Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse représente la synthèse de trois années de travaux de recherche que l'on a présenté, dans ce manuscrit, en trois parties. Celles-ci touchent des domaines différents de l'analyse, à savoir les algèbres de Banach, l'Analyse harmonique et complexe, et la théorie des opérateurs. Nous allons présenter, dans un premier temps, chacun des thèmes abordés, et par la suite nous ferons une analyse plus détaillée des travaux qui ont motivé la recherche et des résultats.

Dans un premier temps, nous étudions le comportement à l'origine de représentations de groupes topologiques dans une algèbre de Banach. Nous étudions la continuité d'une représentation du groupe topologique G dans une algèbre de Banach A en fonction du comportement de $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u)-I\|$, où 1 désigne l'élément unité de G et I celui de A. Nous obtenons aussi des résultats de continuité automatique pour une large catégorie de représentations de groupes. Nous montrons en particulier que si le groupe topologique admet une division continue par n, pour tout $n \geq 2$, alors on a une loi du "zéro-deux" : ou bien $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| \geq 2$, ou bien $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| = 0$, ce qui signifie que la représentation $u \mapsto \theta(u)$ est continue. Ces résultats sont liés au fait que les points du cercle sont des ensembles de synthèse pour l'algèbre des séries de Taylor absolument convergentes.

Nous étudions aux chapitres 3 et 4, dans des cas concrets le spectre de l'opérateur $S_M : E/M \to E/M$ défini par $S(f+M) = Sf + M$, c'est-à-dire la compression de S à E/M où E est un espace de Banach, $S : E \to E$ un opérateur borné et M un sous-espace vectoriel fermé invariant par S, c'est-à-dire vérifiant $S(M) \subset M$. Au chapitre 3 nous nous plaçons dans des espaces de Banach E de fonctions analytiques sur le disque unité pour lesquels le shift usuel S et le shift arrière $T : f \mapsto \frac{f-f(0)}{z}$ ont leur spectre égal au cercle unité et vérifient $\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+ \|S^n\| + \log^+ \|T^n\|}{1+n^2} < +\infty$ (condition de non-quasianalyticité). Nous montrons que si $f \in M$ admet une extension analytique à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r)$, avec $|\zeta| = 1$, $f(\zeta) \neq 0$, alors $\zeta \notin Spec(S_M)$.

Nous appliquons ce résultat à l'espace de Hardy pondéré $H_{\sigma_\alpha}(\mathbb{D})$, avec $\sigma_\alpha(n) = e^{-n^\alpha}$, $n \geq 0$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. N.Nikolski a construit dans [34] des fonctions f_α qui ne s'annulent pas sur le disque unité ouvert et telles que le sous-espace z-invariant M_α engendré par f_α est strictement inclus dans $H^2_\alpha(\mathbb{D})$, et on déduit immédiatement du théorème principal du chapitre 3 que $Spec(S_{M_\alpha}) = \{1\}$.

Au chapitre 4 nous étudions une situation quasianalytique, celle des espaces $l^2(w, \mathbb{Z}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 w^2(n) < +\infty\}$, à poids "log-impairs" i.e. $w(-n) = \frac{1}{w(n)}$, avec $\sum_{n\geq 0} \frac{|\log w(n)|}{1+n^2} = +\infty$. Dans cette situation on ne peut plus appliquer le théorème de Levinson-Cartwright sur les familles normales qui était à la base des résultats du chapitre 3. Soit L un arc fermé non vide du cercle unité ; nous montrons que la construction de Y.Domar de sous-espaces invariants par translations pour les espaces du type ci-dessus vérifiant une condition naturelle de régularité, permet d'obtenir des sous-espaces M_L tels que $Spec(S_{M_L}) = L$, où $S : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ désigne le shift bilatéral usuel sur $l^2(w, \mathbb{Z})$. Ceci répond à une question posée récemment par A.Borichev, H.Hedenmalm et A.Volberg dans [10]. Nous évitons le recours au théorème de Levinson-Cartwright en utilisant des résultats d'A.Atzmon [4], [5], ce qui permet d'obtenir des sous-espaces invariants par translations vérifiant $Spec(S_{M_L}) \subset L$. L'égalité $Spec(S_{M_L}) = L$ résulte alors d'un principe élémentaire général (théorème 4.2.2).

Chapitre 2

Soit A une algèbre de Banach unitaire et G un groupe topologique. Une représentation $\theta : G \to A$ est une application qui vérifie $\theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$ et $\theta(1) = I$, où 1 désigne l'élément unité de G et I celui de A.

Il est bien connu [28, 33, 35, 36] que si T est une représentation fortement continue de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathcal{L}(X)$, l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Banach X, et si $\limsup_{t\to 0} \|T(t) - I\| < 2$, alors la représentation T est continue, c'est-à-dire que $\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0$. A l'aide de la modeste identité

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab,$$

il est possible de montrer [17] que si $(T(t))_{t\in H}$ est une représentation unitaire quelconque d'un sous-groupe H de $\mathbb{R}$ alors ou bien $\limsup_{t\to 0} \|T(t) - I\| \geq \sqrt{3}$, ou bien $\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0$ c'est-à-dire que la représentation est continue.

Plus précisément, il est montré dans [18, 20] que si G est un groupe localement compact abélien et θ une représentation unitaire de G alors ou bien $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| \geq \sqrt{3}$, ou bien $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| = 0$. Si de plus G admet une "division continue pour tout $n \geq 1$, cette loi du "zéro-$\sqrt{3}$" devient une loi du "zéro-deux".

Dans le chapitre 2 nous étendons ces résultats aux groupes topologiques quelconques. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.0.1. *Soit G un groupe topologique et soit $\theta : G \to A$ une représentation de G dans une algèbre de Banach A. Alors, ou bien* $\lim_{u\to 1} \|\theta(u)-1\| = 0$*, ou bien* $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u) - 1\| \geq \sqrt{3}$*. Si de plus G admet une division continue par n pour tout $n \geq 2$, alors* $\lim_{u\to 1} \|\theta(u) - 1\| = 0$*, ou bien* $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u) - 1\| \geq 2$*.*

Les résultats de [18, 20] permettent de se limiter au cas où la représentation est "spectralement continue, c'est-à-dire que $\lim_{u\to 1} \rho(\theta(u) - I) = 0$, $\rho(a)$ désignant le rayon spectral d'un élément a d'une algèbre de Banach. Le théorème 1.0.1 se déduit du résultat suivant :

Théorème 1.0.2. *Soit G un groupe topologique, et soit $\theta : G \to A$ une représentation localement bornée du groupe G dans une algèbre de Banach A. Si θ est spectralement continue, et s'il existe un voisinage V de l'élément unité de G tel que* $\sup_{u\in V} \|(\theta(u) - I)^n\| \leq 2^n$*, pour un entier n, alors θ est continue, i.e.* $\lim_{u\to 1} \|\theta(u) - 1\| = 0$*.*

La preuve de ce théorème se base sur le fait que si $a \in A$, $\rho(a) < 1$ et $\rho(\sin(a)) < 1$, alors $\arcsin(\sin(a)) = a$. Cette fonction intervient dans la preuve de Bonsall et Crabb [9] d'un résultat de Sinclair sur le rayon spectral d'un élément hermitien, et son utilisation dans ce contexte nous a été suggérée par l'adaptation par G.R. Allan et T.J. Ransford [1] de l'argument de Bonsall et Crabb à la preuve d'un théorème de Gelfand qui montre que $a \in A$ vérifie $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|a^n\| < +\infty$, et $Spec(a) = \{1\}$, alors $a = 1$. Dans le cas où G est un groupe de Baire abélien et A une algèbre de Banach, nous obtenons à l'aide du théorème du graphe fermé et du théorème de Gelfand un résultat de continuité automatique :

Proposition 1.0.3. *Soit $\theta : H \to A$ une représentation localement bornée d'un groupe topologique abélien H dans une algèbre de Banach A. Si θ est spectralement continue, alors le graphe de θ est fermé. Ainsi, si H est un groupe de Baire abélien et si est A séparable, alors θ est continue.*

De la même manière, on déduit du théorème de Gelfand un résultat de continuité automatique du même type :

Proposition 1.0.4. *Soit $\theta : H \to A$ une représentation localement bornée d'un groupe compact H dans une algèbre de Banach A. Si θ est spectralement continue alors elle est continue, i.e.* $\lim_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| = 0$*.*

Chapitre 3

On désigne par $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des applications $\sigma : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$0 < \inf_{n\geq 0} \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} \leq \sup_{n\geq 0} \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} < +\infty \tag{1.0.1}$$

$$\tilde{\sigma}(n)^{1/n} \to 1,\ n \to +\infty \tag{1.0.2}$$

$$\overline{\sigma}(n)^{1/n} \to 1,\ n \to +\infty \tag{1.0.3}$$

où $\tilde{\sigma}(n) := \sup_{p\geq 0} \frac{\sigma(n+p)}{\sigma(p)}$ et $\overline{\sigma}(n) := \sup_{p\geq 0} \frac{\sigma(p)}{\sigma(n+p)}$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}^+$, on définit l'espace de Hardy pondéré $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ par

$$H^2_\sigma(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ \|f\| = \big(\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2\sigma^2(n)\big)^{1/2} < +\infty\},$$

où $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$, et $\hat{f}(n)$ désigne le n-ième coefficient de Taylor à l'origine d'une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Le shift S, défini par $Sf(z) = zf(z)$, est un opérateur borné sur $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ et $Spec(S) \subset \mathbb{D}$.

Soit M un sous-espace fermé de $H^2_\sigma(\mathbb{D})$; on dit M que est un sous-espace z-invariant si $S(M) \subset M$. L'existence de sous-espaces z-invariants non-triviaux M possédant les propriétés $Z(M) = \{z \in \mathbb{D},\ f(z) = 0,\ \forall f \in M\} = \emptyset$ et $dim(M \ominus zM) = 1$ reste un problème ouvert. Ces deux propriétés sont équivalentes à la "propriété de division" : la fonction $f_\lambda : z \mapsto \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}$ appartient à M pour toute fonction $f \in M$ et tout $\lambda \in \mathbb{D}$ tel que $f(\lambda) = 0$. Pour obtenir de tels sous-espaces il suffit, quand c'est possible, de trouver $f \in H^2_\sigma(\mathbb{D})$ telle que $Z(f) = \{z \in \mathbb{D},\ f(z) = 0\}$ soit vide et telle que f soit non z-cyclique, c'est à dire que $[f] := \overline{span\{z^n f,\ n \geq 0\}}$ est strictement inclus dans $H^2_\sigma(\mathbb{D})$.

A.Beurling et N.Nikolski (voir [7] et [34]) apportent une réponse positive à ce problème pour des familles de poids ou des poids suffisamment réguliers vérifiant :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}} < +\infty.$$

Ils montrent que la fonction intérieure $\varphi_c(z) = e^{c\frac{z+1}{z-1}}$ $(c > 0)$ n'est pas z-cyclique.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{Z}} \frac{w(n+1)}{w(n)} \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{w(n+1)}{w(n)} < \infty,$$

et

$$\lim_{|n|\to+\infty} \tilde{w}(n)^{1/n} = 1,\ \text{où}\ \tilde{w}(n) = \sup_{p\in\mathbb{Z}} \frac{w(n+p)}{w(p)}.$$

On pose

$$l^2(w,\mathbb{Z}) := \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \|u\| := \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 w^2(n)\big)^{1/2}\};$$

le shift sur $l^2(w,\mathbb{Z})$ est l'opérateur borné défini par $S : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$; on a $Spec(S) \subset \mathbb{T}$. On dit qu'un sous-espace fermé G est invariant par translations si $S(G) = G$. J.Esterle et A.Volberg (voir [21, 22]) ont relié l'existence de sous-espace z-invariants dans $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ avec le problème de l'existence de sous-espaces invariants par translations dans $l^2(w,\mathbb{Z})$. Ils montrent que, sous certaines conditions de régularité et de croissance pour $w(n)$ quand $n \to -\infty$ pour le poids $w \in \mathcal{S}$, les sous-espaces invariants par translations de $l^2(w,\mathbb{Z})$ sont tous "issus" de sous-espaces z-invariants dans $H^2_\sigma(\mathbb{D})$, où $\sigma = w|_{\mathbb{Z}^+}$. On peut identifier $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ avec $l^2(w,\mathbb{Z}^+) := \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ u_n = 0,\ n < 0\}$. Si F est un sous-espace invariant par translations, alors $F^+ := F \cap l^2(w,\mathbb{Z}^+)$ est sous espace z-invariant ayant la propriété de division. Réciproquement, ils montrent que si M est un sous-espace z-invariant non trivial ayant la propriété de division, alors $F = span_{n\in\mathbb{Z}} S^{-n}M$ est un sous-espace invariant par translations non-trivial.

Le propos de cette partie n'est pas de prouver l'existence de sous-espace z-invariants non triviaux, mais de donner des outils pour déterminer le spectre de $S_M : u + M \mapsto Su + M$ pour un sous-espace z-invariant M. Nous avons travaillé dans un cadre plus vaste que celui des espace de Hardy pondérés. Nous considérons des espaces de Banach E de fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ ("espaces admissibles de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$) vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\cup_{0<r<1}\mathcal{H}(r^{-1}\mathbb{D}) \subset E \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$, et l'inclusion $E \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est continue

(ii) Si $f \in E$, alors $\lim_{r\to 1^-} \|f^{[r]} - f\| = 0$, où $f^{[r]}(z) = f(rz)$ $(z \in \mathbb{D})$.

(iii) $S(E) \subset E$ et $T(E) \subset E$, où $Tf(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ $(z \in \mathbb{D})$

(iv) $Spec(S) = Spec(T) = \overline{\mathbb{D}}$

Nous relions l'étude de $Spec(S_M)$ avec l'existence d'une fonction se prolongeant analytiquement au voisinage d'un point du cercle $\mathbb{T}$.

Pour $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{D}$, on pose $f_\lambda(z) := \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}$ $(z \in \mathbb{D})$. Nous montrons d'abord le théorème suivant

Théorème 1.0.5. *Soit E un espace admissible de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ vérifiant*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+\|S^n\| + \log^+\|T^n\|}{1+n^2} < +\infty,$$

et soit $f \in E$; on suppose qu'il existe $\zeta \in \mathbb{T}$ et $r_0 > 0$ tels que f s'étend en une fonction analytique sur $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$. Alors l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ s'étend en une application analytique de $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}(\zeta, r_0)$ dans E.

La preuve de ce théorème repose sur le théorème de Levinson-Cartwright pour les familles normales (voir [6, 12, 14, 15, 24, 29, 30, 31, 32, 40]) qui montre que si on considère le rectangle $U = \{z \in U, |Re(z)| \leq a,\ |Im(z)| \leq b\}$ $(a, b > 0)$ et ρ une fonction continue sur $[0, b]$ telle que $\rho(0) = 0$ et

$$\int_0^b \log\log 1/\rho(t)dt < +\infty,$$

alors l'ensemble des fonctions holomorphes sur U vérifiant $|f(z)| \leq \frac{1}{\rho(|Im(z)|)}$ est une famille normale.

On montre d'abord que si $f \in E$ admet un prolongement analytique au voisinage de $\zeta \in \mathbb{T}$ alors il en est de même pour la fonction $\lambda \mapsto f_\lambda^{[r]}$. Ensuite par l'argument de famille normales de Levinson-Cartwright nous pouvons en déduire que $\lambda \mapsto f_\lambda$ admet aussi un prolongement analytique au voisinage de $\zeta \in \mathbb{T}$.

Une fois ce théorème démontré la voie est ouverte pour en déduire le théorème suivant :

Théorème 1.0.6. *Soient M un sous-espace z-invariant d'un espace admissible E de fonctions analytiques vérifiant*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+\|S^n\| + \log^+\|T^n\|}{1+n^2} < +\infty.$$

Soient $\zeta \in \mathbb{T}$ et $r > 0$; s'il existe $f \in M$ admettant un prolongement à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r)$ et telle que $f(\zeta) \neq 0$, alors

$$\zeta \notin Spec(S_M).$$

Ici encore nous procédons de la même manière que dans le théorème précédent ; nous montrons d'abord que l'application $\lambda \mapsto < (S_M - \lambda I)^{-1}\pi(p), g >$ admet un prolongement analytique au voisinage de ζ, π désignant la surjection de E sur E/M, $g \in M^\perp$ et p un polynôme. Les polynômes étant denses dans E, on en déduit, une fois de plus, à l'aide du théorème de Levinson-Cartwright pour les familles normales, que l'application $\lambda \mapsto < (S_M - \lambda I)^{-1}\pi(f), g >$ admet un prolongement analytique au voisinage de ζ, pour tout $f \in E$, et que $\zeta \notin Spec(S_M)$, ce qui nous permet de conclure.

Comme nous l'avons précisé au début de cette partie A.Beurling et N.Nikolski ont montré que dans le cas "sous-critique" où

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}} < +\infty,$$

la fonction intérieure $\varphi_c(z) = e^{c\frac{z+1}{z-1}}$ $(c > 0)$ n'est pas z-cyclique dans $H^2_\sigma(\mathbb{D})$. Il est également connu (voir [3]) que dans ce cas, si on note N_c le sous-espace z-invariant engendré par φ_c, on a $Spec(S_{N_c}) = \{1\}$ ce qui résulte aussi immédiatement du théorème 1.0.6.

Dans le cas où
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}} = +\infty,$$
N.Nikolski construit, pour des poids de croissance aussi rapide que l'on veut, des fonctions sans zéros non z-cycliques. Dans le cas particulier où σ est le poids défini par
$$\sigma_\alpha(n) = e^{-n^\alpha} \quad (n \geq 0),$$
où $\alpha \in (1/2, 1)$, la construction des fonctions est très concrète. Elle se base sur la croissance maximale de fonctions de $H^2_{\sigma_\alpha}(\mathbb{D})$ et la méthode de Keldysh-Nikolski (voir [34, 21]). Pour tout $c \in (0,1)$, il construit une fonction F_c analytique dans $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, sans zéros qui engendre un sous-espace M_c z-invariant non trivial. Dans ce cas, comme dans le cas sous-critique, on déduit du théorème 1.0.6 le résultat suivant :

Théorème 1.0.7. *Pour $c \in (0,1]$, les sous-espaces M_c sont des sous-espaces de $H^2_{\sigma_\alpha}(\mathbb{D})$ tels que*
$$Spec(S_{M_c}) = \{1\}.$$

Chapitre 4

Dans cette partie nous étudions le spectre de S_M, où M est un sous-espace invariant par translations de $l^2(w, \mathbb{Z})$. Nous considérons le cas où $w \in \mathcal{S}$ est log-impair, c'est-à-dire $w(n)w(-n) = 1$ $(n \geq 0)$, et log-convexe, c'est-à-dire $w(n)^2 \leq w(n-1)w(n+1)$ $(n \geq 1)$.

A.Borichev, H.Hedenmalm et A.Volberg [10] ont étudié le spectre de S_M lorsque M est sous-espace invariant par translations. Ils montrent que si w est log-impair, le spectre de S_M est un parfait du cercle unité, i.e. il n'existe pas de points isolés pour $Spec(S_M)$. Dans leur article, ils posent la question de la construction de sous-espace invariants par translations M pour lesquels $Spec(S_M)$ serait un intervalle donné du cercle unité. A la lumière de travaux d'A.Atzmon, nous trouvons dans une construction de Domar [13] la réponse à leur question.

L'ensemble $\mathcal{E}_{1,a}$ des fonctions de type $a > 0$ est l'ensemble des fonctions entières f vérifiant
$$\limsup_{|z|\to+\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} \leq a.$$

Soit $w \in \mathcal{S}$ log-impair ; lorsque
$$\sum_{n\geq 1} |\log w(n+1) + \log w(n-1) - 2\log w(n)| < +\infty,$$
Y.Domar [13] a construit une fonction $f \in \mathcal{E}_{1,a}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{2h(x)} dx < +\infty$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)^2| w^2(n) < +\infty.$$

Pour cela, Y.Domar prolonge la fonction $\log w(n)$ en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et affine sur chaque intervalle $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{R}$. Il construit alors un prolongement φ analytique à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{C}$. Ensuite par un procédé dit procédé K.K.K. de discrétisation de mesure [25, §10.5] il construit la fonction f. Avec le théorème de Paley-Wiener (voir [8], il parvient alors à montrer que le sous-espace de $l^2(w,\mathbb{Z})$ engendré par $f|_{\mathbb{Z}}$ est un sous-espace fermé non-trivial de $l^2(w,\mathbb{Z})$.

On montre d'abord que le prolongement défini par Y.Domar vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 1.0.8. *Soit $w \in \mathcal{S}$ $\log$-impair et $\log$-convexe, qui vérifie*

$$w(0) = 1, \tag{1.0.4}$$
$$|\log w(n)| = o(n),\ n \to +\infty, \tag{1.0.5}$$
$$|\log w(n+1) - 2\log w(n) + \log w(n-1)| = o(\frac{1}{n}),\ n \to +\infty \tag{1.0.6}$$

Il existe alors une fonction g holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ telle que $g(n) = w(n)$, pour tout $n \geq 0$. La fonction g vérifie les propriétés suivantes :

$$|g(x)| = e^{\varphi(x)} \quad (x \geq 0), \quad |g(x)| = e^{-\varphi(|x|)} \quad (x \leq 0) \tag{1.0.7}$$
$$|g(iy)| = 1 \quad (y \in \mathbb{R}) \tag{1.0.8}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } c_\varepsilon > 0 \text{ tel que } |g(z)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon |Re(z)|} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.0.9}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } c_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g(x+z)|}{|g(x)|} \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|z|} (z \in \mathbb{C}) \tag{1.0.10}$$

Soit $a \in]0,\pi[$; on note :

$$B_g(a)^2 := \{f \in \mathcal{E}_{1,a},\ \|f\|_{B_g^2(a)} := \|fg\|_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty\}.$$

On utilise ensuite des résultats d'A.Atzmon [4], [5].

