

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE

Par **Daniel Gonçalves**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Étude de différents problèmes de partition de graphes

Soutenue le : 17 Novembre 2006

Après avis des rapporteurs :

Sylvain Gravier Chargé de recherche HDR

Michel Habib .. Professeur

Devant la commission d'examen composée de :

Éric Sopena ... Professeur Président

Sylvain Gravier Chargé de recherche HDR Rapporteur

Michel Habib .. Professeur Rapporteur

Adrian Bondy . Professeur Examineur

André Raspaud Professeur Examineur

Étude de différents problèmes de partition de graphes

Résumé : Dans ce mémoire, on s'intéresse à différentes notions de partition de graphes telles que l'arboricité ou la planarité externe. On se concentre sur la famille des graphes planaires. On montre notamment que tout graphe planaire est l'union de :

- deux graphes planaires externes.
- quatre forêts de chenilles.
- trois forêts dont une est de degré maximum au plus quatre.

On donne également quelques résultats de complexité concernant des problèmes de décision liés à différents types d'arboricités. On définit enfin de nouvelles notions d'arboricité telles que l'arboricité mixte ou l'arboricité circulaire.

Discipline : Informatique

Mots-Clefs :

théorie des graphes
graphes planaires
partitionnement
graphes planaires externes
arboricité

LaBRI,
Université Bordeaux 1,
351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex (FRANCE).

On some edge partitioning problems in graphs

Abstract : In this thesis, we consider some edge partitioning problems, like the arboricity or the outerthickness of graphs. We focus on planar graphs. In particular, we prove that any planar graph is the union of :

- two outerplanar graphs.
- four caterpillar forests.
- three forests, one of which has maximum degree at most four.

We also provide some complexity results concerning decision problems related to arboricity. Finally, we define new notions of arboricity like heterogeneous arboricity or circular arboricity.

Discipline : Computer Science

Keywords :

graph theory
planar graphs
partitioning
outerplanar graphs
arboricity

LaBRI,
Université Bordeaux 1,
351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex (FRANCE).

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à mon directeur de thèse, André Raspaud. Il m'a largement fait profiter de son expérience et de son érudition en théorie des graphes. De plus, il a su créer au sein de l'équipe Graphes et Applications du LaBRI, un environnement de travail riche et dynamique. Son dynamisme et son enthousiasme communicatif ont été une réelle source de motivation. Je lui suis aussi grandement reconnaissant pour ses qualités humaines. Il a de nombreuses fois fait preuve d'une grande patience à mon égard. Mais il a surtout été d'un soutien sans faille lors des différentes difficultés que j'ai rencontrées au long de ces années.

Je tiens à remercier chaleureusement Sylvain Gravier et Michel Habib pour m'avoir fait l'honneur de lire attentivement mon mémoire. Leurs commentaires ont été très enrichissants et je tiens à exprimer ma gratitude pour l'intérêt qu'ils ont porté à l'égard de mon travail.

Je remercie Éric Sopena d'avoir accepté de présider mon jury, ainsi qu'Adrian Bondy pour avoir pris part à ce jury.

Je remercie aussi grandement Jean-Luc Fouquet, Denise Amar et Éric Sopena pour leur aide précieuse lors de la rédaction de ce mémoire.

Je tiens également à remercier :

- Mickaël, Pascal, Alexandre, Jérémie, Arnaud L. et Louis pour leur amitié et pour la remarquable ambiance de travail qu'ils ont tous contribué à créer. Leur compagnie lors des différentes missions, ainsi que la compagnie des plus anciens, André, Yon, Arnaud P. et Fabrice, ont toujours fait de ces missions des moments remarquables.
- Pierre, Sylvain, Alexis, Émilie et Amélie pour avoir fait de Bordeaux une ville d'accueil fort agréable.
- Ma famille et plus particulièrement mes parents et ma soeur pour m'avoir soutenu et épaulé durant toutes mes études.

Enfin je remercie Agathe pour sa patience et son amour.

Introduction

Le développement de la théorie des graphes doit beaucoup au problème des quatre couleurs. En effet ce problème de 1852, a été la source de très nombreux travaux de théorie des graphes et a ainsi permis l'émergence de ce domaine de recherche. D'ailleurs, bien que ce problème ait été résolu en 1976, il reste la motivation première de plusieurs travaux récents. En effet, les preuves données depuis celle de K. Appel et W. Haken en 1976 sont techniquement difficiles et de nombreux chercheurs souhaiteraient en avoir une plus simple. Aujourd'hui, la théorie des graphes n'est plus la chasse gardée des mathématiciens. En effet, dans la seconde moitié du XX^{ème} siècle, avec le développement de l'informatique, on a commencé à utiliser les graphes pour modéliser différents problèmes. Ces problèmes vont de la gestion des flux dans des réseaux de distribution, au calcul de plus courts chemins dans des réseaux de communication, en passant par la conception de circuits intégrés.

Dans ces différents problèmes, la notion de graphe planaire reste pertinente puisque par exemple, les graphes modélisant les réseaux routiers ou les circuits intégrés sont des graphes planaires.

Il est intéressant de constater que le problème de 4-coloration d'un graphe planaire G est équivalent au problème de partition de ce graphe ($E(G) = E_1 \cup E_2$) en deux graphes bipartis ($G[E_1]$ et $G[E_2]$). De même, en ce qui concerne l'utilisation des graphes en informatique, la partition d'un graphe en plusieurs sous-graphes peut se révéler très utile pour la conception d'algorithmes performants. En effet, une approche souvent utilisée en algorithmique est l'approche «diviser pour régner». Elle consiste à diviser une instance du problème que l'on cherche à résoudre en plusieurs instances «plus petites», à trouver une solution pour chacune de ces sous-instances, puis à combiner les solutions obtenues pour construire une solution de l'instance de départ. En algorithmique des graphes, ces instances «plus petites» sont souvent les graphes issus d'une partition de l'instance de départ.

Cette thèse porte sur différents problèmes de partition des graphes planaires.

La planarité externe. La planarité externe d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -partition de $E(G)$ en E_1, \dots, E_k où les graphes $G[E_i]$ induits par les ensembles E_i sont des graphes planaires externes. En 1971, G. Chartrand, D. Geller et S. Hedetniemi ont conjecturé dans [CGH71] que les graphes planaires sont de planarité externe au plus deux. On donne dans cette thèse une preuve de cette conjecture, ainsi que quelques résultats démontrant l'optimalité de ce résultat. On indique également quelles sont les conséquences de ce résultat dans d'autres problématiques de théorie des graphes et enfin on propose une généralisation de ce résultat à d'autres surfaces que le plan.

L'arboricité des graphes. L'arboricité d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -partition de $E(G)$ en E_1, \dots, E_k où les graphes $G[E_i]$ induits par les ensembles E_i sont des forêts. Nash-Williams a donné dans [NW64] une formule permettant de calculer cet invariant pour un graphe donné. On s'intéresse en fait à des variantes de cette notion dans lesquelles on impose que les forêts $G[E_i]$ soient par exemple des forêts d'étoiles ou des forêts de chenilles. On donne dans cette thèse plusieurs bornes concernant ces différents types d'arboricité pour différentes familles de graphes planaires. On prouve en particulier deux conjectures récentes : tout d'abord, la conjecture de Y. Roditty, B. Shoham et R. Yuster [RSY01, Cam03] affirmant que l'arboricité chenille des graphes planaires est au plus quatre, et ensuite la conjecture de J. Balogh, M. Kocbol, A. Pluhár et X. Yu [BKPY05] affirmant que les graphes planaires sont décomposables en deux forêts et un graphe de degré maximum au plus quatre. On donne également quelques résultats de complexité concernant différents types d'arboricité pour les graphes planaires de maille bornée. Certains de ces résultats affinent des résultats de NP-complétude déjà connus. On proposera finalement différents problèmes concernant des notions plus « fines » d'arboricité, l'arboricité mixte et l'arboricité circulaire.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres. On donne tout d'abord quelques définitions et notations de bases dans le Chapitre 1. Les Chapitre 2 et 3 sont eux respectivement dédiés à l'étude de la planarité externe et à l'étude de différentes notions d'arboricité dans les graphes planaires.

Table des matières

1	Préliminaires	11
1.1	Éléments de théorie des graphes	11
1.2	Quelques familles de graphes	12
1.3	Les graphes planaires	13
1.4	Quelques notions de coloration	16
2	Partition des graphes planaires par deux graphes planaires externes	19
2.1	Introduction	19
2.2	Les graphes planaires externes	22
2.3	Les triangulations 4-connexes	26
2.4	Partition des triangulations	54
2.5	Optimalité	60
2.6	Conclusion	62
3	Étude de différentes notions d'arboricité de graphe	67
3.1	Introduction	68
3.1.1	Les k - d -colorations	73
3.2	Arboricité étoile	74
3.2.1	NP-complétude de 2-ARBORICITÉ-ÉTOILE	76
3.2.2	NP-complétude de 3-ARBORICITÉ-ÉTOILE	80
3.2.3	NP-complétude de 4-ARBORICITÉ-ÉTOILE	84
3.3	Arboricité intérieurement 1-bornée	92
3.3.1	NP-complétude de 2-ARB-INT-1-BORNÉE	94
3.3.2	NP-complétude de 3-ARB-INT- d -BORNÉE, pour $d \geq 1$	98

3.3.3	Degré moyen maximum et preuves par déchargement	101
3.3.4	Les graphes planaires de maille $g \geq 14$	103
3.4	Arboricité chenille	107
3.4.1	L' α -décomposition des triangulations	109
3.4.2	Les graphes planaires	111
3.4.3	NP-complétude de 2-ARB-INT- d -BORNÉE, pour $d \geq 2$	116
3.4.4	Les graphes planaires de maille $g \geq 6$	119
3.4.5	Les graphes planaires de maille $g \geq 10$	120
3.5	Arboricité intérieurement 3-bornée	123
3.5.1	Les graphes planaires de maille $g \geq 5$	123
3.6	Arboricité T -exclue	125
3.6.1	Les 2-arbres	127
3.6.2	Les graphes planaires bipartis	128
3.7	Arboricité mixte	129
3.7.1	Les graphes planaires	134
3.7.2	Les graphes planaires de maille $g \geq 8$	138
3.8	Arboricité circulaire	139
	Conclusion	143
	Bibliographie	152

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

1.1	Éléments de théorie des graphes	11
1.2	Quelques familles de graphes	12
1.3	Les graphes planaires	13
1.4	Quelques notions de coloration	16

On rappelle dans ce chapitre quelques notions de théorie des graphes nécessaires à la compréhension du texte. Pour les notions non-définies dans ce chapitre voir [Ber63].

1.1 Éléments de théorie des graphes

Un **graphe** G est un couple d'ensembles $(V(G), E(G))$. Les éléments de $V(G)$ sont les **sommets** du graphe. Les éléments de $E(G)$ sont les **arêtes** du graphe. Une **arête** est une paire d'éléments de $V(G)$. Un graphe G est dit **fini** si l'ensemble $V(G)$ est fini. Par la suite, on ne considère que des graphes finis. On note uv l'arête $\{u, v\}$. Les sommets u et v sont appelés les **extrémités** de l'arête uv . L'arête uv est **incidente** aux sommets u et v . Deux sommets u et v sont dits **adjacents**, s'il existe une arête uv . Deux arêtes ayant une extrémité commune sont dites **adjacentes**. Le **voisinage** $N_G(v)$ du sommet v est l'ensemble des sommets adjacents au sommet v dans le graphe G . On dit d'un sommet u que c'est un **voisin** de v si $u \in N_G(v)$. Le **degré** d'un sommet u de G , noté $\deg_G(u)$, est le nombre d'éléments de $N_G(u)$. Le **degré maximum** $\Delta(G)$ d'un graphe G est égal au maximum des degrés des sommets de G : $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg_G(v)$. Le **degré minimum** $\delta(G)$ de G est égal au minimum des degrés des sommets de G : $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg_G(v)$.

Un **sous-graphe** $H = (V(H), E(H))$ du graphe $G = (V(G), E(G))$ est un graphe tel que $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. H étant un graphe, pour toute arête $uv \in E(H)$ on a $u \in V(H)$ et $v \in V(H)$. La notation $H \subseteq G$ indique que H est un sous-graphe de G . Pour $X \subseteq V(G)$, le **sous-graphe induit** $G[X]$ de G est le graphe dont l'ensemble des sommets est X et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans X . De même, pour $Y \subseteq E(G)$ le sous-graphe induit $G[Y]$ de G est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G)$ et dont l'ensemble des arêtes est Y . Pour $S \subseteq V(G)$ (resp. $S \subseteq E(G)$), $G \setminus S$ est le sous-graphe induit $G[V(G) \setminus S]$ (resp. $G[E(G) \setminus S]$). Un **homomorphisme** de H dans G est une application $f : V(H) \rightarrow V(G)$ telle que si $uv \in E(H)$ alors $f(u)f(v) \in E(G)$. Deux graphes H et G sont dits **isomorphes** s'il existe un homomorphisme bijectif de H dans G . Étant donné deux graphes H et G , le graphe G est dit **H -exclu** si aucun de ses sous-graphes n'est isomorphe à H .

Deux sommets v_1 et v_k sont dits **reliés** si $v_1 = v_k$ ou si il existe une suite de sommets v_1, \dots, v_k telle que pour tout $i \in [1, k-1]$, les sommets v_i et v_{i+1} sont adjacents. Une **composante connexe** de G est le graphe induit par une classe d'équivalence de la relation relié. Un graphe est **connexe** s'il ne contient qu'une seule composante connexe. Un graphe connexe est dit **k -connexe** s'il faut supprimer au moins k sommets pour le rendre non-connexe. Une **composante k -connexe** de G est un sous-graphe induit de G qui est k -connexe et maximum en sommets. Un **sommet d'articulation** (resp. un **isthme**) du graphe G est un sommet (resp. une arête) dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes de G .

1.2 Quelques familles de graphes

Un **stable** est un graphe sans arêtes. Le **graphe complet** à k sommets, K_k , est le graphe à k sommets ayant un nombre maximum d'arêtes. Le **graphe biparti complet** $K_{p,q}$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(K_{p,q}) = \{a_i \mid 1 \leq i \leq p\} \cup \{b_j \mid 1 \leq j \leq q\}$ et où pour tout couple (i, j) , tel que $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, il y a une arête $a_i b_j$. Un graphe est dit **k -régulier** si tous ses sommets sont de degré k . Un graphe dont tout sous-graphe contient un sommet de degré au plus k est dit **k -dégénéré**. Une **chaîne** est une séquence $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ d'arêtes de G telle que chaque arête de la séquence ait une extrémité en commun avec l'arête précédente, et l'autre extrémité en commun avec l'arête suivante. Le nombre d'arêtes de la séquence est la longueur de la chaîne μ . Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**; une chaîne qui ne rencontre pas deux fois le même sommet est dite **élémentaire**. Un **cycle** est une chaîne simple dont le sommet initial et le sommet terminal coïncident. Un cycle est dit **élémentaire** si en parcourant le cycle, on ne rencontre qu'une fois le même sommet (excepté le sommet initial qui coïncide avec le sommet terminal). Par la suite, on ne considère que des **chaînes élémentaires** et que des **cycles élémentaires**. Ces chaînes et ces cycles

correspondent à des graphes. On note P_k (resp. C_k) ou $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ le graphe défini par $V(P_k) = \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ (resp. $V(C_k) = \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$) et $E(P_k) = \{v_i v_{i-1} \mid 1 \leq i < k\}$ (resp. $E(C_k) = \{v_i v_j \mid j - i \equiv 1 \pmod{k}\}$). Étant donné un cycle C , une **corde** de C est une arête reliant deux sommets non-consécutifs du cycle C . Un graphe G est dit **triangulé** si tout cycle $C \subseteq G$ de longueur $l \geq 4$ a une corde. La **maille** d'un graphe G ayant un cycle est la longueur du plus petit cycle de G . Une **forêt** est un graphe qui ne contient pas de cycle. Un **arbre** est un graphe connexe ne contenant pas de cycles (*i.e.* une forêt connexe). Dans une forêt, une **feuille** est un sommet de degré un. Pour un entier $k > 0$, on définit les **k -arbres** de la façon suivante. Le graphe complet K_k est un k -arbre. Si $T = (V, E)$ est un k -arbre, C un sous-graphe de T isomorphe à K_k et $x \notin V$, alors $T' = (V \cup \{x\}, E \cup \{xx_i \mid x_i \in V(C)\})$ est un k -arbre. On remarque que les définitions d'arbres et de 1-arbres sont équivalentes. Un **k -arbre partiel** est un sous-graphe d'un k -arbre. La **largeur arborescente** est le plus petit entier k tel que G soit un k -arbre partiel.

On **subdivise** une arête uv d'un graphe G lorsqu'on supprime uv et que l'on rajoute un nouveau sommet x et les arêtes ux et vx . Une **subdivision** de G est un graphe obtenu à partir de G par une série de subdivisions d'arêtes. On **contracte** une arête uv de G lorsque on supprime uv et que l'on identifie les deux sommets u et v . Le sommet issu de cette identification a pour voisinage l'ensemble $N_G(u) \cup N_G(v) \setminus \{u, v\}$. Un **mineur** de G est un graphe obtenu à partir de G par une série de zéro, une ou plusieurs suppressions de sommets, suppressions d'arêtes et ou de contraction d'arêtes.

1.3 Les graphes planaires

Un graphe est **planaire** s'il est possible de le représenter sur un plan de telle sorte que les sommets soient des points distincts du plan, les arêtes des courbes simples et que deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités. Une telle représentation d'un graphe planaire G est une **représentation planaire** de G . Par la suite, lorsque l'on considérera un graphe planaire G , on fera aussi implicitement référence à une certaine représentation planaire de G . Cette représentation de G sera généralement schématisée dans une figure. Une **face** d'un graphe planaire est une région du plan délimitée par des arêtes telle que deux sommets arbitraires de cette région peuvent toujours être reliés par une courbe ne rencontrant ni sommet, ni arête. On dit des arêtes délimitant une face f et de la face f qu'elles sont **incidentes**. De même, un sommet v et une face f sont **incidentes** si v est l'extrémité d'une arête e incidente à la face f . L'ensemble des faces du graphe planaire G se note $F(G)$. Une **triangulation** T est un graphe planaire dont toutes les faces sont des **triangles**, c'est à dire des faces délimitées par trois arêtes.

L'un des premiers prérequis à l'étude des graphes planaires est la formule d'Euler (*c.f.* page 85 de [MT01]).

Théorème 1 (Formule d'Euler) *Pour tout graphe planaire connexe G ayant au moins un sommet on a :*

$$|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$$

Dans une triangulation T chaque arête est incidente à deux faces et chaque face est incidente à trois arêtes, on a donc $2|E(T)| = 3|F(T)|$. Ceci implique que tout graphe planaire G a au plus $3|V(G)| - 6$ arêtes. De plus, tout graphe G vérifiant l'égalité suivante,

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)| \tag{1}$$

tout graphe planaire contient au moins un sommet de degré au plus 5. Les graphes planaires sont donc 5-dégénérés.

Un autre prérequis à l'étude des graphes planaires est le Théorème de Jordan (*c.f.* page 25 de [MT01]). Ce théorème apparemment simple, nécessite cependant une preuve assez complexe.

Théorème 2 (Théorème de Jordan) *Soit C une courbe simple fermée du plan. Cette courbe partage le plan en deux régions connexes, l'intérieur et l'extérieur de C , dont C est la frontière.*

Ceci implique que dans une représentation planaire d'un graphe planaire il y a exactement une face non-bornée, on l'appelle la **face externe**. Les **faces internes** d'un graphe planaire sont toutes les faces autres que la face externe. Un **sommet externe** (resp. un **côté**) est un sommet (resp. une arête) incident à la face externe. Le **bord** d'un graphe planaire est le sous-graphe dont les sommets sont les sommets externes et dont les arêtes sont les côtés de ce graphe. Une **triangulation partielle** T est un graphe planaire dont toutes les faces internes sont des triangles. On dit d'un graphe qu'il est **planaire externe** (ou **planaire extérieur**) s'il admet une représentation planaire dans laquelle tous les sommets sont des sommets externes. Une telle représentation d'un graphe planaire externe G est une **représentation planaire externe** de G . Un graphe planaire externe G ayant au moins trois sommets et ayant un maximum d'arêtes a donc sa face externe incidente à $|V(G)|$ arêtes, et les faces internes incidentes à trois arêtes. Pour un tel graphe G on a donc $2|E(G)| = |V(G)| + 3(|F(G)| - 1)$. En utilisant la formule d'Euler, on en déduit qu'un graphe planaire externe G a au plus $2|V(G)| - 3$ arêtes.

Toute représentation planaire externe d'un graphe planaire externe G vérifie les trois points suivants :

- Un isthme uv de G est nécessairement un côté de G . En effet, si la seule face incidente à uv était une face interne, l'un des sommets u ou v ne serait pas un sommet externe, contredisant la définition de représentation planaire externe.
- Une arête uv de G telle qu'il n'existe pas deux chaînes distinctes non triviales (*i.e.* autres que (u, v)) reliant les sommets u et v est nécessairement un côté de G . On a vu

que c'est vrai lorsque uv est un isthme, on considère donc que uv n'est pas un isthme et donc qu'elle est incidente à deux faces. Si l'arête uv n'était pas un côté, elle serait donc incidente à deux faces internes. Si ces deux faces n'ont que les sommets u et v en commun, on trouverait dans leurs contours deux chaînes distinctes non triviales reliant les sommets u et v . Si ces deux faces ont un troisième sommet w en commun, alors l'un des sommets u , v ou w est interne, contredisant la définition de représentation planaire externe.

- Une arête uv de G telle qu'il existe deux chaînes distinctes non triviales reliant les sommets u et v n'est pas un côté de G . Si l'arête uv était un côté l'une des chaînes reliant u et v serait à l'intérieur du cycle formé par l'autre chaîne et par l'arête uv . La première chaîne n'étant pas triviale, l'un de ses sommets serait à l'intérieur du cycle et ne serait donc pas un sommet externe. Ceci contredirait la définition de représentation planaire externe.

Ceci implique les observations suivantes :

Observation 1.3.1 *Quelle que soit la représentation planaire externe de G considérée, l'ensemble des côtés de G est le même.*

Par la suite, si un graphe planaire externe G n'est pas représenté de façon planaire externe, on définira tout de même l'ensemble de ses côtés en fonction d'une représentation planaire externe de G .

Observation 1.3.2 *Dans toutes les représentations planaires externes d'un graphe planaire externe triangulé G , les faces internes sont des triangles.*

En effet, quelque soit la représentation planaire externe de G , les cotés et les isthmes sont fixés. La Formule d'Euler implique donc que si dans une des représentations planaires externes de G toutes les faces internes sont des triangles, il en est de même dans toutes les représentations planaires externes de G .

Le Théorème de Jordan permet entre autre de caractériser les graphes planaires et les graphes planaires externes en terme de mineur. En effet, Wagner [Wag37] a montré qu'un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas K_5 ou $K_{3,3}$ comme mineur. De même, Chartrand et Harary [CH67] ont montré qu'un graphe est planaire externe si et seulement s'il ne contient pas K_4 ou $K_{2,3}$ comme mineur.

Le Théorème de Jordan permet aussi de définir la notion de cycle séparant. Dans un graphe planaire un **k -cycle séparant** est un cycle de longueur k dont les sommets sont reliés à au moins un sommet dans chacune des deux régions qu'il délimite. On remarque que si dans une triangulation T on a un 3-cycle séparant C , le graphe T_{int} , induit par les sommets de C et les sommets à l'intérieur de C , et le graphe T_{ext} , induit par les sommets de C et les sommets à l'extérieur de C , sont tous deux des triangulations. L'absence de 3-cycles séparants est

caractéristique des triangulations planaires 4-connexes. En effet, les triangulations 4-connexes sont exactement les triangulations qui n'ont pas de 3-cycles séparants.

1.4 Quelques notions de coloration

Une **coloration** des sommets (resp. des arêtes) d'un graphe G est une application f de $V(G)$ (resp. $E(G)$) dans un ensemble, appelé ensemble des couleurs. On dit de $f(x)$ que c'est la couleur de l'élément x . Si l'image de la coloration a k éléments, on prend généralement l'ensemble $\{1, \dots, k\} \subseteq \mathbb{N}$ comme ensemble des couleurs. Une **k -coloration** des sommets (resp. des arêtes) de G est une coloration utilisant au plus k couleurs.

Une **coloration propre des sommets** (resp. **des arêtes**) d'un graphe G est une coloration des sommets (resp. des arêtes) telle que deux sommets adjacents (resp. arêtes adjacentes) ont des couleurs distinctes. Le **nombre chromatique** $\chi(G)$ du graphe G est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration propre de ses sommets. L'**indice chromatique** $\chi'(G)$ du graphe G est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration propre de ses arêtes.

Lorsque l'on considère les ensembles d'éléments ayant la même couleur, on constate qu'une k -coloration des sommets (resp. arêtes) d'un graphe G équivaut à une partition de l'ensemble $V(G)$ (resp. $E(G)$) en k sous-ensembles, V_1, \dots, V_k (resp. E_1, \dots, E_k). De nombreux problèmes de coloration sont définis par une contrainte sur les graphes induits $G[V_i]$ (resp. $G[E_i]$) par les sommets (resp. les arêtes) d'une même couleur. Par exemple, une k -coloration propre des sommets (resp. des arêtes) d'un graphe G est équivalente à une partition de $V(G)$ (resp. $E(G)$) en k sous-ensembles, V_1, \dots, V_k (resp. E_1, \dots, E_k), tels que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ le graphe $G[V_i]$ (resp. $G[E_i]$) est un stable (resp. un graphe de degré maximum au plus un). Une **k -partition** d'un graphe G est un ensemble de k sous-graphes de G , H_1, \dots, H_k , tels que $V(H_i) = V(G)$ pour tout $i \leq k$, tels que $E(G) = \cup_{1 \leq i \leq k} E(H_i)$ et tels que $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ pour toute paire $\{i, j\} \subseteq [1, \dots, k]$. On dit d'un graphe G qu'il est **k -partitionné** par les sous-graphes H_1, \dots, H_k de G si ces graphes forment une k -partition de G . On dit d'un graphe G qu'il est **k -partitionnable** par des graphes ayant la propriété \mathcal{P} si G admet une k -partition en k sous-graphes H_1, \dots, H_k ayant chacun la propriété \mathcal{P} . Lorsque la valeur de l'entier k est inconnue ou implicite on parle de **partitions** de graphes et de graphes **partitionnés** ou **partitionnables**. On définit les invariants de graphe suivants :

- **L'arboricité** $a(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G soit partitionnable en k forêts.
- **La planarité** $\theta(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G soit partitionnable en k graphes planaires.

- **La planarité externe** $\theta_e(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G soit partitionnable en k graphes planaires externes.

Ces trois invariants sont aussi définissables en terme de couverture de graphes. Un graphe G est **couvert** (resp. **p -couvert**) par ses sous-graphes H_1, \dots, H_k si chacune des arêtes de G est dans au moins un (resp. p) de ces sous-graphes. Dans ce cas, les graphes H_1, \dots, H_k forment une **couverture** (resp. **p -couverture**) de G . On dit d'un graphe G qu'il est **couvrable** (resp. **p -couvrable**) par des graphes ayant la propriété \mathcal{P} si G admet une couverture (resp. une p -couverture) par k sous-graphes H_1, \dots, H_k ayant chacun la propriété \mathcal{P} . Une partition d'un graphe G est aussi une couverture de G . Les couvertures de graphes permettent cependant de définir des invariants qui ne sont pas définissables simplement en terme de partition de graphes. On verra par la suite plusieurs de ces invariants.

Chapitre 2

Partition des graphes planaires par deux graphes planaires externes

Sommaire

2.1	Introduction	19
2.2	Les graphes planaires externes	22
2.3	Les triangulations 4-connexes	26
2.4	Partition des triangulations	54
2.5	Optimalité	60
2.6	Conclusion	62

2.1 Introduction

En 1971, Chartrand, Geller et Hedetniemi [CGH71] ont défini les graphes ayant la **propriété** \mathcal{P}_m comme étant les graphes ne contenant pas de subdivision de K_{m+1} ou de $K_{\lfloor m/2 \rfloor + 1, \lfloor m/2 \rfloor + 1}$. Ces propriétés \mathcal{P}_m sont reliées au **nombre de Hajós** $h(G)$ d'un graphe G . Ce nombre est le plus grand entier k tel que G a un sous-graphe isomorphe à une subdivision de K_k . On remarque que les familles de graphes ayant la propriété $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ ou \mathcal{P}_4 sont respectivement, les stables, les forêts, les graphes planaires externes et les graphes planaires [Kur30, CH67]. Chartrand *et al.* ont ensuite proposé deux célèbres conjectures (le Problème 6.3 de [JT95]).

Conjecture 1 ((m,n)-conjecture) *Pour $m > n \geq 1$, tout graphe ayant la propriété \mathcal{P}_m admet une partition de ses sommets en $m - n + 1$ ensembles, telle que chacun de ces ensembles induit un graphe ayant la propriété \mathcal{P}_n .*

Il est facile de voir que cette conjecture est vraie pour $m \leq 4$, c'est-à-dire pour tout couple (m, n) tel que $1 \leq n < m \leq 4$. On distingue trois cas suivant la valeur de n :

- $n = 1$. Les graphes k -dégénérés étant $(k + 1)$ -coloriables (*i.e.* admettent une partition de leurs sommets en $(k + 1)$ sous-ensembles induisant chacun un stable), les forêts étant 1-dégénérées et les graphes planaires externes étant 2-dégénérés, la (m, n) -conjecture est vraie pour les couples $(2, 1)$ et $(3, 1)$. De plus, les graphes planaires étant 4-coloriables [AH77, AHK77], la conjecture est aussi vraie pour le couple $(4, 1)$.
- $n = 2$. Un graphe k -dégénéré admet aussi une partition de ses sommets en $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ ensembles V_i induisant chacun une forêt. En effet, si pour un sommet $v \in V(G)$ tel que $\deg(v) \leq k$ et tel que $V(G) \setminus \{v\}$ admet une partition en $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ ensembles V_i , avec $1 \leq i \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$, induisant chacun une forêt, alors un des ensembles V_i , disons V_1 , est tel que $|N_G(v) \cap V_1| \leq 1$. Le sommet v n'ayant qu'un voisin dans $G[V_1]$, le graphe induit par $V_1 \cup \{v\}$ est donc lui aussi une forêt. Les graphes planaires externes et les graphes planaires étant respectivement 2-dégénérés et 5-dégénérés, la (m, n) -conjecture est donc vraie pour les couples $(3, 2)$ et $(4, 2)$.
- $n = 3$. Chartrand *et al.* ont montré comment obtenir une partition des sommets d'un graphe planaire G en deux ensembles, V_1 et V_2 , induisant chacun un graphe planaire externe, $G[V_1]$ et $G[V_2]$. Pour cela on observe que les sommets externes d'un graphe planaire induisent un graphe planaire externe. On construit donc les ensembles V_1 et V_2 de la manière suivante. On met dans V_1 les sommets externes de G puis on supprime ces sommets ; les nouveaux sommets externes vont dans V_2 avant d'être supprimé, et on continue ainsi de suite. La (m, n) -conjecture est donc aussi vraie pour le couple $(4, 3)$.

La seconde conjecture de Chartrand *et al.* concerne les partitions d'arêtes.

Conjecture 2 ([m,n]-conjecture) *Pour $m > n > 1$, tout graphe ayant la propriété \mathcal{P}_m admet une partition de ses arêtes en $m - n + 1$ ensembles, telle que chacun de ces ensembles induit un graphe ayant la propriété \mathcal{P}_n .*

Nash-Williams [NW64] a montré le théorème suivant :

Théorème 3 (Nash-Williams) *Si $G = (V, E)$ est un graphe et $a(G)$ son arboricité alors :*

$$a(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{|E(H)|}{|V(H)| - 1} \right\rceil$$

le maximum étant pris parmi les sous-graphes H de G ayant au moins deux sommets.

Tout sous-graphe H d'un graphe planaire externe G (resp. un graphe planaire G) est lui aussi planaire externe (resp. planaire) et a donc au plus $2|V(G)| - 3$ arêtes (resp. au plus $3|V(G)| - 6$ arêtes). Ceci implique que l'arboricité des graphes planaires externes (resp. planaires) est donc au plus 2 (resp. 3). La [m,n]-conjecture est donc vraie pour le couple $[3, 2]$ (resp. $[4, 2]$).

Malheureusement, ces deux conjectures sont fausses en général. Jørgensen [Jør89] et Hanson et Toft [HT94] ont montré, par un argument probabiliste, que pour n fixé la (m, n) -conjecture est fausse pour presque tous les graphes. Ils utilisent pour cela les techniques utilisées par Erdős et Fajtlowicz [EF81] pour prouver que presque tous les graphes ayant s sommets ont un nombre de Hajós d'au plus $(2 + \epsilon)\sqrt{s}$. Dans [GKT00], Gutin, Kostochka et Toft montrent que la $[m, n]$ -conjecture est fausse quand $m > cn^2$, pour une certaine constante c . En fait, ils montrent que pour tout couple $[m, n]$ tel que $m > cn^2$, il existe un graphe G ayant la propriété \mathcal{P}_m tel que dans toute m -coloration de ses sommets ou de ses arêtes, l'un des sous-graphes induits par une classe de couleur contient une subdivision de K_{n+1} .

Dans son état de l'art [Woo90], Woodall suggère que ces conjectures sont peut-être vraies si l'on définit la propriété \mathcal{P}_m en terme de mineur plutôt qu'en terme de subdivision. On note cette propriété \mathcal{P}'_m . Pour $n = 1$, cette version de la (m, n) -conjecture est similaire à la conjecture de Hadwiger [Had43].

Conjecture 3 (Hadwiger) *Tout graphe ne contenant pas K_k comme mineur est $(k - 1)$ -coloriable.*

La conjecture de Hadwiger est vraie pour $k \leq 6$ et est ouverte pour $k > 6$ [Wag37, AH77, AHK77, RST93]. Les graphes ayant la propriété \mathcal{P}'_m ne contenant pas K_m comme mineur, la conjecture de Hadwiger dit que ces graphes sont $(m - 1)$ -coloriables (*i.e.* l'ensemble des sommets admet une $(m - 1)$ -partition en sous-ensembles induisant chacun un stable). La conjecture de Hadwiger implique donc la version «mineur» de la $(m, 1)$ -conjecture. La version «mineur» de la (m, n) -conjecture est toujours ouverte. Ce n'est pas le cas de la version «mineur» de la $[m, n]$ -conjecture. En effet, Gutin *et al.* montrent dans [GKT00] que cette version de la $[m, n]$ -conjecture est fausse en général.

Bien que la $[m, n]$ -conjecture soit fausse en général, il existe des couples $[m, n]$ pour lesquels elle reste ouverte. On montrera dans le reste de ce chapitre que la $[4, 3]$ -conjecture est vraie, c'est-à-dire que tout graphe planaire est partitionnable en deux graphes planaires externes. Différents travaux ont porté sur ce cas de la $[m, n]$ -conjecture. Dans [EMC88], Colbourn et El-Mallah montrent que tout graphe planaire peut être couvert par deux 3-arbres partiels. Kedlaya [Ked96] et Ding *et al.* [DOSV00] ont ensuite montré que tout graphe planaire peut être couvert par deux 2-arbres partiels. Dans leur article, Ding *et al.* montrent aussi que tout graphe planaire peut être couvert par deux graphes planaires externes et une forêt dont chaque composante connexe contient au plus 3 sommets. Dans [Hea91], Heath a même proposé une preuve de la $[4, 3]$ -conjecture mais celle-ci s'est finalement révélée incomplète. La preuve donnée dans ce chapitre ne vient pas compléter les travaux de Heath, elle a été produite indépendamment de ces travaux.

Tout graphe planaire étant contenu dans une triangulation et tout sous-graphe d'un graphe planaire externe étant planaire externe, on peut restreindre la $[4, 3]$ -conjecture aux triangulations. Il existe une famille de triangulations pour lesquelles la $[4, 3]$ -conjecture a une solution simple, ce sont les triangulations hamiltoniennes (*i.e.* ayant un cycle passant par tous les sommets). En effet, étant donné un cycle hamiltonien C , le graphe induit par les arêtes de C et les arêtes à l'intérieur de C (resp. à l'extérieur de C) est planaire externe. Cette couverture permet de construire différentes partitions puisque chaque arête de C peut être attribuée soit au premier soit au second graphe planaire externe. Dans [Whi31], Whitney a montré que toute triangulation 4-connexe contient un cycle hamiltonien. La $[4, 3]$ -conjecture est donc vraie pour les triangulations 4-connexes.

Dans ce chapitre, on donne un résultat plus fin pour les triangulations 4-connexes et on montre la $[4, 3]$ -conjecture pour toutes les triangulations. On note S le graphe formé par le cycle $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ et les cordes y_1y_2 , y_1y_3 et y_2y_3 (voir la Figure 1). Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant.

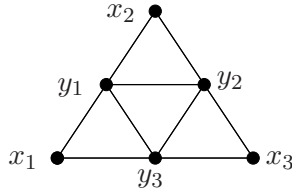


FIG. 1 – Le graphe S .

Théorème 4 *Toute triangulation T admet une partition en deux graphes planaires externes triangulés. De plus, si T est 4-connexe cette partition peut être telle que :*

- (1) *les représentations planaires de ces deux graphes, induites par celle de T , soient planaires externes, et telles que*
- (2) *ces deux graphes soient S -exclus (*i.e.* sans sous-graphe isomorphe à S).*

Dans la Section 2.2, on verra certaines propriétés des graphes planaires externes. On étudiera dans la Section 2.3 le cas des triangulations 4-connexes. Cette étude permettra ensuite, dans la Section 2.4, de prouver le Théorème 4. Dans la Section 2.5 on montrera en quoi le Théorème 4 est optimal, et on verra finalement en conclusion quelles sont les conséquences de ce théorème mais aussi quelles questions ce résultat soulève-t-il.

2.2 Les graphes planaires externes

Une **pousse** est un graphe planaire externe triangulé. Le lemme suivant en donne une définition équivalente.

Lemme 2.2.1 *L'ensemble des pousSES correspond à l'ensemble des graphes planaires externes ayant une représentation planaire externe dans laquelle toutes les faces internes sont des triangles.*

Preuve : Étant donnée une pousse G représentée de façon planaire externe, on observe que toutes les faces internes sont des triangles. En effet si G avait une face interne f bornée par un cycle C de longueur au moins 4, C aurait une corde. Dans ce cas, le graphe constitué par C et par la corde contiendrait un cycle avec au moins un sommets à l'intérieur, ce qui est impossible dans une représentation planaire externe.

À l'inverse, si on considère un graphe G ayant une représentation planaire externe dans laquelle toute face interne est un triangle, on observe que G est une pousse. Tout cycle $C \subseteq G$ de longueur $l \geq 4$ délimite une region du plan qui est l'union de quelques faces internes. Étant donné qu'il n'y a pas de sommets à l'intérieur de C et que les faces internes sont triangulaires, le cycle C a donc bien une corde. \square

On fait la différence entre un graphe et sa représentation dans le plan. Une pousse peut donc être représentée de façon non planaire externe. Dans toute représentation planaire externe d'un graphe G l'ensemble des cotés est le même. On étend donc naturellement la définition de côté à tous les graphes planaires externes, y compris ceux dont la représentation n'est pas planaire externe. Avant de partitionner les triangulations en deux pousSES, il est nécessaire d'étudier ces graphes. On prouve maintenant ces lemmes dont on aura besoin par la suite.

Lemme 2.2.2 *Soit une pousse A ayant c composantes connexes et un isthme e . Si l'on supprime l'isthme e de A , le graphe résultant, $A \setminus \{e\}$, est une pousse ayant $c + 1$ composantes connexes. De plus :*

- un côté (resp. un isthme) $f \neq e$ de A reste un côté (resp. un isthme) dans $A \setminus \{e\}$, et
- deux sommets non-reliés (i.e. appartenant à des composantes connexes distinctes) dans A restent non-reliés dans $A \setminus \{e\}$.

Preuve : La suppression d'un isthme ne change pas la taille des faces internes. Le graphe planaire externe $A \setminus \{e\}$ est donc triangulé. Les autres points du lemme sont faciles à vérifier. \square

Lemme 2.2.3 *Soit une pousse A ayant c composantes connexes et un sommet v de degré 2 dont les voisins u et w sont adjacents entre eux. Si l'on supprime le sommet v de A , le graphe résultant, $A \setminus \{v\}$, est une pousse ayant c composantes connexes. De plus :*

- l'arête uw est un côté de $A \setminus \{v\}$,
- un côté (resp. un isthme) de A non-incident à v , reste un côté (resp. un isthme) dans $A \setminus \{v\}$, et

- deux sommets non-reliés dans A restent non-reliés dans $A \setminus \{v\}$.

Preuve : Le graphe A étant une pousse et le sommet v étant de degré deux, les deux arêtes incidentes à v , uv et vw , sont des côtés de A . Après la suppression du sommet v , l'arête uw se trouve donc sur le bord de $A \setminus \{v\}$. Les autres points du lemme sont faciles à vérifier. \square

L'**intersection** de deux graphes est leur plus grand sous-graphe commun. Plus formellement, l'intersection de deux graphes A et B est le graphe $A \cap B$ dont l'ensemble des sommets est $V(A) \cap V(B)$ et dont l'ensemble des arêtes est $E(A) \cap E(B)$. L'**union** de deux graphes A et B est le graphe $A \cup B$ dont l'ensemble des sommets est $V(A) \cup V(B)$ et dont l'ensemble des arêtes est $E(A) \cup E(B)$. Les lemmes suivants indiquent dans quelle mesure l'union de deux pousses est aussi une pousse.

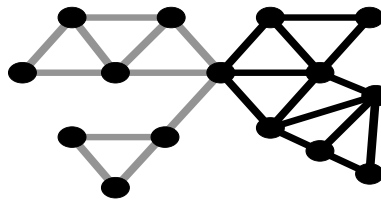


FIG. 2 – Lemme 2.2.4.

Lemme 2.2.4 *Si deux pousses, A et B , ayant respectivement c_1 et c_2 composantes connexes, ont pour intersection un unique sommet v , alors leur union, $A \cup B$, est une pousse ayant $c_1 + c_2 - 1$ composantes connexes. De plus :*

- un côté (resp. un isthme) de A ou de B , reste un côté (resp. un isthme) dans $A \cup B$, et
- deux sommets non-reliés dans A (resp. B) restent non-reliés dans $A \cup B$.

Preuve : On partage le plan en deux par une droite (\mathcal{D}) . On place le sommet v sur cette droite et on représente respectivement A et B de façon planaire externe dans les demi-plans à droite et à gauche de (\mathcal{D}) . On obtient ainsi une représentation planaire externe du graphe $A \cup B$. De plus, toute face interne de $A \cup B$ étant une face interne de A ou de B , les faces internes de $A \cup B$ sont toutes des triangles. Le graphe $A \cup B$ est donc bien une pousse. Les autres points du lemme sont faciles à vérifier. \square

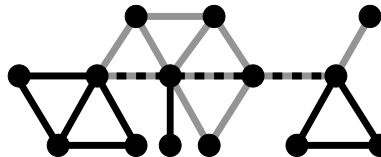


FIG. 3 – Lemme 2.2.5.

Lemme 2.2.5 *Soient deux pousses, A et B , ayant respectivement c_1 et c_2 composantes connexes, dont l'intersection est une chaîne $P = (v_1, \dots, v_k)$. Si les arêtes de P sont toutes des isthmes de B , alors l'union, $A \cup B$, est une pousse ayant $c_1 + c_2 - 1$ composantes connexes. De plus :*

- Un côté (resp. un isthme) $e \notin E(P)$ de A ou de B reste un côté (resp. un isthme) dans $A \cup B$, et
- deux sommets non-reliés dans A (resp. B) restent non-reliés dans $A \cup B$.

Preuve : On supprime dans B les arêtes de P . Ces arêtes étant des isthmes, d'après le Lemme 2.2.2, le graphe $B' = B \setminus E(P)$ est une pousse. On fait ensuite l'union de A et de chacune des composantes connexes de B' . Comme $P \subseteq A$ on a $A \cup B = A \cup B'$. Les arêtes de P étant des isthmes de B , chacune des composantes connexes de B' a au plus un sommet en commun avec A . En appliquant le Lemme 2.2.4 à chaque union avec une composante connexe de B' , on vérifie que $A \cup B$ a bien les propriétés désirées. \square

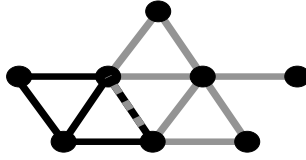


FIG. 4 – Lemme 2.2.6.

Lemme 2.2.6 *Soient deux pousses, A et B , ayant respectivement c_1 et c_2 composantes connexes, dont l'intersection est une arête e . Si e est un côté de A et un côté de B , alors l'union, $A \cup B$, est une pousse ayant $c_1 + c_2 - 1$ composantes connexes. De plus :*

- un côté (resp. un isthme) de A ou de B , autre que e , reste un côté (resp. un isthme) dans $A \cup B$, et
- deux sommets non-reliés dans A (resp. B) restent non-reliés dans $A \cup B$.

Preuve : On partage le plan en deux par une droite (\mathcal{D}). On place l'arête e sur cette droite. L'arête e étant un côté dans A et B , on représente respectivement A et B de façon planaire externe dans les demi-plans à droite et à gauche de (\mathcal{D}). On obtient ainsi une représentation planaire externe du graphe $A \cup B$. De plus, toute face interne de $A \cup B$ étant une face interne de A ou de B , les faces internes de $A \cup B$ sont toutes des triangles. Le graphe $A \cup B$ est donc bien une pousse. Les autres points du lemme sont faciles à vérifier. \square

Lemme 2.2.7 *Soient deux pousses, A et B , ayant respectivement c_1 et c_2 composantes connexes, dont l'intersection est une chaîne (u, v, w) . Si l'arête uv est un isthme de A et l'arête vw un côté de A et de B , alors l'union, $A \cup B$, est une pousse ayant $c_1 + c_2 - 1$ composantes connexes. De plus :*

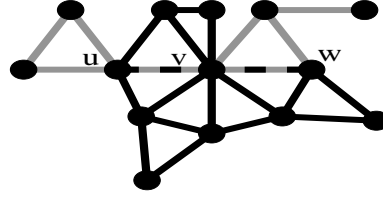


FIG. 5 – Lemme 2.2.7.

- un côté (resp. un isthme) de A ou de B , autre que uv ou vw , reste un côté (resp. un isthme) dans $A \cup B$, et
- deux sommets non-reliés dans A (resp. B) restent non-reliés dans $A \cup B$.

Preuve : L'arête uv étant un isthme de A , d'après le Lemme 2.2.2, le graphe $A' = A \setminus \{uv\}$ est une pousse avec $c_1 + 1$ composantes connexes. On note A'_u la composante connexe de A' contenant le sommet u et A'_v le graphe $A' \setminus A'_u$. D'après le Lemme 2.2.6, l'arête vw étant un côté de A'_v et de B , leur union $A'_v \cup B$ est une pousse. Finalement, cette union n'ayant que le sommet u en commun avec A'_u , d'après le Lemme 2.2.4, l'union $A'_u \cup A'_v \cup B$ est une pousse. Les autres points du lemme sont faciles à vérifier. \square

2.3 Partition des triangulations 4-connexes

On rappelle que dans la partition d'un graphe G en deux graphes A et B , ces graphes sont tels que $V(G) = V(A) = V(B)$, $E(G) = E(A) \cup E(B)$ et $E(A) \cap E(B) = \emptyset$. Par la suite, on va représenter de nombreuses partitions dans des figures. On établit donc une convention de dessin commune à toutes ces figures.

Convention pour les figures représentant une partition en deux pousses A et B (voir la Figure 6). Dans ces figures, les arêtes fines sont des arêtes qui sont indifféremment dans A , dans B ou bien aucun des deux. Les arêtes épaisses sont noires ou grises, selon qu'elles appartiennent à A ou à B . La couleur correspondant à A (resp. B) varie selon les figures, elle sera donc précisée à chaque fois. Les arêtes de A (resp. B) sont de 3 types, «normales», «bombées» ou «pointillées». Les arêtes «normales» représentent des isthmes de A ou de B . Les arêtes «bombées» représentent des côtés de A ou de B . Les isthmes étant des cotés, certains isthmes seront représentés par des arêtes bombées. Les arêtes «pointillées» représentent des arêtes de A ou de B dont la nature exacte (isthme, côté ou autre) n'est pas précisée.

Une triangulation 4-connexe possède un cycle hamiltonien. Une triangulation 4-connexe est donc partitionnable en deux pousses. Soit T une triangulation et T_1, \dots, T_k ses composantes 4-connexes. Ces composantes 4-connexes étant des triangulations 4-connexes [MT01], elles

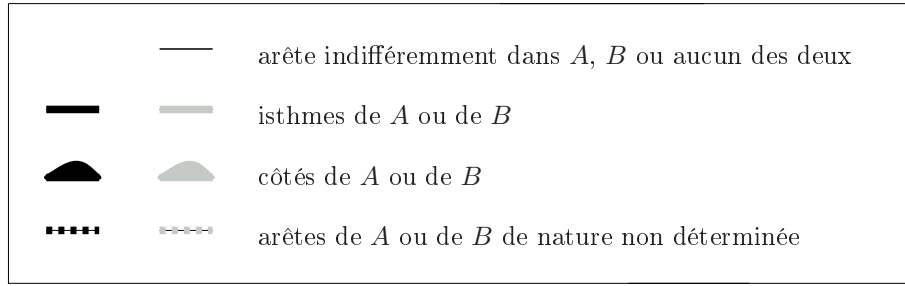
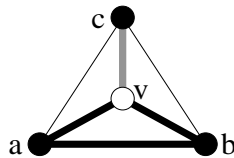


FIG. 6 – Convention pour les figures représentant une partition.

sont toutes partitionnable en deux pousses. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, soient A_i et B_i deux pousses partitionnant T_i , construites en utilisant la méthode des cycles hamiltoniens. Il n'est pas toujours possibles de combiner les pousses A_i entre elles, et les pousses B_i entre elles pour obtenir une partition de T en deux graphes planaires externes. Pour que cela soit possible il faut que chaque pousse A_i ou B_i remplisse certaines conditions. On montre dans cette section que les triangulations partielles 2-connexes et sans 3-cycles séparants (en particulier les triangulations 4-connexes) sont partitionnables en deux pousses vérifiant certaines contraintes. On ne donne pas de justification précise à ces contraintes pour le moment mais on verra dans la section suivante que ces contraintes permettent de combiner entre elles les pousses issues des différentes composantes 4-connexes de T afin de prouver le Théorème 4.

La **stellation** T^* de la triangulation partielle T , est la triangulation partielle obtenue à partir de T , en plaçant dans chaque face interne abc de T un sommet x . Ce sommet x , que l'on nomme **f -sommet**, est adjacent aux sommets a , b et c par de nouvelles arêtes xa , xb et xc . Étant donnée une partition d'une stellation T^* en deux pousses A et B , on dit qu'un **f -sommet** $v \in V(T^*)$ a un voisinage partitionné de façon **prolongeable** (voir Figure 7) si l'on peut nommer ses voisins a , b et c , et avoir les arêtes ab , va et vb dans une même pousse (*e.g.* A) et l'arête vc dans l'autre (*e.g.* B). Les arêtes ac et bc peuvent être indifféremment dans A ou B . Lorsque les arêtes au voisinage d'un **f -sommet** v sont ainsi partitionnées, on dit que l'arête ab est l'**arête support** de v . Une partition de la stellation T^* est dite **prolongeable** si le voisinage de chaque **f -sommet** $v \in V(T^*)$, est partitionné de façon prolongeable.

FIG. 7 – Partition prolongeable du voisinage de v .

Pour montrer les résultats de cette section on s'inspire de la technique utilisée par Whitney

dans [Whi31]. On définit une **W-triangulation** comme étant une triangulation partielle 2-connexe et sans 3-cycle séparant. On remarque en particulier que les triangulations 4-connexes sont des W-triangulations. Les W-triangulations, étant 2-connexes, n'ont pas de point d'articulation. Le bord d'une W-triangulation est donc un cycle (élémentaire). Par abus de langage, on dit d'une arête e d'une W-triangulation T que c'est **une corde de T** si e est une corde du bord de T . Le lemme suivant nous indique dans quelle mesure le sous-graphe d'une W-triangulation est lui aussi une W-triangulation.

Lemme 2.3.1 *Soit T une W-triangulation et C un cycle de T . Le sous-graphe de T induit par les arêtes de C et celles à l'intérieur de C est une W-triangulation.*

Preuve : Soit T' la triangulation partielle sous-graphe de la W-triangulation T à l'intérieur du cycle C . Par définition la W-triangulation T n'a pas de 3-cycle séparant, T' n'a donc pas de 3-cycle séparant. Il nous reste donc à montrer que T' est 2-connexe, c'est à dire que T' ne contient pas de point d'articulation. Pour tout sommet v de T' , comme T' est une triangulation partielle, au plus une des faces incidentes à v n'est pas un triangle, la face externe. De plus, comme la face externe est délimitée par un cycle (élémentaire), le sommet v apparaît au plus une fois dans le contour de la face externe. Le voisinage de v induit donc un graphe connexe et $T' \setminus v$ est connexe. T' ne contient donc pas de point d'articulation et est bien une W-triangulation. \square

Définition 1 *Une W-triangulation T est 3-bornée s'il existe un découpage de son bord en trois chaînes, (a_1, \dots, a_p) , (b_1, \dots, b_q) et (c_1, \dots, c_r) vérifiant les conditions suivantes :*

- On a $a_1 = c_r$, $b_1 = a_p$ et $c_1 = b_q$.
- Les chaînes sont de longueur non nulle, $p > 1$, $q > 1$ et $r > 1$.
- La W-triangulation T n'a pas de corde $a_i a_j$ (resp. $b_i b_j$ ou $c_i c_j$) avec $1 \leq i < p$ et $i + 1 < j \leq p$ (resp. $1 \leq i < q$ et $i + 1 < j \leq q$ ou bien $1 \leq i < r$ et $i + 1 < j \leq r$).

On note (a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) ce **3-bord** de T .

On remarque que dans un 3-bord l'ordre et le sens des chaînes importent. En effet, (a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) , (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) - (a_1, \dots, a_p) et (a_p, \dots, a_1) - (c_r, \dots, c_1) - (b_q, \dots, b_1) sont des 3-bords distincts. La Propriété suivante concerne les W-triangulations 3-bornées.

Propriété 1 *Pour toute W-triangulation 3-bornée T et tout 3-bord (a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) de T , il existe une partition de la stellation T^* en deux pousses $A = (V(T^*), E(A))$ et $B = (V(T^*), E(B))$ (voir la Figure 8). De plus,*

- (a) *la partition est prolongeable,*
- (b) *A est connexe,*

- (c) B a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_q ,
- (d) l'arête a_1a_2 est un côté de A ,
- (e) les arêtes $a_i a_{i+1}$ pour $2 \leq i < p$, sont des isthmes de A ,
- (f) les arêtes $b_i b_{i+1}$ pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A , et
- (g) les arêtes $c_i c_{i+1}$ pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B .

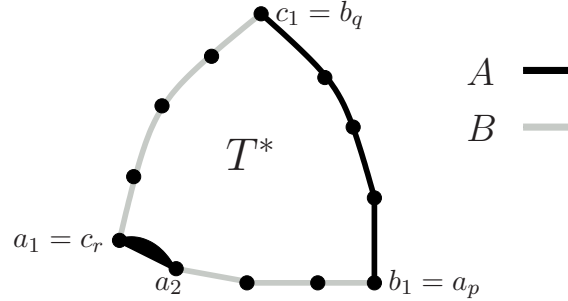


FIG. 8 – Propriété 1.

