

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

PAR **Matthieu GENDULPHE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

**PAYSAGE SYSTOLIQUE DES SURFACES
HYPERBOLIQUES COMPACTES DE PETIT GENRE**

Soutenance le 11 Juillet 2006 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux.

Après avis de :

P. BUSER	Professeur, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne	Rapporteur
R. KELLERHALS	Professeur, Université de Fribourg	Rapporteur

Devant la commission d'examen composée de :

C. BAVARD	Professeur, Université Bordeaux I	Directeur de thèse
A. HENAUT	Professeur, Université Bordeaux I	Examineur
R. KELLERHALS	Professeur, Université de Fribourg	Rapporteur
G. MCSHANE	Maître de Conférences, Université Toulouse III	Examineur
R. SILHOL	Professeur, Université Montpellier II	Examineur

*Paysage systolique des surfaces hyperboliques
compactes de petit genre*

Matthieu Raphaël Gendulphé

Remerciements

D'une foule de petits souvenirs simples et attachants je n'ai réussi à faire qu'un texte convenu, j'espère néanmoins que chacun y verra un témoignage sincère de ma gratitude et de mon amitié.

Je souhaiterais exprimer ma reconnaissance à Christophe Bavard ; il accepta de diriger ma thèse sans me connaître, me consacra de très nombreux vendredi après-midi (entre autres moments), et m'encadra avec une compétence extrême tout en faisant preuve de beaucoup de sympathie.

Je voudrais remercier les membres de mon jury et les rapporteurs de ma thèse. Je remercie Ruth Kellerhals qui rapporta avec soin mes travaux, présida avec élégance mon jury et me permit de faire un petit tour en Suisse. Je remercie Alain Hénaut pour son excursion dans le monde hyperbolique le temps de ma soutenance, et pour l'intérêt qu'il porte aux jeunes géomètres (espèce en voie de disparition à Bordeaux). Je suis heureux que Greg McSchane et Robert Silhol aient accepté de participer à ma soutenance, et je les en remercie sincèrement. Je remercie chaleureusement Peter Buser qui accepta la tâche ingrate de rapporteur. Je remercie aussi Hugo Akrouit pour avoir assisté avec amitié à ma soutenance.

Je suis très fier, et ce pendant encore quelques mois, d'être membre de l'équipe Géométrie du LaBAG. La compagnie des irréductibles Alain et Alain, de Philippe Thieullen, d'Ahmed Sebbar, et du petit dernier Pierre Mounoud a été pour moi très stimulante, je suis sensible à toutes leurs marques de sympathie. Je tiens à exprimer ma gratitude envers Eric Charpentier, je lui promets d'achever ma rédaction de la leçon de Mathématiques d'Aujourd'hui de Maxim Kontsevitch.

Je n'oublie pas les copains ! Ceux qui ont coloré ma vie dans le bureau 154 : Éric Balandraud et Abdililah Bouali. Ceux qui sont déjà partis : James Silipo et Nabil Aboudi, Cyril Agrafeuill, Sylvain Delpéché, Séb Dubernet et Guillaume Bordes, Mourad Abouzaid. Ceux qui sont encore là : Florent Jouve, Oswaldo Velásquez Castañón et Réda Choukrallah. Ceux qui m'ont fait des misères au foot : Élie Nasr, Pierre Moreau, Étienne Matheron et Fred Bayart. Celles qui ont donné une petite touche de féminité au très masculin Institut de Mathématiques : Karen, Sandra, Ludivine, Montse et Magali.

Je pense aussi à tous mes anciens camarades d'agrégation de Rennes, et plus particulièrement à Karel Pravda-Starov, Vincent Beck, Gabriel Peyré, Philippe Michel, Jérôme Malick, Jean Starynckevitch et Stef Graillet.

J'ose croire que ceux qui me suivent depuis quasiment mes débuts en Mathématiques sont fiers de moi, je pense notamment à Antoine, à Christian et Bénédicte, et à Flo et Fab qui sont venus me voir.

Je voulais aussi écrire une petite ligne sur mes étudiants : Christelle, *Julia*, Maÿlis, Pierre... je garderai de tous un merveilleux petit souvenir.

Je remercie toute ma famille, et plus particulièrement mes deux frères, pour leurs marques de soutien et d'affection. Enfin, j'ai une reconnaissance infini envers mes parents.

Introduction générale

Nous allons nous intéresser à certains invariants métriques de type systole dans le cas des surfaces hyperboliques compactes de petit genre.

La *systole* d'une variété riemannienne compacte est définie comme la longueur minimale d'une courbe non contractile et non homotope à un bord, par abus de langage on emploie le même mot pour les courbes réalisant cette longueur.

Etant fixée une variété compacte, le problème principal concernant la systole consiste en la détermination de la borne supérieure de la quantité $\frac{\text{sys}(m)^n}{\text{Vol}(m)}$, où m parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes sur la variété et n désigne la dimension de cette dernière.

Dans le cas des surfaces compactes de caractéristique négative il est naturel de regarder le même problème mais en faisant varier m parmi les métriques hyperboliques. D'après le théorème de Gauss-Bonnet cela revient à déterminer la borne supérieure de la systole sur l'espace des métriques hyperboliques ou encore sur l'espace de Teichmüller. Depuis l'article de David Mumford [Mum71], nous savons que cette borne est en fait un maximum.

La systole des surfaces de Riemann de genre $g \geq 2$ (*i.e.* des surfaces hyperboliques fermées orientables) est un objet bien connu depuis les travaux [Sch93] et [Bav97] de Paul Schmutz Schaller et Christophe Bavard. Une théorie générale basée sur l'analogie avec l'invariant d'Hermite des réseaux euclidiens a été développée, et l'on retrouve dans ce cadre les notions classiques d'extrémalité, de perfection, et d'eutaxie, ainsi qu'un strict analogue du théorème de Voronoï :

Une surface de Riemann est extrême si et seulement si elle est parfaite et eutactique.

Mais, en dépit de ces avancées, seule la constante systolique en genre 2 est connue.

Systole des surfaces non orientables

Les deux premières années de cette thèse furent consacrées à l'étude des surfaces hyperboliques compactes non orientables de caractéristique -1, c'est-à-dire au plan projectif à deux bords, à la bouteille de Klein à un bord et à la somme connexe de trois plans projectifs.

L'objectif principal était la détermination des maxima de la systole. Ceci nécessita dans un premier temps la recherche de propriétés géométriques (chapitres 2 et 3). Passé cette étape, le calcul des bornes optimales ne présentait plus de difficultés majeures, c'est pourquoi le point de mire devint la compréhension globale de la systole vue comme fonction sur l'espace de Teichmüller (chapitres 4 et 5).

Géométrie et Topologie. L'idée est de récupérer l'involution hyperelliptique si utile en genre 2 orientable. Nous démontrons l'existence de cette involution et la caractérisons géométriquement par son action sur les géodésiques fermées simples (à la manière de [HS89]). Ceci fait, nous classons les géodésiques fermées simples des surfaces de caractéristique -1, en particulier nous remarquons une classe d'homotopie libre fixe par tout homéomorphisme (à inverse près) dans la surface non orientable de genre 3.

Espaces de Teichmüller et groupes modulaires. La longueur de la géodésique appartenant à cette classe d'homotopie est un invariant métrique, les lignes de niveau de la fonction associée forment un feuilletage de l'espace de Teichmüller des surfaces non orientables de genre 3 par des Teichmüller de tores à un bord. Cette observation simplifie les raisonnements, elle permet la construction d'un domaine fondamental ainsi que la description de l'action du groupe modulaire. Ceci aboutit à une présentation de chacun des groupes modulaires des surfaces de caractéristique -1, certaines étaient déjà connues ([BC72], [Kor02]).

Systole. Revenons à la systole. Une fois accumulées ces informations, nous décomposons les domaines fondamentaux en cellules adaptées à la systole, c'est-à-dire telles que l'ensemble des géodésiques systoles ne varie pas à l'intérieur d'une même cellule. Il est alors facile de déterminer les points critiques pour la systole et d'en déduire ses maxima. Nous profitons aussi de cette décomposition pour étudier d'autres invariants métriques (chapitre 6). Voici un quelques-uns des résultats obtenus :

THÉORÈME. *Nous avons les inégalités optimales suivantes (dans chaque énoncé s désigne la systole de la surface concernée) :*

– soit X une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1, alors

$$\cosh(s) \leq \frac{5 + \sqrt{17}}{2} ;$$

– soit Y une bouteille de Klein hyperbolique à un bord de longueur b_1 , alors

$$\cosh\left(\frac{s}{4}\right) \leq X_0$$

où $X_0 > 1$ est racine de l'équation $X^3 - X = \cosh(b_1/4)/4$;

– soit Z un plan projectif hyperbolique à deux bords de longueurs b_1, b_2 , alors

$$\cosh(s) \leq \cosh\left(\frac{b_1}{2}\right) + \cosh\left(\frac{b_2}{2}\right) + 1 ;$$

– soit \mathbb{T} un tore hyperbolique à un bord de longueur b_1 , alors

$$\cosh\left(\frac{s}{2}\right) \leq \cosh\left(\frac{b_1}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

La dernière inégalité, valable dans le cas du tore hyperbolique à un bord, était déjà connue (voir [Sch93] ou plus récemment [Par04]). Précisons que nous déterminons toutes les surfaces réalisant les cas d'égalité.

Constante de Bers en genre 2

On appelle *partition* une famille de géodésiques fermées simples et disjointes partageant une surface de Riemann en pantalons. Depuis l'article [Ber74] de Lipman Bers, on sait qu'il existe une constante $B(g)$, appelée *constante de Bers*, telle que toute surface de Riemann de genre g possède une partition dont les géodésiques sont de longueur inférieure à $B(g)$.

Dans [Sch93] Schmutz Schaller généralise ainsi la systole : considérant les familles formées de k géodésiques fermées simples et disjointes, il associe à chacune d'elles une fonction longueur correspondant en tout point à la longueur de sa plus grande géodésique, il introduit alors la *k-systole* comme minimum de ces fonctions longueur. La constante de Bers apparaît en tant que borne supérieure de la $3g$ -3-systole.

A ce jour aucune constante $B(g)$ n'est connue. Si Schmutz Schaller ne détermina pas $B(2)$, il exhiba en revanche deux maxima locaux de la 3-systole et conjectura que ce sont les seuls.

Graphe de contiguïté. Afin de déterminer $B(2)$, nous introduisons un nouvel outil rendant compte de la répartition des points de Weierstrass sur une surface de Riemann hyperelliptique (chapitre 7). Celui-ci prend la forme d'un graphe géodésique, obtenu en quotientant par l'involution hyperelliptique l'ensemble des géodésiques réalisant la distance entre un point de Weierstrass et l'ensemble des points de Weierstrass restant. Lorsque la 3-systole est «grande» ce graphe vérifie une certaine configuration qui permet de majorer la 3-systole par la systole d'une famille particulière de géodésiques (chapitre 9).

Détermination des maxima et de $B(2)$. La détermination des maxima de cette nouvelle fonction systole fait naturellement apparaître les deux surfaces déjà découvertes par Schmutz Schaller, ainsi qu'une nouvelle surface maximale pour la 3-systole (chapitre 10). Nous montrons que la constante de Bers est réalisée par le plus grand de ces trois maxima.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction générale	5
Systole des surfaces non orientables	5
Constante de Bers en genre 2	7
Chapitre 1. Généralités	11
1.1. Petit panorama systolique	11
1.2. Systole et invariant d’Hermite	12
1.3. Quelques rappels sur la géométrie des surfaces hyperelliptiques	13
partie 1. Paysage systolique en caractéristique -1	17
Introduction	18
Conventions	18
Chapitre 2. Topologie et géométrie des surfaces de caractéristique -1	21
2.1. Ovale d’une surface $_{-1}$	21
2.2. Involution hyperelliptique	22
2.3. Géodésiques	24
2.4. Dualité	24
2.5. Deux exemples de surface $_{-1}$	26
2.6. La bouteille de Klein à un bord et le plan projectif à deux bords	26
2.7. Commentaires	27
Chapitre 3. Actions de groupes d’automorphismes	29
3.1. Action par involution	29
3.2. Action de D_4	30
3.3. Action de D_6	31
Chapitre 4. Espaces de Teichmüller et systole des surfaces $_{-1}$	33
4.1. Définition	33
4.2. Paramétrisations de \mathcal{T}_3^-	34
4.3. Générateurs du groupe modulaire	35
4.4. Domaine fondamental	35
4.5. Décomposition cellulaire	38
4.6. Points eutactiques, parfaits et extrêmes	40
Chapitre 5. Cas des surfaces à bords	43
5.1. Espaces de Teichmüller des surfaces à bords	43
5.2. Le tore à un bord	45

5.3. La bouteille de Klein à bord	46
5.4. Le plan projectif à deux bords	48
Chapitre 6. Autres invariants métriques	51
6.1. La systole orientable	51
6.2. La systole non orientable	52
6.3. La 2-systole	53
6.4. La 3-systole	54
partie 2. Constante de Bers en genre 2	55
Introduction	56
Systole et k -systole	56
Plan de la démonstration	57
Conventions	58
Chapitre 7. Graphe de contiguïté	59
7.1. Définitions	59
7.2. Graphe de contiguïté et minoration de la 3-systole en genre 2	61
Chapitre 8. Géométrie-Topologie associée à une géodésique séparante	65
8.1. Géodésique séparante engendrée par deux non séparantes	65
8.2. Correspondance induite par une géodésique séparante	66
8.3. Relation entre les longueurs	67
Chapitre 9. Majorations de la longueur des arêtes de $G_{cont}(X)$	69
9.1. Trois majorations connues	69
9.2. Majoration du twist	70
9.3. Majoration de la longueur des arêtes de $G_{cont}(X)$	70
Chapitre 10. Majoration de la 3-systole	75
10.1. Deux lemmes techniques	76
10.2. Complément à la Proposition 7.2	77
10.3. Majoration de la 3-systole par la systole de la famille $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$	78
Chapitre 11. Existence et détermination d'un maximum global	81
11.1. Existence	81
11.2. Détermination	81
11.3. Commentaire	88
Bibliographie	89

Chapitre 1

Généralités

1.1. Petit panorama systolique

1.1.1. Cadre riemannien. La *systole* d'une variété riemannienne compacte (M, m) est définie comme la longueur minimale d'une courbe non contractile et non homotope à un bord, par abus de langage on emploie le même mot pour les courbes réalisant cette longueur.

D'une manière générale, l'intérêt de la systole réside en la recherche d'inégalités universelles, dites *isosystoliques*, s'écrivant sous la forme :

$$\text{sys}^n(m) \leq c_M \text{Vol}(m),$$

où n désigne la dimension de la variété et c_M une constante ne dépendant que de M . L'exploration de ce sujet débuta de façon spectaculaire en 1983 avec la parution des travaux de M. Gromov. Celui-ci prouva l'existence d'une constante c_M pour une large classe de variétés, et établit aussi des inégalités isosystoliques pour les surfaces compactes.

La détermination de constantes c_M optimales et la description des métriques les réalisant reste d'actualité, en dépit d'une pléthore de publications seul trois cas sont connus :

- le tore de dimension deux (C. Loewner 1949), la métrique extrémale est celle du tore plat équilatéral ;
- le plan projectif réel (P. Pu 1952), le cas d'égalité est réalisé par la métrique ronde ;
- et la bouteille de Klein (C. Bavard 1986), la borne étant atteinte pour une bouteille de Klein singulière, obtenue en recollant suivant leurs bords deux copies d'un ruban de Möbius muni d'une métrique ronde.

Pour plus de détails concernant la systole des variétés riemanniennes compactes on pourra se reporter aux articles [Ber93] ou [CK03].

1.1.2. Systole des surfaces de Riemann. Les surfaces de Riemann de caractéristique négative s'apprêtent spontanément, *via* leur revêtement universel, d'une métrique de courbure constante égale à -1. Dès lors, le problème naturel consiste en la recherche de constantes systoliques optimales pour cette classe de métriques.

En 1993, Paul Schmutz Schaller ([Sch93]) présente une vision novatrice de ce problème : la systole devient une fonction continue sur l'espace de Teichmüller invariante sous l'action du groupe modulaire, ses maxima locaux sont en nombre fini modulo cette action, et l'un d'eux réalise la borne supérieure de la systole

([Mum71]). Tirant profit de la convexité des fonctions longueur des géodésiques, Schmutz Schaller caractérise « à la Voronoï » ces maxima, et dans la foulée tente de les déterminer.

La surface de Bolza se révèle l'unique maximum local de la systole en genre 2, cela se démontre en combinant deux techniques : on découpe d'abord une géodésique afin d'appliquer des inégalités systoliques de surfaces à bords, on examine ensuite certaines configurations de courbes géodésiques.

En genre 3, Schmutz Schaller a probablement exhibé les seules surfaces maximales : la quartique de Klein, la courbe de Wimann exceptionnelle, et une surface octaédrale notée $T(x|y)$. En genre plus grand, principalement 4, 5 et 6, Alexandre Casamayou-Boucau ([CB05]), Ursula Hamenstädt ([Ham01]), et toujours Paul Schmutz Schaller ont mis au jour différents exemples de surfaces maximales : des surfaces de triangle ou possédant un gros groupes d'automorphismes. Le maximum global de la systole n'est toutefois connu qu'en genre 2.

En 1997, Christophe Bavard élabore, par analogie avec l'invariant d'Hermite des réseaux, une théorie générale ([Bav97]) unifiant dans un même cadre géométrique l'invariant d'Hermite des réseaux, l'invariant d'Hermite des variétés abéliennes principalement polarisées, et la systole des surfaces de Riemann. Les notions de perfection et d'eutaxie y sont étendues, et redéfinies en termes de gradients des fonctions longueur. Le résultat principal est un analogue du célèbre théorème de Voronoï caractérisant les points extrêmes de ces invariants.

Plus récemment, Hugo Akrouit (§ 1.2.3 et [Akr03]) a étudié les singularités des systoles généralisées, et Bavard ([Bav05b]) établit des propriétés de finitude.

1.2. Systole et invariant d'Hermite

Dans [Bav97] la systole est définie comme minimum des fonctions longueurs des géodésiques, en tant que telle elle est continue sur l'espace de Teichmüller et invariante sous l'action du groupe modulaire.

1.2.1. Espaces de Teichmüller et groupes modulaires. Rappelons que \mathcal{T}_g , l'espace de Teichmüller des surfaces de Riemann de genre g , est formé des classes de surfaces de Riemann marquées. On marque une surface de Riemann par une base de son groupe fondamental, et deux surfaces marquées sont équivalentes s'il existe un biholomorphisme entre ces surfaces préservant le marquage (voir [IT92]).

Cet espace possède une structure de variété analytique complexe de dimension $3g - 3$, ainsi qu'une métrique kälhérienne de courbure négative (dite de Weil-Petersson). Sur \mathcal{T}_g agit le groupe des homéotopies, son quotient par le sous-groupe des éléments agissant trivialement est le *groupe modulaire* Mod_g . L'action de Mod_g s'effectue par isométries pour la métrique de Weil-Petersson, et le quotient \mathcal{T}_g/Mod_g s'identifie à l'espace des modules.

1.2.2. Perfection, eutaxie et théorème de Voronoï. Considérons M un point de \mathcal{T}_g , et notons S l'ensemble des systoles de la surface sous-jacente. Le point M est dit *eutactique* si le vecteur nul de l'espace tangent $T_M\mathcal{T}_g$ appartient à l'intérieur affine de l'enveloppe convexe des gradients $(\nabla l_s(M))_{s \in S}$, et *parfait* si ces gradients engendrent affinement l'espace tangent. Ces propriétés étant invariantes sous l'action du groupe modulaire, on peut parler de surfaces eutactiques, parfaites ; d'après [Bav05b] et [Akr03] celles-ci sont en nombre fini.

Ces notions coïncident avec celles définies par Voronoï dans le cas des réseaux euclidiens, et l'on retrouve l'analogie exact de son célèbre théorème :

Une surface de Riemann est extrême si et seulement si elle est parfaite et eutactique.

où *extrême* est synonyme de maximale. Remarquons au passage qu'une surface parfaite, *a fortiori* extrême, possède au moins $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}_g) + 1 = 6g - 5$ systoles.

1.2.3. Singularités topologiques de la systole. Lors de sa thèse Akrouit montra que la systole est une fonction de Morse topologique dont les points de Morse d'indice r sont les points eutactiques de rang r . Il établit aussi une formule d'Euler ([Akr03]) identique à celle déjà connue dans le cas des réseaux euclidiens :

$$\chi(\text{Mod}_g) = (-1)^{\dim(\mathcal{T}_g)} \sum_{M \in \mathcal{E}} \frac{(-1)^{\text{ind}(M)}}{\text{Stab}(M)}$$

où \mathcal{E} est un système de représentants des points eutactiques et $\text{Stab}(M)$ le stabilisateur de M dans Mod_g .

1.3. Quelques rappels sur la géométrie des surfaces hyperelliptiques

Tout au long de cette thèse nous n'étudierons que des surfaces hyperelliptiques. Ces surfaces sont soumises à des contraintes géométriques bien particulières qui facilitent leur appréhension. Dans le cas des surfaces de Riemann de genre 2 par exemple, nous avons la dichotomie suivante : les géodésiques fermées simples non séparantes passent par deux points de Weierstrass, tandis que les géodésiques fermées simples séparantes ne passent par aucun point de Weierstrass ([HS89]). Nous verrons au chapitre 2 que les géodésiques fermées simples des surfaces hyperboliques fermées de caractéristique -1 se classent d'une façon similaire.

Nous allons très brièvement présenter les surfaces hyperelliptiques dans le cadre des surfaces de Riemann. Nous adopterons successivement trois points de vue : le point de vue analytique (structure analytique complexe), le point de vue algébrique (courbes planes), et le point de vue métrique (surface hyperbolique). Nous reprenons très largement la présentation d'Eric Reyssat dans [Rey89], et renvoyons à cet ouvrage pour les démonstrations.

1.3.1. Point de vue analytique.

DÉFINITION. Une surface de Riemann S est dite *hyperelliptique* si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- i) il existe un revêtement ramifié $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré 2,

- ii) il existe un diviseur D positif de degré 2 tel que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(D)) \geq 2$, où $\mathcal{L}(D)$ est l'espace vectoriel formé de l'application identiquement nulle et des fonctions méromorphes f vérifiant $(f) + D \geq 0$.

Par la formule d'Hurwitz, le nombre de points de ramification du revêtement $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ est nécessairement $2g + 2$, où g désigne le genre de S .

Toutes les surfaces de Riemann de genre inférieur ou égal à 2 sont hyperelliptiques. Pour la sphère et les tores nous pouvons facilement exhiber des morphismes de degré 2 : $z \mapsto z^2$ pour la sphère, la fonction \wp de Weierstrass pour les tores. En genre 2 par contre, le résultat découle du théorème de Riemann-Roch.

1.3.2. Point de vue « algébrique ».

THÉORÈME. Soit $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un revêtement ramifié de degré 2, et z_1, \dots, z_{2g+2} les points de ramification (vus sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$). Alors S est la surface de Riemann associée à la courbe plane d'équation

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - z_i)$$

(seulement $2g+1$ termes si un z_i vaut ∞). Réciproquement, la surface de Riemann associée à une courbe d'équation $y^2 = \prod_1^n (x - z_i)$ ($z_i \in \mathbb{C}$ distincts) est hyperelliptique de genre $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. En particulier il existe des courbes hyperelliptiques de chaque genre.

Il apparaît que les surfaces hyperelliptiques de genre g sont paramétrées par $2g - 1$ coordonnées complexes, car trois z_i parmi les $2g + 2$ peuvent être fixés par action d'une homographie sur la sphère. L'espace des modules des surfaces hyperelliptiques de genre g est donc de dimension $2g - 1$ complexe, contre $3g - 3$ pour l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre g . Nous comprenons pourquoi l'étude d'invariants métriques dans le cas hyperelliptique suscite peu d'intérêt, en dehors du genre 2.

COROLLAIRE. Le morphisme $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré 2 est unique à automorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ près si $g \geq 2$. En particulier ses points de ramification sur S sont bien définis.

Les surfaces hyperelliptiques se caractérisent par l'existence d'une involution hyperelliptique :

THÉORÈME. Une surface de Riemann S est hyperelliptique si et seulement s'il existe une involution conforme ι_S sur S fixant $2g + 2$ points exactement.

DÉFINITION. L'involution ι_S s'appelle l'involution hyperelliptique de S , et ses points fixes les points de Weierstrass de S .

Vis à vis du revêtement $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, l'involution correspond à l'échange des feuillettes, et les points de Weierstrass aux points de ramification. Si nous regardons S comme une courbe plane d'équation $y^2 = \prod_1^n (x - z_i)$ l'involution hyperelliptique est donnée par $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

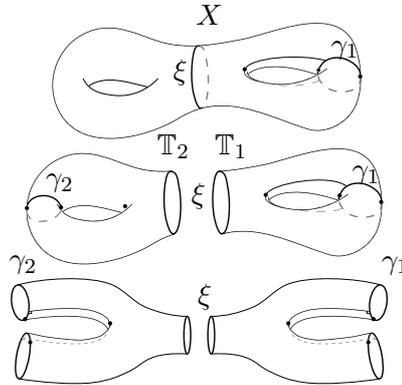
Par unicité du morphisme $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION. *Soit S une surface hyperelliptique de genre supérieur ou égal à 2, l'involution hyperelliptique est unique et appartient au centre du groupe des automorphismes de S .*

Enfin, voici une caractérisation pratique de l'involution hyperelliptique :

COROLLAIRE. *Soit S une surface hyperelliptique de genre supérieur ou égal à 2, S admet un unique automorphisme distinct de l'identité fixant au moins 5 points, c'est l'involution hyperelliptique.*

1.3.3. Point de vue métrique en genre 2. Soit X une surface de Riemann hyperelliptique de genre 2 munie de sa métrique hyperbolique de *Poincaré*. Considérons ξ une géodésique fermée simple séparante de X . En découpant ξ nous obtenons deux tores à un bord hyperboliques : \mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 . Dans un de ces tores, disons \mathbb{T}_1 , découpons à nouveau une géodésique fermée simple γ_1 ; le tore \mathbb{T}_1 se transforme alors en un pantalon hyperbolique avec deux bords de même longueur, ceux correspondant à γ_1 . Nous revenons au tore \mathbb{T}_1 à partir du pantalon en identifiant les deux bords de même longueur suivant un twist convenable.



Le pantalon admet une involution directe échangeant les deux bords isométriques et fixant le troisième. Cette involution commute avec l'identification des bords et induit une involution sur le tore \mathbb{T}_1 . Vue sur le pantalon cette involution fixe un unique point : le milieu de la perpendiculaire commune aux bords identifiés à γ_1 . En revanche, sur le tore \mathbb{T}_1 elle en fixe trois puisqu'elle agit sur γ_1 en renversant l'orientation.

Le tore \mathbb{T}_2 admet une involution semblable à celle de \mathbb{T}_1 , et les deux involutions agissent par rotation d'angle π sur les bords $\partial\mathbb{T}_1$, $\partial\mathbb{T}_2$. Ainsi elles passent au quotient quel que soit le coefficient de twist selon ξ . L'involution induite fixe trois points dans chacun des tores et donc 6 dans X , vu le corollaire précédent cette involution est l'involution hyperelliptique.

Par unicité de l'involution hyperelliptique, il est clair que cette construction ne dépend pas du choix des géodésiques ξ , γ_1 et γ_2 , nous en déduisons la proposition suivante :

PROPOSITION. *L'involution hyperelliptique en genre 2 stabilise toutes les géodésiques fermées simples. De plus, les géodésiques fermées simples non séparantes passent toutes par deux points de Weierstrass, tandis que les géodésiques fermées simples séparantes ne passent par aucun point de Weierstrass.*

<i>Surfaces</i>	c_M	<i>optimale</i>	<i>auteur</i>	
Tore \mathbb{T}^2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	oui	C. Loewner	1949
Plan projectif $\mathbb{R}P^2$	$\frac{\pi}{2}$	oui	P. Pu	1952
Bouteille de Klein $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$	$\frac{\pi}{2^{3/2}}$	oui	C. Bavard	1986
Surface orientable de genre 2	$\frac{\sqrt{2+1}}{3}$	non	M.G. Katz, S. Sabourau	2005
Surface orientable de genre 3	$\frac{8}{7\sqrt{3}}$	peut-être	E. Calabi	1996
Surface orientable de genre 4	$\frac{9\sqrt{7}}{40}$	non	E. Calabi	
Surface de genre g	$\frac{\ln(g)^2}{\pi g}$		M. Gromov	1993

TAB. 1. Quelques constantes systoliques

<i>Surfaces maximales</i>	<i>genre</i>	$\cosh(sys/2)$	<i>globale</i>	<i>références</i>
Surface de Bolza	2	$1 + \sqrt{2} \approx 2,414$	oui	[Sch93], [Bav92]
Courbe de Wimann exceptionnelle	3	$2 + \sqrt{3} \approx 3,732$	peut-être	[Sch93]
Surface de triangle $M(4)$	4	$\frac{5+3\sqrt{3}}{2} \approx 5,098$	peut-être	[Sch93]
Surface S_5	5	5,879	peut-être	
Surface icosaédrale I_6	6	6,471	peut-être	[CB05]

TAB. 2. Quelques surfaces de Riemann maximales

Première partie

Paysage systolique en caractéristique – 1

Introduction

La systole des surfaces de Riemann fut sujet d'études approfondies durant la décennie 1993-2003. L'article de P. Schmutz Schaller [Sch93], marqua une avancée importante dans la recherche de surfaces maximales pour la systole. Celui de C. Bavard [Bav97], fournit quant-à lui un cadre théorique agréable, calqué sur celui de la théorie des réseaux euclidiens. Nous nous inscrivons dans la continuité de ces travaux, néanmoins nous abordons ici une direction jusqu'à présent délaissée : celle des surfaces hyperboliques non orientables. Nous nous intéressons au cas des surfaces compactes de caractéristique -1 , c'est-à-dire au plan projectif à deux bords, à la bouteille de Klein à un bord et à la somme connexe de trois plans projectifs.

