

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITE BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par

Olivier COIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE ET PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

**SYSTEMES LINEAIRES NON ENTIERS ET
IDENTIFICATION PAR MODELE NON ENTIER :
APPLICATION EN THERMIQUE**

Soutenue le 17 juillet 2002

Après avis de : MM. M. FLIESS *Rapporteurs*
J.-C. TRIGEASSOU

Devant la Commission d'examen formée de :

MM. A. RICHARD,	Professeur à l'Université Henri Poincaré (Nancy 1), CRAN – UMR 7039	<i>Président</i>
J.-L. BATTAGLIA,	Maître de Conférences à l'Université Bordeaux 1, LEPT – UMR 8508 CNRS	<i>Rapporteur</i>
H. ABOU-KANDIL,	Professeur à l'ENS Cachan, SATIE – UMR 8029 CNRS	<i>Examineurs</i>
B. DUBUISSON,	Professeur à l'Université Technologique de Compiègne, EUDIASIC – UMR 6599 CNRS	
M. FLIESS,	Directeur de Recherche CNRS, CMLA – UMR 8536 CNRS	
A. OUSTALOUP,	Professeur à l'ENSEIRB, LAP – UMR 5131 CNRS	
J.-C. TRIGEASSOU,	Professeur à l'ESIP, LAII – UPRES EA 1219	

Remerciements

C'est en 1997, lors d'un cours de Maîtrise EEA dispensé par M. Oustaloup, que j'ai découvert la 'dérivation non entière'. Séduit, j'ai orienté mon parcours vers l'étude cet opérateur, d'abord en DEA puis au cours de la Thèse dont ce mémoire expose les travaux de recherche.

C'est à M. Alain Oustaloup, directeur de ma thèse, que j'adresse mes plus chaleureux remerciements. Qu'il trouve ici le témoignage de ma plus sincère reconnaissance pour son encadrement et ses conseils précieux, mais aussi pour son soutien et la confiance dont il m'a témoignée.

Mes remerciements vont également à M. Jean-Luc Battaglia qui a co-encadré mon travail et m'a apporté une aide essentielle dans l'étude des systèmes thermiques.

Je tiens à remercier les membres du jury de thèse à commencer par M. Jean-Claude Trigeassou qui m'a fait l'honneur d'être rapporteur. Ses conseils et son soutien depuis le début ma thèse ont été très précieux. M. Michel Fliess m'a fait l'honneur d'être également rapporteur de cette thèse. Qu'il trouve ici mes plus sincères remerciements. Je remercie également M. Alain Richard d'avoir accepté de participer à ce jury et de m'avoir fait l'honneur de le présider. Je remercie enfin M. Hisham Abou-Kandil et M. Bernard Dubuisson d'avoir accepté l'invitation à participer à ce jury.

La partie théorique de cette thèse n'aurait pu être réalisée sans l'aide de M. François Levron. Je le remercie ici pour sa constante disponibilité et le plaisir que j'ai eu à travailler avec lui.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du LAP, et en particulier aux membres de l'équipe CRONE, pour leur sympathie et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créée.

La réalisation d'une thèse ne serait possible sans le soutien inconditionnel des proches. C'est avec plaisir et reconnaissance que je remercie mes parents, mes sœurs Mélanie et Nathalie, mes amis, et enfin Janine, à qui je dédie ce travail.

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	5
Table des figures	9
Introduction générale et organisation de la thèse	15
Chapitre 1 Opérateurs différentiels non entiers et systèmes linéaires non entiers	19
1.1 – Introduction	19
1.2 – Intégration non entière	20
1.2.1 – Définition	20
1.2.2 – Condition d’existence et propriété de composition.....	23
1.2.2.1 – <i>Condition d’existence</i>	23
1.2.2.2 – <i>Composition de deux intégrations non entières</i>	24
1.2.3 – Transformée de Laplace de l’intégrale non entière d’une fonction temporelle... 24	
1.3 – Dérivation non entière	25
1.3.1 – Définition	25
1.3.2 – Condition d’existence et propriétés	27
1.3.2.1 – <i>Condition d’existence</i>	27
1.3.2.2 – <i>Propriétés principales</i>	27
1.3.3 – Transformée de Laplace de la dérivée non entière d’une fonction temporelle... 28	
1.3.4 – Définition de Grünwald.....	29
1.3.5 – Caractérisation fréquentielle	31
1.3.5.1 – <i>Réponse en fréquences d’un dérivateur non entier réel</i>	31
1.3.5.2 – <i>Réponse en fréquences d’un dérivateur non entier complexe</i>	33
1.4 – Système linéaire non entier.....	39
Chapitre 2 Représentation et analyse des systèmes linéaires non entiers	43
2.1 – Introduction	43
2.2 – Représentation d’état non entière	44
2.2.1 – Définition	44
2.2.2 – Passage d’une représentation d’état non entière à une équation différentielle non entière	45
2.2.3 – Passage d’une équation différentielle non entière à une représentation d’état non entière	47
2.3 – Décomposition modale d’un système non entier	48
2.3.1 – Expression générale de la sortie	48

2.3.2 – Changement de base.....	48
2.4 – Transformée inverse de Laplace des modes propres.....	50
2.4.1 – Détermination des pôles de $G_{\text{modal}}(s)$	52
2.4.2 – Expression de $g_{\text{modal}}(t)$	55
2.5 – Condition de stabilité d'un système non entier.....	57
2.6 – Simulation d'un système non entier.....	59
2.6.1 – Méthodes directes.....	60
2.6.2 – Méthodes indirectes.....	62
2.6.2.1 – Approche basée sur une distribution récursive de zéros et de pôles... 62	
2.6.2.2 – Approche basée sur l'exploitation de la réponse impulsionnelle analytique.....	66
2.7 – Exemples d'étude.....	69
2.7.1 – Train de véhicule équipée de la suspension CRONE passive.....	69
2.7.1.1 – Equation différentielle non entière.....	69
2.7.1.2 – Représentation d'état non entière.....	72
2.7.1.3 – Décomposition modale.....	72
2.7.2 – Système non entier complexe.....	75
Chapitre 3 La dérivation non entière en modélisation des phénomènes de diffusion : application aux systèmes thermiques.....	79
3.1 – Introduction.....	79
3.2 – Transfert de chaleur dans les milieux semi-infinis.....	80
3.2.1 – Milieu semi-infini plan.....	80
3.2.1.1 – Impédance thermique du milieu ($x = 0$).....	82
3.2.1.2 – Transfert général ($x > 0$).....	82
3.2.2 – Milieu semi-infini cylindrique.....	86
3.2.3 – Milieu semi-infini sphérique.....	89
3.3 – Transfert de chaleur dans les milieux finis.....	91
3.3.1 – Transfert de chaleur dans un mur plan.....	91
3.3.1.1 – Impédance thermique du milieu ($x = 0$).....	92
3.3.1.2 – Transfert général ($0 \leq x \leq e$).....	95
3.3.2 – Transfert de chaleur dans un cylindre plein.....	98
3.3.2.1 – Première méthode d'approximation.....	99
3.3.2.2 – Seconde méthode d'approximation.....	99
3.3.3 – Transfert de chaleur dans une sphère pleine.....	101
3.3.3.1 – Première méthode d'approximation.....	102
3.3.3.2 – Seconde méthode d'approximation.....	103
3.4 – Conclusion.....	105
Chapitre 4 Identification par modèle non entier.....	107
4.1 – Introduction.....	107
4.2 – Méthodes à erreur d'équation : seuls les coefficients sont estimés.....	108
4.2.1 – Estimation paramétrique par discrétisation de l'équation différentielle.....	109
4.2.1.1 – Modèle discret de dimension infinie.....	109
4.2.1.2 – Estimation paramétrique du modèle discret.....	112

4.2.1.3 – Retour aux coefficients de l'équation différentielle	115
4.2.1.4 – Application	115
4.2.2 – Estimation paramétrique par filtres de variables d'état non entiers.....	120
4.2.2.1 – Régression linéaire continue.....	120
4.2.2.2 – Filtre de variables d'état non entier.....	122
4.2.2.3 – Estimation paramétrique du modèle	124
4.2.3 – Application : analyse par simulations de Monte Carlo	127
4.3 – Méthodes à erreur de sortie : les ordres de dérivation sont estimés au même titre que les coefficients	131
4.3.1 – Modèle non entier borné en fréquence.....	131
4.3.1.1 – Approximation par représentation d'état entière.....	131
4.3.1.2 – Estimation paramétrique.....	134
4.3.1.3 – Exemple académique.....	137
4.3.2 – Modèle non entier issu d'une décomposition modale	139
4.3.2.1 – Représentation d'état non entière.....	139
4.3.2.2 – Estimation paramétrique.....	141
4.3.2.3 – Applications.....	143
Chapitre 5 Application de l'identification d'un système thermique à la résolution d'un problème inverse en thermique	149
5.1 – Introduction	149
5.2 – Mesure de la température en un point proche de la pointe de l'outil.....	152
5.3 – Première étape : identification du comportement dynamique de l'outil	153
5.3.1 – Réalisation d'un banc de caractérisation de l'outil	154
5.3.2 – Identification du comportement dynamique de l'outil	155
5.4 – Seconde étape : estimation des conditions thermiques de coupe pendant l'usinage.....	160
5.4.1 – Algorithme d'inversion.....	160
5.4.2 – Application.....	161
5.5 – Conclusion et perspectives	162
Conclusion générale et perspectives.....	165
Bibliographie.....	169
Annexe 1 Etude du comportement asymptotique des impédances thermiques des milieux finis	179
A1.1 – Impédance thermique d'un mur plan.....	179
A1.2 – Impédance thermique d'un cylindre fini	180
A1.3 – Impédance thermique d'une sphère finie	181
Annexe 2 Simulation numérique de la sensibilité du modèle à l'ordre de dérivation..	183
Annexe 3 Boîte à outil MATLAB : module System Identification by Fractional Model de la Toolbox CRONE.....	185
A3.1 – Menu "File", gestion des données de la session d'identification	187
A3.1.1 – Commande "New session"	187
A3.1.2 – Commande "Open session"	188

A3.1.3 - Commande "Save session as ..."	189
A3.1.4 – Commande "Modify session title"	190
A3.1.5 – Commande "Exit"	190
A3.2 – Menu "Data"	190
A3.2.1 – Commande "Modify validation data"	191
A3.2.2 – Menu "Preprocessing"	191
A3.2.3 – Menu "Data views"	191
A3.3 – Menu "System Identification"	191
A3.3.1 – Menu "Equation error models"	192
A3.3.1.1 – Commande "Fractional AR model"	192
A3.3.1.2 – Commande "Fractional continuous ARX model"	193
A3.3.2 – Menu "Output error models"	195
A3.3.2.1 – Menu "Fractional modal model"	195
A3.3.2.1.1 – Commande "Automatic initialization"	196
A3.3.2.1.2 – Commande "Manual initialization"	199
A3.3.2.1.3 – Commande "Options"	201
A3.4 – Menu "Estimated-model views "	201
A3.4.1 – Commande "Select model(s)"	202
A3.4.2 – Commande "Delete model"	202
A3.4.3 – Menu "View fractional model(s)"	202
A3.4.3.1 – Commande "Differential equation"	203
A3.4.3.2 – Commande "State-space form"	203
A3.4.3.3 – Commande "Fractional transfer function"	203
A3.4.3.4 – Commande "Expanded modal form"	204
A3.4.3.5 – Commande "Factorized modal form"	205
A3.4.3.6 – Commande "Estimated parameter covariance matrix"	205
A3.4.4 – Menu "Estimation time performances"	206
A3.4.4.1 – Menu "Model residuals"	206
A3.4.4.2 – Menu "Model output"	207
A3.4.4.3 – Commande "Parameter sensitivity plot"	207
A3.4.5 – Menu "Model validation"	207
A3.4.6 – Menu "Transient responses"	207
A3.4.7 – Menu "Frequency responses"	208
A3.4.7.1 – Commande "Bode diagrams"	208
A3.4.7.2 – Commande "Nichols charts"	209
A3.4.7.3 – Commande "Nyquist diagram"	210
A3.4.7.4 – Commande "Lin-log Nyquist diagram"	210
A3.4.8 – Commande "Eigen values, eigen zeros and pôles"	210

Table des figures

Figure 1.1 – Courbes représentatives des variations du facteur d'oubli dans le cas d'une intégrale d'ordre réel n tel que $0.1 < n < 1$	21
Figure 1.2 – Courbes représentatives des variations du module du facteur d'oubli pour des ordres d'intégration dont la partie réelle est comprise entre 0.1 et 1 et dont la partie imaginaire est fixée à 0.5	22
Figure 1.3 – Courbes représentatives des variations de l'argument du facteur d'oubli pour des ordres d'intégration dont la partie réelle est comprise entre 0.1 et 1 et dont la partie imaginaire est fixée à 0.5	23
Figure 1.4 - Représentation de la coupure du plan opérationnel	25
Figure 1.5 – Diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier réel	32
Figure 1.6 – Les parties réelle et imaginaire de l'ordre de dérivation $n = a + ib$ ont des actions bien distinctes sur le comportement des gains et des phases de $D_{\text{réel}}(j\omega)$ et de $D_{\text{imag}}(j\omega)$: - a agit sur la valeur des phases et sur la pente des gains ; - b agit sur la valeur des gains et sur la pente des phases.	38
Figure 1.7 – Diagrammes de Bode de $D_{\text{réel}}(j\omega)$ pour différentes valeurs de l'ordre de dérivation	38
Figure 1.8 – Diagrammes de Bode de $D_{\text{imag}}(j\omega)$ pour différentes valeurs de l'ordre de dérivation	39
Figure 1.9 – La dérivée non entière complexe d'une fonction réelle est à valeurs complexes	40
Figure 1.10 - Système S à entrée réelle et à sortie complexe	40
Figure 2.1 - Représentation du contour d'intégration Γ	51
Figure 2.2 - Détermination des pôles de $G_{\text{modal}}(s)$	53
Figure 2.3 - Décomposition d'un système non entier en trois sous-systèmes.....	54
Figure 2.4 - Intervalles de stabilité et d'instabilité des systèmes non entiers complexes	58
Figure 2.5 - Diagrammes asymptotiques de Bode de $D(s)$ et $D_N(s)$	64
Figure 2.6 - Diagrammes de Bode de $I(s)$	65

Figure 2.7 – Schéma-bloc de l'intégrateur synthétisé	65
Figure 2.8 – Modèle d'un train de véhicule à 4 degrés de liberté	70
Figure 2.9 – Illustration des valeurs propres pour différentes valeurs de M : M=600 kg ; 700 kg ; 800 kg ; 900 kg ; 1000 kg (le module des valeurs propres décroît lorsque la masse augmente)	73
Figure 2.10 – Illustration des pôles complexes conjugués pour différentes valeurs de M : M=600 kg ; 700 kg ; 800 kg ; 900 kg ; 1000 kg (le module des pôles décroît lorsque la masse augmente).....	74
Figure 2.11 – Réponses indicielles du transfert $\theta_{\text{voit}}(s)/\theta_{\text{route}}(s)$ pour différentes valeurs de M : M=600 kg ; 700 kg ; 800 kg ; 900 kg ; 1000 kg	75
Figure 2.12 - Détermination des pôles.....	77
Figure 2.13 - Réponses indicielles modales traits gras : parties réelles traits fins : parties imaginaires ___ : de la réponse générée par λ_1 - - : de la réponse générée par λ_2 ;.....	77
Figure 2.14 - Réponse indicielle globale ___ : partie réelle - - : partie imaginaire	78
Figure 3.1 – Mur plan semi-infini.....	81
Figure 3.2 – Diagrammes de Bode de $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ pour $x = 1\text{mm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho C_p = 10^6\text{JK}^{-1}\text{m}^{-3}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$)	84
Figure 3.3 – Diagrammes de Bode de $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ pour $x = 1\text{cm}$ et $K = 10$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho C_p = 10^6\text{JK}^{-1}\text{m}^{-3}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$).....	85
Figure 3.4 – Variations de a_k et a'_k en fonction de k pour $x = 1\text{cm}$ et $K = 10$ ($\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$).....	85
Figure 3.5 – Milieu semi-infini de cavité interne cylindrique de rayon R et de longueur l .	87
Figure 3.6 – Diagrammes de Bode de $H(r,s)$, $\tilde{H}(r,s)$ pour $r = R = 1\text{cm}$ et $l = 1\text{m}$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$).....	88
Figure 3.7 – Milieu semi-infini de cavité interne sphérique de rayon R	89
Figure 3.8 – Diagrammes de Bode de $\tilde{H}(r,s) = H(r,s)$ pour $r = R = 1\text{cm}$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$).....	90
Figure 3.9 – Mur plan d'épaisseur e	91

Figure 3.10 – Diagrammes de Bode de $H(0,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(0,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(0,s)$ pour $e = 1\text{cm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$).....	94
Figure 3.11 – Diagrammes de Bode de $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$, $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{3,K}(x,s)$ pour $e = 1\text{m}$, $x = 1\text{cm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$).....	97
Figure 3.12 – Cylindre plein de rayon R et de longueur l	98
Figure 3.13 – Diagrammes de Bode de $H(r,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(r,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(r,s)$ pour $l = 1\text{m}$, $r = R = 1\text{cm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$).....	101
Figure 3.14 – Sphère pleine de rayon R	101
Figure 3.15 – Diagrammes de Bode de $H(R,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(R,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(R,s)$ pour $R = 10\text{cm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$).....	104
Figure 4.1 - Schéma de principe de l'expérience	116
Figure 4.2 – Données d'estimation : flux de chaleur de type SBPA.....	118
Figure 4.3 – Erreur de prédiction du modèle (fonction $\varepsilon(t)$) et fonction d'autocorrélation associée.....	119
Figure 4.4 – Localisation des valeurs propres, zéros propres et pôles du modèle.....	119
Figure 4.5 – Validation du modèle : -en haut : températures mesurée et simulée avec le modèle - en bas : erreur de sortie du modèle.....	120
Figure 4.6 – Calcul du résidu $\varepsilon(t)$	125
Figure 4.7 – Diagrammes de Bode	128
Figure 4.8 – Biais d'estimation (norme des erreurs paramétriques normalisées) en fonction du rapport bruit sur signal -----: technique par discrétisation -·-·-·: technique des moindres carrés avec un filtre de variables d'état non entier ———: technique des variables instrumentales avec un filtre de variables d'état non entier.....	130
Figure 4.9 – Biais d'identification (norme quadratique de l'erreur de réponse impulsionnelle moyenne) en fonction du rapport bruit sur signal -----: technique par discrétisation -·-·-·: technique des moindres carrés avec un filtre de variables d'état non entier ———: technique des variables instrumentales avec un filtre de variables d'état non entier.....	130
Figure 4.10 - Diagrammes de Bode de $I^n(s)$	132
Figure 4.11 – Données d'estimation simulées	138
Figure 4.12 - Décomposition d'un système non entier en modes propres	140

Figure 4.13 – Résultats de l'identification a) signal d'entrée b) sortie bruité et sortie du modèle c) erreur de sortie du modèle d) signal d'autocorrelation de l'erreur de sortie	145
Figure 4.14 – Système bidimensionnel soumis au flux de chaleur $\phi(t)$ sur la portion Γ de la surface inférieure: la surface supérieure est isolée ; les autres surfaces échangent de la chaleur avec le milieu ambiant à température nulle (coefficient d'échange $h = 5\text{W/m}^2/\text{K}$, $\lambda = 40\text{W/m}^2/\text{K}$, $\alpha = 1.08 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$)	146
Figure 4.15 – Evolutions de la température au point A et du flux de chaleur obtenues par la méthode des éléments finis	146
Figure 4.16 – Thermogramme calculé à l'instant $t = 20\text{s}$ pour l'évolution du flux de chaleur telle que représentée sur la figure 4.15 ; les lignes représentent les isothermes	147
Figure 4.17 – Comparaison entre la réponse du modèle non entier et celle calculée par la méthode des éléments finis	148
Figure 5.1 – Résolution d'un problème inverse	150
Figure 5.2 – Procédé d'usinage par tournage	151
Figure 5.3 – Outil de coupe utilisé en tournage	151
Figure 5.4 – Représentation schématique du thermocouple inséré entre la plaquette et le porte-outil	153
Figure 5.5 – Vue du feuillet en cuivre positionné sur le porte-outil	153
Figure 5.6 – Micro-résistance constituée d'un film de platine sérigraphié sur un substrat d'alumine	154
Figure 5.7 – Plot en argent	155
Figure 5.8 – Application de l'outil sur le système de chauffe	155
Figure 5.9 – Données d'estimation du modèle	156
Figure 5.10 – Données de validation du modèle	156
Figure 5.11 – Courbes représentatives de la température mesurée et de la température simulée par le modèle (5.2) (données d'estimation)	157
Figure 5.12 – Courbes représentatives de la température mesurée et de la température simulée par le modèle (5.2) (données de validation)	158
Figure 5.13 – Localisation des pôles, valeurs propres et zéros propres du modèle (5.2)	159
Figure 5.14 – Réponse indicielle du modèle (5.2)	159
Figure 5.15 – Tour utilisé pour l'estimation, pendant l'usinage, du flux et de la température à la pointe de l'outil	161

Figure 5.16 – Courbes représentatives des variations – de la température mesurée au point P ($T(t)$) – du flux estimé à la pointe de l'outil ($\phi(t)$) – de la température estimée à la pointe de l'outil ($Y(t)$)..... 162

Introduction générale et organisation de la thèse

Si le concept et le formalisme mathématique de la dérivation non entière (réelle ou complexe) sont issus des travaux de mathématiciens célèbres tels que Laplace, Liouville, Abel, Riemann et Cauchy et remontent ainsi au début du XIX^{ème} siècle, sa synthèse et ses applications dans les sciences physiques et les sciences pour l'ingénieur relèvent des contributions scientifiques de la seconde moitié de ce siècle.

L'opération scientifique "Systèmes à dérivées non entières" que supporte l'équipe CRONE concerne à la fois la théorie des systèmes, l'automatique, la robotique et, d'une manière plus annexe, le traitement du signal et de l'image.

Le thème général des recherches de l'équipe CRONE relève d'un projet à vocation unitaire initialisé en 1975 par son responsable, à savoir la dérivation non entière en tant qu'opérateur et outil de modélisation, sa synthèse étendue au corps des complexes ainsi que ses applications dans les sciences pour l'ingénieur. Plus spécifiquement, en raison de l'appartenance de l'équipe CRONE au Laboratoire d'Automatique et de Productique de Bordeaux, un axe de recherche particulièrement privilégié est celui de l'application de la dérivation non entière en automatique à travers l'identification par modèle non entier et la commande CRONE, abréviation de Commande Robuste d'Ordre Non Entier.

Les motivations d'une telle thématique sont dictées par le souci constant de défendre la thèse suivante : étant donné ses propriétés de "compacité", l'opérateur de dérivation non entière constitue l'outil mathématique par excellence pour modéliser avec un minimum de paramètres le plus grand nombre de phénomènes relevant tout aussi bien des sciences pour l'ingénieur que des sciences biologiques et physico-chimiques ; l'exploitation des modèles réduits correspondants conduit alors à des propriétés remarquables tant par leur caractère novateur et original que par la simplicité de leur formulation. Pour défendre cette thèse,

l'équipe s'attache à développer un corpus théorique puis, par souci applicatif, à le concrétiser par des transferts technologiques relevant d'une véritable valorisation de la recherche amont. Les travaux qui font l'objet de ce mémoire s'inscrivent dans cet axe de recherche, le contexte d'étude étant plus particulièrement celui de la représentation et de l'identification de système par modèle non entier.

En dehors des annexes, la progression de la thèse est ponctuée par cinq chapitres dont le contenu est présenté ici de manière introductive.

Le chapitre 1 commence par rappeler les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'intégration puis de dérivation d'ordre non entier réel ou complexe. Une interprétation originale, fondée sur le produit de convolution entre la fonction à différentier et un "facteur d'oubli", est notamment présentée. Les hypothèses de travail sur les systèmes étudiés dans ce mémoire sont enfin formulées.

Le chapitre 2 relève des domaines d'étude qui suscitent les plus vifs intérêts tant auprès des automaticiens que des mathématiciens. Ce chapitre propose en effet une représentation continue dans un espace d'état généralisé d'un système linéaire non entier complexe, scalaire ou multivariable. La représentation d'état non entière est définie puis étudiée à travers le calcul de la réponse impulsionnelle analytique d'un système non entier complexe commensurable : une attention particulière est portée à la détermination des pôles et un théorème de stabilité est établi ; celui-ci porte sur une condition relative, d'une part, à la position des valeurs propres et, d'autre part, à la valeur de l'ordre complexe commensurable. La dernière partie du chapitre est consacrée à la présentation de quelques méthodes de simulation numérique d'un système non entier. Les méthodes directes sont basées sur la discrétisation de l'équation différentielle non entière par une approximation numérique de l'opérateur de dérivation non entière. Les méthodes indirectes sont quant à elles fondées sur l'approximation de la transmittance non entière par une transmittance non entière.

Le chapitre 3 traite de l'application de l'opérateur de dérivation non entière à la modélisation des phénomènes de diffusion, le champ applicatif retenu étant celui de la thermique. Il consiste en l'étude du transfert de chaleur dans six milieux semi-infinis et finis. Dans chaque cas, la transmittance obtenue, obtenue par transformation de Laplace des équations aux dérivées partielles, fait l'objet d'approximations conduisant à des transmittances réduites entières et non entières. La comparaison des approximations, au moyen des diagrammes de Bode, révèle de bien meilleures performances en faveur des transmittances non entières.

Le chapitre 4 est consacré à l'identification temporelle par modèle non entier. Portant sur une équation différentielle non entière, deux types de méthodes d'estimation paramétrique sont présentées : les méthodes à erreur d'équation et les méthodes à erreur de sortie. Les méthodes à erreur d'équation exploitent la technique d'optimisation des moindres carrés linéaire. Dans ce cas, seuls les coefficients des opérateurs différentiels sont estimés, les ordres de dérivation étant supposés connus. Deux méthodes sont proposées, l'une basée sur la discrétisation de l'équation différentielle, l'autre sur l'utilisation de filtres de variables d'état non entiers et faisant ainsi le lien avec la représentation d'état non entière présentée au chapitre 2. Les méthodes à erreur de sortie utilisent l'algorithme d'optimisation non linéaire de Marquardt, les ordres de dérivation étant alors estimés au même titre que les coefficients. Deux méthodes sont proposées. Développée par Trigeassou, la première est fondée sur l'approximation de l'opérateur d'intégration non entière par une répartition récursive de zéros et de pôles, la seconde étant quant à elle basée sur la forme diagonale de la représentation d'état non entière définie au chapitre 2.

Le chapitre 5 propose une application de l'identification par modèle non entier à la résolution d'un problème inverse en thermique. L'exemple d'illustration retenu consiste en l'estimation des conditions thermiques de coupe en usinage par tournage. Réalisée en deux étapes, la méthode proposée commence par identifier le comportement dynamique de l'outil de coupe par un modèle non entier. La seconde étape consiste ensuite à "inverser" ce modèle pendant la phase d'usinage afin d'estimer le flux et la température à la pointe de l'outil.

Chapitre 1

Opérateurs différentiels non entiers et systèmes linéaires non entiers

1.1 – Introduction

L'extension de la notion d'ordre de dérivation au corps des complexes date du XIXème siècle et relève principalement des travaux de Liouville et Riemann [Miller et Ross, 1993][Oldham et Spanier, 1974][Samko et al., 1993]. Si la définition mathématique d'un tel concept s'avère incontestable, sa dénomination reste plus confuse, prenant en effet dans la littérature des appellations différentes, parfois inspirées du terme générique anglais "fractional calculus". Il est vrai que les appellations "dérivation d'ordre complexe", "dérivation non entière", "dérivation fractionnaire" ou bien "dérivation généralisée" désignent toutes la même notion. Dans un souci de clarté et afin de ne pas alourdir la lecture de ce mémoire, les appellations génériques "dérivation non entière" ou "intégration non entière" sont retenues pour désigner les opérateurs différentiels d'ordre complexe, même si ce choix revêt un caractère restrictif sachant que la qualification "non entière" se veut couvrir des ordres de dérivation entiers, non entiers, réels ou complexes. Lorsqu'une distinction entre ordre strictement réel et ordre complexe mérite d'être soulignée, ces appellations sont respectivement complétées par les qualificatifs "réelle" ou "complexe". On parle alors de "dérivation non entière réelle" ou de "dérivation non entière complexe". Par analogie, la même syntaxe est utilisée pour désigner un "système non entier" ainsi qu'un "modèle d'identification non entier".

En Physique, l'utilisation de l'opérateur de dérivation non entière réelle est maintenant largement répandue dans des domaines aussi variés que la mécanique, l'automatique, la thermique ou l'électrochimie...

En revanche, l'application de l'opérateur de dérivation non entière complexe est relativement récente et se limite pour l'instant à la synthèse de commande robuste (commande CRONE de 3^{ème} génération).

L'objectif de ce chapitre est de poser les bases théoriques des chapitres suivants, en rappelant les définitions et principales propriétés des opérateurs différentiels non entiers.

Trois parties composent ce chapitre. Les deux premières sont respectivement consacrées aux définitions des opérateurs d'intégration puis de dérivation non entière, la troisième partie étant réservée à la définition des hypothèses d'étude.

1.2 – Intégration non entière

1.2.1 – Définition

Inspirée de la formule de Cauchy, la définition de Riemann-Liouville de l'intégrale d'ordre $n \in \mathbb{C}$ (tel que $\Re(n) > 0$) d'une fonction $f(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , a été établie au XIX^{ème} siècle sous la forme de l'expression suivante :

$$I_{t_0}^n f(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau \quad \text{avec} \begin{cases} t > t_0 \\ t_0 \in \mathbb{R}, \\ n \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\Gamma(n)$ est la fonction Gamma généralisée aux nombres complexes, soit :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx. \quad (1.2)$$

Peu d'ouvrages retracent l'historique de l'établissement de cette définition issue de correspondances scientifiques entre plusieurs mathématiciens célèbres comme L'Hôpital, Leibnitz, Euler, Lacroix, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Sonin, Laurent, Grünwald ou Letnikov. Pour une description détaillée de ces correspondances, le lecteur pourra se référer aux ouvrages de [Samko *et al.*, 1993], de [Miller et Ross, 1993] ainsi que de [Oldham et Spanier, 1974].

Pendant longtemps, ce nouvel opérateur a été considéré par les physiciens comme un concept mathématique sans application possible pour les Sciences Physiques. Ce n'est que récemment (2^{ème} partie du XX^{ème} siècle) que son application, notamment en Sciences pour l'Ingénieur s'avère significative, l'exemple le plus frappant étant celui de la commande

CRONE qui, à travers ses trois générations, exploite les propriétés de cet opérateur, avec des ordres strictement réels pour les deux premières générations puis complexes pour la troisième.

Le peu d'intérêt que les physiciens ont porté à cet opérateur n'est certes pas étranger à la difficulté de lui attribuer un sens géométrique ou physique comparable à celui que l'on accorde à l'intégration d'ordre entier. Lorsque l'ordre d'intégration n est complexe, l'image de "l'aire sous la courbe" ou de la "charge d'un condensateur" perd en effet son sens.

Néanmoins, dans le cas où l'ordre n est réel, la définition (1.1) peut être interprétée comme l'aire de la surface que définit la fonction $f(t)$ pondérée par un facteur d'oubli

représenté par la fonction $\frac{1}{\Gamma(n)(t-\tau)^{1-n}}$. Ainsi, si n est égal à 1, $I_{t_0}^n f(t)$ est une intégrale

classique, toutes les valeurs de $f(t)$ ayant le même 'poids'. Si n est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de 'poids' que les plus anciennes. La figure 1.1 représente les variations du facteur d'oubli pour des valeurs de n comprises entre 0.1 et 1. A travers cette interprétation, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration n mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion (dont le lien analytique avec les opérateurs différentiels non entiers est rappelé au chapitre 3).

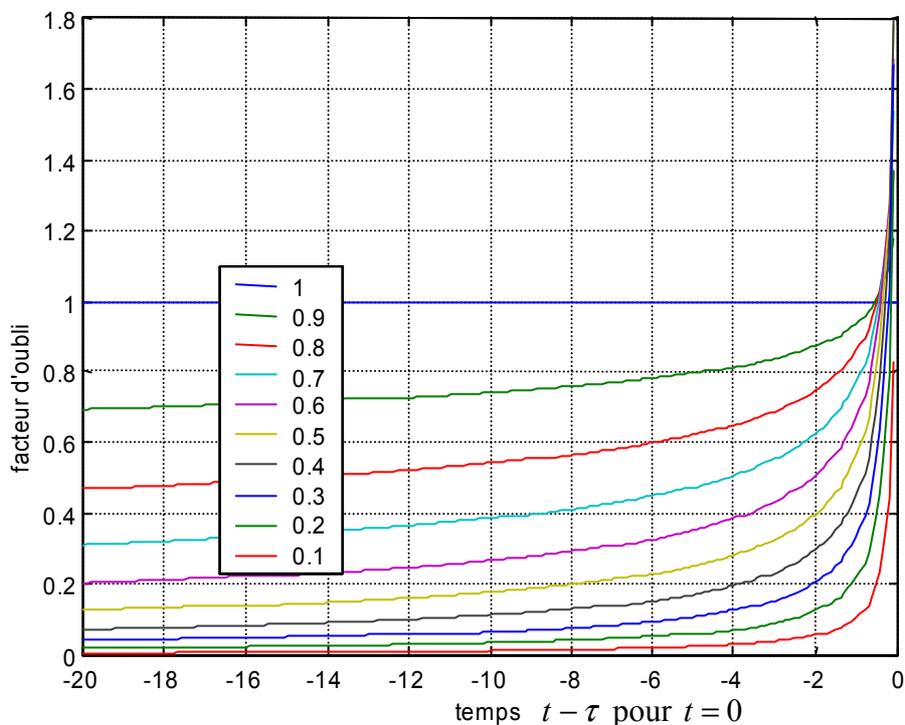


Figure 1.1 – Courbes représentatives des variations du facteur d'oubli dans le cas d'une intégrale d'ordre réel n tel que $0.1 < n < 1$

Dans le cas où l'ordre de dérivation est complexe, l'interprétation n'est pas aussi simple puisque le facteur d'oubli devient une fonction à valeurs complexes. Celui-ci agit alors à la fois sur le module et sur l'argument de la fonction $f(t)$. A titre d'exemple, la figure 1.2 représente les variations du module du facteur d'oubli pour des ordres d'intégration dont la partie réelle est comprise entre 0.1 et 1 et dont la partie imaginaire est fixée à 0.5. La figure 1.3 représente les variations de l'argument pour les mêmes ordres d'intégration.

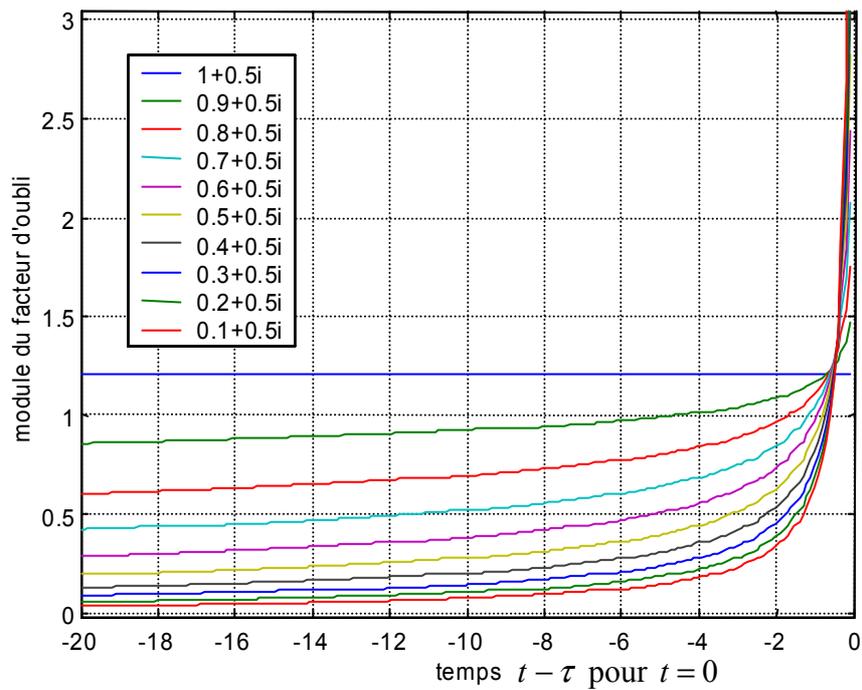


Figure 1.2 – Courbes représentatives des variations du module du facteur d'oubli pour des ordres d'intégration dont la partie réelle est comprise entre 0.1 et 1 et dont la partie imaginaire est fixée à 0.5

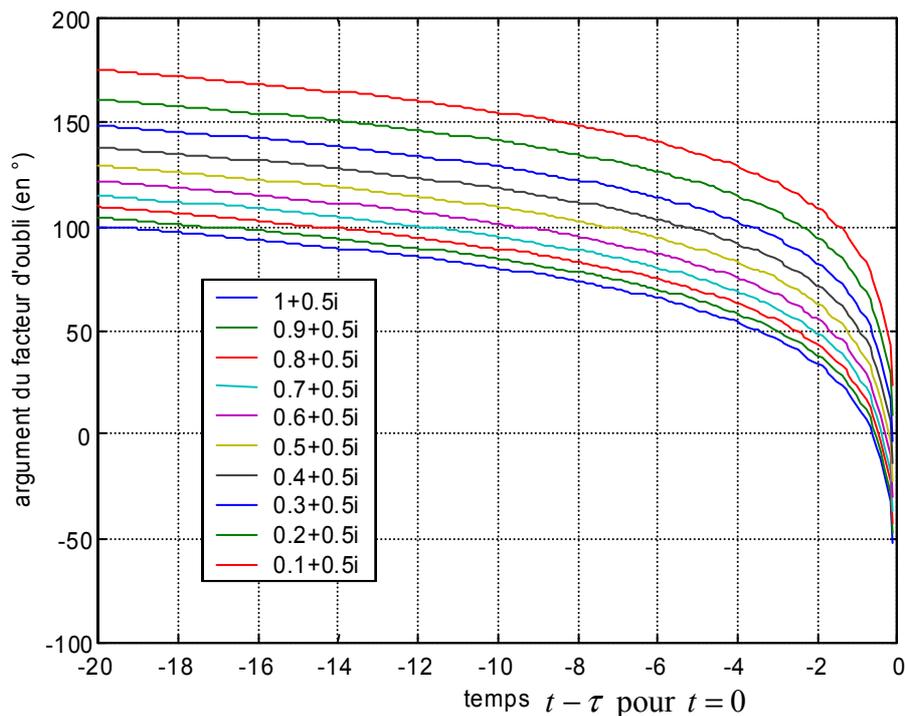


Figure 1.3 – Courbes représentatives des variations de l'argument du facteur d'oubli pour des ordres d'intégration dont la partie réelle est comprise entre 0.1 et 1 et dont la partie imaginaire est fixée à 0.5

Remarque importante - L'analyse de ces 2 figures révèle que lorsque n est complexe, l'intégrale $I_{t_0}^n f(t)$ est une fonction à valeurs complexes même si $f(t)$ est réel. Cette propriété fait plus loin l'objet d'une discussion sur l'interprétation physique. ■

1.2.2 – Condition d'existence et propriété de composition

1.2.2.1 – Condition d'existence

Pour que l'intégrale non entière d'une fonction temporelle $f(t)$ existe, il suffit que f soit continu par morceaux sur $]t_0, +\infty[$ et intégrable sur $[t_0, t]$ pour tout $t > t_0$.

1.2.2.2 – Composition de deux intégrations non entières

Les opérateurs d'intégration non entière vérifient la propriété de semi-groupe, soit [Samko *et al.*, 1993] :

$$I_{t_0}^{n_1} \circ I_{t_0}^{n_2} f(t) = I_{t_0}^{n_1+n_2} f(t), \quad \text{avec } \begin{cases} \mathcal{R}e(n_1) > 0 \\ \mathcal{R}e(n_2) > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2.3 – Transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction temporelle

L'interprétation de l'équation (1.1) comme un produit de convolution permet le calcul de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre complexe d'une fonction temporelle causale, soit [Oldham et Spanier, 1974] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{I_0^n f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}u(t)}{\Gamma(n)} * f(t)\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}u(t)}{\Gamma(n)}\right\} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^n} F(s), \end{aligned} \quad (1.4)$$

où $\mathcal{R}e(n) > 0$ et $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $s = \sigma + j\omega$ désignant la variable de Laplace.

Cette relation traduit un résultat remarquable en ce sens qu'elle généralise la formule bien connue dans le cas entier.

Il est ici important de noter que s^n est une fonction multiforme de \mathbb{C} . En effet, en exprimant $s = \rho e^{j\theta}$ et $n = a + jb$, le développement de s^n conduit à :

$$s^n = (\rho e^{j\theta})^{a+jb} = \rho^a e^{-b\theta} e^{ja\theta}, \quad (1.5)$$

relation dans laquelle la multiformité apparaît à travers la fonction $e^{ja\theta}$. Il est donc nécessaire, par une coupure du plan complexe (figure 1.4), de limiter à 2π la plage de variation de l'argument de la variable s . Cette coupure, définie par la demi-droite d'origine $O(0,0)$ et d'angle orienté φ par rapport à l'axe des abscisses, doit être choisie de manière à respecter deux contraintes :

- s^n doit garder son sens classique lorsque n est entier ;

- afin de pouvoir calculer la transformée inverse de Laplace d'une fonction, la coupure ne doit pas croiser la droite verticale du demi-plan droit définie par les bornes de l'intégrale de Mellin-Fourier (équation (2.19)).

Ainsi, en définissant l'argument de s comme l'angle orienté θ tel que $\theta \in]\varphi - 2\pi, \varphi[$, l'angle φ de la coupure doit respecter l'inégalité suivante :

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}. \quad (1.6)$$

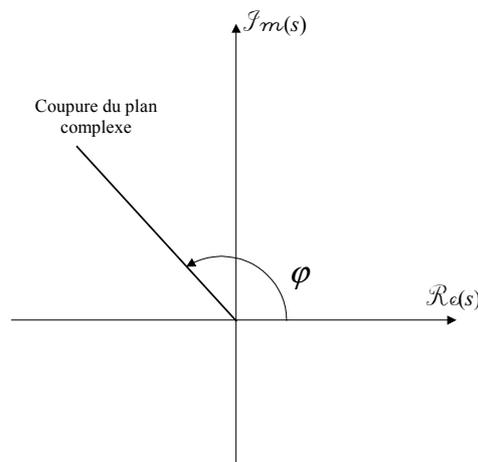


Figure 1.4 - Représentation de la coupure du plan opérationnel

1.3 – Dérivation non entière

1.3.1 – Définition

Pour définir la dérivée non entière d'une fonction temporelle, les notations suivantes sont adoptées :

$$n = [\mathcal{R}e(n)] + \{\mathcal{R}e(n)\} + i \mathcal{I}m(n), \quad (1.7)$$

où $n \in \mathbb{C}$;

- $[\mathcal{R}e(n)]$: partie entière de $\mathcal{R}e(n)$;
- $\{\mathcal{R}e(n)\}$: partie non entière de $\mathcal{R}e(n)$ telle que $0 \leq \{\mathcal{R}e(n)\} < 1$.

La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{C}$ (tel que $\Re(n) > 0$) d'une fonction $f(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est alors définie par la dérivée entière d'une intégrale non entière (dont la partie réelle de l'ordre d'intégration est comprise entre 0 et 1), soit [Samko *et al.*, 1993] :

$$D_{t_0}^n f(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt} \right)^{\lfloor \Re(n) \rfloor + 1} \left(I_{t_0}^{1 - \lfloor \Re(n) \rfloor - i \Im(n)} f(t) \right). \quad (1.8)$$

En utilisant la définition de l'intégrale non entière (1.1), l'équation (1.8) devient :

$$D_{t_0}^n f(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\Gamma(m-n)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-(m-n)}} d\tau \right), \text{ avec } \begin{cases} t > t_0 \\ \Re(n) > 0 \\ m = \lfloor \Re(n) \rfloor + 1 \end{cases}. \quad (1.9)$$

Deux propriétés remarquables distinguent une dérivation non entière d'une dérivation entière :

- 2 paramètres, n et t_0 , sont nécessaires à sa définition, le choix de t_0 faisant plus loin l'objet d'une discussion approfondie ;

- sa définition étant basée sur celle d'une intégration non entière, une dérivation non entière revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet que la dérivée non entière de $f(t)$ nécessite la connaissance de $f(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t]$ alors que dans le cas entier, seule la connaissance 'locale' de f autour de t est nécessaire.

Ces propriétés permettent d'interpréter les systèmes non entiers comme des systèmes à *mémoire longue*, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à *mémoire courte*.

Remarques

- Lorsque $\Re(n) < 0$, l'intégrale d'ordre n est définie par :

$$I_{t_0}^n f(t) \stackrel{\Delta}{=} D_{t_0}^{-n} f(t), \quad (1.10)$$

de même que la dérivée d'ordre n est définie par :

$$D_{t_0}^n f(t) \stackrel{\Delta}{=} I_{t_0}^{-n} f(t). \quad (1.11)$$

Ces définitions permettent ainsi de parler indifféremment d'intégration ou de dérivation, seul le signe de la partie réelle de l'ordre étant déterminant.

- Si $n=0$, on pose

$$D_{t_0}^0 f(t) = I_{t_0}^0 f(t) = f(t). \quad (1.12)$$

- Comme pour l'intégrale non entière complexe, la dérivée non entière complexe d'une fonction temporelle à valeurs réelles est à valeurs complexes.

■

1.3.2 – Condition d'existence et propriétés

1.3.2.1 – Condition d'existence

Pour que la dérivée non entière d'une fonction temporelle $f(t)$ existe, il suffit que $f(t)$ puisse s'écrire :

$$\begin{aligned} & f(t) = (t-t_0)^\lambda \eta(t-t_0) \\ \text{ou} & f(t) = (t-t_0)^\lambda \ln(t-t_0) \eta(t-t_0) \end{aligned}, \text{ avec } \begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} \\ \Re(\lambda) > -1 \\ \eta(t) \text{ fonction analytique de } \mathbb{C} \text{ pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

1.3.2.2 – Propriétés principales

- La dérivée non entière de l'intégrale de même ordre d'une fonction temporelle est telle que :

$$D_{t_0}^n \circ I_{t_0}^n f(t) = f(t) \quad \text{avec } \Re(n) > 0, \quad (1.14)$$

cette relation n'étant pas toujours vraie pour $\Re(n) < 0$.

- Contrairement aux opérateurs d'intégration non entière, les opérateurs de dérivation non entière ne vérifient la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions. On montre en effet que si f vérifie les conditions (1.13), alors ([Samko *et al.*, 1993]) :

$$D_0^{n_1} \left(D_0^{n_2} f(t) \right) = D_0^{n_1+n_2} f(t) \text{ si } \begin{cases} \mathcal{R}e(n_2) < \mathcal{R}e(\lambda)+1 \\ \mathcal{R}e(n_1) > 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

et

$$D_{t_0}^r \left(D_{t_0}^n f(t) \right) = D_{t_0}^{r+n} f(t) \text{ si } \begin{cases} r \text{ entier positif} \\ n \text{ arbitraire} \end{cases} . \quad (1.16)$$

1.3.3 – Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle

La transformée de Laplace de la dérivée entière d'une fonction temporelle causale est donnée par la relation bien connue :

$$\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k \left(I_0^{m-n} f(t) \right) \Big|_{t=0^+} . \quad (1.17)$$

Dans le cas où l'ordre n est non entier, si m désigne le plus petit entier supérieur à $\mathcal{R}e(n) > 0$, l'utilisation de la relation (1.16) conduit à [Oldham et Spanier, 1974] :

$$\mathcal{L}\{D_0^n f(t)\} = \mathcal{L}\{D_0^m \left(I_0^{m-n} f(t) \right)\} \text{ avec } m-1 < \mathcal{R}e(n) \leq m, m \in \mathbf{N}, \quad (1.18)$$

soit conformément à la relation (1.17) :

$$\mathcal{L}\{D_0^n f(t)\} = s^m \mathcal{L}\{I_0^{m-n} f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k \left(I_0^{m-n} f(t) \right) \Big|_{t=0^+} , \quad (1.19)$$

ou encore d'après la relation (1.4) :

$$\mathcal{L}\{D_0^n f(t)\} = s^m s^{n-m} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k \left(I_0^{m-n} f(t) \right) \Big|_{t=0^+} . \quad (1.20)$$

Finalement, l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle causale est donnée par une relation de la forme :

$$\mathcal{L}\{D_0^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k \left(I_0^{m-n} f(t) \right) \Big|_{t=0^+} \text{ avec } \begin{cases} n \in \mathbf{C} \\ m = \lceil \mathcal{R}e(n) \rceil, \\ \mathcal{R}e(n) \geq 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

relation traduisant un résultat remarquable en ce sens qu'elle généralise la formule bien connue dans le cas entier.

Ainsi, si les définitions temporelles des opérateurs différentiels non entiers souffrent d'un formalisme mathématique quelque peu compliqué, leur expression dans le domaine opérationnel relève d'une simplicité remarquable, en particulier dans le cas de l'étude de systèmes relaxés à $t = 0$. Ce formalisme opérationnel est d'ailleurs largement utilisé dans la littérature, notamment dans [Oustaloup, 1995] où l'on trouve une introduction aux opérateurs différentiels non entiers s'inscrivant dans une approche systémique à travers la caractérisation d'un dérivateur non entier par sa transmittance opérationnelle $D(s) = (\tau s)^n$.

1.3.4 – Définition de Grünwald

Une deuxième définition de la dérivée non entière d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue de façon plus intuitive à partir de la généralisation de la définition bien connue de la dérivée d'ordre entier réel.

La dérivée à gauche d'ordre 1 s'écrit par définition :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (1.22)$$

Une discrétisation de t au pas d'échantillonnage h , soit $t = Kh$, se traduit par :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(Kh) - f((K-1)h)}{h}. \quad (1.23)$$

L'introduction de l'opérateur retard q^{-1} applicable à une fonction concrète et défini par $q^{-1} f(Kh) = f((K-1)h)$ permet d'écrire :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - q^{-1}}{h} f(Kh). \quad (1.24)$$

Le même type de calculs mené pour une dérivation à l'ordre 2, conduit à :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - q^{-1})^2}{h^2} f(Kh). \quad (1.25)$$

La généralisation à un ordre de dérivation quelconque (entier ou non entier réel ou complexe) est immédiate et conduit à la définition proposée par Grünwald en 1867 [Grünwald, 1867], soit :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - q^{-1})^n}{h^n} f(Kh), \quad (1.26)$$

soit, en développant $(1 - q^{-1})^n$ par la formule du binôme de Newton :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} f(t - kh), \quad (1.27)$$

ou bien sous une écriture plus condensée, en recourant au formalisme habituel :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (1.28)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad (1.29)$$

A travers la fonction $f(t - kh)$ qui introduit les termes en $f(t)$, $f(t - h)$, $f(t - 2h)$, ..., donc des échantillons du passé, la formule (1.28) montre que la dérivée non entière d'une fonction à un instant t donné prend en compte les valeurs de cette fonction à tous les instants du passé.

De même que pour la définition de Riemann-Liouville (1.8), un tel formalisme peut être étendu à une borne supérieure de sommation quelconque, soit :

$$D_{t_0}^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{K_{t_0}} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (1.30)$$

où K_{t_0} est la partie entière de $\frac{(t - t_0)}{h}$.

Remarque – L'équivalence des deux définitions (1.8) et (1.28) n'est pas toujours vérifiée. On montre cependant que pour la majorité des fonctions rencontrées, la définition de Grünwald converge vers celle de Riemann-Liouville. ■

1.3.5 – Caractérisation fréquentielle

Un *dérivateur non entier* est tel que sa grandeur de sortie $y(t)$ s'identifie, à un facteur près, à la dérivée non entière de sa grandeur d'entrée $u(t)$, soit :

$$y(t) = \tau^n D^n u(t), \quad (1.31)$$

où τ désigne la *constante de temps de différentiation* et $n \in \mathbb{C}$ l'ordre de dérivation complexe ($\mathcal{R}e(n)$ pouvant être supérieur ou inférieur à 0, l'opérateur considéré étant alors soit un dérivateur, soit un intégrateur).

A l'aide des relations (1.4) et (1.21) et sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la traduction opérationnelle de l'équation (1.31) détermine l'équation symbolique :

$$Y(s) = (\tau s)^n U(s), \quad (1.32)$$

soit, en posant $\omega_u = 1/\tau$, appelé *fréquence au gain unité* ou *fréquence de transition* :

$$Y(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^n U(s), \quad (1.33)$$

d'où l'on tire la transmittance :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^n. \quad (1.34)$$

L'étude de la réponse en fréquences d'un tel opérateur requiert la distinction de 2 cas :

- le premier, dans lequel l'opérateur considéré est réduit à un dérivateur non entier réel ;
- le second, plus général, dans lequel l'opérateur considéré est un dérivateur non entier complexe.

1.3.5.1 – Réponse en fréquences d'un dérivateur non entier réel

La réponse en fréquences d'un dérivateur non entier réel se déduit de sa transmittance en faisant $s = j\omega$, soit :

$$D(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u} \right)^n \quad (1.35)$$

Définis comme le module et l'argument de $D(j\omega)$, le gain et le phase du dérivateur admettent des expressions de la forme :

$$\begin{cases} |D(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right)^n \\ \text{Arg}(D(j\omega)) = n \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.36)$$

L'analyse d'un tel système d'équations révèle une propriété remarquable de ce type de dérivateur en ce sens que :

- le diagramme de gain est caractérisé par une droite oblique de pente $6n$ dB par octave ;
- le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée $\varphi = n \frac{\pi}{2}$ rad.

La figure 1.5 représente les diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier réel pour $\omega_u = 1$ rad/s et pour des ordres de dérivation compris entre -1.5 et 1.5 .