Théorème 1.0.9. *Soit w un poids sur $\mathbb{Z}$, $\log$-impair et $\log$-convexe vérifiant (1.0.4), (1.0.5) et (1.0.6). Pour $a \in]0,\pi[$ on a pour les propriétés suivantes :*

(i) $B_g^2(a)$ est un espace de Hilbert, et la convergence dans $B_g^2(a)$ entraîne la convergence sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(ii) L'opérateur de différentiation D, défini par $Df(z) = f'(z)$, est un opérateur borné sur $B_g^2(a)$ et son rayon spectral $\rho(D)$ vérifie

$$\rho(D) = \lim_{n\to+\infty} \|D^n\|^{\frac{1}{n}} \leq a.$$

(iii) Il existe deux réels positifs K_1 et K_2 tels que pour tout $f \in B_g^2(a)$ on a

$$K_1 \|f|_{\mathbb{Z}}\|_{l^2(w,\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{B_a^2} \leq K_2 \|f|_{\mathbb{Z}}\|_{l^2(w,\mathbb{Z})}.$$

Il est alors clair que la fonction $z \mapsto e^{-zD}$ est une fonction entière dans $\mathcal{L}(B_g^2(a))$, et il résulte de (ii) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c_\varepsilon > 0$ tel que $\|e^{-zD}\| \leq c_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|z|}$ $(z \in \mathbb{C})$.

On définit l'arc L_a par

$$L_a := \{e^{it}, \quad |t| \leq a\}.$$

Soit w un poids log-impair vérifiant (1.0.4), (1.0.5) et (1.0.6) ; on peut identifier $l^2(w, \mathbb{Z})$ à son dual en utilisant la formule

$$< u, v >= \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_{-n} \quad (u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(w, \mathbb{Z}),\ v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(w, \mathbb{Z})).$$

On pose

$$\mathcal{D}_a = \{(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}, f \in B_g^2(a)\},$$

on a

$$\mathcal{D}_a = \{u \in l^2(w, \mathbb{Z}), \quad \mathrm{Supp}(\check{u}) \subset L_a\}.$$

On peut alors montrer que comme le suggéraient A.Borichev, H.Hedenmalm et A.Volberg dans [10], les espaces $\mathcal{D}_a^\perp$ vérifient $Spec(S_{\mathcal{D}_a^\perp}) = L_a$.

Théorème 1.0.10. *Soit w un poids* log-*impair vérifiant (1.0.4), (1.0.5) et (1.0.6) ; on a, pour $a \in]0, \pi[$,*

$$Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) = Spec(S_{\mathcal{D}_a^\perp}) = L_a.$$

L'inclusion $Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) \subset L_a$ se déduit des théorèmes 1.0.8 et 1.0.9, et l'autre inclusion s'obtient de manière automatique avec un principe général élémentaire (théorème 4.2.2).

L'auteur tient à remercier tout particulièrement A.Atzmon pour lui avoir communiqué ses développements récents non publiés [4], [5] des résultats annoncés dans [3], qui jouent un rôle essentiel dans le chapitre 4, et pour ses commentaires qui ont permis de clarifier la définition de l'espace $\mathcal{D}_a$ discuté au chapitre 4.

Chapitre 2

Comportement à l'origine des représentations de groupes dans une algèbre de Banach

2.1 Introduction

A well known "zero-two law", see [28], [33], [35] and [36], shows that if, $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ is a strongly continuous one-parameter group of bounded operators on a Banach space X, and if $\limsup_{t\to 0^+} \|T(0) - T(t)\| < 2$, then $\lim_{t\to 0^+} \|T(0) - T(t)\| = 0$. It was observed quite recently, in [17], that if $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ is any one-parameter group of bounded operators, then either $\lim_{t\to 0^+} \|T(0) - T(t)\| = 0$, or $\limsup_{t\to 0^+} \|T(0) - T(t)\| \geq \sqrt{3}$. More generally it is shown in [18] that if $\theta : G \to A$ is any unital representation (in multiplicative notation) of a locally compact abelian group on a Banach algebra, then either $\lim_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| = 0$, or $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| \geq \sqrt{3}$, where I denotes the unit element of A. This "zero-$\sqrt{3}$ law" becomes a "zero-two law" if we assume that the group admits "continuous division by any positive integer". This means in multiplicative notation that for every positive integer n, there exists an open subset U of G containing the unit element 1 and a map $\varphi : U \to G$, which is continuous at 1 and satisfies $\varphi(1) = 1$ and $\varphi^n(u) = u$, for every $u \in U$. In fact, J. Esterle states this result in [18] assuming that "G admits continuous division by 2". This condition is not sufficient, but his argument works smoothly if "G admits continuous division by 2" is replaced by "G admits continuous division by n for every $n \geq 2$", see [20]. In particular the "zero-two law" holds for any one-parameter group of bounded operators. The purpose of this paper is to show that these "zero-$\sqrt{3}$" or "zero-two laws" hold for representations of all topological groups : if $(G, .)$ is a topological group, and if $\theta : G \to A$ is a unital representation of G on a Banach algebra then either $\lim_{u\to 1}\|\theta(u)-I\|=0$, or $\limsup_{u\to 1}\|\theta(u)-I\|\geq\sqrt{3}$. If, further G admits "continuous division by any positive integer", then either $\lim_{u\to 1}\|\theta(u)-I\|=0$, or $\limsup_{u\to 1}\|\theta(u)-I\|\geq 2$.

The paper [18] relies on two observations :

1. Denote by $\rho(\theta(u)-I)$ the spectral radius of $\theta(u)-I$, where $\theta : G\to A$ is a unital representation of a topological group G on a Banach algebra A. Then we have the following possibilities
   (a) $\lim_{u\to 1}\rho(I-\theta(u))=0$,
   (b) $\limsup_{u\to 1}\rho(I-\theta(u))=2\sin(\frac{p\pi}{2p+1})\geq\sqrt{3}$ for some $p\geq 1$,
   (c) $\limsup_{u\to 1}\rho(I-\theta(u))=2$,
   (d) $\limsup_{u\to 1}\rho(I-\theta(u))=+\infty$.

   This result is obtained by introducing the set
   $$\Gamma(\theta)=\{\lambda\in\mathbb{C},\liminf_{u\to 1} dist(\lambda, spec(\theta(u))=0\}.$$
   Elementary observations show that either $\Gamma(\theta)$ equals the unit circle $\mathbb{T}$, or there exists a finite family $p_1,\dots,p_k$ of positive integers such that $\Gamma(\theta)=\cup_{1\leq j\leq k}\Gamma_{p_j}$, where $\Gamma_{p_j}:=\{z\in\mathbb{C}, z^{p_j}=1\}$. The case $p_1=1$, $k=1$ gives $\Gamma(\theta)=\{1\}$. In the other cases where $\Gamma(\theta)\neq\mathbb{T}$ we obtain a finite union of vertices of regular polygons containing 1 and contained in the unit disk. Examples in [18] show that all the situations described above can occur with representations of compact abelian groups : let p be a positive integer, with $p\geq 2$, set $G=\Gamma_p^{\mathbb{N}}$, equipped with the product topology. Then the compact group G admits a representation θ on $\mathbb{C}$ for which $\Gamma(\theta)=\Gamma_p$. To see this, pick a free ultrafilter $\mathcal{U}$ on $\mathbb{N}$ and set $\theta(u)=\lim_{\mathcal{U}} u_n$, for $u=(u_n)_{n\geq 0}$ in G. Looking at sequences $u^{(m)}=(u_n^{(m)})_{n\geq 0}\in G$ which are constant for $n>m$ and satisfy $u_n^{(m)}=1$, for $n\leq m$, we see immediately that the bounded representation θ of G satisfies $\Gamma(\theta)=\Gamma_p$. Also the one-dimensional representation θ of G satisfies $\limsup_{u\to 1}\|1-\theta(u)\|=\limsup_{u\to 1}\rho(1-\theta(u))=\sin(\frac{p\pi}{2p+1})$.

2. If G is a locally compact abelian group and if $\theta : G\to A$ is a unital representation of G on a Banach algebra A which is spectrally continuous, that is $\lim_{u\to 1}\rho(\theta(u)-I)=0$, then either $\lim_{u\to 1}\|\theta(u)-I\|=0$, or $\limsup_{u\to 1}\|\theta(u)-I\|=+\infty$. This result follows from a classical theorem of Gelfand [23], later improved by Hille [26] which shows that if an element a in a Banach algebra A satisfies $spec(a)=\{1\}$ and $\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|a^n\|<+\infty$, then a is the unit element of A. This result is equivalent to the fact that points are sets of synthesis in the Wiener algebra $W(\mathbb{T})$ of absolutely convergent Taylor series, and it can also be deduced from the fact that entire functions of zero exponential type bounded on the line are constant.

Using Gelfand's theorem and the closed graph theorem we were able to extend this automatic continuity theorem for spectrally continuous and locally bounded representation of abelian Baire group on a separable Banach algebra. We don't know whether such a law holds in general but we were able to obtain a "zero-two law" for spectrally continuous representations of arbitrary topological groups. In this situation either $\lim_{u\to 1}\|\theta(u)-I\| = 0$, or $\sup_{u\in U}\|\theta(u)-I\| > 2$, for any neighborhood U of the unit element of G. These phenomena are based on the fact that for any element a of a Banach algebra A such that $\rho(\sin(a)) < 1$ and $\rho(\arcsin(\sin(a))) < 1$ then $\arcsin(\sin(a)) = a$. This use of the arcsine function was suggested to the author by an adaptation of G.R. Allan and T.J. Ransford [1] to the proof of Gelfand's theorem of an argument used by Bonsall and Crabb [9] in their proof of Sinclair's theorem on the spectral radius of a hermitian element. This argument is analyzed in detail in §4 of the recent paper [27]. Our argument also gives an automatic continuity result for spectrally continuous and locally bounded representation of compact non abelian groups.

2.2 Dichotomy laws for topological groups

Let $(G,.)$ be a topological group, let A be a unital Banach algebra, and let I be the unit element of A. A unital representation of G on A is a map $\theta : G \to A$ such that $\theta(1) = I$ and $\theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$ for $u, v \in G$.

Definition 1. *Let $(G,.)$ be a topological group, and $\theta : G \to A$ be a unital representation of G on a Banach algebra A. We will say that θ is spectrally continuous if* $\lim_{u\to 1}\rho(\theta(u)-I) = 0$.

Definition 2. *Let $(G,.)$ be a topological group, and $\theta : G \to A$ be a representation of G in a Banach algebra A. We will say that θ is locally bounded if there exists a neighborhood V of 1, such that* $\sup_{u\in V}\|\theta(u)\| < +\infty$.

Definition 3. *Let n be a positive integer. We will say that G admits continuous division by n if there exists an open subset U of G containing the unit element 1, and a map $\varphi : U \to G$, which is continuous at 1 and satisfies $\varphi(1) = 1$ and $\varphi^n(u) = u$, $u \in U$.*

J. Esterle showed in [18, corollary 2.3], that if $\theta : G \to A$ is a locally bounded representation of a topological group G on a Banach algebra A, then either $\lim_{u\to 1}\rho(I-\theta(u)) = 0$, or $\limsup_{u\to 1}\rho(I-\theta(u)) = 2\sin(\frac{n\pi}{2n+1}) \geq \sqrt{3}$ for some $n \geq 1$, or $\limsup_{u\to 1}\rho(I-\theta(u)) = 2$. If, further, G admits continuous division by n, for every $n \geq 1$, it follows from the corrected version of corollary 2.3 of [18] in [20] that either $\lim_{u\to 1}\rho(I-\theta(u)) = 0$, or $\limsup_{u\to 1}\rho(I-\theta(u)) = 2$. The following theorem gives a similar dichotomy law for the behaviour of $\|(\theta(u)-I)\|$ near the origin :

Theorem 2.2.1. *Let G be a topological group, and let $\theta : G \to A$ be a unital representation of G on a Banach algebra. Then either* $\lim_{u\to 1} \|\theta(u)-1\| = 0$, *or* $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u)-1\| \geq \sqrt{3}$. *If, further, G admits continuous division by n, for every positive integer $n \geq 2$, then either* $\lim_{u\to 1} \|\theta(u)-1\| = 0$, *or* $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u)-1\| \geq 2$.

This follows immediately from the next theorem, Theorem 2.2.2, and Esterle's result mentioned above. Theorem 2.2.2 in fact gives a condition weaker than the condition $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u)-1\| < 2$, which ensures that a spectrally continuous group is continuous. So if the group admits continuous division by n for every $n \geq 2$, and if we have $\limsup_{u\to 1} \|I-\theta(u)\| < 2$ then, since $\rho(a) \leq \|a\|$ for every $a \in A$, the group representation is spectrally continuous and thus continuous, by theorem 2.2.2.

Let A be a Banach algebra with unit element I, let $a \in A$ be such that $\rho(I-a) < 1$, let $b \in A$ such that $\rho(b) < 1$, and let $c \in A$. We can use the principal determination $z \mapsto \log(z)$ of the logarithm on $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, the holomorphic mapping $z \mapsto \arcsin(z)$ on $\mathbb{D}$, and the entire function $z \mapsto \sin(z)$, to define $\log(a)$, $\arcsin(b)$ and $\sin(c)$ by the usual holomorphic calculus. In fact we have

$$\begin{aligned}
\log(a) &= \log(1+a-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(a-1)^n \\
\arcsin(b) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \ldots (2n-1)}{2^n n!(2n+1)} b^{2n+1} \\
\sin(c) &= \frac{e^{ic}-e^{-ic}}{2i}.
\end{aligned}$$

We wil need the following elementary lemma :

Lemma 2.2.1. *(i) Let $a, b \in A$ be such that $\rho(a) < 1$, $\rho(b) < 1$, $ab = ba$ and $\sin(a) = \sin(b)$; then $a = b$.*

(ii) Let $b \in A$ such that $\rho(\sin(b)) < 1$ and $\rho(\arcsin(\sin(b))) < 1$; then $b = \arcsin(\sin(b))$.

Proof. Let $a, b \in A$ be such that $\rho(a) < 1$, $\rho(b) < 1$, $ab = ba$ and $\sin(a) = \sin(b)$. Since $ab = ba$, we can suppose that A is commutative. Let $\chi \in \hat{A}$. Then $\sin(\chi(a)) = \sin(\chi(b))$ and either $\chi(a) = \chi(b) + 2k\pi$, or $\chi(a) = \pi - \chi(b) + 2k\pi$, for some $k \in \mathbb{Z}$. Since $\rho(a) < 1$ and $\rho(b) < 1$, only the first case can occur, with $k = 0$. Hence $spec(a-b) = \{0\}$. Also $\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2}) = 0$, so that $(e^{i(a-b)}-1)(e^{i(a+b)}+1) = 0$. Since $e^{i(a+b)}+1$ is invertible, we have $e^{i(a-b)} - 1 = 0 = (a-b)(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k}{k!}(a-b)^{k-1})$. Since $(a-b)$ is quasinilpotent $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k}{k!}(a-b)^{k-1}$ is invertible, so that $a = b$.

Let $b \in A$ such that $\rho(\sin(b)) < 1$ and $\rho(\arcsin(\sin(b))) < 1$. Since $\sin(\arcsin(z)) = z$ for every $z \in \mathbb{D}$, we have $\sin(b) = \sin(\arcsin(\sin(b)))$, and so $b = \arcsin(\sin(b))$. □

Notice also that if $a \in A$, if $\|a^k\| \leq M$, for $0 \leq k \leq m-1$, and if $\|a^m\| \leq \lambda^m$, for some $\lambda \geq 1$, $M > 0$, and some positive integer $m \geq 0$, then an immediate computation shows that

$$\|a^n\| \leq M\lambda^n, \tag{2.2.1}$$

for every $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 2.2.2. *Let G be a topological group, and let $\theta : G \to A$ be a locally bounded unital representation of G on a Banach algebra. If θ is spectrally continuous, and if there exists a neighborhood V of the unit element of G such that $\sup_{u\in V} \|(\theta(u) - I)^n\| \leq 2^n$, for some positive integer n, then θ is continuous, so that $\lim_{u\to 1} \|\theta(u) - 1\| = 0$.*

Proof. Since θ is locally bounded we can assume that θ is bounded on V and that $V = V^{-1}$, so that $M := max\{\sup_{u\in V} \|\theta(u)\|, \sup_{u\in V} \|(\theta(u)-I)^k\|, 0 \leq k \leq n\} < +\infty$. We deduce then from (2.2.1) that we have $\|(\theta(u) - I)^k\| \leq M2^k$, for every $k \in \mathbb{N}$ and for every $u \in V$. Consider a neighborhood V_1 of 1 contained in V such that $u^2 \in V$ for every $u \in V_1$; we have $(\theta(u)-\theta(u^{-1}))^2 = (\theta(u^2) - I) + (\theta(u^{-2}) - I)$, for every $u \in G$, so that $\|(\theta(u) - \theta(u^{-1}))^{2k}\| = \|\Big((\theta(u^2)-I)+(\theta(u^{-2})-I)\Big)^k\| \leq \sum_{p=1}^k C_k^p\|(\theta(u^2)-I)^p\|\|(\theta(u^{-2})-I)^{k-p}\| \leq M^2 2^{2k}$ and $\|(\theta(u)-\theta(u^{-1}))^{2k+1}\| \leq M^3 2^{2k+1}$, for any positive integer k, and for every $u \in V_1$. Since θ is spectrally continuous, i.e. $\lim_{u\to 1} \rho(\theta(u)-I) = 0$, there exists a neighborhood V_2 of 1 contained in V_1, such that $\rho(\theta(u)-I) < \frac{1}{2}$ and such that, if we set $\varphi(u) = -i\log(\theta(u))$, for $u \in V_2$, then $\rho(\varphi(u)) < \frac{1}{2}$, $\rho(\sin(\varphi(u))) < \frac{1}{2}$,and $\rho(\arcsin(\sin(\varphi(u)))) < \frac{1}{2}$, for every $u \in V_2$. For any positive integer k, we have :

$$\begin{aligned} \|\sin^{2k+1}(\varphi(u))\| &= \left\|\frac{(\theta(u) - \theta(u)^{-1})^{2k+1}}{2^{2k+1}}\right\| \\ &\leq M^3 \quad , u \in V_2,\ k \geq 0. \end{aligned}$$

If $\sum_{k\geq 0} c_k z^{2k+1}$ is the Taylor expansion at 0 of the principal value of $\arcsin(z)$, then an elementary observation shows that $c_k \geq 0$ for all k, and that $\sum_{k\geq 0} c_k$ converges to $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Hence

$$\|\varphi(u)\| = \|\arcsin(\sin(\varphi(u)))\| \leq \sum_{k\geq 0} |c_k|\|\sin^{2k+1}(\varphi(u))\| \leq \frac{\pi}{2}M^3, \quad u \in V_2.$$

Let $\varepsilon > 0$, and let N be a positive integer such that $\frac{\pi}{2}\frac{M^3}{N} < \varepsilon$. Since the map $u \mapsto u^N$ is continuous in G, there exists a neighborhood V_3 of 1 contained in V_2, such that $u^N \in V_3$ for every $u \in V_2$. For $u \in V_3$, $\varphi(u^N) = N\varphi(u)$, hence

$$\|N\varphi(u)\| \leq \frac{\pi}{2}M^3,$$

so that

$$\|\varphi(u)\| \leq \varepsilon, \quad u \in V_3.$$

It follows that $\lim_{u\to 1} \varphi(u) = 0$, and therefore that $\lim_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| = 0$. $\square$

Notice that in theorem 2.2.2 we can replace the condition $\sup_{u\in V} \|(\theta(u) - I)^n\| \leq 2^n$, by the condition $\sup_{u\in V} \|(\theta(u) - \theta(u^{-1}))^n\| \leq 2^n$. It is unknown whether some such condition is necessary. Proposition 2.3.1 and Proposition 2.3.2 suggest the following question : Is any spectrally continuous and locally continuous representation of a general topological group continuous ? Theorem 2.2.2 shows only that if such a representation θ is not continuous we have $\sup_{u\in V} \|\theta(u) - I\| > 2$ for every neighborhood V of the origin.

2.3 Automatic continuity for spectrally continuous representations of compact or abelian Baire groups

It is shown in [18] that a locally bounded and spectrally continuous representation $\theta : H \to A$ of a locally compact abelian group H on a Banach algebra A is continuous, that is to say $\limsup_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| = 0$. In this section we get a similar automatic continuity result for representations of compact groups on a Banach algebra and representations of abelian Baire groups on a separable Banach algebra, thus improving theorem 2.2.2 in these situations.

Proposition 2.3.1. *Let $\theta : H \to A$ be a locally bounded representation of a compact group H on a Banach algebra A. If θ is spectrally continuous then it is continuous, so that* $\lim_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| = 0$.

Proof. Since θ is locally bounded and since H is compact, θ is bounded. Also θ is spectrally continuous, and so there exists a neighborhood V of 1 such that $\rho(\theta(u) - I) < \frac{1}{2}$ and such that, if we set $\varphi(u) = -i\log(\theta(u))$, then $\rho(\varphi(u)) < \frac{1}{2}$, and $\rho(\sin(\varphi(u))) < \frac{1}{2}$, for every $u \in V$. We have

$$\|\sin^k(\varphi(u))\| \leq \frac{\|(\theta(u) - \theta(u^{-1}))^k\|}{2^k} \leq M, \quad k \geq 0,$$

where $M := \sup_{u\in H} \|\theta(u)\| < +\infty$. As in the proof of theorem 2.2.2, we obtain

$$\|\varphi(u)\| = \|\arcsin(\sin(\varphi(u)))\| \leq \sum_{k\geq 0} |c_k| \|\sin^k(\varphi(u))\| \leq \frac{\pi}{2} M \quad u \in W,$$

so that $\lim_{u\to 1} \|\theta(u) - I\| = 0$. $\square$

Proposition 2.3.2. *Let $\theta : H \to A$ be a locally bounded representation of an abelian topological group H on a Banach algebra. If θ is spectrally continuous, then the graph of θ is closed. Thus, if H is an abelian Baire group and if A is separable, θ is continuous.*

Proof. Since H is an abelian group, we can suppose that A is a commutative algebra. Let $(u_n)_{n\geq 0}$ be a sequence in H such that $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, and $\lim_{n\to+\infty} \theta(u_n) = w \in A$. Since $\lim_{u\to 1} \rho(\theta(u) - I) = 0$, and since A is a commutative Banach algebra, we have $spec(w) = \{1\}$. In particular w is invertible, $\lim_{n\to+\infty} u_n^N = 1$, and $\lim_{n\to+\infty} \theta(u_n^N) = w^N$, for $N \in \mathbb{Z}$. Since θ is locally bounded, $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|w^n\| < +\infty$. Now $spec(w) = \{1\}$ and $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|w^n\| < +\infty$, so that, by Gelfand's theorem, see [23], $w = 1$, and the graph of θ is closed. If H is a Baire group and A is separable, this shows that θ is continuous, see [11, Théorème 4, TG iX.69]. □

Chapitre 3

Une étude spectrale dans le cas non quasianalytique

3.1 Introduction

On considère l'espace Hardy $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ défini par

$$H^2_\sigma(\mathbb{D}) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ \|f\| := \big(\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2\sigma(n)^2\big)^{1/2}\},$$

où $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$, $\hat{f}(n)$ désigne le n-ième coefficient de Taylor à l'origine de f, et σ une application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que σ vérifie les conditions $0 < \inf_{n\geq 0} \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} \leq \sup_{n\geq 0} \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} < +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \tilde{\sigma}(n)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \overline{\sigma}(n)^{1/n} = 1$, où $\tilde{\sigma}(n) := \sup_{p\geq 0} \frac{\sigma(n+p)}{\sigma(p)}$ et $\overline{\sigma}(n) := \sup_{p\geq 0} \frac{\sigma(p)}{\sigma(n+p)}$.

