$N°$ d'ordre : 3326

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Réda CHOUKRALLAH**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

****

LACUNARITÉ ET VECTEURS CYCLIQUES POUR LES SEMI-GROUPES DE SHIFTS ADJOINTS

****

Soutenue le 11 Décembre 2006 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

Après avis de :

F. VASILESCU	Professeur, Université des sciences et technologies de Lille	**Rapporteur**
E. YOUSSFI	Professeur, Université de Provence	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen composée de :

E. ABAKUMOV	Maître de conférences, Université Marne-la-Vallée	
B. CHEVREAU	Professeur, Université Bordeaux 1	
J. ESTERLE	Professeur, Université Bordeaux 1	**Président**
N. NIKOLSKI	Professeur, Université Bordeaux 1	**Directeur**
F. VASILESCU	Professeur, Université Lille	
E. YOUSSFI	Professeur, Université Provence	

- 2006 -

Remerciements

J'exprime toute ma gratitude à mon directeur de thèse N. Nikolski de m'avoir proposé un sujet de recherche très intéressant, pour ses encouragements et l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail.
Je tiens à remercier E. Abakumov, B. Chevreau et J. Esterle qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury ainsi que F. Vasilescu et E. Youssfi qui ont en outre rempli la tâche ingrate d'être rapporteurs.
Je voudrais remercier tous les membres de l'équipe d'Analyse de Bordeaux 1 pour leurs conseils et leur soutien et aussi tout ceux du département de Mathématiques qui m'ont permis de travailler dans de très bonnes conditions.
Je voudrais remercier mes amis, mais il m'est impossible de les citer tous ici, je remercie en particulier Delphine Depeyras et Jérémie Joudioux du Bureau 359 pour leur amitié et la bonne humeur de tous les jours.
Enfin, je ne pourrais pas terminer sans rendre hommage à mes parents, à mes soeurs et à mon frère. Je ne saurai jamais leur témoigner suffisamment toute ma gratitude pour m'avoir toujours soutenu.

Table des matières

Introduction

Le sujet de cette thèse se situe autour du phénomène de cyclicité pour le shift adjoint. Il s'agit aussi plus généralement de décrire les sous-espaces S^*-invariants engendrés par une classe de séries lacunaires et dont l'étude sera faite dans différents espaces, en particulier nous considèrerons le cas discret et continu des semi-groupes de shifts adjoints, mais voici d'abord quelques définitions pour introduire notre sujet.
L'espace de Hardy $H^2(X)$ est l'espace des fonctions f à valeurs dans un espace de Hilbert X qui sont analytiques dans le disque $\mathbb{D} = \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\}$ et telles que,

$$\|f\|^2 := \sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbb{T}} \|f(r\zeta)\|_X^2 dm(\zeta) < \infty ,$$

où $\mathbb{T} = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$ est le cercle unité et m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Nous écrirons H^2 pour $H^2(\mathbb{C})$.
Les opérateurs shift S et son adjoint S^* sont définis sur $H^2(X)$ respectivement par,

$$S_X f = zf , \;\; S_X^* f = \frac{f - f(0)}{z} ,$$

z étant "la variable indépendante" c'est-à-dire l'application identité du disque $\mathbb{D}$ (où du cercle $\mathbb{T}$) sur lui-même ($z(\zeta) \equiv \zeta$).
Pour simplifier et lorsqu'il n'a pas d'ambiguité possible sur l'espace dans lequel ces opérateurs agissent on écrira S et S^* pour S_X et S_X^*.
Il est bien connu (voir [9]) que $H^2(X)$ coincide avec l'espace $\ell_a^2(X)$ des séries entières $f(z) = \sum_{n \ge 0} \hat{f}(n) z^n$ telles que $\hat{f}(n) \in X$ et $\sum_{n \ge 0} \|\hat{f}(n)\|_X^2 < \infty$ et si une fonction $g \in H^2(X)$ est représentée par la suite de ses coefficients de Fourier, $g = \{\widehat{g}(0), \widehat{g}(1), \widehat{g}(2), \ldots\}$, S et S^* sont les opérateurs de translation à droite et à gauche suivants définis par,

$$S\{\widehat{g}(0), \widehat{g}(1), \widehat{g}(2), \ldots\} = \{0, \widehat{g}(0), \widehat{g}(1), \ldots\}.$$

$$S^*\{\widehat{g}(0), \widehat{g}(1), \widehat{g}(2), \ldots\} = \{\widehat{g}(1), \widehat{g}(2), \widehat{g}(3), \ldots\}.$$

Etant donnée une famille de fonctions $F \subset H^2(X)$, on considère le plus petit sous-espace invariant par S^* contenant F noté E_F et défini par

$$E_F \stackrel{def}{=} span(S^{*n} f : n \ge 0, \; f \in F).$$

Une famille de fonctions $F \subset H^2(X)$ est dite cyclique pour le shift adjoint si

$$E_F = H^2(X).$$

Il est utile de remarquer que dans le cas de la dimension finie $X = \mathbb{C}^d$ on peut représenter f par ses fonctions coordonnées, $f = (f_i)_{1\leq i\leq d}$, $f_i \in H^2$ et que $\|f\|^2 = \sum_1^d \|f_i\|^2$.

Dans ce cas, on peut représenter l'opérateur de translation et son adjoint sous la forme de somme orthogonale des shifts scalaires,

$$S_d = S \oplus \ldots \oplus S \,:\, H^2_d \longrightarrow H^2_d \text{ et } S^*_d = S^* \oplus \ldots \oplus S^* \,:\, H^2_d \longrightarrow H^2_d,$$

où $H^2_d = H^2 \oplus \ldots \oplus H^2$. Ainsi, la cyclicité d'une fonction $f = (f_i)_{1\leq i\leq d}$ dans $H^2(\mathbb{C}^d)$ se traduit par la possibilité "d'approximer simultanément" n'importe quel ensemble $(g_i)_{1\leq i\leq d}$ où $g_i \in H^2$, $1 \leq i \leq d$, c'est-à-dire, par l'existence d'une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 1}$ telle que,

$$\lim_n p_n(S^*)f_i = g_i\,,\ 1 \leq i \leq d.$$

Le "spectre de Fourier" (appelé aussi spectre des fréquences) et par abus de langage spectre d'une fonction $f \in H^2(X)$ est ici l'ensemble

$$\sigma(f) = \sigma_{\mathcal{F}}(f) = \{k \geq 0 : \hat{f}(k) \neq 0\}.$$

On dit aussi d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ qu'elle est *σ-spectrale* si $\sigma(f) \subset \sigma$.
Une série lacunaire à la Hadamard est une fonction qui peut s'écrire sous la forme;

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k},\ \textit{et telle que}\ \ \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq d > 1\,,\quad \forall\ k,$$

(d est une constante qui ne depend pas de k) et donc f est σ-spectrale pour un σ lacunaire (par Hadamard).
Etant donné un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{N}$, nous notons

$$H^2_\Lambda(X) = \{f \in H^2(X) :\, \sigma(f) \subset \Lambda\}.$$

Dans la première partie de la thèse, on va s'intéresser au problème ouvert de la cyclicité des séries lacunaires dans $H^2(X)$ où X est un espace de Hilbert séparable, on obtiendra un critère de cyclicité pour des séries lacunaires d'Hadamard dont la suite des coefficients de Taylor est complètement relativement compacte (c.r.c.). Notamment, la suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ est dite c.r.c. si, quelque soit la projection orthogonale $P\,:\, X \to X$, la suite normalisée $\{Px_n/\|Px_n\| \,:\, Px_n \neq 0\}$ est relativement compacte. On verra que cette classe de suites coincident avec toutes les suites lorsque X est de dimension finie et que pour tout X séparable, il existe des suites c.r.c. qui engendre l'espace X tout entier. En fait notre résultat permet de démontrer plus puisqu'on va parvenir à caractériser les sous-espaces S^*-invariants engendrés par ce type de séries. Dans cette description que nous obtiendrons

apparait un sous-espace invariant engendré par un polynôme à valeur dans X et que l'on va expliciter en utilisant le langage de fonction intérieure matricielle. Nous verrons ensuite comment on peut se ramener au cas scalaire et donner un critère de cyclicité des séries lacunaires pour une puissance quelconque du shift adjoint ainsi que quelques corollaires annexes. Le cas plus général des séries dont le spectre est une réunion finie de suites lacunaires sera étudié sur certains exemples de nature particulière.
Nous généraliserons aussi ces résultats au polydisque. Dans la seconde partie, nous étudierons le problème dans le cas continu en l'occurrence dans l'espace $L^2(\mathbb{R}+)$ et pour le semi-groupe de translations à gauche. En utilisant la propriété d'unicellularité en théorie d'opérateurs intégral de Volterra, nous construirons une classe de fonctions cycliques pour le semi-groupe de translations à gauche étant un analogue continu des séries lacunaire de l'espace $\ell^2_a(X)$.
Plus précisément, le plan et les résultats principaux de la thèse sont les suivants :

1. Le chapitre 1 donne un aperçu de la théorie générale et de résultats connus de cyclicité pour le shift adjoint dans le cas scalaire H^2.
2. Dans le chapitre 2, on introduit la notion de suites c.r.c. et on décrit dans $H^2(X)$ où X est un espace de Hilbert les sous-espaces engendrés par des séries dont le spectre $\Lambda \subset \mathbb{N}$ est une suite lacunaire ou bien plus généralement satisfaisant la propriété

$$sup\{card\{(i, j) : i \neq j, i, j \in \Lambda, i - j = l\} : l \in \mathbb{Z}\} < \infty,$$

et dont la suite des coefficients de Taylor est c.r.c. On posera comme notation,

$$X_*(f) = \bigcap_{n \geq 0} span(\widehat{f}(k) : k \geq n).$$

On va démontrer deux Théorèmes (2.2.1, 2.2.2) principaux,
• Soit X un espace de Hilbert séparable et soit $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k} \in H^2(X)$ une série lacunaire telle que la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est c.r.c., alors

$$E_f = H^2(X_*) \oplus E_p$$

où p est un polynôme et $p = f - P_{X_*} f$.
• Le deuxième Théorème donne le critère de cyclicité suivant sous la condition c.r.c. pour une fonction $f \in H^2_\Lambda(X)$ où Λ est une suite lacunaire et ainsi,

$$f\, est\, cyclique \Leftrightarrow X_*(f) = X.$$

Plus généralement, pour une famille de fonction $F \subset H^2_\Lambda(X)$ à la place de $F = \{f\}$, les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) $span_X(X_*(f) : f \in F) = X$.

(ii) F est cyclique dans $H^2(X)$.

Grâce à ce Théorème, on va aussi donner un critère de cyclicité indépendament des coefficients mais lié au spectre pour les séries lacunaires dans H^2 et celà pour n'importe quel puissance du shift adjoint voire pour toutes simultanément,
• Soit $f \in H^2$ une série lacunaire telle que $\sigma(f) = (n_k)_{k\geq 1}$ et N un entier naturel non nul. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est S^{*N}-cyclique.

(ii) $\forall\, m \geq 0, \forall\, i = 0, \ldots, N-1, \exists\, k \geq m\, :\, n_k \equiv i\, (mod\, N)$.

Ainsi, f est S^{*N}-cyclique (où $N \in \mathbb{N}$) si et seulement si, quelque soit j, $0 \leq j \leq N$, la congruence $k \equiv j\, (mod\, N)$ admet une infinité de solutions k, $k \in \sigma(f)$.

3. Dans le chapitre 3, on s'intéresse à des séries dont le spectre est la réunion finie de suites lacunaires par exemple on obtient le Théorème 3.2.2 qui donne un critère de cyclicité pour certaines de ces séries,
• Soit X un espace de Hilbert séparable, $\Lambda = \{n_k\}_{k\geq 1}$ une suite lacunaire infinie et $\{m_1, m_2, \ldots, m_d\} \subset \mathbb{Z}$.
Soit $f = \big\{f_i\big\}_{1\leq i\leq d} \in H^2(X^d)$ et $\sigma(f_i) \subset \Lambda + m_i$. Supposons que la suite

$$(\widehat{f_1}(k+m_1),\, \widehat{f_2}(k+m_2), \ldots,\, \widehat{f_d}(k+m_d)))_{k\geq 0}$$

est c.r.c. dans X^d, alors

$$f\ cyclique \Leftrightarrow span\Big(\begin{pmatrix} \widehat{f_1}(k+m_1) \\ \widehat{f_2}(k+m_2) \\ \vdots \\ \widehat{f_d}(k+m_d) \end{pmatrix} \,:\, k \geq N\Big) = X^d \quad \forall\, N \geq 0.$$

Dans le cas d'une fonction $f \in H^2(X)$ dont le spectre de Fourier est de type $\cup_{k\geq 1}[n_k,\, n_k + N]$ où $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite lacunaire, on met en évidence l'existence d'un sous-espace non réduit à $\{0\}$, $L \subset \mathcal{P}_N(X)$ (où $\mathcal{P}_N(X)$ est l'ensemble des polynôme de degré N) et lorsque $dim\, X < \infty$, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que f soit cyclique. On montre que f est cyclique si et seulement L a le rang maximal dans X, i.e.

$$dim\, X = r := \max_{|z|<1} dim(p(z)\, :\, p \in L).$$

4. Le chapitre 4 est une généralisation de notre résultat de cyclicité pour $H^2(\mathbb{D}^n,\, X)$ où X est un espace de Hilbert séparable. Notamment cet espace peut se définir en language des séries entières à coefficients dans $\ell^2(\mathbb{Z}_+^n,\, X)$ de la manière suivante,

$$H^2(\mathbb{D}^n,\, X) = \{f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha,\, \widehat{f}(\alpha) \in X,\, \sum_{\alpha\geq 0} \|\widehat{f}(\alpha)\|_X^2 < \infty\}.$$

Nous traitons ici le cas du bidisque $H^2(\mathbb{D}^2, X)$. Soit $\Lambda = \{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ une suite "lacunaire" dans $\mathbb{Z}_+^2$ dans le sens que

$$sup\{card\{(i, j) : i \neq j, \beta = \alpha_i - \alpha_j\} : \beta \in \mathbb{Z}^2\} < \infty,$$

et telle que $\alpha_j = (\alpha_j^1, \alpha_j^2)$, $\lim\limits_{j\to\infty}(\alpha_{j+1}^1 - \alpha_j^1) = \lim\limits_{j\to\infty}(\alpha_{j+1}^2 - \alpha_j^2) = +\infty$. Soit $f \in H_\Lambda^2(\mathbb{D}^2, X)$ telle que la famille $\{\widehat{f}(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}_+^2\}$ est c.r.c. Alors f est cyclique pour le semi-groupe $\{S^{*\alpha} = S_1^{*\alpha_1} S_2^{*\alpha_2} : \alpha \in \mathbb{Z}_+^2\}$, c'est-à-dire

$$E_f := span(S^{*\alpha} f : \alpha \in \mathbb{Z}_+^2) = H^2(\mathbb{D}^2, X),$$

si et seulement si $X_*(f) = X$ où

$$X_*(f) = \bigcap_{n\geq 1} span(\widehat{f}(\alpha_j) : j \geq n).$$

5. Enfin, dans les chapitre 5 et 6, on étudie la cyclicité de certaines fonctions pour le semi-groupe continu de shifts adjoints et on obtient des résultats dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ et plus généralement dans $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ où X est un espace de Hilbert de dimension finie.
   Pour celà, on va introduire une définition sur les intervalles dans $\mathbb{R}_+$. On dira qu'une réunion dénombrable d'intervalles disjoints $\Lambda = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ est un système d'intervalles si elle vérifie les conditions suivantes :
   i) $a_k < b_k < a_{k+1} \quad \forall\, k \geq 1.$
   ii) $\sup\limits_{k\geq 1} \dfrac{b_k}{a_{k+1}} < 1.$
   On prouve le Théorème 5.2.1 suivant,
   • Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et $supp(f) \subset \Lambda$ où $([a_k, b_k])_{k\geq 1}$ est un système lacunaire d'intervalles tels que,
   i) $c = \sup\limits_{k\geq 1} |b_k - a_k| < \infty.$
   ii) La suite $(f_k)_{k\geq 1}$ où $f_k(t) = f(t + a_k)$, $0 \leq t \leq c$ est c.r.c. dans $L^2(0, c; X)$.
   Alors, f est cyclique dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.
   Une généralisation du Théorème précédent peut être obtenue dans le cas de la dimension finie. Le Théorème 6.2.2 nous permet d'avoir un critère de cyclicité pour des fonctions dans $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ vérifiant les conditions (i), (ii) précédentes. On mettra d'abord en évidence l'existence d'un sous-espace non vide $M \neq \{0\}$ dans $L^2(0, c, X)$ vérifiant

$$L^2 \otimes M(f) \subset E_f.$$

   Et en posant,

$$\mathcal{M}(f) = \mathcal{F}^{-1}(M(f)),$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier et si

$$Rang(\mathcal{M}(f)) := max(dim\{\Phi(z) : \Phi \in \mathcal{M}(f)\} : Im(z) > 0).$$

On obtient le résultat suivant,
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+, X)$ satisfaisant les conditions du Théorème 6.2.1, et supposons que $dim\, X < \infty$. Alors, f est cyclique pour le semi-groupe $(S_t^*)_{t\geq 0}$ dans $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ si et seulement si,

$$Rang(\mathcal{M}(f)) = dim\, X.$$

* *

Afin de terminer cette introduction, nous donnons quelques lignes en plaçant le problème des vecteurs cycliques dans un cadre plus général. Notamment, le problème de cyclicité pour un opérateur T dans un espace de Hilbert est lié à celui de l'existence de sous-espaces T-invariants non-triviaux. Plus précisément, il existe un sous-espace T-invariant non trivial si et seulement s'il existe un vecteur $x \neq 0$ qui n'est pas cyclique. L'étude des sous-espaces invariants trouvent sa légitimité dans l'intérêt de comprendre la structure des opérateurs ainsi que dans la théorie de l'approximation. En ce qui concerne l'opérateur shift, c'est A. Beurling qui dans son célèbre article [4] donne la description des sous-espaces S-invariants et S-cycliques dans l'espace de Hardy H^2; tous les sous-espaces S-invariants sont de la forme ΘH^2 où Θ est une fonction intérieure. De plus $f \in H^2$ est S-cyclique si et seulement si f est une fonction extérieure. En fait, ce dernier résultat est d'abord dû à V. Smirnov en 1928 [32]. D'autres auteurs explorent les structures des vecteurs S-cycliques dans les espaces de Bergman, Dirichlet, etc (voir [31], [6], [16]). La caractérisation des vecteurs S^*-cycliques a été donné par R. Douglas, H. Shapiro et A. Shields [8] en termes de pseudoprolongement ; dans H^2 la non-cyclicité pour le shift adjoint d'une fonction se traduit exactement par la propriété de pseudo-prolongement que nous expliciterons plus tard. Pour les vecteurs S^*-cycliques dans les autres espaces il n'y a que des résultats partiels (voir [14], [25], [28], [34], [35]). Une autre approche intéressante de la cyclicité consiste à étudier les vecteurs hypercycliques en particulier, pour l'opérateur du shift à gauche. Cette approche est lié au sujet plus moderne des "semi-groupes chaotiques" (voir [11]). Parmi les autres liens, il y a un problème connu d'analyse harmonique et complexe : les fonctions moyennes-périodiques ne sont autres que les vecteurs non-cycliques du groupe de translations (voir [25], [12], [13], [5]). Concernant la cyclicité des séries lacunaires, mentionnons l'importante contribution d'E. Abakumov [1] qui en fait l'étude dans des espaces de séries entières non-pondérés et pondérés et qui montre les liens entre le spectre des fréquences d'une fonction f et sa capacité d'approximation dans le sens que $span(S^{*n}f, n \geq 0) = \ell_a^p(w_k)$. Au delà du problème de la cyclicité pour le shift adjoint et pour souligner l'intérêt de se placer dans le cadre plus large de l'espace de Hardy H^2 à valeurs vectorielles, il y a la connection avec différents problèmes et domaines d'études. Par exemple, la restriction de $S^*|_K$ de S^* à ses sous-espaces invariants K, $(K \subset H^2(X), 1 \leq dim\, X \leq \infty)$ caractérise (à une équivalence unitaire près) la classe de toutes les contractions linéaires T, $(\|T\| \leq 1)$ telles que $\lim\limits_{\infty} T^n x = 0$ (cf. à [9], [19] sur le sujet). En particulier aussi la possibilité de décrire

$E_F := span(S^{*n}F : n \geq 0)$ en fonction de $F \subset H^2(X)$ permet de calculer la multiplicité spectrale μ_T d'un opérateur $T : H \longrightarrow H$ de la classe mentionnée ci-dessus ($\mu_T := min\{dim\, F : span(T^n F : n \geq 0) = H\}$. En terme de modèle fonctionnel des contractions le cas vectoriel où $dim\, X < \infty$ correspond aux opérateurs tels que $rang(I - TT^*) \leq rang(I - T^*T) < \infty$, d'autres caractéristiques plus subtiles d'opérateurs qui dépendent de la description des sous-espaces cycliques se rencontrent dans certains problèmes dans la théorie du contrôle (voir [22] où d'autres références sont également données).

Chapitre 1

Un bref aperçu des résultats sur la cyclicité pour le shift adjoint dans H^2

1.1 La notion de pseudocontinuation

Lorsqu'on se place dans le cadre des espaces de Hardy, toute fonction $f \in H^p$, $p > 0$ peut se factoriser en un produit de Blaschke et une fonction $g \in H^p$ sans zéros dans $\mathbb{D}$ mais il existe aussi une factorisation plus subtile qui revient souvent, très connue pour des fonctions dans ce type d'espaces et fort utile en particulier comme nous le verrons par la suite concernant la cyclicité d'une fonction pour le shift adjoint.

Définition 1.1.1 *Une fonction $\theta \in H^2$ est une fonction intérieure si $\theta \in H^\infty$ et si $|\theta| = 1$ p.p sur $\mathbb{T}$.*

Théorème 1.1.1 [30] *Soit c une constante telle que $|c| = 1$, B un produit de Blaschke , μ une mesure de Borel positive et finie sur $\mathbb{T}$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose*

$$f^i(z) = cB(z)exp\big\{ -\int_{-\Pi}^{\Pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\big\} \;\; (z \in \mathbb{D})$$

La fonction f^i est une fonction intérieure et toute fonction intérieure peut s'obtenir de cette façon.

Définition 1.1.2 *Soit φ une fonction mesurable positive sur $\mathbb{T}$ telle que $log\,\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et c une constante telle que $|c| = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$ on pose*

$$f^e(z) = c\,exp\big\{ -\frac{1}{2\Pi}\int_{-\Pi}^{\Pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, log\,\varphi(e^{it})\, dt\big\}$$

La fonction f^e est dite fonction extérieure.

Théorème 1.1.2 *[30] Supposons $0 < p \leq \infty$, $f \in H^p$ sans être la fonction identiquement nulle. On a $log\,|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ (f^* désigne la fonction obtenue à partir des limites radiales de f), la fonction extérieure*

$$f^e(z) = c\,exp\Big\{-\frac{1}{2\Pi}\int_{-\Pi}^{\Pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,log\,|f^*(e^{it})|\,dt\Big\}$$

appartient à H^p et il existe une fonction intérieure f^i telle que

$$f = f^i f^e.$$

De plus

$$log\,|f(0)| \leq \frac{1}{2\Pi}\int_{-\Pi}^{\Pi} log\,|f^*(e^{it})|dt.$$

Les fonctions f^i et f^e sont respectivement appelées les facteurs intérieur et extérieur de f ; f^e ne dépend que des valeurs frontières de $|f|$.
Le Théorème de Beurling (voir [4]) permet de caractériser les sous-espaces S^*-invariants par la représentation canonique suivante qui en découle $K = H^2 \ominus \Theta H^2$ où Θ est une fonction intérieure. Mais il est assez difficile de tirer de l'information à partir de cette écriture. Heureusement, il y a un travail remarquable et profond qui a été fait par R. Douglas, H. Shapiro et A. Shields (voir [8]) pour donner une description plus détaillée des sous-espaces S^*-invariants.

