$N°$d'ordre : 3061

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **M. Issam LOUHICHI**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques pures**

****

PRODUITS D'OPÉRATEURS DE TOEPLITZ SUR L'ESPACE DE BERGMAN

****

Soutenue le : 09 Novembre 2005

Après avis de Messieurs :

Patrick AHERN	Professeur, University of Wisconsin	**Rapporteur**
Ali BAKLOUTI	Professeur, Faculté des Sciences de Sfax	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen formée de :

A. BAKLOUTI	Professeur, Faculté des Sciences de Sfax	**Rapporteur**
H. CHEBLI	Professeur, Faculté des Sciences de Tunis	**Directeur de thèse**
B. CHEVREAU	Professeur, Université de Bordeaux 1	**Examinateur**
H. YOUSSFI	Professeur, Université de Provence	**Examinateur**
N. NIKOLSKII	Professeur, Université de Bordeaux 1	**Président du jury**
E. STROUSE	Maître de conférences HDR, Université Bordeaux 1	**Directeur de thèse**

- 2005 -

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus sincères remerciements à mes deux directeurs de thèse Houcine CHEBLI et Elizabeth STROUSE. je leurs suis très reconnaissant pour la confiance qu'ils m'ont accordée et l'encadrement dont j'ai bénéficié. Leur activité débordante ne les a pas empéchés d'être toujours à l'écoute. C'est avec gentillesse, bonne humeur, patience et en faisant non moins preuve d'une grande rigueur qu'ils m'ont permis de mener à bien cette thèse. Qu'ils sachent que c'est avec un réel plaisir que j'ai partagé cette aventure à trois qui, je l'espère, se poursuivra encore longtemps.
J'ai eu le plaisir et l'honneur d'avoir rencontré Patrick AHERN à plusieurs reprises durant ces trois ans. Je suis heureux qu'il ait accepté d'être rapporteur sur mon travail et je le remercie vivement pour l'intérêt qu'il m'a acoordé tout le long de ma thèse.
Je tiens également à remercier chaleureusement Ali BAKLOUTI qui a eu la patience de lire et de relire ma thèse, en vu d'en faire le rapport. Je suis ravi qu'il participe à mon jury.
Je remercie maintenant Nicolai NIKOLSKII. Je suis honoré qu'il soit présent dans ce jury et qu'il ait accepté de le présider. De même, je tiens à remercier Bernard CHEVREAU qui m'a fait l'honneur d'être membre du jury. Ma reconnaissance va également à El Hassan Youssfi, d'avoir eu la gentillesse de faire le déplacement depuis Marseille afin de participer au jury.
Une pensée particulière à Lova ZAKARIASY pour notre fructueuse collaboration.
Je n'oublierais pas non plus les membres de l'IMB, plus particulièrement Thierry COLIN qui pour moi a été d'une aide précieuse. Je tiens à remercier également tout le staff administratif qui font disparaître d'un coup de baguette magique toutes les tracasseries administratives.

Table des matières

Introduction

Le sujet de ma thèse est l'étude des propriétés multiplicatives des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ du disque unité $\mathbb{D}$.

Soit ϕ une fonction bornée dans $\mathbb{D}$. On appelle opérateur de Toeplitz de symbole ϕ, et on note T_ϕ, l'opérateur défini par :

$$\begin{array}{rcl} T_\phi : L_a^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & L_a^2(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & P(\phi f)\ , \end{array}$$

où P est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ sur $L_a^2(\mathbb{D})$.

Plusieurs questions naturelles se posent. Parmi elles, nous discuterons dans le cadre de la thèse les deux questions suivantes :

1) Sous quelles conditions le produit de deux opérateurs de Toeplitz est-il un opérateur de Toeplitz ?

2) Sous quelles conditions deux opérateurs de Toeplitz commutent-ils ?

Il est clair que si le symbole ϕ est une fonction analytique bornée sur $\mathbb{D}$ alors l'opérateur de Toeplitz T_ϕ n'est autre que l'opérateur de multiplication par ϕ dans $L_a^2(\mathbb{D})$. Dans ce cas, la réponse à ces deux questions devient évidente puisque d'une part le produit d'opérateurs de multiplication est toujours un opérateur de multiplication et d'autre part les opérateurs de multiplication commutent.

Dans [13], Brown et Halmos donnent une réponse complète à ces deux questions pour les opérateurs de Toeplitz définis sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ du cercle unité $\mathbb{T}$. Ils montrent que pour deux fonctions ϕ et ψ bornées sur $\mathbb{T}$:

i) le produit $T_\phi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz T_ω si et seulement si $\overline{\phi}$ est analytique ou ψ est analytique, et dans les deux cas $\omega = \phi\psi$ (Théorème 1.5.1). Dans l'espace $H^2(\mathbb{T})$, une fonction est dite analytique si tous ses coefficients de Fourier d'indice négatif sont nuls.

ii) Les opérateurs T_ϕ et T_ψ commutent si et seulement si ϕ et ψ sont toutes les deux analytiques, ou si $\overline{\phi}$ et $\overline{\psi}$ sont toutes les deux analytiques, ou bien si ϕ est une fonction affine de ψ (Théorème 1.6.1).

Dans l'espace de Bergman, la situation est beaucoup plus compliquée et intéressante. Les questions 1) et 2) ci-dessus résistent encore aux spécialistes et ne sont résolues que dans des cas spécifiques.

Dans [3], Ahern et Čučković montrent qu'il est possible d'avoir un résultat analogue à celui de Brown et Halmos (ce que l'on appelera plus tard un théorème de type Brown-Halmos) en imposant aux symboles de vérifier des conditions bien particulières. Dans [1], Ahern résout la question 1) pour les symboles harmoniques bornés. Soit ϕ une fonction harmonique bornée sur $\mathbb{D}$ alors il existe deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 dans l'espace de Bloch telles que

$$\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}. \tag{1}$$

Considérons alors deux symboles $\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}$ et $\psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$ harmoniques bornés sur $\mathbb{D}$ et regardons le produit $T_\phi T_\psi$. Nous verrons au chapitre 4 que si le produit $T_{\phi_1} T_{\overline{\psi_2}}$ est un opérateur de Toeplitz alors le produit $T_\phi T_\psi$ l'est aussi. C'est « le cœur » de l'article [1] dans lequel Ahern caractérise, via la transformation de Berezin, toutes les fonctions analytiques bornées ϕ et ψ telles que le produit $T_\phi T_{\overline{\psi}}$ soit un opérateur de Toeplitz (Théorème 3.1.5). Par conséquent, Ahern donne une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz de symboles harmoniques bornés soit un opérateur de Toeplitz (Corollaire 3.1.6).

Voyant que la question est résolue pour les opérateurs de Toeplitz de symboles harmoniques bornés, qu'en est-il du cas des symboles plus généraux, telles les fonctions bornées sur $\mathbb{D}$? Sur cette voie et dans un travail en collaboration avec Elizabeth Strouse et Lova Zakariasy [23], nous avons résolu la question 1) pour les opérateurs de Toeplitz à « symbole quasihomogène ». On dit qu'une fonction f est quasihomogène de degré p si $f(re^{i\theta}) = e^{ip\theta}\phi(r)$, où ϕ est une fonction radiale. Nous nous sommes intéressés aux fonctions quasihomogènes car toute fonction f de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ admet *la décomposition polaire* suivante :

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta} f_k(r)$$

où les fonctions f_k sont dans $L^2([0,1], rdr)$. Donc le fait d'avoir des résultats sur les Toeplitz de symboles quasihomogènes nous permettra d'en dire plus sur ceux de symboles généraux. Les techniques utilisées dans [23] diffèrent complètement de celles utilisées dans [1] et [3] puisque la décomposition (1) n'est plus valable. Elles consistent essentiellement en l'utilisation de la transformation de Mellin et de la convolution de Mellin dans l'étude des opérateurs de Toeplitz. Nous avons obtenu une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz de symboles quasihomogènes soit encore un opérateur de Toeplitz (Théorème 3.2.12). De plus, nous sommes capables d'exhiber le symbole de l'opérateur produit puisque ce dernier vérifie une équation de convolution de Mellin (qui reste parfois difficile à résoudre) faisant intervenir les deux premiers symboles (Théorème 3.2.16).

Quant à la question 2), Axler et Čučković l'ont résolue pour les opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique. Ils montrent dans [8] que si ϕ et ψ sont deux symboles harmoniques bornés (et donc la décomposition (1) est dans ce cas valable) et si T_ϕ commute avec T_ψ, alors nécessairement ϕ et ψ sont tous les deux analytiques, ou $\overline{\phi}$ et $\overline{\psi}$ sont tous les deux analytiques, ou bien ϕ est une fonction affine de ψ (Théorème 4.1.1). Avec Rao dans [9], ils donnent la réponse à la question dans le cas des symboles analytiques. En effet, ils prouvent qu'un opérateur de Toeplitz analytique (de symbole une fonction analytique) ne commute qu'avec un opérateur de Toeplitz de même type, c'est-à-dire analytique (Théorème 4.1.4). Comme dans le cas du produit, on voit que la commutativité des opérateurs de Toeplitz de symboles harmoniques bornés ne se produit que dans le cas trivial. Dans [18], Čučković et Rao donnent une caractérisation complète des opérateurs de Toeplitz de symboles bornés qui commutent avec un opérateur de Toeplitz de symbole de la forme $e^{ip\theta}r^m$ où p et m sont deux entiers positifs (Théorème 4.2.1, Théorème 4.2.2 et Théorème 4.2.3).

Dans une deuxième collaboration avec Lova Zakariasy [24], nous nous sommes penchés sur la question 2). Les résultats que nous avons obtenus se résument dans ce qui suit. Soient $p \geq 1$ un entier positif et $\phi \neq 0$ une fonction radiale bornée :

i) Si $f(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta} f_k(r)$ est une fonction bornée telle que T_f commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$, alors $T_{e^{ik\theta}f_k}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

ii) S'il existe $k \leq -1$ tel que $T_{e^{ik\theta}f_k}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors nécessairement $f_k = 0$. En d'autres termes si T_f commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors la partie d'indice négatif dans la décomposition polaire de f est nulle.

iii) S'il existe $k \geq 0$ tel que $T_{e^{ik\theta}f_k}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors f_k est unique à une constante multiplicative près.

Dans [22], je me suis intéressé à la partie positive dans la décomposition polaire de f et il s'est avéré qu'il y a un lien « intime » entre la commutativité et la puissance (donc le produit) des opérateurs de Toeplitz. En effet nous montrons que si $k \geq 0$ et si $T_{e^{ik\theta}f_k}$ et $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commutent alors $\left(T_{e^{ik\theta}f_k}\right)^p = \left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^k$. De plus si k est un multiple de p, par exemple $k = np$, on obtient que $T_{e^{inp\theta}f_{np}} = \left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^n$.

Pour bien exploiter ce résultat, j'ai dû introduire une nouvelle notion, la « T-$p^{ième}$ racine » quasihomogène. On dit qu'un opérateur $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet une T-$p^{ième}$ racine s'il existe une fonction $\psi \neq 0$ radiale bornée telle que $T_{e^{ip\theta}\phi} = \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p$. Cette nouvelle notion de la T-$p^{ième}$ racine nous a permis de donner une réponse complète à la question 2) (Théoreme 5.3.1). En effet nous avons montré la chose suivante : Soit $T_{e^{ip\theta}\phi}$ un opérateur de Toeplitz borné de degré quasihomogène $p \geq 1$ et supposons que $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet une T-$p^{ième}$ racine $T_{e^{i\theta}\psi}$. Si $f(re^{ip\theta}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ik\theta} f_k(r)$ est une fonction bornée telle que T_f commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors pour tout $k \geq 0$:

i) Si $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ est un opérateur de Toeplitz alors ou bien $T_{e^{ik\theta}f_k} = \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ ou bien $f_k = 0$.

ii) Si $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ n'est pas un opérateur de Toeplitz alors $f_k = 0$.

En d'autre termes les opérateurs de Toeplitz qui commutent avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ sont des sommes (parfois infinies) de puissances de la T-$p^{ième}$ racine de $T_{e^{ip\theta}\phi}$. Par ailleurs, nous appliquons nos résultats dans [22] à ceux de Čučković et Rao dans [18] pour voir que l'opérateur $T_{e^{ip\theta}r^m}$, étudié dans [18], admet toujours une T-$p^{ième}$ racine. Ceci nous a permis de simplifier les Théorème 4.2.1, Théorème 4.2.2 et Théorème 4.2.3, dans [18] et de leur donner une nouvelle interprétation.

L'une des conséquences majeures du Théorème 5.3.1 est la construction d'un symbole non trivial (non analytique) tel que la $n^{ième}$ puissance de l'opérateur de Toeplitz associé est toujours un opérateur de Toeplitz, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est un résultat intéressant car avant, on avait des difficultés à trouver même un symbole ϕ tel que T_ϕ^2 est un opérateur de Toeplitz.

La thèse est organisée de la façon suivante. Le chapitre 1 est consacré à l'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy du cercle unité. Nous présentons les résultats de Brown et Halmos dans [13], tout en insistant plus particulièrement sur la différence qu'il y a entre les opérateurs de Toeplitz définis sur l'espace de Hardy et ceux définis sur l'espace de Bergman. Dans le chapitre 2, nous introduisons la notion classique du noyau reproduisant. Nous nous intéressons particulièrement au noyau reproduisant de l'espace de Bergman du disque unité car c'est à travers lui que nous considérons les opérateurs de Toeplitz à symbole dans $L^1(\mathbb{D}, dA)$. Nous définissons ensuite l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman et nous discutons les points de différence entre cet opérateur et celui défini auparavant sur l'espace de Hardy. Le chapitre 3 traite de la question du produit de deux opérateurs de Toeplitz. Plus précisement, quand ce produit est-il un opérateur de Toeplitz ? Nous commençons par exposer les résultats de Ahern et Čučković dans [3], puis ceux de Ahern dans [1] qui donnent la réponse à la question pour les opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique. Nous introduisons ensuite notre travail sur cette question dans [23] et nous donnons la solution à cette question pour les opérateur de Toeplitz à symbole quasihomogène. Le chapitre 4 discute la commutativité des opérateurs de Toeplitz. Quand le produit de deux opérateurs de Toeplitz est-il commutatif ? Nous expliquons tout d'abord les résultats d'Axler, Čučković et Rao dans [8] et [9] concernant la commutativité des opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique.

Puis nous présentons notre contribution à cette question à travers notre travail dans [24] qui traite de la commutativité des opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène. Le chapitre 5 est une suite logique du chapitre 4. En effet nous utilisons les résultats de [24] exposés au chapitre 4 pour caractériser tous les opérateurs de Toeplitz à symbole général qui commutent avec un opérateur à symbole quasihomogène. Nous faisons alors apparaître un lien entre la commutativité et la puissance des opérateurs de Toeplitz. Ceci nous a permis de simplifier les résulats de Čučković et Rao dans [18] et de leur donner une nouvelle interprétation. Nous espérons que ce lien mis à jour entre la commutativité, les puissances et les racines des opérateurs de Toeplitz ouvrira la porte à d'autres questions sur le sujet et permettra d'en élucider certaines encore ouvertes.

Chapitre 1

Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy

Nous avons choisi de commencer ce chapitre en introduisant les opérateurs de Laurent sur $L^2(\mathbb{T})$. Ces derniers étant en relation étroite avec les opérateurs de Toeplitz qu'ils permettent dès lors de définir. En effet l'opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ n'est autre qu'un opérateur de Laurent suivi de la projection de Riesz. Nous dirons que l'opérateur de Toeplitz est la compression de l'opérateur de Laurent à l'espace de Hardy. Sachant que le produit de deux opérateurs de Laurent est, d'une part un opérateur de Laurent, et d'autre part commutatif, qu'en est-il du produit de deux opérateurs de Toeplitz ? La réponse à cette question a été donnée en 1963 par Brown et Halmos [13], qui ont su avec élégance donner une caractérisation complète de la paire d'opérateurs de Toeplitz dont le produit est un opérateur de Toeplitz ou celle dont le produit est commutatif. Nous verrons à travers les deux principaux résultats de [13], Théorème 1.5.1 et Théorème 1.6.1, qu'il est rare que le produit de deux opérarteurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy soit encore un opérateur de Toeplitz. Par le mot « rare », nous voulons dire que le produit n'est un opérateur de Toeplitz que dans des cas bien particuliers que nous discuterons plus tard.

Soient $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$ et $d\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ de sorte que $\mu(\mathbb{T}) = 1$.

On note par $L^2(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{T}$ par rapport à la mesure $d\mu$. Il est bien connu que $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\, d\mu$$

est un espace de Hilbert et que la suite des fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, définies par $e_n(z) = z^n$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

On notera par $\|.\|_2$ la norme dans $L^2(\mathbb{T})$.

1.1 Opérateurs de Laurent

Définition 1.1.1 *Soient ϕ une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$ et $D(L_\phi)$ l'ensemble des fonctions f dans $L^2(\mathbb{T})$ telles que le produit ϕf soit dans $L^2(\mathbb{T})$. On appelle opérateur de Laurent, ou encore opérateur de multiplication, de symbole ϕ sur $L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur défini par*

$$\begin{array}{rcl} L_\phi : D(L_\phi) \subseteq L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & L_\phi f = \phi f. \end{array}$$

Il est clair que $D(L_\phi)$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ puisqu'il contient l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}$ qui lui est dense dans $L^2(\mathbb{T})$

Indiquons un résultat classique des opérateurs de Laurent que nous utiliserons dans la suite du chapitre.

Proposition 1.1.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) ϕ *est borné sur* $\mathbb{T}$.

ii) $D(L_\phi) = L^2(\mathbb{T})$.

iii) L_ϕ *est borné sur* $L^2(\mathbb{T})$.

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii) Il est évident que si le symbole ϕ est borné sur $\mathbb{T}$ alors le produit ϕf est dans $L^2(\mathbb{T})$ avec $\|\phi f\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2$ ceci pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Il suffit de montrer que l'opérateur de Laurent, défini cette fois-ci sur $L^2(\mathbb{T})$ tout entier, est fermé puis d'utiliser le théorème du graphe fermé pour conclure que L_ϕ est borné. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $L^2(\mathbb{T})$ telle que

$$\begin{cases} f_n \to f & \text{en norme } \|.\|_2, \\ L_\phi f_n \to g & \text{en norme } \|.\|_2. \end{cases}$$

On veut montrer que $f \in L^2(\mathbb{T})$, ce qui est évident car $L^2(\mathbb{T})$ est complet, et que $g = L_\phi f$. Comme $(f_n)_n$ converge en norme $\|.\|_2$ vers f, on peut alors extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ telle que $(f_{n_k})_k$ converge simplement vers f μ-presque partout. Ceci implique que

$$\phi f_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \phi f \quad \mu - \text{presque partout.} \tag{1.1}$$

De la même manière (quitte à extraire une autre sous-suite) on montre que

$$L_\phi f_{n_k} = \phi f_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} g \quad \mu - \text{presque partout.} \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on déduit que $g = \phi f$ μ-presque partout i.e. $g = L_\phi f$.

iii) $\Rightarrow$ i) L'astuce de la preuve est due à Morris Schreiber comme le précisent les auteurs de [13]. Si L_ϕ est borné sur $L^2(\mathbb{T})$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|L_\phi f\|_2 \leq c\|f\|_2$ pour toute fonction f dans $L^2(\mathbb{T})$. En particulier

$$\begin{cases} \|\phi\|_2 & = \|L_\phi e_0\|_2 & \leq c\|e_0\|_2 & = c \\ \text{et} & & & \\ \|\phi^2\|_2 & = \|L_\phi \phi\|_2 & \leq c\|\phi\|_2 & \leq c^2. \end{cases}$$

En itérant ce procédé n fois, on obtient $\|\phi^n\|_2 \leq c^n$ pour tout entier n positif, ce qui signifie que

$$\int_{\mathbb{T}} |\frac{\phi}{c}|^{2n} d\mu \leq 1.$$

Supposons que $\mu(\{|\frac{\phi}{c}| > 1\}) > 0$. Il est simple de voir que

$$\Big\{|\frac{\phi}{c}| > 1\Big\} = \bigcup_{m \geq 1} \Big\{|\frac{\phi}{c}| > 1 + \frac{1}{m}\Big\},$$

avec pour tous entiers $m_2 > m_1$

$$\Big\{|\frac{\phi}{c}| > 1 + \frac{1}{m_1}\Big\} \subseteq \Big\{|\frac{\phi}{c}| > 1 + \frac{1}{m_2}\Big\},$$

d'où

$$\mu\Big(\Big\{|\frac{\phi}{c}| > 1\Big\}\Big) = \lim_{m \to +\infty} \mu\Big(\Big\{|\frac{\phi}{c}| > 1 + \frac{1}{m}\Big\}\Big).$$

Comme par hypothése $\mu(\{|\frac{\phi}{c}| > 1\}) > 0$, il existe un entier $m_0 > 0$ tel que

$$\mu\Big(\Big\{|\frac{\phi}{c}| > 1 + \frac{1}{m_0}\Big\}\Big) > 0.$$

En notant $E_0 = \{|\frac{\phi}{c}| > 1 + \frac{1}{m_0}\}$, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{T}} |\frac{\phi}{c}|^{2n} d\mu \geq \int_{E_0} |\frac{\phi}{c}|^{2n} d\mu > (1 + \frac{1}{m_0})^{2n} \mu(E_0), \quad \forall n \geq 1,$$

ce qui est absurde car $(1 + \frac{1}{m_0})^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Donc $|\phi(z)| \leq c$ pour presque tout $z \in \mathbb{T}$ et par suite ϕ est bornée.

$\blacksquare$

Remarque 1.1.3 *D'une manière analogue, on peut définir les opérateurs de Laurent dans $L^2(\mathbb{D})$ par*

$$\begin{aligned} L_\phi : D(L_\phi) \subseteq L^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{D}) \\ f &\longmapsto L_\phi f = \phi f. \end{aligned}$$

Comme dans le cas de $L^2(\mathbb{T})$, l'opérateur de Laurent défini sur $L^2(\mathbb{D})$ est borné si et seulement si son symbole l'est aussi.

Étant donné un opérateur M borné de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$, quand est-il possible d'affirmer que M est un opérateur de Laurent ? Pour répondre à cette question il faut tout d'abord introduire un opérateur important qui joue un role vital dans la théorie des espaces de Hilbert, à savoir la translation bilatérale.

Un opérateur U sur un espace de Hilbert H est appelé translation bilatérale (communément connue aussi sous le nom du shift bilatéral ; voir [25, p. 4] et [27]) s'il vérifie les conditions suivantes :

i) U est unitaire i.e. $UU^* = U^*U = I$ où I est l'opérateur identité. En particulier l'inverse de U est U^* et U est une isométrie.

ii) S'il existe un sous-espace fermé L de H tel que d'une part $U^pL \perp U^qL$ pour p, q entiers quelconques, $p \neq q$ et d'autre part $H = \bigoplus\limits_{-\infty}^{+\infty} U^n L$.

L'opérateur de Laurent de symbole e_1 est une translation bilatérale.

Nous avons une première caractérisation des opérateurs de Laurent donnée par le théorème suivant [13, p. 109].

Théorème 1.1.4 *Un opérateur borné de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même est un opérateur de Laurent si et seulement s'il commute avec la translation bilatérale L_{e_1}.*

Preuve : Soit L_ϕ un opérateur de Laurent borné sur $L^2(\mathbb{T})$. Pour toute fonction f dans $L^2(\mathbb{T})$, on a $L_\phi L_{e_1} f = \phi e_1 f = e_1 \phi f = L_{e_1} L_\phi f$, ce qui prouve bien que L_ϕ et L_{e_1} commutent.

Réciproquement, soit M un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$ commutant avec L_{e_1}. On veut montrer l'existence d'une fonction bornée ϕ telle que $M = L_\phi$. Si c'était le cas, alors pour tout $z \in \mathbb{T}$, on aurait

$$\phi(z) = \phi(z)e_0(z) = (L_\phi e_0)(z) = (Me_0)(z).$$

On pose donc $\phi = Me_0$. Par définition ϕ est dans $L^2(\mathbb{T})$. Par suite, d'après la Proposition 1.1.2, l'opérateur L_ϕ défini par :

$$\begin{aligned} L_\phi : D(L_\phi) \subseteq L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto L_\phi f = \phi f \end{aligned}$$

est fermé à domaine dense. Pour tout entier n, on a :

- Si $n \geq 0$ alors $Me_n = ML_{e_1}^n e_0 = L_{e_1}^n Me_0 = L_{e_1}^n \phi = e_n \phi = \phi e_n = L_\phi e_n$.
- Si $n < 0$ alors $Me_n = ML_{e_1}^{*^{-n}} e_0$. Or M et $L_{e_1}^*$ commutent. En effet comme $ML_{e_1} = L_{e_1}M$ alors, en composant à droite et à gauche par $L_{e_1}^*$ et utilisant le fait que L_{e_1} est unitaire, il vient que $ML_{e_1}^* = L_{e_1}^* M$. D'où :

$$Me_n = ML_{e_1}^{*^{-n}} e_0 = L_{e_1}^{*^{-n}} Me_0 = (e_{-1})^{-n}\phi = e_n\phi = \phi e_n = L_\phi e_n.$$

On en déduit que $Me_n = L_\phi e_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Grâce à la linéarité de M et L_ϕ, on a encore $Mp = L_\phi p$ pour tout polynôme trigonométrique p (combinaison linéaire finie de e_n). Puisque L_ϕ est fermé à domaine dense et l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $L^2(\mathbb{T})$, Il vient que $D(L_\phi) = L^2(\mathbb{T})$ et que $L_\phi = M$ sur $L^2(\mathbb{T})$. Or par hypothèse M est borné donc L_ϕ est borné et, par la Proposition 1.1.2, ϕ l'est aussi. ■

1.2 Matrices de Laurent

Soit ϕ une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$ et notons par $\widehat{\phi}(n)$ le coefficient de Fourier d'indice n de ϕ :

$$\widehat{\phi}(n) = \int_0^{2\pi} \phi(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}.$$

Le théorème de Riesz-Fischer d'une part et de Parseval d'autre part affirment que l'application de $L^2(\mathbb{T})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, l'espace de Hilbert des suites complexes de carré sommable, qui à toute fonction ϕ lui associe sa suite de coefficients de Fourier $(\widehat{\phi}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme [29, p. 92]. Du coup, tout opérateur de Laurent borné sur $L^2(\mathbb{T})$ peut être vu comme opérateur borné de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même. En effet il suffit de considérer sa matrice dans la base orthonormée de $\ell^2(\mathbb{Z})$ qu'on notera $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n = (\dots, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots)$ et la n-ième coordonnée vaut 1.

Ceci nous amène à introduire les matrices de Laurent [15, p. 3].

Définition 1.2.1 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. On considère A la matrice bilatéralement infinie suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \cdots \\ \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \cdots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_{-0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

dont les éléments d'une même diagonale sont égaux. La matrice A est appelée matrice de Laurent.

Quelles sont les conditions sur les coefficients d'une matrice de Laurent pour que celle-ci définisse un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ et donc sur $L^2(\mathbb{T})$? Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit vrai [15, p. 3-4].

Théorème 1.2.2 *Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une matrice de Laurent. A définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ si et seulement s'il existe une fonction ϕ bornée sur $\mathbb{T}$ telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de ϕ.*

Preuve : Supposons que A définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Soit Φ l'isomorphisme de $L^2(\mathbb{T})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui à toute fonction associe sa série de coefficients de Fourier. Posons alors $\phi = \Phi^{-1}(Ae_0)$ où $e_0 = (\ldots, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots)$ (défini auparavant) est l'élément de la base orthonormée de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Si L_ϕ est l'opérateur de Laurent de symbole ϕ alors sa matrice dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est autre que la matrice A. Or par hypothèse, A définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Donc forcément L_ϕ est borné et par suite ϕ l'est aussi.

Réciproquement, soit ϕ dans $L^\infty(\mathbb{T})$ et soit $\mathbf{A}$ la matrice définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \ldots \\ \ldots & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \ldots \\ \ldots & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Comme le symbole ϕ est borné, l'opérateur de Laurent L_ϕ est borné. De plus sa matrice dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^2(\mathbb{Z})$ est la matrice A. Donc A définit bien un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. ■

Une deuxième caractérisation des opérateurs de Laurent est donnée par le théorème suivant [13, p. 92].

Théorème 1.2.3 *Un opérateur borné M de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même est un opérateur de Laurent si et seulement si sa matrice dans la base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent.*

Preuve : Si L_ϕ un opérateur de Laurent borné et si $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est sa matrice dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors

$$\begin{cases} a_{ij} & = \langle L_\phi e_j, e_i\rangle = \langle \phi e_j, e_i\rangle, \\ a_{i+k,j+k} & = \langle \phi e_j e_k, e_k e_i\rangle = \langle \phi e_j, e_{-k} e_k e_i\rangle = \langle \phi e_j, e_i\rangle. \end{cases}$$

Donc $a_{ij} = a_{i+k,j+k}$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$ et A est une matrice de Laurent.

Réciproquement, soit M un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$ dont la matrice dans la base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent *i.e.* pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, $\langle Me_{j+1}, e_{i+1}\rangle = \langle Me_j, e_i\rangle$. Pour prouver que M est bien un opérateur de Laurent il suffit, d'après le Théorème 1.1.4, de prouver que M commute avec la translation bilatérale L_{e_1}, ce qui est vrai car :

$$\begin{aligned} \langle ML_{e_1}e_j, e_i\rangle &= \langle Me_{j+1}, e_i\rangle \\ &= \langle Me_j, e_{i-1}\rangle \\ &= \langle Me_j, L_{e_1}^* e_i\rangle \\ &= \langle L_{e_1}Me_j, e_i\rangle, \text{ pour tout } (i,j) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

■

1.3 Matrices de Toeplitz

Définition 1.3.1 *On appelle matrice de Toeplitz toute matrice unilatéralement infinie, définie par une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et ayant la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas des matrices de Laurent, il est intéressant de savoir quand est-ce qu'une matrice de Toeplitz peut définir un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$? La réponse à cette question a été donnée par le théorème suivant de Otto Toeplitz [14, p. 1].

Théorème 1.3.2 *Une matrice de Toeplitz $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ si et seulement s'il existe une fonction bornée ϕ sur $\mathbb{T}$ telle que les nombres a_n $(n \in \mathbb{Z})$ sont ses coefficients de Fourier i.e. :*

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas la norme de l'opérateur engendré par A est égale à

$$\|\phi\|_\infty := \operatorname{supess}_{t\in\mathbb{T}} |\phi(t)|.$$

Preuve : Soit $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ la fonction dont les coefficients de Fourier sont les éléments a_n de la matrice A et soit L_ϕ l'opérateur de Laurent de symbole ϕ. On sait que L_ϕ est borné si et seulement ϕ est aussi borné, auquel cas $\|L_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. On note par M_ϕ la matrice de l'opérateur L_ϕ dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$M_\phi = \left(\begin{array}{ccc|cccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ \hline \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_{-0} & a_{-1} & \dots \\ \dots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right).$$

D'après le Théorème 1.2.2, M_ϕ définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et dans ce cas $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. Par ailleurs on remarque que la matrice A n'est autre que le quart inférieur droit de la matrice M_ϕ ; autrement dit, si on note par $\mathcal{P}_+$ la projection orthogonale de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ alors $A = \mathcal{P}_+ M_\phi$. Ceci implique que si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ alors

$$\|A\| \leq \|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty. \tag{1}$$

Réciproquement, on suppose que A définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Pour tout entier positif n, on considère S_n la projection de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ définie par :

$$S_n : (t_k)_{k\in\mathbb{Z}} \longrightarrow (\dots, 0, \dots, t_{-n}, t_{-n+1}, \dots, t_0, t_1, t_2, \dots).$$

La matrice de l'opérateur $S_n M_\phi S_n$ dans la base orthonormée $(e_{-n+i})_{i\geq 0}$ de $\operatorname{Im} S_n$ résulte de la matrice M_ϕ en supprimant toutes les lignes et les colonnes d'indices $\{-(n+1), -(n+2), \dots\}$; elle n'est autre alors que la matrice A, ce qui montre que :

$$\|A\| = \|S_n M_\phi S_n\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

D'autre part il est clair, par définition même de S_n, que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers l'opérateur identité de $\ell^2(\mathbb{Z})$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci implique que $(S_n M_\phi S_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers M_ϕ et donc :

$$\|M_\phi\| \leq \liminf_n \|S_n M_\phi S_n\|. \tag{$**$}$$

Les relations $(*)$ et $(**)$ impliquent que :

$$\|M_\phi\| \leq \|A\|, \tag{2}$$

et alors, par le Théorème 1.2.2, les a_n sont les coefficients de Fourier d'une fonction ϕ bornée sur $\mathbb{T}$.

Finalement la matrice $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ si et seulement s'il existe $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que pour tout entier n, $\widehat{\phi}(n) = a_n$ et dans ce cas les égalités (1) et (2) donnent que $\|A\| = \|\phi\|_\infty$. ∎

1.4 Opérateurs de Toeplitz

Définition 1.4.1 *L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions ϕ dans $L^2(\mathbb{T})$ telles que $\widehat{\phi}(n) = 0$ pour tout $n \leq -1$.*

L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$ ayant $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ pour base orthonormée. Notons par P_+ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ dans $H^2(\mathbb{T})$ dite aussi projection de Riesz.

Définition 1.4.2 *Soit L_ϕ un opérateur de Laurent borné sur $L^2(\mathbb{T})$. On appelle opérateur de Toeplitz de symbole ϕ et on note T_ϕ l'opérateur défini par :*

$$\begin{aligned} T_\phi : H^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto P_+ L_\phi f = P_+(\phi f). \end{aligned}$$

L'application qui à toute fonction bornée ϕ associe l'opérateur de Toeplitz T_ϕ est injective. En d'autres termes, si $T_\phi = 0$ alors nécessairement $\phi = 0$. En effet, si pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$, $T_\phi f = 0$ alors en particulier $T_\phi e_n = 0$ pour tout entier $n \geq 0$, où les e_n sont les éléments de la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$. Si $\phi = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i e_i$ est le développement en série de Fourier de ϕ où $a_i = \langle \phi, e_i \rangle$ alors pour tout entier positif n le développement en série de Fourier de ϕe_n est $\phi e_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i e_{i+n}$. Dire que $T_\phi e_n = P_+(\phi e_n) = 0$ pour tout entier positif n revient à dire que les a_i sont tous nuls pour $i \geq -n$. On en déduit donc que $a_i = 0$ et ceci pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et donc ϕ est nulle.

Nous allons voir dans le prochain chapitre que cette propriété reste vraie pour les opérateurs de Toeplitz définis sur l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$.

Nous avons trouvé judicieux d'insister dans la remarque suivante sur le lien qui existe entre les opérateurs de Laurent et de Toeplitz.

