

N° d'ordre : 3126

# THÈSE

PRÉSENTÉE A

## L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE

Par David LABARRE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

### DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

-----  
Du filtrage de Kalman aux techniques  $H_\infty$  et particulières.

Application au traitement du signal de parole et à l'analyse de signaux  
biomédicaux.  
-----

Soutenue le 09 décembre 2005.

Après avis de :

MM. Ezio Todini	Professeur à l'université de Bologne	Rapporteurs
Nicolaï Christov	Professeur à l'université de Lille	

Devant la commission d'examen formée de :

Francis Castagnié	Professeur à l'ENSEEIH, Toulouse	
Ezio Todini	Professeur à l'université de Bologne	Rapporteurs
Nicolaï Christov	Professeur à l'université de Lille	
Mohamed Najim	Professeur à l'ENSEIRB, Bordeaux	Directeur de thèse
Pierre Baylou	Professeur à l'ENSEIRB, Bordeaux	
Eric Grivel	Maître de Conférences à l'ENSEIRB, Bordeaux	



*Tout travail travaille à faire un homme en même temps qu'une chose.*

Emmanuel Mounier



## Remerciements

*Je tiens en tout premier lieu à remercier le Professeur Mohamed Najim pour son accueil au sein de l'Equipe Signal et Image. Je lui sais infiniment gré de ses précieux conseils et de son soutien tout au long de ma thèse.*

*Je remercie tout particulièrement le Docteur Eric Grivel. Ses encouragements, sa patience et ses conseils, tant sur le plan professionnel que personnel, m'ont sans aucun doute permis de mener cette thèse à son terme.*

*Je sais gré au Professeur Francis Castanié d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.*

*Je remercie particulièrement le Professeur Ezio Todini pour le temps qu'il m'a consacré et son accueil au sein de son laboratoire à Bologne. Sa collaboration m'a été très instructive. Je lui sais également gré d'avoir accepté d'être rapporteur.*

*Je remercie vivement le Professeur Nicolai Christov pour toutes les discussions que nous avons eues et pour le temps qu'il m'a consacré. Je lui suis très reconnaissant pour son soutien et ses encouragements. Je le remercie d'avoir accepté d'être rapporteur.*

*Je tiens également à remercier le Professeur Pierre Baylou pour sa bonne humeur et son humour journalier, ainsi que d'avoir accepté de rapporter ma soutenance de thèse.*

*Je voudrais saluer tous les membres de l'Equipe Signal et Image, anciens et nouveaux, pour leur soutien, leurs conseils et les moments partagés avec eux. Je leur souhaite beaucoup de courage et de réussite.*

*Je tiens à remercier du fond du cœur tous mes amis. Ils ont été un soutien essentiel durant toutes ces dernières années.*

*Enfin, j'embrasse ma maman, mon papa et toute ma famille qui m'ont encouragé et soutenu, et sans qui rien n'aurait été possible. Je leur dédicace cette thèse.*



## Liste des acronymes

AR	: <i>AutoRégressif</i>
ARMA	: <i>AutoRégressif à Moyenne Ajustée</i>
ARMAX	: <i>AutoRégressif à Moyenne Ajustée avec entrée eXogène</i>
ASIR	: <i>Auxilliary Sampling Importance Resampling filter</i>
CELP	: <i>Code Exciting Linear Prediction coder</i>
DDS	: <i>Delayed and Damped Sinusoids</i>
DOA	: <i>Direction Of Arrival</i>
DSP	: <i>Densité Spectrale de Puissance</i>
ECG	: <i>ElectroCardioGramme</i>
EDS	: <i>Exponentially Damped Sinusoids</i>
EEG	: <i>ElectroEncéphaloGramme</i>
EKF	: <i>Extended Kalman Filter</i>
EPF	: <i>Extended Particle Filter</i>
EM	: <i>Algorithme d'Espérance-Maximisation ou Expectation-Maximisation algorithm</i>
ESPRIT	: <i>Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques</i>
FFT	: <i>Fast Fourier Transform</i>
LMI	: <i>Linear Matrix Inequality</i>
LMS	: <i>Least Mean Squares</i>
MA	: <i>Moyenne Ajustée</i>
MYW	: <i>Modified Yule-Walker equations</i>
NLMS	: <i>Normalized Least Mean Squares</i>
RII	: <i>Réponse Impulsionnelle Infinie</i>
RLS	: <i>Recursive Least Squares</i>
RLSL	: <i>Recursive Least Squares Lattice</i>
RPF	: <i>Regularized Particle Filter</i>
RSB	: <i>Rapport Signal à Bruit</i>
SIR	: <i>Sampling Importance Resampling</i>
SIS	: <i>Sequential Importance Sampling</i>
TVAR	: <i>Time-Varying AutoRegressive</i>
UKF	: <i>Unscented Kalman Filter</i>
UPF	: <i>Unscented Particle Filter</i>
VAD	: <i>Voice Activity Detector</i>
VI	: <i>Variable Instrumentale</i>
YW	: <i>Yule-Walker equations</i>





## Notations

$f_e$	: fréquence d'échantillonnage
$s_k$	: $k^{\text{ième}}$ échantillon du signal traité
$y_k$	: $k^{\text{ième}}$ échantillon de l'observation du signal
$n_k$	: $k^{\text{ième}}$ échantillon du bruit de mesure ou d'observation
$N$	: nombre d'échantillons disponibles

Sauf indication contraire, si  $x_k$  est un processus stochastique scalaire stationnaire, on a :

$\underline{X}_{k-1}^p = [x_{k-1} \ \cdots \ x_{k-p}]^T$	: vecteur des $p$ derniers échantillons
$\sigma_x^2$	: variance de $x_k$
$r_x(\tau)$	: fonction d'auto-corrélation de $x_k$
$\underline{r}_x$	: vecteur de corrélation entre $\underline{X}_{k-1}^p$ et $x_k$
$R_{xx}$	: matrice d'auto-corrélation structurée Toeplitz
$X(z)$	: transformée en $z$ de $x_k$
$S_x(z)$	: densité spectrale complexe du processus

Le modèle AR :

$p$	: ordre du modèle
$a_i$	: $i^{\text{ième}}$ coefficient de prédiction
$\underline{\theta} = [a_1 \ \cdots \ a_p]^T$	: vecteur des paramètres AR (sauf dans la partie IV.2)
$u_k$	: excitation
$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-1}$	: transformée en $z$ du filtre inverse associé au modèle AR

Le modèle ARCOS :

$\gamma_k$	: amplitude AR
$a_i$	: $i^{\text{ième}}$ coefficient de prédiction de l'amplitude
$\underline{\theta} = [a_1 \ \cdots \ a_p]^T$	: le vecteur des paramètres AR (sauf dans la partie IV.2)
$u_k$	: l'excitation de l'amplitude
$\phi_k$	: phase instantanée du processus ARCOS
$\omega_0$	: pulsation du processus ARCOS
$f_0$	: fréquence du processus ARCOS

Si  $y_k$  est l'observation bruitée d'un processus AR, on a :

$\Psi_k^N = \left[ -\left(\underline{Y}_{k-1}^p\right) \quad \cdots \quad -\left(\underline{Y}_{k-N}^p\right) \right]^T$  : matrice des données structurée Hankel

$\lambda_k = u_k + n_k + \sum_{i=1}^p a_i n_{k-i}$  : bruit générateur relatif à l'autorégression sur  $y_k$

$\underline{\Lambda}_k^N = [\lambda_k \quad \cdots \quad \lambda_{k-N+1}]^T$  : vecteur des  $N$  derniers échantillons de  $\lambda_k$

La représentation dans l'espace d'état d'un système linéaire :

$\underline{x}_k$  : vecteur d'état

$u_k$  ou  $\underline{u}_k$  : processus générateur

$v_k$  : bruit d'observation

$\Phi_k$  : matrice de passage ou de transfert

$\Gamma$  : vecteur d'entrée

$H$  : vecteur de sortie ou d'observation

Le filtre de Kalman :

$Q$  : variance du processus générateur

$R$  : variance du bruit d'observation

$\hat{\underline{x}}_{k/k-1}$  : estimation *a priori* du vecteur d'état

$\hat{\underline{x}}_{k/k}$  : estimation *a posteriori* du vecteur d'état

$P_{k/k-1}$  : matrice de covariance de l'erreur *a priori*

$P_{k/k}$  : matrice de covariance de l'erreur *a posteriori*

$K_k$  : gain du filtre de Kalman

$v_k$  : processus d'innovation

$C_k$  : variance du processus d'innovation

Estimation  $H_\infty$  :

$J_\infty$  : norme  $H_\infty$

$\gamma$  : niveau d'atténuation désiré

$\gamma_{opt}$  : valeur optimale du niveau d'atténuation

$L$  : matrice reliant le vecteur d'état à la quantité à estimer

$\hat{\underline{x}}_{k/k-1}$  : estimation *a priori* du vecteur d'état

$\hat{\underline{x}}_{k/k}$  : estimation *a posteriori* du vecteur d'état

$K_k$  : gain du filtre  $H_\infty$

$v_k$  : processus d'innovation

Filtrage particulière :

$u_k$	: processus générateur
$v_k$	: bruit d'observation
$Y_k$	: ensemble de toutes les observations jusqu'à l'instant $k$
$M$	: nombre de particules
$M_{eff}$	: taille effective du nuage de particule
$x^i \sim p(x)$	: échantillonnage d'une particule $x^i$ selon la densité $p(x)$
$p(\underline{x}_k / Y_{k-1})$	: densité du vecteur d'état <i>a priori</i>
$p(\underline{x}_k / Y_k)$	: densité du vecteur d'état <i>a posteriori</i>
$p(\underline{x}_k / \underline{x}_{k-1})$	: densité de transition
$p(y_k / \underline{x}_k)$	: vraisemblance
$q(\underline{x}_k / Y_k)$	: densité d'importance
$w_k(\underline{x}_k^i)$	: poids d'importance relatif à la particule $\underline{x}_k^i$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	: densité gaussienne de moyenne $m$ et de covariance $\sigma^2$ .

Notations diverses :

$I_p$	: matrice identité de taille $p$
$O(p, q)$	: matrice nulle de taille $p \times q$
$E\{\cdot\}$	: espérance mathématique
$x \propto y$	: $x$ est proportionnel à $y$



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>15</b>
---------------------	-----------

## Partie 1 : modélisation autorégressive

<b>I. Estimation des paramètres autorégressifs au sens des moindres carrés</b>	<b>21</b>
--	-----------

<b>I.1. Cas d'observations non bruitées</b>	<b>22</b>
I.1.1. Méthodes off-line	22
I.1.2. Méthodes on-line	22
<b>I.2. Cas d'observations bruitées</b>	<b>23</b>
I.2.1. Méthodes off-line à correction de biais	24
I.2.2. Méthodes on-line à correction de biais	30
<b>I.3. Conclusion</b>	<b>31</b>

<b>II. Techniques des variables instrumentales pour l'estimation de paramètres AR</b>	<b>33</b>
---	-----------

<b>II.1. Présentation des techniques des variables instrumentales (VI)</b>	<b>34</b>
II.1.1. Principe	34
II.1.2. Etat de l'art des méthodes VI pour l'estimation de paramètres AR	35
<b>II.2. Filtrage dual de Kalman fondé sur les méthodes VI</b>	<b>37</b>
II.2.1. Estimation du signal à partir des observations bruitées	38
II.2.2. Estimation des paramètres AR à partir du signal filtré	39
II.2.3. Estimation des variances du processus générateur et du bruit d'observation	40
II.2.4. Commentaires	41
<b>II.3. Extensions de la méthode d'estimation duale</b>	<b>42</b>
II.3.1. Utilisation d'un lissage de Kalman	42
II.3.2. Cas d'un bruit additif d'observation coloré	44
<b>II.4. Résultats expérimentaux</b>	<b>48</b>
II.4.1. Cas d'un bruit additif blanc : étude préliminaire	48
II.4.2. Cas d'un bruit additif blanc : étude comparative	50
II.4.3. Cas d'un bruit additif coloré	57
<b>II.5. Conclusion</b>	<b>61</b>

<b>III. Estimation <math>H_\infty</math> : une alternative au filtrage de Kalman ?</b>	<b>63</b>
--	-----------

<b>III.1. Présentation et état de l'art de l'estimation <math>H_\infty</math></b>	<b>65</b>
III.1.1. Le filtrage $H_\infty$	66
III.1.2. Solution récursive du filtrage $H_\infty$ fondée sur une équation de Riccati	67
III.1.3. Commentaires	68
<b>III.2. Estimation des paramètres AR par filtrage <math>H_\infty</math></b>	<b>69</b>
III.2.1. Filtrage $H_\infty$ pour l'estimation des paramètres AR	69
III.2.2. Estimation duale $H_\infty$ du processus AR et de ses paramètres	71
<b>III.3. Application au rehaussement du signal de parole</b>	<b>74</b>
III.3.1. Etat de l'art du rehaussement du signal de parole	75
III.3.2. Apport du filtrage $H_\infty$ pour le rehaussement du signal de parole	77
III.3.3. Intérêt de la structure à deux estimateurs	81
<b>III.4. Conclusion</b>	<b>84</b>

## Partie 2 : modélisation sinusoïdale

<b>IV. Les modèles sinusoïdaux stochastiques</b>	<b>89</b>
<b>IV.1. Les modèles sinusoïdaux</b>	<b>90</b>
IV.1.1. Etat de l'art des méthodes de représentation sinusoïdale des signaux	90
IV.1.2. Le modèle ARCOS	92
IV.1.3. Méthode d'estimation des paramètres ARCOS à partir d'observations non bruitées	93
IV.1.4. Méthode d'estimation des paramètres ARCOS en milieu bruité	95
IV.1.5. Résultats expérimentaux	98
IV.1.6. Conclusion	101
<b>IV.2. Généralisation du modèle ARCOS</b>	<b>102</b>
IV.2.1. Un modèle stochastique sinusoïdal	102
IV.2.2. Algorithme d'estimation des paramètres du modèle	103
<b>IV.3. Résultats expérimentaux</b>	<b>107</b>
IV.3.1. Le sommeil et les fuseaux de sommeil	107
IV.3.2. Analyse de fuseaux de sommeil	108
<b>IV.4. Conclusion</b>	<b>113</b>
<b>V. Filtrage particulière et modélisation sinusoïdale</b>	<b>115</b>
<b>V.1. Présentation du filtrage particulière</b>	<b>116</b>
V.1.1. Les méthodes Monte Carlo	116
V.1.2. Le filtrage récursif par échantillonnage d'importance	118
V.1.3. Etat de l'art du filtrage particulière	121
<b>V.2. Application du filtrage particulière à la modélisation harmonique</b>	<b>126</b>
V.2.1. Position du problème	126
V.2.2. Etudes comparative entre EKF et filtre SIR	129
<b>V.3. Conclusion</b>	<b>134</b>
<b>VI. Conclusions générales et perspectives</b>	<b>135</b>
<b>Annexe A : Exemples d'utilisation du modèle autorégressif</b>	<b>139</b>
<b>Annexe B : L'échantillonnage d'importance</b>	<b>143</b>
<b>Annexe C : Le filtre UKF</b>	<b>145</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>

## Introduction

---

En traitement du signal, la modélisation *a priori* du phénomène étudié est au cœur de nombreuses applications, que ce soit dans le secteur biomédical, les systèmes de communications numériques, la défense, etc. Dans ce contexte, si la sélection du modèle peut s'avérer délicate, la conception d'approches d'estimation de ses paramètres constitue un enjeu majeur.

Cette thématique est au centre des préoccupations de notre équipe où plusieurs thèses ont déjà été menées sur ce sujet. En particulier, Gabrea [GAB99a] a proposé des méthodes fondées sur des filtres adaptatifs pour le rehaussement d'un signal parole à partir de deux microphones. Dans le cas monovoie, son intérêt s'est porté sur la combinaison d'une représentation AutoRégressive (AR) du signal de parole et l'utilisation d'un filtre de Kalman. De manière générale, les principales difficultés de cette approche résident dans les estimations des paramètres AR du signal de parole et des variances du bruit additif et de l'excitation à partir des observations bruitées du signal. En reformulant les travaux de Mehra <sup>1</sup> et de Carew et Bellanger <sup>2</sup>, le filtrage de Kalman est alors mis en œuvre sans aucune donnée statistique sur le bruit additif et sur le processus générateur du signal de parole. Ultérieurement, Grivel, dans sa thèse [GRI00], a formulé le rehaussement de la parole en tant que problème de réalisation dans le contexte de l'identification. Cette solution, fondée sur les techniques en sous-espaces

---

<sup>1</sup> R. K. Mehra, On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-15, n°2, pp. 175-184, April 1970.

<sup>2</sup> B. Carew, P. R. Bellanger, Identification of Optimum Filter Steady-State Gain for Systems with Unknown Noise Covariances, IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-18, n°6, pp. 582-587, December 1973.

initialement proposées par Verhaegen<sup>3,4</sup> et Van Overschee et De Moor<sup>5</sup> dans le contexte du « contrôle », a pour avantage d'éviter l'estimation explicite des paramètres AR et fournit une estimation de la variance du bruit additif sans recourir à un détecteur d'activité vocale.

Mon travail de thèse s'inscrit dans cette dynamique et a notamment pour objet de développer de nouvelles méthodes paramétriques de traitement du signal fondées sur des hypothèses moins contraignantes que celles nécessaires à la mise en œuvre du filtre de Kalman.

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous intéressons au modèle AR. Le chapitre I constitue une présentation générale des techniques d'estimation des paramètres du modèle AR au sens des moindres carrés. Nous dressons tout d'abord l'état de l'art des méthodes dites on-line et off-line quand le processus AR est directement observable. Lorsque le processus est perturbé par un bruit additif, nous présentons la résolution des équations de Yule-Walker à compensation de biais [DAV98] [HAS03a] [ZHE00] ainsi que des approches reposant sur des algorithmes adaptatifs de type LMS [TRE79] [WU97] [ZHA00]. Néanmoins, dans la pratique, lorsque le nombre d'échantillons disponibles est réduit, ces méthodes ne fournissent pas toujours des résultats significatifs car elles deviennent instables ou sont lentes à converger.

Dans le chapitre II, nous nous intéressons à une solution alternative et proposons de tirer avantage des techniques des variables instrumentales. Les algorithmes décrits dans cette partie sont le fruit d'une étroite coopération entretenue avec le Professeur E. Todini de l'université de Bologne. Nous présentons notamment une méthode utilisant deux filtres de Kalman interactifs et opérant en parallèle [LAB03] [LAB04b] [LAB04a] [LAB05c]. Le premier filtre permet d'estimer le processus AR à partir de la dernière estimation des paramètres, alors que le second fournit une estimation des paramètres AR à partir de la dernière estimation du signal. L'originalité de ce travail réside dans le fait que la variance de l'innovation du premier filtre est utilisée pour définir la représentation dans l'espace d'état du second filtre. Ce choix permet notamment d'obtenir des estimations consistantes des paramètres AR. En outre, une méthode récursive est proposée pour estimer les variances du processus générateur et du bruit additif. Notons que l'approche proposée dans ce chapitre a également été déclinée, au sein de notre laboratoire, dans le contexte des communications numériques pour l'estimation

---

<sup>3</sup> M. Verhaegen, Identification of the Deterministic Part of MIMO State Space Models given in Innovations Form from Input-Output Data, *Automatica*, vol. 30, n°1, pp. 61-74, January 1994.

<sup>4</sup> M. Verhaegen, Subspace Model Identification, Part I : The Output-Error State Space Model Class Algorithms, *International Journal of Control*, vol. 56, n°5, pp. 1187-1210, 1992.

<sup>5</sup> P. Van Overschee, B. de Moor, N4SID: Subspace Algorithm for the Identification of Combined Deterministic and Stochastic Systems, *Automatica*, vol. 30, n°1, pp. 75-93, January 1994.



conjointe du canal et des données transmises pour un système de type DS-CDMA multiporteuses [JAM05].

Cependant, cette démarche repose sur des hypothèses contraignantes. En effet, pour mettre en oeuvre le filtrage de Kalman, le processus générateur et le bruit d'observation dans la représentation dans l'espace d'état doivent être supposés blancs <sup>6</sup>, gaussiens et à moyenne nulle. Comme ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées dans la pratique, nous nous intéressons à des méthodes alternatives. Ainsi, dans le chapitre III, notre étude porte sur la pertinence du filtrage  $H_\infty$  en traitement du signal. Cette approche semble *a priori* attrayante car aucune hypothèse statistique n'est à formuler dans la représentation du système. Après avoir exposé la problématique de l'estimation  $H_\infty$ , nous présentons différentes techniques de filtrage  $H_\infty$ , en nous focalisant sur celle fondée sur une équation de Riccati. Dans la suite de ce chapitre, nous étudions l'apport de l'estimation  $H_\infty$  dans le contexte de l'estimation de paramètres AR à partir d'observations bruitées [LAB05a], ce qui conduit à un nouvel algorithme d'estimation duale du processus AR et de ses paramètres [LAB05b]. Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacrée au rehaussement du signal de parole. Nous menons notamment une étude comparative entre les algorithmes présentés dans ce mémoire et celui proposé par Shen *et al.* [SHE99]. Il est à noter que ce travail fut mené en étroite collaboration avec le Professeur N. Christov, actuellement à l'Université de Lille.

Dans ces trois premiers chapitres, nous avons opté pour une modélisation AR du signal. Cependant, ce choix peut être remis en cause dans de nombreuses applications. En effet, un signal de parole voisé contient des segments fortement périodiques. De même, les signaux musicaux sont souvent quasi harmoniques. Ainsi, dans la seconde partie de ce mémoire, nous portons notre intérêt sur la modélisation sinusoïdale des signaux. En particulier, le chapitre IV est dédié à une étude des modèles constitués de sinusoïdes modulées par des processus AR. Nous étudions notamment les travaux de Besson *et al.* [BES95] sur le processus ARCOS et proposons un nouvel algorithme d'estimation des paramètres de ce modèle dans le cas où le signal est entaché d'un bruit blanc additif. Comme le modèle ARCOS ne comporte qu'une seule composante sinusoïdale, nous présentons ensuite une généralisation de ce modèle à plusieurs composantes. Pour en estimer les paramètres, nous développons une méthode fondée sur une analyse spectrale de type ESPRIT pour estimer les fréquences du modèle, et un algorithme EM pour estimer les paramètres des amplitudes AR [LAB02]. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous appliquons les méthodes proposées à l'analyse de fuseaux de

---

<sup>6</sup> Nous ne retenons pas les extensions classiques au cas coloré pour leur complexité de mise en oeuvre.

sommeil (*spindle* en anglais), présents dans des ElectroEncéphaloGrammes (EEG) de sujets endormis.

Néanmoins, les paramètres des modèles sinusoïdaux présentés dans le chapitre IV sont supposés constant sur une trame d'analyse. Comme leur suivi au cours du temps est un problème non linéaire, le dernier chapitre est dédié aux méthodes de filtrage particulaire. Fondées sur les techniques d'échantillonnage de type Monte Carlo, ces approches ont l'avantage de contourner les problèmes de linéarisation du système rencontrés dans la mise en oeuvre d'un filtre de Kalman étendu. En outre, elles fournissent une estimation de la densité de probabilité du vecteur d'état, supposée quelconque. Nous dressons l'état de l'art des méthodes de mise en oeuvre du filtrage particulaire. Puis, nous étudions la pertinence du filtrage particulaire pour le suivi de la fréquence fondamentale de signaux harmoniques.

# PARTIE 1

## Modélisation autorégressive



## Chapitre I

### I. Estimation des paramètres autorégressifs au sens des moindres carrés

---

Le modèle AutoRégressif (AR) jouit d'une incontestable popularité dans de nombreux domaines du traitement du signal. A titre d'exemple, il joue un rôle clé dans les normes de codage du signal de parole de type CELP [G.729] [BIU03]. Si l'estimation des paramètres d'un processus AR ne pose pas de difficultés, elle devient délicate lorsque l'on ne dispose que d'observations bruitées. Elle reste même un problème ouvert quand le nombre d'échantillons disponibles est limité. Pour cette raison, nous proposons dans ce chapitre de dresser l'état de l'art des méthodes d'estimation des paramètres AR. Nous traitons dans un premier temps le cas où les observations sont non bruitées. Puis, nous nous intéressons à celui où le signal est perturbé par un bruit additif, en soulignant les avantages et les inconvénients de chaque méthode d'estimation.

## I.1. Cas d'observations non bruitées

Soit un signal  $s_k$  modélisé par le processus AutoRégressif <sup>7</sup> (AR) d'ordre  $p$  défini de la manière suivante :

$$s_k = -\sum_{i=1}^p a_i s_{k-i} + u_k = -\underline{\theta}^T \underline{S}_{k-1}^p + u_k \quad (\text{I.1})$$

où  $\underline{\theta} = [a_1 \quad \dots \quad a_p]^T$  désigne le vecteur des paramètres AR et  $\underline{S}_{k-1}^p = [s_{k-1} \quad \dots \quad s_{k-p}]^T$ .

Le processus  $u_k$  est en outre un processus blanc gaussien à moyenne nulle et de variance  $\sigma_u^2$ .

### I.1.1. Méthodes off-line

Etant donné (I.1), l'estimation  $\underline{\theta}_{LS}$  des paramètres AR au sens des moindres carrés s'exprime de la manière suivante :

$$\underline{\theta}_{LS} = -R_{ss}^{-1} \underline{r}_s \quad (\text{I.2})$$

où  $R_{ss}$  est la matrice d'auto-corrélation de taille  $p \times p$  du signal  $s_k$  et  $\underline{r}_s$  le vecteur de corrélation entre  $\underline{S}_{k-1}^p$  et  $s_k$ .

Ce système d'équations, connu sous le nom d'équations de Yule-Walker (YW) [THE92], peut être résolu de différentes façons. La résolution directe conduit aux méthodes dites d'auto-corrélation et d'auto-covariance [NAJ88]. D'autres algorithmes ont été proposés, comme celui de Levinson [ZHA92], de Marple [MAR80] ou de Burg [KAY88] pour éviter l'inversion de la matrice  $R_{ss}$ .

### I.1.2. Méthodes on-line

Les méthodes dites on-line sont fondées sur des algorithmes récursifs. Ainsi, l'algorithme LMS, ou méthode du gradient, permet d'estimer les paramètres  $\hat{\underline{\theta}}_k$  de la manière suivante [HAY96] :

$$\hat{\underline{\theta}}_k = \hat{\underline{\theta}}_{k-1} + \mu \underline{S}_{k-1}^p e_k \quad (\text{I.3})$$

où  $e_k = s_k + (\underline{S}_{k-1}^p)^T \hat{\underline{\theta}}_k$  et  $\mu$  désigne le pas de l'algorithme, fixé par l'utilisateur.

<sup>7</sup> Nous invitons le lecteur à lire l'annexe A pour des exemples d'utilisation du modèle AR.

Des variantes du filtre LMS ont été proposées comme le filtre LMS Normalisé (NLMS) [HAY96]. Ces méthodes sont connues pour leur faible coût calculatoire, mais le réglage du pas  $\mu$  reste délicat pour obtenir un bon compromis entre rapidité de convergence et variance d'estimation. D'autres travaux visent donc à ajuster de manière automatique le pas  $\mu$  de l'algorithme [LIN02] [SHI04].

Une deuxième approche consiste à résoudre récursivement l'équation (I.2). On obtient alors l'algorithme RLS [HAY96]. Parmi les variantes du filtre RLS, le filtre RLS avec facteur d'oubli [NAJ88] permet de donner plus de poids aux dernières observations. Cette alternative est

*a priori* mieux adaptée à la poursuite de paramètres lentement variables dans le temps.

Enfin, le filtre de Kalman permet d'obtenir une estimation récursive des paramètres AR en minimisant la covariance de l'erreur *a posteriori* [AND79]. Il est fondé sur la représentation dans l'espace d'état du système (I.1) suivante :

$$\begin{cases} \underline{\theta}_k = \underline{\theta}_{k-1} + \underline{\varepsilon}_k \\ s_k = -(\underline{S}_{k-1}^p)^T \underline{\theta}_k + u_k \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

où  $\underline{\varepsilon}_k$  désigne un vecteur aléatoire blanc gaussien à moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Sigma_\varepsilon^2$ . Si les paramètres AR sont supposés constants,  $\Sigma_\varepsilon^2$  est la matrice nulle. Si ils sont variables dans le temps,  $\Sigma_\varepsilon^2 = \lambda I_p$  où  $\lambda$  est un nombre positif.

Cependant, dans de nombreuses applications,  $s_k$  est souvent observé dans un environnement bruité, mettant en défaut les méthodes présentées dans cette partie. Pour cette raison, des approches alternatives doivent être mises en oeuvre et font l'objet de la partie I.2.

## **I.2. Cas d'observations bruitées**

Supposons les observations  $y_k$  du processus perturbées par un bruit additif  $n_k$  comme suit :

$$y_k = s_k + n_k \quad (\text{I.5})$$

En combinant les équations (I.1) et (I.5), on obtient la récursion matricielle pour  $y_k$  suivante :

$$\begin{aligned} \underline{Y}_k^N &= \begin{bmatrix} -(\underline{Y}_{k-1}^p)^T \\ \vdots \\ -(\underline{Y}_{k-N}^p)^T \end{bmatrix} \underline{\theta} + \begin{bmatrix} \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_{k-N+1} \end{bmatrix}, \\ &= \Psi_k^N \underline{\theta} + \underline{\Lambda}_k^N. \end{aligned} \quad (I.6)$$

avec :

$$\underline{Y}_{k-1}^p = [y_{k-1} \quad \cdots \quad y_{k-p}]^T \quad (I.7)$$

et

$$\lambda_k = u_k + n_k + \sum_{i=1}^p a_i n_{k-i}. \quad (I.8)$$

L'estimation des paramètres AR au sens des moindres carrés est alors donnée par :

$$\hat{\underline{\theta}}_{LS} = [(\Psi_N^k)^T (\Psi_N^k)]^{-1} (\Psi_N^k)^T \underline{Y}_k^N \quad (I.9)$$

et l'erreur d'estimation correspondante vérifie :

$$\hat{\underline{\theta}}_{LS} - \underline{\theta} = [(\Psi_k^N)^T (\Psi_k^N)]^{-1} (\Psi_k^N)^T \underline{\Lambda}_k^N. \quad (I.10)$$

Comme  $y_k$  est corrélé avec  $\{\lambda_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ , l'erreur d'estimation (I.10) ne tend pas vers 0 quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , l'estimateur au sens des moindres carrés n'est donc pas consistant.

Par ailleurs, la solution (I.9) peut s'écrire sous la forme d'équations de YW, comme suit :

$$\hat{\underline{\theta}}_{LS} = -\hat{R}_{yy}^{-1} \hat{\underline{r}}_y \quad (I.11)$$

où  $\hat{R}_{yy}$  dénote l'estimation de la matrice d'auto-corrélation des observations  $y_k$  et  $\hat{\underline{r}}_y$  l'estimation du vecteur de corrélation entre  $\underline{Y}_{k-1}^p$  et  $y_k$ .

Puisque l'espérance mathématique de l'estimateur (I.11) s'écrit :

$$E\{\hat{\underline{\theta}}_{LS}\} = -(R_{yy})^{-1} \underline{r}_y \neq -(R_{ss})^{-1} \underline{r}_s = \underline{\theta}, \quad (I.12)$$

l'estimateur au sens des moindres carrés des paramètres AR est biaisé. Pour corriger l'estimation des paramètres AR, de nombreuses approches, off-line ou on-line, ont été proposées.

### I.2.1. Méthodes off-line à correction de biais

Traisons le cas où le bruit additif d'observation  $n_k$  est blanc gaussien à moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2$ . Dans ce cas, les matrices et vecteur d'auto-corrélation de  $s_k$  et  $y_k$  vérifient :



$$R_{yy} = R_{ss} + \sigma_n^2 I_p, \quad (I.13)$$

et 
$$\underline{r}_y = \underline{r}_s. \quad (I.14)$$

L'estimation des paramètres AR au sens des moindres carrés à partir des observations bruitées présente alors un biais qui s'exprime de la manière suivante :

$$E\{\hat{\underline{\theta}}_{LS}\} - \underline{\theta} = -\sigma_n^2 (R_{yy})^{-1} \underline{\theta}. \quad (I.15)$$

D'après Kay [KAY80], la correction de l'estimateur (I.11) conduit aux équations de YW dites compensées en bruit [KAY80] :

$$\hat{\underline{\theta}}_{LSC} = -(R_{yy} - \sigma_n^2 I_p)^{-1} \underline{r}_y \quad (I.16)$$

Les principales méthodes d'estimation des paramètres AR à partir d'observations bruitées reposent sur l'équation (I.16). Comme la variance  $\sigma_n^2$  du bruit additif doit également être estimée, le problème devient non linéaire. Sa résolution a conduit à deux familles de techniques. La première consiste à estimer itérativement et alternativement les paramètres  $\underline{\theta}$  et la variance  $\sigma_n^2$ . C'est notamment le cas des méthodes de Zheng *et al.* [ZHE00] et de Hasan *et al.* [HAS03a]. La seconde, qui comprend la méthode de Davila [DAV98], consiste à voir l'équation (I.16) comme un problème de décomposition en valeurs propres. Regardons plus en détails ces trois algorithmes.

Estimer  $\underline{\theta}$  (ou  $\sigma_n^2$ ) à partir de l'équation (I.16) en connaissant  $\sigma_n^2$  (respectivement  $\underline{\theta}$ ) est un problème linéaire. Zheng *et al.* [ZHE00] proposent donc une approche itérative qui consiste à estimer alternativement  $\underline{\theta}$  et  $\sigma_n^2$ . Pour cela, ils introduisent un vecteur étendu des paramètres AR défini par :

$$\underline{\theta}^e = \begin{bmatrix} \underline{\theta}^T & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (I.17)$$

D'après l'équation (I.15), le biais de l'estimation au sens des moindres carrés de  $\underline{\theta}^e$  est le suivant :

$$E\{\hat{\underline{\theta}}_{LS}^e\} - \underline{\theta}^e = -\sigma_n^2 (R_{yy}^e)^{-1} \underline{\theta}^e \quad (I.18)$$

où  $R_{yy}^e$  dénote la matrice d'auto-corrélation des observations de taille  $p+1$ .

La correction de l'estimation des paramètres au sens des moindres carrés s'effectue alors comme suit :

$$\underline{\theta}^e = \hat{\underline{\theta}}_{LS}^e + \sigma_n^2 (R_{yy}^e)^{-1} \underline{\theta}^e. \quad (I.19)$$

En prémultipliant la relation (I.19) par  $\mu = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$ , on obtient :

$$\mu \underline{\theta}_{LS}^e = \mu \underline{\theta}^e - \mu \sigma_n^2 (R_{yy}^e)^{-1} \underline{\theta}^e = -\mu \sigma_n^2 (R_{yy}^e)^{-1} \underline{\theta}^e. \quad (I.20)$$

Etant donné l'équation (I.20), la variance  $\sigma_n^2$  s'exprime alors comme suit :

$$\sigma_n^2 = \frac{-\mu \underline{\hat{\theta}}_{LS}^e}{\mu (R_{yy}^e)^{-1} \underline{\hat{\theta}}^e}. \quad (I.21)$$

Zheng *et al.* utilisent itérativement les égalités (I.19) et (I.21) pour estimer les paramètres AR et la variance du bruit additif. Cf. figure I.1. La procédure itérative est arrêtée lorsque les paramètres estimés à l'itération  $i-1$  et à l'itération  $i$ , notés respectivement  $\underline{\hat{\theta}}^{i-1}$  et  $\underline{\hat{\theta}}^i$ , satisfont la relation suivante :

$$\frac{\|\underline{\hat{\theta}}^{i1} - \underline{\hat{\theta}}^{i-1}\|}{\|\underline{\hat{\theta}}^i\|} < \delta \quad (I.22)$$

où  $\| \cdot \|$  représente la norme standard  $L_2$  et  $\delta$  est un nombre positif de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-6}$  suivant la précision désirée.

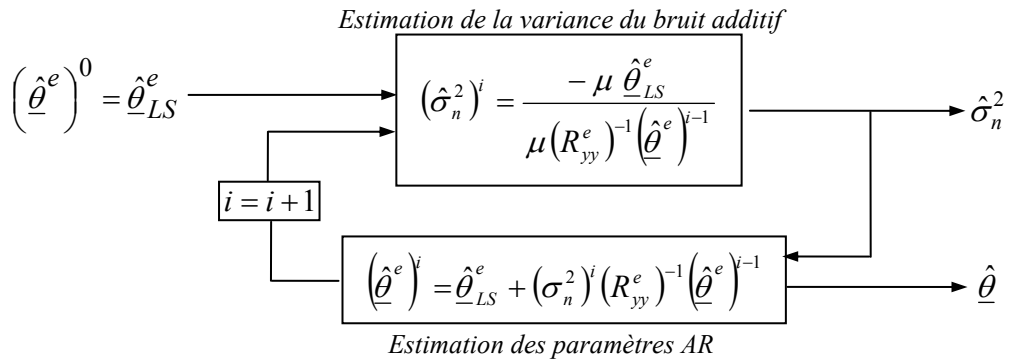


Figure I. 1 : schéma de principe de la méthode de Zheng [ZHE00].

Hasan *et al.* [HAS03a] ont quant à eux proposé une méthode initialement développée pour l'analyse de processus AR vectoriels. Nous présentons ici son utilisation dans le cas d'un processus AR scalaire. Les auteurs obtiennent une seconde relation entre  $\underline{\theta}$  et  $\sigma_n^2$  en exploitant une version filtrée  $z_k$  de l'observation  $y_k$  par le filtre inverse

$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}$ . Cf. figure I.2. En effet, la fonction d'auto-corrélation  $r_z(\tau)$  de  $z_k$

vérifie la relation suivante :

$$r_z(1) = E\{z_k z_{k-1}\} = \sigma_n^2 \sum_{i=1}^p a_i a_{i-1}. \quad (I.23)$$

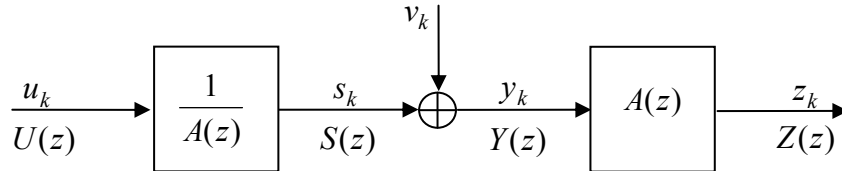


Figure I.2 : schéma bloc du système utilisé dans la méthode de Hasan [HAS03a].

Pour estimer les paramètres  $\underline{\theta}$  et la variance  $\sigma_n^2$ , Hasan *et al.* utilisent alors une méthode itérative fondée sur les étapes suivantes :

1.  $(\hat{r}_z(1))^i$  est déterminée en filtrant  $y_k$  par le filtre inverse  $\hat{A}_i(z)$  défini à partir de  $\hat{\underline{\theta}}^i$ .
2. Le système non linéaire d'équations (I.16)-(I.23) d'inconnue  $\sigma_n^2$  est résolu à l'aide d'une procédure de Newton-Raphson pour mettre à jour la valeur de la variance  $(\hat{\sigma}_n^2)^{i+1}$ .
3. L'estimation corrigée  $\hat{\underline{\theta}}^{i+1}$  des paramètres AR est déduite de l'équation (I.16).

La figure I.3 illustre le principe de l'algorithme.

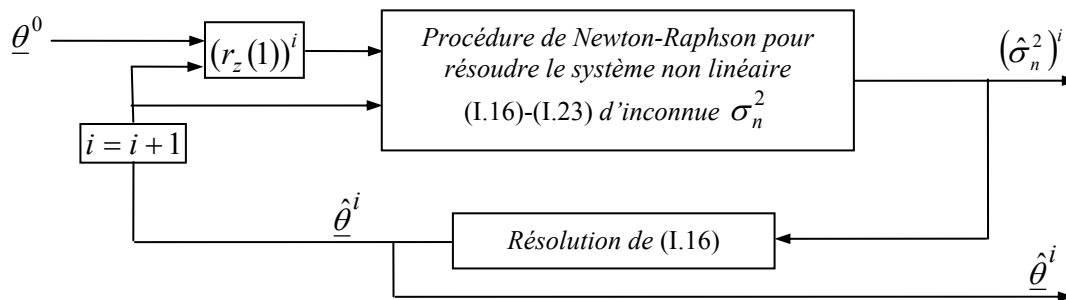


Figure I.3 : Schéma de principe de la méthode de Hasan [HAS03a].

Remarque : De notre point de vue, les équations (I.16) et (I.23) peuvent également être utilisées alternativement et itérativement. Cependant, Hasan *et al.* [HAS03a] ne mentionnent pas cette alternative qui a l'avantage d'être plus simple à implanter.

L'idée proposée par Davila *et al.* [DAV98] est de voir la résolution des équations de YW modifiées (I.16) comme un problème de décomposition en valeurs propres généralisée. Ils considèrent dans un premier temps un système surdéterminé en ajoutant  $q$  équations au système (I.16), ce qui conduit à la relation suivante :

$$\bar{R}_{yy} \bar{\theta}_{LSC} = \sigma_n^2 B \bar{\theta}_{LSC}, \quad (I.24)$$

où :

$$\bar{R}_{yy} = E \left\{ \begin{bmatrix} Y_k^p \\ Y_{k-1}^{p+q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_k^p \\ Y_{k-1}^{p+q} \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} r_y(1) & r_y(0) & r_y(-1) & \cdots & r_y(-p+1) \\ r_y(2) & r_y(1) & r_y(0) & \cdots & r_y(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(p) & r_y(p-1) & r_y(p-2) & \cdots & r_y(0) \\ r_y(p+1) & r_y(p) & r_y(p-1) & \cdots & r_y(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(p+q) & r_y(p+q-1) & r_y(p+q-2) & \cdots & r_y(q) \end{bmatrix}, \quad (I.25)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (I.26)$$

et

$$\bar{\theta}_{LSC} = [1 \quad \theta_{LSC}^T]^T. \quad (I.27)$$

Etant donné (I.24),  $\sigma_n^2$  et  $\bar{\theta}_{LSC}$  sont respectivement interprétés comme une valeur propre généralisée de la matrice  $\bar{R}_{yy}$  et le vecteur propre associé. Le sous-espace propre correspondant au vecteur des paramètres AR est déterminé en résolvant le problème quadratique équivalent suivant :

$$\left( A_0 + \sigma_n^2 A_1 + (\sigma_n^2)^2 A_2 \right) \bar{\theta}_{LSC} = 0_{p+1} \quad (I.28)$$

avec  $A_0 = \bar{R}_{yy}^T \bar{R}_{yy}$ ,  $A_1 = -(\bar{R}_{yy}^T B + B^T \bar{R}_{yy})$  et  $A_2 = B^T B$ .

Les valeurs propres relatives au problème (I.28) sont alors complexes conjuguées. Dans le cas non bruité, la valeur propre recherchée vaut théoriquement 0 car la variance du bruit additif est nulle. Dans le cas bruité, la variance du bruit additif s'ajoute à toutes les valeurs propres de  $\bar{R}_{yy}$  et la solution recherchée correspond à la seule valeur propre  $\sigma_n^2$  réelle. Pour résoudre

(I.28), on se ramène à la résolution du problème de décomposition en valeurs propres généralisées suivant :

$$P\bar{\theta}_{LSC} = \sigma_n^2 Q\bar{\theta}_{LSC} \quad (I.29)$$

$$\text{où } P = \begin{bmatrix} A_0 & 0_p \\ 0_p & I_p \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 \\ I_p & 0_p \end{bmatrix}.$$

Néanmoins, dans la pratique, l'estimation de la fonction d'auto-corrélation de  $y_k$  introduit des erreurs calculatoires et la valeur propre recherchée n'est pas rigoureusement réelle. Comme sa partie imaginaire est très petite par rapport aux parties imaginaires des autres valeurs propres de  $\bar{R}_{yy}$ , Davila *et al.* choisissent le sous-espace propre dont la valeur propre a le plus petit module.

Outre les méthodes qui reposent sur l'équation (I.16), d'autres approches ont été proposées. Parmi elles, Deriche *et al.* [DER94] estiment les paramètres AR au sens du maximum de vraisemblance à l'aide d'un algorithme itératif de type Estimation-Maximisation (EM).

Dans [DIV05], Diversi *et al.* ont récemment proposé d'estimer les paramètres AR en exploitant le fait que la matrice suivante :

$$R_{yy}^e - \begin{bmatrix} \sigma_n^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix} I_{p+1} \quad (I.30)$$

doit être définie non négative, où  $R_{yy}^e$  est la matrice d'auto-corrélation de taille  $p+1$  des observations.

Enfin, Hasan *et al.* [HAS03b] proposent de modéliser la fonction d'auto-corrélation des observations bruitées par une somme de sinusoides exponentiellement amorties (EDS). Les paramètres AR sont ensuite estimés à partir des paramètres EDS.

Les méthodes off-line d'estimation des paramètres AR ont l'avantage d'avoir de faibles coûts calculatoires. Néanmoins, la stabilité des algorithmes à correction de biais n'est pas toujours assurée notamment lorsque le Rapport Signal à Bruit (RSB) devient trop faible ou lorsque le nombre d'échantillons devient limité. Dans la partie suivante, nous nous focalisons sur les techniques on-line.