Il résulte de travaux de N.Nikolski [34] que si $\sigma \leq 1$ vérifie des conditions de régularité convenables, la condition de "non-quasianalyticité unilatérale"

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}} < +\infty, \tag{3.1.1}$$

est nécessaire et suffisante pour que les fonctions $\varphi_c = e^{c\frac{z+1}{z-1}}$ $(c > 0)$ engendrent un sous-espace z-invariant non trivial. Des résultats analogues avaient été obtenus par Beurling dans [7] pour certains espaces localement convexes non banachiques de fonctions holomorphes. A.Atzmon a plus tard montré dans [2] que les sous-espace z-invariants M_c engendrés par les fonctions φ_c sont les seuls sous-espaces z-invariants M de $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ vérifiant $Spec(S_M) = \{1\}$, où $S_M(f + M) = Sf + M$ $(f \in H^2_\sigma(\mathbb{D}))$. Dans le cas où

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}} = +\infty,$$

N.Nikolski propose dans [34] une méthode basée sur le "lemme de Keldysh" qui permet de construire des fonctions $f \in H^2_\sigma(\mathbb{D})$ sans zéros dans $\mathbb{D}$ engendrant un sous-espace z-invariant non trivial pour des poids à décroissance arbitrairement rapide. Dans le cas où $\sigma_\alpha(n) = e^{-n^\alpha}$ $(n \geq 0,\ \alpha \in (1/2, 1))$, la méthode de N.Nikolski devient explicite et il construit une fonction ψ_α du type

$$\psi_\alpha(z) = e^{\sum_{k=0}^{p_\alpha} \frac{b_k}{(1-z)^{\alpha/(1-\alpha)-k}}} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

où $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $p_\alpha = [\frac{\alpha}{1-\alpha}]$, telle que si on pose

$$\psi_{\alpha,c}(z) = e^{\sum_{k=0}^{p_\alpha} \frac{b_k}{(1-z)^{\alpha/(1-\alpha)-k}} - \frac{1}{(1-z)^c}},$$

où $c \in (0,1)$, la fonction $\psi_{\alpha,c}$ engendre un sous-espace z-invariant non trivial de $H^2_{\sigma_\alpha}(\mathbb{D})$. Les fonctions $\psi_{\alpha,c}$ admettent un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Le but de ce chapitre est de montrer que si le shift $S : f \mapsto zf$ et le shift arrière $Tf \mapsto \frac{f-f(0)}{z}$ sur un espace admissible de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ vérifient

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\log^+ \|S^n\| + \log^+ \|T^n\|}{1+n^2} < +\infty,$$

et si $f \in E$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r)$, avec $|\zeta| = 1$, $f(\zeta) \neq 0$ alors $\zeta \notin Spec(S_M)$ pour tout sous-espace z-invariant M contenant f tel que $Spec(S_M) \subset \mathbb{T}$. On en déduit immédiatement que si $M_{\alpha,c}$ est le sous-espace z-invariant de $H^2_{\sigma_\alpha}(\mathbb{D})$ engendré par la fonction $\psi_{\alpha,c}$ de N.Nikolski, alors $Spec(S_{M_{\alpha,c}}) = \{1\}$.

On ne dispose pas à ce jour d'une classification des sous-espaces z-invariants M de $H^2_{\sigma_\alpha}(\mathbb{D})$ tels que $Spec(S_M) = \{1\}$. De tels sous-espaces ont été construits récemment par A.Atzmon [3] par une méthode, très différente de celle de N.Nikolski, basée sur les fonctions de type exponentiel nul qui fonctionne pour des poids log-convexes vérifiant une certaine condition de régularité. Notons que A.Borichev, H.Hedenmalm et A.Volberg ont construit dans [10] des fonctions f sans zéros pour tous les poids log-convexes à décroissance suffisamment rapide. On ne dispose pas de description de $Spec(S_{[f]})$ où $[f]$ est le sous-espace z-invariant engendré par ces fonctions.

Nous considérons des espaces de Banach E de fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\cup_{0<r<1} \mathcal{H}(r^{-1}\mathbb{D}) \subset E \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$, et l'inclusion $E \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est continue

(ii) Si $f \in E$, alors $\lim_{r \to 1^-} \|f^{[r]} - f\| = 0$, où $f^{[r]} = f(rz)$ $(z \in \mathbb{D})$.

(iii) $S(E) \subset E$ et $T(E) \subset E$, où $Tf = \frac{f-f(0)}{z}$

(iv) $Spec(S) = Spec(T) = \overline{\mathbb{D}}$

On dit que de tels espaces sont des espaces admissibles de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$. On note f_λ la fonction définie par $f_\lambda(z) = \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}$ pour $z \in \mathbb{D}$, $z \neq \lambda$ et $f_\lambda(\lambda) = f'(\lambda)$.

Nous montrons le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Soient M un sous-espace z-invariant d'un espace admissible E de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ vérifiant*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+ \|S^n\| + \log^+ \|T^n\|}{1+n^2} < +\infty,$$

tel que $Spec(S_M) \subset \mathbb{T}$. Soient $\zeta \in \mathbb{T}$ et $r > 0$; s'il existe $f \in M$ admettant un prolongement à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r)$ et telle que $f(\zeta) \neq 0$, alors

$$\zeta \notin Spec(S_M).$$

La première étape de la démonstration du théorème 3.1.1 est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1.2. *Soient E un espace admissible de fonctions analytiques vérifiant*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+ \|S^n\| + \log^+ \|T^n\|}{1+n^2} < +\infty,$$

et $f \in E$; on suppose qu'il existe $\zeta \in \mathbb{T}$ et $r_0 > 0$ tels que f s'étend en une fonction analytique sur $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$. Alors l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ s'étend en une application analytique de $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}(\zeta, r_0)$ dans E.

Ce résultat est basé sur la condition de non-quasianalyticité. Nous montrons d'abord que les fonction $f_\lambda^{[r]}$ s'étendent analytiquement à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$, où $f^{[r]}(z) = f(rz)$, pour $z \in \mathbb{D}$. Ensuite par un argument de familles normales, le théorème de Levinson-Cartwright, nous en déduisons le lemme pour la fonction $\lambda \mapsto f_\lambda$.

Il résulte du théorème 3.1.2 que si p est un polynôme, l'application $\lambda \mapsto < (S_M - \lambda I)^{-1}\pi(p), g >$ admet un prolongement analytique à un disque $D(\zeta, r_1)$ si $f(\zeta) \neq 0$, où π désigne la surjection canonique de E sur E/M. La deuxième étape de la démonstration du théorème 3.1.1 consiste à montrer que ceci reste vrai pour les applications $\lambda \mapsto < (S_M - \lambda I)^{-1}\pi(f), g >$, où f est élément quelconque de E. Ceci se démontre en utilisant de nouveau le théorème de Levinson-Cartwright.

Il semblerait intéressant de chercher si on peut obtenir des résultats dans la direction inverse de ceux obtenus ici, c'est-à-dire, si $\zeta \in \mathbb{T}$ et $\zeta \notin Spec(S_M)$, existe-t-il nécessairement une fonction $f \in M$ telle que f s'étend analytiquement au voisinage de ζ ? Nous n'avons pas abordé cette question dans la thèse.

3.2 Le théorème de Levinson-Cartwright

3.2.1 Le théorème de Levinson-Cartwright

Le théorème de Levinson-Cartwright (voir [6], [12], [14], [15], [24], [29, p.376], [30], [31], [32] et [40]) donne une condition de croissance sur un rectangle U privé de l'un de ses axes de symétrie Δ qui permet d'affirmer qu'une famille de fonctions holomorphes dans U vérifiant ladite condition est normale (bien que la majoration donne $f(z) \leq +\infty$ pour $z \in \Delta$). On a plus précisément le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 (Levinson-Cartwright)**.** *Soient $\delta > 0$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et U le rectangle ouvert $\{z \in \mathbb{C},\, Re(z) \in I,\, Im(z) \in (-\delta, \delta)\}$; soit $\rho : [0, \delta] \to [0, +\infty[$ une fonction strictement croissante telle que $\rho(0) = 0$; alors si*

$$\int_0^\delta \log(\log(\frac{1}{\rho(x)}))dx < +\infty,$$

la famille des fonctions f holomorphes sur U telles que $|f(z)| \leq \frac{M}{\rho(|Im(z)|)}$, pour $z \in U$, $Im(z) \neq 0$, est une famille normale.

Par transformation conforme nous pouvons énoncer le théorème précédent pour des familles de fonctions holomorphes dans un voisinage d'un point du bord du disque unité $\mathbb{D}$, le rectangle U devenant une partie de couronne du type $\{z \in \mathbb{C},\, \delta < |z| < 1/\delta,\, |arg(z) - \theta_0| < \alpha\}$. Dans ce cadre les droites $Im(z) = c$ deviennent les droites $arg(z) = c$, ce qui nous donne le théorème suivant :

Corollaire 3.2.2 (Levinson-Cartwright)**.** *Soient $0 < \delta < 1$, $\theta_0 \in]0, 2\pi[$, $\alpha < \pi$ et U l'ouvert défini par $\{z \in \mathbb{C},\, \delta < |z| < 1/\delta,\, |arg(z) - \theta_0| < \alpha\}$; soit $\rho :]\delta, 1] \to [0, +\infty[$ une fonction strictement croissante telle que $\rho(1) = 0$; alors si*

$$\int_\delta^1 \log(\log(\frac{1}{\rho(r)}))dr < +\infty,$$

la famille des fonctions f holomorphes sur U telles que $|f(z)| \leq \frac{M}{\rho(r)}$, pour $z \in U$, $|z| \in \{r, 1/r\}$, $r \in]\delta, 1[$, est une famille normale.

3.2.2 Croissance de la résolvante

Nous aurons à considérer dans ce chapitre, des fonctions analytiques dans un voisinage d'un point du bord du disque dont la croissance est contrôlée par $\|(S - \lambda I)^{-1}\|$ et $\|(T - \lambda I)^{-1}\|$, $|\lambda| \to 1^-$, où S est un opérateur borné sur un espace de fonction analytiques et T est son inverse à gauche. Nous allons montrer que lorsque

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\log^+ \|S^n\| + \log^+ \|T^n\|}{1 + n^2} < +\infty,$$

alors

$$\int_{\delta_0}^1 \log\log \|(S - re^{i\theta} I)^{-1}\| dr < +\infty,$$

et
$$\int_{\delta_0}^{1} \log\log \|(T - re^{i\theta}I)^{-1}\| dr < +\infty,$$
ce qui nous permettra d'utiliser le corollaire 3.2.2 dans ce cadre.

Les deux lemmes suivants, bien connus mais difficiles à trouver dans la littérature proviennent des notes de cours de D.E.A. de M.Zarrabi [41].

Lemme 3.2.3 ([41])**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels positifs vérifiant $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ et $a_{-n} = a_n$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$. On pose $b_n = \sup_{0\leq k\leq n} a_k$, $n \geq 0$. On a*

(i) $b_{n+m} \leq b_n + b_m$, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$

(ii) Si $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+n^2} < +\infty$, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{1+n^2} < +\infty$

Démonstration. Montrons (i). Soient $n, m \in \mathbb{N}$; on a :
$$\begin{aligned} b_{n+m} &= \sup_{0\leq k\leq n+m} a_k \\ &= \sup_{0\leq r\leq n,\, 0\leq s\leq m} a_{r+s} \\ &\leq \sup_{0\leq r\leq n,\, 0\leq s\leq m} (a_r + a_s) \\ &\leq b_n + b_m. \end{aligned}$$

Montrons (ii). Soit $E := \{n \in \mathbb{N}, a_n = b_n\}$; si E est fini et si $m = \sup E$, alors on a $a_n \leq a_m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n = b_m$, pour tout $n \geq m$. On a donc $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+n^2} < +\infty$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{1+n^2} < +\infty$. Supposons maintenant que E n'est pas fini. On écrit $E = \{n_k,\, k \in \mathbb{N}\}$, où $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante. Il est facile de voir que pour $n_k \leq n < n_{k+1}$, on a $b_n = a_{n_k}$. Ainsi, pour $k \geq 2$,
$$\begin{aligned} \sum_{n_k\leq n<n_{k+1}} \frac{b_n}{n^2} &= a_{n_k} \sum_{n_k\leq n<n_{k+1}} \frac{1}{n^2} \\ &\leq a_{n,k} \int_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &\leq \alpha a_{n_k} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k n_{k+1}}, \end{aligned}$$
où α est une constante ne dépendant pas de k.

D'autre part, on a
$$\sum_{n_k\leq n<n_{k+1}} \frac{a_n}{n^2} \geq \sum_{n_k\leq n<m_k} \frac{a_n}{n^2},$$
où $m_k = \inf\{2n_k, n_{k+1}\}$. Posons $A = \{n \in \mathbb{N},\, n_k \leq n < m_k,\, a_n < \frac{a_{n_k}}{3}\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N},\, n_k \leq n < m_k,\, n = n_k + r - s,\, r, s \in A\}$. Si $n \in B$, on a $a_{n_k} = a_{n+s-r} \leq a_n + a_s + a_{-r} \leq a_n + \frac{2}{3} a_{n_k}$, $(s, r \in A)$, et donc $\frac{a_{n_k}}{3} \leq a_n$, ce qui

entraîne que $A \cap B = \emptyset$. De plus, si A contient p éléments, soient $r_1, \ldots, r_p$, alors B contient au moins p éléments, à savoir $n_k, n_k + r_p - r_{p-1}, \ldots, n_k + r_p - r_1$. Par conséquent B contient au moins autant d'éléments que A. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{a_n}{n^2} &\geq \sum_{n_k \leq n < m_k} \frac{a_n}{n^2} \\
&\geq \sum_{n \in B} \frac{a_n}{n^2} \\
&\geq \frac{1}{3} a_{n_k} \sum_{[\frac{n_k+m_k}{2}] \leq n < m_k} \frac{1}{n^2} \\
&\geq \frac{1}{3} a_{n_k} \int_{\frac{n_k+m_k}{2}}^{m_k} \frac{1}{x^2} dx \\
&\geq \frac{1}{3} a_{n_k} \frac{m_k - n_k}{(n_k + m_k) m_k}.
\end{aligned}$$

Si $m_k = 2n_k$, on a

$$\sum_{n_k \leq n < m_{k+1}} \frac{b_n}{n^2} \leq \frac{\alpha}{2} \frac{a_{n_k}}{n_k},$$

et

$$\sum_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{18} \frac{a_n}{n_k}.$$

Si $m_k = n_{k+1}$, on a

$$\sum_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{b_n}{n^2} \leq \alpha a_{n_k} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k n_{k+1}},$$

et

$$\sum_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{a_{n_k}}{9} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k n_{k+1}}.$$

Il existe donc $M > 0$ tel que l'on ait dans les deux cas

$$\sum_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{b_n}{n^2} \leq M \sum_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{a_n}{n^2},$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^2} \leq M \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^2}.$$

□

Lemme 3.2.4 ([41]). *Soit* $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite vérifiant* $w(n) = w(-n)$ *pour* $n \geq 0$ *telle que*

$1 \leq w_{n+m} \leq w_n w_m$, *pour tout* $n, m \in \mathbb{Z}$

$\sum_{n\geq 0} \frac{\log w_n}{1+n^2} < +\infty$

Alors il existe une suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ *croissante et qui satisfait les conditions suivantes :*

(i) $w_n \leq \tau_n$, *pour tout* $n \geq 0$

(ii) $(\frac{\log \tau_n}{n})_{n\geq 1}$ *est strictement décroissante*

(iii) $\sum_{n\geq 1} \frac{\log \tau_n}{1+n^2} < +\infty$

Démonstration. Posons $a_n = \log w_n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a $0 \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m$, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+n^2} < +\infty$. D'après le lemme 3.2.3, il existe une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ croissante telle que

$$\begin{aligned} & a_n \leq b_n, \text{ pour tout } n \geq 0 \\ & b_{n+m} \leq b_n + b_m, \text{ pour tout } n, m \in \mathbb{N} \\ & \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{1+n^2} < +\infty. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Il découle de (3.2.1) que la suite $(\frac{b_{2^p}}{2^p})_{p\geq 0}$ est décroissante. Quitte à remplacer b_n par $b_n + \sqrt{n}$ $(n \geq 0)$, on peut supposer que la suite $(\frac{b_{2^p}}{2^p})_{p\geq 0}$ est strictement décroissante et la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ strictement croissante. Posons

$$\gamma_n = \frac{n - 2^p}{2^{p+1} - 2^p} \frac{b_{2^{p+1}}}{2^{p+1}} + \frac{2^{p+1} - n}{2^{p+1} - 2^p} \frac{b_{2^p}}{2^p},$$

si $n \in [2^p, 2^{p+1}]$. La suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante. Comme $(b_n)_{n\geq 0}$ est croissante, on a pour tout $n \in [2^p, 2^{p+1}]$,

$$\gamma_n \leq \frac{b_{2^p}}{2^p} \leq \frac{b_n}{n} \frac{n}{2^p} \leq 2\frac{b_n}{n}$$

et

$$\gamma_n \geq \frac{b_{2^{p+1}}}{2^{p+1}} \geq \frac{b_n}{n} \frac{n}{2^{p+1}} \geq \frac{1}{2} \frac{b_n}{n}.$$

On pose $\tau_0 = 1$ et

$$\tau_n = \exp\big(\sup_{1\leq k\leq n} 2k\gamma_k\big),$$

pour $n \geq 0$. Il est clair que $(\tau_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante et que $w_n \leq e^{b_n} \leq \tau_n$ pour $n \geq 0$. On a aussi $\log \tau_n \leq 4b_n$ $(n \geq 0)$, ce qui entraîne que $\sum_{n\geq 0} \frac{\log \tau_n}{1+n^2} < +\infty$. En utilisant le fait que $\gamma_{n+1} \leq \gamma_n$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\log \tau_{n+1}}{n+1} &= \max\Big\{\frac{1}{n+1} \sup_{1\leq k\leq n} 2k\gamma_k, \ \frac{2(n+1)\gamma_{n+1}}{n+1}\Big\} \\ &< \max\Big\{\frac{1}{n} \sup_{1\leq k\leq n} 2k\gamma_k, \ \frac{2n\gamma_n}{n}\Big\} \\ &= \frac{\log \tau_n}{n}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ vérifie bien les propriétés cherchées. $\square$

Le lemme suivant est une modification mineure de [34, lemme 2 p.152].