Remarque 1.4.3 *i) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{K}$ un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ et P la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$. Considérons deux opérateurs S de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et T de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$. On dit que S est une dilatation de T (ou encore que T est une compression de S) si $Tf = PSf$ pour tout élément f de $\mathcal{K}$. En particulier si $\mathcal{H}$ est l'espace $L^2(\mathbb{T})$, $\mathcal{K}$ est l'espace $H^2(\mathbb{T})$, P est la projection de Riesz P_+, S est l'opérateur* *de Laurent* L_ϕ *et* T *est l'opérateur de Toeplitz* T_ϕ*, alors* L_ϕ *est une dilatation de* T_ϕ*. On a l'identité fondamentale suivante :*

$$P_+T_\phi P_+f = P_+L_\phi P_+f$$

pour toute fonction f *dans* $L^2(\mathbb{T})$*.*

ii) Pour tout couple de fonctions f *et* g *dans* $H^2(\mathbb{T})$ *on a :*

$$\langle L_\phi f, g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle.$$

En effet comme f *et* g *sont dans* $H^2(\mathbb{T})$ *et* $P_+^* = P_+$*, on a tout de suite que :*

$$\langle L_\phi f, g\rangle = \langle L_\phi f, P_+g\rangle = \langle P_+L_\phi f, g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle.$$

iii) L'opérateur T_ϕ *est positif si et seulement si* L_ϕ *est positif. En effet, comme*

$$\langle T_\phi f, f\rangle = \langle L_\phi f, f\rangle$$

pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{T})$*, il vient que :*

$$\langle T_\phi f, f\rangle \geq 0,\ \forall f \in H^2(\mathbb{T}) \iff \langle L_\phi f, f\rangle \geq 0,\ \forall f \in H^2(\mathbb{T}).$$

Maintenant il suffit de monter l'équivalence suivante

$$\langle L_\phi f, f\rangle \geq 0,\ \forall f \in H^2(\mathbb{T}) \iff L_\phi \text{ est positif.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$*, on rappelle que l'opérateur* $L_{e_1}^n$ *est unitaire. D'où pour toute fonction* $f \in H^2(\mathbb{T})$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\langle L_\phi f, f\rangle \geq 0 \iff \langle L_{e_1}^n L_\phi f, L_{e_1}^n f\rangle \geq 0.$$

Mais, d'après le Théorème 1.1.4, L_ϕ *commute avec* L_{e_1}*. Donc pour toute fonction* $f \in H^2(\mathbb{T})$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$ *on a :*

$$\langle L_\phi f, f\rangle \geq 0 \iff \langle L_{e_1}^n L_\phi f, L_{e_1}^n f\rangle \geq 0 \iff \langle L_\phi L_{e_1}^n f, L_{e_1}^n f\rangle \geq 0.$$

En particulier si $f = e_0$*, on obtient que :*

$$\langle L_\phi e_n, e_n\rangle \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Or le sous-espace engendré par les $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{T})$*, d'où* $\langle L_\phi f, f\rangle \geq 0$ *pour toute fonction* $f \in L^2(\mathbb{T})$*, ce qui est équivalent à dire que* L_ϕ *est un opérateur positif sur* $L^2(\mathbb{T})$*.*

Regardons maintenant les propriétés élémentaires de l'opérateur de Toeplitz.

Propriétés 1.4.4 *a) L'opérateur identité I de $H^2(\mathbb{T})$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole e_0 (la fonction constante qui vaut 1 sur $\mathbb{T}$) et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole 0.*

b) L'opérateur de Toeplitz est linéairement dépendant de son symbole i.e. si $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ et si ϕ est une fonction bornée alors $T_{\alpha\phi+\beta}=\alpha T_\phi+\beta I$.

c) L'adjoint d'un opérateur de Toeplitz T_ϕ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\bar{\phi}$, le conjugué de ϕ. En effet soient f et g deux fonctions dans $H^2(\mathbb{T})$. D'après le point iii) de la Remarque 1.4.3 on a

$$\langle f, T_\phi g\rangle = \langle f, L_\phi g\rangle.$$

Or l'adjoint de l'opérateur L_ϕ est $L_{\bar{\phi}}$ alors

$$\langle f, T_\phi g\rangle = \langle L_{\bar{\phi}} f, g\rangle.$$

Par le même argument on a

$$\langle f, T_\phi g\rangle = \langle T_{\bar{\phi}} f, g\rangle,$$

et ceci pour toutes fonctions f et g dans $H^2(\mathbb{T})$. Ce qui prouve bien que $T_\phi^* = T_{\bar{\phi}}$.

d) L'opérateur de Toeplitz T_ϕ est hermitien, c'est-à-dire $T_\phi^* = T_\phi$, si et seulement si $\phi=\bar{\phi}$. En d'autres termes l'opérateur de Toeplitz est hermitien si et seulement si son symbole est réel.

e) La matrice d'un opérateur de Toeplitz dans la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz. En effet, soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$ la matrice d'un opérateur de Toeplitz T_ϕ dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de $H^2(\mathbb{T})$, alors pour tout entier positif k on a :

$$a_{i+k,j+k} = \langle T_\phi e_{j+k}, e_{i+k}\rangle = \langle \phi e_{j+k}, e_{i+k}\rangle = \langle \phi e_j, e_i\rangle = \langle T_\phi e_j, e_i\rangle = a_{ij}.$$

Comme on vient de le voir dans la propriété précédente, la matrice d'un opérateur de Toeplitz, dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de $H^2(\mathbb{T})$, est une matrice de Toeplitz. Dans [26], Nikolski définit (Définition 4.1.1, p. 243) les opérateurs de Toeplitz comme étant les opérateurs bornés sur $H^2(\mathbb{T})$ dont la matrice dans la base orthonormée $(e_n)_{n\geq 0}$ est une matrice de Toeplitz, puis il montre (Théorème 4.1.4, p. 244) que tout opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ est de la forme donnée par la Définition 3.16.

Le théorème suivant [13, p. 93] montre que si la matrice d'un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz alors nécessairement cet opérateur est un opérateur de Toeplitz.

Théorème 1.4.5 *Tout opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$, dont la matrice dans la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz, est un opérateur de Toeplitz.*

Preuve : Soit T un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$ tel que

$$\langle Te_{j+1}, e_{i+1}\rangle = \langle Te_j, e_i\rangle \quad \forall i, j \geq 0.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'opérateur $T_n = L_{e_1}^{*^n} TP_+ L_{e_1}^n$ défini et borné de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$. Pour tout couple (i, j) d'entiers positifs, on a :

$$\begin{aligned} \langle T_n e_j, e_i\rangle &= \langle L_{e_1}^{*^n} TP_+ L_{e_1}^n e_j, e_i\rangle \\ &= \langle TP_+ L_{e_1}^n e_j, L_{e_1}^n e_i\rangle \\ &= \langle TP_+ e_{j+n}, e_{i+n}\rangle \\ &= \langle Te_{j+n}, e_{i+n}\rangle \\ &= \langle Te_j, e_i\rangle. \end{aligned}$$

Si i et j sont tous les deux négatifs, il existe toujours un entier positif N tel que pour tout entier $n \geq N$, les entiers $i+n$ et $j+n$ soient tous les deux positifs et donc

$$\langle T_n e_j, e_i\rangle = \langle TP_+ e_{j+n}, e_{i+n}\rangle = \langle Te_{j+n}, e_{i+n}\rangle.$$

Puisque la matrice de T est une matrice de Toeplitz, le terme à droite dans l'égalité précédente est indépendant de n. Il vient alors que pour tous i et j dans $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots\}$, la suite $(\langle T_n e_j, e_i\rangle)_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang et donc convergente. Par conséquent, si p et q sont deux polynômes trigonométriques alors la suite $(\langle T_n p, q\rangle)_{n\geq 0}$ est convergente. Comme l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $L^2(\mathbb{T})$, alors pour tout couple de fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{T})$ la suite $(\langle T_n f, g\rangle)_{n\geq 0}$ est convergente. Ceci implique que la suite $(T_n f)_{n\geq 0}$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{T})$. On note $T_\infty f$ sa limite faible.

L'opérateur T_∞ défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_\infty : L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto T_\infty f \end{aligned}$$

où $T_\infty f$ est la limite faible de $(T_n f)_{n\geq 0}$ dans $L^2(\mathbb{T})$, est un opérateur borné. En effet la convergence faible de $(T_n f)_{n\geq 0}$ vers $T_\infty f$ implique que :

$$\|T_\infty f\|_2 \leq \liminf_n \|T_n f\|_2,$$

or $\liminf_n \|T_n f\|_2 \leq \|T\| \|f\|_2$, car $\|T_n\| \leq \|T\|$.

Pour tous $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle T_\infty e_j, e_i \rangle &= \lim_{n \to +\infty} \langle T_n e_j, e_i \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle L_{e_1}^{*^n} T P_+ L_{e_1}^n e_j, e_i \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle L_{e_1}^{*^{n+1}} T P_+ L_{e_1}^{n+1} e_j, e_i \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle L_{e_1}^{*^n} T P_+ L_{e_1}^n e_{j+1}, e_{i+1} \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle T_n e_{j+1}, e_{i+1} \rangle \\
&= \langle T_\infty e_{j+1}, e_{i+1} \rangle,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la matrice de l'opérateur T_∞ dans la base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent et donc, par le Théorème 1.2.3, l'opérateur T_∞ est un opérateur de Laurent.

Pour tout couple d'entiers positifs (k, j), on a :

$$\begin{aligned}
\langle P_+ T_\infty e_j, e_k \rangle &= \langle T_\infty e_j, e_k \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle L_{e_1}^{*^n} T P_+ L_{e_1}^n e_j, e_k \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle T P_+ L_{e_1}^n e_j, L_{e_1}^n e_k \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle T P_+ e_{j+n}, e_{k+n} \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle T e_{j+n}, e_{k+n} \rangle \\
&= \langle T e_j, e_k \rangle.
\end{aligned}$$

Puisque l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $H^2(\mathbb{T})$, on déduit du calcul précédent que, pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$

$$P_+ T_\infty f = T f.$$

Grâce à la Remarque 1.4.3, on conclut que T est une compression à $H^2(\mathbb{T})$ de l'opérateur de Laurent T_∞ et donc T est un opérateur de Teoplitz.

■

La matrice d'un opérateur de Toeplitz défini sur l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ n'est pas forcément une matrice de Toeplitz, sauf s'il s'agit de l'opérateur nul ou de l'opérateur identité de $L_a^2(\mathbb{D})$. Du coup la caractérisation des opérateurs de Toeplitz donnée par le théorème précédent n'est plus valable pour les opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman.

Remarque 1.4.6 *Soit $(a_{ij})_{i,j \geq 0}$ la matrice d'un opérateur de Toeplitz T_ϕ. Comment peut-on récupérer le symbole ϕ à partir de cette matrice ? En effet* *pour tout couple d'entiers positifs (i, j), on a :*

$$a_{ij} = \langle T_\phi e_j, e_i \rangle = \langle \phi e_j, e_i \rangle = \langle \phi, e_{i-j} \rangle.$$

Ceci nous permet d'avoir les coefficients de fourier de ϕ puisque :

$$\begin{cases} \widehat{\phi}(i) & = \langle T_\phi e_0, e_i \rangle & = a_{i0} \\ \widehat{\phi}(-j) & = \langle T_\phi e_j, e_0 \rangle & = a_{0j}. \end{cases}$$

Donc le symbole ϕ est la fonction dont les coefficients de Fourier d'indice positif sont les termes de la 0-ième colonne et ceux d'indice négatif sont les termes de la 0-ième ligne. L'unicité de ϕ est assurée grâce à l'unicité des coefficients de Fourier.

Corollaire 1.4.7 *L'opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ est compact si et seulement si son symbole est nul.*

Preuve : Soit T_ϕ un opérateur de Toeplitz compact. Pout tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier $n \geq 0$ tels que $n + k \geq 0$, on a :

$$\langle T_\phi e_n, e_{n+k} \rangle = \langle \phi e_n, e_{n+k} \rangle = \langle \phi, e_k \rangle.$$

D'autre part, puisque la suite de fonctions $(e_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers 0 et comme par hypothèse T_ϕ est un opérateur compact, alors $(T_\phi e_n)_{n \geq 0}$ converge en norme $\|.\|_2$ vers 0. D'où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a :

$$\|T_\phi e_n\|_2 < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, si on prend $n \geq \sup\{N_\varepsilon, -k\}$, on voit que

$$|\widehat{\phi}(k)| = |\langle \phi, e_k \rangle| = |\langle T_\phi e_n, e_{n+k} \rangle| \leq \|T_\phi e_n\|_2 < \varepsilon,$$

d'où $\widehat{\phi}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et donc ϕ est l'application identiquement nulle.

Réciproquement, si le symbole est nul alors l'opérateur de Toeplitz est nul sur $H^2(\mathbb{T})$ et donc compact. ■

Remarque 1.4.8 *Un opérateur de Toeplitz défini sur l'espace de Bergman peut être compact sans que son symbole soit nul. En effet, nous allons voir à travers la Proposition 2.3.2, que si le symbole est une fonction à support compact sur $\mathbb{D}$ alors l'opérateur de Toeplitz associé est compact.*

La convergence faible établie dans la preuve du Théorème 1.4.5 est, en réalité, une convergence forte comme le prouve le théorème suivant.

Théorème 1.4.9 *Si ϕ est une fonction dans $L^\infty(\mathbb{T})$, alors la suite des opérateurs $(L_{e_1}^{*^n} T_\phi P_+ L_{e_1}^n)_n$ tend fortement vers L_ϕ quand n tend vers $+\infty$.*

Preuve : Par définition de T_ϕ et puisque L_{e_1} est unitaire, on a :

$$L_{e_1}^{*n} T_\phi P_+ L_{e_1}^n = L_{e_1}^{*n} P_+ L_\phi P_+ L_{e_1}^n = (L_{e_1}^{*n} P_+ L_{e_1}^n)(L_{e_1}^{*n} L_\phi L_{e_1}^n)(L_{e_1}^{*n} P_+ L_{e_1}^n).$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$:

$$i + n \geq 0$$

Dans ce cas :

$$L_{e_1}^{*n} P_+ L_{e_1}^n e_i = L_{e_1}^{*n} P_+ e_{i+n} = L_{e_1}^{*n} e_{i+n} = e_i,$$

c'est à dire que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(L_{e_1}^{*n} P_+ L_{e_1}^n e_i)_n$ tend en norme $\|.\|_2$ vers e_i. Comme le sous-espace engendré par les $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ et comme $L_{e_1}^{*n} P_+ L_{e_1}^n$ est borné pour toute n on en déduit que la suite $(L_{e_1}^{*n} P_+ L_{e_1}^n)_n$ tend fortement vers l'opérateur identité de $L^2(\mathbb{T})$.

D'autre part puisque L_ϕ est un opérateur de Laurent, il vient d'après le Théorème 1.1.4, que L_ϕ et L_{e_1} commutent. Comme L_{e_1} est unitaire, on a bien que pour tout $n \geq 0$:

$$L_{e_1}^{*n} L_\phi L_{e_1}^n = L_\phi.$$

Ces deux arguments permettent de conclure que $(L_{e_1}^{*^n} T_\phi P_+ L_{e_1}^n)_n$ tend fortement vers L_ϕ. ■

Remarque 1.4.10 *Le théorème précédent permet aussi de démontrer que*

$$\|T_\phi\| = \|L_\phi\| = \|\phi\|_\infty.$$

En effet, par définition même de l'opérateur de Toeplitz, il évident que :

$$\|T_\phi\| = \|P_+ L_\phi\| \leq \|L_\phi\|. \tag{$*$}$$

D'après le Théorème 1.4.9, on a :

$$L_{e_1}^{*^n} T_\phi P_+ L_{e_1}^n f \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_\phi f, \text{ pour toute fonction } f \in L^2(\mathbb{T}). \tag{1.3}$$

D'autre part, il est clair que :

$$\|L_{e_1}^{*^n} T_\phi P_+ L_{e_1}^n\| \leq \|T_\phi\|. \tag{1.4}$$

Les arguments (1.3) et (1.4), moyennant le théorème de Banach-Steinhaus [12, p. 17], impliquent que :

$$\|L_\phi\| \leq \liminf_n \|L_{e_1}^{n^*} T_\phi P_+ L_{e_1}^n\| \leq \|T_\phi\|. \tag{$**$}$$

Enfin $(*)$ et $(**)$ donnent $\|T_\phi\| = \|L_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Par conséquent, on redémontre que l'application $\phi \longmapsto T_\phi$ est injective.

Un opérateur V sur un espace de Hilbert H est appelé translation unilatérale (voir [25, p. 2]) s'il vérifie les conditions suivantes :

i) V est une isométrie *i.e.* $V^*V = I$ où I est l'opérateur identité.

ii) Il existe un sous-espace fermé L de H tel qu'on ait $V^nL \perp L$, pour tout entier $n \geq 1$, et $H = \bigoplus_{0}^{+\infty} V^nL$.

L'opérateur de Toeplitz de symbole e_1 est une translation unilatérale. En effet, il est clair que pour tout couple de fonctions $(f, g) \in H^2(\mathbb{T}) \times H^2(\mathbb{T})$ on a :

$$\langle T_{e_1}f, T_{e_1}g\rangle = \langle e_1 f, e_1 g\rangle = \langle f, \overline{e_1}e_1 g\rangle = \langle f, e_{-1}e_1 g\rangle = \langle f, g\rangle.$$

Pour le sous-espace L de $H^2(\mathbb{T})$, il suffit de prendre le sous-espace engendré par le vecteur e_0 de la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$.

La translation unilatérale est pour les opérateurs de Toeplitz ce que la translation bilatérale est pour les opérateurs de Laurent.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer une deuxième caractérisation des opérateurs de Toeplitz [13, p. 95] qui fait intervenir la translation unilatérale T_{e_1}. Ce résultat est analogue au Théorème 1.1.4.

Théorème 1.4.11 *Un opérateur borné T sur $H^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $T_{e_1}^*TT_{e_1} = T$.*

Preuve : Grâce au Théorème 1.4.5, on sait que T est un opérateur de Toeplitz si et seulement si pour tout couple d'entiers positifs (i, j), on a :

$$\langle Te_{j+1}, e_{i+1}\rangle = \langle Te_j, e_i\rangle.$$

Or :

$$e_{j+1} = P_+e_1e_j = P_+L_{e_1}e_j = T_{e_1}e_j.$$

D'où :

$$\langle Te_{j+1}, e_{i+1}\rangle = \langle TT_{e_1}e_j, T_{e_1}e_i\rangle = \langle T_{e_1}^*TT_{e_1}e_j, e_i\rangle.$$

Comme le sous-espace engendré par les $(e_n)_{n\geq 0}$ est dense dans $H^2(\mathbb{T})$, on a donc bien $T_{e_1}^*TT_{e_1} = T$ sur $H^2(\mathbb{T})$. ■

Remarque 1.4.12 *Il est important de signaler que l'opérateur de translation unilatérale T_{e_1} n'est pas unitaire. De là la différence entre les conditions nécessaires et suffisantes données par le Théorème 1.1.4 et le Théorème 1.4.11 à savoir :*

$$\begin{aligned} L_{e_1}T = TL_{e_1} &\iff T \textit{ est un opérateur de Laurent},\\ T_{e_1}^*TT_{e_1} = T &\iff T \textit{ est un opérateur de Toeplitz}. \end{aligned}$$

Dans $H^2(\mathbb{T})$, une fonction est dite analytique (resp. anti-analytique) si ses coefficients de Fourier d'indice négatif (resp. ses coefficients de Fourier d'indice positif) sont tous nuls. Un opérateur de Toeplitz est dit analytique (resp. anti-analytique) si son symbole est analytique (resp. anti-analytique).

Théorème 1.4.13 *Soit T_ϕ un opérateur de Toeplitz borné sur $H^2(\mathbb{T})$. T_ϕ est analytique (resp. anti-analytique) si et seulement s'il commute avec la translation unilatérale T_{e_1} (resp. avec $T_{e_1}^*$).*

Preuve : Si T_ϕ est un opérateur de Toeplitz analytique, c'est-à-dire $\phi \in H^\infty(\mathbb{T})$ où $H^\infty(\mathbb{T})$ est l'ensemble des fonctions analytiques qui sont bornées sur $\mathbb{T}$, alors pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$, on a

$$T_\phi T_{e_1} f = T_\phi P_+(e_1 f) = P_+(\phi e_1 f) = \phi e_1 f = e_1 \phi f = T_{e_1} T_\phi f.$$

Donc $T_\phi T_{e_1} = T_{e_1} T_\phi$ sur $H^2(\mathbb{T})$.

Réciproquement, soit T_ϕ un opérateur de Toeplitz borné qui commute avec T_{e_1}. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\widehat{\phi}(-n) = \langle \phi, e_{-n} \rangle = \langle \phi e_n, e_0 \rangle = \langle T_\phi e_n, e_0 \rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(-n) = & \quad \langle T_\phi e_n, e_0 \rangle \\ = & \quad \langle T_\phi T_{e_1}^n e_0, e_0 \rangle \\ = & \quad \langle T_{e_1}^n T_\phi e_0, e_0 \rangle \\ = & \quad \langle T_\phi e_0, {T_{e_1}^*}^n e_0 \rangle. \end{aligned}$$

Or

$$T_{e_1}^* e_0 = T_{e_{-1}} e_0 = P_+ L_{e_{-1}} e_0 = P_+ e_{-1} = 0,$$

car pour tout entier $n \geq 0$, $\langle e_{-1}, e_n \rangle = 0$. Ceci prouve que les coefficients de Fourier d'indice négatif de ϕ sont tous nuls et donc T_ϕ est bien un opérateur de Toeplitz analytique.

Si ϕ est anti-analytique, c'est-à-dire si $\widehat{\phi}(n) = 0$ pour tout entier positif n, alors $\overline{\phi}$ est analytique. Il vient que si T_ϕ est anti-analytique alors son adjoint $T_\phi^* = T_{\overline{\phi}}$ est analytique et donc, moyennant ce qui précéde, $T_\phi^* T_{e_1} = T_{e_1} T_\phi^*$. Par passage à l'adjoint, on obtient que $T_{e_1}^* T_\phi = T_\phi T_{e_1}^*$. ■

Remarque 1.4.14 *La matrice de Toeplitz d'un opérateur de Toeplitz analytique (resp. anti-analytique) dans la base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).*

1.5 Produits d'opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy

Il est clair que si ϕ est une fonction dans $H^\infty(\mathbb{T})$, alors l'opérateur de Toeplitz T_ϕ n'est autre que l'opérateur de multiplication par ϕ sur $H^2(\mathbb{T})$. Du coup, si $\phi \in L^\infty(\mathbb{D})$ et $\psi \in H^\infty(\mathbb{T})$ alors pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$, on a

$$T_\phi T_\psi f = T_\phi(\psi f) = P_+(\phi\psi f) = T_{\phi\psi} f.$$

Donc le produit $T_\phi T_\psi$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\phi\psi$. Maintenant si ϕ est anti-analytique *i.e.* $\overline{\phi}$ est analytique et si ψ est bornée alors pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{T})$, on a

$$\big(T_\phi T_\psi\big)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\phi}} = T_{\overline{\phi\psi}} = \big(T_{\phi\psi}\big)^*.$$

Donc $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$.

En resumé, si ϕ est anti-analytique, bornée ou si ψ est analytique alors le produit $T_\phi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz de symbole $\phi\psi$. On appelera *le cas trivial* le fait de se retrouver dans l'une ou l'autre des deux situations précédentes.

La question est donc de savoir quand est-ce que le produit de deux opérateurs de Toeplitz est un opérateur de Toeplitz ? En effet, l'ensemble des opérateurs de Toeplitz n'est pas du tout stable par multiplication. En d'autres termes, si T_ϕ et T_ψ sont deux opérateurs de Toeplitz bornés alors le produit $T_\phi T_\psi$ n'est pas en général un opérateur de Toeplitz.

Le théorème suivant dû à Brown et Halmos [13, p. 96], donne une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ soit un opérateur de Toeplitz et montre que cela n'arrive que dans le cas trivial.

Théorème 1.5.1 *Soit ϕ et ψ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$. Le produit $T_\phi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si ϕ est anti-analytique ou si ψ est analytique. Si cette condition est satisfaite alors $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$.*

Preuve : Soient $(a_{i-j})_{i,j\geq 0}$, $(b_{i-j})_{i,j\geq 0}$ et $(c_{ij})_{i,j\geq 0}$ respectivement les matrices de T_ϕ, T_ψ et $T_\phi T_\psi$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les a_n sont les coefficients de Fourier de ϕ et les b_n sont ceux de ψ. Pour tout couple (i, j) d'entiers positifs, on a

$$c_{ij} = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} a_{i-k} b_{k-j} \text{ et } c_{i+1,j+1} = a_{i+1} b_{-j-1} + \sum_{k\geq 0}^{+\infty} a_{i-k} b_{k-j},$$

c'est-à-dire que

$$c_{i+1,j+1} = c_{ij} + a_{i+1}b_{-j-1}.$$

Il vient que pour tous entiers positifs i et j

$$\text{si} \quad c_{i+1,j+1} = c_{ij} \quad \text{alors} \quad a_{i+1}b_{-j-1} = 0.$$

Si la matrice $(c_{ij})_{i,j\geq 0}$ est une matrice de Toeplitz, et donc d'après Théorème 1.4.5 le produit $T_\phi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz, alors $a_{i+1} = 0$ pour tout entier positif i ou $b_{-j-1} = 0$ pour tout entier positif j, ce qui est équivalent à dire que $\widehat{\phi}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$ *i.e.* ϕ est anti-analytique, ou $\widehat{\psi}(n) = 0$ pour tout entier $n \leq -1$ *i.e.* ψ est analytique.

Réciproquement si ψ est analytique alors T_ψ est l'opérateur de multiplication par ψ et donc pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$:

$$T_\phi T_\psi f = T_\phi(\psi f) = P_+(\phi\psi f) = T_{\phi\psi} f.$$

Si ϕ est anti-analytique alors son adjoint $\overline{\phi}$ est analytique et alors :

$$\big(T_\phi T_\psi\big)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\phi}} = T_{\overline{\psi}\overline{\phi}} = \big(T_{\phi\psi}\big)^*,$$

et par un deuxième passage à l'adjoint, on obtient que $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$. ∎

Le corollaire suivant montre clairement que l'ensemble des opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ n'a pas de diviseurs de zéro.

Corollaire 1.5.2 *Le produit de deux opérateurs de Toeplitz est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*

Preuve : Soit ϕ et ψ deux fonctions bornées telles que $T_\phi T_\psi = 0$. Comme l'opérateur nul est un opérateur de Toeplitz alors, d'après le théorème précédent, ou ϕ est anti-analytique ou ψ est analytique ; de plus $\phi\psi = 0$. Si ψ était analytique et non identiquement nulle (donc $\psi \in H^\infty(\mathbb{T})$) alors l'ensemble des zéros de ψ serait de mesure nulle et dans ce cas $\phi\psi = 0$ impliquerait que la fonction ϕ serait nulle presque partout sur $\mathbb{T}$ et donc $T_\phi = 0$. ∎

Remarque 1.5.3 *Cette question de diviseurs de zéro, pour l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman, est encore une question ouverte. Dans le Théorème 3.2.24 je présente le dernier résultat à ma connaissance qui traite de cette question.*

Corollaire 1.5.4 *Si T_ϕ est un opérateur de Toeplitz inversible sur $H^2(\mathbb{T})$ alors son inverse est un opérateur de Toeplitz si et seulement si ϕ est analytique ou si ϕ est anti-analytique.*

Preuve : Notons par T_ϕ^{-1} l'inverse de l'opérateur T_ϕ. Si T_ϕ^{-1} est un opérateur de Toeplitz, *i.e.* s'il existe une fonction bornée ψ telle que $T_\phi^{-1} = T_\psi$, alors :

$$T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi = I = T_{e_0}.$$

D'où d'après le Théorème 1.5.1

$$\begin{cases} \phi \text{ est anti-analytique ou } \psi \text{ est analytique} & (*) \\ \text{et} & \\ \phi \text{ est analytique ou } \psi \text{ est anti-analytique.} & (**) \end{cases}$$

Si ϕ n'est pas anti-analytique alors, d'après $(**)$, ψ est analytique et comme ψ est supposée non constante alors forcément elle n'est pas anti-analytique et donc par $(*)$, ϕ est analytique.

Réciproquement, si ϕ est analytique alors, d'après le Théorème 1.4.13, T_ϕ commute avec T_{e_1} et on a alors

$$T_\phi^{-1} T_\phi T_{e_1} = T_\phi^{-1} T_{e_1} T_\phi.$$

En composant à droite par T_ϕ^{-1} dans l'équation précédente, on obtient

$$T_{e_1} T_\phi^{-1} = T_\phi^{-1} T_{e_1}.$$

Ceci prouve bien que T_ϕ^{-1} est un opérateur de Toeplitz analytique.

Si ϕ est anti-analytique alors $\overline{\phi}$ est analytique et d'après ce qui précéde on a

$$T_{\overline{\phi}}^{-1} T_{e_1} = T_{e_1} T_{\overline{\phi}}^{-1}.$$

Par passage à l'adjoint dans cette égalité, on a bien que

$$T_{e_1}^* T_\phi^{-1} = T_\phi^{-1} T_{e_1}^*.$$

Donc, grâce au Théorème 1.4.13, T_ϕ^{-1} est un opérateur de Toeplitz anti-analytique. ■

Il découle de ce corollaire que les seules matrices de Toeplitz inversibles sont les matrices triangulaires.

Corollaire 1.5.5 *Un opérateur de Toeplitz T_ϕ est une isométrie si et seulement si ϕ est analytique et $|\phi|$ est la fonction constante e_0.*

Preuve : Si T_ϕ est une isométrie alors $T_\phi^* T_\phi = T_{\overline{\phi}} T_\phi = I$. D'où d'après le Théorème 1.5.1, ϕ est analytique ou $\overline{\phi}$ est anti-analytique (i.e ϕ est analytique) et $|\phi|^2 = \overline{\phi}\phi = e_0$ car l'opérateur I n'est autre que T_{e_0}.

Réciproquement si ϕ est analytique et $\overline{\phi}\phi = e_0$, alors

$$T_\phi^* T_\phi = T_{\overline{\phi}} T_\phi = T_{\overline{\phi}\phi} = T_{e_0} = I.$$

Donc T_ϕ est une isométrie. ∎

Corollaire 1.5.6 *Les seuls opérateurs de Toeplitz unitaires sont les opérateurs de multiplication par un scalaire de module 1.*

Preuve : Si T_ϕ est un opérateur de Toeplitz unitaire alors T_ϕ et T_ϕ^* sont tous les deux des isométries. D'où, d'après le corollaire précédent, ϕ est analytique, $\overline{\phi}$ est analytique et $|\phi|$ est la fonction constante e_0. Donc ϕ est constante et $|\phi| = 1$. ∎

Corollaire 1.5.7 *Les seuls opérateurs de Toeplitz idempotents sont l'opérateur nul et l'opérateur identité.*

Preuve : Un opérateur de Toeplitz T_ϕ est idempotent si $T_\phi = \big(T_\phi\big)^2$. Dans ce cas $T_\phi\big(I - T_\phi\big) = 0$. Il vient donc d'après le Corollaire 1.5.2 que, T_ϕ est ou bien est nul, ou bien égal à I. ∎

Ce corollaire permet de redémontrer que le produit $T_{e_1}T_{e_1}^*$ n'est pas un opérateur de Toeplitz. En effet si $T_{e_1}T_{e_1}^*$ était un opérateur de Toeplitz et puisque $T_{e_1}T_{e_1}^*T_{e_1}T_{e_1}^* = T_{e_1}T_{e_1}^*$, il serait alors un Toeplitz idempotent. Donc ou $T_{e_1}T_{e_1}^* = I$, ce qui est absurde car il est facile de voir par exemple que $T_{e_1}T_{e_1}^*e_0 = 0$; ou $T_{e_1}T_{e_1}^* = 0$, ce qui est évidemment faux puisque ni T_{e_1} ni son adjoint n'est nul.

1.6 Commutativité des opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$

Nous nous intéressons maintenant à la question de la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$. Si ϕ et ψ sont deux symboles analytiques bornés alors T_ϕ et T_ψ sont deux opérateurs de multiplication sur $H^2(\mathbb{T})$ respectivement par ϕ et ψ et donc ils commutent. Par ailleurs si ϕ et ψ sont tous les deux anti-analytiques alors

$$\big(T_\phi T_\psi\big)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\phi}} = T_{\overline{\phi}} T_{\overline{\psi}} = \big(T_\psi T_\phi\big)^*$$

et donc $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$. Comme dans le cas du produit des deux opérateurs de Toeplitz, on appelera, ces deux situations précédentes, le *cas trivial.*

Considérons maintenant l'opérateur de translation unilatérale T_{e_1} et son adjoint $T_{e_1}^*$. Comme la translation unilatérale est une isométrie on a $T_{e_1}^* T_{e_1} = I$. Or $T_{e_1}^* T_{e_1} T_{e_1}^* T_{e_1} = I \neq T_{e_1} T_{e_1}^*$. D'où, d'après le Théorème 1.4.11, $T_{e_1} T_{e_1}^*$ n'est pas un opérateur de Toeplitz et donc $T_{e_1}^* T_{e_1} \neq T_{e_1} T_{e_1}^*$.

À travers cet exemple, il est clair que le produit de deux opérateurs de Toeplitz n'est pas toujours commutatif. Nous allons voir quelques lignes plus loin, grâce au théorème suivant de Brown et Halmos [13], que cela n'est possible que rarement.

Théorème 1.6.1 *Deux opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ commutent si et seulement s'ils sont tous les deux analytiques, ou s'ils sont tous les deux anti-analytiques ou si l'un est une fonction affine de l'autre.*

Preuve : Soit T_ϕ et T_ψ deux opérateurs de Toeplitz bornés tels que

$$T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi.$$

Notons par $(a_{i-j})_{i,j\geq 0}$, $(b_{i-j})_{i,j\geq 0}$, $(c_{ij})_{i,j\geq 0}$ et $(d_{ij})_{i,j\geq 0}$, respectivement les matrices de T_ϕ, T_ψ, $T_\phi T_\psi$ et $T_\psi T_\phi$. Pour tous entiers positifs i et j, on a

$$\begin{cases} c_{i+1,j+1} = a_{i+1} b_{-j-1} + c_{ij} \\ \text{et} \\ d_{i+1,j+1} = a_{-j-1} b_{i+1} + d_{ij} \end{cases}$$

Comme T_ϕ et T_ψ commutent alors nécessairement $c_{ij} = d_{ij}$. Donc

$$a_{i+1} b_{-j-1} = a_{-j-1} b_{i+1} \ \forall i, j \geq 0. \tag{$*$}$$

Il suffit maintenant de montrer que si l'égalité $(*)$ est vraie alors nous sommes forcément dans l'une des trois situations suivantes :

$$\begin{cases} (1)\ \phi \text{ et } \psi \text{ sont tous les deux analytiques.} \\ (2)\ \phi \text{ et } \psi \text{ sont tous les deux anti-analytiques.} \\ (3) \text{ Il existe deux constantes } \alpha \text{ et } \beta \text{ dans } \mathbb{C} \text{ telles que } T_\phi = \alpha T_\psi + \beta T_{e_0}. \end{cases}$$

Supposons que l'égalité $(*)$ soit vraie et que les deux situations (1) et (2) soient fausses. Alors, ou ϕ est égale à une constante c auquel cas $\phi = 0.\psi + c$ et nous sommes donc dans la situation (3), ou il existe un $i_0 \geq 0$ et $j_0 \geq 0$ tels que $a_{i_0+1} \neq 0$ et $a_{-j_0-1} \neq 0$. Si c'est le cas alors, en posant $\lambda = \frac{b_{i_0+1}}{a_{i_0+1}}$, on obtient à partir de l'égalité $(*)$ que :

$$\begin{cases} b_{i+1} = \lambda a_{i+1} & \forall i \geq 0, \\ \text{et} & \\ b_{-j-1} = \lambda a_{-j-1} & \forall j \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi, les matrices des deux opérateurs de Toeplitz λT_ϕ et T_ψ différent seulement par leurs diagonales principales (la première a λa_0 sur sa diagonale principale alors que la seconde a b_0 sur sa diagonale principale). Donc

$$T_\psi - b_0 I = \lambda\big(T_\phi - a_0 I\big) \ \textit{i.e.}\ T_\psi = \lambda T_\phi + (b_0 - \lambda a_0)I.$$

Réciproquement si ϕ et ψ sont tous les deux analytiques (resp. anti-analytiques) alors les deux opérateurs T_ϕ et T_ψ (resp. leurs adjoints $T_{\overline{\phi}}$ et $T_{\overline{\psi}}$) sont les opérateurs de multiplication respectivement par ϕ et ψ (resp. par $\overline{\phi}$ et $\overline{\psi}$) et donc commutent (resp. leurs adjoints commutent et donc eux aussi commutent).