### I.2.2. Méthodes on-line à correction de biais

Nous nous intéressons dans cette partie aux méthodes adaptatives de type LMS. Pour résoudre le problème du biais, Treichler *et al.* [TRE79] proposent l'algorithme  $\gamma$ -LMS qui consiste à modifier l'équation (I.3) de mise à jour des paramètres AR de la manière suivante :

$$\hat{\underline{\theta}}_k = \gamma \hat{\underline{\theta}}_{k-1} + \mu \underline{Y}_{k-1}^p e_k . \quad (I.31)$$

avec  $\gamma = 1 - \mu \sigma_n^2$  et  $e_k = y_k - (\underline{Y}_{k-1}^p)^T \hat{\underline{\theta}}_k$ .

$E\{\hat{\underline{\theta}}_k\}$  converge alors vers  $\underline{\theta}$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  [TRE79]. Cette solution correspond à la résolution récursive des équations de YW compensées en bruit par un algorithme de type gradient.

Wu *et al.* [WU97] proposent une méthode fondée sur l'algorithme  $\rho$ -LMS. L'idée est de mettre à jour les paramètres AR avec une équation de type gradient reposant sur une estimation préalable du processus, obtenue à partir des derniers paramètres AR estimés. Les auteurs montrent dans une étude statistique que le filtre  $\rho$ -LMS fournit une estimation des paramètres dont la variance est plus faible que celle obtenue à partir de l'algorithme  $\gamma$ -LMS.

Cependant, pour implanter les algorithmes  $\gamma$ -LMS et  $\rho$ -LMS, la variance du bruit additif doit être connue. Pour cette raison, Zhang *et al.* [ZHA00] proposent d'estimer conjointement les paramètres AR et la variance  $\sigma_n^2$  en mettant en oeuvre l'algorithme  $\beta$ -LMS, conduisant à des estimations non biaisées des paramètres AR.

Les méthodes fondées sur un filtre de type gradient sont néanmoins relativement lentes à converger par rapport aux filtres de Kalman et RLS. De plus, afin d'obtenir des estimations non biaisées, on est amené à introduire des hyper paramètres qui, comme le pas  $\mu$  de l'algorithme LMS, restent délicats à régler.

### **I.3. Conclusion**

L'objet de ce chapitre était de présenter les méthodes d'estimation des paramètres d'un processus AR au sens des moindres carrés, plus particulièrement dans le cas où le processus est noyé dans un bruit additif. Lorsque qu'une méthode off-line est choisie, le problème d'estimation devient non linéaire car la variance du bruit additif n'est pas connue. Pour corriger le biais d'estimation des paramètres AR, des techniques itératives ou fondées sur une décomposition en sous-espaces doivent alors être mises en œuvre. Néanmoins, ces méthodes conduisent à des algorithmes qui peuvent devenir instables, notamment lorsque le nombre d'échantillons devient réduit. Les méthodes on-line permettant de corriger le biais sont principalement fondées sur un algorithme de type gradient (LMS). Leur vitesse de convergence peut s'avérer relativement longue et régler le pas de l'algorithme reste une étape délicate.

Dans le prochain chapitre, nous proposons donc une démarche alternative fondée sur les approches dites des variables instrumentales.





## Chapitre II

### II. Techniques des variables instrumentales pour l'estimation de paramètres AR

---

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux méthodes des Variables Instrumentales (VI) qui constituent une alternative aux méthodes d'estimation au sens des moindres carrés pour l'estimation des paramètres AR à partir d'observations bruitées. Après avoir présenté le principe de ces méthodes, nous en dressons l'état de l'art. Puis, nous proposons une approche VI récursive fondée sur deux filtres de Kalman interagissant en parallèle [LAB03] [LAB04b] [LAB05c]. Cette méthode consiste à estimer les paramètres AR à partir d'une version filtrée du processus AR, conduisant ainsi à l'estimation conjointe du signal et de ses paramètres. Des extensions de cette méthode sont ensuite décrites, notamment dans le cas où le bruit d'observation est coloré [LAB05c]. Enfin, nous menons une étude comparative entre l'approche proposée et des méthodes d'estimation existantes [DAV98], [ZHE00], [TRE79], [WU97], [DOB98] dans le cas où le bruit d'observation est blanc puis coloré.

## II.1. Présentation des techniques des variables instrumentales (VI)

### II.1.1. Principe

Les techniques des Variables Instrumentales (VI) permettent de contourner le problème du biais en utilisant des variables, appelées *instruments*, exogènes au système et non corrélées au

sens de la limite en probabilité au processus  $\left\{ \lambda_i = u_i + n_i + \sum_{j=1}^p a_i n_{i-j} \right\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$  défini dans

l'équation (I.6).

Une suite d'estimateurs  $\hat{\underline{\theta}}_N$  a pour limite en probabilité  $\underline{\theta}$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Prob} \left( \max_N |\hat{\underline{\theta}}_N - \underline{\theta}| \geq \varepsilon \right) = 0. \quad (\text{II.1})$$

La limite est alors notée  $P \lim_{N \rightarrow +\infty} (\hat{\underline{\theta}}_N) = \underline{\theta}$ . Lorsque l'estimateur  $\hat{\underline{\theta}}_N$  converge en probabilité vers les paramètres recherchés  $\underline{\theta}$ , il est dit consistant.

Etant donné le problème d'estimation paramétrique défini par les équations (I.1)-(I.5), la matrice  $Z_k$  de taille  $q \times N$  est dite *instrumentale* si elle satisfait les conditions suivantes :

Condition 1 :  $Z_k$  est asymptotiquement non corrélée à  $\underline{\Lambda}_k^N$ , ce qui revient à dire que

$$P \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{N} Z_k \underline{\Lambda}_k^N \right) = 0, \text{ pour tout } k.$$

Condition 2 :  $\frac{1}{N} Z_k \underline{\Psi}_k^N$  est inversible et son inverse a une limite en probabilité.

Rappelons l'équation (I.6) qui traduit la récursion matricielle sur  $y_k$  :

$$\underline{Y}_k^N = \underline{\Psi}_k^N \underline{\theta} + \underline{\Lambda}_k^N \quad (\text{I.6})$$

En prémultipliant cette relation par  $Z_k$ , on obtient :

$$[Z_k \underline{\Psi}_k^N]^{-1} Z_k \underline{Y}_k^N = \underline{\theta} + [Z_k \underline{\Psi}_k^N]^{-1} Z_k \underline{\Lambda}_k^N. \quad (\text{II.2})$$

L'estimateur  $\hat{\underline{\theta}}_{VI}$  des paramètres  $\underline{\theta}$  est donc défini par :

$$\hat{\underline{\theta}}_{VI} = [Z_k \underline{\Psi}_k^N]^{-1} Z_k \underline{Y}_k^N. \quad (\text{II.3})$$

L'erreur d'estimation associée est la suivante :

$$\hat{\underline{\theta}}_{VI} - \underline{\theta} = [Z_k \Psi_k^N]^{-1} Z_k \underline{\Lambda}_k^N. \quad (\text{II.4})$$

D'après la condition 1,  $\hat{\underline{\theta}}_{VI} - \underline{\theta}$  converge en probabilité vers 0 et l'estimation est consistante.

En outre, les méthodes VI constituent une généralisation des méthodes des moindres carrés car si l'on choisit  $Z_k = (\Psi_k^N)^T$ , l'estimateur (II.3) correspond à l'estimateur des moindres carrés (I.9), mais la condition 1 n'est plus vérifiée.

Le choix délicat de la matrice  $Z_k$  constitue l'étape clé d'une méthode VI et conduit donc à différentes approches.

### II.1.2. Etat de l'art des méthodes VI pour l'estimation de paramètres AR

Les méthodes VI ont vu le jour dans le domaine de l'économétrie. Un des premiers articles utilisant les méthodes VI pour la caractérisation de systèmes linéaires a été publié par Wong et Polak [WON67]. Sans être exhaustif, ces méthodes sont aujourd'hui exploitées pour l'analyse spectrale [FRI83], pour l'estimation des DOA [STO95] ou dans le domaine biomédical [CHA85].

Considérons un processus AR défini par la relation (I.1). Si les seules données à disposition sont des observations bruitées  $y_k = s_k + n_k$  du processus, la première idée est de construire la matrice  $Z_k$  avec les échantillons  $y_k$ . Choisissons par exemple :

$$Z_k = - \begin{bmatrix} \underline{y}_{k-p-1}^N & \underline{y}_{k-p-2}^N & \cdots & \underline{y}_{k-p-N}^N \end{bmatrix}. \quad (\text{II.5})$$

Dans ce cas, lorsque le nombre d'échantillons tend vers l'infini, l'estimateur (II.3) peut être interprété à l'aide de la fonction d'auto-corrélation de l'observation  $y_k$  comme suit :

$$\hat{\underline{\theta}}_{VI} = -\bar{R}_{yy}^{-1} \bar{r}_y \quad (\text{II.6})$$

$$\text{où } \bar{R}_{yy} = \begin{bmatrix} r_y(p) & r_y(p-1) & \cdots & r_y(1) \\ r_y(p+1) & r_y(p) & & r_y(2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_y(2p-1) & r_y(2p-2) & \cdots & r_y(p) \end{bmatrix} \text{ et } \bar{r}_y^p = \begin{bmatrix} r_y(p+1) \\ \vdots \\ r_y(2p) \end{bmatrix}.$$

La relation (II.6) est connue sous le nom d'équations de Yule-Walker Modifiées (MYW) <sup>8</sup> [FRI83]. On remarque que le terme  $r_y(0)$ , à l'origine du biais d'estimation, n'intervient pas dans les équations (II.6). Néanmoins, on utilise des termes de la fonction d'auto-corrélation de

<sup>8</sup> Notons que les équations MYW sont utilisées dans la fonction *ivar* de la toolbox *Identification* de Matlab.

$y_k$  avec des décalages plus grands, conduisant à une plus grande variance d'estimation. On peut alors améliorer l'estimation des paramètres AR en augmentant le nombre d'équations dans le système (II.6), ce qui mène aux équations de Yule-Walker surdéterminées ou *Over Extended Yule-Walker equations* en anglais.

Notons qu'une résolution récursive de l'équation (II.3) est décrite dans [WON67]. Dans ce cas, la matrice instrumentale  $Z_k$  est un vecteur colonne de taille  $p$  construit à partir des observations. On obtient alors une version asymétrique<sup>9</sup> du filtre RLS :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_{k-1} \underline{S}_{k-1}^p e_k \\ K_{k-1} = P_{k-1} Z_k \\ P_k = P_{k-1} \left( I_p - Z_{k-1} (\underline{S}_{k-1}^p)^T P_{k-1} \left( (\underline{S}_{k-1}^p)^T P_{k-1} Z_k + 1 \right)^{-1} \right) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Il est également possible de mettre en œuvre les variantes VI du filtre RLS en introduisant un facteur d'oubli  $\lambda$  ou en utilisant un filtrage en treillis [FRI83].

### Construction des variables instrumentales par préfiltrage

Une approche alternative consiste à construire des variables instrumentales fortement corrélées avec le processus non bruité  $s_k$  et non corrélées avec le bruit d'observation  $n_k$ . Dans le contexte de l'identification pour l'analyse des systèmes en automatique, les variables instrumentales peuvent être obtenues en filtrant le processus d'entrée, qui est connu, à l'aide d'un système paramétrique linéaire auxiliaire [LJU87]. Young *et al.* [YOU70] ont exploité cette idée en proposant de mettre à jour les paramètres du système auxiliaire avec un filtre de Kalman. Cependant, en traitement du signal, le processus d'entrée n'étant pas disponible et ces techniques ne sont pas directement applicables. Dès lors, comme le suggèrent Friedlander *et al.* dans [FRI85], nous proposons ici de définir les variables instrumentales en préfiltrant les observations bruitées. Nous utilisons pour cela un filtrage de Kalman. Comme sa mise en œuvre nécessite la connaissance des paramètres AR, cette approche conduit au problème de l'estimation conjointe du signal et de ces paramètres [YOS81].

Si l'on choisit une estimation jointe, le vecteur d'état de la représentation du système est défini comme la concaténation de  $p$  échantillons successifs du signal et des paramètres AR. La représentation dans l'espace d'état résultante est non linéaire et un filtre de Kalman Etendu (EKF) doit être mis en œuvre pour estimer le vecteur d'état. Cependant, la phase de

---

<sup>9</sup> On la qualifie d'asymétrique car le terme  $(\underline{S}_{k-1}^p)^T P_{k-1} \underline{S}_{k-1}^p$  qui apparait dans le cas de l'estimation au sens des moindres carrés devient ici  $(\underline{S}_{k-1}^p)^T P_{k-1} Z_k$ .

linéarisation introduit des approximations et l'EKF peut devenir instable voire diverger lorsque le rapport signal à bruit devient trop faible. Pour améliorer cette méthode, Chui *et al.* [CHU90] proposent d'utiliser un EKF pour lequel la trajectoire nominale est calculée à partir d'un filtre de Kalman linéaire auxiliaire.

Pour contourner les problèmes d'une représentation non linéaire, nous proposons d'utiliser une approche duale [LAB03] [LAB04b] [LAB05c].

## II.2. Filtrage dual de Kalman fondé sur les méthodes VI

L'approche que nous présentons ici met en jeu deux filtres de Kalman fonctionnant en parallèle. A un instant  $k$  donné, l'un permet d'estimer les paramètres à partir d'une version filtrée des observations, alors que l'autre permet de filtrer les observations à partir de la dernière estimation des paramètres AR. Le couplage d'algorithmes pour l'estimation conjointe d'un signal et de ses paramètres n'est pas une idée récente [AND79]. Néanmoins, dans la méthode que nous proposons, les deux filtres de Kalman sont fortement interactifs. En effet, l'estimation du processus AR est utilisée, d'une part pour définir la représentation dans l'espace d'état des paramètres, et d'autre part pour estimer les variances du processus générateur et du bruit additif d'observation dans la représentation dans l'espace d'état du processus AR.

Notons que cette approche a été initialement conçue par Todini *et al.* [TOD78] dans le contexte de la prédiction de taux de précipitation fondées sur un modèle ARMAX et plus récemment étudiée par Mantovan *et al.* [MAN99] dans le contexte plus général de l'analyse de séries temporelles.

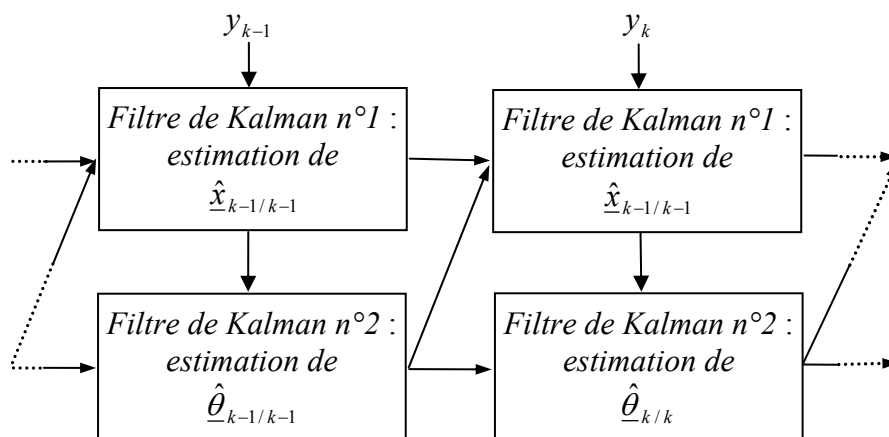


Figure II.1 : schéma de principe du filtre de Kalman dual interactif.

### II.2.1. Estimation du signal à partir des observations bruitées

L'objectif est d'estimer le signal  $s_k$ , modélisé par un processus AR d'ordre  $p$ . Pour cette raison, on construit le vecteur d'état de la manière suivante :

$$\underline{x}_k = [s_k \quad \cdots \quad s_{k-p+1}]^T. \quad (\text{II.8})$$

La représentation dans l'espace d'état du système (I.1)-(I.5) est alors définie par :

$$\begin{cases} \underline{x}_k = \Phi_k \underline{x}_{k-1} + \Gamma u_k \\ y_k = H \underline{x}_k + v_k \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

où  $v_k$  correspond au bruit additif d'observation  $n_k$ , c'est-à-dire un processus blanc gaussien centré de variance  $R = \sigma_n^2$ . Par ailleurs,  $u_k$  est le processus générateur, supposé blanc gaussien centré de variance  $Q = \sigma_u^2$ .

Une estimation  $\hat{\theta} = [\hat{a}_1 \quad \cdots \quad \hat{a}_p]^T$  des paramètres AR est supposée disponible et la matrice de transition  $\Phi_k$ , le vecteur d'entrée  $\Gamma$  et le vecteur d'observation  $H$  sont respectivement définis comme suit :

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1 & \cdots & \cdots & -\hat{a}_p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H = \Gamma^T = \begin{bmatrix} 1 & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{p-1} \end{bmatrix} = H_p. \quad (\text{II.10})$$

La mise en oeuvre d'un filtre de Kalman permet alors d'obtenir une estimation du vecteur d'état. Si  $\hat{\underline{x}}_{k/l}$  désigne cette estimation à l'instant  $k$  étant donné  $l$  observations et  $P_{k/l}$  la matrice de covariance associée, les équations de mise à jour du filtre sont décrites par [NAJ88] :

$$\begin{cases} \hat{\underline{x}}_{k/k-1} = \Phi_k \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1} & (\text{II.11a}) \\ P_{k/k-1} = \Phi_k P_{k-1/k-1} \Phi_k^T + \Gamma Q \Gamma^T & (\text{II.11b}) \\ v_k = y_k - H \hat{\underline{x}}_{k/k-1} & (\text{II.11c}) \\ K_k = P_{k/k-1} H^T (H P_{k/k-1} H^T + R)^{-1} & (\text{II.11d}) \\ \hat{\underline{x}}_{k/k} = \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + K_k v_k & (\text{II.11e}) \\ P_{k/k} = (I_p - K_k H) P_{k/k-1} & (\text{II.11f}) \end{cases}$$

où  $K_k$  est le gain du filtre de Kalman et  $v_k$  le processus d'innovation.

Lorsque le filtre de Kalman est optimal, l'innovation  $v_k$  est un bruit blanc [AND79] [NAJ88] de moyenne nulle et de variance  $C_k$  définie comme suit :

$$C_k = H^T P_{k/k-1} H^T + R. \quad (\text{II.12})$$

L'estimation  $\hat{s}_{k/k}$  du processus est ensuite obtenue comme suit :

$$\hat{s}_{k/k} = H \hat{x}_{k/k}. \quad (\text{II.13})$$

Pour estimer les paramètres AR, nous proposons maintenant d'utiliser un second filtre de Kalman opérant en parallèle.

### II.2.2. Estimation des paramètres AR à partir du signal filtré

Lorsque le processus AR est supposé stationnaire, les paramètres AR sont constants au cours du temps :

$$\underline{\theta}_k = \underline{\theta}_{k-1}. \quad (\text{II.14})$$

Pour les estimer à partir des observations rehaussées,  $\hat{s}_{k/k}$  est exprimé en fonction de  $\underline{\theta}_k$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{s}_{k/k} &= H[\Phi_k \hat{x}_{k-1/k-1} + K_k \nu_k] \\ &= -\hat{x}_{k-1/k-1}^T \underline{\theta}_k + HK_k \nu_k \\ &= H^\theta \underline{\theta}_k + \nu_k^\theta. \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

où  $H^\theta = -\hat{x}_{k-1/k-1}^T$  désigne à présent le vecteur d'observation. Le processus  $\nu_k^\theta = HK_k \nu_k$  est un bruit blanc à moyenne nulle et selon l'équation (II.12), sa variance vaut :

$$R_k^\theta = HK_k C_k K_k^T H^T. \quad (\text{II.16})$$

Les équations (II.14)-(II.15) constituent alors une représentation dans l'espace d'état pour estimer les paramètres AR par filtrage de Kalman :

$$\begin{cases} \underline{\theta}_k = \underline{\theta}_{k-1} \\ \hat{s}_{k/k} = H^\theta \underline{\theta}_k + \nu_k^\theta. \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Si  $\hat{\underline{\theta}}_{k/l}$  désignent l'estimation des paramètres AR à l'instant  $k$  étant donné  $l$  observations et  $P_{k/l}^\theta$  la matrice covariance associée, les équations de mises à jour du second filtre de Kalman sont :

$$\begin{cases} \hat{\underline{\theta}}_{k/k-1} = \hat{\underline{\theta}}_{k-1/k-1} \\ P_{k/k-1}^\theta = P_{k-1/k-1}^\theta \\ K_k^\theta = P_{k/k-1}^\theta (H^\theta)^T (H^\theta P_{k/k-1}^\theta (H^\theta)^T + R_k^\theta)^{-1} \\ \hat{\underline{\theta}}_{k/k} = \hat{\underline{\theta}}_{k/k-1} + K_k^\theta \nu_k^\theta \\ P_{k/k}^\theta = (I_p - K_k^\theta H^\theta) P_{k/k-1}^\theta \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

L'estimation  $\hat{\theta}_{k/k}$  des paramètres à l'instant  $k$  est alors injectée dans le premier filtre de Kalman pour estimer le processus AR à l'instant  $k+1$ .

Néanmoins, cette méthode ne peut être mise en œuvre que si les variances des processus  $u_k$  et  $v_k$  sont connues. Nous présentons dans la prochaine partie une méthode pour les estimer.

### II.2.3. Estimation des variances du processus générateur et du bruit d'observation

Pour estimer la variance du processus générateur  $u_k$ , on remarque que l'équation de Riccati (II.11b) et (II.11f) s'écrit de la manière suivante :

$$P_{k/k} = \Phi P_{k-1/k-1} \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T - K_k H P_{k/k-1}. \quad (\text{II.19})$$

Comme  $P_{k/k-1}$  est une matrice symétrique, d'après les équations (II.11d) et (II.12),  $P_{k/k-1}$  et  $C_k$  satisfont la relation suivante :

$$H P_{k/k-1} = C_k K_k^T. \quad (\text{II.20})$$

En combinant les équations (II.19) et (II.20), la matrice de covariance  $Q$  du processus générateur s'exprime comme suit :

$$Q = D(P_{k/k} - \Phi P_{k-1/k-1} \Phi^T - K_k C_k K_k^T) D^T. \quad (\text{II.21})$$

avec  $D = [\Gamma^T \Gamma]^{-1} \Gamma^T = \Gamma^T$  la pseudo-inverse de  $\Gamma$ .

Sachant que  $C_k$  représente la variance de l'innovation  $v_k$ , nous proposons d'estimer  $Q$  récursivement de la manière suivante :

$$\hat{Q}_k = \frac{k-1}{k} \hat{Q}_{k-1} + \frac{1}{k} D L_k D^T. \quad (\text{II.22})$$

où  $L_k = P_{k/k} - \Phi_{k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k-1}^T + K_k v_k^2 K_k^T$ .

Une estimation de la variance  $R$  du bruit additif d'observation  $v_k$  s'obtient à partir de l'équation (II.12) comme suit :

$$\hat{R}_k = \frac{k-1}{k} \hat{R}_{k-1} + \frac{1}{k} M(k) \quad (\text{II.23})$$

avec  $M_k = v^2(k) - H P_{k/k-1} H^T$ .



## II.2.4. Commentaires

Les équations (II.11), (II.18), (II.22) et (II.23) de cet algorithme suggèrent plusieurs commentaires :

1) Le vecteur d'observation  $H^\theta = -\hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^T$  est ici considéré comme une matrice instrumentale car il n'est pas corrélé avec le processus  $\nu_k^\theta$ . Ainsi, le second filtre de Kalman fournit une estimation consistante des paramètres AR à partir de l'équation (II.15).

2) La méthode que nous présentons est à rapprocher des techniques exposées dans le chapitre 10 dans [AND79]. Cependant, Anderson *et al.* ne donnent pas de détails sur l'implantation des filtres utilisés et notamment comment ils interagissent. En outre, d'autres méthodes utilisent une estimation duale du processus et de ses paramètres. En particulier, dans le contexte de l'annulation de bruit, Oppenheim *et al.* [OPP94] ont proposé de modéliser le bruit à atténuer par un processus AR. Un filtre de Kalman permet alors d'estimer le bruit tandis qu'un filtre LMS permet de mettre à jour les paramètres AR. Dans [DOB98], l'objectif est de rehausser un processus AR perturbé par un bruit additif, impulsionnel ou AR, à l'aide d'un lissage de Kalman. L'étape d'estimation des paramètres est réalisée à l'aide soit d'un algorithme de Levinson soit d'un algorithme RLSL, sans toutefois préciser comment la version rehaussée du signal est utilisée pour l'estimation des paramètres AR. Même si ces techniques sont intrinsèquement des méthodes VI, la méthode proposée se différencie par le fait que la variance de l'innovation relative au signal est exploitée pour définir la représentation dans l'espace d'état des paramètres AR.

3) Il est possible d'introduire un processus excitateur dans l'équation (II.14) comme suit :

$$\underline{\theta}_k = \underline{\theta}_{k-1} + \xi_k. \quad (\text{II.24})$$

où  $\xi_k$  est un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma_\xi^2$ .

Cela permet de donner une variabilité à l'estimation de  $\underline{\theta}_k$ . L'algorithme résultant autorise notamment une poursuite des paramètres AR, lentement variables dans le temps.

## II.3. Extensions de la méthode d'estimation duale

Nous proposons dans cette partie deux extensions de l'approche proposée dans la partie II.2. La première consiste à mettre en œuvre un lissage de Kalman pour améliorer *a priori* l'estimation du processus AR. La seconde traite le cas où le bruit additif d'observation est coloré.

### II.3.1. Utilisation d'un lissage de Kalman

Nous proposons ici un lissage à retard fixe (*fixed-lag smoothing* en anglais). Cela consiste à estimer le signal  $s_k$  étant donné  $k + q$  observations, i.e.  $Y_{k+q} = \{y_i\}_{i=1, \dots, k+q}$  :

$$s_{k/k+q} = E\{s_k / Y_{k+q}\}. \quad (\text{II.25})$$

où  $q$  est un entier positif fixé.

Un tel lissage est obtenu à partir d'un filtrage de Kalman en définissant le vecteur d'état comme suit :

$$\underline{x}_k = [s_k \quad \dots \quad s_{k-q}]^T. \quad (\text{II.26})$$

La représentation dans l'espace d'état du système (I.1)-(I.5) résultante est alors la suivante :

$$\begin{cases} \underline{x}_k = \Phi_k \underline{x}_{k-1} + \Gamma u_k \\ y_k = H \underline{x}_k + v_k \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

où  $u_k$  et  $v_k = n_k$  sont des processus gaussiens centrés de variance respectivement  $Q = \sigma_u^2$  et  $R = \sigma_n^2$ . Si une estimation  $\hat{\theta}$  des paramètres AR est disponible, la matrice de transition  $\Phi_k$ , le vecteur d'entrée  $\Gamma$  et le vecteur d'observation  $H$  sont respectivement définis comme suit :

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1 & \dots & -\hat{a}_p & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^T = H = \begin{bmatrix} 1 & \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_q \end{bmatrix}. \quad (\text{II.28})$$

Un filtrage de Kalman fournit alors une version filtrée et une version lissée du signal, respectivement comme suit :

$$\hat{s}_{k/k} = H \hat{x}_{k/k} \quad (\text{II.29})$$

et

$$\hat{s}_{k-q/k} = L \hat{x}_{k/k} \quad (\text{II.30})$$

$$\text{où } L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A ce niveau, on cherche à exprimer la version lissée du signal en fonction des paramètres AR  $\theta$  à estimer. En combinant les équations (II.11e) et (II.30), on aboutit à l'estimation suivante du processus :

$$\hat{s}_{k-q/k} = \hat{s}_{k-q/k-1} + K_k^{q+1} v_k \quad (\text{II.31})$$

où  $K_k^{q+1}$  désigne la  $(q+1)^{\text{ème}}$  composante du gain du lissage à l'instant  $k$ .

Par un raisonnement analogue, lorsque  $k-i$  observations sont disponibles avec  $0 \leq i \leq q-1$ , l'estimation lissée du processus est décrite par :

$$\hat{s}_{k-q/k-i} = \hat{s}_{k-q/k-i-1} + K_{k-i}^{q-i+1} v_{k-i} \quad (\text{II.32})$$

où  $K_k^i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du gain du lissage de Kalman à l'instant  $k$ .

Puisque l'équation (II.32) est valable pour  $0 \leq i \leq q-1$ , l'estimation lissée du processus AR à l'instant  $k-q$  s'exprime comme suit :

$$\hat{s}_{k-q/k} = \hat{s}_{k-q/k-q} + \sum_{i=1}^q K_{k-q+i}^{i+1} v_{k-q+i} \quad (\text{II.33})$$

Or, d'après les équations (II.11e) et (II.29), la version filtrée du signal à l'instant  $k-q$  s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{s}_{k-q/k-q} &= H \left( \Phi_{k-q} \hat{x}_{k-q-1/k-q-1} + K_{k-q} v_{k-q} \right) \\ &= - \left( \hat{x}_{k-q-1/k-q-1}^{1:p} \right)^T \underline{\theta}_{k-q} + K_{k-q}^1 v_{k-q} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

où  $\hat{x}_{k-q-1/k-q-1}^{1:p}$  correspond aux  $p$  premières composantes du vecteur d'état  $\hat{x}_{k-q-1/k-q-1}$ .

En injectant l'équation (II.34) dans l'équation (II.33), l'expression du signal lissé devient :

$$\hat{s}_{k-q/k} = - \left( \hat{x}_{k-q-1/k-q-1}^{1:p} \right)^T \underline{\theta}_{k-q} + v_k^\theta \quad (\text{II.35})$$

avec  $v_k^\theta = \sum_{i=0}^q K_{k-q+i}^{i+1} v_{k-q+i}$ .

Ainsi, les équations (II.14)-(II.35) forment une représentation dans l'espace d'état pour l'estimation des paramètres AR. Un filtrage de Kalman permet alors d'estimer les paramètres AR. Comme le processus d'innovation  $\nu_k$  est un processus blanc [AND79], la variance  $R_\theta$  peut s'exprimer par la somme suivante :

$$R_\theta = \sum_{i=0}^q (K_{k-q+i}^{i+1})^2 (HP_{k-q+i/k-q+i-1} H^T + R). \quad (\text{II.36})$$

Enfin, les variances du processus générateur et du bruit additif d'observation sont estimées de la même manière que dans la section II.2.3.

### II.3.2. Cas d'un bruit additif d'observation coloré

Dans des cas d'applications réelles, le bruit additif est souvent coloré. Dans ce cas, les approches que nous venons de présenter ne sont plus appropriées.

Pour pallier ce problème, une solution possible consiste à caractériser le bruit d'observation par un modèle paramétrique. Selon les caractéristiques fréquentielles du bruit, un modèle AR ou un modèle MA est envisagé. Lorsqu'un modèle AR d'ordre  $q$  est choisi, on trouve dans [GIB91] [GAN98] [POP98] [GRI02] des méthodes fondées sur un filtrage de Kalman. Le vecteur d'état est défini en concaténant  $p$  échantillons successifs du signal et  $q$  échantillons consécutifs du bruit. Ce choix conduit à une représentation dans l'espace d'état où le bruit de l'équation d'observation est nul, ce qui peut rendre le gain du filtre instable. Pour pallier cet inconvénient, les auteurs utilisent un changement de coordonnées pour réduire l'ordre du filtre [AND79] [GIB91].

Dans la suite, nous nous focalisons sur un modèle MA d'ordre  $q$  pour le bruit perturbateur  $n_k$  défini comme suit :

$$n_k = \sum_{i=0}^q b_i \beta_{k-i} \quad (\text{II.37})$$

où  $\{b_i\}_{i=0, \dots, q}$  sont les paramètres MA et  $\beta_k$  est un bruit blanc gaussien centré de variance  $\sigma_\beta^2$  et indépendant du processus générateur  $u_k$ .

Plusieurs techniques ont été proposées pour estimer les paramètres AR à partir des observations bruitées  $y_k$ .

Zheng *et al.* [ZHE98] montrent que l'erreur d'estimation au sens des moindres carrés est telle que :

$$\hat{\underline{\theta}}_{LS} = \underline{\theta} + \hat{R}_y^{-1}(\hat{\underline{r}}_n - \hat{R}_n \underline{\theta}) \quad (\text{II.38})$$

avec  $\hat{\underline{r}}_n$  une estimation du vecteur de corrélation entre  $n_k$  et  $[n_{k-1} \ \dots \ n_{k-p}]^T$ , et  $\hat{R}_n$  une estimation de la matrice d'auto-corrélation de taille  $p \times p$  du bruit  $n_k$ .

En procédant de la même façon que dans le cas d'un bruit blanc (Cf. partie I.2), Zheng *et al.* [ZHE98] introduisent un vecteur de paramètres AR étendu avec un zéro et trouvent une seconde relation entre les paramètres AR et la fonction d'auto-corrélation du bruit additif. Une technique itérative à correction de biais permet alors d'obtenir une estimation des paramètres AR.

Hasan *et al.* [HAS03c] remarquent que la fonction d'auto-corrélation  $r_n(\tau)$  de  $n_k$  est nulle pour des décalages  $\tau$  supérieurs à  $q+1$  :

$$r_y(\tau) = \begin{cases} r_s(\tau) + r_n(\tau) & , \tau \leq q \\ r_s(\tau) & , \tau > q \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Ils caractérisent alors  $\{r_y(\tau)\}_{\tau > q}$  par un modèle EDS et estiment ses différentes composantes par une méthode de type poursuite adaptative (*Matching Pursuit*). Les paramètres AR sont ensuite obtenus à partir des paramètres EDS.

Nous proposons ici une alternative fondée sur la méthode présentée au paragraphe II.2. Le modèle pour le bruit est défini par l'équation (II.37). Nous introduisons également les processus suivants :

$$w_k^j = \sum_{i=1}^{q+1-j} b_{i+j-1} \beta_{k-i} , j \in \{1, \dots, q\} . \quad (\text{II.40})$$

Ils permettront de simplifier l'écriture de la représentation dans l'espace d'état du système.

A l'aide des équations (I.5), (II.37) et (II.40), on peut exprimer l'observation comme suit :

$$\begin{aligned} y_k &= s_k + \sum_{i=1}^q b_i \beta_{k-i} + b_0 \beta_k \\ &= s_k + w_k^1 + v_k . \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

où  $v_k = b_0 \beta_k$  est un bruit blanc gaussien centré de variance  $R = \sigma_v^2 = b_0^2 \sigma_\beta^2$ .

En construisant le vecteur d'état comme suit :

$$\underline{x}_k = [s_k \quad \cdots \quad s_{k-p+1} \quad w_k^1 \quad \cdots \quad w_k^q]^T, \quad (II.42)$$

la représentation dans l'espace d'état correspondant au système (I.1)-(I.5)-(II.37) est la suivante :

$$\begin{cases} \underline{x}_k = \Phi_k \underline{x}_{k-1} + \Gamma \underline{u}_k \\ y_k = H \underline{x}_k + v_k \end{cases}, \quad (II.43)$$

avec :

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1 & \cdots & \cdots & -\hat{a}_p & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & & O_{q,p} & & & & \\ & & & & \vdots & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \end{bmatrix}, \quad (II.44)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} H_p^T & O_{p,1} \\ O_{q,1} & \Gamma_n \end{bmatrix}, \quad (II.45)$$

et

$$H = [H_p \quad H_q], \quad (II.46)$$

où  $H_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Gamma_n = [b_1 \quad \cdots \quad b_q]^T$  et  $O_{m,n}$  est la matrice nulle de taille  $m \times n$ .

Le processus générateur  $\underline{u}_k$  est un vecteur gaussien centré défini par :

$$\underline{u}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (II.47)$$

de matrice de covariance  $Q = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix}$ .

A partir de la représentation dans l'espace d'état (II.43), un filtrage de Kalman permet d'obtenir une estimation du signal  $s_k$  étant donné les observations  $\{y_i\}_{i=1:k}$  comme suit :

$$\hat{s}_{k/k} = H_{p+q} \hat{\underline{x}}_{k/k}. \quad (II.48)$$

Néanmoins, ce filtrage nécessite la connaissance des paramètres MA  $\{b_i\}_{i=\{0,\dots,q\}}$ . Nous supposons qu'une estimation de ces paramètres est connue *a priori* ou peut être obtenue

durant les périodes d'observation où le signal n'est pas présent. Dans le contexte du traitement du signal de parole, ces segments correspondent aux trames de silence localisées à l'aide d'un détecteur d'activité vocale (VAD). Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B de la recommandation [G.729] pour plus de détails.

Pour estimer les paramètres AR, on exprime  $\hat{s}_{k/k}$  en fonction de  $\underline{\theta}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\hat{s}_{k/k} &= H_{p+q} [\Phi_k \hat{x}_{k-1/k-1} + K_k v_k] \\ &= -\hat{x}_{k-1/k-1}^T \underline{\theta} + H_{p+q} K_k v_k \quad . \\ &= H^{\theta} \underline{\theta} + v_k^{\theta} .\end{aligned}\tag{II.49}$$

La variance  $R_k^{\theta}$  du processus  $v_k^{\theta}$  est définie à partir de la variance de l'innovation du filtre de Kalman estimant le signal, en opérant comme dans l'équation (II.12). On obtient :

$$R_k^{\theta} = H_{p+q} K_k C_k K_k^T H_{p+q}^T .\tag{II.50}$$

Un second filtre de Kalman fondé sur la représentation dans l'espace d'état définie par les équations (II.49) et (II.14) permet alors d'estimer les paramètres AR.

L'estimation de la variance  $Q$  peut être réalisée de la même manière que dans le cas d'un bruit d'observation blanc. En utilisant la même démarche, on obtient :

$$\hat{Q}_k = \frac{k-1}{k} \hat{Q}_{k-1} + \frac{1}{k} D [P_{k/k} - \Phi_{k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k-1} + K_k v_k^2 K_k^T] D^T\tag{II.51}$$

où  $D$  est définie de la manière suivante :

$$D = \begin{bmatrix} H_p & O_{1,q} \\ O_{1,p} & \Gamma_n^T (\Gamma_n^T \Gamma_n)^{-1} \end{bmatrix} .\tag{II.52}$$

Comme la variance  $\sigma_{\beta}^2$  peut être estimée en même temps que les paramètres MA du bruit additif, on préférera utiliser l'équation réduite suivante :

$$\hat{\sigma}_{u_k}^2 = \frac{k-1}{k} \hat{\sigma}_{u_{k-1}}^2 + \frac{1}{k} \left[ P_{k/k}^{1,1} - \Phi_{k-1}^{1,1:p} P_{k-1/k-1}^{1:p,1:p} (\Phi_{k-1}^{1,1:p})^T + (K_k^{1,1})^2 v_k^2 \right]\tag{II.53}$$

où  $M^{1:p,1:q}$  représente la sous-matrice des  $p$  premières lignes et  $q$  premières colonnes de  $M$ .

La matrice diagonale  $\hat{Q}(k)$  est ensuite reconstituée comme suit :

$$\hat{Q}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_u^2(k) & 0 \\ 0 & \sigma_{\beta}^2 \end{bmatrix} .\tag{II.54}$$

La matrice  $R$  est calculée à partir des estimations du paramètre MA  $b_0$  et de la variance  $\sigma_{\beta}^2$ .

## II.4. Résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous étudions expérimentalement la méthode duale présentée dans la partie II.2. Pour cela, nous réalisons tout d'abord une étude comparative entre les méthodes off-line et on-line à compensation de biais pour l'estimation des paramètres du modèle AR dans le cas où le bruit additif est blanc et gaussien. Puis, nous traitons le cas où le processus AR est perturbé par un bruit additif coloré de type MA.

### II.4.1. Cas d'un bruit additif blanc : étude préliminaire

Avant de comparer l'approche proposée avec des méthodes existantes, nous avons effectué des tests préliminaires. Nous avons remarqué que l'algorithme reste « fiable » tant que le RSB est supérieur à 0 dB<sup>10</sup>. De plus, l'estimation de la variance  $R_k$  du bruit additif d'observation joue un rôle clé car elle fixe la puissance du bruit à éliminer et conditionne donc les performances de l'algorithme. Enfin, comme la plupart des méthodes on-line, la variance du processus générateur et les conditions initiales influent sur le comportement transitoire de l'estimation de  $\underline{\theta}_k$ .

Ainsi, nous avons dans un premier temps utilisé les équations (II.22) et (II.23) pour estimer respectivement  $Q_k$  et  $R_k$ . Les figures II.2 et II.3 illustrent les résultats de simulations obtenus sur un processus synthétique AR de 2000 échantillons dont les pôles sont  $p_{1,2} = 0.92e^{\pm j0.3\pi}$ , et qui est ensuite perturbé par un bruit blanc gaussien à moyenne nulle, à un RSB de 10 dB.

En moyenne, pour 100 réalisations du bruit additif, les pôles estimés sont  $\hat{p}_{1,2} = (0.971 \pm 0,007)e^{\pm j(0.293 \pm 0,004)\pi}$ . D'après la figure II.3, la méthode fondée sur les deux filtres de Kalman que nous proposons ne parvient pas à discriminer les variances du processus générateur et du bruit additif dans le signal bruité. Pour cette raison, nous supposons dans la suite que  $R_k$  est estimé durant les segments où le signal n'est pas présent.

---

<sup>10</sup> Les méthodes sont comparées à partir :

- de l'estimation moyenne des paramètres AR ; 100 réalisations du bruit additif sont utilisés.
- de la localisation des pôles estimés et de visualisation de l'allure du spectre AR. Dans ce cas, 20 réalisations sont utilisées pour les figures.



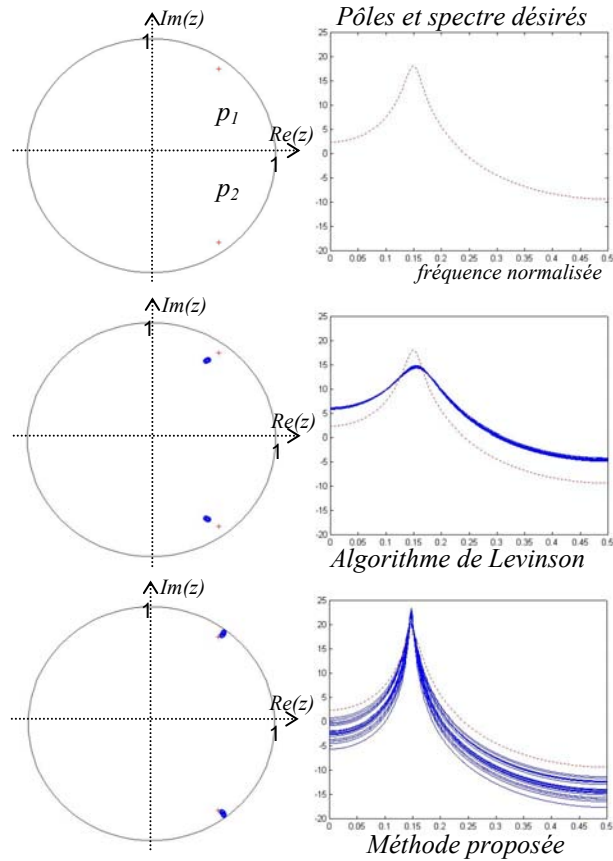


Figure II.2: localisation des pôles dans le plan complexe  $z$  et spectres AR correspondants pour l'algorithme de Levinson et la méthode proposée en utilisant les équations (II.22) et (II.23).

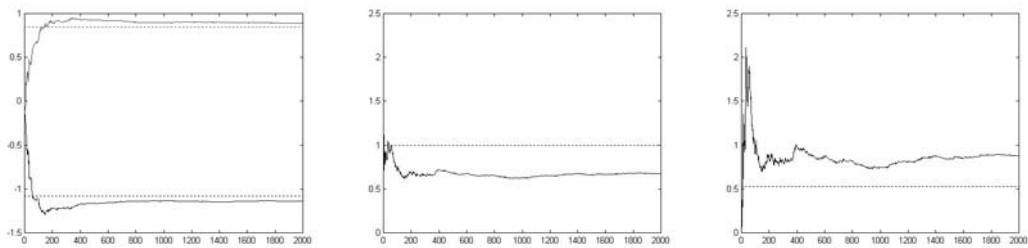


Figure II.3: convergence de l'estimation des paramètres AR et des variances  $Q_k$  et  $R_k$  avec l'algorithme proposé pour une réalisation.

L'expérience a donc été répétée en considérant la variance  $R$  a priori connue. Les pôles estimés sont alors en moyenne  $\hat{p}_{1,2} = (0,924 \pm 0.004) e^{\pm j(0,299 \pm 0.003)\pi}$ . D'après les figures II.4 et II.5, les paramètres AR et la variance  $Q_k$  convergent vers les valeurs désirées. Néanmoins, pour certains jeux de paramètres, la vitesse de convergence reste lente. C'est le cas

notamment lorsque le spectre du signal présente des résonances aiguës (c'est-à-dire des pôles de module supérieur à 0.98) de fréquences voisines (c'est-à-dire un écart entre les pulsations inférieur à  $0,1\pi$ ). Dans ce cas, les paramètres AR prennent des valeurs proches de la frontière de la zone de stabilité et un grand nombre d'échantillons est nécessaire pour que l'algorithme converge. Pour accélérer le processus d'estimation, nous proposons d'utiliser les estimations biaisées au sens des moindres carrés de  $\underline{\theta}_k$  et de  $Q_k$  comme conditions initiales de l'algorithme.