On remarque que la Propriété 1 s'applique aux triangulations 4-connexes. En effet, une triangulation 4-connexe T de face externe abc est une W -triangulation 3-bornée par (a, b) - (b, c) - (c, a) .

On définit maintenant la notion de **chaîne adjacente** dont nous avons besoin pour la Propriété 2. Soit une W -triangulation $T \neq K_3$, 3-bornée par (a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) , sans corde $a_i b_j$, avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, et sans corde $a_i c_j$, avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq r$. La W -triangulation T ayant au moins 4 sommets et n'ayant pas de 3-cycle séparant, les sommets b_1 et b_2 ont exactement un voisin commun dans $V(T) \setminus \{a_1\}$, on le note d_1 . On définit $V_a \subseteq V(T)$ comme étant l'ensemble des sommets de T voisins d'un sommet a_i pour $i > 1$, en excluant les sommets a_i pour $i > 1$ et le sommet b_2 . Le graphe T étant une W -triangulation, l'ensemble $N_T(a_i) \setminus \{a_{i-1}, a_{i+1}\}$, pour $1 < i \leq p$, induit un graphe connexe. De plus, les sommets a_i et a_{i+1} ont au moins un voisin commun dans V_a . L'ensemble V_a induit donc un graphe connexe. Cet ensemble contient les sommets a_1 et d_1 , qui sont respectivement des voisins de a_2 et de a_p . On note $(d_1, d_2, \dots, d_s, a_1)$ la plus courte chaîne reliant d_1 et a_1 dans le graphe $T[V_a]$ (voir la Figure 9). Cette chaîne est appelée **chaîne adjacente** de T pour le 3-bord (a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) et elle vérifie les 3 points suivants :

- Il n'existe pas d'arête $d_i d_j$, avec $1 \leq i < s$ et $i + 1 < j \leq s$, ni d'arête $a_1 d_i$, avec $1 \leq i < s$. En effet, si une telle arête existe $(d_1, d_2, \dots, d_s, a_1)$ n'est pas la plus courte chaîne reliant d_1 et a_1 .
- Les sommets d_i , pour $1 \leq i \leq s$, ne sont pas des sommets b_j ou c_k , pour $1 \leq j \leq q$ et $1 \leq k \leq r$. En effet, la W -triangulation T n'ayant pas de corde de type $a_i b_j$ ou $a_i c_j$, l'ensemble V_a ne contient pas de sommets de type b_i ou c_j autre que le sommet $a_1 = c_r$.

– Cette chaîne est de longueur au moins 1 puisque $d_1 \neq a_1$, on a donc $s \geq 1$.

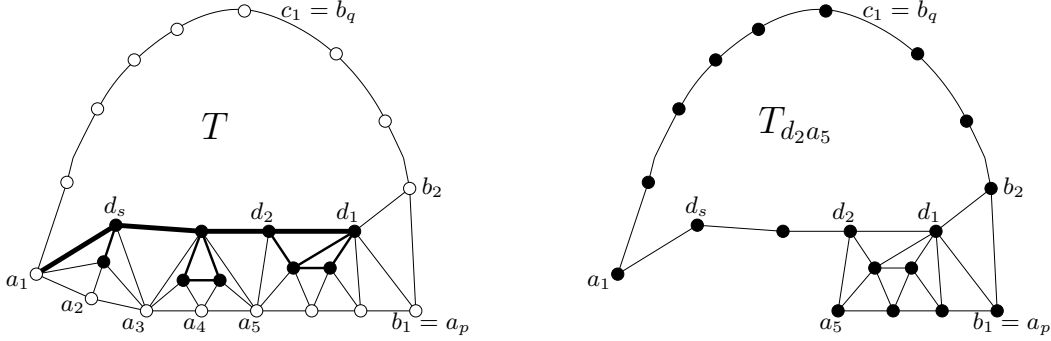


FIG. 9 – La chaîne adjacente de T et le graphe $T_{d_2 a_5}$.

Étant donnée une W -triangulation T , de 3-bord (a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) , sans corde $a_i b_j$, avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, et sans corde $a_i c_j$, avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq r$, on considère la chaîne adjacente $(d_1, d_2, \dots, d_s, a_1)$, avec $s \geq 1$. On définit alors, pour toute arête $d_x a_y \in E(T)$, avec $1 \leq x \leq s$ et $1 < y \leq p$, le graphe $T_{d_x a_y}$ comme étant le graphe contenu à l'intérieur du cycle $C = (a_1, d_s, \dots, d_x, a_y, \dots, a_p, b_2, \dots, b_q, c_2, \dots, c_r)$ dans T (voir la Figure 9). Les sommets d_i , pour $1 \leq i \leq s$, n'étant pas des sommets de type b_j ou c_j , C est bien un cycle et d'après le Lemme 2.3.1 $T_{d_x a_y}$ est une W -triangulation

On considère la Propriété suivante, étroitement liée à la Propriété 1.

Propriété 2 Soit T une W -triangulation 3-bornée par (a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) , sans corde $a_i b_j$ ou $a_i c_j$ et de chaîne adjacente $(d_1, d_2, \dots, d_s, a_1)$. Pour toute arête $d_x a_y \in E(T)$, avec $1 \leq x \leq s$ et $1 < y \leq p$, il existe une partition de la stelliation $T_{d_x a_y}^*$ en deux pousses $A = (V(T_{d_x a_y}^*), E(A))$ et $B = (V(T_{d_x a_y}^*), E(B))$ (voir la Figure 10). De plus,

- (a) la partition est prolongeable,
- (b) A est connexe,
- (c) B a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_q ,
- (d) l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$ pour $x \leq i < s$, sont des isthmes de A ,
- (e) l'arête $d_x a_y$ est un côté de A ,
- (f) les arêtes $a_i a_{i+1}$ pour $y \leq i < p$, sont des isthmes de B ,
- (g) les arêtes $b_i b_{i+1}$ pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A , et
- (h) les arêtes $c_i c_{i+1}$ pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B .

On montre que les Propriétés 1 et 2 sont toujours vérifiées.

Théorème 5 La Propriété 1 (resp. la Propriété 2) est vraie pour toutes les W -triangulations T (resp. $T_{d_x a_y}$).

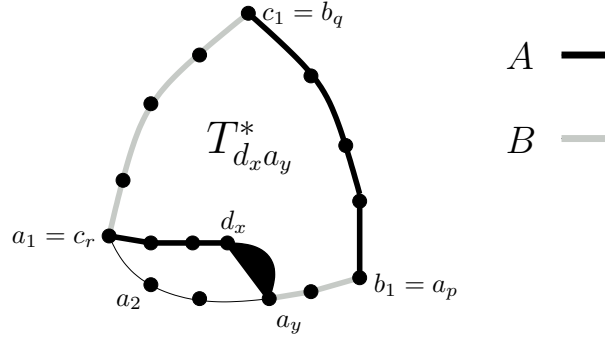


FIG. 10 – Propriété 2.

Ce théorème nous permettra d'utiliser la Propriété 1 dans la section suivante et ainsi de démontrer le Théorème 4. Bien que la Propriété 2 ne soit pas utilisée par la suite, on montre aussi cette propriété car on en a besoin pour prouver la Propriété 1.

Preuve : On montre ce théorème par récurrence sur $m \geq 0$, le nombre d'arête de T ou de $T_{d_x a_y}$. Pour le cas initial on montre le lemme suivant.

Lemme 2.3.2 *La Propriété 1 est vraie pour les W-triangulations T telles que $|E(T)| \leq 5$. De même, la Propriété 2 est vraie pour les W-triangulations $T_{d_x a_y}$ telles que $|E(T_{d_x a_y})| \leq 5$.*

Preuve : Il n'y a que deux W-triangulations ayant au plus 5 arêtes, K_3 et le graphe $K_4 \setminus e$ constitué d'un cycle de longueur 4 ayant une corde.

On montre d'abord la Propriété 1 pour ces deux graphes et pour tous les 3-bords possibles. Les différents 3-bords de K_3 sont équivalents, on note donc a_1 , b_1 , et c_1 les sommets de K_3 et on considère le 3-bord $(a_1, b_1) - (b_1, c_1) - (c_1, a_1)$. On liste les différents 3-bords $(a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r)$ que le graphe $K_4 \setminus e$ admet. Étant donné que $p > 1$, $q > 1$, $r > 1$ et que la W-triangulation $K_4 \setminus e$ a 4 sommets externes, alors on a $p \leq 3$, $q \leq 3$ et $r \leq 3$. Par symétrie de $K_4 \setminus e$, on considère 2 cas, celui où le sommet a_1 est l'un des sommets de degré 2 et celui où c'est l'un des sommets de degré 3. Dans le premier cas, si $p = 2$, comme par définition des 3-bords on ne peut pas avoir de corde $b_1 b_3$, on a $q = 2$ et $r = 3$. Si $p = 3$ alors on a $q = 2$ et $r = 2$. Dans le deuxième cas, comme il n'y a pas de corde $a_1 a_3$, on a $p = 2$. De plus comme il n'y a pas de corde $c_1 c_3$ on a $q = 3$ et $r = 2$.

On représente dans la Figure 11 les partitions de K_3^* et de $(K_4 \setminus e)^*$ vérifiant les contraintes de la Propriété 1 pour tous les 3-bords possibles. Pour les représentations de $(K_4 \setminus e)^*$, on rappelle que les sommets a_1 , b_1 et c_1 sont respectivement identiques aux sommets c_r , a_p et b_q .

Il est facile de vérifier que ces partitions vérifient bien les contraintes de la Propriété 1. On remarque que dans la partition de K_3^* la pousse $B = (V(K_3^*), \{a_1 c_1, c_1 v\})$ a bien deux composantes connexes, une constituée de la chaîne (a_1, c_1, v) et une autre triviale, uniquement

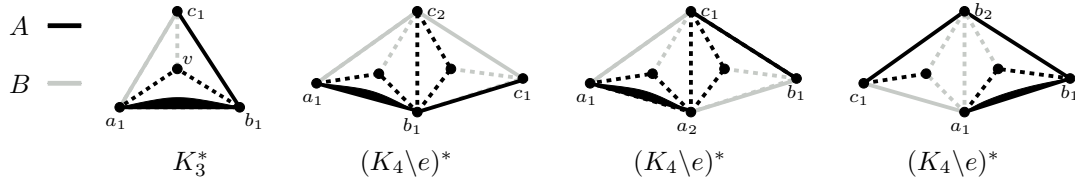


FIG. 11 – Cas initiaux de la Propriété 1.

constituée du sommet b_1 . C'est aussi le cas dans les deux dernières partitions représentées.

Pour la Propriété 2, la W -triangulation $T_{d_x a_y}$ a au moins 4 sommets, a_1 , b_1 , c_1 et d_1 . Donc $T_{d_x a_y} \neq K_3$. Pour $K_4 \setminus e$, le graphe $T_{d_x a_y}$ n'ayant pas de corde $a_1 b_1$, il n'y a qu'une assignation des sommets possible. La W -triangulation $K_4 \setminus e$ est donc constituée du cycle (a_1, c_1, b_1, d_1) et de la corde $c_1 d_1$. On représente dans la Figure 12 une partition de $(K_4 \setminus e)^*$ vérifiant les contraintes de la Propriété 2.

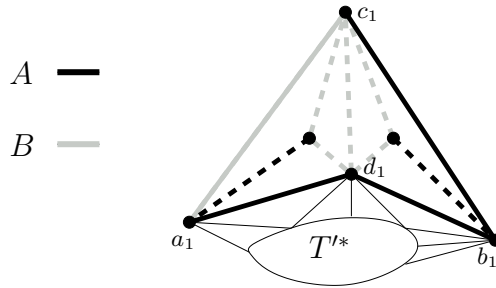


FIG. 12 – Cas initial de la Propriété 2.

Dans la partition de $K_4 \setminus e^*$ représentée, le graphe T' correspond au graphe $T \setminus \{a_1, b_1, c_1, d_1\}$. On constate aussi que dans cette partition l'arête $d_1 b_1$ est un isthme de A . Les isthmes étant aussi des côtés, l'arête $d_1 b_1$ est donc bien un côté de A . On constate ici aussi que B a deux composantes connexes, dont une est constituée uniquement du sommet b_1 . \square

On montre maintenant l'étape d'induction en prouvant le lemme suivant.

Lemme 2.3.3 *Pour tout entier $m > 5$, si la Propriété 1 est vraie pour toutes les W -triangulations T telles que $|E(T)| < m$ et si la Propriété 2 est vraie pour toutes les W -triangulations $T_{d_x a_y}$ telles que $|E(T_{d_x a_y})| < m$, alors la Propriété 1 et la Propriété 2 sont respectivement vraies pour les W -triangulations T et $T_{d_x a_y}$ telles que $|E(T)| = m$ et $|E(T_{d_x a_y})| = m$.*

Preuve : On montre tout d'abord que si les hypothèses du Lemme 2.3.3 sont vérifiées, alors la Propriété 1 est vraie pour les W -triangulations T telles que $|E(T)| = m$. On montrera

ensuite que c'est aussi le cas de la Propriété 2 pour les W-triangulations $T_{d_x a_y}$ telles que $|E(T_{d_x a_y})| = m$.

Cas 1 : Preuve de la Propriété 1 pour une W-triangulation T telle que $|E(T)| = m$.

On considère le 3-bord $(a_1, \dots, a_p)-(b_1, \dots, b_q)-(c_1, \dots, c_r)$ de T . On distingue différents cas selon qu'il existe une corde de type $a_i b_j$ ou $a_i c_j$ dans T . On verra successivement le cas où il y a une corde $a_1 b_j$, pour $1 < j < q$, le cas où il y a une corde $a_i b_j$, pour $1 < i < p$ et $1 < j \leq q$, et le cas où il y a une corde $a_i c_j$, pour $1 < i \leq p$ et $1 < j < r$. On terminera ensuite par le cas où il n'y a ni corde $a_i b_j$, pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$ (par définition des 3-bords il n'y a pas de corde $a_1 b_q$, $a_i b_1$ ou $a_p b_j$), ni corde $a_i c_j$, pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq r$ (par définition des 3-bords il n'y a pas de corde $a_p c_1$, $a_i c_r$ ou $a_1 c_j$).

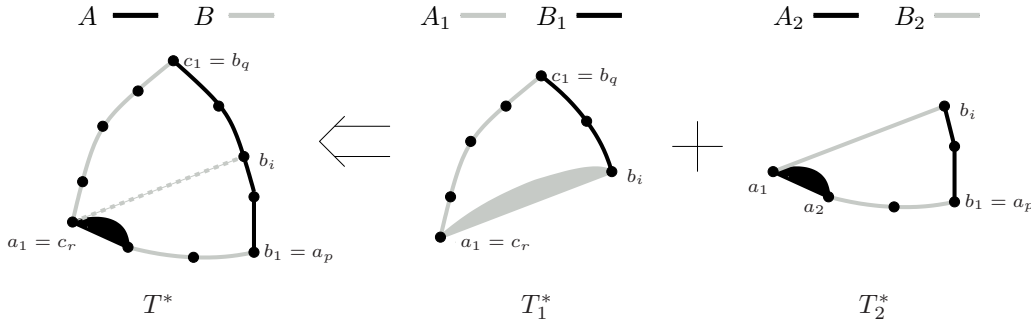


FIG. 13 – Cas 1.1 : corde $a_1 b_i$.

Cas 1.1 : Il y a une corde $a_1 b_i$, pour $1 < i < q$ (voir la Figure 13). On note T_1 (resp. T_2) la W-triangulation (*c.f.* Lemme 2.3.1), sous-graphe de T , à l'intérieur du cycle $(a_1, b_i, \dots, b_q, c_2, \dots, c_r)$ (resp. $(a_1, a_2, \dots, a_p, b_2, \dots, b_i, a_1)$). Comme il n'y a pas de corde de type $a_x a_y$, $b_x b_y$ ou $c_x c_y$, $(b_i c_r)-(c_r, \dots, c_1)-(b_q, \dots, b_i)$ (resp. $(a_1, \dots, a_p)-(b_1, \dots, b_i)-(b_i a_1)$) est un 3-bord de T_1 (resp. T_2). Enfin, comme $a_1 a_2 \notin E(T_1)$ (resp. $c_1 c_2 \notin E(T_2)$), la W-triangulation T_1 (resp. T_2) a moins d'arêtes que T . On peut donc appliquer à T_1 et T_2 la Propriété 1 avec les 3-bords que l'on vient de mentionner. On note A_1 et B_1 (resp. A_2 et B_2) les deux pousses ainsi obtenues, la pousse A_1 (resp. A_2) étant celle contenant l'arête $b_i c_r$ (resp. $a_1 a_2$). La Propriété 1 implique que la partition de T_1^* en $A_1 = (V(T_1^*), E(A_1))$ et $B_1 = (V(T_1^*), E(B_1))$ vérifie les points suivants :

- (a1) la partition de T_1^* est prolongeable,
- (b1) A_1 est connexe,
- (c1) B_1 a exactement deux composantes connexes, une contenant c_1 et l'autre contenant c_r ,
- (d1) l'arête $a_1 b_i$ est un côté de A_1 ,

- (f1) les arêtes $c_j c_{j+1}$, pour $1 \leq j < r$, sont des isthmes de A_1 , et
- (g1) les arêtes $b_j b_{j+1}$, pour $i \leq j < q$, sont des isthmes de B_1 .

La Propriété 1 implique que la partition de T_2^* en $A_2 = (V(T_2^*), E(A_2))$ et $B_2 = (V(T_2^*), E(B_2))$ vérifie les points suivants :

- (a2) la partition de T_2^* est prolongeable,
- (b2) A_2 est connexe,
- (c2) B_2 a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_i ,
- (d2) l'arête $a_1 a_2$ est un côté de A_2 ,
- (e2) les arêtes $a_j a_{j+1}$, pour $2 \leq j < p$, sont des isthmes de B_2 ,
- (f2) les arêtes $b_j b_{j+1}$, pour $1 \leq j < i$, sont des isthmes de A_2 , et
- (g2) l'arête $a_1 b_i$ est un isthme de B_2 .

On définit maintenant A (resp. B) comme étant l'union de B_1 et A_2 (resp. A_1 et B_2). Toutes les arêtes de T^* étant dans A_1 , B_1 , A_2 ou B_2 , les graphes A et B couvrent bien T^* . De plus, la seule arête commune à T_1^* et T_2^* , $a_1 b_i$, est dans B_1 et A_2 (*c.f.* (f1) et (d2)). Les ensembles $E(A)$ et $E(B)$ ne s'intersectent donc pas et les graphes A et B constituent bien une partition de T^* . On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 1.

- (a) Toute face interne de T étant une face interne de T_1 ou de T_2 , tout f -sommet de T^* est un f -sommet de T_1^* ou de T_2^* . Pour chaque f -sommet de T^* , la partition de son voisinage est identique à ce qu'elle était dans T_1^* ou dans T_2^* . Or les partitions de T_1^* et de T_2^* étant toutes deux prolongeables (*c.f.* (a1) et (a2)), la partition de T^* en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 1 est donc vérifié. \diamond

Les pousses B_1 et A_2 ne s'intersectent qu'en deux sommets, a_1 et b_i . Or B_1 a deux composantes connexes, une contenant a_1 et l'autre contenant b_i . En effet, la composante connexe contenant le sommet c_1 contient aussi la chaîne (b_i, \dots, b_q) (*c.f.* (c1) et (g1)). On note B_1' (resp. B_1'') la composante connexe de B_1 contenant le sommet a_1 (resp. b_i). On décompose l'union de B_1 et A_2 en deux unions dans lesquelles les graphes ne s'intersectent qu'en un sommet : $A_2 \cup B_1 = (A_2 \cup B_1') \cup B_1''$. Pour chacune de ces unions on peut appliquer le Lemme 2.2.4. Le Lemme 2.2.4 implique alors que l'union des pousses A_2 et B_1 , le graphe A , est une pousse conforme aux points (b), (d) et (f) de la Propriété 1. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.4 implique le point (b) car A_2 est connexe (*c.f.* (b2)) ainsi que chacune des deux composantes connexes de B_1 (*c.f.* (c1)). \diamond
- (d) Le Lemme 2.2.4 implique le point (d) car l'arête $a_1 a_2$ est un côté de A_2 (*c.f.* (d2)). \diamond
- (f) Le Lemme 2.2.4 implique le point (f) car les arêtes $b_j b_{j+1}$, pour $1 \leq j < i$, sont des isthmes de A_2 (*c.f.* (f2)) et car les arêtes $b_j b_{j+1}$, pour $i \leq j < q$, sont des isthmes de B_1 (*c.f.* (g1)). \diamond

L'intersection des pousses A_1 et B_2 est l'arête a_1b_i . Cette arête étant un isthme dans B_2 (c.f. (g2)), le Lemme 2.2.5 implique que l'union de A_1 et B_2 produit une pousse B conforme aux points (c), (e) et (g) de la Propriété 1. En effet :

- (c) Le Lemme 2.2.5 implique le point (c) car A_1 est connexe et contient les sommets b_i et b_q (c.f. (b1)) et car B_2 a deux composantes connexes, une contenant b_1 et une contenant b_i (c.f. (c2)). En effet, cela implique que dans B le sommet b_1 n'est pas relié au sommet b_i , qui est lui dans la même composante connexe de B que le sommet b_q . Les sommets b_1 et b_q sont donc dans deux composantes connexes distinctes. \diamond
- (e) Le Lemme 2.2.5 implique le point (e) car les arêtes a_ja_{j+1} , pour $2 \leq j < p$, sont des isthmes de B_2 (c.f. (e2)). \diamond
- (g) Le Lemme 2.2.5 implique le point (g) car les arêtes c_jc_{j+1} , pour $1 \leq j < r$, sont des isthmes de A_1 (c.f. (f1)). \diamond

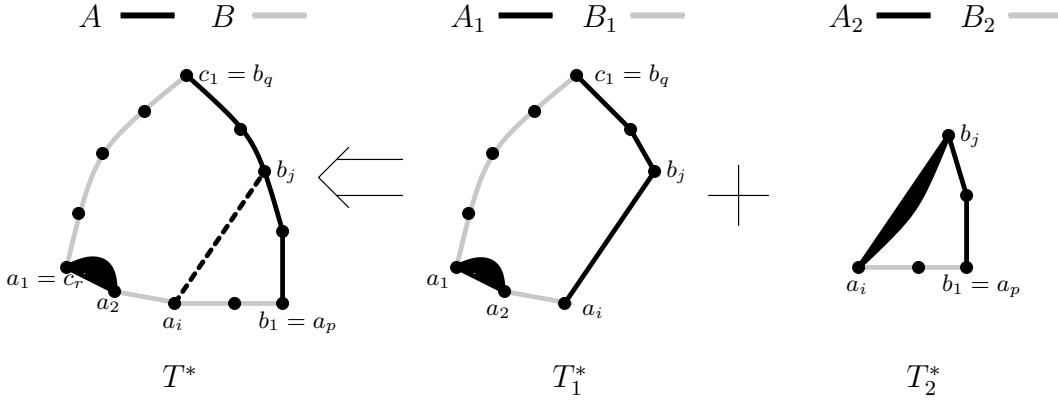


FIG. 14 – Cas 1.2 : corde $a_i b_j$.

Cas 1.2 : Il y a une corde $a_i b_j$, pour $1 < i < p$ et $1 < j \leq q$ (voir la Figure 14). S'il y a plusieurs cordes de type $a_i b_j$, on en considère une telle que j soit maximum, c'est-à-dire telle qu'il n'y ait pas d'arête $a_i b_k$ avec $j < k \leq q$. On note T_1 (resp. T_2) la W-triangulation (c.f. Lemme 2.3.1), sous-graphe de T , à l'intérieur du cycle $(a_1, a_2, \dots, a_i, b_j, \dots, b_q, c_2, \dots, c_r)$ (resp. $(a_i, \dots, a_p, b_2, \dots, b_j, a_i)$). Comme il n'y a pas de corde de type $a_x a_y$, $b_x b_y$, $c_x c_y$ ou $a_i b_k$ avec $k > j$, $(a_1, \dots, a_i)-(a_i, b_j, \dots, b_q)-(c_1, \dots, c_r)$ (resp. $(a_i, b_j)-(b_j, \dots, b_1)-(a_p, \dots, a_i)$) est un 3-bord de T_1 (resp. T_2). Enfin, comme $b_1 b_2 \notin E(T_1)$ (resp. $a_1 a_2 \notin E(T_2)$), la W-triangulation T_1 (resp. T_2) a moins d'arêtes que T . On peut donc appliquer à T_1 et T_2 la Propriété 1 avec les 3-bords que l'on vient de mentionner. On note A_1 et B_1 (resp. A_2 et B_2) les deux pousses ainsi obtenues, la pousse A_1 (resp. A_2) étant celle contenant l'arête $a_1 a_2$ (resp. $a_i b_j$). La Propriété 1 implique que la partition de T_1^* en $A_1 = (V(T_1^*), E(A_1))$ et $B_1 = (V(T_1^*), E(B_1))$ vérifie les points suivants :

- (a1) la partition de T_1^* est prolongeable,
- (b1) A_1 est connexe,
- (c1) B_1 a exactement deux composantes connexes, une contenant a_i et l'autre contenant b_q ,
- (d1) l'arête a_1a_2 est un côté de A_1 ,
- (e1) les arêtes $a_k a_{k+1}$, pour $2 \leq k < p$, sont des isthmes de B_1 ,
- (f1) l'arête $a_i b_j$ et les arêtes $b_k b_{k+1}$, pour $j \leq k < q$, sont des isthmes de A_1 , et
- (g1) les arêtes $c_k c_{k+1}$, pour $1 \leq k < r$, sont des isthmes de B_1 .

La Propriété 1 implique que la partition de T_2^* en $A_2 = (V(T_2^*), E(A_2))$ et $B_2 = (V(T_2^*), E(B_2))$ vérifie les points suivants :

- (a2) la partition de T_2^* est prolongeable,
- (b2) A_2 est connexe,
- (c2) B_2 a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_j ,
- (d2) l'arête $a_i b_j$ est un côté de A_2 ,
- (f2) les arêtes $b_k b_{k+1}$, pour $1 \leq k < j$, sont des isthmes de A_2 , et
- (g2) les arêtes $a_k a_{k+1}$, pour $i \leq k < p$, sont des isthmes de B_2 .

On définit A (resp. B) comme étant l'union de A_1 et A_2 (resp. B_1 et B_2). Toutes les arêtes de T^* étant dans A_1 , B_1 , A_2 ou B_2 , les graphes A et B couvrent bien tout T^* . De plus, la seule arête commune à T_1^* et T_2^* , $a_i b_j$, est dans A_1 et A_2 (*c.f.* (f1) et (d2)). Les ensembles $E(A)$ et $E(B)$ ne s'intersectent donc pas et les graphes A et B constituent bien une partition de T^* . On montre maintenant que ces graphes sont des pouses vérifiant tous les points de la Propriété 1.

- (a) Pour chaque f -sommet de T^* , la partition de son voisinage est identique à ce qu'elle était dans T_1^* ou dans T_2^* . Les partitions de T_1^* et de T_2^* étant toutes deux prolongeables (*c.f.* (a1) et (a2)), la partition de T^* en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 1 est donc vérifié. \diamond

L'intersection des pouses A_1 et A_2 est l'arête $a_i b_j$. Cette arête étant un isthme dans A_1 (*c.f.* (e1)), le Lemme 2.2.5 implique que l'union de A_1 et A_2 produit une pousse A conforme aux points (b), (d) et (f) de la Propriété 1. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.5 implique le point (b) car A_1 et A_2 sont connexes (*c.f.* (b1) et (b2)). \diamond
- (d) Le Lemme 2.2.5 implique le point (d) car l'arête $a_1 a_2$ est un côté de A_1 (*c.f.* (d1)). \diamond
- (f) Le Lemme 2.2.5 implique le point (f) car les arêtes $b_k b_{k+1}$, pour $1 \leq k < j$, sont des isthmes de A_2 (*c.f.* (f2)) et car les arêtes $b_k b_{k+1}$, pour $j \leq k < q$, sont des isthmes de A_1 (*c.f.* (f1)). \diamond

Les pousses B_1 et B_2 ne s'intersectent qu'en deux sommets, a_i et b_j . Or la pousse B_2 a deux composantes connexes, une contenant le sommet a_i (celle contenant le sommet a_p et la chaîne $(a_p, a_{p-1}, \dots, a_i)$) et l'autre contenant b_j (c.f. (c2) et (g2)). On peut donc décomposer l'union de B_1 et B_2 en deux unions successives dans lesquelles les graphes ne s'intersectent qu'en un sommet. Le Lemme 2.2.4 implique alors que l'union de ces deux pousses, le graphe B , est une pousse conforme aux points (c), (e) et (g) de la Propriété 1. En effet :

- (c) Le Lemme 2.2.4 implique le point (c) car B_1 a deux composantes connexes, une contenant a_i et une contenant b_q (c.f. (c1)), et car les deux composantes connexes de B_2 sont connexes et contiennent respectivement les sommets a_i et b_j (c.f. (c2) et (g2)). En effet, cela implique que dans B le sommet b_q n'est pas relié au sommet a_i , qui est lui dans la même composante connexe de B que le sommet b_1 (c.f. (g2)). Les sommets b_1 et b_q sont donc dans deux composantes connexes distinctes. \diamond
- (e) Le Lemme 2.2.4 implique le point (e) car les arêtes $a_k a_{k+1}$, pour $2 \leq k < i$, sont des isthmes de B_1 (c.f. (e1)) et car les arêtes $a_k a_{k+1}$, pour $i \leq k < p$, sont des isthmes de B_2 (c.f. (g2)). \diamond
- (g) Le Lemme 2.2.4 implique le point (g) car les arêtes $c_k c_{k+1}$, pour $1 \leq k < r$, sont des isthmes de B_1 (c.f. (g1)). \diamond

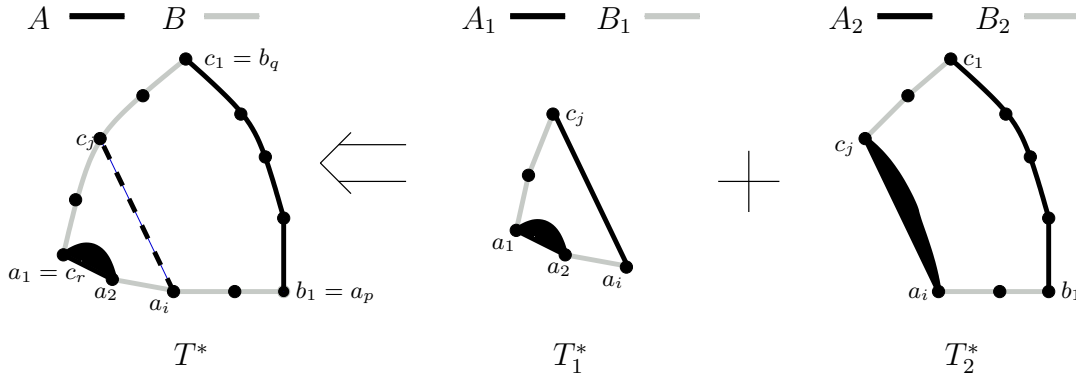


FIG. 15 – Cas 1.3 : corde $a_i c_j$.

Cas 1.3 : Il y a une corde $a_i c_j$, pour $1 < i \leq p$ et $1 < j < r$ (voir la Figure 15). S'il y a plusieurs cordes de type $a_i c_j$, on en considère une telle que i soit maximum, c'est-à-dire telle qu'il n'y ait pas d'arête $a_k c_j$ avec $i < k < r$. On note T_1 (resp. T_2) la W-triangulation (c.f. Lemme 2.3.1), sous-graphe de T , à l'intérieur du cycle $(a_1, a_2, \dots, a_i, c_j, \dots, c_r)$ (resp. $(c_j, a_i, \dots, a_p, b_2, \dots, b_q, c_2, \dots, c_j)$). Comme il n'y a pas de corde de type $a_x a_y, b_x b_y, c_x c_y$ ou $a_k c_j$ avec $k > i$, $(a_1, \dots, a_i)-(a_i, c_j)-(c_j, \dots, c_r)$ (resp. $(c_j, a_i, \dots, a_p)-(b_1, \dots, b_q)-(c_1, \dots, c_j)$) est un 3-bord de T_1 (resp. T_2). Enfin, comme $b_1 b_2 \notin E(T_1)$ (resp. $a_1 a_2 \notin E(T_2)$), la W-triangulation T_1 (resp. T_2) a moins d'arêtes que T . On peut donc appliquer à T_1 et T_2 la

Propriété 1 avec les 3-bords que l'on vient de mentionner. On note A_1 et B_1 (resp. A_2 et B_2) les deux pousses ainsi obtenues, la pousse A_1 (resp. A_2) étant celle contenant l'arête a_1a_2 (resp. a_1c_j). La Propriété 1 implique que la partition de T_1^* en $A_1 = (V(T_1^*), E(A_1))$ et $B_1 = (V(T_1^*), E(B_1))$ vérifie les points suivants :

- (a1) la partition de T_1^* est prolongeable,
- (b1) A_1 est connexe,
- (c1) B_1 a exactement deux composantes connexes, une contenant a_i et l'autre contenant c_j ,
- (d1) l'arête a_1a_2 est un côté de A_1 ,
- (e1) les arêtes $a_k a_{k+1}$, pour $2 \leq k < i$, sont des isthmes de B_1 ,
- (f1) l'arête $a_i c_j$ est un isthme de A_1 , et
- (g1) les arêtes $c_k c_{k+1}$, pour $j \leq k < r$, sont des isthmes de B_1 .

La Propriété 1 implique que la partition de T_2^* en $A_2 = (V(T_2^*), E(A_2))$ et $B_2 = (V(T_2^*), E(B_2))$ vérifie les points suivants :

- (a2) la partition de T_2^* est prolongeable,
- (b2) A_2 est connexe,
- (c2) B_2 a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_q ,
- (d2) l'arête $a_i c_j$ est un côté de A_2 ,
- (e2) les arêtes $a_k a_{k+1}$, pour $i \leq k < p$, sont des isthmes de B_2 ,
- (f2) les arêtes $b_k b_{k+1}$, pour $1 \leq k < q$, sont des isthmes de A_2 , et
- (g2) les arêtes $c_k c_{k+1}$, pour $1 \leq k < j$, sont des isthmes de B_2 .

On définit A (resp. B) comme étant l'union de A_1 et A_2 (resp. B_1 et B_2). Toutes les arêtes de T^* étant dans A_1 , B_1 , A_2 ou B_2 , les graphes A et B couvrent bien tout T^* . De plus, la seule arête commune à T_1^* et T_2^* , $a_i c_j$, est dans A_1 et A_2 (c.f. (f1) et (d2)). Les ensembles $E(A)$ et $E(B)$ ne s'intersectent donc pas et les graphes A et B constituent bien une partition de T^* . On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 1.

- (a) Pour chaque f -sommet de T^* , la partition de son voisinage est identique à ce qu'elle était dans T_1^* ou dans T_2^* . Les partitions de T_1^* et de T_2^* étant toutes deux prolongeables (c.f. (a1) et (a2)), la partition de T^* en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 1 est donc vérifié. \diamond

L'intersection des pousses A_1 et A_2 est l'arête $a_i c_j$. Cette arête étant un isthme dans A_1 (c.f. (f1)), le Lemme 2.2.5 implique que l'union de A_1 et A_2 produit une pousse A conforme aux points (b), (d) et (f) de la Propriété 1. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.5 implique le point (b) car A_1 et A_2 sont connexes (c.f. (b1) et (b2)). \diamond

- (d) Le Lemme 2.2.5 implique le point (d) car l'arête a_1a_2 est un côté de A_1 (*c.f.* (d1)). \diamond
- (f) Le Lemme 2.2.5 implique le point (f) car les arêtes b_kb_{k+1} , pour $1 \leq k < q$, sont des isthmes de A_2 (*c.f.* (f2)). \diamond

Les pousses B_1 et B_2 ne s'intersectent qu'en deux sommets, a_i et c_j . Or la pousse B_1 a deux composantes connexes, une contenant le sommet a_i et l'autre contenant le sommet c_j (*c.f.* (c1)). On peut donc décomposer l'union de B_1 et B_2 en deux unions successives dans lesquelles les graphes ne s'intersectent qu'en un sommet. Le Lemme 2.2.4 implique alors que l'union de ces deux pousses, le graphe B , est une pousse conforme aux points (c), (e) et (g) de la Propriété 1. En effet :

- (c) Le Lemme 2.2.4 implique le point (c) car B_2 a deux composantes connexes, une contenant b_1 et une contenant b_q (*c.f.* (c2)) et car chacune des deux composantes connexes de B_1 est connexe (*c.f.* (c1)). \diamond
- (e) Le Lemme 2.2.4 implique le point (e) car les arêtes $a_k a_{k+1}$, pour $2 \leq k < i$, sont des isthmes de B_1 (*c.f.* (e1)) et car les arêtes $a_k a_{k+1}$, pour $i \leq k < p$, sont des isthmes de B_2 (*c.f.* (e2)). \diamond
- (g) Le Lemme 2.2.4 implique le point (g) car les arêtes $c_k c_{k+1}$, pour $1 \leq k < j$, sont des isthmes de B_2 (*c.f.* (g2)) et car les arêtes $c_k c_{k+1}$, pour $j \leq k < r$, sont des isthmes de B_1 (*c.f.* (g1)). \diamond

Cas 1.4 : Il n'y a pas de corde $a_i b_j$ ou $a_i c_j$. Dans ce cas là on considère la chaîne adjacente (d_1, \dots, d_s, a_1) (voir la Figure 9) de T pour le 3-bord $(a_1, \dots, a_p)-(b_1, \dots, b_q)-(c_1, \dots, c_r)$. On considère l'arête $d_s a_y$, avec $1 < y \leq p$, pour laquelle y est minimum. Une telle arête existe puisque par définition, le sommet d_s est adjacent à un sommet a_y avec $y > 1$. La W-triangulation $T_{d_s a_y}$ a strictement moins d'arêtes que T ($a_1 a_2 \notin E(T_{d_s a_y})$). On peut donc appliquer la Propriété 2 à $T_{d_s a_y}$. On note A' et B' les deux pousses ainsi obtenues. La Propriété 2 implique que la partition de $T_{d_s a_y}^*$ en $A' = (V(T_{d_s a_y}^*), E(A'))$ et $B' = (V(T_{d_s a_y}^*), E(B'))$ vérifie les points suivants :

- (a') la partition de $T_{d_s a_y}^*$ est prolongeable,
- (b') A' est connexe,
- (c') B' a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_q ,
- (d') l'arête $a_1 d_s$ est un isthme de A' ,
- (e') l'arête $d_s a_y$ est un côté de A' ,
- (f') les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y \leq i < p$, sont des isthmes de B' ,
- (g') les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A' , et
- (h') les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B' .

On étend ces deux pousses afin d'obtenir une partition de toute la W-triangulation T^* . Pour cela, on distingue deux cas selon la position de a_y , celui où $y = 2$ et celui où $y > 2$.

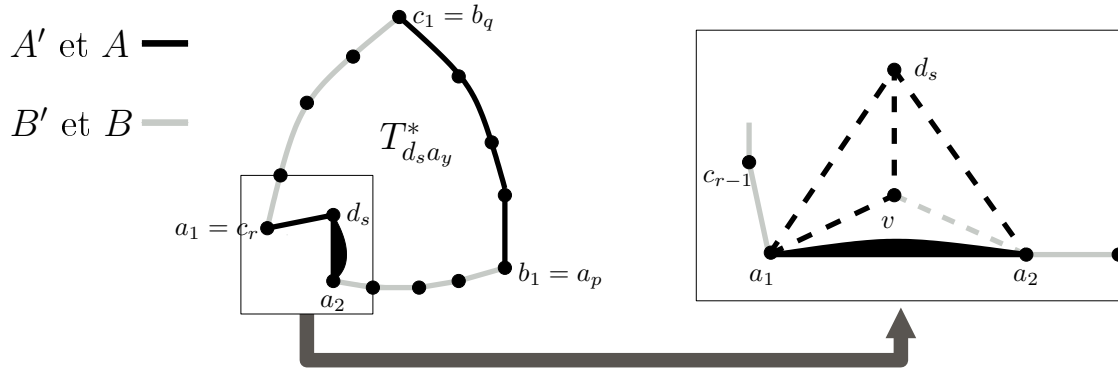


FIG. 16 – Cas 1.4.1.

Cas 1.4.1 : $y = 2$ (voir la Figure 16). Le graphe T étant une W-triangulation, le cycle (a_1, a_2, d_s) délimite une face de T . On note v le f -sommets de T^* adjacent à a_1, a_2 et d_s .

On construit A en faisant l'union de A' et de la pousse G_A formée par le cycle (v, a_1, a_2, d_s) et par l'arête $a_1 d_s$. On construit B en faisant l'union de B' et de l'arête $a_2 v$. Les graphes A et B , couvrant toutes les arêtes de T^* et n'ayant pas d'arête commune, forment une partition de T^* . On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 1.

- (a) Les f -sommets de T^* autres que v ont leur voisinage partitionné comme dans $T_{d_s a_y}^*$. La partition de $T_{d_s a_y}^*$ étant prolongeable (*c.f.* (a')) et le voisinage de v étant partitionné de façon prolongeable, la partition de T^* en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 1 est donc vérifié. \diamond

L'intersection de A' et G_A est la chaîne (a_1, d_s, a_2) . L'arête $a_1 d_s$ étant un isthme de A' et l'arête $a_2 d_s$ étant un côté de A' et de G_A (*c.f.* (d') et (e')), le Lemme 2.2.7 implique que le graphe A est une pousse conforme aux points (b), (d) et (f) de la Propriété 1. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.7 implique le point (b) car A' et G_A sont connexes (*c.f.* (b')). \diamond
- (d) Le Lemme 2.2.7 implique le point (d) car l'arête $a_1 a_2$ est un côté de G_A . \diamond
- (f) Le Lemme 2.2.7 implique le point (f) car les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A' (*c.f.* (g')). \diamond

L'intersection de B' et de l'arête $a_2 v$ étant le sommet a_2 , le Lemme 2.2.4 implique que le graphe B est une pousse conforme aux points (c), (e) et (g) de la Propriété 1. En effet :

- (c) Le Lemme 2.2.4 implique le point (c) car B' a deux composantes connexes, une contenant b_1 et une contenant b_q (c.f. (c')) et car l'arête a_2v forme un graphe connexe. \diamond
- (e) Le Lemme 2.2.4 implique le point (e) car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y = 2 \leq i < p$, sont des isthmes de B' (c.f. (f')). \diamond
- (g) Le Lemme 2.2.4 implique le point (g) car les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B' (c.f. (h')). \diamond

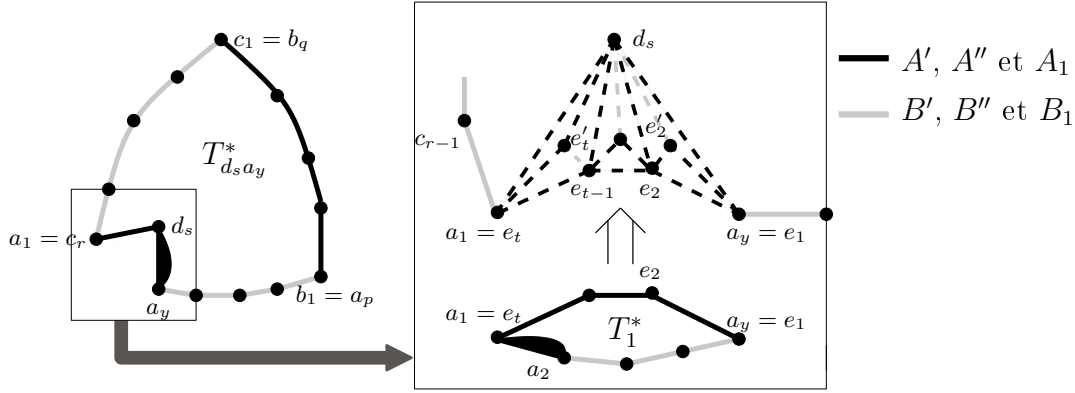


FIG. 17 – Cas 1.4.2.

Cas 1.4.2 : $y > 2$ (voir la Figure 17). On note e_1, e_2, \dots, e_t les voisins de d_s dans T et à l'intérieur du cycle $(d_s, a_1, a_2, \dots, a_y)$, en allant du sommet a_y au sommet a_1 compris. On a donc $e_1 = a_y$ et $e_t = a_1$. De plus, comme il n'y a pas de corde de type $a_1 a_y$ on a $t \geq 3$. L'entier y étant minimum on a $e_i \neq a_j$, pour $1 < i < t$ et $1 < j < y$. On note ensuite e'_i , pour $1 < i \leq t$, les f -sommets de T^* adjacents à d_s, e_i et e_{i-1} .

On construit A'' en faisant l'union de la pousse A' et de la pousse G_A , constituée des arêtes $e_i e_{i+1}$, pour $1 \leq i < t$, des arêtes $d_s e_i$, pour $1 \leq i \leq t$, des arêtes $e_i e'_{i+1}$, pour $1 \leq i < t - 1$, des arêtes $e_i e'_i$, pour $2 \leq i < t$, et des arêtes $d_s e'_t$ et $a_1 e'_t$. L'intersection de ces deux pousses, la chaîne (a_1, d_s, a_y) , a une arête, $a_1 d_s$, isthme de A' et une autre arête, $d_s a_y$, qui est un côté de A' et de G_A (c.f. (d') et (e')). Le Lemme 2.2.7 implique donc que A'' est une pousse :

(a'') connexe (c.f. (b')),

(b'') dont les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes (c.f. (g')).

On construit B'' en faisant l'union de la pousse B' et de la pousse G_B , constituée des arêtes $d_s e'_i$, pour $2 \leq i < t$, et de l'arête $e_{t-1} e'_t$. Ces deux pousses ne s'intersectent qu'en d_s . Le Lemme 2.2.4 implique donc que B'' est une pousse :

(c'') ayant trois composantes connexes, une contenant e_1 , une contenant e_{t-1} et une contenant e_t (c.f. (c'), (f'), (h') et car $V(B'') = V(T_{d_s a_y})$),

- (d'') dont les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y \leq i < p$, sont des isthmes (*c.f.* (f')), et
 (e'') dont les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes (*c.f.* (h')).

On considère maintenant la W-triangulation T_1 , sous-graphe de T (*c.f.* Lemme 2.3.1), à l'intérieur du cycle $(a_1, \dots, a_y, e_2, \dots, e_t)$. La W-triangulation T n'ayant pas de 3-cycle séparant (d_s, e_i, e_j) , il n'y a pas de corde de type $e_i e_j$ dans T_1 . De plus, comme $y > 2$, (a_2, a_1) - (e_t, \dots, e_1) - (a_y, \dots, a_2) est un 3-bord de T_1 . Enfin, comme $a_1 d_s \notin E(T_1)$, la W-triangulation T_1 a moins d'arêtes que T . On peut donc lui appliquer la Propriété 1 avec le 3-bord que l'on vient de mentionner. On note A_1 et B_1 les deux pousses ainsi obtenues, A_1 étant la pousse contenant l'arête $a_1 a_2$. La Propriété 1 implique que la partition de T_1^* en $A_1 = (V(T_1^*), E(A_1))$ et $B_1 = (V(T_1^*), E(B_1))$ vérifie les points suivants :

- (a1) la partition de T_1^* est prolongeable,
- (b1) A_1 est connexe,
- (c1) B_1 a exactement deux composantes connexes, une contenant a_1 et l'autre contenant a_y ,
- (d1) l'arête $a_1 a_2$ est un côté de A_1 ,
- (f1) les arêtes $e_i e_{i+1}$, pour $1 \leq i < t$, sont des isthmes de A_1 , et
- (g1) les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $2 \leq i < y$, sont des isthmes de B_1 .

On définit A (resp. B) comme étant l'union de A'' et A_1 (resp. B'' et B_1). Les graphes A et B , couvrant toutes les arêtes de T^* et n'ayant pas d'arête commune, forment une partition de T^* . On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 1.

- (a) Les f -sommets de T^* , autres que les sommets e'_i , pour $1 < i \leq t$, ont leur voisinage partitionné comme dans $T_{d_s a_y}^*$ ou T_1^* . Les partitions de $T_{d_s a_y}^*$ et de T_1^* étant prolongeable (*c.f.* (a') et (a1)), et le voisinage des sommets e'_i étant par construction partitionné de façon prolongeable, la partition de T^* en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 1 est donc vérifié. \diamond

Les pousses A'' et A_1 s'intersectent sur la chaîne (e_1, e_2, \dots, e_t) dont toutes les arêtes sont des isthmes de A_1 (*c.f.* (f1)). Le Lemme 2.2.5 implique donc que A est une pousse conforme aux points (b), (d) et (f) de la Propriété 1. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.5 implique le point (b) car A'' et A_1 sont connexes (*c.f.* (a'') et (b1)). \diamond
- (d) Le Lemme 2.2.5 implique le point (d) car l'arête $a_1 a_2$ est un côté de A_1 (*c.f.* (d1)). \diamond
- (f) Le Lemme 2.2.5 implique le point (f) car les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A'' (*c.f.* (b'')). \diamond

Les pousses B'' et B_1 ne s'intersectent que sur les sommets e_1 , e_{t-1} et e_t . Or B'' a trois composantes connexes, une contenant e_1 , une contenant e_{t-1} et une contenant e_t (*c.f.* (c'')). On peut donc décomposer l'union de B'' et B_1 en trois unions successives dans lesquelles les

graphes ne s'intersectent qu'en un sommet. Le Lemme 2.2.4 implique alors que l'union de ces deux pousses, le graphe B , est une pousse conforme aux points (c), (e) et (g) de la Propriété 1. En effet :

- (c) Le Lemme 2.2.4 implique le point (c) car B'' a trois composantes connexes, une contenant e_1 , une contenant e_{t-1} et une contenant e_t (*c.f.* (c'')), car B_1 a deux composantes connexes, une contenant e_1 et une contenant e_t (*c.f.* (c1)). En effet, cela implique que dans B les sommets e_1 et e_t sont dans deux composantes connexes distinctes de B . Enfin, les sommets e_1 et b_1 (resp. e_t et b_q) étant dans la même composante connexe (*c.f.* (d'') et (e'')), les sommets b_1 et b_q sont donc dans deux composantes connexes distinctes de B . ◇
- (e) Le Lemme 2.2.4 implique le point (e) car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $2 \leq i < y$, sont des isthmes de B_1 (*c.f.* (g1)) et car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y \leq i < p$, sont des isthmes de B'' (*c.f.* (d'')). ◇
- (g) Le Lemme 2.2.4 implique le point (g) car les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B'' (*c.f.* (e'')). ◇

Ceci achève la preuve du cas 1.

Cas 2 : Preuve de la Propriété 2 pour une W-triangulation $T_{d_x a_y}$ telle que $|E(T_{d_x a_y})| = m$. La W-triangulation $T_{d_x a_y}$ est sous-graphe d'une W-triangulation T . Cette W-triangulation T est 3-bornée par (a_1, \dots, a_p) - (b_1, \dots, b_q) - (c_1, \dots, c_r) . De plus, T n'a pas de corde de type $a_i b_j$ ou $a_i c_j$ et sa chaîne adjacente est (d_1, \dots, d_s, a_1) , avec $s \geq 1$.

Si l'arête $d_x a_y$ est différente de l'arête $d_1 a_p$ alors on définit le couple d'entiers $(z, w) \neq (x, y)$ tels que $x - 1 \leq z \leq x$ et $y \leq w \leq p$. Ce couple est tel qu'il existe une arête $d_z a_w \in E(T_{d_x a_y})$ et tel que z soit maximum. Parmi les couples $(z, w) \neq (x, y)$ possibles, on choisit celui tel que w est minimum. Une telle arête existe forcément car l'ensemble des arêtes $d_z a_w \neq d_x a_y$ telles que $x - 1 \leq z \leq x$ et $y \leq w \leq p$ n'est pas vide. En effet, si $d_x = d_1$ cet ensemble contient l'arête $d_1 a_p$. Si $x > 1$, cet ensemble contient au moins une arête $d_{x-1} a_w$ telle que $y \leq w \leq p$. (le sommet d_{x-1} étant par définition adjacent à un tel sommet a_w).

On distingue différents cas dans notre étude. On verra tout d'abord le cas où $d_x a_y = d_1 a_p$. Lorsque $d_x a_y \neq d_1 a_p$ les cas varient selon la nature de l'arête $d_z a_w$. Lorsque $z = x$ on considère deux cas, le cas où $w = y + 1$ et le cas où $w > y + 1$, et lorsque $z = x - 1$ on considère deux cas, le cas où $w = y$ et le cas où $w > y$.

Cas 2.1 : $d_x a_y = d_1 a_p$ (voir la Figure 18). On note T_1 la W-triangulation (*c.f.* Lemme 2.3.1), sous-graphe de T , à l'intérieur du cycle $(a_1, d_s, \dots, d_1, b_2, \dots, b_q, c_2, \dots, c_r)$. Cette W-triangulation n'a pas de corde de type $b_i b_j$, $c_i c_j$, $d_i d_j$ ou $a_1 d_j$. On considère deux cas suivant l'existence d'une arête $d_1 b_i$ avec $2 < i \leq q$.

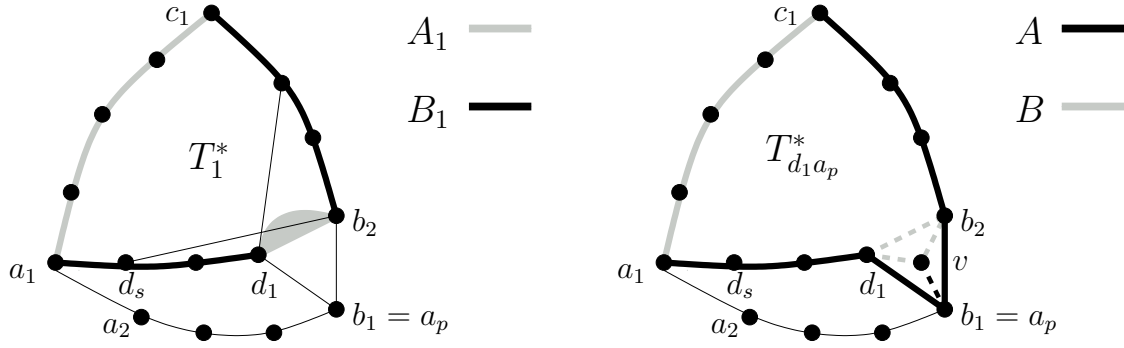


FIG. 18 – Cas 2.1.

- Si T_1 n'a pas de corde de type $d_1 b_i$ alors $(d_1, b_2, \dots, b_q)-(c_1, \dots, c_r)-(a_1, d_s, \dots, d_1)$ est un 3-bord de T_1 .
- Si T_1 a une corde $d_1 b_i$, avec $2 < i \leq q$, on observe que $q > 2$ et qu'il ne peut y avoir de corde $b_2 a_1$ ou $b_2 d_j$, avec $1 < j \leq s$, sans violer la planarité de T (voir la Figure 18). Dans ce cas, $(b_2, d_1, \dots, d_s, a_1)-(c_r, \dots, c_1)-(b_q, \dots, b_2)$ est un 3-bord de T_1 .

Enfin, comme $b_1 b_2 \notin E(T_1)$, la W-triangulation T_1 a moins d'arêtes que $T_{d_1 a_p}$. On peut donc appliquer la Propriété 1 à T_1 avec l'un des 3-bords mentionnés. Que l'on considère l'un ou l'autre des 3-bords, la Propriété 1 produit des partitions de T_1^* , en deux pousses $A_1 = (V(T_1^*), E(A_1))$ et $B_1 = (V(T_1^*), E(B_1))$, ayant exactement les mêmes caractéristiques. En effet, dans les deux cas :

- (a1) la partition de T_1^* est prolongeable,
- (b1) A_1 est connexe,
- (c1) B_1 a exactement deux composantes connexes, une contenant c_1 et l'autre contenant c_r ,
- (d1) l'arête $d_1 b_2$ est un côté de A_1 ,
- (e1-g1) les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 < i \leq q$, les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $1 \leq i < s$, et l'arête $a_1 d_s$ sont des isthmes de B_1 , et
- (f1) les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de A_1 .