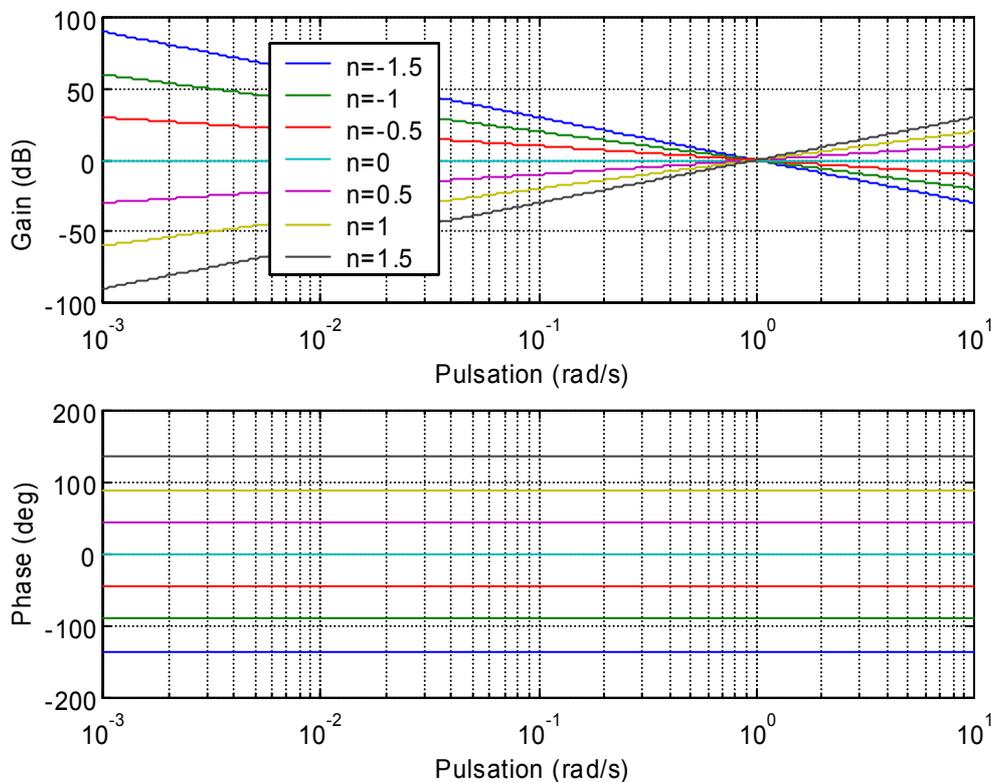


Figure 1.5 – Diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier réel

Le caractère non entier réel de l'ordre de dérivation n , permet ainsi d'assurer, tant au niveau du diagramme de gain que du diagramme de phase, une variation continue :

- de la pente de la droite de gain ;
- de l'ordonnée de la droite de phase.

1.3.5.2 – Réponse en fréquences d'un dérivateur non entier complexe

La description fréquentielle d'un dérivateur non entier complexe requiert la définition d'un espace d'étude mathématique spécifique. Contrairement au cas non entier strictement réel, il s'avère en effet que le gain et la phase d'un dérivateur non entier complexe ne correspondent pas aux module et argument de sa transmittance calculée pour $s = j\omega$.

La grandeur de sortie $y(t)$ d'un dérivateur non entier complexe étant une grandeur complexe (c'est-à-dire de dimension 2 sur \mathbb{R}), il est nécessaire de distinguer deux couples de diagrammes de Bode, l'un représentant fréquentiellement le lien entre la partie réelle de $y(t)$ et l'entrée $u(t)$, l'autre représentant celui entre la partie imaginaire de $y(t)$ et $u(t)$.

La traduction opérationnelle d'une telle distinction revient à décomposer intuitivement la transmittance d'un dérivateur non entier complexe sous la forme :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^{a+ib} = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^a \left[\cos \left(b \ln \frac{s}{\omega_u} \right) + i \sin \left(b \ln \frac{s}{\omega_u} \right) \right], \quad (1.37)$$

ou bien, en posant

$$D_{\text{réel}}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^a \cos \left(b \ln \frac{s}{\omega_u} \right) \quad (1.38)$$

et

$$D_{\text{imag}}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^a \sin \left(b \ln \frac{s}{\omega_u} \right) : \quad (1.39)$$

$$D(s) = D_{\text{réel}}(s) + i D_{\text{imag}}(s), \quad (1.40)$$

les fonctions $D_{\text{réel}}(s)$ et $D_{\text{imag}}(s)$ représentant les transmittances relatives aux sorties réelle $y_r(t)$ et imaginaire $y_i(t)$ du dérivateur non entier complexe. Dès lors, une distinction mathématique doit être faite entre, d'une part, le plan complexe opérationnel noté \mathbb{C}_j dont

relève la variable de Laplace $s = \sigma + j\omega$ et, d'autre part, le plan complexe temporel noté \mathbb{C}_i dont relèvent l'ordre de dérivation $n = a + ib$ et les sorties $y_r(t)$ et $y_i(t)$. L'espace généré par ces 2 plans est appelé *espace bi-complexe* et noté $\hat{\mathbb{C}}$.

1.3.5.2.1 – Définition de l'espace bi-complexe

L'espace bi-complexe est défini par l'ensemble $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_j \times \mathbb{C}_j$, aussi noté $\mathbb{C}_j + i \mathbb{C}_j$ où i est le couple $(0,1)$ de $\mathbb{C}_j \times \mathbb{C}_j$. Cet espace est muni de deux lois $+$ et \bullet telles que :

$$\begin{aligned} \text{si } \begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases}, \text{ où } a, b, a' \text{ et } b' \text{ sont tous des éléments de } \mathbb{C}_j, \\ \text{alors } \begin{cases} z + z' = (a + a') + i(b + b') \\ z \bullet z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.41)$$

On munit aussi cet espace d'une norme définie par :

$$\begin{aligned} \text{si } z = a + ib \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des éléments de } \mathbb{C}_j, \\ \text{alors } \|z\| = \text{Max}(|a + jb|, |a - jb|). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Remarques

- Si $z \in \mathbb{C}_j$ ou \mathbb{C}_i , alors $\|z\| = |z|$ au sens du module dans \mathbb{C}_j ou \mathbb{C}_i ;
- $(\hat{\mathbb{C}}, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel de dimension 4 sur \mathbb{R} et de dimension 2 sur \mathbb{C}_i ou \mathbb{C}_j , normé sur \mathbb{C}_i ou \mathbb{C}_j . C'est donc un espace de Banach. Cependant, $\hat{\mathbb{C}}$ n'est pas un corps. En effet, tous les éléments de $\hat{\mathbb{C}}$ ne sont pas inversibles et il existe des diviseurs de zéro. ■

Ainsi défini, cet espace permet de décomposer mathématiquement la transmittance $D(s)$ selon ses parties réelle et imaginaire par rapport au nombre complexe i , soit, en posant $s = \rho e^{j\theta}$ et $n = a + ib$:

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^n = \left(\frac{\rho}{\omega_u} e^{j\theta} \right)^{a+ib} = \left(\frac{\rho}{\omega_u} \right)^a e^{ja\theta} \left[\cos \left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} + jb\theta \right) + i \sin \left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} + jb\theta \right) \right], \quad (1.43)$$

ou encore, en décomposant $\cos \left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} + jb\theta \right)$ et $\sin \left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} + jb\theta \right)$:

$$D(s) = \left(\frac{\rho}{\omega_u} \right)^a e^{ja\theta} \left\{ \left[\cos \left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} \right) \text{ch}(b\theta) - j \sin \left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} \right) \text{sh}(b\theta) \right] + i \left[\sin \left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} \right) \text{ch}(b\theta) + j \cos \left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} \right) \text{sh}(b\theta) \right] \right\}. \quad (1.44)$$

1.3.5.2.2 – Réponses en fréquences

En vertu de la distinction entre les plans complexes \mathbf{C}_i et \mathbf{C}_j qui assure l'espace bi-complexe, les réponses en fréquences correspondant aux parties réelle et imaginaire de la transmittance d'un dérivateur non entier complexe admettent des expressions de la forme :

$$\mathcal{R}e_{/i}(D(j\omega)) = D_{\text{réel}}(j\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right)^a e^{ja\pi/2} \left[\cos \left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u} \right) \text{ch} \left(b \frac{\pi}{2} \right) - j \sin \left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u} \right) \text{sh} \left(b \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (1.45)$$

et

$$\mathcal{I}m_{/i}(D(j\omega)) = D_{\text{imag}}(j\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right)^a e^{ja\pi/2} \left[\sin \left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u} \right) \text{ch} \left(b \frac{\pi}{2} \right) + j \cos \left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u} \right) \text{sh} \left(b \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (1.46)$$

les gains et phases du dérivateur se déduisant ensuite des modules et arguments de ces 2 réponses en fréquences, soit, pour $D_{\text{réel}}(j\omega)$:

$$|\mathcal{R}e_{/i}(D(j\omega))| = \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right)^a \sqrt{\cos^2 \left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u} \right) + \text{sh}^2 \left(b \frac{\pi}{2} \right)} \quad (1.47)$$

$$\text{et} \quad \text{Arg}(\mathcal{R}e_{/i}(D(j\omega))) = a \frac{\pi}{2} + \arg \left(\cos \left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u} \right) \text{ch} \left(b \frac{\pi}{2} \right) - j \sin \left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u} \right) \text{sh} \left(b \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad (1.48)$$

puis pour $D_{\text{imag}}(j\omega)$:

$$|\mathcal{I}m_{/i}(D(j\omega))| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a \sqrt{\sin^2\left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u}\right) + \text{sh}^2\left(b \frac{\pi}{2}\right)} \quad (1.49)$$

et $\text{Arg}(\mathcal{I}m_{/i}(D(j\omega))) = a \frac{\pi}{2} + \arg\left(\sin\left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u}\right) \text{ch}\left(b \frac{\pi}{2}\right) + j \cos\left(b \ln \frac{\omega}{\omega_u}\right) \text{sh}\left(b \frac{\pi}{2}\right)\right)$. (1.50)

Les valeurs et les pentes des gains à la fréquence ω_u ont pour expressions :

$$|\mathcal{R}e_{/i}(D(j\omega_u))| = \text{ch}\left(b \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.51)$$

et $|\mathcal{I}m_{/i}(D(j\omega_u))| = \left|\text{sh}\left(b \frac{\pi}{2}\right)\right|$, (1.52)

puis : $\frac{\partial |\mathcal{R}e_{/i}(D(j\omega))|_{\text{dB}}}{\partial \log \omega} \Big|_{\omega=\omega_u} = 20a$ (1.53)

et $\frac{\partial |\mathcal{I}m_{/i}(D(j\omega))|_{\text{dB}}}{\partial \log \omega} \Big|_{\omega=\omega_u} = 20a$. (1.54)

Les quatre dernières relations expriment qu'à la fréquence ω_u :

- les valeurs des gains sont exclusivement liées à la partie imaginaire b de l'ordre de dérivation ;

- les pentes des gains sont exclusivement liées à la partie réelle a de l'ordre de dérivation.

Les valeurs et les pentes des phases à la fréquence ω_u ont pour expressions :

$$\text{Arg}(\mathcal{R}e_{/i}(D(j\omega_u))) = a \frac{\pi}{2} \quad (1.55)$$

et $\text{Arg}(\mathcal{I}m_{/i}(D(j\omega_u))) = a \frac{\pi}{2} + \text{sign}(b) \frac{\pi}{2}$, (1.56)

$$\text{puis : } \quad \left. \frac{\partial \text{Arg}(\mathcal{R}e_{/i}(D(j\omega)))}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = -b \operatorname{th}\left(b \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.57)$$

$$\text{et } \quad \left. \frac{\partial \text{Arg}(\mathcal{I}m_{/i}(D(j\omega)))}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = \frac{-b}{\operatorname{th}\left(b \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (1.58)$$

Les quatre dernières relations expriment qu'à la fréquence ω_u :

- les valeurs des phases sont exclusivement liées à la partie réelle a de l'ordre de dérivation ;

- les pentes des phases sont exclusivement liées à la partie imaginaire b de l'ordre de dérivation.

Une telle propriété, illustrée par la figure 1.6, est à l'origine de la stratégie de commande CRONE de troisième génération dans laquelle les parties réelle et imaginaire de l'ordre de dérivation sont utilisées comme paramètres de synthèse afin d'optimiser le gabarit de la transmittance en boucle ouverte quant à son positionnement et à son inclinaison dans le plan de Black [Oustaloup, 1991] [Oustaloup *et al.*, 1995a].

Les figures 1.7 et 1.8 donnent les diagrammes de Bode des parties réelle et imaginaire de $D(j\omega)$ pour $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ et pour différentes valeurs des parties réelle a et imaginaire b de l'ordre de dérivation n .

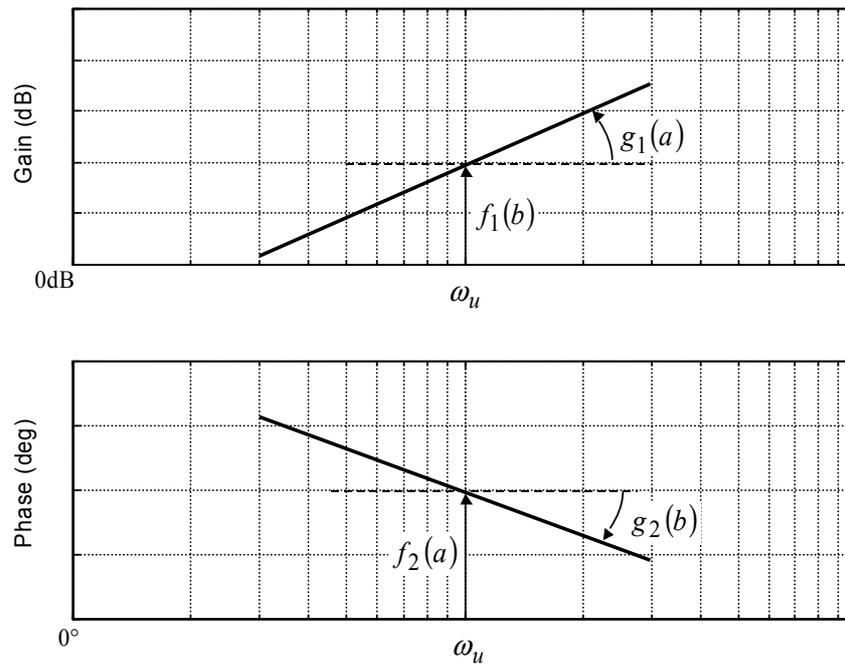


Figure 1.6 – Les parties réelle et imaginaire de l'ordre de dérivation $n = a + ib$ ont des actions bien distinctes sur le comportement des gains et des phases de $D_{\text{réel}}(j\omega)$ et de $D_{\text{imag}}(j\omega)$:

- a agit sur la valeur des phases et sur la pente des gains ;
- b agit sur la valeur des gains et sur la pente des phases.

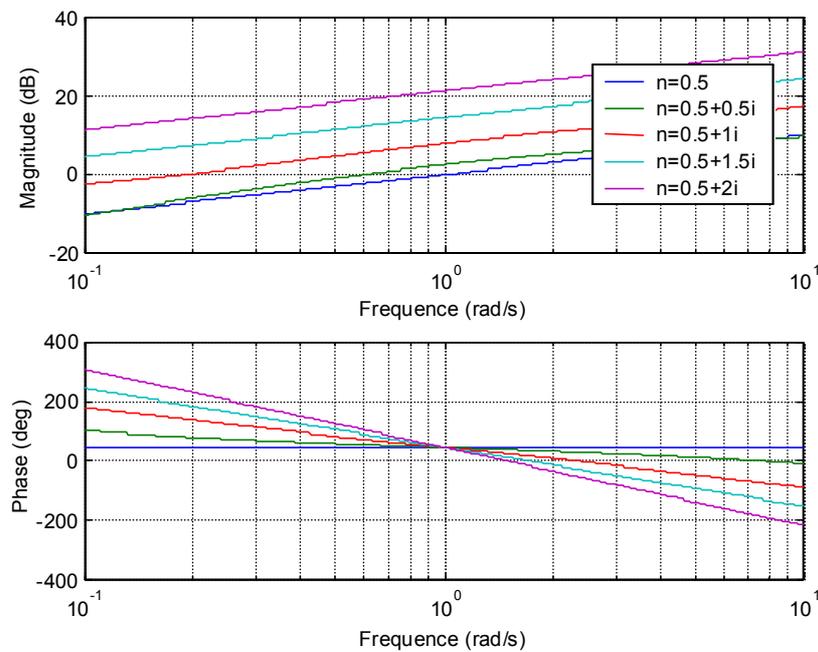


Figure 1.7 – Diagrammes de Bode de $D_{\text{réel}}(j\omega)$ pour différentes valeurs de l'ordre de dérivation

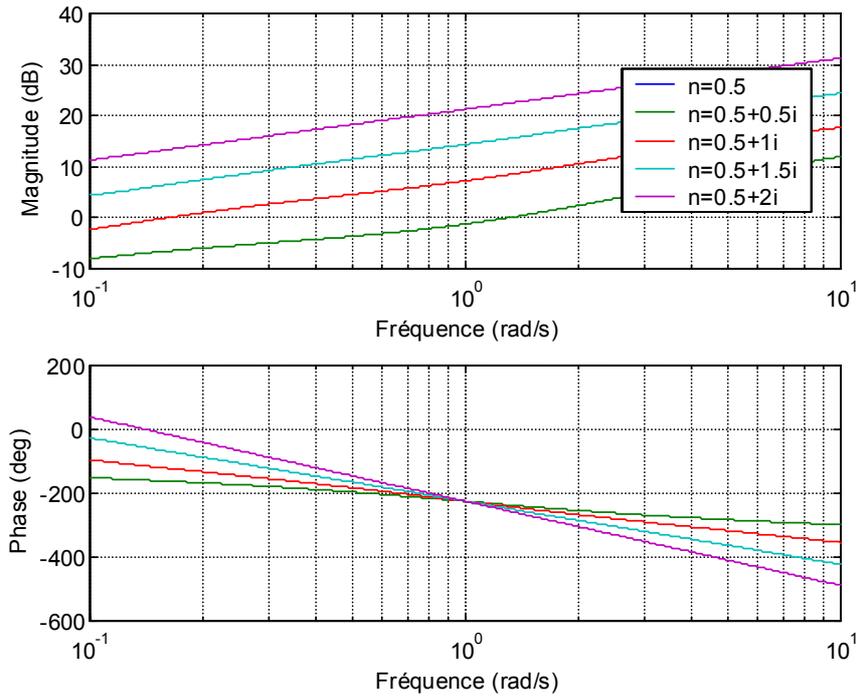


Figure 1.8 – Diagrammes de Bode de $D_{\text{imag}}(j\omega)$ pour différentes valeurs de l'ordre de dérivation

1.4 – Système linéaire non entier

Un système linéaire non entier est par définition un système décrit, dans le cas monovarié, par une équation différentielle faisant intervenir des opérateurs de dérivation non entiers, soit :

$$D_{t_0}^{n_{a_0}} y(t) + a_1 D_{t_0}^{n_{a_1}} y(t) + a_2 D_{t_0}^{n_{a_2}} y(t) + \dots + a_L D_{t_0}^{n_{a_L}} y(t) = b_0 D_{t_0}^{n_{b_0}} u(t) + b_1 D_{t_0}^{n_{b_1}} u(t) + \dots + b_M D_{t_0}^{n_{b_M}} u(t), \quad (1.59)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, les ordres de dérivation $[n_{a_0}, n_{a_1}, \dots, n_{a_L}, n_{b_0}, n_{b_1}, \dots, n_{b_M}]$ étant des nombres entiers, non entiers, réels ou complexes.

Un problème fondamental posé par l'étude d'un système non entier complexe provient du fait que la dérivée non entière complexe d'une fonction réelle est à valeurs complexes (figure 1.9).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \mathbb{C} \\ f(t) & \longrightarrow & D^n f(t) \end{array}$$

Figure 1.9 – La dérivée non entière complexe d'une fonction réelle est à valeurs complexes

Physiquement, seuls les signaux réels sont mesurables et ont donc un sens concret. La fonction $D^n f(t)$ étant une fonction à valeurs complexes, elle représente en réalité une fonction de dimension 2 sur \mathbb{R} . Quel sens physique donner aux parties réelle et imaginaire de $D^n f(t)$?

En automatique, et notamment en commande CRONE de 3^{ème} génération [Oustaloup, 1991] [Oustaloup, 1999] seule la partie réelle de la fonction dérivée est prise en compte. Pour ce type de commande, le comportement en boucle ouverte au voisinage de la fréquence au gain unité est en effet celui de la partie réelle de la transmittance d'un intégrateur d'ordre complexe.

Cette approche, adoptée dans la suite du mémoire, permet de modéliser des systèmes physiques (c'est-à-dire des systèmes à entrée réelle et à sortie réelle) par des équations différentielles dont les ordres de dérivation sont complexes (équation (1.59)). La partie réelle de $y(t)$ représente la sortie mesurable du système (figure 1.10), la partie imaginaire de $y(t)$ étant alors considérée comme non accessible.

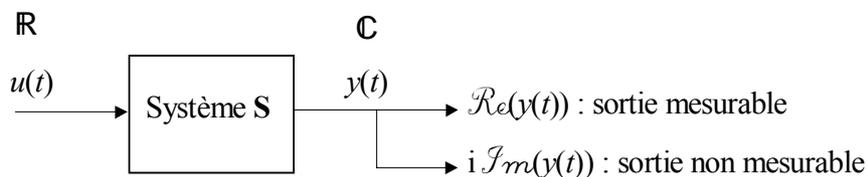


Figure 1.10 - Système S à entrée réelle et à sortie complexe

Remarque - L'approche adoptée ici n'est nullement imposée par une contrainte mathématique ou physique mais correspond à un choix guidé par la stratégie de commande CRONE de troisième génération. Il est d'ailleurs tout à fait possible de considérer le cas opposé, c'est-à-dire celui où la partie imaginaire de $y(t)$ constitue la sortie mesurable et la partie réelle de $y(t)$ la sortie non mesurable.

■

Un second problème concerne le choix de l'instant initial t_0 , borne inférieure d'intégration de la formule de la dérivée non entière d'une fonction temporelle $f(t)$ (équation (1.9)). Ce paramètre caractérise l'instant à partir duquel le passé de la fonction $f(t)$ est pris en compte pour le calcul de la dérivée. Pour un système physique, cet instant ne peut être que celui qui initialise la sollicitation du système, c'est-à-dire l'instant où le signal d'entrée $u(t)$ excite pour la première fois le système considéré. Dans la majorité des cas, cet instant ainsi que toutes les valeurs $f(t)$ correspondantes ne sont malheureusement pas accessibles. Une solution consiste alors à donner au système un temps de repos suffisant pour pouvoir le considérer comme *relaxé*, l'instant initial étant alors fixé arbitrairement à $t_0 = 0$, réduisant ainsi la dérivée non entière d'une fonction à $D^n f(t)$. L'hypothèse suivante est donc adoptée dans toute la suite du mémoire : les systèmes étudiés sont considérés causaux, linéaires, invariants et relaxés à l'instant $t = 0$.

Chapitre 2

Représentation et analyse des systèmes linéaires non entiers

2.1 – Introduction

Dans le chapitre précédent, les définitions et les principales propriétés des opérateurs différentiels non entiers ont été rappelées. Le présent chapitre concerne la représentation et l'analyse des systèmes linéaires non entiers.

Si plusieurs formes (ou outils) de représentation sont à même de décrire un système entier (équation différentielle, équation récurrente, représentation d'état continue, représentation d'état discrète...), un système non entier est le plus souvent décrit par un système différentiel non entier ou, dans le cas monovarié, par une équation différentielle non entière de la forme :

$$D^{n_{a_0}} y(t) + a_1 D^{n_{a_1}} y(t) + a_2 D^{n_{a_2}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{a_L}} y(t) = b_0 D^{n_{b_0}} u(t) + b_1 D^{n_{b_1}} u(t) + \dots + b_M D^{n_{b_M}} u(t), \quad (2.1)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, les ordres de dérivation $[n_{a_0}, n_{a_1}, \dots, n_{a_L}, n_{b_0}, n_{b_1}, \dots, n_{b_M}]$ étant des nombres entiers, non entiers, réels ou complexes.

Compte tenu du caractère générique que revêt l'intitulé *représentation d'état non entière*, l'étude de cette représentation suscite les plus vifs intérêts tant auprès des automaticiens que des mathématiciens. Étudiée par Matignon dans le cas où l'ordre de dérivation est rationnel [Matignon, 1994], cette représentation présente l'avantage de permettre l'analyse des systèmes non entiers à travers leur décomposition modale.

Six paragraphes composent ce chapitre.

Le premier commence par donner la définition d'une représentation d'état non entière ainsi que ses principales propriétés.

Le deuxième propose la décomposition modale d'un système non entier.

Le troisième est consacré au calcul de la transformée inverse de Laplace d'une fonction de transfert du type $\left(\frac{1}{s^n - \lambda_l}\right)^{q_i}$.

Le quatrième s'attache à établir une condition de stabilité ainsi que l'expression analytique de la sortie d'un système non entier complexe.

Le cinquième donne une description succincte des méthodes utilisées pour simuler un système non entier.

Enfin, dans le dernier paragraphe, deux exemples d'étude de systèmes non entiers, l'un réel, l'autre complexe, illustrent les propriétés établies dans les paragraphes précédents.

2.2 – Représentation d'état non entière

2.2.1 – Définition

Comme dans le cas entier, une représentation d'état non entière comporte deux équations :

- une équation d'état non entière dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre n entier, non entier, réel ou complexe ;
- une équation d'observation identique à celle du cas entier.

Elle est ainsi définie par le système d'équation :

$$\begin{cases} D^{(n)}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{E} \mathbf{u}(t) \end{cases}, \quad (2.2)$$

dans lequel :

\mathbf{u} est le vecteur des entrées de dimension $(d_u \times 1)$;

\mathbf{x} est le vecteur d'état non entier de dimension $(d_x \times 1)$;

n est l'ordre de dérivation (scalaire);

y est le vecteur des sorties de dimension $(d_y \times 1)$.

Les matrices **A**, **B**, **C** et **E** sont toutes à éléments constants et de dimension appropriée.

Remarque importante – Bien que désigné sous l'appellation "*vecteur d'état non entier*", le vecteur $x(t)$ ne présente plus les propriétés "*d'état*" au sens classique du terme. On montre en effet que la connaissance de $x(t)$ à l'instant t_0 ne suffit plus pour résumer le passé d'un système non entier. Le problème de l'initialisation d'un tel système à l'instant t_0 requiert la connaissance, soit d'un nombre infini de conditions initiales, soit d'un nombre fini de variables (signal d'entrée par exemple) mais sur un temps correspondant à tout le passé du système. Quelques travaux traitant de ce problème ont été proposés et figurent dans [Lorenzo and Hartley, 2001].

■

2.2.2 – Passage d'une représentation d'état non entière à une équation différentielle non entière

Telle que définie dans le cas MIMO¹ par le système d'équations (2.2), une représentation d'état non entière SISO² n'est pas équivalente à une équation différentielle non entière telle que celle définie par l'équation (2.1). Les opérateurs de dérivation non entiers ne vérifiant pas toujours la propriété de semi-groupe, il s'avère en effet que l'équation différentielle correspondant à la représentation (2.2) est de type séquentielle, soit [Miller et Ross, 1993] :

$$y(t) + a_1 D^n y(t) + a_2 D^n (D^n y(t)) + \dots + a_L \overbrace{D^n \left(\dots \left(D^n y(t) \right) \right)}^{L \text{ fois}} = b_0 D^n u(t) + b_1 D^n (D^n u(t)) + \dots + b_M \underbrace{D^n \left(\dots \left(D^n u(t) \right) \right)}_{M \text{ fois}}, \quad (2.3)$$

équation qui n'est équivalente à l'équation non séquentielle (2.1) que sous la condition :

¹ MIMO : Multi Input – Multi Output

² SISO : Single Input – Single Output

$$D^n(D^n f(t)) = D^{2n} f(t), \quad (2.4)$$

qui exprime la propriété de semi-groupe des opérateurs de dérivation non entière (relation (1.15)).

Dans le cas général de la non vérification de cette propriété, et ce conformément à la relation (1.21), la traduction opérationnelle de l'équation (2.3) s'obtient à partir de transformations du type :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{D^n(D^n f(t))\right\} &= s^n \left(s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left(D^k \left(I^{m-n} f(t) \right) \right) \Big|_{t=0} \right) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left(D^k \left(I^{m-n} (D^n f(t)) \right) \right) \Big|_{t=0} \quad (2.5) \\ &\neq \mathcal{L}\left\{D^{2n} f(t)\right\}, \end{aligned}$$

la fonction $f(t)$ désignant l'entrée $u(t)$ ou la sortie $y(t)$.

En vertu des hypothèses d'étude formulées au paragraphe 1.4, et notamment celle portant sur la relaxation du système à l'instant $t = 0$, la sortie du système $y(t)$ ne dépend que de l'entrée $u(t)$ pour $t > 0$. L'équation (2.5) se simplifie alors selon la relation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{D^n(D^n f(t))\right\} &= s^{2n} F(s) \\ &= \mathcal{L}\left\{D^{2n} f(t)\right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

traduisant un résultat remarquable en ce sens qu'il démontre que les opérateurs de dérivation non entière, utilisés dans un contexte de modélisation de systèmes physiques relaxés à $t = 0$, vérifient la propriété de semi-groupe.

Ce résultat permet ainsi de passer d'une représentation d'état non entière à une équation différentielle non entière de type non séquentielle (2.1), et ce comme dans le cas entier.

Une fonction de transfert du système peut également être obtenue conformément à la relation de passage :

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C} \left(s^n \mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

2.2.3 – Passage d'une équation différentielle non entière à une représentation d'état non entière

Le passage d'une équation différentielle non entière du type

$$D^{n_{a0}} y(t) + a_1 D^{n_{a1}} y(t) + a_2 D^{n_{a2}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{aL}} y(t) = b_0 D^{n_{b0}} u(t) + b_1 D^{n_{b1}} u(t) + \dots + b_M D^{n_{bM}} u(t), \quad (2.8)$$

à une représentation d'état non entière telle que définie par (2.2) n'est possible que lorsque les ordres de dérivation de l'équation différentielle sont dits commensurables [Matignon, 1998]. Cette propriété exprime que les ordres de dérivation doivent tous être multiples entiers d'un même nombre complexe n , c'est-à-dire :

$$\text{tels que } \begin{cases} \exists \left\{ \begin{array}{l} (k_{n_{a0}}, \dots, k_{n_{a1}}, \dots, k_{n_{aL}}) \in \mathbb{N}^{L+1} \\ (k_{n_{b0}}, \dots, k_{n_{b1}}, \dots, k_{n_{bM}}) \in \mathbb{N}^{M+1} \\ n \text{ tel que } \Re_e(n) \in]0, 1] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n_{a_l} = n \times k_{n_{a_l}} \text{ pour } l = 0, \dots, L \\ n_{b_m} = n \times k_{n_{b_m}} \text{ pour } m = 0, \dots, M \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.9)$$

Bien qu'ayant fait l'objet d'une résolution numérique [Oustaloup, 1995], une équation différentielle dont les ordres de dérivation sont complexes non commensurables, se prête difficilement à une résolution analytique. Notre étude se bornera donc au cas où les ordres sont commensurables réels ou complexes.

A titre de remarque, il convient de souligner que, pour des ordres de dérivation réels non commensurables, moyennant une approximation des ordres par des nombres rationnels, il s'avère possible de déterminer un ordre commun n conforme à la condition (2.9).

Lorsque la condition (2.9) est vérifiée, le passage d'une équation différentielle non entière à une représentation d'état équivalente s'effectue de la même manière que dans le cas entier.

2.3 – Décomposition modale d'un système non entier

Dans le cas entier, la décomposition modale d'un système s'effectue, soit par décomposition en éléments simples si le système est décrit par une fonction de transfert de la forme $\frac{N(s)}{D(s)}$, soit par diagonalisation de la matrice d'évolution si le système est décrit par une représentation d'état.

L'étude du cas non entier, par diagonalisation de la matrice d'évolution, constitue l'objet des développements suivants.

2.3.1 – Expression générale de la sortie

Le résultat (1.21) permet d'écrire la transformée de Laplace de l'équation d'état sous la forme :

$$s^n \mathbf{x}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left(D^k \left(I^{m-n} \mathbf{x}(t) \right) \right) \Big|_{t=0+} = \mathbf{A} \mathbf{x}(s) + \mathbf{B} \mathbf{u}(s), \quad (2.10)$$

soit, dans le cas de la relaxation du système à $t = 0$ qui implique

$$D^k \left(I^{m-n} \mathbf{x}(t) \right) \Big|_{t=0+} = \mathbf{0} \text{ pour } 0 \leq k \leq m-1 : \quad (2.11)$$

$$s^n \mathbf{x}(s) = \mathbf{A} \mathbf{x}(s) + \mathbf{B} \mathbf{u}(s). \quad (2.12)$$

En portant dans l'équation d'observation l'expression de $\mathbf{x}(s)$ tirée de (2.12), la sortie $\mathbf{y}(t)$ s'exprime par :

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbf{C} \left(s^n \mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B} \right\} * \mathbf{u}(t) + \mathbf{E} \mathbf{u}(t). \quad (2.13)$$

2.3.2 – Changement de base

De manière analogue au cas entier, la décomposition modale d'un système non entier s'effectue par la diagonalisation de la matrice d'évolution. Un changement de base par transformation semblable du système (2.2) permet en effet d'obtenir une nouvelle réalisation, soit :

$$\begin{cases} D^n \mathbf{x}_J(t) = \mathbf{J} \mathbf{x}_J(t) + \mathbf{B}_J \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_J \mathbf{x}_J(t) + \mathbf{E} \mathbf{u}(t) \end{cases}, \quad (2.14)$$

où \mathbf{J} est une matrice de Jordan contenant sur sa diagonale l'ensemble des valeurs propres de la matrice \mathbf{A} .

La sortie $\mathbf{y}(t)$ s'exprime alors par :

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbf{C}_J (s^n \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} \mathbf{B}_J \right\} * \mathbf{u}(t) + \mathbf{E} \mathbf{u}(t). \quad (2.15)$$

Comme \mathbf{J} est une matrice de Jordan, la matrice $(s^n \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1}$ s'exprime par :

$$(s^n \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} = \begin{pmatrix} (s^n \mathbf{I} - J_{d_1}(\lambda_1))^{-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & (s^n \mathbf{I} - J_{d_l}(\lambda_l))^{-1} & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & (s^n \mathbf{I} - J_{d_r}(\lambda_r))^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

où

$$(s^n \mathbf{I} - J_{d_l}(\lambda_l))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^n - \lambda_l} & \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{d_l} \\ & \frac{1}{s^n - \lambda_l} & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^2 \\ & & & & \frac{1}{s^n - \lambda_l} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

La sortie $\mathbf{y}(t)$ est donc un vecteur dont les composantes sont définies par une combinaison linéaire d'éléments, appelés **modes propres** du système, de la forme

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i} \right\} * \mathbf{u}(t) \quad \text{où } q_i \text{ est un nombre entier reflétant la multiplicité de la } \mathbf{valeur}$$

propre λ_l .

Le paragraphe suivant s'attache ainsi à établir l'expression analytique de la transformée

inverse de Laplace de transferts du type $G_{\text{modal}}(s) = \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i}$.

2.4 – Transformée inverse de Laplace des modes propres

La transformée inverse $g_{\text{modal}}(t)$ d'un mode propre $G_{\text{modal}}(s) = \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i}$ peut s'exprimer à l'aide des fonctions de Mittag-Leffler généralisées, soit [Mittag-Leffler, 1905] [Matignon, 1998] :

$$g_{\text{modal}}(t) = t^{q_i n - 1} \sum_{k=0}^{\infty} C_{q_i - 1 + k} \frac{(\lambda_l t^n)^k}{\Gamma((q_i + k)n)}. \quad (2.18)$$

Bien qu'analytique, l'expression (2.18) se prête difficilement à l'étude structurelle de $g_{\text{modal}}(t)$. Une telle étude, facilitée par l'utilisation de la formule intégrale de Mellin-Fourier et du théorème des résidus, fait ainsi l'objet des paragraphes suivants.

Dans le cas où l'ordre n est réel et $q_i=1$, l'étude de la transformée inverse $g_{\text{modal}}(t)$ de $G_{\text{modal}}(s) = \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i}$ figure dans [Oustaloup, 1983]. Dans le cas où n est complexe, quelques éléments figurent dans [Hotzel, 2000].

Lorsque la valeur propre λ_l est nulle, $g_{\text{modal}}(t)$ est donné par (1.4). Dans le cas contraire, la transformation inverse de Laplace de $G_{\text{modal}}(s)$ s'effectue à l'aide de la formule intégrale de Mellin-Fourier, soit :

$$g_{\text{modal}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_{\text{modal}}(s)] = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i} ds. \quad (2.19)$$

En définissant un contour fermé Γ du type de Bromwich-Wagner contournant la coupure (figure 2.1), le théorème des résidus permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 g_{\text{modal}}(t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i} ds \\
 &= \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \left\{ \mathcal{R}_{e\Delta} \left[e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i} \right] \right\} - \frac{1}{2i\pi} \int_{(\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6)} e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i} ds .
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Lorsque le rayon R tend vers l'infini, l'intégrale le long des contours γ_2 , γ_4 et γ_6 tend vers 0 ([Oustaloup, 1983],[Oustaloup, 1995]). L'équation (2.20) devient alors :

$$g_{\text{modal}}(t) = \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \left\{ \mathcal{R}_{e\Delta} \left[e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i} \right] \right\} - \frac{1}{2i\pi} \int_{(\gamma_3+\gamma_5)} e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i} ds , \tag{2.21}$$

équation dans laquelle figurent deux parties bien distinctes :

- la première résulte du calcul des résidus en chaque pôle de $G_{\text{modal}}(s)$;
- la seconde est générée par le calcul de l'intégrale le long des contours γ_3 et γ_5 .

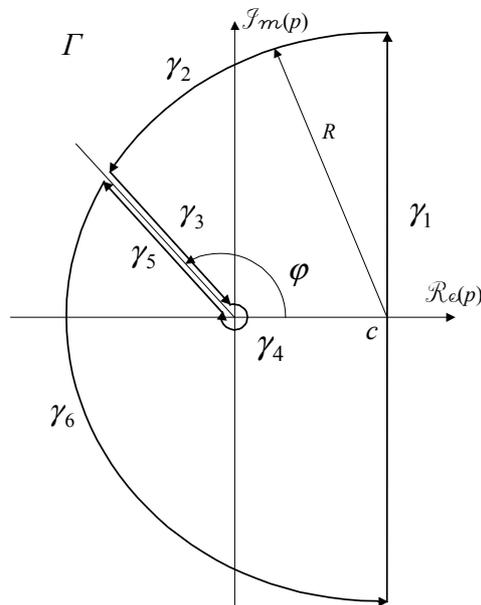


Figure 2.1 - Représentation du contour d'intégration Γ

2.4.1 – Détermination des pôles de $G_{\text{modal}}(s)$

Les pôles d'une fonction de transfert irréductible du type $\frac{N(s)}{D(s)}$ sont les termes qui annulent le dénominateur $D(s)$. Si, dans le cas entier, l'expression des pôles se déduit directement de la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert (les pôles étant alors égaux aux valeurs propres), il en est autrement pour le cas non entier. Il s'avère en effet que les pôles de $G_{\text{modal}}(s)$ vérifient l'équation suivante :

$$s^n - \lambda_l = 0. \quad (2.22)$$

En écrivant $n = a + ib$ (où $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$) et $s = \rho e^{i\theta}$ (où $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in]\varphi - 2\pi, \varphi[$), l'équation (2.22) devient :

$$\rho^a e^{-b\theta} e^{i(a\theta + b \ln \rho)} = \lambda_l. \quad (2.23)$$

Cette équation est équivalente à un système de deux équations, l'une relative au module de λ_l , l'autre à son argument :

$$\begin{cases} \rho_k^a e^{-b\theta_k} = |\lambda_l| \\ a\theta_k + b \ln \rho_k = \arg(\lambda_l) + 2m_k \pi \end{cases}, \quad (2.24)$$

où les m_k sont des nombres entiers exprimant la multiformité de l'équation (2.23) à travers la caractéristique non entier de a .

Après quelques développements, le module et l'argument du pôle de rang k s'expriment par :

$$\begin{cases} \rho_k = \left(|\lambda_l| e^{b\theta_k} \right)^{1/a} \\ \theta_k = \frac{a}{a^2 + b^2} \arg(\lambda_l) - \frac{b}{a^2 + b^2} \ln(|\lambda_l|) + \frac{2 a m_k \pi}{a^2 + b^2} \end{cases}. \quad (2.25)$$

En tenant compte de la coupure du plan complexe, l'argument θ des pôles doit vérifier la contrainte :

$$\begin{cases} \theta \in]\varphi - 2\pi, \varphi[\\ \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad (2.26)$$

imposant une condition sur l'ensemble des entiers m_k , soit :

$$\begin{cases} m_k > \frac{a^2 + b^2}{2a\pi}(\varphi - 2\pi) - \frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} + \frac{b}{2a\pi} \ln(|\lambda_l|) \\ m_k < \frac{a^2 + b^2}{2a\pi}(\varphi) - \frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} + \frac{b}{2a\pi} \ln(|\lambda_l|) \end{cases} \quad (2.27)$$

Le module et l'argument de rang k admettent alors pour expressions :

$$\begin{cases} \rho_k = \left(|\lambda_l| e^{b\theta_k} \right)^{1/a} \\ \theta_k = \frac{\pi}{\mathcal{N}}(m_k - \Lambda) \\ m_k \in I = \left] \frac{(\varphi - 2\pi)}{\pi} \mathcal{N} + \Lambda, \frac{\varphi}{\pi} \mathcal{N} + \Lambda \right[\end{cases} \quad (2.28)$$

Λ et \mathcal{N} étant définis par:

$$\begin{cases} \Lambda = -\frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} + \frac{b}{2a\pi} \ln(|\lambda_l|) \\ \mathcal{N} = \frac{a^2 + b^2}{2a} \end{cases} \quad (2.29)$$

La figure 2.2 illustre la procédure de détermination des pôles dans le cas où $\Lambda - 3\mathcal{N}/2 > 0$. Il apparaît clairement que la présence d'un entier m_k dans l'intervalle I génère un pôle conformément à la définition (2.28).

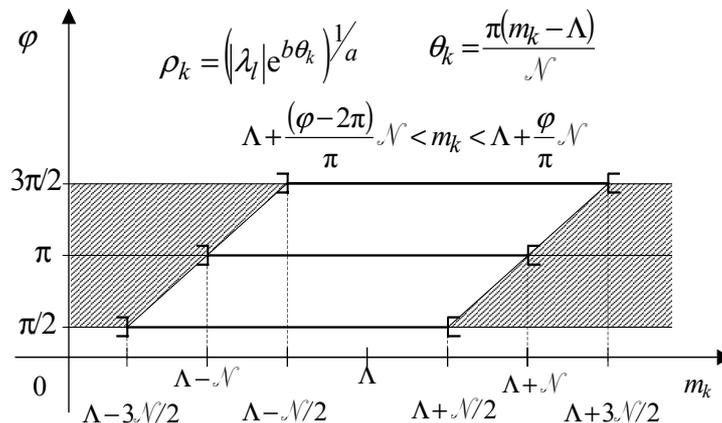


Figure 2.2 - Détermination des pôles de $G_{\text{modal}}(s)$

Le placement de la coupure s'avère donc déterminant quant à la position ou même l'existence des pôles. Le choix de cette coupure étant libre, il est possible, par rotation de celle-ci, de faire apparaître ou disparaître un pôle.

Une configuration intéressante est celle où la décomposition (2.21) est *structurelle* [Matignon, 1998]. Cette propriété, obtenue pour une coupure du plan complexe suivant \mathbb{R}^- , signifie que la réponse impulsionnelle (2.21) se décompose en deux parties bien distinctes [Oustaloup, 1983] :

- la première, générée par le calcul des résidus en chaque pôle, et composée d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles de la forme $e^{p^i t}$;
- la seconde, générée par le calcul d'une intégrale selon \mathbb{R}^- , et composée d'une combinaison linéaire de fonctions dont le comportement asymptotique est de la forme t^n .

Une telle décomposition, adoptée dans la suite du mémoire, est intéressante dans le sens où elle permet de décomposer un système non entier en 3 sous-systèmes [Oustaloup, 1983],[Hotzel, 2000] (figure 2.3) :

- un premier sous-système, composé d'intégrateurs purs (modes propres caractérisés par des valeurs propres nulles) ;
- un deuxième sous-système, composé d'un ensemble de *modes exponentiels* du premier ordre ;
- un troisième sous-système, caractéristique exclusive des systèmes non entiers, composé d'un ensemble de *modes aperiodiques à mémoire longue* appelés *multimodes aperiodiques*.

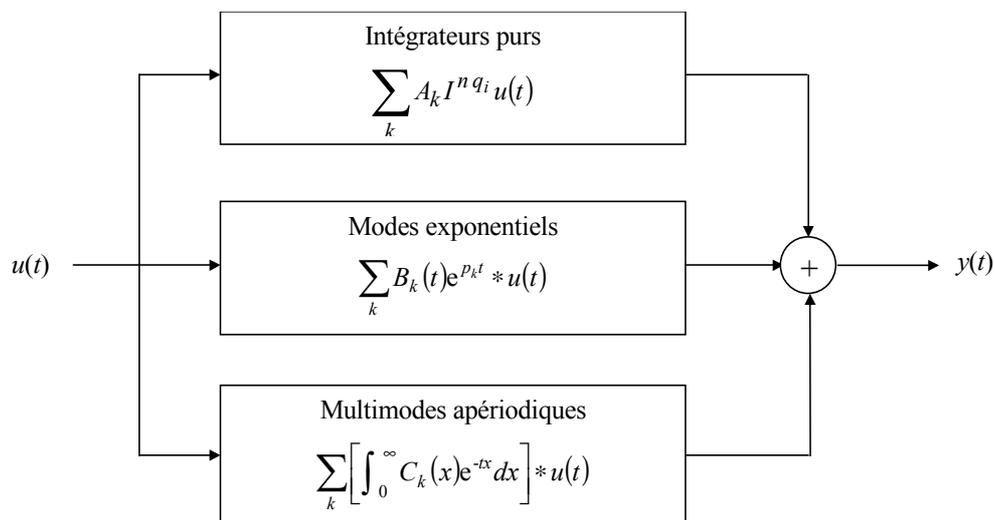


Figure 2.3 - Décomposition d'un système non entier en trois sous-systèmes

Le placement de la coupure du plan complexe suivant \mathbb{R}^- particularise l'expression des pôles conformément à :

$$\begin{cases} \rho_k = \left(|\lambda_l| e^{b\theta_k} \right)^{1/a} \\ \theta_k = \frac{\pi}{\mathcal{N}} (m_k - \Lambda) \\ \Lambda - \mathcal{N} < m_k < \Lambda + \mathcal{N} \end{cases}, \quad (2.30)$$

avec

$$\begin{cases} \Lambda = -\frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} + \frac{b}{2a\pi} \ln(|\lambda_l|) \\ \mathcal{N} = \frac{a^2 + b^2}{2a} \end{cases}. \quad (2.31)$$

Remarques

- Le cas extrême où m_k est égal à $\Lambda - \mathcal{N}$ ou à $\Lambda + \mathcal{N}$, ne génère pas de pôle : les pôles hypothétiquement générés seraient en effet exactement sur la coupure. Le calcul de $g_{\text{modal}}(t)$ s'effectue alors en modifiant les chemins γ_3 et γ_5 de manière à contourner ces points singuliers.
- Dans le cas où l'ordre de dérivation n est strictement réel, l'expression (2.30) se simplifie et les pôles s'expriment par [Oustaloup, 1983] :

$$\begin{cases} \rho_k = \left(|\lambda_l| \right)^{1/a} \\ \theta_k = \frac{\arg(\lambda_l)}{n} + \frac{2m_k\pi}{n} \\ -\frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} - \frac{n}{2} < m_k < -\frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} + \frac{n}{2} \end{cases}. \quad (2.32)$$

■

2.4.2 – Expression de $g_{\text{modal}}(t)$

Les résultats obtenus successivement par Oustaloup [Oustaloup, 1983], Matignon [Matignon, 1994] puis Hotzel [Hotzel, 2000] dans le cas où l'ordre de dérivation n est réel, peuvent être directement étendus au cas complexe. Le calcul des résidus en chaque pôle ainsi

que celui de l'intégrale le long de la coupure, conduisent alors à une expression de $g_{\text{modal}}(t)$ de la forme :

$$g_{\text{modal}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^n - \lambda_l}\right)^{q_i} = \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \frac{p_k}{\lambda_l^{q_i}} Q_{q_i-1}\left(\frac{1}{n}, t p_k\right) e^{t p_k} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} \sum_{k=0}^{q_i-1} (-1)^k \binom{q_i}{k} (\lambda_l)^k x^{n(q_i-k)} \sin[n\pi(q_i-k)]}{[x^{2n} - 2\lambda_l x^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2]^{q_i}} dx, \quad (2.33)$$

où $Q_{\kappa}(x, y)$ est un polynôme à deux variables défini par :

$$\begin{cases} Q_0(x, y) = x \\ \kappa Q_{\kappa}(x, y) = (xy + x - y)Q_{\kappa-1}(x, y) + xy \frac{\partial}{\partial y} Q_{\kappa-1}(x, y) \end{cases} \quad (2.34)$$

Remarque – Dans le cas où $q_i = 1$, le polynôme $Q_{\kappa}(x, y)$ se simplifie et l'expression de $g_{\text{modal}}(t)$ se réduit à [Oustaloup, 1983] :

$$g_{\text{modal}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^n - \lambda_l}\right) = \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \frac{p_k}{n\lambda_l} e^{t p_k} + \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{x^{2n} - 2\lambda_l x^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2} dx \quad (2.35)$$

■

L'équation (2.33) met en évidence la décomposition structurelle de $g_{\text{modal}}(t)$ en deux parties :

- la première, appelée *mode exponentiel*, résultant du calcul des résidus en chaque pôle ;
- la seconde, appelée *multimode aperiodique*, résultant du calcul de l'intégrale le long de la coupure du plan complexe.

La notion de *multimode aperiodique* provient de ce qu'un tel mode est caractérisé par une dynamique aperiodique à mémoire longue constituée par la superposition continue de réponses impulsionnelles de systèmes du premier ordre dont les fréquences transitionnelles sont distribuées continûment de zéro à l'infini [Oustaloup, 1995]. Une étude de cette intégrale permet de représenter le multimode aperiodique par une réalisation d'état infinie, aussi connue

sous le nom de réalisation diffusive [Montseny, 1998][Matignon, 1998], décrite par le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial X(\xi, t)}{\partial t} = -\xi X(\xi, t) + u(t); X(\xi, 0) = 0 \\ y(t) = \int_0^{\infty} \mu(\xi) X(\xi, t) d\xi \end{cases}, \quad (2.36)$$

$\mu(\xi)$ étant défini par :

$$\mu(\xi) = \frac{\xi^n}{\xi^{2n} - 2\lambda_l \xi^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2}, \quad (2.37)$$

la forme générale de la solution de l'équation d'état, soit

$$X(\xi, t) = e^{-t\xi} \otimes u(t), \quad (2.38)$$

se réduisant à $X(\xi, t) = e^{-t\xi}$ dans le cas où $u(t)$ est une impulsion de Dirac unitaire, l'équation de sortie s'exprimant alors par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \frac{\xi^n}{\xi^{2n} - 2\lambda_l \xi^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2} e^{-t\xi} d\xi. \quad (2.39)$$

2.5 – Condition de stabilité d'un système non entier

Précisons ici que l'on entend par stabilité, la stabilité BIBO (bounded input – bounded output) dont une condition suffisante est le respect de l'inéquation :

$$\int_0^{\infty} |\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}| dt = K < +\infty, \quad (2.40)$$

où $H(s)$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t)$, en l'occurrence celle que définit la relation (2.7).

La décomposition modale d'un système non entier (équation (2.15)) permet d'exprimer sa réponse impulsionnelle sous la forme d'une combinaison linéaire de modes propres, soit :

$$h(t) = \sum_{l=1}^L K_l g_{l_{\text{modal}}}(t), \quad (2.41)$$

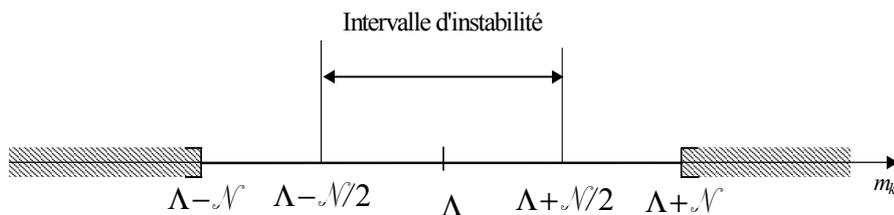
chaque mode propre $g_{l_{\text{modal}}}(t)$ se décomposant en un mode exponentiel et un multimode a périodique conformément à la relation (2.33).

Etant donnée la stabilité du multimode a périodique qu'assure la superposition d'une infinité de modes a périodiques stables [Oustaloup, 1991] (voir également la démonstration par le théorème de Fubini [Matignon, 1996]), une condition nécessaire et suffisante de stabilité portant sur les pôles p_k du système peut être formulée, soit :

$$\Re(p_k) < 0, \quad (2.42)$$

relation qui généralise un résultat bien connu dans le cas entier, à savoir qu'un système est stable si et seulement si la partie réelle de ses pôles est négative.

L'expression analytique des pôles donnée par la relation (2.30) permet alors de définir, des intervalles de stabilité et d'instabilité (figure 2.4) : la présence d'un entier m_k dans l'intervalle $\left[\Lambda - \frac{\mathcal{N}}{2}, \Lambda + \frac{\mathcal{N}}{2}\right]$ génère un pôle instable (c'est-à-dire à partie réelle positive).



$$\begin{cases} \rho_k = \left(|\lambda_l| e^{b\theta_k} \right)^{1/a} \\ \theta_k = \frac{\pi}{\mathcal{N}} (m_k - \Lambda) \\ \Lambda - \mathcal{N} < m_k < \Lambda + \mathcal{N} \end{cases} \quad \begin{cases} \Lambda = -\frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} + \frac{b}{2a\pi} \ln(|\lambda_l|) \\ \mathcal{N} = \frac{a^2 + b^2}{2a} \end{cases}$$

Figure 2.4 - Intervalles de stabilité et d'instabilité des systèmes non entiers complexes

Un théorème de stabilité des systèmes non entiers complexes peut ainsi être énoncé.

Théorème - Soit un système non entier défini par une réalisation irréductible $\{n, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}\}$ de la représentation (2.2) et caractérisé par ses valeurs propres non nulles $\lambda_{l=1, \dots, N_l}$. Alors, en définissant

$$\begin{cases} n = a + ib \\ \Lambda_l = \frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} - \frac{b}{2a\pi} \ln(|\lambda_l|) \\ \mathcal{N} = \frac{a^2 + b^2}{2a} \\ U_l = \left[\Lambda_l - \frac{\mathcal{N}}{2}, \Lambda_l + \frac{\mathcal{N}}{2} \right] \end{cases},$$

le système possède la propriété suivante :

$$\text{stabilité BIBO} \Leftrightarrow \mathbb{Z} \cap U_l = \emptyset, \forall l = 1, \dots, N_l. \quad \blacksquare$$

Remarque - Dans le cas où l'ordre de dérivation n est un réel compris entre 0 et 1, les termes Λ_l et \mathcal{N} se simplifient et l'on retrouve la condition classique de stabilité des systèmes non entiers strictement réels, soit [Matignon, 1996] :

$$|\arg(\lambda_l)| > \frac{n\pi}{2}, \forall l = 1, \dots, N_l. \quad (2.43) \quad \blacksquare$$

2.6 – Simulation d'un système non entier

L'objet de ce paragraphe est de décrire succinctement les différentes méthodes utilisées pour simuler un système non entier. Deux types de méthodes se distinguent par leurs approches différentes. Pour les premières, appelées méthodes directes, l'opérateur de dérivation non entière est directement remplacé par une approximation numérique discrète. Pour les secondes, appelées méthodes indirectes, le système non entier à simuler est approximé par un système entier continu. La simulation est ensuite obtenue par discrétisation du système entier continu.

2.6.1 – Méthodes directes

Quelle que soit la nature de la représentation (représentation d'état, équation différentielle ou fonction de transfert), un système non entier peut toujours être simulé en utilisant les méthodes directes. Celles-ci consistent à remplacer, dans la représentation adoptée, l'opérateur de dérivation non entière par une approximation numérique, afin d'obtenir une équation récurrente directement simulable.