Lemme 3.2.5. *Soit* $(d_n)_{n\geq 0}$ *une suite croissante de réels positifs telle que*
(i) $d_0 \geq 1$
(ii) $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$
(iii) $k(n) := \frac{\log d_n}{n}$ *est strictement décroissante et* $\lim_{n\to+\infty} k(n) = 0$
On pose $\lambda(r) = \sup_{n\geq 0} d_n r^n$, *pour* $r \in [0,1)$ *; si* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log d_n}{1+n^2} < +\infty$, *alors*

$$\int_0^1 \log\log\lambda(r)dr < +\infty.$$

Démonstration. Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log d_n}{1+n^2} < +\infty$; on prolonge k de manière évidente en une fonction affine par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose $N(\sigma) = k^{-1}(\sigma/2)$, $0 < \sigma < \sigma_0$, avec $\sigma_0 := 2\log d_1$. Pour $\sigma > 0$, il existe $n(\sigma)$ tel que $\lambda(e^{-\sigma}) = \sup_{n\geq 0} d_n e^{-n\sigma} = d_{n(\sigma)} e^{-n(\sigma)\sigma}$. On constate tout d'abord que $k(N(\sigma)) = \frac{\sigma}{2}$, donc puisque la fonction k est décroissante $k(n) \leq \frac{\sigma}{2}$ pour tout $n \geq [N(\sigma)] + 1$. On a donc pour tout $n \geq [N(\sigma)] + 1$, $k(n) - \sigma \leq -\frac{\sigma}{2}$, d'où $n(k(n) - \sigma) \leq -\frac{n\sigma}{2}$. Ainsi $d_n e^{-n\sigma} = e^{n(k(n)-\sigma)} \leq e^{-\frac{n\sigma}{2}} < 1$ pour tout $n \geq [N(\sigma)] + 1$. Or, puisque $d_0 = 1$, $\lambda(e^{-\sigma}) = \sup_{n\geq 0} d_n e^{-n\sigma} \geq 1$, donc le sup est atteint pour $n \leq [N(\sigma)] + 1$, c'est-à-dire $n(\sigma) \leq [N(\sigma)] + 1$. La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ étant croissante, on a alors $d_{n(\sigma)} \leq d_{[N(\sigma)]+1}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lambda(e^{-\sigma}) &= d_{n(\sigma)} e^{-n(\sigma)\sigma} \\
&\leq d_{n(\sigma)} \\
&\leq e^{k([N(\sigma)]+1)([N(\sigma)]+1)} \\
&\leq e^{\frac{\sigma}{2}(N(\sigma)+1)}.
\end{aligned}$$

On a alors pour $0 < \delta_0 < 2\sigma_0$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta_0} \log\log\lambda(e^{-\sigma})d\sigma &\leq \int_0^{\delta_0} \log\frac{\sigma}{2}(N(\sigma)+1)d\sigma \\
&\leq \int_0^{\delta_0} \log\frac{\sigma}{2}d\sigma + \int_0^{\delta_0} \log(N(\sigma)+1)d\sigma.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $t = N(\sigma)$, en posant $t_0 = N(\delta_0)$, puisque $d\sigma = 2k'(t)dt$, on a

$$\int_0^{\delta_0} \log(N(\sigma)+1)d\sigma = -2\int_{t_0}^{+\infty} \log(1+t)k'(t)dt.$$

En effectuant une intégration par parties on obtient :

$$-\int_{t_0}^{+\infty} \log(1+t)k'(t)dt \leq k(t_0)\log(1+t_0) + \int_0^{+\infty} \frac{k(t)}{1+t}dt \leq k(t_0)\log(1+t_0) + \sum_{n\geq 0} \frac{\log d_n}{1+n^2},$$

donc
$$\int_0^{\delta_0} \log(N(\sigma)+1)d\sigma < +\infty.$$
Ainsi, puisque la fonction $\sigma \mapsto \log \sigma/2$ est intégrable au voisinage de zéro, on a
$$\int_0^{\delta_0} \log\log\lambda(e^{-\sigma})d\sigma < +\infty.$$
En effectuant le changement de variable $t = e^{-\sigma}$, et en posant $t_1 = e^{-\delta_0}$, on a
$$\int_0^{\delta_0} \log\log\lambda(e^{-\sigma})d\sigma = \int_{t_1}^1 \log\log\lambda(t)\frac{dt}{t},$$
donc
$$\int_0^1 \log\log\lambda(t)dt < +\infty.$$
□

Proposition 3.2.6. *Soit X un espace de Banach et S un opérateur borné sur X ayant un inverse à gauche T borné tel que $Spec(S) \cup Spec(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$. On pose $\lambda_1(r) = \sup_{|\lambda|=r} \|(S-\lambda I)^{-1}\|$ $(r>1)$ et $\lambda_2(r) = \sup_{|\lambda|=r} \|(T-\lambda I)^{-1}\|$ $(r>1)$. Par le principe du maximum on sait que λ_i est croissante $(i=1,2)$. Si*
$$\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+\|S^n\| + \log^+\|T^n\|}{1+n^2} < +\infty,$$
alors pour tout $\delta > 1$, $i = 1, 2$, on a
$$\int_1^{\delta} \log\log\lambda_i(r)dr < +\infty.$$

Démonstration. On pose $w(n) = w(-n) = (n+1)^2 \max\{\|S^{n+1}\|, \|T^{n+1}\|\}$, pour $n \geq 0$. On a $w_0 \geq 1$, car $\max(\|S\|, \|T\|) \geq 1$. On a pour $0 < n < m$, $S^{m-n} = S^nT^m$ et $T^{n-m} = T^nS^m$, donc $w_{n+m} \leq w_nw_m$, pour $n, m \geq 0$ et $w_n \geq 1$, pour tout $n \geq 1$. D'après le lemme 3.2.4 il existe une suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $w_n \leq \tau_n$, pour tout $n \geq 0$

(ii) $(\frac{\log \tau_n}{n})_{n\geq 1}$ est strictement décroissante

(iii) $\sum_{n\geq 0} \frac{\log \tau_n}{1+n^2} < +\infty$.

On pose $\Delta_1(r) = \sup_{n\geq 0} \tau_n r^n$; la suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ satisfait les conditions du lemme 3.2.5 donc
$$\int_0^1 \log\log\Delta_1(r)dr < +\infty. \tag{3.2.2}$$

D'autre part on pose $\Delta_2(r) = \sup_{n\geq 0} w_n r^n$; on a alors pour $|\lambda| > 1$

$$\|(S-\lambda I)^{-1}\| \leq \sum_{n\geq 0} \|S^n\| |\lambda^{-n-1}| \leq \frac{\pi^2}{6}\Delta_2(|\lambda|^{-1}),$$

et donc

$$\lambda_1(r) \leq 1 + \frac{\pi^2}{6}\Delta_2(r^{-1}),$$

pour tout $r > 1$. On sait d'après (i) que $w_n \leq \tau_n$, donc $\Delta_2(r) \leq \Delta_1(r)$ pour tout $r < 1$; on obtient donc pour tout $\delta > 1$ d'après (3.2.2)

$$\int_1^\delta \log\log \lambda_1(r)dr < +\infty.$$

De la même manière

$$\lambda_2(r) \leq 1 + \frac{\pi^2}{6}\Delta_2(r^{-1}),$$

donc

$$\int_1^\delta \log\log \lambda_2(r)dr < +\infty.$$

□

3.3 Une étude spectrale dans le cas non-quasianalytique

On notera $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

Notons que si un espace de Banach E est inclus dans $\mathcal{H}(\Omega)$, l'inclusion étant continue, et si un opérateur continu $R : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ vérifie $R(E) \subset E$, alors il résulte du théorème du graphe fermé que $R|_E : E \to E$ est borné.

On notera S et T le shift unilatéral et le shift arrière, définis sur $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ par les formules $Sf(z) = zf(z)$ et $Tf(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ ($z \in \mathbb{D}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$). Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, on pose $f^{[r]}(z) = f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$, et on note $\hat{f}(n)$ le n-ième coefficient de Taylor de f à l'origine.

Soit E un espace de Banach. On dit que E est un espace admissible de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ si

(i) $\cup_{0<r<1}\mathcal{H}(r^{-1}\mathbb{D}) \subset E \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$, et l'inclusion $E \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est continue

(ii) Si $f \in E$, alors $\lim_{r\to 1^-} \|f^{[r]} - f\| = 0$

(iii) $S(E) \subset E$ et $T(E) \subset E$

(iv) $Spec(S) = Spec(T) = \overline{\mathbb{D}}$

On peut munir l'espace $\cup_{0<r<1}\mathcal{H}(r^{-1}\mathbb{D})$ de sa topologie limite inductive localement convexe naturelle : une application φ de $\cup_{0<r<1}\mathcal{H}(r^{-1}\mathbb{D})$ dans un espace localement convexe F est continue si et seulement si $\varphi|_{\mathcal{H}(r^{-1}\mathbb{D})}$ est continue pour tout $r \in (0,1)$. D'après (i) et le théorème du graphe fermé l'inclusion $\cup_{0<r<1}\mathcal{H}(r^{-1}\mathbb{D}) \subset E$ est continue. Si $f \in E$, $r \in (0,1)$ et

$\rho \in (r,1)$, alors $f^{[r]}$ est égale à la somme de sa série de Taylor dans $\mathcal{H}(\rho^{-1}\mathbb{D})$. Il résulte donc de (i) et (ii) que les polynômes sont denses dans E. De plus l'application $\Delta_r : f \mapsto f^{[r]}$ est linéaire continue d'après le théorème du graphe fermé. Notons qu'il résulte du théorème de Banach-Steinhaus que $\limsup_{r\to 1^-} \|\Delta_r\| < +\infty$.

On dira qu'un espace admissible de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ vérifie la condition de non-quasianalyticité si

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+ \|S^n\| + \log^+ \|T^n\|}{1+n^2} < +\infty. \tag{3.3.1}$$

On dit qu'un sous-espace fermé M de E est z-invariant si $S(M) \subset M$. Si M est un sous-espace fermé z-invariant, on notera π la projection de E sur le quotient E/M et S_M l'opérateur défini par $S_M(\pi(f)) = \pi(Sf)$.

Le dual E^* de E peut-être identifié à un espace de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_e := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. En effet, pour $g \in E^*$, posons $\tilde{g}(\lambda) =< (S-\lambda I)^{-1}1, g >$; il est clair que $\tilde{g}$ est une fonction analytique sur $\mathbb{D}_e$. De plus si $\tilde{g}(\lambda) = 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}_e$, alors, puisque $\tilde{g}(\lambda) = -\sum_{n\geq 0} < S^n 1, g > \lambda^{-n-1}$, on a $< S^n 1, g >= 0$, pour tout $n \geq 0$; les polynômes étant denses dans E, on a alors $g = 0$.

Si M est un sous-espace z-invariant, on définit l'orthogonal $M^\perp$ de M par

$$M^\perp = \{g \in E^*, < f, g >= 0, \forall f \in M\}.$$

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et$X$ un espace de Banach. On dit qu'une application $f : \Omega \to X$ est analytique si pour tout $w \in \Omega$, $\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ existe, et on dit qu'elle est faiblement analytique si $\varphi(f)$ est analytique, pour tout $\varphi \in X^*$. Il est bien connu [39, Théorème 3.3 p.79] que ces deux notions d'analyticité sont équivalentes.

On considère E un espace admissible de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$. Soient $\lambda \in \mathbb{D}$ et $f \in E$; on définit la fonction f_λ par

$$f_\lambda(z) = \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda},$$

pour $z \neq \lambda$, et $f_\lambda(\lambda) = f'(\lambda)$. Si $f \in E$, on a (voir par exemple le calcul dans [21, §2])

$$f_\lambda = T(I - \lambda T)^{-1} f. \tag{3.3.2}$$

En particulier $f_\lambda \in E$ et l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ est une application analytique de $\mathbb{D}$ dans E.

Théorème 3.3.1. *Soient E un espace admissible de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ vérifiant (3.3.1), et $f \in E$; on suppose qu'il existe $\zeta \in \mathbb{T}$ et $r_0 > 0$ tels que f s'étende en une fonction analytique sur $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$. Alors l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ s'étend en une application analytique de $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$ dans E.*

Démonstration. Nous allons montrer dans un premier temps que, pour $r \in [0,1)$, l'application $\lambda \mapsto f_\lambda^{[r]}$ est analytique de $\mathbb{D} \cup r^{-1}D(\zeta, r_0)$ dans E, et ensuite, à l'aide du théorème de Levinson-Cartwright, nous en déduirons le théorème.

Soit $r \in [0,1)$; on considère l'application $\lambda \mapsto f_\lambda^{[r]}$.

D'après (3.3.2) on sait que cette application est analytique de $\mathbb{D}$ dans E. D'autre part on a $f_\lambda^{[r]} = r(f_{r\lambda})^{[r]}$, donc l'application $\lambda \mapsto f_\lambda^{[r]}$ est la composée de l'application $\lambda \mapsto f_{r\lambda}$ qui est analytique de $\frac{1}{r}\mathbb{D}$ dans E et de l'application $g \mapsto rg^{[r]}$ qui est linéaire continue. Donc $\lambda \mapsto f_\lambda^{[r]}$ est analytique de $\frac{1}{r}\mathbb{D}$ dans E.

D'autre part, on a pour $|\lambda| > 1$

$$f_\lambda^{[r]} = (S - \lambda I)^{-1}(f^{[r]} - f^{[r]}(\lambda)),$$

avec $Spec(S) \subset \overline{\mathbb{D}}$, donc les fonctions $\lambda \mapsto (S-\lambda I)^{-1}f^{[r]}$ et $\lambda \mapsto (S-\lambda I)^{-1}1$ sont analytiques de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ dans E. Quant à l'application $\lambda \mapsto f^{[r]}(\lambda) = f(r\lambda)$, elle est analytique sur $r^{-1}D(\zeta, r_0)$. Ainsi $\lambda \mapsto f_\lambda^{[r]}$ est analytique de $r^{-1}D(\zeta, r_0)$ dans E.

Nous avons donc montré que $\lambda \mapsto f_\lambda^{[r]}$ est analytique de $\mathbb{D} \cup r^{-1}D(\zeta, r_0)$ dans E.

On considère un fermé $U \subsetneq D(\zeta, r_0)$ du type $\{z \in \mathbb{C},\ \delta \le |z| \le 1/\delta,\ |arg(z) - \theta_0| \le \alpha\}$, avec $\delta < 1$, $\alpha < \pi$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, et on choisit $r_1 \in [0,1)$ tel que $V := \cup_{r_1<r<1} rU \subsetneq r_1^{-1}D(\zeta, r_0)$. Soit $g \in E^*$; on pose

$$\varphi_r(\lambda) = < f_\lambda^{[r]}, g > .$$

Puisque pour $r \in [r_1, 1)$, l'application $\lambda \mapsto f_\lambda^{[r]}$ est analytique de $\mathbb{D} \cup r^{-1}D(\zeta, r_0)$ dans E, la famille $(\varphi_r)_{r>r_1}$ est une famille d'applications analytiques de U dans $\mathbb{C}$. De plus on a

$$|\varphi_r(\lambda)| \le |\lambda|^{-1}\|(\lambda^{-1} - T)^{-1}\|\|T\|\|g\|\|f^{[r]}\| \quad (|\lambda| < 1)$$
$$|\varphi_r(\lambda)| \le \|(S - \lambda I)^{-1}\|\|g\|\big(\|f^{[r]}\| + \|1\| \sup_{z\in V} |f(z)|\big) \quad (|\lambda| > 1,\ \lambda \in U),$$

or puisque

$$\sum_{n\ge 0} \frac{\log^+\|T^n\| + \log^+\|S^n\|}{1+n^2} < +\infty,$$

d'après le corollaire 3.2.2 et la proposition 3.2.6, $(\varphi_r)_{r>r_1}$ forme une famille normale dans $\mathcal{H}(U)$. En faisant varier le fermé U, on voit donc que $\lambda \mapsto < f_\lambda, g >$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$.

On a donc montré que l'application $\lambda \mapsto < f_\lambda, g >$ est analytique sur $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$, pour tout $g \in E^*$. Donc d'après un résultat bien connu [39, Théorème 3.31 p.79], ceci entraîne que l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ est analytique sur $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$ dans E. $\square$

Corollaire 3.3.2. *Soit M un sous-espace z-invariant d'un espace admissible de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ vérifiant (3.3.1). S'il existe $f \in M$ ayant un prolongement analytique à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)$, $\zeta \in \mathbb{T}$, $r_0 > 0$, alors, pour $g \in M^\perp$,*

$$f(\lambda)g(\lambda) = - < f_\lambda, g >, \quad (|\lambda| > 1,\ \lambda \in \mathbb{D} \cup D(\zeta, r_0)),$$

donc toutes les fonctions de $M^\perp$ admettent un prolongement méromorphe à $(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cup D(\zeta, r_0)$. En particulier, si f ne s'annule pas en ζ, alors toutes les fonctions de $M^\perp$ admettent un prolongement analytique à $(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cup D(\zeta, r_1)$, avec $r_1 \in]0, r_0]$.

Démonstration. Soient $f \in M$ et $g \in M^\perp$; on note φ la fonction définie par

$$\varphi(\lambda) = - < f_\lambda, g > \quad (|\lambda| > 1,\ \lambda \in D(\zeta, r_0)).$$

On a alors pour $|\lambda| > 1$, $\lambda \in D(\zeta, r_0)$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= - < f_\lambda, g > \\ &= - < (S - \lambda I)^{-1}(f - f(\lambda)), g > \\ &= f(\lambda) < (S - \lambda I)^{-1} 1, g > \\ &= f(\lambda) g(\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi, si f ne s'annule pas sur $D(\zeta, r_1)$, on a

$$g(\lambda) = -\frac{< f_\lambda, g >}{f(\lambda)},$$

et puisque $\lambda \mapsto f_\lambda$ est analytique de $D(\zeta, r_0)$ dans E, g admet un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \cup D(\zeta, r_1)$. □

Notons que dans le cas où $f(\zeta) = 0$, avec $f \neq 0$, le corollaire 3.3.2 montre que les éléments de E^* admettent un prolongement à $(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cup D(\zeta, r_0)$. L'exemple suivant montre qu'en général ce pôle n'est pas une pseudosingularité.

Exemple 3.3.3. *Si on considère l'algèbre de Wiener W^+ des fonctions holomorphes dont la série de Taylor est absolument convergente, i.e.*

$$W^+ = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ \sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)| < +\infty\}.$$

Alors W^+ est un espace admissible de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ vérifiant (3.3.1). Soit M le sous-espace z-invariant défini par

$$M = \{f \in W^+,\ f(1) = 0\};$$

Le dual de W^+ est identifié à $\{g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}), (\hat{g}(n))_{n<0} \in l^\infty(\mathbb{Z}^-)\}$, où $\hat{g}(n)$ désigne le n-ième coefficient de Laurent de g en $+\infty$. On a alors

$$\begin{aligned} f \in M &\Leftrightarrow f(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) = 0 \\ &\Leftrightarrow < f, \frac{1}{z-1} >= 0 \end{aligned}$$

L'orthogonal $M^\perp$ est alors égal à

$$M^\perp = \mathbb{C}\frac{1}{z-1},$$

donc toutes les fonctions de $M^\perp$ ont un pôle en 1, alors que $z - 1 \in M$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$.

Soit M un sous-espace z-invariant d'un espace admissible E de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ et soient $\zeta \in \mathbb{T}$ et $r > 0$; s'il existe $f \in M$ admettant un prolongement analytique à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r)$ et telle que $f(\zeta) \neq 0$, alors il existe $0 < r_1 < r$ tel que

$$Spec(S_M) \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}(\zeta, r_1). \tag{3.3.3}$$

En effet, on a $Spec(S_M) \cap \mathbb{D} \subset Z(f)$ pour tout $f \in M$, où $Z(f) := \{z \in \mathbb{D}, f(z) = 0\}$. Ceci résulte du fait que si $g \in E$, on a $(S_M - \lambda I)\pi(g_\lambda) = \pi(g) - g(\lambda)\pi(1)$, où π désigne la surjection canonique de E sur E/M. Donc si $\lambda \notin Z(f)$ avec $f \in M$, alors $(S_M - \lambda I)\pi(f_\lambda) = -f(\lambda)\pi(1)$, donc $(S_M - \lambda I)\pi(g_\lambda) = \pi(g) + \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}(S_M - \lambda I)\pi(f_\lambda)$. Donc $(S_M - \lambda I)$ est inversible et $(S_M - \lambda I)^{-1}\pi(g) = \pi(g_\lambda) - \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}\pi(f_\lambda)$.

Théorème 3.3.4. *Soient M un sous-espace z-invariant d'un espace admissible E de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ vérifiant (3.3.1). Soient $\zeta \in \mathbb{T}$ et $r > 0$; s'il existe $f \in M$ admettant un prolongement analytique à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r)$ et telle que $f(\zeta) \neq 0$, alors*

$$\zeta \notin Spec(S_M).$$

Démonstration. Soit $f \in M$, non nulle et admettant un prolongement à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r)$; on notera π la surjection canonique de E sur E/M. On sait d'après (3.3.3) que il existe $0 < r_1 < r$ tel que $Spec(S_M) \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}(\zeta, r_1)$.

Soit p un polynôme ; pour $\lambda \in D(\zeta, r_1)$, $|\lambda| \neq 1$, on a

$$(S - \lambda I)f_\lambda p = fp - f(\lambda)p,$$

donc

$$(S_M - \lambda I)\pi(f_\lambda p) = -f(\lambda)\pi(p),$$

car $fp = p(S)f \in M$. D'autre part on a

$$(S_M - \lambda I)\pi(f_\lambda p) = (S_M - \lambda I)p(S_M)\pi(f_\lambda),$$

d'où

$$(S_M - \lambda I)^{-1}\pi(p) = -p(S_M)\frac{\pi(f_\lambda)}{f(\lambda)}. \tag{3.3.4}$$

Soit $g \in M^\perp$; on considère l'application $\varphi_p : \lambda \mapsto < (S_M - \lambda)^{-1}\pi(p), g >$. D'après ce qui précède

$$\varphi_p(\lambda) = -\frac{< p(S_M)\pi(f_\lambda), g >}{f(\lambda)} = -\frac{< \pi(f_\lambda), p(S^*|_{M^\perp})g >}{f(\lambda)},$$

et d'après la proposition 3.3.1, l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{D} \cup D(\zeta, r)$. Donc puisque π est linéaire continue, il en est de même de l'application $\lambda \mapsto \pi(f_\lambda)$. L'application φ_p admet donc un prolongement analytique à $D(\zeta, r_1)$. On a de plus

$$|\varphi_p(\lambda)| \leq \|(S_M - \lambda I)^{-1}\|\|\pi(p)\|\|g\| \quad (\lambda \in D(\zeta, r_1),\ |z| \neq 1). \tag{3.3.5}$$

Comme $\|S_M^n\| \leq \|S^n\|$, on a $\sum_{n\geq 0} \frac{\log \|S_M^n\|}{1+n^2} < +\infty$. D'autre part on a, pour $|\lambda| < 1$, $(S - \lambda I)p_\lambda = p - p(\lambda)$, donc $(S_M - \lambda I)\pi(p_\lambda) = \pi(p) - p(\lambda)\pi(1)$. On obtient donc $(S_M - \lambda I)^{-1}\pi(p) = \pi(p_\lambda) + p(\lambda)(S_M - \lambda I)^{-1}\pi(1)$, donc d'après (3.3.4) on a

$$(S_M - \lambda I)^{-1}\pi(p) = \pi(p_\lambda) - p(\lambda)\frac{\pi(f_\lambda)}{f(\lambda)},$$

pour $|\lambda| < 1$. On sait que $p(\lambda) = p - (S - \lambda)p_\lambda$ donc

$$|p(\lambda)| \leq \big(\|S - \lambda\|\|T\|\|(I - \lambda T)^{-1}\| + 1\big)\|p\|,$$

pour $\lambda \in D(\zeta, r_1)$, $|\lambda| < 1$. On sait de plus que $f(\zeta) \neq 0$, donc il existe $0 < r_2 < r_1$ tel que $\inf_{z \in D(\zeta, r_2)} |f(z)| > 0$, donc

$$\|(S_M - \lambda I)^{-1}\pi(p)\| \leq \|\pi(p_\lambda)\| + \big(\|S - \lambda\|\|T\|\|(I - \lambda T)^{-1}\| + 1\big)\|p\|\frac{\|f_\lambda\|}{\inf_{z \in D(\zeta, r_2)} |f(z)|},$$

pour $|\lambda| < 1$, $\lambda \in D(\zeta, r_2)$. On obtient donc d'après (3.3.2)

$$\|(S_M - \lambda I)^{-1}\pi(p)\| \leq \|T\|\|(I - \lambda T)^{-1}\|\|p\| \tag{3.3.6}$$

$$+\big(\|S - \lambda\|\|T\|\|(I - \lambda T)^{-1}\| + 1\big)\|p\|\tfrac{\|T\|\|(I - \lambda T)^{-1}\|\|f\|}{\inf_{z \in D(\zeta, r_1)} |f(z)|}, \tag{3.3.7}$$

pour $|\lambda| < 1$, $\lambda \in D(\zeta, r_2)$.