S'il existe deux nombres complexes α et β tels que $\phi = \alpha\psi + \beta$ alors grâce à la linéarité de l'opérateur de Toeplitz par rapport à son symbole et parce que T_ψ commute avec lui-même et avec l'identité, on a bien que T_ϕ et T_ψ commutent. ■

Corollaire 1.6.2 *Les seuls opérateurs de Toeplitz normaux sont les combinaisons lineaires finies d'opérateurs de Toeplitz hermitiens.*

Preuve : Si T_φ un opérateur de Toeplitz normal i.e $T_{\overline{\phi}}T_\phi = T_\phi T_{\overline{\phi}}$ alors d'après le théorème précédent, deux possibilités se présentent :

$$\begin{cases} \phi \text{ est à la fois analytique et anti-analytique} \\ \text{ou} \\ T_\phi \text{ est une fonction affine de } T_{\overline{\phi}} \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \phi \text{ est constante sur } \mathbb{T} \\ \text{ou} \\ T_\phi \text{ est une fonction affine de } T_{\overline{\phi}} \end{cases}$$

Si ϕ est égale à une constante c sur $\mathbb{T}$ alors $T_\phi = cI$ et l'opérateur identité I est hermitien.

S'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$T_\phi = \alpha T_{\overline{\phi}} + \beta I,$$

alors , par injectivité de l'application $\phi \longmapsto T_\phi$, on a

$$\phi = \alpha\overline{\phi} + \beta.$$

En décomposant ϕ en partie réelle et partie imaginaire, on obtient que

$$\Re\phi + i\Im\phi = \alpha(\Re\phi - i\Im\phi) + \beta.$$

Donc
$$(1+\alpha)i\Im\phi = (\alpha-1)\Re\phi + \beta.$$
Si $\alpha+1 \neq 0$, alors
$$i\Im\phi = \Big(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\Big)\Re\phi + \frac{\beta}{\alpha+1},$$
ce qui implique que
$$\phi = \Big(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\Big)\Re\phi + \frac{\beta}{\alpha+1}$$
et donc
$$T_\phi = \Big(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\Big)T_{\Re\phi} + \frac{\beta}{\alpha+1}I.$$
Or $T_{\Re\phi}$ est hermitien car $\Re\phi$ est une fonction réelle. Maintenant si $\alpha=-1$ alors
$$\Re\phi = \frac{\beta}{2}$$
et donc
$$T_\phi = iT_{\Im\phi} + \frac{3\beta}{2}I,$$
où $T_{\Im\phi}$ est hermitien. $\blacksquare$

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman

Nous commençons ce chapitre par rappeler la topologie de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'espace vectoriel des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Dire que la suite f_n converge vers f signifie que, pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$, et tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, si $n \geq N$,

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \qquad (z \in \mathcal{K}).$$

Nous allons voir que l'espace vectoriel topologique $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est métrisable. Soit $\mathcal{K}_n$ une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{D}$, c'est-à-dire que $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1}$, et que tout compact de $\mathbb{D}$ est contenu dans l'un des $\mathcal{K}_n$. On pose, pour f et g dans $\mathcal{A}(\mathbb{D})$,

$$M_N(F) = \sup_{z \in \mathcal{K}_n} |f(z)|,\ \delta(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf(M_n(f), 1),\ d(f,g) = \delta(f-g).$$

Alors d est une distance sur $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ et la topologie définie par cette distance est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Nous rappelons le théorème suivant de Weierstrass.

Théorème 2.0.3 *Si f_k est une suite de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ qui converge uniformément sur tout compact, sa limite f est analytique. De plus, $\frac{\partial f_k}{\partial z}$ converge vers $\frac{\partial f}{\partial z}$ uniformément sur tout compact.*

Ce théorème a les conséquences suivantes :

- $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est fermé dans $\mathcal{C}(\mathbb{D})$, espace des fonctions continues muni de la convergence uniforme sur les compacts.

- $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est complet, c'est donc un espace de Fréchet. Rappelons qu'un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique qui est localement convexe, métrisable et complet.

2.1 Noyaux reproduisants

Un espace hilbertien de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ est un sous-espace $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ qui est muni d'une structure de hilbert telle que l'injection

$$\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{D})$$

soit continue, ce qui se traduit par la propriété suivante : pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{D}$ il existe une constante $c = c(\mathcal{K})$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{H},\ \forall z \in \mathcal{K},\ |f(z)| \leq c\|f\|.$$

Un tel espace possède un noyau reproduisant. L'espace de Bergman en est un exemple de base.

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Pour $z \in \mathbb{D}$, l'application

$$f \longmapsto f(z), \quad \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C},$$

est continue. Donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction $K_z \in \mathcal{H}$ telle que

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle \quad (f \in \mathcal{H}).$$

Le noyau K, $K(w,z) = K_z(w)$, est appelé le noyau reproduisant de $\mathcal{H}$.

Voici quelques propriétés classiques du noyau (voir [6] et [10]). Le noyau reproduisant K est hermitien et de type positif. En particulier $K_z(z) \geq 0$ pour tout z, et $K_z(z) = 0$ si et seulement si $f(z) = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$.

Rappelons qu'un noyau K est dit *hermitien* si

$$\overline{K_z(w)} = K_w(z),$$

et *de type positif* si

$$\forall z_1, \cdots, z_N \in \mathbb{D},\ \forall \alpha_1, \cdots, \alpha_N \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j,k=1}^{N} K_{z_j}(z_k)\alpha_j\bar{\alpha}_k \geq 0.$$

En effet, par définition même du noyau, il résulte que

$$\begin{array}{rcl} K_z(w) & = & \langle K_z, K_w \rangle = \overline{\langle K_w, K_z \rangle} = \overline{K_w(z)}, \\ K_z(z) & = & \|K_z\|^2 \geq 0, \end{array}$$

et aussi que

$$\sum_{j,k=1}^{N} K_{z_j}(z_k)\alpha_j\bar{\alpha}_k = \sum_{j,k=1}^{N} \langle K_{z_j}, K_{z_k}\rangle \alpha_j\bar{\alpha}_k = \Big\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K_{z_j} \Big\|^2 \geq 0.$$

Le noyau reproduisant $K_z(w)$ est analytique en w, anti-analytique en z. Du théorème de Hartogs [5, p. 413] on déduit que $K_{\bar{z}}(w)$ est analytique sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. En particulier le noyau reproduisant est continu sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Proposition 2.1.1 *Pour toute base hilbertienne e_n de $\mathcal{H}$,*

$$K_z(w) = \sum_{n\geq 0} e_n(w)\overline{e_n(z)},$$

la convergence étant absolue et uniforme sur tout compact de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

En particulier le noyau reproduisant est indépendant du choix de la base hilbertienne.
Preuve : pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathcal{K}} \Big\{ \Big[\sum_{n=1}^{+\infty} |e_n(z)|^2 \Big]^{\frac{1}{2}} \Big\} &= \sup_{z\in\mathcal{K}} \Big\{ \Big| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n(z) \Big| : \Big[\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \Big]^{\frac{1}{2}} = 1 \Big\} \\ &= \sup_{z\in\mathcal{K}} \{ |f(z)| : \|f\| = 1 \} \leq c_{\mathcal{K}}.\end{aligned}$$

Il vient que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$ converge uniformément si z et w sont dans des compacts de $\mathbb{D}$. Maintenant si $f \in \mathcal{H}$, alors $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, e_n\rangle e_n$. La série converge dans $\mathcal{H}$, donc converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$ (converge pour la topologie de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$). En particulier, si $z \in \mathbb{D}$, alors

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, e_n\rangle e_n(z) = \langle f, \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n \rangle = \langle f(.), \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n(.) \rangle.$$

Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n(.) \in \mathcal{H}$, alors l'unicité de la représentation de Riesz montre que

$$K_z(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n(w).$$

De l'inégalité

$$\Big(\sum_{n=p}^{q}|e_n(z)||e_n(w)|\Big)^2 \leq \sum_{n=p}^{q}|e_n(z)|^2\sum_{n=p}^{q}|e_n(w)|^2$$

il résulte que la convergence est absolue et uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$. ■

2.2 L'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$

On note par $dA(z) = rdr\frac{d\theta}{\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque $\mathbb{D}$.

Soit $L^2(\mathbb{D}, dA)$ l'espace des fonctions f definies sur le disque $\mathbb{D}$ telles que

$$\|f\|_2 := \int_{\mathbb{D}}|f|^2dA < \infty.$$

$L^2(\mathbb{D}, dA)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel donné par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f\bar{g}dA.$$

On définit l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ comme étant l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure dA,

$$L_a^2(\mathbb{D}) = \mathcal{A}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D}, dA).$$

Dans la suite nous allons montrer que l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{D}, dA)$.

Lemme 2.2.1 *Soit $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{D}$. Pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$, l'application restriction définie par :*

$$\begin{array}{ccc} (L_a^2(\mathbb{D}), \|.\|_2) & \longrightarrow & (\mathcal{C}(\mathbb{D}), \sup\limits_{z\in\mathcal{K}}|.|) \\ f & \longmapsto & f_{/\mathcal{K}} \end{array}$$

est continue.

Preuve : Soit $\mathcal{K}$ un compact de $\mathbb{D}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}dist(\mathcal{K}, \partial\mathbb{D})$ et z_0 quelconque dans $\mathcal{K}$. Il est clair que

$$\overline{B(z_0, \varepsilon)} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{D}$$

Soit $f \in L^2_a(\mathbb{D})$. Comme la fonction f est analytique dans $\mathbb{D}$ alors elle est developpable en série entière dans $\mathbb{D}$. Soit $R > \varepsilon$ tel que $D(z_0, R) \subset \mathbb{D}$, alors il existe une unique suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes telle que pour tout $z \in D(z_o, R)$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ et la convergence de cette serie vers $f(z)$ est uniforme sur $\overline{B(z_0, \varepsilon)}$. D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) &\geq \int_{\overline{B(z_0,\varepsilon)}} |f(z)|^2 dA(z),\\ &= \int_{\overline{B(z_0,\varepsilon)}} \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 |z-z_0|^{2n} dA(z).\end{aligned}$$

Grâce à la convergence uniforme de la série entière vers $f(z)$, on peut intervertir les signes $\sum$ et $\int$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\, dA(z) &\geq \sum_{n\geq 0} \Big(\int_{\overline{B(z_0,\varepsilon)}} |a_n|^2 |z-z_0|^{2n}\, dA(z)\Big),\\ &\geq |a_0|^2 mes(\overline{B(z_0,\varepsilon)}),\\ &= |f(z_0)|^2 mes(\overline{B(z_0,\varepsilon)}),\end{aligned}$$

où $mes(\overline{B(z_0,\varepsilon)})$ est la mesure de la boule fermée $\overline{B(z_0,\varepsilon)}$. Puisque le z_0 est choisi arbitrairement dans $\mathcal{K}$, on obtient :

$$\sup_{z\in\mathcal{K}} |f(z)| \sup_{z\in\mathcal{K}} [mes(B(z,\varepsilon))]^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_2.$$

■

Remarque 2.2.2 *Une autre preuve du lemme précédent est la suivante : Pour z quelconque dans $\mathbb{D}$, soit $r_z = 1 - |z|$; alors la propriété de la valeur moyenne appliquée à la fontion $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ permet d'écrire :*

$$f(z) = \frac{1}{r_z^2} \int_{|z-w|<r_z} f(w) dA(w),$$

d'où

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r_z^2} \int_{|z-w|<r_z} |f(w)| dA(w) \leq \frac{\|f\|_2}{r_z^2} = \frac{\|f\|_2}{(1-|z|)^2}.$$

Il vient que pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}\sup\{|f(z)| : z \in \mathcal{K}\} &\leq \sup\{\frac{1}{(1-|z|)^2} : z\in\mathcal{K}\}\|f\|_2\\ &\leq \frac{1}{[dist(\mathcal{K}, \partial\mathbb{D})]^2}\|f\|_2,\end{aligned}$$

et ceci grâce au fait que le compact $\mathcal{K}$ *est inclus dans le disque fermé de rayon* $1-dist(\mathcal{K}, \partial\mathbb{D})$. *Donc pour tout compact* $\mathcal{K}$ *de* $\mathbb{D}$ *il existe une constante* $c_{\mathcal{K}} = \dfrac{1}{[dist(\mathcal{K}, \partial\mathbb{D})]^2}$, *dépendant seulement de* $\mathcal{K}$, *telle que*

$$\sup\{|f(z)| : z \in \mathcal{K}\} \leq c_{\mathcal{K}}\|f\|_2.$$

Une conséquence du Lemme 2.2.1 est que l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert (voir [20, p. 3] et [31, p. 47]).

Proposition 2.2.3 $L^2_a(\mathbb{D})$ *est un sous-espace fermé de* $L^2(\mathbb{D}, dA)$.

Preuve : Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy, pour la norme $\|.\|_2$, dans $L^2_a(\mathbb{D})$. Par le lemme précédent, la suite $(f_n)_n$ est aussi de Cauchy pour la topologie de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ et alors pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$, on a

$$\sup_{z\in\mathcal{K}} |f_n(z) - f_m(z)| \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0.$$

Or $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est complet pour la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$. Il existe alors $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que

$$\sup_{z\in\mathcal{K}} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ , } \forall\mathcal{K} \text{ compact de } \mathbb{D}. \tag{1}$$

D'autre part $L^2(\mathbb{D}, dA)$ est un espace d'Hilbert, il existe donc une fonction $g \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ telle que

$$\|f_n - g\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ .}$$

Quitte à extraire une sous-suite de $(f_n)_n$ qu'on notera encore $(f_n)_n$, on a

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g \text{ } p.p. \tag{2}$$

(1) et (2) donnent que $f = g$ presque partout et donc $f \in L^2_a(\mathbb{D})$. Ce qui prouve que $L^2_a(\mathbb{D})$ est complet et donc sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{D}, dA)$. ∎

Du Lemme 2.2.1, on déduit en particulier que l'application évaluation de $L^2_a(\mathbb{D})$ dans $\mathbb{C}$, qui à toute fonction f lui associe sa valeur au point z, est bornée. D'où, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction $K_z \in L^2_a(\mathbb{D})$ telle que pour toute fonction $f \in L^2_a(\mathbb{D})$

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)}dA(w).$$

Le noyau reproduisant K de l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ est appelé le noyau de Bergman de $\mathbb{D}$.

On peut montrer aussi (voir [7, p. 3]) que pour tout $1 \leq p < \infty$ les espaces de Bergman $L^p_a(\mathbb{D})$ admettent un noyau reproduisant.

Nous allons utiliser la Proposition 2.1.1 pour donner explicitement l'expression du noyau reproduisant de $L^2_a(\mathbb{D})$. En effet les fonctions

$$e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

constituent une base hilbertienne de $L^2_a(\mathbb{D})$ et alors

$$\begin{aligned} K_z(w) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{z}^n w^n \\ &= \frac{1}{(1-\bar{z}w)^2}. \end{aligned}$$

Rappellons que l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ et donc la projection othogonale, dite aussi projection de Bergman, de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ dans $L^2_a(\mathbb{D})$ est bien définie. Notons par P cette projection.

Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ et tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$Pf(z) = \langle Pf, K_z \rangle = \langle f, PK_z \rangle = \langle f, K_z \rangle,$$

donc P est un opérateur intégrale donné par

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)}\, dA(w). \tag{2.1}$$

Initialement la projection de Bergman P est définie sur $L^2(\mathbb{D}, dA)$, mais l'intégrale (2.1) a un sens si $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$, ce qui étend le domaine de P à $L^1(\mathbb{D}, dA)$. En particulier on peut appliquer P à toute les fonctions dans $L^p(\mathbb{D}, dA)$ pour $1 \leq p \leq \infty$. Néanmoins la projection P est bornée de $L^p(\mathbb{D}, dA)$ dans l'espace de Bergman $L^p_a(\mathbb{D})$ seulement pour $1 < p < \infty$ (voir par exemple [7, p. 5] et [31, p. 54]).

2.3 Opérateurs de Toeplitz sur $L^2_a(\mathbb{D})$

Étant donné une fonction ϕ bornée sur le disque $\mathbb{D}$, on définit l'opérateur de Toeplitz T_ϕ sur $L^2_a(\mathbb{D})$ par

$$\begin{aligned} T_\phi : L^2_a(\mathbb{D}) &\longrightarrow L^2_a(\mathbb{D}) \\ f &\longmapsto T_\phi f = P(\phi f). \end{aligned}$$

La fonction ϕ est dite symbole de l'opérateur T_ϕ.

Si $f \in L_a^2(\mathbb{D})$ alors $Pf = f$ et donc $\|Pf\|_2 = \|f\|_2$ i.e. la norme de la projection P est égale à 1. D'où $\|T_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.

En utilisant la représentation intégrale de P, nous pouvons voir T_ϕ comme un opérateur intégrale donné par

$$T_\phi f(z) = P(\phi f)(z) = \langle \phi f, K_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w) f(w)}{(1 - z\bar{w})^2} \, dA(w), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Il découle de la définition de l'opérateur de Toeplitz sur $L_a^2(\mathbb{D})$ ces propriétés immédiates.

Proposition 2.3.1 *i) L'opérateur de Toeplitz de symbole la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{D}$ est l'identité de $L_a^2(\mathbb{D})$.*

ii) L'opérateur de Toeplitz sur $L_a^2(\mathbb{D})$ est linéairement dépendant de son symbole.

iii) L'adjoint T_ϕ^* de T_ϕ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\bar{\phi}$ le conjugué de ϕ.

iv) T_ϕ est nul si et seulement si son symbole ϕ est nul.

Preuve : i), ii) et iii) découlent immédiatement de la définition de l'opérateur de Toeplitz.

Pour iv), si T_ϕ est nul alors pour tous m et n dans $\mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \langle T_\phi z^n, z^m \rangle &= \langle P(\phi z^n), z^m \rangle \\ &= \langle \phi z^n, z^m \rangle \\ &= \langle \phi, z^m \bar{z}^n \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où ϕ est orthogonale à l'ensemble des polynômes en $(z, \bar{z})$. Or cet ensemble est dense dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ et donc ϕ est nulle. ■

Malgré ces points en commun entre l'opérateur de Toeplitz défini sur l'espace de Bergman et celui défini au chapitre 1 sur l'espace de Hardy, ces deux opérateurs différent sur plusieurs autres points comme la continuité et la compacité.

Dans cette définition de l'opérateur de Toeplitz sur $L_a^2(\mathbb{D})$ nous avons supposé que le symbole ϕ était borné, ce qui nous a assuré que l'opérateur T_ϕ est lui aussi borné. En réalité contrairement à l'opérateur de Toeplitz défini sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ (il est borné si et seulement son symbole est borné, et il est compact si et seulement si son symbole est nul), l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ peut être borné sans que son symbole ne soit borné.

Soit $\phi \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ et considérons l'opérateur $\widetilde{T}_\phi$, appelé aussi opérateur de Toeplitz, défini sur $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$, l'ensemble des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{D}$, par

$$\widetilde{T}_\phi f(z) = \langle \phi f, K_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w) f(w)}{(1 - z\bar{w})^2} \, dA(w) \quad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{2.2}$$

Puisque la projection de Bergman P peut s'étendre à $L^1(\mathbb{D}, dA)$, il vient que pour toute fonction $f \in A^\infty(\mathbb{D})$, l'écriture $\widetilde{T}_\phi f(z) = P(\phi f)$ à un sens. Comme $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ est dense dans $L^2_a(\mathbb{D})$ et si $\widetilde{T}_\phi$ est borné alors $\widetilde{T}_\phi$ se prolonge par continuité sur $L^2_a(\mathbb{D})$. Quand c'est le cas nous noterons tout simplement T_ϕ pour désigner $\widetilde{T}_\phi$.

Dans la suite, nous allons montrer que si ϕ est une fonction intégrable sur $\mathbb{D}$ et à support compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{D}$ alors l'opérateur $\widetilde{T}_\phi$ est non seulement borné mais aussi compact. La preuve de cette assertion nécessite l'introduction des automorphismes du disque unité $\mathbb{D}$.

On rappelle qu'un automorphisme du disque unité est une application bijective biholomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Tout automorphisme φ de $\mathbb{D}$ peut s'ecrire comme $\varphi(z) = \varphi_a(\epsilon z)$, où $a = \varphi(0) \in \mathbb{D}$, $|\epsilon| = 1$, et

$$\varphi_a(z) := \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

Le Jacobien de l'application φ_a est

$$\frac{dA(\varphi_a(z))}{dA(z)} = |\varphi_a'(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \bar{a}z|^4}.$$

D'autre part l'inverse φ_a^{-1} de l'automorphisme φ_a n'est autre que φ_a lui même. L'ensemble des automorphismes du disque, appelé aussi groupe de Möbius, est noté $Aut(\mathbb{D})$.

Proposition 2.3.2 *Si ϕ est une fonction intégrable et à support compact dans $\mathbb{D}$ alors T_ϕ est compact.*

Preuve : Soit (f_n) une suite bornée dans $L^2_a(\mathbb{D})$. Pour $z \in \mathbb{D}$, on définie $\sigma_z \in Aut(\mathbb{D})$ par $\sigma_z(w) = \dfrac{z - w}{1 - \bar{z}w}$, $\forall w \in \mathbb{D}$. Comme les fonctions f_n sont analytiques et donc harmoniques sur $\mathbb{D}$ alors en particulier elles vérifient la propriété de la valeur moyenne invariante à savoir :

$$f_n(z) = f_n(\sigma_z(0)) = \int_{\mathbb{D}} f_n(\sigma_z(w)) \, dA(w).$$

Le changement de variables $y = \sigma_z(w)$ donne

$$f_n(z) = \int_{\mathbb{D}} f_n(y) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\bar{z}y|^4} \, dA(y).$$

Or $\dfrac{(1-|z|^2)^2}{|1-\bar{z}y|^4} \leq \dfrac{(1-|z|^2)}{(1-|z|)^4} \leq \dfrac{1}{(1-|z|)^4}$. Donc pour tout n, on a

$$|f_n(z)| = \int_{\mathbb{D}} |f_n(y)| \frac{1}{(1-|z|)^4} \, dA(y).$$

Pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$, Il existe $0 < r_{\mathcal{K}} < 1$ tel que $\mathcal{K}$ soit inclus dans le disque fermé $\overline{D(0, r_{\mathcal{K}})}$, et alors, pour cet $r_{\mathcal{K}}$, on a

$$\frac{1}{(1-|z|)^4} \leq \frac{1}{(1-r_{\mathcal{K}})^4}, \quad \forall z \in \mathcal{K}.$$

Par la suite pour tout entier n et tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$, il existe $0 < r_{\mathcal{K}} < 1$ tel que

$$\sup_{z\in\mathcal{K}} |f_n(z)| \leq \frac{1}{(1-r_{\mathcal{K}})^4} \|f_n\|_1.$$

D'où pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$, on a

$$\sup_n (\sup_{z\in\mathcal{K}} |f_n(z)|) \leq \frac{1}{(1-r_{\mathcal{K}})^4} \sup_n \|f\|_1.$$

D'après le théorème de Montel [5, p. 92], la suite (f_n) admet une sous-suite (f_{n_i}) qui converge uniformement sur tous les compacts $\mathcal{K}$ de $\mathbb{D}$ vers une fonction f analytique sur $\mathbb{D}$.

Soit $\mathcal{K}_\phi$ le support compact de la fonction ϕ. Il vient que

$$\begin{aligned} \|\phi f_{n_i} - \phi f\|_2 &= \Big(\int_{\mathcal{K}_0} |\phi(z)|^2 |f_{n_i}(z) - f(z)|^2 \, dA(w) \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\phi\|_2 \sup_{z\in\mathcal{K}_\phi} |f_{n_i}(z) - f(z)|. \end{aligned}$$

Comme $\sup_{z\in\mathcal{K}_\phi} |f_{n_i}(z) - f(z)| \to 0$ quand $n_i \to +\infty$, alors $\phi f_{n_i} \to \phi f$ en norme $\|.\|_2$. D'autre part la projection de Bergman P est continue sur $L^2_a(\mathbb{D})$, donc $P(\phi f_{n_i})$ converge vers $P(\phi f)$ en norme $\|.\|_2$ quand $n_i \to +\infty$ i.e. $T_{\phi f_{n_i}}$ converge vers $T_{\phi f}$ dans $L^2_a(\mathbb{D})$. Donc T_ϕ est bien un opérateur compact.

■

D'une manière générale, si le symbole ϕ est intégrable sur $\mathbb{D}$ et s'il existe $0 < r < 1$ tel que ϕ soit borné sur une couronne $\{z \in \mathbb{D} \ : \ 0 < r < |z| < 1\}$

alors l'opérateur de Toeplitz T_ϕ défini par (2.2) est borné sur $L^2_a(\mathbb{D})$, puisque le symbole ϕ peut s'écrire comme somme d'une fonction bornée et d'une fonction intégrable à support compact :

$$\phi = \phi\chi_{\{z\in\mathbb{D}\ :\ 0\le|z|\le r\}} + \phi\chi_{\{z\in\mathbb{D}\ :\ r<|z|<1\}},$$

où χ_E est la fonction caractéristique usuelle qui vaut 1 si $z \in E$ et 0 sinon. Un tel symbole est appelé **fonction presque bornée** [3, p. 204]. Donc, on peut étendre notre définition de l'opérateur de Toeplitz à beaucoup (mais pas toutes) de fonctions intégrables sur $\mathbb{D}$.

Malheureusement et à nos jours, nous n'avons pas une caractérisation complète des opérateurs de Toeplitz bornés. Autrement dit il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes qui nous assurent que l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman est borné. C'est une question ouverte qui résiste encore à un bon nombre de spécialistes.

Dans la suite, nous allons présenter quelques situations où nous pouvons affirmer que l'opérateur de Toeplitz est borné. Pour cela il nous faut introduire tout d'abord **la transformation de Berezin** qui joue un rôle crucial dans la théorie des opérateurs de Toeplitz.

Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ et $z \in \mathbb{D}$, la transformation de Berezin de f est l'opérateur intégrale défini par

$$Bf(z) = \langle fk_z, k_z\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\bar{w}|^4}\, dA(w), \tag{2.3}$$

où $k_z(w) = (1-|z|^2)^2 K_z(w)$ est le noyau de Bergman normalisé de $L^2_a(\mathbb{D})$. Il est important de signaler que le noyau reproduisant normalisé k_z possède une propriété fort intéressante qui est la suivante.

Proposition 2.3.3 *k_z tend faiblement vers 0 quand $|z|$ tend vers* 1.

Preuve : Pour tout polynôme analytique p sur $\mathbb{D}$, on a

$$\langle p, k_z\rangle = (1-|z|^2)\langle p, K_z\rangle = (1-|z|^2)p(z).$$

Il est clair que cette dernière expression tend vers 0 quand $|z|$ tend vers 1. Comme l'ensemble des polynômes analytiques est dense dans $L^2_a(\mathbb{D})$ alors $\langle f, k_z\rangle \to 0$ quand $|z| \to 1$ pour toute fonction $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ et par conséquent k_z tend faiblement vers 0 quand $|z| \to 1$. ■

Cette propriété nous sera d'une grande utilité plus tard quand nous annoncerons un deuxième résultat sur la continuité des opérateurs de Toeplitz.

D'après (2.3), il vient que

$$B\bar{f} = \overline{Bf},$$

et

$$f \geq 0 \Longrightarrow Bf \geq 0.$$

Proposition 2.3.4 *La transformation de Berezin est injective.*

Preuve : Soit $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ telle que $Bf = 0$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on pose

$$F(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{|1 - z\bar{w}|^2}\, dA(w) = \frac{1}{(1-|z|^2)^2} Bf(z).$$

Par hypothèse, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $Bf(z) = 0$. Ainsi, $F(z) = 0$ et donc

$$\frac{\partial^{n+m} F}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(0) = 0.$$

Pour tous $z \in \mathbb{D}$ et $w \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big[\frac{1}{|1 - z\bar{w}|^2}\Big] &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big[\frac{1}{(1 - z\bar{w})(1 - \bar{z}w)}\Big] \\ &= \frac{1}{(1 - z\bar{w})} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big[\frac{1}{(1 - \bar{z}w)}\Big] \\ &= \frac{1}{(1 - z\bar{w})} \frac{w}{(1 - \bar{z}w)^2}. \end{aligned}$$

En dérivant m fois par rapport à $\bar{z}$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^m}\Big[\frac{1}{|1 - z\bar{w}|^2}\Big] = \frac{1}{(1 - z\bar{w})} \frac{m! w^m}{(1 - \bar{z}w)^{m+1}}.$$

De la même manière, en dérivant n fois par rapport à z, il vient que

$$\frac{\partial}{\partial z^n}\Big[\frac{\partial}{\partial \bar{z}^m}\Big(\frac{1}{|1 - z\bar{w}|^2}\Big)\Big] = \frac{n! \bar{w}^n}{(1 - z\bar{w})^{n+1}} \frac{m! w^m}{(1 - \bar{z}w)^{m+1}}.$$

D'où

$$\frac{\partial^{n+m} F}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(0) = \int_{\mathbb{D}} m! n! w^m \bar{w}^n f(w)\, dA(w) = 0. \tag{2.4}$$

Comme les polynômes en $(z, \bar{z})$ sont denses dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$, alors l'équation (2.4) implique que la fonction f est orthogonale à l'ensemble des polynômes en $(z, \bar{z})$ et donc $\|f\|_2 = 0$ et par la suite $\|f\|_1 = 0$. ■

La transformation de Berezin est étroitement liée aux automorphismes du disque $\mathbb{D}$. En effet, en effectuant dans (2.3) le changement de variables

$$w = \varphi_z(y),$$

il vient que

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\varphi_z(y))\, dA(y).$$

Ainsi l'équation (2.3) est équivalente à

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\varphi(w))\, dA(w), \qquad \text{pour tout } \varphi \in Aut(\mathbb{D}) \text{ tel que } \varphi(0) = z.$$

Une autre propriété importante de la transformation de Berezin est donnée par la proposition suivante. Elle nous permet de trouver des astuces de calcul de quelques transformations de Berezin en général difficile à faire.

Proposition 2.3.5 *Pour tout $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ et toute fonction $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$*

$$B(f \circ \varphi) = (Bf) \circ \varphi.$$

Preuve : Soit $\sigma \in Aut(\mathbb{D})$ et $z \in \mathbb{D}$. On pose

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \quad \text{et donc} \quad \varphi_{\sigma(z)}(w) = \frac{\sigma(z) - w}{1 - \overline{\sigma(z)}w}.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(0) &= \varphi_{\sigma(z)}(\sigma(z)) = 0 \\ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z &\in \mathcal{A}(\mathbb{D}) \\ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(\mathbb{D}) &= \mathbb{D}, \text{ et } \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z \text{ est une bijection .} \end{aligned}$$

D'où, d'après le lemme de Schwarz [29, p. 241], il existe une constante complexe c de module 1 telle que pour tout $w \in \mathbb{D}$

$$\varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(w) = cw$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$, on a

$$B\big(f \circ \sigma\big) = \int_{\mathbb{D}} (f \circ \sigma)(y) \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \bar{z}y|^4}\, dA(y).$$

En effectuant le changement de variables $y = \varphi_z(w)$, on obtient

$$\begin{aligned} B\big(f \circ \sigma\big)(z) &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \sigma \circ \varphi_z)(w)\, dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_{\sigma(z)} \circ \varphi_{\sigma(z)}\sigma \circ \varphi_z)(w)\, dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_{\sigma(z)})(cw)\, dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_{\sigma(z)})(u)\, dA(u) \\ &= Bf\big(\sigma(z)\big) \\ &= \big(Bf\big) \circ \sigma(z). \end{aligned}$$

■

Lemme 2.3.6 *La transformation de Berezin laisse invariant les fonctions harmoniques.*

Preuve : Si $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ alors $f \circ \varphi$ est aussi harmonique pour tout $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$. D'après la propriété de la valeur moyenne, pour tout $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ tel que $\varphi(0) = z$, on a

$$f(z) = f \circ \varphi_z(0) = \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_z(w)\, dA(w) = Bf(z).$$

■

Il faut faire attention au fait que B n'est pas une projection sur l'ensemble des fonctions harmoniques autrement dit Bf n'est pas toujours harmonique.

Si $Bf = g$ est harmonique alors $B(f - g) = 0$. Or B est injective, ce qui implique que $f = g$ et donc f est harmonique. En d'autres termes Bf est harmonique si et seulement si f est harmonique.

Dans [4], Ahern et Rudin montrent que si une fonction intégrable f est telle que $Bf = f$ alors nécessairement f est harmonique sur $\mathbb{D}$.

Soit $\phi \in L^1(\mathbb{D}, dA)$. Il est simple de voir à travers (2.3) que

$$B\phi(z) = \langle \phi k_z, k_z \rangle = \langle \phi k_z, Pk_z \rangle = \langle P(\phi k_z), k_z \rangle = \langle T_\phi k_z, k_z \rangle.$$

Nous avons alors un deuxième résultat sur la continuité des opérateurs de Toeplitz [31, p. 107].

Proposition 2.3.7 *Si $\phi \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ alors T_ϕ est borné si et seulement si ϕ est bornée et T_ϕ est compact si et seulement si ϕ est nulle.*

Preuve : Il est clair que si ϕ est bornée (resp. ϕ est nulle) alors T_ϕ est borné (resp. T_ϕ nul donc compact).

Réciproquement, si T_ϕ est borné, et comme k_z est unitaire dans $L^2_a(\mathbb{D})$, alors pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$|B\phi(z)| = \langle T_\phi k_z, k_z \rangle| \leq \|T_\phi\|.$$

Or ϕ est hamonique i.e. $B\phi = \phi$, car B laisse invariant les fonctions harmoniques, et donc ϕ est bornée.

Si T_ϕ est compact, comme k_z tend faiblement vers 0 quand $|z|$ tend vers 1, alors $\phi(z) = B\phi(z) = \langle T_\phi k_z, k_z \rangle$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers 1. D'où, d'après le principe du maximum, ϕ est nulle sur $\mathbb{D}$. ∎

Si ϕ est une fonction continue sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ alors $B\phi$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et ϕ coïncide avec $B\phi$ sur la frontière $\partial\mathbb{D}$ de $\mathbb{D}$. En effet, si $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ alors l'automorphisme $\varphi_z(w)$ tend vers z_0 quand z tend vers z_0 pour tout $w \in \mathbb{D}$. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$B\phi(z_0) = \lim_{z \to z_0} \int_{\mathbb{D}} \phi \circ \varphi_z(w)\, dA(w) = \phi(z_0).$$

Ceci nous amène à un troisième résultat sur la compacité des opérateurs de Toeplitz [31, p. 107].

Proposition 2.3.8 *Si ϕ est une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ alors T_ϕ est compact si et seulement si ϕ est nulle sur $\partial\mathbb{D}$.*

Preuve : Si ϕ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et nulle sur $\partial\mathbb{D}$ alors il existe une suite (ϕ_n) de fonctions continues à support compact sur $\mathbb{D}$ telle que

$$\|\phi - \phi_n\|_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Or

$$\|T_\phi - T_{\phi_n}\| = \|T_{\phi - \phi_n}\| \leq \|\phi - \phi_n\|_\infty.$$

D'où la suite des opérateurs (T_{ϕ_n}) tend fortement vers T_ϕ quand $n \to +\infty$. Puisque les opérateurs T_{ϕ_n} sont compacts, donc T_ϕ est un opérateur compact.