Plusieurs types d'approximations existent, la plus répandue étant celle issue de la définition de Grünwald, soit [Miller et Ross, 1993] :

$$D^n f(Kh) \approx \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n}{k} f((K-k)h), \quad (2.44)$$

où h désigne la période d'échantillonnage.

L'introduction de cette approximation numérique dans l'équation (2.1) conduit à l'équation récurrente [Oustaloup, 1995] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^{n_{a_0}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{a_0}}{k} y((K-k)h) + \frac{a_1}{h^{n_{a_1}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{a_1}}{k} y((K-k)h) + \dots + \frac{a_L}{h^{n_{a_L}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{a_L}}{k} y((K-k)h) = \\ \frac{b_0}{h^{n_{b_0}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_0}}{k} u((K-k)h) + \frac{b_1}{h^{n_{b_1}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_1}}{k} u((K-k)h) + \dots + \frac{b_M}{h^{n_{b_M}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_M}}{k} u((K-k)h), \end{aligned} \quad (2.45)$$

où K est tel que $t = Kh$.

La sortie du système s'obtient alors en isolant le terme $y(Kh)$, obtenu pour $k=0$, soit :

$$y(Kh) = \frac{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y((K-k)h) + \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u((K-k)h)}{\sum_{l=1}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} + \frac{\sum_{l=1}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}{\sum_{l=1}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}. \quad (2.46)$$

La borne supérieure K des sommes portant sur y et u dépendant du temps $t = Kh$, l'équation (2.46) définit une équation récurrente de dimension croissante avec le temps, cette propriété confirmant bien le caractère global de l'opérateur de dérivation non entière.

L'avantage d'une telle approche réside dans sa simplicité de mise en œuvre. Elle est de plus applicable quelles que soient les valeurs des ordres de dérivation, commensurables ou non, réels ou complexes.

Néanmoins, la simulation de l'équation (2.46) requiert, pour chaque pas d'échantillonnage, le calcul de sommes de dimension croissante avec le temps, soit

$$\sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y((K-k)h) \text{ et } \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u((K-k)h).$$

L'implantation d'un tel calcul est donc difficilement envisageable dans le cadre d'une simulation en temps réel.

D'autres approximations de l'opérateur de dérivation non entière peuvent être aussi utilisées.

A titre d'exemple, citons celle issue de l'extension au non entier de l'approximation de Tustin [Tenreiro Machado, 2000], dans laquelle l'opérateur symbolique de dérivation non entière, s^n , est remplacé par l'opérateur discret :

$$s^n \rightarrow \left(\frac{2}{h}\right)^n \left(\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}\right)^n. \quad (2.47)$$

Un autre exemple du même type, issu de l'extension au non entier de l'approximation d'Al-Alaoui [Chen and Moore, 2001], consiste à remplacer l'opérateur s^n par l'opérateur discret :

$$s^n \rightarrow \left(\frac{8}{7h}\right)^n \left(\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}/7}\right)^n. \quad (2.48)$$

L'approximation numérique proprement dite de tels opérateurs discrets s'effectue ensuite soit par développement en fraction continue, soit par développement en série du numérateur et du dénominateur (binôme de Newton).

Plus complexes à mettre en œuvre, ces méthodes s'avèrent néanmoins plus précises que celle fondée sur la définition de Grünwald.

2.6.2 – Méthodes indirectes

Le principe des méthodes indirectes consiste à approximer le système non entier à simuler par un modèle entier continu. Deux méthodes d'approximation peuvent être utilisées. Alors que la première consiste à remplacer l'opérateur symbolique de dérivation non entière par une distribution récursive de zéros et de pôles, le principe de la seconde consiste à exploiter la forme analytique de la réponse impulsionnelle d'un système non entier (équation (2.41)) afin d'en déterminer une approximation par modèle entier.

2.6.2.1 – Approche basée sur une distribution récursive de zéros et de pôles

L'approche basée sur une distributions récursives de zéros et de pôles résulte des travaux d'A. Oustaloup ([Oustaloup, 1995]) sur la synthèse d'un dérivateur non entier borné en fréquence.

Dans une première phase, cette approche consiste à remplacer chaque dérivateur non entier par un *dérivateur non entier borné en fréquence*, soit symboliquement :

$$s^n \rightarrow D(s) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^n, \quad (2.49)$$

où ω_b et ω_h désignent les fréquences transitionnelles basse et haute, n étant l'ordre de dérivation, réel ou complexe.

Dans une seconde phase, l'approche consiste à synthétiser le dérivateur non entier borné en fréquence par une démarche intuitive fondée sur le concept de fractale à travers la récursivité. Sa synthèse repose en effet sur une distribution récursive de zéros et de pôles, soit :

$$D(s) \rightarrow D_N(s) = C_0 \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \right). \quad (2.50)$$

Dans le cas d'un ordre de dérivation complexe, la synthèse est fondée sur une distribution récursive de zéros et de pôles complexes conformément à celle établie dans [Oustaloup *et al.*, 2000].

Dans le cas d'un ordre de dérivation réel, la récursivité des zéros et des pôles réels de synthèse (figure 2.5) se traduit par une distribution des fréquences transitionnelles ω_k et ω'_k conforme à l'ensemble des relations suivantes :

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \alpha\eta > 1 ; \quad (2.51)$$

$$\frac{\omega_k}{\omega'_k} = \alpha ; \quad \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_{k+1}} = \eta ; \quad (2.52)$$

$$n = \frac{\log \alpha}{\log \alpha + \log \eta} . \quad (2.53)$$

Les rapports α et η définis par (2.52) et qui impliquent un rapport constant $\alpha\eta$ entre deux zéros ou deux pôles consécutifs sont appelés *facteurs récurrents*. Pour un ordre de dérivation n donné et un rapport $\mu = \frac{\omega_b}{\omega_h}$ donné entre les fréquences transitionnelles ω_b et ω_h , ces facteurs ne dépendent que du paramètre N , soit :

$$\alpha = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{n/N} \quad (2.54)$$

et

$$\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{(1-n)/N} . \quad (2.55)$$

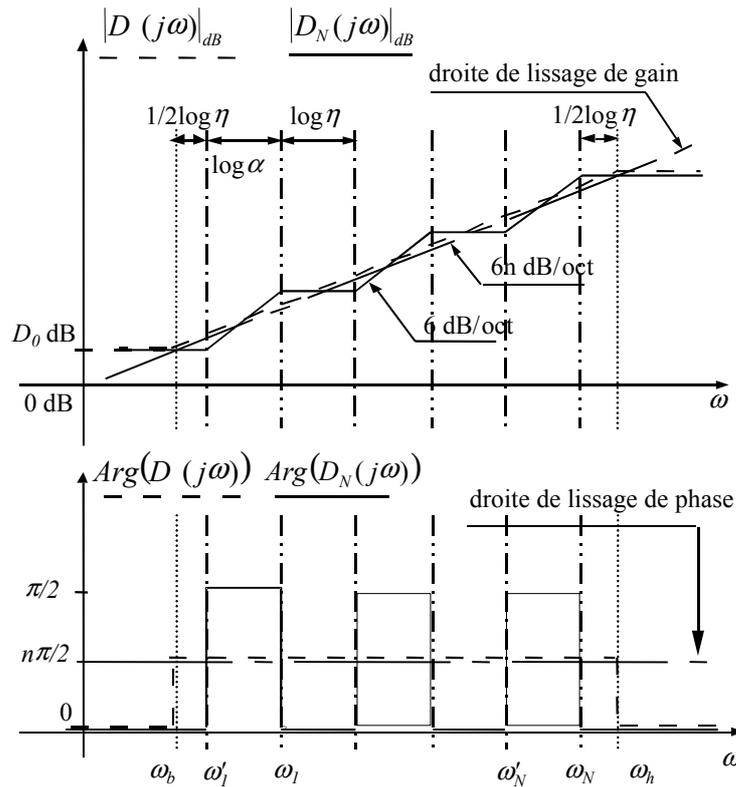


Figure 2.5 - Diagrammes asymptotiques de Bode de $D(s)$ et $D_N(s)$

Une amélioration de cette approche a été proposée par Trigeassou et Lin [Trigeassou et al., 1999] [Lin, 2001] à partir de l'expression d'un *intégrateur non entier borné en fréquence* (figure 2.6), défini par un intégrateur classique présentant un comportement non entier dans une bande de fréquences moyennes, soit symboliquement, dans le cas d'un ordre d'intégration réel compris entre 0 et 1 :

$$\frac{1}{s^n} \rightarrow I(s) = \frac{1}{s} C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{1-n} \quad (2.56)$$

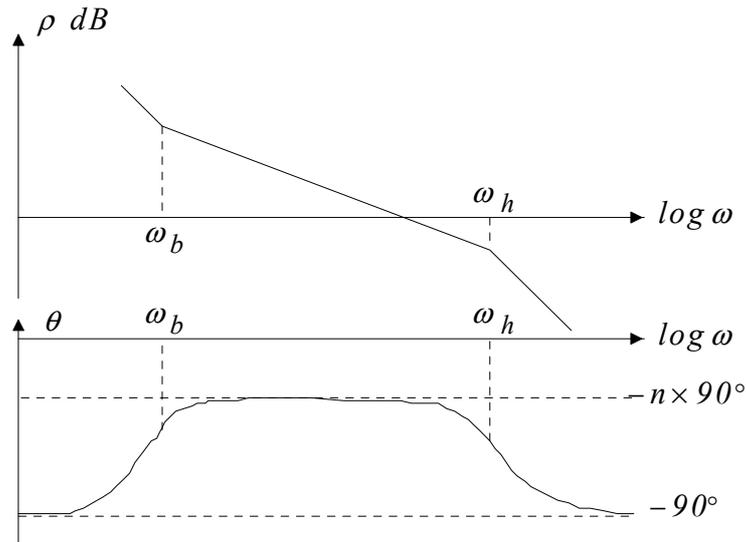


Figure 2.6 - Diagrammes de Bode de $I(s)$

La synthèse d'un tel intégrateur repose sur l'approximation du dérivateur non entier

borné en fréquence $\left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{1-n}$ par la distribution récursive de zéros et de pôles (2.50)). La

figure 2.7 représente l'intégrateur synthétisé sous forme de schéma-bloc.

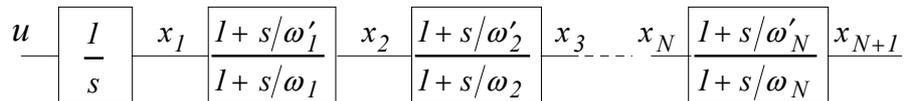


Figure 2.7 – Schéma-bloc de l'intégrateur synthétisé

L'intégrateur non entier ainsi obtenu s'exprime alors sous la forme d'une représentation d'état conforme à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u, (2.57)$$

soit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (2.58)$$

où la matrice \mathbf{A} est définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

et le vecteur \mathbf{b} par :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

La simulation d'un système non entier s'obtient ensuite en introduisant la représentation d'état (2.58) dans une macro-représentation d'état de type (2.2). Pour une description détaillée de la mise en œuvre pratique de cette méthode, le lecteur pourra se référer à [Lin, 2001]. L'approximation obtenue, sous la forme d'une représentation d'état entière de grande dimension, peut ensuite être simulée en utilisant les méthodes classiques de simulation de systèmes entiers.

L'avantage de l'approche qui fait l'objet de ce paragraphe provient de ce qu'elle permet la simulation en temps réel d'un système non entier, et ce contrairement aux approches directes. Néanmoins, la dimension de l'approximation obtenue dépendant directement du nombre d'opérateurs non entiers à synthétiser, un nombre trop important peut s'avérer préjudiciable à l'objectif de simulation en temps réel.

2.6.2.2 – Approche basée sur l'exploitation de la réponse impulsionnelle analytique

Proposée par Heleschewitz et Matignon [Heleschewitz et Matignon, 1998], l'approche basée sur l'exploitation de la réponse impulsionnelle analytique consiste à établir une approximation par modèle entier à partir des réponses impulsionnelles modales analytiques du système non entier à simuler, soit :

$$\begin{aligned}
g_{\text{modal}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^{q_i} &= \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \frac{p_k}{\lambda_l^{q_i}} Q_{q_i-1} \left(\frac{1}{n}, t p_k \right) e^{t p_k} \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} \sum_{k=0}^{q_i-1} (-1)^k \binom{q_i}{k} (\lambda_l)^k x^{n(q_i-k)} \sin[n\pi(q_i-k)]}{[x^{2n} - 2\lambda_l x^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2]^{q_i}} dx,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

où $Q_\kappa(x, y)$ est un polynôme à deux variables défini par :

$$\begin{cases} Q_0(x, y) = x \\ \kappa Q_\kappa(x, y) = (xy + x - y) Q_{\kappa-1}(x, y) + xy \frac{\partial}{\partial y} Q_{\kappa-1}(x, y). \end{cases} \tag{2.62}$$

La décomposition structurelle de la réponse (2.61) mettant en évidence un mode exponentiel et un multimode apériodique, un modèle entier peut ainsi être construit sur la base de cette décomposition, une partie du modèle étant dédié à la simulation du mode exponentiel, l'autre à la simulation du multimode apériodique.

2.6.2.2.1 – Simulation du mode exponentiel

La simulation du mode exponentiel peut être simplement obtenue en élaborant un modèle entier dont les pôles sont ceux du système non entier. Représenté sous forme d'état, ce modèle admet pour expression (dans le cas monovarié) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\text{exp}} = \mathbf{A}_{\text{exp}} \mathbf{x}_{\text{exp}} + \mathbf{B}_{\text{exp}} u \\ y = [1 \quad \dots \quad 1] \mathbf{x}_{\text{exp}} \end{cases}, \tag{2.63}$$

où la matrice \mathbf{A}_{exp} est une matrice diagonale ou de Jordan contenant les pôles du système non entier sur sa diagonale, le vecteur \mathbf{B}_{exp} étant composé des coefficients du terme exponentiel $e^{t p_k}$ (relation (2.61)).

2.6.2.2.2 – Simulation du multimode aperiodique

La simulation du multimode aperiodique repose sur la représentation de ce mode par une représentation diffuse, soit [Heleschewitz et Matignon, 1998] :

$$\begin{cases} \frac{\partial X(\xi, t)}{\partial t} = -\xi X(\xi, t) + u(t); X(\xi, 0) = 0 \\ y(t) = \int_0^\infty \mu(\xi) X(\xi, t) d\xi \end{cases}, \quad (2.64)$$

avec :

$$\mu(\xi) = \frac{\sum_{k=0}^{q_i-1} (-1)^k \binom{q_i}{k} (\lambda_l)^k \xi^{n(q_i-k)} \sin[n\pi(q_i-k)]}{[\xi^{2n} - 2\lambda_l \xi^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2]^{q_i}}. \quad (2.65)$$

La simulation d'une telle représentation s'effectue par la discrétisation de la variable continue ξ qui conduit à l'approximation du multimode aperiodique par la somme discrète :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t\xi} \sum_{k=0}^{q_i-1} (-1)^k \binom{q_i}{k} (\lambda_l)^k \xi^{n(q_i-k)} \sin[n\pi(q_i-k)]}{[\xi^{2n} - 2\lambda_l \xi^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2]^{q_i}} d\xi \approx \sum_{k=1}^K \mu_k e^{-t\xi_k}, \quad (2.66)$$

dans laquelle les ξ_k désignent les points de discrétisation, les μ_k étant calculés en fonction de la méthode de discrétisation de l'intégrale (rectangle ou trapèze par exemple) et de la valeur de la fonction continue $\mu(\xi)$ en $\xi = \xi_k$.

L'approximation obtenue s'exprime ainsi par un modèle entier sous forme modale, chaque mode étant caractérisé par un pôle ξ_k et un coefficient modal μ_k . La représentation d'état d'un tel modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\text{multimode}} = \mathbf{A}_{\text{multimode}} \mathbf{x}_{\text{multimode}} + \mathbf{B}_{\text{multimode}} u \\ y = [1 \quad \dots \quad 1] \mathbf{x}_{\text{multimode}} \end{cases}, \quad (2.67)$$

où $\mathbf{A}_{\text{multimode}}$ est une matrice diagonale contenant l'ensemble des pôles ξ_k , $\mathbf{B}_{\text{multimode}}$ étant composé des coefficients modaux.

2.7 – Exemples d'étude

Deux exemples d'étude sont présentés dans ce paragraphe.

Le premier traite de la modélisation, par représentation d'état non entière réelle, du comportement en roulis d'un train de véhicule équipé de la suspension CRONE passive.

Le second est consacré à l'étude d'un exemple académique de système non entier complexe.

2.7.1 – Train de véhicule équipée de la suspension CRONE passive

Le principe de la suspension CRONE passive consiste à remplacer le ressort et l'amortisseur traditionnels par un dispositif hydropneumatique composé de cellules élémentaires ressort-amortisseur (sphères Citroën) dont les constantes de temps sont distribuées de manière à obtenir un comportement local d'ordre non entier [Oustaloup, 1991], soit :

$$C(s) = C_0 \frac{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m\right)}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m\right)}, \quad (2.68)$$

un tel comportement permettant d'obtenir la robustesse du facteur d'amortissement vis-à-vis des variations de la masse suspendue du véhicule. Le lecteur est renvoyé à [Moreau, 1995] et [Ramus-Serment, 2001] pour une description détaillée de l'approche généralisée en matière d'isolation vibratoire.

2.7.1.1 – Equation différentielle non entière

Le modèle à 4 degrés de liberté d'un train de véhicule est représenté par la figure 2.8. Il est caractérisé par la présence de 2 modes dont les dynamiques sont découplées [Moreau, 1995] :

- le premier est le mode propre de caisse dont la fréquence de coupure est environ de 1 Hz ;
- le deuxième est le mode propre de roue dont la fréquence de coupure est environ de 18 Hz.

La dynamique de roue étant beaucoup plus rapide que celle de la caisse (en l'occurrence un facteur dix-huit), la suite de l'étude fait l'objet d'une hypothèse simplificatrice : les élongations du profil routier sont directement transmises à la suspension.

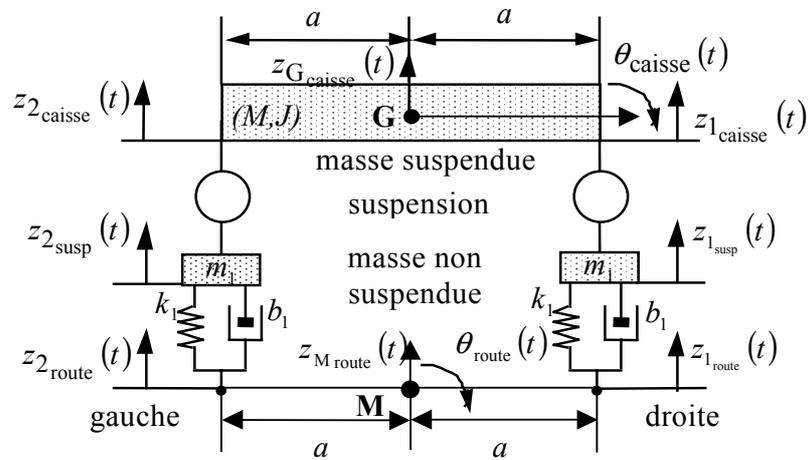


Figure 2.8 – Modèle d'un train de véhicule à 4 degrés de liberté

Les variables suivantes sont utilisées.

- Pour la caisse

$z_{Gcaisse} = \frac{z_{1caisse} + z_{2caisse}}{2}$: position verticale relative (par rapport à la position d'équilibre) du centre d'inertie de la caisse ;

$\theta_{caisse} = \frac{z_{2caisse} - z_{1caisse}}{2a}$: angle de roulis relatif de la caisse (sous l'hypothèse de petits déplacements).

- Pour la route

$z_{Mroute} = \frac{z_{1route} + z_{2route}}{2}$: élongation verticale moyenne du profil routier ;

$\theta_{route} = \frac{z_{2route} - z_{1route}}{2a}$: angle de roulis du profil routier (sous l'hypothèse de petites variations).

- Pour la suspension

$F_{G_{\text{susp}}} = F_1 + F_2$: effort relatif développé par la suspension sur la caisse dont la masse est ramenée en son centre d'inertie G ;

$\Gamma_{\text{susp}} = -aF_1 + aF_2$: couple relatif développé par la suspension sur la caisse (en l'absence de barre anti-roulis).

Par application du principe fondamental de la dynamique, l'équation symbolique qui régit le mouvement en roulis de la caisse autour de sa position d'équilibre s'écrit :

$$Js^2 \theta_{\text{caisse}}(s) = \Gamma_{\text{susp}}(s) + \Gamma_{\text{ext}}(s), \quad (2.69)$$

J et $\Gamma_{\text{ext}}(s)$ désignant respectivement le moment d'inertie de la caisse et un couple extérieur perturbateur qui lui est appliqué.

En portant l'expression de $\Gamma_{\text{susp}}(s)$ dans l'équation (2.69), il vient :

$$Js^2 \theta_{\text{caisse}}(s) = 2a^2 C(s)(\theta_{\text{route}}(s) - \theta_{\text{caisse}}(s)) + \Gamma_{\text{ext}}(s), \quad (2.70)$$

soit :

$$(Js^2 + 2a^2 C(s))\theta_{\text{caisse}}(s) = 2a^2 C(s)\theta_{\text{route}}(s) + \Gamma_{\text{ext}}(s), \quad (2.71)$$

ou, compte tenu de l'expression de $C(s)$:

$$Js^2 \theta_{\text{caisse}}(s) + 2a^2 C_0 \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m}{1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m} \theta_{\text{caisse}}(s) = 2a^2 C_0 \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m}{1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m} \theta_{\text{route}}(s) + \Gamma_{\text{ext}}(s), \quad (2.72)$$

ou bien :

$$Js^2 \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m\right) \theta_{\text{caisse}}(s) + 2a^2 C_0 \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m\right) \theta_{\text{caisse}}(s) = 2a^2 C_0 \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m\right) \theta_{\text{route}}(s) + \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m\right) \Gamma_{\text{ext}}(s), \quad (2.73)$$

équation symbolique dont la traduction temporelle détermine l'équation différentielle non entière régissant le mouvement en roulis :

$$\begin{aligned} \frac{J}{(\omega_h)^m} D^{m+2} \theta_{\text{caisse}}(t) + J D^2 \theta_{\text{caisse}}(t) + \frac{2a^2 C_0}{(\omega_b)^m} D^m \theta_{\text{caisse}}(t) + 2a^2 C_0 \theta_{\text{caisse}}(t) = \\ \frac{2a^2 C_0}{(\omega_b)^m} D^m \theta_{\text{route}}(t) + 2a^2 C_0 \theta_{\text{route}}(t) + \frac{1}{(\omega_h)^m} D^m \Gamma_{\text{ext}}(t) + \Gamma_{\text{ext}}(t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.7.1.2 – Représentation d'état non entière

La représentation d'état non entière équivalente l'équation différentielle non entière (2.74), s'obtient conformément au paragraphe 2.2.3, en exprimant l'ensemble des ordres de dérivation comme le produit d'un nombre entier par un facteur commun n .

La valeur numérique de l'ordre de dérivation de la suspension CRONE passive étant voisin de $2/3$, le facteur commun à tous les ordres de dérivation de l'équation (2.74) est $n = 2/3$. La représentation d'état non entière admet alors pour expression :

$$\begin{cases} D^{2/3} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2a^2 C_0 (\omega_h)^{2/3}}{J} & -\frac{2a^2 C_0 (\omega_h)^{2/3}}{J} & 0 & -(\omega_h)^{2/3} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2a^2 C_0 (\omega_h)^{2/3}}{J} & \frac{1}{J} \\ \frac{2a^2 C_0 (\omega_h)^{2/3}}{J} \left(1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{2/3} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{\text{route}}(t) \\ \Gamma_{\text{ext}}(t) \end{bmatrix} \\ \theta_{\text{caisse}}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.75)$$

2.7.1.3 – Décomposition modale

Correspondant à un train arrière de véhicule, les valeurs numériques suivantes sont utilisées dans la suite des calculs :

– pour la suspension :

$$\begin{cases} \omega_b = 0.1 \text{ rad/s}; \\ \omega_h = 200 \text{ rad/s}; \\ C_0 = 560; \end{cases} \quad (2.76)$$

– pour la caisse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{demi - largeur : } a = 0.7 \text{ m ;} \\ \text{moment d'inertie : } J = Mr^2 \text{ ;} \\ \text{rayon de giration : } r = 0.7 \text{ m ;} \\ \text{masse nominale : } M_{\text{nom}} = 600 \text{ kg ;} \\ \text{masse maximale : } M_{\text{max}} = 1000 \text{ kg.} \end{array} \right. \quad (2.77)$$

La décomposition modale de la représentation (2.75) s'obtient conformément au paragraphe 2.3, en diagonalisant la matrice d'évolution, soit pour la masse nominale :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{2/3} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -34.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.232+2.93j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.232-2.93j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.216 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6019 & 3.03110^{-4} \\ 14.7-2.76j & 1.05610^{-3}-2.3310^{-3}j \\ 14.7+2.76j & 1.05610^{-3}+2.3310^{-3}j \\ 1.9110^{-3} & 3.8910^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{\text{route}}(t) \\ \Gamma_{\text{ext}}(t) \end{bmatrix} \\ \theta_{\text{caisse}}(t) = [2.46710^{-5} \quad 0.0189-0.073j \quad 0.0189+0.073j \quad 0.977] \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \quad (2.78)$$

représentation qui fait apparaître quatre modes propres associés à quatre valeurs propres, deux réelles et deux complexes conjuguées. La figure 2.9 représente la localisation de ces valeurs propres pour 5 valeurs de M comprises entre 600 kg et 1000 kg.

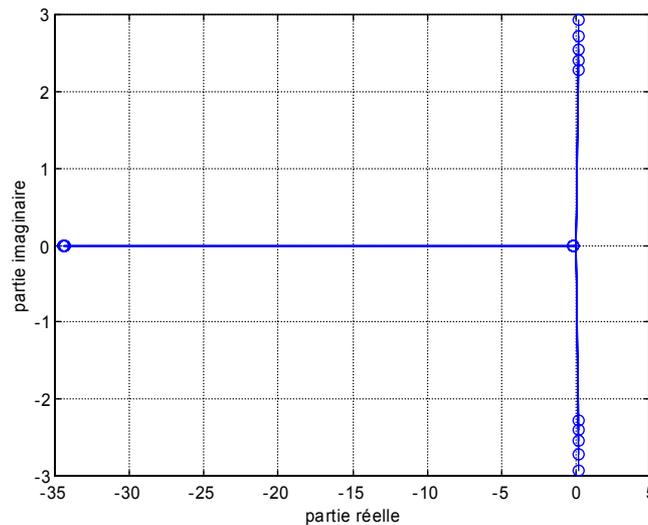


Figure 2.9 – Illustration des valeurs propres pour différentes valeurs de M :
 $M=600 \text{ kg ; } 700 \text{ kg ; } 800 \text{ kg ; } 900 \text{ kg ; } 1000 \text{ kg}$
(le module des valeurs propres décroît lorsque la masse augmente)

La détermination des pôles, effectué conformément à la procédure du paragraphe 2.4.1, conduit à une paire de pôles complexes conjugués associée à la paire de valeurs propres complexes conjuguées. La figure 2.10 les représente pour 5 valeurs de M comprises entre 600 kg et 1000 kg.

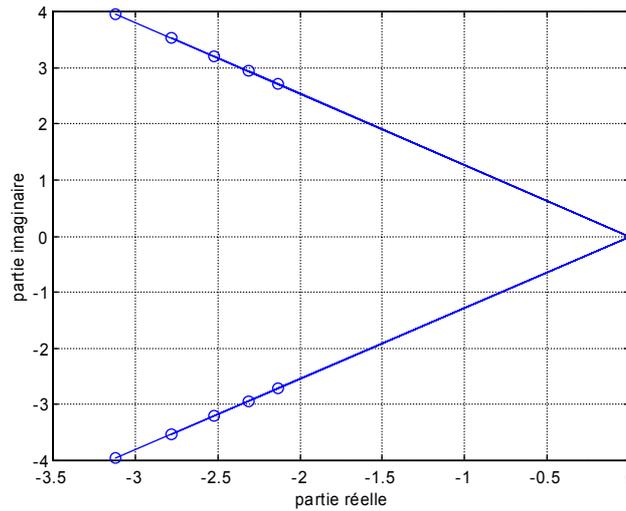


Figure 2.10 – Illustration des pôles complexes conjugués pour différentes valeurs de M :
 $M=600\text{ kg}$; 700 kg ; 800 kg ; 900 kg ; 1000 kg
 (le module des pôles décroît lorsque la masse augmente)

L'analyse des figures 2.9 et 2.10 révèle que le déplacement des valeurs propres et des pôles dû aux variations de la masse M s'effectue à argument constant. Compte tenu de l'équation (2.35) qui exprime analytiquement la réponse impulsionnelle modale d'un système non entier, soit

$$g_{\text{modal}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^n - \lambda_l}\right) = \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \frac{p_k}{n\lambda_l} e^{tp_k} + \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^n e^{-tx}}{x^{2n} - 2\lambda_l x^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2} dx, \quad (2.79)$$

l'invariance de l'argument des pôles traduit un résultat remarquable en ce sens qu'il démontre la robustesse du degré de stabilité du comportement en roulis vis-à-vis des variations de la masse suspendue M .

La figure 2.11 représente les réponses indicielles unitaires du transfert $\theta_{\text{caisse}}(s)/\theta_{\text{route}}(s)$ obtenues pour 5 valeurs de M comprises entre 600 kg et 1000 kg. L'invariance du premier dépassement confirme la robustesse du degré de stabilité aux variations de M .

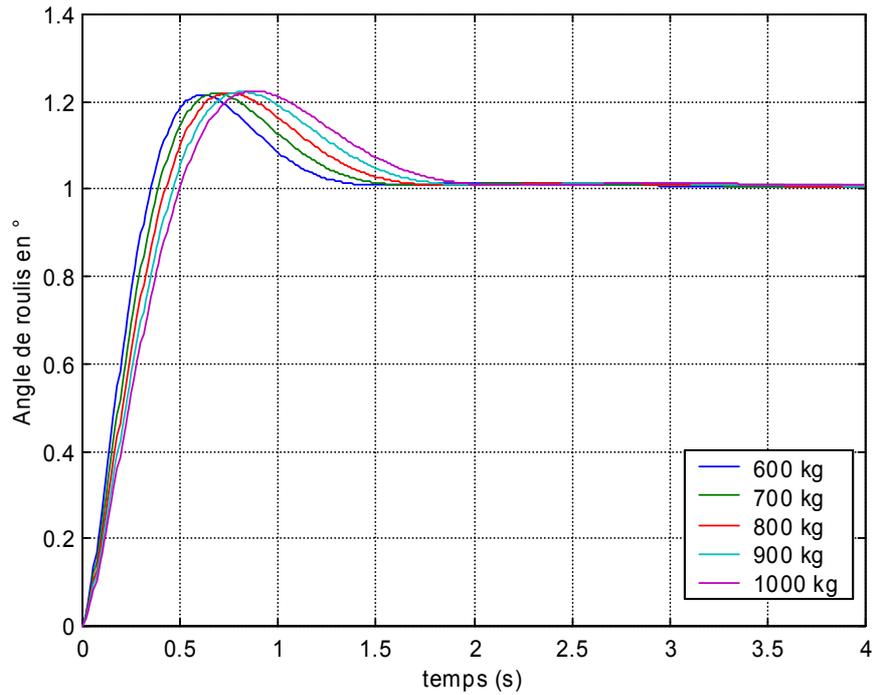


Figure 2.11 – Réponses indicielles du transfert $\theta_{\text{voit}}(s)/\theta_{\text{route}}(s)$ pour différentes valeurs de M : $M=600$ kg ; 700 kg ; 800 kg ; 900 kg ; 1000 kg

2.7.2 – Système non entier complexe

Ce paragraphe est consacré à l'étude d'un exemple académique de système non entier complexe.

Soit un système monovariante dont on considère comme sortie, $\mathcal{R}e(y(t))$, $y(t)$ étant la solution de l'équation différentielle non entière complexe :

$$D^{1+0.4i}y(t) - D^{0.5+0.2i}y(t) + y(t) = D^{0.5+0.2i}u(t) + u(t). \quad (2.80)$$

Les ordres de dérivation de l'équation (2.80) étant commensurables (le facteur commun à tous les ordres étant $n=0.5+0.2i$), le système peut être décrit par une représentation d'état non entière complexe, soit :

$$\begin{cases} D^{0.5+0.2i} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-i\pi/3} \\ e^{i\pi/3} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.81)$$

Conformément au paragraphe 2.3, un changement de base par transformation semblable permet d'obtenir la forme diagonale de cette représentation :

$$\begin{cases} D^{0.5+0.2i} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-i\pi/3} \\ e^{i\pi/3} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.82)$$

La décomposition modale ainsi obtenue conduit donc à l'étude de deux modes propres générés par la paire de valeurs propres conjuguées ($e^{i\pi/3}$, $e^{-i\pi/3}$). En appliquant le formalisme (2.30), les pôles du système s'expriment par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = e^{i\pi/3} &\rightarrow p_1 = e^{20\pi/87} e^{i50\pi/87} \\ \lambda_2 = e^{-i\pi/3} &\rightarrow p_2 = e^{-20\pi/87} e^{-i50\pi/87} \end{aligned} \quad (2.83)$$

La relation (2.83) met en évidence une propriété remarquable des pôles d'un système non entier complexe. Il s'avère en effet que les pôles générés par la paire de valeurs propres complexes conjuguées ($e^{i\pi/3}$, $e^{-i\pi/3}$) ne sont pas complexes conjugués car de modules différents. Cette propriété exclusivement liée à la nature complexe de l'ordre de dérivation traduit un résultat remarquable en ce sens que la paire de valeurs propres ($e^{i\pi/3}$, $e^{-i\pi/3}$) génère deux dynamiques oscillantes différentes, et ce contrairement au cas entier ou non entier strictement réel dans lequel une paire de valeurs propres complexes conjuguées ne peut générer qu'une seule dynamique. En effet, le pôle p_1 étant de module supérieur à celui du pôle p_2 , le comportement dynamique oscillant généré par la valeur propre λ_1 est plus rapide que celui généré par la valeur propre λ_2 . Cette caractéristique, spécifique des systèmes non entiers complexes, est intéressante dans le sens où elle permet de modéliser deux dynamiques différentes par une paire de valeurs propres.

Comme le montre la figure 2.12, les pôles du système sont stables puisque aucun nombre entier n'est présent dans l'intervalle d'instabilité.

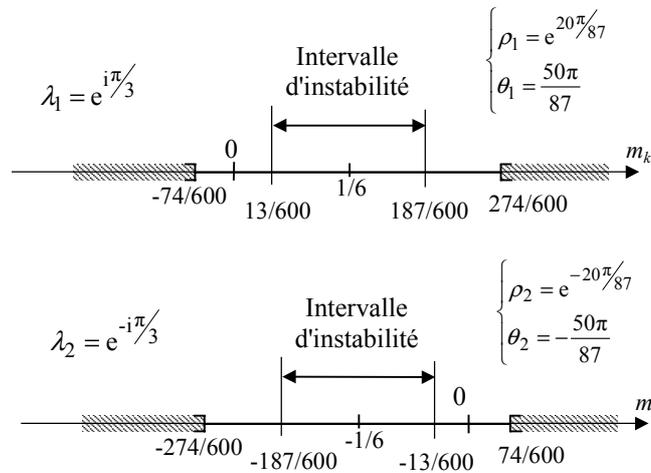


Figure 2.12 - Détermination des pôles

La figure 2.13 représente les réponses indicielles unitaires modales du système générées par les deux valeurs propres $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$. La figure 2.14 représente la réponse indicielle globale du système.

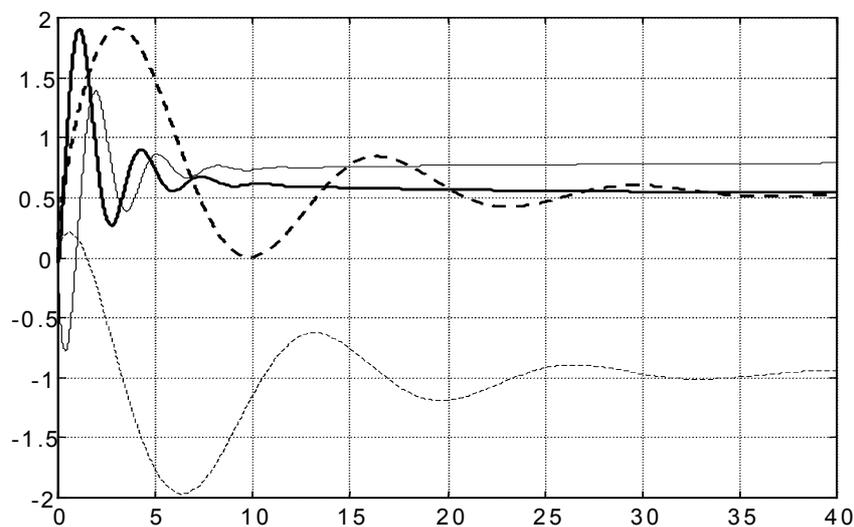


Figure 2.13 - Réponses indicielles modales

traits gras : parties réelles

traits fins : parties imaginaires

— : de la réponse générée par λ_1

-- : de la réponse générée par λ_2 ;

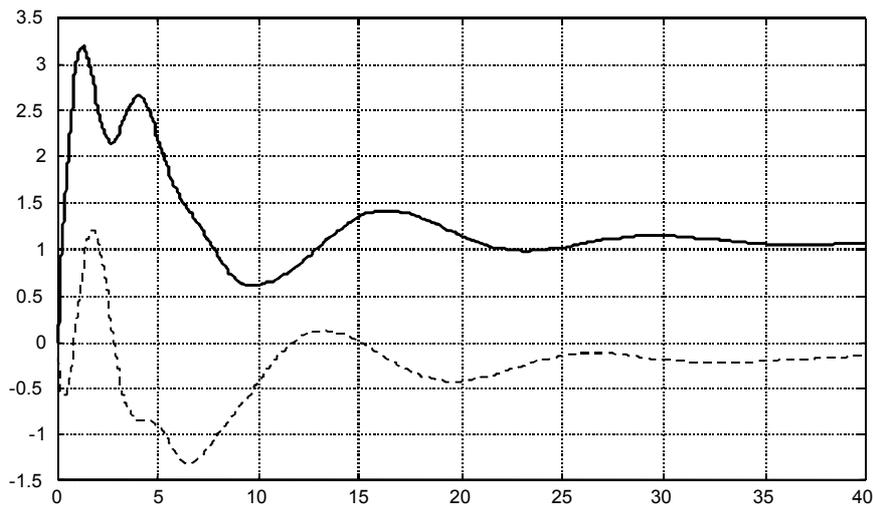


Figure 2.14 - Réponse indicielle globale

— : partie réelle

-- : partie imaginaire

En conclusion, cette étude révèle une propriété remarquable, spécifique de la nature complexe de l'ordre de dérivation. Il s'avère en effet que l'extension, dans une représentation d'état, de l'ordre de dérivation au corps des complexes, permet la modélisation de plusieurs dynamiques oscillantes par à un nombre réduit de paramètres.

Cette caractéristique ouvre sans aucun doute des perspectives intéressantes en matière d'identification. L'objectif de toute identification étant en effet de prendre en compte le plus fidèlement possible l'ensemble des dynamiques d'un système au moyen d'un nombre réduit de paramètres, l'extension de l'ordre de dérivation au corps des complexes devrait permettre de réduire le nombre de paramètres des modèles d'identification.

Chapitre 3

La dérivation non entière en modélisation des phénomènes de diffusion : application aux systèmes thermiques

3.1 – Introduction

Alors que la représentation et l'analyse mathématiques des systèmes non entiers a fait l'objet des développements du chapitre précédent, le présent chapitre traite de l'utilisation de l'opérateur de dérivation non entière dans la modélisation des phénomènes de diffusion, le domaine de la thermique retenu comme champ applicatif ne revêtant aucun caractère réducteur sachant que les développements qui s'y rapportent s'appliquent tout aussi bien aux autres phénomènes diffusifs.

L'étude du lien entre l'opérateur de dérivation non entière et les phénomènes de diffusion a déjà fait l'objet de nombreuses publications. A titre d'exemple, citons l'ouvrage de Oldham et Spanier [Oldham et Spanier, 1974] dans lequel les auteurs établissent analytiquement, pour certaines géométries, le passage de l'équation de la chaleur à une équation différentielle non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.

Ce chapitre propose l'étude du transfert de chaleur dans deux types de milieux : les milieux semi-infinis puis les milieux finis. Dans chacun des cas, trois sortes de géométries sont considérées : plane, cylindrique et sphérique. L'établissement analytique des transmittances correspondantes et leurs approximations sous la forme de transmittances entières et non entières constitue la contribution majeure de ce chapitre, la comparaison des approximations obtenues faisant par ailleurs l'objet d'une attention particulière.

3.2 – Transfert de chaleur dans les milieux semi-infinis

Ce paragraphe développe l'étude du transfert de chaleur dans les milieux semi-infinis plan, cylindrique et sphérique. Dans tous les cas, le milieu est considéré homogène, de conductivité λ , de diffusivité α et de température initiale nulle en tout point. Il est soumis à une densité de flux $\varphi(t)$ sur la surface normale sortante \vec{n} . Le transfert de chaleur 1D est régi par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^p \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) , \quad 0 < r < \infty , \quad t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \varphi(t) , \quad r = 0 , \quad t > 0 \\ T(r,t) = 0 , \quad 0 \leq r < \infty , \quad t = 0 \end{array} \right. , \quad (3.1)$$

système dans lequel p est une variable caractérisant le type de géométrie considéré, à savoir :

- $p = 0$ pour une géométrie plane ;
- $p = 1$ pour une géométrie cylindrique ;
- $p = 2$ pour une géométrie sphérique.

Pour chacune de ces géométries, les pertes au niveau de la surface d'application du flux sont considérées nulles.

3.2.1 – Milieu semi-infini plan

L'étude d'un milieu semi-infini plan correspond au cas où $p = 0$ et $r = x$, x désignant l'abscisse du point de mesure de température à l'intérieur du milieu (figure 3.1). Le système (3.1) se simplifie alors conformément à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} , \quad 0 < x < \infty , \quad t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \varphi(t) , \quad x = 0 , \quad t > 0 \\ T(x,t) = 0 , \quad 0 \leq x < \infty , \quad t = 0 \end{array} \right. . \quad (3.2)$$

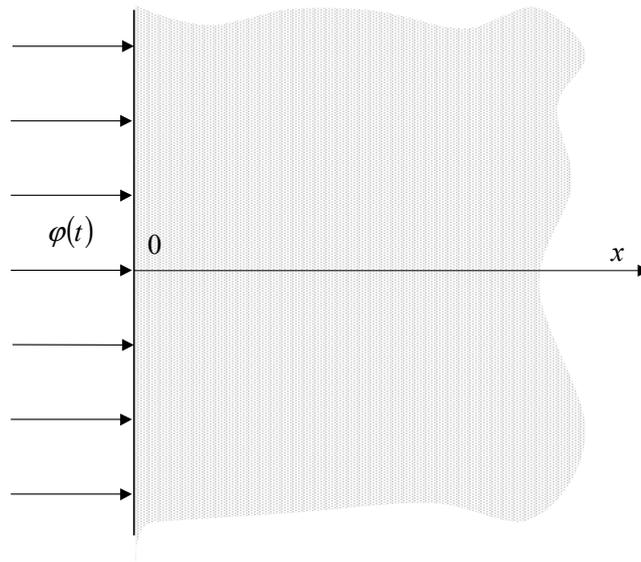


Figure 3.1 – Mur plan semi-infini

La transformation de Laplace de la première équation conduit à :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(x,s) = 0 \quad \text{où } \bar{T}(x,s) = \mathcal{L}\{T(x,t)\}, \quad (3.3)$$

relation qui définit une équation différentielle par rapport à la variable x , dont la solution est immédiate et s'exprime par :

$$\bar{T}(x,s) = K_1(s) e^{-x\sqrt{s/\alpha}} + K_2(s) e^{x\sqrt{s/\alpha}}. \quad (3.4)$$

La prise en compte des conditions aux limites dictées par les deux autres équations du système (3.1) permet d'établir un transfert de la forme :

$$H(x,s) = \frac{\bar{T}(x,s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p}} e^{-x\sqrt{s/\alpha}}. \quad (3.5)$$

Deux cas d'étude méritent d'être distingués.

Le premier, caractérisé par $x=0$, correspond à l'étude de l'impédance thermique du milieu, soit :

$$H(0,s) = \frac{\bar{T}(0,s)}{\bar{\varphi}(s)}. \quad (3.6)$$

Le second correspond à l'étude du transfert défini pour tout $x > 0$, soit :

$$H(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{\varphi}(s)}. \quad (3.7)$$

3.2.1.1 – Impédance thermique du milieu ($x = 0$)

Dans le cas où $x = 0$, le transfert (3.5) se réduit à :

$$H(0, s) = \frac{\bar{T}(0, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho C_p}}, \quad (3.8)$$

qui, dans le domaine temporel (les conditions initiales étant nulles), se traduit par :

$$T(0, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} I^{0.5} \varphi(t), \quad (3.9)$$

relation qui exprime un résultat maintenant bien connu à travers lequel l'impédance thermique d'un milieu semi-infini plan est définie par un intégrateur d'ordre 0.5. Permettant d'exprimer analytiquement la température $T(0, t)$ uniquement en fonction de l'intégrale d'ordre 0.5 du flux $\varphi(t)$, ce résultat met bien en avant dans ce domaine la propriété de compacité que présente l'opérateur de dérivation non entière. Il est vrai que l'impédance résultant d'une discrétisation spatio-temporelle (méthode des éléments finis par exemple) se présente sous la forme d'un modèle entier de très grande dimension.

3.2.1.2 – Transfert général ($x > 0$)

Dans le cas où la mesure de température s'effectue à l'intérieur du milieu, soit $x > 0$, le transfert $H(x, s)$ est donné par la relation (3.5), soit :

$$H(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho C_p}} e^{-x \sqrt{s/\alpha}}. \quad (3.10)$$

Dans le but d'approximer $H(x, s)$ par un développement en série, il convient d'exprimer la fonction exponentielle sous la forme :

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \quad (3.11)$$

Deux types de développement en série sont alors possibles.

Le premier, basé sur le développement direct de $e^{-x\sqrt{s/\alpha}}$, est donné par :

$$\tilde{H}_{1,K}(x,s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \sum_{k=0}^K a_k s^{(k-1)/2} \text{ avec } a_k = (-1)^k \frac{x^k}{\alpha^{k/2} k!}, \quad (3.12)$$

soit, dans le domaine temporel :

$$D^{0.5}T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \sum_{k=0}^K a_k D^{k/2} \varphi(t) \text{ avec } a_k = (-1)^k \frac{x^k}{\alpha^{k/2} k!}. \quad (3.13)$$

La réécriture de (3.10) conformément à l'approximation de Padé d'un retard pur, soit

$$H(x,s) = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho C_p}} e^{-x\sqrt{s/\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{e^{-\frac{x}{2}\sqrt{s/\alpha}}}{e^{\frac{x}{2}\sqrt{s/\alpha}}} \quad (3.14)$$

permet d'obtenir le second développement :

$$\tilde{H}_{2,K}(x,s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{\sum_{k=0}^K a'_k s^{k/2}}{\sum_{k=0}^K |a'_k| s^{(k+1)/2}} \text{ avec } a'_k = (-1)^k \frac{(x/2)^k}{\alpha^{k/2} k!}, \quad (3.15)$$

soit, dans le domaine temporel :

$$\sum_{k=0}^K |a'_k| D^{(k+1)/2} T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \sum_{k=0}^K a'_k D^{k/2} \varphi(t) \text{ avec } a'_k = (-1)^k \frac{(x/2)^k}{\alpha^{k/2} k!}. \quad (3.16)$$

L'avantage du second développement réside dans 2 propriétés fondamentales :

- $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ est une fonction strictement propre alors que $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$ ne l'est pas ;

- tendant vers zéro plus rapidement que la suite a_k , la suite a_k' (dont la "raison" est deux fois plus faible) assure une convergence plus rapide de $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ vers $H(x,s)$.

La figure 3.2 représente les diagrammes de Bode des transferts $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ pour $x = 1\text{mm}$ et $K = 5$.

La figure 3.3 représente les diagrammes de Bode des transferts $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ pour $x = 1\text{cm}$ et $K = 10$. La figure 3.4 représente les variations de a_k et a_k' en fonction de k pour les mêmes valeurs de x et de K ;

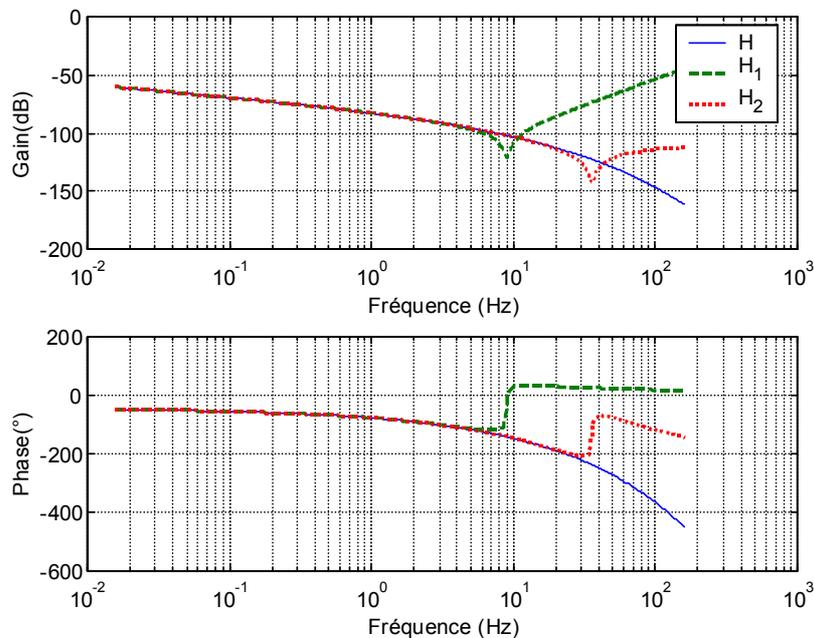


Figure 3.2 – Diagrammes de Bode de $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ pour $x = 1\text{mm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho C_p = 10^6 \text{JK}^{-1}\text{m}^{-3}$ et $\alpha = 10^{-5} \text{m}^2\text{s}^{-1}$)

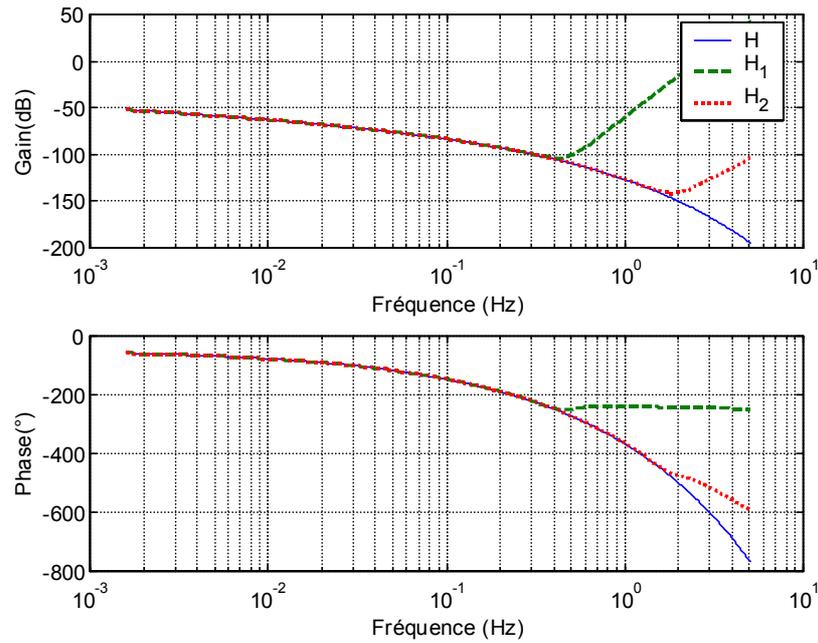


Figure 3.3 – Diagrammes de Bode de $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$
 pour $x = 1\text{cm}$ et $K = 10$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho C_p = 10^6 \text{JK}^{-1}\text{m}^{-3}$ et $\alpha = 10^{-5} \text{m}^2\text{s}^{-1}$)

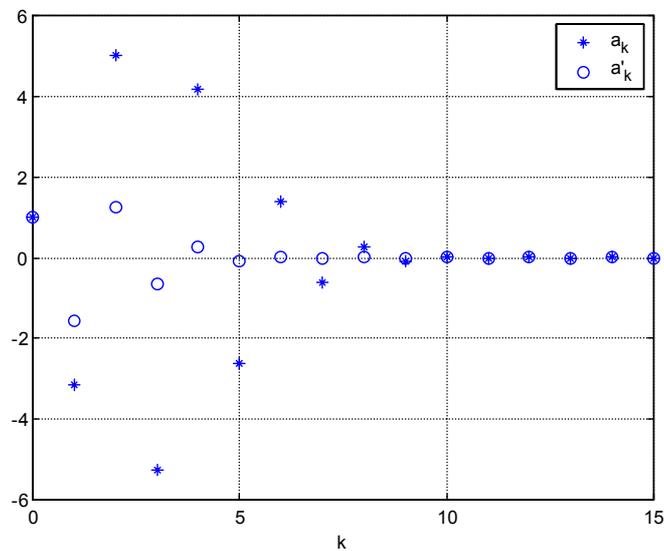


Figure 3.4 – Variations de a_k et a'_k en fonction de k pour $x = 1\text{cm}$ et $K = 10$
 ($\alpha = 10^{-5} \text{m}^2\text{s}^{-1}$)

Confirmant que l'approximation du transfert $H(x,s)$ par le modèle $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ est meilleure que celle obtenue par le modèle $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$, l'analyse de ces 3 figures révèle

également que plus la mesure de température s'effectue loin de la surface d'application du flux, plus le nombre de paramètres nécessaire à une bonne approximation est important, la "raison" de la suite a_k' augmentant en effet avec x .

Remarque importante

La considération, comme sollicitation d'entrée, non plus du flux $\varphi(t)$ mais d'une température imposée en $x=0$, soit $T(0,t)$, conduit à des approximations du transfert $G(x,s) = \frac{\bar{T}(x,s)}{\bar{T}(0,s)}$ par des modèles non entiers de même structure que ceux obtenus à partir de $H(x,s) = \frac{\bar{T}(x,s)}{\bar{\varphi}(s)}$. Comme pour $H(x,s)$, le transfert $G(x,s)$ se traduit alors, dans le domaine temporel, par une équation différentielle non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.



3.2.2 – Milieu semi-infini cylindrique

L'étude d'un milieu semi-infini cylindrique correspond au cas où $p = 1$. Le système considéré (figure 3.5) est un milieu semi-infini présentant une cavité interne cylindrique de rayon intérieur R et de longueur l . La température initiale est supposée nulle en tout point. La surface de la cavité est soumise au flux de chaleur $\phi(t)$.

