

Benjamin BRACONNIER

**Modélisation numérique d'écoulements multiphasiques pour
des fluides compressibles, non miscibles et soumis aux effets capillaires**

2007

Modélisation numérique d'écoulements multiphasiques pour des fluides compressibles, non miscibles et soumis aux effets capillaires.

Résumé

Ce travail porte sur la modélisation numérique d'écoulement faisant intervenir plusieurs fluides faiblement ou fortement compressibles. Les applications concernent les écoulements à poches pour lesquels les fluides sont séparés d'interfaces et les écoulements dispersés pour lesquels les interfaces, trop nombreuses, ne peuvent être toutes décrites. L'objectif est de développer des méthodes numériques traitant indifféremment ces deux classes d'écoulement. Dans ce contexte, nous considérons des modèles d'interfaces diffuses. L'interface n'est pas déterminée de manière explicite, elle est modélisée à l'aide d'une zone de mélange artificielle permettant de respecter les échanges qui y ont lieu. En particulier, les effets capillaires seront reformulés à l'aide d'une force volumique suivant la méthode CSF. Une difficulté majeure dans ce travail est liée à la nécessité de résoudre des systèmes hyperboliques non conservatifs. Leur résolution sera approchée et basée sur des solveurs hyper consistants. Nous exposerons également une technique originale de préconditionnement pour les régimes faible Mach et une formulation implicite des méthodes. Des expériences numériques avec des physiques variées seront proposées : des remontées de bulle, des interactions choc bulle et la chute d'une goutte d'eau.

Mots clés : Écoulement multiphasique, systèmes non conservatifs, méthode d'interface diffuse, tension de surface, solveur équilibre, schéma de relaxation, préconditionnement faible Mach, calcul parallèle, schéma implicite.

Numerical modelling of compressible multiphase flows with non-miscible fluids and capillary effects.

Abstract

This work deals with the numerical modelling of flows involving several weakly or strongly compressible fluids. We are concerned with interface flows for which fluids are separated by interfaces and spray where too many interfaces needs to be modelled. Thus, we propose the development of numerical methods that can deal with both regimes. In this context, we consider diffuse interface methods : the interface is resolved by an artificial mixture zone consistent with the physical interface properties. In particular, capillary effects are formulated as a volumic force according to the CSF method. One of the main difficulty in this work is related to the necessity to solve hyperbolic non-conservative systems. We formulate an hyper consistency property and use it to define discrete non-conservative operators. Then, we exhibit an original preconditioning technique for low Mach flows and an implicit formulation of our methods. Several numerical experiments are proposed : rising bubbles, chock bubble interactions and a falling water drop.

Keywords : Multiphase flow, non-conservative systems, diffuse interface, surface tension, well balanced solver, low Mach preconditioning, relaxation scheme, implicit scheme, parallel computing.

Discipline : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Laboratoire : Mathématiques Appliquées de Bordeaux - Université de Bordeaux 1
33405 Talence Cedex

N°d'ordre : 3381

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Benjamin BRACONNIER

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Modélisation numérique d'écoulements multiphasiques pour des fluides compressibles, non miscibles et soumis aux effets capillaires.

Thèse dirigée par Boniface NKONGA

Soutenue le : 13 juin 2007

Après avis de :

E. DANIEL, Professeur	IUSTI, Marseille	Rapporteur
P. HELLUY, Professeur	U. de Strasbourg	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

C. BERTHON, Maître de conférence	U. de Bordeaux 1	Examineur
P. CHARRIER, Professeur	U. de Bordeaux 1	Président
J. CLAUDEL, Ingénieur	CEA CESTA	Examineur
E. DANIEL, Professeur	IUSTI, Marseille	Rapporteur
P. HELLUY, Professeur	U. de Strasbourg	Rapporteur
J. P. LAMBELIN, Ingénieur	CEA CESTA	Invité
B. NKONGA, Maître de conférence	U. de Bordeaux 1	Directeur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier tout particulièrement Boniface Nkonga, qui m'a dirigé durant cette thèse. Sa disponibilité, sa grande compétence, son exigence mais aussi sa sympathie et ses grandes qualités humaines m'ont permis de mener avec rigueur et persévérance ce travail. Je le remercie également de m'avoir permis d'intégrer mes développements dans le logiciel FluidBox et ainsi de bénéficier de l'ensemble des outils qu'il contient.

Je remercie Eric Daniel et Philippe Helluy d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques m'ont permis d'améliorer le présent document. Je leur en suis très reconnaissant.

J'ajoute un grand merci à mon encadrement CEA Jean Claudel qui, malgré les tâches qui lui incombent, a toujours su trouvé le temps pour m'accorder son soutien scientifique, informatique et administratif.

Je souhaite également exprimer toute ma reconnaissance envers Christophe Berthon qui m'a épaulé tout au long de ces quatre années. Christophe a toujours été présent au bon moment, aussi bien pour me guider dans mes recherches ou pour me transmettre des conseils pratiques précieux.

Je remercie Xavier Carlotti, Michel Mandallena et Jean Roman de m'avoir accueilli dans leurs laboratoires respectifs : le CEA et l'Inria Futur.

Un grand merci à Mickael Papin pour l'aide qu'il m'a apporté. Ses travaux de thèse et de post-doc m'ont également permis de gagner beaucoup de temps lors du développement de FluidBox.

Je remercie mes joyeux amis stagiaires, thésards, ingénieurs du CEA, de CS, du MAB et de l'INRIA ScAIApplix : Anthony, Julien, Dimitri, Mikaël, Guillaume, Nicolas, Guilhem, Gaël, Jérémie, Adam, Robin, Mathieu, Mathieu, Cédric et Cédric, Paul, Sylvain, Vincent...

Je remercie Ludo et Jessie d'avoir supporté mon humeur pesante et rageuse tous les midis de la semaine.

Finalement, j'adresse un grand merci à ma famille pour le soutien moral qu'elle m'a fourni tout au long de la réalisation de ces travaux.

Ce travail de thèse a été financé par une bourse BDI CNRS cofinancée par le CEA.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Modélisation des écoulements multiphasiques	15
2.1	Modèle complet	16
2.1.1	Dérivation d'un modèle mésoscopique	16
2.1.2	Forces capillaires	19
2.1.3	Relations constitutives : loi d'état	23
2.1.4	Modèle d'interface	25
2.1.5	Formulation dissipative à l'équilibre de température	33
2.1.6	Résumé du modèle de base	36
2.2	Stratégie de résolution	37
2.2.1	Résolution des termes de propagation	38
2.2.2	Résolution des termes sources	39
2.2.3	Résolution des termes de relaxation	39
2.3	Le modèle asymptotique	44
2.3.1	Dérivation du modèle	44
2.3.2	Fermeture thermodynamique à l'équilibre de pression	48
2.3.3	Étude mathématique du modèle asymptotique	48
2.3.4	Entropie	50
2.3.5	Résumé du modèle asymptotique	50
2.4	Conclusion	51
3	Schémas numériques non conservatifs 1D	53
3.1	Solveurs équilibre	55
3.1.1	Solveurs équilibre pour le modèle de base	55
3.1.2	Solveurs équilibre pour le modèle asymptotique	61
3.2	Schémas de relaxation	65
3.2.1	Schéma de relaxation pour le modèle de base	66
3.2.2	Schéma de relaxation pour le modèle asymptotique	73
3.2.3	Limite incompressible	80
3.2.4	Généralisation des schémas de relaxation	86
3.3	Méthode d'ordre élevée	90
3.3.1	Ordre 2 en espace	90
3.3.2	Ordre 2 en temps	92
3.4	Conclusion	93

4	Résultats numériques monodimensionnels.	95
4.1	Validation élémentaire	95
4.1.1	Tube à choc entre fluides purs	95
4.1.2	Tube à choc pour des fluides non purs	96
4.2	Validation pour des tubes à chocs forts	101
4.3	Conclusion	104
5	Approximation numérique multi-D	109
5.1	Les opérateurs de propagation en dimension 3	109
5.2	Décomposition en volumes finis	111
5.3	Méthode de type Godunov	112
5.4	Approximation de la tension de surface	114
5.5	Approximation en formulation axisymétrique	126
5.6	Extension MUSCL	126
5.7	Schémas implicites	132
5.8	Conclusion	133
6	Résultats numériques multidimensionnels	135
6.1	Calcul Parallèle	135
6.2	Validation : convergence en maillage	136
6.3	Interaction choc bulle	137
6.4	Chute d'une bulle en 2D	140
6.5	Montée d'une bulle en dimension trois	144
6.6	Conclusion	147
	Conclusion et perspectives	149
	Bibliographie	152
A	Rappels et définitions usuels	159
B	Extension à l'ordre 2 des schémas conservatifs	173
C	Limiteurs de pentes	175
D	Analyse dimensionnelle	177
E	Solveurs pour les systèmes multifluides	179
E.1	Solveur à 3 états pour le modèle asymptotique	179
E.2	Solveur acoustique pour le modèle asymptotique	180
E.3	Matrice de Roe pour le modèle de base	181
F	Validations numériques des schémas 1D	185

Chapitre 1

Introduction

L'étude des écoulements multiphasiques a fait l'objet de nombreux travaux de recherche au cours de ces dernières années. L'atomisation d'un jet, l'écoulement autour d'un avion par temps de brouillard, la dynamique des fluides contenus dans un réservoir sous l'effet du tangage sont des exemples concrets d'écoulements faisant intervenir plusieurs fluides. La diversité des échelles présentes dans un même phénomène rend la simulation numérique difficile et très coûteuse. Néanmoins, l'évolution des puissances de calcul permet aujourd'hui d'envisager des résolutions numériques assez fines. Ceci n'est possible qu'au prix d'efforts plus importants dans la stratégie de résolution. Les points à améliorer sont de nature :

- physique, les modèles mathématiques doivent être plus riches et comprendre, par exemple, les effets de compressibilité, de viscosité, de tension de surface et les changements de phase.
- numérique, les schémas numériques doivent présenter de bonnes propriétés de consistance, de stabilité et être précis. La résolution d'expériences évoluant sur des temps longs nécessite le développement de schémas numériques implicites.
- algorithmique, les techniques de calcul parallèle sont indispensables pour envisager des simulations numériques dans un contexte industriel. L'utilisation de la mémoire doit également être optimisée.

Cette thèse traite de ces trois points. Le but est de développer une stratégie d'approximation en maillages non structurés pour la résolution numérique d'écoulements à interfaces dans des régimes allant des écoulements à poches aux écoulements à phases dispersées.

Nous considérons la simulation numérique d'écoulements faisant intervenir plusieurs fluides faiblement ou fortement compressibles. Ces fluides sont non miscibles et séparés par des interfaces pouvant avoir des topologies complexes (éclatement d'une bulle de gaz à la surface d'un liquide). L'évolution des interfaces et les échanges qui ont lieu dans cette zone d'interfaces jouent un rôle très important dans de tels écoulements. Citons l'exemple d'une goutte suspendue sur la paroi supérieure d'un domaine. Dans ce cas, le rapport entre les effets de gravité et les effets capillaires conditionne la stabilité ou la chute de la goutte (loi de Tate). Les écoulements multiphasiques à interfaces sont présents dans un grand nombre d'applications industrielles. A titre d'illustration, nous détaillons deux exemples concrets :

- écoulement de pétrole dans des conduites

Lors de l'extraction de pétrole, non raffiné et encore mélangé à de l'eau, celui-ci est

transporté à l'aide de conduites souterraines et horizontales sur de longues distances (40 km). A l'occasion de ce transport, des bouchons peuvent se former et induire des efforts de grandes amplitudes sur les parois des conduites et causer, dans certains cas, leur rupture. La problématique sous-jacente est la détermination d'une vitesse de pompage du pétrole dans les conduites assurant un bon débit mais limitant les risques de formation de bouchons et de ruptures de conduite.

– tangage d'un réservoir

Le tangage s'observe, par exemple, lorsqu'un pétrolier est soumis aux effets de la houle. Dans ce cas, les masses liquides contenues dans les réservoirs lorsqu'ils ne sont pas complètement remplis, se déplacent. Suivant les fréquences du tangage, l'interface séparant les liquides de l'air peut présenter une dynamique très complexe incluant des instabilités qui impactent les cloisons transversales du réservoir. Celles-ci occasionnent un effort ponctuel violent. L'enjeu est ici double. D'une part le réservoir doit être dimensionné de manière à ce que les interfaces des fluides contenus aient une fréquence de résonance très éloignée des fréquences d'excitations induites par la houle. Le second point concerne le calcul de l'inertie des fluides de manière à ce que le dispositif de pilotage compense automatiquement l'énergie apportée par les fluides sur le navire.

Le problème de tangage doit aussi être pris en compte lors de la construction d'engins spatiaux (fusée, missile). Le combustible qui alimente les moteurs ou réacteurs est contenu dans des réservoirs dont la masse et la taille sont relativement très importantes en regard de l'ensemble de l'engin.

En fonction des régimes considérés et des dynamiques d'interfaces, deux classes de méthodes numériques sont couramment utilisées pour la résolution d'écoulements multiphasiques : les *méthodes de suivi d'interface* qui reposent sur une définition explicite de la position de la surface d'interface et les *méthodes d'interface diffuse* qui, à l'aide d'un processus d'homogénéisation, permettent de s'affranchir de cette définition. Nous présentons maintenant plus en détail ces deux classes de méthodes.

Les méthodes de suivi d'interface sont très utilisées pour l'étude d'écoulements à poche (les tailles caractéristiques des phénomènes sont du même ordre que les dimensions du domaine). Les modèles mathématiques correspondants sont construits en supposant que chaque fluide est gouverné, dans le volume qu'il occupe, par les équations de Navier Stokes. Les méthodes numériques associées sont basées sur une reconstruction explicite de l'interface. Trois stratégies numériques sont couramment utilisées à cet effet. La méthode *front tracking* [99] repose sur l'advection de marqueurs : points mobiles appartenant à l'interface. Notons que cette méthode nécessite l'utilisation d'un algorithme permettant de répartir au mieux les marqueurs. La méthode VOF (*Volume Of Fluid*) [58] utilise une fonction couleur gouvernée par une équation de transport. Une procédure reconstruit, a posteriori, l'interface et permet ainsi de contrôler la diffusion numérique. Pour ces deux méthodes, les surfaces dont la topologie est relativement complexe en regard de la taille des éléments du maillage, posent en pratique des problèmes de gestion délicats (scission, coalescence de bulle). La méthode *level set* [81] est basée sur une fonction caractérisant la distance à l'interface qui est transportée et régulièrement reconstruite. La transmission d'ondes acoustiques au travers des surfaces d'interfaces est un point difficile pour les méthodes de suivi d'interfaces : elle peut générer des ondes parasites ou occasionner une perte de conservation.

Les méthodes d'interfaces diffuses s'appliquent aussi bien aux écoulements à poche qu'aux écoulements dispersés. Dans ce contexte, la notion d'interface n'est plus définie de manière explicite. Un volume élémentaire peut être occupé par les deux fluides à la fois. Une fonction couleur (fractions volumiques, fractions massiques) permet de quantifier le taux de présence de chaque fluide. Dans le cas d'écoulements à poches, les interfaces sont alors assimilées à des zones de faible épaisseur dans lesquelles les fonctions couleur varient. Pour les écoulements dispersés, les structures rencontrées sont trop nombreuses et trop petites. Le taux de présence sur un volume élémentaire sera donc obtenu à l'aide d'une moyenne. La modélisation des échanges ayant lieu au niveau des interfaces reposera sur une stratégie d'homogénéisation. Elle devra rendre compte des échanges de masse, d'énergie ou d'efforts entre les fluides, assurer une transmission correcte des ondes acoustiques et la conservation globale des fluides. Les méthodes d'interfaces diffuses s'obtiennent à l'aide de processus d'homogénéisation soit des équations discrètes, soit des équations continues gouvernant les fluides.

La méthode DEM (*discrete element method*) a été introduite par Abgrall et Saurel dans [5] et plus récemment étudiée par Papin [84]. Elle repose sur une homogénéisation des équations discrètes approchant le comportement des fluides. La modélisation de l'interface repose sur une approche semi probabiliste utilisant des problèmes de Riemann entre fluides purs. Notons que cette méthode ne nécessite pas la connaissance explicite de la vitesse et de la pression au niveau de l'interface. En pratique, la méthode DEM s'avère très coûteuse [5] et son utilisation est donc restreinte à certains phénomènes stationnaires [82] ou dont les temps caractéristiques sont courts (propagation d'ondes acoustiques).

De nombreux modèles mathématiques sont obtenus en considérant une homogénéisation des équations de Navier Stokes de chaque fluide au niveau continu [12, 66, 50, 5, 38, 2]. La modélisation des propriétés de l'interface fait intervenir des opérateurs différentiels non conservatifs et non linéaires et des termes sources. Leurs expressions requièrent la connaissance de la vitesse et de la pression à l'interface. Ces variables sont estimées en considérant des relations de fermetures spécifiques à la nature de l'écoulement étudié.

L'inconvénient majeur des méthodes d'interface diffuse est dû à l'impossibilité de contrôler exactement l'épaisseur des zones de mélange artificiel.

Dans le cadre de cette thèse, nous concentrons nos efforts d'une part sur l'approximation des modèles compressibles, y compris dans les régimes faible Mach, et d'autre part sur la modélisation numérique de la tension de surface. Les difficultés sont liées au caractère non conservatif et à la non linéarité des opérateurs mathématiques. Les applications cibles pour cette thèse comportent des changements de volumes et des variations importantes de température. Par conséquent, il est impératif de prendre en compte les effets de compressibilité même lorsque l'une des phases en présence est très faiblement compressible, son comportement thermodynamique étant modélisé à l'aide de loi à paramètres ajustables. Cette stratégie nous affranchit des problèmes de couplage de modèles compressibles et incompressibles. Nous considérerons des méthodes d'interface diffuse basées sur le modèle mathématique de Baer et Nunziato [12]. Notre étude traitera également les phénomènes faisant intervenir des dynamiques de bulles, gouttes ou interfaces. Dans ce contexte, les effets capillaires ont un rôle capital et doivent être pris en compte. Remarquons que, dans notre cas, la modélisation de la force de tension de surface est a priori délicate car les méthodes d'interface diffuse ne fournissent pas de localisation explicite de l'interface. En s'appuyant la méthode CSF (*Continuum Surface Force*) développée par Brackbill [28], les

effets capillaires seront reformulés à l'aide d'une force volumique nécessitant des fonctions Dirac régularisées associées à l'interface.

Les modèles mathématiques considérés sont les modèles de Baer Nunziato [12], de Kapila [66] et de Massoni [75]. Ils sont non conservatifs et de nature hyperbolique. Dans le cadre d'une approche de type volumes finis, les formulations faibles associées sont mal posées du fait de la présence d'opérateurs non conservatifs. La recherche de solutions exactes s'effectue en utilisant un cadre mathématique spécifique [41] reposant sur une régularisation parabolique effective des systèmes. Malheureusement, l'unicité des solutions ne peut pas, en général, être prouvée [59, 7].

D'un point de vue pratique, la mise au point de schémas numériques est délicate [59]. Leur construction repose en général sur un critère de consistance prévenant l'oscillation de la pression au niveau des interfaces physiques [1, 75, 10]. Elle s'effectue en identifiant un opérateur conservatif et des opérateurs non conservatifs. Le premier est discrétisé en utilisant les solveurs HLL [75], Roe [10] ou acoustique [52]. Les opérateurs non conservatifs discrets sont alors déduits, à posteriori, en s'appuyant sur le critère de consistance. En s'inspirant des travaux [1], nous avons, dans un premier temps, généralisé cette méthode pour tous les solveurs de type Godunov. Cependant ces schémas numériques, de part leur construction, découplent, dans un certain sens, les effets de l'opérateur conservatif des effets des opérateurs non conservatifs. De plus, cette technique ne s'applique qu'aux systèmes présentant intrinsèquement un critère de consistance aux interfaces.

L'autre type de schéma numérique considéré dans cette thèse repose sur les solveurs de relaxation de type Suliciu [96]. Ces solveurs ont initialement été introduits par Jin et Xin [65] et plus récemment développés pour des applications diverses [14, 16, 20, 21, 23, 32]. Les solveurs de relaxation permettent d'approcher les solutions de systèmes fortement non linéaires et de ce fait difficile à résoudre. Pour cela, un système du premier ordre avec perturbation singulière est défini de manière à ce que sa solution approche, dans un sens à définir, la solution du système initial. Nous exigeons, de plus, que cette solution approchée soit facile à obtenir et s'exprime à l'aide de relations analytiques simples. Dans le cas de systèmes non conservatifs, les solveurs de relaxation que nous avons développés fournissent une régularisation visqueuse implicite des opérateurs non conservatifs et donnent des bonnes approximations des solutions des systèmes multifluides considérés.

La modélisation de la tension de surface s'effectue suivant la méthode CSF (continuum surface force) [28]. Elle reformule les effets capillaires à l'aide d'une force volumique utilisant une régularisation de la fonction Dirac de l'interface. Les termes modélisant la tension de surface selon la méthode CSF sont des opérateurs différentiels d'ordre élevés, non conservatifs et fortement non linéaires. Leur résolution numérique est donc difficile. Les techniques de décomposition d'opérateurs (*splitting*) sont très largement utilisées, bien que connues pour générer des courants parasites [62]. En particulier, lors de reproduction d'expériences, les courants parasites gênent pour l'obtention de bulles à l'équilibre, régies par la loi de Laplace. Nous considérerons donc une résolution ne découplant pas les termes de tension de surface des opérateurs différentiels du premier ordre présents dans les systèmes. En utilisant la formulation conservative des termes de tension de surface proposée par Scardovelli et Zaleski [51], Périgaud et Saurel [85] ont récemment construit un solveur de Roe incluant les effets capillaires. Celui-ci permet une bonne résolution des interfaces physiques gouvernées par la loi de Laplace. Nous proposerons un solveur de relaxation pour les systèmes de Kapila et de Massoni avec les termes de tension de surface

sous leur forme non conservative.

Les écoulements multifluides pour lesquels le nombre de Mach est faible seront également étudiés. Deux régimes d'écoulements peuvent être identifiés dans ce contexte. Le premier régime dénommé 'acoustique' correspond à la limite lorsque la compressibilité des fluides est dominante si bien que le modèle asymptotique est restreint à la caractérisation du comportement des ondes acoustiques. Le second régime porte sur un écoulement dont les effets acoustiques sont résiduels. Dans ce cas, bien que les vitesses de convection des fluides soient très faibles en regard de la vitesse de propagation des ondes acoustiques, ils déterminent l'écoulement. Notre étude porte sur cette limite. Nous montrerons que les schémas numériques précédemment développés sont mal adaptés pour résoudre ce type d'écoulement. En effet, les imprécisions liées à l'approximation des ondes acoustiques altèrent grandement la qualité des résultats. L'utilisation des techniques de préconditionnement de Turkel [98] permet alors de limiter le phénomène de bruit et, ainsi, d'obtenir les solutions adéquates. En découplant les échelles de temps liées à l'évolution des ondes acoustiques et celle des ondes matérielles, le formalisme des schémas de relaxation apporte une justification à ces techniques. Le préconditionnement faible Mach apparaît alors comme un filtre sur les petites échelles acoustiques. Le schéma final est similaire à celui proposé par Guillard et Murrone [53] dans le cas du modèle de Kapila [66]. Le formalisme développé est plus général et ouvre une voie dans la construction de schémas numériques, consistants avec une limite asymptotique, et pour lesquels la technique proposée par Turkel n'est pas directement applicable.

Dans le contexte industriel, certaines expériences évoluent sur des temps longs. Afin d'envisager leur résolution, des schémas numériques implicites seront développés. Ils seront obtenus en considérant une linéarisation des schémas de relaxation écrits sous une forme intégrale pour laquelle les parties convective et dissipative sont isolées. Dans le cas de régimes faible Mach, les matrices issues de la linéarisation des schémas numériques préconditionnés présentent un très mauvais conditionnement. De ce fait, l'utilisation d'algorithmes itératifs nécessite la mise au point de préconditionneurs très évolués qui, en général, sont peu performants pour le calcul parallèle par décomposition de domaine. Or l'approche parallèle par échange de messages et par décomposition de domaine est indispensable dans le cadre d'applications industrielles. Nous considérerons donc l'utilisation d'un solveur direct parallèle pour matrices creuses [57] et évaluerons ses performances par rapport aux méthodes itératives.

Plan du document de thèse

Le premier chapitre décrit les modèles mathématiques d'interface diffuse utilisés dans la thèse. A partir d'une homogénéisation des équations gouvernant les fluides au niveau continu, nous retrouvons le modèle de Baer et Nunziato [12] comportant sept équations en dimension un. Ce modèle comprend des forces de surface qui sont modélisées en utilisant des opérateurs de régularisation. Ces forces admettent alors une formulation volumique conforme à la méthode CSF [28] et dont l'expression est constituée d'opérateurs différentiels non conservatifs et fortement non linéaires. Nous aborderons ensuite les relations de fermeture nécessaires au modèle de Baer Nunziato. Les premières concernent la modélisation des propriétés thermodynamiques des fluides. Pour cela, des lois de type *Stiffened gas* seront développées. Les coefficients qu'elles utilisent seront évaluées en fonction de la nature très faiblement ou fortement compressible des fluides et des régimes

considérés. Le deuxième type de fermeture est lié à l'estimation des vitesses et pressions interfaciales. Nous présentons une technique qui généralise les travaux de Seguin [36]. Elle est basée sur une caractérisation mathématique spécifique de l'interface permettant de respecter la loi de Laplace. La dernière fermeture concerne les termes de production qui seront déterminées de manière à favoriser l'existence d'une inégalité de type Clausius Duhem. Après avoir défini une stratégie de résolution pour le modèle de base, nous mettrons en évidence le besoin de considérer un modèle asymptotique. Celui-ci est obtenu en dérivant le modèle de Baer Nunziato. Il comporte cinq équations en dimension un et est inconditionnellement hyperbolique et entropique.

