

RESUME

Nous résolvons, dans le cadre des hautes fréquences, les équations de Maxwell en régime harmonique posées en domaine extérieur non borné. La considération d'obstacles homogènes nous amène à utiliser la formulation intégrale de Després. Dans ce contexte, Darrigrand a initié une méthode de résolution efficace couplant la méthode de discrétisation microlocale introduite par Abboud, Nédélec et Zhou, et la méthode multipôle FMM : l'assemblage du système est accéléré en adaptant de manière originale l'algorithme de la FMM. Notre travail a consisté à améliorer la précision et la convergence en maillage de cette méthode par l'emploi d'éléments finis d'ordre élevé. Nous avons ensuite proposé une optimisation du couplage, basée sur le lissage et le seuillage des fonctions de transfert, permettant d'obtenir une méthode dont la complexité est quasi-linéaire. Finalement, des tests numériques ont été réalisés afin de valider et d'évaluer l'efficacité de la méthode couplée optimisée lorsque sont considérés des éléments finis d'ordre élevé.

MOTS CLES

Electromagnétisme, Maxwell, Régime harmonique, Hautes fréquences, Equations intégrales de Després, Eléments finis d'ordre élevé, Méthode multipôle rapide, Discrétisation microlocale

ABSTRACT

We solve, for high frequencies, the time harmonic Maxwell equations in an exterior unbounded domain by using the integral equations of Després. In this context, Darrigrand has initiated an efficient method coupling the microlocal discretization method introduced by Abboud, Nédélec and Zhou, and the Fast Multipole Method (FMM) : the calculus of the system is sped up by an original adaptation of the FMM algorithm. Our work deals with the improvement of the precision and the mesh convergence of this method by using higher order finite elements. We then suggest an optimization of the coupling method, based on the smoothing and the filtering of transfer functions, leading to a method with a quasi-linear complexity. Finally, numerical experiments are performed to validate and to evaluate the efficiency of the optimized coupling method when higher order finite elements are considered.

KEY WORDS

Electromagnetism, Maxwell, Time harmonic, High frequencies, Integral equations of Després, Higher order finite elements, Fast Multipole Method, Microlocal discretization

N°d'ordre : 3416

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Ludovic GATARD

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Méthodes d'équations intégrales de frontière d'ordre élevé pour les équations de Maxwell : Couplage de la méthode de discrétisation microlocale et de la méthode multipôle rapide FMM

Thèse dirigée par Alain Bachelot

Soutenue le : 24 septembre 2007

Après avis de :

H. BARUCQ , Maître de Conférence HDR	Université de Pau	Rapporteur
D. BOUCHE , Directeur de Recherche	ENS Cachan	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

M. A. BACHELOT	Professeur - U. Bordeaux 1	Examineur
Mme. H. BARUCQ	Maître de conférence HDR - U. Pau	Examineur
M. D. BOUCHE	Directeur de recherche - ENS Cachan	Examineur
M. V. BRUNEAU	Maître de conférence HDR - U. Bordeaux 1	Rapporteur
M. P. CHARRIER	Professeur - U. Bordeaux 1	Président
Mme. K. MER-NKONGA	Ingénieur-chercheur - CEA-CESTA	Examineur

- 2007 -

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier tout particulièrement monsieur Alain Bachelot, qui m'a dirigé durant cette thèse, ainsi que madame Katherine Mer-Nkonga, mon encadrant CEA. Leur disponibilité, leur compétence, leur exigence et aussi leurs qualités humaines m'ont permis de mener avec rigueur et persévérance ce travail.

Je remercie également madame Hélène Barucq et monsieur Daniel Bouche d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

J'exprime aussi mes remerciements à messieurs Vincent Bruneau et Pierre Charrier pour leur participation à mon jury de thèse.

Je remercie messieurs Xavier Carlotti et Michel Mandallena de m'avoir accueilli au sein du Service Informatique Scientifique du CEA-CESTA.

Je remercie les stagiaires, thésards, ingénieurs et autres personnes en tout genre croisés au CEA, à l'IMB et même ailleurs (ceci représentant beaucoup de monde, je ne me risque pas à en établir une liste qui serait probablement non exhaustive). Cependant, je remercie spécialement :

- Bruno, Fabien, Géraldine, Sylvain, and the Pedrico jungle smash team,
- les membres du groupe by the sword : Arnaud, Emeric, Fabrice, Greg et Rodolphe,
- Florent et Paul pour la bonne ambiance dans le bureau.

Je tiens aussi à remercier Benjamin et Jessie pour les moments passés ensemble.

Finalement, je remercie ma famille pour son soutien durant ces années.

Table des matières

Introduction générale	5
I Equations intégrales de Després et éléments finis d'ordre élevé	17
1 Equations intégrales de Després	19
1.1 Introduction	19
1.2 Problème modèle	19
1.3 Formulation intégrale de Després dans le cas d'un objet Ω parfaitement absorbant	22
1.4 Formulation intégrale de Després dans le cas d'une condition d'impédance généralisée	25
1.5 Diagonalisation par bloc du système	26
1.6 Discrétisation du système intégral	28
1.7 Résolution du problème discret	30
2 Éléments finis de Nédélec de classe $H(\text{div})$	33
2.1 Introduction	33
2.2 Quelques rappels	33
2.3 Éléments finis introduits par Nédélec	36
2.4 Fonctions de base des éléments finis d'ordre élevé de classe $H(\text{div})$ de Nédélec	37
2.5 Fonctions de base des éléments finis d'ordre 1 de classe $H(\text{div})$ de Nédélec	44
3 Fonctions de base courbes	47
3.1 Introduction	47
3.2 Fonctions de base de Bendali	48
3.3 Fonctions de base de Graglia	51
3.4 Comparaison des fonctions de base de Bendali et de Graglia	54
3.5 Fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre 1 de classe $H(\text{div})$ de Nédélec	57
4 Intégrales singulières	61
4.1 Introduction	61
4.2 Éléments plans	62
4.3 Éléments courbes	63

4.4	E_1 et E_2 sont confondus	65
4.4.1	Etude de l'opérateur T	65
4.4.2	Etude de l'opérateur K	68
4.5	E_1 et E_2 ont une arête commune	69
4.6	E_1 et E_2 ont un sommet commun	74
4.7	Facétisation des éléments courbes	78

II Montée en ordre lors de la résolution des équations intégrales de Després par la méthode multipôle FMM 81

5	Présentation de la méthode multipôle	83
5.1	Introduction	83
5.2	Problème modèle	83
5.3	Construction du pavage multipolaire	85
5.4	Développement du noyau de Green	86
5.5	Décomposition du produit matrice-vecteur	89
5.5.1	Algorithme FMM un niveau	90
5.5.2	Algorithme FMM multi-niveaux	92
5.6	Application de la FMM aux équations intégrales de Després (EID)	98
5.6.1	Terme régulier	100
5.6.2	Terme singulier	102
6	FMM et éléments finis courbes d'ordre élevé	105
6.1	Introduction	105
6.2	Critère d'arrêt pour la subdivision de l'objet en octree	105
6.3	Complexité de la FMM en fonction de l'ordre des éléments finis et de la finesse du maillage	107
6.3.1	Brève présentation de la FMM	107
6.3.2	Première étude de la complexité de la FMM	111
6.3.3	Complexité de la FMM en fonction de l'ordre des éléments finis utilisés	113
6.3.4	Comparaison de la complexité de la FMM pour des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1	115
7	Résultats numériques	117
7.1	Introduction	117
7.2	La méthode du GMRes appliquée à la résolution des EID	118
7.3	La sphère comme objet diffractant	122
7.3.1	Cas d'une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$)	122
7.3.2	Cas d'une sphère parfaitement absorbante ($Z_r = 1$)	130
7.4	L'amande comme objet diffractant	136
7.4.1	Présentation de l'amande	136

7.4.2	Cas d'une amande parfaitement conductrice ($Z_r = 0$)	139
7.4.3	Cas d'une amande parfaitement absorbante ($Z_r = 1$)	141
7.5	Conclusion	147

III Montée en ordre lors de la résolution des équations intégrales de Després par la méthode couplée 149

8	Méthode de discrétisation microlocale d'ordre élevé	151
8.1	Introduction	151
8.2	Méthode de discrétisation microlocale	152
8.3	Construction du double maillage	154
8.4	Fonctions de base microlocales d'ordre élevé	155
8.5	Discrétisation du système intégral	160
9	Méthode couplée : Discrétisation Microlocale et FMM	163
9.1	Introduction	163
9.2	La méthode couplée	163
9.3	FMD un niveau	167
9.4	FMD multi-niveaux	169
10	Optimisation de la méthode couplée	175
10.1	Introduction	175
10.2	Optimisation de la FMD par lissage et seuillage des fonctions de transfert	175
10.2.1	Présentation de l'optimisation proposée	175
10.2.2	Lissage des fonctions de transfert	178
10.2.3	Seuillage des fonctions de transfert	182
10.2.4	Complexité de la FMD optimisée	186
10.2.5	Complexité de la FMD optimisée - cas $N_g \leq N_f^{1/2}$	188
10.2.6	Complexité de la FMD optimisée - cas $N_g \geq N_f^{1/2}$	188
10.3	Optimisations informatiques	191
10.3.1	Réorganisation des systèmes discrets	191
10.3.2	Implémentation informatique de la FMD	193
10.3.3	Optimisations liées aux éléments finis	194
11	Résultats numériques	199
11.1	Introduction	199
11.2	La sphère comme objet diffractant	200
11.2.1	Cas d'une sphère parfaitement absorbante ($Z_r = 1$)	200
11.2.2	Cas d'une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$)	210
11.3	L'amande comme objet diffractant	220
11.3.1	Cas d'une amande parfaitement absorbante ($Z_r = 1$)	220

11.3.2 Cas d'une amande parfaitement conductrice ($Z_r = 0$)	222
11.4 Conclusion	224

Conclusion générale	227
----------------------------	------------

Annexe 1	229
-----------------	------------

Annexe 2	233
-----------------	------------

Introduction générale

Problématique générale

Les équations modélisant les problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques, c'est-à-dire les équations de Maxwell, suscitent un vif intérêt en raison de leurs diverses applications industrielles : furtivité radar, compatibilité électromagnétique, conception d'antennes, téléphonie cellulaire, ... Nos travaux se rattachent au domaine de la furtivité radar. Afin de définir ce champ d'application, nous considérons un objet Ω^- dans l'espace \mathbb{R}^3 , dont les diverses caractéristiques sont connues. Ω^- est éclairé par une onde incidente de fréquence f , comme l'illustre la figure 1.

La présence de Ω^- engendre une onde diffractée dépendant des particularités de l'objet. La

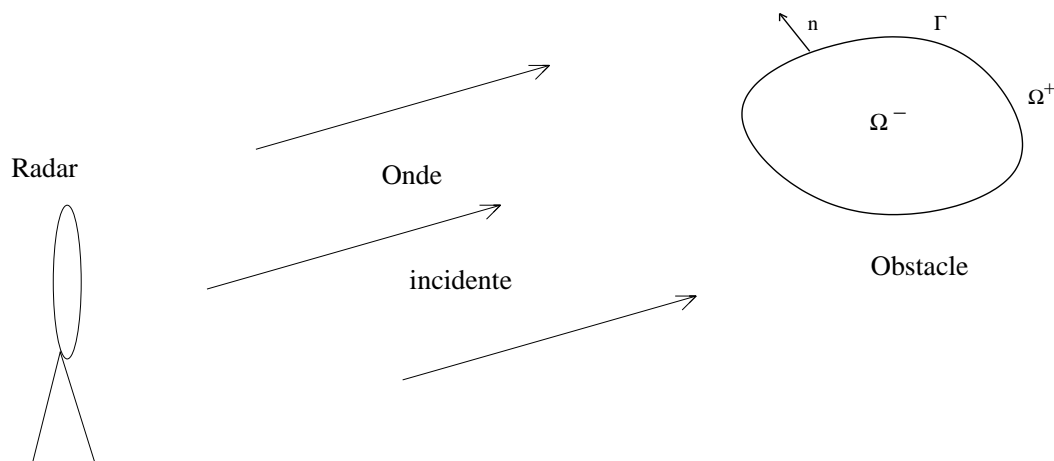


FIG. 1 – Illustration du problème de furtivité radar.

connaissance de l'onde diffractée fournit donc des renseignements sur Ω^- . Le domaine de la furtivité radar correspond à la recherche de la minimisation de ces renseignements : il faut trouver des conditions sur l'objet (forme, matériaux le recouvrant, etc ...) afin de minimiser sa signature radar ou sa Surface Equivalente Radar (SER), la SER étant définie comme la puissance rayonnée dans une direction par un objet éclairé par une onde plane incidente. Elle s'exprime en $dB.m^2$. La SER est dite monostatique lorsque l'émetteur de l'onde incidente et le

récepteur de l'onde diffractée sont positionnés au même endroit. Elle est dite bistatique lorsque l'émetteur est fixe et que seule la position du récepteur varie. La furtivité radar s'inscrit donc dans le cadre des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques par un obstacle, ces derniers étant modélisés par les équations de Maxwell.

Lors de l'étude des équations de Maxwell, il convient de distinguer le régime transitoire et le régime harmonique. Dans le premier cas, le temps t est une variable du problème, et nous suivons l'évolution de la solution au cours du temps. Dans le second cas, la solution dépend uniquement des variables d'espace, car elle est proportionnelle à $e^{-2\pi ift}$, f étant la fréquence du signal incident, ce qui supprime les dérivées partielles en temps des équations de Maxwell. La résolution de ces équations passe par l'écriture d'un système linéaire dont la taille N croît avec la fréquence. En effet, il faut tenir compte, lors de la discrétisation du problème, de la nature oscillante de la solution. Cela se fait en considérant une discrétisation d'autant plus fine que la fréquence est élevée, ou de façon équivalente, que la longueur d'onde λ est petite, et nous aboutissons à des systèmes où le nombre d'inconnues N est proportionnel à la fréquence. Pour les hautes fréquences, N est grand, et par conséquent, le stockage et l'inversion du système linéaire constituent, en dépit de moyens informatiques toujours plus importants, les limitations de la résolution du problème.

Méthodes numériques

Nous présentons un état de l'art des principales méthodes de résolution du problème extérieur pour les équations de Maxwell.

Méthodes asymptotiques

Afin de pallier au problème des hautes fréquences, un premier type de méthodes peut être considéré : les méthodes asymptotiques [91]. Ces méthodes, justifiées par le calcul pseudo-différentiel, permettent de calculer, non pas la solution, mais un développement asymptotique de la solution suivant l'inverse du nombre d'onde k , le nombre d'onde étant proportionnel à la fréquence. Soient l'obstacle Ω^- , et son complémentaire $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$. Ω^+ est divisé en trois zones par l'onde incidente (cf figure 2) : la zone éclairée, la zone d'ombre et la zone de transition.

Le principe de ces méthodes est fondé sur la localisation de la propagation des ondes suivant des géodésiques. Ces géodésiques sont des droites lorsque le milieu est homogène et isotrope. Les méthodes des rayons permettent la résolution du problème dans ce contexte. La plus ancienne de ces méthodes est l'Optique Géométrique [77]. L'OG donne une approximation, appelée approximation de Kirchoff, du champ dans Ω^+ en remplaçant localement la surface Γ de Ω^- par un plan infini, du fait que la longueur d'onde est très courte. Elle a été étendue pour prédire les champs en zone d'ombre par Keller, père de la théorie géométrique de la diffraction (Geometrical

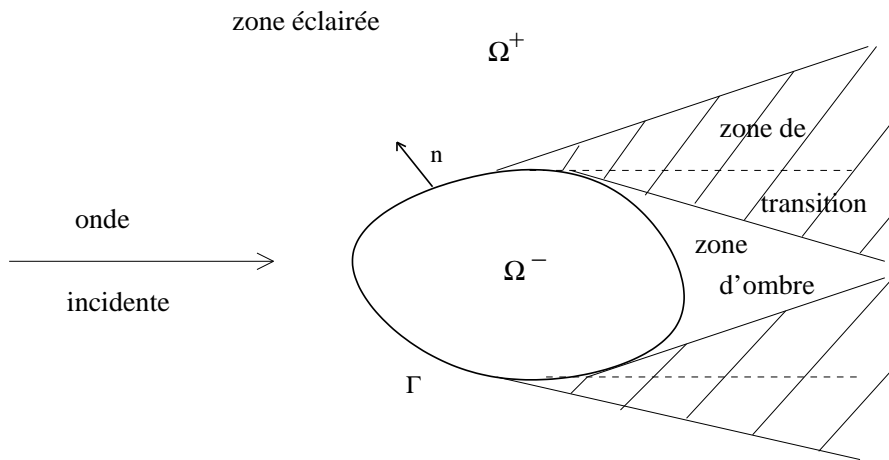


FIG. 2 – Zones de diffraction.

Theory of Diffraction) [74]. Cette théorie construit le champ diffracté par des objets complexes à partir des solutions de problèmes canoniques, l'objet réel étant remplacé par un objet simple, dit canonique, localement équivalent à l'objet réel, mais exactement soluble. Cependant, la GTD donne des résultats erronés quand le champ incident n'est plus un champ de rayons, ce qui est le cas lorsque le milieu considéré est hétérogène. La méthode des couches-limites [26], [91] permet alors de calculer le champ dans les zones où la GTD ne s'applique pas. La phase et l'amplitude dans les couches-limites dépendent de fonctions arbitraires de coordonnées étirées, i.e. multipliées par une puissance $k^{p/q}$, adaptées à l'objet diffractant et à la physique du problème.

Toutes ces méthodes sont basées sur des développements asymptotiques a priori, appelés Ansatz. L'Ansatz comprend un nombre fini de termes, et prend la forme du produit de deux termes :

- une exponentielle de la phase, fortement variable, produit de l'abscisse curviligne le long d'un rayon par le nombre d'onde, qui modélise le comportement oscillant de la solution,
- une amplitude, lentement variable, qui est une somme en puissances décroissantes, entières ou fractionnaires, du nombre d'onde.

En injectant l'Ansatz dans les équations de Maxwell, nous sommes amenés à résoudre un système d'équations différentielles pour déterminer la phase et les fonctions de l'amplitude le long de rayons tracés dans l'espace ou sur l'objet : l'équation eikonale pour le calcul de la phase, et des équations de transport pour les fonctions de l'amplitude. La résolution de ces équations peut donner des formules analytiques, comme pour certains objets canoniques, notamment le cylindre et la sphère. Ces méthodes ont l'avantage d'avoir une complexité qui ne croît pas avec la fréquence. Cependant, les fonctions de l'amplitude sont difficiles à évaluer, car elles sont étroitement liées à la géométrie de l'obstacle.

Méthodes volumiques

Par rapport aux méthodes asymptotiques, d'autres méthodes, comme les méthodes des différences finies [124], des éléments finis [34], [92], [93] des volumes finis [33] et Galerkin discontinues [56], [61] qui résolvent les équations de Maxwell en discrétisant le système d'équations aux dérivées partielles dans un volume entourant l'obstacle, prennent mieux en compte la géométrie de l'objet. Ces méthodes, qualifiées de volumiques, ont aussi par rapport aux méthodes asymptotiques les avantages d'être à la fois valides pour toutes les fréquences et plus précises pour des fréquences pas trop élevées. Les méthodes volumiques permettent de traiter des problèmes transitoires ainsi que le cas des matériaux hétérogènes, ce dernier cas pouvant concerner des problèmes transitoires ou des problèmes harmoniques. Cependant, ces méthodes se heurtent à une difficulté conséquente : la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine extérieur non borné $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$ ne peut se faire qu'en considérant un domaine borné, et donc en tronquant le domaine dans lequel est formulé le problème initial. Cette troncature peut être réalisée en imposant des conditions aux limites absorbantes [9], [15], [16], [57] (i.e. générant peu d'ondes parasites à la frontière artificielle) sur la surface extérieure du domaine de résolution afin de simuler un volume infini. Nous pouvons, par exemple, utiliser pour une frontière placée dans le vide, la condition de Silver-Müller. En pratique, cette condition nécessite de placer la frontière du domaine assez loin de l'obstacle et engendre des problèmes de grandes tailles. De nombreux travaux [7], [14], [6], [8], [21] ont été menés pour proposer des conditions aux limites absorbantes d'ordre élevé plus performantes. Une autre méthode efficace pour absorber les ondes électromagnétiques consiste à utiliser un matériau fictif absorbant via la technique dite des couches PML [23], [18], [17]. Cependant, ces conditions restent approchées, ce qui entraîne des problèmes de précision liés à la réflexion numérique des ondes sur la surface extérieure. De plus, les méthodes volumiques nécessitent un nombre d'inconnues en $\mathcal{O}(k^3)$, car du fait de la nature oscillante de la solution des équations de Maxwell, la discrétisation du volume doit se faire en considérant un nombre minimum de points par longueur d'onde λ ($\lambda = 2\pi/k$), en général une dizaine.

Méthodes surfaciques

Dans certains cas, des alternatives existent pour remplacer les méthodes volumiques. Par exemple, pour la propagation des ondes dans des matériaux homogènes isotropes, les méthodes d'équations intégrales [41] sont bien adaptées. Cependant, si une partie seulement du milieu est non homogène, il est possible de coupler les méthodes d'équations intégrales et d'éléments finis [73], [81]. Elles ont également été utilisées pour résoudre des problèmes posés dans des milieux hétérogènes particuliers [22], [58].

Le problème de troncature du domaine ne se pose plus, puisque les conditions aux limites extérieures sont prises en compte de manière implicite. De ce fait, les méthodes intégrales sont plus précises que les méthodes volumiques. Elles sont qualifiées de frontière lorsqu'elles sont posées

sur le bord Γ de l'objet. La méthode des équations intégrales de frontière nécessite uniquement de déterminer les courants à la surface de Γ , car leur connaissance suffit à l'évaluation des courants diffractés dans tout l'espace. Cette méthode permet donc de ramener un problème 3D non borné à un problème 2D borné, ce qui entraîne une réduction du nombre d'inconnues, car seule la surface de l'objet est maillée. Ce nombre est en $\mathcal{O}(k^2)$, car il faut tenir compte, lors de la discrétisation du problème, de la nature oscillante de la solution due à la présence, dans les intégrales, du noyau de Green, ce dernier étant défini par :

$$G(x) = \frac{\exp(ik|x|)}{4\pi|x|}. \quad (1)$$

La méthode des potentiels retardés associe aux problèmes d'évolution des formulations intégrales espace-temps. Cette méthode a été introduite par Ha Duong [69] pour la diffraction d'une onde acoustique. Nous renvoyons à [97], [119] pour la diffraction par des obstacles conducteurs, et à [79] pour des obstacles dissipatifs.

En régime harmonique, les principales formulations intégrales [19], [96] et [41], utilisées pour résoudre les équations de Maxwell, sont l'équation intégrale en champ électrique (Electric Field Integral Equation), l'équation intégrale en champ magnétique (Magnetic Field Integral Equation) et la CFIE (Combined Field Integral Equation) [86] qui est une combinaison convexe de l'EFIE et de la MFIE. Elles s'appuient sur une représentation sous forme de potentiels des champs électromagnétiques. Celle-ci est fournie par les formules de Stratton-Chu [41]. D'autres formulations intégrales, différentes de celles présentées précédemment, peuvent être aussi utilisées. Par exemple, Després a développé une formulation intégrale spécifique [51], [38], [13], [11]. Les équations intégrales de Després (EID) sont obtenues à partir d'un problème de minimisation sur l'ensemble des solutions entrantes et sortantes des équations de Maxwell. Par rapport aux équations intégrales classiques, les EID ont l'inconvénient de doubler le nombre d'inconnues, mais elles ont l'avantage de donner des systèmes hermitiens, définis positifs et bien conditionnés, ce qui permet la mise en place d'une méthode efficace pour la résolution numérique du problème.

Discrétisation et résolution

A partir de maintenant, nous limitons notre étude au contexte des équations de Maxwell en régime harmonique posées dans un domaine extérieur non borné, et aux cas des objets homogènes. De plus, nous considérons uniquement, pour la modélisation du problème, la méthode des équations intégrales.

Méthodes des éléments finis

Le système intégral obtenu est résolu au moyen d'une méthode d'éléments finis. Les éléments finis utilisés font partie de la famille d'éléments finis de classe $H(\text{div})$ introduite en 1980 par

Nédélec [93]. Cette famille, appelée première famille de Nédélec, constitue une généralisation au cas tridimensionnel des éléments finis mixtes de classe $H(\text{div})$ introduits par Raviart et Thomas en 1977 [100].

Ces éléments finis ont beaucoup d'avantages, avec entre autres la faculté de traiter des maillages non structurés et donc des géométries complexes, et de vérifier implicitement la propriété de conservation de la charge au niveau discret. Ces éléments finis permettent d'approcher le flux d'un champ au même ordre que sa divergence. Ils interpolent un champ en assurant seulement la continuité de sa composante normale entre les éléments adjacents du maillage. Grâce à cette propriété, il n'y a pas de "faux" modes [115] qui apparaissent, contrairement au cas où chaque composante du champ est considérée comme une fonction scalaire. En raison de cette propriété, ces éléments finis sont aussi appelés éléments finis d'arête.

Les fonctions de base les plus connues associées aux éléments finis d'arête sont les fonctions de base de Raviart-Thomas, autrement appelées dans la littérature fonctions de base de Rao-Wilson-Glisson [99]. Elles sont d'ordre 0, car elles approchent les composantes normales d'un champ vectoriel aux arêtes des éléments du maillage par une constante le long de ces arêtes. Ceci entraîne, malgré leur efficacité, une faible vitesse de convergence en maillage. Une idée naturelle, pour augmenter la vitesse de convergence de la discrétisation, consiste à approcher la composante normale le long de chaque arête par un polynôme de degré p supérieur ou égal à 1, plutôt que par une constante.

Graglia *et al.* [65] donnent des formules explicites permettant de définir des fonctions de base à n'importe quel ordre p . Toutes ces fonctions de base interpolent le flux d'un champ vectoriel passant à travers les arêtes du maillage en imposant sa continuité, et permettent de vérifier la propriété de conservation de la charge. De plus, elles ont, par rapport aux autres fonctions de base de la littérature [122], l'avantage d'être symétriques, i.e. d'être indépendantes d'un choix privilégiant certaines arêtes des éléments du maillage.

Les systèmes discrets provenant de la discrétisation des équations intégrales de frontière avec des éléments finis d'arête sont pleins. En effet, le courant peut être développé à partir des fonctions de base des éléments finis d'arête qui représentent chacune un courant local rayonnant dans tout l'espace environnant, et interagissent donc avec tous les autres éléments de la base. Cette interaction très forte conduit à des matrices complexes pleines.

Résolution itérative

Nous avons à résoudre un système linéaire complexe et plein, dont la taille N est proportionnelle au carré de la fréquence, et par conséquent au carré du nombre d'onde k .

La résolution de ce système peut se faire de deux manières : soit en utilisant des méthodes directes, ou soit en utilisant des méthodes itératives [80]. Les méthodes directes ont l'avantage d'être à la fois robustes et précises, mais elles ont l'inconvénient de nécessiter un nombre d'opérations en $\mathcal{O}(N^3)$, et une place mémoire en $\mathcal{O}(N^2)$. Dans le cas des hautes fréquences, l'inversion du système par ces méthodes n'est donc pas envisageable. La résolution s'effectue

en considérant une autre famille de solveurs : les méthodes itératives. Ces solveurs sont moins robustes et moins précis que les précédents, mais ils ont une complexité en $\mathcal{O}(N_{iter}N^2)$, N_{iter} étant le nombre d’itérations nécessaires à la résolution du problème, et sont par conséquent plus économiques en temps de calcul. Les méthodes itératives ont toutes en commun de chercher à s’approcher petit à petit de la solution du problème en réalisant à chaque étape un produit matrice-vecteur qui a un coût en $\mathcal{O}(N^2)$. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer la méthode du gradient conjugué [72] et le GMRes (General Minimu Residual) [106]. Le GMRes a l’avantage de fonctionner quelle que soit la nature de la matrice à inverser, et ne nécessite qu’un seul produit matrice-vecteur par itération. Des versions plus évoluées du GMRes font intervenir un préconditionneur afin d’accélérer la convergence de la résolution.

Cependant, ces méthodes, à l’instar des méthodes directes, requièrent le calcul et le stockage de la matrice du système qui est pleine : la place mémoire nécessaire est donc en $\mathcal{O}(N^2)$. La considération de fréquences élevées engendre donc à la fois des problèmes en temps de calcul et en place mémoire.

Méthodes d’accélération “pures”

Dans le but de remédier à ces limitations, des approches permettant d’accélérer le calcul d’un produit matrice-vecteur, tout en réduisant la place mémoire requise, ont été développées. Nous nous intéressons à quelques unes d’entre elles.

La méthode de compression par ondelettes [25], [43] permet, par un choix judicieux des fonctions de base, de creuser la matrice. De plus, elle dispose de préconditionneurs efficaces, et peut être associée aux méthodes de discrétisations adaptatives. Cependant, l’influence de la géométrie de l’objet sur ces méthodes est importante.

Contrairement à la méthode précédente, certaines méthodes sont a priori moins dépendantes de la forme et de la complexité de l’objet, ce qui est le cas de la méthode développée dans [28] utilisant des transformées de Fourier pour accélérer le produit matrice-vecteur, et de la méthode des matrices hiérarchiques (\mathcal{H} -matrices) [70] basée sur une approximation de bas rang du champ lointain. Le Panel Clustering [71] et la Fast Multipole Method (FMM) [66], exploitant la régularité du noyau de Green (1) dans l’espace, possèdent également cette propriété de robustesse par rapport à l’objet. La méthode de Panel Clustering décrite par Sauter [107] est basée sur un regroupement judicieux des degrés de liberté et un développement du noyau de Green, à la façon FMM.

La FMM [112], [46], [29] et [116] est basée sur une réduction des interactions entre les éléments du maillage éléments finis engendrées par le noyau de Green à des interactions entre des boîtes multipôlaires. Plus précisément, il s’agit d’écrire un développement du noyau de Green après avoir effectué un regroupement astucieux des termes, de manière à réduire la complexité en approchant les interactions lointaines. Le calcul des interactions lointaines est accéléré en regroupant convenablement les éléments du maillage dans les boîtes multipôlaires. La FMM nécessite seulement le stockage des interactions proches, soit une place mémoire en $\mathcal{O}(N)$ (soit

$\mathcal{O}(k^2)$), et elle permet de réduire de manière importante le coût d’un produit matrice-vecteur : en considérant une FMM un niveau, i.e. un regroupement uniforme, ce coût est en $\mathcal{O}(N_{iter}N^{3/2})$ (soit $\mathcal{O}(N_{iter}k^3)$), et en considérant une FMM multiniveaux, i.e. un regroupement en fonction de l’éloignement des interactions, il est en $\mathcal{O}(N_{iter}N \ln N)$ (soit $\mathcal{O}(N_{iter}k^2 \ln k)$).

Méthodes d’accélération “hybrides”

Nous mentionnons une autre catégorie de méthodes permettant de résoudre les équations de Maxwell, appelées méthodes hybrides. Ces méthodes couplent les méthodes asymptotiques et les méthodes de discrétisation (la dénomination “méthodes de discrétisation” correspond à l’emploi conjugué des méthodes d’équations intégrales de frontière et d’éléments finis d’arête) de manière complémentaire :

- D’une part, les méthodes asymptotiques permettent de surmonter la principale difficulté des problèmes à hautes fréquences, à savoir la représentation de la nature fortement oscillante de la solution. Cette étape rend les méthodes de discrétisation très coûteuses.
- D’autre part, les méthodes de discrétisation sont bien adaptées à la prise en compte de géométries complexes, qui constitue une limitation importante des méthodes asymptotiques.

Dans le cadre d’une résolution par équations intégrales de frontière et par éléments finis d’arête, nous présentons deux méthodes hybrides, qui sont des méthodes de discrétisation microlocale. Dans le cas d’un obstacle convexe et d’une onde incidente plane, une première méthode, introduite par Abboud, Nédélec et Zhou [125], [2], [3], consiste à approcher la phase de l’inconnue selon les théories géométriques et physiques de la diffraction, et à restituer cette information, qui caractérise le comportement oscillant de la solution, lors de la discrétisation éléments finis de l’inconnue. Cette approximation a pour conséquence l’obtention d’une nouvelle inconnue beaucoup moins oscillante. Dans le cas des équations de Maxwell, cette nouvelle inconnue peut être approchée avec un nombre de degrés de liberté en $\mathcal{O}(k^\alpha)$, α étant inférieur à 2, au lieu de $\mathcal{O}(k^2)$. Cependant, l’approximation de la surface Γ nécessite un maillage plus fin avec un nombre de mailles en $\mathcal{O}(k^2)$ pour avoir une évaluation des différentes fonctions sur Γ suffisamment précise. Ainsi, le calcul de la matrice du système s’effectue avec un coût en $\mathcal{O}(k^4)$. Selon les auteurs de cette méthode, l’assemblage du système peut être accéléré en utilisant la théorie de la phase stationnaire. Malgré son efficacité en dimension 2, cette méthode engendre des difficultés numériques non encore résolues à notre connaissance en dimension 3.

De la Bourdonnaye et Tolentino [49], [120] ont établi une autre méthode de discrétisation microlocale basée sur la même idée de séparation de l’amplitude et de la phase. Pour traiter des cas plus généraux que précédemment (i.e. aucune condition de convexité de l’objet et aucune condition sur l’onde incidente ne sont imposées), ils proposent de discrétiser la phase de l’inconnue suivant des directions présélectionnées de la sphère unité. Ils obtiennent un problème

où le nombre de degrés de liberté est en $\mathcal{O}(k^2)$, car les discrétisations de la sphère unité et de l'obstacle se font chacune avec un nombre de points en $\mathcal{O}(k)$. L'accélération du produit matrice-vecteur est réalisée par l'emploi de la théorie de la phase stationnaire qui permet de creuser la matrice. Bien que le coût de la méthode soit désormais en $\mathcal{O}(k^2)$, la matrice ainsi générée est mal conditionnée. De plus, un nombre important de points de discrétisation par triangle doit être considéré lors de la discrétisation du système intégral. D'autre part, les résultats obtenus présentent une précision assez limitée [120].

Couplage de la méthode de discrétisation microlocale et de la méthode multipôle FMM

Notre but est de résoudre, dans le cadre des hautes fréquences, les équations de Maxwell en régime harmonique posées en domaine extérieur non borné. La considération d'obstacles homogènes nous amène à utiliser la méthode des équations intégrales de frontière [19], car cette dernière a l'avantage par rapport aux méthodes volumiques d'être très précise et d'engendrer lors de la discrétisation du problème un moins grand nombre d'inconnues. La formulation intégrale utilisée est celle introduite par Després [38], car elle donne des systèmes hermitiens, définis positifs et bien conditionnés. Nous avons considéré l'application de la FMM aux opérateurs des équations intégrales de Després présentées dans [39] et [90].

En reprenant l'idée des méthodes hybrides, qui consiste à associer différentes méthodes en tirant profit des avantages de chacune, Darrigrand [44] a développé une méthode, que nous appelons FMD, couplant les méthodes de discrétisation microlocale [2] et multipôle FMM [31] : il accélère le précalcul du système en adaptant de manière originale l'algorithme de la FMM. La FMD permet de remédier aux limitations affichées d'une part, par les méthodes asymptotiques [91] lors de la prise en compte de géométries complexes, et d'autre part, par la méthode de discrétisation microlocale introduite par Abboud *et al.* [2] qui nécessite d'assembler un système, de taille réduite en $\mathcal{O}(k^\alpha)$, où $\alpha < 2$, avec un nombre d'opérations en $\mathcal{O}(k^4)$. Elle a un coût en $\mathcal{O}(k^{\alpha+2} + N_{iter}k^{2\alpha})$ en temps de calcul ($\alpha < 2$) et un coût en mémoire en $\mathcal{O}(k^2 \ln k)$. La FMD permet donc de repousser les limites des problèmes de temps de calcul et de place mémoire engendrés lors de la considération de fréquences élevées, et peut être avantageuse par rapport à la FMM multi-niveaux, qui a une complexité en $\mathcal{O}(N_{iter}k^2 \ln k)$, dès lors que $\alpha \leq 1$.

Cependant, bien que les premiers résultats soient très encourageants, il a été constaté, pour les équations de Maxwell, qu'ils ne sont pas assez précis pour certains cas, notamment pour les objets absorbants. Nous avons donc donné une formulation des fonctions de base associées aux éléments finis microlocaux d'ordre élevé en s'inspirant de [65], et nous avons intégré ces éléments finis à la FMD afin d'augmenter la précision des résultats. La montée en ordre a permis d'améliorer la convergence en maillage dans le cas d'un objet parfaitement conducteur et dans le cas d'un objet parfaitement absorbant, l'amélioration étant plus spectaculaire pour ce dernier cas. En étudiant la convergence en maillage de la FMD, il est apparu que pour

un même niveau de précision, la taille des systèmes obtenus en employant des éléments finis d'ordre élevé est inférieure à celle des systèmes obtenus en utilisant des éléments finis d'ordre 0. Il résulte donc de l'emploi d'éléments finis d'ordre élevé des gains en temps de calcul et en consommation mémoire. Nous avons également proposé une optimisation de la complexité de la FMD. En analysant la complexité de cette méthode, il apparaît que l'étape de transfert (étape où sont effectués les transferts d'informations entre les boîtes multipôlaires) détermine à elle seule la complexité de la FMD. L'optimisation proposée, basée sur le lissage et le seuillage des fonctions de transfert, est inspirée de [36], [121] et [42]. Elle permet de considérer moins de directions de discrétisation sur la sphère unité. La FMD optimisée a alors une complexité en $\mathcal{O}(k^2 \ln k + N_{iter} k^{2\alpha})$. La consommation en mémoire demeure inchangée, i.e. en $\mathcal{O}(k^2 \ln k)$.

Plan de la thèse

Nous décrivons le plan de ce mémoire qui se décompose en trois parties.

Dans le premier chapitre, nous présentons la formulation intégrale de Després [38] utilisée pour résoudre les équations de Maxwell. La présentation faite dans [38] repose sur la manipulation des potentiels usuels et sur la décomposition du noyau de Green en partie réelle et en partie imaginaire. Elle s'effectue en deux étapes : le cas d'un objet Ω parfaitement absorbant est d'abord considéré, puis le cas d'une condition d'impédance généralisée [11] est traité à partir d'un changement de second membre. La discrétisation du système ainsi que sa résolution sont abordées. Ensuite, nous décrivons au chapitre 2 les fonctions de base des éléments finis plans d'ordre élevé de classe $H(div)$ [93], et plus particulièrement celles définies par Graglia [65]. Dans la continuité, nous présentons au chapitre 3 les fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre élevé. Nous examinons deux paramétrisations de Γ , à première vue, différentes mais qui se révèlent équivalentes : la première, utilisée par Bendali [19], est basée sur l'emploi d'un repère local orthonormé, et la seconde, utilisée par Graglia, est basée sur l'emploi des coordonnées barycentriques. Au chapitre 4, nous détaillons le calcul des intégrales singulières. Ces calculs doivent être effectués de manière précise, car ils représentent les termes dominants du système. Nous avons repris la technique de J. Gay, également connue sous le nom de transformation de Duffy [55], permettant de lever les singularités pour des éléments plans, et nous avons par la suite étendu cette technique aux éléments courbes.

Dans la deuxième partie, le chapitre 5 est consacré à la présentation de la méthode multipôle FMM [46] utilisée pour accélérer les produits matrice-vecteur effectués lors de la résolution itérative. Puis, au chapitre 6, nous étudions les effets engendrés sur la FMM par l'utilisation d'éléments finis courbes d'ordre élevé. Nous nous intéressons au critère d'arrêt pour la subdivision de l'obstacle en octree. Puis, nous quantifions l'impact des éléments finis d'ordre élevé et la finesse du maillage sur la complexité de la FMM. Cette analyse se fait dans un cadre simplifié,

mais reste généralisable aux équations intégrales de Després (EID). Au chapitre 7, une étude des résultats numériques obtenus avec la FMM est proposée. Les résultats numériques représentent des calculs de SER bistatique. Les objets diffractants considérés sont la sphère unité et l'amande NASA. Nous traitons le cas des objets parfaitement absorbants (i.e. d'impédance $Z_r = 1$) et le cas des objets parfaitement conducteurs (i.e. d'impédance $Z_r = 0$). Nous comparons, au travers des différents tests, tout en considérant des fréquences de plus en plus élevées, les résultats obtenus à partir d'éléments finis plans d'ordre 0 et d'éléments finis courbes d'ordre 1.

Dans la troisième partie, nous exposons au chapitre 8 la méthode de discrétisation microlocale introduite par Abboud, Nédélec et Zhou [2]. Etant donné qu'elle sort du cadre classique, nous décrivons également la construction des fonctions de base microlocales courbes d'ordre élevé. Puis, au chapitre 9, nous présentons le couplage de la méthode de discrétisation microlocale et de la méthode multipôle FMM développé dans [44], en détaillant l'algorithme de la méthode couplée ainsi que le calcul de sa complexité. Nous consacrons ensuite le chapitre 10, aux différentes optimisations apportées à la FMD. Nous montrons qu'une réorganisation au niveau du calcul du système permet de diviser par deux le temps de calcul et la place mémoire nécessaires à la résolution du problème. Nous montrons aussi qu'une réécriture des boucles du code permet de réduire de manière significative le temps de calcul. Nous décrivons ensuite une stratégie permettant de calculer efficacement les fonctions de base d'ordre élevé aux points de Gauss. Enfin, nous proposons une optimisation conséquente de la complexité de la FMD. La discrétisation de la sphère unité constitue une limitation au niveau de la complexité de la méthode couplée. Nous développons alors une méthode, basée sur le lissage et le seuillage des fonctions de transfert et inspirée de [36] et [42], qui permet de considérer beaucoup moins de points sur la sphère unité, réduisant ainsi de manière importante la complexité de la méthode couplée. Au chapitre 11, nous menons une étude sur les résultats numériques obtenus avec la FMD optimisée lorsque sont considérés des éléments finis d'ordre élevé. Les objets diffractants utilisés sont la sphère unité et l'amande NASA. Nous traitons le cas des objets parfaitement absorbants (i.e. d'impédance $Z_r = 1$) et le cas des objets parfaitement conducteurs (i.e. d'impédance $Z_r = 0$). Nous considérons d'abord le cas de la sphère. Dans le cadre de la montée en fréquence, nous étudions dans un premier temps la convergence en maillage de la FMD à l'ordre 0. Il se dégage de cette étude que, en pratique, nous avons toujours $N_g \sim k^\alpha$ avec $\alpha \leq 1$, où N_g est le nombre d'inconnues de la discrétisation microlocale. Ceci montre que la FMD peut être comparée à la FMM multi-niveaux. Nous analysons ensuite l'optimisation apportée à la FMD en fonction de l'ordre des éléments finis. Enfin, nous comparons, pour les fréquences précédentes, toujours en fonction de l'ordre des éléments finis, les SER et les consommations en temps et en mémoire obtenues avec la FMM d'une part et avec la FMD d'autre part. Nous considérons ensuite le cas de l'amande NASA. Pour ce cas, nous comparons comme précédemment les résultats obtenus pour $Z_r = 1$ et $Z_r = 0$ avec la FMM et la FMD optimisée, mais nous le faisons uniquement pour le niveau grossier et le paramètre ϵ optimaux.

Première partie

Equations intégrales de Després et éléments finis d'ordre élevé

Chapitre 1

Equations intégrales de Després

1.1 Introduction

Les équations de Maxwell en régime harmonique et en domaine extérieur non borné sont résolues au moyen des équations intégrales de Després (EID). Cette formulation a l'avantage, commun aux méthodes d'équations intégrales, de ramener un problème à trois dimensions non borné à un problème à deux dimensions borné, et a aussi l'avantage, spécifique à la formulation intégrale de Després, d'aboutir à des systèmes hermitiens, définis positifs et bien conditionnés, ce qui permet la mise en place d'une méthode efficace pour la résolution du problème.

A l'origine, les EID étaient basées sur la minimisation d'une fonctionnelle quadratique. Cependant, Collino et Després en donnent dans [38] une présentation plus simple reposant sur la manipulation des potentiels usuels. Cette présentation, et celle qui sera faite dans ce chapitre, se scinde en deux étapes : tout d'abord le cas d'une condition d'impédance $Z_r = 1$ (ce cas correspond à un objet parfaitement absorbant), puis le cas d'une condition d'impédance généralisée. Pour $Z_r = 1$, l'écriture du système intégral est fondée sur la décomposition en parties réelles et imaginaires des opérateurs intégraux habituels. Dans le cas d'une condition d'impédance généralisée, étant donné que la prise en compte de la condition au bord se fait au niveau du second membre, un changement de second membre permet de se ramener au cas précédent. Enfin, la discrétisation du système ainsi que sa résolution sont présentées.

1.2 Problème modèle

Nous étudions les équations de Maxwell. Ces équations modélisent le comportement des ondes électromagnétiques et notamment le phénomène de diffraction engendré par un objet éclairé par une onde électromagnétique (cf figure 1.1) : une onde incidente de fréquence f crée des courants magnétiques et électriques à la surface Γ de l'objet Ω^- qui à leur tour génèrent un champ électromagnétique dans tout l'espace $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$.

Lorsque nous considérons les équations de Maxwell en régime harmonique et en domaine ex-

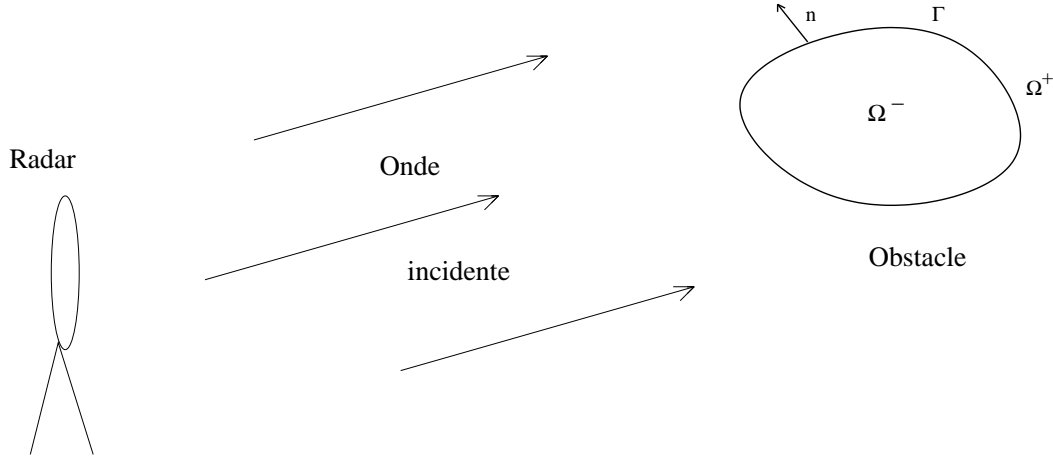


FIG. 1.1 – Illustration du problème de diffraction.

térieur non borné, pour un objet homogène, la méthode de résolution la plus fréquemment utilisée est la méthode des équations intégrales [19], [96]. Elles sont qualifiées de frontière lorsqu'elles sont posées sur le bord Γ de l'objet. La méthode des équations intégrales de frontière nécessite uniquement de déterminer les courants à la surface de Γ , car leur connaissance suffit à l'évaluation des courants diffractés dans tout l'espace. Le problème de troncature du domaine ne se pose plus, car les conditions aux limites sont prises en compte de manière implicite. De ce fait, les méthodes intégrales sont plus précises que les méthodes volumiques. Ces méthodes permettent de ramener un problème 3D non borné à un problème 2D borné, ce qui, lors de la discrétisation du problème, entraîne une réduction conséquente du nombre d'inconnues. Le nombre d'inconnues est en $\mathcal{O}(k^2)$, car il faut, ici aussi, tenir compte lors de la discrétisation du problème, de la nature oscillante de la solution due à la présence, dans les intégrales, du noyau de Green défini par :

$$G(x, y) = \frac{\exp(ik|x - y|)}{4\pi|x - y|}. \quad (1.1)$$

Les systèmes discrets provenant des méthodes intégrales sont pleins.

A présent, nous énonçons les principales formulations intégrales utilisées dans la littérature pour la résolution des équations de Maxwell. Nous considérons dans un premier temps le cas des matériaux parfaitement conducteurs. Les équations intégrales s'appuient sur une représentation sous forme de potentiels des champs électromagnétiques. Celle-ci est fournie par les formules de Stratton-Chu [41]. Une nouvelle inconnue est introduite : le courant surfacique électrique J qui est un champ tangent à la surface Γ . A partir de J , les champs électriques et magnétiques peuvent être obtenus. L'équation intégrale du champ électrique (Electric Field Integral Equation) est obtenue en injectant la condition au bord $M = -n \wedge E|_{\Gamma} = 0$ dans l'équation du champ

électrique des formules de représentation de Stratton-Chu (1.8). L'équation intégrale en champ magnétique (Magnetic Field Integral Equation) est obtenue en injectant $M = 0$ dans l'équation du champ magnétique. Les deux équations EFIE et MFIE souffrent cependant d'un problème d'unicité pour certaines valeurs du nombre d'onde. En effet, la détermination du courant permet non seulement de résoudre le problème dans le domaine extérieur, mais aussi dans le domaine intérieur associé. Or ce problème n'admet pas de solution unique pour certaines valeurs de k . En considérant une combinaison convexe de la EFIE et de la MFIE, nous obtenons la CFIE (Combined Field Integral Equation), exempte du problème d'unicité de la solution, puisque les nombres d'onde pour lesquels il n'y a pas unicité de la solution de l'EFIE et de la MFIE sont distincts.

Concernant les objets ouverts, lorsque Γ est une surface non fermée, les formules de Stratton-Chu sont encore valables au prix d'une substitution dans l'expression du courant J , ce dernier étant le saut de la composante tangentielle (à une rotation près) du champ magnétique à la traversée de Γ . L'EFIE reste valable pour ce type de problème contrairement à la MFIE (et par conséquent à la CFIE), en raison de l'absence d'un domaine intérieur.

Dans le cas de matériaux non parfaitement conducteurs, le nombre d'inconnues double car une inconnue supplémentaire intervient : le courant surfacique magnétique M . Le nombre d'équations double également, car le problème intérieur n'est plus trivial, et est nécessaire à la résolution [20].

Pour résoudre les équations de Maxwell, d'autres formulations intégrales, différentes de celles présentées précédemment, peuvent être utilisées. Nous considérons une méthode d'équations intégrales spécifiques : les équations intégrales de Després (EID) [38]. Par rapport aux équations intégrales classiques, les EID ont l'inconvénient de doubler le nombre d'inconnues, mais elles ont l'avantage de donner des systèmes hermitiens, définis positifs et bien conditionnés, ce qui permet la mise en place d'une méthode efficace pour la résolution numérique du problème. Nous rappelons que les équations de Maxwell en régime harmonique, en domaine extérieur non borné et pour un milieu homogène sont données par :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E^+ - ikZ_0 H^+ = 0, & \text{dans } \Omega^+, \\ \operatorname{rot} H^+ + ikZ_0^{-1} E^+ = 0, & \text{dans } \Omega^+, \\ n \wedge (E^+ \wedge n) + Z_0 Z_r (H^+ \wedge n) = g^{inc}, & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (Z_0 H^+ \wedge \frac{x}{|x|} - E^+) = 0, & \end{cases} \quad (1.2)$$

où

- Ω^- est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^3 de frontière Γ , et $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$,
- n est la normale unitaire sortante à Γ ,
- E^+ et H^+ représentent respectivement le champ électrique et le champ magnétique dans Ω^+ ,

- k est le nombre d'onde. Il est lié à la fréquence f et à la longueur d'onde λ par :

$$k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.3)$$

c étant la vitesse de la lumière,

- Z_0 est l'impédance dans le vide, et Z_r est l'impédance du milieu. Z_r est un opérateur d'impédance supposé symétrique avec une partie réelle positive ou nulle, de manière à avoir un problème bien posé en un sens qui sera précisé par la suite. La nature de Z_r peut être très variée : une constante, un opérateur différentiel, un opérateur pseudo-différentiel, une constante lorsque le milieu considéré est homogène.
- g^{inc} est une donnée initiale liée à l'onde incidente.

La troisième équation du système (1.2) posée sur Γ correspond à la condition aux limites, i.e. à l'équation vérifiée par les traces tangentielles de E^+ et H^+ sur Γ . La dernière ligne de (1.2) est la condition de radiation de Silver-Müller. Elle impose à l'infini le comportement de l'onde diffractée et assure l'unicité de la solution. L'analyse de l'existence et de l'unicité de la solution du système (1.2) est réalisée dans [19], [96] et [41].

1.3 Formulation intégrale de Després dans le cas d'un objet Ω parfaitement absorbant

Cette partie est consacrée au cas d'une condition d'impédance au bord $Z_r = 1$.

La résolution du système (1.2) par une méthode d'équations intégrales amène à résoudre un problème pour les courants équivalents $J = n \wedge H_{|\Gamma}^+$ et $M = -n \wedge E_{|\Gamma}^+$ dans l'espace des champs tangents à Γ , $L^2(T\Gamma) = \{\varphi \in (L^2(\Gamma))^3, \varphi \cdot n = 0\}$. En effet, la détermination de E^+ et H^+ se fait à partir de la connaissance de J et M , car nous avons avec les formules de représentation de Stratton-Chu :

$$E^+(x) = iZ_0 \tilde{T}J(x) + \tilde{K}M(x), \quad (1.4)$$

$$H^+(x) = -\tilde{K}J(x) + iZ_0^{-1} \tilde{T}M(x), \quad (1.5)$$

où les opérateurs \tilde{T} et \tilde{K} sont définis par :

$$\tilde{T}J(x) = k \int_{\Gamma} \left(G(x, y)J(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma} J(y) \right) d\gamma(y), \quad (1.6)$$

$$\tilde{K}J(x) = \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \wedge J(y) d\gamma(y), \quad (1.7)$$

$G(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}$ étant le noyau de Green.

Les courants équivalents J et M vérifient dans $L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)$ le système suivant :

$$\begin{cases} iZ_0(TJ)(x) + (KM)(x) - \frac{1}{2}n(x) \wedge M(x) = 0, \\ (KJ)(x) - \frac{1}{2}n(x) \wedge J(x) - iZ_0^{-1}(TM)(x) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

où les opérateurs T et K sont définis par :

$$TJ(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} n(x) \wedge \left((\tilde{T}J(y)) \wedge n(x) \right), \quad \forall x \in \Gamma \quad (1.9)$$

$$KJ(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} n(x) \wedge \left(\left(\int_{\Gamma, |x-y| > \epsilon} \nabla_y G(x, y) \wedge J(y) d\gamma(y) \right) \wedge n(x) \right), \quad \forall x \in \Gamma. \quad (1.10)$$

Remarque. Les opérateurs T et K sont les opérateurs des formulations intégrales classiques, à savoir la *EFIE* (Electric Field Integral Equation) :

$$(TJ, J') = k \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \left(J(y) \cdot \overline{J'(x)} - \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_{\Gamma} J(y) \cdot \overline{\operatorname{div}_{\Gamma} J'(x)} \right) d\gamma(y) d\gamma(x), \quad (1.11)$$

et la *MFIE* (Magnetic Field Integral Equation) :

$$(KM, J') = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\nabla_x G(x, y) \wedge M(y) \cdot \overline{J'(x)} \right) d\gamma(y) d\gamma(x). \quad (1.12)$$

Le système (1.8) se réécrit sous forme matricielle $SX = 0$, où S et X sont définis par :

$$S = \begin{pmatrix} T & K - \frac{1}{2}n\wedge \\ K - \frac{1}{2}n\wedge & T \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} J_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{iZ_0}J \\ \sqrt{iZ_0}^{-1}M \end{pmatrix} \in L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma).$$

En introduisant une nouvelle inconnue $Y = iX$, notée aussi $Y = (J_2, M_2)^t$, et en décomposant les opérateurs T et K selon leurs parties réelles et imaginaires (le noyau de Green est décomposé en partie réelle et en partie imaginaire) :

$$T = T_r + iT_i, \quad K = K_r + iK_i, \quad (1.13)$$

$SX = 0$ se réécrit :

$$-\mathbf{T}X - \mathbf{R}Y = 0, \quad (1.14)$$

où \mathbf{T} et \mathbf{R} sont définis par :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_r & K_r - \frac{1}{2}n\wedge \\ K_r - \frac{1}{2}n\wedge & T_r \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} T_i & K_i \\ K_i & T_i \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Remarque. T_r, T_i, K_r et K_i sont des opérateurs réels.

La relation (1.14) constitue la première équation du système des EID. La seconde équation des EID s'obtient en reformulant la condition au bord du système (1.2) :

$$n \wedge M - Z_0 J = g^{inc}, \quad (1.16)$$

soit

$$J_1 - in \wedge M_1 = -i\sqrt{iZ_0}^{-1} g^{inc}. \quad (1.17)$$

En multipliant (1.17) par $(-in\wedge)$, nous obtenons :

$$-in \wedge J_1 + M_1 = -n \wedge \sqrt{iZ_0}^{-1} g^{inc}. \quad (1.18)$$

Remarque. M_1 étant un champ tangent à Γ (i.e. $M_1 \cdot n = 0$), nous avons :

$$n \wedge (n \wedge M_1) = -M_1. \quad (1.19)$$

En posant $\tilde{g} = (-i\sqrt{iZ_0}^{-1} g^{inc}, -n \wedge \sqrt{iZ_0}^{-1} g^{inc})^t$, et en se servant de la relation

$$\mathbf{T} - \mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & -n\wedge \\ -n\wedge & 0 \end{pmatrix} = \Pi, \quad (1.20)$$

nous avons :

$$X + \Pi Y = \tilde{g}. \quad (1.21)$$

La seconde équation des EID s'obtient alors en multipliant (1.14) par $(-i)$, et en se servant des relations $Y = iX$ et (1.21) :

$$X + \mathbf{R}X - \mathbf{T}^*Y = \tilde{g}. \quad (1.22)$$

En utilisant $\frac{\sin k|u|}{4\pi|u|} = \frac{k}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{iku \cdot \hat{s}} d\hat{s}$ et les opérateurs de champs lointains a_∞ et A_∞ définis par : $\forall J, M \in \Gamma, \forall \hat{s} \in S^2$,

$$(a_\infty J)(\hat{s}) = \frac{k}{4\pi} \int_\Gamma \hat{s} \wedge (J \wedge \hat{s}) e^{-ikx \cdot \hat{s}} d\gamma(x), \quad (1.23)$$

$$(A_\infty \begin{pmatrix} J \\ M \end{pmatrix})(\hat{s}) = (a_\infty J)(\hat{s}) - i\hat{s} \wedge (a_\infty M)(\hat{s}), \quad (1.24)$$

nous avons $\mathbf{R} = A_\infty^* A_\infty$. Le système des EID composé de (1.14) et (1.22) se réécrit donc :

$$\begin{cases} X + A_\infty^* A_\infty X - \mathbf{T}^* Y = \tilde{g}, \\ \mathbf{T} X + A_\infty^* A_\infty Y = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Le système (1.25) est associé à un problème de point selle qui consiste à trouver (X, γ, Y) solution de $\mathcal{L}(X, \gamma, Y) = \min_{\tilde{X}, \tilde{\gamma}} \max_{\tilde{Y}} \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{\gamma}, \tilde{Y})$ où \mathcal{L} est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{\gamma}, \tilde{Y}) &= \frac{1}{2} \|\tilde{X}\|_{L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|A_\infty \tilde{X}\|_{L^2(TS^2)}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\gamma}\|_{L^2(TS^2)}^2 \\ &\quad + \Re \langle \mathbf{T} \tilde{X} - iA_\infty^* \tilde{\gamma}, \tilde{Y} \rangle_{L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)} \\ &\quad - \Re \langle \tilde{g}, \tilde{X} \rangle_{L^2(T\Gamma) \times L^2(T\Gamma)}. \end{aligned}$$

Une solution (X, γ, Y) de ce problème est solution de (1.25). De plus, l'étude du problème de point selle permet d'obtenir des informations sur l'existence et l'unicité de la solution (X, Y) de (1.25). La condition inf-sup assure l'existence de (X, Y) et l'unicité de X , mais pas l'unicité de Y qui est défini à un élément de $\ker A_\infty$ près [38]. Pour assurer l'unicité de Y , les termes suivants sont ajoutés :

$$\begin{aligned} -\beta X - i\beta Y &= 0 && \text{dans la première équation,} \\ \text{et } -i\beta X + \beta Y &= 0 && \text{dans la seconde équation,} \end{aligned}$$

et (1.25) devient :

$$\begin{cases} (1 - \beta)X + A_\infty^* A_\infty X - (\mathbf{T}^* + i\beta Id)Y = \tilde{g}, \\ (\mathbf{T} - i\beta Id)X + (\beta Id + A_\infty^* A_\infty)Y = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

La solution du problème (1.25) n'est pas modifiée puisque $Y = iX$. Le paramètre β appartient à l'intervalle $]0; 1[$, afin que l'opérateur $((1 - \beta)Id + A_\infty^* A_\infty)$ reste défini positif et vérifie une condition de coercivité qui manquait à $A_\infty^* A_\infty$ dans (1.25), condition assurant l'unicité de la solution (X, Y) de (1.26).

Nous avons pour une condition d'impédance au bord $Z_r = 1$ le système suivant :

$$\begin{cases} (1 - \beta)X + A_\infty^* A_\infty X - (\mathbf{T}^* + i\beta Id)Y = \tilde{g}, \\ (\mathbf{T} - i\beta Id)X + (\beta Id + A_\infty^* A_\infty)Y = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

où \mathbf{T} , $A_\infty^* A_\infty$ et \tilde{g} sont définis par :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_r & K_r - \frac{1}{2}n \wedge \\ K_r - \frac{1}{2}n \wedge & T_r \end{pmatrix}, \quad A_\infty^* A_\infty = \begin{pmatrix} T_i & K_i \\ K_i & T_i \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{iZ_0}^{-1} g^{inc} \\ -n \wedge \sqrt{iZ_0}^{-1} g^{inc} \end{pmatrix}.$$

1.4 Formulation intégrale de Després dans le cas d'une condition d'impédance généralisée

Lorsqu'une condition d'impédance généralisée au bord est considérée (Z_r est différent de 1 dans (1.2) et vérifie $\langle \Re Z_r J, J \rangle \geq 0, \quad \forall J \in D(Z_r)$), la formulation de Després s'obtient en se

ramenant à une condition d'impédance $Z_r = 1$ au bord par un changement de second membre. Soit R l'opérateur de réflexion associé à Z_r , et défini par :

$$R = (Id - Z_r)(Id + Z_r)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(T\Gamma)). \quad (1.28)$$

La condition au bord du système (1.2) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} n \wedge M - Z_0 J &= g^{inc} - Z_0 (Id - Z_r) J \\ &= (Id + R) g^{inc} - R(n \wedge M + Z_0 J) \\ &= (Id + R) g^{inc} - R \sqrt{i Z_0} (n \wedge M_1 - i J_1) = f^{inc}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

En posant $\tilde{g} = (-i \sqrt{i Z_0}^{-1} f^{inc}, -n \wedge \sqrt{i Z_0}^{-1} f^{inc})^t$, (1.25) est obtenu, et en posant

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \sqrt{i Z_0}^{-1} (Id + R) g^{inc} \\ -n \wedge \sqrt{i Z_0}^{-1} (Id + R) g^{inc} \end{pmatrix}, \text{ et } N_R = \begin{pmatrix} -R & -i R(n \wedge \cdot) \\ in \wedge R & -n \wedge R(n \wedge \cdot) \end{pmatrix},$$

nous avons :

$$\begin{cases} X + A_\infty^* A_\infty X - T^* Y = F - N_R X, \\ TX + A_\infty^* A_\infty Y = 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Remarque. Lorsque $Z_r = 1$, R est nul et nous retrouvons (1.25).

De même que pour (1.25), nous définissons pour (1.30) le β système :

$$\begin{cases} (1 + \beta)X + A_\infty^* A_\infty X - (T^* + i\beta Id)Y + N_R X = F, \\ (T - i\beta Id)X + (\beta Id + A_\infty^* A_\infty)Y = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Pour $\|R\|_{\mathcal{L}(L^2(T\Gamma))} < 1$, le problème est bien posé et le système admet une unique solution vérifiant $Y = iX$.

Pour plus de détails, nous renvoyons à l'article [38], où deux présentations différentes sont traitées : l'une est basée sur la combinaison de T et K , l'autre est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle quadratique. Pour plus de détails concernant la minimisation de la fonctionnelle quadratique, le lecteur peut consulter [38].

1.5 Diagonalisation par bloc du système

Le système résolu est différent de celui résolu dans [38]. Il provient de la formulation initiale des EID [52] et [53], mais il peut s'obtenir à partir de la formulation précédente (1.31) par

changement d'inconnues. Soient les nouvelles inconnues $\{x^l, \lambda^l\}_{l=1}^2$ définies par :

$$\begin{aligned} x^1 &= \sqrt{i}(M_1 - J_1), & \lambda^1 &= \frac{\sqrt{i}}{2k}(M_2 - J_2), \\ x^2 &= \sqrt{i}(M_1 + J_1), & \lambda^2 &= \frac{\sqrt{i}}{2k}(M_2 + J_2), \end{aligned}$$

et les nouveaux seconds membres définis par :

$$F_1^{EID} = \sqrt{i} \frac{F_2 - F_1}{2}, \quad \text{et} \quad F_2^{EID} = \sqrt{i} \frac{F_2 + F_1}{2}.$$

Il faut donc résoudre deux systèmes couplés donnés par :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}Id + \frac{1}{4k^2}\delta_l^*\delta_l & kK_l \\ -kK_l^* & \delta_l^*\delta_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^l \\ \lambda^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l^{EID} + A_{R,l}x^{l^c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

où $l \in \{1, 2\}$ et $l^c \in \{1, 2\} \setminus \{l\}$. L'équivalence entre (1.30) et (1.32) est démontrée dans [88]. Les expressions des opérateurs $K_1, K_2, \delta_1^*\delta_1, \delta_2^*\delta_2, A_{R,1}$ et $A_{R,2}$ sont données par :

$$\begin{aligned} K_1 &= -(T_r - K_r - \frac{1}{2}n \wedge \cdot), & K_2 &= -(T_r + K_r + \frac{1}{2}n \wedge \cdot), \\ \delta_1^*\delta_1 &= 2k^2(T_i - K_i), & \delta_2^*\delta_2 &= 2k^2(T_i + K_i), \\ A_{R,1} &= -\frac{iRn \wedge \cdot + R}{2}, & A_{R,2} &= \frac{iRn \wedge \cdot - R}{2}. \end{aligned}$$

Les opérateurs δ_1 et δ_2 sont définis par :

$$(\delta_l \varphi)(\hat{s}) = k((a_\infty J)(\hat{s}) + (-1)^{l+1}i\hat{s} \wedge (a_\infty J)(\hat{s})), \quad l \in \{1, 2\}. \quad (1.33)$$

L'inconnue (λ^1, λ^2) correspond à un multiplicateur de Lagrange, et est liée à (x^1, x^2) par la relation :

$$x^l = -2ik\lambda^l, \quad l \in \{1, 2\}. \quad (1.34)$$

D'après (1.34), les systèmes suivants peuvent-être établis :

- dans le cas d'une impédance $Z_r \neq 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{(1+\beta)}{2}Id + \frac{1}{4k^2}\delta_l^*\delta_l & kK_l \\ -kK_l^* & 2\beta k^2 Id + \delta_l^*\delta_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^l \\ \lambda^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l^{EID} + A_{R,l}x^{l^c} - i\beta k\lambda^l \\ i\beta kx^l \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

où $l \in \{1, 2\}$ et $l^c \in \{1, 2\} \setminus \{l\}$.

- dans le cas d'une impédance $Z_r = 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)}{2}Id + \frac{1}{4k^2}\delta_l^*\delta_l & kK_l - i\beta k Id \\ -kK_l^* - i\beta k Id & 2\beta k^2 Id + \delta_l^*\delta_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^l \\ \lambda^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l^{EID} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

1.6 Discrétisation du système intégral

Les systèmes (1.35) et (1.36) sont résolus par l'emploi d'une formulation variationnelle. Pour (1.35), la formulation suivante est utilisée :
 Trouver $(x^l, \lambda^l) \in \mathbb{H}(\Gamma) \times \mathbb{H}(\Gamma)$ tel que $\forall(\tilde{x}^l, \tilde{\lambda}^l) \in \mathbb{H}^{-1}(\Gamma) \times \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1+\beta}{2}Id + \frac{1}{4k^2}\delta_l^*\delta_l)x^l, \tilde{x}^l \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} + \langle kK_l\lambda^l, \tilde{x}^l \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} &= \langle A_{R,l}x^{lc}, \tilde{x}^l \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} \\ &+ \langle -i\beta k\lambda^l, \tilde{x}^l \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} + \langle F_l^{EID}, \tilde{x}^l \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

et (1.37)

$$\langle -kK_l^*x^l, \tilde{\lambda}^l \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} + \langle (2\beta k^2Id + \delta_l^*\delta_l)\lambda^l, \tilde{\lambda}^l \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)} = \langle i\beta kx^l, \tilde{\lambda}^l \rangle_{\mathbb{H}(\Gamma), \mathbb{H}^{-1}(\Gamma)},$$

où $\mathbb{H}(\Gamma)$ désigne l'espace $L^2(T\Gamma)$.

La résolution de (1.37) est basée sur une méthode d'éléments finis (éléments finis de classe $H(div)$ de Nédélec). La discrétisation par éléments finis du problème se fait en considérant tout d'abord Γ_h , qui est une approximation polynomiale par morceaux de degré l de la surface Γ . Soit \mathcal{T}_h une triangulation régulière et conforme de Γ_h , et soit V_h un sous-espace de dimension finie de $L^2(T\Gamma_h)$ défini par :

$$V_h = \mathcal{Lin}\{\phi_i; i = 1, \dots, N\}, \quad (1.38)$$

où $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ représente l'ensemble des fonctions de base associées à \mathcal{T}_h .

Soient \tilde{X}_h^l et $\tilde{\Lambda}_h^l$ les approximations respectives de x^l et λ^l dans V_h . Elles s'écrivent :

$$\tilde{X}_h^l = \sum_{j=1}^N \alpha_j^l \phi_j, \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}_h^l = \sum_{j=1}^N \gamma_j^l \phi_j, \quad (1.39)$$

avec $\forall j \in \{1, \dots, N\}$, $(\alpha_j^l, \gamma_j^l) \in \mathbb{C}^2$.

En posant $\mathbb{V}_h = V_h \times V_h$, la formulation variationnelle discrète peut être établie :

Trouver \tilde{X}_h^l et $\tilde{\Lambda}_h^l$ tels que $\forall i \in \{1, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j^l < \left(\frac{1+\beta}{2} Id + \frac{1}{4k^2} \delta_l^* \delta_l \right) \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h} + \sum_{j=1}^N \gamma_j^l < kK_l \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h} = \sum_{j=1}^N \alpha_j^{lc} < A_{R,l} \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h} \\ + \sum_{j=1}^N \gamma_j^l < -i\beta k \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h} + < F_l^{EID}, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}, \end{aligned} \quad \text{et} \quad (1.40)$$

$$- \sum_{j=1}^N \alpha_j^l < kK_l^* \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h} + \sum_{j=1}^N \gamma_j^l < (2\beta k^2 Id + \delta_l^* \delta_l) \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h} = \sum_{j=1}^N \alpha_j^l < i\beta k \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}.$$

En posant $X_h^l = (\alpha_1^l, \dots, \alpha_N^l)^t$ et $\Lambda_h^l = (\gamma_1^l, \dots, \gamma_N^l)^t$, la résolution de (1.40) est équivalente à la résolution du système linéaire suivant :

Trouver $Y_h^1 = (X_h^1, \Lambda_h^1)$ et $Y_h^2 = (X_h^2, \Lambda_h^2)$ tels qu'ils vérifient :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_\beta^1 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1 \\ Y_h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\beta^1 & \mathcal{C}_R^1 \\ \mathcal{C}_R^2 & \mathcal{R}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1 \\ Y_h^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

où $S^l = (F^l, 0)^t$ et les matrices \mathcal{M}_β^l , \mathcal{R}_β^l et \mathcal{C}_R^l sont données par :

$$\mathcal{M}_\beta^l = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2} \mathcal{A}^l & \mathcal{K}^l \\ -\mathcal{K}^{l*} & 2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^l \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_\beta^l = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathcal{B}_\beta \\ i\mathcal{B}_\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \mathcal{C}_R^l = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_R^l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

les matrices \mathcal{B}_β , \mathcal{D}_β , \mathcal{A}^l , \mathcal{K}^l , \mathcal{K}^{l*} , \mathcal{N}_R^l de dimension $N \times N$ et le vecteur F^l de dimension N étant définis par :

$$\begin{aligned} (F^l)_i &= < F_l^{EID}, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{B}_\beta)_{ij} &= < \beta k \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{D}_\beta)_{ij} &= < \frac{1+\beta}{2} \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{A}^l)_{ij} &= < \delta_l^* \delta_l \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{K}^l)_{ij} &= < kK_l \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{K}^{l*})_{ij} &= < kK_l^* \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{N}_R^l)_{ij} &= < A_{R,l} \phi_j, \phi_i >_{\mathbb{V}_h}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Les fonctions de base considérées ayant comme caractéristique de vérifier la propriété de conservation de la charge, la solution discrète $\{(\tilde{X}_h^l, \tilde{\Lambda}_h^l), l = 1, 2\}$ converge vers la solution $\{(x^l, \lambda^l), l = 1, 2\}$ du problème continu lorsque le diamètre h des éléments de Γ_h tend vers zéro. L'existence et l'unicité de la solution discrète sont assurées par la condition inf-sup discrète.

Remarque. Dans (1.41), C_R^1 et C_R^2 constituent les termes de couplage. Lorsqu'une condition d'impédance $Z_r = 1$ est considérée, ces termes disparaissent, et nous avons à résoudre deux systèmes parfaitement découplés de la forme :

$$\tilde{\mathcal{M}}_\beta^l Y_h^l = \tilde{S}^l, \quad l \in \{1, 2\}, \quad (1.44)$$

où $\{\tilde{\mathcal{M}}_\beta^l, \tilde{S}^l\}_{l=1}^2$ sont obtenus au moyen d'une formulation variationnelle de (1.36).

1.7 Résolution du problème discret

La résolution du système discret (1.41) utilise la méthode itérative de Jacobi. Soit $(Y_h^1(0), Y_h^2(0))^t$ une solution initiale. Chaque itéré $(Y_h^1(n), Y_h^2(n))^t$ est calculé grâce à la récurrence suivante :

$$\begin{pmatrix} Y_h^1(n) \\ Y_h^2(n) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \underline{Y}_h^1(n) \\ \underline{Y}_h^2(n) \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} Y_h^1(n-1) \\ Y_h^2(n-1) \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

où α est le coefficient de relaxation de la méthode, et $(\underline{Y}_h^1(n), \underline{Y}_h^2(n))^t$ est la solution de :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_\beta^1 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{Y}_h^1(n) \\ \underline{Y}_h^2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\beta^1 & \mathcal{C}_R^1 \\ \mathcal{C}_R^2 & \mathcal{R}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1(n-1) \\ Y_h^2(n-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Pour calculer $(\underline{Y}_h^1(n), \underline{Y}_h^2(n))^t$, en posant :

$$\begin{pmatrix} V_h^1(n-1) \\ V_h^2(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\beta^1 & \mathcal{C}_R^1 \\ \mathcal{C}_R^2 & \mathcal{R}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1(n-1) \\ Y_h^2(n-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

il faut résoudre $\mathcal{M}_\beta^l \underline{Y}_h^l(n) = V^l$, $l \in \{1, 2\}$, ce qui équivaut à résoudre :

$$\begin{cases} (\mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2} \mathcal{A}^l) \underline{X}_h^l(n) + \mathcal{K}^l \underline{\Lambda}_h^l(n) & = V_{h,1}^l(n-1), \\ -\mathcal{K}^{l*} \underline{X}_h^l(n) + (2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^l) \underline{\Lambda}_h^l(n) & = V_{h,2}^l(n-1), \end{cases} \quad (1.48)$$

où $\underline{Y}_h^l(n) = (\underline{X}_h^l(n), \underline{\Lambda}_h^l(n))^t$, $V^l = (V_{h,1}^l(n-1), V_{h,2}^l(n-1))^t$.

$V_{h,1}^l(n-1)$ et $V_{h,2}^l(n-1)$ sont définis par :

$$V_{h,1}^l(n-1) = \mathcal{N}_R^l X_h^l(n-1) - i\mathcal{B}_\beta \Lambda_h^l(n-1) + F^l, \quad (1.49)$$

$$\text{et } V_{h,2}^l(n-1) = i\mathcal{B}_\beta X_h^l(n-1), \quad l \in \{1, 2\}.$$

La résolution de (1.48) se ramène à la résolution d'un système en $\underline{\Lambda}_h^l$ en posant :

$$\begin{cases} \underline{X}_h^l(n) = (\mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2}\mathcal{A}^l)^{-1}(V_{h,1}^l(n-1) - \mathcal{K}^l \underline{\Lambda}_h^l(n)), \\ (\mathcal{K}^{l*}(\mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2}\mathcal{A}^l)^{-1}\mathcal{K}^l + (2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^l))\underline{\Lambda}_h^l(n) = V_{h,2}^l(n-1) + \mathcal{K}^{l*}(\mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2}\mathcal{A}^l)^{-1}V_{h,1}^l(n-1). \end{cases} \quad (1.50)$$

Nous notons $A^l = (\mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2}\mathcal{A}^l)$, $B^l = \mathcal{K}^l$, $C^l = (2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^l)$, $V_1^l = V_{h,1}^l(n-1)$, $V_2^l = V_{h,2}^l(n-1)$, $X^l = \underline{X}_h^l(n)$ et $\Lambda^l = \underline{\Lambda}_h^l(n)$.

La résolution de (1.50) se fait par l'emploi d'un double gradient conjugué décrit dans le tableau 1.1.

La convergence des gradients conjugués est assurée par le caractère hermitien défini positif des matrices A^l et $(B^l)^*(A^l)^{-1}B^l + C^l$. La convergence de la méthode de Jacobi est assurée sous la condition $|R| < 1$.

Lorsque le cas $Z_r = 1$ (i.e. $R = 0$) est considéré, le niveau itératif de la méthode de Jacobi relaxée n'est plus utilisé, car les systèmes provenant de (1.36) sont complètement découplés. Ainsi, chaque système se résout séparément en utilisant la méthode des gradients conjugués utilisée pour calculer \underline{Y}_h^1 et \underline{Y}_h^2 .

<u>GC2</u>	→	<u>GC1</u>
$\begin{cases} \Lambda^{l,0} \text{ donné} \\ X^{l,0} = (A^l)^{-1}(V_1^l - B^l \Lambda^{l,0}) \end{cases}$ $g^{l,0} = C^l \Lambda^{l,0} - (B^l)^* X^{l,0} - V_2^l$ $W^{l,0} = g^{l,0}$ <p><u>$n = 0, \dots$</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - si $n \geq 1$, $W^{l,n} = g^{l,n} + \alpha^{l,n} W^{l,n-1}$ $\alpha^{l,n} = \frac{ g^{l,n} ^2}{ g^{l,n-1} ^2}$ <ul style="list-style-type: none"> - $z^{l,n} = (A^l)^{-1} B^l W^{l,n}$ - $\rho^{l,n} = \frac{ g^{l,n} ^2}{(g^{l,n}, C^l W^{l,n} + (B^l)^* z^{l,n})}$ <ul style="list-style-type: none"> - $\begin{cases} \Lambda^{l,n+1} = \Lambda^{l,n} - \rho^{l,n} W^{l,n} \\ X^{l,n+1} = X^{l,n} + \rho^{l,n} z^{l,n} \end{cases}$ - $g^{l,n+1} = g^{l,n} - \rho^{l,n} (C^l W^{l,n} + (B^l)^* z^{l,n})$ 	→	$X_0^{l,0} \text{ donné, } g_0^l = A^l X_0^{l,0} - (V_1^l - B^l \Lambda^{l,0}),$ $W_0^l = g_0^l$ <p><u>$k = 0, \dots$</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - si $k \geq 1$, $W_k^l = g_k^l + \alpha_k^l W_{k-1}^l$ $\alpha_k^l = \frac{ g_k^l ^2}{ g_{k-1}^l ^2}$ <ul style="list-style-type: none"> - $\rho_k^l = \frac{ g_k^l ^2}{(g_k^l, A^l W_k^l)}$ - $X_{k+1}^{l,0} = X_k^{l,0} - \rho_k^l W_k^l$ - $g_{k+1}^l = g_k^l - \rho_k^l A^l W_k^l$ <hr style="border: 1px solid black;"/> $z_0^{l,n} = z_0^{l,n-1}, g_0^l = A^l z_0^{l,n} - B^l W^{l,n}$ $W_0^l = g_0^l$ <p><u>$k = 0, \dots$</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - si $k \geq 1$, $W_k^l = g_k^l + \alpha_k^l W_{k-1}^l$ $\alpha_k^l = \frac{ g_k^l ^2}{ g_{k-1}^l ^2}$ <ul style="list-style-type: none"> - $z_{k+1}^{l,n} = z_k^{l,n} - \rho_k^l W_k^l$ - $g_{k+1}^l = g_k^l - \rho_k^l A^l W_k^l$

TAB. 1.1 – Algorithme du double gradient conjugué.

Chapitre 2

Eléments finis de Nédélec de classe $H(\text{div})$

2.1 Introduction

Cette partie est consacrée à la description des éléments finis de classe $H(\text{div})$ et des fonctions de base associées. Ces éléments finis sont un outil naturel pour la résolution des équations de Maxwell, car ils rendent possible la construction d'espaces d'approximation conformes de l'espace $H(\text{div})$ intervenant dans la formulation variationnelle.

Les éléments finis utilisés font partie de la famille d'éléments finis de classe $H(\text{div})$ introduite en 1980 par Nédélec dans [93]. Cette famille, appelée première famille de Nédélec, constitue une généralisation au cas tridimensionnel des éléments finis mixtes de classe $H(\text{div})$ introduits par Raviart et Thomas en 1977 dans [100].

Nous présentons les fonctions de base des éléments finis d'ordre élevé de classe $H(\text{div})$ de Nédélec, données dans l'article de Graglia *et al* [65].

2.2 Quelques rappels

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ . Nous rappelons quelques notions importantes dans les définitions suivantes.

Définition 2.2.1. *Un élément fini est défini par :*

1. *un élément géométrique de \mathbb{R}^n , noté K ,*
2. *un sous-espace vectoriel, \mathbb{P} , de dimension finie, et égale à N ,*
3. *un ensemble, Σ , de N degrés de liberté, i.e. de N formes linéaires définies sur l'espace \mathbb{P} .*

L'ensemble Σ est \mathbb{P} -unisolvant (cf définition 2.2.2).

L'élément fini défini ci-dessus sera noté (K, Σ, \mathbb{P}) .

Définition 2.2.2. Σ est \mathbb{P} -unisolvant (ou unisolvant) si et seulement si, il vérifie la propriété suivante :

$$\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N, \exists! q \in \mathbb{P} / \sigma_i(q) = \alpha_i \quad ; \quad \forall \sigma_i \in \Sigma, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Définition 2.2.3. Nous appelons fonctions de base de (K, Σ, \mathbb{P}) les N fonctions q_1, \dots, q_N de l'espace vectoriel \mathbb{P} satisfaisant :

$$\sigma_i(q_j) = \delta_{ij} \quad ; \quad \forall \sigma_i \in \Sigma \quad ; \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker.

Définition 2.2.4. $H(\text{div}, \Omega)$ (ou $H(\text{div})$) est l'espace de vecteurs de \mathbb{R}^n définis sur un ouvert Ω vérifiant :

$$H(\text{div}, \Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^n \quad / \quad \text{div}(u) \in L^2(\Omega)\}.$$

(K, Σ, \mathbb{P}) est dit de classe $H(\text{div})$ quand l'interpolée de toute fonction régulière de l'espace $H(\text{div})$ est dans $H(\text{div})$.