Pour chacune d'elles nous fournissons une présentation du groupe modulaire, mais ceci de manière géométrique, en regardant l'action des homéotopies sur l'espace de Teichmüller. Nous donnons ensuite une décomposition cellulaire d'un domaine fondamental de l'action du groupe modulaire, cette décomposition est adaptée à la systole car dans chaque cellule l'ensemble des géodésiques systoles ne varie pas. Il est alors facile de déterminer les points critiques de la systole sur l'espace de Teichmüller. En particulier, nous en déduisons tous les maxima locaux et globaux de la systole. Voici un extrait de nos résultats :

THÉORÈME. *Nous avons les inégalités optimales suivantes (dans chaque énoncé s désigne la systole de la surface concernée) :*

– soit X une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1 , alors

$$\cosh(s) \leq \frac{5 + \sqrt{17}}{2} ;$$

– soit Y une bouteille de Klein hyperbolique à un bord de longueur b_1 , alors

$$\cosh\left(\frac{s}{4}\right) \leq X_0$$

où $X_0 > 1$ est racine de l'équation $X^3 - X = \cosh(b_1/4)/4$;

– soit Z un plan projectif hyperbolique à deux bords de longueurs b_1, b_2 , alors

$$\cosh(s) \leq \cosh\left(\frac{b_1}{2}\right) + \cosh\left(\frac{b_2}{2}\right) + 1 ;$$

– soit \mathbb{T} un tore hyperbolique à un bord de longueur b_1 , alors

$$\cosh\left(\frac{s}{2}\right) \leq \cosh\left(\frac{b_1}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

REMARQUE. La dernière inégalité, valable dans le cas du tore hyperbolique à un bord, était déjà connue (voir [Sch93]).

En amont de nos résultats se situe une description géométrique (chapitre 2), basée sur l'existence d'une involution hyperelliptique sur toute surface hyperbolique compacte de caractéristique -1 .

Conventions

Dans toute la suite, nous travaillerons sur des surfaces qui seront supposées munies d'une métrique hyperbolique. Le terme *surface* $_{-1}$ désignera une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1 . Par *géodésique* nous entendrons, sauf

mention du contraire, une géodésique fermée simple. Toute courbe fermée simple sera qualifiée d'*orientable* si elle admet un voisinage transversalement orientable, de *non orientable* dans le cas contraire. Nous noterons S^{or} le revêtement des orientations d'une surface S , et γ^{or} une géodésique fermée simple de S^{or} au-dessus d'une géodésique fermée simple γ de S .

Les bords des surfaces hyperboliques seront toujours supposés totalement géodésiques. L'*auto-recollement* d'un bord consistera en l'identification de ses points opposés. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous conserverons la notation d'une géodésique après opération de découpe ou d'auto-recollement. Les polygones évoqués tout au long du texte sont hyperboliques. Nous confondrons les noms des géodésiques et des côtés des polygones avec leurs longueurs respectives, par exemple nous pourrions écrire $\cosh(\gamma)$ au lieu de $\cosh(l(\gamma))$.

Chapitre 2

Topologie et géométrie des surfaces de caractéristique -1

Pour saisir la topologie et la géométrie des surfaces non orientables il est commode de les concevoir comme des surfaces orientables auxquelles on ajoute des bords que l'on auto-recolle. Dans le cas qui nous intéresse, nous appuyerons nos raisonnements sur deux représentations : une surface $_{-1}$ s'identifie à un tore avec un bord auto-recollé ou à un pantalon dont les trois bords sont auto-recollés. Ce sont les seules représentations de ce type.

2.1. Ovale d'une surface $_{-1}$

Nous remarquons ici l'existence d'une courbe canonique, à homotopie près, dans les surfaces fermées de caractéristique -1 . La géodésique associée jouera un rôle géométrique essentiel.

THÉORÈME - DÉFINITION 2.1. *Chaque surface $_{-1}$ X possède une unique géodésique se relevant en une géodésique séparante de X^{or} . Nous l'appellerons ovale de la surface X et la noterons γ_X .*

Dans la première partie de la démonstration de ce résultat, nous exposons une construction élémentaire du revêtement des orientations : pour une surface $_{-1}$ X nous prenons deux copies \mathbb{T}_+ et \mathbb{T}_- du tore \mathbb{T}_X issu de la découpe de γ_X dans X , nous les collons suivant leurs bords en faisant glisser l'un d'un demi-tour par rapport à l'autre (voir figure 2.1). Le quotient de la surface obtenue par la translation-reflexion d'ordre 2 le long de la géodésique associée aux bords s'identifie au quotient de \mathbb{T}_X par l'auto-recollement du bord, c'est-à-dire à X .

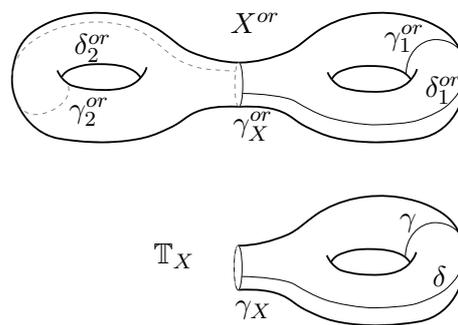


FIG. 2.1. Revêtement des orientations

DÉMONSTRATION. Prenons deux tores avec un bord isométriques, nous les collons selon leurs bords en faisant glisser l'un d'un demi tour par rapport à l'autre. La surface de genre deux ainsi construite possède une involution anti-holomorphe : la translation-reflexion d'ordre 2 le long du bord de chacun des tores. Le quotient de la surface de genre deux par cette involution est une surface₋₁, en fait la surface de genre deux est le revêtement des orientations de la surface₋₁. Le bord des tores se projette sur une géodésique non orientable, le relevé de cette géodésique au revêtement des orientations est une géodésique de longueur double, évidemment séparante. D'un point de vue topologique, cette construction (bien que géométrique) suffit à démontrer l'existence d'une courbe fermée simple en dessous d'une courbe séparante du revêtement des orientations. Puisque chaque classe d'homotopie est réalisée par une géodésique, nous venons de prouver l'existence, dans toute surface₋₁, d'une géodésique (non orientable) dont le relevé est séparant.

Soit X une surface₋₁ et γ_1 une géodésique de X se relevant en une géodésique séparante. Tout d'abord γ_1 se relève de manière unique puisque deux géodésiques séparantes s'intersectent. Ensuite γ_1 est non orientable car l'involution anti-holomorphe de X^{or} la stabilise et agit sur elle sans point fixe. Montrons son unicité. Supposons l'existence d'une autre géodésique γ_2 répondant aux mêmes critères. Les relevés γ_1^{or} et γ_2^{or} s'intersectent nécessairement. Découpons γ_1^{or} dans X^{or} , nous avons deux tores et X s'obtient par l'auto-recollement du bord de l'un d'eux. La non-orientabilité de γ_1 et γ_2 implique que le cardinal de $\gamma_1 \cap \gamma_2$ est impair, en particulier le nombre de composantes de γ_2^{or} dans chacun des tores bordés par γ_1^{or} est impair. Ainsi l'involution hyperelliptique de X^{or} va fixer une de ces composantes qui, nécessairement, passera par un point de Weierstrass ; d'où γ_2^{or} passe par un point de Weierstrass. C'est absurde puisqu'elle est séparante. \square

- REMARQUE 2.1. (1) L'ovale est une géodésique non orientable
 (2) L'élément du groupe fondamental associé à l'ovale joue un rôle similaire à celui associé au bord pour le tore à un bord. Un automorphisme du groupe fondamental l'enverra sur lui même, à conjugaison et inverse près.
 (3) Soient a, b et c , trois générateurs canoniques du groupe fondamental, alors l'élément associé à l'ovale (à conjugaison et inverse près) est abc .

De par sa caractérisation topologique, l'ovale γ_X d'une surface₋₁ X est la seule géodésique à produire un tore à un bord par sa découpe. Nous noterons \mathbb{T}_X ce tore. L'application qui à X associe \mathbb{T}_X établit une bijection entre l'espace des surfaces₋₁ et celui des tores hyperboliques à un bord .

2.2. Involution hyperelliptique

Soit X une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1, la surface de genre deux X^{or} et le tore \mathbb{T}_X admettent tous deux une involution hyperelliptique. Nous renvoyons à [HS89] pour leur étude et observons :

PROPOSITION - DÉFINITION 2.2. *Les involutions hyperelliptiques de X^{or} et \mathbb{T}_X induisent une même involution sur X . Nous l'appellerons involution hyperelliptique et la noterons ι_X .*

L'ensemble de ses points fixes est formé de l'ovale γ_X et de trois points isolés w_1, w_2 et w_3 , que nous nommerons points de Weierstrass.

DÉMONSTRATION. L'involution hyperelliptique $\iota_{\mathbb{T}_X}$ agit par translation d'ordre 2 sur le bord, ainsi $\iota_{\mathbb{T}_X}$ passe au quotient après auto-recollement. De même, l'involution $\iota_{X^{or}}$ agit par translation d'ordre 2 sur les géodésiques séparantes, en particulier elle commute avec la translation-reflexion d'ordre 2 le long de γ_X^{or} , et par conséquent passe au quotient.

Une géodésique séparante d'une surface de genre deux borde deux tores, la restriction de l'involution hyperelliptique à un de ces tores est l'involution hyperelliptique de ce tore. Nous concluons, au vu de la construction du revêtement des orientations, que les involutions hyperelliptiques de \mathbb{T}_X et X^{or} induisent la même involution de X .

L'ensemble des points fixes de ι_X se déduit trivialement de celui de $\iota_{\mathbb{T}_X}$. \square

Plusieurs propriétés de l'involution hyperelliptique, bien connues dans le cas orientable, glissent trivialement au cas non orientable via le revêtement des orientations. Soit X une surface fermée de caractéristique -1 ,

COROLLAIRE 2.3. *L'involution hyperelliptique ι_X est un élément du centre du groupe des automorphismes $\text{Aut}(X)$.*

COROLLAIRE 2.4. *L'involution hyperelliptique stabilise toutes les géodésiques fermées simples.*

Nous savons depuis les travaux de W. Scherrer (voir [BCNS92]) qu'une involution d'une surface non orientable compacte sans bord vérifie l'inégalité $r + 2s \leq g$ où r est le nombre de points fixes isolés, s le nombre de géodésiques de points fixes et g le genre topologique de la surface. Il en ressort que l'involution hyperelliptique d'une surface $_{-1}$ est l'involution ayant le plus de points fixes isolés. Dans la partie 2 de notre article, nous étudierons tous les groupes d'automorphismes de surfaces $_{-1}$; à cette occasion nous verrons :

PROPOSITION 2.5. *Un automorphisme d'une surface $_{-1}$ possède au plus trois points fixes isolés et l'involution hyperelliptique est le seul à atteindre cette borne.*

Définissons l'involution hyperelliptique d'un pantalon hyperbolique comme la réflexion par rapport aux perpendiculaires communes de ses bords. Cette définition n'est pas arbitraire, elle correspond à celle donnée dans [BEG90], à savoir le quotient par l'involution est de genre algébrique 0. De plus l'involution hyperelliptique ainsi définie appartient toujours au centre du groupe des automorphismes, contrairement à l'échange de deux bords de mêmes longueurs. Nous avons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.6. *L'involution hyperelliptique d'un pantalon hyperbolique passe au quotient après auto-recollement des bords en l'involution hyperelliptique d'une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1 .*

Soit P un pantalon hyperbolique. Par auto-recollement d'un, deux ou trois bords de P nous construisons respectivement un plan projectif à deux bords Z , une bouteille de Klein à un bord Y et une surface $_{-1}$ X . L'involution hyperelliptique de P passe au quotient après auto-recollement d'un ou plusieurs bords. Les involutions qui s'en déduisent seront encore qualifiées d'*hyperelliptiques* et notées $\iota_Y, \iota_Z, \iota_X$; d'une manière générale nous préserverons le vocable et les notations définis dans le cadre des surfaces $_{-1}$.

2.3. Géodésiques

Nous allons classer très simplement les géodésiques des surfaces $_{-1}$. Mais avant, soulignons un phénomène assez étonnant.

LEMME 2.7. *Dans une surface fermée de caractéristique -1 , toute intersection de l'ovale avec une géodésique fermée simple s'effectue à angle droit.*

DÉMONSTRATION. Une géodésique fermée simple est stable par l'involution hyperelliptique, or cette dernière est la réflexion par rapport à l'ovale ; d'où l'angle droit. \square

PROPOSITION 2.8. *Il y a trois types de géodésiques fermées simples dans une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1 :*

- l'ovale,
- les géodésiques fermées simples orientables, chacune d'elles passe par exactement deux points de Weierstrass et ne coupe pas l'ovale ;
- les géodésiques fermées simples non orientables distinctes de l'ovale, chacune d'elles passe par exactement un point de Weierstrass et intersecte l'ovale en un point.

DÉMONSTRATION. Soient X une surface $_{-1}$ et γ une géodésique distincte de l'ovale. Commençons par montrer que γ intersecte au plus une fois γ_X .

Supposons que γ coupe γ_X en au moins deux points. Vu dans le tore \mathbb{T}_X , γ possède plusieurs composantes connexes, la parité de leur nombre décidant de son orientabilité. Considérons une composante connexe γ_0 de γ , ou bien γ_0 est stable par l'involution, ou bien elle est envoyée sur une autre composante connexe. Si elle est stable, alors les points d'intersection de γ_0 avec $\partial\mathbb{T}_X$ sont diamétralement opposés et donc identifiés dans X ; donc γ_0 est une géodésique simple fermée et $\gamma = \gamma_0$, absurde. Si elle est envoyée sur une autre composante connexe γ_1 , alors les extrémités de γ_1 sont les points du bord diamétralement opposés aux extrémités de γ_0 . Il vient que $\gamma_0 \cup \gamma_1$ forme une seule et même géodésique, donc $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$. Nous concluons qu'une géodésique de X a au plus deux points d'intersection avec l'ovale.

Supposons que γ coupe γ_X en exactement deux points, alors γ est orientable. Par ailleurs, γ ne passe par aucun point de Weierstrass puisque ses composantes γ_1 et γ_2 sont échangées par l'involution hyperelliptique. Donc γ se relève en une géodésique séparante, c'est absurde (seule γ_X se relève en une géodésique séparante). D'où γ ne peut couper γ_X en deux points.

Supposons que γ coupe γ_X en un point, alors γ est non orientable. Comme l'involution hyperelliptique fixe le point d'intersection elle en fixe nécessairement un autre. Donc γ passe par un point de Weierstrass.

Supposons que γ n'intersecte pas γ_X , alors γ est une géodésique interne de \mathbb{T}_X , elle est donc orientable et passe par deux points de Weierstrass. \square

2.4. Dualité

Etant donnée une géodésique (fermée simple) orientable γ d'une surface $_{-1}$ X , nous pouvons trouver une unique géodésique (fermée simple) non orientable γ' qui lui est disjointe. Effectivement, nous nous ramenons à un pantalon avec

deux bords égaux en découpant γ dans \mathbb{T}_X ; les bords associés à γ admettent une perpendiculaire commune et sa médiatrice s'identifie à une géodésique non orientable de X , disjointe de γ (voir figure 2.2).

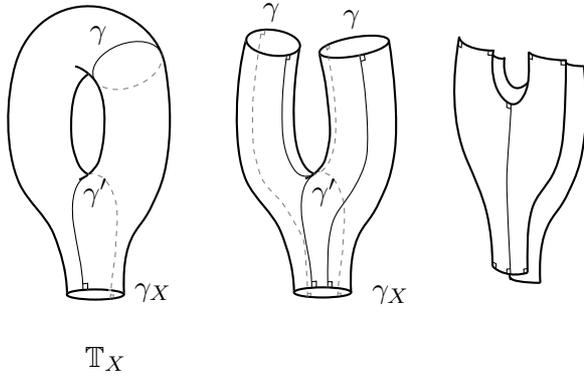


FIG. 2.2. Géodésique duale

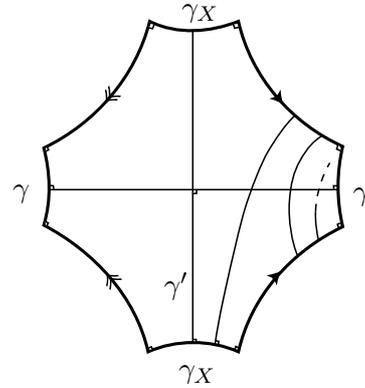


FIG. 2.3

PROPOSITION - DÉFINITION 2.9. *L'application décrite ci-dessus établit une bijection entre les géodésiques fermées simples orientables et les géodésiques fermées simples non orientables distinctes de l'ovale. Soit γ une géodésique fermée simple distincte de l'ovale, nous noterons γ' la géodésique lui correspondant par cette application et l'appellerons géodésique duale de γ .*

DÉMONSTRATION. Soit γ une géodésique orientable de X , il n'existe pas deux géodésiques non orientables (distinctes de l'ovale) disjointes de γ . Procédons par découpe. Découpons d'abord γ dans \mathbb{T}_X , nous obtenons un pantalon avec deux bords égaux. Découpons ensuite les deux perpendiculaires communes issues de $\partial\mathbb{T}_X$, nous arrivons à un octogone dont les côtés opposés sont égaux. Dans cet octogone essayons de construire une géodésique non orientable (distincte de γ' et γ_X) disjointe de γ , cette géodésique partirait à angle droit d'un côté associé à γ_X elle éviterait les côtés associés à γ et au moins dans un premier temps ceux associés à γ' , elle suivrait donc le tracé de la figure 2.3, c'est impossible car elle ne passerait pas par un point de Weierstrass.

Soit γ une géodésique non orientable de X , il existe une et une seule géodésique orientable disjointe de γ . Découpons γ dans \mathbb{T}_X , nous obtenons un cylindre, à homotopie près celui-ci ne contient qu'une seule courbe fermée simple. \square

REMARQUE 2.2. La dualité est croissante (pour les longueurs). En effet, entre une géodésique orientable γ , sa duale γ' et l'ovale γ_X , nous avons la relation

$$\cosh(\gamma/2) = \sinh(\gamma'/2) \sinh(\gamma_X/2).$$

En particulier, la géodésique duale d'une systole de \mathbb{T}_X est une géodésique non orientable de X distincte de γ_X de plus petite longueur; nous pouvons montrer ([Bav05a]) qu'elle réalise le rayon d'injectivité de γ_X . Nous appellerons ces géodésiques *rayons extrémaux*.

2.5. Deux exemples de surface $_{-1}$

Nous construisons un tore équilatéral à un bord en identifiant les côtés opposés d'un hexagone régulier, d'angle au sommet $\pi/3$, auquel on a ôté un disque ouvert (voir figure 2.4). Nous pouvons imposer que la distance du bord aux côtés de l'hexagone soit le quart de la longueur du bord. Nous noterons $\mathbb{T}_{X(H)}$ le tore ainsi obtenu et $X(H)$ la surface $_{-1}$ s'en déduisant.

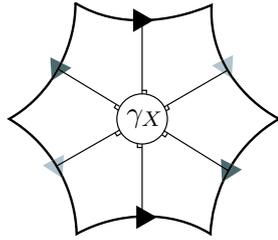


FIG. 2.4. Construction du tore équilatéral

Les points de Weierstrass de $X(H)$ sont les milieux des côtés de l'hexagone. Nous avons représenté les perpendiculaires communes du bord et des côtés, elles forment trois rayons extrémaux. Les segments joignant les milieux des côtés constituent les systoles de \mathbb{T}_X puisque ce sont les duales des rayons extrémaux. Il est facile de voir que la longueur des rayons extrémaux est plus petite que la longueur des systoles de \mathbb{T}_X , et nous en déduisons que $X(H)$ possède exactement quatre systoles : les rayons extrémaux et l'ovale. Après quelques calculs, nous trouvons $\cosh(\text{sys}(X(H))) = (5 + \sqrt{17})/2$.

Une deuxième surface intéressante provient du pentagone droit régulier. Collons deux tels pentagones suivant un côté nous obtenons un hexagone droit, à partir de deux hexagones nous fabriquons un pantalon, puis en recollant deux bords de ce pantalon avec un twist nul nous parvenons à une surface $_{-1}$ notée $X(P)$ (nous effectuons la démarche inverse de celle de la figure 2.2).

Cette surface possède cinq systole : l'ovale, deux systoles orientables et deux rayons extrémaux. En fait, il y a une systole par côté du pentagone. Il est très facile de voir que ces géodésiques sont bien les systoles, car toute géodésique passe par un sommet d'un pentagone (un point de Weierstrass) avant de traverser celui-ci. Nous trouvons $\cosh(\text{sys}(X(P))) = 2 + \sqrt{5}$.

2.6. La bouteille de Klein à un bord et le plan projectif à deux bords

Nous reprenons les notations de la fin du § 2.2. Le cas des surfaces $_{-1}$ a visiblement valeur de paradigme. En raisonnant avec Y et Z comme nous le ferions avec X nous trouvons :

PROPOSITION 2.10. *La bouteille de Klein à un bord admet une seule géodésique fermée simple orientable et une infinité de géodésiques fermées simples non orientables.*

DÉMONSTRATION. La géodésique orientable est la duale du bord. Des exemples de géodésiques non orientables sont les deux bords auto-recollés de P , nous obtenons une infinité d'autres géodésiques non orientables en faisant agir sur elles le twist selon la géodésique orientable. \square

REMARQUE 2.3. En fait, nous récupérons toutes les géodésiques non orientables par la méthode explicitée dans la preuve.

PROPOSITION 2.11. *Le plan projectif à deux bords n'admet aucune géodésique fermée simple orientable et seulement deux géodésiques fermées simples non orientables.*

DÉMONSTRATION. Une géodésique orientable serait duale de chacun des bords, c'est impossible. Il y a une géodésique non orientable évidente : le bord auto-recollé de P . Cherchons les autres géodésiques non orientables. Elles sont orthogonales à l'ovale et l'intersectent en un seul point, de plus elles passent obligatoirement par les point de Weierstrass de Z . Nous voyons rapidement qu'il n'y a qu'une possibilité. \square

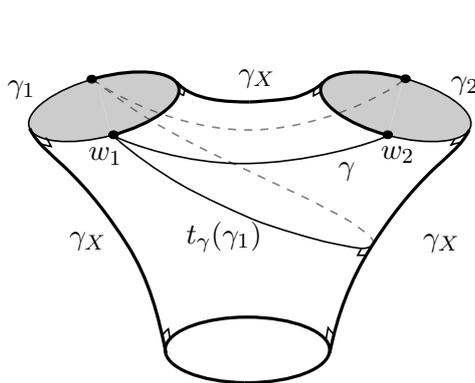


FIG. 2.5. La bouteille de Klein à bord

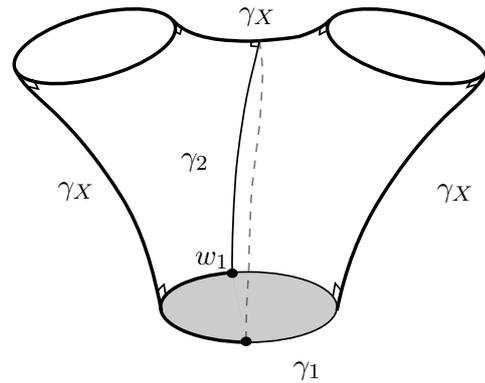


FIG. 2.6. Le plan projectif à deux bords

Pour chacune des figures 2.5 et 2.6, les bords grisés du pantalon représentent ceux auto-recollés. Sur la figure 2.6 nous avons noté γ_1 et γ_2 les deux géodésiques (fermées simples) du plan projectif à deux bords. Sur la figure 2.5 nous avons noté γ la géodésique orientable et γ_1, γ_2 deux géodésiques non orientables ; le t_γ désigne le twist selon γ .

2.7. Commentaires

Dans notre approche des surfaces non orientables nous avons adopté un point de vue métrique, hyperbolique. Un point de vue plus classique serait celui des surfaces de Klein, c'est-à-dire des surfaces munies d'un atlas dont les changements

de cartes sont holomorphes ou anti-holomorphes. L'étude des surfaces de Klein a connu un fort développement depuis l'impulsion donnée par le livre [AG71] d'Alling et Greenleaf au début des années 70 ; les méthodes utilisées, basées sur l'emploi des groupes cristallographiques non euclidiens («N.E.C groups » en anglais) font essentiellement appel à des techniques combinatoires. Les résultats obtenus concernent principalement les groupes d'automorphismes (borne du nombre d'automorphismes, détermination des groupes d'automorphismes des surfaces hyperelliptiques...). Dans ce cadre l'involution hyperelliptique est souvent définie comme une involution σ d'une surface X telle que $X/\langle\sigma\rangle$ soit de genre algébrique 0, il est alors montré que l'involution hyperelliptique est unique et dans le centre de $\text{Aut}(X)$ (voir l'article [Buj89] de J.A. Bujalance).

Parmi les différents articles d'E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki, et D. Singerman, nous renvoyons à [BEG90] pour une introduction aux surfaces de Klein, à [BEG85] et [Buj89] pour l'étude de l'involution hyperelliptique des surfaces de Klein sans bord.

Chapitre 3

Actions de groupes d'automorphismes

L'ensemble des surfaces réalisant une certaine action par automorphismes est le lieu des points fixes d'un sous-groupe du groupe modulaire, et forme ainsi une sous-variété totalement géodésique de l'espace de Teichmüller. La compréhension de l'action du groupe modulaire passe donc par une description de toutes ces actions.

Commençons par rappeler un résultat connu sur le sujet, c'est un cas particulier du théorème principal de [BBGM89].

PROPOSITION 3.1. *Les seuls groupes se réalisant comme groupe des automorphismes d'une surface₋₁ sont : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, D_4 et D_6 .*

Dans toute la suite X désignera une surface₋₁. Soulignons que le paramètre de twist est à valeurs dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

3.1. Action par involution

Dans [BCNS92], nous trouvons des informations précises, attribuées à Scherrer, sur l'action par involution. Pour une involution d'une surface₋₁, notons r son nombre de points fixes isolés, s^+ (resp. s^-) le nombre de géodésiques orientables (resp. non orientables) fixées points à points.

PROPOSITION 3.2. *Les seuls triplets (r, s^+, s^-) réalisés par l'involution d'une surface₋₁ sont : $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ et $(3, 0, 1)$. Et à chacun d'eux correspond une unique involution, à conjugaison topologique près.*

Le triplet $(3, 0, 1)$ caractérise l'involution hyperelliptique. Les autres involutions fixent chacune points à points une géodésique non orientable, que nous noterons δ^- , et s'identifient à la réflexion selon cette géodésique. Leur point fixe isolé correspond au point de γ_X opposé au point $\delta^- \cap \gamma_X$.

Lorsque $(r, s^+, s^-) = (1, 1, 1)$ la géodésique duale de δ^- , notée δ^+ , est fixée points à points. Nécessairement le twist selon δ^+ est nul, et la surface admet une deuxième involution de signature $(1, 1, 1)$ consistant en la réflexion selon les géodésiques associées aux perpendiculaires communes du pantalon obtenu par découpe de δ^+ dans \mathbb{T}_X (figure 3.1). Réciproquement, une surface X ayant un coefficient de twist nul suivant une géodésique de \mathbb{T}_X admet une telle action par automorphismes.

Lorsque $(r, s^+, s^-) = (1, 0, 1)$ l'involution agit par translation d'ordre 2 sur δ^+ . Ceci implique que le twist selon δ^+ vaut $1/2$, et la surface admet une deuxième involution de signature $(1, 0, 1)$ consistant en la réflexion selon la géodésique associée aux perpendiculaires communes du pantalon obtenu par découpe de δ^+ dans

\mathbb{T}_X (figure 3.2). Réciproquement, une surface X ayant un coefficient de twist $1/2$ suivant une géodésique de \mathbb{T}_X admet une telle action par automorphismes.