Réciproquement, si T_ϕ est compact alors $B\phi(z) = \langle T_\phi k_z, k_z \rangle$ tend vers 0 quand $|z| \to 1$ car k_z converge faiblement vers 0 ($|z| \to 1$). Ainsi $\phi = 0$ sur $\partial\mathbb{D}$, puisque $B\phi = \phi$ sur $\partial\mathbb{D}$. ∎

D'autres résultats traitant de la continuité des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman existent. Voir par exemple [31].

Dans mon travail en collaboration avec E. Strouse et L. Zakariasy, nous étions confrontés à cette question de continuité de l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman. Cette difficulté de caractériser les opérateurs de Toeplitz bornés nous a poussé à introduire la notion de la **T-fonction**.

Définition 2.3.9 *Soit $\phi \in L^1(\mathbb{D}, dA)$. La fonction ϕ est dite une T-fonction si l'opérateur $\widetilde{T}_\phi$ défini par (2.2) est borné sur $L^2_a(\mathbb{D})$.*

Chapitre 3

Produits d'opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman

Ce chapitre est consacré à l'étude du produit de deux opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$. Nous commençerons par analyser les résultats de Ahern et Čučković dans [3], puis ceux de Ahern dans [1]. Nous essayerons tout le long de ce chapitre de comparer la situation dans $L^2_a(\mathbb{D})$ avec celle des opérateurs de Toeplitz sur le Hardy $H^2(\mathbb{T})$ et donc avec le Théorème 1.5.1 de Brown et Halmos. Ensuite nous présenterons nos résultats de [23] qui traitent des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes. Cette nouvelle notion nous permettra de considérer des opérateurs de Toeplitz à symbole plus général et non plus seulement à symbole harmonique comme c'est le cas dans [3] et [1]. Nous donnerons à travers le Théorème 3.2.12 des conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes soit encore un opérateur de Toeplitz. Enfin nous allons exploiter ce théorème pour mettre l'accent sur la difficulté de caractériser les paires d'opérateurs de Toeplitz quasihomogènes dont le produit est un opérateur de Toeplitz.

3.1 Opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique

Dans [13], Brown et Halmos ont montré que pour deux symboles ϕ et ψ bornés sur le cercle unité $\mathbb{T}$, le produit $T_\phi T_\psi$, défini sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$, est un opérateur de Toeplitz si et seulement si ϕ est anti-analytique ou si ψ est analytique. Existe-t-il un résultat analogue sur l'espace de Bergman ? Plus précisément peut-on trouver des conditions nécessaires et suffisantes (ou, au moins nécessaires ou suffisantes) pour qu'étant donné deux opérateurs de Toeplitz T_ϕ et T_ψ définis sur $L_a^2(\mathbb{D})$, dont le produit $T_\phi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz alors ϕ est anti-analytique ou ψ est analytique ? Un tel résultat s'il existe sera appelé **théorème de type Brown-Halmos**.

Il est clair que si $\phi \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$, l'ensemble des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{D}$, alors T_ϕ n'est autre que l'opérateur de multiplication sur $L_a^2(\mathbb{D})$ par la fonction ϕ. Par la suite si ϕ est une T-fonction et si $\psi \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ alors pour toute fonction $f \in L_a^2(\mathbb{D})$

$$T_\phi T_\psi f = T_\phi P(\psi f) = T_\phi(\psi f) = P(\phi\psi f) = T_{\phi\psi} f.$$

Donc le produit $T_\phi T_\psi$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\phi\psi$. Par ailleurs si $\overline{\phi} \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ et si ψ est une T-fonction alors

$$\big(T_\phi T_\psi\big)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\phi}} = T_{\overline{\psi\phi}} = \big(T_{\phi\psi}\big)^*,$$

ce qui signifie que $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$.

En résumé, si ϕ est anti-analytique ou si ψ est analytique alors le produit $T_\phi T_\psi$ est l'opérateur de Toeplitz $T_{\phi\psi}$. Comme pour les opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy, nous appellerons ces deux situations **le cas trivial**.

Nous allons voir que contrairement à ce qui est connu sur le produit des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy, pour les opérateurs de Toeplitz définis sur l'espace de Bergman il existe des T-fonctions ϕ et ψ telles que le produit $T_\phi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz mais ni ϕ est anti-analytique, ni ψ est analytique. Néanmoins, on peut obtenir un théorème de type Brown-Halmos en exigeant des symboles de vérifier des conditions bien précises.

Si ϕ est une fonction harmonique bornée sur $\mathbb{D}$ alors elle se décompose de la manière suivante $\phi = \phi_1 + \overline{\phi}_2$, où les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 certe ne sont pas nécessairement bornées mais elles sont dans l'espace de Bloch. On rappelle que l'espace de Bloch est l'ensemble des fonctions analytiques f sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\sup\{(1-|z|^2)|f'(z)| : z \in \mathbb{D}\} < +\infty.$$

En effet, en écrivant $\phi = \Re\phi + i\Im\phi$, on a que $\Re\phi$ et $\Im\phi$ sont deux fonctions harmoniques réelles. Donc si f et g sont les deux uniques fonctions analytiques telles que

$$\Re\phi = \Re f \text{ et } f(0) = 0,$$

et

$$\Im\phi = \Re g \text{ et } g(0) = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}\phi &= \Re f + i\Re g \\ &= \frac{1}{2}(f+\bar{f}) + i\frac{1}{2}(g+\bar{g}) \\ &= \frac{1}{2}(f+ig) + \frac{1}{2}\overline{(f-ig)}.\end{aligned}$$

En posant $\phi_1 = \frac{1}{2}(f+ig)$ et $\phi_2 = \frac{1}{2}(f-ig)$, on a bien que $\phi = \phi_1 + \overline{\phi}_2$. Maintenant, sachant que la projection de Bergman P est un opérateur borné de $L^\infty(\mathbb{D})$ dans l'espace de Bloch (voir [7, p. 13] et [31, p. 78]), il vient que les fonctions $P(\phi) = \phi_1$ et $P(\overline{\phi}) = \phi_2$ appartiennent toutes les deux à l'espace de Bloch.

Cette décomposition précédente des fonctions harmoniques bornées sur $\mathbb{D}$ est analogue à la décomposition des fonctions dans BMO. En effet par le théorème de Fefferman (voir [19]) une fonction ϕ est dans BMO si et seulement si elle admet la représentation suivante

$$\phi = f + P_+ g$$

où f et g sont dans $L^\infty(\mathbb{T})$, et P_+ la projection de Riesz.

Soit $\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}$ et $\psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$ où les ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2 sont des T-fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Il découle de la linéarité de l'opérateur de Toeplitz par rapport à son symbole et des cas triviaux mentionnés auparavant que :

$$T_\phi T_\psi = \big(T_{\phi_1} + T_{\overline{\phi_2}}\big)\big(T_{\psi_1} + T_{\overline{\psi_2}}\big) = T_{\phi_1\psi_1} + T_{\overline{\phi_2}\psi_1} + T_{\overline{\phi_2\psi_2}} + T_{\phi_1}T_{\overline{\psi_2}}, \quad (3.1)$$

car trois des quatre termes dans la somme au dessus ont ou le premier opérateur de Toeplitz est à symbole anti-analytiques ou le second est à symbole analytique. Ainsi si $T_{\phi_1}T_{\overline{\psi_2}}$ est un opérateur de Toeplitz alors $T_\phi T_\psi$ le sera aussi. Si de plus, $T_{\phi_1}T_{\overline{\psi_2}} = T_{\phi_1\overline{\psi_2}}$ alors nous aurons $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$.

Dans [1], Ahern donne, via la transformation de Berezin, une caractérisation complète des T-fonctions analytiques ϕ et ψ telles que le produit $T_\phi T_{\overline{\psi}}$ soit un opérateur de Toeplitz. Son résultat repose sur la proposition suivante [3, p. 204].

Proposition 3.1.1 *Soit ϕ, ψ deux T-fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ et u une T-fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $T_\phi T_{\overline{\psi}} = T_u$.

(ii) $\phi\overline{\psi} = Bu$.

(iii) Pour tout couple $(z,w) \in \mathbb{D}\times\mathbb{D}$ on a

$$\phi(z)\overline{\psi}(\bar{w}) = (1-zw)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{u(\xi)}{(1-\overline{\xi}z)^2(1-\xi w)^2}\, dA(\xi).$$

Preuve : $T_\phi T_{\overline{\psi}} = T_u$ si et seulement si $T_\phi T_{\overline{\psi}} K_z = T_u K_z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Or, pour tout $w \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} T_{\overline{\psi}} K_z(w) &= P(\overline{\psi} K_z)(w) \\ &= \langle \overline{\psi} K_z, K_w \rangle \\ &= \langle K_z, \psi K_w \rangle \\ &= \overline{\langle \psi K_w, K_z \rangle} \\ &= \overline{\psi(z) K_w(z)} \\ &= \overline{\psi}(z) K_z(w). \end{aligned}$$

D'où $T_\phi T_{\overline{\psi}} K_z(w) = \overline{\psi}(z)\phi(w)K_z(w)$, $\forall z \in \mathbb{D}$ et $\forall w \in \mathbb{D}$. Donc pour tout $(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} T_\phi T_{\overline{\psi}} = T_u \iff \phi(w)\overline{\psi}(z) &= \frac{1}{K_z(w)} P(uK_z)(w) \\ &= (1 - \bar{z}w)^2 \langle uK_z, K_w \rangle \\ &= (1 - \bar{z}w)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{u(\xi)}{(1 - \xi\bar{z})^2 (1 - \bar{\xi}w)^2} \, dA(\xi). \end{aligned}$$

En remplaçant z par $\bar{z}$ dans cette dernière expression, on obtient bien l'équivalence entre (i) et (iii).

Maintenant, en remplaçant dans (iii), w par z on obtient (ii).

Pour clore la preuve, il reste à montrer que (ii) implique(iii). Soit F et G les fonctions définies et analytiques sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \phi(z)\overline{\psi}(\bar{w}), \\ G(z, w) &= (1 - zw)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{u(\xi)}{(1 - \xi z)^2 (1 - \bar{\xi}w)^2} \, dA(\xi). \end{aligned}$$

L'assertion (ii) est équivalente à dire que la fonction F est égale à la fonction G sur l'ensemble $\{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{D}\}$. Comme F et G sont toutes les deux analytiques sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, on a bien que $F = G$ sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. ■

Remarque 3.1.2 *Dans la preuve précédente nous avons utilisé le fait suivant : Si F est une fonction analytique sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ et si F et nulle sur l'ensemble $\{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{D}\}$ alors F est nulle sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. En effet, pour tout réel θ fixé, considérons la fonction F_θ définie sur $\mathbb{D}$ par $F_\theta(z) = F(e^{i\theta} z, z)$. F_θ est analytique sur $\mathbb{D}$ et pour tout réel $r \in [0, 1)$, nous avons que*

$$F_\theta(e^{-i\frac{\theta}{2}} r) = F(e^{i\frac{\theta}{2}} r, e^{-i\frac{\theta}{2}} r) = 0.$$

D'où F_θ *est nulle sur le segment* $\{e^{-i\theta}r : r \in [0,1)\}$ *et donc* F_θ *est nulle sur* $\mathbb{D}$*. Comme* θ *est choisi arbitrairement, il vient que* $F(z,w) = 0$ *à chaque fois que* $|z| = |w|$*.*
Maintenant, soit w_0 *quelconque dans* $\mathbb{D}$ *et considérons cette fois-ci la fonction* F_{w_0} *définie sur* $\mathbb{D}$ *par* $F_{w_0}(z) = F(z, w_0)$*.* F_{w_0} *est analytique sur* $\mathbb{D}$ *et nulle sur le cercle* $\{z : |z| = |w_0|\}$*. Donc* F_{w_0} *est nulle sur* $\mathbb{D}$*. Comme* w_0 *est choisi arbitrairement dans* $\mathbb{D}$*, nous déduisons que* F *est nulle sur* $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$*.*

Il résulte de cette proposition que pour deux fonctions analytiques ϕ et ψ, le produit $T_\phi T_{\overline{\psi}}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $\phi\overline{\psi} = Bu$ pour une certaine fonction u qu'on ne demande à priori que d'être intégrable sur $\mathbb{D}$.

Supposons que l'une des deux fonctions ϕ ou ψ est constante alors $\phi\overline{\psi}$ est une fonction harmonique et donc $\phi\overline{\psi} = B(\phi\overline{\psi})$ car B laisse invariant les fonctions harmoniques. Il vient alors que $B(\phi\overline{\psi}) = B(u)$, et comme B est injective on aura que $\phi\overline{\psi} = u$. Cette situation correspond au cas trivial. En effet dans la décomposition $\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}$ et $\psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$, dire que ϕ_1 ou ψ_2 est constante revient à dire que ϕ est anti-analytique ou ψ est analytique. Et donc le produit $T_\phi T_\psi$ est l'opérateur de Toeplitz $T_{\phi\psi}$. Sous certaines conditions ce cas trivial est l'unique situation où on peut avoir $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$.

Une réciproque « partielle »de ce résultat a été donnée par la Proposition 2 de [3, p. 206], qui fait intervenir le Laplacien invariant. Rappellons que le Laplacien invariant, noté souvent $\widetilde{\Delta}$, est égale à $(1-|z|^2)^2\Delta$.

Proposition 3.1.3 *Si* ϕ *et* ψ *sont analytiques et si* $\phi\overline{\psi} = Bu$ *pour une certaine fonction* $u \in L^1(\mathbb{D}, dA) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{D})$ *telle que le Laplacien invariant de* u *est borné sur* $\mathbb{D}$ *alors* ϕ *ou* ψ *est constante.*

Néanmoins, dans de nombreuses autres situations il existe une fonction $u \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ telle que $u = \phi\overline{\psi}$ où ϕ et ψ sont toutes les deux analytiques mais ni ϕ, ni ψ est constante. Les deux exemples suivants, [3, p. 208] et [1, p. 208], illustrent bien cela. En outre, ils montrent que la condition sur $\widetilde{\Delta}u$ de la proposition ci-dessus n'est pas nécessaires.

Lemme 3.1.4 *i)* $z\bar{z} = Bu_1(z)$*, où* $u_1(z) = 1 + \log|z|^2$*.*
ii) $z\bar{z}^2 = Bu_2(z)$*, où* $u_2(z) = 2\bar{z} - \dfrac{1}{z}$*.*

Il est clair que ni u_1, ni u_2 n'appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{D})$. De plus les u_1 et u_2 ne sont pas bornées mais elles sont presque-bornées.

Il résulte de la Proposition 3.1.1 que

$$T_z T_{\bar{z}} = T_{1+\log|z|^2}$$

et

$$T_zT_{\bar{z}^2} = T_{2\bar{z}-\frac{1}{z}}.$$

Plus loin nous allons pouvoir vérifier ces deux exemples avec notre Corollaire 3.2.17 de [23].

Remarquons que dans les deux exemples la fonction ϕ (qui est égale à z) et la fonction ψ (qui égale à $\bar{z}$ pour le premier exemple et $\bar{z}^2$ pour le second) sont toutes les deux des polynômes analytiques dont le degré de leur produit est inférieur ou égale à 3. Par ailleurs, d'après la Proposition 2.3.5, nous avons pour tout $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$

$$\varphi\overline{\varphi} = B(u_1 \circ \varphi),$$

et

$$\varphi\overline{\varphi}^2 = B(u_2 \circ \varphi),$$

ce qui est équivalent, d'après la Proposition 3.1.1, à

$$T_\varphi T_{\overline{\varphi}} = T_{u_1\circ\varphi},$$

et

$$T_\varphi T_{\overline{\varphi}^2} = T_{u_2\circ\varphi}.$$

Nous allons voir, à travers le théorème suivant [1, p. 207], que toutes les fonctions analytiques ϕ et ψ telles que $\phi\overline{\psi} = Bu$ pour une certaine fonction $u \in L^1(\mathbb{D}, dA)$, doivent être de cette forme, c'est-à-dire chacune de ces deux fonctions est la composée d'un polynôme analytique et d'un automorphisme du disque. De plus le degré du produit des deux polynômes ne doit pas dépasser 3.

Théorème 3.1.5 *Si ϕ et ψ sont deux fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, toutes les deux non constantes et telles que $\phi\overline{\psi} = Bu$ où $u \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ alors il existe deux polynômes analytiques non constants p et q dont le degré du produit est inférieur ou égale à 3 et il existe un $z_0 \in \mathbb{D}$ tels que $\phi = p\circ\varphi_{z_0}$ et $\psi = q\circ\varphi_{z_0}$.*

Ce théorème est en réalité une généralisation de la Proposition 3.1.3, puisqu'on se débarasse de la condition sur le Laplacien invariant de la fonction u. En effet, si on regarde les deux exemples du Lemme 3.1.4, on se rend compte que les deux fonctions u_1 et u_2 ne sont pas dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{D})$ et donc leurs Laplacien n'est même pas défini.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la caractérisation de toutes les T-fonctions harmoniques ϕ et ψ telles que le produit $T_\phi T_\psi$ soit un opérateur de Toeplitz.

Corollaire 3.1.6 *Soit $\phi = \phi_1 + \overline{\phi}_2$ et $\psi = \psi_1 + \overline{\psi}_2$, telles que ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2 sont des T-fonctions analytiques et ni ϕ_1, ni ψ_2 est constante. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe une T-fonction v telle que $T_\phi T_\psi = T_v$.

ii) Il existe deux polynômes analytiques non constants p et q avec le degré du produit $pq \leq 3$ et il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tels que $\phi_1 = p \circ \varphi_{z_0}$, $\psi_2 = q \circ \varphi_{z_0}$ et v soit de la forme

$$v = u \circ \varphi_{z_0} + \overline{\phi}_2 \psi_1 + \phi_1 \psi_1 + \overline{\phi}_2 \overline{\psi}_2,$$

où la fonction u est définie par $p\bar{q} = Bu$.

Preuve : Si $T_\phi T_\psi = T_v$ alors, d'après l'équation (3.1), on a

$$T_{\phi_1} T_{\overline{\psi}_2} = T_{v - \phi_1\psi_1 - \overline{\phi}_2\psi_1 - \overline{\phi}_2\overline{\psi}_1},$$

d'où, d'après la Proposition 3.1.1,

$$\phi_1 \overline{\psi}_2 = B(v - \phi_1\psi_1 - \overline{\phi}_2\psi_1 - \overline{\phi}_2\overline{\psi}_1). \tag{3.2}$$

Il vient, par le Théorème 3.1.5, que $\phi_1 = p \circ \varphi_{z_0}$, $\psi_2 = q \circ \varphi_{z_0}$ avec p et q deux polynômes analytiques tels que deg $pq \leq 3$ et $\varphi_{z_0} \in Aut(\mathbb{D})$. L'équation (3.2) devient alors

$$(p\bar{q}) \circ \varphi_{z_0} = B(v - \phi_1\psi_1 - \overline{\phi}_2\psi_1 - \overline{\phi}_2\overline{\psi}_1).$$

Utilisant le fait que la transformation de Berezin B laisse invariant les fonctions harmoniques et qu'elle est injective, on obtient que

$$v = (p\bar{q}) \circ \varphi_{z_0} + \phi_1\psi_1 + \overline{\phi}_2\psi_1 + \overline{\phi}_2\overline{\psi}_1.$$

Réciproquement, si $\phi_1 = p \circ \varphi_{z_0}$ et si $\psi_2 = q \circ \varphi_{z_0}$ alors, d'après la Proposition 3.1.1, $T_{\phi_1} T_{\overline{\psi}_2} = T_{(p\bar{q})\circ\varphi_{z_0}}$. Donc l'équation (3.1) devient

$$T_\phi T_\psi = T_{\phi_1\psi_1} + T_{\overline{\phi}_2\psi_1} + T_{\overline{\phi}_2\overline{\psi}_2} + T_{(p\bar{q})\circ\varphi_{z_0}},$$

c'est-à-dire $T_\phi T_\psi = T_v$. ■

Remarque 3.1.7 *Sous les hypothèses du corollaire précédent, si $T_\phi T_\psi = T_v$ et si $p(z) = a_0 + a_1 z$ et $q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$, où a_1 et b_2 sont deux constantes non nulles, alors*

$$\begin{aligned} v &= a_0\bar{b_0} + a_0\bar{b_1}\overline{\varphi}_{z_0} + a_0\bar{b_2}\overline{\varphi}^2_{z_0} + a_1\bar{b_0}\varphi_{z_0} + a_1\bar{b_1}|\varphi_{z_0}|^2 \\ &+ a_1\bar{b_2}\varphi_{z_0}\overline{\varphi}^2_{z_0} + \overline{\phi}_2\psi_1 + \phi_1\psi_1 + \overline{\phi}_2\overline{\psi}_2. \end{aligned}$$

D'où, d'après les deux équations (3.1), (3.1) et la Proposition 2.3.5, on a

$$\begin{aligned} v &= a_0\bar{b_0} + a_0\bar{b_1}\overline{\varphi}_{z_0} + a_0\bar{b_2}\overline{\varphi}^2_{z_0} + a_1\bar{b_0}\varphi_{z_0} + a_1\bar{b_1}B(u_1 \circ \varphi_{z_0}) \\ &+ a_1\bar{b_2}B(u_2 \circ \varphi_{z_0}) + \overline{\phi}_2\psi_1 + \phi_1\psi_1 + \overline{\phi}_2\overline{\psi}_2 \\ &= a_0\bar{b_0} + a_0\bar{b_1}\overline{\varphi}_{z_0} + a_0\bar{b_2}\overline{\varphi}^2_{z_0} + a_1\bar{b_0}\varphi_{z_0} + a_1\bar{b_1}(1 + \log|\varphi_{z_0}|^2) \\ &+ a_1\bar{b_2}(2\overline{\varphi}_{z_0} - \frac{1}{\varphi_{z_0}}) + \overline{\phi}_2\psi_1 + \phi_1\psi_1 + \overline{\phi}_2\overline{\psi}_2. \end{aligned}$$

On remarque que si la fonction v est bornée sur $\mathbb{D}$ alors nécessairement $a_1 = 0$ ou $b_1 = b_2 = 0$. Mais $a_1 = 0$ implique que $\phi_1 = a_0$ et donc ϕ est anti-analytique. Ainsi on obtient un théorème de type Brown-Halmos. De la même manière et en inversant les rôles de p et q (p devient le polynôme de degré 2 et q celui de degré 1) on montre que si v est bornée alors ψ est analytique.

En resumé, si ϕ, ψ sont deux T-fonctions harmoniques et v est une fonction bornée telles que $T_\phi T_\psi = T_v$ alors ou ϕ est anti-analytique ou ψ est analytique, et dans les deux cas on a $v = \phi\psi$.

Un résultat immédiat découle de cette remarque, qui est que l'ensemble des opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique n'admet pas de diviseurs de zéro [3, p. 202].

Corollaire 3.1.8 *Si ϕ et ψ sont deux T-fonctions harmoniques telles que $T_\phi T_\psi = 0$ alors nécessairement $\phi = 0$ ou $\psi = 0$.*

Preuve : D'après la remarque précédente, $\phi\psi = 0$ sur $\mathbb{D}$, mais comme ϕ et ψ sont harmoniques sur $\mathbb{D}$ alors au moins l'une des deux fonctions est nulle.

■

Il faut bien préciser que le probléme des diviseurs de zéro pour les opérateurs de Toeplitz définis sur l'espace de Bergman est encore à nos jours un problème ouvert. On sait répondre dans des cas particuliers comme le montre le corollaire ci-dessus ou comme nous allons voir plus tard quand les symboles sont des fonctions quasihomogènes. Mais d'une manière générale, étant donné deux T-fonctions ϕ et ψ telles que $T_\phi T_\psi = 0$, rien n'affirme que ϕ est nulle ou ψ est nulle. Récemment dans [17], Čučković regarde le produit $T_\phi T_\psi = 0$ quand ϕ est une fonction quelconque dans $L^\infty(\mathbb{D})$ et $\psi(z) = z^j - \bar{z}^l$, et il montre que ϕ est nécessairement nulle.

Une autre version du Corollaire 3.1.8 est la suivante [3, p. 202].

Corollaire 3.1.9 *Si ϕ, ψ et v sont des T-fonctions harmoniques telles que $T_\phi T_\psi = T_\phi T_v$ et ϕ non identiquement nulle alors $\psi = v$.*

Preuve : Si $T_\phi T_\psi = T_\phi T_v$ alors $T_\phi T_{\psi - v} = 0$ et donc, d'après le Corollaire 3.1.8, $\psi - v = 0$ i.e. $\psi = v$. ■

On rappelle que sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$, les seuls opérateurs de Toeplitz idempotents sont l'opérateur nul et l'opérateur identité. La même situation est encore vraie pour les opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique sur l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$.

Corollaire 3.1.10 *Si ϕ est une T-fonction harmonique telle que l'opérateur de Toeplitz T_ϕ soit idempotent alors $\phi = 0$ ou $\phi = \mathbb{1}$.*

Preuve : Si $T_\phi^2 = T_\phi$ alors $T_\phi^2 - T_\phi = T_\phi\big(T_\phi - I\big) = 0$. Comme l'identité I de $L^2_a(\mathbb{D})$ n'est autre que l'opérateur $T_{\mathbf{1}}$ de symbole la fonction qui vaut 1. Ainsi $T_\phi^2 = T_\phi$ implique que $T_\phi T_{\phi - \mathbf{1}} = 0$. Il vient donc d'après le Corollaire 3.1.8 que $\phi = 0$ ou $\phi = \mathbb{1}$. ■

3.2 Opérateurs de Toeplitz quasihomogènes

Voyant que la question quand le produit de deux opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique est un opérateur de Toeplitz a été résolue avec élégance en partie par Ahern et Čučković dans [3] puis par Ahern dans [1], nous avons songé à regarder la même question mais pour une autre classe de symboles. Sur cette voie et dans un travail en collaboration avec Elizabeth Strouse et Lova Zakariasy [23], nous nous sommes intéressés à l'étude du produit de deux opérateurs de Toeplitz à **symbole quasihomogène**.

Définition 3.2.1 *Nous dirons qu'une fonction f est quasihomogène de degré $p \in \mathbb{Z}$ s'il existe une fonction radiale ϕ telle que pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$*

$$f(re^{i\theta}) = e^{ip\theta}\phi(r).$$

Si une telle fonction f est le symbole d'un opérateur de Toeplitz alors nous dirons que l'opérateur de Toeplitz T_f est quasihomogène de degré p.

Rappellons qu'une fonction ϕ est dite radiale si pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$\phi(z) = \phi(|z|).$$

Dans toute la suite nous assimilerons les fonctions radiales dans $L^1(\mathbb{D}, dA)$ à des fonctions dans $L^1([0,1], rdr)$.

Pourquoi regarder une telle classe de symboles ? Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure rdr. Comme d'une part les polynômes en $(z, \bar{z})$ sont denses dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ et d'autre part pour deux entiers $k_1 \neq k_2$, $e^{ik_1\theta}\mathcal{R}$ est orthogonale à $e^{ik_2\theta}\mathcal{R}$, il vient la décomposition suivante de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ à savoir :

$$L^2(\mathbb{D}, dA) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\mathcal{R}.$$

Ainsi toute fonction $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ admet la décomposition suivante :

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta} f_k(r), \qquad f_k \in \mathcal{R}.$$

De plus si $f \in L^\infty(\mathbb{D}, dA) \subset L^2(\mathbb{D}, dA)$ alors pour tout $r \in [0,1)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$|f_k(r)| = \frac{1}{2}\Big| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\, d\theta \Big| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|,$$

et donc toutes les fonctions f_k sont bornées sur $\mathbb{D}$.

Même si ce genre de décomposition n'a pas lieu pour $L^1(\mathbb{D}, dA)$, nous espérons que le fait d'avoir des résultats sur le produit d'opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène, nous permettra de dire plus sur ceux dont les symboles sont des fonctions beaucoup plus générales.

Les techniques utilisées dans [23], comme nous allons le voir, différent complètement de celles de [3] et [1] puisque la décomposition du symbole en somme de deux fonctions analytiques appartenant à l'espace de Bloch n'est plus valable dans notre cas car le symbole que nous regardons n'est presque jamais harmonique. Ces techniques consistent à utiliser la **la transformation de Mellin** et la **la convolution de Mellin** dans l'étude des opérateurs de Toeplitz. L'idée d'utiliser ces deux notions dans la théorie des opérateurs de Toeplitz est dûe à Čučković et Rao dans [18].

Soit $p \in \mathbb{N}$, ϕ une T-fonction radiale et regardons les images par l'opérateur de Toeplitz $T_{e^{-ip\theta}\phi}$ de tous les éléments z^n $(n \in \mathbb{N})$ de la base orthogonale de $L^2_a(\mathbb{D})$:

$$\begin{aligned} T_{e^{-ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{e^{-ip\theta}\phi(w)w^n}{(1-z\bar{w})^2}\, dA(w) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \phi(r)r^n e^{i(n-p)\theta} \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)r^k e^{-ik\theta} z^k\, rdr\frac{d\theta}{\pi} \\ &= \int_0^1 \phi(r) \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p-k)\theta}\, \frac{d\theta}{\pi} r^{n+k} z^k\, rdr. \end{aligned}$$

Or si $n \leq p-1$ alors il impossible d'avoir $n = k+p$ avec $k \geq 0$. Par contre si $n \geq p$ alors il existe toujours un $k \geq 0$ tel que $n = k+p$. Par ailleurs

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-p-k)\theta} \frac{d\theta}{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } k+p \neq n, \\ 2 & \text{si } k+p = n. \end{cases}$$

Donc

$$T_{e^{-ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq p-1, \\ 2(n-p+1)\displaystyle\int_0^1 \phi(r) r^{2n-p+1}\, dr z^{n-p} & \text{si } n \geq p. \end{cases}$$

De la même manière, on montre que pour tout entier $n \geq 0$

$$T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = 2(n+p+1)\int_0^1 \phi(r) r^{2n+p+1}\, dr z^{n+p}.$$

On définit la transformation de Mellin d'une application ϕ par

$$\widehat{\phi}(z) = \int_0^{+\infty} \phi(r) r^{z-1}\, dr.$$

Dans notre cas, nous traitons les fonctions radiales définies sur $\mathbb{D}$ et donc nous les considérons nulles sur l'intervalle $[1, +\infty)$. Ainsi si ϕ est une fonction radiale dans $L^1([0,1], rdr)$ alors

$$\widehat{\phi}(z) = \int_0^1 \phi(z) r^{z-1}\, dr.$$

Il est clair que pour une fonction radiale $\phi \in L^1([0,1], rdr)$, l'application $z \mapsto \widehat{\phi}(z)$ est bornée sur le demi-plan $\{z : \Re z \geq 2\}$ et analytique sur le demi-plan $\{z : \Re z > 2\}$.

Pour $z \in \{z : \Re z \geq 2\}$, la quantité $\displaystyle\int_0^1 \phi(r) r^{z-1}\, dr$ est appelée le coefficient de Mellin de ϕ d'indice z et sera notée dorénavant par $\widehat{\phi}(z)$. En resumé nous avons le lemme de calcul suivant que nous utiliserons souvent.

Lemme 3.2.2 *Si p est un entier positif et ϕ une T-fonction radiale alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = 2(n+p+1)\widehat{\phi}(2n+p+2) z^{n+p},$$

et

$$T_{e^{-ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = \begin{cases} 0 & si\ n < p \\ 2(n-p+1)\widehat{\phi}(2n-p+2) z^{n-p} & si\ n \geq p \end{cases}$$

Remarque 3.2.3 *La matrice d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène dans la base orthonormée de $L_a^2(\mathbb{D})$, est une matrice dont les éléments sont nuls sauf sur une diagonale. Par exemple, si $p \in \mathbb{N}$, si ϕ une T-fonction radiale et si $A = (a_{ij})$ est la matrice de $T_{e^{ip\theta}\phi}$ dans la base orthonormée $(\sqrt{k+1}z^k)_{k\geq 0}$ alors*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i-j \neq p \\ 2\sqrt{j+1}(j+p+1)\widehat{\phi}(2j+p+2) & si\ i-j = p \end{cases}$$

Proposition 3.2.4 *Soient ϕ une T-fonction radiale et $p \in \mathbb{N}$. Alors*

(i) $T_{e^{ip\theta}\phi}$ *est borné si et seulement si*

$$\sup_{k\geq 0} |2\sqrt{k+1}(k+p+1)\widehat{\phi}(2k+p+2)| < +\infty.$$

(ii) $T_{e^{ip\theta}\phi}$ *est compact si et seulement si*

$$\lim_{k\to+\infty} |2\sqrt{k+1}(k+p+1)\widehat{\phi}(2k+p+2)| = 0.$$

Preuve : Notons par $\lambda_k = 2\sqrt{k+1}(k+p+1)\widehat{\phi}(2k+p+2)$. Le point (i) est trivial puisque $\sup\limits_k |\lambda_k|$ n'est autre que la norme de l'opérateur $T_{e^{ip\theta}\phi}$. Pour le (ii), si $T_{e^{ip\theta}\phi}$ est compact et comme la suite $(\sqrt{k+1}z^k)_{k\geq 0}$ tend faiblement vers 0 quand $k \to +\infty$ alors

$$\|T_{e^{ip\theta}\phi}(\sqrt{k+1}z^k)\|_2 \to 0 \text{ quand } k \to +\infty,$$

i.e.

$$\lim_{k\to+\infty} |\lambda_k| = 0.$$

Réciproquement, considérons l'opérateur diagonal de rang fini T_n défini sur $L_a^2(\mathbb{D})$ par

$$T_n(\sqrt{k+1}z^k) = \begin{cases} \lambda_k z^{k+p} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Il vient que

$$\|\big(T_n - T_{e^{ip\theta}\phi}\big)(\sqrt{k+1}z^k)\|_2 \leq \sup_{k>n} |\lambda_k|.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k>n} |\lambda_k| = 0$ car par hypothèse $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda_k| = 0$. D'où la suite d'opérateurs compacts (T_n) converge fortement vers $T_{e^{ip\theta}\phi}$ et donc $T_{e^{ip\theta}\phi}$ est lui même compact. ■

Le théorème suivant [28, p. 102] , que nous avons choisi de rappeler, nous permettra de déduire que la transformation de Mellin est injective.

Théorème 3.2.5 *Soit ϕ une fonction analytique bornée sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Si ϕ est nulle sur une suite de points distincts $z_1, z_2, \ldots,$ vérifiant*

(1) $\inf |z_n| > 0$ *;*

(2) $\sum_{n\geq 1} \Re(\frac{1}{z_n}) = \infty$ *;*

alors ϕ est identiquement nulle sur $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$.

Corollaire 3.2.6 *Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers positifs supérieurs ou égales à 2 vérifiant la condition*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Si $\phi \in L^1([0,1], rdr)$ est telle que $\widehat{\phi}(n_k) = 0$ pour tout $k \geq 0$, alors ϕ est nulle.

Preuve : Si $\widehat{\phi}(n_k) = \int_0^1 \phi(r) r^{n_k - 1}\, rdr = 0$ pour tout k alors, d'après le théorème précédent, $\widehat{\phi}(z) = 0$ pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 2\}$ et donc ϕ est nulle.

■

La question que nous nous sommes posés dans [23] est la suivante : Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène soit encore un opérateur de Toeplitz et est-ce possible d'expliciter le symbole de l'opérateur produit ?

Pour répondre à cette question il fallait tout d'abord passer par une étape clé qui est de déterminer la nature du symbole du produit quand ceci est un opérateur de Toeplitz. Plus précisement est-il nécessaire que le symbole de l'opérateur produit soit lui aussi une fonction quasihomogène ? Et si c'est le cas quel est son degré ? La réponse est affirmative et repose sur la notion de la **radialisation** (voir [32]).