Généralement, lors de la résolution des équations de Maxwell par la méthode des éléments finis, nous utilisons les éléments finis de Raviart-Thomas (RT), également connus dans la littérature sous le nom d'éléments finis de Rao-Wilson-Glisson (RWG) [99]. Leur emploi se justifie par le fait que leurs fonctions de base vérifient la propriété de conservation de la charge. Les éléments finis de Raviart-Thomas sont des éléments finis d'arête, et sont définis à l'ordre 0, par :

- K est un triangle plan,
- \mathbb{P} est tel que tout vecteur $\vec{q} \in \mathbb{P}$ s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{q}(x) = q^1(\xi) \vec{f}_1^K + q^2(\xi) \vec{f}_2^K, \quad \text{avec} \quad q^\alpha(\xi) = w_\alpha + \xi^\alpha w_0, \quad (2.1)$$

w_0, w_1 et w_2 étant des constantes scalaires. x est un point de K de coordonnées (ξ^1, ξ^2) dans le repère orthonormé $\{O_K, \vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$ contenu dans le même plan que K ,

- $\Sigma = \left\{ \int_{\partial K_i} q \cdot \hat{n}_i ds \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \right\}$, \hat{n}_i étant la normale unitaire sortante à ∂K_i (∂K_i représente le $i^{\text{ième}}$ côté de K). De plus, \hat{n}_i est contenue dans le même plan que K .

Les fonctions de base $\{RT_i\}_{i=1}^3$ de l'élément fini Raviart-Thomas d'ordre 0 sont données par :

$$RT_i(x) = \text{sgn}(\partial K_i) \frac{x - a_i^K}{2\text{mes}(K)} \quad ; \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.2)$$

où

- $mes(K)$ est l'aire du triangle K ,
- a_i^K est le sommet de K opposé à l'arête ∂K_i ,
- $sgn(\partial K_i)$ est le signe affecté à l'arête ∂K_i de K ,
- x est un point de K .

Nous donnons maintenant quelques propriétés remarquables des fonctions de base $\{RT_i\}_{i=1}^3$.

1. Chaque fonction de base RT_i a pour support les éléments de la triangulation \mathcal{T}_h de Γ ayant ∂K_i pour arête : il y en a au plus deux, K_i^+ et K_i^- , car \mathcal{T}_h est une triangulation conforme. RT_i est orientée arbitrairement en choisissant, parmi les triangles du support de RT_i , un triangle positif K_i^+ , où $sgn(\partial K_i) = sgn(\partial K_i^+) > 0$, et un triangle négatif K_i^- , où $sgn(\partial K_i) = sgn(\partial K_i^-) < 0$.
2. Ces fonctions ont la particularité d'avoir par rapport aux arêtes de K des composantes normales constantes, et des composantes tangentiels linéaires. Plus précisément, nous avons pour les composantes normales le long de chaque arête ∂K_j :

$$RT_i \cdot \hat{n}_j = \delta_{ij} \frac{sgn(\partial K_i)}{mes(\partial K_i)} \quad (2.3)$$

où $mes(\partial K_i)$ est la longueur de l'arête ∂K_i .

3. Les fonctions $\{RT_i\}_{i=1}^3$ sont des fonctions vectorielles utilisées pour approcher le courant surfacique, J , qui est un champ de vecteurs tangents à la surface. Elles servent aussi à assurer la continuité du flux de J à travers les arêtes de chaque triangle K . De plus, les composantes normales aux arêtes de K des fonctions $\{RT_i\}_{i=1}^3$ étant constantes le long des arêtes de K , les flux de J à travers ces arêtes sont donc approchés par des constantes. Pour cette raison, nous disons que les fonctions de base $\{RT_i\}_{i=1}^3$ sont d'ordre 0, bien qu'elles soient de degré polynômial 1.
4. La divergence surfacique de RT_i vaut :

$$div_{\Gamma} RT_i = \frac{sgn(\partial K_i)}{mes(K)}. \quad (2.4)$$

5. Les fonctions de base $\{RT_i\}_{i=1}^3$ vérifient la propriété de conservation de la charge. Soit \vec{p} tel que $\vec{p} = \sum_{j=1}^N p_j RT_j$. Nous avons alors :

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \vec{p} \, d\gamma = \sum_{j=1}^N p_j \int_{K_j^- \cup K_j^+} \operatorname{div}_{\Gamma} RT_j \, d\gamma, \quad (2.5)$$

$$= \sum_{j=1}^N p_j \underbrace{(\operatorname{sgn}(K_j^-) + \operatorname{sgn}(K_j^+))}_{=0} = 0. \quad (2.6)$$

2.3 Éléments finis introduits par Nédélec

Les éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre 0, présentés dans la section précédente, sont les éléments finis d'ordre le plus bas d'une famille d'éléments finis de classe $H(\operatorname{div})$ introduite par Nédélec dans [93], ce qui entraîne malgré leur efficacité une vitesse de convergence en maillage faible. Une idée naturelle, pour augmenter la vitesse de convergence de la discrétisation, consiste à approcher la composante normale le long de chaque arête par un polynôme de degré p supérieur ou égal à 1, plutôt que par une constante. Les flux de J à travers les arêtes de K sont donc approchés par des polynômes de degré p .

L'espace $(\mathbb{P}_p)^2$ des polynômes à valeurs dans \mathbb{R}^2 de degré inférieur ou égal à p en les variables x_1 et x_2 , peut se décomposer de la façon suivante :

$$(\mathbb{P}_p)^2 = (\mathbb{P}_{p-1})^2 \oplus \{(\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2 | \forall q \in (\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2, \operatorname{div} q \neq 0\} \oplus \{(\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2 | \forall q \in (\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2, \operatorname{div} q \equiv 0\}, \quad (2.7)$$

où $(\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2$ représente l'espace des polynômes homogènes de degré p en les variables x_1 et x_2 , et à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

En définissant \mathbb{D}^p par $\mathbb{D}^p = (\mathbb{P}_{p-1})^2 \oplus \widetilde{\mathbb{P}}_{p-1} \cdot r$ où $r = (x_1, x_2)^t$, et comme $\widetilde{\mathbb{P}}_{p-1} \cdot r = \{(\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2 | \forall q \in (\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2, \operatorname{div} q \neq 0\}$ [93], $(\mathbb{P}_p)^2$ s'écrit aussi :

$$(\mathbb{P}_p)^2 = \mathbb{D}^p \oplus \{(\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2 | \forall q \in (\widetilde{\mathbb{P}}_p)^2, \operatorname{div} q \equiv 0\}. \quad (2.8)$$

L'espace \mathbb{D}^p recouvre l'ensemble des polynômes de degré p contribuant à approcher la divergence avec des termes de degré $(p-1)$, tout en excluant les polynômes homogènes de degré p appartenant au noyau de l'opérateur divergence. Etant donné que $\mathbb{D}^p = (\mathbb{P}_{p-1})^2 \oplus \widetilde{\mathbb{P}}_{p-1} \cdot r$, et que $r \cdot \hat{n}_i$ est constant le long de l'arête ∂K_i , alors la composante normale d'un champ vectoriel est approchée au même ordre que sa divergence, i.e. à l'ordre $(p-1)$.

Nous définissons seulement les éléments finis de cette famille ayant des éléments triangulaires, car la triangulation de Γ est formée uniquement de triangles. Nous renvoyons à [93] lorsque K est un tétraèdre ou un cube. Dans le cas qui nous intéresse, (K, Σ, \mathbb{P}) est défini par :

- K est un triangle plan,
- $\mathbb{P} = \mathbb{D}^p$,

– Σ est constitué des degrés de liberté suivants :

$$(i) \quad \int_{\partial K_i} (q \cdot \hat{n}_i) w ds \quad ; \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.9)$$

pour tout polynôme w de degré inférieur ou égal à $(p - 1)$ en la variable curviligne s .

$$(ii) \quad \text{pour } p \geq 2, \quad \int_K q \cdot w dx, \quad \forall w \in (\mathbb{P}_{p-2})^2. \quad (2.10)$$

Remarque. Les fonctions $\{RT_i\}_{i=1}^3$ sont les fonctions de base de l'élément fini $(K, \Sigma, \mathbb{D}^1)$, lorsque $\Sigma = \left\{ \int_{\partial K_i} q \cdot \hat{n}_i ds \quad ; \quad i \in \{1, 2, 3\} \right\}$.

2.4 Fonctions de base des éléments finis d'ordre élevé de classe $H(div)$ de Nédélec

La présentation faite dans l'article de Graglia *et al.* [65] a plusieurs avantages, notamment d'avoir un système de notations directement exploitable pour une mise en œuvre informatique, de générer les fonctions de base pour des éléments finis d'ordre aussi élevé que souhaité, et de donner des propriétés importantes concernant ces fonctions. Ces fonctions de base ont aussi d'autres avantages par rapport aux autres fonctions de base de la littérature.

Par exemple, considérons les fonctions de base données par Cendes dans [115], pour les éléments finis de classe $H(div)$ d'ordre p de Nédélec. Ces fonctions sont définies en deux étapes. Soit V , un champ vectoriel tangent à la surface approchée, que nous souhaitons approcher par des éléments finis d'ordre p de classe $H(div)$. Soient les champs V_n et V_t représentant respectivement les composantes normales et tangentielles de V par rapport aux arêtes du triangle K . Nous avons donc $V = V_n + V_t$. La première étape consiste à interpoler V_n par un polynôme de degré p le long de chaque côté de K pour assurer la continuité jusqu'à l'ordre p de V_n le long des côtés de K . Dans cette étape, $3(p + 1)$ degrés de liberté ont été définis. Comme $\mathbb{P} = \mathbb{D}^{p+1}$, la dimension de \mathbb{P} est $(p + 1)(p + 3)$. La seconde étape consiste à définir les $p(p + 1)$ degrés de liberté restant de telle manière qu'ils ne perturbent pas la continuité de V_n . Cendes choisit donc ces degrés de liberté de sorte qu'ils interpolent V_t . Lorsque p est égal à un, Cendes obtient six fonctions de base (deux fonctions par arête de K) interpolant V_n , augmentées de deux fonctions de base interpolant V_t qui varient suivant les arêtes auxquelles elles sont associées. Cendes impose que V_t soit nulle sur l'arête restante. D'où, bien qu'étant complètes jusqu'au même ordre que leur divergence, les fonctions de base de Cendes ne sont pas symétriques, i.e. elles dépendent d'un choix privilégié par rapport à deux arêtes de K , contrairement à celles de Graglia. En utilisant les fonctions de base de Cendes, les résultats des calculs dépendent des arêtes privilégiées. De

plus, les fonctions de base de Cendes ne sont pas totalement interpolantes, dans le sens où toutes les fonctions de base n'interpolent pas le flux d'un champ vectoriel passant à travers les arêtes de K , certaines fonctions de base interpolant la circulation du champ. Par contre, toutes les fonctions de base de Graglia interpolent le flux de ce champ vectoriel passant à travers les arêtes de K .

Nous donnons quelques notations concernant le triangle K .

- Les côtés de K sont notés l_1 , l_2 et l_3 .
- Les sommets s_{12} , s_{13} et s_{23} de K sont définis comme les intersections des arêtes de K . Par exemple, s_{12} est le sommet de K où se rejoignent les côtés l_1 et l_2 .
- λ_i est la coordonnée barycentrique associée au $i^{\text{ième}}$ côté de K . λ_i varie linéairement de zéro à un, de telle sorte qu'elle est nulle au niveau de l_i , et qu'elle vaut un au sommet opposé à l_i . λ_1 , λ_2 et λ_3 valent respectivement un aux sommets s_{23} , s_{13} et s_{12} .

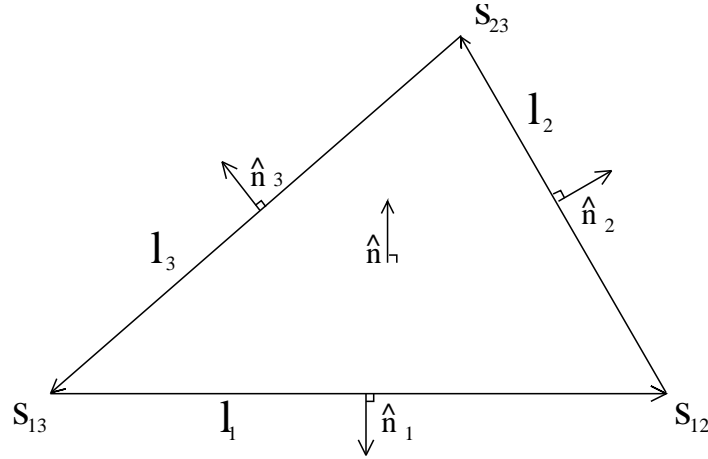


FIG. 2.1 – Notations associées à un triangle K .

Remarque. Dans cette étude et dans celle réalisée par Graglia et al. [65], le triangle K est plongé dans le plan (xOy) de \mathbb{R}^3 . La normale unitaire au plan contenant K est alors définie par :

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un point x du triangle K est paramétré par :

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 s_{23} + \lambda_2 s_{13} + \lambda_3 s_{12} \\ &= \lambda_1 s_{23} + \lambda_2 s_{13} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) s_{12} \\ &= s_{12} + \lambda_1 (s_{23} - s_{12}) + \lambda_2 (s_{13} - s_{12}) \\ x &= s_{12} + \lambda_1 l_2 - \lambda_2 l_1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Suivant la paramétrisation (2.11), nous pouvons montrer que les fonctions de base (2.2) de l'élément fini d'ordre 0 s'écrivent aussi :

$$\Lambda_\beta(\lambda) = \frac{1}{J}(\lambda_{\beta+1}l_{\beta-1} - \lambda_{\beta-1}l_{\beta+1}) \quad ; \quad \beta = 1, 2, 3, \quad (2.12)$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et $J = |l_1 \wedge l_2| = 2mes(K)$. Les indices ci-dessus sont calculés modulo 3.

Remarque. *Tout vecteur appartenant au plan tangent défini par K peut-être représenté à l'aide de $\{\Lambda_\beta\}_{\beta=1}^3$, puisque $\Lambda_2 - \Lambda_3 = \frac{l_1}{J}$ et $\Lambda_3 - \Lambda_1 = \frac{l_2}{J}$ sont linéairement indépendants. La base $\{\Lambda_\beta\}_{\beta=1}^3$ est dite complète à l'ordre zéro car $(\Lambda_2 - \Lambda_3)$ et $(\Lambda_3 - \Lambda_1)$ forment une base de $(\mathbb{P}_0)^2$. La divergence de cette base est complète à l'ordre zéro comme la base. Cependant, cette base n'est pas complète à l'ordre un, bien qu'elle soit de degré un, car il lui manque les termes $\{\lambda_1 l_1, \lambda_2 l_2, \lambda_1 l_2 + \lambda_2 l_1\}$ appartenant au noyau de l'opérateur divergence. Nous ne pouvons donc pas modéliser n'importe quel vecteur de $(\mathbb{P}_1)^2$.*

La présentation des fonctions de base d'ordre 0 étant terminée, nous passons à celle des fonctions de base d'ordre $p \geq 1$. Les fonctions de base d'ordre p sont obtenues en faisant le produit entre les fonctions de base d'ordre 0 et des polynômes scalaires de degré p en les variables λ_1, λ_2 et λ_3 . Parmi les fonctions de base d'ordre p , nous pouvons dégager trois sous-familles F_1, F_2 et F_3 car chaque fonction Λ_β est associée à l'arête β ($\beta \in \{1, 2, 3\}$). Pour chaque sous-famille F_β , les fonctions de base sont données par :

$$\Lambda_{ijk}^1(\lambda) = N_{ijk}^1 R_i(p+2, \lambda_1) \hat{R}_j(p+2, \lambda_2) \hat{R}_k(p+2, \lambda_3) \Lambda_1(\lambda) \quad ; \quad i \in \{0, 1, \dots, p\}, \quad (2.13)$$

$$j, k \in \{1, 2, \dots, p+1\},$$

$$\Lambda_{ijk}^2(\lambda) = N_{ijk}^2 \hat{R}_i(p+2, \lambda_1) R_j(p+2, \lambda_2) \hat{R}_k(p+2, \lambda_3) \Lambda_2(\lambda) \quad ; \quad j \in \{0, 1, \dots, p\}, \quad (2.14)$$

$$i, k \in \{1, 2, \dots, p+1\},$$

$$\Lambda_{ijk}^3(\lambda) = N_{ijk}^3 \hat{R}_i(p+2, \lambda_1) \hat{R}_j(p+2, \lambda_2) R_k(p+2, \lambda_3) \Lambda_3(\lambda) \quad ; \quad k \in \{0, 1, \dots, p\}, \quad (2.15)$$

$$i, j \in \{1, 2, \dots, p+1\},$$

où

- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$,
- i, j et k sont les indices des points d'interpolation, et vérifient la relation $i + j + k = p + 2$,
- R (2.17) et \hat{R} (2.18) sont des polynômes scalaires d'une variable,

- $\forall \beta \in \{1, 2, 3\}$, N_{ijk}^β est un coefficient de normalisation tel qu'au point d'interpolation de coordonnées barycentriques $\lambda_{ijk} = (\frac{i}{p+2}, \frac{j}{p+2}, \frac{k}{p+2})$, nous avons $\Lambda_{ijk}^\beta(\lambda_{ijk}) \cdot \hat{n}_\beta = 1$, i.e.

$$N_{ijk}^\beta = \frac{p+2}{p+2-i_\beta} |l_\beta|, \quad (2.16)$$

i_β valant i, j ou k selon que β soit égal à 1, 2 ou 3.

Nous décrivons un procédé simple pour construire les points d'interpolation. Tout d'abord, chaque arête est subdivisée en $(p+2)$ intervalles égaux. Les points d'interpolation situés sur l_1 , l_2 et l_3 correspondent à l'ensemble des points délimitant chaque intervalle privé des sommets de K . Ensuite, à partir de ces points sont tracées les droites joignant les points de deux arêtes parallèlement à la troisième arête. Les points d'intersection obtenus constituent l'ensemble des points d'interpolation situés à l'intérieur de K . L'ensemble des points d'interpolation pour $p = 1$ est donné par la figure 2.2.

Les polynômes scalaires R et \hat{R} , intervenant dans (2.13), (2.14) et (2.15), sont des polynômes

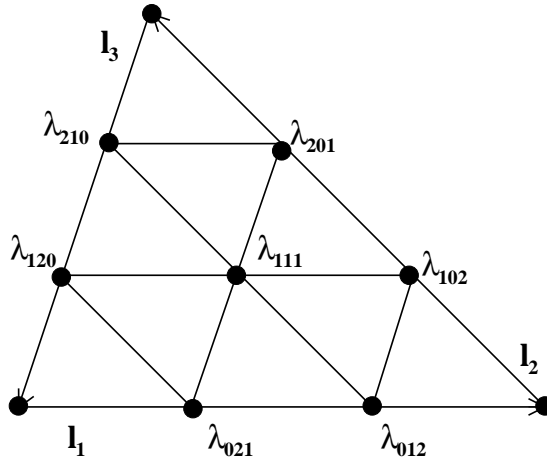


FIG. 2.2 – Ensemble des points d'interpolation λ_{ijk} lorsque $p = 1$.

d'interpolation. Plus précisément, les polynômes R sont des polynômes de Silvester [109], et constituent une extension des polynômes d'interpolation de Lagrange. Les polynômes de Silvester, R , sont définis par :

$$R_i(p, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (p\eta - k), & 1 \leq i \leq p, \\ 1, & i = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

$R_i(p, \eta)$ est de degré i , et vaut 1 quand η prend la valeur i/p . Ses racines sont $0, 1/p, 2/p, \dots, (i-1)/p$, pour $i > 0$.

Les polynômes \hat{R} sont des polynômes de Silvester modifiés. Ils sont définis par :

$$\hat{R}_i(p, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(i-1)!} \prod_{k=1}^{i-1} (p\eta - k), & 2 \leq i \leq p+1, \\ 1, & i = 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

$\hat{R}_i(p, \eta)$ est de degré $(i-1)$, et vaut 1 quand η prend la valeur i/p . Ses racines sont $1/p, 2/p, \dots, (i-1)/p$, pour $i > 1$.

Lorsque $i \geq 1$, $R_i(p, \eta)$ et $\hat{R}_i(p, \eta)$ sont liés par les relations suivantes :

$$R_i(p, \eta) = \frac{p\eta}{i} \hat{R}_i(p, \eta), \quad (2.19)$$

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{\hat{R}_i(p, \eta)}{i} = \frac{1}{p\eta}. \quad (2.20)$$

En utilisant (2.19) et (2.20), les fonctions de base (2.13), (2.14) et (2.15) se réécrivent sous une forme plus condensée :

$$\Lambda_{ijk}^1(\lambda) = N_{ijk}^1 \frac{(p+2)\hat{\alpha}_{ijk}(\lambda)\lambda_1}{i} \Lambda_1(\lambda), \quad i \in \{0, 1, \dots, p\}, j, k \in \{1, 2, \dots, p+1\}, \quad (2.21)$$

$$\Lambda_{ijk}^2(\lambda) = N_{ijk}^2 \frac{(p+2)\hat{\alpha}_{ijk}(\lambda)\lambda_2}{j} \Lambda_2(\lambda), \quad j \in \{0, 1, \dots, p\}, i, k \in \{1, 2, \dots, p+1\}, \quad (2.22)$$

$$\Lambda_{ijk}^3(\lambda) = N_{ijk}^3 \frac{(p+2)\hat{\alpha}_{ijk}(\lambda)\lambda_3}{k} \Lambda_3(\lambda), \quad k \in \{0, 1, \dots, p\}, i, j \in \{1, 2, \dots, p+1\}, \quad (2.23)$$

$\hat{\alpha}_{ijk}(\lambda)$ étant un polynôme scalaire en les variables λ_1, λ_2 et λ_3 , donné par :

$$\hat{\alpha}_{ijk}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \hat{R}_i(p+2, \lambda_1) \hat{R}_j(p+2, \lambda_2) \hat{R}_k(p+2, \lambda_3). \quad (2.24)$$

$\hat{\alpha}_{ijk}(\lambda)$ est de degré $(p-1)$, car \hat{R}_i, \hat{R}_j et \hat{R}_k sont de degré respectifs $(i-1), (j-1)$ et $(k-1)$, et $i+j+k = p+2$.

De par leur construction, ces fonctions de base vérifient les propriétés des fonctions de base $\{\Lambda_\beta\}_{\beta=1}^3$ (mis à part la valeur de la divergence surfacique qui change). Elles permettent de reconnaître et d'éliminer les dépendances linéaires survenant lors de leur construction, et donc d'éviter la présence de modes parasites [115]. Nous récapitulons les propriétés des fonctions Λ_{ijk}^β :

1. $\Lambda_{ijk}^\beta(\lambda_{i'j'k'}) \cdot \hat{n}_\gamma = \delta_{\beta\gamma} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \delta_{kk'}, \forall i, j, k, \beta, \gamma \mid \beta, \gamma \leq 3, i+j+k = p+2,$

2. $\Lambda_{ijk}^\beta(\lambda_{i'j'k'}) = 0$ pour $\lambda_{i'j'k'} \in l_\beta$ et $(i', j', k') \neq (i, j, k)$,
3. $\Lambda_{ijk}^\beta(\lambda_{i'j'k'}) = 0$ pour $\lambda_{i'j'k'} \notin l_1 \cup l_2 \cup l_3$ et $(i', j', k') \neq (i, j, k)$,
4. Chaque fonction de base associée à un point d'interpolation situé sur une arête l_β de K a pour support les deux triangles du maillage ayant en commun l_β . Chaque fonction de base associée à un point d'interpolation situé à l'intérieur de K a pour support K .
5. Les fonctions de base de Graglia vérifient la propriété de conservation de la charge.
6. En considérant comme précédemment un champ de vecteurs V , et en le décomposant par rapport aux arêtes de K selon sa partie normale V_n et sa partie tangentielle V_t , il apparaît que les fonctions de base de Graglia, contrairement à celles de Cendes, n'imposent pas l'annulation de V_t sur une arête de K .

Nous appelons nœuds tous les points d'interpolation de K . Un nœud interne désigne un point d'interpolation situé à l'intérieur de K , et un nœud externe désigne un point d'interpolation situé sur une arête de K . Les fonctions de base associées aux nœuds internes ne sont pas toutes linéairement indépendantes. En effet, pour un nœud interne de coordonnées barycentriques $\lambda_{ijk} = (\frac{i}{p+2}, \frac{j}{p+2}, \frac{k}{p+2})$, les trois fonctions de base Λ_{ijk}^1 , Λ_{ijk}^2 et Λ_{ijk}^3 interpolant ce nœud vérifient :

$$\frac{i}{N_{ijk}^1} \Lambda_{ijk}^1 + \frac{j}{N_{ijk}^2} \Lambda_{ijk}^2 + \frac{k}{N_{ijk}^3} \Lambda_{ijk}^3 \equiv 0, \quad (2.25)$$

car d'après (2.12) $\lambda_1 \Lambda_1 + \lambda_2 \Lambda_2 + \lambda_3 \Lambda_3 \equiv 0$.

Remarque. Par la suite, le point d'interpolation (ou le nœud) associé aux coordonnées barycentriques λ_{ijk} est assimilé à λ_{ijk} .

Les fonctions associées au nœud interne λ_{ijk} vérifient les relations suivantes :

$$\frac{\Lambda_{ijk}^2(\lambda)}{N_{ijk}^2} - \frac{\Lambda_{ijk}^3(\lambda)}{N_{ijk}^3} = \begin{cases} \frac{\tau_1}{|h_1|} & \text{si } \lambda = \lambda_{ijk}, \\ 0 & \text{en tout autre nœud } \lambda \neq \lambda_{ijk}, \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\frac{\Lambda_{ijk}^3(\lambda)}{N_{ijk}^3} - \frac{\Lambda_{ijk}^1(\lambda)}{N_{ijk}^1} = \begin{cases} \frac{\tau_2}{|h_2|} & \text{si } \lambda = \lambda_{ijk}, \\ 0 & \text{en tout autre nœud } \lambda \neq \lambda_{ijk}, \end{cases} \quad (2.27)$$

où $\tau_1 = l_1/|l_1|$ (respectivement $\tau_2 = l_2/|l_2|$) est le vecteur unitaire tangent à l'arête l_1 (respectivement l_2), et $|h_1|$ (respectivement $|h_2|$) est le module du vecteur hauteur de K issu du sommet s_{23} (respectivement s_{13}).

Les combinaisons linéaires (2.26) et (2.27), qui sont linéairement indépendantes, sont utilisées pour former une base de vecteurs linéairement indépendants. Il y a donc deux fonctions de base associées à chaque nœud interne. Par contre, les fonctions Λ_{ijk}^β sont utilisées pour interpoler les nœuds externes, car pour chaque nœud λ_{ijk} d'une arête β , il n'y a que Λ_{ijk}^β vérifiant $\Lambda_{ijk}^\beta(\lambda) \wedge n^\beta \neq 0$. Ceci revient donc à prendre une fonction de base par nœud externe, et deux fonctions de base par nœud interne. Au total, nous avons $3(p+1)$ degrés de liberté associés aux nœuds externes et $p(p+1)$ degrés de liberté associés aux nœuds internes, soit un total de $(p+1)(p+3)$ degrés de liberté, ce qui correspond à la dimension de l'espace \mathbb{D}^{p+1} .

L'ensemble des nœuds d'interpolation et l'ensemble des fonctions de base associées aux éléments finis d'ordre 0 et 1 sont donnés à titre d'exemples.

Pour un élément fini d'ordre 0, nous avons d'après la figure 2.3 :

1. 0 nœud interne,
2. 3 nœuds externes, auxquels sont associées les fonctions de base $\{\Lambda_\beta\}_{\beta=1}^3$,
3. 3 fonctions de base au total.

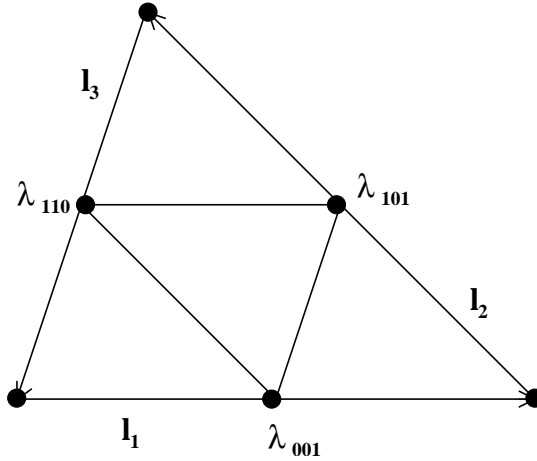


FIG. 2.3 – Points d'interpolation pour des éléments finis d'ordre 0.

Pour un élément fini d'ordre 1, nous avons d'après la figure 2.4 :

1. 1 nœud interne, auquel sont associées les fonctions de base $\left\{ \frac{\Lambda_{111}^2}{N_{111}^2} - \frac{\Lambda_{111}^3}{N_{111}^3}; \frac{\Lambda_{111}^3}{N_{111}^3} - \frac{\Lambda_{111}^1}{N_{111}^1} \right\}$,
2. 6 nœuds externes, auxquels sont associées les fonctions de base $\{\Lambda_{012}^1; \Lambda_{021}^1; \Lambda_{102}^2; \Lambda_{201}^2; \Lambda_{120}^3; \Lambda_{210}^3\}$,
3. 8 fonctions de base au total.

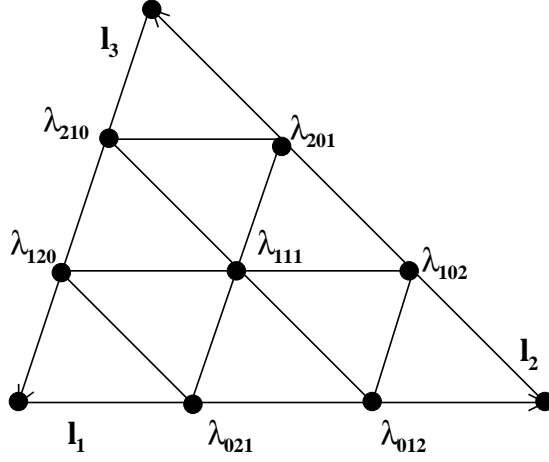


FIG. 2.4 – Points d'interpolation pour des éléments finis d'ordre 1.

2.5 Fonctions de base des éléments finis d'ordre 1 de classe $H(\text{div})$ de Nédélec

Les fonctions de base associées à l'arête l_1 du triangle K , sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{012}^1(\lambda) = N_{012}^1(3\lambda_3 - 1)\Lambda_1(\lambda), \quad \text{avec } N_{012}^1 = |l_1|, \\ \Lambda_{021}^1(\lambda) = N_{021}^1(3\lambda_2 - 1)\Lambda_1(\lambda), \quad \text{avec } N_{021}^1 = |l_1|, \\ \Lambda_{111}^1(\lambda) = N_{111}^1 3\lambda_1 \Lambda_1(\lambda), \quad \text{avec } N_{111}^1 = \frac{3}{2}|l_1|. \end{array} \right.$$

Les fonctions de base associées à l'arête l_2 de K , sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{102}^2(\lambda) = N_{102}^2(3\lambda_3 - 1)\Lambda_2(\lambda), \quad \text{avec } N_{102}^2 = |l_2|, \\ \Lambda_{201}^2(\lambda) = N_{201}^2(3\lambda_1 - 1)\Lambda_2(\lambda), \quad \text{avec } N_{201}^2 = |l_2|, \\ \Lambda_{111}^2(\lambda) = N_{111}^2 3\lambda_2 \Lambda_2(\lambda), \quad \text{avec } N_{111}^2 = \frac{3}{2}|l_2|. \end{array} \right.$$

Les fonctions de base associées à l'arête l_3 de K , sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{120}^3(\lambda) = N_{120}^3(3\lambda_2 - 1)\Lambda_3(\lambda), \quad \text{avec } N_{120}^3 = |l_3|, \\ \Lambda_{210}^3(\lambda) = N_{210}^3(3\lambda_1 - 1)\Lambda_3(\lambda), \quad \text{avec } N_{210}^3 = |l_3|, \\ \Lambda_{111}^3(\lambda) = N_{111}^3 3\lambda_3 \Lambda_3(\lambda), \quad \text{avec } N_{111}^3 = \frac{3}{2}|l_3|. \end{array} \right.$$

Nous gardons les fonctions de base $\Lambda_{012}^1, \Lambda_{021}^1, \Lambda_{102}^2, \Lambda_{201}^2, \Lambda_{120}^3$ et Λ_{210}^3 associées aux nœuds externes, puisqu'elles forment un ensemble de \mathbb{D}^2 linéairement indépendant. Il ne reste plus qu'à compléter cet ensemble pour obtenir une base de \mathbb{D}^2 . $\{\Lambda_{012}^1, \Lambda_{021}^1, \Lambda_{102}^2, \Lambda_{201}^2, \Lambda_{120}^3, \Lambda_{210}^3\}$ ne peut pas être complétée avec les fonctions $\Lambda_{111}^1, \Lambda_{111}^2$, et Λ_{111}^3 interpolant le nœud λ_{111} , car elles sont linéairement dépendantes. En effet, il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{111}^1}{N_{111}^1} + \frac{\Lambda_{111}^2}{N_{111}^2} + \frac{\Lambda_{111}^3}{N_{111}^3} &= 3(\lambda_1\Lambda_1 + \lambda_2\Lambda_2 + \lambda_3\Lambda_3) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Comme il a été expliqué précédemment, au nœud interne λ_{111} sont considérées les fonctions de base suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\Lambda_{111}^3(\lambda)}{N_{111}^3} - \frac{\Lambda_{111}^1(\lambda)}{N_{111}^1} = 3(\lambda_3\Lambda_3(\lambda) - \lambda_1\Lambda_1(\lambda)), \\ \frac{\Lambda_{111}^2(\lambda)}{N_{111}^2} - \frac{\Lambda_{111}^3(\lambda)}{N_{111}^3} = 3(\lambda_2\Lambda_2(\lambda) - \lambda_3\Lambda_3(\lambda)), \end{cases}$$

qui sont linéairement indépendantes. $\{\Lambda_{012}^1, \Lambda_{021}^1, \Lambda_{102}^2, \Lambda_{201}^2, \Lambda_{120}^3, \Lambda_{210}^3\}$ est complété avec les deux fonctions ci-dessus. Le nouvel ensemble obtenu forme une base de \mathbb{D}^2 , car les fonctions le composant appartiennent à \mathbb{D}^2 , sont linéairement indépendantes, et sont en nombre égal à la dimension de \mathbb{D}^2 . L'unisolvance de cet élément fini est montrée dans l'annexe 11.4.

Remarque. 1. Pour former une base de \mathbb{D}^2 , nous avons exhibé les fonctions $\frac{\Lambda_{111}^3(\lambda)}{N_{111}^3} - \frac{\Lambda_{111}^1(\lambda)}{N_{111}^1}$ et $\frac{\Lambda_{111}^2(\lambda)}{N_{111}^2} - \frac{\Lambda_{111}^3(\lambda)}{N_{111}^3}$ dans le but de montrer qu'elles étaient linéairement indépendantes. Néanmoins, nous pouvons simplement garder deux des trois fonctions $\Lambda_{111}^1, \Lambda_{111}^2$ et Λ_{111}^3 . En effet, cela n'implique pas de choix privilégié par rapport à deux arêtes de K , puisque l'annulation sur une arête de la composante tangentielle du champ de vecteur interpolé n'est pas imposée.

2. Les coefficients de normalisation N_{ijk}^β ne sont pas nécessaires pour vérifier la propriété de conservation de la charge. C'est évident pour les fonctions de base associées aux nœuds internes, car les flux de ces fonctions sont nuls sur le bord de K . Soient deux éléments K^+ et K^- d'un maillage Γ_h représentant une surface fermée. Nous supposons que ces éléments ont une arête commune, et qu'ils constituent le support d'une fonction de base associée à un nœud d'interpolation situé sur cette arête. Sur l'arête commune, le flux de la restriction de la fonction de base à K^+ et le flux de la restriction de la fonction de base à K^- sont des polynômes de degré p entièrement déterminés par leurs valeurs aux $(p+1)$ points d'interpolation. Les flux sont égaux, car nous avons sur l'arête β considérée :

$$\Lambda_{ijk}^{\beta+}(\lambda_{i'j'k'}) \cdot \hat{n}_{\beta+} = \Lambda_{ijk}^{\beta-}(\lambda_{i'j'k'}) \cdot \hat{n}_{\beta-} = 0, \quad \forall \lambda_{i'j'k'} \neq \lambda_{ijk}, \quad (2.29)$$

$$\Lambda_{ijk}^{\beta+}(\lambda_{i'j'k'}) \cdot \hat{n}_{\beta+} = \Lambda_{ijk}^{\beta-}(\lambda_{i'j'k'}) \cdot \hat{n}_{\beta-}, \quad \text{pour } \lambda_{i'j'k'} = \lambda_{ijk}, \quad (2.30)$$

où les symboles $+$ et $-$ désignent respectivement les restrictions à K^+ et à K^- .

Chapitre 3

Fonctions de base courbes

3.1 Introduction

Pour les méthodes classiques de résolution des équations de Maxwell en régime harmonique basées sur les formules de représentation intégrale de Stratton-Chu [41], Bendali [19] a montré qu'en n'approchant pas convenablement la géométrie du problème, la précision de la méthode est dégradée, car l'ordre d'approximation de la géométrie intervient dans les estimations d'erreur. Plus précisément, Bendali a montré qu'en remplaçant le plan tangent à la surface exacte Γ par celui de la surface approchée à l'ordre l , Γ_h , il y a perte d'un ordre dans la précision du schéma. Une solution, pour conserver l'ordre d'approximation du schéma, consiste alors à approcher le plan tangent à Γ à l'ordre $(l + 1)$. Cependant, en pratique, pour plus de simplicité, le plan tangent à Γ est approché par le plan tangent à Γ_h , et la précision désirée est ensuite obtenue en jouant sur la finesse du maillage (en raffinant, par exemple, le maillage au niveau des zones à fortes courbures). Il est possible d'atténuer les erreurs d'approximation de la géométrie en utilisant des éléments courbes.

De plus, un des objectifs visés, est d'intégrer les éléments courbes dans la méthode de résolution des équations de Maxwell développée par Darrigrand [44], qui est basée sur le couplage d'une méthode multipôle [35] et [46], et d'une méthode de discrétisation microlocale [125]. En effet, afin de satisfaire aux exigences de la méthode de discrétisation microlocale, il est nécessaire d'utiliser une discrétisation éléments finis d'ordre élevé avec des éléments courbes.

Dans ce chapitre, vont être étudiées les fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre élevé de classe $H(\text{div})$ de Nédélec. Lors de cette étude, deux paramétrisations de Γ à première vue différentes sont examinées : la première, utilisée par Bendali [19], est basée sur l'emploi d'un repère local orthonormé, et la seconde, utilisée par Graglia [65], est basée sur l'emploi des coordonnées barycentriques.

3.2 Fonctions de base de Bendali

Cette partie est consacrée à la définition des fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre élevé de classe $H(\text{div})$ de Nédélec. Elles sont appelées fonctions de base de Bendali, car le formalisme introduit par Bendali dans [19] est ici repris.

Soit Γ_h l'approximation de Γ servant à établir le problème discret. Nous décrivons la procédure de construction des triangles courbes \widetilde{K}_h de Γ_h , car les espaces d'éléments finis intervenant dans la formulation du problème discret sont intimement liés à la définition de la surface approchée Γ_h . La triangulation de Γ par des éléments courbes se fait de manière classique, c'est pourquoi, elle est présentée de façon assez succincte. La partie A de l'annexe 2 en fournit une présentation plus détaillée.

En résumé, nous considérons que la triangulation de Γ se fait en deux étapes. Lors de la première étape, Γ est approchée par une surface polyédrique $\widetilde{\Gamma}_h$, constituée de triangles plans notés K . Nous avons :

$$\widetilde{\Gamma}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K, \quad (3.1)$$

où \mathcal{T}_h est la triangulation de Γ formée des triangles plans K .

La seconde étape consiste à construire Γ_h , approximation de Γ , qui remplacera Γ dans les équations intégrales. $\widetilde{\Gamma}_h$ est construite par l'intermédiaire de l'interpolée d'ordre l de ψ , projection orthogonale de $\widetilde{\Gamma}_h$ sur Γ , à partir des éléments finis de Lagrange $(K, \Sigma_K, \mathbb{P}_l)$.

Soit $F_K = \Pi_l \psi|_K$ l'interpolée d'ordre l de ψ restreinte à K , associant au triangle plan $K \subset \widetilde{\Gamma}_h$ le triangle courbe $\widetilde{K}_h \subset \Gamma_h$. Nous avons alors :

$$\Gamma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} F_K(K).$$

Nous introduisons également les notations suivantes :

$$\widetilde{K}_h = F_K(K) \subset \Gamma_h \quad \text{et} \quad \widetilde{K} = (\psi \circ F_K)(K) \subset \Gamma.$$

Remarque. Prendre $l = 1$ ramène à la situation $\Gamma_h = \widetilde{\Gamma}_h$.

Etant donné que Γ_h provient de la juxtaposition des triangles \widetilde{K}_h , qui dépendent eux-mêmes des triangles K de $\widetilde{\Gamma}_h$, il est naturel d'introduire des coordonnées locales pour chaque triplet $\{F_K, \widetilde{K}_h, K\}$. Soit $\{O_K, \vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$ le repère orthonormé associé à K . Si (ξ^1, ξ^2) sont les coordonnées d'un point $x_K \in K$ dans $\{O_K, \vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$, alors nous avons :

$$x_K - O_K = \xi^1 \vec{f}_1^K + \xi^2 \vec{f}_2^K. \quad (3.2)$$

Tout point x_K appartenant à K s'écrit donc comme une fonction de ξ^1 et de ξ^2 , i.e. $x_K = x_K(\xi^1, \xi^2)$. En posant $x_h = F_K(x_K)$ image sur \widetilde{K}_h de x_K par F_K , x_h s'écrit aussi comme une

fonction de ξ^1 et de ξ^2 .

Nous nous intéressons également aux vecteurs tangents à Γ , car les inconnues du problème sont des champs tangents à Γ . Une base du plan tangent à Γ est définie par :

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial(\psi \circ F_K)}{\partial \xi^\alpha} \quad ; \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.3)$$

Au niveau des inconnues, le passage au problème discret se fait en considérant le plan tangent à Γ_h . Une base du plan tangent à Γ_h est définie par :

$$\vec{e}_\alpha^h = \frac{\partial F_K}{\partial \xi^\alpha} \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.4)$$

Remarque. Bien que \vec{e}_α^h soit une base du plan tangent à Γ_h , et que Γ_h soit une approximation d'ordre l de la surface Γ , Bendali a constaté [19], qu'en remplaçant le plan tangent à Γ par le plan tangent à Γ_h , nous obtenons une dégradation dans l'approximation de la géométrie aboutissant à la perte d'un ordre de convergence dans le schéma utilisé. Cette dégradation est due à une mauvaise approximation du plan tangent à Γ . Pour rétablir les ordres de convergences, le plan tangent à Γ peut être approché à un ordre supérieur en introduisant un réseau supplémentaire de points. Mais, tant qu'à stocker un réseau supplémentaire de points de Γ , autant approcher toute la géométrie à l'ordre supérieur, et prendre alors comme approximation du plan tangent à Γ , le plan tangent de la nouvelle surface approchant Γ . Pour de plus amples informations sur la dégradation de la géométrie, nous renvoyons à la partie B de l'annexe 2.

Nous définissons à présent les fonctions de base associées aux éléments courbes. Nous les notons $\{\widetilde{RT}_i\}_{i \in I}$, I étant un ensemble fini d'entiers.

Remarque. Par convention, l'indice grec α prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$ et les répétitions de la forme $a^\alpha b_\alpha$ de cet indice entraîneront, sauf indication contraire, la sommation sur toutes les valeurs possibles de l'indice, i.e. nous aurons :

$$a^\alpha b_\alpha = a^1 b_1 + a^2 b_2.$$

L'espace d'éléments finis X_h utilisé par Bendali [19] pour le problème discret est défini par :

$$X_h = \{ \vec{p} = p^\alpha \vec{e}_\alpha^h \in C^\infty(\widetilde{K}_h, \mathbb{C}^3) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad R_K \vec{p} \in \mathbb{D}_m \quad \text{et} \quad R_K \vec{p} \cdot \vec{\nu}_i^K + R_L \vec{p} \cdot \vec{\nu}_j^L = 0, \quad \text{sur toute arête curviligne de } \Gamma_h, F_K(\partial K_i) = F_L(\partial L_j) \},$$

où

- \mathbb{D}_m est l'espace de Raviart-Thomas défini par :

$$\vec{u} \in \mathbb{D}_m \iff \exists v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{P}_m \mid \vec{u}(x) = u(\xi) \vec{f}_\alpha^K, \quad \text{avec} \quad u^\alpha(\xi) = v_\alpha(\xi) + \xi^\alpha v_0(\xi), \quad (3.5)$$

$x \in K$ est lié à ξ par : $x = O_K + \xi^\alpha \vec{f}_\alpha^K$.

– $R_K \vec{q}$ est associé au champ de vecteur $\vec{q} = q^\alpha \vec{e}_\alpha^h$ tangent à Γ_h , et est défini par :

$$R_K \vec{q} = \sqrt{g_h} q^\alpha \vec{f}_\alpha^K, \quad (3.6)$$

$\sqrt{g_h} = |\vec{e}_1^h \wedge \vec{e}_2^h|$ étant l'élément de surface de Γ_h .

\vec{q} peut s'écrire en fonction de $R_K \vec{q}$, ce qui donne :

$$\vec{q} = q^\alpha \vec{e}_\alpha^h = \frac{1}{\sqrt{g_h}} \frac{1}{(f_\alpha^K, f_\alpha^K)} (R_K \vec{q})^\alpha \vec{e}_\alpha^h. \quad (3.7)$$

Soit \vec{j} le courant approché défini sur un élément \widetilde{K}_h de Γ_h . Nous avons :

$$\vec{j} = \sum_{i \in I} j_i \widetilde{RT}_i \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_h}} (R_K \vec{j})^\alpha \vec{e}_\alpha^h, \quad (3.9)$$

car \vec{j} est tangent à Γ_h .

De plus, comme $R_K \vec{j} \in \mathbb{D}_m$, nous avons :

$$R_K \vec{j} = \sum_{i \in I} \theta_i RT_i, \quad (3.10)$$

où $\{RT_i\}_{i \in I}$ est l'ensemble des fonctions de base de l'élément fini plan correspondant à l'élément fini courbe considéré.

D'après les relations (3.8) et (3.10), nous avons :

$$\vec{j} = \sum_{i \in I} \theta_i \frac{1}{\sqrt{g_h}} \sum_{\alpha=1}^2 (RT_i \cdot \vec{f}_\alpha^K) \vec{e}_\alpha^h, \quad (3.11)$$

ce qui entraîne en imposant $\lambda_i = j_i$, que \widetilde{RT}_i est défini par :

$$\widetilde{RT}_i(x_h(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{g_h}} ((RT_i(x_K(\xi)) \cdot \vec{f}_1^K) \vec{e}_1^h(x_h(\xi)) + (RT_i(x_K(\xi)) \cdot \vec{f}_2^K) \vec{e}_2^h(x_h(\xi))) \quad (3.12)$$

où x_K est l'antécédant sur K de $x_h \in \widetilde{K}_h$.

Une approximation de la géométrie d'ordre 1 ($l = 1$) donne $\widetilde{RT}_i = RT_i$, car $\vec{e}_1^h = \vec{f}_1^K$ et $\vec{e}_2^h = \vec{f}_2^K$, et $\sqrt{g_h} = 1$.

Remarque. L'ensemble $\{\vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$ constitue une base contravariante du plan tangent à K (car $\vec{f}_\alpha^K = \frac{\partial x_K}{\partial \xi^\alpha}$), mais il constitue aussi une base covariante du plan tangent à K puisque \vec{f}_1^K et \vec{f}_2^K sont orthonormés. $\{\vec{e}_1^h, \vec{e}_2^h\}$ formant une base contravariante du plan tangent à Γ_h , pour obtenir les fonctions $\{\widetilde{RT}_i\}_{i \in I}$, les coordonnées contravariantes des fonctions $\{RT_i\}_{i \in I}$ données par $(RT_i \cdot \vec{f}_1^K)$ et $(RT_i \cdot \vec{f}_2^K)$ sont injectées dans les fonctions $\{\widetilde{RT}_i\}_{i \in I}$.

3.3 Fonctions de base de Graglia

Nous définissons les fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre élevé de classe $H(div)$ de Nédélec données par Graglia. Bien que les résultats de Graglia soient utilisés, nous ne suivrons pas la présentation faite dans son article [65] mais plutôt celle de la section précédente, car la base $\{\vec{e}_1^h, \vec{e}_2^h\}$ du plan tangent à Γ_h n'apparaît pas de façon explicite. Γ_h est construite comme précédemment, et en gardant les mêmes notations, Γ_h est définie par :

$$\Gamma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} F_K(K), \text{ et } F_K(K) = \widetilde{K}_h. \quad (3.13)$$

Comme précédemment, à chaque triangle plan $K \in \mathcal{T}_h$ est associé un système de coordonnées locales, ce qui revient à lier chaque triangle courbe $\widetilde{K}_h \subset \Gamma_h$ à un système de coordonnées locales, puisque $\widetilde{K}_h = F_K(K)$. Le système de coordonnées locales sélectionnées est différent de celui utilisé par Bendali : les coordonnées locales choisies sont les coordonnées barycentriques λ_1, λ_2 et λ_3 .

Remarque. La coordonnée barycentrique λ_3 peut être omise, car $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Un point x_K appartenant à K est paramétré par :

$$x_K = s_{12} + \lambda_1 l_2 - \lambda_2 l_1. \quad (3.14)$$

x_K s'écrit donc comme une fonction de λ_1 et de λ_2 , i.e. $x_K = x_K(\lambda_1, \lambda_2)$. Comme $\widetilde{K}_h = F_K(K)$, un point x_h appartenant à \widetilde{K}_h , image de x_K par F_K , s'écrit aussi comme une fonction de λ_1 et de λ_2 , i.e. $x_h = x_h(\lambda_1, \lambda_2)$, puisque $x_h = F_K(x_K(\lambda_1, \lambda_2))$.

Une base du plan tangent à Γ_h est donnée par :

$$\vec{e}_\alpha^h = \frac{\partial F_K}{\partial \lambda_\alpha} \quad ; \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.15)$$

La définition des fonctions de base courbes se fait en deux parties. D'abord les fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre 0 sont définies, ensuite sont traitées les fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre élevé.

Soient $\{\widetilde{\Lambda}_\beta\}_{\beta=1}^3$ les fonctions de base courbes d'ordre 0. Pour établir les expressions de ces fonctions, les rappels suivants sont nécessaires.

Tout triangle plan $K \in \mathcal{T}_h$, est paramétré suivant la relation (3.14). A partir de cette paramétrisation, une base contravariante $\{\vec{e}_1^K, \vec{e}_2^K\}$ du plan tangent à K est donnée par :

$$\vec{e}_1^K = \frac{\partial x_K}{\partial \lambda_1} = l_2, \quad (3.16)$$

$$\vec{e}_2^K = \frac{\partial x_K}{\partial \lambda_2} = -l_1. \quad (3.17)$$

Soit $\{\vec{e}_K^1, \vec{e}_K^2\}$ la base covariante du plan tangent à K associée à la base $\{\vec{e}_1^K, \vec{e}_2^K\}$. Les vecteurs \vec{e}_K^1 et \vec{e}_K^2 sont définis par la relation

$$\vec{e}_K^i = (TM)_K^{-1} \vec{e}_i^K, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (3.18)$$

où $(TM)_K$ est le tenseur métrique qui opère du plan tangent dans le plan cotangent. $(TM)_K$ est défini par :

$$(TM)_K = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^K \cdot \vec{e}_1^K & \vec{e}_1^K \cdot \vec{e}_2^K \\ \vec{e}_1^K \cdot \vec{e}_2^K & \vec{e}_2^K \cdot \vec{e}_2^K \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

De par leur construction, $\{\vec{e}_1^K, \vec{e}_2^K\}$ et $\{\vec{e}_K^1, \vec{e}_K^2\}$ vérifient $\vec{e}_K^i \cdot \vec{e}_j^K = \delta_{ij}$, δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker.

Les fonctions planes d'ordre 0, $\{\Lambda_\beta\}_{\beta=1}^3$, sont données par :

$$\Lambda_1 = \frac{1}{J}(\lambda_2 l_3 - \lambda_3 l_2), \quad (3.20)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{J}(\lambda_3 l_1 - \lambda_1 l_3), \quad (3.21)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{J}(\lambda_1 l_2 - \lambda_2 l_1). \quad (3.22)$$

Comme $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $l_3 = -l_1 - l_2$, et $\vec{e}_1^K = l_2$ et $\vec{e}_2^K = -l_1$, elles peuvent s'exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 , et en fonction de $\{\vec{e}_1^K, \vec{e}_2^K\}$:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{J}(-(1 - \lambda_1)\vec{e}_1^K + \lambda_2\vec{e}_2^K), \quad (3.23)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{J}(\lambda_1\vec{e}_1^K - (1 - \lambda_2)\vec{e}_2^K), \quad (3.24)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{J}(\lambda_1\vec{e}_1^K + \lambda_2\vec{e}_2^K). \quad (3.25)$$

Les fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre 0 sont définies par :

$$\widetilde{\Lambda}_\beta = \frac{1}{\sqrt{g_h}}((J\Lambda_\beta \cdot \vec{e}_K^1)\vec{e}_1^h + (J\Lambda_\beta \cdot \vec{e}_K^2)\vec{e}_2^h) \quad ; \quad \beta \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.26)$$

où $\sqrt{g_h}$ est l'élément de surface de Γ_h et $J = 2mes(K)$.

En écrivant de manière explicite les fonctions de base courbe d'ordre 0, nous avons :

$$\widetilde{\Lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_h}}(-(1 - \lambda_1)\vec{e}_1^h + \lambda_2\vec{e}_2^h), \quad (3.27)$$

$$\widetilde{\Lambda}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_h}}(\lambda_1\vec{e}_1^h - (1 - \lambda_2)\vec{e}_2^h), \quad (3.28)$$

$$\widetilde{\Lambda}_3 = \frac{1}{\sqrt{g_h}}(\lambda_1\vec{e}_1^h + \lambda_2\vec{e}_2^h). \quad (3.29)$$

Remarque. En considérant une approximation de la géométrie d'ordre 1, nous avons $\widetilde{\Lambda}_i = \Lambda_i$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Nous définissons à présent les fonctions de base courbes d'ordre élevé. Les fonctions de base planes d'ordre élevé, $\{\Lambda_{ijk}^\beta\}_{\beta=1,3}^{i+j+k=p+2}$, sont générées à partir des polynômes d'interpolation de Silvester et des fonctions de base planes d'ordre 0, $\{\Lambda_\beta\}_{\beta=1}^3$ (cf chapitre 2). Un ensemble de nœuds sur le triangle K associés aux points d'interpolation des polynômes de Silvester est ainsi défini. Cet ensemble est formé de nœuds externes situés sur les arêtes de K , et de nœuds internes situés à l'intérieur de K . Chaque nœud est noté selon ses coordonnées barycentriques $\lambda_{ijk} = (\frac{i}{p+2}, \frac{j}{p+2}, \frac{k}{p+2})$. La fonction de base d'ordre p , Λ_{ijk}^β , associée à λ_{ijk} est donnée par :

$$\Lambda_{ijk}^\beta(\lambda) = \frac{(p+2)\lambda_\beta \hat{\alpha}_{ijk}(\lambda)}{i_\beta} \Lambda_\beta(\lambda), \quad (3.30)$$

où i_β désigne respectivement les valeurs i , j ou k selon que β prend respectivement les valeurs 1, 2 ou 3. Les notations utilisées pour définir les fonctions de base Λ_{ijk}^β sont celles du chapitre précédent.

La définition des fonctions de base courbes d'ordre élevé est immédiate. En effet, en se servant des fonctions de base courbes d'ordre 0, $\{\widetilde{\Lambda}_\beta\}_{\beta=1}^3$, et en s'inspirant de (3.26), il vient :

$$\widetilde{\Lambda}_{ijk}^\beta(\lambda) = \frac{N_{ijk}^\beta}{\sqrt{g_h}} ((J\Lambda_{ijk}^\beta \cdot \vec{e}_K^1) \vec{e}_1^h + (J\Lambda_{ijk}^\beta \cdot \vec{e}_K^2) \vec{e}_2^h). \quad (3.31)$$

L'expression (3.31) se réécrit également :

$$\widetilde{\Lambda}_{ijk}^\beta(\lambda) = N_{ijk}^\beta \frac{(p+2)\lambda_\beta \hat{\alpha}_{ijk}(\lambda)}{i_\beta} \widetilde{\Lambda}_\beta(\lambda). \quad (3.32)$$

Le coefficient de normalisation, N_{ijk}^β , est tel qu'au point λ_{ijk} , nous avons :

$$\widetilde{\Lambda}_{ijk}^\beta(\lambda_{ijk}) \cdot \hat{n}_\beta(\lambda_{ijk}) = 1, \quad (3.33)$$

où \hat{n}_β est un vecteur unitaire normal à \hat{n} qui vérifie selon les valeurs de β :

- $\hat{n}_1 \cdot \vec{e}_2^h = 0$,
- $\hat{n}_2 \cdot \vec{e}_1^h = 0$,
- $\hat{n}_3 \cdot (\vec{e}_2^h - \vec{e}_1^h) = 0$.

Les coefficients de normalisation sont alors déterminés à partir des relations précédentes :

$$N_{ijk}^1 = \frac{p+2}{p+2-i} |e_2^h(\lambda_{ijk})|, \quad (3.34)$$

$$N_{ijk}^2 = \frac{p+2}{p+2-j} |e_1^h(\lambda_{ijk})|, \quad (3.35)$$

$$N_{ijk}^3 = \frac{p+2}{p+2-k} |e_2^h(\lambda_{ijk}) - e_1^h(\lambda_{ijk})|. \quad (3.36)$$

Remarque. *Comme au chapitre précédent, les trois fonctions de base associées à un même nœud interne sont linéairement dépendantes. Deux fonctions sont alors choisies parmi ces trois fonctions.*

3.4 Comparaison des fonctions de base de Bendali et de Graglia

Nous montrons que les fonctions de base courbes d'ordre élevé de Bendali et de Graglia sont équivalentes. Nous procédons à des simplifications au niveau des notations utilisées. $\widetilde{\Lambda}_\beta$ désigne n'importe quelle fonction de base d'ordre élevé de Graglia. La notation des fonctions de base d'ordre élevé de Graglia est telle qu'à chaque fonction de base \widetilde{RT}_β de Bendali, il correspond une fonction de base $\widetilde{\Lambda}_\beta$ de Graglia. Cette correspondance entre \widetilde{RT}_β et $\widetilde{\Lambda}_\beta$ se fait par le biais des fonctions de base planes RT_β et Λ_β qui leur sont associées.

Lemme. *Si les fonctions de base "planes" de Bendali RT_{β_0} et de Graglia Λ_{β_0} vérifient :*

$$RT_{\beta_0}(\xi) = (\Lambda_{\beta_0} \circ \phi)(\xi), \quad (3.37)$$

alors nous avons, entre les fonctions de base "courbes" de Bendali \widetilde{RT}_{β_0} et de Graglia $\widetilde{\Lambda}_{\beta_0}$, la relation suivante :

$$\widetilde{RT}_{\beta_0}(\xi) = \frac{1}{N_{\beta_0}} (\widetilde{\Lambda}_{\beta_0} \circ \phi)(\xi), \quad (3.38)$$

N_{β_0} étant le coefficient de normalisation de $\widetilde{\Lambda}_{\beta_0}$.

Dans cette partie, (3.51) est montré de manière simplifiée, mais nous renvoyons à la section 11.4 de l'annexe 11.4 pour une preuve détaillée.

Nous notons respectivement x_B et x_G les paramétrisations de Γ_h de Bendali et de Graglia. Nous posons :

$$\begin{aligned}
- \vec{b}_1^h &= \frac{\partial x_B}{\partial \xi^1}, \text{ et } \vec{b}_2^h = \frac{\partial x_B}{\partial \xi^2}, \\
- \vec{g}_1^h &= \frac{\partial x_G}{\partial \lambda_1}, \text{ et } \vec{g}_2^h = \frac{\partial x_G}{\partial \lambda_2},
\end{aligned}$$

où $\{\vec{b}_1^h, \vec{b}_2^h\}$ est une base du plan tangent à Γ_h obtenue à partir de la paramétrisation de Bendali, et $\{\vec{g}_1^h, \vec{g}_2^h\}$ est une base du plan tangent à Γ_h obtenue à partir de la paramétrisation de Graglia. Soit \widetilde{K}_h un élément courbe de Γ_h , et soit K l'élément plan de $\widetilde{\Gamma}_h$ tel que \widetilde{K}_h est l'image de K par F_K , l'interpolée de la projection orthogonale de $\widetilde{\Gamma}_h$ sur Γ . Les coordonnées barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ associées aux sommets de K s'écrivent comme des fonctions affines de ξ^1 et de ξ^2 :

$$\lambda_i(\xi^1, \xi^2) = \alpha_i + \beta_i \xi^1 + \gamma_i \xi^2 \quad ; \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.39)$$

Nous posons : $\lambda_i(\xi^1, \xi^2) = \phi_i(\xi^1, \xi^2)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Les fonctions $\{\phi_i\}_{i=1}^3$ sont complètement définies, car elles vérifient les relations $\phi_i(a_j^K) = \delta_{ij}$, a_1^K , a_2^K et a_3^K correspondant aux sommets s_{23} , s_{13} et s_{12} de K .

En posant $\xi = (\xi^1, \xi^2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, nous obtenons :

$$x_G(\lambda) = (x_G \circ \phi)(\xi) = x_B(\xi). \quad (3.40)$$

Nous avons en utilisant (3.40) :

$$\vec{b}_1^h = \sum_{j=1}^2 \beta_j (\vec{g}_j^h \circ \phi), \quad (3.41)$$

$$\text{et } \vec{b}_2^h = \sum_{j=1}^2 \gamma_j (\vec{g}_j^h \circ \phi). \quad (3.42)$$

Soit $\sqrt{g_h^B} = |\vec{b}_1^h \wedge \vec{b}_2^h|$ le jacobien provenant de la paramétrisation de Bendali, et soit $\sqrt{g_h^G} = |\vec{g}_1^h \wedge \vec{g}_2^h|$ le jacobien provenant de la paramétrisation de Graglia. A l'aide de (3.41) et (3.42), $\sqrt{g_h^B}$ s'exprime en fonction de $\sqrt{g_h^G}$:

$$\sqrt{g_h^B} = c |(\vec{g}_1^h \wedge \vec{g}_2^h) \circ \phi| = c \sqrt{g_h^G} \circ \phi, \quad (3.43)$$

où $c = |\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1|$.

Les fonctions de base courbes de Bendali $\{\widetilde{RT}_\beta\}_\beta$ et de Graglia $\{\widetilde{\Lambda}_\beta\}_\beta$ sont définies par :

$$\widetilde{RT}_\beta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{g_h^B}} ((RT_\beta \cdot \vec{f}_1^K) \vec{b}_1^h + (RT_\beta \cdot \vec{f}_2^K) \vec{b}_2^h), \quad (3.44)$$

$$\widetilde{\Lambda}_\beta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{g_h^G}} ((\Lambda_\beta \cdot \vec{e}_K^1) \vec{g}_1^h + (\Lambda_\beta \cdot \vec{e}_K^2) \vec{g}_2^h). \quad (3.45)$$

Nous supposons que les fonctions RT_{β_0} et Λ_{β_0} vérifient (3.37). Nous allons montrer que \widetilde{RT}_{β_0} et $\widetilde{\Lambda}_{\beta_0}$ sont équivalentes.

\vec{e}_1^K et \vec{e}_2^K étant définis par :

$$\vec{e}_1^K = l_2, \quad \text{et} \quad \vec{e}_2^K = -l_1,$$

et \vec{f}_1^K et \vec{f}_2^K étant définis par :

$$\vec{f}_1^K = \frac{\overrightarrow{a_1^K a_2^K}}{|\overrightarrow{a_1^K a_2^K}|}, \quad \text{et} \quad \vec{f}_2^K = \frac{\overrightarrow{a_1^K a_3^K} - (\overrightarrow{a_1^K a_3^K} \cdot \vec{f}_1^K) \vec{f}_1^K}{|\overrightarrow{a_1^K a_3^K} - (\overrightarrow{a_1^K a_3^K} \cdot \vec{f}_1^K) \vec{f}_1^K|}, \quad (3.46)$$

nous avons :

$$\vec{e}_1^K = -\xi_3^1 \vec{f}_1^K - \xi_3^2 \vec{f}_2^K, \quad (3.47)$$

$$\vec{e}_2^K = (\xi_2^1 - \xi_3^1) \vec{f}_1^K - \xi_3^2 \vec{f}_2^K, \quad (3.48)$$

en notant $\xi_i = (\xi_i^1, \xi_i^2)$ les coordonnées de a_i^K dans le repère $\{a_1^K, \vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$.

Nous avons donc :

$$\widetilde{RT}_{\beta_0}(\xi) = \frac{1}{c(\sqrt{g_h^G} \circ \phi)} ((RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_1^K) \sum_{k=1}^2 \beta_k (\vec{g}_k^h \circ \phi) + (RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_2^K) \sum_{k=1}^2 \gamma_k (\vec{g}_k^h \circ \phi)). \quad (3.49)$$

En remarquant que $(RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_1^K)$ et $(RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_2^K)$ sont respectivement les premières et secondes coordonnées de RT_{β_0} dans la base orthonormée $\{\vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$, nous pouvons écrire :

$$\widetilde{RT}_{\beta_0}(\xi) = \frac{1}{c(\sqrt{g_h^G} \circ \phi)} ((RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_1^K) (\vec{g}_1^h \circ \phi) + (RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_2^K) (\vec{g}_2^h \circ \phi)). \quad (3.50)$$

En utilisant les relations (3.37) et (3.31), nous avons :

$$\widetilde{RT}_{\beta_0}(\xi) = \frac{1}{N_{\beta_0}} (\widetilde{\Lambda}_{\beta_0} \circ \phi)(\xi), \quad (3.51)$$

N_{β_0} étant le coefficient de normalisation de $\widetilde{\Lambda}_{\beta_0}$.

3.5 Fonctions de base des éléments finis courbes d'ordre 1 de classe $H(\text{div})$ de Nédélec

Comme il a été dit dans l'introduction de ce chapitre, l'emploi d'éléments courbes sert à modéliser correctement la géométrie du problème. Nous effectuons une approximation de la géométrie à l'ordre deux.

Soit $\widetilde{\Gamma}_h$ une approximation d'ordre 1 de Γ dont les faces correspondent aux triangles plans K de la triangulation \mathcal{T}_h . Pour obtenir cette première approximation, une première grille de points situés exactement sur Γ est donnée. Pour une approximation d'ordre 2 de Γ , une grille supplémentaire de points de Γ , un par arête de $\widetilde{\Gamma}_h$, est mise à disposition. A K est associé, le triangle curviligne $\widetilde{K}_h = F_K(K)$ passant par les points des deux grilles précédentes. Soit ψ la projection orthogonale sur Γ . L'interpolée d'ordre 2 de ψ , restreinte à K , obtenue à partir de l'élément fini de Lagrange $(\widetilde{K}_h, \Sigma_K, \mathbb{P}_2)$ peut être évaluée à l'aide du réseau de points formé à partir de la grille initiale et de la grille supplémentaire. Σ_K est défini par :

$$\Sigma_K = \{a_{\frac{i+1}{2}}^h\}_{i=1}^6, \quad (3.52)$$

avec les notations suivantes $\forall K \subset \widetilde{\Gamma}_h$ et $\forall \widetilde{K}_h \subset \Gamma_h$:

- $\{a_1^K, a_2^K, a_3^K\}$ sont les sommets de K (et sont aussi les sommets de \widetilde{K}_h),
- $\{a_{\frac{3}{2}}^K, a_{\frac{5}{2}}^K, a_{\frac{7}{2}}^K\}$ sont les milieux respectifs des côtés $[a_1^K, a_2^K]$, $[a_2^K, a_3^K]$, $[a_1^K, a_3^K]$,
- $\{a_{\frac{3}{2}}^h, a_{\frac{5}{2}}^h, a_{\frac{7}{2}}^h\}$ sont les milieux respectifs des arêtes curvilignes de \widetilde{K}_h .

Remarque. Nous écrivons indifféremment a_i^K ou a_i^h pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Pour un triangle $K \in \mathcal{T}_h$, les coordonnées barycentriques d'un point $x_K \in K$, associées aux sommets $\{a_1^K, a_2^K, a_3^K\}$ de K , sont notées $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$. Nous avons :

$$x_K(\lambda) = s_{12} + \lambda_1 l_2 - \lambda_2 l_1. \quad (3.53)$$

Soit $x_h \in \widetilde{K}_h$ l'image de $x_K \in K$ par F_K . $x_h \in \widetilde{K}_h$ s'écrit alors :

$$x_h(\lambda) = \sum_{i=1}^6 \varphi_{\frac{i+1}{2}}^h(\lambda) a_{\frac{i+1}{2}}^h, \quad (3.54)$$

$\{\varphi_{\frac{i+1}{2}}^h\}_{i=1}^6$ étant les fonctions de base \mathbb{P}_2 associées à $(\widetilde{K}_h, \Sigma_K, \mathbb{P}_2)$.

Les fonctions $\{\varphi_{\frac{i+1}{2}}^h\}_{i=1}^6$ sont définies par :

$$\varphi_i^h(\lambda) = \lambda_i(2\lambda_i - 1) \quad , 1 \leq i \leq 3, \quad (3.55)$$

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}}^h(\lambda) = 4\lambda_i\lambda_{i+1} \quad , 1 \leq i \leq 3. \quad (3.56)$$

Remarque. Par convention, nous prenons lorsque $i = 3$, $\lambda_{i+1} = \lambda_1$.

Comme une base du plan tangent à Γ_h est définie par :

$$\vec{e}_\alpha^h = \frac{\partial x_h}{\partial \lambda_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

l'expression des vecteurs \vec{e}_α^h est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^h(\xi) &= \overrightarrow{a_2^h a_1^h} + 4\lambda_1 \overrightarrow{a_1^h a_{\frac{3}{2}}^h} + 4\lambda_2 \overrightarrow{a_{\frac{3}{2}}^h a_2^h} + 4\lambda_3 \overrightarrow{a_{\frac{7}{2}}^h a_{\frac{5}{2}}^h}, \\ \vec{e}_2^h(\xi) &= \overrightarrow{a_3^h a_1^h} + 4\lambda_1 \overrightarrow{a_1^h a_{\frac{7}{2}}^h} + 4\lambda_2 \overrightarrow{a_{\frac{3}{2}}^h a_{\frac{5}{2}}^h} + 4\lambda_3 \overrightarrow{a_{\frac{7}{2}}^h a_{\frac{5}{2}}^h}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Les fonctions de base associées à l'arête l_1 du triangle \widetilde{K}_h , sont données par :

$$\begin{cases} \widetilde{\Lambda}_{012}^1(\lambda) = N_{012}^1(3\lambda_3 - 1)\widetilde{\Lambda}_1(\lambda), & \text{avec } N_{012}^1 = |\vec{e}_2^h(\lambda_{012})|, \\ \widetilde{\Lambda}_{021}^1(\lambda) = N_{021}^1(3\lambda_2 - 1)\widetilde{\Lambda}_1(\lambda), & \text{avec } N_{021}^1 = |\vec{e}_2^h(\lambda_{021})|, \\ \widetilde{\Lambda}_{111}^1(\lambda) = N_{111}^1 3\lambda_1 \widetilde{\Lambda}_1(\lambda), & \text{avec } N_{111}^1 = \frac{3}{2} |\vec{e}_2^h(\lambda_{111})|. \end{cases}$$

Les fonctions de base associées à l'arête l_2 de \widetilde{K}_h , sont données par :

$$\begin{cases} \widetilde{\Lambda}_{102}^2(\lambda) = N_{102}^2(3\lambda_3 - 1)\widetilde{\Lambda}_2(\lambda), & \text{avec } N_{102}^2 = |\vec{e}_1^h(\lambda_{102})|, \\ \widetilde{\Lambda}_{201}^2(\lambda) = N_{201}^2(3\lambda_1 - 1)\widetilde{\Lambda}_2(\lambda), & \text{avec } N_{201}^2 = |\vec{e}_1^h(\lambda_{201})|, \\ \widetilde{\Lambda}_{111}^2(\lambda) = N_{111}^2 3\lambda_2 \widetilde{\Lambda}_2(\lambda), & \text{avec } N_{111}^2 = \frac{3}{2} |\vec{e}_1^h(\lambda_{111})|. \end{cases}$$

Les fonctions de base associées à l'arête l_3 de \widetilde{K}_h , sont données par :

$$\begin{cases} \widetilde{\Lambda}_{120}^3(\lambda) = N_{120}^3(3\lambda_2 - 1)\widetilde{\Lambda}_3(\lambda), & \text{avec } N_{120}^3 = |\vec{e}_2^h(\lambda_{120}) - \vec{e}_1^h(\lambda_{120})|, \\ \widetilde{\Lambda}_{210}^3(\lambda) = N_{210}^3(3\lambda_1 - 1)\widetilde{\Lambda}_3(\lambda), & \text{avec } N_{210}^3 = |\vec{e}_2^h(\lambda_{210}) - \vec{e}_1^h(\lambda_{210})|, \\ \widetilde{\Lambda}_{111}^3(\lambda) = N_{111}^3 3\lambda_3 \widetilde{\Lambda}_3(\lambda), & \text{avec } N_{111}^3 = \frac{3}{2} |\vec{e}_2^h(\lambda_{111}) - \vec{e}_1^h(\lambda_{111})|. \end{cases}$$

Nous gardons les fonctions de base suivantes $\{\widetilde{\Lambda}_{012}^1, \widetilde{\Lambda}_{021}^1, \widetilde{\Lambda}_{102}^2, \widetilde{\Lambda}_{201}^2, \widetilde{\Lambda}_{120}^3, \widetilde{\Lambda}_{210}^3\}$ associées aux nœuds externes, puisqu'elles forment un ensemble de \mathbb{D}^2 linéairement indépendant.

Il ne reste plus qu'à compléter cet ensemble pour obtenir une base de \mathbb{D}^2 . Les fonctions $\widetilde{\Lambda}_{111}^1$, $\widetilde{\Lambda}_{111}^2$, et $\widetilde{\Lambda}_{111}^3$ interpolant le nœud λ_{111} sont linéairement dépendantes, et ne peuvent-êre rajoutées à l'ensemble déjà obtenu. Nous associons au nœud interne λ_{111} les deux fonctions de base $\widetilde{\Lambda}_{111}^1$ et $\widetilde{\Lambda}_{111}^2$ linéairement indépendantes. $\{\widetilde{\Lambda}_{012}^1, \widetilde{\Lambda}_{021}^1, \widetilde{\Lambda}_{102}^2, \widetilde{\Lambda}_{201}^2, \widetilde{\Lambda}_{120}^3, \widetilde{\Lambda}_{210}^3\}$ est complété avec $\widetilde{\Lambda}_{111}^1$ et $\widetilde{\Lambda}_{111}^2$. Le nouvel ensemble obtenu forme une base de \mathbb{D}^2 , car les fonctions le composant appartiennent à \mathbb{D}^2 , sont linéairement indépendantes, et en nombre égal à la dimension de \mathbb{D}^2 .

Chapitre 4

Intégrales singulières

4.1 Introduction

Cette partie est consacrée au calcul des intégrales singulières apparaissant lors de la résolution des équations de Maxwell par une méthode couplant les équations intégrales (équations intégrales de Després dans notre cas [38]) et les éléments finis surfaciques décrits aux chapitres précédents. Les équations intégrales font intervenir les opérateurs intégraux classiques, à savoir l'opérateur T pour la EFIE (Electric Field Integral Equation) et l'opérateur K pour la MFIE (Magnetic Field Integral Equation) donnés ci-dessous :

$$(TJ, J') = k \int_{E_1} \int_{E_2} G(x, y) \left(J(y) \cdot \overline{J'(x)} - \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_\Gamma J(y) \cdot \overline{\operatorname{div}_\Gamma J'(x)} \right) dE_2(y) dE_1(x), \quad (4.1)$$

$$(KJ, J') = \int_{E_1} \int_{E_2} \left(\nabla_x G(x, y) \wedge J(y) \right) \cdot \overline{J'(x)} dE_2(y) dE_1(x), \quad (4.2)$$

$G(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}$ étant le noyau de Green. E_1 et E_2 représentent deux éléments du maillage Γ_h . J et J' correspondent aux fonctions de base associées aux éléments finis de Raviart-Thomas. E_1 (respectivement E_2) est inclu dans le support de J (respectivement J').

Il apparaît clairement que le noyau de Green et son gradient sont singuliers dans les trois cas suivants :

- E_1 et E_2 sont confondus,
- E_1 et E_2 ont une arête commune,
- E_1 et E_2 ont un sommet commun.

Nous présentons une méthode, due à J. Gay, connue également sous le nom de méthode de Duffy [55], permettant à partir de changements de variables de lever les singularités des opérateurs T et K . Selon la configuration des éléments E_1 et E_2 , et selon l'ordre d'approximation

de la géométrie (éléments plans ou courbes), les opérateurs sont traités de manières différentes. En effet, T a une singularité en $\frac{1}{|x-y|}$, alors que K a une singularité en $\frac{1}{|x-y|^2}$, car

$$\nabla_x G(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|^2} \left(ik - \frac{1}{|x-y|} \right) (x-y).$$

Dans la méthode utilisée, les variables considérées sont les coordonnées barycentriques associées aux sommets des éléments de Γ_h . Cette technique est développée dans [117] et [60]. Le formalisme utilisé est celui introduit dans [83] par Lu, pour traiter le cas où T est singulier lorsque les éléments considérés sont confondus. Parmi les méthodes basées sur les changements de variables, nous pouvons distinguer celles faisant intervenir les coordonnées polaires [75]. Il existe d'autres types de méthodes, comme celle utilisée par Bendali dans [19], combinant avec la méthode d'extraction de la singularité les formules de Stokes et du Laplacien. Pour un aperçu général sur le traitement des intégrales singulières, le lecteur intéressé pourra consulter [76].

4.2 Eléments plans

Soit \hat{T} le triangle de référence dans \mathbb{R}^2 : \hat{T} a pour sommet $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Pour tout triangle plan E plongé dans \mathbb{R}^3 , l'application φ_E effectue une paramétrisation de E par \hat{T} (figure 4.1).

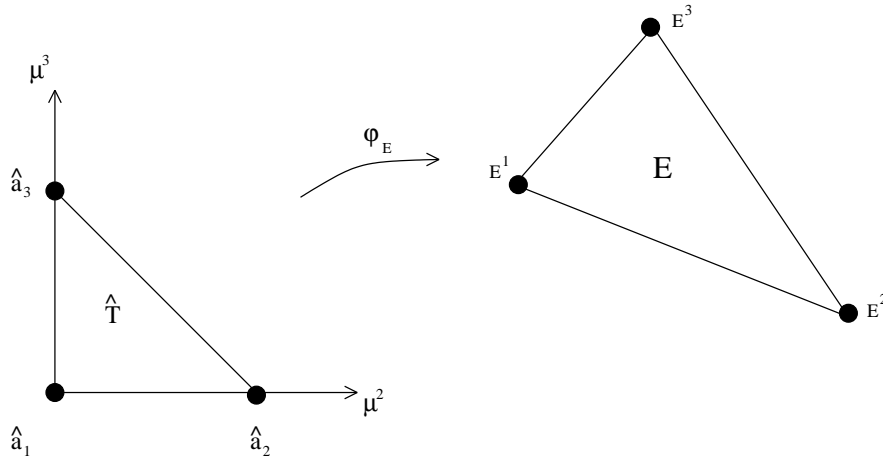


FIG. 4.1 – Paramétrisation des éléments plans.

Une formulation explicite de la paramétrisation du triangle E est donnée par :

$$\begin{aligned} x(\mu^2, \mu^3) &= \varphi_E(\mu^2, \mu^3) \\ &= \sum_{i=1}^3 \varphi_{E,i}(\mu^2, \mu^3) r^i, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où

- x est un point de \mathbb{R}^3 situé sur E ,
- $\{r^i\}_{i=1}^3$ correspond aux rayons vecteurs associés aux sommets $\{E^i\}_{i=1}^3$ de E , (dans les calculs à venir, aucune distinction ne sera faite entre r^i et E^i),
- $\{\mu^i\}_{i=1}^3$ sont les coordonnées barycentriques associées aux sommets de \hat{T} ,
- les fonctions $\{\varphi_{E,i}\}_{i=1}^3$ sont définies par :

$$\varphi_{E,1}(\mu^2, \mu^3) = \mu^1, \quad (4.4)$$

$$\varphi_{E,2}(\mu^2, \mu^3) = \mu^2, \quad (4.5)$$

$$\varphi_{E,3}(\mu^2, \mu^3) = 1 - \mu^1 - \mu^2, \quad (4.6)$$

où $\mu^1 = 1 - \mu^2 - \mu^3$.

Remarque. Les fonctions $\{\varphi_{E,i}\}_{i=1}^3$ vérifient les relations

$$\varphi_{E,i}(\hat{a}_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.7)$$

4.3 Éléments courbes

Soit \hat{T} le triangle de référence dans \mathbb{R}^2 . Pour tout triangle courbe E plongé dans \mathbb{R}^3 , l'application φ_E effectue une paramétrisation de E par \hat{T} (figure 4.2).

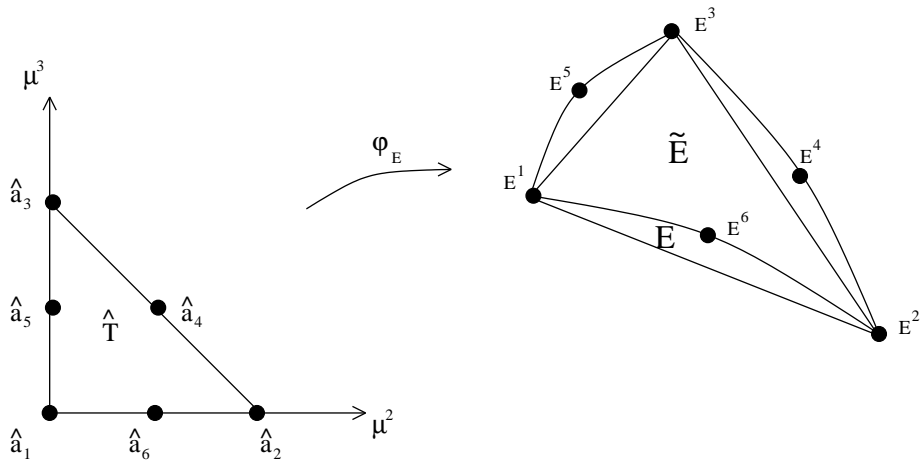


FIG. 4.2 – Paramétrisation des éléments courbes.