Définition 1.1.3 *Une fonction méromorphe dite de type ou de caractéristique bornée est une fonction de la forme f/g, avec $f, g \in H^\infty$. L'ensemble de ces fonctions est la classe de Nevanlinna notée Nev.*

Définition 1.1.4 *Soit $f \in H^2$, une fonction méromorphe $\widetilde{f}$ définie sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ est un pseudoprolongement de f si $\widetilde{f}$ est une fonction de type borné au sens de Nevanlinna et si $\widetilde{f}\,(\zeta) = f(\zeta)$ p.p ζ, $\zeta \in \mathbb{T}$.*

Le Lemme suivant donne une description élémentaire des sous-espaces S^*-invariants et joue un rôle important dans la preuve du Théorème qui va suivre.

Lemme 1.1.1 *Si Θ est une fonction intérieure alors*

$$H^2 \ominus \Theta H^2 = H^2 \cap \overline{z}\Theta\overline{H^2}.$$

La notion de pseudoprolongement que l'on vient de voir va se révéler très efficace pour décrire les vecteurs cycliques pour le shift adjoint S^*, si on définit C comme l'ensemble de ces vecteurs et $N = H^2 \setminus C$, on a le Théorème fondamental suivant,

Théorème 1.1.3 *[8] Soit $f \in H^2$. Les propositons suivantes sont équivalentes.*

1. $f \in N$.

2. f admet un pseudoprolongement.

Il est clair que toute fonction intérieure Θ admet un pseudoprolongement $\widetilde{\Theta}$ en raison du principe de réflection

$$\widetilde{\Theta}\,(\zeta) = 1 \setminus \overline{\Theta(1 \setminus \bar{\zeta})}, \;\; |\zeta| > 1.$$

Ainsi une fonction intérieure dans H^2 n'est pas cyclique pour le shift adjoint et $f \in H^2$ n'est pas cyclique si et seulement si $f \in H^2 \ominus \vartheta H^2$ pour une fonction intérieure ϑ.
Rappelons aussi quelques propriétés de l'opération de pseudoprolongement qui sont des conséquences triviales liées à la classe de *Nevanlinna* et qui mérite d'être énoncées vu leur apport dans l'étude des vecteurs cycliques,

i) unicité : si $\widetilde{f}$ existe et si $\widetilde{f} \equiv 0$ alors $f \equiv 0$;

ii) linéarité : si $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ existent alors $(\lambda f + \mu g)^{\sim} = \lambda\,\widetilde{f} + \mu\,\widetilde{g}$;

iii) permanence : si $\widetilde{f}$ existe et si f admet un prolongement analytique (au sens usuel) en un point ζ, $|\zeta| = 1$, ce prolongement coincide avec $\widetilde{f}$;

iv) stabilité pour la multiplication : si $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ existent et si $fg \in H^2$ alors $(fg)^{\sim} = \widetilde{f}\widetilde{g}$.

De nombreux résultats dérivent du Théorème 1.1.3 (se référer à [8]), en voici un bref aperçu ce ne sont pas forcément les plus intéressants mais ils participent à bien définir et à mieux comprendre le contexte du problème de la cyclicité.
- N est un sous-espace linéaire ; $N + C \subset C$; $\mathcal{P}_A \subset N$, $C \neq \emptyset$; $clos\, C = H^2$; $S^*C \subset C$.
- Dans la factorisation $f = f^e f^i$ d'une fonction $f \in H^2$ en produit de deux fonctions intérieure et extérieure, seul le facteur extérieure est responsable de la cyclicté de f pour le shift adjoint i.e.,

$$f \in N \Leftrightarrow f^e \in N.$$

- Si $f \in H^2$ est telle que $\overline{\lim}_{+\infty} |\widehat{f}(n)|^{1 \setminus n} < 1$ alors soit f est cyclique soit f est une fonction rationnelle.
- Si on perturbe une fonction de ce dernier type en lui ajoutant une série lacunaire, E. Abakumov montre dans [1] que ce résultat reste vérifié.

1.2 Cyclicité et lacunarité

L'étude de la cyclicité des séries lacunaires pour le shift adjoint a été entreprise à l'aide de deux approches par R. Douglas, H. Shapiro et A. Shields en 1970 dans un article (voir [8]) qui deviendra une référence en matière de cyclicité pour le shift adjoint et source d'inspiration pour plusieurs auteurs. La première de ces approches se base sur la notion de pseudoprolongement et en utilisant certaines propriétés aritmétiques du spectre des fréquences de la série considéré. Elle leur permet d'obtenir un résultat partiel de cyclicité au sens qu'il n'est obtenu que pour certaines séries lacunaires spécifiques. En l'occurence, si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2^k} \in H^2$ et si $a_k \neq 0$ pour une infinité de k alors f est cyclique. Donc la

cyclicité d'une série dans H^2 est acquise lorsque le spectre est infini et contenu dans un ensemble de type $E = \{2^k : k \geq 0\}$. L'avantage de cette approche qui sera développée plus tard par d'autres auteurs est qu'elle peut s'appliquer avec succès pour des ensembles moins denses que les ensembles lacunaires à savoir pour l'un des plus beaux résultats dans le domaine (voir [2]) $E = \{n^2 + m^2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ ou encore $E = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ où $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des nombres premiers. Son inconvénient est que cette méthode semble difficilement généralisable à des ensembles lacunaires quelconques (pour plus de précision voir [15] qui exploite la notion de pseudoprolongement pour certains ensembles lacunaires).
La seconde approche est de travailler avec les coefficients de Fourier et de considérer les liens entre le "spectre" des fréquences d'une fonction $f \in H^2$ et sa capacité d'approximer l'ensemble tout entier par des combinaisons linéaires des séries de Taylors "restantes" $S^{*n} f(z) = \sum_{k \geq 0} \widehat{f}(k+n) z^k$. Cette technique repose sur l'utilisation d'une propriété vérifiée par les ensembles lacunaires Λ qui est la suivante,

$$\sup_{I \in \mathbb{N}} card\big\{(m, n) \in \Lambda^2 : m \neq n, m - n = I\big\} < \infty.$$

Ainsi, R. Douglas, H. Shapiro et A. Shields démontrent qu'une série lacunaire qui n'est pas un polynôme est cyclique dans H^2,

Théorème 1.2.1 [*8*] *Soit $(n_k)_{k \geq 1}$ une suite lacunaire dans $\mathbb{N}$. Si $a_k \neq 0$ pour une infinité de k et si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, alors $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ est cyclique.*

Ce fait se ressemble avec le Théorème de Fabry des lacunes qui énonce l'impossibilité de prolonger de manière analytique sur un point de la frontière de son disque de convergence une fonction dont le spectre des fréquence est infinie et à densité basse. Notons aussi qu'il n'y a pas de preuve directe c'est à dire sans utiliser l'opérateur de translation et les vecteurs cycliques pour montrer qu'une série lacunaire dans un espace de Hardy n'admet pas de pseudoprolongement. E. Abakumov dans son article [1] prouve par la suite que le Théorème 1.2.1 reste vérifié sous l'hypothèse plus faible où le spectre de la série est la réunion d'un nombre fini de suites lacunaires et montre aussi dans le cadre plus général des espaces $\ell_a^p = \{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) z^k : \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ que la cyclicité des séries lacunaires n'est pas un fait universel mais par contre dépend d'une façon quantitative de la métrique de l'espace et de la rapidité de décroissance spécifique des coefficients de Taylor $\{|\widehat{f}(k)|, k \in \sigma(f)\}$. Pour illustrer cela, voici un de ses résultats.

Théorème 1.2.2 [*1*]

1. *Soit $2 \leq p \leq \infty$. Si $f \in \ell_a^p$ est telle que $\sigma(f)$ est une réunion finie de suites lacunaires D'Hadamard, alors f est cyclique dans ℓ_a^p.*
2. *Soit $1 \leq p < 2$. Alors il existe dans ℓ_a^p des séries lacunaires d'Hadamard qui ne sont pas cycliques.*

Evoquons aussi un résultat remarquable obtenu par la suite par A. B. Aleksandrov [3] qui utilise une approche différente qui lui permet de se placer dans un cadre plus large en l'occurence les ensembles $\Lambda(1)$ qui contiennent donc les ensembles lacunaires, les réunions finies d'ensembles lacunaires et même les ensembles de Sidon. Plus exactement un ensemble $\Lambda(p)$, $0 < p < \infty$ est un sous-ensemble E de $\mathbb{Z}_+$ tel que pour un (et donc pour tout) $q \in (0, p)$, toute fonction de H^q et dont le spectre est inclus dans E est dans H^p. Notons que $\Lambda(1) \subset \Lambda(p)\ \forall\ p > 1$ et ainsi tout ensemble $\Lambda(1)$ est un ensemble $\Lambda(p)\ \forall\ p > 1$. Aleksandrov établit dans son article le fait suivant. Soit $E \subset \mathbb{Z}_+$ un ensemble $\Lambda(1)$ et f une fonction holomorphe et de type bornée dans $\mathbb{D}$; si de plus f est E-spectrale et pseudoprolongeable, alors f est un polynôme. Ce qui permet de prouver la cyclicité de séries dans H^p à spectre inclu dans un ensemble $\Lambda(1)$.

Qu'en est-il de la cyclicité des séries lacunaires lorsqu'on se place dans le cadre plus général de l'espace de Hardy $H^2(X)$ à valeurs dans un espace de Hilbet séparable X. Dans cet espace, la notion de pseudo-prolongement des fonctions ne traduit plus la non-cyclicité aussi directement que dans le cas scalaire comme le prouve l'article [24] de N. K. Nikolskii et V. I. Vasyunin où ils montrent que si des fonctions dans $H^2(\mathbb{C}^d)$ sont non cycliques, elles peuvent l'être "à différents degrés". Ainsi, ces auteurs introduisent et étudient une classification des fonctions dans $H^2(\mathbb{C}^d)$ selon leur degré de cyclicité pour analyser le phénomène de cyclicité dans le cas vectoriel.
C'est pourquoi il semble préférable de privilégier pour étudier la cyclicité des séries lacunaires dans le cas vectoriel la deuxième approche qui se fait par les coefficients de Fourier et c'est donc cette direction qui sera explorée dans la prochaine section.

Chapitre 2

Séries lacunaires

2.1 Suites complètement relativement compactes

Définition 2.1.1 *Soit X un espace de Hilbert.*
Une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ d'éléments dans X est dite complètement relativement compacte (c.r.c.) si pour toute projection orthogonale $P: X \to X$ et pour
$\eta = \{k \geq 0 : Pa_k \neq 0\}$ la suite $\left(\frac{Pa_k}{\|Pa_k\|}\right)_{k\in\eta}$ est relativement compacte dans X.

Remarque 2.1.1 *Il est clair que dans un espace de dimension finie, toute suite est c.r.c.*

Nous allons voir dans le Lemme suivant que même dans le cadre plus général des espaces de Hilbert de dimension infinie, il existe des suites c.r.c. qui engendrent l'espace tout entier.

Lemme 2.1.1 *Pour tout espace de Banach séparable X, il existe une suite $(a_k)_{k\geq 0}$, $a_k \in X$ telle que*
1) span$(a_k : k \in A) = X$ pour tout ensemble infini $A \subset \mathbb{N}$.
2) Pour tout opérateur linéaire continue $T: X \to X$,

$$\left(\frac{Ta_k}{\|Ta_k\|}\right)_{k\in\eta},\ \eta = \{k \geq 0 : Ta_k \neq 0\}$$

est relativement compacte dans X.

Preuve : Soit une suite d'éléments normalisés $(x_k)_{k\geq 1} \subset X$ telle que $span(x_k : k \geq 1) = X$ et posons,

$$a_k = \sum_{j\geq 0} \lambda_k^j x_j\ ;\ \begin{cases} \lambda_k \in \mathbb{C}^* \\ |\lambda_k| < 1,\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j \\ \lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = 0. \end{cases}$$

Donc $a_k = f(\lambda_k)\ \forall\ k \geq 1$ où $f(z) = \sum_{j\geq 1} z^j x_j$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$ à valeurs dans X.

Montrons que la suite $(a_k)_{k\in A}$ engendre X. Pour celà, considérons $\varphi \in X^*$ telle que,

$$\varphi(a_k) = 0,\quad \forall\ k \in A.$$

Il faut prouver que φ s'annule sur X tout entier. Soit

$$\psi : z \mapsto \varphi(f(z)) = \sum_{j\geq 1} z^j \varphi(x_j)$$

une fonction holomorphe telle que,

$$\psi(\lambda_k) = \varphi(f(\lambda_k) = \varphi(a_k) = 0, \ \forall \ k \in A.$$

Notons que la suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ de complexes deux à deux distincts converge vers 0 et c'est une suite de zéros pour la fonction ψ qui est holomorphe dans le disque donc d'après le principe des zéros isolés $\psi \equiv 0$. Par conséquent ses coefficients de Taylor sont nuls et ainsi,

$$\varphi(x_j) = 0, \ \forall \ j \geq 1.$$

La famille $(x_j)_{j\geq 1}$ est dense dans X donc on a bien $\varphi \equiv 0$.
Prouvons maintenant la deuxième partie du Lemme, soit $T \in \mathcal{L}(X)$, un opérateur linéaire et continu alors,

$$Ta_k = Tf(\lambda_k) = T(\sum_{j\geq 1} \lambda_k^j x_j) = \sum_{j\geq 1} \lambda_k^j Tx_j.$$

Si $T = 0$, la propriété est évidente. Si $T \neq 0$, il existe $j \geq 1$ tel que $Tx_j \neq 0_X$. On pose,

$$m = min\{j : Tx_j \neq 0\}$$

et $Ta_k = \sum_{j\geq m} \lambda_k^j Tx_j = \lambda_k^m Tx_m + \sum_{j>m} \lambda_k^j Tx_j = \lambda_k^m (Tx_m + o(1))$ lorsque $k \to \infty$ car la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ converge vers 0. De plus la continuité de la norme nous permet d'avoir,

$$\|Ta_k\| = |\lambda_k^m| \big(\|Tx_m\| + o(1)\big), \ k \to \infty.$$

Par conséquent,

$$\frac{Ta_k}{\|Ta_k\|} = \frac{\lambda_k^m (Tx_m + o(1))}{|\lambda_k^m| \big(\|Tx_m\| + o(1)\big)}, \ \ k \to \infty,$$

D'où le résultat. $\square$

Remarquons que si de plus $\forall \ k$, $\lambda_k > 0$, la suite $\big(\frac{Ta_k}{\|Ta_k\|}\big)_{k\geq 1}$ admet une limite.
Cette définition des suites c.r.c. va permettre de prouver des résultats dans l'espace de Hardy $H^2(X)$ où X est un espace de Hilbert séparable tout en englobant complètement le cas de la dimension finie ($dim\, X < \infty$) grâce à la remarque 1 précédente. D'autre part le Lemme 2.1.1 montre que dans le cas où la dimension de X est infinie les suites c.r.c. ne se réduisent pas au cas de la dimension finie.

2.2 Sous-espaces S^*-invariants engendrés par une série lacunaire et cyclicité

Dans cette partie nous allons décrire les sous-espaces S^*-invariants engendrés par certaines séries lacunaires, à valeurs dans un espace de Hilbert séparable X ce qui va permettre de donner un critère explicite de cyclicité pour ces séries, et en particulier pour le cas où $dim\, X < \infty$. Il s'agit en ce qui nous concerne de se placer dans $H^2(X)$, de considérer une série lacunaire f dont les coefficients de Taylor forment une suite c.r.c. et d'étudier le plus petit sous-espaces S^*-invariant contenant f en l'occurence $span(S^{*n}f : n \geq 0)$. Nous commencerons par la condition nécessaire de cyclicité valable pour toute famille $F \subset H^2(X)$

Lemme 2.2.1 *Soit $F \subset H^2(X)$ et $E_F = span(S^{*n}F : n \geq 0)$. Si F est cyclique alors*

$$X_*(F) = X,$$

où $X_*(F) = \cap_{m\geq 0} span(\widehat{f}(k) : k \geq m, f \in F)$.

Preuve : Supposons que $X_*(F) \neq X$. Alors, il existe $m \geq 0$ tel que

$$X_m := span_X(\widehat{f}(k) : k \geq m, f \in F) \neq X.$$

Mais $\forall f \in F$, on a $S^{*m}f \in H^2(X_m)$ donc $\forall g \in E_F$, nous aurons $S^{*m}g \in H^2(X_m)$. Par conséquent ; $\forall g \in E_F$ on écrit $g = p + h$, $h \in H^2(X_m)$, $deg(p) \leq m - 1$, et il est clair que $E_F \neq H^2(X)$ d'où la contradiction. □

Ce Lemme présente une condition nécessaire quand à la cyclicité d'une fonction dans $H^2(X)$. Ces chapitres et les suivants sont consacrés à amener les cas particuliers (lié à la lacunarité) où cette condition est suffisante. Remarquons d'abord que dans le cas général c'est à dire sans aucune condition sur le spectre $\sigma(f)$, $f \in H^2(X)$ la condition $X_*(f) = X$ n'est bien sûr pas suffisante. Notons que si $F \subset H^2(X)$ est cyclique dans $H^2(X)$ et si $P : X \to X$ est une projection dans X alors $PF = \{Pf : f \in F\}$ où $Pf(z) = Pf(z)$, $z \in \mathbb{D}$ est cyclique dans $H^2(PX)$.
Rappelons que pour $n = 1$ on a vu dans le chapitre précédente qu'une fonction intérieure dans H^2 n'est pas cyclique.
Si $n = 2$ on se donne dans H^2 une fonction $g_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g}_1(k) z^k$ intérieure scalaire impaire (par exemple si I est une fonction intérieur on pose $g_1 = zI(z^2)$ et g_2 une fonction paire arbitraire tels que g_1, g_2 ne sont pas des polynômes et soit, $f = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ alors

$$span(\widehat{f}(k) : k \geq m) \supset \Big(\begin{pmatrix} \widehat{g}_1(2k+1) \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{g}_2(2k) \end{pmatrix} : k \geq m \Big) = \mathbb{C}^2,$$

donc $X_*(f) = \mathbb{C}^2$. Mais la projection sur la première composante $Pf = (g_1, 0)$ n'est pas cyclique dans $H^2(\mathbb{C} \oplus \{0\})$, donc f n'est pas cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^2)$.
Une construction similaire amène un exemple dans $H^2(X)$ quelque soit X, $dim\, X > 1$.
Plus généralement, étant donné une fonction f de $H^2(X)$, la cyclicité des fonctions coordonnées f_j par rapport à une base orthonormée $(e_j)_{j\geq 0}$, ie. $f = \sum_{j\geq 0} f_j . e_j$ est nécessaire à la cyclicité de f, mais cette cyclicité des fonctions coordonnées f_j n'est pas suffisante. Il

faut en plus une certaine "indépendence" pour obtenir la cyclicité de f. Par exemple, la fonction

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

n'est pas cyclique si f_1, f_2 ne sont pas cycliques ou f_1 est cyclique et f_2 n'est pas cyclique ou encore $f_1 = f_2$ est cyclique.
Soit,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$$

une série lacunaire dans $H^2(X)$ où X est un espace de Hilbert séparable, on adapte pour cette fonction les notations déjà introduites pour des familles $F \subset H^2(X)$, en adressant ces définitions à la famille $F = \{f\}$, $f \in H^2(X)$.

Notation :

$$\begin{aligned} E_f &= span_{H^2(X)}(S^{*n} f : n \geq 0). \\ X_*(f) &= \bigcap_{n \geq 0} span_X(\widehat{f}(k) : k \geq n). \\ X_\infty(f) &= span_X\big(F\, sous\, espace\, vectoriel\, ferme\, de\, X \ :\ H^2(F) \subset E_{S^{*N} f} \quad \forall\, N \geq 0\big). \end{aligned}$$

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité possible sur la fonction f considérée, on écrira X_* et X_∞ respectivement pour $X_*(f)$ et $X_\infty(f)$ afin d'alléger les notations.
Voici les Théorèmes que l'on va prouver dans cette section et qui nous renseigne sur la nature des sous-espaces S^*-invariants engendrés par une série lacunaire. Le Théorème 2.2.1 indique que ceux-ci se partagent en deux sous-espaces supplémentaires, l'un est doublement invariant (un espace est dit *doublement invariant* s'il est invariant pour l'opérateur S et son adjoint S^*) et l'autre est un sous-espace S^*-invariant de dimension finie engendré par un polynôme.

Théorème 2.2.1 *Soit X un espace de Hilbert séparable et soit $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k} \in H^2(X)$ une série lacunaire telle que la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est c.r.c., alors*

$$E_f = H^2(X_*) \oplus E_p$$

où p est un polynôme et $p = f - P_{X_*} f$.

Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}$ une suite d'entiers. On rappelle la notation suivante

$$H^2_\Lambda(X) := \{f \in H^2(X) : \sigma(f) \subset \Lambda\}.$$

On a le Théorème suivant de cyclicité pour les séries lacunaires c.r.c.

Théorème 2.2.2 *Soit X un espace de Hilbert séparable, $\Lambda \subset \mathbb{N}$ une suite lacunaire, F une famille de fonctions dans $H^2_\Lambda(X)$ telle que $\forall\, f \in F$, $(\widehat{f}(k))_{k\geq 0}$ est une suite c.r.c. dans X.*
Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $span_X(X_*(f) : f \in F) = X$.

(ii) *F est cyclique dans $H^2(X)$.*

Remarque 2.2.1 *L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) comme nous l'avons déjà vu reste correcte quelque soit $F \subset H^2(X)$ (voir Lemme 2.2.1).*

Une conséquence immédiate du Théorème 2.2.2 lorsque la famille F se réduit à une fonction, $F = \{f\}$ est de donner un critère de cyclicité, en l'occurence,

Corollaire 2.2.1 *Soit f comme dans le Théorème 2.2.2,*

$$f\, est\, cyclique \Leftrightarrow X_*(f) = X.$$

Les Lemmes 2.2.2-2.2.4 ci-dessous rappellent quelques faits connus sur des suites et des séries numériques et qui seront utiles par la suite. Nous donnerons ici leurs preuves pour être plus complet dans notre présentation.

Lemme 2.2.2 *Si $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite lacunaire de nombres entiers tels que*

$$n_{k+1} \geq d.n_k \quad \forall k \geq 1,$$

pour un $d > 1$, alors il existe un nombre M tel que pour tout nombre entier N il ne peut y avoir plus de M représentations de la forme $N = n_j - n_k$.

Preuve : Prenons M tel que $d^{M-1}(d-1) \geq 1$. Si N est donné, soit i le premier entier tel que $n_i > N$. Il suffit de monter que si $N = n_j - n_k$ alors $i \leq j < i + M$. La première inégalité est triviale. Pour la seconde si $j \geq i + M$ alors

$$n_j - n_k \geq n_j - n_{j-1} \geq (d-1)n_{j-1} \geq (d-1)d^{M-1}n_i > N.$$

$\square$

Lemme 2.2.3 *Soit une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $b_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$.*

Si $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite lacunaire, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j>k} b_{n_j - n_k} < \infty.$$

Preuve : Par le Lemme précédent on en déduit que cette série est majorée par $M\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. □

Lemme 2.2.4 *Si $b_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ et si $r_n = \sum_{k>n} b_k$, alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r_n} = \infty.$$

*Preuve :*Remarquons que la série peut s'écrire de la manière suivante,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{n-1} - r_n}{r_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{r_{n-1}}{r_n} - 1).$$

Cette série diverge puisque le produit $\prod_{n=0}^{\infty} \frac{r_{n-1}}{r_n}$ diverge. □

D'abord nous démontrons que $X_* = X_\infty$.