Dans le second chapitre, nous considérerons l'étude de schémas numériques en dimension un d'espace. Notre approche est basée sur une formulation volumes finis. Dans ce contexte, les schémas numériques ne peuvent être déduits de la résolution approchée de problèmes de Riemann. Nous considérerons dans un premier temps des solveurs d'équilibre [1]. Ces solveurs reposent sur l'identification de relations de consistance entre les opérateurs conservatifs et non conservatifs. Les opérateurs conservatifs sont d'abord discrétisés en utilisant des solveurs de type Godunov. L'approximation des opérateurs non conservatifs est déduite, *à posteriori*, à l'aide des relations de consistance. Nos travaux ont consisté à généraliser les schémas numériques existants [1, 75, 10] à l'ensemble des schémas de type Godunov pour les modèles de Baer Nunziato et asymptotique. Le second type de solveur est basé sur les schémas de relaxation de type Suliciu [96]. Ils reposent sur la construction d'un système 'dissipatif' dont les solutions exactes s'expriment de manière analytique. Elles doivent également être de bonnes approximations des solutions du système initial. Les schémas numériques associés sont implémentés à l'aide d'une méthode de Godunov utilisant la solution exacte du système de relaxation. Afin d'assurer des propriétés de stabilité, une condition sous-caractéristique de Witham est exhibée. Ensuite, en utilisant, le formalisme introduit par Gallice [43], nous effectuerons une comparaison des solveurs de relaxation et des solveurs d'équilibre et proposerons leur généralisation à une classe de modèles mathématiques non conservatifs. Les schémas numériques développés seront ensuite étendus à l'ordre 2 en espace et en temps. Le dernier point concerne la résolution d'écoulement dans les régimes faibles Mach. Après avoir montré que les schémas numériques précédents sont mal adaptés à ce régime, nous proposerons une interprétation de la technique de préconditionnement de type Turkel à l'aide du schéma de relaxation. Celui-ci sera obtenu en découplant les échelles de temps liées aux ondes acoustiques et matérielles et en filtrant les phénomènes associés aux petites échelles. Remarquons que, à l'aide du formalisme du solveur de relaxation, la stabilité des schémas numériques préconditionnés peut être étudiée.

Le chapitre trois regroupe des simulations numériques d'expériences monodimensionnelles. Le but est d'effectuer une comparaison des modèles utilisés et de déterminer les régimes qui leur sont les plus appropriés. Ces expériences permettront, de plus, la validation des schémas numériques précédemment introduits en s'appuyant sur les travaux [60, 82]. Les premières expériences [82] comportent des tubes à choc entre fluides purs et ensuite entre fluides mélangés. Elles utilisent de la loi de *Stiffened gas*. Elles permettront de caractériser la physique la plus adaptée à chaque modèle. Les autres expériences, initialement proposées par Hu et Khoo [60], sont composées de tubes à choc entre fluides purs obéissant à la loi des gaz parfaits. Les fluides sont soumis à de très fortes variations de pression et de densité. Ces expériences, difficiles à reproduire par la simulation numérique,

montreront la robustesse des schémas numériques développés.

Dans le chapitre quatre, nous aborderons l'approximation d'écoulements multidimensionnels. Après avoir écrit les équations gouvernant les fluides en dimension trois et présenté les simplifications relatives aux géométries axisymétriques et 2D plan, les méthodes de résolution précédemment introduites seront étendues en dimensions supérieures. Pour cela, nous définirons une décomposition en volumes finis du domaine. Elle nous permettra de formuler des schémas numériques reposant sur des fluctuations monodimensionnelles. La discrétisation des termes liés à la modélisation CSF des effets capillaires sera ensuite étudiée. Cette méthode nécessite la connaissance d'une fonction couleur. Nous montrerons que les variables qui décrivent les fluides ne peuvent être utilisées à cet effet. La fonction couleur sera donc évaluée à l'aide d'opérateurs de régularisation afin de contrôler exactement la zone dans laquelle agit la force. Des filtres seront également mis en place pour améliorer l'évaluation de la normale et de la courbure en fonction de l'échelle de la modélisation. Nous développerons ensuite des schémas numériques incluant les effets capillaires et éliminant les problèmes liés aux courants parasites [62]. Notre approche sera basée sur un solveur de relaxation résolvant l'ensemble des opérateurs différentiels présents dans les modèles. Des preuves mathématiques et expérimentales montreront que notre solveur résout exactement les discontinuités de contact soumises à la tension de surface. La précision des schémas numériques sera améliorée en développant une technique de type MUSCL [71] spécialement adaptée à nos problèmes non conservatifs. Nous proposerons enfin une formulation implicite basée sur une linéarisation des contributions conservatives et non conservatives.

Dans le chapitre cinq, des expériences numériques 2D et 3D illustreront les méthodes développées dans cette thèse. La première concerne la remontée d'une bulle d'air contenue dans de l'eau. Nous réaliserons cette expérience dans le cas d'une géométrie 2D plan et axisymétrique. Compte tenu de la taille de cette expérience, les effets capillaires seront négligés. L'expérience est reproduite à l'aide de maillage de plus en plus fin dans le but de caractériser les moyens qui doivent être mis en oeuvre en fonction de la taille caractéristique des phénomènes étudiés. Le deuxième type d'expérience consiste en des interactions choc bulle expérimentalement effectuées par Haas et Sturtevant [54]. Ces expériences ont pour but de montrer les possibilités de notre logiciel pour traiter des problèmes avec une résolution très fine. Les calculs sont réalisés avec 11.5 millions d'inconnues et réparties sur 64 processeurs à l'aide des techniques de calcul parallèle par passage de message. Nous considérons ensuite une expérience réalisée par Périgaud et Saurel [85]. Une goutte, initialement en contact avec la paroi supérieure d'un domaine, se rompt et tombe sous l'effet de la gravité. L'utilisation des techniques de préconditionnement pour les régimes faible Mach nous permettra de reproduire cette expérience avec une grande précision et sans en modifier les tailles caractéristiques. La dernière expérience concerne la remontée d'une bulle en dimension trois.

Nous présenterons enfin les conclusions inspirées par cette thèse et les perspectives de recherches futures qu'elle soulève.

Les travaux réalisés dans cette thèse ont fait l'objet de communications lors de congrès internationaux et de publications :

COMMUNICATIONS LORS DE CONGRES INTERNATIONAUX

Relaxation method based solvers for multi-fluid flows.

DFG-CNRS workshop : Micro-Macro Modelling and Simulation of Liquid-Vapour Flows, 10-12 Janvier 2007, Bordeaux, France.

Efficient technique for solving low Mach number compressible multiphase problems.

PMAA'06, 7-9 Septembre 2006, Rennes, France.

Gagnant du prix jeune chercheur.

A relaxation method based solver for the Kapila model.

ICCFD, 10-14 Juillet 2006, Gent, Belgique.

A relaxation based solver for multi-fluid flows with surface tension.

ENUMATH, 18-22 Juillet 2005, Santiago de Compostella, Espagne.

Numerical approximation of a degenerated non-conservative multi-fluid model : relaxation scheme.

ICFD, 29 Mars - 1 Avril 2004, Oxford, Angleterre.

Sélectionné pour 'ICFD SPECIAL ISSUE'.

LISTE DES PUBLICATIONS

B. Braconnier, B. Nkonga, M. Papin, P. Ramet, M. Ricchiuto, J. Roman and R. Abgrall,
Efficient solution technique for low Mach number compressible multiphase problems.
Proceeding PMAA'06.

B. Nkonga, B. Braconnier and J. Claudel,
Relaxation based Godunov type scheme for low Mach multiphase flows.
Proceeding ECCOMAS CFD 2006.

C. Berthon, B. Braconnier, J. Claudel and B. Nkonga,
A relaxation method for the Kapila model.
Proceeding ICCFD 2006.

C. Berthon, B. Braconnier, J. Claudel and B. Nkonga
A relaxation based solver for multi-fluid flows with surface tension.
Proceeding Enumath 2005.

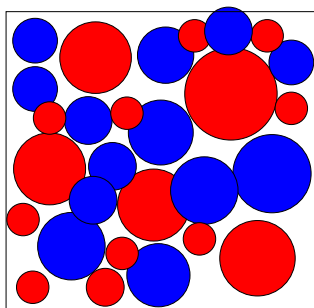
C. Berthon, B. Braconnier and B. Nkonga,
Numerical approximation of a degenerated non-conservative multi-fluid model : relaxation scheme.
Int. J. Numer. Methods Fluids 48, No.1, 85-90 (2005).

Chapitre 2

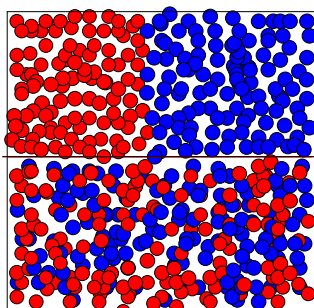
Modèles physiques et numériques pour les écoulements multiphasiques à interfaces soumises aux effets capillaires.

Ce chapitre est dédié à la présentation de la modélisation numérique d'écoulements constitués de plusieurs phases pures. La description de ce mélange peut se faire à plusieurs échelles :

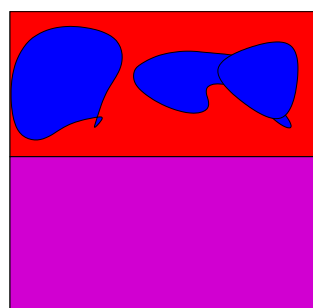
1. à l'échelle microscopique, le mélange est un ensemble de molécules de natures différentes qui interagissent entre elles. On ne peut en général pas séparer les phases en présence. La notion de discontinuité n'a pas le sens mathématique usuel.
2. à l'échelle macroscopique, un volume élémentaire est occupé soit par toutes les phases dans des proportions différentes : multiphase soit uniquement par une phase à la fois : multifluide.
3. à l'échelle mégascopique, un point de l'espace peut être assimilé à une homogénéisation d'un volume de l'échelle macroscopique. Les équations du modèle sont alors obtenues



1 échelle microscopique



2 échelle macroscopique



3 échelle mégascopique

FIG. 2.1 – Echelle de modélisation

à partir de moyennes volumiques sur les équations de l'échelle macroscopique. C'est dans ce cadre que se situe notre étude.

A partir des équations de la mécanique des fluides de chaque espèce pure, nous dérivons un modèle mésoscopique décrivant les écoulements multiphasiques.

2.1 Modèle complet

2.1.1 Dérivation d'un modèle mésoscopique

Soit Ω le domaine d'étude de l'écoulement et $\Omega_k \in \Omega$ le sous domaine contenant l'espèce k . En chaque point $x \in \Omega_k$, les équations de la mécanique des fluides qui s'appliquent à la phase k sont données par :

$$\begin{cases} \partial_t(\hat{\rho}_k) + \nabla \cdot (\hat{\rho}_k \hat{u}_k) = 0, \\ \partial_t(\hat{\rho}_k \hat{u}_k) + \nabla \cdot (\hat{\rho}_k \hat{u}_k \otimes \hat{u}_k) + \nabla \hat{p}_k = \nabla \cdot (\hat{\tau}_k) + \hat{f}_k, \\ \partial_t(\hat{\rho}_k \hat{e}_k) + \nabla \cdot (\hat{\rho}_k \hat{H}_k \hat{u}_k) = \nabla \cdot (\hat{\tau}_k \cdot \hat{u}_k) - \nabla \cdot (\hat{q}_k) + \hat{f}_k \cdot \hat{u}_k, \end{cases} \quad (2.1)$$

où les variables notées \hat{z} sont des variables de l'échelle macroscopique. $\hat{\rho}_k$ est la densité, \hat{u}_k est la vitesse, \hat{e}_k est l'énergie volumique, $\hat{H}_k = \hat{e}_k + \frac{\hat{p}_k}{\hat{\rho}_k}$ est l'enthalpie et \hat{p}_k est la pression du fluide. Au second membre figure le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\hat{\tau}_k = 2\mu_k \hat{D}_k \quad \text{où} \quad \hat{D}_k = \frac{1}{2} (\nabla \hat{u}_k + \nabla \hat{u}_k^T) \quad (2.2)$$

est le tenseur des vitesses de déformation et $\hat{\mu}_k$ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide k . Le flux thermique \hat{q}_k est défini à l'aide de la loi de Fourier :

$$\hat{q}_k = -\lambda_k \nabla \hat{T}_k, \quad (2.3)$$

où λ_k est la conductivité thermique et \hat{T}_k la température. \hat{f}_k est le vecteur des forces extérieures se décomposant en la somme d'une contribution volumique \hat{f}_k^v liée par exemple aux effets de gravitation, d'un champ magnétique ou de la force de Coriolis et d'une contribution surfacique \hat{f}_k^s liée à la force de tension de surface.

La structure spatiale de l'écoulement est définie par des fonctions caractéristiques $\hat{\chi}_k(x)$ associées à chaque composante du fluide :

$$\hat{\chi}_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.4)$$

Ces fonctions sont gouvernées par les équations d'évolution :

$$\partial_t(\hat{\chi}_k) + \mathbf{u}_k \cdot \nabla(\hat{\chi}_k) = 0.$$

Les équations précédemment introduites décrivent l'écoulement des fluides à l'échelle macroscopique. Comme notre étude porte sur l'échelle mégascopique, ces équations font l'objet d'un processus d'homogénéisation. Plusieurs procédés sont présents dans la littérature

et ceux-ci comportent des simplifications spécifiques à l'écoulement étudié. Citons l'exemple des moyennes utilisées par Chinnayya [34] et plus récemment Papin [82]. Dans notre cas, si à chaque point x de l'échelle mégascopique est associé un volume $\hat{V}(x, t)$ de l'échelle macroscopique, nous pouvons définir pour chaque fluide k des nouvelles variables associées à cette échelle. Ces variables sont évaluées à l'aide d'un processus d'homogénéisation simple reposant sur des moyennes volumiques [40, 34] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k(x, t) = \frac{1}{\hat{V}(x, t)} \int_{\hat{V}(x, t)} \hat{\chi}_k(\hat{x}, t) d\hat{x}, \\ \alpha_k(x, t) \rho_k(x, t) = \frac{1}{\hat{V}(x, t)} \int_{\hat{V}(x, t)} \hat{\rho}_k(x, t) \hat{\chi}_k(x, t) d\hat{x}, \\ \alpha_k(x, t) j_k(x, t) = \frac{1}{\hat{V}(x, t)} \int_{\hat{V}(x, t)} \hat{\rho}_k(\hat{x}, t) \hat{u}_k(\hat{x}, t) \hat{\chi}_k(\hat{x}, t) d\hat{x}, \\ \alpha_k(x, t) E_k(x, t) = \frac{1}{\hat{V}(x, t)} \int_{\hat{V}(x, t)} \hat{\rho}_k(\hat{x}, t) \hat{e}_k(\hat{x}, t) \hat{\chi}_k(\hat{x}, t) d\hat{x}, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

où α_k , j_k et E_k sont respectivement la fraction volumique, la quantité de mouvement et l'énergie totale. Les contraintes de conservation de masses et le respect du volume conduisent à :

$$\sum_{k=1}^q \alpha_k = \sum_{k=1}^q \frac{V_k}{V} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k = \sum_{k=1}^q \frac{m_k V_k}{V_k V} = \frac{m}{V} = \rho. \quad (2.6)$$

Les fractions massiques, vitesses, énergies volumiques et énergies internes des fluides se déduisent des variables précédentes à l'aide des relations :

$$\rho = \sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k, \quad y_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho}, \quad u_k = \frac{1}{\rho_k} j_k, \quad e_k = \frac{E_k}{\rho_k}, \quad \epsilon_k = e_k - \frac{1}{2} u_k^2. \quad (2.7)$$

Au niveau de l'interface entre les fluides, nous définissons, à l'aide de relations intégrales, les opérateurs mathématiques suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha_k = \frac{1}{\hat{V}} \int_{\hat{V}(x, t)} \mathbf{u}_k \cdot \nabla \hat{\chi}_k(\hat{x}, t) d\hat{x}, \\ p_I \cdot \nabla \alpha_k = \frac{1}{\hat{V}} \int_{\hat{V}(x, t)} p_k \cdot \nabla \hat{\chi}_k(\hat{x}, t) d\hat{x}, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où \mathbf{u}_I et p_I sont les variables interfaciales. A l'échelle mégascopique, ces variables constituent de nouvelles inconnues du problème qui seront déterminées de manière à ce que le système respecte certaines propriétés physiques de l'écoulement. En effet, nous exigeons la continuité de ces variables au niveau de l'interface entre deux fluides [93].

L'intégration du système (2.1) à l'échelle mégascopique selon les approximations [12] conduit aux équations gouvernant le fluide k :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + u_I \nabla(\alpha_k) = \dot{\alpha}_k, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = \dot{m}_k, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla(\alpha_k p_k) = p_I \nabla \alpha_k + \\ \nabla \cdot (\alpha_k \boldsymbol{\tau}_k) + f_k^v + f_k^S + \dot{v}_k, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k e_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k H_k \mathbf{u}_k) = -p_I \partial_t(\alpha_k) + \\ \nabla \cdot (\alpha_k \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) - \nabla \cdot (\alpha_k q_k) + f_k^v \cdot \mathbf{u}_k + f_k^S \cdot \mathbf{u}_I + u_I \cdot \dot{v}_k + \dot{q}_k. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où $\boldsymbol{\tau}_k$ est le tenseur des contraintes visqueuses, q_k désigne le flux de chaleur, f_k^v les forces volumiques et f_k^S les forces surfaciques. $\dot{\alpha}_k$ représente les effets de compaction de la fraction volumique. \dot{m}_k traduit les effets de transfert de masse entre les phases. \dot{v}_k est l'échange de quantité de mouvement, dû aux forces de traînée, qui s'exerce entre les fluides. L'échange d'énergie est pris en compte par \dot{q}_k .

Afin de préserver la contrainte de saturation (2.6), la conservation de la masse $\left(\rho = \sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k\right)$, de la quantité de mouvement $\left(\rho \mathbf{u} = \sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k\right)$ et de l'énergie $\left(\rho e = \sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k e_k\right)$ de l'ensemble des fluides, les relations de fermeture suivantes sont imposées :

$$\sum_{k=1}^q \dot{\alpha}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^q \dot{m}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^q \dot{v}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^q \dot{q}_k = 0. \quad (2.10)$$

Ainsi les équations de conservation suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \right) + \nabla \left(\sum_{k=1}^q \alpha_k p_k \right) = \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^q \alpha_k \boldsymbol{\tau}_k \right) + \\ \sum_{k=1}^q (f_k^v + f_k^S), \\ \partial_t(\rho e) + \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k H_k \mathbf{u}_k \right) = \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^q \alpha_k \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k \right) - \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^q \alpha_k q_k \right) + \\ \sum_{k=1}^q (f_k^v \cdot \mathbf{u}_k + f_k^S \cdot \mathbf{u}_I). \end{array} \right. \quad (2.11)$$

A l'issue de ce paragraphe, nous avons obtenu les équations de propagation gouvernant q fluides. Nous abordons maintenant la modélisation de la tension de surface.

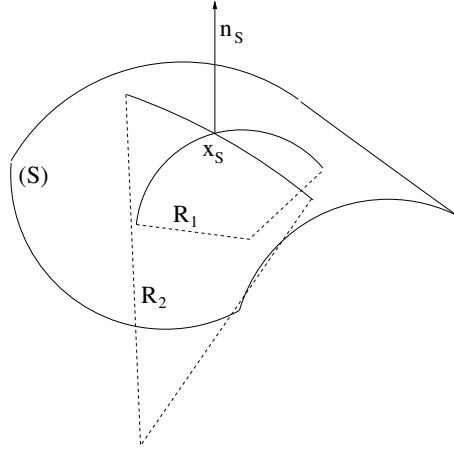


FIG. 2.2 – Rayons de courbure principaux et normale à l'interface (S) qui sépare deux fluides

2.1.2 Forces capillaires

Nous considérons la force de tension de surface s'exerçant sur un fluide k en contact avec d'autres fluides. A l'échelle microscopique, cette force s'exerce dans une zone de faible épaisseur. Dans celle-ci, les molécules de fluides tendent à se mélanger sous l'effet de diffusion (agitation thermique). A ce phénomène s'ajoute une répulsion des molécules de chaque espèce due à leur nature physico-chimique. Il en résulte que l'interface est une zone de mélange et que la transition d'un fluide à l'autre s'effectue continuellement.

A l'échelle mégascopique, la zone d'interface est d'épaisseur nulle et se réduit à une surface. Pour donner un cadre mathématique rigoureux à ce paragraphe, nous supposons que la surface d'interface est localement paramétrable à l'aide d'un difféomorphisme de classe C^2 .

Soit S_k la surface d'interface délimitant le fluide k et \mathbf{x}_{S_k} un point appartenant à cette surface. La normale à la surface en ce point sera notée $\mathbf{n}_k(\mathbf{x}_{S_k})$. Compte tenu de l'hypothèse de régularité de la surface, la courbure sera définie à partir de la paramétrisation de la surface. En notant $R_1(\mathbf{x}_{S_k})$ et $R_2(\mathbf{x}_{S_k})$ (voir figure 2.1.2) les deux rayons principaux, la courbure $\kappa_k(\mathbf{x}_{S_k})$ est donnée par la relation :

$$\kappa_k(\mathbf{x}_{S_k}) = \frac{1}{R_1(\mathbf{x}_{S_k})} + \frac{1}{R_2(\mathbf{x}_{S_k})}. \quad (2.12)$$

Celle-ci sera localement bornée. La force de tension de surface est orientée suivant la normale \mathbf{n}_k et son intensité est proportionnelle à la courbure κ_k :

$$\mathbf{F}_{S_k}(\mathbf{x}_{S_k}) = -\sigma_k \kappa_k(\mathbf{x}_{S_k}) \mathbf{n}_k(\mathbf{x}_{S_k}) \quad (2.13)$$

où σ_k est un coefficient de proportionnalité qui dépend de la nature du fluide en contact avec le fluide k . Le tableau suivant regroupe des valeurs de coefficient de tension de surface

couramment utilisées :

interface	eau/air	pétrole/air	mercure/air	platine/air	hélium liq./vap.
T en C	20	20	175	2000	-270
σ en $N.m^{-2}$	0.0725	0.024	0.547	18.02	0.000024

La prise en compte d'une force surfacique est mal adaptée aux méthodes de type volumes finis. En effet, ces méthodes reposent sur une homogénéisation des phénomènes physiques sur un volume défini à l'aide du maillage. De plus, la formulation précédente de la force nécessite la connaissance d'une paramétrisation de la surface.

La méthode CSF (Continuum Surface Force [28]), développée par Brackbill, reformule les effets de tension de surface en une force volumique. La force de tension de surface revêt alors l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_{S_k}^v(\mathbf{x}) = -\sigma_k(\mathbf{x})\kappa_k(\mathbf{x})\mathbf{n}_k(\mathbf{x})\delta_{S_k}(x), \quad (2.14)$$

où δ_{S_k} est la fonction Dirac associée à l'interface définie au sens des distribution par :

$$\delta_{S_k} = \nabla H_k,$$

avec H_k la fonction Heaviside associée au fluide k :

$$H_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est dans le fluide } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Les fonctions κ_k et \mathbf{n}_k sont des fonctions continues définies dans tout le domaine Ω et donnent, pour les points au voisinage de la surface, la valeur de la courbure et de la normale. Plus rigoureusement, ces fonctions doivent vérifier :

$$\begin{cases} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_{S_k}} \mathbf{n}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{S_k}(\mathbf{x}_{S_k}) & \forall \mathbf{x}_{S_k} \in S, \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_{S_k}} \kappa_k(\mathbf{x}) = \kappa_{S_k}(\mathbf{x}_{S_k}) & \forall \mathbf{x}_{S_k} \in S. \end{cases} \quad (2.16)$$

Les méthodes permettant d'évaluer ces fonctions seront présentées dans la section 5.4.