Il est simple d'étendre les pousses A_1 et B_1 afin d'obtenir la partition de $T_{d_1 a_p}^*$ désirée. On note v le f -sommet adjacent à a_p , b_2 et d_1 (voir la Figure 18). On construit A (resp. B) en faisant l'union de B_1 (resp. A_1) et du graphe G_A (resp. G_B) constitué des arêtes $b_1 b_2$, $b_1 v$ et $b_1 d_1$ (resp. des arêtes $d_1 b_2$, $v b_2$, $v d_1$ et du sommet b_1). Il est clair que A et B forment une partition de $T_{d_1 a_p}^*$. On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 2.

- (a) Les f -sommets de $T_{d_1 a_p}^*$ autres que v ont leur voisinage partitionné comme dans T_1^* . La partition de T_1^* étant prolongeable (*c.f.* (a1)) et v ayant un voisinage partitionné de

façon prolongeable, la partition de $T_{d_1 a_p}^*$ en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 2 est donc vérifié. \diamond

Les pousses B_1 et G_A ne s'intersectent qu'en d_1 et b_2 . Or la pousse B_1 a deux composantes connexes, une contenant d_1 (celle contenant le sommet c_r et la chaîne (d_1, \dots, d_s, c_r) , *c.f.* (c1) et (e1-g1)) et l'autre contenant b_2 (celle contenant le sommet c_1 et la chaîne (b_2, \dots, b_q) , *c.f.* (c1) et (e1-g1)). On peut donc décomposer l'union de B_1 et G_A en deux unions successives dans lesquelles les graphes ne s'intersectent qu'en un sommet. Le Lemme 2.2.4 implique alors que l'union de ces deux pousses, le graphe A , est une pousse conforme aux points (b), (d), (e) et (g) de la Propriété 2. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.4 implique le point (b) car G_A est connexe ainsi que chacune des deux composantes connexes de B_1 (*c.f.* (c1)). \diamond
- (d) Le Lemme 2.2.4 implique le point (d) car l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $1 \leq i < t$, sont des isthmes de B_1 (*c.f.* (e1-g1)). \diamond
- (e) Le Lemme 2.2.4 implique le point (e) car l'arête $d_1 a_p$ est un côté de G_A . \diamond
- (g) Le Lemme 2.2.4 implique le point (g) car l'arête $b_1 b_2$ est un isthme de G_A et car les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $2 \leq i < q$, sont des isthmes de B_1 (*c.f.* (e1-g1)). \diamond

L'intersection des pousses A_1 et G_B est l'arête $d_1 b_2$. Cette arête étant un côté de la pousse A_1 et de la pousse G_B (*c.f.* (d1)), le Lemme 2.2.6 implique que l'union de ces deux pousses, le graphe B , est une pousse conforme aux points (c), (f) et (h) de la Propriété 2. En effet :

- (c) Le Lemme 2.2.6 implique le point (c) car A_1 est connexe et contient les sommets b_2 et b_q (*c.f.* (b1)) et car G_B a deux composantes connexes, une contenant b_1 et une contenant b_2 . \diamond
- (f) La pousse B vérifie le point (f) car il n'y a pas d'arête $a_i a_{i+1}$, pour $y \leq i < p$, dans le graphe $T_{d_1 a_p}$. \diamond
- (h) Le Lemme 2.2.6 implique le point (h) car les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de A_1 (*c.f.* (f1)). \diamond

Cas 2.2 : $d_x a_y \neq d_1 a_p$, $z = x$ et $w = y + 1$ (voir la Figure 19). Comme $d_x a_y \notin E(T_{d_z a_w})$, la W -triangulation $T_{d_z a_w}$ a moins d'arêtes que $T_{d_x a_y}$. La Propriété 2 s'applique donc à $T_{d_z a_w}$. On note A' et B' les deux pousses ainsi obtenues. La Propriété 2 implique que la partition de $T_{d_z a_w}^*$ en $A' = (V(T_{d_z a_w}^*), E(A'))$ et $B' = (V(T_{d_z a_w}^*), E(B'))$ vérifie les points suivants :

- (a') la partition de $T_{d_z a_w}^*$ est prolongeable,
- (b') A' est connexe,
- (c') B' a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_q ,
- (d') l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $z \leq i < s$, sont des isthmes de A' ,

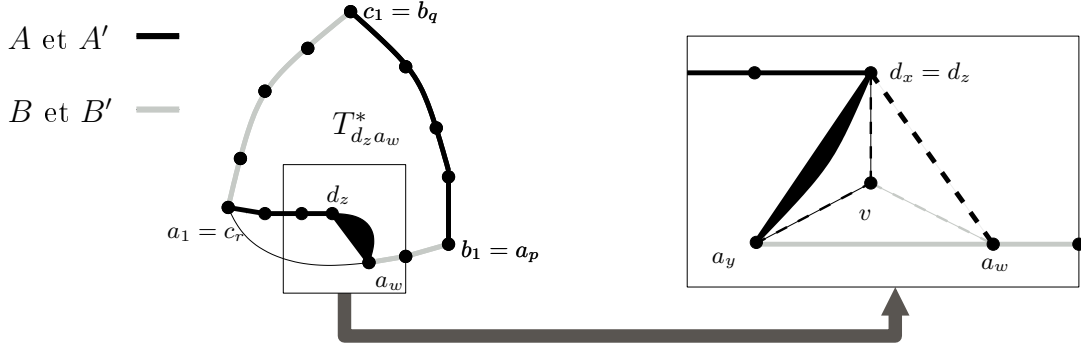


FIG. 19 – Cas 2.2.

- (e') l'arête $d_z a_w$ est un côté de A' ,
- (f') les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes de B' ,
- (g') les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A' , et
- (h') les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B' .

Le graphe $T_{d_x a_y}$ étant une W-triangulation, le cycle (d_x, a_y, a_w) délimite une face de $T_{d_x a_y}$. On note v le f -sommet adjacent à d_x, a_y et a_w . On définit A (resp. B) comme étant l'union de A' (resp. B') et de la pousse G_A (resp. G_B) constituée du cycle (v, d_x, a_y) (resp. de la chaîne (v, a_w, a_y)). Les graphes A et B , couvrant toutes les arêtes de $T_{d_x a_y}^*$ et n'ayant pas d'arête commune, forment une partition de $T_{d_x a_y}^*$. On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 2.

- (a) Les f -sommets autres que v ont leur voisinage partitionné comme dans $T_{d_z a_w}^*$. La partition de $T_{d_z a_w}^*$ étant prolongeable (*c.f.* (a')) et le sommet v ayant un voisinage partitionné de façon prolongeable, la partition de $T_{d_x a_y}^*$ en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 2 est donc vérifié. \diamond

L'intersection des pousses A' et G_A est le sommet d_x . Le Lemme 2.2.4 implique donc que A est une pousse conforme aux points (b), (d), (e) et (g) de la Propriété 2. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.4 implique le point (b) car A' et G_A sont connexes (*c.f.* (b')). \diamond
- (d) Le Lemme 2.2.4 implique le point (d) car l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $x = z \leq i < t$, sont des isthmes de A' (*c.f.* (d')). \diamond
- (e) Le Lemme 2.2.4 implique le point (e) car l'arête $d_x a_y$ est un côté de G_A . \diamond
- (g) Le Lemme 2.2.4 implique le point (g) car les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A' (*c.f.* (g')). \diamond

Les pousses B' et G_B ne s'intersectant qu'en a_w , le Lemme 2.2.4 implique donc que B est une pousse conforme aux points (c), (f) et (h) de la Propriété 2. En effet :

- (c) Le Lemme 2.2.4 implique le point (c) car G_B est connexe et car B' a deux composantes connexes, une contenant b_1 et une contenant b_q (c.f. (c')). \diamond
- (f) Le Lemme 2.2.4 implique le point (f) car l'arête $a_y a_w$ est un isthme de G_B et car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes de B' (c.f. (f')). \diamond
- (h) Le Lemme 2.2.4 implique le point (h) car les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B' (c.f. (h')). \diamond

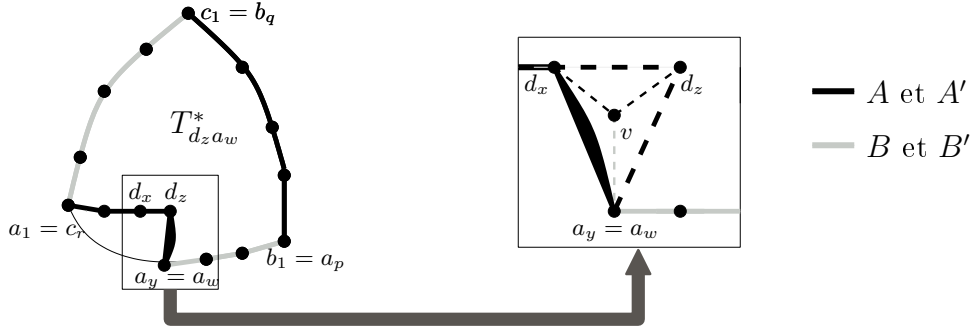


FIG. 20 – Cas 2.3.

Cas 2.3 : $d_x a_y \neq d_1 a_p$, $z = x - 1$ et $w = y$ (voir la Figure 20). Comme $d_x a_y \notin E(T_{d_z a_w})$, la W-triangulation $T_{d_z a_w}$ a moins d'arêtes que $T_{d_x a_y}$. La Propriété 2 s'applique donc à $T_{d_z a_w}$. On note A' et B' les deux pousses ainsi obtenues. La Propriété 2 implique que la partition de $T_{d_z a_w}^*$ en $A' = (V(T_{d_z a_w}^*), E(A'))$ et $B' = (V(T_{d_z a_w}^*), E(B'))$ vérifie les points suivants :

- (a') la partition de $T_{d_z a_w}^*$ est prolongeable,
- (b') A' est connexe,
- (c') B' a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_q ,
- (d') l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $z \leq i < s$, sont des isthmes de A' ,
- (e') l'arête $d_z a_w$ est un côté de A' ,
- (f') les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes de B' ,
- (g') les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A' , et
- (h') les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B' .

Le graphe $T_{d_x a_y}$ étant une W-triangulation, le cycle (d_x, a_y, d_z) délimite une face de $T_{d_x a_y}$. On note v le f -sommet adjacent à d_x , a_y et d_z . On obtient A (resp. B) en faisant l'union de la pousse A' (resp. B') et de la pousse G_A (resp. G_B), constituée du cycle (a_y, d_z, v, d_x) et de l'arête $d_x d_z$ (resp. constituée de l'arête $a_y v$). Les graphes A et B , couvrant toutes les arêtes de $T_{d_x a_y}^*$ et n'ayant pas d'arête commune, forment une partition de $T_{d_x a_y}^*$. On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 2.

- (a) Les f -sommets autres que v ont leur voisinage partitionné comme dans $T_{d_z a_w}^*$. La partition de $T_{d_z a_w}^*$ étant prolongeable (*c.f.* (a')) et v ayant un voisinage partitionné de façon prolongeable, la partition de $T_{d_x a_y}^*$ en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 2 est donc vérifié. \diamond

L'intersection des pousses A' et G_A est la chaîne (d_x, d_z, a_y) . L'arête $d_x d_z$ est un isthme de A' et l'arête $d_z a_y$ est un côté de A' et de G_A . Le Lemme 2.2.7 implique donc que A est une pousse conforme aux points (b), (d), (e) et (g) de la Propriété 2. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.7 implique le point (b) car A' et G_A sont connexes (*c.f.* (b')). \diamond
- (d) Le Lemme 2.2.7 implique le point (d) car l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $x = z \leq i < t$, sont des isthmes de A' (*c.f.* (d')). \diamond
- (e) Le Lemme 2.2.7 implique le point (e) car l'arête $d_x a_y$ est un côté de G_A . \diamond
- (g) Le Lemme 2.2.7 implique le point (g) car les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A' (*c.f.* (g')). \diamond

Les pousses B' et G_B ne s'intersectent qu'en a_y , le Lemme 2.2.4 implique que B est une pousse conforme aux points (c), (f) et (h) de la Propriété 2. En effet :

- (c) Le Lemme 2.2.4 implique le point (c) car G_B est connexe et car B' a deux composantes connexes, une contenant b_1 et une contenant b_q (*c.f.* (c')). \diamond
- (f) Le Lemme 2.2.4 implique le point (f) car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y = w \leq i < p$, sont des isthmes de B' (*c.f.* (f')). \diamond
- (h) Le Lemme 2.2.4 implique le point (h) car les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B' (*c.f.* (h')). \diamond

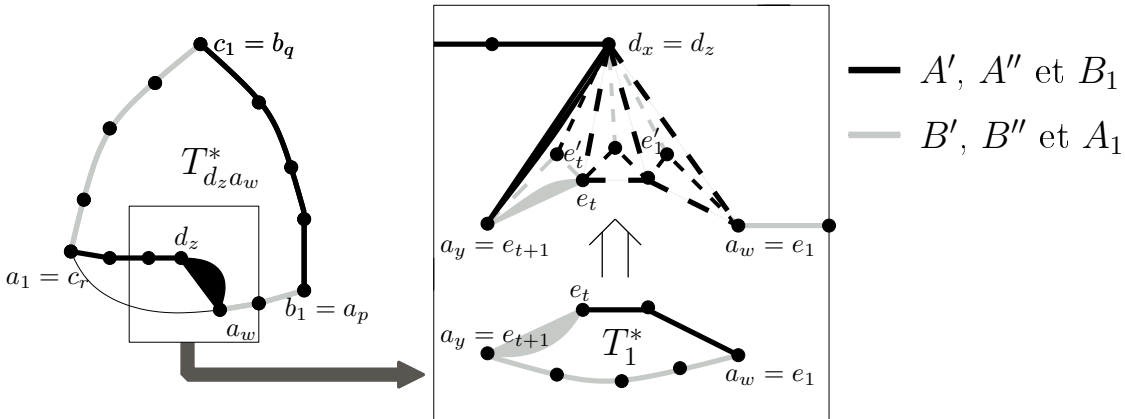


FIG. 21 – Cas 2.4.

Cas 2.4 : $d_x a_y \neq d_1 a_p$, $z = x$ et $w > y + 1$ (voir la **Figure 21**). Comme $d_x a_y \notin E(T_{d_z a_w})$, la W-triangulation $T_{d_z a_w}$ a moins d'arêtes que $T_{d_x a_y}$. La Propriété 2 s'applique donc à $T_{d_z a_w}$. On note A' et B' les deux pousses ainsi obtenues. La Propriété 2 implique que la partition de $T_{d_z a_w}^*$ en $A' = (V(T_{d_z a_w}^*), E(A'))$ et $B' = (V(T_{d_z a_w}^*), E(B'))$ vérifie les points suivants :

- (a') la partition de $T_{d_z a_w}^*$ est prolongeable,
- (b') A' est connexe,
- (c') B' a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_q ,
- (d') l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $z \leq i < s$, sont des isthmes de A' ,
- (e') l'arête $d_z a_w$ est un côté de A' ,
- (f') les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes de B' ,
- (g') les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A' , et
- (h') les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B' .

On note $e_1, e_2, \dots, e_t, e_{t+1}$ les voisins de d_x dans T et à l'intérieur du cycle (d_x, a_y, \dots, a_w) en allant du sommets a_w au sommet a_y compris. On a donc $e_1 = a_w$ et $e_{t+1} = a_y$. De plus, comme il n'y a pas de corde $a_y a_w$ on a $t \geq 2$. On note ensuite e'_i , pour $1 \leq i \leq t$, les f -sommets de T^* adjacents à d_x , e_i et e_{i+1} .

On construit A'' en faisant l'union de la pousse A' et de la pousse G_A , constituée des arêtes $e_i e_{i+1}$, pour $1 \leq i < t$, des arêtes $d_x e_i$, pour $1 \leq i \leq t + 1$, des arêtes $e_i e'_i$, pour $1 \leq i < t$, des arêtes $e'_i e_{i+1}$, pour $1 \leq i < t$, et de l'arête $d_x e'_t$. L'intersection de ces deux pousses, l'arête $d_x a_w$, est un côté dans chacune de ces pousses (*c.f.* (e')). Le Lemme 2.2.6 implique donc que A'' est une pousse :

- (a'') connexe (*c.f.* (a')),
- (b'') dont l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $x \leq i < s$, sont des isthmes (*c.f.* (d')),
- (c'') dont l'arête $d_x a_y$ est un isthme (et donc aussi un côté), et
- (d'') dont les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes (*c.f.* (g')).

On construit B'' en faisant l'union de la pousse B' et de la pousse G_B , constituée des arêtes $d_x e'_i$, pour $1 \leq i < t$, et des arêtes $e_t e_{t+1}$, $e_t e'_t$ et $e_{t+1} e'_t$. Les pousses B' et G_B s'intersectent en un seul sommet, d_x . Le Lemme 2.2.4 implique donc que B'' est une pousse :

- (e'') ayant trois composantes connexes, une contenant a_w (celle contenant la chaîne (a_w, \dots, a_p)), une contenant b_q et une contenant l'arête $a_y e_t$ (*c.f.* (c') et (f')),
- (f'') dont l'arête $a_y e_t$ est un côté,
- (g'') dont les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes (*c.f.* (f')).
- (h'') dont les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes (*c.f.* (h')).

On considère maintenant la W-triangulation T_1 (*c.f.* Lemme 2.3.1), sous-graphe de T , à l'intérieur du cycle $(a_y, \dots, a_w, e_2, \dots, e_t, e_{t+1})$. La W-triangulation T n'ayant pas de 3-cycle

séparant (d_x, e_i, e_j) , il n'y a pas de corde de type $e_i e_j$ dans T_1 . De plus, comme $t \geq 2$, $(e_t, e_{t+1})-(a_y, \dots, a_w)-(e_1, \dots, e_t)$ est un 3-bord de T_1 . Enfin, comme $d_x a_y \notin E(T_1)$, la W-triangulation T_1 a moins d'arêtes que $T_{d_x a_y}$. La Propriété 1 s'applique donc à T_1 pour le 3-bord mentionné. On note A_1 et B_1 les deux pousses ainsi obtenues, la pousse A_1 étant celle contenant l'arête $a_y e_t$. La Propriété 1 implique que la partition de T_1^* en $A_1 = (V(T_1^*), E(A_1))$ et $B_1 = (V(T_1^*), E(B_1))$ vérifie les points suivants :

- (a1) la partition de T_1^* est prolongeable,
- (b1) A_1 est connexe,
- (c1) B_1 a exactement deux composantes connexes, une contenant a_y et l'autre contenant a_w ,
- (d1) l'arête $a_y e_t$ est un côté de A_1 ,
- (f1) les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y \leq i < w$, sont des isthmes de A_1 , et
- (g1) les arêtes $e_i e_{i+1}$, pour $1 \leq i < t$, sont des isthmes de B_1 .

On définit A (resp. B) comme étant l'union de A'' (resp. B'') et B_1 (resp. A_1). Les graphes A et B , couvrant toutes les arêtes de $T_{d_x a_y}^*$ et n'ayant pas d'arête commune, forment une partition de $T_{d_x a_y}^*$. On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 2.

- (a) Les f -sommets, autres que les f -sommets e'_i , pour $1 \leq i \leq t$, ont leur voisinage partitionné comme dans $T_{d_z a_w}^*$ ou T_1^* . Les partitions de $T_{d_z a_w}^*$ et de T_1^* étant prolongeables (*c.f.* (a') et (a1)) et les f -sommets e'_i ayant un voisinage partitionné de façon prolongeable, la partition de $T_{d_x a_y}^*$ en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 2 est donc vérifié. \diamond

Les pousses A'' et B_1 s'intersectent sur la chaîne (e_1, e_2, \dots, e_t) et sur le sommet a_y . Or B_1 a deux composantes connexes, une contenant la chaîne (e_1, e_2, \dots, e_t) et l'autre contenant le sommet a_y (*c.f.* (c1) et (g1)). On peut donc décomposer l'union de A'' et B_1 en deux unions successives, une pour chaque composante connexe de B_1 . Pour l'union concernant la composante connexe de B_1 contenant la chaîne (e_1, e_2, \dots, e_t) , les arêtes de cette chaîne étant des isthmes dans B_1 , on peut appliquer le Lemme 2.2.5. Pour l'union concernant l'autre composante connexe de B_1 on peut appliquer le Lemme 2.2.4. Le Lemme 2.2.5 et le Lemme 2.2.4 impliquent que le graphe A est une pousse conforme aux points (b), (d), (e) et (g) de la Propriété 2. En effet :

- (b) Les Lemmes 2.2.5 et 2.2.4 impliquent le point (b) car A'' est connexe (*c.f.* (a'')) et car B_1 a deux composantes connexes, une contenant le sommet a_y et une contenant la chaîne (e_1, \dots, e_t) (*c.f.* (c1) et (g1)). \diamond
- (d) Les Lemmes 2.2.5 et 2.2.4 impliquent le point (d) car l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $x \leq i < t$, sont des isthmes de A'' (*c.f.* (b'')). \diamond

- (e) Les Lemmes 2.2.5 et 2.2.4 impliquent le point (e) car l'arête $d_x a_y$ est un côté de A'' (c.f. (c'')). ◇
- (g) Les Lemmes 2.2.5 et 2.2.4 impliquent le point (g) car les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A'' (c.f. (d'')). ◇

Les pousses B'' et A_1 s'intersectent sur l'arête $a_y e_t$ et sur le sommet a_w . Or B'' a trois composantes connexes, une contenant l'arête $a_y e_t$, une contenant le sommet a_w et une contenant le sommet b_q (c.f. (e'')). On peut décomposer l'union de B'' et A_1 en deux unions successives, une pour la composante connexe de B'' contenant l'arête $e_t a_y$, et une pour le reste du graphe B'' . Pour la première union, l'arête $e_t a_y$ étant un côté dans A_1 et dans B'' (c.f. (d1) et (f'')), on peut appliquer le Lemme 2.2.6. Pour la seconde union, l'intersection étant le sommet a_w on peut appliquer le Lemme 2.2.4. Le Lemme 2.2.6 et le Lemme 2.2.4 impliquent que le graphe B est une pousse conforme aux points (c), (f) et (h) de la Propriété 2. En effet :

- (c) Les Lemmes 2.2.6 et 2.2.4 impliquent le point (c) car B'' a trois composantes connexes, une contenant l'arête $a_y e_t$, une contenant les sommets a_w et b_1 et une contenant le sommet b_q (c.f. (e'') et (g'')), et car A_1 est connexe (c.f. (b1)). ◇
- (f) Les Lemmes 2.2.6 et 2.2.4 impliquent le point (f) car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y \leq i < w$, sont des isthmes de A_1 (c.f. (f1)), et car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes de B'' (c.f. (g'')). ◇
- (h) Les Lemmes 2.2.6 et 2.2.4 impliquent le point (h) car les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B'' (c.f. (h'')). ◇

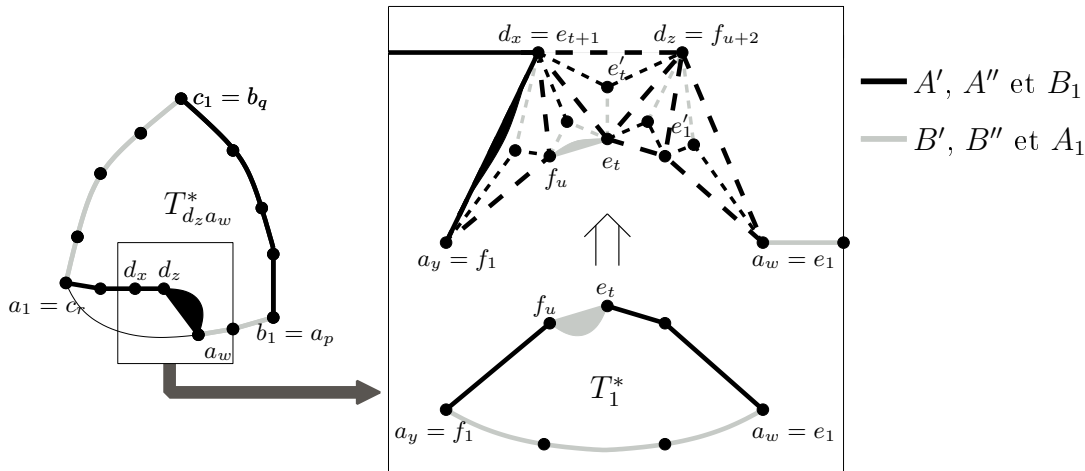


FIG. 22 – Cas 2.5.

Cas 2.5 : $d_x a_y \neq d_1 a_p$, $z = x - 1$ et $w > y > 1$ (voir la Figure 22). Comme $d_x a_y \notin E(T_{d_z a_w})$, la W-triangulation $T_{d_z a_w}$ a moins d'arêtes que $T_{d_x a_y}$. La Propriété 2 s'applique donc

à $T_{d_z a_w}$. On note A' et B' les deux pousses ainsi obtenues. La Propriété 2 implique que la partition de $T_{d_z a_w}^*$ en $A' = (V(T_{d_z a_w}^*), E(A'))$ et $B' = (V(T_{d_z a_w}^*), E(B'))$ vérifie les points suivants :

- (a') la partition de $T_{d_z a_w}^*$ est prolongeable,
- (b') A' est connexe,
- (c') B' a exactement deux composantes connexes, une contenant b_1 et l'autre contenant b_q ,
- (d') l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $z \leq i < s$, sont des isthmes de A' ,
- (e') l'arête $d_z a_w$ est un côté de A' ,
- (f') les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes de B' ,
- (g') les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A' , et
- (h') les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B' .

On note $e_1, e_2, \dots, e_t, e_{t+1}$ (resp. $f_1, f_2, \dots, f_u, f_{u+1}, f_{u+2}$) les voisins de d_z (resp. d_x) dans T et à l'intérieur du cycle $(d_z, d_x, a_y, \dots, a_w)$ en allant du sommet a_w au sommet d_x (resp. en allant de a_y à d_z) compris. On a donc $e_1 = a_w$, $e_t = f_{u+1}$, $e_{t+1} = d_x$, $f_1 = a_y$ et $f_{u+2} = d_z$. De plus, par définition de l'arête $d_z a_w$, il n'y a pas d'arête $d_x a_w$ ou $d_z a_y$, on a donc $t \geq 2$ et $u \geq 1$. On note ensuite e'_i , pour $1 \leq i \leq t$ (resp. f'_i pour $1 \leq i \leq u$), les f -sommets de T^* adjacents à d_z , e_i et e_{i+1} (resp. d_x , f_i et f_{i+1}).

On construit A'' en faisant l'union de la pousse A' et de la pousse G_A , constituée des arêtes $e_i e_{i+1}$, pour $1 \leq i \leq t$, des arêtes $d_z e_i$, pour $1 \leq i \leq t+1$, des arêtes $e_i e'_i$, pour $1 \leq i < t$, des arêtes $e'_i e_{i+1}$, pour $1 \leq i < t$, des arêtes $d_x e'_t$ et $d_z e'_t$, des arêtes $f_i f_{i+1}$, pour $1 \leq i < u$, des arêtes $d_x f_i$, pour $1 \leq i \leq u$, des arêtes $f_i f'_i$, pour $1 \leq i < u$, des arêtes $f'_i f_{i+1}$, pour $1 \leq i < u$, et finalement de l'arête $d_x f'_u$. L'intersection de ces deux pousses est la chaîne (d_x, d_z, a_w) dont l'arête $d_x d_z$ est un isthme de A' et dont l'arête $d_z a_w$ est un côté de A' et de G_A (c.f. (d') et (e')). Le Lemme 2.2.7 implique donc que A'' est une pousse :

- (a'') connexe (c.f. (a')),
- (b'') dont l'arête $a_1 d_s$ et les arêtes $d_i d_{i+1}$, pour $x \leq i < s$, sont des isthmes (c.f. (d')),
- (c'') dont l'arête $d_x a_y$ est un côté, et
- (d'') dont les arêtes $b_i b_{i+1}$, pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes (c.f. (g')).

On construit B'' en faisant l'union de la pousse B' et de la pousse G_B , constituée des arêtes $d_z e'_i$, pour $1 \leq i < t$, des arêtes $d_x f'_i$, pour $1 \leq i < u$, et des arêtes $f_u e_t$, $f_u f'_u$, $e_t f'_u$ et $e_t e'_t$. L'intersection de ces deux pousses, les sommets d_x et d_z , sont dans deux composantes connexes distinctes de G_B . Le Lemme 2.2.4 permet donc de dire que B'' est une pousse :

- (e'') ayant trois composantes connexes, une contenant a_w (celle contenant la chaîne (a_w, \dots, a_p)), une contenant b_q et une contenant l'arête $f_u e_t$ (c.f. (c') et (f')),
- (f'') dont l'arête $f_u e_t$ est un côté,

(gⁿ) dont les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes (*c.f.* (f')).

(hⁿ) dont les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes (*c.f.* (h')).

On considère maintenant la W-triangulation T_1 (*c.f.* Lemme 2.3.1), sous-graphe de T , à l'intérieur du cycle $(a_y, \dots, a_w, e_2, \dots, e_t, f_u, \dots, f_1)$. Comme il n'y a pas de 3-cycle séparant (d_x, e_i, e_j) (resp. (d_x, f_i, f_j)) dans T , il n'y a pas de corde de type $e_i e_j$ (resp. $f_i f_j$) dans T_1 . De plus, étant donné qu'il n'y a pas de corde de type $a_i a_j$, que $t \geq 2$ et que $u \geq 1$, $(e_t, f_u, \dots, f_1) - (a_y, \dots, a_w) - (e_1, \dots, e_t)$ est un 3-bord de T_1 . Enfin, comme $d_x a_y \notin E(T_1)$, la W-triangulation T_1 a moins d'arêtes que $T_{d_x a_y}$. La Propriété 1 s'applique donc à T_1 pour le 3-bord mentionné. On note A_1 et B_1 les deux pousses ainsi obtenues, la pousse A_1 étant celle contenant l'arête $f_u e_t$. La Propriété 1 implique que la partition de T_1^* en $A_1 = (V(T_1^*), E(A_1))$ et $B_1 = (V(T_1^*), E(B_1))$ vérifie les points suivants :

- (a1) la partition de T_1^* est prolongeable,
- (b1) A_1 est connexe,
- (c1) B_1 a exactement deux composantes connexes, une contenant a_y et l'autre contenant a_w ,
- (d1) l'arête $f_u e_t$ est un côté de A_1 ,
- (e1) les arêtes $f_i f_{i+1}$, pour $1 \leq i < u$, sont des isthmes de B_1 ,
- (f1) les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y \leq i < w$, sont des isthmes de A_1 , et
- (g1) les arêtes $e_i e_{i+1}$, pour $1 \leq i < t$, sont des isthmes de B_1 .

On définit A (resp. B) comme étant l'union de A'' et B_1 (resp. B'' et A_1). Les graphes A et B , couvrant toutes les arêtes de $T_{d_x a_y}^*$ et n'ayant pas d'arête commune, forment une partition de $T_{d_x a_y}^*$. On montre maintenant que ces graphes sont des pousses vérifiant tous les points de la Propriété 2.

- (a) Les f -sommets autres que e'_i ou f'_j ont leur voisinage partitionné comme dans $T_{d_x a_w}^*$ ou T_1^* . Les partitions de $T_{d_x a_w}^*$ et de T_1^* étant prolongeables (*c.f.* (a') et (a1)) et les f -sommets e'_i et f'_j ayant un voisinage partitionné de façon prolongeable, la partition de $T_{d_x a_y}^*$ en A et B est elle aussi prolongeable. Le point (a) de la Propriété 2 est donc vérifié. \diamond

Les pousses A'' et B_1 s'intersectent sur les chaînes (e_1, e_2, \dots, e_t) et (f_1, f_2, \dots, f_u) . Or B_1 a deux composantes connexes, une contenant la chaîne (e_1, e_2, \dots, e_t) et l'autre contenant la chaîne (f_1, f_2, \dots, f_u) (*c.f.* (c1), (e1) et (g1)). On peut donc décomposer l'union de A'' et B_1 en deux unions successives dans lesquelles les graphes ne s'intersectent qu'en une chaîne. Les arêtes de ces chaînes étant toutes des isthmes de B_1 (*c.f.* (e1) et (g1)), on peut appliquer à chacune de ces unions le Lemme 2.2.5. Le Lemme 2.2.5 implique que le graphe A est une pousse conforme aux points (b), (d), (e) et (g) de la Propriété 2. En effet :

- (b) Le Lemme 2.2.5 implique le point (b) car A'' est connexe (*c.f.* (a'')) et car B_1 a deux composantes connexes, une contenant la chaîne (e_1, e_2, \dots, e_t) et l'autre contenant la chaîne (f_1, f_2, \dots, f_u) (*c.f.* (c1), (e1) et (g1)). \diamond

- (d) Le Lemme 2.2.5 implique le point (d) car l'arête a_1d_s et les arêtes d_id_{i+1} , pour $x \leq i < t$, sont des isthmes de A'' (c.f. (b'')). \diamond
- (e) Le Lemme 2.2.5 implique le point (e) car l'arête d_xa_y est un côté de A'' (c.f. (c'')). \diamond
- (g) Le Lemme 2.2.5 implique le point (g) car les arêtes b_ib_{i+1} , pour $1 \leq i < q$, sont des isthmes de A'' (c.f. (d'')). \diamond

Les pousses B'' et A_1 s'intersectent sur l'arête $e_t f_u$ et sur le sommet a_w . Or B'' a trois composantes connexes, une contenant l'arête $e_t f_u$, une contenant les sommets a_w et une contenant le sommet b_q (c.f. (e'')). On peut donc décomposer l'union de B'' et A_1 en deux unions successives, une où l'on considère la composante connexe de B'' contenant l'arête $e_t f_u$, et l'autre où l'on considère le reste de B'' . Dans la première union, l'arête $e_t f_u$ étant un côté de B'' et de A_1 (c.f. (f'') et (d1)), on applique le Lemme 2.2.6. Dans la seconde union, l'intersection des graphes est le sommet a_w , on applique donc le Lemme 2.2.4. Ces deux lemmes impliquent que B est une pousse conforme aux points (c), (f) et (h) de la Propriété 2. En effet :

- (c) Les Lemmes 2.2.6 et 2.2.4 impliquent le point (c) car B'' a trois composantes connexes, une contenant l'arête $e_t f_u$, une contenant les sommets a_w et b_1 et une contenant le sommet b_q (c.f. (e'') et (g'')), et car A_1 est connexe (c.f. (b1)). \diamond
- (f) Les Lemmes 2.2.6 et 2.2.4 impliquent le point (f) car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $y \leq i < w$, sont des isthmes de A_1 (c.f. (f1)), et car les arêtes $a_i a_{i+1}$, pour $w \leq i < p$, sont des isthmes de B'' (c.f. (g'')). \diamond
- (h) Les Lemmes 2.2.6 et 2.2.4 impliquent le point (h) car les arêtes $c_i c_{i+1}$, pour $1 \leq i < r$, sont des isthmes de B'' (c.f. (h'')). \diamond

Ceci achève la preuve du cas 2 et donc celle du Lemme 2.3.3. \square

On a donc bien prouvé le Théorème 5 par récurrence sur m . \square

2.4 Partition des triangulations

Soit une triangulation T ayant un 3-cycle séparant (a, b, c) . On note T_{ext} (resp. T_{int}) la triangulation induite par les arêtes du cycle (a, b, c) et celles à l'extérieur du cycle (resp. à l'intérieur). On considère que T_{ext} (resp. T_{int}) admet une partition en deux graphes planaires externes, A_{ext} et B_{ext} (resp. A_{int} et B_{int}). Si l'on désire que les graphes A_{ext} , B_{ext} , A_{int} et B_{int} soient tels que les graphes $A_{ext} \cup A_{int}$ et $B_{ext} \cup B_{int}$ sont des graphes planaires externes formant une partition de T , alors il faut que les graphes A_{ext} , B_{ext} , A_{int} et B_{int} vérifient tous certaines propriétés permettant un «recollage» le long du cycle (a, b, c) . Pour les graphes A_{ext} et B_{ext} , le cycle (a, b, c) délimitant une face interne quelconque de T_{ext} , cette propriété doit s'appliquer à toutes les faces internes de T_{ext} . Concrètement, cette propriété sera que la

partition soit faite sur T_{ext}^* et qu'elle soit prolongeable. Pour les graphes A_{int} et B_{int} , le cycle (a, b, c) délimitant la face externe de T_{int} , cette propriété doit s'appliquer aux abords de la face externe de T_{int} . Cette propriété sera que certaines arêtes du cycle (a, b, c) sont des isthmes ou bien des côtés de A_{int} ou de B_{int} et que certains des sommets a, b ou c sont dans différentes composantes connexes de A_{int} ou de B_{int} .

Le théorème suivant montre quelles sont exactement ces contraintes sur les faces internes ou externes. Ce résultat publié dans [Gon05b] implique le Théorème 4 qui résout la [4, 3]-conjecture.

Théorème 6 *Étant donnée une triangulation T de face externe abc , il existe une partition de T^* en deux pousses $A = (V(T^*), E(A))$ et $B = (V(T^*), E(B))$ (voir la Figure 23). De plus,*

- (a) *la partition est prolongeable,*
- (b) *A est connexe,*
- (c) *B a exactement deux composantes connexes, une contenant le sommet b et l'autre contenant c ,*
- (d) *l'arête ab est un côté de A ,*
- (e) *l'arête bc est un isthme de A , et*
- (f) *l'arête ac est un isthme de B .*

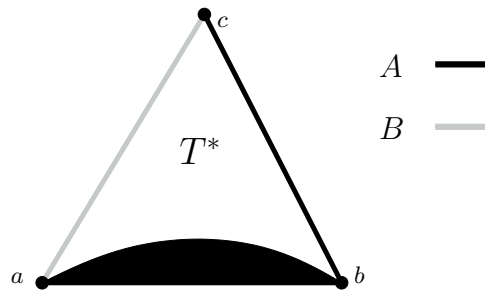


FIG. 23 – Théorème 6.

Preuve : Soit T une triangulation de face externe abc . On procède par récurrence sur le nombre de 3-cycles séparants dans T . S'il n'y en a pas, la triangulation T est 4-connexe. On peut alors appliquer la Propriété 1 à T pour le 3-bord (a, b) - (b, c) - (c, a) . La partition de T^* ainsi obtenue est conforme au Théorème 6.

Si T a un 3-cycle séparant C , on note respectivement T_{ext} et T_{int} les triangulations à l'extérieur et à l'intérieur de C . Le cycle C n'est plus 3-cycle séparant dans T_{ext} ou dans T_{int} . Les triangulations T_{ext} et T_{int} ont donc strictement moins de 3-cycles séparants que T . On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence pour partitionner T_{ext}^* ou T_{int}^* .

On applique l'hypothèse de récurrence à T_{ext} pour partitionner T_{ext}^* en deux pousses $A_e = (V(T_{ext}^*), E(A_e))$ et $B_e = (V(T_{ext}^*), E(B_e))$ telles que :

- (a_e) la partition est prolongeable,
- (b_e) A_e est connexe,
- (c_e) B_e a exactement deux composantes connexes, une contenant le sommet b et l'autre contenant c ,
- (d_e) l'arête ab est un côté de A_e ,
- (e_e) l'arête bc est un isthme de A_e , et
- (f_e) l'arête ac est un isthme de B_e .

On considère maintenant le f -sommet v à l'intérieur du 3-cycle C dans T_{ext}^* . La partition de T_{ext}^* étant prolongeable, on peut nommer les sommets de C , a' , b' et c' , de façon à ce que l'arête support de v soit $a'b'$. On considère, sans perte de généralité que $a'b' \in E(A_e)$ et donc que $va' \in E(A_e)$, $vb' \in E(A_e)$ et $vc' \in E(B_e)$ (voir la Figure 24). Maintenant que l'on a spécifié quel est le sommet a' , le sommet b' et le sommet c' on applique l'hypothèse de récurrence à la triangulation T_{int} de face externe $a'b'c'$. On obtient une partition de T_{int}^* en deux pousses $A_i = (V(T_{int}^*), E(A_i))$ et $B_i = (V(T_{int}^*), E(B_i))$ telles que :

- (a_i) la partition est prolongeable,
- (b_i) A_i est connexe,
- (c_i) B_i a exactement deux composantes connexes, une contenant le sommet b' et l'autre contenant c' ,
- (d_i) l'arête $a'b'$ est un côté de A_i ,
- (e_i) l'arête $b'c'$ est un isthme de A_i , et
- (f_i) l'arête $a'c'$ est un isthme de B_i .

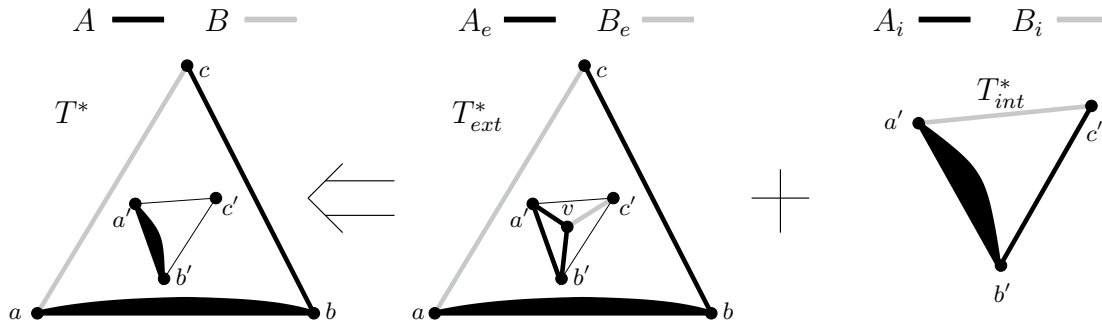


FIG. 24 – Construction de A et de B .

On va maintenant construire la partition de T^* en A et B respectivement à partir des graphes A_e et A_i et des graphes B_e et B_i (Si l'on avait eu $a'b' \in E(B_e)$ on le ferait avec les graphes A_e et B_i et les graphes B_e et A_i). Le cycle $C = (a', b', c')$ ne délimitant pas une face de T , le f -sommet v de T_{ext}^* n'est pas un sommet de T^* . On supprime donc le sommet v dans A_e et B_e , $A'_e = A_e \setminus v$ et $B'_e = B_e \setminus v$. Par application du Lemme 2.2.3, le graphe A'_e est une pousse :

- (e1) connexe,
- (e2) dont l'arête ab est un côté,
- (e3) dont l'arête bc est un isthme, et
- (e4) dont l'arête $a'b'$ est un côté.

Par application du Lemme 2.2.2, le graphe B'_e est une pousse :

- (e5) ayant deux composantes connexes, une contenant le sommet b et une contenant le sommet c , et
- (e6) dont l'arête ac est un isthme.

On sait que les arêtes $a'b'$, $b'c'$ et $a'c'$ sont respectivement dans A_i , A_i et B_i . On sait aussi que l'arête $a'b'$ est dans A'_e mais on ignore si les arêtes $a'c'$ et $b'c'$ sont dans A'_e ou dans B'_e . Afin d'éviter un conflit, on ôte l'arête $b'c'$ de A_i et l'arête $c'a'$ de B_i , $A'_i = A_i \setminus \{b'c'\}$ et $B'_i = B_i \setminus \{c'a'\}$. Par application du Lemme 2.2.2, le graphe A'_i est une pousse :

- (i1) ayant deux composantes connexes, une contenant le sommet c' et l'autre contenant l'arête $a'b'$, et
- (i2) dont l'arête $a'b'$ est un côté.

Par application du Lemme 2.2.2, le graphe B'_i est une pousse :

- (i3) ayant trois composantes connexes, une contenant le sommet a' , une contenant le sommet b' et une contenant le sommet c' .

On définit maintenant A et B comme étant respectivement l'union de A'_e et A'_i , et l'union de B'_e et B'_i . Chaque arête de T^* étant dans l'un de ces quatre sous-graphes, et $a'b'$ étant la seule arête appartenant à deux d'entre eux, les graphes A et B forment bien une partition de T^* . On va maintenant prouver que A et B sont des pousses et qu'elles vérifient bien les différents points du théorème.

La partition de T^* est prolongeable. La plupart des f -sommets de T^* ont leur voisinage partagé exactement comme dans T_{int}^* ou dans T_{ext}^* . Les seuls f -sommets pour lesquels ce n'est pas le cas sont le f -sommet v_1 de T_{int}^* adjacent à b' et c' , et le f -sommet v_2 de T_{int}^* adjacent à a' et c' . D'après (e_i) (resp. (f_i)), l'arête $b'c'$ (resp. $c'a'$) est un isthme de A_i (resp. B_i), l'arête support de v_1 (resp. v_2) n'est donc pas $b'c'$ (resp. $c'a'$). En effet, si c'était le cas on aurait un cycle $(v_1, b', c') \in A_i$ (resp. $(v_2, c', a') \in B_i$) et l'arête $b'c'$ (resp. $c'a'$) ne serait pas un isthme. Ceci implique que les arêtes incidentes à v_1 (resp. v_2) et son arête support sont partitionnées comme elles l'étaient dans T_{int}^* . La partition du voisinage de v_1 (resp. v_2) est donc bien prolongeable. La partition de T^* est prolongeable et la condition (a) du théorème est donc vérifiée.

Le graphe A est planaire externe. On décompose l'union de A'_e et A'_i en deux étapes. À chaque étape on considère une des composantes connexes de A'_i . On fait d'abord l'union de A'_e et de la composante connexe de A'_i contenant $a'b'$. Ces deux graphes ne s'intersectent qu'en $a'b'$. L'arête $a'b'$ étant un côté dans chacune de ces deux pousses (c.f. (e4) et (i2)), on applique le Lemme 2.2.6. On fait ensuite l'union du graphe issu de la première union et de la composante connexe de A'_i contenant le sommet c' . Ces deux graphes ne s'intersectent qu'en c' , on applique donc le Lemme 2.2.4. Le Lemme 2.2.6 et le Lemme 2.2.4 impliquent que le graphe A est une pousse telle que :

- (b) A est connexe car A'_e est connexe (c.f. (e1)) et car A'_i a exactement deux composantes connexes, une contenant c' et une contenant $a'b'$ (c.f. (i1)).
- (d) L'arête ab est un côté de A car l'arête ab est un côté de A'_e (c.f. (e2)).
- (e) L'arête bc est un isthme de A car l'arête bc est un isthme de A'_e (c.f. (e3)).

Le graphe B est planaire externe. On décompose l'union de B'_e et B'_i en trois étapes. À chaque étape on considère une des composantes connexes de B'_i . Lorsqu'on fait l'union avec la composante connexe de B'_i contenant a' (resp. b' et c'), les deux graphes ne s'intersectent qu'en un sommet, a' (resp. b' et c'). Pour chacune de ces unions on applique donc le Lemme 2.2.4. Lemme 2.2.4 implique que le graphe B est une pousse telle que :

- (c) B a deux composantes connexes, une contenant le sommet b et une contenant le sommet c , car B'_e a deux composantes connexes, une contenant le sommet b et une contenant le sommet c (c.f. (e5)), et car chacune des trois composantes connexes de B'_i est connexe (c.f. (i3)).
- (f) L'arête ac est un isthme de B car l'arête ac est un isthme de B'_e (c.f. (e6)).

□

On rappelle la définition du graphe S ainsi que l'énoncé du Théorème 4 :

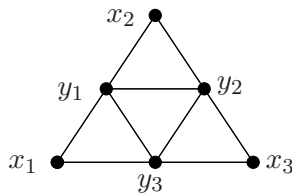


FIG. 25 – Le graphe S .

Théorème 4 *Toute triangulation T admet une partition en deux graphes planaires externes triangulés. De plus, si T est 4-connexe cette partition peut être telle que :*

- (1) *les représentations planaires de ces deux graphes, induites par celle de T , soient planaires externes, et telle que*

(2) ces deux graphes soient S -exclus (i.e. sans sous-graphe isomorphe à S).

En utilisant le Théorème 6 on prouve finalement le Théorème 4.

Preuve du Théorème 4 : Pour toute triangulation T , le Théorème 6 implique qu'il existe une partition prolongeable de stellation T^* en deux pousses A et B . Cette partition induit une partition de T en A' et B' . On obtient A' (resp. B') en supprimant les f -sommets de A (resp. B). Comme la partition de T^* est prolongeable les f -sommets sont soit de degré un dans A (resp. B) soit de degré deux dans A (resp. B) et avec les deux voisins qui sont adjacents entre eux dans A (resp. B). Or les Lemmes 2.2.2 et 2.2.3 indiquent qu'un graphe obtenu par la suppression de tels sommets dans une pousse est aussi une pousse. On considère maintenant le cas des triangulations 4-connexes.

- (1) Si la représentation planaire induite par la représentation planaire de T d'une des pousses A' ou B' n'est pas planaire externe, alors cette pousse a un cycle C et un sommet $x \notin C$ à l'intérieur de C . On considère un tel cycle C de longueur minimum. Cette pousse étant triangulée, si C est de longueur supérieure à 3, alors C a une corde e . Dans ce cas, on peut construire un cycle passant par e et par certaines arêtes de C , contenant le sommet x à l'intérieur et étant de longueur plus petite que C . C'est impossible puisque C est de longueur minimum. Le cycle C est donc un cycle de longueur 3. Or T étant 4-connexe, il n'y a pas de 3-cycle séparant. Le seul cycle de longueur 3 ayant des sommets à l'intérieur est le cycle délimitant la face externe de T . Or comme ce cycle n'est, par définition de A et B , pas entièrement contenu dans A ou dans B , on en déduit qu'il n'existe pas de tel cycle C . Les deux pousses sont donc bien représentées de façon planaire externe. Le point (1) du Théorème 4 est donc vérifié.
- (2) Si le graphe S était sous-graphe de la pousse A , T n'ayant pas de 3-cycle séparant, le cycle (y_1, y_2, y_3) de S délimiterait une face de T . Cette face ne serait pas la face externe abc car $ab \in A$ et $ac \in B$. La face $y_1y_2y_3$ serait donc une face interne de T . On note v le f -sommet de T^* relié aux sommets y_1, y_2 et y_3 . On considère maintenant la partition de T^* donnée par le Théorème 6. Cette partition étant prolongeable et les arêtes y_1y_2, y_1y_3 et y_2y_3 étant dans A , l'arête support de v , disons y_1y_2 , est dans A . Comme il s'agit de l'arête support de v , les arêtes vy_1 et vy_2 sont donc dans A . Les arêtes $y_1x_2, y_2x_2, y_1v, y_2v, y_1y_3$ et y_2y_3 , toutes contenues dans A , formeraient donc une copie de $K_{2,3}$, ce qui est impossible dans un graphe planaire externe. Le point (2) du Théorème 4 est donc vérifié.

□

2.5 Optimalité

On remarque que par définition des partitions de graphes, les graphes A et B du Théorème 6 sont tels que $V(A) = V(B) = V(T)$. On définit la **densité** d'un graphe H comme étant le ratio $\frac{|E(H)|}{|V(H)|}$. On rappelle que la planarité externe $\theta_e(G)$ (resp. la planarité $\theta(G)$ et l'arboricité $a(G)$) d'un graphe G , est le plus petit entier k tel que G soit partitionnable par k graphes planaires externes (resp. graphes planaires et forêts). Tout comme l'arboricité ou la planarité, la planarité externe augmente lorsque la densité du graphe augmente suffisamment. En effet, les graphes planaires externes sur n sommets ayant au plus $2n - 3$ arêtes, pour tout graphe G on a :

$$\theta_e(G) \geq \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{|E(H)|}{2|V(H)| - 3} \right\rceil \quad (2)$$

Le maximum étant pris parmi tous les sous-graphes de G ayant au moins 4 sommets. Les triangulations sur n sommets ayant $3n - 6$ arêtes, le Théorème 6 est donc optimal en terme de planarité externe. On définit maintenant la planarité externe fractionnaire $\theta_e^f(G)$ d'un graphe G :

$$\theta_e^f(G) = \inf \left\{ \frac{p}{q} : G \text{ est } q\text{-couvrable par } p \text{ graphes planaires externes} \right\}$$

Une k -partition étant une 1-couverture par k graphes, on a $\theta_e^f(G) \leq \theta_e(G)$. La planarité externe fractionnaire maximale d'un graphe planaire vaut donc au plus 2. Et comme les graphes planaires externes sur n sommets ont au plus $2n - 3$ arêtes, on a l'inégalité suivante :

$$\theta_e^f(G) \geq \max_{H \subseteq G} \frac{|E(H)|}{2|V(H)| - 3} \quad (3)$$

Cette relation permet de dire que la planarité externe fractionnaire maximale des graphes planaires se situe entre $\frac{3}{2}$ et 2. Les graphes planaires bipartis sont significativement moins denses que les graphes planaires généraux. Les graphes planaires bipartis sur n sommets ont au plus $2n - 4$ arêtes (Par la Formule d'Euler et le fait que chaque face est incidente à au moins 4 arêtes). La planarité externe fractionnaire maximale des graphes planaires bipartis se situe donc entre 1 et 2. Les graphes planaires bipartis sont si peu denses que, d'après la formule de Nash-Williams (*c.f.* Théorème 3), on peut même les couvrir avec deux forêts, qui sont des graphes planaires externes assez triviaux. Malgré cela, le théorème suivant montre que la borne supérieure de θ_e^f , donnée par le Théorème 6 est optimale, y compris lorsque l'on se restreint à la famille des graphes planaires bipartis.

Théorème 7 *Pour toute paire d'entier (p, q) , si $\frac{p}{q} < 2$, le graphe planaire biparti $K_{2,2p+1}$, n'admet pas de q -couverture par p graphes planaires externes.*

Preuve du Théorème 7 : Soient $\{a_1, a_2\}$ et $\{b_1, \dots, b_{2p+1}\}$ les deux stables maximaux du graphe $K_{2,2p+1}$. Si l'on q -couvre ce graphe avec p graphes planaires externes, les graphes

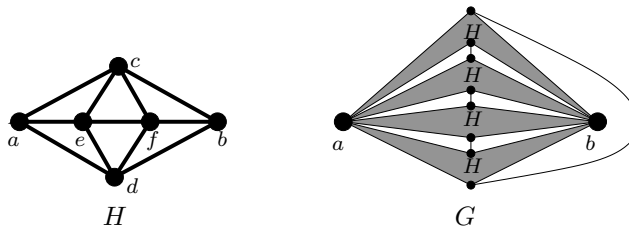
planaires externes étant $K_{2,3}$ -exclus, chacun d'entre eux contient au plus deux des chaînes (a_1, b_i, a_2) , pour $1 \leq i \leq 2p + 1$. Il existe donc un entier k , avec $1 \leq k \leq 2p + 1$, tel que la chaîne (a_1, b_k, a_2) n'est sous-graphe d'aucun des graphes planaires externes. Il faut donc q graphes planaires externes pour q -couvrir l'arête a_1b_k et q autres pour couvrir l'arête a_2b_k . Il est donc bien nécessaire que $p \geq 2q$.

□

La somme du nombre d'arêtes d'un arbre sur n sommets, $n - 1$, et du nombre d'arêtes d'un graphe planaire externe maximal sur n sommets, $2n - 3$, étant supérieure au nombre d'arêtes d'un graphe planaire maximal sur n sommets, $3n - 6$, on pourrait imaginer que les graphes planaires sont partitionnables en une forêt et en un graphe planaire externe. Kedlaya [Ked96] a montré que ce n'est pas toujours possible. Il a exhibé des triangulations non 4-connexes n'admettant pas de partition en deux graphes planaires externes si l'on impose que l'un des deux soit représenté de façon planaire externe. Comme les forêts sont toujours représentées de façon planaire externe, on ne peut pas partitionner ces graphes en une forêt et un graphe planaire externe.