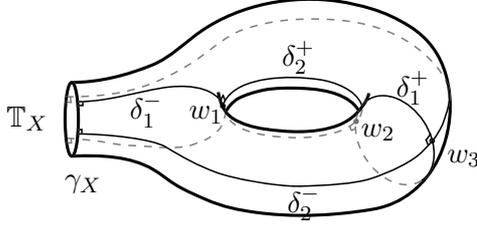


FIG. 3.1. Surface avec un twist nul selon δ_i^+

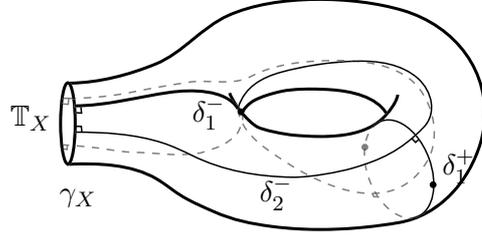


FIG. 3.2. Surface avec un twist $1/2$ selon δ_i^+

3.2. Action de D_4

Les surfaces $_{-1}$ admettant D_4 comme groupe des automorphismes sont exactement celles construites de la manière suivante : partant d'un pentagone droit vérifiant $a = e$ (et $b = d$), nous recollons le pantalon associé avec un twist nul (voir figure 3.3). Via un argument de trigonométrie hyperbolique, nous concluons que l'ensemble des surfaces $_{-1}$ ayant D_4 pour groupe des automorphismes forme une famille à un paramètre (par exemple $l(\gamma_X)$).

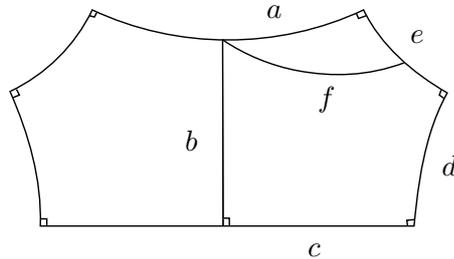


FIG. 3.3. Hexagone et pentagones droits

Quelques constatations sur ces surfaces. Pour chacune d'elles, le tore \mathbb{T}_X possède deux systoles s_1 et s_2 , associées aux côtés a et e du pentagone. L'ovale γ_X a bien entendu deux rayons extrémaux (Rem. 2.2) associés aux côtés b et d . Trivialement, parmi ces surfaces seule celle construite à partir du pentagone régulier possède plus de deux systoles. Enfin, nous voyons sans peine comment agissent tous les automorphismes ; en particulier pour une telle surface X , $\text{Aut}(X)$ contient deux sous-groupes G_1, G_2 de la forme $\{id_X, \sigma_1, \sigma_2, \iota_X\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $(r, s^+, s^-)_{G_1} = (1, 0, 1)$ et $(r, s^+, s^-)_{G_2} = (1, 1, 1)$ (pour ce dernier nous avons $\delta_i^+ = s_i$). Cette famille de surfaces se situe donc à l'intersection des deux familles étudiées précédemment. En fait, elle forme exactement l'intersection car, nous allons le voir, les surfaces X avec $\text{Aut}(X) \simeq D_6$ n'ont pas de groupe d'automorphisme $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ contenant ι_X et avec $(r, s^+, s^-)_G = (1, 1, 1)$.

3.3. Action de D_6

Soit X une surface avec $\text{Aut}(X) \simeq D_6$. Considérons τ un automorphisme d'ordre 6 de X , nous avons $\tau^3 = \iota_X$. Vu que ι_X fixe les points de Weierstrass, la restriction de τ à ces points est un cycle d'ordre 3.

Prenons un rayon extrémal de X , τ transforme ce rayon extrémal en un autre rayon extrémal puisqu'il agit transitivement sur les points de Weierstrass, il en découle que X possède trois rayons extrémaux disjoints $r_1, r_2 = \tau(r_1)$ et $r_3 = \tau^2(r_1)$. Ainsi, X est un pantalon hyperbolique avec trois bords de mêmes longueurs auto-recollés. Par dualité (Rem. 2.2), le tore \mathbb{T}_X possède trois systoles s_1, s_2, s_3 ; le paramètre de twist suivant chacune d'elles est nécessairement $1/2$.

Conclusion : il y a une famille à un paramètre (la longueur de l'ovale γ_X) de surfaces ayant D_6 pour groupe d'automorphismes. Une représentation agréable de ces surfaces est celle de la figure 2.4. Le groupe d'automorphisme nous apparaît alors avec limpidité, nous remarquons en particulier que les trois sous-groupes contenant ι_X et isomorphes au groupe de Klein vérifient $(r, s^+, s^-)_G = (1, 0, 1)$.

Chapitre 4

Espaces de Teichmüller et systole des surfaces₋₁

Nous nous intéressons à l'espace de Teichmüller des surfaces₋₁. Nous souhaitons décomposer un domaine fondamental de l'action du groupe modulaire en cellules adaptées à la systole; ceci nous permettra de classer les points critiques de la fonction systole.

Toutes les surfaces seront supposées fermées. Pour une géodésique orientable γ_1 , le twist θ_1 sera croissant si l'on a un glissement dans le sens donné par la flèche de la figure 4.2; si la figure 4.2 représente un twist nul selon γ_1 , alors la figure 4.1 représente un twist compris entre 0 et 1/2 (la lettre γ_4 ne désigne pas la même géodésique dans les deux figures). Nous noterons t_{γ_1} le twist de Dehn selon γ_1 .

4.1. Définition

Fixons nous une surface hyperbolique orientable R de genre $g \geq 2$. On appelle *surface marquée de genre g* un couple (S, φ) formé d'une surface hyperbolique orientable S de genre g et d'un homéomorphisme préservant l'orientation $\varphi : R \rightarrow S$. Sur l'ensemble des surfaces marquées on définit le relation d'équivalence suivante :

$$(S, \varphi) \sim (S', \varphi') \text{ si } \varphi' \circ \varphi^{-1} \text{ est isotope à une isométrie.}$$

Nous regarderons l'*espace de Teichmüller* \mathcal{T}_g des surfaces hyperboliques orientables de genre g comme l'espace des classes d'équivalences $[S, \varphi]$ de surfaces marquées. Il est muni d'une structure de variété analytique complexe (de dimension $3g-3$) ainsi que d'une métrique kählérienne de courbure négative (dite de Weil-Petersson).

Sur \mathcal{T}_g , agit naturellement le groupe des homéotopies. Son quotient par le sous-groupe des éléments agissant trivialement est le groupe modulaire, que nous noterons Mod_g . L'action de Mod_g sur \mathcal{T}_g s'effectue par isométrie pour la métrique de Weil-Petersson.

En supprimant la condition relative à l'orientabilité, on étend au cadre non orientable les notions de surfaces marquées et d'espace de Teichmüller. L'espace de Teichmüller des surfaces hyperboliques non orientables de genre g sera noté \mathcal{T}_g^- , et le groupe modulaire associé Mod_g^- . En considérant le revêtement des orientations plutôt qu'une surface elle-même, l'espace \mathcal{T}_g^- apparaît comme lieu des points fixes d'une isométrie négative de \mathcal{T}_{g+1} , et en tant que tel c'est une sous-variété totalement géodésique de \mathcal{T}_{g+1} sur laquelle agit Mod_g^- par isométries.

Nous allons nous intéresser à \mathcal{T}_3^- l'espace de Teichmüller des surfaces hyperboliques non orientables de genre 3. Vu dans \mathcal{T}_2 c'est le lieu des points fixes de l'homéotopie se réalisant comme translation-reflexion d'ordre 2 le long de la géodésique séparante au-dessus de l'ovale.

4.2. Paramétrisations de \mathcal{T}_3^-

Nous allons exhiber deux paramétrisations globales de \mathcal{T}_3^- .

PROPOSITION 4.1. *Soit γ_1 une géodésique orientable des surfaces₋₁. Soient (θ_1, l_1) les coordonnées twist-longueur selon γ_1 , l'application*

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{T}_3^- &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ M = [X, \varphi] &\longmapsto (\theta_1(M), l_1(M), l_{\gamma_X}(M)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

DÉMONSTRATION. Considérons les coordonnées de Fenchel-Nielsen de \mathcal{T}_2 associées au système de géodésiques $\{\tilde{\gamma}_X, \tilde{\gamma}_{11}, \tilde{\gamma}_{12}\}$, où les $\tilde{\gamma}_{1i}$ ($i = 1, 2$) sont les deux relevés de γ_1 . Il est connu (voir par exemple [IT92]) que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{T}_2 &\longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 \times (\mathbb{R})^3 \\ N &\longmapsto (l_{\tilde{\gamma}_X}(N), l_{11}(N), l_{12}(N), \theta_{\tilde{\gamma}_X}(N), \theta_{11}(N), \theta_{12}(N)) \end{aligned}$$

est un système de coordonnées globales sur \mathcal{T}_2 .

L'espace \mathcal{T}_3^- s'identifie clairement à l'ensemble des points de \mathcal{T}_2 déterminés par les conditions

$$\begin{cases} \theta_{\tilde{\gamma}_X}(N) = \pi \\ l_{11}(N) = l_{12}(N) \\ \theta_{11}(N) = \theta_{12}(N) \end{cases} .$$

Il s'en suit que $(\theta_1, l_1, l_{\gamma_X})$ forme un système de coordonnées globales sur \mathcal{T}_3^- . \square

REMARQUE 4.1. Dans ce système de coordonnées, il semble naturel d'imaginer \mathcal{T}_3^- comme espace fibré au-dessus de \mathbb{R}_+^* (la longueur du bord), chaque fibre étant l'espace de Teichmüller des tore à un bord de longueur fixée.

Le deuxième système de coordonnées que nous allons présenter consiste en trois fonctions longueurs. Nous ne nous appuyons pas sur le revêtement des orientations.

THÉORÈME 4.2. *Soient γ_4, γ_5 et γ_6 trois géodésiques non orientables et disjointes. Alors, l'application ayant pour coordonnées les fonctions longueurs associées*

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathcal{T}_3^- &\longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 \\ M = [X, \varphi] &\longmapsto (l_4(M), l_5(M), l_6(M)) \end{aligned}$$

établit un difféomorphisme entre \mathcal{T}_3^- et $(\mathbb{R}_+^)^3$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, l'application Ψ est bijective. En effet, l'opération de découpe des trois géodésiques γ_4, γ_5 et γ_6 établit une bijection entre \mathcal{T}_3^- et l'espace des pantalons; mais ce dernier est paramétré par les longueurs des bords, d'où l'affirmation. Ensuite, Ψ à l'instar des fonctions longueurs est de classe C^∞ sur \mathcal{T}_3^- . Enfin, son application réciproque l'est aussi, puisqu'avec un peu de trigonométrie hyperbolique nous voyons que l_{γ_X}, l_1 et θ_1 dépendent de façon C^∞ de $l_4(M), l_5(M)$ et $l_6(M)$. \square

REMARQUE 4.2. Une carte globale de l'espace de Teichmüller donnée par des longueurs est un phénomène très rare, il ne se produit jamais dans le cas hyperbolique orientable, même localement (voir par exemple [SS88]).

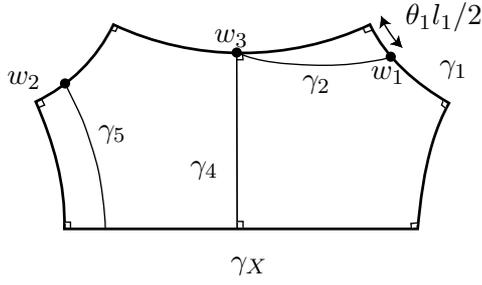


FIG. 4.1

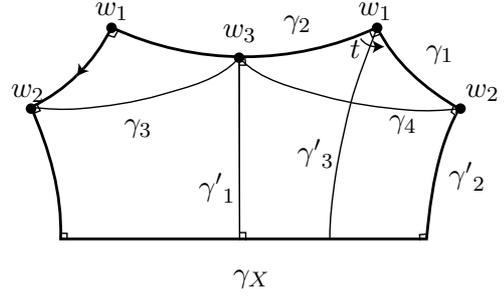


FIG. 4.2

Nous allons nous fixer un système de coordonnées auquel nous nous référerons par la suite. Choisissons $X(P)$ comme origine du Teichmüller, et adoptons les notations suivantes (voir figure 4.2) :

- γ_1 et γ_2 désignent les deux systoles orientables de $X(P)$,
- $\gamma_3 = t_{\gamma_1}^{-1}(\gamma_2)$ et $\gamma_4 = t_{\gamma_1}(\gamma_2)$ sont les géodésiques obtenues à partir de γ_2 par un seul twist de Dehn selon γ_1 .

Nous optons pour le système de coordonnées $(\theta_1, l_1, l_{\gamma_X})$ avec la convention suivante : $\theta_1([X(P), id]) = 0$. Nous noterons $[X(H), \varphi_{1/2}]$ la surface marquée associée à $X(H)$ telle que $\theta_1([X(H), \varphi_{1/2}]) = 1/2$.

4.3. Générateurs du groupe modulaire

Jetons un œil à quelques éléments du groupe des homéotopies des surfaces $_{-1}$. Soient

- n l'homéotopie associée à la réflexion selon γ_1 dans $[X(P), id]$, n est un élément d'ordre 2 qui fixe γ_1 et γ_2 , et échange γ_3 et γ_4 . Vu dans notre système de coordonnées, n correspond à la symétrie par rapport au plan $\{\theta_1 = 0\}$.
- u la réflexion par rapport à γ'_3 dans $[X(P), id]$, u échange γ_1 et γ_2 . L'ensemble des points fixes de u est $\{l_1 = l_2\}$.
- $t = u \cdot n$ l'homéotopie associée à la rotation d'angle $\pi/2$ en w_1 dans $[X(P), id]$ (voir figure 4.2); t échange γ_1 et γ_2 , et γ_3 et γ_4 .
- v l'homéotopie associée à la réflexion selon γ'_1 dans $[X(H), \varphi_{1/2}]$, v échange γ_2 et γ_3 et son lieu des points fixes est $\{l_2 = l_3\}$. Vu dans notre système de coordonnées, v correspond à la symétrie par rapport au plan $\{\theta_1 = 1/2\}$.
- $s = v \cdot u$ l'homéotopie qui vue dans $[X(H), \varphi_{1/2}]$ est la translation d'ordre 6 le long du bord de $\mathbb{T}_{X(H)}$, s agit transitivement sur γ_1, γ_2 et γ_3 , plus précisément $s(\gamma_1) = \gamma_3$ et $s(\gamma_3) = \gamma_2$.

Nous allons montrer que les éléments n, s et t engendrent le groupe modulaire Mod_3^- , et que ce dernier est isomorphe à $PGL(2, \mathbb{Z})$

4.4. Domaine fondamental

Soit D l'ensemble

$$D = \{M = [X, \varphi] \in \mathcal{T}_3^- ; 0 \leq \theta_1(M) \leq 1/2 \quad \text{et} \quad l_1(M) \leq l_2(M)\}.$$

L'objet de ce paragraphe est de montrer que D est un domaine fondamental de \mathcal{T}_3^- pour l'action du groupe modulaire.

PROPOSITION 4.3. *Soit $M = [X, \varphi]$ un point de D , alors la géodésique γ_1 est une systole de \mathbb{T}_X .*

DÉMONSTRATION. Soit $M = [X, \varphi]$ un point du plan $\{\theta_1 = 0\}$. La surface X admet un groupe d'automorphisme $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ avec $(r, s^+, s^-)_G = (1, 1, 1)$, et les systoles éventuelles de \mathbb{T}_X sont les deux géodésiques de points fixes, c'est-à-dire γ_1 et γ_2 . Il en découle que γ_1 est une systole interne de tout élément $M \in D$ avec $\theta_1(M) = 0$.

Soit $M = [X, \varphi]$ un point de $D \setminus \{\theta_1 = 0\}$ tel que X possède deux systoles internes : γ_1 et une autre systole γ . Les géodésiques γ_1 et γ s'intersectent en exactement un point, nous en déduisons $\gamma = \gamma_2$. Comme l'ensemble $D \setminus \{l_1 = l_2\}$ est connexe nous concluons que γ_1 est l'unique systole interne de chacun des points de cet ensemble. \square

COROLLAIRE 4.4. *Soit $M = [X, \varphi]$ un point de \mathcal{T}_3^- tel que $l_1(M) < l_{t_{\gamma_1}^k(\gamma_2)}(M)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors γ_1 est l'unique systole de \mathbb{T}_X .*

DÉMONSTRATION. A l'aide de t_{γ_1} et n nous revenons au cas où $M \in D$. \square

THÉORÈME 4.5. *L'ensemble D est un domaine fondamental pour l'action du groupe modulaire Mod_3^- sur l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_3^- .*

DÉMONSTRATION. D contient un domaine fondamental. En effet, quitte à user de t_{γ_1} et t nous pouvons envoyer n'importe quel point de \mathcal{T}_3^- sur un point M vérifiant $l_1(M) < l_{t_{\gamma_1}^k(\gamma_2)}(M)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; ensuite les actions de t_{γ_1} et n ramènent M dans D .

Soit g un élément du groupe modulaire tel que $\dot{D} \cap (g \cdot \dot{D}) \neq \emptyset$,

– ou bien $g \cdot \partial D = \partial D$, dans ce cas nécessairement $g = id$,

– ou bien il existe $M \in \partial D$ tel que $g(M) \in \dot{D}$, mais ceci est impossible car les points de D fixés par un élément de Mod_3^- sont exactement les points frontière.

Donc $g = id$, et D est bien un domaine fondamental pour l'action de groupe modulaire. \square

REMARQUE 4.3. Un domaine fondamental dans le cas des tores avec un bord de longueur variable a déjà été décrit par Peter Buser et Klaus-Dieter Semmler dans [BS88].

Nous avons représenté en figure 4.3 le plan horizontal $\{l_{\gamma_X} = 2\}$ (les échelles en abscisse et ordonnée sont différentes).

Comme pour l_1 fixé, l_2 croît avec le twist θ_1 (sur $\{\theta_1 \geq 0\}$), on observe que les points de $\{l_1 = l_2, \theta_1 \geq 0\}$ ont une ordonnée qui est fonction croissante de leur abscisse. En fait, la longueur l_2 s'exprime en fonction de θ_1 et l_1 de la façon suivante :

$$\cosh^2(l_2/2) = \cosh^2(\theta_1 l_1/2) \frac{\cosh^2(l_{\gamma_X}/2) + \cosh^2(l_1/2) - 1}{\cosh^2(l_1/2) - 1}.$$

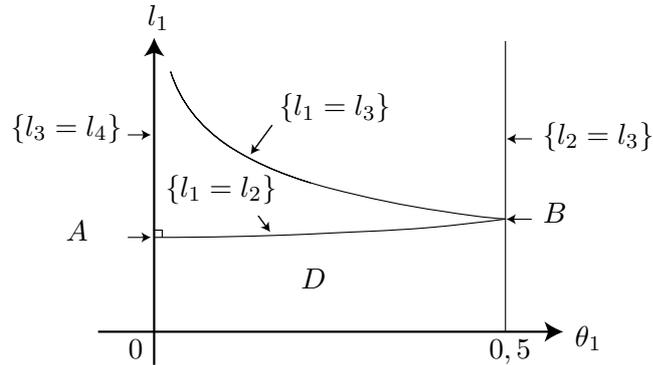


FIG. 4.3

Les points A et B sont respectivement les points fixes de t et s , les surfaces associées admettent un groupe d'isométrie isomorphe à D_4 et D_6 .

Avec n , t et s nous envoyons D sur n'importe lequel de ses voisins (voir figure 4.4), nous en déduisons que ce sont bien des générateurs de Mod_3^- .

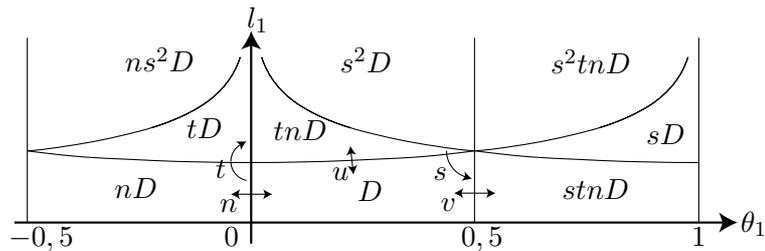


FIG. 4.4. Action des générateurs sur D

Nous pouvons même en dire plus. Il est clair que d'un point de vue combinatoire, le pavage obtenu par l'action de Mod_3^- sur \mathcal{T}_3^- est le même que celui obtenu par l'action classique de $PGL(2, \mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} ($PGL(2, \mathbb{Z})$ est le groupe d'un triangle d'angle $\pi/\infty, \pi/2, \pi/3$). Nous en déduisons

PROPOSITION 4.6. *Le groupe Mod_3^- est isomorphe à $PGL(2, \mathbb{Z})$.*

En fait, ce résultat était déjà connu puisque dans [BC72] (et [BC04]) Birman et Chillingworth fournirent la présentation suivante du groupe des homéotopies d'une surface $_{-1}$:

$$\langle a, b, y \mid aba = bab, yay^{-1} = a^{-1}, yby^{-1} = b^{-1}, y^2 = 1, (aba)^4 = 1 \rangle.$$

Le groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ admet pour sa part la présentation

$$\langle s, t, n \mid s^3t^2 = 1, ntn^{-1}t = 1, nstn^{-1}st = 1, n^2 = 1, t^4 = 1, s^6 = 1 \rangle.$$

Il y a équivalence entre ces deux présentations, il suffit de poser $n = y$, $t = aba$ et $s = ab$.

PROPOSITION 4.7. *Soit X une surface $_{-1}$, alors $Homeot(X) \simeq GL(2, \mathbb{Z})$.*

4.5. Décomposition cellulaire

Soit $[X, \varphi]$ une surface marquée de D , par la Proposition 4.3 l'une des trois géodésiques $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_X$ est une systole. Commençons par regarder les lieux d'égalité de longueurs de ces géodésiques. Celles-ci ne dépendent pas du twist θ_1 , posons $x = \cosh^2(\gamma_1/2)$ et $z = \cosh^2(\gamma_X/2)$, en usant de l'égalité

$$\sinh(\gamma'_1/2) \sinh(\gamma_X/2) = \cosh(\gamma_1/2),$$

il vient :

$$\begin{aligned} l_{\gamma_1} = l_{\gamma_X} &\Leftrightarrow z = x \\ l_{\gamma'_1} = l_{\gamma_X} &\Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{x} \\ l_{\gamma_1} = l_{\gamma'_1} &\Leftrightarrow z = 1 + \frac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour nous avons

$$\begin{aligned} \text{pour } \theta_1 = 0, \quad l_{\gamma_1} = l_{\gamma_2} &\Leftrightarrow z = (x-1)^2, \\ \text{pour } \theta_1 = 1/2 \quad l_{\gamma_1} = l_{\gamma_2} &\Leftrightarrow z = 2x^{3/2} - 3x + 1. \end{aligned}$$

Nous avons représenté en figure 4.5 les courbes associées à ces égalités, elles donnent une idée de la configuration des lieux d'égalités de longueurs dans une coupe à twist constant de D (plan vertical).

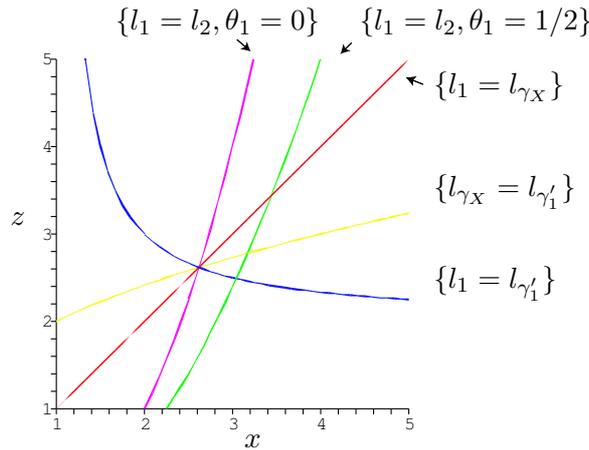


FIG. 4.5. Lieux d'égalité de longueurs

Nous en tirons une décomposition cellulaire de D , une esquisse relativement fidèle en est donnée en figure 4.6. Il y a 3 cellules de dimension 3 :

- $C_1 = \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma_X}, l_{\gamma'_1} > l_{\gamma_1}\}$,
- $C_2 = \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma_X}, l_{\gamma_1} > l_{\gamma'_1}\}$,
- $C_3 = \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma'_1}, l_{\gamma_1} > l_{\gamma_X}\}$.

En excluant les faces et arêtes contenues dans les plans $\{\theta_1 = 0\}$ et $\{\theta_1 = 1/2\}$, on compte 5 faces et 2 arêtes. Nous désignerons une face par un F en mettant en indice le numéro de toutes les cellules de dimension 3 adjacentes, nous procéderons de façon similaire avec les arêtes mais avec un A . Pour les faces et les arêtes contenues dans les plans $\{\theta_1 = 0\}$ et $\{\theta_1 = 1/2\}$, nous adopterons le même système mais avec des F^0 , des A^0 , des $F^{1/2}$ et des $A^{1/2}$. Tous les points d'une cellule ont même(s)

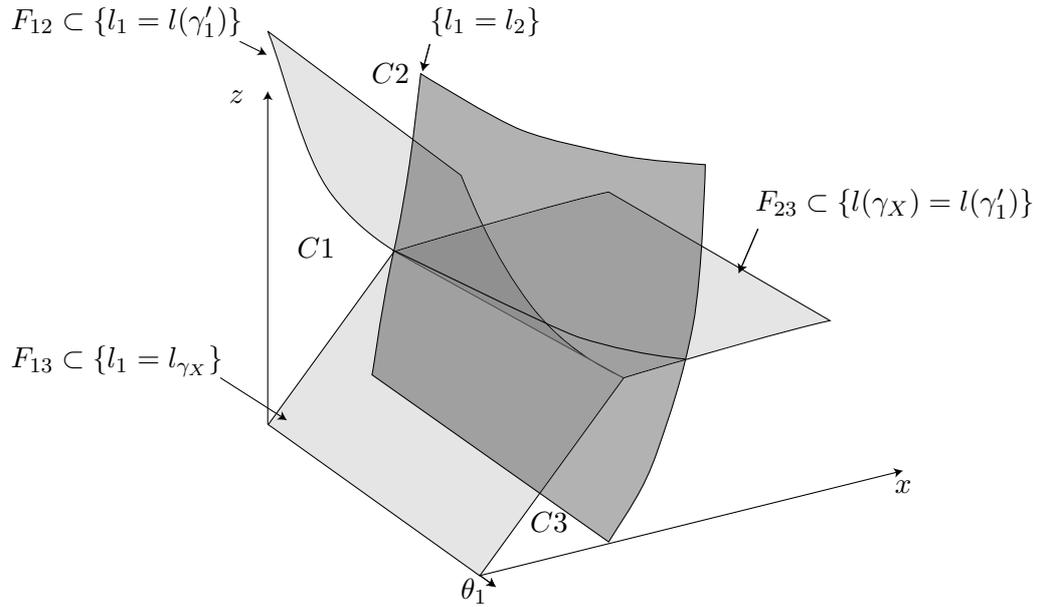


FIG. 4.6. Décomposition cellulaire

systole(s), les tableaux ci-dessous donnent la (ou les) systole(s) associée(s) à une cellule.

cellule	systole	face	systoles	arête	systoles
C_1	γ_1	F_{12}	γ_1, γ'_1	A_{123}	$\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_X$
C_2	γ'_1	F_2	γ'_1, γ'_2	A_{23}	$\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma_X$
		F_{23}	γ'_1, γ_X		
C_3	γ_X	F_3	γ_X		
		F_{13}	γ_1, γ_X		

face	systole	arête	systoles	sommet	systoles
F_1^0	γ_1	A_{12}^0	γ_1, γ'_1	$[X(P), id]$	$\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma'_2, \gamma_X$
F_2^0	γ'_1	A_2^0	γ'_1, γ'_2		
F_3^0	γ_X	A_3^0	γ_X		
		A_{13}^0	γ_1, γ_X		

face	systole	arête	systoles	sommet	systoles
$F_1^{1/2}$	γ_1	$A_{12}^{1/2}$	γ_1, γ'_1	S_{123}	$\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_X$
$F_2^{1/2}$	γ'_1	$A_2^{1/2}$	$\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$		
		$A_{23}^{1/2}$	γ'_1, γ_X	$[X(H), \varphi_{1/2}]$	$\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma_X$
$F_3^{1/2}$	γ_X	$A_3^{1/2}$	γ_X		
		$A_{13}^{1/2}$	γ'_1, γ_X		

4.6. Points eutactiques, parfaits et extrêmes

Nous laissons au lecteur le soin de lire les articles [Bav97] et [Bav05b] de Bavard afin de prendre connaissance des différentes définitions et résultats classiques de cette théorie. Donnons cependant un analogue du théorème de Voronoï, il est énoncé pour les surfaces orientables dans les articles cités mais reste valable dans le cadre des surfaces hyperboliques compactes :

THÉORÈME 4.8. *Une surface hyperbolique compacte est extrême si est seulement si elle est parfaite et eutactique.*

D'après un résultat de H. Akrouit ([Akr03]), dans le cas orientable la systole est une fonction de Morse topologique sur l'espace de Teichmüller ; ses points critiques sont exactement les points eutactiques et par conséquent, sont intéressants à classer en eux-mêmes. Ceci reste vrai dans le cas non orientable, aussi nous recherchons tous les points eutactiques.