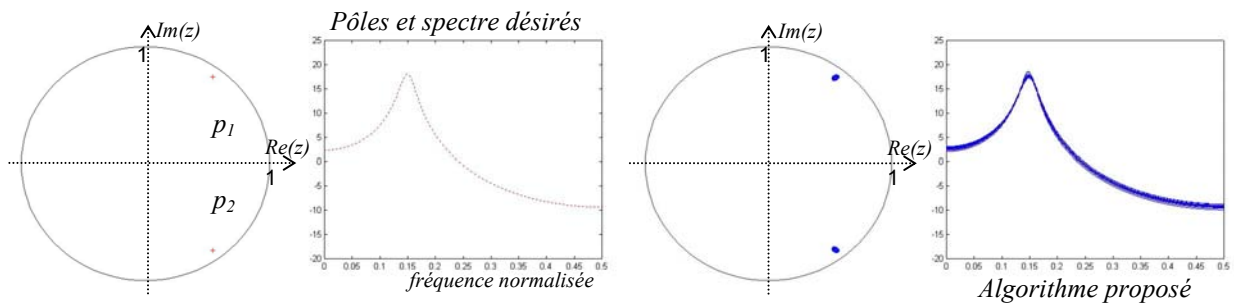


Figure II.4: localisation des pôles dans le plan complexe  $z$  et spectres AR correspondants pour la méthode proposée en utilisant l'équation (II.22) avec la variance  $R_k$  connue a priori.

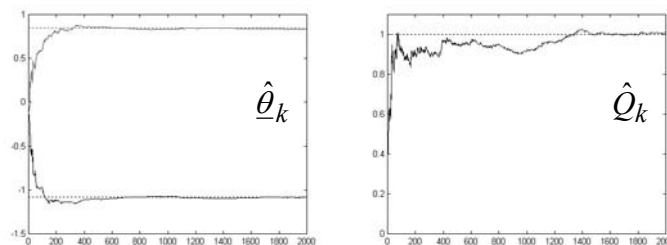


Figure II.5: convergence de l'estimation des paramètres AR et de la variance  $Q_k$  avec l'algorithme proposé pour une réalisation.

#### II.4.2. Cas d'un bruit additif blanc : étude comparative

Une étude comparative est ici effectuée entre huit méthodes à correction de biais dont quatre méthodes off-line :

- méthode de Davila [DAV98],
- méthode de Zheng [ZHE00],
- méthode de Hasan [HAS03a],
- équations de Yule-Walker Modifiées [FRI83],

et quatre méthodes on-line :

- algorithme  $\gamma$ -LMS [TRE79],
- algorithme  $\rho$ -LMS [WU97],
- approche de Doblinger [DOB98],
- approche duale proposée avec un filtrage pour estimer le processus AR<sup>11</sup>.

Lorsque le nombre d'échantillons est grand (c'est-à-dire supérieur à 2000), toutes les méthodes testées fournissent des estimations des paramètres AR non biaisées ou consistantes. Ainsi, pour les caractériser, nous nous intéressons à des cas limites et montrons les résultats de deux tests en particulier. Le premier consiste à éprouver les algorithmes lorsque le nombre d'observations disponibles est réduit (quelques centaines dans le cas du codage ou du rehaussement du signal de parole par exemple). Le second est un cas d'estimation de paramètres AR délicat à résoudre car le processus AR comporte deux résonances aiguës proches dans son spectre.

*Test n°1 : nombre réduit d'observations bruitées disponibles*

Un processus AR de 300 échantillons est généré. Ses pôles sont les suivants :

$$p_{1,2} = 0,98e^{\pm j0,1\pi}, \quad p_{3,4} = 0,97e^{\pm j0,3\pi} \quad \text{et} \quad p_{5,6} = 0,8e^{\pm j0,84\pi}.$$

Il est ensuite perturbé par un bruit blanc gaussien à moyenne nulle à un RSB de 10 dB.

*Test n°2 : processus AR comportant deux résonances aiguës proches*

Un processus AR de 512 échantillons est généré. Ses pôles sont les suivants :

$$p_{1,2} = 0,98e^{\pm j0,2\pi}, \quad p_{3,4} = 0,98e^{\pm j0,3\pi}.$$

Il est ensuite perturbé par un bruit blanc gaussien à moyenne nulle à un RSB de 15 dB.

---

<sup>11</sup> L'extension de la méthode proposée utilisant un lissage de Kalman n'est pas testée car elle permet uniquement d'améliorer l'estimation du processus. En pratique, nous avons en effet observé que les méthodes fondées sur un filtrage et sur un lissage fournissaient des résultats très similaires pour l'estimation des paramètres AR.

D'après la figure II.6, quand le nombre d'échantillons disponible est faible, les méthodes off-line peuvent diverger. Diversi *et al.* [DIV05] confirment que la procédure itérative de Zheng *et al.* peut devenir instable. Dans ce cas, les réalisations correspondantes ne sont pas prises en compte pour les résultats moyens (Cf. tableau III.1). La méthode de Hasan ne permet pas non plus d'obtenir une estimation « satisfaisante » des paramètres AR.

Les méthodes on-line fournissent des estimations des paramètres AR à l'intérieur du cercle unité. Néanmoins, les approches fondées sur un algorithme LMS n'ont pas le temps de converger et sont toujours dans un état transitoire. La méthode de Doblinger et celle fondée sur deux filtres de Kalman proposée dans ce mémoire donnent des estimations des pôles dans le cercle unité du plan complexe  $Z$  et permettent de détecter les fréquences des résonances les plus aigues dans le spectre du processus.

Méthode	$\sigma_a^2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	
Levinson	8,59 ± 0,47	-0,91 ± 0,04	-0,04 ± 0,07	0,21 ± 0,07	0,04 ± 0,06	-0,14 ± 0,08	0,18 ± 0,05	0
Davila	0,62 ± 0,28	-1,59 ± 0,47	0,77 ± 1,39	-0,16 ± 2,01	0,84 ± 1,78	-1,46 ± 0,99	0,85 ± 0,29	19
Zheng	1,70 ± 1,67	-1,46 ± 0,67	0,59 ± 1,36	-0,02 ± 1,72	0,68 ± 2,33	-1,30 ± 1,97	0,79 ± 0,75	12
Hasan	2,97 ± 10 <sup>8</sup>	-1,13 ± 1,00	-0,18 ± 2,44	0,91 ± 4,05	-0,68 ± 4,22	0,029 ± 2,73	0,01 ± 1,02	69
MYW	3,53 ± 0,49	-1,53 ± 0,20	0,48 ± 0,52	0,49 ± 0,65	-0,09 ± 0,59	-0,68 ± 0,40	0,57 ± 0,15	0
$\gamma$ -LMS	6,31 ± 1,06	-0,49 ± 0,08	-0,39 ± 0,11	0,18 ± 0,12	0,04 ± 0,11	-0,30 ± 0,12	0,48 ± 0,07	0
$\rho$ -LMS	7,28 ± 0,83	-0,55 ± 0,03	-0,19 ± 0,03	0,04 ± 0,03	-0,13 ± 0,04	-0,19 ± 0,03	0,60 ± 0,05	0
Doblinger	8,59 ± 0,47	-1,18 ± 0,06	0,12 ± 0,14	0,41 ± 0,19	-0,02 ± 0,15	-0,44 ± 0,14	0,39 ± 0,08	0
Méthode proposée	2,22 ± 0,58	-1,45 ± 0,08	0,34 ± 0,14	0,64 ± 0,16	-0,16 ± 0,14	-0,65 ± 0,15	0,54 ± 0,09	0
Valeur attendue	1	-1,60	0,45	0,87	-0,51	-0,56	0,58	/

Tableau III.1 : test 1, valeurs moyennes des paramètres AR estimés. La dernière colonne indique le nombre de réalisations non prises en compte dans le moyennage.

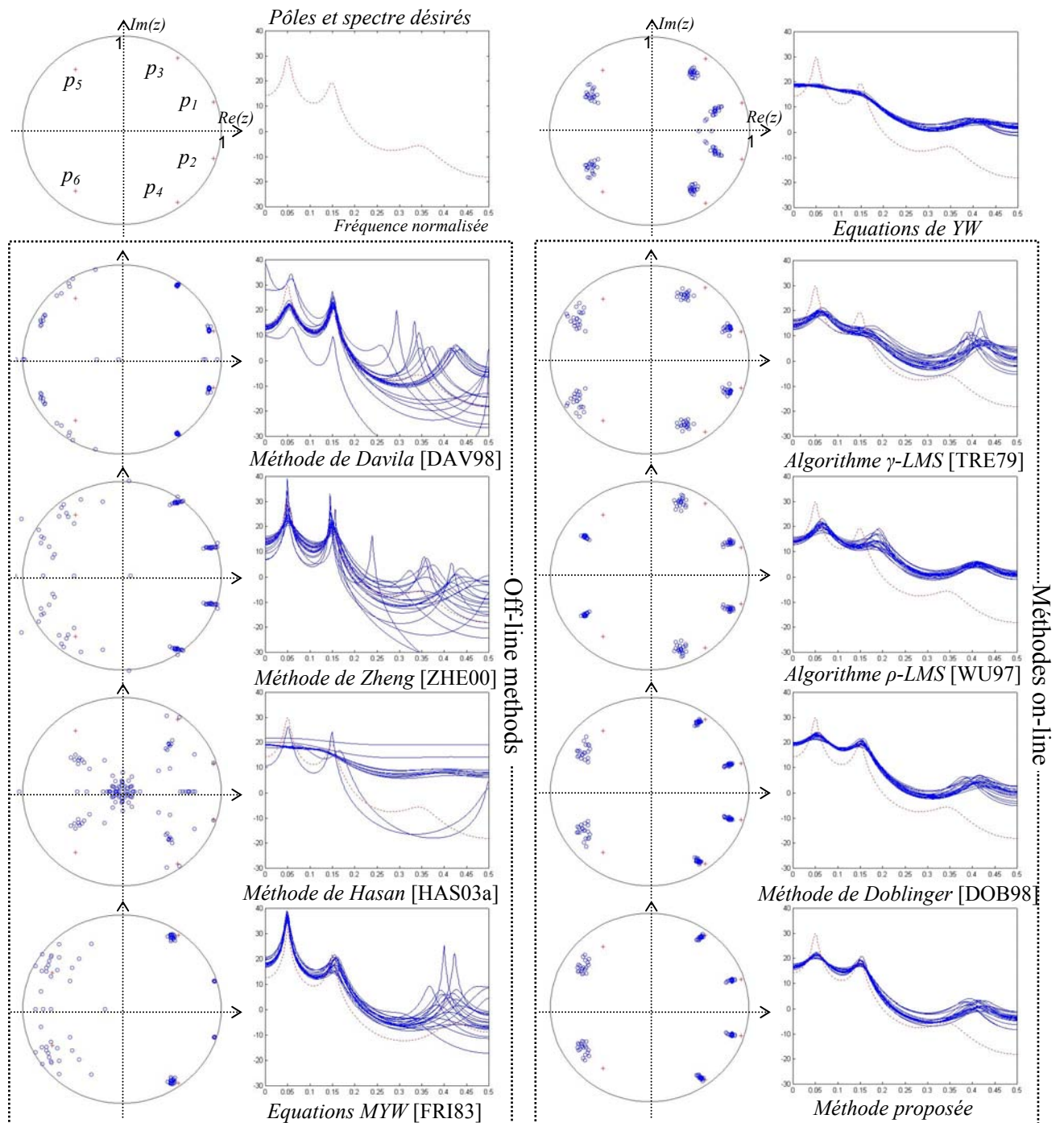


Fig. II.6: test n°1.

localisation des pôles dans le plan complexe  $z$  et spectres AR correspondants pour différentes approches off-line et on-line.

Dans la seconde expérience, l'ordre du modèle est *a priori* connu et fixé à 4. D'après la figure II.7 et le tableau III.2, la méthode de Davila *et al.* est dans ce cas la plus performante, mais devient très instable. Par ailleurs, toutes les méthodes on-line n'ont pas le temps de converger. Dans cette expérience, le choix de l'ordre du modèle s'avère relativement difficile à partir des critères classiques (critère d'information théorique d'Akaike ou l'analyse des valeurs singulières de la matrice des données [THE92]). Nous avons donc testé un ordre de  $p=6$ . Pour mener notre étude comparative, nous comparons la position des pôles et l'allure des spectres AR. D'après la figure II.8, les méthodes off-line restent toujours instables. La méthode de Doblinger et celle proposée ici permettent à présent de localiser les résonances basses fréquences du spectre. Néanmoins, la forme du spectre dans les hautes fréquences est modifiée.

Méthode	$\sigma_a^2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	
Levinson	85,53 ± 2,54	-0,74 ± 0,03	0,20 ± 0,04	0,36 ± 0,04	0,10 ± 0,03	0
Davila	4,81 ± 3,57	-2,75 ± 0,10	3,80 ± 0,27	-2,69 ± 0,28	0,96 ± 0,13	60
Zheng	72,50 ± 33,92	-0,79 ± 0,32	0,23 ± 0,46	0,38 ± 0,39	0,07 ± 0,19	10
Hasan	88,74 ± 571	-0,85 ± 1,39	0,40 ± 2,50	0,20 ± 2,58	0,14 ± 1,55	20
MYW	37,70 ± 7,02	-0,74 ± 0,17	0,21 ± 0,38	-0,13 ± 0,33	-0,17 ± 0,13	0
$\gamma$ -LMS	44,39 ± 9,01	-0,79 ± 0,10	0,11 ± 0,14	0,53 ± 0,13	-0,07 ± 0,09	0
$\rho$ -LMS	60,18 ± 7,97	-0,88 ± 0,05	0,29 ± 0,05	0,37 ± 0,04	-0,04 ± 0,05	0
Doblinger	85,53 ± 2,54	-1,03 ± 0,05	0,42 ± 0,09	0,37 ± 0,09	-0,08 ± 0,05	0
Méthode proposée	30,89 ± 3,01	-1,39 ± 0,09	0,90 ± 0,16	0,08 ± 0,14	-0,11 ± 0,05	0
Valeur attendue	1	-2,74	3,75	-2,63	0,92	/

Tableau III.2 : test 2, valeurs moyennes des paramètres AR estimés. La dernière colonne indique le nombre de réalisations non prises en compte dans le moyennage.

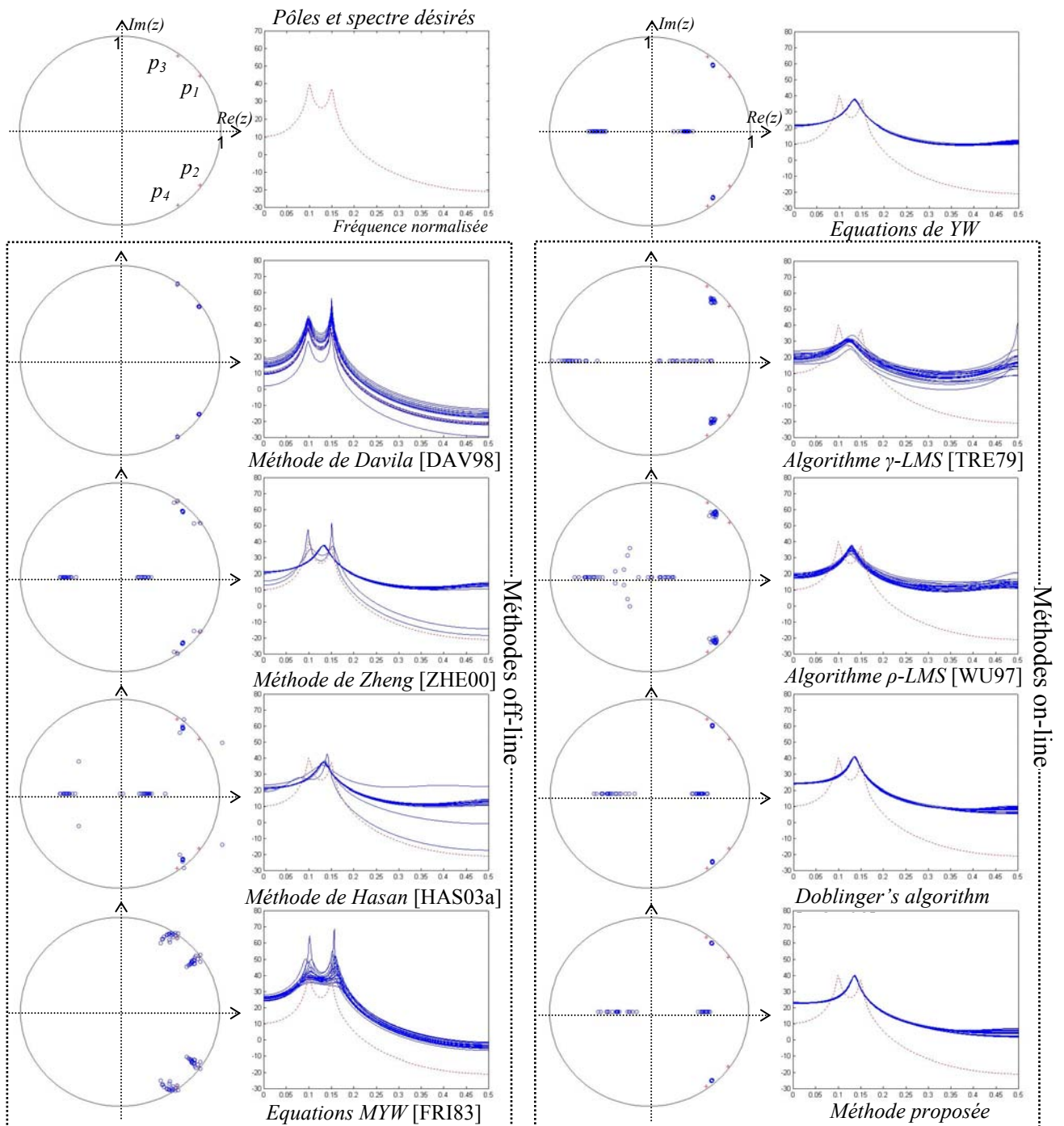


Fig. II.7: test n°2 avec  $p=4$ ,

localisation des pôles dans le plan complexe  $z$  et spectres AR correspondants

pour différentes approches off-line et on-line.

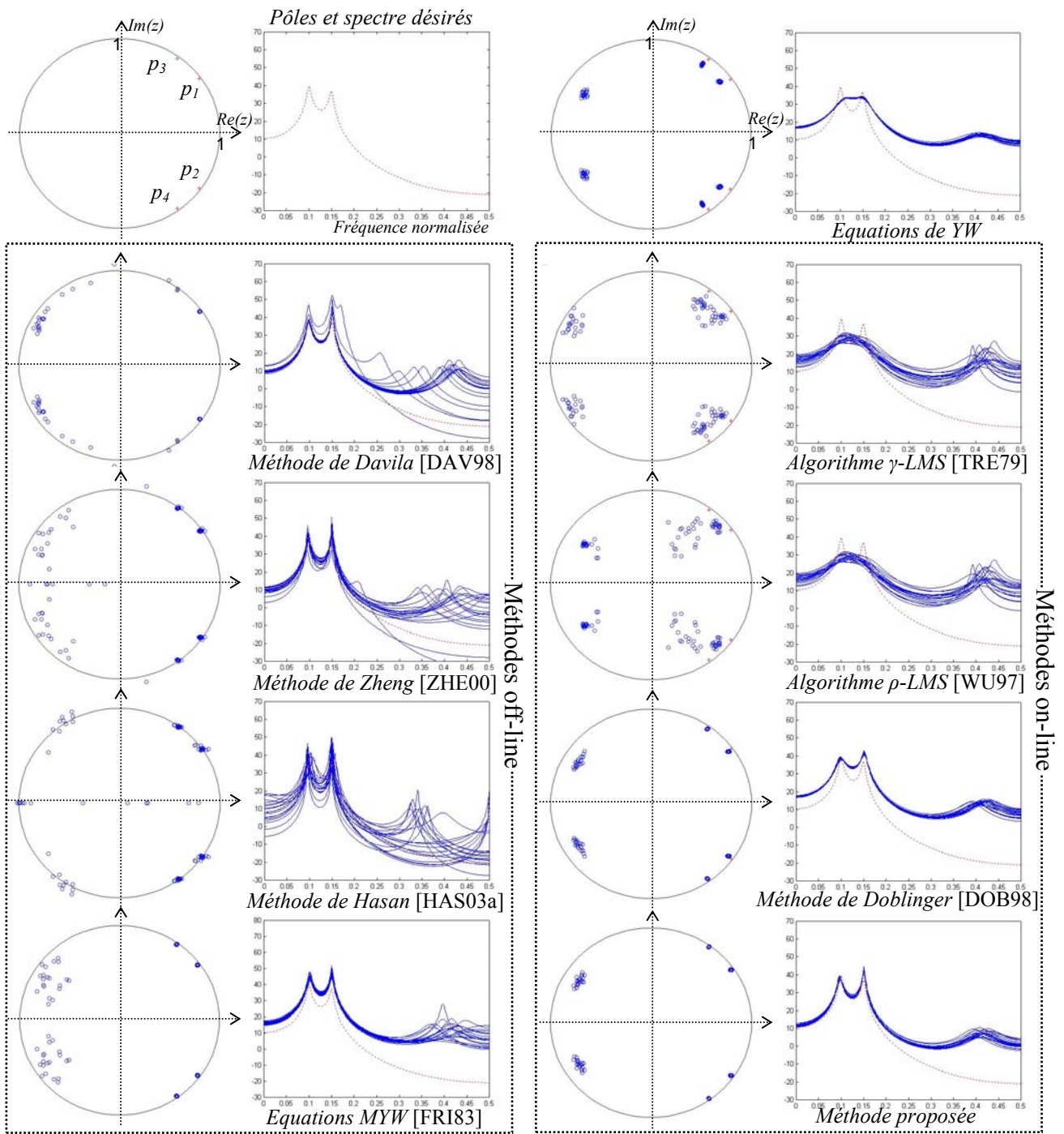


Figure II.8: test n°2 avec  $p=6$ .

localisation des pôles dans le plan complexe Z et spectres AR correspondants  
pour différentes approches off-line et on-line.



Il est à noter que le coût calculatoire de la méthode proposée est de l'ordre de  $p^3$  opérations par récursion, ce qui est comparable à celui de la méthode de Doblinger. Néanmoins, il reste plus élevé que celui des méthodes fondées sur un algorithme LMS.

Dans le cas d'un processus AR perturbé par un bruit blanc, la méthode fondée sur deux filtres de Kalman que nous proposons réalise le meilleur compromis entre stabilité et précision de l'estimation, mais possède un coût calculatoire relativement élevé.

### II.4.3. Cas d'un bruit additif coloré

Nous testons ici la méthode présentée dans la section II.3.2 lorsque le bruit d'observation est coloré de type MA. Nous l'avons comparée à celle proposée par Zheng *et al.* dans [ZHE98]. Deux tests ont été réalisés. Dans le premier, la résonance du processus AR est localisée dans les basses fréquences, alors que le bruit est localisé dans les hautes fréquences. Dans le second, le processus AR et le bruit MA sont tous deux localisés dans la même zone fréquentielle.

#### *Test n°3 : processus AR basse fréquence et bruit MA haute fréquence*

Un processus AR de 2000 échantillons est généré. Ses pôles sont les suivants :

$$p_{1,2} = \rho e^{\pm j\varphi} = 0.92e^{\pm j0.2\pi} .$$

Il est ensuite perturbé par un bruit MA à moyenne nulle d'ordre 4 caractérisé par les zéros

$$z_{1,2} = 0.9e^{\pm j0.1\pi} \text{ et } z_{3,4} = 0.9e^{\pm j0.4\pi} . \text{ Le RSB est fixé à 13 dB.}$$

#### *Test n°4 : processus AR et bruit MA dans la même zone fréquentielle*

Un processus AR de 2000 échantillons est généré. Ses pôles sont les suivants :

$$p_{1,2} = \rho e^{\pm j\varphi} = 0.95e^{\pm j0.4\pi} .$$

Il est ensuite perturbé par un bruit MA à moyenne nulle d'ordre 4 caractérisé par les zéros

$$z_{1,2} = 0.7e^{\pm j0.2\pi} \text{ et } z_{3,4} = 0.7e^{\pm j0.8\pi} . \text{ Le RSB est fixé à 0 dB.}$$

Méthode	$\sigma_\alpha^2$	$a_1$	$a_2$	
Levinson	4,68 ± 0,05	0,99 ± 0,01	0,37 ± 0,01	0
Zheng	1,74 ± 0,11	-1,42 ± 0,01	0,79 ± 0,01	0
Méthode proposée	1,31 ± 0,29	-1,46 ± 0,04	0,81 ± 0,04	0
Valeur attendue	1	-1,49	0,85	/

Tableau III.3 : test 3, valeurs moyennes des paramètres AR estimés. La dernière colonne indique le nombre de réalisations non prises en compte dans le moyennage.

Méthode	$\sigma_\alpha^2$	$a_1$	$a_2$	
Levinson	7,43 ± 0,20	-0,24 ± 0,02	0,56 ± 0,02	0
Zheng	4,76 ± 0,66	-0,39 ± 0,02	0,69 ± 0,03	0
Méthode proposée	1,76 ± 0,16	-0,48 ± 0,02	0,86 ± 0,01	0
Valeur attendue	1	-0,59	0,90	/

Tableau III.4 : test 2, valeurs moyennes des paramètres AR estimés. La dernière colonne indique le nombre de réalisations non prises en compte dans le moyennage.

Lorsque l'algorithme de Levinson est utilisé, les estimations des paramètres AR sont biaisées et il n'est pas possible de distinguer les spectres de puissance du signal et du bruit

Nous avons en outre réalisé d'autres expériences avec de nombreux jeux de paramètres MA à différents RSB. Les résultats ont montré que la méthode de Zheng *et al.* donnait souvent une estimation correcte de l'angle  $\varphi$ , mais surestimait le module  $\rho$ , conduisant parfois à des pôles en dehors du cercle unité. Comme l'illustrent les figures II.9 et II.10, la méthode que nous proposons donne des estimations des pôles plus robustes que celles obtenues avec la méthode de Zheng.

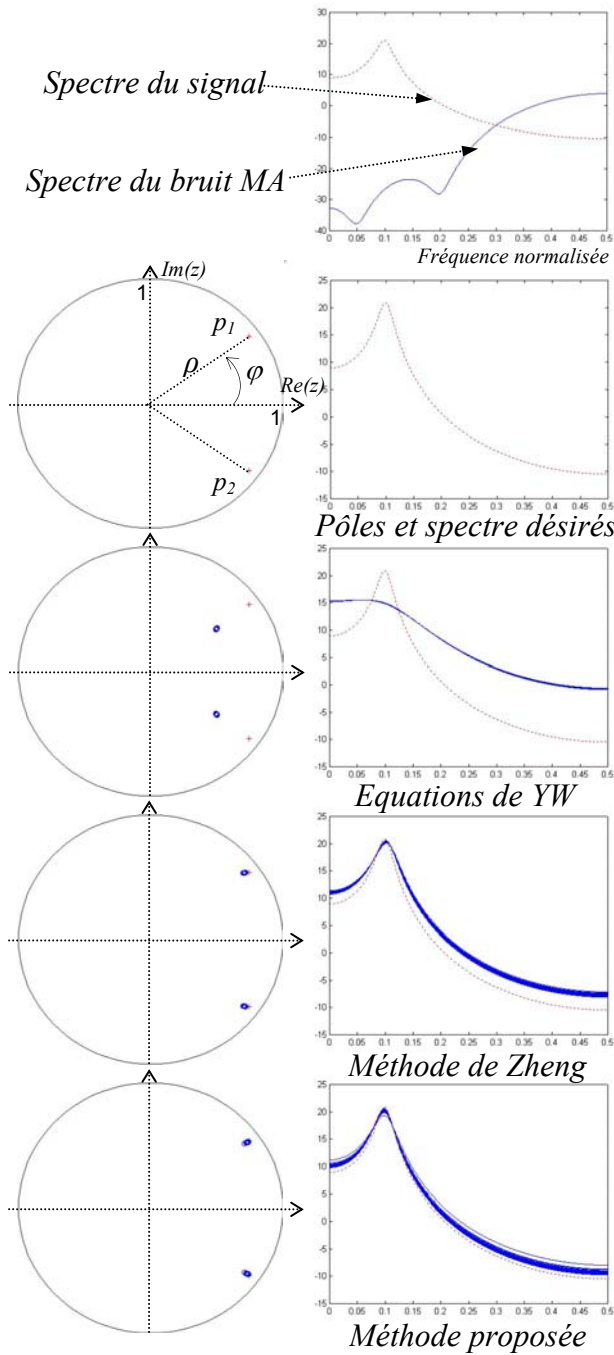


Figure II.9: test n°3,

localisation des pôles dans le plan complexe  $z$  et spectres AR correspondants dans le cas d'un bruit coloré.

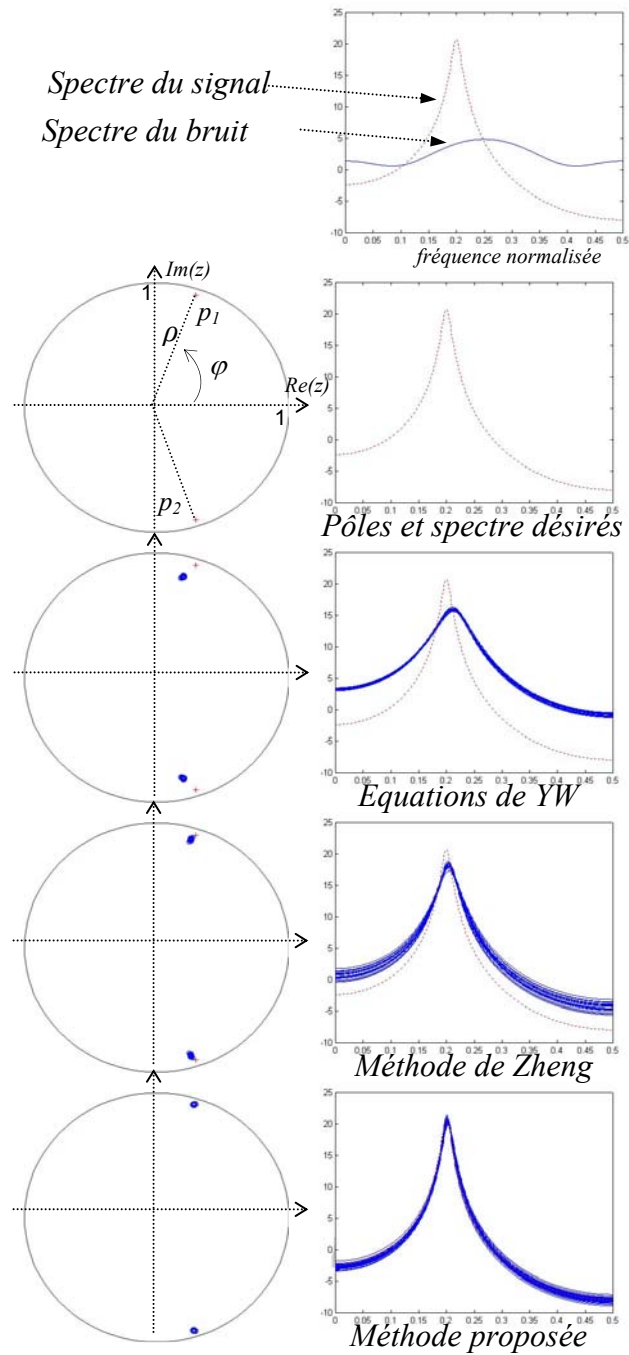


Figure II.10: test n°4,

localisation des pôles dans le plan complexe  $z$  et spectres AR correspondants dans le cas d'un bruit coloré.

## **II.5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche fondée sur les techniques de la matrice instrumentale pour estimer les paramètres AR d'un processus. Elle utilise deux filtrages de Kalman et permet d'estimer conjointement le processus AR et ses paramètres. Le premier filtre fournit une estimation du signal avec la dernière estimation disponible des paramètres AR, alors que le second permet de mettre à jour les paramètres AR en utilisant les dernières estimations du signal. L'originalité de ce travail réside dans le fait que la variance de l'innovation du premier filtre est utilisée dans la représentation dans l'espace d'état des paramètres pour le second filtre. Puis, nous avons proposé d'utiliser un lissage à retard fixe pour améliorer éventuellement l'estimation du processus AR. Enfin, nous avons traité le cas où le bruit additif d'observation est coloré de type MA.

L'étude comparative que nous avons menée montre que cette méthode permet d'obtenir des estimations consistantes des paramètres AR. Par ailleurs, elle réalise un bon compromis entre stabilité et précision de l'estimation. Pour ces raisons, dans la partie III.3 de ce mémoire, nous proposerons de la tester pour le rehaussement du signal de parole [LAB04b]. Notons qu'elle a été également été déclinée dans le domaine des communications numériques pour l'estimation conjointe des données et du canal de transmission pour des systèmes de type MC-DS-CDMA [JAM05].

Néanmoins, cette approche exige des hypothèses contraignantes. En effet, le filtre de Kalman est optimal si le processus générateur et le bruit d'observation sont des bruits blancs gaussiens. Dans des applications réelles, ces hypothèses ne sont pas toujours valables. De plus, les approches présentées jusque là ne permettent pas de prendre en compte les incertitudes dues à la modélisation du système. Pour ces raisons, nous proposons dans le chapitre III d'étudier des méthodes alternatives fondées sur une estimation  $H_\infty$ .



## Chapitre III

### III. Estimation $H_\infty$ : une alternative au filtrage de Kalman ?

En traitement du signal, mettre en oeuvre une approche paramétrique fondée sur un modèle *a priori* du phénomène étudié n'est pas trivial pour les deux raisons principales suivantes :

1. Un modèle restera toujours une approximation de la réalité. De manière générale, plus le modèle est fidèle au phénomène étudié, plus l'analyse mathématique ultérieure risque d'être complexe. Prenons l'exemple d'un signal de parole à rehausser : suivant sa nature voisée ou non voisée, le signal de parole peut être modélisé comme la sortie d'un filtrage RII dont l'entrée est soit un bruit blanc stationnaire, soit un train d'impulsions périodiques et de période celle de la fréquence fondamentale. Cf. annexe A. Bien que modulable, cette représentation n'est pas nécessairement bien adaptée à des sons fricatifs voisés ou des trames mixtes. Par ailleurs, la sélection de l'ordre du modèle  $p$  n'est pas évidente lorsque l'on ne dispose que d'observations bruitées. Enfin, le bruit additif d'observation, généralement coloré, doit être aussi caractérisé par un modèle, introduisant d'autres incertitudes.
2. La phase d'estimation des paramètres du modèle est également une source d'erreurs. Cette étape repose souvent sur des hypothèses statistiques fortes. C'est notamment le cas lorsque l'on utilise un filtrage de Kalman, où le processus générateur et le bruit d'observation doivent être blancs, gaussiens et non corrélés. De plus, lorsque les observations sont perturbées par des bruits de mesure, l'application d'algorithmes standards peut aboutir à des estimations biaisées, non consistantes, etc.

Dans ce chapitre, nous examinons des méthodes fondées sur une estimation  $H_\infty$  et proposons d'analyser leur pertinence pour le traitement paramétrique du signal. Ces approches sont *a priori* séduisantes car les hypothèses nécessaires à leur mise en œuvre sont moins restrictives que celles d'un filtre de Kalman. La théorie  $H_\infty$  a été particulièrement exploitée dans le domaine du « contrôle », mais ses applications en traitement du signal restent peu nombreuses. Ainsi, dans le contexte de l'annulation adaptative de bruit, Sayyarodsari *et al.* [SAY98] utilisent un filtre  $H_\infty$  pour la mise à jour des paramètres du système de débruitage, plutôt qu'un algorithme LMS habituellement utilisé [OPP94]. Une adaptation plus rapide et une estimation plus lisse des paramètres sont ainsi obtenues. Dans le contexte de l'égalisation en communications numériques, les paramètres du canal, modélisé par un filtre à réponse impulsionnelle finie, ne sont pas connus exactement et des bruits perturbent l'observation du signal reçu. Pour ces raisons, un filtrage  $H_\infty$  a été étudié dans [ERD00] pour retrouver les données transmises. Vikalo *et al.* [VIK00] ont quant à eux analysé l'estimation  $H_\infty$  pour la conception de bancs de filtres de synthèse du signal. Cette approche permet de prendre en compte les incertitudes dues à la quantification du signal et aux bruits additifs dans chaque sous-bande. Dans ces deux derniers travaux, les auteurs concluent que les approches  $H_2$  et  $H_\infty$  donnent des résultats en moyenne similaires.

Dans ce mémoire, nous illustrons notre point de vue en considérant le rehaussement du signal de parole. Le choix de cette application est motivé par les deux raisons suivantes :

1. D'une part, un signal de parole présente des caractéristiques spectrales variées<sup>12</sup>. D'autre part, le bruit additif d'observation peut être coloré ou non, stationnaire ou non. Cette application permet donc de couvrir différents cas de traitement du signal.
2. D'autre part, de nombreuses méthodes de rehaussement du signal de parole fondées sur une modélisation AR du signal et un filtrage de Kalman ont été proposées<sup>13</sup>. Notons que même si ces méthodes permettent d'obtenir une amélioration significative du RSB moyen, plusieurs auteurs [GAN98] [GRI02] préconisent l'utilisation d'un lissage de Kalman pour atténuer le bruit résiduel.

---

<sup>12</sup> Nous invitons le lecteur à lire l'annexe A.

<sup>13</sup> Nous renvoyons le lecteur à la partie III.3.1 pour un état de l'art exhaustif.



Il est à noter que notre étude est complémentaire des travaux de Shen *et al.* [SHE95] [SHE99]. Ces derniers proposent d'utiliser un filtrage  $H_\infty$  pour retrouver le signal de parole, modélisé par un processus AR. Les paramètres AR sont préalablement estimés à l'aide soit d'un algorithme de type EM [SHE95], soit d'un autre filtre  $H_\infty$  opérant en série directement sur les observations bruitées [SHE99]. Leur approche a également été déclinée dans le domaine des communications sans fil de type OFDM pour l'estimation conjointe du canal de transmission et des données transmises [CAI04]. Néanmoins, aucune étude sur l'estimation des paramètres AR par filtrage  $H_\infty$  n'a été menée dans ces deux références. Nous proposons donc de mettre évidence le comportement des techniques  $H_\infty$  vis-à-vis d'incertitudes de modélisation ou d'erreurs d'estimation des paramètres du modèle.

Dans la première partie, nous présentons le problème général de l'estimation  $H_\infty$ , ainsi que l'état de l'art des différentes familles de solutions. Puis, nous traitons l'estimation de paramètres AR par filtrage  $H_\infty$ . Nous étudions alors une version de la méthode duale présentée dans la section II.2 dans laquelle les filtres de Kalman sont remplacés par des algorithmes  $H_\infty$ . Enfin, cette approche est déclinée dans le cadre du rehaussement du signal de parole.

### III.1. Présentation et état de l'art de l'estimation $H_\infty$

Les travaux sur la théorie  $H_\infty$  ont été initialisés en 1981 par Zames *et al.* [ZAM81] dans le domaine du « contrôle ». Contrairement au filtre de Kalman qui vise à minimiser la norme  $H_2$  de l'erreur de prédiction, cette approche vise à minimiser la norme  $H_\infty$  du système. Cela revient à minimiser les effets des perturbations sur l'estimation désirée dans le pire des cas. En d'autres termes, on minimise la valeur maximale du spectre de l'erreur d'estimation des paramètres, quelles que soient les perturbations. De ce point de vue, d'après Hassibi *et al.* [HAS99a], l'estimation  $H_\infty$  semble plus robuste que le filtre de Kalman vis-à-vis des incertitudes. Il est à noter qu'aucune hypothèse statistique n'est à formuler sur le processus générateur et le bruit d'observation.

### III.1.1. Le filtrage $H_\infty$

Nous prenons ici l'exemple de l'estimation du signal  $s_k$ . Considérons le système d'entrées le processus générateur  $u_k$  et le bruit d'observation  $v_k$ , et de sortie l'erreur d'estimation  $e_k = \hat{s}_k - s_k$ . L'objectif est de construire un estimateur  $\hat{s}_k$  de  $s_k$  en minimisant la norme  $H_\infty$  définie de la manière suivante :

$$J_\infty = \sup_{u_k, v_k, e_0} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \|e_k\|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} [\|u_k\|^2 + \|v_k\|^2] + \|e_0\|^2} \quad (\text{III.1})$$

où  $\sup(\cdot)$  et  $\|\cdot\|$  désignent respectivement la borne supérieure et la norme  $H_2$ .  $N$  est le nombre d'échantillons disponibles et le terme  $\|e_0\|^2$  permet de prendre en compte l'incertitude sur la valeur initiale de l'erreur.

La première solution de filtrage  $H_\infty$  a été proposée en 1988 par Grimble *et al.* [GRI88] [GRI90]. Fondée sur des techniques de décompositions polynomiales, elle s'applique directement à la fonction de transfert du système, tout comme les approches par interpolation [FU91] ou par factorisation spectrale [COL98]. Ces méthodes sont généralement qualifiées de fréquentielles et conduisent à des équations difficilement exploitables en pratique.

Aujourd'hui, les solutions les plus souvent étudiées reposent sur une représentation dans l'espace d'état du système de la forme suivante :

$$\begin{cases} \underline{x}_k = \Phi_k \underline{x}_{k-1} + \Gamma u_k \\ y_k = H \underline{x}_k + v_k \\ s_k = L \underline{x}_k \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

où  $L$  est un vecteur reliant le vecteur d'état à la grandeur à estimer, ici le signal  $s_k$ .

Selon Hassibi *et al.* [HAS99a], la minimisation du critère (III.1) est souvent impossible de manière directe et ne conduit pas à une formulation exploitable du filtre. Pour cette raison, on considère généralement le problème sous optimal suivant :

$$J_\infty < \gamma^2 \quad (\text{III.3})$$

où  $\gamma$  est un niveau dit d'atténuation ou de performance. Notons qu'il existe une valeur minimale  $\gamma_{opt}$  de  $\gamma$  telle que (III.3) admette une solution.

Les deux approches suivantes permettent alors de résoudre le problème (III.3) :

- La première consiste à résoudre un problème d'optimisation convexe sous contraintes de stabilité [GER99]. Ces dernières sont formulées par une inéquation linéaire matricielle (LMI) en utilisant le lemme borné réel ou une inégalité de type Lyapunov par exemple.
- La seconde est fondée sur la résolution d'une équation quadratique de type Riccati [SHA92] [NAG91]. Notons qu'un lissage  $H_\infty$  peut également être mis en oeuvre. Comme le lissage  $H_\infty$  à intervalle fixe correspond au lissage de Kalman du même type [HAS99a], les études [MIR01] [BOL04] sont principalement consacrées au lissage  $H_\infty$  de type retard fixe.

Il est à noter que les approches fondées sur la théorie des jeux sont à rapprocher des méthodes de filtrage  $H_\infty$  [YAE92] ou de lissage  $H_\infty$  [THE94]. En effet, dans ce contexte, un statisticien joue contre la nature. Sa meilleure stratégie consiste à considérer les perturbations engendrées par son adversaire sur le système et à minimiser la valeur attendue de leur coût dans le pire des cas. Il s'agit donc d'un problème de type minimax, dont la solution optimale correspond à un point d'équilibre entre le joueur et la nature. La solution obtenue est similaire à la solution par équation de Riccati.

Nous proposons dans ce travail d'étudier la solution fondée sur une équation de Riccati pour les deux raisons suivantes. D'une part, les équations du filtre sont simples à implanter et le coût calculatoire de cette approche est avantageux en comparaison avec les approches de type LMI. D'autre part, la structure du filtre obtenu est similaire à celle du filtre de Kalman, facilitant la comparaison entre les approches  $H_2$  et  $H_\infty$ .

### III.1.2. Solution récursive du filtrage $H_\infty$ fondée sur une équation de Riccati

Etant donné un niveau d'atténuation  $\gamma$ , l'estimateur  $\hat{s}_k$  de  $s_k$  vérifiant la condition (III.3) existe si et seulement si :

$$P_{k+1/k}^{-1} + H^T H - \gamma^{-2} L^T L > 0 \quad (\text{III.4})$$

où la matrice  $P_{k+1/k}$  vérifie la récursion de Riccati suivante :

$$P_{k+1/k} = \Phi_k P_{k/k} \Phi_k^T + \Gamma Q \Gamma^T \quad (\text{III.5})$$

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - P_{k/k-1} \begin{bmatrix} H^T & L^T \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} H \\ L \end{bmatrix} P_{k/k-1} \quad (\text{III.6})$$

avec  $M = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ L \end{bmatrix} P_{k/k-1} \begin{bmatrix} H^T & L^T \end{bmatrix}$ .  $Q$  et  $R$  sont des matrices de pondération permettant de régler le comportement du filtre vis-à-vis des erreurs de modélisation et de représentation du système.

Si la condition (III.4) est vérifiée, les estimations *a posteriori* du vecteur d'état  $\underline{x}_k$  et de  $s_k$  sont mises à jour de la manière suivante :

$$\hat{s}_{k/k} = L \hat{\underline{x}}_{k/k} \quad (\text{III.7})$$

$$\hat{\underline{x}}_{k/k} = \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + K_k \nu_k \quad (\text{III.8})$$

$$\hat{\underline{x}}_{k/k-1} = \Phi_k \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1} \quad (\text{III.9})$$

où  $K_k = P_{k/k-1} H (R + H P_{k/k-1} H^T)^{-1}$  désigne le gain du filtre et  $\nu_k = y_k - H \hat{\underline{x}}_{k/k-1}$  l'innovation.