Soient \mathbf{x}_{S_k} un point de la surface et $\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}$ un voisinage de ce point. La relation intégrale suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \int_{S \cap \nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} \mathbf{F}_{S_k}(\mathbf{x}_{S_k}) dS(\mathbf{x}_{S_k}) &= - \int_{S \cap \nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} \sigma_{S_k}(\mathbf{x}_{S_k}) \kappa_{S_k}(\mathbf{x}_{S_k}) \mathbf{n}_{S_k}(\mathbf{x}_{S_k}) dS(\mathbf{x}_{S_k}) = \\ &= - \int_{\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} \sigma_k \kappa_k(\mathbf{x}) \mathbf{n}_k(\mathbf{x}) \delta_{S_k}(x) d\mathbf{x} = \int_{\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} \mathbf{F}_{S_k}^v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.17)$$

La fonction $\mathbf{F}_{S_k}^v$ est définie dans $L^1(\nu_{\mathbf{x}_{S_k}})$. Elle permet de traduire les effets de tension de surface après intégration sur un volume de faible épaisseur, voisin de l'interface. Dans le cadre d'une méthode d'interface diffuse, la contribution de cette force ne peut être définie de manière précise. De ce fait, la fonction Dirac de l'interface sera régularisée à l'aide d'une fonction $\delta_S^\epsilon \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

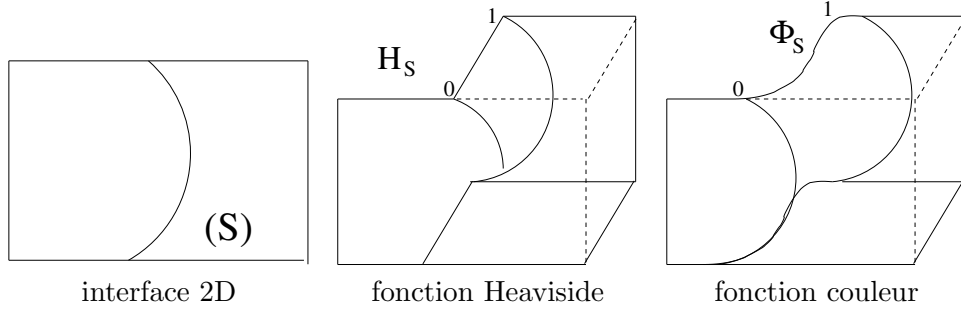


FIG. 2.3 – Exemple de fonction couleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x}_{S_k} \in S, \forall \nu_{\mathbf{x}_{S_k}} \text{ voisinage de } \mathbf{x}_{S_k} \quad \int_{\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} |\delta_{S_k}(x) - \delta_{S_k}^\epsilon(x)| d\mathbf{x} = O(\epsilon), \\ \delta_{S_k}^\epsilon(\mathbf{x}_{S_k} + z\mathbf{n}_k(\mathbf{x}_{S_k})) = 0 \quad \text{si } |z| > \frac{\epsilon}{2}. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

La première condition assure que la fonction δ_S^ϵ aura pour limite la fonction Dirac au sens L^1 lorsque ϵ tend vers 0. La deuxième condition impose que le support de la fonction régularisée possède une épaisseur maximale de ϵ .

Ce type de fonction peut être obtenu en effectuant le produit de convolution de δ_{S_k} par des fonctions régularisantes. Ainsi, la force de tension de surface peut être modélisée à l'aide d'une force volumique définie par :

$$\mathbf{F}_{S_k}^\epsilon(\mathbf{x}) = -\sigma_k(\mathbf{x})\kappa_k(\mathbf{x})\mathbf{n}_k(\mathbf{x})\delta_S^\epsilon(\mathbf{x}). \quad (2.19)$$

La courbure κ_k étant localement bornée sur ce voisinage, l'ordre de grandeur de l'erreur commise est donné par :

$$\left| \int_{\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} (\mathbf{F}_{S_k}^\epsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_{S_k}^v(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right| \leq \text{Sup}(|\sigma_k|) \text{Sup}_{\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} (|\kappa_k|) \int_{\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} |\delta_{S_k}^\epsilon(\mathbf{x}) - \delta_{S_k}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = O(\epsilon). \quad (2.20)$$

Le passage à la limite lorsque l'épaisseur de la zone de mélange tend vers 0 permet d'obtenir :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} \mathbf{F}_{S_k}^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\nu_{\mathbf{x}_{S_k}}} \mathbf{F}_{S_k}^v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.21)$$

Dans le cadre de méthodes d'interface diffuse, la position de l'interface n'est pas explicitement donnée. Par conséquent, le paramétrage de la surface, la courbure et la normale restent tous inconnus. Nous introduisons alors la notion de fonction couleur :

Définition 1 On dit que $\Phi_k : \Omega \rightarrow R$ est une fonction couleur lorsque :

- elle est régulière
- elle ne varie qu'au voisinage de la surface S_k délimitant le domaine occupé par le fluide k . Sa variation doit être monotone à la traversée de cette interface. Ailleurs, elle vaut 1 si le point considéré est dans le fluide k et 0 sinon.

La zone où Φ varie sera appelée la zone de mélange.

Les fonctions couleur permettent d'obtenir des fonctions de Heavyside régularisées. Un exemple de fonction couleur est présenté figure (2.3). Divers choix de la fonction couleur sont possibles et ces choix dépendent du modèle utilisé [28, 85]. Ceux-ci peuvent se déduire des variables de fraction volumique α_k , de fraction massique y_k , et d'entropie S_k à l'aide d'un opérateur $f_k = f_k(\alpha_k, y_k, S_k)$ à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$. Deux modélisations seront considérées dans la suite. La première suppose que la fonction couleur est une variable d'évolution régie par une équation de transport comportant un terme source au second membre :

$$\partial_t(\Phi_k) + \mathbf{u}_I \cdot \nabla(\Phi_k) = \frac{1}{\lambda}(f_k(\alpha_k, y_k, S_k) - \Phi_k). \quad (2.22)$$

Dans le second cas, nous supposons que la fonction couleur est un paramètre donné par la relation simple :

$$\partial_t(\Phi_k) = \frac{1}{\lambda}(f_k(\alpha_k, y_k, S_k) - \Phi_k). \quad (2.23)$$

L'utilisation des relations (2.22) ou (2.23) conduit à deux modélisations différentes des variables interfaciales et à deux stratégies de résolution spécifiques qui seront présentées dans la section 2.2. Dans la suite du document, nous supposons que la fonction couleur est gouvernée par la relation (2.22) de manière à proposer une modélisation des variables interfaciales tenant compte des effets de la tension de surface.

Pour le dernier fluide, nous imposerons la fonction couleur induite par les autres fluides :

$$\Phi_q = 1 - \sum_k^{q-1} \Phi_k.$$

En considérant que le gradient de la fonction couleur définit une fonction Heavyside régularisée, la force de tension de surface présente dans le système (2.9) s'écrit :

$$f_k^S = -\Phi_k \sigma_k \kappa_k(\Phi) \nabla \Phi_k. \quad (2.24)$$

La méthode CSF [28] nous a permis de prendre en compte la force de tension de surface à l'aide d'une force volumique. Celle-ci requière la connaissance de fonction couleur Φ_k associée à chaque fluide k et conduit à une expression simple de la force.

Le système (2.9) n'est pas fermé. Le tableau suivant donne en détail le nombre d'inconnues et d'équations :

variables	α_k	$\alpha_k \rho_k$	$\alpha_k \rho_k u_k$	$\alpha_k \rho_k e_k$	p_k	u_I	p_I
nbe total d'inconnues	$q - 1$	q	q	q	q	1	1
nbe total d'équations	$q - 1$	q	q	q	0	0	0

Le système comporte donc $4q - 1$ équations et $5q + 1$ inconnues. $q + 2$ fermetures doivent donc être considérées. Pour cela, nous introduisons q équations d'état modélisant les propriétés thermodynamiques des fluides et 2 relations déterminant les variables interfaciales.

2.1.3 Relations constitutives : loi d'état

Supposons que tous les fluides obéissent à des fonctions d'état monophasés et de même type. Pour plus de clarté, l'indice k faisant référence au fluide considéré est omis.

La modélisation des fonctions d'état s'effectue en admettant que le système est bivariable :

$$T = T(\rho, \epsilon), \quad p = p(\rho, \epsilon). \quad (2.25)$$

Considérons un système thermodynamique fermé pour lequel l'énergie libre massique f s'exprime en fonction de la température T et du volume massique ($v = 1/\rho$) qui sont des variables indépendantes : $f(v, T)$. Par définition, l'énergie libre massique est donnée par la relation :

$$f(v, T) = \epsilon(v, T) - T s, \quad (2.26)$$

où s est l'entropie. L'énergie libre vérifie la relation de Maxwell :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial T} = \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial v}. \quad (2.27)$$

Nous considérons les relations fondamentales suivantes

$$df = -p dv - s dT, \quad d\epsilon = -p dv + T ds. \quad (2.28)$$

Celles-ci seront utilisées dans le contexte de la loi *gaz parfait* et de la loi *Stiffened gas*.

Loi des gaz parfaits

Les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait peuvent être décrites à l'aide de deux équations :

$$p = \rho R T, \quad \text{et} \quad \epsilon = C_v T \quad (2.29)$$

où R est la constante spécifique du gaz et C_v est la capacité de chaleur spécifique. Ainsi, la pression et l'énergie interne sont liées par la relation :

$$p = \rho \Gamma \epsilon, \quad (2.30)$$

avec :

$$\Gamma = \frac{R}{C_v} = v \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_v = \gamma - 1. \quad (2.31)$$

Loi de type it Stiffened gas

La loi de type it Stiffened gas permet de supposer que, autour d'un état de référence $(\rho_0, T_0, p_0, \epsilon_0)$, le comportement du fluide peut être assimilé au comportement d'un gaz parfait. Les coefficients Γ et C_v restent constants et les variations de densité, pression et énergie interne du fluide suivent les relations :

$$\Gamma = v \frac{p(v, T) - p_s(v)}{\epsilon(v, T) - \epsilon_s(v)}, \quad \epsilon - \epsilon_s(v) = C_v T, \quad (2.32)$$

où les fonctions ϵ_s et p_s doivent être déterminées. Les relations (2.32) permettent de montrer que :

$$p(v, T) = p_s(v) + \rho\Gamma C_v T. \quad (2.33)$$

L'utilisation de l'expression de la différentielle de l'énergie libre et la relation (2.27) conduit aux relations :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v = \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T.$$

Par conséquent, en dérivant la relation de Gibbs (2.28), la propriété différentielle suivante est obtenue :

$$\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial v} \right|_T = -p + T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v. \quad (2.34)$$

En considérant les relations (2.32,2.33), la forme différentielle précédente se met sous la forme :

$$\frac{d\epsilon_s(v)}{dv} = -p_s(v).$$

Supposons que l'énergie interne soit régie par la loi d'état *Stiffened gas* :

$$\epsilon(p, \rho) = \frac{p + (\Gamma + 1)p_\infty}{\Gamma\rho} + K \implies p_s(v) = -p_\infty + \frac{\Gamma}{v} (\epsilon_s(v) - vp_\infty - K),$$

où K et p^∞ sont une énergie et une pression de référence définies en fonction d'un état thermodynamique. Alors, la fonction $\epsilon_s(v)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d}{dv} (\epsilon_s(v) - vp_\infty - K) = -\frac{\Gamma}{v} (\epsilon_s(v) - vp_\infty - K).$$

Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme :

$$\epsilon_s(v) = vp_\infty + K + C_1 r^\Gamma,$$

où C_1 est une constante et $r = \rho/\rho_0$ une variable. Lorsque $C_1 \neq 0$, une difficulté apparaît pour cette modélisation : la non unicité de la densité obtenue par inversion de la loi d'état à pression et à température données [73]. Nous considérerons donc le cas dégénéré où $C_1 = 0$. Le résultat précédant permet alors de déduire l'équation liant la pression et la densité à l'énergie interne :

$$p + (\Gamma + 1)p^\infty = \rho\Gamma(\epsilon - K) \quad (2.35)$$

et celle liant la pression et la densité à la température :

$$\frac{p + p^\infty}{\rho\Gamma} = C_v T \quad (2.36)$$

Il reste maintenant à déterminer les constantes Γ , p^∞ , K et C_1 . Pour cela, nous imposons la valeur de la vitesse du son c_0 du fluide à l'état standard et son coefficient de dilatation

$\left(\beta_p = \frac{v}{T} \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p \right)$ à pression constante :

$$\rho_0 c_0^2 = (\Gamma + 1)(p_0 + p_\infty) \quad \text{et} \quad \beta_p = \frac{p_0 + p_\infty}{\Gamma \rho_0 C_v T_0}. \quad (2.37)$$

Γ est alors obtenu comme une racine de l'équation du second degré :

$$\Gamma^2 + \Gamma - \frac{c_0^2}{C_v T_0 \beta_p} = 0.$$

Cette équation admet deux racines réelles (le déterminant est positif) et de signes opposés (le produit des racines est négatif). Seule la solution positive sera retenue :

$$\Gamma = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4c_0^2}{C_v T_0 \beta_p}}}{2}$$

Les relations (2.37, 2.35) permettent de déduire les valeurs de p^∞ et K :

$$p^\infty = \frac{\rho_0 c_0^2}{\Gamma + 1} - p_0, \quad K = \epsilon_0 - \frac{p_0 + (\Gamma + 1)p^\infty}{\rho_0 \Gamma}. \quad (2.38)$$

A titre d'illustration, le calcul de ces constantes est détaillé pour l'eau et l'air. Pour les régimes considérés, les constantes thermodynamiques et l'état de référence doivent être fixés de la manière suivante :

	ρ_0 (kg/m^3)	p_0 (Pa)	ϵ_0 (J/kg^1)	T_0 (K)	c_0 (m/s)	C_v ($J/(kg.K)$)	β_p
air	1.126	$1.0 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^6$	298.15	340	1005	0.9778
eau	1002	$1.0 \cdot 10^5$	617	298.15	1500	4184	12.9

L'utilisation des relations (2.38) conduit aux valeurs de constantes :

	p^∞ (Pa)	K (J/kg^1)	Γ
air	0	$1.707 \cdot 10^6$	0.303
eau	$2.0 \cdot 10^9$	$-1.81 \cdot 10^7$	0.124

Deux fermetures ont été exposées dans ce paragraphe : la loi de gaz parfait et son extension : la loi Stiffened gaz. Pour cette loi, nous avons adopté une modélisation qui permet une caractérisation du comportement thermodynamique des fluides adaptés à nos applications et permettant une inversion de la loi d'état lorsque la pression et la température sont données [73].

2.1.4 Modèle d'interface

Afin de clore la fermeture du système (2.9), nous devons déterminer les variables interfaciales. Plusieurs critères peuvent être considérés à cet effet [36, 44, 79]. L'un d'eux consiste à favoriser l'existence d'une inégalité de type Clausius Duhem pour le mélange [44]. Dans notre cas, la détermination des variables interfaciales s'effectuera en étudiant les équations de propagation associées au système (2.9). Nous exigerons que l'onde correspondant aux interfaces entre les fluides soit caractérisée mathématiquement par une

discontinuité de contact au travers de laquelle le saut de pression vérifiera la loi de Laplace [69]. La démarche proposée généralisera les travaux [44]. L'étude se décompose en trois étapes. Dans un premier temps, nous examinons les propriétés de la 'jacobienne' du système. Ensuite, en supposant que u_I et p_I sont des invariants de Riemann, l'ensemble des invariants de Riemann associés à l'onde u_I est déterminé. Ainsi, de nouvelles relations de fermeture pour les variables interfaciales pourront être exhibées.

Dans le cas de q fluides, les équations gouvernant le fluide k pour $k < q$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + u_I \nabla(\alpha_k) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k u_k \otimes u_k) + \nabla(\alpha_k p_k) = p_I \nabla \alpha_k - \Phi_k \sigma_k \kappa_k \nabla(\Phi_k), \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k e_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k H_k u_k) = p_I u_I \partial_x(\alpha_k) - \Phi_k \sigma_k \kappa_k \mathbf{u}_I \cdot \nabla(\Phi_k), \\ \partial_t(\Phi_k) + \mathbf{u}_I \cdot \nabla \Phi_k = 0. \end{array} \right.$$

et pour le fluide q , nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q u_q) = 0, \\ \partial_t(\alpha_q \rho_q u_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q u_q \otimes u_q) + \nabla(\alpha_q p_q) = p_I \nabla \alpha_q + \Phi_q \sigma_q \kappa_q \nabla(\Phi_q) \\ \partial_t(\alpha_q \rho_q e_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q H_q u_q) = p_I u_I \partial_x(\alpha_q) + \Phi_q \sigma_q \kappa_q \mathbf{u}_I \cdot \nabla(\Phi_q), \end{array} \right.$$

avec les relations de fermetures :

$$\alpha_q = 1 - \sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k, \quad \Phi_q = 1 - \sum_{k=1}^{q-1} \Phi_k$$

Le système d'équations gouvernant les q fluides est mis sous la forme vectorielle :

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{U} = 0, \quad (2.39)$$

où le vecteur des variables primitives est donné par :

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_k)^T \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_k = (\alpha_k, \rho_k, u_k, p_k, \Phi_k)^T \quad \text{si } k < q \\ \mathbf{U}_q = (\rho_q, u_q, p_q)^T \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

La matrice \mathbf{A} est de la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \mathbf{A}_3 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{A}_{q-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{A}_{q-1} & 0 \\ \mathbf{A}_{q,1} & \mathbf{A}_{q,2} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{A}_{q,q-2} & \mathbf{A}_{q,q-1} & \mathbf{A}_q \end{pmatrix}$$

où les sous-matrices sont données par :

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} u_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_k(\Delta u)_k}{\alpha_k} & u_k & \rho_k & 0 & 0 \\ \frac{(\Delta p)_k}{\alpha_k \rho_k} & 0 & u_k & \frac{1}{\rho_k} & \frac{\Phi_k \sigma_k \kappa_k}{\alpha_k \rho_k} \\ \frac{\rho_k c_{k,I}^2 (\Delta u)_k}{\alpha_k} & 0 & \rho_k c_k^2 & u_k & -\frac{\Gamma_k \Phi_k \sigma_k \kappa_k (\Delta u)_k}{\alpha_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_I \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{A}_{q,k} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho_q(\Delta u)_q}{\alpha_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(\Delta p)_q}{\alpha_q \rho_q} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Phi_q \sigma_q \kappa_q}{\alpha_q \rho_q} \\ -\frac{\rho_q c_{q,I}^2 (\Delta u)_q}{\alpha_q} & 0 & 0 & 0 & \frac{\Gamma_q \Phi_q \sigma_q \kappa_q (\Delta u)_q}{\alpha_q} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_q = \begin{pmatrix} u_q & \rho_q & 0 \\ 0 & u_q & \frac{1}{\rho_q} \\ 0 & \rho_q c_q^2 & u_q \end{pmatrix}$$

Les quantités $c_{k,I}$ sont les vitesses du son des fluides lorsqu'ils suivent la loi Stiffened gaz et que leurs pressions prennent la valeur de la pression interfaciale p_I :

$$\rho_k c_{k,I}^2 = \gamma_k (p_I + p_k^\infty) + (p_k - p_I) \quad (2.41)$$

et les écarts de vitesse et de pression sont donnés par :

$$(\Delta u)_k = u_k - u_I, \quad (\Delta p)_k = p_k - p_I.$$

La matrice \mathbf{A} admet les valeurs propres u_I , et u_k , $u_k \pm c_k$ pour $k = 1 \dots q$. Concernant, les valeurs propres u_k , $u_k \pm c_k$, les vecteurs propres à droite sont découplés du reste du système si bien que, pour ces ondes, seules les matrices \mathbf{A}_k suffisent à l'étude. Leurs expressions, très similaires à celles des vecteurs associés aux équations d'Euler, sont données pour $k = 1 \dots (q-1)$:

$$\begin{cases} R_{u_k} = (0, \dots, 0, r_{u_k}, 0, \dots, 0)^T, \\ R_{u_k \pm c_k} = (0, \dots, 0, r_{u_k \pm c_k}, 0, \dots, 0)^T \end{cases}$$

où :

$$r_{u_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u_k \pm c_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_k \\ \pm c_k \\ \rho_k c_k^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le fluide q , nous avons :

$$R_{u_q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_{u_q \pm c_q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_k \\ \pm c_k \\ \rho_k c_k^2 \end{pmatrix}$$

Les $2(q-1)$ derniers vecteurs propres à droite sont associés à l'onde u_I . Ils s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} R_{u_{I,k}}^a = \left(0, \dots, 0, r_{u_{I,k}}^a, 0, \dots, 0, r_{u_{I,q}}^a \right)^T \\ R_{u_{I,k}}^b = \left(0, \dots, 0, r_{u_{I,k}}^b, 0, \dots, 0, r_{u_{I,q}}^b \right)^T \end{cases}$$

où, en introduisant la notation $L_k = c_k^2 - (\Delta u)_k$, les vecteurs $r_{u_{I,k}}^a$, $r_{u_{I,q}}^a$, $r_{u_{I,k}}^b$ et $r_{u_{I,q}}^b$ sont donnés par :

$$r_{u_{I,k}}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\gamma_k \Phi_k \sigma_k \kappa_k}{\alpha_k L_k} \\ \frac{\gamma_k \Phi_k \sigma_k \kappa_k (\Delta u)_k}{\alpha_k \rho_k L_k} \\ -\frac{\Phi_k \sigma_k \kappa_k [L_k + \gamma_k (\Delta u)_k^2]}{\alpha_k L_k} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_{u_{I,q}}^a = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_q \Phi_q \sigma_q \kappa_q}{\alpha_q L_q} \\ -\frac{\gamma_q \Phi_q \sigma_q \kappa_q (\Delta u)_q}{\alpha_q \rho_q L_q} \\ \frac{\Phi_q \sigma_q \kappa_q [L_q + \gamma_q (\Delta u)_q^2]}{\alpha_q L_q} \end{pmatrix}$$

$$r_{u_{I,k}}^b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho_k c_{k,I}^2 - (\Delta p)_k - \rho_k L_k}{\alpha_k L_k} \\ -\frac{[\rho_k c_{k,I}^2 - (\Delta p)_k] (\Delta u)_k}{\alpha_k \rho_k L_k} \\ \frac{[\rho_k c_{k,I}^2 (\Delta u)_k^2 - (\Delta p)_k c_k^2]}{\alpha_k L_k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u_{I,q}}^b = \begin{pmatrix} \frac{\rho_q c_{q,I}^2 - (\Delta p)_q - \rho_q L_q}{\alpha_q L_q} \\ -\frac{[\rho_q c_{q,I}^2 - (\Delta p)_q] (\Delta u)_q}{\alpha_q \rho_q L_q} \\ \frac{[\rho_q c_{q,I}^2 (\Delta u)_q^2 - (\Delta p)_q c_q^2]}{\alpha_q L_q} \end{pmatrix}$$

Soit \mathbf{P} la matrice contenant les vecteurs propres à droite de la matrice \mathbf{A} . Afin de définir le domaine d'hyperbolicité du système, les conditions dans lesquelles la matrice \mathbf{P} est inversible doivent être identifiées. Pour cela, nous évaluons son déterminant :

$$\det(P) = 2^q \rho_q c_q^3 (\alpha_q L_q^2)^{q-1} \prod_{k=1}^{q-1} \alpha_k \rho_k c_k^3 L_k^2 \quad (2.42)$$

Le système est donc hyperbolique si et seulement si :

$$\forall k \in \{1 \dots q\}, \quad \begin{cases} \alpha_k \neq 0, \\ \alpha_k \neq 1, \\ c_k^2 \neq (u_k - u_I)^2. \end{cases} \quad (2.43)$$

Nous étudions maintenant la nature des ondes u_k et $u_k \pm c_k$ et déterminons leurs invariants de Riemann. Les variables interfaciales n'interviennent pas dans le calcul.

- L'onde u_k est linéairement dégénérée ($\mathbf{r}_{u_k} \cdot \nabla_{\mathbf{V}_k}(u_k) = 0$) et ces invariants de Riemann sont les suivants :

$$\alpha_k, \quad \Phi_k, \quad u_k, \quad p_k. \quad (2.44)$$

- L'onde $u_k \pm c_k$ est vraiment non linéaire ($\mathbf{r}_{u_k} \cdot \nabla_{\mathbf{V}_k}(u_k) \neq 0$). Les invariants de Riemann ne seront conservés que dans les ondes de détente. Ils sont donnés par :

$$S_k = \frac{p_k + p_k^\infty}{\rho_k^{\gamma_k}}, \quad u_k + \frac{2c_k}{\gamma_k - 1}, \quad \alpha_k, \quad \Phi_k. \quad (2.45)$$

L'onde associée à la vitesse u_I doit modéliser l'interface séparant les deux fluides. En s'inspirant des travaux [44], nous imposons à cette onde d'être une discontinuité de contact laissant invariants u_I et p_I et proposons une méthode plus générale pour déterminer ces variables. En supposant que u_I et p_I sont des invariants de Riemann pour l'onde, nous déterminons $3k$ invariants de Riemann (où k désigne le nombre de fluides). Par conséquent, nous considérerons des modèles d'interface pouvant s'exprimer comme des fonctions de ces invariants de Riemann. Parmi ces modèles, seuls ceux conduisant à des vitesses et pressions interfaciales invariants de Riemann seront retenus. Remarquons que, dans notre contexte, la pression interfaciale doit tenir compte des effets de la tension de surface.

Proposition 1 *Supposons que la vitesse u_I et la pression p_I soient des invariants de Riemann pour l'onde u_I alors les quantités :*

$$\forall k \in \{1 \dots q\}, \quad \begin{cases} I_k^1 = \alpha_k \rho_k (u_k - u_I), \\ I_k^2 = \alpha_k (p_k - p_I) + \alpha_k \rho_k u_k (u_k - u_I) + \sigma_k \kappa_k \frac{\Phi_k^2}{2}, \\ I_k^3 = \frac{c_k^2}{\Gamma_k} + \frac{u_k^2}{2} - u_k u_I, \end{cases}$$

sont des invariants de Riemann pour cette onde.

