_0 - z^2) = \phi(P_0 - z^2) + (P - z^2)(1 - \phi) + [P, \phi] \tag{3.8}$$

Multiplying (3.8) by $R(z) := (P - z^2)^{-1}$ on the left and by $R_0(z) := (P_0 - z^2)^{-1}$ on the right, one has :

$$R(z) = R(z)\phi + (1 - \phi)R_0(z) + R(z)[P, \phi]R_0(z)$$

Hence, introducing $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ equal to 1 on $\text{supp } \phi$,

$$\begin{aligned} \chi(P - z^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s} &= \chi R(z)\phi \langle x \rangle^{-s} + \chi(1 - \phi)R_0(z)\langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + \chi R(z)[P, \phi]R_0(z)\langle x \rangle^{-s} \\ &= \chi R(z)\phi \langle x \rangle^{-s} + \chi(1 - \phi)R_0(z)\langle x \rangle^{-s} \\ &\quad + \chi R(z)\psi [P, \phi] \psi R_0(z)\langle x \rangle^{-s} \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \|\chi(P - z^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow L^2} &\leq \|\chi R(z)\phi\|_{L^2 \rightarrow L^2} + \|\chi R_0(z)\langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \\ &\quad + \|\chi R(z)\psi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|\psi R_0(z)\langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow H^1} \end{aligned}$$

But, since 0 is not a resonance, $\chi R(z)\chi$ is analytic, thus continuous from \mathbb{R} to $\mathcal{L}(L^2, H^1)$ (by Lemma 3.1). According to Lemma 3.2, one has in fact $\|\chi(P - z^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow L^2} < \infty$ \square

3.2.5 $H^\gamma \rightarrow H^\gamma$ estimates

Lemma 3.7 *Assume that for all cut-off function χ ,*

$$\|\chi(P - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_\chi \langle \lambda \rangle^{-1} .$$

Then, for all $\gamma \in \mathbb{R}$, one has

$$\|\chi(P - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \leq C_{\chi, \gamma} \langle \lambda \rangle^{-1} \quad (3.9)$$

$$\|\langle x \rangle^{-s}(P - \lambda^2)^{-1}\chi\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \leq C_{\chi, \gamma} \langle \lambda \rangle^{-1}. \quad (3.10)$$

Proof. The estimate (3.9) for $\gamma = 0$ is true by hypothesis, and (3.10) for $\gamma = 0$ by duality.

It is sufficient to prove that the H^γ estimates (3.9) implies the $H^{\gamma+2}$ and $H^{\gamma-2}$ estimates (3.9). Indeed, if it is true, then (3.9) is true for γ even integer positive and negative by induction, thus for all γ real by interpolation, thus (3.10) is true by duality.

To prove (3.9) $_\gamma \Rightarrow$ (3.9) $_{\gamma+2}$, remark that

$$\|(P + i)\chi(P - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P + i)^{-1}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \simeq \|\chi(P - \lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{H^{\gamma+2} \rightarrow H^{\gamma+2}} .$$

Thus, the end of the proof of implication (3.9) $_\gamma \Rightarrow$ (3.9) $_{\gamma+2}$ is similar to the proof of Lemma 3.2.

$$\begin{aligned} (P + i)\chi &= \chi(P + i) + [P, \chi] \\ &= \chi(P + i) + (P + i)^{-1}(P + i)[P, \chi] \\ &= \chi(P + i) + (P + i)^{-1}([P, \chi](P + i) + [P, [P, \chi]]) \end{aligned}$$

Thus, if ϕ is a cut-off equal to 1 when $\chi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
& (P+i)\chi(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&= \chi(P+i)(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&\quad + (P+i)^{-1}[P,\chi](P+i)(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&\quad + (P+i)^{-1}[P,[P,\chi]](P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&= \chi(P-\tau^2)^{-1}(P+i)\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&\quad + (P+i)^{-1}[P,\chi](P-\tau^2)^{-1}(P+i)\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&\quad + (P+i)^{-1}[P,[P,\chi]]\phi(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&= \chi\phi(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\langle x \rangle^s(P+i)\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&\quad + (P+i)^{-1}[P,\chi]\phi(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\langle x \rangle^s(P+i)\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} \\
&\quad + (P+i)^{-1}[P,[P,\chi]]\phi(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1}
\end{aligned}$$

Hence, $\|(P+i)\chi(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \lesssim \|\phi(P-\tau^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma}$ since the following operators are bounded.

$$\begin{aligned}
& \langle x \rangle^s(P+i)\langle x \rangle^{-s}(P+i)^{-1} : H^\gamma \longrightarrow H^\gamma \\
& (P+i)^{-1}[P,\chi] : H^\gamma \longrightarrow H^\gamma \\
& (P+i)^{-1}[P,[P,\chi]] : H^\gamma \longrightarrow H^\gamma
\end{aligned}$$

It remains to prove $(3.9)_\gamma \Rightarrow (3.9)_{\gamma-2}$. Remark that

$$\|(P+i)^{-1}\chi(P-\lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)\|_{H^\gamma \rightarrow H^\gamma} \simeq \|\chi(P-\lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{H^{\gamma-2} \rightarrow H^{\gamma-2}}.$$

But $(P+i)^{-1}\chi(P-\lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)$

$$\begin{aligned}
&= (P+i)^{-1}\chi(P+i)(P+i)^{-1}(P-\lambda^2)^{-1}(P+i)\langle x \rangle^{-s}S^* \\
&= (P+i)^{-1}\chi(P+i)\phi(P-\lambda^2)^{-1}\langle x \rangle^{-s}S^*
\end{aligned}$$

where the operators $(P+i)^{-1}\chi(P+i)$ and $S^* := \langle x \rangle^s(P+i)^{-1}\langle x \rangle^{-s}(P+i)$ are bounded on H^γ and ϕ is a cut-off equal to 1 on $\text{supp } \chi$. This finishes the proof of $(3.9)_\gamma \Rightarrow (3.9)_{\gamma-2}$ \square

3.3 Estimates for the wave equation (3.7) : proof of Theorem 3.2

In this section, we prove Theorem 3.2. First, remark that it is sufficient to prove it for $\gamma = 0$. Indeed, if it is proved when $\gamma = 0$, we can apply this with $v = P^\gamma u$, which is the solution of the wave equation (3.11) below, to obtain Theorem 3.2 in the general case.

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + Pv &= P^\gamma f \\ v|_{t=0} &= P^\gamma v_0 \\ \partial_t v|_{t=0} &= P^\gamma v_1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Here, we assume that $\gamma = 0$.

3.3.1 Estimates for the right hand side of the wave equation

First, assume that $u_0 = u_1 = 0$. Under these assumptions, note that if u is the solution on $t \geq 0$ of (3.7), then u extended by 0 on $\{t < 0\}$ as well as f , is a solution of (3.7) for $t \in \mathbb{R}$. This is why we can use a time-Fourier transform. Because $f|_{t < 0} = 0$, one has, for $\text{Im } \tau < 0$,

$$(P - \tau^2)^{-1} \widehat{u}(\tau, x) = \widehat{f}(\tau, x)$$

Thus,

$$\widehat{u}(\tau, x) = (P - \tau^2)^{-1} \widehat{f}(\tau, x)$$

By Proposition 3.3 and Lemma 3.7, one has for almost every $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\|\chi \widehat{u}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \frac{1}{\langle \tau \rangle} \|\langle x \rangle^s \widehat{f}(\tau, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^3)} \quad (3.12)$$

Hence,

$$\|\chi \tau \widehat{u}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \lesssim \|\langle x \rangle^s f(\tau, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^3)}^2$$

that is (integrating in τ , and since the times Fourier transform is an isometry on $L^2(H)$ if H is a Hilbert space)

$$\|\chi \partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^3))}^2 \lesssim \|\langle x \rangle^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+3})}^2 \quad (3.13)$$

By Lemma 3.3, one has

$$\|\chi u\|_{L^2(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))}^2 \lesssim \|\langle x \rangle^s f\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^3))}^2 \quad (3.14)$$

For $R > 0$ fixed, choose χ equal to 1 when $|x| \leq R$. Since, for v in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, one has

$$\|v\|_{\dot{H}_P^1(B_R)} \leq \|\chi v\|_{H^1(\mathbb{R}^3)},$$

the inequalities (3.13) and (3.14) prove the theorem when $f = 0$.

3.3.2 Estimates for the initial data

Suppose now that $f = 0$. We follow the scheme of the proof of N. Burq with $P = -\Delta_g$ in [12]. Let $A = i \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ P & 0 \end{pmatrix}$ be an operator on $\mathcal{H} := \dot{H}_P^1 \times L^2$ with domain $(\dot{H}_P^2 \times \dot{H}_P^1) \cap \mathcal{H}$. The solution of (3.7) with $f = 0$ is given by

$$\begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} = e^{itA} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Lemma 3.8 *Let be u a solution of the equation (3.7) with $f = 0$. Then one has*

$$\|\chi \partial_t u\|_{L^2(L^2)} + \|\chi u\|_{L^2(\dot{H}_P^1)} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}_P^1} + \|u_1\|_{L^2}$$

Proof. Observe that e^{itA} is a unitary group on the Hilbert space \mathcal{H} , equipped with the scalar product

$$((u_1, u_2)|(v_1, v_2))_{\mathcal{H}, \mathcal{H}} = (P^{1/2}u_1, P^{1/2}v_1)_{L^2, L^2} + (u_2, v_2)_{L^2, L^2} .$$

Denote by $T = \chi e^{itA}$ and fix ϕ equal to 1 on $\text{supp } \chi$. We want to prove Lemma 3.8, which means the continuity of T from \mathcal{H} to $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$. The continuity of T from \mathcal{H} to $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ is equivalent to the continuity of T^* from $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ to \mathcal{H} , where, by definition of T^* ,

$$\langle Tu, G \rangle_{L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}), L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})} = \langle u, T^*G \rangle_{\mathcal{H}, \mathcal{H}}$$

Hence, one has

$$T^*G(t, \cdot) = \int_{u \in \mathbb{R}} e^{-iuA} \chi G(u, \cdot) du$$

and the continuity of T^* is in its turn equivalent to the continuity of TT^* from $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ to $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$. Finally,

$$TT^*G(t, \cdot) = \int_{u \in \mathbb{R}} \chi e^{i(t-u)A} \chi G(u, \cdot) du = \int_{u < t} + \int_{t < u}$$

and it is sufficient to prove the continuity of any of the two operators above, say for example the continuity of χU_χ^γ from $L^2(\mathcal{H}^\gamma)$ to itself, were

$$U_\chi^\gamma(G)(t, \cdot) = \int_{u < t} e^{i(t-u)A} \chi G(u, \cdot) du$$

Suppose that G is supported in $\{t > 0\}$ (which by density and translation invariance is possible). Then

$$(i\partial_t + A) U_\chi^\gamma(G) = \chi G(t, \cdot), \quad U_\chi^\gamma(G)|_{t < 0} = 0$$

The Fourier transform with respect to t of $U_\chi^\gamma(G)$ and G are holomorphic in the half plane $\text{Im } z < 0$ (due to the support property) and satisfy there

$$(A - z) \widehat{U}_\chi^\gamma(G) = \chi \widehat{G}$$

Hence,

$$\widehat{U}_\chi^\gamma(G) = (A - z)^{-1} \chi \widehat{G} .$$

Thus, the following lemma finishes the proof of Theorem 3.2. □

Lemma 3.9 *For all cut-off χ , $\chi(A - z)^{-1}\chi$ is bounded from \mathcal{H} to itself.*

Proof. Note that

$$(A - z)^{-1} = \begin{pmatrix} z(P - z^2)^{-1} & -i(P - z^2)^{-1} \\ iP(P - z^2)^{-1} & z(P - z^2)^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Hence, we want to prove the following estimates (for all cut-off χ) :

$$\begin{aligned}\|\chi(P - \tau^2)^{-1}\chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} &\lesssim \langle \tau \rangle^{-1} \\ \|\chi(P - \tau^2)^{-1}\chi\|_{L^2 \rightarrow \dot{H}_P^1} &\lesssim 1 \\ \|\chi P(P - \tau^2)^{-1}\chi\|_{\dot{H}_P^1 \rightarrow L^2} &\lesssim 1 \\ \|\chi(P - \tau^2)^{-1}\chi\|_{\dot{H}_P^1 \rightarrow \dot{H}_P^1} &\lesssim \langle \tau \rangle^{-1}\end{aligned}$$

Since the inclusion $H^1 \subset \dot{H}_P^1$ is continuous and $(P - \tau^2)^{-1}\chi = (P - \tau^2)^{-1}\chi\phi$ where ϕId is continuous from \dot{H}_P^1 to H^1 , is sufficient to prove the same estimates by replacing homogeneous Sobolev spaces by the inhomogeneous spaces :

$$\|\chi(P - \tau^2)^{-1}\chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim \langle \tau \rangle^{-1} \quad (3.16)$$

$$\|\chi(P - \tau^2)^{-1}\chi\|_{L^2 \rightarrow H^1} \lesssim 1 \quad (3.17)$$

$$\|\chi P(P - \tau^2)^{-1}\chi\|_{H^1 \rightarrow L^2} \lesssim 1 \quad (3.18)$$

$$\|\chi(P - \tau^2)^{-1}\chi\|_{H^1 \rightarrow H^1} \lesssim \langle \tau \rangle^{-1} \quad (3.19)$$

The inequalities (3.16) and (3.19) follows from Proposition 3.3 and Lemma 3.7, and (3.17) from Lemma 3.5.