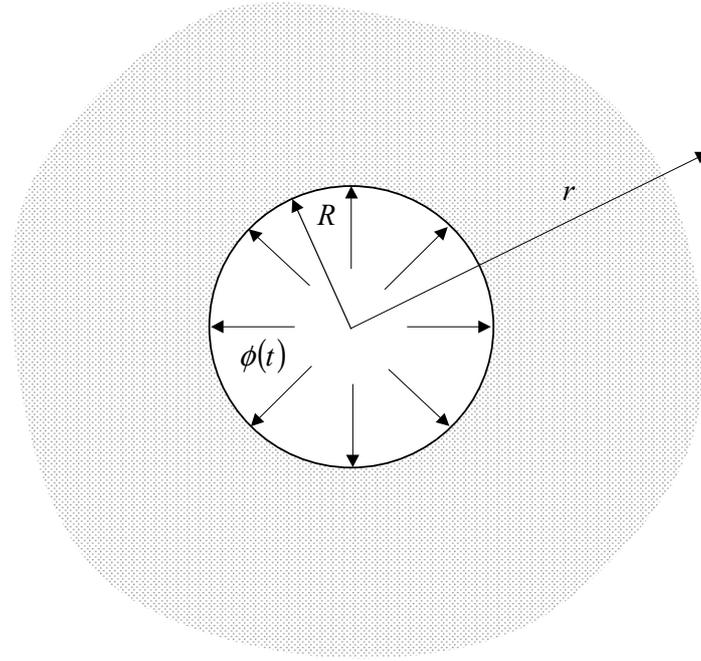


Figure 3.5 – Milieu semi-infini de cavité interne cylindrique de rayon R et de longueur l

Conformément aux développements du paragraphe précédent, la transformation de Laplace du système (3.1) permet de déterminer le transfert reliant $\bar{T}(r, s)$ à $\bar{\phi}(s)$:

$$H(r, s) = \frac{\bar{T}(r, s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{\sqrt{\alpha} K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{s}\right)}{2\pi R l \lambda \sqrt{s} K_1\left(\frac{R}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{s}\right)}, \quad (3.17)$$

où K_0 et K_1 sont les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce d'ordres 0 et 1, telles que :

$$K_k(z) = \int_0^{\pi} e^{-z \cosh(t)} \cosh(kt) dt, \quad (3.18)$$

dont le développement au premier ordre conduit à la fonction de transfert réduite :

$$\tilde{H}(r, s) = \frac{b_0 \sqrt{s} - 1}{a_0 \sqrt{s} + a_1 s}, \quad (3.19)$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \frac{3\pi\lambda l}{4} b_0 \\ a_1 = \frac{16\pi\lambda Rr}{\alpha} \\ b_0 = \frac{8r}{\sqrt{\alpha}} \end{cases} \quad (3.20)$$

Comme dans le cas d'un plan semi-infini, la traduction temporelle de l'équation (3.19) est une équation différentielle dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5, soit :

$$a_0 D^{0.5} T(r,t) + a_1 D^1 T(r,t) = b_0 D^{0.5} \phi(t) - \phi(t). \quad (3.21)$$

La figure 3.6 représente les diagrammes de Bode des transferts $H(r,s)$ et $\tilde{H}(r,s)$ pour $r = R = 1\text{cm}$ et $l = 1\text{m}$. La qualité de l'approximation obtenue confirme la capacité de l'opérateur de dérivation non entière de modéliser les phénomènes de diffusion avec un nombre réduit de paramètres.

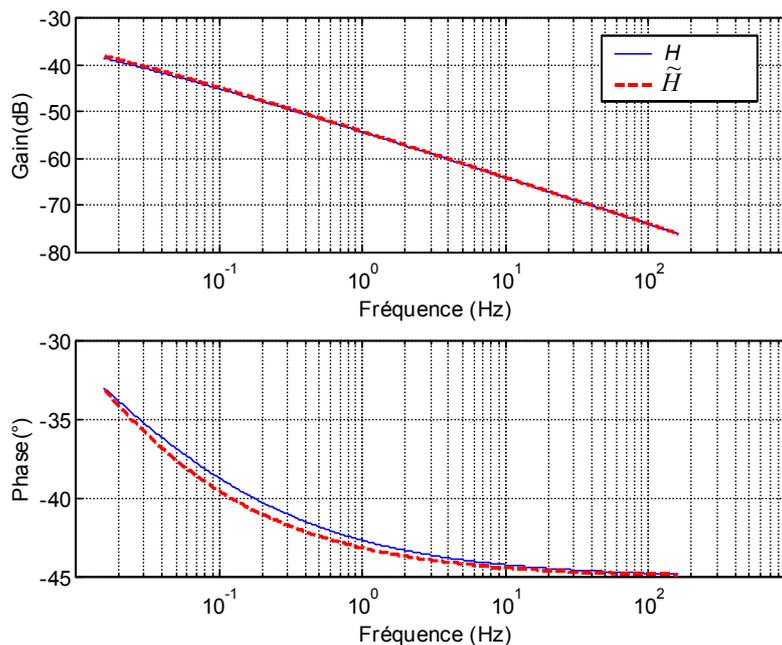


Figure 3.6 – Diagrammes de Bode de $H(r,s)$, $\tilde{H}(r,s)$

pour $r = R = 1\text{cm}$ et $l = 1\text{m}$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$)

3.2.3 – Milieu semi-infini sphérique

L'étude d'un milieu semi-infini sphérique au cas où $p = 2$. Le système considéré (figure 3.7) est un milieu semi-infini présentant une cavité interne sphérique de rayon R . La surface de la cavité est soumise au flux de chaleur $\phi(t)$. Conformément au paragraphe 3.2.1, la transformation de Laplace du système (3.1) détermine le transfert entre $\bar{T}(r, s)$ et $\bar{\phi}(s)$:

$$H(r, s) = \frac{\bar{T}(r, s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{\exp\left(-\frac{r\sqrt{s}}{\sqrt{\alpha}}\right)}{4\pi r \lambda \left(\frac{R\sqrt{s}}{\sqrt{\alpha}} + 1\right) \exp\left(-\frac{R\sqrt{s}}{\sqrt{\alpha}}\right)}, \quad (3.22)$$

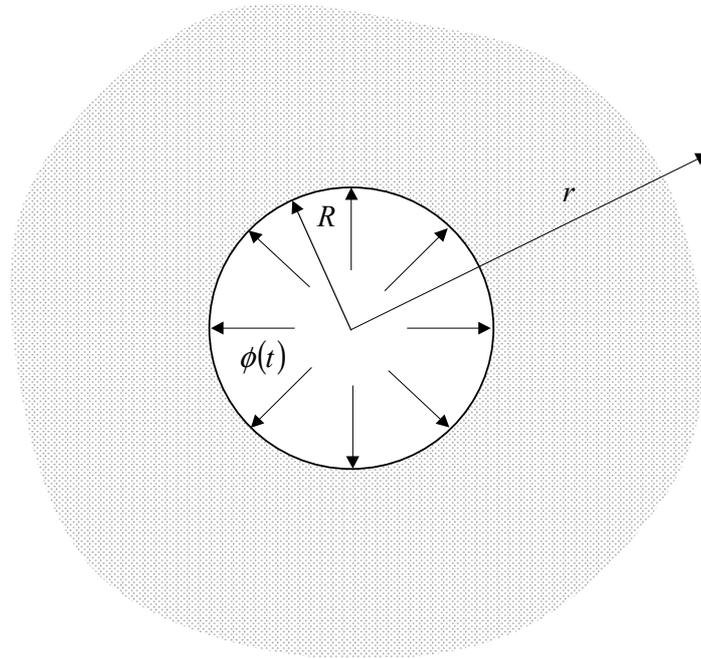


Figure 3.7 – Milieu semi-infini de cavité interne sphérique de rayon R

dont le développement en série s'effectue à partir de celui de la fonction exponentielle (relation (3.11)), soit :

$$\tilde{H}(r, s) = \frac{\sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{r^k}{k! \alpha^{k/2}} s^{k/2}}{4\pi r \lambda \left(\frac{R\sqrt{s}}{\sqrt{\alpha}} + 1\right) \sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{R^k}{k! \alpha^{k/2}} s^{k/2}}, \quad (3.23)$$

qui, dans le domaine temporel, se traduit par :

$$4\pi\lambda \left[T(r,t) + \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k k \frac{R^{k+1}}{(k+1)! \alpha^{(k+1)/2}} D^{(k+1)/2} T(r,t) + (-1)^K \frac{R^{K+1}}{K! \alpha^{(K+1)/2}} D^{K/2} T(r,t) \right] = \sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{r^k}{k! \alpha^{k/2}} D^{k/2} \phi(t), \quad (3.24)$$

équation différentielle dont les ordres de dérivation sont bien multiples de 0.5, comme pour les autres géométries semi-infinies.

Lorsque la mesure de température s'effectue au niveau de la surface d'application du flux, les fonctions exponentielles du transfert (3.22) se simplifient et l'approximation $\tilde{H}(r,s)$ donné par (3.23) se confond alors avec la transmittance exacte $H(r,s)$, soit :

$$4\pi\lambda R \left(T(R,t) + \frac{R}{\sqrt{\alpha}} D^{0.5} T(R,t) \right) = \phi(t). \quad (3.25)$$

La figure 3.8 représente, pour $r = R = 1\text{cm}$, les diagrammes de Bode du transfert $\tilde{H}(r,s)$ qui, dans cette configuration, s'identifie à $H(r,s)$.

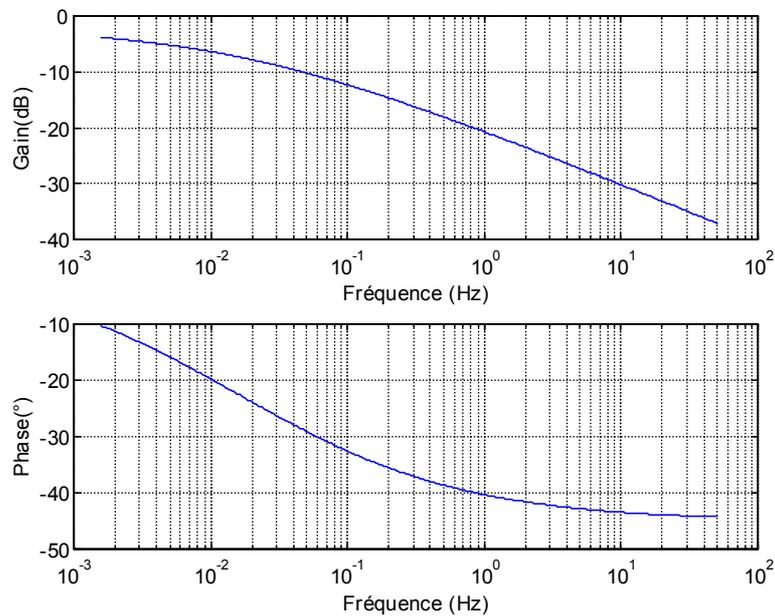


Figure 3.8 – Diagrammes de Bode de $\tilde{H}(r,s) = H(r,s)$
pour $r = R = 1\text{cm}$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$)

3.3 – Transfert de chaleur dans les milieux finis

Ce paragraphe le transfert de chaleur 1D dans 3 milieux finis, en l'occurrence un mur plan (résultant de la troncature du mur plan semi-infini), un cylindre plein et une sphère pleine.

Omniprésent dans les transferts de chaleur dans les milieux semi-infinis, l'opérateur de dérivation non entière le reste dans les milieux finis. Caractérisé par une intégration d'ordre 0.5, le comportement aux temps courts de l'impédance thermique des milieux finis est en effet identique à celui des milieux semi-infinis, exprimant ainsi l'identité des comportements asymptotiques en haute fréquence.

3.3.1 – Transfert de chaleur dans un mur plan

Considérons le transfert de chaleur 1D dans une paroi plane d'épaisseur e , de diffusivité α et de conductivité λ , soumise à la densité de flux $\varphi(t)$ en $x = 0$ (figure 3.9). On considère par ailleurs qu'il n'y a pas de perte en $x = 0$.

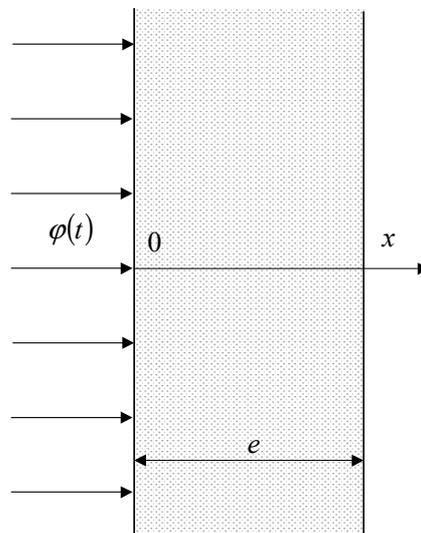


Figure 3.9 – Mur plan d'épaisseur e

Sous l'hypothèse selon laquelle le flux sortant en $x = e$ est nul, la transformation de Laplace des équations aux dérivées partielles (3.2) conduit à un transfert de la forme :

$$H(x,s) = \frac{\bar{T}(x,s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{\cosh\left((e-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh\left(e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}, \quad (3.26)$$

x désignant l'abscisse du point de mesure de température à l'intérieur du milieu.

Conformément aux développements effectués pour le milieu plan semi-infini, deux cas d'études font l'objet d'une distinction.

Le premier, caractérisé par $x = 0$, correspond à l'étude de l'impédance thermique du milieu, soit :

$$H(0,s) = \frac{\bar{T}(0,s)}{\bar{\varphi}(s)}. \quad (3.27)$$

Le second correspond à l'étude du transfert défini pour tout $x > 0$, soit :

$$H(x,s) = \frac{\bar{T}(x,s)}{\bar{\varphi}(s)}. \quad (3.28)$$

3.3.1.1 – Impédance thermique du milieu ($x = 0$)

En supposant une mesure de température en face avant, soit $x = 0$, le transfert se simplifie conformément à :

$$H(0,s) = \frac{\bar{T}(0,s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{\cosh\left(e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh\left(e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \tanh\left(e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}, \quad (3.29)$$

résultat qui exprime un comportement asymptotique d'ordre 0.5 en haute fréquence (voir annexe 1).

Dans le cadre d'une approximation de $H(0,s)$ par un développement en série, deux cas sont distingués. Le premier correspond à un développement direct des fonctions trigonométriques hyperboliques et conduit à un transfert entier. Pour le second, le transfert $H(0,s)$ est exprimé à l'aide de fonctions exponentielles dont le développement conduit à un transfert non entier.

3.3.1.1.1 – Première méthode d'approximation

La première méthode d'approximation est basée sur le développement direct des fonctions trigonométriques hyperboliques, soit :

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (3.30)$$

L'introduction de ces développements dans le transfert $H(0,s)$ conduit au transfert réduit $\tilde{H}_{1,K}(0,s)$:

$$\tilde{H}_{1,K}(0,s) = \frac{\sum_{k=0}^K a_k s^k}{\lambda \sum_{k=0}^K \frac{e}{\alpha(2k+1)} a_k s^{k+1}}, \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{e^{2k}}{(2k)! \alpha^k}, \quad (3.31)$$

qui, dans le domaine temporel, se traduit par :

$$\lambda \sum_{k=0}^K \frac{e}{\alpha(2k+1)} a_k D^{k+1} T(0,t) = \sum_{k=0}^K a_k D^k \varphi(t), \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{e^{2k}}{(2k)! \alpha^k}. \quad (3.32)$$

Définie par l'équation (3.32), l'approximation ainsi obtenue n'est autre qu'une équation différentielle dont les ordres de dérivation sont entiers. Aussi, le comportement asymptotique de $H(0,s)$ en haute fréquence, en l'occurrence une intégration d'ordre 0.5, ne peut être reproduit par une telle approximation, même en prenant un nombre important de paramètres.

3.3.1.1.2 – Seconde méthode d'approximation

Dans l'objectif d'obtenir une seconde approximation qui assure le même comportement asymptotique en haute fréquence que $H(0,s)$, un jeu d'écriture permet d'exprimer le transfert $H(0,s)$ sous la forme :

$$H(0,s) = \frac{\bar{T}(0,s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{\exp\left(2e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) + 1}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \left(\exp\left(2e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - 1 \right)}, \quad (3.33)$$

le développement en série de la fonction exponentielle conduisant au transfert réduit $\tilde{H}_{2,K}(0,s)$:

$$\tilde{H}_{2,K}(0,s) = \frac{1 + \sum_{k=1}^K a'_k s^{k/2}}{\lambda \sum_{k=1}^K \frac{a'_k}{\sqrt{\alpha}} s^{(k+1)/2}}, \quad \text{avec } a'_k = \frac{2^{k-1} e^k}{k! \alpha^{k/2}}, \quad (3.34)$$

qui, dans le domaine temporel, se traduit par :

$$\lambda \sum_{k=1}^K \frac{a'_k}{\sqrt{\alpha}} D^{(k+1)/2} T(0,t) = 1 + \sum_{k=1}^K a'_k D^{k/2} \varphi(t), \quad \text{avec } a'_k = \frac{2^{k-1} e^k}{k! \alpha^{k/2}}, \quad (3.35)$$

approximation qui n'est autre qu'une équation différentielle non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.

L'étude du comportement asymptotique en haute fréquence du transfert (3.34) démontre bien l'adéquation d'une telle approximation au transfert $H(0,s)$.

La figure 3.10 illustre une telle propriété à travers les diagrammes de Bode des transferts $H(0,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(0,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(0,s)$, pour $e = 10\text{cm}$ et $K = 5$.

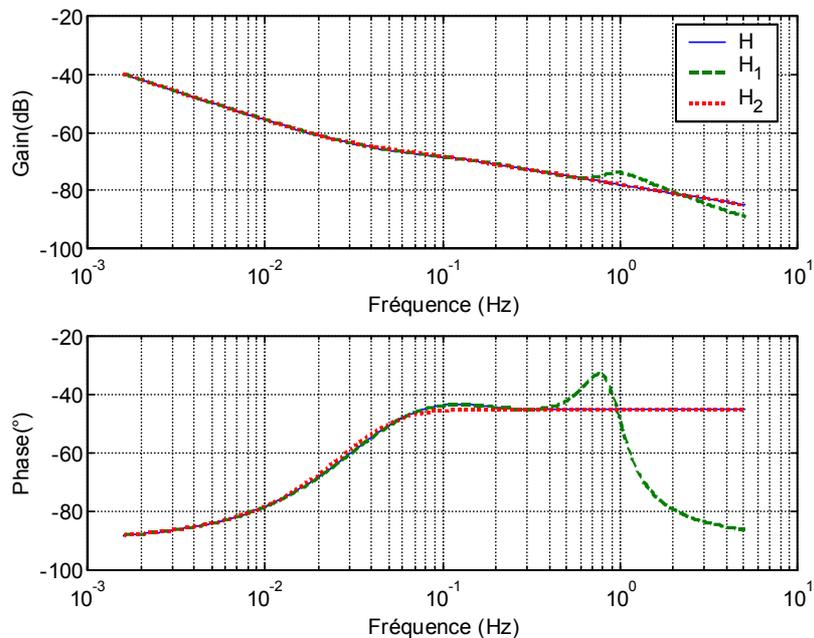


Figure 3.10 – Diagrammes de Bode de $H(0,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(0,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(0,s)$

pour $e = 1\text{cm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$)

3.3.1.2 – Transfert général ($0 \leq x \leq e$)

Dans le cas où la mesure de température s'effectue à l'intérieur du milieu, soit $0 \leq x \leq e$, le transfert $H(x, s)$ est donné par la relation (3.26), soit :

$$H(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{\cosh\left((e-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh\left(e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}. \quad (3.36)$$

Comme dans le cas où $x=0$, plusieurs méthodes d'approximation peuvent être envisagées. Trois font ici l'objet d'une présentation. La première correspond à un développement direct des fonctions trigonométriques hyperboliques et conduit à un modèle entier. La deuxième et la troisième font appel à la décomposition de $\cosh(z)$ et $\sinh(z)$ en fonctions exponentielles et conduisent à des modèles non entiers.

3.3.1.2.1 – Première méthode d'approximation

La première méthode d'approximation, basée sur le développement direct des fonctions trigonométriques hyperboliques, conduit à un transfert entier de la forme :

$$\tilde{H}_{1,K}(x, s) = \frac{\sum_{k=0}^K b_k s^k}{\lambda \sum_{k=0}^K \alpha_k s^{k+1}}, \quad \text{avec } b_k = \frac{(e-x)^{2k}}{(2k)! \alpha^k} \text{ et } a_k = \frac{e^{2k+1}}{(2k+1)! \alpha^{k+1}}, \quad (3.37)$$

qui, dans le domaine temporel, se traduit par :

$$\lambda \sum_{k=0}^K a_k D^{k+1} T(x, t) = \sum_{k=0}^K b_k D^k \varphi(t). \quad (3.38)$$

3.3.1.2.2 – Deuxième méthode d'approximation

Pour la deuxième méthode d'approximation, les fonctions $\cosh(z)$ et $\sinh(z)$ sont décomposées en fonctions exponentielles. Le transfert $H(x, s)$ s'exprime alors sous la forme :

$$H(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{\exp\left((2e-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) + \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\left(\exp\left(2e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - 1\right)}. \quad (3.39)$$

Le développement en série des fonctions exponentielles conduit ensuite à une approximation de la forme :

$$\tilde{H}_{2,K}(x, s) = \frac{\sum_{k=0}^K b_k s^{k/2}}{\lambda \sum_{k=1}^K \alpha_k s^{(k+1)/2}}, \quad \text{avec } b_k = \frac{(2e-x)^k + x^k}{k! \alpha^{k/2}} \text{ et } a_k = \frac{(2e)^k}{k! \alpha^{(k+1)/2}}, \quad (3.40)$$

qui, dans le domaine, se traduit par :

$$\lambda \sum_{k=1}^K a_k D^{(k+1)/2} T(x, t) = \sum_{k=0}^K b_k D^{k/2} \varphi(t). \quad (3.41)$$

3.3.1.2.3 – Troisième méthode d'approximation

La troisième méthode d'approximation, basée sur le développement de $\cosh(a-b)$, permet d'exprimer le transfert $H(x, s)$ sous la forme :

$$H(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{-\sinh\left(x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)\left(\exp\left(2e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - 1\right) + \cosh\left(x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)\left(\exp\left(2e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) + 1\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\left(\exp\left(2e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - 1\right)}. \quad (3.42)$$

Le développement en série des fonctions $\sinh(z)$, $\cosh(z)$ et $\exp(z)$ conduit alors à l'approximation :

$$\tilde{H}_{3,K}(x, s) = \frac{\left(\sum_{k=0}^K \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2k} s^k\right) \left(1 + \sum_{k=0}^K \frac{1}{k!} \left(\frac{2e}{\sqrt{\alpha}}\right)^k s^{k/2}\right) - \left(\sum_{k=0}^K \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2k+1} s^{(2k+1)/2}\right) \left(\sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \left(\frac{2e}{\sqrt{\alpha}}\right)^k s^{k/2}\right)}{\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(2e)^k}{k! \alpha^{(k+1)/2}} s^{(k+1)/2}}. \quad (3.43)$$

Comme pour la méthode précédente, la traduction temporelle d'une telle approximation s'exprime sous la forme d'une équation différentielle non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.

La figure 3.11 représente les diagrammes de Bode des transferts $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$, $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{3,K}(x,s)$ pour $e = 1\text{m}$, $x = 1\text{cm}$ et $K = 5$.

La qualité de l'approximation obtenue avec le transfert $\tilde{H}_{3,K}(x,s)$ dont les diagrammes de Bode se confondent avec ceux du transfert $H(x,s)$, confirme la capacité de l'opérateur de dérivation non entière à décrire les phénomènes thermiques avec de peu de paramètres.

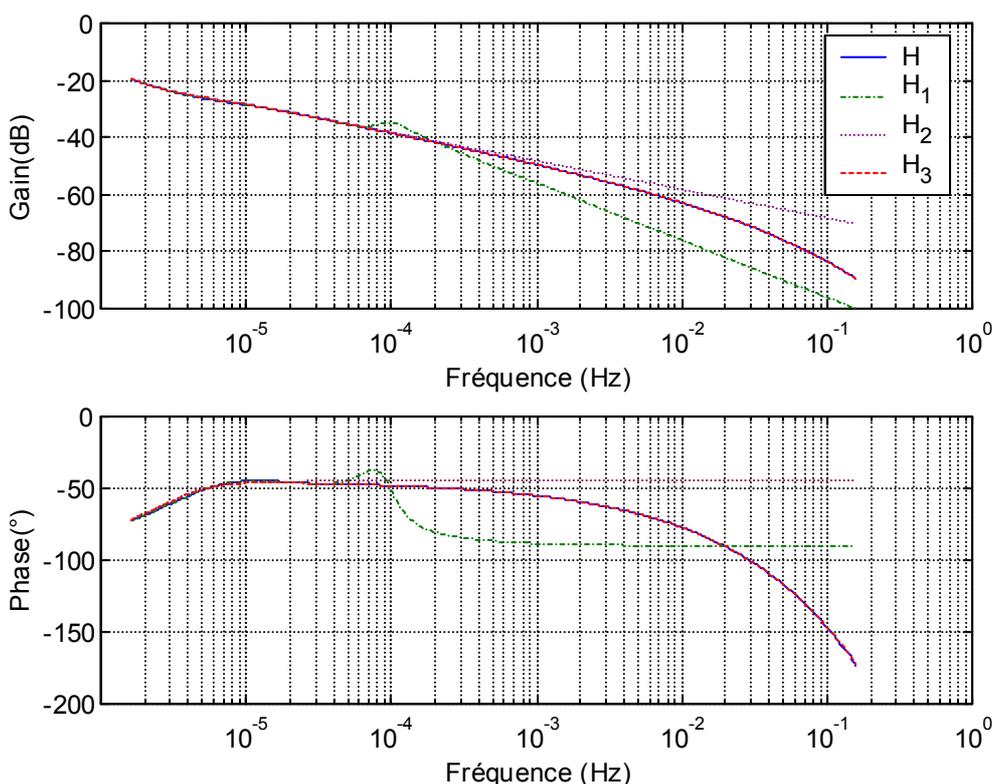


Figure 3.11 – Diagrammes de Bode de $H(x,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(x,s)$, $\tilde{H}_{2,K}(x,s)$ et $\tilde{H}_{3,K}(x,s)$ pour $e = 1\text{m}$, $x = 1\text{cm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$)

3.3.2 – Transfert de chaleur dans un cylindre plein

Le système considéré (figure 3.12) est un cylindre plein, de rayon R et de longueur l , dont la surface est soumise au flux de chaleur $\phi(t)$. La température initiale est supposée nulle en tout point.

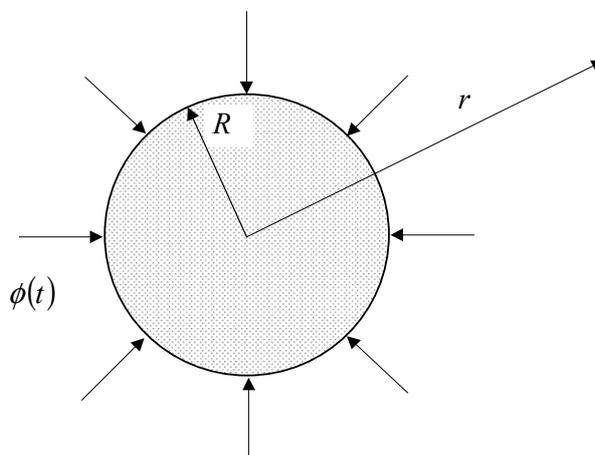


Figure 3.12 – Cylindre plein de rayon R et de longueur l

La transformation de Laplace des équations aux dérivées partielles (3.2) conduit à un transfert de la forme :

$$H(r,s) = \frac{\bar{T}(r,s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{\sqrt{\alpha} I_0\left(\frac{r}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{s}\right)}{2 \pi l R \lambda \sqrt{s} I_1\left(\frac{R}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{s}\right)}, \quad (3.44)$$

dans lequel r désigne la position radiale de la mesure de température, I_0 et I_1 étant les fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordres 0 et 1, telles que :

$$I_k(z) = \int_0^\pi e^{-z \cos(t)} \cos(kt) dt. \quad (3.45)$$

Dans le cadre d'une approximation de $H(r,s)$, deux types de développement en série sont considérées. Basé sur le développement en série des fonctions de Bessel, le premier conduit à un modèle entier. Faisant appel à un développement spécifique des fonctions de Bessel, le second conduit à un modèle non entier dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.

3.3.2.1 – Première méthode d'approximation

Etant donné le développement en série des fonctions de Bessel de première espèce, soit

$$I_k(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2l}}{l!(k+l)!}, \quad (3.46)$$

le transfert $H(r,s)$ admet une approximation sous la forme du transfert entier $\tilde{H}_{1,K}(r,s)$:

$$\tilde{H}_{1,K}(r,s) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi l \lambda R} \frac{\sum_{k=0}^K b_k s^k}{\sum_{k=0}^K a_k s^{k+1}}, \quad (3.47)$$

avec

$$\begin{cases} a_k = \left(\frac{R}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2k+1} \frac{1}{k!(k+1)!} \\ b_k = \left(\frac{e}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} \end{cases}, \quad (3.48)$$

approximation qui, dans le domaine temporel, se traduit par :

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi l \lambda R} \sum_{k=0}^K a_k D^{k+1} T(r,t) = \sum_{k=0}^K b_k D^k \phi(t). \quad (3.49)$$

L'étude du comportement asymptotique de $H(r,s)$ en haute fréquence (voir annexe 1) révèle que, pour $r = R$, le transfert de chaleur dans le cylindre plein est caractérisé, comme dans le cylindre semi-infini, par une intégration d'ordre 0.5. L'approximation par transfert entier (3.47) s'avérant ne pas reproduire un tel comportement, le paragraphe suivant s'attache à déterminer un développement qui assure un comportement asymptotique en haute fréquence conforme à celui de $H(r,s)$.

3.3.2.2 – Seconde méthode d'approximation

La seconde méthode d'approximation est fondée sur un développement spécifique des fonctions de Bessel valable pour z assez grand, soit :

$$I_k(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right), \quad (3.50)$$

avec $\mu = 4k^2$.

L'approximation d'ordre réduit de $H(r,s)$, résultant d'une troncature au premier terme de (3.50), s'exprime alors par :

$$\tilde{H}_2(r,s) = \frac{1 + b_1\sqrt{s}}{a_0\sqrt{s} + a_1s}, \quad (3.51)$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{6\pi l \lambda r}{\sqrt{\alpha}} \\ a_1 = \frac{16\pi l \lambda R r}{\alpha} \\ b_1 = \frac{8r}{\sqrt{\alpha}} \end{cases}, \quad (3.52)$$

qui, dans le domaine temporel, se traduit par :

$$a_0 D^{0.5} T(r,t) + a_1 D^1 T(r,t) = \phi(t) + b_1 D^{0.5} \phi(t). \quad (3.53)$$

Comme pour le milieu cylindrique semi-infini, l'approximation ainsi obtenue n'est autre qu'une équation différentielle non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.

La figure 3.13 représente les diagrammes de Bode des transferts $H(r,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(r,s)$, $\tilde{H}_2(r,s)$ pour $l = 1\text{m}$, $r = R = 1\text{cm}$ et $K = 5$. Le comportement en basse fréquence est bien reproduit par le modèle entier alors que celui en haute fréquence est bien reproduit par le modèle non entier.

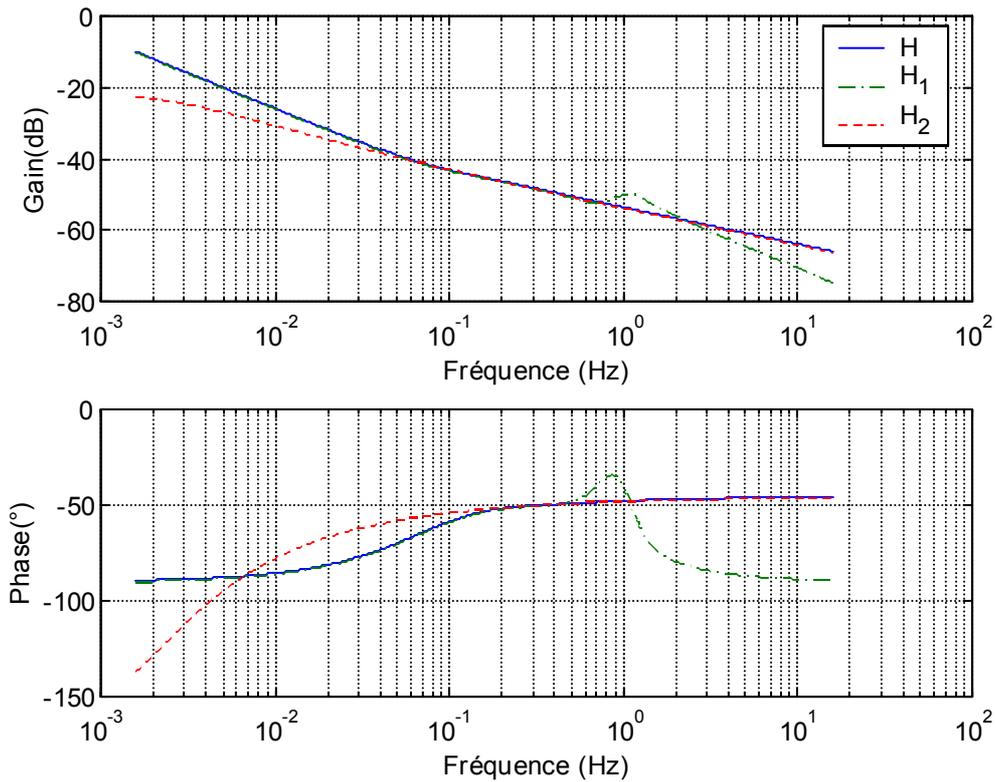


Figure 3.13 – Diagrammes de Bode de $H(r,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(r,s)$ et $\tilde{H}_2(r,s)$ pour $l = 1\text{m}$, $r = R = 1\text{cm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$)

3.3.3 – Transfert de chaleur dans une sphère pleine

La dernière étude de ce chapitre porte sur le transfert de chaleur dans une sphère pleine dont la surface est soumise au flux de chaleur $\phi(t)$ (figure 3.14). La température initiale est supposée nulle en tout point.

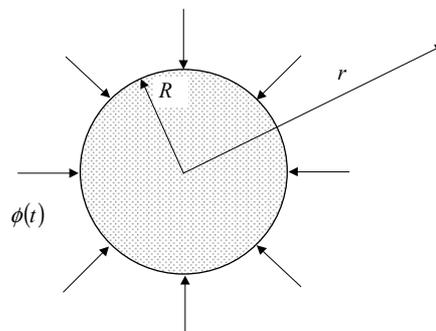


Figure 3.14 – Sphère pleine de rayon R

Issu de la transformation de Laplace des équations aux dérivées partielles (3.2), le transfert reliant $\bar{T}(r,s)$ à $\bar{\phi}(s)$ s'exprime par :

$$H(r,s) = \frac{R^2 \sinh\left(r\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda r \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \cosh\left(R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - \sinh\left(R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) \right)}, \quad (3.54)$$

où r désigne la position radiale de la mesure de température.

Dans le cas d'une mesure de température en surface, soit $\bar{T}(r,s)$ avec $r = R$, deux méthodes d'approximation de $H(R,s)$ sont possibles. La première, basée sur le développement direct des fonctions trigonométriques hyperboliques, conduit à un transfert entier. La seconde, basée sur le développement de la fonction exponentielle, conduit à un transfert non entier.

3.3.3.1 – Première méthode d'approximation

La première méthode d'approximation est fondée sur le développement en série entière des fonctions trigonométriques hyperboliques, soit :

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (3.55)$$

L'introduction de ces développements dans le transfert $H(R,s)$ conduit au transfert réduit :

$$\tilde{H}_{1,K}(R,s) = \frac{R \sum_{k=0}^K b_k s^k}{\lambda \sum_{k=0}^K a_k s^k}, \quad (3.56)$$

avec

$$\begin{cases} b_k = \frac{R^{2k+1}}{\alpha^k (2k+1)!} \\ a_k = \frac{R^{2k}}{\alpha^k (2k)!} \left(1 - \frac{R}{2k+1}\right) \end{cases}, \quad (3.57)$$

qui, dans le domaine temporel, se traduit par :

$$\sum_{k=0}^K a_k D^k T(R,t) = \frac{R}{\lambda} \sum_{k=0}^K b_k D^k \phi(t). \quad (3.58)$$

Comme pour les autres géométries, une telle approximation s'avère ne pas reproduire le comportement asymptotique en haute fréquence du transfert $H(R,s)$, à savoir une intégration d'ordre 0.5 (voir annexe 1). Une seconde méthode d'approximation, assurant quant à elle un tel comportement, est ainsi proposée au paragraphe suivant.

3.3.3.2 – Seconde méthode d'approximation

Pour la seconde méthode d'approximation, les fonctions $\cosh(z)$ et $\sinh(z)$ sont décomposées en fonctions exponentielles, le transfert $H(R,s)$ s'exprimant alors par :

$$H(R,s) = \frac{R}{\lambda} \frac{\exp\left(2R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - 1}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \left(\exp\left(2R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) + 1 \right) - \left(\exp\left(2R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - 1 \right)}. \quad (3.59)$$

Le développement en série des fonctions exponentielles conduit ensuite à une approximation de la forme :

$$\tilde{H}_{2,K}(R,s) = \frac{R\sqrt{\alpha}}{\lambda} \frac{\sum_{k=0}^{K-1} b_k s^{k/2}}{1 + \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k s^{k/2} + \left(\frac{2R}{\sqrt{\alpha}}\right)^K \frac{s^{K/2}}{K!}}, \quad (3.60)$$

avec

$$\begin{cases} b_k = \left(\frac{2R}{\sqrt{\alpha}}\right)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \\ a_k = \left(\frac{2R}{\sqrt{\alpha}}\right)^k \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{2R}{k+1}\right) \end{cases}, \quad (3.61)$$

qui, dans le domaine temporel, se traduit par :

$$T(R,t) + \left(\sum_{k=0}^{K-1} a_k D^{k/2} T(R,t) \right) + \left(\frac{2R}{\sqrt{\alpha}} \right)^K \frac{1}{K!} D^{K/2} T(R,t) = \frac{R\sqrt{\alpha}}{\lambda} \sum_{k=0}^{K-1} b_k D^{k/2} \phi(t). \quad (3.62)$$

Définie par une équation différentielle non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5, une telle approximation assure bien un comportement asymptotique d'ordre 0.5 en haute fréquence caractérisé par un intégrateur d'ordre 0.5.

La figure 3.15 représente les diagrammes de Bode des transferts $H(R,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(R,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(R,s)$ pour $R = 10\text{cm}$ et $K = 5$.

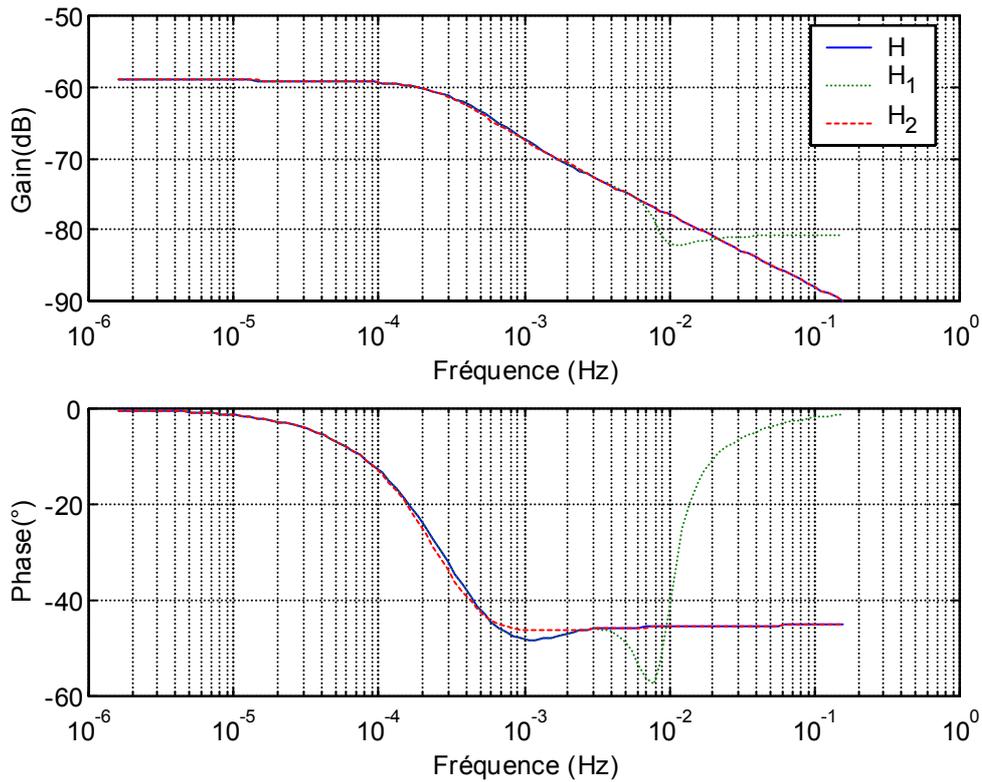


Figure 3.15 – Diagrammes de Bode de $H(R,s)$, $\tilde{H}_{1,K}(R,s)$ et $\tilde{H}_{2,K}(R,s)$
pour $R = 10\text{cm}$ et $K = 5$ ($\lambda = 10\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\alpha = 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$)

3.4 – Conclusion

En conclusion de ce chapitre, les études menées sur les milieux à la fois semi-infinis et finis montrent toutes que l'opérateur de dérivation non entière s'avère l'outil par excellence pour modéliser les transferts de chaleur avec peu de paramètres.

Dans chaque cas, un modèle non entier dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5, a en effet permis d'obtenir une approximation des transferts bien meilleure qu'avec un modèle entier. Ce résultat n'est certes pas étranger au fait que le comportement asymptotique en haute fréquence des impédances thermiques correspond toujours à une intégration d'ordre 0.5.

Il convient enfin de souligner que la détermination des modèles d'approximation non entiers est le plus souvent conditionnée par une réécriture appropriée des transferts. Il est vrai que les développements '*habituels*' conduisent pour la plupart à des approximations par modèle entier.

Chapitre 4

Identification par modèle non entier

4.1 – Introduction

L'étude des systèmes linéaires non entiers, tant au niveau mathématique que physique, a fait l'objet des développements des chapitres précédents. L'objet de ce chapitre consiste à utiliser et exploiter le concept de dérivation non entière dans un contexte d'identification.

D'un point de vue mathématique, l'introduction d'opérateurs de dérivation non entière dans une équation différentielle permet d'obtenir une solution analytique dont la dynamique présente des modes non exponentiels à mémoire longue (multimodes apériodiques).

D'un point de vue physique, et plus particulièrement dans un contexte de modélisation des phénomènes de diffusion, une équation différentielle non entière permet incontestablement une modélisation plus "compacte" (au sens du nombre de paramètres nécessaires) qu'une équation différentielle entière, obtenue par exemple par des méthodes de discrétisation spatio-temporelles.

Dans un tel cadre, le développement de méthodes d'identification, basées sur des modèles construits à partir d'équations différentielles non entières, apparaît légitime voire même de rigueur. Il est vrai que l'objectif d'une démarche d'identification est certes d'obtenir une modélisation "parcimonieuse" d'un système dynamique, c'est-à-dire une modélisation avec un minimum de paramètres.

Initialisés au début des années 90 par B. Mathieux et L. Le Lay, les travaux sur l'identification par modèle non entier ont fait l'objet de nombreuses publications et de deux thèses de doctorat, l'une de l'université Bordeaux 1 [Le Lay, 1998], l'autre de l'université de Poitiers [Lin, 2001].

Sous sa forme la plus générale, un modèle non entier est défini par une équation ou un système d'équations différentielles caractérisées par des ordres de dérivation réels, entiers ou non entiers, soit dans le cas monovarié :

$$D^{n_{a_0}} y(t) + \dots + a_l D^{n_{a_l}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{a_L}} y(t) = b_0 D^{n_{b_0}} u(t) + \dots + b_m D^{n_{b_m}} u(t) + \dots + b_M D^{n_{b_M}} u(t), \quad (4.1)$$

où $y(t)$ et $u(t)$ désignent respectivement la sortie et l'entrée du système à identifier.

Si dans le cas entier, les coefficients des opérateurs de dérivation suffisent à décrire complètement une équation différentielle, les ordres de dérivation étant distribués implicitement en raison d'un écart unitaire entre 2 ordres consécutifs, il en est autrement dans le cas non entier, où la connaissance des ordres de dérivation s'avère aussi nécessaire.

Dans un contexte d'identification par estimation paramétrique, l'étude de l'équation (4.1) révèle que les coefficients des opérateurs différentiels interviennent linéairement alors que les ordres de dérivation interviennent quant à eux non linéairement. Deux cas d'étude sont alors à distinguer.

Le premier correspond à l'identification d'un système dynamique dont une analyse préalable permet de fixer a priori les ordres de dérivation du modèle. Seuls les coefficients des opérateurs font alors l'objet d'une estimation paramétrique, le modèle ainsi obtenu étant alors qualifié de modèle boîte grise. Basées sur les méthodes à erreur d'équation, les techniques d'optimisation utilisées sont linéaires vis-à-vis des paramètres et en permettent une estimation directe.

Dans le second cas, les ordres de dérivation doivent être estimés au même titre que les coefficients, le modèle étant alors de type boîte noire. Basées sur les méthodes erreur de sortie, les techniques d'optimisation utilisées sont non linéaires vis-à-vis des paramètres et font appel à des algorithmes de programmation non linéaire (PNL).

4.2 – Méthodes à erreur d'équation : seuls les coefficients sont estimés

Ce paragraphe s'articule autour de 2 méthodes d'estimation paramétrique de modèle non entier à erreur d'équation où seuls les coefficients sont estimés, les ordres de dérivation étant supposés connus.

La première, développée par B. Matthieu et L. Le Lay [Le Lay, 1998], repose sur la discrétisation de l'équation différentielle non entière (4.1) en utilisant l'approximation numérique de Grünwald de la dérivée non entière d'une fonction temporelle.

La seconde est basée sur l'extension au non-entier des méthodes classiques d'estimation de modèle à représentation continue développées par Young [Young, 1981][Neumann and Isermann, 1988]. Une méthode, basée sur l'utilisation de filtres de variables d'état non entiers associée aux techniques d'optimisation par moindres carrés linéaires et par variables instrumentales, est notamment présentée.

4.2.1 – Estimation paramétrique par discrétisation de l'équation différentielle

La méthode d'estimation sommairement présentée ici relève des travaux de B. Matthieu et L. Le Lay. Le lecteur pourra se référer à [Le Lay, 1998] pour une description détaillée et illustrée de nombreux exemples. L'objectif consiste à estimer les coefficients, notés $a_1, \dots, a_L, b_0, \dots, b_M$ de l'équation différentielle non entière :

$$D^{n_{a0}} y(t) + a_1 D^{n_{a1}} y(t) + \dots + a_l D^{n_{al}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{aL}} y(t) = b_0 D^{n_{b0}} u(t) + \dots + b_m D^{n_{bm}} u(t) + \dots + b_M D^{n_{bM}} u(t), \quad (4.2)$$

les ordres de dérivation étant des nombres réels positifs, entiers ou non entiers, supposés connus.

L'estimation paramétrique se décompose en trois phases bien distinctes. La première consiste à discrétiser l'équation (4.2) puis à linéariser le modèle discret obtenu à l'aide d'un changement de variables. La deuxième consiste à estimer les nouveaux paramètres par une méthode à erreur de prédiction utilisant la technique d'optimisation des moindres carrés linéaire. Enfin, dans la troisième phase, les paramètres initiaux (coefficients a_l et b_m) sont calculés à partir de l'inversion du changement de variables.

4.2.1.1 – Modèle discret de dimension infinie

La discrétisation de l'équation (4.2) s'effectue en remplaçant les dérivées continues par une approximation discrète issue de la définition de Grünwald, soit :

$$D^n f(Kh) \approx \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n}{k} f((K-k)h), \quad (4.3)$$

où h désigne la période d'échantillonnage et où $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Le modèle discret ainsi obtenu est de la forme :

$$\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y((K-k)h) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u((K-k)h), \quad (4.4)$$

où $a_0 = 1$.

Ce modèle, reliant tous les échantillons de la sortie à tous les échantillons de l'entrée, est de dimension croissante avec le temps $t = Kh$. En effet, contrairement aux modèles paramétriques entiers dont la mémoire se limite aux L dernières valeurs de la sortie et aux M dernières valeurs de l'entrée, les modèles non entiers prennent en compte quant à eux tout le passé du système à travers la somme sur K . Mais ce caractère global ne se paie pas pour autant au prix d'une complexification démesurée du modèle puisque seulement $(L+M)$ paramètres suffisent à la description complète du modèle non entier.

En vue d'utiliser une méthode d'estimation à erreur de prédiction (PEM), la sortie du modèle à l'instant Kh s'exprime en fonction des entrées et sorties passées en isolant le terme $y(Kh)$ dans l'équation (4.4), obtenu pour $k=0$, soit :

$$y(Kh) = - \frac{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y((K-k)h)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} + \frac{\sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u((K-k)h)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}, \quad (4.5)$$

relation non linéaire vis-à-vis des paramètres $(a_0, \dots, a_L, b_0, \dots, b_M)$.

Une technique de linéarisation qui permette l'utilisation de la méthode des moindres carrés linéaire, consiste alors à exprimer $y(Kh)$ par une relation linéaire par rapport à un nouvel ensemble de paramètres $(a'_1, \dots, a'_L, b'_0, \dots, b'_M)$, soit :

$$y(Kh) = - \sum_{l=0}^L a'_l Y_l(Kh) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(Kh), \quad (4.6)$$

où les paramètres $(a'_0, \dots, a'_L, b'_0, \dots, b'_M)$ sont définis par le changement de variables :

$$a'_l = \frac{\frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} \quad \text{où } 0 \leq l \leq L, \text{ avec la contrainte } \sum_{l=0}^L a'_l = 1, \quad (4.7)$$

et

$$b'_m = \frac{\frac{b_m}{h^{n_{b_m}}}}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} \quad \text{où } 0 \leq m \leq M, \quad (4.8)$$

les fonctions scalaires $Y_l(Kh)$ et $U_m(Kh)$ étant définies à partir des sorties et des entrées passées conformément à :

$$Y_l(Kh) = \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y((K-k)h) \quad (4.9)$$

et

$$U_m(Kh) = \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u((K-k)h). \quad (4.10)$$

De par la linéarité de la sortie du modèle vis-à-vis des nouveaux paramètres (relation (4.6)), une procédure d'estimation telle que la méthode des moindres carrés linéaire s'avère maintenant applicable et fait l'objet du paragraphe suivant.

4.2.1.2 – Estimation paramétrique du modèle discret

4.2.1.2.1 – Méthode des moindres carrés linéaire

L'estimation des nouveaux paramètres devant s'effectuer sous la contrainte $\sum_{l=0}^L a'_l = 1$

(relation (4.7)), un jeu d'écriture tel que $a'_0 = 1 - \sum_{l=1}^L a'_l$, permet d'exprimer une estimation de

la sortie du modèle linéairement et sans contrainte par rapport à une estimation du vecteur des paramètres $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}} = (\hat{a}'_1, \dots, \hat{a}'_L, \hat{b}'_0, \dots, \hat{b}'_M)^T$, soit :

$$\hat{y}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}}) = -Y_0(Kh) - \sum_{l=1}^L \hat{a}'_l (Y_l(Kh) - Y_0(Kh)) + \sum_{m=0}^M \hat{b}'_m U_m(Kh). \quad (4.11)$$

L'écriture de l'équation (4.11) pour N points de mesure entre Kh et $(K+N)h$, conduit ensuite à la régression linéaire matricielle suivante :

$$\hat{\mathbf{Y}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}}) = -\mathbf{Y}_0 + \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}}, \quad (4.12)$$

où $\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{y}(Kh), \dots, \hat{y}((K+N)h)]^T$ et $\mathbf{Y}_0 = [Y_0(Kh), \dots, Y_0((K+N)h)]^T$, et où la matrice de régression $\boldsymbol{\Phi}$ est définie par :

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} -Y_1(Kh) + Y_0(Kh) & \dots & -Y_L(Kh) + Y_0(Kh) & U_0(Kh) & \dots & U_M(Kh) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -Y_1((K+N)h) + Y_0((K+N)h) & \dots & -Y_L((K+N)h) + Y_0((K+N)h) & U_0((K+N)h) & \dots & U_M((K+N)h) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Le problème d'estimation se formalise maintenant par la recherche d'un vecteur de paramètres optimal, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}_{opt}}$, minimisant le critère quadratique $J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}})$ basé sur l'erreur de prédiction du modèle $\varepsilon(Kh)$, soit :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}_{opt}} = \arg \min(J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}})), \text{ avec } J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}}) = \mathbf{E}^T \mathbf{E}, \quad (4.14)$$

où $\mathbf{E}^T = [\varepsilon(Kh), \dots, \varepsilon((K+N)h)]$ et $\varepsilon(Kh) = y(Kh) - \hat{y}(Kh)$.

Le vecteur optimal $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}_{opt}}$, solution de l'équation (4.14), est bien connu et s'exprime par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}_{opt}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_0). \quad (4.15)$$

4.2.1.2.2 – Analyse du biais d'estimation via l'erreur d'équation

Dans un contexte réaliste, la sortie du système à identifier est généralement mesurée par un capteur générant un signal de perturbation additif $p(t)$, la sortie mesurée s'exprimant alors par :

$$y^*(t) = y(t) + p(t), \quad (4.16)$$

et le vecteur estimé par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{r}_{opt}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^{*T} \boldsymbol{\Phi}^* \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{*T} (\mathbf{Y}^* + \mathbf{Y}_0^*), \quad (4.17)$$

où $\boldsymbol{\Phi}^*$, \mathbf{Y}^* et \mathbf{Y}_0^* sont définis en remplaçant $y(Kh)$ par $y^*(Kh)$ dans les relations (4.12) et (4.13) via (4.9).

En remplaçant maintenant $y(t)$ par $y(t) = y^*(t) - p(t)$ dans l'équation (4.6), on obtient :

$$y^*(Kh) = - \sum_{l=0}^L a'_l Y_l^*(Kh) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(Kh) + p(Kh) + \sum_{l=0}^L a'_l \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} p((K-k)h), \quad (4.18)$$

soit, en introduisant la notion d'*erreur d'équation* telle que

$$e(Kh) = p(Kh) + \sum_{l=0}^L a'_l \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} p((K-k)h) : \quad (4.19)$$

$$y^*(Kh) = - \sum_{l=0}^L a'_l Y_l^*(Kh) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(Kh) + e(Kh). \quad (4.20)$$

L'introduction de (4.20) dans (4.17) conduit alors, pour N tendant vers l'infini, à l'expression du biais de l'estimateur, soit :

$$\Delta\theta = E[\hat{\theta}_{r_{opt}} - \theta_r] = E\left[\left(\Phi^{*T} \Phi^*\right)^{-1}\right] E\left[\Phi^{*T} \begin{bmatrix} e(Kh) \\ e((K+1)h) \\ \vdots \\ e((K+N)h) \end{bmatrix}\right]. \quad (4.21)$$

Un cas d'étude fréquemment rencontré correspond à celui où le signal de perturbation $p(t)$ se réduit à un bruit blanc $b(t)$. Dans ce cas, compte tenu de la relation (4.19) reliant $e(t)$ à $p(t)$, la relation (4.21) révèle que l'estimation est asymptotiquement biaisée. La cause principale de ce biais d'estimation provient de la corrélation entre le signal $e(t)$ et le signal $y^*(t)$ qui est contenu dans la matrice de régression Φ^* .