Le résultat de Kedlaya n'est pas vrai pour les triangulations 4-connexes. En effet, on a vu dans le Théorème 6 que les triangulations 4-connexes sont partitionnables en deux graphes planaires externes représentés de façon planaire externe. Il existe cependant des triangulations 4-connexes n'admettant pas de partition en une forêt et en un graphe planaire externe.

On considère le graphe H représenté dans la Figure 26. On construit le graphe G en prenant 4 copies de H , en identifiant leurs sommets a et b , et en ajoutant des arêtes reliant certains sommets de type c à certains sommets de type d , comme indiqué dans la figure. Il est facile de vérifier que cette triangulation ne contient pas de 3-cycle séparants et qu'elle est donc 4-connexe.

FIG. 26 – Les graphes H et G .

Théorème 8 *Le graphe planaire 4-connexe G représenté dans la Figure 26 n'est pas partitionnable en une forêt et en un graphe planaire externe.*

Preuve : On raisonne par l'absurde et on considère une partition du graphe G en une forêt F et en un graphe planaire externe P . Les forêts n'ayant pas de cycle, il y a au plus une chaîne

reliant a et b dans F . Les graphes planaires externes ne contenant pas de mineur de $K_{2,3}$, il y a au plus deux chaînes disjointes reliant a et b dans P . Il existe donc au moins une copie de H ne contenant aucune chaîne reliant a et b dans F ou dans P .

Dans cette copie de H on a, parmi les arêtes ac et bc (resp. ad et bd), une arête dans F et une arête dans P . On considère, sans perte de généralité que $ac \in F$ et que $bc \in P$. On remarque qu'il n'y a pas de chaîne reliant c et d passant par e ou f dans F . En effet, si $ad \in F$ cela créerait un cycle dans F et si $bd \in F$ cela créerait une chaîne entre a et b dans F . Il y a donc parmi les arêtes ce , cf , de et df , au plus deux arêtes dans F . On considère différents cas selon le nombre de ces arêtes dans F :

- S'il y en a deux, il y en a une incidente à e et une incidente à f . Il y a donc dans F une chaîne reliant a ou b et le sommet e et une chaîne reliant a ou b et le sommet f . Comme il n'y a pas de cycle ou de chaîne reliant a et b dans F , on ne peut mettre ni ae , ni ef , ni fb dans F . Ce qui est impossible puisque cela implique que l'on a la chaîne (a, e, f, b) dans P .
- S'il y en a une, il y a une chaîne reliant c et d passant par e ou f dans P . Comme il n'y a pas de chaîne reliant a et b dans P , on a donc $ad \in F$ et $bd \in P$. On considère, sans perte de généralité, que cette arête dans F est adjacente à c et on a donc de et df dans P . On a aussi $ae \in F$, sinon on aurait la chaîne (a, e, d, b) dans P . Pour éviter le cycle (a, c, e) dans F on a $ce \in P$ et $cf \in F$. Finalement pour éviter le chaîne (a, c, f, b) ou le cycle (a, c, f, e) dans F on a $bf \in P$ et $ef \in P$. Or cela implique que les arêtes ce , cb , de , df , db , ef et fb , formant un mineur de K_4 sont dans P . Ceci est impossible puisque les graphes planaires externes n'ont pas de mineur de K_4 .
- S'il n'y en a pas, pour ne pas avoir de chemin dans P reliant a et b on a $bd \in P$. Or cela implique que les arêtes ce , cf , cb , de , df et db , formant un $K_{2,3}$ sont dans P . Ceci est impossible puisque les graphes planaires externes n'ont pas de mineur de $K_{2,3}$.

□

2.6 Conclusion

Les preuves de la Propriété 1, de la Propriété 2 et du Théorème 6 sont toutes trois constructives. On pourrait s'en inspirer pour concevoir un algorithme prenant en entrée un graphe planaire et renvoyant en sortie une partition de ce graphe en deux graphes planaires externes. Un graphe planaire G ayant au plus $3|V(G)| - 6$ arêtes, on peut les triangulariser en temps $O(|V(G)|)$. De même dans [Ric86], Richards montre comment décomposer une triangulation T en ses composantes 4-connexes, des triangulations 4-connexes, en temps $O(|V(G)|)$. En utilisant des structures de données adéquates et en procédant comme dans les preuves de la Propriété 1 et de la Propriété 2, on peut partitionner des triangulations 4-connexes en deux

pousses en temps $O(|V(G)|)$. On a alors bien un algorithme linéaire partitionnant les graphes planaires en deux graphes planaires externes.

On constate que le Théorème 4 a des conséquences intéressantes pour différentes problématiques de théorie des graphes. La planarité $\theta(G)$ des graphes a été longuement étudiée (voir [MOS98] pour un état de l'art). La planarité externe $\theta_e(G)$ des graphes a, elle-aussi, été étudiée [GN90a, GN90b]. Maintenant que la [4, 3]-conjecture est un théorème, on borne plus finement $\theta_e(G)$ en terme de $\theta(G)$.

Corollaire 1 *Pour tout graphe G , on a $\theta_e(G) \leq 2\theta(G)$.*

Un **graphe de k -intervalle** est un graphe où les sommets sont des ensembles de k segments d'une droite (\mathcal{D}) et tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si leur intersection est non-vide. On dit aussi des graphes de 1-intervalles que ce sont des **graphes d'intervalles**. Le **nombre d'intervalles** $i(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G est un graphe de k -intervalle. Le **nombre de pistes** $t(G)$ d'un graphe G est lui le plus petit entier k tel que G soit couvrable par k graphes d'intervalles. Soit un graphe G couvrable par k graphes d'intervalles. En représentant chacun de ces graphes d'intervalles sur des segments disjoints d'une droite (\mathcal{D}) on obtient une représentation de G en graphe de k -intervalle. Pour tout graphe G on a donc $i(G) \leq t(G)$. Dans [SW83], Scheinerman et West montrent que pour tout graphe planaire G , on a $i(G) \leq 3$. De plus, il existe des graphes planaires de nombre d'intervalles 3. Le nombre de pistes maximum des graphes planaires est donc au moins 3. Dans [KW99], Kostochka et West montrent que tout graphe planaire externe H est partitionnable en deux graphes d'intervalles (*i.e.* $t(H) \leq 2$). Cette borne est optimale étant donné qu'il existe des graphes planaires externes qui ne sont pas des graphes d'intervalles. La question se pose aussi de savoir quel est le nombre de pistes maximum des graphes planaires [GW95, KW99]. Les graphes planaires étant partitionnables en deux graphes planaires externes, et les graphes planaires externes étant partitionnables en deux graphes d'intervalles, on obtient un début de réponse.

Corollaire 2 (du Théorème 4) *Tout graphe planaire G est couvrable par quatre graphes d'intervalles (*i.e.* $t(G) \leq 4$).*

Le nombre de pistes maximum pour les graphes planaires est donc 3 ou 4. Dans le chapitre suivant, on donnera un résultat un peu plus fort. En fait, on va montrer que tout graphe planaire est couvrable par 4 graphes d'intervalles acycliques (*i.e.* sans cycles). On montrera aussi que ce résultat est optimal en exhibant des graphes planaires ayant un nombre de pistes égal à 4.

Dans [GZ99, BKP05], les auteurs montrent que les graphes planaires externes sont couvrables par une forêt et un graphe de degré maximum $\Delta = 3$. Dans [HHL⁺02, BKP05], les auteurs montrent que les graphes planaires sont couvrables par deux forêts et un graphe de

degré maximum $\Delta = 8$. Ils s'interrogent également sur la valeur minimum de Δ .

Problème ouvert 1 (He et al. [HHL⁺02]) *Quel est le plus petit entier Δ pour lequel tout graphe planaire est couvrable par deux forêts et un graphe de degré maximum au plus Δ .*

Dans [BKPY05], Balogh et al. montrent que $\Delta \geq 4$ et conjecturent que $\Delta = 4$.

Conjecture 4 (Balogh et al. [BKPY05]) *Tout graphe planaire est couvrable par deux forêts et un graphe de degré maximum au plus 4.*

Les graphes planaires étant couvrables par deux graphes planaires externes, et les graphes planaires externes étant couvrables par une forêt et un graphe de degré maximum $\Delta = 3$, on a le résultat suivant :

Corollaire 3 (du Théorème 4) *Tout graphe planaire G est couvrable par deux forêts et un graphe de degré maximum $\Delta \leq 6$.*

Ce résultat n'est pas optimal puisque l'on prouvera dans la Section 3.7 que la Conjecture 4 est vraie.

Dans [Chu90], Chung construit des graphes contenant comme sous-graphes induits tous les graphes planaires ayant un nombre fixé de sommets, n , et un degré maximum inférieur à k , pour k fixé. Ces graphes ont $O(n^{3.5})$ sommets. Chung montre aussi que si la $[4, 3]$ -conjecture est vraie on peut construire de tels graphes avec seulement $O(n^3)$ sommets. Mais notre résultat n'induit pas de nouvelle borne puisque depuis l'article de Chung, Thomassen a montré, dans [Tho95], comment atteindre la borne $O(n^3)$.

Le Théorème 4 appelle aussi plusieurs questionnements. Il existe des graphes planaires de largeur arborescente arbitrairement grande. Dans [Ked96, DOSV00], les auteurs montrent que l'on peut néanmoins les couvrir avec deux graphes de largeur arborescente au plus 2. Il est montré dans [DOSV00] que tout graphe représentable sur une surface \mathbb{S} est couvrable par deux graphes de largeur arborescente bornée. Notre résultat peut-il être lui aussi étendu à d'autres surfaces? Pour chaque surface \mathbb{S} il existe une notion de graphe \mathbb{S} -externe. Un graphe est \mathbb{S} -externe s'il admet une représentation sur \mathbb{S} où tous ses sommets sont incidents à la même face. On propose la conjecture suivante.

Conjecture 5 *Tout graphe plongeable sur une surface \mathbb{S} est couvrable par deux graphes \mathbb{S} -externes.*

Cette conjecture est vraie pour les graphes toroïdaux 5-connexes. En effet, dans [BR95], Brunet et Richter montrent que ces graphes ont un cycle hamiltonien séparant le tore en deux régions connexes. En prenant les arêtes d'un tel cycle C et celles à l'intérieur d'une même région on obtient bien un graphe torique externe. En effet, tous les sommets sont incidents à la même

face, la face bornée par C . D'ailleurs, un des deux graphes ainsi construits est un graphe planaire externe. C'est pourquoi on propose les conjectures suivantes.

Conjecture 6 *Tout graphe plongeable sur une surface \mathbb{S} est couvrable par un graphe \mathbb{S} -externe et un graphe planaire externe.*

Cette conjecture entraîne la Conjecture 5. La **surface orientée de genre k** , \mathbb{S}_k , est une sphère à laquelle on a accroché k anses. Les surfaces \mathbb{S}_0 et \mathbb{S}_1 sont donc respectivement la sphère et le tore.

Conjecture 7 *Pour tout g et pour tout graphe G représentable sur \mathbb{S}_g , il existe deux entiers g_1 et g_2 tels que $g = g_1 + g_2$ et tels que G est couvrable par un graphe \mathbb{S}_{g_1} -externe et un graphe \mathbb{S}_{g_2} -externe.*

Cette conjecture aussi entraîne la Conjecture 5 puisque les graphes \mathbb{S}_{g_1} - ou \mathbb{S}_{g_2} -externes sont *a fortiori* \mathbb{S}_g -externes. Il est facile de voir que les Conjectures 6 et 7 sont vraies pour les graphes G ayant un sommet dominant (*i.e.* adjacent à tous les autres), v . En effet, en considérant une représentation de G sur une surface \mathbb{S} et en supprimant le sommet v , on obtient une représentation de $G \setminus \{v\}$ dans laquelle tous les sommets sont incidents à la même face. Le graphe $G \setminus \{v\}$ est donc \mathbb{S} -externe, alors que le graphe induit par les arêtes incidentes à v forme une étoile et est donc un graphe planaire externe (*i.e.* \mathbb{S}_0 -externe).

On termine enfin par la plus ambitieuse de ces conjectures, qui entraîne les trois conjectures précédentes.

Conjecture 8 *Pour tout g , g_1 et g_2 tels que $g = g_1 + g_2$, tout graphe plongeable sur \mathbb{S}_g est couvrable par un graphe \mathbb{S}_{g_1} -externe et un graphe \mathbb{S}_{g_2} -externe.*

Chapitre 3

Étude de différentes notions d'arboricité de graphe

Sommaire

3.1	Introduction	68
3.1.1	Les k - d -colorations	73
3.2	Arboricité étoile	74
3.2.1	NP-complétude de 2-ARBORICITÉ-ÉTOILE	76
3.2.2	NP-complétude de 3-ARBORICITÉ-ÉTOILE	80
3.2.3	NP-complétude de 4-ARBORICITÉ-ÉTOILE	84
3.3	Arboricité intérieurement 1-bornée	92
3.3.1	NP-complétude de 2-ARB-INT-1-BORNÉE	94
3.3.2	NP-complétude de 3-ARB-INT- d -BORNÉE, pour $d \geq 1$	98
3.3.3	Degré moyen maximum et preuves par déchargement	101
3.3.4	Les graphes planaires de maille $g \geq 14$	103
3.4	Arboricité chenille	107
3.4.1	L' α -décomposition des triangulations	109
3.4.2	Les graphes planaires	111
3.4.3	NP-complétude de 2-ARB-INT- d -BORNÉE, pour $d \geq 2$	116
3.4.4	Les graphes planaires de maille $g \geq 6$	119
3.4.5	Les graphes planaires de maille $g \geq 10$	120
3.5	Arboricité intérieurement 3-bornée	123
3.5.1	Les graphes planaires de maille $g \geq 5$	123
3.6	Arboricité T-exclue	125
3.6.1	Les 2-arbres	127
3.6.2	Les graphes planaires bipartis	128
3.7	Arboricité mixte	129

3.7.1	Les graphes planaires	134
3.7.2	Les graphes planaires de maille $g \geq 8$	138
3.8	Arboricité circulaire	139

3.1 Introduction

Ce chapitre regroupe différents travaux ([Gon06, GO05, Gon05a]) effectués sur la notion d'arboricité des graphes. L'**arboricité** $a(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une partition de G en k forêts. Étant donné qu'une forêt avec $n \geq 1$ sommets a au plus $n - 1$ arêtes, il faut pour un graphe $G = (V, E)$, au moins $\lceil |E|/(|V| - 1) \rceil$ forêts pour contenir toutes les arêtes de G . Cette remarque étant vraie pour tout sous-graphe de G , on a la relation suivante :

$$a(G) \geq \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{|E(H)|}{|V(H)| - 1} \right\rceil \quad (4)$$

Le maximum étant pris parmi les sous-graphes non-triviaux (*i.e.* ayant au moins 2 sommets) H de G . Cette borne n'est issue que d'un argument concernant la densité des forêts et ne tient pas compte de la structure particulière de ces graphes. En utilisant un résultat prouvé par Tutte [Tut61] et par Nash-Williams [NW61], Nash-Williams [NW64] a montré que cette borne correspond à la valeur exacte de $a(G)$.

Théorème 9 (Nash-Williams) *L'arboricité $a(G)$ d'un graphe G vaut*

$$a(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{|E_H|}{|V_H| - 1} \right\rceil$$

le maximum étant pris parmi les sous-graphes H de G ayant au moins deux sommets.

Différentes variantes de la notion d'arboricité ont été étudiées. L'**arboricité d -bornée** $ab_d(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une partition de G en k forêts de degré maximum au plus d . Pour $d = 2$, ces forêts sont des forêts de chaînes et on parle alors d'**arboricité linéaire** $al(G)$, $al(G) = ab_2(G)$. Soit G un graphe Δ -régulier, partitionné en k forêts de chaînes et v un sommet de G étant au bout d'une de ces chaînes. Les chaînes étant de degré au plus 2, il faut au moins $\lceil (\Delta - 1)/2 \rceil$ forêts de chaînes pour contenir les autres $\Delta - 1$ arêtes incidentes à v . On a donc :

$$al(G) \geq 1 + \left\lceil \frac{\Delta - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta + 1}{2} \right\rceil \quad (5)$$

Indépendamment Akiyama, Exoo et Harary [AEH80] et Hilton [Hil82] conjecturent que cette borne est la valeur exacte.

Conjecture 9 (Akiyama et al. et Hilton) *Pour tout graphe Δ -régulier G , on a $al(G) = \left\lceil \frac{\Delta + 1}{2} \right\rceil$*

Les cas $\Delta = 1$ ou 2 sont triviaux. De nombreux travaux portent sur cette conjecture toujours ouverte. En particulier, on trouve dans [AEH81, Tom82, EP84, Gul86] les preuves des cas $\Delta = 3, 4, 5, 6, 8$ et 10 . Dans [Alo88] Alon montre lui que pour tout $\epsilon > 0$, $al(G) \leq (\frac{1}{2} + \epsilon)\Delta$ pour tout G de degré maximum Δ suffisamment grand. Dans [Tru91], Truszczyński étudie $ab_d(G)$ pour tout $d \geq 2$ et propose une généralisation de la Conjecture 9.

Conjecture 10 (Truszczyński) *Pour $d \geq 2$ et tout graphe Δ -régulier G , on a :*

$$ab_d(G) = \begin{cases} a(G) \text{ ou } a(G) + 1 & \text{si } a(G) = \frac{\Delta}{d} \\ \max \left\{ \lceil \frac{\Delta}{d} \rceil, a(G) \right\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette conjecture est encore ouverte. Elle n'a été prouvée que pour les graphes complets, les graphes bipartis complets et pour les couples (G, d) tels que $d \leq \Delta(G) + 1 - a(G)$.

Une **étoile** est un arbre de diamètre au plus 2. Une **chenille** est un arbre dont les sommets de degré $d \geq 2$ induisent une chaîne (éventuellement triviale). L'**arboricité étoile** $ae(G)$ (resp. l'**arboricité chenille** $ac(G)$) d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une partition de G en k forêts d'étoiles (resp. de chenilles). Les étoiles étant des chenilles et les chenilles étant des arbres, on a les inégalités suivantes :

$$a(G) \leq ac(G) \leq ae(G) \tag{6}$$

Étant donné un arbre A enraciné, on partitionne l'ensemble de ses arêtes $E(A)$ en E_i et E_p qui sont respectivement l'ensemble des arêtes des niveaux impairs et l'ensemble des arêtes des niveaux pairs. Les graphes induits par ces ensembles, $A[E_i]$ et $A[E_p]$, sont des forêts d'étoiles. On a donc :

$$ae(G) \leq 2a(G) \tag{7}$$

Dans [HMS96], Hakimi *et al.* montrent que l'on peut aussi borner $ae(G)$ par un autre invariant de G , son nombre chromatique acyclique. Le **nombre chromatique acyclique** $\chi_a(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration propre des sommets de G où toute paire de couleurs induit un graphe sans cycles.

Théorème 10 (Hakimi *et al.*) *Pour tout graphe G , on a $ae(G) \leq \chi_a(G)$.*

Étant donnée une famille finie ou infinie \mathcal{F} de graphes, on définit $\chi_a(\mathcal{F})$ (resp. $ae(\mathcal{F})$, $ac(\mathcal{F})$, $a(\mathcal{F})$) comme étant le maximum de $\chi_a(G)$ (resp. $ae(G)$, $ac(G)$, $a(G)$), pour $G \in \mathcal{F}$. Lorsque ce maximum n'est pas défini, $\chi_a(\mathcal{F})$ (resp. $ae(\mathcal{F})$, $ac(\mathcal{F})$ ou $a(\mathcal{F})$) prend la valeur $+\infty$.

Pour tout entier $g \geq 3$ on note \mathcal{P}_g l'ensemble des graphes planaires de maille $k \geq g$. Comme $\mathcal{P}_{g+1} \subset \mathcal{P}_g$, on a $\chi_a(\mathcal{P}_{g+1}) \leq \chi_a(\mathcal{P}_g)$ (resp. $ae(\mathcal{P}_{g+1}) \leq ae(\mathcal{P}_g)$, $ac(\mathcal{P}_{g+1}) \leq ac(\mathcal{P}_g)$ et $a(\mathcal{P}_{g+1}) \leq a(\mathcal{P}_g)$). De plus, le Théorème 10 et l'inégalité (6) impliquent que pour toute famille de graphes \mathcal{F} on a :

$$a(\mathcal{F}) \leq ac(\mathcal{F}) \leq ae(\mathcal{F}) \leq \chi_a(\mathcal{F}) \tag{8}$$

On a regroupé dans le tableau suivant les valeurs possibles de ces invariants pour les familles de graphes planaires \mathcal{P}_g .

maille g	$a(\mathcal{P}_g)$	$ac(\mathcal{P}_g)$	$ae(\mathcal{P}_g)$	$\chi_a(\mathcal{P}_g)$
3	3	3-4-5	5	5
4	2	2-3-4	2-3-4	5
5-6	2	2-3-4	2-3-4	3-4
≥ 7	2	2-3	2-3	3

TAB. 1 – Valeurs possibles de différents invariants pour les familles de graphes \mathcal{P}_g .

La colonne correspondant à l'arboricité «classique» est obtenue par le Théorème de Nash-Williams (*c.f.* Théorème 9) et par la Formule d'Euler (*c.f.* Théorème 1). Les résultats de [Bor79, BKW99] donnent les bornes supérieures de la dernière colonne. De plus, il existe des graphes planaires bipartis (donc de maille $g \geq 4$) de nombre chromatique acyclique 5 [KM76] et des graphes de maille arbitrairement grande de nombre chromatique acyclique 3 : les cycles impairs C_{2n+1} . La colonne correspondant à l'arboricité étoile est obtenue par les inégalités (7) et (8) et par le fait qu'il existe des graphes planaires d'arboricité étoile 5 [AA89]. Finalement, la colonne correspondant à l'arboricité chenille est obtenue par l'inégalité (6).

Dans la suite de ce chapitre, on affine les valeurs du Tableau 1 et on étudie d'autres types d'arboricités proches de l'arboricité étoile et de l'arboricité chenille. Le **degré interne maximum** d'une forêt F est le degré maximum de la forêt induite par les sommets v de degré au moins 2 dans F ($\deg_F(v) \geq 2$). On note que les forêts d'étoiles et les forêts de chenilles sont respectivement de degré interne maximum 0 et au plus 2. Pour tout entier $d \geq 0$, l'**arboricité intérieurement d -bornée** $a_d(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une partition de G en k forêts de degré interne maximum au plus d . Ce nouvel invariant englobe plusieurs types d'arboricités connues. En effet, l'arboricité étoile (resp. l'arboricité chenille) correspond à l'arboricité intérieurement 0-bornée (resp. 2-bornée). Pour tout graphe G , on a donc $ae(G) = a_0(G)$ et $ac(G) = a_2(G)$. Pour tout entier $d \geq 0$ et tout graphe G , par définition du degré interne maximum, on a :

$$a_{d+1}(G) \leq a_d(G) \quad (9)$$

Comme précédemment, on étend la définition de cet invariant de graphe aux ensembles de graphes. Pour une famille \mathcal{F} de graphes, on définit $a_d(\mathcal{F})$ comme étant le maximum de $a_d(G)$ pour $G \in \mathcal{F}$. Lorsque ce maximum n'est pas défini, $a_d(\mathcal{F})$ prend la valeur $+\infty$. Encore une fois pour tout entier $d \geq 0$, comme $\mathcal{P}_{g+1} \subset \mathcal{P}_g$, on a :

$$a_d(\mathcal{P}_{g+1}) \leq a_d(\mathcal{P}_g) \quad (10)$$

Dans la suite de ce chapitre on étudie $a_d(\mathcal{P}_g)$ pour différents entiers $d \geq 0$ et $g \geq 3$. Le Tableau 2 récapitule les différentes valeurs possibles de $a_d(\mathcal{P}_g)$ pour $0 \leq d \leq 3$. On s'intéresse à a_1 et

à a_3 car ces paramètres sont en relation avec l'arboricité étoile et l'arboricité chenille. Étant donné que pour tout entier $g \geq 3$ on a l'inégalité,

$$a(\mathcal{P}_g) \leq a_3(\mathcal{P}_g) \leq a_2(\mathcal{P}_g) \leq a_1(\mathcal{P}_g) \leq a_0(\mathcal{P}_g) \leq \chi_a(\mathcal{P}_g) \quad (11)$$

les colonnes du tableau sont classées par «ordre» croissant. Les différences entre ce tableau et le Tableau 1 sont prouvées dans les sections suivantes.

maille g	$a(\mathcal{P}_g)$	$a_3(\mathcal{P}_g)$	$ac(\mathcal{P}_g) = a_2(\mathcal{P}_g)$	$a_1(\mathcal{P}_g)$	$ae(\mathcal{P}_g) = a_0(\mathcal{P}_g)$	$\chi_a(\mathcal{P}_g)$
3	3	4	4	4-5	5	5
4	2	4	4	4	4	5
5	2	3	3-4	3-4	3-4	3-4
6	2	3	3	3-4	3-4	3-4
7-8	2	2-3	2-3	3	3	3
9	2	2-3	2-3	2-3	3	3
10-13	2	2	2	2-3	3	3
≥ 14	2	2	2	2	3	3

TAB. 2 – Résultats concernant les graphes planaires.

Les colonnes $a(\mathcal{P}_g)$ et $\chi_a(\mathcal{P}_g)$ sont les mêmes que dans le Tableau 1. Les valeurs de la colonne $ae(\mathcal{P}_g)$ (resp. $a_1(\mathcal{P}_g)$, $ac(\mathcal{P}_g)$ et $a_3(\mathcal{P}_g)$) proviennent des relations (10) et (11) et des résultats présentés dans la Section 3.2 (resp. la Section 3.3, la Section 3.4 et la Section 3.5).

On a aussi dans ce chapitre des résultats de complexité. Un **problème de décision** est un problème dont la réponse, pour une instance donnée, est positive ou négative. Les problèmes NP-complets forment une famille de problèmes pour lesquels on ne dispose pas d'algorithmes efficaces. Les textes de référence [GJ79, HU79, CLR90] fournissent une définition précise des différentes familles de problèmes. Dans [Hob89] l'auteur présente un algorithme polynomial permettant de calculer l'arboricité d'un graphe G . Pour de nombreuses variantes de l'arboricité, il n'existe pas de tel algorithme. Il est montré dans [HMS96] qu'il est NP-complet, étant donné un graphe G , de décider si $ae(G) \leq 2$. De même, dans [She96], Shermer montre que décider si $al(G) \leq 2$ ou bien décider si $ac(G) \leq 2$ sont tous deux des problèmes NP-complets. Au cours de ce chapitre, on affine ces résultats de NP-complétude et on donne d'autres résultats de complexité. Pour cela on note **k -ARB-INT- d -BORNÉE** le problème qui prend en entrée un graphe G et qui indique si $a_d(G) \leq k$. On utilise aussi une notation alternative lorsque $d = 0$ ou 2 ; on note respectivement **k -ARBORICITÉ-ÉTOILE** et **k -ARBORICITÉ-CHENILLE**, les problèmes k -ARB-INT-0-BORNÉE et k -ARB-INT-2-BORNÉE. On remarque que si le problème k -ARB-INT- d -BORNÉE est NP-complet pour une famille de graphe \mathcal{F} , alors cela implique que \mathcal{F} contient des graphes G tels que $a_d(G) > k$. En effet, il n'existe pas d'algorithme permettant de répondre à un problème NP-complet en

temps constant. Donc lorsque k -ARB-INT- d -BORNÉE est un problème NP-complet pour une famille de graphe \mathcal{F} on a $a_d(\mathcal{F}) > k$.

Dans la Section 3.2 on montre que les problèmes 2-ARBORICITÉ-ÉTOILE, 3-ARBORICITÉ-ÉTOILE et 4-ARBORICITÉ-ÉTOILE sont NP-complets pour certaines familles de graphes assez restreintes. Ces résultats permettent de répondre positivement à un problème ouvert de Fiala et Le [FL04] concernant l'indice sous-chromatique $\chi'_{sub}(G)$ des graphes (on définira cet invariant de graphe dans la Section 3.2).

Problème ouvert 2 (Fiala et Le [FL04]) *Est-il NP-complet de décider si un graphe planaire G est tel que $\chi'_{sub}(G) \leq 2$?*

Dans la Section 3.3 on montre que $a_1(\mathcal{P}_{14}) \leq 2$ et que les problèmes 2-ARB-INT-1-BORNÉE et 3-ARB-INT- d -BORNÉE, avec $d \geq 1$, sont NP-complets pour certaines familles de graphes.

Dans la Section 3.4 on montre que les problèmes 2-ARB-INT- d -BORNÉE, avec $d \geq 2$, sont NP-complets et que $ac(\mathcal{P}_3) \leq 4$, $ac(\mathcal{P}_6) \leq 3$ et $ac(\mathcal{P}_{10}) \leq 2$. Ces résultats permettent de répondre à la Conjecture 11 et à trois problèmes ouverts de Gyárfás et West [GW95].

Conjecture 11 (Roditty, Shoham et Yuster [RSY01, Cam03]) *Pour tout graphe planaire G , on a $ac(G) \leq 4$.*

Problème ouvert 3 (Gyárfás et West [GW95]) *Quel est le nombre de pistes maximum d'un graphe planaire ? Est-ce 3 comme pour le nombre d'intervalle [SW83] ?*

Problème ouvert 4 (Gyárfás et West [GW95]) *Est-il NP-complet de décider si un graphe G sans triangle est tel que $t(G) \leq 2$?*

Problème ouvert 5 (Gyárfás et West [GW95]) *Est-il NP-complet de décider si un graphe planaire G est tel que $t(G) \leq 2$?*

Dans la Section 3.5 on montre que $a_3(\mathcal{P}_5) \leq 3$.

Dans la Section 3.6 on introduit un nouveau type d'arboricité, l'arboricité T -exclue. Cette notion permet entre autre de montrer que bien que $a(\mathcal{P}_4) = 2$, pour tout entier $d \geq 0$ on a $a_d(\mathcal{P}_4) \geq 3$.

Dans la Section 3.7 on répond au Problème ouvert 1 en prouvant la Conjecture 4. On rappelle ici leurs énoncés respectifs.

Problème ouvert 1 (He et al. [HHL⁺02]) *Quel est le plus petit entier Δ pour lequel tout graphe planaire est couvrable par deux forêts et un graphe de degré maximum Δ ?*

Conjecture 4 (Balogh et al. [BKPY05]) *Tout graphe planaire est couvrable par deux forêts et un graphe de degré maximum au plus 4.*

En fait, on montre un résultat plus fort. On prouve que tout graphe planaire admet une partition en trois forêts dont l'une est de degré maximum au plus 4. On montre également que tout graphe planaire de maille $g \geq 8$ est couvrable par deux forêts dont une est de degré maximum au plus 2.

Enfin, dans la Section 3.8 on conclut ce chapitre en donnant certaines perspectives de recherche. Ces perspectives portent sur un raffinement des différentes notions d'arboricité étudiées.

Avant de prouver ces résultats, on présente dans la sous-section suivante un type de coloration d'arêtes en relation avec l'arboricité intérieurement d -bornée.

3.1.1 Les k - d -colorations

L'**orientation** d'une arête uv est un ordre sur ses extrémités. Il y a deux ordres possibles, on dit de l'arête uv qu'elle est orientée soit de u vers v , soit de v vers u . Une **orientation partielle** des arêtes d'un graphe G est l'orientation d'un ensemble $S \subseteq E(G)$ d'arêtes de G . Les arêtes de S sont dites **orientées** et celles de $E(G) \setminus S$, **non-orientées**.

Définition 2 Une k - d -coloration d'un graphe G est constitué d'une k -coloration des arêtes de G et d'une orientation partielle des arêtes de G , telles que pour tout entier i , avec $1 \leq i \leq k$, on respecte les conditions suivantes :

- (A) Un sommet v incident à une arête e , coloriée i et orientée vers v , n'a pas d'autre arête incidente coloriée i .
- (B) Tout sommet $v \in V(G)$ a au plus d arêtes incidentes non-orientées et coloriées i .
- (C) Les arêtes non-orientées et coloriées i induisent un graphe acyclique (i.e. sans cycles).

Soit G un graphe k - d -colorié. Pour tout i avec $1 \leq i \leq k$, on note F_i le graphe induit par les arêtes coloriées i . Une **extrémité de F_i** est un sommet $v \in V(G)$ incident à une arête coloriée i et orientée vers v . La condition (A) implique que toute extrémité v de F_i est de degré 1 dans F_i ($\deg_{F_i}(v) = 1$). Les **sommets internes de F_i** sont les sommets de G qui ne sont pas des extrémités de F_i . En particulier, un sommet n'ayant aucune arête incidente coloriée i est interne dans F_i . Le lemme suivant montre que ce type de coloration est lié à l'arboricité intérieurement d -bornée.

Lemme 3.1.1 Soit un entier $k \geq 1$ et un entier $d \geq 0$. Un graphe G est k - d -coloriable si et seulement si $a_d(G) \leq k$.

Preuve : Soit G un graphe k - d -colorié. Pour tout i avec $1 \leq i \leq k$, on montre que le graphe F_i induit par les arêtes coloriées i est une forêt de degré interne maximum au plus d . Le graphe F_i est une forêt car ses arêtes non-orientées induisent une forêt (condition (C)) et car ses arêtes orientées, ayant une extrémité de degré 1 dans F_i (condition (A)), ne sont pas incluses dans un cycle de F_i . La forêt F_i est de degré interne maximum au plus d . En effet, le

graphe induit par ses sommets v de degré $\deg(v) \geq 2$ ne contient que des arêtes non-orientées, il est donc de degré au plus d (condition (B)).

Réciproquement, on considère un graphe G tel que $a_d(G) \leq k$. Soit $E(G) = E_1 \cup \dots \cup E_k$ une k -partition de ses arêtes, telle que pour tout i , avec $1 \leq i \leq k$, le graphe $G[E_i]$ soit une forêt de degré interne maximum au plus d . On montre que le graphe G est k - d -coloriable. Pour la k -coloration des arêtes, on colorie une arête $e \in E(G)$ avec la couleur i si et seulement si $e \in E_i$. Comme $G[E_i]$ est une forêt, la condition (C) est remplie. Ensuite pour tout i , avec $1 \leq i \leq k$, et pour tout sommet v de degré 1 dans $G[E_i]$ on oriente son arête incidente dans $G[E_i]$, e , vers une feuille de $G[E_i]$. Le sommet v étant une feuille de $G[E_i]$, l'arête e a bien au moins une de ses extrémités qui est une feuille. Dans le cas où les deux extrémités d'une arête uv sont de degré 1 dans $G[E_i]$, alors l'arête uv est arbitrairement orientée de u vers v ou de v vers u . Les autres arêtes de $G[E_i]$ restent non-orientées. Par construction, la condition (A) est remplie. Finalement, le graphe induit par les arêtes non-orientées (c'est à dire les arêtes dont les deux extrémités sont de degré au moins 2) et coloriées i étant le sous-graphe de $G[E_i]$ induit par les sommets v de degré $\deg_{G[E_i]}(v) \geq 2$ et $G[E_i]$ étant de degré interne maximum au plus d , la condition (B) est remplie. \square

Soient deux entiers $k \geq 1$ et $d \geq 0$, et un graphe G k - d -colorié. Un sommet $v \in V(G)$ est p -interne (resp. $\leq p$ -interne, $\geq p$ -interne) s'il est interne dans exactement (resp. au plus, au moins) p forêts F_i . On insiste sur le fait qu'un sommet p -interne n'est pas $(p-1)$ ou $(p+1)$ -interne.

Lemme 3.1.2 *Soit deux entiers $k \geq 1$ et $d \geq 0$, et un graphe G k - d -colorié. Tout sommet $v \in V(G)$ de degré $\deg_G(v) \neq k$ est nécessairement ≥ 1 -interne.*

Preuve : On le montre en prouvant que tout sommet 0-interne est de degré k . En effet toute extrémité v de F_i , avec $1 \leq i \leq k$, est de degré 1 dans F_i ($\deg_{F_i}(v) = 1$). Si un sommet v est une extrémité dans toutes les forêts F_i , avec $1 \leq i \leq k$, alors la condition (A) implique que v est incident à exactement k arêtes, toutes orientées vers v et toutes coloriées différemment. \square

Soient un graphe G k - d -colorié, un sommet $u \in V(G)$ et un sommet $v \notin V(G)$. Si u est interne dans la forêt F_1 (donc u est ≥ 1 -interne) on peut étendre la k - d -coloration de G au graphe $G \cup \{uv\}$ en orientant l'arête uv vers v et en la coloriant 1. On dit donc d'une k - d -coloration de G qu'elle est p -prolongeable si tous les sommets de G sont $\geq p$ -internes.

3.2 Arboricité étoile des graphes planaires

Il existe différentes bornes connues pour $ae(\mathcal{F})$ lorsque $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}_g$. Dans [AA89], Algor et Alon considèrent les graphes de degré maximum borné. Ils montrent, en utilisant le Lemme Local de Lovász [EL75], que pour tout graphe Δ -régulier G on a $ae(G) = \frac{1}{2}\Delta + O(\Delta^{\frac{2}{3}} \log^{\frac{1}{3}} \Delta)$. Les

graphes planaires externes étant acycliquement 3-coloriables, le Théorème 10 implique qu'ils sont d'arboricité étoile au plus 3. Cette borne est fine puisqu'il existe des graphes planaires externes d'arboricité étoile 3.

Un graphe ***t*-dégénéré** est un graphe G dont tout sous-graphe $H \subseteq G$ est de degré minimum au plus t . Dans [HMS96], les auteurs montrent que le problème 2-ARBORICITÉ-ÉTOILE restreint à la famille des graphes 2-dégénérés est NP-complet. On affine ce résultat en restreignant la famille de graphe.

Théorème 11 *Pour tout entier $n > 1$, il est NP-complet de décider si un graphe G , biparti, planaire, 2-dégénéré, de maille $g \geq 2n$ et de degré maximum 3, vérifie $ae(G) \leq 2$.*

On note que la maille de ces graphes est arbitrairement grande. Ce théorème a plusieurs conséquences notables. On savait que :

- si $g \geq 4$ alors $ae(\mathcal{P}_g) \leq 4$ et que
- si $g \geq 7$ alors $ae(\mathcal{P}_g) \leq 3$.

Le Théorème 11 impliquant que $ae(\mathcal{P}_g) \geq 3$ pour $g \geq 4$, on déduit que :

- si $4 \leq g < 7$ alors $ae(\mathcal{P}_g) = 3$ ou 4 et que
- si $g \geq 7$ alors $ae(\mathcal{P}_g) = 3$.

Un graphe **multi-complet** est un graphe dont chaque composante connexe est un graphe complet. Par exemple, les stables sont des graphes multi-complets. Le **nombre sous-chromatique** $\chi_{sub}(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration des sommets de G dont chaque classe de couleur induit un graphe multi-complet.

Le **graphe représentatif des arêtes** d'un graphe G , noté $L(G)$, est le graphe dont les sommets représentent les arêtes de G (*i.e.* $V(L(G)) = E(G)$) et dont les arêtes sont définies de la façon suivante : il existe une arête reliant les sommets e et f de $L(G)$ si et seulement si, dans le graphe G , l'arête e est incidente à l'arête f . Les sommets d'un graphe représentatif des arêtes $L(G)$ qui induisent une clique correspondent à des arêtes de G qui induisent une étoile $K_{1,n}$ ou un triangle K_3 . On définit donc l'**indice sous-chromatique** $\chi'_{sub}(G)$ d'un graphe G comme étant le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration des arêtes de G dont chaque classe de couleur induit un graphe dont les composantes connexes sont des étoiles ou des triangles. Cette notion est équivalente à la notion de nombre sous-chromatique du graphe représentatif des arêtes de G . En effet, $L(G)$ étant une clique si et seulement si G est une étoile ou K_3 , on a $\chi'_{sub}(G) = \chi_{sub}(L(G))$.

On remarque que pour tout graphe G de maille $g \geq 4$ (donc sans triangles), on a $ae(G) = \chi'_{sub}(G)$. Le Théorème 11 permet donc de répondre positivement au Problème ouvert 2 de Fiala et Le.

Corollaire 4 (du Théorème 11) *Il est NP-complet de décider si un graphe planaire G vérifie $\chi'_{sub}(G) \leq 2$.*

On note \mathcal{L} la famille des graphes représentatifs des arêtes des graphes bipartis, planaires, de degré maximum 3 et de maille au moins 6. Tout graphe $L(G) \in \mathcal{L}$ est planaire (car G est planaire et $\Delta(G) \leq 3$), de degré maximum 4 (car $\Delta(G) \leq 3$) et est le graphe représentatif des arêtes d'un graphe biparti. Ceci implique que les graphes de \mathcal{L} sont parfaits [BLS99].

Décider si un graphe G vérifie $\chi_{sub}(G) \leq 2$ est NP-complet si G est un graphe parfait [BFNW02] ou bien si G est planaire [GH03]. Les graphes de \mathcal{L} étant planaires et parfaits, le Théorème 11 permet d'affiner ces deux résultats.

Corollaire 5 (du Théorème 11) *Il est NP-complet de décider si un graphe G , planaire, parfait et de degré maximum 4, vérifie $\chi_{sub}(G) \leq 2$.*

On montre aussi dans cette section que les problèmes 3-ARBORICITÉ-ÉTOILE et 4-ARBORICITÉ-ÉTOILE sont NP-complets pour des familles restreintes de graphes.

Théorème 12 *Il est NP-complet de décider si un graphe G , planaire, biparti et 2-dégénéré vérifie $ae(G) \leq 3$.*

Théorème 13 *Il est NP-complet de décider si un graphe planaire G vérifie $ae(G) \leq 4$.*

On savait que $ae(\mathcal{P}_4) \leq 4$ et le Théorème 12 implique que $ae(\mathcal{P}_4) \geq 4$, on a donc $ae(\mathcal{P}_4) = 4$. Avant de commencer les preuves de ces théorèmes, on rappelle que $ae(G) = a_0(G)$ et qu'une k -0-coloration d'un graphe G est une k -coloration des arêtes de G et une orientation de toutes ses arêtes (condition (B) avec $d = 0$), telles que pour tout entier i , avec $1 \leq i \leq k$, on respecte la condition suivante :

- (A) Un sommet v incident à une arête e , coloriée i et orientée vers v , n'a pas d'autre arête incidente coloriée i .

Pour les k -0-colorations, la condition (C) est une conséquence de la condition (B).

3.2.1 NP-complétude de 2-ARBORICITÉ-ÉTOILE

Une k -coloration des sommets d'un graphe G est **t -impropre** si chacun des graphes induits par une classe de couleur est de degré maximum au plus t . Les colorations propres des sommets d'un graphe sont donc des colorations 0-impropres. Le problème **2-COLORATION 1-IMPROPRE** prend en entrée un graphe G et indique si ce graphe admet une 2-coloration 1-impropre de ses sommets. Dans [FJLS03, GH03], il est montré que le problème 2-COLORATION 1-IMPROPRE est NP-complet, y compris lorsque l'on se restreint aux graphes planaires sans triangles et de degré maximum quatre. On prouve le Théorème 11 par réduction polynomiale de ce problème.

Preuve du Théorème 11 : Le Lemme 3.1.1 implique qu'il est suffisant de montrer que pour tout $n > 0$, il est NP-complet de décider si un graphe G , biparti, planaire, 2-dégénéré, de

maille $g \geq 2n$ et de degré maximum 3, est 2-0-coloriable. Il est clair que décider si un graphe est 2-0-coloriable est dans NP. On montre donc que ce problème est NP-dur par réduction polynomiale de 2-COLORATION 1-IMPROPRE.

Pour tout entier $l > 1$, on définit les graphes C'_{2l} et R_{2l+1} de la façon suivante. On construit R_{2l+1} à partir d'une chaîne $(x_1, x_2, \dots, x_{2l+1})$ à laquelle on ajoute, pour tout entier $i \in [1, \dots, 2l+1]$, un sommet y_i et une arête $x_i y_i$. On construit C'_{2l} à partir d'un cycle $(z_1, z_2, \dots, z_{2l})$ auquel on ajoute, pour tout entier $i \in [1, \dots, 2l]$, un sommet z'_i et une arête $z_i z'_i$. On fait quelques remarques concernant les 2-0-colorations possibles de ces graphes.

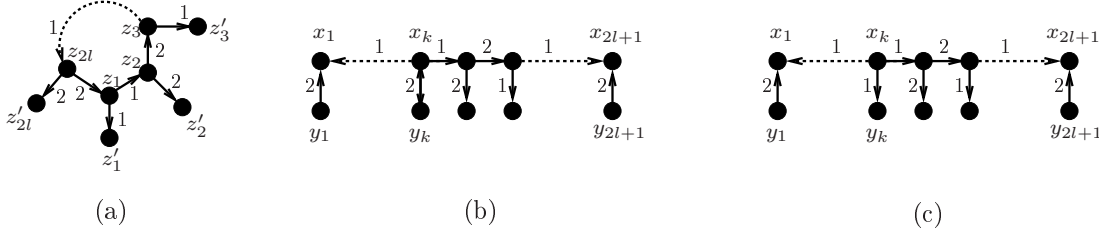


FIG. 27 – Les 2-0-colorations de C'_{2l} et de R_{2l+1} .

Fait 1 Pour tout entier $l > 1$, le graphe C'_{2l} est 2-0-coloriable. De plus, dans chacune des 2-0-colorations de C'_{2l} , les arêtes $z_i z'_i$, pour $i \in [1 \dots 2l]$, sont orientées vers z'_i et alternativement coloriées 1 et 2 (par exemple 1 lorsque i est impair et 2 lorsque i est pair).

Preuve : On constate dans la Figure 27.(a) que tout graphe C'_{2l} est 2-0-coloriable. Les sommets z_i étant de degré trois, ils sont ≥ 1 -internes (c.f. Lemme 3.1.2).

On considère donc, sans perte de généralité, que le sommet z_1 est interne dans F_1 et qu'il a au moins deux arêtes incidentes coloriées 1. Une des arêtes $z_1 z_2$ ou $z_1 z_{2l}$, disons $z_1 z_2$, est donc coloriée 1 et orientée de z_1 vers l'autre extrémité. Ceci entraîne que le sommet z_2 est une extrémité dans F_1 et est interne dans F_2 . Les arêtes $z_2 z_3$ et $z_2 z'_2$ sont donc coloriées 2 et orientées de z_2 vers l'autre extrémité. En itérant ce raisonnement pour les sommets z_3, z_4, \dots, z_{2l} , on prouve le Fait 1. \square

Fait 2 Pour tout entier $l > 1$, le graphe R_{2l+1} admet des 2-0-colorations dans laquelle les arêtes $x_1 y_1$ et $x_{2l+1} y_{2l+1}$ sont coloriées 2 et respectivement orientées vers x_1 et x_{2l+1} . Pour chacune de ces colorations il existe un entier $k \in [2, \dots, 2l]$ tel que :

- (a) si l'entier k est pair, l'arête $x_k y_k$ est soit coloriée 2 et indifféremment orientée vers x_k ou y_k , soit coloriée 1 et orientée vers y_k , et tel que
- (b) toute arête $x_i y_i$, pour un entier pair $i \in [2, \dots, k-1] \cup [k+1, \dots, 2l]$, est coloriée 1 et orientée vers y_i .

De plus, il existe de telles 2-0-colorations de R_{2l+1} où l'arête $x_k y_k$ est coloriée 1 (resp. 2), pour tout entier $k \in [2, \dots, 2l]$.

Preuve : On considère une 2-0-coloration de R_{2l+1} dans laquelle les arêtes $x_1 y_1$ et $x_{2l+1} y_{2l+1}$ sont coloriées 2 et respectivement orientées vers x_1 et x_{2l+1} . Étant donné la couleur et les orientations des arêtes $x_1 y_1$ et $x_{2l+1} y_{2l+1}$, les arêtes $x_1 x_2$ et $x_{2l} x_{2l+1}$ sont coloriées 1. Étant de degré 3, les sommets x_i , pour $i \in [2, \dots, 2l]$ sont ≥ 1 -internes (c.f. Lemme 3.1.2).

Si une arête $x_i x_{i+1}$, avec $i \in [1, \dots, 2l]$, est coloriée 1 et est orientée vers x_i (resp. x_{i+1}) alors le sommet x_i (resp. x_{i+1}) est une extrémité de F_1 et est interne dans F_2 . L'arête $x_{i-1} x_i$ (resp. $x_{i+1} x_{i+2}$) est donc coloriée 2 et orientée vers x_{i-1} (resp. x_{i+2}).

Cette observation implique que l'arête $x_1 x_2$ (resp. $x_{2l} x_{2l+1}$), qui est coloriée 1, est orientée vers x_1 (resp. x_{2l+1}). En effet, si cette arête était orientée vers x_2 (resp. x_{2l}) alors cela impliquerait que l'arête $x_{2l} x_{2l+1}$ (resp. $x_1 x_2$) soit coloriée 2, ce qui est impossible.

Il existe donc un entier $k \in [2, \dots, 2l]$ tel que les arêtes $x_i x_{i+1}$, pour $i \in [1, \dots, 2l]$, sont orientées vers x_i lorsque $i < k$ ou bien vers x_{i+1} lorsque $i \geq k$. De plus, une arête $x_i x_{i+1}$, avec $i \in [1, \dots, k-1]$ (resp. $i \in [k, \dots, 2l]$), est coloriée 1 (resp. 2) si i est impair et 2 (resp. 1) si i est pair.

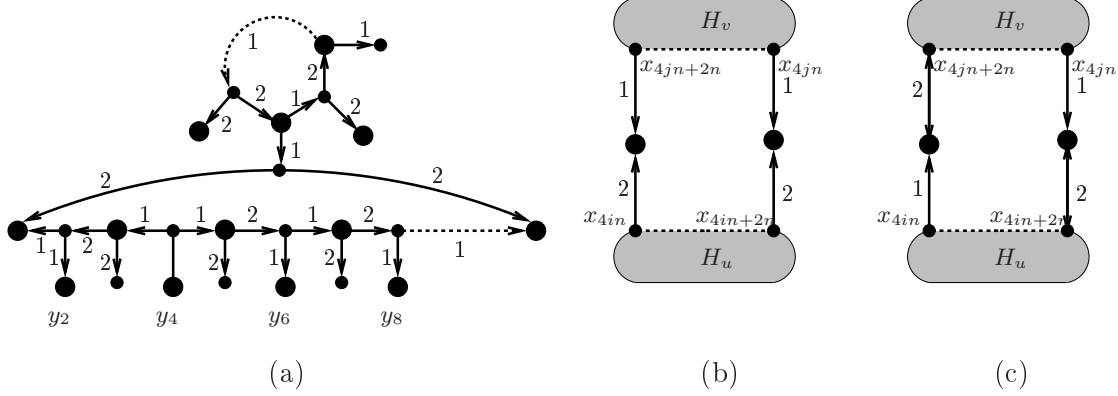
Cela implique, si l'entier k est pair, que l'arête $x_k y_k$ est soit coloriée 2, soit coloriée 1 et orientée vers y_k . On a donc bien le point (a). Les colorations des arêtes $x_i x_{i+1}$ impliquent aussi que les sommets x_i , avec $i \in [2, \dots, k-1] \cup [k+1, \dots, 2l]$, sont des extrémités de F_2 et internes dans F_1 si i est pair. Toute arête $x_i y_i$, pour un entier pair $i \in [2, \dots, k-1] \cup [k+1, \dots, 2l]$, est donc coloriée 1 et orientée vers y_i . On a donc aussi le point (b).

Enfin, on montre dans la Figure 27.(b) et (c) comment construire une 2-0-coloration de R_{2l+1} (avec les mêmes contraintes sur $x_1 y_1$ et $x_{2l+1} y_{2l+1}$) où l'entier k et la couleur de l'arête $x_k y_k$ sont fixés.

□

On construit le graphe H en combinant une copie de C'_{4n} et une copie de R_{18n+1} . Pour cela on fusionne le sommet z'_1 de C'_{4n} avec les sommets y_1 et y_{18n+1} de R_{18n+1} , comme indiqué Figure 28.(a). On remarque en particulier que H est bien planaire, biparti, 2-dégénéré, de maille $\geq 4n$ et de degré au plus 3. On appelle ce graphe le gadget des sommets. On étudie les différentes 2-0-colorations possibles de ce graphe.

Lemme 3.2.1 *Dans toute 2-0-coloration de H , au moins sept des arêtes $x_{2in} y_{2in}$, avec $1 \leq i \leq 8$, sont orientées vers y_i et sont de la même couleur. L'arête restante $x_k y_k$, pour un entier $k = 2in$ avec $1 \leq i \leq 8$, est soit coloriée et orientée comme les autres, soit coloriée différemment et orientée indifféremment vers x_k ou y_k . De plus, pour tout entier k telle que $k = 2in$ et $1 \leq i \leq 8$, il existe de telles colorations de H .*

FIG. 28 – Le gadget du sommet u , H_u .

Preuve : Le Fait 1 implique que la copie de R_{17n+1} soit coloriée avec les arêtes x_1y_1 et $x_{17n+1}y_{17n+1}$ orientées vers x_i et de la même couleur. Le Fait 2 permet alors de prouver le lemme. \square

Soit G un graphe planaire sans triangle et de degré maximum quatre. On rappelle que décider si G est 2-coloriable de façon 1-impropre est NP-complet. Étant donné ce graphe G , on construit le graphe G' en remplaçant chaque sommet $u \in V(G)$ par une copie du gadget des sommets H ; on note cette copie H_u . Ensuite, on connecte ces différentes copies de H en procédant ainsi :

- Étant donnée une représentation planaire de G , pour chaque sommet $u \in V(G)$, on numérote ses arêtes incidentes de 1 à $\deg_G(u)$ (avec $\deg_G(u) \leq 4$) en parcourant ces arêtes dans le sens trigonométrique autour de u .
- Pour chaque arête $uv \in E(G)$ on fait la chose suivante : Soit i (resp. j) le numéro de l'arête uv pour le sommet u (resp. v). On identifie les sommets y_{4in} de H_u et y_{4jn+2n} de H_v et les sommets y_{4in+2n} de H_u et y_{2jn} de H_v .

Le graphe G' ainsi obtenu est planaire, biparti, 2-dégénéré, de maille $g \geq 4n$ et de degré au plus 3.

On montre maintenant que le graphe G est 2-coloriable de façon 1-impropre si et seulement si le graphe G' est 2-0-coloriable. On aura ainsi bien montré qu'il existe une réduction polynomiale (la construction de G' est polynomiale en $|V(G)| + |E(G)|$) de 2-COLORATION 1-IMPROPRE vers 2-ARBORICITÉ-ÉTOILE.

Étant donnée une 2-coloration 1-impropre c de G on construit une 2-0-coloration de G' . Pour tout sommet $u \in V(G)$, on colorie le gadget H_u de sorte que pour toute arête $uv \in E(G)$, si les sommets communs de H_u et de H_v sont les sommets y_{4in} et y_{4in+2n} de H_u , alors on colorie les arêtes incidentes à ces sommets de la façon suivante :

- Si $c(u) \neq c(v)$, les arêtes $x_{4in}y_{4in}$ et $x_{4in+2n}y_{4in+2n}$ de H_u sont coloriées $c(u)$ (voir Figure

28.(b)).

- Si $c(u) = c(v)$, les arêtes $x_{4in}y_{4in}$ et $x_{4in+2n}y_{4in+2n}$ de H_u sont respectivement coloriées $c(u)$ et $3 - c(u)$ (voir Figure 28.(c)).