Démonstration :

Les calculs nécessaires à la preuve ne sont pas complètement détaillés. Seules les dérivées des invariants de Riemann et les étapes importantes sont présentées.

Les invariants I_k^1 :

Soit $k \in \{1 \dots (q-1)\}$. Les dérivées de I_k^1 s'écrivent :

$$\nabla_{\mathbf{V}} I_k^1 = I_k^1 C_k^1 - \alpha_k \rho_k \nabla_{\mathbf{V}} u_I,$$

où

$$C_k^1 = (0, \dots, 0, c_k^1, 0, \dots, 0)^T, \quad c_k^1 = \left(\frac{1}{\alpha_k}, \frac{1}{\rho_k}, \frac{1}{(\Delta u)_k}, 0, 0 \right)^T.$$

Comme on suppose que u_I est un invariant de Riemann il suffit de montrer que pour tout $k' \in \{1 \dots (q-1)\}$:

$$\nabla_{\mathbf{V}} I_k^1 \cdot R_{u_I, k'}^a = I_k^1 C_k^1 \cdot R_{u_I, k'}^a \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{V}} I_k^1 \cdot R_{u_I, k'}^b = I_k^1 C_k^1 \cdot R_{u_I, k'}^b.$$

L'invariant I_q^1 admet la dérivée :

$$\nabla_{\mathbf{V}} I_q^1 = I_q^1 \left[C_q^1 - \frac{1}{\alpha_q} \sum_{k=1}^{q-1} \nabla_{\mathbf{V}} \alpha_k \right] - \alpha_q \rho_q \nabla_{\mathbf{V}} u_I,$$

avec :

$$C_q^1 = (0, \dots, 0, w_q^1)^T, \quad c_q^1 = \left(\frac{1}{\rho_q}, \frac{1}{(\Delta u)_q}, 0 \right)^T.$$

Les invariants I_k^2 :

L'invariant I_k^2 s'écrit sous la forme :

$$I_k^2 = \alpha_k (p_k - p_I) + I_k^1 u_1 + \sigma_k \kappa_k \frac{\Phi_k^2}{2}.$$

Ainsi pour $k \in \{1 \dots (q-1)\}$, ses dérivées s'écrivent :

$$\nabla_{\mathbf{V}} I_k^2 = C_k^2 + u_1 \nabla_{\mathbf{V}} I_k^1 - \alpha_k \nabla_{\mathbf{V}} p_I,$$

avec :

$$C_k^2 = (0, \dots, 0, c_k^2)^T, \quad c_k^2 = (0, I_k^1, \alpha_k)^T.$$

Pour tout $k' \in \{1 \dots (q-1)\}$, le calcul des produits scalaires suivants se réduit à :

$$\nabla_{\mathbf{V}} I_k^2 \cdot R_{u_I, k'}^a = C_k^2 \cdot R_{u_I, k'}^a, \quad \nabla_{\mathbf{V}} I_k^2 \cdot R_{u_I, k'}^b = C_k^2 \cdot R_{u_I, k'}^b.$$

Concernant le fluide q , la dérivée de l'invariant de Riemann s'écrit :

$$\nabla_{\mathbf{V}} I_q^2 = C_q^2 + u_q \nabla_{\mathbf{V}} I_k^1 - \alpha_k \nabla_{\mathbf{V}} p_I - (\Delta p)_q \sum_{k=1}^{q-1} \nabla_{\mathbf{V}} \alpha_k - \sigma_q \kappa_q \Phi_q \sum_{k=1}^{q-1} \nabla_{\mathbf{V}} \Phi_k,$$

avec :

$$C_k^2 = (0, \dots, 0, c_k^2, 0, \dots, 0)^T, \quad c_k^2 = ((\Delta p)_k, 0, I_k^1, \alpha_k, \sigma_k \kappa_k \Phi_k)^T.$$

Pour terminer la preuve, nous devons calculer pour tout $k \in \{1 \dots (q-1)\}$:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{V}} I_q^2 \cdot R_{u_I, k}^a = c_q^2 \cdot r_{u_I, q}^a - \sigma_q \kappa_q \Phi_q \nabla_{\mathbf{V}_k} \Phi_k \cdot r_{u_I, k}^a, \\ \nabla_{\mathbf{V}} I_k^2 \cdot R_{u_I, k}^b = c_q^2 \cdot r_{u_I, q}^b - (\Delta p)_q \nabla \alpha_k \cdot r_{u_I, k}^b. \end{cases}$$

Les invariants I_k^3 :

L'invariant de Riemann I_k^3 se reformule de la manière suivante :

$$I_k^3 = \frac{\gamma_k(p + p_k^\infty)}{\rho_k \Gamma_k} + \frac{u_k^2}{2} - u_k u_I.$$

Ainsi ces dérivées s'écrivent :

$$\nabla I_k^3 = -u_k \nabla u_I + C_k^3,$$

avec :

$$C_k^3 = (0, \dots, 0, c_k^3, 0, \dots, 0)^T, \quad c_k^3 = \left(0, -\frac{c_k^2}{\rho_k \Gamma_k}, (\Delta u)_k, \frac{\gamma_k}{\rho_k \Gamma_k}, 0 \right)^T,$$

$$C_q^3 = (0, \dots, 0, c_q^3)^T, \quad c_q^3 = \left(-\frac{c_q^2}{\rho_q \Gamma_q}, (\Delta u)_q, \frac{\gamma_q}{\rho_q \Gamma_q} \right)^T.$$

Soit $k' \in \{1 \dots q\}$, nous avons :

$$\nabla I_k^3 \cdot R_{u_I, k'}^a = c_k^3 \cdot r_{u_I, k'}^a, \quad \nabla I_k^3 \cdot R_{u_I, k'}^b = c_k^3 \cdot r_{u_I, k'}^b.$$

En supposant que u_I et p_I sont des invariants de Riemann, $3q$ invariants de Riemann ont pu être déterminés. Comme le système possède $5q - 2$ équations et $3q - 2$ vecteurs propres à droite pour l'onde u_I , deux relations de fermeture indépendantes peuvent être déterminées. Il existe donc deux fonctions F_1 et F_2 vérifiant :

$$\begin{cases} F_1(I_1^1, I_1^2, I_1^3, \dots, I_k^1, I_k^2, I_k^3, \dots, I_q^1, I_q^2, I_q^3, u_I, p_I) = 0, \\ F_2(I_1^1, I_1^2, I_1^3, \dots, I_k^1, I_k^2, I_k^3, \dots, I_q^1, I_q^2, I_q^3, u_I, p_I) = 0. \end{cases}$$

Dans notre cas, les variables u_I et p_I n'ont pas encore été déterminées. Les fonctions F_1 et F_2 seront donc choisies de manière à ce que le système (2.1.4) soit inversible pour les variables u_I et p_I . De nombreuses fonctions peuvent être considérées puisque beaucoup d'opérateurs mathématiques conservent les invariants de Riemann. Malgré tout, l'utilisation de telles fonctions conduit à des systèmes durs ou impossibles à résoudre, ou ne possédant pas de solution unique. Seules des fonctions simples seront considérées.

Une condition de consistance supplémentaire sera imposée. Lorsque les vitesses et les pressions des fluides s'équilibrent vers une vitesse u et une pression p , la vitesse et la pression interfaciale doivent, en l'absence de tension de surface, tendre vers les valeurs d'équilibre :

$$\forall k = \{1 \dots q\} \quad \begin{cases} u_k \rightarrow u \\ p_k \rightarrow p \\ \sigma_k = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_I \rightarrow u \\ p_I \rightarrow p \end{cases}. \quad (2.46)$$

Commençons par déterminer une relation de fermeture permettant de déterminer u_I . La relation simple suivante est considérée :

$$\sum_{k=1}^q a_k I_k^1 = a_0 \implies u_I = \frac{\sum_{k=1}^q a_k \alpha_k \rho_k u_k - a_0}{\sum_{k=1}^q a_k \alpha_k \rho_k}, \quad (2.47)$$

où a_k sont des réels à déterminer. En introduisant la notation $\overline{a\alpha\rho} = \sum_{k=1}^q a_k \alpha_k \rho_k$, les dérivées de la variable interfaciale s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_I}{\partial \mathbf{V}_k} = \frac{a_k}{\overline{a\alpha\rho}} \begin{pmatrix} \rho_k (\Delta u)_k \\ \alpha_k (\Delta u)_k \\ \alpha_k \rho_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a_q}{\overline{a\alpha\rho}} \begin{pmatrix} \rho_q (\Delta u)_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } k < q, \\ \\ \frac{\partial u_I}{\partial \mathbf{V}_q} = \frac{a_q}{\overline{a\alpha\rho}} \begin{pmatrix} \alpha_q (\Delta u)_q \\ \alpha_q \rho_q \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

Un calcul simple montre que le produit scalaire du gradient de u_I par les vecteurs propres $R_{u_I,k}^a$ et $R_{u_I,k}^a$ pour $k \in \{1 \dots (q-1)\}$ est nul. Ainsi, cette valeur de u_I engendre bien une onde linéairement dégénérée. La condition de consistance (2.46) impose que $a_0 = 0$ et qu'il existe $k \in \{1 \dots q\}$ tel que $a_k \neq 0$.

A titre d'illustration, deux autres choix de fermeture sont proposés :

$$\sum_{k=1}^q (I_k^2 + u_I I_k^1) + p_I = 0 \implies u_I^2 = \frac{\sum_{k=1}^q \alpha_k p_k + \alpha_k \rho_k u_k^2 + \sigma_k \kappa_k \frac{\Phi_k^2}{2}}{\sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k}.$$

Cette valeur de u_I^2 ne peut conduire à une onde linéairement dégénérée du fait de la singularité lorsque les vitesses changent de signe. La dernière fermeture proposée est la suivante :

$$\sum_{k=1}^q (I_k^2 u_I + I_k^1 I_k^3) + p_I u_I = 0 \implies u_I = \frac{\sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k u_k \left(\frac{u_k^2}{2} + \frac{c_k^2}{\Gamma_k} \right)}{\sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k e_k - \sigma_k \kappa_k \frac{\Phi_k^2}{2}}.$$

Remarquons que la condition de consistance (2.46) ne peut être vérifiée et il est donc inutile de prouver que cette variable est un invariant de Riemann. Cette fermeture pourra être utilisée dans des contextes physiques différents.

Concernant la pression interfaciale, beaucoup de relations de fermeture peuvent être considérées dès lors que u_I est connue. La fermeture la plus simple est la suivante :

$$\sum_{k=1}^q b_k \left(\alpha_k (p_k - p_I) + I_k^1 u_k + \sigma_k \kappa_k \frac{\Phi_k^2}{2} \right) = b_0 \implies p_I = \frac{\sum_{k=1}^q b_k \left[\alpha_k p_k + I_k^1 u_k + \sigma_k \kappa_k \frac{\Phi_k^2}{2} \right] + b_0}{\sum_{k=1}^q b_k \alpha_k}, \quad (2.48)$$

où b_k sont des réels. En introduisant les notations :

$$\overline{b\alpha} = \sum_{k'=1}^q b_{k'} \alpha_{k'}, \quad \overline{b\alpha\rho u} = \sum_{k'=1}^q b_{k'} \alpha_{k'} \rho_{k'} u_{k'},$$

les dérivées de la pression interfaciale s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\partial p_I}{\partial \mathbf{V}_k} = \frac{b_k}{\overline{b\alpha}} \begin{pmatrix} (\Delta p)_k + \rho_k u_k (\Delta u)_k \\ \alpha_k u_k (\Delta u)_k \\ \alpha_k \rho_k [u_k + (\Delta u)_k] \\ \alpha_k \\ \sigma_k \kappa_k \Phi_k \end{pmatrix} - \frac{b_q}{\overline{b\alpha}} \begin{pmatrix} (\Delta p)_q + \rho_q u_q (\Delta u)_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_q \kappa_q \Phi_k \end{pmatrix} - \frac{\overline{b\alpha\rho u}}{\overline{b\alpha}} \frac{\partial u_I}{\partial \mathbf{V}_k} \quad \text{si } k < q,$$

$$\frac{\partial p_I}{\partial \mathbf{V}_q} = \frac{b_q}{\overline{b\alpha}} \begin{pmatrix} \alpha_q u_q (\Delta u)_q \\ \alpha_q \rho_q [u_q + (\Delta u)_q] \\ \alpha_q \end{pmatrix} - \frac{\overline{b\alpha\rho u}}{\overline{b\alpha}} \frac{\partial u_I}{\partial \mathbf{V}_q} \quad \text{sinon.}$$

Le produit de la dérivée de cette variable par les vecteurs propres $R_{u_I, k}^a$ et $R_{u_I, k}^a$ pour $k \in \{1 \dots (q-1)\}$ est nul. Ainsi, p_I est un invariant de Riemann pour l'onde de contact u_I . La relation de consistance (2.46) impose $b_0 = 0$ et qu'il existe $k \in \{1 \dots q\}$ tel que $b_k \neq 0$.

Au cours de ce paragraphe, nous avons développé une technique permettant de déterminer des expressions analytiques de vitesse et de pression interfaciales vérifiant des critères importants pour l'écoulement. Le premier critère impose que l'interface physique séparant les fluides soit modélisée par une discontinuité de contact c'est à dire que u_I soit un invariant de Riemann. Le second critère concerne la conservation de la pression interfaciale conduisant au respect de la loi de Laplace [69] lorsque les effets capillaires sont pris en compte. Nos résultats (2.47, 2.48) généralisent les résultats obtenus dans le cas bifluide par Baer Nunziato [12] ($a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = 0$ et $b_2 = 1$) et Massoni, Saurel, Nkonga et Abgrall [75] ($a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = 1$ et $b_2 = 1$). La dernière remarque concerne les produits non conservatifs $u_I \partial_x (\alpha_k)$ et $p_I \partial_x (\alpha_k)$. La fraction volumique n'étant discontinue qu'au niveau de l'onde u_I où les quantités u_I et p_I sont invariantes, les produits non conservatifs ne soulèveront pas d'ambiguïtés [72].

2.1.5 Formulation dissipative à l'équilibre de température

L'analyse de la structure dissipative du système s'effectue en établissant une inégalité de type Clausius Duhem pour le système (2.9). Pour cela, nous cherchons une entropie de

mélange et l'équation d'évolution qui lui est associée. Dans ce paragraphe, nous supposons que les fluides sont à l'équilibre thermique. Les processus permettant de ramener les fluides à l'équilibre de température seront donc omis.

L'énergie cinétique de chaque fluide est régie par l'équation :

$$\partial_t \left(\alpha_k \rho_k \frac{\mathbf{u}_k^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\alpha_k \rho_k \frac{\mathbf{u}_k^2}{2} \mathbf{u}_k \right) + \mathbf{u}_k \cdot \nabla (\alpha_k p_k) = \quad (2.49)$$

$$p_I \mathbf{u}_k \nabla \alpha_k + \mathbf{u}_k \cdot \nabla \cdot (\alpha_k \tau_k) + \alpha_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k + \Phi_k \sigma_k \kappa_k \mathbf{u}_k \cdot \nabla \phi_k + \mathbf{u}_k \cdot \dot{v}_k - \mathbf{u}_k^2 \dot{m}_k.$$

Les équations d'énergies internes des fluides se déduisent de la relation $\epsilon_k = e_k - \frac{\mathbf{u}_k^2}{2}$:

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_k \rho_k \epsilon_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \epsilon_k \mathbf{u}_k) + \alpha_k p_k \nabla \cdot \mathbf{u}_k = \\ p_I (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \alpha_k + \sigma_k \kappa_k \Phi_k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \Phi_k + \alpha_k \tau_k : \nabla \mathbf{u}_k - \nabla (\alpha_k q_k) - \\ p_I \dot{\alpha}_k - (e_k - \mathbf{u}_k^2) \dot{m}_k + \dot{v}_k \cdot (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k) + \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (2.50)$$

L'équation d'énergie interne des fluides $\rho \epsilon = \sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k \epsilon_k$ s'obtient en sommant les équations précédentes :

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho \epsilon) + \nabla \cdot \left(\rho \epsilon \mathbf{u} + \sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k \epsilon_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \right) + \alpha_k p_k \nabla \cdot (\mathbf{u}_k) = \\ \sum_{k=1}^q [p_I (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \alpha_k + \sigma_k \kappa_k \Phi_k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \Phi_k + \alpha_k \tau_k : \nabla \mathbf{u}_k - \nabla (\alpha_k q_k)] - \\ \sum_{k=1}^q [p_I \dot{\alpha}_k - (e_k - \mathbf{u}_k^2) \dot{m}_k + \dot{v}_k \cdot (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k)], \end{aligned} \quad (2.51)$$

où $\mathbf{u} = \sum y_k \mathbf{u}_k$ est la vitesse du centre de masse du volume fluide.

D'après la théorie cinétique des mélanges gazeux, l'entropie des fluides obéit à l'équation différentielle [50] :

$$T d(\rho s) = d(\rho \epsilon) - \sum_{k=1}^q g_k d(\alpha_k \rho_k), \quad (2.52)$$

où T est la température du mélange et g_k le potentiel chimique de l'espèce :

$$g_k = \frac{p_k}{\rho_k} + \epsilon_k - T s. \quad (2.53)$$

L'équation d'entropie est ainsi obtenue à partir des équations de masse des fluides et de l'énergie interne de mélange :

$$\partial_t(\rho s) + \nabla \cdot \left(\rho s \mathbf{u} + \sum_{k=1}^q \alpha_k [b_k + \rho_k s_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u})] \right) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \frac{\dot{Q}}{T}, \quad (2.54)$$

où nous avons utilisé la loi de Fourier et introduit les notations $b_k = \frac{q_k}{T_k}$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^q [p_I(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \alpha_k + \sigma_k \kappa_k \Phi_k(\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \Phi_k], \\ \Gamma_2 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^q \alpha_k \lambda_k |\nabla T_k|^2, \\ \Gamma_3 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^q \alpha_k \tau_k : \nabla \mathbf{u}_k, \\ \dot{Q} = - \sum_{k=1}^q [\dot{v}_k \cdot \mathbf{u}_k + \dot{m}_k (H_k - \mathbf{u}_k^2) + \dot{\alpha}_k p_k]. \end{array} \right. \quad (2.55)$$

La positivité de Γ_1 ne peut en général pas être démontrée. Seguin a montré [93] qu'un choix correct de variables interfaciales pouvait, en l'absence de force de tension de surface, annuler ces termes sources. B. Graille [50] a montré la positivité de ces termes, sans la tension de surface, et dans le cas isovolume. Remarquons cependant, que ce terme n'est non nul qu'au niveau des 'zones de mélange' puisqu'il s'exprime à l'aide des dérivées en espace de la fraction volumique et de la fonction couleur. De plus, son amplitude pourra être contrôlée dès lors que la fraction volumique sera régulière et que les vitesses des fluides seront proches de l'équilibre. Nous considérerons donc des relaxation instantanée de vitesse [68] puisqu'elles limitent fortement les déséquilibres de vitesses des fluides.

La preuve de la positivité de Γ_2 est évidente. La positivité de Γ_3 se démontre de la manière suivante :

$$\Gamma_3 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^q \alpha_k \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla \mathbf{u}_k^T) : \nabla \mathbf{u}_k = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^q \alpha_k \mu_k \left(\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} \right)^2 \geq 0, \quad (2.56)$$

où $u_{k,i}$ est la i^{eme} composante du vecteur \mathbf{u}_k dans le repère utilisé.

Proposition 2 Lorsque pour tout fluide k les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_k \cdot \sum_{l=1}^q (u_l - u_k) \geq 0, \\ \dot{m}_k \sum_{l=1}^q (H_k - H_l - (u_k^2 - u_l^2)) \leq 0, \\ \dot{\alpha}_k \sum_{l=1}^q (p_l - p_k) \leq 0, \end{array} \right. \quad (2.57)$$

sont vérifiées, le terme \dot{Q}_k est positif et l'inégalité de Clausius Duhem :

$$\partial_t(\rho S) + \partial_t(\rho S) - \Gamma_1 \geq 0, \quad (2.58)$$

est satisfaite.

Démonstration :

La preuve s'effectue en considérant la relation simple :

$$\sum_{k=1}^q \left(\sum_{l=1}^q \dot{q}_k + \dot{v}_k \cdot \sum_{l=1}^q (u_l - u_k) - \dot{m}_k \sum_{l=1}^q (H_k - H_l - (u_k^2 - u_l^2)) - \dot{\alpha}_k \sum_{l=1}^q (p_l - p_k) \right) = \frac{\dot{Q}}{N_f} \geq 0 \quad (2.59)$$

et l'inégalité (2.58) est obtenue aisément puisque tous les termes du second membre sont positifs.

Les conditions suffisantes pour que le système admette une entropie ont été exhibées. Nous étudions maintenant les termes de production proposés par Baer Nunziato [12]. Dans ce cas, les transferts d'énergie et de masse sont négligés ($\dot{q}_k = 0$, $\dot{m}_k = 0$). Les conditions nécessaires de la proposition (2.57) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_k \cdot \sum_{l=1}^q (u_l - u_k) \geq 0, \\ \dot{\alpha}_k \sum_{l=1}^q (p_l - p_k) \leq 0. \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Le choix des termes de compaction et d'échange d'énergies proposé par Baer Nunziato [12] est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_k = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{l=1}^q (u_l - u_k), \\ \dot{\alpha}_k = -\frac{z}{\mu_k} \sum_{l=1}^q (p_l - p_k), \end{array} \right. \quad (2.61)$$

où $\lambda_k > 0$ sont des réels positifs qui déterminent l'intensité des forces de traînée entre les fluides. μ_k sont des réels positifs qui contrôlent l'amplitude des effets liés aux fluctuations de pressions : transfert d'énergie d'une phase à l'autre et compaction des phases. z est un paramètre qui contrôle l'amplitude de la compaction des phases. Ce choix de fermeture satisfait les propositions (2.57) et (2.10).

Il permet de montrer l'existence d'une inégalité d'entropie pour le système.

2.1.6 Résumé du modèle de base

Le modèle de Baer Nunziato s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\partial_t(\alpha_k) + \mathbf{u}_I \nabla(\alpha_k) = \frac{z}{\mu_k} \sum_{l=1}^q (p_l - p_k), \\
\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0, \\
\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot [\alpha_k (\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k + p_k)] = \\
p_I \nabla \alpha_k + \nabla \cdot (\alpha_k \tau_k) + \mathbf{f}_k^v - \Phi_k \sigma_k \kappa_k \nabla(\Phi_k) + \frac{1}{\lambda_k} \sum_{l=1}^q (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_k), \\
\partial_t(\alpha_k E_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k H_k \mathbf{u}_k) = \\
-p_I \partial_t(\alpha_k) + \nabla \cdot [\alpha_k (\tau_k \cdot \mathbf{u}_k - q_k)] + \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k^v - \Phi_k \sigma_k \kappa_k \mathbf{u}_I \nabla(\Phi_k) + \\
\frac{1}{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \mathbf{u}_I \cdot (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_k), \\
\partial_t(\Phi_k) + \mathbf{u}_I \cdot \nabla(\Phi_k) = \frac{1}{\lambda} (f_k(\alpha_k, \mathbf{y}_k, S_k) - \Phi_k).
\end{array} \right. \quad (2.62)$$

Il est fermé en considérant que chaque fluide obéit une loi d'état fluide pur *Stiffened gaz*.

Les vitesses interfaciales sont choisies de manière à ce que l'interface physique entre les fluides soit modélisée par une discontinuité de contact se propageant à la vitesse interfaciale. De plus pour cette onde, nous imposons que la pression interfaciale soit un invariant de Riemann de manière à ce que les pressions soient égales de part et d'autre de l'interface.