### III.1.3. Commentaires

Les équations (III.5-9) du filtre suggèrent quelques commentaires :

1. La structure du filtre  $H_\infty$  est similaire à celle du filtre de Kalman. Plus particulièrement, on remarque que lorsque  $\gamma$  tend vers l'infini, les équations du filtre  $H_\infty$  coïncident avec celles du filtre de Kalman.
2. Contrairement au filtre de Kalman, une solution au problème (III.3) n'est pas toujours garantie. En effet, l'équation de Riccati contient des termes quadratiques indéfinis, conduisant à la condition (III.4).
3. Le choix de la valeur de  $\gamma$  est un problème délicat. On trouve de nombreux travaux, pour la plupart dans le contexte du « contrôle », permettant de calculer théoriquement la valeur optimale  $\gamma_{opt}$ . On trouve également des éléments de réponse dans [SHE99], où ce paramètre est mis à jour récursivement en se fondant sur la condition d'existence du filtre (III.4). Dans ce mémoire, la valeur de  $\gamma$  sera obtenue à l'aide d'une procédure d'optimisation dichotomique qui maximise le gain du RSB après filtrage.
4. Le vecteur  $L$  joue un rôle important. Pour le filtrage de Kalman, l'estimation d'une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état est la combinaison linéaire des

estimations des composantes. Pour le filtrage  $H_\infty$ , la matrice  $L$  intervient dans l'équation de Riccati, privilégiant ainsi une combinaison linéaire prédéfinie et arbitraire des variables d'état.

## III.2. Estimation des paramètres AR par filtrage $H_\infty$

Nous testons dans un premier temps le comportement du filtrage  $H_\infty$  lorsqu'il est appliqué directement sur les observations bruitées. Outre les incertitudes de modélisation, notre étude est motivée par le fait que Hassibi *et al.* [HAS96b] ont montré que le filtre LMS, algorithme largement étudié pour l'estimation de paramètres, est optimal au sens de la norme  $H_\infty$ . Nous proposons ensuite une nouvelle approche dérivée de la méthode présentée dans la partie II.2 permettant d'améliorer l'estimation des paramètres AR à partir d'observations bruitées.

### III.2.1. Filtrage $H_\infty$ pour l'estimation des paramètres AR

Peu de travaux traitent le problème de l'estimation de paramètres dans un cadre  $H_\infty$ . Grimble *et al.* [GRI92] étudient le filtrage  $H_\infty$  pour l'identification de processus ARMAX non bruités. D'après les résultats montrés dans [GRI92], les performances en termes du maximum du spectre de l'erreur d'estimation sont en faveur du filtrage  $H_\infty$ , mais semblent similaires à ceux obtenus avec un filtre de Kalman.

Lorsque les observations  $y_k$  du processus AR  $s_k$  sont bruitées, on définit la représentation dans l'espace d'état du système (I.5)-(II.14) comme suit :

$$\begin{cases} \underline{\theta}_k = \underline{\theta}_{k-1} + \varepsilon_k \\ y_k = -(\underline{Y}_{k-1}^p)^T \underline{\theta}_k + \lambda_k \\ \underline{\theta}_k = L \underline{\theta}_k \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

où  $\varepsilon_k$  est un processus gaussien à moyenne nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et  $L$  correspond à la matrice identité de taille  $p$ . Nous rappelons que  $\underline{\theta}_k$ ,  $\underline{Y}_{k-1}^p$  et  $\lambda_k$  sont définis dans les équations (I.1) et (I.6).

Un filtrage  $H_\infty$  fondé sur la représentation (III.10) permet d'obtenir une estimation récursive du vecteur d'état  $\underline{\theta}_k$ . Comme le processus  $\lambda_k$  est coloré et qu'aucune information sur ses

statistiques n'est disponible, le filtrage  $H_\infty$  semble *a priori* plus approprié que le filtre de Kalman pour l'estimation des paramètres AR à partir d'observations bruitées.

Nous montrons ici les résultats de deux tests effectués sur des signaux AR synthétiques :

Test 1 : cas d'un nombre élevé d'échantillons disponibles

On génère un processus AR de 2000 échantillons caractérisé par les pôles suivants :

$p_{1,2} = 0.75e^{\pm j0.2\pi}$ ,  $p_{3,4} = 0.8e^{\pm j0.4\pi}$  et  $p_{5,6} = 0.85e^{\pm j0.7\pi}$ , puis perturbé par un bruit blanc gaussien à moyenne nulle à un RSB de 10 dB.

Test 2 : cas de résonances aiguës et d'un nombre réduit d'échantillons disponibles

On génère un processus AR de 512 échantillons caractérisé par les pôles suivants :

$p_{1,2} = 0.98e^{\pm j0.1\pi}$ ,  $p_{3,4} = 0.97e^{\pm j0.3\pi}$  et  $p_{5,6} = 0.8e^{\pm j0.7\pi}$ , puis perturbé par un bruit blanc gaussien à moyenne nulle à un RSB de 10 dB.

<i>Méthode</i>	$\sigma_\alpha^2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
<i>Filtre de Kalman</i>	1,42 ± 0,02	-0,51 ± 0,01	0,54 ± 0,02	-0,17 ± 0,02	0,33 ± 0,02	-0,20 ± 0,02	0,14 ± 0,01
<i>Filtre <math>H_\infty</math></i>	1,28 ± 0,02	-0,52 ± 0,01	0,55 ± 0,02	-0,23 ± 0,02	0,33 ± 0,02	-0,17 ± 0,02	0,11 ± 0,01
<i>Valeur attendue</i>	1	-0,71	0,82	-0,49	0,61	-0,40	0,26

Tableau III.5 : test 1, valeurs moyennes des paramètres AR estimés fondés sur 100 réalisations du bruit additif d'observation.

<i>Méthode</i>	$\sigma_\alpha^2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
<i>Filtre de Kalman</i>	14,52 ± 0,64	-0,99 ± 0,03	0,07 ± 0,05	0,30 ± 0,07	0,01 ± 0,06	-0,22 ± 0,06	0,17 ± 0,04
<i>Filtre <math>H_\infty</math></i>	14,69 ± 0,64	-1,01 ± 0,03	0,08 ± 0,05	0,31 ± 0,07	-0,00 ± 0,06	-0,23 ± 0,06	0,17 ± 0,04
<i>Valeur attendue</i>	1	-2,06	1,84	-0,98	0,80	-0,97	0,58

Tableau III.6 : test 2, valeurs moyennes des paramètres AR estimés fondés sur 100 réalisations du bruit additif d'observation.

D'après les tableaux III.5 et III.6, les estimations des paramètres AR sont biaisées dans les deux cas et les résultats sont en moyenne similaires. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que le bruit d'observation  $\lambda_k$  dans la représentation dans l'espace d'état (III.10) dépend des paramètres à estimer.

Pour pallier ce phénomène, nous proposons maintenant de développer dans un cadre  $H_\infty$  une méthode inspirée de l'approche duale proposée dans la partie II.2.

### III.2.2. Estimation duale $H_\infty$ du processus AR et de ses paramètres

Pour améliorer l'estimation des paramètres AR, nous proposons de mettre en œuvre deux estimateurs  $H_\infty$  opérant en parallèle de la manière suivante [LAB05b] :

- Un lissage  $H_\infty$  de type retard fixe permet de rehausser les observations bruitées en utilisant la dernière estimation des paramètres AR. Nous optons pour un lissage afin d'atténuer le bruit résiduel.
- Un filtrage  $H_\infty$  permet de mettre à jour l'estimation des paramètres AR en utilisant la dernière estimation du processus AR et les informations véhiculées par le processus d'innovation issu du premier estimateur.

La figure III.1 illustre le principe de la méthode.

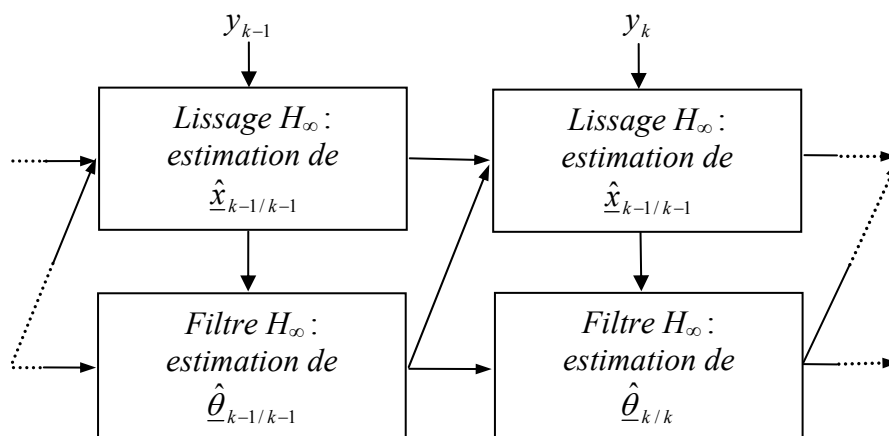


Figure III.1 : schéma de principe de l'estimation duale dans un cadre  $H_\infty$ .

Pour estimer le processus AR, on construit le vecteur d'état de la manière suivante :

$$\underline{x}_k = [s_k \quad \cdots \quad s_{k-q}]^T \quad (\text{III.11})$$

où le retard  $q$  est un entier tel que  $q \geq p$ .

La représentation dans l'espace d'état du système (I.1)-(I.5) satisfait alors :

$$\begin{cases} \underline{x}_k = \Phi_k \underline{x}_{k-1} + \Gamma u_k \\ y_k = H \underline{x}_k + v_k \\ s_k = L \underline{x}_k \end{cases}, \quad (\text{III.12})$$

où  $\Phi_k$ ,  $H$  et  $\Gamma$  sont définis en (II.28) et  $L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Etant donné le niveau d'atténuation  $\gamma$ , un filtrage  $H_\infty$  permet d'obtenir l'estimation filtrée du signal :

$$\hat{s}_{k-q/k-q} = H \hat{\underline{x}}_{k-q/k-q}. \quad (\text{III.13})$$

L'estimation dite lissée est :

$$\hat{s}_{k-q/k} = L \hat{\underline{x}}_{k/k}. \quad (\text{III.14})$$

Néanmoins, les paramètres AR ne sont pas connus et doivent être estimés pour mettre en œuvre ce lissage. Ils sont supposés constants sur une trame d'analyse et vérifient :

$$\underline{\theta}_k = \underline{\theta}_{k-1}. \quad (\text{III.15})$$

En suivant la même démarche que dans la partie II.3.1, on exprime la version lissée du signal en fonction des paramètres AR de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{s}_{k-q/k} &= -\left(\hat{\underline{x}}_{k-q-1/k-q-1}^{1:p}\right)^T \underline{\theta}_{k-q} + v_k^\theta, \\ &= H_k^\theta \underline{\theta}_{k-q} + v_k^\theta, \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

où  $\hat{\underline{x}}_{k/k}^{1:p}$  correspond aux  $p$  premières composantes du vecteur d'état  $\hat{\underline{x}}_{k/k}$  et

$$v_k^\theta = \sum_{i=0}^q K_{k-q+i}^{i+1} v_{k-q+i}.$$

Etant donné (III.15) et (III.16), la représentation dans l'espace d'état pour l'estimation des paramètres AR s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \underline{\theta}_k = \underline{\theta}_{k-1} \\ \hat{s}_{k-q/k} = H_k^\theta \underline{\theta}_k + v_k^\theta, \\ \underline{\theta}_k = L^\theta \underline{\theta}_k \end{cases}, \quad (\text{III.17})$$

où  $L^\theta$  est la matrice identité de taille  $p$ .

Etant donné le niveau d'atténuation  $\gamma^\theta$ , un second filtrage  $H_\infty$  permet de mettre à jour l'estimation des paramètres AR. Ce filtre met en jeu deux nouvelles matrices de pondération notées  $Q^\theta$  et  $R^\theta$ .



*Remarque* : Le réglage des matrices de pondération  $Q$ ,  $R$ ,  $Q^\theta$  et  $R^\theta$  est une tâche délicate. Nous proposons ici un moyen d'ajuster ces matrices automatiquement. Dans un cadre  $H_\infty$ , la matrice  $P_{k+1/k}$  n'est pas la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, mais en constitue une borne supérieure [YAE92] :

$$E\{(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k+1/k})(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k+1/k})^T\} \leq P_{k+1/k}. \quad (\text{III.18})$$

De plus, Shen *et al.* [SHE99] mentionnent que les matrices  $Q$  et  $R$  jouent le même rôle que les variances du processus générateur et du bruit d'observation respectivement dans le cadre  $H_2$ . Pour ces raisons, nous proposons d'ajuster  $Q$ ,  $R$ ,  $Q^\theta$  et  $R^\theta$  en raisonnant par analogie avec l'approche duale présentée dans la partie II.2. Nous supposons dans un premier temps que les caractéristiques du bruit additif d'observation varient lentement dans le temps. La matrice  $R$  est donc réglée ou mise à jour pendant les trames où le signal n'est pas présent.

Etant donné (II.22), nous proposons de mettre à jour la matrice  $Q$  de la manière suivante :

$$Q_k = \frac{k-1}{k} Q_{k-1} + \frac{1}{k} DM_k D^T \quad (\text{III.19})$$

où  $D = (\Gamma^T \Gamma)^T$  et  $M_k = P_{k/k} - \Phi_{k-1} P_{k-1/k-1} (\Phi_{k-1})^T + K_k \nu_k^2 K_k^T$ .

Par analogie à la relation (II.36), la matrice  $R^\theta$  est définie comme suit :

$$R_k^\theta = \sum_{i=0}^q \left\{ (K_{k-q+i}^{i+1})^2 (HP_{k-q+i/k-q+i-1} H^T + R) \right\}. \quad (\text{III.20})$$

où  $K_k^i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du gain du lissage  $H_\infty$ .

Enfin, d'après l'équation (II.14), la matrice  $Q^\theta$  est fixée à 0.

Testons alors l'approche proposée sur des données AR synthétiques. Nous comparons la méthode fondée sur le filtrage dual de Kalman présentée dans la partie II.2 à la méthode proposée ci-dessus. Les mêmes expériences que dans la partie III.2.1. sont réalisées.

D'après les tableaux III.7 et III.8, l'étude comparative montrent que l'algorithme proposé permet de réduire les erreurs sur l'estimation des paramètres AR par rapport à l'application directe du filtre  $H_\infty$  aux données bruitées. Par ailleurs, les méthodes  $H_2$  et  $H_\infty$  présentent des performances similaires, confirmant les conclusions dans [ERD00] [SAY98] et [VIK00].

Méthode	$\sigma_\alpha^2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
Filtrage dual de Kalman	1,42 $\pm 0,03$	-0,51 $\pm 0,02$	0,54 $\pm 0,03$	-0,17 $\pm 0,04$	0,33 $\pm 0,03$	-0,20 $\pm 0,03$	0,14 $\pm 0,02$
Filtrage dual $H_\infty$	1,28 $\pm 0,03$	-0,52 $\pm 0,02$	0,55 $\pm 0,03$	-0,23 $\pm 0,04$	0,33 $\pm 0,03$	-0,17 $\pm 0,03$	0,11 $\pm 0,02$
Valeur attendue	1	-0,71	0,82	-0,49	0,61	-0,40	0,26

*Tableau III.7 : test 1, valeurs moyennes des paramètres AR estimés fondés sur 100 réalisations du bruit additif d'observation.*

Méthode	$\sigma_\alpha^2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
Filtrage dual de Kalman	4,40 $\pm 0,81$	-1,52 $\pm 0,06$	0,48 $\pm 0,13$	0,60 $\pm 0,18$	-0,26 $\pm 0,18$	-0,55 $\pm 0,14$	0,49 $\pm 0,07$
Filtrage dual $H_\infty$	4,38 $\pm 0,81$	-1,48 $\pm 0,06$	0,42 $\pm 0,13$	0,61 $\pm 0,18$	-0,15 $\pm 0,18$	-0,70 $\pm 0,14$	0,56 $\pm 0,07$
Valeur attendue	1	-2,06	1,84	-0,98	0,80	-0,97	0,58

*Tableau III.8: test 2, valeurs moyennes des paramètres AR estimés fondés sur 100 réalisations du bruit additif d'observation.*

Dans la section suivante, nous nous focalisons sur le problème du rehaussement du signal de parole.

### III.3. Application au rehaussement du signal de parole

Le rehaussement du signal de parole joue un rôle clé dans des applications multimédia comme la reconnaissance de la parole ou les systèmes de visioconférence par exemple. Une fois l'état de l'art sur les méthodes de rehaussement fondées sur un seul microphone dressé, nous analysons la pertinence du filtrage  $H_\infty$  pour ce problème [LAB05a]. La dernière partie présente les résultats d'une étude comparative entre les méthodes duales proposées dans les parties II.2 et III.2.2 et l'algorithme présenté dans [SHE99].

### III.3.1. Etat de l'art du rehaussement du signal de parole

Parmi les méthodes de rehaussement du signal de parole monovoie, on distingue deux grandes catégories d'approches.

Les méthodes non paramétriques reposent généralement sur une estimation spectrale à court terme du signal de parole [BOL79] [BER79] [EPH84]. Quand ce type de méthode est utilisé, on observe un bruit musical résiduel dans le signal de parole rehaussé.

Les méthodes paramétriques reposent sur le choix d'un modèle *a priori* pour le signal de parole. Deux familles se distinguent. La première regroupe les méthodes fondées sur un modèle sinusoïdal [JEN01] ou exponentiel [JEN95] [EPH95] [DOC02] pour le signal de parole. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à lire le chapitre IV.

Dans la seconde famille d'approches paramétriques, le signal de parole est modélisé par un processus AR. Un filtrage de Wiener ou de Kalman est ensuite utilisé pour retrouver le signal de parole. Dans ce cas, les méthodes proposées opèrent généralement en deux étapes :

1. Les paramètres AR et les variances du processus générateur et du bruit additif sont estimés.
2. Puis, le filtrage est mis en œuvre pour rehausser le signal de parole.

Sans vouloir être exhaustif, détaillons quelques solutions proposées ces vingt dernières années. En 1987, Paliwal *et al.* [PAL87] ont montré à travers un cas d'école la pertinence d'un filtrage de Kalman pour le rehaussement du signal de parole. Les paramètres du modèle et la variance du bruit additif sont estimés à partir du signal de parole et du bruit additif respectivement, supposés tous deux disponibles. Cette méthode n'est cependant pas applicable dans un cas réel.

Gibson *et al.* [GIB91] ont alors proposé une approche fondée sur une estimation itérative sous optimale. Les paramètres AR et la variance du processus générateur sont estimés à partir du signal de parole bruité. Pour améliorer le rehaussement, on itère la procédure de filtrage sur le signal bruité, mais en estimant les paramètres AR à partir du signal de parole rehaussé. (Cf. figure III.2.). La variance du bruit additif est estimée durant les trames de silence, ce qui nécessite l'utilisation d'un VAD.

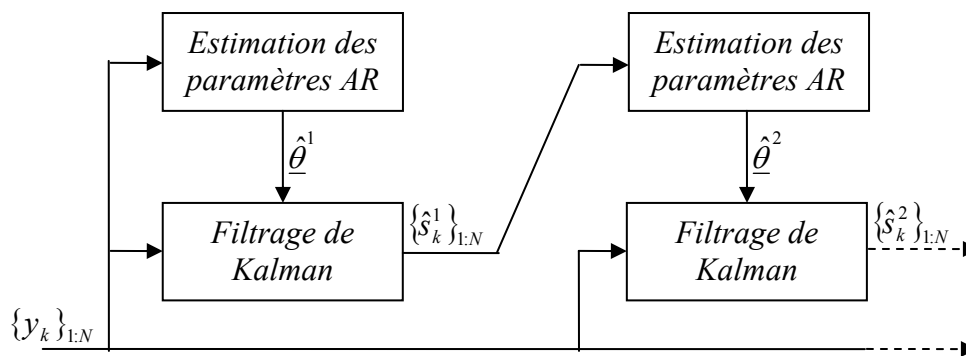


Figure III.2 : principe de la méthode de rehaussement du signal de parole proposée par Gibson *et al.* [GIB91].

Gannot *et al.* [GAN98] représentent le signal de parole et le bruit additif d'observation par deux modèles AR. Un algorithme itératif de type EM fondé sur un lissage de Kalman est alors mis en œuvre pour estimer à la fois les paramètres des modèles et le signal de parole.

L'estimation de la variance du processus générateur est une tâche délicate et conditionne le rehaussement du signal de parole. Ainsi, Gabrea *et al.* [GAB99b] proposent de calculer le gain du filtre de Kalman itérativement et sans la connaissance explicite des variances des bruits. Grivel *et al.* [GRI02] quant à eux utilisent des techniques d'identification en sous-espace permettant d'estimer directement les matrices de la représentation dans l'espace d'état. Notons que cette dernière approche ne nécessite pas l'utilisation d'un VAD.

Pour les trames voisées, le processus générateur est un processus quasi-périodique. Ainsi, Goh *et al.* [GOH99] exploitent le modèle dit de prédiction à long terme (Cf. Annexe A). Cette approche a l'avantage de conduire à une représentation dans l'espace d'état où les bruits sont blancs et gaussiens. Néanmoins, cette méthode nécessite un VAD, un algorithme de décision de Voisement/Non voisement et une estimation du pitch à partir des observations bruitées. En conséquence, son coût calculatoire est grandement augmenté par rapport aux autres méthodes présentées. De plus, lorsque le RSB devient faible, la détection d'activité vocale et la décision de Voisement/Non Voisement deviennent impossibles et l'estimation du pitch introduit des incertitudes importantes dans la modélisation du signal.

Dans [MA04], un post filtrage perceptuel est utilisé afin d'améliorer la qualité auditive du signal rehaussé.

Remarque : L'estimation simultanée des paramètres AR et du signal de parole est un problème non linéaire. Ainsi, de nouvelles approches ont été récemment proposées utilisant des techniques de filtrage particulaire<sup>14</sup> [VER02].

### III.3.2. Apport du filtrage $H_\infty$ pour le rehaussement du signal de parole

Pour analyser le comportement du filtrage  $H_\infty$  dans le contexte du rehaussement du signal de parole, nous utilisons les deux protocoles suivants [LAB05a] :

#### Protocole 1 :

Les paramètres du modèle sont estimés à partir du signal de parole et du bruit additif, tous deux supposés disponibles. Un filtrage  $H_\infty$  est alors mis en œuvre pour rehausser le signal de parole à partir des observations bruitées. Cette approche a l'avantage de limiter l'influence du bruit de mesure sur l'estimation des paramètres AR et permet donc de caractériser le comportement du filtrage  $H_\infty$  vis-à-vis des approximations dues à la modélisation du système. Il est à noter que dans ce protocole d'expérimentation, nous analysons aussi l'apport d'un lissage de type intervalle fixe [AND79].

#### Protocole 2 :

Les paramètres AR sont estimés directement à partir des observations bruitées, ce qui est une nouvelle source d'erreur par rapport au protocole 1. L'approche itérative décrite dans la figure III.2 est alors mise en œuvre, mais le filtrage de Kalman est remplacé par un filtrage  $H_\infty$ . Cette approche permet donc de caractériser le comportement du filtrage  $H_\infty$  vis-à-vis d'erreurs d'estimation des paramètres AR.

Dans les tests, les conditions expérimentales sont les suivantes. Le signal /WAZIWAZA/<sup>15</sup>, échantillonné à 16 kHz, est perturbé par un bruit additif, à savoir des RSB de 15 dB, 10 dB et 5 dB. Trois types de bruit sont étudiés :

- Bruit 1 : bruit blanc gaussien à moyenne nulle (100 réalisations) ;
- Bruit 2 : bruit coloré de type MA synthétisé selon ses zéros  $0.8e^{\pm j0.1\pi}$ ,  $0.8e^{\pm j0.9\pi}$  (100 réalisations) ;
- Bruit 3 : bruit enregistré dans une voiture roulant à 110 km.h<sup>-1</sup> (1 réalisation).

---

<sup>14</sup> Nous reviendrons sur le filtrage particulaire dans le chapitre V de ce mémoire.

<sup>15</sup> Nous tenons à remercier l'ENST de nous avoir aimablement fourni ce signal de parole.

La procédure de rehaussement est fondée sur une approche de type trame par trame, avec un recouvrement de 50% et un fenêtrage de Hamming. La longueur d'une trame est fixée à  $N=512$  échantillons. L'ordre du processus AR qui modélise le signal de parole est fixé à 10. Des tests auditifs, le gain du RSB et l'analyse du spectrogramme sont les trois critères que nous utilisons pour mesurer la qualité du signal rehaussé.

Remarque : Lorsque le bruit additif d'observation est coloré, les méthodes de rehaussement par filtrage de Kalman intègrent un modèle MA pour le bruit, dont l'ordre est fixé à 4 pour le bruit 2, et à 6 pour le bruit 3.

<b>Protocole 1</b>			
<i>RSB d'entrée (dB)</i>	15	10	5
<i>Filtre de Kalman</i>	3,88	5,24	6,74
<i>Filtre <math>H_\infty</math></i>	3,87	5,24	6,73
<i>Lissage de Kalman</i>	7,13	8,91	10,60
<i>Lissage <math>H_\infty</math></i>	7,13	8,90	10,61

<b>Protocole 2</b>			
<i>RSB d'entrée (dB)</i>	15	10	5
<i>Filtre de Kalman</i>	3,60	4,91	6,41
<i>Filtre <math>H_\infty</math></i>	3,60	4,91	6,41

Tableaux III.9 : gains moyens du RSB en dB, cas du Bruit 1.

Lorsque le bruit additif d'observation est blanc gaussien, le niveau d'atténuation  $\gamma$  dans le filtrage  $H_\infty$  tend vers l'infini. D'après les tableaux III.9, les approches  $H_2$  et  $H_\infty$  donnent alors des résultats semblables en moyenne pour les deux protocoles.

<b>Protocole 1</b>			
<i>RSB d'entrée (dB)</i>	15	10	5
<i>Filtre de Kalman</i>	5,48	7,35	9,15
<i>Filtre <math>H_\infty</math></i>	5,47	7,37	9,35
<i>Lissage de Kalman</i>	10,3	12,69	14,98
<i>Lissage <math>H_\infty</math></i>	10,11	12,45	14,45

<b>Protocole 2</b>			
<i>RSB d'entrée (dB)</i>	15	10	5
<i>Filtre de Kalman</i>	4,40	6,04	7,66
<i>Filtre <math>H_\infty</math></i>	4,34	5,91	7,18

Tableaux III.10 : gains moyens du RSB en dB, cas du Bruit 2.

Lorsque le bruit est coloré de type MA, le niveau d'atténuation  $\gamma$  ne tend plus vers l'infini. D'après la figure III.3 et les tableaux III.10, les performances en moyenne restent semblables. Néanmoins, la mise en œuvre du filtrage  $H_\infty$  a l'avantage d'éviter une modélisation du bruit additif d'observation.

<b>Protocole 1</b>			
<i>RSB d'entrée (dB)</i>	15	10	5
<i>Filtre de Kalman</i>	0,62	1,10	2,05
<i>Filtre <math>H_\infty</math></i>	0,59	1,15	2,11
<i>Lissage de Kalman</i>	2,06	2,87	3,84
<i>Lissage <math>H_\infty</math></i>	2,37	3,47	4,56

<b>Protocole 2</b>			
<i>RSB d'entrée (dB)</i>	15	10	5
<i>Filtre de Kalman</i>	0,59	1,02	1,76
<i>Filtre <math>H_\infty</math></i>	0,59	1,02	1,75

Tableaux III.11 : gains du RSB en dB, cas du Bruit3.

D'après les tableaux III.11, avec le protocole 1, le filtrage  $H_\infty$  fournit les gains du RSB les plus élevés. Cependant, l'amélioration de la qualité perceptuelle du signal rehaussé reste peu significative. Pour le protocole 2, les résultats sont similaires.

Les résultats de cette étude comparative montrent que le filtrage  $H_\infty$  ne permet pas d'améliorer significativement la qualité auditive du signal de parole rehaussé par rapport à un filtrage de Kalman. D'après nos simulations, la phase d'estimation des paramètres AR reste une étape clé dans la procédure de rehaussement. De plus, utiliser un lissage plutôt qu'un filtrage permet d'atténuer significativement le bruit résiduel. Ainsi, nous proposons dans la section suivante d'étudier expérimentalement les méthodes d'estimation duale du signal et de ses paramètres proposées dans les parties II.2 et III.2.1 et de les comparer à l'approche de rehaussement présentée dans [SHE99].

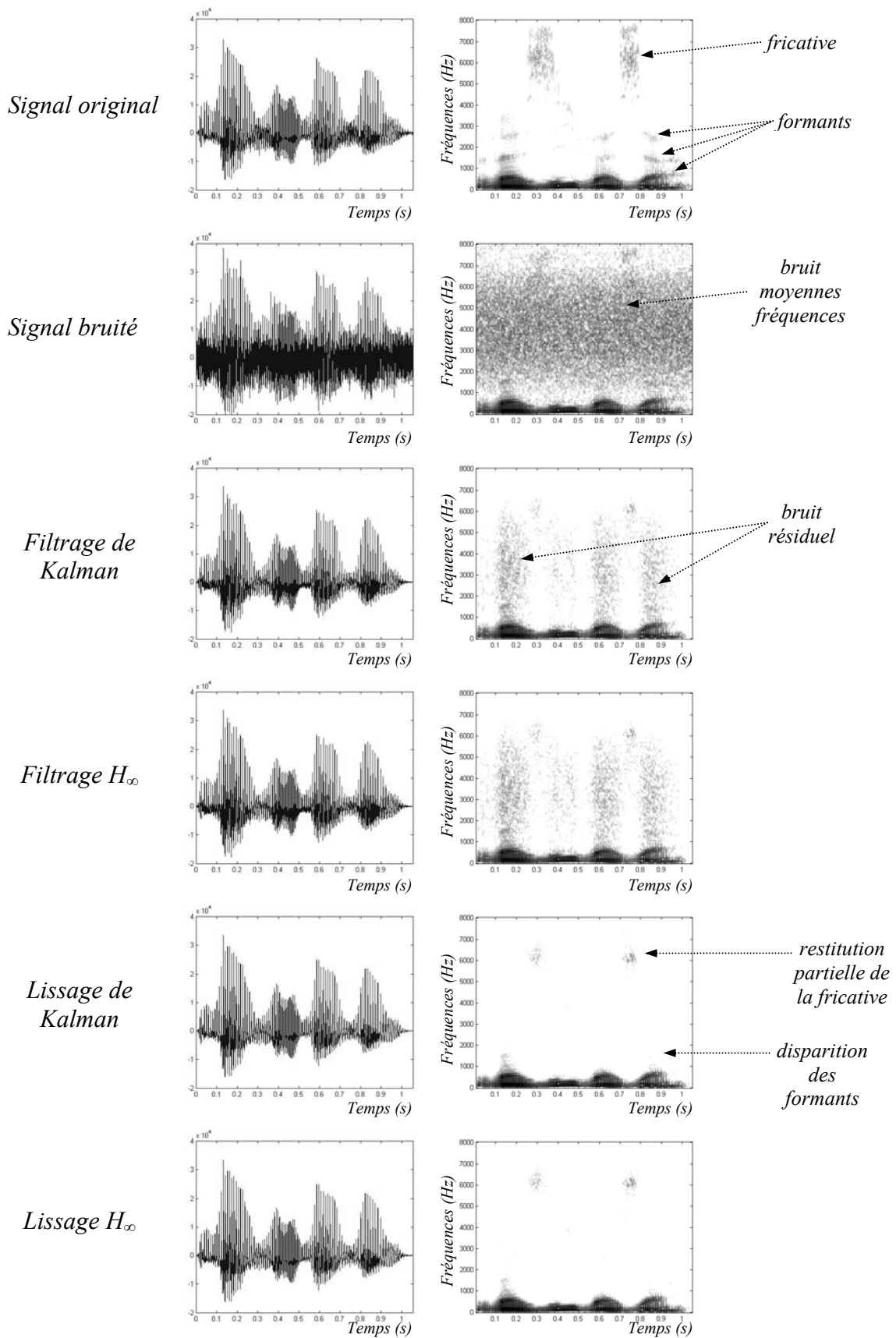


Figure III.3 : Evolutions temporelles et spectrogrammes des signaux originaux, bruités, filtrés et lissés pour le protocole 1 et le bruit 2 ;  $RSB=5$  dB.



### III.3.3. Intérêt de la structure à deux estimateurs

Dans cette étude comparative, nous utilisons les mêmes conditions expérimentales que dans la partie III.3.2. Les trois méthodes suivantes sont étudiées :

1. le filtrage dual de Kalman présenté dans la partie II.3 [LAB05b],
2. le filtrage dual  $H_\infty$  présenté dans la partie III.2.2 [LAB04a] [LAB04b],
3. la méthode de rehaussement proposée par Shen *et al.* dans [SHE99], fondée sur deux filtres  $H_\infty$  non interactifs fonctionnant en série.

Notons que suivant la nature de la trame traitée, la convergence des paramètres AR peut être relativement lente (>512 échantillons). Pour cette raison, nous utilisons un schéma itératif opérant comme suit :

1. la trame de signal est traitée une première fois et fournit une estimation des paramètres AR et du signal de parole, avec des conditions initiales nulles pour les paramètres AR.
2. la même trame bruitée est à nouveau traitée, mais les valeurs initiales des paramètres AR et de la matrice  $P_{0/0}$  correspondante correspondent aux dernières valeurs estimées par le filtrage précédent.

Le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir les résultats présentés varie de 3 à 5.

<b>Bruit 1</b>			
<i>RSB d'entrée (dB)</i>	15	10	5
<i>Estimation duale <math>H_2</math></i>	3,27	4,29	5,47
<i>Estimation duale <math>H_\infty</math></i>	3,28	4,33	5,56
<i>Méthode de Shen et al. [SHE99]</i>	2,67	3,33	3,94

Tableau III.12 : gains moyens du RSB.

<b>Bruit 2</b>			
<i>RSB d'entrée</i>	15	10	5
<i>Estimation duale <math>H_2</math></i>	4,04	6,01	6,75
<i>Estimation duale <math>H_\infty</math></i>	3,91	5,82	6,47
<i>Méthode de Shen et al. [SHE99]</i>	3,6	5,5	6,1

Tableau III.13 : gains moyens du RSB.

<b>Bruit 3</b>			
<i>RSB d'entrée</i>	15	10	5
<i>Estimation duale <math>H_2</math></i>	1,35	2,14	2,75
<i>Estimation duale <math>H_\infty</math></i>	1,30	2,08	2,65
<i>Méthode de Shen et al. [SHE99]</i>	0,56	0,95	1,41

Tableau III.14 : gains du RSB.

Si l'on se fonde sur les gains du RSB (Cf. tableaux III.12, III.13 et III.14) et les tests d'écoute, les méthodes que nous proposons montrent des performances supérieures à la méthode de Shen *et al.* pour les deux raisons suivantes :

- dans la méthode proposée par Shen *et al.*, les paramètres AR sont estimés directement à partir des observations bruitées à l'aide d'un filtre  $H_\infty$ . Comme nous l'avons vu au paragraphe III.2.1, cela conduit à des erreurs importantes d'estimation sur les paramètres AR.
- les méthodes proposées intègrent un lissage permettant d'atténuer la gêne auditive créée par ce bruit résiduel.

Les spectrogrammes de la figure III.4 montre que les méthodes duales proposées ne sont pas capables de restituer les formants noyés dans le bruit. De plus, malgré l'utilisation d'un lissage, un léger bruit résiduel persiste dans les basses fréquences. Les tests d'écoute montrent que la différence entre les méthodes de lissage  $H_2$  et  $H_\infty$  proposées n'est pas audible.

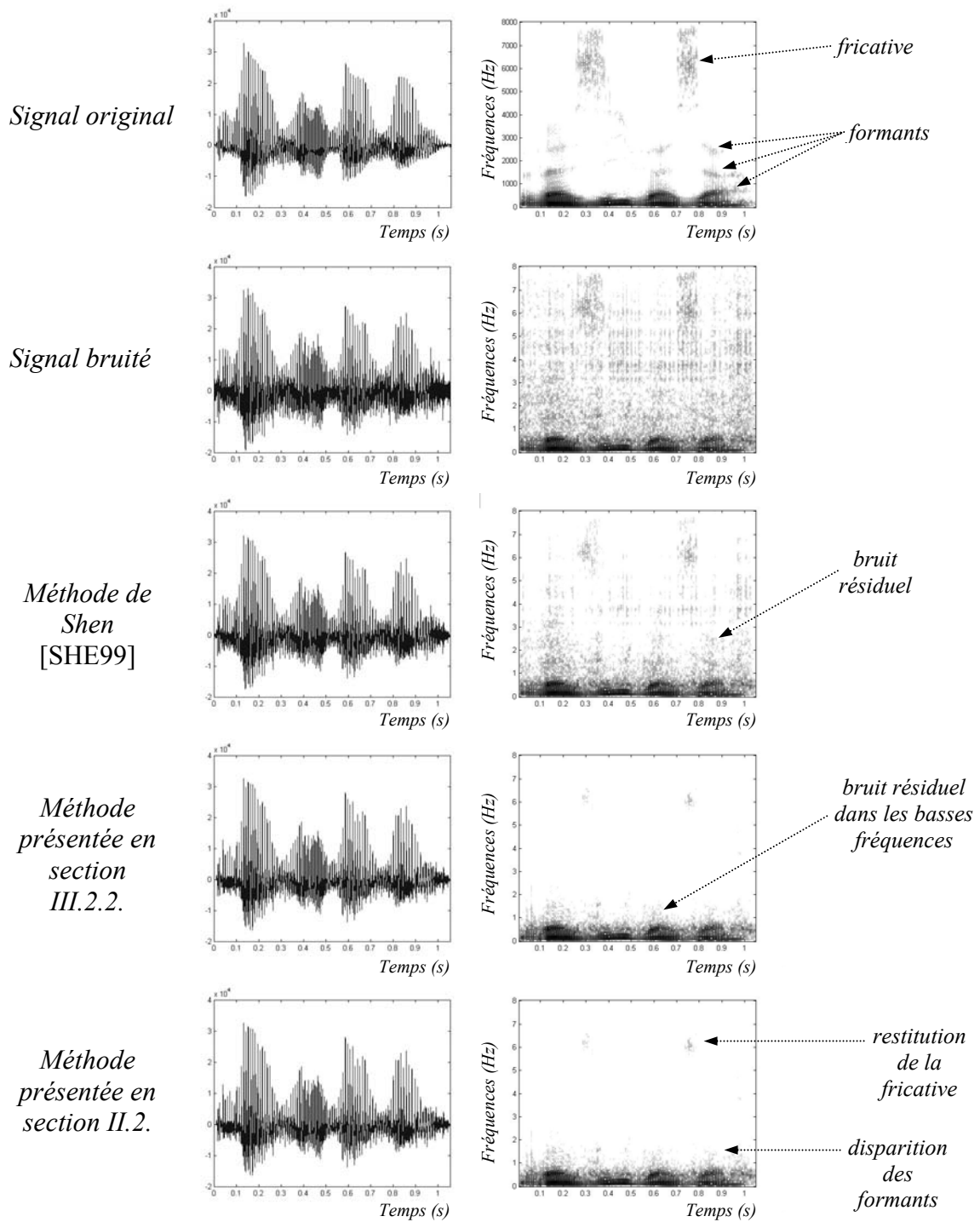


Figure III.4 : Evolutions temporelles et spectrogrammes des signaux originaux, bruités, filtrés et lissés pour le protocole 1 et le bruit 3 ;  $RSB=10$  dB.

### III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la pertinence des techniques d'estimation  $H_\infty$  dans le contexte du traitement du signal, et plus particulièrement du rehaussement du signal de parole. Ces méthodes sont *a priori* attrayantes car contrairement au filtre de Kalman, aucune hypothèse statistique sur le processus générateur et le bruit additif d'observation n'est nécessaire. Visant à minimiser les effets des perturbations sur l'erreur d'estimation du signal dans le pire cas, les techniques de filtrage  $H_\infty$  semblent plus robustes vis-à-vis des incertitudes et des perturbations.

Dans un premier temps, nous avons analysé le comportement du filtrage  $H_\infty$  pour l'estimation de paramètres AR à partir d'observations bruitées. Les résultats ont montré que l'application du filtre  $H_\infty$  directement sur les observations bruitées fournit en moyenne les mêmes résultats qu'un filtre de Kalman. Pour améliorer l'estimation des paramètres AR, nous avons étudié une nouvelle méthode dans laquelle un lissage  $H_\infty$  de type retard fixe interagit avec un filtrage  $H_\infty$ . Le lissage fournit une estimation du signal, tandis que le filtre permet de mettre à jour l'estimation des paramètres AR. Dans la dernière partie, nous avons étudié expérimentalement les techniques d'estimation  $H_\infty$  dans le contexte du rehaussement du signal de parole. Nous n'avons pas observé d'améliorations significatives à l'écoute des signaux rehaussés.

Ainsi, dans la première partie de ce mémoire, nous avons étudié les principales méthodes d'estimation des paramètres AR et proposé de nouveaux algorithmes utilisant les techniques des variables instrumentales ou l'estimation  $H_\infty$ . Lorsqu'un grand nombre d'échantillons<sup>16</sup> du signal observé bruité est disponible, les techniques d'estimation off-line à correction de biais proposées par Davila *et al.* [DAV98], Zheng *et al.* [ZHE00] et les équations MYW sont les plus efficaces car elles réalisent le meilleur compromis entre coût calculatoire, précision et variance d'estimation. Cependant, quand le nombre d'échantillons se réduit, les performances de ces algorithmes se dégradent. En effet, ils peuvent conduire à des pôles estimés à l'extérieur du cercle unité. Ainsi, dans des cas réels comme le rehaussement du signal de parole par exemple, de telles approches ne sont pas exploitables. Pour pallier ce problème, on préférera utiliser des méthodes on-line, qui ont l'avantage de conduire à un système stable. Les approches proposées ont alors les avantages suivants : elles garantissent la stabilité du

---

<sup>16</sup> Cela dépend de l'enveloppe du signal et donc du jeu de paramètres AR à estimer. En moyenne, au moins 512 échantillons sont nécessaires.

système obtenu, permettent de réduire le biais d'estimation des paramètres AR, ont une vitesse de convergence plus élevée que les filtre LMS à correction de biais et fournissent une estimation du processus AR. Si des informations statistiques sur le processus générateur et le bruit additif d'observation peuvent être connues *a priori*, l'utilisation de l'approche par filtrage dual de Kalman développée dans le chapitre II est préférable. Dans le cas contraire, ou si les modèles pour le signal et pour le bruit d'observation sont incertains, la méthode d'estimation duale  $H_\infty$  présentée dans le chapitre III est la plus appropriée.

Pour perfectionner les techniques de modélisation AR des signaux, les méthodes d'estimation dites robustes [XIE94] [WAN02] fondées sur un filtrage de Kalman ou un filtrage  $H_\infty$  permettent de prendre en compte explicitement les incertitudes sur les paramètres du modèle. Ces approches permettent de pallier les problèmes dus à la phase d'estimation des paramètres, mais conduisent à des algorithmes toujours plus complexes et lourds calculatoirement. Pour cette raison, nous nous focalisons dans la suite de ce mémoire sur des modèles alternatifs au modèle AR. Ainsi, la partie suivante est dédiée aux modèles sinusoïdaux. Plus particulièrement, dans le chapitre IV, nous menons une réflexion sur des modèles qui exploitent à la fois la nature stochastique du modèle AR et la nature déterministe des modèles sinusoïdaux. Enfin, dans le chapitre V, nous étudions de nouvelles méthodes de suivi fréquentiel fondées sur le filtrage particulière.



# PARTIE 2

## Modélisation sinusoïdale





## Chapitre IV

### IV. Les modèles sinusoïdaux stochastiques

---

Le modèle AR a été largement utilisé pour le traitement du signal de parole car il permet de modéliser l'enveloppe spectrale du signal analysé. Néanmoins, quand ce dernier présente des caractéristiques harmoniques, un ordre du modèle considérablement plus élevé (au moins 50) doit être choisi pour prendre en compte les détails du spectre. Dans ce cas, l'estimation des paramètres AR devient délicate, notamment lorsque le nombre d'échantillons disponibles est réduit et le signal bruité. Ainsi, pour caractériser un signal présentant de fortes périodicités, qu'il soit musical, biomédical ou de parole, les modèles sinusoïdaux jouissent d'une certaine popularité.

Dans ce chapitre, nous présentons un panorama des modèles sinusoïdaux existants. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux modèles sinusoïdaux dits stochastiques. Dans un premier temps, nous traitons du modèle dit ARCOS, qui consiste à moduler une sinusoïde par un processus AR. Nous exploitons la méthode proposée par Besson *et al.* [BES95] pour estimer les paramètres du modèle, notamment dans le cas où le processus est noyé dans un bruit blanc additif. Puis, nous étudions une généralisation de ce modèle à plusieurs composantes sinusoïdales. Pour estimer les paramètres, nous proposons une analyse haute résolution de type ESPRIT couplé avec un algorithme de type EM. Dans la dernière partie, nous illustrons les potentialités de la méthode proposée dans le contexte de l'analyse et de la classification de signaux ElectroEncéphaloGraphiques (EEG).

## IV.1. Les modèles sinusoïaux

### IV.1.1. Etat de l'art des méthodes de représentation sinusoïdale des signaux

En 1986, Mac Aulay et Quatieri [AUL80] publient un des articles fondateurs pour la modélisation sinusoïdale dans le domaine du traitement du signal. Ils proposent une nouvelle méthode de codage du signal de parole à bas débit fondé sur un schéma d'analyse/synthèse. Le signal de parole  $s_k$  est modélisé par une somme de  $L$  composantes sinusoïdales définies ainsi :

$$s_k = \sum_{i=1}^L \gamma_k^i \cos(\phi_k^i) = \sum_{i=1}^L \gamma_k^i \cos(2k\pi f_i + \phi_0^i) \quad (\text{IV.1})$$

où  $\gamma_k^i$ ,  $\phi_k^i$ ,  $\phi_0^i$  et  $f_i$  désignent respectivement l'amplitude instantanée, la phase instantanée, la phase à l'origine et la fréquence normalisée de la  $i^{\text{ème}}$  composante du modèle.