D'après (3.3.5) et (3.3.6), et puisque $\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+ \|S^n\| + \log^+ \|T^n\|}{1+n^2} < +\infty$, on sait d'après le corollaire 3.2.2 et la proposition 3.2.6 que la famille $(\varphi_p)_{\|p\|\leq 1}$ forme une famille normale de $D(\zeta, r_2)$.

Ainsi si $f \in E$ et $\|f\| \leq 1$, alors il existe une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que $\|p_n - f\| \to 0$, $n \to +\infty$, et $\|p_n\| \leq 1$, $n \geq 0$. Puisque $Spec(S_M) \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}(\zeta, r_1)$ on a alors $(S_M - \lambda I)^{-1}\pi(p_n) \to (S_M - \lambda I)^{-1}\pi(f)$ et donc d'après ce qui précède, l'application $\lambda \mapsto < (S_M - \lambda I)^{-1}\pi(f), g >$ admet un prolongement analytique à $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}) \cup D(\zeta, r_2)$. D'après un résultat bien connu [39, Théorème 3.31 p.79], ceci entraîne que $\lambda \mapsto (S_M - \lambda I)^{-1}\pi(f)$ admet un prolongement analytique à $(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cup D(\zeta, r_2)$. $\square$

3.4 Application dans les espaces de Hardy pondérés

On désigne par $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des applications $\sigma : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$0 < \inf_{n\geq 0} \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} \leq \sup_{n\geq 0} \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} < +\infty \tag{3.4.1}$$

$$\tilde{\sigma}(n)^{1/n} \to 1,\ n \to +\infty \tag{3.4.2}$$

$$\overline{\sigma}(n)^{1/n} \to 1,\ n \to +\infty \tag{3.4.3}$$

$$\tag{3.4.4}$$

où $\tilde{\sigma}(n) := \sup_{p\geq 0} \frac{\sigma(n+p)}{\sigma(p)}$ et $\overline{\sigma}(n) = \sup_{p\geq 0} \frac{\sigma(p)}{\sigma(n+p)}$.

On désigne par $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ l'ensemble

$$H^2_\sigma(\mathbb{D}) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ \|f\| = (\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|\sigma^2(n))^{1/2} < +\infty\}.$$

Le shift S est un opérateur borné sur $H^2_\sigma(\mathbb{D})$, et son spectre est inclus dans le disque unité $\mathbb{D}$.

Si le poids est log-convexe i.e. $\sigma(n)^2 \leq \sigma(n-1)\sigma(n+1)$, et tend vers zéro, on peut identifier $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ à l'espace de Bergman $B^2(\rho, \mathbb{D})$, défini par

$$B^2(\rho, \mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),\ \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \rho(|z|) dm_{\mathbb{D}}(z) < +\infty\},$$

où ρ est une fonction strictement positive intégrable sur $\mathbb{D}$ et $dm_{\mathbb{D}}(z) = \pi^{-1}dxdy$ $(z = x + iy)$.

L'espace $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ est un espace admissible de fonction analytiques sur $\mathbb{D}$. Nous considérons donc son dual comme un espace de fonctions analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$: pour $\sigma \in \mathcal{S}^+$, on notera

$$\sigma^*(n) = \frac{1}{\sigma(-n+1)} \quad (n < 0);$$

on désigne par $H^2_{\sigma^*}(\mathbb{D}_e)$ l'ensemble

$$H^2_\sigma(\mathbb{D}_e) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}_e),\ \|f\| = (\sum_{n<0} |\hat{f}(n)|^2 \sigma^{*2}(n))^{1/2} < +\infty\},$$

où $\mathbb{D}_e := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Le dual de $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ peut-être considéré comme l'espace $H^2_{\sigma^*}(\mathbb{D}_e)$ via la dualité

$$< f, g >= \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)\hat{g}(-n-1) \quad (f \in H^2_\sigma(\mathbb{D}),\, g \in H^2_\sigma(\mathbb{D}_e)).$$

Pour $\zeta \in \mathbb{D}$, on notera ψ_ζ l'application $f \mapsto f(\zeta)$ de $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ dans $\mathbb{C}$. Il est clair que ψ_ζ est définie par

$$\psi_\zeta(f) =< f, \frac{1}{z-\zeta} > \quad (f \in H^2_\sigma(\mathbb{D})).$$

Pour $\sigma \in \mathcal{S}^+$, on définit L_σ, la transformée de Legendre de σ, par

$$L_\sigma(r) = \sup_{n\geq 0} \sigma^{-1}(n) r^n.$$

On a alors $\sigma(n)^{-1} = \inf_{0<r<1} L_\sigma(r) r^{-n}$. De plus, si on note $\sigma_1(n) = (1+n)^{-1}\sigma(n)$, alors pour $f \in H^2_\sigma(\mathbb{D})$ on a

$$|f(\zeta)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} L_{\sigma_1}(r)\|f\| \quad (|\zeta| = r,\, \zeta \in \mathbb{D}),$$

donc

$$\|\psi_\zeta\| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} L_{\sigma_1}(|\zeta|) \quad (\zeta \in \mathbb{D}).$$

Pour une fonction $f \in H^2_\sigma(\mathbb{D})$, on notera $[f]$ le sous-espace z-invariant engendré par f, c'est à dire le plus petit sous-espace invariant par le shift contenant f ; on a

$$[f] = \overline{span\{z^n f,\, n \geq 0\}}.$$

3.4.1 Un principe général

Le lemme qui suit est un critère pour que le sous-espace invariant engendré par une fonction soit non-trivial. A l'aide de ce lemme N. Nikolski montre que le sous-espace invariant engendré par la fonction intérieure $\varphi_c := e^{-c\frac{1+z}{1-z}}$, avec $c > 0$, est non-trivial lorsque $\sum_{n\geq 0} \frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}} < +\infty$. Il construit ainsi une famille totalement ordonnée de sous-espaces invariants sans zéro commun, i.e. $\{z \in \mathbb{D}, f(z) = 0\ \forall f \in [\varphi_c]\} = \emptyset$, et dont la compression du shift sur le quotient $H^2_\sigma(\mathbb{D})/[\varphi_c]$ vérifie $Spec(S_{[\varphi_c]}) = \{1\}$. Dans le cas où $\sum_{n\geq 0} \frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}} = +\infty$, N.Nikolski construit pour des poids σ à croissance aussi rapide que l'on veut des fonctions f_σ sans zéros non z-cycliques. Dans le cas particulier où $\sigma(n) = e^{-n^\alpha}$, avec $\alpha \in (1/2, 1)$, on a une construction très concrète de ces fonctions (voir [34] et [21]). Le spectre de $S_{[f_\sigma]}$ n'avait pas été étudié jusqu'ici.

Dans un espace admissible de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ on note ψ_ζ l'opérateur d'évaluation $\psi_\zeta f = f(\zeta)$ en $\zeta \in \mathbb{D}$.

Soient Ω un domaine simplement connexe et w une représentation de $\mathbb{D}$ sur Ω ; on dira qu'une fonction G est extérieure dans Ω si $G \circ w$ est une fonction extérieure sur $\mathbb{D}$.

Lemme 3.4.1 (M.V.Keldysh-N.Nikolski)**.** *Soient E un espace admissible de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, $f \in E$ et γ une courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses telle que $\gamma \cap \mathbb{T} = \{1\}$. S'il existe une fonction G extérieure dans $Int(\gamma)$ telle que :*

$$\frac{\|\psi_\zeta\|}{|f(\zeta)|} \leq |G(\zeta)| \quad , \zeta \in \gamma,$$
$$f(x)G(x) \to 0, \quad x \to 1^-,$$

alors

$$[f] \subsetneq E.$$

Nous donnons ici la preuve de ce lemme que l'on peut trouver dans [34, §2.8 lemme 1 p.165].

Démonstration. Nous allons montrer que $[f] \subsetneq E$ par l'absurde ; supposons que $[f] = E$. Il existe donc une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ de polynômes telle que $\lim_{n\to+\infty} \|1 - p_n f\| = 0$. En particulier, pour $\zeta \in \mathbb{D}$ on a

$$|p_n(\zeta)f(\zeta) - 1| \leq \|\psi_\zeta\|\|p_n f - 1\|,$$

d'où

$$|p_n(\zeta)f(\zeta)| \leq \|\psi_\zeta\|\|p_n f - 1\| + 1 \leq \|\psi_\zeta\|(\|p_n f - 1\| + \|1\|).$$

La suite $(\|p_n f\|)_{n\geq 0}$ étant bornée, il existe donc $c > 0$ tel que

$$|p_n(\zeta)| \leq c|G(\zeta)|, \; \zeta \in \gamma.$$

Puisque G est une fonction extérieure, on a donc pour $\zeta \in Int(\gamma)$

$$|p_n(\zeta)| \leq c|G(\zeta)|,$$

donc en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$1 \leq c|f(x)||G(x)|,$$

ce qui contredit la deuxième hypothèse du lemme et achève la preuve. $\square$

3.4.2 Sous-espaces invariants pour $\sigma(n) = e^{-n^\alpha}$

Dans cette section nous donnons la construction de N.Nikolski (voir [34] et [21]) des sous-espace invariants non-triviaux engendrés par des fonctions sans zéros. Ces fonctions analytiques sans zéros sont données explicitement. La construction se base sur l'étude de la croissance maximale des fonctions de $H^2_\sigma(\mathbb{D})$. En effet ces fonctions sont le quotient d'une fonction analytique dont le maximum sur chaque cercle de rayon $r > 0$ est maximal par rapport à la croissance tolérée dans $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ avec une fonction extérieure dans un domaine inclus strictement dans $\mathbb{D}$. Les techniques utilisées ici sont très "concrètes", elle se basent sur une approximation de la transformée de Legendre $L_\sigma(r)$ que nous sommes capables de calculer explicitement.

Soit $\alpha \in (1/2, 1)$; on note σ_α le poids défini par

$$\sigma(n) = e^{n^\alpha} \quad (n \geq 0),$$

et $p_\alpha := [\frac{\alpha}{1-\alpha}]$.

On montre alors qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$L_{\sigma_\alpha}(r) = e^{\sum_{k=0}^{p_\alpha} \frac{a_k}{(1-r)^{\alpha/(1-\alpha)-k}} + O(1)} \quad (r \in (0,1)). \tag{3.4.5}$$

Pour cela on montre que le $\sup_{x \geq 0} e^{x^\alpha + x \log r}$ est atteint lorsque

$$\alpha x^{\alpha - 1} + \log r = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = (-\frac{\alpha}{\log r})^{1/(1-\alpha)}.$$

Ensuite en utilisant le développement limité de $-\frac{1}{\log r}$ au voisinage de 1 on obtient l'existence de $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ vérifiant (3.4.5).

La deuxième étape de la construction est basée sur le lemme suivant [34, §2.8 lemme 2 p.168] :

Lemme 3.4.2 (N. Nikolski). *Pour tout $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, il existe $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, tels que si $f(z) = \sum_{k=0}^{p_\alpha} \frac{b_k}{(1-z)^{\alpha/(1-\alpha)-k}}$, alors $\sup_{|z|=r} Re(f(z))$ vérifie*

$$\sup_{|z|=r} Re(f(z)) = \sum_{k=0}^{p_\alpha} \frac{a_k}{(1-r)^{\alpha/(1-\alpha)-k}} + O(1),$$

$r \to 1^-$. Le maximum est atteint sur une courbe γ symétrique par rapport à l'axe des abscisses telle que $\gamma \cap \mathbb{T} = \{1\}$. Si de plus $a_0 > 0$, alors $b_0 = -\frac{a_0}{|\cos(\pi\alpha)|} < 0$.

Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ définis dans la formule 3.4.5, on définit F par

$$F(z) = e^{\sum_{k=0}^{p_\alpha} \frac{b_k}{(1-z)^{\alpha/(1-\alpha)-k}}} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

où $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ sont définis par le lemme 3.4.2. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.4.3 (N.Nikolski[34]). *Soit $c \in (0,1)$; le sous-espace invariant N_c engendré par la fonction $F_c := Fe^{-\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c}$ est un sous-espace invariant non-trivial tel que $Z(N_c) = \emptyset$.*

La preuve de ce théorème repose sur le principe de Keldysh-Nikolski. On définit p et L par

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \sum_{k=0}^{p_\alpha} \frac{b_k}{(1-\lambda)^{\alpha/(1-\alpha)-k}} \quad (\lambda \in \mathbb{D}) && (3.4.6) \\ L(r) &= \sup_{|\lambda|=r} Re(p(\lambda)) \quad (r \in [0,1)); && (3.4.7) \end{aligned}$$

on sait alors par le lemme 3.4.2 que le maximum dans (3.4.7) est atteint sur une courbe γ qui satisfait les conditions du lemme 3.4.1, et que l'on a

$$\lim_{|\lambda|\to 1^-,\, \lambda\in\gamma} |arg(1) - \lambda| = \pi(1-\alpha) \qquad (3.4.8)$$

$$L(r) = \log L_{\sigma_\alpha}(r) + O(1),\ r \to 1^-. \qquad (3.4.9)$$

Soit $c \in (0,1)$; on montre alors que $F_c \in H^2_{\sigma_\alpha}(\mathbb{D})$. De plus si on considère la fonction G définie par

$$G(z) := e^{\frac{2}{(1-z)^c}};$$

la fonction G est une fonction extérieure sur $\mathbb{D}$ et donc sur $Int\gamma$. On montre alors que

$$\log\|\psi_\zeta\| - \log|F_c(\zeta)| \leq \log L_{\sigma_\alpha}(|\zeta|) - Re(p(\zeta)) + Re\Big(\frac{1}{(1-\zeta)^c}\Big) + o\Big(\log\frac{1}{1-|\zeta|}\Big),$$

quand $|\zeta| \to 1^-$, donc

$$\overline{\lim}_{|\zeta|\to 1^-,\, \zeta\in\gamma} \|\psi_\zeta\| |F_c^{-1}(\zeta)| |G^{-1}(\zeta)| = 0.$$

D'autre part, il est clair que $|F_c(x)| = o(G^{-1}(x))$, lorsque $x \to 1^-$, ainsi d'après le lemme 3.4.5 le sous-espace N_c est un sous-espace invariant non-trivial pour le shift.

3.4.3 Étude spectrale de S_{N_c}

Théorème 3.4.4. *Pour $c \in (0,1]$, les sous-espaces N_c sont des sous-espaces sans zéros tels que*

$$Spec(S_{N_c}) = \{1\}.$$

Démonstration. Soit $c \in (0,1]$; la fonction $Fe^{-\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus [1,+\infty[$, donc le sous-espace N_c contient une fonction qui admet un prolongement au voisinage de tout point $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Nous allons montrer que $\sum_{n\geq 0}\frac{\log^+\|S^n\|+\log^+\|T^n\|}{1+n^2}<\infty$, ainsi nous pourrons conclure à l'aide du théorème 3.3.4 que le spectre $Spec(S_{N_c})=\{1\}$.

On a, d'une part :

$$\|S^n\|=1$$

donc

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\log^+\|S^n\|}{1+n^2}<\infty.$$

D'autre part

$$\|T^n\|=sup_{p\geq 0}\frac{\sigma_\alpha(p)}{\sigma_\alpha(n+p)}=\sup_{p\geq 0}e^{(n+p)^\alpha-p^\alpha}=e^{n^\alpha},$$

donc

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\log^+\|T^n\|}{1+n^2}<\infty.$$

□

3.4.4 Complément et commentaires

Dans le cas sous-critique, c'est-à-dire lorsque $\sum_{n\geq 0}\frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}}<+\infty$, N.Nikolski (voir [34]) a montré que les fonctions $\varphi_c=e^{-c\frac{1+z}{1-z}}$, $c>0$ engendraient des sous-espaces invariants non-triviaux avec une preuve basée sur le lemme de Keldysh-Nikolski.

Plus tard A.Atzmon [2] [3] a observé que le dual de $[\varphi_c]$ s'identifie aux restrictions aux entiers d'un espace de fonctions de type exponentiel 1/2, c'est-à-dire d'un espace de fonctions entières G vérifiant

$$|G(z)|\leq Me^{a|z|^{1/2}}\quad (z\in\mathbb{C}),$$

et il montre que l'opérateur de différentiation sur cet espace de fonctions entières est quasinilpotent. Ceci résulte également du théorème 3.3.4 puisque φ_c se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

La construction de A.Atzmon fournit en fait un sous-espace invariant de $H^2_\sigma(\mathbb{D})$ pour une large classe de poids dans le cas critique. On définit la fonction φ affine par morceaux sur chaque segment $[n,n+1]$, $n\geq 0$ et prenant les valeurs $\varphi(n)=\log 1/\sigma(n)$, pour $n\geq 0$, et on pose

$$\varphi_c^*(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{3/2}(x+t)}dt+c\sqrt{x}\quad (x\geq 0),$$

avec $c\geq 0$ lorsque $\sum_{n\geq 0}\frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}}<+\infty$, et $c\in\mathbb{R}$ lorsque $\sum_{n\geq 0}\frac{\log 1/\sigma(n)}{n^{3/2}}=+\infty$.

On notera $\mathcal{E}_{1,0}$ l'ensemble de fonctions de type exponentiel nul, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions entières f vérifiant

$$\limsup_{|z|\to+\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} \le 0,$$

et l'ensemble $B^2_\varphi(c)$ par

$$B^2_\varphi(c) := \{f \in \mathcal{E}_{1,0}, \sum_{n\ge 0} |f(n)|^2\sigma^{-2}(n) < +\infty, |f(-n)| = O(e^{\varphi^*_c(n)})\}.$$

A. Atzmon montre que $B^2_\varphi(c)$ est un espace de Hilbert et que l'opérateur de différentiation D défini par $Df(z) = f'(z)$, est un opérateur borné sur $B^2_\varphi(c)$, et que D est quasinilpotent, i.e. $Spec(D) = \{0\}$. On définit le sous espace A_c par

$$A_c := \big\{ \sum_{n\ge 0} f(n)z^n, f \in B^2_\varphi(c)\big\};$$

Quand on a la condition

$$|\log\sigma(n+1) - 2\log\sigma(n) + \log\sigma(n-1)| = o(\frac{1}{n}),$$

alors A_c est un sous-espace invariant par le backward shift, et ainsi $A_c^\perp$ est un sous-espace invariant par le shift vérifiant $Spec(S_{A_c^\perp}) = \{1\}$.

Dans le cas sous-critique les sous-espaces construits par A.Atzmon sont les orthogonaux de ceux construits par A.Beurling et N.Nikolski. L'étude spectrale que nous avons menée suggère que c'est aussi le cas pour les poids σ_α, $\alpha \in (1/2, 1)$.

Chapitre 4

Une étude spectrale dans le cas quasianalytique

4.1 Introduction

Dans cette partie notre objectif est une étude spectrale pour les opérateurs S_M induits par le shift bilatéral sur des quotients de l'espace considéré par des sous-espaces invariants par translations. Nous allons nous placer dans un cadre quasianalytique où le théorème de Levinson-Cartwright 3.2.1 n'est plus applicable. Le principe du théorème de Levinson-Cartwright est que si on considère une suite de fonctions analytiques $(f_n)_{n\geq 0}$ dans un rectangle $U = \{z \in \mathbb{C}, |Re(z)| < a,\ |Im(z)| < b\}$ $(a, b > 0)$ qui converge uniformément sur tout compact de $U\backslash]-a, a[$ vers une fonction f, et si de plus la croissance de chaque fonction f_n quand on s'approche du segment $]-a, a[$ n'est pas "trop importante", alors la fonction f est analytique sur U. Dans notre cas les fonctions f_n ont une croissance bien plus importante que celle autorisée par le théorème de Levinson-Cartwright, mais cette croissance excessive n'a lieu que d'un coté du rectangle ; de l'autre côté les fonctions f_n ont une grande régularité, et c'est ce phénomène qui nous permettra de procéder à l'étude spectrale.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des poids $w : \mathbb{Z} \mapsto (0, +\infty)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{Z}} \tfrac{w(n+1)}{w(n)} \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \tfrac{w(n+1)}{w(n)} < +\infty, \qquad (4.1.1)$$

$$\tilde{w}(n)^{1/|n|} \to 1,\ |n| \to +\infty, \text{ où } \tilde{w}(n) := \sup_{p\in\mathbb{Z}} \tfrac{w(n+p)}{w(p)} \quad (n \in \mathbb{Z})\ (4.1.2)$$

Pour $w \in \mathcal{S}$, on pose

$$l^2(w, \mathbb{Z}) := \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \|u\|_w = \left(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 w^2(n)\right)^{1/2} < +\infty\right\},$$
$$w^*(n) = \tfrac{1}{w(-n)}\ (n \in \mathbb{Z}).$$

Le shift bilatéral sur $l^2(w,\mathbb{Z})$ est défini par la formule

$$Su=(u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}} \quad (u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l^2(w,\mathbb{Z})).$$

L'opérateur S est borné et inversible sur $l^2(w,\mathbb{Z})$; on a de plus

$$\|S^n\|=\tilde{w}(n) \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

On a alors en particulier $Spec(S)=\mathbb{T}$.

Le dual de $l^2(w,\mathbb{Z})$ peut être identifié à $l^2(w^*,\mathbb{Z})$, la dualité étant donnée par la formule :

$$<u,v>=\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p v_{-p} \quad (u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l^2(w,\mathbb{Z}), v=(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l^2(w^*,\mathbb{Z})).$$

L'adjoint de l'opérateur S dans $l^2(w,\mathbb{Z})$ est le shift S sur $l^2(w^*,\mathbb{Z})$.

On rappelle qu'un sous-espace M est dit invariant par translations si $S(M)=M$ et il est dit non-trivial si $M\neq\{0\}$ et $M\neq l^2(w,\mathbb{Z})$.