Soit ϕ une fonction intégrable sur $\mathbb{D}$. On définit la radialisation de ϕ, et on note $rad(\phi)$, par

$$rad(\phi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta} z)\, d\theta. \tag{3.3}$$

L'intégrale existe et est finie presque partout car $\phi \in L^1(\mathbb{D}, dA)$. Il découle directement de cette définition qu'une fonction ϕ est radiale si et seulement si $\phi = rad(\phi)$.

Lemme 3.2.7 *Pour toute T-fonction ϕ et tous entiers positifs j et k, on a*

$$\langle T_{rad(\phi)} z^k, z^j \rangle = \begin{cases} \langle T_\phi z^k, z^k \rangle & si\ k = j \\ 0 & si\ k \neq j \end{cases}$$

Preuve : Pour tous entiers positifs k et j

$$\begin{aligned} \langle T_{rad(\phi)} z^k, z^j \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta} w)\, d\theta w^k \bar{w}^j\, dA(w) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \phi(e^{i\theta} w) w^k \bar{w}^j\, d\theta\, dA(w). \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $z = e^{i\theta} w$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle T_{rad(\phi)} z^k, z^j \rangle &= \frac{1}{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\theta}\, d\theta \Big) \int_{\mathbb{D}} \phi(z) z^k \bar{z}^j\, dA(z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\theta}\, d\theta \Big) \langle T_\phi z^k, z^j \rangle \\ &= \begin{cases} \langle T_\phi z^k, z^k \rangle & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

■

Ce lemme est essentiel dans la preuve du théorème suivant qui permet, à partir des images des éléments de la base orthogonale de $L_a^2(\mathbb{D})$ par un opérateur de Toeplitz, de déterminer si ce dernier est quasihomogène auquel cas donner son degré quasihomogène.

Théorème 3.2.8 *Une fonction f est quasihomogène de degré $p \in \mathbb{Z}$ si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante λ_n, dépendant seulement de f, telle que*

$$T_f(\xi^n)(z) = \begin{cases} 0 & si\ n < \sup(-p, 0) \\ \lambda_n z^{n+p} & si\ n \geq \sup(-p, 0) \end{cases} \tag{3.4}$$

Preuve : Il est clair, d'après le Lemme 3.2.2, que si f est quasihomogène de degré p alors l'équation (3.4) est vraie.

Réciproquement, supposons que l'équation (3.4) est vraie, il vient que : Si $p \geq 0$ alors pour tout couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\langle T_{\bar{z}^p f} z^n, z^m \rangle = \langle f z^n, z^{m+p} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \dfrac{\lambda_m}{m+p+1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

et si $p < 0$ alors pour tout couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\langle T_{z^{-p}f} z^n, z^m \rangle = \langle f z^{n-p}, z^m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \dfrac{\lambda_{m-p}}{m+1} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Ainsi, si on définit une fonction ϕ d'être

$$\phi = \begin{cases} \bar{z}^p f & \text{si } p \geq 0 \\ z^{-p} f & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

alors, d'après le Lemme 3.2.7, il vient que pour tous entiers $m, n \geq 0$

$$\langle T_{rad(\phi)} z^n, z^m \rangle = \langle T_\phi z^n, z^m \rangle,$$

et donc $T_{rad(\phi)} = T_\phi$. D'où $rad(\phi) = \phi$ i.e. ϕ est radiale. Or, par définition même de la fonction ϕ, ceci implique que f est quasihomogène de degré p.

■

On déduit de ce théorème que si le produit de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes est lui même un opérateur de Toeplitz alors il sera quasihomogène de degré la somme des degrés des deux premiers.

Corollaire 3.2.9 *Soient f et g deux T-fonctions quasihomogènes de degrés respectivement p et s. S'il existe une T-fonction h telle que $T_f T_g = T_h$ alors nécessairement h est quasihomogène de degré $p + s$.*

Preuve : Soient ϕ et ψ deux T-fonctions radiales telles que $f = e^{ip\theta}\phi$ et $g = e^{is\theta}\psi$.

Premier cas : D'après le Lemme 3.2.2, si p et s sont deux entiers positifs alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi}(\xi^n)(z) = \lambda_n z^{n+p+s},$$

où $\lambda_n = 2(n + p + s + 1)\widehat{\phi}(2n + p + 2s + 2)2(n + s + 1)\widehat{\psi}(2n + s + 2)$. Mais si $T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi} = T_h$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi}(\xi^n) = T_h(\xi^n)$ c'est-à-dire

$$T_h(\xi^n)(z) = \lambda_n z^{n+p+s}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

et donc, d'après le Théorème 3.2.8, h est quasihomogène de degré $p + s$.

Deuxième cas : Maintenant, si p est positif et s est négatif alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi}(\xi^n)(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < -s = \sup(-s, 0) \\ \lambda_n z^{n+p+s} & \text{si } n \geq -s, \end{cases}$$

donc si $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi} = T_h$ alors, d'après le Théorème 3.2.8, h est quasihomogène de degré $p+s$.

Troisième cas : Si p et s sont tous les deux négatifs et si $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi} = T_h$ alors, par passage à l'adjoint, on aura

$$T_{e^{-is\theta}\psi}T_{e^{-ip\theta}\psi} = T_{\bar{h}},$$

où cette fois-ci $-p$ et $-s$ sont positifs et donc, d'après le premier cas précèdent, $\bar{h}$ sera une fonction quasihomogène de degré $-p-s$ ce qui équivalent à dire que h est quasihomogène de degré $p+s$.

Si p est négatif et si s est positif alors, par passage à l'adjoint, on se ramène au deuxième cas. ■

Le corollaire suivant montre qu'il n'existe pas d'opérateurs de Toeplitz quasihomogènes de degré non nul qui soient idempotents.

Corollaire 3.2.10 *Tout opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré non nul ne peut être idempotent.*

Preuve : Soient p un entier non nul et ϕ une T-fonction radiale. Si $T_{e^{ip\theta}\phi}$ était idempotant i.e. $\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^2 = T_{e^{ip\theta}\phi}$, on aurait, d'après le Corollaire 3.2.9, que $T_{e^{ip\theta}\phi}$ est quasihomogène de degré $2p$ ce qui est absurde. ■

En réalité les seuls opérateurs de Toeplitz quasihomogènes idempotents sont l'opérateur nul et l'opérateur identité.

On sait maintenant que si p et s sont deux entiers et ϕ et ψ sont deux T-fonctions radiales telles que le produit $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi}$ soit un opérateur de Toeplitz alors le symbole de ce dernier sera de la forme $e^{i(p+s)\theta}\omega$, où ω est une fonction radiale. La deuxième étape sera donc de déterminer la fonction radiale associée au symbole quasihomogène de l'opérateur produit.

Soit p et s deux entiers positifs tels que $p \geq s$. S'il existe une T-fonction radiale ω telle que $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi} = T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}$, alors pour tout entier positif k et tout $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}(\xi^k)(z) = T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}(\xi^k)(z).$$

Il vient du Lemme 3.2.2 que

$$\widehat{\omega}(2k+p-s+2) = 0 \quad \text{si } 0 \leq k \leq s-1, \tag{3.5}$$

$$\widehat{\omega}(2k+p-s+2) = 2(k-s+1)\widehat{\phi}(2k+p-2s+2)\widehat{\psi}(2k-s+2) \quad \text{si } k \geq s. \tag{3.6}$$

Sachant que $\dfrac{1}{2(k-s+1)} = \widehat{\mathbb{1}}(2k-2s+2)$, où $\mathbb{1}$ est la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{D}$, alors pour tout $k \geq s$ l'équation (3.6) est équivalente à

$$\widehat{\mathbb{1}}(2k-2s+2)\widehat{\omega}(2k+p-s+2) = \widehat{\phi}(2k+p-2s+2)\widehat{\psi}(2k-s+2). \tag{3.7}$$

En posant $n = k - s$, l'équation (3.7) s'écrit sous la forme suivante

$$\widehat{\mathbb{1}}(2n+2)\widehat{r^{p+s}\omega}(2n+2) = \widehat{r^p\phi}(2n+2)\widehat{r^s\psi}(2n+2) \quad \forall n \geq 0. \tag{3.8}$$

Maintenant le produit des coefficients de Mellin $\widehat{\mathbb{1}}(2n+2)\widehat{r^{p+s}\omega}(2n+2)$ peut être écrit de la manière suivante :

$$\widehat{\mathbb{1}}(2n+2)\widehat{r^{p+s}\omega}(2n+2) = \int_0^1 \int_0^1 r^{2n+1}\omega(t)t^{2n+1}\,dr\,dt.$$

En effectuant le changement de variables $rt = u$ et $t = v$, l'intégrale au dessus devient alors

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{1}}(2n+2)\widehat{r^{p+s}\omega}(2n+2) &= \iint_{0 \leq u \leq v \leq 1} \big(\frac{u}{v}\big)^{2n+1}\omega(v)v^{2n+1}\frac{du\,dv}{v} \\ &= \int_0^1 u^{2n+1}\Big[\int_u^1 \mathbb{1}\big(\frac{u}{v}\big)\omega(v)\,\frac{dv}{v}\Big]\,du.\end{aligned}$$

Définition 3.2.11 *Soient f et g deux fonctions dans $L^1([0,1]; rdr)$. On définit la convolution de Mellin (dite aussi la convolution multiplicative) de f et g par :*

$$(f *_M g)(r) = \int_r^1 f\big(\frac{r}{t}\big)g(t)\,\frac{dt}{t}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_u^1 \mathbb{1}\big(\frac{u}{v}\big)\omega(v)\,\frac{dv}{v}$ sera donc notée par $(\mathbb{1} *_M \omega)(u)$. Ainsi, on obtient la chose suivante :

$$\widehat{\mathbb{1}}(2n+2)\widehat{r^{p+s}\omega}(2n+2) = \int_0^1 (\mathbb{1} *_M \omega)(u)u^{2n+1}\,du = (\widehat{\mathbb{1} *_M \omega})(2n+2).$$

De la même manière, on montre que

$$\widehat{r^p\phi}(2n+2)\widehat{r^s\psi}(2n+2) = (\widehat{r^p\phi *_M r^s\psi})(2n+2).$$

Donc l'équation (3.8) est équivalente à

$$(\widehat{\mathbb{1} *_M r^{p+s}\omega})(2n+2) = (\widehat{r^p\phi *_M r^s\psi})(2n+2) \quad \forall n \geq 0.$$

D'où, d'après le Corollaire 3.2.6, on a

$$\mathbb{1} *_M r^{p+s}\omega = r^p\phi *_M r^s\psi. \tag{3.9}$$

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le théorème principal de [23] qui donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes soit un opérateur de Toeplitz. Nous avons choisi de donner l'énoncé pour deux opérateurs de degrés quasihomogènes opposés (l'un est de degré positif et l'autre est de degré négatif). Nous discuterons plus tard tous les autres cas.

Théorème 3.2.12 *Si p et s sont deux entiers positifs tels que $p \geq s$ et si ϕ et ψ sont deux T-fonctions radiales alors le produit $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement s'il existe une T-fonction radiale ω vérifiant les conditions suivantes :*

(a) $\widehat{\omega}(2k+p-s+2) = 0$ *pour* $0 \leq k \leq s-1$,

(b) $\mathbb{1} *_M r^{p+s}\omega = r^p\phi *_M r^s\psi$.

Dans ce cas $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi} = T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}$.

Il faut remarquer que si $s = 0$ alors la condition (a) n'a plus lieu d'être.

Preuve : Si $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz alors nécessairement, d'après le Corollaire 3.2.9, il est de la forme $T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}$, où ω est une T-fonction radiale. Maintenant la condition (a) n'est autre que l'équation (3.5) et la condition (b) n'est autre que l'équation (3.9).

Réciproquement si ω est une T-fonction radiale vérifiant les conditions (a) et (b) alors l'opérateur borné $T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}$ coïncide avec le produit borné $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ sur tous les éléments $(\xi^n)_{n\geq 0}$ de la base orthogonale de $L^2_a(\mathbb{D})$ et donc les deux opérateurs coïncident partout.

■

Exemples

1) Pour tout entier non nul n, on a :

$$\Big(T_{z^n\bar{z}^n}\Big)^2 = T_{|z|^{2n}(1+\log|z|^2)},$$

et

$$T_{z^{n+1}\bar{z}^n}T_{z^n\bar{z}^{n+1}} = T_{|z|^{2n}[1+(n+1)\log|z|^2]}.$$

2) Pour tous entiers non nuls m et n tels que $m \neq n$, on a :

$$T_{z^n\bar{z}^n}T_{z^m\bar{z}^m} = \frac{n}{n-m}T_{z^n\bar{z}^n} - \frac{m}{n-m}T_{z^m\bar{z}^m},$$

et

$$T_{z^{n+1}\bar{z}^n}T_{z^m\bar{z}^{m+1}}\frac{n+1}{n-m}T_{z^n\bar{z}^n} - \frac{m+1}{n-m}T_{z^m\bar{z}^m}.$$

3) L'exemple suivant a été donné par Daniel Suárez dans [30] mais sans expliquer comment expliciter le symbole de l'opérateur produit. Pour cette raison nous avons choisi de le démontrer. Pour tout $0 < r < 1$ et toute T-fonction radiale ϕ, si χ_r est la fonction caractéristique du disque $\{z : |z| \leq r\}$, alors

$$T_{\chi_r}T_\phi = T_{\chi_r\phi(\frac{\cdot}{r})}.$$

En effet, comme χ_r et ϕ sont deux fonctions radiales (c'est à dire quasihomogènes de degré 0) ainsi si le produit $T_{\chi_r}T_\phi$ est un opérateur de

Toeplitz alors, d'après le Corollaire 3.2.9, il est nécessairement de la forme T_ω où ω est une fonction radiale vérifiant, d'après le Théorème 3.2.12, l'équation de convolution de Mellin suivante :

$$\mathbb{1} *_M \omega = \chi_r *_M \phi.$$

D'où pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_t^1 \omega(u)\,\frac{du}{u} &= \int_t^1 \chi_r(u)\phi(\frac{t}{u})\,\frac{du}{u}\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t > r \\ \displaystyle\int_t^r \phi(\frac{t}{u})\,\frac{du}{u} & \text{si } t \leq r. \end{cases}\end{aligned}$$

En posant, pour $t \leq r$, le changement de variables $y = \dfrac{t}{u}$, on a

$$\int_t^r \phi(\frac{t}{u})\,\frac{du}{u} = \int_{\frac{t}{r}}^1 \phi(y)\,\frac{dy}{y}.$$

Donc

$$\int_t^1 \omega(y)\,\frac{dy}{y} = \begin{cases} 0 & \text{si } t > r \\ \displaystyle\int_{\frac{t}{r}}^1 \phi(y)\,\frac{dy}{y} & \text{si } t \leq r. \end{cases}$$

En dérivant ce système par rapport à la variable t, on obtient

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > r \\ \phi(\frac{t}{r}) & \text{si } t \leq r \end{cases}$$

ce qui est équivalent à dire que pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$\omega(t) = \chi_r(t)\phi(\frac{t}{r}).$$

Remarque 3.2.13

i) Si p et s sont deux entiers positifs et si ϕ et ψ sont deux T-fonctions radiales alors le produit $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement s'il existe une T-fonction radiale ω telle que

$$r^s *_M r^p\omega = r^{p+s}\phi *_M \psi.$$

ii) Si p et s sont deux entiers positifs et si ϕ et ψ sont deux T-fonctions radiales alors le produit $T_{e^{-ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si son adjoint $T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi}$ est un opérateur de Toeplitz et donc si et seulement si la condition du cas i) est vérifiée tout en inversant les rôles de p et s et de ϕ et ψ.

iii) Si $0 \leq p \leq s$ et si ϕ et ψ sont deux T-fonctions radiales alors le produit $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si son adjoint $T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{-ip\theta}\phi}$ l'est aussi et donc si et seulement si les conditions du Théorème 3.2.12 sont vérifiées tout en inversant les rôles de p et s et de ϕ et ψ.

Dans [8], Axler et Čučković introduisent, pour $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, l'opérateur U_φ de $L^2_a(\mathbb{D})$ dans $L^2_a(\mathbb{D})$ défini de la manière suivante :

$$U_\varphi f = (f \circ \varphi)\varphi'. \tag{3.10}$$

Cet opérateur U_φ est devenu un outil de base dans la théorie des opérateurs de Toeplitz. U_φ est un opérateur unitaire et $U_\varphi^* = U_{\varphi^{-1}}$ où φ^{-1} est l'automorphisme réciproque de φ. En effet pour toutes fonctions f et g dans $L^2_a(\mathbb{D})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle U_z f, g\rangle &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi)(\xi)\varphi'(\xi)\overline{g(\xi)}\, dA(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(z)\varphi'[\varphi^{-1}(z)]\overline{g[\varphi^{-1}(z)]}|\varphi^{-1'}(z)|^2\, dA(z), \text{ en posant } z = \varphi(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(z)\varphi'[\varphi^{-1}(z)]\varphi^{-1'}(z)\overline{g[\varphi^{-1}(z)]\varphi^{-1'}(z)}\, dA(z).
\end{aligned}$$

Or $\varphi'[\varphi^{-1}(z)]\varphi^{-1'}(z) = (\varphi \circ \varphi^{-1})(z) = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
\langle U_z f, g\rangle &= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{(g \circ \varphi^{-1})(z)\varphi^{-1'}(z)}\, dA(z) \\
&= \langle f, U_{\varphi^{-1}} g\rangle.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour toute fonction $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, on a

$$U_{\varphi^{-1}}U_\varphi f = U_{\varphi^{-1}}[(f \circ \varphi)\varphi'] = (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(\varphi' \circ \varphi^{-1})\varphi^{-1'} = f,$$

et

$$U_\varphi U_{\varphi^{-1}} f = U_\varphi[(f \circ \varphi^{-1})\varphi^{-1'}] = (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1'} \circ \varphi)\varphi' = f.$$

Le lemme suivant est une propriété bien connue de l'opérateur unitaire U_φ (voir [8, p. 7]).

Lemme 3.2.14 *Pour toute T-fonction ψ et tout automorphisme φ de $\mathbb{D}$, $U_\varphi T_\psi U_\varphi^* = T_{\psi\circ\varphi}$.*

Preuve : Pour $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, on définit l'opérateur V_φ par :

$$\begin{aligned}
V_\varphi :\ L^2(\mathbb{D}, dA) &\longrightarrow L^2(\mathbb{D}, dA) \\
f &\longmapsto (f \circ \varphi)\varphi'
\end{aligned}$$

V_φ est un opérateur unitaire (on le montre exactement de la même manière que pour U_φ) dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ et $V_\varphi^* = V_{\varphi^{-1}}$. D'autre part

$$V_{\varphi_{/L^2_a(\mathbb{D})}} = U_\varphi \quad \text{i.e} \quad V_\varphi f = U_\varphi f \ , \forall f \in L^2_a(\mathbb{D}).$$

Comme $U_\varphi f \in L^2_a(\mathbb{D})$, $\forall f \in L^2_a$ alors V_φ envoie $L^2_a(\mathbb{D})$ dans $L^2_a(\mathbb{D})$.

Qu'en est-il de $L^{2^\perp}_a(\mathbb{D})$? Soient $f \in L^{2^\perp}_a(\mathbb{D})$ et $g \in L^2_a(\mathbb{D})$ deux fonctions quelconques, on a :

$$\langle V^*_{\varphi^{-1}} f, g\rangle = \langle f, V_{\varphi^{-1}} g\rangle = 0 \ , \text{ car } V_{\varphi^{-1}} g \in L^2_a(\mathbb{D}),$$

d'où, $\forall f \in L^{2^\perp}_a(\mathbb{D})$, $V^*_{\varphi^{-1}} f$ appartient à $L^{2^\perp}_a(\mathbb{D})$. Or $V^*_{\varphi^{-1}} = V^{-1}_{\varphi^{-1}} = V_\varphi$ et donc V_φ envoie $L^{2^\perp}_a(\mathbb{D})$ dans $L^{2^\perp}_a(\mathbb{D})$.

Si $f \in L^2_a(\mathbb{D})$

$$V_h P f = V_h f \text{ et } P V_h f = V_h f \implies V_h P = P V_h \text{ sur } L^2_a(\mathbb{D}), \tag{3.11}$$

et si $f \in L^{2^\perp}_a(\mathbb{D})$

$$V_\varphi P f = V_\varphi 0 = 0 \text{ et } P V_\varphi f = 0 \implies V_\varphi P = P V_\varphi \text{ sur } L^{2^\perp}_a(\mathbb{D}). \tag{3.12}$$

Les équations (3.11) et (3.12) impliquent que $V_\varphi P = P V_\varphi$ sur $L^2(\mathbb{D}, dA)$.

Soit $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ quelconque, alors :

$$\begin{aligned} T_{\psi\circ\varphi} U_\varphi f = \ & T_{\psi\circ\varphi}\Big((f\circ\varphi)\varphi'\Big) & = P\Big((\psi\circ\varphi)(f\circ\varphi)\varphi'\Big) \\ = \ & P\Big(V_\varphi(\psi f)\Big) & = V_\varphi\Big(P(\psi f)\Big) \\ = \ & U_\varphi\Big(P(\psi f)\Big) & = U_\varphi T_\psi f. \end{aligned}$$

D'où $T_{\psi\circ\varphi} U_\varphi = U_\varphi T_\psi$ sur $L^2_a(\mathbb{D})$. Comme U_φ est unitaire on a bien donc $T_{\psi\circ\varphi} = U_\varphi T_\psi U^*_\varphi$.

■

En combinant le Théorème 3.2.12 avec le lemme précédent, nous pouvons obtenir le même résultat mais pour une classe de fonctions beaucoup plus compliquées.

Corollaire 3.2.15 *Soient p, s, ϕ, ψ et ω comme dans le Théorème 3.2.12. Si $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, $f = (e^{ip\theta}\phi\circ\varphi)$, $g = (e^{-is\theta}\psi\circ\varphi)$ et $h = (e^{i(p-s)\theta}\omega\circ\varphi)$ alors*

$$T_f T_g = T_h.$$

Preuve : Comme p, s, ϕ, ψ et ω verifient les conditions du Théorème 3.2.12 alors

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi} = T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}.$$

Comme U_φ est unitaire, on a

$$U_\varphi T_{e^{ip\theta}\phi}U_\varphi U_\varphi^* T_{e^{-is\theta}\psi}U_\varphi^* = U_\varphi T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}U_\varphi^*,$$

et donc le Lemme 3.2.14 achève la preuve. ■

Dans plusieurs cas il est difficile d'exhiber le symbole de l'opérateur produit. En effet, il n'est pas toujours facile de résoudre l'équation de convolution de Mellin de la condition (b) du Théorème 3.2.12. Par contre si le membre de droite de cette même équation est différentiable alors il est possible de donner explicitement le symbole de l'opérateur produit.

Théorème 3.2.16 *Soient $p \geq s$ deux entiers positifs. On considère deux T-fonctions radiales ϕ et ψ telles que la fonction Λ définie par :*

$$\Lambda(r) = (r^p\phi *_M r^s\psi)(r)$$

soit presque partout différentiable sur [0,1]. Soit

$$\omega(r) = -r^{1-(p+s)}\Lambda'(r),$$

alors le produit $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si

(a) ω est une T-fonction,

(b) $\widehat{\omega}(2k+p-s+2) = 0$ pour $0 \leq k \leq s-1$.

Dans ce cas $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi} = T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}$.

Preuve : Il suffit juste de remarquer que ω est une solution de l'équation de convolution de Mellin

$$\mathbb{1} *_M r^{p+s}\omega = \Lambda$$

si et seulement si

$$\int_r^1 t^{p+s}\omega(t)\,\frac{dt}{t} = \Lambda(r).$$

Maintenant, en dérivant cette équation par rapport à la variable r, on obtient

$$\omega(r) = -r^{1-(p+s)}\Lambda'(r).$$

■

Dans la suite une application simple mais intéressante de ce théorème.

Corollaire 3.2.17 *Si $p \geq s$ sont deux entiers positifs et si l_1 et l_2 sont deux réels supérieurs ou égales à -1, alors le produit $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}}T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si*

(i) $l_2 - p \geq -1$, $l_1 - s \geq -1$, *et* $s = 0$ *ou* 1,

ou

(ii) $l_1 = p = 0$ *ou* $l_2 = s = 0$.

Preuve : En gardant les mêmes notations du Théorème 3.2.16, soient $\phi(r) = r^{l_1}$ et $\psi(r) = r^{l_2}$. Il est clair que la fonction Λ définie comme dans le Théorème 3.2.16 est différentiable sur [0,1]. Ainsi le produit $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}}T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ est un opérateur de Toeplitz de symbole $e^{i(p-s)\theta}\omega$ si et seulement si la fonction ω donnée par :

$$\omega(r) = \begin{cases} \dfrac{l_2+s}{l_2+s-l_1-p}r^{l_2-p} - \dfrac{l_1+p}{l_2+s-l_1-p}r^{l_1-s} & \text{si } l_1 - s \neq l_2 - p \\ r^{l_1-s}[1+(l_1+p)\log r] & \text{si } l_1 - s = l_2 - p. \end{cases}$$

vérifie les conditions (a) et (b) du Théorème 3.2.16.

En regardant l'expression de la fonction ω, on remarque que si $l_1 - s$ ou si $l_2 - p$ est inférieur à -1 alors ω n'est pas intégrable et donc ne peut être une T-fonction. Par contre, ω est bornée ou presque bornée si la condition **(A)** suivante est satisfaite :

$$(\mathbf{A}) : \begin{cases} l_1 + p \neq 0,\ l_2 + s \neq 0,\ l_1 - s \geq -1 \text{ et } l_2 - p \geq -1; \\ \text{ou} \\ l_2 + s = 0 \text{ et } l_1 - s \geq -1; \\ \text{ou} \\ l_1 + p = 0 \text{ et } l_2 - p \geq -1; \end{cases}$$

Par conséquent ω est une T-fonction, et donc la condition (a) du Théorème 3.2.16 est satisfaite, si et seulement si **(A)** est vérifiée.

Par ailleurs, si **(A)** n'est pas vérifiée alors on ne peut pas parler de tous les coefficients de Mellin de ω puisque cette dernière ne sera pas intégrable. Donc on ne peut discuter la condition (b) du Théorème 3.2.16 que lorsque **(A)** est vraie. Dans ce cas, un calcul direct des coefficients de Mellin de ω montre que pour tout entier $m \geq 2$, on a :

(I) : Si $l_1 + p \neq 0$ et $l_2 + s \neq 0$ alors

$$\widehat{\omega}(m) = \frac{m-(p+s)}{(l_1 - s + m)(l_2 - p + m)}.$$

(II) : Si $l_1 + p \neq 0$ et $l_2 + s = 0$ alors

$$\widehat{\omega}(m) = \frac{l_1 + p}{(l_1 - s + m)(l_2 + s - l_1 - p)}.$$

(III) : Si $l_1 + p = 0$ et $l_2 + s \neq 0$ alors

$$\widehat{\omega}(m) = \frac{l_2 + s}{(l_2 - p + m)(l_2 + s - l_1 - p)}.$$

(IV) : Si $l_1 + p = 0$ et $l_2 + s = 0$ alors

$$\widehat{\omega} = \frac{1}{m - (p+s)}.$$

On voit bien que $\widehat{\omega}(m) = 0$ n'est possible que dans le cas (I), c'est-à-dire $\widehat{\omega}(m) = 0$ si et seulement si $m = p + s$, $l_1 + p \neq 0$ et $l_2 + s \neq 0$. Donc

$$\widehat{\omega}(2k + p - s + 2) = 0 \iff k = s - 1,\ l_1 + p \neq 0 \text{ et } l_2 + s \neq 0.$$

Par la suite la condition (b) du Théorème 3.2.16 est satisfaite si et seulement si $s = 0$ (ce qui correspond au cas où la condition (b) n'a plus lieu d'être) ou si $s = 1$ et $l_1 + p \neq 0$ et $l_2 + s \neq 0$ (dans ce cas $k = 0$ et $p - s + 2 = p + s$ et donc la condition (b) du Théorème 3.2.16 se résume à avoir $\widehat{\omega}(p + s) = 0$, ce qui est vrai par (I)). En résumé, si le produit $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}} T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ est un opérateur de Toeplitz alors ou bien « $s = 0$ et **(A)** est vraie » ou bien « $s = 1$, **(A)** est vraie, $l_1 + p \neq 0$ et $l_2 + s \neq 0$ ». Il est clair que ces deux conditions impliquent soit (i), soit (ii).

Réciproquement, la condition (i) implique la condition **(A)**. Donc, d'après le Théorème 3.2.16, le produit $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}} T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ sera un opérateur de Toeplitz. Si la condition (ii) est satisfaite alors au moins l'un des deux opérateurs $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}}$ et $T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ sera l'identité et donc le produit sera encore un opérateur de Toeplitz. ■

Si $0 \leq p < s$ alors, par passage à l'adjoint, on obtient un résultat analogue au Corollaire 3.2.17, à savoir : $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}} T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si

(i) $l_1 - s \leq -1$, $l_2 - p \leq -1$ et $p = 0$ ou 1,

ou

(ii) $l_1 = p = 0$ ou $l_2 = s = 0$.

Nous remarquons que la condition **(A)** de la preuve précédente montre clairement que le produit $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}} T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ peut être un opérateur de Toeplitz à symbole borné comme il peut être un opérateur Toeplitz à symbole presque borné. De là tout l'intéret d'étendre la définition des opérateurs de Toeplitz à des symboles qui sont dans $L^1(\mathbb{D}, dA)$.

Remarque 3.2.18 *Si l_1 et l_2 sont deux entiers positifs et si $p = l_1$ et $s = l_2$ (i.e. $e^{ip\theta}r^{l_1} = z^p$ et $e^{-is\theta}r^{l_2} = \bar{z}^s$) alors le corollaire précédent nous affirme que le produit $T_{z^p} T_{\bar{z}^s}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si*

*) $p = 0$ *ou* $s = 0$ *ce qui est équivalent à dire que l'un des deux opérateurs est l'identité.*
ou

**) $s = 1$, *dans ce cas le (i) du corollaire implique que* $1 - p \geq -1$ *c'est-à-dire* $p \leq 2$. *Donc* $T_{z^p}T_{\bar{z}}$ *est un opérateur de Toeplitz si et seulement si* $p = 0$, *ou* 1 *ou* 2, *ainsi la somme* $p + s$ *est toujours inférieure ou égale à* 3. *Et on redémontre donc le Théorème 3.1.5 de Ahern [1] pour les monômes. Dans notre tentative de montrer le Théorème 3.1.5 pour les polynômes en* $(z, \bar{z})$, *nous nous sommes heurtés à la question ouverte suivante : Soient* m, n, p *et* s, *quatre entiers positifs tels que* $T_{z^m}T_{\bar{z}^n} + T_{z^p}T_{\bar{z}^s}$ *soit un opérateur de Toeplitz. Peut-on affirmer que chacun des produits* $T_{z^m}T_{\bar{z}^n}$ *et* $T_{z^p}T_{\bar{z}^s}$ *est opérateur de Toeplitz ? A priori il n'y a aucune raison pour que ceci soit vrai.*

Cette méthode de résoudre l'équation de convolution de Mellin et de retrouver le symbole de l'opérateur produit ouvre la porte à d'autres questions intéressantes et surtout permet d'avoir beaucoup d'exemples non triviaux d'opérateurs de Toeplitz à symbole non harmonique dont le produit est encore un opérateur de Toeplitz et de plus le symbole du produit n'est autre que le produit des symboles. Là encore, on voit toute la différence entre les opérateurs de Toeplitz définis sur l'espace de Hardy et ceux définis sur l'espace de Bergman. J'ai choisi d'exposer dans la suite un exemple inspiré de l'article [2]. Il est intéressant dans le sens où il prouve encore une fois que sur $L^2_a(\mathbb{D})$ il est possible d'avoir des produits de type $T_fT_g = T_{fg}$ et ni $\bar{f}$ ni g est analytique. L'exemple est le suivant : Étant donné un réel $0 < r < 1$ et un entier $p \geq 0$, on cherche à trouver une T-fonction radiale ϕ telle que

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{\chi_r} = T_{e^{ip\theta}\phi\chi_r}, \tag{3.13}$$

où χ_r est la fonction caractéristique du disque $\{z : |z| \leq r\}$. Si l'égalité (3.13) est vraie alors d'après la Théorème 3.2.12, on a :

$$\mathbb{1} *_M r^p\phi\chi_r = r^p\phi *_M \chi_r. \tag{3.14}$$

Or,

$$(\mathbb{1} *_M r^p\phi\chi_r)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > r \\ \displaystyle\int_t^r u^p\phi(p)\,\frac{du}{u} & \text{si } t < r, \end{cases}$$

et

$$(r^p\phi *_M \chi_r)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > r \\ \displaystyle\int_{\frac{t}{r}}^1 u^p\phi(p)\,\frac{du}{u} & \text{si } t < r. \end{cases}$$

Donc l'équation (3.14) implique que pour tout $t < r$, on a :

$$\int_t^r u^p \phi(p)\,\frac{du}{u} = \int_{\frac{t}{r}}^1 u^p \phi(p)\,\frac{du}{u}.$$

En dérivant cette équation par rapport à la variable t, on obtient :

$$\phi(t) = \frac{1}{r^p}\phi(\frac{t}{r}). \tag{3.15}$$

Donc l'égalité (3.13) est vraie si et seulement si l'égalité (3.15) est vérifiée pour tout $t < r$.

Soit $\widetilde{\phi}$ une fonction radiale bornée définie initialement sur la couronne $\{z : r < |z| < 1\}$. Pour tout $t \in (0,1)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r^{k+1} < t < r^k$. On note par ϕ la fonction radiale définie sur $\mathbb{D}$ par

$$\phi(t) = \frac{1}{r^{kp}}\widetilde{\phi}(\frac{t}{r^k}),\ \text{pour } r^{k+1} < t < r^k. \tag{3.16}$$

Alors pour tout $t < r$, on a :

$$\phi(t) = \frac{1}{r^p}\phi(\frac{t}{r}).$$

Donc la fonction ϕ définie par (3.16) vérifie bien (3.13). Du coup, grâce à cette construction, nous avons une application injective de l'ensemble des fonctions bornées sur la couronne $\{z : r < |z| < 1\}$ dans l'ensemble des fonctions radiales ϕ telles que $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{\chi_r} = T_{e^{ip\theta}\phi\chi_r}$.

Toutefois il est difficile de caractériser les paires d'opérateurs de Toeplitz dont le produit est un opérateur de Toeplitz. En effet, le théorème (voir [23]) que nous allons énoncer dit clairement qu'il existe des opérateurs de Toeplitz quasihomogène dont le produit est un opérateur de Toeplitz quasihomogène comme il existe d'autres tels que leur produit n'est pas un opérateur de Toeplitz. Nous aurons besoin dans la preuve de notre théorème du lemme (voir [23]) suivant concernant les coefficients de Mellin des polynômes.

Lemme 3.2.19 *Pour tous entiers p et s dans $\mathbb{N}$, il existe un polynôme non nul q tel que :*

(i) $q(r) = a_0 r^p + a_1 r^{p+1} + \cdots + a_p r^{p+s}$,
et
(ii) $\widehat{q}(2k+2) = 0$ *pour* $0 \leq k \leq s-1$.