2.2 Stratégie de résolution

Afin de définir la stratégie de résolution, le système de Baer Nunziato (2.9) est écrit en dimension 1 et pour deux fluides uniquement :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\partial_t \mathbf{W} + \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_v + \frac{1}{\mu} \mathbf{R}_p + \mathbf{H}^a \mathbf{g} - \mathbf{H}^b \nabla \Phi_1 + \nabla \cdot \mathbf{F}^{vis}, \\
\partial_t(\Phi_1) + \mathbf{u}_I \cdot \nabla(\Phi_1) = \frac{1}{\lambda} (f_1(\alpha_1, \mathbf{y}_1, S_1) - \Phi_1),
\end{array} \right. \quad (2.63)$$

où le vecteur des variables conservatives \mathbf{W} , le flux \mathbf{F} et les termes non conservatifs $\mathbf{B} \partial_x \mathbf{V}$ sont donnés par :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 \\ \alpha_1 E_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2 \\ \alpha_2 E_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1^2 + \alpha_1 p_1 \\ \alpha_1 (E_1 + p_1) \mathbf{u}_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2^2 + \alpha_2 p_2 \\ \alpha_2 (E_2 + p_2) \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \rho_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ p_1 \\ \rho_2 \\ \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_I \mathbf{u}_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_I \mathbf{u}_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les termes de relaxation revêtent quant à eux la forme suivante :

$$\mathbf{R}_v = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -\mathbf{u}_I \\ 0 \\ 1 \\ \mathbf{u}_I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_p = (p_1 - p_2) \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \\ -p_I \\ 0 \\ 0 \\ p_I \end{pmatrix}$$

Les termes sources sont constitués des termes de force volumique et de viscosité :

$$\mathbf{H}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{vis} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \tau_1 \\ \alpha_1 \tau_1 \cdot \mathbf{u}_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \tau_2 \\ \alpha_2 \tau_2 \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$$

Dans le cas de deux fluides, la formulation de la tension de surface est simplifiée car $\sigma_1 = \sigma_2$, $\kappa_1 = -\kappa_2$ et $\Phi_2 = 1 - \Phi_1$. Il vient :

$$\mathbf{H}^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_1 \sigma_1 \kappa_1 \\ \Phi_1 \sigma_1 \kappa_1 \mathbf{u}_I \\ 0 \\ \Phi_2 \sigma_1 \kappa_1 \\ \Phi_2 \sigma_1 \kappa_1 \mathbf{u}_I \end{pmatrix}$$

L'approximation du système (2.63) s'effectue suivant une méthode de décomposition d'opérateurs ('splitting') dont les étapes sont les suivantes :

2.2.1 Résolution des termes de propagation

L'opérateur de propagation est constitué d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en temps et en espace. Les termes de tension de surface pourront être inclus lorsque l'équation (2.22) est utilisée pour la fonction couleur et lorsque la courbure est supposée localement constante. Dans le cas contraire, ces forces seront résolues (2.2.2). L'opérateur de propagation est donné par :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\mathbf{H}^b \nabla \phi_1 \\ \partial_t \Phi_1 + \mathbf{u}_I \cdot \nabla \Phi_1 = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Remarquons que la fraction volumique est gouvernée par une équation de transport à la vitesse interfaciale u_I . Les masses des fluides $\alpha_k \rho_k$ obéissent à des équations de conservation. Les équations de quantités de mouvement $\alpha_k \rho_k$ et d'énergie $\alpha_k \rho_k e_k$ présentent une partie conservative habituelle et des termes non conservatifs $p_I \nabla \alpha_k$ et $p_I u_I \cdot \nabla (\alpha_k)$ qui traduisent l'interaction des fluides. Lorsque les fractions volumiques sont uniformes en espace, le système devient conservatif.

Le système étant hyperbolique, nous utiliserons des méthodes numériques reposant sur une résolution approchée de problèmes de Riemann. Ces méthodes seront détaillées dans le chapitre 3.

2.2.2 Résolution des termes sources

Les termes sources, par définition, ne font intervenir que les termes ne présentant aucune dérivée (gravité), ou ceux comportant de fortes non linéarités (viscosité). Lorsque l'équation (2.23) sera considérée pour la fonction couleur, les effets de la tension de surface devront être résolus en tant que termes sources. Nous considérons le système :

$$\partial_t \mathbf{W} = \mathbf{H}^a \mathbf{g} - \mathbf{H}^b \nabla \Phi_1 + \nabla \cdot \mathbf{F}^{vis}. \quad (2.66)$$

Le traitement des effets de la gravité et de la viscosité est courant et ne sera pas détaillé dans ce document. La résolution de la tension de surface est présentée dans la section 5.4.

2.2.3 Résolution des termes de relaxation

Les processus de relaxation des vitesses et des pressions ne font intervenir aucune dérivée des variables décrivant les fluides. La relation (2.67) correspond donc à un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\partial_t \mathbf{W} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_v + \frac{1}{\mu} \mathbf{R}_p. \quad (2.67)$$

Dans cette section, nous traitons la résolution des processus de relaxation de vitesses et de pressions dans le cas bifluide. Les termes présents dans l'expression de ces processus (2.61) ne font intervenir aucune dérivée spatiale. De ce fait, leur résolution est donc découplée du traitement des opérateurs de propagation.

D'un point de vue physique, nous supposons que l'échelle de temps liée au processus d'équilibre des variables de vitesse et pression est petite devant celle associée aux opérateurs de propagation [68]. En pratique, le processus de relaxation sera supposé instantané. Ainsi, les pressions et vitesses seront à l'équilibre après chaque relaxation.

Afin de clarifier la présentation, les variables décrivant les fluides seront annotées 0 et * respectivement avant et après les processus de relaxation.

Relaxation des vitesses

Le système traduisant le processus de relaxation des vitesses est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1u_1) = \frac{1}{\lambda}(u_2 - u_1), \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1e_1) = \frac{1}{\lambda}u_I(u_2 - u_1), \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2u_2) = -\frac{1}{\lambda}(u_2 - u_1), \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2e_2) = -\frac{1}{\lambda}u_I(u_2 - u_1). \end{array} \right. \quad (2.68)$$

Il laisse invariantes la masse de chaque fluide $\alpha_k\rho_k$, la quantité de mouvement totale $\sum_{k=1}^q \alpha_k\rho_ku_k$ et l'énergie totale $\sum_{k=1}^q \alpha_k\rho_ke_k$. En introduisant la constante $\tau = \frac{1}{\alpha_1\rho_1} - \frac{1}{\alpha_2\rho_2}$, l'équation gouvernant l'écart de vitesse $w = u_1 - u_2$ s'écrit :

$$\partial_t w = -\frac{\tau}{\lambda}w$$

Cette équation différentielle ordinaire est une équation harmonique. Le signe négatif au second membre assure la décroissance de l'écart des vitesses et donc l'obtention de l'équilibre. Il vient en intégrant :

$$w(t) = w^0 e^{-\frac{\tau t}{\lambda}}$$

La combinaison de la relation précédente avec les équations de quantité de mouvement permet d'obtenir les équations différentielles vérifiées par les vitesses des fluides. Leur résolution est simple et donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = u_1^0 + \frac{u_2^0 - u_1^0}{\alpha_1\rho_1\tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau t}{\lambda}} \right), \\ u_2(t) = u_2^0 - \frac{u_2^0 - u_1^0}{\alpha_2\rho_2\tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau t}{\lambda}} \right). \end{array} \right.$$

Pour déterminer l'évolution des énergies de chaque fluide, il est nécessaire de connaître l'expression de la variable interfaciale u_I . Suivant la relation (2.47), cette variable s'écrit sous la forme $u_I = k_1u_1 + k_2u_2$ où k_1 et k_2 sont fonctions des masses des fluides. Ainsi, l'équation de u_I est la suivante :

$$u_I(t) = u_I^0 + \left(\frac{k_1}{\alpha_1 \rho_1} - \frac{k_2}{\alpha_2 \rho_2} \right) \frac{u_2^0 - u_1^0}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau t}{\lambda}} \right).$$

L'utilisation de cette relation permet d'obtenir les équations qui gouvernent les énergies de chaque fluide :

$$\begin{cases} e_1(t) = e_1^0 + \frac{w^0(u_I^0 + cte)}{\alpha_1 \rho_1 \tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau t}{\lambda}} \right) - \frac{w^0 cte}{2\alpha_1 \rho_1 \tau} \left(1 - e^{-\frac{2\tau t}{\lambda}} \right), \\ e_2(t) = e_2^0 - \frac{w^0(u_I^0 + cte)}{\alpha_2 \rho_2 \tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau t}{\lambda}} \right) + \frac{w^0 cte}{2\alpha_2 \rho_2 \tau} \left(1 - e^{-\frac{2\tau t}{\lambda}} \right). \end{cases}$$

Lorsque l'équilibre des vitesses sera atteint $\left(\frac{\Delta t}{\lambda} \rightarrow 0 \right)$, les variables décrivant les fluides prendront les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_1^* = u_1^0 + \frac{u_2^0 - u_1^0}{\alpha_1 \rho_1 \tau}, & u_2^* = u_2^0 - \frac{u_2^0 - u_1^0}{\alpha_2 \rho_2 \tau}, \\ e_1^* = e_1^0 + \frac{w^0[2u_I^0 + cte]}{2\alpha_1 \rho_1 \tau}, & e_2^* = e_2^0 - \frac{w^0[2u_I^0 + cte]}{2\alpha_2 \rho_2 \tau}. \end{cases} \quad (2.69)$$

Relaxation des pressions avec effet de compaction

Le processus de relaxation est résolu en prenant en compte les effets de compaction de la fraction volumique ($z=1$). Pour cela, la connaissance des variables interfaciales u_I et p_I n'est pas nécessaire. Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_1) = \nu(p_1 - p_2), \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 e_1) = \nu p_I(p_1 - p_2), \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 e_2) = -\nu p_I(p_1 - p_2). \end{cases} \quad (2.70)$$

Cette étape conserve les masses, la quantité de mouvement de chaque fluide ainsi que l'énergie totale du mélange. Ce système ne peut pas être résolu de manière exacte. Nous présentons la méthode approchée la plus simple. Pour cela, les énergies internes de chaque fluide sont exprimées à l'aide de la fraction volumique :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_1 \rho_1 e_1) = p_I \partial_t(\alpha_1), \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 e_2) = -p_I \partial_t(\alpha_1). \end{cases}$$

En intégrant ces équations sur $[0, +\infty)$, il vient :

$$\begin{cases} (\alpha_1 \rho_1 e_1)^* - (\alpha_1 \rho_1 e_1)^0 = \int_0^{+\infty} p_I \partial_t(\alpha_1) dt, \\ (\alpha_2 \rho_2 e_2)^* - (\alpha_2 \rho_2 e_2)^0 = - \int_0^{+\infty} p_I \partial_t(\alpha_1) dt. \end{cases}$$

L'intégrale présente aux seconds membres est approchée par la méthode des trapèzes [68] :

$$\int_0^{+\infty} p_I \partial_t(\alpha_1) dt \approx \frac{p_I^* + p_I^0}{2} (\alpha_1^* - \alpha_1^0).$$

En utilisant les lois d'état de chaque fluide et l'égalité des pressions à l'équilibre $p_1^* = p_2^* = p_I^*$, le système précédent devient :

$$\begin{cases} \alpha_1^* \frac{p_I^* + \gamma_1 P_1^\infty}{\gamma_1 - 1} - \alpha_1^0 \frac{p_I^0 + \gamma_1 P_1^\infty}{\gamma_1 - 1} = \frac{p_I^* + p_I^0}{2} (\alpha_1^* - \alpha_1^0), \\ \alpha_2^* \frac{p_I^* + \gamma_2 P_2^\infty}{\gamma_2 - 1} - \alpha_2^0 \frac{p_I^0 + \gamma_2 P_2^\infty}{\gamma_2 - 1} = - \frac{p_I^* + p_I^0}{2} (\alpha_1^* - \alpha_1^0). \end{cases}$$

Le système obtenu comporte deux équations non linéaires en regard des deux inconnues p_I^* et α_1^* . Il est résolu en isolant la pression d'équilibre :

$$\begin{cases} p_I^* = \frac{\alpha_1^0 p_1^0 - \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} p_I^0 + \gamma_1 p_1^\infty \right) (\alpha_1^* - \alpha_1^0)}{\alpha_1^0 + \frac{\gamma_1 + 1}{2} (\alpha_1^* - \alpha_1^0)}, \\ p_I^* = \frac{\alpha_2^0 p_2^0 + \left(\frac{\gamma_2 - 1}{2} p_I^0 + \gamma_2 p_2^\infty \right) (\alpha_1^* - \alpha_1^0)}{\alpha_1^0 + \frac{\gamma_2 + 1}{2} (\alpha_1^* - \alpha_1^0)}. \end{cases}$$

L'égalité de ces deux relations permet d'obtenir un polynôme du second degré en la variable $(\alpha_1^* - \alpha_1^0)$:

$$A_0 + A_1(\alpha_1^* - \alpha_1^0) + A_2(\alpha_1^* - \alpha_1^0)^2 = 0, \quad (2.71)$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\begin{cases} A_0 = \alpha_1^0 \alpha_2^0 (p_2^0 - p_1^0), \\ A_1 = -\frac{\gamma_2 + 1}{2} \alpha_1^0 p_1^0 - \frac{\gamma_1 + 1}{2} \alpha_2^0 p_2^0 - \frac{\alpha_2^0 (\gamma_1 - 1) + \alpha_1^0 (\gamma_2 - 1)}{2} p_I^0 - (\alpha_2^0 \gamma_1 p_1^0 + \alpha_1^0 \gamma_2 p_2^0), \\ A_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} p_I^0 + \frac{\gamma_2 + 1}{2} \gamma_1 p_1^0 + \frac{\gamma_1 + 1}{2} \gamma_2 p_2^0. \end{cases}$$

Ce polynôme admet toujours deux racines réelles. On peut montrer que celle à retenir est du signe de $-(p_2^0 - p_1^0)$ et permet de vérifier : $\alpha_1^* \in [0, 1]$. Ces dernières propriétés assurent l'existence et l'unicité de la fraction volumique relaxée.

Relaxation des pressions sans effet de compaction

Considérons le processus de relaxation des pressions sans les termes de compaction ($z = 0$). Dans ce cas, l'atteinte de l'équilibre des pressions ne s'accompagnera pas de variations de volume des fluides. Le système que nous devons résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 e_1) = \nu p_I (p_1 - p_2), \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 e_2) = -\nu p_I (p_1 - p_2). \end{array} \right. \quad (2.72)$$

Comme les variables α_k , ρ_k et u_k sont constantes, seules les équations d'énergie des fluides sont considérées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \partial_t(\rho_1 e_1) = \nu p_I (p_1 - p_2), \\ \alpha_2 \partial_t(\rho_2 e_2) = -\nu p_I (p_1 - p_2). \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système, il est nécessaire d'exprimer les énergies internes en fonction des pressions. Dans le cas d'une fermeture utilisant la loi des gaz raides, les équations des pressions sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{\Gamma_1} \partial_t(p_1) = \nu p_I (p_1 - p_2), \\ \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} \partial_t(p_2) = -\nu p_I (p_1 - p_2). \end{array} \right.$$

Par sommation, nous obtenons une équation liant les pressions des deux fluides :

$$\frac{\alpha_1}{\Gamma_1} \partial_t(p_1) + \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} \partial_t(p_2) = 0.$$

L'intégration de cette relation et la prise en compte de l'égalité des pressions après relaxation ($p_1^* = p_2^* = p_I^*$) conduit au résultat suivant :

$$p^* = \frac{\frac{\alpha_1}{\Gamma_1} p_1^0 + \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} p_2^0}{\frac{\alpha_1}{\Gamma_1} + \frac{\alpha_2}{\Gamma_2}}. \quad (2.73)$$

Les méthodes de résolution présentées supposent que les processus de relaxation s'effectuent en un temps négligeable devant le temps caractéristique de l'opérateur de propagation. Les solutions obtenues sont donc très voisines de solutions d'équilibre. Dans la suite du document, nous déterminons le système les gouvernant.

2.3 Le modèle asymptotique

2.3.1 Dérivation du modèle

Les fluides que nous considérons sont non miscibles. Pour les modèles d'interface diffuse, il existe une zone artificielle de mélange. Cependant, celle-ci possède une faible épaisseur et respecte néanmoins la nature physique de l'écoulement. Lorsqu'une phase est prépondérante, les variables interfaciales sont très proches des vitesse et pression de celle-ci et les processus de relaxation ont peu d'influence sur le résultat. Dans ce contexte, il est d'usage de supposer que l'échelle d'évolution des processus de relaxation est très petite de manière à ce que les vitesses et pressions des fluides restent proches de l'équilibre. Ainsi, les pressions et les vitesses des fluides peuvent s'écrire à l'aide des développements de Chapman Enskog suivants :

$$p_k = p + \mu p'_k + O(\mu^2), \quad u_k = u + \lambda u'_k + O(\lambda^2), \quad (2.74)$$

où pour simplifier les notations, la vitesse interfaciale est notée $u = u_I$ et la pression interfaciale $p = p_I$. L'utilisation des développements asymptotiques permet d'obtenir, à partir du modèle (2.9), un système à l'ordre 0 en λ et μ :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F} + \mathbf{B} \partial_x \mathbf{V} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_v + \frac{1}{\nu} \mathbf{R}_p + \mathbf{H}^a \mathbf{g} - \mathbf{H}^b \nabla \Phi_1 + \nabla \cdot \mathbf{F}^{vis}, \\ \partial_t \Phi_1 + u_I \partial_x \Phi_1 = \frac{1}{\lambda} (f_1(\alpha_1, y_1, S_1) - \Phi_1), \end{cases} \quad (2.75)$$

où les vecteurs et matrices du système sont donnés par :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u \\ \alpha_1 E_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u \\ \alpha_2 E_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u \\ \alpha_1 \rho_1 u^2 + \alpha_1 p \\ \alpha_1 (E_1 + p) u \\ \alpha_2 \rho_2 u \\ \alpha_2 \rho_2 u^2 + \alpha_2 p \\ \alpha_1 (E_2 + p) u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \rho_1 \\ u \\ p \\ \rho_2 \\ u \\ p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -pu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et les vecteurs de relaxation, qui sont au second membre de l'équation, satisfont l'égalité :

$$\mathbf{R}_v = \lambda(u'_1 - u'_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -u \\ 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_p = \mu(p'_1 - p'_2) \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \\ -p \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix},$$

où le paramètre de compaction z a été introduit de manière à contrôler l'amplitude de la variation de volume des fluides sous l'effet de la relaxation des pressions. Les termes source sont donnés par :

$$\mathbf{H}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u} \\ 0 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{vis} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \tau_1 \\ \alpha_1 \tau_1 \mathbf{u} \\ 0 \\ \alpha_2 \tau_2 \\ \alpha_2 \tau_2 \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_1 \sigma_1 \kappa_1 \\ \Phi_1 \sigma_1 \kappa_1 \mathbf{u} \\ 0 \\ \Phi_2 \sigma_1 \kappa_1 \\ \Phi_2 \sigma_1 \kappa_1 \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

L'expression du terme $p'_1 - p'_2$ est déduite des équations de pressions des fluides. En utilisant la loi *Stiffened gas*, il vient :

$$\begin{cases} \partial_t(p) + u \partial_x(p) + \rho_1 c_1^2 \partial_x(u) = -(p'_1 - p'_2) \frac{\Gamma_1}{\alpha_1} (p + z \rho_1 \epsilon_1), \\ \partial_t(p) + u \partial_x(p) + \rho_2 c_2^2 \partial_x(u) = (p'_1 - p'_2) \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} (p + z \rho_2 \epsilon_2). \end{cases} \quad (2.76)$$

En effectuant la différence entre ces deux relations, le terme de fluctuation de pression s'exprime en fonction de la dérivée spatiale de la vitesse. Nous obtenons ainsi en introduisant la notation β_1 :

$$p'_1 - p'_2 = \beta_1 \partial_x(u) \quad \text{avec} \quad \beta_1 = \frac{\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2}{\frac{\Gamma_1}{\alpha_1} (p + z \rho_1 \epsilon_1) + \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} (p + z \rho_2 \epsilon_2)}. \quad (2.77)$$

La prise en compte de cette relation dans les équations (2.76) conduit à l'équation de la pression de mélange :

$$\partial_t(p) + u \partial_x(p) + \rho c^2 \partial_x(u) = 0, \quad (2.78)$$

où c est la vitesse du son de mélange. Elle est donnée par la relation :

$$\rho c^2 = \frac{\frac{\alpha_1 \rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + (z-1)\Gamma_1 \rho_1 \epsilon_1} + \frac{\alpha_2 \rho_2 c_2^2}{\rho_2 c_2^2 + (z-1)\Gamma_2 \rho_2 \epsilon_2}}{\frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2 + (z-1)\Gamma_1 \rho_1 \epsilon_1} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2 + (z-1)\Gamma_2 \rho_2 \epsilon_2}}. \quad (2.79)$$

Afin de déterminer la différence des fluctuations de vitesse $u'_1 - u'_2$, les équations suivantes sont utilisées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(u) + u\partial_x(u) + \frac{1}{\rho_1}\partial_x(p) = -\frac{1}{\alpha_1\rho_1}(u'_1 - u'_2) + \frac{\partial_x(\alpha_1\tau_1)}{\alpha_1\rho_1} + g - \frac{\Phi_1\sigma_1\kappa_1}{\alpha_1\rho_1}\partial_x(\Phi_1), \\ \partial_t(u) + u\partial_x(u) + \frac{1}{\rho_2}\partial_x(p) = \frac{1}{\alpha_2\rho_2}(u'_1 - u'_2) + \frac{\partial_x(\alpha_2\tau_2)}{\alpha_2\rho_2} + g - \frac{\Phi_2\sigma_2\kappa_2}{\alpha_2\rho_2}\partial_x(\Phi_2). \end{array} \right. \quad (2.80)$$

Leur différence donne une expression simple des fluctuations en fonction du gradient de pression :

$$u'_1 - u'_2 = [\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2] \partial_x(p) + y_2 [\partial_x(\alpha_1 \tau_1) - \Phi_1 \sigma_1 \kappa_1 \partial_x(\Phi_1)] - y_1 [\partial_x(\alpha_2 \tau_2) - \Phi_2 \sigma_2 \kappa_2 \partial_x(\Phi_2)].$$

En notant $\mu = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ le coefficient de viscosité moyen du fluide, l'équation de la vitesse moyenne est aisément déduite des calculs précédents :

$$\partial_t(u) + u\partial_x(u) + \frac{1}{\rho}\partial_x(p) = g + \frac{\partial_x(\alpha\tau) - \sigma_1\kappa_1\partial_x(\Phi_1)}{\rho}, \quad (2.81)$$

où la densité de mélange $\rho = \sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k$ est utilisée.

Le système (2.75) possède le même nombre d'équations que le système initial (2.63). Néanmoins, en sommant les équations de quantité de mouvement et d'énergie, le nombre de variables peut être réduit. Pour cette simplification, l'énergie de mélange E est utilisée et de nouvelles fermetures devront être considérées. Le modèle obtenu sera appelé modèle asymptotique. Il est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1) + u\partial_x(\alpha_1) - z\beta_1\partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = \partial_x(\tau) + \rho g - \sigma_1\kappa_1\partial_x(\Phi_1), \\ \partial_t(E) + \partial_x[(E + p)u] = \partial_x(\tau u) + \rho g u - \sigma_1\kappa_1 u \partial_x(\Phi_1), \\ \partial_t(\Phi_1) + u\partial_x(\Phi_1) = \frac{1}{\lambda}(f_1(\alpha_1, y_1, S_1) - \Phi_1). \end{array} \right. \quad (2.82)$$

Le modèle asymptotique s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\mathbf{W}) + \nabla(\mathbf{F}) + \mathbf{B}\nabla(\mathbf{V}) = \mathbf{H}^a \mathbf{g} - \mathbf{H}^b \nabla\Phi_1 + \nabla \cdot \mathbf{F}^{vis}, \\ \partial_t\Phi_1 + u_I \partial_x\Phi_1 = \frac{1}{\lambda}(f_1(\alpha_1, y_1, S_1) - \Phi_1), \end{array} \right. \quad (2.83)$$

où :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u \\ \alpha_2 \rho_2 u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ u \\ p \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & z\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ \rho \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{vis} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau \\ \tau \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_1 \kappa_1 \\ \sigma_1 \kappa_1 \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Au cours de ce paragraphe, nous avons dérivé un modèle asymptotique à partir du modèle de base (2.9). Celui-ci donne, suivant la valeur de z , les modèles connus suivants :

- Le modèle de Kapila [66] s'obtient en fixant le paramètre de compaction $z = 1$ et $\beta_1 = \alpha_1 \left(1 - \frac{\rho c^2}{\rho_1 c_1^2}\right)$. Guillard et Murrone ont montré dans [52] qu'il dérive du modèle de Baer Nunziato [12]. Ce modèle admet la vitesse du son suivante :

$$\frac{1}{\rho c^2} = \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k}{\rho_k c_k^2}. \quad (2.85)$$

- Le modèle de Massoni [75] se retrouve en négligeant les termes de compaction $z = 0$. Cette approximation est valable dans la limite où les fluides considérés sont incompressibles. Dans ce contexte, les processus qui entrent en jeu pour l'équilibre des pressions au niveau des interfaces ont peu d'influence sur le volume occupé par les fluides. La vitesse du son de ce modèle est la suivante :

$$\rho c^2 = \frac{\sum_{k=1}^q \alpha_k \rho_k c_k^2 / \Gamma_k}{\sum_{k=1}^q \alpha_k / \Gamma_k}. \quad (2.86)$$

Remarque :

Ces deux modèles diffèrent de part leur équation de fraction volumique et de part leur vitesse du son de 'mélange'. Dans les zones où les fluides sont purs, les vitesses du son de 'mélange' spécifique à chaque modèle tendent vers la vitesse du son du fluide pur, conduisant dans les deux cas à une bonne description de l'écoulement. En effet, dans le cas d'écoulement à poche, la zone de mélange artificielle qui modélise l'interface séparant les fluides reste de faible épaisseur et l'utilisation du modèle de Kapila ou de Massoni conduit à des résultats numériques de bonnes qualités [85, 52, 53, 10]. Pour les écoulements de fluides dispersés, la modélisation de la zone de mélange conditionne la validité de ces

deux modèles [95]. Des expériences numériques, présentées dans le chapitre 4, montrent la pertinence de ces deux modèles pour la résolution d'écoulements à poches ou dispersés.