PROPOSITION 4.9. *Il y a exactement deux surfaces₋₁ eutactiques : $X(P)$ et $X(H)$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de déterminer les points eutactiques dans le domaine D . Regardons les gradients (dans le système de coordonnées usuel) des fonctions longueur des systoles éventuelles de surface₋₁, nous voyons directement

$$\nabla l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla l_{\gamma_X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla l_{\gamma'_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite en dérivant par rapport à l_1 l'égalité

$$\cosh(l_2/2) = \cosh(\theta_1 l_1/2) \frac{\cosh(l_{\gamma_X}/2)}{\sinh(l_1/2)},$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_2}{2\partial l_1} \sinh(l_2/2) &= \frac{\theta_1}{2} \sinh(\theta_1 l_1/2) \frac{\cosh(l_{\gamma_X}/2)}{\sinh(l_1/2)} - \cosh(\theta_1 l_1/2) \cosh(l_{\gamma_X}/2) \frac{\cosh(l_1/2)}{2 \sinh^2(l_1/2)} \\ &\leq \frac{\cosh(l_{\gamma_X}/2) \cosh(\theta_1 l_1/2)}{2} \left[\frac{1}{2 \sinh(l_1/2)} - \frac{\cosh(l_1/2)}{\sinh^2(l_1/2)} \right] \\ &< 0. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport aux autres variables il vient

$$\nabla l_{\gamma_2}([X, \varphi]) = \begin{pmatrix} 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } \theta_1([X, \varphi]) = 0,$$

et

$$\nabla l_{\gamma_2}([X, \varphi]) = \begin{pmatrix} > 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } 1/2 \geq \theta_1([X, \varphi]) > 0.$$

Enfin via l'égalité de la Remarque 2.2 nous trouvons

$$\nabla l_{\gamma'_2}([X, \varphi]) = \begin{pmatrix} 0 \\ < 0 \\ * \end{pmatrix} \quad \text{si } \theta_1([X, \varphi]) = 0$$

et

$$\nabla l_{\gamma'_2}([X, \varphi]) = \begin{pmatrix} > 0 \\ < 0 \\ * \end{pmatrix} \quad \text{si } 1/2 \geq \theta_1([X, \varphi]) > 0.$$

Nous allons étudier les différentes configurations de systoles pour un point $[X, \varphi]$ de D .

- Si X possède exactement une systole, alors le gradient de la fonction longueur associée est non nul et X n'est pas une surface eutactique.
- Si X possède exactement deux systoles, et si celles-ci sont γ_1 et γ'_1 , ou γ_1 et γ_X , ou γ'_1 et γ_X , alors les vecteurs gradient des fonctions longueur des systoles ne sont visiblement pas colinéaires et la surface n'est pas eutactique. Si X contient exactement deux systoles qui sont γ'_1 et γ'_2 , alors en regardant les gradients des fonctions longueur dans le système de coordonnées $(l_{\gamma'_1}, l_{\gamma'_2}, l_{\gamma'_3})$ on s'aperçoit qu'ils ne sont pas colinéaires, et par suite la surface pas eutactique.
- Si X possède exactement trois systoles, alors ou bien les systoles de X sont γ'_1 , γ'_2 et γ'_3 , et en se plaçant dans le système de coordonnées $(l_{\gamma'_1}, l_{\gamma'_2}, l_{\gamma'_3})$ il est clair que X n'est pas eutactique; ou bien les systoles de X sont γ_1 , γ'_1 et γ_X , et avec les coordonnées usuelles on voit que X n'est pas eutactique; ou bien les systoles de X sont γ'_1 , γ'_2 et γ_X , dans ce cas $\theta_1([X, \varphi]) > 0$ et en regardant les coordonnées des vecteurs gradient des fonctions longueurs on voit encore une fois que X n'est pas eutactique.
- Si X possède exactement quatre systoles, alors $X = X(H)$. Comme $X(H)$ est un point fixe isolé d'un sous-groupe de Mod_3^- c'est un point eutactique (voir le Corollaire 1.3. de [Bav05a]).
- Si X possède exactement cinq systoles, alors $X = X(P)$. Comme $X(P)$ est elle aussi un point fixe isolé d'un sous-groupe du groupe modulaire, elle est eutactique.

□

Avec des calculs triviaux nous déterminons aussi les surfaces parfaites et ainsi les surfaces extrêmes de \mathcal{T}_3^- .

PROPOSITION 4.10. *Il y a une et une seule surfaces₋₁ parfaite : $X(H)$.*

COROLLAIRE 4.11. *Il y a une et une seule surfaces₋₁ extrême : $X(H)$. Le maximum global de la fonction systole sur \mathcal{T}_3^- (modulo l'action du groupe modulaire) est atteint en $[X(H), \varphi_{1/2}]$ et*

$$\cosh(\text{sys}(X(H))) = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

REMARQUE 4.4. Une fois connus tous les points eutactiques de \mathcal{T}_3^- , et via la formule d'Euler donnée par H.Akrout (dans [Akr03] au § 6.3.), nous retrouvons la

caractéristique du groupe modulaire :

$$\chi(\text{Mod}_3^-) = (-1)^3 \left[\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{6} \right] = -\frac{1}{12}$$

Chapitre 5

Cas des surfaces à bords

De notre étude de \mathcal{T}_3^- nous allons déduire une description des espaces de Teichmüller du tore à un bord, du plan projectif à deux bords et de la bouteille de Klein à un bord (les longueurs des bords seront supposées fixées).

Avant toute chose, pour toutes les surfaces compactes possédant k bords, nous appellerons b_i ($i = 1 \dots k$) leurs bords, et nous supposerons fixées les longueurs $(l(b_i))_{i=1 \dots k}$. Sauf mention du contraire, un homéomorphisme entre deux surfaces à bords enverra le bord b_i ($1 \leq i \leq k$) de la première surface sur le bord b_i de la deuxième.

5.1. Espaces de Teichmüller des surfaces à bords

Nous procédons comme nous l'avions fait dans le cas des surfaces sans bord. Nous fixons une surface compacte R orientable ou non, de genre g avec k bords (les longueurs des bords, nous venons de le dire, sont fixées). Une surface marquée est alors un couple (S, φ) , où S est une surface et $\varphi : R \mapsto S$ un homéomorphisme, préservant l'orientation si R est orientable. Deux surfaces marquées (S, φ) et (S', φ') seront équivalentes lorsque l'homéomorphisme $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ sera isotope à une isométrie. On définit l'espace $\mathcal{T}_{g,k}$ (resp. $\mathcal{T}_{g,k}^-$) des surfaces compactes orientables (resp. non orientables) de genre g à k bords de longueurs fixées, comme l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces marquées. Cet espace possède une structure de variété C^∞ déterminée par les fonctions longueurs.

Nous allons montrer que par auto-recollement des bords nous pouvons plonger ces espaces de Teichmüller de surfaces à bords ($\mathcal{T}_{1,1}$, $\mathcal{T}_{1,2}^-$ et $\mathcal{T}_{2,1}^-$ par exemple) dans les espaces de Teichmüller de surfaces sans bords (ici \mathcal{T}_3^-).

Soit S une surface compacte avec k bords, notons \bar{S} la surface obtenue par auto-recollement des bords. Nous avons le lemme suivant :

LEMME 5.1. *Soit φ un homéomorphisme de S , φ induit un homéomorphisme $\bar{\varphi}$ de \bar{S} unique à isotopie près. De plus, si ψ est un homéomorphisme de S isotope à φ , alors $\bar{\psi}$ et $\bar{\varphi}$ sont isotopes.*

Afin de donner une esquisse de démonstration de ce lemme nous aurons besoin d'un résultat bien connu (voir [Ghy01]) :

PROPOSITION 5.2. *Un homéomorphisme du cercle est isotope à une isométrie.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ et $\tilde{f} \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ un de ses relevés à \mathbb{R} , \tilde{f} s'écrit sous la forme $\tilde{f}(x) = x + t(x)$ où t est 1-périodique. Maintenant, t s'écrit sous la forme $c_0 + t_0$ où c_0 est une constante et t_0 une fonction 1-périodique

dont la valeur moyenne sur une période est nulle. Pour $0 \leq s \leq 1$ on définit \tilde{f}_s par $\tilde{f}_s(x) = x + c_0 + (1-s)t_0(x)$. Nous avons $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ et \tilde{f}_1 une translation. Comme l'ensemble des homéomorphismes de \mathbb{R} préservant l'orientation est convexe (c'est l'ensemble des fonctions strictement croissantes tendant vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$) il est clair que $(s, x) \mapsto \tilde{f}_s(x)$ est une isotopie. Pour toute valeur du paramètre s , \tilde{f}_s commute avec les translations entières, et nous en déduisons une isotopie $(f_s)_s$ entre f et une rotation de \mathbb{S}^1 . De la même façon, nous montrons qu'un homéomorphisme du cercle ne préservant pas l'orientation est isotope à une isométrie négative, c'est-à-dire à une symétrie. \square

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU LEMME 5.1. La restriction de φ à chacun des bords est isotope à un homéomorphisme commutant avec l'auto-recollement de ce bord (par la proposition précédente), ainsi φ induit un homéomorphisme de S commutant avec l'auto-recollement des b_i ($i = 1 \dots k$), donc induit un homéomorphisme $\bar{\varphi}$ de \bar{S} . Avec un peu de topologie, il apparaît que si φ est isotope à ψ , un autre homéomorphisme de S , alors $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ sont isotopes. Nous concluons que l'homéomorphisme induit est bien unique à isotopie près. \square

Ainsi, à une surface marquée $[S, \varphi]$ correspond une unique surface marquée $[\bar{S}, \bar{\varphi}]$. Autrement dit, nous définissons (modulo l'action des groupes modulaires) une unique application

$$\mathcal{R} : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{g,k} \text{ (resp. } \mathcal{T}_{g,k}^-) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{2g+k}^- \text{ (resp. } \mathcal{T}_{g+k}^-) \\ [S, \varphi] & \longmapsto & [\bar{S}, \bar{\varphi}] \end{array} .$$

Notons f_1, \dots, f_k les géodésiques issues de l'auto-recollement des bords, \mathcal{R} est à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{F} = \{l(f_i) = l(b_i)/2, i = 1 \dots k\}$.

Inversement, soit S une surface compacte non orientable sans bord, et soient f_1, \dots, f_k des géodésiques de S non orientables et disjointes. Si \hat{S} désigne la surface obtenue par découpe de ces k géodésiques, alors le lemme suivant vient directement.

LEMME 5.3. *Soit φ un homéomorphisme de S fixant (à homotopie près) les courbes $(f_i)_{i=1 \dots k}$, φ induit un homéomorphisme $\hat{\varphi}$ de \hat{S} unique à isotopie près. De plus, si ψ est un homéomorphisme de S isotope à φ , alors $\hat{\psi}$ et $\hat{\varphi}$ sont isotopes.*

Nous pouvons alors définir une application

$$\mathcal{D} : \begin{array}{ccc} \mathcal{F} = \{l(f_i) = l(b_i)/2, i = 1 \dots k\} \subset \mathcal{T}_g^- & \longrightarrow & \mathcal{T}_{(g-k)/2,k} \text{ ou } \mathcal{T}_{g-k,k}^- \\ [S, \varphi] & \longmapsto & [\hat{S}, \hat{\varphi}] \end{array} ,$$

l'espace d'arrivée dépendant de la nature topologique des géodésiques.

Soient $\mathcal{T}1$ un espace de Teichmüller de surfaces à bords, et $\mathcal{T}2$ l'espace de Teichmüller des surfaces sans bords de même caractéristique. Les applications \mathcal{D} et \mathcal{R} existantes entre ces deux espaces vérifient $\mathcal{D} \circ \mathcal{R} = id_{\mathcal{T}1}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{D} = id_{\mathcal{F}}$. En particulier l'image de \mathcal{R} est exactement l'ensemble \mathcal{F} des points de $\mathcal{T}2$ vérifiant les conditions de longueur. D'une manière générale les lieux d'égalité de longueurs ne constituent pas des sous-variétés du Teichmüller, néanmoins dans le cas présent les géodésiques $(f_i)_{i=1 \dots k}$ sont disjointes, et par un petit lemme nous concluons que \mathcal{F} est une sous-variété de \mathcal{T}_g^- .

LEMME 5.4. *Soit R une surface hyperbolique compacte, soit $(f_i)_{i=1\dots k}$ une famille de géodésiques disjointes de R . L'ensemble $\mathcal{F} = \{l(f_i) = l(b_i)/2, i = 1 \dots k\}$ est une sous-variété lisse de codimension k de l'espace de Teichmüller de R .*

DÉMONSTRATION. Nous pouvons compléter cette famille en une famille de géodésiques disjointes, telle que les coordonnées de longueur et éventuellement de twist associées établissent un difféomorphisme entre $\mathcal{T}(R)$ et un produit $(\mathbb{R}_+^*)^\alpha \times \mathbb{R}^\beta$ où $\alpha + \beta$ est égal à $\dim(\mathcal{T}(R))$. L'assertion s'en déduit immédiatement. \square

En choisissant de bons systèmes de coordonnées de $\mathcal{T}1$ et $\mathcal{T}2$, il est désormais clair que les applications de découpe et de recollement sont de classe C^∞ . Par conséquent,

PROPOSITION 5.5. *Les applications \mathcal{R} et \mathcal{D} établissent des difféomorphismes entre $\mathcal{T}1$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}2$. En particulier, \mathcal{R} est un plongement de $\mathcal{T}1$ dans $\mathcal{T}2$.*

En ce qui concerne le groupe des homéotopies d'une surface à bord S , par les lemmes 5.1 et 5.3 il est isomorphe au groupe $Fix((f_i)_{i=1\dots k})$ égal à

$$\{h \in \text{Homeot}(\bar{S}) ; h \text{ fixe (à homotopie près) les géodésiques } f_i \text{ } i = 1 \dots k\}.$$

L'application \mathcal{R} est équivariante pour l'action de $\text{Homeot}(S)$.

Enfin, nous aurions pu définir une application d'auto-recollement de k_1 bords (avec $k_1 < k$) d'une surface à k bords, nous retrouverions avec les mêmes preuves tous les résultats obtenus.

5.2. Le tore à un bord

L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{1,1}$, des tores à un bord de longueur fixée $l(b_1) > 0$, s'identifie au plan $\{l_{\gamma_X} = l(b_1)/2\} \subset \mathcal{T}_3^-$ via le plongement \mathcal{R} . Le groupe des homéotopies est isomorphe à celui des surfaces $_{-1}$ puisque tout homéomorphisme de surface $_{-1}$ fixe l'ovale, ainsi nous retrouvons ce résultat bien connu :

PROPOSITION 5.6. *Le groupe des homéotopies des tores à un bord est isomorphe à $GL(2, \mathbb{Z})$, et $Mod_{1,1} \simeq PGL(2, \mathbb{Z})$.*

Un domaine fondamental $D_{l(b_1)}$ de l'action de $Mod_{1,1}$ sur $\mathcal{T}_{1,1}$ s'obtient en intersectant D avec le plan $\{l_{\gamma_X} = l(b_1)/2\}$ (voir figure 4.3), et l'action des générateurs se lit directement sur la figure 4.4.

Considérons la décomposition cellulaire triviale, c'est-à-dire constituée d'une face F , trois arêtes $A_1 = \{l_3 = l_4\}$, $A_2 = \{l_1 = l_2\}$, et $A_3 = \{l_2 = l_3\}$, et deux sommets S_{12} et S_{23} . Les points de la face, de même que ceux des arêtes A_1 et A_3 admettent une seule systole, γ_1 . Les points de l'arête A_2 possèdent deux systoles, γ_1 et γ_2 ; mais aucun d'eux n'est un point eutactiques car $\frac{\partial l_2}{\partial \theta_1} \neq 0$. Enfin, les systoles de S_1 sont γ_1 et γ_2 , et celles de S_2 , γ_1 , γ_2 et γ_3 . Ces deux surfaces, en tant que points fixes isolés de sous-groupes du groupe modulaire sont eutactiques. Trivialement la seule surface parfaite correspond au sommet S_{23} . Nous retrouvons ainsi ce résultat de P. Schmutz Schaller ([Sch93]) :

THÉORÈME 5.7. *L'espace $\mathcal{T}_{1,1}$ des tores à un bord de longueur fixée ($l(b_1) > 0$) contient une seule surface extrême (modulo l'action du groupe modulaire). Cette*

surface est modélisée sur l'hexagone régulier (figure 2.4), et la longueur s de sa systole est donnée par

$$\cosh(s/2) = \cosh(b_1/6) + 1/2.$$

5.3. La bouteille de Klein à bord

Regardons maintenant l'espace $\mathcal{T}_{2,1}^-$ des bouteilles de Klein à bord de longueur fixée $l(b_1) > 0$. Via le plongement \mathcal{R} et en supposant que le bord auto-recollé se confond avec la géodésique γ'_1 , cet espace s'identifie à $\{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2\} \subset \mathcal{T}_3^-$. Remarquons que cet ensemble est une surface réglée, son intersection avec un plan horizontal est une droite parallèle à l'axe du twist.

Les éléments de Mod_3^- fixant γ'_1 n'agissent que sur la coordonnée de twist θ_1 car ils fixent aussi γ_X . Sur la figure 4.4 nous voyons aisément quels sont ces éléments, ce sont ceux envoyant D sur un autre domaine fondamental bordé par le plan $\{l_1 = 0\}$. Leur groupe est engendré par n et $v = stn$, les réflexions selon les droites $\{\theta_1 = 0\}$ et $\{\theta_1 = 1/2\}$; d'où

PROPOSITION 5.8. *Le groupe modulaire de la bouteille de Klein à bord admet la présentation suivante : $Mod_{2,1}^- \simeq \langle n, v \mid n^2 = v^2 = 1 \rangle$.*

REMARQUE 5.1. Résultat à comparer avec celui de [Kor02] (associé à [Spr75]).

Un domaine fondamental pour l'action de ce groupe sur $\{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2\}$ est donc $\{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2, 0 \leq \theta_1 \leq 1/2\}$. Une décomposition cellulaire intéressante de ce domaine, est celle constituée de deux faces

$$F_1 = \{l_{\gamma'_2} > l_{\gamma_1}\}, \quad F_2 = \{l_{\gamma'_2} < l_{\gamma_1}\}$$

de cinq arêtes

$$\begin{aligned} A_{11} &= \{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2, \theta_1 = 0, l_{\gamma'_2} > l_{\gamma_1}\}, & A_{12} &= \{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2, \theta_1 = 1/2, l_{\gamma'_2} > l_{\gamma_1}\}, \\ A_{21} &= \{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2, \theta_1 = 0, l_{\gamma'_2} < l_{\gamma_1}\}, & A_{22} &= \{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2, \theta_1 = 1/2, l_{\gamma'_2} < l_{\gamma_1}\}, \\ A_3 &= \{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2, l_{\gamma'_2} = l_{\gamma_1}\}, \end{aligned}$$

et de deux sommets S_1 (le sommet à twist nul) et S_2 (le sommet à twist $1/2$).

Montrons que l'ensemble A_3 forme bien une arête. Nous calculons l_2 de deux manières :

$$\begin{aligned} \cosh^2(l_2/2) &= \sinh^2(l_{\gamma'_2}/2) \sinh^2(l_X/2) \\ \cosh^2(l_2/2) &= \cosh^2(\theta_1 l_1/2) \coth^2(l_1/2) \coth^2(l_{\gamma'_1}/2) \\ &= \cosh^2(\theta_1 l_1/2) \frac{\sinh^2(l_X/2) \cosh^2(l_{\gamma'_1}/2)}{\sinh^2(l_1/2)}. \end{aligned}$$

En utilisant successivement la première puis la deuxième de ces égalités, il vient :

$$\begin{aligned} \sinh^2(l_{\gamma'_2}/2) &= \frac{\cosh^2(l_2/2)}{\sinh^2(l_X/2)} \\ &= \frac{\cosh^2(\theta_1 l_1/2) \cosh^2(l_{\gamma'_1}/2)}{\sinh^2(l_1/2)}. \end{aligned}$$

Au final, nous trouvons que $l_{\gamma'_2} = l_{\gamma_1}$ équivaut à

$$\cosh^2(l_{\gamma'_1}/2) = \left[\frac{\sinh^2(l_1/2)}{\cosh(\theta_1 l_1/2)} \right]^2.$$

Considérons θ_1 fixé, la fonction $x \mapsto \frac{\sinh^2(x)}{\cosh(\theta_1 x)}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et tend vers 0 en 0, vers $+\infty$ en $+\infty$. Pour tout θ_1 il existe donc un unique l_1 tel que $l_{\gamma'_2} = l_1$.

Comme la coordonnée de twist est comprise entre 0 et 1/2, les seules systoles possibles sont γ'_2 , γ'_3 et γ_1 , car les autres géodésiques de la bouteille de Klein à bord se déduisent de celles-ci par le twist de Dehn t_{γ_1} . Soulignons aussi que si γ'_3 est une systole, alors $\theta_1 = 1/2$ (sinon $l(\gamma'_2) < l(\gamma'_3)$). Nous pouvons maintenant donner la systole de chaque composante :

face	systole	arête	systoles	sommet	systoles
F_1	γ_1	A_{11}	γ_1	S_1	γ_1, γ'_2
		A_{12}	γ_1		
		A_3	γ_1, γ'_2	S_2	$\gamma_1, \gamma'_2, \gamma'_3$
F_2	γ'_2	A_{21}	γ'_2		
		A_{22}	γ'_2, γ'_3		

Déterminons les points eutactiques. Les surfaces possédant une seule systole ne sont pas des points eutactiques puisque les fonctions longueurs sont strictement convexes. Les points ayant γ'_2 et γ'_3 pour systoles ne sont eux non plus pas eutactiques puisque $(l_{\gamma'_2}, l_{\gamma'_3})$ est un système de coordonnées de $\{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2\}$. Il ne reste plus qu'à étudier les deux sommets. Nous observons que (dans les coordonnées (θ_1, l_1))

$$\nabla l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla l_{\gamma'_2}(S_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ < 0 \end{pmatrix},$$

donc S_1 est eutactique. Penchons nous sur le cas de S_2 , l'expression de l_1 est symétrique en les coordonnées $(l_{\gamma'_2}, l_{\gamma'_3})$, donc le gradient $\nabla l_1(S_2)$ a même composantes en $\frac{\partial}{\partial l_{\gamma'_2}}$ et $\frac{\partial}{\partial l_{\gamma'_3}}$, il est facile de voir qu'elles sont négatives ce qui implique S_2 eutactique.

Evidemment, S_2 est le seul point parfait, et aussi le seul point extrême. Pour calculer sa systole, nous découpons γ'_2 et γ'_3 , nous obtenons un pantalon à deux bords égaux. Ce pantalon se divise deux hexagones droits, nous travaillons dans l'un d'eux. Notons s la longueur des systoles et z la longueur de la perpendiculaire commune à γ'_2 et γ'_3 , nous avons (formule exprimant la distance de déplacement) $\sinh(s/4) = \sinh(z/2) \cosh(s/2)$, mais

$$\sinh(z/2) = \cosh(b_1/4)/(2 \sinh(s/2) \cosh(s/2)),$$

d'où $\cosh^3(s/4) - \cosh(s/4) = \cosh(b_1/4)/4$.

PROPOSITION 5.9. *Modulo l'action du groupe modulaire, l'espace $T_{2,1}^-$ a deux points eutactiques, un seul de ces deux points est parfait et donc extrême. Soit s la valeur de la systole en ce point, le cosinus hyperbolique $\cosh(s/4)$ est racine de l'équation $X^3 - X = \cosh(b_1/4)/4$.*

REMARQUE 5.2. (1) Bien sûr, l'équation $X^3 - X = \cosh(b_1/4)/4$ admet une unique racine supérieure à 1 ; cette racine est croissante en fonction du second membre de l'égalité. La valeur maximale de la systole est donc fonction croissante de la longueur du bord.

(2) En appliquant la formule d'Euler il vient : $\chi(\text{Mod}_{2,1}^-) = 0$.

5.4. Le plan projectif à deux bords

Considérons $\mathcal{T}_{1,2}^-$ l'espace de Teichmüller des plans projectifs à deux bords de longueurs $l(b_1)$ et $l(b_2)$ fixées. Par l'application d'auto-recollement \mathcal{R} , cet espace se plonge dans \mathcal{T}_3^- . Munissons \mathcal{T}_3^- du système de coordonnées $(l_{\gamma'_1}, l_{\gamma'_2}, l_{\gamma'_3})$, et supposons que les bords des plans projectifs sont identifiés à γ'_1 et γ'_2 après auto-recollement. Alors, l'image de $\mathcal{T}_{1,2}^-$ par \mathcal{R} est la droite $\{l_{\gamma'_1} = l(b_1)/2, l_{\gamma'_2} = l(b_2)/2\}$, en particulier $\mathcal{T}_{1,2}^-$ est paramétré par la longueur $l_{\gamma'_3}$ (c'est trivial, voir figure 2.6)

Nous pouvons montrer simplement que $\text{Mod}_{1,2}^-$ s'identifie à $\langle n \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En effet, on obtient un plan projectif à deux bords en découpant une géodésique non orientable d'une bouteille de Klein à bord, donc $\text{Mod}_{1,2}^-$ peut être vu comme le sous-groupe de $\text{Mod}_{2,1}^-$ stabilisant une certaine géodésique.

PROPOSITION 5.10. *Le groupe modulaire $\text{Mod}_{1,2}^-$ du plan projectif à deux bords est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Ceci dit, des présentations des groupes des homéotopies des surfaces fermées non orientables furent données par J. S. Birman et D. R. J. Chillingworth dès 1971. Plus récemment, M. Korkmaz ([Kor02]) fournit des générateurs du groupes des homéotopies pour les surfaces compactes non orientables pointées, et dans le cas du plan projectif moins deux points montra que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Or, nous savons par un théorème de D. J. Sprows ([Spr75]), que le groupe des homéotopies d'une surface compacte privée de k points est isomorphe au groupe des homéotopies de cette surface privée de k disques ouverts. Par conséquent,

PROPOSITION 5.11. *Le groupe des homéotopies du plan projectif à deux bords est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Soit Z un plan projectif à deux bords, le groupe $\text{Homeot}(Z)$ est isomorphe au sous-groupe de $\text{Homeot}(\bar{Z})$ formé des éléments fixant (à homotopie près) chacune des courbes γ'_1 et γ'_2 . Nous observons que l'identité id , l'involution hyperelliptique ι_Z , l'homéotopie n définie en § 4.3 et le produit $\iota \cdot n$, vérifient tous cette contrainte. Par conséquent, les homéotopies de Z qui s'en déduisent composent l'ensemble du groupe des homéotopies.

Décrivons l'action de ces éléments. L'involution hyperelliptique renverse l'orientation des géodésiques de Z , ainsi que celle des bords. L'homéotopie n conserve l'orientation de b_1 et renverse celle de b_2 , elle échange les deux géodésiques fermées simples de Z . n est ce qu'on appelle un glissement de bord («boundary slide» en anglais), cela consiste à faire passer un bord d'une surface non orientable à travers un plan projectif. Ce concept fut introduit par Lickorish, nous renvoyons à [Kor02]

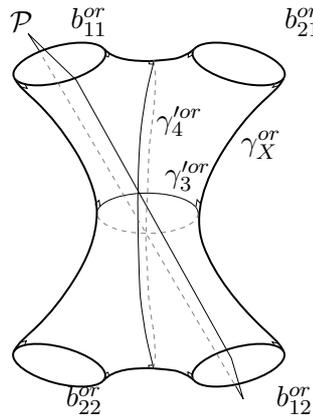


FIG. 5.1. Action de n^{or}

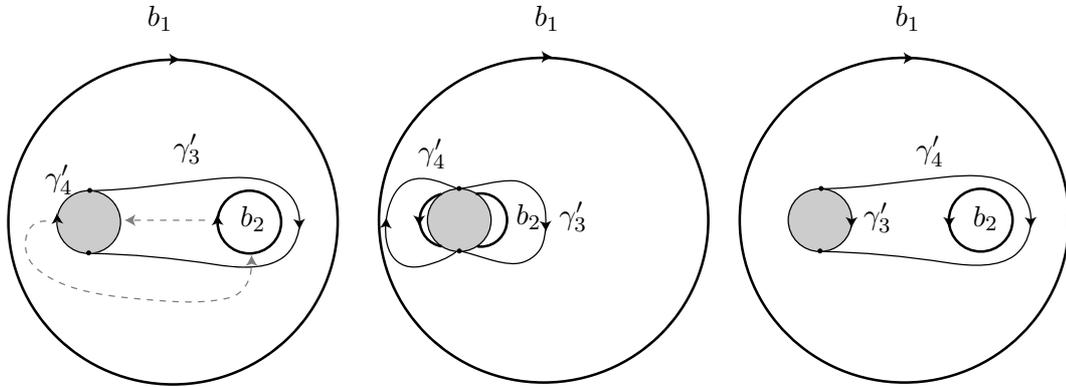


FIG. 5.2. Glissement de bord

pour plus de détails. Notons qu'en général un glissement n'est pas involutif car son carré est un twist de Dehn le long d'une courbe, cependant dans le cas présent cette courbe est un bord.