Les paramètres du modèle sont supposés constants sur une trame d'analyse et sont estimés à partir d'une FFT du signal. Ces résultats sont à l'origine de nombreux travaux sur la modélisation sinusoïdale des signaux [MAC96] [GEO97] [BRI01] [JEN01] et ont trouvé des applications notamment dans le domaine de la synthèse audio [SER90].

Néanmoins, lorsque l'on traite un segment transitoire du signal, les paramètres du modèle ne peuvent plus être supposés constants. C'est le cas par exemple d'un signal musical pour l'évanouissement ou l'attaque d'une note. Cf. figure IV.1.

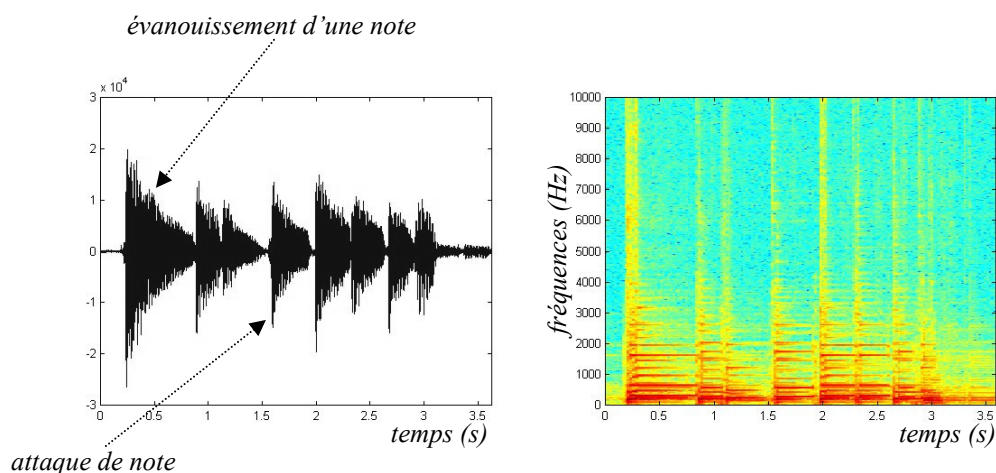


Figure IV.1 : représentation temporelle (gauche) et spectrogramme (droite)  
d'une mélodie de guitare<sup>17</sup> ;  $f_e=44100$  Hz.

<sup>17</sup> Artiste : Tryo, Chanson : J'ai rien prévu pour demain, Album : Mamagubida.

Pour modéliser de lentes variations, le modèle à fenêtrage exponentiel [BOY02] peut être considéré :

$$s_k = \sum_{i=1}^L \gamma_k^i e^{\lambda_i k} \cos(2k\pi f_i + \phi_0^i) \quad (\text{IV.2})$$

où  $\lambda_i$  est le facteur d'amortissement de la  $i^{\text{ème}}$  composante.

Pour estimer les paramètres du modèle, une méthode en sous-espace dite à haute résolution peut être mise en œuvre. Dans ce cas, le signal est supposé perturbé par un bruit additif blanc et gaussien  $n_k$  :

$$y_k = s_k + n_k. \quad (\text{IV.3})$$

Une décomposition en valeurs propres de la matrice d'auto-corrélation ou en valeurs singulières de la matrice de type Hankel des données observées  $y_k$  permet alors d'estimer les différents paramètres du modèle à partir du sous-espace signal [HUF93]. Ces approches ont été aussi utilisées dans le contexte du rehaussement du signal de parole [EPH95] [JEN95] [DOC02] ou de l'analyse de signaux audio [BOY02]. Une approche alternative repose sur une modélisation par poursuite adaptative (*Matching-Pursuit*) [MAL93] [GRI03]. Le principe est de rechercher dans le signal des motifs correspondants à des formes d'onde d'un dictionnaire préalablement construit<sup>18</sup>.

Les variations rapides du signal comme les attaques de notes sont des phénomènes quasi instantanés. Pour les prendre en compte, un détecteur de transitoires [VER97] [HAM96] [BOY02] doit être utilisé. L'analyse du signal est ensuite réalisée soit à l'aide d'un fenêtrage adaptatif (trames longues pour les segments quasi-stationnaires et trames courtes pour les transitoires), soit à l'aide d'un modèle DDS intégrant dans l'exponentielle du modèle (IV.2) un retard caractéristique de la localisation temporelle du transitoire dans la trame d'analyse.

Cependant, certains signaux contiennent à la fois des caractéristiques sinusoïdales et stochastiques. C'est le cas d'un son de parole fricatif voisé (Cf. Annexe A) ou issu d'un instrument à vent comme le saxophone. Le signal  $s_k$  est alors modélisé par la somme d'une composante déterministe sinusoïdale  $\hat{s}_k$  et d'une composante stochastique  $n_k$  :

$$s_k = \hat{s}_k + n_k = \sum_{i=1}^L \gamma_k^i \cos(\phi_k^i) + n_k. \quad (\text{IV.4})$$

<sup>18</sup> Les formes d'onde généralement utilisées sont des sinusoïdes, des sinusoïdes amorties ou des fonctions de Gabor.

Dans le contexte de l'analyse/synthèse de signaux musicaux, Serra *et al.* [SER90] ont appelé ce modèle « Sinusoïdes + Bruit ». Ce dernier a également été exploité par Stylianou [STY01] pour l'analyse, la modification, la synthèse et le rehaussement du signal de parole.

Néanmoins, une composante sinusoïdale est très localisée en fréquence et ne peut pas toujours prendre en compte toutes les caractéristiques spectrales du signal. Nous proposons dans la suite d'étudier les modèles sinusoïdaux dits stochastiques. La partie suivante est en particulier dédiée à l'étude du modèle dit ARCOS.

#### IV.1.2. Le modèle ARCOS

A notre connaissance, le modèle ARCOS a été introduit par Besson *et al.* [BES95] pour l'analyse d'un signal radar  $s_k$ . Ce dernier est défini par une sinusoïde perturbée par un bruit multiplicatif  $\gamma_k$  comme suit :

$$s_k = \gamma_k \cos(k\omega_0 + \varphi) \quad (\text{IV.5})$$

avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$  où  $f_0$  désigne la fréquence doppler normalisée à estimer.  $\varphi$ , la phase à l'origine, est supposée aléatoire, uniformément distribuée dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$  et indépendante de  $\gamma_k$ .

Le bruit  $\gamma_k$  est modélisé par le processus AR suivant :

$$\gamma_k = -\sum_{i=1}^p a_i \gamma_{k-i} + u_k \quad (\text{IV.6})$$

où  $u_k$  est un processus blanc gaussien centré et de variance  $\sigma_u^2$ . Dans la suite,

$\underline{\theta} = [a_1 \ \dots \ a_p]^T$  désigne le vecteur des paramètres AR et on note  $A(z) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i}$  avec  $a_0 = 1$ .

Le bruit  $\gamma_k$  est supposée varier lentement dans le temps et Besson *et al.* formulent alors l'hypothèse suivante :

*Les fréquences angulaires des pôles  $\{p_i = \rho_i e^{j\omega_i}\}_{i \in \{1, \dots, p\}}$  du processus AR  $\gamma_k$  sont toutes plus petites que  $\omega_0$  :*

$$\omega_0 > \omega_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}. \quad (\text{IV.7})$$

Remarque : Parmi les travaux sur les bruits multiplicatifs, Swami propose d'estimer les paramètres du signal soit à l'aide de méthodes fondées sur des statistiques d'ordre supérieur et les cumulants [SWA94], soit à l'aide de méthodes des moindres carrés non linéaires [SWA99]. Coulon *et al.* [COU99] traitent le cas d'une somme de sinusoides perturbée par un bruit multiplicatif et un bruit additif, tous deux de type MA. La procédure d'estimation des paramètres est fondée sur la résolution d'un système de type YW fondé sur les statistiques d'ordre supérieur. Les auteurs ont étendu leur approche au cas où chacune des composantes sinusoidales est perturbée par un bruit multiplicatif de type MA différent et indépendant.

Néanmoins, étant donné que  $\gamma_k$  est un bruit perturbateur, Besson *et al.* ne se focalisent que sur l'estimation de la pulsation  $\omega_0$ . L'objectif de notre étude est différent. En effet, nous supposons que les amplitudes véhiculent des informations caractéristiques du signal. Ainsi, les méthodes que nous développons dans les parties suivantes visent à estimer la pulsation  $\omega_0$ , les paramètres  $\underline{\theta}$  et  $\sigma_u^2$ .

#### IV.1.3. Méthode d'estimation des paramètres ARCOS à partir d'observations non bruitées

Pour estimer la pulsation  $\omega_0$ , l'idée de Besson *et al.* est d'interpréter spectralement le processus ARCOS comme un processus ARMA. En effet, étant donné (IV.5) et (IV.6), la DSP de  $s_k$  satisfait :

$$S_s(z) = \frac{1}{4} (S_\gamma(z.e^{j\omega_0}) + S_\gamma(z.e^{-j\omega_0})) \quad (IV.8)$$

où  $S_\gamma(z) = \frac{\sigma_u^2}{A(z)A(z^{-1})}$  désigne la DSP de l'amplitude AR  $\gamma_k$ .

$S_s(z)$  s'exprime alors comme suit :

$$\begin{aligned} S_s(z) &= \frac{\sigma_u^2}{4} \frac{A(z.e^{j\omega_0})A(z^{-1}.e^{-j\omega_0}) + A(z^{-1}.e^{j\omega_0})A(z.e^{-j\omega_0})}{A(z.e^{j\omega_0})A(z.e^{-j\omega_0})A(z^{-1}.e^{-j\omega_0})A(z^{-1}.e^{j\omega_0})} \\ &= \lambda^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{D(z)D(z^{-1})} \end{aligned} \quad (IV.9)$$

avec  $D(z) = A(z.e^{j\omega_0})A(z.e^{-j\omega_0})$  et  $\lambda^2 = \frac{\sigma_u^2}{4}$ .

Etant donné l'équation (IV.9),  $S_s(z)$  est homogène à la DSP d'un processus ARMA d'ordre  $(2p, p)$ . Notons que les zéros de  $D(z)$ , qui définissent la partie AR du processus ARMA, s'expriment de la manière suivante :

$$\left\{ p_i^+ = \rho_i e^{j(\omega_i + \omega_0)}, p_i^- = \rho_i e^{j(\omega_i - \omega_0)} \right\}_{i=1:p} \quad (\text{IV.10})$$

où  $\{p_i = \rho_i e^{j\omega_i}\}_{i=1:p}$  sont les zéros de  $A(z)$ , complexes conjugués ou réels.

D'après l'hypothèse (IV.7),  $p_i^+$  et  $p_i^-$  ont des pulsations respectivement positives et négatives. Ainsi, dans [BES95], l'estimation de la pulsation  $\omega_0$  s'effectue en trois étapes :

1. On obtient les estimations des pôles  $\hat{p}_i^+$  et  $\hat{p}_i^-$  à l'aide des équations MYW.
2. On détecte les zéros  $\hat{p}_i^+$  qui ont un argument positif.
3. On estime la pulsation  $\omega_0$  comme suit :

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \arg(\hat{p}_i^+) \quad (\text{IV.11})$$

où  $\arg(\cdot)$  désigne l'argument.

Nous proposons maintenant d'estimer les paramètres AR  $\underline{\theta}$  et la variance  $\sigma_u^2$ .  $\underline{\theta}$  est déduit des pôles  $\hat{z}_i$  calculés comme suit :

$$\hat{z}_i = \hat{z}_i^+ e^{-j\hat{\omega}_0}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (\text{IV.12})$$

La variance  $\sigma_u^2$  est estimée en considérant la relation (IV.9) pour  $z = 1$ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= 2\lambda^2 \times |A(e^{j\omega_0})|^2 \times |B(1)|^2 \\ &= 2\lambda^2 \times \prod_{i=1}^p (|1 - z_i e^{j\omega_0}|^2) \times \left( \sum_{i=1}^p b_i \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

où  $\lambda^2$  correspond à la variance du processus générateur et  $\{b_i\}_{i=1:p}$  aux paramètres MA du processus ARMA, estimés à l'aide des équations de YW [THE92].

Remarque : Besson *et al.* proposent un estimateur de la pulsation  $\omega_0$  qui tient compte de la relation particulière entre  $\underline{\theta}$  et  $\omega_0$ . En effet, en identifiant les polynômes

$D(z) = 1 + \sum_{i=1}^{2p} d_i z^{-i} = A(z.e^{j\omega_0})A(z.e^{-j\omega_0})$ , on obtient l'équation suivante :

$$d_k = \sum_{i=1}^p a_i a_{k-i} \cos((2i-k)\omega_0), \quad \forall k \in \{1, \dots, 2p\} \quad (\text{IV.14})$$

où  $a_i = 0, \forall i \notin \{0, \dots, p\}$ .

Le vecteur  $\underline{d} = [d_1 \ \dots \ d_p]^T$  dépend donc du jeu de paramètres  $\chi = [\underline{\theta}^T \ \omega_0]^T$ . Ce dernier est alors estimé comme suit :

$$\hat{\chi} = \min\{J\} = \min\left\{\left(\hat{R}_{ss} \underline{d}(\chi) + \hat{r}_s\right)^T \left(\hat{R}_{ss} \underline{d}(\chi) + \hat{r}_s\right)\right\}. \quad (\text{IV.15})$$

Comme ce problème d'estimation est non linéaire, Besson *et al.* utilisent un algorithme itératif de type Gauss-Newton. L'estimation de  $\chi$  est alors mise à jour de la manière suivante :

$$\chi^{i+1} = \chi^i - \left[ \left[ \frac{\partial^2 J(\chi)}{\partial \chi \partial \chi^T} \right]^{-1} \frac{\partial J(\chi)}{\partial \chi} \right]_{\chi=\chi^i}. \quad (\text{IV.16})$$

Néanmoins, lorsque le processus ARCOS est noyé dans un bruit blanc, les estimateurs présentés ci-dessus fournissent des estimations biaisées des paramètres ARCOS car ils sont fondés sur les équations de YW. Besson *et al.* donnent dans [BES96] les limites de leurs approches dans ce cas. Cependant, aucune solution n'est proposée pour tenir compte des effets du bruit additif. Dans [BES97], ils proposent deux méthodes en sous-espace pour estimer la fréquence doppler  $\omega_0$ , mais ne précisent pas comment les paramètres AR peuvent être estimés. Nous proposons dans la partie suivante d'améliorer l'estimation des paramètres ARCOS à l'aide d'un algorithme itératif à compensation de biais.

#### IV.1.4. Méthode d'estimation des paramètres ARCOS en milieu bruité

Supposons que les observations  $y_k$  du processus ARCOS  $s_k$  sont perturbées par un bruit  $n_k$  blanc gaussien centré de variance  $\sigma_n^2$  comme suit :

$$y_k = \gamma_k \cos(\phi_k) + n_k. \quad (\text{IV.17})$$

D'après (IV.9), l'estimation des paramètres ARCOS revient à l'estimation des paramètres d'un processus ARMA d'ordre  $(2p, p)$  qui s'exprime de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^{2p} d_i s_{k-i} = \sum_{i=0}^p b_i u_{k-i} \quad (\text{IV.18})$$

où  $d_0 = 1$ ,  $\underline{d} = [d_1 \ \dots \ d_{2p}]^T$  désignent les paramètres AR,  $b_0 = 1$ ,  $\underline{b} = [b_1 \ \dots \ b_p]^T$  les paramètres MA et  $u_k$  un processus blanc gaussien centré de variance  $\sigma_u^2$ .

Supposons que l'estimation des paramètres AR  $\underline{d}$  est obtenue en résolvant les équations de YW suivantes [THE92] :

$$\begin{bmatrix} r_{yy}^p & \dots & r_{yy}^1 & r_{yy}^0 & r_{yy}^1 & \dots & r_{yy}^{p-1} \\ r_{yy}^{p+1} & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & r_{yy}^1 \\ r_{yy}^{2p-1} & & & \ddots & & & r_{yy}^0 \\ r_{yy}^{2p} & \ddots & & & \ddots & & r_{yy}^1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ r_{yy}^{3p-1} & \dots & r_{yy}^{2p} & r_{yy}^{2p-1} & \dots & \dots & r_{yy}^p \end{bmatrix} \hat{\underline{d}}_{LS} = - \begin{bmatrix} r_{yy}^{p+1} \\ r_{yy}^{p+1} \\ \vdots \\ r_{yy}^{3p} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.19})$$

Ce système peut écrire sous la forme équivalente suivante :

$$R_{yy} \hat{\underline{d}}_{LS} = -\underline{r}_y, \quad (\text{IV.20})$$

avec  $R_{yy} = E\{\underline{Y}_{k,2p} (\underline{Y}_{k+p,2p})^T\}$ ,  $\underline{Y}_{i,j} = [y_i \ \dots \ y_{i-j+1}]^T$  et :

$$\underline{r}_y = E\{\underline{Y}_{k,2p} y_{k+p+1}\} \quad (\text{IV.21})$$

Etant donné (IV.17) et (IV.18), les observations peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$y_{k+p+1} = -(\underline{Y}_{k+p,2p})^T \underline{d} + \lambda_{k+p+1}, \quad (\text{IV.22})$$

avec :

$$\lambda_k = \sum_{i=0}^{2p} d_i n_{k-i} + \sum_{i=0}^p b_i u_{k-i}. \quad (\text{IV.23})$$

Comme  $u_k$  et  $n_k$  sont des processus blancs, les équations (IV.21), (IV.22) et (IV.23) permettent d'écrire :



$$\begin{aligned}
 \underline{r}_y &= -E\{\underline{Y}_{k,2p} (\underline{Y}_{k,2p})^T\} \underline{d} + E\{\underline{Y}_{k,2p} \lambda_{k+p+1}\} \\
 &= -R_{yy} \underline{d} + \sigma_n^2 \begin{bmatrix} d_{p+1} \\ \vdots \\ d_{2p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= -R_{yy} \underline{d} + \sigma_n^2 J \underline{d}
 \end{aligned} \tag{IV.24}$$

avec  $J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ , matrice de dimensions  $2p \times 2p$  que l'on peut décomposer

en 4 sous-matrices de taille  $p \times p$ .

La combinaison des équations (IV.20) et (IV.24) donne alors l'erreur d'estimation suivante :

$$\hat{\underline{d}}_{LS} - \underline{d} = -\sigma_n^2 (R_{yy})^{-1} J \underline{d}. \tag{IV.25}$$

Nous proposons maintenant de mettre en œuvre un algorithme itératif pour corriger  $\hat{\underline{d}}_{LS}$ . Pour cela, introduisons un vecteur de paramètres étendu tel que :

$$\underline{d}^e = [\underline{d}^T \quad 0]^T. \tag{IV.26}$$

En posant  $\mu = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$ , on obtient la relation suivante :

$$\mu \underline{d}^e = 0. \tag{IV.27}$$

Etant donné l'équations (IV.25), on déduit l'expression suivante de  $\sigma_n^2$  :

$$\sigma_n^2 = \frac{-\mu \hat{\underline{d}}_{LS}^e}{\mu (R_{yy}^e)^{-1} J \underline{d}^e}. \tag{IV.28}$$

où  $\hat{\underline{d}}_{LS}^e$  désigne l'estimation du vecteur des paramètres AR étendu à partir de (IV.19) et  $R_{yy}^e$  la matrice d'auto-corrélation des observations de taille  $2p+1 \times 2p+1$ .

$\sigma_n^2$  et  $\underline{d}$  sont alors estimés itérativement selon les deux étapes suivantes :

1. La variance du bruit additif est estimée comme suit :

$$(\hat{\sigma}_n^2)^i = \frac{-\mu \hat{\underline{d}}_{LS}^e}{\mu (\hat{R}_{yy}^e)^{-1} J(\hat{\underline{d}}^e)^{i-1}}, \quad (\text{IV.29})$$

2. et les paramètres AR sont mis à jour comme suit :

$$(\hat{\underline{d}}^e)^i = \hat{\underline{d}}_{LS}^e - (\hat{\sigma}_n^2)^i (R_{yy})^{-1} J(\hat{\underline{d}}^e)^{i-1}, \quad (\text{IV.30})$$

avec  $(\hat{\underline{d}}^e)^0 = \hat{\underline{d}}_{LS}^e$  et  $(\hat{\sigma}_n^2)^0 = 0$ .

La procédure itérative est stoppée lorsque le critère suivant est vérifié :

$$\frac{\|(\hat{\underline{d}}^e)^{i+1} - (\hat{\underline{d}}^e)^i\|}{\|(\hat{\underline{d}}^e)^{i+1}\|} < \delta \quad (\text{IV.31})$$

où  $\delta$  un nombre positif très petit devant 1.

Une fois  $\underline{d}$  estimé, les équations (IV.11) et (IV.12) fournissent respectivement une estimation de la pulsation  $\omega_0$  et des paramètres AR  $\underline{\theta}$  de l'amplitude du processus ARCOS. Puisqu'une estimation  $\hat{\sigma}_n^2$  de la variance du bruit additif est maintenant disponible, on peut corriger les équations de YW et en déduire la variance  $\sigma_u^2$  en utilisant une équation du type (IV.28).

#### IV.1.5. Résultats expérimentaux

Pour tester la méthode proposée, trois processus ARCOS de 2000 échantillons chacun sont générés comme suit :

- Processus ARCOS 1 : La fréquence normalisée  $f_0$  est fixée à 0,25. Les pôles sont  $p_1 = 0,99$  et  $p_{3,4} = 0,99e^{\pm j0,1\pi}$ .
- Processus ARCOS 2 : La fréquence normalisée  $f_0$  est fixée à 0,25. Les pôles sont  $p_1 = 0,95$  et  $p_{3,4} = 0,9e^{\pm j0,1\pi}$ .
- Processus ARCOS 3 : La fréquence normalisée  $f_0$  est fixée à 0,08. Les pôles sont  $p_1 = 0,99$  et  $p_{3,4} = 0,99e^{\pm j0,1\pi}$ .

Le processus ARCOS généré est ensuite perturbé par un bruit blanc gaussien additif avec un RSB variant de 0 dB à 40 dB. Les résultats présentés se fondent sur 100 réalisations du bruit additif. Dans les expériences que nous avons menées, certains zéros du polynôme  $D(z)$  décrit par l'ensemble (IV.10) deviennent réels. Dans ce cas, l'estimation des paramètres ARCOS devient délicate. Les résultats que nous montrons ici ne tiennent pas compte de ces réalisations.

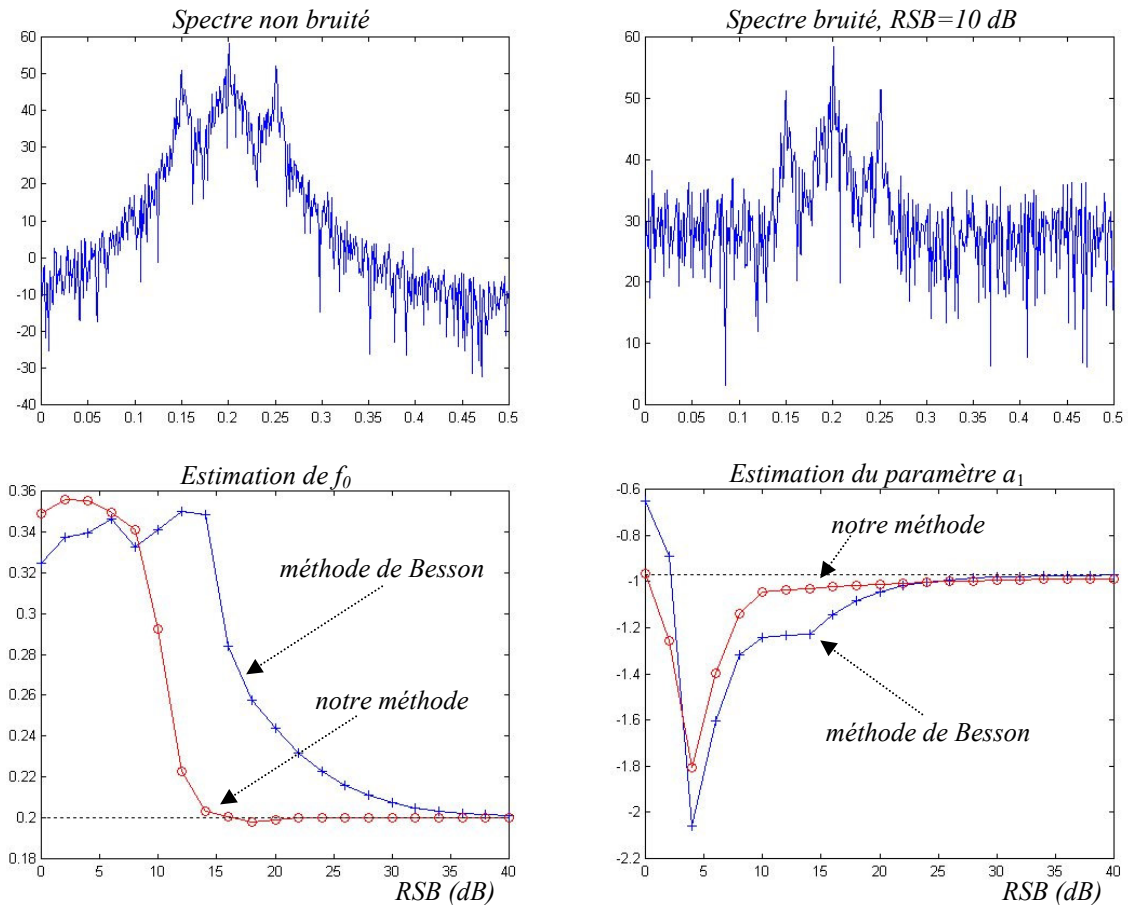


Figure IV.2 : résultats de simulation avec le processus ARCOS 1 avec la méthode de Besson (croix) et la méthode proposée (cercle).

D'après la figure IV.2, la méthode utilisée par Besson *et al.* fournit une estimation biaisée de la fréquence  $f_0$ . En outre, au dessous d'un RSB de 15 dB, le pourcentage du nombre de réalisations non prises en compte avec cette méthode dépassent 50 %. Pour un RSB compris entre 15 dB et 40 dB, la méthode proposée permet de corriger le biais et le pourcentage du nombre de réalisations non prises en compte reste inférieur à 5 %. En revanche, pour des RSB plus faibles, les deux méthodes ne sont plus capables d'estimer convenablement la fréquence du signal.

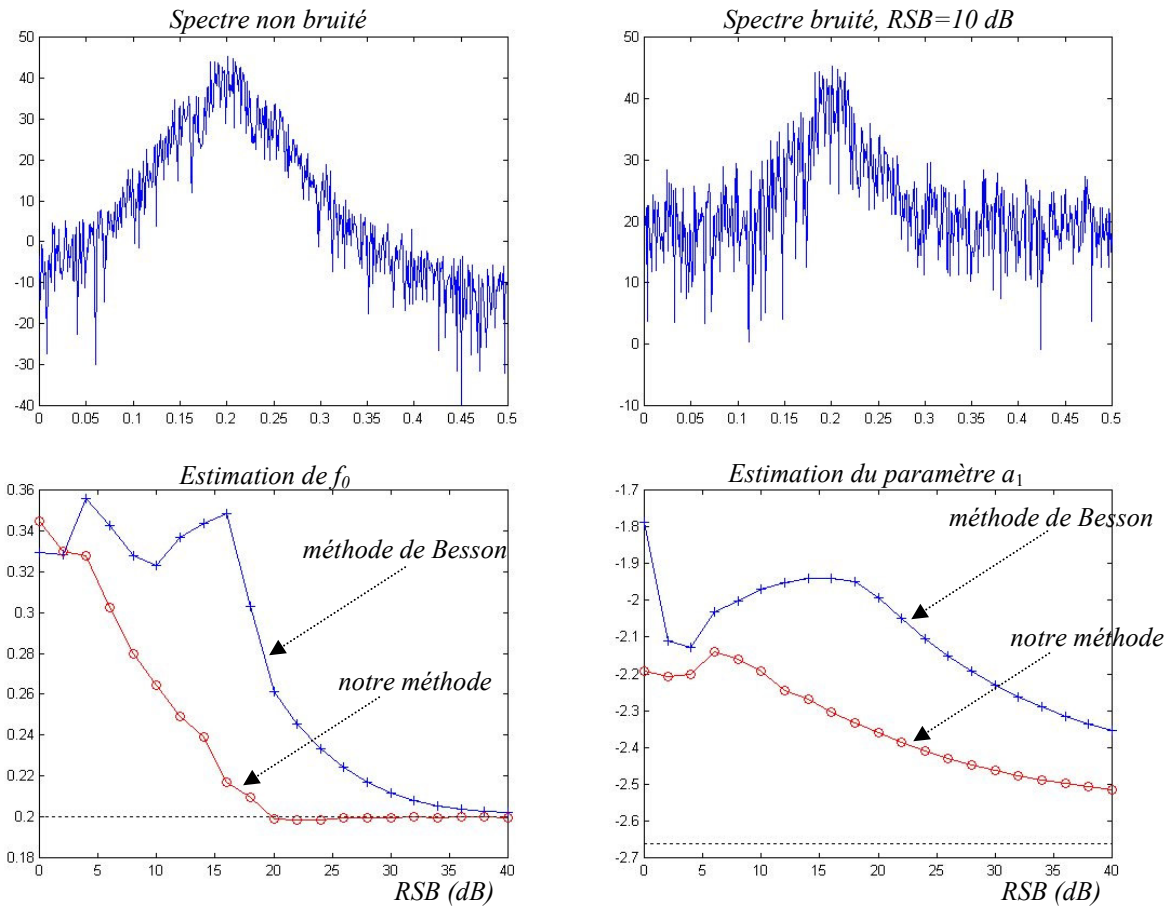
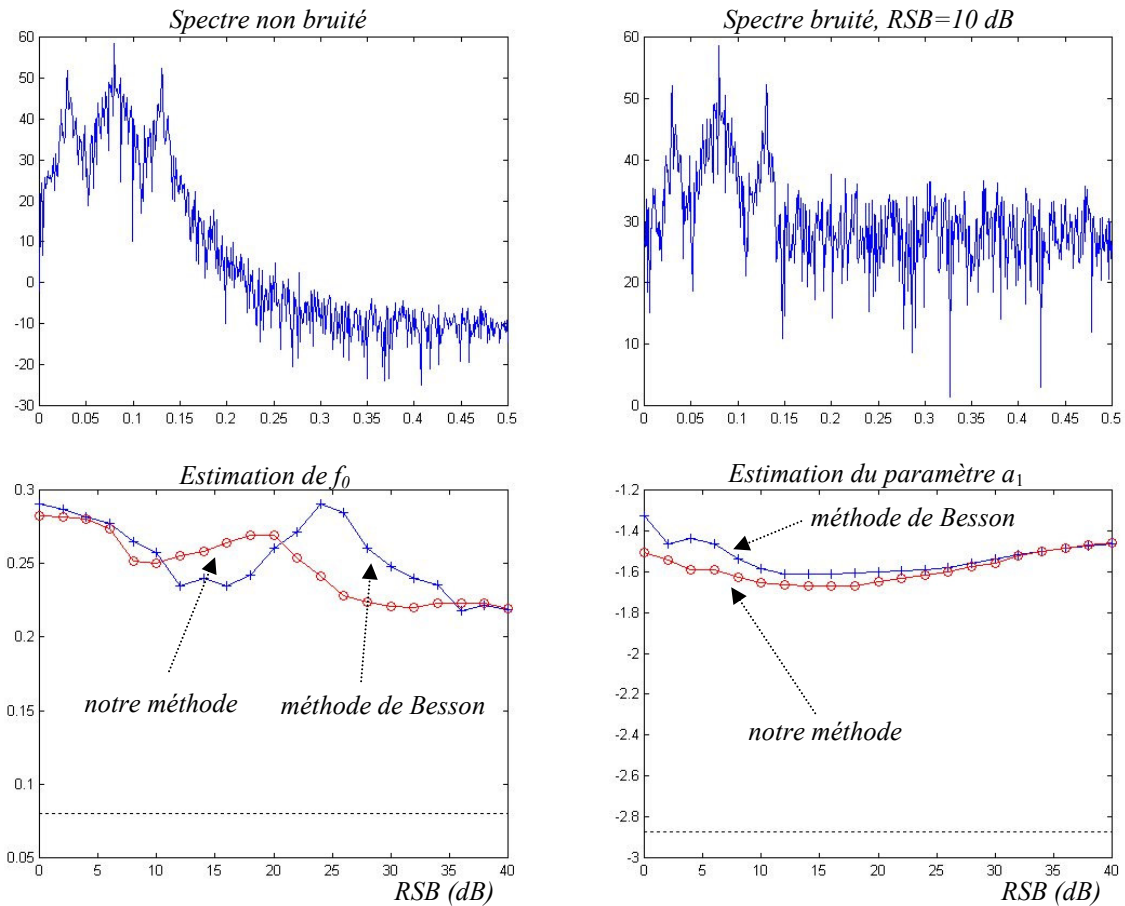


Figure IV.3 : résultats de simulation avec le processus ARCOS 2 avec la méthode de Besson (croix) et la méthode proposée (cercle).

Dans le cas du processus ARCOS 2, les résonances du spectre du signal sont moins aigues et l'estimation des paramètres du modèle devient délicate. La figure IV.3 montre que la méthode proposée permet de réduire significativement le biais d'estimation des paramètres par rapport à la méthode de Besson *et al.*, notamment pour des RSB compris entre 20 dB et 40 dB.



*Figure IV.4 : résultats de simulation avec le processus ARCOS 3 avec la méthode de Besson (croix) et la méthode proposée (rond).*

La dernière expérience montre que lorsque le spectre du processus ARCOS est proche de la fréquence 0 ou  $\pi$ , les paramètres ARCOS ne peuvent pas être estimés correctement. D'après la figure IV.4, la méthode proposée ne permet pas de réduire significativement le biais dû au bruit additif et les deux algorithmes étudiés ne fournissent pas des estimations acceptables des paramètres ARCOS.

#### IV.1.6. Conclusion

Les résultats ci-dessus montrent que les méthodes testées restent sensibles au bruit de mesure. Par ailleurs, le modèle ARCOS ne comporte qu'une seule composante sinusoïdale. Or, dans des applications comme l'analyse/synthèse de signaux audio, le traitement de la parole ou l'analyse de signaux biomédicaux par exemple, un tel processus n'est pas adapté. Ainsi, dans la partie suivante, nous étudions un modèle stochastique sinusoïdal généralisé à une somme de composantes ARCOS et présentons un nouvel algorithme d'estimation des paramètres.

## IV.2. Généralisation du modèle ARCOS

### IV.2.1. Un modèle stochastique sinusoidal

Pour éviter le problème de l'estimation non linéaire des phases initiales des composantes sinusoidales, nous considérons le modèle suivant :

$$s_k = \sum_{i=1}^L \{a_k^i \cos(\varphi_k^i) + b_k^i \sin(\varphi_k^i)\}. \quad (\text{IV.32})$$

Pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, L\}$ ,  $\varphi_k^i = k\omega_i$  désigne la phase instantanée et  $\omega_i$  la pulsation de la  $i^{\text{ème}}$  composante sinusoidale du modèle.

Les amplitudes  $a_k^i$  et  $b_k^i$  sont modélisées par des processus AR d'ordre  $p_i$  comme suit :

$$\begin{cases} a_k^i = -\sum_{j=1}^{p_i} \gamma_j^i a_{k-j}^i + \varepsilon_k^{a_i} \\ b_k^i = -\sum_{j=1}^{p_i} \gamma_j^i b_{k-j}^i + \varepsilon_k^{b_i} \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

où  $\Gamma_i = [\gamma_1^i \ \dots \ \gamma_{p_i}^i]^T$  sont les paramètres AR de la  $i^{\text{ème}}$  composante et  $\varepsilon_k^{a_i}$  et  $\varepsilon_k^{b_i}$  sont des processus blancs gaussiens centrés de variance  $\sigma_i^2$ . Notons que sur une trame d'analyse, les paramètres AR sont supposés constants.

Le signal est perturbé par un bruit additif, et on ne dispose que de l'observation suivante :

$$y_k = s_k + n_k \quad (\text{IV.34})$$

où  $n_k$  est un bruit blanc gaussien centré de variance  $\sigma_n^2$ .

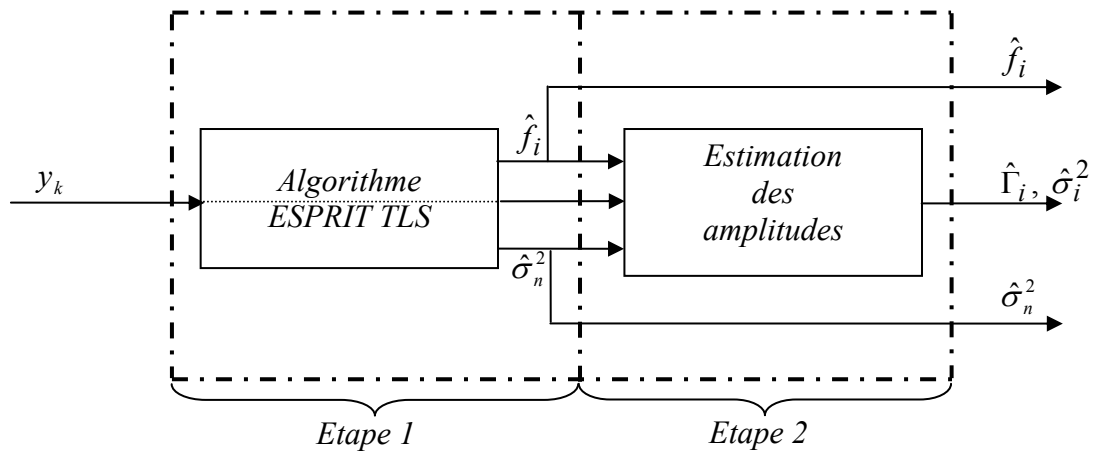
Nous introduisons en outre les notations suivantes :

$$\underline{\theta}_i = [\Gamma_i^T \ \sigma_i^2]^T \text{ et } \underline{\theta} = [\underline{\theta}_1 \ \dots \ \underline{\theta}_L]^T, \quad (\text{IV.35})$$

$$\begin{cases} \alpha_i = [a_1^i \ \dots \ a_N^i]^T \\ \beta_i = [b_1^i \ \dots \ b_N^i]^T \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A_{k-1}^i = [a_{k-1}^i \ \dots \ a_{k-p}^i]^T \\ B_{k-1}^i = [b_{k-1}^i \ \dots \ b_{k-p}^i]^T \end{cases}. \quad (\text{IV.36})$$

### IV.2.2. Algorithme d'estimation des paramètres du modèle

Pour estimer les paramètres du modèle décrit dans l'équation (IV.32), l'algorithme proposé opère en deux étapes [LAB02]. La première consiste à estimer les pulsations de chaque composante sinusoidale et la variance du bruit additif d'observation à l'aide d'un algorithme ESPRIT TLS [THE92]. La seconde fournit une estimation des paramètres AR des amplitudes du modèle. Cf. la figure IV.5.



*Figure IV.5 : schéma de principe d'estimation des paramètres du modèle stochastique sinusoidal.*

Les paramètres AR  $\{\Gamma_i\}_{i=1:L}$  des amplitudes et les variances  $\{\sigma_i^2\}_{i=1:L}$  des processus générateurs sont estimés au sens du maximum de vraisemblance. Comme aucune réalisation des amplitudes AR du modèle n'est disponible, un algorithme itératif de type EM est mis en oeuvre. La log-vraisemblance se définit de la manière suivante :

$$Q(\theta, \hat{\theta}^r) = E \left\{ \ln(p_z(z, \theta)) / N, \hat{\theta}^r \right\} \quad (IV.37)$$

où  $E\{./N\}$  désigne l'espérance mathématique connaissant  $N$  observations,  $\hat{\theta}^r$  l'estimation des paramètres à l'itération  $r$ ,  $p_z(z, \theta)$  la densité de probabilité de toutes les amplitudes  $z = [\alpha_1 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_L \ \beta_L]^T$  à tous les instants et de tous les paramètres.

Etape de maximisation

Comme les amplitudes AR sont indépendantes, la densité de probabilité  $p_z(z, \underline{\theta})$  se factorise comme suit :

$$p_z(z, \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^L p_{a_i}(\alpha_i, \underline{\theta}_i) p_{b_i}(\beta_i, \underline{\theta}_i). \quad (\text{IV.38})$$

avec :

$$\begin{cases} p_{a_i}(\alpha_i, \underline{\theta}_i) = \lambda_{a_i} \prod_{i=1}^L p_{a_k^i/a_{k-1}^i, \dots, a_{k-p}^i}(\alpha_i, \underline{\theta}_i) \\ p_{b_i}(\beta_i, \underline{\theta}_i) = \lambda_{b_i} \prod_{i=1}^L p_{b_i(k)/b_i(k-1), \dots, b_i(k-p)}(\beta_i, \underline{\theta}_i) \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

où les constantes  $\lambda_{a_i}$  et  $\lambda_{b_i}$  prennent en compte les  $p$  valeurs initiales des amplitudes.

Par ailleurs, puisque  $\varepsilon_{a_i}(k)$  est un processus blanc, gaussien, centré et de variance  $\sigma_i^2$ , la densité de probabilité  $p_{a_k^i/a_{k-1}^i, \dots, a_{k-p}^i}(\alpha_i, \underline{\theta}_i)$  est alors définie par :

$$p_{a_k^i/a_{k-1}^i, \dots, a_{k-p}^i}(\alpha_i, \underline{\theta}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(a_k^i + \Gamma_i^T A_{k-1}^i)^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (\text{IV.40})$$

En combinant les relations (IV.38), (IV.39) et (IV.40), on obtient l'expression de la vraisemblance :

$$Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^r) = \sum_{i=1}^L E \left\{ \ln(\lambda) - (N-p) \ln(2\pi\sigma_i^2) - \frac{1}{2\sigma_i^2} \sum_{k=p+1}^N \left( (a_k^i + \Gamma_i^T A_{k-1}^i)^2 + (b_k^i + \Gamma_i^T B_{k-1}^i)^2 \right) / N, \underline{\theta}^r \right\} \quad (\text{IV.41})$$

avec  $\lambda = \prod_{i=1}^L \lambda_{a_i} \lambda_{b_i}$ .

Quel que soit  $i$  dans  $\{1, \dots, L\}$ , et en remarquant que  $(\Gamma_i^T A_{k-1}^i) A_{k-1}^i = (A_{k-1}^i A_{k-1}^{i T}) \Gamma_i$ , annuler la dérivée partielle de  $Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^r)$  par rapport à  $\Gamma_i$  conduit à l'estimation des paramètres AR suivante :

$$\hat{\Gamma}_i = - \left[ \sum_{k=p+1}^N E \left\{ A_{k-1}^i A_{k-1}^{i T} + B_{k-1}^i B_{k-1}^{i T} / N, \underline{\theta}^r \right\} \right]^{-1} \sum_{k=p+1}^N E \left\{ a_k^i A_{k-1}^i + b_k^i B_{k-1}^i / N, \underline{\theta}^r \right\} \quad (\text{IV.42})$$



Quel que soit  $i$  dans  $\{1, \dots, L\}$ , annuler la dérivée partielle de  $Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^r)$  par rapport à  $\sigma_i^2$  conduit à l'estimation de la variance  $\sigma_i^2$  suivante :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{k=p+1}^N E \left\{ (a_k^i + \Gamma_i^T A_{k-1}^i)^2 + (b_k^i + \Gamma_i^T B_{k-1}^i)^2 / N, \underline{\theta}^r \right\} \quad (\text{IV.43})$$

Etape d'estimation

Pour mettre en œuvre les estimateurs (IV.42) et (IV.43), les statistiques suivantes doivent être estimées :

$$E \{ a_k^i a_k^i / N \} \text{ et } E \{ b_k^i b_k^i / N \}, \quad (\text{IV.44a})$$

$$E \{ a_k^i A_{k-1}^i / N \} \text{ et } E \{ b_k^i B_{k-1}^i / N \}, \quad (\text{IV.44b})$$

$$E \{ A_{k-1}^i A_{k-1}^i / N \} \text{ et } E \{ B_{k-1}^i B_{k-1}^i / N \}. \quad (\text{IV.44c})$$

Elles sont ici obtenues à l'aide d'un lissage de Kalman de type intervalle fixe, où l'intervalle est fixé à la longueur  $N$  de la trame d'analyse. On suppose que des estimations des paramètres AR  $\{\Gamma_i\}_{i=1, \dots, L}$  et des variances  $\{\sigma_i^2\}_{i=1, \dots, L}$  sont disponibles et le vecteur d'état est défini à partir des amplitudes de la manière suivante :

$$\underline{x}_k = [A_k^1 \quad B_k^1 \quad \dots \quad A_k^L \quad B_k^L]^T \quad (\text{IV.45})$$

et la représentation dans l'espace d'état du système (IV.32)-(IV.34) est alors :

$$\begin{cases} \underline{x}_{k-1} = \Phi \underline{x}_k + \Gamma \underline{u}_{k+1} \\ y_k = H_k \underline{x}_k + n_k \end{cases} \quad (\text{IV.46})$$

où :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_1 & & \\ & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \Phi_L & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_L & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \Phi_i = \begin{bmatrix} -\gamma_1^i & \dots & -\gamma_{p_i}^i \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.47})$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{2L-1} \\ \Gamma_{2L} \end{bmatrix} \text{ avec } \Gamma_i = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \dots 0}^{i-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.48})$$

et  $H_k = [H_k^1 \quad \dots \quad H_k^L]$  avec  $H_k^i = [\cos(\varphi_k^i) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \sin(\varphi_k^i) \quad 0 \quad \dots \quad 0]$ . (IV.49)

Notons que  $\Gamma_i$  est de taille  $p_i \times 2L$  et  $H_k^i$  un vecteur de taille  $2p$ .