Preuve : En calculant les coefficients de Mellin du polynôme q, il vient que pour tout $0 \leq k \leq s-1$, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{q}(2k+2) &= \sum_{n=0}^{s} a_n \widehat{r^{p+n}}(2k+2) \\ &= \sum_{n=0}^{s} a_n \frac{1}{2k+p+n+2}.\end{aligned}$$

La condition (ii) est alors équivalente au système suivant de s équations à s inconnus

$$\begin{cases} \widehat{q}(2) &= \sum_{n=0}^{s} a_n \widehat{r^{p+n}}(2) &= 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{q}(2s) &= \sum_{n=0}^{s} a_n \widehat{r^{p+n}}(2s) &= 0 \end{cases}$$

Prouver l'existence du polynôme q revient alors à montrer l'existence d'un vecteur non nul $v = (a_1, a_2, \cdots, a_s)$ tel que

$$Mv = c,$$

où

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+3} & \frac{1}{p+4} & \cdots & \frac{1}{p+s+2} \\ \frac{1}{p+5} & \frac{1}{p+6} & \cdots & \frac{1}{p+s+5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p+2s+1} & \frac{1}{p+2s+2} & \cdots & \frac{1}{p+3s} \end{pmatrix}$$

et

$$c = -\begin{pmatrix} \frac{a_0}{p+2} \\ \frac{a_0}{p+4} \\ \vdots \\ \frac{a_0}{p+2s} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice M est une matrice de Cauchy (voir [21, p. 36]) et donc inversible. En effet :

$$M = \Big(\frac{1}{p+2i+j}\Big)_{i,j=1}^{s}$$

et son déterminant est :

$$\det(M) = \frac{2^{\frac{s(s-1)}{2}}(1!2!\cdots(s-2)!(s-1)!)^2}{\Pi_{1\leq i,j\leq s}(n+2i+j)} \neq 0.$$

Par conséquent le polynôme q existe et vérifie la condition (ii). ∎

Théorème 3.2.20 *Soit $p \geq s$ deux entiers positifs. Alors :*
(i) Il existe deux T-fonctions radiales ϕ et ψ telles que $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ soit un opérateur de Toeplitz.
(ii) Il existe deux T-fonctions radiales ϕ et ψ telles que $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ ne soit pas un opérateur de Toeplitz.

Pour la preuve, nous aurons besoin de la notion du « degré minimal » d'un polynôme $q(r)$ défini d'être le plus grand entier n tel que le quotient $\frac{q(r)}{r^n}$ soit encore un polynôme.
Preuve : Soient $\phi(r) = r^s$ et $\psi(r) = r^s q(r)$, où $q(r)$ est le polynôme de degré $p+s$ du Lemme 3.2.19. Comme $r^{2s}q$ est un polynôme de degré minimal $p+2s$ alors la fonction Λ, du Théorème 3.2.16, définie par :

$$\Lambda = r^{p+s} *_M r^{2s} q$$

est aussi un polynôme de degré minimal $p+s$. Ainsi Λ est différentiable et la fonction radiale ω donnée par :

$$\omega(r) = -r^{1-(p+s)}\Lambda'(r)$$

est encore un polynôme, donc une T-fonction. Ce qui prouve la condition (a) du Théorème 3.2.16. Pour montrer que cette même fonction ω vérifie la condition (b) du Théorème 3.2.16, il suffit de calculer ses coefficients de Mellin. En effet pour tout $0 \leq k \leq s-1$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}(2k+p-s+2) &= \int_0^1 -r^{1-(p+s)}\Lambda'(r) r^{2k+p-s+1}\, dr \\ &= -\int_0^1 \Lambda'(r) r^{2k-2s+2}\, dr.\end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie et en remarquant que $\Lambda(1) = 0$, on obtient que pour tout $0 \leq k \leq s-1$:

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}(2k+p-s+2) &= -\left[\Lambda(r) r^{2k-2s+2}\right]_0^1 + (2k-2s+2)\int_0^1 \Lambda(r) r^{2k-2s+1}\, dr \\ &= (2k-2s+2)\int_0^1 \Lambda(r) r^{2k-2s+1}\, dr.\end{aligned}$$

Or

$$\Lambda(r) = (t^{p+s} *_M t^{2s} q)(r) = r^{2s}(t^{p-s} *_M q)(r).$$

D'où pour tout $0 \leq k \leq s-1$:

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}(2k+p-s+2) =&(2k-2s+2)\int_0^1 (t^{p-s} *_M q)(r) r^{2k+1} dr\\ =&(2k-2s+2)\widehat{(r^{p-s} *_M q)}(2k+2)\\ =&(2k-2s+2)\widehat{r^{p-s}}(2k+2)\widehat{q}(2k+2)\\ =&0,\end{aligned}$$

car $\widehat{q}(2k+2) = 0$ pour $0 \leq k \leq s-1$. Ce qui prouve que ω vérifie la condition (b) du Théorème 3.2.16 et donc le produit $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz. D'où le (i).

Pour le (ii), il existe évidemment beaucoup d'exemples d'opérateurs de Toeplitz quasihomogènes dont le produit n'est pas un opérateur de Toeplitz. Ainsi dés que p ou s est plus grand que 1, le Corollaire 3.2.17 montre qu'en posant $l_1 = p-2$ et $l_2 = s-2$, le produit $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}}T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ n'est plus un opérateur de Toeplitz. Si $p = s = 1$ ou $p = 1$ et $s = 0$, et en prenant $\phi(r) = r^{-1}$ et $\psi(r) = r^{-1}$, le Théorème 3.2.16 montre que si $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ était un opérateur de Toeplitz alors son symbole serait $e^{i(p-s)\theta}r^{-2}$ qui n'est pas une T-fonction et donc le produit ne peut pas être un opérateur de Toeplitz.

Le cas $p = s = 0$ est le plus difficile à traiter. Il faut trouver deux T-fonctions radiales ϕ et ψ telles que $T_\phi T_\psi$ ne soit pas un opérateur de Toeplitz. L'idée de la construction de ces deux T-fonctions radiales nous a été proposée pas A. Borichev. Elle consiste à remarquer que pour toute fonction radiale $\omega \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ et pour tout réel $\alpha \in (0,1)$, la fonction $\mathbb{1} *_M \omega$ est bornée sur l'intervalle $[\alpha, 1]$. En effet, pour tout $t \in [\alpha, 1]$, on a :

$$|(\mathbb{1} *_M \omega)(t)| \leq \int_t^1 |\omega(s)| \frac{ds}{s} \leq \frac{1}{\alpha^2}\|\omega\|_{L^1}.$$

Donc si on construit une T-fonction radiale ϕ telle que la fonction $\phi *_M \phi$ ne soit pas bornée sur $[\alpha, 1]$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$ alors il n'y aura pas de fonction radiale ω solution de l'équation $\phi *_M \phi = \mathbb{1} *_M \omega$, ce qui est équivalent à dire que le produit $T_\phi T_\phi$ n'est pas un opérateur de Toeplitz. Pour cela, soit $(t_k)_{k=0}^\infty$ une suite dans $[\frac{1}{2}, 1)$ qui tend vers 1, et soit $(\varepsilon_k)_{k=0}^\infty$ la suite définie par :

$$\varepsilon_k = \min\Big(t_k^{\frac{1}{2}} - t_k;\ (\frac{1}{2})^{3k}(1 - t_k^{\frac{1}{2}})^6\Big).$$

Maintenant, soit ϕ la fonction radiale définie sur $[0,1]$ par :

$$\phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{-\frac{2}{3}} \chi_{[t_k - \varepsilon_k, t_k + \varepsilon_k]}(r).$$

$\phi \in L^1([0,1], rdr)$. En effet

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\phi(r)|\, rdr &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k^{-\frac{2}{3}} \chi_{[t_k-\varepsilon_k, t_k+\varepsilon_k]}(r)\, rdr \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k^{-\frac{2}{3}} \int_0^1 \chi_{[t_k-\varepsilon_k, t_k+\varepsilon_k]}(r)\, rdr \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k^{-\frac{2}{3}} \int_{t_k-\varepsilon_k}^{t_k+\varepsilon_k} rdr \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k^{-\frac{2}{3}} [(t_k+\varepsilon_k)^2 - (t_k-\varepsilon_k)^2] \\
&= 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k^{\frac{1}{3}} t_k.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon_k \leq (\frac{1}{2})^{3k}(1-t_k^{\frac{1}{2}})^6$ et $t_k < 1$ alors $\varepsilon_k \leq (\frac{1}{2})^{3k}$. Donc

$$\int_0^1 |\phi(r)|\, rdr \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k < \infty.$$

Il reste à vérifier que ϕ est une T-fonction. Pour cela il suffit, d'après la Proposition 3.2.4, de montrer que la suite $(n\widehat{\phi}(n))_{n=0}^{\infty}$ est bornée.

$$\begin{aligned}
n\widehat{\phi}(n) &= n \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k^{-\frac{2}{3}} \chi_{[t_k-\varepsilon_k, t_k+\varepsilon_k]}(r) r^{n-1}\, dr \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k^{-\frac{2}{3}} [(t_k-\varepsilon_k)^n - (t_k+\varepsilon_k)^n]
\end{aligned}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $t \mapsto t^n$ sur l'intervalle $[t_k - \varepsilon_k, t_k + \varepsilon_k]$ implique qu'il existe un réel

$$t'_k \in (t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon) \subseteq (t_k - \varepsilon, t_k^{\frac{1}{2}})$$

tel que :

$$\frac{(t_k-\varepsilon)^n - (t_k+\varepsilon)^n}{2\varepsilon} = n(t'_k)^{n-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} n\widehat{\phi}(n) &= 2n\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k^{\frac{1}{3}}(t'_k)^{n-1} \\ &\leq 2n\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k^{\frac{1}{3}}(t_k^{\frac{1}{2}})^{n-1}, \end{aligned}$$

car $t'_k < t_k^{\frac{1}{2}}$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} n\widehat{\phi}(n) &\leq 2\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k^{\frac{1}{3}}\sum_{n=2}^{+\infty} n(t_k^{\frac{1}{2}})^{n-1} \\ &\leq 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varepsilon_k^{\frac{1}{3}}}{(1-t_k^{\frac{1}{2}})^2} \\ &\leq 2\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

La série converge et donc son terme général $n\widehat{\phi}(n)$ est borné et par la suite ϕ est une T-fonction. Par ailleurs, pour tout t_k, on a :

$$|(\phi *_M \phi)(t_k^2)| = \int_{t_k^2}^{1}\phi(r)\phi\big(\frac{t_k^2}{r}\big)\,\frac{dr}{r} \geq \int_{t_k}^{t_k+\varepsilon_k}\phi(r)\phi\big(\frac{t_k^2}{r}\big)\,\frac{dr}{r} \geq \frac{\varepsilon_k^{-\frac{1}{3}}}{\varepsilon_k + t_k}.$$

Or $\dfrac{\varepsilon_k^{-\frac{1}{3}}}{\varepsilon_k + t_k}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ car ε_k tend vers 0. Donc le produit de convolution $\phi *_M \phi$ ne peut pas être bornée sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et par la suite le produit $T_\phi T_\phi$ n'est pas un opérateur de Toeplitz. ■

Remarque 3.2.21 *Un autre exemple de T-fonction radiale ϕ telle que $T_\phi T_\phi$ ne soit pas un opérateur de Toeplitz a été donné par Ahern et Čučković dans [2]. En effet si ϕ est une T-fonction radiale telle que $T_\phi T_\phi = T_\omega$ alors, d'après le Théorème 3.2.12, pour tout z dans le demi-plan $\Pi := \{z : \Re z > 2\}$, on a*

$$\widehat{\phi}(z)\widehat{\phi}(z) = \frac{\widehat{\omega}(z)}{z}.$$

En particulier, comme la transformation de Mellin est bornée sur le demi-plan Π alors il existe une constante positive c telle que :

$$|\widehat{\phi}(z)\widehat{\phi}(z)| \leq \frac{c}{|z|}.$$

Donc l'idée est de trouver une fonction radiale ϕ telle que $\widehat{\phi *_M \phi}$ ne soit pas un $O(\frac{1}{|z|})$. Tout d'abord, on commence par calculer :

$$\widehat{\phi}(2+i2^n) = \int_0^1 \phi(r) r^{1+i2^n}\, dr.$$

Puis, on effectue le changement de variables $r = e^{-t}$ et on obtient :

$$\widehat{\phi}(2+i2^n) = \int_0^{+\infty} \phi(e^{-t}) e^{-2t} e^{-i2^n t}\, dt. \tag{3.17}$$

Ensuite, on définit ϕ de la manière suivante :

$$\phi(e^{-t})e^{-2t} = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{i2^k t}}{k^2} & si\ 2\pi \leq t \leq 4\pi, \\ 0 & sinon\ . \end{cases}$$

La constante $-\frac{\pi^2}{6}$ est choisie de sorte que $\phi(e^{-2\pi})e^{-4\pi}$ et $\phi(e^{-4\pi})e^{-8\pi}$ soient nulles. En effet :

$$\phi(e^{-2\pi})e^{-4\pi} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{i2^k 2\pi}}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 0,$$

car $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Idem pour $\phi(e^{-4\pi})e^{-8\pi}$. Donc la fonction ϕ ainsi définie est continue à support compact sur $(0,1)$ (en effet pour pour tout $2\pi \leq t \leq 4\pi$, $e^{-t} \in (0,1)$). Maintenant, dans l'équation (3.17), en permutant les signes $\sum$ et $\int$, il vient que :

$$\widehat{\phi}(2+i2^n) = -\frac{\pi^2}{6} \int_{2\pi}^{4\pi} e^{-i2^n t}\, dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \int_{2\pi}^{4\pi} e^{i(2^k - 2^n)t}\, dt.$$

Or

$$\int_{2\pi}^{4\pi} e^{i(2^k-2^n)t}\, dt = \begin{cases} 0 & si\ k \neq n \\ 2\pi & si\ k = n. \end{cases}$$

D'où

$$\widehat{\phi}(2+i2^n) = \frac{2\pi}{n^2},$$

et

$$(\widehat{\phi *_M \phi})(2+i2^n) = \frac{4\pi^2}{n^4}.$$

Il est clair que $\frac{4\pi^2}{n^4}$ n'est pas un $O(\frac{1}{2^n})$ et donc $T_\phi T_\phi$ n'est pas un opérateur de Toeplitz.

Dans notre étude des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes, nous nous sommes aussi intéressés à la question des diviseurs de zéro qui, rappelons le, est toujours une question ouverte pour les opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman. La technique de regarder les coefficients de Mellin a permis d'éliminer plusieurs cas et de pouvoir affimer que si le produit de deux opérateurs de Toeplitz, dont l'un est de symbole quasihomogène et l'autre de symbole une T-fonction quelconque, est nul alors forcément l'un des facteurs est nul.

Le théorème suivant est dû à Ahern et Čučković dans [2].

Théorème 3.2.22 *Soient p un entier positif, f une T-fonction et ψ une T-fonction radiale tels que $T_f T_{e^{ip\theta}\psi} = 0$ alors f ou ψ est nulle.*

Preuve : Si $T_f T_{e^{ip\theta}\psi} = 0$ alors, d'après le Lemme 3.2.2, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(2k+2p+2)\widehat{\psi}(2k+p+2)T_f(z^{k+p}) = 0. \tag{3.18}$$

Soit $E := \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\psi}(2k+2p+2) = 0\}$. Si

$$\sum_{k\in E} \frac{1}{2k+2} = +\infty$$

alors, d'après la Proposition 3.2.6, $r^{2p}\psi = 0$ et donc ψ est nulle. Sinon, on a nécessairement :

$$\sum_{k\in E^c} \frac{1}{2k+2} = +\infty,$$

où E^c est le complémentaire de l'ensemble E dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in E^c$ l'équation (3.18) implique que $T_f(z^{k+p}) = 0$. D'où pour tout $k \in E^c$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\langle T_f z^{k+p}, z^n\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) z^{k+p} \bar{z}^n \, dA(z) = 0.$$

Par passage en coordonnées polaires, on obtient pour tout $k \in E^c$ et tout entier n :

$$\int_0^1 r^{k+n+p+1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{i(k-n+p)\theta} \frac{d\theta}{\pi} \, dr = 0.$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ un entier fixé ; il existe toujours un $n \in \mathbb{N}$ tel que $m+n-p$ soit dans E^c. Pour tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $m+n-p \in E^c$, on a :

$$\int_0^1 r^{m+2n+1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{im\theta} \frac{d\theta}{\pi} \, dr = 0.$$

Or, il est clair que :

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m+n-p\in E^c}} \frac{1}{m+2n+1} = +\infty.$$

D'où, d'après le théorème de Müntz-Szasz :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{im\theta}\,\frac{d\theta}{\pi} = 0$$

pour presque tout $r \in [0,1]$. Mais ceci reste vrai pour tout entier m. Donc f est nulle. ∎

Remarque 3.2.23 *Si $p \in \mathbb{N}$ et si $T_fT_{e^{-ip\theta}\psi} = 0$ alors, en composant à droite par T_{z^p}, on se ramène à $T_fT_{r^p\psi} = 0$. Or le symbole $r^p\psi$ est une fonction radiale, en particulier elle est quasihomogène de degré 0, et donc par le théorème précédent on peut affirmer que $f = 0$ ou $r^p\psi = 0$ i.e. $\psi = 0$.*

D'autre part si $T_{e^{ip\theta}\psi}T_f = 0$ alors par passage à l'adjoint on aura $T_{\bar{f}}T_{e^{-ip\theta}\psi} = 0$ et donc le même raisonnement est encore valable.

Récemment, dans [17], Čučković conjecture que, si le produit de deux opérateurs de Toeplitz est nul et si l'un des symboles est une fonction harmonique alors nécessairement l'un des facteurs est nul. Pour aboutir à ce résultat, l'idée de Čučković était de combiner les transformations de Berezin et de Mellin. Il obtient le théorème suivant.

Théorème 3.2.24 *(1) Soit $f \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ et soit g la fonction définie par $g(z) = z^j - \bar{z}^l$, où $j,\ l \in \mathbb{N}$. Si $T_fT_g = 0$ alors $f = 0$.*

(2) Soit $f(re^{i\theta}) = \sum_{k<0} e^{ik\theta}f_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ et soit $g = g_1 + \overline{g_2}$, où les deux fonctions g_1 et g_2 sont dans $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$. Si $T_fT_g = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Comme corollaire de ce théorème, Čučković obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.2.25 *Soit $f(re^{i\theta}) = \sum_{k<0} e^{ik\theta}f_k(r) + \sum_{k=0}^{N} e^{ik\theta}f_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ et soit $g = g_1 + \overline{g_2}$, où g_1 et g_2 sont dans $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$. Si $T_fT_g = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$.*

Preuve : On suppose que $T_fT_g = 0$. En composant à gauche par $T_{\bar{z}^{N+1}}$, on obtient :

$$T_{\bar{z}^{N+1}}T_fT_g = T_{\bar{z}^{N+1}f}T_g = 0.$$

Or $\bar{z}^{N+1}f$ n'a que des composantes d'indice négatif dans sa décomposition polaire. En effet :

$$(\bar{z}^{N+1}f)(re^{i\theta}) = \sum_{k<-N-1} e^{ik\theta}r^{N+1}f_{k+N+1}(r) + \sum_{-N-1}^{-1} e^{ik\theta}r^{N+1}f_{k+N+1}(r).$$

Donc le théorème précédent implique que, $\bar{z}^{N+1}f = 0$ i.e. $f = 0$, ou $g = 0$. ■

La question, qui reste à résoudre, est donc de savoir ce qui se passe si la fonction f avait une infinité de composantes positives dans sa décomposition polaire.

Chapitre 4

Commutativité des opérateurs de Toeplitz

Si ϕ et ψ sont deux T-fonctions analytiques alors T_ϕ et T_ψ sont les opérateurs de multiplication sur $L_a^2(\mathbb{D})$ respectivement par ϕ et ψ et donc ils commutent. Par ailleurs si $\overline{\phi}$ et $\overline{\psi}$ sont deux T-fonctions analytiques alors

$$\big(T_\phi T_\psi\big)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\phi}} = T_{\overline{\phi}} T_{\overline{\psi}} = \big(T_\psi T_\phi\big)^*,$$

et donc $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$.

Nous avons vu que sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$, Brown et Halmos ont montré que deux opérateurs de Toeplitz commutent si et seulement si leurs symboles sont tous les deux analytiques, ou tous les deux anti-analytiques, ou l'un est une application affine de l'autre. La situation sur l'espace de Bergman est complètement différente et beaucoup plus compliquée. Par exemple deux opérateurs à symbole radial commutent. En effet, si ϕ est un symbole radial (en particulier ϕ est une fonction quasihomogène de degré 0) alors d'après la Remarque 3.2.3 la matrice de l'opérateur de Toeplitz T_ϕ dans la base orthonormée de $L_a^2(\mathbb{D})$ est une matrice diagonale avec pour éléments sur la diagonale principale la suite $\{\sqrt{k+1}(2k+2)\widehat{\phi}(2k+2)\}_{k\geq 0}$. Comme deux matrices diagonales commutent toujours, donc les opérateurs de Toeplitz à symbole radial commutent.

Dans la suite nous présentons les travaux de Axler, Čučković et Rao concernant la commutativité des opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique.

4.1 Commutativité des opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique

Dans [8], Axler et Čučković étudient la commutativité des opérateurs de Toeplitz à symbole harmonique sur l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ et montrent un résultat analogue au Théorème 1.6.1 de Brown et Halmos sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$. Rappelons que la preuve du Théorème 1.6.1 repose essentiellement sur les manipulations des matrices de Toeplitz dans la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$. Ces matrices ont la particularité d'être constantes sur toutes les diagonales. Cette propriété n'est plus vraie sur l'espace de Bergman. La preuve d'Axler et Čučković utilise des propriétés de type la valeur moyenne invariante. Leur théorème est le suivant [8, p. 2].

Théorème 4.1.1 *Soit ϕ et ψ deux fonctions harmoniques bornées sur $\mathbb{D}$. Alors*

$$T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$$

si et seulement si

(a) ϕ et ψ sont toutes les deux analytiques sur $\mathbb{D}$,
ou
(b) $\overline{\phi}$ et $\overline{\psi}$ sont toutes les deux analytiques sur $\mathbb{D}$,
ou
(c) il existe deux constantes complexes non nulles α et β telles que

$$\phi = \alpha\psi + \beta.$$

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant qui dit qu'une fonction est harmonique sur le disque $\mathbb{D}$ si et seulement si elle vérifie la propriété de la valeur moyenne invariante pour les surfaces et si sa radialisation, définie auparavant par (3.2.7), peut être prolongée par continuité sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$.

Lemme 4.1.2 *Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{D}) \cap L^1(\mathbb{D}, dA)$. u est harmonique sur $\mathbb{D}$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{D}} u \circ h \, dA = u(h(0))$$

et

$$rad(u \circ h) \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \text{ pour tout } h \in Aut(\mathbb{D}).$$

Nous présenterons dans la suite la preuve du Théorème 4.1.1 pour voir comment les techniques utilisées sont complètement différentes de celles utilisées par Brown et Halmos lorsqu'ils ont résolu la question de la commutativité des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$.

Preuve : Comme nous l'avons déjà vu auparavant si ϕ et ψ sont deux fonctions harmoniques bornées sur $\mathbb{D}$ alors elles se décomposent de la manière suivante à savoir :

$$\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2} \text{ et } \psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$$

où ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2 sont dans l'espace de Bloch.

En appliquant l'opérateur $T_\phi T_\psi$ à la fonction $\mathbb{1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} T_\phi T_\psi \mathbb{1} &= T_\phi[P(\psi_1 + \overline{\psi_2(0)})] \\ &= T_\phi(\psi_1 + \overline{\psi_2(0)}) \\ &= P([\phi_1 + \overline{\phi_2}][\psi_1 + \overline{\psi_2(0)}]) \\ &= \phi_1\psi_1 + \overline{\psi_2(0)}\phi_1 + P(\overline{\phi_2}\psi_1) + \overline{\phi_2(0)\psi_2(0)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\langle T_\phi T_\psi \mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle = \int_{\mathbb{D}} \phi_1\psi_1 + \overline{\psi_2(0)}\phi_1 + \overline{\phi_2}\psi_1 + \overline{\phi_2(0)\psi_2(0)}\, dA.$$

Comme ϕ_1 et ψ_1 sont des fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ alors d'après le Lemme 4.1.2, on a :

$$\langle T_\phi T_\psi \mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle = \phi_1(0)\psi_1(0) + \phi_1(0)\overline{\psi_2(0)} + \overline{\phi_2(0)\psi_2(0)} + \int_{\mathbb{D}} \overline{\phi_2}\psi_1\, dA. \quad (4.1)$$

De la même manière, on montre que :

$$\langle T_\psi T_\phi \mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle = \phi_1(0)\psi_1(0) + \overline{\phi_2(0)}\psi_1(0) + \overline{\phi_2(0)\psi_2(0)} + \int_{\mathbb{D}} \phi_1\overline{\psi_2}\, dA. \quad (4.2)$$

Si $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$ alors, d'après les deux équations (4.1) et (4.2), on obtient que :

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{\phi_2}\psi_1 - \phi_1\overline{\phi_2}\, dA = \overline{\phi_2(0)}\psi_1(0) - \phi_1(0)\overline{\psi_2(0)}. \quad (4.3)$$

Soit $h \in Aut(\mathbb{D})$ et U_h l'opérateur unitaire défini dans le chapitre précédent par (3.10). Si $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$ alors :

$$U_h T_\phi U_h^* U_h T_\psi U_h^* = U_h T_\psi U_h^* U_h T_\phi U_h^*.$$

D'où d'après le Lemme 3.2.14 :

$$T_{\phi\circ h} T_{\psi\circ h} = T_{\psi\circ h} T_{\phi\circ h}.$$

Sachant que $\phi\circ h = \phi_1\circ h + \overline{\phi_2}\circ h$ et $\psi\circ h = \psi_1\circ h + \overline{\psi_2}\circ h$, l'équation (4.3) devient :

$$\int_{\mathbb{D}} (\overline{\phi_2}\psi_1 - \phi_1\overline{\phi_2})\circ h\, dA = \overline{\phi_2(h(0))}\psi_1(h(0)) - \phi_1(h(0))\overline{\psi_2(h(0))}.$$

En posant $u = \overline{\phi_2}\psi_1 - \phi_1\overline{\psi_2}$, la dernière égalité est équivalente à :

$$\int_{\mathbb{D}} (u \circ h)\, dA = u(h(0)).$$

En d'autres termes u possède la propriété de la valeur moyenne invariante pour les surfaces.

Ce qu'il faut montrer maintenant est que u est harmonique sur $\mathbb{D}$. Pour cela il suffit, d'après le Lemme 4.1.2, de prouver que $rad(u \circ h) \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$. Comme $\phi_2 \circ h$ et $\psi_1 \circ h$ sont dans l'espace de Bloch alors elles sont developpables en série de Taylor, c'est-à-dire qu'il existe deux suites complexes (a_n) et (b_n) telles que pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$(\phi_2 \circ h)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

et

$$(\psi_1 \circ h)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty, \tag{4.4}$$

car l'espace de Bloch est inclus dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. Ainsi pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$\begin{aligned} rad[(\overline{\phi_2}\psi_1) \circ h](z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\overline{\phi_2} \circ h)(e^{i\theta}z)(\psi_1 \circ h)(e^{i\theta}z)\, d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n b_n |z|^{2n}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy- Schwarz, (4.4) implique que pour tout $|z| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{a}_n b_n||z|^2 &\leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Donc $rad[(\overline{\phi_2}\psi_1) \circ h]$ converge uniformement sur $\overline{\mathbb{D}}$, ce qui implique que :

$$rad[(\overline{\phi_2}\psi_1) \circ h] \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}).$$

De la même manière, on montre aussi que $rad[(\phi_1\overline{\psi_2}) \circ h] \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Donc, d'après le Lemme 4.1.2, u est harmonique. Par la suite :

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big) &= 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\frac{\partial(\overline{\phi_2}\psi_1 - \phi_1\overline{\psi_2})}{\partial z}\Big) \\ &= 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\overline{\phi_2}\psi_1' - \phi_1'\overline{\psi_2}), \end{aligned}$$

car $\frac{\partial \overline{\phi_2}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{z}}\right)} = 0$ et $\frac{\partial \overline{\psi_2}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}}\right)} = 0$ puisque ϕ_2 et ψ_2 sont analytiques sur $\mathbb{D}$. D'où :

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big) &= 4(\overline{\phi_2'}\psi_1' - \phi_1'\overline{\psi_2'}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$u \text{ est harmonique sur } \mathbb{D} \iff \overline{\phi_2'}\psi_1 = \phi_1'\overline{\psi_2'} \text{ sur } \mathbb{D}. \tag{4.5}$$

Regardons maintenant comment cette équivalence (4.5) implique l'une des trois situations (a) ou (b) ou (c) du théorème :

Premier cas : Si $\psi_1' = 0$ sur $\mathbb{D}$, alors (4.5) implique que, ou bien ψ_2' ou bien ϕ_1' est identiquement nulle dans $\mathbb{D}$. D'où :

(i) Si $\psi_2' = 0$ sur $\mathbb{D}$, alors $\psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$ est constante sur $\mathbb{D}$ et alors en prenant $a = 0$ il vient que $a\phi + \psi$ est constante sur $\mathbb{D}$.

(ii) Si $\phi_1' = 0$ sur $\mathbb{D}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} \dfrac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{z}} &=& \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\big[\overline{\phi_1} + \phi_2\big] &=& \dfrac{\partial \overline{\phi_1}}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \overline{z}} &=& \overline{\phi_1'} &=& 0 \\ \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \overline{z}} &=& \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\big[\overline{\psi_1} + \psi_2\big] &=& \dfrac{\partial \overline{\psi_1}}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} &=& \overline{\psi_1'} &=& 0. \end{array} \right.$$

et donc $\overline{\phi}$ et $\overline{\psi}$ sont analytiques sur $\mathbb{D}$.

Deuxième cas : Si ψ_1' et ψ_2' sont toutes les deux non identiquement nulles sur $\mathbb{D}$. Puisque ψ_1' et ψ_2' sont analytiques dans $\mathbb{D}$ alors l'ensemble des zéros de ψ_1' et celui de ψ_2' sont de mesure nulle. Donc (4.5) implique que :

$$\frac{\phi_1'}{\psi_1'} = \overline{\left(\frac{\phi_2'}{\psi_2'}\right)}. \tag{4.6}$$

La fonction $\dfrac{\phi_1'}{\psi_1'}$ est méromorphe dans sur$\mathbb{D}$. En effet elle est analytique sur $\mathbb{D}\backslash\{$ les zéros de $\psi_1'\}$, de même $\dfrac{\phi_2'}{\psi_2'}$ est analytique sur $\mathbb{D}\backslash\{$ les zéros de $\psi_2'\}$.

(5.2) implique que la fonction $\dfrac{\phi_1'}{\psi_1'}$ ainsi que sa conjuguée sont méromorphes dans $\mathbb{D}$. Donc forcément $\dfrac{\phi_1'}{\psi_1'}$ est constante sur $\mathbb{D}\backslash\{$ les zéros de $\psi_1'\}$. Il existe alors une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\begin{cases} \phi_1' - c\psi_1' = 0 & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \phi_2' - \overline{c}\psi_2' = 0 & \text{sur } \mathbb{D}, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \phi_1 - c\psi_1 \text{ est constante sur } \mathbb{D}, & (1) \\ \phi_2 - \overline{c}\psi_2 \text{ est constante sur } \mathbb{D}. & (2) \end{cases}$$

En passant au conjugué dans (2) et en sommant avec (1), on obtient :

$$(\phi_1 + \overline{\phi_2}) - c(\psi_1 + \overline{\psi_2}) \text{ est constante sur } \mathbb{D},$$

c'est-à-dire $\phi - c\psi$ est constante sur $\mathbb{D}$.

■

Il découle de ce théorème le corollaire suivant concernant les opérateurs de Toeplitz normaux.

Corollaire 4.1.3 *Soit ϕ une fonction harmonique bornée sur $\mathbb{D}$. Alors l'opérateur T_ϕ est normal i.e. $T_\phi T_\phi^* = T_\phi^* T_\phi$ si et seulement si l'ensemble $\phi(\mathbb{D})$ vit sur une droite du plan complexe $\mathbb{C}$.*

Preuve : On suppose qu'il existe deux constantes non nulles α et β dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\phi(z) = \alpha z + \beta \ , \forall z \in \mathbb{D},$$

alors $\overline{\beta}\phi(z) - \alpha\overline{\beta}z = |\beta|^2 \in \mathbb{R}$ et ceci pour tout $z \in \mathbb{D}$. En notant $a = \overline{\beta}$ et $b = -\alpha\overline{\beta}$, il vient que l'opérateur $a\phi + b$ est à valeurs réelles sur $\mathbb{D}$. Ainsi :

$$T_{a\phi+b}^* = T_{\overline{a\phi+b}} = T_{a\varphi+b} \ \text{ i.e. } \ T_{a\varphi+b} \text{ est auto-adjoint, donc normal .}$$

Comme $T_\phi = a^{-1}(T_{a\phi+b} - bI)$, alors T_ϕ est aussi un opérateur normal.

Réciproquement, on suppose que T_ϕ est normal. Comme la fonction ϕ est harmonique et bornée dans $\mathbb{D}$, $\overline{\phi}$ est aussi harmonique et bornée dans $\mathbb{D}$. Alors d'après le théorème précédent, il vient que :

$$\begin{cases} (1)\ \phi \text{ et } \overline{\phi} \text{ sont toutes les deux analytiques dans } \mathbb{D}, \\ \ \text{ou bien} \\ (2)\ \exists (a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } a\phi + b\overline{\phi} \text{ est constante dans } \mathbb{D}. \end{cases}$$

(1) implique que ϕ est constante dans $\mathbb{D}$ et donc l'ensemble $\phi(\mathbb{D})$ est inclus dans une droite de $\mathbb{C}$.
(2) implique l'existence d'une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $a\phi + b\overline{\phi} = c$ sur $\mathbb{D}$ c'est-à-dire $(a+b)\Re\phi + i(a-b)\Im\phi = c$, d'où :

$$\begin{cases} \text{Si } a-b=0 \text{ alors } \Re\phi(z) = \dfrac{c_1}{a+b}, \ \forall z \in \mathbb{D}, \text{ où } c_1 \in \mathbb{C}; \\ \text{Si } a+b=0 \text{ alors } \Im\phi(z) = \dfrac{c_2}{a-b}, \ \forall z \in \mathbb{D}, \text{ où } c_2 \in \mathbb{C}; \\ \text{Si } a+b \neq 0 \text{ et } a-b \neq 0 \text{ alors } \phi(z) = c_3, \ \forall z \in \mathbb{D}, \text{ où } c_3 \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

■

À la fin de leur article [8], Axler et Čučković se posent la question suivante : Est-ce que le Théorème 4.1.1 est valable pour un domaine borné Ω quelconque de $\mathbb{C}$? Dans ce cas l'opérateur de Toeplitz sera défini dans l'espace de Bergman $L_a^2(\Omega)$ associé au domaine Ω. La preuve du Théorème 4.1.1 utilise souvent les automorphises du disque $\mathbb{D}$. Or il est généralement difficile de donner explicitement le groupe d'automorphismes d'un domaine borné quelconque de $\mathbb{C}$. Donc la preuve du Théorème 4.1.1 n'est plus valable si le disque $\mathbb{D}$ est remplacé par Ω.

Dans [9], Axler, Čučković et Rao donnent non seulement la réponse à cette question mais également ils prouvent qu'un opérateur de Toeplitz analytique (c'est-à-dire à symbole analytique) ne peut commuter qu'avec un opérateur de Toeplitz de même type. Du coup leur résultat est une généralisation d'un résultat dû à Čučković dans [16] qui montre que dans l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ si $\phi(z) = z^n$ et si ψ est une fonction bornée telle que T_ϕ commute avec T_ψ alors nécessairement ψ est analytique dans $\mathbb{D}$. Le théorème énoncé par Axler, Čučković et Rao dans [9] est le suivant.