Nous donnons deux représentations de n . La première (figure 5.1) est l'action de n^{or} , un relevé de n , sur le revêtement des orientations Z^{or} de Z . Z^{or} s'obtient, par exemple, en découpant γ_3 dans Z et en collant deux copies du pantalon obtenu avec un twist de $1/2$. En figure 5.1, Z^{or} est vu plongé dans l'espace \mathbb{R}^3 , n^{or} est alors la réflexion par rapport au plan \mathcal{P} contenant les points de Weierstrass. Nous laissons au lecteur le soin de voir que ceci a bien un sens, quitte à donner suffisamment de symétries au plongement de Z^{or} . La deuxième représente un glissement de bord (figure 5.2) effectué par le bord b_2 en suivant le chemin pointillé. Nous voyons bien que les géodésiques intérieures de Z sont échangées, que le bord b_1 conserve son orientation, et que celle de b_2 est inversée.

Prenons l_{γ_3} comme coordonnée de $\mathcal{T}_{1,2}^-$, γ_4 est l'autre géodésique fermée simple de Z . L'action de n s'exprime simplement en disant qu'au point de coordonnée (l_{γ_3}) elle associe le point de coordonnée (l_{γ_4}) ; n a donc un unique point fixe, $Z(P)$, déterminé par $l_{\gamma_3} = l_{\gamma_4}$. En tant que point fixe isolé de n , $Z(P)$ est eutactique. Il n'y a pas d'autre point eutactique car, quitte à appliquer n , ce point aurait γ_3 pour

unique systole, or le gradient de γ'_3 est non nul. En fait, nous voyons que $l_{\gamma'_4}$ est une fonction strictement décroissante de $l_{\gamma'_3}$. Trivialement, $Z(P)$ est le seul point parfait de $\mathcal{T}_{1,2}^-$ et aussi le seul point extrême. Remarquons que $l_{\gamma'_3} = l_{\gamma'_4}$, c'est-à-dire $\bar{Z}(P)$ est un élément du plan $\{\theta_1 = 0\}$.

Calculons la systole s de $Z(P)$. En découpant une systole de $Z(P)$ nous obtenons un pantalon (voir figure 2.6), celui-ci se divise en deux hexagones droits, nous travaillerons dans l'un d'eux. La deuxième systole part orthogonalement d'un côté de l'hexagone pour ensuite couper le côté opposé en son milieu avec un angle α . L'hexagone est ainsi partagé en deux pentagones et nous avons les égalités suivantes (voir [Bus92] p. 37) :

$$\begin{cases} \cosh(b_2/2) &= -\cosh^2(s/2)\cos(\alpha) &+ \sinh^2(s/2) \\ \cosh(b_1/2) &= -\cosh^2(s/2)\cos(\pi - \alpha) &+ \sinh^2(s/2) \end{cases} .$$

Nous additionnons ces deux lignes, vient alors le théorème suivant :

THÉORÈME 5.12. *Modulo l'action du groupe modulaire, le maximum de la fonction systole sur $\mathcal{T}_{1,2}^-$ est atteint au point $Z(P)$, sa valeur est donnée par*

$$\cosh(\text{sys}(Z(P))) = \cosh(b_1/2) + \cosh(b_2/2) + 1.$$

REMARQUE 5.3. En appliquant la formule d'Euler nous avons $:\chi(\text{Mod}_{1,2}^-) = 1/2$.

Chapitre 6

Autres invariants métriques

Nous donnons ici d'autres inégalités optimales valables pour la systole orientable, la systole non orientable, la 2-systole et la 3-systole des surfaces₋₁. Tout consiste à exploiter convenablement des décompositions du domaine D .

6.1. La systole orientable

La systole orientable d'une surface₋₁ est la plus petite longueur d'une géodésique orientable, qui éventuellement peut être carré d'une géodésique non orientable. Dans D il y a 3 candidats possibles pour la systole orientable : γ_1 , γ_X^2 ou $\gamma_1'^2$. Nous décomposons facilement D en trois zones correspondant aux lieux où les différents candidats sont effectivement réalisés comme la systole orientable. Ces trois zones se déterminent sans difficultés puisque :

$$\begin{aligned} l_{\gamma_1} = 2l_{\gamma_X} &\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{x+1}}{2} \\ l_{\gamma_1'} = l_{\gamma_X} &\Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{x} \\ l_{\gamma_1} = 2l_{\gamma_1'} &\Leftrightarrow z = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

avec $x = \cosh^2(l_1/2)$ et $z = \cosh^2(l_X/2)$.

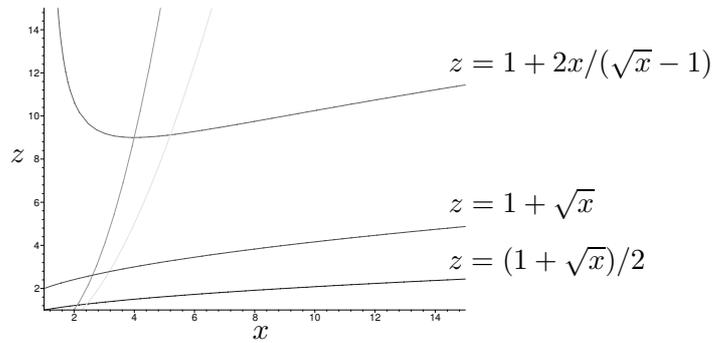


FIG. 6.1

Nous regardons le maximum de la systole orientable dans chacune de ces zones, il est toujours atteint sur la droite des surfaces équilatérales $\{l_1 = l_2, \theta_1 = 1/2\}$. Sur cette droite il y a donc deux points intéressants, comme γ_1 est systole orientable de chacun d'eux nous voyons que le point réalisant le maximum global de la systole orientable sur D est celui admettant $\gamma_1, \gamma_1'^2, \gamma_2, \gamma_2'^2, \gamma_3, \gamma_3'^2$ comme systoles orientables. Pour calculer la valeur de la systole orientable en ce point nous

utilisons les égalités

$$\begin{cases} \cosh(h/2) &= \coth(l_1/4) \coth(l_1/2) \\ \cosh(l_1/2) &= \cosh(h/2) \cosh(l_1/4) = \coth(l_1/2) \cosh^2(l_1/4) / \sinh(l_1/4) \end{cases}$$

où h est la perpendiculaire commune aux bords associés à γ_1 dans le pantalon issu de la découpe de γ_1 dans \mathbb{T}_X . Partant de

$$\sinh(l_1/2) \sinh(l_1/4) = \cosh^2(l_1/4)$$

nous arrivons à l'équation

$$2X^2 - 5X + 1 = 0$$

où $X = \cosh(l_1/2)$. Nous trouvons donc $X = (5 + \sqrt{17})/4 \cong 2,28$. Pour mémoire le cosinus hyperbolique de la demi-systole orientable de $X(H)$ vaut $(3 + \sqrt{17})/4$. Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 6.1. *Modulo l'action du groupe modulaire, la systole orientable atteint son maximum sur \mathcal{T}_3^- au point de twist $1/2$ tel que les géodésiques $\gamma_1, \gamma_1'^2, \gamma_2, \gamma_2'^2, \gamma_3, \gamma_3'^2$ aient mêmes longueurs. En ce point nous avons*

$$\cosh(l_1/2) = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}.$$

6.2. La systole non orientable

Dans un premier temps, regardons seulement les géodésiques non orientables distinctes de l'ovale. Il est facile de voir que le minimum des fonctions longueur associées à ces géodésiques n'est pas borné sur \mathcal{T}_3^- . En effet, dans le domaine D ce minimum est égal à $l_{\gamma_1'}$, et nous avons

$$\sinh(l_{\gamma_1'}/2) = \cosh(l_1/2) / \sinh(l_X/2) \geq 1 / \sinh(l_X/2)$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque l_X tend vers 0.

Si maintenant nous considérons toutes les géodésiques non orientables, y compris l'ovale. Alors la systole non orientable (la plus petite longueur d'une géodésique non orientable) est égale sur D au minimum des fonctions l_X et $l_{\gamma_1'}$. Sur le sous-ensemble $\{l_X \leq l_{\gamma_1'}\}$ de D le maximum de la systole non orientable, c'est-à-dire l_X , est atteint au point $X(H)$. Sur le sous-ensemble $\{l_{\gamma_1'} \leq l_X\}$ de D , à l_X fixé le maximum de $l_{\gamma_1'}$ est atteint là où l_1 est maximum. Il y a deux cas à distinguer : dans le premier cas le plan horizontal déterminé par la valeur de l_X intersecte l'ensemble $\{l_X = l_{\gamma_1'}\}$ et $l_{\gamma_1'} \leq l_X \leq l_X(X(H))$; dans le deuxième cas le maximum de la systole non orientable sur le plan horizontal est atteint à l'intersection des plans $\{\theta_1 = 1/2\}$ et $\{l_1 = l_2\}$ (c'est la droite des surfaces équilatérales). Cependant à twist $1/2$ nous avons,

$$\begin{cases} \sinh(h/2) &= \cosh(l_X/2) / \sinh(l_1/2) \\ \cosh(l_2/2) &= \cosh(l_1/4) \cosh(h/2) \end{cases},$$

en notant h la perpendiculaire commune aux bords associés à γ_1 dans le pantalon provenant de la découpe de γ_1 dans \mathbb{T}_X . Nous en déduisons

$$\cosh^2(l_2/2) = \frac{\cosh^2(l_X/2) + \cosh^2(l_1/2) - 1}{2(\cosh(l_1/2) - 1)},$$

et comme $l_1 = l_2$ il vient

$$\sinh^2(l_X/2) = \cosh^2(l_1/2)(2 \cosh(l_1/2) - 3),$$

d'où

$$\sinh^2(l_{\gamma'_1}/2) = \frac{\cosh^2(l_1/2)}{\sinh^2(l_X/2)} = \frac{1}{2 \cosh(l_1/2) - 3}.$$

Le minimum de $\cosh(l_1/2)$ sur l'ensemble $\{\theta_1 = 1/2, l_1 = l_2, l_X \leq l_{\gamma'_1}\}$ est atteint au point $X(H)$. Nous sommes arrivés au résultat suivant :

PROPOSITION 6.2. *Modulo l'action du groupe modulaire, la systole non orientable atteint son maximum sur \mathcal{T}_3^- au point $X(H)$. Cette surface possède 4 systoles non orientables : $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ et γ_X ; leur longueur est donnée par*

$$\cosh(l_1(X(H))) = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

6.3. La 2-systole

La k -systole fut introduite par P. Scmutz Schaller dans [Sch93], nous renvoyons à cet article pour les définitions relatives à cet objet.

PROPOSITION 6.3. *Modulo l'action du groupe modulaire, la 2-systole atteint son maximum global sur \mathcal{T}_3^- en la surface équilatérale donnée par les conditions suivantes : $l_1 = l_2 = l_3 = l_{\gamma'_1} = l_{\gamma'_2} = l_{\gamma'_3}$. En ce point la systole est γ_X et la 2-systole est réalisée par les 6 géodésiques γ_i, γ'_i ($i = 1, 2, 3$) ; le cosinus hyperbolique de la demi-2-systole est alors racine de l'équation $2X^3 - 3X^2 - 2X + 2 = 0$, en valeur approchée nous avons $\cosh(l_1/2) \cong 1,74$.*

DÉMONSTRATION. Il sera ici particulièrement agréable de travailler avec une décomposition de D en six cellules de dimension 3 :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma_X} > l_{\gamma'_1} > l_{\gamma_1}\}, & E_2 &= \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma_X} > l_{\gamma_1} > l_{\gamma'_1}\}, \\ E_3 &= \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma_1} > l_{\gamma_X} > l_{\gamma'_1}\}, & E_4 &= \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma_1} > l_{\gamma'_1} > l_{\gamma_X}\}, \\ E_5 &= \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma'_1} > l_{\gamma_1} > l_{\gamma_X}\}, & E_6 &= \{[X, \varphi] \in D \mid l_{\gamma'_1} > l_{\gamma_X} > l_{\gamma_1}\}. \end{aligned}$$

cela correspond à diviser en deux chacune des cellules C_i ($i = 1, 2, 3$) en prolongeant naturellement les faces F_{12}, F_{23} et F_{13} (voir figure 6.2).

Un 2-système consiste en une géodésique orientable et sa duale, ou en une géodésique orientable et l'ovale, ou en deux géodésiques non orientables (distinctes de l'ovale) disjointes. Pour une surface fixée, si $l_X, l_1 \leq l'_1$ alors $\{l_X, l_1\}$ forme un 2-système de longueur minimale.

Dans l'ensemble des points de D vérifiant $l_X \leq l_1 \leq l_{\gamma'_1}$ la 2-systole est donnée par l_1 . Sur cet ensemble elle atteint son maximum au point de twist $1/2$ tel que $l_1 = l_{\gamma'_1} = l_2 = l_{\gamma'_2} = l_3 = l_{\gamma'_3}$, nous noterons M_2 ce point. Remarquons que la systole de M_2 est γ_X . La 2-systole de M_2 , c'est-à-dire $l_1(M_2)$, est donnée par $\cosh(l_1(M_2)/2) = X_0$ où X_0 est solution de l'équation $2X^3 - 3X^2 - 2X + 2 = 0$. Il vient $\cosh(l_1(M_2)/2) \cong 1,74$.

Dans l'ensemble des points vérifiant $l_1 \leq l_X \leq l_{\gamma'_1}$, la 2-systole est donnée par l_X . Son maximum est atteint par exemple au point $X(P)$, et vaut

$$\cosh(l_X(X(P))/2) = (1 + \sqrt{5})/2 \cong 1,62.$$

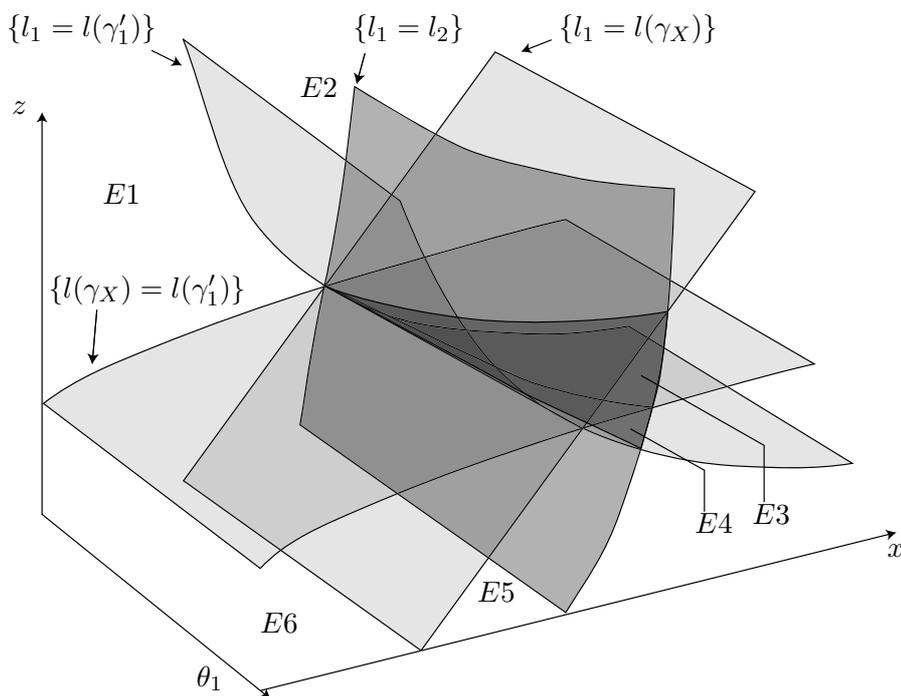


FIG. 6.2. Décomposition en six cellules

Dans l'ensemble des points vérifiant $l_1 \leq l_{\gamma'_1} \leq l_X$, la 2-systole est donnée par $l_{\gamma'_1}$. Son maximum est atteint lui aussi (par exemple) au point $X(P)$, et a donc même valeur que précédemment.

Enfin, dans tous les autres cas, c'est-à-dire lorsque $l_{\gamma'_1} \leq l_1$, la 2-systole est la géodésique de plus petite longueur parmi celles disjointes de γ'_1 . Sur cet ensemble la 2-systole est fonction croissante de $l_{\gamma'_1}$ (voir Rem. 5.2), donc le maximum de la 2-systole sera atteint là où $l_{\gamma'_1}$ atteint son maximum. À l_X fixée, $l_{\gamma'_1}$ atteint son maximum là où l_1 est maximum, soit à l'intersection des plans $\{\theta_1 = 1/2\}$ et $\{l_1 = l_2\}$ (la droite des surfaces équilatérales). Nous reproduisons à l'identique le raisonnement du paragraphe précédent, nous voyons que le minimum de $\cosh(l_1/2)$ sur l'ensemble $\{\theta_1 = 1/2, l_1 = l_2, l_{\gamma'_1} \leq l_1\}$ est atteint au point M_2 .

Nous concluons que, modulo l'action de Mod_3^- , le maximum de la 2-systole sur \mathcal{T}_3^- est atteint au point M_2 . \square

6.4. La 3-systole

Un 3-système d'une surface $_{-1}$ est constitué de 3 géodésiques disjointes, il s'ensuit que ces géodésiques sont nécessairement non orientables et distinctes de l'ovale. Nous avons vu au § 6.2 que le minimum des géodésiques non orientables distinctes de l'ovale n'est pas borné sur \mathcal{T}_3^- , par conséquent la 3-systole n'est pas bornée sur \mathcal{T}_3^- .

Deuxième partie

Constante de Bers en genre 2

Nous considérons les surfaces de Riemann de genre $g \geq 2$ munies de leur métrique hyperbolique de *Poincaré*.

Introduction

Alors qu'il s'employait à compactifier l'espace des modules, Lipman Bers fit l'observation suivante ([Ber74]) : toute surface de Riemann possède une famille de $3g - 3$ géodésiques fermées simples et disjointes (une *partition*), dont les longueurs sont majorées par une constante $B(g)$ dépendant seulement du genre g . La constante mise au jour par le mathématicien éponyme suscite plusieurs interrogations : Quelle est sa valeur ? Est-elle réalisée par une surface ? Peut-on en donner une asymptotique ?

Dès 1980, Peter Buser majore $B(g)$ par $(6g - 4)\operatorname{arccosh}2\pi(g - 1)$. En 1992, il parvient avec Mika Seppälä ([BS92]) à un résultat plus précis, et la même année indique dans [Bus92] une minoration de $B(g)$. Le tout donne une bonne idée du comportement asymptotique de $B(g)$: $\sqrt{6g} - 2 \leq B(g) < 21g$.

Durant les années 90, Paul Schmutz Schaller s'intéresse aux fonctions de type systole sur les surfaces de Riemann, et se lance dans la recherche de leur maxima ([Sch93]), en particulier de $B(2)$. Dans un premier temps il s'attaque aux surfaces à bords, pour se diriger ensuite vers les surfaces fermées. La surface de «Bolza» se révèle alors l'unique maximum global de la systole et de la 2-systole en genre 2. Le cas de la 3-systole, bornée supérieurement par $B(2)$, s'avère plus hardu : Schmutz Schaller découvre deux maxima locaux et conjecture que ce sont les seuls, mais il ne prouve pas l'existence d'un maximum global.

A ce jour, aucune valeur de $B(g)$ n'est connue. La recherche de la constante de Bers en genre 2 se poursuit cependant ([Par04],[Par05]). Les méthodes de découpages de Schmutz Schaller, mêmes exploitées avec habileté, n'ont toujours pas abouti, et la résolution de ce problème semble maintenant nécessiter l'élaboration d'autres techniques.

Dans cet article nous déterminons $B(2)$, plus précisément nous montrons :

THÉORÈME. *La constante de Bers $B(2)$ est donnée par $\cosh(B(2)/12) = x_0$ où x_0 est l'unique solution supérieure à 1 de $32x^5 - 32x^4 - 24x^3 + 24x^2 - 1 = 0$, soit $\cosh(B(2)/2) \approx 4,67$. La surface réalisant $B(2)$ est unique à isométrie près.*

La surface réalisant $B(2)$ est une des deux surfaces 3-maximales construites dans [Sch93]. La méthode mise en œuvre pour ce résultat (et décrite plus loin) aboutit naturellement à la découverte d'un troisième maximum local de la 3-systole, infirmant ainsi la conjecture de Schmutz Schaller.

Systole et k -systole

La *systole* d'une surface de Riemann est la longueur de sa plus petite géodésique non-homotopiquement triviale ; par abus de langage, on emploie le même mot pour toute géodésique la réalisant.

La systole, en tant que minimum des fonctions longueur des géodésiques, définit une fonction continue sur l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g , invariante sous l'action du

groupe modulaire Mod_g . La caractérisation et la recherche de ses maxima locaux fut un sujet d'études bouillonnant, dont émergea une théorie élégante ([Sch93] et [Bav97]), basée sur l'analogie avec l'invariant d'Hermité des réseaux euclidiens.

Schmutz Schaller généralise ainsi la systole ([Sch93]) : considérant les familles formées de k géodésiques fermées simples et disjointes, il associe à chacune d'elle une fonction longueur correspondant en tout point à la longueur de sa plus grande géodésique :

$$l_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}}(M) = \sup(l_{\gamma_1}(M), \dots, l_{\gamma_k}(M)) \quad (M \in \mathcal{T}_g).$$

Il introduit alors la k -systole comme minimum de ces fonctions longueurs :

$$sys_k = \inf \{ l_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}} ; \text{les } \gamma_1, \dots, \gamma_k \text{ sont } k \text{ géodésiques f. s. disjointes} \}.$$

Le cadre théorique développé pour la systole englobe ces nouveaux invariants.

La constante de Bers apparaît naturellement en tant que borne supérieure de la $3g$ -3-systole. Mais à la différence de la constante systolique ([Mum71]), rien n'assure que $B(g)$ est un maximum.

Plan de la démonstration

Donnons une explication heuristique de la démonstration. Imaginons une éventuelle surface de Riemann X réalisant la constante de Bers en genre 2. A l'instar des deux maxima connus, celle-ci posséderait probablement une géodésique séparante ξ de longueur la 3-systole de X . Nous en déduirions (par certaines inégalités) que les trois points de Weierstrass dans chacun des tores bordés par ξ seraient très proches les uns des autres, et inversement deux points de Weierstrass se situant chacun d'un côté de ξ seraient très éloignés l'un de l'autre (Fig. 6.3). Ainsi, les autres triplets de géodésiques réalisant la 3-systole de X , probablement formés de géodésiques non séparantes, vérifieraient la configuration suivante : deux géodésiques seraient petites et se situeraient chacune dans un tore bordé par ξ , tandis que la troisième relierait un point de Weierstrass de chaque tore, coupant ξ en deux points. Pour les surfaces proches de X , la 3-systole et la systole de la famille formée de ξ et des géodésiques coupant ξ en deux points coïncideraient donc ; et nous serions ramenés à la recherche de surfaces maximales pour cette nouvelle fonction systole facile à appréhender.

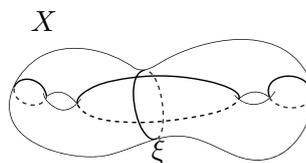


FIG. 6.3

La démonstration repose sur l'introduction d'un nouvel outil, *le graphe de contiguïté*, rendant compte de la répartition des points de Weierstrass sur une surface de Riemann hyperelliptique. Lorsque la 3-systole est grande, cet outil nous informe que les points de Weierstrass se répartissent en deux groupes de trois points proches les uns des autres (partie 1). Il s'agit ensuite de majorer la 3-systole

par la systole d'une famille de géodésiques reliant les deux groupes de points de Weierstrass (partie 3). Il reste alors à déterminer le maximum de cette fonction systole et à conclure (partie 4), ceci conduit naturellement à la construction d'un nouveau maximum local de la 3-systole. La deuxième partie établit des résultats topologiques préliminaires.

Conventions

A partir de maintenant, X désigne une surface de Riemann de genre 2. Sauf mention du contraire, par géodésique nous entendrons géodésique fermée simple. Lorsque cela ne prêterait pas à confusion, le nom d'une géodésique désignera encore sa longueur : nous préférons $\cosh(\gamma)$ à $\cosh(l(\gamma))$.

Chapitre 7

Graphe de contiguïté

Parallèlement à Schmutz Schaller et ses techniques de découpages, Christophe Bavard développa dans [Bav92] une méthode reposant sur un argument de densité : soit S une surface de Riemann hyperelliptique de genre $g \geq 2$, on considère dans le revêtement universel les cellules de Dirichlet-Voronoi associées aux relevés des points de Weierstrass, chacune d'elles contient un disque de centre le relevé d'un point de Weierstrass et de rayon la moitié du rayon d'injectivité au point de Weierstrass, on compare alors la densité des disques dans leurs cellules avec la densité maximale d'empilement (donnée par László Fejes Tóth) afin d'obtenir un résultat, par exemple une borne sur la systole. En appliquant cette méthode en d'autres points que les points de Weierstrass, Bavard obtint également une borne optimale sur le rayon d'injectivité maximal d'une surface de Riemann de genre $g \geq 2$ ([Bav96]).

La méthode de Bavard, *a priori* d'aucun secours dans l'étude de la 3-systole en genre 2, conduit cependant à deux observations intéressantes :

- les points de Weierstrass jouent un rôle prépondérant et il serait sûrement utile d'étudier leur répartition sur la surface,
- si une surface de Riemann de genre 2 possède trois géodésiques disjointes réalisant chacune un rayon d'injectivité, alors sa 3-systole se révèle très petite. En effet, la borne sur le rayon d'injectivité permet de majorer la longueur des trois géodésiques par $2 \operatorname{arccosh}(2, 88)$, or nous savons que $B(2) \geq 2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$ ([Sch93]).

Suivant la première observation, nous allons introduire un graphe géodésique dont les sommets sont les points de Weierstrass. Nous tenterons alors de déterminer les configurations possibles pour ce graphe sous une hypothèse de minoration de la 3-systole : $sys_3 \geq 2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$.

7.1. Définitions

Nous allons provisoirement considérer une surface hyperbolique S munie d'une involution hyperelliptique.

DÉFINITION 7.1. Nous appellerons *graphe régulier*, tout graphe géodésique obtenu en quotientant par l'involution hyperelliptique un système de géodésiques vérifiant les propriétés suivantes :

- i) chaque géodésique passe par exactement deux points de Weierstrass,
- ii) deux géodésiques ne peuvent s'intersecter qu'en un point de Weierstrass,
- iii) par chaque point de Weierstrass passe au moins une géodésique.

REMARQUE 7.1. (1) Les sommets d'un graphe régulier sont bien entendu les points de Weierstrass.

(2) Par un sommet passe au moins une arête.

(3) Deux sommets sont reliés par au plus une arête.

Voici un exemple de graphe régulier particulièrement intéressant.

DÉFINITION 7.2. Nous appellerons *graphe de contiguïté* de la surface S , noté $G_{cont}(S)$, le graphe géodésique obtenu en quotientant par l'involution hyperelliptique l'ensemble des géodésiques réalisant la distance entre un point de Weierstrass et l'ensemble des points de Weierstrass restant.

EXEMPLE 7.1. Le graphe de contiguïté d'un tore à un bord est formé de trois sommets, et de deux ou trois arêtes. Génériquement il en possède deux, dont une provient de la systole. Lorsqu'il en possède trois, les deux arêtes les plus longues ont nécessairement même mesure.

EXEMPLE 7.2. Le graphe de contiguïté de la surface de «Bolza» de genre 2 est le 1-squelette d'un octaèdre régulier ([Bav92]).

PROPOSITION 7.1. Soient γ et γ' deux géodésiques distinctes réalisant chacune la distance entre un point de Weierstrass et l'ensemble des points de Weierstrass restant. Alors, les points d'intersection éventuels de γ et γ' sont des points de Weierstrass.

CONSÉQUENCE 7.1. Les arêtes du graphe de contiguïté ne s'intersectent pas en dehors des sommets, ainsi le graphe de contiguïté est un graphe régulier.

DÉMONSTRATION. Si γ et γ' ont un point de Weierstrass en commun, l'assertion est évidente. Plaçons nous désormais dans le cas où les deux géodésiques ne passent pas par un même point de Weierstrass. Pour fixer les idées, disons que γ passe par w_1, w_2 et réalise la distance entre w_1 et les autres points de Weierstrass, et que γ' passe par w_3, w_4 et réalise la distance entre w_3 et les autres points de Weierstrass. Supposons, par l'absurde, l'existence d'un point p appartenant à γ et γ' . Si par exemple $d(p, w_2) \leq d(p, w_4)$ alors

$$d(w_3, w_2) < d(w_3, p) + d(p, w_2) \leq d(w_3, p) + d(p, w_4) = d(w_3, w_4) = r_{inj}(w_3).$$

Contradiction ! De même, il y a une contradiction si $d(p, w_2) \geq d(p, w_4)$. \square

Afin d'éviter les graphes réguliers avec un grand nombre d'arêtes, nous allons nous restreindre à une famille de graphes très petite, telle que tout graphe régulier contienne un graphe de cette famille.