Afin de résoudre ce problème, l'estimation de $\hat{\theta}_r$ peut s'obtenir itérativement en utilisant la méthode des variables instrumentales [Young, 1981]. Décrite dans le paragraphe 4.2.2.3.2, cette technique consiste à remplacer les éléments de Φ^* corrélés avec $e(t)$ (ou encore $y^*(t)$) par un signal non corrélé provenant généralement de la simulation d'un modèle auxiliaire.

4.2.1.2.3 – Matrice de covariance des paramètres du modèle discret

Dans le cas où le signal $e(t)$ est une séquence blanche non corrélée avec Φ^* , l'estimation par la méthode des moindres carrés ne présente pas de biais asymptotique (N tendant vers l'infini). En revanche, pour un nombre fini N de mesures, on peut montrer que le vecteur $\hat{\theta}_{r_{opt}}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée sur θ_r dont une estimation de la matrice de covariance est donnée par [Ljung, 1987][Söderstrom and Stoïca, 1989] :

$$\text{cov}(\hat{\theta}_{r_{opt}}) = \left(\Phi^{*T} \Phi^*\right)^{-1} \sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{a_1}^2 & \text{cov}(a_1, a_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{cov}(a_1, b_M) \\ \cdot & \cdot & \sigma_{a_L}^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{b'_0}^2 & \cdot & \cdot \\ \text{Sym} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{cov}(b_{M-1}, b_M) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{b'_M}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

σ^2 étant la variance de $e(t)$ dont une estimation est donnée par :

$$\sigma^2 = \frac{\mathbf{E}^T \mathbf{E}}{N - (L - 1 + M)}.$$

Notons que même si l'écart-type sur chaque paramètre est faible, il est néanmoins nécessaire de valider l'hypothèse formulée sur le signal $e(t)$. A cet effet on pourra observer les courbes représentant l'autocorrélation de l'erreur de prédiction \mathbf{E} et l'intercorrélation entre la matrice de régression Φ^* et l'erreur de prédiction \mathbf{E} .

4.2.1.3 – Retour aux coefficients de l'équation différentielle

La validation des paramètres du modèle récurrent étant effectuée, les coefficients a_l du modèle continu se déduisent par la résolution du système linéaire suivant (a_0 étant fixé à 1) :

$$\begin{bmatrix} (a'_1 - 1)h^{-n\alpha_1} & a'_1 h^{-n\alpha_2} & \dots & a'_1 h^{-n\alpha_L} \\ a'_2 h^{-n\alpha_1} & (a'_2 - 1)h^{-n\alpha_2} & \dots & a'_2 h^{-n\alpha_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_L h^{-n\alpha_1} & a'_L h^{-n\alpha_2} & \dots & (a'_L - 1)h^{-n\alpha_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a'_1 h^{-n\alpha_0} \\ -a'_2 h^{-n\alpha_0} \\ \vdots \\ -a'_L h^{-n\alpha_0} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

les coefficients b_m s'expriment alors directement par :

$$b_m = b'_m \sum_{l=0}^L a_l h^{n b_m - n a_l}.$$

4.2.1.4 – Application

4.2.1.4.1 – Introduction

La méthode ainsi développée est appliquée à l'identification du comportement dynamique d'un système thermique [Battaglia *et al.*, 2000].

L'identification consiste en l'estimation des paramètres d'un modèle non entier qui reproduit au mieux l'évolution de la température mesurée en un point d'un matériau supposé de type semi-infini sollicité en flux de chaleur.

Le dispositif expérimental (figure 4.1) est constitué d'un bloc en aluminium de type AU4G 2017 sur lequel est disposé une résistance chauffante plate de type Minco MK de 360 Ohms.

Une plaque isolante recouvre la résistance chauffante afin que le flux soit dirigé vers le bloc d'aluminium.

Un thermocouple cuivre-constantan de 2/10 de mm de diamètre est disposé entre la résistance et l'aluminium, au centre du bloc. L'épaisseur totale de la résistance et du thermocouple n'excède pas 2/10 de mm de façon à ne pas introduire une hétérogénéité importante dans le milieu. La résistance chauffante est alimentée par une alimentation stabilisée dont la puissance est mesurée, le flux de chaleur étant alors connu précisément.

Les deux fils du thermocouple sont reliés à des bornes en laiton maintenues à température ambiante. La mesure est amplifiée (gain égal à 3000) puis le signal est visualisé et enregistré sur un oscilloscope numérique.

Afin de diminuer la résistance de contact entre la résistance et le matériau, une fine pellicule de graisse d'argent est répartie sur la surface de contact.

Les dimensions du bloc (70x70x60) sont telles que le matériau se comporte comme un milieu semi-infini vis-à-vis du thermocouple pour des temps de mesure de l'ordre de quelques dizaines de secondes.

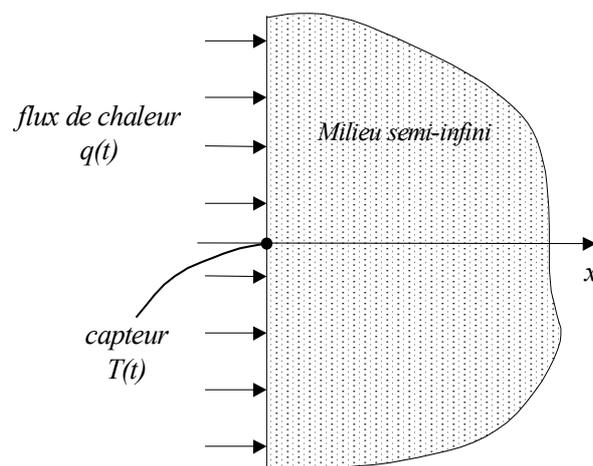


Figure 4.1 - Schéma de principe de l'expérience

4.2.1.4.2 – Choix de la structure du modèle d'identification

Le choix de la nature et de la structure du modèle d'identification peut être guidé par la connaissance de la solution analytique dans le domaine opérationnel, soit, en désignant par $\bar{T}(s)$ et $\bar{q}(s)$ les transformées de Laplace de $T(t)$ et $q(t)$:

$$\bar{T}(s) = \left(\frac{1}{(\rho C_p)_s V_s s + \frac{1}{R_T + \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p S \sqrt{s}}}}} \right) \bar{q}(s), \quad (4.24)$$

ou
$$\frac{\bar{T}(s)}{\bar{q}(s)} = \frac{1 + S R_T \sqrt{\lambda \rho C_p} s^{0.5}}{S \sqrt{\lambda \rho C_p} s^{0.5} + (\rho C_p)_s V_s s^1 + (\rho C_p)_s V_s S R_T \sqrt{\lambda \rho C_p} s^{1.5}}. \quad (4.25)$$

La forme de ce modèle de connaissance conduit à choisir un modèle d'identification non entier dont la structure est définie par :

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5}}{s^{0.5} (a_0 + a_1 s^{0.5} + s^1)}, \quad (4.26)$$

modèle comportant

- un intégrateur d'ordre 0.5
- et des dérivées non entières d'ordre multiple de 0.5.

4.2.1.4.3 – Estimation paramétrique du modèle d'identification

En imposant un flux de chaleur selon une séquence binaire (figure 4.2), l'estimation paramétrique du modèle d'identification conduit aux résultats présentés dans le tableau 4.1 pour une période d'échantillonnage de 0.05s.

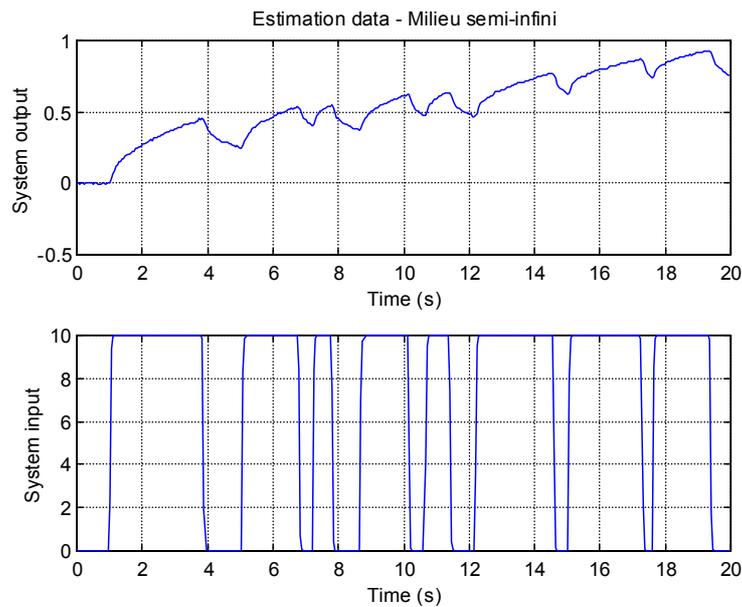


Figure 4.2 – Données d'estimation : flux de chaleur de type SBPA

Ordres de dérivation	Paramètres du modèle discret	Ecart-types des paramètres du modèle discret	Paramètres du modèle continu
$n_{a_0} = 0.5$	$a'_0 = 1.4793$	$\sigma_{a'_0} = 0.203$	$a_0 = 39.77$
$n_{a_1} = 1$	$a'_1 = -0.8513$	$\sigma_{a'_1} = 0.0759$	$a_1 = -7.23$
$n_{a_2} = 1.5$	$a'_2 = 0.3720$	$\sigma_{a'_2} = 0$	$a_2 = 1$
$n_{b_0} = 0$	$b'_0 = 0.011$	$\sigma_{b'_0} = 0.0013$	$b_0 = 0.94$
$n_{b_1} = 0.5$	$b'_1 = -0.0058$	$\sigma_{b'_1} = 0.0015$	$b_1 = -0.15$

Tableau 4.1 – Résultats de l'estimation

Le transfert estimé est donc de la forme :

$$H(s) = \frac{\bar{T}(s)}{\bar{q}(s)} = \frac{0.94 - 0.15s^{0.5}}{39.77s^{0.5} - 7.23s^1 + s^{1.5}} \quad (4.27)$$

La figure 4.3 présente l'erreur de prédiction ainsi que la fonction d'autocorrélation associée.

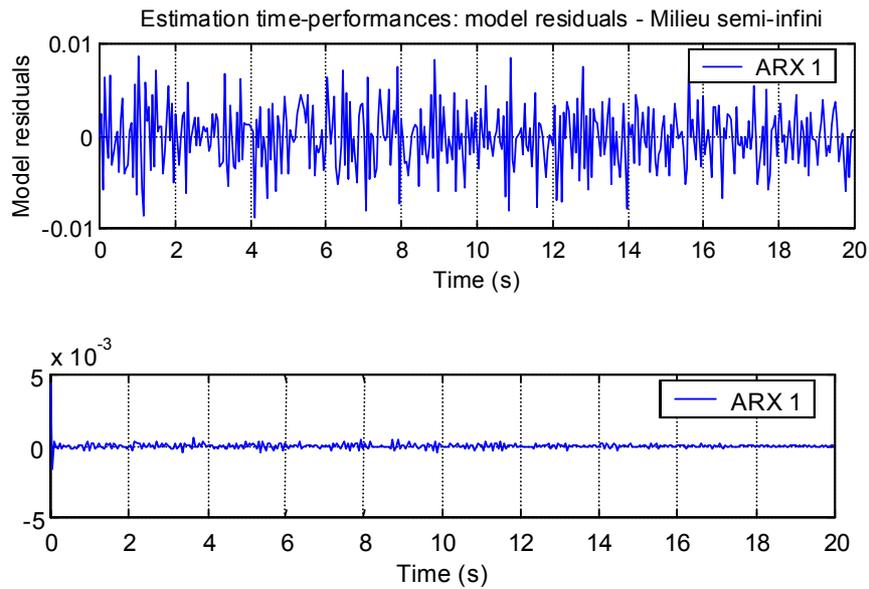


Figure 4.3 – Erreur de prédiction du modèle (fonction $\varepsilon(t)$)
et fonction d'autocorrélation associée

La figure 4.4 représente la localisation des valeurs propres, zéros propres et pôles du modèle (le lecteur étant renvoyé au paragraphe 4.3.2.1 pour la définition du terme *zéro propre*). Trois pôles distincts sont comptabilisables. Le premier, à l'origine, provient de l'intégration d'ordre 0.5 que présente le modèle. Les 2 autres, complexes conjugués, sont à partie réelle négative et génèrent un mode exponentiel stable.

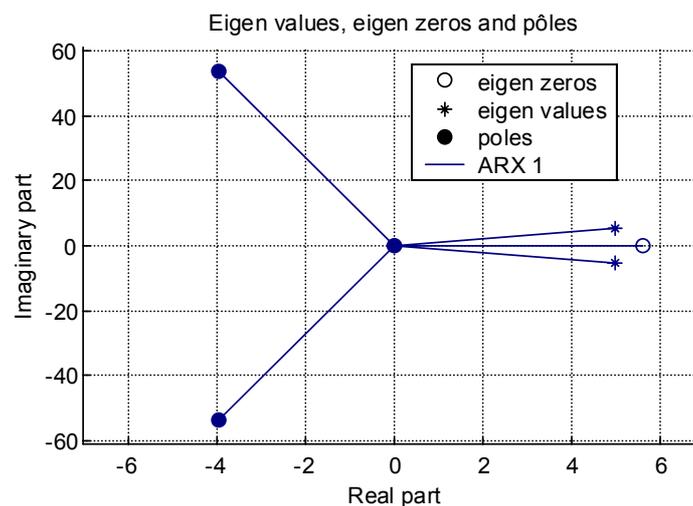


Figure 4.4 – Localisation des valeurs propres, zéros propres et pôles du modèle

Après la phase d'estimation, le modèle doit être validé à partir de données différentes de celles utilisées pour réaliser l'estimation paramétrique. La figure 4.5 représente, d'une part,

la température mesurée superposée à celle simulée avec le modèle et, d'autre part, l'erreur de sortie du modèle pour les mêmes données.

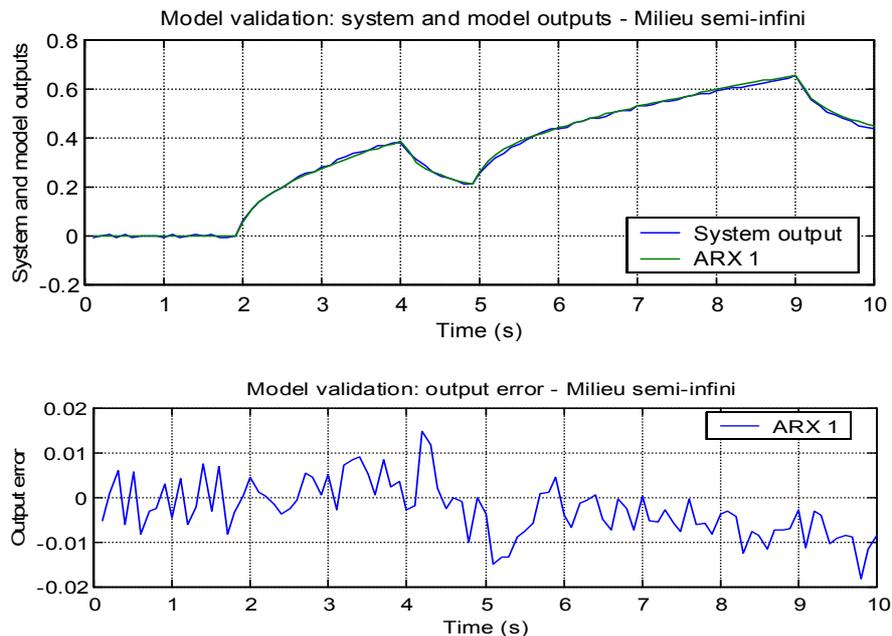


Figure 4.5 – Validation du modèle :

- en haut : températures mesurée et simulée avec le modèle

- en bas : erreur de sortie du modèle

Les faibles valeurs de l'erreur de sortie permettent de conclure sur la pertinence de l'utilisation de modèles non entiers pour la modélisation de phénomènes de transfert de chaleur.

4.2.2 – Estimation paramétrique par filtres de variables d'état non entiers

4.2.2.1 – Régression linéaire continue

La méthode d'estimation paramétrique présentée dans ce paragraphe résulte de l'extension au non entier de la méthode des filtres de variables d'état continus proposée par Young [Young, 1981]. Comme dans le paragraphe précédent, l'objectif consiste à estimer, à partir des données d'entrée et de sortie mesurées sur le système à identifier, les coefficients de l'équation différentielle non entière :

$$D^{n_{a0}} y(t) + a_1 D^{n_{a1}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{aL}} y(t) = b_0 D^{n_{b0}} u(t) + \dots + b_M D^{n_{bM}} u(t), \quad (4.28)$$

les ordres de dérivation étant supposés connus.

La méthode repose sur la construction d'une régression linéaire continue, soit :

$$\begin{aligned} D^{n_{a0}} y(t) &= -a_1 D^{n_{a1}} y(t) - \dots - a_L D^{n_{aL}} y(t) + b_0 D^{n_{b0}} u(t) + \dots + b_M D^{n_{bM}} u(t) \\ &= \left[-D^{n_{a1}} y(t) \quad \dots \quad -D^{n_{aL}} y(t) \quad D^{n_{b0}} u(t) \quad \dots \quad D^{n_{bM}} u(t) \right] \boldsymbol{\theta} \\ &= \boldsymbol{\varphi}(t) \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

où $\boldsymbol{\theta} = [a_1 \quad \dots \quad a_L \quad b_0 \quad \dots \quad b_M]^T$.

Basée sur la technique des moindres carrés linéaire, l'estimation paramétrique requiert l'évaluation numérique des dérivées successives contenues dans le vecteur $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Un problème posé par cette évaluation numérique provient de ce que, d'une part, le calcul numérique d'une dérivée génère une erreur importante, notamment dans le domaine des hautes fréquences et, d'autre part, que ce calcul amplifie le bruit de mesure.

Afin de résoudre ce problème, une transformation linéaire (généralement un filtrage passe-bas) est appliquée à l'équation (4.29) conformément à :

$$\begin{aligned} D^{n_{a0}} y_f(t) &= -a_1 D^{n_{a1}} y_f(t) - \dots - a_L D^{n_{aL}} y_f(t) + b_0 D^{n_{b0}} u_f(t) + \dots + b_M D^{n_{bM}} u_f(t) \\ &= \left[-D^{n_{a1}} y_f(t) \quad \dots \quad -D^{n_{aL}} y_f(t) \quad D^{n_{b0}} u_f(t) \quad \dots \quad D^{n_{bM}} u_f(t) \right] \boldsymbol{\theta} \\ &= \boldsymbol{\varphi}_f(t) \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

où $u_f(t)$ et $y_f(t)$ désignent respectivement les signaux d'entrée et de sortie du système filtrés par un filtre F , causal, stationnaire et de type passe-bas, défini par sa réponse impulsionnelle $h_f(t)$.

Les 2 équations (4.29) et (4.30) étant équivalentes, l'estimation paramétrique peut porter indifféremment sur l'une ou l'autre de ces équations. Néanmoins, l'utilisation de (4.30) permet maintenant l'évaluation numérique des éléments du vecteur de régression $\boldsymbol{\varphi}_f(t)$ qui présente l'avantage de porter sur des signaux filtrés (donc moins sources d'erreur).

4.2.2.2 – Filtre de variables d'état non entier

L'évaluation numérique des dérivées successives des signaux $u_f(t)$ et $y_f(t)$ s'effectue par la simulation du filtre F sous forme de représentation d'état. Classiquement utilisée dans le cas entier sous la dénomination *filtre de variables d'état* (SVF), cette astuce permet d'assurer à la fois le filtrage et le calcul des dérivées des signaux d'entrée et de sortie. L'idée consiste en effet à exprimer les différentes dérivées des signaux d'entrée ou de sortie comme des composantes du vecteur d'état d'une réalisation particulière du filtre F , soit :

$$\mathbf{x} = \left[D^{(N_f-1) \times n} z_f(t), D^{(N_f-2) \times n} z_f(t), \dots, D^n z_f(t), z_f(t) \right]^T, \quad (4.31)$$

où $z_f(t)$ désigne l'entrée ou la sortie filtrée, les ordres de dérivation k_n ($k = 0, \dots, N_f - 1$) coïncidant avec ceux du modèle (4.28). Le filtre F admet alors pour fonction de transfert :

$$F(s) = \frac{A}{\alpha_0 + \alpha_1 s^n + \dots + \alpha_{N_f-1} s^{n \times (N_f-1)} + s^{n \times N_f}}. \quad (4.32)$$

Le choix de ses paramètres A , α_k , n et N_f est soumis au respect de 2 contraintes.

La première porte sur le choix des paramètres n et N_f . Contrairement au cas classique où les différents ordres de dérivation sont entiers et donc implicitement distribués en raison d'un écart unitaire entre deux ordres consécutifs, le cas non entier nécessite le choix d'un paramètre n respectant la propriété :

$$\exists \begin{cases} (k_{n_{a_0}}, \dots, k_{n_{a_l}}, \dots, k_{n_{a_L}}) \in \mathbf{N}^{L+1} \\ (k_{n_{b_0}}, \dots, k_{n_{b_m}}, \dots, k_{n_{b_M}}) \in \mathbf{N}^{M+1} \\ n \in [0, 1] \end{cases} \text{ tel } \begin{cases} n_{a_l} = n \times k_{n_{a_l}} \text{ pour } l = 0, \dots, L \\ n_{b_m} = n \times k_{n_{b_m}} \text{ pour } m = 0, \dots, M \end{cases}, \quad (4.33)$$

propriété exprimant que chaque ordre de dérivation du modèle (4.28) doit pouvoir s'exprimer comme le produit de n par un nombre entier k .

Le paramètre N_f est alors déterminé à l'aide de l'inéquation suivante :

$$N_f > \max(k_{n_{a_L}}, k_{n_{b_M}}). \quad (4.34)$$

Remarque - La propriété (4.33) implique l'hypothèse selon laquelle les ordres de dérivation du modèle (4.28) sont commensurables, réduisant ainsi le champ d'application de la méthode

d'estimation par filtre de variables d'état par rapport à la méthode précédente. Néanmoins, dans la grande majorité des cas, cette propriété ne constitue pas une hypothèse forte. ■

La seconde contrainte porte sur le choix des coefficients α_k . Le filtre devant être stable, le choix des α_k est donc soumis à la propriété de stabilité (2.43), à savoir que les valeurs propres du filtre, solutions de l'équation

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{N_f-1} \lambda^{(N_f-1)} + \lambda^{N_f} = 0, \quad (4.35)$$

doivent vérifier :

$$|\arg(\lambda_l)| > \frac{n\pi}{2}, \quad \forall l = 1, \dots, N_f. \quad (4.36)$$

Le choix des coefficients α_k détermine également, à travers le positionnement des pôles, la dynamique du filtre F .

Une structure particulière du filtre assurant le respect des conditions (4.33) et (4.36) et permettant le placement en fréquence du caractère passe-bas correspond à l'extension au non-entier du filtre de Poisson, soit :

$$F(s) = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{\omega_f}\right)^n + 1\right)^{N_f}} = \frac{\omega_f^{n \times N_f}}{s^{n \times N_f} + C_1^{N_f} \omega_f^n s^{n \times (N_f-1)} + \dots + C_{N_f-1}^{N_f} \omega_f^{n \times (N_f-1)} s^n + \omega_f^{n \times N_f}}, \quad (4.37)$$

où ω_f est la fréquence transitionnelle du filtre.

Une réalisation du filtre, telle que le vecteur d'état soit composé des dérivées successives de sa sortie

$$\mathbf{x} = \left[D^{(N_f-1) \times n} z_f(t), D^{(N_f-2) \times n} z_f(t), \dots, D^n z_f(t), z_f(t) \right]^T, \quad (4.38)$$

s'écrit alors :

$$D^n \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -C_1^{N_f} \omega_f^n & -C_2^{N_f} \omega_f^{2 \times n} & \dots & -C_{N_f-1}^{N_f} \omega_f^{n \times (N_f-1)} & -\omega_f^{n \times N_f} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \omega_f^{n \times N_f} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z(t), \quad (4.39)$$

où $z(t)$ désigne l'entrée ou la sortie du système.

La simulation de ce filtre assure alors l'évaluation numérique des dérivées filtrées des signaux d'entrée et de sortie.

4.2.2.3 – Estimation paramétrique du modèle

4.2.2.3.1 – Méthode des moindres carrés linéaire

Dans un contexte d'identification de système réel, le signal de sortie est mesuré par un capteur générant un signal de perturbation additif $p(t)$ conformément à :

$$y^*(t) = y(t) + p(t), \quad (4.40)$$

où $y^*(t)$ désigne le signal mesuré.

L'estimation paramétrique est alors obtenue par la minimisation d'un critère basé sur un signal $\varepsilon(t)$, appelé *résidu* et défini par ($y_f^*(t)$ désignant le signal $y^*(t)$ filtré par F) :

$$\varepsilon(t) = D^{n_{a0}} y_f^*(t) + \hat{a}_1 D^{n_{a1}} y_f^*(t) + \dots + \hat{a}_L D^{n_{aL}} y_f^*(t) - \hat{b}_0 D^{n_{b0}} u_f(t) - \dots - \hat{b}_M D^{n_{bM}} u_f(t), \quad (4.41)$$

ou encore, en utilisant la régression linéaire (4.30) :

$$\varepsilon(t) = D^{n_{a0}} y_f^*(t) - \boldsymbol{\varphi}_f^*(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.42)$$

le vecteur $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_L, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_M)$ étant une estimation des paramètres du modèle.

La figure 4.6 illustre la procédure de calcul du signal $\varepsilon(t)$.

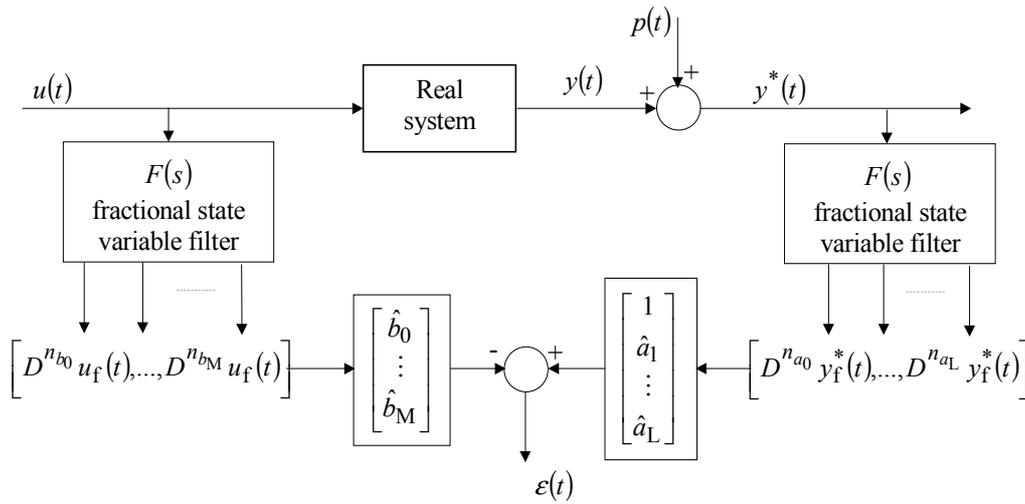


Figure 4.6 – Calcul du résidu $\varepsilon(t)$

Le critère sur lequel porte l'optimisation est un critère quadratique défini, pour N points de mesure, par :

$$J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{E}^T \mathbf{E}, \quad (4.43)$$

où $\mathbf{E} = [\varepsilon(k_0 h) \quad \varepsilon((k_0 + 1)h) \quad \cdots \quad \varepsilon((k_0 + N - 1)h)]^T$, h désignant la période d'échantillonnage et k_0 un nombre entier tel que $k_0 h \geq T_f$ où T_f est le temps de réponse du filtre F .

Le problème d'estimation se formalise alors par la recherche d'un vecteur de paramètres optimal, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{opt}$, minimisant le critère quadratique $J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, soit :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{opt} = \arg \min(J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}})). \quad (4.44)$$

Le vecteur optimal $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{opt}$, solution de l'équation (4.44), est bien connu et s'exprime par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{opt} = \left(\boldsymbol{\Phi}_f^{*T} \boldsymbol{\Phi}_f^* \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_f^{*T} D^{n_{a0}} \mathbf{Y}_f^*, \quad (4.45)$$

$$\text{où } \begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_f^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_f^{*T}(k_0 h) & \boldsymbol{\phi}_f^{*T}((k_0 + 1)h) & \cdots & \boldsymbol{\phi}_f^{*T}((k_0 + N - 1)h) \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{Y}_f^* = \begin{bmatrix} y_f^*(k_0 h) & y_f^*((k_0 + 1)h) & \cdots & y_f^*((k_0 + N - 1)h) \end{bmatrix} \end{cases}.$$

4.2.2.3.2 – Analyse du biais d'estimation via l'erreur d'équation

L'introduction, dans le modèle (4.30), de la sortie mesurée et filtrée, soit $y_f^*(t) = y_f(t) + p_f(t)$, conduit à l'équation :

$$D^{n_{a0}} y_f^*(t) + \dots + a_L D^{n_{aL}} y_f^*(t) = b_0 D^{n_{b0}} u_f(t) + \dots + b_M D^{n_{bM}} u_f(t) + D^{n_{a0}} p_f(t) + \dots + a_L D^{n_{aL}} p_f(t) \quad (4.46)$$

ou, soit en introduisant la notion d'**erreur d'équation** telle que

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(s^{n_{a0}} + a_1 s^{n_{a1}} + \dots + a_L s^{n_{aL}} \right) \times F(s) \right\} \otimes p(t) \quad (4.47)$$

$$D^{n_{a0}} y_f^*(t) + \dots + a_L D^{n_{aL}} y_f^*(t) = b_0 D^{n_{b0}} u_f(t) + \dots + b_M D^{n_{bM}} u_f(t) + e(t) \quad (4.48)$$

La régression linéaire (4.30) devient alors :

$$D^{n_{a0}} y_f^*(t) = \boldsymbol{\Phi}_f^*(t) \boldsymbol{\theta} + e(t), \quad (4.49)$$

soit, sous forme matricielle :

$$D^{n_{a0}} \mathbf{Y}_f^* = \mathbf{\Phi}_f^* \boldsymbol{\theta} + \begin{bmatrix} e(k_0 h) \\ e((k_0 + 1)h) \\ \vdots \\ e((k_0 + N - 1)h) \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

expression qui, portée dans (4.45), conduit (pour N tendant vers l'infini) à la forme bien connue du biais de l'estimateur, soit :

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = E[\boldsymbol{\theta}_{\text{opt}} - \boldsymbol{\theta}] = E \left[\left(\mathbf{\Phi}_f^{*T} \mathbf{\Phi}_f^* \right)^{-1} \right] E \left[\mathbf{\Phi}_f^{*T} \begin{bmatrix} e(k_0 h) \\ e((k_0 + 1)h) \\ \vdots \\ e((k_0 + N - 1)h) \end{bmatrix} \right]. \quad (4.51)$$

L'étude de la relation (4.51) révèle que dans le cas d'un signal de perturbation $p(t)$ se réduisant à un bruit blanc $b(t)$, le signal $e(t)$ est corrélé avec la matrice de régression $\mathbf{\Phi}_f^*$ et génère un biais d'estimation asymptotique. Dans ce cas, la **méthode des variables**

instrumentales (IV) peut être utilisée. Celle-ci consiste à remplacer, dans la matrice Φ_f^* , les signaux corrélés avec $e(t)$ par des *variables instrumentales* non corrélés. Généralement ces variables sont issues de la simulation d'un modèle auxiliaire dont la dynamique est proche de celle du système à identifier. L'estimation paramétrique peut alors être mise en œuvre à l'aide d'une technique itérative telle que :

$$\theta_{k+1}^{IV} = \left(\Phi_f^{IVT}(\theta_k^{IV}) \Phi_f^* \right)^{-1} \Phi_f^{IVT}(\theta_k^{IV}) D^{n_{a0}} Y_f^*, \quad (4.52)$$

où $\Phi_f^{IV}(\theta_k^{IV})$ est la matrice de régression dans laquelle le signal $y^*(t)$ corrélé avec $e(t)$ est remplacé par $y_f^{IV}(\theta_k^{IV}, t)$, soit :

$$\Phi_f^{IV}(\theta_k^{IV}) = \left[\Phi_f^{IVT}(\theta_k^{IV}, k_0 \times T_s) \quad \Phi_f^{IVT}(\theta_k^{IV}, (k_0 + 1) \times T_s) \quad \dots \quad \Phi_f^{IVT}(\theta_k^{IV}, (k_0 + K - 1) \times T_s) \right]^T, \quad (4.53)$$

avec

$$\Phi_f^{IV}(\theta_k^{IV}, t) = \left[-D^{n_{a1}} y_f^{IV}(\theta_k^{IV}, t) \quad \dots \quad -D^{n_{aL}} y_f^{IV}(\theta_k^{IV}, t) \quad D^{n_{b0}} u_f(t) \quad \dots \quad D^{n_{bM}} u_f(t) \right], \quad (4.54)$$

$y_f^{IV}(\theta_k^{IV}, t)$ résultant de la simulation de l'équation (4.30) en utilisant le vecteur des paramètres θ_k^{IV} .

4.2.3 – Application : analyse par simulations de Monte Carlo

L'objet de ce paragraphe consiste à appliquer et analyser les deux méthodes d'estimation ainsi décrites par la méthode de Monte Carlo. L'application porte sur un système académique décrit par l'équation différentielle non entière :

$$D^{1.5} y(t) + D^1 y(t) + y(t) = D^1 u(t) + D^{0.5} u(t) + u(t). \quad (4.55)$$

Sa réponse fréquentielle est donnée par les diagrammes de Bode de la figure 4.7. De type passe-bas, il présente un comportement asymptotique d'ordre 0.5 en haute fréquence.

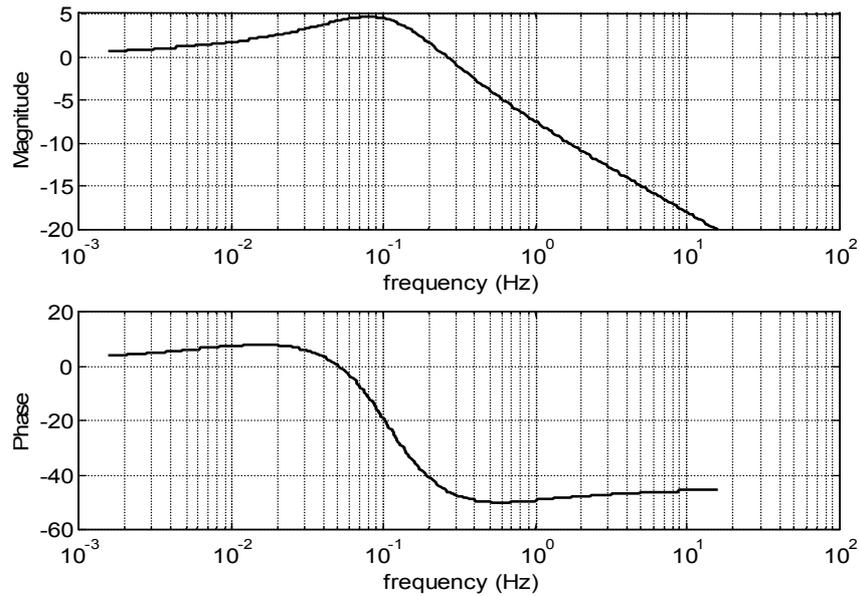


Figure 4.7 – Diagrammes de Bode

L'analyse de Monte-Carlo consiste à identifier ce système à l'aide de plusieurs jeux de données entrée – sortie. Dans le but de mener une analyse statistique des résultats, les données utilisées pour chaque estimation sont toutes issues de la simulation de l'équation (4.55) avec le même signal d'entrée $u(t)$, généralement caractérisé par un large spectre afin d'exciter toute la dynamique du système. Chaque vecteur de données correspondant au signal de sortie est ensuite bruité par l'addition de différentes réalisations d'un bruit blanc $b(t)$ de variance donnée σ^2 , le rapport bruit sur signal de chacune des réalisations étant alors défini par :

$$NSR = \frac{\sqrt{\text{var}(p(t))}}{\sqrt{\text{var}(y(t))}} \times 100. \quad (4.56)$$

Le nombre de réalisations pour un même rapport signal sur bruit est égal à 1000. Le signal d'entrée $u(t)$ est un signal binaire pseudo-aléatoire (SBPA) de 1000 points et de période d'échantillonnage $h = 0.05\text{s}$. Pour chaque réalisation, 3 techniques d'estimation sont appliquées :

- celle par discrétisation de l'équation différentielle (relation (4.15)) ;
- celle des moindres carrés linéaire avec un filtre de variables d'état (relation (4.45)) ;
- celle des variables instrumentales avec un filtre de variables d'état (relation (4.52)) ;

la fréquence transitionnelle du filtre de variables d'état (filtre de Poisson) est fixée à $\omega_f = 0.1\text{Hz}$.

La procédure est alors répétée pour différents rapports signal sur bruit, entre 0 et 50%.

Afin d'évaluer les performances de chacune des techniques, deux types de critère sont calculés pour chaque rapport signal sur bruit.

Le premier est calculé à partir de la moyenne normalisée des erreurs paramétriques et s'exprime par :

$$MNE = \frac{\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{mean}}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|} * 100 . \quad (4.57)$$

Le second est calculé à partir de la norme quadratique de la différence entre les réponses impulsionnelles réelle et estimées.

Une analyse circonstanciée doit être menée à partir de l'étude de ces 2 critères. Il est vrai qu'un écart paramétrique (premier critère) qui proviendrait d'une sensibilité extrêmement faible de la dynamique du système à un paramètre du modèle, n'aurait pas d'influence sur la réponse impulsionnelle (second critère). Un tel phénomène relève d'une problématique **d'identifiabilité**, dont l'analyse est généralement effectuée par l'étude de la sensibilité du modèle à chaque paramètre. Le lecteur est renvoyé à [Walter et Pronzato, 1994] où figure une description détaillée de cette notion. Notons que le tracé a posteriori des courbes de sensibilité (signaux contenus dans la matrice de régression Φ_f^*) est également utile à cette étude.

Les figures 4.8 et 4.9 présentent l'évolution du premier et second critère en fonction du rapport signal sur bruit. Conformément aux résultats théoriques présentés dans les paragraphes précédents, il apparaît clairement que les techniques basées sur les moindres carrés font l'objet à la fois d'un biais d'estimation important. La technique des variables instrumentales permet quant à elle une estimation non biaisée, même pour des rapports signal sur bruit importants.

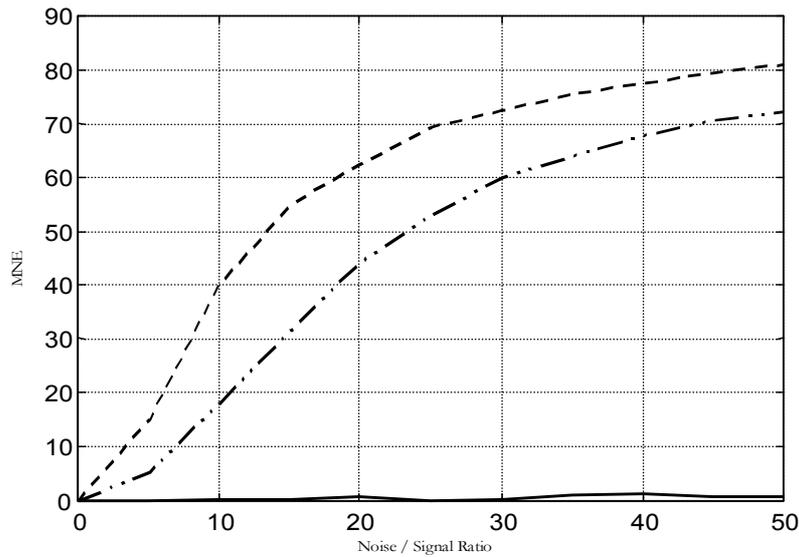


Figure 4.8 – Biais d'estimation (norme des erreurs paramétriques normalisées) en fonction du rapport bruit sur signal

----- : technique par discrétisation

- · - · - : technique des moindres carrés avec un filtre de variables d'état non entier

———— : technique des variables instrumentales avec un filtre de variables d'état non entier

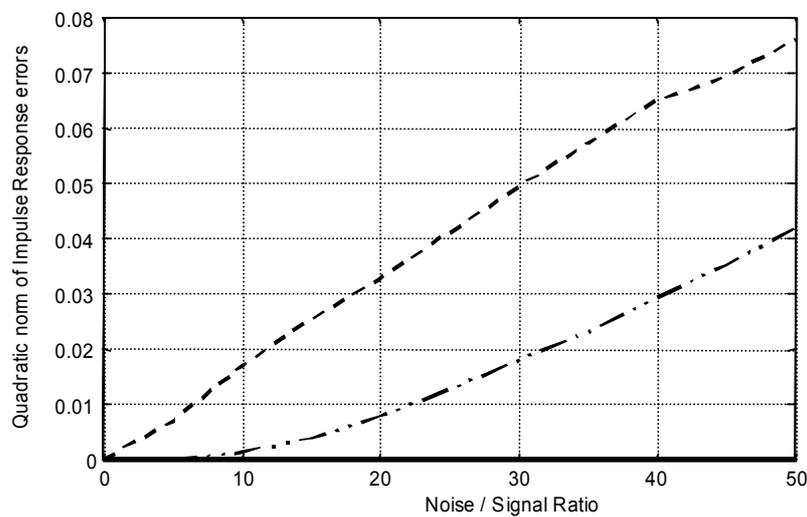


Figure 4.9 – Biais d'estimation (norme quadratique de l'erreur de réponse impulsionnelle moyenne) en fonction du rapport bruit sur signal

----- : technique par discrétisation

- · - · - : technique des moindres carrés avec un filtre de variables d'état non entier

———— : technique des variables instrumentales avec un filtre de variables d'état non entier

4.3– Méthodes à erreur de sortie : les ordres de dérivation sont estimés au même titre que les coefficients

Dans le paragraphe précédent, 2 méthodes d'estimation paramétrique de modèle non entier à erreur d'équation ont été présentées. Fondées sur l'hypothèse selon laquelle les ordres de dérivation sont connus, ces méthodes permettent uniquement l'estimation des coefficients des opérateurs de dérivation non entière.

L'objet de ce paragraphe consiste à présenter deux méthodes permettant l'estimation des ordres de dérivation au même titre que les coefficients.

Alors que l'estimation paramétrique s'effectue par une technique d'optimisation linéaire dans le cas où seuls les coefficients sont à estimer, l'estimation des ordres de dérivation et des coefficients requiert l'utilisation d'un algorithme de programmation non linéaire.

Dans le contexte d'une telle exigence, une méthode d'estimation à erreur de sortie dont l'avantage est de ne pas présenter de biais d'estimation, apparaît des plus appropriées. C'est pourquoi les deux méthodes qui font l'objet de ce paragraphe sont à erreur de sortie.

La première, proposée par Trigeassou et Lin, est basée sur la définition d'un opérateur de dérivation non entière borné en fréquence.

Le seconde est quant à elle fondée sur la forme diagonale d'une représentation d'état non entière.

4.3.1 – Modèle non entier borné en fréquence

4.3.1.1 – Approximation par représentation d'état entière

Proposée par Trigeassou et Lin [Trigeassou *et al.*, 1999][Lin et Poinot, 1999][Lin *et al.*, 2000a][Lin *et al.*, 2001], la méthode présentée dans ce paragraphe est fondée sur l'utilisation de l'intégrateur non entier borné en fréquence (2.56), défini comme un intégrateur conventionnel présentant un comportement non entier dans une bande de fréquences moyennes $[\omega_b, \omega_h]$, soit pour un intégrateur d'ordre n compris entre 0 et 1 :

$$I^n(s) = \frac{1}{s} C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{1-n} . \quad (4.58)$$

Basée sur la transmittance du dérivateur non entier borné en fréquence proposé par Oustaloup [Oustaloup, 1995], soit

$$D^{1-n}(s) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{1-n}, \quad (4.59)$$

la définition d'un tel opérateur est motivée, d'une part, par le constat selon lequel le caractère non entier inhérent aux systèmes physiques est à spectre borné, parfois même limité à une seule décade et, d'autre part, par l'intérêt de définir de manière réaliste, en l'occurrence par un intégrateur conventionnel, le comportement hors de ce domaine limité.

La figure 4.10 illustre la réponse fréquentielle de cet opérateur par ses diagrammes de Bode. Son comportement correspond :

- à celui d'un intégrateur conventionnel en dehors de la bande de fréquences $[\omega_b, \omega_h]$;
- à celui d'un intégrateur non entier dans la bande de fréquences $[\omega_b, \omega_h]$.

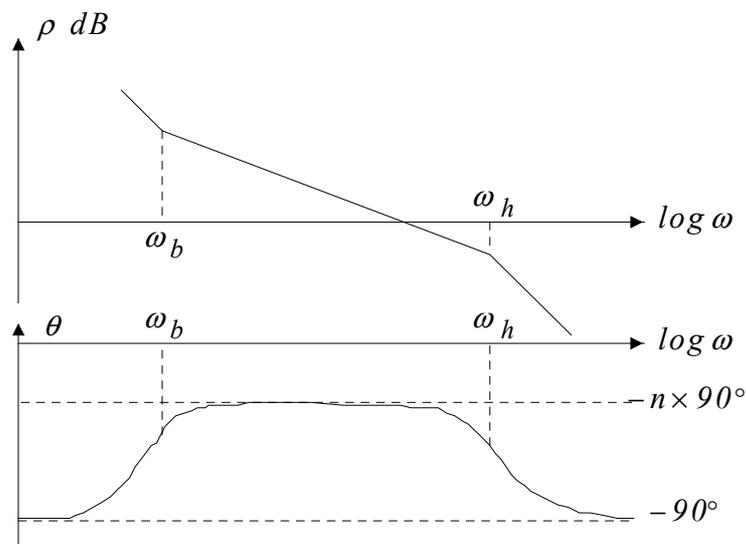


Figure 4.10 - Diagrammes de Bode de $I^n(s)$

Conformément à la méthode décrite au paragraphe 2.6.2.1, une approximation entière de cet opérateur peut être obtenue en remplaçant le dérivateur non entier borné en fréquence (4.59) par une distribution récursive de zéros et de pôles, soit, sous la forme d'une représentation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{A}_I \mathbf{x}_I + \mathbf{b}_I u, \quad (4.60)$$

où la matrice \mathbf{A}_I est définie par :

$$\mathbf{A}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

et le vecteur \mathbf{b}_I par :

$$\mathbf{b}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

les facteurs récurrents α et η , liés à l'ordre de dérivation, étant définis par les relations (2.54) et (2.55).

Dans un objectif de simulation d'un système non entier, la représentation d'état (4.60) de l'opérateur est insérée dans une représentation d'état non entière décrivant le système à simuler, soit, dans le cas d'un système monovarié dont l'état non entier est de dimension 1 :

$$\begin{cases} D^n x(t) = a_0 x(t) + b_0 u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}, \quad (4.63)$$

ce qui conduit à alors à une représentation d'état classique de grande dimension, soit, pour un ordre de dérivation n compris entre 0 et 1 :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \\ y = \mathbf{c} \mathbf{x} \end{cases}, \quad (4.64)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \mathbf{A}_I + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -C_0 a_0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.65)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{b}_I \quad (4.66)$$

et
$$\mathbf{c} = [0, \dots, 0, b_0]. \quad (4.67)$$

Le lecteur est renvoyé à [Lin, 2001] pour une description détaillée de la mise en œuvre d'une telle procédure dans le cas d'un système non entier dont le vecteur d'état non entier est de dimension supérieure à 1.

4.3.1.2 – Estimation paramétrique

4.3.1.2.1 – Introduction

Le modèle d'identification retenu pour l'estimation paramétrique se présente sous la forme de la représentation d'état non entière (4.63), soit :

$$\begin{cases} D^n x(t) = a_0 x(t) + b_0 u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}, \quad (4.68)$$

la fonction de transfert d'un tel système ayant pour expression :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n - a_0}. \quad (4.69)$$

Remarque – Pour des raisons de simplicité, la méthode présentée ici se limite au cas où le vecteur d'état non entier est de dimension 1. Le lecteur se référera à [Lin, 2001] pour une description détaillée des autres cas. ■

L'objectif de l'identification consiste à estimer, non seulement les paramètres $[a_0, b_0]$ de la représentation (4.68), mais aussi les paramètres de l'opérateur différentiel non entier $[n, \omega_b, \omega_h]$. En pratique, l'estimation est basée sur l'approximation (4.64), soit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}) u \\ y = \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x} \end{cases}, \quad (4.70)$$

où $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur des paramètres à estimer, soit :

$$\boldsymbol{\theta} = [a_0, b_0, \omega_1, \alpha, \eta]^T. \quad (4.71)$$

La sortie du modèle étant non linéaire vis-à-vis du vecteur $\boldsymbol{\theta}$, l'estimation paramétrique s'effectue par une technique d'optimisation à erreur de sortie basée sur un algorithme de programmation non linéaire.

4.3.1.2.2 – Algorithme à erreur de sortie

L'ensemble des données est composé de N couples entrée – sortie, soit $\{u(Kh), y^*(Kh)\}$, où h désigne la période d'échantillonnage et :

$$y^*(Kh) = y(Kh) + p(Kh), \quad (4.72)$$

$p(Kh)$ étant un signal de perturbation additif représentant par exemple le bruit mesure généré par le capteur.

L'estimation paramétrique est alors obtenue par la minimisation d'un critère basé sur l'erreur de sortie du modèle vis-à-vis du vecteur des paramètres $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, soit :

$$\varepsilon(Kh) = y^*(Kh) - \hat{y}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (4.73)$$

Le critère sur lequel porte l'optimisation est un critère quadratique défini, pour N points de mesure, par :

$$J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{E}^T \mathbf{E}, \quad (4.74)$$

où $\mathbf{E} = [\varepsilon(k_0h) \quad \varepsilon((k_0+1)h) \quad \dots \quad \varepsilon((k_0+N-1)h)]^T$.

Le problème d'estimation se formalise alors par la recherche du vecteur des paramètres optimal, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{opt}$, minimisant le critère quadratique $J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, soit :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{opt} = \arg \min(J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}})). \quad (4.75)$$

La sortie estimée $\hat{y}(t, \hat{\theta})$ étant non linéaire vis-à-vis de $\hat{\theta}$, un algorithme d'optimisation non linéaire, en l'occurrence l'algorithme de Marquardt ([Marquardt, 1963]), est utilisé pour déterminer itérativement $\hat{\theta}_{opt}$:

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left\{ \left[\mathbf{J}_{\theta\theta}'' + \xi \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{J}_{\theta}' \right\}_{\theta = \hat{\theta}_i}, \quad (4.76)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_{\theta}' = -2 \sum_{k=k_0}^K \varepsilon(Kh) \sigma(Kh, \hat{\theta}) : \text{gradient} \\ \mathbf{J}_{\theta\theta}'' \approx 2 \sum_{k=k_0}^K \sigma(Kh, \hat{\theta}) \sigma^T(Kh, \hat{\theta}) : \text{hessien} \\ \sigma(Kh, \hat{\theta}) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(Kh, \hat{\theta}) : \text{fonction de sensibilité de la sortie} \\ \xi : \text{paramètre de contrôle} \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Cet algorithme fait appel au calcul du gradient et du hessien, eux-mêmes dépendant de l'intégration numérique des fonctions de sensibilité $\sigma(Kh, \hat{\theta})$ [Richalet *et al.*, 1971], qui sont équivalentes au régresseur dans le cas linéaire. Le paragraphe suivant s'attache donc à présenter les méthodes de calcul des fonctions de sensibilité.

4.3.1.2.3 – Fonctions de sensibilité $\sigma(Kh, \hat{\theta})$

Deux type de fonctions de sensibilité sont distinguées :

- $\sigma_{y,\theta} = \frac{\partial y}{\partial \theta}(t, \hat{\theta})$: fonction de sensibilité de la sortie au vecteur θ (fonction utilisée dans l'algorithme (4.77)) ;
- $\sigma_{x,\theta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}(t, \hat{\theta})$: fonction de sensibilité de l'état (équation (4.70)) au vecteur θ .

La fonction $\sigma_{x,\theta}$ s'obtient par la différentiation de l'équation d'état de (4.70) par rapport à θ , soit :

$$\dot{\sigma}_{x,\theta} = \mathbf{A}(\hat{\theta}) \sigma_{x,\theta} + \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta}(\hat{\theta}) \right] \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta}(\hat{\theta}) u, \quad (4.78)$$

les fonctions $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta}(\hat{\theta})$ et $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta}(\hat{\theta})$ étant calculées à partir de la représentation d'état (4.60) de l'opérateur d'intégration non entière.

Le calcul de $\sigma_{y,\theta}$ s'obtient ensuite par la différentiation de l'équation de sortie de (4.70) par rapport à θ , soit :

$$\sigma_{y,\theta} = \mathbf{c}(\theta) \sigma_{x,\theta} + \left[\frac{\partial \mathbf{c}(\theta)}{\partial \theta} \right] \mathbf{x}. \quad (4.79)$$

4.3.1.3 – Exemple académique

L'exemple présenté ici est tiré de [Trigeassou *et al.*, 1999]. Le lecteur est renvoyé à [Lin *et al.*, 2000a][Lin *et al.*, 2000b][Lin *et al.*, 2001] pour des applications sur des systèmes réels, notamment ceux régis par des processus de diffusion (thermiques, électrochimiques et électromagnétiques).

L'algorithme présenté dans le paragraphe précédent est appliqué à l'identification d'un système académique de par la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.1}{s^{0.6} + 0.1}, \quad (4.80)$$

soit, sous forme de représentation d'état :

$$\begin{cases} D^{0.6} x(t) = -0.1 x(t) + 0.1 u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}. \quad (4.81)$$

L'opérateur différentiel non entier utilisé est un opérateur borné en fréquence ($\omega_b = 0.01 \text{ rad/s}$ et $\omega_h = 1 \text{ rad/s}$) dont la synthèse avec $N = 5$ cellules fournit une bonne approximation.

Le système est excité par une entrée SBPA (Signal Binaire Pseudo Aléatoire) avec une période d'échantillonnage $h = 0.1 \text{ s}$. La figure 4.11 représente le tracé des signaux d'entrée et de sortie correspondants.

Afin d'apprécier la dégradation de l'estimation engendrée par une perturbation stochastique, un bruit blanc est additionné à la sortie pour deux valeurs du rapport signal sur bruit (S/B). Les résultats sont présentés dans le tableau 4.2.

En l'absence de perturbation sur la sortie, l'algorithme à erreur de sortie converge vers les paramètres exacts.

Pour $S/B = 100$, les paramètres estimés sont relativement proches des paramètres exacts.

Pour $S/B = 10$, les estimations s'avèrent plus perturbées par le bruit. Néanmoins, les diagrammes de Bode du modèle estimé restent très proches de ceux du modèle exact.