Une formulation explicite de la paramétrisation du triangle E est donnée par :

$$x(\mu^2, \mu^3) = \varphi_E(\mu^2, \mu^3) \quad (4.8)$$

$$= \sum_{i=1}^6 \varphi_{E,i}(\mu^2, \mu^3) r^i, \quad (4.9)$$

où

- x est un point de \mathbb{R}^3 situé sur E ,
- $\{r^i\}_{i=1}^6$ correspond aux rayons vecteurs associés aux nœuds $\{E^i\}_{i=1}^6$ de E , (dans les calculs à venir, aucune distinction ne sera faite entre r^i et E^i),
- $\{\mu^i\}_{i=1}^3$ sont les coordonnées barycentriques associées aux sommets de \hat{T} .
- les fonctions $\{\varphi_{E,i}\}_{i=1}^6$ sont définies par :

$$\varphi_{E,1}(\mu^2, \mu^3) = \mu^1(2\mu^1 - 1), \quad (4.10)$$

$$\varphi_{E,2}(\mu^2, \mu^3) = \mu^2(2\mu^2 - 1), \quad (4.11)$$

$$\varphi_{E,3}(\mu^2, \mu^3) = \mu^3(2\mu^3 - 1), \quad (4.12)$$

$$\varphi_{E,4}(\mu^2, \mu^3) = 4\mu^2\mu^3, \quad (4.13)$$

$$\varphi_{E,5}(\mu^2, \mu^3) = 4\mu^1\mu^3, \quad (4.14)$$

$$\varphi_{E,6}(\mu^2, \mu^3) = 4\mu^1\mu^2, \quad (4.15)$$

$$\text{où } \mu^1 = 1 - \mu^2 - \mu^3.$$

Remarque. Les fonctions $\{\varphi_{E,i}\}_{i=1}^6$ vérifient les relations

$$\varphi_{E,i}(\hat{a}_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}. \quad (4.16)$$

Pour évaluer les intégrales singulières posées sur des éléments courbes, deux stratégies différentes sont à disposition. La première est fondée sur l'approximation des éléments courbes à partir de petits éléments plans. Les intégrales sont alors posées sur des éléments plans, et elles sont évaluées en utilisant les méthodes de calcul développées pour les éléments plans.

La seconde stratégie est basée sur des changements de variables permettant de lever la singularité directement à partir des éléments courbes. Cette démarche a, par rapport à la première, l'inconvénient d'être plus difficile à mettre en œuvre, mais elle a les avantages d'être moins coûteuse en temps de calcul et d'être plus précise.

Lorsque des éléments courbes sont considérés, le calcul des intégrales singulières est effectué selon la seconde stratégie exposée. Cependant, nous présentons dans la dernière section de ce chapitre le calcul des intégrales singulières lorsque la première stratégie est considérée.

4.4 E_1 et E_2 sont confondus

4.4.1 Etude de l'opérateur T

Les éléments E_1 et E_2 étant identiques, ils sont notés E .

Nous étudions l'opérateur T . Cet opérateur a une singularité en $\frac{1}{|x-y|}$, et est défini par :

$$I = (TJ, J') = \int_{E_1} \int_{E_2} \frac{F(x, y)}{|x-y|} dE_2(y) dE_1(x), \quad (4.17)$$

où

$$F(x, y) = \frac{k}{4\pi} \exp(ik|x-y|) \left(J(y) \cdot \overline{J'(x)} - \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_\Gamma J(y) \cdot \overline{\operatorname{div}_\Gamma J'(x)} \right). \quad (4.18)$$

En introduisant la paramétrisation de E donnée par (4.3) si E est plan, ou (4.8) si E est courbe, I se réécrit :

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\lambda^2} \int_0^1 \int_0^{1-\mu^2} \frac{H(\lambda^2, \lambda^3, \mu^2, \mu^3)}{|R(\lambda^2, \lambda^3, \mu^2, \mu^3)|} d\mu^3 d\mu^2 d\lambda^3 d\lambda^2, \quad (4.19)$$

avec

$$H(\lambda, \mu) = H(\lambda^2, \lambda^3, \mu^2, \mu^3) = \sqrt{\varphi_E(\lambda)} \sqrt{\varphi_E(\mu)} F(x(\lambda), y(\mu)), \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mu) &= y(\mu) - x(\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^n (\varphi_{E,i}(\mu) - \varphi_{E,i}(\lambda)) r^i, \end{aligned} \quad (4.21)$$

où n vaut 3 si E est plan, et 6 si E est courbe.

Remarque. Lorsque E est plan, nous avons $\sqrt{\varphi_E} = 2\operatorname{mes}(E)$.

I est approchée en utilisant une quadrature selon λ :

$$I \simeq \sum_g \omega_g \int_0^1 \int_0^{1-\mu^2} \frac{H(\lambda_g^2, \lambda_g^3, \mu^2, \mu^3)}{|R(\lambda_g^2, \lambda_g^3, \mu^2, \mu^3)|} d\mu^3 d\mu^2 = \sum_g \omega_g I(\lambda_g), \quad (4.22)$$

ω_g et λ_g représentant respectivement les poids et les points de la quadrature utilisée.

Remarque. La quadrature choisie est une quadrature de Gauss dont les points sont situés à l'intérieur du domaine d'intégration E .

Nous réécrivons $R(\lambda_g, \mu)$:

$$R(\lambda_g, \mu) = \sum_{\substack{l+k=0 \\ 0 \leq l, k \leq 2}}^2 (\mu^2 - \lambda_g^2)^l (\mu^3 - \lambda_g^3)^k P_{lk}, \quad (4.23)$$

où $P_{lk} = \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mu^2 \mu^3}^\alpha R(\lambda_g, \mu)$, $\alpha = (l, k)$, $\alpha! = l!k!$ et $\partial_{\mu^2 \mu^3}^\alpha = \partial_{\mu^2}^l \partial_{\mu^3}^k$. Les coefficients P_{lk} sont donnés dans le tableau 4.1.

Coefficients P_{lk}	E plan	E courbe
P_{00}	0	0
P_{10}	$\overrightarrow{r^1 r^2}$	$4\lambda_g^1 \overrightarrow{r^1 r^6} + \overrightarrow{r^2 r^1} + 4\lambda_g^3 \overrightarrow{r^5 r^4} + 4\lambda_g^2 \overrightarrow{r^6 r^2}$
P_{01}	$\overrightarrow{r^1 r^3}$	$\overrightarrow{r^3 r^1} + 4\lambda_g^2 \overrightarrow{r^6 r^4} + 4\lambda_g^1 \overrightarrow{r^1 r^5} + 4\lambda_g^3 \overrightarrow{r^5 r^3}$
P_{11}	0	$4\overrightarrow{r^5 r^4} + 4\overrightarrow{r^6 r^1}$
P_{20}	0	$2\overrightarrow{r^6 r^1} + 2\overrightarrow{r^6 r^2}$
P_{02}	0	$2\overrightarrow{r^5 r^1} + 2\overrightarrow{r^5 r^3}$

TAB. 4.1 – Coefficients intervenant dans le développement (4.23).

Nous allons évaluer l'intégrale $I(\lambda_g)$, qui est singulière lorsque $\mu = \lambda_g$. A partir de $\mu = \lambda_g$, \hat{T} est subdivisé en trois zones en reliant chaque sommet de \hat{T} à λ_g (figure 4.3). Ceci revient à diviser E en trois zones en reliant chaque sommet à $x(\lambda_g)$.

Nous avons donc :

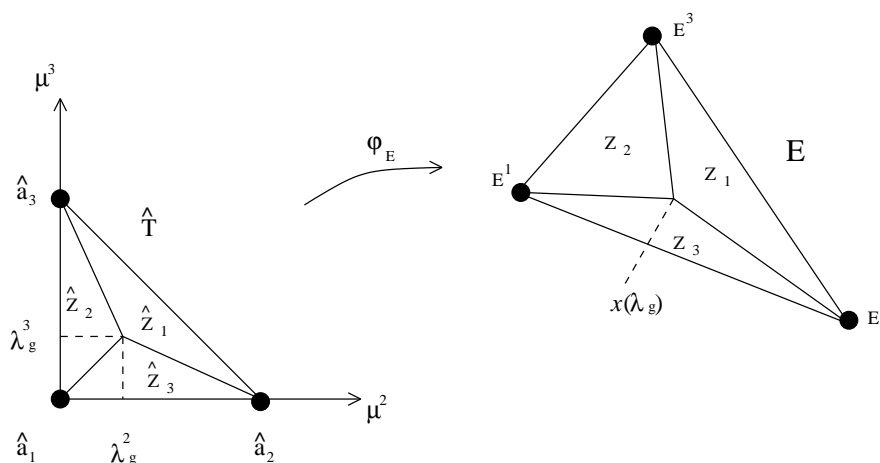


FIG. 4.3 – Eléments confondus.

$$I(\lambda_g) = \sum_{j=1}^3 \int_{\hat{Z}_j} \frac{H(\lambda_g, \mu)}{|R(\lambda_g, \mu)|} d\mu = \sum_{j=1}^3 I_j(\lambda_g). \quad (4.24)$$

Pour chaque zone, un premier changement de variables est effectué afin de ramener la singularité $(\lambda_g^2, \lambda_g^3)$ en $(0, 0)$ (tableau 4.2).

Zone	Changement de variables		Jacobien
\hat{Z}_1	$\mu^2 = \lambda_g^2(1 - u)$	$\mu^3 = \lambda_g^3 + (1 - \lambda_g^3)u - v$	$Jac_1 = \lambda_g^2$
\hat{Z}_2	$\mu^2 = \lambda_g^2(1 - u) + v$	$\mu^3 = \lambda_g^3(1 - u)$	$Jac_2 = \lambda_g^3$
\hat{Z}_3	$\mu^2 = \lambda_g^2 + (1 - \lambda_g^2)u - v$	$\mu^3 = \lambda_g^3(1 - u) + v$	$Jac_3 = 1 - \lambda_g^2 - \lambda_g^3$

TAB. 4.2 – Changements de variables ramenant dans les zones \hat{Z}_1 , \hat{Z}_2 et \hat{Z}_3 la singularité $(\mu^2, \mu^3) = (\lambda_g^2, \lambda_g^3)$ de (4.24) en $(u, v) = (0, 0)$.

Nous avons donc :

$$I_j(\lambda_g) = \int_0^1 \int_0^u \frac{H_j(\lambda_g, u, v)}{|R_j(\lambda_g, u, v)|} Jac_j dv du, \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.25)$$

où

- $H_j(\lambda_g, u, v) = H \circ \psi_j(\lambda_g, u, v)$, ψ_j étant le changement de variables associé à \hat{Z}_j ,
- $R_j(\lambda_g, u, v) = R \circ \psi_j(\lambda_g, u, v)$, et nous avons les résultats suivants :

$$R_1(\lambda_g, u, v) = \sum_{\substack{l+k=1 \\ 0 \leq l, k \leq 2}}^2 (-\lambda_g^2 u)^l ((1 - \lambda_g^3)u - v)^k P_{lk}, \quad (4.26)$$

$$R_2(\lambda_g, u, v) = \sum_{\substack{l+k=1 \\ 0 \leq l, k \leq 2}}^2 (-\lambda_g^2 u + v)^l (-\lambda_g^3 u)^k P_{lk}, \quad (4.27)$$

$$R_3(\lambda_g, u, v) = \sum_{\substack{l+k=1 \\ 0 \leq l, k \leq 2}}^2 ((1 - \lambda_g^2)u - v)^l (-\lambda_g^3 u + v)^k P_{lk}. \quad (4.28)$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à lever la singularité, ce qui se fait en posant $v = tu$. Nous avons donc :

$$I_j(\lambda_g) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{H_j(\lambda_g, u, tu)}{|R_j^0(\lambda_g, t)|} Jac_j dt du, \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.29)$$

où R_j^0 est défini par $R_j(\lambda_g, u, tu) = uR_j^0(\lambda_g, t)$, et est donné par :

$$R_1^0(\lambda_g, t) = \sum_{\substack{l+k=1 \\ 0 \leq l, k \leq 2}}^2 u^{l+k-1} (-\lambda_g^2)^l (1 - \lambda_g^3 - t)^k P_{lk}, \quad (4.30)$$

$$R_2^0(\lambda_g, t) = \sum_{\substack{l+k=1 \\ 0 \leq l, k \leq 2}}^2 u^{l+k-1} (t - \lambda_g^2)^l (-\lambda_g^3)^k P_{lk}, \quad (4.31)$$

$$R_3^0(\lambda_g, t) = \sum_{\substack{l+k=1 \\ 0 \leq l, k \leq 2}}^2 u^{l+k-1} (1 - \lambda_g^2 - t)^l (t - \lambda_g^3)^k P_{lk}. \quad (4.32)$$

L'intégrale (4.29) n'étant plus singulière, elle peut être évaluée au moyen d'une quadrature de Gauss.

4.4.2 Etude de l'opérateur K

L'opérateur K est défini par :

$$(KJ, J') = \int_E \int_E \left(\nabla_x G(x, y) \wedge J(y) \right) \cdot \overline{J'(x)} dE(y) dE(x). \quad (4.33)$$

E est plan

Lorsque E est plan, la fonction de base J est donnée par :

$$J(y) = P(y) \frac{y - E^i}{\sqrt{\varphi_E(y)}}, \quad (4.34)$$

où P représente un polynôme scalaire, $\sqrt{\varphi_E(y)}$ correspond au jacobien associé à la transformation $\varphi_E(\hat{T}) = E$ (ici $\sqrt{\varphi_E(y)} = 2mes(E)$) et i prend la valeur 1, 2, ou 3 suivant la fonction de base considérée. J' s'écrit de la même manière que J .

D'après (4.34), J et J' sont dans le plan tangent de E , qui n'est autre que E lui-même. Le produit vectoriel de J et de J' est donc normal à E . Or, le gradient du noyau de Green est dirigé selon le vecteur $x - y$, qui est dans le plan de E , car x et y appartiennent tous deux à E . Le produit scalaire du gradient du noyau de Green et du produit vectoriel de J et de J' est par conséquent nul. Nous avons donc :

$$(KJ, J') = 0. \quad (4.35)$$

E est courbe

Lorsque E est courbe, l'intégrale liée à l'opérateur K est évaluée par l'intermédiaire d'une intégration par parties afin de se ramener au cas précédent. Nous avons :

$$\begin{aligned}
(KJ, J') &= \int_E \int_E \left(\nabla_x G(x, y) \wedge J(y) \right) \cdot \overline{J'(x)} dE(y) dE(x), \\
&\simeq \sum_{x_g} \omega_g \int_E \nabla_x G(x, x_g) \cdot \left(J(x_g) \wedge \overline{J'(x)} \right) dE(x), \\
&\simeq \sum_{x_g} \omega_g \left(\int_E \operatorname{div}_x (G(x, x_g) J(x_g) \wedge \overline{J'(x)}) dE(x) \right. \\
&\quad \left. - \int_E G(x, x_g) \operatorname{div}_x (J(x_g) \wedge \overline{J'(x)}) dE(x) \right). \tag{4.36}
\end{aligned}$$

La seconde intégrale peut être calculée avec ce qui a été vu auparavant. Pour la première intégrale, nous avons :

$$\int_E \operatorname{div}_x (G(x, x_g) J(x_g) \wedge \overline{J'(x)}) dE(x) = \int_{\partial E} G(x, x_g) (J(x_g) \wedge \overline{J'(x)}) \cdot n_{\partial E}(x) d\partial E(x). \tag{4.37}$$

Cette dernière intégrale n'est plus singulière, car les points de quadrature x_g ont été pris à l'intérieur de E .

4.5 E_1 et E_2 ont une arête commune

Dans cette partie, nous nous contenterons de lever la singularité associée à l'opérateur T défini par (4.17), car l'intégrale liée à l'opérateur K s'évalue de la même façon. Nous considérons les éléments E_1 et E_2 dans la configuration donnée par la figure 4.4, où $\{E_1^i\}_{i=1}^3$ (respectivement $\{E_2^i\}_{i=1}^3$) sont les sommets de E_1 (respectivement E_2).

En employant les coordonnées barycentriques associées à E_1 et à E_2 , (4.17) se réécrit :

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\lambda^2} \int_0^1 \int_0^{1-\mu^2} \frac{H(\lambda^2, \lambda^3, \mu^2, \mu^3)}{|R(\lambda^2, \lambda^3, \mu^2, \mu^3)|} d\mu^3 d\mu^2 d\lambda^3 d\lambda^2. \tag{4.38}$$

En posant $\lambda^1 = 1 - \lambda^2 - \lambda^3$ et $\mu^1 = 1 - \mu^2 - \mu^3$, il apparaît clairement que I est singulière quand $\lambda^1 = \mu^1 = 0$ et $\lambda^2 + \mu^2 = 1$.

Nous posons :

$$\lambda^2 = (1 - \gamma^1)(1 - \gamma^2), \tag{4.39}$$

$$\lambda^3 = (1 - \gamma^1)\gamma^2, \tag{4.40}$$

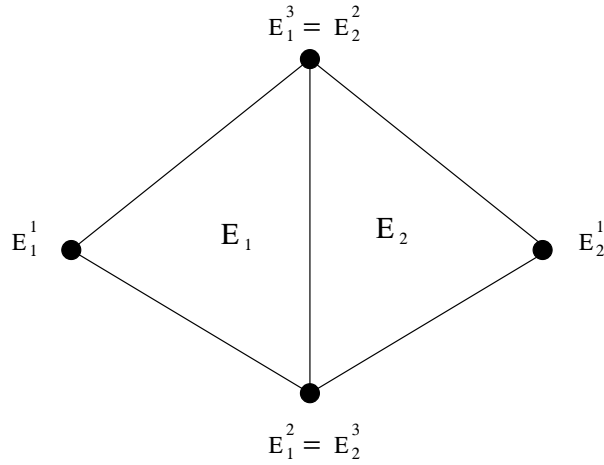


FIG. 4.4 – Eléments ayant une arête commune.

et

$$\mu^2 = (1 - \delta^1)(1 - \delta^2), \quad (4.41)$$

$$\mu^3 = (1 - \delta^1)\delta^2. \quad (4.42)$$

Cette transformation change le domaine d'intégration $\hat{T} \times \hat{T}$ en $[0, 1]^2 \times [0, 1]^2$. La singularité apparaît lorsque $\gamma^1 = \delta^1 = 0$ et $\gamma^2 + \delta^2 = 1$. Le jacobien associé à cette transformation est $(1 - \gamma^1)(1 - \delta^1)$. Nous avons :

$$x(\gamma^1, \gamma^2) = \sum_{0 \leq l, k \leq 2} (\gamma^1)^l (\gamma^2)^k P_{lk}, \quad (4.43)$$

les coefficients P_{lk} étant définis dans le tableau 4.3.

Nous avons :

Coefficients P_{lk}	E_1 plan	E_1 courbe
P_{00}	E_1^2	E_1^2
P_{10}	$E_1^1 - E_1^2$	$-E_1^1 - 3E_1^2 + 4E_1^6$
P_{20}	0	$2E_1^1 + 2E_1^2 + 4E_1^6$
P_{12}	0	$-4E_1^2 - 4E_1^3 + 8E_1^4$
P_{02}	0	$2E_1^2 + 2E_1^3 - 4E_1^4$
P_{21}	0	$4(-E_1^2 + E_1^4 - E_1^5 + E_1^6)$
P_{22}	0	$2E_1^2 + 2E_1^3 - 4E_1^4$
P_{11}	$E_1^2 - E_1^3$	$7E_1^2 - 8E_1^4 + 4E_1^5 - 4E_1^6 + E_1^3$
P_{01}	$-E_1^2 + E_1^3$	$-3E_1^2 - E_1^3 + 4E_1^4$

TAB. 4.3 – Coefficients intervenant dans le développement (4.43).

$$y(\delta^1, \delta^2) = \sum_{0 \leq l, k \leq 2} (\delta^1)^l (\delta^2)^k Q_{lk}, \quad (4.44)$$

les coefficients Q_{lk} s'obtenant à partir des coefficients P_{lk} en remplaçant E_1 par E_2 dans le tableau 4.3.

Par un changement de variables, la singularité est ramenée en $\gamma^1 = \delta^1 = \omega = 0$. Nous décomposons le domaine d'intégration $[0, 1]^2$ associé aux variables γ^2 et δ^2 (cf figure 4.5), et nous posons :

– pour T_1 :

$$\gamma^2 = (1 - \omega)u, \quad (4.45)$$

$$\delta^2 = (1 - \omega)(1 - u), \quad (4.46)$$

– pour T_2 :

$$\gamma^2 = (1 - \omega)u + \omega, \quad (4.47)$$

$$\delta^2 = (1 - \omega)(1 - u) + \omega. \quad (4.48)$$

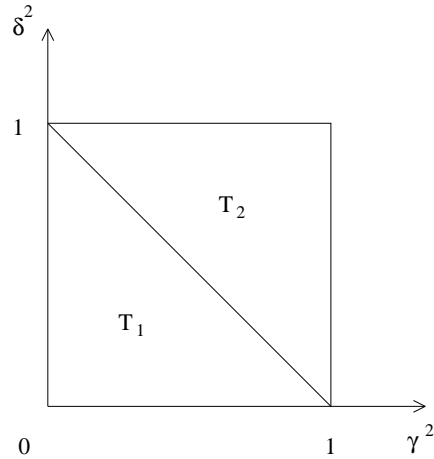


FIG. 4.5 – Subdivision du domaine d'intégration $[0, 1]^2$ en les variables γ^2 et δ^2 .

Suite aux changements de variables ci-dessus, nous obtenons le tableau 4.4.

Zone	λ^2	λ^3	μ^2	μ^3	Jacobien
T_1	$(1 - \gamma^1)$ $(1 - (1 - \omega)u)$	$(1 - \gamma^1)$ $(1 - \omega)u$	$(1 - \delta^1)$ $(1 - (1 - \omega)(1 - u))$	$(1 - \delta^1)$ $(1 - \omega)(1 - u)$	$1 - \omega$
T_2	$(1 - \gamma^1)$ $(1 - \omega)(1 - u)$	$(1 - \gamma^1)$ $(1 + \omega - \omega u)$	$-(1 - \delta^1)$ $(1 - \omega)u$	$(1 - \delta^1)$ $(1 - u + \omega u)$	$1 - \omega$

TAB. 4.4 – Changements de variables ramenant la singularité en $(\gamma^1, \delta^1, \gamma^2 + \delta^2) = (0, 0, 1)$ de (4.38) en $(\gamma^1, \delta^1, \omega) = (0, 0, 0)$.

Le domaine d'intégration devient $[0, 1]^4$.

Nous avons :

1. lorsque E_1 et E_2 sont plans :

– pour T_1 :

$$\begin{aligned} x - y &= \gamma^1 E_1^1 - \delta^1 E_2^1 \\ &+ (\omega + \delta^1(1 - \omega)(1 - u) - \gamma^1(1 - (1 - \omega)u))E_1^2 \\ &+ (\delta^1(1 - (1 - \omega)(1 - u)) - \omega - \gamma^1(1 - \omega)u)E_1^3, \end{aligned} \quad (4.49)$$

– pour T_2 :

$$\begin{aligned} x - y &= \gamma^1 E_1^1 - \delta^1 E_2^1 \\ &+ (\gamma^1((1 - \omega)u + \omega) + \delta^1((1 - \omega)(1 - u) + \omega) - \gamma^1 - \omega)E_1^2 \\ &+ (\gamma^1((1 - \omega)u + \omega) + \delta^1((1 - \omega)(1 - u) + \omega) - \delta^1 - \omega)E_1^3, \end{aligned} \quad (4.50)$$

2. lorsque E_1 et E_2 sont courbes :

– pour T_1 :

$$x - y = \sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} ((\gamma^1)^l (1 - \omega)^k u^k P_{lk} - (\delta^1)^l (1 - \omega)^k (1 - u)^k Q_{lk}) \quad (4.51)$$

$$+ \sum_{k=0}^2 ((1 - \omega)^k u^k P_{0k} - (1 - \omega)^k (1 - u)^k Q_{0k})$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} ((\gamma^1)^l (1 - \omega)^k u^k P_{lk} - (\delta^1)^l (1 - \omega)^k (1 - u)^k Q_{lk}) \quad (4.52)$$

$$+ \omega((4u - 2)\omega - 4u + 3)E_1^2 + ((4u - 2)\omega + 1 - 4u)E_1^3 \\ + 4(2u - 1)(1 - \omega)E_1^4,$$

– pour T_2 :

$$x - y = \sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} ((\gamma^1)^l (1 + \omega - \omega u)^k P_{lk} - (\delta^1)^l (1 - u + \omega u)^k Q_{lk}) \quad (4.53)$$

$$+ \sum_{k=0}^2 ((1 + \omega - \omega u)^k P_{0k} - (1 - u + \omega u)^k Q_{0k})$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} ((\gamma^1)^l (1 + \omega - \omega u)^k P_{lk} - (\delta^1)^l (1 - u + \omega u)^k Q_{lk}) \quad (4.54)$$

$$+ \omega((-3 + 4u + 2\omega - 4\omega u)E_1^2 + (-1 + 4u + 2\omega - 4\omega u)E_1^3 \\ + (4 - 8u - 4\omega + 8\omega u)E_1^4).$$

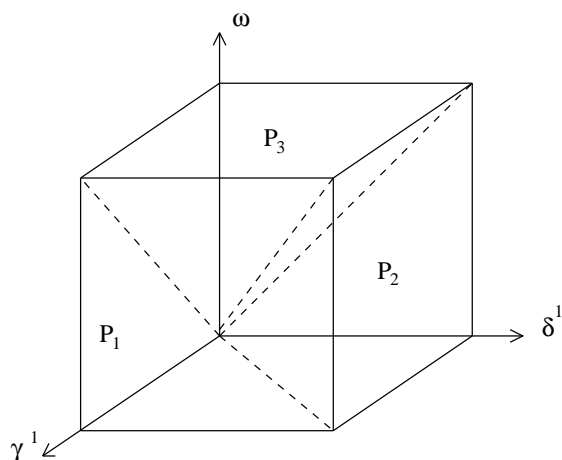


FIG. 4.6 – Subdivision du domaine d'intégration $[0, 1]^3$ en les variables γ^1 , δ^1 et ω en trois zones pyramidales.

Zone	γ^1	δ^1	ω	Jacobien
P_1	ξ	$\xi\eta$	$\xi\tau$	ξ^2
P_2	$\xi\eta$	η	$\eta\tau$	η^2
P_3	$\xi\tau$	$\eta\tau$	τ	τ^2

TAB. 4.5 – Changements de variables provenant de la subdivision de $[0, 1]^3$ en trois zones pyramidales.

La singularité est située en $\gamma^1 = \delta^1 = \omega = 0$. Pour lever cette singularité, le domaine d'intégration $[0, 1]^3$ en les variables γ^1 , δ^1 et ω est découpé en trois zones pyramidales comme indiqué par la figure 4.6. Nous effectuons les changements de variables décrits dans le tableau 4.5.

Le domaine d'intégration en les variables ξ , η , τ et u est $[0, 1]^4$. Les résultats obtenus, sont résumés lorsque E_1 et E_2 sont plans dans le tableau 4.6, et lorsque E_1 et E_2 sont courbes dans le tableau 4.7. Grâce à ces divers changements de variables, l'intégrale obtenue n'est plus singulière, et son évaluation peut se faire au moyen d'une quadrature de Gauss classique.

Remarque. *L'intégrale liée à l'opérateur K , bien qu'ayant une singularité en $\frac{1}{|R|^2}$ s'évalue de la même façon que précédemment.*

Zone		$x - y$
T_1	P_1	$\xi(E_1^1 - \eta E_2^1 + (\tau + (1 - \xi\tau)(\eta(1 - u) + u))E_1^2 + (\eta - \tau - (1 - \xi\tau)(\eta(1 - u) + u))E_1^3)$
	P_2	$\eta(\xi E_1^1 - E_2^1 + (\tau - \xi + (1 - \eta\tau)(1 - u + \xi u))E_1^2 + (1 - \tau - (1 - \eta\tau)(1 - u + \xi u))E_1^3)$
	P_3	$\tau(\xi E_1^1 - \eta E_2^1 + (1 - \xi + (1 - \tau)(\eta + (\xi - \tau)u))E_1^2 + (\eta - 1 - (1 - \tau)(\eta + (\xi - \eta)u))E_1^3)$
T_2	P_1	$\xi(E_1^1 - \eta E_2^1 + ((1 - \xi\tau)u + \xi\tau + \eta((1 - \xi\tau)(1 - u) + \xi\tau) - \tau - 1)E_1^2 - ((1 - \xi\tau)u + \xi\tau - \tau + \eta((1 - \xi\tau)(1 - u) + \xi\tau - 1))E_1^3)$
	P_2	$\eta(\xi E_1^1 - E_2^1 + (\xi((1 - \eta\tau)u + \eta\tau) + (1 - \eta\tau)(1 - u) + \eta\tau - \tau - \xi)E_1^2 - (\xi((1 - \eta\tau)u + \eta\tau) + (1 - \eta\tau)(1 - u) + \eta\tau - \tau - 1)E_1^3)$
	P_3	$\tau(\xi E_1^1 - \eta E_2^1 + (\xi((1 - \tau)u + \tau) + \eta((1 - \tau)(1 - u) + \tau) - \xi - 1)E_1^2 - (\xi((1 - \tau)u + \tau) + \eta((1 - \tau)(1 - u) + \tau) - \eta - 1)E_1^3)$

TAB. 4.6 – Changements de variables levant la singularité dans le cas où E_1 et E_2 ont une arête commune et sont des éléments plans.

4.6 E_1 et E_2 ont un sommet commun

Dans cette partie, nous nous contenterons de lever la singularité associée à l'opérateur T défini par (4.17). Nous considérons les éléments E_1 et E_2 dans la configuration suivante :

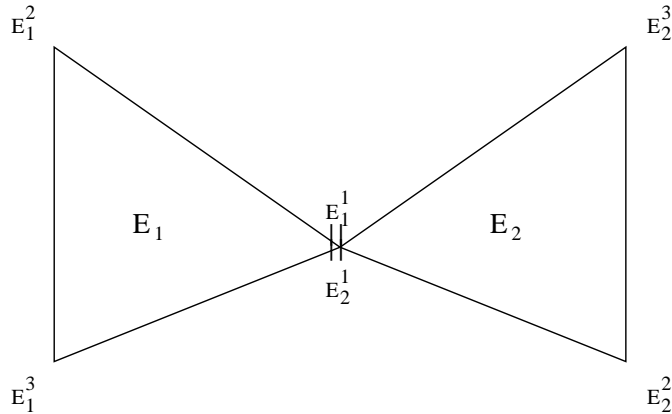


FIG. 4.7 – Eléments ayant un sommet commun.

Zone	$x - y$	
T_1	P_1	$\xi(\sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} (\xi^{l-1}(1 - \xi\tau)^k u^k P_{lk} - \xi^{l-1}\eta^l(1 - \xi\tau)^k(1 - u)^k Q_{lk})$ $+\tau(((4u - 2)\xi\tau - 4u + 3)E_1^2 + ((4u - 2)\xi\tau + 1 - 4u)E_1^3 + 2(4u - 2)(1 - \xi\tau)E_1^4))$
	P_2	$\eta(\sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} (\xi^l \eta^{l-1}(1 - \eta\tau)^k u^k P_{lk} - \eta^{l-1}(1 - \eta\tau)^k(1 - u)^k Q_{lk})$ $+\tau(((4u - 2)\eta\tau - 4u + 3)E_1^2 + ((4u - 2)\eta\tau + 1 - 4u)E_1^3 + 4(2u - 1)(1 - \eta\tau)E_1^4))$
	P_3	$\tau(\sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} (\xi^l \tau^{l-1}(1 - \tau)^k u^k P_{lk} - \eta^l \tau^{l-1}(1 - \tau)^k(1 - u)^k Q_{lk})$ $+((4u - 2)\tau - 4u + 3)E_1^2 + ((4u - 2)\tau + 1 - 4u)E_1^3 + 4(2u - 1)(1 - \tau)E_1^4)$
T_2	P_1	$\xi(\sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} (\xi^{l-1}((1 - \xi\tau)u + \xi\tau)^k P_{lk} - \xi^{l-1}\eta^l((1 - \xi\tau)(1 - u) + \xi\tau)^k Q_{lk})$ $+\tau((4(1 - \xi\tau)u + 2\xi\tau - 3)E_1^2 + (-1 + 4u - 2\xi\tau(2u - 1))E_1^3$ $+4(1 - 2u - \xi\tau + 2u\xi\tau)E_1^4))$
	P_2	$\eta(\sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} (\xi^l \eta^{l-1}((1 - \eta\tau)u + \eta\tau)^k P_{lk} - \eta^{l-1}((1 - \eta\tau)(1 - u) + \eta\tau)^k Q_{lk})$ $+\tau((4(1 - \eta\tau)u + 2\eta\tau - 3)E_1^2 + (-1 + 4u - 2\eta\tau(2u - 1))E_1^3$ $+4(1 - 2u - \eta\tau + 2\eta\tau u)E_1^4))$
	P_3	$\tau(\sum_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 2}} (\xi^l \tau^{l-1}((1 - \tau)u + \tau)^k P_{lk} - \eta^l \tau^{l-1}((1 - \tau)(1 - u) + \tau)^k Q_{lk})$ $+4(1 - \tau)u + 2\tau - 3)E_1^2 + (-1 + 4u - 2\tau(2u - 1))E_1^3 + 4(1 - 2u - \tau + 2\tau u)E_1^4)$

TAB. 4.7 – Changements de variables levant la singularité dans le cas où E_1 et E_2 ont une arête commune et sont des éléments courbes.

où $\{E_1^i\}_{i=1}^3$ (respectivement $\{E_2^i\}_{i=1}^3$) sont les sommets de E_1 (respectivement E_2).

En employant les coordonnées barycentriques associées à E_1 et à E_2 , (4.17) se réécrit :

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\lambda^2} \int_0^1 \int_0^{1-\mu^2} \frac{H(\lambda^2, \lambda^3, \mu^2, \mu^3)}{|R(\lambda^2, \lambda^3, \mu^2, \mu^3)|} d\mu^3 d\mu^2 d\lambda^3 d\lambda^2. \quad (4.55)$$

En posant $\lambda^1 = 1 - \lambda^2 - \lambda^3$ et $\mu^1 = 1 - \mu^2 - \mu^3$, la singularité apparaît quand $\lambda^1 = \mu^1 = 1$, i.e. $\lambda^2 + \lambda^3 = \mu^2 + \mu^3 = 0$.

A partir des changements de variables suivants :

$$\lambda^2 = \gamma^1(1 - \gamma^2), \quad (4.56)$$

$$\lambda^3 = \gamma^1\gamma^2, \quad (4.57)$$

et

$$\mu^2 = \delta^1(1 - \delta^2), \quad (4.58)$$

$$\mu^3 = \delta^1\delta^2, \quad (4.59)$$

nous avons :

$$I = \int_{[0,1]^2} \underbrace{\left(\int_{[0,1]^2} \frac{H(\gamma^1, \gamma^2, \delta^1, \delta^2)}{|R|} \gamma^1 \delta^1 d\gamma^1 d\delta^1 \right)}_J d\gamma^2 d\delta^2. \quad (4.60)$$

Nous avons aussi :

$$x(\lambda) = \sum_{0 \leq l, k \leq 2} (\gamma^1)^l (\gamma^2)^k P_{lk}, \quad (4.61)$$

où les coefficients P_{lk} sont définis dans le tableau 4.8.

Coefficients P_{lk}	E_1 plan	E_1 courbe
P_{00}	E_1^1	E_1^1
P_{10}	$-E_1^1 + E_1^2$	$-3E_1^1 - E_1^2 + 4E_1^6$
P_{20}	0	$2E_1^1 + 2E_1^2 - 4E_1^6$
P_{21}	0	$-4E_1^2 + 4E_1^4 - 4E_1^5 + 4E_1^6$
P_{22}	0	$2E_1^2 + E_1^3 - 4E_1^4$
P_{11}	$-E_1^2 + E_1^3$	$E_1^2 - E_1^3 + 4E_1^5 - 4E_1^6$
P_{01}	0	0
P_{02}	0	0
P_{12}	0	0

TAB. 4.8 – Coefficients intervenant dans le développement (4.61).

Nous avons :

$$y(\delta^1, \delta^2) = \sum_{0 \leq l, k \leq 2} (\delta^1)^l (\delta^2)^k Q_{lk}, \quad (4.62)$$

les coefficients Q_{lk} s'obtenant à partir des coefficients P_{lk} en remplaçant E_1 par E_2 dans le tableau 4.8.

La singularité se trouve en $\gamma^1 = \delta^1 = 0$. Le domaine d'intégration de J est découpé comme indiqué à la figure 4.8.

Nous avons alors :

$$J = \int_{T_1} \left(\frac{H(\gamma^1, \gamma^2, \delta^1, \delta^2)}{|R_1|} + \frac{H(\delta^1, \gamma^2, \gamma^1, \delta^2)}{|R_2|} \right) \gamma^1 \delta^1 d\gamma^1 d\delta^1. \quad (4.63)$$

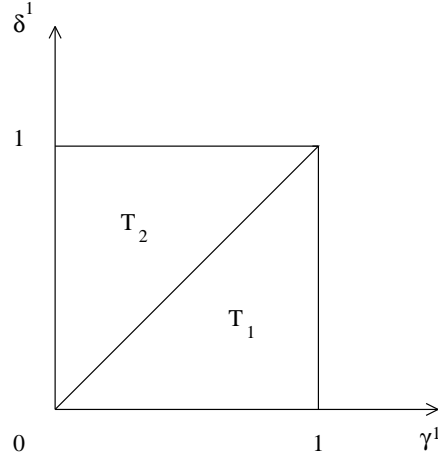


FIG. 4.8 – Subdivision du domaine d'intégration $[0, 1]^2$ de J .

En posant $\delta^1 = t\gamma^1$, la singularité est levée, et nous avons :

$$J = \int_{[0,1]^2} \left(\frac{H(\gamma^1, \gamma^2, t\gamma^1, \delta^2)}{|R_1|} + \frac{H(t\gamma^1, \gamma^2, \gamma^1, \delta^2)}{|R_2|} \right) t(\gamma^1)^3 d\gamma^1 d\delta^1, \quad (4.64)$$

avec

1. lorsque E_1 et E_2 sont plans :

$$R_1 = \gamma^1((1 - \gamma^2)\overrightarrow{E_1^1 E_1^2} + \gamma^2\overrightarrow{E_1^1 E_1^3} - (1 - \delta^2)t\overrightarrow{E_2^1 E_2^2} - t\gamma^2\overrightarrow{E_2^1 E_2^3}), \quad (4.65)$$

$$R_2 = \gamma^1((1 - \gamma^2)t\overrightarrow{E_1^1 E_1^2} + \gamma^2 t\overrightarrow{E_1^1 E_1^3} - (1 - \delta^2)\overrightarrow{E_2^1 E_2^2} - \gamma^2\overrightarrow{E_2^1 E_2^3}), \quad (4.66)$$

2. lorsque E_1 et E_2 sont courbes :

$$R_1 = \gamma^1(P_{10} - tQ_{10} + \gamma^1(P_{20} - t^2Q_{20} + \gamma^2P_{21} - t^2\delta^2Q_{21} + (\gamma^2)^2P_{22} - t^2(\delta^2)^2Q_{22}) + \gamma^2P_{11} - t\delta^2Q_{11}), \quad (4.67)$$

$$R_2 = \gamma^1(tP_{10} - Q_{10} + \gamma^1(t^2P_{20} - Q_{20} + t^2\gamma^2P_{21} - \delta^2Q_{21} + t^2(\gamma^2)^2P_{22} - (\delta^2)^2Q_{22}) + \gamma^2tP_{11} - \delta^2Q_{11}). \quad (4.68)$$

Remarque. Les changements de variables ci-dessus permettent aussi de lever la singularité en $\frac{1}{|R|^2}$ de l'opérateur K .

4.7 Facétisation des éléments courbes

En utilisant les paramétrisations de E_1 et de E_2 , (4.1) se réécrit :

$$(TJ, J') = k \int_{\hat{T}} \int_{\hat{T}} G(x(\lambda), y(\mu)) \left(\frac{J_*(y(\mu))}{\sqrt{\varphi_{E_2}(\mu)}} \cdot \frac{\overline{J'_*(x(\lambda))}}{\sqrt{\varphi_{E_1}(\lambda)}} \right. \\ \left. - \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\varphi_{E_2}(\mu)}} \sum_{\alpha=2}^3 \partial_{\mu^\alpha} J_*^\alpha(y(\mu)) \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi_{E_1}(\lambda)}} \sum_{\beta=2}^3 \partial_{\lambda^\beta} J_*'^\beta(x(\lambda)) \right) \sqrt{\varphi_{E_2}(\mu)} \sqrt{\varphi_{E_1}(\lambda)} d\mu d\lambda, \quad (4.69)$$

où $\sqrt{\varphi_{E_2}(\mu)} = |\partial_{\mu^2} y \wedge \partial_{\mu^3} y|$ et $\sqrt{\varphi_{E_1}(\lambda)} = |\partial_{\lambda^2} x \wedge \partial_{\lambda^3} x|$ sont les jacobiens associés aux transformations $\varphi_{E_1}(\hat{T}) = E_1$ et $\varphi_{E_2}(\hat{T}) = E_2$.

Les fonctions J et J' sont telles que :

$$J(y(\mu)) = \frac{J_*(y(\mu))}{\sqrt{\varphi_{E_2}(\mu)}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{E_2}(\mu)}} \sum_{\alpha=2}^3 J_*^\alpha(y(\mu)) \partial_{\mu^\alpha} y(\mu), \quad (4.70)$$

$$J'(x(\lambda)) = \frac{J'_*(x(\lambda))}{\sqrt{\varphi_{E_1}(\lambda)}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{E_1}(\lambda)}} \sum_{\beta=2}^3 J_*'^\beta(x(\lambda)) \partial_{\lambda^\beta} x(\lambda). \quad (4.71)$$

(4.69) se réécrit :

$$(TJ, J') = k \int_{\hat{T}} \int_{\hat{T}} G(x(\lambda), y(\mu)) H(x(\lambda), y(\mu)) d\mu d\lambda, \quad (4.72)$$

avec $H(x(\lambda), y(\mu)) = \left(J_*(y(\mu)) \cdot \overline{J'_*(x(\lambda))} - \frac{1}{k^2} \sum_{\alpha=2}^3 \partial_{\mu^\alpha} J_*^\alpha(y(\mu)) \cdot \sum_{\beta=2}^3 \partial_{\lambda^\beta} J_*'^\beta(x(\lambda)) \right)$.

Le triangle courbe E_1 est raffiné (figure 4.9) en subdivisant le triangle plan \widetilde{E}_1 lui étant associé en quatre triangles égaux. Le procédé se poursuit ainsi jusqu'à un ordre M .

Nous avons :

$$\widetilde{E}_1 = \bigcup_{\delta=1}^{4^M} \widetilde{E}_1^\delta \quad \text{et} \quad E_1 = \bigcup_{\delta=1}^{4^M} E_1^\delta. \quad (4.73)$$

Nous faisons de même pour les triangles E_2 et \widetilde{E}_2 . En posant $T(E_1, E_2) = (TJ, J')$, nous avons :

$$T(E_1, E_2) = \sum_{\delta, \gamma=1}^{4^M} T(E_1^\delta, E_2^\gamma), \quad (4.74)$$

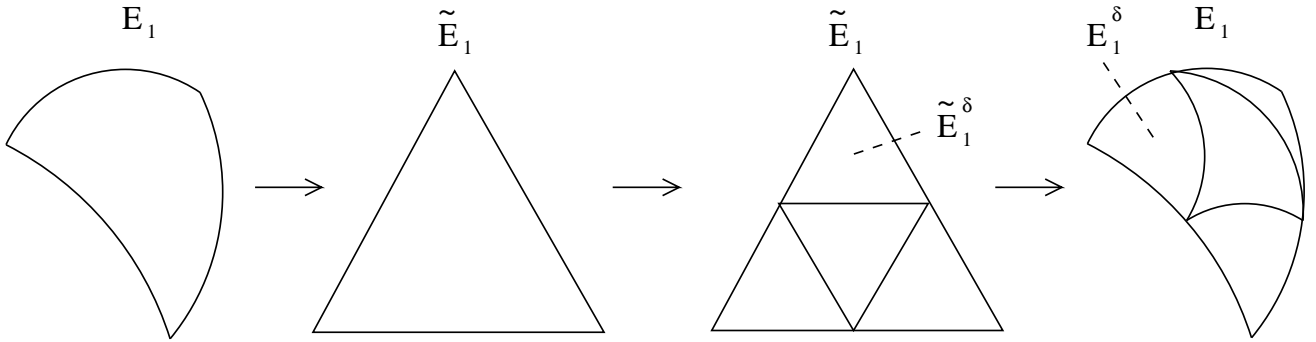


FIG. 4.9 – Raffinement de Γ_h .

$$T(E_1^\delta, E_2^\gamma) = k \int_{\hat{T}^\delta} \int_{\hat{T}^\gamma} G(x(\lambda_\delta), y(\mu_\gamma)) H(x(\lambda_\delta), y(\mu_\gamma)) d\mu_\gamma d\lambda_\delta, \quad (4.75)$$

où $\lambda_\delta = \lambda_{|\hat{T}^\delta}$ avec $\hat{T} = \bigcup_{\delta=1}^{4^M} \hat{T}^\delta$, et $\mu_\gamma = \mu_{|\hat{T}^\gamma}$ avec $\hat{T} = \bigcup_{\gamma=1}^{4^M} \hat{T}^\gamma$.

Il apparaît dans la figure 4.10 que $\hat{T}^\delta = \phi(\hat{T}_0)$, où ϕ est la composée d'une rotation \mathcal{R} et d'une

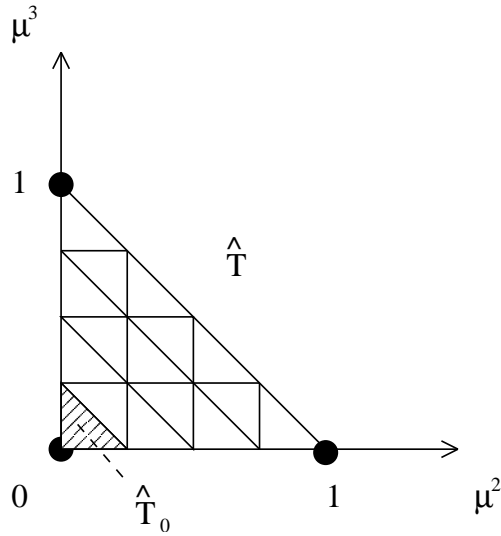


FIG. 4.10 – Subdivision du triangle de référence \hat{T} .

translation \mathcal{T} . En considérant l'homothétie \mathcal{H} de centre O et de rapport $1/M$ permettant de passer de \hat{T}_0 à \hat{T} , nous avons :

$$T(E_1^\delta, E_2^\gamma) = \frac{k}{M^4} \int_{\hat{T}} \int_{\hat{T}} G(X(\lambda), Y(\mu)) F(\lambda, \mu) d\mu d\lambda, \quad (4.76)$$

où $X(\lambda) = x(\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{H}_1(\lambda_\delta))$, $Y(\mu) = y(\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{H}_2(\mu_\gamma))$ et $F(\lambda, \mu) = H(X(\lambda), Y(\mu))$.
 Nous avons :

$$T(E_1, E_2) = \sum_{\delta=1}^{4^M} \left\{ \sum_{\gamma/E_1^\delta \cap E_2^\gamma = \emptyset} T(E_1^\delta, E_2^\gamma) + \sum_{\gamma/E_1^\delta \cap E_2^\gamma \neq \emptyset} T(E_1^\delta, E_2^\gamma) \right\}. \quad (4.77)$$

Lorsque E_1^δ et E_2^γ sont disjoints, $T(E_1^\delta, E_2^\gamma)$ est calculée en utilisant une quadrature de Gauss :

$$T(E_1^\delta, E_2^\gamma) = \frac{k}{M^4} \sum_{\lambda_g, \mu_g} \omega_{\lambda_g} \omega_{\mu_g} G(X(\lambda_g), Y(\mu_g)) F(\lambda_g, \mu_g). \quad (4.78)$$

Lorsque E_1^δ et E_2^γ ne sont pas disjoints, les intégrales sur E_1^δ et E_2^γ sont approchées de manière plus complexe. Pour M assez grand, $F(\lambda, \mu)$ peut être approchée sans perte de précision par sa valeur aux centres de gravité de $\hat{T} \times \hat{T}$. $T(E_1^\delta, E_2^\gamma)$ est donc approchée par :

$$T(E_1^\delta, E_2^\gamma) \simeq \frac{k}{M^4} F(\lambda_g, \mu_g) \int_{\hat{T}} \int_{\hat{T}} G(X(\lambda), Y(\mu)) d\mu d\lambda. \quad (4.79)$$

Ensuite, nous construisons X_δ l'interpolée linéaire de X , et Y_γ l'interpolée linéaire de Y , de telle sorte que $X_\delta(\hat{a}_i) = E_1^{\delta,i}$ et $Y_\gamma(\hat{a}_i) = E_2^{\gamma,i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ ($E_1^{\delta,1}$, $E_1^{\delta,2}$ et $E_1^{\delta,3}$ (respectivement $E_2^{\gamma,1}$, $E_2^{\gamma,2}$ et $E_2^{\gamma,3}$) étant les sommets de E_1^δ (respectivement E_2^γ)).
 $G(X(\lambda), Y(\mu))$ est approché par $G(X_\delta(\lambda), Y_\gamma(\mu))$, et nous avons :

$$T(E_1^\delta, E_2^\gamma) \simeq \frac{kF(\lambda_g, \mu_g)}{4M^4 \text{mes}(\overline{E_1^\delta}) \text{mes}(\overline{E_2^\gamma})} \int_{\overline{E_1^\delta}} \int_{\overline{E_2^\gamma}} G(X_\delta(\lambda), Y_\gamma(\mu)) d\overline{E_1^\delta}(X_\delta) d\overline{E_2^\gamma}(Y_\gamma), \quad (4.80)$$

où $X_\delta(\hat{T}) = \overline{E_1^\delta}$ et $Y_\gamma(\hat{T}) = \overline{E_2^\gamma}$ ($\overline{E_1^\delta}$ (respectivement $\overline{E_2^\gamma}$) étant le triangle plan délimité par les sommets $E_1^{\delta,1}$, $E_1^{\delta,2}$ et $E_1^{\delta,3}$ (respectivement $E_2^{\gamma,1}$, $E_2^{\gamma,2}$ et $E_2^{\gamma,3}$)).

Pour évaluer cette dernière intégrale, les changements de variables de la partie précédente sont utilisés.

Bien entendu, tout ce qui a été vu précédemment reste valable pour l'opérateur K .

Deuxième partie

Montée en ordre lors de la résolution des
équations intégrales de Després par la
méthode multipôle FMM

Chapitre 5

Présentation de la méthode multipôle

5.1 Introduction

Cette partie est consacrée à la présentation d'une méthode multipôle : la Fast Multipole Method (FMM). La FMM est utilisée pour accélérer les produits matrice-vecteur effectués lors de la résolution par une méthode itérative des systèmes discrets (1.41) provenant de la résolution des équations de Maxwell par des méthodes d'équations intégrales et d'éléments finis. En effet, l'opération la plus coûteuse dans une méthode itérative est le produit matrice-vecteur. Ce coût est en $\mathcal{O}(N^2)$ pour un produit matrice-vecteur classique, car la matrice du système est pleine, mais il est ramené en $\mathcal{O}(N^{3/2})$ en utilisant la FMM un niveau, et en $\mathcal{O}(N \ln N)$ en utilisant la FMM multi-niveaux.

Les méthodes multipolaires ont été introduites dans les années 80 afin de résoudre le problème à N corps en astrophysique [66]. Ensuite, elles ont été généralisées par Rokhlin et Greengard aux équations de Laplace résolues par méthodes intégrales [31], [67] et [68]. Les équations de Helmholtz $2D$ et $3D$, résolues au moyen d'une FMM un niveau, sont respectivement traitées dans [103] et [104]. Une bonne introduction à la FMM dans sa version un niveau est donnée dans [35]. La version multi-niveaux de la FMM a été développée par Chew et son équipe [82], [111] et [112]. De nombreux travaux de clarification et d'amélioration de la méthode ont été entrepris, notamment par Darve [46]. En ce qui concerne les estimations d'erreurs, nous renvoyons à [47] et [29], et pour une présentation de l'implémentation de la FMM, à [48]. Une étude de la parallélisation de la FMM a été faite dans [54] et [116].

5.2 Problème modèle

Soit Γ la surface de l'objet diffractant Ω , est approchée par $\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^N T_i$. Afin de ne pas alourdir l'exposé, nous considérons la résolution d'un système linéaire $Ax = b$, où la matrice A

est définie par : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$,

$$A_{ij} = \begin{cases} G(x_i, x_j) & \text{si } T_i \cap T_j = \emptyset, \\ JG(T_i, T_j) & \text{si } T_i \cap T_j \neq \emptyset, \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $x_i \in T_i, x_j \in T_j, G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ étant le noyau de Green et $JG(T_i, T_j)$ définissant les interactions singulières dont les calculs ont été évoqués au chapitre 4.

Avant de décrire en détail les éléments de la méthode multipôle, nous présentons brièvement l'interprétation algorithmique de la méthode, qui est basée sur une séparation de variables. Nous supposons qu'il est possible d'effectuer une séparation de variables telle que :

$$G(x, y) \simeq \sum_{p=0}^P u_p(x) \cdot v_p(y). \quad (5.2)$$

Pour i fixé, nous définissons les ensembles $I = \{j \in \{1, \dots, N\} | T_i \cap T_j = \emptyset\}$ et $J = \{j \in \{1, \dots, N\} | T_i \cap T_j \neq \emptyset\}$. L'ensemble J contient très peu d'éléments.

Soit un vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_N)^t$. Nous avons : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N A_{ij} Y_j &= \sum_{j \in I} A_{ij} Y_j + \sum_{j \in J} A_{ij} Y_j \\ &\simeq \sum_{p=0}^P u_p(x_i) \left(\sum_{j \in I} v_p(x_j) Y_j \right) + \sum_{j \in J} A_{ij} Y_j \\ &\simeq \underbrace{\sum_{p=0}^P u_p(x_i) v_p}_{(*)} + \underbrace{\sum_{j \in J} A_{ij} Y_j}_{(**)} \end{aligned}$$

Un produit matrice-vecteur demande donc $\mathcal{O}(NP)$ opérations pour la partie (*), et $\mathcal{O}(N)$ opérations pour la partie (**). Il y a accélération du produit si $P \ll N$, car dans ce cas, la complexité d'un produit matrice-vecteur passe de $\mathcal{O}(N^2)$ à $\mathcal{O}(NP)$.

Il existe pour le noyau de Green une formule d'addition semblable à (5.2). Cependant, cette formule n'est valable que si $|x| < |y|$. Cette condition n'étant en général pas remplie, nous effectuerons un regroupement de points, et nous considérerons les nouvelles variables X et d telles que :

$$x - y = X + d, \quad |d| < |X|,$$

pour x et y suffisamment éloignés.

5.3 Construction du pavage multipôlaire

La transformation des interactions générées par le noyau de Green entre les éléments de Γ_h , en des interactions entre des boîtes contenant plusieurs éléments de Γ_h , constitue le principe de la FMM. La structure de boîtes considérées est un octree. Sa construction se fait de manière récursive. Tout d'abord, un cube C^0 englobant Γ_h est construit. Soit d_0 la longueur des arêtes de C^0 . Ce cube est ensuite subdivisé en huit cubes de côtés de longueur $d_1 = d_0/2$. Les cubes d'intersection vide avec Γ_h ne sont pas retenus. Ce procédé est réitéré jusqu'à ce que la longueur des côtés des cubes soit ν/k , où ν est une constante indépendante du nombre d'onde k . L'octree étant défini par plusieurs niveaux de pavage, les notations suivantes sont introduites :

- M_n est le nombre de cubes au niveau n ,
- C_m^n est le $m^{\text{ième}}$ cube du niveau n ($m \in \{1, \dots, M_n\}$),
- X_m^n est le centre de C_m^n ,
- d_n est la longueur des côtés des cubes au niveau n .

De part la construction de l'octree, d_{n+1} se déduit de d_n par la formule suivante :

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{2}. \quad (5.3)$$

Le dernier niveau de l'octree est appelé le niveau fin. L'indice n est remplacé par l'indice f pour indiquer que nous parlons du niveau fin. Le critère d'arrêt de la subdivision de l'octree est donné par $kd_f \simeq 1$; ce critère est obtenu par des considérations de complexité optimale et de stabilité de l'algorithme (cf section 5.4).

Un élément de Γ_h est contenu dans un cube de l'octree si son centre de gravité appartient au cube.

Nous définissons à présent un peu de vocabulaire. Les cubes C_m^{n+1} provenant de la subdivision d'un cube $C_{\tilde{m}}^n$ sont les "fils" de $C_{\tilde{m}}^n$, et par conséquent $C_{\tilde{m}}^n$ est leur "père". Nous définissons la notion de voisinage. Cette notion ne concerne que des cubes du même niveau. Le voisinage V_m^n d'un cube C_m^n de centre X_m^n est défini par :

$$V_m^n = \{m' \in \{1, \dots, M_n\} / |X_m^n - X_{m'}^n|_\infty \leq V_{max} d_n\}, \quad (5.4)$$

V_{max} étant un paramètre de l'algorithme. En général, V_{max} est pris égal à un.

Pour tout niveau $n \geq 3$, l'ensemble des plus proches non voisins de C_m^n est défini par :

$$TL_m^n = \{m' \in \{1, \dots, M_n\} / m' \notin V_m^n \text{ et } \mathcal{P}(n, m') \in V_{\mathcal{P}(n,m)}^{n-1}\}, \quad (5.5)$$

où \mathcal{P} donne le numéro du père pour chaque fils. Soit \mathcal{S} la fonction associant à un cube C_m^n l'ensemble de ses fils.

Le nombre d'éléments de TL_m^n est majoré par $nbTra = 316$. En effet, grâce à la structure de l'octree, le vecteur $r_{mm'}^n$, reliant les centres des boîtes C_m^n et $C_{m'}^n$, s'écrit :

$$r_{mm'}^n = d_n \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}, \quad \text{où } (l_x, l_y, l_z) \in \mathbb{Z}^3. \quad (5.6)$$

Dans le cas de la FMM multi-niveaux, $r_{mm'}^n$ relie des boîtes non voisines dont les parents sont voisins. Comme les boîtes sont non voisines, nous avons :

$$(l_x, l_y, l_z) \notin [-1; 1]^3. \quad (5.7)$$

Le fait que les pères soient voisins implique :

$$(l_x, l_y, l_z) \in [-3; 3]^3. \quad (5.8)$$

Le nombre de triplets (l_x, l_y, l_z) vérifiant ces conditions est $7^3 - 3^3 = 316$.

5.4 Développement du noyau de Green

Nous avons énoncé le principe de la FMM qui consiste à remplacer les interactions entre les mailles de Γ_h par des interactions entre les boîtes multipolaires de l'octree. Ces interactions étant générées par le noyau de Green, il va être "cassé" à l'aide de séparation de variables, obtenues par un développement en séries. Le théorème d'addition de Gegenbauer est utilisé comme point de départ :

$$G(x_i, x_j) = \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) j_l(k|r^n|) P_l(\cos(r^n, r_{mm'}^n)), \quad (5.9)$$

où $x_i \in C_m^n$ et $x_j \in C_{m'}^n$. En posant $r_i^n = x_i - X_m^n$, $r_j^n = x_j - X_{m'}^n$, $r_{mm'}^n = X_m^n - X_{m'}^n$ et $r^n = r_i^n - r_j^n$, nous avons :

$$x_i - x_j = x_i - X_m^n + X_m^n - X_{m'}^n + X_{m'}^n - x_j, \quad (5.10)$$

$$= r_{mm'}^n + r^n. \quad (5.11)$$

$h_l^{(1)}$ et j_l sont respectivement les fonctions sphériques de Hankel de degré l et de Bessel de première espèce de degré l . P_l est le polynôme de Legendre de degré l . La convergence de la série est assurée si et seulement si $|r^n| < |r_{mm'}^n|$.

Remarque. La contrainte $|r^n| < |r_{mm'}^n|$ oblige à distinguer les boîtes voisines des boîtes non voisines. D'où les définitions données précédemment.

Dans (5.9), les points x_i et x_j ne sont pas complètement découplés puisque des termes contenant r^n subsistent. L'identité de Funk-Hecke permet de découpler complètement x_i et x_j . En effet, nous avons :

$$j_l(k|r^n|)P_l(\cos(r^n, r_{mm'}^n)) = \frac{i^l}{4\pi} \int_{S^2} P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)) e^{ik\hat{s}\cdot r^n} d\hat{s}, \quad (5.12)$$

$$= \frac{i^l}{4\pi} \int_{S^2} P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)) e^{ik\hat{s}\cdot r_i^n} e^{-ik\hat{s}\cdot r_j^n} d\hat{s}, \quad (5.13)$$

où S^2 représente la sphère unité de \mathbb{R}^3 .
La série (5.9) est tronquée :

$$G(x_i, x_j) \simeq \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\hat{s}\cdot r_i^n} T_{mm'}^n(\hat{s}) e^{-ik\hat{s}\cdot r_j^n} d\hat{s}, \quad (5.14)$$

$$\text{où } T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)). \quad (5.15)$$

Remarque. 1) $T_{mm'}^n$ est appelée fonction de transfert.

2) L'interversion de la sommation et de l'intégrale a été rendue possible grâce à la troncature de la série sur l'indice l . Sans cela, elle est impossible car la fonction de Hankel $h_l^{(1)}$ diverge quand l tend vers l'infini.

Pour finir, la sphère unité est discrétisée, ce qui donne :

$$G(x_i, x_j) \simeq \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^{S_n} \omega_p^n e^{ik\hat{s}_p^n \cdot r_i^n} T_{mm'}^n(\hat{s}_p^n) e^{-ik\hat{s}_p^n \cdot r_j^n}. \quad (5.16)$$

Le choix du paramètre de troncature L_n permet de contrôler l'erreur commise sur la série

$$\left| \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=L_n+1}^{+\infty} (2l+1) h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) j_l(k|r^n|) P_l(\cos(r^n, r_{mm'}^n)) \right|. \quad (5.17)$$

La fonction $h_l^{(1)}$ est définie par $h_l^{(1)} = j_l + iy_l$, j_l et y_l étant des fonctions réelles. y_l est la fonction sphérique de Bessel de deuxième espèce de degré l .

L'étude des fonctions j_l et y_l montre que $l \rightarrow j_l(x)$ converge rapidement vers zéro à partir de $l \geq x$, et que $l \rightarrow y_l(x_0)$ diverge vite lorsque l devient plus grand que x_0 . De plus, nous avons asymptotiquement :

$$(2l+1)j_l(x)y_l(x_0) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^l\right). \quad (5.18)$$

Sous la condition $x < x_0$, il apparaît clairement que la décroissance rapide de $j_l(x)$ l'emporte sur la divergence de $(2l+1)y_l(x_0)$, et entraîne la convergence vers zéro de $(2l+1)j_l(x)y_l(x_0)$ dès que l devient plus grand que x . Par conséquent, pour que la série (5.17) converge, le paramètre de troncature L_n doit vérifier la condition $L_n > k|r^n|$.

Cependant, pour des raisons de stabilité numérique, L_n ne peut pas être pris plus grand que $k|r_{mm'}^n|$, car la quadrature approchée de la formule de Funk-Hecke ne permet plus de compenser la croissance importante de la fonction de Hankel $h_l^{(1)}$ intervenant dans $T_{mm'}^n$. L_n est donc borné par $k|r^n| < L_n < k|r_{mm'}^n|$.

Darve a montré dans [46] que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists L_n / \left| \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=L_n+1}^{+\infty} (2l+1)h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|)j_l(k|r^n|)P_l(\cos(r^n, r_{mm'}^n)) \right| < \epsilon, \quad (5.19)$$

et a abouti à la formule semi-empirique suivante :

$$L_n = k|r^n| + c \ln(\pi + k|r^n|), \quad (5.20)$$

où $c \sim \ln(\epsilon^{-1})$.

Chew fournit une formule empirique plus fiable pour de grands $k|r^n|$:

$$L_n = k|r^n| + c(k|r^n|)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.21)$$

Carayol et Collino proposent dans [29] de nouvelles estimations plus précises, dans le cas de très grandes valeurs de $k|r^n|$.

Remarque. Pour les résultats numériques, la formule empirique donnée par Chew sera utilisée.

Nous abordons le choix de la quadrature sur S^2 , car nous intégrons numériquement

$$e^{ik\hat{s}_p^n \cdot r_i^n} T_{mm'}^n(\hat{s}_p^n) e^{-ik\hat{s}_p^n \cdot r_j^n}. \quad (5.22)$$

Les harmoniques sphériques de degré l , Y_{lm} , sont données par :

$$Y_{lm}(\hat{s}) = Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (5.23)$$

où $\{P_l^m\}_{|m| \leq l}$ sont les fonctions de Legendre associées [4]. Le théorème d'addition des harmoniques sphériques est rappelé ci-dessous :

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{|m| \leq l} \overline{Y_{lm}(\hat{s}')} Y_{lm}(\hat{s}), \quad (5.24)$$

où $\hat{s} = (\theta, \phi)$, $\hat{s}' = (\theta', \phi')$ dans le repère local associé à S^2 , et γ est l'angle formé entre \hat{s} et \hat{s}' ($\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$).

D'après ce théorème et les relations ci-dessous :

$$e^{ik\hat{s}\cdot r^n} = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1)(-i)^l j_l(k|r^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r^n)), \quad (5.25)$$

$$|e^{ik\hat{s}\cdot r^n} T_{mm'}^n(\hat{s}) - T_{mm'}^n(\hat{s}) \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1)(-i)^l j_l(k|r^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r^n))| \leq \epsilon, \quad (5.26)$$

l'intégrant (5.22) peut être approché à ϵ près par une combinaison d'harmoniques sphériques de degré inférieur ou égal à $2L_n$.

La quadrature $\{\omega_p^n, \hat{s}_p^n\}_{p=1}^{S_n}$ choisie est une quadrature intégrant exactement sur S^2 les harmoniques sphériques de degré inférieur ou égal à $2L_n$. Les points de quadrature $\{\hat{s}_p^n\}_{p=1}^{S_n}$ correspondant aux points $\{(\theta_j^n, \phi_i^n)\}_{\substack{1 \leq i \leq 2L_n+1 \\ 1 \leq j \leq L_n+1}}$ définis par :

- $\theta_j^n \in [0; \pi]$ est tel que $\cos\theta_j^n$ correspond au point de Gauss-Legendre de poids $\tilde{\omega}_j^n$,
- $\phi_i^n \in [0; 2\pi]$ est tel que $\phi_i^n = \frac{2\pi i}{2L_n+1}$ et est associé au poids $\frac{2\pi}{2L_n+1}$,

donnent une telle quadrature. Une démonstration est faite dans [29]. Nous avons :

$$S_n = (2L_n + 1)(L_n + 1), \quad (5.27)$$

L_n étant donné par (5.21).

5.5 Décomposition du produit matrice-vecteur

La matrice A donnée par (5.1) est décomposée en une matrice proche A^{near} et en une matrice lointaine A^{far} : $A = A^{near} + A^{far}$ avec

$$A_{ij}^{near} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } m' \in V_m^f, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad A_{ij}^{far} = \begin{cases} 0, & \text{si } m' \in V_m^f, \\ A_{ij}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.28)$$

où $T_i \in C_m^f$ et $T_j \in C_{m'}^f$.

Nous avons pour un vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_N)^t$:

$$\begin{aligned} Z &= AY, \\ &= A^{near}Y + A^{far}Y, \\ &= Z^{near} + Z^{far}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec

$$Z_i^{near} = \sum_{j \in V_m^f} A_{ij} Y_j, \quad \text{et} \quad Z_i^{far} = \sum_{j \notin V_m^f} A_{ij} Y_j. \quad (5.30)$$

En ce qui concerne les interactions proches, Z^{near} est calculé en effectuant un produit matrice-vecteur classique entre A^{near} et Y , la matrice A^{near} étant stockée.

La FMM consiste à approcher Z^{far} par \tilde{Z}^{far} :

$$\tilde{Z}_i^{far} = \sum_{m' \notin V_m^f} \sum_{j/x_j \in C_{m'}^f} Y_j \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_i^f} T_{mm'}^f(\hat{s}) e^{-ik\hat{s} \cdot r_j^f} d\hat{s}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (5.31)$$

Nous avons en réorganisant les différentes sommations :

$$\tilde{Z}_i^{far} = \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_i^f} \sum_{m' \notin V_m^f} T_{mm'}^f(\hat{s}) \sum_{j/x_j \in C_{m'}^f} e^{-ik\hat{s} \cdot r_j^f} Y_j d\hat{s}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (5.32)$$

5.5.1 Algorithme FMM un niveau

La FMM un niveau ne fait intervenir que les groupes du niveau fin. Pour une FMM un niveau, \tilde{Z}^{far} est directement donné par :

$$\tilde{Z}_i^{far} = \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^{S_f} \omega_p^f e^{ik\hat{s}_p^f \cdot r_i^f} \sum_{m' \notin V_m^f} T_{mm'}^f(\hat{s}_p^f) \sum_{j/x_j \in C_{m'}^f} e^{-ik\hat{s}_p^f \cdot r_j^f} Y_j. \quad (5.33)$$

L'algorithme permettant de calculer \tilde{Z}^{far} se résume aux étapes ci-dessous :

– *Etape 1* : Calcul des fonctions de radiation.

$\forall m' \in \{1, \dots, M_f\}, \forall p \in \{1, \dots, S_f\}$:

$$F_{m'}^f(\hat{s}_p^f) = \sum_{j/x_j \in C_{m'}^f} e^{-ik\hat{s}_p^f \cdot r_j^f} Y_j. \quad (5.34)$$

– *Etape 2* : Transferts des groupes sources $C_{m'}^f$ vers le groupe observateur C_m^f .

$\forall m \in \{1, \dots, M_f\}, \forall p \in \{1, \dots, S_f\}$:

$$G_m^f(\hat{s}_p^f) = \sum_{m' \notin V_m^f} T_{mm'}^f(\hat{s}_p^f) F_{m'}^f(\hat{s}_p^f). \quad (5.35)$$

– *Etape 3* : Intégration vers le point observateur x_i .

$\forall m \in \{1, \dots, M_f\}, \forall i \in \{1, \dots, N\}/x_i \in C_m^f$:

$$\tilde{Z}_i^{far} = \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^{S_f} \omega_p^f e^{ik\hat{s}_p^f \cdot r_i^f} G_m^f(\hat{s}_p^f). \quad (5.36)$$

Etape	Coût calcul	Place mémoire
1	NS_f	$N + M_f S_f$
2	$M_f^2 S_f$	$M_f S_f$
3	NS_f	N

TAB. 5.1 – Complexités des étapes de la FMM un niveau.

Les complexités des étapes de la FMM un niveau sont reportées dans le tableau 5.1.

La complexité du calcul de Z^{near} étant en $\mathcal{O}(N^2/M_f)$, le coût d'un produit matrice-vecteur avec la FMM un niveau est donc donné par :

$$\text{Coût FMM un niveau} = \underbrace{\mathcal{O}(NS_f + M_f^2 S_f)}_{\tilde{Z}^{far}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{N^2}{M_f}\right)}_{Z^{near}} \quad (5.37)$$

$$= \mathcal{O}(NL_f^2 + (M_f L_f)^2 + \frac{N^2}{M_f}). \quad (5.38)$$

En notant δ la densité de maillage, nous avons :

$$\frac{d_f}{\lambda} = \mathcal{O}\left(\frac{d_f}{\delta h}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{d_f}{\delta} \sqrt{N}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{d_0}{\delta} \sqrt{\frac{N}{M_f}}\right). \quad (5.39)$$

L_f étant proportionnel à kd_f (5.21), soit à d_f/λ , nous avons :

$$L_f = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{N}{M_f}}\right). \quad (5.40)$$

D'après (5.27) et (5.40), S_f est donné par :

$$S_f = \mathcal{O}((L_f)^2) = \mathcal{O}\left(\frac{N}{M_f}\right). \quad (5.41)$$

La complexité de la FMM un niveau devient :

$$\text{Coût FMM un niveau} = \mathcal{O}\left(M_f N + \frac{N^2}{M_f}\right). \quad (5.42)$$

En choisissant M_f dans le but de minimiser (5.42), nous obtenons $M_f = \mathcal{O}(N^{1/2})$. Un produit matrice-vecteur demande donc $\mathcal{O}(N^{3/2})$ opérations et une place mémoire en $\mathcal{O}(N)$, N étant la taille du vecteur. La résolution d'un système linéaire, $Ax = b$, par la FMM nécessite :

$$\mathcal{O}(N + N_{iter} N^{3/2}) \text{ opérations et une place mémoire en } \mathcal{O}(N),$$

$\mathcal{O}(N)$ représentant la complexité du calcul de Z^{near} , étape qui contrairement aux autres, est indépendante de Y , et N_{iter} étant le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du système.

5.5.2 Algorithme FMM multi-niveaux

La FMM multi-niveaux consiste à effectuer des regroupements de points en fonction de l'éloignement par rapport au point observateur, ce qui permet de réduire le nombre de transferts entre les groupes lointains. Nous illustrons ce principe en l'appliquant à la figure 5.1. En considérant une méthode un niveau, la boîte B_{ref}^2 est en interaction avec 19 boîtes. En considérant une méthode deux niveaux, la boîte B_{ref}^1 est en interaction avec 8 boîtes du niveau 1, et la boîte B_{ref}^2 avec 2 boîtes du niveau 2, ce qui fait un total de 10 interactions. Par ce simple exemple, l'intérêt de considérer une méthode multipôle avec plusieurs niveaux est aussitôt visible.

Pour chaque niveau n de construction, $n \in \{2, \dots, niv_f\}$, l'ensemble des cubes de l'octree est

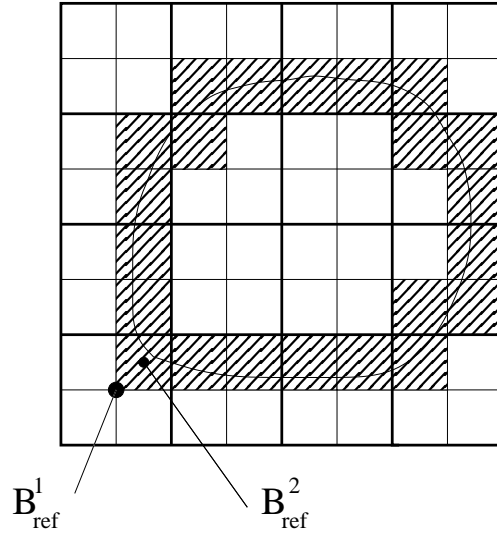


FIG. 5.1 – Pavage multipolaire.

considéré, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 Z_i^{far} &= \sum_{j \notin V_m^2} A_{ij} Y_j + \sum_{n=3}^{niv_f} \sum_{j \in TL_m^n} A_{ij} Y_j, \\
 \tilde{Z}_i^{far} &= \frac{ik}{(4\pi)^2} \left(\int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_i^2} \sum_{m' \notin V_m^2} T_{mm'}^2(\hat{s}) \sum_{j/x_j \in C_m^2} e^{-ik\hat{s} \cdot r_j^2} Y_j d\hat{s} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=3}^{niv_f} \int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_i^n} \sum_{m' \in TL_m^n} T_{mm'}^n(\hat{s}) \sum_{j/x_j \in C_m^n} e^{-ik\hat{s} \cdot r_j^n} Y_j d\hat{s} \right), \tag{5.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_i^{far} &= \frac{ik}{(4\pi)^2} \left(\int_{S^2} e^{ik\hat{s}\cdot r_i^f} e^{ik\hat{s}\cdot(X_m^f - X_m^2)} \sum_{m' \notin V_m^2} T_{mm'}^2(\hat{s}) \sum_{v \in \mathcal{F}(2, m')} e^{ik\hat{s}\cdot(X_{m'}^2 - X_v^f)} F_v^f(\hat{s}) d\hat{s} \right. \\
&+ \sum_{n=3}^{niv_f-1} \int_{S^2} e^{ik\hat{s}\cdot r_i^f} e^{ik\hat{s}\cdot(X_m^f - X_m^n)} \sum_{m' \in TL_m^n} T_{mm'}^n(\hat{s}) \sum_{v \in \mathcal{F}(n, m')} e^{ik\hat{s}\cdot(X_{m'}^n - X_v^f)} F_v^f(\hat{s}) d\hat{s} \\
&\left. + \int_{S^2} e^{ik\hat{s}\cdot r_i^f} \sum_{m' \in TL_m^n} T_{mm'}^n(\hat{s}) F_{m'}^f(\hat{s}) d\hat{s} \right), \tag{5.44}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{F}(n, m)$ est une fonction associant à toute boîte C_m^n ses descendants au niveau niv_f , et F_v^f est donnée par

$$F_v^f(\hat{s}) = \sum_{j/x_j \in C_v^f} e^{-ik\hat{s}\cdot r_j^f} Y_j. \tag{5.45}$$

Afin d'obtenir une complexité optimale, le nombre de groupes choisi au niveau le plus fin est $M_f = \mathcal{O}(N)$.

Version “continue”

La version continue (version ne tenant pas compte de la discrétisation de S^2) de l'algorithme d'un produit matrice-vecteur $\widetilde{A^{far}Y} = \tilde{Z}^{far}$ utilisant la FMM multi-niveaux (5.44) est donnée par :

- *Etape 1* : Calcul des fonctions de radiation au niveau niv_f .
 $\forall m \in \{1, \dots, M_f\}$:

$$F_m^f(\hat{s}) = \sum_{j/x_j \in C_m^f} e^{-ik\hat{s}\cdot r_j^f} Y_j. \tag{5.46}$$

- *Etape 2* : Calcul des fonctions de radiation aux niveaux supérieurs.
 Pour n allant de $(niv_f - 1)$ à 3, $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$:

$$F_m^n(\hat{s}) = \sum_{v \in \mathcal{S}(n, m)} e^{-ik\hat{s}\cdot(X_m^n - X_v^{n+1})} F_v^{n+1}(\hat{s}). \tag{5.47}$$

- *Etape 3* : Transferts des groupes sources $C_{m'}^n$ vers le groupe observateur C_m^n .
 $\forall n \in \{3, \dots, niv_f\}$, $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$:

$$G_m^n(\hat{s}) = \sum_{m' \in TL_m^n} T_{mm'}^n(\hat{s}) F_{m'}^n(\hat{s}), \tag{5.48}$$

et lorsque $n = 2$, $\forall m \in \{1, \dots, M_2\}$:

$$G_m^2(\hat{s}) = \sum_{m' \notin V_2^f} T_{mm'}^2(\hat{s}) F_{m'}^2(\hat{s}). \quad (5.49)$$

– *Etape 4* : Propagation de l'information pour n allant de 3 à niv_f .
 $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$:

$$G_m^n(\hat{s}) \leftarrow G_m^n(\hat{s}) + e^{ik\hat{s} \cdot (X_m^n - X_{\mathcal{P}(n,m)}^{n-1})} G_{\mathcal{P}(n,m)}^{n-1}(\hat{s}). \quad (5.50)$$

– *Etape 5* : Intégration vers le point observateur au niveau niv_f .
 $\forall m \in \{1, \dots, M_f\}$, $\forall i \in \{1, \dots, N\} / x_i \in C_m^f$:

$$\tilde{Z}_i^{far} = \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_i^f} G_m^f(\hat{s}) d\hat{s}. \quad (5.51)$$

Remarque. 1) *Le calcul des fonctions de transfert est intégré, à l'étape 3, étape où sont effectués les transferts entre boîtes. A cette étape, nous faisons une boucle sur les directions puis une boucle sur les couples de boîtes dans la direction courante, et la fonction de transfert n'est calculée que si elle ne l'a pas déjà été. Le calcul des fonctions de transfert n'a donc pas un coût prédominant dans la complexité de la FMM multi-niveaux.*

2) *A un niveau n donné, pour chaque transfert de C_m^n vers $C_{m'}^n$, $r_{mm'}^n$ est calculé puis (l_x, l_y, l_z) est évalué. Comme le nombre d'éléments de TL_m^n est majoré par 316, il y a au plus 316 fonctions de transfert $T_{mm'}^n$ à calculer par niveau.*

Version "discrète"

Nous décrivons la version discrète (version tenant compte de la discrétisation de S^2) de l'algorithme utilisé pour calculer \tilde{Z}^{far} . Dans cette version, il faut tenir compte de la variation du nombre de pôles entre deux niveaux distincts, qui s'accompagne d'un changement de la discrétisation de la sphère unité. En effet, le développement du noyau de Green (5.16) nécessite pour être évalué correctement un nombre de pôles en L_n , ce dernier paramètre dépendant lui-même de la taille des boîtes multipolaires du niveau n considéré, et fixant par la relation $S_n = (2L_n + 1)(L_n + 1)$, la discrétisation de la sphère unité. Il faut donc évaluer, pour chaque niveau n de la FMM, l'ensemble $\{F_{m'}^n(\hat{s}_p^n)\}_{\substack{1 \leq m' \leq M_n \\ 1 \leq p \leq S_n}}$. Un moyen rapide d'effectuer ces évaluations repose sur l'emploi d'une récurrence. Les fonctions de radiation $F_{m'}^n$ aux points $\{\hat{s}_p^n\}_{p=1}^{S_n}$ sont supposées calculées, et il faut déterminer les valeurs des fonctions F_m^{n-1} aux points $\{\hat{s}_p^{n-1}\}_{p=1}^{S_{n-1}}$. Pour calculer $\{F_m^{n-1}(\hat{s}_p^{n-1})\}_{\substack{1 \leq m \leq M_{n-1} \\ 1 \leq p \leq S_{n-1}}}$, à partir de $\{F_{m'}^n(\hat{s}_p^n)\}_{\substack{1 \leq m' \leq M_n \\ 1 \leq p \leq S_n}}$ et de la relation suivante :

$$F_m^{n-1}(\hat{s}) = \sum_{m' \in \mathcal{S}(n-1, m)} e^{ik\hat{s} \cdot (X_m^{n-1} - X_{m'}^n)} F_{m'}^n(\hat{s}), \quad (5.52)$$

Darve [46] a étudié plusieurs méthodes d'interpolation, notamment une méthode semi-naïve dont la complexité est en $\mathcal{O}(S_n^{3/2})$, et une méthode utilisant une FMM 1D dont la complexité est en $\mathcal{O}(S_n \ln S_n)$.

L'interpolation est utilisée pour transférer les fonctions de radiation d'un niveau "fils" à un niveau "père". Un phénomène similaire apparaît lors de l'étape 4 de la version continue :

$$\underbrace{G_m^n(\hat{s})}_{\text{à évaluer aux points } \{\hat{s}_p^n\}_{1 \leq p \leq S_n}} \longleftarrow \underbrace{G_m^n(\hat{s})}_{\text{connue aux points } \{\hat{s}_p^n\}_{1 \leq p \leq S_n}} + \underbrace{e^{ik\hat{s} \cdot (X_m^n - X_{\mathcal{P}(n,m)}^{n-1})} G_{\mathcal{P}(n,m)}^{n-1}(\hat{s})}_{\text{connue aux points } \{\hat{s}_p^{n-1}\}_{1 \leq p \leq S_{n-1}}}. \quad (5.53)$$

La notion d'antepolation est introduite. L'antepolation est utilisée pour transférer les fonctions de radiation d'un niveau "père" à un niveau "fils". Lors de l'étape d'antepolation, nous diminuons le nombre de directions sur la sphère unité, tout en filtrant les plus hautes fréquences.

La méthode utilisée ici consiste à représenter les fonctions de radiation $F_m^n(\hat{s})$ par une série d'harmoniques sphériques. Cette série est ensuite tronquée, et la fonction $\tilde{F}_m^n(\hat{s})$ obtenue est représentée exactement par l'ensemble de directions $\{\hat{s}_p^n\}_{p=1}^{S_n}$. $\tilde{F}_m^n(\hat{s})$ peut-être ensuite calculée pour un autre ensemble de directions $\{\hat{s}_p^{n-1}\}_{p=1}^{S_{n-1}}$.