Moreover, since

$$\chi P(P - \tau^2)^{-1}\chi = \chi(P - \tau^2)^{-1}P\chi = \chi\phi(P - \tau^2)^{-1}\phi P\chi$$

and since $P\chi : H^2 \rightarrow L^2$ is continuous, (3.18) follows from Lemma 3.5. \square

3.4 Application

This section is devoted to the proof of Theorem 3.1. We suppose that $(\varepsilon, \mu) = (\eta\tilde{\varepsilon}, \eta\tilde{\mu})$ where $\eta > 0$ and $\tilde{\varepsilon}$ and $\tilde{\mu}$ being fixed are equal to 1 out of $B(0, R)$. In order to deal with a self-ajoint operator on the classical Hilbert space L^2 , consider the new variables $(\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{m}}) = (\sqrt{\tilde{\varepsilon}}\mathbf{e}, \sqrt{\tilde{\mu}}, \sqrt{\tilde{\mu}}\mathbf{m})$ instead of $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$, and $\tilde{\gamma} = \mu^{1/2}\gamma$ instead of γ in (3.2).

Notation 3.1 Let R , P and Q denote the differential operators defined by

$$Ru = \varepsilon^{-1/2} \mathbf{curl}(\mu^{-1/2}u)$$

$$Pu = \varepsilon^{-1/2} \mathbf{curl}\left(\mu^{-1} \mathbf{curl}(\varepsilon^{-1/2}u)\right) - \varepsilon^{1/2} \nabla\left(\varepsilon^{-2}\mu^{-1} \operatorname{div}(\varepsilon^{1/2}u)\right)$$

$$Qu = \mu^{-1/2} \mathbf{curl}\left(\varepsilon^{-1} \mathbf{curl}(\mu^{-1/2}u)\right) - \mu^{1/2} \nabla\left(\varepsilon^{-1}\mu^{-2} \operatorname{div}(\mu^{1/2}u)\right)$$

Remark that P and Q are operator of the form given by (3.6).

Omitting the tilde $\tilde{\cdot}$, the new system is

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \partial_t \mathbf{e} - R\mathbf{h} = 0 \\ \eta \partial_t \mathbf{h} + R^* \mathbf{e} = -\eta \partial_t \mathbf{m} \\ \partial_t \mathbf{m} = f(\mathbf{m}, \mathbf{h}_T, x) \\ (\mathbf{e}(0), \mathbf{h}(0)) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0) \\ \mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{1/2} \mathbf{e}) = 0 \\ \operatorname{div}(\mu^{1/2}(\mathbf{h} + \mathbf{m})) = 0 \end{array} \right.$$

The existence of solutions in $C^0(L^2) \times C^0(L^2) \times (W^{1,\infty}(L^2) \times L_{\text{loc}}^\infty(L^\infty))$ is established by F. Jochmann in [32].

The propagation equations of the electromagnetic field (\mathbf{e}, \mathbf{h}) are obtained by classical manipulations in the first two equations in (3.4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^2 \partial_t^2 \mathbf{e} - R R^* \mathbf{e} = -\eta R \partial_t \mathbf{m} \\ \eta^2 \partial_t^2 \mathbf{h} + R^* R \mathbf{h} = -\eta^2 \partial_t^2 \mathbf{m} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

The analogue of $(P_{\parallel}, P_{\perp})$ defined by Proposition 3.2 in [1] is (Π, Σ) , where $\Sigma = 1 - \Pi$ and $\Pi : n \mapsto \Pi n = \tilde{n}$ is such that :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mu^{1/2} \tilde{n}) = \operatorname{div}(\mu^{1/2} n) \\ \mathbf{curl}(\mu^{-1/2} \tilde{n}) = 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

In other terms, $\tilde{\Pi} := \mu^{-1/2} \Pi \mu^{1/2}$ is the orthogonal projector on $\operatorname{Ker} \mathbf{curl}$ in the Hilbert space $L^2(\mu) := \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \int |f|^2 \mu dx < \infty\}$ (see section 2 in [32]). As a consequence, Π and Σ are bounded operators from L^2 to L^2 .

Remark that, if $\operatorname{div}(\varepsilon^{1/2} e) = 0$, then $P e = R R^* e$, and if $\operatorname{div}(\mu^{1/2} h) = 0$, then $Q h = R^* R h$, implying that $\|R^* e\|_{L^2} = \|e\|_{\dot{H}_P^1}$ and $\|R h\|_{L^2} = \|h\|_{\dot{H}_Q^1}$.

Decompose $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$ where $\mathbf{h}_1 = \Sigma \mathbf{h}$ and $\mathbf{h}_2 = \Pi \mathbf{h} = -\Pi \mathbf{m}$. The propagation equations (3.20) are equivalent to the equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^2 \partial_t^2 \mathbf{e} + P \mathbf{e} = -\eta R \partial_t \mathbf{m} \\ \eta^2 \partial_t^2 \mathbf{h}_1 + Q \mathbf{h}_1 = -\eta^2 \partial_t^2 \Sigma \mathbf{m} \\ \mathbf{h}_2 = -\Pi \mathbf{m} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{1/2} \mathbf{e}) = 0 \end{array} \right.$$

since the conditions $\operatorname{div}(\varepsilon^{1/2} \mathbf{e}) = \operatorname{div}(\mu^{1/2} \mathbf{h}_1) = 0$ are preserved in both systems of equations.

Recall that our goal is to generalise the proof of Theorem 1.6 in [1], to the case where ε and μ are not constant.

Hence, in order to obtain estimates on the system (3.1), we need to prove the following lemma. Here, ε and μ are in $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\varepsilon, \mu \geq c > 0$ and $\varepsilon = \mu = 1$ out of a compact K in \mathbb{R}^3 .

Lemma 3.10 *P is self-adjoint, positive, elliptic operator with the form written in (3.6), and 0 is not a resonance of P . The same proprieties hold for Q .*

Proof. Symetricity and Positivity of P are immediate (integrating by part). The principal symbol of P is $a(x)|\xi|^2 = \mu(x)^{-1} \varepsilon(x)^{-1} |\xi|^2$ (which points out that P has the form (3.6)), and the ellipticity follows. Hence, classical results imply the self-adjointness of P with domain H^2 . It remains to check that 0 is not a resonance of P .

Indeed, if it were, then there would exist a resonant state, $\phi = \Pi^{-1}u \in H_{\text{loc}}^2$, where u belongs to L_{comp}^2 , $P\phi = 0$, and

$$\Pi^{-1} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} R(z^2)^{-1} d(z^2)$$

where \mathcal{C} is a small contour in the complex plane around 0, and $R(z^2) : L_{\text{comp}}^2 \rightarrow H_{\text{loc}}^2$ is the meromorphic extension of $(P - z^2)^{-1}$ from $\{\text{Im } z > 0\}$ to \mathbb{C} . Moreover, if $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ is equal to 1 on $\text{supp}(P - P_0)$, then (see [47], Section 2.3, equality (2.57))

$$\Pi^{-1}u = \underbrace{\chi \Pi^{-1}u}_{\in H_{\text{comp}}^2} + \Delta^{-1} \left(\underbrace{[P, \chi] \Pi^{-1}u}_{\in L_{\text{comp}}^2} \right)$$

Hence, for $|x|$ sufficiently large, one has

$$|\phi(x)| \lesssim \frac{1}{|x|} \quad \text{and} \quad \left| \mathbf{curl}(\varepsilon^{-1/2}\phi) \right| + \left| \text{div}(\varepsilon^{1/2}\phi) \right| \lesssim \frac{1}{|x|^2} .$$

Since ϕ belongs to H_{loc}^2 and $\mathbf{curl}(\varepsilon^{-1/2}\phi), \text{div}(\varepsilon^{1/2}\phi)$ belong to L_{loc}^2 , it implies that in fact ϕ belongs to $L^4(\mathbb{R}^3)$ and $\mathbf{curl}(\varepsilon^{-1/2}\phi), \text{div}(\varepsilon^{1/2}\phi)$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$

Let χ a cut-off in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, such that $\chi = 1$ on $B(0, 1)$ and $\chi = 0$ out of $B(0, 2)$. Let $\chi_R(x) = \chi\left(\frac{x}{R}\right)$.

One has

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\chi_R \phi) P \phi \, dx = 0$$

Thus

$$\begin{aligned} & \int \mu^{-1} \mathbf{curl}(\varepsilon^{-1/2}\phi) \mathbf{curl}(\varepsilon^{-1/2}\phi \chi_R) \, dx \\ & + \int \frac{1}{\mu \varepsilon^2} \text{div}(\varepsilon^{1/2}\phi) \text{div}(\varepsilon^{1/2}\phi \chi_R) \, dx = 0 \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} & \int \mu^{-1} \left| \mathbf{curl}(\varepsilon^{-1/2}\phi) \right|^2 \chi_R \, dx + \int \frac{1}{\mu \varepsilon^2} \left| \text{div}(\varepsilon^{1/2}\phi) \right|^2 \chi_R \, dx \\ & = \int \mu^{-1} \mathbf{curl}(\varepsilon^{-1/2}\phi) \cdot (\varepsilon^{-1/2}\phi \times \nabla \chi_R) \, dx + \int \frac{1}{\mu \varepsilon^2} \text{div}(\varepsilon^{1/2}\phi) \varepsilon^{1/2}\phi \nabla \chi_R \, dx \end{aligned}$$

Hence, using Hölder's inequality,

$$\begin{aligned}
& \int |R^* \phi|^2 \chi_R dx + \int \frac{1}{\mu \varepsilon^2} |\operatorname{div}(\varepsilon^{1/2} \phi)|^2 \chi_R dx \\
& \leq \|R^* \phi\|_{L^2} \left\| (\varepsilon)^{-1/2} \phi \right\|_{L^4} \|\nabla \chi_R\|_{L^4} \\
& \quad + \left\| \frac{1}{\mu \varepsilon^2} \right\|_{L^\infty} \|\operatorname{div}(\varepsilon^{1/2} \phi)\|_{L^2} \|\varepsilon^{1/2} \phi\|_{L^4} \|\nabla \chi_R\|_{L^4} \\
& \lesssim \|\nabla \chi_R\|_{L^4} \lesssim R^{-1/4}
\end{aligned}$$

By Lebesgue's theorem (R goes to infinity), it implies that $\|\phi\|_{\dot{H}_Q^1} = 0$. Since $d = 3$, $\dot{H}_Q^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ continuously. Hence, $\phi = 0$, and 0 is not a resonance. \square

Lemma 3.11 *If $\operatorname{supp} m \subset B(0, R)$, then*

$$|\Pi m(x)| \lesssim 1/\langle x \rangle^3 \text{ for } |x| \geq R + 1. \quad (3.22)$$

Proof. Write

$$\operatorname{div}(\mu^{1/2} \Pi m) = -\operatorname{div}(\mu^{1/2} m) \quad \mathbf{curl} \mu^{-1/2} \Pi m = 0$$

Since $\mu^{-1/2} = \frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}} + \mu^{1/2}$, one has

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu^{-1/2} \Pi m) = \operatorname{div}\left(\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}} \Pi m - \mu^{1/2} m\right) \\ \mathbf{curl}(\mu^{-1/2} \Pi m) = 0 \end{cases}$$

Hence,

$$\mu^{-1/2} \Pi m = \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}\left(\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}} \Pi m - \mu^{1/2} m\right)$$

Since $\nabla \Delta^{-1} \operatorname{div} = \Psi^*$ where $|\Psi(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^3}$ and $1 - \mu$ and m are supported in $\{|x| \leq R\}$, one has

$$|\Pi m(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^3} \quad |x| > R + 1 \quad \square$$

Remark 3.6 *As a consequence of Lemma 3.22 and the continuity of Π from L^2 to L^2 (thus to L_{loc}^2), $\langle x \rangle^s \Pi m(x)$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^3)$, for $s = 1 > 1/2$ and*

$$\|\langle x \rangle \Pi m\|_{L^2} \lesssim \|m\|_{L^2}.$$

A simple computation give the following decomposition of \mathbf{e} and $\Pi \mathbf{h}$.