2.3.2 Fermeture thermodynamique à l'équilibre de pression

Supposons que chaque fluide possède sa pression p_k et que celle-ci s'exprime à l'aide du développement asymptotique $p_k = p + \mu p'_k + O(\mu^2)$. Dans ce cas, les relations qui lient la pression aux énergies internes de chaque fluide (2.35) donnent au premier ordre :

$$\frac{p + \gamma_k p_k^\infty}{\gamma_k - 1} = \rho_k (\epsilon_k - \epsilon_k^\infty). \quad (2.87)$$

L'énergie interne de mélange a été précédemment définie comme la moyenne des énergies internes pondérées par les fractions massiques : $\epsilon = y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2$. La relation qui lie la pression et l'énergie interne du mélange est obtenue en multipliant les équations précédentes par $\frac{\alpha_k}{\rho}$ et en les sommant :

$$\frac{p + \gamma p^\infty}{\gamma - 1} = \rho (\epsilon - \epsilon^\infty), \quad (2.88)$$

où des constantes de mélange dépendantes de la fraction volumique et de la fraction massique des fluides ont été introduites :

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}, \quad \frac{\gamma p^\infty}{\gamma - 1} = \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k \gamma_k p_k^\infty}{\gamma_k - 1}, \quad \epsilon^\infty = \sum_{k=1}^q y_k \epsilon_k^\infty. \quad (2.89)$$

Les relations de température sont déterminées en considérant les relations (2.36) à l'ordre 0 par rapport au paramètre λ :

$$p + p_k^\infty = (\gamma_k - 1) \rho_k^{\gamma_k} C_{vk} \left(\frac{T_k}{\rho_k^{\gamma_k - 1}} - \frac{T_k^\infty}{\rho_{k0}^{\gamma_k - 1}} \right). \quad (2.90)$$

Les relations (2.88) et (2.90) permettent de fermer le système (2.82). Nous effectuons maintenant son étude mathématique.

2.3.3 Étude mathématique du modèle asymptotique

Dans cette section, la nature de l'opérateur de propagation du système asymptotique est étudiée. Exprimé à l'aide des variables primitives, il se met sous la forme suivante :

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{U} = 0, \quad (2.91)$$

où le vecteur des variables primitives est donné par :

$$\mathbf{U} = (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, u, p, \Phi_1)^T. \quad (2.92)$$

La matrice du système est, quant à elle, égale à :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & z\beta & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \alpha_1\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & \alpha_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & \frac{1}{\rho} & \frac{\sigma_1\kappa_1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

où c est la vitesse du son donnée par (2.79). La matrice \mathbf{A} est diagonalisable. Ses valeurs propres sont réelles : $u - c$, u et $u + c$. Les vecteurs propres à droite associés sont donnés par :

$$r_{u-c} = \begin{pmatrix} z\beta \\ \alpha_1\rho_1 \\ \alpha_2\rho_2 \\ -c \\ \rho c^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u+c} = \begin{pmatrix} z\beta \\ \alpha_1\rho_1 \\ \alpha_2\rho_2 \\ c \\ \rho c^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

$$r_{u,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_1\kappa_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Soit \mathbf{P} la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres à droite de la matrice \mathbf{A} . Son déterminant vaut :

$$\text{Det}(\mathbf{P}) = 2\rho c^3 > 0. \quad (2.96)$$

L'opérateur de propagation du modèle asymptotique est donc inconditionnellement hyperbolique. Terminons ce paragraphe par la caractérisation des ondes du système :

- L'onde u admet les invariants de Riemann suivant u et $p + \sigma_1\kappa_1\Phi_1$. Elle est linéairement dégénérée : elle n'engendrera que des discontinuités de contact pour lesquelles les invariants de Riemann seront toujours conservés. Notons que lorsque les termes de tension de surface sont considérés, la loi de Laplace est vérifiée.
- Les ondes $u \pm c$ sont vraiment non linéaires. Les invariants de Riemann ne seront conservés que dans les détenteurs. Ils sont donnés par :

$$\begin{cases} \Phi_1, \frac{p + p_1^\infty}{\rho_1^{\gamma_1}}, \frac{p + p_2^\infty}{\rho_2^{\gamma_2}}, y_1, I_{u\pm c}^5 & \text{si } z = 1, \\ \Phi_1, \alpha_1, y_1, y_2, I_{u\pm c}^5 & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

où l'expression de $I_{u\pm c}^5$ ne peut être donnée analytiquement.

2.3.4 Entropie

Afin de caractériser par la suite une entropie discrète du système, nous commençons par déterminer l'équation régissant l'énergie cinétique du modèle asymptotique :

$$\partial_t \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) + \partial_x \left(\rho \frac{u^2}{2} u \right) + u \partial_x(p) = u \partial_x(\tau) + \rho g u - \sigma_1 \kappa_1 u \partial_x(\Phi_1).$$

Cette équation permet, avec l'équation de l'énergie du système, d'obtenir la relation gouvernant l'énergie interne du mélange :

$$\partial_t(\rho \epsilon) + \partial_x(\rho \epsilon u) + p \partial_x(u) = \tau \partial_x(u).$$

Supposons que l'entropie de mélange des systèmes asymptotiques obéit à la différentielle :

$$T d(\rho s) = d(\rho \epsilon) - \sum_{k=1}^q g_k d(\alpha_k \rho_k),$$

où le potentiel chimique de l'espèce k est donné par :

$$g_k = \frac{p}{\rho_k} + \epsilon_k - T s.$$

L'utilisation de cette différentielle et de l'équation de l'énergie interne permet de déterminer la relation régissant l'entropie :

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s u) = \frac{1}{T} u \partial_x(\tau). \quad (2.97)$$

L'inégalité de type Clausius Duhem suivante est donc vérifiée :

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s u) \geq 0. \quad (2.98)$$

L'étude du modèle asymptotique a permis de montrer que le système (2.91) est inconditionnellement hyperbolique. Celui-ci admet deux ondes vraiment non linéaire et une discontinuité de contact. Une entropie physique a pu être déterminée conduisant à une inégalité de type Clausius Duhem.

2.3.5 Résumé du modèle asymptotique

Le modèle asymptotique s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1) + u \partial_x(\alpha_1) - z \beta_1 \partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = \partial_x(\tau) + \rho g - \sigma_1 \kappa_1 \partial_x(\Phi_1), \\ \partial_t(E) + \partial_x((E + p)u) = \partial_x(\tau u) + \rho g u - \sigma_1 \kappa_1 u \partial_x(\Phi_1), \\ \partial_t(\Phi_1) + u \partial_x(\Phi_1) = \frac{1}{\lambda} (f_1(\alpha_1, y_1, S_1) - \Phi_1), \end{array} \right. \quad (2.99)$$

Ce modèle est fermé à l'aide de loi d'état de mélange. Il est non conservatif, inconditionnellement hyperbolique et entropique.

2.4 Conclusion

Le premier chapitre a permis de décrire les modèles mathématiques d'interface diffuse utilisés. A partir d'une homogénéisation des équations gouvernant les fluides au niveau continu, nous avons obtenu un modèle de base [12] comportant sept équations en dimension un. Les effets capillaires sont modélisés à l'aide d'une formulation volumique faisant intervenir des opérateurs différentiels non conservatifs et fortement non linéaires (CSF [28]). Ce modèle a nécessité plusieurs relations de fermetures. Les premières concernent la modélisation des propriétés thermodynamiques des fluides. Pour cela, des lois type *Stiffened gas* ont été présentées. Les deuxièmes sont liées à l'estimation des vitesses et pressions interfaciales. Nous avons présenté une technique qui généralise les travaux de Seguin [93]. Elle est basée sur une caractérisation mathématique spécifique de l'interface permettant de respecter de la loi de Laplace. Les dernières fermetures concernent les termes de production qui ont été déterminés de manière à favoriser l'existence d'une inégalité de type Clausius Duhem. Après avoir défini une stratégie de résolution pour le modèle de base, nous avons mis en évidence le besoin de considérer un modèle asymptotique. En effet, le modèle de base est faiblement hyperbolique et non conservatif. Le modèle asymptotique a été obtenu en dérivant le modèle base lorsque les vitesses et pressions s'équilibrent. Le modèle asymptotique [66, 75] comporte cinq équations en dimension un. Il est inconditionnellement hyperbolique et entropique.

Chapitre 3

Schémas numériques monodimensionnels pour les systèmes hyperboliques non conservatifs.

Ce chapitre traite de la résolution numérique de systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre régissant les écoulements multifluides. Les systèmes considérés sont hyperboliques ou faiblement hyperboliques, non linéaires et non conservatifs. Ils peuvent s'écrire, en dimension un d'espace et sans tension de surface, sous la forme vectorielle condensée :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F} + \mathbf{B} \partial_x \mathbf{V} = 0, \quad (3.1)$$

où \mathbf{W} est le vecteur des variables conservatives, \mathbf{F} le flux associé et $\mathbf{B} \partial_x \mathbf{V}$ la partie non conservative du système.

Le système (3.1) sera dit entropique lorsqu'il admet un couple entropie-flux (η, q) , où $\eta : \mathbf{W} \rightarrow \eta(\mathbf{W})$ est convexe, et qui vérifie l'inégalité :

$$\partial_t(\eta(\mathbf{W})) + \partial_x(q(\mathbf{W})) \leq 0. \quad (3.2)$$

Considérons un maillage structuré en temps et en espace composé des cellules $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ et des intervalles $J_n = [t^n, t^{n+1}]$ où les variables suivantes sont introduites :

$$t^n = n\Delta t, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x.$$

Δt est l'incrément en temps et Δx la longueur d'une cellule de calcul. Nous considérons une approximation constante par morceaux \mathbf{W}^h de la solution définie par :

$$\mathbf{W}^h(x, t) = \mathbf{W}_i^n \quad \text{si } x \in I_i \quad \text{et } t \in J_n,$$

avec à l'instant $t = 0$:

$$\mathbf{W}_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} \mathbf{W}(x, 0).$$

Dans le contexte volumes finis, la résolution numérique s'obtient en intégrant le système (3.1) sur les volumes spatiaux temporels $Q_i^n = I_i \times J_n$:

$$\int_{I_i} \mathbf{W}^{n+1} dx - \int_{I_i} \mathbf{W}^n dx + \int_{J_n} \mathbf{F}_{i+1/2} dt - \int_{J_n} \mathbf{F}_{i-1/2} dt + \int_{I_i} \int_{J_n} \mathbf{B} \partial_x(\mathbf{V}) dx dt = 0.$$

Ce schéma numérique se réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n}{\Delta t} + \frac{\Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{I_i} \int_{J_n} \mathbf{B} \partial_x(\mathbf{V}) dx dt = 0, \quad (3.3)$$

où

$$\Phi_{i+1/2}^n = \int_{J_n} \mathbf{F}_{i+1/2}^n dt$$

sont des approximations des flux aux interfaces $x = x_{i+1/2}$. Nous supposons qu'il est possible d'exprimer ces flux en fonction de \mathbf{W}_{i-1}^n , \mathbf{W}_i^n et \mathbf{W}_{i+1}^n . Par conséquent, la formulation (3.3) repose sur la résolution de problèmes de Riemann associés aux interfaces $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$. Moyennant une translation ces problèmes se ramènent à la résolution du problème modèle :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{W}(t=0, x) = \begin{cases} \mathbf{W}^L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}^R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (3.4)$$

où \mathbf{W}^L et \mathbf{W}^R sont des états initiaux admissibles.

En introduisant la variable autosimilaire $\xi = x/t$, le problème de Riemann (3.4) se reformule de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\xi \partial_\xi(\mathbf{W}) + \partial_\xi(\mathbf{F}) + \mathbf{B} \partial_\xi(\mathbf{V}) = 0 \\ \mathbf{W}(\xi = -\infty) = \mathbf{W}^L \\ \mathbf{W}(\xi = +\infty) = \mathbf{W}^R \end{cases} \quad (3.5)$$

Le terme non conservatif $\mathbf{B} \partial_\xi(\mathbf{V})$ n'est pas toujours une distribution. En effet, dès lors que les termes \mathbf{B} et \mathbf{V} sont discontinus en une même valeur de ξ , il n'existe plus de formulation faible associée au terme non conservatif [41, 72]. La recherche de solution est donc délicate puisqu'elle demande des définitions d'espaces mathématiques spécifiques [41] ou l'élaboration de relations cinétiques [56]. Les solutions seront donc dépendantes de la structure mathématique choisie [59]. La recherche de solutions 'exactes' ne sera pas abordée dans ce travail.

La mise au point de solveurs approchés n'est pas aisée puisque les critères habituels sont en général basés sur des propriétés de conservation ne pouvant s'adapter directement au cas non conservatif.

Nous analyserons deux approches de construction de schémas numériques pour les systèmes (3.1). La première est basée sur des relations d'équilibre (*hyper consistence*) [1], [75], [2]. Elle s'applique aux systèmes présentant une forme de redondance entre

les opérateurs conservatifs et non conservatifs. En effet, sous certaines hypothèses, les contributions discrètes non conservatives $\int \int \mathbf{B} \partial_x(\mathbf{V})$ peuvent être exprimées à l'aide des flux discrets ϕ . Ces relations permettent de déduire une approximation 'consistante' du système. L'autre approche repose sur les solveurs de relaxation de pression de type Suliciu ([96], [65]). Elle consiste à trouver un système 'dissipatif' simple à résoudre et qui, à la limite tend, dans un sens à définir, vers le système non conservatif (3.1).

3.1 Solveurs équilibre (hyper consistance)

Le développement de solveurs équilibre demande une bonne connaissance sur la résolution de système conservatif. A cet effet, un rappel est donnée dans l'annexe A. Les solveurs équilibre sont présentés, successivement, pour le modèle de base (2.9) et le modèle asymptotique (2.82). Dans cette section, les solveurs seront développés en supposant que les fluides obéissent à des lois d'états de type *Stiffened gas*. Pour d'autres lois d'états, la méthodologie sera identique, seuls les calculs différeront.

3.1.1 Solveurs équilibre pour le modèle de base

Afin d'énoncer le critère d'hyper consistance, le système (2.9) est réécrit sous une forme permettant d'identifier les opérateurs conservatifs et non conservatifs :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_k) + u_I \partial_x(\alpha_k) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \mathbf{w}_k) + \partial_x(\alpha_k \mathbf{f}_k) - p_I S_I \partial_x(\alpha_k) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

où :

$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} \rho_k \\ \rho_k u_k \\ E_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} \rho_k u_k \\ \rho_k u_k^2 + p_k \\ (E_k + p_k) u_k \end{pmatrix}, \quad S_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_I \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Le système de propagation possède deux propriétés importantes permettant de découpler formellement l'approximation des systèmes conservatifs et non conservatifs :

Proposition 3 *Quand la fraction volumique α_k est constante, le système dégénère en un système conservatif :*

$$\partial_t(\alpha_k \mathbf{w}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{f}_k) = 0. \quad (3.8)$$

De ce fait, l'approximation numérique de $\nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{f}_k)$ doit être sous forme conservative, même lorsque α_k n'est pas constant.

Proposition 4 *Lorsque les fluides sont tels que $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}$, $\gamma_k = \gamma$ et $p_k^\infty = p^\infty$, le système se réduit à une équation de transport pour α_k qui se reformule de la manière suivante :*

$$\mathbf{w} u_I \cdot \nabla(\alpha_k) = \nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{f}) - p_I S_i \nabla(\alpha_k) = -\mathbf{w} \partial_t(\alpha_k). \quad (3.9)$$

Cette équation rend compte de l'équilibre entre les termes conservatifs et non conservatifs. D'un point de vue discret, cet équilibre doit toujours être respecté afin d'assurer la consistance du schéma numérique.

La prise en considération des propositions précédentes conduit à des schémas numériques s'écrivant formellement :

$$\begin{cases} \frac{(\alpha_k)_i^{n+1} - (\alpha_k)_i^n}{\Delta t} + (u_I \cdot \partial_x)_i^h \alpha_k = 0, \\ \frac{(\alpha_k \mathbf{w}_k)_i^{n+1} - (\alpha_k \mathbf{w}_k)_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_{i+1/2}(\alpha_k^n, \mathbf{w}_k^n) - \phi_{i-1/2}(\alpha_k^n, \mathbf{w}_k^n)}{\Delta x} = (S_{IP1} \partial_x)_i^h \alpha_k, \end{cases} \quad (3.10)$$

où les opérateurs discrets $(u_I \cdot \partial_x)_i^h \alpha_k$ et $(S_{IP1} \partial_x)_i^h \alpha_k$ seront définis de manière à respecter au niveau discret la proposition 4. ϕ est un opérateur satisfaisant la proposition 3. Les propositions 3 et 4 associées au schéma numérique (3.10) conduisent à la définition suivante :

Définition 2 *Pour tout état constant $\tilde{\mathbf{w}}$ et tout flux conservatif $\phi_{i\pm 1/2}(\alpha_k^n, \mathbf{w}_k^n)$, l'opérateur non conservatif discret est 'hyper consistant' lorsqu'il vérifie la relation*

$$(S_{IP1} \partial_x)_i^h \alpha_k + \tilde{\mathbf{w}}(u_I \partial_x)_i^h \alpha_k = \frac{\phi_{i+1/2}(\alpha_k^n, \tilde{\mathbf{w}}) - \phi_{i-1/2}(\alpha_k^n, \tilde{\mathbf{w}})}{\Delta x}, \quad (3.11)$$

et sont consistants à la limite de convergence du maillage ($\Delta x \rightarrow 0$).

Cette propriété, formulée comme une préservation de la discontinuité de contact, a été utilisée pour améliorer l'approximation numérique d'écoulements de fluides compressibles [1, 5, 75]. Nous proposons dans la section suivante, des expressions pour les flux conservatifs $\phi_{i+1/2}$ permettant de déduire, par la suite, un opérateur non conservatif discret 'hyper consistant'.

Solveur à 3 états

Le solveur à 3 états approche la solution du problème de Riemann constitué par le système (3.8) à l'aide d'une solution constante par morceaux (HLL [55]). Les états constants associés à chaque fluide k sont notés :

$$(\alpha_k \mathbf{w}_k)^L = \begin{pmatrix} (\alpha_k \rho_k)^L \\ (\alpha_k \rho_k u_k)^L \\ (\alpha_k E_k)^L \end{pmatrix}, \quad (\alpha_k \mathbf{w}_k)^* = \begin{pmatrix} (\alpha_k \rho_k)^* \\ (\alpha_k \rho_k u_k)^* \\ (\alpha_k E_k)^* \end{pmatrix}, \quad (\alpha_k \mathbf{w}_k)^R = \begin{pmatrix} (\alpha_k \rho_k)^R \\ (\alpha_k \rho_k u_k)^R \\ (\alpha_k E_k)^R \end{pmatrix}.$$

Connaissant les valeurs propres du système complet (3.6), nous fixons deux réels λ^L et λ^R à l'aide des relations :

$$\begin{cases} \lambda^L = \min_{k'}(u_{k'}^L - c_{k'}^L, u_{k'}^R - c_{k'}^R), \\ \lambda^R = \max_{k'}(u_{k'}^L + c_{k'}^L, u_{k'}^R + c_{k'}^R). \end{cases}$$

Supposons que les discontinuités de la solution approchée soient aux valeurs $\xi = \lambda^L$ et $\xi = \lambda^R$. L'état conservatif $(\alpha_k \mathbf{w}_k)^*$ est défini de manière à ce que les deux sauts vérifient les relations de Rankine Hugoniot pour le système (3.8) :

$$(\alpha_k \mathbf{f}_k)^R - (\alpha_k \mathbf{f}_k)^L = \lambda^R [(\alpha_k \mathbf{w}_k)^R - (\alpha_k \mathbf{w}_k)^*] + \lambda^L [(\alpha_k \mathbf{w}_k)^* - (\alpha_k \mathbf{w}_k)^L],$$

où :

$$(\alpha_k \mathbf{f}_k)^R = \begin{pmatrix} \alpha_k^L \rho_k^L u_k^L \\ \alpha_k^L \rho_k^L (u_k^L)^2 + \alpha_k^L p_k^L \\ \alpha_k^L (E_k^L + p_k^L) \end{pmatrix}, \quad (\alpha_k \mathbf{f}_k)^L = \begin{pmatrix} \alpha_k^R \rho_k^R u_k^R \\ \alpha_k^R \rho_k^R (u_k^R)^2 + \alpha_k^R p_k^R \\ \alpha_k^R (E_k^R + p_k^R) \end{pmatrix}.$$

En utilisant la relation de saut précédente, un calcul simple montre que l'état $(\alpha_k \mathbf{w}_k)^*$ s'écrit sous la forme :

$$(\alpha_k \mathbf{w}_k)^* = \frac{(\alpha_k \mathbf{f}_k)^L - (\alpha_k \mathbf{f}_k)^R + \lambda^R (\alpha_k \mathbf{w}_k)^R - \lambda^L (\alpha_k \mathbf{w}_k)^L}{\lambda^R - \lambda^L}.$$

Le flux conservatif associé à cet état se déduit de la relation de compatibilité (9) appliquée au système conservatif (3.8). Il vient :

$$(\alpha_k \mathbf{f}_k)^* = \frac{\lambda^R (\alpha_k \mathbf{f}_k)^L - \lambda^L (\alpha_k \mathbf{f}_k)^R - \lambda^R \lambda^L [(\alpha_k \mathbf{w}_k)^R - (\alpha_k \mathbf{w}_k)^L]}{\lambda^R - \lambda^L}.$$

Le flux à l'interface $\phi_k^* = \phi_k [(\alpha_k \mathbf{w}_k)^L, (\alpha_k \mathbf{w}_k)^R]$ prend donc les valeurs suivantes :

$$\phi_k^* = \begin{cases} (\alpha_k \mathbf{f}_k)^L & \text{si } \lambda^L > 0, \\ (\alpha_k \mathbf{f}_k)^* & \text{si } \lambda^L < 0 < \lambda^R, \\ (\alpha_k \mathbf{f}_k)^R & \text{si } \lambda^R < 0. \end{cases}$$

Le flux à l'interface s'écrit sous la forme synthétique suivante :

$$\phi_k^* = \frac{(\lambda^R)^+ (\alpha_k \mathbf{f}_k)^L - (\lambda^L)^- (\alpha_k \mathbf{f}_k)^R - (\lambda^R)^+ (\lambda^L)^- [(\alpha_k \mathbf{w}_k)^R - (\alpha_k \mathbf{w}_k)^L]}{(\lambda^R)^+ - (\lambda^L)^-}. \quad (3.12)$$

Ce flux discret exprimé sous forme conservative prend en compte la structure non conservative de l'opérateur de propagation. En effet, celui-ci est évalué en utilisant la valeur des ondes du système non conservatif (3.1) et des relations de saut prenant en compte la fraction volumique.