La fonction $F_m^n(\hat{s})$ s'écrit :

$$F_m^n(\hat{s}) = \sum_{j/x_j \in C_m^n} e^{-ik\hat{s} \cdot r_j^n} Y_j. \quad (5.54)$$

En considérant la troncature (5.80) et la décomposition (5.24), nous avons :

$$F_m^n(\hat{s}) \simeq \tilde{F}_m^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} \sum_{r=-l}^l f_l^r Y_l^r(\hat{s}), \quad (5.55)$$

$$\text{où } f_l^r = 4\pi(-i)^l \sum_{j/x_j \in C_m^n} j_l(k|x_j - X_m^n|) \overline{Y_l^r(x_j - X_m^n)} Y_j. \quad (5.56)$$

Les coefficients f_l^r du développement sont formellement déterminés en multipliant la relation (5.55) par une harmonique sphérique Y_l^r , en intégrant la relation obtenue sur la sphère unité et en utilisant la propriété d'orthogonalité des harmoniques sphériques. L'intégration se fait par une quadrature exacte qui nécessite $S_n = (2L_n + 1)(L_n + 1)$ directions \hat{s}_p^n (cf section 5.4). Ensuite, la formule obtenue est réinjectée dans (5.55) et les sommations sur l et r sont inversées. Nous aboutissons un calcul de coefficients de Fourier d'une fonction de ϕ , et un calcul par rapport à θ qui est accéléré par la formule de Christoffel-Darboux [5].

A partir de la connaissance de $\{F_m^n(\theta_j^n, \phi_i^n)\}_{\substack{1 \leq i \leq 2L_n+1 \\ 1 \leq j \leq L_n+1}}$, l'algorithme permettant de calculer $\{\tilde{F}_m^n(\theta_j^{n-1}, \phi_i^{n-1})\}_{\substack{1 \leq i \leq 2L_{n-1}+1 \\ 1 \leq j \leq L_{n-1}+1}}$ est donné par :

– calcul des $f^r(\theta_j^n), \forall r \in \{-L_n, \dots, L_n\}, \forall j \in \{1, \dots, L_n+1\}$:

$$f^r(\theta_j^n) = \sum_{i=1}^{2L_n+1} F_m^n(\theta_j^n, \phi_i^n) e^{-ir\phi_i^n}. \quad (5.57)$$

– calcul des $\tilde{f}^r(\theta_j^{n-1}), \forall r \in \{-L_n, \dots, L_n\}, \forall j \in \{1, \dots, L_{n-1}+1\}$:

$$\tilde{f}^r(\theta_j^{n-1}) = 2\pi \sum_{k=1}^{L_n+1} \tilde{\omega}_k^n f^r(\theta_k^n) \sqrt{\frac{(L_n+1)^2 - r^2}{4(L_n+1)^2 - 1}} \cdot \frac{\overline{Q}_{L_n+1}^r(\cos(\theta_j^{n-1})) \overline{Q}_{L_n}^r(\cos(\theta_k^n)) - \overline{Q}_{L_n}^r(\cos(\theta_j^{n-1})) \overline{Q}_{L_n+1}^r(\cos(\theta_k^n))}{\cos(\theta_j^{n-1}) - \cos(\theta_k^n)}, \quad (5.58)$$

où $Q_l^r = P_l^r / \sqrt{4\pi}$.

– calcul des valeurs de $\tilde{F}_m^n(\hat{s}_p^{n-1}) : \forall j \in \{1, \dots, L_{n-1}+1\}, \forall i \in \{1, \dots, 2L_{n-1}+1\}$,

$$\tilde{F}_m^n(\theta_j^{n-1}, \phi_i^{n-1}) = \frac{1}{2L_n+1} \sum_{r=-L_n}^{L_n} \tilde{f}^r(\theta_j^{n-1}) e^{ir\phi_i^{n-1}}. \quad (5.59)$$

Pour passer du niveau n au niveau $n-1$, la complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}((L_n)^3)$. Comme $L_2 = \mathcal{O}(N^{1/2})$, le calcul des fonctions de radiation au niveau le plus grossier est en $\mathcal{O}(N^{3/2})$. La deuxième étape du calcul (calcul de \tilde{f}^r) peut s'écrire comme un produit matrice-vecteur où la matrice est donnée par $M_{ij} = \frac{1}{\cos(\theta_i) - \cos(\theta_j)}$. Ce produit peut être accélérer par une méthode multipôle à une dimension [123], et donner un algorithme d'interpolation avec une complexité en $\mathcal{O}(N \ln N)$ si une FFT est utilisée pour les deux autres étapes (calcul de f^r et de \tilde{F}_m^n). Quant à l'antépolation, il s'agit de l'opération adjointe de l'interpolation, et ceci implique un filtrage des plus hautes fréquences de la fonction.

L'algorithme de la FMM multi-niveaux permettant de calculer \tilde{Z}^{far} est donné par :

– *Etape 1* : Calcul des fonctions de radiation $\{F_m^f(\hat{s}_p^f)\}_{\substack{1 \leq m \leq M_f \\ 1 \leq p \leq S_f}}$ au niveau fin.

– *Etape 2* : Interpolations successives des fonctions de radiation pour obtenir celles des niveaux supérieurs :

$\forall n \in \{3, \dots, niv_f\}, \forall m \in \{1, \dots, M_{n-1}\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, S_{n-1}\}$:

$$F_m^{n-1}(\hat{s}_p^{n-1}) = \sum_{\tilde{m} \in \mathcal{S}(n-1, m)} e^{ik\hat{s}_p^{n-1} \cdot (X_m^{n-1} - X_{\tilde{m}}^n)} Interp(F_{\tilde{m}}^n)(\hat{s}_p^{n-1}), \quad (5.60)$$

où *Interp* correspond à l'opérateur d'interpolation. Nous faisons varier n de niv_f à 3.

- *Etape 3* : Transferts des groupes sources $C_{m'}^n$, vers le groupe observateur C_m^n .
 $\forall n \in \{3, \dots, niv_f\}$, $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, S_n\}$:

$$G_m^n(\hat{s}_p^n) = \sum_{m' \in TL_m^n} T_{mm'}^n(\hat{s}_p^n) F_{m'}^n(\hat{s}_p^n), \quad (5.61)$$

et lorsque $n = 2$, $\forall m \in \{1, \dots, M_2\}$:

$$G_m^2(\hat{s}_p^2) = \sum_{m' \notin V_2^f} T_{mm'}^2(\hat{s}_p^2) F_{m'}^2(\hat{s}_p^2). \quad (5.62)$$

- *Etape 4* : Propagation de l'information pour n allant de 3 à niv_f .
 $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, S_n\}$:

$$G_m^n(\hat{s}_p^n) \longleftarrow G_m^n(\hat{s}_p^n) + Anterp(e^{ik\hat{s} \cdot (X_m^n - X_{\mathcal{P}(n,m)}^{n-1})} G_{\mathcal{P}(n,m)}^{n-1})(\hat{s}_p^n), \quad (5.63)$$

où *Anterp* correspond à l'opérateur d'ant interpolation.

- *Etape 5* : Intégration vers le point observateur au niveau niv_f .
 $\forall m \in \{1, \dots, M_f\}$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}/x_i \in C_m^f$:

$$\tilde{Z}_i^{far} = \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^{S_f} \omega_p^f e^{ik\hat{s}_p^f \cdot r_i^f} G_m^f(\hat{s}_p^f). \quad (5.64)$$

Remarque. Afin de diminuer le nombre de transferts à calculer, les symétries des fonctions de transfert sont utilisées. Soit P un plan passant par l'origine, et S_P la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. En posant $T_{r_{mm'}}^n(\hat{s}) = T_{mm'}^n(\hat{s})$, nous avons :

$$T_{r_{mm'}}^n(S_P(\hat{s})) = T_{S_P(r_{mm'})}^n(\hat{s}), \quad \forall \hat{s} \in S^2. \quad (5.65)$$

Les symétries utilisées, car adaptées à la quadrature de S^2 , sont les symétries par rapport aux plans (xOy) , (xOz) , (yOz) et $(zO\Delta)$, Δ étant la bissectrice de l'angle xOy . Dès qu'il existe une combinaison de ces quatres symétries transformant $r_{m_1m_1}^n$ en $r_{m_2m_2}^n$, les fonctions de transfert $T_{m_1m_1}^n$ et $T_{m_2m_2}^n$ se déduisent l'une de l'autre. Le nombre de fonctions de transfert à calculer se réduit donc à 34.

En utilisant le même raisonnement que pour la FMM un niveau, nous pouvons réécrire (5.41) pour chaque niveau n de la FMM multi-niveaux :

$$S_n = \mathcal{O}((L_n)^2) = \mathcal{O}\left(\frac{N}{M_n}\right). \quad (5.66)$$

Étape	Coût calcul	Place mémoire
1	N	N
2	$N \ln^2 N$	$N \ln N$
3	$nbTra N \ln N$	$nbTra N \ln N$
4	$N \ln^2 N$	$N \ln N$
5	N	N

TAB. 5.2 – Complexités des étapes de la FMM "discrète".

Les complexités des différentes étapes de la FMM multi-niveaux sont résumées dans le tableau 5.2.

La complexité du calcul de Z^{near} est en $\mathcal{O}(N^2/M_f)$, soit en $\mathcal{O}(N)$, puisque nous avons $M_f = \mathcal{O}(N)$. La complexité de la FMM multi-niveaux pour résoudre le système $Ax = b$ est donc donnée par :

$$\mathcal{O}(N + N_{iter} N \ln^2 N),$$

$\mathcal{O}(N)$ représentant la complexité du calcul de Z^{near} , étape qui contrairement aux autres est indépendante de Y , et N_{iter} étant le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du système.

Remarque. *Par rapport à l'étape de transfert, l'apparition d'un terme supplémentaire en $\ln N$ dans les étapes de montées et de descentes provient des opérations d'interpolation et d'antépolation. La complexité de l'algorithme multipolaire est donc asymptotiquement en $\mathcal{O}(N \ln^2 N)$. En fait, cette complexité est atteinte quand $\ln N$ est prépondérant devant la constante $nbTra$, ce qui correspond à des valeurs de N très grandes, supérieures à 10^{100} . En pratique, le coût prépondérant de la FMM est $\mathcal{O}(nbTra N \ln N)$ et est dû à l'étape de transferts.*

5.6 Application de la FMM aux équations intégrales de Després (EID)

Pour présenter un produit matrice-vecteur effectué avec la FMM, la matrice A définie par (5.1) a été utilisée. Cependant, la matrice intervenant dans les EID comporte quelques différences avec (5.1) ; elle fait notamment intervenir des fonctions de base, mais surtout, les EID étant basées sur la séparation en partie réelle, G_r , et en partie imaginaire, G_i , du noyau de Green, elle fait intervenir deux nouveaux noyaux :

$$G(x, y) = G_r(x, y) + iG_i(x, y) \tag{5.67}$$

$$= \frac{\cos(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} + i \frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|}. \tag{5.68}$$

Dans le cas d'une condition au bord d'impédance de type Léontovitch, en posant $Y_h^1 = (X_h^1, \Lambda_h^1)$ et $Y_h^2 = (X_h^2, \Lambda_h^2)$ avec pour $l \in \{1, 2\}$ $X_h^l = (\alpha_1^l, \dots, \alpha_N^l)^t$ et $\Lambda_h^l = (\gamma_1^l, \dots, \gamma_N^l)^t$, les EID s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_\beta^1 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1 \\ Y_h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\beta^1 & \mathcal{C}_R^1 \\ \mathcal{C}_R^2 & \mathcal{R}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1 \\ Y_h^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

où $S^l = \begin{pmatrix} F^l \\ 0 \end{pmatrix}$ et les matrices \mathcal{M}_β^l , \mathcal{R}_β^l et \mathcal{C}_R^l sont données par :

$$\mathcal{M}_\beta^l = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2} \mathcal{A}^l & \mathcal{K}^l \\ -\mathcal{K}^{l*} & 2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^l \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_\beta^l = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathcal{B}_\beta \\ i\mathcal{B}_\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \mathcal{C}_R^l = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_R^l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

les matrices \mathcal{B}_β , \mathcal{D}_β , \mathcal{A}^l , \mathcal{K}^l , \mathcal{K}^{l*} , \mathcal{N}_R^l de dimension $N \times N$ et le vecteur F^l de dimension N étant définis par :

$$\begin{aligned} (F^l)_i &= \langle F_l^{EID}, \phi_i \rangle_{\mathbf{v}_h}, \\ (\mathcal{B}_\beta)_{ij} &= \langle \beta k \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbf{v}_h}, \\ (\mathcal{D}_\beta)_{ij} &= \langle \frac{1+\beta}{2} \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbf{v}_h}, \\ (\mathcal{A}^l)_{ij} &= \langle \delta_l^* \delta_l \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbf{v}_h}, \\ (\mathcal{K}^l)_{ij} &= \langle k K_l \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbf{v}_h}, \\ (\mathcal{K}^{l*})_{ij} &= \langle k K_l \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbf{v}_h}, \\ (\mathcal{N}_R^l)_{ij} &= \langle A_{R,l} \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbf{v}_h}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Les matrices \mathcal{A}^l et \mathcal{K}^l , $l \in \{1, 2\}$, sont définies par :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^l)_{ij} &= (\delta_l^* \delta_l \phi_j, \phi_i), \\ (\mathcal{K}^l)_{ij} &= (k K_l \phi_j, \phi_i), \end{aligned}$$

où (\cdot, \cdot) correspond au produit scalaire de $L^2(\Gamma_h)$, et $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ est l'ensemble des fonctions de base. Les opérateurs $\delta_l^* \delta_l$ et K_l sont donnés par :

$$\begin{aligned} \delta_l^* \delta_l &= 2k^2(T_i + (-1)^l K_i), \\ K_l &= -(T_r + (-1)^l K_r + (-1)^l \frac{1}{2} n \wedge \cdot), \end{aligned}$$

T_r , K_r , T_i et K_i sont définis par :

$$T = T_r + iT_i \quad \text{et} \quad K = K_r + iK_i. \quad (5.72)$$

Les relations (5.72) sont obtenues à partir de la décomposition en partie réelle, G_r , et en partie imaginaire, G_i , du noyau de Green (T_r et K_r s'écrivent avec G_r , alors que T_i et K_i s'écrivent avec G_i).

Les opérateurs T et K sont donnés par :

$$(T\phi_j, \phi_i) = k \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G(x, y) \left(\phi_j(y) \cdot \overline{\phi_i(x)} - \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_{\Gamma} \phi_j(y) \cdot \overline{\operatorname{div}_{\Gamma} \phi_i(x)} \right) d\gamma(y) d\gamma(x), \quad (5.73)$$

$$(K\phi_j, \phi_i) = \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \left(\nabla_x G(x, y) \wedge \phi_j(y) \right) \cdot \overline{\phi_i(x)} d\gamma(y) d\gamma(x). \quad (5.74)$$

La méthode multipôle est appliquée aux produits matrice-vecteur faisant intervenir les matrices \mathcal{A}^l et $\tilde{\mathcal{K}}^l$, $\tilde{\mathcal{K}}^l$ étant définie par :

$$(\tilde{\mathcal{K}}^l)_{ij} = (\tilde{K}_l \phi_j, \phi_i), \quad (5.75)$$

avec $\tilde{K}_1 = K_r - T_r$ et $\tilde{K}_2 = K_r + T_r$.

Les noyaux de \mathcal{A}^l et $\tilde{\mathcal{K}}^l$ étant différents, deux sections distinctes sont consacrées au traitement multipolaire de ces matrices. Le noyau G_i étant régulier, \mathcal{A}^l est appelé terme régulier. Le noyau G_r étant singulier, $\tilde{\mathcal{K}}^l$ est appelé terme singulier.

Pour de plus amples détails sur l'application de la méthode multipôle aux EID, le lecteur intéressé est invité à consulter [39], et [90] pour une application industrielle.

5.6.1 Terme régulier

L'identité

$$G_i(x, y) = \frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} = \frac{k}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik(x-y)\cdot\hat{s}} d\hat{s}, \quad (5.76)$$

permet une réécriture de la matrice \mathcal{A}^l :

$$(\mathcal{A}^l)_{ij} = (\delta_l \phi_j, \delta_l \phi_i)_{L^2(S^2)}, \quad (5.77)$$

avec

$$(\delta_l f)(\hat{s}) = \frac{k^2}{2\pi\sqrt{2}} \int_{\Gamma_h} f(x) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l i \hat{\phi}) e^{-ikx\cdot\hat{s}} d\gamma(x), \quad (5.78)$$

où $(\hat{s}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ est le repère local en coordonnées sphériques sur S^2 , et $l \in \{1, 2\}$.

Nous avons :

$$(\mathcal{A}^l)_{ij} = \frac{k^4}{8\pi} \int_{S^2} \left(\int_{\Gamma_h} \phi_j(y) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l i \hat{\phi}) e^{-ky\cdot\hat{s}} d\gamma(y) \right) \cdot \overline{\left(\int_{\Gamma_h} \phi_i(x) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l i \hat{\phi}) e^{-ikx\cdot\hat{s}} d\gamma(x) \right)} d\hat{s}.$$

Sous cette forme, la discrétisation de la sphère unité nécessiterait $\mathcal{O}(N)$ directions à cause du caractère oscillant de $e^{-ikx \cdot \hat{s}}$ en la variable \hat{s} . Ainsi, même si les indices i et j sont découplés, le coût est en $\mathcal{O}(N^2)$.

Soient X_x et X_y les centres des boîtes multipolaires contenant respectivement x et y . Nous avons :

$$(\mathcal{A}^l)_{ij} = \frac{k^4}{8\pi} \int_{S^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{(\phi_j(y) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l i \hat{\phi}) e^{-ik(y-X_y) \cdot \hat{s}} e^{-ik(X_y-X_x) \cdot \hat{s}})}{(\phi_i(x) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l i \hat{\phi}) e^{-ik(x-X_x) \cdot \hat{s}})} d\gamma(y) d\gamma(x) d\hat{s}. \quad (5.79)$$

En utilisant la série de Jacobi-Anger, $e^{-ik(X_y-X_x) \cdot \hat{s}}$ est approché par :

$$e^{-ik(X_y-X_x) \cdot \hat{s}} \simeq \sum_{l=0}^L (2l+1) i^l j_l(k|X_y-X_x|) P_l(\cos(\hat{s}, X_y-X_x)) = T_{xy}. \quad (5.80)$$

Les intégrales posées sur Γ_h sont discrétisées. Soient x_j les points de quadrature de Γ_h appartenant au support de ϕ_j , et ω_j les poids associés aux points x_j . Soit $Y = (Y_1, \dots, Y_N)^t$ un vecteur. La FMM est appliquée à \mathcal{A}^l en considérant les fonctions de radiation :

$$F_m^{l,f} = \sum_{j|x_j \in C_m^f} \omega_j e^{-ik\hat{s} \cdot r_j^n} \phi_j(x_j) \cdot (\hat{\theta} + (-1)^l i \hat{\phi}) Y_j, \quad (5.81)$$

et les fonctions de transfert :

$$T_{mm'}^n = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l j_l(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)). \quad (5.82)$$

Une version à une composante pour le terme régulier est obtenue, car les fonctions de radiations (5.81) sont des quantités scalaires.

Remarque. 1) Les facteurs $(\hat{\theta} + (-1)^l i \hat{\phi})$ incrémentent de un le degré des polynômes à intégrer sur S^2 , il faut donc augmenter le nombre de points de quadrature sur S^2 . Une astuce numérique, proposée par Collino [37], pour interpoler les nouvelles fonctions de radiation consiste à les multiplier par $\sin(\theta_j^n)$ avant l'interpolation et à utiliser la relation :

$$\sin(\theta)(\hat{\theta} - i \hat{\phi}) = \sum_{l=0}^2 \sum_{|m| \leq l} c_l^m Y_l^m(\theta, \phi). \quad (5.83)$$

Nous avons une série de produits d'harmoniques sphériques, et nous nous ramenons à la décomposition (5.80) en exprimant chaque produit $Y_l^r(\theta, \phi) Y_l^r(\theta, \phi)$ comme une somme d'harmoniques

sphériques. L'interpolation de la fonction de radiation $F_m^{l,f}$ est effectuée en ajoutant deux termes à la série : L_n devient $L_n + 2$. Nous avons donc :

$$S_n = (2(L_n + 2) + 1)((L_n + 2) + 1). \quad (5.84)$$

La fonction de radiation interpolée est ensuite obtenue en divisant par $\sin(\theta_j^{n-1})$.

2) Pour le terme régulier, il n'y a pas de matrice proche. Lorsque $C_m^n = C_{m'}^n$, nous avons $T_{mm'}^n = 1$.

5.6.2 Terme singulier

Nous ne traitons ici que $\tilde{K}_1 = K_r - T_r$, car le traitement de \tilde{K}_2 est similaire. Soient X_x et X_y les boîtes multipolaires contenant respectivement x et y . Lorsque $|X_y - X_x| > |r_y - r_x|$, nous avons [4] :

$$G_r(x, y) = \frac{\cos(k|x - y|)}{4\pi|x - y|} \simeq \frac{-k}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\hat{s}\cdot r_x} T_{xy}(\hat{s}) e^{-ik\hat{s}\cdot r_y} d\hat{s}, \quad (5.85)$$

$$\text{avec } T_{xy}(\hat{s}) = \sum_{l=0}^L (2l + 1) i^l y_l(k|r_{xy}|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{xy})). \quad (5.86)$$

\tilde{K}_1 est donné par :

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_1)_{ij} &= - \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} (\nabla_y G_r(x, y) \wedge \phi_j(y)) \cdot \overline{\phi_i(x)} d\gamma(y) d\gamma(x) \\ &- k \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G_r(x, y) \phi_j(y) \cdot \overline{\phi_i(x)} d\gamma(y) d\gamma(x) \\ &+ \frac{1}{k} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G_r(x, y) \text{div}_\Gamma \phi_j(y) \cdot \overline{\text{div}_\Gamma \phi_i(x)} d\gamma(y) d\gamma(x). \end{aligned} \quad (5.87)$$

En posant $\mathcal{G}_r(x, y) = (Id_{3 \times 3} - \frac{1}{k^2} \nabla_x \otimes \nabla_y) G_r(x, y)$ et en utilisant la formule de Gauss pour le dernier terme de (5.87), \tilde{K}_1 se réécrit :

$$(\tilde{K}_1)_{ij} = -k \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} (\mathcal{G}_r(x, y) \phi_j(y) + \frac{1}{k} \nabla_y G_r(x, y) \wedge \phi_j(y)) \cdot \overline{\phi_i(x)} d\gamma(y) d\gamma(x). \quad (5.88)$$

Remarque. Le développement (5.85) n'étant pas valable partout, \tilde{K}_1 est décomposée en une matrice proche \tilde{K}_1^{near} et une matrice lointaine \tilde{K}_1^{far} (cf (5.28)).

Les intégrales de (5.87) posées sur Γ_h sont discrétisées, et la FMM est appliquée en considérant les fonctions de radiation :

$$F_{1,m}^{l,f} = \sum_{j|x_j \in C_m^f} \omega_j e^{-ik\hat{s}\cdot r_j^n} (\phi_j(x_j) + i\hat{s} \wedge \phi_j(x_j)) Y_j, \quad (5.89)$$

$$F_{2,m}^{l,f} = \sum_{j|x_j \in C_m^f} \omega_j e^{-ik\hat{s}\cdot r_j^n} (\text{div}_{\Gamma} \phi_j)(x_j) Y_j,$$

et les fonctions de transfert :

$$T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l y_l(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)). \quad (5.90)$$

où x_j correspondent aux points de quadrature de Γ_h appartenant au support de ϕ_j , et ω_j est le poids associé à x_j .

(5.89) correspond à une formulation à quatre composantes, car $F_{1,m}^{l,f}$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 et $F_{2,m}^{l,f}$ est un scalaire. Nous allons donner une version à une composante de la FMM. L'intérêt d'une telle version est qu'elle permet de réduire le nombre de fonctions de radiation à traiter et le nombre de transferts à effectuer. La version à une composante pour le terme singulier a été établie par Collino et Mer-Nkonga [39].

Nous considérons l'écriture (5.88). Les intégrales de (5.88) posées sur Γ_h sont discrétisées. Soient x_j les points de quadrature de Γ_h appartenant au support de ϕ_j , et ω_j les poids associés aux points x_j . Une écriture "symétrique" est obtenue en écrivant les relations suivantes : $\forall V, W \in \mathbb{C}^3$ et $\forall \hat{s} \in S^2$

$$V \cdot (W - (\hat{s} \cdot W)\hat{s} + i\hat{s} \wedge W) = (V \cdot (\hat{\theta} + i\hat{\phi})) \overline{(W \cdot (\hat{\theta} + i\hat{\phi}))}, \quad (5.91)$$

ce qui permet d'appliquer la FMM en considérant les fonctions de radiation :

$$F_m^{l,f} = \sum_{j|x_j \in C_m^f} \omega_j e^{-ik\hat{s}\cdot r_j^n} \phi_j(x_j) \cdot (\hat{\theta} + i\hat{\phi}) Y_j, \quad (5.92)$$

et les fonctions de transfert :

$$T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l y_l(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)). \quad (5.93)$$

Nous avons une version de la FMM une composante, car les fonctions de radiation (5.92) sont des scalaires.

Remarque. Les opérateurs T (5.73) et K (5.74) conduisent respectivement à deux types d'équations : l'EFIE qui est l'équation intégrale en champ électrique, et la MFIE qui est l'équation intégrale en champ magnétique. En combinant ces deux équations, nous obtenons la CFIE (Combined Field Integral Equation) :

$$CFIE = \alpha EFIE + (1 - \alpha)iMFIE, \quad (5.94)$$

où $\alpha \in [0, 1]$.

Nous pouvons appliquer la FMM à la CFIE et avoir une version à quatre composantes en considérant les fonctions de radiation (5.89). Des versions à trois et à deux composantes ont été établies par Collino et Millot [40].

Chapitre 6

FMM et éléments finis courbes d'ordre élevé

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les effets engendrés sur la FMM par l'emploi d'éléments finis courbes d'ordre élevé. En premier lieu, nous nous intéressons au critère d'arrêt pour la subdivision de l'obstacle en octree, i.e. nous regardons comment choisir la taille des boîtes multipolaires au niveau fin. Ensuite, nous quantifions, dans une seconde partie, l'impact qu'ont les éléments finis d'ordre élevé et la finesse du maillage Γ_h considéré sur la complexité de la FMM. Cette analyse est faite en appliquant la FMM à un cas simplifié, ce cas restant néanmoins généralisable aux équations intégrales de Després (EID). Pour conclure, la complexité de la FMM pour des éléments finis d'ordre 0 est comparée à celle donnée par des éléments finis d'ordre 1. Ceci s'effectue en tenant compte, pour chaque cas, de la finesse du maillage Γ_h .

6.2 Critère d'arrêt pour la subdivision de l'objet en octree

Cette partie est consacrée au choix de la taille des cubes au niveau fin d_f . Pour des raisons de stabilité de la méthode FMM [46], le critère d'arrêt de la subdivision de l'octree est :

$$kd_f \sim 1, \tag{6.1}$$

où k est le nombre d'onde.

D'après la relation (6.1), d_f doit être un peu plus grande que la plus longue arête du maillage (h_{max}), i.e. chaque cube au niveau fin contient au plus quelques triangles du maillage. Typiquement, nous avons :

$$\text{si } kd_f \sim 1 \Rightarrow d \sim \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{6.2}$$

(6.1) peut-être retrouvée à partir de (6.2).

Pour un maillage en $\lambda/10$ ($\sim h_{max}$), le critère suivant est habituellement considéré :

$$d_f \sim \max(2.5h_{max}, \frac{\lambda}{2\pi}). \quad (6.3)$$

L'avantage du critère (6.3) est qu'il tient compte de la taille des éléments du maillage, ce qui est nécessaire afin de calculer correctement les interactions singulières. Désormais, des maillages grossiers comportant moins d'éléments que précédemment peuvent-être considérés, i.e. des maillages en λ/a avec $a < 10$.

Comme ci-dessus, le critère d'arrêt pour la construction de l'octree est défini en imposant que les cubes du niveau le plus fin contiennent au plus quelques éléments du maillage. La relation (6.3) est conservée.

Remarque. *En considérant un maillage en $\lambda/5$, nous avons :*

$$h_{max} \sim \frac{\lambda}{5} \Rightarrow d_f \geq 2.5 \frac{\lambda}{5} = \frac{\lambda}{2}. \quad (6.4)$$

Etudions les répercussions du critère (6.3) sur le nombre de niveaux de la FMM. Soit d_0 la longueur du côté du cube initial. De par la construction de l'octree, nous avons la relation :

$$d_f = \frac{d_0}{2^{niv_f}}. \quad (6.5)$$

Le nombre maximum de niveaux de subdivision est alors donné par :

$$niv_f = \frac{\ln d_0 - \ln d_f}{\ln 2}. \quad (6.6)$$

D'après (6.6), pour un maillage grossier ($a < 10$), niv_f diminue car d_f augmente.

Pour un maillage en λ/a , nous posons $d_f^a = d_f$, $niv_f^a = niv_f$ et $h_{max}^a = h_{max}$. En adoptant ces notations, nous avons :

$$niv_f^a = \frac{\ln d_0 - \ln d_f^a}{\ln 2} \sim \frac{\ln d_0 - \ln(2.5c_1 h_{max}^a)}{\ln 2}, \quad (6.7)$$

avec $c_1 \sim 1$.

Comme $h_{max}^a \sim \lambda/a$ et $h_{max}^{10} \sim \lambda/10$, nous avons $h_{max}^a \sim \frac{10}{a} h_{max}^{10}$, i.e. $h_{max}^a = c_2 \frac{10}{a} h_{max}^{10}$ avec $c_2 \sim 1$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} niv_f^a &\sim \frac{\ln d_0 - \ln(2.5 \frac{10}{a} c_3 h_{max}^{10})}{\ln 2} \\ &\sim \frac{\ln d_0 - \ln(\frac{10}{a} c_3 d_f^{10})}{\ln 2} \\ &\sim \frac{\ln d_0 - \ln d_f^{10}}{\ln 2} - \frac{\ln(\frac{10}{a} c_3)}{\ln 2}, \quad \text{où } c_3 = c_1 c_2 \sim 1, \\ niv_f^a &\sim niv_f^{10} - \frac{\ln 10 - \ln a}{\ln 2}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

avec $a < 10$. La quantité $(\ln 10 - \ln a)/\ln 2$ représente le nombre de niveaux perdus en considérant un maillage en λ/a par rapport à un maillage en $\lambda/10$.

Remarque. En considérant un maillage en $\lambda/5$, d'après (6.8), il y a perte d'un niveau dans la FMM.

6.3 Complexité de la FMM en fonction de l'ordre des éléments finis et de la finesse du maillage

6.3.1 Brève présentation de la FMM

Nous calculons la complexité d'une méthode FMM à niv_f niveaux, lorsque des éléments finis d'ordre 0 ou d'ordre 1 sont utilisés.

Afin de ne pas trop alourdir la présentation, nous considérons la résolution d'un système linéaire $Ax = b$, dont la matrice A est définie par :

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G(x, y) \varphi_i(x) \cdot \overline{\varphi_j(y)} d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y), \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (6.9)$$

où G est le noyau de Green donné par :

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad (6.10)$$

φ_i et φ_j sont respectivement les $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ fonctions de base. Dans (6.9), les surfaces Γ_h peuvent-être remplacées par les supports $supp(\varphi_i)$ et $supp(\varphi_j)$ des fonctions φ_i et φ_j . Le support de chaque fonction de base est au plus constitué de deux éléments de Γ_h . Soient T_i et T_j les éléments respectifs de $supp(\varphi_i)$ et $supp(\varphi_j)$.

Nous notons :

- M_n est le nombre de cubes au niveau n ,
- C_m^n est le $m^{\text{ième}}$ cube du niveau n ($m \in \{1, \dots, M_n\}$),
- X_m^n est le centre de C_m^n ,
- d_n est la longueur des côtés des cubes au niveau n .

Les cubes C_m^{n+1} provenant de la subdivision d'un cube $C_{\tilde{m}}^n$ sont les "fils" de $C_{\tilde{m}}^n$, et par conséquent $C_{\tilde{m}}^n$ est leur "père". Le voisinage V_m^n d'un cube C_m^n est défini par :

$$V_m^n = \{m' \in \{1, \dots, M_n\} / |X_m^n - X_{m'}^n|_\infty \leq d_n\}. \quad (6.11)$$

La notion de plus proches non voisins est définie par :

$$\forall n \geq 3, \quad TL_m^n = \{m' \in \{1, \dots, M_n\} / m' \notin V_m^n \text{ et } \mathcal{P}(n, m') \in V_{\mathcal{P}(n, m)}^{n-1}\}, \quad (6.12)$$

où \mathcal{P} donne le numéro du père pour chaque fils. La fonction \mathcal{S} associe à un cube C_m^n l'ensemble de ses fils.

Comme il a été expliqué au chapitre précédent, pour appliquer la FMM, A est décomposée en une matrice proche A^{near} et en une matrice lointaine A^{far} : $A = A^{near} + A^{far}$, A^{near} et A^{far} vérifiant :

$$A_{ij}^{near} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } m' \in V_m^f, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad A_{ij}^{far} = \begin{cases} 0, & \text{si } m' \in V_m^f, \\ A_{ij}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.13)$$

où pour plus de simplicité, il a été supposé que $supp(\varphi_i) \subset C_m^f$ et $supp(\varphi_j) \subset C_{m'}^f$. Soit un vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_N)^t$, nous avons :

$$\begin{aligned} Z &= AY, \\ &= A^{near}Y + A^{far}Y, \\ &= Z^{near} + Z^{far}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\text{avec } Z_i^{near} = \sum_{j \in V_m^f} A_{ij} Y_j, \quad \text{et} \quad Z_i^{far} = \sum_{j \notin V_m^f} A_{ij} Y_j + \sum_{n=3}^{niv_f} \sum_{j \in TL_m^n} A_{ij} Y_j. \quad (6.15)$$

Dans (6.15), $j \in V_m^f$ signifie que l'entier j appartient à $\{1, \dots, N\}$ tel que la fonction de base φ_j possède au moins un élément de son support inclu dans V_m^f . $j \notin V_m^f$ et $j \in TL_m^n$ s'interprètent de la même façon.

La FMM consiste alors à approcher Z^{far} par \tilde{Z}^{far} :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_i^{far} &= \frac{ik}{(4\pi)^2} \left(\sum_{T_i \subset supp(\varphi_i)} \sum_{x_\alpha \in T_i} \omega_\alpha \varphi_i(x_\alpha) \right. \\ &\quad \cdot \int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_\alpha^2} \sum_{m' \notin V_m^f} T_{mm'}^2(\hat{s}) \sum_{T \in C_m^2} \sum_{x_\beta \in T} \omega_\beta e^{-ik\hat{s} \cdot r_\beta^2} \sum_{j | T \subset supp(\varphi_j)} \overline{\varphi_j(x_\beta)} Y_j d\hat{s} \\ &+ \sum_{n=3}^{niv_f} \sum_{T_i \subset supp(\varphi_i)} \sum_{x_\alpha \in T_i} \omega_\alpha \varphi_i(x_\alpha) \\ &\quad \cdot \int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_\alpha^n} \sum_{m' \in TL_m^n} T_{mm'}^n(\hat{s}) \sum_{T \in C_m^n} \sum_{x_\beta \in T} \omega_\beta e^{-ik\hat{s} \cdot r_\beta^n} \sum_{j | T \subset supp(\varphi_j)} \overline{\varphi_j(x_\beta)} Y_j d\hat{s} \Big), \end{aligned} \quad (6.16)$$

où T est un élément de Γ_h ,

$$\text{et } T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)). \quad (6.17)$$

Comme $x_\alpha \in C_m^n$ et $x_\beta \in C_{m'}^n$, en posant $r_\alpha^n = x_\alpha - X_m^n$, $r_\beta^n = x_\beta - X_{m'}^n$, $r_{mm'}^n = X_m^n - X_{m'}^n$ et $r^n = r_\alpha^n - r_\beta^n$, nous avons :

$$x_\alpha - x_\beta = r_{mm'}^n + r^n. \quad (6.18)$$

Remarque. Lorsque \tilde{Z}_i^{far} est évalué, que ce soit pour des éléments finis d'ordre 0, ou que ce soit pour des éléments finis d'ordre 1, nous utilisons exactement la même quadrature pour discrétiser les intégrales posées sur les éléments de Γ_h . Pour cette raison, le nombre de points de quadrature n'est pas considéré dans la complexité de la FMM.

En utilisant une FMM avec niv_f niveaux, le calcul de \tilde{Z}^{far} se fait en tenant compte du critère de subdivision de l'octree (6.3). L'algorithme d'un produit matrice-vecteur effectué au moyen de la FMM multi-niveaux est donné par :

– Interactions proches :

Z^{near} est calculé en faisant un produit matrice-vecteur classique entre A^{near} et Y , la matrice A^{near} étant stockée. Lors du calcul de la matrice proche, il faut à la fois tenir compte de l'ordre des éléments finis et de la finesse du maillage, i.e. de la taille des éléments.

– Interactions lointaines :

\tilde{Z}^{far} est calculé en utilisant l'algorithme suivant :

– Initialisation au niveau niv_f :

$\forall m' \in \{1, \dots, M_f\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, S_f\}$:

$$F_{m'}^f(\hat{s}_p^f) = \sum_{T \in C_{m'}^f} \sum_{x_\beta \in T} \omega_\beta e^{-ik\hat{s}_p^f \cdot r_\beta^f} \sum_{j|T \subset \text{supp}(\varphi_j)} \overline{\varphi_j(x_\beta)} Y_j. \quad (6.19)$$

– Montées :

$\forall n \in \{3, \dots, niv_f\}$, $\forall m' \in \{1, \dots, M_{n-1}\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, S_{n-1}\}$:

$$F_{m'}^{n-1}(\hat{s}_p^{n-1}) = \sum_{\tilde{m} \in \mathcal{S}(n-1, m')} e^{ik\hat{s}_p^{n-1} \cdot (X_{m'}^{n-1} - X_{\tilde{m}}^n)} \text{Interp}(F_{\tilde{m}}^n)(\hat{s}_p^{n-1}), \quad (6.20)$$

où Interp correspond à l'opérateur d'interpolation, et n varie de niv_f à 3.

– Transferts :

$\forall n \in \{3, \dots, niv_f\}$, $\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, S_n\}$:

$$G_m^n(\hat{s}_p^n) = \sum_{m' \in TL_m^n} T_{mm'}^n(\hat{s}_p^n) F_{m'}^n(\hat{s}_p^n), \quad (6.21)$$

et lorsque $n = 2$, $\forall m \in \{1, \dots, M_2\}$:

$$G_m^2(\hat{s}_p^n) = \sum_{m' \notin V_2^f} T_{mm'}^2(\hat{s}_p^n) F_{m'}^2(\hat{s}_p^n). \quad (6.22)$$

– Descentes :

$\forall m \in \{1, \dots, M_n\}$ et $\forall p \in \{1, \dots, S_n\}$:

$$G_m^n(\hat{s}_p^n) \leftarrow G_m^m(\hat{s}_p^n) + \text{Anterp}(e^{ik\hat{s} \cdot (X_m^n - X_{\mathcal{P}(n,m)}^{n-1})} G_{\mathcal{P}(n,m)}^{m-1})(\hat{s}_p^n). \quad (6.23)$$

où *Anterp* correspond à l'opérateur d'interpolation, et n varie de 3 à niv_f .

– Intégration au niveau niv_f :

$\forall m \in \{1, \dots, M_f\}$ et $\forall i \in \{1, \dots, N\}$:

$$\tilde{Z}_i^{far} = \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_{T_i \subset \text{supp}(\varphi_i)} \sum_{x_\alpha \in T_i} \omega_\alpha \varphi_i(x_\alpha) \cdot \sum_{p=1}^{S_f} \omega_p^f e^{-ik\hat{s}_p^f \cdot r_\alpha^f} G_m^f(\hat{s}_p^f). \quad (6.24)$$

Dans l'algorithme ci-dessus, seules les étapes d'initialisation et d'intégration dépendent à la fois de l'ordre des éléments finis et de la finesse du maillage. Les étapes de montées, de transferts et de descentes ne dépendent que de la finesse du maillage.

Remarque. Si le nombre de points de quadrature devait figurer dans le calcul de la complexité de la FMM, alors il apparaîtrait au niveau des étapes d'initialisation et d'intégration.

Nous notons :

- n_{ddl} le nombre de degrés de liberté,
- $L_n \sim kd_n$ le nombre de pôles au niveau n pour le calcul des fonctions de transfert,
- $S_n \sim 2(L_n)^2$ le nombre de points de quadrature au niveau n sur la sphère unité S^2 .

Nous avons également les relations suivantes entre les niveaux $(n-1)$ et n :

- $d_{n-1} = 2d_n$,
- $M_n/8 \leq M_{n-1} \leq M_n/4$,
- $S_{n-1} = 4S_n$,
- $L_{n-1} = 2L_n$,
- $M_n S_n \sim n_{ddl}$,
- $M_f \sim n_{ddl}$,
- $S_f \sim 1$.

Remarque. Nous avons :

$$L_n S_n \sim (L_n)^3 \sim (kd_n)^3 \sim \begin{cases} 1 & \text{si } n = niv_f \\ n_{ddl}^{3/2} & \text{si } n = niv_g \end{cases} \quad (6.25)$$

Nous allons calculer en fonction des éléments finis utilisés, la complexité de la résolution du problème $Ax = b$ par la FMM.

6.3.2 Première étude de la complexité de la FMM

Pour l'étude de la complexité de la FMM, la partie initialisation, notée avec 0 en exposant, est dissociée de la partie itérative, notée avec *iter* en exposant. En notant f_{total} le nombre total d'opérations demandées pour résoudre $Ax = b$, nous avons :

$$f_{total} = f_{total}^0 + N_{iter} f_{total}^{iter}, \quad (6.26)$$

où N_{iter} correspond au nombre d'itérations nécessaires à la résolution du problème. Le coût des interactions proches va être évalué. Pour cela, il faut se placer au niveau niv_f de la FMM. Les interactions proches sont traitées en deux étapes : une première étape consistant à calculer la matrice proche, et une seconde étape, effectuée à chaque itération de la résolution, où est réalisé le produit matrice proche vecteur. La complexité des interactions proches vaut donc :

$$f_{proche} = f_{proche}^0 + N_{iter} f_{proche}^{iter}. \quad (6.27)$$

- Calcul de la matrice proche A^{near} :
Chaque boîte ayant au plus 27 boîtes voisines, il y a au plus $27M_f$ interactions proches. Soient deux boîtes C_m^f et C_k^f voisines, il faut calculer :

$$\int_{\Gamma_h \cap C_m^f} \int_{\Gamma_h \cap C_k^f} G(x, y) \varphi_i(x) \cdot \overline{\varphi_j(y)} d\Gamma_h(x) d\Gamma_h(y), \quad (6.28)$$

pour tous les degrés de liberté de C_m^f et C_k^f .
La complexité du calcul de A^{near} vaut :

$$f_{proche}^0 \sim 27M_f \left(\frac{n_{ddl}}{M_f}\right)^2 \sim n_{ddl}. \quad (6.29)$$

- Produit matrice proche-vecteur :
A chaque itération de la résolution, un produit matrice-vecteur de taille $\frac{n_{ddl}}{M_f} \times \frac{n_{ddl}}{M_f}$ est réalisé pour chaque interaction proche :

$$f_{proche}^{iter} \sim 27M_f \left(\frac{n_{ddl}}{M_f}\right)^2 \sim n_{ddl}. \quad (6.30)$$

Remarque. Les constantes intervenant à la fois dans la FMM d'ordre 0 et dans la FMM d'ordre 1 ne sont pas considérées. Pour cette raison, la constante 27 est enlevée des expressions (6.29) et (6.30).

Le coût des calculs de la partie interactions lointaines va être évalué.

– Initialisation :

Au niveau niv_f , pour toute boîte $C_{m'}^f$, et pour les S_f points de la quadrature sur S^2 , la fonction de radiation $F_{m'}^f(\hat{s}_p^f)$ est calculée :

$$\begin{aligned} f_{init}^{iter} &\sim M_f S_f \frac{n_{ddl}}{M_f} \\ &\sim n_{ddl}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

– Montées :

$$\begin{aligned} f_{mont}^{iter} &\sim \sum_{n=3}^{niv_f} M_n S_n \ln S_n \\ &\sim niv_f n_{ddl} \ln(n_{ddl}). \end{aligned} \quad (6.32)$$

– Transferts :

$$\begin{aligned} f_{trans}^{iter} &\sim \sum_{n=2}^{niv_f} nbTra \quad M_n S_n \\ &\sim nbTra \quad niv_f n_{ddl}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

– Descentes :

Les complexités de l'étapes de descentes est identique à celle de l'étape de montées :

$$f_{desc}^{iter} \sim niv_f n_{ddl} \ln(n_{ddl}). \quad (6.34)$$

– Intégration :

La complexité de l'étape d'intégration est identique à celle de l'étape d'initialisation :

$$f_{int}^{iter} \sim n_{ddl}. \quad (6.35)$$

Comme $f_{total} = f_{total}^0 + N_{iter} f_{total}^{iter}$, nous avons :

$$f_{total}^0 = f_{proche}^0,$$

$$f_{total}^{iter} = f_{proche}^{iter} + f_{init}^{iter} + f_{mont}^{iter} + f_{trans}^{iter} + f_{desc}^{iter} + f_{int}^{iter}.$$

Les résultats précédemment obtenus sont résumés dans le tableau 6.1 .

Etape	f_{proche}^0	f_{proche}^{iter}	f_{init}^{iter}	f_{mont}^{iter}	f_{trans}^{iter}	f_{desc}^{iter}	f_{int}^{iter}
Complexité	n_{ddl}	n_{ddl}	n_{ddl}	niv_f $n_{ddl} \ln(n_{ddl})$	$nbTra$ $niv_f n_{ddl}$	niv_f $n_{ddl} \ln(n_{ddl})$	n_{ddl}

TAB. 6.1 – Complexités des étapes de la FMM.

6.3.3 Complexité de la FMM en fonction de l'ordre des éléments finis utilisés

Nous calculons les complexités obtenues avec les éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1. Ces calculs sont effectués en considérant un maillage en λ/δ^0 pour les éléments finis d'ordre 0, et un maillage en λ/δ^1 pour les éléments finis d'ordre 1. Nous nous permettons de prendre un maillage plus grossier avec les éléments finis d'ordre 1, puisqu'ils donnent des résultats plus précis que les éléments finis d'ordre 0. Nous sommes dans la situation où $\delta^0 > \delta^1$.

Les quantités associées aux éléments finis d'ordre 0 s'écrivent avec 0 en exposant, et celles associées aux éléments finis d'ordre 1 s'écrivent avec 1 en exposant.

n_T^0 (respectivement n_T^1) étant le nombre d'éléments du maillage en λ/δ^0 (respectivement en λ/δ^1), nous avons :

$$n_T^0 \sim \left(\frac{\delta^0}{\delta^1}\right)^2 n_T^1. \quad (6.36)$$

Nous avons les relations suivantes :

– pour des éléments finis d'ordre 0 :

$$n_{ddl}^0 = \frac{3}{2} n_T^0, \quad (6.37)$$

– pour des éléments finis d'ordre 1 :

$$n_{ddl}^1 = 5n_T^1. \quad (6.38)$$

Le rapport entre les nombres de degrés de liberté des éléments finis d'ordre 0, n_{ddl}^0 , et d'ordre 1, n_{ddl}^1 est donné par :

$$n_{ddl}^1 = \frac{10}{3} \left(\frac{\delta^1}{\delta^0}\right)^2 n_{ddl}^0. \quad (6.39)$$

D'après la section 6.2, nous avons :

$$niv_f^1 \sim niv_f^0 - \frac{\ln(\delta^0/\delta^1)}{\ln 2} \sim niv_f^0 - \eta \quad (6.40)$$

$$\text{avec } \eta = \frac{\ln(\delta^0/\delta^1)}{\ln 2}. \quad (6.41)$$

Si d_f^0 est la longueur des arêtes des boîtes multipolaires au niveau niv_f^0 pour le maillage en λ/δ^0 , alors pour le maillage en λ/δ^1 , la longueur des arêtes des boîtes multipolaires au niveau niv_f^1 sera $d_f^1 \sim 2^\eta d_f^0$.

A partir du tableau 6.1 et des relations (6.39), (6.40) et (6.41), les complexités des différentes parties de la FMM sont comparées selon l'ordre des éléments finis utilisés. Les complexités des calculs proches sont reportées dans le tableau 6.2, celles des étapes d'initialisation et d'intégration dans le tableau 6.3, et celle des étapes de montées, de descentes et de transferts dans le tableau 6.4.

Etape	Ordre 0	Ordre 1
f_{proche}^0	n_{ddl}^0	$\frac{10}{3} \left(\frac{\delta^1}{\delta^0}\right)^2 n_{ddl}^0$
f_{proche}^{iter}	n_{ddl}^0	$\frac{10}{3} \left(\frac{\delta^1}{\delta^0}\right)^2 n_{ddl}^0$

TAB. 6.2 – Complexités des calculs proches pour des éléments finis d'ordre 0 associés à un maillage en λ/δ^0 et pour des éléments finis d'ordre 1 associés à un maillage en λ/δ^1 .

Etape	Ordre 0	Ordre 1
f_{init}^{iter}	n_{ddl}^0	$\frac{10}{3} \left(\frac{\delta^1}{\delta^0}\right)^2 n_{ddl}^0$
f_{int}^{iter}	n_{ddl}^0	$\frac{10}{3} \left(\frac{\delta^1}{\delta^0}\right)^2 n_{ddl}^0$

TAB. 6.3 – Complexités des étapes d'initialisation et d'intégration pour des éléments finis d'ordre 0 associés à un maillage en λ/δ^0 et pour des éléments finis d'ordre 1 associés à un maillage en λ/δ^1 .

Etape	Ordre 0	Ordre 1
f_{mont}^{iter}	$niv_f^0 n_{ddl}^0 \ln(n_{ddl}^0)$	$\frac{10}{3}(niv_f^0 - \eta)(\frac{\delta^1}{\delta^0})^2 n_{ddl}^0 \ln(n_{ddl}^0)$
f_{trans}^{iter}	$nbTra \quad niv_f^0 n_{ddl}^0$	$\frac{10}{3}(\frac{\delta^1}{\delta^0})^2 nbTra(niv_f^0 - \eta)n_{ddl}^0$
f_{desc}^{iter}	$niv_f^0 n_{ddl}^0 \ln(n_{ddl}^0)$	$\frac{10}{3}(niv_f^0 - \eta)(\frac{\delta^1}{\delta^0})^2 n_{ddl}^0 \ln(n_{ddl}^0)$

TAB. 6.4 – Complexités des étapes de montées, de transferts et de descentes pour des éléments finis d'ordre 0 associés à un maillage en λ/δ^0 et pour des éléments finis d'ordre 1 associés à un maillage en λ/δ^1 .

6.3.4 Comparaison de la complexité de la FMM pour des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1

– Au regard des résultats du tableau 6.2, nous avons :

$$\frac{f_{proche}^0}{f_{proche}^1} = \frac{3}{10} \left(\frac{\delta^0}{\delta^1}\right)^2. \quad (6.42)$$

Ce rapport dépend de la finesse des maillages d'ordre 0 et d'ordre 1, mais aussi de la constante 3/10 relatant le rapport entre les éléments finis d'ordre 0 et ceux d'ordre 1. Il y a un gain avec la méthode d'ordre 1, lorsque (6.42) est supérieur à un, i.e. lorsque $\delta^0 \geq \sqrt{\frac{10}{3}}\delta^1$. Comme $\sqrt{\frac{10}{3}} \simeq 1.826$, pour avoir un gain à cette étape avec la méthode d'ordre 1, il faut que δ^0 soit 1.9 fois supérieur à δ^1 . Si δ^0 et δ^1 sont très proches, i.e. $\delta^0/\delta^1 \simeq 1$, alors les calculs proches sont plus coûteux à l'ordre 1 qu'à l'ordre 0, ce qui est tout à fait normal puisque pour un même maillage le nombre de degrés de liberté augmente avec l'ordre des éléments finis utilisés.

– En ce qui concerne les étapes d'initialisation et d'intégration, les rapports $f_{init}^{iter,0}/f_{init}^{iter,1}$ et $f_{int}^{iter,0}/f_{int}^{iter,1}$ sont identiques à $f_{proche}^0/f_{proche}^1$, i.e. si le nombre de degrés de liberté à l'ordre 1 est inférieur à celui à l'ordre 0, alors la méthode d'ordre 1 est la plus avantageuse. Cependant, ces étapes, aussi bien à l'ordre 0 qu'à l'ordre 1, représentent avec l'étape où est réalisé le produit matrice proche vecteur, les étapes les moins coûteuses de la FMM. Pour ces étapes, les différences de coûts entre l'ordre 0 et l'ordre 1 sont donc à relativiser,

car la partie la plus coûteuse de l'algorithme est l'étape de la partie itérative où sont effectués les transferts (f_{trans}^{iter}).

- Les complexités des étapes de montées (f_{mont}^{iter}), de transferts (f_{trans}^{iter}) et de descentes (f_{desc}^{iter}) donnent le même rapport de coût entre l'ordre 0 et l'ordre 1. Ces étapes dépendent à la fois du nombre d'inconnues et de la finesse de Γ_h . Ces différents coûts peuvent être comparés en fonction de la valeur du rapport δ^1/δ^0 . En effet, pour un niveau de précision fixé, si ce rapport est tel qu'à l'ordre 1, il entraîne la suppression d'un niveau dans la FMM et une réduction suffisante du nombre de degrés de liberté, alors l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 est la plus avantageuse. Sinon, l'emploi d'éléments finis d'ordre 0 est moins coûteux.

Nous avons donc :

$$\frac{f_{total}^{iter,0}}{f_{total}^{iter,1}} \sim \frac{3niv_f^0}{10(niv_f^0 - \eta)} \left(\frac{\delta^0}{\delta^1}\right)^2. \quad (6.43)$$

Les résultats numériques du chapitre 7 donnent des exemples de valeurs respectives de δ^0 et δ^1 qui permettent d'avoir une précision similaire à l'ordre 0 et à l'ordre 1, dans les cas des objets parfaitement conducteurs ($Z_r = 0$) et parfaitement absorbant ($Z_r = 1$).

Chapitre 7

Résultats numériques

7.1 Introduction

Nous présentons, dans ce chapitre, les résultats obtenus lors de la résolution des équations de Maxwell en régime harmonique et en domaine extérieur. Ce problème est résolu en utilisant la formulation intégrale de Després et des éléments finis d'ordre élevé de classe $H(\text{div})$. Le système linéaire obtenu est inversé au moyen d'une méthode itérative, dont le produit matrice-vecteur est accéléré par la méthode multipôle (FMM).

Les résultats numériques représentent des calculs de Surface Equivalente Radar (SER) bistatique. La SER s'exprime comme une transformation logarithmique de l'amplitude de diffusion (σ), ce qui permet de visualiser plus précisément les faibles signatures :

$$\forall \hat{s} \in S^2, \quad SER(\hat{s}) = 20 \log_{10}(\sigma(\hat{s})), \quad (7.1)$$

où S^2 est la sphère unité. L'amplitude de diffusion correspond à l'observation à l'infini de l'onde diffractée par un objet donné pour une onde incidente donnée. Les objets diffractants des cas tests sont la sphère et l'amande NASA. Nous comparons, au travers de ces tests, tout en considérant des fréquences de plus en plus élevées, les résultats obtenus à partir d'éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1. Le cas d'une condition d'impédance de type Léontovitch au bord de l'obstacle Ω est traité en considérant d'abord Ω comme un objet parfaitement conducteur ($Z_r = 0$), puis comme un objet parfaitement absorbant ($Z_r = 1$).

Aussi bien pour $Z_r = 0$ que pour $Z_r = 1$, un GMRes flexible est utilisé pour inverser le système linéaire. Le préconditionnement à droite du GMRes se fait par l'intermédiaire d'un gradient conjugué creux reprenant l'algorithme du double gradient conjugué du tableau 1.1. En ce qui concerne les divers paramètres de la résolution, le paramètre β des EID est égal à 0.5, et le paramètre de troncature de la série multipolaire au niveau n , L_n , est donné par (5.21) :

$$L_n = kd_n + c(kd_n)^{1/3}, \quad (7.2)$$

où k est le nombre d'onde, d_n est la taille des boîtes multipolaires au niveau n , et le coefficient c est choisi égal à 3. Pour la FMM, ce choix fournit un bon compromis entre rapidité et précision. Soient N le nombre d'éléments d'un maillage Γ_h , σ_{ref} l'amplitude de diffusion de la solution de référence et σ_{app} l'amplitude de diffusion de la solution approchée. σ_{ref} et σ_{app} sont évaluées en P points. Leurs valeurs en ces points sont notées σ_{ref}^i et σ_{app}^i , $i \in \{1, \dots, P\}$. Le calcul de l'erreur absolue commise sur l'amplitude de diffusion est donné par :

$$Err_a = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{i=1}^P |\sigma_{ref}^i - \sigma_{app}^i|^2}. \quad (7.3)$$

Les versions de la FMM à une composante du chapitre 5 sont utilisées avec les éléments finis d'ordre 0. Par contre, les versions de la FMM à plusieurs composantes sont utilisées avec les éléments finis d'ordre 1, car un calcul précis des intégrales de correction n'a pas été implémenté pour les versions à une composante et les éléments finis d'ordre 1, ce qui engendre des problèmes de précision.

7.2 La méthode du GMRes appliquée à la résolution des EID

La méthode de Jacobi ne convergeant pas assez rapidement, le système (1.41) est résolu en utilisant un GMRes flexible (Generalized Minimum Residual) [106], [64], [62] et [63]. Nous présentons d'abord le GMRes, puis le GMRes flexible.

Le GMRes construit une approximation de la solution du problème $Ax = b$ (A étant une matrice de taille $N \times N$) de la forme :

$$x_m = x_0 + V_m y_m, \quad (7.4)$$

où x_0 est une donnée initiale, $V_m = [v_1, \dots, v_m]$ est une matrice orthogonale dont les vecteurs colonnes $\{v_j\}_{j=1}^m$ constituent une base orthonormée de l'espace de Krylov de dimension m , \mathcal{K}_m , défini par :

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{Lin}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\}, \quad \text{avec } r_0 = b - Ax_0, \quad (7.5)$$

et y_m est tel que $|r_m|_2 = |b - Ax_m|_2$ est minimisé sur \mathcal{K}_m , $|\cdot|_2$ désignant la norme euclidienne. L'algorithme d'Arnoldi permet de construire une base orthonormée $\{v_j\}_{j=1}^m$ de \mathcal{K}_m et induit la relation :

$$AV_m = V_{m+1} \tilde{H}_m, \quad (7.6)$$

$\tilde{H}_m = \begin{bmatrix} & & H_m \\ 0 & \cdots & 0 \\ & & h_{m+1,m} \end{bmatrix}$ étant une matrice de dimension $(m+1) \times m$, et H_m étant la matrice de Hessenberg supérieure d'ordre m .

Soient $\beta = |r_0|_2$ et $v_1 = r_0/\beta$. Le résidu r_m vérifie :

$$|r_m|_2 = |r_0 - AV_m y_m|_2 \quad (7.7)$$

$$= |V_{m+1}(\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m)|_2 \quad (7.8)$$

$$= |\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m|_2, \quad (7.9)$$

car V_{m+1} est une matrice orthogonale. e_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m . y_m est la solution au sens des moindres carrés de :

$$\min_{y \in \mathcal{K}_m} |\beta e_1 - \tilde{H}_m y|_2. \quad (7.10)$$

La solution du problème de minimisation (7.10) est obtenue à partir d'une factorisation QR de la matrice $[\tilde{H}_m, \beta e_1]$, Q étant une matrice orthonormée et R étant une matrice triangulaire supérieure de dimension $(m+1) \times (m+1)$. La factorisation QR s'effectue en utilisant les matrices de rotations de Givens. y_m est alors donné par :

$$y_m = R(1:m, 1:m)^{-1} R(1:m, m+1), \quad (7.11)$$

où $R(1:m, m+1)$ est le $(m+1)^{\text{ième}}$ vecteur colonne de R , et $R(1:m, 1:m)$ désigne la sous-matrice de R formée à partir des m premières lignes et m premières colonnes.

Le GMRes a les désavantages d'avoir un coût par itération qui croît au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente, et d'imposer le stockage de tous les vecteurs $\{v_j\}_{j=1}^m$, m étant au maximum égal à N . Une première solution consiste en pratique, selon la taille N des vecteurs, à effectuer lorsque m est trop grand, l itérations en choisissant $l < m$, puis à relancer le GMRes en prenant x_l ($x_l = x_0 + V_l y_l$) comme donnée initiale. Une autre solution, qui est fréquemment associée à la première, consiste à utiliser un préconditionneur P^{-1} (ici à droite) pour réduire la dimension de l'espace de Krylov (P^{-1} est souvent une approximation de A^{-1}). Le GMRes préconditionné à droite résout :

$$AP^{-1}t = b, \quad (7.12)$$

où x la solution de $Ax = b$ est telle que $x = P^{-1}t$.

Soit x_0 une donnée initiale. Nous avons :

$$t_0 = Px_0, \quad (7.13)$$

$$\text{et } r_0 = b - Ax_0 = b - AP^{-1}t_0. \quad (7.14)$$

Le GMRes préconditionné construit une approximation de la solution de (7.12) de la forme :

$$t_m = t_0 + V_m y_m, \quad (7.15)$$

où les vecteurs colonnes $\{v_j\}_{j=1}^m$ de V_m constituent une base orthonormée de l'espace de Krylov de dimension m défini par :

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{Lin}\{r_0, AP^{-1}r_0, \dots, (AP^{-1})^{m-1}r_0\}, \quad (7.16)$$

et y_m est tel que $|r_m|_2 = |b - AP^{-1}t_m|_2$ est minimisé sur \mathcal{K}_m . Les vecteurs $\{v_j\}_{j=1}^m$ sont construits à partir de l'algorithme d'Arnoldi qui induit la relation suivante :

$$AP^{-1}V_m = V_{m+1}\tilde{H}_m, \quad (7.17)$$

où $P^{-1}V_m = [P^{-1}v_1, \dots, P^{-1}v_m]$, $\tilde{H}_m = \begin{bmatrix} H_m & \\ 0 \dots 0 & h_{m+1,m} \end{bmatrix}$ est une matrice de dimension $(m+1) \times m$, et H_m est la matrice de Hessenberg supérieure d'ordre m . Soient $\beta = |r_0|_2$ et $v_1 = r_0/\beta$. Le résidu r_m vérifie :

$$|r_m|_2 = |b - AP^{-1}t_m|_2 \quad (7.18)$$

$$= |\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m|_2. \quad (7.19)$$

y_m est solution au sens des moindres carrés de

$$\min_{y \in \mathcal{K}_m} |\beta e_1 - \tilde{H}_m y|_2, \quad (7.20)$$

$$\text{et } x_m = P^{-1}t_m = x_0 + P^{-1}V_m y_m. \quad (7.21)$$

Pour le GMRes préconditionné à droite, seuls les vecteurs v_j sont à préconditionner, ce qui représente peu de changements dans l'algorithme du GMRes et une faible augmentation du temps de calcul lorsque P^{-1} est choisie astucieusement. En général, P est construite de sorte qu'elle soit facilement inversible, et $P^{-1}v_j$ est calculé en résolvant $Pz_j = v_j$. Dans la littérature, les itérations dues à P^{-1} sont appelées itérations intérieures, et celles dues au GMRes sont appelées itérations extérieures.

La méthode permettant de prendre en compte l'évolution à chaque itération de l'espace de Krylov est appelée GMRes flexible; en effet P^{-1} varie à chaque itération externe. En posant $Z_m = [z_1, \dots, z_m] = [P_1^{-1}v_1, \dots, P_m^{-1}v_m]$, une solution approchée de $Ax = b$ est donnée par :

$$x_m = x_0 + Z_m y_m, \quad (7.22)$$

où y_m est tel que $|r_m|_2 = |b - Ax_m|_2$ est minimisé sur \mathcal{K}_m . La relation (7.17) devient :

$$AZ_m = V_{m+1}\tilde{H}_m, \quad (7.23)$$

et le résidu r_m vérifie $|r_m|_2 = |\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m|_2$.

La présentation du GMRes flexible étant achevée, nous revenons à la résolution des EID. Le système (1.41) résolu par la méthode de Jacobi est réécrit de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_\beta^1 - \mathcal{R}_\beta^1 & -\mathcal{C}_R^1 \\ -\mathcal{C}_R^2 & \mathcal{M}_\beta^2 - \mathcal{R}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1 \\ Y_h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

où $\forall l \in \{1, 2\}$, $S^l = (F^l, 0)^t$ et les matrices \mathcal{M}_β^l , \mathcal{R}_β^l et \mathcal{C}_R^l sont données par :

$$\mathcal{M}_\beta^l = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2}\mathcal{A}^l & \mathcal{K}^l \\ -\mathcal{K}^{l*} & 2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^l \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_\beta^l = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathcal{B}_\beta \\ i\mathcal{B}_\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \mathcal{C}_R^l = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_R^l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

les matrices \mathcal{B}_β , \mathcal{D}_β , \mathcal{A}^l , \mathcal{K}^l , \mathcal{K}^{l*} , \mathcal{N}_R^l et le vecteur F^l étant définis par (1.43).

(7.24) est le système résolu par le GMRes flexible. Le préconditionnement se fait à partir de P qui est une approximation de la matrice de (7.24) :

$$P = \begin{pmatrix} \text{diag}(\mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2}\mathcal{A}^1) & \mathcal{K}_{near}^1 + i\mathcal{B}_\beta & 0 & 0 \\ -i\mathcal{B}_\beta - \mathcal{K}_{near}^{1,*} & \text{diag}(2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(\mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2}\mathcal{A}^2) & \mathcal{K}_{near}^2 + i\mathcal{B}_\beta \\ 0 & 0 & -i\mathcal{B}_\beta - \mathcal{K}_{near}^{2,*} & \text{diag}(2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^2) \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

où $\text{diag}(M)$ désigne la diagonale d'une matrice M , et \mathcal{K}_{near}^1 (respectivement \mathcal{K}_{near}^2) correspond à la matrice proche associée à \mathcal{K}^1 (respectivement \mathcal{K}^2), obtenue avec l'octree de la FMM.

A chaque itération du GMRes, le système creux provenant du préconditionnement ($Pz_j = v_j$) est résolu par l'algorithme du double gradient conjugué décrit dans le tableau 1.1, le gradient conjugué interne ($GC1$) étant remplacé par l'inversion directe des matrices diagonales notées $\text{diag}(\dots)$ dans (7.26). Le résidu du gradient conjugué externe ($GC2$) est fixé à 10^{-3} .

A chaque itération du GMRes, l'emploi d'une méthode itérative pour inverser P revient à considérer un préconditionneur variant à chaque itération externe. La méthode utilisée pour l'inversion du système (7.24) est alors le GMRes flexible. Par la suite, nous désignerons par GMRes le GMRes flexible.

7.3 La sphère comme objet diffractant

L'objet diffractant considéré est une sphère. Ce cas test a pour principal avantage de posséder, aussi bien dans le cas d'un obstacle parfaitement conducteur ($Z_r = 0$) que dans le cas d'un obstacle parfaitement absorbant ($Z_r = 1$), une solution exacte donnée par les séries de MIE (cf. [41] ou [96]). La solution obtenue à partir du code peut être comparée à la solution exacte, et il est ainsi possible d'observer son niveau de précision.

Pour tous les cas tests de cette partie, la sphère utilisée est centrée à l'origine et a un rayon de un mètre. A chaque fois, elle est éclairée par une onde incidente de direction $\hat{k} = (0, 0, -1)^t$, dont la fréquence prend les valeurs $1.2GHz$, $3.2GHz$ et $4.7GHz$.

7.3.1 Cas d'une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$)

Etude de la précision des éléments finis d'ordre 1 pour une fréquence de $1.2GHz$

Une onde de fréquence $1.2GHz$ est considérée. Le premier test contribue à valider l'implémentation des éléments finis courbes d'ordre 1. Un maillage Γ_h en $\lambda/10$ (i.e. la longueur moyenne des arêtes des éléments de Γ_h est en $\lambda/10$) est utilisé, car à l'ordre 0, une telle finesse de maillage garantit une bonne précision du résultat. La quadrature comporte sept points de Gauss par élément de Γ_h . Au regard de la figure 7.1, nous recollons bien à la courbe de référence avec les éléments finis d'ordre 1. Pour le même test, en considérant une quadrature composée de trois points de Gauss au lieu de sept, nous obtenons exactement le même résultat.

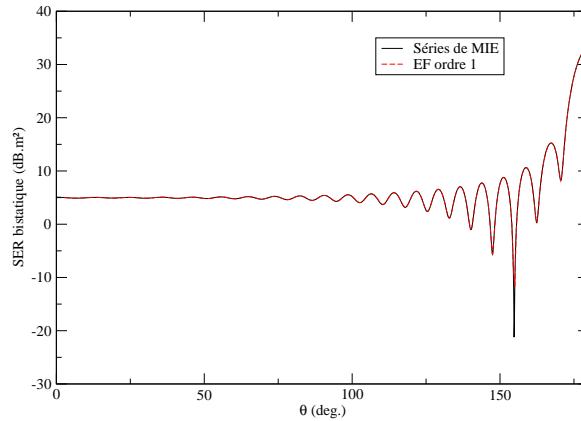


FIG. 7.1 – Validation, en utilisant une quadrature de Gauss à 7 points, des éléments finis d'ordre 1 dans le cas d'une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$) maillée en $\lambda/10$ ($N = 50000$), et éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 1.2GHz$.

La précision des éléments finis d'ordre 1 est testée en considérant un maillage en $\lambda/5$, et sept points de Gauss par élément de Γ_h . La quadrature comprend suffisamment de points de Gauss

pour que ce paramètre n'influence pas le comportement de la solution. Le résultat de la figure 7.2 est assez probant, et est confirmé par les calculs des erreurs commises sur l'amplitude de diffusion (7.3) du tableau 7.1.

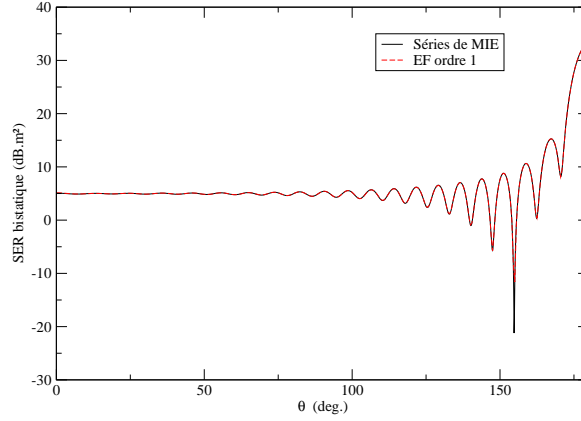


FIG. 7.2 – Résultat obtenu avec des éléments finis d'ordre 1 en utilisant une quadrature de Gauss à 7 points dans le cas d'une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$) maillée en $\lambda/5$ ($N = 12500$), et éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 1.2GHz$.

Γ_h	$\lambda/10$	$\lambda/5$
Err_a	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$1.33 \cdot 10^{-3}$

TAB. 7.1 – Erreurs absolues commises sur l'amplitude de diffusion avec des éléments finis d'ordre 1 et 7 points de Gauss.

Nous étudions l'influence de la quadrature sur la précision de la solution obtenue à partir de l'emploi d'éléments finis d'ordre 1. Comme précédemment, un maillage en $\lambda/5$ est considéré. Deux quadratures comportant 3 points de Gauss chacune sont utilisées. Les points de Gauss de la première quadrature sont situés à l'intérieur des éléments de Γ_h (nous parlerons de points de Gauss intérieurs), et ceux de la seconde quadrature sont situés sur le bord des éléments de Γ_h (nous parlerons de points de Gauss frontières). Ces quadratures sont définies sur le triangle de référence par :

– première quadrature :

$$(\omega, \lambda_2, \lambda_3) = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right); \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right); \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right) \right\},$$

– deuxième quadrature :

$$(\omega, \lambda_2, \lambda_3) = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 0 \right); \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\},$$

ω désignant le poids de la quadrature, λ_2 et λ_3 étant respectivement les coordonnées barycentriques associées aux deuxième et troisième sommet du triangle de référence.

Une autre quadrature composée de trois points frontières est aussi utilisée :

$$(\omega, \lambda_2, \lambda_3) = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right); \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3} \right); \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 0 \right) \right\}.$$

Les deux premières quadratures sont exactes pour des polynômes de degré 2, et la dernière pour des polynômes de degré 1.

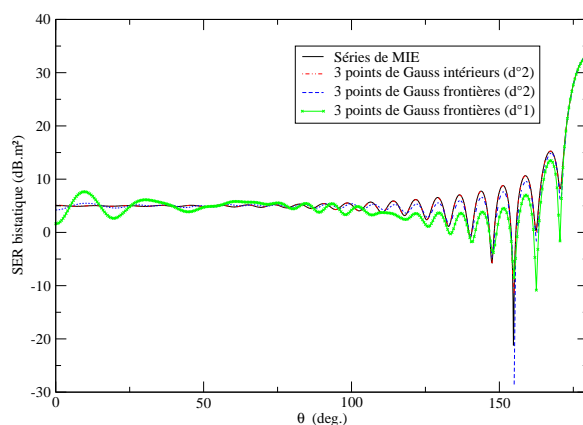


FIG. 7.3 – Influence de la quadrature sur le comportement des éléments finis d'ordre 1 dans le cas d'une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$) maillée en $\lambda/5$ ($N = 12500$), et éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 1.2GHz$.

Quadrature	3 points intérieurs (d^2)	3 points frontières (d^2)	3 points frontières (d^1)	7 points intérieurs	7 points frontières
Err_a	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$	$4.5 \cdot 10^{-1}$	$1.33 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$

TAB. 7.2 – Éléments finis d'ordre 1 et maillage Γ_h en $\lambda/5$.

D'après la figure 7.3 et le tableau 7.2, lorsqu'un maillage en $\lambda/5$ est considéré, et lorsque la résolution du problème fait intervenir des éléments finis d'ordre 1, il y a une perte de précision avec les quadratures ayant 3 points de Gauss frontières, qui n'apparaît pas avec celle ayant 3 points de Gauss intérieurs. Dorénavant, la quadrature composée avec 3 points de Gauss intérieurs sera la seule employée pour les calculs.

Une onde incidente de fréquence $1.2GHz$

Nous tenons à signaler que les notations introduites dans cette partie seront reprises par la suite dans les autres sections.

Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage en $\lambda/10$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/5$. Ces résultats sont reportés dans la figure 7.4 et dans le tableau 7.3. Dans le tableau 7.3, la colonne "Coût total FMM" correspond exclusivement au temps nécessaire pour effectuer l'ensemble des produits matrices-vecteurs avec la FMM, le préconditionnement du GMRes n'étant pas inclus. Du fait que le GMRes flexible soit employé, nous avons préféré reporter le coût total du préconditionnement ("Coût total précond.") à la place du coût de préconditionnement par itération externe.

Un gain de temps s'accompagnant d'une amélioration de la précision du résultat est observé avec les éléments finis d'ordre 1. Il est dû au fait qu'à l'ordre 1, la diminution du nombre de degrés de liberté arrive à compenser l'augmentation du nombre d'itérations du GMRes. En effet, les nombres respectifs de degrés de liberté à l'ordre 0 et à l'ordre 1 étant donnés par $3N/2$ et $5N$, 75000 inconnues sont utilisées à l'ordre 0 contre 62500 inconnues à l'ordre 1, soit près de 15% d'inconnues supplémentaires à l'ordre 0. Ce phénomène se traduit par un produit matrice-vecteur ainsi qu'un assemblage de la matrice proche plus rapides à l'ordre 1 comme le montre le tableau 7.3.

De plus, pour un maillage en $\lambda/5$, le nombre de niveaux dans la FMM (6 niveaux) est exactement le même que pour un maillage en $\lambda/10$, contrairement à ce qui est prévu en théorie : suppression d'un niveau pour un maillage en $\lambda/5$ (cf. Section 6.2). En effet, des résultats de précisions similaires sont obtenus en considérant 5 ou 6 niveaux dans la FMM. Par contre, le fait de considérer 6 niveaux donne de meilleurs temps de calcul.

Soit $f_{total}^{iter,0}$ (respectivement $f_{total}^{iter,1}$) le coût d'un produit matrice-vecteur effectué par la FMM à l'ordre 0 (respectivement à l'ordre 1) lors d'une itération du GMRes. Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} = 1.2$, donné par (6.43), est inférieur au rapport réel $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 1.8$. Il est difficile d'expliquer cet écart avec la théorie, mais une complexité ne donne pas le coût réel mais juste ce vers quoi doit tendre ce dernier. Dans le calcul du rapport réel $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1}$, le temps nécessaire au préconditionnement n'est pas inclus, car ce temps n'est pas directement imputable à la FMM.

Par rapport à la taille des systèmes, le préconditionnement du GMRes demande plus de temps à l'ordre 1. Ceci est normal, puisqu'un préconditionneur itératif est utilisé, et que les systèmes

d'ordre 1 sont connus pour être moins bien conditionnés que ceux d'ordre 0. La convergence du résidu du GMRes (figure 7.4(e)) illustre le moins bon conditionnement à l'ordre 1.

Cependant, le test d'arrêt du GMRes ne dépend pas du résidu. En effet, bien que le résidu continue à converger, la solution du problème n'évolue quasiment plus. Passé un certain seuil, il n'est donc plus utile de poursuivre la résolution. Ce seuil est facilement repéré, car la formulation de Després [114] fournit un critère de convergence original n'existant pas pour des formulations intégrales plus classiques. Il est basé sur la relation suivante :

$$x^l = -2ik\lambda^l, \quad l \in \{1, 2\}, \quad (7.27)$$

décrivant la dépendance entre les inconnues $\{x^l, \lambda_{l=1}^l\}^2$ du problème continu (1.35). La relation (7.27) doit donc être vérifiée par les inconnues $\{\tilde{X}_h^l, \tilde{\Lambda}_h^l\}_{l=1}^2$ (1.39) du problème discret.

Remarque. Les inconnues Y_h^1 et Y_h^2 du système (7.24) sont liées aux inconnues $\{\tilde{X}_h^l, \tilde{\Lambda}_h^l\}_{l=1}^2$ (cf. (1.39)) par la relation :

$$Y_h^l = (X_h^l, \Lambda_h^l)^t, \quad l \in \{1, 2\}, \quad (7.28)$$

où $X_h^l = (\alpha_1^l, \dots, \alpha_N^l)^t$, $\Lambda_h^l = (\gamma_1^l, \dots, \gamma_N^l)^t$ et $\forall j \in \{1, \dots, N\}$, $(\alpha_j^l, \gamma_j^l) \in \mathbb{C}^2$.

En notant $|\cdot|_2$ la norme l^2 définie par :

$$|u|_2 = \left(\sum_{K \in \Gamma_h} \int_K |u(x)|^2 dK(x) \right)^{1/2}, \quad (7.29)$$

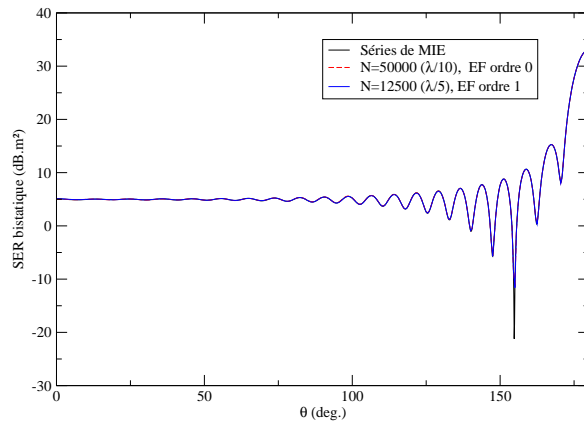
le critère d'arrêt des EID repose sur la convergence de δ qui est définie par :

$$\delta_i = \text{Max} \left(\frac{|d_{i+1}^1 - d_i^1|}{d_i^1}, \frac{|d_{i+1}^2 - d_i^2|}{d_i^2} \right), \quad (7.30)$$

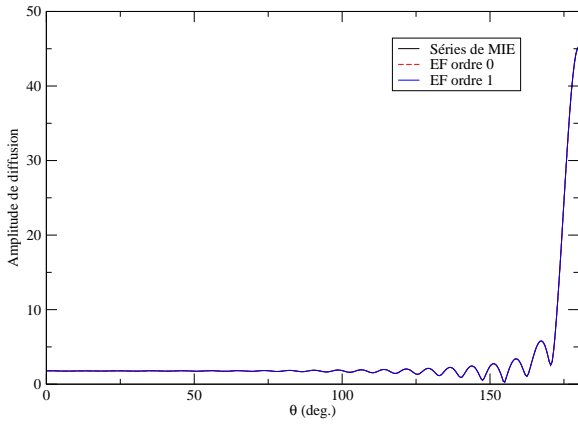
$$\text{où } d_i^l = |\tilde{X}_{h,i}^l + 2ik\tilde{\Lambda}_{h,i}^l|_2 \quad (7.31)$$

et $\tilde{X}_{h,i}^l$, $\tilde{\Lambda}_{h,i}^l$ et δ_i correspondent aux valeurs de \tilde{X}_h^l , $\tilde{\Lambda}_h^l$ et δ à la $i^{\text{ième}}$ itération du GMRes. L'arrêt du GMRes s'effectue lorsque δ est inférieur à 10^{-3} , ce seuil assurant dans la pratique l'obtention d'une solution précise. La figure 7.4(d) décrit le comportement de δ . Au regard de cette figure, l'arrêt du GMRes intervient après 32 itérations à l'ordre 0 et après 49 itérations à l'ordre 1. D'après la figure 7.4(e), il faut 56 itérations à l'ordre 0 pour que le résidu du GMRes soit inférieur à 10^{-3} . Au bout de 100 itérations, ce résidu n'est toujours pas atteint à l'ordre 1. Lorsque l'arrêt du GMRes dépend de δ , les EID donnent un résultat précis avec une convergence modeste sur le résidu du GMRes. Comme pour le résidu du GMRes, δ converge moins vite à l'ordre 1.

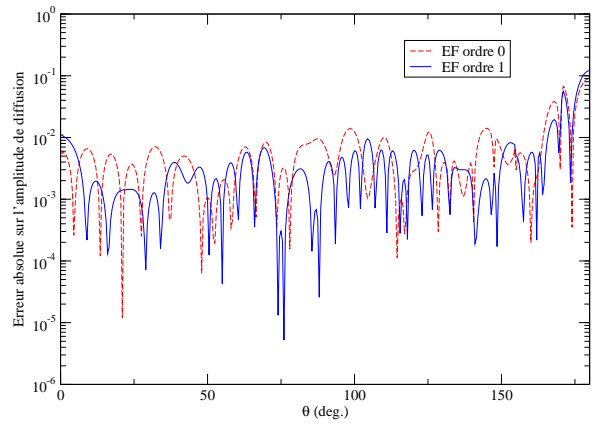
Quant à la mémoire consommée, elle est légèrement plus importante à l'ordre 0 qu'à l'ordre 1, car de plus grands vecteurs sont stockés à l'ordre 0.



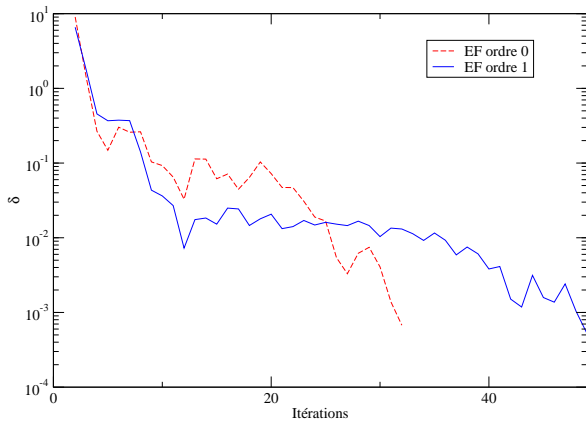
(a)



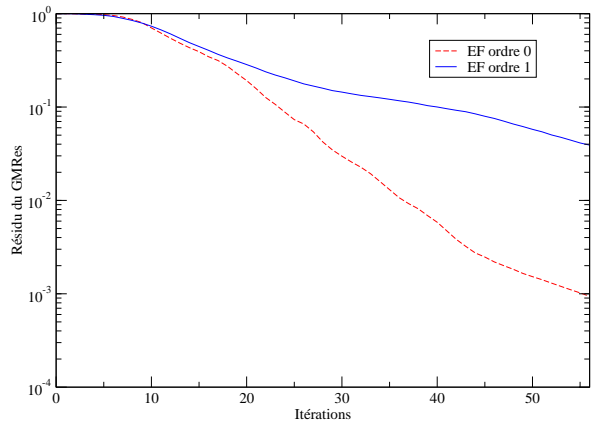
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.4 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 1.2GHz$.