$\underline{u}_k$  est un vecteur aléatoire blanc, gaussien à moyenne nulle défini par :

$$\underline{u}_k = [\varepsilon_k^{a_1} \quad \varepsilon_k^{b_1} \quad \dots \quad \varepsilon_k^{a_L} \quad \varepsilon_k^{a_L}]^T. \quad (\text{IV.50})$$

Sa matrice de covariance est diagonale et vaut :

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma_L^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma_L^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.51})$$

Pour estimer  $E\{a_k^i A_{k-1}^i\}$  et  $E\{b_k^i B_{k-1}^i\}$ , on introduit dans le lissage de Kalman l'estimation de la matrice d'inter-covariance entre  $\underline{x}_{k-1}$  et  $\underline{x}_{k-1}$  définies par :

$$P_{k,k-1/k-1} = E\{[\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k-1}][\underline{x}_{k-1} - \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}]^T / k - 1\} \quad (\text{IV.52})$$

$$P_{k,k-1/N} = E\{[\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/N}][\underline{x}_{k-1} - \hat{\underline{x}}_{k-1/N}]^T / N\}. \quad (\text{IV.53})$$

Les équations du lissage de Kalman sont alors les suivantes :

*Estimation directe :*

$$\text{Pour } k \text{ de } 1 \text{ à } N, \quad \begin{cases} P_{k/k-1} = \Phi P_{k-1/k-1} \Phi^t + Q \\ K_k = P_{k/k-1} H_k^T [H_k P_{k/k-1} H_k^T + R]^{-1} \\ \underline{x}_{k/k-1} = \Phi \underline{x}_{k-1/k-1} \\ \underline{x}_{k/k} = \underline{x}_{k/k-1} + K_k [y_k - H_k \underline{x}_{k/k-1}] \\ P_{k/k} = [I - K_k H_k] P_{k/k-1} \\ P_{k,k-1/k} = [I - K_k H_k] \Phi P_{k-1/k-1} \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

*Estimation rétrograde :*

$$\text{Pour } k \text{ de } N-1 \text{ à } 1, \quad \begin{cases} A_k = P_{k/k} \Phi^t P_{k+1/k}^{-1} \\ \underline{x}_{k/N} = \underline{x}_{k/k} + A_k [\underline{x}_{k+1/N} - \Phi \underline{x}_{k/k}] \\ P_{k/N} = P_{k/k} + A_k [P_{k+1/N} - P_{k+1/k}] A_k^T \\ P_{k,k-1/N} = P_{k,k-1/k} + [P_{k/N} - P_{k/k}] P_{k/k}^{-1} P_{k,k-1/k} \end{cases} \quad (\text{IV.55})$$

Les quantités définies dans l'équation (IV.44a-c) sont estimées à partir des matrices  $E\{\underline{x}_k \underline{x}_k^t / N\}$  et  $E\{\underline{x}_k \underline{x}_{k-1}^t / N\}$ . En effet, les matrices de covariance et d'inter-covariance de l'état sont définies par :

$$P_{k/N} = E\{[\underline{x}_k - E\{\underline{x}_k / N\}][\underline{x}_k - E\{\underline{x}_k / N\}]^T / N\} \quad (IV.56)$$

et

$$P_{k,k-1/N} = E\{[\underline{x}_k - E\{\underline{x}_k / N\}][\underline{x}_{k-1} - E\{\underline{x}_{k-1} / N\}]^T / N\}. \quad (IV.57)$$

Etant donné que l'espérance est un produit scalaire, on a :

$$E\{E\{\underline{x}_k / N\} / N\} = E\{\underline{x}_k / N\} = \hat{\underline{x}}_{k/N}, \quad (IV.58)$$

et les équations (IV.56) et (IV.57) s'écrivent respectivement :

$$E\{\underline{x}_k \underline{x}_k^T / N\} = P_{k/N} + \hat{\underline{x}}_{k/N} \hat{\underline{x}}_{k/N}^T, \quad (IV.59)$$

$$E\{\underline{x}_k \underline{x}_{k-1}^T / N\} = P_{k,k-1/N} + \hat{\underline{x}}_{k/N} \hat{\underline{x}}_{k-1/N}^T. \quad (IV.60)$$

Comme  $\hat{\underline{x}}_{k/N}$ ,  $\hat{\underline{x}}_{k-1/N}$ ,  $P_{k/N}$ ,  $P_{k,k-1/N}$  sont fournis par le lissage de Kalman, il ne reste plus qu'à extraire des matrices  $E\{\underline{x}_k \underline{x}_k^T / N\}$  et  $E\{\underline{x}_k \underline{x}_{k-1}^T / N\}$  les termes définis dans (IV.44a-c) nécessaires à l'estimation des paramètres  $\underline{\theta}$  du modèle.

### IV.3. Résultats expérimentaux

Les simulations menées dans cette partie sont réalisées à partir d'enregistrements réels ElectroEncéphaloGraphiques (EEG)<sup>19</sup>. Plus précisément, nous proposons de tester la méthode développée dans la partie IV.2 pour l'analyse et la caractérisation de fuseaux de sommeil [LAB02].

#### IV.3.1. Le sommeil et les fuseaux de sommeil

Les fuseaux de sommeil sont des segments observables dans des enregistrements EEG. Ils sont quasi-périodiques et leur fréquence centrale avoisine 14 Hz. Les spécialistes du sommeil n'ont pas démontré le rôle joué par ces signaux dans les mécanismes du sommeil. Néanmoins, il est établi qu'ils ont une fonction déterminante dans le système de l'éveil et du sommeil et qu'ils sont caractéristiques de certaines maladies comme l'épilepsie. Ainsi, l'analyse des fuseaux de sommeil est un champ disciplinaire très actif.

<sup>19</sup> Nous tenons à remercier M. Tomczak de l'université Henri Poincaré de Nancy de nous avoir aimablement fourni cette base de signaux EEG.

Notre objectif est de proposer un outil d'analyse spectrale automatique de fuseaux de sommeil. Examinons dans un premier temps les travaux existants. Akgül *et al.* [AKG00] proposent d'utiliser les statistiques d'ordre supérieur pour étudier les caractéristiques non-stationnaires de ces signaux. Plus particulièrement, ils étudient à l'aide de bispectres les interactions éventuelles entre les différentes composantes spectrales du fuseau de sommeil. Pour analyser la fréquence centrale du fuseau de sommeil, les techniques de représentation adaptative (*Matching Pursuit*) sont les plus utilisées [HUP05] [BLI01] [ZYG00]. En effet, une telle approche paramétrique permet d'une part de mettre en œuvre la détection des fuseaux de sommeil, et d'autre part de caractériser les signaux détectés dans l'espace temps-fréquence. En outre, dans [ZYG00], l'auteur exploite les réseaux de neurones pour modéliser le processus de génération des fuseaux de sommeil.

Nous proposons ici une approche alternative fondée sur le modèle stochastique sinusoïdal décrit dans l'équation (IV.32) et la méthode d'estimation de ses paramètres présentée dans la partie IV.2. Notons que nous n'apportons pas de réponse d'ordre médical, mais que nous proposons un nouvel outil d'analyse spectrale et de classification des fuseaux de sommeil.

### IV.3.2. Analyse de fuseaux de sommeil

Examinons tout d'abord quelques fuseaux de sommeil. La figure IV.6 montre un enregistrement EEG. Son spectrogramme présente des composantes spectrales occupant une bande fréquentielle de quelques Hertz. Comme l'information que nous cherchons à caractériser se situe entre 10 Hz et 15 Hz, nous avons préfiltré les signaux à l'aide d'un filtre passe-haut de type Butterworth d'ordre 10 et dont la fréquence de coupure est fixée à 10 Hz. D'après la figure IV.7 qui illustre le résultat obtenu après préfiltrage, les signaux à disposition contiennent des fuseaux de sommeil de durée comprise entre 50 ms et 80 ms. Leur fréquence centrale se situe autour de 14 Hz.

Les périodogrammes montrés dans les figures IV.6 et IV.7 illustrent la difficulté à modéliser de tels signaux. En effet, les lobes que l'on observe ne peuvent pas être correctement analysés par un modèle AR ou sinusoïdal.

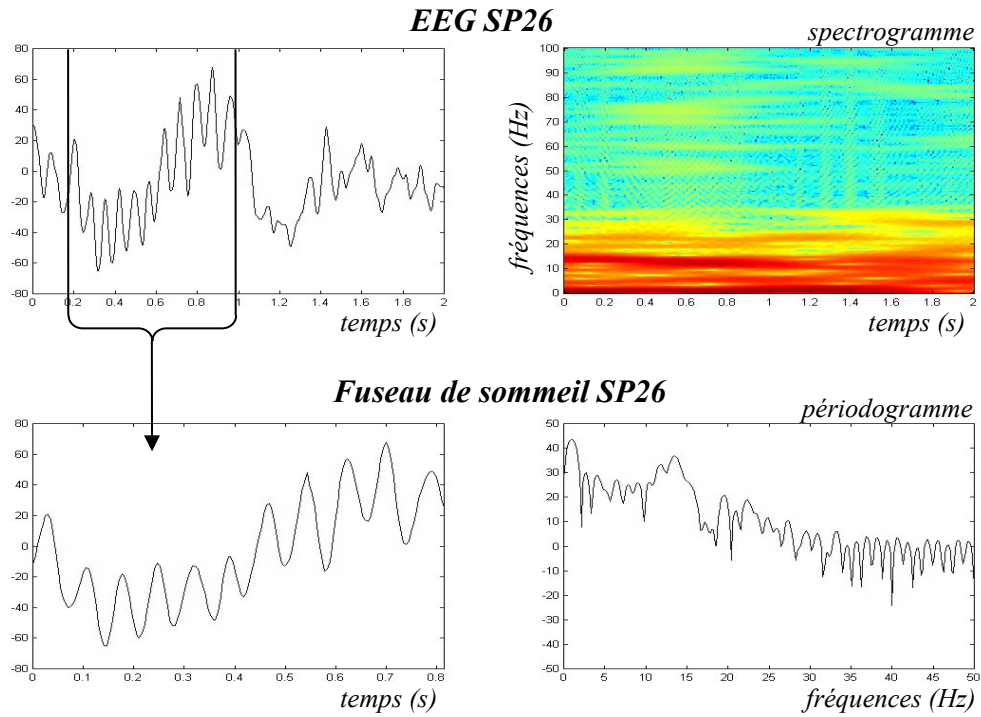


Figure IV.6 : représentations temporelles (gauche) et fréquentielles (droite) de signaux EEG ;  $f_e=200$  Hz.

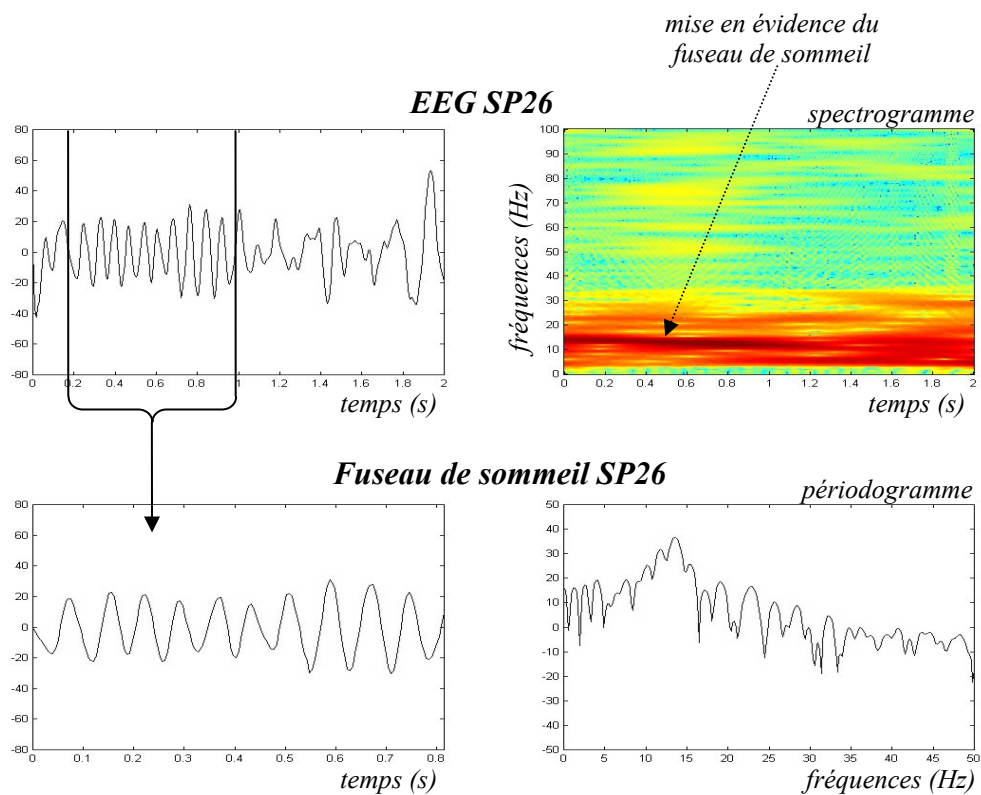


Figure IV.7 : représentations temporelles (gauche) et fréquentielles (droite) de signaux EEG avec une opération de préfiltrage ;  $f_e=200$  Hz.

Nous menons une étude comparative entre les deux approches suivantes :

- le fuseau de sommeil est analysé avec la méthode présentée dans la partie IV.1.3 fondée sur les travaux de Besson *et al.* [BES95]. L'amplitude AR du modèle est d'ordre 1. Nous appellerons cette méthode *BESSON*.
- le fuseau de sommeil est analysé avec la méthode proposée dans la partie IV.2.2. Le modèle (IV.32) comporte une composante de fréquence  $f_0$ . Les amplitudes AR sont d'ordre 1. Leur paramètre AR est  $\gamma$  et la variance des processus générateurs correspondants est  $\sigma_\varepsilon^2$ . Nous appellerons cette méthode *ESPEM*.

Pour mesurer la pertinence de l'analyse obtenue, nous comparons le périodogramme avec le spectre stochastique sinusoidal obtenu à partir du modèle.

<i>Fuseau de sommeil analysé</i>	<i>ESPEM</i>		<i>BESSON</i>	
	$\gamma$	$\sigma_\varepsilon^2$	$\gamma$	$\sigma_\varepsilon^2$
<i>SP16</i>	-0,9735	25,34	-0,9892	14,52
<i>SP24</i>	-0,9830	11,55	-0,9892	10,66
<i>SP25</i>	-0,9899	10,43	-0,9956	9,88
<i>SP26</i>	-0,9839	9,11	-0,9913	10,08
<i>SP33</i>	-0,9825	9,52	-0,9889	9,00

*Tableau IV.15 : estimations des paramètres des amplitudes du modèle stochastique sinusoidal*

$f_0$ (Hz)	<i>FFT</i>	<i>ESPRIT</i>	<i>BESSON</i>
<i>SP16</i>	13,89	13,87	13,43
<i>SP24</i>	13,70	13,63	13,67
<i>SP25</i>	13,89	13,71	13,86
<i>SP26</i>	13,50	13,26	13,31
<i>SP33</i>	12,92	12,60	12,49

*Tableau IV.16 : comparaison de l'estimation de la fréquence centrale des fuseaux de sommeil*

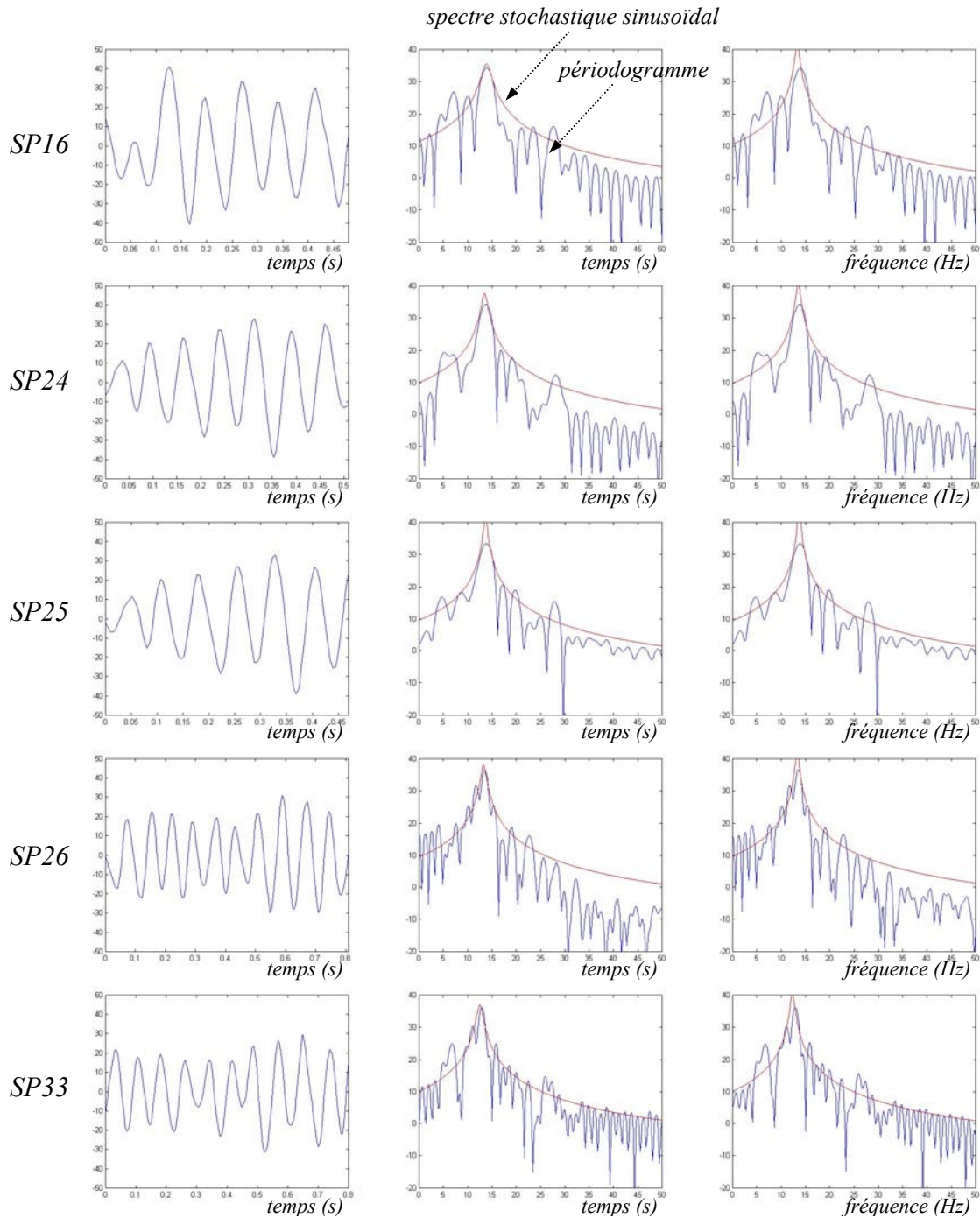
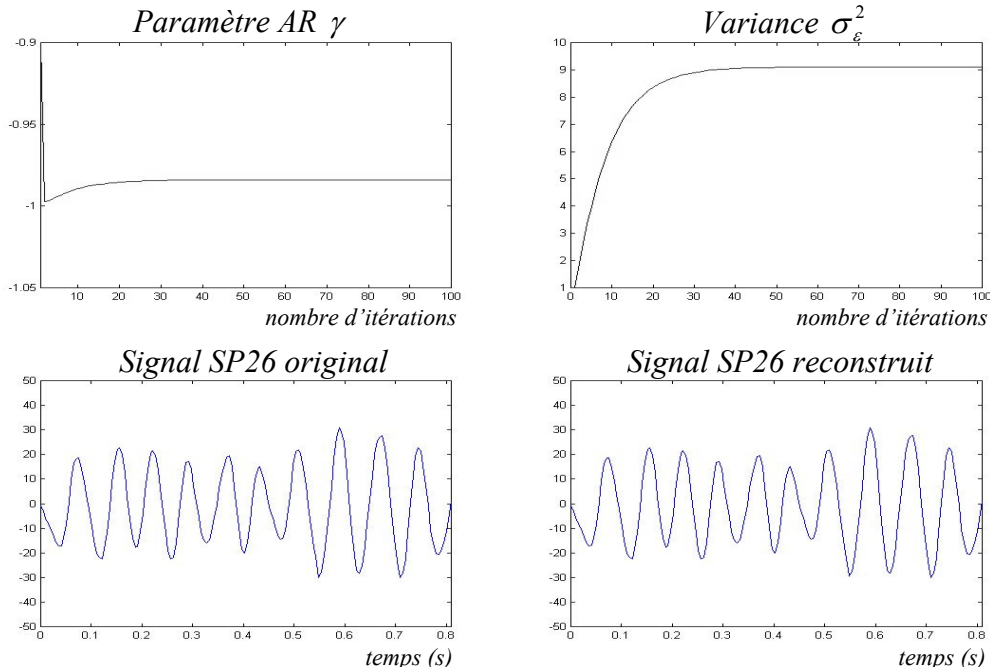


Figure IV.8 : représentations temporelles (gauche) des fuseaux de sommeil ; superposition du periodogramme et du spectre stochastique sinusoidal obtenu avec la méthode ESPEM (au milieu) et la méthode BESSON (droite) ;  $f_e=200$  Hz.

D'après les tableaux IV.15 et IV.16 et la figure IV.8, les méthodes étudiées permettent de caractériser la largeur du lobe principal du spectre du signal à l'aide du paramètre  $\gamma$ . Par ailleurs, les spectres fournis par la méthode proposée *ESPEM* permettent d'approximer le

périodogramme plus finement que ceux fournis par la méthode *BESSON*. Enfin, la figure IV.9 montre que le signal reconstruit à partir du modèle stochastique sinusoidal reproduit très fidèlement le signal original et que l'algorithme EM nécessite une cinquantaine d'itérations pour converger.



*Figure IV.9 : convergence des paramètres du modèle et évolutions temporelles des signaux original et reconstruit.*

La méthode proposée constitue donc un outil d'analyse spectrale des fuseaux de sommeil. Elle fournit une estimation haute résolution de la fréquence centrale du signal, mais caractérise également la largeur du lobe à travers le paramètre AR de l'amplitude. Enfin, la variance  $\sigma_\epsilon^2$  donne une information sur la puissance du fuseau de sommeil analysé.



## IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les modèles stochastiques sinusoïdaux comme alternative au modèle AR. Nous avons tout d'abord étudié le modèle ARCOS, qui consiste à moduler une sinusoïde par un processus AR. Nous avons repris les travaux de Besson *et al.* [BES95] et proposé une amélioration de leur méthode pour estimer la fréquence et les paramètres de l'amplitude AR du modèle. Dans le cas où le processus est observé dans un milieu bruité, un nouvel algorithme à correction de biais a été développé. En pratique, pour des RSB supérieurs à 20 dB en moyenne, la méthode proposée permet d'améliorer les estimations des paramètres ARCOS. Néanmoins, cette approche a deux inconvénients. D'une part, pour des RSB plus faibles, nous avons observé que l'estimation des paramètres restait sensible au bruit de mesure. D'autre part, le modèle ne comporte qu'une composante sinusoïdale.

Pour ces raisons, nous avons généralisé ce modèle à plusieurs composantes. Nous avons ensuite proposé un algorithme d'estimation des paramètres du modèle combinant une analyse haute résolution de type ESPRIT et un algorithme EM utilisant un lissage de Kalman.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous nous sommes focalisés sur le problème de l'analyse de fuseaux de sommeil. Observés dans des enregistrements EEG, ces segments quasi-sinusoïdaux de courte durée jouent un rôle clé dans les processus qui régissent le sommeil. Leur analyse et leur caractérisation sont d'importance car leur véritable fonction biologique n'est pas encore clairement établie. L'étude expérimentale que nous avons menée a montré que les approches proposées permettaient de caractériser le spectre d'un fuseau de sommeil à l'aide de trois paramètres : la fréquence centrale du signal, le paramètre AR de l'amplitude du modèle et la variance du processus générateur associé.

Néanmoins, toutes les approches présentées dans ce chapitre supposent que les paramètres du modèle sont constants sur une trame d'analyse. Ainsi, lorsque le signal est non stationnaire, elles ne sont plus adaptées. En outre, l'estimation conjointe des paramètres du modèle est un problème non linéaire. Un filtre de Kaman étendu (EKF) peut alors être utilisé. Cependant, sa mise en œuvre est problématique car elle nécessite des hypothèses de gaussianité et la phase de linéarisation introduit des approximations. Pour cette raison, dans le chapitre V, nous proposons d'étudier le filtrage particulière pour la modélisation sinusoïdale des signaux. Ce travail ouvre une nouvelle thématique au sein de notre laboratoire et présente notamment la problématique du suivi de fréquence.



## Chapitre V

### **V. Filtrage particulaire et modélisation sinusoïdale**

---

Depuis une quinzaine d'années, le filtrage particulaire, ou échantillonnage séquentiel d'importance (SIS) est étudié dans le contexte de l'estimation non linéaire comme alternative à l'EKF. Par ailleurs, il se place dans le contexte de l'estimation bayésienne et apporte une réponse au problème de l'estimation non gaussienne.

L'objectif dans ce chapitre est d'exploiter les techniques de filtrage particulaire pour la modélisation sinusoïdale. Reposant sur le principe de l'échantillonnage d'importance, nous les présentons dans la première partie. La seconde partie est dédiée à leur utilisation pour le suivi fréquentiel, notamment celui de la fréquence fondamentale d'un signal harmonique.

## V.1. Présentation du filtrage particulière

Fondé sur les techniques d'échantillonnage de type Monte Carlo (MC), le filtrage particulière présente les deux avantages suivants :

1. Contrairement aux techniques d'estimation au sens des moindres carrés comme le filtre de Kalman, il se place dans un contexte bayésien plus général et permet de se libérer de l'hypothèse de gaussiannité.
2. Lorsque le problème d'estimation est non linéaire, l'utilisation d'un filtre de Kalman implique une phase de linéarisation, introduisant des approximations. Les méthodes de type MC ont l'avantage de s'affranchir de cette étape.

Dans cette partie, nous présentons dans un premier temps le principe des techniques d'échantillonnage MC en nous focalisant notamment sur l'échantillonnage d'importance. Puis, nous exposons le filtrage récursif par échantillonnage d'importance. Enfin, nous dressons l'état de l'art des techniques de mise en œuvre du filtrage particulière.

### V.1.1. Les méthodes Monte Carlo

Etant donné une variable aléatoire  $x$ , les méthodes MC consiste à représenter la densité de probabilité  $p(x)$  par une population d'échantillons. Ces derniers, encore appelés particules, sont générés aléatoirement, indépendamment et identiquement selon la densité  $p(x)$ . On notera  $x^i \sim p(x)$  un échantillon ainsi généré. Si  $M$  particules sont utilisées,  $p(x)$  est alors approximée comme suit :

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(x - x^i), \quad (\text{V.1})$$

où  $\delta(\cdot)$  désigne l'impulsion de Dirac.

Lorsque le nombre de particules  $M$  tend vers l'infini,  $\hat{p}(x)$  tend vers la densité de probabilité  $p(x)$  :

$$\hat{p}(x) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} p(x). \quad (\text{V.2})$$

Notons que le poids affecté à chaque échantillon est toujours égal à  $\frac{1}{M}$ . Comme l'illustre la figure V.1, c'est donc la répartition des échantillons qui reflète les propriétés de la densité  $p(x)$ .

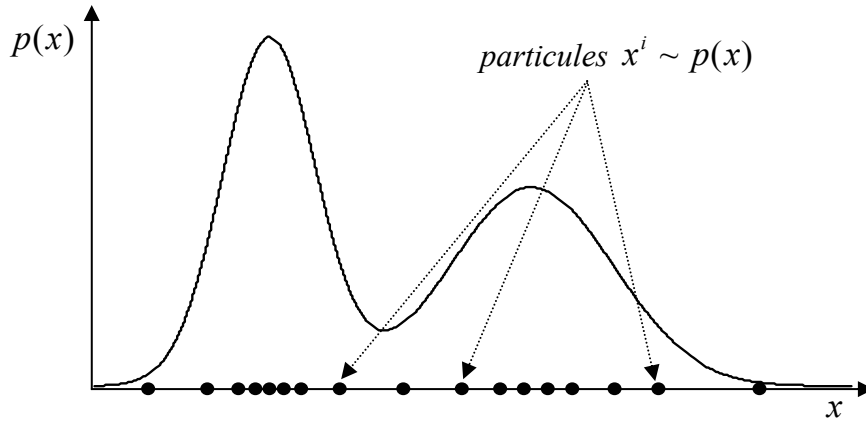


Figure V.1 : approximation Monte Carlo d'une densité de probabilité.

La moyenne d'ensemble de  $f(x)$  est définie par :

$$E\{f(x)\} = \int f(x)p(x)dx . \quad (\text{V.3})$$

où  $E\{.\}$  désigne l'espérance mathématique et  $f$  une fonction analytique quelconque.

En remplaçant la densité de probabilité  $p(x)$  par son approximation  $\hat{p}(x)$  définie dans l'équation (V.1), on obtient alors l'estimation suivante :

$$E\{f(x)\} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(x^i) . \quad (\text{V.4})$$

où  $\{x^i \sim p(x)\}_{i=1:M}$ .

Cependant, obtenir des échantillons suivant la densité  $p(x)$  n'est pas toujours possible. Pour pallier ce problème, on peut recourir à l'échantillonnage dit d'importance. Il consiste tout d'abord à choisir une densité auxiliaire  $q(x)$ , appelée densité d'importance, et répondant aux deux critères suivants :

- on doit pouvoir échantillonner facilement selon  $q(x)$ ,
- $q(x)$  doit « imiter » au mieux la densité  $p(x)$  dans le sens où le quotient entre les deux densités doit être le plus invariant possible en fonction de  $x$  :

$$\frac{p(x)}{q(x)} \approx \text{constante} . \quad (\text{V.5})$$

Etant donné  $M$  échantillons  $x^i \sim q(x)$ , la moyenne d'ensemble de  $f(x)$  est alors estimée comme suit :

$$E\{f(x)\} = \int f(x) \frac{p(x)}{q(x)} q(x) dx \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(x^i) \frac{p(x^i)}{q(x^i)} . \quad (\text{V.6})$$

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B pour un exemple illustratif de l'échantillonnage d'importance. L'approximation MC définie dans l'équation (V.6) reste valable pour une fonction  $f$  vectorielle et peut être utilisée pour estimer le vecteur d'état  $\underline{x}_k$  de la représentation dans l'espace d'état suivante :

$$\begin{cases} \underline{x}_k = f(\underline{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) \\ y_k = g(\underline{x}_k, v_k) \end{cases}, \quad (\text{V.7})$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions analytiques quelconques et  $y_k$  désigne l'observation.  $u_k$  et  $v_k$  sont respectivement le processus générateur et le bruit d'observation dont les densités de probabilité, et donc respectivement la densité de transition  $p(\underline{x}_k/\underline{x}_{k-1})$  et la vraisemblance  $p(y_k/\underline{x}_k)$ , sont supposées connues.

L'estimation récursive de  $\underline{x}_k$  exploitant les méthodes d'échantillonnage d'importance est appelé filtrage particulière. Nous en exposons le principe dans la partie suivante.

### V.1.2. Le filtrage récursif par échantillonnage d'importance

Soit  $h$  une fonction analytique quelconque. Le filtrage particulière vise à estimer récursivement la densité de filtrage *a posteriori*  $p(\underline{x}_k/Y_k)$  par échantillonnage d'importance. Etant donné une densité d'importance  $q(\underline{x}_k/Y_k)$ , la moyenne d'ensemble de  $h(\underline{x}_k)$  s'écrit de la manière suivante [ARU02] :

$$\begin{aligned} E\{h(\underline{x}_k)\} &= \frac{\int h(\underline{x}_k) w_k(\underline{x}_k) q(\underline{x}_k/Y_k) d\underline{x}_k}{\int w_k(\underline{x}_k) q(\underline{x}_k/Y_k) d\underline{x}_k} \\ &= \frac{E_q\{w_k(\underline{x}_k) h(\underline{x}_k)\}}{E_q\{w_k(\underline{x}_k)\}} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

où  $w_k(\underline{x}_k) = \frac{p(\underline{x}_k/Y_k)}{q(\underline{x}_k/Y_k)} p(Y_k)$  et  $E_q\{\cdot\}$  dénote l'espérance mathématique calculée à partir de la densité d'importance  $q(\underline{x}_k/Y_k)$ .

L'approximation de type MC de l'équation (V.8) conduit alors à l'estimation suivante :

$$E\{h(\underline{x}_k)\} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{w}_k(\underline{x}_k^i) h(\underline{x}_k^i). \quad (\text{V.9})$$

où  $\{\underline{x}_k^i \sim q(\underline{x}_k/Y_k)\}_{i=1:M}$  et  $\tilde{w}_k(\underline{x}_k^i) = w_k(\underline{x}_k^i) / \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_k(\underline{x}_k^i)$  sont les poids normalisés.

Les poids  $\{w_k(\underline{x}_k^i)\}_{i=1:M}$  sont appelées poids d'importance et sont calculées selon la relation réursive suivante [ARU02] :

$$w_k(\underline{x}_k^i) = w_{k-1}(\underline{x}_{k-1}^i) \frac{p(y_k/\underline{x}_k^i)p(\underline{x}_k^i/\underline{x}_{k-1}^i)}{q(\underline{x}_k^i/\underline{x}_{k-1}^i, Y_k)}. \quad (\text{V.10})$$

Dans cette expression, la vraisemblance  $p(y_k/\underline{x}_k^i)$ , la densité de transition  $p(\underline{x}_k^i/\underline{x}_{k-1}^i)$  et la densité d'importance  $q(\underline{x}_k^i/\underline{x}_{k-1}^i, Y_k)$  sont connues. Les équations (V.9) et (V.10) permettent alors d'estimer récurivement la quantité  $E\{h(\underline{x}_k)\}$  selon les étapes suivantes :

Filtrage récurif par échantillonnage d'importance (SIS) :

1.  $M$  particules sont échantillonnées selon la densité d'importance  $q(\underline{x}_k^i/\underline{x}_{k-1}^i, Y_k)$ .
2. Le poids  $w_k(\underline{x}_k^i)$  est affecté à chaque particule suivant l'équation (V.10).
3.  $E\{h(\underline{x}_k)\}$  est estimé suivant l'équation (V.9),

Néanmoins, un phénomène de dégénérescence du nuage de particules est très rapidement observé. En effet, après quelques itérations, une seule particule caractérise la densité *a posteriori* du vecteur d'état. Comme l'illustre la figure V.2, son poids normalisé est alors très proche de 1 tandis que les autres poids normalisés tendent vers 0.

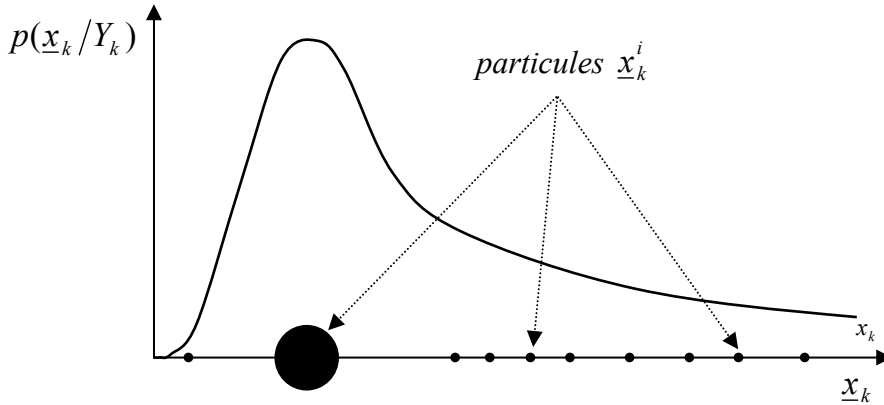


Figure V.2 : illustration du phénomène de dégénérescence.

Pour mesurer cette dégénérescence, Kong *et al.* ont introduit la taille effective du nuage de particules [KON94], définie de la manière suivante :

$$M_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^M (\tilde{w}_k(\underline{x}_k^i))^2}. \quad (\text{V.11})$$

Si tous les poids normalisés sont égaux à  $\frac{1}{M}$ , la taille effective du nuage de particules  $M_{eff}$  vaut sa valeur maximale  $M$ . Si un poids vaut 1 et les autres 0,  $M_{eff}$  vaut sa valeur minimale  $M$ . Ainsi, plus la taille effective du nuage diminue, plus la dégénérescence augmente.

Ce phénomène vient du fait que la variance des poids d'importance, et donc la probabilité que l'un d'eux prenne une valeur très proche de 1, augmente au fil des itérations [DOU00]. Pour pallier ce problème, une étape de ré-échantillonnage est introduite dans l'algorithme. Elle consiste à conserver et/ou multiplier les particules de poids forts et à éliminer les particules de poids faibles. Les poids affectés aux nouvelles particules  $\tilde{x}_k^i$  valent  $\frac{1}{M}$ . Cf. figure V.3.

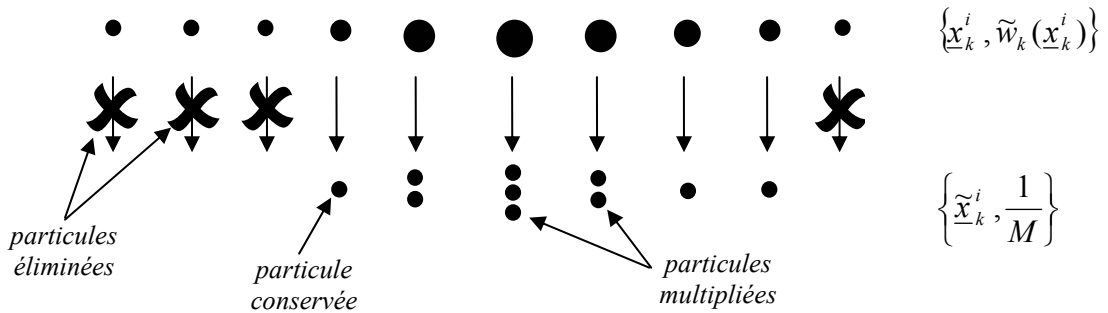


Figure V.3 : principe de l'étape de ré-échantillonnage.

L'algorithme présenté dans [ARU02] reste le plus utilisé. Il existe d'autres techniques, comme le ré-échantillonnage résiduel ou stratifié [LIU98] par exemple.

Filtrage SIS avec ré-échantillonnage :

1.  $M$  particules sont échantillonnées selon la densité d'importance  $q(\underline{x}_k^i / \underline{x}_{k-1}^i, Y_k)$ .
2. Le poids  $w_k(\underline{x}_k^i)$  est affecté à chaque particule suivant l'équation (V.10).
3.  $E\{h(\underline{x}_k)\}$  est estimée suivant l'équation (V.9).
4. Si  $M_{eff} < M_{eff}^{seuil}$ , une étape de ré-échantillonnage est mise en œuvre.

Cependant, le choix de la densité d'importance conditionne les performances du filtre et a abouti à différentes méthodes de mise en œuvre de filtrage particulaire.



### V.1.3. Etat de l'art du filtrage particulière

La première méthode de filtrage particulière a été proposée en 1993 par Gordon *et al.* [GOR93]. Elle repose sur les deux points principaux suivants :

- La densité d'importance est choisie comme la densité de transition :

$$q(\underline{x}_k^i / \underline{x}_{k-1}^i, Y_k) = p(\underline{x}_k^i / \underline{x}_{k-1}^i). \quad (\text{V.12})$$

L'équation (V.10) de remise à jour des poids devient alors :

$$w_k(\underline{x}_k^i) = w_{k-1}(\underline{x}_{k-1}^i) p(y_k / \underline{x}_k^i). \quad (\text{V.13})$$

- Les auteurs utilisent une étape de ré-échantillonnage à chaque itération. Cela a pour effet de ré-initialiser tous les poids à  $\frac{1}{M}$ , qui deviennent directement proportionnels à la vraisemblance :

$$w_k(\underline{x}_k^i) \propto p(y_k / \underline{x}_k^i). \quad (\text{V.14})$$

La méthode de filtrage ainsi obtenue est connue sous le nom de filtre SIR. Cf. figure V.4.

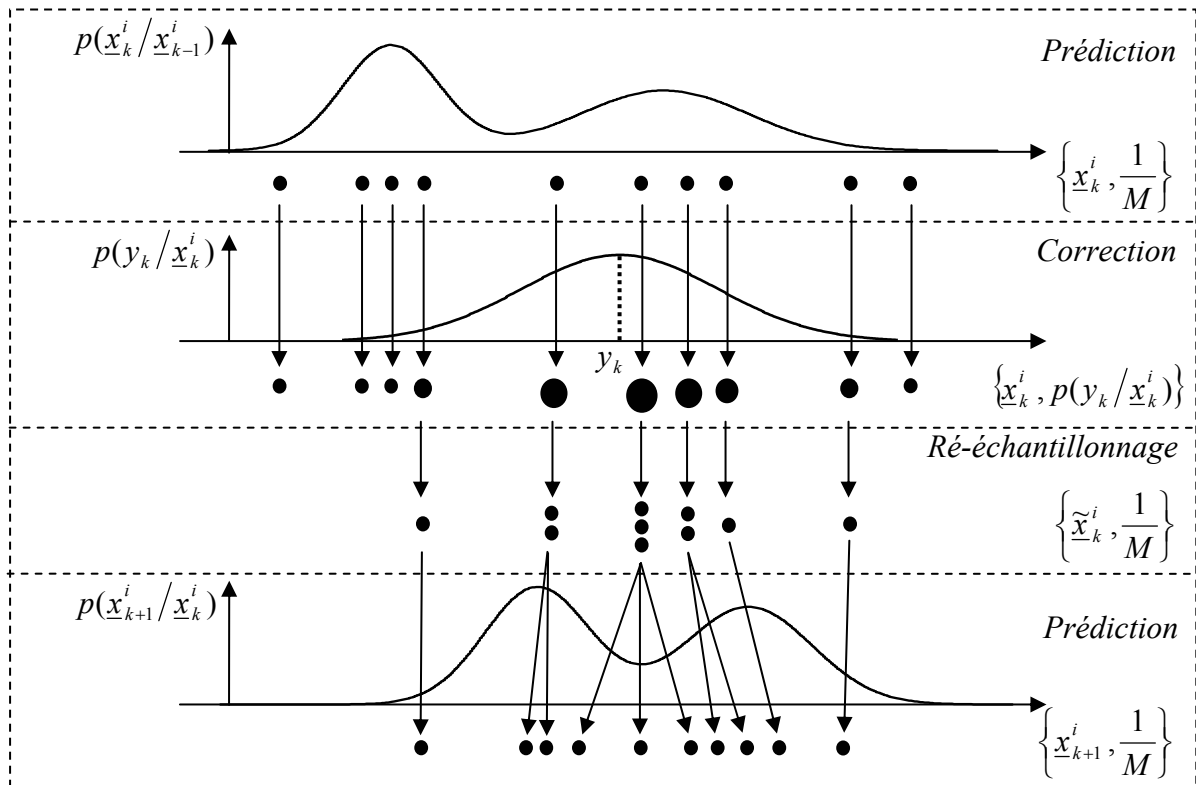


Figure V.4 : principe du filtrage SIR.

Le filtre SIR opère en 5 étapes, comme suit :

1.  $M$  particules sont échantillonnées selon la densité d'importance  $p(\underline{x}_k^i / \underline{x}_{k-1}^i)$ .
2. Le poids  $w_k(\underline{x}_k^i) = p(y_k / \underline{x}_k^i)$  est affecté à chaque particule.
3. Les poids sont normalisés.
4.  $E\{h(\underline{x}_k)\}$  est estimée suivant l'équation (V.9).
5. Une étape de ré-échantillonnage est mise en œuvre.

Cette méthode a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre. Cependant, deux inconvénients majeurs subsistent :

- D'une part, l'étape de ré-échantillonnage s'effectue sur une population discrète d'échantillons. Ainsi, son utilisation systématique peut conduire à une perte de diversité du nuage de particules.
- D'autre part, la densité d'importance ne dépend pas de la nouvelle observation  $y_k$  et le filtre est sensible aux points aberrants. En effet, comme l'illustre la figure V.5, si la vraisemblance est éloignée du nuage de particules, les poids ne seront pas représentatifs de la densité *a posteriori*.

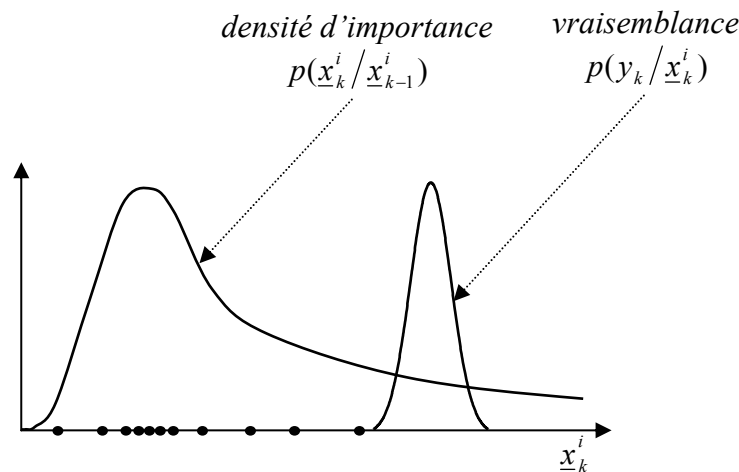


Figure V.5 : problème du au choix de la densité d'importance : aucune particule n'est sur le support de la vraisemblance.