Lemma 3.12 *Let u and ψ be the solutions of the following Cauchy problems.*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + P u &= -\Pi \partial_t \mathbf{m} \\ u|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t u|_{t=0} &= \Pi \mathbf{h}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 \psi + Q \psi &= 0 \\ \psi|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t \psi|_{t=0} &= \mathbf{e}_0 \end{cases}$$

Then $\Pi \mathbf{h} = \partial_t u - R^* \psi$ and $\mathbf{e} = Ru - \partial_t \psi$.

As a consequence, using Theorem 3.2 with $\gamma = 1$ on u and ψ , one has :

Proposition 3.5 *Suppose that ε and μ are smooth in \mathbb{R}^3 and constant (equal to ε_0 and μ_0 out of $B(0, R)$).*

Let $(\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})$ be a solution of system (3.1). Then \mathbf{e} and $\Pi \mathbf{h}$ belong to $L^2(L^2_{\text{loc}})$.

Proposition 3.5 is the equivalent of Lemma 4.1 in [1].

Proof. In order to run Theorem 3.2 with $\gamma = 1$ on u and ψ , it is sufficient to remark that $\mathbf{e}_0, \Pi \mathbf{h}_0$ belong to L^2 (since $\Pi : L^2 \rightarrow L^2$ is continuous) and $\langle x \rangle \Pi \partial_t \mathbf{m}$ belongs to $L^2(L^2)$, which is a given by Remark 3.6. \square

As a consequence, several results established on the Maxwell-Landau-Lifshitz system in the case of ε and μ are constant in [1] still available if ε and μ are smooth and constant out of a compact. We will explain the principal differences of the proofs between the two cases.

The proof of Theorem 3.1 goes on as in Theorem 1.6 in [1]. Recall the principal steps.

- Fix η_1 and η_2 and write the expression of $\partial_t \mathbf{m}_{\eta_1} - \partial_t \mathbf{m}_{\eta_2}$, and multiply by $\mathbf{m}_{\eta_1} - \partial_t \mathbf{m}_{\eta_2}$. One has

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}|^2 &\leq 2 |\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2}|^2 (|\Pi m| + C) \\ &\quad + 8 (|\Sigma h_{\eta_1}| + |\Sigma h_{\eta_2}|) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 |f(\mathbf{m}_{\eta_i}, \Pi(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_i}), x) \cdot (\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}_{\eta_2})| \end{aligned} \tag{3.23}$$

- Introduce $a(t, x) = |x|^2 + 2 \int_0^t (|\Pi m(s, x)| + C) ds$ to absorb the first term by Gronwall's lemma.
- Commute $e^{-a(t)}$ and Π , and make an approximation of $e^{-a(t)}$ by cut-off and regularization to show that the commutator $[\Pi, e^{-a(t)}](\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\eta_i})$ converges strongly to 0 in $L^\infty_{\text{loc}}(L^2)$, by using the compacity of $[\Pi, f]$, where f is a smooth function (this compacity result is almost written in Corollary 3.3 in [32]).
- Use convenient Gronwall's type lemmas to show the strong convergence of $\mathbf{m}_{\eta_1} - \mathbf{m}$ in $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^3, e^{-a(t, x)} dx dt))$
- Thus, modulo a subsequence, using Lebesgue's theorem, we show the convergence of \mathbf{m}_{η_1} to \mathbf{m} in $L^\infty([0, T], L^p)$ for all $p < \infty$.

The proof of uniqueness needs the following

Lemma 3.13 *If m belongs to $L^1 \cap L^\infty$, then Πm satisfies :*

$$\|\Pi m\|_{L^p} \lesssim p \|m\|_{L^1 \cap L^\infty}$$

This is the equivalent of Proposition 5.8 in [1] (and also a consequence of this proposition).

Proof. Since, when $n = m$ and $n = \Pi n$,

$$\operatorname{div}(\mu^{1/2}n) = \operatorname{div}(\mu \mu^{-1/2}n) = \nabla \mu \cdot \mu^{-1/2}n + \mu \operatorname{div}(\mu^{-1/2}n)$$

one has

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu^{-1/2}\Pi m) = \operatorname{div}(\mu^{-1/2}m) + \mu^{-3/2}\nabla \mu \cdot (m - \Pi m) \\ \mathbf{curl}(\mu^{-1/2}\Pi m) = 0 \end{cases}$$

Hence

$$\Pi m = \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}(m) + \nabla \Delta^{-1} \left(\mu^{-3/2} \frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot (m - \Pi m) \right) \quad (3.24)$$

Since $(m - \Pi m)$ belongs to L^2 , and $\nabla \Delta^{-1}$ is the convolution by a function Ψ such that $|\Psi(x)| \lesssim 1/|x|^2$, one has :

$$\left\| \nabla \Delta^{-1} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot (m - \Pi m) \right) \right\|_{L^6} \lesssim \|m\|_{L^2} \leq \|m\|_{L^1 \cap L^\infty}$$

Thus, using the equality (3.24) with the continuity of $\nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}$ from L^6 to L^6 , one has

$$\|\tilde{m}\|_{L^6} \lesssim \|m\|_{L^1 \cap L^\infty}$$

Then, since Ψ belongs to $L_{\text{loc}}^{5/6}$ and $\operatorname{supp} \nabla \mu \subset B_{R-1}$, the Hölder's inequality implies

$$\left\| \nabla \Delta^{-1} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot (m - \Pi m) \right) \right\|_{L^\infty(B_R)} \lesssim \|m\|_{L^1 \cap L^\infty}$$

and the support property implies

$$\left| \nabla \Delta^{-1} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot (m - \Pi m) \right) \right| \lesssim \frac{1}{|x|^2} \|m\|_{L^1 \cap L^\infty}, \quad |x| \geq R+1$$

Thus,

$$\left\| \nabla \Delta^{-1} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot (m - \Pi m) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|m\|_{L^1 \cap L^\infty}$$

Since, with the notations in [1], $P_{\parallel} = \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}$, using Proposition 5.8 in [1], we conclude proof of Lemma 3.13. \square

To show the uniqueness, the steps are analogous to Section 5.3 in [1] :

- If \mathbf{m}_1 and \mathbf{m}_2 are two solutions, then $\mathbf{h}_i = -\Pi\mathbf{m}_i$ and, developping the expression of $\partial_t\mathbf{m}_1 - \partial_t\mathbf{m}_2$, one has :

$$\frac{1}{2}\partial_t|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2 \leq 2|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2| |\Pi(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)| + (|\Pi\mathbf{m}_1| + X)|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2$$

- Decompose $\Pi\mathbf{m}_1 = \Pi^M\mathbf{m}_1 + \Pi'^M\mathbf{m}_1$, where $\Pi^M m = m \mathbf{1}_{\{|m|>M\}}$, and use Gronwall's Lemma to absorb $\Pi'^M\mathbf{m}_1$.
- Use Proposition 3.13 to show that $\|\Pi^M\mathbf{m}_1\|_{L^1} \lesssim \exp(-cM)$ for $c > 0$.
- By Gronwall's Lemma, one has for $T > 0$ fixed and $t < T$,

$$\|\mathbf{m}_1(t) - \mathbf{m}_2(t)\|_{L^2}^2 \lesssim \exp(M(T - c)) ,$$

hence the uniqueness for $T < c$, and thus for all $T > 0$ since it is an autonomous system.

Acknowledgments

The author wishes to warmly thank Guy Métivier and especially Jean-François Bony for their help and their advise.

Chapitre 4

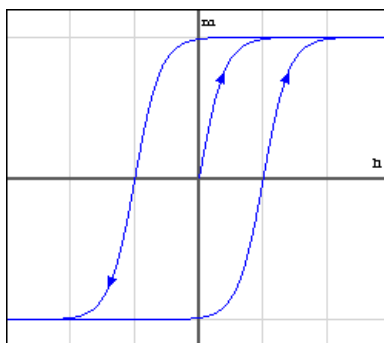
Asymptotique en cas de variations lentes du champ appliqué

4.1 Motivation

Ce chapitre a pour objet de commencer à mettre en évidence un rapport entre le phénomène d'hystérésis en ferromagnétisme et l'équation d'évolution de Landau-Lifshitz. Rappelons l'observation physique sur l'hystérésis (voir à ce sujet l'annexe A de [43]) :

4.1.1 Descriptions physique et mathématique du phénomène d'hystérésis

Dans une zone où le moment magnétique est (plus ou moins) constant – une telle zone étant appelé domaine de Weiss – si un matériau ferromagnétique est soumis à un champ extérieur h_{ext} , les parois du domaine vont se déplacer de manière à renforcer le champ extérieur h_{ext} . Lorsque h_{ext} augmente beaucoup, le domaine favorablement orienté occupera tout le volume du matériau qui est alors aimanté à saturation. La courbe qui relie l'aimantation m au champ extérieur h s'appelle alors la boucle d'hystérésis du matériau (voir figure ci-dessous). Si on diminue h , on oblige les parois à se déplacer de nouveau. Le mouvement du retour n'est pas le même que celui suivi lorsque h augmentait, parce qu'une partie du mouvement des parois est irréversible en raison des défauts cristallins.



Une formalisation rigoureuse sur le plan mathématique de ce phénomène d'hystéresis est un peu laborieuse, et a notamment été écrite par Visintin. Un opérateur d'hystéresis (qui correspond dans la situation précédente à l'application $h_{\text{ext}} \mapsto m$) est une application

$$\mathcal{F} : u \mapsto w$$

d'un espace de fonctions dépendant du temps t dans un autre, et vérifiant les propriétés suivantes :

- *Effet de mémoire* : pour tout temps t , $w(t)$ peut dépendre de $u(t)$ mais aussi de l'évolution précédente de u :

$$\text{si } u(t) = v(t) \text{ pour tout } t \leq t_0, \text{ alors } \mathcal{F}(u)(t) = \mathcal{F}(v)(t) \text{ pour tout } t \leq t_0$$

- *Indépendance par rapport à l'échelle de temps choisie* : la sortie w est invariante par tout changement d'échelle de temps :

$$\text{si } s : (0, T) \rightarrow (0, T) \text{ est un homéomorphisme croissant, alors } \mathcal{F}(u)(s(t)) = \mathcal{F}(u \circ s)(t)$$

Par exemple, le modèle limite de saturation décrit par la situation précédente serait que m prenne alternativement les deux valeurs -1 et 1 dépendamment de l'évolution précédente de h_{ext} , ce qui correspond au modèle de Presach décrit notamment par Visintin.