Cas	Err_a	Temps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	5110	0.8	32	220	480	4384 (137)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/5$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	4449	0.7	49	94	588	3724 (76)

TAB. 7.3 – Sphère, $f = 1.2GHz$, $Z_r = 0$.

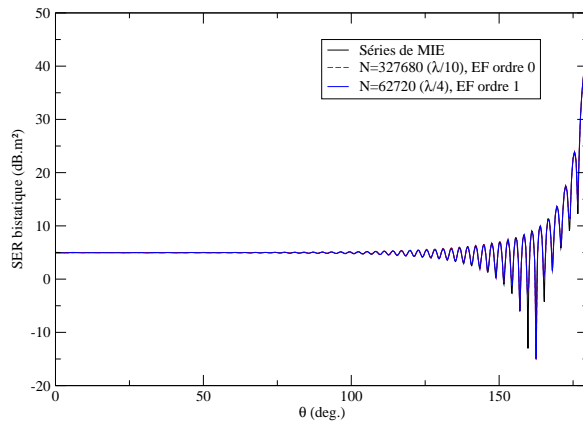
Une onde incidente de fréquence $3.2GHz$

Nous montons en fréquence, et à présent une onde incidente de fréquence $3.2GHz$ est considérée. Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage en $\lambda/10$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/4$. Ces résultats sont reportés dans la figure 7.5 et dans le tableau 7.4. A l'ordre 0 et à l'ordre 1, les systèmes sont composés respectivement de 491520 inconnues et de 313600 inconnues. Il y a donc plus de 36% de degrés de liberté supplémentaires à l'ordre 0. Le nombre de niveaux dans la FMM (7 niveaux) est le même pour les méthodes d'ordre 0 et d'ordre 1. En effet, bien que la théorie prédise la suppression d'un niveau lorsqu'un maillage en $\lambda/4$ est utilisé, aucune perte de précision n'a été constatée en considérant 6 ou 7 niveaux dans la FMM. Ce phénomène conjugué à la réduction du nombre de degrés de liberté à l'ordre 1 entraîne que l'assemblage de la matrice proche ainsi que le produit matrice-vecteur sont plus rapides ce qui compense l'augmentation du nombre d'itérations du GMRes à l'ordre 1. Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0}/f_{total}^{iter^1} \simeq 1.9$, donné par (6.43), est supérieur au rapport réel $f_{total}^{iter,0}/f_{total}^{iter^1} \simeq 1.3$. Le gain de temps global à l'ordre 1 par rapport à l'ordre 0 est faible, mais la précision est un peu meilleure à l'ordre 1.

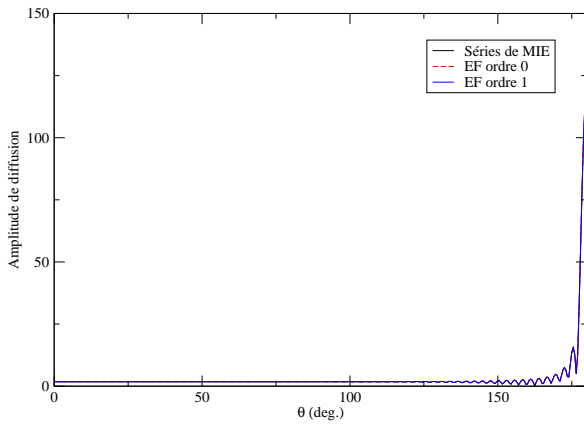
En ce qui concerne la convergence du GMRes et du δ , les remarques faites pour le cas à $1.2GHz$ s'appliquent également ici. Même si le nombre d'itérations du GMRes à l'ordre 0 est inférieur à celui à l'ordre 1, la taille du système d'ordre 0 étant bien plus grande que celle du système d'ordre 1, un gain en mémoire est également réalisé.

Cas	Err_a	Temps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	48502	6.7	42	1766	5334	40194 (957)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/4$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	47002	5.4	56	518	4312	41552 (742)

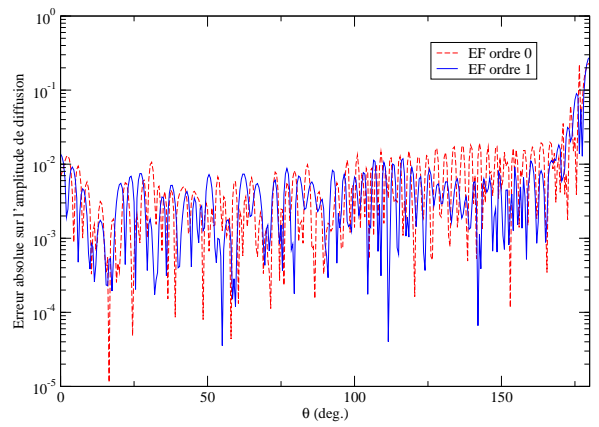
TAB. 7.4 – Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 0$.



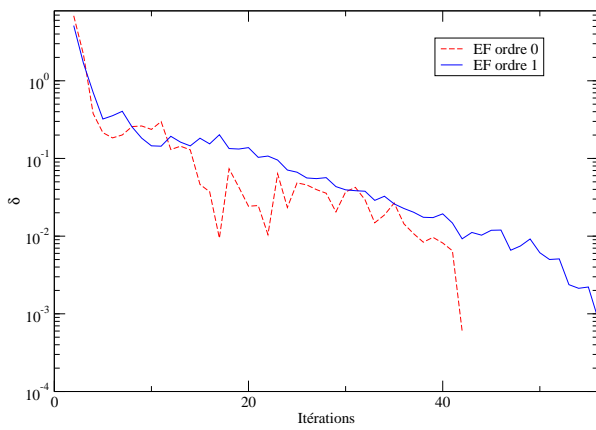
(a)



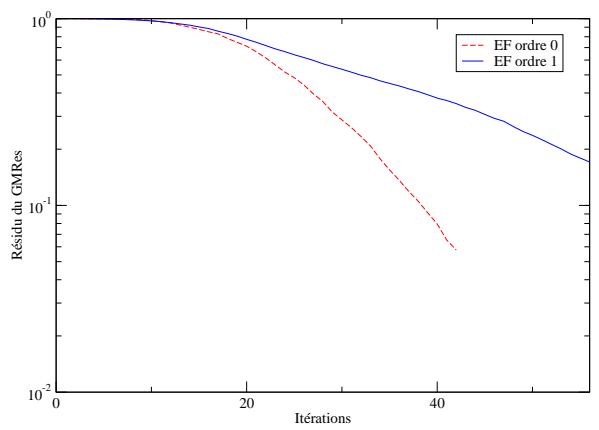
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.5 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 3.2GHz$.

Une onde incidente de fréquence $4.7GHz$

Nous continuons de monter en fréquence, et à présent une onde incidente de fréquence $4.7GHz$ est considérée. Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage en $\lambda/10$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/4$. Ces résultats sont reportés dans la figure 7.6 et dans le tableau 7.5.

A l'ordre 0 et à l'ordre 1, les systèmes sont composés respectivement de 1105920 inconnues et de 640000 inconnues. Il y a donc environ 42% de degrés de liberté supplémentaires à l'ordre 0. Le nombre de niveaux dans la FMM (8 niveaux) est le même pour les méthodes d'ordre 0 et d'ordre 1.

Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 1.9$ est supérieur au rapport réel $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 1.3$. Le tableau 7.5 montre que les temps d'assemblage de la matrice proche et d'un produit matrice-vecteur avec la FMM sont plus coûteux à l'ordre 0 à cause d'un plus grand nombre d'inconnues. Cependant, la différence entre les temps de calcul nécessaires à la résolution du problème à l'ordre 0 et à l'ordre 1 se fait au niveau du nombre d'itérations du GMRes. En effet, d'après la figure 7.6(d), les nombres d'itérations du GMRes à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont respectivement de 50 et de 82. Au final, la méthode d'ordre 0 est plus rapide que celle d'ordre 1. Cependant, la méthode d'ordre 1 fournit un résultat plus précis que celle d'ordre 0. Même si le nombre d'itérations est inférieur à l'ordre 0, la taille du système fait que la méthode d'ordre 0 consomme quasiment autant de mémoire que celle d'ordre 1.

Cas	Err_a	Temps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	142210	11.2	50	3081	12050	118700 (2374)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/4$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	171658	11.6	82	786	14070	154242 (1881)

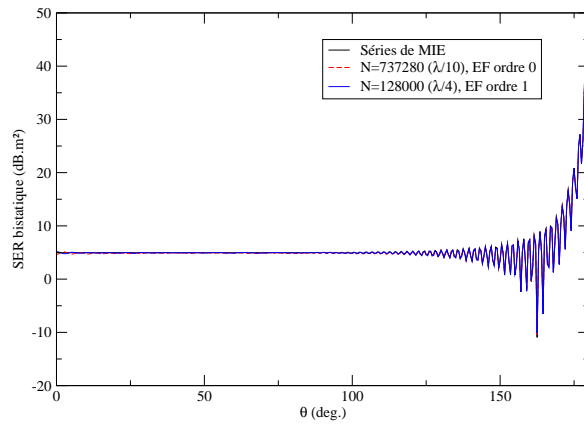
TAB. 7.5 – Sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 0$.

7.3.2 Cas d'une sphère parfaitement absorbante ($Z_r = 1$)

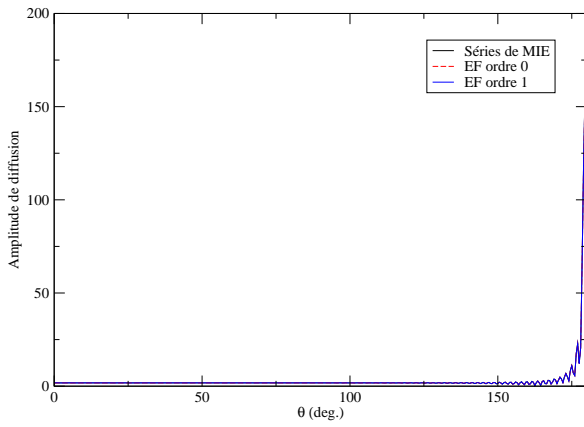
Une onde incidente de fréquence $1.2GHz$

Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage Γ_h en $\lambda/10$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage Γ_h en $\lambda/5$. Ces résultats sont reportés dans la figure 7.7 et dans le tableau 7.6. Il y a plus de 15% d'inconnues supplémentaires à l'ordre 0. Le nombre de niveaux dans la FMM (6 niveaux) est le même pour les méthodes d'ordre 0 et d'ordre 1.

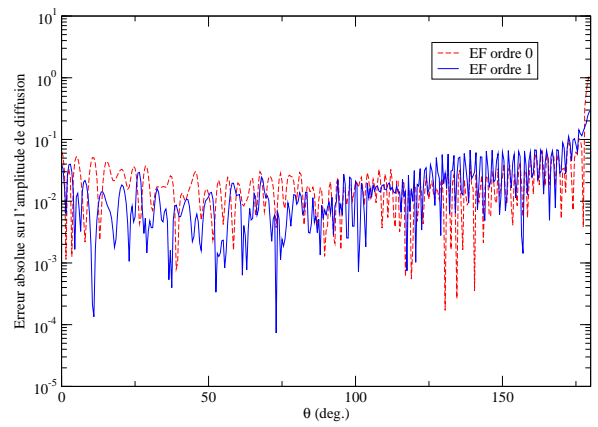
Contrairement au cas du conducteur parfait, les résultats obtenus à l'ordre 0 et à l'ordre 1 ne



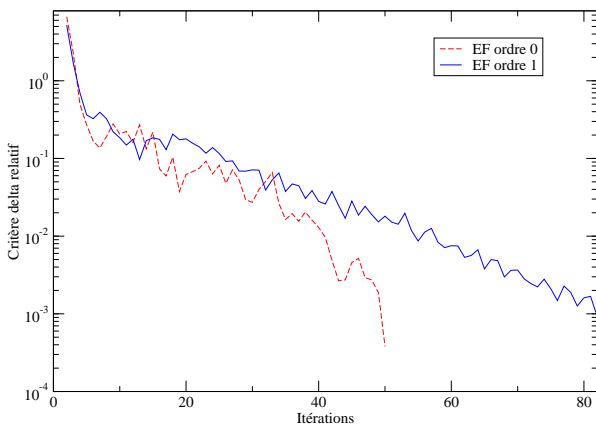
(a)



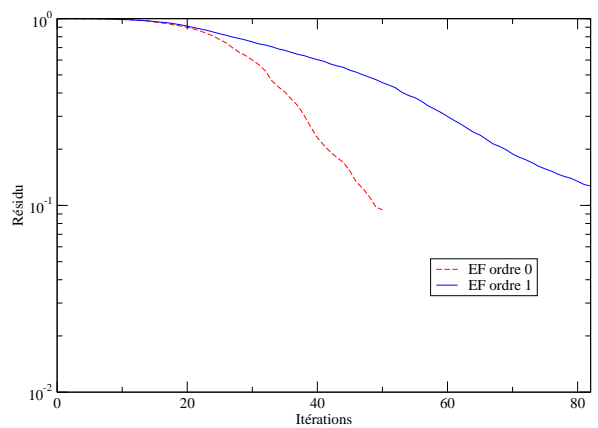
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.6 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 4.7GHz$.

recollent pas tout à fait aux séries de MIE. Lorsque θ est compris entre 12 et 35 degrés, il y a une légère différence entre la solution obtenue avec les éléments finis d'ordre 0 et la solution exacte. Cette différence n'est pas observée avec les éléments finis d'ordre 1. Par contre, que ce soit à l'ordre 0 ou à l'ordre 1, la solution exacte est mal approchée quand θ avoisine zéro, car la valeur de la solution exacte en zéro est de moins l'infini. Etant donné que les SER calculées ne sont pas représentatives de la solution exacte lorsque θ est proche de zéro, nous calculons Err_a (cf. (7.3)) ce qui correspond à l'erreur commise sur l'amplitude de diffusion (7.1).

Comme précédemment, la convergence de δ sert de critère d'arrêt au GMRes. En effet, d'après les figures 7.7(e) et 7.7(d), il faut 24 itérations à l'ordre 0 et 29 itérations à l'ordre 1 pour que le résidu du GMRes soit inférieur à 10^{-3} , alors qu'il faut 21 itérations à l'ordre 0 et 23 itérations à l'ordre 1 pour que δ soit inférieur à 10^{-3} . Il est à noter également que le résidu du GMRes et δ convergent plus rapidement que dans le cas du conducteur parfait.

Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} = 1.2$, donné par (6.43), est inférieur au rapport réel $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 1.8$. Les temps d'assemblage de la matrice proche et d'un produit matrice-vecteur sont moins coûteux à l'ordre 1 à cause de la plus grande taille du système d'ordre 0. Etant donné que les nombres d'itérations du GMRes à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont quasiment identiques, l'utilisation de la méthode d'ordre 1 entraîne une réduction du temps de calcul, qui s'accompagne d'une amélioration de la précision du résultat. Quant à la mémoire consommée, elle est légèrement plus importante à l'ordre 0 qu'à l'ordre 1, car à nombre quasiment égal de plus grands vecteurs sont stockés à l'ordre 0.

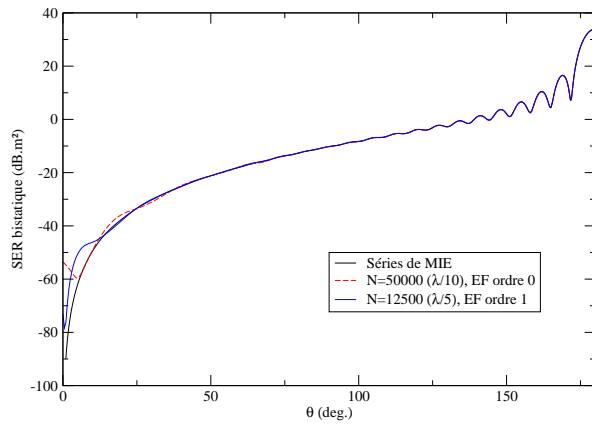
Cas	Err_a	Temps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	3461	0.9	21	220	315	2898 (138)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/5$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	2212	0.7	23	96	299	1771 (77)

TAB. 7.6 – Sphère, $f = 1.2GHz$, $Z_r = 1$.

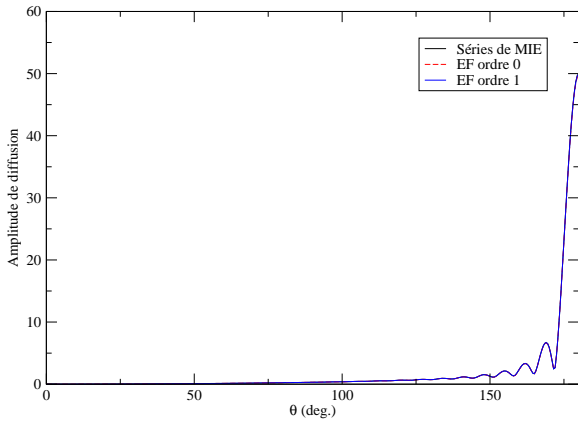
Une onde incidente de fréquence $3.2GHz$

Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage en $\lambda/10$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/6$. Ces résultats sont reportés dans la figure 7.8 et dans le tableau 7.7. A l'ordre 0 et à l'ordre 1, les systèmes sont composés respectivement de 491520 inconnues et de 640000 inconnues. Il y a environ 23% de degrés de liberté supplémentaires à l'ordre 1. Le nombre de niveaux dans la FMM (7 niveaux) est le même pour les méthodes d'ordre 0 et d'ordre 1.

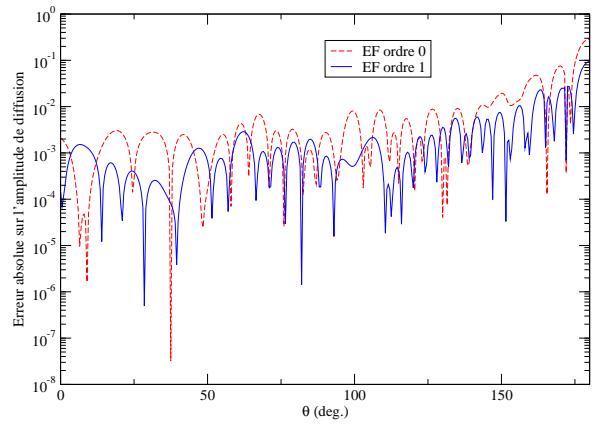
Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 0.6$ est inférieur au rapport réel $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 1$. Le temps



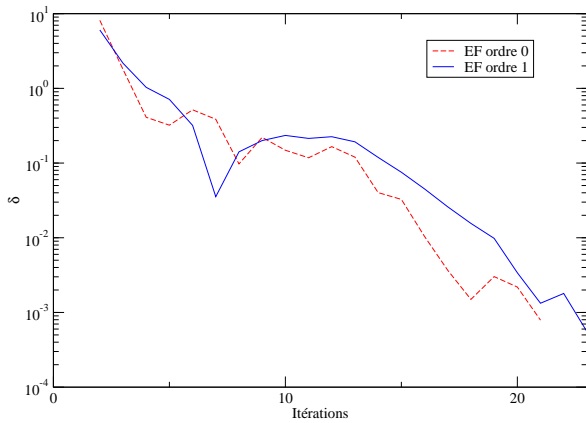
(a)



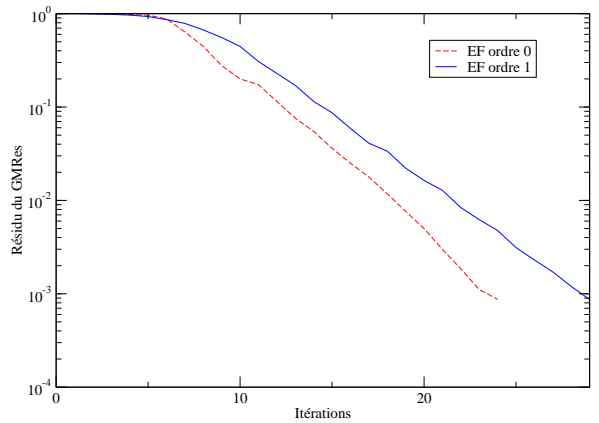
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.7 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une sphère parfaitement absorbante ($Z_r = 1$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 1.2GHz$.

d'assemblage de la matrice proche à l'ordre 1 est inférieur au temps d'assemblage de la matrice proche à l'ordre 0, car des intégrales de correction provenant de la version à une composante de la FMM sont calculées à l'ordre 0. Ces intégrales n'apparaissent pas à l'ordre 1 puisque la version à quatre composantes de la FMM est utilisée.

A l'ordre 1, la diminution du coût des produits matrice-vecteur ne réussit pas à compenser la diminution du coût des produits matrice-vecteur due au moins bon conditionnement des méthodes d'ordre 1. Cette augmentation entraîne d'ailleurs une perte en temps de calcul. En utilisant la méthode d'ordre 1, nous constatons une amélioration de la précision du résultat. Comme précédemment, le résidu du GMRes et δ convergent plus vite que dans le cas du conducteur parfait. En ce qui concerne la mémoire, les tailles des systèmes sont que la méthode d'ordre 1 consomme plus de mémoire que celle d'ordre 0.

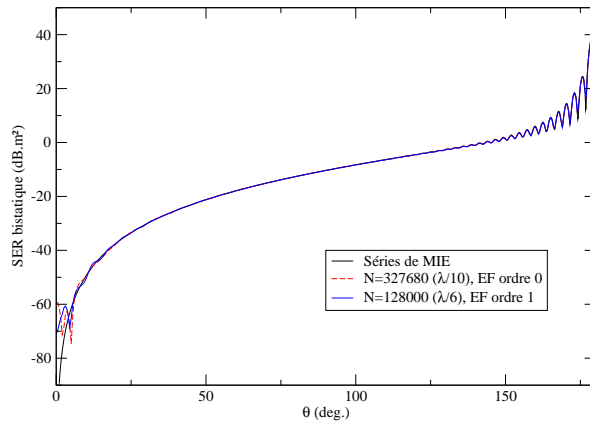
Cas	Err_a	Temps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	33120	6.3	28	1766	3556	26796 (957)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/6$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	38688	7	32	1228	7209	29472 (921)

TAB. 7.7 – Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$.

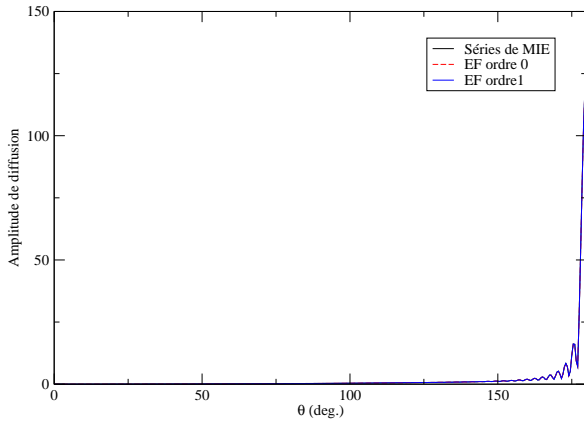
Une onde incidente de fréquence $4.7GHz$

Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage en $\lambda/11.5$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/6$. Ces résultats sont reportés dans la figure 7.9 et dans le tableau 7.8. A l'ordre 0, le maillage en $\lambda/11.5$ est préféré à celui en $\lambda/10$, car il donne une solution dont la précision est comparable à celle de la solution d'ordre 1. La figure 7.9(b) confirme ce choix. A l'ordre 0 et à l'ordre 1, les systèmes sont composés respectivement de 1505280 inconnues et de 1254400 inconnues. Il y a donc près de 16% de degrés de liberté supplémentaires à l'ordre 0. Le nombre de niveaux dans la FMM (8 niveaux) est le même pour les méthodes d'ordre 0 et d'ordre 1.

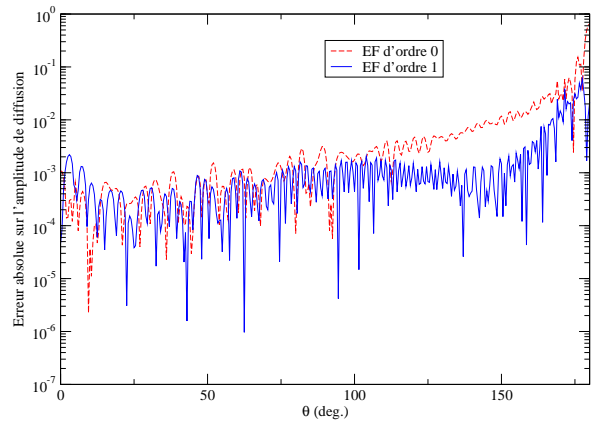
Comme pour les fréquences $1.2GHz$ et $3.2GHz$, le résidu du GMRes et δ convergent plus vite que dans le cas du conducteur parfait. Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 1.1$ est proche du rapport réel $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 1.2$. Les temps d'assemblage de la matrice proche et d'un produit matrice-vecteur sont moins coûteux à l'ordre 1 du fait de la plus grande taille du système à l'ordre 0. Etant donné que les nombres d'itérations du GMRes à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont quasiment identiques, l'utilisation de la méthode d'ordre 1 entraîne une réduction du temps de calcul, qui s'accompagne d'une amélioration de la précision du résultat. Les nombres d'itérations étant similaires à l'ordre 0 et à l'ordre 1, les tailles des systèmes sont que la méthode d'ordre 0



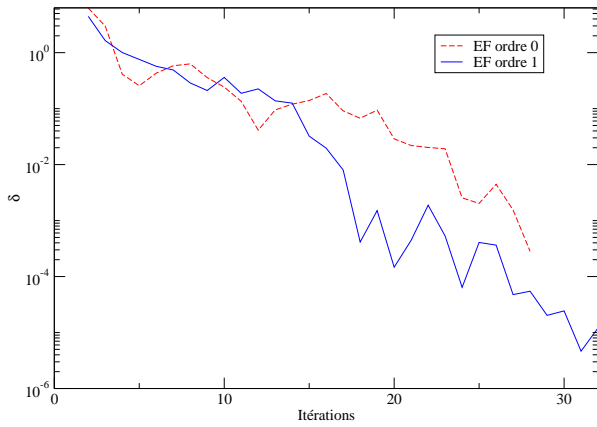
(a)



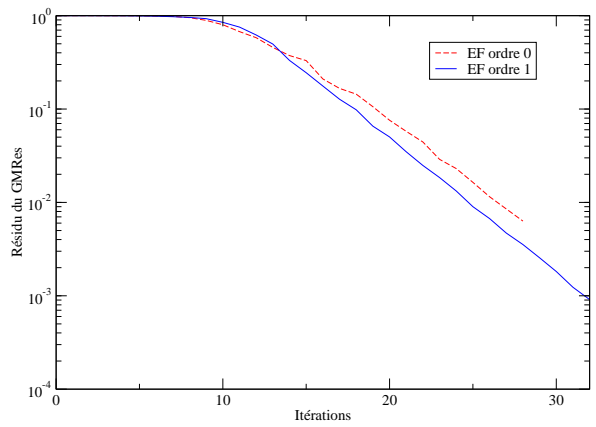
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.8 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une sphère parfaitement absorbante ($Z_r = 1$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 3.2GHz$.

consomme plus de mémoire que celle d'ordre 1.

Cas	Err_a	Temps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total. précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/11.5$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	90494	12.2	25	4730	11025	68625 (2745)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/6$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	70726	11.8	24	2092	10320	54360 (2265)

TAB. 7.8 – Sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 1$.

7.4 L'amande comme objet diffractant

7.4.1 Présentation de l'amande

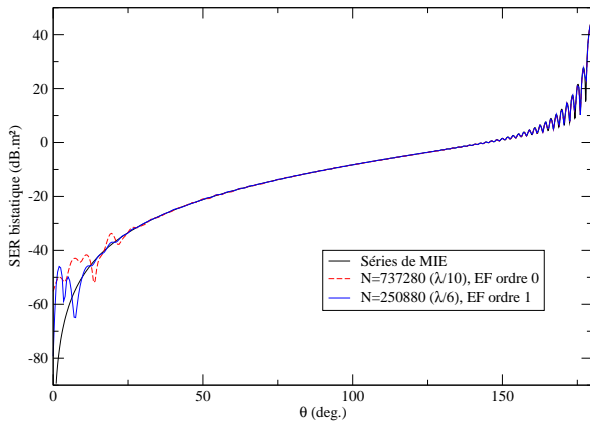
L'amande est décrite succinctement. Cet objet, appelé amande NASA, est souvent utilisé par les industriels pour comparer leurs codes [1]. L'amande est orientée de telle sorte que son plus grand diamètre parte de l'origine et suive l'axe (Oz), et que le plan (xOz) coupe l'amande en deux parties identiques au niveau de ses deux arêtes tranchantes. La longueur d de l'amande est de 2.5 mètres. L'amande est divisée en deux parties :

1. une ellipsoïde : $t \in] - 0.416667; 0[$ et $\psi \in] - \pi; \pi[$

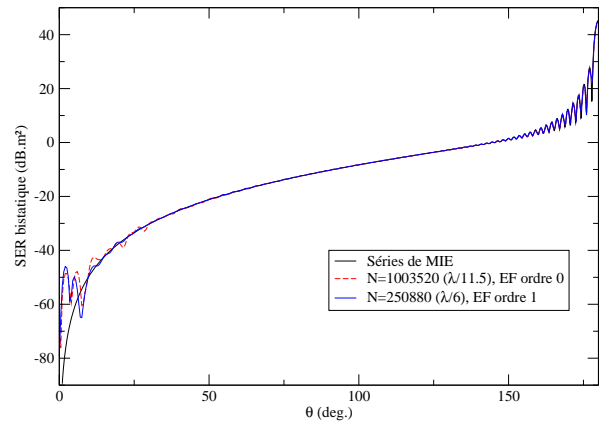
$$\begin{cases} x = 0.193333d\sqrt{1 - \left(\frac{t}{0.416667}\right)^2}\cos\psi \\ y = 0.064444d\sqrt{1 - \left(\frac{t}{0.416667}\right)^2}\sin\psi \\ z = dt \end{cases} \quad (7.32)$$

2. une ogive elliptique : $t \in]0; 0.583333[$ et $\psi \in] - \pi; \pi[$

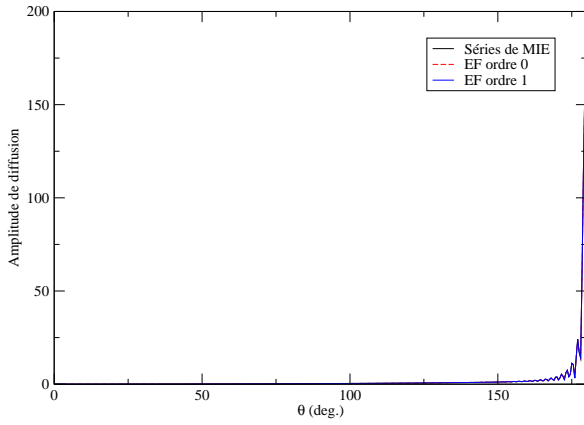
$$\begin{cases} x = 4.833450d\left(\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2.083350}\right)^2} - 0.96\right)\cos\psi \\ y = 1.611148d\left(\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2.083350}\right)^2} - 0.96\right)\sin\psi \\ z = dt \end{cases} \quad (7.33)$$



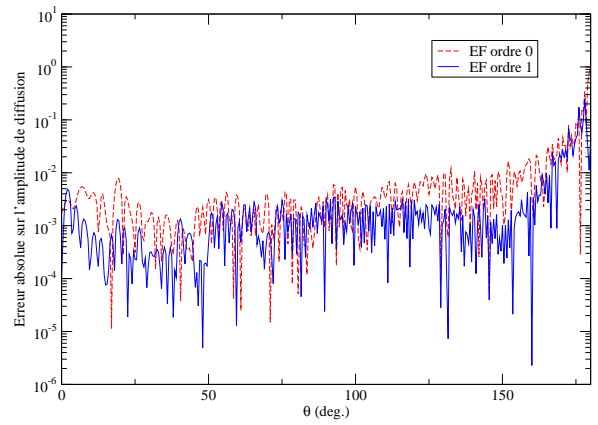
(a)



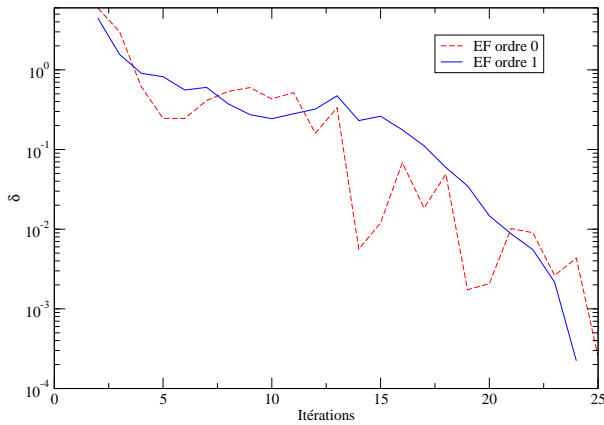
(b)



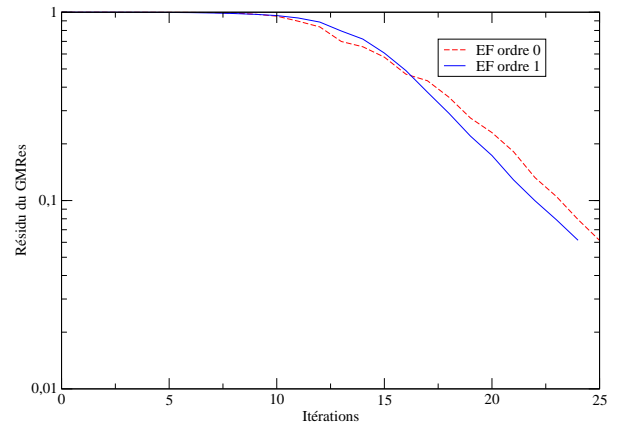
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 7.9 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une sphère parfaitement absorbante ($Z_r = 1$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 4.7GHz$.

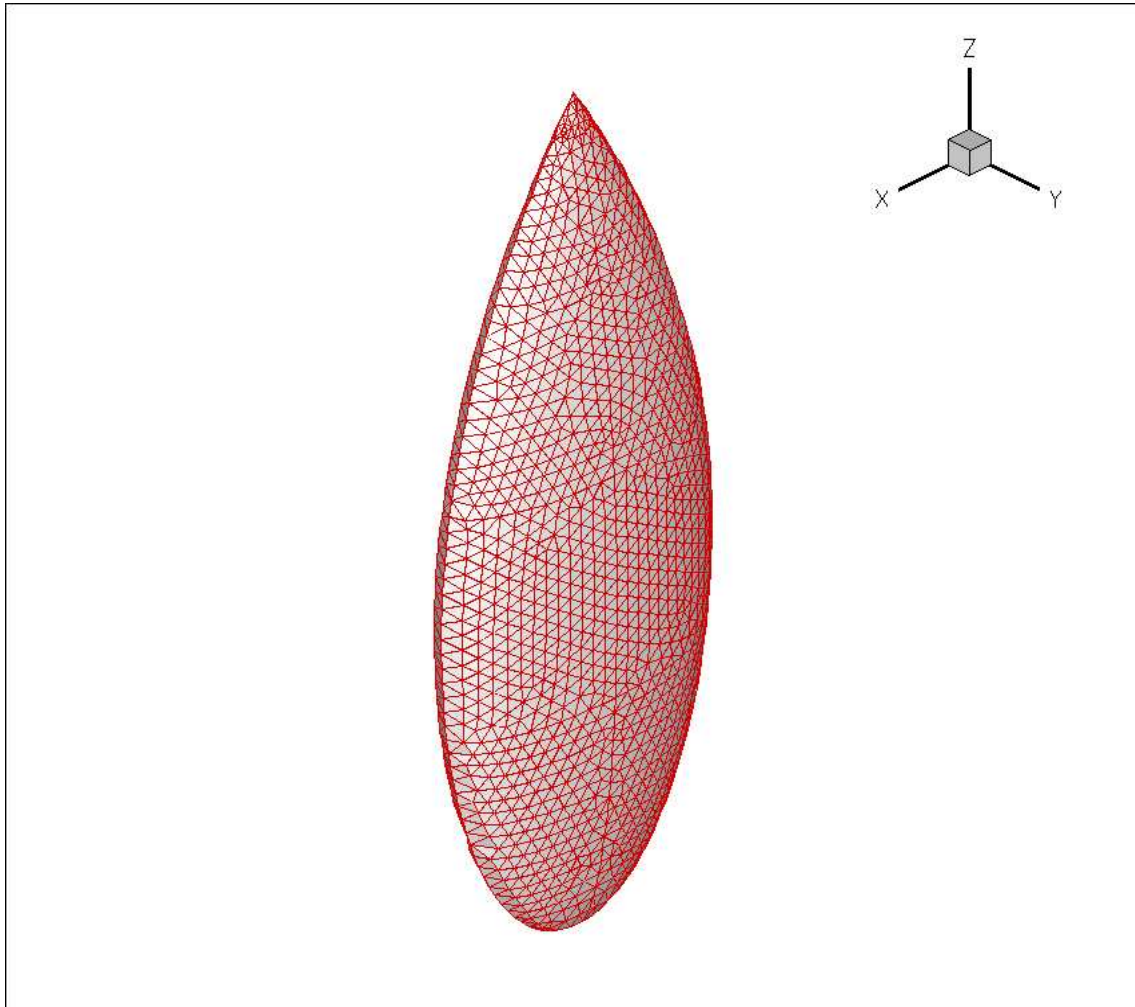


FIG. 7.10 – Maillage de l'amande NASA comportant 4236 éléments.

La figure 7.10 représente un maillage de l'amande décrite précédemment.

Dans le cas de l'amande, il n'existe pas de solution exacte comme pour la sphère. Pour comparer les résultats obtenus, nous avons recours à l'emploi d'une solution de référence calculée avec les éléments finis d'ordre 0 et un maillage très fin en $\lambda/15$. Pour tous les cas tests, l'amande est éclairée par une onde incidente de direction $(0, 0, -1)^t$ dont la fréquence vaut soit $1.2GHz$ ou soit $5GHz$.

7.4.2 Cas d'une amande parfaitement conductrice ($Z_r = 0$)

Une onde incidente de fréquence $1.2GHz$

La solution de référence est calculée en considérant un maillage en $\lambda/15$ comportant 31228 éléments. Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage en $\lambda/10$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/5$. Ces résultats sont reportés dans le tableau 7.9 et dans la figure 7.11.

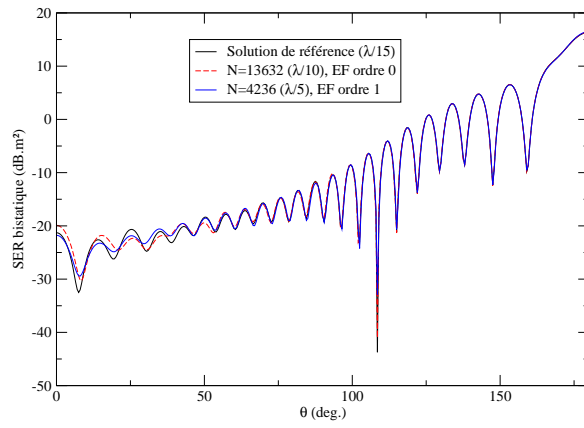
À l'ordre 0 et à l'ordre 1, les systèmes sont composés respectivement de 20448 inconnues et de 21180 inconnues. Le nombre de niveaux dans la FMM (6 niveaux) est le même à l'ordre 0 et à l'ordre 1. Les nombres de degrés de liberté étant quasiment identiques, les coûts d'un produit matrice-vecteur à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont voisins. Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} = 1.2$ est très proche du rapport réel $f_{total}^{iter,0} / f_{total}^{iter,1} \simeq 1.2$. Le critère d'arrêt du GMRes dépend ici aussi du comportement de δ . Le nombre d'itérations du GMRes à l'ordre 0 est inférieur au nombre d'itérations à l'ordre 1, ce qui entraîne que la méthode d'ordre 0 soit moins coûteuse que celle d'ordre 1. En utilisant la méthode d'ordre 1, il y a cependant amélioration de la précision du résultat. Les consommations en mémoire à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont identiques.

Cas	Err_a	Tps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	1501	0.3	33	66	132	1254 (38)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/5$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	2056	0.3	44	38	286	1716 (39)

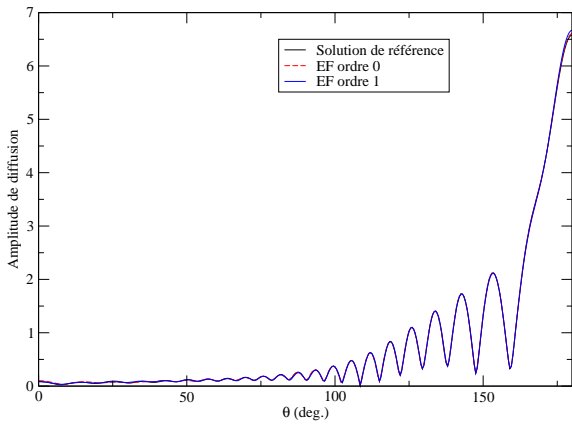
TAB. 7.9 – Amande, $f = 1.2GHz$, $Z_r = 0$.

Une onde incidente de fréquence $5GHz$

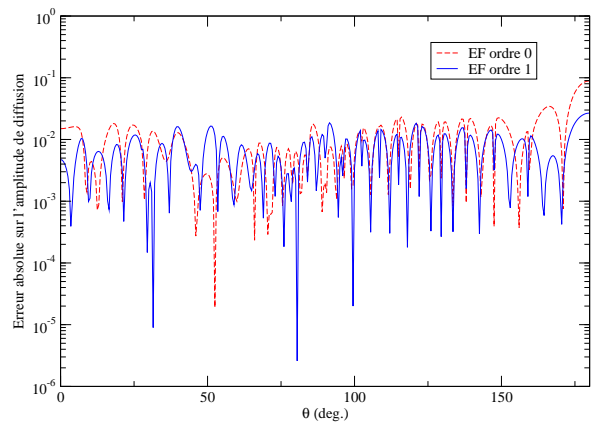
La solution de référence est calculée en considérant un maillage en $\lambda/15$ comportant 499648 éléments. Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage en $\lambda/10.5$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments



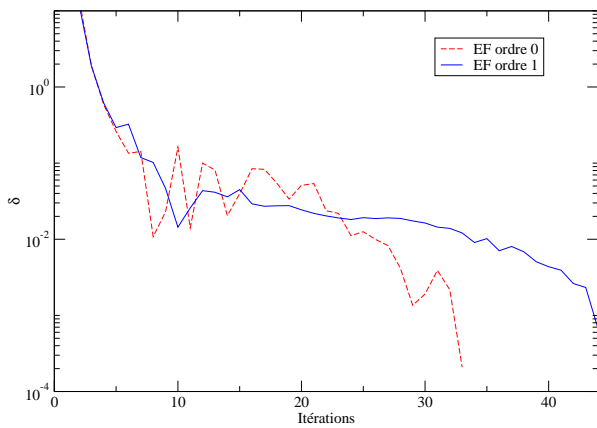
(a)



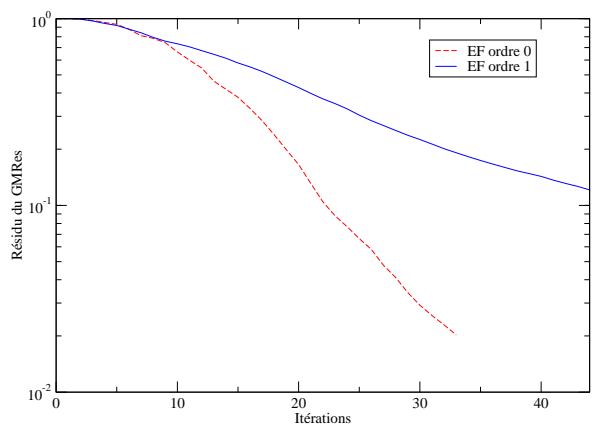
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.11 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une amande parfaitement conductrice ($Z_r = 0$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 1.2GHz$.

finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/5$. Ces résultats sont reportés dans le tableau 7.10 et dans la figure 7.12.

A l'ordre 0 et à l'ordre 1, les systèmes sont composés respectivement de 406656 inconnues et de 338880 inconnues. Il y a plus de 20% de degrés de liberté supplémentaires à l'ordre 0. Le nombre de niveaux dans la FMM (8 niveaux) est le même à l'ordre 0 et à l'ordre 1.

Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0}/f_{total}^{iter,1} \simeq 1.3$ est presque identique au rapport réel $f_{total}^{iter,0}/f_{total}^{iter,1} \simeq 1.3$. Le tableau 7.10 montre que les temps d'assemblage de la matrice proche et d'un produit matrice-vecteur avec la FMM sont plus coûteux à l'ordre 0 à cause d'un plus grand nombre d'inconnues. Cependant, la différence entre les temps de calcul à l'ordre 0 et à l'ordre 1 se fait au niveau du nombre d'itérations du GMRes. Le critère d'arrêt du GMRes dépend de la convergence de δ : nous avons maintenu à l'ordre 0 le seuil 10^{-3} ; par contre, à l'ordre 1, ce seuil est fixé à $5 \cdot 10^{-3}$ afin de réduire le nombre d'itérations du GMRes. En effet, à l'ordre 1, ce seuil donne des résultats plus précis que ceux obtenus à l'ordre 0 avec $\delta = 10^{-3}$ comme critère d'arrêt. D'après la figure 7.12(d), les nombres d'itérations du GMRes à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont respectivement de 47 et de 70. Au final, un gain en temps de calcul est observé à l'ordre 0. En utilisant la méthode d'ordre 1, il y a amélioration de la précision du résultat. Même si le nombre d'itérations est inférieur à l'ordre 0, la taille du système fait que la méthode d'ordre 0 consomme quasiment autant de mémoire que celle d'ordre 1.

A l'ordre 1, lorsque le critère d'arrêt est fixé à $\delta = 10^{-3}$, le GMRes converge en 80 itérations ce qui correspond à un temps de calcul de 125757 secondes, donne une erreur de $1.3 \cdot 10^{-2}$ sur l'amplitude de diffusion et nécessite une mémoire de $5.7Go$. Pour donner un ordre de comparaison, pour la solution de référence (maillage en $\lambda/15$), le GMRes converge en 80 itérations ce qui correspond à un temps de calcul de 139361 secondes et nécessite $11Go$. En exigeant à l'ordre 0 une solution aussi précise qu'à l'ordre 1, il serait probable que la méthode d'ordre 1 soit moins coûteuse en temps et en mémoire.

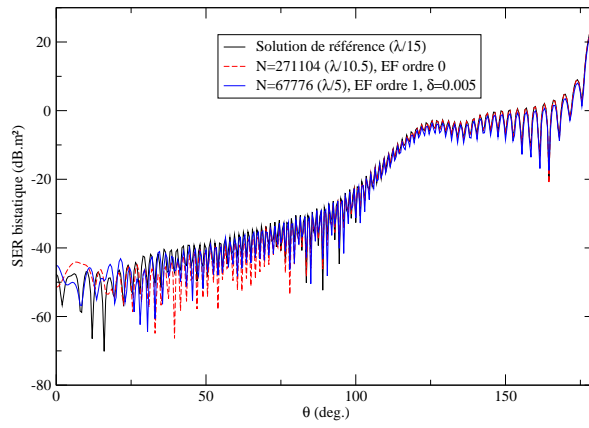
Cas	Err_a	Tps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10.5$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	60981	5.4	47	1475	13677	45120 (960)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/5$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	70805	5.5	70	598	16450	53060 (758)

TAB. 7.10 – Amande, $f = 5GHz$, $Z_r = 0$.

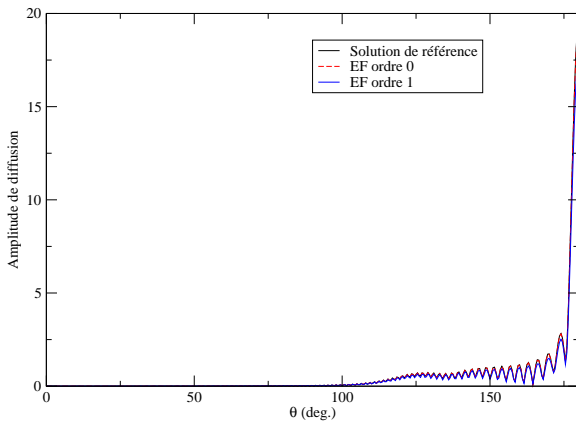
7.4.3 Cas d'une amande parfaitement absorbante ($Z_r = 1$)

Une onde incidente de fréquence $1.2GHz$

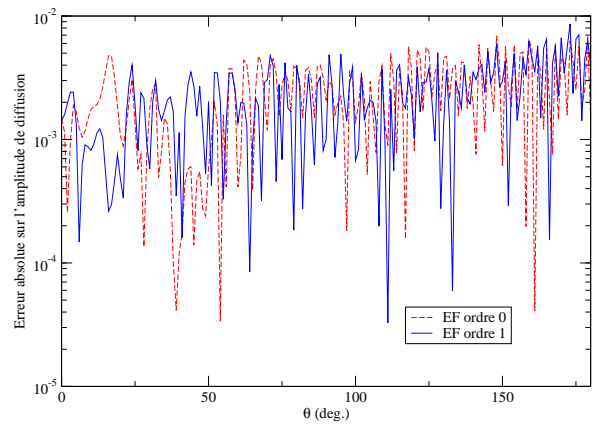
La solution de référence est calculée en considérant un maillage en $\lambda/15$ comportant 31228 éléments. Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un



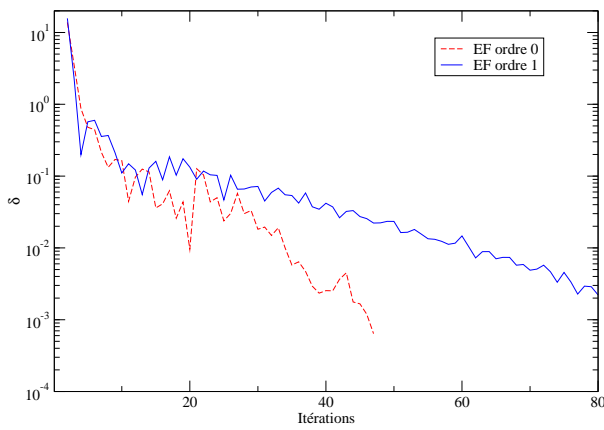
(a)



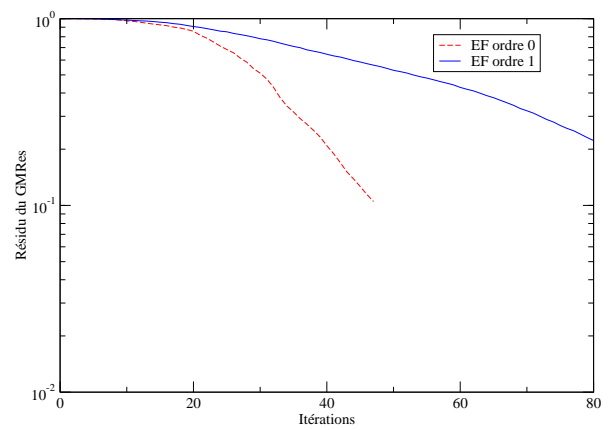
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.12 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une amande parfaitement conductrice ($Z_r = 0$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 5GHz$.

maillage en $\lambda/10$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/5$. Ces résultats sont reportés dans le tableau 7.11 et dans la figure 7.13.

Les mêmes commentaires que pour le cas du conducteur parfait peuvent être faits. Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0}/f_{total}^{iter,1} = 1.2$ est très proche du rapport réel $f_{total}^{iter,0}/f_{total}^{iter,1} = 1.2$. Le nombre de niveaux dans la FMM (6 niveaux) est le même à l'ordre 0 et à l'ordre 1. Comme pour la sphère, par rapport au cas du conducteur parfait, le résidu du GMRes et δ convergent plus rapidement. A l'ordre 1, le coût du préconditionnement entraîne que le temps de calcul est légèrement supérieur au temps de calcul à l'ordre 0. Il y a amélioration à l'ordre 1 de la précision du résultat. Les consommations en mémoire à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont identiques.

Cas	Err_a	Tps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	816	0.3	17	66	68	646 (38)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/5$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	827	0.3	17	38	110	663 (39)

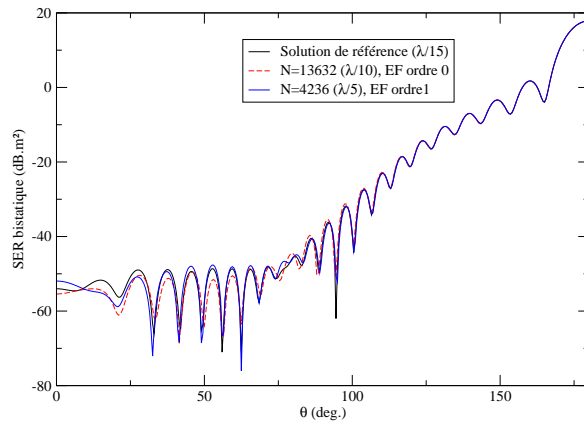
TAB. 7.11 – Amande, $f = 1.2GHz$, $Z_r = 1$.

Une onde incidente de fréquence $5GHz$

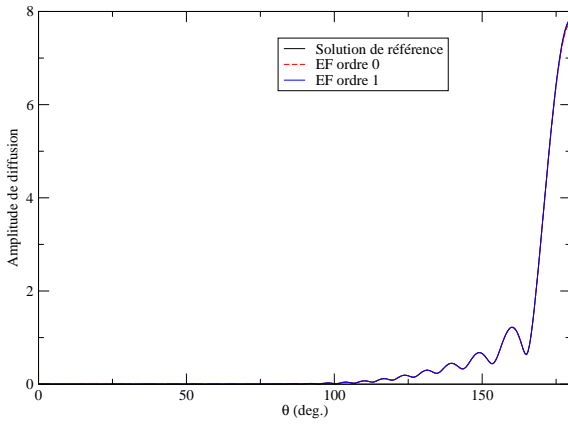
La solution de référence est calculée en considérant un maillage en $\lambda/15$ comportant 499648 éléments. Les résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 0 avec un maillage en $\lambda/10.5$ sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 1 avec un maillage en $\lambda/7$. Ces résultats sont reportés dans le tableau 7.12 et dans la figure 7.14.

A l'ordre 0 et à l'ordre 1, les systèmes sont composés respectivement de 406656 inconnues et de 624560 inconnues. Il y a environ 34% de degrés de liberté supplémentaires à l'ordre 1. Le nombre de niveaux dans la FMM (8 niveaux) est le même à l'ordre 0 et à l'ordre 1.

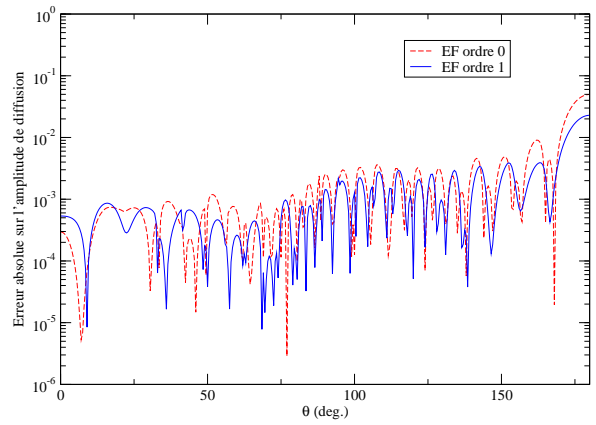
Le rapport théorique $f_{total}^{iter,0}/f_{total}^{iter,1} \simeq 0.7$ est presque identique au rapport réel $f_{total}^{iter,0}/f_{total}^{iter,1} \simeq 0.7$. Le tableau 7.12 montre qu'un produit matrice-vecteur avec la FMM est plus coûteux à l'ordre 1 à cause d'un plus grand nombre d'inconnues. Pour le critère d'arrêt du GMRes lié à δ , nous avons maintenu à l'ordre 0 le seuil 10^{-3} , et nous avons à l'ordre 1 passé ce seuil à $5 \cdot 10^{-3}$ afin de réduire le nombre d'itérations du GMRes. En effet, à l'ordre 1, ce seuil donne des résultats plus précis que ceux obtenus à l'ordre 0 avec $\delta = 10^{-3}$ comme critère d'arrêt. D'après la figure 7.14(d), les nombres d'itérations du GMRes à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont quasiment identiques. Au final, un gain en temps de calcul est donc observé à l'ordre 0. En utilisant la méthode d'ordre 1, il y a amélioration de la précision du résultat. Même si le nombre d'itérations est inférieur à l'ordre 0, la taille du système fait que la méthode d'ordre 0 consomme quasiment autant de



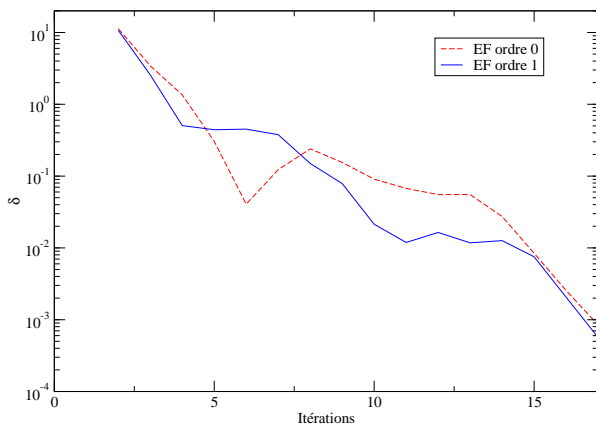
(a)



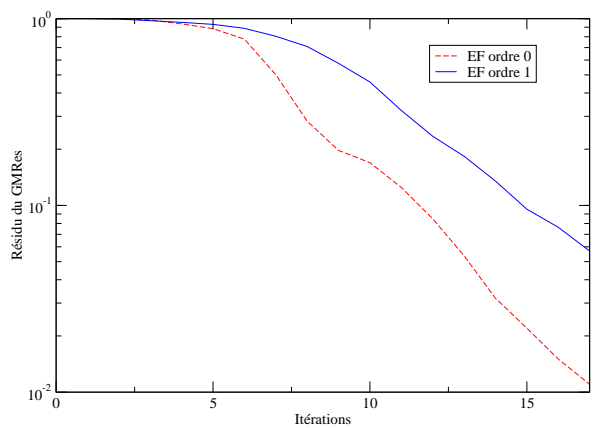
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.13 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une amande parfaitement absorbante ($Z_r = 1$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 1.2GHz$.

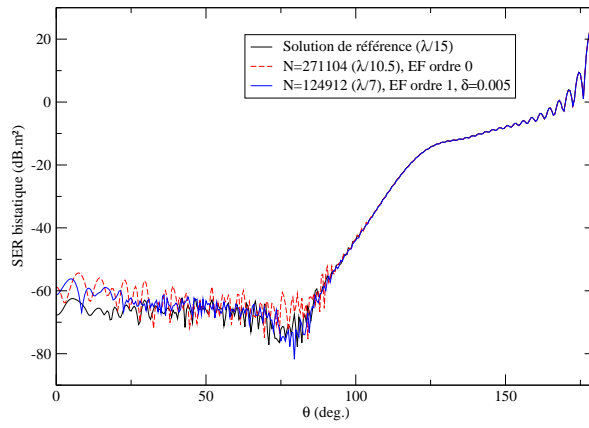
mémoire que celle d'ordre 1.

A l'ordre 1, lorsque le critère d'arrêt est fixé à $\delta = 10^{-3}$, le GMRes converge en 31 itérations ce qui correspond à un temps de calcul de 52997 secondes, donne une erreur de 10^{-3} sur l'amplitude de diffusion et nécessite une mémoire de $8Go$. Pour donner un ordre de comparaison, pour la solution de référence (maillage en $\lambda/15$), le GMRes converge en 55 itérations ce qui correspond à un temps de calcul de 98658 secondes et nécessite $9.9Go$. En exigeant à l'ordre 0 une solution aussi précise qu'à l'ordre 1, il serait fort probable que la méthode d'ordre 1 soit moins coûteuse en temps et en mémoire.

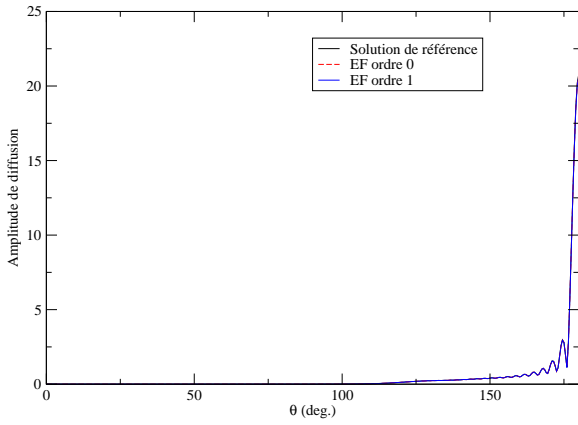
Une autre solution pour avoir un gain en temps à l'ordre 1 consisterait à accélérer le produit matrice-vecteur en considérant par exemple un maillage en $\lambda/6$ afin de réduire le nombre d'inconnues. Cependant, nous n'avons à disposition pour l'amande qu'un nombre limité de maillages : à partir de maillages ayant respectivement 4236, 13632 et 31228 éléments, nous créons par raffinement et projection tous les autres maillages utilisés. A partir de maillages très grossiers, nous pouvons obtenir des maillages en $\lambda/10$ voire même plus fins, mais ces maillages ne donnent pas de bons résultats par rapport à ceux créés directement ou construits à partir de maillages déjà assez fins. En effet, lorsqu'un maillage en λ/a avec $a \geq 10$ est créé à partir d'un maillage très grossier, la répartition des éléments du maillage se fait de façon homogène et les zones de fortes courbures comme les pointes de l'amande sont mal approchées. Ceci laisse d'ailleurs à penser qu'avec des maillages créés directement à partir d'un logiciel de maillage, nous pourrions accroître la qualité des résultats grâce à une meilleure répartition des mailles.

Cas	Err_a	Tps (s.)	Mém. (Go)	Iters GMRes	Matrice Proche (s.)	Coût total précond. (s.)	Coût FMM (par iter) (s.)
EF ordre 0 Γ_h en $\lambda/10.5$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	37556	4.7	28	1465	8484	26992 (964)
EF ordre 1 Γ_h en $\lambda/7$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	42738	7.8	27	1204	8208	32589 (1207)

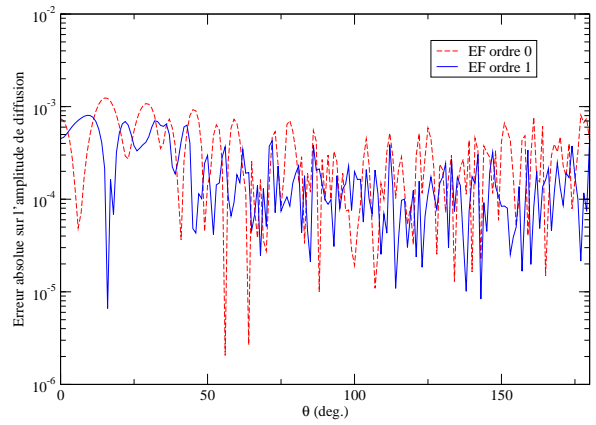
TAB. 7.12 – Amande, $f = 5GHz$, $Z_r = 1$.



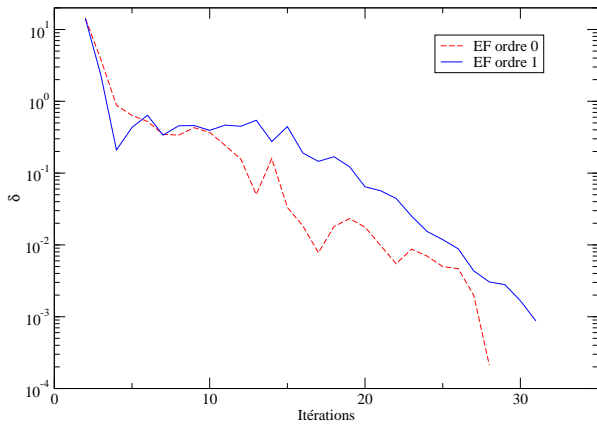
(a)



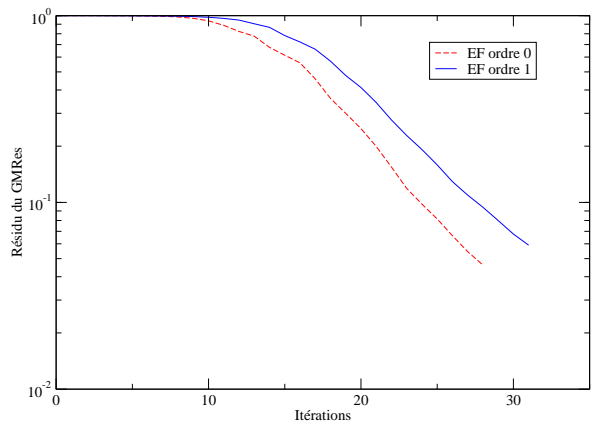
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 7.14 – Résultats obtenus avec des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 pour une amande parfaitement absorbante ($Z_r = 1$) éclairée par une onde incidente de fréquence $f = 5GHz$.

7.5 Conclusion

Dans cette partie, nous dressons le bilan de l'étude menée sur l'emploi d'éléments finis d'ordre élevé dans la FMM. Au regard des divers résultats obtenus, dans le cas d'un obstacle (sphère ou amande NASA) parfaitement conducteur ($Z_r = 0$) ou parfaitement absorbant ($Z_r = 1$), les points suivants se dégagent :

- Le temps d'assemblage de la matrice proche a peu de poids face au temps de calcul des produits matrice-vecteur. De plus, il est moins coûteux à l'ordre 1 qu'à l'ordre 0, à cause des intégrales de correction intervenant dans la version à une composante de la FMM utilisée avec les éléments finis d'ordre 0.
- Pour le GMRes, plutôt que d'utiliser comme critère d'arrêt le résidu, nous nous servons de δ (7.30). Ce critère d'arrêt propre aux EID exprime la relation entre les inconnues primales et duales du problème, et il est très efficace puisque nous assistons, aussi bien à l'ordre 0 qu'à l'ordre 1, à l'arrêt du GMRes alors que le résidu a peu convergé.
- Pour un même objet, une même fréquence et un même maillage, le coût d'un produit matrice-vecteur ne varie pas en fonction de l'impédance considérée.
- En pratique, le même nombre de niveaux est utilisé dans la FMM à l'ordre 0 et à l'ordre 1.

Quel que soit l'obstacle considéré (sphère ou amande NASA), des différences apparaissent entre les cas $Z_r = 0$ et $Z_r = 1$:

- Le cas d'un objet parfaitement absorbant demande plus de précision que le cas d'un objet parfaitement conducteur, car les niveaux de SER sont plus bas, donc plus difficiles à capter : par exemple, dans le cas de la sphère, pour une fréquence de $4.7GHz$, il faut utiliser à l'ordre 1 un maillage en $\lambda/6$ quand $Z_r = 1$, alors qu'un maillage en $\lambda/4$ suffit quand $Z_r = 0$.
- Le résidu du GMRes et δ convergent plus rapidement pour $Z_r = 1$ que pour $Z_r = 0$. Le préconditionnement est beaucoup plus efficace pour $Z_r = 1$ que pour $Z_r = 0$, ceci étant en partie (le cas $Z_r = 0$ est toujours plus difficile à faire converger que le cas $Z_r = 1$) dû au fait que la matrice de préconditionnement (7.26) est plus proche de la matrice (7.24) du problème initial dans le cas $Z_r = 1$ (les termes de couplage faisant intervenir Z_r dans (7.24) ont été négligés de manière à inverser plus facilement (7.26)). Ce phénomène est plus particulièrement prononcé à l'ordre 1. Pour tous les tests effectués dans le cas $Z_r = 1$, les nombres d'itérations du GMRes à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont quasiment identiques. Pour $Z_r = 0$, le nombre d'itérations du GMRes augmente à l'ordre 0 et à l'ordre 1, mais il croît plus fortement à l'ordre 1. De plus, cette augmentation suit la montée en fréquence. Etant donné que pour $Z_r = 0$, nous pouvons utiliser des maillages beaucoup plus grossiers à l'ordre 1 qu'à l'ordre 0, il est légitime, en résolvant le problème de conditionnement, d'espérer à l'ordre 1 des gains importants en temps de calcul.

Dans le cas de l'amande à $5GHz$, aussi bien pour $Z_r = 0$ que pour $Z_r = 1$, les résultats sont sûrement améliorables en utilisant de "bons" maillages et non des maillages obtenus par raffinement et projection de maillages initiaux grossiers.

Conclusion finale :

Dans l'ensemble des cas tests considérés, nous pourrions certainement avoir de meilleurs résultats en temps de calcul à l'ordre 1 qu'à l'ordre 0, en ajustant mieux la finesse du maillage (dans tous les cas tests, nous avons obtenu une meilleure précision à l'ordre 1, ce qui prouve que la finesse du maillage était trop importante pour une comparaison avec l'ordre 0), et également en travaillant sur le préconditionnement.

Pour réduire le temps de calcul à l'ordre 1, il faudrait diminuer le nombre d'itérations du GMRes en améliorant le préconditionnement du système (7.24). En effet, pour la quasi-totalité des cas tests effectués, les produits matrice-vecteur sont moins coûteux à l'ordre 1 qu'à l'ordre 0. De plus, il paraît difficile à l'ordre 1 de réduire le temps d'un produit matrice-vecteur sans dégrader la précision de la solution car nous utilisons déjà des maillages assez grossiers (par exemple, pour une impédance $Z_r = 0$ et pour des fréquences de $3.2GHz$ et de $4.7GHz$, le maillage Γ_h est en $\lambda/4$). Afin de rendre plus efficace la convergence du GMRes, il faut maintenant travailler sur le préconditionnement ; nous pourrions par exemple utiliser des préconditionneurs plus efficaces comme ceux développés dans [30] pour l'inversion de systèmes pleins provenant de l'électromagnétisme par des méthodes rapides comme la FMM.

Troisième partie

Montée en ordre lors de la résolution des
équations intégrales de Després par la
méthode couplée

Chapitre 8

Méthode de discrétisation microlocale d'ordre élevé

8.1 Introduction

La résolution des équations de Maxwell par des méthodes intégrales et d'éléments finis, amène à inverser un système linéaire plein dont la taille, $N \times N$, augmente avec la fréquence de l'onde incidente. Plus précisément, N est proportionnel au nombre d'onde k au carré, qui est lui-même proportionnel à la fréquence. Une solution envisageable pour accélérer la résolution du système est de réduire N . La méthode de discrétisation microlocale développée par Abboud, Nédélec et Zhou [125] permet d'effectuer une telle réduction avec efficacité. Le principe de cette méthode est le suivant : lors de la discrétisation de l'inconnue, une information sur le caractère oscillant de la solution est donnée en approchant la phase de l'inconnue. Une nouvelle inconnue beaucoup moins oscillante est obtenue, et dans le cas des équations de Maxwell, elle peut être approchée avec un nombre de degrés de liberté en $\mathcal{O}(k^\alpha)$, α étant inférieur à 2, au lieu de $\mathcal{O}(k^2)$. Cependant, la considération d'un maillage plus grossier nécessite d'approcher Γ avec des éléments de degré très élevé. Afin de remédier à ce problème, Abboud *et al.* utilisent un double maillage : un maillage grossier pour l'inconnue ayant $\mathcal{O}(k^\alpha)$ éléments, et un maillage fin pour la géométrie ayant $\mathcal{O}(k^2)$ éléments. Les inconnues sont définies à partir du maillage grossier, mais sont évaluées sur le maillage fin. L'élaboration des éléments finis microlocaux repose donc sur ce double maillage. Etant donné qu'elle sort du cadre classique, la construction des fonctions de base microlocales est présentée, notamment celle des fonctions de base microlocales courbes d'ordre élevé, car leur emploi permet de relâcher le maillage de l'inconnue tout en satisfaisant pleinement les estimations d'erreur de Zhou. Le maillage fin étant obtenu par raffinement du maillage grossier et projection sur la surface Γ , l'utilisation d'éléments courbes est associée à l'emploi des fonctions de base microlocales d'ordre élevé afin de conserver une bonne approximation de la géométrie.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de discrétisation microlocale d'ordre élevé.

8.2 Méthode de discrétisation microlocale

Le principe de la méthode de discrétisation microlocale repose sur la considération des inconnues J et M du problème (3.6) en fonction de leur phase et de leur amplitude :

$$J = e^{i\phi} \mathcal{J} \quad \text{et} \quad M = e^{i\phi} \mathcal{M}, \quad (8.1)$$

\mathcal{J} et \mathcal{M} étant respectivement les amplitudes de J et de M , et ϕ étant la phase du courant. Les théories géométriques et physiques de la diffraction [26] permettent d'obtenir un développement asymptotique de ϕ donné par :

$$\phi = k\phi_0 + \mathcal{O}(k^{1/3}). \quad (8.2)$$

Un développement de la phase d'ordre 1 est donc donné par :

$$\tilde{\phi} = k\phi_0. \quad (8.3)$$

Pour élaborer leur méthode, Abboud *et al.* ont fait les hypothèses suivantes :

- l'obstacle ω est un ouvert borné, régulier et convexe de \mathbb{R}^3 ,
- l'onde incidente est plane, i.e. $u^{inc}(x) = e^{ik\xi \cdot x}$ où ξ est la direction de l'onde.

Dans ce contexte, ϕ_0 est donnée par :

$$\phi_0(x) = \xi \cdot x. \quad (8.4)$$

Soit $Q = (J, M)$, et soit \tilde{Q} la nouvelle inconnue vérifiant $Q = e^{i\tilde{\phi}} \tilde{Q}$. Nous avons :

$$\tilde{Q} = e^{i(\phi - \tilde{\phi})} \mathcal{Q}, \quad (8.5)$$

où $\mathcal{Q} = (\mathcal{J}, \mathcal{M})$.

Si (8.3)-(8.4) est une bonne approximation de la phase, \tilde{Q} est beaucoup moins oscillante que Q , et peut être approchée avec moins de degrés de liberté. Soit \tilde{Q}_h l'inconnue du système discret associée à \tilde{Q} .

Dans [125], Zhou donne les estimations d'erreur suivantes pour l'équation de Helmholtz :

- lorsqu'est considérée une condition au bord de Dirichlet :

$$\frac{|\tilde{Q} - \pi(\tilde{Q}_h)|_{L^2(\Gamma)}}{|\tilde{Q}|_{L^2(\Gamma)}} \leq C(h^m + h^l + (k^{1/3}h)^{m+1} + kh^l), \quad (8.6)$$

- lorsque sont considérées les conditions au bord de Neumann ou de Robin :

$$\frac{|\tilde{Q} - \pi(\tilde{Q}_h)|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{|\tilde{Q}|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \leq C((k^{1/3}h)^{m+1} + k^{3/2}h^l(kh + 1)), \quad (8.7)$$

π étant la projection orthogonale de Γ_h sur Γ , et h la longueur maximale des arêtes de Γ_h . Le paramètre m correspond au degré d'approximation de l'inconnue, et le paramètre l au degré d'approximation de la géométrie.

Afin de borner l'erreur relative (8.6), nous pourrions prendre $h \sim k^{-1/3}$. Cependant, pour que le terme en kh^l se comporte comme celui en $k^{1/3}h$, il faudrait considérer une approximation Γ_h de la surface Γ de degré $l = 3$. Ce choix s'avérant compliqué à mettre en œuvre dans un code de calcul, Abboud *et al.* proposent d'utiliser un double maillage : un premier maillage Γ_{h_g} , noté Γ_g , pour approcher l'inconnue, et un second maillage Γ_{h_f} , noté Γ_f , pour approcher la géométrie. Cette solution se justifie par le fait que le terme $k^{1/3}h$ provient de la discrétisation de l'inconnue (paramètre m) alors que le terme kh^l est lié à l'approximation de la géométrie (paramètre l).

Pour les conditions de Neumann et de Robin, en prenant $h \sim k^{-1/3}$, il faudrait choisir, afin de borner l'erreur relative (8.7), une approximation Γ_h de Γ de degré $l = 7$. Plutôt que d'avoir recours à des éléments de degré 7, Abboud *et al.* considèrent, comme précédemment, la solution du double maillage.

Soient h_f et h_g les longueurs maximales respectives des arêtes des maillages Γ_f et Γ_g . Pour l'équation de Helmholtz, Zhou obtient de nouvelles estimations d'erreur dépendantes de h_f et de h_g :

– pour la condition de Dirichlet :

$$\frac{|\tilde{Q} - \pi(\tilde{Q}_h)|_{L^2(\Gamma)}}{|\tilde{Q}|_{L^2(\Gamma)}} \leq C(h_g^m + h_g^{-1}h_f^{l+1} + (h_g k^{1/3})^{m+1} + kh_g^{-1}h_f^{l+1}), \quad (8.8)$$

– pour les conditions de Neumann ou de Robin :

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{Q} - \pi(\tilde{Q}_h)|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{|\tilde{Q}|_{H^{1/2}(\Gamma)}} &\leq C \left(k^{1/2}h_g^{m+1/2} + k^{1/2}h_f^{l+1} + (h_g k^{1/3})^{m+1} \right) \\ &+ (h_f^l h_g^{-1} k^{1/2} + k^{3/2} h_f^l)(kh_f + 1)h_f^{l+1}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Dans le cas de Dirichlet, l'estimation d'erreur (8.8) permet de prendre $l = 1$ en imposant :

$$h_g \sim k^{-1/3} \quad \text{et} \quad h_f \sim k^{-2/3}. \quad (8.10)$$

Par contre, dans les cas de Neumann et de Robin, en choisissant $h_g \sim k^{-1/3}$ et $h_f \sim k^{-1}$, il faut au moins considérer $l = 2$.

En ce qui concerne les équations de Maxwell, lorsqu'un double maillage est utilisé, Zhou donne l'estimation suivante dans le cas d'un conducteur parfait ($Z_r = 0$) :

$$\frac{|\tilde{Q} - \pi(\tilde{Q}_h)|_H + |\tilde{\mu} - \pi(\tilde{\mu}_h)|_N}{|\tilde{Q}|_H + |\tilde{\mu}|_N} \leq C_\sigma((h_g^{m-\sigma} + h_g^{m+1/2})k^{m/3} + h_f^l k), \quad \sigma \in]0; 1/2], \quad (8.11)$$

où $\tilde{\mu}$ est la densité associée à \tilde{Q} , $H = H^{-1/2}(\Gamma; \mathbb{C}^3)$ et $N = \{\mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \langle \mu, 1_{\Gamma_i} \rangle = 0, i = 1, \dots, p\}$, 1_{Γ_i} étant la fonction caractéristique de la $i^{\text{ième}}$ composante connexe Γ_i de $\Gamma = \bigcup_{i=1}^p \Gamma_i$ [19] et [125].

Remarque. Pour une condition au bord de Léontovitch dont l'impédance Z_r est non nulle, Zhou indique que l'estimation (8.11) obtenue pour une condition au bord de Dirichlet reste valable.

La relation (8.11) permet de considérer $l = 1$ en choisissant $h_f \sim k^{-1}$. La présence du terme en σ , due aux espaces tangents, ne permet plus en théorie le choix $h_g \sim k^{-1/3}$. En effet, en posant $h_g \sim k^\alpha$, la condition de convergence est :

$$\alpha \leq -\frac{m}{3(m - \sigma)}. \quad (8.12)$$

Pour des éléments finis microlocaux d'ordre 0, i.e. pour $m = 1$, (8.12) est équivalent à :

$$\alpha \leq -\frac{1}{3(1 - \sigma)}. \quad (8.13)$$

L'inconnue du problème est donc définie sur un maillage grossier Γ_g ayant un nombre de mailles N_g en $\mathcal{O}(k^{-2\alpha})$, avec α vérifiant (8.13) pour $m = 1$ ou (8.14) pour $m = 2$. La surface est approchée par un maillage fin Γ_f dont le nombre de mailles N_f est en $\mathcal{O}(k^2)$.

Remarque. Si $\sigma \in]0; 1/3]$, alors $\alpha = -1/2$ satisfait (8.13); et si $\sigma \in]1/3; 1/2]$, alors $\alpha = -2/3$ satisfait (8.13).

Pour des éléments finis microlocaux d'ordre 1, i.e. pour $m = 2$, (8.12) est équivalent à :

$$\alpha \leq -\frac{2}{3(2 - \sigma)}. \quad (8.14)$$

En choisissant $\alpha = -1/2$, (8.14) est vérifiée $\forall \sigma \in]0; 1/2]$.

Dans la plupart des cas, les choix $h_g \sim k^{-1/2}$ et $h_f \sim k^{-1}$ permettent de satisfaire (8.12). Cette tendance est d'ailleurs confirmée par la pratique.

8.3 Construction du double maillage

Nous décrivons la construction des maillages de Γ_g et de Γ_f . Soit un maillage grossier de Γ_g comportant N_g éléments ($N_g \sim k$). $\Gamma_f^{-\pi}$ est obtenu en raffinant Γ_g :

$$\text{si } \Gamma_g = \bigcup_{i=1}^{N_g} T_i, \quad \text{alors } \Gamma_f^{-\pi} = \bigcup_{i=1}^{N_g} \bigcup_{i_0=1}^{N_i} T_{ii_0}^{-\pi}, \quad (8.15)$$

où \mathcal{N}_i est le nombre d'éléments de $\Gamma_f^{-\pi}$ contenus dans le $i^{\text{ième}}$ élément du maillage de Γ_g . Soient π la projection orthogonale de Γ_g sur Γ , et π_h l'interpolée d'ordre l de π obtenue à partir des éléments finis de Lagrange $(T_{ii_0}^{-\pi}, \Sigma_{T_{ii_0}^{-\pi}}, \mathbb{P}_l)$, où $\Sigma_{T_{ii_0}^{-\pi}}$ est l'ensemble des degrés de liberté, et \mathbb{P}_l est l'espace des polynômes à deux indéterminées de degré inférieur ou égal à l . Lorsque $l = 1$, $\Sigma_{T_{ii_0}^{-\pi}}$ est l'ensemble, noté $\Sigma_{T_{ii_0}^{-\pi}}^1$, regroupant la projection sur Γ des sommets de $T_{ii_0}^{-\pi}$. Lorsque $l = 2$, $\Sigma_{T_{ii_0}^{-\pi}}$ réunit $\Sigma_{T_{ii_0}^{-\pi}}^1$ et l'ensemble formé par la projection sur Γ des milieux des arêtes de $T_{ii_0}^{-\pi}$. Γ_f est obtenue par projection des sommets de $\Gamma_f^{-\pi}$ sur Γ :

$$\Gamma_f = \pi_h(\Gamma_f^{-\pi}) = \bigcup_{i=1}^{N_g} \bigcup_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} \pi_h(T_{ii_0}^{-\pi}) = \bigcup_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} T_{ii_0}. \quad (8.16)$$

Γ_g^s est définie par :

$$\Gamma_g^s = \pi_h(\Gamma_g) = \bigcup_{i=1}^{N_g} \pi_h(T_i) = \bigcup_{i=1}^{N_g} T_i^s. \quad (8.17)$$

Du point de vue géométrique, Γ_g^s et Γ_f sont identiques, mais le maillage de Γ_g^s est composé d'éléments grossiers.