On notera $S|_M$ la restriction de l'opérateur S au sous-espace invariant M :

$$\begin{aligned} S|_M : M &\rightarrow M \\ u &\mapsto Su, \end{aligned}$$

et S_M l'opérateur induit par S sur le quotient $l^2(w,\mathbb{Z})/M$, défini par :

$$\begin{aligned} S_M : l^2(w,\mathbb{Z})/M &\rightarrow l^2(w,\mathbb{Z})/M \\ u+M &\mapsto Su+M. \end{aligned}$$

Si $M\subset l^2(w,\mathbb{Z})$, on définit $M^\perp\subset l^2(w^*,\mathbb{Z})$ par :

$$M^\perp := \{v\in l^2(w^*,\mathbb{Z}),\ <u,v>=0,\ \forall u\in M\}.$$

Ainsi, si M est un sous-espace invariant par translations, $M^\perp$ peut être identifié au dual de $l^2(w,\mathbb{Z})/M$, avec le crochet de dualité

$$(u+M,v)=<u,v> \quad (u\in l^2(w,\mathbb{Z}),\ v\in M^\perp),$$

et l'adjoint de l'opérateur S_M sur $l^2(w,\mathbb{Z})$ devient alors l'opérateur $S|_{M^\perp}$ sur $M^\perp$. On a alors $Spec(S_M)=Spec(S|_{M^\perp})$.

On dira qu'un poids $w\in\mathcal{S}$ est log-impair si $w(-n)=w(n)^{-1}$ $(n\in\mathbb{Z})$ et qu'un poids log-impair est log-convexe si $w(n)^2\leq w(n-1)w(n+1)$ $(n\geq 1)$.

Soit M un sous-espace invariant par translations non trivial de $l^2(w,\mathbb{Z})$, avec w log-impair. A.Borichev, H.Hedenmalm et A.Volberg montrent (voir [10]) que le spectre de l'opérateur S_M est un ensemble parfait du cercle, c'est-à-dire ne contient pas de points isolés. Ils montrent que $l^2_+(w,\mathbb{Z})\cap M=\{0\}$ pour les sous-espaces invariants par translations construits par Y.Domar

[13], où $l^2_+(w,\mathbb{Z}) := \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\, u_n = 0,\, n < 0\}$, et construisent pour une large classe de poids log-impairs des sous-espaces invariants par translations M engendrés par $M \cap l^2_+(w,\mathbb{Z})$. Ils posent la question de l'existence de sous-espaces invariants invariants M pour lesquels le spectre de S_M soit un intervalle donné du cercle. Pour cela ils proposent les sous-espaces invariants construits par Y.Domar [13]. Nous répondons par l'affirmative.

Soit $w \in \mathcal{S}$ log-impair ; on considère h le prolongement affine par morceaux sur $\mathbb{R}$ de $\log w$. Lorsque

$$\sum_{n\geq 1} |\log w(n+1) + \log w(n-1) - 2\log w(n)| < +\infty,$$

Y. Domar [13] construit un prolongement analytique de h à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et par le procédé appelé procédé K.K.K [25, §10.5] de discrétisation de mesure il construit une fonction entière f telle que

$$\limsup_{|z|\to+\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \frac{\pi}{2} \tag{4.1.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{2h(x)} dx < +\infty \tag{4.1.4}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)^2| w^2(n) < +\infty. \tag{4.1.5}$$

Ensuite à l'aide du théorème de Paley-Wiener ([8]), il montre que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)(-1)^n f(m-n) = 0,$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Ainsi le sous espace invariant par translations de $l^2(w,\mathbb{Z})$ engendré par la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un sous-espace non-trivial. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on notera

$$u^+(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n \quad (|z| < 1)$$
$$u^-(z) = -\sum_{n<0} u_n z^n \quad (|z| > 1),$$

et $\mathrm{Reg}(u)$ l'ensemble des points ζ du cercle pour lesquels il existe une fonction $h \in \mathcal{H}(D(\zeta,r))$ $(r > 0)$ telle que $h(\lambda) = u^+(\lambda)$ $(\lambda \in D(\zeta,r), |\lambda| < 1)$ et $h(\lambda) = u^-(\lambda)$ $(\lambda \in D(\zeta,r), |\lambda| > 1)$. On notera $\mathrm{Supp}(u) = \mathbb{T} \setminus \mathrm{Reg}(u)$. Lorsque le spectre du shift est inclus dans le cercle unité, si on pose $u = (f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ et $v_m = ((-1)^n f(m-n))_{n\in\mathbb{Z}}$, alors $\mathrm{Supp}(u) \cap \mathrm{Supp}(v_m) = \emptyset$, ce qui implique d'après [19] que dans ce cas $u * v = 0$. Ceci permet de montrer que si w est un poids log-impair vérifiant les conditions de Y.Domar, le sous-espace invariant par translations engendré par $f|_{\mathbb{Z}}$ n'est pas dense dans $l^2(w,\mathbb{Z})$ si f vérifie (4.1.3) et (4.1.5).

Dans la suite de l'introduction nous ne considérerons que des poids $w \in \mathcal{S}$ log-impairs, et log-convexes, qui vérifient

$$w(0) = 1 \qquad (4.1.6)$$
$$|\log w(n)| = o(n),\ n \to +\infty \qquad (4.1.7)$$
$$|\log w(n+1) - 2\log w(n) + \log w(n-1)| = o(\frac{1}{n}),\ n \to +\infty \qquad (4.1.8)$$

Dans un premier temps nous étudions les propriétés du prolongement harmonique φ de $n \mapsto \log w(n)$. Nous montrons à l'aide de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes (voir [39, Théorème 3.3 p.78]) le théorème suivant qui précise la construction de Y.Domar [13].

Théorème 4.1.1. *Soit $w \in \mathcal{S}$* log-*impair et* log-*convexe, qui vérifie (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.8). Il existe une fonction g holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ telle $g(n) = w(n)$, pour tout $n \geq 0$. La fonction g vérifie les propriétés suivantes :*

$$|g(x)| = e^{\varphi(x)} \quad (x \geq 0), \quad |g(x)| = e^{-\varphi(|x|)} \quad (x \leq 0) \qquad (4.1.9)$$
$$|g(iy)| = 1 \quad (y \in \mathbb{R}) \qquad (4.1.10)$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \textit{il existe } c_\varepsilon > 0 \textit{ tel que } |g(z)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon |Re(z)|} \quad (z \in \mathbb{C}) \qquad (4.1.11)$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \textit{il existe } c_\varepsilon > 0 \textit{ tel que } \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g(x+z)|}{|g(x)|} \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|z|} (z \in \mathbb{C}) \qquad (4.1.12)$$

Pour construire la fonction g nous prolongeons dans un premier temps la fonction $\log w(n)$ de manière affine sur chaque intervalle $[n, n+1]$ $(n \geq 0)$; ensuite, à l'aide du noyau de Poisson pour le premier quart de plan, nous construisons une fonction k harmonique dans le premier quart de plan, qui vaut $k(n) = \log w(n)$, pour $n \geq 0$ et $k(ix) = 0$, pour $x \geq 0$. Ensuite on pose $k(z) = k(\overline{z}) = -k(-z)$ pour obtenir un prolongement de $\log w(n)$ harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, continu sur $\mathbb{C}$. Pour obtenir la propriété (4.1.12) nous comparons à l'aide de l'inégalité de Jensen la fonction k à la fonction $z \mapsto z \log z$.

Soit $w \in \mathcal{S}$ log-impair et log-convexe, qui vérifie (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.8). On considère la fonction g donnée par le théorème 4.1.1 et $a \in]0, \pi[$; on note :

$$\mathcal{E}_{1,a} := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}),\ \limsup_{|z|\to+\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} \leq a\}$$
$$B_g^2(a) := \{f \in \mathcal{E}_{1,a},\ \|f\|_{B_a^2} := \|fg\|_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty\},$$

Les résultats d'A.Atzmon [4], [5] donnent alors dans ce cadre les propriétés suivantes :

Théorème 4.1.2 (A.Atzmon)**.**

(i) $B_g^2(a)$ est un espace de Hilbert, et la convergence dans B_a^2 entraîne la convergence sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(ii) L'opérateur de différentiation D, défini par $Df(z) = f'(z)$, est un opérateur borné sur $B_g^2(a)$ et son rayon spectral $\rho(D)$ vérifie

$$\rho(D) = \lim_{n\to+\infty} \|D^n\|^{\frac{1}{n}} \leq a.$$

Il est alors clair que la fonction $z \mapsto e^{-zD}$ est une fonction entière dans $\mathcal{L}(B_a^2)$, et il résulte de (ii) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c_\varepsilon > 0$ tel que $\|e^{-zD}\| \leq c_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|z|}$ $(z \in \mathbb{C})$.

On peut alors faire appel à un autre résultat d'A.Atzmon [4], [5].

Théorème 4.1.3 (A.Atzmon)**.** *Pour $a \in]0,\pi[$ il existe deux réels positifs K_1 et K_2 tels que pour tout $f \in B_g^2(a)$ on a*

$$K_1 \|f|_{\mathbb{Z}}\|_{l^2(w,\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{B_a^2} \leq K_2 \|f|_{\mathbb{Z}}\|_{l^2(w,\mathbb{Z})}.$$

On définit l'arc L_a par

$$L_a := \{e^{it}, \quad |t| \leq a\}.$$

On pose

$$\mathcal{D}_a := \{f|_{\mathbb{Z}}, f \in B_g^2(a)\}.$$

Ce sont les sous-espaces invariants $\mathcal{D}_a$ qui vont répondre à la question de Borichev-Hedenmalm-Volberg. On pose

$$M_a = \mathcal{D}_a^\perp \subset l^2(w,\mathbb{Z}).$$

On obtient alors le théorème suivant

Théorème 4.1.4. *Soit $w \in \mathcal{S}$* log*-impair et* log*-convexe, qui vérifie (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.8). On a, pour $a \in]0,\pi[$,*

$$Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) = Spec(S_{M_a}) = L_a.$$

Il résulte du théorème 4.1.1 et des travaux de A.Atzmon que si w vérifie (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.8), alors $Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) \subset L_a$. Le fait que $Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) = L_a$ résulte alors d'un principe élémentaire général (théorème 4.2.2).

4.2 Un principe général

Le shift bilatéral S sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est l'application linéaire définie par $Su = (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ $(u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}})$. On dit qu'un espace de Banach E est un espace admissible de suites s'il vérifie les propriétés suivantes :

(i) $U \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$

(ii) les applications coordonnées sont continues
(iii) la norme est invariante par rotation
(iv) $S(U) \subset U$
(v) $Spec(S) \subset \mathbb{T}$.

Soit U un espace admissible de suites et soit $\theta \in [0, 2\pi]$; on définit R_θ, la rotation d'angle θ par $R_\theta u = (u_n e^{-in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ $(u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}})$. L'opérateur R_θ est une isométrie.

On dira qu'un sous-espace fermé M est invariant par translations si $S(M) = M$. La restriction du shift au sous-espace invariant par translations M est l'opérateur $S|_M$ défini par

$$\begin{aligned} S|_M : M &\rightarrow M \\ u &\mapsto Su \end{aligned}$$

Soient X un espace de Banach et $S \in \mathcal{L}(X)$; il est bien connu que si $\lambda \in \partial(Spec(S))$ alors il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de X telle que pour tout $n \geq 0$ $\|u_n\| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}(S - \lambda I)u_n = 0$. Réciproquement s'il existe une telle suite d'éléments alors $\lambda \in Spec(S)$.

Lemme 4.2.1. *Soient M et N deux sous-espaces invariants par translations d'un espace admissible de suites U. Si $N \subset M$, alors*

$$Spec(S|_N) \subset Spec(S|_M).$$

Démonstration. Puisque U est un espace de Banach admissible de suites, on a $Spec(S) \subset \mathbb{T}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$; on a $(S - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n\geq 0} S^n \lambda^{-n-1}$, donc puisque M est invariant par translations, on a pour tout $u \in M$, $(S - \lambda I)^{-1}u \in M$, donc $(S|_M - \lambda I)$ est inversible. De la même manière si $|\lambda| < 1$, alors $(S|_M - \lambda I)$ est inversible, donc $Spec(S|_M) \subset \mathbb{T}$. Soient M et N deux sous-espaces invariants tels que $N \subset M$; puisque $Spec(S_N) \subset \mathbb{T}$, il est d'intérieur vide, donc pour tout $\lambda \in Spec(S|_N)$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de N telle que pour tout $n \geq 0$ $\|u_n\| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}(S - \lambda I)u_n = 0$. Puisque $N \subset M$ on a alors $\lambda \in Spec(S|_M)$. □

Pour $a \in [0, \pi[$ on définit l'arc L_a par $L_a := \{e^{it},\ |t| \leq a\}$.

On considère une famille de sous-espace invariants par translations $(D_{L_a})_{a\in(0,\pi)}$. Pour tout arc L fermé d'intérieur non-vide il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ et $a \in [0, \pi[$ tels que $L = e^{i\theta}L_a$; on définit D_L par

$$D_L := R_\theta(D_{L_a}).$$

Puisque R_θ est une isométrie le sous-espace D_L est un sous-espace fermé. De plus $R_\theta S R_{-\theta} = e^{i\theta}S$ donc le sous-espace D_L est un sous-espace invariant par translations et

$$Spec(S|_{D_L}) = e^{i\theta} Spec(S|_{D_{L_a}}). \tag{4.2.1}$$

On considère une famille $(D_{L_a})_{a\in(0,\pi)}$ de sous-espaces invariants vérifiant

(1) pour tout $a \in (0,\pi)$, $D_{L_a} \neq \{0\}$
(2) $Spec(S|_{D_{L_a}}) \subset L_a$
(3) si $L \subset L_a$, alors $D_L \subset D_{L_a}$
On déduit de la propriété (3) et de (4.2.1) que pour tout arc L fermé d'intérieur non-vide

$$Spec(S|_{D_L}) \subset L. \tag{4.2.2}$$

Théorème 4.2.2. *Soit U un espace admissible de suites et soit $(D_{L_a})_{a\in(0,\pi)}$ une famille de sous-espaces invariants par translations vérifiant* (1)*,* (2) *et* (3)*. Alors pour tout arc fermé L d'intérieur non-vide on a*

$$Spec(S|_{D_L}) = L.$$

Démonstration. Soit $a \in (0,\pi)$ et soit K un arc fermé d'intérieur non vide inclus dans L_a ; on a d'après le lemme 4.2.1, $Spec(S|_{D_K}) \subset Spec(S|_{D_{L_a}})$ et d'après la propriété (4.2.2), $Spec(S|_{D_K}) \subset K$, donc

$$\emptyset \neq Spec(S|_{D_K}) \subset Spec(S_{D_{L_a}}) \cap K,$$

donc $Spec(S_{D_{L_a}})$ est dense dans L_a, donc $Spec(S|_{D_{L_a}}) = L_a$. On déduit de (4.2.1) que pour tout arc L fermé d'intérieur non-vide $Spec(S|_{D_L}) = L$. □

4.3 Noyau de Poisson du premier quart de plan

On désigne par Q_1 le premier quart de plan défini par

$$Q_1 := \{x + iy,\ x > 0,\ y > 0\},$$

et par $\partial Q_1 := \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+$ son bord orienté de haut en bas sur $i\mathbb{R}^+$, et de gauche à droite sur $\mathbb{R}^+$. On paramètre ∂Q_1 par la fonction γ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= -is, \quad \text{pour } s < 0 \\ \gamma(s) &= s, \quad \text{pour } s \geq 0, \end{aligned}$$

Pour $f \in L^1(\partial Q_1, |d\zeta|)$, c'est à dire telle que

$$\int_0^{+\infty} |f(is)|ds + \int_0^{+\infty} |f(s)|ds < +\infty,$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q_1} f(\zeta)|d\zeta| &= \int_{\mathbb{R}} f(\gamma(s))|\gamma'(s)ds| \\ &= \int_{-\infty}^0 f(-is)ds + \int_0^{+\infty} f(s)ds \\ &= \int_0^{+\infty} f(is)ds + \int_0^{+\infty} f(s)ds. \end{aligned}$$

Le noyau de Poisson pour Q_1 se déduit du noyau de Poisson pour le demi-plan complexe [37][p.83] par la transformation conforme $z \mapsto z^2$. Il est défini sur ∂Q_1 par

$$\begin{aligned}
P_{x,y}(s) &= \frac{2}{\pi}\frac{xys}{(x^2-y^2-s^2)^2+4x^2y^2},\ s \geq 0,\\
P_{x,y}(is) &= \frac{2}{\pi}\frac{xys}{(x^2-y^2+s^2)^2+4x^2y^2},\ s \geq 0.
\end{aligned}$$

Pour une fonction $\varphi \in L^1(\partial Q_1, |d\zeta|)$, i.e. telle que

$$\int_{\partial Q_1} \frac{|\varphi(\zeta)|}{1+|\zeta^3|}|d\zeta| < +\infty,$$

la transformée de poisson $P[\varphi]$, de la fonction φ, pour le premier quart de plan est définie par :

$$\begin{aligned}
P[\varphi](x+iy) &= \int_{\partial Q_1} P_{x,y}(\zeta)\varphi(\zeta)|d\zeta|\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{xy}{(x^2-y^2+s^2)^2+4x^2y^2}\varphi(is)sds\\
&\quad +\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{xy}{(x^2-y^2-s^2)^2+4x^2y^2}\varphi(s)sds,
\end{aligned}$$

pour $x+iy \in Q_1$.

$P[\varphi]$ définit alors une fonction harmonique sur le premier quart de plan Q_1, et lorsque φ est continue, $P[\varphi]$ est continue sur $\overline{Q_1}$ avec

$$\begin{aligned}
P[\varphi](x) &= \varphi(x),\ x \geq 0,\\
P[\varphi](ix) &= \varphi(ix),\ x \geq 0.
\end{aligned}$$

On cite ici une propriété du noyau de Poisson dont nous aurons besoin par la suite :

Lemme 4.3.1. *Si φ_1, φ_2 sont deux fonctions telles que*

$$\int_{\partial Q_1} \frac{|\varphi_i(\zeta)|}{1+|\zeta^3|}|d\zeta| < +\infty,\ i=1,2, \tag{4.3.1}$$

$$\sup_{\zeta\in\partial Q_1} |\varphi_1(\zeta)-\varphi_2(\zeta)| < +\infty, \tag{4.3.2}$$

alors

$$\sup_{z\in Q_1} |P[\varphi_1](z)-P[\varphi_2](z)| = \sup_{\zeta\in\partial Q_1} |\varphi_1(\zeta)-\varphi_2(\zeta)|.$$

Démonstration. D'une part puisque

$$\int_{\partial Q_1} \frac{|\varphi_i(\zeta)|}{1+|\zeta^3|}|d\zeta| < +\infty,\ i = 1, 2,$$

les fonctions $P[\varphi_1]$ et $P[\varphi_2]$ sont bien définies sur Q_1.

D'autre part, pour tout $z = x + iy \in Q_1$, on a :

$$\begin{aligned} |P[\varphi_1](z) - P[\varphi_2](z)| &= |\int_{\partial Q_1} P_{x,y}(\zeta)\varphi_1(\zeta)|d\zeta| - \int_{\partial Q_1} P_{x,y}(s)\varphi_2(\zeta)|d\zeta|| \\ &= |\int_{\partial Q_1} P_{x,y}(\zeta)(\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta))|d\zeta|| \\ &\leq \int_{\partial Q_1} |P_{x,y}(\zeta)(\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta))||d\zeta|. \end{aligned}$$

Or le noyau de Poisson est positif sur ∂Q_1, donc en notant $M := \sup_{\zeta \in \partial Q_1} |\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta)|$, on obtient

$$\begin{aligned} |P[\varphi_1](z) - P[\varphi_2](z)| &\leq \int_{\partial Q_1} P_{x,y}(\zeta)|\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta)||d\zeta| \\ &\leq M \int_{\partial Q_1} P_{x,y}(\zeta)|d\zeta| = M, \end{aligned}$$

car $\int_{\partial Q_1} P_{x,y}(\zeta)|d\zeta| = 1$. □

4.4 La construction de Domar

4.4.1 Un cas particulier

On note ψ la fonction définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} x \log x,\ x \in \mathbb{R}^+, \\ 0,\ x \in i\mathbb{R}^+; \end{cases}$$

et $k := P[\psi]$; k est la fonction harmonique sur Q_1, continue sur $\overline{Q_1}$ telle que

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{2}{\pi} x \log x,\ x \geq 0, \\ k(ix) &= 0,\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition 4.4.1. *k est donnée par la formule*

$$k(z) = Re(\frac{2}{\pi} z \log z) + y,$$

pour $z = x + iy \in Q_1$, et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$0 \leq k(x + iy) - k(x) \leq cy,$$

pour $x+iy\in Q_1$. *De plus*

$$k(n+1)-2k(n)+k(n-1)\sim\frac{2}{\pi n},$$

$n\to+\infty$.

Démonstration. Soit $z=iy$, $y\geq 0$;

$$\begin{aligned} Re(\frac{2}{\pi}z\log z)) &= Re(\frac{2}{\pi}iy(\log y+i\frac{\pi}{2})) \\ &= -y \end{aligned}$$

donc puisque $z\mapsto Re(\frac{2}{\pi}z\log z)+y$ est harmonique sur Q_1 continue sur $\overline{Q_1}$ et vaut $\frac{2}{\pi}x\log x$ sur $\mathbb{R}^+$, 0 sur $i\mathbb{R}^+$ on a

$$k(z)=Re(\frac{2}{\pi}z\log z)+y,$$

pour $z=x+iy\in Q_1$.

D'autre part pour $x+iy\in Q_1$ on a :

$$\begin{aligned} k(x+iy)-k(x) &= Re(\frac{2}{\pi}(x+iy)(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+iarg(x+iy)))+y-\frac{2}{\pi}x\log x \\ &= \frac{2}{\pi}\big(\frac{1}{2}x\log(x^2+y^2)-yarg(x+iy)\big)+y-\frac{2}{\pi}x\log x \\ &= \big(\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\frac{x}{y}\log(1+\frac{y^2}{x^2})\big)y+(1-\frac{2}{\pi}arg(x+iy))y \\ &\leq cy. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\begin{aligned} k(n+1)-2k(n)+k(n-1) &= \frac{2}{\pi}\big((n+1)\log(n+1)-2n\log n+(n-1)\log(n-1)\big) \\ &= \frac{2}{\pi}\big(n\log(1+\frac{1}{n})+n\log(1-\frac{1}{n})+\log(\frac{n+1}{n-1})\big) \\ &= \frac{2}{\pi}\big(n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})+\frac{2}{n-1}+o(\frac{1}{n})\big) \\ &= \frac{2}{\pi n}+o(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

□

4.4.2 Le cas général

Soit φ une fonction affine sur chaque segment $[n,n+1]$, $n\geq 0$ qui vérifie

$$|\varphi(x)| = o(x),\ x\to+\infty, \tag{4.4.1}$$

$$|\varphi(n+1)-2\varphi(n)+\varphi(n-1)| = o(\frac{1}{n}),\quad n\to+\infty, \tag{4.4.2}$$

$$\varphi(ix) = 0,\ x\geq 0. \tag{4.4.3}$$

On note $u = P[\varphi]$ son prolongement harmonique au premier quart de plan. u est la fonction harmonique sur Q_1 qui vaut $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, et qui vaut 0 sur $i\mathbb{R}^+$.