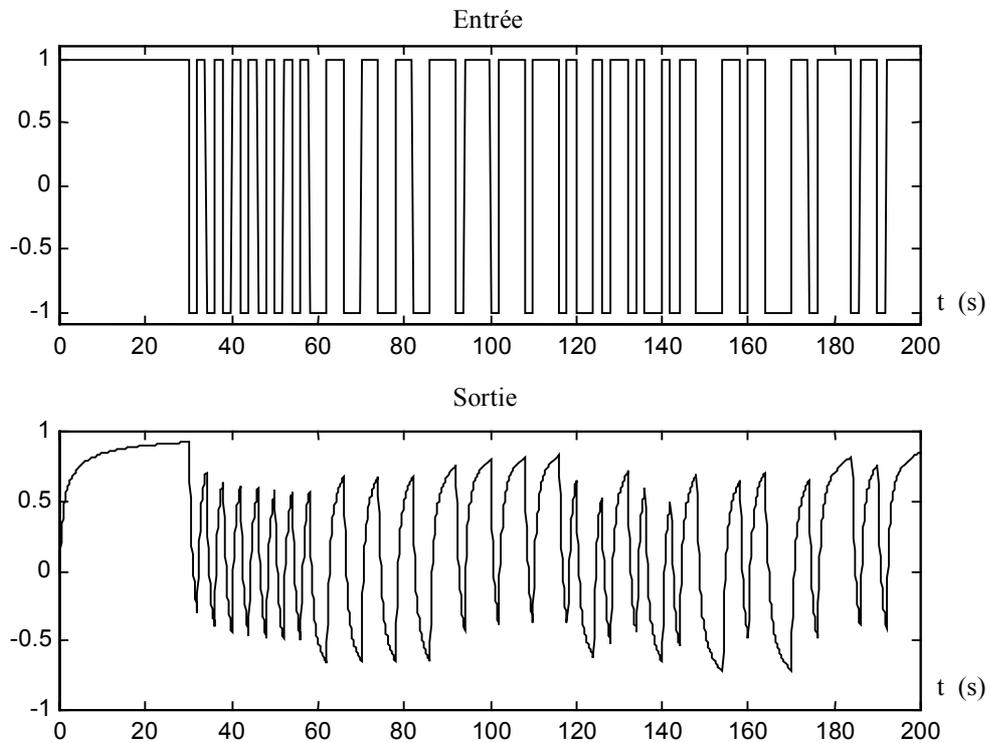


Figure 4.11 – Données d'estimation simulées

Paramètres	Exact	Estimés	
		S/B = 100	S/B = 10
a_0	0,1	0,10042	0,17410
b_0	0,1	0,10041	0,17087
n	0,6	0,60760	0,62412
ω_1	0,01	0,00933	0,02955
ω_N	1	1,01008	1,14037

Tableau 4.2 – Résultats de l'estimation paramétrique

4.3.2 – Modèle non entier issu d'une décomposition modale

4.3.2.1 – Représentation d'état non entière

La méthode d'identification présentée dans ce paragraphe repose sur l'estimation paramétrique d'un modèle non entier sous la forme diagonale d'une représentation d'état non entière ([Cois *et al.*, 2000a],[Battaglia *et al.*, 2001a],[Aoun *et al.*, 2000]), soit, dans le cas d'un système monovisible strictement propre dont les valeurs propres sont distinctes :

$$\begin{cases} D^n \mathbf{x}_J(t) = \mathbf{J} \mathbf{x}_J(t) + \mathbf{B}_J u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_J \mathbf{x}_J(t) \end{cases}, \quad (4.82)$$

où \mathbf{J} est une matrice diagonale contenant les valeurs propres du modèle sur sa diagonale.

Dans cette configuration, la sortie du modèle s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de modes propres (figure 4.12), soit :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbf{C}_J (s^n \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} \mathbf{B}_J \right\} * u(t), \quad (4.83)$$

où $(s^n \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1}$ s'exprime par :

$$(s^n \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} = \begin{pmatrix} (s^n - \lambda_1)^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (s^n - \lambda_l)^{-1} & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & (s^n - \lambda_N)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

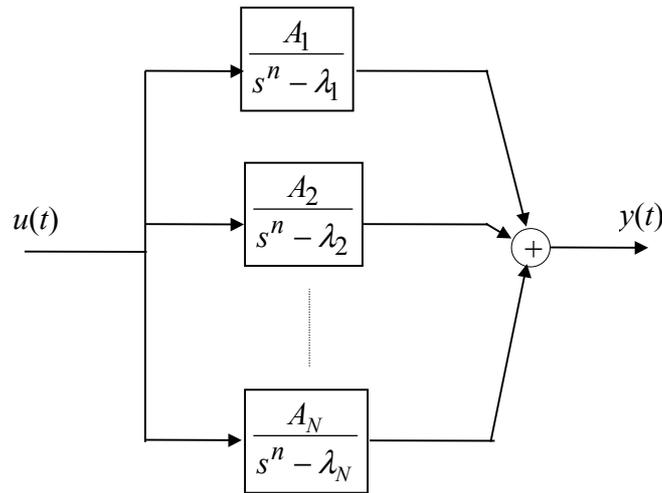


Figure 4.12 - Décomposition d'un système non entier en modes propres

L'objectif de l'identification consiste à estimer le vecteur θ des paramètres modaux du modèle, définis par :

$$\theta^T = [n \ A_1 \ \lambda_1 \ \dots \ A_N \ \lambda_N],$$

- où :
- n est l'ordre de dérivation commun à tous les modes propres ;
 - les A_n sont les coefficients de chaque mode propre ;
 - les λ_n sont les valeurs propres.

Par réduction au même dénominateur, il est possible d'exprimer le modèle non entier par une transmittance $H(s)$ admettant trois formes équivalentes :

- la forme modale développée, soit :

$$H(s) = \sum_{n=1}^N \frac{A_l}{s^n - \lambda_l}, \quad (4.85)$$

faisant apparaître les **valeurs propres** λ_l et les coefficients modaux A_l ;

- la forme modale factorisée, soit :

$$H(s) = \frac{K \prod_{n=1}^{N_z} (s^n - z_l)}{\prod_{n=1}^N (s^n - \lambda_l)}, \quad (4.86)$$

faisant apparaître les *valeurs propres* λ_l et les *zéros propres* z_l ;

- la forme rationnelle à puissances non entières, soit :

$$H(s) = \frac{b_{N-1}s^{(N-1)n} + \dots + b_0}{s^{Nn} + a_{N-1}s^{(N-1)n} + \dots + a_0}. \quad (4.87)$$

Dans un contexte d'identification par estimation paramétrique, la prise en compte des valeurs et espaces de confiance des paramètres estimés, permet, pour chacune des formes, d'envisager des réductions de modèle.

Pour la forme modale développée, un mode propre peut être supprimé si sa contribution est négligeable devant celle des autres modes.

Pour la forme modale factorisée, une simplification peut être effectuée si l'intersection des ellipsoïdes de confiance d'un couple zéro propre – valeur propre représente une surface importante.

4.3.2.2 – Estimation paramétrique

4.3.2.2.1 – Algorithme à erreur de sortie

L'ensemble des données réelles échantillonnées à la période h est composé de N paires entrée-sortie $\{u(Kh), y^*(Kh)\}$ telles que :

$$y^*(Kh) = y(Kh) + p(Kh), \quad (4.88)$$

où $p(Kh)$ étant un signal de perturbation additif représentant par exemple le bruit de mesure généré par le capteur.

Le vecteur $\hat{\theta}$ étant une estimation de θ , l'erreur de prédiction du modèle est donnée par :

$$\varepsilon(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = y^*(Kh) - \hat{y}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (4.89)$$

La valeur optimale de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, soit $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{opt}}$, est alors obtenue par la minimisation d'un critère quadratique portant sur l'erreur de prédiction, soit :

$$J_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^2(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (4.90)$$

La sortie estimée $\hat{y}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ étant non linéaire vis-à-vis du vecteur des paramètres $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, un algorithme d'optimisation non linéaire, en l'occurrence l'algorithme de Marquardt, est utilisée pour déterminer itérativement $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{opt}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \left\{ \left[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}'' + \xi \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}' \right\}_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_i}, \quad (4.91)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}' = -2 \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon(Kh) \boldsymbol{\sigma}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}) : \text{gradient} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}'' \approx 2 \sum_{k=0}^{K-1} \boldsymbol{\sigma}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\sigma}^T(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}) : \text{hessien} \\ \boldsymbol{\sigma}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial \hat{y}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} : \text{fonction de sensibilité} \\ \xi : \text{paramètre de Marquardt} \end{array} \right.$$

Cet algorithme, très souvent utilisé en programmation non linéaire, assure une convergence robuste malgré une mauvaise initialisation de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Une bonne précision sur la sensibilité de la sortie est toutefois nécessaire afin d'assurer une bonne convergence.

4.3.2.2.2 – Fonctions de sensibilité de la sortie

Etant donné la structure du modèle d'identification, le calcul de $\boldsymbol{\sigma}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ est relativement facilité. Ainsi on montre que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{y}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial A_l} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right) * u(t) \\ \frac{\partial \hat{y}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_l} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{A_l}{(s^n - \lambda_l)^2} \right) * u(t) \\ \frac{\partial \hat{y}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial n} = \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{n=1}^N - \frac{A_l s^n \ln(s)}{(s^n - \lambda_l)^2} \right) * u(t) \end{cases} \quad (4.92)$$

Le calcul numérique des deux premières fonctions ne pose aucun problème, le calcul de la troisième, plus délicat par la présence de $\ln(s)$, est donné en annexe 2.

4.3.2.2.3 – Validité des paramètres estimés

Sous l'hypothèse selon laquelle la séquence des erreurs de prédiction est blanche, on montre que le vecteur des paramètres estimés est un vecteur aléatoire centrée sur $\boldsymbol{\theta}$, et dont une estimation de la matrice de covariance est donnée par :

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{opt}}) = \sigma^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\sigma}^T(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\sigma}(Kh, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)^{-1}, \quad (4.93)$$

où σ^2 est la variance du bruit de sortie. A partir de cette matrice, il est ensuite possible d'obtenir les variances de chaque paramètre (sur la diagonale) ainsi que les coefficients de corrélation entre deux paramètres (hors diagonale).

4.3.2.3 – Applications

4.3.2.3.1 – Identification d'un système académique

L'algorithme qui vient d'être développé est appliqué à l'identification d'un système simulé décrit par une transmittance sous forme modale développée [Cois *et al.*, 2000a] :

$$H(s) = \frac{1+i}{s^{0.5} - e^{i\pi/3}} + \frac{1-i}{s^{0.5} - e^{-i\pi/3}} + \frac{2}{s^{0.5} + 1}. \quad (4.94)$$

Le système ainsi décrit est stable puisque les trois valeurs propres vérifient la condition (2.43). De plus, les deux premiers modes propres génèrent chacun un mode exponentiel et un multimode apériodique, le troisième ne générant qu'un multimode apériodique.

L'identification porte successivement sur deux fichiers de 400 points entrée-sortie simulés avec une période d'échantillonnage de 0.1 seconde, l'un non bruité, l'autre bruité en sortie par une séquence blanche de variance 1. Les résultats de l'identification sont portés dans le tableau 4.3 et illustrés par la figure 4.13 pour un modèle d'identification à trois modes propres. Lorsque l'on augmente le nombre de modes propres, il est toujours possible de réduire la dimension du modèle par simplification zéro propre - valeur propre. Ces résultats sont très satisfaisants puisque le système est identifié avec une bonne précision des paramètres aussi bien dans le cas non bruité que bruité.

Vraies valeurs		Valeurs estimées		
		Sans bruit	Avec bruit	Ecart type
n	0.5	0.5	0.513	0.037
$\Re(A_{1,2})$	1	1	1.1	0.15
$\Im(A_{1,2})$	± 1	± 0.999	± 0.999	0.068
$\Re(\lambda_{1,2})$	0.5	0.499	0.468	0.067
$\Im(\lambda_{1,2})$	± 0.866	± 0.866	± 0.879	0.030
A_3	2	2	1.95	0.39
λ_3	-1	-1	-0.983	0.20

Tableau 4.3 – Résultats de l'estimation paramétrique

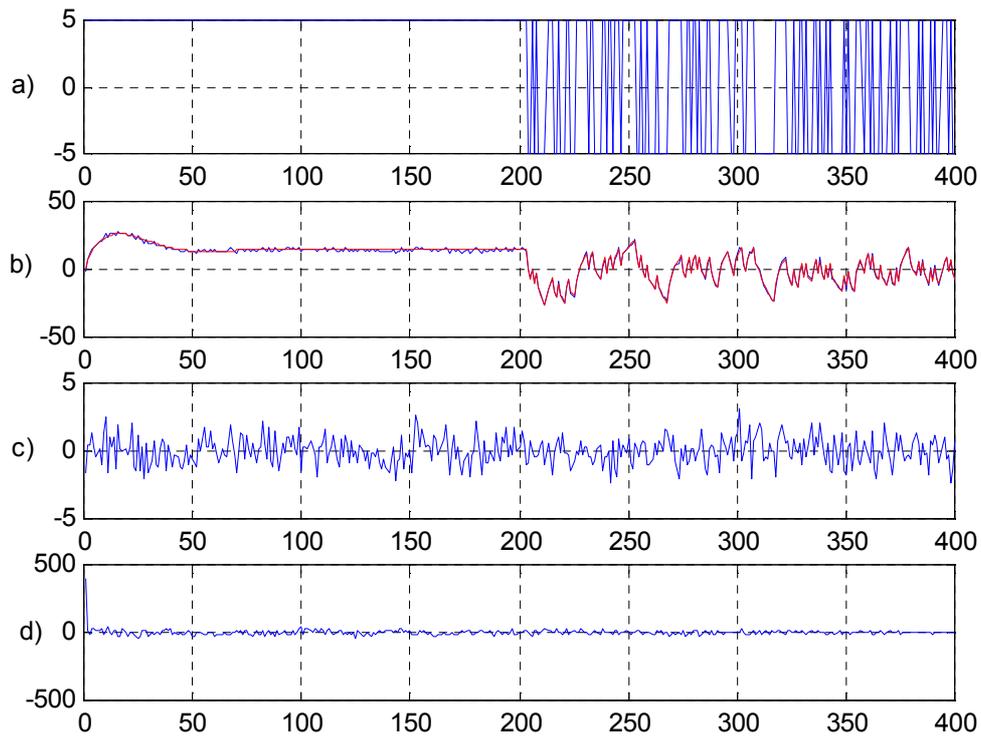


Figure 4.13 – Résultats de l'identification

a) signal d'entrée

b) sortie bruité et sortie du modèle

c) erreur de sortie du modèle

d) signal d'autocorrelation de l'erreur de sortie

4.3.2.3.2 – Identification d'un système thermique 2D simulé (sans bruit)

L'algorithme est maintenant appliqué à l'identification d'un système thermique bidimensionnel rectangulaire représenté par la figure 4.14.

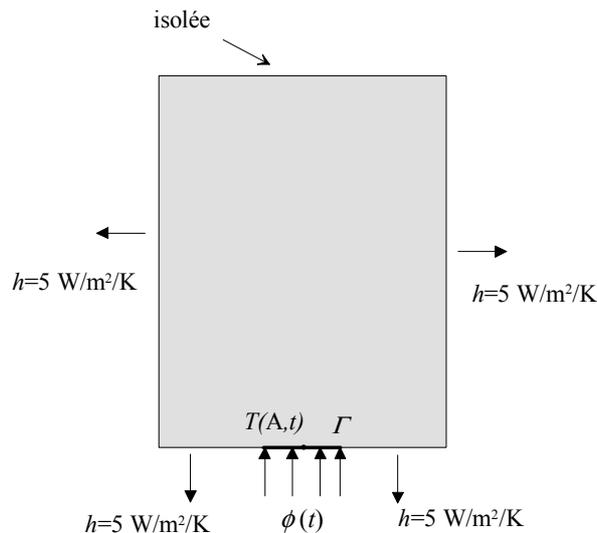


Figure 4.14 – Système bidimensionnel soumis au flux de chaleur $\phi(t)$ sur la portion Γ de la surface inférieure: la surface supérieure est isolée ;
 les autres surfaces échangent de la chaleur avec le milieu ambiant à température nulle
 (coefficient d'échange $h = 5\text{W/m}^2/\text{K}$, $\lambda = 40\text{W/m}^2/\text{K}$, $\alpha = 1.08 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$)

Les données d'estimation proviennent de la simulation du système par la méthode des éléments finis, avec un maillage constitué de 537 nœuds et de 997 éléments triangulaires. La figure 4.15 représente les courbes d'évolution du flux appliqué à la surface Γ et de la température calculée au point A. La figure 4.16 représente le thermogramme calculé à l'instant $t = 20\text{s}$.

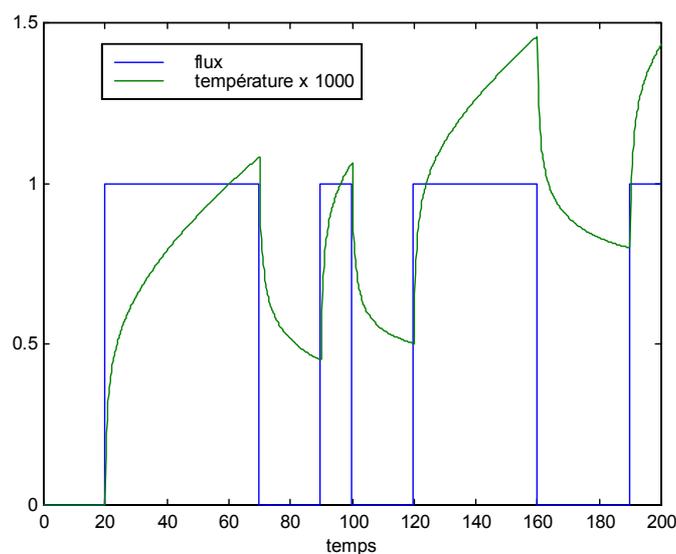


Figure 4.15 – Evolutions de la température au point A et du flux de chaleur obtenues par la méthode des éléments finis

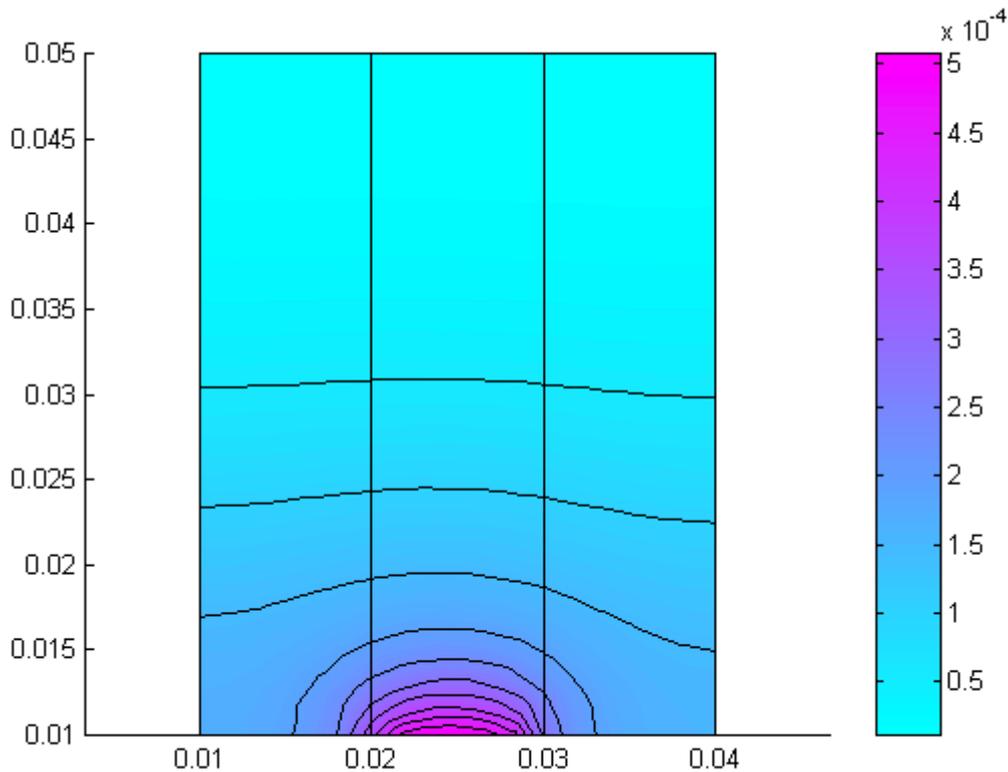


Figure 4.16 – Thermogramme calculé à l'instant $t = 20s$ pour l'évolution du flux de chaleur telle que représentée sur la figure 4.15 ; les lignes représentent les isothermes

L'algorithme d'estimation est alors appliqué à plusieurs structures de modèle. Les résultats sont portés dans le tableau 4.4.

N	A_i	λ_i	n
1	4	-0,024	0,5486
3	-2,928-j 3,65	-0,703+j 1,46	0,51
	-2,928-j 3,65	-0,703+j 1,46	
	3,087	-0,023	
4	-0,414-j 0,487	-1,5324-j 1,33	0,501
	-0,414+j 0,487	-1,5324+j 1,33	
	-2,171-j 0,605	-0,022+j 0,0006	
	-2,171+j 0,605	-0,022-j 0,0006	

Tableau 4.4 – Résultats de l'estimation paramétrique d'un modèle non entier pour différentes valeurs du nombre N de modes

L'analyse des résultats révèle que la valeur estimée de l'ordre de dérivation commun n se rapproche de 0.5 au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de modes du modèle.

La figure 4.17 illustre les résultats de l'estimation pour le modèle à 4 modes. Il apparaît clairement que le modèle estimé reproduit fidèlement le comportement dynamique du système thermique. Par ailleurs, cet exemple montre bien la cohérence des modèles non entiers dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5, avec les phénomènes de diffusion 2D.

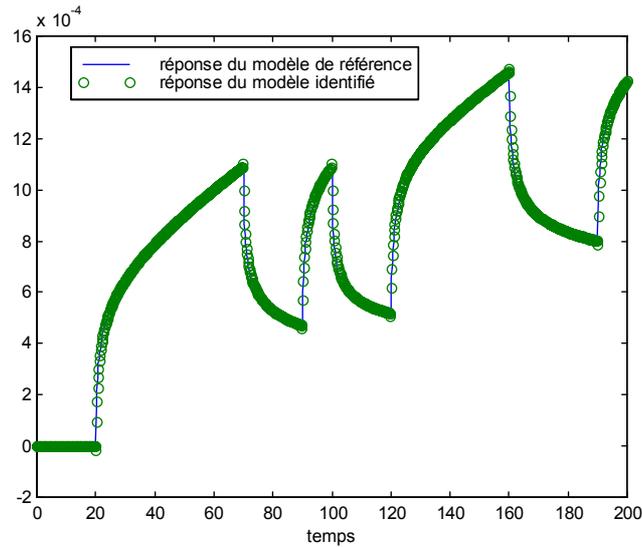


Figure 4.17 – Comparaison entre la réponse du modèle non entier et celle calculée par la méthode des éléments finis

Chapitre 5

Application de l'identification d'un système thermique à la résolution d'un problème inverse en thermique

5.1 – Introduction

Le dernier chapitre de ce mémoire traite de l'application de l'identification d'un système thermique à la résolution d'un problème inverse. L'exemple d'illustration retenu consiste en l'estimation des conditions thermiques de coupe lors d'une opération d'usinage par tournage.

Un nombre important de problèmes rencontrés en thermique concerne l'estimation d'une ou plusieurs grandeurs d'entrée à partir de la mesure d'une ou plusieurs grandeurs de sortie. Le lecteur est renvoyé à l'ouvrage de [Beck *et al.*, 1985] pour une description détaillée des différentes approches existantes pour la résolution de tels problèmes.

Considérons le système représenté par la figure 5.1 et sollicité par le flux $\phi(t)$ sur une partie de sa surface externe, la température $T(t)$ mesurée au plus près de la surface d'application du flux constituant la grandeur de sortie. L'objectif du problème inverse est alors d'estimer le flux $\phi(t)$ à partir de la mesure du signal $T(t)$.

L'approche adoptée dans ce chapitre s'articule autour de deux étapes.

Dans un premier temps, le comportement dynamique reliant la température $T(t)$ au flux $\phi(t)$ est identifié. Une procédure expérimentale permettant la mesure des signaux de flux et de température est alors mise en œuvre. Le système étant de nature thermique, le modèle

d'identification utilisé est un modèle non entier dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.

Dans un second temps, le système étant replacé dans ses conditions normales d'utilisation, le modèle obtenu dans la première étape ainsi que le signal de température $T(t)$ sont utilisés pour d'estimer le flux $\phi(t)$.

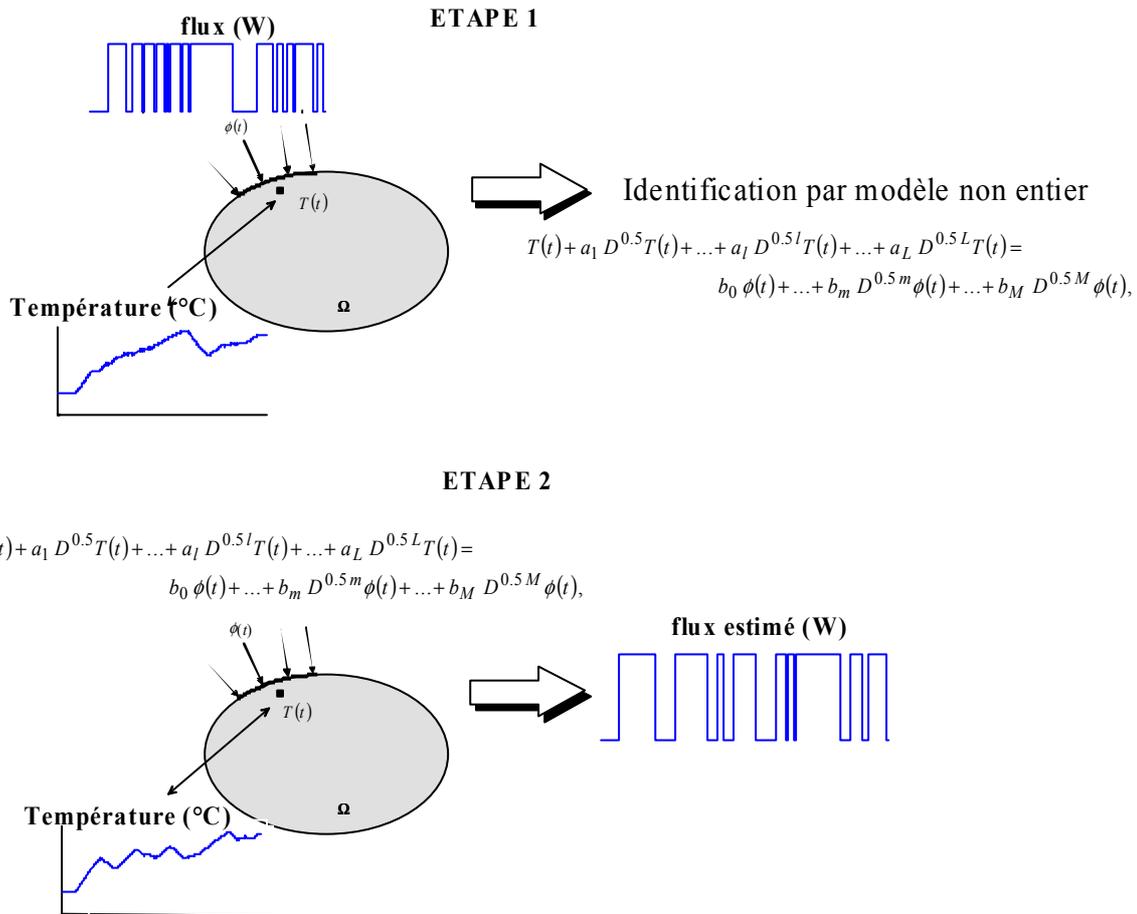


Figure 5.1 – Résolution d'un problème inverse

L'exemple présenté à titre d'illustration consiste en l'estimation en temps réel des conditions thermiques (flux et température) au niveau de l'arête de coupe d'un outil de tournage (figures 5.2et 5.3). L'estimation de ces conditions représente un enjeu de premier plan dans le domaine de l'usinage. Deux raisons en justifient l'importance.

La première provient du fait que la connaissance des conditions thermiques de coupe permet, en temps réel, une optimisation efficace des paramètres de coupe (vitesse de rotation, vitesse d'avance, ...). Une telle optimisation offre sans aucun doute des perspectives intéressantes, notamment dans le domaine de l'usinage à grande vitesse.

La seconde raison concerne la surveillance de l'état d'usure de l'outil. L'étude de l'évolution des conditions thermiques de coupe en fonction du nombre de passes effectuées par l'outil permet en effet de détecter rapidement une éventuelle dégradation de l'arête de coupe de l'outil. Une telle information, exploitée par un algorithme de prise de décision, permet d'envisager une procédure de changement automatique d'outil dans le cadre de l'usinage de pièces en grande série.

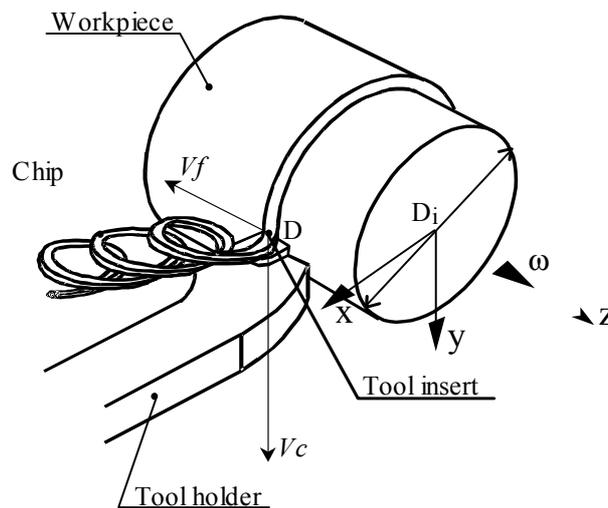


Figure 5.2 – Procédé d'usinage par tournage

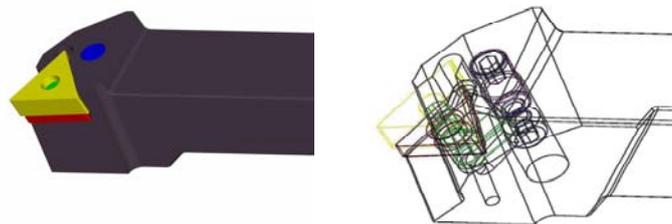


Figure 5.3 – Outil de coupe utilisé en tournage

L'objectif de la méthode proposée consiste à développer un dispositif de mesure non intrusif, c'est-à-dire ne nécessitant pas d'usinage de l'outil pour y insérer un capteur. De plus, un changement d'outil (ou plaquette d'outil) doit être possible sans modification du dispositif.

Dans ce contexte, la démarche décrite par la figure 5.1, décrivant la résolution d'un problème inverse en 2 étapes, apparaît la mieux adaptée. C'est précisément celle-ci qui a été mise en œuvre en collaboration avec J.-L. Battaglia et L. Puigsegur du Laboratoire "Energétique et Phénomènes de transfert" de Bordeaux.

L'estimation des conditions thermiques de coupe fait appel à la mise en place d'un thermocouple adapté à l'outil qui mesure la température $T(t)$ en un point P proche de l'arête de coupe.

Après ce paragraphe introductif, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les différentes phases qui interviennent dans la mise en œuvre du dispositif d'estimation des conditions thermiques de coupe.

Le deuxième paragraphe commence par décrire la phase de la mesure de température en un point proche de la pointe de l'outil. Un capteur assure cette mesure aussi bien lors des essais expérimentaux visant à identifier le comportement thermique de l'outil (première étape) qu'en conditions réelles d'usinage (seconde étape).

Le troisième paragraphe décrit la première étape de la résolution du problème, à savoir l'identification du comportement dynamique de l'outil. En laboratoire, un dispositif expérimental a été mis en œuvre afin de reproduire les conditions thermiques d'usinage. Le comportement dynamique de l'outil de coupe est ensuite identifié par deux modèles non entiers. Le premier relie la température $T(t)$, mesurée au point P, au flux thermique pénétrant la pointe de l'outil. Le second relie la même température $T(t)$ à celle de la pointe de l'outil.

Le quatrième paragraphe est consacré à la seconde étape. L'outil étant replacé en conditions d'usinage, la mesure de la température $T(t)$ ainsi que les deux modèles non entiers sont utilisés dans un algorithme d'inversion afin d'estimer en temps réel les conditions thermiques de coupe, à savoir le flux pénétrant la pointe de l'outil et sa température.

5.2 – Mesure de la température en un point proche de la pointe de l'outil

La mesure de la température en un point P proche de la pointe de l'outil est effectuée à l'aide d'un thermocouple de type T (cuivre – constantan) dont la sensibilité est de $51\mu\text{V}/^\circ$. Celui-ci est réalisé à partir d'un feuillet en cuivre de forme triangulaire et d'épaisseur 2/10mm sur lequel est soudé un fil de constantan au niveau de l'une de ses pointes. Un fil de cuivre est également soudé sur une autre pointe du triangle. La différence de potentiel aux bornes des deux fils est donc proportionnelle à la température du point de soudure cuivre – constantan.

L'ensemble est inséré entre la plaquette et le porte-outil (figures 5.4 et 5.5) de manière que le point P de mesure se situe le plus près possible de la pointe de l'outil (3 à 5 mm selon l'épaisseur de la plaquette).

La forme triangulaire du feuillet en cuivre permet le maintien en position du thermocouple lors d'un changement de plaquette.

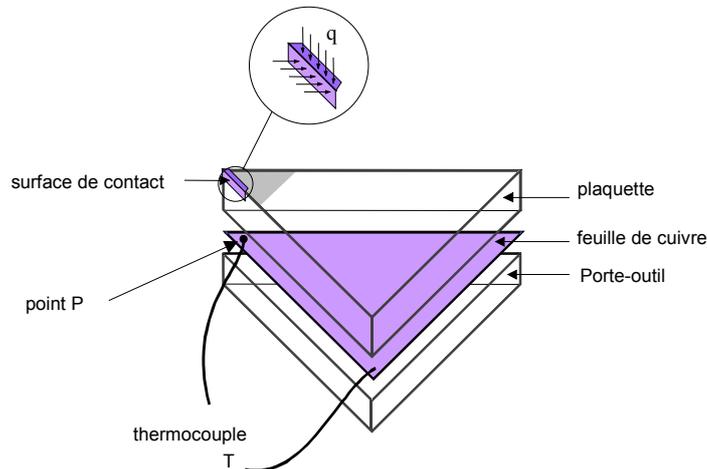


Figure 5.4 – Représentation schématique du thermocouple inséré entre la plaquette et le porte-outil

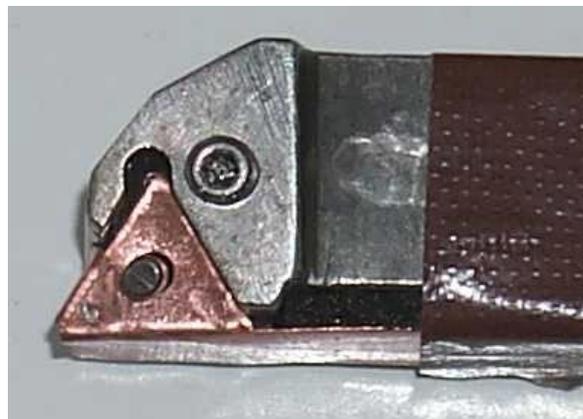


Figure 5.5 – Vue du feuillet en cuivre positionné sur le porte-outil

5.3 – Première étape : identification du comportement dynamique de l'outil

L'objectif de la première étape est d'identifier le comportement dynamique de l'outil. Cette étape requiert la mise en œuvre d'un dispositif expérimental spécifique, afin de placer

l'outil dans des conditions thermiques similaires à celles de l'usinage. Deux modèles de comportement sont alors estimés, le premier reliant la température du point P au flux thermique pénétrant la pointe, le second reliant la température du point P à la température de la pointe de l'outil.

5.3.1 – Réalisation d'un banc de caractérisation de l'outil

Afin de placer l'outil dans des conditions thermiques similaires à celles de l'usinage, un flux thermique est appliqué à la surface en contact avec la pièce pendant l'usinage. L'objectif étant d'identifier le comportement dynamique de l'outil, le flux appliqué ainsi que la température de la pointe de l'outil doivent être mesurables. A cet effet, une micro-résistance, constituée d'un film de platine sérigraphié sur un substrat d'alumine, a été développée au laboratoire IXL de l'Université Bordeaux 1 (figure 5.6). La micro-résistance est surmontée d'un plot en argent dont le rôle est de canaliser le flux thermique vers la pointe de l'outil appliquée et maintenue contre lui. La température de la pointe de l'outil est mesurée à l'aide d'un thermocouple de type K disposé dans le plot en argent (figure 5.7)

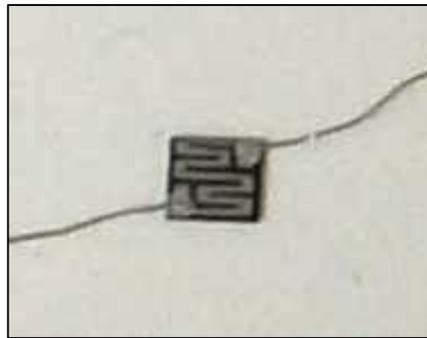


Figure 5.6 – Micro-résistance constituée d'un film de platine sérigraphié sur un substrat d'alumine

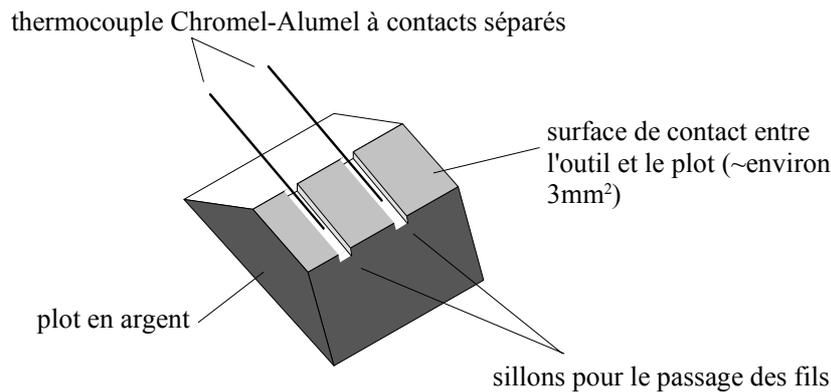


Figure 5.7 – Plot en argent

L'outil est monté dans un banc de déplacement 3D de type μ -control permettant de contrôler précisément sa position par rapport au dispositif chauffant. Afin de minimiser la résistance thermique de contact entre la pointe de l'outil et le plot en argent, un film de graisse d'argent est appliqué entre les deux parties et un effort de contact est maintenu (figure 5.8).



Figure 5.8 – Application de l'outil sur le système de chauffe

5.3.2 – Identification du comportement dynamique de l'outil

Seuls les résultats sur l'identification du comportement dynamique entre la température au point P (sortie du système) et le flux (entrée du système) sont présentés dans ce paragraphe, les résultats entre la température au point P et la température de la pointe de l'outil étant similaires.

Afin d'identifier le comportement dynamique de l'outil, deux jeux de données sont enregistrés (figures 5.9 et 5.10). Le premier est utilisé pour réaliser l'estimation paramétrique du modèle, le second étant quant à lui réservé à la validation du modèle.

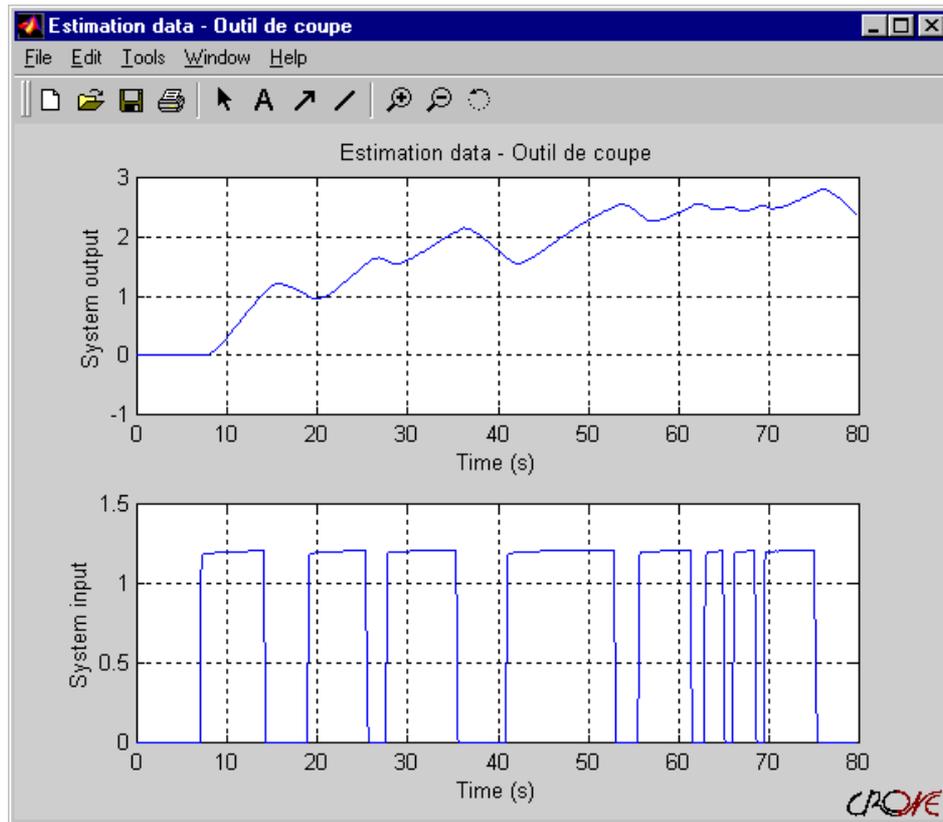


Figure 5.9 – Données d'estimation du modèle

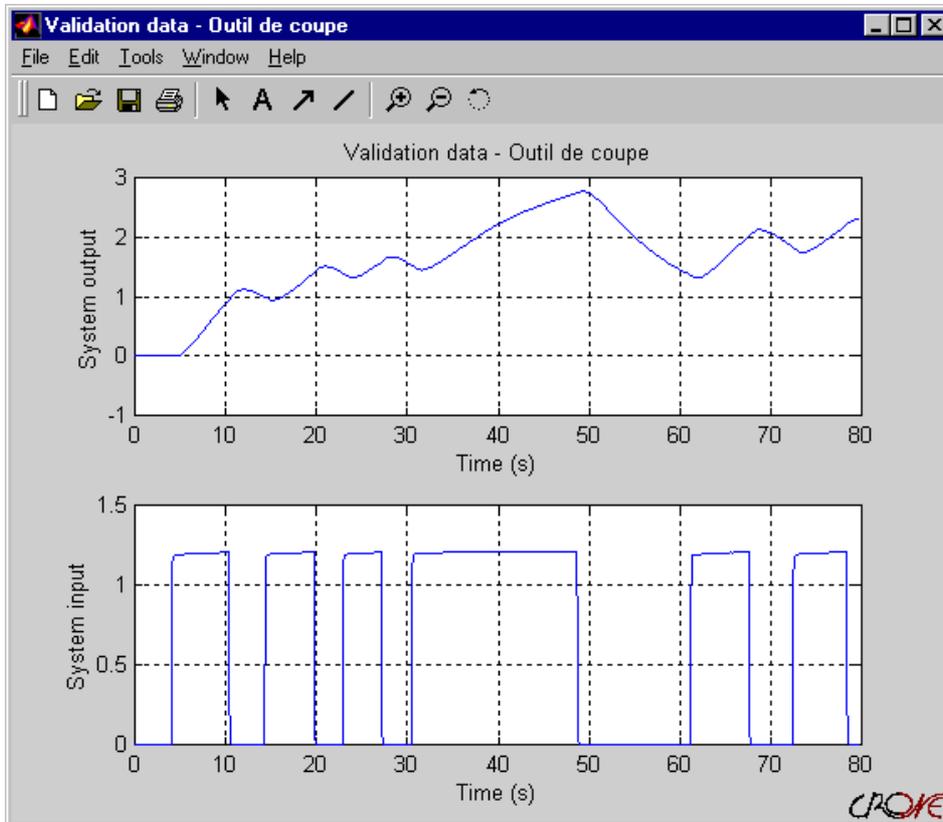


Figure 5.10 – Données de validation du modèle

Le système étant de nature thermique, le modèle d'identification est une équation différentielle non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5, soit :

$$T(t) + \dots + a_l D^{0.5l} T(t) + \dots + a_L D^{0.5L} T(t) = b_0 \phi(t) + \dots + b_m D^{0.5m} \phi(t) + \dots + b_M D^{0.5M} \phi(t). \quad (5.1)$$

La méthode d'estimation utilisée est la méthode des variables instrumentales associée aux filtres de variables d'état non entiers, ceux-ci étant en l'occurrence des filtres de Poisson non entiers dont la fréquence de coupure est égale à la fréquence de Nyquist, soit $\omega_f = 10\pi$ rad/s.

Après optimisation, l'équation différentielle correspondant au transfert entre la température au point P et le flux est donnée par :

$$T(t) + 16.97 D^{0.5} T(t) - 13.50 D^1 T(t) + 59.09 D^{1.5} T(t) = 8.20 \phi(t) - 5.50 D^{0.5} \phi(t). \quad (5.2)$$

La figure 5.11 illustre les résultats de l'estimation à travers les courbes représentatives de la température mesurée et de la température simulée par le modèle (5.2).

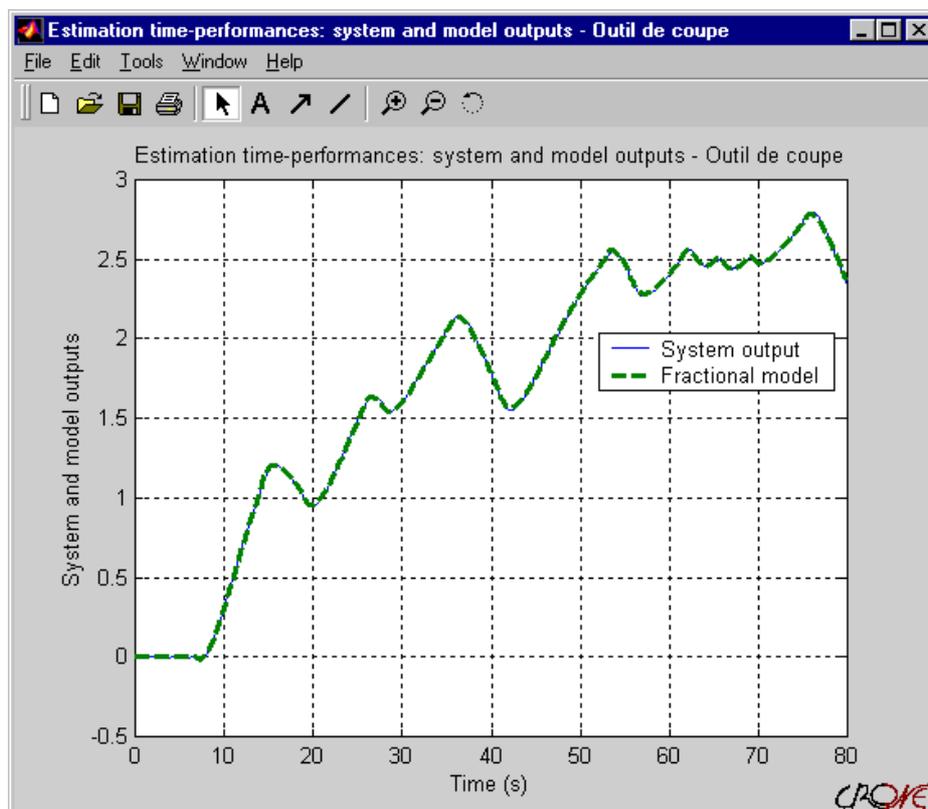


Figure 5.11 – Courbes représentatives de la température mesurée et de la température simulée par le modèle (5.2) (données d'estimation)

Afin de valider le modèle estimé, celui-ci est simulé à partir du flux issu du jeu de données de validation. La figure 5.12 illustre les résultats de validation à travers les courbes représentatives de la température mesurée et de la température simulée par le modèle (5.2), ces résultats révélant une bonne juxtaposition des deux courbes.

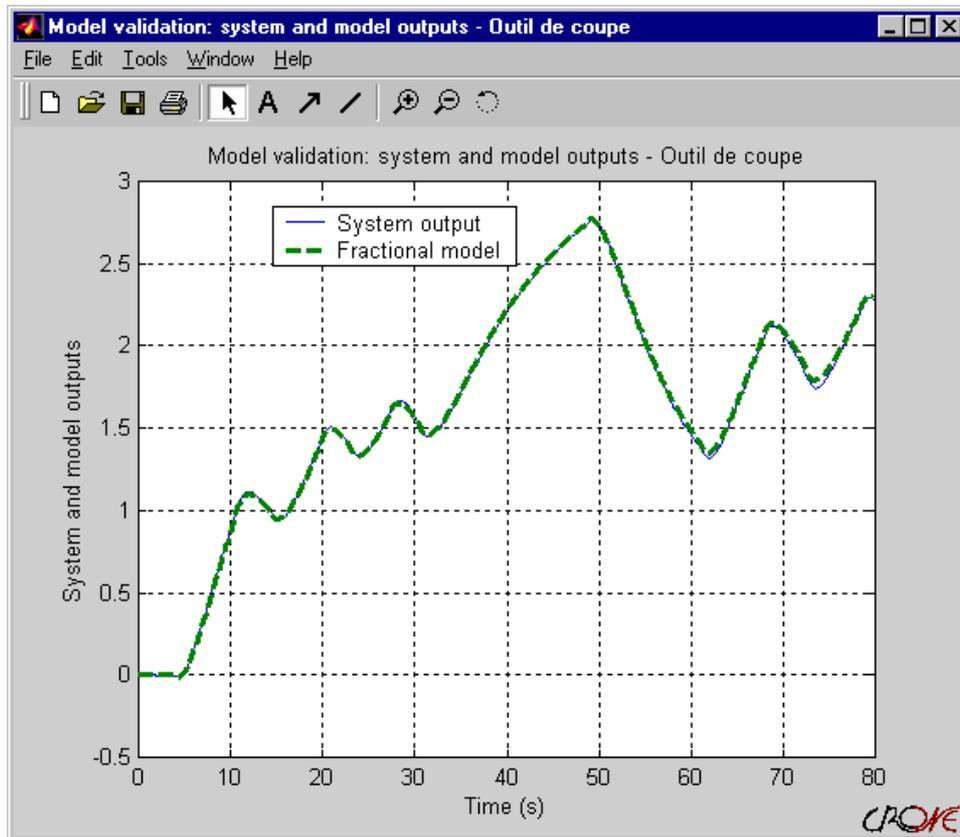


Figure 5.12 – Courbes représentatives de la température mesurée et de la température simulée par le modèle (5.2) (données de validation)

La figure 5.13 représente la localisation des pôles, des valeurs propres et des zéros propres du modèle (5.2). Le modèle est stable puisque les pôles sont à partie réelle négative.

La figure 5.14 représente enfin la réponse indicielle du modèle (5.2).

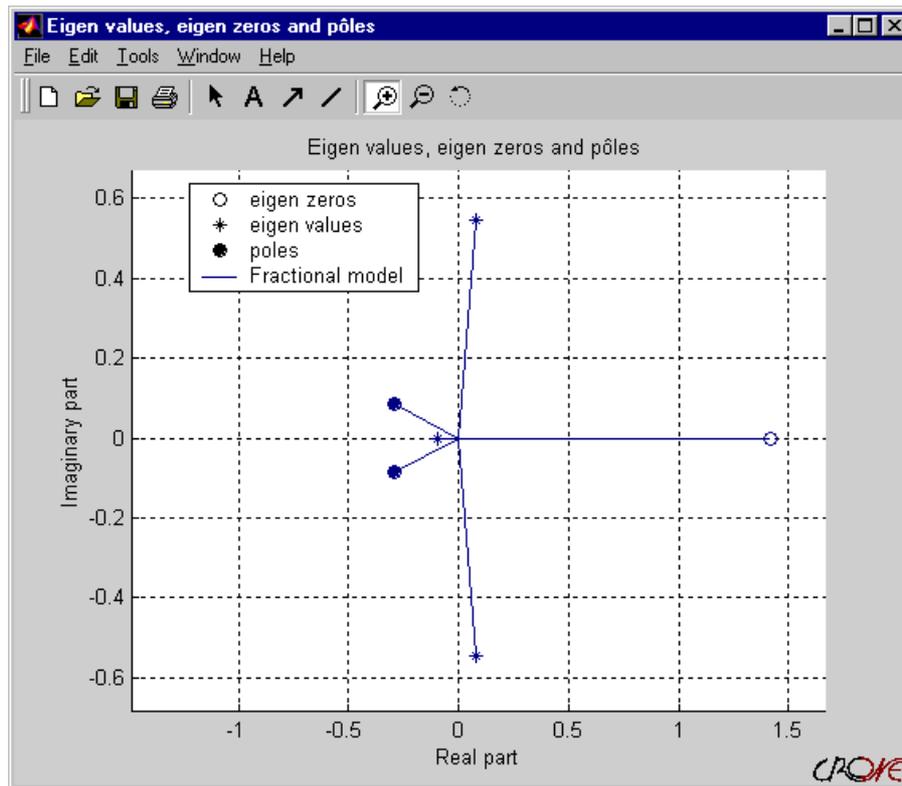


Figure 5.13 – Localisation des pôles, valeurs propres et zéros propres du modèle (5.2)

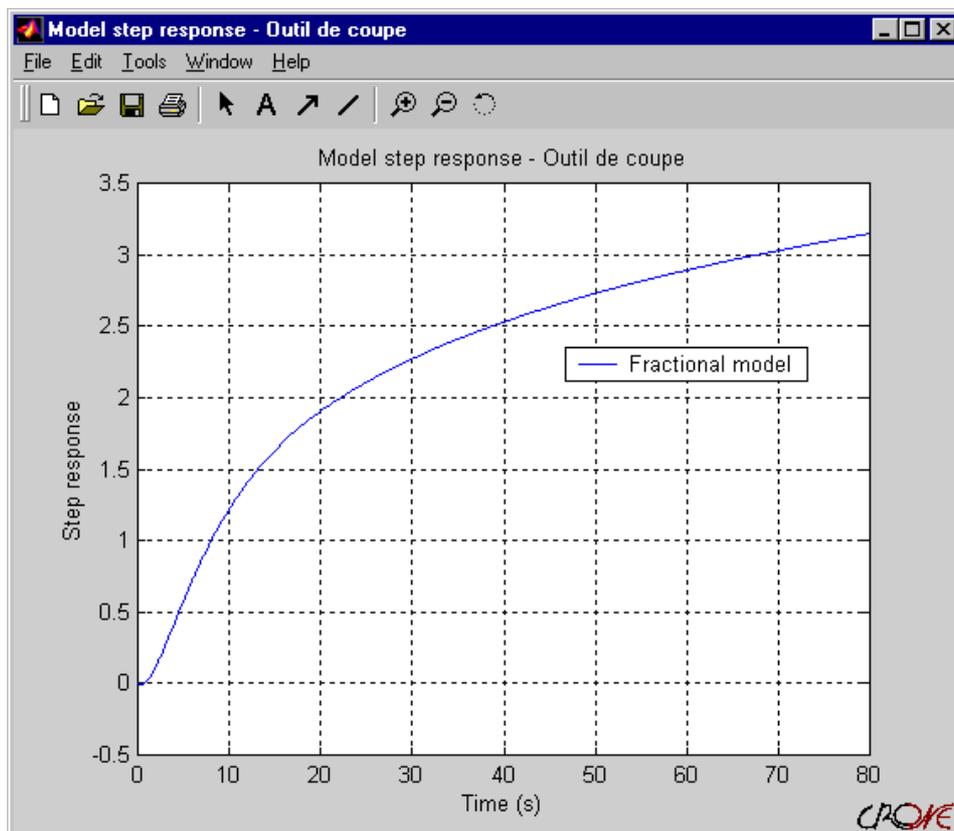


Figure 5.14 – Réponse indicielle du modèle (5.2)

La même démarche est appliquée à l'identification du comportement dynamique reliant la température mesurée au point P à la température de la pointe de l'outil.