Remarque. *Nous avons en théorie la relation suivante :*

$$N_f = \sum_{i=1}^{N_g} \mathcal{N}_i, \quad (8.18)$$

et en pratique, $N_f = N_g \mathcal{N}_i$ car chaque élément du maillage de Γ_g est subdivisé en un même nombre d'éléments.

La figure 8.1 permet de visualiser les différents éléments définis précédemment.

8.4 Fonctions de base microlocales d'ordre élevé

Nous présentons les fonctions de base $\{\tilde{\phi}_j\}_{j=1}^N$ des éléments finis microlocaux. Soit $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ l'ensemble des fonctions de base associées à Γ_g . Les fonctions de base ϕ_j sont les fonctions de base de Raviart-Thomas/Graglia décrites dans les chapitres 2 et 3.

Remarque. N s'exprime en fonction de N_g . Pour des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1, nous avons respectivement $N = \frac{3}{2}N_g$ et $N = 5N_g$.

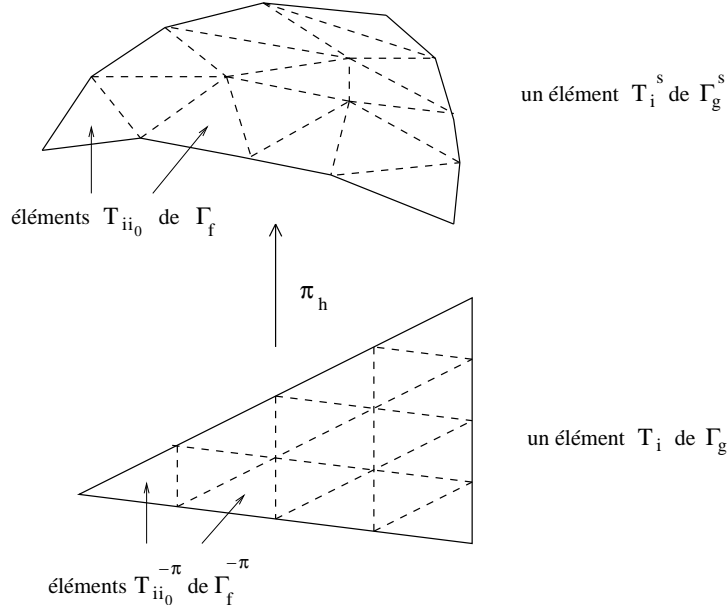


FIG. 8.1 – Description des correspondances entre les maillages de Γ_g et de Γ_f .

Soit ψ_i la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \psi_i : \hat{T} &\rightarrow T_i & (8.19) \\ \hat{\eta} = (\hat{\eta}^2, \hat{\eta}^3) &\rightarrow x = a_1^i + \hat{\eta}^2 \overrightarrow{a_1^i a_2^i} + \hat{\eta}^3 \overrightarrow{a_1^i a_3^i} \end{aligned}$$

qui associe au triangle de référence \hat{T} l'élément T_i de Γ_g (a_1^i , a_2^i et a_3^i sont les sommets de T_i). De plus, chaque élément $T_i^s = \bigcup_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} T_{ii_0}$ de Γ_g^s étant associé à un élément $T_i = \bigcup_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} T_{ii_0}^{-\pi}$ de Γ_g par l'intermédiaire de π_h , nous notons π_i la restriction de π_h à T_i . En posant $\hat{T} = \bigcup_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} \hat{T}_{i_0}$, nous avons :

$$T_{ii_0} = \pi_i \circ \psi_i(\hat{T}_{i_0}). \quad (8.20)$$

Remarque. En pratique, la triangulation de \hat{T} est obtenue en subdivisant \hat{T} en quatre triangles identiques de manière récursive jusqu'à un ordre M .

Chaque élément \hat{T}_{i_0} est l'image de \hat{T} par translation, rotation et homothétie. Nous avons :

$$\begin{aligned} \theta_{i_0} : \hat{T} &\rightarrow \hat{T}_{i_0}, & \text{et} & \quad \chi_{ii_0} : \hat{T} \rightarrow T_{ii_0}^{-\pi} & (8.21) \\ \hat{\lambda} &\rightarrow \hat{\eta} & & \quad \hat{\lambda} \rightarrow x = \psi_i \circ \theta_{i_0}(\hat{\lambda}). \end{aligned}$$

Remarque. En notant $a_1^{-\pi, ii_0}$, $a_2^{-\pi, ii_0}$ et $a_3^{-\pi, ii_0}$ les sommets de $T_{ii_0}^{-\pi}$, nous avons :

$$\chi_{ii_0} : \hat{T} \rightarrow T_{ii_0}^{-\pi} \quad (8.22)$$

$$\hat{\lambda} \rightarrow x = a_1^{-\pi, ii_0} + \hat{\lambda}^2 \overrightarrow{a_1^{-\pi, ii_0} a_2^{-\pi, ii_0}} + \hat{\lambda}^3 \overrightarrow{a_1^{-\pi, ii_0} a_3^{-\pi, ii_0}}. \quad (8.23)$$

Une base du plan tangent à T_{ii_0} est donnée par :

$$\vec{e}_1^h = \frac{\partial(\pi_i \circ \chi_{ii_0})}{\partial \hat{\lambda}^2}(\hat{\lambda}) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2^h = \frac{\partial(\pi_i \circ \chi_{ii_0})}{\partial \hat{\lambda}^3}(\hat{\lambda}). \quad (8.24)$$

Une base du plan tangent à $T_{ii_0}^{-\pi}$ est donnée par :

$$\vec{e}_1^{ii_0} = \frac{\partial(\chi_{ii_0})}{\partial \hat{\lambda}^2}(\hat{\lambda}) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2^{ii_0} = \frac{\partial(\chi_{ii_0})}{\partial \hat{\lambda}^3}(\hat{\lambda}). \quad (8.25)$$

Soit φ un champ de vecteurs tangents défini sur Γ_g et destiné à être projeté sur Γ_f (i.e. la projection de φ doit être tangente à Γ_f). Comme $\Gamma_g = \bigcup_{i=1}^{N_g} T_i$, nous posons :

$$\varphi|_{T_i}(x) = \varphi_i(x), \quad (8.26)$$

et comme $T_i = \bigcup_{i_0=1}^{N_i} T_{ii_0}^{-\pi}$, nous posons :

$$\varphi|_{T_{ii_0}^{-\pi}}(x) = \varphi_{ii_0}(x). \quad (8.27)$$

Localement, φ est donc définie sur Γ_g par :

$$\varphi_{ii_0}(x) = \varphi_{ii_0} \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) = \varphi_{ii_0}^1 \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \vec{e}_1^{ii_0} + \varphi_{ii_0}^2 \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \vec{e}_2^{ii_0}. \quad (8.28)$$

Soit $\tilde{\varphi}$ la projection de φ sur Γ_f . Nous avons :

$$\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(\pi_i \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda})) = \frac{2mes(T_{ii_0}^{-\pi})}{\sqrt{g_h(\hat{\lambda})}} (\varphi_{ii_0}^1 \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \vec{e}_1^h + \varphi_{ii_0}^2 \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \vec{e}_2^h), \quad (8.29)$$

où $y = \pi_h(x) \in T_{ii_0}$ et $\sqrt{g_h} = |\vec{e}_1^h \wedge \vec{e}_2^h|$ est le jacobien de $\pi_i \circ \chi_{ii_0}$.

Soit $j \in \{1, \dots, N\}$. Soit $\tilde{\phi}_j$ la $j^{\text{ième}}$ fonctions de base microlocale d'ordre 0, et soit $\tilde{\phi}_{j, ii_0}$ sa restriction à T_{ii_0} . $\tilde{\phi}_{j, ii_0}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{j, ii_0}(y) &= \tilde{\phi}_{j, ii_0}(\pi_h \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda})) \\ &= \frac{2mes(T_{ii_0}^{-\pi})}{\sqrt{g_h(\hat{\lambda})}} (\phi_{j, ii_0}^1 \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \vec{e}_1^h + \phi_{j, ii_0}^2 \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \vec{e}_2^h) e^{ik\xi \cdot \pi_i \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda})}, \end{aligned} \quad (8.30)$$

$$\text{où } \phi_{j|T_{ii_0}^{-\pi}}(x) = \phi_{j,ii_0}(x) = \text{sgn}(\partial T_i^{\beta_1(j,i)}) \frac{x - a_{\beta_2(j,i)}^i}{2\text{mes}(T_i)} = \Lambda_{\beta_2(j,i)}(x), \quad (8.31)$$

et $i \in \text{supp}(j)$, $\text{supp}(j)$ étant l'ensemble formé à partir des indices i des éléments T_i appartenant au support de ϕ_j . $\text{supp}(j)$ correspond aussi à l'ensemble formé à partir des indices i des éléments T_i^s appartenant au support de ϕ_j . Les fonctions $\beta_1(j, i)$ et $\beta_2(j, i)$ prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, et associent respectivement à l'arête d'indice globale j , son numéro local dans le triangle T_i et le sommet de T_i opposé à cette arête. Le support de ϕ_j est composé de deux éléments T_{i_1} et T_{i_2} de Γ_g auxquels sont attribués les signes opposés $\text{sgn}(\partial T_{i_1}^{\beta_1(j,i_1)})$ et $\text{sgn}(\partial T_{i_2}^{\beta_1(j,i_2)})$ (T_{i_1} et T_{i_2} ont la $j^{\text{ième}}$ arête de Γ_g en commun). $\text{mes}(T_i)$ et $\text{mes}(T_{ii_0}^{-\pi})$ correspondent aux surfaces respectives des éléments T_i et $T_{ii_0}^{-\pi}$. Localement, ϕ_j est notée $\Lambda_{\beta_2(j,i)}$.

Remarque. La fonction $\beta_1(j, i)$ est choisie de sorte qu'elle soit identique à la fonction $\beta_2(j, i)$. Elles seront notées toutes les deux $\beta(j, i)$.

Les fonctions de base vérifient la propriété de conservation de la charge. En effet, nous avons :

$$\int_{\Gamma_f} \text{div}_\Gamma \vec{p} \, d\gamma = \sum_{i=1}^{N_g} \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{T_{ii_0}} \text{div}_\Gamma \vec{p} \, d\gamma(y) \quad (8.32)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_g} \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{\hat{T}} \partial_{\hat{\lambda}^\alpha} (\sqrt{g_h(\hat{\lambda})} p^\alpha \circ \chi_{ii_0}) \, d\hat{\lambda} \quad (8.33)$$

et comme $\vec{p} = \sum_{j=1}^N p_j \tilde{\phi}_j$, il vient :

$$\int_{\Gamma_f} \text{div}_\Gamma \vec{p} \, d\gamma = \sum_{j=1}^N p_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \in \text{supp}(j)}}^{N_g} \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{\hat{T}} \partial_{\hat{\lambda}^\alpha} (2\text{mes}(T_{ii_0}^{-\pi}) e^{ik\xi \cdot \pi_i \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda})} \Lambda_{\beta(j,i)}^\alpha \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda})) \, d\hat{\lambda} \quad (8.34)$$

$$= \sum_{j=1}^N p_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \in \text{supp}(j)}}^{N_g} \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{T_{ii_0}^{-\pi}} \text{div}_\Gamma (e^{ik\xi \cdot \pi_i(x)} \Lambda_{\beta(j,i)}(x)) \, dx \quad (8.35)$$

$$= \sum_{j=1}^N p_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \in \text{supp}(j)}}^{N_g} \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{\partial T_{ii_0}^{-\pi}} e^{ik\xi \cdot \pi_i(x)} \Lambda_{\beta(j,i)}(x) \cdot \hat{n}_{ii_0}^{-\pi} \, ds(x) \quad (8.36)$$

$$= \sum_{j=1}^N p_j \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \in \text{supp}(j)}}^{N_g} \sum_{i_0=1}^{N_i} \frac{\text{sgn}(\partial T_i^{\beta(j,i)})}{\text{mes}(\partial T_i^{\beta(j,i)})} \int_{\partial T_{ii_0}^{-\pi} \cap \partial T_i^{\beta(j,i)}} e^{ik\xi \cdot \pi_i(x)} \, ds(x)}_0 \quad (8.37)$$

$$= 0, \quad (8.38)$$

où $\hat{n}_{ii_0}^{-\pi}$ est la normale unitaire sortante à $T_{ii_0}^{-\pi}$ contenue dans le plan de T_i .

Les fonctions de base microlocales d'ordre élevé sont obtenues de la même manière que les fonctions de base classiques d'ordre élevé : en multipliant par un polynôme d'interpolation les fonctions de base microlocales d'ordre 0 (cf chapitres 2 et 3). Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{j,ii_0}(y) &= \tilde{\Lambda}_{lmn}^{\beta(j,i)}(y) \\ &= \frac{2mes(T_{ii_0}^{-\pi})}{\sqrt{g_h(\hat{\lambda})}} ((\Lambda_{lmn}^{\beta(j,i)})^1 \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \vec{e}_1^h + (\Lambda_{lmn}^{\beta(j,i)})^2 \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \vec{e}_2^h) e^{ik\xi \cdot \pi_i \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda})},\end{aligned}\quad (8.39)$$

où $y = \pi_i \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda})$, $\Lambda_{lmn}^{\beta(j,i)}(x) = \alpha_{lmn}^{\beta(j,i)}(x) \Lambda_{\beta(j,i)}(x) = \phi_{j,ii_0}(x)$, $x = \chi_{ii_0}(\hat{\lambda})$. $\alpha_{lmn}^{\beta(j,i)}$ est défini par :

$$\begin{aligned}\alpha_{lmn}^{\beta(j,i)}(x) &= \alpha_{lmn}^{\beta(j,i)} \circ \chi_{ii_0}(\hat{\lambda}) \\ &= N_{lmn}^{\beta(j,i)} \frac{(p+2) \hat{\alpha}_{lmn}(\hat{\lambda}) \hat{\lambda}^{\beta(j,i)}}{m_{\beta(j,i)}} \Lambda_{\beta(j,i)}(\hat{\lambda}),\end{aligned}\quad (8.40)$$

où $\hat{\alpha}_{lmn}$ est un polynôme à valeur scalaire défini au chapitre 2 (2.24), $N_{lmn}^{\beta(j,i)}$ est défini par (2.16), et $m_{\beta(j,i)}$ désigne respectivement les valeurs l , m ou n selon que $\beta(j,i)$ prend respectivement les valeurs 1, 2 ou 3.

Ces fonctions de base vérifient également la propriété de conservation de la charge :

$$\int_{\Gamma_f} \text{div}_{\Gamma} \vec{p} \, d\gamma = \sum_{j=1}^N p_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \in \text{supp}(j)}}^{N_g} \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{\partial T_{ii_0}^{-\pi} \cap \partial T_i^{\beta(j,i)}} e^{ik\xi \cdot \pi_i(x)} \phi_{j,ii_0}(x) \cdot \hat{n}_{ii_0}^{-\pi} \, ds(x) \quad (8.41)$$

$$= 0. \quad (8.42)$$

En effet, soit ϕ_j est telle que son support est composé d'un seul élément T_i de Γ_g et $\forall x \in \partial T_i^{\beta(j,i)}$, $\alpha_{lmn}^{\beta(j,i)}(x) = 0$; soit ϕ_j est telle que son support est composé de deux éléments T_{i_1} et T_{i_2} de Γ_g , et les traces de $\text{sgn}(\partial T_{i_1}^{\beta(j,i_1)}) \phi_{j,i_1 i_0} \cdot \hat{n}_{i_1 i_0}^{-\pi}$ et de $\text{sgn}(\partial T_{i_2}^{\beta(j,i_2)}) \phi_{j,i_2 i_0} \cdot \hat{n}_{i_2 i_0}^{-\pi}$ soient égales sur $\partial T_{i_1}^{\beta(j,i_1)} = \partial T_{i_2}^{\beta(j,i_2)}$.

Remarque. Les résultats énoncés précédemment pour les fonctions de base microlocales sont valables pour n'importe quel degré d'approximation de la géométrie.

En revenant à la notation $\tilde{\phi}_j$ pour les fonctions de base microlocales, nous avons d'après (8.39) : $\forall y \in T_{ii_0}$,

$$\tilde{\phi}_j(y) = \tilde{\phi}_{j,ii_0}(y) = \mathcal{J}_{ii_0}(y) e^{ik\phi_0(y)} (\phi_{j,ii_0} \circ \pi_h^{-1}(y) \cdot \vec{e}_{ii_0}^{\alpha}) e_{\alpha}^h, \quad (8.43)$$

où $\mathcal{J}_{ii_0} = \frac{2mes(T_{ii_0}^{-\pi})}{\sqrt{g_h}}$ est le jacobien associé à π_h , et $\{\vec{e}_{ii_0}^{\alpha}\}_{\alpha=1}^2$ est tel que $\vec{e}_{ii_0}^{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta}^{ii_0} = \delta_{\alpha\beta}$.

8.5 Discrétisation du système intégral

Nous reprenons la formulation variationnelle (1.37). V_h est défini par :

$$V_h = \mathcal{L}in\{\tilde{\phi}_j; 1, \dots, N\}. \quad (8.44)$$

Les approximations \tilde{X}_h^l et $\tilde{\Lambda}_h^l$ de x^l et λ^l dans V_h s'écrivent :

$$\tilde{X}_h^l = \sum_{j=1}^N \tilde{\alpha}_j^l \tilde{\phi}_j, \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}_h^l = \sum_{j=1}^N \tilde{\gamma}_j^l \tilde{\phi}_j, \quad (8.45)$$

avec $\tilde{\alpha}_j^l, \tilde{\gamma}_j^l \in \mathbb{C}$ et $l \in \{1, 2\}$.

Nous aboutissons au système (1.40), avec les matrices $\mathcal{B}_\beta, \mathcal{D}_\beta, \mathcal{A}^l, \mathcal{K}^l, \mathcal{K}^{l*}, \mathcal{N}_R^l$ et le vecteur F^l définis par :

$$\begin{aligned} (F^l)_i &= \langle F_l^{EID}, \tilde{\phi}_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{B}_\beta)_{ij} &= \langle \beta k \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{D}_\beta)_{ij} &= \langle \frac{1+\beta}{2} \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{A}^l)_{ij} &= \langle \delta_l^* \delta_l \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{K}^l)_{ij} &= \langle k K_l \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{K}^{l*})_{ij} &= \langle k K_l \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{N}_R^l)_{ij} &= \langle A_{R,l} \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_i \rangle_{\mathbb{V}_h}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

où $\mathbb{V}_h = V_h \times V_h$.

L'élément $(F^l)_j$ se calcule de la façon suivante :

$$(F^l)_j = \int_{\Gamma_f} F_l^{EID}(x) \cdot \overline{\tilde{\phi}_j(x)} d\gamma(x), \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad (8.47)$$

$$= \sum_{i \in \text{supp}(j)} \int_{T_i^s} F_l^{EID}(x) \cdot \overline{\tilde{\phi}_j(x)} d\gamma(x), \quad (8.48)$$

$$= \sum_{i \in \text{supp}(j)} \sum_{i_0=1}^{N_i} \int_{T_{i i_0}} F_l^{EID}(x) \cdot \overline{\mathcal{J}_{i i_0}(x) e^{ik\phi_0(x)} (\phi_j \circ \pi_h^{-1}(x) \cdot \overrightarrow{e_{i i_0}^\alpha}) e_\alpha^h} d\gamma(x). \quad (8.49)$$

Par rapport aux calculs classiques, il apparaît une somme sur i_0 , ainsi que la phase de l'inconnue. Les éléments matriciels se calculent de manière similaire. Par exemple, d'après la section 5.6.1,

nous avons : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}^1)_{ij} &= \frac{k^4}{8\pi} \int_{S^2} \left(\int_{\Gamma_f} \tilde{\phi}_j(y) \cdot (\hat{\theta} - i\hat{\phi}) e^{-iky \cdot \hat{s}} d\gamma(y) \right) \cdot \overline{\left(\int_{\Gamma_f} \tilde{\phi}_i(x) \cdot (\hat{\theta} - i\hat{\phi}) e^{-ikx \cdot \hat{s}} d\gamma(x) \right)} d\hat{s}, \\
&= \frac{k^4}{8\pi} \int_{S^2} \left(\sum_{q \in \text{supp}(j)} \sum_{q_0=1}^{N_q} \int_{T_{qq_0}} \mathcal{J}_{qq_0}(y) e^{ik\phi_0(y)} (\phi_j \circ \pi_h^{-1}(y) \cdot \overrightarrow{e_{qq_0}^\alpha}) \overrightarrow{e_\alpha^h} \cdot (\hat{\theta} - i\hat{\phi}) e^{-iky \cdot \hat{s}} d\gamma(y) \right) \\
&\quad \cdot \overline{\left(\sum_{p \in \text{supp}(i)} \sum_{p_0=1}^{N_p} \int_{T_{pp_0}} \mathcal{J}_{pp_0}(x) e^{ik\phi_0(x)} (\phi_i \circ \pi_h^{-1}(x) \cdot \overrightarrow{e_{pp_0}^\beta}) \overrightarrow{e_\beta^h} \cdot (\hat{\theta} - i\hat{\phi}) e^{-ikx \cdot \hat{s}} d\gamma(x) \right)} d\hat{s}.
\end{aligned} \tag{8.50}$$

où $(\hat{s}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ est le repère local en coordonnées sphériques sur S^2 .

D'après (8.18) et (8.50), l'assemblage des matrices définies par (8.46) a une complexité en $\mathcal{O}(N_f^2)$. La complexité de la méthode de discrétisation microlocale est donc en $\mathcal{O}(N_f^2 + N_{iter} N_g^2)$, où N_{iter} est le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du système.

Chapitre 9

Méthode couplée : Discrétisation Microlocale et FMM

9.1 Introduction

En employant la méthode de discrétisation microlocale pour résoudre les équations de Maxwell, la taille des problèmes (1.35) et (1.36) est théoriquement en $\mathcal{O}(k^\alpha \times k^\alpha)$, α étant inférieur à 2, au lieu d'être en $\mathcal{O}(k^2 \times k^2)$. Cette réduction, importante en pratique, permet de stocker les matrices du système. Cependant, leur assemblage demande un nombre d'opérations en $\mathcal{O}(k^4)$ qui peut-être accéléré selon Abboud *et al.*, par l'utilisation de la théorie de la phase stationnaire. Malgré son efficacité en dimension 2, cette méthode engendre des difficultés numériques non encore résolues à notre connaissance en dimension 3.

Dans [44], Darrigrand a développé une méthode couplant la méthode de discrétisation microlocale et la méthode multipôle : il accélère le précalcul du système en utilisant la méthode multipôle (FMM) à la place de la théorie de la phase stationnaire. Dans cette partie, nous présentons cette méthode couplée (FMD), dans le cas d'une méthode multipôle à un niveau et dans le cas multi-niveaux. L'algorithme multi-niveaux dans le cadre de la discrétisation microlocale est différent de l'algorithme classique. Nous présentons ces différences et nous détaillons la complexité de l'algorithme.

9.2 La méthode couplée

Nous nous intéressons ici uniquement au cas des équations de Maxwell. Nous renvoyons à [44] pour l'équation de Helmholtz.

Afin d'employer la méthode de discrétisation microlocale, nous nous plaçons dans les conditions du chapitre précédent, i.e. l'obstacle considéré est convexe, et éclairé par une onde incidente, u^{inc} , plane de la forme $u^{inc}(x) = e^{ik\xi \cdot x}$, ξ étant la direction de l'onde incidente. Une approximation de la phase de degré 1 est donnée par $k\phi_0(x)$ où $\phi_0(x) = \xi \cdot x$.

La méthode de discrétisation microlocale fait intervenir un double maillage : un maillage grossier Γ_g associé à l'inconnue du problème, et un maillage fin Γ_f associé à la géométrie du problème. Le diamètre, h_g , des N_g éléments de Γ_g est en $\mathcal{O}(k^{-\alpha/2})$, avec $0 < \alpha < 2$, et le diamètre, h_f , des N_f éléments de Γ_f est en $\mathcal{O}(k^{-1})$.

Soit π la projection orthogonale de Γ_g sur Γ . Pour l'obtention de Γ_f , Γ_g est raffinée, puis projetée sur Γ au moyen de π_h (cf figure 9.1).

Nous avons ainsi :

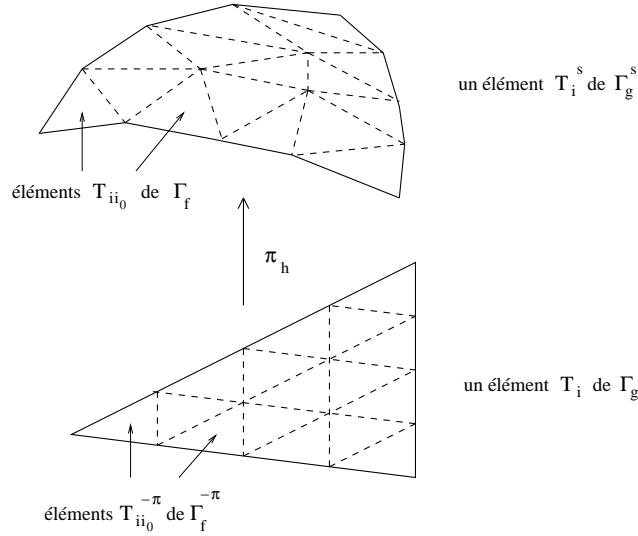


FIG. 9.1 – Description des correspondances entre les maillages de Γ_g et de Γ_f .

$$\Gamma_g = \bigcup_{i=1}^{N_g} T_i \quad \text{et} \quad \Gamma_f = \bigcup_{i=1}^{N_g} T_i^s = \bigcup_{i=1}^{N_g} \bigcup_{i_0=1}^{N_i} T_{ii_0}. \quad (9.1)$$

Les éléments de Γ_g sont appelés triangles grossiers, et les éléments de Γ_f triangles fins. En notant $\{\tilde{\phi}_i\}_{i=1}^N$ les fonctions de base microlocales définies au chapitre précédent, nous avons à résoudre le système suivant :

$$AX = b, \quad (9.2)$$

où nous considérons, pour simplifier, A et b définis par : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$,

$$A_{ij} = \sum_{\beta \in \text{supp}(j)} \sum_{\alpha \in \text{supp}(i)} \sum_{\beta_0=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha_0=1}^{N_\alpha} \int_{T_{\alpha\alpha_0}} \int_{T_{\beta\beta_0}} G(x, y) \tilde{\phi}_j(y) \cdot \overline{\tilde{\phi}_i(x)} d\gamma(y) d\gamma(x), \quad (9.3)$$

$$b_i = \sum_{\alpha \in \text{supp}(i)} \sum_{\alpha_0=1}^{N_\alpha} \int_{T_{\alpha\alpha_0}} u^{inc}(y) \cdot \overline{\tilde{\phi}_i(y)} d\gamma(y), \quad (9.4)$$

$$X = (X_1, \dots, X_N)^t. \quad (9.5)$$

$supp(i)$ (respectivement $supp(j)$) est l'ensemble formé à partir des indices i (respectivement j) des éléments de T_i^s (respectivement T_j^s) appartenant au support de $\tilde{\phi}_i$ (respectivement $\tilde{\phi}_j$). Ce sont aussi les ensembles formés à partir des indices des éléments appartenant aux supports de ϕ_i et ϕ_j . Le noyau de Green G est défini par :

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \quad (9.6)$$

Remarque. N dépend linéairement de N_g , i.e. $N \sim N_g$.

Les fonctions de base $\tilde{\phi}_i$ sont données par (8.39) : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$\tilde{\phi}_i(x) = \tilde{\phi}_{i,\alpha\alpha_0}(x) = \mathcal{J}_{\alpha\alpha_0}(x) e^{ik\phi_0(x)} \phi_{i,\alpha\alpha_0}^\delta \circ \pi_h^{-1}(x) \overrightarrow{e_\delta^h}, \quad \forall x \in T_{\alpha\alpha_0}, \quad (9.7)$$

où $\mathcal{J}_{\alpha\alpha_0} = 2mes(T_{\alpha\alpha_0}^{-\pi})/\sqrt{g_h}$, $\tilde{\phi}_{i,\alpha\alpha_0}$ (respectivement $\phi_{i,\alpha\alpha_0}$) est la restriction de $\tilde{\phi}_i$ (respectivement ϕ_i) à $T_{\alpha\alpha_0}$ et $\phi_{i,\alpha\alpha_0}^\delta \circ \pi_h^{-1}(x) = \phi_i \circ \pi_h^{-1}(x) \cdot \overrightarrow{e_{\alpha\alpha_0}^\delta}$.

Les triangles $T_{\alpha\alpha_0}^{-\pi}$ correspondent aux triangles provenant du raffinement de Γ_g . Les intégrales (9.3) et (9.4) sont à présent discrétisées. Afin de ne pas alourdir l'exposé, la quadrature considérée contient un seul point par triangle fin. Le système discret s'écrit de la même manière que (9.2) : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$

$$A_{ij} = \sum_{\beta \in supp(j)} \sum_{\alpha \in supp(i)} \sum_{\beta_0=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha_0=1}^{N_\alpha} 4mes(T_{\alpha\alpha_0}^{-\pi}) mes(T_{\beta\beta_0}^{-\pi}) G(x_{\alpha\alpha_0}, y_{\beta\beta_0}) e^{ik\phi_0(y_{\beta\beta_0})} \phi_{j,\beta\beta_0}^\delta \circ \pi_h^{-1}(y_{\beta\beta_0}) \overrightarrow{e_\delta^h} \cdot e^{-ik\phi_0(x_{\alpha\alpha_0})} \phi_{i,\alpha\alpha_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{\alpha\alpha_0}) \overrightarrow{e_\epsilon^h} \quad (9.8)$$

$$b_i = \sum_{\alpha \in supp(i)} \sum_{\alpha_0=1}^{N_\alpha} 2mes(T_{\alpha\alpha_0}^{-\pi}) u^{inc}(x_{\alpha\alpha_0}) \cdot e^{-ik\phi_0(x_{\alpha\alpha_0})} \phi_{i,\alpha\alpha_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{\alpha\alpha_0}) \overrightarrow{e_\epsilon^h}. \quad (9.9)$$

Le calcul de A a un coût en $\mathcal{O}(N_f^2)$, i.e. en $\mathcal{O}(k^4)$. Il va être accéléré en utilisant la FMM. Nous rappelons quelques caractéristiques de la FMM. Tout d'abord, pour utiliser cette méthode, un octree est construit : un cube C^0 englobant Γ_f est considéré, puis subdivisé récursivement en huit jusqu'à ce que chaque cube nouvellement obtenu ne contienne que quelques éléments de Γ_f . Plusieurs niveaux sont ainsi définis dans l'octree. Les lettres f et g sont mises respectivement en indice pour indiquer que nous faisons référence au dernier et au premier niveaux de l'octree. Le niveau fin correspond au dernier niveau (niveau où la taille des cubes est la plus petite) et le niveau grossier correspond au premier niveau (niveau où la taille des cubes est la plus grande). C_m^n est le $m^{\text{ième}}$ cube du niveau n de centre X_m^n . M_n est le nombre de cubes du niveau n . Le voisinage de C_m^n est défini par :

$$V_m^n = \{m' \in \{1, \dots, M_n\} / |X_m^n - X_{m'}^n|_\infty \leq d_n\}, \quad (9.10)$$

où d_n est la longueur des côtés des cubes du niveau n .

Les plus proches non voisins de C_m^n sont définis par :

$$\forall n \geq 3, \quad TL_m^n = \{m' \in \{1, \dots, M_n\} / m' \notin V_m^n \text{ et } \mathcal{P}(n, m') \in V_{\mathcal{P}(n, m)}^{n-1}\}, \quad (9.11)$$

où $\mathcal{P}(u, v)$ donne le numéro du cube du niveau $(u-1)$ ayant engendré C_v^u . La fonction \mathcal{S} associe à un cube l'ensemble de ses fils.

A est décomposée en une matrice proche A^{near} et en une matrice lointaine A^{far} de sorte que :

$$A = A^{near} + A^{far}, \quad (9.12)$$

$$A_{ij}^{near} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } m' \in V_m^f, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad A_{ij}^{far} = \begin{cases} 0, & \text{si } m' \in V_m^f, \\ A_{ij}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (9.13)$$

où les indices m et m' correspondent respectivement à l'ensemble des cubes C_m^f et $C_{m'}^f$, contenant le support de $\tilde{\phi}_i$, $supp(\tilde{\phi}_i) = \{T_\alpha^s | \alpha \in supp(i)\}$, et le support de $\tilde{\phi}_j$, $supp(\tilde{\phi}_j) = \{T_\alpha^s | \alpha \in supp(j)\}$.

La FMM va être utilisée pour approcher A^{far} . En considérant que $supp(\tilde{\phi}_i) \cap C_m^n \neq \emptyset$ et que $supp(\tilde{\phi}_j) \cap C_{m'}^n \neq \emptyset$, l'approximation de A^{far} se fait par le biais du développement suivant :

$$G(x_{\alpha\alpha_0}, y_{\beta\beta_0}) \simeq \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_{\alpha\alpha_0}^n} T_{mm'}^n(\hat{s}) e^{-ik\hat{s} \cdot r_{\beta\beta_0}^n} d\hat{s}, \quad (9.14)$$

$$\text{où } T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)). \quad (9.15)$$

Dans les formules (9.14) et (9.15), nous avons :

$$x_{\alpha\alpha_0} - y_{\beta\beta_0} = r_{mm'}^n + r^n, \quad (9.16)$$

avec $r_{mm'}^n = X_m^n - X_{m'}^n$, $r^n = r_{\alpha\alpha_0}^n - r_{\beta\beta_0}^n$, $r_{\alpha\alpha_0}^n = x_{\alpha\alpha_0}^n - X_m^n$ et $r_{\beta\beta_0}^n = y_{\beta\beta_0}^n - X_{m'}^n$.

Par l'emploi de la FMM, A^{far} est approchée par \tilde{A}^{far} : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}^{far} = & \sum_{\alpha \in supp(i)} \sum_{m/T_\alpha^s \cap C_m^f \neq \emptyset} \sum_{\alpha_0/x_{\alpha\alpha_0} \in C_m^f} \sum_{\beta \in supp(j)} \sum_{m' \notin V_m^f/T_\beta^s \cap C_{m'}^f \neq \emptyset} \sum_{\beta_0/y_{\beta\beta_0} \in C_{m'}^f} 4mes(T_{\alpha\alpha_0}^{-\pi}) \\ & mes(T_{\beta\beta_0}^{-\pi}) e^{ik\phi_0(y_{\beta\beta_0})} \phi_{j,\beta\beta_0}^\delta \circ \pi_h^{-1}(y_{\beta\beta_0}) \vec{e}_\delta^h \cdot e^{-ik\phi_0(x_{\alpha\alpha_0})} \phi_{i,\alpha\alpha_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{\alpha\alpha_0}) \vec{e}_\epsilon^h \quad (9.17) \\ & \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\hat{s} \cdot r_{\alpha\alpha_0}^f} T_{mm'}^f(\hat{s}) e^{-ik\hat{s} \cdot r_{\beta\beta_0}^f} d\hat{s}, \end{aligned}$$

$$= \frac{ik}{4\pi^2} \int_{S^2} \sum_{\alpha \in \text{supp}(i)} \sum_{m/T_\alpha^s \cap C_m^f \neq \emptyset} \sum_{\alpha_0/x_{\alpha_0} \in C_m^f} \text{mes}(T_{\alpha\alpha_0}^{-\pi}) e^{-ik\phi_0(x_{\alpha\alpha_0})} \phi_{i,\alpha\alpha_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{\alpha\alpha_0}) \vec{e}_\epsilon^h e^{ik\hat{s} \cdot r_{\alpha\alpha_0}^f} \quad (9.18)$$

$$\sum_{\beta \in \text{supp}(j)} \sum_{m' \notin V_m^f/T_\beta^s \cap C_m^f, \neq \emptyset} T_{mm'}^f(\hat{s}) \sum_{\beta_0/y_{\beta\beta_0} \in C_m^f} \text{mes}(T_{\beta\beta_0}^{-\pi}) e^{ik\phi_0(y_{\beta\beta_0})} \phi_{j,\beta\beta_0}^\delta \circ \pi_h^{-1}(y_{\beta\beta_0}) \vec{e}_\delta^h e^{-ik\hat{s} \cdot r_{\beta\beta_0}^f} d\hat{s}.$$

Afin d'alléger les notations, et comme $N \sim N_g$, nous posons $\text{supp}(\tilde{\phi}_i) = T_i^s$ et $\text{supp}(\tilde{\phi}_j) = T_j^s$. Ces considérations entraînent : $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$

$$\tilde{A}_{ij}^{far} = \frac{ik}{4\pi^2} \int_{S^2} \sum_{m/T_i^s \cap C_m^f \neq \emptyset} \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m^f} \text{mes}(T_{ii_0}^{-\pi}) e^{-ik\phi_0(x_{ii_0})} \phi_{ii_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{ii_0}) \vec{e}_\epsilon^h e^{ik\hat{s} \cdot r_{ii_0}^f} \quad (9.19)$$

$$\sum_{m' \notin V_m^f/T_j^s \cap C_m^f, \neq \emptyset} T_{mm'}^f(\hat{s}) \sum_{j_0/y_{jj_0} \in C_m^f} \text{mes}(T_{jj_0}^{-\pi}) e^{ik\phi_0(y_{jj_0})} \phi_{jj_0}^\delta \circ \pi_h^{-1}(y_{jj_0}) \vec{e}_j^h e^{-ik\hat{s} \cdot r_{jj_0}^f} d\hat{s}.$$

9.3 FMD un niveau

L'assemblage de A (9.19) étant accéléré par la FMM un niveau, la méthode couplée sera appelée FMD un niveau. La FMM un niveau ne faisant intervenir que les cubes du niveau fin, la discrétisation de la sphère unité donne : $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$

$$\tilde{A}_{ij}^{far} = \frac{ik}{4\pi^2} \sum_{p=1}^{S_f} \omega_p^f \sum_{m/T_i^s \cap C_m^f \neq \emptyset} \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m^f} \text{mes}(T_{ii_0}^{-\pi}) e^{-ik\phi_0(x_{ii_0})} \phi_{ii_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{ii_0}) \vec{e}_\epsilon^h e^{ik\hat{s}_p^f \cdot r_{ii_0}^f} \quad (9.20)$$

$$\sum_{m' \notin V_m^f/T_j^s \cap C_m^f, \neq \emptyset} T_{mm'}^f(\hat{s}_p^f) \sum_{j_0/y_{jj_0} \in C_m^f} \text{mes}(T_{jj_0}^{-\pi}) e^{ik\phi_0(y_{jj_0})} \phi_{jj_0}^\delta \circ \pi_h^{-1}(y_{jj_0}) \vec{e}_j^h e^{-ik\hat{s}_p^f \cdot r_{jj_0}^f}.$$

Pour calculer \tilde{A}^{far} , l'algorithme suivant est utilisé :

- *Etape 1* : Calcul des fonctions de radiation.
 $\forall i \in \{1, \dots, N_g\}, m/T_i^s \cap C_m^f \neq \emptyset, \forall p \in \{1, \dots, S_f\}$:

$$F_{im}^f(\hat{s}_p^f) = \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m^f} \text{mes}(T_{ii_0}^{-\pi}) e^{ik\phi_0(x_{ii_0})} \phi_{ii_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{ii_0}) \vec{e}_\epsilon^h e^{ik\hat{s}_p^f \cdot r_{ii_0}^f}. \quad (9.21)$$

- *Etape 2* : Transfert et intégration du sur S_f .
 $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$,

$$\tilde{A}_{ij}^{far} = \frac{ik}{4\pi^2} \sum_{p=1}^{S_f} \omega_p^f \sum_{m/T_i^s \cap C_m^f \neq \emptyset} F_{im}^f(\hat{s}_p^f) \sum_{m' \notin V_m^f/T_j^s \cap C_{m'}^f \neq \emptyset} T_{mm'}^f(\hat{s}_p^f) \overline{F_{jm'}^f(\hat{s}_p^f)}. \quad (9.22)$$

La complexité de cet algorithme est résumée dans le tableau 9.1. La complexité du calcul de la

Etape	Calcul	Mémoire
1	$N_f S_f$	$N_f + M_f S_f$
2	$\max(M_f^2, N_g^2) S_f$	N_g^2

TAB. 9.1 – Complexité du calcul de \tilde{A}^{far} par la FMD un niveau.

matrice proche A^{near} nécessite $\mathcal{O}(N_f^2/M_f)$ opérations et une place mémoire en $\mathcal{O}(N_f)$. Le nombre de boîtes multipolaires au niveau fin, M_f , est choisi dans le but de minimiser la complexité du calcul de A . D'après les relations suivantes :

$$M_f S_f \sim N_f \quad \text{et} \quad L_f \sim S_f^{1/2}, \quad (9.23)$$

le coût du calcul de A est donné par :

$$\text{Coût calcul de } A \sim \underbrace{\frac{N_f^2}{M_f} + \frac{N_f}{M_f} \max(M_f^2, N_g^2)}_{\tilde{A}^{far}} + \underbrace{\frac{N_f^2}{M_f}}_{A^{near}}. \quad (9.24)$$

Ce coût est minimal pour $M_f \sim N_f^{1/2}$ quelque soit la valeur de N_g , et il est dans ce cas en $\mathcal{O}(N_f^{3/2})$. Lorsque la méthode couplée est utilisée pour inverser (9.2), la matrice A du système est calculée puis stockée, et ensuite le système est inversé en employant une méthode itérative ou une méthode directe.

Si une méthode itérative est utilisée, la complexité de la résolution de (9.2) par la méthode couplée (FMD) est donnée par :

$$CI_x + N_{iter} CD_x, \quad (9.25)$$

où CI_x et CD_x désignent respectivement les temps de calculs indépendants et dépendants du vecteur x , et N_{iter} correspond au nombre d'itérations nécessaires à la résolution du système. Les calculs indépendants de x correspondent à l'assemblage de A . Les calculs dépendants de x correspondent à l'évaluation d'un produit matrice-vecteur avec A de taille $N_g \times N_g$. La complexité de la FMD un niveau est donnée en théorie par :

$$CI_x + N_{iter} CD_x \sim N_f^{3/2} + N_{iter} N_g^2. \quad (9.26)$$

La place mémoire consommée par la FMD est en $\mathcal{O}(N_f + N_g^2)$.

Remarque. Dans les résultats numériques du chapitre 11, nous observons qu'en pratique $N_g \sim N_f^{1/2}$ (i.e. $\alpha = 1$ et $N_g = \mathcal{O}(k)$), pour les tailles de cas considérés. Dans l'hypothèse $N_g \sim N_f^{1/2}$, les coûts de la FMD un niveau et de la FMM un niveau sont reportés dans le tableau 9.2. Au regard de ce tableau, il apparaît une différence notable entre les complexités de la FMD et de la FMM : la majeure partie du coût se situe, pour la FMD, au niveau des opérations indépendantes du vecteur x (i.e. au niveau de l'assemblage de A), alors que pour la FMM, elle se situe au niveau de la résolution itérative du système, étape dépendante de x . La FMM est donc $N_{iter}^{(FMM)}$ fois plus coûteuse que la FMD, $N_{iter}^{(FMM)}$ étant le nombre d'itérations nécessaires à la FMM pour résoudre le problème (nous considérons que N_f est négligeable devant $N_f^{3/2}$).

	CI_x	CD_x
FMM	N_f	$N_f^{3/2}$
FMD	$N_f^{3/2}$	N_g^2

TAB. 9.2 – Complexités de la FMM un niveau et de la FMD un niveau si $N_g \sim N_f^{1/2}$ ($\alpha = 1$).

9.4 FMD multi-niveaux

L'assemblage de A (9.19) étant accéléré par la FMM multi-niveaux, la méthode couplée sera appelée FMD multi-niveaux. Comme la FMM multi-niveaux est utilisée pour évaluer (9.19), nous avons : $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}^{far} &= \frac{ik}{4\pi^2} \int_{S^2} \sum_{m/T_i^s \cap C_m^g \neq \emptyset} \sum_{i_0/x_{ii_0} \in C_m^g} \overline{F_{im}^g}(\hat{s}) \sum_{m' \notin V_m^g/T_j^s \cap C_m^g \neq \emptyset} T_{mm'}^g(\hat{s}) \sum_{j_0/y_{jj_0} \in C_m^g} F_{jm'}^g(\hat{s}) d\hat{s} \\ &+ \frac{ik}{4\pi^2} \int_{S^2} \sum_{n=niv_g+1}^{niv_f} \sum_{m/T_i^s \cap C_m^n \neq \emptyset} \sum_{i_0/x_{ii_0} \in C_m^n} \overline{F_{im}^n}(\hat{s}) \sum_{m' \in TL_m^n/T_j^s \cap C_m^n \neq \emptyset} T_{mm'}^n(\hat{s}) \sum_{j_0/y_{jj_0} \in C_m^n} F_{jm'}^n(\hat{s}) d\hat{s}, \end{aligned} \quad (9.27)$$

où F_{im}^n est donnée par :

$$F_{im}^n(\hat{s}) = \sum_{i_0/x_{ii_0} \in C_m^n} mes(T_{ii_0}^{-\pi}) e^{ik\phi_0(x_{ii_0})} \phi_{ii_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{ii_0}) \overrightarrow{e}_c^h e^{ik\hat{s} \cdot r_{ii_0}}. \quad (9.28)$$

Pour la FMD, contrairement à la FMM multi-niveaux, tous les niveaux de l'octree ne sont pas considérés. Seuls les niveaux n compris entre niv_g et niv_f sont considérés.

La discrétisation de (9.27) sur la sphère unité S^2 donne : $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}^{far} &= \frac{ik}{4\pi^2} \sum_{p=1}^{S_g} \omega_p^g \sum_{m/T_i^s \cap C_m^g \neq \emptyset} \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m^g} \overline{F_{im}^g(\hat{s}_p^g)} \sum_{m' \notin V_m^g/T_j^s \cap C_m^g \neq \emptyset} T_{mm'}^g(\hat{s}_p^g) \sum_{j_0/y_{j_0} \in C_m^g} F_{jm'}^g(\hat{s}_p^g), \\ &+ \frac{ik}{4\pi^2} \sum_{n=niv_g+1}^{niv_f} \sum_{p=1}^{S_n} \omega_p^n \sum_{m/T_i^s \cap C_m^n \neq \emptyset} \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m^n} \overline{F_{im}^n(\hat{s}_p^n)} \sum_{m' \in TL_m^n/T_j^s \cap C_m^n \neq \emptyset} T_{mm'}^n(\hat{s}_p^n) \sum_{j_0/y_{j_0} \in C_m^n} F_{jm'}^n(\hat{s}_p^n). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Pour calculer \tilde{A}^{far} , l'algorithme suivant est utilisé :

– Etape 1 : Calcul des fonctions de radiation.

1.1 : Regroupement local au niveau fin niv_f .

$\forall i \in \{1, \dots, N_g\}$, $m/T_i^s \cap C_m^f \neq \emptyset$, $\forall p \in \{1, \dots, S_f\}$:

$$F_{im}^f(\hat{s}_p^f) = \sum_{i_0/x_{i_0} \in C_m^f} mes(T_{i_0}^{-\pi}) e^{ik\phi_0(x_{i_0})} \phi_{i_0}^\epsilon \circ \pi_h^{-1}(x_{i_0}) \vec{e}_\epsilon^h e^{ik\hat{s}_p^f \cdot r_{i_0}}. \quad (9.30)$$

1.2 : Obtention des fonctions de radiation des niveaux $(niv_f - 1)$ à niv_g par interpolations successives.

$\forall i \in \{1, \dots, N_g\}$, $\forall n \in \{niv_g + 1, \dots, niv_f\}$ (n parcourt cet ensemble en allant de niv_f à $niv_g + 1$), $m'/T_i^s \cap C_m^{n-1} \neq \emptyset$ et $\forall p \in \{1, \dots, S_{n-1}\}$:

$$F_{im'}^{n-1}(\hat{s}_p^{n-1}) = \sum_{\tilde{m} \in \mathcal{S}(n-1, m')} e^{ik\hat{s}_p^{n-1} \cdot (X_{m'}^{n-1} - X_{\tilde{m}}^n)} Interp(F_{i\tilde{m}}^n)(\hat{s}_p^{n-1}), \quad (9.31)$$

où $Interp$ correspond à l'opérateur d'interpolation.

– Etape 2 : Transfert et intégration du résultat.

2.1 : Pour n allant de niv_f à $(niv_g + 1)$, $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$:

$$\tilde{A}_{ij} \leftarrow \tilde{A}_{ij} + \frac{ik}{4\pi^2} \sum_{p=1}^{S_n} \omega_p^n \sum_{m/T_i^s \cap C_m^n \neq \emptyset} F_{im}^n(\hat{s}_p^n) \sum_{m' \in TL_m^n/T_j^s \cap C_m^n \neq \emptyset} T_{mm'}^n(\hat{s}_p^n) \overline{F_{jm'}^n(\hat{s}_p^n)}. \quad (9.32)$$

2.2 : Pour $n = niv_g$, $\forall i, j \in \{1, \dots, N_g\}$:

$$\tilde{A}_{ij} \leftarrow \tilde{A}_{ij} + \frac{ik}{4\pi^2} \sum_{p=1}^{S_g} \omega_p^g \sum_{m/T_i^s \cap C_m^g \neq \emptyset} F_{im}^g(\hat{s}_p^g) \sum_{m' \notin V_m^g/T_j^s \cap C_m^g \neq \emptyset} T_{mm'}^g(\hat{s}_p^g) \overline{F_{jm'}^g(\hat{s}_p^g)}. \quad (9.33)$$

Remarque. Différences entre FMD multi-niveaux et FMM multi-niveaux :

- 1) L'étape 1 correspond à un regroupement local aussi bien au niveau observateur qu'au niveau source.
- 2) Il n'y a pas d'étape d'interpolation dans la FMD multi-niveaux.
- 3) La complexité optimale sera obtenue avec un niveau grossier plus fin que pour la FMM multi-niveau (voir plus loin).

Remarque. Le calcul des fonctions de transfert est intégré, à l'étape 2, étape où sont effectués les transferts entre boîtes. A cette étape, nous faisons une boucle sur les directions puis une boucle sur les couples de boîtes dans la direction courante, et la fonction de transfert n'est calculée que si elle ne l'a pas déjà été.

Nous allons déterminer le niveau grossier optimal par rapport à la complexité. Soit niv_c le niveau critique pour lequel le nombre de boîtes M_c est de l'ordre du nombre de triangles grossiers N_g . Pour le calcul de \tilde{A}^{far} , la complexité de la FMD est résumée dans le tableau 9.3. Dans ce tableau, dl est le facteur permettant de passer du nombre d'éléments de Γ_g au nombre de degrés de liberté global. Ce facteur est de 3/2 à l'ordre 0 et de 5 à l'ordre 1.

Nous rappelons les relations suivantes :

Etape	Calculs	Mémoire
1.1	$N_f S_f (dl)$	$M_f S_f (dl)$
1.2	$\sum_{n=niv_g}^{niv_f-1} \max(M_n, N_g) S_n \ln S_n (dl)$	$\sum_{n=niv_g}^{niv_f-1} \max(M_n, N_g) S_n (dl)$
2.1	$\sum_{n=niv_g+1}^{niv_c} nbTra \frac{N_g^2}{M_n} S_n (dl^2) + \sum_{n=niv_c+1}^{niv_f} nbTra M_n S_n (dl^2)$	$N_g^2 (dl^2)$
2.2	$\max(M_g^2, N_g^2) S_g (dl^2)$	$N_g^2 (dl^2)$

TAB. 9.3 – Complexité du calcul de \tilde{A}^{far} par la FMD multi-niveaux.

$$\begin{aligned} M_c &\sim N_g \sim N_f^{\alpha/2}, \\ M_n S_n &\sim N_f. \end{aligned}$$

La construction de la matrice proche A^{near} nécessite $\mathcal{O}(N_f^2/M_f)$ opérations. Afin de minimiser cette complexité, le nombre de boîtes multipolaires au niveau fin, M_f , est choisi comme dans la FMM multi-niveaux, i.e. $M_f \sim N_f$. L'étape 1.1 incite également à prendre M_f aussi grand que possible (cf (9.23)), ce qui justifie bien d'avoir $M_f \sim N_f$. Au regard de l'étape 2.2, nous

considérons $M_g \leq N_g$, i.e. $niv_g \leq niv_c$. Afin de minimiser le coût de l'étape 2.1, il faut prendre :

$$niv_g = niv_c, \quad i.e. \quad M_g \sim N_g. \quad (9.34)$$

Donc le choix optimal pour M_g est donné par $M_g \sim N_g$. La complexité de la FMD multi-niveaux est alors reportée dans le tableau 9.4, l'étape 3 correspondant au coût de la résolution du système (9.2) par une méthode itérative nécessitant N_{iter} itérations.

Pour résoudre (9.2), la complexité de la méthode est décomposée comme précédemment :

Etape	Calculs	Mémoire
1.1	$N_f (dl)$	$N_f (dl)$
1.2	$N_f \ln^2 N_f (dl)$	$N_f \ln N_f (dl)$
2.1	$nbTra N_f \ln N_f (dl^2)$	$N_g^2 (dl^2)$
2.2	$N_g N_f (dl^2)$	$N_g^2 (dl^2)$
3	$N_{iter} N_g^2 (dl^2)$	$N_g^2 (dl^2)$

TAB. 9.4 – Complexité de la FMD multi-niveaux pour le choix optimal $niv_g = niv_c$.

$$CI_x + N_{iter} CD_x, \quad (9.35)$$

où CI_x et CD_x représentent respectivement les temps de calculs indépendants et dépendants de x .

L'étape la plus coûteuse est celle des transferts au niveau grossier. La FMD nécessite $\mathcal{O}(N_g N_f + N_{iter} N_g^2)$ opérations, soit $\mathcal{O}(N_f^{(\alpha+2)/2} + N_{iter} N_g^2)$ opérations en remplaçant N_g par $N_f^{\alpha/2}$, et une place mémoire en $\mathcal{O}(N_f \ln N_f)$.

Remarque. Dans les résultats numériques du chapitre 11, nous observons qu'en pratique $N_g \sim N_f^{1/2}$ (i.e. $\alpha = 1$ et $N_g = \mathcal{O}(k)$), pour les tailles de cas considérés. Dans l'hypothèse $N_g \sim N_f^{1/2}$, les complexités de la FMM multi-niveaux et de la FMD multi-niveaux sont reportées dans le tableau 9.5.

Il apparaît dans ce tableau une différence notable entre les complexités de la FMD et de la FMM : la majeure partie du coût se situe, pour la FMD, au niveau des opérations indépendantes du vecteur x (i.e. au niveau de l'assemblage de A), alors que pour la FMM, elle se situe au niveau de la résolution itérative du système, étape dépendante de x .

En désignant par $N_{iter}^{(FMM)}$ le nombre d'itérations nécessaires à la FMM pour résoudre le système,

	CI_x	CD_x
FMM	N_f	$nbTraN_f \ln N_f$
FMD	$N_g N_f$	N_g^2

TAB. 9.5 – Complexités de la FMM multi-niveaux et de la FMD multi-niveaux si $N_g \sim N_f^{1/2}$ ($\alpha = 1$).

en posant $N_f = 10^\beta$, $\beta \in \mathbb{N}^*$, et en donnant à $nbTra$ sa valeur maximale ($nbTra = 316$) ainsi que ses valeurs moyennes pour la sphère ($nbTra = 44.3$) et pour l'amande ($nbTra = 34.7$), nous avons le tableau 9.6 dans le cas où $N_g \sim N_f^{1/2}$. A la vue de ce tableau, il apparaît que pour une taille de problème N_f ne dépassant pas 10^7 , ce qui correspond aux objectifs actuels dans l'industrie, la FMD est en théorie moins coûteuse que la FMM. Cette réduction est de l'ordre de $N_{iter}^{(FMM)}$ lorsque $nbTra$ est fixée à sa valeur maximale. Pour la sphère et pour l'amande, la réduction est moindre; en considérant une sous-estimation de $N_{iter}^{(FMM)}$: $N_{iter}^{(FMM)} = 10$, la FMD reste tout de même dans le cas le moins favorable quasiment deux fois moins coûteuse que la FMM.

β	5	6	7
FMD	$\simeq 10^{7.5}$	$\simeq 10^9$	$\simeq 10^{10.5}$
FMM; $nbTra = 316$	$\simeq 3.6N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^8$	$\simeq 4.4N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^9$	$\simeq 5N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^{10}$
$\frac{FMM}{FMD}$; $nbTra = 316$	$\simeq 11N_{iter}^{(FMM)}$	$\simeq 4.4N_{iter}^{(FMM)}$	$\simeq 1.6N_{iter}^{(FMM)}$
FMM; $nbTra = 44.3$ (sphère)	$\simeq 5.1N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^7$	$\simeq 6.1N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^8$	$\simeq 7.1N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^9$
$\frac{FMM}{FMD}$; $nbTra = 44.3$	$\simeq 1.6N_{iter}^{(FMM)}$	$\simeq 0.6N_{iter}^{(FMM)}$	$\simeq 0.2N_{iter}^{(FMM)}$
FMM; $nbTra = 34.7$ (amande)	$\simeq 4N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^7$	$\simeq 4.8N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^8$	$\simeq 5.6N_{iter}^{(FMM)} \cdot 10^9$
$\frac{FMM}{FMD}$; $nbTra = 34.7$	$\simeq 1.3N_{iter}^{(FMM)}$	$\simeq 0.5N_{iter}^{(FMM)}$	$\simeq 0.2N_{iter}^{(FMM)}$

TAB. 9.6 – Complexités de la FMM multi-niveaux et de la FMD multi-niveaux si $N_g \sim N_f^{1/2}$, pour $N_f = 10^\beta$.

Chapitre 10

Optimisation de la méthode couplée

10.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux différentes optimisations apportées à la méthode couplée (FMD). Dans une première partie, nous montrons que la discrétisation de la sphère unité constitue une limitation au niveau de la complexité de la méthode couplée. Nous développons alors une méthode, basée sur le lissage et le seuillage des fonctions de transfert, qui permet de considérer moins de points sur la sphère unité, réduisant ainsi de manière importante la complexité de la méthode couplée.

Ensuite, nous montrons qu'une réorganisation des calculs du système permet de diviser par deux le temps de calcul et la place mémoire nécessaires à la résolution du problème. Nous montrons aussi qu'une réécriture des boucles du code permet de réduire de manière significative le temps de calcul. Nous décrivons ensuite une stratégie permettant de calculer efficacement les fonctions de base d'ordre élevé aux points de Gauss.

10.2 Optimisation de la FMD par lissage et seuillage des fonctions de transfert

10.2.1 Présentation de l'optimisation proposée

Nous présentons une optimisation de la FMD au niveau des transferts, car cette étape dicte la consommation en temps de la méthode. Notre propos est illustré par l'intermédiaire du tableau 10.1 présentant les temps de calcul des différentes étapes de la FMD lorsqu'est considérée une sphère de rayon un mètre, parfaitement absorbante et éclairée par une onde incidente de fréquence $3,2 \text{ GHz}$. Le maillage grossier Γ_g comprend 20480 éléments ($\lambda/2.5$) et le maillage fin 327680 éléments ($\lambda/10$). Le niveau grossier niv_g est égal à 4 et le niveau fin niv_f est égal à 7. Nous avons utilisé des éléments finis microlocaux d'ordre 0 et adopté la stratégie

privilégiant la consommation en mémoire (cf section 10.3.1).

	Calculs Proches	Fonctions de radiation	Aggrégation	Transferts
Matrices Cosinus	5786 (5.8%)	152 (0.15%)	252 (0.25%)	44032 (44.5%)
Matrices Sinus		154 (0.15%)	244 (0.25%)	41266 (41.7%)
Matrice totale	91910 (92.8%)			
Résolution du système	5408 (5.5%)			
Temps total	99015 (100%)			

TAB. 10.1 – Temps de calcul en secondes, sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$.

Dans le tableau 10.1, Matrices Cosinus (respectivement Sinus) désigne les matrices \mathcal{K}^1 et \mathcal{K}^2 (respectivement \mathcal{A}^1 et \mathcal{A}^2) du système (1.32). Matrice totale correspond à la matrice obtenue après l'entière discrétisation du système (1.32).

Au regard du tableau 10.1, la majeure partie du temps de calcul consommé par la FMD se situe au niveau des transferts, et notamment au niveau des transferts effectués au niveau grossier niv_g , où par exemple le temps consommé pour l'assemblage des matrices cosinus à cette étape est de 43837 secondes, soit 44.3% du temps total nécessaire à la résolution du problème. Ce constat est renforcé par l'analyse théorique de la complexité de la FMD faite au chapitre précédent, montrant que les étapes les plus coûteuses sont les étapes de transfert (cf tableau 9.4). Dans la complexité des étapes de transfert apparaît un terme en N_f provenant de la relation :

$$\forall n \in \{niv_g, \dots, niv_f\}, \quad M_n S_n \sim N_f. \quad (10.1)$$

L'optimisation proposée vise à "casser" la relation (10.1) en réduisant le nombre de points utilisés lors de la discrétisation de la sphère unité S^2 .

Au niveau n , lorsque x_i appartient à la boîte C_m^n de centre X_m^n et x_j appartient à la boîte $C_{m'}^n$ de centre $X_{m'}^n$, en posant $r_i^n = x_i - X_m^n$, $r_j^n = x_j - X_{m'}^n$, $r_{mm'}^n = X_m^n - X_{m'}^n$ et $r^n = r_i^n - r_j^n$, les

fonctions de transfert sont définies par :

$$T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)), \quad (10.2)$$

$$\text{où } L_n = kd_n + c(kd_n)^{1/3}. \quad (10.3)$$

d_n est la longueur des côtés des boîtes au niveau n . \hat{s} est un point de la sphère unité S^2 . $h_l^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce et P_l est le polynôme de Legendre.

Remarque. Dans la FMM et la FMD, la résolution des équations intégrales de Després amène à considérer, au lieu des fonctions de transfert (10.2), les fonctions de transfert suivantes :

$$T_{mm'}^{Sin,n}(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l j_l(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)), \quad (10.4)$$

$$T_{mm'}^{Cos,n}(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l y_l(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)), \quad (10.5)$$

où $T_{mm'}^{Sin,n}$ et $T_{mm'}^{Cos,n}$ sont respectivement associées aux matrices \mathcal{A}^l et \mathcal{K}^l provenant de la séparation en partie réelle et en partie imaginaire du noyau de Green.

Cependant, nous continuons notre étude en considérant les fonctions $T_{mm'}^n$, données par (10.2), car nous pouvons appliquer à $T_{mm'}^{Sin,n}$ et à $T_{mm'}^{Cos,n}$ exactement le même traitement qu'à $T_{mm'}^n$.

Certains auteurs, notamment Rokhlin [36] et Chew [121], ont remarqué que lors de la discrétisation de S^2 des directions pouvaient être privilégiées. Ce constat est basé sur l'interprétation physique des opérations de transfert : selon Rokhlin et Chew, une fonction de transfert représente l'effet qu'une source bornée, exprimée en terme de fonctions de radiation, a sur une région observatrice distante (l'effet d'une boîte $C_{m'}^n$ sur une boîte C_m^n). Cette interprétation suggère qu'il faut principalement prendre en compte les transferts effectués entre C_m^n et $C_{m'}^n$, suivant la direction $r_{mm'}^n$ (cf chapitre 6 [46]). Le nombre de points à considérer sur S^2 peut être réduit en seuillant les fonctions de transfert $T_{mm'}^n$ (cf chapitre 2 [116]) :

soit $\epsilon > 0$ et soit $T_{mm'}^{n,max} = \max_{\hat{s} \in S^2} |T_{mm'}^n(\hat{s})|$,

si $\frac{|T_{mm'}^n(\hat{s})|}{T_{mm'}^{n,max}} \leq \epsilon$, alors le transfert entre C_m^n et $C_{m'}^n$, dans la direction \hat{s} n'est pas effectué.

Rokhlin utilise le seuillage des fonctions de transfert pour la FMM à un niveau. La méthode obtenue est appelée la Ray Propagation Fast Multipole Algorithm (RPFMA). Chew et Darve l'ont également utilisée dans le contexte multi-niveaux. Dans le cas à un niveau, le seuillage

permet d'obtenir une complexité en $\mathcal{O}(N^{5/4})$ au lieu de $\mathcal{O}(N^{1/2})$. Dans le cas multi-niveaux, il permet de réduire le coût d'un facteur α .

L'optimisation proposée pour la FMD s'appuie sur le fait que pour cette méthode, le calcul d'un coefficient de la matrice du problème discret revient à l'interaction de deux éléments du maillage grossier. Il y a donc une direction privilégiée à chaque résolution multipolaire.

10.2.2 Lissage des fonctions de transfert

Pour l'étude de $T_{mm'}^n$, nous considérons k et $r_{mm'}^n$ fixés, et nous posons :

$$\begin{aligned} T_{mm'}^n(\hat{s}) &= \tilde{T}_{mm'}^n(\cos(\theta)), \\ &= \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\theta)), \end{aligned} \quad (10.6)$$

où $\cos(\theta) = \cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)$.

Nous pouvons aussi écrire :

$$T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} \sum_{m=-l}^l f_{r_{mm'}^n}^{l,m} Y_{l,m}(\hat{s}). \quad (10.7)$$

La figure 10.1 représente les parties réelles et imaginaires de $\tilde{T}_{mm'}^n$, dans un cas particulier.

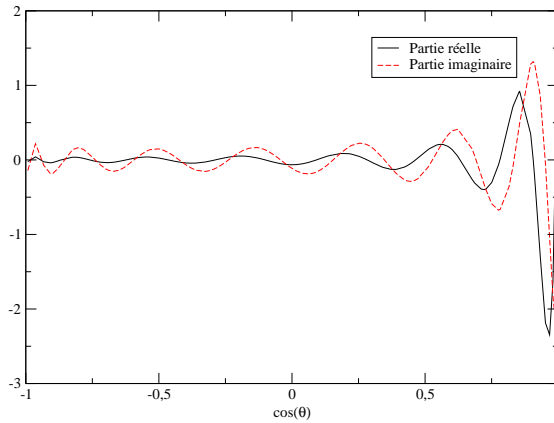


FIG. 10.1 – Parties réelles et imaginaires de $\tilde{T}_{mm'}^n$, défini par (10.6) pour $L_n = 15$ et $k r_{mm'}^n = (30, 0, 0)^t$.

Les parties réelle et imaginaire de $\tilde{T}_{mm'}^n$ ont, lorsque $\cos(\theta)$ est proche de 1, une forte amplitude, et lorsque $\cos(\theta)$ s'éloigne de 1, une amplitude plus faible. Cette amplitude décroît vers

0 en oscillant, au fur et à mesure que l'éloignement entre $\cos(\theta)$ et 1 croît. Il est évident que le caractère oscillant de $\tilde{T}_{mm'}^n$, provenant du fait que nous approchons une série infinie en la tronquant brutalement au $L_n^{\text{ième}}$ terme, empêche d'effectuer un seuillage efficace. Une solution pour éliminer ces oscillations, et ainsi concentrer le support de $\tilde{T}_{mm'}^n$ en $\cos(\theta) \sim 1$, consiste à lisser les fonctions de transfert, à l'aide de fonctions de régularisation ("window functions") en considérant la relation (10.7) et [46].

Trois lissages différents sont proposés :

- Chew [42] donne la fonction suivante :

$$T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n/2} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)) \quad (10.8)$$

$$+ \sum_{l=L_n/2+1}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)) \cos^2\left(\frac{l - L_n/2}{L_n - L_n/2} \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

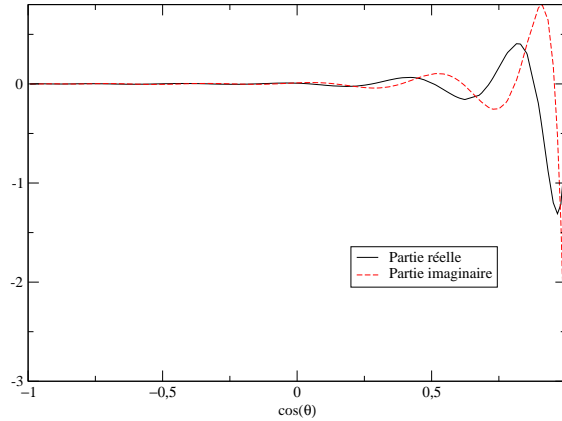


FIG. 10.2 – Parties réelles et imaginaires de la fonction $\tilde{T}_{mm'}^n$, proposée par Chew (10.8) pour $L_n = 15$ et $k r_{mm'}^n = (30, 0, 0)^t$.

- Sylvand [116] donne la fonction suivante :

$$T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)) \quad (10.9)$$

$$+ \sum_{l=L_n+1}^{L'_n} (2L_n+1) i^{L_n} h_{L_n}^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)) \cos^2\left(\frac{l - L_n}{L'_n - L_n} \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

avec $L'_n = \gamma L_n$ et $\gamma = 1.4$.

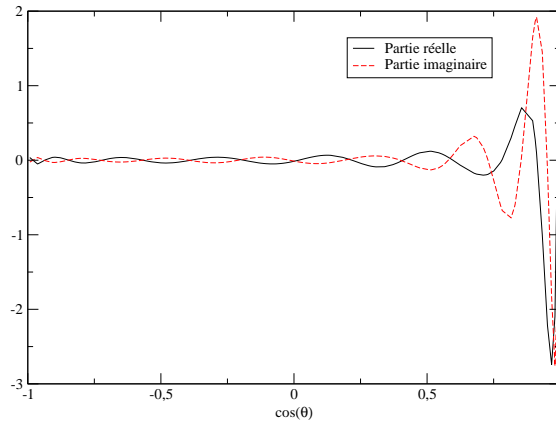


FIG. 10.3 – Parties réelles et imaginaires de la fonction $\tilde{T}_{mm'}^n$ proposée par Sylvand (10.9) pour $L_n = 15$ et $k r_{mm'}^n = (30, 0, 0)^t$.

– Rokhlin [36] donne la fonction suivante :

$$T_{mm'}^n(\hat{s}) = \sum_{l=0}^{L_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)) \quad (10.10)$$

$$+ \sum_{l=L_n+1}^{L'_n} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|r_{mm'}^n|) P_l(\cos(\hat{s}, r_{mm'}^n)) \cos^2\left(\frac{l-L_n}{L'_n-L_n} \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

avec $L'_n = \gamma L_n$ et $\gamma = 2$.

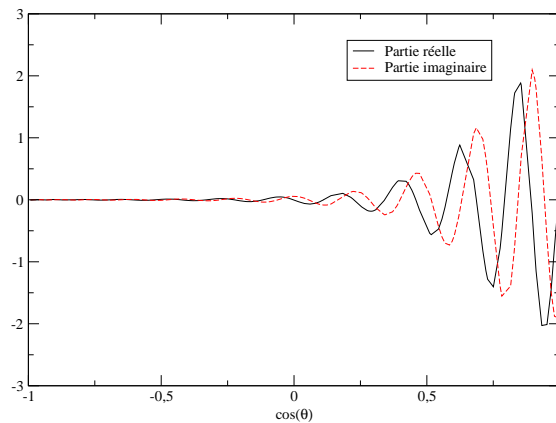


FIG. 10.4 – Parties réelles et imaginaires de la fonction $\tilde{T}_{mm'}^n$ proposée par Rokhlin (10.10) pour $L_n = 15$ et $k r_{mm'}^n = (30, 0, 0)^t$.

Avant de pousser notre étude plus en avant, nous faisons quelques commentaires sur les lissages considérés. Au regard des figures 10.2, 10.3 et 10.4, nous remarquons que le lissage proposé par Chew donne une fonction de transfert beaucoup moins oscillante que celles obtenues à partir des lissages de Sylvand et de Rokhlin. Deux types de lissage peuvent être distingués : pour l'approximation de $T_{mm'}^n$, le lissage de Chew utilise L_n termes, et les lissages de Rokhlin et de Sylvand utilisent γL_n termes avec $\gamma > 1$. Les lissages de Rokhlin et de Sylvand nécessitent donc d'augmenter la finesse de discrétisation de S^2 au niveau n , puisque des harmoniques sphériques de degré supérieur ou égal à L_n sont rajoutées dans l'approximation des fonctions de transfert. Les lissages de Rokhlin et de Sylvand diffèrent principalement par le fait que pour tous les indices l supérieurs à L_n , Sylvand fixe pour le terme $(2l + 1)i^l h_l^{(1)}(kr_{mm'}^n)$ l'indice l égal à L_n , afin d'éviter la divergence des fonctions de Hankel pour $l > kr_{mm'}^n$. Rokhlin précise toutefois dans [36] que le lissage (10.10) est à considérer à titre d'exemple, et qu'il existe des fonctions de lissage optimisant le support des fonctions de transfert.

Les trois fonctions de lissage données précédemment sont validées pour une sphère de rayon un mètre, parfaitement absorbante ($Z_r = 1$) et éclairée par une onde incidente de fréquence $1GHz$. Pour ce cas test, la constante c intervenant dans le calcul de L_n (10.3) est égal à 3, et nous fixons, pour la résolution du problème par un double gradient conjugué dont la description est faite au tableau 1.1, le résidu du gradient conjugué interne ($GC1$) à 10^{-4} et le résidu du gradient conjugué externe ($GC2$) à 10^{-3} . Le niveau fin, niv_f , est égal à 5, et le niveau grossier,

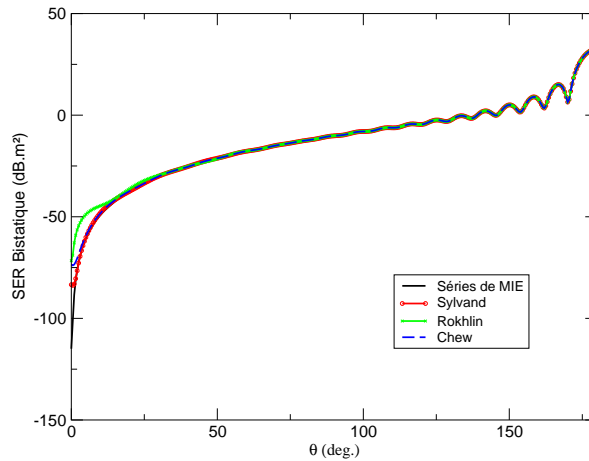


FIG. 10.5 – Sphère, $f = 1GHz$, $Z_r = 1$, FMD ordre 0, $N_g = 2420(\lambda/2.75)$ et $N_f = 38720(\lambda/11)$.

niv_g , est égal à 2. La figure 10.5 montre que les lissages de Chew et de Sylvand donnent de bons résultats. Une légère dégradation des résultats est observée avec le lissage de Rokhlin.

10.2.3 Seuillage des fonctions de transfert

Nous procédons au seuillage des fonctions de transfert lissées. Pour étudier l'efficacité des trois méthodes de lissage sur la FMD, ϵ prend les valeurs 10^{-3} , $3 \cdot 10^{-3}$ et $5 \cdot 10^{-3}$, mais ϵ ne prend pas de valeur supérieure à $5 \cdot 10^{-3}$, car cela entraîne une nette dégradation des résultats. Le cas test utilisé correspond à une sphère parfaitement absorbante, éclairée par une onde incidente de fréquence $3,2GHz$. Les maillages grossier et fin sont respectivement composés de $N_g = 1280$ et $N_f = 327680$ éléments, ce qui correspond à des maillages de finesse respective 1.6λ et $\lambda/10$. Pour ce cas test, nous utilisons des éléments finis d'ordre 1. La constante c intervenant dans le calcul de L_n (10.3) est égale à 3. Pour le double gradient conjugué, nous fixons le résidu du gradient conjugué interne à 10^{-4} et le résidu du gradient conjugué externe à 10^{-3} . Le niveau fin niv_f est égal à 7. Le niveau grossier niv_g varie de 3 à 4. Les résultats obtenus sont reportés dans les tableaux 10.2-10.5.

Dans ces tableaux, pour les seuillages de Chew et de Sylvand au niveau niv_g , niveau où

ϵ	Matrices Cosinus			Matrices Sinus			Tps total (s)
	$\#(T_{mm'}^g \neq 0)$	$\overline{N}_{S^2}^g$	Tps (s)	$\#(T_{mm'}^g \neq 0)$	$\overline{N}_{S^2}^g$	Tps (s)	
0	100%	3402	15802	100%	3402	15116	38946
10^{-3}	61.7%	2099	7206	63.4%	2156	7841	24147
$3 \cdot 10^{-3}$	45.7%	1556	6005	48.3%	1645	5535	19629
$5 \cdot 10^{-3}$	39.3%	1337	4045	42.3%	1439	4732	16491

TAB. 10.2 – Lissage de Chew, Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, FMD ordre 1, $N_g = 1280$, $N_f = 327680$, $niv_f = 7$ et $niv_g = 3$.

la consommation de temps est la plus importante, nous donnons, en fonction de ϵ , pour les matrices cosinus et pour les matrices sinus, le nombre (en pourcentage) de transferts effectués ($\#(T_{mm'}^g \neq 0)$), le nombre moyen de points sur S^2 utilisés lors des transferts (\overline{N}_{S^2}), et le temps en secondes de l'étape de transfert. L'étape de transfert comprend le calcul et le seuillage des fonctions de transfert, ainsi que les transferts effectués en fonction du seuillage. Nous donnons le temps total nécessaire à la résolution du problème dans la dernière colonne de chaque tableau. Pour chaque tableau figure également le pourcentage de chaque valeur affichée, ce pourcentage étant calculé par rapport à la valeur correspondante lorsque ϵ vaut zéro.

Les résultats obtenus avec le lissage donné par Rokhlin n'ont pas été reportés avec les tableaux précédents, car lorsque ce lissage est considéré, il y a une dégradation des résultats due à l'instabilité des fonctions de Hankel et à l'augmentation du nombre de pôles pour le calcul des fonctions de transfert. La figure 10.4 illustre bien ce phénomène, où de fortes oscillations apparaissent après $\cos(\theta) = 0.5$, contrairement à ce qui est observé dans la figure 10.1. Le

ϵ	Matrices Cosinus			Matrices Sinus			Tps total (s)
	$\#(T_{mm'}^g \neq 0)$	$\overline{N}_{S^2}^g$	Tps (s)	$\#(T_{mm'}^g \neq 0)$	$\overline{N}_{S^2}^g$	Tps (s)	
0		1128	7790		1128	7099	21271
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
10^{-3}		799	5359		799	5523	17910
	70.8%	70.8%	68.8%	70.8%	70.8%	77.8%	84.2%
$3 \cdot 10^{-3}$		558	4207		559	4160	16860
	49.5%	49.5%	54%	49.6%	49.6%	58.6%	70.8%
$5 \cdot 10^{-3}$		490	3911		496	3827	16148
	43.4%	43.4%	50.2%	44%	44%	53.9%	67.8%

TAB. 10.3 – Lissage de Chew, Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, FMD ordre 1, $N_g = 1280$, $N_f = 327680$, $niv_f = 7$ et $niv_g = 4$.

ϵ	Matrices Cosinus			Matrices Sinus			Tps total (s)
	$\#(T_{mm'}^g \neq 0)$	$\overline{N}_{S^2}^g$	Tps (s)	$\#(T_{mm'}^g \neq 0)$	$\overline{N}_{S^2}^g$	Tps (s)	
0		6668	30988		6668	29641	77468
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
10^{-3}		6645	30368		6657	29345	75145
	99.7%	99.7%	98%	99.8%	99.8%	99%	97%
$3 \cdot 10^{-3}$		6492	30244		6561	29296	74369
	97.4%	97.4%	97.6%	98.4%	98.4%	98.5%	96%
$5 \cdot 10^{-3}$		6259	29098		6382	29078	73904
	93.9%	93.9%	97.3%	95.7%	95.7%	98.1%	95.4%

TAB. 10.4 – Lissage de Sylvand, Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, FMD ordre 1, $N_g = 1280$, $N_f = 327680$, $niv_f = 7$ et $niv_g = 3$.

lissage donné par Rokhlin est donc éliminé.

Nous revenons à l'étude des tableaux 10.2-10.5. En considérant le seuillage de Chew (cf tableaux 10.2 et 10.3), quand $\epsilon = 0$, le coût des transferts du niveau grossier pour $niv_g = 3$ est quasiment deux fois supérieur au coût des transferts au niveau grossier pour $niv_g = 4$, ceci étant dû au plus grand nombre de transferts à effectuer lorsque $niv_g = 3$. Cependant, en considérant le même cas et en prenant $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$, ces temps de calcul sont presque identiques. L'explication de ce résultat vient du fait qu'il y a plus de fonctions de transfert seuillées pour $niv_g = 3$ (60,7% pour les matrices en cosinus et 57,7% pour les matrices en sinus) que pour $niv_g = 4$ (56,6% pour les matrices en cosinus et 56% pour les matrices en sinus), ceci mettant quasiment à égalité les nombres de transferts à effectuer pour $niv_g = 3$ et pour $niv_g = 4$. Ce phénomène traduit une plus grande diminution en pourcentage du nombre moyen de points sur la sphère unité lorsque $niv_g = 3$. Aux niveaux plus fins, le seuillage permet aussi des gains en temps de calcul, mais dans une moindre mesure : lorsque $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$, les gains réalisés pour $niv_g = 3$ et pour

ϵ	Matrices Cosinus			Matrices Sinus			Tps total (s)
	$\#(T_{mm'}^g \neq 0)$	$\overline{N}_{S^2}^g$	Tps (s)	$\#(T_{mm'}^g \neq 0)$	$\overline{N}_{S^2}^g$	Tps (s)	
0	100%	2211 100%	15269 100%	100%	2211 100%	13916 100%	42312 100%
10^{-3}	99.8%	2206 99.8%	15055 98.6%	99.8%	2206 99.8%	13805 99.2%	42058 99.4%
$3 \cdot 10^{-3}$	97.7%	2160 97.7%	14719 96.4%	97.7%	2160 97.7%	13512 97.1%	40196 95%
$5 \cdot 10^{-3}$	94.4%	2088 94.4%	14505 95%	94.4%	2088 94.4%	13318 95.7%	39054 92.3%

TAB. 10.5 – Lissage de Sylvand, Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, FMD ordre 1, $N_g = 1280$, $N_f = 327680$, $niv_f = 7$ et $niv_g = 4$.

$niv_g = 4$ sont respectivement de 1.5% et de 5%. Les coûts des autres étapes de la résolution (étapes différentes des étapes de transfert) ne varient pas avec ϵ , et représentent une part plus importante du temps total pour $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ que pour $\epsilon = 0$, cette part étant quasiment identique pour $niv_g = 3$ et pour $niv_g = 4$. Aussi bien pour $niv_g = 3$ que pour $niv_g = 4$, une réduction importante du coût des transferts effectués au niveau grossier, qui se répercutent de manière remarquable sur le temps total de calcul. Lorsque $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$, la réduction du temps total de calcul est de 53.9% pour $niv_g = 3$, et elle est de 32,2% pour $niv_g = 4$. Outre la réduction du temps de calcul, le seuillage a donc un autre effet bénéfique, puisque pour ce cas il assouplit le choix du niveau grossier niv_g en ramenant, pour les niveaux grossiers considérés, presque à égalité les temps de calcul lorsque $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$.

En ce qui concerne le seuillage de Sylvand, il apparaît clairement qu'il est moins efficace, quelque soit le niveau grossier choisi, que celui de Chew, et ceci pour deux raisons : d'une part, le seuillage proposé par Sylvand entraîne une augmentation du nombre de points de quadrature sur S^2 pour chaque niveau de la FMD, qui à son tour entraîne une augmentation du nombre de transferts à effectuer ; et d'autre part, le seuillage des fonctions de transfert (10.9) est peu efficace : les 7% de fonctions de transfert seuillées ne sont jamais dépassés. Au regard des figures 10.2 et 10.3, le lissage proposé par Chew donne des fonctions de transfert moins oscillantes que celles de Sylvand, ce qui confirme la moins bonne efficacité du seuillage de Sylvand.

Nous comparons, dans les figures 10.6 et 10.7, les SER obtenues à partir des lissages de Chew et de Sylvand. Nous constatons qu'après seuillage, le lissage de Chew est le meilleur compromis entre rapidité et précision. Par la suite, lorsque la FMD optimisée sera évoquée, nous associerons à la FMD le lissage des fonctions de transfert proposé par Chew, et le seuillage de ces mêmes fonctions suivant ϵ , paramètre qui sera précisé à chaque fois.