Proposition 4.4.2. *On a les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi(x),\, x \geq 0 \\ u(iy) &= 0,\, y \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$|u(z)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon Re(z), \quad (z \in Q_1).$$

Démonstration. Les assertions

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi(x),\, x \geq 0 \\ u(iy) &= 0,\, y \geq 0, \end{aligned}$$

sont vraies par construction de $P[\varphi]$: $P[\varphi]$ est la transformée de Poisson pour le premier quart de plan de la fonction φ. Ainsi $P[\varphi]$ est harmonique sur le premier quart de plan, continue sur $\overline{Q_1}$ et coïncide avec φ sur ∂Q_1.

Soit $\varepsilon > 0$; on sait que $|\varphi(x)| = o(x)$, $x \to +\infty$, donc il existe $A > 0$ tel que

$$|\varphi(x)| \leq \varepsilon x,\, x > A.$$

On note $c_\varepsilon := sup_{0 \leq x \leq A} |u(x)|$. On a alors pour $z = x + iy \in Q_1$

$$\begin{aligned} |u(z)| &= |\int_{\partial Q_1} P_{x,y}(\zeta)\varphi(\zeta)|d\zeta|| = |\int_{\mathbb{R}^+} P_{x,y}(s)\varphi(s)ds| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^+} P_{x,y}(s)|\varphi(s)|ds \\ &\leq \int_0^A P_{x,y}(s)|\varphi(s)|ds + \int_A^{+\infty} P_{x,y}(s)|\varphi(s)|ds \\ &\leq c_\varepsilon + \varepsilon \int_A^{+\infty} P_{x,y}(s)sds \\ &\leq c_\varepsilon + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^+} P_{x,y}(s)sds. \end{aligned}$$

La fonction $x+iy \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} P_{x,y}(s)sds$ est la transformée de Poisson de la fonction qui vaut x pour sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $i\mathbb{R}^+$. C'est donc la fonction harmonique sur Q_1, continue sur $\overline{Q_1}$ qui vaut x pour $x \in \mathbb{R}^+$, et 0 sur $i\mathbb{R}^+$, il s'agit donc de la fonction $z \mapsto Re(z)$. On a donc pour $z \in Q_1$

$$|u(z)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon Re(z).$$

□

Théorème 4.4.3. *Soit φ une fonction affine sur chaque segment $[n, n+1]$, $n \geq 0$ qui vérifie*

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0, & \qquad (4.4.4) \\ |\varphi(x)| &= o(x),\, x \to +\infty, \qquad (4.4.5) \\ |\varphi(n+1) - 2\varphi(n) + \varphi(n-1)| &= o(\frac{1}{n}), \quad n \to +\infty, \qquad (4.4.6) \\ \varphi(ix) &= 0,\, x \geq 0. \qquad (4.4.7) \end{aligned}$$

On note $u := P[\varphi]$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \geq 0} |u(x+iy) - u(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon y \quad (y \geq 0),$$

et si de plus φ est supposée concave et croissante, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \geq 0} |u(x+t) - u(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon t \quad (t \geq 0),$$

et dans ce cas pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \geq 0} |u(x+z) - u(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon |z| \quad (z \in Q_1),$$

On prolonge u en une fonction $\tilde{u}$ sur $\mathbb{C}$, en posant

$$\tilde{u}(z) = \tilde{u}(\overline{z}) = -\tilde{u}(-z).$$

La fonction $\tilde{u}$ est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{C}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{u}(x+z) - \tilde{u}(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon |z| \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Démonstration. Pour la preuve de cet théorème nous identifierons les fonctions définies sur ∂Q_1 aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante : si f est définie sur ∂Q_1, nous l'identifions a $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(x),\, x \geq 0 \\ \tilde{f}(-x) &= f(ix),\, x \geq 0. \end{aligned}$$

A l'aide de cette identification l'idée de la preuve est la suivante : nous allons construire une fonction φ_2 telle que

$$\begin{gathered} \varepsilon k + \varphi_2 \text{ est convexe sur } \mathbb{R} \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_2(x) - \varphi(x)| < +\infty \end{gathered}$$

A l'aide de la première propriété et de l'inégalité de Jensen nous allons alors montrer que, si on note $u_2 := P[\varphi_2]$:

$$\sup_{x\geq 0} u_2(x) - u_2(x+iy) = o(y), \quad y \to +\infty,$$

ensuite, grâce à la deuxième propriété, nous savons d'après le lemme (4.3.1), que

$$\sup_{z\in Q_1} |u(z) - u_2(z)| < +\infty,$$

ce qui nous permet alors d'en déduire que

$$\sup_{x\geq 0} u(x) - u(x+iy) = o(y), \quad y \to +\infty.$$

La construction de φ_2 se fait en deux étapes : la première consiste à construire φ_1 telle que $\varepsilon k + \varphi_1$ soit affine par morceaux sur les intervalles $[n, n+1]$, $n \geq 0$, et convexe pour $x > A$ avec $A > 0$ (la fonction k ayant été définie dans le paragraphe 4.4.1). Ensuite nous construisons φ_2 en modifiant $\varepsilon k + \varphi_1$ sur $]-\infty, A]$ de manière à ce que $\varepsilon k + \varphi_2$ soit convexe sur $\mathbb{R}$. Le même travail sur $\varepsilon k - \varphi$ nous donne alors l'estimation pour $u(x+iy) - u(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$; on pose $a_n = \varepsilon k(n) + \varphi(n)$, $n \geq 0$.
Puisque

$$|\varphi(n+1) - 2\varphi(n) + \varphi(n-1)| = o(\frac{1}{n}), \quad n \to +\infty,$$

il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n > n_0$

$$|\varphi(n+1) - 2\varphi(n) + \varphi(n-1)| \leq \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Puisque d'après la proposition 4.4.1

$$k(n+1) - 2k(n) + k(n-1) \sim \frac{1}{n},$$

on peut supposer que pour $n > n_0$

$$|\varphi(n+1) - 2\varphi(n) + \varphi(n-1)| \leq \varepsilon\big(k(n+1) - 2k(n) + k(n-1)\big).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} \leq a_{n+1} - a_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \varepsilon k(n) + \varphi(n) - (\varepsilon k(n-1) + \varphi(n-1)) \\ &\qquad \leq \varepsilon k(n+1) + \varphi(n+1) - (\varepsilon k(n) + \varphi(n)) \\ &\Longleftrightarrow \quad -\varphi(n+1) + 2\varphi(n) - \varphi(n-1) \\ &\qquad \leq \varepsilon(k(n+1) - 2k(n) + k(n-1)); \end{aligned}$$

donc pour $n > n_0$ on a

$$a_n - a_{n-1} \leq a_{n+1} - a_n.$$

On considère la fonction f affine par morceaux telle que $f(n) = a_n$, $(n \geq 0)$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$; sur chaque intervalle $[n, n+1]$, f a pour coefficient directeur $a_{n+1} - a_n$, donc f ainsi définie est convexe pour $x > n_0$. On pose $\varphi_1 = f - \varepsilon k$; on a alors $(\varphi - \varphi_1)(n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $\varphi - \varphi_1$ est dérivable sur chaque intervalle $[n, n+1]$. La fonction φ est affine par morceaux sur chaque intervalle $[n, n+1]$, donc pour tout $s \in [n, n+1]$, $\varphi'(s) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$. De la même manière f est affine par morceaux sur chaque intervalle $[n, n+1]$, donc pour tout $s \in [n, n+1]$, $f'(s) = \varepsilon(k(n+1) - k(n)) + \varphi(n+1) - \varphi(n)$; on a donc, puisque $f = \varepsilon k + \varphi_1$, pour tout $s \in [n, n+1]$, $\varphi_1'(s) = -\varepsilon k'(s) + \varepsilon(k(n+1) - k(n)) + \varphi(n+1) - \varphi(n))$.

On obtient pour tout $s \in [n, n+1]$,

$$\begin{aligned} |\varphi'(s) - \varphi_1'(s)| &= \varepsilon |k(n+1) - k(n) - k'(s)| \\ &= \varepsilon \frac{2}{\pi} |(n+1)\log(n+1) - n\log n - \log s - 1| \\ &\leq \varepsilon \frac{2}{\pi} (1 + |n \log(1 + \frac{1}{n})| + |\log(\frac{n+1}{s})|); \end{aligned}$$

donc $|\varphi'(s) - \varphi_1'(s)| \to 0$, $s \to +\infty$. Comme $\varphi(n) = \varphi_1(n)$, $n \geq 0$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) - \varphi_1(x) = 0.$$

Par conséquent

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |(\varphi - \varphi_1)(x)| < +\infty.$$

Maintenant nous allons construire g, continue sur $\mathbb{R}$, qui coïncide avec f sur $]-\infty, a] \cup [n_0, +\infty[$ (a reste à déterminer) et affine sur l'intervalle $[a, n_0]$. Puisque $\varphi(x) = o(x)$, $x \to +\infty$ et que $k(x) = \frac{2}{\pi} x \log x$ pour $x \geq 0$, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; f étant convexe au voisinage de l'infini, on peut alors choisir n_0 tel que $f(n_0 + 1) - f(n_0) > 0$ et $f(n_0) \geq 0$. On peut alors définir la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x),\ x > n_0, \\ (f(n_0+1) - f(n_0))(x - n_0) + f(n_0), \quad n_0 - \frac{f(n_0)}{f(n_0+1) - f(n_0)} < x \leq n_0, \\ 0,\ x \leq n_0 - \frac{f(n_0)}{f(n_0+1) - f(n_0)}. \end{cases}$$

On note φ_2 la fonction définie par

$$\varphi_2 = g - \varepsilon k,$$

et $u_2 := P[\varphi_2]$ le prolongement au premier quart de plan de φ_2.

On rappelle que l'on identifie les fonctions définies sur ∂Q_1 avec des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ainsi $P_{x,y}|d\zeta|$ est identifiée à une mesure sur $\mathbb{R}$ de masse 1 que l'on notera $P_{x,y} ds$.

On a alors d'après l'inégalité de Jensen appliquée avec la mesure $P_{x,y}ds$, la fonction

$$h(s) = \begin{cases} s, \, s \geq 0 \\ 0, \, s < 0 \end{cases}$$

et la fonction convexe g :

$$g\left(\int_0^{+\infty} P_{x,y}(s) s ds\right) \leq \int_{\mathbb{R}} g(h(s)) P_{x,y}(s) ds.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \int_{-\infty}^0 g(0) P_{x,y}(s) ds + \int_0^{+\infty} g(s) P_{x,y}(s) ds \\ &\leq g(0) + \int_{\mathbb{R}} g(s) P_{x,y}(s) ds \end{aligned}$$

d'où

$$\varepsilon k(x) + u_2(x) \leq u_2(0) + \varepsilon k(x+iy) + u_2(x+iy).$$

On obtient

$$u_2(x) - u_2(x+iy) \leq u_2(0) + \varepsilon(k(x+iy) - k(x)).$$

Finalement puisque φ_1 et φ_2 coïncident partout sauf sur un compact, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < +\infty$, d'où

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) - \varphi_2(x)| < +\infty,$$

et donc, d'après le lemme (4.3.1)

$$\sup_{z\in\overline{Q_1}} |u(z) - u_2(z)| < +\infty.$$

On a

$$u(x) - u(x+iy) \leq u_2(x) - u_2(x+iy) + |u(x) - u_2(x)| + |u(x+iy) - u_2(x+iy)|;$$

ainsi il existe une constante $c_{\varepsilon,1} > 0$ telle que

$$\sup_{x\geq 0} u(x) - u(x+iy) \leq c_{\varepsilon,1} + \sup_{x\geq 0} \varepsilon(k(x+iy) - k(x)).$$

En appliquant ce résultat à $-\varphi$, on voit qu'il existe une constante $c_{\varepsilon,2} > 0$ telle que

$$\sup_{x\geq 0} u(x+iy) - u(x) \leq c_{\varepsilon,2} + \sup_{x\geq 0} \varepsilon(k(x+iy) - k(x)),$$

d'où, en notant $c_\varepsilon = \max(c_{\varepsilon,1}, c_{\varepsilon,2})$, on a

$$\sup_{x\geq 0} |u(x+iy) - u(x)| \leq c_\varepsilon + \sup_{x\geq 0} \varepsilon(k(x+iy) - k(x)).$$

Finalement, puisque d'après la proposition 4.4.1 il existe une constante $c > 0$ telle que

$$0 \leq k(x+iy) - k(x) \leq cy,$$

quand $x + iy \in Q_1$, on a

$$\sup_{x\geq 0} |u(x+iy) - u(x)| \leq c_\varepsilon + c\varepsilon y \quad (y \geq 0)$$

Si φ est supposée concave croissante, alors pour tout $t \geq 0$ l'application

$$x \mapsto \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t}$$

est positive décroissante , donc

$$\sup_{x\geq 0} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| \leq \varphi(t) = o(t). \tag{4.4.8}$$

La fonction φ étant continue, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$\varphi(t) \leq c_\varepsilon + \varepsilon t \quad (t \geq 0),$$

donc

$$\sup_{x\geq 0} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon t \quad (t \geq 0).$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $c_{\varepsilon,1} > 0$ et $c_{\varepsilon,2} > 0$, telles que

$$\begin{array}{c} \sup_{x\geq 0} |u(x+iy) - u(x)| \leq c_{\varepsilon,1} + \varepsilon y \quad (y \geq 0), \\ \sup_{x\geq 0} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| \leq c_{\varepsilon,2} + \varepsilon t \quad (t \geq 0). \end{array}$$

Finalement si $z = t + iy \in Q_1$, alors, en notant $c_{\varepsilon,3} = c_{\varepsilon,1} + c_{\varepsilon,2}$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{x\geq 0} |u(x+z) - u(x)| &= \sup_{x\geq 0} |u(x+t+iy) - u(x)| \\ &\leq \sup_{x\geq 0} |u(x+t+iy) - u(x+t)| + \sup_{x\geq 0} |u(x+t) - u(x)| \\ &\leq c_{\varepsilon,3} + \varepsilon(t+y), \end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{x\geq 0} |u(x+z) - u(x)| \leq c_{\varepsilon,3} + 2\varepsilon|z|, \quad (z \in Q_1). \tag{4.4.9}$$

Le reste des propriétés est une conséquence du lemme 4.4.4 qui suit. $\square$

Lemme 4.4.4. *Soit u une fonction définie sur $\mathbb{C}$ vérifiant*

$$u(z) = u(\overline{z}) = -u(-z) \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{4.4.10}$$

croissante sur $\mathbb{R}^+$, et telle pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \geq 0} |u(x+z) - u(x)| = c_\varepsilon, +\varepsilon|z| \quad z \in \overline{Q_1}. \tag{4.4.11}$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+z) - u(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon|z| \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Démonstration. Nous allons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+z) - u(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon|z| \quad (z \in Q_1).$$

D'après (4.4.11) il suffit de montrer :

$$\sup_{x \leq 0} |u(x+z) - u(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon|z|.$$

Soit $\varepsilon > 0$; d'après (4.4.11), il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$\sup_{x \geq 0} |u(x+z) - u(x)| \leq c_\varepsilon + \varepsilon|z| \quad (z \in \overline{Q_1}) \tag{4.4.12}$$

Soient $x \geq 0$ et $z = t + iy \in Q_1$; nous allons étudier $|u(-x+z) - u(-x)|$.
Si $-x + z \in Q_2$, c'est-à-dire $t - x < 0$, alors

$$\begin{aligned} u(-x) &= -u(x) \\ u(-x+z) &= -u(x-t+iy), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |u(-x+z) - u(-x)| &= |u(x-t+iy) - u(x)| \\ &\leq |u(x-t+iy) - u(x-t)| + |u(x-t) - u(x)|. \end{aligned}$$

Puisque $x - t$ est positif, on a

$$|u(x-t+iy) - u(x-t)| \leq \sup_{s \geq 0} |u(s+iy) - u(s)|,$$

or d'après (4.4.12)

$$\sup_{s \geq 0} |u(s+iy) - u(s)| = c_\varepsilon + \varepsilon|z|.$$

D'autre part
$$|u(x-t)-u(x)| \leq \sup_{s\geq 0}|u(s)-u(s+t)|,$$
or d'après (4.4.12)
$$\sup_{s\geq 0}|u(s)-u(s+t)| \leq c_\varepsilon+\varepsilon|z|.$$

Si $-x+z\in Q_1$, c'est-à-dire $-x+t>0$, alors
$$\begin{array}{rcl} u(-x) & = & -u(x) \\ u(-x+z) & = & u(-x+t+iy), \end{array}$$
donc
$$\begin{array}{rcl} |u(-x+z)-u(-x)| & = & |u(-x+t+iy)+u(x)| \\ & \leq & |u(-x+t+iy)-u(-x+t)|+|u(-x+t)+u(x)|. \end{array}$$
Puisque $-x+t$ est positif, on a
$$|u(-x+t+iy)-u(-x+t)| \leq \sup_{s\geq 0}|u(s+iy)-u(s)|,$$
or d'après (4.4.12)
$$\sup_{s\geq 0}|u(s+iy)-u(s)| \leq c_\varepsilon+\varepsilon|z|.$$
D'autre part u étant supposée croissante et positive sur $\mathbb{R}^+$, on a $0\leq u(t-x)\leq u(t)$, et puisque $t>x$, $0\leq u(x)\leq u(t)$, donc
$$|u(-x+t)+u(x)| \leq 2u(t),$$
or par hypothèse $u(t)\leq c_\varepsilon+\varepsilon t$, lorsque $t\geq 0$.

On a donc, dans tous les cas, pour $z\in Q_1$:
$$\sup_{x\leq 0}|u(x+z)-u(x)| \leq 2(c_\varepsilon+\varepsilon|z|).$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $c_\varepsilon>0$ telle que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x+z)-u(x)| \leq c_\varepsilon+\varepsilon|z| \quad (z\in Q_1). \tag{4.4.13}$$

Si $z=t+iy\in Q_2$, alors
$$\begin{array}{rcl} \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x+z)-u(x)| & = & \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x+t+iy)-u(x)| \\ & = & \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(-(-x-t)+iy)-u(-(-x))|, \end{array}$$

or d'après (4.4.10), on a : $u(\alpha+i\beta)=u(-\alpha+i\beta) \quad (\alpha+i\beta\in\mathbb{C})$, donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x+z)-u(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(-x-t+iy)-u(-x)|,$$

avec $-t+iy\in Q_1$, donc d'après (4.4.12), pour tout $\varepsilon>0$, il existe $c_\varepsilon>0$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x+z)-u(x)|\le c_\varepsilon+\varepsilon|z| \quad (z\in Q_1\cup Q_2)). \tag{4.4.14}$$

Finalement, si $z=t+iy$ avec $y<0$, alors puisque d'après 4.4.10, on a : $u(z)=u(\overline{z})$, on obtient :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x+z)-u(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x+\overline{z})-u(x)|,$$

et $\overline{z}\in Q_1\cup Q_2$, donc d'après (4.4.14), pour tout $\varepsilon>0$ il existe $c_\varepsilon>0$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x+z)-u(x)|\le c_\varepsilon+\varepsilon|z| \quad (z\in\mathbb{C}).$$

□

Nous obtenons alors le théorème suivant.

Théorème 4.4.5. *Soit $w\in\mathcal{S}$ log-impair et log-convexe, qui vérifie*

$$w(0)=1, \tag{4.4.15}$$
$$|\log w(n)|=o(n),\ n\to+\infty, \tag{4.4.16}$$
$$|\log w(n+1)-2\log w(n)+\log w(n-1)|=o(\tfrac{1}{n}), \quad n\to+\infty. \tag{4.4.17}$$

Il existe alors une fonction g holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ telle que $g(n)=w(n)$, pour tout $n\ge 0$. La fonction g vérifie les propriétés suivantes :

$$|g(x)|=e^{\varphi(x)} \quad (x\ge 0), \quad |g(x)|=e^{-\varphi(|x|)} \quad (x\le 0) \tag{4.4.18}$$
$$|g(iy)|=1 \quad (y\in\mathbb{R}) \tag{4.4.19}$$
$$\forall\varepsilon>0,\ \textit{il existe } c_\varepsilon>0 \textit{ tel que } |g(z)|\le c_\varepsilon e^{\varepsilon|Re(z)|} \quad (z\in\mathbb{C}) \tag{4.4.20}$$
$$\forall\varepsilon>0,\ \textit{il existe } c_\varepsilon>0 \textit{ tel que } \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|g(x+z)|}{|g(x)|}\le c_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}(z\in\mathbb{C}) \tag{4.4.21}$$

Démonstration. On note φ le prolongement affine par morceaux de w ; la fonction φ vérifie alors les conditions du théorème 4.4.3. On note v le conjugué harmonique de la fonction harmonique $\tilde{u}$ donnée par le théorème 4.4.3 et on pose $g=e^{\tilde{u}+iv}$; il est clair alors que la fonction g vérifie les propriétés désirées. □

4.5 Les résultats d'Atzmon

4.5.1 L'espace $B_g^2(a)$

Les résultats suivants et leurs preuves ont été communiquées à l'auteur dans [4], et leur preuves apparaîtront dans [5].