La coloration c étant 1-impropre, pour chaque gadget H_u au plus une arête $x_{2in}y_{2in}$, avec $1 \leq i \leq 8$, n'est pas coloriée $c(u)$. Le Lemme 3.2.1 indique que pour chaque sommet $u \in V(G)$, il existe une telle 2-0-coloration du gadget H_u . On voit Figure 28.(b) et (c) que tout sommet appartenant à 2 gadgets est incident à 2 arêtes de couleurs distinctes, la condition (A) est donc respectée. Les 2-0-colorations des différents gadgets des sommets induisent donc une 2-0-coloration du graphe G .

Réciproquement, étant donné une 2-0-coloration de G' on construit une 2-coloration 1-impropre de G . Pour cela il suffit de colorier un sommet $u \in V(G)$ comme la majorité des arêtes $x_{2i}y_{2i}$ de H_u . On note c cette coloration des sommets de G . Le Lemme 3.2.1 implique que, pour tout $u \in V(G)$, le gadget H_u est «adjacent» à au plus un gadget, H_v , telle que $c(u) = c(v)$, la coloration c est donc bien 1-impropre. \square

3.2.2 NP-complétude de 3-ARBORICITÉ-ÉTOILE

Le problème **3-COLORATION** prend en entrée un graphe G et indique si ce graphe admet une 3-coloration propre de ses sommets. Dans [GJS76], il est montré que le problème 3-COLORATION est NP-complet, y compris lorsque l'on se restreint aux graphes planaires de degré maximum quatre. On prouve le Théorème 12 par réduction polynomiale de ce problème.

Preuve du Théorème 12 : Il est suffisant de montrer (*c.f.* Lemme 3.1.1) que décider si un graphe G , biparti, planaire et 2-dégénéré est 3-0-coloriable, est un problème NP-complet. Il est clair que décider si un graphe est 3-0-coloriable est dans NP. On montre donc que ce problème est NP-dur par réduction polynomiale de 3-COLORATION.

Soit \mathcal{A} le graphe dont 4 copies sont représentés dans la Figure 29.

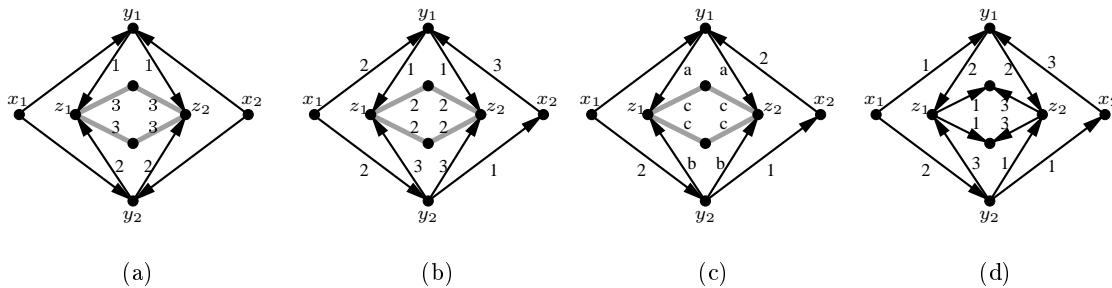


FIG. 29 – Le graphe \mathcal{A} .

On étudie les contraintes de 3-0-coloration de \mathcal{A} .

Fait 3 *Il n'y a pas de 3-0-coloration de \mathcal{A} où toutes les arêtes incidentes à x_1 ou à x_2 sont orientées vers y_i , avec $i \in \{1, 2\}$. De plus, toute 3-0-coloration de \mathcal{A} où une seule des arêtes $x_i y_j$, avec i et $j \in \{1, 2\}$, disons l'arête $x_2 y_2$, est orientée vers x_i , est telle que les arêtes $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$ et $x_2 y_2$ sont respectivement coloriées 1, 2, 3 et 1 (à la permutation de couleur près).*

Preuve : On note que d'après le Lemme 3.1.2 les sommets y_i , avec $i \in \{1, 2\}$, et les sommets z_i , avec $i \in \{1, 2\}$, sont tous ≥ 1 -internes. Si toutes les arêtes $x_i y_j$, avec i et $j \in \{1, 2\}$, sont orientées vers y_j (voir Figure 29.(a)), les sommets y_j sont des extrémités dans 2 des forêts F_i , avec $1 \leq i \leq 3$. Ces sommets sont donc 1-internes. Ceci implique que les arêtes $y_1 z_1$ et $y_1 z_2$ (resp. $y_2 z_1$ et $y_2 z_2$) sont orientées vers les sommets z_i , avec $i \in \{1, 2\}$, et sont toutes deux coloriées $a \in \{1, 2, 3\}$ (resp. $b \in \{1, 2, 3\}$). Comme la forêt F_a ne peut contenir le cycle (y_1, z_1, y_2, z_2) on a $a \neq b$; disons que $a = 1$ et $b = 2$. Ceci implique que les sommets z_1 et z_2 sont tous deux 1-internes dans F_3 . Les autres arêtes incidentes aux sommets z_1 et z_2 sont donc toutes coloriées 3. Ceci est impossible puisque ces arêtes forment un cycle et que F_3 est une forêt. On ne peut donc pas avoir toutes les arêtes $x_i y_j$, avec i et $j \in \{1, 2\}$, orientées vers y_j .

On considère maintenant que l'arête $x_2 y_2$ est coloriée 1 et est orientée vers x_2 , que l'arête $x_1 y_2$ est coloriée 2 et est orientée vers y_2 et que les arêtes $x_i y_1$, avec $i \in \{1, 2\}$ sont toutes deux orientées vers y_1 . On traite différents cas suivant la coloration des arêtes $x_i y_1$, avec $i \in \{1, 2\}$.

1. Si l'arête $x_1 y_1$ est coloriée 2 (voir Figure 29.(b)) alors l'arête $x_2 y_1$ ne peut être coloriée 2 (condition (A)). De plus, l'arête $x_2 y_2$ étant orientée vers y_2 et coloriée 1 alors l'arête $x_2 y_1$ ne peut être coloriée 1 (condition (A)). L'arête $x_2 y_1$ est donc nécessairement coloriée 3. De même, cela implique que les arêtes $y_1 z_1$ et $y_1 z_2$ sont coloriées 1 et sont respectivement orientées vers les sommets z_1 et z_2 . Ceci implique que les arêtes $y_2 z_1$ et $y_2 z_2$ sont coloriées 3 et sont respectivement orientées vers les sommets z_1 et z_2 . Ceci implique que les sommets z_1 et z_2 sont tous deux 1-internes dans F_2 . Les autres arêtes incidentes aux sommets z_1 et z_2 sont donc toutes coloriées 2. Ceci est impossible puisque ces arêtes forment un cycle et que F_2 est une forêt. L'arêtes $x_1 y_1$ n'est donc pas coloriée 2.
2. Si l'arête $x_2 y_1$ est coloriée 2 (voir Figure 29.(c)), alors les arêtes $y_1 z_1$ et $y_1 z_2$ sont coloriées $a \in \{1, 3\}$ (a dépend de la couleur de l'arête $x_1 y_1$) et sont respectivement orientées vers les sommets z_1 et z_2 . Ceci implique que les arêtes $y_2 z_1$ et $y_2 z_2$ sont coloriées $b \in \{1, 2, 3\} \setminus \{2, a\}$ et sont respectivement orientées vers les sommets z_1 et z_2 . Comme la forêt F_a ne peut contenir le cycle (y_1, z_1, y_2, z_2) , on a $a \neq b$. Ceci implique que les sommets z_1 et z_2 sont tous deux 1-internes dans F_c , avec $c \in \{1, 2, 3\} \setminus \{a, b\}$. Les autres arêtes incidentes aux sommets z_1 et z_2 sont donc toutes coloriées c . Ceci est impossible puisque ces arêtes forment un cycle et que F_c est une forêt. L'arêtes $x_2 y_1$ n'est donc pas coloriée 2.
3. Si les arêtes $x_1 y_1$ et $x_2 y_1$ ne sont pas coloriées 2 (voir Figure 29.(d)), alors ces arêtes sont nécessairement coloriées respectivement 1 et 3. On constate finalement dans la Figure

29.(d) qu'il existe bien une 3-0-coloration de \mathcal{A} où les arêtes x_1y_1 , x_1y_2 , x_2y_1 et x_2y_2 sont respectivement coloriées 1, 2, 3 et 1.

□

On construit le graphe \mathcal{B} à partir de deux copies de \mathcal{A} , dont on identifie les sommets x_1 et les sommets x_2 , et d'un nouveau sommet u comme décrit dans la Figure 30. On remarque que \mathcal{B} est un graphe planaire, biparti et 2-dégénéré. On appelle ce graphe le gadget des sommets.

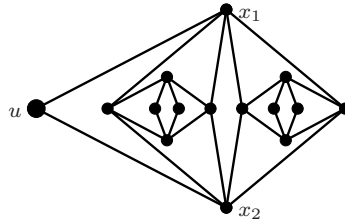


FIG. 30 – Le gadget des sommets : le graphe \mathcal{B} .

Lemme 3.2.2 *Le graphe \mathcal{B} est 3-0-coloriable et dans chacune de ces 3-0-colorations, le sommet u est 1-interne.*

Preuve : En utilisant la coloration de \mathcal{A} présentée dans le Fait 3, il est facile de construire une 3-0-coloration de \mathcal{B} . On montre maintenant que dans toute 3-0-colorations de \mathcal{B} les arêtes ux_1 et ux_2 sont orientées vers u . On raisonne par l'absurde en considérant que l'arête ux_1 est orientée vers x_1 et coloriée 1. On considère deux cas suivant le nombre de copies de \mathcal{A} ayant une arête orientée vers x_1 . Étant donné que x_1 est ≥ 1 -interne (*c.f.* Lemme 3.1.2) et que l'arête ux_1 est déjà orientée vers x_1 , il y a au plus une arête orientée vers x_1 dans les copies de \mathcal{A} .

- Si aucune copie de \mathcal{A} n'a d'arête orientée vers x_1 , d'après le Fait 3, il y a au moins deux arêtes orientées vers x_2 . Le sommet x_2 étant ≥ 1 -interne (*c.f.* Lemme 3.1.2), il y en a exactement deux, une pour chaque copie de \mathcal{A} . On considère que ces arêtes sont coloriées a et $b \in \{1, 2, 3\}$, avec $a \neq b$, et que le sommet x_2 est 1-interne dans F_c , avec $c \in \{1, 2, 3\} \setminus \{a, b\}$. L'arête ux_2 est donc coloriée c et orientée vers u . Or d'après les colorations possibles de \mathcal{A} (*c.f.* Fait 3), le sommet x_1 est interne dans F_a et F_b , on a donc $c = 1$. Or étant données leurs orientations respectives, les arêtes ux_1 et ux_2 ne peuvent être toutes deux coloriées 1. Une des copies de \mathcal{A} a donc une arête orientée vers x_1 .
- Si une copie de \mathcal{A} a une arête orientée vers x_1 et coloriée 2, alors le sommet x_1 est 1-interne dans F_3 . Dans la deuxième copie de \mathcal{A} , les arêtes x_1y_1 et x_1y_2 sont donc coloriées 3 et orientées vers les sommets y_1 et y_2 . Or d'après le Fait 3 ceci implique que dans cette copie de \mathcal{A} , les arêtes x_2y_1 et x_2y_2 sont toutes deux orientées vers x_2 . Or comme les sommets y_1 et y_2 sont des extrémités de F_3 , les arêtes x_2y_1 et x_2y_2 sont respectivement

coloriées 1 et 2. Le sommet x_2 est donc 1-interne dans F_3 et d'après le Fait 3, la première copie de \mathcal{A} n'est pas coloriable dans ces conditions.

Les arêtes ux_1 et ux_2 sont donc toutes deux orientées vers le sommet u . Ce sommet est donc bien 1-interne. \square

Lemme 3.2.3 *On considère une 3-0-coloration d'un graphe H où les sommets u et v sont 1-internes. Soit 2 sommets x et $y \notin V(H)$, on note H' l'union de H et du cycle (u, x, v, y) . On peut étendre la 3-0-coloration de H à H' uniquement si les sommets u et v sont internes dans des forêts distinctes.*

Preuve : Le sommet u (resp. v) étant 1-interne dans F_i avec $i \in \{1, 2, 3\}$ (resp. F_j avec $j \in \{1, 2, 3\}$), les arêtes ux et uy (resp. vx et vy) sont nécessairement orientées vers x et y et coloriées i (resp. j). Il faut donc, pour respecter la condition (A), que $i \neq j$. \square

Soit G un graphe planaire de degré maximum quatre. On rappelle que décider si G est 3-coloriable est NP-complet. Étant donné ce graphe G , on construit le graphe G' en remplaçant chaque arête uv de G par un cycle (u, x, v, y) , où les sommets x et y sont de nouveaux sommets, et où pour chaque sommet $v \in V(G)$ on ajoute un gadget et on identifie ce sommet v au sommet u du gadget. Le graphe G' ainsi construit est planaire, biparti et 2-dégénéré.

On montre maintenant que le graphe G est 3-coloriable si et seulement si le graphe G' est 3-0-coloriable. On aura ainsi bien montré qu'il existe une réduction polynomiale (la construction de G' est polynomiale en $|V(G)| + |E(G)|$) de 3-COLORATION vers 3-ARBORICITÉ-ÉTOILE.

Si le graphe G admet une 3-coloration propre de ses sommets c , on en déduit une 3-0-coloration de G' . Il faut pour cela, pour chaque sommet $v \in V(G)$, colorier le gadget de v de manière à ce que le sommet u de ce gadget soit 1-interne dans la forêt $F_{c(v)}$ (*c.f.* Lemme 3.2.2).

Finalement, pour chaque arête $uv \in E(G)$, on colorie le cycle (u, x, v, y) en orientant les arêtes vers x ou y et en coloriant $c(u)$ (resp. $c(v)$) les arêtes incidentes à u (resp. v). Comme $c(u) \neq c(v)$, la condition (A) est respectée et on a bien une 3-0-coloration de G' .

Réciproquement, si G' admet une 3-0-coloration, on en déduit une 3-coloration de G . Dans le gadget du sommet $v \in V(G)$ le sommet u est 1-interne dans F_i , pour $i \in \{1, 2, 3\}$ (*c.f.* Lemme 3.2.2). On définit la coloration c des sommets de G en posant $c(v) = i$. D'après le Lemme 3.2.3 cette coloration donnera des couleurs différentes à deux sommets voisins dans G . La coloration c est donc bien une 3-coloration propre de G . \square

3.2.3 NP-complétude de 4-ARBORICITÉ-ÉTOILE

Dans [Och05], Ochem montre qu'il est NP-complet de décider si un graphe planaire G est acycliquement 4-coloriable. On s'inspire de sa technique pour prouver le Théorème 13.

Preuve du Théorème 13 : Il est suffisant de montrer (*c.f.* Lemme 3.1.1) que décider si un graphe planaire G est 4-0-coloriable, est un problème NP-complet. Il est clair que décider si un graphe est 4-0-coloriable est dans NP. On montre donc que ce problème est NP-dur par réduction polynomiale de 3-COLORATION.

Soit \mathcal{A} le graphe représenté dans la Figure 31.(a). Dans ce graphe, l'indice i est un entier tel que $1 \in \{1, 3\}$.

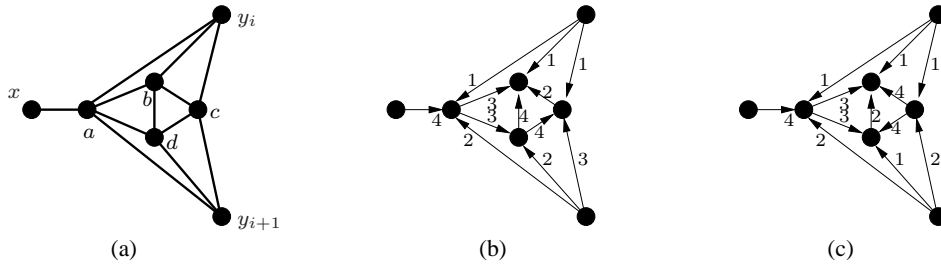


FIG. 31 – Le graphe \mathcal{A} et deux de ses 4-0-colorations.

Fait 4 *Il n'existe pas de 4-0-coloration du graphe \mathcal{A} où les arêtes $y_i a$, $y_i b$ et $y_i c$ sont colorées 1 et orientées de y_i vers l'autre extrémité, et où les arêtes $y_{i+1} a$, $y_{i+1} d$ et $y_{i+1} c$ sont colorées 2 et orientées de y_{i+1} vers l'autre extrémité.*

Preuve : En effet, dans ce cas les sommets a , b , c et d sont respectivement des extrémités de F_1 et F_2 , de F_1 , de F_1 et F_2 et enfin de F_2 . on ne peut donc colorier les arêtes ab , bc , cd , bd , ad et ax que 3 ou 4, ce qui est impossible étant donné que le graphe induit par ces arêtes est d'arboricité étoile 3. \square

La Figure 31.(b) (resp. la Figure 31.(c)) implique le fait suivant.

Fait 5 *Il existe une 4-0-coloration du graphe \mathcal{A} où les arêtes incidentes à y_i sont colorées 1 et orientées de y_i vers l'autre extrémité, et où les arêtes incidentes à y_{i+1} sont orientées de y_{i+1} vers l'autre extrémité et colorées 2 ou 3 (resp. 1 ou 2).*

On construit le graphe \mathcal{B} à partir de deux copies de \mathcal{A} , une avec $i = 1$ et une avec $i = 3$. On identifie les sommets x de chacune des copies de \mathcal{A} ; on rajoute un sommet z , les arêtes $y_i y_{i+1}$, avec $1 \leq i < 4$, ainsi que les arêtes xy_i et zy_i , avec $1 \leq i \leq 4$ (voir Figure 32.(a)).

Fait 6 *Il n'existe pas de 4-0-coloration du graphe \mathcal{B} où toutes les arêtes xy_i , avec $1 \leq i \leq 4$, et toutes les arêtes zy_i , avec $1 \leq i \leq 4$, sont orientées vers y_i .*

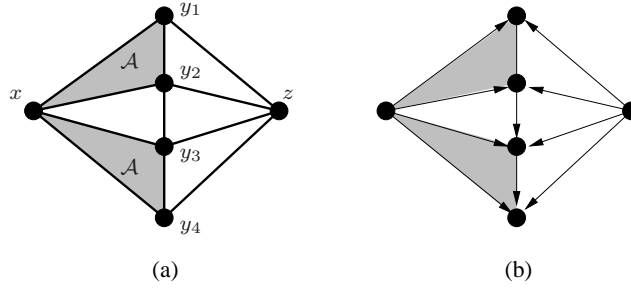


FIG. 32 – Le graphe \mathcal{B} .

Preuve : On raisonne par l'absurde en considérant qu'une telle 4-0-coloration existe. On considère, sans perte de généralité que l'arête y_2y_3 est orientée vers y_3 (voir Figure 32.(a)). Comme les arêtes xy_3 , zy_3 et y_2y_3 sont toutes orientées vers y_3 , ce sommet est donc une extrémité dans au moins trois forêts. De plus, comme $\deg(y_3) = 7 \neq 4$, ce sommet est nécessairement 1-interne (c.f. Lemme 3.1.2). L'arête y_3y_4 est donc orientée vers y_4 . Ceci implique, les arêtes xy_4 , zy_4 et y_3y_4 étant toutes orientées vers y_4 , que le sommet y_4 est lui aussi une extrémité dans au moins trois forêts. Comme $\deg(y_4) = 6 \neq 4$, le sommet y_4 est lui aussi 1-interne (c.f. Lemme 3.1.2). Dans la copie de \mathcal{A} où $i = 3$, les arêtes y_3a , y_3b et y_3c (resp. y_4a , y_4d et y_4c) sont donc orientées de y_3 (resp. y_4) vers l'autre extrémité et coloriées $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ (resp. $k \in \{1, 2, 3, 4\}$). Or d'après le Fait 4, ceci est impossible. \square

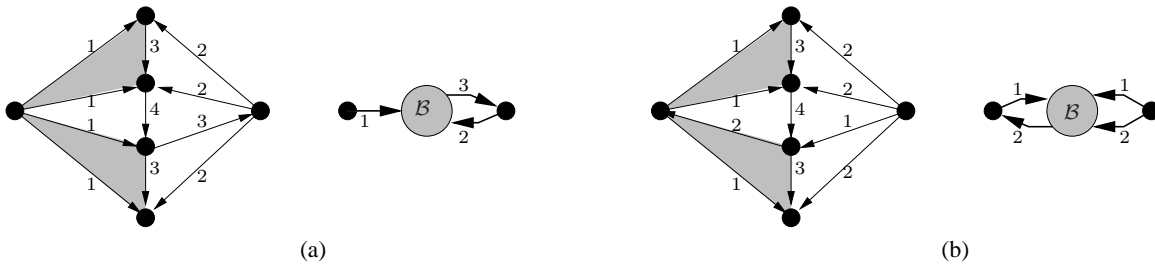


FIG. 33 – Deux 4-0-colorations de \mathcal{B} et les schémas les représentant.

En utilisant les 4-0-colorations de \mathcal{A} décrites dans le Fait 5, on obtient les deux 4-0-colorations de \mathcal{B} décrites dans les faits suivants. Dans la Figure 33 on représente deux de ces 4-0-colorations ainsi que les schémas correspondants. On utilisera ces schémas dans les figures suivantes où l'on représente des 4-0-colorations de copies de \mathcal{B} .

Fait 7 *Il existe une 4-0-coloration du graphe \mathcal{B} où toutes les arêtes incidentes à x (resp. z) sont orientées vers l'autre extrémité et coloriées 1, et où les arêtes incidentes à z (resp. x) sont orientées vers l'autre extrémité et coloriées 2, sauf une qui est orientée vers z (resp. x) et coloriée 3 (voir Figure 33.(a)).*

Fait 8 Il existe une 4-0-coloration du graphe \mathcal{B} où les arêtes incidentes à x et z sont orientées vers l'autre extrémité et respectivement coloriées 1 et 2, sauf l'arête xy_3 (resp. zy_3) qui est orientée vers x (resp. z) et est coloriée 2 (resp. 1), et sauf l'arête zy_3 (resp. xy_3) qui est orientée vers y_3 et est coloriée 1 (resp. 2) (voir Figure 33.(b)).

On construit le graphe \mathcal{C} à partir de cinq copies de \mathcal{B} dont on identifie les sommets x et z (voir Figure 34.(a)).

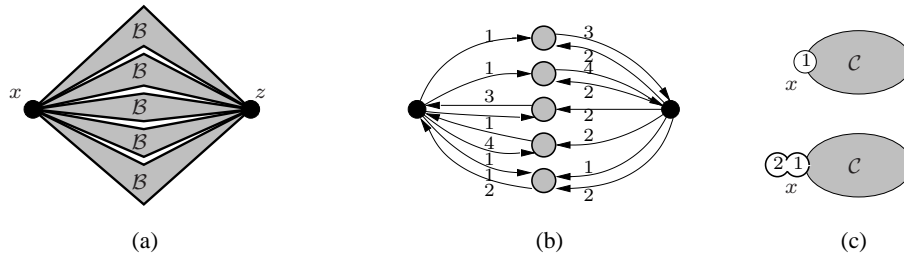


FIG. 34 – Le graphe \mathcal{C} , une de ses 4-0-colorations et le schéma la représentant.

Lemme 3.2.4 Dans chacune des 4-0-colorations de \mathcal{C} ,

- (1) le sommet x est 1 ou 2-interne, et
- (2) le sommet x est incident à des arêtes de toutes les couleurs.

De plus, il existe une 4-0-coloration de \mathcal{C} où le sommet x est 1-interne (resp. 2-interne).

Dans la Figure 34.(b) et (c) on représente une de ces 4-0-colorations ainsi que deux type de schémas. Le schéma du haut (resp. du bas) correspond à une 4-0-coloration de \mathcal{C} dans laquelle le sommet x est 1-interne dans F_1 (resp. 2-interne dans F_1 et F_2). On utilisera ces schémas dans les figures suivantes où l'on représente des 4-0-colorations de copies de \mathcal{C} .

Preuve : On considère une 4-0-coloration quelconque de \mathcal{C} . (1) D'après le Fait 6, il y a dans chaque copie de \mathcal{B} au moins une arête orientée vers x ou z . Comme $\deg(x)$ et $\deg(z) \neq 4$, les sommets x et z sont ≥ 1 -internes (*c.f.* Lemme 3.1.2) et ont au plus trois arêtes incidentes orientées vers chacun d'eux. L'un des sommets x ou z est 1-interne tandis que l'autre est 1 ou 2-interne. Le sommet x est donc bien 1 ou 2-interne.

(2) Le sommet x étant de degré $d > 3$, s'il est 1-interne il est à des arêtes de toutes les couleurs. On considère donc que x est 2-interne. Sans perte de généralité, on considère que x est 2-interne dans F_1 et F_2 que z est 1-interne dans F_a , avec $a \in \{1, 3\}$. Cela implique plusieurs points :

- Dans chaque copie de \mathcal{B} il y exactement une arête incidente à un sommet y_i , avec $1 \leq i \leq 4$, orientée vers x ou vers z . Une copie de \mathcal{B} a une arête orientée vers x et coloriée 3, une autre a une arête orientée vers x et coloriée 4, une autre a une arête

orientée vers z et coloriée 2, une autre a une arête orientée vers z et coloriée 4 et enfin la dernière a une arête orientée vers z et coloriée $b \in \{1, 3\} \setminus a$.

- Le sommet z étant 1-interne dans F_a , dans chaque copie de \mathcal{B} les arêtes zy_i , avec $1 \leq i \leq 4$, orientées vers y_i sont coloriées a .
- Le sommet x étant une extrémité de F_3 et F_4 , il est incident à une arête coloriée 3 et à une arête coloriée 4.

Le sommet x étant incident à des arêtes coloriées 3 et 4 on doit donc montrer que x est aussi incident à au moins une arête coloriée 1 et à au moins une arête coloriée 2. Dans la copie de \mathcal{B} où il y a une arête xy_i , avec $1 \leq i \leq 4$, orientée vers x et coloriée 3, l'arête zy_i (dans la même copie de \mathcal{B} et pour le même entier i) est orientée vers y_i et n'est pas coloriée 3. On a donc $a = 1$. Dans toute copie de \mathcal{B} il y a un sommet y_i , avec $1 \leq i \leq 4$, tel que les arêtes xy_i et zy_i sont toutes deux orientées vers y_i . L'arête zy_i étant coloriée 1, l'arêtes xy_i n'est pas coloriée 1, elle est donc coloriée 2. Dans la copie de \mathcal{B} où il y a une arête zy_i , avec $1 \leq i \leq 4$, orientée vers z et coloriée 2, alors l'arête xy_i , pour le même entier i , est orientée vers y_i et n'est pas coloriée 2. Cette arête est donc coloriée 1. Le sommet x est donc bien incident à des arêtes de toutes les couleurs.

On observe finalement dans la Figure 34.(b), en utilisant les 4-0-colorations de \mathcal{B} décrites précédemment, qu'il existe une 4-0-coloration de \mathcal{C} où le sommet x est 1-interne. On peut construire une 4-0-coloration de \mathcal{C} où les sommet x est 2-interne simplement en modifiant la 4-0-coloration de la copie de \mathcal{B} située en bas dans la Figure 34.(b). \square

On construit le graphe \mathcal{D} à partir de 3 copies de \mathcal{C} et de 3 nouveaux sommets. On note u l'un de ces sommet. Le sommet u est adjacent aux 2 autres nouveaux sommets et au sommet x de chacune des copies de \mathcal{C} (voir Figure 35.(a)).

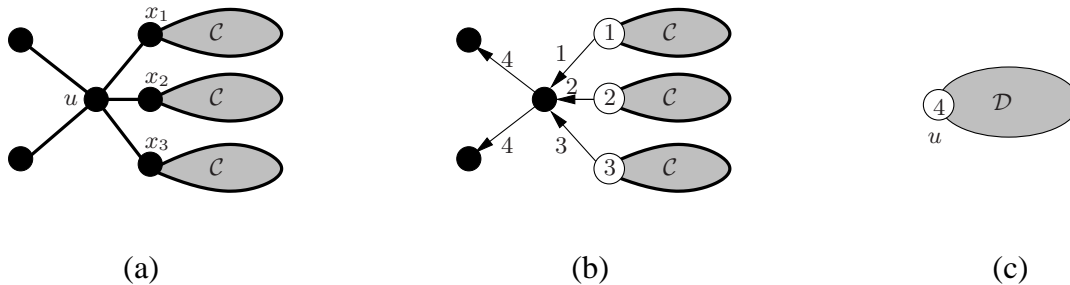


FIG. 35 – Le graphe \mathcal{D} , une de ses 4-0-colorations et le schéma la représentant.

Lemme 3.2.5 *Le graphe \mathcal{D} est 4-0-coloriable et dans chacune de ces 4-0-colorations, le sommet u est 1-interne et il a des arêtes incidentes de toutes les couleurs.*

Dans la Figure 35.(b) et (c) on représente une de ces 4-0-colorations ainsi que le schéma qui lui correspond. Dans ce schéma, le 4 signifie que dans cette 4-0-coloration de \mathcal{D} , le sommet u

est 1-interne dans F_4 . On utilisera ce schéma dans les figures suivantes où l'on représente des 4-0-coloration de copies de \mathcal{D} .

Preuve : On observe tout d'abord dans la Figure 35.(b), en utilisant les 4-0-colorations de \mathcal{C} décrites précédemment, qu'une telle 4-0-coloration de \mathcal{D} existe. On considère maintenant une 4-0-coloration quelconque de \mathcal{D} . Le Lemme 3.2.4 indique que étant donnée les 4-0-colorations possibles de chaque copie de \mathcal{C} , toutes les arêtes ux_i sont orientées vers u . Ces trois arêtes utilisent donc trois couleurs distinctes, disons 1, 2 et 3. Les autres arêtes incidentes à u sont donc coloriées 4 et orientées de u vers l'autre extrémité. Le sommet u est donc 1-interne dans F_4 et incident à des arêtes de toutes les couleurs. \square

On construit le graphe \mathcal{E} à partir de 3 copies de \mathcal{D} et de 4 nouveaux sommets, u, u', v et v' , comme décrit dans la Figure 36.(a).

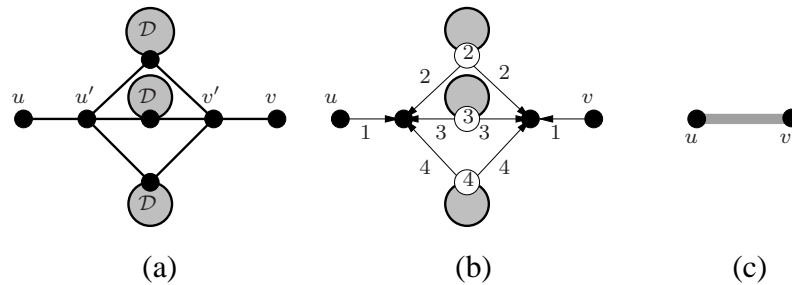


FIG. 36 – Le graphe \mathcal{E} , une de ses 4-0-colorations et le schéma représentant \mathcal{E} .

Lemme 3.2.6 *Le graphe \mathcal{E} admet une 4-0-coloration où les arêtes uu' et vv' sont respectivement orientées vers u' et v' . De plus, dans chacune de ces 4-0-colorations, ces deux arêtes sont de la même couleur.*

Dans la Figure 36.(b) et (c) on représente une de ces 4-0-colorations ainsi que le schéma qui lui correspond. On utilisera ce schéma dans les figures suivantes où l'on représente des copies du graphe \mathcal{E} .

Preuve : On observe tout d'abord dans la Figure 36.(b), en utilisant les 4-0-colorations de \mathcal{D} décrites précédemment, qu'une telle 4-0-coloration de \mathcal{E} existe. On considère maintenant une 4-0-coloration quelconque de \mathcal{E} avec les arêtes uu' et vv' respectivement orientées vers u' et v' . Le Lemme 3.2.5 indique que, pour chaque copie de \mathcal{D} , les arêtes reliant cette copie aux sommets u' et v' sont de la même couleur et sont respectivement orientées vers u' et v' . La condition (A) implique donc que les arêtes uu' et vv' soient de la même couleur. \square

Le graphe \mathcal{F} est une chaîne de longueur deux, (u, v, w) . On obtient le Lemme 3.2.7 par simple définition de la 4-0-coloration.

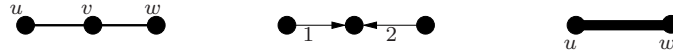


FIG. 37 – Le graphe \mathcal{F} , une de ses 4-0-colorations et le schéma représentant \mathcal{F} .

Lemme 3.2.7 *Le graphe \mathcal{F} a une 4-0-coloration où les arêtes uv et vw sont orientées vers v . De plus, dans chacune de ces 4-0-colorations, ces deux arêtes sont de couleurs différentes.*

Dans la Figure 37 on représente \mathcal{F} , une des 4-0-colorations de \mathcal{F} évoqué dans le Lemme 3.2.7, ainsi que le schéma représentant \mathcal{F} . On utilisera ce schéma dans les figures suivantes où l'on représente des copies de \mathcal{F} .

On doit maintenant combiner les graphes précédents pour construire des instances de 4-ARBORICITÉ-ÉTOILE.

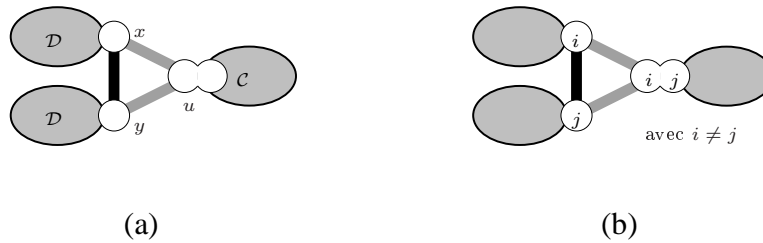


FIG. 38 – Une combinaison des graphes \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E} et \mathcal{F} .

Remarque 3.2.1 *Dans toute 4-0-coloration du graphe décrit dans la Figure 38 les sommets u , x et y sont respectivement 2-interne dans F_i et F_j , 1-interne dans F_i et 1-interne dans F_j , pour $i \neq j$.*

En effet, d'après les Lemmes 3.2.4 et 3.2.5, les sommets u , x et y sont respectivement 1 ou 2-interne, 1-interne et 1-interne. De plus, les arêtes incidentes aux sommets u , x ou y dans les graphes \mathcal{E} et \mathcal{F} sont orientées de u , x ou y vers l'autre extrémité. On en déduit, en utilisant les Lemmes 3.2.6 et 3.2.7, que les sommets u et x (resp. u et y) sont internes dans la même forêt, et que les sommets x et y sont internes dans des forêts distinctes (disons F_i et F_j avec $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ et $i \neq j$). Le sommet u est donc 2-interne dans F_i et F_j . De plus, il est clair, en utilisant les 4-0-colorations de \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E} et \mathcal{F} présentées précédemment que ce graphe est bien 4-0-coloriable.

On montre maintenant comment construire l'instance de 4-ARBORICITÉ-ÉTOILE. Dans les figures suivantes on ne représentera pas les copies de \mathcal{C} et de \mathcal{D} . Comme dans chaque copies de ces graphes on utilise les propriétés du sommet x pour \mathcal{C} et du sommet u pour \mathcal{D} , on ne représentera que ces sommets-ci. On représente ces sommets, qui sont 1 ou 2-interne, par un cercle blanc s'il sont 1-internes et par un double cercle blanc s'il sont 2-internes. On indique

également à l'intérieur de ces (double) cercles dans quelle(s) forêt(s) ils sont internes.

Le gadget des sommets est le graphe représenté dans la Figure 39.(a). Comme il s'agit d'une représentation schématique, on précise qu'il y a une copie de \mathcal{C} qui n'est pas représentée (pour le sommet u , c'est pour cela qu'il peut être 2-interne) ainsi que 16 copies de \mathcal{D} (pour les sommets x_i et y_i , avec $1 \leq i \leq 8$, c'est pour cela qu'ils sont 1-internes). On remarque que ce graphe est bien un graphe planaire.

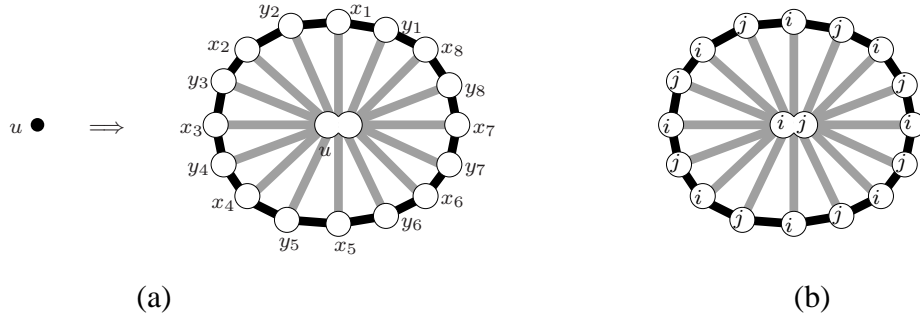


FIG. 39 – Le gadget des sommets.

Lemme 3.2.8 *Le gadget des sommets (Figure 39) est 4-0-coloriable et dans chacune de ses 4-0-colorations les sommets x_k (resp. y_k) sont 1-interne dans la même forêt F_i (resp. F_j). De plus, $i \neq j$ et le sommet u est 2-interne dans F_i et F_j .*

Preuve : On colorie le gadget des sommets en utilisant les coloration présentées précédemment de façon à ce que les sommets x_k (resp. y_k) soient 1-interne dans F_i (resp. F_j) et de façon à ce que u soit 2-interne dans F_i et F_j . Le reste du Lemme se prouve en utilisant la Remarque 3.2.1. \square

Soit G un graphe planaire de degré maximum quatre. On rappelle que décider si G est 3-coloriable est NP-complet. Étant donné ce graphe G , on construit le graphe G' en remplaçant chaque sommet $u \in V(G)$ par une copie du gadget des sommets ; on note cette copie H_u . Ensuite, on connecte ces différents gadgets en procédant ainsi :

- Étant donnée un représentation planaire de G , pour chaque sommet $u \in V(G)$, on numérote ses arêtes incidentes de 1 à $\deg_G(u)$ (avec $\deg_G(u) \leq 4$) en parcourant ces arêtes dans le sens trigonométrique autour de u .
- Pour chaque arête $uv \in E(G)$ on fait la chose suivante : Soit i (resp. j) le numero de l'arête uv pour le sommet u (resp. v). On ajoute une copie de \mathcal{E} reliant le sommet x_{2i} de H_u et le sommet x_{2j} de H_v (voir Figure 40). On choisi une des extrémités de uv , disons u . On ajoute une copie de \mathcal{F} reliant le sommet y_{2j} de H_u et le sommet y_{2j+1} de H_v (voir Figure 40).

Le graphe G' ainsi obtenu est planaire.

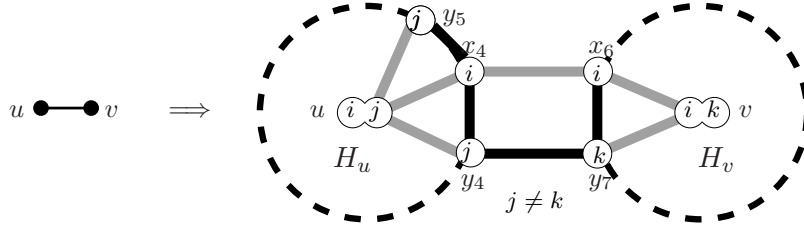


FIG. 40 – Le gadget des arêtes.

Lemme 3.2.9 *Soit une arête $uv \in E(G)$ et soient H_u et H_v les gadgets des sommets u et v dans G' . Dans une 4-0-coloration de G' on a les propriétés suivantes :*

- (1) *Les sommets x_i , avec $1 \leq i \leq 8$, de H_u et de H_v sont 1-interne dans la même forêt F_j , avec $1 \leq j \leq 4$.*
- (2) *Les sommets y_i , avec $1 \leq i \leq 8$, de H_u et ceux de H_v sont 1-internes dans deux forêts distinctes.*

Preuve : En effet, d'après le Lemme 3.2.6 les sommets $x_i \in V(H_u)$ et $x_j \in V(H_v)$ qui sont reliés par une copie de \mathcal{E} sont 1-internes dans la même forêt. Or tous les sommets x_i , avec $1 \leq i \leq 8$, de H_u (resp. de H_v) sont 1-internes dans la même forêt (*c.f.* Lemme 3.2.8), on a donc bien le point (1).

D'après le Lemme 3.2.7 les sommets $y_i \in V(H_u)$ et $y_j \in V(H_v)$ qui sont reliés par une copie de \mathcal{F} sont internes dans 2 forêts distinctes. Or tous les sommets y_i , avec $1 \leq i \leq 8$, de H_u (resp. de H_v) sont 1-internes dans la même forêt (*c.f.* Lemme 3.2.8), on a donc bien le point (2). \square

On montre maintenant que le graphe G est 3-coloriable si et seulement si le graphe G' est 4-0-coloriable. On aura ainsi bien montré qu'il existe une réduction polynomiale (la construction de G' est polynomiale en $|V(G)| + |E(G)|$) de 3-COLORATION vers 4-ARBORICITÉ-ÉTOILE.

Si le graphe G admet une 3-coloration propre de ses sommets c , on en déduit une 4-0-coloration de G' . Pour cela, on 4-0-colorie chaque gadget H_u (*c.f.* Lemme 3.2.8) de façon à ce que :

- le sommet u soit 2-interne dans F_4 et $F_{c(u)}$,
- les sommets x_i , avec $1 \leq i \leq 8$, soient 1-interne dans F_4 , et
- les sommets y_i , avec $1 \leq i \leq 8$, soient 1-interne dans $F_{c(u)}$.

D'après le Lemme 3.2.6 tous les sommets de type x_i étant 1-interne dans la même forêt, F_4 , les copies de \mathcal{E} les reliant sont aussi 4-0-coloriables. Enfin, deux sommets de type y_i et reliés par une copie de \mathcal{F} sont 1-internes dans des forêts distinctes (disons $F_{c(u)}$ et $F_{c(v)}$). Il est

donc aussi possible de les 4-0-colorier, d'après le Lemme 3.2.7. Le graphe G' est donc bien 4-0-coloriable.

Réciproquement, si G' admet une 4-0-coloration, on en déduit une 3-coloration de G . le Lemme 3.2.9 implique que tous les sommets de type x_i sont 1-internes dans la même forêt, disons F_4 , les sommets de type y_i sont donc 1-internes dans F_1, F_2 ou F_3 . On définit une 3-coloration des sommets de G de la façon suivante : $c(v) = i$ si les sommets y_j de H_v , avec $1 \leq j \leq 8$, sont 1-internes dans F_i . Or d'après le Lemme 3.2.9, pour toute arête $uv \in E(G)$, les sommet de type y_i dans H_u et ceux de type y_i dans H_v sont 1-internes dans des forêts distinctes. La 3-coloration c est donc une coloration propre et le graphe G est bien 3-coloriable. \square

3.3 Arboricité intérieurement 1-bornée

Il semble que l'arboricité intérieurement 1-bornée n'a pas été étudiée auparavant. Cet invariant est intéressant car les arbres intérieurement 2-bornés sont simples, ce sont les **étoiles doubles**. On peut définir ces graphes de deux façon différentes. Les étoiles doubles sont les arbres de diamètre $d \leq 3$. On définit également les étoiles doubles comme étant les arbres qui ont au plus deux sommets de degré $d \geq 2$. L'arboricité intérieurement 1-bornée a aussi l'intéressante propriété d'être bornée par les arboricités étoile et chenille.

$$\forall G, \quad ac(G) \leq a_1(G) \leq ae(G) \quad (12)$$

On rappelle qu'une k -1-coloration (*c.f.* Sous-section 3.1.1) d'un graphe G est une k -coloration et une orientation partielle des arêtes de G , telles que pour tout entier i , avec $1 \leq i \leq k$, on respecte les conditions suivantes :

- (A) Un sommet v incident à une arête e , coloriée i et orientée vers v , n'a pas d'autre arête incidente coloriée i .
- (B) Tout sommet $v \in V(G)$ a au plus une arête incidente non-orientée et coloriée i .

Dans ce cas ($d = 1$) le point (C) est une conséquence du point (B), on n'en fait donc pas mention ici.

On a vu que le nombre chromatique acyclique d'un graphe borne son arboricité étoile (*c.f.* Théorème 10). On peut donner le même genre de borne pour l'arboricité intérieurement 1-bornée. On définit pour cela les **k -colorations acycliques 1-impropres**. Un graphe est acycliquement k -coloriable de façon 1-impropre s'il admet une k -coloration de ses sommets telle que (1) chaque classe de couleur induise un graphe de degré maximum au plus 1 et (2) chaque cycle de G , $C \subseteq G$, est soit colorié de façon non-propre, soit colorié avec au moins trois couleurs. Différents travaux portent sur ce type de coloration [BSV99, Och05]. On montre que ce type de coloration permet de borner $a_1(G)$.

Lemme 3.3.1 *Si un graphe G est acycliquement k -coloriable de façon 1-impropre, alors $a_1(G) \leq k$.*

Preuve : En effet, il est possible de construire une k -1-coloration d'un graphe G , à partir d'une k -coloration acyclique 1-impropre de G , c . Pour cela on procède de la façon suivante :

- (1) Si une arête uv a ses deux extrémités de la même couleur ($c(u) = c(v) = i$), alors on laisse l'arête uv non-orientée et on la colorie i . On note $E' \subseteq E(G)$ l'ensemble de ces arêtes.

On considère maintenant le graphe $G \setminus E'$. Il est clair que la coloration c de $V(G)$ est une k -coloration acyclique de $G \setminus E'$. Or Hakimi *et al.* [HMS96] ont montré qu'étant donnée une k -coloration acyclique c d'un graphe H , il existe une k -0-coloration des arêtes de H telle que les sommets v coloriés i ($c(v) = i$) sont internes dans F_i .

- (2) Le graphe $G \setminus E'$ admet donc une k -0-coloration telle que tout sommet $v \in V(G)$ est interne dans $F_{c(v)}$.

La réunion de cette coloration de $G \setminus E'$ et de la coloration de E' donne une k -1-coloration de G telle que tout sommet $v \in V(G)$ est interne $F_{c(v)}$. En effet :

- Étant donnée la k -0-coloration de $G \setminus E'$, si une arête $uv \in E(G)$ est orientée vers v et est coloriée 1, alors $c(v) \neq 1$ et le sommet v n'a pas d'autre arête incidente orientée (vers v ou dans l'autre direction) et coloriée 1. De plus, étant donné que $c(v) \neq 1$, il n'y a donc pas d'arête non-orientée coloriée 1 incidente à v . La coloration de G vérifie donc bien la condition (A).
- Les arêtes non-orientées d'une même couleur étant un sous-ensemble de l'ensemble E' , qui induit un graphe de degré maximum 1, la coloration de G vérifie donc aussi la condition (B).

La coloration du graphe G est donc bien une k -1-coloration et on a bien $a_1(G) \leq k$. \square

On présente maintenant les différents résultats obtenus pour ce type d'arboricité pour les familles de graphes \mathcal{P}_g . On montre que les problèmes 2-ARB-INT-1-BORNÉE et 3-ARB-INT- d -BORNÉE, avec $d \geq 1$, sont NP-complets pour des familles restreintes de graphes.

Théorème 14 *Il est NP-complet de décider si un graphe G , planaire, biparti et de maille $g \geq 8$, vérifie $a_1(G) \leq 2$.*

Théorème 15 *Pour tout entier $d \geq 1$, il est NP-complet de décider si un graphe G , planaire et biparti, vérifie $a_d(G) \leq 3$.*

Pour tout entier g tel que $3 \leq g \leq 8$, le Théorème 14 implique qu'il existe un graphe planaire G de maille g , tel que $a_1(G) \geq 3$. Or, étant donné que $ae(\mathcal{P}_7) = 3$ et que $ae(\mathcal{P}_7) \geq a_1(\mathcal{P}_7) \geq a_1(\mathcal{P}_8)$, on $a_1(\mathcal{P}_7) = a_1(\mathcal{P}_8) = 3$. Pour tout entier $d \geq 1$, le Théorème 15 implique qu'il existe

des graphes planaires bipartis (donc de maille $g \geq 4$) G tels que $a_d(G) \geq 4$. Or, étant donné que $ae(\mathcal{P}_4) = 4$, on a $a_d(\mathcal{P}_4) = 4$ pour tout entier $d \geq 1$. De plus, comme $\mathcal{P}_4 \subset \mathcal{P}_3$ on en déduit aussi que $a_d(\mathcal{P}_3) \geq 4$ pour tout entier $d \geq 1$.

On montre également que contrairement à l'arboricité étoile, il existe un entier k tel que $a_1(\mathcal{P}_k) = 3$ et $a_1(\mathcal{P}_{k+1}) = 2$. On vient de voir que cet entier k est tel que $k \geq 9$ et le théorème suivant nous indique que $k < 14$.

Théorème 16 *Tout graphe planaire G de maille $g \geq 14$ vérifie $a_1(G) \leq 2$.*

3.3.1 NP-complétude de 2-ARB-INT-1-BORNÉE

On rappelle que le problème 2-COLORATION 1-IMPROPRE prend en entrée un graphe G et indique si ce graphe admet une 2-coloration de ses sommets telle que chaque sommet a au plus un voisin de la même couleur que lui. On prouve le Théorème 14 par réduction polynomial de 2-COLORATION 1-IMPROPRE.

Preuve du Théorème 14 : Il est suffisant de montrer (*c.f.* Lemme 3.1.1) que décider si un graphe G , biparti, planaire et de maille $g \geq 8$ est 2-1-coloriable, est un problème NP-complet. Il est clair que décider si un graphe est 2-1-coloriable est dans NP. On montre donc que ce problème est NP-dur par réduction polynomial de 2-COLORATION 1-IMPROPRE.

On considère les graphes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} représentés dans la Figure 41. Les représentations de \mathcal{A} et de \mathcal{B} sont explicites. On construit \mathcal{C} à partir de 3 copies de \mathcal{B} et de 2 nouveaux sommets, y_i et y_{i+1} (i étant un entier quelconque), en ajoutant 3 arêtes reliant le sommet y_i et les 3 sommets z_1 (que l'on dénote z_1^1 , z_1^2 et z_1^3) et 3 arêtes reliant le sommet y_{i+1} et les 3 sommets z_2 (que l'on dénote z_2^1 , z_2^2 et z_2^3). On construit le gadget des sommets \mathcal{D} à partir de 5 copies de \mathcal{C} , une pour chaque valeur de $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, et d'un nouveau sommet x , en ajoutant 6 arêtes xy_i , avec $1 \leq i \leq 6$.

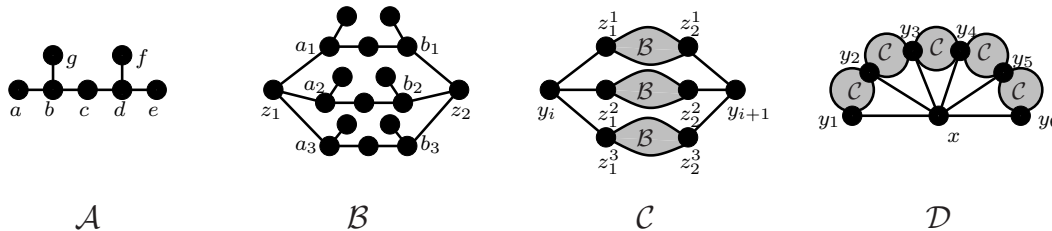


FIG. 41 – Les graphes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} .

On étudie les propriétés des 2-1-colorations de ces graphes.

Fait 1 *Dans aucune des 2-1-colorations de \mathcal{A} les arêtes ab et de ne sont coloriées 1 et respectivement orientées vers b et d . Par contre, il en existe une les arêtes ab et de sont respectivement*

coloriées 1 et 2, et respectivement orientées vers b et d .

Preuve : Si les arêtes ab et de sont coloriées 1 et respectivement orientées vers b et d , les sommets b et d sont des extrémités de F_1 . Ceci entraîne que toutes les arêtes de la chaîne (g, b, c, d, f) , sont coloriées 2. C'est impossible puisque F_2 doit être une forêt de diamètre au plus 3. Si les arêtes ab et de sont respectivement coloriées 1 et 2, et respectivement orientées vers b et d , alors on peut compléter cette 2-1-coloration de \mathcal{A} en coloriant les arêtes bg, bc, dc et df respectivement 2, 2, 1 et 1, et en orientant ces arêtes de b ou de d vers l'autre extrémité. \square

Fait 2 Dans aucune des 2-1-colorations de \mathcal{B} les arêtes z_1a_i et z_2b_i , avec $1 \leq i \leq 3$, ne sont toutes coloriées 1. Par contre, il en existe une dans laquelle les arêtes z_1a_i , avec $1 \leq i \leq 3$, sont coloriées 1 et orientées vers a_i , et dans laquelle les arêtes z_2b_i , avec $1 \leq i \leq 3$, sont coloriées 2 et orientées vers b_i .

Preuve : Si les arêtes z_1a_i et z_2b_i sont toutes coloriées 1, alors il existe un entier $k \in \{1, 2, 3\}$ tel que les arêtes z_1a_k et z_2b_k sont respectivement orientées vers a_k et b_k . Or le Fait 1 indique qu'une telle 2-1-coloration d'une copie de \mathcal{A} est impossible. Le graphe \mathcal{B} n'admet donc pas de 2-1-coloration où les arêtes z_1a_i et z_2b_i sont toutes coloriées 1.

Il est simple de construire la 2-1-coloration de \mathcal{B} dans laquelle les arêtes z_1a_i , avec $1 \leq i \leq 3$, sont coloriées 1 et orientées vers a_i , et dans laquelle les arêtes z_2b_i , avec $1 \leq i \leq 3$, sont coloriées 2 et orientées vers b_i . Pour cela, il suffit d'utiliser 3 fois la 2-1-coloration de \mathcal{A} décrite dans le Fait 1. \square

On montre que le graphe \mathcal{C} a une propriété similaire au graphe \mathcal{B} . La différence entre \mathcal{B} et \mathcal{C} vient du fait que dans le graphe \mathcal{C} les sommets y_i et y_{i+1} sont à distance 6, ce qui permet au graphe \mathcal{D} d'être de maille 8.

Fait 3 Dans aucune des 2-1-colorations de \mathcal{C} les arêtes $y_iz_1^j$ et $y_{i+1}z_2^j$, avec $1 \leq j \leq 3$, ne sont toutes coloriées 1. Par contre, il en existe une dans laquelle les arêtes $y_iz_1^j$, avec $1 \leq j \leq 3$, sont coloriées 1 et orientées vers z_1^j , et dans laquelle les arêtes $y_{i+1}z_2^j$, avec $1 \leq j \leq 3$, sont coloriées 2 et orientées vers z_2^j .

Preuve : Si les arêtes $y_iz_1^j$ et $y_{i+1}z_2^j$ sont toutes coloriées 1, alors il existe un entier $k \in \{1, 2, 3\}$ tel que les arêtes $y_iz_1^k$ et $y_{i+1}z_2^k$ sont respectivement orientées vers z_1^k et z_2^k . Les sommets z_1^k et z_2^k sont donc tous deux 1-internes dans F_2 et toutes leurs arêtes incidentes autres que $y_iz_1^k$ et $y_{i+1}z_2^k$ sont coloriées 2. Or le Fait 2 indique qu'une telle 2-1-coloration d'une copie de \mathcal{B} est impossible. Le graphe \mathcal{C} n'admet donc pas de 2-1-coloration où les arêtes $y_iz_1^j$ et $y_{i+1}z_2^j$ sont toutes coloriées 1.