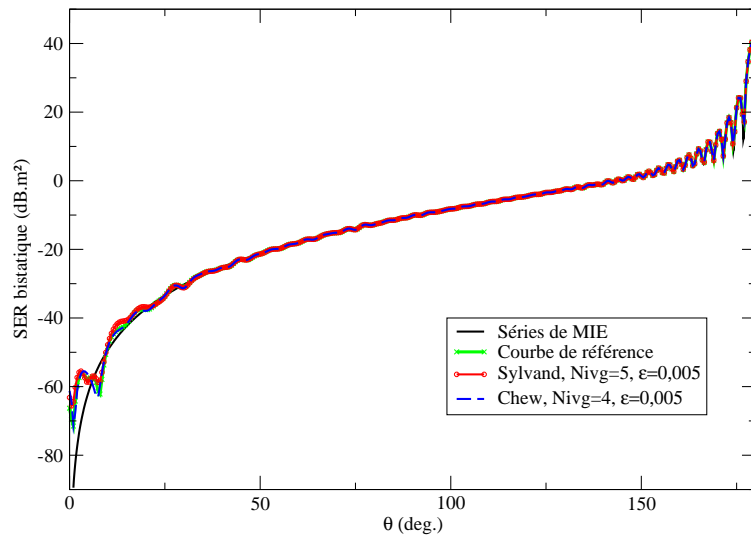


FIG. 10.6 – Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, FMD ordre 1, $N_g = 1280$ et $N_g = 327680$.

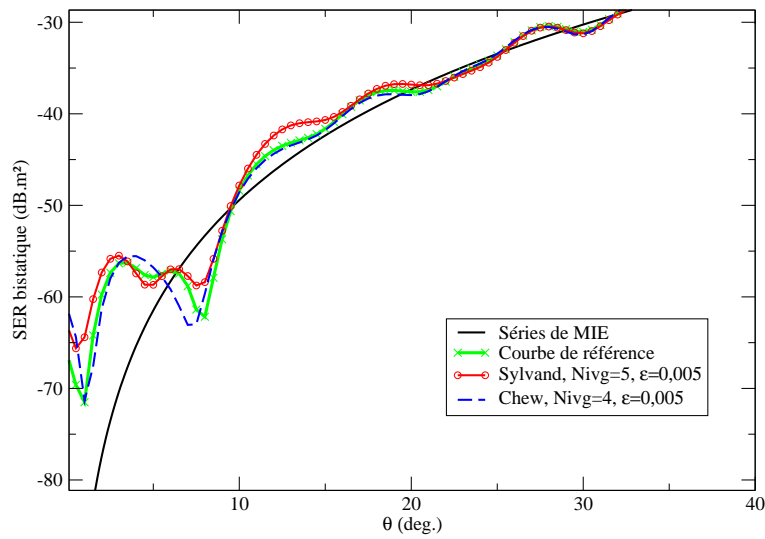


FIG. 10.7 – Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, FMD ordre 1, $N_g = 1280$ et $N_g = 327680$.

10.2.4 Complexité de la FMD optimisée

Dans cette partie, nous faisons une analyse qualitative de la complexité de la FMD optimisée par lissage et seuillage. En effet, cette analyse est basée sur une heuristique du nombre de points sur la sphère unité S^2 après seuillage donnée par (10.14).

Soit S_n l'ensemble des points de quadrature sur S^2 au niveau n . Les notations suivantes sont utilisées :

- niv_{c_1} correspond au niveau critique 1, i.e. au niveau pour lequel le nombre de boîtes multipôlaires est de l'ordre du nombre de triangles grossiers (N_g),
- niv_{c_2} correspond au niveau critique 2, i.e. au niveau pour lequel le nombre de boîtes multipôlaires est de l'ordre de la racine carrée du nombre de triangles fins (N_f),
- M_{c_1} (respectivement M_{c_2}) correspond au nombre de boîtes multipôlaires au niveau niv_{c_1} (respectivement niv_{c_2}),
- S_{c_1} (respectivement S_{c_2}) correspond au nombre de points sur S^2 au niveau niv_{c_1} (respectivement niv_{c_2}).

Etant donné que les algorithmes de la FMD classique et de la FMD optimisée sont fondamentalement identiques, il vient en reprenant le tableau 9.3 que la complexité de la FMD optimisée est résumée dans le tableau 10.6.

Aucune contrainte n'interdit de choisir M_f aussi grand que possible; l'étape 1.1 ainsi que

Etape	Calculs	Mémoire
1.1	$N_f S_f$	$M_f S_f$
1.2	$\sum_{n=niv_g}^{niv_f-1} \max(M_n, N_g) S_n \ln S_n$	$\sum_{n=niv_g}^{niv_f-1} \max(M_n, N_g) S_n$
2.1	$\sum_{n=niv_g+1}^{niv_{c_1}} nbTra \frac{N_g^2}{M_n} S_n + \sum_{n=niv_{c_1}+1}^{niv_f} nbTra M_n S_n$	N_g^2
2.2	$\max(M_g^2, N_g^2) S_g$	N_g^2

TAB. 10.6 – Complexité de la FMD multi-niveaux.

le coût des interactions proches en $\mathcal{O}(N_f^2/M_f)$ y incitant fortement. Nous optons donc pour $M_f \sim N_f$.

En seuillant les fonctions de transfert, nous avons, au lieu de $S_n \sim \frac{N_f}{M_n}$, une nouvelle estimation :

$$\tilde{S}_n \sim \frac{N_f}{M_n^2}. \quad (10.11)$$

L'angle solide, $\Omega_{mm'}^n$, sous lequel la boîte $C_{m'}$ est vue du centre X_m^n de la boîte C_m^n est donné par :

$$\Omega_{mm'}^n \sim \frac{\pi(d_n)^2}{4|r_{mm'}^n|^2}. \quad (10.12)$$

Ceci entraîne que l'angle solide moyen Ω^n sous lequel une boîte du niveau n est vue du centre d'une autre boîte est tel que :

$$\Omega^n \sim 1/M_n. \quad (10.13)$$

Nous avons alors :

$$\tilde{S}_n \sim \Omega^n S_n \sim \Omega^n \frac{N_f}{M_n} \sim \frac{N_f}{M_n^2}. \quad (10.14)$$

D'après cette dernière relation, il apparaît que \tilde{S}_n tend vers 0 lorsque le nombre de niveaux augmente. Cependant, puisqu'il faut connaître les fonctions de radiation de chaque groupe dans au moins une direction pour chaque autre groupe, le nombre de directions est une constante pour les groupes vraiment petits. Il faut alors toujours garder à l'esprit que :

$$\tilde{S}_n \sim \max(1, \frac{N_f}{M_n^2}), \quad (10.15)$$

ceci n'étant pas insignifiant lorsque M_n devient plus grand que $N_f^{1/2}$, i.e. lorsque n est supérieur à niv_{c_2} . Etant donné que M_g sera choisi par rapport à N_g (cf étapes 1.2 et 2.2), l'étude de la complexité nécessite donc de distinguer deux cas : $N_g \leq N_f^{1/2}$ et $N_f^{1/2} \leq N_g$.

Remarque. *La relation*

$$L_n \sim \sqrt{\frac{N_f}{M_n}}, \quad (10.16)$$

est encore valide, seulement, comme le nombre de points de discrétisation sur la sphère unité a changé, nous n'avons plus $L_n = \sqrt{S_n}$, mais nous avons à la place

$$L_n \sim \sqrt{M_n \tilde{S}_n}. \quad (10.17)$$

10.2.5 Complexité de la FMD optimisée - cas $N_g \leq N_f^{1/2}$

Nous considérons le cas où $N_g \leq N_f^{1/2}$. D'après l'étape 2.2, il n'y a pas intérêt à choisir $niv_g > niv_{c_2}$, car au delà de ce seuil, la grande taille de M_g n'est plus compensée par S_g qui devient de l'ordre de l'unité, et cesse de décroître. Pour cette même étape, il serait également désavantageux de prendre $M_g < N_g$ ($niv_g < niv_{c_1}$). Nous considérons donc :

$$N_g \sim M_{niv_{c_1}} \leq M_g \leq M_{niv_{c_2}} \sim N_f^{1/2}. \quad (10.18)$$

La complexité obtenue est reportée dans le tableau 10.7.

Le produit $M_n S_n$ décroît lorsque n croît, alors qu'avant optimisation, il était constant, de

Etape	Calculs	Mémoire
1.1	N_f	N_f
1.2	$(N_f + \frac{N_f}{M_g}) \ln^2 N_f$	$(N_f + \frac{N_f}{M_g}) \ln N_f$
2.1	$nbTra(N_f + \frac{N_f}{M_g}) \ln N_f$	N_g^2
2.2	N_f	N_g^2

TAB. 10.7 – Complexité de la FMD multi-niveaux dans le cas où $N_g \leq N_f^{1/2}$.

l'ordre de N_f . S_n décroît plus vite lorsque n croît. Contrairement au cas sans seuillage, la complexité diminue quand M_g croît sous la contrainte $M_{niv_{c_1}} \leq M_g \leq M_{niv_{c_2}}$. Dans ce cas, l'optimum est obtenu pour $M_g = M_{niv_{c_2}} \sim N_f^{1/2}$, et la complexité est donnée dans le tableau 10.8.

Lorsque $N_g \leq N_f^{1/2}$, la FMD optimisée nécessite :

$\mathcal{O}(\max(nbTra, \ln N_f) N_f \ln N_f + N_{iter} N_g^2)$ opérations et une place mémoire en $\mathcal{O}(N_f \ln N_f)$.

10.2.6 Complexité de la FMD optimisée - cas $N_g \geq N_f^{1/2}$

Nous considérons le cas où $N_g \geq N_f^{1/2}$. Les trois possibilités suivantes sont envisagées :

- $M_g < N_f^{1/2}$,
- $N_f^{1/2} \leq M_g \leq N_g$,
- $N_g < M_g$.

Etape	Calculs	Mémoire
1.1	N_f	N_f
1.2	$N_f \ln^2 N_f$	$N_f \ln N_f$
2.1	$nbTra N_f \ln N_f$	N_g^2
2.2	N_f	N_g^2

TAB. 10.8 – Complexité de la FMD multi-niveaux dans le cas où $N_g \leq N_f^{1/2}$ pour le choix optimal $M_g \sim N_f^{1/2}$.

La complexité de la FMD optimisée est reportée dans le tableau 10.9.

Dans ce tableau, la somme $\sum_{n=i}^j$ est nulle lorsque i est supérieur à j . Ainsi, le nombre de termes

Etape	Calculs	Mémoire
1.1	N_f	N_f
1.2	$\sum_{n=niv_g}^{niv_{c_2}-1} N_g \frac{N_f}{M_n^2} \ln S_n$ $+ \sum_{n=niv_{c_2}}^{niv_{c_1}-1} N_g + \sum_{n=niv_{c_1}}^{niv_f-1} M_n$	$\sum_{n=niv_g}^{niv_{c_2}-1} N_g \frac{N_f}{M_n^2}$ $+ \sum_{n=niv_{c_2}}^{niv_{c_1}-1} N_g + \sum_{n=niv_{c_1}}^{niv_f-1} M_n$
2.1	$\sum_{n=niv_g+1}^{niv_{c_2}} nbTra \frac{N_g^2}{M_n} \frac{N_f}{M_n^2}$ $\sum_{n=niv_{c_2}}^{niv_{c_1}} nbTra \frac{N_g^2}{M_n} + \sum_{n=niv_{c_1}+1}^{niv_f} nbTra M_n$	N_g^2
2.2	$N_g^2 \frac{N_f}{M_g^2} \text{ si } M_g \leq N_f^{1/2} \leq N_g$ $N_g^2 \text{ si } N_f^{1/2} \leq M_g \leq N_g$ $M_g^2 \text{ si } N_f^{1/2} \leq N_g \leq M_g$	N_g^2

TAB. 10.9 – Complexité de la FMD multi-niveaux dans le cas où $N_g \geq N_f^{1/2}$.

effectifs des étapes 1.2 et 2.1 dépend de la position de niv_g par rapport à niv_{c_1} et à niv_{c_2} . Ce tableau nous inspire les remarques suivantes :

- pour le premier terme des étapes 1.2 et 2.1, il faut choisir M_g le plus grand possible si ce

dernier est inférieur à $N_f^{1/2}$,

- pour l'étape 2.2, choisir $M_g < N_f^{1/2}$ ainsi que $N_g < M_g$ est fortement désavantageux. Le coût de cette étape est indépendant de M_g , s'il est choisi entre $N_f^{1/2}$ et N_g .
- pour le deuxième terme de l'étape 2.1, sous la condition $N_f^{1/2} < M_g < N_g$, il faut prendre M_g aussi grand que possible,

Le choix à retenir est donc :

$$M_g \sim N_g. \quad (10.19)$$

La complexité de la FMD optimisée est alors donnée dans le tableau 10.10.

Lorsque $N_g \geq N_f^{1/2}$, la FMD optimisée nécessite :

Etape	Calculs	Mémoire
1.1	N_f	N_f
1.2	$N_f \ln^2 N_f$	$N_f \ln N_f$
2.1	$nbTra N_f \ln N_f$	N_g^2
2.2	N_g^2	N_g^2

TAB. 10.10 – Complexité de la FMD multi-niveaux dans le cas où $N_g \geq N_f^{1/2}$ pour le choix optimal $M_g \sim N_g$.

$\mathcal{O}(\max(nbTra, \ln N_f) N_f \ln N_f + (N_{iter} + 1) N_g^2)$ opérations et une place mémoire en $\mathcal{O}(N_f \ln N_f)$.

Conclusion sur complexité de la FMD optimisée :

En se référant au chapitre 11, il apparaît que nous obtenons des résultats numériques précis avec $N_g \lesssim N_f^{1/2}$. En pratique, la complexité de la FMD optimisée est donc en $\mathcal{O}(N_f \ln N_f + N_{iter} N_g^2)$. Cette complexité est quasi-linéaire, et est celle du précalcul utilisant la FMM.

10.3 Optimisations informatiques

10.3.1 Réorganisation des systèmes discrets

Les systèmes des EID servant à résoudre les équations de Maxwell s'écrivent :

– dans le cas d'une condition au bord d'impédance de type Léontovitch :

$$\begin{pmatrix} \frac{(1+\beta)}{2}Id + \frac{1}{4k^2}\delta_l^*\delta_l & kK_l \\ -kK_l^* & 2\beta k^2Id + \delta_l^*\delta_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^l \\ \lambda^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l^{EID} + A_{R,l}x^{l^c} - i\beta k\lambda^l \\ i\beta kx^l \end{pmatrix} \quad (10.20)$$

où $l \in \{1, 2\}$ et $l^c \in \{1, 2\} \setminus \{l\}$. Les deux systèmes sont couplés par le terme $A_{R,l}x^{l^c}$.

– dans le cas d'une condition au bord $Z_r = 1$ ($R = 0$) :

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)}{2}Id + \frac{1}{4k^2}\delta_l^*\delta_l & kK_l - i\beta kId \\ -kK_l^* - i\beta kId & 2\beta k^2Id + \delta_l^*\delta_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^l \\ \lambda^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l^{EID} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.21)$$

Les systèmes (10.20) et (10.21) utilisent uniquement les opérateurs Id , $(\delta_1^*\delta_1)$, $(\delta_2^*\delta_2)$, K_1 et K_2 possédant directement ou indirectement quelques propriétés remarquables. L'opérateur Id est évidemment hermitien, ainsi que les opérateurs $(\delta_1^*\delta_1)$ et $(\delta_2^*\delta_2)$. Les opérateurs K_1 et K_2 ne sont pas hermitiens. Par contre, ils peuvent être décomposés comme la somme d'opérateurs hermitiens T_r et K_r , et d'un opérateur anti-hermitien $(n \wedge \cdot)$. En effet, K_1 et K_2 sont donnés par :

$$K_1 = -(T_r - K_r - \frac{1}{2}n \wedge \cdot) \quad \text{et} \quad K_2 = -(T_r + K_r + \frac{1}{2}n \wedge \cdot), \quad (10.22)$$

les opérateurs T_r et K_r étant les parties réelles des opérateurs T et K définis par :

$$(TJ, J') = k \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \left(J(y) \cdot \overline{J'(x)} - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} J(y) \cdot \overline{\text{div}_{\Gamma} J'(x)} \right) d\gamma(y) d\gamma(x), \quad (10.23)$$

$$(KM, J') = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\nabla_x G(x, y) \wedge M(y) \cdot \overline{J'(x)} \right) d\gamma(y) d\gamma(x), \quad (10.24)$$

et l'opérateur $(n \wedge \cdot)$ étant défini par :

$$\left(\frac{1}{2}n \wedge J, J' \right) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2}n(x) \wedge J(x) \cdot J'(x) \right) d\gamma(x). \quad (10.25)$$

Il est facile de vérifier le caractère hermitien des opérateurs T_r et K_r , et le caractère anti-hermitien de l'opérateur $(n \wedge \cdot)$.

Nous nous intéressons aux systèmes discrets associés à (10.20) et à (10.21). Pour (10.20), en posant $Y_h^1 = (X_h^1, \Lambda_h^1)$, $Y_h^2 = (X_h^2, \Lambda_h^2)$, $X_h^l = (\alpha_1^l, \dots, \alpha_{N_g}^l)^t$ et $\Lambda_h^l = (\gamma_1^l, \dots, \gamma_{N_g}^l)^t$, nous avons à résoudre le système discret suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_\beta^1 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1 \\ Y_h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\beta^1 & \mathcal{C}_R^1 \\ \mathcal{C}_R^2 & \mathcal{R}_\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h^1 \\ Y_h^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}, \quad (10.26)$$

où $S^l = (F^l, 0)^t$, et les matrices \mathcal{M}_β^l , \mathcal{R}_β^l et \mathcal{C}_R^l sont données par :

$$\mathcal{M}_\beta^l = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\beta + \frac{1}{4k^2} \mathcal{A}^l & \mathcal{K}^l \\ -\mathcal{K}^{l*} & 2k\mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}^l \end{pmatrix}, \mathcal{R}_\beta^l = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathcal{B}_\beta \\ i\mathcal{B}_\beta & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{C}_R^l = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_R^l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.27)$$

Les matrices \mathcal{B}_β , \mathcal{D}_β , \mathcal{A}^l , \mathcal{K}^l , \mathcal{K}^{l*} , \mathcal{N}_R^l de dimension $N_g \times N_g$, et le vecteur F^l de dimension N_g sont définis par :

$$\begin{aligned} (F^l)_i &= \langle F_l^{EID}, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{B}_\beta)_{ij} &= \langle \beta k \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{D}_\beta)_{ij} &= \langle \frac{1+\beta}{2} \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{A}^l)_{ij} &= \langle \delta_l^* \delta_l \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{K}^l)_{ij} &= \langle k K_l \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{K}^{l*})_{ij} &= \langle k K_l \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ (\mathcal{N}_R^l)_{ij} &= \langle A_{R,l} \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

où $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_g}$ correspond à l'ensemble des fonctions de base associées à la discrétisation élément fini. Les calculs de $(F^l)_i$ et de $(\mathcal{A}^l)_{ij}$ sont exposés à la section 8.5.

Remarque. Le système discret provenant de (10.21) n'est pas traité car il est composé des entités matricielles (10.28) rencontrées au système (10.26). Donc, tout ce qui sera établi pour le système discret associé à (10.20), s'appliquera au système discret associé à (10.21).

Les opérateurs discrets de (10.26) ont les mêmes propriétés que les opérateurs de (10.21). Ces propriétés sont utilisées pour réduire le coût de la FMD. Soient \mathcal{N} et \mathcal{I} les matrices intervenant dans les évaluations de \mathcal{N}_R^1 , \mathcal{N}_R^2 , \mathcal{B}_β et \mathcal{D}_β données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{ij} &= \langle n \wedge \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}, \\ \mathcal{I}_{ij} &= \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{\mathbb{V}_h}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Pour résoudre (10.26) avec la FMD, les différentes entités matricielles \mathcal{A}^1 , \mathcal{A}^2 , \mathcal{K}^1 , \mathcal{K}^2 , \mathcal{N} et \mathcal{I} sont calculées et stockées.

D'après les propriétés de ces matrices, les temps de calcul et la place mémoire nécessaires peuvent être réduits par deux puisqu'il suffit de calculer et de stocker la partie triangulaire inférieure (ou supérieure) de chaque matrice. La place mémoire peut être encore réduite en ne stockant plus \mathcal{N} et \mathcal{I} . Cette dernière réduction a juste le léger désavantage d'accroître le temps nécessaire à l'inversion de (10.26). Cependant, ce temps est négligeable par rapport au temps d'assemblage des matrices pleines \mathcal{A}^l et \mathcal{K}^l .

Remarque. Dans le cas d'un objet parfaitement absorbant ($Z_r = 1$), nous avons à disposition deux stratégies de résolution, car les systèmes (10.21) étant totalement découplés, nous pouvons :

- soit calculer en même temps chaque système, et inverser le premier puis le second système,
- soit résoudre séparément chaque système : le premier système est assemblé et inversé, puis ce procédé est réitéré pour le second système.

La seconde stratégie divise par deux la consommation en mémoire, mais augmente le temps de calcul, car certaines opérations, notamment la lecture de tableaux de grandes tailles, sont alors effectuées deux fois. Lorsque nous considérons cette stratégie et l'optimisation des calculs des matrices \mathcal{A}^l et \mathcal{K}^l , nous avons par rapport à une résolution normale de (10.21) :

- une consommation en mémoire divisée par deux,
- un temps de calcul identique.

Nous dirons que la première stratégie privilégie le temps de calcul, et que la seconde stratégie privilégie la consommation en mémoire.

10.3.2 Implémentation informatique de la FMD

Nous commentons et optimisons l'implémentation informatique de la FMD. L'étape concernée est l'étape où s'effectuent à la fois les transferts entre les boîtes multipôlaires et l'assemblage des matrices (étape 2 du tableau 9.4), car cette étape détermine la complexité de la FMD.

Afin d'alléger notre présentation, nous traitons juste le cas des matrices \mathcal{A}^1 et \mathcal{A}^2 . Lors de l'assemblage de ces matrices, les transferts multipôlaires sont uniquement effectués au niveau grossier niv_g , et les opérateurs associés à \mathcal{A}^1 et \mathcal{A}^2 étant réguliers, il n'y a pas lieu de différencier les boîtes voisines des boîtes non voisines.

En tenant compte de la section précédente, l'implémentation de cette étape se déroule comme suit :

$$\begin{aligned} MatSin &= 0 \\ Do\ ibox &= C_1^g, C_{M_g}^g \\ X_{ib,jb}^g &= X_{ibox}^g - X_{jbox}^g \end{aligned}$$

```

Do i = 1, ddldsibox
  Do j = 1, ddldsibox
    Maux = 0
    Do p = 1, Sg
      Maux = Maux +  $\omega_p^g \overline{F_{ibox}^g(\hat{s}_p^g)} T^g(X_{ib,jb}^g, \hat{s}_p^g) F_{jjbox}^g(\hat{s}_p^g)$ 
    End do
    IndiceMat = f(i,j)
    MatSin(IndiceMat) = MatSin(IndiceMat) + Maux
  End do
End do

```

où $T^g(X_{ib,jb}, \hat{s}_p^g)$ est la fonction de transfert entre les boîtes de centres X_{ibox}^g et X_{jbox}^g au point de la sphère unité \hat{s}_p^g . *ddldsibox* et *ddldsibox* représentent respectivement les nombres de degrés de liberté contenus dans les boîtes *ibox* et *jbox*.

La complexité de cet algorithme est donnée par :

$$\begin{aligned}
\text{coût calculs} &= \sum_{ibox=1}^{M_g} \sum_{jbox=1}^{M_g} \sum_{iedgeloc=1}^{ddldsibox} \sum_{jedgeloc=1}^{ddldsibox} \sum_{p=1}^{S_g} a, \\
&\sim M_g^2 (ddlparbox)^2 S_g a,
\end{aligned} \tag{10.30}$$

où a est le nombre d'opérations effectuées pour une évaluation de M_{aux} , et *ddlparbox* représente le nombre moyen de degrés de liberté contenus dans une boîte mutipolaire du niveau grossier niv_g . Les degrés de liberté sont supposés équirépartis dans l'ensemble des boîtes de l'octree. Tel que l'algorithme est implémenté, $a = 6$.

En posant $\tilde{F}_{ibox}^g(\hat{s}_p^g) = \omega_p^g \overline{F_{ibox}^g(\hat{s}_p^g)} T^g(X_{ib,jb}^g, \hat{s}_p^g)$, et en remontant les calculs de $\tilde{F}_{ibox}^g(\hat{s}_p^g)$ pour tous les degrés de liberté de la boîte *ibox* et pour tous les points de la sphère unité, il reste à évaluer dans la boucle la plus interne $M_{aux} = M_{aux} + \tilde{F}_{ibox}^g(\hat{s}_p^g) F_{jjbox}^g(\hat{s}_p^g)$. La valeur de a passe de six à trois, ce qui divise par deux la complexité de l'algorithme.

En posant $ddlparbox = \frac{N_g}{M_g}$ et en utilisant les relations du chapitre précédent $M_g \sim N_g$ et $M_g S_g \sim N_f$, nous retrouvons la complexité de l'étape 2.2 de la FMD multi-niveaux (cf tableau 9.4) :

$$\text{coût calculs} \sim N_g N_f. \tag{10.31}$$

10.3.3 Optimisations liées aux éléments finis

Dans cette partie, nous décrivons une stratégie permettant de calculer efficacement les fonctions de base microlocales. Nous réduisons en premier le nombre de vecteurs à stocker pour le calcul des fonctions de base en incorporant un signe aux éléments de $\Gamma_f^{-\pi}$, $\Gamma_f^{-\pi}$ étant un

maillage intermédiaire qui intervient lors de la construction du maillage fin Γ_f à partir du maillage grossier Γ_g . Nous améliorons ensuite le calcul de la partie polynômiale des fonctions de base en donnant une formule qui permet d'évaluer les coordonnées barycentriques associées à un élément de Γ_g à partir de la connaissance des coordonnées barycentriques associées aux éléments de $\Gamma_f^{-\pi}$. Ceci se fait en considérant une numérotation spéciale des éléments de $\Gamma_f^{-\pi}$ et de Γ_f qui dépend de la numérotation des éléments de Γ_g .

Nous effectuons d'abord quelques rappels concernant la construction des maillages Γ_g et Γ_f . Γ_f est obtenu par raffinement et projection de Γ_g sur Γ . Le raffinement des éléments de Γ_g s'effectue en subdivisant récursivement jusqu'à un ordre M chaque élément en quatre triangles égaux, de sorte que nous avons :

$$\text{si } \Gamma_g = \bigcup_{i=1}^{N_g} T_i, \quad \text{alors } \Gamma_f^{-\pi} = \bigcup_{i=1}^{N_g} \bigcup_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} T_{ii_0}^{-\pi}, \quad (10.32)$$

où $\mathcal{N}_i = 4^M$. La figure 10.8 représente une telle subdivision pour $M = 2$.

Soit π_h l'interpolée de la projection orthogonale π de Γ_g sur Γ (cf section 8.3). Γ_f est obtenue

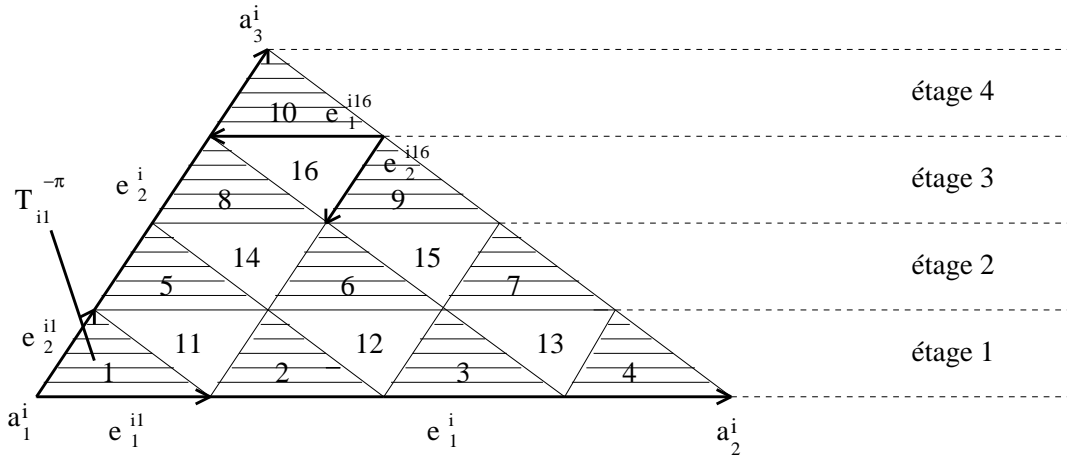


FIG. 10.8 – Subdivision à l'ordre 2 d'un élément T_i appartenant au maillage grossier Γ_g .

par projection des sommets de $\Gamma_f^{-\pi}$ sur Γ :

$$\Gamma_f = \pi_h(\Gamma_f^{-\pi}) = \bigcup_{i=1}^{N_g} \bigcup_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} \pi_h(T_{ii_0}^{-\pi}) = \bigcup_{i_0=1}^{\mathcal{N}_i} T_{ii_0}. \quad (10.33)$$

Les fonctions de base microlocales sont définies par : $\forall j \in \{1, \dots, N_g\}, \forall y \in T_{ii_0}$,

$$\tilde{\phi}_j(y) = \tilde{\phi}_{j,ii_0}(y) = \mathcal{J}_{ii_0}(y) e^{ik\phi_0(y)} (\phi_{j,ii_0} \circ \pi_h^{-1}(y) \cdot \vec{e}_{ii_0}^\alpha) \vec{e}_\alpha^h, \quad (10.34)$$

où $\mathcal{J}_{ii_0} = \frac{2mes(T_{ii_0}^{-\pi})}{\sqrt{g_h}}$ est le jacobien associé à π_h . $\{\vec{e}_1^h, \vec{e}_2^h\}$ (cf (8.24)) forme une base du plan tangent à T_{ii_0} . $\{\vec{e}_{ii_0}^1, \vec{e}_{ii_0}^2\}$ forme une base du plan cotangent à $T_{ii_0}^{-\pi}$ définie par $\vec{e}_{ii_0}^\alpha \cdot \vec{e}_\beta^{ii_0} = \delta_{\alpha\beta}$, $\{\vec{e}_1^{ii_0}, \vec{e}_2^{ii_0}\}$ étant une base du plan tangent à $T_{ii_0}^{-\pi}$ (cf (8.25)).

En appliquant la FMD, les bases des plans tangents à tous les éléments $T_{ii_0}^{-\pi}$ et $T_{ii_0} = \pi_h(T_{ii_0}^{-\pi})$ doivent être évaluées et stockées. Ces diverses bases sont calculées uniquement aux centres de gravité des éléments concernés. Nous proposons dans la suite d'optimiser le calcul et le stockage des vecteurs $\vec{e}_{ii_0}^\alpha$.

Cette démarche est justifiée par le fait que le calcul des plans tangents, à chaque fois que ceux-ci sont utilisés, entraîne une augmentation importante du temps de calcul. D'après la construction des éléments $T_{ii_0}^{-\pi}$, nous avons :

– pour les triangles hachurés :

$$\vec{e}_{ii_0}^\alpha = \frac{1}{2M} \vec{e}_i^\alpha \quad \text{et} \quad \vec{e}_\alpha^{ii_0} = 2^M \vec{e}_\alpha^i, \quad \alpha = 1, 2, \quad (10.35)$$

– pour les triangles non hachurés :

$$\vec{e}_{ii_0}^\alpha = -\frac{1}{2M} \vec{e}_i^\alpha \quad \text{et} \quad \vec{e}_\alpha^{ii_0} = -2^M \vec{e}_\alpha^i, \quad \alpha = 1, 2, \quad (10.36)$$

où \vec{e}_i^α et \vec{e}_α^i correspondent respectivement aux bases contravariantes et covariantes du plan tangent à T_i .

Remarque. 1) Les bases \vec{e}_i^α et \vec{e}_α^i , ainsi que les bases $\vec{e}_{ii_0}^\alpha$ et $\vec{e}_\alpha^{ii_0}$, vérifient les relations :

$$\vec{e}_i^\alpha \cdot \vec{e}_\beta^i = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \vec{e}_{ii_0}^\alpha \cdot \vec{e}_\beta^{ii_0} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (10.37)$$

2) En posant $\cos\theta = \frac{\vec{a}_1^i \vec{a}_2^i \cdot \vec{a}_1^i \vec{a}_3^i}{|\vec{a}_1^i \vec{a}_2^i| |\vec{a}_1^i \vec{a}_3^i|}$, nous avons :

$$\vec{e}_1^i = \frac{1}{|\vec{a}_1^i \vec{a}_2^i| (1 - \cos^2\theta)} \vec{e}_1^i - \frac{\cos\theta}{|\vec{a}_1^i \vec{a}_2^i| |\vec{a}_1^i \vec{a}_3^i| (1 - \cos^2\theta)} \vec{e}_2^i, \quad (10.38)$$

$$\vec{e}_2^i = -\frac{\cos\theta}{|\vec{a}_1^i \vec{a}_2^i| |\vec{a}_1^i \vec{a}_3^i| (1 - \cos^2\theta)} \vec{e}_1^i + \frac{1}{|\vec{a}_1^i \vec{a}_3^i| (1 - \cos^2\theta)} \vec{e}_2^i, \quad (10.39)$$

a_1^i , a_2^i et a_3^i étant les sommets de T_i .

Il n'est plus nécessaire de stocker $\vec{e}_{ii_0}^\alpha$, puisqu'ils peuvent être calculés à partir de \vec{e}_i^α . Le stockage des plans tangents passe donc de $4N_f$ vecteurs à $2(N_f + N_g)$ vecteurs.

Les signes négatifs des plans tangents non hachurés sont directement pris en compte dans les différents maillages considérés. Dans le code, trois maillages sont utilisés :

- un maillage grossier, Γ_g , comportant les nombres de nœuds et d'éléments de Γ_g , les coordonnées des nœuds de Γ_g , les connectivités entre les éléments et les nœuds de Γ_g , et les connectivités entre les éléments et les degrés de liberté de Γ_g ,
- un maillage fin, Γ_f , ordonné comme Γ_g ,
- un maillage intermédiaire, $\Gamma_f^{-\pi}$, comportant les nombres de nœuds et d'éléments de $\Gamma_f^{-\pi}$, les coordonnées des nœuds de $\Gamma_f^{-\pi}$ et pour chaque élément $T_{ii_0}^{-\pi}$ le numéro de l'élément T_i auquel il appartient.

Les signes des vecteurs des plans tangents sont incorporés dans le dernier champ du maillage $\Gamma_f^{-\pi}$.

La seconde optimisation concerne le calcul de la partie polynômiale (8.40) des fonctions de base microlocales nécessitant l'évaluation des coordonnées barycentriques "globales" sur T_i (i.e. les coordonnées barycentriques associées aux sommets de T_i) correspondant aux coordonnées barycentriques "locales" des points de Gauss sur $T_{ii_0}^{-\pi}$ (i.e. les coordonnées barycentriques associées aux sommets de $T_{ii_0}^{-\pi}$).

Ces calculs sont effectués en utilisant une numérotation spécifique pour les éléments de $\Gamma_f^{-\pi}$ et de Γ_f .

Tout d'abord, les éléments de $\Gamma_f^{-\pi}$ et de Γ_f sont rangés selon la numérotation des éléments de Γ_g . Par exemple pour $M = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\text{élément } T_i \text{ de } \Gamma_g &\rightarrow \text{élément } T_{ii_0}^{-\pi} \text{ de } \Gamma_f^{-\pi} \\
i = 1 &\rightarrow \{T_{1i_0}^{-\pi}\}_{i_0=1}^4 = \{1, 2, 3, 4\} \\
i = 2 &\rightarrow \{T_{2i_0}^{-\pi}\}_{i_0=1}^4 = \{5, 6, 7, 8\} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Les éléments de $\Gamma_f^{-\pi}$ et de Γ_f sont aussi classés dans l'ordre de la figure 10.8.

Remarque. *Les triangles hachurés peuvent être distingués des triangles non hachurés grâce aux signes inclus dans le maillage $\Gamma_f^{-\pi}$, ce qui, avec la connaissance des coordonnées du sommet $a_1^{-\pi, ii_0}$, permet d'identifier le numéro de $T_{ii_0}^{-\pi}$.*

Soit $x_{ii_0} \in T_{ii_0}^{-\pi}$. Nous notons $(\hat{\lambda}_2^{ii_0}, \hat{\lambda}_3^{ii_0})$ les coordonnées barycentriques locales de x_{ii_0} , et $(\hat{\lambda}_2^i, \hat{\lambda}_3^i)$ les coordonnées barycentriques globales de x_{ii_0} . Nous avons :

$$x_{ii_0} = a_1^{-\pi, ii_0} + \hat{\lambda}_2^{ii_0} \overrightarrow{a_1^{-\pi, ii_0} a_2^{-\pi, ii_0}} + \hat{\lambda}_3^{ii_0} \overrightarrow{a_1^{-\pi, ii_0} a_3^{-\pi, ii_0}} \quad (10.40)$$

$$= a_1^i + \hat{\lambda}_2^i \overrightarrow{a_1^i a_2^i} + \hat{\lambda}_3^i \overrightarrow{a_1^i a_3^i}. \quad (10.41)$$

En utilisant la numérotation introduite précédemment, il vient :

– pour le $j^{\text{ième}}$ triangle non hachuré du $k^{\text{ième}}$ étage :

$$\hat{\lambda}_2^i = \frac{\hat{\lambda}_2^{i_0} + j - 1}{2^M}, \quad \hat{\lambda}_3^i = \frac{\hat{\lambda}_3^{i_0} + k - 1}{2^M}, \quad (10.42)$$

– pour le $j^{\text{ième}}$ triangle hachuré du $k^{\text{ième}}$ étage :

$$\hat{\lambda}_2^i = \frac{-\hat{\lambda}_2^{i_0} + j}{2^M}, \quad \hat{\lambda}_3^i = \frac{-\hat{\lambda}_3^{i_0} + k}{2^M}, \quad (10.43)$$

où le $k^{\text{ième}}$ étage de T_i correspond à la partie de T_i située entre les droites parallèles au côté $(a_1^i a_2^i)$ passant par les points $a_1^i + \frac{k-1}{2^M} \overrightarrow{a_1^i a_3^i}$ et $a_1^i + \frac{k}{2^M} \overrightarrow{a_1^i a_3^i}$. Les triangles non hachurés sont répartis sur 2^M étages, et il y en a $(2^M - k + 1)$ au $k^{\text{ième}}$ étage. Les triangles hachurés sont répartis sur $(2^M - 1)$ étages, et il y en a $(2^M - k)$ au $k^{\text{ième}}$ étage.

Chapitre 11

Résultats numériques

11.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats numériques obtenus lors de la résolution, à partir de la formulation intégrale de Desprès (cf. Chapitre 1), des équations de Maxwell en régime harmonique par le couplage des méthodes de discrétisation microlocale et multipôle. Nous désignons par FMD la méthode couplée. Nous traitons le cas d'une condition d'impédance de type Léontovitch au bord de l'obstacle Ω en considérant d'abord Ω comme un objet parfaitement absorbant ($Z_r = 1$), puis comme un objet parfaitement conducteur ($Z_r = 0$). Les objets considérés sont la sphère et l'amande NASA [1].

Lorsque Ω est une sphère, le plan d'étude est le même quel que soit l'impédance considérée. Nous étudions d'abord, pour la FMD à l'ordre 0, la convergence en maillage (Γ_g), ensuite pour des fréquences de $3.2GHz$ et de $4.7GHz$, nous analysons, en fonction de l'ordre des éléments finis microlocaux, l'optimisation apportée à la FMD (chapitre 10), notamment en ce qui concerne les choix du niveau grossier (niv_g) et du paramètre de seuillage (ϵ). Enfin, nous comparons, pour ces mêmes fréquences et selon l'ordre des éléments finis, les SER (et par conséquent Err_a l'erreur commise sur l'amplitude de diffusion) et les consommations en temps et en mémoire obtenues avec la méthode FMM d'une part et avec la FMD optimisée d'autre part.

Lorsque Ω représente l'amande NASA, nous considérons uniquement le niveau grossier et le paramètre ϵ optimaux, et nous comparons comme précédemment les résultats obtenus pour $Z_r = 1$ et $Z_r = 0$ avec la FMM et la FMD optimisée.

En ce qui concerne le paramètre de troncature de la série multipolaire au niveau n , L_n est donné par (5.21) :

$$L_n = kd_n + c(kd_n)^{1/3}, \quad (11.1)$$

où k est le nombre d'onde, d_n est la taille des boîtes multipolaires au niveau n , et le coefficient c est choisi égal à 3. Le paramètre β des EID est égal à 0.5.

Dans le cas d'un objet parfaitement absorbant, les résultats avec la FMD (respectivement la FMM) ont été obtenus en utilisant un double gradient conjugué (cf tableau 1.1) (respectivement

un GMRes). Le résidu du gradient conjugué externe (*GC2*) est fixé à 10^{-3} , et celui du gradient conjugué interne (*GC1*) est égal à 10^{-4} . Dans le cas d'un objet parfaitement conducteur, les résultats avec la FMD et la FMM ont été obtenus en utilisant un GMRes. Les valeurs prises par les paramètres de cette méthode sont donnés dans la section 11.2.2.

Pour la FMD, nous notons N_g et N_f les nombres d'éléments respectifs que contiennent les maillages grossiers Γ_g et les maillages fins Γ_f . Pour la FMM, nous notons prédemment N le nombre d'éléments du maillage utilisé. Ce nombre correspondant au nombre d'éléments de Γ_f , nous le notons désormais N_f . Pour la FMD, nous notons niv_g le niveau grossier et niv_f le niveau fin. niv_f correspond également au niveau fin de la FMM. Nous utilisons pour la FMD une quadrature avec un seul point de Gauss par élément de Γ_f , car les fonctions à intégrer numériquement, même si elles doivent être évaluées sur Γ_f , sont avant tout définies à partir des éléments de Γ_g , ce qui fait que pour un élément de Γ_g le nombre de points de quadrature est égal à 4^M (cf remarque section 11.2.1). Nous utilisons pour la FMM une quadrature avec trois points de Gauss par élément de Γ_f . En se ramenant au triangle de référence, la quadrature utilisée pour la FMD est définie par :

$$(\omega, \lambda_2, \lambda_3) = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}, \quad (11.2)$$

et la quadrature utilisée pour la FMM est définie par :

$$(\omega, \lambda_2, \lambda_3) = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right); \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right); \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right) \right\}, \quad (11.3)$$

où ω désigne le poids de la quadrature, λ_2 et λ_3 sont respectivement les coordonnées associées aux deuxième et troisième sommets du triangle de référence.

11.2 La sphère comme objet diffractant

L'objet diffractant considéré est une sphère. Ce cas test a pour principal avantage de posséder, aussi bien pour le cas d'un obstacle parfaitement absorbant ($Z_r = 1$) que pour le cas d'un obstacle parfaitement conducteur ($Z_r = 0$), une solution exacte donnée par les séries de MIE (cf [41] ou [96]). La solution obtenue à partir du code peut être comparée à la solution exacte, et il est ainsi possible d'observer son degré de précision.

Pour tous les cas tests de cette partie, la sphère utilisée est centrée à l'origine et a un rayon de un mètre. Elle est éclairée par une onde incidente de direction $\hat{k} = (0, 0, -1)^t$.

11.2.1 Cas d'une sphère parfaitement absorbante ($Z_r = 1$)

Convergence en maillage pour des ondes incidentes de fréquence $1GHz$ et $3.2GHz$

Nous étudions la convergence en maillage des éléments finis microlocaux d'ordre 0. Pour des fréquences de $1GHz$ et de $3.2GHz$, les figures 11.1 et 11.2 décrivent l'évolution de la précision

de la FMD en fonction de la finesse du maillage grossier Γ_g . L'erreur de la FMM n'influence pas les calculs, car la constante multipolaire c intervenant dans le calcul (11.1) du paramètre de troncature L_n est suffisamment élevée et égale à 3. Afin de minimiser l'erreur due à l'approximation de la géométrie, la finesse des maillages fins utilisés est toujours proche de $\lambda/10$.

Remarque. *A partir d'un maillage grossier Γ_g donné, il n'est pas possible de considérer des maillages fins Γ_f de finesse quelconque, car Γ_f s'obtient par raffinement de Γ_g et projection sur Γ . Γ_g est raffiné en subdivisant récursivement jusqu'à un ordre M chacun de ses éléments en quatre. Le nombre d'éléments de Γ_f vaut 4^M fois celui de Γ_g , et fixe en quelque sorte la finesse de Γ_f . Pour un maillage Γ_g donné, le procédé de construction de Γ_f ne permet pas de considérer des maillages fins compris entre deux subdivisions successives.*

D'après la figure 11.1 et le tableau 11.1, pour une fréquence de $1GHz$, l'obtention d'un bon niveau de précision avec la FMD se fait en considérant un maillage Γ_g en λ/α tel que $\alpha \geq 2.5$. D'après la figure 11.2 et le tableau 11.2, pour une fréquence de $3.2GHz$, la convergence de la FMD vers un résultat satisfaisant est assurée lorsque Γ_g est au moins en $\lambda/2.25$ et une solution très précise est obtenue avec $\lambda/2.5$ (cf Figure 11.2). Pour des fréquences plus élevées, ces deux exemples laissent à penser qu'avec les éléments fins microlocaux d'ordre 0, un bon niveau de précision est garanti en considérant un maillage grossier Γ_g en λ/α tel que $\alpha \in [2.25, 3]$.

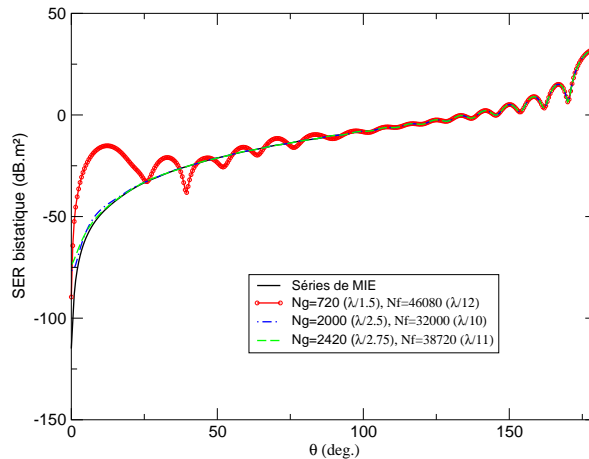


FIG. 11.1 – Convergence en maillage de la FMD d'ordre 0 dans le cas d'une sphère parfaitement absorbante éclairée par une onde de fréquence $1GHz$.

Il est clair que pour conserver un résultat précis avec la FMD d'ordre 0, la finesse de Γ_g (i.e. le nombre d'éléments de Γ_g) doit suivre l'augmentation de la fréquence, ce qui, en soit, constitue une limitation aussi bien au niveau du temps de calcul qu'au niveau de la consommation en mémoire. Par exemple, pour une fréquence de $3.2GHz$, les tableaux 11.2 et 11.3 contenant les

Γ_g	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
$\lambda/1.5$	1166	0.3	$2.5 \cdot 10^{-1}$
$\lambda/2.5$	2628	0.6	$2.2 \cdot 10^{-3}$
$\lambda/2.75$	3853	0.8	$1.7 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.1 – Eléments finis microlocaux d'ordre 0, sphère, $f = 1GHz$, $Z_r = 1$, $niv_g = 2$ et $niv_f = 5$.

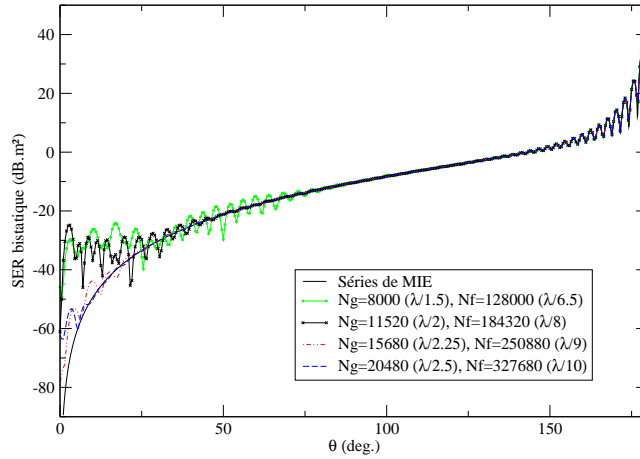


FIG. 11.2 – Convergence en maillage de la FMD d'ordre 0 dans le cas d'une sphère parfaitement absorbante éclairée par une onde de fréquence $3.2GHz$.

Γ_g	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
$\lambda/1.5$	25955	3.5	$1.2 \cdot 10^{-1}$
$\lambda/2$	42698	6.3	$9.7 \cdot 10^{-2}$
$\lambda/2.25$	66530	10.7	$4.8 \cdot 10^{-3}$
$\lambda/2.5$	99015	17.2	$3.5 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.2 – Eléments finis microlocaux d'ordre 0, sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, $niv_g = 4$, $niv_f = 7$ et mémoire privilégiée.

Γ_g	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
$\lambda/1.5$	16851	7	$1.2 \cdot 10^{-1}$
$\lambda/2$	21938	13	$9.7 \cdot 10^{-2}$
$\lambda/2.25$	33849	21.7	$4.8 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.3 – Eléments finis microlocaux d'ordre 0, sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, $niv_g = 4$, $niv_f = 7$ et temps de calcul privilégié.

ressources utilisées par la FMD d'ordre 0 en fonction de la finesse de Γ_g , montrent les différences

de consommation en temps et en mémoire selon la stratégie adoptée (cf section 10.3.1) : soit la priorité est donnée à la mémoire (tableau 11.2), ou soit elle est donnée au temps de calcul (tableau 11.3). En privilégiant un moindre temps de calcul, l'utilisation d'un maillage Γ_g en $\lambda/2.5$ n'est plus possible, car il faudrait environ $34Go$ de mémoire, ce qui dépasse les ressources disponibles. Afin d'utiliser un maillage Γ_g en $\lambda/2.5$ et d'obtenir une solution précise avec la FMD d'ordre 0, il faut réduire la mémoire demandée, et donc adopter la stratégie privilégiant la consommation en mémoire qui consiste à résoudre séparément chaque système des EID (car dans ce cas les systèmes sont totalement découplés) en calculant et en désallouant les matrices concernées. Cependant, le fait de ne plus calculer en même temps les matrices des deux systèmes double les temps de calcul, car certaines opérations, notamment la lecture de tableaux de grandes tailles, sont alors effectuées deux fois.

Afin de remédier à la fois aux problèmes de temps et de mémoire, nous nous intéressons aux éléments finis microlocaux courbes d'ordre 1, car ils permettent de considérer des maillages Γ_g plus grossiers qu'à l'ordre 0 tout en donnant des résultats précis. Dans la figure 11.3 et le tableau 11.4, nous comparons, pour une fréquence de $3.2GHz$, les résultats obtenus avec des éléments finis microlocaux d'ordre 0 et d'ordre 1. Le maillage grossier à l'ordre 0 (respectivement à l'ordre 1) contient 15680 éléments (respectivement 1280 éléments) ce qui représente 23520 degrés de liberté (respectivement 6400 degrés de liberté). Le niveau grossier est égal à 4 et le niveau fin est égal à 7. Les éléments finis microlocaux d'ordre 1 fournissent un résultat plus précis que ceux d'ordre 0, tout en étant moins coûteux en temps de calcul et en mémoire, et ce quelque soit la stratégie considérée. Nous pouvons remarquer que grâce à la montée en ordre, nous sommes passés d'un maillage en $\lambda/2.25$ à un maillage en 1.6λ sans dégradation de la précision. Quelle que soit la stratégie considérée, nous avons à l'ordre 1 un gain en temps d'environ 40% et un gain en place mémoire de 70%.

Cas	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
FMD 0, Γ_g en $\lambda/2.25$ et mémoire privilégiée	66530	10.7	$4.8 \cdot 10^{-3}$
FMD 0, Γ_g en $\lambda/2.25$ et temps privilégié	33849	21.7	$4.8 \cdot 10^{-3}$
FMD 1, Γ_g en 1.6λ et mémoire privilégiée	40784	3.2	$4.1 \cdot 10^{-3}$
FMD 1, Γ_g en 1.6λ et temps privilégié	21271	6.5	$4.1 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.4 – Eléments finis microlocaux d'ordre 0 et d'ordre 1, sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, $niv_g = 4$ et $niv_f = 7$.

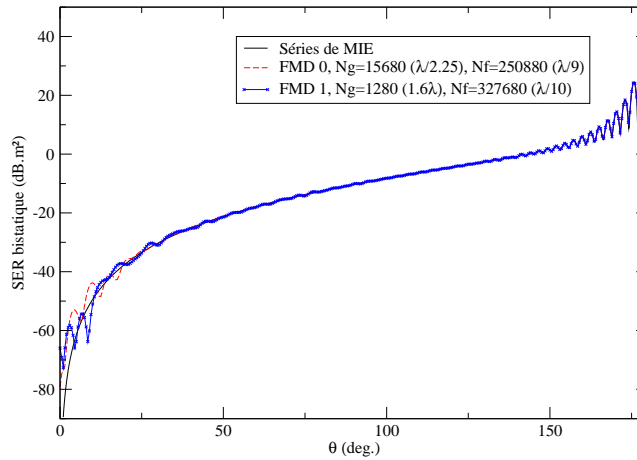


FIG. 11.3 – Éléments finis microlocaux d’ordre 0 et d’ordre 1, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$, $niv_g = 4$ et $niv_f = 7$.

Choix du niveau grossier et du paramètre de seuillage pour des ondes incidentes de fréquence $3.2GHz$ et $4.7GHz$

Dans le chapitre 10, il a été vu que le coût des transferts, en particulier celui du niveau grossier, représentait la majeure partie du temps utilisé par la FMD. Ce coût a été optimisé en réduisant le nombre de directions de discrétisation de la sphère unité S^2 : Rokhlin et Chew ont constaté que des directions pouvaient être privilégiées lors de la discrétisation de S^2 pour la FMM un niveau, et nous avons appliqué cette idée au contexte de la FMD. Pour éliminer des directions sur S^2 , les fonctions de transfert T_{mm}^n sont lissées puis seuillées, ce qui entraîne l’apparition du paramètre ϵ correspondant à la valeur de seuillage. Il faut déterminer une valeur de ϵ optimale permettant d’éliminer le plus grand nombre de transferts sans dégrader la précision du résultat. Nous avons vu également dans les chapitres 9 et 10 qu’en théorie, et dans une moindre mesure en pratique, la complexité de la FMD (non optimisée ($\epsilon = 0$) ou optimisée ($\epsilon > 0$)) dépend fortement du choix du niveau grossier niv_g . Par conséquent, parallèlement à la spécification de ϵ , une étude sur le choix du niveau grossier optimal va être conduite.

Pour des fréquences de $3.2GHz$ et de $4.7GHz$, nous évaluons en fonction de l’ordre des éléments finis microlocaux considérés la combinaison (niv_g, ϵ) donnant un temps de calcul minimal, ainsi qu’une erreur sur l’amplitude de diffusion (Err_a cf (7.3)) voisine de l’erreur commise lorsque ϵ est nul.

Nous considérons d’abord une fréquence de $3.2GHz$. Pour la FMD d’ordre 0 et la FMD d’ordre 1, les maillages grossiers Γ_g sont respectivement en $\lambda/2.25$ (15680 éléments) et en 1.6λ (1280 éléments), et les maillages fin Γ_f sont respectivement en $\lambda/9$ (250880 éléments) et en $\lambda/10$ (327680 éléments). Les résultats concernant ce cas sont reportés dans la figure 11.6 et dans les tableaux 11.5 et 11.6.

A cette fréquence, la valeur optimale de ϵ est $5 \cdot 10^{-3}$ pour la FMD d'ordre 1 (cf chapitre 10). Il apparaît aussi que, pour la FMD d'ordre 0, $5 \cdot 10^{-3}$ est la valeur optimale de ϵ . D'après le tableau 11.5, à l'ordre 0 et à l'ordre 1, les meilleurs temps de calcul, aussi bien pour $\epsilon = 0$ que pour $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$, sont obtenus quand le niveau grossier niv_g est égal à 4. En observant les tableaux 11.5 et 11.6, nous remarquons que les temps de calcul varient fortement en fonction de niv_g contrairement à Err_a . Nous pouvons remarquer que, grâce à la montée en ordre et au seuillage, nous avons divisé le temps de calcul par deux sur ce cas (33849s/ 16148s).

		$niv_g = 3$	$niv_g = 4$	$niv_g = 5$
FMD 0	$\epsilon = 0$	128303	33849	48182
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	55839	18721	36018
FMD 1	$\epsilon = 0$	38946	21271	64905
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	16491	16148	49639

TAB. 11.5 – Temps de calcul, sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$.

		$niv_g = 3$	$niv_g = 4$	$niv_g = 5$
FMD 0	$\epsilon = 0$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$
FMD 1	$\epsilon = 0$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.6 – Erreur sur l'amplitude de diffusion (Err_a), sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$.

Nous considérons à présent une fréquence de $4.7GHz$. Pour la FMD d'ordre 0 et la FMD d'ordre 1, les maillages grossiers Γ_g sont respectivement en $\lambda/1.75$ (20480 éléments) et en 1.6λ (2880 éléments), et les maillages fin Γ_f sont respectivement en $\lambda/13$ (1310720 éléments) et en $\lambda/10$ (737280 éléments). Les résultats concernant ce cas sont reportés dans la figure 11.4 et dans les tableaux 11.7 et 11.8.

A cette fréquence, pour la FMD d'ordre 0 et la FMD d'ordre 1, la valeur optimale de ϵ n'est plus $5 \cdot 10^{-3}$, mais 10^{-2} . D'après le tableau 11.7, aussi bien à l'ordre 0 et qu'à l'ordre 1, les temps de calcul décroissent fortement en passant de $\epsilon = 0$ à $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$, et continuent à diminuer lorsque $\epsilon = 10^{-2}$, la précision des résultats restant toutefois préservée (cf tableau 11.8). Les meilleurs temps de calcul, quel que soit la valeur de ϵ , sont obtenus quand le niveau grossier niv_g est égal à 4. En observant les tableaux 11.7 et 11.8, nous remarquons, comme précédemment, que contrairement à Err_a , les temps de calcul varient fortement en fonction de niv_g . Nous pouvons

remarquer que, grâce à la montée en ordre et au seuillage, nous avons divisé le temps de calcul par 5.7 sur ce cas.

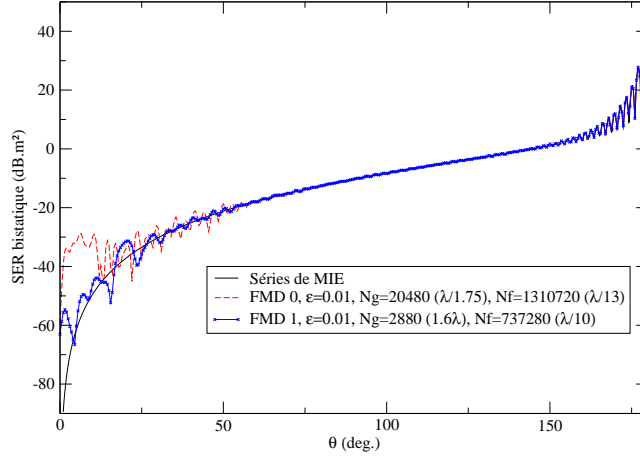


FIG. 11.4 – Eléments finis microlocaux d'ordre 0 et d'ordre 1, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 1$, $niv_g = 4$ et $niv_f = 8$.

		$niv_g = 3$	$niv_g = 4$	$niv_g = 5$
FMD 0	$\epsilon = 0$	1571833	263552	316340
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	547023	115339	171355
	$\epsilon = 10^{-2}$	472834	101735	157173
FMD 1	$\epsilon = 0$	275673	116621	179941
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	108404	48984	94967
	$\epsilon = 10^{-2}$	93574	45814	87931

TAB. 11.7 – Temps de calcul, sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 1$.

		$niv_g = 3$	$niv_g = 4$	$niv_g = 5$
FMD 0	$\epsilon = 0$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$
	$\epsilon = 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$
FMD 1	$\epsilon = 0$	$8.5 \cdot 10^{-3}$	$8.5 \cdot 10^{-3}$	$8.5 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 10^{-2}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.8 – Erreur sur l'amplitude de diffusion (Err_a), sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 1$.

Comparaisons entre la FMD et la FMM

Une onde incidente de fréquence $3.2GHz$

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus pour une fréquence de $3.2GHz$ avec la FMM et la FMD lorsque des éléments finis microlocaux d'ordre 0 et d'ordre 1 sont utilisés. Nous confrontons tout d'abord les résultats obtenus avec la FMD et la FMM pour une même finesse de maillage. Nous considérons pour la FMD d'ordre 0 un maillage grossier en $\lambda/2.25$ ($N_g = 15680$) et un maillage fin en $\lambda/9$ ($N_f = 150880$), et pour la FMM d'ordre 0 et d'ordre 1 un maillage en $\lambda/2.25$ ($N_f = 15680$). Au regard de la figure 11.5, nous constatons que, pour une même finesse de maillage, l'erreur est moindre avec la FMD qu'avec la FMM.

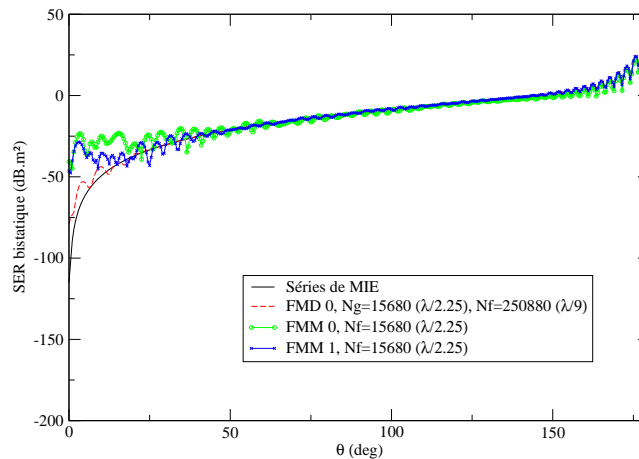


FIG. 11.5 – FMD et FMM, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$.

Pour la FMM, nous reprenons les résultats de la section 7.3.2, et nous utilisons respectivement à l'ordre 0 et à l'ordre 1 des maillages en $\lambda/10$ ($N_f = 327680$) et en $\lambda/6$ ($N_f = 128000$). Pour la FMD, nous considérons à l'ordre 0 un maillage grossier en $\lambda/2.25$ ($N_g = 15680$) et un maillage fin en $\lambda/9$ ($N_f = 250880$), et à l'ordre 1 un maillage grossier en 1.6λ ($N_g = 1280$) et un maillage fin en $\lambda/10$ ($N_f = 327680$). Nous donnons pour la FMD uniquement les résultats obtenus avec optimisation en choisissant le niveau grossier niv_g fournissant les meilleurs temps de calcul : $niv_g = 4$. Par la suite, lorsque nous évoquerons la FMD dans cette section, nous parlerons, sauf mention contraire, de la FMD optimisée. Les résultats sont reportés dans la figure 11.6 et le tableau 11.9.

Remarque. Les nombres de degrés de liberté des différentes méthodes apparaissent dans le tableau 11.9 pour mettre en évidence les tailles des systèmes à inverser. Au regard de ces valeurs, il est clair que l'inversion du système demande la majeure partie du temps de calcul de la FMM,

contrairement à la FMD, où l'assemblage des systèmes représente l'étape consommant le plus de temps.

D'après le tableau 11.9, la FMD aussi bien à l'ordre 0 qu'à l'ordre 1 est un peu moins précise que la FMM (les solutions données par la FMD restant toutefois assez précises), mais elle permet par rapport à la FMM d'importants gains en temps de calcul.

En ce qui concerne la mémoire, il est à noter que la FMD en consomme beaucoup plus à l'ordre 0 qu'à l'ordre 1, même si les temps de calcul et les erreurs commises sur l'amplitude de diffusion sont proches. La FMD d'ordre 0 consomme également beaucoup plus de mémoire que la FMM. Nous voyons bien avec ce cas que la mémoire constitue une limitation de la FMD d'ordre 0. En effet, si nous continuons de monter en fréquence, alors la FMD d'ordre 0 ne sera plus compétitive par rapport à la FMM car :

- en privilégiant le temps de calcul, la FMD d'ordre 0 sera peu précise puisqu'il faudra utiliser un maillage grossier Γ_g en λ/a avec $a < 2$ afin de ne pas dépasser la capacité mémoire du calculateur.
- en privilégiant la mémoire, le temps de calcul sera multiplié par deux et avoisinera ainsi le temps de calcul de la FMM. De plus, la mémoire consommée par la FMD d'ordre 0 restera probablement encore supérieure à celle demandée par la FMM.

Pour cette fréquence et pour des fréquences plus élevées, nous voyons les avantages qu'offre la FMD d'ordre 1 par rapport à la FMD d'ordre 0 : la consommation en mémoire est considérablement réduite, les temps de calcul restent plus attractifs que ceux de la FMM et l'erreur commise sur l'amplitude de diffusion diminue. La FMD optimisée d'ordre 1 permet d'obtenir un facteur 2 en temps de calcul par rapport à la FMM d'ordre 0 (moins coûteuse ici que la FMM d'ordre 1), pour une consommation mémoire et un niveau d'erreur comparables.

Méthode	Degrés de liberté	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
FMM 0	491520	33120	6.3	$2.7 \cdot 10^{-3}$
FMM 1	640000	38688	7	$2.2 \cdot 10^{-3}$
FMD 0, $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	23520	18721	21.7	$5.1 \cdot 10^{-3}$
FMD 1, $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	6400	16148	6.5	$4.3 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.9 – Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$.

Une onde incidente de fréquence $4.7GHz$

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus pour une fréquence de $4.7GHz$ avec la FMM et la FMD lorsque des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 sont utilisés.

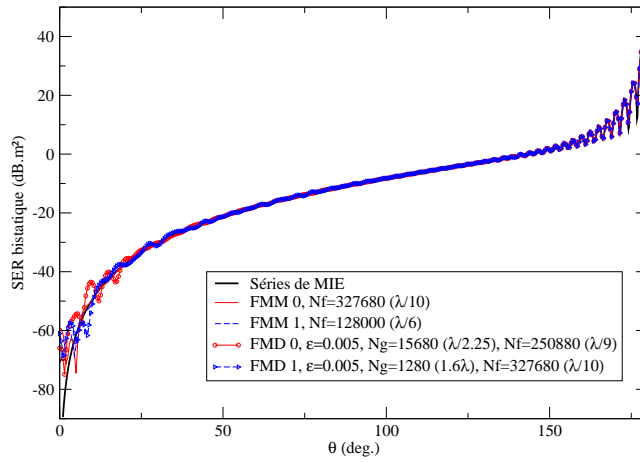


FIG. 11.6 – Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$.

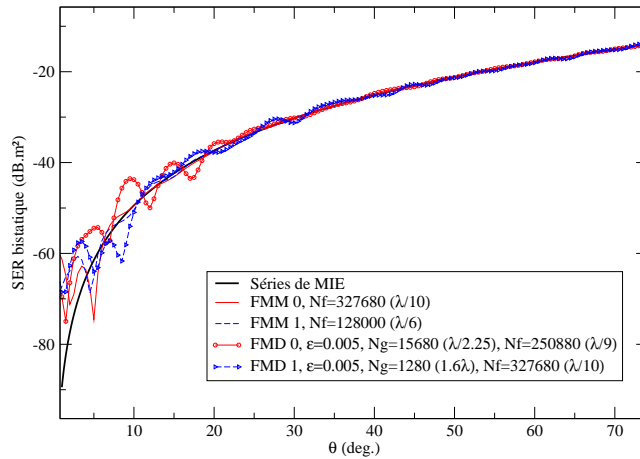


FIG. 11.7 – Zoom, Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 1$.

Nous confrontons tout d'abord les résultats obtenus avec la FMD et la FMM pour une même finesse de maillage. Nous considérons pour la FMD d'ordre 0 un maillage grossier en $\lambda/1.75$ ($N_g = 20480$) et un maillage fin en $\lambda/13$ ($N_f = 1310720$), et pour la FMM d'ordre 0 et d'ordre 1 un maillage en $\lambda/1.75$ ($N_f = 20480$). Au regard de la figure 11.8, nous constatons que, pour une même finesse de maillage, l'erreur est moindre avec la FMD qu'avec la FMM.

Pour la FMM, nous reprenons les résultats de la section 7.3.2, et nous utilisons respectivement à l'ordre 0 et à l'ordre 1 des maillages en $\lambda/11.5$ ($N_f = 1003520$) et en $\lambda/6$ ($N_f = 250880$).

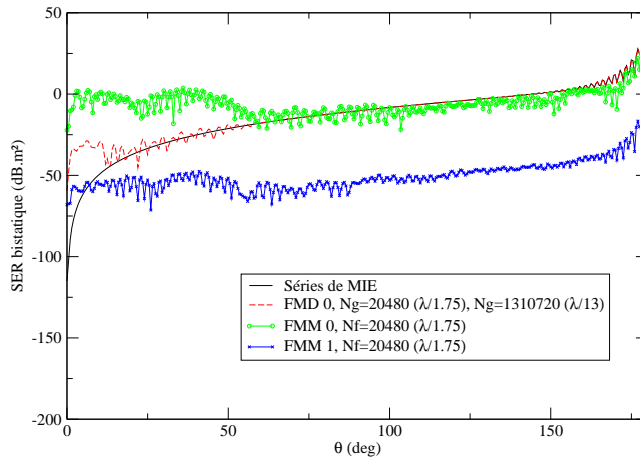


FIG. 11.8 – FMD et FMM, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 1$.

Pour la FMD, nous considérons à l'ordre 0 un maillage grossier en $\lambda/1.75$ ($N_g = 20480$) et un maillage fin en $\lambda/13$ ($N_f = 1310720$), et à l'ordre 1 un maillage grossier en 1.6λ ($N_g = 2880$) et un maillage fin en $\lambda/10$ ($N_f = 737280$). Nous donnons pour la FMD uniquement les résultats obtenus avec optimisation en choisissant le niveau grossier niv_g fournissant les meilleurs temps de calcul : $niv_g = 4$. Les résultats sont reportés dans la figure 11.9 et le tableau 11.10.

Nous montons en fréquence, ce qui nous oblige, pour la FMD d'ordre 0, à privilégier la consommation en mémoire. D'après le tableau 11.10, la consommation en mémoire de la FMD d'ordre 0 demeure encore importante, et comme il n'est pas possible de considérer des maillages grossiers en λ/a avec $a \geq 2$, il y a dégradation de la précision du résultat. De plus, même si de tels maillages grossiers pouvaient être considérés, ce ne serait pas intéressant, car la FMD d'ordre 0 consomme déjà plus de temps que les autres méthodes.

Nous comparons donc les résultats obtenus avec la FMM d'ordre 1 et la FMD d'ordre 1, puisque, d'après le tableau 11.10, les méthodes d'ordre 1 sont au niveau du temps de calcul et de la précision des résultats plus performantes que celles d'ordre 0. La FMD d'ordre 1 nécessite plus de mémoire et fournit un résultat moins précis (mais qui demeure suffisamment précis) que la FMM d'ordre 1. Cependant, elle est beaucoup moins coûteuse en temps que la FMM, le gain étant de l'ordre de 1.5.

11.2.2 Cas d'une sphère parfaitement conductrice ($Z_r = 0$)

Convergence en maillage pour des ondes incidentes de fréquence $3.2GHz$ et $4.7GHz$

Nous étudions la convergence en maillage des éléments finis microlocaux d'ordre 0. Pour des fréquences de $3.2GHz$ et de $4.7GHz$, les résultats obtenus sont reportés dans les tableaux 11.11 et 11.12, et dans les figures 11.11 et 11.12 qui décrivent l'évolution de la FMD, notamment de

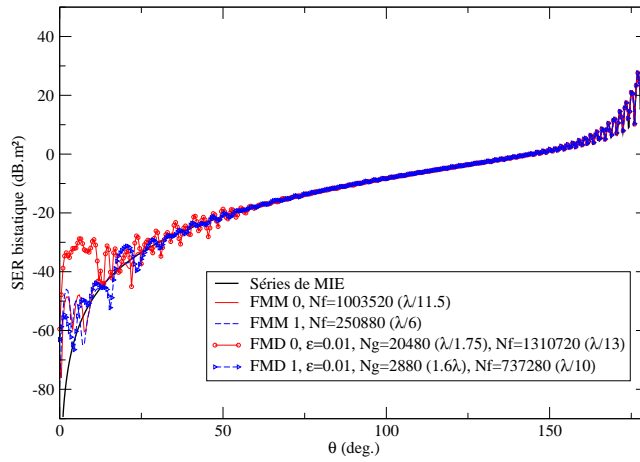


FIG. 11.9 – Sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 1$.

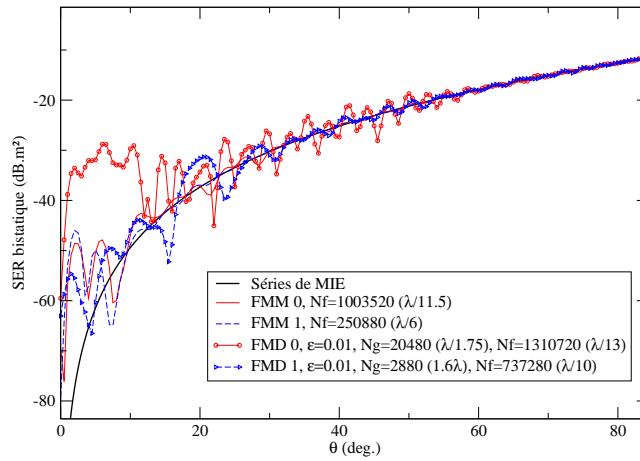


FIG. 11.10 – Zoom, Sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 1$.

Méthode	Degrés de liberté	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
FMM 0	1505280	90494	12.2	$3.8 \cdot 10^{-3}$
FMM 1	1254400	70726	11.8	$2.9 \cdot 10^{-3}$
FMD 0, $\epsilon = 10^{-2}$	30720	101735	20	$3.9 \cdot 10^{-2}$
FMD 1, $\epsilon = 10^{-2}$	14400	45814	21.6	$8.6 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.10 – Sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 1$.

sa précision, en fonction de la finesse du maillage grossier Γ_g . L'erreur de la FMM n'influence pas les calculs, car la constante multipolaire c intervenant dans le calcul (11.1) du paramètre de troncature L_n est égale à 3. Afin de minimiser l'erreur due à l'approximation de la géométrie, la finesse des maillages fins utilisés est, tant que faire se peut, proche de $\lambda/10$. Les résultats des tableaux 11.11 et 11.12 ont été obtenus en utilisant la version de la FMD privilégiant le temps de calcul.

La convergence de la FMD vers un bon résultat est assurée pour une fréquence de $3.2GHz$ lorsque le maillage grossier Γ_g est en $\lambda/1.25$, et pour une fréquence de $4.7GHz$ lorsque le maillage grossier Γ_g est en λ . Pour un maillage grossier en λ/α avec $\alpha \leq 2$ donné, nous obtenons par rapport au cas d'un objet parfaitement absorbant ($Z_r = 1$) des résultats plus précis. L'utilisation de maillages Γ_g très lâches réduit fortement la consommation en mémoire de la FMD d'ordre 0 :

- à $3.2GHz$, pour avoir des résultats précis nous utilisons ici un maillage en $\lambda/1.25$ ($N_g = 5120$) et nous consommons $4.6Go$ (tableau 11.11), alors que pour $Z_r = 1$, nous utilisons un maillage en $\lambda/2.25$ ($N_g = 15680$) et une mémoire de $21.7Go$ (tableau 11.3),
- à $4.7GHz$, pour avoir des résultats précis nous utilisons ici un maillage en λ ($N_g = 8000$) et nous consommons $12.8Go$ (tableau 11.12), alors que pour $Z_r = 1$, nous utilisons un maillage en $\lambda/1.75$ ($N_g = 20480$) et une mémoire de $20Go$ (tableau 11.10).

La consommation en mémoire ne pose donc plus de problème comme auparavant, ce qui renforce le fait d'utiliser la version de la FMD privilégiant le temps de calcul.

Pour des fréquences plus élevées, ces deux exemples laissent à penser qu'avec les éléments finis microlocaux d'ordre 0, un bon niveau de précision est garanti en considérant un maillage grossier Γ_g en λ/α tel que $\alpha \in [1, 2]$.

Nous nous intéressons à la FMD d'ordre 1 pour étudier, dans le cas du conducteur parfait, le comportement de la FMD en fonction de l'ordre des éléments finis utilisés. Pour les éléments finis microlocaux d'ordre 1, le maillage grossier Γ_g est choisi de façon à préserver la précision des résultats obtenus à l'ordre 0. Cette contrainte est satisfaite en prenant pour une fréquence de $3.2GHz$ un maillage grossier Γ_g en 2.5λ ($N_g = 500$) et un maillage fin Γ_f en $\lambda/6.5$ ($N_f = 128000$), et pour une fréquence de $4.7GHz$, un maillage grossier Γ_g en 2.8λ ($N_g = 720$) et un maillage fin Γ_f en $\lambda/10$ ($N_f = 737280$). Nous passons, sans dégradation de la précision, pour une fréquence de $3.2GHz$ d'un maillage Γ_g en $\lambda/1.25$ à l'ordre 0 à un maillage Γ_g en 2.5λ à l'ordre 1, et pour une fréquence de $4.7GHz$, d'un maillage Γ_g en λ à l'ordre 0 à un maillage Γ_g en 2.8λ .

Nous considérons, à présent, uniquement le cas à $3.2GHz$. A l'ordre 1, le maillage grossier est encore plus lâche que le dernier maillage considéré à l'ordre 0, et le nombre de degrés de liberté à l'ordre 1 égal à 2500 est inférieur au nombre de degrés de liberté à l'ordre 0 égal à 7680. Nous nous attendons donc à ce que la FMD d'ordre 1 soit moins coûteuse en temps et en mémoire que la FMD d'ordre 0. Or, en considérant le même niveau grossier qu'à l'ordre 0, i.e. $niv_g = 2$, le temps de calcul à l'ordre 1 est de 125008 secondes, et contredit totalement nos prévisions, le coût de la FMD d'ordre 0 étant de 47238 secondes (cf tableau 11.11). Contrairement à ce qui

se passe habituellement avec la FMD, la majeure partie du temps de calcul de la FMD d'ordre 1 provient de l'inversion du système par la méthode de Jacobi : 73484 secondes, le temps d'assemblage du système étant de 51160 secondes. La méthode de Jacobi est donc remplacée par un GMRes, car il offre une meilleure vitesse de convergence : le temps pour inverser le système chute à 16847 secondes. Le temps de calcul de la FMD d'ordre 1 est alors de 68007 secondes. Au regard du tableau 11.13, le surcoût de la FMD d'ordre 1 traduit un choix non optimal du niveau grossier. La FMD d'ordre 1 nécessite une mémoire de $3.7Go$ ce qui est inférieure à celle consommée à l'ordre 0, et elle fournit une solution plus précise : l'erreur sur l'amplitude de diffusion étant égal à $5.8 \cdot 10^{-3}$.

Lorsque nous considérons une fréquence de $4.7GHz$, sous les mêmes conditions qu'à l'ordre 0 (i.e. $niv_g = 4$ et $niv_f = 8$), les éléments finis microlocaux d'ordre 1 fournissent un résultat plus précis que ceux d'ordre 0 (cf tableau 11.16). Pour ce cas, comme nous le verrons bientôt, bien que le choix du niveau grossier soit optimal, nous allons montrer qu'en ajustant le paramètre de seuillage ϵ , le coût de la FMD d'ordre 1 peut être fortement réduit.

Remarque. *L'emploi du GMRes, à la place de la méthode de Jacobi, avec la FMD n'engendre pas d'augmentation de la mémoire comme avec la FMM. En effet, le GMRes est ici appliqué à une matrice de petite taille alors que pour la FMM, il est appliqué à une matrice de grande taille. Pour la FMD, la mémoire demandée pour le stockage des vecteurs nécessaires au GMRes est donc négligeable. Une autre différence entre la FMD et la FMM concernant le fonctionnement du GMRes est que nous n'utilisons pas l'évolution de la quantité δ (7.30) provenant des EID comme critère d'arrêt, car la résolution itérative du système ne représente pas l'étape la plus coûteuse de la méthode.*

Γ_g	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
2.5λ	6130	2	$2.6 \cdot 10^{-2}$
1.6λ	24261	3.3	$9.5 \cdot 10^{-3}$
$\lambda/1.25$	47238	4.6	$7.1 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.11 – Eléments finis microlocaux d'ordre 0, sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 0$, $niv_g = 2$ et $niv_f = 7$.

Choix du niveau grossier et du paramètre de seuillage pour des ondes de fréquences $3.2GHz$ et $4.7GHz$

Comme pour $Z_r = 1$, nous déterminons pour des fréquences de $3.2GHz$ et de $4.7GHz$ la combinaison (niv_g, ϵ) optimale, i.e. niv_g et ϵ sont choisis de sorte à avoir un temps de calcul minimum tout en préservant une erreur sur l'amplitude de diffusion Err_a proche de celle commise lorsque ϵ est nul. Bien qu'ayant été conduites pour $Z_r = 1$, ces études sont justifiées car

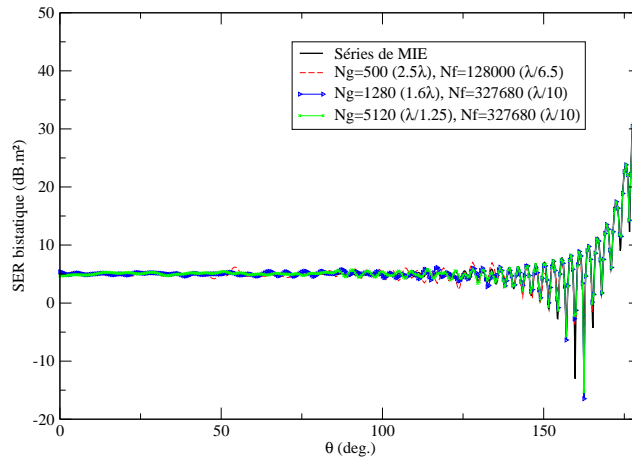


FIG. 11.11 – Convergence en maillage de la FMD d’ordre 0 dans le cas d’une sphère parfaitement conductrice éclairée par une onde de fréquence $f = 3.2GHz$.

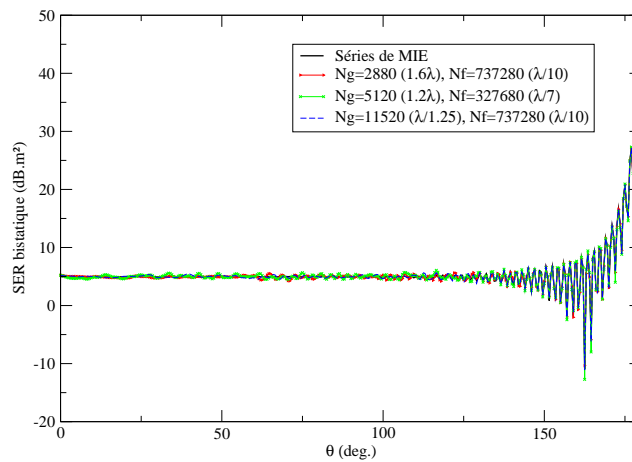


FIG. 11.12 – Convergence en maillage de la FMD d’ordre 0 dans le cas d’une sphère parfaitement conductrice éclairée par une onde de fréquence $f = 4.7GHz$.

dans le cas $Z_r = 0$, les maillages grossiers Γ_g utilisés sont plus lâches que pour $Z_r = 1$.