Lemme 2.2.5 *Soit X un espace de Hilbert séparable et $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, z^{n_k} \in H^2(X)$ une série lacunaire qui n'est pas un polynôme et où la suite $(\frac{a_k}{\|a_k\|})_{k\geq 1}$ est relativement compacte. Alors, il existe un élément non nul $x \in X$ tel que*

$$H^2 \otimes x \subset E_{S^{*N}f} \quad \forall\; N \geq 0.$$

Preuve : Soit

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, z^{n_k}.$$

Et pour tout entier N, $j \geq 0$ fixés, il existe k_0 entier tel que pour tout $k \geq k_0$, $n_k - n_{k-1} \geq j + N$ (ce qui est possible car f est une série lacunaire). On considère

$$\frac{1}{\|a_k\|} S^{*n_k - N - j} S^{*N} f = \frac{a_k}{\|a_k\|}.z^j + z^j \sum_{l>k} \frac{a_l}{\|a_k\|}\, z^{n_l - n_k}.$$

On pose $r_k = \sum_{l>k} \frac{a_l}{\|a_k\|}\, z^{n_l - n_k}$. Montrons que les r_k convergent faiblement vers 0 pour une sous suite. Il suffit de montrer que tout voisinage de 0 pour la topologie faible contient l'un des r_k. On considère les voisinages de la forme suivante

$$V = \{h \in H^2(X) \;:\; |(h, h_i)| < \;1,\; 1 \leq i \leq n\}.$$

Les fonctions h_i $i = 1, \dots n$ sont des éléments donnés de $H^2(X)$ et $h_i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{h}_i(k)\, z^k$. On obtient

$$
\begin{aligned}
|(r_k, h_i)|^2 \le & \quad \Big(\sum_{l>k} \big| \big(\frac{a_l}{\|a_k\|} \,,\, \hat{h}_i(n_l - n_k) \big) \big| \Big)^2 . \\
\le & \quad \Big(\sum_{l>k} \frac{\|a_l\|^2}{\|a_k\|^2} \Big) \Big(\sum_{l>k} \|\hat{h}_i(n_l - n_k)\|^2 \Big).
\end{aligned}
$$

Supposons qu'aucun des r_k n'appartient à V alors,

$$1 \le \max_{1 \le i \le n} |(r_k, h_i)| \quad \forall\, k \ge k_0.$$

Par conséquent,

$$\frac{\|a_k\|^2}{\sum_{l>k} \|a_l\|^2} \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{l>k} \|\hat{h}_i(n_l - n_k)\|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{l>k} \|\hat{h}_i(n_l - n_k)\|^2.$$

En sommant sur k on obtient une contradiction : le coté de gauche diverge grâce au Lemme 2.2.4 tandis que celui de droite converge grâce au Lemme 2.2.3, ainsi il existe une sous-suite $(r_{k_i})_{i \ge 1}$ qui converge faiblement vers 0. De la suite $(\frac{a_{k_i}}{\|a_{k_i}\|})_{i \ge 1}$ correspondante on peut, puisque $(a_k)_{k \ge 0}$ est c.r.c., en extraire une sous-suite convergente vers une limite non nulle x. La suite $(r_{k_i})_{i \ge 1}$ ne dépend ni de N ni de j et x vérifie bien,

$$x z^j \in E_{S^{*N} f} \quad \forall\, j \ge 0, \forall\, N \ge 0.$$

Autrement dit,

$$H^2 \otimes x \subset E_{S^{*N} f} \quad \forall\, N \ge 0.$$

$\square$

Remarque 2.2.2 *Le Lemme 2.2.5 reste vérifié pour des fonctions $f \in H^2_\Lambda(X)$, où $\Lambda \in \mathbb{Z}_+$ est un ensemble satisfaisant la propriété suivante plus générale que la lacunarité*

$$\sup_{m \ge 1} card\big\{ (l, k) : l > k \,;\, l, k \in \Lambda \,,\, m = l - k \big\} < \infty.$$

Nous allons démontrer que

$$X_\infty \subset X_*.$$

(Voir Corollaire 2.2.3 ci-dessous). Il est utile de noter que cette inclusion ainsi que les Lemmes 2.2.6 et les Corollaires 2.2.2 et 2.2.3 sont des propriétés générales des sous-espaces S^*-invariants et ne dépendent pas de la lacunarité d'une série de $H^2(X)$ ni de la dimension de X.

Lemme 2.2.6 *Soit x , y des éléments de $H^2(X)$. Alors*

$$y \in E_x \Rightarrow y_i \in span(x_j : j \geq 0) \quad \forall\, i \geq 0.$$

Preuve : Soit $(z_i)_{i\geq 0}$ la base standard de l'espace ℓ_a^2 et soient $x, y \in H^2(X)$, alors

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i \ , \ y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^i,$$

et pour un i_0 quelconque fixé,

$$S^{*i_0} y = y_{i_0} z^{i_0} + \sum_{i>i_0} y_i . z^{i-i_0}.$$

Puisque $y \in E_x$ qui est stable par S^* donc $S^{*i_0} y \in E_x$ et il existe une suite de polynôme complexes tels que,

$$S^{*i_0} y = \lim_{n\to\infty} p_n(S^*)x = y_{i_0} + \sum_{i>i_0} y_i z^{i-i_0}.$$

Ainsi,

$$y_{i_0} = \lim_{n\to\infty} \big[p_n(S^*)x\big](0).$$

Or,

$$\big[p_n(S^*)x\big](0) \in span(x_j \,:\, j \geq 0).$$

Finalement, on a bien $y_{i_0} \in span(x_j : j \geq 0\,)$. $\square$

Corollaire 2.2.2 *Soient $f(z) = \sum_{j\geq 1} a_j z^{n_j}$, $y = \sum_{i\geq 1} y_i z^i \in H^2(X)$. Alors,*

$$y \in E_{S^{*n_k} f} \Rightarrow y_i \in span(a_j : j \geq k) \quad \forall\ i \geq 0.$$

Preuve : On pose $x = S^{*n_k} f$ dans le Lemme 2.2.6. $\square$

Corollaire 2.2.3 *Soient f, y comme dans le Corollaire précédent. Alors,*

$$y \in H^2(X_\infty) \Rightarrow y_i \in X_* = \bigcap_{k\geq 1} span(a_j : j \geq k) \ , \forall\, i \geq 0.$$

Et par conséquent,

$$X_\infty \subset X_*.$$

Preuve : Par définition de X_∞,

$$H^2(X_\infty) \subset \bigcap_{k\geq 1} E_{S^{*n_k}f}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le Corollaire 2.2.2. $\square$

Maintenant, nous voulons démonter que

$$X_* = X_\infty.$$

Dans cette deuxième étape et prouver l'inclusion inverse à celle déjà obtenue, on considère le sous-espace suivant,

$$A = E_f \ominus H^2(X_\infty).$$

Et la projection orthogonale P_A sur A définie par

$$P_A f = f - P_{H^2(X_\infty)} f.$$

Lemme 2.2.7 *Soit* $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^{n_k} \in H^2(X)$ *une série lacunaire, alors*

(i) $\sigma(P_A f) \subset \sigma(f)$.

(ii) $P_A f$ *est un polynôme.*

Preuve :

Notons que $H^2(X_\infty) = \{x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.z^k : x_k \in X_\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty\}$.

En fait, $P_{H^2(X_\infty)}$ est une projection définie par composantes. Notamment soit,

$$Px := \sum_{k=0}^{\infty} (P_{X_\infty} x_k) z^k$$

où P_{X_∞} est la projection sur X_∞ dans X.

Il est clair que si $x \in H^2(X_\infty)$, $Px = x$.

D'autre part, si $x \in H^2(X_\infty)^\perp = H^2(X_\infty^\perp)$, alors $Px = 0$. Donc,

$$P = P_{H^2(X_\infty)}.$$

Ainsi, on peut écrire

$$(P_{H^2(X_\infty)} f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (P_{X_\infty} a_k) z^{n_k}.$$

Ce qui nous donne (i).

Pour prouver (ii), supposons que $P_A f$ n'est pas un polynôme.

Notons que

$$P_A f \in E_f,$$

car $P_A f = f - P_{H^2(X_\infty)} f$ et par définition $H^2(X_\infty) \subset E_f$.
Posons, pour alléger les notations,

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k = P_A f = \sum_{k=1}^{\infty} (P_{(X_\infty)^\perp} a_k) z^{n_k},$$

où $y_{n_k} = P_{(X_\infty)^\perp} a_k \in X_\infty^\perp$.
D'après ce qui précède, $P_A f$ est une série lacunaire et puisque la suite $(a_k)_{k\geq 0}$ est c.r.c. donc la suite $\left(\frac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|}\right)_{k\geq 0}$ est relativement compacte et puisque nous supposons que ce n'est pas un polynôme, $P_A f$ vérifie le Lemme 2.2.5, ainsi

$$\exists\, x \neq 0,\ (\|x\| = 1)\ et\ x \otimes H^2 \subset span(S^{*k} P_A f : k \geq N), \quad \forall\, N \geq 0.$$

$x \in X_\infty^\perp$ car x est la limite d'une sous suite $\frac{y_{n_{k_i}}}{\|y_{n_{k_i}}\|} \in E_\infty^\perp$ et

$$x \otimes H^2 \subset \bigcap_{N\geq 0} span(S^{*k} y : k \geq N) \subset \bigcap_{N\geq 0} E_{S^{*N} f}.$$

La deuxième inclusion est basée sur le fait que

$$y = P_A f \in E_f.$$

Donc $S^{*k} y = S^{*k} P_A f \in E_{S^{*k} f} \quad \forall\, k \geq 0$.
Mais si $x \otimes H^2 \subset \bigcap_{N\geq 0} E_{S^{*N} f}$ celà entraîne que

$$x \otimes H^2 \subset H^2(X_\infty),$$

car par définition, X_∞ est le sous-espace maximal tel que $H^2(X_\infty) \subset E_{S^{*N} f} \quad \forall\, N \geq 0$. Alors,

$$x \in X_\infty.$$

Or, on a vu que

$$x \in X_\infty^\perp.$$

Par conséquent, $x = 0$ ce qui est absurde donc $P_A f$ est un polynôme. $\square$

Proposition 2.2.1 *Soit X un espace de Hilbert séparable, $f \in H^2_\Lambda(X)$, où Λ est une suite lacunaire et $(\widehat{f}(k))_{k\geq 0}$ une suite c.r.c. Alors,*

$$X_* = X_\infty.$$

Preuve : L'inclusion $X_\infty \subset X_*$ a été prouvée dans le Corollaire 2.2.3. Reste à prouver l'inclusion inverse. On a,

$$f = P_A f + P_{H^2(X_\infty)} f.$$

Soit d le degré de $P_A f$, alors pour tout $k \geq d+1$,

$$S^{*k} f = S^{*k} P_{H^2(X_\infty)} f \subset H^2(X_\infty).$$

Donc,

$$S^{*(d+1)} f = \sum_{k>d} a_k z_{n_k - d - 1} \in H^2(X_\infty).$$

Et par suite,

$$a_k \in X_\infty \ \ \forall\, k > d.$$

Par conséquent,

$$X_* = \bigcap_{n \geq 0} span(a_k : k \geq n) \subset \ span(a_k : k > d) \subset X_\infty.$$

□

D'après la Proposition 2.2.1, puisque

$$X_* = X_\infty.$$

On obtient,

$$H^2(X_*) \subset E_f \subset H^2(X).$$

Preuve du Théorème 2.2.1 : Si f est un polynôme la preuve est immédiate.
Si f n'en est pas un, on sait d'après ce qui précède que

$$f = P_{H^2(X_\infty)} f + p,$$

où p est un polynôme. D'après la Proposition 2.2.1,

$$X_\infty = X_*.$$

Rappelons aussi que par définition,

$$H^2(X_\infty) \subset E_f.$$

Montrons la double inclusion pour obtenir l'égalité du Théorème.
Il est clair que $p \in E_f$ donc $E_p \subset E_f$, et d'autre part $H^2(X_\infty) \subset E_f$ par conséquent,

$$H^2(X_*) \oplus E_p \subset E_f.$$

Inversement on a, $S^{*n} f = S^{*n} P_{H^2(X_\infty)} f + S^{*n} p \ \ \forall n \geq 0$ et puisque $H^2(X_\infty)$ est stable par S^*,

$$S^{*n} f \subset H^2(X_*) \oplus E_p \ \ \forall n \geq 0.$$

D'où l'inclusion inverse et l'égalité $E_f = H^2(X_*) \oplus E_p$. □

Remarque 2.2.3 *Concernant le degré du polynôme p, on peut dire puisque $X_\infty = X_*$, qu'il existe un nombre $N(f)$ minimal tel que*

$$X_\infty = span(a_k :\ k \geq N(f)).$$

De plus, $p = f - P_{H^2(X_\infty)} f$ donc,

$$deg(p) = N(f) - 1.$$

Preuve du Théorème 2.2.2 : Le Lemme 2.2.1 permet de prouver l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$. Il reste à montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$. En effet, on sait que pour tout $f \in F$, on a

$$E_f = H^2(X_*(f)) \oplus E_p,$$

où p est un polynôme. Celà entraîne que

$$H^2(X_*(f)) \subset E_F,$$

pour tout $f \in F$ et donc,

$$E_F \supset span(H^2(X_*(f)) : f \in F) = H^2(span(X_*(f) : f \in F)) = H^2(X).$$

Par conséquent, F est cyclique. □

2.3 Sous-espaces invariants pour le shift adjoint

Dans la partie qui suit, il s'agit de donner une autre caractérisation de l'espace E_p qui intervient dans le Théorème 2.2.1. Faisons d'abord un rappel de la théorie autour des sous-espaces S^*-invariants et de certains Théorèmes qui vont intervenir dans la caractérisation de cet espace E_p.

Définition 2.3.1 *Soit T un opérateur sur un espace X, $Lat\,T$ est l'ensemble des sous-espaces invariants par rapport à T.*

En théorie des sous-espaces invariants, le Théorème le plus important est certes celui de Beurling et par la suite de nombreux auteurs se sont inspirés de ce résultat pour enrichir et faire avancer l'étude de ce domaine.

Théorème 2.3.1 [19] *Si E est un sous-espace de L^2 invariant par le shift bilatéral $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}f = zf, \;\; \forall\, f \in L^2$ et $S = \mathcal{S}|_{H^2}$), alors il ne peut y avoir que deux possibilités :*

1. *$\mathcal{S}E = E$ et dans ce cas, il existe un sous-ensemble m-mesurable e, $e \in \mathbb{T}$ tel que $E = \chi_e L^2$ où χ_e est la fonction caractéristique de e.*
2. *$\mathcal{S}E \neq E$, dans ce cas il existe une fonction mesurable Θ sur $\mathbb{T}$ avec $|\Theta| = 1$ p.p. telle que $E = \Theta H^2$.*

En particulier, si $E \subset H^2$ alors $\mathcal{S}E \subset E$ mais $\mathcal{S}^{-1}E \not\subset E$ donc $E = \Theta H^2$ et puisque $E \subset H^2$ alors $\Theta \in H^2$. Lorsqu'on se place dans l'espace de Hardy $H^2(X)$, où X est un espace de Hilbert quelconque le Théorème suivant donne quelques informations supplémentaire en plus de généraliser le cas scalaire

Théorème 2.3.2 [19] *(Lax-Halmos). Soit X un espace de Hibert et considérons l'opérateur de translation S_X dans $H^2(X)$. Un sous-espace fermé E appartient à $Lat\, S_X$ si et seulement si*

$$E = \Theta H^2(X'),$$

où X' est un sous-espace fermé de X et Θ une fonction à valeurs opérateurs m-mesurable (m étant la mesure de Lebesgue normalisé sur le cercle $\mathbb{T}$) et dont les valeurs $\Theta(\zeta)$ sont des opérateurs isométriques de X' dans X (p.p sur $\mathbb{T}$) et qui admet un prolongement holomorphe dans le disque $\mathbb{D}$ (au sens de la théorie des espaces H^p) ; de telles fonctions sont appelées "fonctions intérieures à gauche". La représentation ci-dessus est unique dans le sens que

$$\Theta' H^2(X') = \Theta'' H^2(X'') \Leftrightarrow \Theta' = \Theta'' V$$

où V est un opérateur unitaire de X' dans X''.

Le passage à S^* se fait par la relation entre les sous-espaces d'un opérateur A et de son adjoint A^* :

$$A^* E \subset E \Leftrightarrow A E^{\perp} \subset E^{\perp}.$$

Le Théorème de Lax-Halmos permet de caractériser $Lat\, S^*$ et donc de représenter un sous-espaces S^*-invariant et en particulier E_f sous la forme

$$K_\Theta = H^2(X) \ominus \Theta H^2(X')$$

et si $dim\, X < \infty$ alors Θ est une fonction intérieure à gauche à valeurs matricielles et $dim\, X' \leq dim\, X$.
Le théorème de Kronecker est une généralisation du Lemme de Beurling (voir [19] p. 33) et énonce le fait suivant dans H^2 : la fonction caractéristique Θ dans la représentation de Lax-Halmos d'un sous-espace S^*-invariant de dimension finie est une fonction rationnelle et plus précisément un produit de Blaschke fini. En voici l'énoncé intégral.

Théorème 2.3.3 *(Kronecker). Soit $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ un sous-espace S^*-invariant. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) K_Θ est de dimension finie.

ii) $K_\Theta = span\big(z^k/(1-\overline{\lambda}z)^{k+1} \,:\, 0 \leq k \leq d(\lambda)\big)$, où $\sum_{\lambda\in\mathbb{D}} d(\lambda) < \infty$.

iii) $\Theta = B = \prod {b_\lambda}^{d(\lambda)}$ est un produit fini de Blaschke où $b_\lambda = \frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{\lambda - z}{1-\overline{\lambda}z}$ sont les facteurs de Blaschke usuels.

Le nombre $dim\, K_\Theta$ s'appelle degré de Mac Millan de Θ.

Dans le cadre de notre travail nous aurons besoin d'une version plus générale de ce Théorème valable pour des espaces de Hardy à valeurs vectorielles. Cette généralisation est obtenue par S. Treil [33]. Pour l'énoncer nous avons besoin de la définition suivante qui remonte à l'article de V. P. Potapov [26],

Définition 2.3.2 *Un produit fini de Blaschke-Potapov est une fonction B à valeurs opérateurs, $B(\zeta) : X \to X$, $\zeta \in \mathbb{T}$ telle que*

$$B = B_1.B_2 \ldots B_n$$

$$B_k(z) = \left\{ \frac{z - \lambda_k}{1 - \overline{\lambda}_k z} P_k + (I - P_k) \right\},$$

où $|\lambda_k| < 1$ *et* P_k *est une projection orthogonale dans* X.

Lemme 2.3.1 [33] *Soit* F *un sous-espace tel que* $zF \subset F \subset H^2(X)$ *et on suppose que,*

$$codim\, F = dim\,(H^2(X) \ominus F) < +\infty.$$

Alors il existe un produit fini de Blaschke-Potapov B *tel que*

$$F = H^2(X) \ominus BH^2(X).$$

Dans le cas particulier d'un sous-espace F engendré par un polynôme, nous donnons dans la section suivante une version de ce Lemme de Treil contenant l'information détaillée sur la fonction B.

Par la suite, nous utiliserons certaines propriétés de factorisations de fonctions intérieures à valeurs opératorielles, ainsi que les espaces correspondants K_Θ. Il s'agit notamment des trois propositions suivantes.

A l'instar de la factorisation en facteurs intérieur-extérieure que nous avons vu dans H^2, il existe aussi pour les fonctions à valeurs opérateurs une factorisation de même type. Le travail originel a été fait par V. P. Potapov pour les fonctions matricielles (voir [26]) et développé dans diverses directions par d'autres auteurs (M. S. Brodskii, M. S. Livshic, Yu. P. Ginzburg, I. Gohberg et M. G Krein). Voici le Théorème plus général, (voir [10] pour plus de références) bien que nous aurons besoin que du cas particulier.

Théorème 2.3.4 *Soit* $\Theta \in H^\infty(\mathbb{D}, L(X))$ *une fonction intérieure à valeurs opérateurs et* $\Theta(\zeta)$ *est inversible p.p* $\zeta \in \mathbb{T}$, *alors*

$$\Theta(z) = U.\, S(z).\, B(z)$$

où U *est un opérateur unitaire,* B *est le produit de Blaschke-Potapov,*

$$B(z) = \overset{\curvearrowleft}{\prod_{k \geq 1}} B(\lambda_k,\, P_k)(z) = \lim_n \big(B(\lambda_n,\, P_n)(z) \ldots B(\lambda_1,\, P_1)(z) \big),$$

où $B(\lambda_k,\, P_k)(z) = b_{\lambda_k}(z) P_k + (I - P_k)$ *avec* $\lambda_k \in \mathbb{D}$, $b_{\lambda_k}(z)$ *sont les facteurs usuels du produit de Blaschke,* $P_k : X \longrightarrow X$ *sont des projections orthogonales et* S *est l'intégrale multiplicative,*

$$S(z) = \overset{\curvearrowleft}{\int_{[0,\, 2\Pi]}} exp\Big(\frac{z + e^{i\varphi(t)}}{z - e^{i\varphi(t)}} d\mu(t) \Big)$$

i.e., la limite du produit partiel à droite,

$$\overset{\curvearrowleft}{\prod_{1 \leq k \leq n}} exp\Big(\frac{z + e^{i\varphi(t_k)}}{z - e^{i\varphi(t_k)}} d\mu(\Delta_k) \Big)$$

où μ *est une mesure positive à valeurs opérateurs, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue et* φ *est une fonction croissante avec* $0 \leq \varphi(t) \leq 2\Pi$.

Lemme 2.3.2 *[19]*

$$Ker(S^* - \overline{\lambda}I)|_{K_\theta} = \Big\{\frac{e}{1-\overline{\lambda}z} : e \in Ker\,\Theta(\lambda)^*\Big\}.$$

Lemme 2.3.3 *[23] Soit X un espace de Banach et $\dim X < \infty$. T un opérateur de X dans X. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

i) T est cyclique.

ii) $\dim Ker(T - \lambda.I) \leq 1 \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$.

2.4 Sous-espaces S^*-invariants engendrés par un polynôme

Théorème 2.4.1 *Soit $F \subset H^2(X)$ un sous-espace vectoriel fermé. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

i) Il existe un polynôme $p \in H^2(X)$ de degré N tel que $F = E_p$.

ii) $\dim F = N+1$ et $F = K_\Theta = H^2(X) \ominus \Theta H^2(X)$, où Θ est un polynôme intérieur matriciel de la forme $\Theta = \overset{\curvearrowleft}{\prod_{k=1}^{N+1}} \big({P_k}^{\perp} + zP_k\big)$, où $\dim Ker\,\Theta(0)^* = 1$ et $P_k : X \mapsto X$ sont des projections orthogonales.

De plus, la condition $\dim Ker\,\Theta(0)^* = 1$ est équivalente à la condition suivante :
$\exists\, x_{N+1} \in X$ tel que $\|x_{N+1}\| = 1$ et $P_{N+1} = \langle\, . \,; x_{N+1}\rangle x_{N+1}$ et $\forall\, k = 1, \ldots, N$,
$\exists\, x_k \in (1 - P_{k+1}) \ldots (1 - P_{N+1})X$ tel que $\|x_k\| = 1$ et $P_k = \langle\, . \,, x_k\rangle x_k$.