DÉFINITION 7.3. Nous dirons qu'un graphe est *minimal* lorsque

- i) ce graphe est régulier,
- ii) il minimise le nombre d'arêtes parmi les graphes ayant même nombre de sommets et même connectivité.

REMARQUE 7.2. En particulier les sommets d'un graphe minimal sont les points de Weierstrass de la surface.

EXEMPLE 7.3. Les graphes minimaux à 6 sommets sont au nombre de dix, représentés en figure 7.1.

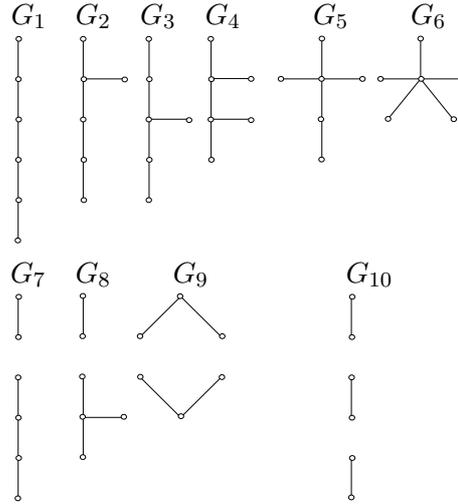


FIG. 7.1. Graphes minimaux à 6 sommets

7.2. Graphe de contiguïté et minoration de la 3-systole en genre 2

Nous nous plaçons en genre 2, sous une hypothèse de minoration de la 3-systole, nous allons déterminer les configurations possibles pour les sous-graphes minimaux du graphe de contiguïté.

L'hypothèse de minoration provient de la surface $P(3)$, construite par Schmutz Schaller dans [Sch93] au § 5. Aux points de \mathcal{T}_2 associés à $P(3)$, la 3-systole admet un maximum local approchant $2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$ par valeurs supérieures.

Dans la proposition ci-dessous X désigne une surface de Riemann de genre 2 vérifiant $\operatorname{sys}_3 \geq 2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$

PROPOSITION 7.2. *Soit G un graphe régulier de X dont les arêtes sont de longueurs inférieures à $\operatorname{arccosh}(2, 88)$. Alors, parmi les graphes minimaux, seuls les graphes G_4 et G_9 peuvent éventuellement se réaliser comme sous-graphe de G .*

L'alternative suivante résume assez bien la preuve : ou bien les degrés des sommets sont petits, et il existe trois arêtes disjointes (et donc la 3-systole est petite); ou bien le degré d'un sommet est grand, et il existe des voisins de ce sommet proches les uns des autres, ce qui permet de construire des arêtes petites.

DÉMONSTRATION. Le graphe G ne peut contenir de sous-graphe possédant trois arêtes disjointes, car les longueurs des arêtes sont majorées par $\operatorname{arccosh}(2, 88) < \operatorname{arccosh}(4, 67)$. Ainsi les graphes G_1 , G_3 , G_7 et G_{10} sont à exclusion. Il reste seulement à traiter les cas des graphes G_6 et G_8 , puisque G_8 est un sous-graphe de G_2 et G_5 .

Si G contient un sous-graphe du type G_6 . Alors, dans le revêtement universel nous construisons un polygone convexe de la façon suivante : nous considérons un relevé \tilde{w}_1 de w_1 , le point de Weierstrass de degré 5, de ce point sont issus 5 segments s_i ($i = 2, \dots, 6$) d'extrémité \tilde{w}_i (un relevé de w_i) tels que chacun d'eux est associé à une arête de G_6 ; nous supposons les s_i et \tilde{w}_i ($i = 2, \dots, 7$) ordonnés

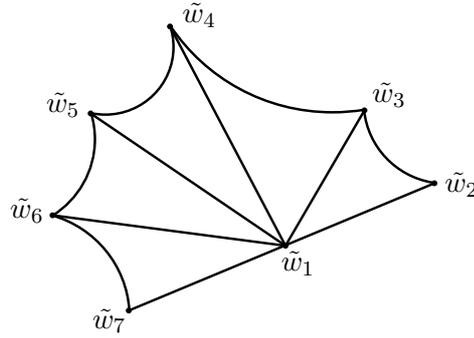


FIG. 7.2

dans le sens trigonométrique, et noterons \tilde{w}_7 et s_7 les images respectives de \tilde{w}_2 et s_2 par la symétrie de centre \tilde{w}_1 ; en traçant les segments $[\tilde{w}_i, \tilde{w}_{i+1}]$ ($i = 2, \dots, 6$) nous obtenons un hexagone convexe se divisant en 5 triangles $(\tilde{w}_1 \tilde{w}_i \tilde{w}_{i+1})$ ($i = 2, \dots, 6$) (Fig. 7.2). Nécessairement pour 3 de ces triangles, l'angle en \tilde{w}_1 est inférieur à $\pi/3$, comme $l(s_i) < \operatorname{arccosh}(2, 88)$ ($i = 2, \dots, 7$), il vient que pour ces trois triangles le côté opposé à \tilde{w}_1 est de longueur inférieur à $\operatorname{arccosh}(4, 67)$. Ainsi, parmi les côtés du polygone et les segments $s_i = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_i]$ ($i = 2, \dots, 6$), nous pouvons choisir trois segments disjoints de longueurs inférieures à $\operatorname{arccosh}(4, 67)$. Les géodésiques de X associées à ces segments sont elles aussi disjointes et forment une partition de la surface X . En effet, dans X les géodésiques associées aux s_i ne s'intersectent qu'en w_1 , ainsi le relevé de l'une d'elles ne peut traverser un triangle $(\tilde{w}_1 \tilde{w}_i \tilde{w}_{i+1})$ ($i = 2, \dots, 6$), par conséquent les géodésiques associées aux segments considérés ne peuvent s'intersecter qu'en des points de Weierstrass, or ce n'est pas le cas. Nous avons donc fabriqué une partition de longueur inférieure à $2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$, ceci contredit l'hypothèse sur la 3-systole.

Si G contient un sous-graphe du type G_8 . Soient w_1 le sommet de degré 3, et w_2 , w_3 et w_4 ses voisins. En reproduisant le raisonnement précédent nous trouvons deux segments entre les w_i ($i = 1..4$) disjoints et de longueurs inférieures à $\operatorname{arccosh}(4, 67)$. L'arête $[w_5, w_6]$ est disjointe de ces deux segments; en effet, regardons ce qui se passe dans le polygone de centre \tilde{w}_1 et de sommets \tilde{w}_2 , \tilde{w}_3 , \tilde{w}_4 et \tilde{w}'_2 (le symétrique de \tilde{w}_2 par rapport à \tilde{w}_1), il est clair que l'arête ne peut intersecter les rayons de ce polygone, mais ceci implique qu'elle ne peut non plus intersecter un côté. Nous avons à nouveau une petite partition de X contredisant l'hypothèse sur la 3-systole. \square

Sous l'hypothèse de minoration de la 3-systole, la borne de Bavard sur la rayon d'injectivité reste valable pour les arêtes du graphe de contiguïté, la démonstration de ce fait sera l'objet du chapitre 9. Les énoncés du lemme et de la proposition ci-dessous sont valables sous les mêmes hypothèses que précédemment.

LEMME. *Les longueurs des arêtes du graphe de contiguïté de X sont majorées par $\operatorname{arccosh}(2, 88)$.*

PROPOSITION 7.3. *Parmi les graphes minimaux, seuls les graphes G_4 et G_9 peuvent éventuellement se réaliser comme sous-graphe de $G_{\text{cont}}(X)$.*

REMARQUE 7.3. Nous verrons plus loin (§ 10.2) que le graphe G_4 peut à son tour être mis de côté.

Chapitre 8

Géométrie-Topologie associée à une géodésique séparante

Soient X une surface de Riemann de genre 2, et G un graphe régulier de X isomorphe au graphe G_9 ; nous allons montrer l'existence d'une géodésique séparante canoniquement associée à G , nous étudierons en suivant les configurations de certaines géodésiques relatives à une géodésique séparante.

8.1. Géodésique séparante engendrée par deux non séparantes

Notons \mathcal{G}_s (resp. \mathcal{G}_{\neq}) l'ensemble des géodésiques fermées simples séparantes (resp. non séparantes) de X . Considérons le sous-ensemble A de $\mathcal{G}_{\neq} \times \mathcal{G}_{\neq}$ formées des couples de géodésiques non séparantes s'intersectant en exactement un point :

$$A = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}_{\neq} \times \mathcal{G}_{\neq}; \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ s'intersectent en exactement un point}\}.$$

Nous pouvons construire une application surjective

$$\begin{aligned} \text{Sep} : A \subset \mathcal{G}_{\neq} \times \mathcal{G}_{\neq} &\longrightarrow \mathcal{G}_s \\ (\gamma, \delta) &\longmapsto \text{Sep}(\gamma, \delta) \end{aligned}$$

en associant à chaque couple $(\gamma_1, \gamma_2) \in A$ l'unique géodésique fermée simple dans la classe d'homotopie $[\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2]$. L'application ainsi définie est bien à valeurs dans l'ensemble des géodésiques fermées simples séparantes puisque la classe de $\text{Sep}(\gamma, \delta)$ dans $H_1(X, \mathbb{Z})$ est nulle en tant que commutateur.

PROPOSITION 8.1. *Soit $(\gamma, \delta) \in A$, alors une géodésique fermée simple n'intersectant pas $\gamma \cup \delta$ est contenue dans le tore bordé par $\text{Sep}(\gamma, \delta)$ ne contenant pas γ et δ .*

DÉMONSTRATION. Soit η une géodésique fermée simple de X disjointe de $\gamma \cup \delta$, η n'a pas d'homotopie dans le tore bordé par ξ contenant γ et δ , autrement dit la trace de η sur ce tore est homotope à un arc de ξ . Ainsi, η est homotope à une courbe n'intersectant pas ξ . Comme les géodésiques minimisent le nombre d'intersections nous concluons directement. \square

REMARQUE 8.1. Une géodésique disjointe de γ et δ est aussi disjointe de $\text{Sep}(\gamma, \delta)$. En particulier, $\text{Sep}(\gamma, \delta)$ est l'unique géodésique de \mathcal{G}_s n'intersectant pas $\gamma \cup \delta$.

CONSÉQUENCE 8.1. Soit G un graphe régulier de X isomorphe au graphe G_9 , l'application Sep associe à chaque composante connexe de G l'unique géodésique les séparant.

8.2. Correspondance induite par une géodésique séparante

Fixons nous ξ une géodésique fermée simple séparante de X , nous souhaitons comprendre la géométrie-topologie associée au couple (X, ξ) .

NOTATIONS. Nous noterons \mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 les tores à un bord issus de la découpe de ξ dans X . Par $\mathcal{G}_{\mathbb{T}_i}$ ($i = 1, 2$) nous désignerons l'ensemble des géodésiques fermées simples de X contenues dans \mathbb{T}_i ($i = 1, 2$), et par \mathcal{G}_ξ l'ensemble des géodésiques fermées simples de X coupant ξ en exactement deux points. Enfin, nous appellerons *rayon* d'un tore à un bord \mathbb{T} , un segment géodésique simple, orthogonal à $\partial\mathbb{T}$ en ses extrémités, et stable par l'involution hyperelliptique.

Procédons à quelques observations : les géodésiques appartenant à \mathcal{G}_ξ passent nécessairement par un point de Weierstrass de chacun des tores \mathbb{T}_i ($i = 1, 2$), cela découle de la stabilité des géodésiques fermées simples vis à vis de l'involution hyperelliptique. Bien sûr, il existe des géodésiques fermées simples coupant ξ en plus de deux points, nous pouvons même les choisir passant par deux points de Weierstrass situés d'un même côté de ξ .

Nous voulons mettre en correspondance les ensembles \mathcal{G}_ξ et $\mathcal{G}_{\mathbb{T}_1} \times \mathcal{G}_{\mathbb{T}_2}$.

LEMME 8.2. *Soit $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$, il existe un unique couple $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}_{\mathbb{T}_1} \times \mathcal{G}_{\mathbb{T}_2}$ tel que γ_1 et γ_2 soient disjointes de γ .*

DÉMONSTRATION. Cette propriété est purement topologique. En découpant la trace de γ sur le tore \mathbb{T}_i nous obtenons un cylindre. A homotopie et orientation près, il existe une unique courbe fermée simple sur ce cylindre, γ_i est la géodésique dans cette classe d'homotopie libre. Précisons que les géodésiques minimisent le nombre d'intersection parmi les courbes dans les mêmes classes d'homotopie libre. \square

REMARQUE 8.2. A toute géodésique fermée simple γ d'un tore à un bord \mathbb{T} nous pouvons associer un unique rayon γ' disjoint de γ . Le rayon « dual » de γ minimise la longueur dans sa classe d'homotopie, il vérifie de plus la relation $\sinh(\gamma'/2) \sinh(\partial\mathbb{T}/4) = \cosh(\gamma/2)$.

L'application Ξ ci-dessous est donc bien définie,

$$\Xi_\xi : \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\xi & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\mathbb{T}_1} \times \mathcal{G}_{\mathbb{T}_2} \\ \gamma & \longmapsto & (\gamma_1, \gamma_2) \end{array} ,$$

elle est par ailleurs équivariante pour l'action naturelle du groupe $\langle t_{\xi/2} \rangle$, où $t_{\xi/2}$ désigne le demi-twist selon ξ .

LEMME 8.3. *Soient γ et δ deux éléments de \mathcal{G}_ξ , nous avons l'équivalence*

$$\Xi(\gamma) = \Xi(\delta) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \delta = (t_{\xi/2})^k \cdot \gamma .$$

DÉMONSTRATION. L'implication réciproque est triviale car ξ et γ n'intersectent pas γ_1 et γ_2 . Soit $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}_{\mathbb{T}_1} \times \mathcal{G}_{\mathbb{T}_2}$, déterminons tous les antécédents de ce couple par Ξ . Découpons γ_1 et γ_2 dans X , nous voyons sans difficulté qu'un antécédent γ intersecte seulement une fois la perpendiculaire commune aux deux bords issus de la découpe de γ_i ($i = 1$ ou 2), sinon γ ne serait pas simple. Nous pouvons de ce fait visualiser les antécédents de (γ_1, γ_2) de la façon suivante (fig. 8.1) : nous divisons X en trois parties, deux pantalons et un cylindre, en découpant deux courbes

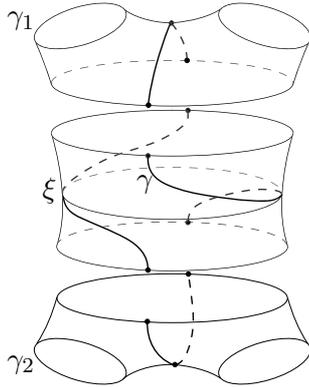


FIG. 8.1

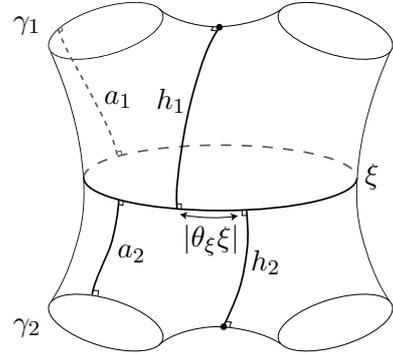


FIG. 8.2

homotopes à ξ . Fixons deux points sur chacune de ces courbes, un antécédent de (γ_1, γ_2) est homotope à une courbe dont le tracé dans chacun des pantalons relie simplement les points que nous avons fixés en passant entre les deux autres bords. Dans le cylindre, la courbe possède deux composantes connexes homotopes, chaque composante relie un point fixé d'un bord à un point fixé de l'autre bord. Il est clair que toutes ces courbes sont dans le même orbite sous l'action de $\langle t_{\xi/2} \rangle$. \square

Le groupe $\langle t_{\xi/2} \rangle$ agit librement sur \mathcal{G}_ξ et trivialement sur \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 . Gardons le même nom Ξ pour l'application entre les quotients, nous avons :

PROPOSITION 8.4. *L'application Ξ établie une bijection entre $\mathcal{G}_\xi / \langle t_{\xi/2} \rangle$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{T}_1} \times \mathcal{G}_{\mathbb{T}_2}$.*

8.3. Relation entre les longueurs

Pour le problème qui nous intéresse, à savoir la 3-systole, la correspondance entre géodésiques définie ci-dessus nous sera utile dans la mesure où elle induit une relation (une égalité) entre les longueurs.

Revenons au couple (X, ξ) étudié en au § 8.2. Fixons $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$, dans le pantalon issu de la découpe de ξ et γ_i ($i = 1, 2$) notons (Fig. 8.2) :

- a_i une perpendiculaire commune à ξ et à un bord identifié à γ_i ($i = 1, 2$),
- h_i la demi-médiatrice de la perpendiculaire commune aux bords identifiés à γ_i ($i = 1, 2$).

Enfin, désignons par θ_ξ la coordonnée de twist selon ξ relativement au h_i ($i = 1, 2$). Considérons qu'à $\theta_\xi = 0$ la géodésique γ supporte les segments h_i ($i = 1, 2$), alors à twist quelconque la longueur de γ est donnée par la formule (voir [Bus92]) :

$$\cosh(\gamma/2) = \sinh(\gamma_1/2) \sinh(\gamma_2/2) [\sinh(a_1) \sinh(a_2) \cosh(\theta_\xi \xi) + \cosh(a_1) \cosh(a_2)] - \cosh(\gamma_1/2) \cosh(\gamma_2/2)$$

Les égalités suivantes, valables pour $i = 1, 2$

$$\begin{cases} \sinh(\gamma_i/2) \sinh(a_i) &= \cosh(h_i) \\ \sinh(\gamma_i/2) \cosh(a_i) &= \cosh(\gamma_i/2) \coth(\xi/4) \\ \sinh(h_i) \sinh(\xi/4) &= \cosh(\gamma_i/2) \end{cases}$$

nous permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}\cosh(\gamma/2) &= \cosh(h_1) \cosh(h_2) \cosh(\theta_\xi \xi) + \cosh(\gamma_1/2) \cosh(\gamma_2/2) [\coth^2(\xi/4) - 1], \\ &= \cosh(h_1) \cosh(h_2) \cosh(\theta_\xi \xi) + \sinh(h_1) \sinh(h_2).\end{aligned}$$

REMARQUE 8.3. Nous avons $h_i = \gamma'_i/2$ ($i = 1, 2$).

Chapitre 9

Majorations de la longueur des arêtes de $G_{cont}(X)$

Dans toute cette partie X désigne une surface de Riemann de genre 2. Nous établirons d'abord quelques résultats préliminaires, nous démontrerons ensuite le lemme utilisé lors de la preuve de la Proposition 7.3. Nous procéderons par l'absurde : sous une hypothèse particulière, vérifiée lorsque l'une des arêtes de $G_{cont}(X)$ est supérieure à $\operatorname{arccosh}(2, 88)$, nous donnerons une méthode permettant une construire de petite partition de X .

NOTATIONS. Etant fixée ξ , une géodésique séparante de X , nous noterons \mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 les tores bordés par ξ , nous nommerons α_i et β_i deux géodésiques associées à des arêtes de $G_{cont}(\mathbb{T}_i)$, et nous appellerons δ_i et ε_i les deux géodésiques formant un triangle avec α_i et β_i dans le tore \mathbb{T}_i (figure 9.1). Quitte à effectuer un choix nous supposons $sys(\mathbb{T}_i) = \alpha_i \leq \beta_i \leq \delta_i \leq \varepsilon_i$.

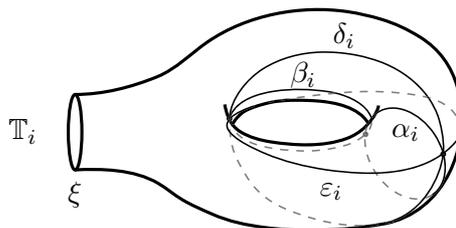


FIG. 9.1

9.1. Trois majorations connues

PROPOSITION 9.1. Soient r_{inj}^{max} le plus grand rayon d'injectivité de X , ξ une géodésique séparante de X , et $i \in \{1, 2\}$. Nous avons :

$$\cosh(r_{inj}^{max}) < 2, 88, \tag{9.1}$$

$$\sinh(\alpha_i/2) \leq \frac{1}{2 \sinh(\xi/12)} \tag{9.2}$$

$$\cosh(sys(\mathbb{T}_i)/2) \leq \cosh(\xi/6) + 1/2 \tag{9.3}$$

Les deux premières inégalités sont dûes à Bavard ([Bav96] et [Bav05a]), la troisième est la majoration optimale de la systole du tore à un bord tirée de [Sch93] et [Par04] (et redémontrée dans la première partie de cette thèse).

CONSÉQUENCE 9.1. Si la 3-systole de X est supérieure ou égale à $2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$, alors toute géodésique séparante ξ de X vérifie (utiliser 9.3)

$$\cosh(\xi/2) \geq 4, 67. \tag{9.4}$$

9.2. Majoration du twist

LEMME 9.2. *Il existe un point de $\xi \cap (\alpha'_1 \cup \beta'_1)$ et un point de $\xi \cap \alpha'_2$ séparés par un segment de ξ de longueur inférieure à $\xi/6$.*

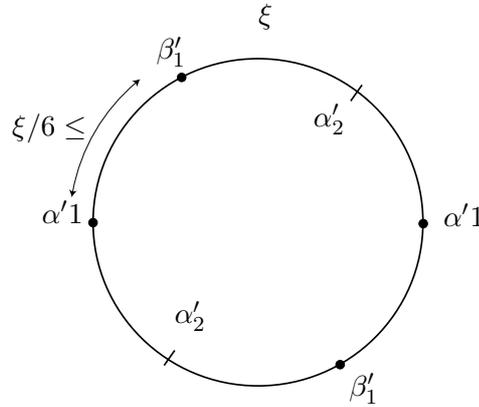


FIG. 9.2

DÉMONSTRATION. Les points de $\xi \cap (\alpha'_1 \cup \beta'_1)$ divisent ξ en quatre segments : deux contenant un point de δ'_1 , et deux n'en contenant pas. La surface $_{-1}$ associée à \mathbb{T}_1 se transforme, après découpe des rayons α'_1 , β'_1 et δ'_1 , en un pantalon hyperbolique. Les perpendiculaires communes de ce pantalon s'identifient à l'image de ξ dans la surface $_{-1}$, et la perpendiculaire commune la plus longue est celle opposée au bord le plus long, celui provenant de δ'_1 . La longueur de ce segment, qui est un de ceux ne contenant pas de point de δ'_1 est donc supérieure à $\xi/6$.

Découpons α_1 dans \mathbb{T}_1 , nous avons un pantalon se divisant en deux hexagones droits dans lesquels nous situons sans difficultés les rayons α'_1 et β'_1 . Nous majorons directement la longueur du segment considéré par $\xi/4$.

Pour conclure, regardons un segment moitié de ξ d'extrémités les points de $\xi \cap \alpha'_2$ (figure 9.2). Ce segment contient (au moins) un point de chacun des rayons α'_1 et β'_1 . Ces deux points étant séparés par un arc de longueur au moins $\xi/6$, l'un d'eux se situe nécessairement à une distance au plus $\xi/6$ d'une des extrémités. \square

9.3. Majoration de la longueur des arêtes de $G_{\text{cont}}(X)$

PROPOSITION 9.3. *Si la 3-systole de X est supérieure ou égale à $2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$, les arêtes du graphe de contiguïté sont de longueur inférieure à $\operatorname{arccosh}(2, 88)$.*

Lorsque les rayons d'injectivité aux points de Weierstrass se réalisent comme géodésiques fermées simples, la proposition se déduit trivialement de la borne sur le rayon d'injectivité (9.1). Regardons ce qui se passe en un point de Weierstrass w_1 où le rayon d'injectivité n'est pas réalisé par une géodésique mais par un lacet géodésique λ .

Le lacet λ ne peut être dans la classe d'homotopie libre d'une géodésique séparante, sinon cette géodésique serait de longueur inférieure à λ , et nous pourrions construire à l'aide de l'inégalité systolique du tore à un bord (9.3) une partition

de longueur inférieure à $2 \operatorname{arccosh}(4,67)$. Le lacet λ et son image par l'involution hyperelliptique forme une seule et même géodésique s'auto-intersectant en w_1 . A partir de cette géodésique, nous construisons une géodésique séparante ξ disjointe de λ , nous appellerons \mathbb{T}_1 le tore bordé par ξ contenant w_1 (figure 9.3). La géodésique dans la classe d'homotopie libre de λ est contenue dans \mathbb{T}_1 , et disjointe de λ . Cette géodésique est plus petite que n'importe quelle géodésique passant par w_1 , et par conséquent réalise la systole de \mathbb{T}_1 , c'est donc α_1 .

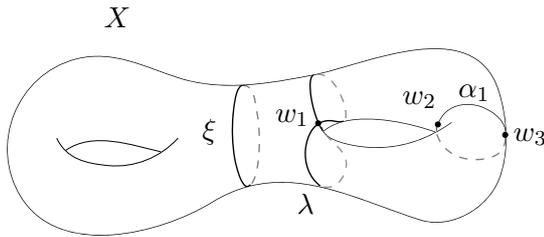


FIG. 9.3

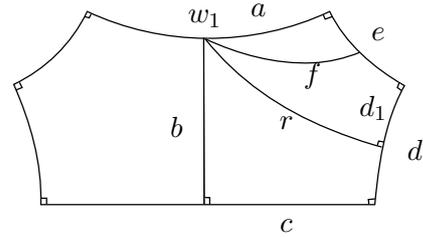


FIG. 9.4

Par découpe de α_1 et de ses perpendiculaires communes avec ξ , le tore \mathbb{T}_1 se divise en deux hexagones droits isométriques. Ces hexagones sont à leur tour formés de deux pentagones droits isométriques. Un de ces pentagones est représenté en figure 9.4 avec la convention : $c = \xi/4$, $e = \alpha_1/2$, $r = r_{\text{inj}}(w_1)$, et $\cosh(f) = \cosh(e/2) \cosh(a)$. Le segment f relie w_1 au milieu de e , sa longueur majore la longueur de la plus petite géodésique de \mathbb{T}_1 passant par w_1 . Pour démontrer la proposition ci-dessus, il suffit de prouver que $\cosh(f) < 2,88$.

Nous allons prouver cette inégalité par l'absurde : sous l'hypothèse

$$\cosh(f) \geq 2,88 \tag{9.5}$$

nous allons élaborer une procédure prenant en entrée un encadrement de r et sortant une majoration de la plus petite géodésique $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$ telle que $\gamma_1 = \alpha_1$ et $\gamma_2 = \beta_2$. En implémentant cette procédure sur ordinateur nous verrons que la longueur de cette géodésique est inférieure à $2 \operatorname{arccosh}(4,67)$ pour toutes les valeurs possibles de r . Ce qui contredit $\text{sys}_3 \geq 2 \operatorname{arccosh}(4,67)$.

9.3.1. Trigonométrie et premières estimations. Voici trois relations trigonométriques dans $(abcde)$, obtenues simplement à partir des relations usuelles dans le trirectangle et le pentagone droit :

$$\cosh(a) = \frac{\sinh(r)}{\sinh(e)} \tag{9.6}$$

$$\cosh(c) = \tanh(a) \sinh(r) \tag{9.7}$$

$$\cosh(f) = \frac{\sinh(r)}{\sqrt{2(\cosh(e) - 1)}} \tag{9.8}$$

De ces relations nous pouvons immédiatement tirer quelques estimations :

$$\cosh(e) < 1,44 \quad (9.9)$$

$$\cosh(a) > 2,6 \quad (9.10)$$

$$\cosh(c) > 0,923 \sinh(r) \quad (9.11)$$

La première estimation se déduit de (9.8) et des inégalités (9.5) et (9.1). La deuxième est une combinaison de (9.6), (9.9) et (9.1). Enfin la troisième résulte de (9.7) et (9.10).

9.3.2. Procédure de majoration. Dans ce paragraphe nous mettons au point une procédure prenant en entrée un encadrement de r , et sortant une majoration de la plus petite géodésique $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$ vérifiant $\Xi(\gamma) = (\alpha_1, \beta_2)$. Cette procédure consiste en un enchaînement d'une dizaine d'inégalités dont le cheminement global se résume ainsi : par des formules de trigonométrie nous encadrons facilement les longueurs de ξ et α'_1 , en revanche l'obtention d'inégalités sur α_2 , α'_2 , β_2 et β'_2 s'avère plus délicate, il s'agit d'exprimer la longueur de la plus petite géodésique de \mathcal{G}_ξ vérifiant $\Xi(\gamma) = (\alpha_1, \alpha_2)$ et d'écrire qu'elle dépasse $2 \operatorname{arccosh}(4,67)$.