4.1.2 Description de l'opérateur de Presach

Soit $T > 0$ fixé. On note $BV(0, T)$ l'espace des fonctions de $(0, T)$ dans \mathbb{R} à variation bornée, et par $C_d(0, T)$ l'espace des fonctions continues à droite sur $[0, T[$. Pour tout couple de réels $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ tel que $\rho_1 < \rho_2$, on introduit l'opérateur appelé *delayed relay operator* :

$$h_\rho : C^0(0, T) \times \{-1; 1\} \longrightarrow BV(0, T) \cap C_d(0, T)$$

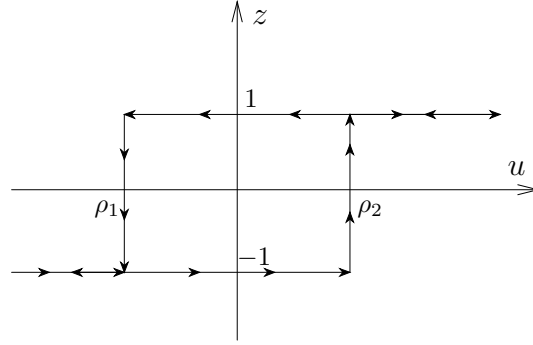
Pour tout $u \in C^0(0, T)$ et $\xi = \pm 1$, la fonction $z = h_\rho(u, \xi) : [0, T] \rightarrow \{-1; 1\}$ est définie comme suit :

$$z(0) = \begin{cases} -1 & \text{si } u(0) \leq \rho_1 \\ \xi & \text{si } \rho_1 < u(0) < \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho_2 < u(0) \end{cases}$$

et, pour $0 < t \leq T$, en notant $X_t = u_{]0, t]}^{-1}(\{\rho_1, \rho_2\})$, où $u_{]0, t]}^{-1}(A)$ désigne l'image réciproque de A par $u_{]0, t]}$, restriction de u à l'intervalle $]0, t]$.

$$z(t) = \begin{cases} z(0) & \text{si } X_t = \emptyset \\ -1 & \text{si } u(\max X_t) = \rho_1 \\ 1 & \text{si } u(\max X_t) = \rho_2 \end{cases}$$

Cette définition est non ambiguë (voir [50], chap. IV pour les détails), et la correspondance entre l'entrée et la sortie se schématise par le graphe suivant :



4.1.3 Asymptotique étudiée

Pour ce qui nous concerne, on regarde des variations lentes de fonction du temps du chant extérieur de l'équation de Landau-Lifshitz à l'échelle du temps long. Après le changement d'échelle en question, il s'agit donc de regarder, à $\varepsilon > 0$ petit tendant vers 0, le comportement de la solution m^ε du système d'équations suivant¹ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \partial_t m^\varepsilon(t, x) = f\left(m^\varepsilon(t, x), -\nabla \Phi(m^\varepsilon(t, x)) + h_d(t, x) + h_{\text{ext}}(t, x), x\right) \\ m(0, x) = m_0(x) \\ \mathbf{rot} h_d(t, x) = 0 \\ \text{div} (\mu(x) h_d(t, x)) = -\text{div} (\mu(x) m(t, x)) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où l'on a noté

$$f(m, h, x) = -\gamma(x) (m \times h - \alpha(x) m \times (m \times h))$$

et $h_{\text{ext}}(t, x)$ est une fonction de \mathbb{R}_+^{1+3} dans \mathbb{R}^3 donnée.

Ici, nous nous restreindrons à la dimension 0 ou 1 d'espace, de sorte que l'application $m \mapsto h_d$ décrite sous forme implicite par les deux dernières équations du système (4.1) devienne locale :

$$h_d(t, x) = -m_1(t, x) e_1$$

¹Bien entendu, le ε ici est une constante destinée à tendre vers 0 qui n'a rien à voir avec la perméabilité électrique provenant des équations de Maxwell.

Dans ce cas, l'équation à étudier n'est plus qu'une équation différentielle ordinaire en chaque point x :

$$\varepsilon \frac{dm}{dt}(t) = F(m, t)$$

où

$$F(m, t) = f(m, -\nabla\Psi(m) - h_{\text{ext}}(t))$$

avec

$$\Psi(m) = \Phi(m) + (m \cdot e_1)^2$$

Désormais, à l'exception de la Proposition 4.4, on omettra l'étude de la dépendance en x .

Ce type d'équation est un cas particulier de « systèmes lents rapides » (un tel cas est par exemple étudié dans [10]), qui sont des systèmes de deux équations différentielles (éventuellement en dimension ≥ 1) avec deux temps d'évolution différents, du type suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}(t) &= f(x, y) \\ \dot{y}(t) &= g(x, y) \end{cases} \quad (4.2)$$

où l'on prend pour fonction g la constante 1.

Les techniques généralement utilisées dans la littérature actuelle pour l'étude de ce type de système reposent souvent sur l'utilisation de l'analyse non standard² (voir par exemple à ce sujet [25] pour un système discret, [9] pour une équation différentielle de la variable complexe). Par ailleurs, en ce qui concerne les systèmes lents-rapides, les résultats établis sont généralement de la forme suivante : on montre l'existence de régimes de trajectoires particulières (les canards), au sens où l'on peut extraire une sous-suite de solution de $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ qui converge vers quelque chose que l'on veut mettre en évidence, à savoir une solution instable du système limite (voir par exemple [6]).

Ici, la démarche sera plutôt la suivante : on se donne une donnée initiale m_0 fixe (éventuellement m_0^ε , convergente assez rapidement vers une donnée m_0) et, avec cette donnée, on souhaite regarder l'évolution de l'équation pour ε très petit, dans le cas "générique".

4.2 Convergence sur les points d'équilibre stables

Intuitivement, lorsque ε est très petit, du fait que t varie lentement, au voisinage d'un temps t_0 , la solution m^ε se comporte comme une solution de l'équation différentielle autonome

$$\varepsilon \frac{dn^\varepsilon}{dt} = F(n^\varepsilon, t_0)$$

Lorsque la solution précédente n^ε converge vers un point d'équilibre stable en t_0 (ce qui est équivalent à la convergence de $n^\varepsilon(t)$ vers ce point d'équilibre, à ε fixé), il va donc en être de même de m^ε lorsque ε tend vers 0.

²pour une présentation de l'analyse non standard, on pourra consulter [21]

Le premier résultat que nous montrons est donc le suivant.

Théorème 4.1 Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 , m_∞ un point de \mathbb{R}^n un point d'équilibre symptotiquement stable du champ de vecteur $F(\cdot, 0)$, c'est-à-dire tel que :

- $F(m_\infty, 0) = 0$
- les parties réelles des valeurs propres de $\partial_m F(m_\infty, 0)$ sont toutes strictement négatives.

Il est donc en particulier supposé qu'un tel point m_∞ existe.

Soit m_0 un point de \mathbb{R}^n tel que, si l'on note n_{t_0, n_0} la solution du système autonome

$$\begin{cases} \dot{n}(t) &= F(n(t), 0) \\ n(t_0) &= n_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

la fonction n_{0, m_0} converge vers m_∞ .

Soit, à $\varepsilon > 0$ fixé (petit), m^ε la solution du système (non autonome)

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{m}^\varepsilon &= F(m^\varepsilon, t) \\ m^\varepsilon(0) &= m_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Alors, lorsque ε tend vers 0, m^ε converge sur $]0, T[$ vers $m^0(t)$ où $m^0(t)$ est la solution locale au théorème des fonctions implicites de l'équation

$$\begin{cases} F(m^0(t), t) &= 0 \\ m^0(0) &= m_\infty \end{cases} \quad (4.5)$$

et où T est le plus grand réel tel que pour tout $t \in [0, T[$, le point $F(m^0(t), t)$ corresponde à un équilibre asymptotiquement stable.

Remarque 4.1 Afin de simplifier la présentation (qui reste laborieuse), nous démontrerons le résultat sous l'hypothèse légèrement plus forte en ce qui concerne la stabilité asymptotique des points d'équilibre : on prend pour T le plus grand réel tel que pour tout $t < T$, il existe une constante $c = c_t > 0$ tel que

$$v \cdot (\partial_m F(m^0(t), t)v) \leq -c|v|^2$$

où \cdot désigne un produit scalaire fixé sur \mathbb{R}^n indépendant de t ; par exemple, le produit scalaire canonique.

La preuve de ce résultat se fait en deux étapes. La première vise à montrer que $m^\varepsilon(t)$ s'approche de $m_\infty(0)$ pour ε petit et t_ε petit (dépendant de ε), du fait que m et n_{0, m_0} (après un changement d'échelle de temps) vérifient des problèmes de Cauchy « proches ». La seconde étape assure que, si $m^\varepsilon(t_\varepsilon)$ est suffisamment proche de $m^\infty(t_\varepsilon)$, alors pour $t \geq t_\varepsilon$, $m^\varepsilon(t)$ reste proche de $m^0(t)$.

Preuve. Notons provisoirement $n_{0,m_0}(t) = n(t)$, et $n^\varepsilon(t) = n(t/\varepsilon)$, de sorte de n^ε est solution du système suivant.

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{n}^\varepsilon &= F(n^\varepsilon, 0) \\ n^\varepsilon(0) &= m_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt}(m^\varepsilon - n^\varepsilon) &= F(m^\varepsilon, t) - F(n^\varepsilon, 0) \\ &= [F(m^\varepsilon, t) - F(m^\varepsilon, 0)] + [F(m^\varepsilon, 0) - F(n^\varepsilon, 0)] \\ &= \int_0^t \partial_t F(m^\varepsilon(t), s) ds + [F(m^\varepsilon, 0) - F(n^\varepsilon, 0)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Utilisons la formule de Taylor-Lagrange pour F

$$F(m, 0) = F(n, 0) + \frac{\partial F}{\partial m}(n, 0)[m - n] + G_{m,n}$$

où $|G(m, n)| \leq |m - n|^2 \|\partial_m^2 F\|_\infty$.

Ainsi, pour tout ε , on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |m^\varepsilon - n^\varepsilon|^2 &= (m^\varepsilon - n^\varepsilon) \cdot [F(m^\varepsilon, t) - F(m^\varepsilon, 0)] + (m^\varepsilon - n^\varepsilon) \cdot [F(m^\varepsilon, 0) - F(n^\varepsilon, 0)] \\ &\leq 2t \|\partial_t F\|_{L^\infty} + \|\partial_m F\|_{L^\infty} |m^\varepsilon - n^\varepsilon|^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

En particulier, compte tenu de $m^\varepsilon(0) = n^\varepsilon(0)$, le lemme de Gronwall implique que :

$$\begin{aligned} |m^\varepsilon(t) - n^\varepsilon(t)|^2 &\leq \frac{2\|\partial_t F\|_{L^\infty[0,t]}}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{2\|\partial_m F\|_{L^\infty}}{\varepsilon}(t-s)} 2s ds \\ &\lesssim t e^{\frac{Ct}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

avec $C = 2\|\partial_m F\|_{L^\infty}$, la dernière majoration arrivant en majorant dans l'intégrande le facteur $2s$ par $2t$.

Fixons maintenant

$$t_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2C} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$$

de sorte que $t_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow \infty$ et que la majoration précédente montre que pour tout $t \in [0, t_\varepsilon]$, on a

$$|m^\varepsilon(t) - n^\varepsilon(t)| \lesssim \sqrt{\varepsilon} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (4.9)$$

D'autre part, comme $\lim t_\varepsilon = 0$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{t_\varepsilon} = 0$, on a alors

$$n^\varepsilon(t_\varepsilon) = n^1(t_\varepsilon/\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} m^\infty,$$

si bien que, par compacité, et pour ε suffisamment petit, on a pour tout $t \geq t_\varepsilon$, $n^\varepsilon(t)$ reste dans un voisinage arbitrairement $m^0(0)$.