Il est simple de construire la 2-1-coloration de \mathcal{C} dans laquelle les arêtes $y_iz_1^j$, avec $1 \leq j \leq 3$, sont coloriées 1 et orientées vers z_1^j , et dans laquelle les arêtes $y_{i+1}z_2^j$, avec $1 \leq j \leq 3$, sont

coloriées 2 et orientées vers z_2^j . Pour cela, il suffit d'utiliser 3 fois la 2-1-coloration de \mathcal{B} décrite dans le Fait 2. \square

Fait 4 *Dans aucune des 2-1-colorations de \mathcal{D} il n'existe d'entier $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que les arêtes xy_k et xy_{k+1} sont toutes deux coloriées 1, et respectivement orientées vers y_k et y_{k+1} .*

Preuve : Si les arêtes xy_k et xy_{k+1} sont toutes deux coloriées 1 et respectivement orientées vers y_k et y_{k+1} , alors les autres arêtes incidentes aux sommets y_k et y_{k+1} sont toutes coloriées 2. Or le Fait 3 indique qu'il n'existe pas de telle 2-1-coloration de la copie de \mathcal{C} reliant y_k et y_{k+1} . \square

Fait 5 *Dans toutes les 2-1-colorations de \mathcal{D} le sommet x est 2-interne et a des arêtes incidentes de toutes les couleurs, 1 et 2. De plus, il existe une 2-1-coloration de \mathcal{D} où toutes les arêtes incidentes à x sont orientées de x vers l'autre extrémité.*

Preuve : Si une arête xy_k est coloriée 2 et est orientée vers x , les autres arêtes incidentes à x sont alors nécessairement toutes coloriées 1. Il y a dans ce cas un entier k tel que les arêtes xy_k et xy_{k+1} sont toutes deux coloriées 1 et respectivement orientées vers y_k et y_{k+1} . Or le Fait 4 indique que ceci est impossible. Le sommet x n'a donc pas d'arête incidente orientée vers x , il est donc bien 2-interne.

Si toutes les arêtes incidentes à x sont coloriées 1, alors il existe un entier k tel que les arêtes xy_k et xy_{k+1} sont respectivement orientées vers y_k et y_{k+1} . Or le Fait 4 indique que ceci est impossible. Le sommet x a donc des arêtes incidentes de toutes les couleurs.

Si une arête xy_k était coloriée 2 et orientée vers x , les autres arêtes incidentes à x seraient alors toutes coloriées 1. Il y aurait dans ce cas un entier k tel que les arêtes xy_k et xy_{k+1} soient toutes deux coloriées 1 et respectivement orientées vers y_k et y_{k+1} . Or le Fait 4 indique que c'est impossible.

Si on oriente toutes les arêtes xy_i , avec $1 \leq i \leq 6$, vers y_i en les coloriant 1 lorsque i est pair et 2 lorsque i est impair, alors on peut compléter cette 2-1-coloration de \mathcal{D} en utilisant la 2-1-coloration de \mathcal{C} décrite dans le Fait 3. \square

Étant donné un sommet u , le gadget des sommets H_u est le graphe formé par le sommet u , un nouveau sommet u' , 2 copies de \mathcal{D} , de l'arête uu' et de 2 arêtes reliant le sommet u' au sommet x (que l'on note x_1 ou x_2) de chacune des copies de \mathcal{D} (voir la Figure 42).

Lemme 3.3.2 *Le gadget des sommets est 2-1-coloriable et dans toutes ses 2-1-colorations l'arête uu' est orientée vers u (le sommet u est donc 1-interne).*

Preuve : Il est simple de 2-1-colorier H_u . Il suffit pour cela d'utiliser la 2-1-coloration de \mathcal{D} décrite dans le Fait 5. Cette coloration permet de laisser les arêtes $u'x_i$, avec $i \in \{1, 2\}$,

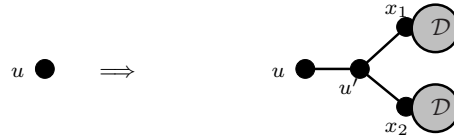


FIG. 42 – Le gadget des sommets, H_u .

non-orientées, et de les colorier i . On termine en orientant l'arête uu' vers u et en la coloriant 1 ou 2.

D'après le Fait 5, les colorations des copies de \mathcal{D} impliquent que les arêtes $u'x_i$ sont soit orientées vers u' soit non-orientées. Dans tous les cas de figure, l'arête uu' est nécessairement orientée vers u . \square

Étant donnée une arête uv on définit un gadget des arêtes. Ce gadget est représenté dans la Figure 43.(a).

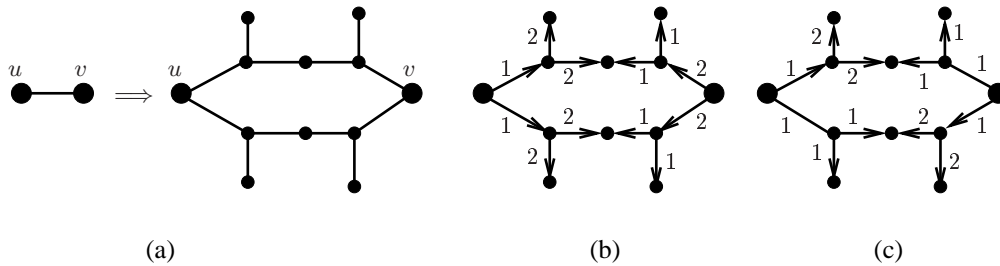


FIG. 43 – Le gadget des arêtes.

Lemme 3.3.3 *Soit une 2-1-coloration du gadget de l'arête uv où les arêtes incidentes à u (resp. v) sont toutes deux coloriées $i \in \{1, 2\}$ (resp. $j \in \{1, 2\}$).*

- (1) *Si $i \neq j$ alors ces arêtes peuvent être orientées de u ou v vers l'autre extrémité.*
- (2) *Si $i = j$ alors chacun des sommets u et v est incident à une arête non-orientée.*

Preuve : La Figure 43.(b) permet de vérifier le point (1).

Le Fait 1 implique que si les arêtes incidentes à u ou à v sont de la même couleur alors il faut que au moins deux d'entre elles (une par copie de \mathcal{A}) soient non-orientées. Comme chaque sommet est incident à au plus une arête non-orientée par couleur, chacun des sommets u et v est incident à une arête non-orientée. Finalement, on constate dans la Figure 43.(c) qu'une telle 2-1-coloration du gadget existe. Le point (2) est donc vérifié. \square

Soit G un graphe planaire sans triangle de degré maximum quatre. On rappelle que décider si G est 2-coloriable de façon 1-impropre est NP-complet. Étant donné ce graphe G , on

construit le graphe G' en remplaçant chaque sommet $u \in V(G)$ par une copie du gadget des sommets, H_u , et en remplaçant chaque arête $uv \in E(G)$ par une copie du gadget des arêtes. On constate aisément que le graphe G' ainsi construit est planaire, biparti et de maille $g \geq 8$.

On montre maintenant que le graphe G est 2-coloriable de façon 1-impropre si et seulement si le graphe G' est 2-1-coloriable. On aura ainsi bien montré qu'il existe une réduction polynomiale (la construction de G' étant polynomiale en $|V(G)| + |E(G)|$) de 2-COLORATION 1-IMPROPRE vers 2-ARB-INT-1-BORNÉE.

Étant donnée une 2-coloration 1-impropre de G , c , on construit une 2-1-coloration de G' . Pour chaque sommet $u \in V(G)$, on colorie le gadget H_u de telle sorte que u soit 1-interne dans $F_{c(u)}$ (Lemme 3.3.2) et pour chaque arête $uv \in E(G)$, on colorie le gadget de uv en prenant le modèle de la Figure 43.(b) (resp. Figure 43.(c)) si $c(u) \neq c(v)$ (resp. si $c(u) = c(v)$). Chaque sommet $u \in V(G)$ ayant au plus un voisin v de la même couleur ($c(u) = c(v)$), chaque sommet u a au plus une arête incidente non-orientée coloriée $c(u)$. Cette coloration de G' est donc bien une 2-1-coloration.

Réciproquement, si G' admet une 2-1-coloration, on en déduit une 2-coloration 1-impropre de G . On obtient cette coloration en coloriant chaque sommet $u \in V(G)$ avec le seul entier $i \in \{1, 2\}$ tel que le sommet u est 1-interne dans F_i . En effet, d'après le Lemme 3.3.2 ces sommets sont 1-internes et, d'après le Lemme 3.3.3, chaque sommet $u \in V(G)$ ayant au plus une arête incidente non-orientée coloriée $c(u)$, la 2-coloration de G ainsi obtenue est bien 1-impropre. \square

3.3.2 NP-complétude de 3-ARB-INT- d -BORNÉE, pour $d \geq 1$

On rappelle que le problème **3-COLORATION** prend en entrée un graphe G et indique si ce graphe admet une 3-coloration propre de ses sommets. On prouve le Théorème 15 par réduction polynomial de 3-COLORATION.

Preuve du Théorème 15 : Il est suffisant de montrer (*c.f.* Lemme 3.1.1) que, pour tout $d \geq 1$, décider si un graphe G , biparti, planaire et 2-dégénéré est 3- d -coloriable, est un problème NP-complet. Il est clair que décider si un graphe est 3- d -coloriable est dans NP. On montre donc que ce problème est NP-dur par réduction polynomiale de 3-COLORATION. On admet dans le reste de la preuve que d est un entier quelconque tel que $d \geq 1$.

Soit \mathcal{A} le graphe représenté dans la Figure 44.(a).

Fait 6 *Dans toute 3- d -coloration du graphe \mathcal{A} où les arêtes $y_i z_j$, avec i et $j \in \{1, 2\}$, sont coloriées 1 ou 2, au moins une de ces 4 arêtes n'est pas orientée vers z_1 ou z_2 . De plus, il existe une 3- d -coloration de \mathcal{A} où seul une des arêtes $y_i z_j$, avec i et $j \in \{1, 2\}$, est non-orientée, où les autres arêtes de ce type sont orientées vers z_1 ou z_2 , et où les arêtes incidentes à y_1 (resp. y_2) sont coloriées 1 (resp. 2).*

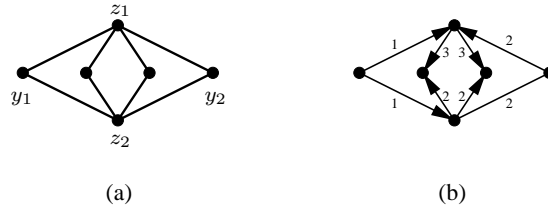


FIG. 44 – Le graphe \mathcal{A} .

Preuve : Si les arêtes de type $y_i z_j$ sont toutes orientées vers le sommet z_j et coloriées 1 ou 2, toutes les autres arêtes incidentes aux sommets z_i , formant un cycle, sont coloriées 3. Ceci est impossible étant donné que le graphe induit par les arêtes coloriées 3, F_3 , est une forêt.

On constate finalement dans la Figure 44.(b) qu’il existe bien une 3- d -coloration de \mathcal{A} où seule une des arêtes de type $y_i z_j$ est non-orientée, où les autres sont orientées vers z_i et où les arêtes incidentes à y_1 (resp. y_2) sont coloriées 1 (resp. 2). \square

On construit le graphe \mathcal{B} à partir de $2d + 1$ copies de \mathcal{A} en identifiant les sommets y_1 de chaque copie, en identifiant les sommets y_2 de chaque copie, et en ajoutant 2 nouveaux sommets, x_1 et x_2 , et 4 arêtes, $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$ et $x_2 y_2$ (voir la Figure 45.(a)).

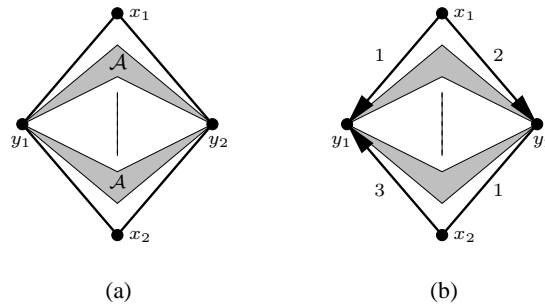


FIG. 45 – Le graphe \mathcal{B} .

Fait 7 Dans toute 3- d -coloration du graphe \mathcal{B} , au moins une des arêtes $x_i y_j$, avec i et $j \in \{1, 2\}$, n’est pas orientée vers le sommet y_j . Par contre, il existe une 3- d -coloration de \mathcal{B} où les arêtes $x_1 y_1$, $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ sont orientées vers les sommets y_j , avec $j \in \{1, 2\}$, et respectivement coloriées 1, 2 et 3 et où l’arête $x_2 y_2$ est non-orientée et coloriée 1.

Preuve : Si les arêtes de type $x_i y_j$ sont toutes orientés vers les sommets y_j , cela implique que les sommets y_1 et y_2 sont 1-internes, disons respectivement dans F_a et F_b , avec a et $b \in \{1, 2, 3\}$. Dans toutes les copies de \mathcal{A} les arêtes incidentes à y_1 (resp. y_2) sont donc coloriées a (resp. b). Le sommet y_1 (resp. y_2) étant incident à au plus d arêtes non-orientées, une des $2d + 1$ copies de \mathcal{A} est telle que toutes ses arêtes de type $y_1 z_i$ (resp. $y_2 z_i$) ont la même couleur et sont

orientées vers z_i . Or d'après le Fait 6 il n'existe pas de telle 3- d -coloration de \mathcal{A} . Les arêtes de type $x_i y_j$ ne sont donc pas toutes orientées vers y_j .

Si les arêtes $x_1 y_1$, $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ sont orientées vers y_1 ou y_2 et respectivement coloriées 1, 2 et 3, et si l'arête $x_2 y_2$ est non-orientée et coloriée 1 (voir Figure 45.(b)), alors le sommet y_1 est 1-interne dans la forêt F_2 et le sommet y_2 est 2-interne dans les forêts F_1 et F_3 . Les sommets y_1 et y_2 pouvant encore admettre respectivement d et $2d - 1$ arêtes incidente non-orientées, on peut terminer la 3- d -coloration de \mathcal{B} en utilisant la 3- d -coloration de \mathcal{A} décrite dans le Fait 6. \square

Étant donné un sommet u , on construit le graphe \mathcal{C}_u à partir de $6d$ copies de \mathcal{B} en identifiant les sommets x_1 de chaque copie, en identifiant les sommets x_2 de chaque copie, et en ajoutant les arêtes ux_1 et ux_2 (voir Figure 46). On appelle ce graphe le gadget des sommets.

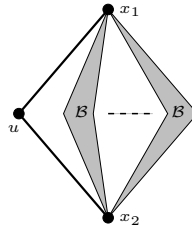


FIG. 46 – Le graphe \mathcal{C}_u .

Lemme 3.3.4 *Le graphe \mathcal{C}_u est 3- d -coloriable et dans chacune de ses 3- d -colorations, le sommet u est 1-interne.*

Preuve : En effet, d'après le Fait 7, dans toute 3- d -coloration du graphe \mathcal{C}_u , chaque copie de \mathcal{B} contient au moins une arête qui n'est pas orientée vers un sommet de type y_i . Comme il y a $6d$ copies de \mathcal{B} , les sommets x_1 et x_2 doivent avoir chacun d arêtes non-orientées dans chacune des 3 forêts. Les arêtes ux_1 et ux_2 sont donc nécessairement orientées vers le sommet u . Le sommet u est donc nécessairement 1-interne.

Enfin on constate qu'il existe bien une 3- d -coloration de \mathcal{C}_u . On la construit en faisant en sorte que les sommets x_1 et x_2 soient internes dans chacune des 3 forêts et en utilisant la coloration de \mathcal{B} décrite dans le Fait 7. \square

Lemme 3.3.5 *Si dans une 3- d -coloration du cycle (u, x, v, y) les arêtes ux et uy sont de la même couleur $a \in \{1, 2, 3\}$ et les arêtes vx et vy sont de la même couleur $b \in \{1, 2, 3\}$, alors on a $a \neq b$.*

Preuve : En effet, si $a = b$ on a un cycle dans F_a , ce qui est impossible. \square

Soit G un graphe planaire de degré maximum quatre. On rappelle que décider si G est

3-coloriable est NP-complet. Étant donné ce graphe G , on construit le graphe G' en prenant pour chaque sommet $u \in V(G)$ un gadget des sommet \mathcal{C}_u et en remplaçant chaque arête $uv \in E(G)$ par un cycle (u, x, v, y) , où les sommets x et y sont de nouveaux sommets. On constate aisément que le graphe G' ainsi construit est planaire, biparti et 2-dégénéré.

On montre maintenant que le graphe G est 3-coloriable si et seulement si le graphe G' est 3- d -coloriable. On aura ainsi bien montré qu'il existe une réduction polynomiale (la construction de G' étant polynomiale en $|V(G)| + |E(G)|$) de 3-COLORATION vers 3-ARB-INT- d -BORNÉE.

Si le graphe G admet une 3-coloration propre de ses sommets c , on en déduit une 3- d -coloration de G' . En effet, d'après le Lemme 3.3.4 on peut colorier chaque gadget des sommets \mathcal{C}_u , pour $u \in V(G)$, de manière à ce que le sommet u soit 1-interne dans la forêt $F_{c(u)}$. Finalement on 3- d -colorie les cycles (u, x, v, y) correspondant à une arête $uv \in E(G)$ en orientant les arêtes de ce cycle vers les sommets x ou y et en coloriant $c(u)$ (resp. $c(v)$) les arêtes incidentes à u (resp. v). Ceci est possible puisque les sommets u et v sont respectivement 1-internes dans $F_{c(u)}$ et $F_{c(v)}$. Finalement comme c est une coloration propre de G et que les sommets u et v sont adjacents dans G on a $c(u) \neq c(v)$. Cette coloration de G' est donc bien une 3- d -coloration.

Réciproquement, si G' admet une 3- d -coloration, on en déduit une 3-coloration de G . D'après le Lemme 3.3.4, pour chaque sommet $u \in V(G)$, la 3- d -coloration de \mathcal{C}_u est telle que le sommet u est 1-interne. On définit une coloration c des sommets de G de façon à ce que chaque sommet $u \in V(G)$ soit 1-interne (dans la 3- d -coloration de G') dans $F_{c(u)}$. Pour tout sommet $u \in V(G)$, la 3- d -coloration de \mathcal{C}_u impliquant que ce sommet est 1-interne dans $F_{c(u)}$, les autres arêtes incidentes à u dans G' sont donc toutes coloriées $c(u)$. Le Lemme 3.3.5 implique donc que pour toute arête $uv \in E(G)$ on a $c(u) \neq c(v)$. La coloration c est donc bien une coloration propre des sommets de G . \square

3.3.3 Degré moyen maximum et preuves par déchargement

Le **degré moyen** $Dm(G)$ d'un graphe G est le quotient $2|E(G)|/|V(G)|$. Le **degré moyen maximum** $Dmm(G)$ d'un graphe G est défini par la formule suivante :

$$Dmm(G) = \max_{H \subseteq G} \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}$$

le maximum étant pris sur les sous-graphes H de G ayant au moins un sommet. On remarque que pour tout sous-graphe H de G , on a $Dmm(H) \leq Dmm(G)$. Le degré moyen et le degré moyen maximum sont respectivement des expressions de la densité du graphe et de la densité locale maximum du graphe. Un graphe planaire G ayant au plus $3|V(G)| - 6$ arêtes, on peut donc borner $Dm(G)$ par 6. Cette remarque étant valide pour les sous-graphes de G (qui sont

planaires) on a $Dmm(G) < 6$. En utilisant la formule d'Euler (*c.f.* Théorème 1), on obtient un résultat plus fin :

Lemme 3.3.6 *Pour tout graphe planaire G de maille g , on a $Dmm(G) < \frac{2g}{g-2}$.*

Preuve : Tout sous-graphe H d'un graphe G de maille g est de maille au moins g . On a donc $g|V(H)| \leq 2|E(H)|$. Le graphe H étant planaire on utilise la formule d'Euler et on obtient :

$$g|V(H)| + 2|E(H)| \geq g|E(H)| + 2g$$

ce qui implique que

$$|V(H)| > |E(H)|(g-2)/g$$

Pour tout sous-graphe H de G on a bien :

$$\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} < \frac{2g}{g-2}$$

□

Plusieurs preuves de ce chapitre utilisent la **méthode de preuve par déchargement**. Cette technique est due à Heesch [Hee69] et a permis à Appel et Haken [AH77, AHK77] de prouver le fameux Théorème des 4 Couleurs. On utilisera cette méthode pour prouver des assertions du type : "*Tout graphe G tel que $Dmm(G) < q$ vérifie la propriété \mathcal{P}* ".

Pour ce faire, on considère un graphe H tel que $Dmm(H) < q$, qui ne vérifie pas la propriété \mathcal{P} et qui a un nombre minimum de sommets. Ceci implique que tout sous-graphe propre $H' \subsetneq H$ ($Dmm(H') \leq Dmm(H) < q$) vérifie la propriété \mathcal{P} . On appelle ce graphe H le **contre-exemple minimum**.

les **configurations interdites** sont des graphes H_1, \dots, H_t ayant 2 types de sommets, les "blancs" et les "noirs". On dit d'un graphe G qu'il **contient** la configuration H_i , pour $1 \leq i \leq t$, s'il existe une application $f : V(H_i) \rightarrow V(G)$ telle que :

- pour toute arête $uv \in E(H_i)$ alors $f(u)f(v)$ est une arête de G ,
- si 2 sommets noirs de H_i , u et v , sont tels que $f(u) = f(v)$ alors ces sommets n'ont pas de voisin commun dans H_i ,
- si $u \in V(H_i)$ est un sommet blanc alors il n'existe pas de sommet $v \in V(H_i)$, $v \neq u$, tel que $f(v) = f(u)$, et
- si $u \in V(H_i)$ est un sommet blanc alors $\deg_{H_i}(u) = \deg_G(f(u))$.

La première étape dans une preuve par déchargement consiste à montrer que le contre-exemple minimum H ne contient pas certaines configurations H_i , avec $1 \leq i \leq t$. On appelle ces configurations les **configurations interdites**. On montre généralement que H ne contient aucune des configurations interdites en utilisant le fait que $|V(H)|$ est minimum.

La deuxième étape consiste à montrer que tout graphe G ne contenant aucune des configurations interdites est tel que $Dmm(G) \geq q$. Pour cela on attribut à tout sommet $v \in V(G)$ une charge initiale $\delta(v)$ égale à son degré ($\delta(v) = \deg_G(v)$). On définit ensuite une **procédure de déchargement** qui préserve la charge totale du graphe. On montre enfin que si la procédure est appliquée à un graphe G n'ayant aucune des configurations interdites, alors la charge finale $\delta^*(v)$ de chaque sommet $v \in V(G)$ est telle que $\delta^*(v) \geq q$. On a donc bien :

$$Dmm(G) \geq Dm(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \delta(v)}{|V(G)|} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \delta^*(v)}{|V(G)|} \geq \frac{q|V(G)|}{|V(G)|} = q$$

On a alors une contradiction puisque le contre-exemple H ne contient aucune des configurations interdites et que par définition $Dmm(H) < q$. On montre ainsi qu'il n'existe pas de contre-exemple H .

3.3.4 Les graphes planaires de maille $g \geq 14$

On rappelle qu'un k - d -coloration d'un graphe G est dite p -prolongeable si tout les sommets de G sont $\geq p$ -internes.

Preuve du Théorème 16 : La propriété suivante implique le Théorème 16 (*c.f.* Lemmes 3.1.1 et 3.3.6).

Propriété 3 *Tout graphe G tel que $Dmm(G) < \frac{7}{3}$ admet une 2-1-coloration 1-prolongeable.*

On prouve cette propriété par déchargement. Soit le graphe H , un contre-exemple qui minimise $|V(H)|$. On remarque tout d'abord le fait suivant concernant les 2-1-colorations 1-prolongeables.

Fait 8 *Soit G un graphe avec une 2-1-coloration 1-prolongeable. Si tous les voisins d'un sommet $v \in V(G)$ sont de degré 2, alors il existe une 2-1-coloration 1-prolongeable de G dans laquelle v est 2-interne.*

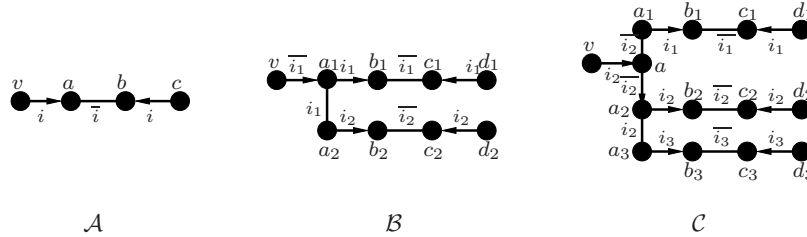
Preuve : On prouve cela en modifiant légèrement la 2-1-coloration initiale de G . Si v n'est pas 2-interne, comme cette coloration est 1-prolongeable, alors v est 1-interne. On considère sans perte de généralité qu'il est 1-interne dans F_1 . Le sommet v a donc un voisin x de degré 2 tel que l'arête vx est orienté vers v et est coloriée 2. La définition de 2-1-coloration (*c.f.* condition (A)) implique que cette arête vx est la seule arête incidente à v qui soit coloriée 2. Le sommet x étant ≥ 1 -interne, l'autre arête incidente à x , xy , est soit non-orientée, soit orientée vers y ou bien soit orientée vers x et coloriée 1. On modifie l'orientation et la coloration de l'arête vx afin d'obtenir la 2-1-coloration 1-prolongeable de G désirée.

- Si l'arête xy est non-orientée et coloriée 1 (resp. 2) on oriente vx vers x et on la colorie 2 (resp. 1).

- Si l'arête xy est orientée vers y et coloriée 1 (resp. 2) on oriente vx vers x et on la colorie 2 (resp. 1).
- Si l'arête xy est orientée vers x et coloriée 1 on supprime l'orientation de vx (l'arête vx est maintenant non-orientée) et on la colorie 2.

□

On s'intéresse maintenant aux colorations des graphes \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} de la Figure 47. Dans cette figure, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, on note \bar{i} l'entier $3 - i$.

FIG. 47 – 2-1-coloration des graphes \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} .

Les 2-1-colorations décrites Figure 47 permettent d'énoncer les faits suivants :

Fait 9 Pour toute couleur $i \in \{1, 2\}$, il existe une 2-1-coloration 1-prolongeable de \mathcal{A} telle que :

- l'arête bc est coloriée i et est orientée vers b , et
- l'arête va est orientée vers a .

Fait 10 Pour tout couple de couleurs $(i_1, i_2) \in \{1, 2\}^2$, il existe une 2-1-coloration 1-prolongeable de \mathcal{B} telle que :

- l'arête c_1d_1 est coloriée i_1 et est orientée vers c_1 ,
- l'arête c_2d_2 est coloriée i_2 et est orientée vers c_2 , et
- l'arête va_1 est orientée vers a_1 .

Fait 11 Pour tout triplet de couleurs $(i_1, i_2, i_3) \in \{1, 2\}^3$, il existe une 2-1-coloration 1-prolongeable de \mathcal{C} telle que :

- pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, l'arête c_jd_j est coloriée i_j et est orientée vers c_j , et
- l'arête va est orientée vers a .

Les configurations interdites représentées Figure 48 sont des graphes ayant un sommet v incident à $n \geq 0$ chaînes de longueur 2, à m copies de \mathcal{A} , à p copies de \mathcal{B} et à r copies de \mathcal{C} , avec $m + p + r \geq 1$,

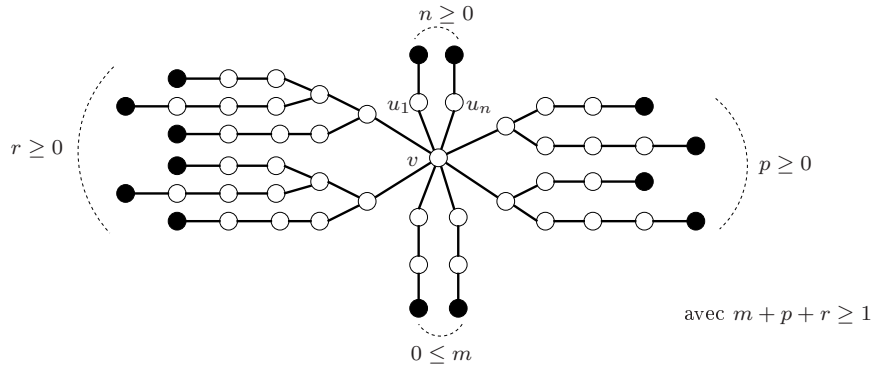


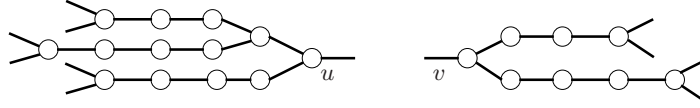
FIG. 48 – Configurations interdites.

Lemme 3.3.7 *Le contre-exemple minimal H n'a pas de sommet de degré 1 et ne contient aucune des configurations de la Figure 48.*

Preuve : Si H a une arête uv telle que $\deg(v) = 1$, par minimalité de H , il existe une 2-1-coloration 1-prolongeable de $H \setminus \{v\}$. Cette coloration étant 1-prolongeable, le sommet u est donc interne dans au moins une forêt, disons F_1 . On prolonge cette 2-1-coloration de $H \setminus \{v\}$ à H en coloriant 1 l'arête uv et en l'orientant vers v . Cette coloration de H étant une 2-1-coloration 1-prolongeable, ceci contredit la définition de H . Le contre-exemple minimal H ne contient donc pas de sommet de degré 1.

Si H contient une des configurations de la Figure 48, on considère le graphe H' obtenu à partir de H en supprimant tous les sommets blancs autres que v, u_1, \dots, u_n . Étant donné que $m + p + r \geq 1$, le graphe H' contient moins de sommets que H . Par minimalité de H , il existe une 2-1-coloration 1-prolongeable de H' . D'après le Fait 8, on peut modifier cette coloration afin que le sommet v soit 2-interne. De plus, cette coloration étant 1-prolongeable, les sommets noirs de la configuration sont tous ≥ 1 -internes. On prolonge maintenant cette 2-1-coloration de H' à H . Le Fait 9 permet de 2-1-colorier chacune des m copies de \mathcal{A} de façon 1-prolongeable, et de manière à ce que le sommet v reste 2-interne. Le Fait 10 permet de 2-1-colorier chacune des p copies de \mathcal{B} de façon 1-prolongeable, et de manière à ce que le sommet v reste 2-interne. Le Fait 11 permet enfin de 2-1-colorier chacune des r copies de \mathcal{C} de façon 1-prolongeable, et de manière à ce que le sommet v reste 2-interne. Cette coloration de H étant une 2-1-coloration 1-prolongeable, ceci contredit la définition de H . Le contre-exemple minimal H ne contient donc aucune des configurations interdites. \square

Pour tout entier $q \geq 1$, une q -chaîne est une chaîne de q sommets de H étant tous de degré 2 dans H . On dit d'une q -chaîne qu'elle est **incidente** à un sommet v , si une des extrémité de cette q -chaîne est adjacente à v . La configuration de la Figure 48 avec $n = m = 1, p = r = 0$ implique que H ne contient pas de 4-chaîne. Un sommet **très faible** est un sommet de degré 3

FIG. 49 – Un sommet faible, u , et un sommet très faible, v .

adjacent à une 3-chaîne et à une 2-chaîne (voir Figure 49). Un sommet **faible** est un sommet de degré 3 adjacent à une 3-chaîne et à un sommet très faible. Un sommet de degré au moins 3 qui n'est ni faible, ni très faible, est dit **fort**. On procède maintenant à l'étape de déchargement afin de prouver qu'un tel graphe H n'existe pas. La charge initiale de chaque sommet est égale à son degré ($\delta(v) = \deg(v)$). On utilise ensuite la règle de déchargement suivante :

Chaque sommet v de degré au moins 3 donne :

- $\frac{1}{6}$ à chaque sommet appartenant à une q -chaîne incidente à v , avec $q \geq 1$,
- $\frac{1}{3}$ à chaque sommet très faible adjacent à v ,

de plus, chaque sommet fort v donne :

- $\frac{1}{6}$ à chaque sommet faible adjacent à v .

Cette procédure est telle que chaque sommet $v \in V(H)$ a une charge finale $\delta^*(v) \geq \frac{7}{3}$. On considère différents cas suivant le degré et la nature de v :

- $\deg(v) \leq 1$: H ne contient pas de tel sommet (*c.f.* Lemme 3.3.7).
- $\deg(v) = 2$: v reçoit $\frac{1}{6}$ de chacun des deux sommets de degré au moins 3 incidents à la q -chaîne contenant v . On a donc $\delta^*(v) = 2 + 2\frac{1}{6} = \frac{7}{3}$.
- $\deg(v) = 3$ et v est un sommet très faible : v a un voisin de degré au moins 3 (on a pas la configuration où $n = 2$, $m = 1$ et $p = r = 0$) qui n'est pas très faible (on a pas la configuration où $n = 2$, $p = 1$ et $m = r = 0$). Ce sommet v donne donc $\frac{1}{6}$ à chaque sommet des 2 q -chaîne, avec $1 \leq q \leq 3$, qui lui sont incidentes, reçoit $\frac{1}{3}$ de son voisin de degré 3 et ne lui donne rien. On a donc $\delta^*(v) \geq 3 - 2 \times 3\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.
- $\deg(v) = 3$ et v est un sommet faible : v a un voisin de degré au moins 3 (on a pas la configuration où $n = 2$, $p = 1$ et $m = r = 0$) qui n'est ni très faible (on a pas la configuration où $n = 2$, $r = 1$ et $m = p = 0$), ni faible (on a pas la configuration où $m = 0$ et $n = p = r = 1$). Ce sommet v donne donc $\frac{1}{3}$ au sommet très faible qui lui est adjacent, donne $\frac{1}{6}$ à chaque sommet de la 3-chaîne qui lui est incidente et reçoit $\frac{1}{6}$ de son voisin fort. On a donc $\delta^*(v) \geq 3 - \frac{1}{3} - 3\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{3}$.
- $\deg(v) = 3$ et v est un sommet fort : Si tous les voisins de v sont des 2-sommets, alors ils appartiennent à des 1-chaînes (on a pas la configuration où $n = 2$, $m = 1$ et $p = r = 0$), et donc $\delta^*(v) = 3 - 3\frac{1}{6} = \frac{5}{2} > \frac{7}{3}$. Sinon, v a un voisin fort (on a pas les configurations où n , m , p et r sont tels que $n < 3$, $m = 0$ et $n + p + r = 3$). Le sommet v étant fort, dans le pire des cas, ses deux autres voisins sont (1) dans deux 2-chaînes, (2) un sommet

très faible et dans une 2-chaîne, (3) deux sommets très faibles, (4) dans une 3-chaîne et dans une 1-chaîne, ou bien (5) un sommet faible et dans une 3-chaîne. Dans tous les cas v donne au plus $\frac{2}{3}$, on a donc $\delta^*(v) \geq 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.

- $\deg(v) = k \geq 4$: Si v a k voisins de degré 2, alors ils appartiennent à des 1-chaînes (on a pas la configuration où $n = k - 1$, $m = 1$ et $p = r = 0$), et donc $\delta^*(v) = k - k\frac{1}{6} = \frac{5k}{6} \geq \frac{10}{3} > \frac{7}{3}$. Sinon, v a au plus $k - 1$ voisins non forts et de degré au plus 3 (on a pas les configurations où n, m, p et r sont tels que $n < k$, $m = 0$ et $n + p + r = k$). Pour chaque voisin de v qui n'est pas fort et de degré au plus 3, le sommet v donne au plus $\frac{1}{2}$. En effet, si c'est un sommet d'une q -chaîne, avec $1 \leq q \leq 3$, il donne au plus $3\frac{1}{6}$ et si c'est un sommet faible (resp. très faible) il donne $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{6}$). On a donc $\delta^*(v) \geq k - (k - 1)\frac{1}{2} = \frac{k+1}{2} \geq \frac{5}{2} > \frac{7}{3}$.

Par conservation des charges, le degré moyen maximum de G est donc supérieur ou égale à $\frac{7}{3}$, ce qui est en contradiction avec la définition de H . Le contre-exemple H n'existe donc pas. \square

3.4 Arboricité chenille des graphes planaires

L'arboricité chenille a principalement été étudié car la famille des forêts de chenilles est la famille des graphes d'intervalles acycliques (*i.e.* sans cycles). On rappelle que le nombre de pistes $t(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de graphes d'intervalles, sous-graphes de G , nécessaires pour couvrir G . L'arboricité chenille borne donc le nombre de pistes d'un graphe.

Lemme 3.4.1 *Étant donné un graphe G , on a $t(G) \leq ac(G)$. De plus, si G est sans triangles, alors $t(G) = ac(G)$.*

Preuve : En effet, il est facile de voir que les forêts de chenilles sont des graphes d'intervalles. On a donc bien $t(G) \leq ac(G)$ pour tout graphe G . Enfin, un graphe sans triangles n'ayant que des sous-graphes sans triangles et les graphes d'intervalles sans triangles étant des forêts de chenilles, on a bien $t(G) \geq ac(G)$ pour tout graphe G sans triangles. \square

En montrant que $a(K_{m,n}) = ac(K_{m,n})$, Gyárfás et West [GW95] ont donc déterminé le nombre de pistes des graphes bipartis complets. Dans [KW99], Kostochka et West montrent que les graphes planaires externes ont un nombre de pistes d'au plus deux. Ceci implique donc que les graphes planaires externes sans triangles sont d'arboricité chenille au plus 2. Ceci n'est pas vrai pour tous les graphes planaires externes puisqu'il existe des graphes planaires externes d'arboricité chenille 3 [KW99]. Les graphes planaires externes étant d'arboricité étoile au plus 3 (*c.f.* Section 3.2), l'arboricité chenille maximum des graphes planaires externes est donc 3.

Les graphes bipartis étant sans triangles et tout graphe sans triangles G étant tel que $t(G) = ca(G)$ (*c.f.* Lemme 3.4.1), le Théorème 15 permet donc de répondre au Problème ouvert 3 de Gyárfás et West.

Corollaire 6 (du Théorème 15) *Il existe des graphes planaires bipartis G , pour lesquels $ac(G) = t(G) \geq 4$.*

Ce résultat et le Corollaire 2 (*c.f.* Chapitre 2) impliquent donc que le nombre de pistes maximum des graphes planaires est 4.

Dans [CK71], Chvátal et Komlós introduisent la notion de chaîne croissante. Dans un graphe $G = (V, E)$, étant donné une bijection $f : E \rightarrow [1 \dots |E|]$, une **chaîne croissante** de G est une chaîne $C = (v_1, \dots, v_k)$ telle que $f(v_1v_2) < f(v_2v_3) < \dots < f(v_{k-1}v_k)$. Cette notion permet de définir l'invariant de graphe $\mu(G)$ de la façon suivante : $\mu(G) = \min_f \max_C l(C)$, où le minimum se fait sur toutes les bijections f , où le maximum se fait sur toutes les chaînes croissantes C et où $l(C)$ est la longueur de la chaîne C . Comme pour d'autres invariants de graphe, on étend cette définition aux familles de graphes de la façon suivante $\mu(\mathcal{F}) = \max_{G \in \mathcal{F}} \mu(G)$. Lorsque ce maximum n'est pas défini $\mu(\mathcal{F})$ prend la valeur $+\infty$. Le théorème suivant permet de borner $\mu(G)$.

Théorème 17 (Roditty *et al.* [RSY01]) *Si un graphe G est couvert par les graphes H_1, \dots, H_k , alors, $\mu(G) \leq \sum_{i=1}^k \mu(H_i)$.*

Dans [RSY01], on apprend également que $\mu(T)$ est facilement calculable pour un arbre T . En effet,

- si $T = K_2$ alors $\mu(T) = 1$,
- si T est une chenille autre que K_2 alors $\mu(T) = 2$, et enfin
- si T n'est pas une chenille, alors $\mu(T) = 3$.

Étant donné le Théorème 17, on a donc les trois relations suivantes :

$$\mu(G) \leq \chi'(G) \tag{13}$$

$$\mu(G) \leq 2ac(G) \tag{14}$$

$$\mu(G) \leq 3a(G) \tag{15}$$

Les graphes planaires étant d'arboricité au plus 3, on déduit de l'inégalité (15) que pour tout graphe planaire G on a $\mu(G) \leq 3 \times 3 = 9$. Roditty *et al.* proposent la Conjecture 11 afin de descendre cette borne à 8.

Conjecture 11 (Roditty *et al.* [RSY01, Cam03]) *Pour tout graphe planaire G , on a $ac(G) \leq 4$.*

Cette conjecture est plus forte que le Corollaire 2 puisque les forêts de chenilles forment un sous-ensemble strict des graphes d'intervalles. On montre dans la Sous-section 3.4.2, en utilisant la décomposition décrite dans la Sous-section 3.4.1, que cette conjecture est vraie (*c.f.* Théorème 21). On a donc :

Corollaire 7 (du Théorème 21) *Pour tout graphe planaire G , on a $\mu(G) \leq 8$.*

On a vu dans la section précédente que le problème 3-ARBORICITÉ-CHENILLE est NP-complet pour la famille des graphes planaires bipartis (*c.f.* Théorème 15). Dans [She96] les auteurs utilisent l'arboricité chenille pour des problèmes de dessin de graphes. Ils montrent en particulier que le problème 2-ARBORICITÉ-CHENILLE est NP-complet. On verra dans la Sous-section 3.4.3 que ceci est vrai pour tous les problèmes 2-ARB-INT- d -BORNÉE, avec $d \geq 2$, et pour une famille restreinte de graphes.

Théorème 18 *Pour tout entier $d \geq 2$, il est NP-complet de décider si un graphe G , planaire, biparti et de maille $g \geq 6$ vérifie $a_d(G) \leq 2$.*

Ce résultat implique donc que $ac(\mathcal{P}_6) \geq 3$ ($ac(G) = a_2(G)$). On montre dans la Sous-section 3.4.4 que cette borne est atteinte.

Théorème 19 *Tout graphe planaire G de maille $g \geq 6$ vérifie $ac(G) \leq 3$.*

Étant donnés les résultats de la section précédente, on sait que pour tout $g \geq 14$ on a $ac(\mathcal{P}_g) = 2$. On montre dans la Sous-section 3.4.5 que l'on peut étendre ce résultat à tout $g \geq 10$.

Théorème 20 *Tout graphe planaire G de maille $g \geq 10$ vérifie $ac(G) \leq 2$.*

Ce résultat permet de déduire une nouvelle borne pour $\mu(G)$ dans le cas des graphes planaires de maille $g \geq 10$.

Corollaire 8 *Pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 10$, on a $\mu(G) \leq 4$.*

Avant de donner les preuves de ces théorèmes, on rappelle qu'une k -2-coloration (*c.f.* Sous-section 3.1.1) d'un graphe G est une k -coloration et une orientation partielle des arêtes de G , telles que pour tout entier i , avec $1 \leq i \leq k$, on respecte les conditions suivantes :

- (A) Un sommet v incident à une arête e , coloriée i et orientée vers v , n'a pas d'autre arête incidente coloriée i .
- (B) Tout sommet $v \in V(G)$ a au plus 2 arêtes incidentes non-orientées et coloriées i .
- (C) Les arêtes non-orientées et coloriées i induisent un graphe acyclique.

3.4.1 L' α -décomposition des triangulations

Dans cette sous-section on définit une méthode de décomposition des triangulations en trois triangulations plus petites (*i.e.* ayant moins de sommets). Cette décomposition est utilisée dans les Sous-sections 3.4.2 et 3.7.1

Soit T une triangulation dont la face externe est uvw et telle qu'en parcourant la face externe dans le sens des aiguilles d'une montre on rencontre successivement les sommets u, v

et w . Soit la suite x_1, x_2, \dots, x_t des voisins communs de u et w , avec $x_1 = v$. Cette suite est telle que si $j > i$, le sommet x_j est à l'intérieur du cycle (u, w, x_i) (voir Figure 50.(a)). Le **sommet partenaire de l'arête uw** est le sommet x_2 . Dans une triangulation avec au moins quatre sommets, pour toute arête xy , il existe au moins deux sommets voisins de x et de y . Le sommet partenaire est donc bien défini pour toute triangulation $T \neq K_3$. On note dorénavant x le sommet partenaire de l'arête uw .

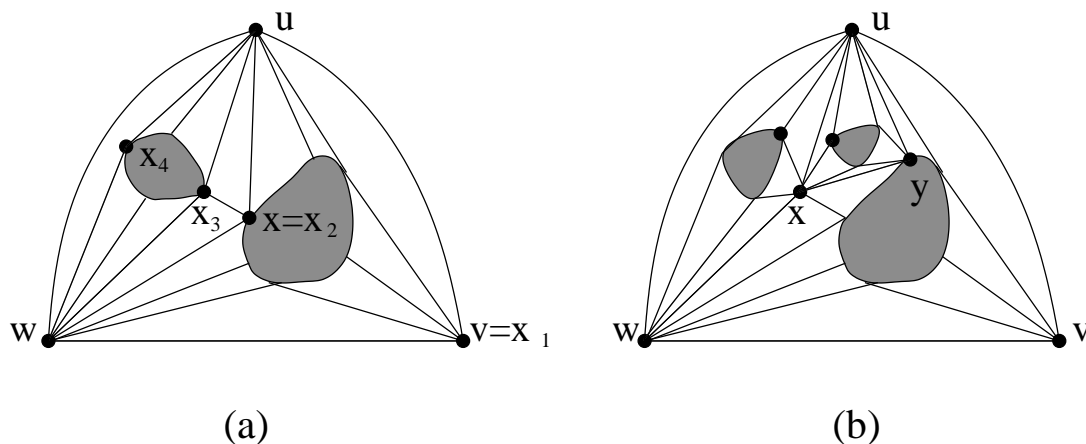


FIG. 50 – Le sommet partenaire de l'arête uw , x , et le sommet y .

On considère maintenant la suite des voisins de u , en commençant par le sommet v et en suivant le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à atteindre le sommet w . On note y le premier sommet de cette suite qui soit un voisin de x (voir Figure 50.(b)). Si les sommets v et x sont adjacents on aura alors $y = v$. Par contre, les sommets u et x ayant au moins deux voisins communs ($T \neq K_3$), et le sommet w étant le dernier sommet de la suite, on a $y \neq w$.

Si le cycle (u, w, x) (resp. (u, x, y)) est un 3-cycle séparant (*i.e.* avec des sommets à l'intérieur), on note T_g (resp. T_d) la triangulation qui est à l'intérieur (voir Figure 51). On observe que dans la Figure 51, la triangulation T_g (resp. T_d) est à gauche (resp. à droite) de l'arête ux . On note T_e , la triangulation à l'extérieur de ces deux cycles. Étant donné que $w \notin V(T_d)$ (resp. $v \notin V(T_g)$), la triangulation T_d (resp. T_g) a strictement moins de sommets que T . Par contre, dans le cas où les cycles (u, w, x) et (u, x, y) ne sont pas séparants, T_e a autant de sommets que T ($T_e = T$). Par définition des sommets x et y , les sommets u et w (resp. u et x) ont seulement deux voisins communs dans la triangulation T_e : x et v (resp. u et y). Le sommet partenaire de l'arête uw dans la triangulation T_e est donc toujours x .

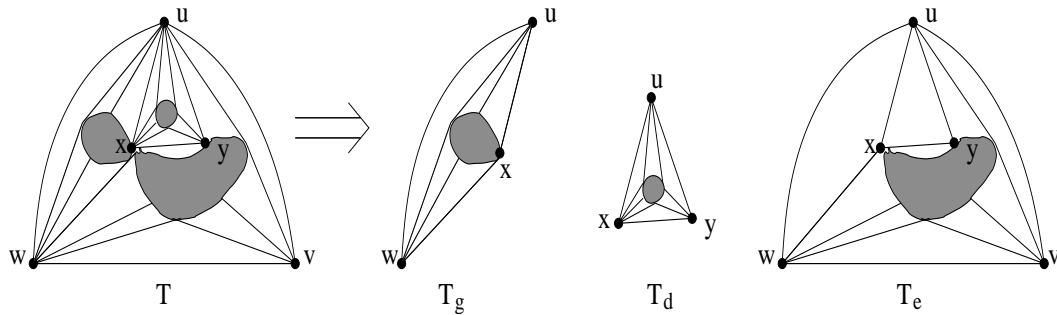


FIG. 51 – Décomposition de T en T_e , T_g et T_d .

On construit T_f à partir de T_e en supprimant les arêtes wx , ux et yx , puis en fusionnant les sommets u et x en un même sommet u' (voir Figure 52). Les sommets u et x n'ayant que 2 voisins en commun dans la triangulation T_e , w et y , la triangulation T_f est bien définie, c.à.d. sans boucles ni arêtes multiples. Comme on a fusionné deux sommets, la triangulation T_f a strictement moins de sommets que T_e . Si $T_f \neq K_3$, on note x' le sommet partenaire de l'arête $u'w$ dans la triangulation T_f . On remarque que par définition de x , le sommet x' n'est pas adjacent à u dans le graphe T_e . En effet, dans ce cas x' serait le seul sommet incident à u et w différent de x , c.à.d. le sommet v , ce qui est impossible par définition de sommet partenaire.

Si x' était adjacent à u dans T_e , on aurait $x_i = x'$ pour un entier $i > 2$, et le sommet x' serait dans T_g et non pas dans T_e .

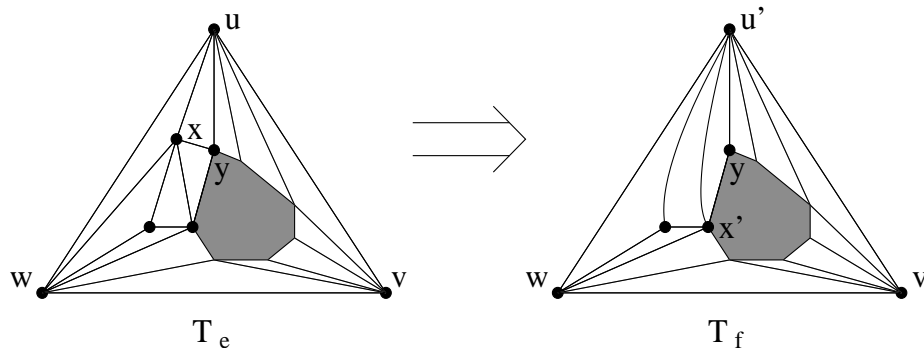


FIG. 52 – Construction de T_f à partir de T_e .

3.4.2 Les graphes planaires

Dans cette sous-section on prouve la Conjecture 11. Les sous-graphes des forêts de chenilles étant eux aussi des forêts de chenilles, il suffit de prouver ce théorème pour les triangulations. On montre donc ce résultat pour les triangulations en utilisant l' α -décomposition décrite dans

la Sous-section 3.4.1. En fait, on prouve un résultat plus fort que la conjecture.

Théorème 21 *Pour toute triangulation T et tout triplet (u, v, w) de sommets externes deux à deux distincts, il existe une 4-2-coloration 2-prolongeable de $T \setminus \{uv, uw, vw\}$ telle que (voir Figure 53) :*

- Toutes les arêtes incidentes à u sont coloriées 1. De plus, elles sont toutes orientées de u vers l'autre extrémité, sauf l'arête ux qui est non-orientée (x étant le sommet partenaire de uw).
- Toutes les arêtes incidentes à v sont coloriées 2 et orientées de v vers l'autre extrémité.
- Toutes les arêtes incidentes à w sont coloriées 3 et orientées de w vers l'autre extrémité.

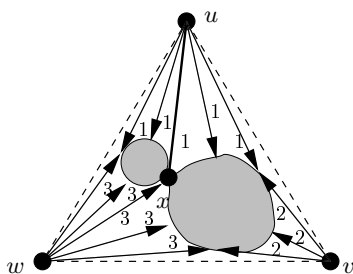


FIG. 53 – Le Théorème 21.

Preuve : On prouve ce théorème par récurrence sur le nombre de sommets de T . Si $T = K_3$ ou K_4 , il est clair que le Théorème est vrai. Si T est une triangulation ayant au moins cinq sommets, on considère les triangulations T_f , T_d et T_g obtenues par α -décomposition. Chacune des 3 triangulations ayant moins de sommets que T , on leur applique l'hypothèse de récurrence. On l'applique tout d'abord à la triangulation T_f pour le triplet (u', v, w) . On note c_f la 4-2-coloration des arêtes internes (*i.e.* non-externes) de T_f ainsi obtenue. Si l'arête $xy \in E(T_f)$ est coloriée i et est non-orientée (resp. orientée vers y) on note $c_f(xy) = (i; \cdot, \cdot)$ (resp. $c_f(xy) = (i; x, y)$).

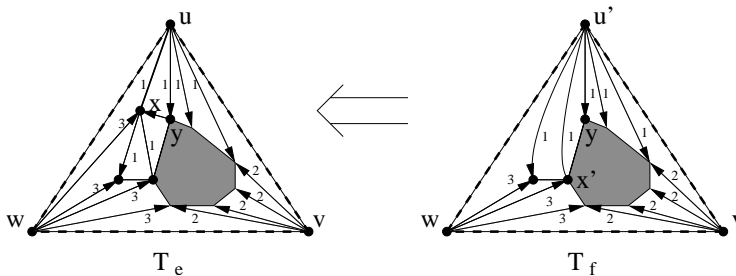


FIG. 54 – 4-2-coloration de T_e à partir de celle de T_f .

On montre que le Théorème 21 est vrai pour la triangulation T_e en construisant la 4-2-coloration c_e de la façon suivante (voir Figure 54) :

- $c_e(e) = c_f(e)$ si $e \in T_f \setminus \{u'\}$.
- $c_e(ua) = c_f(u'a)$ si $a \neq x$.
- $c_e(xa) = c_f(u'a)$ si $a \neq u, y$ et w .
- $c_e(xu) = (1; \cdot, \cdot)$, l'arête xu est donc non-orientée et coloriée 1.
- $c_e(xw) = (1; w, x)$, l'arête xw est donc orientée vers x et coloriée 3.
- $c_e(xy) = (2; y, x)$ si y est interne dans F_2 . Sinon $c_e(xy) = (4; y, x)$.

On montre tout d'abord que c_e est bien une 4-2-coloration puisque elle vérifie les conditions (A), (B) et (C).

(A) Les sommets autres que u, w, x ou y ont leurs arêtes incidentes coloriées comme dans c_f , qui est une 4-2-coloration : ils vérifient donc bien la condition (A). Les sommets u et w n'ont pas d'arêtes incidentes orientées vers eux : ils vérifient donc bien la condition (A). Le sommet x a deux arêtes incidentes orientées vers lui qui sont coloriées 3 et 2, ou bien 3 et 4. Les autres arêtes incidentes à x sont toutes coloriées 1 et ne sont pas orientées vers x : le sommet x vérifie donc bien la condition (A). Finalement pour le sommet y , les arêtes incidentes à y , autres que xy , sont coloriées et orientées comme dans c_f , qui est une 4-2-coloration.

- Si dans la coloration c_e le sommet y est interne dans F_2 , il en est de même dans la coloration c_f . On peut donc orienter l'arête xy vers x et la colorier 2.
- Si dans la coloration c_e le sommet y n'est pas interne dans F_2 , alors $y \neq v$. Ceci implique que y est une extrémité dans F_1 (l'arête uy est orientée vers y et est coloriée 1). La coloration c_f étant 2-prolongeable, le sommet y est donc interne dans F_3 et F_4 . On peut donc orienter l'arête xy vers x et la colorier 4.

Le sommet y vérifie bien la condition (A).

(B) Les sommets autres que u, w, x ou y ont leurs arêtes incidentes coloriées comme dans c_f , qui est une 4-2-coloration : ils vérifient donc bien la condition (B). Les sommets u, v et x ont respectivement 1, 0 et 2 arêtes incidentes non-orientées : ils vérifient donc bien la condition (B). Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, le sommet y a autant d'arêtes incidentes non-orientées et coloriées k que dans c_f , qui est une 4-2-coloration : le sommet y vérifie donc bien la condition (B).