Soit g une fonction analytique dans $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C},\, Im(z) > 0\}$, telle que son module admet une extension sans zéros et continue à $\overline{\mathbb{C}}$; soit $a \in [0, \pi[$; on note :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{1,a} &:= \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), |f(z)| = O(e^{(a+\varepsilon)|z|}),\, |z| \to +\infty, \quad \varepsilon > 0\},\\
B_g^2(a) &:= \{f \in \mathcal{E}_{1,a},\, \|f\|_{B_g^2(a)} := \|fg\|_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty\}.
\end{aligned}$$

A.Atzmon a montré les résultats suivants :

Théorème 4.5.1 (A.Atzmon)**.** *Si*

$$\limsup_{|z|\to+\infty, z\in\mathbb{C}^+} \frac{\log|g(z)|}{|z|} \leq 0,$$

alors $B_g^2(a)$ est un espace de Hilbert, et la convergence dans $B_g^2(a)$ entraîne la convergence sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Théorème 4.5.2 (A.Atzmon)**.** *Si de plus g vérifie (4.1.12), alors*

(i) L'opérateur de différentiation D, défini par $Df(z) = f'(z)$, est un opérateur borné sur $B_g^2(a)$ et son rayon spectral $\rho(D)$ vérifie

$$\rho(D) = \lim_{n\to+\infty} \|D^n\|^{\frac{1}{n}} \leq a.$$

(ii) On a $T_z = e^{-zD} \in \mathcal{L}(B_g^2(a))$ pour $z \in \mathbb{C}$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|T_z\| \leq c_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|z|} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Si h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ on note Rh la restriction de h aux entiers.

Théorème 4.5.3 (A.Atzmon)**.** *Si g vérifie les conditions du théorème 4.5.2 alors pour $a \in]0, \pi[$ il existe deux constantes positives K_1 et K_2 telles que pour tout $f \in B_a^2$*

$$K_1\|R(fg)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{B_g^2(a)} \leq \|R(fg)\|_{l^2(\mathbb{Z})}.$$

4.6 Application aux espaces $l^2(w, \mathbb{Z})$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des poids $w : \mathbb{Z} \mapsto (0, +\infty)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{Z}} \frac{w(n+1)}{w(n)} \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{w(n+1)}{w(n)} < +\infty, \tag{4.6.1}$$

$$\tilde{w}(n)^{1/|n|} \to 1,\ |n| \to +\infty, \quad \text{où} \quad \tilde{w}(n) := \sup_{p\in\mathbb{Z}} \frac{w(n+p)}{w(p)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4.6.2}$$

Pour $w \in \mathcal{S}$, on pose

$$l^2(w, \mathbb{Z}) := \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \|u\|_w = (\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|w^2(n))^{1/2} < +\infty\right\},$$
$$w^*(n) = \frac{1}{w(-n)}\ (n \in \mathbb{Z}).$$

Le shift bilatéral sur $l^2(w, \mathbb{Z})$ est défini par la formule

$$Su = (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}} \quad (u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(w, \mathbb{Z})).$$

L'opérateur S est borné et inversible sur $l^2(w, \mathbb{Z})$; on a de plus

$$\|S^n\| = \tilde{w}(n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

On a alors $Spec(S) = \mathbb{T}$.

Le dual de $l^2(w, \mathbb{Z})$ peut être identifié à $l^2(w^*, \mathbb{Z})$, la dualité étant donnée par la formule :

$$< u, v >= \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p v_{-p} \quad (u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(w, \mathbb{Z}), v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(w^*, \mathbb{Z})).$$

L'adjoint de l'opérateur S dans $l^2(w, \mathbb{Z})$ est alors identifié au shift S sur $l^2(w^*, \mathbb{Z})$.

On rappelle qu'un sous-espace M est dit invariant par translations si $S(M) = M$, et il est dit non-trivial si $M \neq \{0\}$ et $M \neq l^2(w, \mathbb{Z})$.

On notera $S|_M$ la restriction de l'opérateur S au sous-espace invariant M :

$$\begin{aligned} S|_M : M &\to M \\ u &\mapsto Su, \end{aligned}$$

et S_M l'opérateur induit par S sur le quotient $l^2(w, \mathbb{Z})/M$, défini par :

$$\begin{aligned} S_M : l^2(w, \mathbb{Z})/M &\to l^2(w, \mathbb{Z})/M \\ u + M &\mapsto Su + M. \end{aligned}$$

Si $M \subset l^2(w, \mathbb{Z})$, on définit $M^\perp \subset l^2(w^*, \mathbb{Z})$ par :

$$M^\perp := \{v \in l^2(w^*, \mathbb{Z}),\ < u, v >= 0,\ \forall u \in M\}.$$

Ainsi, si M est un sous-espace invariant par translations, $M^{\perp}$ peut être identifié au dual de $l^2(w,\mathbb{Z})/M$, avec le crochet de dualité

$$(u+M,v) =< u,v > \quad (u \in l^2(w,\mathbb{Z}),\, v \in M^{\perp}),$$

et l'adjoint de l'opérateur S_M sur $l^2(w,\mathbb{Z})$ est alors l'opérateur $S|_{M^{\perp}}$ sur $M^{\perp}$. On a alors $Spec(S_M) = Spec(S|_{M^{\perp}})$.

Posons

$$\mathcal{E} = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\, \limsup_{|n|\to+\infty} |u_n|^{1/n} \leq 1\}.$$

On a pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(w,\mathbb{Z})$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(w^*,\mathbb{Z})$

$$\Big|\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p v_{n-p}\Big| \leq \|u\|_w \|v\|_{w^*} \tilde{w}(-n-1),$$

et donc $u * v := (\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p v_{n-p})_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}$.

On notera $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$, et $\mathcal{H}_0(\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}})$ l'ensemble des fonctions f, holomorphes dans $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$, qui vérifient $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$.

On appelle $HF(\mathbb{T})$ l'ensemble des hyperfonctions du cercle $\mathbb{T}$, i.e. l'ensemble de tous les couples $F = (f,g)$, où $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $g \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}})$. On note $P^+ : HF(\mathbb{T}) \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'application $(f,g) \mapsto f$, et $P^- : HF(\mathbb{T}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}})$ l'application $(f,g) \mapsto g$. Pour $F \in HF(\mathbb{T})$, on note

$$\hat{F}(n) = \widehat{P^+(F)}(n) \quad (n \geq 0), \quad \hat{F}(n) = \widehat{P^-(F)}(n) \quad (n < 0),$$

où $\widehat{P^+(F)}(n)$ désigne le n-ième coefficient de Taylor en 0 de P^+ $(n \geq 0)$ et $\widehat{P^-(F)}(n)$ désigne le n-ième coefficient de Laurent de P^- en $+\infty$ $(n < 0)$. Pour $u \in \mathcal{E}$, posons

$$\check{u} = (\check{u}^+, \check{u}^-),$$

où $\check{u}^+$ et $\check{u}^-$ sont définis par la formule

$$\check{u}^+(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n u_n \quad (|\lambda| < 1)$$
$$\check{u}^-(\lambda) = -\sum_{n<0} \lambda^n u_n \quad (|\lambda| > 1).$$

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : F \mapsto \widehat{F} := (\widehat{F}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une bijection de $HF(\mathbb{T})$ sur $\mathcal{E}$, et $\mathcal{F}^{-1}(u) = \check{u}$ pour $u \in \mathcal{E}$.

Un point régulier $\zeta \in \mathbb{T}$ d'une hyperfonction $F = (f,g)$ est un point pour lequel il existe $r > 0$ et une fonction $h \in \mathcal{H}(D(\zeta,r))$ telle que $h(\lambda) = f(\lambda)\,(\lambda \in D(\zeta,r)\cap\mathbb{D})$ et $h(\lambda) = g(\lambda)\,(\lambda \in D(\zeta,r)\cap\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}})$. On note $\mathrm{Reg}(F)$ l'ensemble des points $\zeta \in \mathbb{T}$ réguliers pour F, et on pose $\mathrm{Supp}(F) = \mathbb{T}\setminus\mathrm{Reg}(F)$. Il est clair que $\mathrm{Supp}(F)$ est fermé et qu'il existe $G \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\mathrm{Supp}(F))$ tel que $G|_{\mathbb{D}} = f$ et $G|_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}}$.

On appelle $HF_w(\mathbb{T})$ l'ensemble des hyperfonctions F telles que $\widehat{F} \in l^2(w, \mathbb{Z})$.

On a pour tout $v \in l^2(w^*, \mathbb{Z})$:

$$\check{v}^+(\lambda) =< (S - \lambda I)^{-1} e_0, v > \quad (|\lambda| < 1), \tag{4.6.3}$$

$$\check{v}^-(\lambda) =< (S - \lambda I)^{-1} e_0, v > \quad (|\lambda| > 1), \tag{4.6.4}$$

où $e_0 := (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$. En effet, pour $|\lambda| < 1$, on a

$$\begin{aligned} < (S - \lambda I)^{-1} e_0, v > &= < S^{-1}(I - \lambda S^{-1})^{-1} e_0, v > \\ &= \sum_{n \geq 0} \lambda^n < S^{-n-1} e_0, v > \\ &= \sum_{n \geq 0} \lambda^n v_n \\ &= \check{v}^+(\lambda). \end{aligned}$$

Pour $|\lambda| > 1$, on a

$$\begin{aligned} < (S - \lambda I)^{-1} e_0, v > &= < \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\lambda} S - I)^{-1} e_0, v > \\ &= -\sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} < S^n e_0, v > \\ &= -\sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} v_{-n-1} \\ &= \check{v}^-(\lambda). \end{aligned}$$

Soit $0 < a < \pi$: on définit l'arc L_a par

$$L_a := \{e^{it}, \quad |t| \leq a\}.$$

On notera E_a le sous espace de $l^2(w^*, \mathbb{Z})$ défini par

$$E_a := \{u \in l^2(w^*, \mathbb{Z}), \quad \mathrm{Supp}(\check{u}) \subset L_a\},$$

où $\check{u} := \mathcal{F}^{-1} u$.

On a le résultat classique suivant.

Lemme 4.6.1. *Soit $w \in \mathcal{S}$ et soit M un sous-espace invariant par translations non-trivial de $l^2(w, \mathbb{Z})$; on suppose que $Spec(S_M) \subsetneq \mathbb{T}$. Alors*

$$Supp(\check{v}) \subset Spec(S_M),$$

pour tout $v \in M^\perp$. En particulier, si M est un sous-espace invariant par translations tel que

$$Spec(S_M) \subset L_a,$$

alors

$$M^\perp \subset E_a.$$

Démonstration. On suppose qu'il existe $\zeta \in \mathbb{T}$ tel que $\zeta \notin Spec(S_M)$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $D(\zeta, \delta) \cap Spec(S_M) = \emptyset$, où $D(\zeta, \delta) := \{z \in \mathbb{C},\, |z - \zeta| < \delta\}$. On note I l'arc de cercle centré en ζ et de rayon δ :

$$I := \{e^{i\theta} \in \mathbb{T},\, |\theta - arg(\zeta)| < \delta\}.$$

On a alors $Spec(S_M) \cap I = \emptyset$.

Soit $v \in M^{\perp}$; nous allons montrer que $\check{v}$ admet un prolongement analytique au travers de I.

On note π la projection canonique de $l^2(w, \mathbb{Z})$ sur $l^2(w, \mathbb{Z})/M$. Soit $v \in M^{\perp}$; pour $\lambda \neq 1$, on a

$$< (S - \lambda I)^{-1} e_0, v >= ((S_M - \lambda I)^{-1} \pi(e_0), v).$$

Donc d'après (4.6.3) et (4.6.4), $\check{v}$ admet un prolongement analytique au travers de I.

Soit M un sous-espace invariant par translations tel que

$$Spec(S_M) \subset L_a.$$

On a alors, pour tout $\zeta \notin L_a$, $\zeta \notin Spec(S_M)$, donc si $v \in M^{\perp}$, d'après ce qui précède, $\check{v}$ admet un prolongement analytique au travers d'un arc contenant ζ. Donc $\check{v}$ admet un prolongement analytique au travers de $\mathbb{T} \backslash L_a$, i.e. $u \in E_a$. Donc $M^{\perp} \subset E_a$. □

Nous considérerons dorénavant uniquement des poids appartenant à la classe $\mathcal{T}$ des poids décroissants log-impairs et log-convexes vérifiant

$$|\log w(n+1) - 2\log w(n) + \log w(n-1)| = o(\frac{1}{n}), \quad n \to +\infty. \qquad (4.6.5)$$

On a alors $w^* = w$. Soit φ la fonction affine par morceaux qui vaut

$$\varphi(n) = \log w(n) \quad (n \geq 0).$$

Etant donné que le fait de changer un nombre fini de termes de $w \in \mathcal{S}$ ne change pas l'espace $l^2(w, \mathbb{Z})$, on suppose que

$$w(0) = 1. \qquad (4.6.6)$$

Puisque $w \in \mathcal{S}$, on a d'après (4.6.2)

$$\tilde{w}(n)^{1/|n|} \to 1,\, |n| \to +\infty,$$

en particulier

$$w(n)^{1/|n|} \to 1,\, |n| \to +\infty,$$

donc

$$\log w(n) = o(n),\, |n| \to +\infty. \qquad (4.6.7)$$

D'après (4.6.5), (4.6.6) et (4.6.7), la fonction φ vérifie toutes les conditions requises par le théorème 4.4.3. Soient g le prolongement analytique associé à φ dans les parties 4.4 et 4.5, et $B_g^2(a)$ l'espace défini dans la partie 4.5. On définit les espaces $\mathcal{D}_a$ par

$$\mathcal{D}_a := \{f|_{\mathbb{Z}},\ f \in B_g^2(a)\}$$

Proposition 4.6.2. *Soit $w \in \mathcal{T}$; on a*

$$Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) \subset L_a,$$

et

$$\mathcal{D}_a \subset E_a.$$

On a donc

$$Spec(S_{\mathcal{D}_a^{\perp}}) \subset L_a.$$

Démonstration. D'après le théorème 4.5.3, on a bien

$$\mathcal{D}_a \subset l^2(w, \mathbb{Z}),$$

et pour $f \in B_g^2(a)$, les normes $\|f\|_{B_g^2(a)}$ et $\|f|_{\mathbb{Z}}\|_{l^2(w,\mathbb{Z})}$ sont équivalentes.

Pour $f \in B_g^2(a)$, on a, d'après le théorème 4.5.2

$$e^D f(z) = T_{-1} f,$$

donc

$$e^D f|_{\mathbb{Z}} = T_{-1} f|_{\mathbb{Z}} = S^{-1}(f|_{\mathbb{Z}}).$$

D'après le théorème 4.5.2, $\mathcal{D}_a$ est donc un sous-espace invariant par translations et

$$Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) \subset \{e^{i\lambda},\ |\lambda| \leq a\}.$$

Or $Spec(S) \subset \mathbb{T}$, donc

$$Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) \subset \{e^{it},\ |t| \leq a\} = L_a.$$

Puisque $Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) \subset L_a$, on a $Spec(S_{\mathcal{D}_a^{\perp}}) \subset L_a$, donc, d'après le lemme 4.6.1, $\mathcal{D}_a \subset E_a$ □

Théorème 4.6.3. *Soit $w \in \mathcal{T}$; on a*

$$Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) = Spec(S_{\mathcal{D}_a^{\perp}}) = L_a.$$

Démonstration. Pour $w \in \mathcal{T}$, $l^2(w, \mathbb{Z})$ est une espace admissible de suites. On sait d'après la proposition 4.6.2, que $Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) \subset L_a$. Soit L est un arc fermé d'intérieur vide inclus dans le cercle de sorte qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ et

$b \in (0,\pi)$ tels que $L = e^{i\theta} L_b$. On définit les sous-espaces D_L en accord avec les notations de la section 4.1 par

$$D_L := \{(f(n)e^{-in\theta})_{n\in\mathbb{Z}},\, (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in D_{L_b}\}.$$

Si $L \subset L_a$, alors on a $|\theta| + b \leq a$. Soit $u = (u_n e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}} \in D_L$; il existe $f \in B^2_g(b)$ tel que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On pose $h(z) = e^{i\theta z} f(z)$; puisque $f \in \mathcal{E}_{1,b}$ et $|\theta| + b \leq a$, $h \in \mathcal{E}_{1,a}$. De plus $|hg|$ et $|fg|$ coïncident sur $\mathbb{R}$ donc $hg \in L^2(\mathbb{R})$, ainsi $h \in B^2_g(a)$. On a donc $D_L \subset D_{L_a}$. D'après la proposition 4.6.2 et ce qui précède la famille $(D_{L_a})_{a\in(0,\pi)} \in \mathfrak{A}$, donc d'après le théorème 4.2.2 pour tout $a \in (0,\pi)$

$$Spec(S|_{\mathcal{D}_a}) = Spec(S_{\mathcal{D}_a^\perp}) = L_a.$$

□

Corollaire 4.6.4. *Soit $w \in \mathcal{T}$ et soit L un arc de cercle fermé d'intérieur non vide de sorte qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ et $0 < a < \pi$ tels que $L = e^{i\theta} L_a$. Si M est défini par*

$$M := \{(u_n e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}},\, u \in \mathcal{D}_a^\perp\},$$

alors

$$Spec(S_M) = L.$$

Bibliographie

[1] G.R. Allan and T.J. Ransford, *Power-dominated elements in a Banach algebra*, Studia Mathematica 94 (1989). 63-79.

[2] A. Atzmon, *Maximal, minimal, and primary invariant subspaces*, J. Funct. Anal. 185 (2001), n°1, 155-213.

[3] A. Atzmon, *Entire functions, invariant subspaces and Fourier transforms*, Proceedings of the Ashkelon Workshop on Complex Function Theory (1996), 37-52, Israel Math. Conf. Proc., 11, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1997.

[4] A. Atzmon, *private conversation.*

[5] A.Atzmon, *Weighted Lp spaces of entire functions, Fourier transforms and invariant subspaces*, preprint.

[6] A. Beurling, *On quasianalyticity and general distributions*, Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Stanford Univ., Stanford, Calif., (1961).

[7] A. Beurling, *A critical topology in harmonic analysis on semigroups*, Acta. Math. 112, (1964), 215-228.

[8] R.P. Boas, Entire functions, Academic Press, New-York, 1954.

[9] F.F. Bonsall and M.J. Crabb, *The spectral radius of a hermitian element of a Banach algebra*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 178-180.

[10] A. Borichev, H. Hedenmalm and A. Volberg, *Large Bergman spaces : invertibility, cyclicity, and subspaces of arbitrary index*, J. Funct. Anal. 207 (2004), n°1, 111-160.

[11] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Topologie Générale chap. IX, Hermann, Paris, 1974.

[12] M. Cartwright, *Some uniqueness theorems*, Proc. London Math. Soc. (2) 41 (1936), 33-47.

[13] Y. Domar, *Entire functions of order* ≤ 1*, with bounds on both axes*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 22 (1997), n°2, 339-348.

[14] Y. Domar, *Uniform boundedness in families related to subharmonic functions*, J. London Math. Soc. (2) 38 (1988), no.3, 485-491.

[15] Y. Domar, *On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function*, Ark. Mat. 3 (1957), 429-440.

[16] E.M. Dynkin, *Functions with a prescribed bound for $\partial f/\partial \bar{z}$, and a theorem of N. Levinson*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 89 (131) (1972), 182-190, 349.

[17] J. Esterle,*Zero-one and zero-two laws for the behaviour of semigroups near the origin*, Banach algebras and their applications, Contemp. Math., 363, Amer. Math. Soc., (2004). 69-79.

[18] J. Esterle,*The zero-$\sqrt{3}$ and zero-two laws for representations of locally compact abelian groups*, Izv. Nats. Akad. Nauk. Armenii Mat. 38 (2003), n°5, 11-22 ; translation in J. Contemp. Math. Anal. 38 (2003), n°5, 9-19 (2004).

[19] J. Esterle and R. Gay, *Product of hyperfunctions on the circle*, Israel J. Math. (2000), 271-283.

[20] J. Esterle and J.M. Paoli, *Corrections and Complements to the "Zero-$\sqrt{3}$ and zero-two laws for representations of locally abelian groups"*, preprint.

[21] J. Esterle and A. Volberg, *Analytic left-invariant subspaces of weighted Hilbert spaces of sequences*, J. Operator Theory 45 (2001), n°2, 265-301.

[22] J. Esterle and A. Volberg, *Asymptotically holomorphic functions and translation invariant subspaces of weighted Hilbert spaces of sequences*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 35 (2002), n°2, 185-230.

[23] I.M. Gelfand, *Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Grupen* (German) Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 9 (51), (1941) 49-50.

[24] V.P. Gurarii, *On the theorem of N. Levinson on normal families of analytic functions* (Russian), Zap. Naucn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 19 (1970), 215-220.

[25] W.K. Hayman, Subharmonic functions. Volume 2, Academic Press Inc., 20. (1989).

[26] E. Hille, *On the theory of characters of groups and semi-groups in normed vector rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 30, (1944). 58-60.

[27] N. Kalton, S. Montgomery-Smith, K. Oleszkiewicz and Y. Tomilov, *Power bounded operators and related norm estimates*, J. London Math. Soc. (2) 70 (2004), 463-478.

[28] T. Kato, *A characterization of holomorphic semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 495-498.

[29] P. Koosis, The logarithmic integral I, Cambridge University Press, 1988.

[30] N. Levinson, *On the non-vanishing of some functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. 22 (1936), 228-229.

[31] N. Levinson, *Gap and density theorems*, Colloq. Publ., vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1940.

[32] V.I. Lomonosov, Ju.I. Ljubic and V.I. Macaev, *Duality of spectral subspaces, and conditions for the separability of the spectrum of bounded linear operator* (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR 219, (1974), 737-739.

[33] J.W. Neuberger, *Analyticity and quasi-analyticity for one-parameter semi-groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 488-494.

[34] N.K. Nikolski, *Selected problems of weighted approximation and spectral analysis*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (120), (1974).

[35] A. Pazy, *Approximation of the identity operator by semigroups of linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc ; 30 (1971), 147-150.

[36] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New-York, 1983.

[37] M. Rosenblum and J. Rovnyak, Topics in Hardy classes and univalent functions, Birkhauser-Verlag, Basel, 1994 xii+250pp.

[38] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, Paris, 1994.

[39] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New-York etc. : Mc Graw-Hill Book Comp. XIII, (1973).

[40] N. Sjoberg, Comp. rend. IX Congr. des Math. Scan., Helsingfors (1938).

[41] M. Zarrabi, Classes de fonctions non-quasianalytiques et existence de sous-espaces invariants, Cours de D.E.A. (printemps 2001).

Sébastien Dubernet
Laboratoire d'Analyse et Géométrie
UMR 5467
Université Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33405 Talence (France)
email : dubernet@math.u-bordeaux1.fr