Preuve : Supposons que $F = E_p = span(S^{*n}p : n \geq 0)$ et que p est un polynôme de degré N, $p = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, $a_N \neq 0$, alors

$$E_p = span(S^{*n}p : 0 \leq n \leq N),$$

car $S^{*n}p = 0 \;\forall\, n \geq N+1$, donc F est engendré par $\{S^{*n}p\}_{n=0}^{N}$ qui est une famille libre car si $\sum_{n=0}^{N} \lambda_n S^{*n}p = 0$, on a

$$S^{*N}\sum_{n=0}^{N}\lambda_n S^{*n}p = \lambda_0 S^{*N}p = \lambda_0 a_N = 0.$$

Et puisque $a_n \neq 0$, $\lambda_0 = 0$. Ainsi, $\sum_{n=0}^{N}\lambda_i S^{*n}p = \sum_{n=1}^{N}\lambda_i S^{*n}p = 0$ et cette fois on applique S^{*N-1} on obtient $\lambda_1 a_N = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite on montre que $\lambda_i = 0 \;\forall\, i = 0, \ldots N$.

Donc $\{S^{*n}p\}_{i=0}^{N}$ est une base de F et $dim\, E_p = N+1$. $S^* E_p \subset E_p$, on pose $T = S^*|_{E_p}$. Puisque E_p est S^*-invariant, il peut être représenté selon la forme canonique suivante

$$E_p = H^2(X) \ominus \Theta H^2(X),$$

Θ est une fonction intérieure, matricielle ($z \mapsto \Theta(z)$, $\Theta(\zeta) : X \mapsto X$ est unitaire $|\zeta| = 1$).
Et grâce à la factorisation de Blaschke-Potapov que nous avons vu précédemment,

$$\Theta = V.B.S,$$

où V est un facteur unitaire, S la partie singulière et B le produit fini de Blaschke suivant,

$$B = \prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{N+1}} \left({P_k}^{\perp} + b_{\lambda_k} P_k\right),$$

où b_{λ_k} sont les facteurs usuels du produit de Blaschke et $P_k : X \mapsto X$ sont des projections orthogonales. De plus, $\sigma(T) = \{\lambda_k,\ 1 \leq k \leq N+1\}$.
On peut dans ce cas faire les réductions suivantes ; puisque $dim\, E_p < \infty$ alors d'après le Lemme 2.3.1 $\Theta(z)$ est rationnelle. Donc la partie singulière de la factorisation est triviale et $S = 1$. De plus, $\sigma(T) = \{0\}$ car $T^{N+1} \equiv 0$ par conséquent 0 est la seule valeur propre et $b_{\lambda_k} = z\ \forall\, k$ donc B peut s'écrire sous la forme plus simplifiée,

$$B = \prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{N+1}} \left({P_k}^{\perp} + z P_k\right).$$

Montrons que $dim\, Ker\, T = 1$. On sait que $Ker\, T^{N+1} = E_p$ et $Ker\, T^N \neq E_p$. Si $k \leq N$ alors $dim\, Ker\, T^{k+1} \geq dim\, Ker\, T^k + 1$ sinon $Ker\, T^k = KerT^{k+1} = \ldots = KerT^{N+1} = E_p$ mais $KerT^N \neq E_p$ d'où la contradiction. Pour $k \leq N$, on a $dim\, Ker\, T^{k+1} \geq dim\, Ker\, T + k$ et si $k = N$ alors $dim\, Ker\, T^{N+1} = N+1 \geq N + dim\, Ker\, T$ ce qui entraîne $dim\, Ker\, T \leq 1$. Mais $dim\, Ker\, T \neq 0$ sinon $E_p = Ker\, T^{N+1} = \{0\}$ ce qui n'est pas possible. Donc $dim\, KerT = 1$.
Prouvons que $dim\, Ker\, \Theta(0)^* = 1$. D'après le Lemme 2.3.2 en prenant $\lambda = 0$, $Ker\, T = Ker\, S^*|_{K_\Theta} = Ker\, \Theta(0)^*$, par conséquent $dim\, Ker\, T = dim\, Ker\, \Theta(0)^* = 1$.
Réciproquement, si Θ est un produit de la forme (ii) et $T = S^*|_{K_\Theta}$ alors d'après le Lemme 2.3.2, $\sigma(T) = \{0\}$. De plus, le Lemme 2.3.3 montre que l'opérateur T est cyclique, parce que $Ker\, T = Ker\, \Theta(0)^*$ est de dimension 1. Donc il existe $p \in K_\Theta$ tel que

$$K_\Theta = span(S^{*n}p : n \geq 0).$$

Puisque $\sigma(T) = \{0\}$ et $dim\, K_\Theta = N+1$, il est clair que $T^{N+1} = 0$, donc $S^{*N+1}p = 0$ et p est un polynôme et $deg\, p \leq N$. Le degré est égale à N parce que $dim\, K_\Theta = N+1$.

Passons à la caractérisation de $\Theta = \prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{N+1}} \left({P_k}^{\perp} + b_{\lambda_k} P_k\right)$ telle que $dim\, Ker\, \Theta^*(0) = 1$.
Soit Θ un produit de Blaschke-Potapov de la forme indiquée alors $\Theta = V.B$ donc,

$$\Theta(0) = V.B(0) = V \prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{N+1}} (1 - P_k).$$

Et,

$$\Theta(0)^* = \prod_{k=1}^{\overset{\frown}{N+1}} \big(1-P_k\big).V^* = (1-P_1)\cdots(1-P_{N+1})V^*.$$

Ainsi, $Ker\,\Theta(0)^* \supset Ker\,(1-P_{N+1})V^*$ or $dim\,Ker\,\Theta(0)^* = 1$ donc $dim\,Ker\,(1-P_{N+1})V^* = 1$.
Et comme V est un facteur unitaire alors $dim\,Ker\,(1-P_{N+1}) = 1$ c'est-à-dire $rang\,P_{N+1} = 1$.
$dim\,Ker\,\Theta(0)^* = 1 \Leftrightarrow rang\,P_{N+1} = 1$ et $Ker\,(1-P_1)\ldots(1-P_N)|_{(1-P_{N+1})X} = \{0\}$.
Considérons les projections P_k de Θ. On a vu que $rang\,P_{N+1} = 1$ donc il existe $x_{N+1} \in X$ tel que $\|x_{N+1}\| = 1$ et $P_{N+1} = \langle\,.\,; x_{N+1}\rangle x_{N+1}$.
Puisque $(1-P_1)\ldots(1-P_N)|_{(1-P_{N+1})X}$ est injective alors $Ker\,(1-P_N)\cap {x_{N+1}}^{\perp} = \{0\}$ et $rang\,P_N \leq 1$ et ainsi il existe $x_N \in X$ tel que $\|x_N\| = 1$; $P_N = (.,x_N)x_N$ et $x_N \notin {x_{N+1}}^{\perp}$.
De la même manière, puisque $(1-P_{N-1})(1-P_N)|_{(1-P_{N+1})X}$ est injective alors,

$$P_{N-1}X \cap (1-P_N)(1-P_{N+1})X = \{0\}.$$

Et ainsi, il existe $x_{N-1} \in X$ tel que $\|x_{N-1}\| = 1$; $P_{N-1} = (.,x_{N-1})x_{N-1}$ et $x_{N-1} \notin (1-P_N){x_{N+1}}^{\perp}$. Par récurrence, on obtient

$$\forall\;\; k = 1,\ldots N,\; P_k = (.,x_k)x_k;\; \|x_k\| = 1,\;\; x_k \in (1-P_{k+1})\ldots(1-P_{N+1})X.$$

Il est facile de voir que ce raisonnement est réversible et donc la propriété en question caractérise les produits Θ participant dans (ii). $\square$

2.5 Séries lacunaires cycliques pour une puissance quelconque de S^* dans H^2

Lemme 2.5.1 *Soit X un espace de Hilbert séparable et $N \in \mathbb{N}^*$.*
Soit,

$$f \in H^2(X),\; F \in H^2(X^N),\; f(z) = \sum_{k\geq 0}\widehat{f}(k)z^k,\; F(z) = \sum_{k\geq 0}\widehat{F}(k)z^k,$$

où $X^N = X\times\ldots\times X$ (N fois) et $\widehat{F}(k) = \big(\widehat{f}(Nk);\widehat{f}(Nk+1);\ldots;\widehat{f}(Nk+N-1)\big) \in X^N$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est S^{*N}-cyclique dans $H^2(X)$.

ii) F est S^*-cyclique dans $H^2(X^N)$.

Preuve :
On considère,

$$\begin{array}{llll}\Psi: & H^2(X) & \longrightarrow H^2(X^N) & \\ & f & \longmapsto \Psi(f)(z) = \sum_{k\geq 0}\widehat{F}(k)z^k, & avec\ \widehat{F}(k) = \begin{pmatrix}\widehat{f}(Nk)\\ \vdots \\ \widehat{f}(Nk+N-1)\end{pmatrix}.\end{array}$$

Ψ est un isomorphisme isométrique et on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
H^2(X) \arrow[r, "S_X^{*N}"] \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr] & H^2(X) \arrow[d, "\Psi"] \\
H^2(X^N) \arrow[r, "S^*_{X^N}"] & H^2(X^N)
\end{tikzcd}$$

Ainsi, d'après le diagramme,

$$S^*_{X^N}\Psi = \Psi_X S^{*N}.$$

En effet, soit $f \in H^2(X)$ et $g(z) = \sum_{k \geq N} \widehat{f}(k) z^{k-N}$. Alors,

$$\Psi S_X^{*N} f = \Psi(\sum_{k \geq N} \widehat{f}(k) z^{k-N}) = \Psi(g) = \sum_{m \geq 0} \widehat{G}(m) z^m = S^*_{X^N} F(z) = S^*_{X^N}\Psi(f),$$

car $\widehat{G}(m) = \big(\widehat{g}(Nm), \ldots, \widehat{g}(N(m+1)-1)\big) = \big(\widehat{f}(N(m+1), \ldots, \widehat{g}(N(m+2)-1)\big)\ \forall\ m \geq 0$.
Puisque $S^*_{X^N}\Psi = \Psi S_X^{*N}$ alors $\forall\ k \geq 0$, , $S^{*k}_{X^N}\Psi = \Psi S_X^{*Nk}$ et pour tout polynôme complex p,

$$p(S^*_{X^N})\Psi(f) = \Psi p(S_X^{*N}).$$

Donc si f est cyclique pour S_X^{*N} dans $H^2(X)$ alors $\Psi(f)$ est cyclique pour $S^*_{X^N}$ dans $H^2(X^N)$ et réciproquement. $\square$

Nous pouvons dès lors qu'on a établit ce lien entre les cyclicités de $S^*_{X^N}$ et S_X^{*N} donner un critère de cyclicité des séries lacunaires pour n'importe quelle puissance de l'opérateur S^* dans H^2.

Théorème 2.5.1 *Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in H^2_\Lambda(X)$, où Λ est une suite lacunaire et $(\widehat{f}(k))_{k \geq 0}$ une suite c.r.c. dans X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) f *est* S^{*N}*-cyclique dans* $H^2(X)$.

ii) $span\bigg(\Big(\widehat{f}(Nk); \widehat{f}(Nk+1); \ldots; \widehat{f}(Nk+N-1)\Big) : \forall\, k \geq m\bigg) = X^N \quad \forall\ m \geq 0.$

Preuve : f peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} \widehat{f}(k) z^{n_k},$$

avec $\widehat{f}(k) \neq 0$ et $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq d > 1\ \forall\, k \geq 1$.
On pose pour tout $k \geq 1$,

$$n_k = N.p_k + q_k,$$

où $0 \leq q_k \leq N-1$. Soit,

$$\widehat{A}(k) = \Big(\widehat{f}(Np_k); \widehat{f}(Np_k+1); \ldots; \widehat{f}(Np_k+N-1)\Big).$$

Il est aisé de vérifier que

$$A_k \neq 0 \ \ \forall\, k \geq 1.$$

La fonction $F(z) = \sum_{k \geq 1} A_k z^{p_k}$ est une série lacunaire de $H^2(X^N)$ car

$$d < \frac{n_{k+1}}{n_k} = \frac{Np_{k+1} + q_{k+1}}{Np_k + q_k} \leq \frac{Np_{k+1} + N}{Np_k} = \frac{p_{k+1}}{p_k} + \frac{1}{p_k}.$$

Par conséquent, pour k_0 assez grand par exemple de sorte que $\frac{1}{p_k} < \frac{d-1}{2}$, $k \geq k_0$, on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > \frac{d+1}{2} > 1, \ k \geq k_0.$$

Il reste à appliquer le Théorème 2.2.2 donc F est cyclique si et seulement si la condition $ii)$ est satisfaite. Le Lemme 2.5.1 achève la démonstration. □

Grâce à ce Lemme, on peut ainsi construire des séries lacunaires dans H^2 qui sont cycliques pour une puissance fixée du shift adjoint S^* en donnant une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de la fonction considérée mais on peut aussi décrire les spectres lacunaires des fonctions S^{*N}-cyclique dans H^2.

Corollaire 2.5.1 *Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé et $f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^{n_k} \in H^2$ une série lacunaire. Supposons que pour tout $k \geq 0$, $a_k \neq 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est S^{*N}-cyclique.*

(ii) $\forall\, m \geq 0, \forall\, i = 0, \ldots, N-1, \exists\, k, n_k \geq m : \ n_k \equiv i \,(mod\, N)$.

Preuve : Le critère sur les coefficients de Taylor du Théorème 2.5.1 pour obtenir la cyclicité de la série est réalisée en raison de la nature de $\sigma(f)$. En effet, si $n_k \equiv i \,(mod\, N)$ alors $\widehat{F}(k) = a_k e_i$ où $(e_i)_{i=0}^{N-1}$ est la base standard de $\mathbb{C}^N$. □

Exemple :

On peut aussi construire une série lacunaire $f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^{n_k} \in H^2$ qui soit S^{*N}-cyclique pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Il suffit pour celà de considérer la suite lacunaire,

$$n_k = (k+1)! + k.$$

Pour n'importe quel entier non nul N, la suite tronquée $(n_k)_{k \geq m}$ passe par toutes les classes modulo N quelque soit l'entier m ce qui garantit la cyclicité d'après le Théorème 2.2.2.

Chapitre 3

Etude de séries dont le spectre est une réunion finie de suites lacunaires

3.1 Degré de cyclicité

En s'appuyant sur l'étude faite par N. K. Nikolski et V. I. Vasyunin [24] et en utilisant les outils qu'ils ont mis en place auparavant on va décrire dans cette section une méthode pour construire des éléments cycliques f dans $H^2(X)$, $dim\, X = d < \infty$ où le spectre $\sigma(f) = \Lambda$ est une réunion finie de suites lacunaires. L'approche de [24] au problème de non-cyclicité se base sur le critère général suivant de non-cyclicité d'une fonction $f = (f_i)_{1\leq i\leq d}$ dans $H^2(X)$,

$$f \notin C^X \Leftrightarrow \exists\; g \in H^2(X) :\; g \neq 0,\; g^* f \in H^1_-,$$

où C^X est l'ensemble des fonctions cycliques, H^1_- est l'espace de Hardy à l'extérieur du disque, $H^1_- = \{\varphi :\; \varphi \in L^1(\mathbb{T}),\, \widehat{\varphi}(n) = 0,\, n \geq 0\}$ et $(g^*f)(\zeta) \stackrel{def}{=} (f(\zeta),\, g(\zeta))_X$, $\zeta \in \mathbb{T}$ ou bien en termes de fonctions coordonnées $g^*f = \sum \overline{g}_i f_i$. Donc la non-cyclicité d'une fonction f signifie l'existence d'une fonction $g \in H^2(X) \setminus \{0\}$ orthogonale à tous les $S^{*n} f$ $(n \geq 0)$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{T}} \overline{z}^n g^* f\, dm = 0, \quad n \geq 0,$$

ou encore $g^*f \in H^1_-$. Les auteurs de [24] introduisent une classification des fonctions non-cycliques selon leur degré de non-cyclicité qui tient compte du nombre de solutions indépendantes g de l'équation $P_+ g^* f = 0$ quand f décrit un sous-espace $F \subset H^2(X)$; il s'agit de considérer le nombre s pour lequel le sous-espace E_f contient un sous-espace de type $H^2(\mathbb{C}^s)$. Voici quelques définitons et Théorèmes qui illustrent cette étude et qui vont nous servir par la suite dans la construction que l'on se propose de faire.

Définition 3.1.1 *Soit F un sous-espace dans $H^2(X)$, $dim\, X = d < \infty$.*
Le degré de cyclicité du sous-espace F est défini par le nombre suivant

$$dc(F) = coDim[H^2(X) \ominus E_F] \stackrel{def}{=} d - \max_{\zeta \in \mathbb{D}} dim\{g(\zeta) :\; g \in H^2(X) \ominus E_F\}.$$

Si s est un entier alors

$$C_s = C_s^X \stackrel{def}{=} \{F : F \subset H^2(X),\, dc(F) \leq s\}.$$

Remarque 3.1.1 *D'après la définition, il est clair que*

a) $C_s \subset C_{s+1},\ s \geq 0.$

b) $C_s = C_d\ \forall\ s \geq d.$

c) $C_{d-1} = N^X$ *est l'ensemble des sous-espaces F qui sont non cycliques (i.e tels que $E_F \neq H^2(X)$).*

d) $C_d \setminus C_{d-1} = C^X$, *donc F est cyclique si et seulement si $dc(F) = d$.*

Une définiton équivalente du degré de cyclicité peut être donnée en utilisant le Théorème de Lax-Halmos que nous avons abordé dans la partie précédente et selon lequel on peut écrire $E_F = H^2(X) \ominus \Theta H^2(X')$ où Θ est une fonction intérieure à gauche, à valeurs matricielles et $dim\, X' \leq dim\, X$. En utilisant cette écriture de E_F, la définiton du degré de cyclicité devient,

$$dc(F) = dim\, X - \max_{\zeta \in \mathbb{D}} dim\, \Theta(\zeta) X' = dim\, X - \max_{\zeta \in \mathbb{D}} rang\, \Theta(\zeta).$$

La fonction $rang\, \Theta(\zeta)$ est constante presque partout (sauf peut être pour un ensemble dénombrable qui s'accumule seulement sur $\mathbb{T}$). Et en considérant les propriétés isométriques des valeurs de $\Theta(\zeta)$ à la frontière pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$, alors

$$Rang\ \Theta \stackrel{def}{=} \max_{\zeta \in \mathbb{D}} rang\, \Theta(\zeta) = dim\, X',$$

et ainsi,

$$dc(F) = dim\, X - dim\, X'.$$

On s'intéresse plus particulièrement aux Théorèmes et au Corollaire suivants qui donne une description inductive des classes C_s.

Théorème 3.1.1 [*24*] *Soit X un espace de Hilbert avec $dim\, X < \infty$ et $F \subset H^2(X)$ un sous-espace vectoriel tel que $dim\, F < \infty$.*

1) $C_{s_1} + C_{s_2} = C_{s_1+s_2}$ *pour tout s_1, s_2 au sens qu'une somme algébrique de sous-espaces dans C_{s_1} et C_{s_1} est dans $C_{s_1+s_2}$ et pour tout sous-espace F dans $C_{s_1+s_2}$, il existe $F_i \in C_{s_i}$, $i = 1, 2$, tel que $F \subset F_1 + F_2$; de plus il existe un opérateur linéaire A tel que $AF \in C_{s_1}$ et $(I - A)F \in C_{s_2}$.*

2) $F \in C_s \Leftrightarrow \pi F \notin C^{\pi X}$ *pour toute projection orthogonale π de rang $s + 1$ sur X (i.e. $dim\, \pi X = s + 1$).*

Corollaire 3.1.1 [*24*] *Soit F et G des sous-espaces vectoriels dans $H^2(X)$.*

i) *Si $F \subset G$, alors $dc(F) \leq dc(G)$.*

ii) $dc(F + G) \leq dc(F) + dc(G).$

iii) *Si $E_F = H^2(X) \ominus \Theta_F H^2(X)$ est la représentation canonique de l'espace E_F, alors*

$$dc(F + G) = dc(F) + dc(P_+ \Theta_F^* G).$$

Théorème 3.1.2 *[24] Soit $\psi = \{\psi_i\}_{1\le i\le d} \in H^2(\mathbb{C}^d)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) ψ est un vecteur cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^d)$.

ii) Pour tout vecteur cyclique ϕ dans $H^2(\mathbb{C}^{d-1})$, il existe un indice i $(1 \le i \le d)$ tel que le vecteur $\binom{\phi}{\psi_i}$ est cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^d)$.

Notons aussi cette remarque importante pour la suite faite dans [24] qui est une autre manière de caractériser le degré de cyclicité,

$$\begin{aligned} dc(F) &= max\{s : \exists \pi\, (une\, projection\, orthogonale),\, rang\, \pi = s,\ \pi F \in C^{\pi X}\} \\ &= max\{s : \exists \kappa \subset \{1, \dots, d\},\, card\, \kappa = s,\ \pi_\kappa F \in C^{\pi_\kappa X}\}, \end{aligned}$$

où π_κ est la projection orthogonale sur l'espace $span(e_i : i \in \kappa)$, $\{e_i\}_{1\le i\le d}$ étant une base orthogonale arbitraire dans X.

3.2 Constructions de fonctions dont le spectre est une réunion de suites lacunaires

Dans le cas scalaire H^2, comme nous l'avons vu précédemment, E. Abakumov a démontré que les fonctions dont le spectre de Fourier est une réunion finie de suites lacunaires est cyclique. Nous allons étudier dans cette partie certaines constructions de fonctions cycliques à valeurs vectorielles et dont le spectre $\Lambda \subset \mathbb{N}$ est une réunion finie de suites lacunaires $\Lambda = \Lambda_i$. Voici tout d'abord un Théorème sur l'existence de fonctions cycliques pour le shift adjoint dans $H^2(X)$ où $dim\, X < \infty$ et dont les fonctions coordonnées sont des séries lacunaires de H^2 dont la lacunarité du spectre peut être choisie.

Théorème 3.2.1 *Soient $\Lambda_j \subset \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d$ des suites lacunaires arbitraires. Il existe une fonction cyclique $\psi = \{\psi_i\}_{1\le i\le d} \in H^2(\mathbb{C}^d)$ telle que $\sigma(\psi_i) = \Lambda_i$, $1 \le i \le d$.*

Preuve : On considère $\forall\, i$, $1 \le i \le d$ des ensembles lacunaires quelconques et infinis Λ_i de $\mathbb{N}$.
On pose $F_1 = \psi_1$ et $\sigma(\psi_1) = \Lambda_1$ qui est cyclique dans H^2 d'après le Théorème de Douglas-Shapiro-Shields.
Soit $\Psi_2 = \binom{\psi_{2,1}}{\psi_{2,2}}$ où $\sigma(\psi_{2,i}) = \Lambda_2$, $i = 1, 2$. Ψ_2 est cyclique si le critère du Théorème 2.2.2 est vérifié c'est-à-dire

$$span\Big(\begin{pmatrix}\widehat{\psi_{2,1}(k)}\\ \widehat{\psi_{2,2}}(k)\end{pmatrix} : k \ge N\Big) = \mathbb{C}^2, \quad \forall\, N \ge 0.$$

Cette condition est évidemment réalisable en prenant des coefficients convenables. Puisque les deux fonctions F_1 et Ψ_2 sont cycliques on peut appliquer le Théorème 3.1.2, par conséquent il existe $\psi_2 = \psi_{2,j}$ pour un certain indice $j \in \{1; 2\}$ tel que la fonction $F_2 = \binom{\psi_1}{\psi_2}$ soit cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^2)$.
De la même manière, on peut à nouveau considérer la fonction cyclique précédente F_2 et

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix}\psi_{3,1}\\ \psi_{3,2}\\ \psi_{3,3}\end{pmatrix},$$

où $\forall\ \ i \in \{1,\,2,\,3\}$, $\sigma(\psi_{3,\,i}) = \Lambda_3$ est telle que,

$$span\Big(\begin{pmatrix} \widehat{\psi}_{3,\,1}(k) \\ \widehat{\psi}_{3,\,2}(k) \\ \widehat{\psi}_{3,\,3}(k) \end{pmatrix} \,:\, k \geq N\Big) = \mathbb{C}^3 \ \ \forall\ N \geq 0.$$

Cette dernière condition est aisément réalisable pour des coefficients appropriés. On peut à nouveau appliquer le Théorème 3.1.2 qui donne l'existence de $\psi_3 = \psi_{3,\,j}$ pour un certain indice $j \in \{1; 2; 3\}$ telle que la fonction

$$F_3 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

soit cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^3)$ avec $\sigma(\psi_i) = \Lambda_i$, $1 \leq i \leq 3$. Par récurrence, on obtient une fonction $\Psi = \big\{\psi_i\big\}_{1 \leq i \leq d}$ cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^d)$ et dont les fonctions coordonnées ψ_i sont des séries lacunaires de H^2 de spectre Λ_i. $\square$

Remarquons aussi le fait général suivant : $\forall\ \Lambda$ (infini) $\subset \mathbb{N}$, il existe une fonction cyclique $f \in H^2(X)$ telle que $\sigma(f) \subset \Lambda$. Il suffit de se ramener à une fonction f telle que le spectre $\sigma(f) \subset \{n_k\}_{k\geq 1}$ où $\{n_k\}_{k\geq 1}$ est une suite lacunaire suffisament rare pour que $\{n_k\}_{k\geq 1} \subset \Lambda$. Dans ce qui suit, nous allons voir que le critère de cyclicité du Théorème 2.2.2 reste valable pour certains cas de fonctions dans $H^2(X^d)$ dont les fonctions coordonnées sont des séries lacunaires ayant les spectres de Fourier différents. Nous commencerons par un Lemme général.