5.4– Seconde étape : estimation des conditions thermiques de coupe pendant l'usinage

5.4.1 – Algorithme d'inversion

Le comportement dynamique de l'outil étant maintenant identifié par deux modèles, l'un entre la température au point P et le flux à la pointe de l'outil, l'autre entre la température au point P et la température à la pointe de l'outil, la seconde étape consiste à mettre en œuvre un algorithme d'inversion pour, à partir de ces deux modèles et de la température enregistrée pendant l'usinage, estimer le flux et la température à la pointe de l'outil.

Tirée de l'ouvrage de Beck [Beck *et al.*, 1985], la technique d'estimation retenue est séquentielle, permettant ainsi une estimation en temps réel pendant l'usinage. Son principe est fondé sur l'hypothèse selon laquelle, à l'instant t , la grandeur d'entrée (flux $\phi(t)$ ou température à la pointe de l'outil) est constante sur l'intervalle futur $[t, t + rh]$, r désignant le nombre de pas de temps futurs et h la période d'échantillonnage.

La grandeur d'entrée à l'instant $t + h$ est alors déterminée par la minimisation d'un critère quadratique entre la température au point P et celle simulée en considérant la grandeur d'entrée constante sur les r pas de temps futurs. L'expression du critère ainsi que sa minimisation conduisent alors à l'estimée de la grandeur d'entrée u_k (flux ou température) conformément à :

$$\hat{u}_k = \frac{\sum_{i=1}^r dh_i (T_{k+i-1} - \tilde{T}_{k+i-1})}{\sum_{i=1}^r dh_i^2}, \text{ avec } \tilde{T}_{k+i-1} = \sum_{l=1}^{k-1} h_{k+i-l} u_l + T_0, \quad (5.3)$$

et où $dh_i = \sum_{l=1}^i h_l$ (h_l étant la réponse impulsionnelle du modèle de l'outil).

5.4.2– Application

L'usinage est réalisé sur un tour parallèle équipé de l'outil instrumenté (figure 5.15). Il consiste en un chariotage sur un rondin d'acier de type 42CD4 de 57,4mm de diamètre avec une plaquette de carbure SANVIK COROMANT TNMG 16 04 08-23. Les paramètres de la coupe sont :

- vitesse de coupe : $V_c = 90\text{m/min}$
- avance : $f = 0.3\text{mm}$
- profondeur de passe : $a_p = 2\text{mm}$.

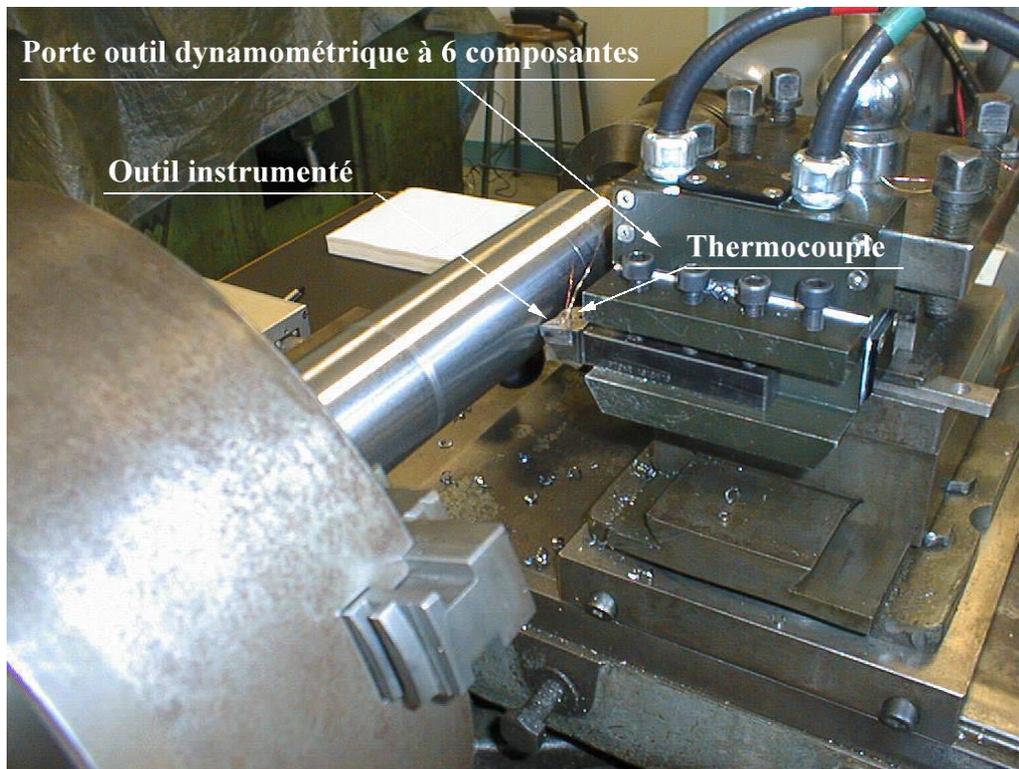


Figure 5.15 – Tour utilisé pour l'estimation, pendant l'usinage, du flux et de la température à la pointe de l'outil

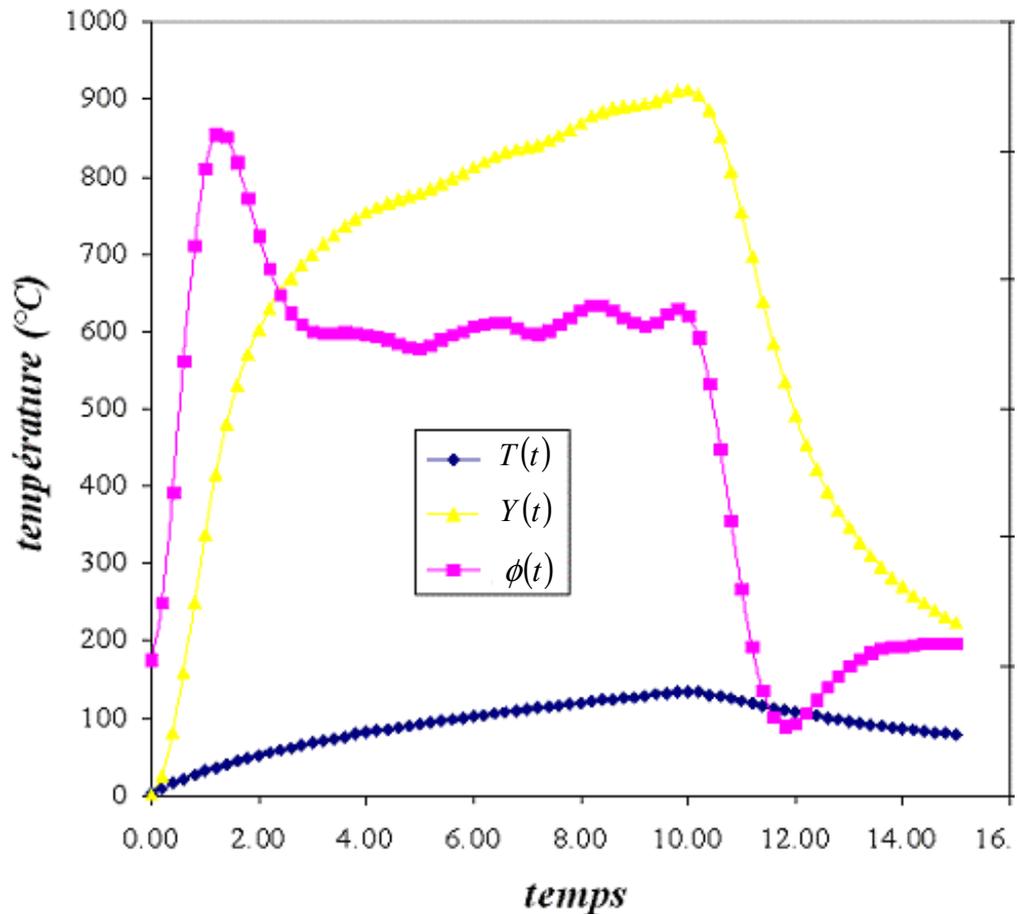


Figure 5.16 – Courbes représentatives des variations
 – de la température mesurée au point P ($T(t)$)
 – du flux estimé à la pointe de l'outil ($\phi(t)$)
 – de la température estimée à la pointe de l'outil ($Y(t)$)

5.5 – Conclusion et perspectives

Une méthode d'estimation des conditions thermiques de coupe en usinage par tournage a été proposée. Basée sur l'identification du comportement thermique entre les conditions en pointe d'outil et la température mesurée par un capteur proche de la pointe, cette approche diffère des approches classiques pour plusieurs raisons.

La première provient du fait qu'elle ne requiert pas de connaître précisément les paramètres thermo-physiques de l'outil. Une approche basée sur la modélisation thermique de l'outil par la méthode des éléments finis a été proposée par Olson et Throne [Olson and

Throne, 2001]. Contrairement à l'approche basée sur l'identification de l'outil, une telle méthode requiert la connaissance précise non seulement de la géométrie de l'outil mais en plus de tous les paramètres et coefficients caractérisant les matériaux et interfaces de contacts. De plus, le comportement thermique du capteur (thermocouple placé sous l'arête de coupe) doit également faire l'objet d'une modélisation précise. L'approche par identification permet d'inclure directement le comportement du capteur dans le modèle identifié.

Parmi les approches basées sur l'identification du comportement de l'outil, celle proposée dans ce mémoire tient son originalité de par la nature non entière des modèles utilisés. Le lecteur trouvera dans [Battaglia and Batsale, 2000] une approche basée sur l'utilisation de modèles "classiques" ARX.

Afin de confirmer l'intérêt de l'approche "non entière" en matière de résolution de problème inverse, une étude comparative par rapport à celles précédemment citées reste à effectuer. Une telle étude facilitera la comparaison objective de l'ensemble des méthodes, en mettant en avant leurs avantages et inconvénients.

Conclusion générale et perspectives

L'interprétation et la discussion des principaux résultats obtenus dans ce mémoire font l'objet de la conclusion.

Le **chapitre 1** commence par rappeler les définitions et les principales propriétés des opérateurs différentiels non entiers. Une interprétation originale, fondée sur le produit de convolution entre la fonction à différentier et un "facteur d'oubli", est notamment présentée. L'intégrale d'ordre réel n compris entre 0 et 1 d'une fonction $f(t)$ s'identifie ainsi à l'aire que définit cette fonction pondérée par un facteur d'oubli. Cette interprétation est intéressante dans le sens où elle met en évidence la capacité de l'opérateur de dérivation non entière de modéliser les systèmes à mémoire longue tels que les systèmes thermiques.

La représentation d'un système linéaire non entier complexe dans un espace d'état généralisé fait l'objet des développements du **chapitre 2**. La représentation d'état non entière est étudiée à travers le calcul de la réponse impulsionnelle d'un système non entier complexe commensurable. Portant sur les valeurs propres et sur l'ordre complexe commensurable, un théorème de stabilité est établi. Quelques méthodes de simulation de systèmes non entiers sont présentés. Les méthodes directes sont basées sur la discrétisation de l'équation différentielle non entière par une approximation numérique de l'opérateur de dérivation non entière. Les méthodes indirectes sont quant à elles fondées sur l'approximation de la transmittance non entière par une transmittance entière.

L'application de l'opérateur de dérivation non entière à la modélisation des phénomènes de diffusion fait l'objet du **chapitre 3**, le champ applicatif retenu étant celui de la thermique. L'étude du transfert de chaleur dans six milieux semi-infinis et finis ainsi que la détermination d'approximations sous la forme de transmittances entières et non entières

constitue la contribution principale de ce chapitre. La comparaison des approximations, au moyen des diagrammes de Bode, révèle de bien meilleures performances en faveur des transmittances non entières.

Le chapitre 4 est consacré à l'identification temporelle par modèle non entier. Portant sur une équation différentielle non entière, deux types de méthodes d'estimation paramétrique sont proposées : les méthodes à erreur d'équation et les méthodes à erreur de sortie. Les méthodes à erreur d'équation exploitent la technique d'optimisation des moindres carrés linéaire. Dans ce cas, seuls les coefficients des opérateurs différentiels sont estimés, les ordres de dérivation étant supposés connus. Deux méthodes sont proposées, l'une basée sur la discrétisation de l'équation différentielle, l'autre sur l'utilisation de filtres de variables d'état non entiers. Les méthodes à erreur de sortie utilisent l'algorithme d'optimisation non linéaire de Marquardt, les ordres de dérivation étant alors estimés au même titre que les coefficients. Deux méthodes sont proposées. La première est fondée sur l'approximation de l'opérateur d'intégration non entière par une répartition récursive de zéros et de pôles, la seconde étant quant à elle basée sur la forme diagonale de la représentation d'état non entière définie au chapitre 2.

Le chapitre 5 propose une application de l'identification par modèle non entier à la résolution d'un problème inverse en thermique. L'exemple d'illustration retenu consiste en l'estimation des conditions thermiques de coupe en usinage par tournage. Réalisée en deux étapes, la méthode proposée commence par identifier le comportement dynamique de l'outil de coupe par un modèle non entier. La seconde étape consiste ensuite à "inverser" ce modèle pendant la phase d'usinage afin d'estimer le flux et la température à la pointe de l'outil.

Quant aux perspectives de recherche, elles s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours.

Dans le chapitre 2, un objectif ambitieux consisterait à déterminer les pôles d'une transmittance non entière dont les ordres de dérivation seraient complexes non commensurables. Le calcul de la réponse impulsionnelle analytique serait alors possible et un théorème de stabilité plus général pourrait être établi.

Dans le chapitre 3, il conviendrait de prolonger l'étude aux transferts de chaleurs 2D puis 3D. Ceci permettrait de confirmer l'approche adoptée en identification concernant les ordres de dérivation choisis a priori multiples de 0.5 dans le cas de systèmes thermiques complexes. Une étude particulière peut également porter sur les systèmes électrochimiques (batteries, ...) dont l'équation de diffusion régit la dynamique.

Enfin, dans le chapitre 4, un objectif ambitieux peut consister à étendre la méthode des filtres de variables d'état à des filtres plus généraux que les filtres de Poisson. Un filtre défini par le dénominateur de la fonction de transfert à estimer peut notamment s'avérer très performant.

Bibliographie

- [Aoun, 2000] Aoun M., *Identification temporelle par modèle non entier issu d'une décomposition modale*, Rapport de DEA, Université Bordeaux I, Talence, France, 2000.
- [Aoun *et al.*, 2000] Aoun M., Cois O., Oustaloup A., Battaglia J.-L. Identification temporelle par modèle non entier issu d'une décomposition modale, *In proceedings of JSFT'2000, Journées Scientifiques Franco-Tunisiennes*, Monastir, 25-26 octobre, 2000.
- [Aoun *et al.*, 2002] Aoun M., Malti R., Cois O., Oustaloup A., System identification using fractional hammerstein models - *Accepted paper for presentation in the 15th IFAC World Congress 2002*, Barcelona, Spain, July 21-26, 2002.
- [APP, 94] Agence pour la Protection des Programmes - N° 93.30.006.00 (IDDN.FR.001.300006.00. R.P.1993.000.00000 - 28/07/1993) ; N° 94.11.015.00 (IDDN.FR.001.110015.00. R.P.1994.000.00000) - le16/03/1994.
- [Astrom and Eykhof, 1971] Astrom K.J., Eykhof P., System Identification – A survey, *Automatica*, 7, pp. 123-167, 1971.
- [Battaglia and Batsale, 2000] Battaglia, J.-L., Batsale, J.-C., Estimation of heat flux and temperature in a tool during turning, *Inverse Problem in Engineering*, Vol. 8, pp. 435-456, 2000.
- [Battaglia *et al.*, 2000] Battaglia J.-L., Le Lay L., Batsale J.-C., Oustaloup A., Cois O. Heat flux estimation through inverted non integer identification models, *International Journal of Thermal Science*, vol. 39,n°3, p.374-389, 2000.

- [Battaglia *et al.*, 2001a] Battaglia J.-L., Cois O., Puigsegur L., Oustaloup A. Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 44, n°14, p.2671-2680, 2001.
- [Battaglia *et al.*, 2001b] Battaglia J.-L., Cois O., Puigsegur L. Solving an IHCP using a consistent identified model, *In proceedings of Eurotherm 2001*, Poitiers, France, 5-7 March, 2001.
- [Beck *et al.*, 1985] Beck, J.V., Blackwell B., Clair C.R.St., *Inverse Heat Conduction*, A Wiley-Interscience Publication, 1985.
- [Chen and Moore, 2001] Chen Y., Moore K.L., Discretization schemes for fractional differentiators and integrators, *IEEE Transaction on Circuits and Systems 1: Fundamental Theory and Applications*, October, 2001.
- [Cois, 1998] Cois O., *Contribution à la définition de la représentation d'état généralisée*, DEA thesis, Université Bordeaux I, Talence, 1998.
- [Cois *et al.*, 1998] Cois O., Lanusse P., Levron F., Oustaloup A., Contribution à la définition de la Représentation d'Etat Généralisée, *Actes de RTCLF'98, 24^{ème} Réunion des Théoriciens de Circuits de Langue Française*, Brest, France, 1^{er}-2 octobre, 1998.
- [Cois et Levron, 1999] Cois O., Levron F., Représentation d'état généralisée, espace bi-complexe, *Communication effectuée dans le cadre de la première journée de l'action thématique "Les systèmes à dérivées non entières"*, Bordeaux, France, 10 juin, 1999.
- [Cois *et al.*, 1999a] O. Cois, J.L. Battaglia, L. Le Lay, Identification temporelle par modèle non entier, *Actes des JDA'99, Journées Doctorales d'Automatique*, Nancy, France, 21-23 Septembre, 1999.
- [Cois *et al.*, 1999b] Cois O., Battaglia J.-L., Le Lay L., Oustaloup A., Identification temporelle par modèle non entier, *RTCLF'99, 25^{ème} Réunion des Théoriciens de Circuits de Langue Française*, Metz, France, 14-15 octobre, 1999.
- [Cois et Oustaloup, 2000a] Cois O., Oustaloup A. Une synthèse sur les méthodes d'identification par modèle non entier, *CIMASI'2000, 3^{ème} Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et*

les Sciences de l'Ingénieur, Casablanca, Maroc, 23-25 octobre, 2000.

- [Cois et Oustaloup, 2000b] Cois O., Oustaloup A. Une synthèse sur les méthodes d'identification par modèle non entier, *Journée d'étude du Groupe Thématique Identification du GDR Automatique*, Paris, France, 20 mars, 2000.
- [Cois et al., 2000a] Cois O., Oustaloup A., Battaglia E., Battaglia J.-L. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification, *In proceedings of IFAC-SYSID'2000, 5th Symposium on System Identification*, Santa Barbara, USA, 21-23 June, 2000.
- [Cois et al., 2000b] Cois O., Levron F., Oustaloup A., Systèmes à dérivées d'ordre complexe, *Actes de IEEE-CIFA'2000, Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Lille, France, 5-8 juillet, 2000.
- [Cois et al., 2000c] Cois O., Battaglia E., Oustaloup A., Identification par modèle non entier issu d'une décomposition modale, *Journée d'étude du Groupe Thématique Identification du GDR Automatique*, Paris, France, 20 mars, 2000.
- [Cois et Poinot, 2001] Cois O., Poinot T. Identification de système par modèle non entier, *Actes des JNA'2001, Journées Nationales d'Automatique*, Autran, France, 31 janvier-2 février, 2001.
- [Cois et al., 2001a] Cois O., Oustaloup A., Poinot T., Battaglia J.-L. Fractional state variable filter for system identification by fractional model, *In proceedings of ECC'2001, 6th European Control Conference*, Porto, Portugal, 3-5 September, 2001.
- [Cois et al., 2001b] Cois O., Levron F., Oustaloup A. Complex-fractional systems: modal decomposition and stability condition, *In proceedings of ECC'2001, 6th European Control Conference*, Porto, Portugal, 3-5 September, 2001.
- [Cois et al., 2001c] Cois O., Puigsegur L., Oustaloup A., Battaglia J.-L. Identification par modèle non entier : application à l'estimation des conditions thermiques de coupe en tournage, *Actes de JIME'2001, Journées "Identification et de Modélisation Expérimentale"*, Nancy, France, 29-30 mars, 2001.

- [Cois *et al.*, 2001d] Cois O., Oustaloup A. Battaglia J.-L. La dérivation non entière en identification : application à l'estimation des conditions thermiques de coupe en tournage, *RTCLF'01, 27^{ème} Réunion des Théoriciens de Circuits de Langue Française*, Paris, France, 20-21 septembre, 2001.
- [Darling and Newmann, 1997] Darling R. and J. Newman, On the short behavior of porous intercalation electrodes, *J. Electrochem. Soc.*, **144(9)**, 3057-3063, 1997.
- [Grünwald, 1867] Grünwald A.K., Ueber begrenzte derivationen und deren Anwendung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **XII(6)**, pp. 441-480, 1867.
- [Hartley and Lorenzo, 1998] Hartley T.T., Lorenzo C.F., A solution to the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation, *NASA report*, 1998.
- [Heleschewitz et Matignon, 1998] Heleschewitz D., Matignon D., Diffusive realisations of fractional integrodifferential operators: structural analysis under approximation. *In proceedings of the IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, France, 8-10 juillet, 1998.
- [Heleschewitz et Matignon, 1999] Heleschewitz D., Matignon D., Réalisations et approximations diffusives d'oscillateurs avec amortissements viscoélastiques, *Actes des JDA'99, Journées Doctorales d'Automatique*, Nancy, France, 21-23 septembre, 1999.
- [Hotzel, 2000] Hotzel R. *Contribution à la théorie structurelle et à la commande des systèmes linéaires fractionnaires*, Ph. D. Thesis, Université de Paris-Sud, Orsay, 1998.
- [Ichise et al., 1971] Ichise M., Nagayanagi Y., Kojima T., An analog simulation of non integer order transfer functions for analysis of electrode processes, *J. Electroanal. Chem. Interfacial Electrochem.*, **33**, 1971.
- [Lanusse, 1994] Lanusse P., *De la commande CRONE de première génération à la commande CRONE de troisième génération*, Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux I, Talence, France, 14 février, 1994.

- [Le Lay, 1998] Le Lay L., *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I, Talence, France, 20 octobre, 1998.
- [Le Lay *et al.*, 1999a] Le Lay L., Oustaloup A., Sabatier J., Cois O., Laguerre functions generalised to any real derivative orders, *In proceedings of ECC'99, 5th European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, September, 1999.
- [Le Lay *et al.*, 1999b] Le Lay L., Oustaloup A., Levron F., Cois O., Identification fréquentielle par modèle non entier, *Communication effectuée dans le cadre de la journée bilan du PRC-GDR Automatique "La dérivation non entière en isolation vibratoire"*, Bordeaux, France, 09 juin, 1999.
- [Letnikov, 1868] Letnikov A.V., Theory of differentiation of arbitrary order, *Mat. Sb.*, **3**, pp. 1-68, 1868.
- [Levron, 1996a] Levron F., *Extension du plan complexe*, Rapport interne, LAP, Université Bordeaux I, Talence, France, 1996.
- [Levron, 1996b] Levron F., *Synthèse d'un dérivateur d'ordre non entier complexe borné en fréquence*, Rapport interne, LAP, Université Bordeaux I, Talence, France, 1996.
- [Lin, 2001] Lin J., *Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier*, Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 2001.
- [Lin et Poinot, 1999] Lin J., T. Poinot, Modélisation de systèmes d'ordre non entier, *JDA'99 Journées Doctorales d'Automatique*, pp.53-56, Nancy, France, 1999.
- [Lin *et al.*, 2000a] Lin J., Poinot T., Trigeassou J.-C., Ouvrard R. Parameter estimation of fractional systems : application to the modeling of a lead-acid battery, *IFAC-SYSID'2000, 5th Symposium on System Identification*, Santa-Barbara, USA, 21-23 June, 2000.
- [Lin *et al.*, 2000b] Lin J., Poinot T., Trigeassou J.-C., Kabbaj H., Faucher J., Modélisation et identification d'ordre non entier d'une machine asynchrone, *Actes de IEEE-CIFA'2000, Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Lille, France, 5-8 juillet, 2000.

- [Lin *et al.*, 2001] Lin J., T. Poinot, J.-C. Trigeassou, P. Coirault, Parameter estimation of fractional systems: application to heat transfer, *In proceedings of ECC'2001, 6th European Control Conference*, Porto, Portugal, 3-5 September, 2001.
- [Liouville, 1832] Liouville J., Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques, *J. Ecole Polytech.*, **13(21)**, pp. 71-162, 1832.
- [Ljung, 1987] Ljung L., *System identification - Theory for the user*, Prentice Hall, 1987.
- [Lorenzo and Hartley, 2000] Lorenzo C. F., Hartley T. T., Initialized Fractional Calculus, *Int. J. of App. Math.*, **3(3)**, pp. 249-266, September, 2000.
- [Lorenzo and Hartley, 2001] Lorenzo C. F., Hartley T. T., Initialization in fractional order systems, *In proceedings of ECC'2001, 6th European Control Conference*, Porto, Portugal, 3-5 September, 2001.
- [Malti *et al.*, 2002] Malti R., Cois O., Aoun M., Levron F., Oustaloup A., Computing impulse response energy of fractional transfer function, *Accepted paper for presentation in the 15th IFAC World Congress 2002*, Barcelona, Spain, July 21-26, 2002.
- [Marquardt, 1963] Marquardt D.W., An algorithm for Least-Squares estimation of Non-Linear Parameters, *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, **11(2)**, pp. 431-441, 1963.
- [Matignon, 1994] Matignon D., *Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*, Ph. D. Thesis, Université de Paris-Sud, Orsay, 1994.
- [Matignon, 1998] Matignon D., Stability properties for generalized fractional differential systems, *ESAIM: proc. Vol.5, Systèmes Différentiels Fractionnaires – Modèles, Méthodes et Applications*, Paris, 1998.
- [Matignon, 1996] Matignon D., Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, *In: Proc. CESA'96, Symp. on Control, Optimization and Supervision*, p.963-968, Lille, France, 1996.
- [Melchior *et al.*, 1999] Melchior P., Lanusse P., Dancla F., Cois O., Valorisation de l'approche non entière par le logiciel CRONE, *Actes du CETSIIS-EEA, Colloque sur l'Enseignement des Technologies et des*

Sciences de l'Information et des Systèmes, Montpellier, France, 4-5 novembre, 1999.

- [Melchior *et al.*, 2001] Melchior P., Lanusse P., Dancla F., Cois O., "CRONE Toolbox" : une boîte à outils Matlab pour les systèmes fractionnaires, *Colloque sur l'Enseignement des Technologies et des Sciences de l'Information et des Systèmes en EEA, CETISIS-EEA'2001*, pp. 241-244, Clermont-Ferrand, France, 29-30 Octobre 2001.
- [Miller et Ross, 1993] Miller K.S. and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, A Wiley-Interscience Publication, 1993.
- [Mittag-Leffler, 1905] Mittag-Leffler G., Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, *Acta Math.*, **29**, pp. 101-168, septembre, 1904.
- [Montseny, 1998] Montseny G., Diffusive representation of pseudo-differential time-operators, *ESAIM: proc. Vol.5, Systèmes Différentiels Fractionnaires – Modèles, Méthodes et Applications*, Paris, 1998.
- [Moreau, 1995] Moreau X., La dérivation non entière en isolation vibratoire et son application dans le domaine de l'automobile. La suspension CRONE : du concept à la réalisation. Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, Talence, France, 1^{er} février 1995.
- [Neumann and Isermann, 1988] Neumann D and R. Isermann, Comparison of some parameter estimation methods for continuous-time models. *In: IFAC, Identification and System Parameter Estimation*, pp. 851-856, 1988.
- [Oldham et Spanier, 1970] Oldham K.B., J. Spanier, The replacement of Fick's laws by a formulation involving semi-differentiation, *Electro-anal. Chem. Interfacial Electrochem.*, **26**, pp. 331-341, 1970.
- [Oldham et Spanier, 1972] Oldham K.B., J. Spanier, A general solution of the diffusive equation for semiinfinite geometries, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **39**, pp. 655-669, 1972.
- [Oldham, 1973] Oldham K.B., Diffusive transport to planar, cylindrical and spherical electrodes, *Electroanal. Chem. Interfacial Electrochem.*, **41**, pp. 351-358, 1973.

- [Oldham et Spanier, 1974] Oldham K.B., J. Spanier, *The fractionnal calculus*, Academic Press, New-York and London, 1974.
- [Olson and Throne, 2001] Olson L. and Throne R., Estimation of tool/chip interface temperatures for on-line tool monitoring: an inverse problem approach, *Inverse Problems in Engineering*, vol. 9, pp. 367-388, 2001.
- [Oustaloup, 1983] Oustaloup A., *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*, Masson, 1983.
- [Oustaloup, 1991] Oustaloup A., *La commande CRONE*, Hermès, Paris, 1991.
- [Oustaloup et al., 1995a] Oustaloup A., P. Lanusse and B. Mathieu, Robust control of SISO plants: the CRONE control, *ECC'95, European Control Conference*, Roma, Italy, 1995.
- [Oustaloup et al., 1995b] Oustaloup A., B. Mathieu and P. Lanusse, The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission, *European Journal of Control*, **1(2)**, pp. 113-121, 1995.
- [Oustaloup et al., 1995c] Oustaloup A., B. Mathieu and P. Lanusse, Intégration non entière complexe et contours d'isoamortissement, *RAIRO-APII*, **29(2)**, pp. 177-203, 1995.
- [Oustaloup, 1995] Oustaloup A., *La dérivation non entière: théorie, synthèse et applications*, Editions Hermès, Paris, 1995.
- [Oustaloup et al., 1996] Oustaloup A., Le Lay L., Mathieu B., Identification of non integer order system in the time domain, *In proceedings of IEEE-CESA'96, SMC IMACS Multiconference – Computational Engineering in Systems Application – Symposium on Control, Optimisation and Supervision*, Lille, France, july 9-12, 1996.
- [Oustaloup, 1999] Oustaloup A., *La commande CRONE : du scalaire au multivariable – 2ème édition*, Editions Hermès, Paris, 1999.
- [Oustaloup et al., 2000] Oustaloup A., F. Levron, F. Nanot and B. Mathieu, Frequency-band complex non integer differentiator: characterization and synthesis, *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 2000.
- [Podlubny, 1999] Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

- [Puigsegur *et al.*, 2001a] Puigsegur L., Cois O., Battaglia J.-L., Oustaloup A. Conditions thermiques de coupe en tournage : métrologie, identification et estimation, *Actes de C2I'2001, Colloque Interdisciplinaire en Instrumentation*, Paris, France, 31 janvier-1^{er} février, 2001.
- [Puigsegur *et al.*, 2001b] Puigsegur L., Battaglia J.-L., Batsale J.-C., Cois O. Identification de modèles du transfert de chaleur par conduction dans un système. Utilisation d'une structure à dérivées fractionnaires. *Actes du Congrès SFT'2001*, Nantes, France, 29-31 mai, 2001.
- [Ramus-Serment, 2001] Ramus-Serment C., Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondée sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques, *Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux I*, Talence, 10 juillet 2001.
- [Raynaud and Zergainoh, 1998] Raynaud H.-F., Zergainoh A., State-space representation for CRONE controllers, *In proceedings of IFAC-SCC'98, 5th Conference on Systems Structure and Control*, pp. 293-298, 1998.
- [Raynaud and Zergainoh, 2000] Raynaud H.-F., Zergainoh A., State-space representation for fractional order controllers, *Automatica*, **36(7)**, pp. 1017-1021, 2000.
- [Richalet *et al.*, 1971] Richalet J., A. Rault, R. Poulliquen. *Identification des processus par la méthode du modèle*, Gordon and Breach, 1971.
- [Riemann, 1892] Riemann B., *Gesammelte Werke*, 1892.
- [Sabatier *et al.*, 2002] Sabatier J., Cois O., Oustaloup A., Commande de systèmes fractionnaires par placement de pôles, *CIFA'2002, 2^{ème} IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, session invitée "Application de la dérivation fractionnaire en modélisation, identification et commande - Systèmes fractionnaires", Nantes, France, 6-8 Juillet 2002.
- [Samko *et al.*, 1993] Samko S.G., A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [Söderstrom and Stoïca, 1989] Söderstrom T., Stoïca P., *System Identification*, Prentice Hall International, London, 1989.

- [TenReiro Machado, 2000] TenReiro Machado J.A., Discrete-time fractional-order controllers, *In proceedings of IEEE-INES'2000, 4th International Conference on Intelligent Engineering Systems*, Portoroz, Slovenia, September 17-19, 2000.
- [TenReiro Machado, 2001] TenReiro Machado J.A., Discrete-time fractional-order controllers, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **4(1)**, pp. 47–66, 2001.
- [Trigeassou *et al.*, 1999] Trigeassou J.-C., T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup, F. Levron. Modeling and identification of a non integer order system. In: *Proc ECC'99, European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [Unbehauen and Rao, 1987] Unbehauen H. and G.P. Rao, *Identification of continuous systems*, System and control series, Amsterdam, 1987.
- [Vinagre *et al.*, 2000] Vinagre B. M., I. Podlubny, A. Hernandez, V. Feliu, Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **3(3)**, pp. 231–248, 2000.
- [Vinagre *et al.*, 2001] Vinagre B. M., Petras I., Merchan P., Darcak L., Two digital realizations of fractional controllers: application to temperature control of a solid, *In proceedings of ECC'2001, 6th European Control Conference*, Porto, Portugal, 3-5 September, 2001.
- [Walter et Pronzato, 1994] Walter E., Pronzato L., *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*, Masson, 1994.
- [Young, 1981] Young P.C., Parameter estimation for continuous-time models – a survey. *Automatica*, **17(1)**, 23-29, 1981.

Annexe 1

Etude du comportement asymptotique des impédances thermiques des milieux finis

A1.1 – Impédance thermique d'un mur plan

L'impédance thermique d'un mur plan s'exprime par :

$$H(0, s) = \frac{\bar{T}(0, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{\cosh\left(e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh\left(e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \tanh\left(e\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}. \quad (\text{A1.1})$$

Le comportement asymptotique en haute fréquence d'un tel transfert est donné par la limite de $H(0, s)$ lorsque $s \rightarrow \infty$. La limite de la fonction \tanh s'exprimant par

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tanh(z) = 1, \quad (\text{A1.2})$$

le transfert $H(0, s)$ lorsque $s \rightarrow \infty$ est donné par:

$$H(0, s) \underset{s \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}}}, \quad (\text{A1.3})$$

relation exprimant que le comportement en haute fréquence de l'impédance thermique d'un mur fini est le même que celui d'un mur semi-infini, en l'occurrence un intégrateur d'ordre 0.5.

Notons qu'un tel comportement non entier 'dégénère' en un comportement entier dès l'instant où la chaleur a complètement diffusée dans le milieu, soit à partir de $t \approx e^2/\alpha$.

A1.2 – Impédance thermique d'un cylindre fini

L'impédance thermique d'un cylindre fini s'exprime par :

$$H(R,s) = \frac{\bar{T}(R,s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{\sqrt{\alpha} I_0\left(\frac{R}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{s}\right)}{2\pi l R \lambda \sqrt{s} I_1\left(\frac{R}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{s}\right)}, \quad (\text{A1.4})$$

dans lequel R désigne le rayon du cylindre, I_0 et I_1 étant les fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordres 0 et 1, telles que :

$$I_k(z) = \int_0^\pi e^{-z \cos(t)} \cos(kt) dt. \quad (\text{A1.5})$$

Rappelons que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{I_0(z)}{I_1(z)} = 1, \quad (\text{A1.6})$$

et

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{I_0(z)}{I_1(z)} = \frac{1}{z}. \quad (\text{A1.7})$$

Le transfert $H(R,s)$ lorsque $s \rightarrow \infty$ s'exprime donc par :

$$H(R,s) \underset{s \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi l R \lambda \sqrt{s}}. \quad (\text{A1.8})$$

La relation (A1.8) révèle que le comportement asymptotique en haute fréquence de l'impédance thermique d'un cylindre plein est caractérisé par une intégration d'ordre 0.5. Notons que ce comportement est identique à celui du mur plan.

De plus, comme pour le mur plan, le comportement non entier caractérisant l'impédance en haute fréquence 'dégénère' en un comportement entier dès l'instant où la chaleur a traversé le milieu, soit à partir de $t \approx R^2/\alpha$.

A1.3 – Impédance thermique d'une sphère finie

L'impédance thermique d'une sphère finie s'exprime par :

$$H(R, s) = \frac{\bar{T}(R, s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{R^2 \sinh\left(R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda R \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \cosh\left(R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - \sinh\left(R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)\right)} = \frac{R}{\lambda \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \operatorname{coth}\left(R\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) - 1\right)}, \quad (\text{A1.9})$$

où R désigne le rayon de la sphère.

Le transfert $H(R, s)$ lorsque $s \rightarrow \infty$ est alors donné par :

$$H(R, s) = \frac{R}{\lambda \sqrt{\frac{s}{\alpha}}}, \quad (\text{A1.10})$$

exprimant un comportement en haute fréquence caractérisé par une intégration d'ordre 0.5, comme pour les autres géométries finies.

Annexe 2

Simulation numérique de la sensibilité du modèle à l'ordre de dérivation

La sensibilité de la sortie du modèle à l'ordre de dérivation commensurable n est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}(t, \hat{\theta})}{\partial n} &= \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{l=1}^N \frac{A_l s^n \ln(s)}{(s^n - \lambda_l)^2} \right) * u(t) \\ &= \sum_{l=1}^N -A_l \mathcal{L}^{-1} [G_l(s, \hat{\theta})] * u(t). \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

En utilisant l'approximation d'Euler, soit $s = \frac{1-z^{-1}}{h}$, et le binôme de Newton pour approximer l'opérateur symbolique de dérivation non entière s^n , la transformée de Laplace correspondant à $G_l(s, \hat{\theta})$ s'exprime par :

$$G_l(z, \hat{\theta}) = \frac{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{h^n} \binom{n}{k} z^{-k} \right] \left[-\ln(h) + \ln(1-z^{-1}) \right]}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{h^{2n}} \binom{2n}{k} z^{-k} - 2\lambda_l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{h^n} \binom{n}{k} z^{-k} + \lambda_l^2} \quad (\text{A2.2})$$

Le développement en série entière de $\ln(1-z^{-1})$ conduit alors à :

$$G_l(z, \hat{\theta}) = \frac{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{h^n} \binom{n}{k} z^{-k} \right] \left[-\ln(h) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{h} \right]}{\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{h^{2n}} \binom{2n}{k} - \frac{2\lambda_l}{h^n} \binom{n}{k} \right] (-1)^k z^{-k} + \lambda_l^2}. \quad (\text{A2.3})$$

Finalement, en supposant le système relaxé à $t=0$, la sensibilité de la sortie du modèle s'obtient par la simulation du système d'équations récurrentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{k=0}^{Kh} \left[\frac{1}{h^{2n}} \binom{2n}{k} - \frac{2\lambda_1}{h^n} \binom{n}{k} \right] (-1)^k q^{-k} + \lambda_1^2 \right] \frac{\partial y_1(Kh, \hat{\theta})}{\partial n} = \\ \left[\sum_{k=0}^{Kh} \frac{(-1)^k}{h^n} \binom{n}{k} q^{-k} \right] \left[-\ln(h) - \sum_{k=1}^{Kh} \frac{q^{-k}}{h} \right] u(Kh) \\ \vdots \\ \left[\sum_{k=0}^{Kh} \left[\frac{1}{h^{2n}} \binom{2n}{k} - \frac{2\lambda_N}{h^n} \binom{n}{k} \right] (-1)^k q^{-k} + \lambda_N^2 \right] \frac{\partial y_N(Kh, \hat{\theta})}{\partial n} = \\ \left[\sum_{k=0}^{Kh} \frac{(-1)^k}{h^n} \binom{n}{k} q^{-k} \right] \left[-\ln(h) - \sum_{k=1}^{Kh} \frac{q^{-k}}{h} \right] u(Kh) \end{array} \right. \quad (\text{A2.4})$$

$$\frac{\partial y(Kh, \hat{\theta})}{\partial n} = \sum_{l=1}^N A_l \frac{\partial y_l(Kh, \hat{\theta})}{\partial n}$$

Annexe 3

Boite à outil MATLAB : module System Identification by Fractional Model de la Toolbox CRONE

La boite à outils *The CRONE Toolbox* a été développé depuis le début des années 90. Elle a fait l'objet de plusieurs publications, thèses et articles, et d'un enregistrement auprès de l'Agence pour la Protection des Programmes (APP) en 1993 et 1994 [APP, 94].

Le choix de Matlab est motivé par les nombreux avantages de ce logiciel : algorithmes de calculs numériques sur des matrices complexes, langage de programmation de haut niveau, fonctions d'affichage graphique, création aisée d'IHM (menus, champs de saisie, etc...). La portabilité sur d'autres systèmes est aussi un avantage important, notamment pour faciliter la diffusion de cette boite à outils.

De plus, la plupart des laboratoires universitaires et des services R&D industriels utilisent ce logiciel. Il devient de fait un standard mondial des logiciels de calcul pluridisciplinaire et particulièrement dans le domaine de l'automatique.

Actuellement, la toolbox CRONE comporte trois modules : *Fractional calculus*, *System Identification by Fractional Model*, *CRONE CSD*.

Ces modules répondent à une priorité scientifique visant une diffusion internationale de résultats de recherche obtenus dans le cadre du non-entier. Les développements sont volontairement limités, dans un premier temps, au cas scalaire (une entrée - une sortie) afin d'assurer un apprentissage progressif de l'utilisateur.

A l'heure actuelle, le module *System Identification by Fractional Model* regroupe 6 méthodes d'estimation basées sur une structure de modèle à dérivées non entières. Celles-ci sont regroupées en deux thèmes :

- les méthodes où seuls les coefficients sont estimés, les ordres de dérivation étant fixés par l'utilisateur (méthodes à erreur d'équation) ;
- les méthodes où les ordres de dérivations sont estimés au même titre que les coefficients (méthodes à erreur de sortie).

Le module, s'articule autour de 4 menus principaux proposés dans la fenêtre principale :

- le menu "**File**", permettant la gestion de toutes les données et variables ;
- le menu "**Data**", donnant accès à un pré-traitement des données d'estimation et de validation ;
- le menu "**System identification**", qui propose à l'utilisateur un choix de structure de modèle (à terme, erreur d'équation ou erreur de sortie) ;
- le menu "**Estimated-model views**", qui traite l'affichage de tous les résultats de l'identification.

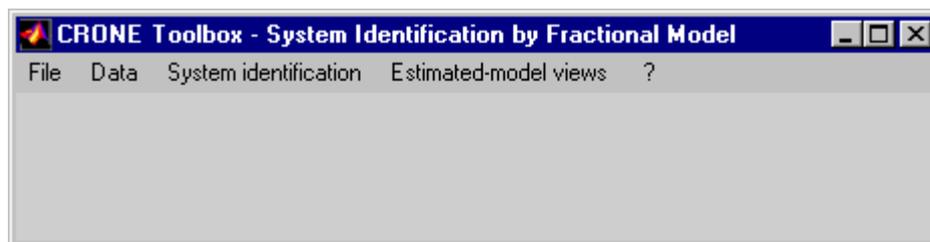


Figure A3.1 - Fenêtre principale

Une *session* d'identification comporte 4 phases, qui correspondent aux quatre menus principaux.

A3.1 – Menu "File", gestion des données de la session d'identification

Pour l'utilisateur, la première tâche à effectuer pour démarrer une session d'identification est de charger un jeu de données d'estimation (et de validation) correspondant à une série de mesures sur le système à identifier. Ce jeu de données (d'estimation ou de validation), pour être exploitable par le module, doit être sous la forme d'un fichier de données Matlab (.mat) et doit comprendre :

- un vecteur correspondant aux mesures effectuées sur l'entrée du système ;
- un vecteur correspondant aux mesures effectuées sur la sortie du système.

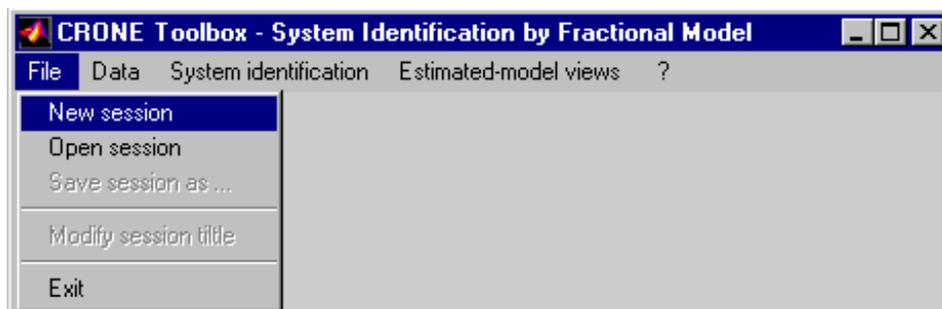


Figure A3.2 - Menu "File"

A3.1.1 – Commande "New session"

Cette commande donne accès à une fenêtre de dialogue "Load estimation data" permettant à l'utilisateur de sélectionner un fichier contenant les données d'estimation :

- sélectionner un fichier ;
- valider en cliquant sur "Ouvrir"

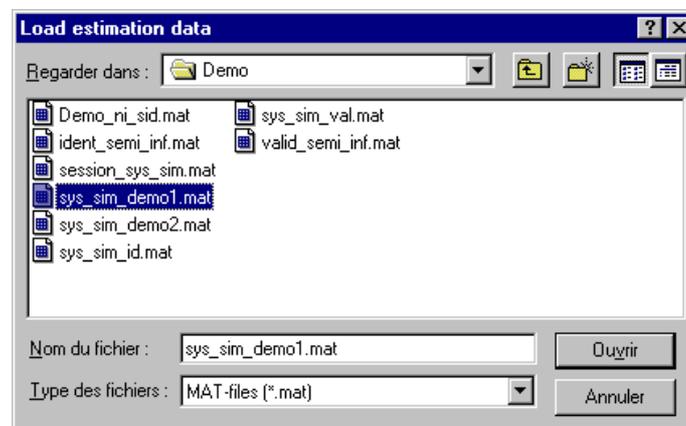


Figure A3.3 - Fenêtre de dialogue "Load estimation data "

L'utilisateur est ensuite invité à remplir les champs d'une fenêtre de saisie. Pour cela, une fenêtre d'information propose la liste de toutes les variables contenues dans le fichier précédemment ouvert.

remplir les champs ;

valider en cliquant sur "OK".

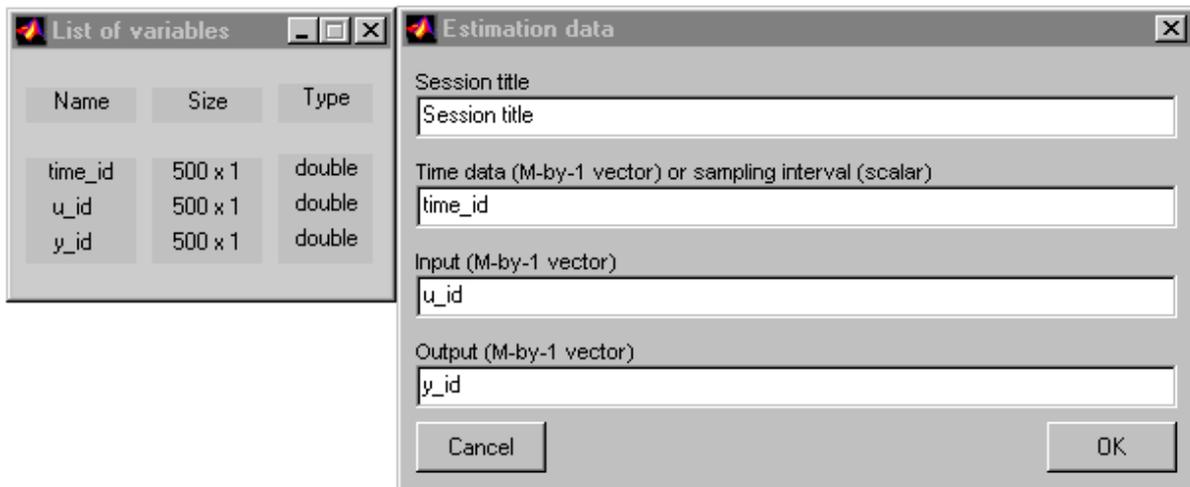


Figure A3.4 - Fenêtre de saisie des données d'estimation

Une procédure équivalente à la précédente permet de charger un jeu de données de validation. Si aucun jeu de données de validation n'est disponible, cliquer sur "Annuler".

Remarque importante

Pour estimer un modèle de type AR (sans entrée exogène), l'utilisateur doit laisser le champ "Input" vide. Seule l'identification par modèle de type AR non entier est alors accessible.

A3.1.2 – Commande "Open session"

La commande "Open session" du menu "File" permet à l'utilisateur de charger une session d'identification précédemment sauvegardée dans un fichier Matlab. Une fenêtre de dialogue s'ouvre et permet de sélectionner un fichier dont l'extension est *tdi* (Time Domain Identification). Valider en cliquant sur "Ouvrir".

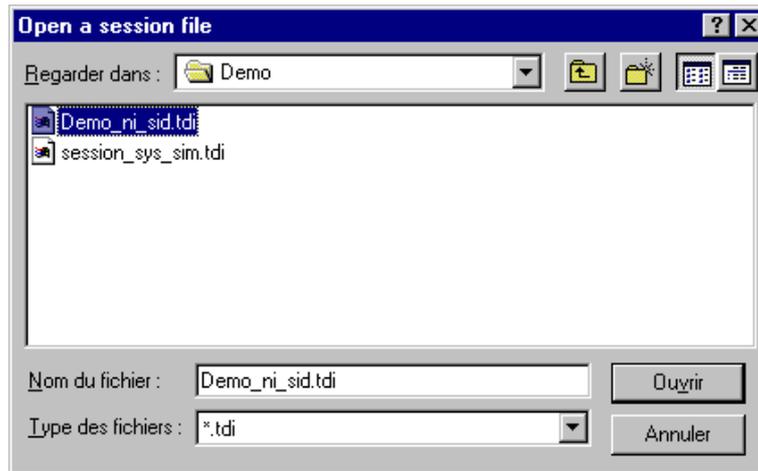


Figure A3.5 - Fenêtre "Open a session file"

Toutes les données de la session sont alors disponibles et modifiables.

A3.1.3 - Commande "Save session as ..."

La commande "Save session as ..." permet à l'utilisateur de sauver la session en cours sous la forme d'un fichier d'extension *tdi*. Elle donne accès à une fenêtre de dialogue qui invite l'utilisateur à nommer la session.

- remplir le champs "Nom du fichier";
- valider en cliquant sur "Enregistrer".

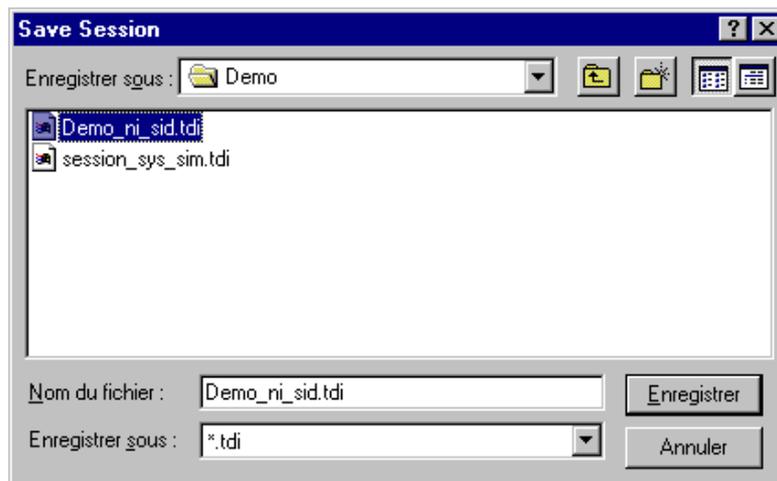


Figure A3.6 - Fenêtre "Save session"

A3.1.4 – Commande "Modify session title"

Cette commande permet de changer le nom de la session en cours. Une fenêtre de saisie s'ouvre :

- saisir un nouveau nom ;
- valider en cliquant sur "OK".

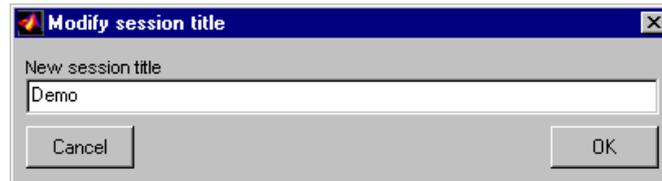


Figure A3.7 - Fenêtre de dialogue "Modify session title"

A3.1.5 – Commande "Exit"

Cette commande propose de sauver la session en cours si besoin est, puis ferme la fenêtre principale.

A3.2 – Menu "Data"

Après l'ouverture d'une session, l'utilisateur a la possibilité, à l'aide du menu "Data", d'effectuer un pré-traitement des données (mise à l'échelle, sélection d'une partie des données, filtrage ...).

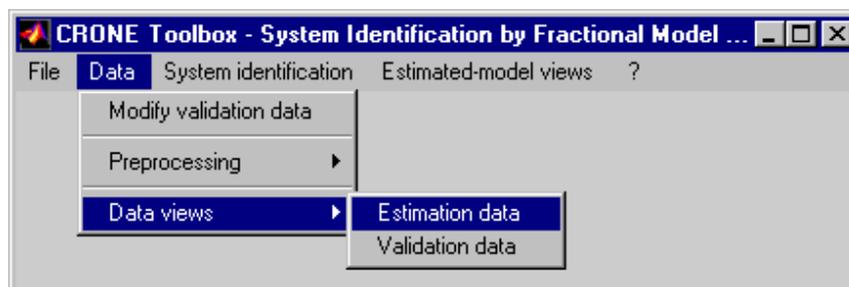


Figure A3.8 - Menu "Data"

A3.2.1 – Commande "Modify validation data"

La commande "Modify validation" permet à l'utilisateur de charger un nouveau jeu de données de validation afin de pouvoir valider le caractère prédictif des modèles estimés. Une procédure équivalente à celle décrite en A3.1.1 est effectuée.

A3.2.2 – Menu "Preprocessing"

Le menu "Preprocessing" est en cours de développement. A terme, il permettra le filtrage, le recentrage, la mise à l'échelle et le rééchantillonnage des données.