Le filtrage particulière régularisé (RPF) [MUS01] vise à améliorer l'étape 5 de ré-échantillonnage du filtrage SIR en utilisant une approximation continue de la densité *a posteriori* de la forme suivante :

$$\hat{p}(\underline{x}_k / Y_k) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_k(\underline{x}_k^i) K_T(\underline{x}_k - \underline{x}_k^i), \quad (\text{V.15})$$

où  $K_h(\underline{x}_k) = \frac{1}{T^{n_x}} K\left(\frac{\underline{x}_k}{T}\right)$  est une densité échelonnée de moyenne nulle et de variance finie, avec  $n_x$  la taille du vecteur d'état  $\underline{x}_k$ .

$K(\cdot)$  est obtenue en minimisant l'erreur quadratique entre la densité *a posteriori* et la densité estimée :

$$E\left\{\left(\hat{p}(\underline{x}_k / Y_k) - p(\underline{x}_k / Y_k)\right)^2 d\underline{x}_k\right\}. \quad (\text{V.16})$$

Lorsque les poids sont égaux, le choix optimal pour  $K(\cdot)$  est un noyau d'Epanechnikov [MUS01] défini comme suit :

$$K_{opt}(\underline{x}_k) = \begin{cases} \frac{n_x + 2}{2c_{n_x}} (1 - \|\underline{x}_k\|^2), & \text{si } \|\underline{x}_k\| < 1 \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

où  $c_{n_x}$  le volume de la sphère unité de dimension  $n_x$ .

En outre, lorsque les densités de  $u_k$  et  $v_k$  sont gaussiennes, le facteur d'échelle optimal  $T_{opt}$  est calculé par la formule suivante :

$$T_{opt} = \left[ \frac{8}{c_{n_x}} (n_x + 4) (2\sqrt{\pi})^{n_x} \right]^{\frac{1}{n_x + 4}} M^{-\frac{1}{n_x + 4}}. \quad (\text{V.18})$$

La figure V.6 illustre le principe de l'approximation continue de la densité  $\hat{p}(\underline{x}_k / Y_k)$ . Le filtre particulière régularisé ainsi obtenu est décrit par les étapes suivantes :

#### Filtre particulière régularisé

1.  $M$  particules sont échantillonnées selon la densité d'importance  $p(\underline{x}_k^i / \underline{x}_{k-1}^i)$ .
2. Le poids  $w_k(\underline{x}_k^i) = p(y_k / \underline{x}_k^i)$  est affecté à chaque particule.
3. Les poids sont normalisés.
4.  $E\{h(\underline{x}_k)\}$  est estimée suivant l'équation (V.9).
5. Une étape de ré-échantillonnage selon la densité  $\hat{p}(\underline{x}_k / Y_k)$  est mise en œuvre.

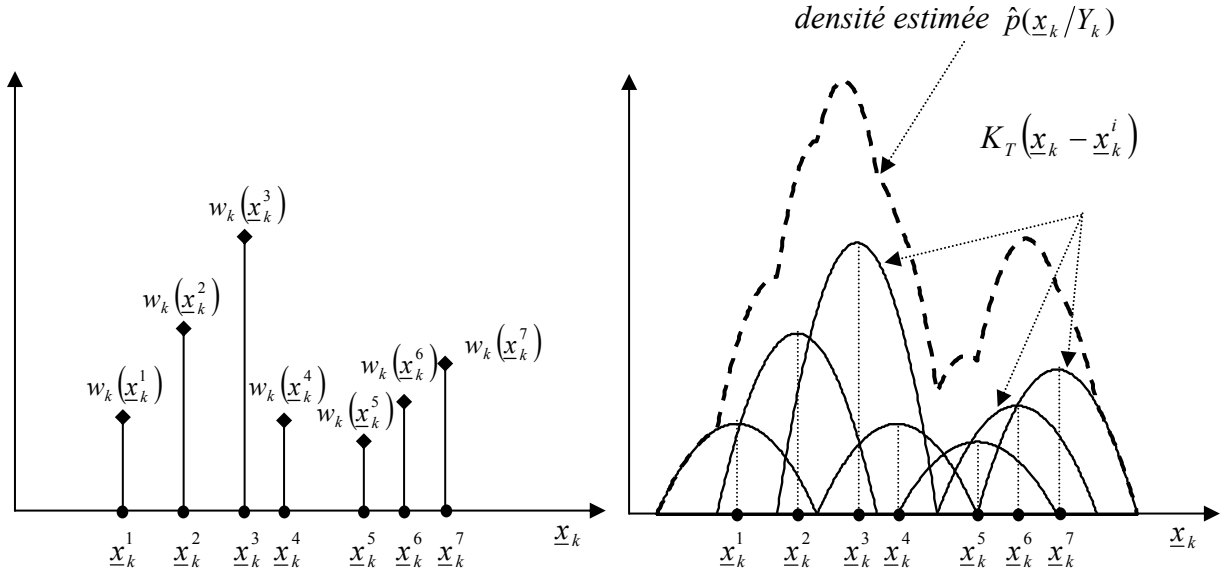


Figure V.6 : représentations discrète (gauche) et continue (droite) de la densité a posteriori pour la phase de ré-échantillonnage dans le filtre particulaire régularisé.

Néanmoins, la densité continue estimée  $\hat{p}(\underline{x}_k/Y_k)$  ne converge plus nécessairement vers la densité *a posteriori*  $p(\underline{x}_k/Y_k)$  lorsque le nombre de particules tend vers l'infini. En effet, on remarque dans la figure V.6 que le second maximum de  $\hat{p}(\underline{x}_k/Y_k)$  ne correspond plus à la dernière particule  $\underline{x}_k^7$ . Par ailleurs, le problème du choix de la densité d'importance n'est pas abordé.

Doucet *et al.* [DOU00] ont montré que le choix suivant de la densité d'importance :

$$q(\underline{x}_k^i/\underline{x}_{k-1}^i, Y_k) = p(\underline{x}_k^i/\underline{x}_{k-1}^i, Y_k). \quad (\text{V.19})$$

permet de minimiser la variance des poids. On parle alors de densité optimale.

Pitt *et al.* [PIT99] ont proposé un algorithme fondé sur une variable auxiliaire (ASIR). Le principe est d'imiter l'échantillonnage obtenu avec la densité optimale en injectant la nouvelle observation dans la phase d'échantillonnage d'importance. Comme l'illustre la figure V.7, cela revient donc à anticiper la nouvelle observation  $y_k$  pour le ré-échantillonnage à l'instant  $k-1$ . Pour plus de détails sur cette méthode, nous invitons le lecteur à consulter les références suivantes [PIT01] [ARU02].

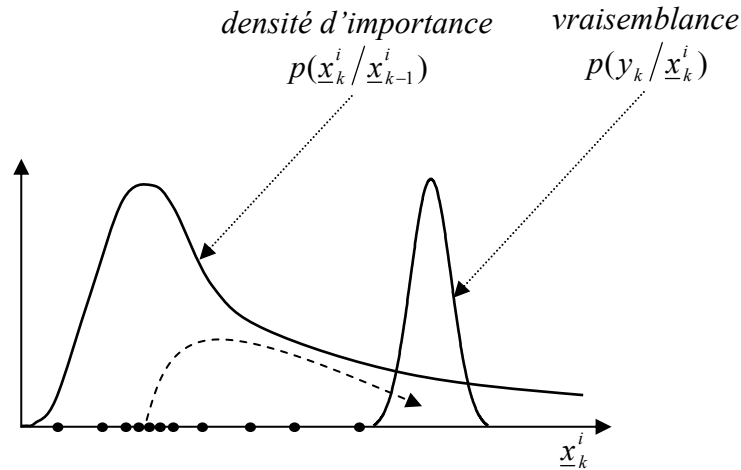


Figure V.7 : le filtre ASIR revient à générer un nuage de particule en tenant compte de la nouvelle observation.

Le filtre ASIR contourne le problème du choix de la densité d'importance et a l'avantage de générer des particules naturellement plus proches de la vraisemblance.

Une solution alternative consiste à construire la densité d'importance à partir d'un banc de filtre EKF ou de filtre de Kalman « non parfumé » (UKF)<sup>20</sup>. Pour chaque particule, un filtre EKF ou UKF est mise en œuvre et fournit une estimation gaussienne  $\mathcal{N}(\hat{x}_k^i, P_k^i)$  de la densité *a posteriori* du vecteur d'état. Cette dernière sera choisie comme densité d'importance pour la particule correspondante. Les  $M$  densités d'importance ainsi obtenues sont ensuite utilisées dans un filtre SIR. Cf. figure V.8. Le filtre obtenu est appelé EPF ou UPF selon que l'on utilise un EKF ou un UKF [RIS04]. Il opère en 5 étapes, comme suit :

1. Un EKF ou un UKF permet d'obtenir l'estimation moyenne  $\hat{x}_k^i$  de la particule  $x_k^i$  et la matrice de covariance associée  $P_k^i$ .
2. Une particule  $x_k^i$  est générée selon chaque densité d'importance  $\mathcal{N}(\hat{x}_k^i, P_k^i)$ .
3. Le poids  $w_k(x_k^i)$  est affecté à chaque particule  $x_k^i$  selon l'équation (V.10).
4.  $E\{h(x_k)\}$  est estimée suivant l'équation (V.9).
5. Une étape de ré-échantillonnage est mise en œuvre.

<sup>20</sup> Nous invitons le lecteur à lire l'annexe C pour une description détaillée de l'UKF.

Par construction, les filtres EPF et UPF ont l'avantage de conditionner l'échantillonnage d'importance avec la nouvelle observation. Plus particulièrement, dans le cas gaussien, la variance des poids est minimisée. Cependant, son principal inconvénient réside dans son coût calculatoire car  $M$  filtres de Kalman en parallèle sont utilisés.

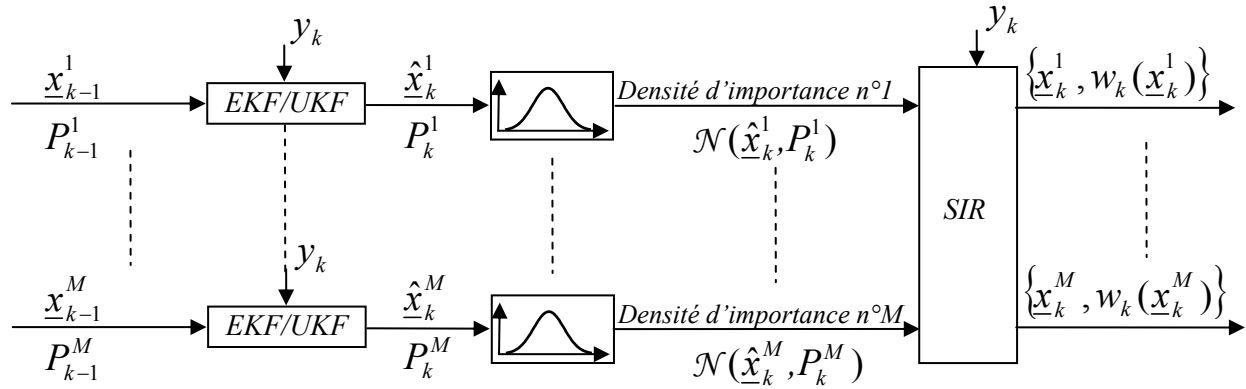


Figure V.8 : principe du filtrage EPF ou UPF.

Si le filtrage particulière a principalement été exploité dans le contexte du suivi d'objets [RIS04], il a également été étudié pour les deux applications suivantes :

- l'analyse et le rehaussement de signaux audio ou de parole fondé sur un modèle AR à paramètres variables (TVAR) [VER02] [FON02] ;
- l'estimation conjointe du canal de transmission, caractérisé par un modèle AR, et de ses paramètres dans le contexte des communications numériques [HUA04].

Dans la partie suivante, nous proposons d'étudier le filtrage particulière pour le suivi de la fréquence fondamentale d'un signal harmonique.

## V.2. Application du filtrage particulière à la modélisation harmonique

### V.2.1. Position du problème

Les techniques d'analyse spectrale permettent d'estimer les fréquences d'un signal, généralement supposées constantes sur la fenêtre d'analyse. Dans ce mémoire, nous considérons les méthodes on-line qui traitent les données échantillon après échantillon.

Puisque le problème du suivi de fréquences est non linéaire, l'utilisation d'un filtre EKF a été proposée. Outre le tutorial présenté dans [PAR90], Johnston *et al.* [JOH01] ont mené une étude comparative entre différentes formes du filtre EKF.

Peu de travaux abordent le problème du suivi de fréquences par filtrage particulière. A notre connaissance, deux types d'approches peuvent être envisagées. Dans la première, que nous qualifions de fréquentielle, les observations dans la représentation dans l'espace d'état sont les valeurs du spectrogramme ou du module de la FFT du signal observé. Ainsi, Shi *et al.* [SHI03] utilisent un filtrage particulière de type SIR couplé à un ré-échantillonnage résiduel pour le suivi des formants d'un signal de parole à partir du spectrogramme. Pour le cas de signaux harmoniques, Dubois *et al.* [DUB05a] [DUB05b] proposent d'utiliser un modèle de Markov caché couplé avec un filtre UPF pour le suivi de  $f_0$  fondée sur une FFT du signal. La seconde approche est temporelle car les observations dans la représentation dans l'espace d'état sont les valeurs du signal bruité. Dans ce cas, Dubois *et al.* [DUB05c] proposent d'utiliser un filtre UPF, mais n'abordent pas le cas de signaux harmoniques.

Nous proposons ici d'étudier le comportement du filtrage particulière SIR pour le suivi de la fréquence fondamentale d'un signal harmonique dans le domaine temporel. Nous considérons le modèle suivant :

$$y_k = \sum_{l=1}^L \{ a_k^l \cos(\Phi_k^l) + b_k^l \sin(\Phi_k^l) \} + v_k \quad (\text{V.20})$$

où  $v_k$  désigne un bruit blanc gaussien à moyenne nulle et de variance  $\sigma_v^2$ .  $a_k^l$  et  $b_k^l$  sont les amplitudes de la  $l^{\text{ième}}$  composante et la phase  $\Phi_k^l$  dépend de la pulsation fondamentale normalisée  $\omega_0 = 2\pi f_0$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_k^l &= lk\omega_0 + \Phi_0^l \\ &= \Phi_{k-1}^l + l\omega_0 \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

Pour cela, nous définissons le vecteur d'état comme suit :

$$\underline{x}_k = [a_k^1 \quad \dots \quad a_k^L \quad b_k^1 \quad \dots \quad b_k^L \quad \Phi_k^1 \quad \dots \quad \Phi_k^L \quad \omega_0]^T. \quad (\text{V.22})$$

On suppose que les paramètres du modèle varient lentement dans le temps et vérifient les relations suivantes, pour tout  $l$  dans  $\{1, \dots, L\}$  :

$$\begin{cases} a_k^l = a_{k-1}^l + u_{k,a^l} \\ b_k^l = b_{k-1}^l + u_{k,b^l} \\ \omega_{0,k} = \omega_{0,k-1} + u_{k,\omega_0} \end{cases}, \quad (V.23)$$

où  $u_{k,a^l}$ ,  $u_{k,b^l}$  et  $u_{k,\omega_0}$  sont des processus blancs gaussiens centrés de variances respectives  $\sigma_{a^l}^2$ ,  $\sigma_{b^l}^2$  et  $\sigma_{\omega_0}^2$ .

Etant donné les équations (V.21), (V.22) et (V.23), l'équation de transition de la représentation dans l'espace d'état est la suivante :

$$\underline{x}_k = \Phi \underline{x}_{k-1} + \Gamma \underline{u}_k, \quad (V.24)$$

avec :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & L \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (V.25)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (V.26)$$

et

$$\underline{u}_k = [u_{k,a^1} \quad \cdots \quad u_{k,a^L} \quad u_{k,b^1} \quad \cdots \quad u_{k,b^L} \quad u_{k,\omega_0}]^T, \quad (V.27)$$

dont la matrice de covariance diagonale est :



$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & \sigma_L^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma_1^2 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_L^2 & 0 \\ & & & 0 & \sigma_{\omega_0}^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{V.28})$$

L'équation d'observation est l'équation du modèle (V.20) et est non linéaire. On la réécrit sous la forme suivante :

$$y_k = g(\underline{x}_k) + v_k. \quad (\text{V.29})$$

Dans la partie suivante, nous menons une étude comparative entre le filtre EKF et le filtre SIR pour l'estimation du vecteur d'état  $\underline{x}_k$ .

### V.2.2. Etudes comparative entre EKF et filtre SIR

Lorsque l'on traite un signal harmonique comme un signal de flûte par exemple, le suivi de la pulsation fondamentale  $\omega_0$  permet de détecter la note jouée par le musicien et donc de transcrire automatiquement la mélodie jouée. On supposera que l'enregistrement est perturbé par un bruit additif  $v_k$  blanc gaussien de variance  $\sigma_v^2$ . La fréquence d'échantillonnage est de  $f_e = 44100$  Hz. Comme un demi ton (plus petit écart fréquentiel possible entre deux notes) correspond à 17 Hz, la précision de l'estimateur de la pulsation fondamentale normalisée  $\omega_0$

doit être de  $\frac{17}{2} \times \frac{2\pi}{44100} = 0,0012 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La mise en œuvre des filtres EKF et SIR nécessitent une phase d'initialisation. Nous proposons ici d'appliquer la méthode d'analyse haute résolution proposée par Van Huffel *et al.* [HUF93] sur les 400 premiers échantillons des observations bruitées. Nous obtenons ainsi des estimations initiales de la pulsation fondamentale  $\omega_{0,0}$ , des amplitudes  $[a_0^1 \dots a_0^L \ b_0^1 \dots b_0^L]$  et de la variance  $\sigma_v^2$  du bruit du bruit additif.

Sauf indication contraire, les variances  $\{\sigma_l^2\}_{l=1:L}$  et la variance  $\sigma_{\omega_0}^2$  sont respectivement fixées à  $10^{-5}$  et  $10^{-9}$ . Dans le filtrage SIR, nous utilisons l'algorithme de ré-échantillonnage présenté dans [ARU02] et le nombre de particules est fixé à  $M = 1500$ .

Nous avons mené les quatre tests suivants :

Test 1 : Un signal synthétique stationnaire dont la pulsation fondamentale normalisée est égale à  $\omega_0 = 0,0373$  (note DO) est généré. L'ordre du modèle est fixé à 4 composantes et les amplitudes sont constantes.

Test 2 : Le signal synthétique du test 1 est exponentiellement amorti. Ce cas correspond à l'évanouissement d'un son par exemple. Dans ce cas, les variances  $\sigma_l^2$  des processus générateurs des amplitudes doivent être modifiées. Nous avons choisi la valeur suivante  $\{\sigma_l^2 = 10^{-2,5}\}_{l=1:L}$ .

Test 3 : Dans ce test, nous traitons le cas où la pulsation fondamentale varie lentement. Le signal correspond au passage d'une note de DO ( $\omega_0 = 0,0373$ ) à une note de MI ( $\omega_0 = 0,0470$ ). La zone transitoire dure 11,3 millisecondes et les amplitudes sont constantes. On fixe la variance  $\sigma_{\omega_0}^2$  à  $10^{-8}$ .

Test 4 : Dans ce test, nous traitons le cas d'une brusque variation de la pulsation  $\omega_0$ . Le signal correspond au passage d'une note de DO ( $\omega_0 = 0,0373$ ) à une note de MI ( $\omega_0 = 0,0470$ ). La zone transitoire dure 1,13 millisecondes et les amplitudes sont constantes.

Dans chaque test, le signal synthétisé est ensuite perturbé par un bruit additif à un RSB de 20 dB.

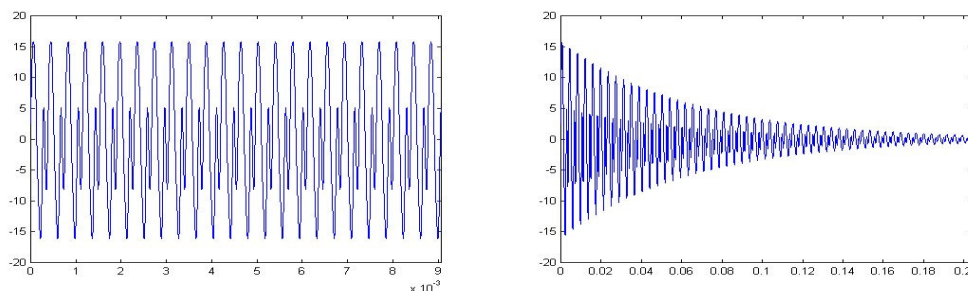


Figure V.9 : signaux utilisés pour les tests 1 (gauche) et 2 (droite).

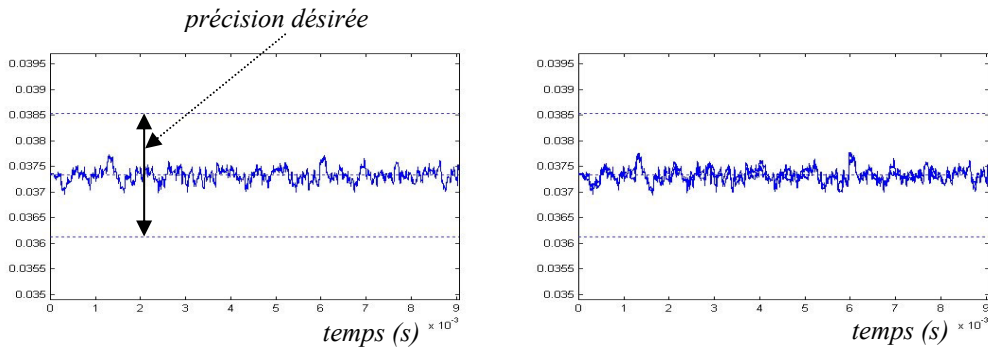


Figure V.10 : test 1, suivi de la pulsation fondamentale avec le filtre EKF (gauche) et le filtre SIR (droite).

Dans le test 1, les filtres EKF et SIR fournissent une reconstruction fidèle du signal original avec un gain du RSB respectivement de 14,33 dB et 12,11 dB. D'après la figure V.10, les deux filtres ont des comportements similaires pour le suivi de la pulsation fondamentale  $\omega_0$ . Ces résultats comparatifs confirment les conclusions présentées dans [FON02] pour la modélisation de processus AR à paramètres variables.

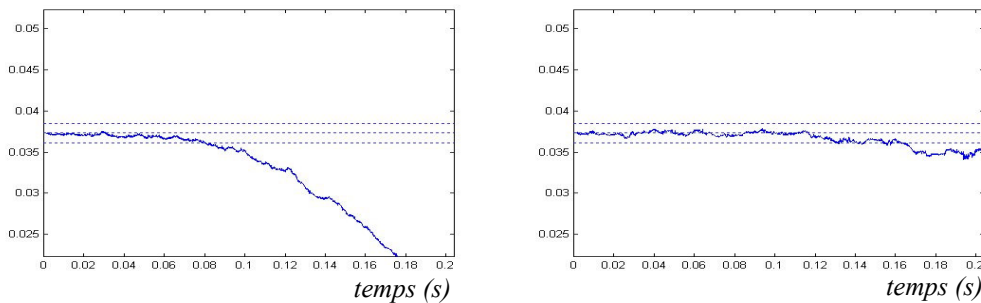


Figure V.11 : test 2, suivi de la pulsation fondamentale avec le filtre EKF (gauche) et le filtre SIR (droite).

Pour le test 2, les filtres EKF et SIR fournissent un gain du RSB respectivement de 5,62 dB et 6,35 dB. Le filtre particulière SIR présente de meilleures performances que l'EKF pour le suivi de la pulsation  $\omega_0$  (Cf. figure V.11) et des amplitudes (Cf. figure V.12).

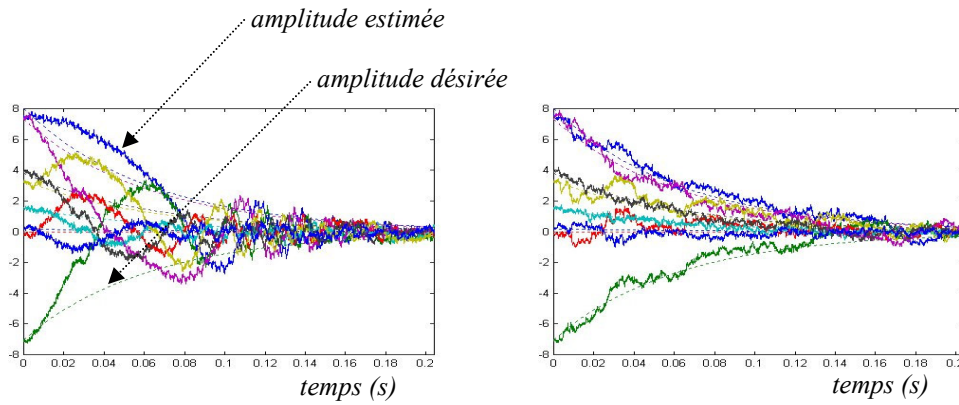


Figure V.12 : test 2, suivi des amplitudes avec le filtre EKF (gauche) et le filtre SIR (droite).

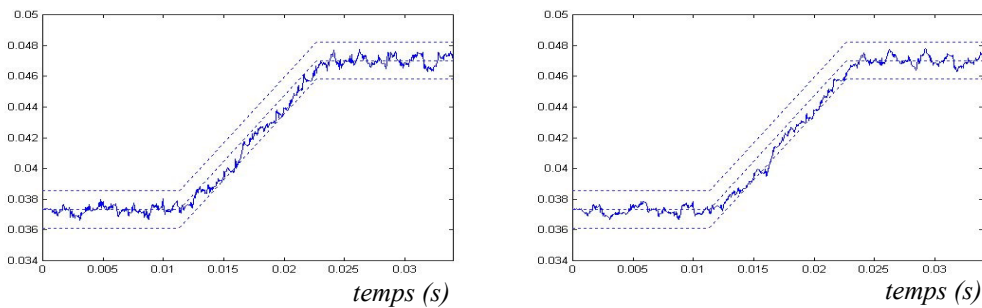


Figure V.13 : test 3, suivi de la pulsation fondamentale avec le filtre EKF (gauche) et le filtre SIR (droite).

D'après la V.13, dans le test 3, les filtres de Kalman et SIR ont des performances similaires pour le suivi d'une fréquence lentement variable dans le temps. Les deux filtres EKF et SIR fournissent un gain du RSB respectivement de 11,96 dB et 10,71 dB.

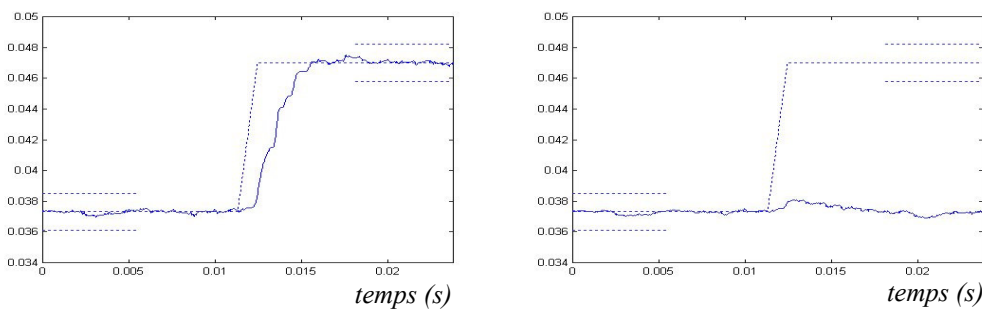


Figure V.14 : test 4, suivi de la pulsation fondamentale avec le filtre EKF (gauche) et le filtre SIR (droite).

D'après la figure V.14, où la variance  $\sigma_{\omega_0}^2$  est fixée à  $10^{-9}$ , le filtre de Kalman parvient à suivre la valeur de la fréquence fondamentale, mais avec un retard significatif. En revanche, le filtre particulaire n'est pas capable de détecter le changement de pulsation fondamentale. En effet, dans ce cas, la vraisemblance est trop éloignée du nuage de particules et le filtre « perd sa cible ».

Le réglage de la variance  $\sigma_{\omega_0}^2$  peut permettre d'améliorer ces résultats, mais est critique pour trouver le compromis entre rapidité d'adaptation du filtre et variance d'estimation. Ainsi, nous avons observé l'évolution de la taille effective du nuage de particules. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés au critère suivant :

$$C = \frac{\log(N_{eff})}{\log(M)}. \quad (V.30)$$

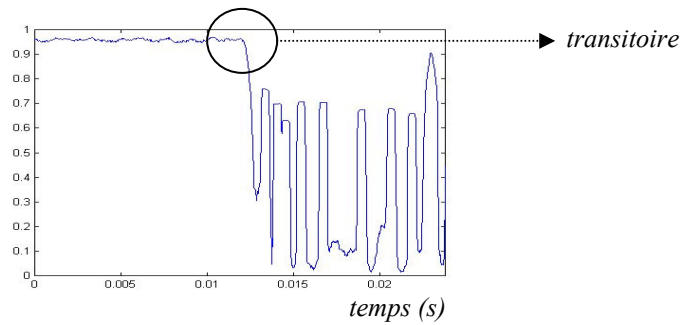
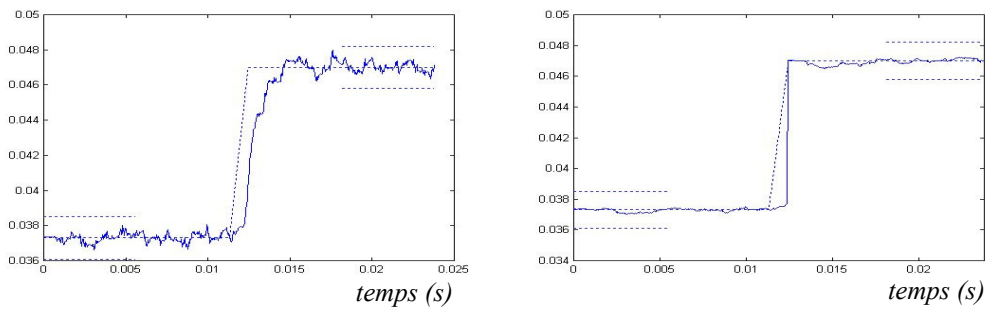


Figure V.15 : évolution du critère  $C$  lissé.

D'après la figure V.15, l'évolution d'une version lissée sur 20 échantillons successifs de ce critère permet de détecter la zone transitoire. Ainsi, lorsque  $C$  descend au dessous de 0,94, le filtre particulaire est ré-initialisé en appliquant l'algorithme de Van Huffel *et al.* [HUF93] sur les 400 échantillons suivants des observations. La valeur de  $\sigma_{\omega_0}^2$  est maintenue à  $10^{-9}$  pour le filtre SIR, et fixée à  $\sigma_{\omega_0}^2 = 10^{-8}$  pour le filtre de Kalman.



*Figure V.16 : suivi de la pulsation fondamentale avec le filtre EKF (gauche) et le filtre SIR (droite) avec réinitialisation du filtre SIR au transitoire.*

Les figures V.16 et V.15 montrent que la méthode proposée permet d’une part de détecter la zone transitoire, et d’autre part de suivre la pulsation fondamentale avec un bon compromis entre précision et rapidité.

### V.3. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des méthodes Monte Carlo récursives pour le filtrage fondé sur une représentation dans l’espace d’état. Ces approches de filtrage, dites particulières, permettent de traiter les cas d’estimation non linéaire. Par ailleurs, elles fournissent une représentation de la densité de filtrage *a posteriori* du vecteur d’état, sans hypothèse de gaussianité.

Dans le contexte de la modélisation sinusoïdale, le problème du suivi de fréquence est non linéaire. Nous avons ainsi étudié les potentialités du filtrage particulaire pour le suivi de la pulsation fondamentale d’un signal harmonique. Nous avons réalisé des tests sur des signaux synthétiques dont la fréquence fondamentale variait lentement ou brusquement. Les résultats obtenus sont prometteurs et ouvrent des perspectives, notamment dans le contexte de l’analyse de signaux audio.

## VI. Conclusions générales et perspectives

---

Dans cette thèse, nous avons développé des approches paramétriques de traitement du signal fondées sur des modèles *a priori*. Plus particulièrement, nous avons proposé de nouveaux algorithmes d'estimation des paramètres, dans lesquels les hypothèses sont compatibles avec des cas réels d'application, comme le rehaussement du signal de parole ou l'analyse de signaux biomédicaux.

Dans la première partie, nous nous sommes focalisés sur le modèle AutoRégressif (AR). Le premier chapitre propose un bilan des méthodes existantes d'estimation des paramètres AR au sens des moindres carrés. En pratique, lorsque le signal est perturbé par un bruit additif, les méthodes off-line à correction de biais deviennent instables lorsque le nombre d'échantillons disponibles est de l'ordre de quelques centaines. Dans ce même cas, les méthodes on-line, fondées sur un algorithme LMS, n'ont pas le temps de converger vers la valeur attendue des paramètres AR.

Dans le chapitre II, nous avons donc opté pour une autre démarche et exploité les techniques des variables instrumentales. Nous avons développé une approche d'estimation des paramètres AR fondée sur deux filtres de Kalman interactifs fonctionnant en parallèle. Nous avons ensuite proposé deux extensions de la méthode. La première consiste à utiliser un lissage de Kalman pour améliorer l'estimation du signal, tandis que la seconde est une extension au cas d'un bruit additif coloré de type MA. L'étude comparative que nous avons menée sur des signaux synthétiques confirme que la méthode proposée réalise un bon compromis entre précision et stabilité de l'estimation des paramètres AR.

Cependant, lorsque l'on traite un signal réel comme un signal de parole ou un signal biomédical, le modèle choisi reste une approximation des phénomènes physiques mis en jeu. De plus, les techniques d'estimation comme le filtre de Kalman repose sur des hypothèses de gaussianité contraignantes qui ne correspondent pas nécessairement à la réalité. Pour ces deux raisons, nous nous sommes tournés dans le chapitre III vers des approches alternatives fondées sur l'estimation  $H_\infty$ . Nous avons mené des études comparatives entre le filtrage de Kalman et le filtrage  $H_\infty$  pour le rehaussement du signal de parole dans le cas d'un bruit additif blanc ou coloré. Nous en avons conclu que les performances en moyenne des approches  $H_\infty$  sont similaires aux approches  $H_2$ . Néanmoins, elles ont l'avantage de nécessiter aucune hypothèse et aucune modélisation du bruit perturbateur.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous nous sommes focalisés sur les modèles sinusoïdaux. Plus particulièrement, dans le chapitre IV, nous avons choisi d'étudier les modèles sinusoïdaux dits stochastiques, qui consistent à moduler une sinusoïde avec un processus AR. Nous avons amélioré les méthodes proposées par Besson *et al.*, notamment dans le cas où le signal est noyé dans un bruit blanc. Néanmoins, ces approches ont deux inconvénients majeurs. D'une part, l'estimation de la fréquence du modèle reste très sensible au bruit pour des RSB faibles. D'autre part, le modèle ne comporte qu'une seule composante sinusoïdale. En conséquence, nous avons généralisé ce modèle à une somme de composantes stochastiques sinusoïdales. Combinant une analyse spectrale de type ESPRIT et un algorithme EM, l'algorithme d'estimation des paramètres proposé a été exploitée pour l'analyse de fuseaux de sommeil, signaux présents dans un enregistrement EEG d'un sujet endormi. L'objectif est de les caractériser pour mieux comprendre les processus du sommeil, évaluer sa qualité et détecter certaines maladies comme l'épilepsie. L'approche proposée s'est révélée un outil efficace d'analyse de ces signaux.

Cependant, l'estimation conjointe ou le suivi des paramètres d'un modèle sinusoïdal est un problème non linéaire. Pour éviter les problèmes de mise en œuvre d'un EKF, nous nous sommes intéressés dans le chapitre V au filtrage particulière. Plus particulièrement, nous avons mené une étude sur les potentialités de ces techniques pour le suivi de la fréquence fondamentale d'un signal harmonique. Des tests réalisés sur des signaux synthétiques dont la fréquence fondamentale varie lentement ou brusquement ont été réalisés. Les résultats obtenus sont prometteurs et ouvrent des perspectives d'études futures dans le contexte de l'analyse de signaux audio par exemple. Plus généralement, l'utilisation de telles méthodes



dans le contexte de la modélisation stochastique sinusoïdale reste un sujet ouvert qui pourrait conduire à des approches de traitement du signal toujours plus fidèles à la réalité physique.



## Annexe A : Exemples d'utilisation du modèle autorégressif

Le modèle AutoRégressif (AR) présente plusieurs avantages. Il est notamment caractérisé par un nombre réduit de paramètres et permet d'analyser les propriétés spectrales d'une large gamme de signaux stochastiques [KAY88].

Dans le domaine du traitement du signal biomédical, un modèle AR permet d'analyser le système cardio-respiratoire [ARN98]. Ce dernier est caractérisé par les fluctuations du rythme cardiaque, les mouvements respiratoires et la pression sanguine. Une analyse spectrale du signal électro-cardiographique (ECG) fondée sur un modèle AR permet de détecter les changements au cours du temps des caractéristiques fréquentielles de l'ECG et donc du fonctionnement du système cardio-respiratoire.

Dans [ANS89], Ansourian *et al.* analyse la respiration d'un fœtus. Les mouvements abdominaux de la patiente enceinte sont enregistrés à partir d'un système d'électrodes. Les signaux captés contiennent une information spectrale non stationnaire sur les mouvements respiratoires du fœtus. Cette dernière peut être extraite et analysée grâce à une modélisation AR sur de courts segments du signal.

Enfin, le modèle AR permet d'analyser les signaux électro-encéphalographiques (EEG) [GUL01] pour détecter une maladie éventuelle. Il est par exemple utilisé dans [MIW04] afin de cerner les régions du cerveau responsables de troubles épileptiques.

La modélisation par un processus AR est également exploitée dans le contexte de l'analyse, du codage ou du rehaussement du signal de parole. Ce signal acoustique possède des caractéristiques spectrales complexes et fortement non stationnaires. Il est composé des deux types de sons suivants (Cf. figure A.1) :

- les *sons non voisés*, qui ont des caractéristiques purement stochastiques. C'est le cas des plosives (/P/, /T/, /K/), des occlusives nasales (/M/, /N/) ou des fricatives non voisées (/F/, /S/).
- Les *sons voisés* qui correspondent à des segments de parole à fort caractère périodique. L'excitation glottale générant la parole est alors un signal quasi harmonique de fréquence fondamentale (ou pitch)  $f_0$ . C'est le cas des voyelles (/A/, /I/). Cf. figure A.2. En outre, certains phonèmes comme les fricatives voisées (/Z/ ou /V/ par exemple) contiennent à la fois les caractères harmonique et stochastique. Cf. figure A.3.

Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer à [BOI87].

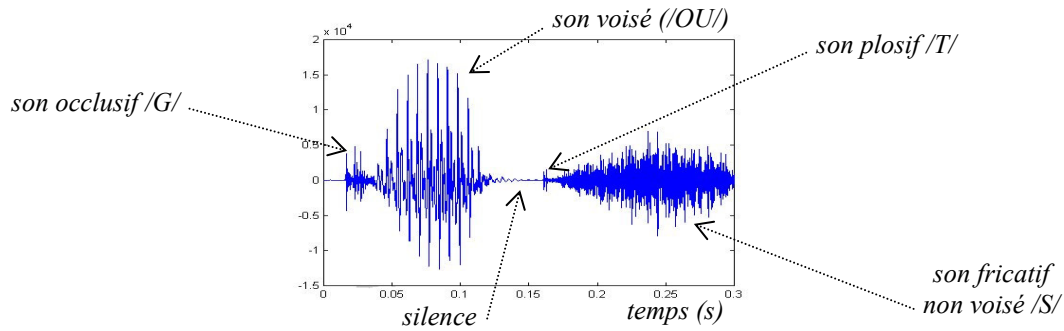


Figure A.1 : représentation temporelle du signal de parole correspondant au mot /GOODS/ ;  $f_e=16$  kHz.

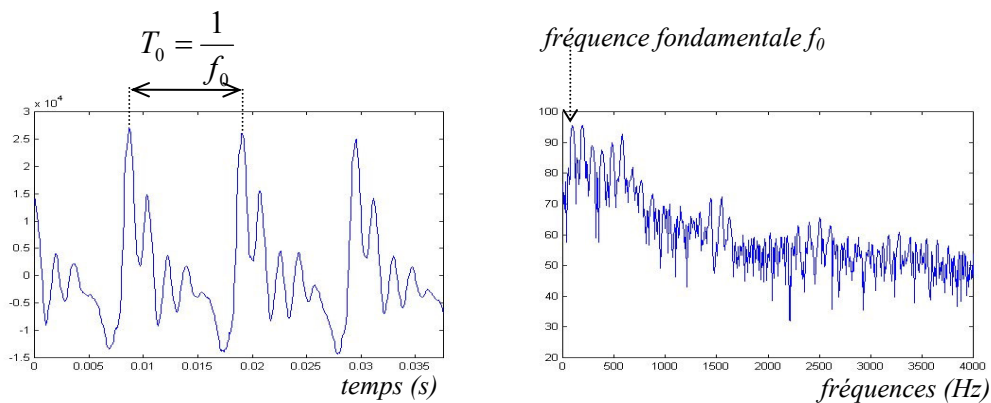


Figure A.2 : représentation temporelle (gauche) et périodogramme (droite) d'un son voisé (phonème /A/,  $f_e=16$  kHz).

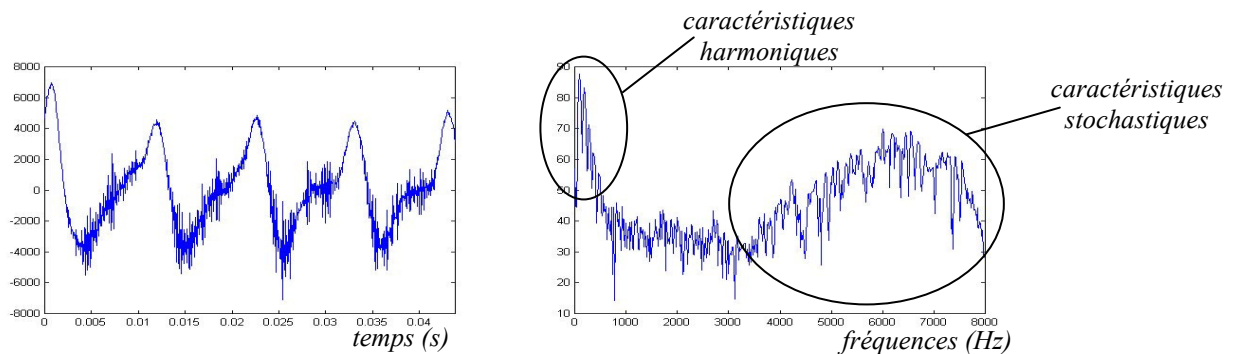


Figure A.3 : représentation temporelle (gauche) et périodogramme (droite) d'un son fricatif (phonème /Z/,  $f_e=16$  kHz).

Le conduit vocal peut être modélisé comme une succession de tubes de sections diverses, chacun à l'origine d'une résonance acoustique appelée formant (Cf. figure A.4). Les normes de type CELP [G.729] [BIU03] utilisent un modèle AR dans lequel le processus générateur est défini suivant la nature de la trame de parole traitée. Lorsque le segment est non voisé,

l'excitation est un bruit blanc à moyenne nulle. Lorsque le segment est voisé, l'excitation est le résultat d'un filtrage d'un bruit blanc par un filtre sélectif en fréquence de la forme :

$$u_k = \lambda u_{k-n_0} + \varepsilon_k \quad (\text{A.1})$$

avec  $\lambda$  un nombre proche de 1,  $n_0 = \left\lceil \frac{f_e}{f_0} \right\rceil$  et  $\varepsilon_k$  un bruit blanc gaussien centré.

On parle alors de prédicteur long-terme et court-terme pour caractériser respectivement (A.1) et le modèle AR pour la parole (I.1), puisque  $n_0$  varie approximativement entre 15 et 100 si  $f_e=8000$  Hz alors que  $p$  est en général compris entre 8 et 16.

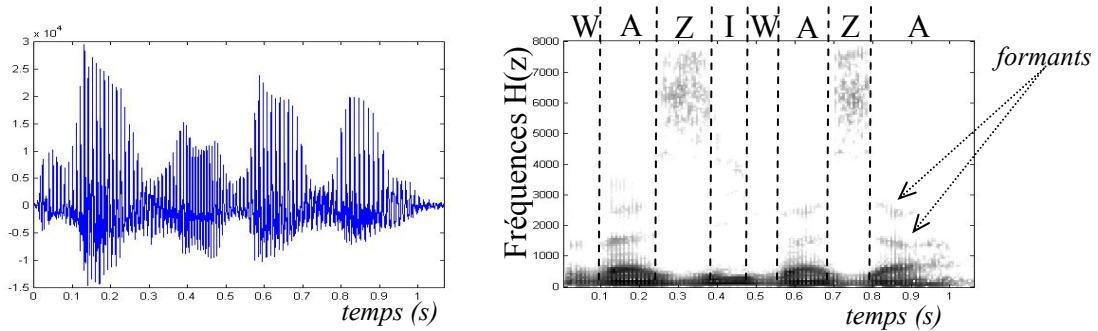


Figure A.4 : représentation temporelle (gauche) et spectrogramme (droite) d'un signal de parole (expression /WAZIWAZA/ ;  $f_e=16$  kHz).