Lemme 3.2.1 *Soit X un espace de Hilbert séparable et $f \in H^2(X^d)$,*
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$ *est cyclique.*

ii) $\forall\, \vartheta_i \in H^\infty,\ \vartheta_i \not\equiv 0,\ \ i = 1, \ldots d,\quad \begin{pmatrix} P_+(\overline{\vartheta}_1 f_1) \\ P_+(\overline{\vartheta}_2 f_2) \\ \vdots \\ P_+(\overline{\vartheta}_d f_d) \end{pmatrix}$ *est cyclique.*

iii) $\exists\, \vartheta_i \in H^\infty,\ \vartheta_i \not\equiv 0,\ \ i = 1, \ldots d,\quad \begin{pmatrix} P_+(\overline{\vartheta}_1 f_1) \\ P_+(\overline{\vartheta}_2 f_2) \\ \vdots \\ P_+(\overline{\vartheta}_d f_d) \end{pmatrix}$ *est cyclique.*

Preuve : Puisque $ii) \Rightarrow iii)$ est trivial, montrons que $i) \Rightarrow ii)$ et $iii) \Rightarrow i)$.
$i) \Rightarrow ii)$. $\forall\, \vartheta_i \in H^\infty\, \vartheta_i \not\equiv 0,\ \ i = 1, \ldots d$ on définit l'opérateur $\mathcal{D}$ par la règle,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D} : H^2(X^d) & \longrightarrow & H^2(X^d) \\ g & \longmapsto & \mathcal{D}(g) = \begin{pmatrix} P_+(\overline{\vartheta}_1 g_1) \\ P_+(\overline{\vartheta}_2 f_2) \\ \vdots \\ P_+(\overline{\vartheta}_d g_d) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Montrons que $\mathcal{D}H^2(X^d)$ est dense dans $H^2(X^d)$. Il suffit pour celà de prouver que

$$Ker\, \mathcal{D}^* = \{0\}.$$

Pour définir $\mathcal{D}^*$, on regarde le produit scalaire,

$$\langle \mathcal{D}h; g\rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle P_+(\overline{\vartheta}_i h_i); g_i\rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle h_i; \vartheta_i g_i\rangle = \langle h; \sum_{i=1}^{d} \vartheta_i g_i\rangle = \langle h; \mathcal{D}^* g\rangle \ \ \forall g,\, h \in H^2(X^d).$$

On obtient,

$$\mathcal{D}^* g = \begin{pmatrix} \vartheta_1 g_1 \\ \vartheta_2 g_2 \\ \vdots \\ \vartheta_d g_d \end{pmatrix} \quad \forall\ g \in H^2(X^d).$$

Donc si $\mathcal{D}^* g = 0$, alors $\vartheta_i g_i = 0\ \ \forall\, i = 1, \ldots d$. Mais $\vartheta_i \neq 0\ \ \forall\ i = 1, \ldots d$.

Par conséquent, $g_1 = \ldots = g_d = 0$ et $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} = 0.$

Ainsi $\mathcal{D}$ est dense dans $H^2(X^d)$. De plus, pour tout $n \geq 0$,

$$S^{*n}\mathcal{D}f = \mathcal{D}S^{*n}f.$$

Et maintenant, si f est une fonction cyclique de $H^2(X^d)$, alors

$$E_{\mathcal{D}f} = span(S^{*n}\mathcal{D}f : n \geq 0) \supset \mathcal{D}(span(S^{*n}f : n \geq 0)) = \mathcal{D}E_f.$$

Mais $E_f = H^2(X^d)$ et $E_{\mathcal{D}f}$ est fermé donc,

$$E_{\mathcal{D}f} = H^2(X^d).$$

Vérifions que $iii) \Rightarrow i)$. Soit $\vartheta_i \in H^\infty$, $\vartheta_i \neq 0$ et $f \in H^2(X^d)$ telle que $\mathcal{D}f$ est cyclique.
On pose,

$$\theta = \vartheta_1 \vartheta_2 \ldots \vartheta_d.$$

Et pour tout $i = 1, \ldots d$,

$$\theta_i = \vartheta_1 \ldots \overset{\vee}{\vartheta_i} \ldots \vartheta_d.$$

On suppose que,

$$\begin{pmatrix} P_+\overline{\vartheta}_1 f_1 \\ P_+\overline{\vartheta}_2 f_2 \\ \vdots \\ P_+\overline{\vartheta}_d f_d \end{pmatrix}$$

est cyclique.
Si on considère l'application $\mathcal{D}$ précédente définie pour les fonctions $\theta_1, \dots, \theta_d$ et en utilisant le sens $i) \Rightarrow ii)$ qui vient d'être prouvé, alors la fonction

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} P_+\overline{\vartheta}_1 f_1 \\ P_+\overline{\vartheta}_2 f_2 \\ \vdots \\ P_+\overline{\vartheta}_d f_d \end{pmatrix} = P_+\overline{\theta}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} = P_+\overline{\theta} f$$

est cyclique.
En approximant θ par ses polynômes de Fejér ϕ_n, on obtient $\|\phi_n\|_\infty \leq \|\theta\|_\infty$ et $\phi_n(\zeta) \to \theta(\zeta)$ $p.p.\,\zeta \in \mathbb{T}$ ce qui entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \|\phi_n(S^*)f - P_+\overline{\theta} f\|_2 = 0.$$

Donc $P_+\overline{\theta} f \in E_f$ et ainsi $E_f = H^2(X^d)$. $\square$

Théorème 3.2.2 *Soit X un espace de Hilbert séparable, Λ une suite lacunaire infinie et $\{m_1, m_2, \dots, m_d\} \subset \mathbb{Z}$ des entiers relatifs fixés.*
Soit,

$$f = (f_i)_{1\leq i\leq d} \in H^2(X^d),$$

où $\sigma(f_i) \subset \Lambda + m_i$. Supposons que la suite

$$(\widehat{f_1}(k+m_1),\ \widehat{f_2}(k+m_2), \dots,\ \widehat{f_d}(k+m_d)))_{k\geq 0}$$

est c.r.c. dans X^d, alors

$$f \text{ cyclique} \Leftrightarrow span\Big(\begin{pmatrix} \widehat{f_1}(k+m_1) \\ \widehat{f_2}(k+m_2) \\ \vdots \\ \widehat{f_n}(k+m_d) \end{pmatrix} :\ k \geq N\Big) = X^d \quad \forall\ N \geq 0.$$

Preuve : On utilise le critère de cyclicité du Théorème 2.2.2 pour les séries lacunaires dans $H^2(X^d)$. On peut, sans perte de généralité supposer que $\sigma(f_d) = \Lambda = \{n_k\}_{k\geq 1}$ et $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_d = 0$. C'est une application directe du Lemme 3.2.1 qui donne l'équivalence. Notamment, il suffit de choisir $\vartheta_i = z^{m_i}\ \ \forall\ i = 1, \dots d$. Alors,

$$\mathcal{D}f = \begin{pmatrix} S^{*m_1} f_1 \\ S^{*m_2} f_2 \\ \vdots \\ S^{*m_d} f_d \end{pmatrix}$$

est une série lacunaire car les spectres de chacune de ses fonctions coordonnées sont inclus dans Λ. De plus $\widehat{\mathcal{D}f}(k) = (\widehat{f}_j(k+m_j))_{j=1}^d, \ \ \forall\ k \geq 0$. L'application du Théorème 2.2.2 et le Lemme 3.2.1 achève la preuve. $\square$

Exemple : Soit $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite lacunaire d'Hadamard $f \in H^2(\mathbb{C}^2)$ telle que,

$$f(z) = \sum_{k\geq 1} \begin{pmatrix} a_k \\ 0 \end{pmatrix} z^{n_k} + \sum_{k\geq 1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_k \end{pmatrix} z^{n_k+1},$$

D'après la Proposition précédente si $\forall\ m \geq 1$,

$$span(\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} :\ k \geq m) = \mathbb{C}^2,$$

alors f est cyclique. $\square$

Dans le premier chapitre nous avons vu parmi certaines propriétés des vecteurs cycliques dans H^2 le fait suivant

$$f \in C,\ g \in N \Rightarrow f+g \in C. \quad (*)$$

Ce n'est plus vrai en général dans l'espace $H^2(X)$ où X est un espace de Hilbert séparable comme en témoigne l'exemple suivant

Exemple : Si on considère dans $H^2(\mathbb{C}^2)$ une fonction cyclique de la forme

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

et la fonction g suivante,

$$g = \begin{pmatrix} -f_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, $dc(f) = 2$, $dc(g) = 1$ et la somme,

$$f+g = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

n'est pas cyclique et ainsi $f \in C,\ g \in N \not\Rightarrow f+g \in C$. $\square$

Dans le cas des espaces $H^2(\mathbb{C}^d)$, en utilisant la notion du degré de cyclicité d'une fonction $f \in H^2(\mathbb{C}^n)$, il est possible de sauver une partie de l'implication précédente $(*)$. Par exemple si $f,\ g \in H^2(\mathbb{C}^d)$ sont telles que $f \in C$ (donc $dc(f) = d$) et $g \in N$ avec $dc(g) = 0$ alors

$$f+g \in C.$$

On peut voir ce résultat comme une conséquence directe du *iii*) dans le Corollaire 3.1.1 ou bien puisque $dc(g) = 0$ alors d'après la caractérisation de la classe C_0 donnée par V. I. Vasyunin et N. K. Nikolski dans [24] il existe une fonction intérieure scalaire ϑ telle que $P_+\overline{\vartheta}g = 0$; par conséquent si f est cyclique, le Lemme 3.2.1 entraîne que,

$$f + g \text{ cyclique} \Leftrightarrow P_+\overline{\vartheta}(f+g) = P_+\overline{\vartheta}(f) \text{ cyclique} \Leftrightarrow f \text{ cyclique}.$$

Nous allons maintenant décrire certaines paires de fonctions $\{f, g\} \subset H^2(\mathbb{C}^d)$, f cyclique et g non cyclique avec $dc(g) = 1$, telles que $f + g$ est cyclique. La Proposition suivante permet de construire des fonctions cycliques dans $H^2(\mathbb{C}^2)$ dont le spectre est une réunion finie de type $(n_k)_{k\geq 1} \cup (n_k + 1)_{k\geq 1}$ où $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite lacunaire d'Hadamard.

Proposition 3.2.1 *Soit $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite lacunaire d'Hadamard.* $\varphi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}$ *deux fonctions dans $H^2(\mathbb{C}^2)$ telles que $\sigma(f_1)$, $\sigma(g_1) \subset (n_k)_{k\geq 1}$ et $\sigma(f_2)$, $\sigma(g_2) \subset (n_k+1)_{k\geq 1}$. On suppose que $dc(\varphi_1) = 2$ et $dc(\varphi_2) = 1$ et que la condition suivante est vérifiée*

$$span(\begin{pmatrix} \widehat{f_1}(k) \\ \widehat{g}_1(k) \\ \widehat{g}_2(k-1) \end{pmatrix} : k \geq m) = \mathbb{C}^3, \quad \forall\, m \geq 1.$$

Alors $\varphi_1 + \varphi_2$ est cyclique.

Preuve : Rappelons que par le Corollaire 3.1.1, pour des sous-espaces vectoriels E, $F \subset H^2(\mathbb{C}^d)$, on a

$$dc(F + G) = dc(F) + dc(P_+\Theta_F^* G).$$

De plus on a l'inégalité $dc(P_+\Theta_F^* G) \leq dc(G)$ (c'est une conséquence du Lemme DC dans [24]). On considère le sous-espace F engendré par

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 + f_2 \\ g_1 + g_2 \end{pmatrix}.$$

Supposons que $\varphi_1 + \varphi_2$ n'est pas cyclique alors

$$dc(F) = 1.$$

Soit G le sous-espace engendré par

$$\begin{pmatrix} g_2 \\ -f_2 \\ -g_2 \end{pmatrix}.$$

D'après les hypothèses de départ, le critère de cyclicité du Corollaire 2.2.3 et la définition du degré de cyclicité par les projections coordonnées, on a

$$dc(P_+\Theta_F^* G) \leq dc(G) = dc(\varphi_2) = 1.$$

D'autre part,

$$\varphi = \begin{pmatrix} g_2 \\ f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} \in F + G,$$

où φ est une fonction cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^3)$ d'après le Théorème 3.2.2. Donc,

$$dc(F+G) = 3.$$

Ainsi, l'équation *iii*) du Corollaire 3.1.1 n'est pas vérifiée donc l'hypothèse de départ est fausse et par conséquent $\varphi_1 + \varphi_2$ est cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^2)$. □

Remarque 3.2.1 *On peut généraliser la Proposition précédente dans $H^2(\mathbb{C}^d)$ à une série de type $f = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k$ où $\sigma(\varphi_i) \subset (n_k + i)_{k \geq 1}$, $i = 1, \dots r$ et $dc(\varphi_1) = d$, $dc(\varphi_i) = 1$ pour $i = 2, \dots r$ et ceci pour tout d, $r \geq 1$. Notons que si $d = 1$, la Proposition est vérifiée grâce au Théorème 1.2.2 d'E. Abakumov sur la cyclicité d'une réunion finie de séries lacunaires quelconque. Les arguments qui permettent de passer du cas $r = 2$ au cas général $r \geq 2$ sont à peu près les mêmes que précedemment.*

Il est intéressant de voir qu'on peut aussi additionner r séries lacunaires cycliques dans $H^2(\mathbb{C}^d)$ et sous une condition donnée sur les coefficients obtenir une réunion finie cyclique.

Proposition 3.2.2 *Soient r, $d \geq 1$ deux entiers fixés et $\varphi = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \in H^2(\mathbb{C}^d)$ où $\sigma(\varphi_i) \subset (n_k + i - 1)_{k \geq 1}$, $i = 1, \dots r$. Supposons que $\forall\ m \geq 0$,*

$$span\left(\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(k) \\ \widehat{\varphi}_2(k+1) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}_r(k+r-1) \end{pmatrix} :\ k \geq m \right) = \mathbb{C}^{d \times r}.$$

Alors φ est cyclique.

Preuve : Considérons dans $H^2(\mathbb{C}^{d \times r})$ les sous-espaces suivants,

$$F = span \begin{pmatrix} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ G = span\left(\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ -\varphi_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ 0 \\ -\varphi_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots, \begin{pmatrix} \varphi_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\varphi_r \end{pmatrix} \right).$$

En utilisant l'équation du Corollaire 3.1.1 et le fait que G est engendrée par $r-1$ fonctions de degré d, on obtient $dc(G) \leq (r-1)d$. De plus, si on suppose que $dc(F) < d$ alors $dc(F+G) < rd$. D'autre part,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{pmatrix} \in F+G.$$

Cette fonction est cyclique dans $H^2(\mathbb{C}^{d\times r})$ d'après l'hypothèse de la Proposition et grâce au Théorème 3.2.2 ce qui entraîne $dc(F+G) = d\times r$. La contradiction montre qu'en fait φ est cyclique. □

La Proposition précédente donne une condition suffisante de cyclicité et suggèrent qu'il pourrait y avoir un critère de cyclicité lié aux coefficients pour les fonctions dont le spectre une réunion finie de suites lacunaires et dont la longueur des blocs serait bornée. Il s'agit, donc, des fonctions f telles que $\sigma(f) \subset \cup_{k=0}^{\infty}[n_k + d_k]$ où $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite lacunaire d'Hadamard infinie et $\sup\limits_{k\geq 1} d_k < \infty$. Mais il apparaît que pour ce type de séries, le critère du Théorème 2.2.2 n'est plus valide. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple suivant.

Exemple : Soit $f \in H^2$ une série lacunaire qui n'est pas un polynôme et

$$F = \begin{pmatrix} f \\ S^*f \end{pmatrix} \in H^2(\mathbb{C}^2).$$

Cette fonction est formée par la réunion de deux séries lacunaires, elle possède des blocs de longueur deux et de plus elle vérifie le critère du Théorème 2.2.2 car pour tout $m \geq 0$,

$$span(\widehat{F}(k) : k \geq m) = span\Big(\begin{pmatrix} \widehat{f}(k) \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}(k) \end{pmatrix} : k \geq m\Big) = \mathbb{C}^2.$$

Et pourtant F n'est pas cyclique. En effet, soit $h \in H^2$ une fonction non identiquement nulle, alors si $\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \in E_f$, il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} p_n(S^*) \begin{pmatrix} f \\ S^*f \end{pmatrix},$$

ce qui entraîne

$$h = \lim_{n\to\infty} p_n(S^*)S^*f = S^* \lim_{n\to\infty} p_n(S^*)f = S^*0 = 0.$$

Donc, aucune fonction $\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$, $h \neq 0$, n'est dans E_f. □

Il faut donc trouver un nouveau critère de cyclicité plus général et qui s'étend à ces séries. Le Lemme et la Proposition suivantes peuvent être regardés comme les préparatifs pour une telle description.

Définition 3.2.1 *Soit X un espace de Hilbert séparable, une fonction $f \in H^2(X)$ est une série lacunaire par blocs s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\Psi_N(f) \stackrel{def}{=} \sum_{k\geq 0} \widehat{\Psi}_N(f)(k) z^k,$$

où $\widehat{\Psi}_N(f)(k) = \begin{pmatrix} \widehat{f}(Nk) \\ \vdots \\ \widehat{f}(Nk+N-1) \end{pmatrix} \in X^N$ *et $\sigma(\Psi_N(f))$ est une suite lacunaire.*

Exemples :

1) La suite $(a^k)_{k\geq 0}$ où $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est lacunaire par blocs.
2) La suite $m_k = k! + k$ n'est pas lacunaire par blocs. Cet exemple a le mérite de montrer que cette particularité pour une suite d'être lacunaire par blocs n'est pas liée à la rapidité de croissance de cette suite.
3) La suite $\cup_{k\geq 1}[n_k, n_k + N]$ où $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite lacunaire, n'est pas lacunaire par blocs en général.

Nous allons donner un critère de cyclicité pour des séries c.r.c. dont le spectre de Fourier est lacunaire par blocs.

Lemme 3.2.2 *Soit F une famille de fonctions dans $H^2(X)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est cyclique dans $H^2(X)$.*
2. *La famille $\{\Psi_N(F), \Psi_N(S^*F), \ldots, \Psi_N(S^{*N-1}F)\}$ est cyclique dans $H^2(X^N)$.*

Preuve : Il suffit de remarquer d'une part que Ψ_N est un isomorphisme isométrique de $H^2(X)$ dans $H^2(X^N)$ et d'autre part que tout entier k peut s'écrire par la divison euclidienne $k = p_k N + q_k$, avec $0 \leq q_k \leq N-1$ et par conséquent,

$$\Psi_N(S_X^{*k} F) = S_{X^N}^{*p_k} \Psi_N(S^{*q_k} f).$$

D'où le résultat. $\square$

Proposition 3.2.3 *Soit N un entier et $F \in H^2(X)$ une famille finie de fonctions telle que $\forall\ f \in F$, la suite $(\widehat{f}(k))_{k\geq 0}$ est c.r.c. et $\Psi_N(f)$ est une série lacunaire par blocs. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est cyclique dans $H^2(X)$.*
2. *$X_*(\Phi) = X^N$ où $\Phi = \Psi_N(F), \Psi_N(S^*F), \ldots, \Psi_N(S^{*N-1}F)$.*

Preuve : c'est une conséquence du Lemme 3.2.2 et du Théorème 2.2.2. $\square$

3.3 Séries lacunaires avec des blocs bornés

Dans cette partie, nous nous occuperons du problème de cyclicité pour des séries dont le spectre est inclus dans des ensembles de type

$$\Lambda = \cup_{k\geq 0}[n_k; n_k + N],$$

où $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite lacunaire et N un nombre entier donné.
Etant donné une telle série f, nous amènerons une construction d'un sous-espace S-invariant $F \subset E_f$ qui doit jouer le rôle du sous-espace $H^2(X_*)$ dans le Théorème 2.2.1. A présent, nous ne pouvons vérifier que f est S^*-invariant (et d'ailleurs en général, ce n'est pas le cas), mais nous sommes convaincu que la construction et le critère final dépendent directement de F. Voici, donc, cette construction.

Lemme 3.3.1 *Soit X un espace de Hilbert séparable et soit*

$$f(z) = \sum_{k\geq 1} P_k(z) z^{n_k} \in H^2(X),$$

où P_k sont des polynômes de degré inférieur ou égal à N et $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite lacunaire. On suppose que la suite $\left(\frac{P_k}{\|P_k\|}\right)_{k\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathcal{P}_N(X)$.
Alors, il existe un polynôme non nul P, $deg\, P \leq N$ à valeur dans X tel que

$$H^2 \otimes P \subset E_{S^{*n}f} \quad \forall\, n \geq 0.$$

Preuve : Soit,

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} P_k(z) z^{n_k},$$

où $P_k(z) = \widehat{f}(n_k) + \ldots + \widehat{f}(n_k + N) z^N$.
Pour tout entier n, $j \geq 0$ fixés, il existe k_0 entier tel que pour tout $k \geq k_0$, $n_k - n_{k-1} \geq j + n$ (ce qui est possible car f est une série lacunaire par blocs).
Nous donnons la preuve pour $n = 0$. Pour $n > 0$, comme dans le Lemme 2.2.5, il suffit de modifier les expressions au début de la preuve en regardant,

$$\frac{1}{\|P_k\|} S^{*n_k+n-j} S^{*n} f = \frac{P_k}{\|P_k\|} z^j + z^j \sum_{l>k} \frac{P_l}{\|P_k\|}\, z^{n_l - n_k}.$$

Celà va conduire exactement à la même limite $z^j P$ dans le sous-espace $E_{S^{*n}f}$ au lieu de E_f.
On pose,

$$r_k = \sum_{l>k} \frac{P_l}{\|P_k\|}\, z^{n_l - n_k}.$$

Montrons que les r_k convergent faiblement vers 0 pour une sous suite. Il faut montrer que tout voisinage de 0 pour la topologie faible contient l'un des r_k. On considère des voisinages de la forme

$$V = \big\{h \in H^2(X) \,:\, |(h, h_i)| < 1,\, 1 \leq i \leq n\big\}.$$

Les fonctions h_i, $i = 1, \dots n$ sont fixées dans $H^2(X)$ et $h_i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{h}_i(k) z^k$.