En particulier, (comme m^0 est continu et $t_\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (m^\varepsilon(t_\varepsilon) - m^0(t_\varepsilon)) = 0 \quad (4.10)$$

Montrons maintenant la convergence de m^ε vers m^0 « pour $t_\varepsilon \leq t \leq T' < T$ ». Notons que l'égalité $F(m^0(t), t) = 0$ donne

$$\dot{m}^0(t) = -\partial_m F(m^0(t), t)^{-1} \partial_t F(m^0(t), t) .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{m}^\varepsilon(t) &= F(m^\varepsilon(t), t) \\ &= F(m^\varepsilon(t), t) - F(m^0(t), t) \\ &= \partial_m F(m^0(t), t)(m^\varepsilon(t) - m^0(t)) + O(|m^0(t) - m^\varepsilon(t)|^2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} |m^\varepsilon(t) - m^0(t)|^2 &= (m^\varepsilon(t) - m^0(t)) \cdot \partial_m F(m^0(t), t)(m^\varepsilon(t) - m^0(t)) \\ &\quad + O(|m^0(t) - m^\varepsilon(t)|^2) \\ &\quad + \varepsilon(m^\varepsilon(t) - m^0(t)) \cdot \partial_m F(m^0(t), t)^{-1} \partial_t F(m^0(t), t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Or, par compacité, en fixant $0 < T' < T$, il existe une constante $c > 0$ telle que quel que soit $t \leq T'$.

$$v \cdot \frac{\partial F}{\partial m}(m^0(t), t)v \leq -c|v|^2$$

si bien que, pourvu que $m^0(t) - m^\varepsilon(t)$ reste petit (à ε fixé), (4.11) implique que :

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} |m^\varepsilon(t) - m^0(t)|^2 \leq -\frac{c}{2} |m^0(t) - m^\varepsilon(t)|^2 + 2C\varepsilon$$

d'où, après une application du lemme de Gronwall,

$$\begin{aligned} |m^\varepsilon(t) - m^0(t)|^2 &\leq e^{-\frac{c}{2}(t-t_\varepsilon)} |m^\varepsilon(t_\varepsilon) - m^0(t_\varepsilon)|^2 + 4 \int_{t_\varepsilon}^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} C \, ds \\ &\leq e^{-\frac{c}{2}(t-t_\varepsilon)} |m^\varepsilon(t_\varepsilon) - m^0(t_\varepsilon)| + 4 \frac{C\varepsilon}{c} \end{aligned}$$

En particulier, sous réserve que $|m^\varepsilon(t_\varepsilon) - m^0(t_\varepsilon)|$ soit suffisamment petit (ce qui est le cas pour ε assez petit d'après (4.10)), par un raisonnement classique, $m^\varepsilon(t) - m^0(t)$ reste petit pour tout $\eta < t \leq T'$ (avec $\eta > 0$) et ε suffisamment petit, donc converge vers 0, ce qu'il fallait montrer (vu que le résultat est vrai pour tout $T' < T$ et tout $\eta > 0$). \square

4.3 Cas d'une équation de Landau-Lifshitz

Dans ce paragraphe, nous regardons dans quelle mesure le résultat de la section précédente peut s'appliquer à une équation de Landau-Lifshitz. On considère donc la fonction $F(m, t)$ définie par :

$$F(m, t) = f(m, -\nabla\Psi(m) + \lambda(t))$$

où $f(m, h) = -m \times h - \alpha m \times (m \times h)$ et $\lambda(t)$ est une fonction donnée de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^3 .

On s'intéresse, pour λ donné dans \mathbb{R}^3 , au flot $n(t) = \phi(t, \lambda, t_0, n_0)$ défini par

$$\begin{cases} \dot{n} &= f(n, -\nabla\Psi(n) + \lambda) = f(n, -\nabla\Xi(n)) \\ n(t_0) &= n_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

où $\Xi(n) = \Psi(n) + \frac{1}{2}|n - \lambda|^2$

Remarquons que, si l'on prend une donnée initiale m_0 dans S^2 , la sphère unité de \mathbb{R}^3 , l'évolution de m suivant le champ $F(m, t_0)$ reste dans S^2 , de sorte que l'équation différentielle à étudier peut être vue, non plus sur tout \mathbb{R}^3 , mais sur S^2 , sous-variété de \mathbb{R}^3 de dimension 2.

4.3.1 Recherche des ensembles ω -limites de l'équation

Commençons par vérifier que

Lemme 4.1 *L'équation différentielle (4.12) n'admet pas de trajectoire périodique non stationnaire.*

Preuve. En effet, compte tenu du fait que $h \cdot f(m, h) = \alpha|f(m, h)|^2$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Xi(n) &= \nabla\Xi(n) \cdot \dot{n} \\ &= \nabla\Xi(n) \cdot f(n, -\nabla\Xi(n)) \\ &= -\alpha|f(n, -\nabla\Xi(n))|^2 \\ &= -\alpha|\dot{n}|^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

de sorte que la quantité $t \mapsto \Xi(n(t))$ est décroissante. Si n est périodique, $\Xi(n)$ est périodique et décroissante, donc constante, donc de dérivée nulle. Le calcul précédent montre alors que $\dot{n} = 0$, c'est-à-dire que $n(t)$ est constante, et que la trajectoire est un point stationnaire. \square

De plus, le calcul précédent implique également que :

Lemme 4.2 *L'ensemble ω -limite d'une trajectoire (c'est-à-dire l'ensemble des points adhérents à l'infini à la trajectoire) est nécessairement inclus dans l'ensemble*

$$E = \{m \in S^2, f(m, -\nabla\Xi(m)) = 0\} = \{m \in S^2, m \times \nabla\Xi(m) = 0\} \quad (4.14)$$

Preuve. En effet, $t \mapsto \Xi(m(t))$ est décroissante, et minorée (car m est à valeurs dans le compact S^2); elle est donc convergente. Sa dérivée est une fonction négative, donc intégrable. Du fait que $\frac{d}{dt}\Xi(n)$ s'exprime comme une fonction continue de n (voir (4.13), deuxième ligne), elle est donc elle-même uniformément continue. En tant que fonction uniformément continue et intégrable en $+\infty$, elle converge nécessairement vers 0. De fait, d'après (4.13), il en est de même pour $|\dot{m}|^2 \simeq |m \times \nabla \Xi(m)|^2$. En particulier, l'ensemble ω -limite de m est bien inclus dans E défini par (4.14). \square

Supposons que l'équation (4.12) ne soit pas triviale. Afin d'appliquer le théorème de Poincaré-Bendixon, montrons que m est à valeurs dans un ensemble difféomorphe au plan, ce qui est le cas si l'adhérence de la trajectoire de m ne recouvre pas S^2 entièrement (vu que S^2 privé d'un point est bien difféomorphe à \mathbb{R}^2). C'est en particulier ce que montre le lemme suivant.

Lemme 4.3 *La trajectoire de m n'est pas dense dans S^2*

Preuve. En effet, il existe des points m de la sphère S^2 qui ne sont pas dans l'ensemble fermé E décrit par (4.14). Il en résulte qu'à un segment de courbe \mathcal{C}^1 près (de la forme $\{m(t), 0 \leq t \leq T\}$), l'image dans S^2 de la trajectoire n est inclus dans un tel voisinage; en particulier, l'image de la trajectoire n'est pas dense dans la sphère S^2 . \square

Fixons un point $m_0 \in S^2$ hors de l'adhérence de la trajectoire, et considérons l'image par une projection stéréographique $R : S^2 \setminus \{m_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la trajectoire n . Cette trajectoire (projetée stéréographiquement) vérifie une équation différentielle autonome dans \mathbb{R}^2 (l'équation de Landau-Lifshitz transportée par la projection stéréographique), et est bornée. Or, en ce qui concerne les systèmes différentiels du plan, nous avons le résultat suivant, conséquence du théorème de Poincaré-Bendixon :

Théorème 4.2 *Soit $\dot{x} = f(x)$ un système différentiel dans \mathbb{R}^2 avec un nombre fini de points d'équilibre, et x_0 une donnée initiale. On suppose que l'orbite positive $\gamma(x_0) = \overline{\{x(t), t \geq 0\}}$ est bornée. Alors nous avons l'alternative suivante pour la description de l'ensemble ω -limite de x_0 (noté $\omega(x_0)$) :*

1. *L'ensemble ω -limite est un point d'équilibre x^∞ et $x(t) \rightarrow x^\infty$ lorsque t tend vers l'infini.*
2. *$\omega(x_0)$ est une orbite périodique Γ*
3. *$\omega(x_0)$ est une réunion de points d'équilibre et d'orbites ayant les points d'équilibre en question pour ensemble α -limite et ω -limite.*

Pour une démonstration de ce théorème, voir par exemple [28].

4.3.2 Recherche des points critiques en cas d'anisotropie quadratique

Pour pouvoir appliquer le théorème 4.2, vérifions que, dans de larges cas, l'hypothèse est vérifiée (à savoir qu'il n'y a qu'un nombre fini de points d'équilibre). Pour cela, nous restreignons de nouveau l'étude au cas où la fonction convexe Φ (et donc également Ψ) est une forme quadratique. Dans ce cas, on a :

$$f(n, -\nabla\Xi(n)) = f(n, Cn - \lambda)$$

où C est un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^3 (défini modulo un multiple de l'identité près, du fait que $f(m, h)$ est linéaire en h et que $f(m, \lambda m) = 0$). Les points d'équilibre du système sont alors les points m tels que

$$m \times (-Cm + \lambda) = 0$$

Plaçons-nous dans une base orthogonale adéquate, dans laquelle la matrice de C est diagonale. L'équation $m \times (\lambda - Cm) = 0$ se ramène au système (de rang 2) suivant :

$$\begin{cases} m_2(\lambda_3 - c_3 m_3) = m_3(\lambda_2 - c_2 m_2) \\ m_3(\lambda_1 - c_1 m_1) = m_1(\lambda_3 - c_3 m_3) \\ m_1(\lambda_2 - c_2 m_2) = m_2(\lambda_1 - c_1 m_1) \end{cases}$$

– Si C a ses trois valeurs propres distinctes, les équations deviennent :

$$\begin{cases} \left(m_2 - \frac{\lambda_2}{c_2 - c_3}\right) \left(m_3 - \frac{\lambda_3}{c_3 - c_2}\right) = -\frac{\lambda_2 \lambda_3}{(c_2 - c_3)^2} \\ \left(m_3 - \frac{\lambda_3}{c_3 - c_1}\right) \left(m_1 - \frac{\lambda_1}{c_1 - c_3}\right) = -\frac{\lambda_3 \lambda_1}{(c_3 - c_1)^2} \\ \left(m_1 - \frac{\lambda_1}{c_1 - c_2}\right) \left(m_2 - \frac{\lambda_2}{c_2 - c_1}\right) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(c_1 - c_2)^2} \end{cases}$$

À λ fixé et $|m| = 1$, ces équations montrent que m appartient à l'intersection deux prismes hyperboliques orthogonaux, et une sphère. Il s'agit nécessairement d'un ensemble discret.

– Si C a ses trois valeurs propres confondues, ie C est une matrice multiple de l'identité, alors le système se simplifie en $m \times \lambda = 0$. Dans ce cas, ou bien λ est nul, et alors l'équation se ramène, quelle que soit la donnée initiale à $\dot{m} = 0$, ou bien, λ est non nul, et il n'y a que deux solutions sur la sphère : $m = \pm \frac{\lambda}{|\lambda|}$.

– Si C a deux valeurs propres distinctes (une simple et une double), quitte à prendre une base orthogonale adéquate, et à remplacer C par $C - kI_3$, où k est la valeur propre double, on peut supposer que $C = \text{diag}(c_1, 0, 0)$. Les trois équations deviennent alors :

$$\begin{cases} m_2 \lambda_3 = m_3 \lambda_2 \\ m_3(\lambda_1 - c_1 m_1) = m_1 \lambda_3 \\ m_1 \lambda_2 = m_2(\lambda_1 - c_1 m_1) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} m_2\lambda_3 = m_3\lambda_2 \\ \left(m_3 + \frac{\lambda_3}{c_1}\right)\left(m_1 - \frac{\lambda_1}{c_1}\right) = -\frac{\lambda_3\lambda_1}{c_1^2} \\ \left(m_1 - \frac{\lambda_1}{c_1}\right)\left(m_2 + \frac{\lambda_2}{c_1}\right) = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{c_1^2} \end{cases}$$

Une disjonction de cas est encore nécessaire :

- Si $(\lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0)$, la première équation est l'équation d'un plan, et les deux autres celles de prismes hyperboliques. De nouveau, l'ensemble des points stationnaires reste un ensemble discret.
- Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (c'est-à-dire, de manière intrinsèque, si λ est le vecteur propre de C associé à l'unique droite propre de C), le système se résout en $m_1 = \frac{\lambda_1}{c_2}$ – cette situation ne pouvant se présenter que si $|\lambda_1| \leq |c_2|$ – ou $(m_2 = m_3 = 0)$. Dans ce cas, le produit scalaire de l'équation avec le vecteur unitaire de même direction que λ (notons-le e_1) donne une équation différentielle sur m^1 (ne dépendant pas des autres composantes de m). Ceci fera l'objet de la section suivante.