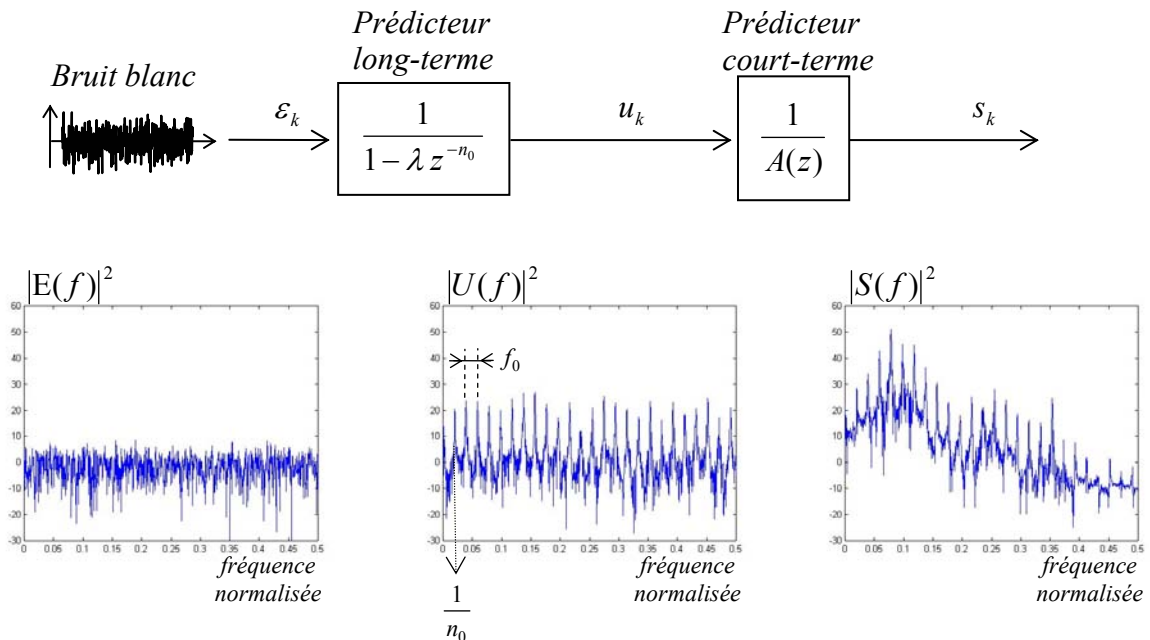


Figure A.5 : synthèse d'un signal de parole voisé fondée sur le modèle AR et spectres de puissance des signaux.



## Annexe B : L'échantillonnage d'importance

---

Nous illustrons le principe de l'échantillonnage d'importance au travers d'un exemple. Fixons-nous l'objectif d'estimer l'intégrale suivante :

$$A = \int_0^1 f(x) dx, \quad (\text{B.1})$$

où la fonction  $f(x)$  est définie pour tout  $x$  par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}. \quad (\text{B.2})$$

Par le calcul, on obtient  $A = \frac{e - 2}{e - 1} = 0,418$ . Estimons à présent  $A$  par une méthode MC par échantillonnage d'importance. En introduisant la densité d'importance  $q(x)$ , l'intégrale  $A$  devient :

$$A \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{f(x^i)}{q(x^i)}, \quad (\text{B.3})$$

où  $\{x^i \sim q(x)\}_{i=1:M}$  et la somme est réalisée implicitement selon la densité  $q(x)$ .

Prenons alors deux cas de densité d'importance :

Cas 1 :  $q(x)$  correspond à la densité uniforme  $U(x)$  définie comme suit :

$$U(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Cas 2 :  $q(x)$  satisfait :

$$q(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

La figure B.1 montre que le second cas est plus pertinent que le premier car le quotient  $\frac{f(x)}{2x}$

varie moins que le quotient  $\frac{f(x)}{U(x)}$  sur le support  $[0,1]$ . D'après la figure B.2, le second choix

de densité d'importance permet d'obtenir une estimation acceptable de l'intégrale quelque soit le nombre de particules utilisées.

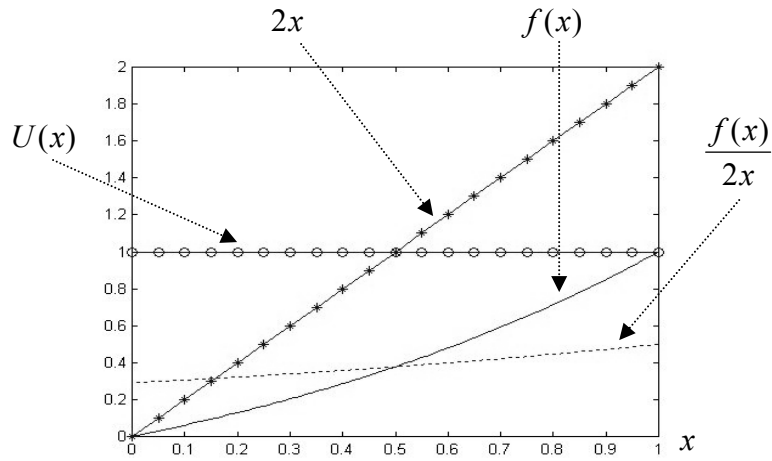


Figure B.1 : représentation de  $f(x)$  et des deux densités d'importances choisies.

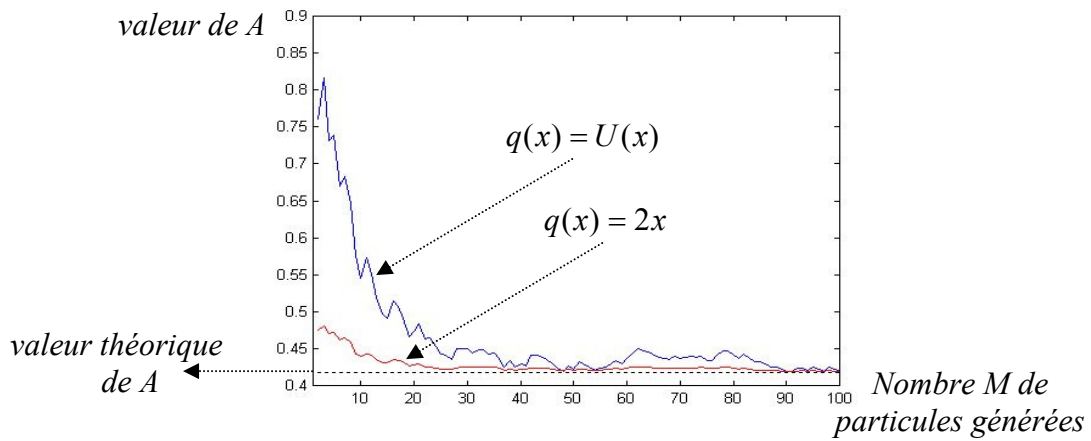


Figure B.2 : estimation de l'intégrale  $A$  pour différentes valeurs du nombre de particules.



## Annexe C : Le filtre UKF

---

Le filtre de Kalman appelé *Unscented Kalman Filter* (UKF) en anglais repose sur la transformée que nous appellerons « non parfumée » (UT, acronyme de *Unscented Transformation* en anglais). Proposée en 1995 par Julier *et al.* [JUL95], l'UT permet d'estimer la moyenne d'ensemble et la covariance d'une transformation analytique  $y = f(\underline{x})$  quelconque d'un vecteur aléatoire gaussienne  $\underline{x}$  de moyenne  $m_{\underline{x}}$  et de matrice de covariance  $P_{\underline{x}}$ .

Si  $L$  est la taille du vecteur  $\underline{x}$ , la méthode proposée par Julier *et al.* opère suivant trois étapes :

1.  $2L+1$  particules ou  $\sigma$ -points [JUL95] sont générés comme suit :

$$\underline{x}^0 = m_{\underline{x}} \quad (\text{C.1})$$

$$\underline{x}^i = m_{\underline{x}} + \left( \sqrt{(L + \lambda) P_{\underline{x}}} \right)_i, \quad i \in \{1, \dots, L\} \quad (\text{C.2})$$

$$\underline{x}^i = m_{\underline{x}} - \left( \sqrt{(L + \lambda) P_{\underline{x}}} \right)_i, \quad i \in \{L+1, \dots, 2L\} \quad (\text{C.3})$$

où  $(M)_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne ou colonne de la matrice  $M$  et  $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$  est un facteur d'échelle.  $\alpha$  est un paramètre qui permet de régler la dispersion des  $\sigma$ -points autour de la moyenne  $m_{\underline{x}}$ .  $\kappa$  est un facteur d'échelle secondaire.

2. Les  $\sigma$ -points sont transformés par la fonction  $f$ :

$$y^i = f(\underline{x}^i), \quad i \in \{0, \dots, 2L\}. \quad (\text{C.4})$$

3. La moyenne d'ensemble  $\bar{y}$  et la covariance  $P_y$  de la variable  $y$  sont alors estimées comme suit :

$$m_y = \sum_{i=0}^{2L} W_m^i y^i \quad (\text{C.5})$$

$$P_y = \sum_{i=0}^{2L} W_c^i (y^i - \bar{y})(y^i - \bar{y})^{*T} \quad (\text{C.6})$$

où  $*$  désigne l'opérateur complexe conjugué et les poids sont définis par :

$$\begin{aligned} W_m^0 &= \lambda / (\lambda + L) \\ W_c^0 &= \lambda / (\lambda + L) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_m^i &= W_c^i = 1 / \{2(\lambda + L)\}, \quad i \in \{1, \dots, 2L\} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

avec  $\beta$  un paramètre qui permet de prendre en compte des termes d'ordre supérieur dans la distribution du vecteur aléatoire [WAN01].

Cette approche est connexe aux méthodes d'échantillonnage de Monte Carlo (MC). Comme l'illustre la figure C.1, la densité de probabilité du vecteur aléatoire est caractérisée par un nuage de point qui se propage au travers de la fonction  $f$ . Néanmoins, l'UT repose sur une construction déterministe du nuage de particules. Ainsi, elle ne permet pas de caractériser n'importe quel type de densité. Elle a cependant l'avantage d'avoir un coût calculatoire réduit en comparaison avec les méthodes MC, qui utilisent des centaines voir des milliers d'échantillons.

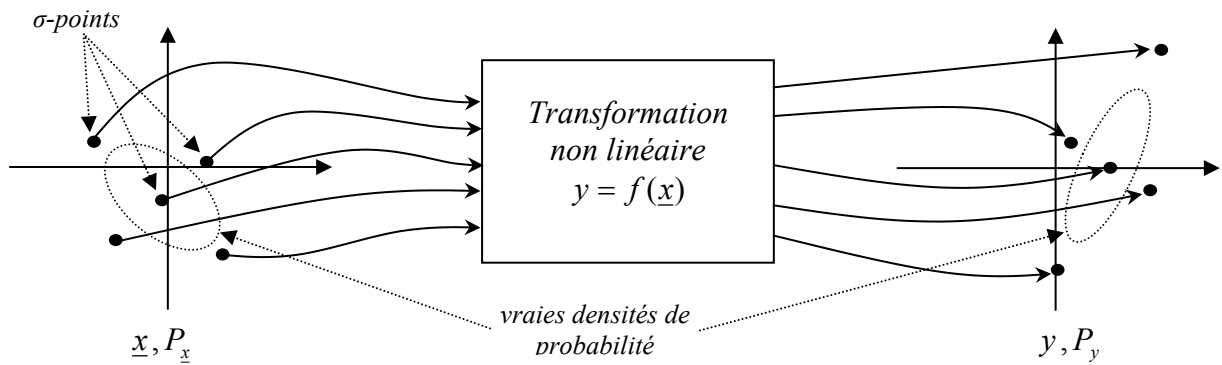


Figure C.1 : principe de l'UT dans le cas d'un vecteur aléatoire  $\underline{x}$  de taille 2.

Soit la représentation dans l'espace d'état suivante :

$$\begin{cases} \underline{x}_k = f(\underline{x}_{k-1}, \underline{u}_k) \\ y_k = g(\underline{x}_k, \underline{v}_k) \end{cases}, \quad (\text{C.8})$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions analytiques quelconques,  $\underline{x}_k$ ,  $y_k$ ,  $\underline{u}_k$  et  $\underline{v}_k$  désignent respectivement le vecteur d'état, l'observation, le processus générateur et le bruit d'observation.

L'UKF permet d'estimer récursivement  $\underline{x}_k$ . A un instant donné  $k$ , en appliquant deux fois l'UT sur les fonctions  $f$  et  $g$  du système, on obtient tout d'abord des prédictions du vecteur d'état  $\hat{\underline{x}}_{k/k-1}$  et de l'observation  $\hat{y}_{k/k-1}$ . L'estimation a posteriori du vecteur d'état est ensuite obtenue de la manière suivante :

$$\hat{\underline{x}}_{k/k} = \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k/k-1}), \quad (\text{C.9})$$

où  $K_k$  est le gain du filtre, calculé à partir de l'estimation des matrices de covariance  $P_{k-1/k-1}^{yy}$  de l'observation et de la matrice d'intercorrélation  $P_{k-1/k-1}^{xy}$  entre le vecteur d'état et l'observation comme suit [JUL95] :

$$K_k = P_{k/k-1}^{xy} (P_{k/k-1}^{yy})^{-1}. \quad (\text{C.10})$$

Les équations de l'algorithme de l'UT sont données dans la figure C.3.

Génération des  $\sigma$ -points

$$\hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^e = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^T & \bar{\underline{u}}^T & \bar{\underline{v}}^T \end{bmatrix}^T$$

$$P_{k-1/k-1}^e = \text{diag}(P_{k-1/k-1}^{xx}, P^{uu}, P^{vv})$$

$$\left(\hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^e\right)^i = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^e & \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^e + \gamma\sqrt{P_{k-1/k-1}^e} & \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^e - \gamma\sqrt{P_{k-1/k-1}^e} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^i & \hat{\underline{u}}_{k-1/k-1}^i & \hat{\underline{v}}_{k-1/k-1}^i \end{bmatrix}$$

Estimation a priori

$$\left(\hat{\underline{x}}_{k/k-1}^e\right)^i = f\left(\hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^i, \hat{\underline{u}}_{k-1/k-1}^i\right)$$

$$\hat{\underline{x}}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_m^i \hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^i$$

$$P_{k/k-1}^{xx} = \sum_{i=0}^{2L} W_c^i \left(\hat{\underline{x}}_{k/k-1}^i - \hat{\underline{x}}_{k/k-1}\right) \left(\hat{\underline{x}}_{k/k-1}^i - \hat{\underline{x}}_{k/k-1}\right)^T$$

$$\hat{\underline{y}}_{k/k-1} = g\left(\hat{\underline{x}}_{k-1/k-1}^i, \hat{\underline{v}}_{k-1/k-1}^i\right)$$

$$\hat{\underline{y}}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_m^i \hat{\underline{y}}_{k-1/k-1}^i$$

$$P_{k/k-1}^{yy} = \sum_{i=0}^{2L} W_c^i \left(\hat{\underline{y}}_{k/k-1}^i - \hat{\underline{y}}_{k/k-1}\right) \left(\hat{\underline{y}}_{k/k-1}^i - \hat{\underline{y}}_{k/k-1}\right)^T$$

Estimation a posteriori

$$P_{k/k-1}^{xy} = \sum_{i=0}^{2L} W_c^i \left(\hat{\underline{x}}_{k/k-1}^i - \hat{\underline{x}}_{k/k-1}\right) \left(\hat{\underline{y}}_{k/k-1}^i - \hat{\underline{y}}_{k/k-1}\right)^T$$

$$K_k = P_{k/k-1}^{xy} \left(P_{k/k-1}^{yy}\right)^{-1}$$

$$\hat{\underline{x}}_{k/k} = \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + K_k \left(y_k - \hat{\underline{y}}_{k/k-1}\right)$$

$$P_{k/k}^{xx} = P_{k/k-1}^{xx} - K_k P_{k/k-1}^{yy} K_k^T$$

$\bar{\underline{u}}$  et  $P^{uu}$  la moyenne et la matrice de covariance du processus générateur  
 $\bar{\underline{v}}$  et  $P^{vv}$  la moyenne et la matrice de covariance du bruit additif  
 $L$  est la taille du vecteur d'état étendu

Figure C.3 : algorithme de l'UKF.



## Bibliographie

---

- [AND79] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, Optimal Filtering, Ed. T. Kailath, Prentice Hall, 1979.
- [ANS89] M. N. Ansourian, J. H. Dripps, G. J. Beattie, K. Boddy, Autoregressive Spectral Estimation of Fetal Breathing Movement, IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 36, n°11, pp. 1076-1084, November 1989.
- [AKG00] T. Akgül, S. Mingui, R. J. Sciabassi, A. E. Cetin, Characterization of Sleep Spindles Using Higher Order Statistics and Spectra, IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 47, n°8, pp. 997-1009, August 2000.
- [ARN98] M. Arnold, W. H. R. Miltner, H. Witte, R. Bauer and C Braun, Adaptive AR Modelling of Nonstationary Time Series by Means of Kalman Filtering, IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 45, n°5, pp. 553-562, May 1998.
- [ARU02] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/ Non-Gaussian Bayesian Tracking, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 50, n°2, pp. 174-188, February 2002.
- [AUL80] R. J. Mac Aulay, M. L. Malpass, Speech Enhancement Using a Soft-Decision Noise Suppression Filter, IEEE Trans. on Audio, Signal and Speech Processing, vol. 28, n°2, pp. 137-145, April 1980.
- [BES95] O. Besson, P. Stoica, Sinusoidal Signals with Random Amplitude: Least-Squares Estimators and Their Statistical Analysis, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 43, n°11, pp. 2733-2744, November 1995.
- [BES96] O. Besson, P. Stoica, Estimating the Parameters of a Random Amplitude Sinusoid from its Sample Covariance, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 5, pp. 2499-2502, May 1996.
- [BES97] O. Besson, P. Stoica, On Subspace-Based Methods for Frequency Estimation of Random Amplitude Sinusoidal Signal, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 5, pp. 3989-3992, April 1997.
- [BER79] M. Berouti, R. Schwartz and J. Makhoul, Enhancement of Speech Corrupted by Acoustic Noise, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 4, pp. 208-211, April 1979.

- [BIU03] G. Biundo Lolito, Codage à débit variable de la parole en bande élargie, mémoire de thèse à la faculté des sciences de l'université de Neuchâtel, PhD supervisor : F. Pellandini, 2003.
- [BLI01] K. J. Blinowska, P. J. Durka, Unbiased High Resolution Method of EEG Analysis in Time-Frequency Space, *Acta Neurobiologiae Experimentalis*, vol. 61, n°3, pp. 157-174, 2001.
- [BOI87] R. Boite, M. Kunt, Traitement de la parole, Presses Polytechniques Romandes, 1987.
- [BOL79] S. F. Boll, Suppression of Acoustic Noise in Speech Using Spectral Subtraction, *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. 27, n°2, pp. 113-120, April 1979.
- [BOL04] P. Bolzern, P. Colaneri, G. De Nicolao, On Discrete-Time  $H_\infty$  Fixed-Lag Smoothing, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 52, n°1, pp. 132-141, January 2004.
- [BOY02] R. Boyer, Modélisation et codage de signaux audio par extensions du modèle sinusoïdal – Représentation compactes des signaux à variations rapides, Ph.D. dissertation, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST) Paris, Département Traitement du signal et des images, PhD supervisor : N. Moreau, December 2002 (In French).
- [BRI01] D. O'Brian, A. I. C. Monaghan, Concatenative Synthesis Based on a Harmonic Model, *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 9, n°1, pp. 11-20, January 2001.
- [CAI04] J. Cai, X. Shen, J.W. Mark, Robust Channel Estimation for OFDM Wireless Communication Systems – An  $H_\infty$  Approach, *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 3, n°6, pp. 2060-2071, November 2004.
- [CHA85] M. Chan, J. Aguilar-Martin, P. Celcis, J. P. Marc Vergnes, Instrumental Variable Techniques in Cerebral Blood Flow Estimation Using Very Few Samples, *IFAC Symp. on Identification and System parameter Estimation*, July 1985.
- [CHU90] C. K. Chui, G. Chen, H. C. Chui; Modified Extended Kalman Filtering and a Real-Time Parallel Algorithm for System Parameter Identification, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 35, n°1, pp. 100-104, January 1990.

- [COL98] P. Colaneri, M. Maroni and U. Shaked,  $H_\infty$  Prediction and Smoothing for Discrete-Time Systems: a J-Spectral Approach, proc. of IEEE-CDC, vol. 3, pp. 2836-2842, 1998.
- [COU99] M. Coulon, J.-Y. Tournet, Multiple Frequency Estimation in Additive and Multiplicative Noise, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 4, pp. 1573-1576, March 1999.
- [DAV98] C. E. Davila, A Subspace Approach to Estimation of Autoregressive Parameters from Noisy Measurements, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 46, n°2, pp. 531-534, February 1998.
- [DER94] M. Deriche, AR Parameter Estimation From Noisy Data Using the EM Algorithm, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 4, pp. 69-72, April 1994.
- [DIV05] R. Diversi, U. Soverini, R. Guidorzi, A New Estimation Approach for AR Models in Presence of Noise, Proc. XVI<sup>th</sup> IFAC World Congress, Prague, 2005.
- [DOB98] G. Doblinger, Smoothing of Noisy AR Signals Using an Adaptive Kalman Filter, proc. of EURASIP-EUSIPCO, vol. 2, pp. 781-784, September 1998.
- [DOC02] S. Doclo, M. Moonen, GSVD-Based Optimal Filtering for Single and Multimicrophone Speech Enhancement, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 50, n°9, pp. 2230-2244, September 2002.
- [DOU00] A. Doucet, S. Godsill, C. Andrieu, On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering, Statistics and Computing, vol. 10, n°3, pp. 197-208, 2000.
- [DUB05a] C. Dubois, M. Davy, J. Idier, Tracking of Time-Frequency Components Using Particle Filtering, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 4, pp. 18-23, March 2005.
- [DUB05b] C. Dubois and M. Davy, Harmonic Tracking Using Sequential Monte Carlo, proc. of IEEE-SSP, Bordeaux, France, July 2005.
- [DUB05c] C. Dubois and M. Davy, Suivi de Trajectoires Temps-Fréquence par Filtrage Particulaire, proc. of GRETSI 2005, Louvain-la-Neuve, Belgium, September 2005 (In French).
- [EPH84] Y. Ephraim, D. Malah, Speech Enhancement Using a Minimum Mean-Square Error Short-Time Spectral Amplitude Estimator, IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing, vol. 32, n°6, pp. 1109-1121, December 1984.
- [EPH95] Y. Ephraim, H. L. Van Trees, A Signal Subspace Approach for Speech Enhancement, IEEE Trans. on Speech Audio Processing, vol. 3, n°4, pp. 255-266, July 1995.

- [ERD00] A.T. Erdogan, B. Hassibi, T. Kailath, On Linear  $H_\infty$  Equalization of Communication Channels, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, n°11, pp. 3227-3231, November 2000.
- [FON02] W. Fong, S. J. Godsill, A. Doucet, M. West, Monte Carlo Smoothing with Application to Audio Signal Enhancement, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, n°2, pp. 438-449, February 2002.
- [FRI83] B. Friedlander, Instrumental Variable Methods for ARMA Spectral Estimation, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 31, n°2, pp. 404-415, April 1983.
- [FRI85] B. Friedlander, P. Stoica, T. Soderström, Instrumental Variable Methods for ARMA Parameter Estimation, *IFAC, Identification and system parameter estimation*, New York, pp. 29-36, 1985.
- [FU91] M. Fu, Interpolation approach to  $H_\infty$  optimal estimation and its interconnection to loop transfer recovery, *System and Control Letters*, vol. 17, n°1, pp. 29-36, July 1991.
- [G.729] Codage de la Parole à 8 kbit/s par Prediction Linéaire avec Excitation par Sequences Codées à Structure Algébrique Conjuguée, *UIT-T Recommendation G.729*, 1996.
- [GAB99a] M. Gabrea, Rehaussement de la Parole en Ambiance Bruitée. Méthodes Monovoie et Bivoie, Ph.D. dissertation, Equipe Signal et Image, UMR 5131 LAPS, PhD supervisor : M. Najim, 1999.
- [GAB99b] M. Gabrea, E. Grivel, M. Najim, A Single Microphone Kalman Filter-Based Noise Canceller, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 6, n°3, pp. 53-55, March 1999.
- [GAN98] S. Gannot, D. Burchtein, E. Weinstein, Iterative and Sequential Kalman Filter-Based Speech Enhancement Algorithms, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 6, n°4, pp. 373-385, July 1998.
- [GEO97] E. B. George, M. J. T. Smith, Speech Analysis/Synthesis and Modification Using an Analysis-by-Synthesis/Overlap-Add Sinusoidal Model, *IEEE Trans on Speech and Audio Processing*, vol. 5, n°5, pp. 389-406, September 1997.
- [GER99] J. C. Geromel, Optimal Linear Filtering Under Parameter Uncertainty, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, n°1, pp. 168-175, January 1999.



- [GIB91] J. D. Gibson, B. Koo, S. D. Gray, Filtering of Colored Noise for Speech Enhancement and Coding, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 39, n°8, pp. 1732-1742, August 1991.
- [GOH99] Z. Goh, K. C. Tan, B. T. G. Tan, Speech Enhancement Based on a Voiced-Unvoiced Speech Model, *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 7, n°5, pp. 510-524, September 1999.
- [GOR93] N. J. Gordon, D. J. Salmond, A. F. M. Smith, Novel Approach to Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation, *IEE Proc.-F*, vol. 140, n°2, pp. 107-113, 1993.
- [GRI00] E. Grivel, Contribution au Rehaussement du Signal de Parole par Filtrage de Kalman: Reformulation de Techniques d'Identification et Modèles Harmoniques, Ph.D. dissertation, Equipe Signal et Image, UMR 5131 LAPS, PhD supervisor : M. Najim, 2000.
- [GRI02] E. Grivel, M. Gabrea, M. Najim, Speech Enhancement as a Realization Issue, *Signal Processing*, vol. 82, n°12, pp. 1963-1978, December 2002.
- [GRI03] E. Grivel, J. M. Vesin, M. Najim, Algorithmes Génétiques pour le Rehaussement d'un Signal de Parole Voisé Fondé sur un Modèle Sinusoïdal, *proc. of GRETSI*, vol. 3, pp. 233-236, 2003 (in French).
- [GRI88] M. J. Grimble,  $H_\infty$  Design of Optimal Linear Filters, *Linear Circuits, Systems and Signal Processing: Theory and Applications*, C. I. Byrnes, C. F. Martin, R. E. Saeks (Eds.), pp. 533-540, North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1988.
- [GRI90] M. J. Grimble, A. E. Sayed, Solution of the  $H_\infty$  Optimal Linear Filtering Problem for Discrete-Time Systems, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, n°7, pp. 1092-1104, July 1990.
- [GRI92] M. J. Grimble, R. Hashim, U. Shaked, Identification algorithms based on  $H_\infty$  state-space filtering techniques, *proc. of IEEE-CDC*, vol. 2, pp. 2287-2292, 1992.
- [GUL01] I. Güler, M. K. Kiymik, M. Akin, A. Alkan, AR Spectral Analysis of EEG Signal by Using Maximum Likelihood Estimation, *Computers in Biology and Medicine*, n°31, pp. 441-450, 2001.
- [HAM96] K. N. Hamdy, M. Ali, A. H. Tewfik, Low Bit Rate High Quality Audio Coding With Combined Harmonic and Wavelet Representations, *proc. of IEEE-ICASSP*, vol. 2, pp. 1045-1048, May 1996.

- [HAS03a] K. Hasan, J. Hossain, A. Haque, Parameter Estimation of Multichannel Autoregressive Processes in Noise, *Signal Processing*, vol. 83, n°3, pp. 603-610, January 2003.
- [HAS03b] K. Hasan, S. A. Fattah, Identification of Noisy AR Systems Using Damped Sinusoidal Model of Autocorrelation Function, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 10, n°6, pp. 157-160, June 2003.
- [HAS03c] M. K. Hasan, A. K. M. Z. R. Chowdhury, M. R. Khan, Identification of Autoregressive Signals in Colored Noise Using Damped Sinusoidal Model, *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, n°7, pp. 966-969, July 2003.
- [HAS96b] B. Hassibi, A. H. Sayed, T. Kailath,  $H_\infty$  Optimality of the LMS Algorithm, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, n°2, pp. 267-280, February 1996.
- [HAS99a] B. Hassibi, A. H. Sayed, T. Kailath, *Indefinite-Quadratic Estimation and Control, a Unified Approach to  $H_2$  and  $H_\infty$  Theories*, SIAM Edition, 1999.
- [HAY96] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3<sup>rd</sup> Ed., Prentice Hall, 1996.
- [HUA04] Y. Huang, P. M. Djuric, A Blind Particle Filtering Detector of Signals Transmitted Over Flat Fading Channels, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 52, n°7, pp. 1891-1900, July 2004.
- [HUF93] S. Van Huffel, Enhanced Resolution Based on Minimum Variance Estimation and Exponential Data Modeling, *Signal Processing*, vol. 33, n°3, pp. 333-355, September 1993.
- [HUP05] E. Huupponen, A. Saastamoinen, J. Virkkala, S.-L. Himanen, J. Hasan, A. Värri, Determination of EEG Sleep Spindle Frequency with DFT and Matching Pursuit Approaches, *proc of IASTED-BioMED*, pp. 383-386, 2005.
- [JAM05] A. Jamoos, D. Labarre, E. Grivel, M. Najim, Two cross coupled Kalman filters for joint estimation of MC-DS-CDMA fading channels and their corresponding autoregressive parameters, *proc. of EURASIP-EUSIPCO*, September 2005.
- [JEN01] J. Jensen, J. H. L. Hansen, Speech Enhancement Using a Constrained Iterative Sinusoidal Model, *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 9, n°7, pp. 731-740, October 2001.

- [JEN95] S. H. Jensen, P. C. Hansen, S. D. Hansen, J. A. Sorensen, Reduction of Broad Band Noise in Speech by Truncated QSVD, *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 3, n°6, pp. 439-448, November 1995.
- [JOH01] L. A. Johnston, V. Krishnamurthy, Derivation of a Sawtooth Iterate Extended Kalman Smoother via the AECM Algorithm, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, n°9, September 2001, pp. 1899-1909.
- [JUL95] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, H. F. Durrant-Whyte, A New Approach for Filtering Nonlinear Systems, *proc. of the IEEE-ACC*, vol. 3, pp. 1628-1632, 1995
- [KAY80] S. M. Kay, Noise Compensation for Autoregressive Spectral Estimates, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 28, n°3, pp. 292-303, June 1980.
- [KAY88] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation, Theory and Application*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [KON94] A. Kong, J. S. Liu, W. H. Wong, Sequential Imputations and Bayesian Missing Data Problems, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89, n°425, pp. 278-288, 1994.
- [LAB02] D. Labarre, E. Grivel, Y. Berthoumieu, M. Najim, A Stochastic Sinusoidal Model with Application to Speech and EEG-Sleep Spindle Signals, *proc. of EURASIP-EUSIPCO*, 2002.
- [LAB03] D. Labarre, E. Grivel, M. Najim, E. Todini, Estimating the AR Parameters from Noisy Observations by Means of Parallel Kalman Filters, *proc. of the 5<sup>th</sup> COST 276 Workshop*, October 2-3, 2003, Prague, Csech Republic.
- [LAB04a] D. Labarre, E. Grivel, M. Najim, E. Todini, Two-Kalman Filters Based Instrumental Variable Techniques for Speech Enhancement, *proc. of IEEE-MMSP conference*, Sienna, Italia, September 29-October 1, 2004.
- [LAB04b] D. Labarre, E. Grivel, M. Najim, E. Todini, Two-Kalman Filters Approach for Unbiased AR Parameter Estimation from Noisy Observations, Application to Speech Enhancement, *proc. of EURASIP-EUSIPCO*, pp.633-636, 2004.
- [LAB05a] D. Labarre, E. Grivel, M. Najim, N. Christov, Relevance of  $H_\infty$  filtering for Speech Enhancement, *proc. of IEEE-ICASSP*, vol. 4, pp. 169-172, March 2005.

- [LAB05b] D. Labarre, E. Grivel, N. Christov, M. Najim, Le Lissage  $H_\infty$  : Une Alternative au Filtrage de Kalman pour le Rehaussement du Signal de Parole?, proc. of GRETSI, Louvain-la-Neuve, Belgium, 2005 (in French).
- [LAB05c] D. Labarre, E. Grivel, M. Najim, E. Todini, Consistent Estimation of Autoregressive Parameters from Noisy Observations based on Two Interacting Kalman Filters, corrected version submitted to Signal Processing.
- [LIN02] L. Lindbom, J. Rutstrom, A. Ahlen, M. Sternad, Automatic Tuning of the Step Size in WLMS Algorithms: Applications to EDGE, proc. of VTC, vol. 4, pp. 2229-2233, 2002.
- [LIU98] J. S. Liu, R. Chen, Sequential Monte Carlo Methods for Dynamical Systems, Journal of the American Statistical Association, vol. 93, pp. 1032-1044, 1998.
- [LJU87] L. Ljung, System Identification, Prentice-Hall, 1987.
- [MA04] N. Ma, M. Bouchard, R. A. Goubran, Perceptual Kalman Filtering for Speech Enhancement in Colored Noise, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 2, pp. 717-720, May 2004.
- [MAC96] M. W. Macon, Speech Synthesis Based on Sinusoidal Modeling, Ph.D. dissertation, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 1996.
- [MAL93] S. G. Mallah, Z. Zhang, Matching Pursuit With Time-Frequency Dictionaries, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 41, n°12, pp. 3397-3415, December 1993.
- [MAN99] P. Mantovan, A. Pastore, S. Tonellato, Recursive Estimation of System Parameter in Environmental Time Series, M. Vichi and O. Optiz (Eds) Classification and Data Analysis. Springer, pp. 311-318, 1999.
- [MAR80] L. Marple, A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 28, n°4, pp. 441-454, August 1980.
- [MIR01] L. Mirkin, Continuous-Time Fixed-Lag Smoothing in an  $H_\infty$  Setting, proc. of IEEE-CDC, vol. 4, pp. 3512-3517, 2001.
- [MIW04] F. Miwakeichi, A. Galka, S. Uchida, H. Arakaki, N. Hirai, M. Nishida, T. Maehara, K. Kawai, S. Sunaga, H. Shimizu, Impulse Response Function Based on Multivariate AR Model Can Differentiate Focal Hemisphere in Temporal Lobe Epilepsy, Epilepsy Research, vol. 61, n°1-3, pp. 73-87, September-October 2004.

- [MUS01] C. Musso, N. Oudjane, F. Legland, Improving Regularised Particle Filters, in Sequential Monte Carlo Methods in Practice, A. Doucet, N. de Freitas, N. J. Gordon, eds., New York, Springer, 2001.
- [NAG91] K. M. Nagpal, P. P. Khargonekar, Filtering and Smoothing in an  $H_\infty$  setting, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 36, n°2, pp. 152-166, February 1991.
- [NAJ88] M. Najim, Modélisation et Identification en Traitement du Signal, Ed. Masson, 1988.
- [OPP94] A. V. Oppenheim, E. Weinstein, K. C. Zangi, M. Feder D. Gauger, Single-Sensor Active Noise Cancellation, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 2, n°2, pp. 285-290, April 1994.
- [PAL87] K. K. Paliwal, A. Basu, A Speech Enhancement Method Based on Kalman Filtering, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 1, pp. 177-180, April 1987.
- [PAR90] P. J. Parker, B. D. O. Anderson, Frequency Tracking of Nonsinusoidal Periodic Signals in Noise, Signal Processing, vol. 20, n°2, pp. 127-152, June 1990.
- [PIT99] M. K. Pitt, N. Shepard, Filtering via Simulation: Auxiliary Particle Filters, Journal of the American Statistical Association, vol. 94, n°446, pp. 590-599, 1999.
- [PIT01] M. K. Pitt, N. Shepard, Auxiliary Variable Based Particle Filters, in Sequential Monte Carlo Methods in Practice, A. Doucet, N. de Freitas, N. J. Gordon, eds., New York, Springer, 2001.
- [POP98] D. Popescu, I. Zeljkovic, Kalman Filtering of Colored Noise for Speech Enhancement, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 2, pp. 997-1000, May 1998
- [RIS04] B. Ristic, S. Arulampalam, N. Gordon, Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications, Artech House, 2004.
- [SAY98] B. Sayyarodsari, B. Hassibi, J. How, A. Carrier, An  $H_\infty$ -Optimal Alternative to the FxLMS Algorithm, proc. of IEEE-ACC, vol. 2, pp. 1116-1121, 1998.
- [SER90] X. Serra, J. Smith III, Spectral Modeling Synthesis: A Sound System Based on a Deterministic plus Stochastic Decomposition, Computer Music Journal, vol. 14, n°4, 1990.
- [SHA92] U. Shaked and Y. Theodor,  $H_\infty$ -Optimal Estimation: a Tutorial, proc. of IEEE-CDC, vol. 2, pp. 2278-2286, 1992.
- [SHE95] X. Shen, Discrete  $H_\infty$  Filter Design With Application to Speech Enhancement, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 2, pp. 1504-1507, May 1995.

- [SHE99] X. Shen, L. Deng, A Dynamic System Approach to Speech Enhancement Using the  $H_\infty$  Filtering Algorithm, *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 7, n°4, pp. 391-399, July 1999.
- [SHI03] Y. Shi, E. Chang, Spectrogram-Based Formant Tracking via Particle Filters, *proc. of IEEE-ICASSP*, vol. 1, pp. 168-171, April 2003.
- [SHI04] H.-C. Shin, A. H. Sayed, W.-J. Song, Variable Step-Size NLMS and Affine Projection Algorithms, *IEEE Trans. on Signal Processing Letters*, vol. 11, n°2, pp. 132-135, February 2004.
- [STO95] P. Stoica, M. Cedervall, T. Soderström, Adaptive Instrumental Variable Method for Robust Direction-of-Arrival Estimation, *IEE proc. Radar Sonar and Navigation*, vol. 14, n°2, pp. 45-53, April 1995.
- [STY01] Y. Stylianou, Applying the Harmonic Plus Noise Model in Concatenative Speech Synthesis, *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 9, n°1, pp. 21-29, January 2001.
- [SWA94] A. Swami, Multiplicative Noise Models: Parameter Estimation Using Cumulants, *Signal Processing*, vol. 36, n°3, pp. 355-373, April 1994.
- [SWA99] A. Swami, Non-Linear Least Squares Estimation for Harmonics in Multiplicative and Additive Noise, *Signal Processing*, vol. 78, n°1, pp. 43-60, October 1999.
- [THE94] Y. Theodor, U. Shaked, Game Theory Approach to  $H_\infty$ -Optimal Discrete-Time Fixed-Point and Fixed-Lag Smoothing, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, n°9, pp. 1944-1948, September 1994.
- [THE92] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall, 1992.
- [TOD78] E. Todini, Mutually Interactive State/Parameter Estimation (MISP) –Application of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics and Water Resources, *proc. of AGU Chapman Conf., Univ. of Pittsburg*, May 1978.
- [TRE79] J. R. Treichler, Transient and Convergent Behavior of the Adaptive Line Enhancer, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 27, n°1, pp. 53-62, February 1979.
- [VER97] T. Verma, S. Levine, T. Meng, Transient Modeling Synthesis: a Flexible Analysis/Synthesis Tool for Transient Signals, *proc. of the ICMC*, pp. 164-167, 1997.

- [VER02] J. Vermaak, C. Andrieu, A. Doucet, S. J. Godsill, Particle Methods for Bayesian Modeling and Enhancement of Speech Signals, *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 10, n°3, pp. 173-185, March 2002.
- [VIK00] H. Vikalo, B. Hassibi, T. Kailath, Mixed  $H_2/H_\infty$  Optimal Signal Reconstruction in Noisy Filter Banks, *proc. of IEEE-ICASSP*, vol. 1, pp. 500-503, June 2000.
- [WAN01] E. A. Wan, R. van der Merwe, The Unscented Kalman Filter, Chapter 7 in *Kalman filtering and Neural Networks*, S. Haykin, ed., John Wiley, 2001.
- [WAN02] F. Wang, V. Balakrishnan, Robust Kalman Filters for Linear Time-Varying Systems with Stochastic Parametric Uncertainties, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, n°4, pp. 803-813, April 2002.
- [WON67] K. Y. Wong, E. Polak, Identification of Linear Discrete Time Systems Using the Instrumental Variable Method, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 12, n°6, pp. 707-718, December 1967.
- [WU97] W-R. Wu, P-C Chen, Adaptive AR Modeling in White Gaussian Noise, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, n°5, pp. 1184-1191, May 1997.
- [XIE94] L. Xie, Y. C. Soh, C. E. de Souza, Robust Kalman Filtering for Uncertain Discrete-Time Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, n°6, pp. 1310-1314, June 1994.
- [YAE92] I. Yaesh, U. Shaked, Game Theory Approach to Optimal Linear State Estimation and Its Relation to the Minimum  $H_\infty$ -Norm Estimation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, n°6, pp. 828-831, June 1992.
- [YOS81] T. Yoshimura, K. Konishi, T. Soeda, An Extended Kalman Filter for Linear Discrete Time Systems with Unknown Parameters, *Automatica*, vol. 17, n°4, pp. 657-660, July 1981.
- [YOU70] P.-C. Young, An Instrumental Variable Method for Real-Time Identification of Noisy Process, *Automatica*, vol. 6, n°2, pp. 271-287, March 1970.
- [ZAM81] G. Zames, Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-26, n°2, pp. 301-320, April 1981.
- [ZHA92] H.-M. Zhang, P. Duhamel, On the Methods for Solving Yule-Walker Equations, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, n°12, pp. 2987-3000, December 1992.

- [ZHA00] Y. Zhang, C. Wen, Y. C. Soh, Unbiased LMS Filtering in the Presence of White Measurement Noise with Unknown Power, IEEE Trans. on Circuits and Systems-II: Analog and Digital signal Processing, vol. 47, n°9, pp. 968-972, September 2000.
- [ZHE98] W. X. Zheng, Unbiased Identification of Autoregressive Signals Observed in Colored Noise, proc. of IEEE-ICASSP, vol. 4, pp. 2329-2332, May 1998.
- [ZHE00] W. X. Zheng, Autoregressive Parameter Estimation from Noisy Data, IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital signal processing, vol. 47, n°1, pp. 71-75, January 2000.
- [ZYG00] J. Zygierewicz, Analysis of Sleep Spindles and Model of Their Generation, PhD dissertation, Institute of Experimental Physics Department of Physics, Warsaw University, April 2000.



**Résumé** - Dans ce mémoire, nous développons des approches paramétriques de traitement du signal fondées sur des modèles *a priori*. Nous proposons de nouveaux algorithmes d'estimation des paramètres dans lesquels les hypothèses sont compatibles avec des cas réels d'application.

Dans la première partie, nous nous intéressons au modèle AutoRégressif (AR). Nous proposons une nouvelle méthode exploitant les techniques dites des variables instrumentales et utilisant deux filtres de Kalman interactifs. Puis, pour nous affranchir des hypothèses de gaussianité nécessaires à la mise en œuvre d'un filtre de Kalman, nous nous penchons ensuite sur les approches d'estimation  $H_\infty$ . Nous proposons notamment un nouvel algorithme d'estimation duale du signal et des paramètres. Nous appliquons les méthodes proposées dans le contexte du rehaussement du signal de parole.

Dans la seconde partie, nous portons notre intérêt sur les modèles sinusoïdaux. Nous étudions notamment les modèles consistant à moduler des sinusoïdes par des processus AR. Nous proposons une méthode d'estimation des paramètres combinant une analyse spectrale de type ESPRIT et un algorithme EM. Néanmoins, le suivi des fréquences d'un modèle sinusoïdal est un problème non linéaire. Pour cette raison, nous abordons donc les techniques de filtrage particulière comme alternative au filtre de Kalman étendu. Les algorithmes proposés sont appliqués dans les contextes de l'analyse de signaux EEG et du suivi de la fréquence fondamentale d'un signal harmonique.

**Mot clés** - variables instrumentales, filtrage de Kalman, filtrage  $H_\infty$ , filtrage particulière, algorithme ESPRIT, algorithme EM, rehaussement du signal de parole, analyse de fuseau de sommeil.

**Abstract** - This dissertation deals with the development of parametric approaches for signal processing based on *a priori* models. To estimate the parameters, we propose new algorithms using assumptions that hold in real cases.

In the first part, when an autoregressive (AR) model is considered, we propose a new method exploiting the so-called instrumental variable techniques and using two interacting Kalman filters. However, carrying out a Kalman filtering requires restricting Gaussian assumptions. To avoid them, we investigate  $H_\infty$  techniques and propose a new algorithm for the dual estimation of the signal and the parameters. The proposed methods are tested in the context of speech enhancement.

In the second part, we focus our attention on sinusoidal models. More particularly, we consider sinusoids modulated with AR processes. To estimate the model parameters, we present a new method based on an ESPRIT spectral analysis technique combined with an EM algorithm. However, tracking the frequencies of a sinusoidal model is a non linear problem. For this reason, we investigate particle filters as an alternative to the extended Kalman filter. The proposed algorithms are exercised in the framework of EEG sleep spindle analysis and fundamental frequency tracking of a harmonic signal.

**Key words** - instrumental variables, Kalman filtering,  $H_\infty$  filtering, particle filtering, ESPRIT algorithm, EM algorithm, speech enhancement, EEG-sleep spindle analysis.