Soit,

$$Q^i_k(z) = \widehat{h}_i(k) + \ldots + \widehat{h}_i(k+N) z^N \ \ \forall\ k \geq 0.$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
|(r_k, h_i)|^2 \leq & \quad \Big(\sum_{l>k} \big| (\frac{P_l}{\|P_k\|} \,,\, Q^i_{n_l - n_k}) \big| \Big)^2. \\
\leq & \ \ \Big(\sum_{l>k} \frac{\|P_l\|^2}{\|P_k\|^2} \Big) \Big(\sum_{l>k} \|Q^i_{n_l - n_k}\|^2 \Big).
\end{aligned}$$

Supposons qu'aucun des r_k n'appartient à V alors,

$$1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |(r_k, h_i)| \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Par conséquent,

$$\frac{\|P_k\|^2}{\sum_{l>k} \|P_l\|^2} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{l>k} \|Q^i_{n_l - n_k}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{l>k} \|Q^i_{n_l - n_k}\|^2.$$

En sommant sur k on obtient une contradiction le coté de gauche diverge grâce au Lemme 2.2.4 tandis que celui de droite converge grâce au Lemme 2.2.3. D'où le résultat.
Il existe une sous-suite $(r_{k_i})_{i \geq 1}$ qui converge faiblement vers 0. De la suite $(\frac{P_{k_i}}{\|P_{k_i}\|})_{i \geq 1}$ correspondante, on peut extraire puisque $(P_k)_{k \geq 1}$ est r.c., une sous-suite convergente vers une limite P non nulle qui vérifie bien,

$$z^j P \in E_f \ \ \forall\ j \geq 0.$$

Donc $H^2 \otimes P \subset E_f$. □

Remarque 3.3.1 *Il est clair d'après la preuve que $deg(P) \leq N$. Notons par $\mathcal{P}_N(X)$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à N et à valeur dans X.*

Corollaire 3.3.1 *Soit f comme dans le Lemme 3.3.1. Alors, il existe un sous-espace fermé $L \subset \mathcal{P}_N(X)$ tel que*

(a) $L \neq \{0\}$.

(b) $F := H^2 \otimes L \subset \bigcap_{k \geq 0} E_{S^{*k} f} \subset E_f$.

(c) Si $g \in \mathcal{P}_N(X)$ et $H^2 \otimes g \subset E_f$, alors $g \in L$ ("L est maximal").

Preuve : En effet, par définition

$$H^2 \otimes L = clos_{H^2(X)}\big\{\sum h_j p_j \,:\, h_j \in H^2,\, p_j \in L\big\}.$$

Donc, si L_α, $\alpha \in A$, satisfait la condition (b), alors $span_{H^2(X)}(L_\alpha \,:\, \alpha \in A)$ l'est aussi. le reste découle du Lemme 3.3.1. $\square$

Le Théorème suivant contient les autres propriétés du sous-espace $F = H^2 \otimes L$ défini dans le Corollaire 3.3.1 qui sont lié à la cyclicité éventuelle de f.

Théorème 3.3.1 *Soit X un espace de Hilbert séparable et soit*

$$f(z) = \sum_{k\geq 1} P_k(z) z^{n_k} \in H^2(X),$$

où P_k sont des polynômes de degré inférieur ou égal à N et $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite lacunaire. On suppose que la suite $(P_k)_{k\geq 1}$ est c.r.c. dans $\mathcal{P}_N(X)$.
Soit $F = H^2 \otimes L$, le sous-espace du Corollaire 3.3.1. Alors,

(i) $SF \subset F \subset \bigcap_{k\geq 0} E_{S^{*k}f} \subset E_f$.

(ii) $f = g + p$ *où* $g \in F$ *et p est un polynôme.*

(iii) $\bigcap_{k\geq 0} E_{S^{*k}f} = clos(F + S^*L + \ldots + S^{*N}L)$ *et donc il existe $d \geq 0$ tel que*

$$S^{*d} f \in clos(F + S^*L + \ldots + S^{*N}L) = \bigcap_{k\geq 0} E_{S^{*k}f}.$$

En particulier,

$$S^{*d} E_f = clos(F + S^*L + \ldots + S^{*N}L).$$

(iv) *Si $dim\, X < \infty$ alors la condition nécessaire et suffisante pour que f soit cyclique est que L ait le rang maximal dans X, i.e.*

$$dim\, X = r := \max_{|z|<1} dim(p(z) : p \in L).$$

Preuve : Il est clair que (i) est vérifiée.
(ii) Par définition, $f = \sum_{k\geq 1} z^{n_k} P_k$, où $deg(P_k) \leq N$. D'autre part, toute somme convergente de type $g = \sum_{k\geq 1} z^{n_k} Q_k$, où $Q_k \in L$ est dans $F = H^2 \otimes L$. En particulier, c'est le cas pour la série g avec $Q_k = P_L(P_k)$. Donc, $p := f - g \in E_f$ et on a $p = \sum_{k\geq 1} z^{n_k} P_{L^\perp}(P_k)$ où $L^\perp = \mathcal{P}_N(X) \ominus L$. Le Lemme 3.3.1 est applicable à la série p à la place de f. Si p n'est pas un polynôme, on obtient un polynôme $R \neq 0$, $R \in \mathcal{P}_N(X) \ominus L$ tel que $H^2 \otimes R \subset \bigcap_{k\geq 0} E_{S^{*k}f} \subset E_f$. La contradiction (avec le Corollaire 3.3.1) montre que p est un polynôme. En posant $g = \sum_{k\geq 1} z^{n_k} P_L(P_k) \in H^2 \otimes L$ et $f = g + p$, on obtient le résultat.
(iii) Par définition,

$$H^2 \otimes L = clos_{H^2(X)} \{ \sum c_j z^j p_j : p_j \in L \},$$

(les sommes sont finies). D'autre part, pour toute somme $A = \sum_{k\geq 0} c_j z^j p_j \in H^2 \otimes L$ et pour tout $k \geq 0$, on a

$$S^{*k} A = \sum_{0\leq j<k} c_j S^{*(k-j)} p_j + \sum_{j\geq k} c_j z^{j-k} p_j \in F + S^*L + \ldots + S^{*N}L.$$

(Remarquons que $S^{*k}L = \{0\}$ pour $k > N$). Donc,

$$E_{H^2\otimes L} \subset clos(F + S^*L + \ldots + S^{*N}L) \subset \bigcap_{k\geq 0} E_{S^{*k}f}.$$

(pour la dernière inclusion : $\bigcap_{k\geq 0} E_{S^{*k}f}$ est un sous-espace fermé S^*-invariant et $F,\, L \subset \bigcap_{k\geq 0} E_{S^{*k}f}$.
D'autre part, d'après (ii), $f - p \in F = H^2 \otimes L$ où p est un polynôme. Donc il existe $d \geq 0$ tel que pour tout $k \geq d$, on a

$$S^{*k}f \in S^{*d}(H^2 \otimes L) \subset clos(F + S^*L + \ldots + S^{*N}L).$$

Celà implique

$$\bigcap_{k\geq 0} E_{S^{*k}f} \subset clos(F + S^*L + \ldots + S^{*N}L),$$

et donc l'égalité du (iii).
(iv) Observons d'abord, que dans le cas où $dim\, X < \infty$, le sous-espace F a la co-dimension finie dans E_f (voir la formule du point (iii) du Théorème). Supposons maintenant que $E_f = H^2(X)$. Alors, $H^2 \otimes L$ est un sous-espace S-invariant de $H^2(X)$ de co-dimension finie. Il est facile de voir qu'un tel sous-espace a le rang local maximal (par exemple, on peut s'appuyer sur la représentation de Lax-Halmos qui donne $F = H^2 \otimes L = BH^2(X')$ (où B est un produit de Blaschke-Potapov). Mais, puisque $F = H^2 \otimes L$, le rang local de F, c'est-à-dire

$$r := \max_{|z|<1} dim(f(z) :\ f \in F),$$

est égale au rang local de L. Donc, $r = dim\, X$.
Réciproquement, supposons que $r = dim\, X$. Le sous-espace $F \subset H^2(X)$ étant S-invariant possède possède une représentation de Lax-Halmos, $F = \Theta H^2(X')$, où $X' \subset X$ et Θ est une fonction intérieure à gauche. Puisque le rang local de F coïncide avec le rang locale de L et d'après l'hypothèse $r = dim\, X$, on obtient

$$dim\, X = r = dim\, (\Theta(z)H^2(X')) \leq dim\, X' \leq dim\, X.$$

Donc, $X = X'$ et on a,

$$det(\Theta)H^2(X) \subset \Theta H^2(X) \subset E_f.$$

Mais $\theta = det(\Theta)$ est une fonction intérieure scalaire et donc le sous-espace S^*-invariant engendré par $\theta H^2(X)$ coïncide avec $H^2(X)$. En effet, si ϕ_n sont les polynômes de Fejer de θ, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|P_+\overline{\phi}_n\theta f - f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\phi_n(S^*)\theta f - f\|_2 = 0.$$

pour tout $f \in H^2(X)$, d'où le résultat. Par conséquent, $E_f = H^2(X)$. □

Remarque 3.3.2 *Si $dim\, X < \infty$, alors l'espace $H^2 \otimes L$ a la co-dimension finie dans E_f et il semble très probable que celà entraîne un certain critère de cyclicité dans $H^2(X)$ des séries lacunaires "par blocs".*

Pour l'instant, on peut en déduire le corollaire suivant,

Corollaire 3.3.2 *Soit f comme dans le Théorème 3.3.1.*

(i) Si $X = \mathbb{C}$, alors f est cyclique.

(ii) Si $\dim X < \infty$, alors $H^2 \otimes L$ est un sous-espace de E_f de co-dimension finie ($\leq (N+1).\dim X$).

(iii) Si $\dim L = (N+1).\dim X$, alors $L = \mathcal{P}_N(X)$, et donc f est cyclique.

(iv) On a toujours, $L \subset \bigcap_{n\geq 1} span_X(P_k : k \geq n)$ et

$$\bigcap_{n\geq 1} span_X(P_k(z) : |z| < 1, k \geq n) = \bigcap_{n\geq 1} span_X(\widehat{P}_k(j) : 0 \leq j \leq N, k \geq n).$$

(v) Si $\bigcap_{n\geq 1} span_X(P_k : k \geq n) \neq \mathcal{P}_N(X)$, ou bien $\bigcap_{n\geq 1} span_X(\widehat{P}_k(j) : 0 \leq j \leq N, k \geq n) \neq X$, alors f n'est pas cyclique dans $H^2(X)$.

Exemple : Soit $X = \mathbb{C}^2$, $P_k = a_k(e_1 + ze_2)$, $a_k \neq 0$, $\sum_{k\geq 0}|a_k|^2 < \infty$ où e_j, $j = 1, 2$ est la base standard de $\mathbb{C}^2$. Alors, $N = 1$, $L = \{\lambda P_1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$, le rang local de L est 1 et $\bigcap_{n\geq 1} span_X(P_k : k \geq n) \neq \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^2)$. la fonction f, bien sûr, n'est pas cyclique (voir Théorème 3.2.2).

Chapitre 4

Séries lacunaires à plusieurs variables

4.1 Etude dans le polydisque

Dans ce chapitre, nous considérons les espaces H^2 dans les polydisques $\mathbb{D}^n$ et les semi-groupes de shifts adjoints sur ces espaces. Notamment, par définition

$$H^2(\mathbb{D}^n) = \{f(z) = \sum_{\alpha \geq 0} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha, \sum_{\alpha \geq 0} |\widehat{f}(\alpha)|^2 < \infty\},$$

où $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ est un multi-indice et $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ le monôme élémentaire dans $\mathbb{D}^n$. Nous réferrons à [29] pour toute information sur $H^2(\mathbb{D}^n)$. On a $L^2(\mathbb{Z}_+^n) = l^2(\mathbb{Z}_+^n) \equiv H^2(\mathbb{D}^n)$.
On définit le semi-groupe $(S^{*\alpha})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ de façon que pour toute série entière $f(z) = \sum_{\alpha \geq 0} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha$ dans $\mathbb{D}^n$, on pose

$$S^{*\alpha} f(z) = \sum_{\beta \geq 0} \widehat{f}(\alpha + \beta) z^\beta.$$

Le semi-groupe $(S^{*\alpha})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ a n générateurs $S_1^*, \ldots, S_n^*$.
Il est clair que $f \in H^2(\mathbb{D}^n) \Rightarrow S^{*\alpha} f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ et $\|S^{*\alpha} f\|_2 \leq \|f\|_2$. On note $\sigma(f)$ le spectre (de Fourier) de f :

$$\sigma(f) = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : \widehat{f}(\alpha) \neq 0\}.$$

De même façon, on définit l'espace H^2 dans $\mathbb{D}^n$ à valeurs dans un espace de Hilbert X en posant

$$H^2(\mathbb{D}^n, X) = \{f(z) = \sum_{\alpha \geq 0} \widehat{f}(\alpha) z^\alpha, \widehat{f}(\alpha) \in X, \sum_{\alpha \geq 0} \|\widehat{f}(\alpha)\|_X^2 < \infty\}.$$

On définit comme auparavant,

$$E_f = span_{H^2(\mathbb{D}^n, X)}\{S^{*\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

Et on dit que f est cyclique si $E_f = H^2(\mathbb{D}^n, X)$.
Le but de ce chapitre est d'établir un analogue du résultat principal du chapitre 2.

Notamment, nous regarderons le cas des fonctions $f \in H^2(\mathbb{D}^n, X)$ à spectre “rare” dans le sens suivant.

(C1) Il existe $C > 0$ tel que

$$card\{(\alpha, \alpha') \subset \sigma(f) \times \sigma(f),\, \alpha \neq \alpha' : \beta = \alpha - \alpha'\} \leq C, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$$

.

(C2) $\lim_{j\to\infty} (\alpha_{j+1,\,k} - \alpha_{j,\,k}) = \infty, \quad \forall\, k,\, 1 \leq k \leq n.$

Remarque 4.1.1 *Il est clair que si pour une suite $(\alpha_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{Z}_+^n$, l'une de ses suites composantes $(\alpha_{j,\,k})_{j\in\mathbb{Z}_+^n}$, $1 \leq k \leq n$ est lacunaire dans le sens d'Hadamard, alors la conditions $C1$ est aussi satisfaite.*

Lemme 4.1.1 *Soit X un espace de Hilbert séparable.*
Pour toute série $f \in H^2(\mathbb{D}^n, X)$ vérifiant les conditions $(C1)$, $(C2)$ ci-dessus et telle que $(\widehat{f}(k))_{k\geq 0}$ est une suite relativement compacte, il existe un élément non nul $x \in X$ tel que

$$H^2(\mathbb{D}^n, X) \otimes x \subset E_{S^{*\beta} f} \quad \forall\, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Preuve : Soit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ fixé et $f \in H^2_{\mathbb{D}^n}(X)$ vérifiant les conditions précédentes. Grâce à $(C2)$, f s'écrit

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \widehat{f}(\alpha_k) z^{\alpha_k},$$

avec la particularité que $\alpha_{j+1} \geq \alpha_j, \quad \forall\, j \geq 0$. D'après $(C2)$, il existe un entier k_0 tel que

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} \geq \beta, \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Et pour tout $k \geq k_0$,

$$\frac{S^{\alpha_k - \beta}}{\|\alpha_k\|} f(z) = \frac{\widehat{f}(\alpha_k)}{\|\widehat{f}(\alpha_k)\|} z^{\beta} + z^{\beta} \sum_{j>k} \frac{\widehat{f}(\alpha_j)}{\|\widehat{f}(\alpha_k)\|}\, z^{\alpha_j - \alpha_k}.$$

On pose $r_k = \sum_{j>k} \frac{\widehat{f}(\alpha_j)}{\|\widehat{f}(\alpha_k)\|}\, z_1^{\alpha_j - \alpha_k}$ et on va montrer que les r_k convergent faiblement vers 0 pour une sous-suite. Il suffit de montrer que tout voisinage de 0 pour la topologie faible contient l'un des r_k. On considère des voisinages de la forme $V = \big\{h \in H^2(\mathbb{D}^n, X) : |(h, g_i)| < 1,\, 1 \leq i \leq m\big\}$, $g_i\,(i = 1 \ldots m)$ sont des éléments fixés dans $H^2(\mathbb{D}^n, X)$, $g_i(z) = \sum_{\gamma_i \in \mathbb{Z}_+^n} \widehat{g}_i(\gamma_i)\, z^{\gamma_i}$. On obtient,

$$\begin{aligned} |(r_k, g_i)|^2 \leq & \quad \Big(\sum_{j>k} \big| \big(\frac{\widehat{f}(a_j)}{\|\widehat{f}(a_k)\|},\, \widehat{g}_i(\alpha_j - \alpha_k) \big) \big| \Big)^2. \\ \leq & \quad \sum_{j>k} \frac{\|\widehat{f}(a_j)\|^2}{\|\widehat{f}(a_k)\|^2} . \sum_{j>k} \|\widehat{g}_i(\alpha_j - \alpha_k)\|^2. \end{aligned}$$

Supposons qu'aucun des r_k n'appartient à V alors $1 \leq \max_{1\leq i\leq n} |(r_k, g_i)| \ \ \forall\, k \geq k_0$. Par conséquent,

$$\frac{\|\widehat{f}(a_k)\|^2}{\sum_{j>k} \|\widehat{f}(a_l)\|^2} \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{l>k} \|\widehat{g}_i(\alpha_j - \alpha_k)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>k} \|\hat{g}_i(\alpha_j - \alpha_k)\|^2.$$

En sommant sur k,

$$\sum_{k\geq k_0} \frac{\|\widehat{f}(a_k)\|^2}{\sum_{j>k} \|\widehat{f}(a_l)\|^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\geq k_0} \sum_{j>k} \|\widehat{g}_i(\alpha_j - \alpha_k)\|^2.$$

On obtient une contradiction car le coté de gauche diverge grâce au Lemme 2.2.3 alors que celui de droite converge grâce au Lemme 2.2.4. Donc il existe une sous-suite $(r_{k_i})_{i\geq 1}$ qui converge faiblement vers 0. De la suite $(\frac{\widehat{f}(a_{k_i})}{\|\widehat{f}(a_{k_i})\|})_{i\geq 1}$ correspondante on peut puisque la suite $(\widehat{f}(k))_{k\geq 0}$ est c.r.c. en extraire une sous-suite convergente vers une limite non nulle x car $(r_{k_i})_{i\geq 1}$ ne dépend pas de β et vérifiant,

$$z^{\beta} x \in E_f \ \ \forall\, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

De la même manière, on peut monter que $z^{\beta} x \in E_{S^{*\alpha} f} \ \ \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ et ainsi $H^2(\mathbb{D}^n,\, X) \otimes x \subset E_f$. $\square$

Théorème 4.1.1 *Soit X est un espace de Hilbert séparable et $f \in H^2(\mathbb{D}^n,\, X)$, $f(z) = \sum_{k\geq 0} \widehat{f}(\alpha_k) z^{\alpha_k}$ telle que $\sigma(f)$ vérifie les conditions $(C1)$, $(C2)$ et $(\widehat{f}(\alpha_k))_{k\geq 0}$ est c.r.c. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) f est cyclique pour S^* dans $H^2(\mathbb{D}^n,\, X)$.

2) $span(\widehat{f}(\alpha_j)\ :\ j \geq k) = X \ \ \forall\ k \geq 0$.

Preuve : L'étude faite au chapitre 2 dans le cadre de $H^2(X)$ où X est un espace de Hilbert séparable et les méthodes qui y ont été développées se transposent à l'espace $H^2(\mathbb{D}^n,\, X)$ dès lors que le Lemme 4.1.1 est réalisé. D'où le résultat. $\square$

Lemme 4.1.2 *[1] Soit $1 \leq p < \infty$ et soit Ω un sous-ensemble S^*-invariant de ℓ^p_a (i.e., si $f \in \Omega$ alors $S^* f \in \Omega$). Supposons que l'inclusion $1 \in span(S^{*k} f,\, k \geq 0)$ est vérifiée pour tout $f \in \Omega$. Alors tout élément de Ω est une fonction cyclique dans ℓ^p_a.*

Remarque 4.1.2 *Lorsque $X \equiv \mathbb{C}$, on peut directement conclure quant à la cyclicité de f, il suffit de voir que le Lemme 4.1.1 nous donne $1 \in span(S^{*\alpha} f,\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^2)$ en divisant par x ce qui est possible dans le cas scalaire et en adaptant le Lemme précédent d'E. Abakumov dans l'espace $H^2(\mathbb{D}^n,\, X)$.*
Cette adaptation est simple : il suffit pour cela de considérer $S^{*\alpha} = S_1^{*\alpha_1} \ldots S_n^{*\alpha_2}\ \forall\ \alpha =$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^n$ et de reprendre le même argument d'induction utilisé dans la preuve du Lemme 4.1.2 mais dans $H^2(\mathbb{D}^n)$ à savoir si $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ est fixé et si on suppose que $z^\beta \in span(S^{*\alpha} f,\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n)\ \ \forall\, \beta < \eta$ alors $z^\eta \in span(S^{*\alpha} f,\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$.

Chapitre 5

Semi-groupe de shifts adjoints et cyclicité dans $L^2(\mathbb{R}_+)$

Dans ce chapitre, nous allons donner des résultats analogues à ce qui a précédé mais pour le semi-groupe continu de shifts adjoints sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'espace $L^2(\mathbb{R}_+)$ des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ telles que

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^\infty |f|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

et le semi-groupe $(S_t^*)_{t>0}$ où

$$S_t^* f(x) = f(x+t) \ x \geq 0, \ t > 0.$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, on pose $E_f := span_{L^2(\mathbb{R}_+)}\big(S_t^* f \ : \ t > 0\big)$ et f est cyclique si $E_f = L^2(\mathbb{R}_+)$.

5.1 La propriété d'unicellularité

Nous allons dans un premier temps présenter certains résultats connus en théorie des sous-espaces invariants autour de la propriété d'unicellularité réalisée par certains opérateurs et qui interviendront de manière primordiale dans la seconde partie de ce chapitre. La plupart de ces résultats ainsi que leur preuves sont tirés de [27].

Définition 5.1.1 *Une treillis de sous-espaces L est dite accessible s'il existe un opérateur T sur un espace séparable de Hilbert de dimension infinie tel que $Lat\,T$ ordonné par l'inclusion est isomorphe à L, on dira que $L \approx Lat\,T$.*

Décrire $Lat\,T$ n'est pas toujours aisé parfois même cette description se révèle insuffisante à déterminer si l'opérateur T possède des sous-espaces invariants non-triviaux, la définition que nous venons de voir permet de reformuler le problème des sous-espaces invariants, un treillis de deux éléments totalement ordonné est-il accessible ? Remarquons aussi que si L est accessible, son dual l'est aussi (L^* est égale à L et est ordonnée selon $x \leq y \Leftrightarrow x \geq y$

dans L). Cette notion d'accessibilité est très utile pour caractériser le treillis de certains opérateurs car si on considère un segment $[x,\, y]$ (où $x \leq y$) dans un treillis L et qui est un sous-treillis de la forme $[x,\, y] = \{z \in L : \, x \leq z \leq y\}$, on a la caractérisation suivante qui se révèle très efficace dans le cas des opérateurs unicellulaires à savoir que si M et N sont deux éléments dans $Lat\, T$ tels que $M \subset N$ et $N \ominus M$ est de dimension infinie alors $[M,\, N]$ est *accessible* (voir [27] pour plus de précisions).

Définition 5.1.2 *Soit X un espace de Banach, T un opérateur borné sur X.*
T est dit unicellulaire si $Lat\, T$ est totalement ordonné par la relation d'inclusion.