La conclusion de cette étude est donc :

Proposition 4.1 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}^3$ et C une matrice réelle symétrique 3×3 donnés. Alors l'ensemble des points d'équilibre de l'équation (4.12) est fini, à l'exception du cas où C a une valeur propre double et où λ appartient à l'unique droite propre de C .*

Finalement, à l'exception du cas où C a exactement une valeur propre double (et une simple) et où λ appartient à la droite propre de C , l'équation n'admet qu'un nombre fini de points d'équilibre, et le théorème 4.2 s'applique. Compte tenu du lemme 4.2, il en résulte que :

Proposition 4.2 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}^3$ et C une matrice réelle symétrique 3×3 donnés. Alors, pour toute donnée initiale n_0 , le flot $n(t)$ défini par l'équation (4.12) converge vers l'un des points d'équilibre du système.*

4.3.3 Exemple d'application

Si la matrice C est nulle (ou scalaire), il y a deux points d'équilibre $m = \pm\lambda/|\lambda|$. Or, Ξ admet sur la sphère au moins 2 extrema (un maximum et un minimum) qui, d'après le théorème donnant une condition nécessaire d'extremum lié (multiplicateurs de Lagrange), vérifient nécessairement la condition $\Xi(m) \times m = 0$ (ce qui nous ramène au fait qu'on tombe sur des points d'équilibre du système). Du fait que, à l'exception des points stationnaires, si n est solution de l'équation (4.12), $\Xi(n(t))$ est strictement décroissance, $n(t)$ converge nécessairement vers le point stationnaire du système qui réalise le minimum de $\Xi(m)$ sur la sphère $\Xi(n(t))$ (il ne peut en effet converger vers l'autre point stationnaire, qui réalise le maximum de $\Xi(m)$, vu que $t \mapsto \Xi(n(t))$ est décroissante), et ce point est $m = +\lambda/|\lambda|$.

Le même raisonnement reste valable pour toute configuration telle que l'ensemble E défini par (4.14) ne comporte que deux points de S^2 . Par exemple, ce sera le cas si C est très petit devant $|\lambda|$ (en tant que matrice). En effet, fixons λ , tel que $|\lambda| = 1$ (ce à quoi on peut toujours se ramener, quitte à remplacer C par $C/|\lambda|$, du fait que la fonction $f(m, h)$ est linéaire en h). On considère $g(m, C) = f(m, Cm - \lambda)$, et on cherche à montrer que pour C petit (comme élément de $S_3(\mathbb{R})$, espace des matrices réelles symétriques 3×3 , muni d'une norme quelconque), $g(m, C)$ n'a que deux zéros sur S^2 , ce qui équivaut au fait que la fonction :

$$h : (m, C) \mapsto \frac{1}{\alpha}g(m, C) + \frac{1}{2}m(|m|^2 - 1) \in \mathbb{R}^3$$

n'a que deux zéros sur \mathbb{R}^3 . Cette équivalence provient du fait que $g(m, C) \cdot m = 0$ et qu'en conséquence (théorème de Pythagore),

$$|h(m, C)|^2 = \frac{1}{\alpha^2}|g(m, C)|^2 + \frac{1}{4}|m|^2(1 - |m|^2)^2.$$

Lorsque $C = 0$, $h(m, C)$ n'a bien que deux points critiques, $m = \pm\lambda$ (rappelons qu'ici, $|\lambda| = 1$).

Pour montrer que $h(m, C)$ a deux zéros pour C petit qui sont voisins de λ et $-\lambda$, on applique le théorème des fonctions implicites. Vérifions que la différentielle de h par rapport à m au point $(\pm\lambda, C = 0)$ est inversible.

$$D_m h(m, 0)v = -\frac{1}{\alpha}v \times \lambda - m \times (v \times \lambda) - v \times (m \times \lambda) + \frac{1}{2}v(|m|^2 - 1) + m(v \cdot m)$$

En particulier, il vient :

$$D_m h(\pm\lambda, 0) = Id_{\mathbb{R}^3}$$

Ainsi, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe deux réels $r_1, r_2 > 0$, et deux fonctions

$$\phi_+ : B_{S_3(\mathbb{R})}(0, r_1) \longrightarrow B_{\mathbb{R}^3}(\lambda, r_2)$$

$$\phi_- : B_{S_3(\mathbb{R})}(0, r_1) \longrightarrow B_{\mathbb{R}^3}(-\lambda, r_2)$$

et telles que, pour $C \in B_{S_3(\mathbb{R})}(0, r_1)$ et $m \in B_{\mathbb{R}^3}(\pm\lambda, r_2)$, on a

$$h(m, C) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad m = \phi_{\pm}(C).$$

D'autre part, la fonction $m \mapsto h(m, C)$ ne s'annule pas pour $C = 0$ sur le compact

$$K = S^2 \cap \{|m - \lambda| \geq r_2, |m + \lambda| \geq r_2\}$$

donc, par continuité uniforme, il existe r_3 tel que $0 < r_3 < r_1$ tel que, si $\|C\| \leq r_3$, alors $h(m, C)$ ne s'annule pas sur K . Comme, pour tout $C \in S_3(\mathbb{R})$ telle que $\|C\| \leq r_3$, $m \mapsto h(m, C)$ s'annule exactement deux fois sur $S^2 \setminus K$ il s'ensuit que, si $\|C\| \leq r_3$, $m \mapsto h(m, C)$ n'a que deux points critiques.

Supposons maintenant que C est fixé (non nul) et que λ est variable et grand (c'est en effet le champ extérieur, qui est physiquement le paramètre sur lequel on peut jouer). Remarquons que $m \times (Cm - \lambda) = |\lambda| m \times (\tilde{C}m - \tilde{\lambda})$, où $\tilde{\lambda} = \lambda/|\lambda|$ est de module 1 et $\tilde{C} = 1/|\lambda|C$ est petit. Nous obtenons alors l'énoncé suivant.

Lemme 4.4 *Supposons C fixé dans $S_3(\mathbb{R})$. Il existe λ_0 tel que, pour tout λ tel que $|\lambda| \geq \lambda_0$, et n_0 point non stationnaire dans S^2 de l'équation $\dot{n} = f(n, Cn - \lambda)$, la solution $n(t)$ du problème de Cauchy (4.12) converge vers l'unique point réalisant le minimum sur S^2 de $\Xi(n)$.*

Dans ce cas, lorsque l'on fait varier λ continûment hors de la boule $B(0, \lambda_0)$, le point d'équilibre stable de $f(m, Cm - \lambda(t))$ (parmi les deux points critiques de cette même fonction) est toujours celui qui est le plus proche de $\lambda(t)$, ou encore le seul qui vérifie

$$\lambda(t) \cdot m \geq c > 0$$

(on peut par exemple prendre $c = \lambda_0(1 - r_2)$), si bien que le T défini au théorème 4.1 est $+\infty$. On peut donc énoncer le résultat suivant (qui est une application du lemme 4.4 et du théorème 4.1) :

Proposition 4.3 *Il existe λ_0 tel que, pour toute application $\lambda(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus B(0, \lambda_0)$, si m^ε est la solution de l'équation*

$$\varepsilon \dot{m}^\varepsilon(t) = f(m^\varepsilon(t), Cm^\varepsilon(t) - \lambda(t))$$

on ait $m^\varepsilon(t)$ converge vers l'unique point $m^0(t)$ tel que $m^0(t) \times (Cm^0(t) - \lambda(t)) = 0$ et $m^0(t) \cdot \lambda(t) > 0$ lorsque ε tend vers 0, uniformément sur tout compact.

Enfin, énonçons un résultat de convergence, avec une dépendance en x . On suppose que le domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ est borné, et on fixe $p < \infty$.

Proposition 4.4 *Soit $m_0(x) \in L^\infty(\Omega; S^2)$ et $\lambda(t, x) \in \mathcal{L}^1(\Omega_x; C^0(\mathbb{R}_t))$, tel que pour presque tout $x \in \Omega$, $m_0(x) \times (Cm_0(x) - \lambda(0, x)) \neq 0$. Alors pour tout $t > 0$ et $m^\varepsilon(t, \cdot)$ converge dans $L^p(\Omega_x)$ vers $m^0(t, \cdot)$, où, pour presque tout x , $m^0(t, x)$ est caractérisé par les deux relations suivantes :*

$$m^0(t, x) \times (Cm^0(t, x) - \lambda(t, x)) = 0 \quad \text{et} \quad m^0(t, x) \cdot \lambda(t, x) > 0$$

Preuve. Du fait que $|m^\varepsilon(t, x)| \leq \mathbf{1}_\Omega(x) \in L^p$, cette proposition découle immédiatement de la proposition 4.3 (appliquée, pour presque tout x fixé, à $t \mapsto m^\varepsilon(t, x)$) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue. \square

Nous allons maintenant étudier un cas particulier de la seule situation où le théorème ne s'applique pas.

4.4 Étude d'un cas particulier 1D

Supposons que C ait une valeur propre double (c'est à dire que $C = \delta I_3 + \beta \tilde{C}$ où C est un projecteur orthogonal de rang 1, et on peut toujours remplacer C par $\beta \tilde{C}$), et que $\lambda(t)$ varie dans la direction du vecteur propre de valeur propre non nulle de C . En notant e_1 un vecteur propre non nul en question, et $m_1^\varepsilon = m^\varepsilon \cdot e_1$, on a donc finalement (quitte à remplacer ε par ε/β et λ par λ/β).

$$\varepsilon \frac{d}{dt} m^\varepsilon = f(m^\varepsilon, (m_1^\varepsilon - \lambda(t)) e_1)$$

Le produit scalaire de l'égalité précédente avec e_1 donne une équation différentielle sur m_1^ε (ne faisant pas intervenir les autres composantes de m^ε) :

$$\varepsilon \frac{d}{dt} m_1^\varepsilon = (1 - m_1^{\varepsilon 2})(m_1^\varepsilon - \lambda)$$

Dans ce cas particulier, le fait que les solutions d'une équation différentielle dans \mathbb{R} sont monotones va nous permettre de continuer l'étude, et en particulier on montre que le « décollage » d'un point d'équilibre initialement stable, mais devenu instable, n'est pas immédiat.

On note $|\lambda|_\infty = \sup_{t \geq 0} |\lambda(t)|$.

Étant donné $\varepsilon > 0$ et $u_0^\varepsilon \in (-1, 1)$, on note $u^\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow (-1, 1)$ l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}^\varepsilon(t) &= \underbrace{-\left((u^\varepsilon(t))^2 - 1\right)(u^\varepsilon(t) - \lambda(t))}_{:=f(u^\varepsilon(t), \lambda(t))} \\ u^\varepsilon(0) &= u_0^\varepsilon \end{cases} \quad (4.15)$$

Les points d'équilibre stable sont $u^\varepsilon = 1$ et $u^\varepsilon = -1$, si bien qu'il semble légitime de se demander si u^ε ne convergerait pas vers $h_\rho(\lambda, \xi)$ pour un certain $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ et $\xi = \pm 1$, où h_ρ est l'opérateur de Presach décrit à la première section de ce chapitre. Nous allons voir que la réponse est non, du fait que u^ε est un peu trop près d'un point d'équilibre, lorsque celui-ci devient instable, pour s'en éloigner aussitôt...