A3.2.3 – Menu "Data views"

Le menu "Data views" permet de tracer les données d'estimation ou de validation.

A3.3 – Menu "System Identification"

Le menu "System Identification" propose 2 structures de modèles :

- modèle à erreur d'équation ;
- modèle à erreur de sortie (en cours de développement).

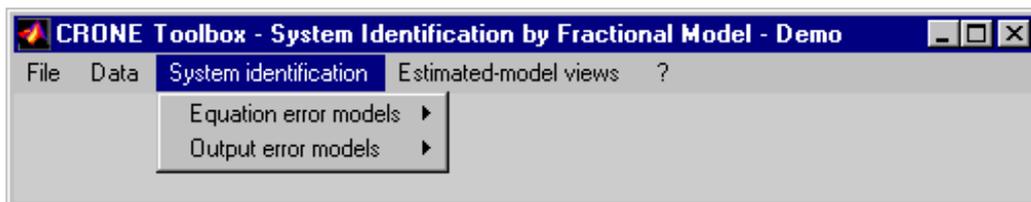


Figure A3.9 - Menu "Identification methods"

A3.3.1 – Menu "Equation error models"

A3.3.1.1 – Commande "Fractional AR model"

La commande "Fractional AR model" ouvre une fenêtre de saisie qui permet à l'utilisateur de paramétrer l'estimation d'un modèle AR non entier.

Remarque - Cette commande n'est active seulement si le champ **Input** a été laissé vide lors de la saisie des données d'estimation (pas d'entrée exogène).

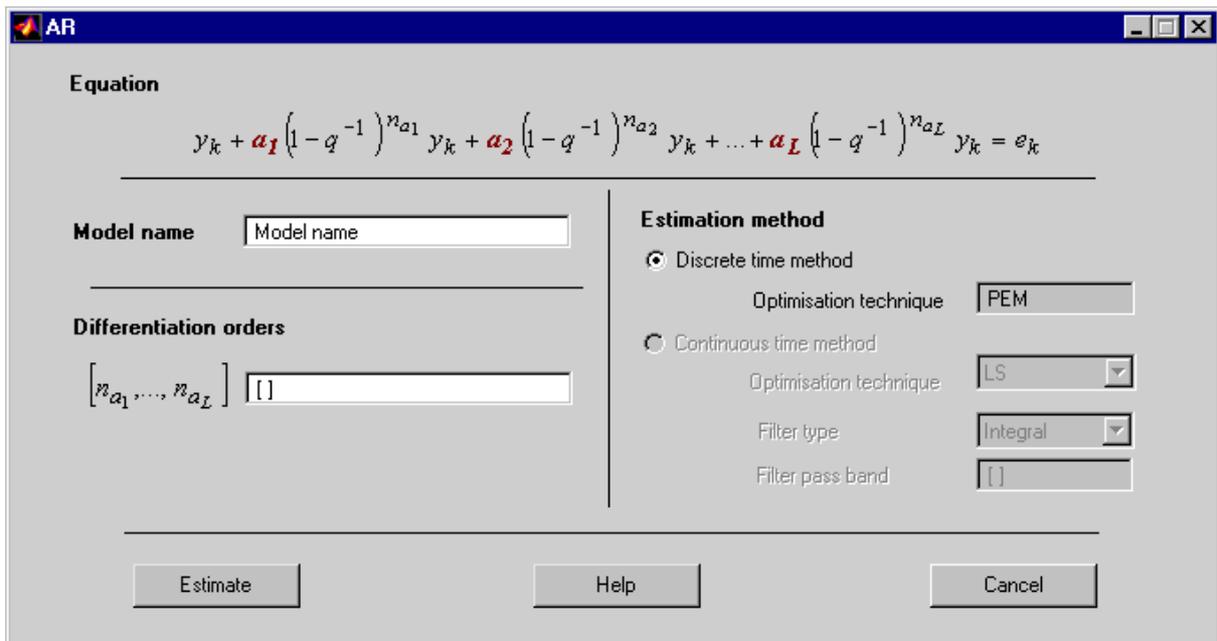


Figure A3.10 - Fenêtre de saisie des paramètres du modèle

Plusieurs champs sont à remplir :

a) Model name

Saisir un nom à attribuer au modèle.

b) Differentiation orders

Saisir les ordres de dérivation du modèle sous la forme d'un vecteur de réels positifs

c) Estimation method

Une seule méthode est proposée, la méthode à erreur de prédiction)

Valider en cliquant sur **Estimate**.

Une fenêtre de dialogue s'ouvre ensuite et invite l'utilisateur à choisir l'emplacement du modèle qu'il vient de créer, le module "*System Identification by Fractional Model*" permettant d'identifier jusqu'à 9 modèles pour un jeu de données d'identification.

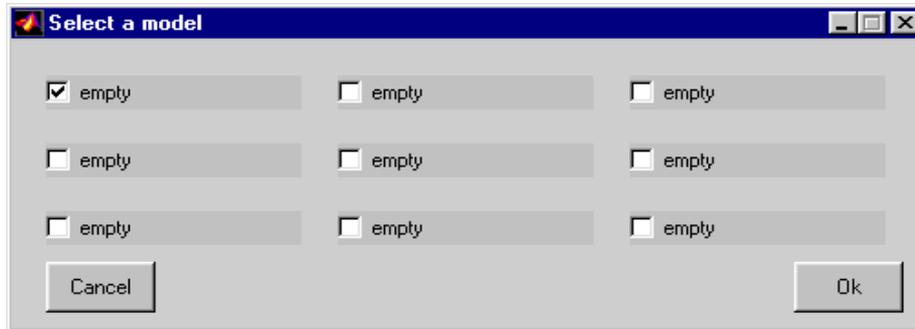


Figure A3.11 - Fenêtre de sélection d'un modèle

L'utilisateur doit alors :

- choisir un emplacement ;
- valider en cliquant sur "OK".

L'algorithme d'identification est ensuite exécuté et les résultats mis en mémoire afin d'être exploités par les commandes du menu "**Estimated-model views**".

A3.3.1.2 – Commande "Fractional continuous ARX model"

La commande "**Fractional continuous ARX model**" ouvre une fenêtre de saisie qui permet à l'utilisateur de paramétrer l'estimation d'un modèle ARX non entier.

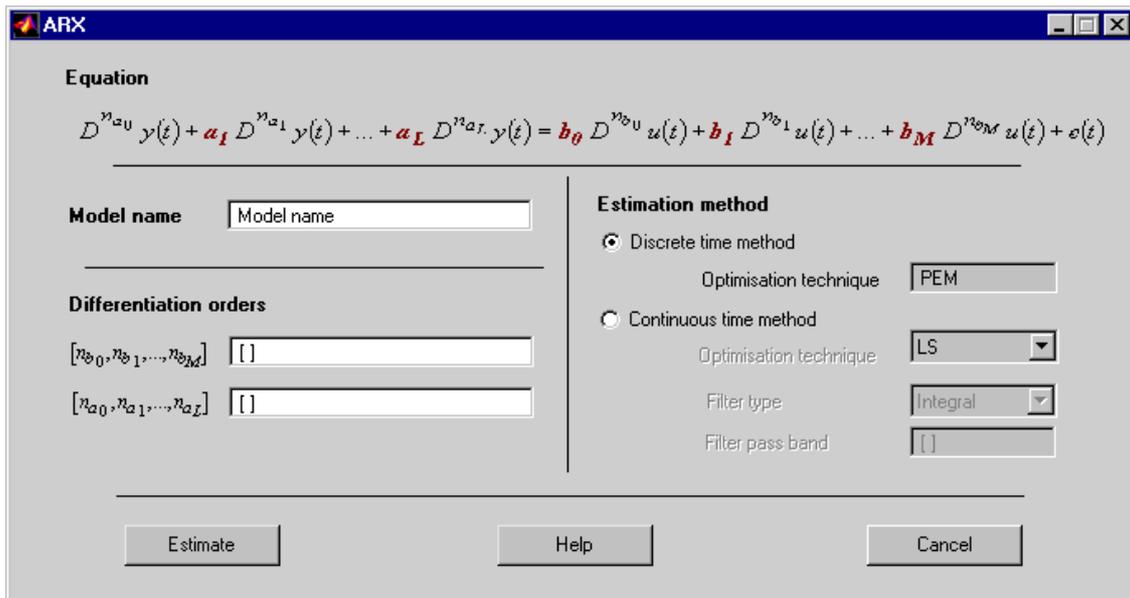


Figure A3.12 - Fenêtre de saisie des paramètres du modèle

Plusieurs champs sont à remplir :

a) **Model name**

Saisir un nom à attribuer au modèle.

b) **Differentiation orders**

Saisir les ordres de dérivation du modèle sous la forme de vecteurs de réels positifs (numérateur puis dénominateur).

c) **Estimation method**

Plusieurs méthodes d'estimation sont proposées :

- méthode discrète ;
- méthode continue, avec optimisation par la technique des moindres carrés linéaires (LS), sans filtrage ou avec filtre intégral.

Valider en cliquant sur **Estimate**.

Une fenêtre de dialogue s'ouvre ensuite et invite l'utilisateur à choisir l'emplacement du modèle qu'il vient de créer, le module "System Identification by Fractional Model" permettant d'identifier jusqu'à 9 modèles pour un jeu de données d'identification.

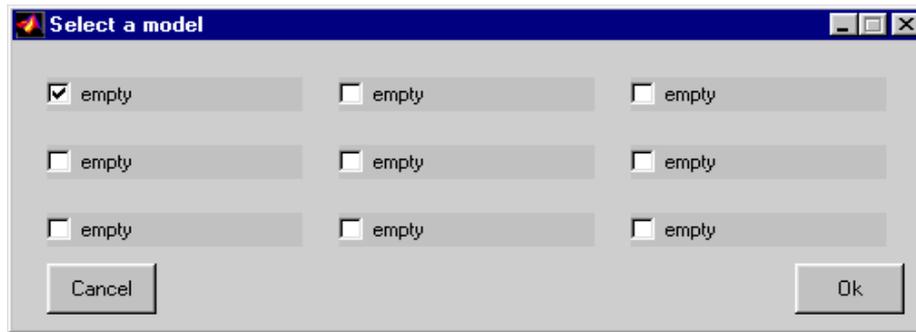


Figure A3.13 - Fenêtre de sélection d'un modèle

L'utilisateur doit alors :

- choisir un emplacement ;
- valider en cliquant sur "OK".

L'algorithme d'identification est ensuite exécuté et les résultats mis en mémoire afin d'être exploités par les commandes du menu "**Estimated-model views**".

A3.3.2 – Menu "Output error models"

A3.3.2.1 – Menu "Fractional modal model"

La menu "**Fractional modal model**" permet l'identification d'un système par un modèle non entier sous forme modale. Contrairement aux méthodes à erreur d'équation, l'estimation paramétrique porte à la fois sur les ordres de dérivation et sur les coefficients.

La structure du modèle est fondée sur la forme modale développée d'un système non entier.

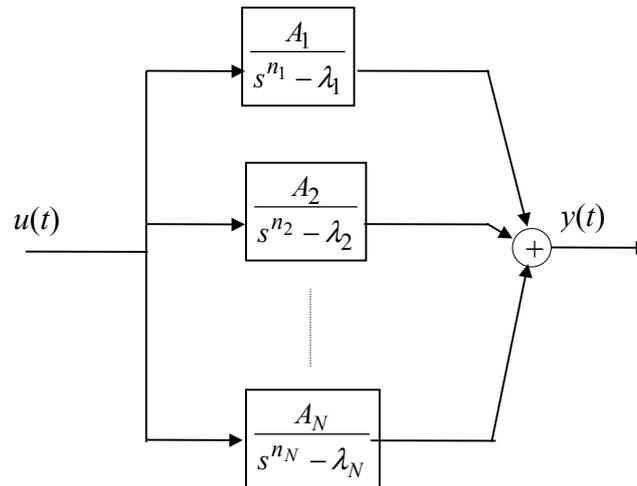


Figure A3.14 - Décomposition d'un système non entier en modes propres

Deux méthodes d'estimation sont proposées. Alors que la première assure une initialisation automatique des paramètres, la seconde en requiert une initialisation manuelle.

A3.3.2.1.1 – Commande "Automatic initialization"

Cette commande permet de lancer l'exécution de la méthode avec initialisation automatique.

L'algorithme s'articule autour de deux étapes.

La première étape consiste à sélectionner automatiquement un modèle d'initialisation dont les paramètres sont optimisés dans la deuxième étape. Pour cela, plusieurs estimations sont effectuées avec différentes structures de modèles, la méthode utilisée étant celle basée sur les filtres de variables d'état. Pour accélérer cette étape, un nombre limité de données est utilisé. Le modèle d'initialisation est alors sélectionné sur la base d'un critère portant sur l'erreur de sortie.

Les modèles candidats dans cette étape ont des fonctions de transfert de la forme:

$$H(s) = \frac{b_{N-1}s^{(N-1)n} + \dots + b_0}{s^{Nn} + a_{N-1}s^{(N-1)n} + \dots + a_0} \quad (11)$$

où n un réel appelé ordre commensurable, N étant le nombre de modes propres.

La deuxième étape consiste ensuite à réaliser une estimation paramétrique itérative. L'algorithme est initialisé par le modèle sélectionné lors de la première étape.

La commande "**Automatic initialization**" ouvre une fenêtre de saisie qui permet à l'utilisateur de spécifier le paramétrage de la première étape.

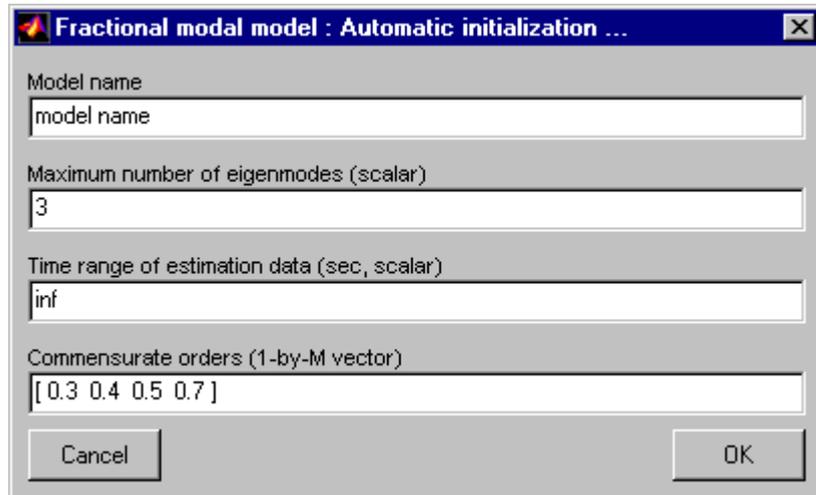


Figure A3.15 - Fenêtre de saisie des paramètres de la première étape

Plusieurs champs sont à remplir :

a) **Model name**

Saisir un nom à attribuer au modèle.

b) **Maximum number of eigenmodes**

Saisir le nombre maximal de modes propres du modèle d'initialisation.

c) **Time range of estimation data**

Saisir l'horizon temporel des données d'estimation (en seconde). Cet horizon est utilisé pour déterminer le modèle d'initialisation.

Remarque - Dans la deuxième étape, la totalité des données est exploitée.

d) **Commensurate orders**

Saisir les ordres commensurable des modèles candidats sous la forme d'un vecteur de réels positifs.

Valider en cliquant sur "ok".

Une fenêtre de dialogue s'ouvre et invite l'utilisateur à choisir l'emplacement du modèle qu'il vient de créer.

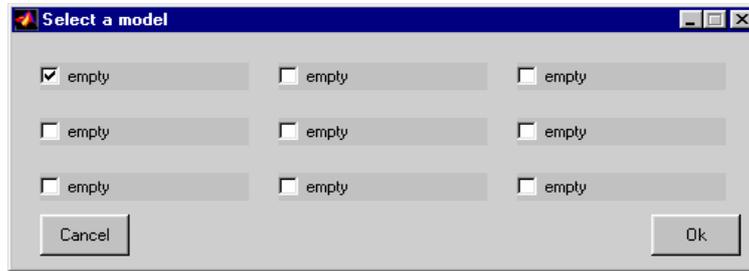


Figure A3.16 - Fenêtre de sélection d'un modèle

L'utilisateur doit alors :

- choisir un emplacement ;
- valider en cliquant sur "OK".

L'algorithme d'identification est ensuite exécuté. A la fin de l'optimisation, un tracé de la sortie du système, du modèle initial et du modèle identifié est affiché. Une fenêtre de dialogue s'affiche. L'utilisateur a le choix entre :

- changer les options d'optimisation en cliquant sur "Options" ;
- continuer l'optimisation en cliquant sur "Continue" ;
- terminer l'optimisation en cliquant sur "End".

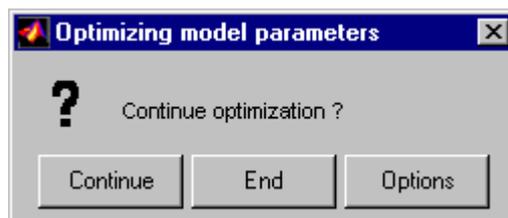


Figure A3.17 - Fenêtre de choix

Les résultats de l'identification sont mis en mémoire afin d'être exploités par les commandes du menu "**Estimated-model views**".

A3.3.2.1.2 – Commande "Manual initialization"

Cette commande permet l'estimation d'un modèle de forme modale. Elle consiste à réaliser une estimation paramétrique itérative.

La deuxième étape de la méthode décrite dans le paragraphe précédent est exécutée directement. L'utilisateur doit alors initialiser tous les paramètres du modèle.

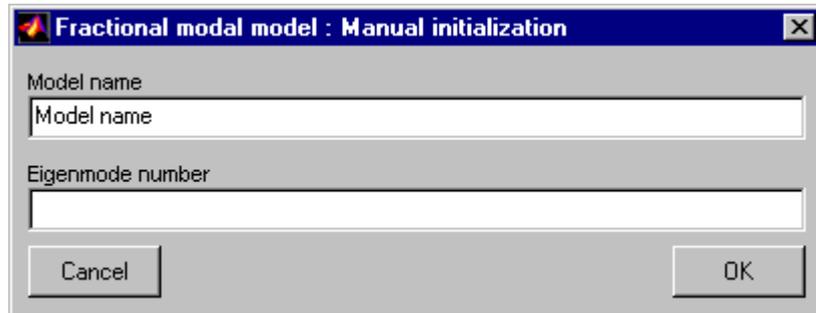


Figure A3.18 - Fenêtre de saisie des paramètres du modèle

L'utilisateur doit donner un nom au modèle et spécifier un nombre entier de modes propres.

Ensuite, une fenêtre de dialogue demande à l'utilisateur si les ordres de dérivation sont identiques pour tous les modes propres.

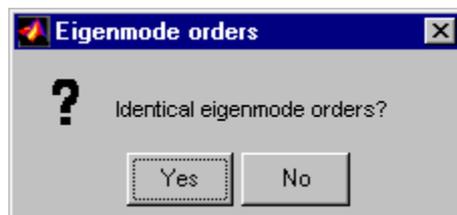


Figure A3.19 - Fenêtre de paramétrage des ordres des modes propres

Puis, une fenêtre de saisie invite l'utilisateur à initialiser les trois paramètres de chaque mode propre par des réels ou des complexes : le gain propre, la valeur propre et l'ordre associé.

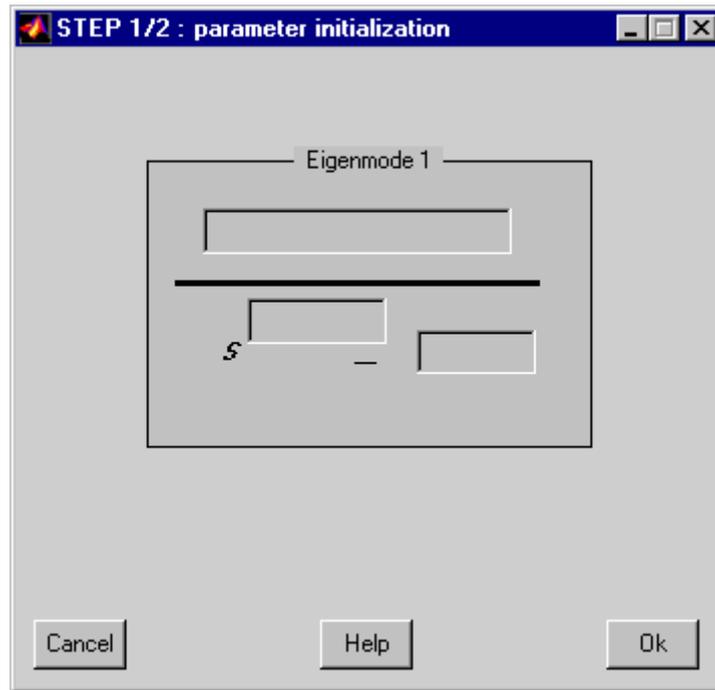


Figure A3.20 - Fenêtre de paramétrage d'un mode propre

Le bouton "Help" permet d'afficher la structure du modèle à identifier.

Le bouton "Ok" permet de valider et de d'initialiser le mode suivant. Si tous les modes sont initialisés, l'estimation est lancée.

Si le nombre d'itérations maximal est atteint ou l'optimisation est terminée une fenêtre de dialogue demande à l'utilisateur de sauver le modèle courant ou de continuer la recherche du modèle optimal. L'utilisateur peut changer les paramètres d'optimisation en cliquant sur "Options".

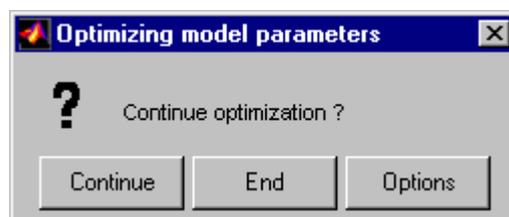


Figure A3.21 - Fenêtre de choix

Les résultats de l'identification sont mis en mémoire afin d'être exploités par les commandes du menu "Estimated-model views".

A3.3.2.1.3 – Commande "Options"

La commande "**Options**" ouvre une fenêtre de saisie qui permet à l'utilisateur de paramétrer l'algorithme d'optimisation. L'utilisateur a le choix entre trois méthodes d'optimisation : Newton, Newton–Gauss ou Marquardt.

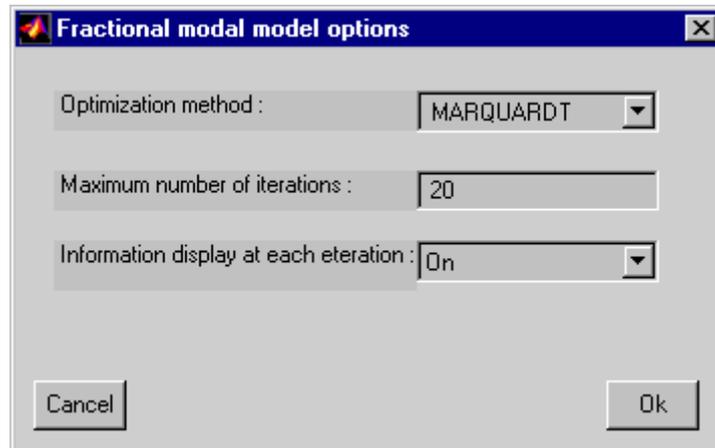


Figure A3.22 - Fenêtre de choix des options d'optimisation

Pour valider son choix l'utilisateur doit appuyer sur "ok".

A3.4 – Menu "Estimated-model views "

Le menu "**Estimated-model views**" gère l'affichage de tous les résultats de l'estimation paramétrique.

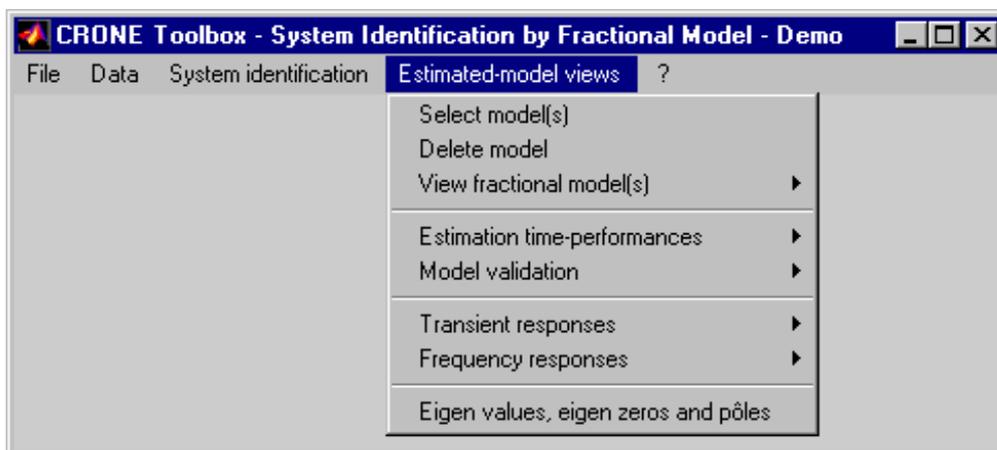


Figure A3.23 - Menu "Estimated-model views"

A3.4.1 – Commande "Select model(s)"

Pour l'utilisateur, il s'agit en premier lieu de sélectionner le ou les modèle(s) dont il veut afficher les résultats. La commande "**Select model(s)**" ouvre une fenêtre de dialogue et invite l'utilisateur à choisir un ou plusieurs modèles :

- sélectionner un ou plusieurs modèles ;
- valider en cliquant sur "OK".

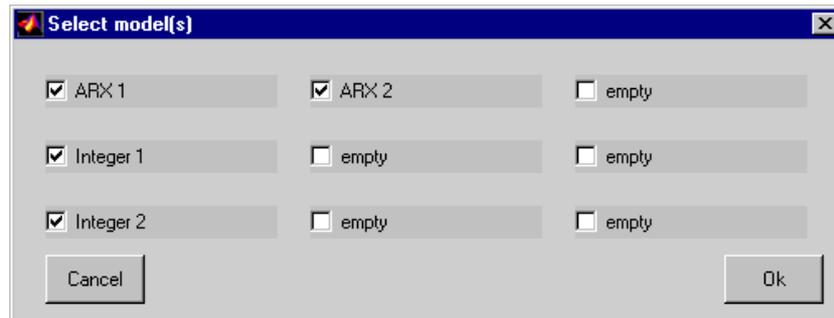


Figure A3.24 - Fenêtre de sélection d'un ou plusieurs modèles

A3.4.2 – Commande "Delete model"

Lorsqu'un modèle donne des résultats insatisfaisants, l'utilisateur a la possibilité de l'effacer. La commande "**Delete a model**" ouvre une fenêtre de dialogue :

- sélectionner le modèle à effacer ;
- valider en cliquant sur "OK".

A3.4.3 – Menu "View fractional model(s)"

Le menu "**View fractional model(s)**" gère l'affichage des valeurs numériques des modèles estimés. Plusieurs formes sont proposées à l'utilisateur.

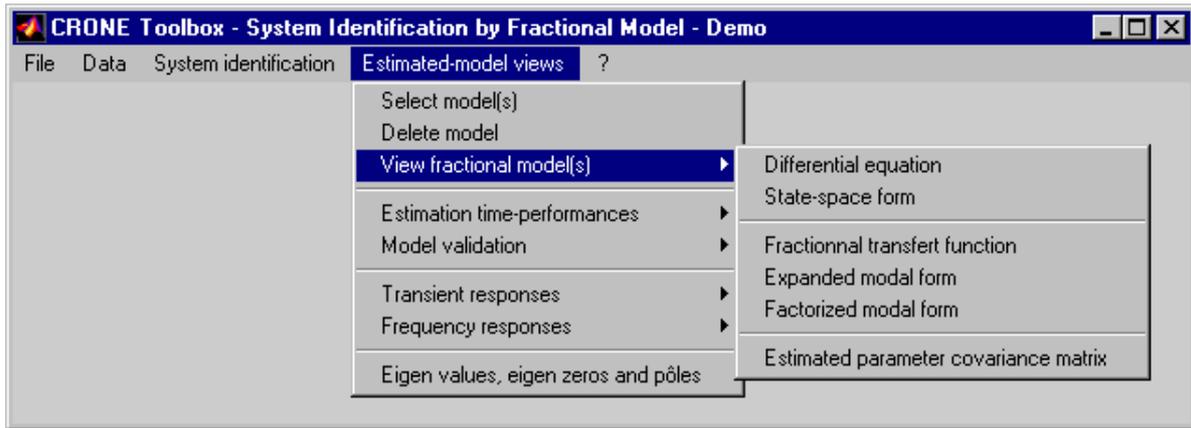


Figure A3.25 - Menu "View fractional model(s)"

A3.4.3.1 – Commande "Differential equation"

Non disponible sur cette version.

A3.4.3.2 – Commande "State-space form"

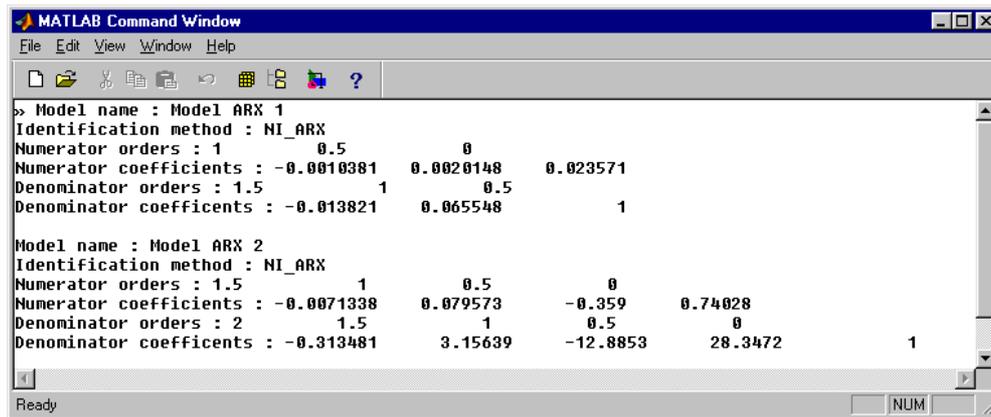
Non disponible sur cette version.

A3.4.3.3 – Commande "Fractional transfer function"

La commande "**Fractional transfert function**" affiche les modèles sélectionnés sous la forme d'une fraction rationnelle non entière du type :

$$H(s) = \frac{\beta_{N-1} s^{n\beta_{N-1}} + \dots + \beta_0}{s^{n\alpha_N} + \alpha_{N-1} s^{n\alpha_{N-1}} + \dots + \alpha_0} \quad (\text{A3.1})$$

Les différents paramètres estimés sont alors affichés dans la fenêtre Matlab sous la forme suivante :



```

>> Model name : Model ARX 1
Identification method : NI_ARX
Numerator orders : 1      0.5      0
Numerator coefficients : -0.0010381  0.0020148  0.023571
Denominator orders : 1.5      1      0.5
Denominator coefficients : -0.013821  0.065548  1

Model name : Model ARX 2
Identification method : NI_ARX
Numerator orders : 1.5      1      0.5      0
Numerator coefficients : -0.0071338  0.079573  -0.359  0.74028
Denominator orders : 2      1.5      1      0.5      0
Denominator coefficients : -0.313481  3.15639  -12.8853  28.3472  1

```

Figure A3.26 - Affichage des paramètres estimés

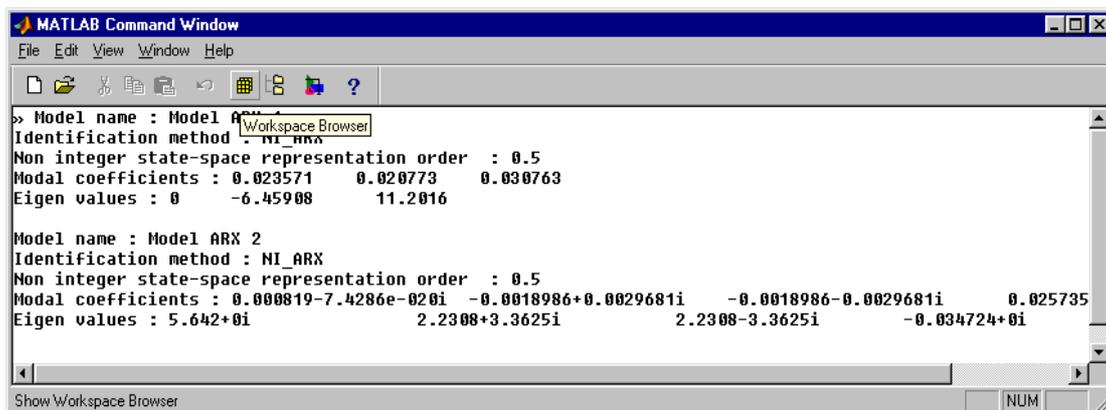
lorsque le modèle est sous la forme d'une fonction de transfert rationnelle

A3.4.3.4 – Commande "Expanded modal form"

La commande "Expanded modal form" affiche les modèles sélectionnés sous une forme modale développée. Cette forme permet de faire apparaître les valeurs propres ainsi que les coefficients modaux des modèles identifiés. Elle est du type :

$$H(s) = \sum_{l=1}^N \frac{A_l}{s^n - \lambda_l} \quad (\text{A3.2})$$

où les λ_l sont les valeurs propres, les A_l les coefficients modaux et n l'ordre de la représentation associée au modèle. Les différents paramètres estimés sont affichés dans la fenêtre Matlab sous la forme suivante :



```

>> Model name : Model ARX 1
Identification method : NI_ARX
Non integer state-space representation order : 0.5
Modal coefficients : 0.023571  0.020773  0.030763
Eigen values : 0  -6.45908  11.2016

Model name : Model ARX 2
Identification method : NI_ARX
Non integer state-space representation order : 0.5
Modal coefficients : 0.000819-7.4286e-020i  -0.0018986+0.0029681i  -0.0018986-0.0029681i  0.025735
Eigen values : 5.642+0i  2.2308+3.3625i  2.2308-3.3625i  -0.034724+0i

```

Figure A3.27 - Affichage des paramètres estimés

lorsque le modèle est sous la forme modale développée

A3.4.3.5 – Commande "Factorized modal form"

La commande "**Factorized modal form**" affiche les modèles sélectionnés sous une forme modale factorisée. Cette forme permet de faire apparaître les valeurs propres ainsi que les zéros propres des modèles estimés. Elle est du type :

$$H(s) = \frac{A \prod_{l=1}^{N_z} (s^n - z_l)}{\prod_{l=1}^N (s^n - \lambda_l)}, \quad (\text{A3.3})$$

où les λ_l sont les valeurs propres, les z_l les zéros propres, A le gain du modèle, et n l'ordre de la représentation associée au modèle. Cette forme permet d'informer l'utilisateur sur d'éventuelles réductions de l'ordre du modèle. En effet, si un zéro propre et une valeur propre sont proche l'un de l'autre, une simplification peut être effectuée de manière à réduire l'ordre du modèle sans modifier la dynamique dominante du modèle. Les différents paramètres estimés sont affichés dans la fenêtre Matlab sous la forme suivante :

```

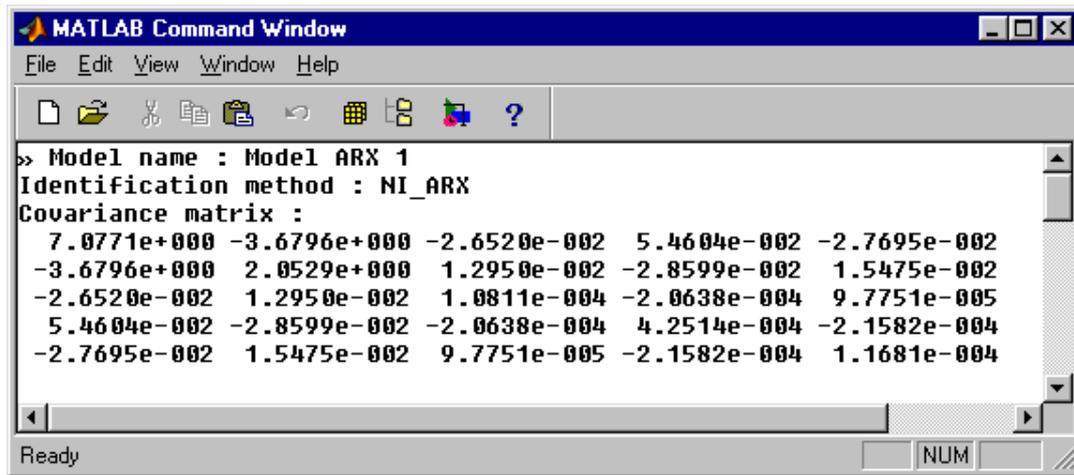
>> Model name : Model ARX 1
Identification method : NI_ARX
Non integer state-space representation order : 0.5
Gain : 0.075108
Eigen zeros : -3.8925      5.8334
Eigen values : 0      -6.45908      11.2016

Model name : Model ARX 2
Identification method : NI_ARX
Non integer state-space representation order : 0.5
Gain : 0.022757
Eigen zeros : 2.8825-3.3084i      2.8825-3.3084i      5.3895+0i
Eigen values : 5.642+0i      2.2308+3.3625i      2.2308-3.3625i      -0.034724+0i
  
```

*Figure A3.28 - Affichage des paramètres estimés
lorsque le modèle est sous la forme modale factorisée*

A3.4.3.6 – Commande "Estimated parameter covariance matrix"

La commande "**Estimated parameter covariance matrix**" affiche la matrice de covariance des paramètres estimés. L'affichage de cette matrice se fait dans la fenêtre Matlab sous la forme suivante :



*Figure A3.29 - Affichage dans la fenêtre Matlab
de la matrice de covariance des paramètres estimés*

A3.4.4 – Menu "Estimation time performances"

Le menu "Estimation time performances" propose à l'utilisateur le tracé de toutes les courbes relatives aux données d'estimation.

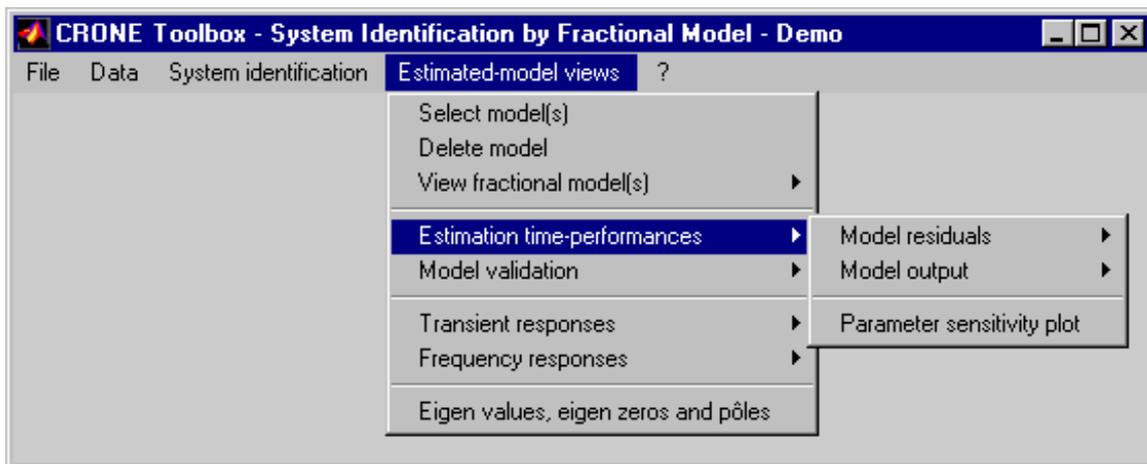


Figure A3.30 - Menu "Estimation time-performances"

A3.4.4.1 – Menu "Model residuals"

Le menu "Model residuals" propose le tracé :

- des résidus relatifs à l'estimation paramétrique (commande "Signal plot") ;
- de l'autocorrélation des résidus (commande "Auto-correlation") ;
- de l'intercorrélation entre l'entrée et les résidus (commande "Input cross-correlation").

A3.4.4.2 – Menu "Model output"

Le menu "Model output" propose le tracé :

- de la sortie du modèle correspondant aux données d'estimation (commande "Signal plot") ;
- de l'erreur de sortie du modèle (commande "Error plot") ;

A3.4.4.3 – Commande "Parameter sensitivity plot"

Non disponible, en cours de développement.

A3.4.5 – Menu "Model validation"

Afin de valider le caractère prédictif des modèles estimés, le menu "Model validation" propose à l'utilisateur le tracé de toutes les courbes relatives aux données de validation. Les menus et commandes proposées sont les mêmes que pour le menu "Estimation time performances".

A3.4.6 – Menu "Transient responses"

Le menu "Transient responses" permet à l'utilisateur de tracer les réponses impulsionnelle et indicielle des modèles estimés.

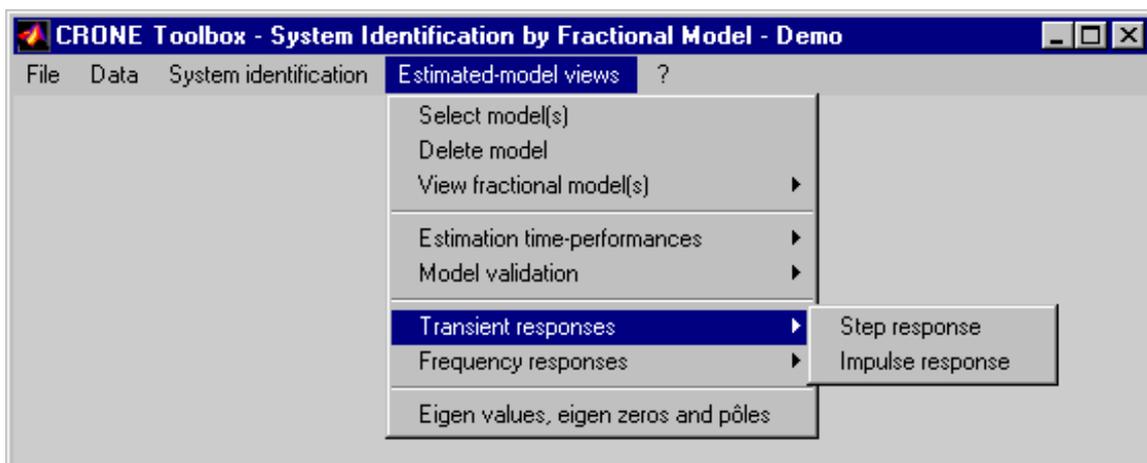


Figure A3.31 - Menu "Transient responses"

A3.4.7 – Menu "Frequency responses"

Le menu "Frequency responses" permet à l'utilisateur de tracer les réponses fréquentielles des modèles estimés.

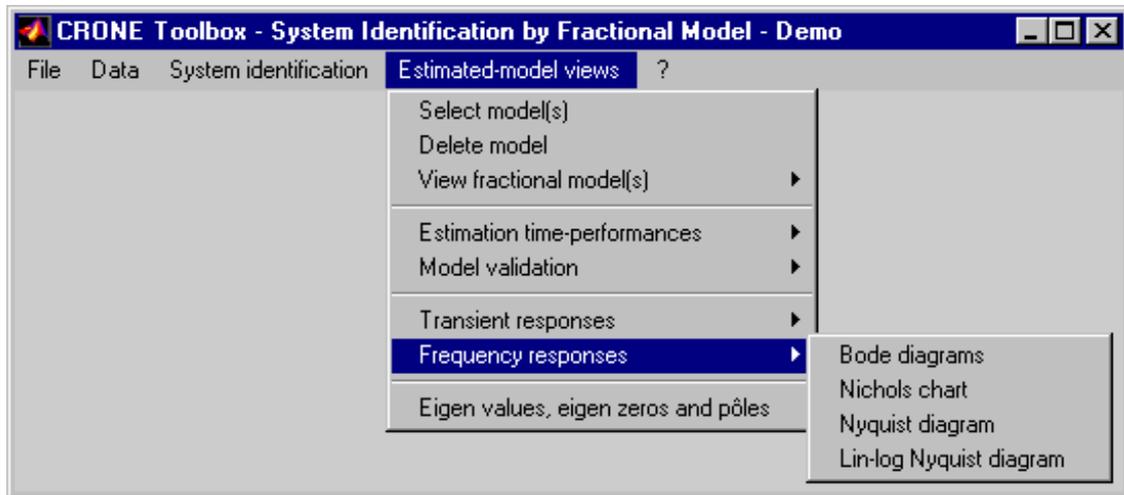


Figure A3.32 - Menu "Frequency responses"

A3.4.7.1 – Commande "Bode diagrams"

La commande "**Bode diagrams**" trace les diagrammes de Bode des différents modèles estimés. Elle fait appel à la fonction "**CRONE_bode.m**", fonction commune à tout le logiciel. La bande fréquentielle du tracé est déterminée en fonction :

- de la période d'échantillonnage pour la fréquence haute (fréquence de Nyquist) ;
- de la durée de l'expérience pour la fréquence basse.

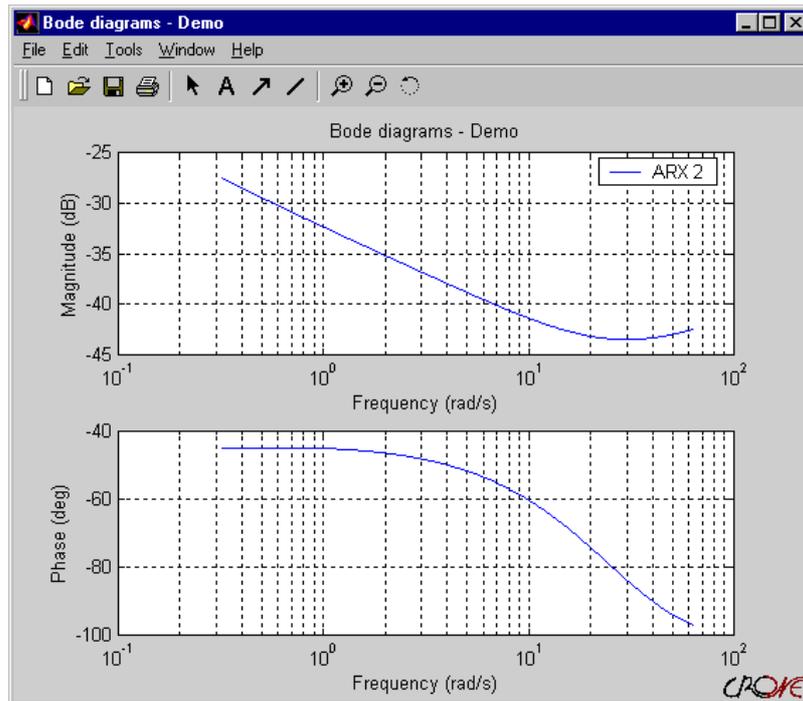


Figure A3.33 - Diagramme de Bode d'un modèle estimé

A3.4.7.2 – Commande "Nichols charts"

La commande "Nichols charts" trace les diagrammes de Black/Nichols des modèles estimés. Elle fait appel à la fonction "*CRONE_black.m*", fonction commune à tout le logiciel. La bande fréquentielle est déterminée de la même manière que pour le diagramme de Bode.

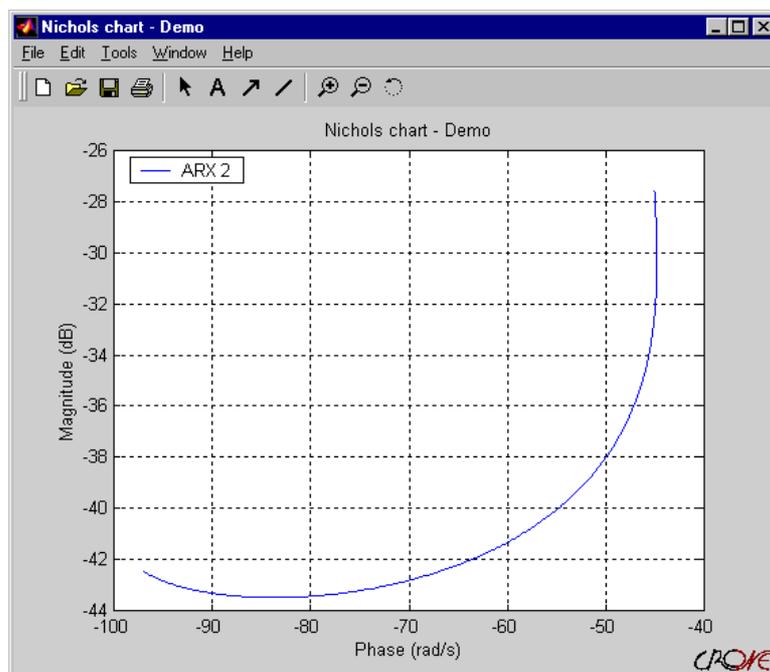


Figure A3.34 - Diagramme de Black d'un modèle estimé

A3.4.7.3 – Commande "Nyquist diagram"

La commande "Nyquist diagram" trace les diagrammes de Nyquist des modèles estimés. Elle fait appel à la fonction "*CRONE_nyquist.m*", fonction commune à tout le logiciel. La bande fréquentielle est déterminée de la même manière que pour le diagramme de Bode.

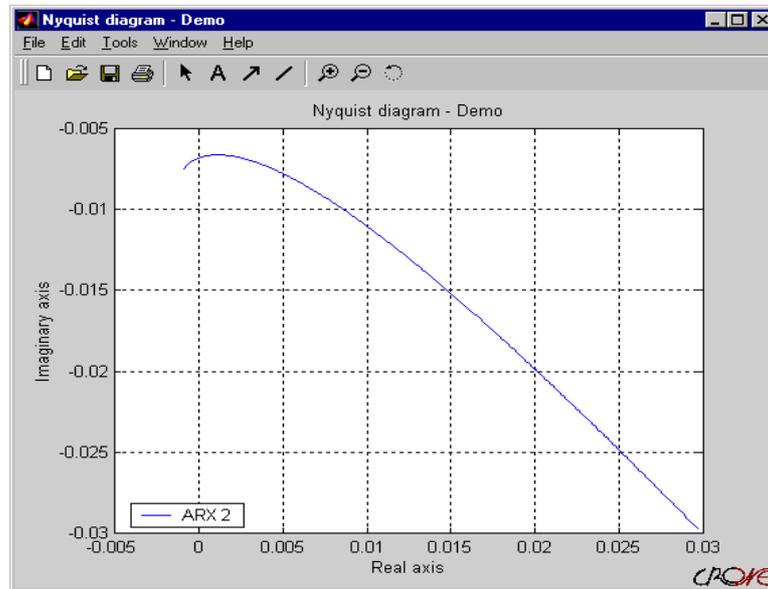


Figure A3.35 - Diagramme de Nyquist d'un modèle estimé

A3.4.7.4 – Commande "Lin-log Nyquist diagram"

La commande "Lin-log Nyquist diagram" trace les diagrammes de Nyquist des modèles estimés dans un diagramme Lin-log. Elle fait appel à la fonction "*CRONE_nyquist.m*", fonction commune à tout le logiciel. La bande fréquentielle est déterminée de la même manière que pour le diagramme de Bode.

A3.4.8 – Commande "Eigen values, eigen zeros and pôles"

La commande "Eigen values, eigen zeros and pôles" a pour objectif d'informer l'utilisateur sur :

- la stabilité des modèles estimés (critère sur les pôles) ;
- une possibilité de simplification de modèle (critère sur les valeurs propres et les zéros propres).

Cette commande fait appel à la fonction "**CRONE_eigen_plot.m**", fonction commune à tout le logiciel. Elle trace les valeurs propres, zéros propres et pôles des modèles estimés et affiche la valeur numérique des pôles correspondant à chaque valeur propre. Sachant que la position des pôles détermine directement la stabilité des systèmes, les modèles estimés seront stables si tous les pôles sont à partie réelle négative. De plus, si une valeur propre est très proche d'un zéro propre, une simplification de modèle est possible.

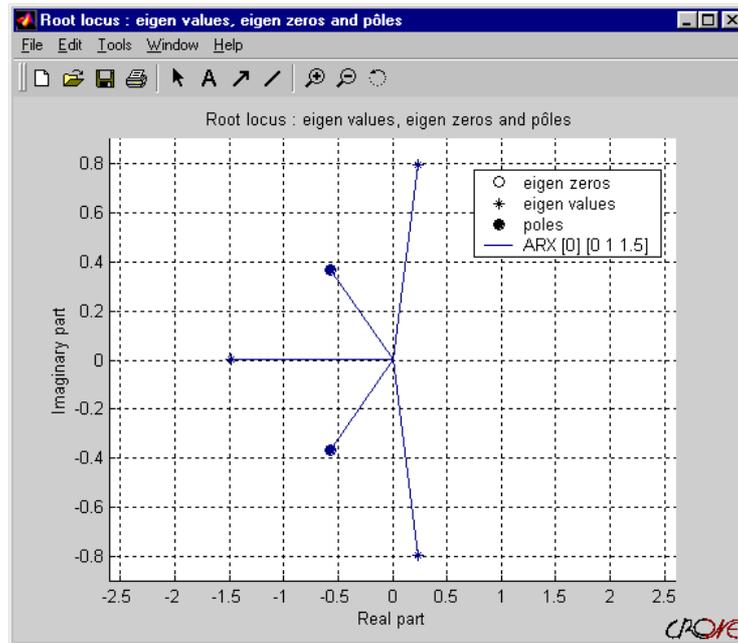


Figure A3.36 - Tracé des valeurs propres, zéros propres et pôles d'un modèle estimé

Résumé

Le thème général des travaux qui font l'objet de ce mémoire concerne la représentation et l'identification de système par modèle non entier. Le premier chapitre commence par rappeler les définitions et principales propriétés des opérateurs différentiels non entiers. Le deuxième chapitre propose une représentation continue dans un espace d'état généralisé d'un système linéaire non entier complexe, scalaire ou multivariable. Un théorème de stabilité est établi. Le troisième chapitre traite de l'application de l'opérateur de dérivation non entière à la modélisation de phénomènes de diffusion, le champ applicatif retenu étant celui de la thermique. L'étude du transfert de chaleur dans six milieux semi-infinis et finis, ainsi que la détermination d'approximations sous la forme de transmittances entières et non entières constitue la contribution principale de ce chapitre. Le quatrième chapitre est consacré à l'identification par modèle non entier. Portant sur une équation différentielle non entière, deux types de méthodes d'estimation paramétriques sont présentés : les méthodes à erreur d'équation et les méthodes à erreur de sortie. Le dernier chapitre propose une application de l'identification par modèle non entier à la résolution d'un problème inverse en thermique. L'exemple d'illustration retenu consiste en l'estimation des conditions thermiques de coupe en usinage par tournage.

Mots clés

Dérivation non entière, représentation d'état non entière, identification par modèle non entier, phénomènes de diffusion, problème inverse.

Abstract

This thesis deals with system representation and identification by fractional models. Chapter 1 recalls the definitions and main properties of the fractional operators. Chapter 2 proposes the study of a continuous MIMO complex-fractional system through a generalized state space representation. A stability theorem is established from the output analytical expression. Chapter 3 deals with the modeling of diffusive processes using fractional differentiation operators. The heat transfer through 6 different finite and semi-infinite media is studied. Approximations using integer or fractional transfer functions are then established and compared. Chapter 4 is devoted to system identification by fractional model. Equation error methods as well as output error methods are developed. Finally, chapter 5 gives an application of system identification to the solving of a thermal inverse problem. An example, consisting of the estimation of the thermal cut conditions, is given.

Keywords

Fractional differentiation, fractional state-space representation, system identification by fractional model, diffusive processes, inverse problem.