(C) En passant de la coloration c_f à c_e , on a ajouté une seule arête non-orientée, l'arête ux . Donc, s'il y avait un cycle d'arêtes non-orientées dans F_i , pour $1 \leq i \leq 4$, alors ce cycle passerait par l'arête ux . Or, le sommet u n'étant incident qu'à une seule arête non-orientée, l'arête ux , il n'y a pas de tel cycle.

On montre maintenant que c_e est bien 2-prolongeable. En effet, les sommets autres que u, w, x ou y ayant leurs arêtes incidentes coloriées comme dans c_f , qui est une 4-2-coloration 2-prolongeable : ces sommets sont ≥ 2 -internes. Dans la coloration c_e les sommets u, w et x ont respectivement 0, 0 et 2 arêtes incidentes orientées vers eux, ils sont donc bien ≥ 2 -internes. Finalement, le sommet y a autant d'arêtes incidentes orientées vers lui que dans c_f , c'est donc bien un sommet ≥ 2 -interne.

On vérifie finalement que les arêtes incidentes aux sommets u, v et w sont bien coloriées et orientées comme décrit dans le Théorème 21 :

- Les arêtes incidentes à u sont bien toutes coloriées 1. De plus, l'arête ux est bien la seule qui soit non-orientée. En effet, le sommet x' n'est pas adjacent à u .
- Même dans le cas où $v = y$, toutes les arêtes incidentes à v sont coloriées 2 et orientées de v vers l'autre extrémité.
- Toutes les arêtes incidentes à w , y compris wx , sont coloriées 3 et orientées de w vers l'autre extrémité.

Les couleurs s et t sont définies de la façon suivante : s est la couleur de l'arête xy , $s \in \{2, 4\}$, et t est celle qui est différente de 1, 3 et s .

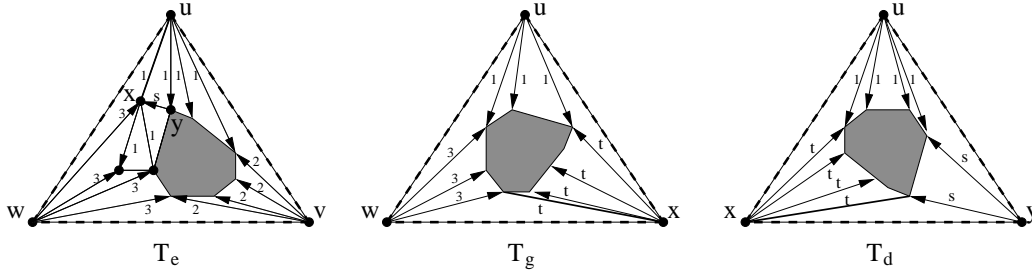
Remarque 3.4.1 *Dans la 4-2-coloration c_e de T_e , le sommet x est interne dans F_1 et F_t et aucune de ses arêtes incidentes n'est coloriée t .*

On va maintenant prolonger la coloration de T_e afin d'obtenir une coloration c de T . Comme T_g et T_d ont moins de sommets que T , on applique l'hypothèse de récurrence à T_g pour le triplet (x, u, w) , ainsi que à T_d pour le triplet (x, u, y) et on obtient les colorations c_g et c_d . On permute les couleurs de c_g (resp. c_d) afin que les arêtes coloriées 1, 2, 3 ou 4 soient désormais respectivement coloriées $t, 1, 3$ et s (resp. $t, 1, s$ et 3). On définit enfin c de la façon suivante :

$$c(e) = \begin{cases} c_e(e) & \text{si } e \in E(T_e) \setminus \{uv, uw, vw\} \\ c_g(e) & \text{si } e \in E(T_g) \setminus \{ux, uw, wx\} \\ c_d(e) & \text{si } e \in E(T_d) \setminus \{ux, uy, xy\} \end{cases}$$

On montre tout d'abord que c est bien une 4-2-coloration puisque elle vérifie les conditions (A), (B) et (C).

- (A) Les sommets autres que u, w, x ou y ont leurs arêtes incidentes coloriées comme dans c_e, c_g ou bien c_d , qui sont toutes trois des 4-2-colorations : ces sommets vérifient donc bien la condition (A). Les sommets u et w n'ont pas d'arêtes incidentes orientées vers eux : ils vérifient donc bien la condition (A). Dans la coloration c_e , le sommet x (resp. y) est interne dans F_t (resp. F_s), il n'y a donc pas d'arêtes coloriées t (resp. s) orientées vers x (resp. y). Comme dans c_g et c_d les arêtes incidentes à x (resp. y) sont toutes coloriées

FIG. 55 – Les 4-2-colorations de T_e , T_g et T_d .

t (resp. s) et ne sont pas orientées vers x (resp. y), le sommet x (resp. y) vérifie donc bien la condition (A).

- (B) Les sommets autres que u , w , x ou y ont leurs arêtes incidentes coloriées comme dans c_e , c_g ou bien c_d , qui sont toutes trois des 4-2-colorations : ces sommets vérifient donc bien la condition (B). Les sommets u et w ont respectivement 1 et 0 arêtes incidentes non-orientées : ils vérifient donc bien la condition (B). Le sommet x a au plus deux arêtes incidentes non-orientées et coloriées 1 (les arêtes ux et xx') et au plus deux arêtes incidentes non-orientées et coloriées t (une dans T_g et une dans T_d) : le sommet x vérifie donc bien la condition (B). Le sommet y n'a pas d'arêtes incidentes non-orientées dans T_d . Comme la coloration c_e est une 4-2-coloration, le sommet y vérifie donc bien la condition (B).
- (C) Comme c_e , c_g et c_d sont des 4-2-colorations, s'il y a un cycle d'arêtes non-orientées dans F_i , pour $1 \leq i \leq 4$, ce cycle passe forcément par au moins deux des graphes $T_e \setminus \{uv, uw, vw\}$, $T_g \setminus \{ux, uw, wx\}$ et $T_d \setminus \{ux, uy, xy\}$. Or les sommets u , w , et y n'ayant pas d'arêtes incidentes non-orientées dans les graphes $T_g \setminus \{ux, uw, wx\}$ et $T_d \setminus \{ux, uy, xy\}$, un tel cycle "entrant" dans $T_g \setminus \{ux, uw, wx\}$ ou $T_d \setminus \{ux, uy, xy\}$ par le sommet x ne pourrait pas "ressortir". La condition (C) est donc vérifiée.

On montre maintenant que c est bien 2-prolongeable. En effet, les sommets autres que u , w , x ou y ayant leurs arêtes incidentes coloriées comme dans c_e , c_g et c_d , qui sont toutes trois des 4-2-colorations 2-prolongeables : ces sommets sont ≥ 2 -internes. De plus, aucune des arêtes coloriées par c_g ou par c_d n'étant orientée vers l'un des sommets, u , w , x ou y , et la coloration c_e étant 2-prolongeable, les sommets u , w , x et y , sont bien ≥ 2 -internes.

Il est finalement aisé de vérifier que les arêtes incidentes à u (resp. v ou w) sont coloriées et orientées de façon comme indiqué dans le théorème. \square

Il est possible de transformer cette preuve en un algorithme de partition des arêtes d'un graphe planaire en 4 forêts de chenilles. De plus, en utilisant une structure de données adaptée, cette algorithme serait linéaire en $|V(G)|$.

3.4.3 NP-complétude de 2-ARB-INT- d -BORNÉE, pour $d \geq 2$

On rappelle que le problème 2-COLORATION 1-IMPROPRE prend en entrée un graphe G et indique si ce graphe admet une 2-coloration de ses sommets telle que chaque sommet a au plus un voisin de la même couleur que lui. On prouve le Théorème 18 par réduction polynomial de 2-COLORATION 1-IMPROPRE. Dans le reste de cette sous-section, d est un entier quelconque tel que $d \geq 2$.

Preuve du Théorème 18 : Il est suffisant de montrer (*c.f.* Lemme 3.1.1) que, pour tout entier $d \geq 2$, décider si un graphe G , planaire, biparti et de maille $g \geq 6$ est 2- d -coloriable, est un problème NP-complet. Il est clair que décider si un graphe est 2-1-coloriable est dans NP. On montre donc que ce problème est NP-dur par réduction polynomial de 2-COLORATION 1-IMPROPRE.

On considère les graphes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} représentés dans la Figure 56 et on étudie les différentes 2- d -colorations possibles de ces graphes.

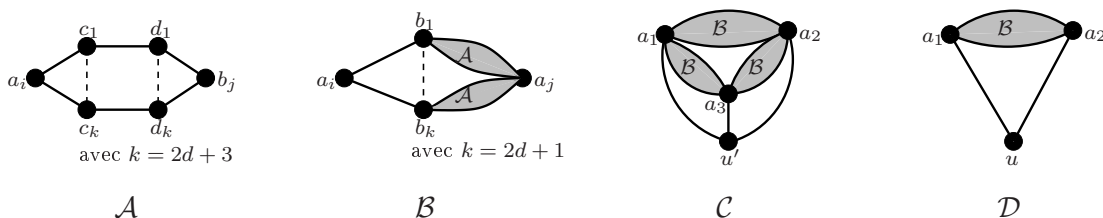


FIG. 56 – Les graphes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} .

Fait 1 *Le graphe \mathcal{A} est 2- d -coloriable et dans toutes ses 2- d -colorations les sommets a_i et b_j sont internes dans une même forêt. De plus, il existe une 2- d -coloration de \mathcal{A} où toutes les arêtes incidentes à a_i ou à b_j ont la même couleur et sont orientées de a_i ou de b_j vers l'autre extrémité.*

Preuve : On considère une 2- d -coloration de \mathcal{A} . Les sommets a_i et b_j étant de degré $2d + 3$, ils sont ≥ 1 -internes (*c.f.* Lemme 3.1.2). Si les sommets a_i et b_j ne sont pas internes dans la même forêt, ceci implique que ces sommets sont 1-internes respectivement dans F_1 et F_2 . Ces sommets ont donc chacun au plus d arêtes incidentes non-orientées et au plus une arête incidente orientée vers eux. Il y a donc un entier p tel que les arêtes $a_i c_p$ et $b_j d_p$ sont respectivement orientées vers c_p et d_p . Comme a_i et b_j sont 1-internes respectivement dans F_1 et F_2 , les arêtes $a_i c_p$ et $b_j d_p$ sont respectivement coloriées 1 et 2. Ceci est impossible puisque dans ce cas l'arête $c_p d_p$ ne peut être coloriée ni 1, ni 2. Les sommets a_i et b_j sont donc internes dans la même forêt.

Une des 2- d -colorations de \mathcal{A} est telle que toutes les arêtes incidentes à a_i ou b_j ont la même couleur, disons 1, et sont orientées de a_i ou de b_j vers l'autre extrémité. En effet, cela

est possible en laissant toutes les arêtes $c_k d_k$ non-orientées et coloriées 2. \square

Fait 2 *Le graphe \mathcal{B} est 2-d-coloriable et dans toutes ses 2-d-colorations les sommets a_i et a_j sont internes dans deux forêts distinctes. De plus, il existe une 2-d-coloration de \mathcal{B} où toutes les arêtes incidentes à a_i ou à a_j sont orientées de a_i ou bien de a_j vers l'autre extrémité et où les arête incidentes à a_i sont coloriées 1 et celles incidentes à a_j sont coloriées 2.*

Preuve : Le sommet a_i étant de degré $2d + 1$, ce sommet a au moins une arête incidente $a_i b_l$, avec $1 \leq l \leq 2d + 1$, orientée de a_i vers b_l . Or d'après le Fait 1 les sommets a_j et b_l sont interne dans la même forêt, disons F_1 . Ceci implique que l'arête $a_i b_l$ est coloriée 2, et donc que a_i est interne dans F_2 . Les sommet a_i et a_j sont donc bien internes dans deux forêts distinctes.

On utilise la coloration décrite dans le Fait 1 pour colorier chaque copie de \mathcal{A} de façon à ce que toutes les arêtes incidentes à a_j et toutes les arêtes incidentes à b_m , avec $1 \leq m \leq 2d + 1$, sauf l'arête $a_i b_m$, soient coloriées 2 et orientées de a_j ou de b_m vers l'autre extrémité. On colorie finalement 1 les arêtes $a_i b_m$, avec $1 \leq m \leq 2d + 1$, et on les oriente vers b_m . \square

Fait 3 *Le graphe \mathcal{C} est 2-d-coloriable et dans toutes ses 2-d-colorations au moins une des arêtes $u'a_i$, avec $1 \leq i \leq 3$ est non-orientée. De plus, il existe des 2-d-colorations de \mathcal{C} où l'arête $u'a_1$ est non-orientée et où les autres arêtes $u'a_i$ sont orientées vers a_i .*

Preuve : On considère les 2-d-colorations de \mathcal{C} sans arête $u'a_i$ non-orientée. Le sommet u' étant de degré 3, u' est ≥ 1 -interne (c.f. Lemme 3.1.2). Le sommet u' a donc au plus une de ses arêtes incidentes orientée vers lui.

- Si toutes les arêtes $u'a_i$ sont orientées vers a_i , alors deux d'entre elles sont de la même couleur. On considère donc que les arêtes $u'a_1$ et $u'a_2$ sont coloriées 1. Les sommets a_1 et a_2 ne sont donc pas internes dans F_1 . D'après le Fait 2, la copie de \mathcal{B} reliant a_1 et a_2 n'est donc pas 2-d-coloriable.
- Si une des arêtes $u'a_i$ est orientée vers u' , disons $u'a_3$, et qu'elle est coloriée 2, alors les autres arêtes $u'a_i$ sont orientées vers a_i et coloriées 1. On vient de le voir que dans ce cas la copie de \mathcal{B} reliant a_1 et a_2 n'est pas 2-d-coloriable.

Il y a donc, dans toute 2-d-coloration de \mathcal{C} , une arête $u'a_i$ non-orientée.

On utilise la 2-d-coloration décrite dans le Fait 2 afin de colorier les copies de \mathcal{B} de façon à ce que les arêtes incidentes à un sommet a_i , autres que $u'a_i$, soient orientées de a_i vers l'autre extrémité et de façon à ce que celles qui soient incidentes à a_1 (resp. a_2) soient coloriées 1 (resp. 2). Pour les arêtes incidentes à a_3 dans la copie de \mathcal{B} qui relie a_3 à a_1 (resp. a_2) on utilise la couleur 2 (resp. 1). On complète cette coloration en orientant les arêtes $u'a_1$ et $u'a_2$ respectivement vers a_1 et a_2 , en laissant l'arête $u'a_3$ non-orientée et en coloriant les arêtes $u'a_1$, $u'a_2$ et $u'a_3$ respectivement 2, 1 et 1. \square

Fait 4 *Le graphe \mathcal{D} admet des 2-d-colorations où les arêtes ua_1 et ua_2 sont de la même couleur. Dans chacune des ces colorations, au moins une des arêtes ua_i est non-orientée. De plus, de telles colorations avec exactement une des arêtes ua_i non-orientée existent.*

Preuve : Si les deux arêtes ua_1 et ua_2 sont coloriées 1 et orientées vers a_i , alors les sommets a_i ne sont pas internes dans F_1 , ce qui est impossible d'après le Fait 2.

Si on oriente ua_1 vers a_1 , que l'on laisse ua_2 non-orientée et que l'on colorie 1 ces arêtes alors on peut compléter cette 2-d-coloration de \mathcal{D} . Pour cela on utilise la coloration de \mathcal{B} décrite dans le Fait 2 de façon à ce que les arêtes incidentes à a_1 , autres que ua_1 , soient toutes coloriées 2 ; et de façon à ce que les arêtes incidentes à a_2 , autres que ua_2 , soient toutes coloriées 1 et orientées de a_2 vers l'autre extrémité. \square

Le gadget d'un sommet u est composé de $2d$ copies de \mathcal{C} partageant le même sommet u' , de $d - 1$ copies de \mathcal{D} partageant le même sommet u , et d'une arête uu' .

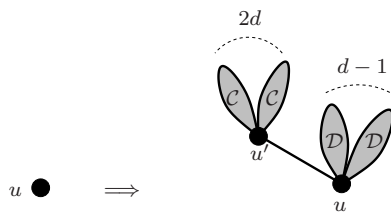


FIG. 57 – Le gadget du sommet u .

Lemme 3.4.2 *Le gadget des sommets est 2-d-coloriable et dans toutes ses 2-d-colorations, le sommet u est 1-interne et est incident à au moins $d - 1$ arêtes non-orientées. De plus, il existe une 2-d-coloration dans laquelle le sommet u est incident à exactement $d - 1$ arêtes non-orientées.*

Si on rajoute des arêtes incidentes au sommet u , ces arêtes seront donc toutes de la même couleur et au plus une d'entre elles sera non-orientée alors que les autres seront toutes orientées de u vers l'autre extrémité.

Preuve du Lemme : On considère une 2-d-coloration du gadget. D'après le Fait 3, le sommet u' est incident à $2d$ arêtes non-orientées (d dans chaque forêt). L'arête $u'u$ est donc orientée vers u et on considère qu'elle est coloriée 2. Ceci implique que le sommet u n'est pas interne dans F_2 mais comme il est de degré supérieur à 2 ce sommet est 1-interne dans F_1 (c.f. Lemme 3.1.2). Les arêtes incidentes à u , autres que uu' sont donc toutes coloriées 1. Ceci implique, d'après le Fait 4, que le sommet u est incident à au moins $d - 1$ arêtes non-orientées coloriées 1.

Finalement le Fait 3 permet de colorier les copies de \mathcal{C} de sorte que le sommet u' soit 2-interne. On oriente l'arête uu' vers u en la coloriant 2. Le Fait 3 permet ensuite de colorier

les $d - 1$ copies de \mathcal{D} de sorte que chacune d'elles ne contienne qu'une seule arête non-orientée incidente à u . On obtient ainsi bien la 2- d -coloration du gadget décrite dans le lemme. \square

Étant donné un graphe G , on construit le graphe G' en subdivisant chaque arête $uv \in E(G)$ et en ajoutant à chaque sommet $u \in V(G)$ le gadget décrit dans la Figure 57. On montre que le graphe G est 2-coloriable de façon 1-impropre si et seulement si G' est 2- d -coloriable.

Étant donnée une 2-coloration 1-impropre c de G on construit une 2- d -coloration de G' de la manière suivante. D'après le Lemme 3.4.2, pour chaque sommet $u \in V(G)$, le gadget du sommet u est 2- d -coloriable de façon à ce que u soit 1-interne dans $F_{c(u)}$ et que ce sommet ait déjà $d - 1$ arêtes non-orientées dans $F_{c(u)}$. Étant donnée une arête $uv \in E(G)$, subdivisé par un sommet x dans G' ,

- si $c(u) \neq c(v)$, on oriente les arêtes ux et vx vers x et on les colorie respectivement $c(u)$ et $c(v)$.
- si $c(u) = c(v)$, on laisse les arêtes ux et vx non-orientées et on les colorie $c(u)$.

Comme un sommet $u \in V(G)$ a au plus un voisin v tel que $c(u) = c(v)$, ce même sommet u aura bien au plus d arêtes incidentes non-orientées dans $F_{c(u)}$.

Étant donnée une 2- d -coloration de G' on construit une 2-coloration 1-impropre c de G de la manière suivante. D'après le Lemme 3.4.2, chaque sommet $u \in V(G)$ est 1-interne dans G' . On colorie i un sommet $u \in V(G)$ si ce sommet est 1-interne dans F_i . Or le Lemme 3.4.2, et les colorations possibles de la chaîne (u, x, v) (uv étant une arête de G) impliquent qu'un sommet $u \in V(G)$ a au plus un voisin v dans G tel que u et v soient 1-interne dans la même forêt dans G' . La 2-coloration des sommets de G obtenue est donc bien 1-impropre. \square

3.4.4 Les graphes planaires de maille $g \geq 6$

On rappelle qu'un k - d -coloration d'un graphe G est dite p -prolongeable si tout les sommets de G sont $\geq p$ -internes.

Preuve du Théorème 19 : La propriété suivante implique le Théorème 19 (*c.f.* Lemmes 3.1.1 et 3.3.6).

Propriété 4 *Tout graphe G tel que $Dmm(G) < 3$ admet une 3-2-coloration 2-prolongeable.*

On prouve cette propriété par déchargement. Soit le graphe G , un contre-exemple qui minimise $|V(G)|$.

Lemme 3.4.3 *Le contre-exemple minimal G , ne contient pas :*

- (1) de sommet v tel que $\deg(v) \leq 1$, ni
- (2) d'arête uv telle que $\deg(u) = 2$ et $\deg(v) \leq 5$.

Preuve du Lemme 3.4.3 : (1) Si G a un sommet v tel que $\deg(v) \leq 1$ alors, par minimalité de G , le graphe $G \setminus \{v\}$ admet une 3-2-coloration 2-prolongeable. Si $\deg(v) = 0$ alors cette coloration est une 3-2-coloration 2-prolongeable de G . Si $\deg(v) = 1$, on note u l'unique voisin de v dans G . On étend simplement la 3-2-coloration de $G \setminus \{v\}$ à G en orientant l'arête uv de u vers v et en la coloriant i , i étant tel que u est interne dans F_i . Il est simple de voir que cette coloration est bien une 3-2-coloration 2-prolongeable de G . Le graphe G n'étant, par définition, pas 3-2-colorable de façon 2-prolongeable, G ne contient donc pas de sommet v tel que $\deg(v) \leq 1$.

(2) Si G a une arête uv telle que $\deg(u) = 2$ et $\deg(v) \leq 5$. On note w le second voisin de u . le graphe $G \setminus \{u\}$ admet une 3-2-coloration 2-prolongeable telle que v est interne dans les forêts F_1 et F_2 . Si dans $G \setminus \{u\}$, toutes les arête incidentes à v sont non-orientées et coloriées 1 ou 2, on laisse l'arête uv non-orientée et on la colorie 3. On oriente alors uv vers u et on la colorie 1 ou 2 (selon que w est interne dans F_1 ou F_2), et on obtient alors une 3-2-coloration 2-prolongeable de G . Sinon, le sommet v étant de degré au plus 4 dans $G \setminus \{u\}$, il existe un entier $i \in \{1, 2\}$ tel que v a au plus une arête incidente non-orientées et coloriée i dans $G \setminus \{u\}$. Dans ce cas là, l'arête uv est non-orientées et on la colorie i . On oriente alors uv vers u et on la colorie 2 ou 3 (selon que w est interne dans F_2 ou F_3), et on obtient alors une 3-2-coloration 2-prolongeable de G . Le graphe G n'étant, par définition, pas 3-2-colorable de façon 2-prolongeable, G ne contient donc pas d'arête uv telle que $\deg(u) = 2$ et $\deg(v) \leq 5$. \square

On assigne à chaque sommet $v \in V(G)$ une charge initiale est égale à son degré ($\delta(v) = \deg(v)$). On procède ensuite à l'étape de déchargement où chaque sommet v de degré au moins 3 donne $\frac{1}{2}$ à chacun de ses voisins de degré 2. On vérifie que chaque sommet $v \in V(G)$ a une charge finale $\delta^*(v) \geq 3$:

- $\deg(v) = 2$: v a deux voisins de degré au moins 6 (Lemme 3.4.3), donc $\delta^*(v) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$.
- $\deg(v) = k$, avec $3 \leq k \leq 5$: v n'a pas de voisin de degré 2, donc $\delta^*(v) = k \geq 3$.
- $\deg(v) = k \geq 6$: v a au plus k voisins de degré 2, donc $\delta^*(v) \geq k - k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \geq 3$.

Par conservation des charges, le degré moyen maximum de G est donc supérieur ou égale à trois, ce qui est en contradiction avec la définition de G . Le contre-exemple G n'existe donc pas. \square

3.4.5 Les graphes planaires de maille $g \geq 10$

Preuve du Théorème 20 : La propriété suivante implique le Théorème 20 (*c.f.* Lemmes 3.1.1 et 3.3.6).

Propriété 5 *Tout graphe G tel que $Dmm(G) < \frac{5}{2}$ admet une 2-2-coloration 1-prolongeable.*

On prouve cette propriété par déchargement. Soit le graphe G , un contre-exemple qui minimise $|V(G)|$.

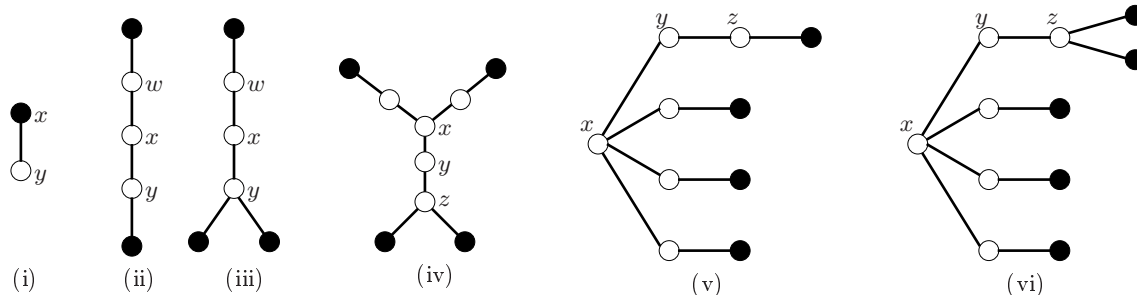


FIG. 58 – Les configurations interdites.

Lemme 3.4.4 *Le contre-exemple minimal G , ne contient aucune des configurations de la Figure 58.*

Pour prouver ce lemme on utilise le fait suivant :

Fait 5 *Si un graphe H est 2-2-coloriable de façon 1-prolongeable et contient un sommet x dont tous les voisins sont de degré 2, alors H admet une 2-2-coloration 1-prolongeable dans laquelle x est 2-interne.*

Preuve : On modifie une 2-2-coloration 1-prolongeable de H afin d'obtenir une 2-2-coloration 1-prolongeable dans laquelle le sommet x est 2-interne. Si le sommet x n'est pas 2-interne, alors une arête incidente à x , wx , est orientée vers x et est coloriée i , avec $i \in \{1, 2\}$. Dans ce cas, toutes les autres arêtes incidentes à x sont coloriées $3 - i$. On modifie la coloration de H en enlevant l'orientation à l'arête wx . L'arête wx est maintenant non-orientée et coloriée i . Il est simple de vérifier que, le sommet w étant de degré 2, cette coloration est bien une 2-2-coloration 1-prolongeable dans laquelle x est 2-interne. \square

Preuve du Lemme 3.4.4 : On prouve le lemme en montrant que si G contenait l'une de ces configurations, alors G serait 2-2-coloriable de façon 1-prolongeable, ce qui contredirait la définition de G . On traite les différentes configurations :

- (i) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{y\}$ admet une 2-2-coloration 1-prolongeable. Or le sommet x étant interne dans au moins une des forêts, disons F_1 , on peut étendre cette coloration à tout le graphe G en orientant l'arête xy vers y et en la coloriant 1.
- (ii) (iii) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{w, x\}$ admet une 2-2-coloration 1-prolongeable dans laquelle le sommet v est interne dans F_1 . On distingue deux cas suivant que y est interne dans F_1 , ou pas.
 - Si y est interne dans F_1 , on peut étendre cette coloration à tout le graphe G en

orientant l'arête vw vers w et en la coloriant 1, en orientant l'arête xy vers x et en la coloriant 1 et en laissant l'arête wy non-orientée et en la coloriant 2.

- Si y n'est pas interne dans F_1 cela signifie que l'une de ses arêtes incidente est coloriée 1. Le sommet y a donc au plus une arête incidente non-orientée et coloriée 2. On peut donc étendre la coloration à tout le graphe G en orientant l'arête vw vers w et en la coloriant 1, puis en laissant les arêtes xy et wy non-orientées et coloriées 2.

- (iv) (v) (vi) Par minimalité de $|V(G)|$, et d'après le Fait 5, le graphe $G \setminus \{y\}$ a une 2-2-coloration 1-prolongeable dans laquelle le sommet x est 2-interne. Le sommet z étant ≥ 1 -interne et de degré au plus 2 dans $G \setminus \{y\}$, il est toujours possible de colorier l'arête yz en la laissant non-orientée. Si yz est coloriée 1 (resp. 2) on oriente l'arête xy vers y et on la colorie 2 (resp. 1).

□

Un sommet v est dit **mort** s'il est de degré 3 et que tous ses voisins sont de degré 2. Un sommet v est dit **faible** s'il est de degré 2 et que l'un de ses voisins, u , est de degré 2 ou bien est un sommet mort. On procède maintenant à l'étape de déchargement afin de prouver qu'un tel graphe G n'existe pas. La charge initiale de chaque sommet est égale à son degré ($\delta(v) = \deg(v)$). On utilise ensuite la règle de déchargement suivante :

Chaque sommet de degré au moins 4 donne :

- $\frac{1}{2}$ à ses voisins faibles et
- $\frac{1}{4}$ à ses autres voisins de degré 2.

de plus, chaque sommet de degré 3 et non mort donne :

- $\frac{1}{4}$ à ses voisins de degré 2.

Cette procédure est telle que chaque sommet $v \in V(G)$ a une charge finale $d^*(v) \geq \frac{5}{2}$. On considère différents cas suivant le degré et la nature de v :

- $\deg(v) = 1$: G ne contient pas de tel sommet (*c.f.* configuration (i)).
- $\deg(v) = 2$ et v est faible : v a un voisin de degré au moins 4 (*c.f.* configurations (ii), (iii) et (iv)), donc $\delta^*(v) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.
- $\deg(v) = 2$ et v n'est pas faible : v reçoit $\frac{1}{4}$ de chacun de ses voisins, donc $\delta^*(v) \geq 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$.
- $\deg(v) = 3$ et v est mort : v ne donne et ne reçoit rien, donc $\delta^*(v) = d(v) = 3 > \frac{5}{2}$.
- $\deg(v) = 3$ et v n'est pas mort : v a au plus deux voisins de degré 2, donc $\delta^*(v) \geq 3 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$.
- $\deg(v) = 4$ et que l'un de ses voisins est de degré au moins 3 : v donne au plus $\frac{1}{2}$ à ses voisins de degré 2, donc $\delta^*(v) \geq 4 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

- $\deg(v) = 4$ et que tous ses voisins sont de degré 2 : aucun des voisins de v n'est faible (*c.f.* configurations (v) et (vi)), v donne donc $\frac{1}{4}$ à chacun de ses voisins, donc $\delta^*(v) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 3 \geq \frac{5}{2}$.
- $\deg(v) = k \geq 5$: v donne au plus $\frac{1}{2}$ à chacun de ses voisins, donc $\delta^*(v) \geq k - k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \geq \frac{5}{2}$.

Par conservation des charges, le degré moyen maximum de G est donc supérieur ou égale à $\frac{5}{2}$, ce qui est en contradiction avec la définition de G . Le contre-exemple G n'existe donc pas. \square

3.5 Arboricité intérieurement 3-bornée des graphes planaires

Ce type d'arboricité n'a pas été étudié auparavant. Cependant, on a vu dans les sections précédentes que les problèmes 2-ARB-INT-3-BORNÉE (*c.f.* Théorème 18) et 3-ARB-INT-3-BORNÉE (*c.f.* Théorème 15) sont NP-complets même si l'on se restreint aux graphes planaires, bipartis et de maille respectivement $g \geq 6$ et $g \geq 4$. On a également vu dans ces sections que $a_3(\mathcal{P}_4) = 4$ et que $a_3(\mathcal{P}_6) = 3$. On a donc $a_3(\mathcal{P}_5) = 3$ ou 4. Le théorème suivant permet de trancher entre ces deux valeurs.

Théorème 22 *Tout graphe planaire G de maille $g \geq 5$ vérifie $a_3(G) \leq 3$.*

On rappelle qu'une k -2-coloration (*c.f.* Sous-section 3.1.1) d'un graphe G est une k -coloration et une orientation partielle des arêtes de G , telles que pour tout entier i , avec $1 \leq i \leq k$, on respecte les conditions suivantes :

- (A) Un sommet v incident à une arête e , coloriée i et orientée vers v , n'a pas d'autre arête incidente coloriée i .
- (B) Tout sommet $v \in V(G)$ a au plus 3 arêtes incidentes non-orientées et coloriées i .
- (C) Les arêtes non-orientées et coloriées i induisent un graphe acyclique.

3.5.1 Les graphes planaires de maille $g \geq 5$

Preuve du Théorème 22 : La propriété suivante implique le Théorème 22 (*c.f.* Lemmes 3.1.1 et 3.3.6).

Propriété 6 *Tout graphe G tel que $Dmm(G) < \frac{10}{3}$ admet une 3-3-coloration 2-prolongeable.*

On prouve cette propriété par déchargement. Soit le graphe G , un contre-exemple qui minimise $|V(G)|$.

Lemme 3.5.1 *Le contre-exemple minimum G , ne contient aucune des configurations de la Figure 59.*

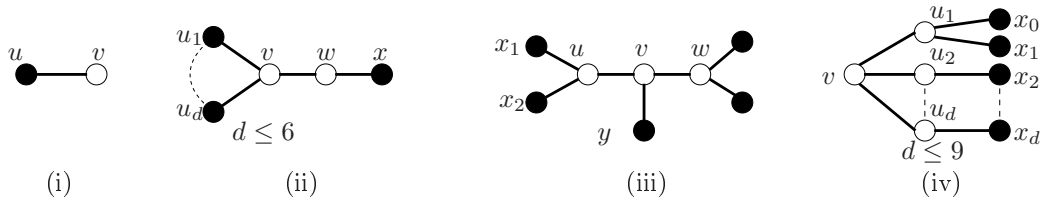


FIG. 59 – Les configurations interdites.

Preuve : On prouve le lemme en montrant que si G contenait l'une de ces configurations, alors G serait 3-3-coloriable de façon 2-prolongeable, ce qui contredirait la définition de G . On traite les différentes configurations :

- (i) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{v\}$ admet une 3-3-coloration 2-prolongeable. Or le sommet u étant interne dans au moins deux des forêts, disons F_1 et F_2 , on peut étendre cette coloration à tout le graphe G en orientant l'arête uv vers v et en la coloriant 1.
- (ii) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{w\}$ admet une 3-3-coloration 2-prolongeable dans laquelle le sommet v est interne dans F_1 et F_2 .
 - Si toutes les arête vu_i sont non-orientées et coloriées 1 ou 2, on oriente wv vers v et on la colorie 3. On oriente alors xw vers w et on la colorie 1 ou 2 (selon que x est interne dans F_1 ou F_2).
 - Sinon, il y a au plus deux arêtes vu_i non-orientées dans F_1 ou dans F_2 , disons F_1 . Dans ce cas là, on laisse l'arête vw non-orientée et on la colorie 1. On oriente alors xw vers w et on la colorie 2 ou 3 (selon que x est interne dans F_2 ou F_3).
- (iii) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{v\}$ admet une 3-3-coloration 2-prolongeable dans laquelle le sommet w est interne dans F_1 et F_2 .
 - Si u est un sommet interne de F_3 , on laisse l'arête uv non-orientée et on la colorie 3. On oriente alors yv vers v et on la colorie 1 ou 2 (selon que y est interne dans F_1 ou F_2), disons 1. On laisse enfin l'arête vw non-orientée et on la colorie 2.
 - Si u est une extrémité de F_3 , une de arêtes incidentes à u , disons x_1u , est orientée vers u et coloriée 3. Sans perte de généralité, on considère que l'arête x_2u est coloriée 1. On laisse alors les arêtes uv et vw non-orientées et on les colorie 2. On oriente enfin yv vers v et on la colorie 1 ou 3 (selon que v est interne dans F_1 ou F_3).
- (iv) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{v, u_2, \dots, u_d\}$ admet une 3-3-coloration 2-prolongeable dans laquelle le sommet u_1 est interne dans F_1 . On laisse toutes les arêtes vu_i , pour $1 \leq i \leq d$, non-orientées et on les colorie 1 si $1 \leq i \leq 3$, 2 si $4 \leq i \leq 6$, et 3 si $7 \leq i \leq 9$. On oriente chacune des arêtes x_iu_i , pour $2 \leq i \leq d$, vers u_i et on les colorie avec une couleur distincte de celle de vu_i .

□

On procède maintenant à l'étape de déchargement afin de prouver qu'un tel graphe G n'existe pas. La charge initiale de chaque sommet est égale à son degré ($\delta(v) = \deg(v)$). On utilise ensuite la règle de déchargement suivante :

Chaque sommet de degré au moins 4 donne :

- $\frac{2}{3}$ à chacun de ses voisins de degré 2 et
- $\frac{1}{6}$ à chacun de ses voisins de degré 3.

Cette procédure est telle que chaque sommet $v \in V(G)$ a une charge finale $\delta^*(v) \geq \frac{10}{3}$. On considère différents cas suivant le degré de v :

- $\deg(v) = 1$: G ne contient pas de tel sommet (*c.f.* configuration (i)).
- $\deg(v) = 2$: v a deux voisins de degré au moins 8 (*c.f.* configuration (ii)), donc $\delta^*(v) = 2 + 2\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.
- $\deg(v) = 3$: v n'a pas de 2-voisins (*c.f.* configuration (ii)) et a au moins deux voisins de degré au moins 4 (*c.f.* configurations (ii) et (iii)), donc $\delta^*(v) \geq 3 + 2\frac{1}{6} = \frac{10}{3}$.
- $\deg(v) = k$, avec $4 \leq k \leq 7$: v n'a pas de voisins de degré 2 (*c.f.* configuration (ii)), donc $\delta^*(v) \geq k - k\frac{1}{6} = k\frac{5}{6} \geq \frac{10}{3}$.
- $\deg(v) = k$, avec $8 \leq k \leq 9$: v a soit un sommet de degré au moins 4, soit deux sommets de degré 3 (*c.f.* configuration (iv)). Dans le premier cas on a $\delta^*(v) \geq k - (k-1)\frac{2}{3} = \frac{k+2}{3} \geq \frac{10}{3}$, et dans le second on a $\delta^*(v) \geq k - (k-2)\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6} = \frac{k+3}{3} > \frac{10}{3}$.
- $d(v) = k \geq 10$: v donne au plus $\frac{2}{3}$ à chacun de ses voisins, donc $\delta^*(v) \geq k - k\frac{2}{3} = \frac{k}{3} \geq \frac{10}{3}$.

Par conservation des charges, le degré moyen maximum de G est donc supérieur ou égale à $\frac{10}{3}$, ce qui est en contradiction avec la définition de G . Le contre-exemple G n'existe donc pas. \square

3.6 Arboricité T -exclue

On rappelle qu'une chaîne P_n est une chaîne ayant n sommets. On définit l'arbre S_n , comme étant l'arbre dont un sommet est incident à n copies de P_3 (voir Figure 60). Étant



FIG. 60 – la chaîne P_4 et l'arbre S_n .

donné un arbre T , une **forêt T -exclue** est une forêt dont aucun sous-graphe n'est isomorphe à T . Par exemple, étant donné un entier $n \geq 2$, les forêts P_n -exclues (resp. $K_{1,n}$ -exclues) sont

les forêts de diamètre au plus $n - 2$ (resp. les forêts de degré maximum au plus $n - 1$). De même, les forêts S_n -exclues sont les forêts de degré interne maximum au plus $n - 1$.

Un arbre est dit **trivial** s'il a moins de trois sommets. Pour tout arbre non-trivial T , on définit l'**arboricité T -exclue**, notée $\text{arb-}T(G)$, comme étant le plus petit entier k tel que G soit couvrable par k forêts T -exclues. Ce nouvel invariant de graphe permet de regrouper plusieurs invariants courants. Par exemple, l'indice chromatique, l'arboricité linéaire, l'arboricité d -bornée, l'arboricité étoile, l'arboricité chenille et l'arboricité intérieurement d -bornée, pour $d \geq 1$, correspondent respectivement aux arboricités P_3 -exclue, $K_{1,3}$ -exclue, $K_{1,d+1}$ -exclue, P_4 -exclue, S_3 -exclue et S_{d+1} -exclue. Comme précédemment, on étend la définition de cet invariant de graphes aux ensembles de graphes. Étant donné une famille finie ou infinie \mathcal{F} de graphes, on définit $\text{arb-}T(\mathcal{F})$ comme étant le maximum de $\text{arb-}T(G)$, pour $G \in \mathcal{F}$. Lorsque ce maximum n'est pas défini, $\text{arb-}T(\mathcal{F})$ prend la valeur $+\infty$.

Observation 3.6.1 *Étant donnés 2 arbres T_1 et T_2 , si T_1 est un sous-arbre de T_2 , alors pour tout graphe G (resp. famille \mathcal{F}) on a $\text{arb-}T_1(G) \geq \text{arb-}T_2(G)$ (resp. famille $\text{arb-}T_1(\mathcal{F}) \geq \text{arb-}T_2(\mathcal{F})$).*

En effet dans ce cas, toute forêt T_1 -exclue est nécessairement T_2 -exclue.

On définit maintenant l'**arboricité T -exclue minimum** $U(\mathcal{F})$ d'un ensemble de graphes \mathcal{F} comme étant le minimum de $\text{arb-}T(\mathcal{F})$, pour tout arbre non-trivial T . Étant donné que pour tout arbre T et pour toute famille de graphe \mathcal{F} on a $\text{arb-}T(\mathcal{F}) \geq a(\mathcal{F})$, on a la relation suivante pour tout arbre T et toute famille de graphe \mathcal{F} :

$$\text{arb-}T(\mathcal{F}) \geq U(\mathcal{F}) \geq a(\mathcal{F}) \quad (16)$$

L'arboricité T -exclue minimum est un invariant qui semble proche de l'arboricité classique puisque ces deux invariants sont égaux sur les familles finies de graphes. En effet, pour toute famille finie \mathcal{F} , il existe un entier l tel que $l > \max_{G \in \mathcal{F}} |V(G)|$. Toute forêt $F \subseteq G \in \mathcal{F}$ a donc au plus $l - 1$ sommets et est donc P_l -exclue. Toute partition d'un graphe $G \in \mathcal{F}$ en $a(G)$ forêts est donc une partition en forêts P_l -exclues.

Ces invariants sont cependant différents pour certaines familles infinies de graphes. Un exemple trivial est la famille des arbres, notée \mathcal{A} . Il est clair que $a(\mathcal{A}) = 1$. Par contre, pour tout arbre T on a $\text{arb-}T(\mathcal{A}) \geq \text{arb-}T(T) = 2$, et donc $U(\mathcal{A}) \geq 2$. En fait, les arbres étant d'arboricité étoile (*i.e.* P_4 -exclue) au plus deux, on a exactement $U(\mathcal{A}) = 2$. On donne deux autres exemples de telles familles. On montre dans les sous-sections suivantes que la famille des 2-arbres, notée \mathcal{A}_2 , et celle des graphes planaires bipartis, notée \mathcal{P}_{bip} , qui sont des familles d'arboricité 2, sont d'arboricité T -exclue minimum au moins 3.

Théorème 23 $U(\mathcal{A}_2) > 2$.

Il est clair que les k -arbres sont d'arboricité au plus k . De plus, les k -arbres étant acycliquement

$(k + 1)$ -coloriables, le Théorème 10 nous indique que pour tout k -arbre G on a $\text{arb-}P_4(G) \leq k + 1$. On a donc $U(\mathcal{A}_2) = 3$.

Théorème 24 $U(\mathcal{P}_{bip}) > 2$.

Pour les graphes planaires bipartis on a cependant pas déterminé la valeur exacte de $U(\mathcal{P}_{bip})$. Étant donné que les graphes planaires bipartis sont d'arboricité étoile au plus 4 on sait juste que $U(\mathcal{P}_{bip}) = 3$ ou 4.

Ces théorèmes semblent naturels. En effet, tout 2-arbre (resp. graphe planaire biparti maximum) G ayant n sommets a $2n - 3$ (resp. au plus $2n - 4$) arêtes. En leur rajoutant 2 arêtes (resp. 3), ces graphes auront alors $2n - 1$ arêtes et seront d'arboricité au moins trois. Ces graphes sont donc «quasiment» d'arboricité trois. Il paraît donc normal que l'on ne puisse plus couvrir ces graphes avec deux forêts si l'on rajoute des contraintes structurelles sur ces forêts, à savoir qu'elles soient T -exclues. Le même raisonnement nous fait poser les deux conjectures suivantes :

Conjecture 12 Soit \mathcal{A}_k , l'ensemble des k -arbres. Pour tout entier $k \geq 1$ on a $U(\mathcal{A}_k) \geq k + 1$.

Conjecture 13 $U(\mathcal{P}_3) \geq 4$.

On remarque que si l'on essaie de couvrir un graphe G avec $a(G) + 1$ forêts plutôt que $a(G)$ on gagne une grande flexibilité. On fait donc la conjecture suivante :

Conjecture 14 Pour toute famille de graphe \mathcal{F} , on a $a(\mathcal{F}) \leq U(\mathcal{F}) \leq a(\mathcal{F}) + 1$.

3.6.1 Les 2-arbres

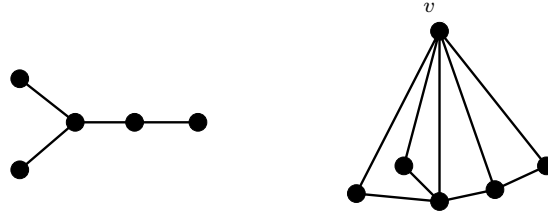
Preuve du Théorème 23 : On prouve un résultat plus fort que le Théorème 23.

Propriété 7 Pour toute arbre T et pour tout sous-arbre $T' \subseteq T$ enraciné en r' il existe un 2-arbre partiel, noté $G(T, T')$, enraciné en un sommet v et tel que dans toute couverture de $G(T, T')$ par deux forêts F_1 et F_2 on a soit une copie de T dans F_1 ($T \subseteq F_1$), soit une copie de T' dans F_1 ($T' \subseteq F_1$) telle que la racine de T' corresponde à celle de $G(T, T')$ ($r' = v$).

Ce résultat implique bien le Théorème 23 puisque, pour tout arbre T , il existe un 2-arbre partiel, $G(T, T)$, qui n'est pas couvrable par 2 forêts T -exclues.

On raisonne par l'absurde en considérant un contre-exemple, un couple (T, T') tel que $|V(T')|$ soit minimum. Étant donné un arbre T , on construit le 2-arbre $H(T)$ en ajoutant à T un nouveau sommet v relié à tous les sommets de T (voir Figure 61).

Dans le cas où $T' = K_2$, on pose $G(T, K_2) = H(T)$, le sommet v étant la racine. En effet, si toutes les arêtes incidente à v dans $H(T)$ sont dans F_2 , F_2 ne pouvant pas contenir de

FIG. 61 – Exemple d'arbre T et le 2-arbre $H(T)$ correspondant.

cycle, alors les autres arêtes de $H(T)$, formant une copie de T , sont toutes dans F_1 . On a donc $T' \neq K_2$.

On considère maintenant différents cas suivant le degré de r' dans T' .

- Si $\deg_{T'}(r') = 1$, on note r'' le voisin de r' et T'' l'arbre $T' \setminus r'$ enraciné en r'' . On considère le graphe $H(T)$ enraciné en v et $|V(T)|$ copies de $G(T, T'')$ enracinées en u_i , avec $1 \leq i \leq |V(T)|$. En identifiant chacun des sommets u_i à un sommet distinct de $H(T) \setminus v$ on obtient le 2-arbre partiel $G(T, T'')$. En effet, si l'on couvre ce graphe avec deux forêts F_1 et F_2 telles que F_1 soit T -exclue, alors il existe nécessairement une arête vu_i telle que $vu_i \in F_1$, sinon (F_2 étant sans-cycles) toutes les arêtes de $H(T) \setminus v$, qui forment une copie de T , seraient dans F_1 . Or ce sommet u_i est la racine d'une copie de T'' telle que $r'' = u_i$. En y ajoutant l'arête vu_i on obtient une copie de $T' \subseteq F_1$ enraciné en v . Le couple (T, T') n'est donc pas un contre-exemple.
- Si $\deg_{T'}(r') \geq 2$, alors on partage T' en deux arbres disjoints, T'' et T''' , partageant tous deux la même racine que T' , le sommet r' , et ayant chacun au moins une arête. Par minimalité de T' il existe bien deux 2-arbres partiels $G_{T, T''}$ et $G_{T, T'''}$, enracinés en v'' et v''' . En prenant ces deux graphes et en fusionnant leur racine en un sommet v on obtient le 2-arbre partiel $G(T, T')$. En effet, si l'on couvre ce graphe avec deux forêts F_1 et F_2 telles que F_1 soit T -exclue, alors on a une copie de $T'' \subseteq F_1$ et une copie de $T''' \subseteq F_1$, disjointes et toutes deux enracinées en v . Le sommet v est donc bien la racine d'une copie de $T' \subseteq F_1$. Le couple (T, T') n'est donc pas un contre-exemple.

□

3.6.2 Les graphes planaires bipartis

On définit les arbres enracinés T_n pour $n \geq 1$. Pour $n = 1$ on a $T_1 = K_2$. Pour $n > 1$, on obtient T_n à partir de n copies de T_{n-1} dont on relie les racines à un même nouveau sommet, qui est la racine de T_n (voir Figure 62). Il est clair que tout arbre T est un sous-arbre de T_n , pour un entier n suffisamment grand. On définit les graphes planaires bipartis G_n pour $n \geq 1$. Le graphe G_1 est le 4-cycle (u_1, x, v_1, y) . Pour $n > 1$, on obtient G_n à partir de deux sommets, u_n et v_n , et $2n$ copies de G_{n-1} , notées G_{n-1}^i , avec $1 \leq i \leq 2n$. On note u_{n-1}^i et v_{n-1}^i , les

sommets u_{n-1} et v_{n-1} de la copie G_{n-1}^i . Enfin, on relie u_n (resp. v_n) à tous les sommets u_{n-1}^i et v_{n-1}^i pour $1 \leq i \leq 2n$. On voit dans la Figure 62 que les graphes G_n sont bien planaires et bipartis.

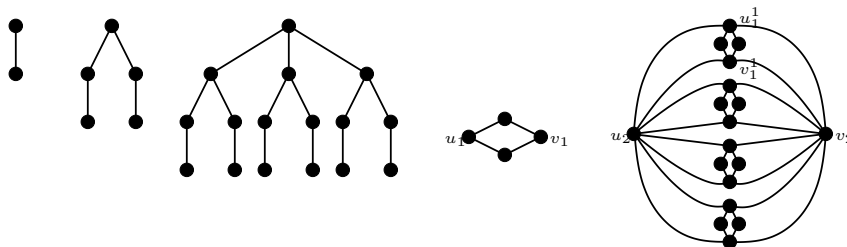


FIG. 62 – Les arbres T_1 , T_2 et T_3 et les graphes G_1 et G_2 .

Preuve du Théorème 24 : On prouve un résultat plus fort que le Théorème 24.

Propriété 8 Dans toute partition de G_n en deux forêts F_1 et F_2 , l'un des sommets u_n ou v_n est la racine d'un arbre $T_n \subseteq F_1$.

On prouve ce résultat par récurrence sur n . Pour G_1 , la forêt F_2 ne pouvant couvrir toutes les arêtes du cycle, il y a bien une des arêtes incidentes à u_1 ou à v_1 dans F_1 . On considère maintenant une partition de G_n , pour $n > 1$ en deux forêts F_1 et F_2 . Les sommets u_{n-1}^i et v_{n-1}^i étant «symétriques», on considère sans perte de généralité que pour tout i c'est le sommet u_{n-1}^i (et non v_{n-1}^i) qui est la racine d'un arbre $T_{n-1} \subseteq F_1 \cap G_{n-1}^i$. Étant donné que F_2 ne contient pas de cycles, il y a au plus un sommet u_{n-1}^i tel que les deux arêtes $u_n u_{n-1}^i$ et $v_n u_{n-1}^i$ sont dans F_2 . Ceci implique qu'il y a soit n arêtes $u_n u_{n-1}^i$, soit n arêtes $v_n u_{n-1}^i$ dans F_1 . Les sommets u_{n-1}^i étant des racines de $T_{n-1} \subseteq F_1 \cap G_{n-1}^i$, On a bien un copie de $T_n \subseteq F_1$ enraciné en u_n ou en v_n . \square

3.7 Arboricité mixte des graphes

On a vu dans les sections précédentes que les graphes planaires sont d'arboricité étoile au plus 5 et d'arboricité chenille au plus quatre. On pourrait se demander, afin d'affiner nos connaissances sur les couvertures possibles des graphes planaires, si par exemple les graphes planaires sont couvrables par 3 forêts de chenilles et une forêt d'étoile. Le concept d'**arboricité mixte** regroupe donc les couvertures de graphes en des forêts de type variés.

Dans [BKP05], Balogh, Kochol, Pluhár et Yu explorent une notion de couverture proche de l'arboricité, les (t, D) -couvertures. Un graphe est (t, D) -**couvert** si l'on peut le couvrir avec t forêts et un graphe de degré maximum au plus D .

Les graphes planaires externes étant d'arboricité au plus 2, ils sont $(2, 0)$ -couvrables. De

plus, les graphes planaires externes n'étant pas de degré maximum borné, ils ne sont, pour aucun entier $k > 0$, $(0, k)$ -couvrables. Dans [GZ99], les auteurs montrent que les graphes planaires externes sont $(1, 3)$ -couvrables. Dans [BKPY05], les auteurs affinent ce résultat en montrant que les graphes planaires externes sont couvrables par 2 forêts dont une est de degré maximum au plus 3. Dans ce même article, les auteurs montrent également que ce résultat est optimal puisqu'ils exhibent une famille de graphes planaires externes qui ne sont pas $(1, 2)$ -couvrables.

Les graphes planaires étant d'arboricité au plus 3, ils sont $(3, 0)$ -couvrables. De plus pour tout $k \geq 0$, on prouve aisément que le graphe biparti complet $K_{2, 2k+2}$, qui est planaire, n'est pas $(1, k)$ -couvrables. Dans [HHL⁺02], les auteurs montrent que les graphes planaires sont $(2, 8)$ -couvrables. Dans [BKPY05], les auteurs affinent ce résultat en montrant que les graphes planaires sont couvrables par 3 forêts dont une est de degré maximum au plus 8. Dans les deux articles les auteurs s'interrogent sur la valeur du plus petit entier Δ tel que tout graphe planaire G est $(2, \Delta)$ -couvrable (*c.f.* Problème ouvert 1 pour [HHL⁺02]). Dans [BKPY05], les auteurs montrent que $\Delta \geq 4$ et conjecturent que $\Delta = 4$ (*c.f.* Conjecture 4).

On a apporté, au chapitre précédent, un début de réponse à cette question en montrant que $\Delta \leq 6$. En effet, le Corollaire 3 indique tout graphe planaire G est $(2, 6)$ -couvrable. On donne, dans la Sous-section 3.7.1, une réponse complète en montrant un résultat plus fort que la Conjecture 4.

Théorème 25 *Tout graphe planaire est couvrable par trois forêts dont une est de degré maximum au plus 4.*

Les arbres de degré maximum 4 étant couvrables par deux forêts de chaînes ou bien par deux forêts de ≤ 3 -étoiles (*c.à.d.* dont les composantes connexes sont $K_{1,1}$, $K_{1,2}$ ou $K_{1,3}$), ce résultat a plusieurs conséquences intéressantes en ce qui concerne les arboricités mixtes des graphes planaires.

Corollaire 9 *Tout graphe planaire est couvrable par :*

- 2 forêts et 2 forêts de chaînes,
- 2 forêts et 2 forêts de ≤ 3 -étoiles, et
- 6 forêts d'étoiles, dont 2 sont des forêts de ≤ 3 -étoiles.