Ainsi pour un opérateur unicellulaire T si on prend dans $Lat\, T$ deux sous-espaces M_1, M_2 tels que $M_1 \neq M_2$ alors soit $M_1 \subset M_2$ soit $M_2 \subset M_1$. Si M est un sous-espace invariant pour un opérateur borné T alors $M^{\perp}$ est un sous-espace invariant pour T^* et par conséquent si T est unicellulaire alors T^* l'est également. Il faut aussi savoir que si un opérateur T est unicellulaire alors l'ensemble des vecteurs non-cycliques de T est un ensemble de première catégorie c'est à dire qu'il peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles rares (et un ensemble est dit rare s'il n'est pas dense dans aucun ouvert de l'espace) et la conséquence importante qui découle de ce fait est que tout sous-espace invariant de T est cyclique.

Exemples :

1. Soit $\{e_n\}_{n\geq 0}$ dans un espace de Hilbert séparable H et $\{w_n\}_{n\geq 0}$ une suite strictement décroissante dans ℓ^2, l'opérateur A définit par
$$Ae_0 = 0,\, Ae_n = w_n e_{n-1}, \quad \forall\, n > 0,$$
est l'opérateur de *Donoghue* muni de la suite de poids pondérés $\{w_n\}_{n\geq 0}$ et si M est un sous-espace non- trivial invariant par A alors $M = span(e_k : \, 0 \leq k \leq n)$ pour un entier $n \geq 0$ et donc A est unicellulaire.

2. Si S est l'opérateur unilatéral de translation, si ϕ_1 est la fonction intérieure définie par $\phi_1 = exp\big(\frac{z+1}{z-1}\big)$ et si P est la projection sur $(\phi_1 H^2)^{\perp}$ alors l'opérateur $PS|_{(\phi_1 H^2)^{\perp}}$ est unicellulaire et
$$Lat\,(PS|_{(\phi_1 H^2)^{\perp}}) \approx [0,\, 1].$$
Ce dernier exemple va jouer un rôle important dans le Théorème qui suit, (pour plus de précisions concernant ces deux exemples voir [27]).

Définition 5.1.3 *Un opérateur intégrale de type Voterra sur $L^2(0,\, 1)$ est un opérateur K tel que*
$$(Kf)(x) = \int_0^x k(x,\, y) f(y)\, dy,$$
où k est une fonction carré intégrable sur le carré unité. En particulier, l'opérateur de Voterra est l'opérateur de type Volterra pour lequel k est la fonction constante égale à 1.

Pour tout $\alpha \in [0,\, 1]$ soit

$$M_\alpha = \{f \in L^2(0,\, 1) :\; f = 0 \; p.p \text{ sur } [0,\, \alpha]\}.$$

Il est clair que $\{M_\alpha :\; \alpha \in [0,\, 1\} \subset Lat\, K$ pour tout opérateur intégral de type Volterra. Le Théorème qui suit nous intéresse tout particulièrement dans le cadre de cette étude, il a été démontré de manière indépendente par plusieurs auteurs S.Agmon, W.Donoghue, Brodskii, Kalisch, Sahnovic. Pour la preuve complète, le lecteur pourra se référer à [27] $p.\,68$. Ce théorème jouera un rôle important dans la construction de notre résultat.

Théorème 5.1.1 *L'opérateur de Volterra est unicellulaire et*

$$Lat\, V = \{M_\alpha :\; \alpha \in [0,\, 1]\}.$$

Ce Théorème peut se démontrer aussi grâce au Théorème de Titchmarsh concernant les convolutions et qui est un résultat d'importance en analyse et dans la théorie des équations différentielles et énonce le fait suivant : Soit $F(t)$, $G(t) \in L_1(0,\, 1)$, si

$$(F * G)(t) = \int_0^t F(t-s)G(s)ds$$

est nulle presque partout, il existe un nombre réel α, $(0 \leq \alpha \leq 1)$ tel que les fonctions $F(t)$ et $G(t)$ soient respectivement nulles sur les intervalles $[0,\, \alpha]$ et $[0,\, 1-\alpha]$. Une preuve élémentaire et directe de ce Théorème a été donné par I. Mikusinski et G. K Kalisch a démontré que le Théorème de Titchmarsh peut être obtenu à partir du Théorème 5.1.1.

Pour lier le semi-groupe de translations $(S_t^*)_{t>0}$ avec l'opérateur de Volterra, nous allons donner la preuve d'un résultat connu (voir [21]) et qui va nous ramener au cadre de travail que l'on s'est fixé et nous permettre de travailler avec le semi-groupe de translations. Notamment, nous démontrons le Lemme suivant.

Lemme 5.1.1 *Si M est un sous-espace fermé dans $L^2(0,\, a)$ et S_t le semi-groupe de translations à droite alors,*

$$S_t M \subset M, \;\; \forall\, t > 0 \Leftrightarrow VM \subset M.$$

Preuve : En considérant la fonction de Dirac δ_t au point t, la fonction caractéristique $\chi = \chi_{[0,\, a]}$ et le produit de convolution $*$ de deux fonctions, on peut écrire

$$S_t f = f * \delta_t, \;\; t \geq 0.$$

$$Vf = f * \chi.$$

Par récurrence,

$$V^n f = f * \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\chi, \;\; n \geq 1.$$

Et pour tout polynôme $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $p(V)f = f * q$ où q est un polynôme défini par p et la formule précédente et $\|p(V)\| \leq C. \max_{0 \leq x \leq a} |p(x)|$.
Si on suppose que $VM \subset M$ alors $p(V)M \subset M = \overline{M}$ pout tout polynôme p et si $g \in C[0,\, a]$ et $(p_n)_{n \geq 0}$ est une suite de polynôme qui converge vers g, d'après ce qui précède $p_n(V)f$ converge vers $f * g$ et ainsi $f * g \in M$. Si on se donne un suite régularisante $(g_n)_{n \geq 1} \in C_{[0,\, a]}$ telle que $g_n \equiv 0$ $x \in [0,\, t-1 \setminus n] \cup [t+1 \setminus n,\, a]$, $g_n(x) = n^2 x + (n - n^2 t)$, $x \in [t-1 \setminus n,\, t]$ et $g_n(x) = -n^2 x + (n - n^2 t)$, $x \in [t,\, t-1 \setminus n]$ que l'on peut normaliser par une constante et cette suite vérifie $f * g_n$ converge faiblement vers $f * \delta_t$ et puisque M est fermé $\delta_t * f = S_t \in M$.
Réciproquement, on considère la suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 1}$ définie par,

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n} a}.$$

alors $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers $\chi_{[0,\, a]}$ et pour tout $f \in C_{[0,\, a]}$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^a f \, d\mu_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n} a) = \int_0^a f \, dx.$$

Puisqu'on suppose que $S_t M \subset M$, $\forall\, 0 \leq t \leq a$ donc $\mu_n * f \in M$ $\forall\, n \geq 1$ et $\chi * f = Vf \in M$. $\square$

La description des sous-espaces invariants pour l'opérateur de Volterra, l'unicellularité de celui-ci ainsi que le lien avec le semi-groupe continu des translations à droite nous permettent d'affirmer le fait suivant qui est une conséquence directe de tout ce qui précède,

Théorème 5.1.2 *$f \in L^2(0,\, a)$, $a \in supp(f)$ $\Rightarrow$ $E_f = L^2(0,\, a)$.*

Remarque 5.1.1 *Par la suite on regardera $L^2(0,\, a)$ comme étant inclus dans $L^2(0,\, \infty)$ en prolongeant toute fonction de $L^2(0,\, a)$ dans $(a,\, \infty)$ par 0.*

5.2 Fonctions cycliques pour $(S_t^*)_{t>0}$

Définition 5.2.1 *Un système lacunaire d'intervalles est une réunion dénombrable d'intervalles disjoints $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k,\, b_k]$ vérifiant les conditions suivantes :*

i) $a_k < b_k < a_{k+1}$ $\forall\, k \geq 1$.

ii) $\sup_{k \geq 1} \dfrac{b_k}{a_{k+1}} < 1$.

Lemme 5.2.1 *Soit $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k,\, b_k]$ un système lacunaire d'intervalles sur $\mathbb{R}_+$.*
La fonction $\phi(x) = card\big\{(a_j - a_k,\, b_j - a_k) : x \in (a_j - a_k,\, b_j - a_k)\big\}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Preuve : Cette preuve est une modification de la preuve du Lemme 2.2.2.
Puisque Λ est un système lacunaire, il existe $d > 1$ tel que $\inf\limits_{k\geq 1} \dfrac{a_{k+1}}{b_k} \geq d$, soit $M > 0$ tel que $d^{M-1}(d-1) \geq 1$ et soit $x \in \mathbb{R}_+$, il existe un ensemble fini J tel que $\forall\, j \in J,\;\; a_j - a_k \leq x \leq b_j - a_k$.
Soit j_0 le plus petit indice dans J tel que $b_{j_0} > x$ et montrons que si $j \in J$ alors, $j_0 \leq j < j_0 + M$.
La première inégalité est triviale, pour la deuxième supposons que $j \geq j_0 + M$,
$a_j - a_k \geq a_j - b_{j-1} \geq (d-1)b_{j-1} \geq (d-1)d^{M-1}b_{j_0} > x$.
mais si $a_j - a_k > x$ alors $(a_j - a_k, b_j - a_k)$ n'encadre pas x ce qui est absurde puisqu'on suppose que $j \in J$.
Par conséquent, $\phi(x) \leq M \;\forall\, x \in \mathbb{R}_+$ et ϕ est bornée. $\square$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $supp(f) \subset \Lambda$, on peut alors écrire f comme une série de fonctions

$$f = \sum_{k\geq 1} g_k \qquad\qquad supp(g_k) \subset [a_k,\, b_k].$$

$$f(x) = \sum_{k\geq 1} f_k(x - a_k) \qquad f_k \in L^2(0,\, b_k - a_k) \subset L^2(\mathbb{R}_+).$$

Théorème 5.2.1 *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *et* $supp(f) \subset \Lambda$*, où* $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,\, b_k]$ *est un système lacunaire.*
On suppose que,

i) $c = \sup_{k\geq 1}|b_k - a_k| < \infty.$

ii) $\left(\frac{f_k}{\|f_k\|}\right)_{k\geq 1}$ *est relativement compact.*

alors, f *est cyclique dans* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Preuve : On considère pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{S^*_{a_k} f}{\|f_k\|} = \frac{f_k}{\|f_k\|} + \sum_{j>k} \frac{f_j}{\|f_k\|}.$$

Et en posant $r_k = \sum_{j>k} \frac{f_j}{\|f_k\|}$, montrons qu'il existe une sous-suite qui converge faiblement vers 0. Il faut prouver que tout voisinage de 0 pour la topologie faible contient l'un des r_k. On peut considérer des voisinages de la forme

$$V = \left\{ h \in L^2(\mathbb{R}_+) \,:\, |(h, h_i)| < 1,\, 1 \leq i \leq n \right\},$$

où les h_i, $i = 1 \ldots n$ sont des fonctions fixées dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.
Supposons qu'aucun des r_k n'appartient à V alors $1 \leq \max_{1\leq i\leq n} |(r_k,\, h_i)| \;\; \forall\, k \geq 1$.
On obtient,

$$|(r_k,\, h_i)| \leq \frac{1}{\|f_k\|} \int_{a_j \leq x \leq b_j} |\sum_{j>k} f_j(x - a_j + a_k) h_i(x)| dx \leq \frac{1}{\|f_k\|} \Big(\sum_{j>k} \|f_j\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j>k} \int_{a_j - a_k}^{b_j - a_k} |h_i(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\|f_k\|^2}{\sum_{j>k} \|f_j\|^2} \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j>k} \int_{a_j - a_k}^{b_j - a_k} |h_i(x)|^2 dx \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>k} \int_{a_j - a_k}^{b_j - a_k} |h_i(x)|^2 dx.$$

On somme sur k,

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\|f_k\|^2}{\sum_{j>k} \|f_j\|^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\geq 1} \sum_{j>k} \int_{a_j - a_k}^{b_j - a_k} |h_i(x)|^2 dx.$$

Le membre de gauche diverge d'après le Lemme 2.2.4, montrons que celui de droite est fini pour obtenir une contradiction et conclure. Il s'agit de prouver que

$$\sum_{k\geq 1} \sum_{j>k} \int_{a_j - a_k}^{b_j - a_k} |h_i(x)|^2 dx < \infty.$$

Posons $\phi(x) = \sum_{k\geq 1}\sum_{j>k}\chi_{(a_j-a_k,b_j-a_k)}(x)$, on peut remarquer que la fonction ϕ s'écrit aussi de la manière suivante,

$$\phi(x) = card\big\{(a_j - a_k, b_j - a_k) : x \in (a_j - a_k, b_j - a_k)\big\}.$$

Si on applique le Lemme 5.2.1 alors ϕ est bornée donc $\exists\, M > 0 : \phi(x) \leq M \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\sum_{j>k}\int_{a_j-a_k}^{b_j-a_k}|h_i(x)|^2dx &= \sum_{k\geq 1}\sum_{j>k}\int_{\mathbb{R}_+}\chi_{(a_j-a_k,b_j-a_k)}(x)|h_i(x)|^2dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\sum_{k\geq 1}\sum_{j>k}\chi_{(a_j-a_k,b_j-a_k)}(x)|h_i(x)|^2dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\phi(x)|h_i(x)|^2dx \leq M\int_{\mathbb{R}_+}|h_i(x)|^2dx < \infty.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une sous-suite $(r_{k_j})_{j\geq 1}$ qui convergent faiblement vers 0 et on a,

$$S^*_{a_{k_j}}f = \frac{f_{k_j}}{\|f_{k_j}\|} + r_{k_j}.$$

De plus $(f_k/\|f_k\|)_{k\geq 1}$ est relativement compact alors pour une sous-suite $(k_{j_i})_{i\geq 1}$, la suite $(f_{k_{j_i}}/\|f_{k_{j_i}}\|)_{i\geq 1}$ convergent faiblement vers une limite $g \neq 0$ et par conséquent,

$$g \in E_f.$$

On utilise la condition (i). Soit $b = sup\ supp(g)$, alors $0 < b < \infty$ et $g \in L^2(0,\, b)$.
Notons que,

$$E_g \subset E_f,$$

car $S^*_t E_f \subset E_f \quad \forall\, t > 0$. On peut appliquer le Théorème 5.1.2 et ainsi,

$$E_g = L^2(0, b) \subset E_f.$$

Maintenant, on procède de la même manière mais pour $S^*_{a_k - T}$ où $T > 0$ est arbitraire et on choisit k de sorte que $a_k > T$. On obtient comme précédemment,

$$S^*_{a_k-T}f(x) = \frac{f_k(x+T)}{\|f_k\|} + r_k(x).$$

On peut à nouveau de la même manière extraire une sous-suite convergente, $(f_{k_{j_i}}/\|f_{k_{j_i})\|})_{i\geq 1}$ dont la limite g est non identiquement nulle et telle que $g \in E_f$ et $supp(g) \subset [T,\, c+T]$. Puisque $b = sup\ supp(g) > T$ et en appliquant encore le Théorème 5.1.2 on obtient,

$$L^2(0,\, T) \subset E_f \quad \forall\, T > 0.$$

Donc, $L^2(\mathbb{R}_+) \subset E_f$. D'où le résultat. $\square$

Chapitre 6

Généralisation à $L^2(\mathbb{R}_+,\, X)$

Nous allons dans cette partie généraliser le résultat obtenu précédemment en se plaçant dans $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ où X est un espace de Hilbert de dimension finie. Soit $c > 0$ une constante. En utilisant la définition introduite dans le chapitre 2 section 1, on va considérer une suite $(f_k)_{k\geq 1}$ de l'espace $L^2((0,\, c),\, X)$ qui sera complètement relativement compacte. Rappelons qu'une suite dans l'espace $L^2(0,\, c;\, X)$ est dite c.r.c. si les suites $\left(\frac{Pf_k}{\|Pf_k\|}\right)_{k\in\eta}$ sont relativement compactes dans $L^2((0,\, c),\, PX)$ quelque soit la projection orthogonale $P:\, L^2(0,\, c;\, X) \to L^2(0,\, c;\, X)$, $(\eta = \{k \geq 1:\, Pf_k \neq 0\})$.
Danc ce chapitre, nous obtiendrons donc une généralisation du résultat du chapitre 5. On pourra regarder cette généralisation comme une version "temps continue" du Théorème du §3.3 sur les séries entières lacunaires par blocs. Par conséquent, comme dans ce §3.3, nous changerons le langage en remplaçant des sous-espaces du type $L^2(\mathbb{R}_+,\, X') \subset L^2(\mathbb{R}_+,\, X)$ par des "produits tensoriels" $L^2 \otimes M$ où $M \subset L^2(0,\, c;\, X)$ est un espace de fonctions à support compact (dont les transformées de Fourier sont des analogues des polynômes dans le cas du 3.3). Le critère de la cyclicité d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}_+,\, X)$ est donné sous forme de "rang complé" de transformée de Fourier d'un espace limite $M = M(f)$, ce qui est, bien sûr, pas si efficace comme des critères en termes des valeurs asymptotiques simples $f(x)$, $x \geq k$, $k \to \infty$ style du Théorème 2.2.2. d'autre part, au moins dans le sens direct des mots, les critères de ce dernier type ne sont pas possible du tout (voir Exemple ci-dessous).
Mais avant d'entreprendre cette généralisation il est nécessaire de rappeler certains faits, en particulier concernant les fonctions analytiques à valeurs opérateurs que nous allons donner ici sans les preuves (pour plus de détails on peut se référer à [9], chapitre 5). Ce sera l'objet de notre première partie, introduire et préciser les outils qui nous serviront par la suite.

6.1 Préliminaires

Soit $w : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}_+$,

$$\omega(z) = i\frac{1+z}{1-z},$$

l'application usuelle conforme du disque $\mathbb{D}$ sur le demi-plan supérieur

$$\mathbb{C}_+ = \{\xi \in \mathbb{C} : \, Im\,\xi > 0\}.$$

La restriction à la frontière $\omega|_{\mathbb{T}}$ donne une correspondence bijective entre $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ et $\mathbb{R}$. L'inverse ω^{-1},

$$\omega^{-1}(x) = i\frac{x-i}{x+i},$$

a pour Jacobien

$$|J(x)| = \frac{2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Donc, l'application $U = U_p$,

$$U_p f(x) = \Big(\frac{1}{\pi(x+i)^2}\Big)^{1/p} . \, f\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big), \quad x \in \mathbb{R}$$

est un isomorphisme isométrique (unitaire pour $p = 2$) de l'espace $L^p(\mathbb{T})$ sur l'espace $L^p(\mathbb{R})$,

$$U_p : \, L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}).$$

Pour p, $1 \leq p \leq \infty$, $U_p H^p(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{R})$. On a aussi le Théorème de Paley-Wiener qui va nous permettre d'exporter vers $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ certains Théorèmes et caractérisations des sous-espaces S^*-invariants que nous utiliserons. Nous donnons ici la version scalaire. Mais rappelons d'abord la définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ et son inverse $\mathcal{F}^{-1}$,

$$\mathcal{F}f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixz}\, dx, \quad \mathcal{F}^{-1}f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ixz}\, dx,$$

qui sont des applications unitaires de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sur lui-même.

Théorème 6.1.1 *(Paley-Wiener).*

$$U_2 H^2 = \mathcal{F}^{-1} L^2(\mathbb{R}_+).$$

Théorème 6.1.2 *(Lax-Halmos). Soit F un sous-espace vectoriel dans $L^2(\mathbb{R}_+, X)$. Supposons que $S_t^* F \subset F \;\; \forall\, t > 0$ alors,*

$$F = \mathcal{F}(K_\theta) = \mathcal{F}(H_+^2(X) \ominus \theta H_+^2(X'))$$

où $\theta : X' \longrightarrow X$ est une fonction intérieure à gauche et $dim\, X' \leq dim\, X$.

Définition 6.1.1 *On dira que la fonction analytique contractante à valeurs opératorielles $\{X, Y, \Theta(\lambda)\}$ admet un multiple scalaire $m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ est une fonction analytique scalaire $\not\equiv 0$, lorsqu'il existe une fonction analytique contractante à valeurs opératorielles $\{Y, X, \vartheta(\lambda)\}$ telle que*

$$\Omega(\lambda)\Theta(\lambda) = \delta(\lambda) I_X, \quad \Theta(\lambda)\Omega(\lambda) = \delta(\lambda) I_Y, \quad (|\lambda| < 1).$$

Voici une Proposition qui établit une classe simple de fonctions à multiple scalaire en l'occurence le déterminant d'une fonction matricielle.

Proposition 6.1.1 [9] *Dans le cas où* $\dim X = \dim Y = n < \infty$, *toute fonction analytique contractive* $\{X, Y, \Theta(\lambda)\}$ *telle que* $\Theta(\lambda)^{-1}$ *existe pour du moins un* $\lambda \in \mathbb{D}$ *admet comme multiple scalaire le déterminant* $d(\lambda)$ *de la matrice* $\Theta(\lambda)$ *prise par rapport à deux bases orthonormales, dans* X *et dans* Y. *La matrice de* $\Omega(\lambda)$ *est l'adjointe algébrique de celle de* $\Theta(\lambda)$.

Théorème 6.1.3 [9] *Supposons que* $\Theta(\lambda)$ *admet un multiple scalaire* $\delta(\lambda)$ *et soient* $\delta_i(\lambda)$ *et* $\delta_e(\lambda)$ *les facteurs intérieur et extérieur de* $\delta(\lambda)$.

a) Si $\Theta(\lambda)$ *est intérieure ou extérieure, elle admet* $\delta_i(\lambda)$ *ou* $\delta_e(\lambda)$ *comme multiple scalaire, selon les cas.*

b) Si $\delta(\lambda)$ *est une fonction intérieure ou extérieur,* $\Theta(\lambda)$ *est aussi intérieure ou extérieur, selon les cas.*

c) Si $\Theta(\lambda)$ *est intérieure ou extérieure, elle est intérieure ou extérieure de deux côtés.*

Le Corollaire suivant va nous être particulièrement utile.

Corollaire 6.1.1 [9] *Soit* $\{X^n, X^n, \vartheta(\lambda)\}$ *une fonction analytique contractante matricielle telle que* $d(\lambda) = \det \vartheta(\lambda) \not\equiv 0$. *Pour que* $\vartheta(\lambda)$ *soit intérieure ou extérieure, il faut et il suffit que* $d(\lambda)$ *soit intérieure ou extérieure, selon les cas.*

Enfin, citons ce "Lemme de Complémentation" qui sera nécessaire pour établir la preuve de la généralisation que l'on se propose de faire (pour plus de précisons concernant ce Lemme, se référer à [19] entre autres).

Lemme 6.1.1 *Soit* X *et* X' *des espaces de Hilbert,* $X' \subset X$, $\dim X < \infty$, *et soit* $\Phi' \in H^\infty(L(X', X))$. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $ess \inf \zeta \in \mathbb{T}\, min\{\|\Phi'(\zeta)x\| : \|x\| = 1\} > 0$.
2. *Il existe des fonctions* Φ *et* Ω *dans* $H^\infty(L(X))$ *avec* $\Phi|_{X'} = \Phi'$, $\Phi|_{X \ominus X'}$ *étant une fonction intérieure à gauche, telle que* $\Omega\Phi = mI_X$, *où* m *est une fonction intérieure scalaire.*

6.2 Version vectorielle

Le Lemme suivant constitue la première étape pour obtenir une généralisation du Chapitre 5 au cas des fonctions vectorielles.