Lemme 4.5 *Soit $(u_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille de réels compris entre -1 et 1 . On suppose qu'il existe une constante $c_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $\min(|u_0^\varepsilon - 1|, |u_0^\varepsilon + 1|, |u_0^\varepsilon - \lambda(0)|) \geq 2c_0$. On suppose également que le signe de $u_0^\varepsilon - \lambda(0)$ est une constante $K \in \{-1, 1\}$ indépendante de ε . On pose $t_1 = \min\{t > 0 \mid \lambda(t) = K\}$.*

Soit u^ε la solution de (4.15) $_\varepsilon$. Alors :

$$u^\varepsilon(t) \text{ tend vers } K \text{ pour tout } t \in]0, t_1[\quad (4.16)$$

$$\text{si } t_1 < +\infty, \text{ il existe } d_1, d_2 > 0 \text{ tels que } e^{-d_1/\varepsilon} \lesssim |u^\varepsilon(t_1) - K| \lesssim e^{-d_2/\varepsilon} \quad (4.17)$$

Preuve. Supposons que $K = 1$ (*Mutatis Mutandis*, la preuve est la même pour $K = -1$). Remarquons qu'on a toujours

$$-1 < u^\varepsilon(t) < 1$$

car les fonctions constantes 1 et -1 sont solutions de (4.15) $_\varepsilon$.

Pour tout $t \in [0, t_1]$, on a

$$f(u^\varepsilon(t), \lambda(t)) = \underbrace{(1 - u^\varepsilon(t))}_{>0} \underbrace{(1 + u^\varepsilon(t))}_{<2} \underbrace{(u^\varepsilon(t) - \lambda(t))}_{<1+|\lambda|_\infty} \quad (4.18)$$

En conséquence, on a :

$$\varepsilon \dot{u}^\varepsilon \leq 2(1 + |\lambda|_\infty)(1 - u^\varepsilon)$$

En intégrant cette inégalité différentielle (lemme de Gronwall), il vient :

$$1 - u^\varepsilon(t_1) \geq (1 - u_0^\varepsilon) \exp(-(2(1 + |\lambda|_\infty)t_1/\varepsilon) \geq c_0 \exp(-(2(1 + |\lambda|_\infty)t_1/\varepsilon)$$

ce qui fournit la deuxième partie de l'encadrement (4.17) lorsque $t_1 < \infty$ avec $d_1 = 2(1 + |\lambda|_\infty)t_1$.

D'autre part, comme λ est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que $|\lambda(t) - \lambda(0)| \leq c_0$ pour $t < \eta$, ce qui entraîne

$$u_\varepsilon^0 - \lambda(0) - c_0 \geq c_0.$$

De plus, pour tout ε , la fonction u^ε est strictement croissante sur $[0, \eta]$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $t_2 \in (0, \eta)$ tel que $\dot{u}^\varepsilon(t_2) = 0$ et $\dot{u}^\varepsilon(t) > 0$ pour $t < t_2$. D'après (4.18), ceci impliquerait que $u^\varepsilon(t_2) = \lambda(t_2)$, ce qui est impossible vu que

$$u^\varepsilon(t_2) > u^\varepsilon(0) \geq 2c_0 + \lambda(0) \geq c_0 + \lambda(t_2).$$

En conséquence, pour tout $t \in (0, \eta)$, on a

$$u^\varepsilon(t) - \lambda(t) \geq c_0$$

Il en résulte que, pour tout $t \in [0, \eta]$, on a

$$f(u^\varepsilon(t), \lambda(t)) = \underbrace{(1 - u^\varepsilon(t))}_{>0} \underbrace{(1 + u^\varepsilon(t))}_{>2c_0} \underbrace{(u^\varepsilon(t) - \lambda(t))}_{>c_0}$$

Ainsi, sur $[0, \eta]$, on a :

$$2c_0^2(1 - u^\varepsilon) \leq f(u^\varepsilon, \lambda) = \varepsilon \dot{u}^\varepsilon$$

Cette inégalité intégrée donne le résultat suivant :

$$1 - u^\varepsilon(t) \leq (1 - u_0^\varepsilon) \exp(-2c_0^2 t/\varepsilon) \leq 2 \exp(-2c_0^2 t/\varepsilon)$$

En particulier, pour tout $t \in]0, \eta[$, on a $u^\varepsilon(t) \rightarrow 1$ lorsque ε tend vers 0.

Soit $\alpha > 0$ fixé (α assez petit et $\alpha < \eta$), et $c_1 = \min\left(c_0, \frac{1}{2} \min_{t \in [0, t_1 - \alpha]} (1 - \lambda(t))\right) > 0$. Alors on peut fixer $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on ait :

$$0 < 1 - u^\varepsilon(\alpha) \leq c_1$$

Dans ce cas, on a, pour tout $t \in [\alpha, t_1 - \alpha]$:

$$\varepsilon \dot{u}^\varepsilon(t) = f(u^\varepsilon(t), \lambda(t)) \geq 2c_1^2(1 - u^\varepsilon)$$

En conséquence, on en déduit que pour tout $t \in [\alpha, t_1 - \alpha]$,

$$1 - u^\varepsilon(t) \leq (1 - u^\varepsilon(\alpha)) \exp\left(\frac{-2c_1^2(t - \alpha)}{\varepsilon}\right) \leq 2 \exp\left(\frac{-2c_1^2(t - \alpha)}{\varepsilon}\right)$$

En particulier $u^\varepsilon(t) \rightarrow 1$, sur $]0, t_1 - \alpha[$, et ceci quel que soit $0 < \alpha < t_1$, ce qui termine le point (4.16) de la démonstration du lemme, ainsi que la deuxième partie de l'encadrement (4.17) avec $d_2 = 2c_1^2(t_1 - \alpha)$. \square

On sait donc maintenant que u^ε tend vers 1 (ou -1), au moins jusqu'à ce que le point d'équilibre 1 (resp : -1) devienne instable. Se pose alors la question du devenir de u^ε à partir du moment où 1 devient un équilibre instable (ce qui est le cas lorsque $\lambda > 1$) :

- Dès que u^ε est voisin de 1, décolle-t-il immédiatement de ce point d'équilibre lorsque le point d'équilibre 1 devient instable ?
- Y reste-t-il collé définitivement ?
- Y décolle-t-il seulement avec du retard ?

Nous allons voir que la première alternative ne se produit pas ; c'est ce que donne le lemme suivant.

Lemme 4.6 *Soit t_1 un point tel que $e^{-c_1/\varepsilon} \lesssim |1 - u^\varepsilon(t_1)| \lesssim e^{-c_1/\varepsilon}$. Alors il existe t_2 tel que $t_1 < t_2 \leq \infty$ et u^ε converge vers 1 sur $]t_1, t_2[$.*

De plus, si $\tilde{\lambda}(t)$ reste positif, on peut choisir t_2 tel que, si $t_2 < \infty$, on ait à extraction de suite près $u^{\varepsilon(t)} \rightarrow -1$ pour $t > t_2$ et voisin de t_2 .

Preuve. On pose $v^\varepsilon = u^\varepsilon - 1$ et $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t) - 1$, de sorte qu'au voisinage de t_1 , $\tilde{\lambda}(t) > 0$ lorsque $t > t_1$ et $\tilde{\lambda}(t) < 0$ pour $t < t_1$. Alors on a $-2 < v^\varepsilon < 0$ et

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v}^\varepsilon &= -v^\varepsilon(v^\varepsilon + 2)(v^\varepsilon - \tilde{\lambda}(t)) \\ &= 2\tilde{\lambda}(t)v^\varepsilon + (v^\varepsilon)^2(\tilde{\lambda}(t) - 2 - v^\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.19}$$

D'où, en multipliant cette équation par $2v^\varepsilon$, et en posant $X(t) = v^\varepsilon(t)^2$, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) - \frac{4\tilde{\lambda}(t)}{\varepsilon}X(t) &= -\frac{1}{\varepsilon}X(t)^{3/2}(\tilde{\lambda}(t) - 2 - v^\varepsilon) \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon}X(t)^{3/2} \end{aligned}$$

où $C = |\tilde{\lambda}|_{L^\infty} + 2$.

Posant $Z(t) = X(t) \exp\left(-\frac{4}{\varepsilon} \int_{t_1}^t \tilde{\lambda}(s) ds\right)$, il vient :

$$\dot{Z}(t) \leq \frac{C}{\varepsilon} Z(t)^{3/2} \exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{t_1}^t \tilde{\lambda}(s) ds\right)$$

Cette inégalité est à variables séparables, et s'intègre en :

$$2 \left(\frac{1}{\sqrt{Z(t_1)}} - \frac{1}{\sqrt{Z(t)}} \right) \leq \frac{C}{2\varepsilon} \int_{t_1}^t \exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{t_1}^s \tilde{\lambda}(\tau) d\tau\right) ds$$

d'où

$$Z(t) \leq \left(Z(t_1)^{-1/2} - \frac{C}{2\varepsilon} \int_{t_1}^t \exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{t_1}^s \tilde{\lambda}(\tau) d\tau\right) ds \right)^{-2}$$

lorsque le second membre reste continu et borné.

On a ainsi :

$$|v^\varepsilon(t)| \leq \frac{\exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{t_1}^t \tilde{\lambda}(s) ds\right)}{\frac{1}{v^\varepsilon(t_1)} - \frac{C}{2\varepsilon} \int_{t_1}^t \exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{t_1}^s \tilde{\lambda}(\tau) d\tau\right) ds}$$

Soit

$$|v^\varepsilon(t)| \leq \frac{A_{\varepsilon, t_1}(t)}{1 - \frac{C}{2\varepsilon} \int_{t_1}^t A_{\varepsilon, t_1}(s) ds}$$

où

$$A_{\varepsilon, t_1}(t) = v^\varepsilon(t_1) \exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{t_1}^t \tilde{\lambda}(s) ds\right)$$

Ainsi, pour tout t tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \sup_{t_1 \leq s \leq t} A_{\varepsilon, t_1}(s) \right) = 0, \quad (4.20)$$

on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^\varepsilon(t) = 0$.

Pour montrer le lemme, il reste à montrer qu'il existe $t > t_1$ vérifiant la condition (4.20) précédente. Comme $|v^\varepsilon(t_1)| \leq e^{-d_1/\varepsilon}$, tout t tel que $\int_{t_1}^{t'} \tilde{\lambda}(s) ds < d_1/2$ pour tout $t' \in [t_1, t]$ convient (et évidemment, il en existe qui sont strictement supérieurs à t_1).

Définissons t_2 par $t_2 = \inf\{t > t_1, v^\varepsilon(t) \neq 0\}$. A extraction de suite près, il existe $\beta > 0$ tel que $v^\varepsilon(t_2) \geq \beta$ pour tout ε (extrait) suffisamment petit. On peut alors appliquer le lemme 4.5 avec $u_0^\varepsilon = u^\varepsilon(t_2)$ condition initiale à l'instant t_2 (et non plus 0), et $K = -1$, ce qui donne la convergence voulue de u^0 vers -1 pour $t > t_2$. \square

Du fait que $t_2 > t_1$ dans le lemme précédent, il en résulte que la limite de m^ε (si elle existe) ne peut dépendre d'une valeur ponctuelle-seuil de λ , à partir de laquelle immédiatement la limite de m^ε passerait de $+1$ à -1 . Ceci s'énonce de la manière suivante (résultat annoncé au début du paragraphe).