Théorème 4.1.4 *Soit Ω un domaine borné quelconque de $\mathbb{C}$. Si ϕ est une fonction analytique non constante sur Ω et si ψ une fonction bornée sur Ω telle que T_ϕ et T_ψ commutent alors ψ est analytique sur Ω.*

La preuve de ce théorème repose sur un résultat, dû à Bishop dans [11], sur l'approximation des fonctions continues par des fonctions analytiques et des fonctions harmoniques.

Dans [2], Ahern et Čučković utilisent le Théorème 4.1.4 pour obtenir le résultat suivant sur le produit de deux opérateurs de Toeplitz.

Théorème 4.1.5 *Si $\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont dans $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$, si ψ est dans $L^\infty(\mathbb{D})$, et si $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$ alors $\overline{\phi}$ est analytique ou ψ est analytique.*

Preuve : Grâce à la linéarité de l'opérateur de Toeplitz par rapport à son symbole, on a :

$$T_\phi T_\psi = T_{\phi_1} T_\psi + T_{\overline{\phi}_2} T_\psi = T_{\phi_1} T_\psi + T_{\overline{\phi}_2 \psi},$$

et

$$T_{\phi\psi} = T_{\phi_1 \psi} + T_{\overline{\phi}_2 \psi}.$$

Ainsi

$$T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi} \Longrightarrow T_{\phi_1} T_\psi = T_{\phi_1 \psi}.$$

Or

$$T_{\phi_1 \psi} = T_\psi T_{\phi_1}.$$

Donc

$$T_{\phi_1} T_\psi = T_\psi T_{\phi_1}.$$

Maintenant, si ϕ_1 est constante alors $\overline{\phi}$ est analytique. Et si ϕ_1 est non constante alors, d'après le Théorème 4.1.4, ψ est nécessairement analytique. ■

4.2 Commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes

Dans [24], nous nous sommes intéressés à la commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes. Plus précisement nous obtenons une caractérisation des opérateurs quasihomogènes qui commutent.

Nous commençons par rappeler la décomposition suivante de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ à savoir :

$$L^2(\mathbb{D}, dA) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\theta} \mathcal{R},$$

où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des fonctions dans $L^2([0,1], rdr)$.

La question de commutativité des opérateurs quasihomogènes a été déjà étudiée auparavant dans un cadre particulier par Čučković et Rao dans [18], où ils ont caractérisé toutes les fonctions ψ bornées sur $\mathbb{D}$ telles que T_ψ et $T_{e^{ip\theta} r^m}$ commutent, avec p et m sont deux entiers positifs. Nos résultats dans [24], généralisent ceux de [18] et les simplifient. Nous avons choisi ici de présenter les trois théorèmes de [18].

Théorème 4.2.1 *Soient* $\psi(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta}\psi_k(r)$ *et* $\phi(re^{ik\theta}) = e^{i\delta\theta}r^m$ *deux fonctions dans* $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$*, où* $\psi_k \in \mathcal{R}$*,* $m \in \mathbb{N}$*,* $\delta \in \mathbb{N}$*. Alors* T_ϕ *et* T_ψ *commutent si et seulement si pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*, il existe des constantes* $a_0(k)$*,* $a(k)$*,* $b(k)$*,* $c(k)$*, et* $d(k)$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

$$\widehat{\psi_k}(z) = a_0(k)\frac{\Gamma(z/2\delta + a(k))\Gamma(z/2\delta + b(k))}{\Gamma(z/2\delta + c(k))\Gamma(z/2\delta + d(k))},$$

où Γ *est la fonction Gamma. De plus, les constantes valent* $a(k) = k/2\delta$*,* $b(k) = (m + \delta - k)/2\delta$*,* $c(k) = (2\delta - k)/2\delta$*, et* $d(k) = (k + \delta + m)/2\delta$*.*

Théorème 4.2.2 *Soit* $\psi_k(r)$ *une fonction bornée sur* $[0, 1)$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*, telle que :*

$$\widehat{\psi_k}(z) = \frac{\Gamma(z/2\delta + a)\Gamma(z/2\delta + b)}{\Gamma(z/2\delta + c)\Gamma(z/2\delta + d)},$$

où a*,* b*,* c*, et* d *sont comme dans le Théorème 4.2.1, satisfont la condition* $a+b-c-d = -1$ *et* $\delta \in \mathbb{N}$*. Alors* $\widehat{\psi_k}$ *est une fonction rationnelle si et seulement si l'une des quantités* $a - c$*, ou* $a - d$*, ou* $b - c$*, ou* $b - d$ *est un entier. Dans ce cas* $\widehat{\psi_k}$ *est une fonction rationnelle propre avec le degré du dénominateur est égale au degré du numérateur plus un. De plus :*

(a) Si $a - c = \lambda \geq 0$ *alors* $\psi_k(r)$ *existe pour tout* $k = (\lambda + 1)\delta$ *et à la forme suivante :*

$$\psi_k(r) = 2\delta \sum_{\substack{j\geq 0 \\ (\lambda\delta - m)/2\delta) \leq j \leq \lambda}} A_j r^{2\delta(a+j)}$$

pour certaines constantes $A_j \in \mathbb{C}$*.*

(b) Si $a - c = -\lambda$*,* $\lambda > 0$ *alors* $\psi_k(r)$ *existe pour tout* $k = (1 - \lambda)\delta$ *et à la forme suivante :*

$$\psi_k(r) = 2\delta \sum_{(\lambda-1)/2 \leq j \leq \lambda - 1} A_j r^{2\delta(a+j)}$$

pour certaines constantes $A_j \in \mathbb{C}$*.*

(c) Si $a - d$ *est un entier alors* $a - d = -\lambda$*,* $\lambda > 0$ *et la solution* $\psi_k(r)$ *existe pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *et à la forme suivante :*

$$\psi_k(r) = 2\delta \sum_{\substack{a+j\geq 0 \\ 0 \leq j \leq \lambda - 1}} A_j r^{2\delta(a+j)}$$

Théorème 4.2.3 *Soit $\psi_k(r)$ une fonction bornée sur $[0,1)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, qui vérifie :*

$$\widehat{\psi_k}(z) = \frac{\Gamma(z/2\delta + a)\Gamma(z/2\delta + b)}{\Gamma(z/2\delta + c)\Gamma(z/2\delta + d)},$$

où a, b, c, d, et δ sont comme dans le Théorème 4.2.1. On suppose que ni $a-c$, ni $a-d$, ni $b-c$ et ni $b-d$ est un entier. Alors la solution ψ_k existe pour tout $k > 0$ et à la forme suivante :

$$\psi_k(r) = c[h(r^{2\delta}) + (h *_M A)(r^{2\delta})],$$

où

$$h(t) = t^a \int_t^1 (s-t)^{c_1-a-1}(1-s)^{d_1-b-1} s^{b-c_1}\, ds,$$

avec $c_1 = c + [k/\delta]$, $d_1 = d - [k/\delta]$ (ici $[.]$ désigne la partie entière) et

$$A(t) = \sum_{j=0}^{[k/\delta]} A_j t^{d_1+j}$$

pour des certaines constantes $A_j \in \mathbb{C}$.

Le lemme suivant est intéressant dans le sens où il montre qu' un opérateur de Toeplitz T_ψ, dont le symbole ψ est une fonction bornée, commute avec un opérateur quasihomogène si et seulement si ce dernier commute avec tous les opérateurs $T_{e^{ik\theta}\psi_k}$ où $e^{ik\theta}\psi_k$ sont les éléments de la décomposition polaire de ψ i.e.

$$\psi(re^{ik\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\psi_k(r).$$

Ce résultat nous permettra à travers la manipulation des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes de pouvoir déduire des résultats sur des opérateurs de Toeplitz de symboles bien plus généraux.

Lemme 4.2.4 *Soit $e^{ip\theta}\phi$ une fonction quasihomogène bornée de degré l'entier positif p et soit*

$$\psi(re^{ik\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\psi_k(r).$$

Alors

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi = T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi} \iff T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k} = T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Preuve : Soit n un entier positif. d'après le Lemme 3.2.2, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k}(z^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq -n-1 \\ a_n\widehat{\phi}(2n+2k+p+2)\widehat{\psi_k}(2n+k+2)z^{n+k+p} & \text{si } k \geq -n, \end{cases}$$

et

$$T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq -n-p-1 \\ b_n\widehat{\psi_k}(2n+k+2p+2)\widehat{\phi}(2n+p+2)z^{n+k+p} & \text{si } k \geq -n-p, \end{cases}$$

où $a_n = 2(n+k+p+1)2(n+k+1)$ et $b_n = 2(n+k+p+1)2(n+p+1)$.
Donc pour tout entier positif n, on a :

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi(z^n) = \sum_{k+n\geq 0} T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k}z^n,$$

et

$$T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi}(z^n) = \sum_{k+n+p\geq 0} T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}z^n.$$

Ainsi pour tout couple (m,n) d'entiers positifs, on a :

$$\langle T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi z^n, z^m\rangle = \langle T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{i(m-n-p)\theta}\psi_{m-n-p}}z^n, z^m\rangle, \tag{4.7}$$

et

$$\langle T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi}z^n, z^m\rangle = \langle T_{e^{i(m-n-p)\theta}\psi_{m-n-p}}T_{e^{ip\theta}\phi}z^n, z^m\rangle. \tag{4.8}$$

D'autre part :

$$\langle T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k}z^n, z^m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k+n+p \\ \langle T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{i(m-n-p)\theta}\psi_{m-n-p}}z^n, z^m\rangle & \text{si } m = k+n+p, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k+n+p \\ \langle T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi z^n, z^m\rangle & \text{si } m = k+n+p, \end{cases}$$

et

$$\langle T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}z^n, z^m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k+n+p \\ \langle T_{e^{i(m-n-p)\theta}\psi_{m-n-p}}T_{e^{ip\theta}\phi}z^n, z^m\rangle & \text{si } m = k+n+p, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k+n+p \\ \langle T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi}z^n, z^m\rangle & \text{si } m = k+n+p. \end{cases}$$

Ceci prouve que, si $T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi = T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\langle T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k}z^n, z^m\rangle = \langle T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}z^n, z^m\rangle,$$

et donc

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k} = T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement, si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k} = T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}$, alors en particulier pour tout couple (m, n) d'entiers positifs, si $m = k + n + p$, on obtient :

$$\langle T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{i(m-n-p)\theta}\psi_{m-n-p}}z^n, z^m\rangle = \langle T_{e^{i(m-n-p)\theta}\psi_{m-n-p}}T_{e^{ip\theta}\phi}z^n, z^m\rangle.$$

D'où, grâce aux équations (4.7) et (4.8), pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\langle T_{e^{ip\theta}\phi}T_{\psi}z^n, z^m\rangle = \langle T_{\psi}T_{e^{ip\theta}\phi}z^n, z^m\rangle,$$

c'est-à-dire

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{\psi} = T_{\psi}T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

$\blacksquare$

Pour caractériser donc les fonctions bornées ψ telles que T_ψ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$, nous pouvons regarder séparément la partie d'indice négatif et la partie d'indice positif dans la décomposition polaire de ψ. Dans ce sens, nous avons obtenu dans [24] un premier résultat qui affirme que deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes non triviaux dont les degrés ne sont pas de même signe, ne peuvent jamais commuter.

Proposition 4.2.5 *Soient p et s deux entiers strictement positifs tels que $p \geq s$ et soient ϕ et ψ deux fonctions radiales bornées. Si*

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi} = T_{e^{-is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi},$$

alors ϕ est nulle ou ψ est nulle.

Preuve : Si

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi} = T_{e^{-is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi}$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{D}$

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}(\xi^n)(z) = T_{e^{-is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z).$$

D'où, d'après le Lemme 3.2.2, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\widehat{\phi}(2n + p + 2)\widehat{\psi}(2n + 2p - s + 2) = 0 \quad \text{si } n \leq s - 1, \tag{4.9}$$

et

$$\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi}(2n+2p-s+2) = c_n\widehat{\phi}(2n+p-2s+2)\widehat{\psi}(2n-s+2) \quad \text{si } n \geq s, \tag{4.10}$$

où $c_n = \frac{n-s+1}{n+p+1}$.

De l'équation (4.9), on déduit que pour tout entier $n_0 \leq s-1$ il existe une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ définie par $n_{k+1} = n_k + p$ ou $n_k + s$ pour laquelle on a :

$$\widehat{\phi}(2n_k + p + 2)\widehat{\psi}(2n_k + 2p - s + 2) = 0. \tag{4.11}$$

En effet, soit $n_0 \leq s-1$ tel que :

$$\widehat{\phi}(2n_0 + p + 2)\widehat{\psi}(2n_0 + 2p - s + 2) = 0.$$

Il vient que :

$$\widehat{\phi}(2n_0 + p + 2) = 0 \text{ ou } \widehat{\psi}(2n_0 + 2p - s + 2) = 0.$$

Si $\widehat{\phi}(2n_0+p+2) = 0$ (resp. $\widehat{\psi}(2n_0+2p-s+2) = 0$) alors, en posant $n_1 = n_0+s$ (resp. $n_1 = n_0 + p$) et en remplaçant dans l'équation (4.10) n par n_1, on obtient :

$$\widehat{\phi}(2n_1 + p + 2)\widehat{\psi}(2n_1 + 2p - s + 2) = c_{n_1}\widehat{\phi}(2n_0 + p + 2)\widehat{\psi}(2n_1 - s + 2).$$

(resp.$\widehat{\phi}(2n_1+p+2)\widehat{\psi}(2n_1+2p-s+2) = c_{n_1}\widehat{\phi}(2n_1+p-2s+2)\widehat{\psi}(2n_0+2p-s+2)$)
Comme $\widehat{\phi}(2n_0 + p + 2) = 0$ (resp. $\widehat{\psi}(2n_0 + 2p - s + 2) = 0$), il vient que :

$$\widehat{\phi}(2n_1 + p + 2)\widehat{\psi}(2n_1 + 2p - s + 2) = 0.$$

Ainsi en réitérant le même procédé, on arrive à construire une suite n_k d'entiers positifs vérifiant l'équation (4.11). De plus il est simple de voir que pour tout $k \geq 1$,

$$2n_k + 1 \leq 2(n_0 + kp) \leq 2(k+1)p,$$

car $n_0 \leq s \leq p$. Donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n_k + 1} = +\infty. \tag{4.12}$$

Soit E_1 et E_2 les deux ensembles définis par :

$$E_1 := \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\phi}(2n_k+p+2) = 0\} \text{ et } E_2 := \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\psi}(2n_k+2p-s+2) = 0\}.$$

Il est clair que :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n_k + 1} \leq \sum_{k\in E_1} \frac{1}{2n_k + 1} + \sum_{k\in E_2} \frac{1}{2n_k + 1}.$$

D'où, d'après l'équation (4.12), au moins l'une des deux séries $\displaystyle\sum_{k\in E_1}\frac{1}{2n_k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k\in E_2}\frac{1}{2n_k+1}$ est divergente. Si $\displaystyle\sum_{k\in E_1}\frac{1}{2n_k+1}=\infty$ (resp. $\displaystyle\sum_{k\in E_2}\frac{1}{2n_k+1}=\infty$) alors d'après le Corollaire 3.2.6, $r^p\phi=0$ et donc ϕ est nulle (resp. $r^{2p-s}\psi=0$ et donc $\psi=0$).

■

Remarque 4.2.6 *Si $0<p<s$ et si $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}=T_{e^{-is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors par passage à l'adjoint on a*

$$T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{-ip\theta}\phi}=T_{e^{-ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi}.$$

En appliquant le Théorème précédent en remplaçant p par s et ϕ par ψ, on obtient que $\phi=0$ ou $\psi=0$.

La proposition suivante montre qu'un opérateur de Toeplitz à symbole radial ne peut pas commuter avec un opérateur quasihomogène de degré non nul.

Proposition 4.2.7 *Soit $e^{ip\theta}\phi$ une fonction quasihomogène bornée de degré $p>0$ et soit ψ une fonction radiale bornée. Si $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commute avec T_ψ alors nécessairement $\phi=0$ ou ψ est constante.*

Preuve : Si $T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi}=T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi$ alors, d'après le Lemme 3.2.2, pour tout entier $n\geq 0$:

$$\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi}(2n+2p+2)=c_n\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi}(2n+2), \tag{4.13}$$

où $c_n=\dfrac{2n+2}{2n+2p+2}$.

Soit $E:=\{n\in\mathbb{N}:\widehat{\phi}(2n+p+2)=0\}$. Si $\displaystyle\sum_{n\in E}\frac{1}{2n+1}=\infty$ alors d'après le Corollaire 3.2.6 $r^p\phi=0$ et donc $\phi=0$. Sinon $\displaystyle\sum_{n\in E^c}\frac{1}{2n+1}=\infty$ où E^c est le complémentaire de l'ensemble E dans $\mathbb{N}$. D'après l'équation (4.13), pour tout $n\in E^c$, on a :

$$(2n+2p+2)\widehat{\psi}(2n+2p+2)=(2n+2)\widehat{\psi}(2n+2). \tag{4.14}$$

Il existe au moins un $n_0\in E^c$ pour lequel $\widehat{\psi}(2n_0+2)\neq 0$ et $\widehat{\psi}(2n_0+2p+2)\neq 0$ (sinon d'après le Corollaire 3.2.6, $\psi=0$ car $\displaystyle\sum_{n\in E^c}\frac{1}{2n+1}=\infty$). En prenant dans l'équation (4.14), $n = n_0 + p$ on obtient :

$$\begin{aligned}(2n_0 + 4p + 2)\widehat{\psi}(2n_0 + 4p + 2) &= (2n_0 + 2p + 2)\widehat{\psi}(2n_0 + 2p + 2)\\ &= (2n_0 + 2)\widehat{\psi}(2n_0 + 2).\end{aligned}$$

Ainsi en répétant le même procédé, on montre que pour tout entier $k \geq 1$:

$$(2n_0 + 2kp2)\widehat{\psi}(2n_0 + 2kp + 2) = (2n_0 + 2)\widehat{\psi}(2n_0 + 2).$$

En notant par C la constante qui vaut $(2n_0 + 2)\widehat{\psi}(2n_0 + 2)$, il vient que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\widehat{\psi}(2n_0 + 2kp + 2) = \frac{C}{2n_0 + 2kp2} = C\widehat{\mathbb{1}}(2n_0 + 2kp2).$$

Donc, d'après le Corollaire 3.2.6, $\psi = C\mathbb{1}$.

$\blacksquare$

Remarque 4.2.8 *Si $p > 0$ et si $T_{e^{-ip\theta}\phi}T_\psi = T_\psi T_{e^{-ip\theta}\phi}$ alors par passage à l'adjoint, on a :*

$$T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi} = T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi.$$

On se ramène ainsi aux hypothèses de la proposition précédente, et donc $\phi = 0$ ou ψ est constante.

De ces deux propositions, on conclut que si une fonction bornée sur $\mathbb{D}$ commute avec un opérateur de Toeplitz quasihomogène non nul de degré positif alors nécessairement sa partie d'indice négatif dans sa décomposition polaire est nulle.

Théorème 4.2.9 *Soit p un entier positif et ϕ une fonction radiale bornée non constante. S'il existe une fonction*

$$\psi(re^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\psi_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$$

telle que $T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi = T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors $\psi_k = 0$ pour tout $k < 0$.

Preuve : Si $T_{e^{ip\theta}\phi}$ et T_ψ commutent alors, d'après le Lemme 4.2.4, $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commute avec $T_{e^{ik\theta}\psi_k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donc, d'après la Proposition 4.2.5, $\psi_k = 0$ pour tout $k < 0$ car la fonction ϕ est supposée non constante. $\blacksquare$

Corollaire 4.2.10 *Un opérateur de Toeplitz à symbole radial ne commute qu'avec un opérateur de Toeplitz de même type.*

Preuve : Soit ϕ une fonction radiale bornée non constante et soit

$$\psi(re^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\psi_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$$

telle que $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$. D'après le Lemme 4.2.4, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$T_\phi T_{e^{ik\theta}\psi_k} = T_{e^{ik\theta}\psi_k} T_\phi.$$

Par la Proposition 4.2.7, on a $\psi_k = 0$ pour tout $k > 0$. La Remarque 4.2.8quant à elle implique que $\psi_k = 0$ pour tout $k < 0$. Finalement $\psi = \psi_0$ et donc ψ est radiale. ■

Qu'en est-il maintenant de la commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes dont les degrés sont de même signe ? Dans [18], Čučković et Rao montrent qu'il existe plusieurs opérateurs de Toeplitz quasihomogènes de degré positif qui commutent avec $T_{e^{ip\theta}r^m}$ où p et m sont deux entiers positifs. Néanmoins nous avons obtenu dans [24] un résultat d'unicité trés important.

Proposition 4.2.11 *Soit p et s sont deux entiers strictement positifs et soit ϕ une fonction radiale bornée non identiquement nulle. S'il existe une fonction radiale bornée ψ non identiquement nulle telle que*

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi} = T_{e^{is\theta}\psi} T_{e^{ip\theta}\phi},$$

alors ψ est unique à une constante multiplicative prés.

Preuve : On suppose qu'il existe deux fonctions radiales bornées $\psi_1 \neq 0$ et $\psi_2 \neq 0$ telles que :

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi_1} = T_{e^{is\theta}\psi_1} T_{e^{ip\theta}\phi},$$

et

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi_2} = T_{e^{is\theta}\psi_2} T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

Alors pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(2n+p+2s+2)\widehat{\psi_1}(2n+s+2) &= c_n\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi_1}(2n+2p+s+2),\\
\widehat{\phi}(2n+p+2s+2)\widehat{\psi_2}(2n+s+2) &= c_n\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi_2}(2n+2p+s+2),
\end{aligned}$$

où $c_n = \dfrac{n+p+1}{n+s+2}$. Soit E l'ensemble des entiers défini par :

$$E := \{n \in \mathbb{N} : \widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\phi}(2n+p+2s+2) \neq 0\}.$$

Il est clair que $\sum_{n\in E} \frac{1}{2n+1} = \infty$ car par hypothèse ϕ n'est pas identiquement nulle. Le système d'équations précédent implique donc que pour tout $n \in E$:

$$\widehat{\psi_1}(2n+s+2)\widehat{\psi_2}(2n+2p+s+2) = \widehat{\psi_1}(2n+2p+s+2)\widehat{\psi_2}(2n+s+2). \quad (4.15)$$

Comme on a supposé que ψ_1 est non nulle alors il existe au moins un entier $n_0 \in E$ tel que $\widehat{r^s\psi_1}(2n_0+2) \neq 0$. Soit maintenant F l'ensemble d'entiers défini par :

$$F := \{k \in \mathbb{N} : \widehat{r^s\psi_1}(2n_0 + 2kp + 2) \neq 0\}.$$

$\sum_{k\in F} \frac{1}{2n_0 + 2kp + 1} = \infty$ car ψ_1 est supposée non identiquement nulle. Pour tout $k \in F$, l'équation (4.15) implique que :

$$\widehat{r^s\psi_1}(2n_0 + 2)\widehat{r^s\psi_2}(2n_0 + 2kp + 2) = \widehat{r^s\psi_1}(2n_0 + 2kp + 2)\widehat{r^s\psi_2}(2n_0 + 2),$$

ce qui est équivalent à dire que pour tout $k \in F$:

$$(\widehat{r^s\psi_2} - c\widehat{r^s\psi_1})(2n_0 + 2kp + 2) = 0,$$

avec $c = \frac{\widehat{r^s\psi_2}(2n_0 + 2)}{\widehat{r^s\psi_1}(2n_0 + 2)}$. Donc, d'après le Corollaire 3.2.6, $\psi_2 = c\psi_1$. ∎

En résumé nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.2.12 *Si $\psi(re^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\psi_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ et si T_ψ commute avec un opérateur quasihomogène non constant et de degré non nul alors $\psi_k = 0$ pour tout $k < 0$ et les ψ_k pour $k \geq 0$ sont uniques à une constante multiplicative prés. En particulier ψ_0 est constante.*

Dans [18], Čučković et Rao donnent explicitement, quand elles existent, les fonctions radiales bornées ψ_k telles que $T_{e^{ik\theta}\psi_k}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}r^m}$. Dans le prochain chapitre nous allons voir que la question de commutativité des opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène est étroitement liée aux puissances et racines de ces mêmes opérateurs. Du coup nous allons, dans un premier temps, simplifier les résultats dans [18] et leurs donner une nouvelle interprétation, puis dans un deuxième temps les généraliser.

Chapitre 5

Puissances et racines d'opérateurs de Toeplitz

Dans ce chapitre nous exposerons les résultats de [22]. Nous nous rendrons compte que la question de la commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes est intimement liée à la notion de « la puissance »et la « T-racine »de ces mêmes opérateurs.

Les résultats de [22] simplifient ceux de [18], à savoir les Théorèmes 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3, et leurs donnent une nouvelle interprétation en terme de puissances et de T-racines d'opérateurs de Toeplitz. Plus particulièrement et à partir des techniques de calcul dans [18], nous déduisons une construction simple d'une large famille de symboles quasihomogènes non triviaux dont les opérateurs de Toeplitz associés élevés à la puissance n, pour n'importe quel entier $n \in \mathbb{N}$, sont toujours des opérateurs de Toeplitz.

Nous nous intéressons dans ce chapitre seulement aux opérateurs quasihomogènes dont les degrés sont de même signe. En effet, grâce au Théorème 4.2.12, si ψ est une fonction bornée telle que T_ψ commute avec un opérateur quasihomogène non constant et de degré strictement positif alors la partie négative dans la décomposition polaire de ψ est nulle. De même et par passage à l'adjoint, si T_ψ commute avec un opérateur de Toeplitz quasihomogène non constant de degré strictement négatif alors la partie positive dans la décomposition polaire de ψ est nulle.

Notre idée de départ dans [22] est simple. Étant donné deux entiers positifs p, s et une T-fonction radiale ϕ ; si $\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^s$ est un opérateur de Toeplitz alors, d'après le Théorème 3.2.8, il sera un opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré ps. De plus il est clair que cet opérateur commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$. Or la Proposition 4.2.11 du chapitre précédent montre que s'il existe une T-fonction radiale non nulle ψ telle que $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commute avec $T_{e^{ips\theta}\psi}$ alors ψ est unique à une constante multiplicative prés. Donc grâce à cette unicité, cet opérateur $T_{e^{ips\theta}\psi}$ ne peut être, à une constante prés, que l'opérateur de Toeplitz $\big(T_{e^{ip\theta}\phi}\big)^s$.

Est-il possible que tout opérateur de Toeplitz non nul de degré quasi-homogène un multiple de p, par exemple ps avec $s \in \mathbb{N}$, et qui commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ est de cette forme, c'est-à-dire la $s^{ième}$ puissance de l'opérateur $T_{e^{ip\theta}\phi}$ lui même ? Que se passe-t-il si $\big(T_{e^{ip\theta}\phi}\big)^s$ n'est pas un opérateur de Toeplitz ? Est-ce que cela signifie que dans ce cas il n'existe pas un opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré ps non nul qui commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$?

Tout le long de ce chapitre nous allons répondre à ces questions et mettre en évidence la relation qui existe entre, d'une part, la commutativité et, d'autre part, la puissance des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes.

5.1 Puissances d'opérateurs de Toeplitz quasi-homogènes

Nous commençons tout d'abord par introduire un lemme de calcul important que nous utiliserons souvent dans notre analyse des puissances des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes

Lemme 5.1.1 *Soient n, p deux entiers positifs et ϕ une T-fonction radiale. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\begin{aligned}\big(T_{e^{ip\theta}\phi}\big)^n(\xi^k)(z) &= \Big[\prod_{j=0}^{n-1} 2(k+jp+p+1)\widehat{\phi}(2k+2jp+p+2)\Big] z^{k+np} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{n-1}\widehat{\phi}(2k+2jp+p+2)}{\prod_{j=0}^{n-1}\widehat{1\!\!1}(2k+2jp+2p+2)} z^{k+np}.\end{aligned}$$

Preuve : D'après le Lemme 3.2.2, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^k)(z) = 2(k+p+1)\widehat{\phi}(2k+p+2)z^{k+p}.$$

En appliquant $n-$fois l'opérateur $T_{e^{ip\theta}\phi}$ au vecteur ξ^k de la base orthogonale de $L^2_a(\mathbb{D})$, on obtient :

$$\big(T_{e^{ip\theta}\phi}\big)^n(\xi^k)(z) = \Big[\prod_{j=0}^{n-1} 2(k+jp+p+1)\widehat{\phi}(2k+2jp+p+2)\Big] z^{k+np}.$$

Sachant que pour tout $0 \le j \le n-1$,

$$2(k+jp+p+1) = \frac{1}{\widehat{1\!\!1}(2k+2jp+2p+2)},$$

donc

$$\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^n(\xi^k)(z) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}\widehat{\phi}(2k+2jp+p+2)}{\prod_{j=0}^{n-1}\widehat{\mathbb{1}}(2k+2jp+2p+2)} z^{k+np}.$$

■

Remarque 5.1.2 *Si $n = 0$, nous considérons que $\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^0 = I$ où I est l'opérateur identité de $L^2_a(\mathbb{D})$.*

Nous rappelons, à travers le théorème suivant, les résultats essentiels du chapitre précédent.

Théorème 5.1.3 *Soient p un entier strictement positif, ϕ une T-fonction radiale non nulle et $\psi(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta}\psi_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$. Alors :*

(a) T_ψ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ si et seulement si $T_{e^{ik\theta}\psi_k}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ pout tout entier $k \in \mathbb{Z}$.
(b) S'il existe un entier $k \leq -1$ et une T-fonction radiale ψ_k tels que $T_{e^{ik\theta}\psi_k}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors ψ_k est nécessairement nulle.
(c) S'il existe un entier $k \geq 0$ et une T-fonction radiale ψ_k tels que $T_{e^{ik\theta}\psi_k}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors ψ_k est unique à une constante multiplicative prés. En particulier ψ_0 est une constante.

Pour éviter de répéter à chaque fois qu'un opérateur ou un symbole est unique à une constante multiplicative prés, nous allons adopter la notation suivante : Si S et T sont deux opérateurs (resp. deux fonctions) et s'il existe une constante non nulle c telle $S = cT$ alors nous noterons $S \equiv T$.

La proposition suivante constitue le premier pas vers la réponse aux questions posées au début du chapitre.

Proposition 5.1.4 *Soient p et s deux entiers positifs et soient ϕ et ψ deux T-fonctions radiales non nulles. Si*

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi} = T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi},$$

alors

$$\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^s \equiv \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p.$$

La preuve de cette proposition nécessite les deux lemmes techniques suivants.

Lemme 5.1.5 *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites non nulles et* p *et* s *deux entiers positifs tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$a_{n+s}b_n = a_n b_{n+p}. \tag{5.1}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, *si on pose :*

$$A_k = \prod_{j=0}^{s-1} a_{k+jp} \quad \textit{et} \quad B_k = \prod_{j=0}^{p-1} b_{k+js},$$

alors

$$A_k B_{k+p} = A_{k+p} B_k.$$

Preuve : En prenant dans l'égalité (5.1), $n = k,\ k+s, \ldots, k+(p-1)s$, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{k+s}b_k &= a_k b_{k+p} \\ a_{k+2s}b_{k+s} &= a_{k+s}b_{k+p+s} \\ \vdots &= \vdots \\ a_{k+ps}b_{k+(p-1)s} &= a_{k+(p-1)s}b_{k+(p-1)s+p}. \end{aligned}$$

Si on multiplie ces équations membre à membre et si on divise les deux membres de l'égalité résultante par les termes a_k qui se trouvent des deux côtés de l'égalité, on obtient :

$$a_{k+ps}B_k = a_k B_{k+p} \text{ c'est-à-dire } \frac{a_{k+ps}}{a_k} = \frac{B_{k+p}}{B_k}.$$

Or, par définition des A_k, on a :

$$\frac{a_{k+ps}}{a_k} = \frac{A_{k+p}}{A_k}.$$

D'où le résultat. ■

Lemme 5.1.6 *Soient* F *et* G *deux fonctions analytiques bornées sur le demi-plan* $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 2\}$ *et non identiquement nulles. S'il existe un entier* $p \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$F(z)G(z+p) = F(z+p)G(z), \tag{5.2}$$

alors

$$F \equiv G.$$

Preuve : En remplaçant dans (5.2), z par $z_n = z + np$ pour $n = 0, \ldots, k-1$, on obtient les k équations suivantes à savoir :

$$\begin{aligned} F(z)G(z+p) &= F(z+p)G(z) \\ F(z+p)G(z+2p) &= F(z+2p)G(z+p) \\ \vdots &= \vdots \\ F(z+(k-1)p)G(z+kp) &= F(z+kp)G(z+(k-1)p). \end{aligned}$$

En multipliant ces équations membre à membre et en divisant l'équation obtenue par les termes $F(z+np)$ et $G(z+np)$ qui se répètent dans les deux membres de l'équation, on aura :

$$F(z)G(z+kp) = F(z+kp)G(z). \tag{5.3}$$

Comme G est par hypothèse non identiquement nulle alors il existe un $z_0 \in \Pi$ tel que $G(z_0) \neq 0$. Soit $E := \{k \in \mathbb{N} : G(z_0 + kp) = 0\}$. Si

$$\sum_{k \in E} \Re\left(\frac{1}{|z_0 + kp|}\right) = \infty,$$

alors, d'après le Théorème 3.2.5, G est nulle ce qui est en contradiction avec les hypothèses. Ainsi

$$\sum_{k \in E^c} \Re\left(\frac{1}{|z_0 + kp|}\right) = \infty,$$

où E^c est le complémentaire de E dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in E^c$, l'équation (5.3) implique que :

$$\frac{F(z_0 + kp)}{G(z_0 + kp)} = \frac{F(z_0)}{G(z_0)}.$$

Si on pose $c = \dfrac{F(z_0)}{G(z_0)}$, alors $(F - cG)(z_0 + kp) = 0$ pour tout $k \in E^c$ et donc par le Théorème 3.2.5, $F - cG = 0$ sur Π i.e. $F \equiv G$.

■

Nous allons maintenant pouvoir donner la preuve de la Proposition 5.1.4.