Plus généralement, les flux conservatifs discrets de type Godunov se mettent sous la forme proposée dans [79]. Remarquons que, comme la fraction volumique doit être prise en compte dans l'évaluation de ce flux, une équation supplémentaire doit être considérée. Il vient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi_k^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_k^L \mathbf{f}_k^L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_k^R \mathbf{f}_k^R \end{pmatrix} - \mathbf{P}_k \varphi(\Lambda_k) \mathbf{P}_k^{-1} \left[\begin{pmatrix} \alpha_k^R \\ \alpha_k^R \mathbf{w}_k^R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_k^L \\ \alpha_k^L \mathbf{w}_k^L \end{pmatrix} \right] \right), \quad (3.13)$$

où $\mathbf{P}_k \varphi(\Lambda_k) \mathbf{P}_k^{-1}$ est couramment appelé la matrice de viscosité. \mathbf{P}_k est la matrice contenant les valeurs propres à droite de la matrice de Roe associée au système conservatif (3.8). Elle est donnée en annexe (E.3). $\varphi(\Lambda_k)$ est une matrice diagonale contrôlant la viscosité du schéma numérique :

$$\varphi(\Lambda_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^{-c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^c \end{pmatrix},$$

où ξ_k^{-c} , ξ_k^u et ξ_k^{+c} dépendent du solveur utilisé. Le tableau suivant donne leurs valeurs dans le cas des solveurs de Roe, à 3 états et Rusanov :

$$\begin{array}{l} \text{Roe} \\ \text{3 états} \\ \text{Rusanov} \end{array} \implies \begin{cases} \xi_k^{-c} = |\bar{u}_k - c_k^*| \\ \xi_k^u = |\bar{u}_k| \\ \xi_k^{+c} = |\bar{u}_k + c_k^*| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_k^{-c} = \frac{2(\lambda^R)^+(\lambda^L)^- - [(\lambda^R)^+ + (\lambda^L)^-] (\bar{u}_k - c_k^*)}{(\lambda^R)^+ - (\lambda^L)^-} \\ \xi_k^u = \frac{2(\lambda^R)^+(\lambda^L)^- - [(\lambda^R)^+ + (\lambda^L)^-] \bar{u}_k}{(\lambda^R)^+ - (\lambda^L)^-} \\ \xi_k^{+c} = \frac{2(\lambda^R)^+(\lambda^L)^- - [(\lambda^R)^+ + (\lambda^L)^-] (\bar{u}_k + c_k^*)}{(\lambda^R)^+ - (\lambda^L)^-} \end{cases}$$

$$\text{Rusanov} \implies \xi_k^{-c} = \xi_k^u = \xi_k^{+c} = \max(|\lambda^R|, |\lambda^L|)$$

En utilisant le schéma de Roe donné en annexe (E.3), nous pouvons facilement déduire une expression du flux conservatif discret d'un schéma de type Godunov :

$$\phi^* = \frac{1}{2} [\alpha_k^R \mathbf{f}_k^R + \alpha_k^L \mathbf{f}_k^L - \xi_k^{-c} R_{u_k - c_k} - \xi_k^u R_{u_k} - \xi_k^{+c} R_{u_k + c_k}], \quad (3.14)$$

où :

$$R_{u_k - c_k} = \frac{1}{2(c_k^*)^2} \left(\frac{\bar{u}_k \gamma_k p_k^\infty}{\bar{u}_k - c_k^*} \Delta(\alpha_k) + \Delta(\alpha_k p_k) - \frac{\alpha_k \rho_k c_k^*}{\bar{u}_k - c_k^*} \Delta(u_k) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u}_k - c_k^* \\ \bar{H}_k - c_k^* \bar{u}_k \end{pmatrix},$$

$$R_{u_k} = \left(\Delta(\alpha_k \rho_k) - \frac{\Delta[\alpha_k(p_k + \gamma_k p_k^\infty)]}{(c_k^*)^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u}_k \\ \bar{u}_k^2/2 \end{pmatrix},$$

$$R_{u_k + c_k} = \frac{1}{2(c_k^*)^2} \left(\frac{\bar{u}_k \gamma_k p_k^\infty}{\bar{u}_k + c_k^*} \Delta(\alpha_k) + \Delta(\alpha_k p_k) + \frac{\alpha_k \rho_k c_k^*}{\bar{u}_k + c_k^*} \Delta(u_k) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u}_k + c_k^* \\ \bar{H}_k + c_k^* \bar{u}_k \end{pmatrix}.$$

Cette écriture nous permet maintenant d'aborder la discrétisation des opérateurs non conservatifs.

opérateurs non conservatifs discrets

En utilisant l'expression (3.14) lorsque les fluides suivent les hypothèses de la proposition 3 ($\rho_k = \tilde{\rho}$, $u_k = \tilde{u}$, $p_k = \tilde{p}$, $\gamma_k = \gamma$ et $p_k^\infty = p^\infty$), le flux numérique conservatif s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2}(\alpha_k, \tilde{\mathbf{w}}_k) &= \tilde{\mathbf{f}} \frac{(\alpha_k)_i^n + (\alpha_k)_{i+1}^n}{2} - \frac{1}{4\tilde{c}^2} \left[\left(\frac{\tilde{u}\gamma p^\infty}{\tilde{u} - \tilde{c}} + \tilde{p} \right) (\xi^{-c})_{i+1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \\ \tilde{H} - \tilde{u}\tilde{c} \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. 4\Gamma\tilde{p} (\xi^u)_{i+1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{u}^2/2 \end{pmatrix} + \left(\frac{\tilde{u}\gamma p^\infty}{\tilde{u} + \tilde{c}} + \tilde{p} \right) (\xi^{+c})_{i+1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \\ \tilde{H} + \tilde{u}\tilde{c} \end{pmatrix} \right] \Delta\alpha_k. \end{aligned}$$

Ces relations permettent alors d'inverser le système (3.11) et d'obtenir une formulation des opérateurs non conservatifs discrets. Afin de simplifier leurs expressions, les contributions relatives à chaque interface sont isolées :

$$\begin{cases} (u_I \partial_x)_i^h \alpha_k = (u_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k - (u_I \partial_x)_{i-1/2}^h \alpha_k, \\ (p_I \partial_x)_i^h \alpha_k = (p_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k - (p_I \partial_x)_{i-1/2}^h \alpha_k, \\ (p_I u_I \partial_x)_i^h \alpha_k = (p_I u_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k - (p_I u_I \partial_x)_{i-1/2}^h \alpha_k, \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} (u_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \tilde{u} \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2} - \frac{1}{4\tilde{\rho}\tilde{c}^2} \left[\left(\frac{\tilde{u}\gamma p^\infty}{\tilde{u} - \tilde{c}} + \tilde{p} \right) \xi^{-c} + 2\Gamma\tilde{p}\xi^u + \left(\frac{\tilde{u}\gamma p^\infty}{\tilde{u} + \tilde{c}} + \tilde{p} \right) \xi^{+c} \right] (\Delta\alpha_k)_{i+1/2}, \\ (p_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \tilde{p} \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2} + \frac{1}{4\tilde{c}} \left[\left(\frac{\tilde{u}\gamma p^\infty}{\tilde{u} - \tilde{c}} + \tilde{p} \right) \xi^{-c} - \left(\frac{\tilde{u}\gamma p^\infty}{\tilde{u} + \tilde{c}} + \tilde{p} \right) \xi^{+c} \right] (\Delta\alpha_k)_{i+1/2}, \\ (p_I u_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \tilde{p}\tilde{u} \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2} - \frac{1}{4\tilde{\rho}\tilde{c}^2} \left[(\tilde{p} - \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{c}) \left(\frac{\tilde{u}\gamma p^\infty}{\tilde{u} - \tilde{c}} - \tilde{p} \right) \xi^{-c} + 2\Gamma\tilde{p}\tilde{\rho}\tilde{c} \xi^u + \right. \\ \left. (\tilde{p} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{c}) \left(\frac{\tilde{u}\gamma p^\infty}{\tilde{u} + \tilde{c}} + \tilde{p} \right) \xi^{+c} \right] (\Delta\alpha_k)_{i+1/2}. \end{cases}$$

Ces relations d'équilibre permettent de déduire une approximation consistante des opérateurs non conservatifs discrets et convergente à la limite lorsque Δx tend vers 0. Nous proposons la discrétisation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \bar{u}_I \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2} - \\ \frac{1}{4\rho(c_I^*)^2} \left[\left(\frac{\bar{u}_I(\gamma p^\infty)^*}{\bar{u}_I - c_I^*} + \bar{p}_I \right) \xi_I^{-c} + 2\Gamma^* \bar{p}_I \xi_I^u + \left(\frac{\bar{u}_I(\gamma p^\infty)^*}{\bar{u}_I + c_I^*} + \bar{p}_I \right) \xi_I^{+c} \right] (\Delta \alpha_k)_{i+1/2}, \\ \\ (p_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \bar{p}_I \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2} + \\ \frac{1}{4c_I^*} \left[\left(\frac{\bar{u}_I(\gamma p^\infty)^*}{\bar{u}_I - c_I^*} + \bar{p}_I \right) \xi_I^{-c} - \left(\frac{\bar{u}_I(\gamma p^\infty)^*}{\bar{u}_I + c_I^*} + \bar{p}_I \right) \xi_I^{+c} \right] (\Delta \alpha_k)_{i+1/2}, \\ \\ (p_I u_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \bar{p}_I \bar{u}_I \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2} - \\ \frac{1}{4\rho(c_I^*)^2} \left[(\bar{p}_I - \rho \bar{u}_I c_I^*) \left(\frac{\bar{u}_I(\gamma p^\infty)^*}{\bar{u}_I - c_I^*} - \bar{p}_I \right) \xi_I^{-c} + 2\Gamma^* \bar{p}_I \rho \epsilon \xi_I^u + \right. \\ \left. (\bar{p}_I + \rho \bar{u}_I c_I^*) \left(\frac{\bar{u}_I(\gamma p^\infty)^*}{\bar{u}_I + c_I^*} + \bar{p}_I \right) \xi_I^{+c} \right] (\Delta \alpha_k)_{i+1/2}, \end{array} \right.$$

où nous avons défini, à chaque interface $x_{i+1/2}$, les opérateurs de moyenne :

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1}} x_{i+1} + \sqrt{\rho_i} x_i}{\sqrt{\rho_{i+1}} + \sqrt{\rho_i}}, \quad \underline{x} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1}} x_i + \sqrt{\rho_i} x_{i+1}}{\sqrt{\rho_{i+1}} + \sqrt{\rho_i}},$$

et les constantes :

$$(\gamma p^\infty)^* = \sum_{k=1}^q \overline{(\alpha_k \gamma_k p_k^\infty)}, \quad \frac{1}{\Gamma^*} = \sum_{k=1}^q \overline{\left(\frac{\alpha_k}{\Gamma_k} \right)}, \quad c_I^* = \sqrt{\Gamma^* (\bar{H} - \bar{u}_I^2/2)}.$$

Les coefficients de viscosité numérique ξ_I^{-c} , ξ_I^u et ξ_I^{+c} dépendent du solveur utilisé. Pour le schéma de Roe, les expressions suivantes doivent être utilisées :

$$\xi_I^{-c} = |\bar{u}_I - c_I^*|, \quad \xi_I^u = |\bar{u}_I|, \quad \xi_I^{+c} = |\bar{u}_I + c_I^*|.$$

Remarque :

Lorsque les fluides considérés obéissent à la loi des gaz parfait et que le solveur de Rusanov est utilisé, les opérateurs non conservatifs discrets sont donnés par les relations très simples :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \bar{u}_I \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2\Delta x} - \xi_I (\Delta \alpha_k)_{i+1/2} \alpha_k, \\ \\ (p_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \bar{p}_I \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2\Delta x}, \\ \\ (u_I p_I \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \bar{p}_I \bar{u}_I \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2\Delta x}. \end{array} \right.$$

Les propriétés d'hyper-consistance 3 et 4 ont permis de construire un schéma numérique pour lequel la viscosité numérique des opérateurs non conservatifs discrets s'équilibre avec celle des flux conservatifs. Ce schéma numérique permettra donc de respecter certaines propriétés de l'écoulement (contacts stationnaires). Nos résultats généralisent les méthodes proposées dans [79, 1, 5].

3.1.2 Solveurs équilibre pour le modèle asymptotique

Afin de permettre la mise au point de solveurs équilibre, le modèle asymptotique est écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_1) + u\partial_x(\alpha_k) + z\beta_1\partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(\mathbf{w}) + \partial_x(\mathbf{f}) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Les vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{f} regroupent respectivement les variables et le flux conservatifs :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha_1\rho_1 \\ \alpha_2\rho_2 \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\alpha_1, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \alpha_1\rho_1 u \\ \alpha_2\rho_2 u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Nous considérons des schémas numériques s'écrivant formellement :

$$\begin{cases} \frac{(\alpha_1)_i^{n+1} - (\alpha_1)_i^n}{\Delta t} + (u \cdot \partial_x)_i^h \alpha_1 + z(\beta_1 \cdot \partial_x)_i^h u = 0 \\ \frac{\mathbf{w}_i^{n+1} - \mathbf{w}_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_{i+1/2}(\alpha_1^n, \mathbf{w}^n) - \phi_{i-1/2}(\alpha_1^n, \mathbf{w}^n)}{\Delta x} = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Afin d'assurer la consistance (voir propositions 3 et 4), l'opérateur discret non conservatif $(u \cdot \partial_x)_i^h \alpha_1$ doit être défini de la manière suivante :

Définition 3 Pour tout état $\tilde{\mathbf{w}}$ tel que ses variables vérifient : $\rho_k = \tilde{\rho}_k$, $u = \tilde{u}$ et $p = \tilde{p}$ et tout flux conservatif $\phi_{i\pm 1/2}(\alpha_1^n, \mathbf{w}^n)$, l'opérateur non conservatif discret $(u_I \partial_x)_i^h$ est 'hyper consistant' lorsqu'il vérifie la relation

$$(u_I \partial_x)_i^h \alpha_1 = \frac{\phi_{i+1/2}^{\alpha_1 \rho_1}(\alpha_1^n, \tilde{\mathbf{w}}) - \phi_{i-1/2}^{\alpha_1 \rho_1}(\alpha_1^n, \tilde{\mathbf{w}})}{\Delta x}, \quad (3.17)$$

et est consistant à la limite de convergence du maillage ($\Delta x \rightarrow 0$). $\phi_{i\pm 1/2}^{\alpha_1 \rho_1}$ désigne la première composante du flux conservatif.

Le terme $z\beta_1\partial_x(u)$ ne peut être déduit à partir du principe de consistance classique. Une approximation pourrait être obtenue en considérant les discrétisations des opérateurs non conservatifs du système complet à la limite lorsque les vitesses et les pressions des fluides tendent vers l'équilibre. Cette approche sera écartée et une méthode de *splitting* sera utilisée.

La notion d'hyper consistance a permis d'identifier la relation d'équilibre existant entre les opérateurs conservatif et non conservatif. Nous devons maintenant déterminer une discrétisation du flux \mathbf{f} . Pour cela, le solveur de Roe est utilisé.

Solveur de Roe

En s'appuyant des travaux de Kokh [10] et plus récemment Caro [30], nous développons un solveur de Roe pour la partie conservative du système (3.15). La matrice de Roe cherchée doit satisfaire les propriétés de conservation, de diagonalisation et de consistance :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}^*(\mathbf{W}^L - \mathbf{W}^R) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^R \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^* \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles,} \\ \mathbf{A}^* \text{ converge vers } \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} \text{ lorsque } \mathbf{W}^L, \mathbf{W}^R \text{ convergent vers } \mathbf{W}, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

où la notation \mathbf{W} a été définie (2.84). Nous introduisons maintenant les opérateurs de moyenne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{x^L \sqrt{\rho^L} + x^R \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}, \\ \underline{x} = \frac{x^R \sqrt{\rho^L} + x^L \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}, \\ \Delta x = x^R - x^L. \end{array} \right.$$

La matrice de Roe qui est cherchée est supposée se mettre sous la forme :

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2^* \bar{u} & -y_1^* \bar{u} & y_1^* & 0 \\ 0 & -y_2^* \bar{u} & y_1^* \bar{u} & y_2^* & 0 \\ M^* & \frac{(\Gamma^* - 2)\bar{u}^2}{2} & \frac{(\Gamma^* - 2)\bar{u}^2}{2} & (2 - \Gamma^*)\bar{u} & \Gamma^* \\ M^* \bar{u} & \left(\frac{\Gamma^* \bar{u}^2}{2} - H^* \right) \bar{u} & \frac{\Gamma^* \bar{u}^3}{2} & H^* - \Gamma^* \bar{u}^2 & \bar{u} \gamma^* \end{pmatrix},$$

où $M^* = \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} \right)^*$, y_1^* , y_2^* , H^* et $\Gamma^* = \gamma^* - 1$ sont des moyennes de Roe qui doivent être déterminées. Il est important de noter que pour les modèles réduits, la variable Γ doit aussi être moyennée puisqu'elle dépend de la variable α_1 .

A partir des propriétés de conservation (3.18), un calcul simple montre que les moyennes de Roe des fractions massiques et de l'enthalpie de mélange doivent respecter les relations :

$$y_1^* = \bar{y}_1, \quad y_2^* = \bar{y}_2, \quad H^* = \bar{H}.$$

Les autres coefficients ne peuvent être déterminés de manière unique car les conditions de conservation conduisent à une équation possédant les deux inconnues γ^* et M^* :

$$\Gamma^* \Delta(\rho \epsilon) + M^* \Delta(\alpha_1) = \Delta p. \quad (3.19)$$

La matrice de Roe doit être diagonalisable à valeurs propres réelles (3.18). Un calcul simple montre qu'elle admet les valeurs propres $\bar{u} - c^*$, \bar{u} et $\bar{u} + c^*$ où la vitesse du son moyenne c^* est définie par :

$$c^* = \sqrt{\Gamma^* \left(\bar{H} - \frac{\bar{u}^2}{2} \right)}. \quad (3.20)$$

Du fait de la dépendance de la pression par rapport à la fraction volumique, une relation de fermeture supplémentaire est nécessaire. Dans notre cadre d'étude, il convient de fixer la vitesse du son moyenne par la relation [10] :

$$\frac{(c^*)^2}{\bar{\Gamma}} = \sum_k \overline{\left(\frac{\alpha_k c_k^2}{\Gamma_k} \right)}.$$

Le coefficient Γ^* se déduit de (3.20) et M^* de (3.19). La matrice de Roe est donc complètement déterminée.

Soit \mathbf{P}^* la matrice dont les lignes sont les vecteurs propres à droite de \mathbf{A}^* . Cette matrice est donnée par :

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\bar{u}^2 - (c^*)^2}{M^*} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_1 & 1 & 0 & \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 & \bar{y}_2 & 0 & 1 & \bar{y}_2 \\ \bar{u} - c^* & 0 & \bar{u} & \bar{u} & \bar{u} + c^* \\ \bar{H} - c^*\bar{u} & \bar{H} - \frac{\bar{u}^2}{2} & \frac{\bar{u}^2}{2} & \frac{\bar{u}^2}{2} & \bar{H} + c^*\bar{u} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est toujours non nul :

$$\det(\mathbf{P}) = 2 \left(H - \frac{\bar{u}}{2} \right) c^* (\bar{u}^2 - (c^*)^2) \neq 0.$$

Par conséquent, la matrice de Roe est toujours diagonalisable à valeurs propres réelles. De plus, par construction, elle vérifie les propriétés de conservation et il est simple de prouver qu'elle vérifie la propriété de consistance. La matrice de Roe est donc conforme aux conditions (3.18).

Afin d'expliciter le flux de type Godunov, l'inverse de la matrice \mathbf{P}^* est calculé :

$$(\mathbf{P}^*)^{-1} = \frac{1}{2(c^*)^2} \begin{pmatrix} -\frac{c^*M}{\bar{u} - c^*} & \frac{\Gamma^*\bar{u}^2}{2} + c^*\bar{u} & \frac{\Gamma^*\bar{u}^2}{2} + c^*\bar{u} & -c^* - \bar{u}\Gamma^* & \Gamma^* \\ \frac{2(c^*)^2M}{\bar{u}^2 - (c^*)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c^*)^2 - y_1\bar{u}^2\Gamma^* & -y_1\bar{u}^2\Gamma^* & 2y_1\bar{u}\Gamma^* & -2y_1\Gamma^* \\ 0 & -y_2\bar{u}^2\Gamma^* & 2(c^*)^2 - y_2\bar{u}^2\Gamma^* & 2y_2\bar{u}\Gamma^* & -2y_2\Gamma^* \\ \frac{c^*M}{\bar{u} + c^*} & \frac{\Gamma^*\bar{u}^2}{2} - c^*\bar{u} & \frac{\Gamma^*\bar{u}^2}{2} - c^*\bar{u} & c^* - \bar{u}\Gamma^* & \Gamma^* \end{pmatrix}.$$

La matrice diagonale contenant les valeurs propres de \mathbf{A}^* est donnée par :

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} \bar{u} - c^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u} + c^* \end{pmatrix}.$$

Pour le schéma de Roe, le flux numérique conservatif ϕ^* est donné par l'équation :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^R \end{pmatrix} - \mathbf{P}^* \varphi(\Lambda^*) (\mathbf{P}^*)^{-1} (\mathbf{W}_d - \mathbf{W}_g) \right], \quad (3.21)$$

où la matrice l'opérateur φ est, dans le cas particulier du solveur de Roe, la valeur absolue.

Plus généralement, les flux numériques ϕ^* , donnés par les schémas de type Godunov, se mettent sous la forme :

$$\phi^* = \frac{1}{2} [\mathbf{f}^R + \mathbf{f}^L - \xi^{-c} R_{u-c} - \xi^u R_u - \xi^{+c} R_{u+c}], \quad (3.22)$$

où les valeurs des viscosités ξ^{-c} , ξ^u , ξ^{+c} dépendent du solveur utilisé et les vecteurs ont pour expressions :

$$R_{u-c} = \frac{-\bar{u}M^* \Delta(\alpha_1) + \Delta(p) - \underline{\rho}c^* \Delta(u)}{2(c^*)^2} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{u} - c^* \\ \bar{H} - c^*\bar{u} \end{pmatrix},$$

$$R_u = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha_1 \rho_1) \\ \Delta(\alpha_2 \rho_2) \\ \bar{u} \Delta(\rho) \\ \bar{u}^2 \\ \frac{1}{2} \Delta(\rho) \end{pmatrix} + \frac{M^* \Delta(\alpha_1) - \Delta(p)}{(c^*)^2} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{u} \\ \bar{u}^2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$R_{u+c} = \frac{\bar{u}M^* \Delta(\alpha_1) + \Delta(p) + \underline{\rho}c^* \Delta(u)}{2(c^*)^2} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{u} + c^* \\ \bar{H} + c^*\bar{u} \end{pmatrix}.$$

opérateurs non conservatifs discrets

Nous abordons maintenant l'approximation des opérateurs non conservatifs discrets. Pour cela, l'expression du flux conservatif (3.21) est étudiée lorsque les fluides sont tels que $\rho_k = \tilde{\rho}_k$, $u = \tilde{u}$ et $p = \tilde{p}$. Dans ce cas, le flux de masse associé au fluide k est donné par :

$$\Phi^{(1)} = \frac{\tilde{\rho}_k}{2} \left[\tilde{u} \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2} + \left(\frac{\tilde{u} \tilde{M}}{2\tilde{c}^2(\tilde{u} - \tilde{c})} \frac{(\alpha_k)^m}{\tilde{\rho}} \xi^{-c} - \left[1 + \frac{(\alpha_k)^m \tilde{M}}{\tilde{\rho} \tilde{c}^2} \right] \xi^u - \frac{\tilde{u} \tilde{M}}{2\tilde{c}^2(\tilde{u} + \tilde{c})} \frac{(\alpha_k)^m}{\tilde{\rho}} \xi^{+c} \right) \Delta(\alpha_k) \right].$$

Cette relation permet de déterminer l'opérateur non conservatif $(u_I \partial_x)_{i+1/2} \alpha_k$ à l'équilibre. Pour un écoulement quelconque, nous proposons une discrétisation pour laquelle les variables de vitesse sont des approximations locales de u :

$$(u \partial_x)_{i+1/2}^h \alpha_k = \bar{u} \frac{(\alpha_k)_i + (\alpha_k)_{i+1}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u} M^*}{2(c^*)^2(\bar{u} - c^*)} \frac{\bar{\alpha}_k}{\rho} \xi^{-c} - \left[1 + \frac{\bar{\alpha}_k}{\rho} \frac{M^*}{(c^*)^2} \right] \xi^u - \frac{\bar{u} M^*}{2(c^*)^2(\bar{u} + c^*)} \frac{\bar{\alpha}_k}{\rho} \xi^{+c} \right) \Delta(\alpha_k). \quad (3.23)$$

L'autre opérateur non conservatif est discrétisé en utilisant une méthode de décomposition d'opérateur standard :

$$(z\beta_1 \partial_x u)_{i+1/2}^h = (z\beta_1)_i \bar{u}.$$

A l'aide de la technique d'hyper consistence, nous avons pu obtenir des solveurs équilibre pour les modèles (2.63) et (2.82). Ces solveurs sont tels que les opérateurs conservatifs et non conservatifs possèdent des viscosités numériques cohérentes. Ainsi, certains critères de l'écoulement sont préservés : les discontinuités de contact sont résolues sans oscillations de pression. Lorsque la fraction volumique est constante les solveurs deviennent conservatifs et leurs solutions vérifient les relations de saut de Rankine Hugoniot. Les solveurs présentés dans cette section généralisent les précédents travaux [1, 2, 5, 75, 79, 30]. Cependant, ces solveurs sont fortement dépendant de la loi d'état utilisée puisque la discrétisation de l'ensemble des opérateurs différentiels se déduit de la linéarisation du flux conservatif, fonction de la loi de pression. Afin de palier cette difficulté, nous abordons maintenant la présentation des schémas de relaxation.

3.2 Schémas de relaxation

Les schémas de relaxation de type Suliciu [96] sont des outils très performants pour la résolution approchée des équations de la mécanique des fluides [32, 21]. Ceux-ci reposent sur la mise au point d'un système 'perturbé' dont les solutions sont faciles à obtenir et approchent, dans un certain sens, les solutions du système initial.

Ces schémas ont été initialement introduits pour résoudre les systèmes conservatifs [65]. Une analyse du schéma pour les équations d'Euler est donnée en annexe (A). Dans ce cas, nous pouvons montrer qu'il est identique au solveur HLLC. Cependant, contrairement au schéma HLLC, la technique de relaxation peut être utilisée pour résoudre les systèmes non conservatifs [32, 20]. Les systèmes de conservation considérés dans ce document seront écrits sous la forme :

$$\partial_t \mathbf{W}_R + \partial_x \mathbf{F}_R + \mathbf{B}_R \partial_x \mathbf{V}_R = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_R, \quad (3.24)$$

où le vecteur \mathbf{W}_R est composé des variables conservatives et les variables nécessaires à la mise en place du schéma de relaxation, \mathbf{F}_R est le flux conservatif associé et $\mathbf{B}_R \partial_x \mathbf{V}_R$ constitue l'opérateur non conservatif. L'opérateur \mathbf{R}_R impose à la solution de rester dans un voisinage de l'équilibre. L'amplitude de ce phénomène est contrôlée à l'aide du réel positif λ . La résolution de ce système s'effectue en deux étapes : l'évolution et la projection.

Évolution

L'évolution est l'étape de résolution de l'opérateur de propagation associé au système de relaxation (3.24) :

$$\partial_t \mathbf{W}_R + \partial_x \mathbf{F}_R + \mathbf{B}_R \partial_x \mathbf{V}_R = 0. \quad (3.25)$$

Ce système est constitué d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et de nature hyperbolique. Il sera résolu de manière exacte et nous noterons \mathcal{V}_R sa solution. L'implémentation s'effectuera à l'aide de méthode de Godunov :

Définition 4 Soit \mathcal{V}_R une solution exacte du système (3.25). Le schéma

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \mathcal{V}_{i-1/2}^{\mathbf{h}^n}(x, t^{n+1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathcal{V}_{i+1/2}^{\mathbf{h}^n}(x, t^{n+1}) dx \right) \quad (3.26)$$

est appelé schéma de Godunov.