Partons d'un encadrement

$$r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)}$$

- (1) De ce dernier et de (9.7) nous tirons un encadrement $c^{(1)} \leq c \leq c^{(2)}$. Par (9.4) nous supposons $1,111 < c^{(1)}$.
- (2) De $\sinh b = \cosh e / \sinh c$ et $\cosh b = 1 / (\tanh a \tanh c)$ vient $b \leq b^{(2)}$ avec $b^{(2)} = \min \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{1,44}{\sinh c^{(1)}} \right), \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\tanh(1,609) \tanh c^{(1)}} \right) \right)$.
- (3) La plus petite géodésique $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$ vérifiant $\Xi(\gamma) = (\alpha_1, \alpha_2)$ est nécessairement de longueur supérieure à $2 \operatorname{arccosh}(4,67)$ car α_1 et α_2 sont en longueur inférieures à $2 \operatorname{arccosh}(4,67)$ (c'est clair pour α_1 , on le démontre pour α_2 en utilisant (9.3), (9.7) et la majoration sur le rayon d'injectivité). De ce fait α'_2 est minorée par $\alpha'_2^{(1)}$, la solution positive de l'équation (voir § 8.3)

$$\cosh b^{(2)} \cosh(x/2) \cosh c^{(2)} + \sinh b^{(2)} \sinh(x/2) = 4,67.$$

La majoration (9.2) s'appliquant directement à α'_2 , nous obtenons finalement un encadrement $\alpha'_2^{(1)} \leq \alpha'_2 \leq \alpha'_2^{(2)}$.

- (4) Soit μ la distance sur ξ entre α'_1 et α'_2 , par (9.4) et (9.2) nous avons $\mu^{(1)} \leq \mu$ où $\mu^{(1)}$ est la solution positive de l'équation

$$\cosh b^{(2)} \sqrt{1 + \frac{1}{4 \sinh^2(c^{(1)}/3)} \cosh x} + \sinh b^{(2)} \frac{1}{2 \sinh(c^{(1)}/3)} = 4,67.$$

- (5) La relation $\cosh(\alpha_2/2) = \sinh(\alpha'_2/2) \sinh c$ donne un encadrement de α_2 du type : $\alpha_2^{(1)} \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^{(2)}$, dont nous améliorons éventuellement le majorant par (9.3).

- (6) Soit a_2 la perpendiculaire commune à α_2 et α'_2 , nous avons $a_2 \leq a_2^{(2)}$ avec $a_2^{(2)} = \min \left(\operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\cosh(\alpha_2^{(1)}/2) \tanh c^{(1)}} \right), \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\tanh(\alpha_2^{(1)}/2) \tanh(\alpha_2^{\prime(1)}/2)} \right) \right)$.
- (7) Comme $\cosh(\beta_2/2) \leq \cosh(\alpha_2/4) \cosh a_2$ nous obtenons une majoration de la forme $\beta_2 \leq \beta_2^{(2)}$.
- (8) De la relation $\cosh(\beta_2/2) = \sinh(\beta_2'/2) \sinh c$ nous déduisons une majoration $\beta_2' \leq \beta_2^{\prime(2)}$.
- (9) Nous majorons la longueur de la plus petite géodésique $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$ vérifiant $\Xi(\gamma) = (\alpha_1, \alpha_2)$ par $\gamma^{(2)}$ définie par

$$\cosh(\gamma^{(2)}/2) = \cosh b^{(2)} \cosh(\beta_2^{\prime(2)}/2) \cosh\left(\frac{c^{(2)}}{3} - \mu^{(1)}\right) + \sinh b^{(2)} \sinh(\beta_2^{\prime(2)}/2).$$

Le paramètre $c^{(2)}/3 - \mu^{(1)}$ correspond au twist, c'est-à-dire à la distance entre α'_1 et β'_2 sur ξ . Comme la distance sur ξ entre α'_2 et β'_2 est supérieure à $\xi/6$ (voir la démonstration du Lemme 9.2), et celle entre α'_1 et α'_2 supérieure à $\mu^{(1)}$, nous trouvons que le twist est inférieure à $\xi/2 - \xi/6 - \mu^{(1)}$.

9.3.3. Conclusion et remarques. Nous pouvons supposer $r \in [1, 292; 1, 72]$: la minoration se déduit de (9.7 et 9.4), et la majoration vient directement de (9.1). En appliquant la procédure à un recouvrement de cet intervalle par de petits intervalles, il apparaît que la plus courte géodésique $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$ telle que $\Xi(\gamma) = (\alpha_1, \beta_2)$ est de longueur inférieure à $2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$. Les géodésiques α_1 et β_2 étant elles aussi de longueurs inférieures à $2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$, l'hypothèse $\text{sys}_3 \geq 2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$ est contredite. Ceci termine la preuve de la Proposition 9.3.

Une question naturelle est de savoir s'il existe une borne sur la longueur des arêtes du graphe de contiguïté, uniforme sur l'espace de Teichmüller. La réponse est négative, nous fabriquons un contre-exemple à partir du pentagone de la figure 9.4 : il suffit de prendre $a = b$ aussi grand qu'on veut et de recoller (avec ou sans twist) des pentagones isométriques afin de récupérer une surface de genre 2.

Chapitre 10

Majoration de la 3-systole

Nous considérons la situation suivante : X est une surface de Riemann de genre 2 vérifiant $\text{sys}_3(X) \geq 2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$. Par la Proposition 7.3, le graphe de contiguïté de X admet un sous-graphe minimal G isomorphe au graphe G_9 ; à ce graphe nous associons canoniquement une géodésique séparante ξ (Conséquence 8.1) que nous fixons une fois pour toutes. Nous pouvons supposer le graphe G formé des géodésiques $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ et β_2 , ce que nous ferons.

Dans cette partie nous allons établir une majoration de la 3-systole de X par la systole de la famille $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$. Cela se fera en deux étapes, dans un premier temps nous regarderons quelles sont les plus petites géodésiques de $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$, nous montrerons ensuite que si γ est l'une d'elles alors la longueur de la partition $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ est donnée par la longueur de γ .

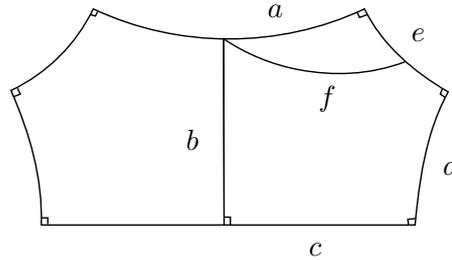


FIG. 10.1

NOTATIONS. Nous désignerons par \mathcal{F} la famille de géodésiques

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \mathcal{G}_\xi ; \Xi(\gamma) \in \{\alpha_1, \beta_1, \delta_1\} \times \{\alpha_2, \beta_2, \delta_2\}\} \cup \{\xi\}.$$

Nous associerons naturellement à tout élément γ de \mathcal{G}_ξ la partition $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$, et à ξ la partition $(\xi, \alpha_1, \alpha_2)$. Nous avons vu au § 8.3 que la longueur d'une géodésique $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$ est donnée par :

$$\cosh(\gamma/2) = \cosh(\gamma'_1/2) \cosh(\gamma'_2/2) \cosh(\mu) + \sinh(\gamma'_1/2) \sinh(\gamma'_2/2),$$

où μ est, modulo ξ , la longueur d'un des quatre segments de ξ délimités par les points d'intersection de γ'_1 et γ'_2 avec ξ .

Nous travaillerons fréquemment dans le pentagone $(abcde)$, moitié de l'hexagone droit issu de la découpe de β_1 dans le tore \mathbb{T}_1 . Ce pentagone est représenté en figure 10.1. Nous conviendrons de

$$b = \beta'_1/2, \quad c = \xi/4, \quad e = \beta_1/2 \quad \text{et} \quad f = \delta_1/2.$$

10.1. Deux lemmes techniques

LEMME 10.1. *L'une des deux inégalités suivantes est vérifiée :*

$$\cosh(\beta_1/2) < 2,16 \quad \text{ou} \quad \cosh(a) < 1,62.$$

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde

$$2,16 \leq \cosh(\beta_1/2) \quad \text{et} \quad 1,62 \leq \cosh(a).$$

Alors, dans le pentagone $(abcde)$ nous avons les inégalités suivantes :

- (1) $2,16 \leq \cosh(e) \leq 2,88,$
- (2) $1,62 \leq \cosh(a) \leq 2,88,$
- (3) $2,44 \leq \cosh(c) \leq 8,$
- (4) $\cosh(b) \leq 1,4,$
- (5) $\sinh(b) \leq \frac{2,88}{\sinh(c)}.$

Les deux majorations par 2,88 proviennent de la borne sur la longueur des arêtes de $G_{cont}(X)$. En utilisant l'identité $\cosh(c) = \sinh(a) \sinh(e)$ avec les encadrements (1) et (2) nous obtenons l'encadrement (3). L'inégalité (4) se déduit de l'égalité $\tanh(e) \cosh(a) \tanh(b) = 1$ et des deux premières minoration. Enfin, la dernière inégalité est triviale.

Afin de vérifier l'hypothèse d'absurde, nous allons exhiber une géodésique $\eta \in \mathcal{F} \setminus \{\xi\}$ telle que la longueur de la partition (η, η_1, η_2) est donnée par η et inférieure à $2 \operatorname{arccosh}(4,67)$. Partons de $\eta \in \mathcal{F} \setminus \{\xi\}$ vérifiant

$$\Xi(\eta) \in \{\alpha_1, \beta_1\} \times \{\alpha_2\} \quad \text{et} \quad \mu \leq \xi/6,$$

un tel η existe par le Lemme 9.2 ; nous avons

$$\cosh(\eta/2) \leq \cosh(\beta'_1/2) \cosh(\alpha'_2/2) \cosh(\xi/6) + \sinh(\beta'_1/2) \sinh(\alpha'_2/2).$$

Nous majorons le rayon α'_2 par le rayon d'injectivité maximal de $\partial\mathbb{T}_2$:

$$\sinh(\alpha'_2/2) \leq \frac{1}{2 \sinh(\xi/12)},$$

donné par C. Bavard dans [Bav05a]. Nous allons distinguer quatre cas correspondant à des intervalles de valeurs de ξ . Chaque encadrement de ξ induit des majorations sur μ et α'_2 , et il ne nous reste plus qu'à fournir une majoration de β'_1 pour contrôler la longueur de η .

- Si $2,44 \leq \cosh(\xi/4) \leq 3$, nous utilisons l'inégalité (4) pour majorer β'_1 . Nous trouvons $\cosh(\eta) \leq 4,31 < 4,67$.
- Si $3 \leq \cosh(\xi/4) \leq 4$, nous utilisons l'inégalité (4) pour majorer β'_1 . Nous trouvons $\cosh(\eta) \leq 4,57 < 4,67$.
- Si $4 \leq \cosh(\xi/4) \leq 6$, nous utilisons l'inégalité (5) pour majorer β'_1 . Nous trouvons $\cosh(\eta) \leq 4,57 < 4,67$.
- Si $6 \leq \cosh(\xi/4) \leq 8$, nous utilisons l'inégalité (5) pour majorer β'_1 . Nous trouvons $\cosh(\eta) \leq 4,37 < 4,67$.

Dans tous les cas, la géodésique η est bien de longueur $\cosh(\eta/2) < 4,67$. Les géodésiques η_1 et η_2 correspondent à des arêtes de $G_{cont}(X)$, et leurs longueurs sont inférieures à $2 \operatorname{arccosh}(2,88)$. Finalement, la partition (η, η_1, η_2) contredit l'hypothèse $\cosh(sys_3(X)/2) \geq 4,67$. \square

CONSÉQUENCE 10.1. La systole α_1 du tore \mathbb{T}_1 vérifie

$$\cosh(\alpha_1/2) < 2,26.$$

Dans le cas où $\cosh(\beta_1/2) < 2,16$ c'est trivial puisque α_1 est plus petite que β_1 , dans le cas où $\cosh(a) < 1,62$ on utilise la majoration $\cosh(\beta_1/2) \leq 2,88$ et l'inégalité $\cosh(\alpha_1/2) \leq \cosh(\beta_1/4) \cosh(a)$.

REMARQUE 10.1. Toutes ces inégalités sont aussi valables dans le tore \mathbb{T}_2 .

LEMME 10.2. *La longueur d'une partition $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ associée à un élément γ de \mathcal{F} est donnée par la longueur de γ .*

DÉMONSTRATION. Soit γ un élément de \mathcal{F} .

Ou bien la longueur de la partition $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ associée à γ est égale à la longueur de γ , c'est par exemple le cas lorsque $(\gamma_1, \gamma_2) \in \{\alpha_1, \beta_1\} \times \{\alpha_2, \beta_2\}$, puisque $\cosh(\alpha_i/2), \cosh(\beta_i/2) \leq 2,88$ ($i = 1, 2$) et $\cosh(\text{sys}_3(X)/2) \geq 4,67$.

Ou bien la longueur de la partition est donnée par la longueur du couple (γ_1, γ_2) . Dans ce cas, un certain δ_i , disons δ_1 , appartient à (γ_1, γ_2) et donne la longueur de la partition. Dans le pentagone $(abcde)$ nous avons alors :

$$\left. \begin{array}{l} \cosh(a) \cosh(e) \geq \cosh(f) \geq 4,67 \\ \cosh(e) \geq \cosh(\alpha_1) \geq \cosh(a) \end{array} \right\} \implies \cosh(e) \geq \sqrt{4,67} > 2,16$$

et de même,

$$\left. \begin{array}{l} \cosh(a) \cosh(e) \geq \cosh(f) \geq 4,67 \\ 2,88 \geq \cosh(e) \end{array} \right\} \implies \cosh(a) > 1,62.$$

Ces minoration contredisent le lemme précédent. \square

10.2. Complément à la Proposition 7.2

La proposition ci-dessous affirme que lorsque la 3-systole est suffisamment grande, les points de Weierstrass se répartissent en deux groupes de trois points proches les uns des autres, les deux groupes étant éloignés l'un de l'autre.

PROPOSITION 10.3. *Il n'existe pas de géodésique de longueur inférieure à $2 \operatorname{arccosh}(2,88)$ complétant G en un graphe régulier connexe.*

DÉMONSTRATION. Sous l'hypothèse $\text{sys}_3 \geq 2 \operatorname{arccosh}(4,67)$, nous avons vu (au § 7.2) que parmi les graphes minimaux seuls les graphes G_4 et G_9 pouvaient se réaliser comme sous-graphe d'un graphe régulier dont les arêtes seraient plus petites que $\operatorname{arccosh}(2,88)$. Ainsi, nous supposons par l'absurde «qu'il existe une géodésique de longueur inférieure $2 \operatorname{arccosh}(2,88)$ complétant G en un graphe régulier isomorphe à G_4 ». Nous nommerons γ_0 la géodésique associée à l'arête joignant les deux composantes connexes de G . Comme l'arc $\gamma_0 \cap \mathbb{T}_1$ n'intersecte α_1 et β_1 qu'en un point de Weierstrass, nécessairement celui-ci se situe dans la même classe d'homotopie que δ'_1 ou ε'_1 , disons ε'_1 . Dans la suite nous supposons le segment $\gamma_0 \cap \mathbb{T}_1$ plus court que le segment $\gamma_0 \cap \mathbb{T}_2$.

Si $\cosh(\varepsilon_1/2) < 4,67$, alors le graphe associé aux géodésiques $\alpha_2, \beta_2, \gamma_0$ et ε_1 est isomorphe au graphe G_8 . Les arguments justifiant l'élimination du graphe G_8 lors de la preuve de la Proposition 7.2 s'appliquent à nouveau, contredisant $\cosh(\text{sys}_3(X)/2) \geq 4,67$.

Si $\cosh(\varepsilon_1/2) \geq 4,67$, alors comme $\cosh(\varepsilon'_1) \leq 2,88$ nous déduisons de la relation $\sinh(\varepsilon'_1/2) \sinh(\xi/4) = \cosh(\varepsilon_1/2)$ l'inégalité $\cosh(\xi/4) > 4,9$. En se plaçant dans le pentagone $(abcde)$ nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} \cosh(a) \cosh(e) > \cosh(\xi/4) > 4,67 \\ \cosh(e) \geq \cosh(\alpha_1) \geq \cosh(a) \end{array} \right\} \implies \cosh(e) \geq \sqrt{4,67} > 2,16$$

$$\left. \begin{array}{l} \cosh(a) \cosh(e) > \cosh(\xi/4) > 4,67 \\ 2,88 \geq \cosh(e) \end{array} \right\} \implies \cosh(a) > 1,62.$$

Ces minorations contredisent le Lemme 10.1. □

L'intérêt de ce résultat réside dans le corollaire ci-dessous.

COROLLAIRE 10.4. *Sous l'hypothèse $\text{sys}_3 \geq 2 \operatorname{arccosh}(4,67)$, parmi les graphes minimaux seul le graphe G_9 se réalise comme sous-graphe du graphe de contiguïté de X .*

10.3. Majoration de la 3-systole par la systole de la famille $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$

C'est le dénouement, nous allons mettre à profit tous les résultats obtenus afin d'abandonner la 3-systole au profit de la systole de la famille $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$.

LEMME 10.5. *Soit γ une géodésique réalisant la systole de la famille \mathcal{G}_ξ , alors $\Xi(\gamma) \in \{\alpha_1, \beta_1, \delta_1, \varepsilon_1\} \times \{\alpha_2, \beta_2, \delta_2, \varepsilon_1\}$.*

DÉMONSTRATION. Soit γ une géodésique de longueur minimale dans la famille \mathcal{G}_ξ . En raison de leurs propriétés de minimisation les géodésiques γ , α_i et β_i ne peuvent s'intersecter en dehors des points de Weierstrass. Comme α_i , β_i et δ_i forment un triangle, nous avons l'alternative suivante :

- (1) ou bien γ ne rencontre pas le triangle $(\alpha_i, \beta_i, \delta_i)$ en dehors de ses sommets, alors γ est disjointe d'une des trois géodésiques $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$,
- (2) ou bien γ rencontre δ_i en dehors de ses points de Weierstrass, alors γ coupe δ_i en exactement deux points (échangés par l'involution) et passe par le point de Weierstrass opposé; dans ce cas γ est disjointe de ε_i , autrement dit $\varepsilon_i \in \Xi(\gamma)$.

□

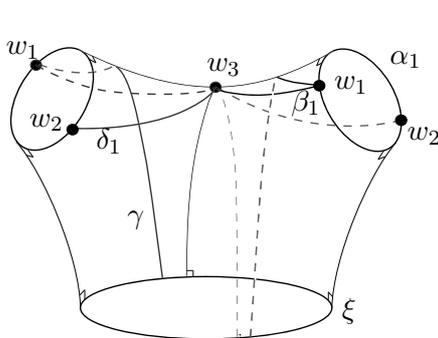


FIG. 10.2

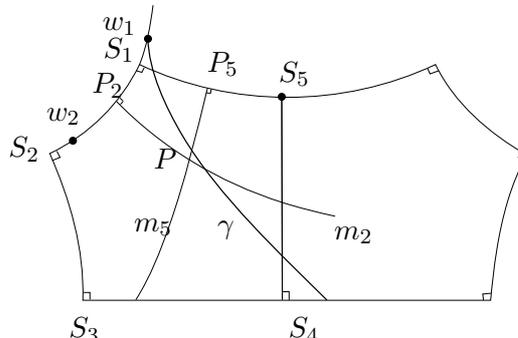


FIG. 10.3

Rappelons nos hypothèses : X est une surface de Riemann de genre 2 dont la 3-systole vérifie $sys_3 \geq 2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$.

THÉORÈME 10.6. *Si γ est une géodésique réalisant la systole de la famille $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$, alors $\Xi(\gamma) \in \{\alpha_1, \beta_1, \delta_1\} \times \{\alpha_2, \beta_2, \delta_2\}$.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que le cas (2) de la démonstration précédente ne peut occurer.

Supposons par l'absurde que γ coupe δ_1 en dehors des points de Weierstrass. En découpant la géodésique α_1 dans le tore \mathbb{T}_1 nous obtenons un pantalon hyperbolique (fig. 10.2). Ce pantalon se scinde en deux hexagones droits isométriques, se divisant à leurs tours en pentagones droits isométriques. Nous allons travailler dans un de ces pentagones dont nous noterons S_i ($i = 1, \dots, 5$) les sommets (fig. 10.3). Soient m_5 et m_2 les médiatrices respectives des segments $[S_1, S_5]$ et $[w_1, w_2]$, la longueur de chacun de ces segments est inférieure à $\operatorname{arccosh}(2, 88)$, ainsi $\sinh(P_2 S_1) \sinh(S_1 P_5) < 1$ et nécessairement m_2 et m_5 s'intersectent en un point P de X .

Plaçons nous dans le revêtement universel \tilde{X} de X , et considérons \tilde{M} un point de $\tilde{\gamma}$ se situant au-delà du trirectangle $(\tilde{P}_2 \tilde{P} \tilde{P}_5 \tilde{S}_1)$. Par construction ce point est soit plus proche de $\tilde{S}_5 = \tilde{w}_3$ que de \tilde{S}_1 , soit plus proche de \tilde{w}_2 que de \tilde{w}_1 , dans les deux cas \tilde{M} est plus proche d'un des deux relevés des points de Weierstrass w_2, w_3 que du relevé de w_1 . Ceci contredit presque la minimalité de γ dans la famille \mathcal{G}_ξ , le seul problème étant qu'on peut *a priori* parcourir plusieurs fois γ dans le revêtement universel avant de sortir du trirectangle.

Montrons que la distance de \tilde{P} à \tilde{w}_1 est inférieure en cosinus hyperbolique à 2,88. Nous avons $\cosh(\tilde{P} \tilde{w}_1) = \cosh(\tilde{P}_2 \tilde{w}_1) \cosh(\tilde{P}_2 \tilde{P})$, mais

$$\cosh(\tilde{P}_2 \tilde{w}_1) = \cosh(\alpha_1/4) < 1, 28$$

par la Conséquence 10.1. Il suffit donc majorer $\cosh(\tilde{P}_2 \tilde{P})$. Soit ϕ l'angle du trirectangle en \tilde{P} , par les formules usuelles il vient :

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{\sinh(\tilde{P}_2 \tilde{S}_1) \sinh(\tilde{S}_1 \tilde{P}_5)}{\cosh(\tilde{S}_1 \tilde{P}_5)} \leq \frac{\sinh(\alpha_1/4) \sinh(\beta_1/4)}{\cosh(\beta_1/4)} \\ \cosh(\tilde{P}_2 \tilde{P}) = \frac{\cosh(\tilde{S}_1 \tilde{P}_5)}{\sin \phi} \leq \frac{\cosh(\beta_1/4)}{\sin \phi} \end{cases}$$

Or, nous avons par le Lemme 10.1

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha_1/2) \leq 2, 26 \quad \text{et} \quad \cosh(\beta_1/2) \leq 2, 88, \quad \text{ou} \\ \cosh(\alpha_1/2) \leq 2, 16 \quad \text{et} \quad \cosh(\beta_1/2) \leq 2, 16. \end{aligned}$$

Nous trouvons $\cosh(\tilde{P}_2 \tilde{P}) \leq 2, 2$ dans le premier cas, et $\cosh(\tilde{P}_2 \tilde{P}) \leq 1, 55$ dans le deuxième. Au final nous avons bien $\cosh(\tilde{P} \tilde{w}_1) < 2, 88$.

La longueur de $\gamma/2$ est supérieure à 2,88 en cosinus hyperbolique, sinon nous pourrions contredire la Proposition 10.3. La géodésique γ part de w_1 pour pénétrer dans le pentagone $(S_1 S_2 S_3 S_4 S_5)$, et traverse alors le trirectangle $(P_2 P P_5 S_1)$, sinon nous pourrions construire une géodésique de \mathcal{G}_ξ plus courte que γ passant par w_3 . Vue notre majoration de la distance $d(P, w_1)$, γ sort du trirectangle avant d'atteindre son deuxième point de Weierstrass ; ainsi, les points de γ à la sortie du trirectangle sont plus proches de w_2 ou de w_3 que de w_1 . C'est absurde puisque γ est supposée de longueur minimale dans \mathcal{G}_ξ . \square

COROLLAIRE 10.7. *Lorsque la 3-systole vérifie $sys_3 \geq 2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$, la systole de la famille $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$ majore la 3-systole.*

DÉMONSTRATION. Nous venons de voir que lorsque $\cosh(sys_3(X)/2) \geq 4,67$ la systole de $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$ est égale à la systole de \mathcal{F} . Mais la longueur d'une partition associée à une géodésique de \mathcal{F} est égale à la longueur de la géodésique, ainsi la systole de \mathcal{F} coïncide avec la longueur minimale des partitions associées aux éléments de \mathcal{F} . Donc

$$sys_{\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}} = sys_{\mathcal{F}} = \inf_{\gamma \in \mathcal{F}} l(\gamma) = \inf_{\gamma \in \mathcal{F}} l(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) \geq sys_3,$$

la 3-systole est majorée par la systole de la famille $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$. □

Chapitre 11

Existence et détermination d'un maximum global

11.1. Existence

PROPOSITION 11.1. *L'ensemble des surfaces dont la 3-systole est supérieure à $2 \operatorname{arccosh}(4,67)$ forme un compact de l'espace des modules.*

DÉMONSTRATION. Cet ensemble est un fermé de l'espace des modules, il s'agit de montrer qu'il n'atteint pas l'infini. Rappelons que nous allons à l'infini dans l'espace des modules lorsqu'une géodésique γ tend en longueur vers 0. Nous supposons par l'absurde l'existence d'une surface X avec $\cosh(\operatorname{sys}_3(X)/2) \geq 4,67$ pour $l_\gamma(X)$ aussi proche de 0 que voulue.

Si γ est séparante, de l'inégalité de la systole du tore à un bord (9.3) nous déduisons l'existence d'une géodésique petite dans chacun des tores bordés par γ . Nous construisons ainsi une partition de longueur inférieure à $2 \operatorname{arccosh}(4,67)$, c'est absurde.

Si γ est non séparante, nous allons considérer deux cas. Ou bien γ est une géodésique d'un des tores \mathbb{T}_i ($i = 1$ ou 2), alors la systole α_i tend elle aussi vers 0, et dans le pentagone de la figure 10.1 nous avons

$$\cosh(\xi/4) = \sinh(a) \sinh(\beta_i/2) \leq \sinh(\alpha_i/2) \sinh(\beta_i/2),$$

d'où $l_\xi(X)$ tend vers 0, c'est absurde. Ou bien γ n'est incluse dans aucun des tores \mathbb{T}_i ($i = 1, 2$), alors sa longueur dépasse nécessairement celle des rayons α'_i ($i = 1, 2$), et dans la figure 10.1 nous avons $d \leq \alpha'_1/2 \leq \gamma/2$ et

$$1 = \tanh(a) \cosh(\beta_1/2) \tanh(d) \leq \tanh(\alpha_1/2) \cosh(\beta_1/2) \tanh(\gamma/2).$$

Il y a une contradiction lorsque la longueur de γ tend vers 0. □

COROLLAIRE 11.2. *La 3-systole admet un maximum global sur \mathcal{T}_2*

11.2. Détermination

NOTATIONS. Nous désignerons par M un point de \mathcal{T}_2 et par X sa surface de Riemann sous-jacente.

Nous allons travailler dans l'ouvert D formé des points M de \mathcal{T}_2 vérifiant les conditions suivantes :

- i) parmi les graphes minimaux, seul le graphe G_9 est un sous-graphe du graphe de contiguïté $G_{\text{cont}}(X)$,
- ii) la géodésique ξ vérifie $\xi > 2 \operatorname{arccosh}(4,67)$

Cet ouvert est invariant sous l'action du groupe modulaire et

PROPOSITION 11.3. *L'ouvert D se projette sur un ouvert relativement compact de l'espace des modules.*

DÉMONSTRATION. Fixons une géodésique γ , et supposons par l'absurde l'existence d'une surface X dans l'image de D avec $l_\gamma(X)$ aussi petite que voulue.

Si γ est non séparante l'une des α_i (disons α_1) tend en longueur vers 0, par suite dans le pentagone de la figure 9.4 nous avons a et d qui tendent vers $+\infty$ car $\cosh c = \sinh a \sinh e$ et $\cosh b = \sinh d \sinh e$, en particulier l'arête β_1 tend elle aussi en longueur vers $+\infty$. Mais si $l_\xi(X)$ reste bornée alors la plus petite géodésique de \mathcal{G}_ξ construite à partir de α'_1 et α'_2 sera elle aussi bornée (par (9.2) et la formule du § 8.3), donc de longueur inférieure à β_1 ce qui contredit le fait que β_1 est l'arête de $G_{cont}(X)$ passant par le point de Weierstrass de \mathbb{T}_1 n'appartenant pas à α_1 . Si $l_\xi(X)$ n'est plus bornée mais tend vers $+\infty$, alors les deux rayons α'_1 et α'_2 tendent en longueur vers 0 par (9.2), et le cosinus hyperbolique de la demi-longueur de la plus petite géodésique de \mathcal{G}_ξ construite à partir de ces deux rayons est équivalente à $\cosh(\xi/4)$, or $\beta_1 \geq a$ et $\cosh(a) = \sinh(\xi/4) \sinh d$, comme d tend vers $+\infty$ nous retrouvons la même contradiction que précédemment.