Preuve : Si $T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi} = T_{e^{is\theta}\psi} T_{e^{ip\theta}\phi}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{is\theta}\psi}(\xi^k)(z) = T_{e^{is\theta}\psi} T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^k)(z).$$

D'après le Lemme 3.2.2, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{\widehat{\phi}(2k+p+2s+2)}{\widehat{1\!\!1}(2k+2p+2s+2)} \frac{\widehat{\psi}(2k+s+2)}{\widehat{1\!\!1}(2++2s+2)} = \frac{\widehat{\phi}(2k+p+2)}{\widehat{1\!\!1}(2k+2p+2)} \frac{\widehat{\psi}(2k+2p+s+2)}{\widehat{1\!\!1}(2k+2p+2s+2)}.$$

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose :

$$a_k = \frac{\widehat{\phi}(2k+p+2)}{\widehat{1\!\!1}(2k+2p+2)} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{\widehat{\psi}(2k+s+2)}{\widehat{1\!\!1}(2k+2s+2)},$$

alors l'équation précédente est équivalente à :

$$a_{k+s}b_k = a_k b_{k+p}.$$

D'où, d'après le Lemme 5.1.5, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{j=0}^{s-1} a_{k+jp} \prod_{j=0}^{p-1} b_{k+p+js} = \prod_{j=0}^{s-1} a_{k+p+jp} \prod_{j=0}^{p-1} b_{k+js}. \tag{5.4}$$

Soient F et G les deux fonctions analytiques bornées sur le demi-plan Π, définies par :

$$F(z) = \prod_{j=0}^{p-1} \widehat{1\!\!1}(z+2js+2s) \prod_{j=0}^{s-1} \widehat{\phi}(z+2jp+p),$$

et

$$G(z) = \prod_{j=0}^{s-1} \widehat{1\!\!1}(z+2jp+2p) \prod_{j=0}^{p-1} \widehat{\psi}(z+2js+s).$$

L'équation (5.4) est alors équivalente à :

$$F(2k+2)G(2k+2p+2) = F(2k+2p+2)G(2k+2), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'où, d'après le Théorème 3.2.5,

$$F(z)G(z+2p) = F(z+2p)G(Z), \text{ pour tout } z \in \Pi.$$

Maintenant, le Lemme 5.1.6 implique que $F \equiv G$ sur Π, en particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{\prod_{j=0}^{s-1} \widehat{\phi}(2k+2jp+p+2)}{\prod_{j=0}^{s-1} \widehat{1\!\!1}(2k+2jp+2p+2)} \equiv \frac{\prod_{j=0}^{p-1} \widehat{\psi}(2k+2js+s+2)}{\prod_{j=0}^{p-1} \widehat{1\!\!1}(2k+2js+2s+2)},$$

ce qui signifie, d'après le Lemme 5.1.1, que

$$\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^s(\xi^k)(z) \equiv \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p(\xi^k)(z), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Puisque les deux opérateurs $T_{e^{ip\theta}\phi}$ et $T_{e^{is\theta}\psi}$ sont bornés et coïncident sur les éléments de la base orthogonale de $L_a^2(\mathbb{D})$, donc

$$\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^s \equiv \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p.$$

■

Remarque 5.1.7 *Si p et s sont tous les deux négatifs et si*

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi} = T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi},$$

alors par passage à l'adjoint, on obtient

$$T_{e^{-is\theta}\psi}T_{e^{-ip\theta}\phi} = T_{e^{-ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}.$$

Maintenant, la Proposition 5.1.4, implique que

$$\left(T_{e^{-ip\theta}\phi}\right)^{-s} \equiv \left(T_{e^{-is\theta}\psi}\right)^{-p}.$$

En passant encore une fois à l'adjoint dans cette dernière égalité, on obtient

$$\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^{-s} \equiv \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^{-p}.$$

La proposition suivante permet de déduire que si deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes commutent et si le degré quasihomogène du premier est un multiple du degré du second alors forcément le premier opérateur est une puissance du deuxième.

Proposition 5.1.8 *Soient n, p et s trois entiers positifs et soient ϕ et ψ deux T-fonctions radiales non identiquement nulles. Si*

$$\left(T_{e^{ips\theta}\phi}\right)^{n} = \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^{np}$$

alors

$$T_{e^{ips\theta}\phi} = \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^{p}.$$

Preuve : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_k = 2(k+ps+1)\widehat{\phi}(2k+ps+2) \quad \text{et} \quad b_k = 2(k+s+1)\widehat{\psi}(2k+s+2).$$

D'après le Lemme 5.1.1, on a :

$$\left(T_{e^{ips\theta}\phi}\right)^{n} = \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^{np} \iff \prod_{j=0}^{n-1} a_{k+jps} = \prod_{j=0}^{np-1} b_{k+js},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

et

$$T_{e^{ips\theta}\phi} = \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^{p} \iff a_k = \prod_{j=0}^{p-1} b_{k+js},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ce qu'on va montrer est la chose suivante : Si

$$\prod_{j=0}^{n-1} a_{k+jps} = \prod_{j=0}^{np-1} b_{k+js} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \tag{5.5}$$

alors

$$a_{knps} = \prod_{j=0}^{p-1} b_{knps+js} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Pour cela on va procéder par reccurence. En prenant $k = 0$ dans l'équation (5.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} a_{jps} &= \prod_{j=0}^{np-1} b_{js} \\ &= \prod_{j=0}^{p-1} b_{js} \prod_{j=p}^{np-1} b_{js} \\ &= \prod_{j=0}^{p-1} b_{js} \prod_{j=0}^{np-1} b_{ps+js}. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} a_{jps} &= a_0 \prod_{j=1}^{n-1} a_{jps} \\ &= a_0 \prod_{j=0}^{n-1} a_{ps+jps}. \end{aligned}$$

Or, l'équation (5.5) implique que

$$\prod_{j=0}^{n-1} a_{ps+jps} = \prod_{j=0}^{np-1} b_{ps+js}.$$

Donc

$$a_0 = \prod_{j=0}^{p-1} b_{js}.$$

Maintenant, on suppose que l'équation (5.6) est vraie à l'ordre $knps$ et on montre qu'elle est encore vérifiée à l'ordre $(k+1)nps$. En remplaçant k par $(k+1)nps$ dans le terme de gauche de l'équation (5.5), on a :

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} a_{knps+jps} &= a_{knps} \prod_{j=1}^{n-1} a_{knps+jps} \\ &= a_{knps} \prod_{j=0}^{n-2} a_{knps+ps+jps}. \end{aligned}$$

En multipliant cette dernière équation par $a_{(k+1)nps}$, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{(k+1)nps}\prod_{j=0}^{n-1} a_{knps+jps} &= a_{knps}a_{(k+1)nps}\prod_{j=0}^{n-2} a_{knps+ps+jps} \\ &= a_{knps}\prod_{j=0}^{n-1} a_{knps+ps+jps}. \end{aligned}$$

Or, d'après l'équation (5.5), on a

$$\prod_{j=0}^{n-1} a_{knps+ps+jps} = \prod_{j=0}^{np-1} b_{knps+ps+js}.$$

D'où

$$a_{(k+1)nps}\prod_{j=0}^{n-1} a_{knps+jps} = a_{knps}\prod_{j=0}^{np-1} b_{knps+ps+js}.$$

Comme par hypothèse

$$a_{knps} = \prod_{j=0}^{p-1} b_{knps+js},$$

alors

$$a_{(k+1)nps}\prod_{j=0}^{n-1} a_{knps+jps} = \prod_{j=0}^{p-1} b_{knps+js}\prod_{j=0}^{np-1} b_{knps+ps+js}. \tag{5.7}$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{p-1} b_{knps+js}\prod_{j=0}^{np-1} b_{knps+ps+js} &= \prod_{j=0}^{p-1} b_{knps+js}\prod_{j=p}^{np+p-1} b_{knps+js} \\ &= \prod_{j=0}^{p-1} b_{knps+js}\prod_{j=p}^{np-1} b_{knps+js}\prod_{j=np}^{np+p-1} b_{knps+js} \\ &= \prod_{j=0}^{np-1} b_{knps+js}\prod_{j=0}^{p-1} b_{(k+1)nps+js}. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation (5.7) est équivalente à

$$a_{(k+1)nps}\prod_{j=0}^{n-1} a_{knps+jps} = \prod_{j=0}^{np-1} b_{knps+js}\prod_{j=0}^{p-1} b_{(k+1)nps+js}.$$

Donc, grâce à l'équation (5.5), on a bien

$$a_{(k+1)nps} = \prod_{j=0}^{p-1} b_{(k+1)nps+js}.$$

Ainsi, on a montré que l'équation (5.6) est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$; et en remplaçant a_k et b_k par leurs valeurs, il vient que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$2(knps+ps+1)\widehat{\phi}(2knps+ps+2) = \prod_{j=0}^{p-1} 2(knps+js+s+1)\widehat{\psi}(2knps+2js+s+2).$$

En introduisant dans cette dernière équation la fonction $\mathbb{1}$, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\widehat{\phi}(2knps+ps+2)\prod_{j=0}^{p-1}\widehat{\mathbb{1}}(2knps+2js+2s+2) = \widehat{\mathbb{1}}(2knps+2ps+2)\prod_{j=0}^{p-1}\widehat{\psi}(2knps+2js+s+2).$$

Enfin, et grâce au Corollaire 3.2.6, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\widehat{\phi}(2k+ps+2)\prod_{j=0}^{p-1}\widehat{\mathbb{1}}(2k+2js+2s+2) = \widehat{\mathbb{1}}(2k+2ps+2)\prod_{j=0}^{p-1}\widehat{\psi}(2k+2js+s+2),$$

ce qui est équivalent à écrire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$2(k+ps+1)\widehat{\phi}(2k+ps+2) = \frac{\prod_{j=0}^{p-1}\widehat{\psi}(2k+2js+s+2)}{\prod_{j=0}^{p-1}\widehat{\mathbb{1}}(2k+2js+2s+2)}.$$

Donc, d'après le Lemme 5.1.1, on conclut que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$T_{e^{ips\theta}\phi}(\xi^k)(z) = \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p(\xi^k)(z).$$

Les deux opérateurs $T_{e^{ips\theta}\phi}$ et $\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p$ sont bornés et coïncident sur les éléments ξ^k de la base orthogonale de $L_a^2(\mathbb{D})$, donc ils coïncident partout c'est-à-dire

$$T_{e^{ips\theta}\phi} = \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p.$$

■

Remarque 5.1.9 *Dans la Proposition 4.2.7, nous avons montré que si p est un entier strictement positif, si ϕ une T-fonction radiale non identiquement nulle et s'il existe une T-fonction radiale ψ telle que T_ψ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$*

alors nécessairement ψ est constante. Ici nous allons redémontrer se résultat en utilisant les deux propositions précédentes. En effet si

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi = T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi},$$

alors d'après la Proposition 5.1.4, on a

$$\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^0 \equiv \left(T_\psi\right)^p.$$

Sachant que $\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^0 = I$, *alors* $\left(T_\psi\right)^p \equiv I$. *Mais on peut toujours écrire que* $I^p = I$. *Ainsi on arrive à avoir*

$$\left(T_\psi\right)^p \equiv I^p.$$

D'où, d'après la Proposition 5.1.8

$$T_\psi \equiv I.$$

Donc $\psi \equiv \mathbb{1}$, *puisque l'identité* I *n'est autre que l'opérateur de Toeplitz de symbole* $\mathbb{1}$.

5.2 Racines d'opérateurs de Toeplitz quasihomogènes

Nous venons de voir, à travers la Proposition 5.1.4, que si $T_{e^{ip\theta}\phi}$ et $T_{e^{is\theta}\psi}$ sont deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes de degrés strictement positifs et s'ils commutent alors

$$\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^s \equiv \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p. \tag{5.8}$$

Supposons maintenant qu'il existe une T-fonction quasihomogène f telle que

$$\left(T_f\right)^p = T_{e^{ip\theta}\phi},$$

alors d'après le Lemme 5.1.1 , l'opérateur T_f est nécessairement quasihomogène de degré 1 i.e. $f = e^{i\theta}\omega$ où ω est une fonction radiale. Ainsi l'équation (5.8) devient

$$\left(T_{e^{i\theta}\omega}\right)^{ps} \equiv \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p.$$

Donc, d'après la Proposition 5.1.8, on obtient

$$T_{e^{is\theta}\psi} \equiv \left(T_{e^{i\theta}\omega}\right)^s.$$

Définition 5.2.1 *Soit ϕ une T-fonction radiale non identiquement nulle et soit p un entier strictement positif. On dit que $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet une T-$p^{ième}$ racine, s'il existe une T-fonction ψ telle que*

$$T_{e^{ip\theta}\phi} = \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p.$$

Nous avons choisi la terminologie « T-$p^{ième}$ racine »pour la raison simple suivante : Étant donné un opérateur de Toeplitz T, est-il vrai que s'il existe un opérateur S et un entier p tels que $S^p = T$, alors S est forcement un opérateur de Toeplitz ? En d'autres termes, est-ce que les racines d'un opérateur de Toeplitz sont aussi des opérateurs de Toeplitz ?

Remarque 5.2.2 *(i) La T-$p^{ième}$ racine d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène, si elle existe, est unique. En effet, supposons que $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet deux T-$p^{ième}$ racines $T_{e^{i\theta}\psi}$ et $T_{e^{i\theta}\widetilde{\psi}}$. Alors*

$$\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p = \left(T_{e^{i\theta}\widetilde{\psi}}\right)^p.$$

D'où d'après la Proposition 5.1.8

$$T_{e^{i\theta}\psi} = T_{e^{i\theta}\widetilde{\psi}}.$$

Donc, d'après le point (iv) de la Proposition 2.3.1, $\psi = \widetilde{\psi}$.

(ii) Nous avons une définition analogue de la T-$p^{ième}$ racine pour les opérateurs de Toeplitz quasihomogènes de degré négatif. Si p est un entier positif et si ϕ est une T-fonction radiale alors nous dirons que $T_{e^{-ip\theta}\phi}$ admet une T-$p^{ième}$ racine s'il existe une T-fonction radiale ψ telle que

$$T_{e^{-ip\theta}\phi} = \left(T_{e^{-i\theta}\psi}\right)^p.$$

En passant à l'adjoint dans cette dernière égalité, nous nous rendons compte que $T_{e^{-ip\theta}\phi}$ admet une T-$p^{ième}$ racine si et seulement si son adjoint $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet lui aussi une T-$p^{ième}$ racine.

Si un opérateur de Toeplitz quasihomogène $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet une T-$p^{ième}$ racine, alors la méthode la plus simple pour la déterminer est la suivante : Chercher la T-fonction radiale ψ telle que $T_{e^{i\theta}\psi}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$. En effet, si

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{i\theta}\psi} = T_{e^{i\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi},$$

alors d'après la Proposition 5.1.4

$$T_{e^{ip\theta}\phi} \equiv \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p.$$

Nous avons utilisé cette méthode pour trouver les deux exemples suivants. Nous n'allons pas donner les détails du calcul qui sont loin d'être compliqués.
Exemples

(1) $T_{e^{i\theta}\frac{r+r^5}{2}}$ est la T-racine carrée de $T_{e^{2i\theta}r^6}$ i.e. $\left(T_{e^{i\theta}\frac{r+r^5}{2}}\right)^2 = T_{e^{2i\theta}r^6}$.
(2) $T_{e^{i\theta}\frac{3r+2r^5+3r^9}{8}}$ est la T-racine carrée de $T_{e^{2i\theta}r^{10}}$.

5.3 Résultats principaux

Soit $T_{e^{i\theta}\psi}$ la T-$p^{ième}$ racine de $T_{e^{ip\theta}\phi}$. Si k est entier positif et si $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ est un opérateur de Toeplitz, alors, d'après le Théorème 3.2.8, il sera un opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré k. De plus, d'après la Proposition 4.2.11 il sera l'unique (à une constante multiplicative prés) opérateur de Toeplitz quasihomogène non nul de degré k qui commutera avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$. Nous allons caractériser tous les opérateurs de Toeplitz qui commutent avec un opérateur de Toeplitz quasihomogène qui admet une T-racine. Nous verrons que si un opérateur de Toeplitz quasihomogène $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet une T-$p^{ième}$ racine alors tout opérateur quasihomogène non nul, dont le degré quasihomogène est de même signe que celui de p, et qui commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ est nécessairement une puissance de la T-$p^{ième}$ racine $T_{e^{i\theta}\psi}$.

Théorème 5.3.1 *Soient p un entier strictement positif et ϕ une T-fonction radiale non nulle. On suppose $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet une T-$p^{ième}$ racine $T_{e^{i\theta}\psi}$. S'il existe une fonction*

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta} f_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$$

telle que

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_f = T_f T_{e^{ip\theta}\phi},$$

alors

(i) $f_k = 0$ *pour tout* $k < 0$.
(ii) Si $k \geq 0$ *et si* $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ *est un opérateur de Toeplitz alors ou bien* $f_k = 0$ *ou bien* $T_{e^{ik\theta}f_k} \equiv \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$.
(iii) Si $k \geq 0$ *et si* $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ *n'est pas un opérateur de Toeplitz alors nécessairement* $f_k = 0$.

Preuve : D'après le Lemme 4.2.4, $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commute avec T_f si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{ip\theta}f_k} = T_{e^{ip\theta}f_k} T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

Ainsi l'assertion (i) est une conséquence immédiate de la Proposition 4.2.5.

Pour montrer l'assertion (ii), soit k un entier positif. On suppose $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ est un opérateur de Toeplitz alors c'est un opérateur quasihomogène de degré k qui commute avec $T_{e^{ip\theta}}$. Or la Proposition 4.2.11 implique que s'il existe une fonction $f_k \neq 0$ radiale bornée telle que $T_{e^{ik\theta}f_k}$ et $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commutent alors $T_{e^{ik\theta}f_k}$ est unique à une constante multiplicative prés. Donc $T_{e^{ik\theta}f_k} \equiv \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$.

Finalement pour prouver l'assertion (iii), soit $k \geq 0$ tel que $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ n'est pas un opérateur de Toeplitz. S'il existe une fonction radiale bornée $f_k \neq 0$ telle que $T_{e^{ik\theta}f_k}$ et $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commutent, alors d'après la Proposition 5.1.4

$$\left(T_{e^{ik\theta}f_k}\right)^p \equiv \left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^k.$$

Comme $T_{e^{i\theta}\psi}$ est la T-$p^{ième}$ racine de $T_{e^{ip\theta}\phi}$, on a

$$\left(T_{e^{ik\theta}f_k}\right)^p \equiv \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^{kp}.$$

Donc, d'après la Proposition 5.1.8, on obtient

$$T_{e^{ik\theta}f_k} \equiv \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k,$$

ce qui contredit nos hypothèses.

■

À partir des calculs techniques et astucieux dûs à Čučković et Rao [18], nous sommes arrivés à pouvoir affirmer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $m \geq 0$, l'opérateur de Toeplitz $T_{e^{ip\theta}r^m}$ admet toujours une T-$p^{ième}$ racine.

Théorème 5.3.2 *Soient $p \geq 1$ et $m \geq 0$ deux entiers. Pour tout entier s tel que $1 \leq s < p$, il existe une fonction radiale bornée ψ telle que*

$$T_{e^{ip\theta}r^m} T_{e^{is\theta}\psi} = T_{e^{is\theta}\psi} T_{e^{ip\theta}r^m}. \tag{5.9}$$

Nous avons préféré omettre de la preuve la partie trés longue qui consiste à montrer que la fonction radiale ψ est bornée (voir [18, p. 208-213]).

Preuve : Soient f et g les deux fonctions radiales définies par

$$f(r) = 2pr^{2s}(1 - r^{2p})^{-\frac{s}{p}} \text{ et } g(r) = 2pr^{m+p}(1 - r^{2p})^{\frac{s}{p}-1}.$$

Soit ψ la fonction définie par

$$r^s\psi = f *_M g.$$

La fonction ψ, ainsi définie, vérifie l'équation (5.9) si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$T_{e^{ip\theta}r^m} T_{e^{is\theta}\psi}(\xi^k)(z) = T_{e^{is\theta}\psi} T_{e^{ip\theta}r^m}(\xi^k)(z),$$

c'est-à-dire, d'après le Lemme 3.2.2, si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{2k+2p+2}{2k+m+p+2}\widehat{r^s\psi}(2k+2p+2) = \frac{2k+2s+2}{2k+m+p+2s+2}\widehat{r^s\psi}(2k+2). \quad (5.10)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{r^s\psi}(2k+2) &= \widehat{f}(2k+2)\widehat{g}(2k+2)\\ &= 4p^2 \int_0^1 r^{2s}(1-r^{2p})^{-\frac{s}{p}} r^{2k+1}\,dr \int_0^1 r^{m+p}(1-r^{2p})^{\frac{s}{p}-1} r^{2k+1}\,dr.\end{aligned}$$

En posant le changement de variables $t = r^2p$ dans les deux intégrales au dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{r^s\psi}(2k+2) &= \int_0^1 t^{\frac{2k-2p+2s+2}{2p}}(1-t)^{-\frac{s}{p}}\,dt \int_0^1 t^{\frac{2k+m-p+1}{2p}}(1-t)^{\frac{s}{p}-1}\,dt\\ &= B\Big(\frac{2k+2s+2}{2p}, 1-\frac{s}{p}\Big)B\Big(\frac{2k+m+p+2}{2p}, \frac{s}{p}\Big), \quad (5.11)\end{aligned}$$

où B est la fonction Bêta, définie sur le demi-plan $\Re z > 0$ par :

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1}\,dt.$$

De la même manière, on montre que

$$\widehat{r^s\psi}(2k+2p+2) = B\Big(\frac{2k+2p+2s+2}{2p}, 1-\frac{s}{p}\Big)B\Big(\frac{2k+m+3p+2}{2p}, \frac{s}{p}\Big). \quad (5.12)$$

Soit Γ la fonction Gamma définie sur le demi-plan $\Re z > 0$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

On rappelle que pour tous z_1 et z_2 tels que $Rez_1 > 0$ et $Rez_2 > 0$, on a

$$B(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}.$$

Ainsi

$$B\Big(\frac{2k+2p+2s+2}{2p}, 1-\frac{s}{p}\Big) = \frac{\Gamma\big(\frac{2k+2p+2s+2}{2p}\big)\Gamma\big(1-\frac{s}{p}\big)}{\Gamma\big(\frac{2k+2p+2}{2p}+1\big)}.$$

Sachant que pour tout z tel que $\Re z > 0$, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

alors :

$$\begin{aligned}
B\Big(\frac{2k+2p+2s+2}{2p}, 1-\frac{s}{p}\Big) &= \frac{2p}{2k+2p+2}\frac{\Gamma\big(\frac{2k+2p+2s+2}{2p}\big)\Gamma\big(1-\frac{s}{p}\big)}{\Gamma\big(\frac{2k+2p+2}{2p}\big)} \\
&= \frac{2k+2s+2}{2k+2p+2}\frac{\Gamma\big(\frac{2k+2s+2}{2p}\big)\Gamma\big(1-\frac{s}{p}\big)}{\Gamma\big(\frac{2k+2p+2}{2p}\big)} \\
&= \frac{2k+2s+2}{2k+2p+2}B\Big(\frac{2k+2s+2}{2p}, 1-\frac{s}{p}\Big).
\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que

$$B\Big(\frac{2k+m+3p+2}{2p}, \frac{s}{p}\Big) = \frac{2k+m+p+2}{2k+m+p+2s+2}B\Big(\frac{2k+m+p+2}{2p}, \frac{s}{p}\Big).$$

Il vient donc, d'après les deux équations (5.11) et (5.12), que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\widehat{r^s\psi}(2k+2p+2) = \frac{(2k+2s+2)(2k+m+p+2)}{(2k+2p+2)(2k+m+p+2s+2)}\widehat{r^s\psi}(2k+2),$$

ce qui est équivalent à l'équation (5.10).

■

Remarque 5.3.3 *(i) Comme l'opérateur $T_{e^{ip\theta}r^m}$ commute avec lui même alors si $s = p$ la Proposition 4.2.11 implique $\psi \equiv r^m$.*

(ii) Si $m = (2n+1)p$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ alors la fonction ψ existe pour tout entier $s \in \mathbb{N}$. En effet, l'équation (5.10) et le Corollaire 3.2.6 implique que pour tout $z \in \Pi = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 2\}$

$$\widehat{r^s\psi}(z+2p)F(z) = \widehat{r^s\psi}(z)F(z+2p), \tag{5.13}$$

où F est la fonction définie par

$$F(z) = \frac{\Gamma(\frac{z+2s}{2p})\Gamma(\frac{z+m+p}{2p})}{\Gamma(\frac{z}{2p}+1)\Gamma(\frac{z+m+p+2s}{2p})}.$$

En remplaçant m par $(2n+1)p$, on obtient

$$F(z) = \frac{\Gamma(\frac{z+2s}{2p})\Gamma(\frac{z}{2p}+n+1)}{\Gamma(\frac{z}{2p}+1)\Gamma(\frac{z+2s}{2p}+n+1)}.$$

En applicant, l'identité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, *on a*

$$F(z) = 2p\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(z+2jp+2p)}{\prod_{j=0}^{n}(z+2jp+2s)}.$$

Maintenant, on voit que $F(z)$ *est une fraction propre en* z *puisque le numérateur est un polynôme de degré* n *et le dénominateur est un polynôme de degré* $n+1$. *Donc il existe des constantes* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *dans* $\mathbb{C}$ *telles que*

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{z+2jp+2s}.$$

Sachant que pour tout $0 \leq j \leq n$

$$\frac{1}{z+2jp+2s} = \widehat{r^{2jp+2s}}(z),$$

alors

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j \widehat{r^{2jp+2s}}(z).$$

Il découle de l'équation (5.13) et du Lemme 5.1.6 que

$$\widehat{r^s\psi}(z) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \widehat{r^{2jp+2s}}(z).$$

Donc le Corollaire 3.2.6 implique que

$$\psi(r) = \sum_{j=0}^{n} a_j r^{2jp+s}.$$

Dans la suite, nous présentons des conséquences et des applications intéressantes du Théorème 5.3.2.

Corollaire 5.3.4 *Pour tous entiers* $m \geq 0$, $p \geq 1$ *et* $s \geq 1$, *il existe une fonction radiale bornée* ψ *telle que*

$$\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p \equiv T_{e^{ips\theta}r^m}.$$

Preuve : Soient $m \geq 0$, $p \geq 1$ et $s \geq 1$ trois entiers. Le Théorème 5.3.2 implique qu'il existe une fonction radiale bornée ψ telle que

$$T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{ips\theta}r^m} = T_{e^{ips\theta}r^m}T_{e^{is\theta}\psi}.$$

Par la Proposition 5.1.4 on obtient

$$\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^{ps} \equiv \left(T_{e^{ips\theta}r^m}\right)^s.$$

Donc, d'après la Proposition 5.1.8, on a

$$\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^{p} \equiv T_{e^{ips\theta}r^m}.$$

■

Un autre résultat positif sur le produit d'opérateurs de Toeplitz est donné par le corollaire suivant.

Corollaire 5.3.5 *Soient $m \geq 0$ et $p \geq 1$ deux entiers. Si l'opérateur de Toeplitz $T_{e^{ip\theta}r^m}$ admet une T-$p^{\text{ième}}$ racine $T_{e^{i\theta}\psi}$ alors pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le produit $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ est un opérateur de Toeplitz.*

Preuve : D'après le Théorème 5.3.2, on sait que pour tout entier $1 \leq k \leq p$ il existe une fonction radiale bornée ϕ telle que

$$T_{e^{ik\theta}\phi}T_{e^{ip\theta}r^m} = T_{e^{ip\theta}r^m}T_{e^{ik\theta}\phi}.$$

D'où, d'après la Proposition 5.1.4, on a

$$\left(T_{e^{ik\theta}\phi}\right)^{p} \equiv \left(T_{e^{ip\theta}r^m}\right)^k. \tag{5.14}$$

Comme $T_{e^{i\theta}\psi}$ est la T-$p^{\text{ième}}$ racine de $T_{e^{ip\theta}r^m}$, alors l'équation (5.14) est équivalente à

$$\left(T_{e^{ik\theta}\phi}\right)^{p} \equiv \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^{kp}.$$

Donc, d'après la Proposition 5.1.8, on a bien

$$\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^{k} \equiv T_{e^{ik\theta}\phi}.$$

■

Nous avons déjà vu que si ϕ est une fonction analytique bornée sur $\mathbb{D}$ alors l'opérateur de Toeplitz T_ϕ n'est que l'opérateur de multiplication dans $L_a^2(\mathbb{D})$ par la fonction ϕ. Ainsi pour tout entier positif k, le produit $\left(T_\phi\right)^k$ est toujours un opérateur de Toeplitz de symbole ϕ^k.

Dans le corollaire suivant nous construisons des symboles quasihomogènes non triviaux dont les opérateurs de Toeplitz associés, élevés à n'importe quelle puissance restent toujours des opérateurs de Toeplitz.

Corollaire 5.3.6 *Il existe une fonction radiale bornée ψ telle que pour tout entier positif k, le produit $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ est toujours un opérateur de Toeplitz.*

Preuve : Soient $n \geq 0$ et $p \geq 1$ deux entiers. D'après le Théorème 5.3.2, l'opérateur de Toeplitz $T_{e^{ip\theta}r^{(2n+1)p}}$ admet une T-$p^{i\grave{e}me}$ racine $T_{e^{i\theta}\psi}$. D'autre part, l'assertion (ii) de la Remarque 5.3.3 affirme que pour tout entier $k \geq 1$, il existe toujours une fonction radiale bornée ϕ_k telle que

$$T_{e^{ip\theta}r^{(2n+1)p}} T_{e^{ik\theta}\phi_k} = T_{e^{ik\theta}\phi_k} T_{e^{ip\theta}r^{(2n+1)p}}.$$

D'où, d'après la Proposition 5.1.4

$$\left(T_{e^{ip\theta}r^{(2n+1)p}}\right)^k \equiv \left(T_{e^{ik\theta}\phi_k}\right)^p.$$

Comme $T_{e^{i\theta}\psi}$ est la T-$p^{i\grave{e}me}$ racine de $T_{e^{ip\theta}r^{(2n+1)p}}$, alors

$$\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^{kp} \equiv \left(T_{e^{ik\theta}\phi_k}\right)^p.$$

Il vient donc d'après la Proposition 5.1.8 que

$$\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k \equiv T_{e^{ik\theta}\phi_k}.$$

■

Les deux exemples d'opérateurs de Toeplitz $T_{e^{i\theta}\frac{r+r^5}{2}}$ et $T_{e^{i\theta}\frac{3r+2r^5+3r^9}{8}}$, donnés auparavant à la fin de la section précédente, vérifient le corollaire précédent.

Bibliographie

[1] P. Ahern : *On the range of the Berezin transform.* Journal of Functional Analysis **215** (2004), 206-216.

[2] P. Ahern et Z. Čučković : *Some examples in the theory of Toeplitz operators.* Sci. Math (Szeged) 70 (2004), No. 1-2, 373-378.

[3] P. Ahern et Z. Čučković : *A Theorem of Brown-Halmos Type for Bergman Space Toeplitz Operators.* Journal of functional Analysis **187** (2001), 200-210.

[4] P. Ahern, M. Flores et W. Rudin : *An Invariant Volume-Mean-Value Property.* Journal of Functional Analysis **111** (1993), 380-397.

[5] E. Amar et E. Matheron : *Analyse complexe.* Cassini, Paris, 2004.

[6] N. Aronszajn : *Theory of reproducing kernels.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 68, 1950, 337-404. cassini, Paris, 2004.

[7] Sh. Axler : *Bergman Spaces and Their Operators.* Pitman Res. Notes in Math. Vol. I (1988), 1-50.

[8] Sh. Axler et Z. Čučković : *Commuting Toeplitz operators with harmonic symbols.* Integr. Equat. Oper. Th. **14** (1991), 1-12.

[9] Sh. Axler, Z. Čučković et N. V. Rao : *Commutants of Analytic Toeplitz Operators on the Bergman space.* Proc. Amer. Math. Soc.**128** (2000), no. 7. 1951-1953.

[10] S. Bergman : *The Kernel Function and Conformal Mapping.* MATHEMATICAL Surveys and Monographs, Volume 5, 1970.

[11] Christopher J. Bishop : *Approximating continuous functions by holomorphic and harmonic functions.* Trans. Amer. math. Soc. **311** (1989), 781-811.

[12] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris, 1996.

[13] A. Brown et P. R. Halmos : *Algebraic Properties of Toeplitz operators.* J. Reine Angew. Math. **123** (1964), 89-102.

[14] A. Böttcher et S. M. Grudsky : *Toeplitz Matrices, Asymptotic Linear Algebra, and Functional Analysis.* Birkhauser Verlag, Basel, 2000.

[15] A. Böttcher et B. Silberg : *Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[16] Z. Čučković : *Commutants of Toeplitz operators on the Bergman space.* Pacific J. Math. **162** (1994), 277-285.

[17] Z. Čučković : *Berezin versus Mellin.* J. Math. Anal. Appl. **287** (2003) 234-243.

[18] Z. Čučković et N. V. Rao : *Mellin Transform, Monomial Symbols, and Commuting Toeplitz Operators.* Journal of Functional Analysis **154** (1998), 194-214.

[19] J. B. Garnett : *Bounded analytic functions.* Pure and Applied Mathematics **96**, Academic Press, New York, 1981.

[20] H. Hedenmalm, B. Korenblum et K. Zhu : *Theory of Bergman Spaces.* Springer Verlag, New York, 2000.

[21] D. E. Knuth : *The art of computer programming.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1969.

[22] I. Louhichi : *Powers and roots of Toeplitz operators.* Preprint.

[23] I. Louhichi, E. Strouse et L. Zakariasy : *Products of Toeplitz operators on the Bergman space.* Integral Equation and Operator Theory. Published on line : 1 October 2005.

[24] I. Louhichi et L. Zakariasy : *On Toeplitz operators with quasihomogeneous symbols.* Archiv der Mathematik. Volume **85**, Number 3 (2005), 248-257.

[25] B. SZ.- Nagy et C. Foias : *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.

[26] N. K. Nikolski : *Operators, Functions, and Systems : An Easy Reading. Volume I : Hardy, Hankel, and Toeplitz.* American Mathematical Society, 2002.

[27] N. K. Nikolski : *Treatise on shift Operator.* Grundlehren Math. Wiss. **273**, Springer-Verlag, 1986.

[28] R. Remmert : *Classical Topics in Complex Function Theory.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1998.

[29] W. Rudin : *Real and Complex analysis.* McGraw-Hill, New-York, 1966.

[30] D. Suárez : *The Toeplitz algebra on the Bergman space coincides with its commutator ideal.* J. Operator Theory **51** (2004), no. 1, 105-114.

[31] K. Zhu : *Operator Theory in Function Spaces.* Marcel Dekker, New York, 1990.

[32] N. Zorboska : *The Berezin transform and radial operators.* Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 793-800.

Résumé : Le sujet de cette thèse est l'étude des produits d'opérateurs de Toeplitz, aussi bien ceux définis sur l'espace de Hardy du cercle unité que ceux définis sur l'espace de Bergman du disque unité. Les deux questions soulevées dans mon travail sont les suivantes :

1) Sous quelles conditions le produit de deux opérateurs de Toeplitz est-il un opérateur de Toeplitz ?
2) Sous quelles conditions le produits de deux opérateurs de Toeplitz est-il commutatif ?

Pour chacune de ces deux questions, nous commençons par rappeler les travaux antérieurs avec tout ce qu'ils nécessitent comme outils techniques, puis nous exposerons notre contribution dans ce domaine. Notamment, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes soit encore un opérateur de Toeplitz. De plus, nous caractérisons les opérateurs de Toeplitz bornés qui commutent avec un opérateur de Toeplitz quasihomogène. Pour motiver cette caractérisation, nous introduisons une nouvelle notion à savoir la T-racine d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène. Cette notion, nous permet de donner une construction effective d'opérateurs de Toeplitz non triviaux dont toutes les puissances sont des opérateurs de Toeplitz.

Mots clefs : Opérateurs de Toeplitz, Espace de Bergman, Espace de Hardy, Transformation de Mellin.

Abstract : The subject of this thesis is the study of the product of two Toeplitz operators those defined on the Hardy space of the unit circle as well as those defined on the Bergman space of the unit disc. The two questions raised in my work are as follows :

1) Under which conditions is the product of two Toeplitz operators a Toeplitz operator ?
2) Under which conditions is the product of two Toeplitz operators commutative ?

For each of these two questions we start by discussing former work along with several technical tools, then we explain our contribution to this domain. In particular, we give necessary and sufficient conditions for the product of two quasihomogeneous Toeplitz operators to be a Toeplitz operator. Moreover, we characterize the bounded Toeplitz operators which commute with a quasihomogeneous Toeplitz operator. To motivate this characterization we introduce a new notion-namely the T-root of a quasihomogeneous Toeplitz operator. This work enables us to give an effective construction of a non trivial Toeplitz operator whose powers are all Toeplitz operators.

Key words : Toeplitz operators, Bergman space, Hardy space, Mellin transform.