Nous traitons d’abord le cas d’une fréquence de $3.2GHz$. Pour la FMD d’ordre 0 et la FMD d’ordre 1, les maillages grossiers Γ_g sont respectivement en $\lambda/1.25$ (5120 éléments) et en 2.5λ (500 éléments), et les maillages fin Γ_f sont respectivement en $\lambda/10$ (327680 éléments) et en $\lambda/6.5$ (128000 éléments). Les résultats obtenus sont reportés dans la figure 11.13 et dans les

Γ_g	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
1.6λ	43401	5.6	$1 \cdot 10^{-1}$
1.2λ	57713	6.2	$9.5 \cdot 10^{-2}$
$\lambda/1.25$	125030	16	$3.6 \cdot 10^{-2}$

TAB. 11.12 – Eléments finis microlocaux d’ordre 0, sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 0$, $niv_g = 4$ et $niv_f = 8$.

tableaux 11.13 et 11.14.

A cette fréquence, la valeur optimale de ϵ n’est plus $5 \cdot 10^{-3}$, comme pour $Z_r = 1$, mais 10^{-2} . D’après le tableau 11.13, à l’ordre 0 et à l’ordre 1, les meilleurs temps de calcul sont obtenus quand le niveau grossier niv_g est égal à 3, et ce quelque soit la valeur de ϵ considérée. Nous calculons les niveaux grossiers théoriques pour les méthodes d’ordre 0 et d’ordre 1 en nous appuyant sur la section 10.2.4 et sur le tableau 11.13. Le maillage de Γ_f ayant $N_{f,\lambda/10} = 327680$ éléments est en $\lambda/10$. Nous pouvons remarquer que grâce à la montée en ordre et au seuillage, nous avons divisé le temps de calcul par 1.7 ($39236s. / 22833s.$).

		$niv_g = 2$	$niv_g = 3$	$niv_g = 4$
FMD 0	$\epsilon = 0$	47238	39236	39186
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	36846	29427	30565
	$\epsilon = 10^{-2}$	30705	27073	27822
FMD 1	$\epsilon = 0$	68007	34118	34272
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	49109	26724	27246
	$\epsilon = 10^{-2}$	37305	22833	22942

TAB. 11.13 – Temps de calcul, sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 0$.

		$niv_g = 2$	$niv_g = 3$	$niv_g = 4$
FMD 0	$\epsilon = 0$	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$
FMD 1	$\epsilon = 0$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$
	$\epsilon = 10^{-2}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.14 – Erreur sur l’amplitude de diffusion (Err_a), sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 0$.

Nous traitons à présent le cas d’une fréquence de $4.7GHz$. Pour la FMD d’ordre 0 et la FMD d’ordre 1, les maillages grossiers Γ_g sont respectivement en $\lambda/1.25$ (11520 éléments) et en 2.8λ (720 éléments), et les maillages fin Γ_f sont en $\lambda/10$ (737280 éléments). Les résultats obtenus

sont reportés dans la figure 11.16 et dans les tableaux 11.15 et 11.16.

A cette fréquence, la valeur optimale de ϵ est 10^{-2} . D'après le tableau 11.15, à l'ordre 0 et à l'ordre 1, les meilleurs temps de calcul quelque soit la valeur de ϵ considérée sont obtenus quand le niveau grossier niv_g est égal à 4. Nous pouvons remarquer que grâce à la montée en ordre et au seuillage, nous avons divisé le temps de calcul par 2.4 (125030s. / 52922s.).

		$niv_g = 3$	$niv_g = 4$	$niv_g = 5$
FMD 0	$\epsilon = 0$	154968	125030	136172
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	82611	69715	102935
	$\epsilon = 10^{-2}$	78173	67149	97808
FMD 1	$\epsilon = 0$	109473	102692	295216
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	60219	54861	79549
	$\epsilon = 10^{-2}$	57563	52922	70815

TAB. 11.15 – Temps de calcul, sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 0$.

		$niv_g = 3$	$niv_g = 4$	$niv_g = 5$
FMD 0	$\epsilon = 0$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$
	$\epsilon = 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$
FMD 1	$\epsilon = 0$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$
	$\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$
	$\epsilon = 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$

TAB. 11.16 – Erreur sur l'amplitude de diffusion (Err_a), sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 0$.

Comparaisons entre la FMD et la FMM

Une onde incidente de fréquence $3.2GHz$

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus pour une fréquence de $3.2GHz$ avec la FMM et la FMD lorsque des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 sont utilisés. Pour la FMM, nous reprenons les résultats de la section 7.3.1, et nous utilisons respectivement à l'ordre 0 et à l'ordre 1 des maillages en $\lambda/10$ ($N_f = 327680$) et en $\lambda/4$ ($N_f = 62720$). Pour la FMD, nous considérons à l'ordre 0 un maillage grossier en $\lambda/1.25$ ($N_g = 5120$) et un maillage fin en $\lambda/10$ ($N_f = 327680$), et à l'ordre 1 un maillage grossier en 2.5λ ($N_g = 500$) et un maillage fin en $\lambda/10$ ($N_f = 327680$).

Nous avons obtenu au paragraphe précédent, pour la FMD à l'ordre 0 et à l'ordre 1, des résultats précis avec des maillages grossiers plus lâches que ceux utilisés dans le cas d'une sphère parfaitement absorbante. Nous nous attendons donc à ce que par rapport à la FMM,

la FMD fournisse des temps de calcul très compétitifs tout en donnant des résultats ayant un bon niveau de précision. Pour la FMD, nous donnons uniquement les résultats obtenus dans le cas le plus favorable : $niv_g = 3$ et $\epsilon = 10^{-2}$. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 11.17 et la figure 11.13.

D'après le tableau 11.17, nous avons avec la FMD un gain en mémoire. La FMD d'ordre 1 est moins coûteuse en temps de calcul et en place mémoire que la FMD d'ordre 0, tout en étant plus précise. Pour la FMM, la méthode d'ordre 1 fournit une solution un peu plus précise que celle d'ordre 0 et a un temps de calcul inférieur à cette dernière. La FMD d'ordre 1 permet d'obtenir un facteur 2 en temps de calcul par rapport à la FMM d'ordre 1, pour une consommation mémoire et un niveau d'erreur comparables.

Méthode	Degrés de liberté	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
FMM 0	491520	48502	6.7	$3.9 \cdot 10^{-3}$
FMM 1	313600	47002	5.4	$2.7 \cdot 10^{-3}$
FMD 0, $\epsilon = 10^{-2}$	7680	27073	4.6	$7.3 \cdot 10^{-3}$
FMD 1, $\epsilon = 10^{-2}$	2500	22833	3.7	$5.9 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.17 – Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 0$.

Une onde incidente de fréquence $4.7GHz$

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus pour une fréquence de $4.7GHz$ avec la FMM et la FMD lorsque des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 sont utilisés. Pour la FMM, nous reprenons les résultats de la section 7.3.1, et nous utilisons respectivement à l'ordre 0 et à l'ordre 1 des maillages en $\lambda/10$ ($N_f = 737280$) et en $\lambda/4$ ($N_f = 128000$). Pour la FMD, nous considérons à l'ordre 0 un maillage grossier en $\lambda/1.25$ ($N_g = 11520$) et un maillage fin en $\lambda/10$ ($N_f = 737280$), et à l'ordre 1 un maillage grossier en 2.8λ ($N_g = 720$) et un maillage fin en $\lambda/10$ ($N_f = 737280$).

Pour la FMD, nous donnons uniquement les résultats obtenus dans le cas le plus favorable : $niv_g = 4$ et $\epsilon = 10^{-2}$. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 11.18 et la figure 11.16.

La FMD d'ordre 1 est moins coûteuse en temps de calcul et en place mémoire que la FMD d'ordre 0, tout en étant plus précise. Pour la FMM, la méthode d'ordre 1 fournit une solution un peu plus précise que celle d'ordre 0. Par contre, elle a un temps de calcul supérieur à cette dernière. La FMD d'ordre 1 est un peu moins précise que la FMM d'ordre 0, mais elle est beaucoup moins coûteuse en temps de calcul, le gain étant de 2.7. D'après le tableau 11.18, la mémoire consommée par la FMD d'ordre 1 et celle consommée par la FMM d'ordre 0 sont quasiment identiques.

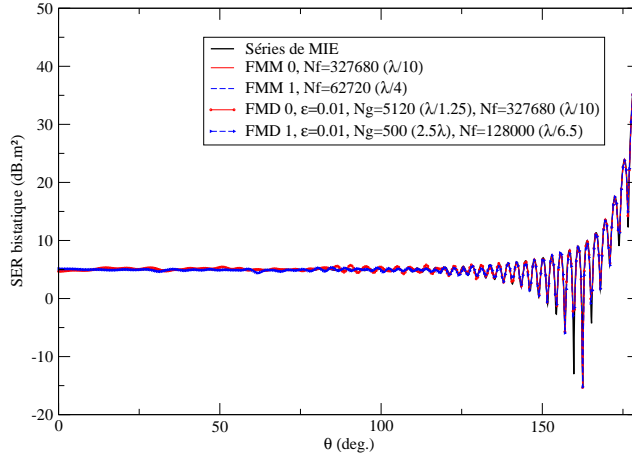


FIG. 11.13 – Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 0$.

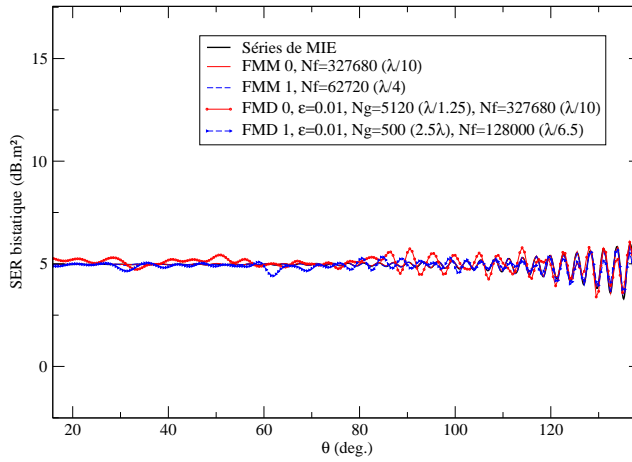


FIG. 11.14 – Zoom, Sphère, $f = 3.2GHz$, $Z_r = 0$.

Méthode	Degrés de liberté	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
FMM 0	1105920	142210	11.2	$1.8 \cdot 10^{-2}$
FMM 1	640000	171658	11.6	$1.1 \cdot 10^{-2}$
FMD 0, $\epsilon = 10^{-2}$	17280	67149	16	$3.7 \cdot 10^{-2}$
FMD 1, $\epsilon = 10^{-2}$	3600	52922	12	$2.9 \cdot 10^{-2}$

TAB. 11.18 – Sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 0$.

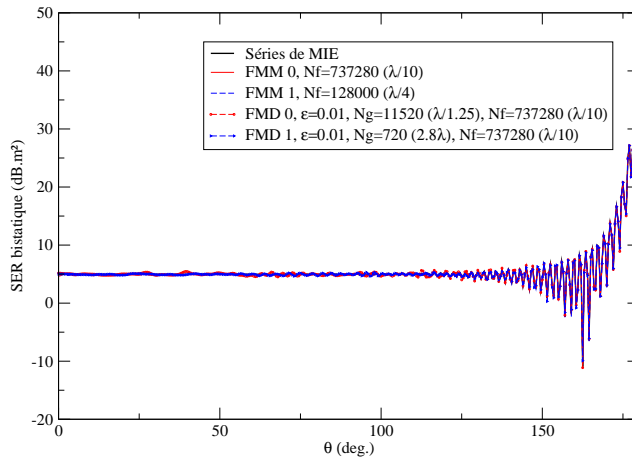


FIG. 11.15 – Sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 0$.

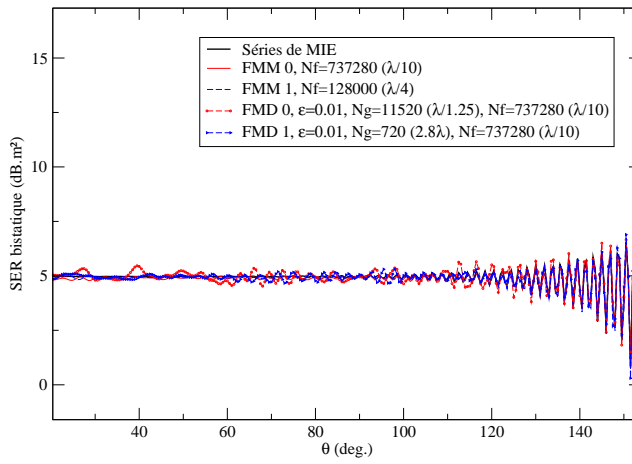


FIG. 11.16 – Zoom, Sphère, $f = 4.7GHz$, $Z_r = 0$.

11.3 L'amande comme objet diffractant

Nous rappelons que pour l'amande, il n'existe pas de solution exacte. Pour comparer les résultats obtenus, nous avons recours à l'emploi d'une solution de référence calculée avec la FMM d'ordre 0 et un maillage très fin (au moins en $\lambda/15$). L'orientation de l'amande est identique à celle de la figure 7.10. Nous renvoyons à la section 7.4.1 pour une description plus précise de cet objet.

Avant d'aller plus loin, nous profitons de la complexité de la géométrie de l'amande pour tester le domaine de validité de l'approximation de la phase choisie (approximation de Kirchhoff). Pour cela, nous considérons une fréquence de $1.2GHz$. La solution de référence est calculée en utilisant la FMM d'ordre 0 et un maillage en $\lambda/15$ ($N_f = 31228$). Nous comparons les résultats obtenus avec la FMM d'ordre 0 et la FMD d'ordre 0. Nous employons, pour la FMM, un maillage en $\lambda/10$ ($N_f = 13632$), et pour la FMD, un maillage grossier en $\lambda/5$ ($N_g = 4236$) et un maillage fin en $\lambda/11$ ($N_f = 16944$).

Nous étudions deux cas : un premier cas où la direction de l'onde incidente est $\xi = (0, 0, -1)^t$, et un second cas où la direction de l'onde incidente est $\xi = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^t$.

Pour le premier cas (figure 11.17), la solution obtenue avec la FMD est nettement moins précise que celle obtenue avec la FMM. Pour ce cas, la dégradation de la précision avec la FMD peut s'expliquer par le fait que l'approximation de la phase n'est plus valide lorsque l'onde incidente est dirigée selon la pointe de l'amande, et donc l'approximation de la phase est inefficace dans ce cas. En effet, l'approximation de Kirchhoff basée sur un remplacement local de l'objet par son plan tangent est prise à défaut ici, car le plan tangent à l'amande varie fortement au niveau de la pointe.

Pour le second cas (figure 11.18), l'onde incidente n'est plus dirigée selon la pointe de l'amande. Les résultats obtenus pour cette incidence à partir de la FMM et de la FMD recollent avec la solution de référence. Ceci confirme que la dégradation de la précision observée avec la FMD dans le premier cas ne prend pas bien en compte les singularités de l'obstacle.

Les difficultés liées à la complexité de la géométrie de l'amande étant exposées, nous considérons pour les prochains cas tests une onde incidente de fréquence $5GHz$ et de direction $\xi = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^t$.

11.3.1 Cas d'une amande parfaitement absorbante ($Z_r = 1$)

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus pour une fréquence de $5GHz$ avec la FMM et la FMD lorsque des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 sont utilisés. Pour la FMM, nous utilisons respectivement à l'ordre 0 et à l'ordre 1 des maillages en $\lambda/10.5$ ($N_f = 271648$) et en $\lambda/7$ ($N_f = 124912$). Pour la FMD, nous considérons à l'ordre 0 un maillage grossier en $\lambda/2.25$ ($N_g = 13632$) et un maillage fin en $\lambda/9.5$ ($N_f = 218112$), et à l'ordre 1 un maillage grossier en $\lambda/1.25$ ($N_g = 4236$) et un maillage fin en $\lambda/10.5$ ($N_f = 271104$). Nous fixons le paramètre niv_g à 5 et le paramètre ϵ du seuillage des fonctions de transfert de la FMD à 10^{-2} .

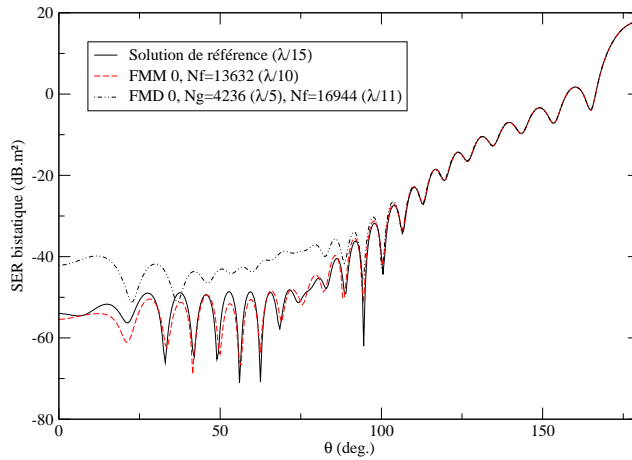


FIG. 11.17 – Amande, $f = 1.2GHz$, $Z_r = 1$, incidence1 : $\xi = (0, 0, -1)^t$.

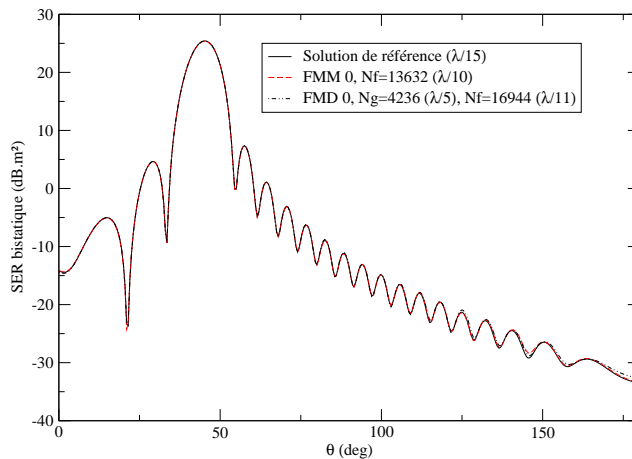


FIG. 11.18 – Amande, $f = 1.2GHz$, $Z_r = 1$, incidence2 : $\xi = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^t$.

Pour tous les cas, niv_f est égal à 8. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 11.19 et la figure 11.19.

La FMM d'ordre 1 fournit une solution plus précise que la FMM d'ordre 0. Par contre, elle a, en raison d'un moins bon conditionnement des systèmes et de la plus grande taille de ces systèmes, un temps de calcul et une consommation en mémoire supérieurs à cette dernière. La FMD d'ordre 1 est plus coûteuse en temps de calcul et en place mémoire que la FMD d'ordre 0, ceci étant dû à la plus grande taille des systèmes d'ordre 1. Cependant, la FMD d'ordre 1 est plus précise que la FMD d'ordre 0. De façon générale, la FMD est un peu moins précise et

consomme à peu près deux fois plus de mémoire que la FMM, mais elle est beaucoup moins coûteuse en temps de calcul. D'après le tableau 11.19, lorsque nous considérons un même niveau de précision (i.e. nous comparons la FMD d'ordre 1 et la FMM d'ordre 0), le gain en temps de calcul réalisé avec la FMD est environ de 1.2.

Que ce soit pour la FMM ou pour la FMD, nous pouvons expliquer la non optimalité des coûts de calcul et de mémoire à l'ordre 1 par le fait que nous n'avons à disposition qu'un nombre limité de maillages. Les résultats obtenus à l'ordre 1 peuvent être sûrement améliorés en ajustant mieux la finesse des maillages utilisés. En effet, les résultats obtenus à l'ordre 1 sont plus précis que ceux obtenus à l'ordre 0.

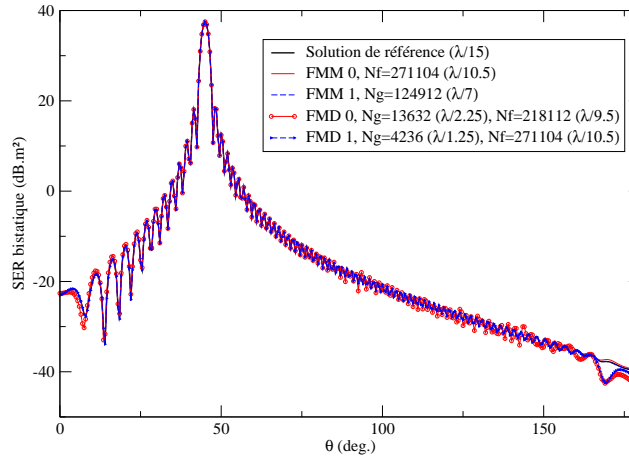


FIG. 11.19 – Amande, $f = 5GHz$, $Z_r = 1$, incidence : $\xi = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^t$.

Méthode	Degrés de liberté	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
FMM 0	406656	42994	4.8	$1.9 \cdot 10^{-3}$
FMM 1	624560	51295	7.9	$1.5 \cdot 10^{-3}$
FMD 0, $\epsilon = 10^{-2}$	20448	18156	16.2	$3.1 \cdot 10^{-3}$
FMD 1, $\epsilon = 10^{-2}$	21180	36631	17.5	$2.2 \cdot 10^{-3}$

TAB. 11.19 – Amande, $f = 5GHz$, $Z_r = 1$, incidence : $\xi = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^t$.

11.3.2 Cas d'une amande parfaitement conductrice ($Z_r = 0$)

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus pour une fréquence de $5GHz$ avec la FMM et la FMD lorsque des éléments finis d'ordre 0 et d'ordre 1 sont utilisés. Pour la FMM,

nous utilisons respectivement à l'ordre 0 et à l'ordre 1 des maillages en $\lambda/10.5$ ($N_f = 271648$) et en $\lambda/5$ ($N_f = 67776$). Pour la FMD, nous considérons à l'ordre 0 un maillage grossier en $\lambda/2.25$ ($N_g = 13632$) et un maillage fin en $\lambda/9.5$ ($N_f = 218112$), et à l'ordre 1 un maillage grossier en $\lambda/1.25$ ($N_g = 4236$) et un maillage fin en $\lambda/10.5$ ($N_f = 271104$). Nous fixons le paramètre niv_g à 5 et le paramètre ϵ à 10^{-2} . Pour tous les cas, niv_f est égal à 8. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 11.20 et la figure 11.20.

La FMM d'ordre 1 fournit une solution plus précise que la FMM d'ordre 0. Par contre, elle a, en raison d'un moins bon conditionnement des systèmes, un temps de calcul supérieur à cette dernière. La consommation en mémoire de ces deux méthodes est équivalente. La FMD d'ordre 1 est plus coûteuse en temps de calcul et en place mémoire que la FMD d'ordre 0, ceci étant dû à la plus grande taille des systèmes d'ordre 1. Cependant, la FMD d'ordre 1 est plus précise que la FMD d'ordre 0. De façon générale, la FMD est un peu moins précise et consomme à peu près deux fois plus de mémoire que la FMM, mais elle est beaucoup moins coûteuse en temps de calcul. D'après le tableau 11.20, lorsque nous considérons un même niveau de précision (i.e. nous comparons la FMD d'ordre 1 et la FMM d'ordre 0), le gain en temps de calcul réalisé avec la FMD est environ de 1.5.

Comme précédemment, les résultats obtenus à l'ordre 1 peuvent être améliorés en ajustant mieux la finesse des maillages.

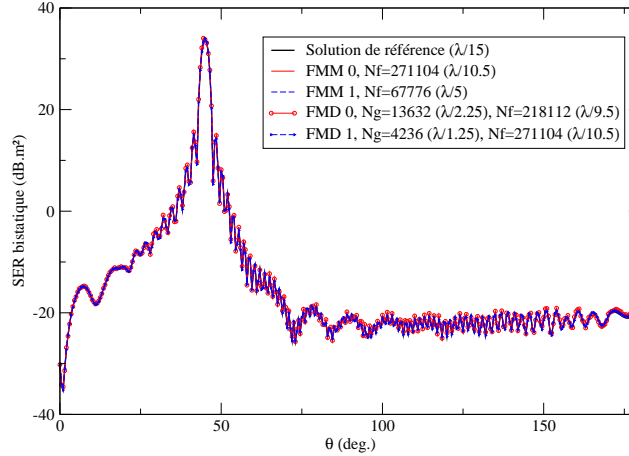


FIG. 11.20 – Amande, $f = 5GHz$, $Z_r = 0$, incidence : $\xi = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^t$.

Méthode	Degrés de liberté	Temps CPU (s.)	Mémoire (Go)	Err_a
FMM 0	406656	71307	5.6	$3.1 \cdot 10^{-2}$
FMM 1	338880	80533	5.8	$2.2 \cdot 10^{-2}$
FMD 0, $\epsilon = 10^{-2}$	20448	31645	16.5	$5.9 \cdot 10^{-2}$
FMD 1, $\epsilon = 10^{-2}$	21180	47916	17.5	$3.4 \cdot 10^{-2}$

TAB. 11.20 – Amande, $f = 5GHz$, $Z_r = 0$, incidence : $\xi = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^t$.

11.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons examiné le comportement de la méthode couplée FMD en fonction de l'ordre des éléments finis et des obstacles (sphère et amande NASA) en considérant à chaque fois le cas d'un objet parfaitement conducteur ($Z_r = 0$), et le cas d'un objet parfaitement absorbant ($Z_r = 1$).

Tout d'abord, en étudiant la convergence en maillage de la FMD pour le cas $Z_r = 1$, il s'est dégagé que l'obtention, avec des éléments finis microlocaux d'ordre 0, d'une solution précise nécessite l'emploi de maillages grossiers Γ_g avec $N_g \lesssim N_f^{1/2}$, ce qui constitue, lors de la montée en fréquence, une limitation tant au niveau du temps de calcul qu'au niveau de la consommation en mémoire. L'utilisation d'éléments finis microlocaux d'ordre 1 permet alors de remédier à ces problèmes, mais aussi de fournir des solutions plus précises. Pour le cas $Z_r = 0$, la FMD converge plus vite en maillage. Cependant, l'utilisation d'éléments finis microlocaux d'ordre 1 reste avantageuse, car ces derniers donnent comme précédemment des résultats plus précis qu'à l'ordre 0, et à moindre coût.

Les gains obtenus avec l'introduction d'éléments finis microlocaux d'ordre 1 dans la version initiale de la FMD sont également observés avec la FMD optimisée.

Nous avons ensuite comparé les résultats obtenus avec la FMD et la FMM. Il est apparu que la FMD est nettement moins coûteuse en temps de calcul que la FMM, mais est un peu moins précise et plus consommatrice en place mémoire que cette dernière. En ce qui concerne la place mémoire, lorsque $N_g \sim N_f^{1/2}$, nous avons $N_g^2 \sim N_f$. Les consommations en mémoire de la FMD optimisée et de la FMM sont donc théoriquement identiques. Cependant, en pratique, la FMD nécessite pour certains cas deux fois plus de mémoire que la FMM, ceci étant probablement dû à la formulation intégrale considérée (EID), qui, par rapport à une méthode intégrale classique, double le nombre d'inconnues. Ce phénomène se répercute plus sur la FMD que sur la FMM, car le stockage pour la FMM se fait en fonction des boîtes multipôlaires du niveau fin niv_f . Lorsque l'obstacle est la sphère, le gain en temps avec la FMD d'ordre 1 est pour $Z_r = 1$ (respectivement $Z_r = 0$) au moins de 1.5 (respectivement 2) par rapport au meilleur temps de la FMM. Lorsque l'objet est l'amande NASA, le gain en temps avec la FMD d'ordre 1 est pour $Z_r = 1$ (respectivement $Z_r = 0$) au moins de 1.2 (respectivement 1.5) par rapport au meilleur temps de la FMM. Les gains observés avec l'amande sont moindres que ceux obtenus avec la sphère. Néanmoins, ils peuvent être améliorés en ajustant mieux la finesse des maillages

utilisés.

Une amélioration possible de la FMD pourrait consister à considérer une autre formulation intégrale. En effet, les EID engendrent avec la FMD des problèmes de mémoire en multipliant par deux la taille des systèmes. De plus, le critère d'arrêt propre aux EID n'est pas utilisé lors de la résolution itérative, du fait du faible coût de cette étape par rapport au calcul du système. Cependant, si la formulation de Després est considérée, il semble que la résolution itérative de la FMD puisse être améliorée en tenant compte du critère d'arrêt des EID. L'impact de cette modification sera d'autant plus intéressant que l'influence du temps nécessaire à l'inversion du système sur le temps total de la résolution est plus importante pour la FMD optimisée que pour la FMD classique.

Une autre solution consisterait à inverser le système en utilisant une méthode directe. Le code utilisé étant séquentiel, cette approche n'a pas été adoptée ici, car autrement la consommation en mémoire de la méthode aurait dépassé les ressources disponibles.

Cependant, la parallélisation du code autoriserait une telle approche tout en réduisant les temps de calcul, et permettrait en outre de considérer des fréquences plus élevées, notamment pour le cas $Z_r = 1$ où la consommation en mémoire de la FMD est importante.

Du fait que la phase soit approchée par une méthode asymptotique, la considération de fréquences plus élevées mettrait encore plus en évidence les gains obtenus avec la FMD optimisée par rapport à la FMM, tout en réduisant l'écart de précision constaté entre la FMD et la FMM. Cependant, pour des géométries complexes telles que l'amande NASA, il paraît nécessaire d'améliorer l'approximation de la phase de l'inconnue en tenant compte des singularités de courbure de l'obstacle.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié la résolution, dans le cadre des hautes fréquences, des équations de Maxwell en régime harmonique et en domaine extérieur non borné par des méthodes d'équations intégrales de frontière d'ordre élevé. La formulation intégrale utilisée est celle de Després [38], car elle fournit des systèmes hermitiens, définis positifs et bien conditionnés. La méthode de résolution considérée a été initiée par Darrigrand [44], et est basée sur le couplage de la méthode de discrétisation microlocale [125] et de la FMM [46].

La méthode de discrétisation microlocale, introduite Abboud, Nédélec et Zhou, associe les méthodes asymptotiques et les éléments finis : la phase de l'inconnue est approchée selon les théories géométriques et physiques de la diffraction, ce qui permet d'obtenir une nouvelle inconnue beaucoup moins oscillante pouvant être approchée avec un nombre de degrés de liberté en $\mathcal{O}(k^\alpha)$ où $\alpha < 2$. Cependant, cette méthode nécessite d'assembler le système avec un nombre d'opérations en $\mathcal{O}(k^4)$, car la discrétisation des intégrales doit être effectuée sur un nombre d'éléments en $\mathcal{O}(k^2)$. Le calcul du système est alors accéléré en adaptant de manière originale l'algorithme de la FMM [44]. La méthode couplée (FMD) a un coût en $\mathcal{O}(k^{\alpha+2} + N_{iter}k^{2\alpha})$ en temps de calcul au lieu de $\mathcal{O}(N_{iter}k^4)$ pour une méthode classique et de $\mathcal{O}(N_{iter}k^2 \ln k)$ pour la FMM multi-niveaux.

Bien que les premiers résultats soient très encourageants, il a été constaté pour les équations de Maxwell qu'ils ne sont pas assez précis pour certains cas, notamment pour les objets parfaitement absorbants. Notre travail a alors consisté à monter en ordre au niveau de l'approximation éléments finis du problème. Ceci a d'abord été effectué pour la FMM, puis pour la FMD, et dans chaque cas nous avons considéré des approximations d'ordre élevé de l'inconnue et de la géométrie. Les éléments finis utilisés sont de classe $H(div)$ [93], et les fonctions de base considérées sont, pour la FMM, celles de Graglia [65], et pour la FMD, une adaptation de ces dernières. Nous avons étudié les effets engendrés sur la FMM par la montée en ordre, et nous avons montré, par le biais des résultats numériques obtenus, que par rapport aux éléments finis d'ordre 0, les éléments finis d'ordre 1 permettent d'accélérer la convergence en maillage et de rendre moins coûteux les produits matrice-vecteur pour la quasi-totalité des cas tests réalisés. Cependant, en raison d'une résolution itérative du problème et du moins bon conditionnement des systèmes d'ordre 1, les temps de calcul de la FMM d'ordre 1 sont parfois supérieurs à ceux de la FMM d'ordre 0. Pour la FMD, la montée en ordre s'est traduite par une amélioration remarquable de la convergence en maillage. Nous avons eu à résoudre, dans le cas d'un conduc-

teur parfait, des problèmes liés au mauvais conditionnement des systèmes d'ordre 1 ; pour la résolution itérative, la méthode de Jacobi a été remplacée par un GMRes préconditionné [90]. Pour la FMD, nous nous sommes ensuite attachés à réduire le coût de l'étape de transfert, car cette étape détermine à elle seule la complexité de la méthode. L'optimisation proposée, basée sur le lissage et le seuillage des fonctions de transfert, permet de considérer moins de directions de discrétisation sur la sphère unité, et d'obtenir une méthode ayant une complexité en $\mathcal{O}(k^2 \ln k + N_{iter} k^{2\alpha})$. Les tests numériques ont montré qu'en choisissant de manière convenable le niveau grossier et le paramètre de seuillage, nous obtenons, en montant en ordre avec la FMD optimisée, des gains importants par rapport à la version initiale de la FMD. Nous avons ensuite comparé la FMD optimisée à la FMM. Par rapport à la FMM, il est apparu que la FMD est nettement moins coûteuse en temps de calcul mais un peu moins précise, et pour certains cas, plus consommatrice en mémoire.

A l'issue de ce travail, certaines perspectives peuvent être envisagées. En ce qui concerne la FMM, nous pouvons songer, au regard des résultats numériques obtenus, à améliorer le préconditionnement du système à l'ordre 1 afin de diminuer le nombre d'itérations de la résolution itérative.

Pour la FMD, une première amélioration pourrait consister à considérer une formulation intégrale autre que les EID, ce qui permettrait notamment de réduire la consommation en mémoire. Une autre perspective serait de paralléliser le code en s'appuyant sur une version parallèle d'un code FMM. Ceci réduirait les temps de calcul et augmenterait la capacité de stockage, ce qui permettrait de considérer des fréquences plus élevées. L'inversion du système pourrait aussi se faire par une méthode directe parallèle efficace, étant donné que le système est de taille réduite. Cette modification étant d'autant plus intéressante que l'influence du coût de cette étape sur le temps total de la résolution est plus importante pour la FMD optimisée que pour la FMD classique. D'autre part, pour des géométries complexes telles que l'amande NASA, nous devons améliorer, par l'emploi de méthodes physiques plus appropriées (par exemple la méthode des couches minces [91]), l'approximation de la phase de l'inconnue en tenant compte des singularités éventuelles ainsi que des zones de fortes courbures de l'obstacle. De plus, l'application de la méthode de discrétisation microlocale étant uniquement valide pour une onde incidente plane et un objet convexe, une généralisation de cette méthode aux objets non convexes éclairés par une onde incidente quelconque semble être nécessaire pour traiter un plus grand nombre de problèmes. En s'inspirant de la méthode développée par de La Bourdonnaye et Tolentino [49], nous pourrions envisager une discrétisation de la phase basée sur la considération de plusieurs directions qui seraient choisies en nombre limité et en fonction de l'obstacle.

Annexe 1

Nous allons montrer l'unisolvance de l'élément fini de classe $H(\text{div})$ de Nédélec d'ordre un. D'après la définition (2.2.2) et la forme des degrés de liberté (2.9) et (2.10), ceci revient à montrer qu'il existe un unique $q \in \mathbb{D}^2$ vérifiant :

$$\alpha_i = \int_{\partial K_i} (q \cdot \hat{n}_i) ds \quad ; \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (11.4)$$

$$\alpha_{i+3} = \int_{\partial K_i} (q \cdot \hat{n}_i) s ds \quad ; \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (11.5)$$

$$\alpha_7 = \int_K q^1 dx \quad \text{où } q^1 = q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11.6)$$

$$(11.7)$$

$$\alpha_8 = \int_K q^2 dx \quad \text{où } q^2 = q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.8)$$

pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_8)$ appartenant à \mathbb{R}^8 .

Afin d'alléger les notations, nous posons :

- $\phi_1 = \Lambda_{012}^1$,
- $\phi_2 = \Lambda_{021}^1$,
- $\phi_3 = \Lambda_{102}^2$,
- $\phi_4 = \Lambda_{201}^2$,
- $\phi_5 = \Lambda_{120}^3$,
- $\phi_6 = \Lambda_{210}^3$,
- $\phi_7 = \frac{\Lambda_{111}^3(\lambda)}{N_{111}^3} - \frac{\Lambda_{111}^1(\lambda)}{N_{111}^1}$,
- $\phi_8 = \frac{\Lambda_{111}^2(\lambda)}{N_{111}^2} - \frac{\Lambda_{111}^3(\lambda)}{N_{111}^3}$.

Comme q admet la décomposition suivante :

$$q = \sum_{j=1}^8 q_j \phi_j,$$

il revient au même de montrer l'existence d'un unique q , que de montrer l'existence d'un unique

vecteur $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_8 \end{pmatrix}$ solution de l'équation matricielle :

$$AQ = \alpha, \quad (11.9)$$

où A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} \int_{\partial K_1} (\phi_1 \cdot \hat{n}_1) ds & \int_{\partial K_1} (\phi_2 \cdot \hat{n}_1) ds & \dots & \dots & \int_{\partial K_1} (\phi_8 \cdot \hat{n}_1) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_{\partial K_3} (\phi_1 \cdot \hat{n}_3) s ds & \dots & \dots & \dots & \int_{\partial K_3} (\phi_8 \cdot \hat{n}_3) s ds \\ \int_K \phi_1^1 dx & \dots & \dots & \dots & \int_K \phi_8^1 dx \\ \int_K \phi_1^2 dx & \dots & \dots & \dots & \int_K \phi_8^2 dx \end{pmatrix}.$$

En tenant compte de l'annulation de certains coefficients sur les six premières lignes de A , nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & b_1 & b_2 \\ * & * & * & * & * & * & b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer le déterminant de A . En effectuant des développements par ligne et par colonne, nous avons :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^6 a_i \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer les coefficients b_1 , b_2 , b_3 et b_4 . Pour simplifier cette tâche, nous remarquons que les coefficients b_1 et b_3 d'une part, et les coefficients b_2 et b_4 d'autre part, sont identiques. Nous posons :

$$I_n = \int_K \phi_7^n dx, \quad \text{et} \quad J_n = \int_K \phi_8^n dx, \quad \text{où } n \in \{1, 2\}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_K \phi_7^n dx \\
&= \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} 3[\lambda_3(\lambda_1 l_2^n - \lambda_2 l_1^n) - \lambda_1(\lambda_2 l_3^n - \lambda_3 l_2^n)] d\lambda_2 \\
&= \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} 3[(\lambda_2)^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2]l_1^n + (2\lambda_1 - 2(\lambda_1)^2 - \lambda_1\lambda_2)l_2^n] d\lambda_2 \\
I_n &= \frac{3l_2^n}{8}, \quad n \in \{1, 2\}.
\end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons $J_n = \frac{3l_1^n}{8}$, $n \in \{1, 2\}$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (b_1 b_4 - b_2 b_3) \prod_{i=1}^6 a_i \\
&= \frac{9}{64} (l_1^2 l_2^1 - l_1^1 l_2^2) \prod_{i=1}^6 a_i \neq 0,
\end{aligned}$$

car les vecteurs l_1 et l_2 définis par $l_1 = \begin{pmatrix} l_1^1 \\ l_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $l_2 = \begin{pmatrix} l_1^1 \\ l_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants,

ce qui entraîne que $|l_1 \wedge l_2| = |l_1^2 l_2^1 - l_1^1 l_2^2|$ est non nul.

Nous venons de montrer que la matrice A est inversible puisque son déterminant est non nul, et donc que l'élément fini de classe $H(\text{div})$ d'ordre 1 est unisolvant.

Annexe 2

Partie A

Dans cette partie, nous décrivons la méthode classique de triangulation d'une surface Γ . La triangulation de Γ nous permet par la suite de construire Γ_h , surface approchant Γ et servant à l'approximation numérique des différentes intégrales.

Nous nous donnons en premier lieu, une surface fermée $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, supposée assez régulière, et pouvant être définie comme la réunion de p composantes connexes Γ_i .

La surface Γ étant régulière, elle admet un recouvrement fini d'ouverts $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^p$, i.e. $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^p \mathcal{O}_i$,

et il existe un difféomorphisme φ_i associé à chaque ouvert \mathcal{O}_i , qui envoie \mathcal{O}_i dans un cube de \mathbb{R}^2 . Nous posons désormais $\phi_i = \varphi_i^{-1}$.

Nous avons donc un système fini $\{\mathcal{O}_i, \phi_i\}_{i=1}^p$ de cartes formant un atlas de Γ , à partir duquel nous pouvons "triangler" Γ , i.e. pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe un ouvert polygônale D_i qui vérifie $\overline{D}_i \subset \omega_i$ et $\phi_i(\overline{D}_i) = \Gamma_i$, où ω_i est l'ouvert de \mathbb{R}^2 permettant de paramétrer \mathcal{O}_i par $\phi_i : \omega_i \rightarrow \mathcal{O}_i$.

Remarque. $\phi : \omega \rightarrow \mathcal{O}$ est un système de coordonnées locales.

Nous avons la "triangulation" suivante de Γ :

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^p \Gamma_i = \bigcup_{i=1}^p \phi_i(\overline{D}_i) \subset \bigcup_{i=1}^p \phi_i(\omega_i). \quad (11.10)$$

Cette triangulation vérifie les conditions de compatibilités suivantes :

$$\forall (\omega_i, D_i, \phi_i) \neq (\omega_j, D_j, \phi_j), \quad \phi_i(\overline{D}_i) \cap \phi_j(\overline{D}_j) = \begin{cases} \text{soit } \emptyset \\ \text{soit un sommet commun} \\ \text{soit une arête curviligne commune} \end{cases}$$

Remarque. Une telle triangulation existe toujours pour une variété C^∞ compacte et orientée.

Nous considérons \mathcal{T}_i^h une triangulation de D_i , que nous supposons régulière, i.e. \mathcal{T}_i^h doit satisfaire les conditions usuelles :

- $\forall T \in \mathcal{T}_i^h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq c_1$, où c_1 est une constante indépendante de T et de h ,
- $\frac{h}{h_T} \leq c_2$, où c_2 est une constante indépendante de T et de h ,

où h_T (respectivement ρ_T) correspond au diamètre du cercle circonscrit (inscrit) du triangle T , et

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_i^h} h_T. \quad (11.11)$$

Soit ϕ_i^T l'interpolée linéaire de ϕ_i sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_i^h$. Nous notons $\mathcal{T}_*^h = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{T}_i^h$. Nous définissons ensuite ϕ_{ih} la fonction définie sur \mathcal{T}_i^h dont la restriction à $T \in \mathcal{T}_i^h$ coïncide avec ϕ_i^T , et ϕ_h la fonction définie sur \mathcal{T}_*^h dont la restriction à \mathcal{T}_i^h coïncide avec ϕ_{ih} . Pour tous triangles distincts T_1 et T_2 appartenant à \mathcal{T}_i^h , $\phi_i^{T_1}(T_1)$ et $\phi_i^{T_2}(T_2)$ vérifient les conditions de compatibilités vues précédemment. Nous pouvons alors définir :

$$\widetilde{\Gamma}_h = \bigcup_{i=1}^p \bigcup_{T \in \mathcal{T}_i^h} \phi_i^T(T). \quad (11.12)$$

Nous définissons donc une nouvelle triangulation :

$$\mathcal{T}_h = \{K \text{ plan} \mid K = \phi_h(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_*^h\}. \quad (11.13)$$

Il apparaît clairement que la juxtaposition des éléments plans de \mathcal{T}_h forme une surface polyédrique fermée $\widetilde{\Gamma}_h$ dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. $\widetilde{\Gamma}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ est déjà une approximation de Γ . Nous pourrions choisir $\Gamma_h = \widetilde{\Gamma}_h$, mais nous approcherions Γ avec seulement, une surface plane et non avec une surface courbe.

Nous considérons ψ la projection orthogonale de $\widetilde{\Gamma}_h$ sur Γ . A chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$, nous associons l'élément fini de Lagrange $(K, \Sigma_K, \mathbb{P}_l)$, où \mathbb{P}_l est l'espace des polynômes à deux indéterminées, à coefficients complexes et de degré total inférieur ou égal à l ; Σ_K est l'ensemble des degrés de libertés de l'élément fini, et est ici l'ensemble des valeurs prises par p quelconque dans \mathbb{P}_l sur un ensemble N_K^l de $\frac{(l+1)(l+2)}{2}$ nœuds choisis sur K .

Remarque. l est l'ordre d'approximation de la géométrie.

Nous définissons $F_K = \Pi_l \psi|_K$ l'interpolée d'ordre l de ψ restreinte à K , obtenue à partir de l'élément fini $(K, \Sigma_K, \mathbb{P}_l)$.

Nous avons la définition suivante de Γ_h :

$$\Gamma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} F_K(K). \quad (11.14)$$

La surface Γ_h , construite ci-dessus, est totalement définie par un nombre fini de points de Γ . Elle nous permet ainsi de poser le problème discret en remplaçant Γ par Γ_h dans les équations intégrales.

Partie B

Nous introduisons quelques notions de géométrie différentielle dans le but d'établir une relation entre Γ et Γ_h , tout en gardant à l'esprit ce qui a été vu précédemment dans la partie A de cette annexe. Nous définissons Φ , un C^∞ -difféomorphisme entre $\Gamma \times]-\varepsilon; \varepsilon[$ et un voisinage tubulaire U_ε de Γ qui est constitué des points dont la distance à Γ est inférieure à ε , par :

$$\begin{aligned} \Phi : \Gamma \times]-\varepsilon; \varepsilon[&\longrightarrow U_\varepsilon \\ (m, t) &\longrightarrow \Phi(m, t) = m + t\vec{n}(m), \end{aligned} \quad (11.15)$$

où $U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \inf_{y \in \Gamma} |x - y| < \varepsilon\}$, et \vec{n} est la normale unitaire à Γ au point m .

De (11.15), il s'ensuit que pour une carte locale (\mathcal{O}, ϕ) , l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \omega \times]-\varepsilon; \varepsilon[&\longrightarrow U \\ (y, t) &\longrightarrow \Psi(y, t) = \phi(y) + t\vec{n}(\phi(y)), \end{aligned} \quad (11.16)$$

est un C^∞ -difféomorphisme.

Dans les notations ci-dessus, U est un ouvert de \mathbb{R}^3 , et ϕ va de ω , qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 , dans $\mathcal{O} \subset \Gamma$. La relation liant les coordonnées locales $y = (y^1, y^2)$ de la carte (\mathcal{O}, D, ϕ) , avec $K = \phi_T(T)$ (où ϕ_T est l'interpolée de ϕ) et $T \subset D$, aux coordonnées $\xi = (\xi^1, \xi^2)$, est donnée par :

$$\phi(y^1, y^2) + t(y^1, y^2)\vec{n}(\phi(y^1, y^2)) = F_K(\xi^1, \xi^2), \quad (11.17)$$

où F_K correspond à l'interpolée d'ordre l de la projection orthogonale de $\widetilde{\Gamma}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ sur Γ ,

construit à partir de l'élément fini Lagrangien $(K, \Sigma_K, \mathbb{P}_l)$.

Nous avons donc $(\psi \circ F_K)(\xi) = \phi(y^1(\xi), y^2(\xi))$, ce qui entraîne :

$$\phi(y^1(\xi), y^2(\xi)) + t(y^1(\xi), y^2(\xi))\vec{n}(\phi(y^1(\xi), y^2(\xi))) = F_K(\xi), \quad (11.18)$$

soit avec un léger abus de notation :

$$(\psi \circ F_K)(\xi^1, \xi^2) + t(\xi^1, \xi^2)\vec{n}(\xi^1, \xi^2) = F_K(\xi^1, \xi^2). \quad (11.19)$$

Nous venons donc d'établir une relation entre les surfaces Γ_h et Γ .

A partir de (11.19), Bendali a montré [19], qu'en remplaçant le plan tangent à Γ par le plan

tangent à Γ_h , alors il y a perte d'un ordre de convergence, et pour un schéma d'ordre 1, il peut aussi y avoir perte de la consistance.

En effet, en dérivant (11.19) par rapport à ξ^α , nous obtenons :

$$\vec{e}_\alpha + \frac{\partial t}{\partial \xi^\alpha} \vec{n} + t \frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi^\alpha} = \vec{e}_\alpha^h, \quad (11.20)$$

où $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (resp. $\{\vec{e}_1^h, \vec{e}_2^h\}$) forme une base du plan tangent à Γ (resp. Γ_h).

De l'égalité (11.20), nous déduisons l'estimation d'erreur suivante :

$$|\vec{e}_\alpha - \vec{e}_\alpha^h| \leq ch^l, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (11.21)$$

puisque la fonction t , s'annulant sur l'ensemble des nœuds de K utilisé pour définir les degrés de liberté de l'élément fini $(K, \Sigma_K, \mathbb{P}_l)$, vérifie les résultats classiques d'interpolation :

$$|t(\xi^1, \xi^2)| \leq ch^{l+1}, \quad (11.22)$$

$$\left| \frac{\partial t}{\partial \xi^\alpha}(\xi^1, \xi^2) \right| \leq ch^l, \quad (11.23)$$

où c est une constante indépendante de h et de K .

Nous voyons bien, que cette perte dans l'ordre d'approximation du plan tangent à Γ est due à la présence de la normale dans (11.19). Donc pour conserver les ordres d'approximation de la géométrie, il ne faut pas directement approcher le plan tangent à Γ par le plan tangent à Γ_h . Pour remédier à cela, une solution possible consiste à prendre comme base du plan tangent à Γ_h :

$$\vec{e}_\alpha^h = \frac{\partial \widetilde{\rho}_K}{\partial \xi^\alpha}, \quad (11.24)$$

où nous définissons $\widetilde{\rho}_K$ comme l'interpolée de $(\psi \circ F_K)$ construit à partir de l'élément fini $(K, \widetilde{\Sigma}_K, \mathbb{P}_{l+1})$.

De la même façon que précédemment, nous obtenons l'estimation d'erreur suivante :

$$|\vec{e}_\alpha^\Gamma - \vec{e}_\alpha^h| \leq ch^{l+1}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (11.25)$$

Partie C

Nous reprenons les notations introduites au chapitre 3. Nous montrons que les fonctions de base courbes d'ordre élevé de Bendali (cf section 3.2) et de Graglia (cf section 3.3) sont équivalentes. Nous notons respectivement x_B et x_G les paramétrisations de Γ_h de Bendali et de Graglia. Pour établir ce résultat, il va falloir tout d'abord comparer les bases du plan tangent à Γ_h obtenues à partir des paramétrisations de Bendali et de Graglia. Pour les distinguer, nous posons :

$$\begin{aligned}
- \vec{b}_1^h &= \frac{\partial x_B}{\partial \xi^1}, \text{ et } \vec{b}_2^h = \frac{\partial x_B}{\partial \xi^2}, \\
- \vec{g}_1^h &= \frac{\partial x_G}{\partial \lambda_1}, \text{ et } \vec{g}_2^h = \frac{\partial x_G}{\partial \lambda_2},
\end{aligned}$$

où $\{\vec{b}_1^h, \vec{b}_2^h\}$ est une base du plan tangent à Γ_h obtenue à partir de la paramétrisation de Bendali, et $\{\vec{g}_1^h, \vec{g}_2^h\}$ est une base du plan tangent à Γ_h obtenue à partir de la paramétrisation de Graglia.

Afin de comparer la base $\{\vec{b}_1^h, \vec{b}_2^h\}$ liée aux coordonnées $\{\xi^1, \xi^2\}$, et la base $\{\vec{g}_1^h, \vec{g}_2^h\}$ liée aux coordonnées $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, il faut mettre en relation ces systèmes.

Soit \widetilde{K}_h un élément courbe de Γ_h , et soit K l'élément plan de $\widetilde{\Gamma}_h$ tel que \widetilde{K}_h est l'image de K par F_K , l'interpolée de la projection orthogonale de $\widetilde{\Gamma}_h$ sur Γ . Les coordonnées barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ associées aux sommets de K s'écrivent comme des fonctions affines de ξ^1 et de ξ^2 :

$$\lambda_i(\xi^1, \xi^2) = \alpha_i + \beta_i \xi^1 + \gamma_i \xi^2 \quad ; \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (11.26)$$

Nous posons : $\lambda_i(\xi^1, \xi^2) = \phi_i(\xi^1, \xi^2)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Les fonctions $\{\phi_i\}_{i=1}^3$ sont complètement définies, car elles vérifient les relations $\phi_i(a_j^K) = \delta_{ij}$, a_1^K , a_2^K et a_3^K correspondant aux sommets s_{23} , s_{13} et s_{12} de K .

En posant $\xi = (\xi^1, \xi^2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, nous obtenons :

$$x_G(\lambda) = (x_G \circ \phi)(\xi) = x_B(\xi). \quad (11.27)$$

Nous avons en utilisant (11.27) et la formule de dérivation des fonctions composées du calcul différentiel :

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1^h &= \frac{\partial x_B}{\partial \xi^1} = \frac{\partial(x_G \circ \phi)}{\partial \xi^1} \\
&= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial x_G}{\partial \lambda_j} \circ \phi \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi^1} \\
\vec{b}_1^h &= \sum_{j=1}^2 \beta_j (\vec{g}_j^h \circ \phi).
\end{aligned} \quad (11.28)$$

De la même façon, nous avons pour \vec{b}_2^h :

$$\vec{b}_2^h = \frac{\partial x_B}{\partial \xi^2} = \sum_{j=1}^2 \gamma_j (\vec{g}_j^h \circ \phi). \quad (11.29)$$

Soit $\sqrt{g_h^B}$ le jacobien provenant de la paramétrisation de Bendali, et soit $\sqrt{g_h^G}$ le jacobien provenant de la paramétrisation de Graglia, i.e. en posant dS l'élément de surface, nous avons $dS = \sqrt{g_h^B} d\xi^1 d\xi^2 = \sqrt{g_h^G} d\lambda_1 d\lambda_2$.

$\sqrt{g_h^B}$ (respectivement $\sqrt{g_h^G}$) est la racine carrée de la valeur absolue du déterminant du tenseur métrique (TM^B) (respectivement (TM^G)) associé à $\{\vec{b}_1^h, \vec{b}_2^h\}$ (respectivement $\{\vec{g}_1^h, \vec{g}_2^h\}$). Les tenseurs métriques (TM^B) et (TM^G) sont définis par :

$$(TM^B)_{\widetilde{K}_h} = \begin{pmatrix} (\vec{b}_1^h \cdot \vec{b}_1^h) & (\vec{b}_1^h \cdot \vec{b}_2^h) \\ (\vec{b}_1^h \cdot \vec{b}_2^h) & (\vec{b}_2^h \cdot \vec{b}_2^h) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (TM^G)_{\widetilde{K}_h} = \begin{pmatrix} (\vec{g}_1^h \cdot \vec{g}_1^h) & (\vec{g}_1^h \cdot \vec{g}_2^h) \\ (\vec{g}_1^h \cdot \vec{g}_2^h) & (\vec{g}_2^h \cdot \vec{g}_2^h) \end{pmatrix} \quad (11.30)$$

Nous avons donc $\sqrt{g_h^B} = |\vec{b}_1^h \wedge \vec{b}_2^h|$ et $\sqrt{g_h^G} = |\vec{g}_1^h \wedge \vec{g}_2^h|$. A l'aide de (11.28) et (11.29), $\sqrt{g_h^B}$ s'exprime en fonction de $\sqrt{g_h^G}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{g_h^B} &= |\vec{b}_1^h \wedge \vec{b}_2^h| \\ &= c|\vec{g}_1^h \wedge \vec{g}_2^h| \circ \phi, \end{aligned} \quad (11.31)$$

où $c = |\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1|$.

Remarque. Pour une approximation de la surface d'ordre 1, nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{g_h^B} &= |\vec{f}_1^K \wedge \vec{f}_2^K| = 1 \\ &= c\sqrt{g_h^G} \circ \phi = 2mes(K)c, \end{aligned}$$

ce qui entraîne $c = \frac{1}{2mes(K)}$.

Nous procédons à des simplifications au niveau des notations utilisées. $\widetilde{\Lambda}_\beta$ désigne n'importe quelle fonction de base d'ordre élevé de Graglia. La notation des fonctions de base d'ordre élevé de Graglia est telle qu'à chaque fonction de base \widetilde{RT}_β de Bendali, il correspond une fonction de base $\widetilde{\Lambda}_\beta$ de Graglia. Cette correspondance entre \widetilde{RT}_β et $\widetilde{\Lambda}_\beta$ se fait par le biais des fonctions de base planes RT_β et Λ_β .

Les fonctions de base courbes de Bendali $\{\widetilde{RT}_\beta\}_\beta$ et de Graglia $\{\widetilde{\Lambda}_\beta\}_\beta$ sont définies par :

$$\widetilde{RT}_\beta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{g_h^B}}((RT_\beta \cdot \vec{f}_1^K)\vec{b}_1^h + (RT_\beta \cdot \vec{f}_2^K)\vec{b}_2^h), \quad (11.32)$$

$$\widetilde{\Lambda}_\beta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{g_h^G}}((\Lambda_\beta \cdot \vec{e}_K^1)\vec{g}_1^h + (\Lambda_\beta \cdot \vec{e}_K^2)\vec{g}_2^h). \quad (11.33)$$

Nous supposons que les fonctions RT_{β_0} et Λ_{β_0} vérifient :

$$RT_{\beta_0}(\xi) = (\Lambda_{\beta_0} \circ \phi)(\xi). \quad (11.34)$$

Nous allons montrer que \widetilde{RT}_{β_0} et $\widetilde{\Lambda}_{\beta_0}$ sont équivalentes.

Soit P la matrice associée à l'application $Id_{e,f}$, définie par :

$$Id_{e,f} : (\mathbb{R}^2, \{\vec{e}_1^K, \vec{e}_2^K\}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \{\vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}). \quad (11.35)$$

\vec{e}_1^K et \vec{e}_2^K étant définis par :

$$\vec{e}_1^K = l_2, \quad \text{et} \quad \vec{e}_2^K = -l_1,$$

et \vec{f}_1^K et \vec{f}_2^K étant définis par :

$$\vec{f}_1^K = \frac{\overrightarrow{a_1^K a_2^K}}{|a_1^K a_2^K|}, \quad \text{et} \quad \vec{f}_2^K = \frac{\overrightarrow{a_1^K a_3^K} - (\overrightarrow{a_1^K a_3^K} \cdot \vec{f}_1^K) \vec{f}_1^K}{|\overrightarrow{a_1^K a_3^K} - (\overrightarrow{a_1^K a_3^K} \cdot \vec{f}_1^K) \vec{f}_1^K|}, \quad (11.36)$$

nous avons :

$$\vec{e}_1^K = -\xi_3^1 \vec{f}_1^K - \xi_3^2 \vec{f}_2^K, \quad (11.37)$$

$$\vec{e}_2^K = (\xi_2^1 - \xi_3^1) \vec{f}_1^K - \xi_3^2 \vec{f}_2^K, \quad (11.38)$$

en notant $\xi_i = (\xi_i^1, \xi_i^2)$ les coordonnées de a_i^K dans le repère $\{a_1^K, \vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$.

P s'écrit donc :

$$P = \begin{pmatrix} -\xi_3^1 & \xi_2^1 - \xi_3^1 \\ -\xi_3^2 & -\xi_3^2 \end{pmatrix}. \quad (11.39)$$

Soient (x^1, x^2) les coordonnées d'un vecteur \vec{v} dans la base $\{\vec{e}_1^K, \vec{e}_2^K\}$, et (y^1, y^2) les coordonnées de ce même vecteur dans la base $\{\vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$. Le passage des coordonnées (x^1, x^2) aux coordonnées (y^1, y^2) se fait par :

$$y^i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} x^j, \quad i = 1, 2. \quad (11.40)$$

(11.40) étant équivalent à :

$$\vec{v} \cdot \vec{f}_i^K = \sum_{j=1}^2 P_{ij} \vec{v} \cdot \vec{e}_j^K, \quad i = 1, 2, \quad (11.41)$$

nous avons :

$$\widetilde{RT}_{\beta_0}(\xi) = \frac{1}{c(\sqrt{g_h^G} \circ \phi)} ((RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_1^K) \vec{b}_1^h + (RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_2^K) \vec{b}_2^h) \quad (11.42)$$

$$= \frac{1}{c(\sqrt{g_h^G} \circ \phi)} ((RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_1^K) \sum_{k=1}^2 \beta_k (\vec{g}_k^h \circ \phi) + (RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_2^K) \sum_{k=1}^2 \gamma_k (\vec{g}_k^h \circ \phi)) \quad (11.43)$$

En remarquant que $(RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_1^K)$ et $(RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_2^K)$ sont respectivement les premières et secondes coordonnées de RT_{β_0} dans la base orthonormée $\{\vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$, nous pouvons écrire :

$$RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_1^K = \sum_{j=1}^2 P_{1j}(RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^j), \quad (11.44)$$

$$RT_{\beta_0} \cdot \vec{f}_2^K = \sum_{j=1}^2 P_{2j}(RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^j). \quad (11.45)$$

D'où, nous avons :

$$\begin{aligned} \widetilde{RT}_{\beta_0}(\xi) &= \frac{1}{c(\sqrt{g_h^G} \circ \phi)} \left(\left(\sum_{j=1}^2 P_{1j}(RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^j) \right) \sum_{k=1}^2 \beta_k(\vec{g}_k^h \circ \phi) \right. \\ &+ \left. \left(\sum_{j=1}^2 P_{2j}(RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^j) \right) \sum_{k=1}^2 \gamma_k(\vec{g}_k^h \circ \phi) \right) \end{aligned} \quad (11.46)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c(\sqrt{g_h^G} \circ \phi)} \left((\beta_1 \sum_{j=1}^2 P_{1j}(RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^j) + \gamma_1 \sum_{j=1}^2 P_{2j}(RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^j))(\vec{g}_1^h \circ \phi) \right. \\ &+ \left. (\beta_2 \sum_{j=1}^2 P_{1j}(RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^j) + \gamma_2 \sum_{j=1}^2 P_{2j}(RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^j))(\vec{g}_2^h \circ \phi) \right). \end{aligned} \quad (11.47)$$

Remarque. L'obtention des coefficients $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}_{i=1}^3$, intervenant dans les coordonnées barycentriques, se fait en utilisant les relations $\lambda_i(a_j^K) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq 3$, et en choisissant a_1^K comme origine du repère $\{O_K, \vec{f}_1^K, \vec{f}_2^K\}$. De plus, en tenant compte de la façon dont ont été choisis les vecteurs \vec{f}_1^K et \vec{f}_2^K dans (11.36), nous obtenons :

$$\begin{aligned} - \alpha_1 &= 1, \beta_1 = -\frac{1}{\xi_2^1}, \gamma_1 = \frac{\xi_3^1 - \xi_2^1}{\xi_2^1 \xi_3^2}, \\ - \alpha_2 &= 0, \beta_2 = \frac{1}{\xi_2^1}, \gamma_2 = -\frac{\xi_3^1}{\xi_2^1 \xi_3^2}, \\ - \alpha_3 &= 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = \frac{1}{\xi_3^2}. \end{aligned}$$

D'après les relations :

$$\begin{aligned} - \beta_1 P_{11} + \gamma_1 P_{21} &= 1, \\ - \beta_1 P_{12} + \gamma_1 P_{22} &= 0, \\ - \beta_2 P_{11} + \gamma_2 P_{21} &= 0, \end{aligned}$$

$$- \beta_2 P_{12} + \gamma_2 P_{22} = 1,$$

il vient immédiatement que :

$$\widetilde{RT}_{\beta_0}(\xi) = \frac{1}{c(\sqrt{g_h^G} \circ \phi)} \left((RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^1)(\vec{g}_1^h \circ \phi) + (RT_{\beta_0} \cdot \vec{e}_K^2)(\vec{g}_2^h \circ \phi) \right). \quad (11.48)$$

En utilisant les relations (11.34) et (3.31), nous avons :

$$\widetilde{RT}_{\beta_0}(\xi) = \frac{1}{N_{\beta_0}} (\widetilde{\Lambda}_{\beta_0} \circ \phi)(\xi), \quad (11.49)$$

N_{β_0} étant le coefficient de normalisation de $\widetilde{\Lambda}_{\beta_0}$.

Bibliographie

- [1] Workshop EM JINA, November 2002.
- [2] T. ABOUD, J.-C. NÉDÉLEC, and B. ZHOU. Méthodes des équations intégrales pour les hautes fréquences. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 318, serie I :165–170, 1994.
- [3] T. ABOUD, J.-C. NÉDÉLEC, and B. ZHOU. Improvement of the Integral Equation Method for High Frequency Problems. *Third international conference on mathematical aspects of wave propagation phenomena, SIAM*, pages 178–187, 1995.
- [4] M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. John Wiley, New York, 1972.
- [5] B. ALPERT and R. JACKOB-CHIEN. A fast spherical filter with uniform resolution. *J. Comput. Phys.*, 2(136), 1997.
- [6] X. ANTOINE and H. BARUCQ. Microlocal diagonalization of strictly hyperbolic pseudo-differential systems and application to the design of radiation conditions in electromagnetism. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(6) :1877–1905, 2001.
- [7] X. ANTOINE and H. BARUCQ. Approximation by generalized impedance boundary conditions of a transmission problem in acoustic scattering. *ESAIM : M2AN*, 39(5) :1041–1059, 2005.
- [8] X. ANTOINE, H. BARUCQ, and A. BENDALI. Bayliss-Turkel-like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape. *J. Math. Anal. Appl.*, 229(1) :184–211, 1999.
- [9] X. ANTOINE, H. BARUCQ, and L. VERNHET. High-frequency asymptotic analysis of a dissipative transmission problem resulting in generalized impedance boundary conditions. *Asymptot. Anal.*, 26(3-4) :257–283, 2001.
- [10] A. BACHELOT, E. DARRIGRAND, and K. MER-NKONGA. Coupling of a Multilevel Fast Multipole and a Microlocal Discretization for the 3-D Integral Equations of Electromagnetism. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 336, serie 1 :505–510, 2003.
- [11] N. BARTOLI. *Modèles pour la diffraction d’ondes par des obstacles revêtus de couches minces. Résolution de problèmes de diffraction d’ondes via une formulation intégrale de type point selle*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse 3, Décembre 2000.
- [12] N. BARTOLI, A. BENDALI, and F. COLLINO. Equations intégrales de Després. Rapport tr/emc/00/03, CERFACS, Toulouse, France, 2000.

- [13] N. BARTOLI and F. COLLINO. Integral Equations via Saddle Point Problem for Acoustic Problems. *M2AN*, 34(5) :1023–1049, 2000.
- [14] H. BARUCQ. A new family of first-order boundary conditions for the Maxwell system : derivation, well-posedness and long-time behavior. *J. Math. Pures Appl.*, 82(1) :67–88, 2003.
- [15] H. BARUCQ, F. DELAURENS, and B. HANOZET. Method of absorbing boundary conditions : phenomena of error stabilization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(3) :1113–1129, 1998.
- [16] A. BAYLISS and E. TURKEL. Radiation boundary conditions for wavelike equations. *Comm. Pure and Appl. Math*, 13 :707–725, 1980.
- [17] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX, and P. JOLY. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *J. Comput. Phys.*, 188(2) :399–433, 2003.
- [18] E. BÉCACHE and P. JOLY. On the analysis of Bérenger’s perfectly matched layers for Maxwell’s equations. *Math. Model. Numer. Anal.*, 36(1) :87–119, 2002.
- [19] A. BENDALI. *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. Thèse d’état, Université Paris VI, Janvier 1984.
- [20] A. BENDALI, M.B. FARES, and J. GAY. A boundary-element solution of the leontovitch problem. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 47(10) :1597–1605, 1999.
- [21] A. BENDALI and L. HALPERN. Approximation par troncature de domaine de la solution du problème aux limites extérieur pour le système de Maxwell en régime sinusoidal. *C.R.A.S.*, 294 :557–560, 1982.
- [22] A. BENDALI and K. LEMRABET. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [23] J.P. BÉRENGER. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114 :185–200, 1994.
- [24] M. BERGOUNIOUX. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*. Dunod, 2001.
- [25] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, and V. ROKHLIN. The fast wavelet transform and numerical algorithms. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44 :141–183, 1991.
- [26] D. BOUCHE and F. MOLINET. *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*. Springer-Verlag, 1994.
- [27] F. BREZZI and M. FORTIN. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15. Springer-Verlag, 1991.
- [28] O.P. BRUNO and L.A. KUNYANSKY. A fast high order algorithm for the solution of surface scattering problems : basic implementation, tests, and applications. *J. Comput. Phys.*, 169(1) :80–110, 2001.
- [29] Q. CARAYOL. *Développement et analyse d’une méthode multipôle multiniveau pour l’électromagnétisme*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, Décembre 2001.

- [30] B. CARPENTIERI. *Sparse preconditionners for dense linear systems from electromagnetic applications*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, Avril 2002.
- [31] H. CHENG, L. GREENGARD, and V. ROKHLIN. A Fast Adaptative Multipole Algorithm in Three Dimensions. *J. Comput. Phys.*, 155(2) :468–498, 1999.
- [32] P.G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [33] J.P. CIONI. *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis, Décembre 1995.
- [34] G. COHEN, P. JOLY, J.E. ROBERTS, and N. TORDJMAN. Higher-order triangular finite elements with mass-lumping for the wave equation. *SIAM J. on Numer. Anal.*, 38(6) :2047–2078, 2001.
- [35] R. COIFMAN, V. ROKHLIN, and S. WANDZURA. The Fast Multipole Method for the Wave Equation : A Pedestrian Prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35(3) :7–12, June 1993.
- [36] R. COIFMAN, V. ROKHLIN, and S. WANDZURA. Faster single-stage multipole method for the wave equation. In *10th Annu. Rev. Progress Appl. Computat. Electromagn.*, Monterey, CA, pages 19–24, 1994.
- [37] F. COLLINO. Communication personnelle, Mars 2000.
- [38] F. COLLINO and B. DESPRÉS. Integral equations via saddle point problems for time-harmonic Maxwell’s equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 150 :157–192, 2003.
- [39] F. COLLINO and K. MER-NKONGA. The Fast Multipole Method Applied to a Mixed Integral System for Time-Harmonic Maxwell’s Equations. In *JEE 02 : European Symposium on Numerical Methods in Electromagnetics*, pages 121–126. ONERA - Toulouse, France, March 2002.
- [40] F. COLLINO and F. MILLOT. A 2-Components Algorithm for the Multilevel Fast Multipole Method for Solving Large Scale Diffraction Problems. In *JEE 02 : European Symposium on Numerical Methods in Electromagnetics*, pages 103–108. ONERA - Toulouse, France, March 2002.
- [41] D. COLTON and R. KRESS. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theorie*, volume 93. Springer-Verlag, 1992.
- [42] T.J. CUI, W.C. CHEW, G. CHEN, and J. SONG. Efficient MLFMA, RPFMA, and FAFFA Algorithms for EM Scattering by Very Large Structures. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 52(3) :759–770, 2004.
- [43] W. DAHMEN, H. HARBRECHT, and R. SCHNEIDER. Compression techniques for boundary integral equations– asymptotically optimal complexity estimates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43 :2251–2271, 2006.

- [44] E. DARRIGRAND. *Couplage méthodes multipôles - discrétisation microlocale pour les équations intégrales de l'électromagnétisme*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Septembre 2002.
- [45] E. DARRIGRAND. Coupling of Fast Multipole Method and Microlocal Discretization for the 3-D Helmholtz Equation. *J. Comput. Phys.*, 181(1) :126–154, 2002.
- [46] E. DARVE. *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, Juin 1999.
- [47] E. DARVE. The Fast Multipole Method (I) : Error Analysis and Asymptotic Complexity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(1) :98–128, 2000.
- [48] E. DARVE. The Fast Multipole Method : Numerical Implementation. *J. Comput. Phys.*, 160(1) :195–240, 2000.
- [49] A. DE LA BOURDONNAYE and M. TOLENTINO. Discrétisation d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 en hautes fréquences. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 320, serie I :507–510, 1995.
- [50] B. DEMBART and E. YIP. The Accuracy of Fast Multipole Methods for Maxwell's Equations. *IEEE Comp. Sci. & Engineering Magazine*, pages 48–56, July 1998.
- [51] B. DESPRÉS. Quadratic functional and integral equations for harmonic wave problems in exterior domains. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 31(6) :679–732, 1997.
- [52] B. DESPRÉS. Fonctionnelle quadratique et équations intégrales. In G. Cohen and P. Joly, editors, *Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*, chapter 8, pages 2–81. INRIA, Ecole des Ondes, Mars 1998.
- [53] B. DESPRÉS. Un système mixte intégral pour les problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques en fréquence. In G. Cohen and P. Joly, editors, *Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*, chapter 9. INRIA, Ecole des Ondes, Mars 1998.
- [54] K.C. DONEPUDI, J.-M. JIN, S. VELAMPARAMBIL, J. SONG, and W.C. CHEW. A Higher Order Parallelized Multilevel Fast Multipole Algorithm for 3-D Scattering. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 49(7) :1069–1078, July 2001.
- [55] M.G. DUFFY. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *Siam. J. Numer. Anal.*, 19(6) :1260–1262, Dec. 1982.
- [56] M. DURUFLÉ. *Intégration numérique et éléments finis d'ordre élevé appliqués aux équations de Maxwell en régime harmonique*. Thèse de doctorat, Université de Paris Dauphine, février 2006.
- [57] B. ENGQUIST and A. MAJDA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31 :629–651, 1977.
- [58] B. ENGQUIST and J.-C. NÉDÉLEC. Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Rapport de recherche CMAP, Ecole Polytechnique, 1993.

- [59] M.A. EPTON and B. DEMBART. Multipole Translation Theory for the Three-Dimensional Laplace and Helmholtz Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16 :865–897, July 1995.
- [60] S. ERICHSEN and S. SAUTER. Efficient automatic quadrature in 3-D Galerkin BEM. *Comp. Methods Appl. Eng.*, 157 :215–224, 1998.
- [61] H. FOL. *Méthodes de type Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 3D en régime harmonique*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis, décembre 2006.
- [62] V. FRAYSSÉ, L. GIRAUD, and S. GRATTON. A Set of Flexible-GMRES Routines for Real and Complex Arithmetics. Rapport tr/pa/98/20, CERFACS, Toulouse, France, 1998.
- [63] V. FRAYSSÉ, L. GIRAUD, and S. GRATTON. A Set of Flexible-GMRES Routines for Real and Complex Arithmetics on High Performance Computers. Rapport tr/pa/06/09, CERFACS, Toulouse, France, 2006.
- [64] G. H. GOLUB and H. A. VAN DER VORST. Closer to the solution : Iterative linear solvers. Technical report, Stanford University.
- [65] R.D. GRAGLIA, D.R. WILTON, and A.F. PETERSON. Higher Order Interpolatory Vector Bases for Computational Electromagnetics. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 45(3) :329–342, March 1997.
- [66] L. GREENGARD and V. ROKHLIN. A Fast Algorithm for Particle Simulations. *J. Comput. Phys.*, 73 :325–348, 1987.
- [67] L. GREENGARD and V. ROKHLIN. The Rapid Evaluation of Potential Fields in Three Dimensions. In *Vortex Methods in Lecture Notes in Mathematics, 1360*, Springer Verlag, pages 121–141, 1988.
- [68] L. GREENGARD and V. ROKHLIN. A New Version of the Fast Multipole Method for the Laplace Equation in Three Dimensions. *Acta Numerica*, 6 :229–269, 1997.
- [69] T. HA DUONG. *Equations intégrales pour la résolution numérique des problèmes de diffraction d’ondes acoustiques dans \mathcal{R}^3* . Thèse d’état, Université Paris VI, 1987.
- [70] W. HACKBUSCH and B.N. KHOROMSKIJ. A sparse \mathcal{H} -matrix arithmetic. II : Application to multidimensional problems. *Computing*, 64 :21–47, 2000.
- [71] W. HACKBUSCH and Z.P. NOWAK. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.*, 54 :463–491, 1989.
- [72] M. R. HESTENES and E. STIEFEL. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 49 :409–436, 1952.
- [73] C. JOHNSON and J.-C. NÉDÉLEC. On the coupling of boundary integral and finite element method. *Math. of Comp.*, 152(35) :1063–1079, 1980.
- [74] J.B. KELLER. Geometrical theory of diffraction. *J. Opt. Soc. Amer.*, 52(2), 1962.
- [75] R. KIESER, C. SCHWAB, and W.L. WENDLAND. Numerical evaluation of singular and finite part integrals on curved surfaces using symbolic manipulation. *Computing*, 49 :279–301, 1992.

- [76] R. KLEES. Numerical calculation of weakly singular surface integrals. *Journal of Geodesy*, 70 :781–797, 1996.
- [77] M. KLINE. An asymptotic solution of Maxwell’s equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 4 :225–262, 1951.
- [78] S. KOC, J.M. SONG, and W.C. CHEW. Error Analysis for the Numerical Evaluation of the Diagonal Forms of the Scalar Spherical Addition Theorem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(3) :906–921, April 1999.
- [79] V. LANGE. *Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1995.
- [80] P. LASCAUX and R. THÉODORE. *Analyse numérique matricielle appliquée à l’art de l’ingénieur*. Masson, 1993.
- [81] V. LEVILLAIN. *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1991.
- [82] C.-C. LU and W.C. CHEW. A Multilevel Algorithm for Solving a Boundary Integral Equation of Wave Scattering. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 7(10) :466–470, July 1994.
- [83] C.C. LU. Volume-surface integral equation. In W.C. Chew, J.M. Jin, E. Michielssen, and M. Song, editors, *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, chapter 11, pages 487–540. Boston, MA : Artech, 2001.
- [84] V. LUBET. Diffraction d’une onde électromagnétique sur un corps 3.D. Résolution par méthode intégrale avec éléments plans et triangulaires. Rapport de d.e.a., Université Bordeaux I, 1991.
- [85] P.A. MARTIN. Multiple Scattering and the Rehr-Albers-Fritzsche Formula for the Propagator Matrix. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 31 :8923–8932, 1998.
- [86] J.R. MAUTZ and R. HARRINGTON. A combined-source formulation for radiation and scattering from a perfectly conducting body. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 27 :445–454, 1979.
- [87] R.B. MELROSE and M.E. TAYLOR. Near Peak Scattering and the Corrected Kirchhoff Approximation for a Convex Obstacle. *Adv. in Math.*, 55 :242–315, 1985.
- [88] K. MER-NKONGA. Reformulation des équations intégrales de Després, validations et optimisation du code Maxiim. Rapport CEA/CESTA/DEV/SIS/GANA DO 280, CEA-CESTA, Septembre 1999.
- [89] K. MER-NKONGA. The Fast Multipole Method Applied to a Mixed Integral System for Time-Harmonic Maxwell’s Equations. In *Second International Conference on Boundary Integral Methods : Theory and Applications*. IMA - University of Bath, September 2000.
- [90] K. MER-NKONGA, M. MANDALLENA, D. GOUDIN, B. STUPFEL, and F. COLLINO. A numerical strategy for a high frequency electromagnetic scattering problem in a mixed formulation. *C. R. Physique*, 7 :509–517, 2006.

- [91] F. MOLINET, I. ANDRONOV, and D. BOUCHE. *Asymptotic and Hybrid Methods in Electromagnetics*. IEE Electromagnetic Waves Series 51, 2005.
- [92] P. MONK. A comparison of three mixed methods for the time-dependent Maxwell's equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(5) :1097–1122, 1992.
- [93] J.-C. NÉDÉLEC. Mixed Finite Elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 35 :315–341, 1980.
- [94] J.-C. NÉDÉLEC. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 50 :57–81, 1986.
- [95] J.-C. NÉDÉLEC. Résolution des équations d'ondes acoustiques et électromagnétiques. Cours de d.e.a., Ecole Polytechnique, 1999.
- [96] J.-C. NÉDÉLEC. *Acoustic and Electromagnetic Equations, Integral Representation for Harmonic Problems*. Springer-Verlag, 2001.
- [97] A. PUJOLS. *Equations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell. Application au calcul de SER*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1991.
- [98] J. RAHOLA. Diagonal Forms of the Translation Operators in the Fast Multipole Algorithm for Scattering Problems. *BIT*, 36(2) :333–358, 1996.
- [99] S.M. RAO, D.R. WILTON, and A.W. GLISSON. Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 30(3) :409–418, May 1982.
- [100] P.A. RAVIART and J.M. THOMAS. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. *Lectures Notes in Mathematics*, 606 :292–315, 1975.
- [101] M. REED and B. SIMON. *Scattering Theory : Method of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, 1979.
- [102] V. ROKHLIN. Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory. *J. Comput. Phys.*, 60(2) :187–207, 1985.
- [103] V. ROKHLIN. Rapid Solution of Integral Equations of Scattering Theory in Two Dimensions. *J. Comput. Phys.*, 86(2) :414–439, 1990.
- [104] V. ROKHLIN. Diagonal Forms of Translation Operators for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. Research Report YALEU/DCS/RR-894, Yale University, March 1992.
- [105] V. ROKHLIN. Sparse Diagonal Forms for Translation Operators for the Helmholtz Equation in Two Dimensions. *Applied Computational Harmonic Analysis*, 5(1) :36–67, 1998.
- [106] Y. SAAD. A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14(2) :461–469, 1993.
- [107] S.A. SAUTER. Variable order panel clustering. *Computing*, 64 :223–261, 2000.
- [108] T.B.A. SENIOR and J.L. VOLAKIS. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. IEEE Waves Series 41, 1995.
- [109] P.P. SILVESTER and R.L. FERRARI. *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge : Cambridge Press, 1990.

- [110] J.M. SONG and W.C. CHEW. Fast Multipole Method Solution Using Parametric Geometry. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 7(16) :760–767, November 1994.
- [111] J.M. SONG and W.C. CHEW. Multilevel Fast Multipole Algorithm for Solving Combined Field Integral Equations of Electromagnetic Scattering. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 10(1) :14–19, September 1995.
- [112] J.M. SONG, C.-C. LU, and W.C. CHEW. Multilevel Fast Multipole Algorithm for Electromagnetic Scattering by Large Complex Objects. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 45(10) :1488–1493, October 1997.
- [113] A. H. STROUD. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall Inc, 1971.
- [114] B. STUPFEL. A Hybrid Finite Element and Integral Equation Domain Decomposition Method for the Solution of the 3-D Scattering Problem. *J. Comput. Phys.*, 172 :451–471, 2001.
- [115] D. SUN, J. MANGES, X. YUAN, and Z. CENDES. Spurious modes in finite element methods. *IEEE Antennas Propagat. Mag*, 37(5) :12–24, Oct. 1995.
- [116] G. SYLVAND. *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : Performances, parallélisation, applications*. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, Juin 2002.
- [117] D.J. TAYLOR. Accurate and Efficient Numerical Integration of Weakly Singular Integrals in Galerkin EFIE Solutions. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 51 :1630–1637, July 2003.
- [118] M.E. TAYLOR. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, 1981.
- [119] I. TERRASSE. *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell, instationnaires par une méthode de potentiels retardés*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1993.
- [120] M. TOLENTINO. *Résolution hautes fréquences d'équations intégrales par une méthode de discrétisation microlocale*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Décembre 1997.
- [121] R.L. WAGNER and W.C. CHEW. A Ray-Propagation Fast Multipole Algorithm. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 7(10) :435–438, July 1994.
- [122] S. WANDZURA. Electric current basis functions for curved surfaces. *Electromag*, 12 :77–91, 1992.
- [123] N. YARVIN and V. ROKHLIN. A generalized one-dimensional fast multipole method with application to filtering of spherical harmonics. *J. Comput. Phys.*, 147(2) :594–609, 1997.
- [124] K.S. YEE. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Ant. and Prop.*, AP-16 :302–307, 1966.
- [125] B. ZHOU. *Méthode des équations intégrales pour la résolution des problèmes de diffraction à hautes fréquences*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, Novembre 1995.

- [126] O. C. ZIENKIEWICZ. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill London, 1971.