Proposition 4.5 *Il n'existe pas de couple $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\xi = \pm 1$ tels que pour toute fonction assez régulière $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction m^ε solution de (4.15) converge vers $h_\rho(\lambda, \xi)$ lorsque ε tend vers 0.*

Il y a des cas où le point décolle effectivement de l'équilibre devenu instable, c'est-à-dire où $t_2 < \infty$:

Lemme 4.7 *On suppose que $t \mapsto \int_{t_1}^t \tilde{\lambda}(s) ds$ n'est pas majorée et que $|\tilde{\lambda}|_{L^\infty} < 2$. Alors $t_2 < \infty$*

Preuve. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $v^\varepsilon(t) \rightarrow 0$ pour tout $t \geq t_1$ (cette propriété étant vraie uniformément sur tout compact en espace, vu que $|v^\varepsilon(t)| \leq v^\varepsilon(T)$ pour tout $t < T$). Or, l'équation (4.19) et le fait que $v^\varepsilon(t) < 0$ impliquent que, pour ε suffisamment petit et tout t entre t_1 et $T < \infty$ fixé $\tilde{\lambda}(t) - 2 - v^\varepsilon(t) < 0$, et donc :

$$\varepsilon \dot{v}^\varepsilon(t) - 2\tilde{\lambda}(t)v^\varepsilon(t) \geq 0$$

D'où, en intégrant :

$$|v^\varepsilon(t)|^2 \geq |v^\varepsilon(t_1)|^2 \exp\left(\frac{4}{\varepsilon} \int_{t_1}^t \tilde{\lambda}(s) ds\right)$$

Ce qui, avec T choisi initialement tel que $\int_{t_1}^T \tilde{\lambda}(s) ds \geq d_2$, contredit la convergence de v^ε vers 0. Cette dernière hypothèse est donc fautive, ce qu'il fallait démontrer. \square

Remarque 4.2 *Afin de déterminer les taux de convergence et de décollage, des expressions du type $\exp(\Lambda(t)/\varepsilon)$, apparaissent, où Λ désigne une primitive de λ . Il pourrait donc être intéressant d'étudier la convergence m^ε quand ε tend vers 0 vers quelque chose de la forme $h_\rho(\Lambda, \xi)$*

Bibliographie

- [1] J. Starynkévitch, Local Energy Estimates for the Maxwell-Landau-Lifshitz System and Applications, *J. Hyperbolic. Differ. Eq.*, Vol 2, N° 3 (2005), 565-594.
- [2] F. Alouges and S. Labbé, z -invariant micromagnetic configurations in thin plates, *Colloque Modélisation du ferromagnétisme*, (2–6 décembre 2002), CIRM, Marseille.
- [3] P. Aviles & Y. Giga, A mathematical problem related to the physical theory of liquid crystals configurations, *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, **12**, (1987),1–16.
- [4] F. Alouges, T. Rivière and S. Serfaty, Néel and cross-tie wall energies for planar micromagnetic configurations, A tribute to J.-L. Lions, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **8**, (2002), 31–68.
- [5] F. Alouges and A. Soyeur, On global weak solution for Landau-Lifshitz equations : existence and non-uniqueness, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **18** (1992), 1071–1084.
- [6] E. Benoit, J.-L. Callot, F. Diener, and M. Diener, 1981, Chasse aux canards, *Collectanea Mathematica* 31-32(1-3) (1981), 37-119.
- [7] E. Benoit, Equations différentielles : relation entrée-sortie, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 293 (1981), 293-296.
- [8] E. Benoit, Systèmes lents-rapides de \mathbb{R}^3 et leurs canards, in *IIIe Rencontre de Géométrie du Schnepfenried*, Astérisque, 109-110, tome 2 (1983), 159-191.
- [9] E. Benoit, A. Fruchard, R. Schäfke and G. Wallet. Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides point tournant. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 6, 7 no. 4* (1998), p. 627-658.
- [10] N. Berglund. On the Reduction of Adiabatic Dynamical Systems near Equilibrium Curves, *Proceedings of the international workshop "Celestial Mechanics, Separatrix Splitting, Diffusion"*, Aussois, France, June 21-27, 1998.
- [11] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, (Masson, Paris, 1983).
- [12] N. Burq, Global Strichartz estimates for nontrapping geometries : about an article by H. Smith and C. Sogge, *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003),
- [13] G. Carbou, Regularity for critical points of a non local energy, *Calculus of Variations* **5** (1997), 409–433.
- [14] G. Carbou and P. Fabrie, Comportement asymptotique des solutions faibles des équations de Landau-Lifshitz, *C.R. Acad. Sci. Paris t.* **325** (1997) pp 717–720.

- [15] G. Carbou and P. Fabrie, Time average in micromagnetism, *J. Diff. Equ* **147** (1998), 383–409.
- [16] G. Carbou, P. Fabrie and F. Jochmann, A Remark on the weak ω -limit set for micromagnetism equation, *Appl. Math. Lett.* **15** (2002), 95–99.
- [17] G. Carbou and P. Fabrie, Regular Solutions for Landau-Lifshitz Equation in a Bounded Domain, *Differential and Integral Equations* **14** (2001) 213–229.
- [18] G. Carbou and P. Fabrie, Regular Solutions for Landau-Lifshitz Equation in \mathbb{R}^3 , *Commun. Appl. Anal.* **5** (2001) n°1, 17–30.
- [19] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, Couche limite en ferromagnétisme, *Comm. Partial Differential Equations* **27** (2002), n 7–8, 1467–1495.
- [20] G. Carbou, P. Fabrie and O. Guès, On the ferromagnetism equations in the non static case, *Comm. Pure Appli. Anal.* **3** (2004), n 3, 367–393.
- [21] F. Diener, G. Reeb. *Analyse non standard*, Hermann, Paris, 1989.
- [22] F. Diener. *Étude générique des canards*, Thèse Strasbourg, 1983.
- [23] E. Dumas, Global existence for Maxwell-Bloch systems, à paraître dans *Journal of Differential Equations*.
- [24] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduates Studies in Mathematics, Vol. 19 (American Mathematical Society, 1997).
- [25] A. Fruchard. Canards et râteaux. *Annales de l'institut Fourier*, 42 n°4 (1992), p. 825-855.
- [26] H. Haddar, *Modèles asymptotiques en ferromagnétisme ; couches minces et homogénéisation*, PhD thesis (december 2000).
- [27] H. Haddar, Étude du problème couplé Maxwell-Landau-Lifshitz. Existence et unicité de solutions forte en dimension 2. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, 332(5) :411–416, 2001.
- [28] J. Hale and H. Kaçak. *Dynamics and Bifurcations*, Texts in Applied Mathematics 3, 1991.
- [29] L. Halpern et S. Labbé. La théorie du micromagnétisme. Modélisation et simulation du comportement des matériaux magnétiques. *Matapli* **66** (2001).
- [30] K. Hamdache, and M. Tilioua, The Landau-Lifshitz equations and the damping parameter, to appear in *Boll. Union. Mat. Ital. Sez. B*.
- [31] L. Hörmander, *The analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (Springer-Verlag, 1990).
- [32] F. Jochmann, Existence of solutions and quasi-stationary limit for a hyperbolic system describing ferromagnetism, *Siam. J. Math. Anal.* **34** (2002) 315–340.
- [33] F. Jochmann, Asymptotic Behavior of the electromagnetic field for a micromagnetism equation without exchange energy, *Siam. J. Math. Anal.* **37** (2005) 276-290.
- [34] T. Jecko, *Sections efficaces totales d'une molécule diatomique dans l'approximation de Born-Oppenheimer*, PhD thesis (october 1996).

- [35] T. Jecko, *Théorie du Commutateur de Mourre. Application au problème à N corps*, Cours de Master 2 de niveau 2 (novembre 2004), <http://perso.univ-rennes1.fr/thierry.jecko/fichiers/Mourre-N-corps.pdf>
- [36] A. Jensen, E. Mourre and P. Perry, Multiple Commutator Estimates and resolvent smoothness in Quantum Scattering Theory, *Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique* **41A**, (1984) 207-225.
- [37] J.-L. Joly, G. Métivier and J. Rauch, Global solution to Maxwell equation in a ferromagnetic medium, *Ann. Inst. H. Poincaré* **1** (2000) 307–340.
- [38] P. Joly and O. Vacus, Mathematical and numerical studies of 1D non linear ferromagnetic material *Numerical Methods in engineering '96* (1996).
- [39] P. Joly and O. Vacus, Maxwell's Equations in a 1D Ferromagnetic Medium : Existence and Uniqueness of Strong Solutions, *Rapport de recherche de l'INRIA - Rocquencourt , Equipe : ONDES*, 31 pages - (novembre 1996).
- [40] S. Labbé, *Simulation numérique du comportement hyperfréquence des matériaux ferromagnétiques*, PhD thesis (decembre 1998).
- [41] M. Lecumberry and T. Rivière, Regularity for micromagnetics configurations having zero jump energy, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **15** (2002), n°3, 389–402.
- [42] L. Landau and E. Lifshitz, *Electrodynamique des milieux continus* (Mir, Moscou, 1969).
- [43] V. Mathé. *Signaux numériques dans les sols : potentiel de la caractérisation de la texture d'un sol par les anomalies magnétiques métriques à inframétriques. Prospection dans la zone humide des marais de l'ouest de la France*. Thèse de doctorat de Physique à la Rochelle, 2003.
- [44] T. Rivière and S. Serfaty, Limiting Domain Wall Energy for a Problem Related to Micromagnetics, *Comm. Pure Appl. Math.*, **54**, (2001), 294–338.
- [45] D. Robert, Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbation du second ordre du laplacien, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, **25** (1992) 107-134.
- [46] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, (Hermann, Paris, 1966).
- [47] J. Sjöstrand, *Lectures on resonances* (may 2002) <http://www.math.polytechnique.fr/~sjostrand/CoursbgWeb.pdf>
- [48] J. Sjöstrand and M. Zworski, Complex scaling and the distribution of scattering poles, *J. Amer. Math. Soc.*, Vol 4, N°4, (October 1991), 729-769.
- [49] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, (Princeton University Press, 1970).
- [50] A. Visintin. *Differential Models of Hysteresis*, Applied Mathematical Science 111, Springer, 1994.
- [51] A. Visintin. Modified Landau-Lifshitz equation for ferromagnetism. *Physica B*, 233 (1997), 365–369
- [52] A. Visintin. Vector Ferromagnetic hysteresis and Maxwell equations. *Journal of Material Processing and Manufacturing Science*, 9 (2000), 64-69.
- [53] A. Visintin. Vector Preisach model and Maxwell equations *Physica B*, 306 (2001), 21–25.

Résumé

Problèmes d'asymptotique en temps en ferromagnétisme

Cette thèse est consacrée à quelques problèmes d'asymptotique en temps en ferromagnétisme. Le modèle mathématique utilisé est donné par l'équation de Landau-Lifshitz, que l'on couple avec les équations de Maxwell.

Les deux premières parties étudient la limite quasi-stationnaire du système (d'abord à coefficients constants, puis à coefficients variables). Le point clé réside dans l'obtention d'une intégrabilité en temps de l'énergie locale de l'équation des ondes, obtenues dans la première partie par une écriture exacte de la solution fondamentale de l'équation des ondes à coefficients constante. Dans la deuxième partie, Cette intégrabilité de l'énergie locale est obtenue avec des coefficients variables et réguliers par une analyse spectrale et une estimation de la résolvante pour une perturbation matricielle du Laplacien.

La troisième partie met en évidence dans un cas particulier 1D un phénomène de retard de l'évolution du moment magnétique en fonction du champ extérieur, lorsque celui-ci devient un équilibre instable de l'équation homogène associée. Le résultat principal est l'établissement de la non-convergence vers un modèle de Preisach (un modèle d'hystérésis), en cas de variations lentes du champ appliqué.

Mot-clés : ferromagnétisme, micromagnétisme, équation de Landau-Lifshitz, hystérésis, approximation quasi-stationnaire, équations de Maxwell.

Abstract

Time-asymptotic Problems in Ferromagnetism

This thesis is devoted to some asymptotic problems in time in ferromagnetism. The mathematical model is given by the Landau-Lifshitz equation, which is used with Maxwell equations.

The first two parts are devoted to the quasi-stationary limit in the system (first in homogeneous medium, second in inhomogeneous media). The key point is to obtain integrability in time of the wave equation, obtained in the first part by using the fundamental solution of the free wave equation. In the second part (inhomogeneous media), this integrability is obtained by spectral analysis and a resolvent estimate for a compact matrixial perturbation of the laplacian.

The third part shows in a 1D particular case a delay in the evolution of magnetization with respect to the exterior field, whenever this becomes an unstable equilibrium in the correspondant homogeneous equation. The principal resultat is the non-convergence towards a Preisach model (a model of hysteresis), with slow variations in time of the applied field.

Keywords : ferromagnetism, micromagnetism, Landau-Lifshitz equation, hysteresis, quasi-stationary limit, Maxwell equations.