Lemme 6.2.1 *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}_+, X)$ *et* $supp(f) \subset \Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$ *où* Λ *est un système lacunaire d'intervalles. On pose pour tout* $k \geq 0$, $f_k(x) = f(x + a_k)$, *avec* $supp(f_k) \subset [0, b_k - a_k]$ *et on suppose que,* *i)* $\sup_{k\geq 1}|b_k - a_k| \leq c < \infty$.

ii) $\left(\frac{f_k}{\|f_k\|}\right)_{k\geq 1}$ *est une suite relativement compacte dans* $L^2(0,\, c;\, X)$.

Alors, il existe une fonction non nulle $g \in L^2(0,\, c;\, X)$ *telle que* $S_t g \in E_f$ *pour tout* $t \geq 0$.

Remarque 6.2.1 *En fait, comme dans la preuve du Lemme 2.2.5 pour le cas discret, on peut démontrer bien plus même si par la suite ce n'est pas nécessaire. On peut prouver que la fonction g vérifie*

$$S_t g \in E_{S_u^* f} \quad \forall\, t,\, u \geq 0.$$

Preuve : C'est exactement le même raisonnement que dans la première partie de la preuve du Théorème 5.2.1 avec les modifications mineures techniques, de sorte qu'on remplace les produits $f_j(x - a_j + a_k)h_i(x)$ par des produits scalaires $(f_j(x - a_j + a_k),\, h_i(x))_X$, etc (voir aussi comme modèle, la preuve du Lemme 2.2.5 pour le cas discret). □

Maintenant, nous pouvons procéder de la même manière que dans le §3.3 pour le cas discret. Tout d'abord, nous introduisons l'analogue continu du produit $H^2 \otimes L$ du §3.3. Notamment, soit $c > 0$ et M un sous-espace de $L^2(0,\, c,\, X)$. Rappelons que nous regardons tout espace $L^2(a,\, b;\, X)$ comme sous-espace de $L^2(\mathbb{R}_+,\, X)$. On pose

$$L^2 \otimes M = span_{L^2(\mathbb{R}_+,\, X)}(S_t M \,:\, t \geq 0) = clos_{L^2(\mathbb{R}_+,\, X)}\Big(\sum_i \varphi_i * m_i \,:\, m_i \in M,\, supp(\varphi_i) \text{ compact}\Big),$$

où φ_i sont des fonctions de L^2 ou bien de L^1 (sans aucune influence pour le résultat) et les sommes sont finies. Avec cette notation, nous avons l'analogue suivant du Corollaire 3.3.1.

Corollaire 6.2.1 *Soit f comme dans le Lemme 6.2.1. Alors, il existe un sous-espace fermé* $M = M(f) \subset L^2(0,\, c;\, X)$ *tel que*

(a) $M(f) \neq \{0\}$.

(b) $L^2 \otimes M(f) \subset E_f$.

(c) Si $h \in L^2(0,\, c;\, X)$ *et* $L^2 \otimes h \subset E_f$, *alors* $h \in M(f)$, *("*$M(f)$ *est maximal").*

Preuve : En effet, le Lemme 6.2.1 donne l'existence d'un M satisfaisant (a) et (b). D'autre part, d'après la définition du "produit" $L^2 \otimes M$, il est clair que si $L^2 \otimes M_\alpha \subset E_f\, (\alpha \in A)$, alors $L^2 \otimes M \subset E_f$ où $M = span_{L^2(0,\, c;\, X)}(M_\alpha : \alpha \in A)$. D'où le résultat. □

le Théorème suivant contient les autres propriétés du sous-espace $L^2 \otimes M(f) \subset E_f$ du Corollaire 6.2.1 qui sont liées à la cyclicité éventuelle de f.

Théorème 6.2.1 *Soit f comme dans le Lemme 6.2.1, telle que la suite* $(f_k)_{k\geq 1}$ *est c.r.c. dans* $L^2(0,\, c;\, X)$ *et* $F = L^2 \otimes M(f)$, *le sous-espace de* E_f *défini dans le Corollaire 6.2.1. Alors,*

(i) $S_t F \subset F \subset E_f$ *pour tout* $t,\, t \geq 0$.

(ii) $f = g + h$ *où* $g \in F$ *et* $supp(h)$ *est compact.*

(iii) *Soit* $E_{M(f)} = span_{L^2(\mathbb{R}_+, X)}(S_t^* M(f) \, : \, t \geq 0)$, *le sous-espace* S_t^**-invariant engendré par* $M(f)$. *Alors,* $E_{M(f)} \subset L^2(0, c; X)$ *et*

$$E_f = clos_{L^2(\mathbb{R}_+, X)}(L^2 \otimes M(f) + E_{M(f)}),$$

et les sous-espaces $L^2 \otimes M(f)$ *et* $E_{M(f)}$ *sont de la forme*

$$L^2 \otimes M(f) = \mathcal{F}(\Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+, X_1)), \, E_{M(f)} = L^2(\mathbb{R}_+, X) \ominus \mathcal{F}(\Theta_2 H^2(\mathbb{C}_+, X_2)),$$

où, $X_i \subset X (i = 1, 2)$, $\mathcal{F}$ *étant la transformée de Fourier,* Θ_i *des fonctions matricielles intérieures à gauche,* $\Theta_i(z) : X_i \to X$ *et* Θ_2 *est un diviseur à gauche de* $e^{icz}. I_X$.

Preuve : Le (i) est évident par la définition de F.
(ii). C'est un analogue du raisonnement correspondant au Théorème 3.3.1. Notamment, on observe d'abord que la somme de toute série

$$g = \sum_{k \geq 1} S_{a_k} \varphi_k, \, \varphi_k \in M,$$

convergente dans $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ est dans $L^2 \otimes M$. En particulier, c'est le cas pour $\varphi_k = P_M f_k$ où f_k sont les fonctions de décomposition lacunaire de f, P_M étant la projection orthogonale sur M dans $L^2(0, c; X)$. Donc, la fonction

$$h = f - g = \sum_{k \geq 1} S_{a_k} P_{M^\perp} f_k$$

est dans E_f, où $M^\perp = L^2(0, c; X) \ominus M$. Il est clair que tous les points limites de la suite $(P_{M^\perp} f_k / \| P_{M^\perp} f_k \|)_{k \geq 1}$ sont dans $M^\perp$. Par conséquent, le support $supp(h)$ est compact (sinon en utilisant la propriété c.r.c. de $(f_k)_{k \geq 1}$, on applique à nouveau le Lemme 6.2.1 à h et on obtient une fonction non nulle $\varphi \in E_f \cap M^\perp$ telle que $S_t \varphi \in E_f$ pour tout $t \geq 0$; ceci contredit la définition de $M = M(f)$.
(iii). Il est clair que $L^2 \otimes M(f) \subset E_f$ et $E_{M(f)} \subset E_f \cap L^2(0, c; X)$, et donc

$$clos_{L^2(\mathbb{R}_+, X)}(L^2 \otimes M(f) + E_{M(f)}) \subset E_f.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, regardons une combinaison finie $g = \sum_k S_{a_k} \varphi_k$, $\varphi_k \in M$. Alors, pour tout $t \geq 0$, on a

$$S_t^* g = \sum_{a_k < t} S_t^* S_{a_k} \varphi_k + \sum_{a_k \geq t} S_t^* S_{a_k} \varphi_k = \sum_{a_k < t} S_{t - a_k}^* \varphi_k + \sum_{a_k \geq t} S_{a_k - t} \varphi_k,$$

où $\sum_{a_k < t} S_{t - a_k}^* \varphi_k$ est dans $E_{M(f)}$ et $\sum_{a_k \geq t} S_{a_k - t} \varphi_k$ dans $L^2 \otimes M(f)$. Ceci montre que le sous-espace S_t^*-invariant engendré par $L^2 \otimes M(f)$ et $E_{M(f)}$ est dans $clos_{L^2(\mathbb{R}_+, X)}(L^2 \otimes M(f) + E_{M(f)})$. Mais ce sous-espace contient E_f, donc $E_f \subset clos_{L^2(\mathbb{R}_+, X)}(L^2 \otimes M(f) + E_{M(f)})$, ce qui montre l'égalité du (iii).
Les représentations pour $L^2 \otimes M(f)$ et $E_{M(f)}$ découlent du Théorème de Lax-Halmos et du fait que l'inclusion

$$E_{M(f)} = L^2(\mathbb{R}_+, X) \ominus \mathcal{F}(\Theta_2 H^2(X_2)) \subset L^2(0, c; X) = L^2(\mathbb{R}_+, X) \ominus \mathcal{F}(e^{icz} H^2(X))$$

est équivalent à la divisibilité mentionnée dans l'énoncé (voir, par exemple, [19], p.19). $\square$

Nous passons maintenant aux transformées de Fourier de tous les objets, notamment

$$F = \mathcal{F}^{-1}(f) \in H^2(\mathbb{C}_+, X), \, \mathcal{E}_F = \mathcal{F}^{-1}(E_f) = span_{H^2(\mathbb{C}_+, X)}(P_+ e^{-itz} F : \, t \geq 0),$$

$$\mathcal{M}(f) = \mathcal{F}^{-1}(M(f)) \subset \mathcal{F}^{-1}(L^2(0, c; X)) = K_\theta = H^2(\mathbb{C}_+, X) \ominus \theta H^2(\mathbb{C}_+, X),$$

où $\theta = e^{icz}$,

$$H^2_+ \otimes \mathcal{M}(f) := \mathcal{F}^{-1}(L^2 \otimes M(f)) = span_{H^2(\mathbb{C}_+, X)}(e^{itz} \mathcal{M}(f) : \, t \geq 0) = \Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+, X_1),$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}(f)} = \mathcal{F}^{-1}(E_{M(f)}) = K_{\Theta_2} := H^2(\mathbb{C}_+, X) \ominus \Theta_2 H^2(\mathbb{C}_+, X_2).$$

Corollaire 6.2.2 *Sous les hypothèses du Théorème 6.2.1 et dans les notations données ci-dessus, on a*

$$\mathcal{E}_F = clos_{H^2(\mathbb{C}_+, X)}(\Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+, X_1) + K_{\Theta_2}),$$

et $dim\, X_1 = Rang(\mathcal{M}(f))$*, où*

$$Rang(\mathcal{M}(f)) = max(dim\{\Phi(z) : \, \Phi \in \mathcal{M}(f)\} : \, Im(z) > 0).$$

Preuve : En effet, la première formule est la transformée de Fourier de la formule (iii) du Théorème 6.2.1. La seconde découle de

$$dim\, X_1 = \max_z(dim\{\Phi(z) : \, \Phi \in \Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+, X_1)\},$$

ainsi que de la définition de Θ_1, $span_{H^2(\mathbb{C}_+, X)}(e^{itz} \mathcal{M}(f) : \, t \geq 0) = \Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+, X_1)$. $\square$

Lemme 6.2.2 *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}_+, X)$ *satisfaisant les conditions du Théorème 6.2.1, et supposons que* $dim\, X < \infty$*. Si* $Rang(\mathcal{M}(f)) = dim\, X$*, où* $\mathcal{M}(f) = \mathcal{F}^{-1}(M(f))$*, alors* $E_f = L^2(\mathbb{R}_+, X)$ *(*f *est cyclique).*

Preuve : C'est un analogue continu de la preuve de la suffisance dans (iv) du Théorème 3.3.1. Ainsi, lorsque $dim\, X_1 = dim\, X$ et donc $X_1 = X$, on a

$$(det\, \Theta_1) H^2(\mathbb{C}_+, X) \subset \Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+, X) \subset \mathcal{E}_F.$$

En utilisant le fait que $P_+ e^{-itz} \mathcal{E}_F \subset \mathcal{E}_F$, $t \geq 0$ de même façon que dans la preuve du Théorème 3.3.1, on obtient $\mathcal{E}_F = H^2(\mathbb{C}_+, X)$, d'où le résultat. $\square$

Théorème 6.2.2 *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}_+, X)$ *satisfaisant les conditions du Théorème 6.2.1, et supposons que* $dim\, X < \infty$*. Alors,* f *est cyclique pour le semi-groupe* $(S_t^*)_{t \geq 0}$ *dans* $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ *si et seulement si,*

$$Rang(\mathcal{M}(f)) = dim\, X,$$

où $\mathcal{M}(f) = \mathcal{F}^{-1}(M(f))$*.*

Preuve : La suffisance est déjà démontrée dans le Lemme 6.2.2. Réciproquement, soit f cyclique, donc

$$\mathcal{E}_F = H^2(\mathbb{C}_+,\, X) = clos_{H^2(\mathbb{C}_+,\, X)}(\Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+,\, X_1) + K_{\Theta_2}),$$

d'après le Corollaire 6.2.2. En posant $\theta = e^{icz}$ et en utilisant $K_{\Theta_2} \subset K_\theta$, on obtient

$$H^2(\mathbb{C}_+,\, X) = P_+\overline{\theta}(H^2(\mathbb{C}_+,\, X)) = clos_{H^2(\mathbb{C}_+,\, X)}(P_+\overline{\theta}\Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+,\, X_1)).$$

Celà entraîne que le sous-espace $\Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+,\, X_1)$ est $(P_+e^{-itz})_{t\geq 0}$-cyclique dans $H^2(\mathbb{C}_+,\, X)$.
Supposons maintenant que $Rang(\mathcal{M}(f)) < dim\, X$. Alors, par le Corollaire 6.2.2, $dim\, X_1 < dim\, X$. D'après le Lemme de Complémentation 6.1.1, il existe une fonction intérieure (bilatérale), $\Theta(z) : X \longrightarrow X$ telle que $\Theta|_{X_1} = \Theta_1$. Puisque la multiplication par une fonction intérieure à gauche est une application isométrique, on a que

$$\Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+,\, X_1) \perp \Theta' H^2(\mathbb{C}_+,\, X'),$$

où $X' = X \ominus X_1 \neq \{0\}$ et $\Theta' = \Theta|_{X'}$. Par conséquent, $\Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+,\, X_1) \perp e^{itz}\Theta' H^2(\mathbb{C}_+,\, X')$ pour tout $t \geq 0$, ce qui contredit la cyclicité mentionnée de $\Theta_1 H^2(\mathbb{C}_+,\, X_1)$. La contradiction montre que $Rang(\mathcal{M}(f)) = dim\, X$. □

Remarque 6.2.2 *Comme dans le cas discret (voir §2.4.), on peut montrer que le sous-espace S_t^*-invariant $E_{M(f)}$ étant inclus dans $L^2(0,\, c;\, X)$ admet la représentation de Fourier de sorte que*

$$E_{M(f)} = L^2(0,\, c;\, X) \ominus \mathcal{F}(\Theta H^2(X)),$$

où Θ est une fonction intérieure au spectre $\{0\}$. Celà entraîne, après le changement de variable $z = (x-i)/(x+i)$ et d'après le Théorème de factorisation 2.3.4, que

$$\Theta(z) = \int_a^{\curvearrowleft b} exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) d\mu(t),$$

où μ est une mesure matricielle positive. Malheureusement, comme dans le cas discret, celà ne revient pas à dire que $\Theta = exp\left(\frac{z+1}{z-1}A\right)$ où A est un opérateur dans X tel que $0 \leq A \leq I$. Dans le cas discret, on a réussit quand même à aboutir à un critère de cyclicité (un peu plus transparent qu'ici) parce que dans ce cas-là, ce sous-espace "de défaut" est de dimension finie.

Nous terminons avec un contre-exemple similaire à l'exemple à la fin du §3.3.

Exemple : Soit $X = \mathbb{C}^2$, $a_k = 2^k$, $b_k = 2^k + 2$, $f = (\varphi_1,\, \varphi_2)$ où $\varphi_1 = \sum_k g_k \chi_{\Delta_k}$ et g_k des fonctions continues non nulle sur $\Delta_k = [2^k+1,\, 2^k+2]$ telles que $\sum_k \|g_k\chi_{\Delta_k}\| < \infty$ et $\varphi_2 = S_1^*\varphi_1$.
Avec des g_k convenables, on peut avoir l'espace $M(f)$ de dimension infinie, mais toujours du rang $Rang(\mathcal{F}M(f)) = 1$. La fonction f, bien sûr, n'est pas cyclique. ■

Bibliographie

[1] E. V. Abakumov, *Cyclicity and approximation by lacunary power series*, Michigan.Math.J,42 (1995), no.2, 277-299.

[2] A. B. Aleksandrov, *Gap series and pseudocontinuations. An arithmetic approach*, (Russian) Algebra i Analiz 9 (1997), no. 1, 3–31 ; translation in St. Petersburg Math. J. 9 (1998), no. 1, 1–20

[3] A. B. Aleksandrov, *Lacunary series and pseudocontinuations*, translation in J. Math. Sci. (New York) 92 (1998), no. 1, 3550-3559.

[4] A. F. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. 81 (1949), 239-255.

[5] A. Borichev, H. Hedenmalm *Completeness of translates in weighted Hilbert spaces on the half-line*,

[6] L. Brown, A. L. Shields *Cyclic vectors in the Dirichlet spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 269-304.

[7] D. G. Cantor, *A simple construction of analytic functions without radial limits*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 1964 335-336.

[8] R. G. Douglas, H.S. Shapiro, A.L.Shields, *Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator*, Ann.Inst.Fourier(Grenoble), 20 (1970), fasc.1, 37-76.

[9] C. Foias, B. Sz. Nagy, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson et Cie et Akadémiai Kiado, Budapest, 1967. fasc.1, 37-76.

[10] Yu. P. Ginzburg, L. V. Shevchuk, *On the Potapov theory of multiplicative representations. Matrix and operator valued functions*, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser, Basel, 1994, 72, 28–47.

[11] G. Godefroy, J. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vectors manifolds*, J. of Funct. Anal. 98 no. 2 (1991), 229–269.

[12] V. P Gurarii, *Harmonic analysis in spaces with a weight*, Trudy Mosk. Matem. Obshch. 35 (1976), 21–76 (en russe) et Trans. Moscow Math. Soc. 35 (1979), 21–75.

[13] H. Hedenmalm, *Translates of functions of two variables*, Duke Math. J. 58 no.1 (1991), 251–297.

[14] H. M Hilden, L. J. Wallen, *Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators*, Indiana. Univ. Math. J. 23 (1973/74), 557–565.

[15] B. Jöricke, *Pseudocontinuation and properties of analytic functions on boundary sets of positive measure*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 126 (1983), 88–96.

[16] B. Korenblum, *Outer functions and cyclic elements in Bergman spaces*, J. of Funct. Anal. 115 (1993), 104-118.

[17] N. N. Luzin, I. I. Privalov, *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 42 (1925), 143-191.

[18] G. R. MacLane, *Holomorphic functions, of arbitrarily slow growth, without radial limits*, Michigan Math. J. 9 1962, 21-24.

[19] N. K. Nikolskii, *Treatise on the shift operator*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[20] N. K. Nikolskii, *Operators, functions, and systems : an easy reading*, Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. 216–217.

[21] N. K. Nikolskii, *Invariant subspaces in operator theory and function theory*, Mathematical analysis, Vol. 12 (Russian), pp. 199–412, 468. Akad. Nauk SSSR Vsesojuz. Inst. Naučn. i Tehn. Informacii, Moscow, 1974. ; Engl. transl. : J. Soviet. Math., 5 (1976), 129-249.

[22] N. K. Nikolskii, V.I. Vasyunin, *Control subspaces of minimal dimension. Elementary introduction*, Discotheca. (Russian) Investigations on linear operators and the theory of functions, XI. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 113 (1981), 41–75.

[23] N. K.Nikolskii, V.I. Vasyunin, *Control subspaces of minimal dimension and root vectors*, Integral Equations Operator Theory 6 (1983), no. 2, 274–311.

[24] N. K. Nikolskii, V.I. Vasyunin, *Classification of H^2-functions according to the degree of their cyclicity*, Math. USSR, 23, 225-242 (1984).

[25] B. Nyman, *on the one-dimensional translation group and semi-group in certain function spaces*, thèse, Uppsala, 1950.

[26] V. P. Potapov, *The multiplicative structure of J-contractive matrix functions*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 15 1960 131-243..

[27] H. Radjavi, P. Rosenthal *Invariant Subspaces*, Springer Verlag, 1973.

[28] S. Richter, C. Sundberg, *Invariant subspaces of the Dirichlet shift and pseudocontinuations*, Trans. Amer. Math. Soc. 341 no. 2 (1994), 863–879.

[29] W. Rudin, *Function theory in the in polydiscs*, Benjamin, W.A., 1969.

[30] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1987.

[31] A. L. Shields, *Weighted shift operators and analytic function theory*, "To. Oper. Theory", Math. Surveys 13, AMS, Providence, R. I, 1974, 49–128.

[32] V. I. Smirnov, *Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe*, J. de Société Math. et Phys. de Lénigrad 2 (1928), 155.

[33] S. R. Treil, *The Adamyan-Arov-Krein Theorem : Vectorial variant*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 141 (1985), 56-71. Translated in J. Soviet Math.

[34] S. Walsh, *Cyclic vectors for backward hyponormal weighted shift*, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 107–114.

[35] S. Walsh, *Noncyclic vectors for the backward Bergman shift*, Acta Sci. Math. 53 (1989), 105–109.

Résumé

Dans la première partie de la thèse, on va s'intéresser au problème ouvert de la cyclicité des séries lacunaires dans $H^2(X)$ où X est un espace de Hilbert séparable, on obtiendra un critère de cyclicité pour des séries lacunaires d'Hadamard dont la suite des coefficients de Taylor est complètement relativement compacte (c.r.c.). Notamment, la suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ est dite c.r.c. si, quelque soit la projection orthogonale $P : X \to X$, la suite normalisée $\{Px_n/\|Px_n\| \; : \; Px_n \neq 0\}$ est relativement compacte. On verra que cette classe de suites coincident avec toutes les suites lorsque X est de dimension finie et que pour tout X séparable, il existe des suites c.r.c. qui engendre l'espace X tout entier. En fait notre résultat permet de démontrer plus puisqu'on va parvenir à caractériser les sous-espaces S^*-invariants engendrés par ce type de séries. Dans cette description que nous obtiendrons apparait un sous-espace invariant engendré par un polynôme à valeur dans X et que l'on va expliciter en utilisant le langage de fonction intérieure matricielle. Nous verrons ensuite comment on peut se ramener au cas scalaire et donner un critère de cyclicité des séries lacunaires pour une puissance quelconque du shift adjoint ainsi que quelques corollaires annexes. Le cas plus général des séries dont le spectre est une réunion finie de suites lacunaires sera étudié sur certains exemples de nature particulière.
Nous généraliserons aussi ces résultats au polydisque. Dans la seconde partie, nous étudierons le problème dans le cas continu en l'occurrence dans l'espace $L^2(\mathbb{R}+)$ et pour le semi-groupe de translations à gauche. En utilisant la propriété d'unicellularité en théorie d'opérateurs intégral de Volterra, nous construirons une classe de fonctions cycliques pour le semi-groupe de translations à gauche étant un analogue continu des séries lacunaire de l'espace $\ell^2_a(X)$.

Mots-clé : Theorie des opérateurs, Shift adjoint, Semi-groupes de shifts adjoints, Vecteurs cycliques, Séries lacunaires.

Abstract

The first part of this thesis gives a description of invariant subspaces for the backward shift generated by vector valued lacunary series and by a class of lacunary power series in $H^2(X)$, (where X is an Hilbert space). In particular, we show that these series f in $H^2(X)$ are cyclic vectors if and only if the queue of Taylor coefficients $\widehat{f}(k)$, $k > N$ generates the whole space X. Analogs of this result are obtained for some functions whose spectrum is a finite union of lacunary sequences and in the polydisc. In the scalar case H^2, we give the criterion to have cyclicity of lacunary series for any power of the backward shift.
In the second part, we prove in the vector-valued spaces $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ (where X is a finite dimensional Hilbert space) the cyclicity for the semi-group of left translations of some particular functions with support included in a lacunary system of intervals.

Keywords : Operator theory, Backward shift, Semi-groups of backward shifts, Cyclic vectors, Lacunary series.