Différents travaux portent sur les graphes planaires de maille bornée. On sait que les graphes planaires de maille g sont :

- $(1, 1)$ -couvrables si $g \geq 10$ (voir [BBC⁺04]),
- $(1, 2)$ -couvrables si $g \geq 7$ (voir [HHL⁺02]), et
- $(1, 4)$ -couvrables si $g \geq 5$ (voir [HHL⁺02]).

On remarque que les graphes de degré maximum deux ne sont pas nécessairement des forêts. On prouve dans la Sous-section 3.7.2 le résultat suivant pour les graphes planaires de maille $g \geq 8$.

Théorème 26 *Tout graphe planaire de maille $g \geq 8$ est couvrable par une forêt et une forêt de chaînes.*

On rappelle que $\mu(G) = \min_f \max_C l(C)$, où le minimum se fait sur toutes les bijections $f : E(G) \rightarrow [1..|E(G)|]$, où le maximum se fait sur toutes les chaînes croissantes C et où $l(C)$ est la longueur de la chaîne C . Le Théorème 17 et différents résultats concernant les arboricités mixtes et non-mixtes des graphes planaires permettent d'obtenir des bornes supérieures pour $\mu(G)$. On regroupe ces bornes dans le théorème suivant :

Théorème 27 *Tout graphe planaire G de maille g vérifie :*

- $\mu(G) \leq 4$ si $g \geq 10$,
- $\mu(G) \leq 5$ si $g \geq 8$,
- $\mu(G) \leq 6$ si $g \geq 4$, et
- $\mu(G) \leq 8$ si $g \geq 3$.

Preuve : On rappelle que pour les forêts F , les forêts de chenilles C et les graphes de degré maximum un M on a $\mu(F) \leq 3$, $\mu(C) \leq 2$ et $\mu(M) \leq 1$ [RSY01]. De plus, si un graphe G est couvert par H_1 et H_2 on a $\mu(G) \leq \mu(H_1) + \mu(H_2)$ [RSY01].

- Tout graphe planaire G de maille 10 étant couvrable par une forêt et un graphe de degré maximum un [BBC⁺04], on a $\mu(G) \leq 3 + 1$.
- Tout graphe planaire G de maille 8 étant couvrable par une forêt et une forêt de chaînes (*c.f.* Théorème 26), on a $\mu(G) \leq 3 + 2$.
- Tout graphe planaire G de maille 4 étant couvrable par 2 forêts (*c.f.* Théorème de Nash-Williams), on a $\mu(G) \leq 3 + 3$.
- Tout graphe planaire G étant couvrable par 4 forêts de chenilles (*c.f.* Théorème 25), on a $\mu(G) \leq 2 + 2 + 2 + 2$.

□

On remarque aisément que tout cycle de longueur impaire C_{2n+1} vérifie $\mu(C_{2n+1}) = 3$. On sait donc que pour tout entier $g \geq 3$ on a $\mu(\mathcal{P}_g) \geq 3$. Étant donné que $\mu(\mathcal{P}_g) \leq 4$, pour $g \geq 10$, on se pose la question suivante :

Problème ouvert 6 *Existe-t-il un entier g tel que $\mu(\mathcal{P}_g) = 3$?*

On ne peut malheureusement pas répondre positivement à ce problème en montrant que tout graphe planaire de maille au moins g est couvrable par une forêt de chenille et un graphe de degré maximum un. En effet :

Théorème 28 *Pour tout entier $\Delta \geq 0$, l'arbre T_Δ représenté dans la Figure 63 n'est pas couvrable par une forêt de chenille et une forêt de degré maximum au plus Δ .*

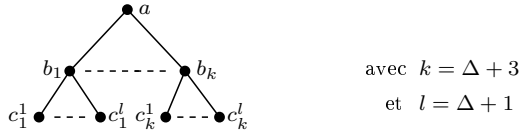


FIG. 63 – L'arbre T_Δ .

Preuve : On raisonne par l'absurde en considérant que T_Δ est l'union d'une forêt de degré maximum Δ , notée F , et d'une forêt de chenille, notée C . Étant donné que $\Delta(F) \leq \Delta$, le sommet a de T_Δ a au moins trois arêtes incidentes dans C , disons ab_1, ab_2 et ab_3 . Le même argument implique que pour tout entier $i \in [1 \dots k]$, une des arêtes $b_i c_i^j$, disons $b_i c_i^1$, est dans C . Les arêtes $ab_1, ab_2, ab_3, b_1 c_1^1, b_2 c_2^1$ et $b_3 c_3^1$, formant un graphe S_3 , sont toutes dans C ce qui est impossible puisque les forêts de chenilles sont des forêts S_3 -exclues. L'arbre T_Δ n'est donc pas couvrable par une forêt de chenille et une forêt de degré maximum au plus Δ . \square

En ce qui concerne les bornes inférieures de $\mu(\mathcal{F})$ on sait juste que $\mu(\mathcal{P}_3) \geq 6$ et $\mu(\mathcal{P}_4) \geq 5$ [RSY01]. On sait donc que :

$$6 \leq \mu(\mathcal{P}_3) \leq 8 \tag{17}$$

$$5 \leq \mu(\mathcal{P}_4) \leq 6 \tag{18}$$

On s'interroge donc sur la valeur exacte de $\mu(\mathcal{F})$ pour ces deux familles de graphes. On constate par exemple qu'on ne peut pas borner $\mu(\mathcal{P}_3)$ par 7 (resp. $\mu(\mathcal{P}_4)$ par 5) en montrant que tout graphe $G \in \mathcal{P}_3$ (resp. $G \in \mathcal{P}_4$) est couvrable par une forêt et deux (resp. une) forêts de chenilles.

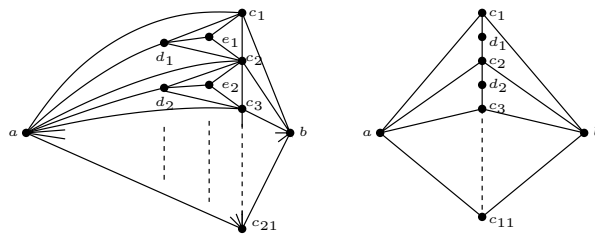


FIG. 64 – Les graphes H_1 et H_2 .

Théorème 29 *Le graphe planaire H_1 de la Figure 64 n'est pas couvrable par une forêt et deux forêts de chenilles.*

Théorème 30 *Le graphe planaire et biparti H_2 de la Figure 64 n'est pas couvrable par une forêt et une forêt de chenilles.*

Preuve du Théorème 29 : On raisonne par l'absurde en considérant qu'il existe une forêt $F_3 \subseteq H_1$ telle que le graphe $H_1 \setminus F_3$ est 2-2-coloriable. On complète cette coloration à toutes les arêtes de H_1 en coloriant 3 les arêtes de F_3 et en les laissant non-orientées. Par définition des k -2-colorations, les sommets a et b ont chacun au plus quatre arêtes incidentes coloriées 1 ou 2 qui ne soient pas orientées vers l'autre extrémité. De plus, la forêt F_3 contient au plus une chaîne reliant les sommets a et b . Il existe donc un entier i pour lequel :

- les arêtes ac_i , ad_i , ac_{i+1} , bc_i et bc_{i+1} sont soit coloriées 3, soit orientées de a ou b vers l'autre extrémité, et tel que
- il n'y a pas de chaîne dans F_3 reliant a et b passant par bc_i ou bc_{i+1} .

On montre qu'une telle coloration du graphe induit par les sommets a , b , c_i , c_{i+1} , d_i et e_i n'existe pas. On considère différents cas selon le nombre d'arêtes coloriées 3 parmi ac_i , ac_{i+1} , bc_i et bc_{i+1} . Il y en a au plus deux car il n'y a pas de chaîne dans F_3 reliant a et b passant par bc_i ou bc_{i+1} .

- (0) Les arêtes ac_i , ac_{i+1} , bc_i et bc_{i+1} sont toutes orientées vers c_i ou c_{i+1} , les sommets c_i et c_{i+1} sont donc des extrémités de F_1 et F_2 . Ceci implique que les autres arêtes incidentes à ces sommets, comme celles du cycle (c_i, d_i, c_{i+1}) sont dans la forêt F_3 , ce qui est impossible.
- (1) Sans perte de généralité, on considère que les arêtes ac_i , et bc_i sont orientées vers c_i . Le sommet c_i est donc une extrémité de F_1 et de F_2 . Ceci implique que les autres arêtes incidentes à c_i , $c_i d_i$, $c_i e_i$ et $c_i c_{i+1}$, sont dans F_3 . Dans ces conditions les arêtes $c_{i+1} d_i$, $c_{i+1} e_i$ sont forcément orientées vers d_i et c_i et coloriées x , avec $x = 1$ ou 2 (suivant si c_{i+1} est une extrémité de F_1 ou de F_2). De plus, comme une des arêtes ac_{i+1} ou bc_{i+1} est dans F_3 , l'arête ad_i n'est pas dans F_3 , sinon F_3 contiendrait soit un cycle soit une chaîne reliant a et b passant par bc_{i+1} . L'arête ad_i est donc orientée vers d_i et coloriée $3 - x$. Or il est dans ces conditions impossible de colorier l'arête $d_i e_i$.
- (2) On distingue deux cas suivant la coloration de l'arête ad_i :
 - L'arête ad_i est orientée vers d_i et coloriée 1. Comme on ne veut pas de chaîne coloriée 3 reliant c_i et c_{i+1} dans $H_1 \setminus \{a, b\}$ (pour éviter dans F_3 un cycle ou une chaîne reliant a et b) il y a au plus une des arête $c_i d_i$ et $d_i c_{i+1}$ dans F_3 . On considère donc que l'arête $c_i d_i$ est coloriée 2, ce qui signifie que celle des arêtes ac_i et bc_i qui est orientée vers c_i est coloriée 1. L'arête $c_i c_{i+1}$ est donc coloriée 2 et ceci implique que l'arête $d_i c_{i+1}$ est coloriée 3 (pas de cycle dans F_2) et que celle des arêtes ac_{i+1} et bc_{i+1} qui est orientée vers c_{i+1} est coloriée 1. Dans cette situation aucune des arêtes incidentes à e_i ne peut être coloriée 1, au plus une des arêtes incidentes à e_i peut être coloriée 2, et au plus une des arêtes incidentes à e_i peut être coloriée 3. Il est donc impossible de colorier les trois arêtes incidentes à e_i .
 - L'arête ad_i est non-orientée et coloriée 3. Aucune des arêtes $c_i c_{i+1}$, $c_i d_i$ et $d_i c_{i+1}$ n'étant coloriée 3 (pour éviter dans F_3 un cycle ou une chaîne reliant a et b), l'arête

$c_i c_{i+1}$ est donc coloriée 1 ou 2, disons 1. Ceci implique que celle des arêtes ac_i et bc_i (resp. ac_{i+1} et bc_{i+1}) qui est orientée vers c_i (resp. c_{i+1}) est coloriée 2. Les arêtes $c_i d_i$ et $d_i c_{i+1}$ ne sont donc pas coloriables 2. Enfin on constate que si on coloriait ces deux arêtes 1, on aurait un cycle dans F_1 , ce qui est impossible.

Chacun de ces cas entraînant une contradiction, il n'existe pas de telle coloration de H_1 et le théorème est donc bien vérifié. \square

On passe maintenant au cas du graphe H_2 .

Preuve du Théorèmes 30 : On raisonne par l'absurde en considérant qu'il existe une forêt $F_2 \subseteq H_2$ telle que le graphe $H_2 \setminus F_2$ est 1-2-coloriable. On complète cette coloration à toutes les arêtes de H_2 en coloriant 2 les arêtes de F_2 et en les laissant non-orientées. Par définition des k -2-colorations, les sommets a et b ont chacun au plus deux arêtes incidentes coloriées 1 qui ne soient pas orientées vers l'autre extrémité. De plus, la forêt F_2 contient au plus une chaîne reliant a et b . Il existe donc un entier i pour lequel

- les arêtes ac_i , ac_{i+1} , bc_i et bc_{i+1} sont soit coloriées 2, soit orientées de a ou b vers l'autre extrémité, et tel que
- il n'y a pas de chaîne dans F_2 reliant a et b passant par bc_i ou bc_{i+1} .

Ceci implique que les sommets c_i et c_{i+1} sont des extrémités de F_1 et donc que les arêtes $c_i d_i$ et $d_i c_{i+1}$ sont dans F_2 créant ainsi soit un cycle dans F_2 , soit une chaîne reliant a et b , ce qui est impossible. Il n'existe donc pas de telle coloration de H_2 et le théorème est bien vérifié. \square

3.7.1 Les graphes planaires

Tout graphe planaire étant le sous-graphe d'une triangulation, il suffit de prouver le Théorème 25 pour les triangulations. En fait, on prouve le théorème suivant qui implique le Théorème 25. On montre ce résultat sur les triangulations en utilisant l' α -décomposition décrite dans la sous-section 3.4.1. On trouve aussi dans cette sous-section la définition de sommet partenaire.

Théorème 31 *Pour toute triangulation $T = (V, E)$ et tout triplet (u, v, w) de sommets externes deux à deux distincts, il existe une 3-coloration des arêtes de $T \setminus \{uv, uw, vw\}$ qui partitionne $E' = E \setminus \{uv, uw, vw\}$ en trois ensembles E_1 , E_2 et E_3 tels que :*

- (a) *Le graphe induit par E_i , $T[E_i]$, est une forêt, pour tout entier $i \in \{1, 2, 3\}$.*
- (b) *$\Delta(T[E_3]) \leq 4$.*
- (c) *Toutes les arêtes de E' incidentes à v sont dans E_1 .*
- (d) *Toutes les arêtes de E' incidentes à w sont dans E_2 .*
- (e) *L'arête ux est dans E_3 (x étant le sommet partenaire de uw).*

- (f) Les arêtes incidentes à u strictement comprises entre uw et ux sont dans E_1 .
- (g) Les arêtes incidentes à u strictement comprises entre ux et uv sont dans E_2 .
- (h) Dans chacune des forêts $T[E_i]$, les sommets u , v et w sont dans des composantes connexes distinctes. De plus, la composante connexe de u dans $T[E_1]$ ne couvre que le sommet u et les sommets strictement à l'intérieur du cycle (u, w, x) .

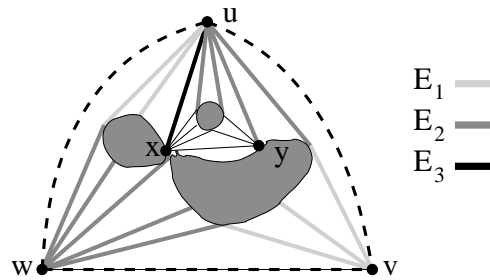


FIG. 65 – Le Théorème 31.

Il est simple d'étendre à toute la triangulation T la coloration donnée par ce théorème. Par exemple, en coloriant les arêtes uv , uw et vw respectivement 1, 1 et 2, on obtient bien une coloration des arêtes de T impliquant le Théorème 25.

Preuve du Théorème 31 : On prouve ce théorème par récurrence sur le nombre de sommets de T . Si $T = K_3$ il est clair que le théorème est vrai puisqu'il n'y a pas d'autres arêtes que uv , uw ou vw . Sinon ($T \neq K_3$), on considère les triangulations T_f , T_d et T_g obtenues par α -décomposition (voir la Sous-section 3.4.1). Ces trois triangulations ayant chacune moins de sommets que T , on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence.

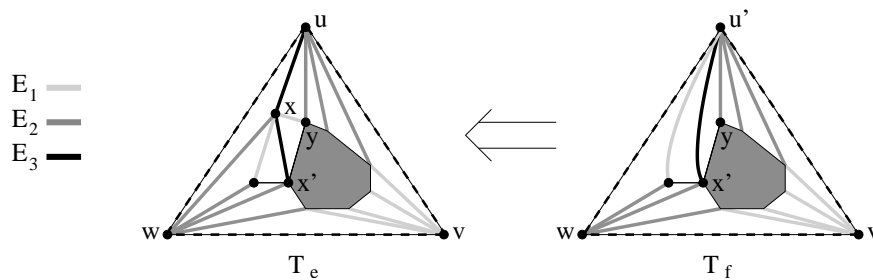


FIG. 66 – Coloration de T_e à partir de celle de T_f .

On l'applique donc à T_f pour le triplet (u', v, w) , et on obtient une 3-coloration c_f des arêtes internes de T_f . On étend cette coloration à T_e en posant :

- $c_e(e) = c_f(e)$ si $e \in T_f \setminus \{u', x\}$.
- $c_e(ua) = c_f(u'a)$ si $a \neq x$.

- $c_e(xa) = c_f(u'a)$ si $a \neq u, y$ ou w .
- $c_e(ux) = 3$.
- $c_e(wx) = 2$.
- $c_e(yx) = 1$.

On constate que la coloration c_e est bien une coloration des arêtes de $T_e \setminus \{uv, uw, vw\}$ vérifiant toutes les conditions du théorème :

- (a) Les sommets u' et y (resp. u' et w) étant, d'après la condition (h), dans des composantes connexes distinctes de $T_f[E_1]$ (resp. $T_f[E_2]$), l'arête xy (resp. xw), que l'on a colorié 1 (resp. 2), ne crée pas de cycles dans $T_e[E_1]$ (resp. $T_e[E_2]$). Les graphes $T_e[E_1]$ et $T_e[E_2]$ sont donc bien des forêts. De même, le sommet u n'étant incident qu'à une arête de E_3 , on a pas créé de cycle en ajoutant l'arête ux à $T_f[E_3]$. Le graphe $T_e[E_3]$ est donc bien une forêt.
- (b) Pour tout sommet $a \in V(T_e)$, autre que u ou x , on a $\deg_{T_e[E_3]}(a) = \deg_{T_f[E_3]}(a) \leq 4$. Enfin, il est clair que $\deg_{T_e[E_3]}(u) = 1$ et $\deg_{T_e[E_3]}(x) = 2$. On a donc bien $\Delta(T_e[E_3]) \leq 4$.
- (c)(d)(e)(f)(g) Il est clair que les arêtes incidentes aux sommets u, v ou w sont bien coloriées conformément au théorème.
- (h) Les sommets u et w (resp. v et w) n'étant incidents à aucune arête coloriée 1 (resp. 3), les sommets u, v et w sont bien dans 3 composantes connexes distinctes de $T_e[E_1]$ (resp. $T_e[E_3]$). Les sommets u et w ne sont pas dans la même composante connexe de $T_e[E_2]$. En effet si c'était le cas, la chaîne $C \subseteq T_e[E_2]$ reliant u et w induirait soit une chaîne $C' \subseteq T_f[E_2]$ reliant u' et w dans T_f , soit (lorsque C emprunte wx) un cycle $C' \subseteq T_f[E_2]$ passant par u' dans T_f , ce qui est impossible. Enfin le sommet v n'étant incident à aucune arête coloriée 2, les sommets u, v et w sont bien dans 3 composantes connexes distinctes de $T_e[E_2]$.

Finalement, le sommet u étant dans une composante connexe triviale (*i.e.* sans arête) de $T_e[E_1]$ et le cycle (u, w, x) ne contenant aucun sommet, le point (h) est bien vérifié.

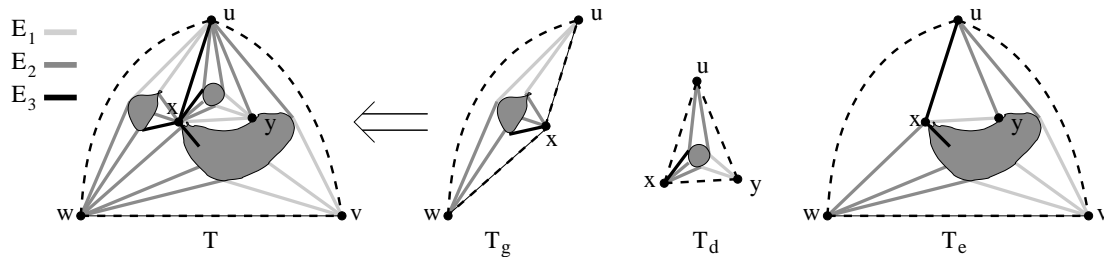


FIG. 67 – Coloration de T à partir de celles de T_e, T_g et T_d .

On va maintenant prolonger la coloration de T_e afin d'obtenir une coloration c de T . On applique maintenant l'hypothèse de récurrence à T_g pour le triplet (x, u, w) , ainsi qu'à T_d

pour le triplet (x, y, u) , et on obtient les colorations c_g et c_d . On définit c de la façon suivante :

$$c(e) = \begin{cases} c_e(e) & \text{si } e \in E(T_e) \setminus \{uv, uw, vw\} \\ c_g(e) & \text{si } e \in E(T_g) \setminus \{ux, uw, wx\} \\ c_d(e) & \text{si } e \in E(T_d) \setminus \{ux, uy, xy\} \end{cases}$$

On peut maintenant constater que la coloration c est bien une coloration des arêtes de $T \setminus \{uv, uw, vw\}$ vérifiant toutes les conditions du théorème :

- (a) Si l'un des graphes $T[E_i]$, pour un entier $i \in \{1, 2, 3\}$, contenait un cycle $C \subseteq T[E_i]$ alors ce cycle devrait emprunter des arêtes de $T_g[E_i]$ ou de $T_d[E_i]$. En effet, un tel cycle C ne peut être entièrement dans $T_e[E_i]$ puisque $T_e[E_i]$ est une forêt. Or les colorations de T_g et de T_d étant elles aussi conforme au théorème, si un cycle C “entrait” dans $T_g[E_i]$ ou $T_d[E_i]$ par l'un des sommets u, w, x ou y , il ne pourrait en “ressortir” par un autre de ces quatres sommets. Il n'y a donc pas de tel cycle C et les graphes $T[E_i]$ sont bien des forêts.
- (b) Les sommets u, w et y n'ayant aucune arête incidente coloriée 3 dans T_g ou T_d , tout sommet $a \in V(T)$, autre que x , est tel que $\deg_{T[E_3]}(a) = \deg_{T_e[E_3]}(a)$, $\deg_{T_g[E_3]}(a)$ ou $\deg_{T_d[E_3]}(a)$, et donc $\deg_{T[E_3]}(a) \leq 4$. Enfin le sommet x ayant respectivement au plus 2, 1 et 1 arêtes incidentes coloriées 3 dans T_e, T_g et T_d , on a bien $\deg_{T[E_3]}(x) \leq 4$.
- (c)(d)(e)(f)(g) Il est clair que les arêtes incidentes aux sommets u, v ou w sont bien coloriées conformément au théorème.
- (h) Si deux des sommets, u, v ou w , était dans la même composante connexe de $T[E_i]$, pour un entier $i \in \{1, 2, 3\}$, alors la chaîne $C \subseteq T[E_i]$ les reliant devrait emprunter des arêtes de $T_g[E_i]$ ou de $T_d[E_i]$. En effet, un telle chaîne C ne peut être entièrement dans $T_e[E_i]$ puisque la coloration de T_e est conforme au théorème. Or les colorations de T_g et de T_d étant elles aussi conforme au théorème, si une chaîne C “entrait” dans $T_g[E_i]$ ou $T_d[E_i]$ par l'un des sommets u, w, x ou y , elle ne pourrait en “ressortir” par un autre de ces quatres sommets. Les sommets u, v et w sont donc bien, pour tout entier $i \in \{1, 2, 3\}$, dans 3 composantes connexes distinctes de $T[E_i]$.

Finalement, les composantes connexes de $T_g[E_1]$ contenant les sommets x et w étant triviales, la composante connexe de $T_g[E_1]$ contenant le sommets u contient aussi tous les sommet de T_g autres que w ou x . Il en est donc de même dans la coloration des arêtes de T et le point (h) est bien vérifié.

□

Il est possible de transformer cette preuve en un algorithme de partition des arêtes d'un graphe planaire en 3 forêts dont une est de degré maximum au plus 4. De plus, en utilisant une structure de données adaptée, cet algorithme serait linéaire en $|V(G)|$.

3.7.2 Les graphes planaires de maille $g \geq 8$

Preuve du Théorème 26 : La propriété suivante implique le Théorème 26 (*c.f.* Lemme 3.3.6).

Propriété 9 *Tout graphe G tel que $Dmm(G) < \frac{8}{3}$ est couvrable par une forêt et une forêt de chaînes.*

On prouve cette propriété par déchargement. Soit le graphe G , un contre-exemple qui minimise $|V(G)|$.

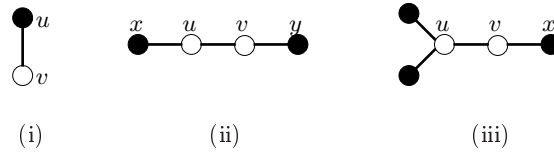


FIG. 68 – Les configurations interdites.

Lemme 3.7.1 *Le contre-exemple minimal G ne contient aucune des configurations de la Figure 68.*

Preuve : On prouve le lemme en montrant que si G contenait l'une de ces configurations, alors G serait couvrable par une forêt et une forêt de chaînes, ce qui contredirait la définition de G . On traite les différentes configurations :

- (i) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{v\}$ admet une couverture par une forêt F et une forêt de chaîne L . On étend aisément cette couverture à tout le graphe G en ajoutant l'arête uv dans F .
- (ii) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{u, v\}$ admet une couverture par une forêt F et une forêt de chaîne L . On étend aisément cette couverture à tout le graphe G en ajoutant les arêtes ux et vy dans F et l'arête uv dans L .
- (iii) Par minimalité de $|V(G)|$, le graphe $G \setminus \{v\}$ admet une couverture par une forêt F et une forêt de chaîne L . On étend aisément cette couverture à tout le graphe G en ajoutant l'arête vx dans F et l'arête uv dans F (resp. L) si les autres arêtes incidentes à u sont dans L (resp. si une des deux autres arêtes incidente à u est dans F).

□

On procède maintenant à l'étape de déchargement afin de prouver qu'un tel graphe G n'existe pas. La charge initiale de chaque sommet est égale à son degré ($\delta(v) = \deg(v)$). On procède à une étape de déchargement où chaque sommet de degré au moins 4 donne $\frac{1}{3}$ à ses voisins de degré 2.

Cette procédure est telle que chaque sommet $v \in V(G)$ a une charge finale $\delta^*(v) \geq \frac{8}{3}$. On considère différents cas suivant le degré de v :

- $\deg_G(v) = 2$: v a deux voisins de degré au moins 4 (configurations (ii) et (iii)), donc $\delta^*(v) = 2 + 2\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.
- $\deg_G(v) = 3$: v ne participe pas au déchargement, donc $\delta^*(v) = 3 > \frac{8}{3}$.
- $\deg_G(v) = k \geq 4$: v donne au plus $\frac{1}{3}$ à chacun de ses voisins, donc $\delta^*(v) \geq k - k\frac{1}{3} = k\frac{2}{3} \geq \frac{8}{3}$.

Par conservation des charges, le degré moyen maximum de G est donc supérieur ou égale à $\frac{8}{3}$, ce qui est en contradiction avec la définition de G . Le contre-exemple G n'existe donc pas. \square

3.8 Arboricité circulaire

En 1988, Vince [Vin88] a défini un invariant de graphe qui est un raffinement du nombre chromatique. Étant donné un réel r on note C_r le cercle de longueur r . Une **r -coloration circulaire** c d'un graphe G assigne à chaque sommet de G un point du cercle C_r de façon à ce que pour toute arête uv de G le plus petit arc de cercle de C_r reliant $c(u)$ à $c(v)$ soit de longueur au moins 1. On définit le **nombre chromatique circulaire** $\chi_c(G)$ d'un graphe G de la façon suivante :

$$\chi_c(G) = \inf\{r : G \text{ est circulairement } r\text{-coloriable}\}$$

Il est montré dans [Vin88, BH90] que la borne inférieure de la définition est atteinte et que $\chi_c(G) \in \mathbb{Q}$ pour tout graphe fini G . Finalement, cet invariant est bien un raffinement du nombre chromatique puisque pour tout graphe G on a $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$. Cette notion de coloration circulaire a été étendue à d'autres type de colorations tels que les colorations d'arêtes [Mos95] ou le $L(p, q)$ -étiquetage [LZ03]. On se propose maintenant d'étudier une version "circulaire" de l'arboricité.

Une **r -coloration circulaire en forêts** f d'un graphe G assigne à chaque arête de G un point du cercle C_r de façon à ce qu'aucun cycle de G ne soit tel que toutes les arêtes de ce cycle aient leurs images dans un arc de cercle de longueur $l < 1$. On définit l'**arboricité circulaire** $a_c(G)$ d'un graphe G de la façon suivante :

$$a_c(G) = \inf\{r : G \text{ est circulairement } r\text{-coloriable en forêts}\}$$

En utilisant les mêmes méthodes que pour le nombre chromatique circulaire, on peut montrer que la borne inférieure de la définition est atteinte, que $a_c(G) \in \mathbb{Q}$ pour tout graphe fini G et enfin que $a(G) - 1 < a_c(G) \leq a(G)$.

Soit G un graphe tel que $a_c(G) = r$ et f une r -coloration circulaire de G dans C_r . Tout arc A de C_r de longueur $l < 1$ induisant une forêt dans G , au plus $|V(G)| - 1$ arêtes $e \in E(G)$ ont leur image dans cet arc. Ceci implique que $r \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|-1}$. Cette remarque étant vraie pour tout sous-graphe H de G , on a :

$$a_c(G) \geq \Phi(G) \quad (19)$$

en posant $\Phi(G) = \max_{H \subseteq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|-1}$, le maximum étant pris parmi tous les sous-graphes H de G ayant au moins 2 sommets. On conjecture que, comme pour le Théorème de Nash-Williams, ce ratio donne la valeur exacte de $a_c(G)$.

Conjecture 15 *Pour tout graphe G , on a $a_c(G) = \Phi(G)$.*

On a quelques premiers résultats concernant cette conjecture.

Lemme 3.8.1 *Pour tout cycle C_n , avec $n \geq 3$, on a $a_c(C_n) = \Phi(C_n) = \frac{n}{n-1}$.*

Preuve : Étant donné un cycle $C_n = (v_0, \dots, v_{n-1})$ et un cercle \mathcal{C} de longueur $\frac{n}{n-1}$, on définit une $\left(\frac{n}{n-1}\right)$ -coloration circulaire $c : E(C_n) \rightarrow \mathcal{C}$. Soient p_i , avec $0 \leq i < n$, des points de \mathcal{C} tels que pour tout entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$ les points p_i et p_{i+1} (les indices étant des entiers modulo n) soient à distance $\frac{1}{n-1}$ dans \mathcal{C} . La coloration circulaire c est définie par $c(v_i v_{i+1}) = p_i$. En effet, tout arc de \mathcal{C} de longueur $l < 1$ contenant au plus $n-1$ points p_i , le graphe induit par les arête ayant leur image dans cet arc a donc au plus $n-1$ arêtes et ne contient donc pas de cycle. Enfin la relation (19) permet de déduire que l'on a bien $a_c(C_n) = \Phi(C_n)$. \square

On a aussi réduit la famille des graphes pour lesquels il faut prouver cette conjecture.

Lemme 3.8.2 *La Conjecture 15 est vraie si et seulement si elle est vraie pour les graphes équilibrés, c.à.d. les graphes G n'ayant pas de sous-graphe strict $H \subsetneq G$ tel que $\frac{|E(H)|}{|V(H)|-1} = \Phi(G)$.*

Dans ce cas on remarque que $\frac{|E(G)|}{|V(G)|-1} = \Phi(G)$.

Preuve : Soit G un contre-exemple de la Conjecture 15, minimal en $|V(G)|$. On considère le plus petit sous-graphe strict $H \subsetneq G$ tel que $\frac{|E(H)|}{|V(H)|-1} = \Phi(G)$. Le graphe G étant minimal, le graphe H admet une $\Phi(G)$ -coloration circulaire c_H de ses arêtes en forêts. De plus H étant minimum, le graphe H est connexe.

On considère ensuite le graphe G' qui est obtenu à partir du graphe G après contraction de toutes les arêtes $uv \in E(H)$ en un sommet que l'on note $v_H \in V(G')$. Le graphe G' est tel que $\Phi(G') \leq \Phi(G)$. En effet, il ne peut exister un graphe $H' \subseteq G'$ tel que $\frac{|E(H')|}{|V(H')|-1} > \Phi(G)$. Si un tel graphe H' existe, H' n'étant pas sous-graphe de G , alors $v_H \in V(H')$. On considère le sous-graphe X de G contenant les arêtes de H et les arêtes de H' . Ce graphe est tel que $|V(X)| = |V(H)| + |V(H')| - 1$ (le sommet v_H n'existe plus) et tel que $|E(X)| = |E(H)| + |E(H')|$,

Or comme $|E(H)| = \Phi(G)(|V(H)| - 1)$ et $|E(H')| > \Phi(G)(|V(H')| - 1)$, on obtient que $\frac{|E(X)|}{|V(X)|-1} > \Phi(G)$ ce qui est impossible pour un sous-graphe X de G .

Le contre-exemple G étant minimal, comme $\Phi(G') \leq \Phi(G)$, le graphe G' admet une $\Phi(G)$ -coloration circulaire $c_{G'}$ de ses arêtes en forêts. En utilisant c_H et $c_{G'}$, on construit une $\Phi(G)$ -coloration circulaire des arêtes de G en forêts, c . On définit c par $c(e) = c_H(e)$ si $e \in E(H)$ et par $c(e) = c_{G'}(e)$ si $e \in E(G')$. Cette coloration est bien une coloration circulaire des arêtes de G en forêts. En effet, si toutes les arêtes d'un cycle $C \subseteq G$ ont leur image dans un arc de longueur $l < 1$, alors ce cycle n'est pas compris dans H (par définition de c_H). Ce cycle a donc au moins une arête dans $G \setminus H$. Cela implique que ce cycle induit un cycle dans G' , ce qui est impossible par définition de $c_{G'}$. La coloration c est donc bien une $\Phi(G)$ -coloration circulaire de G en forêts. Le contre-exemple minimal G n'a donc pas de sous-graphe strict $H \subsetneq G$ tel que $\frac{|E(H)|}{|V(H)|-1} = \Phi(G)$. \square

Récemment, J. van den Heuvel a prouvé la Conjecture 15 [vdH06]. Il reste cependant des questions concernant la notion d'arboricité circulaire. On peut étendre le concept d'arboricité circulaire à d'autres types d'arboricités. Pour l'**arboricité étoile circulaire** ae_c (resp. l'**arboricité linéaire circulaire** al_c) on rajouterait la contrainte que les forêts induite par les arcs de cercle de longueur $l < 1$ soient des forêts d'étoiles (resp. des forêts de chaînes). On a vu que $ae(G) \leq 2a(G)$, il serait donc intéressant de dire si cette relation s'étend aux arboricités circulaires.

Problème ouvert 7 *A-t-on $ae_c(G) \leq 2a_c(G)$ pour tout graphe G ?*

On propose aussi d'étendre la Conjecture 9 aux arboricités circulaires.

Conjecture 16 *Pour tout graphe G Δ -régulier, on a $al_c(G) = \frac{\Delta+1}{2}$.*

Comme $al_c(G) \leq al(G)$, pour tout entier Δ impaire cette conjecture est équivalente à la Conjecture 9. La Conjecture 16 est donc vraie pour $\Delta = 1, 3$ ou 5 . Il est assez simple de voir que pour tout cycle C_n on a $al_c(C_n) \leq 3/2$. Le Lemme 3.8.1 implique donc que la Conjecture 16 est aussi vraie pour $\Delta = 2$.

Conclusion

Le travail effectué lors de cette thèse porte sur des problèmes de couverture de graphes planaires. Cette problématique est classique en théorie des graphes mais il reste cependant de nombreuses questions non élucidées. Dans cette thèse, nous avons répondu positivement à trois conjectures portant sur les couvertures des graphes planaires.

- (I) La première est une conjecture de Chartrand, Geller et Hedetniemi [CGH71]. Elle dit que les graphes planaires sont couvrables par deux graphes planaires externes. Notre résultat est optimal dans un sens fort : pour tout entier $k > 0$, il existe un entier l tel que le graphe planaire biparti $K_{2,l}$ n'est pas k -couvrable par $2k - 1$ graphes planaires externes.
- (II) La deuxième est une conjecture de Roditty, Shoham et Yuster [RSY01]. Elle dit que les graphes planaires sont couvrables par quatre forêts de chenilles. On a également montré que ce résultat est fin puisque il existe des graphes planaires qui ne sont pas couvrables par une forêt et deux forêts de chenilles.
- (III) La troisième est une conjecture de Balogh, Kochol, Pluhár et Yu [BKPY05]. Dans cet article Balogh *et al.* montrent que les graphes planaires sont couvrables par trois forêts dont une est de degré maximum au plus 8 et ils conjecturent que les graphes planaires sont couvrables par deux forêts et un graphe de degré maximum au plus 4. On a prouvé un résultat un peu plus fort que leur conjecture, puisque l'on a montré que les graphes planaires sont couvrables par trois forêts dont une est de degré maximum au plus 4. Ce résultat est optimal puisque Balogh *et al.* ont montré qu'on ne peut couvrir les graphes planaires,
 - ni avec une forêt et un graphe de degré maximum borné,
 - ni avec deux forêts et un graphe de degré maximum au plus 3.

Pour prouver la première conjecture on s'est inspiré d'une technique de décomposition des triangulations 4-connexes décrite dans [Whi31]. Cette technique est particulièrement intéressante puisqu'elle a récemment permis de répondre à un autre vieux problème. En effet, en utilisant cette technique nous montrons dans [CGO07], avec J. Chalopin et P. Ochem, que tout graphe planaire G admet une représentation dans le plan où chaque élément de $V(G)$ est

une courbe et où les éléments de $E(G)$ sont en bijection avec les intersections de 2 courbes (si les courbes a et b s'intersectent en k points, le graphe G a une arête ab de multiplicité k).

Pour les deux autres conjectures, c'est une nouvelle technique de décomposition des triangulations, l' α -décomposition, qui nous a permis de les prouver de façon plutôt élégante. Nous espérons donc en particulier que cette thèse servira à faire connaître ces outils.

Un autre aspect de cette thèse a été la définition et l'exploration de nouveaux concepts.

- L'arboricité intérieurement d -bornée permet d'unifier différents invariants de graphes. Ceci nous a permis de travailler sur l'arboricité étoile et l'arboricité chenille avec un éclairage nouveau, mais aussi d'explorer les arboricités intérieurement 1-bornée ou bien intérieurement 3-bornée. On a eu de nombreux résultats concernant ces arboricités, notamment des résultats de NP-complétude qui viennent enrichir nos connaissances sur la complexité des problèmes de partition de graphes.
- L'arboricité T -exclue minimum d'un graphe est égale à l'arboricité «classique» de ce graphe. Par contre, cet invariant devient intéressant lorsque l'on considère des familles infinies de graphes. En effet, on a montré que pour au moins trois familles de graphes, les arbres, les 2-arbres et les graphes planaires bipartis, cet invariant est différent de l'arboricité «classique».
- L'arboricité mixte est un terme général qui réunit les couvertures de graphes par des forêts de types variés. Cette notion est intéressante puisque elle permet d'affiner différents résultats d'arboricité.
- Les arboricités circulaires permettent elles-aussi d'affiner les résultats d'arboricité. On savait que pour tout cycle C_n on a $a(C_n) = 2$ et on peut maintenant exprimer le fait qu'un très grand cycle est quasiment un arbre puisque $a^c(C_n) = n/(n - 1)$.

Les conséquences de ces travaux pour d'autres problématiques en théorie des graphes sont diverses.

- On a par exemple des résultats concernant $t(G)$, le nombre de pistes de G . On a montré de deux manières différentes que les graphes planaires ont un nombre de pistes qui est au plus 4. On a aussi montré que cette borne est atteinte, en particulier pour les graphes planaires bipartis. On a également montré qu'il est NP-complet de décider si un graphe planaire G sans triangle a un nombre de pistes inférieur ou égal à 2. Ces résultats répondent à différentes questions de Gyárfás et West [GW95].
- Certains de nos résultats nous ont aussi permis de baisser les bornes supérieures connues de $\mu(\mathcal{F})$ lorsque \mathcal{F} est la famille des graphes planaires ou bien la famille des graphes planaires de maille 8.
- On a aussi répondu à une question de Fiala et Le [FL04] en montrant qu'il est NP-complet de décider si un graphe planaire G vérifie $\chi'_{sub}(G) \leq 2$.

- Soit G_n le plus petit graphe contenant, comme sous-graphes induits, tous les graphes planaires ayant n sommets. La partition des graphes planaires en trois forêts, dont une de degré maximum 4, a permis à N. Bonichon, C. Gavaille et A. Labourel [BGL06] de prouver que $|V(G_n)|$ est borné par $n^3 + O(1)$, améliorant ainsi la précédente borne, $n^3 + 2^{O(\log^* n)}$.
- La preuve de la Conjecture 15, par J. van den Heuvel [vdH06], semble s'étendre aux matroïdes. On peut donc en déduire une nouvelle notion de rang d'un matroïde qui aurait une valeur dans \mathbb{Q} et non-plus simplement dans \mathbb{N} .

Les suites possibles à donner à ces recherches sont très diverses. Il reste par exemple de vieilles conjectures à résoudre. Tout particulièrement la conjecture de Akiyama, Exoo et Harary [AEH80]. Cette conjecture, qui dit que tout graphe Δ -régulier G vérifie $al(G) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$, est toujours ouverte pour $\Delta = 7, 9$ et $\Delta \geq 11$.

Un autre problème intéressant serait de trouver un algorithme linéaire permettant de partager les arêtes d'un graphe planaire en cinq forêts d'étoiles. En étant ambitieux ceci pourrait prendre la forme d'un algorithme linéaire qui colorie les sommets d'un graphe planaire avec cinq couleurs de façon acyclique. La deuxième étape, consistant à transformer cette coloration en partition des arêtes se fait facilement (et en temps linéaire) avec la technique de Hakimi *et al.* [HMS96].

On pourrait aussi chercher d'autres familles \mathcal{F} telles que $U(\mathcal{F}) \neq a(\mathcal{F})$, ou bien définir une version circulaire de $U(\mathcal{F})$, $U^c(\mathcal{F})$, et chercher si l'on a bien $U^c(\mathcal{F}) = a^c(\mathcal{F})$.

Le paramètre de Colin de Verdière $CdV(G)$ [CdV90] caractérise les graphes G qui sont des forêts de chaînes ($CdV(G) \leq 1$), des graphes planaires externes ($CdV(G) \leq 2$) ou bien des graphes planaires ($CdV(G) \leq 3$). Il est intéressant de constater que tout graphe G , tel que $CdV(G) = k \leq 3$, admet une partition en k forêts dont une est de degré maximum au plus $k + 1$. De plus pour tout entier $k \geq 1$, il existe un graphe G de paramètre $CdV(G) = k$ qui n'est pas $(k - 1, k)$ -couvrable. Il semble donc naturel de se demander si tout graphe G admet une partition en $CdV(G)$ forêts dont une est de degré maximum au plus $CdV(G) + 1$. Pour montrer un tel résultat, il serait sans doute fort utile de généraliser l' α -décomposition à toutes les valeurs possible de $CdV(G)$, et non plus seulement se restreindre aux graphes G tels que $CdV(G) = 3$.

La Conjecture 15 étant vraie, on pourrait améliorer les informations présentes dans la colonne $a(\mathcal{P}_g)$ du Tableau 2 en y mettant plutôt les valeurs de $a^c(\mathcal{P}_g)$. De même, on pourrait essayer d'améliorer les résultats présentés dans les autres colonnes du Tableau 2 en considérant pour chaque colonne l'arboricité circulaire correspondante.

Enfin, il serait très intéressant de généraliser la technique utilisée dans le premier chapitre afin qu'elle nous aide à manipuler les graphes représentés sur des surfaces \mathbb{S} autres que le plan. Cela nous permettrait éventuellement de répondre aux Conjectures 5, 6, 7 et 8.

Bibliographie

- [AA89] I. Algor and N. Alon. The star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 75 :11–12, 1989.
- [AEH80] J. Akiyama, G. Exoo, and F. Harary. Covering and packing in graphs. III. Cyclic and acyclic invariants. *Math. Slovaca*, 30(4) :405–417, 1980.
- [AEH81] J. Akiyama, G. Exoo, and F. Harary. Covering and packing in graphs. IV. Linear arboricity. *Networks*, 11(1) :69–72, 1981.
- [AH77] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. I. Discharging. *Illinois J. Math.*, 21(3) :429–490, 1977.
- [AHK77] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable. II. Reducibility. *Illinois J. Math.*, 21(3) :491–567, 1977.
- [Alo88] N. Alon. The linear arboricity of graphs. *Israel J. Math.*, 62(3) :311–325, 1988.
- [BBC⁺04] A. Bassa, J. Burns, J. Campbell, A. Deshpande, J. Farley, M. Halsey, S. Michalakis, P.-O. Persson, P. Pylyavskyy, L. Rademacher, A. Riehl, M. Rios, J. Samuel, B. Tenner, A. Vijayasarathy, L. Zhao, and D.J. Kleitman. Partitioning a planar graph of girth ten into a forest and a matching. *manuscript*, 2004.
- [Ber63] C. Berge. *Théorie des graphes et ses applications*. Deuxième édition. Dunod. Paris, 1963.
- [BFNW02] H. Broersma, F.V. Fomin, J. Nešetřil, and G.J. Woeginger. More about subcolorings. *Computing*, 69(3) :187–203, 2002.
- [BGL06] N. Bonichon, C. Gavaille, and A. Labourel. An efficient adjacency scheme for bounded degree trees and applications. In *Proceedings of the Sixth Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications*, 2006.
- [BH90] J. A. Bondy and P. Hell. A note on the star chromatic number. *J. Graph Theory*, 14(4) :479–482, 1990.
- [BKPY05] J. Balogh, M. Kochol, A. Pluhár, and X. Yu. Covering planar graphs with forests. *J. Combin. Theory Ser. B*, 94(1) :147–158, 2005.

- [BKW99] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. Acyclic colorings of planar graphs with large girth. *J. London Math. Soc.*, 60 :344–352, 1999.
- [BLS99] A. Brandstädt, V.B. Le, and J.P. Spinrad. *Graph classes : a survey*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
- [Bor79] O. Borodin. On acyclic colorings of planar graphs. *Discrete Math.*, 25 :211–236, 1979.
- [BR95] R. Brunet and R.B. Richter. Hamiltonicity of 5-connected toroidal triangulations. *J. Graph Theory*, 20(3) :267–286, 1995.
- [BSV99] P. Boiron, E. Sopena, and L. Vignal. Acyclic improper colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 32(1) :97–107, 1999.
- [Cam03] P.J. Cameron. Research problems from the 18th British Combinatorial Conference. *Discrete Math.*, 266(1-3) :441–451, 2003. The 18th British Combinatorial Conference (Brighton, 2001).
- [CdV90] Y. Colin de Verdière. Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité. *J. Combin. Theory Ser. B*, 50(1) :11–21, 1990.
- [CGH71] G. Chartrand, D. Geller, and S. Hedetniemi. Graphs with forbidden subgraphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 10 :12–41, 1971.
- [CGO07] J. Chalopin, D. Gonçalves, and P. Ochem. Planar graphs are in 1-string. In *Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2007.
- [CH67] G. Chartrand and F. Harary. Planar permutation graphs. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 3 :433–438, 1967.
- [Chu90] F. R. K. Chung. Universal graphs and induced-universal graphs. *J. Graph Theory*, 14(4) :443–454, 1990.
- [CK71] V. Chvátal and J. Komlós. Some combinatorial theorems on monotonicity. *Canad. Math. Bull.*, 14 :151–157, 1971.
- [CLR90] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, and R.L. Rivest. *Introduction to algorithms*. The MIT Electrical Engineering and Computer Science Series. MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [DOSV00] G. Ding, B. Oporowski, D. P. Sanders, and D. Vertigan. Surfaces, tree-width, clique-minors, and partitions. *J. Combin. Theory Ser. B*, 79(2) :221–246, 2000.
- [EF81] P. Erdős and S. Fajtlowicz. On the conjecture of Hajós. *Combinatorica*, 1(2) :141–143, 1981.
- [EL75] P. Erdős and L. Lovász. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. In *Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday)*, Vol. II, pages 609–627. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. North-Holland, Amsterdam, 1975.

- [EMC88] E. S. El-Mallah and C. J. Colbourn. Partitioning the edges of a planar graph into two partial k -trees. *Congr. Numer.*, 66 :69–80, 1988. Nineteenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Baton Rouge, LA, 1988).
- [EP84] H. Enomoto and B. Péroche. The linear arboricity of some regular graphs. *J. Graph Theory*, 8(2) :309–324, 1984.
- [FJLS03] J. Fiala, K. Jansen, V.B. Le, and E. Seidel. Graph subcolorings : Complexity and algorithms. *Discrete Math.*, 16(4) :635–650, 2003.
- [FL04] J. Fiala and V.B. Le. The subchromatic index of graphs. *KAM Series*, 655, 2004.
- [GH03] J. Gimbel and C. Hartman. Subcolorings and the subchromatic number of a graph. *Discrete Math.*, 272(2-3) :139–154, 2003.
- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
- [GJS76] M.R. Garey, D.S. Johnson, and L.J. Stockmeyer. Some simplified np-complete graph problems. *Theor. Comput. Sci.*, 1(3) :237–267, 1976.
- [GKT00] G. Gutin, A. V. Kostochka, and B. Toft. On the Hajós number of graphs. *Discrete Math.*, 213(1-3) :153–161, 2000. Selected topics in discrete mathematics (Warsaw, 1996).
- [GN90a] R. K. Guy and R. J. Nowakowski. The outerthickness & outercoarseness of graphs. I. The complete graph & the n -cube. In *Topics in combinatorics and graph theory (Oberwolfach, 1990)*, pages 297–310. Physica, Heidelberg, 1990.
- [GN90b] Richard K. Guy and Richard J. Nowakowski. The outerthickness & outercoarseness of graphs. II. The complete bipartite graph. In *Contemporary methods in graph theory*, pages 313–322. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1990.
- [GO05] D. Gonçalves and P. Ochem. On some arboricities in planar graphs. In *Proceedings of ICGT*, 2005.
- [Gon05a] D. Gonçalves. Covering planar graphs with three forests, one being of maximum degree four. *submitted*, 2005.
- [Gon05b] D. Gonçalves. Edge-partition of planar graphs into two outerplanar graphs. In *Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 504–512, 2005.
- [Gon06] D. Gonçalves. On the caterpillar arboricity of planar graphs. *Discrete Math.*, to appear in 2006.
- [Gul86] F. Guldan. The linear arboricity of 10-regular graphs. *Math. Slovaca*, 36(3) :225–228, 1986.

- [GW95] A. Gyárfás and D.B. West. Multitrack interval graphs. *Congr. Numer.*, 139 :109–116, 1995.
- [GZ99] D. J. Guan and X. Zhu. Game chromatic number of outerplanar graphs. *J. Graph Theory*, 30(1) :67–70, 1999.
- [Had43] H. Hadwiger. Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 88 :133–142, 1943.
- [Hea91] L.S. Heath. Edge coloring planar graphs with two outerplanar subgraphs. In *Proceedings of the Second Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (San Francisco, CA, 1991)*, pages 195–202, New York, 1991. ACM.
- [Hee69] H. Heesch. *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem*, volume 810/810 of *B. I. Hochschulschriften*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969.
- [HHL⁺02] W. He, X. Hou, K.-W. Lih, J. Shao, W. Wang, and X. Zhu. Edge-partitions of planar graphs and their game coloring numbers. *J. Graph Theory*, 41(4) :307–317, 2002.
- [Hil82] A. J. W. Hilton. Canonical edge-colourings of locally finite graphs. *Combinatorica*, 2(1) :37–51, 1982.
- [HMS96] S.L. Hakimi, J. Mitchem, and E. Schmeichel. Star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 149 :93–98, 1996.
- [Hob89] A.M. Hobbs. Computing edge-toughness and fractional arboricity. *Contemp. Math.*, 89 :89–106, 1989.
- [HT94] D. Hanson and B. Toft. The (m, n) -conjecture is false. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 11 :59–66, 1994.
- [HU79] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1979. Addison-Wesley Series in Computer Science.
- [Jør89] L. Jørgensen. Some probabilistic and extremal results on subdivisions and odd subdivisions of graphs. *J. Graph Theory*, 13(1) :75–85, 1989.
- [JT95] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph coloring problems*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., New York, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- [Ked96] K. S. Kedlaya. Outerplanar partitions of planar graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 67(2) :238–248, 1996.
- [KM76] A.V. Kostochka and L.S. Mel’nikov. Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings. *Discrete Math.*, 14 :403–406, 1976.
- [Kur30] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 5 :271–283, 1930.

- [KW99] A.V. Kostochka and D.B. West. Every outerplanar graph is the union of two interval graphs. In *Proceedings of the Thirtieth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, FL, 1999)*, volume 139, pages 5–8, 1999.
- [LZ03] D. Liu and X. Zhu. Circulant distant two labeling and circular chromatic number. *Ars Combin.*, 69 :177–183, 2003.
- [Mos95] D. Moser. The star chromatic number of line graphs. In *Graph theory, combinatorics, and algorithms, Vol. 1, 2 (Kalamazoo, MI, 1992)*, Wiley-Intersci. Publ., pages 819–823. Wiley, New York, 1995.
- [MOS98] P. Mutzel, T. Odenthal, and M. Scharbrodt. The thickness of graphs : a survey. *Graphs Combin.*, 14(1) :59–73, 1998.
- [MT01] B. Mohar and C. Thomassen. *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001.
- [NW61] C.St.J.A. Nash-Williams. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J. London Math. Soc.*, 36 :445–450, 1961.
- [NW64] C. St. J. A. Nash-Williams. Decomposition of finite graphs into forests. *J. London Math. Soc.*, 39 :12, 1964.
- [Och05] P. Ochem. Negative results on acyclic improper colorings. In Stefan Felsner, editor, *2005 European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb '05)*, volume AE of *DMTCS Proceedings*, pages 357–362. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2005.
- [Ric86] D. Richards. Finding short cycles in planar graphs using separators. *J. Algorithms*, 7(3) :382–394, 1986.
- [RST93] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Hadwiger’s conjecture for K_6 -free graphs. *Combinatorica*, 13(3) :279–361, 1993.
- [RSY01] Y. Roditty, B. Shoham, and R. Yuster. Monotone paths in edge-ordered sparse graphs. *Discrete Math.*, 226 :411–417, 2001.
- [She96] T.C. Shermer. On rectangle visibility graphs iii. external visibility and complexity. In *Proceedings of CCCG '96*, pages 234–239, 1996.
- [SW83] E.R. Scheinerman and D.B. West. The interval number of a planar graph - three intervals suffice. *J. Combin. Theory Ser. B*, 35 :224–239, 1983.
- [Tho95] C. Thomassen. Decomposing a planar graph into degenerate graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 65(2) :305–314, 1995.
- [Tom82] P. Tomasta. Note on linear arboricity. *Math. Slovaca*, 32(3) :239–242, 1982.
- [Tru91] M. Truszczynski. Decompositions of graphs into forests with bounded maximum degree. *Discrete Math.*, 98(3) :207–222, 1991.

- [Tut61] W. T. Tutte. On the problem of decomposing a graph into n connected factors. *J. London Math. Soc.*, 36 :221–230, 1961.
- [vdH06] J. van den Heuvel. Circular arboricity of graphs. In *Proceedings of the Sixth Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications*, 2006.
- [Vin88] A. Vince. Star chromatic number. *J. Graph Theory*, 12(4) :551–559, 1988.
- [Wag37] K. Wagner. über eine eigenschaft der ebenen komplexe. *Math. Ann.*, 114 :570–590, 1937.
- [Whi31] H. Whitney. A theorem on graphs. *Ann. of Math. (2)*, 32(2) :378–390, 1931.
- [Woo90] D. Woodall. Improper colourings of graphs. In *Graph colourings (Milton Keynes, 1988)*, volume 218 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 45–63. Longman Sci. Tech., Harlow, 1990.