Si γ est séparante alors γ va nécessairement intersecter α_1 ou β_1 , disons β_1 . Nous en déduisons que le côté d du pentagone de la figure 10.1 est majoré par $l_\gamma(X)$, ce qui implique que d tend vers 0. Il s'ensuit que $e = \beta_1$ tend vers $+\infty$ car $\cosh b = \sinh e \sinh d$. Or, soit \mathbb{T}_γ un tore bordé par γ ayant un point de Weierstrass en commun avec β_1 , nous pouvons supposer les deux géodésiques de $G_{cont}(\mathbb{T}_\gamma)$ de longueurs bornées en fonction de $l_\gamma(X)$ (la systole de \mathbb{T}_γ est bornée par l'inégalité systolique, et la deuxième géodésique est bornée car dans le cas contraire $sys(\mathbb{T}_\gamma)$ tendrait vers 0 et nous serions alors ramenés au cas précédent). Nous trouvons par conséquent une géodésique plus petite que β_1 et ayant un point de Weierstrass en commun avec cette dernière, c'est absurde. \square

L'adhérence de D contient tous les points de \mathcal{T}_2 dont la 3-systole dépasse la valeur $2 \operatorname{arccosh}(4, 67)$, ainsi

$$B(2) = \max_D sys_3 \leq \max_D sys_{\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}}.$$

Les points réalisant le maximum global sur \overline{D} de la fonction $sys_{\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}}$ ne se situent pas à la frontière de D (nous avons construit D exprès car $\{sys_3 > 2 \operatorname{arccosh}(4, 67)\}$ ne vérifiait pas cette propriété), ils appartiennent donc à D . Nous allons rechercher ces points.

La systole des surfaces de Riemann est un analogue de l'invariant d'Hermité des réseaux euclidiens. Un cadre théorique général englobant ces deux invariants a été élaboré par Bavard ([Bav97]), les notions de perfection et d'eutaxie y sont définies en termes de gradient des fonctions longueur, et l'on retrouve un analogue du théorème de Voronoï dont voici un énoncé dans le cadre qui nous convient :

THÉORÈME. *Une surface de Riemann compacte est extrême si et seulement si elle est parfaite et eutactique.*

En particulier, les maxima locaux des fonctions de type systole admettent au moins la dimension du Teichmüller plus une géodésiques réalisant la systole ([Sch93] et [Bav97]). Ici, cela signifie que dans une surface réalisant un maximum local de

la 3-systole sur D il y a au moins 7 géodésiques de \mathcal{F} de longueur minimale. La géodésique ξ étant potentiellement l'une d'elles, il reste au moins 6 géodésiques de \mathcal{G}_ξ de longueur minimale dans \mathcal{F} . Nous allons déterminer les configurations possibles pour ces géodésiques.

NOTATIONS. Nous noterons $(\gamma_j)_{j \in J}$ la famille des géodésiques distinctes de ξ de longueur minimale dans \mathcal{F} .

Recueillons d'abord quelques informations sur ces géodésiques.

11.2.1. Deux lemmes d'intersection.

LEMME 11.4. *Les éléments de \mathcal{F} n'intersectent les α_i, β_i et δ_i ($i = 1, 2$) qu'en des points de Weierstrass.*

DÉMONSTRATION. Les éléments de $\mathcal{F} \setminus \{\xi\}$ s'obtiennent essentiellement à partir des rayons duaux α'_i, β'_i et δ'_i ($i = 1, 2$). Or ces rayons n'intersectent les triangles $(\alpha_i \beta_i \delta_i)$ ($i = 1, 2$) qu'en leurs sommets. \square

LEMME 11.5. *Les géodésiques γ_j ($j \in J$) ne s'intersectent pas en dehors des points de Weierstrass.*

DÉMONSTRATION. Les γ_j ($j \in J$) sont toutes de même longueur, la longueur minimale d'un élément de \mathcal{F} . Si deux d'entre elles s'intersectaient nous pourrions facilement en construire une troisième plus petite. \square

11.2.2. Elimination de configurations. Soit M_{max} un point de D réalisant un maximum local de la fonction $sys_{\mathcal{F}}$, nous noterons X_{max} sa surface sous-jacente.

PROPOSITION 11.6. *Dans X_{max} , deux géodésiques de $(\gamma_j)_{j \in J}$ ne passent jamais par les deux mêmes points de Weierstrass.*

DÉMONSTRATION. Soient γ_{j_1} et γ_{j_2} deux éléments de $(\gamma_j)_{j \in J}$ passant par les mêmes points de Weierstrass. Ces géodésiques diffèrent nécessairement d'un demi-twist selon ξ . Ainsi, vue la formule du § 8.3, il est clair que le coefficient de twist selon ξ dans la partition formée de ξ et des géodésiques de $\Xi(\gamma_{j_1})$ est égal à $1/4$.

En découpant γ_{j_1} et les géodésiques de $\Xi(\gamma_{j_1})$ dans X , nous obtenons deux pantalons hyperboliques, envoyés l'un sur l'autre par l'involution hyperelliptique. Les contraintes données par les Lemmes 11.4 et 11.5 permettent de situer toutes les γ_j ($j \in J$), elles sont exactement au nombre de 6, et passent chacune par un des deux points de Weierstrass appartenant à γ_{j_1} . Nous avons représenté en figure 11.1 un de ces pantalons, les géodésiques en trait fin correspondent aux $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ ($i = 1, 2$), celles en trait gras aux γ_j ($j \in J$). Le graphe en-dessous donne un point de vue combinatoire, l'arête en gras s'identifie à γ_{j_1} . Dans la suite de la preuve nous prendrons $J = \{1, \dots, 6\}$ et $j_1 = 1, j_2 = 2$.

En procédant à quelques découpages dans X_{max} nous arrivons à la figure 11.2. L'égalité des longueurs entre les γ_j ($j \in J = \{1, \dots, 6\}$) entraîne que les coefficients de twist selon les géodésiques de $\Xi(\gamma_1)$ (dans la partition formée de ces géodésiques et de ξ) valent $1/2$. Dans X_{max} , nous avons deux triplets de géodésiques, $(\gamma_5, \gamma_6, \alpha_1)$ et $(\gamma_3, \gamma_4, \alpha_2)$, formant des triangles isocèles disjoints; il existe une géodésique séparant X_{max} en deux tores à un bord contenant chacun un triangle, ces tores à un bord sont déterminés à isométries près par les longueurs

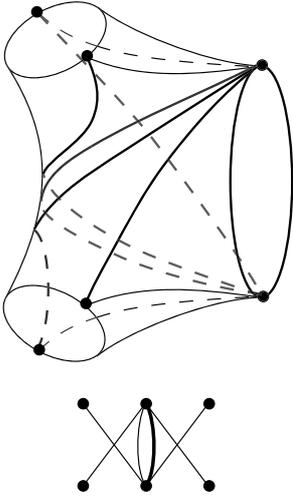


FIG. 11.1

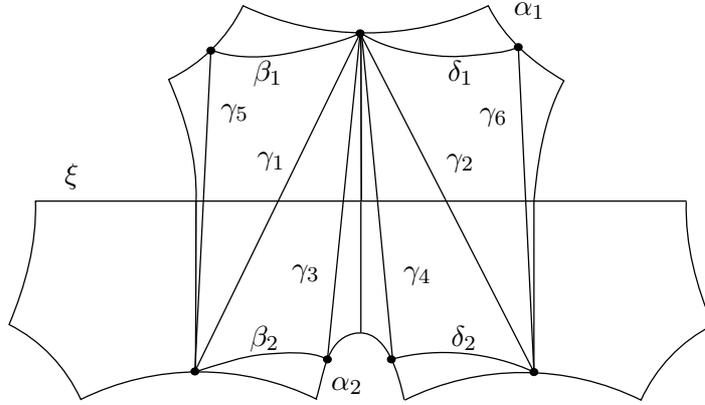


FIG. 11.2

$l(\gamma_3) = l(\gamma_4) = l(\gamma_5) = l(\gamma_6)$, il s'ensuit $l(\alpha_1) = l(\alpha_2)$. Enfin l'égalité entre la longueur de ξ et celle des γ_j ($j \in J$) détermine X_{max} de manière unique à isométrie près, $X_{max} \simeq N(3)$, mais $N(3) \notin D$ car $\cosh(\xi/2) < 4,67$. \square

Dans la proposition qui suit nous faisons apparaître une configuration de géodésiques susceptible de produire un maximum, nous prouvons ensuite l'existence d'une surface réalisant cette configuration, et montrons sa maximalité vis à vis de la systole de \mathcal{F} et de la 3-systole.

PROPOSITION 11.7. *Dans X_{max} , par un point de Weierstrass ne passe jamais trois géodésiques distinctes de $(\gamma_j)_{j \in J}$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que par un point de Weierstrass passent trois géodésiques de $(\gamma_j)_{j \in J}$. Découpons l'une de ces trois géodésiques ainsi que le couple qui lui est associé par Ξ . Nous obtenons deux pantalons hyperboliques, envoyés l'un sur l'autre par l'involution hyperelliptique. Il apparaît vite par les Lemmes 11.4 et 11.5 qu'il n'y a que trois configurations topologiques possibles pour les $(\gamma_j)_{j \in J}$ dans ces pantalons (fig. 11.3). En fait ces trois configurations correspondent à une seule et même configuration dans la surface toute entière, d'un point de vue combinatoire nous avons un seul et même graphe, il n'y a que l'arête découpée (en trait gras) qui change. Dans la suite de la preuve nous prendrons $J = \{1, \dots, 6\}$.

Soient w_1 et w_4 les deux points de Weierstrass en lesquels concourent trois géodésiques de $(\gamma_j)_{j \in J}$, soit γ_1 la géodésique reliant w_1 et w_4 , soient γ_2 et γ_3 les deux autres géodésiques passant par w_1 , et soient γ_4 et γ_5 les deux autres géodésiques passant par w_4 . Chacune des paires γ_2, γ_3 et γ_4, γ_5 forme un triangle isocèle avec une géodésique des $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$, ces triangles sont disjoints et nous pouvons trouver une géodésique les séparant, par conséquent ils sont isométriques. Nous en déduisons que les deux bords distincts de γ_1 dans le pantalon de gauche de la figure 11.3 ont même longueur. Vue la configuration des géodésiques $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ et γ_5 dans ce pantalon, nous avons nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ et $\delta_1 = \delta_2$, en particulier

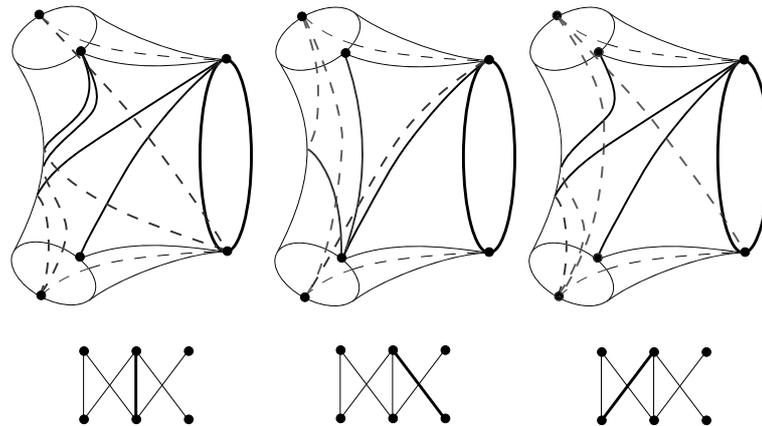


FIG. 11.3

les tores \mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 sont isométriques. Notons que la translation d'ordre 2 selon γ_1 réalise un automorphisme de la surface X_{max} .

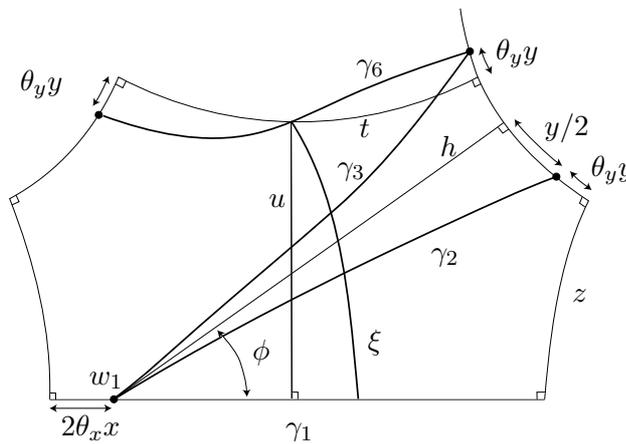


FIG. 11.4

Nous allons prouver l'existence de la surface évoquée. En fait, il s'agit de réaliser la configuration de gauche de la figure 11.3. Nous considérons donc un pantalon avec deux bords égaux de longueur $2y$, le troisième bord étant de longueur $4x$. Nous exprimons trivialement les longueurs t , u et z (voir figure 11.4) en fonction de x et y :

$$\begin{aligned} \cosh^2 t &= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 y - 1} + 1, \\ \cosh^2 u &= \frac{\cosh^2 y}{\cosh^2 x - 1} + 1, \\ \cosh^2 z &= \frac{\cosh^2 x \cosh^2 y}{(\cosh^2 x - 1)(\cosh^2 y - 1)}. \end{aligned}$$

Sur chaque bord nous fixons deux points opposés correspondant aux points de Weierstrass, les couples sur les bords de longueur $2y$ ont le même décalage $\theta_y y$ par rapport aux perpendiculaires communes. Les segments tracés en gras représentent les segments moitié des géodésiques γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_6 et ξ . L'existence de la surface

équivalent à l'existence de paramètres x, θ_x, y, θ_y tels que les 5 segments géodésiques en gras soient de même longueur. Supposons x et y fixés, choisissons θ_y tel que γ_6 soit de longueur $4x$, c'est-à-dire tel que $\cosh(\theta_y y) = \cosh x / \cosh t$; nous pouvons maintenant calculer $\sin \phi$ et h en fonction de x et y :

$$\begin{aligned} \sin^2 \phi &= \cosh^2\left(\frac{y}{2} + \theta_y y\right) + \cosh^2 z - \cosh^2\left(\frac{y}{2} + \theta_y y\right) \cosh^2 z, \\ \cosh^2 h &= \frac{\cosh^2 z}{\sin^2 \phi}, \end{aligned}$$

et en posant $X = \cosh x$ et $Y = \cosh y$ nous avons

$$\cosh^2\left(\frac{y}{2} + \theta_y y\right) = \frac{Y - 1}{X^2 + Y^2 - 1} \left[X^2 Y^2 + X^2 Y - X^2/2 - Y^2/2 + 1/2 + X(Y + 1)\sqrt{X^2 Y^2 - 2X^2 - Y^2 + 1} \right],$$

La condition $\gamma_2 = \gamma_3 = 4x$, équivalente à $\cosh h = \cosh(2x) / \cosh(y/2)$, donne implicitement y en fonction de x . Nous élaborons facilement un petit programme qui en entrée prend x et sort une valeur approchée de y . Pour différentes valeurs de x nous calculons

$$\cosh^2(2(1 - \theta_x)x) = \frac{X^2(X^2 - 1)}{X^2 + Y^2 - 1} \left[8X^4 - 12X^2 - 4Y^2 + 5 - 4(2X^2 - 1)\sqrt{X^4 - 2X^2 - Y^2 + 1} \right],$$

puis $\cosh^2(2(1 - \theta_x)x) \sin^2 \phi - \cosh^2(y/2 + \theta_y y)$, cette grandeur prend des valeurs négatives et positives, nous en déduisons l'existence d'un x tel que les géodésiques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6$ et ξ sont de même longueur $4x$. Nous trouvons que les coordonnées twists-longueurs solutions de notre problème sont approximativement $(x; \theta_x; y; \theta_y) \approx (1, 1075; 0, 17; 1, 06; 0, 15)$.

L'ensemble \mathcal{V} des points de \mathcal{T}_2 admettant la même involution non triviale que X_{max} forme une sous-variété totalement géodésique de dimension 4. Montrer que M_{max} est un point extrême pour la systole de la famille $\{\gamma_1, \dots, \gamma_6, \xi\}$ dans \mathcal{T}_2 équivaut à montrer que M_{max} est un point extrême de la systole de la famille $\{\gamma_1, \dots, \gamma_6, \xi\}$ dans \mathcal{V} . Comme les couples (γ_2, γ_3) et (γ_4, γ_5) sont échangés par l'automorphisme, nous sommes amenés à raisonner sur les gradients des cinq fonctions longueurs $l_{\gamma_1}, l_{\gamma_2}, l_{\gamma_3}, l_{\gamma_6}$ et l_{ξ} . Nous pouvons déterminer l'expression analytique de chacune de ces fonctions en les coordonnées $(x, \theta_x, y, \theta_y)$, en calculant les gradients nous trouvons que la surface X_{max} est parfaite et eutactique donc extrême pour la famille de géodésique $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6, \xi\}$.

Il Reste à montrer que ces géodésiques réalisent bien la 3-systole de X_{max} . Les géodésiques de longueur $2y$ sont les systoles de chacun des tores délimités par ξ , nous repérons facilement la deuxième plus petite géodésique de ces tores. En comparant les longueurs de ces géodésiques avec celles des perpendiculaires communes du pantalon de la figure 11.4 nous voyons qu'elles réalisent des arêtes de $G_{cont}(X_{max})$, et les géodésiques $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ réalisent la distance entre les deux groupes de points de Weierstrass. Considérons une partition de longueur minimale, celle-ci contient au moins deux géodésiques non séparantes, nécessairement chacune d'elles est ou bien incluse dans l'un des tores délimités par ξ ou bien un élément de la famille $\{\gamma_1, \dots, \gamma_6\}$. Si l'une d'elles appartient à la famille $\{\gamma_1, \dots, \gamma_6\}$ ces dernières réalisent bien la 3-systole. Si les deux sont contenues dans un tore, alors

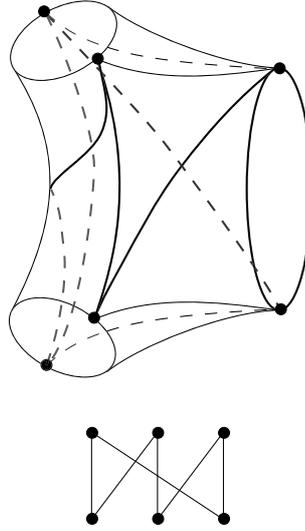


FIG. 11.5

la troisième géodésique de la partition est ou bien non séparante et dans ce cas appartient à la famille $\{\gamma_1, \dots, \gamma_6\}$, ou bien séparante et dans ce cas c'est ξ (il suffit de travailler un peu avec le rayon d'injectivité de ξ). En passant par une résolution numérique nous avons

$$\text{sys}_3(X_{max}) = \text{sys}_{\mathcal{F}}(X_{max}) \approx 2 \operatorname{arccosh}(4,63).$$

□

11.2.3. Conclusion.

PROPOSITION 11.8. *Les points de D réalisant un maximum local de la systole de \mathcal{F} sont ceux correspondant à la surface $P(3)$ marquée.*

DÉMONSTRATION. Pour que le point M_{max} soit un maximum local de la fonction $\text{sys}_{\mathcal{F}}$ sur D , la famille $(\gamma_j)_{j \in J}$ doit contenir au moins 6 éléments. Les Propositions 11.6 et 11.7 nous éclairent sur la configuration des γ_j ($j \in J$), *via* des découpages nous constatons qu'il y a une unique configuration (combinatoire, topologique) possible (fig. 11.5). Cette configuration est exactement celle des géodésiques de $P(3)$ réalisant la systole de \mathcal{F} , or nous savons qu'une configuration est réalisée par au plus une surface extrême. De ce fait X_{max} est isométrique à $P(3)$. □

COROLLAIRE 11.9. *Le maximum global de la 3-systole sur D est atteint en unique point (modulo l'action du groupe modulaire) correspondant à la surface $P(3)$ marquée.*

DÉMONSTRATION. Sur D la systole de \mathcal{F} majore la 3-systole, or $\text{sys}_{\mathcal{F}}$ et sys_3 ont même valeur en $P(3)$. □

THÉORÈME 11.10. *Le maximum global de la 3-systole sur \mathcal{T}_2 est atteint aux points correspondant à la surface $P(3)$ marquée.*

La géodésique ξ sépare $P(3)$ en deux tores équilatéraux. La longueur du rayon minimal r de ces tores est donnée par ([Bav05a]) :

$$\sinh(r/2) = \frac{1}{2\sinh(\xi/12)}.$$

Par ailleurs le coefficient de twist θ_ξ vaut $1/12$. En injectant tout ceci dans la formule du § 8.3 nous obtenons :

$$\cosh(B(2)/2) = \frac{1}{4[\cosh^2(B(2)/12) - 1]} + \cosh(B(2)/12).$$

Après simplifications il vient que $\cosh(B(2)/12)$ est solution de

$$32X^5 - 32X^4 - 24X^3 + 24X^2 - 1 = 0.$$

Nous trouvons $\cosh(B(2)/2) \approx 4,67096$.

11.3. Commentaire

La méthode introduite semble assez efficace. En effet, en étudiant les différentes configurations topologiques susceptibles de réaliser un maximum de la systole de la famille $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$, nous avons naturellement retrouvé les deux surfaces $P(3)$ et $N(3)$ découvertes par Schmutz Schaller ; nous avons de plus fait apparaître un troisième maximum local de la 3-systole, infirmant ainsi la conjecture de Schmutz Schaller, à savoir que les seuls maxima de la 3-systole sur le Teichmüller sont les points associés aux surfaces $N(3)$ et $P(3)$.

Bibliographie

- [AG71] N. L. Alling and N. Greenleaf. *Foundations of the theory of Klein surfaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 219.
- [Akr03] H. Akrouf. Singularités topologiques des systoles généralisées. *Topology*, 42(2) :291–308, 2003.
- [Bav92] C. Bavard. La systole des surfaces hyperelliptiques. *Prépublication de l'ENS Lyon*, 71, 1992.
- [Bav96] C. Bavard. Disques extrémaux et surfaces modulaires. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 5(2) :191–202, 1996.
- [Bav97] C. Bavard. Systole et invariant d’Hermite. *J. reine angew. Math.*, 482 :93–120, 1997.
- [Bav05a] C. Bavard. Anneaux extrémaux dans les surfaces de Riemann. *Manuscripta Math.*, 117 :265–271, 2005.
- [Bav05b] C. Bavard. Théorie de Voronoï géométrique. Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues. *Bull. Soc. Math. France*, 133 :205–257, 2005.
- [BBGM89] E. Bujalance, J. A. Bujalance, G. Gromadzki, and E. Martinez. The groups of automorphisms of nonorientable hyperelliptic Klein surfaces without boundary. In *Groups—Korea 1988 (Pusan, 1988)*, volume 1398 of *Lecture Notes in Math.*, pages 43–51. Springer, Berlin, 1989.
- [BC72] J. S. Birman and D. R. J. Chillingworth. On the homeotopy group of a non-orientable surface. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 71 :437–448, 1972.
- [BC04] J. S. Birman and D. R. J. Chillingworth. Erratum : “On the homeotopy group of a non-orientable surface” [Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 437–448]. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 136(2) :441, 2004.
- [BCNS92] E. Bujalance, A. F. Costa, S. M. Natanzon, and D. Singerman. Involutions of compact Klein surfaces. *Math. Z.*, 211(3) :461–478, 1992.
- [BEG85] E. Bujalance, J. J. Etayo, and J. M. Gamboa. Hyperelliptic Klein surfaces. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 36(142) :141–157, 1985.
- [BEG90] E. Bujalance, J. J. Etayo, and G. Gamboa, J. M. Gromadzki. *Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces*, volume 1439 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. A combinatorial approach.
- [Ber74] L. Bers. Spaces of degenerating Riemann surfaces. In *Discontinuous groups and Riemann surfaces (Proc. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md., 1973)*, pages 43–55. Ann. of Math. Studies, No. 79. Princeton Univ. Press, 1974.
- [Ber93] M. Berger. Systoles et applications selon Gromov. *Astérisque*, (216) :Exp. No. 771, 5, 279–310, 1993. Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.

- [BS88] P. Buser and K.-D. Semmler. The geometry and spectrum of the one-holed torus. *Comment. Math. Helv.*, 63(2) :259–274, 1988.
- [BS92] P. Buser and M. Seppälä. Symmetric pants decompositions of Riemann surfaces. *Duke Math. J.*, 67(1) :39–55, 1992.
- [Buj89] J. A. Bujalance. Hyperelliptic compact nonorientable Klein surfaces without boundary. *Kodai Math. J.*, 12(1) :1–8, 1989.
- [Bus92] P. Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., 1992.
- [CB05] A. Casamayou-Boucau. Surfaces de Riemann parfaites en genre 4 et 6. *Comment. Math. Helv.*, 80(3) :455–482, 2005.
- [CK03] C. B. Croke and M. G. Katz. Universal volume bounds in Riemannian manifolds. In *Surveys in differential geometry, Vol. VIII (Boston, MA, 2002)*, *Surv. Differ. Geom.*, VIII, pages 109–137. Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [Ghy01] E. Ghys. Groups acting on the circle. *Enseign. Math. (2)*, 47(3-4) :329–407, 2001.
- [Ham01] U. Hamenstädt. New examples of maximal surfaces. *Enseign. Math. (2)*, 47(1-2) :65–101, 2001.
- [HS89] A. Haas and P. Susskind. The geometry of the hyperelliptic involution in genus two. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 105(1) :159–165, 1989.
- [IT92] Y. Imayoshi and M. Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, Tokyo, 1992.
- [Kor02] M. Korkmaz. Mapping class groups of nonorientable surfaces. *Geom. Dedicata*, 89 :109–133, 2002.
- [Mum71] D. Mumford. A remark on Mahler’s compactness theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 :289–294, 1971.
- [Par04] H. Parlier. On the geometry of simple closed geodesics. *Thèse de doctorat*, EPFL, 2004.
- [Par05] H. Parlier. Lengths of geodesics on Riemann surfaces with boundary. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 30(2) :227–236, 2005.
- [Rey89] E. Reyssat. *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann*, volume 77 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., 1989.
- [Sch93] P. Schmutz. Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length. *Geom. Funct. Anal.*, 3(6) :564–631, 1993.
- [Spr75] D. J. Sprows. Homeotopy groups of compact 2-manifolds. *Fund. Math.*, 90(1) :99–103, 1975.
- [SS88] M. Seppälä and T. Sorvali. Parametrization of Teichmüller spaces by geodesic length functions. In *Holomorphic functions and moduli, Vol. II (Berkeley, CA, 1986)*, volume 11 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 267–284. Springer, 1988.

Paysage systolique des surfaces hyperboliques compactes de petit genre

Cette thèse est consacrée à l'étude d'invariants métriques de type systole dans le cas des surfaces hyperboliques compactes de petit genre.

Dans la première partie, nous déterminons des inégalités optimales pour la systole des surfaces hyperboliques compactes de caractéristique -1. Dans un premier temps nous étudions la géométrie de ces surfaces, nous décrivons ensuite l'action des groupes modulaires sur les espaces de Teichmüller. Nous décomposons alors des domaines fondamentaux de ces actions en cellules adaptées à la systole, c'est-à-dire telles que tous les points d'une cellule ont mêmes géodésiques pour systoles. Enfin, nous donnons tous les points critiques des fonctions systole et en particulier leurs maxima. Nous nous intéressons aussi à d'autres invariants comme la 2-systole, la 3-systole...

La deuxième partie de la thèse est consacrée au calcul de la constante de Bers en genre 2. Afin de déterminer cette constante, nous introduisons un nouvel outil *le graphe de contiguïté* rendant compte de la répartition des points de Weierstrass sur une surface de Riemann hyperelliptique. Lorsque la 3-systole est «grande», ce graphe vérifie une certaine configuration qui permet de majorer la 3-systole par la systole d'une famille particulière de géodésiques. La détermination des maxima de cette nouvelle fonction systole fait apparaître trois surfaces maximales pour la 3-systole, dont une nouvelle. Nous montrons que la constante de Bers est réalisée par le plus grand de ces trois maxima.

Mots clés : Systole, surfaces de Riemann, espaces de Teichmüller, constante de Bers.

Systolic Landscape of Compact Hyperbolic Surfaces of Low Genus

This thesis deals with systolic invariants of compact hyperbolic surfaces of low genus.

In the first part, we investigate the systole of hyperbolic surfaces of characteristic -1. We are mainly concerned with non orientable surfaces. We devote our first part to study their geometry, then we describe the action of the mapping class group on their Teichmüller's spaces. Finally, we give all the critical points of the systole, which lead to the knowledge of the maxima. We also calculate other metric invariants (2-systole, 3-systole...) for the non orientable closed surface of genus 3.

The second part of the thesis is dedicated to the calculation of the Bers' constant in genus two. To determine this constant, we introduce a new tool *the graph of proximity* reporting the distribution of the Weierstrass points on hyperelliptic Riemann surfaces. When the 3-systole is «big», this graph satisfies a certain configuration and the 3-systole is bounded by the systole of a particular family of geodesics. The determination of the maxima of this new systolic function reveals three maximal surfaces for the 3-systole. We show that the biggest of these three maxima realize the Bers' constant.

Keywords : Systole, Riemann surfaces, Teichmüller spaces, Bers' constant.