Projection

L'étape de projection est constituée d'équations différentielles ordinaires s'écrivant sous la forme vectorielle suivante :

$$\partial_t \mathbf{W}_R = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_R. \quad (3.27)$$

Elle consiste en la projection des variables du schéma de relaxation \mathbf{W}_R sur la variété d'équilibre \mathbf{W} .

Dans la suite de ce document, des systèmes de relaxation sont proposés pour le système de base (3.6) et le système asymptotique (3.15). Leurs solutions exactes seront explicitées et le caractère dissipatif des systèmes de relaxation sera étudié.

3.2.1 Schéma de relaxation pour le modèle de base

En s'inspirant de la construction de solveurs de relaxation pour les équations d'Euler (voir annexe A), un système de relaxation est proposé pour le modèle de base à deux phases. Les pressions thermodynamiques p_k seront remplacées localement dans le temps par des pressions de relaxation π_k , dont les évolutions sont très proches des celles de p_k . Nous donnerons ensuite la solution exacte de ce système et montrerons les conditions de stabilité suivant Whitham [100].

Pour le modèle de base avec deux phases 1 et 2, les équations régissant les pressions thermodynamiques des fluides sont données par :

$$\begin{cases} \partial_t(p_1) + u_1 \partial_x(p_1) + \rho_1 c_1^2 \partial_x(u_1) = 0, \\ \partial_t(p_2) + u_2 \partial_x(p_2) + \rho_2 c_2^2 \partial_x(u_2) - \frac{\rho_2 c_2^2 (u_2 - u_1)}{\alpha_2} \partial_x(\alpha_1) = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

La relaxation des pressions consiste à définir l'évolution de π_1 et π_2 par des équations dont la partie 'principale' est très proche des équations (3.28) et comportant, au second membre, un terme source. Nous proposons les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\pi_1) + u_1 \partial_x(\pi_1) + \frac{a^2}{\rho_1} \partial_x(u_1) = \frac{1}{\lambda}(p_1 - \pi_1), \\ \partial_t(\pi_2) + u_2 \partial_x(\pi_2) + \frac{b^2}{\rho_2} \partial_x(u_2) - \frac{b^2(u_2 - u_1)}{\alpha_2 \rho_2} \partial_x(\alpha_1) = \frac{1}{\lambda}(p_2 - \pi_2), \end{array} \right.$$

où a et b sont deux réels positifs qui doivent être définis de manière à rendre le système dissipatif.

Le système de relaxation, que nous proposons pour approcher les solutions du modèle de base (3.6) avec la fermeture de Baer Nunziato [12], est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1) + u_1 \partial_x(\alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) - \pi_2 \partial_x(\alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 e_1) + \partial_x[\alpha_1(\rho_1 e_1 + \pi_1)u_1] - \pi_2 u_1 \partial_x(\alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\pi_1) + u_1 \partial_x(\pi_1) + \frac{a^2}{\rho_1} \partial_x(u_1) = \frac{1}{\lambda}(p_1 - \pi_1), \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2) + \pi_2 \partial_x(\alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 e_2) + \partial_x[\alpha_2(\rho_2 e_2 + \pi_2)u_2] + \pi_2 u_1 \partial_x(\alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\pi_2) + u_2 \partial_x(\pi_2) + \frac{b^2}{\rho_2} \partial_x(u_2) = \frac{1}{\lambda}(p_2 - \pi_2). \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Les propriétés de ce système sont données dans la proposition suivante :

Proposition 5 *Lorsque $\alpha_1 \neq 1$ et $\alpha_1 \neq 0$, le système de relaxation (3.29) est hyperbolique. Toutes ses ondes sont linéairement dégénérées. Leurs invariants de Riemann sont donnés par :*

onde	invariants de Riemann							
u_1	u_1	u_2	Π_2	$\alpha_2 \rho_2$	$\alpha_1(\Pi_2 - \Pi_1)$	$\epsilon_2 + \Pi_2/\rho_2$		
$u_1 \pm a/\rho_1$	α_1	ρ_2	u_2	ϵ_2	Π_2	$u_1 \pm a/\rho_1$	$\Pi_1^2/2 - a^2 \epsilon_1$	$\Pi_1 \mp a u_1$
u_2	α_1	ρ_1	u_1	Π_1	ϵ_1	u_2	Π_2	
$u_2 \pm b/\rho_2$	α_1	ρ_1	u_1	ϵ_1	Π_1	$u_2 \pm b/\rho_2$	$\Pi_2^2/2 - b^2 \epsilon_2$	$\Pi_2 \mp b u_2$

Démonstration :

La matrice Jacobienne du système de relaxation pour les variables $(\alpha_1, \rho_1, u_1, \epsilon_1, \pi_1, \rho_2, u_2, \epsilon_2, \pi_2)$ s'écrit :

$$A(U) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi_1 - \pi_2}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & u_1 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi_1}{\rho_1} & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_1^2}{a^2} & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_2(u_2 - u_1)}{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & \frac{1}{\rho_2} \\ -\frac{\pi_2(u_2 - u_1)}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi_2}{\rho_2} & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_2}{b^2} & 0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Ces valeurs propres sont u_1 , u_2 , $u_1 \pm \frac{a_1}{\rho_1}$, $u_2 \pm \frac{a_2}{\rho_2}$ et les vecteurs propres associés sont donnés par :

$$r_{u_1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u_1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u_1,3} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 (\Pi_2 - \Pi_1) \\ \alpha_1 \rho_2 \\ 0 \\ \alpha_1 \Pi_2 / \rho_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u_1 \pm a_1 / \rho_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1^2 \\ \pm a \\ \Pi_1 \\ a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_{u_2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u_2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u_2 \pm a_2 / \rho_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_2^2 \\ \pm b \\ \Pi_2 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant des vecteurs propres à droite est $4\alpha_1\alpha_2a^3b^3$. Le système est donc hyperbolique pour les conditions énoncées dans la proposition. Les contraintes d'hyperbolicité sont moins fortes que pour le système de Baer Nunziato. Les problèmes liés à la résonance $u_1 = u_2 \pm c_2$ ne sont plus présents. La preuve se termine en vérifiant que les quantités données dans le tableau (3.30) sont des invariants de Riemann. Ainsi, toutes les ondes du système sont linéairement dégénérées.

La difficulté majeure pour la résolution du système de relaxation (3.29) est la détermination de l'ordre des 6 ondes. Dans la proposition qui suit, une condition suffisante est spécifiée afin de privilégier le classement des ondes le plus 'naturel'.

Proposition 6 (Solution du système de relaxation associée au modèle de base)

Lorsque que les réels positifs a et b vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} b > -\frac{\rho_2^L \Delta u_2}{4} + \sqrt{B_1} \quad \text{si} \quad B_1 = \left(\frac{\rho_2^L \Delta u_2}{4} \right)^2 + \frac{\rho_2^L \Delta \pi_2}{2} > 0, \\ b > -\frac{\rho_2^R \Delta u_2}{4} + \sqrt{B_2} \quad \text{si} \quad B_2 = \left(\frac{\rho_2^R \Delta u_2}{4} \right)^2 - \frac{\rho_2^R \Delta \pi_2}{2} > 0, \\ b > \rho_2^L \left(u_2^L - \frac{\alpha_1^L u_1^L + \alpha_1^R u_1^R}{\alpha_1^L + \alpha_1^R} \right), \quad b > \rho_2^R \left(\frac{\alpha_1^L u_1^L + \alpha_1^R u_1^R}{\alpha_1^L + \alpha_1^R} - u_2^R \right), \\ a > \rho_1^L \left(u_1^L - u_2^L + \frac{b}{\rho_2^L} \right), \quad a > \rho_1^R \left(u_2^R - u_1^R + \frac{b}{\rho_2^R} \right), \\ a > \frac{\delta}{(\alpha_1^R + \alpha_1^L) \left(\frac{b}{\rho_2^L} - u_2^L \right) + \alpha_1^L u_1^L + \alpha_1^R u_1^R}, \\ a > \frac{-\delta}{(\alpha_1^R + \alpha_1^L) \left(\frac{b}{\rho_2^R} + u_2^R \right) - \alpha_1^L u_1^L - \alpha_1^R u_1^R}, \end{array} \right. \quad (3.31)$$

avec $\delta = \alpha_1^R \pi_1^R - \alpha_1^L \pi_1^L - (\alpha_1^R - \alpha_1^L) \left(\frac{\pi_2^R + \pi_2^L}{2} - \frac{b \Delta u_2}{2} \right)$ alors il existe une solution exacte du système de relaxation pour laquelle les ondes sont classées de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 - \frac{a}{\rho_1} < u_2 - \frac{b}{\rho_2} < u_2 < u_2 + \frac{b}{\rho_2} < u_1 + \frac{a}{\rho_1}, \\ u_2 - \frac{b}{\rho_2} < u_1 < u_2 + \frac{b}{\rho_2}. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Dans ce cas, les vitesses des discontinuités matérielles prennent les valeurs :

$$u_1^* = \frac{\alpha_1^L u_1^L + \alpha_1^R u_1^R}{\alpha_1^L + \alpha_1^R} - \frac{\delta}{a (\alpha_1^L + \alpha_1^R)}, \quad u_2^* = \frac{u_2^L + u_2^R}{2b} + \frac{\pi_2^L - \pi_2^R}{2b}, \quad (3.33)$$

et la solution constante par morceaux est composée de 7 états qui seront notés \mathbf{V}^L , \mathbf{V}^{S1} , \mathbf{V}^{S2} , \mathbf{V}^{S3} , \mathbf{V}^{S4} , \mathbf{V}^{S5} et \mathbf{V}^R . Leurs expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^L &= \begin{pmatrix} \alpha_1^L \\ \rho_1^L \\ u_1^L \\ \epsilon_1^L \\ \pi_1^L \\ \rho_2^L \\ u_2^L \\ \epsilon_2^L \\ \pi_2^L \end{pmatrix}, & \mathbf{V}^{S1} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^L \\ \rho_1^* \\ u_1^* \\ \epsilon_1^* \\ \pi_1^* \\ \rho_2^L \\ u_2^L \\ \epsilon_2^L \\ \pi_2^L \end{pmatrix}, & \mathbf{V}^{S2} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^L \\ \rho_1^* \\ u_1^* \\ \epsilon_1^* \\ \pi_1^* \\ \rho_2^* \\ u_2^* \\ \epsilon_2^* \\ \pi_2^* \end{pmatrix}, \\
\mathbf{V}^{S4} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^R \\ \rho_1^{**} \\ u_1^* \\ \epsilon_1^{**} \\ \pi_1^{**} \\ \rho_2^{***} \\ u_2^* \\ \epsilon_2^* \\ \pi_2^* \end{pmatrix}, & \mathbf{V}^{S5} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^R \\ \rho_1^{**} \\ u_1^* \\ \epsilon_1^{**} \\ \pi_1^{**} \\ \rho_2^R \\ u_2^R \\ \epsilon_2^R \\ \pi_2^R \end{pmatrix}, & \mathbf{V}^R &= \begin{pmatrix} \alpha_1^R \\ \rho_1^R \\ u_1^R \\ \epsilon_1^R \\ \pi_1^R \\ \rho_2^R \\ u_2^R \\ \epsilon_2^R \\ \pi_2^R \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\frac{1}{\rho_1^*} = \frac{1}{\rho_1^L} + \frac{u_1^* - u_1^L}{a}, & \frac{1}{\rho_1^{**}} = \frac{1}{\rho_1^R} + \frac{u_1^R - u_1^*}{a}, \\
\frac{1}{\rho_2^*} = \frac{1}{\rho_2^L} + \frac{u_2^* - u_2^L}{b}, & \frac{1}{\rho_2^{***}} = \frac{1}{\rho_2^R} + \frac{u_2^R - u_2^*}{b}, \\
\epsilon_1^* = \epsilon_1^L - \frac{(\pi_1^*)^2 - (\pi_1^L)^2}{2a^2}, & \epsilon_1^{**} = \epsilon_1^R - \frac{(\pi_1^{**})^2 - (\pi_1^R)^2}{2a^2}, \\
\epsilon_2^* = \epsilon_2^L - \frac{(\pi_2^*)^2 - (\pi_2^L)^2}{2b^2}, & \epsilon_2^{***} = \epsilon_2^R - \frac{(\pi_2^{**})^2 - (\pi_2^R)^2}{2b^2}, \\
\pi_1^* = \pi_1^L + a(u_1^L - u_1^*), & \pi_1^{**} = \pi_1^R + a(u_1^* - u_1^R), \\
\pi_2^* = \frac{\pi_2^L + \pi_2^R}{2} + b \frac{u_2^L - u_2^R}{2}.
\end{array} \right. \tag{3.35}$$

Lorsque $u_1^* < u_2^*$, \mathbf{V}^{S3} est donné par :

$$\mathbf{V}^{S3} = (\alpha_1^R, \rho_1^{**}, u_1^*, \epsilon_1^*, \pi_1^{**}, \rho_2^{**}, u_2^*, \epsilon_2^{**}, \pi_2^*)^T,$$

avec :

$$\rho_2^{**} = \frac{\alpha_2^L \rho_2^*}{\alpha_2^R}, \quad \epsilon_2^{**} = \epsilon_2^* + \pi_2^* \left(\frac{1}{\rho_2^*} - \frac{1}{\rho_2^{**}} \right),$$

et lorsque $u_2^* < u_1^*$, il est donné par :

$$\mathbf{V}^{S3} = (\alpha_1^L, \rho_1^*, u_1^*, \epsilon_1^*, \pi_1^*, \rho_2^{**}, u_2^*, \epsilon_2^{**}, \pi_2^*)^T,$$

avec :

$$\rho_2^{**} = \frac{\alpha_2^R \rho_2^{***}}{\alpha_2^L}, \quad \epsilon_2^{**} = \epsilon_2^{***} + \pi_2^* \left(\frac{1}{\rho_2^{***}} - \frac{1}{\rho_2^*} \right).$$

Démonstration :

Les ondes u_2 et $u_2 \pm b/\rho_2$ laissent invariants toutes les variables décrivant le premier fluide. Un raisonnement similaire à (A.21) basé sur la positivité des densités montre que les ondes du premier fluide sont classées de la manière suivante : $u_1 - a/\rho_1 < u_1 < u_1 + a/\rho_1$. De même comme u_2 est invariant à travers les ondes u_1 et $u_1 \pm a/\rho_1$ et comme les densités du second fluide doivent rester positives, il est facile de montrer que : $u_2 - b/\rho_2 < u_2 < u_2 + b/\rho_2$. Les conditions (3.31) donnent $u_2 + b/\rho_2 < u_1 + a/\rho_1$ et $u_1 - a/\rho_1 < u_2 - b/\rho_2$. Le classement des ondes est donc le suivant :

$$\begin{cases} u_1 - \frac{a}{\rho_1} < u_2 - \frac{b}{\rho_2} < u_2 < u_2 + \frac{b}{\rho_2} < u_1 + \frac{a}{\rho_1}, \\ u_1 - \frac{a}{\rho_1} < u_1 < u_1 + \frac{a}{\rho_1}. \end{cases}$$

Pour la suite de la preuve, nous supposons que l'ordre donné (3.32) est respecté. Dans ce cas, les solutions seront exhibées et nous veillerons à posteriori que cet ordre est respecté. L'utilisation des invariants de Riemann du système (3.30) permet de montrer que la solution constante par morceaux admet la structure (3.34). Comme les variables u_2 et π_2 ne sont discontinues que pour les ondes $u_2 \pm b/\rho_2$, leurs expressions ne dépendent pas de l'ordre des ondes u_1 et u_2 . Un calcul simple permet d'obtenir leurs relations. De plus, la variable u_1^* se déduit de trois relations qui ne dépendent pas de l'ordre des ondes u_1 et u_2 :

$$\pi_1^L + au_1^L = \pi_1^* + au_1^*, \quad \alpha_1^L(\pi_1^* - \pi_2^*) = \alpha_1^R(\pi_1^{**} - \pi_2^*), \quad \pi_1^{**} - au_1^* = \pi_1^R - au_1^R.$$

Les variables ρ_1^* , ϵ_1^* , Π_1^* , ρ_2^* , ϵ_2^* , ρ_1^{**} , ϵ_1^{**} , Π_1^{**} , ρ_2^{***} et ϵ_2^{***} sont déterminées en utilisant les invariants de Riemann pour les ondes $u_1 - a/\rho_1$, $u_2 - b/\rho_2$, $u_2 + b/\rho_2$ et $u_1 + a/\rho_1$. L'état constant \mathbf{V}^{S3} et ses variables ρ_2^{**} et ϵ_2^{**} sont déterminés en considérant les cas $u_1 < u_2$ et $u_2 < u_1$.

Le reste de la démonstration consiste à vérifier que l'ordre des valeurs propres (3.32) est respecté. Les conditions $u_2^L - b/\rho_2^L < u_2^*$ et $u_2^* < u_2^R - b/\rho_2^R$ se reformulent ainsi :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_2^L} b^2 + \frac{\Delta u_2}{2} b - \frac{\Delta \pi_2}{2} > 0, \\ \frac{1}{\rho_2^R} b^2 + \frac{\Delta u_2}{2} b + \frac{\Delta \pi_2}{2} > 0. \end{cases}$$

La positivité de ces polynômes conduit aux inégalités (3.31). Ensuite, $u_1^L - a/\rho_1^L < u_2^L - b/\rho_2^L$ et $u_2^R + b/\rho_2^R < u_1^R + a/\rho_1^R$ seront justes lorsque les conditions (3.31) seront satisfaites.

Les inégalités $u_2^L - b/\rho_2^L < u_1^*$ et $u_1^* < u_2^R + b/\rho_2^R$ sont équivalentes à :

$$\begin{cases} a(\alpha_1^R + \alpha_1^L) \left(\frac{b}{\rho_2^L} - u_2^L + \frac{\alpha_1^L u_1^L + \alpha_1^R u_1^R}{\alpha_1^R + \alpha_1^L} \right) > \delta, \\ a(\alpha_1^R + \alpha_1^L) \left(\frac{b}{\rho_2^R} + u_2^R - \frac{\alpha_1^L u_1^L + \alpha_1^R u_1^R}{\alpha_1^R + \alpha_1^L} \right) > -\delta. \end{cases}$$

Compte tenu des conditions déjà obtenues pour b , ces relations donnent (3.31).

Proposition 7 (*Dissipation et stabilité de l'état d'équilibre du système de relaxation*)
Le système à l'équilibre associé au système de relaxation (3.29) est donné par :

$$\partial_t(\mathbf{W}) + \partial_x(\mathbf{F}) + \mathbf{B}\partial_x(\mathbf{V}) = \lambda(\partial_x[\mathbf{C}_1\partial_x\mathbf{W}] + \alpha_2\partial_x[\mathbf{C}_2\partial_x\mathbf{W}]) \quad (3.36)$$

où \mathbf{W} , \mathbf{F} , \mathbf{B} , \mathbf{V} sont explicités (2.64). Les matrices dissipatives de ce système prennent les formes suivantes :

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_1 d_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_1^2 d_1 & u_1 d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & -d_2 u_2 & d_2 & 0 \\ u_1 r & 0 & 0 & 0 & -u_1 u_2 d_2 & u_1 d_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & u_2 d_2 & -d_2 & 0 \\ r u_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 u_2 d_2 & -u_1 d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & -u_2 d_2 & d_2 & 0 \\ r u_2 & 0 & 0 & 0 & -u_2^2 d_2 & u_2 d_2 & 0 \end{pmatrix},$$

où $d_1 = \frac{a^2}{\rho_1^2} - c_1^2$, $d_2 = \frac{b^2}{\rho_2^2} - c_2^2$ et $r = \rho_2^2 c_2^2 (u_2 - u_1)$.

La condition sous-caractéristique de Whitham s'écrit :

$$a > \rho_1 c_1, \quad b > \rho_2 c_2. \quad (3.38)$$

Démonstration :

Pour chaque paramètre de relaxation π_k , un développement asymptotique autour de la pression thermodynamique p_k est considéré :

$$\pi_k = p_k + \lambda \pi_k^\lambda + O(\lambda^2). \quad (3.39)$$

Son utilisation dans les équations des paramètres de relaxation du système (3.29) donne au premier ordre en λ :

$$\begin{cases} \pi_1^\lambda = - \left[\partial_t(p_1) + u_1 \partial_x(p_1) + \frac{a^2}{\rho_1} \partial_x(u_1) \right], \\ \pi_2^\lambda = - \left[\partial_t(p_2) + u_2 \partial_x(p_2) + \frac{b^2}{\rho_2} \partial_x(u_2) \right]. \end{cases} \quad (3.40)$$

A l'aide des équations de pression données (3.28), les fluctuations de pressions s'écrivent :

$$\begin{cases} \pi_1^\lambda = -d_1 \partial_x(u_1), \\ \pi_2^\lambda = -d_2 \partial_x(u_2) - \frac{r}{\alpha_2 \rho_2} \partial_x(\alpha_1). \end{cases} \quad (3.41)$$

Le système à l'équilibre associé au système de relaxation (3.29) s'écrit alors sous la forme :

$$\partial_t(\mathbf{W}) + \partial_x(\mathbf{F}) + \mathbf{B} \partial_x(\mathbf{V}) = \lambda \mathbf{R}, \quad (3.42)$$

où :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_x(\alpha_1 \pi_1^\lambda + \alpha_2 \pi_2^\lambda) \\ -\partial_x([\alpha_1 \pi_1^\lambda + \alpha_2 \pi_2^\lambda] u_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x(\pi_2^\lambda) \\ \partial_x(\pi_2^\lambda u_1) \\ 0 \\ -\partial_x(\pi_2^\lambda) \\ -\partial_x(\pi_2^\lambda u_2) \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Ces termes réécrits sous la forme dissipative habituelle et à l'aide des variables conservatives conduisent aux matrices \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 . Leurs valeurs propres sont 0, d_1 , d_2 et 0, d_2 . Elles assurent la stabilité au sens de Whitham [100] dès lors qu'elles restent positives (3.38).

3.2.2 Schéma de relaxation pour le modèle asymptotique

Pour le modèle asymptotique (2.82), certains critères ont été déterminants pour la mise au point d'un système de relaxation. Le premier critère concerne les différences importantes qui existent au niveau de la discontinuité de contact qui sépare les fluides. En effet, lorsque les fluides considérés sont de l'eau ($\rho_{eau} = 1000$, $c_{eau} = 1500$) et de l'air ($\rho_{air} = 1$, $c_{air} = 340$), le rapport de densité est de 1000 et celui des vitesses du son de 4.4 environ à l'interface. Le paramètre a qui permet de linéariser l'équation de pression devra suivre une équation de transport [26] afin d'approximer au mieux les propriétés des fluides dans cette zone, et en particulier, la vitesse de propagation des ondes acoustiques.

Le deuxième critère est en rapport avec le terme β_1 présent dans le modèle. Ce terme est fonction des vitesses du son des fluides et donc dépend de la fermeture utilisée. Il doit donc faire l'objet d'une relaxation. Nous proposons de chercher une approximation $\tilde{\beta}_1$ conduisant à un système linéairement dégénéré pour lequel le calcul de la solution est simple.

Elle admet les valeurs propres $u \pm \frac{a}{\rho}$ et u . Les vecteurs propres à droite associés sont :

$$\begin{aligned}
 r_{u \pm a/\rho} &= \begin{pmatrix} \rho \tilde{\beta}_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \rho \\ \alpha_2 \rho_2 \rho \\ \pm a \\ \pi \\ a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u,1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u,2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 r_{u,3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u,4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u,5} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u,6} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Le déterminant des vecteurs propres à droite vaut :

$$\text{Det}(r_{u-a/\rho}, r_{u,1}, r_{u,2}, r_{u,3}, r_{u,4}, r_{u,5}, r_{u,6}, r_{u+a/\rho}) = 2a^3 > 0. \tag{3.48}$$

Le système (3.44) est donc inconditionnellement hyperbolique. Le reste de la démonstration s'effectue en vérifiant que les invariants de Riemann (3.45) sont corrects.

En utilisant la conservation des invariants de Riemann (3.45), nous avons le résultat suivant :

Proposition 9 *Sous les hypothèses (A.21), le système de relaxation (3.44) admet une unique solution constante par morceaux composée des états constants :*

$$\mathbf{V}^L = \begin{pmatrix} \alpha_1^L \\ y_1^L \\ y_2^L \\ u^L \\ \epsilon^L \\ \pi^L \\ a^L \\ (b_1^L)^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^* = \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ y_1^L \\ y_2^L \\ u^* \\ \epsilon^* \\ \pi^* \\ a^L \\ (b_1^L)^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{**} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{**} \\ y_1^R \\ y_2^R \\ u^* \\ \epsilon^{**} \\ \pi^* \\ a^R \\ (b_1^R)^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^R = \begin{pmatrix} \alpha_1^R \\ y_1^R \\ y_2^R \\ u^R \\ \epsilon^R \\ \pi^R \\ a^R \\ (b_1^R)^2 \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{a^R u^R + a^L u^L + \pi^L - \pi^R}{a^L + a^R} \\ \pi^* = \frac{a^L \pi^R + a^R \pi^L + a^L a^R (u^L - u^R)}{a^L + a^R} \\ \epsilon^* = \epsilon^g + \frac{(\pi^*)^2 - (\pi^L)^2}{2(a^L)^2}, \quad \epsilon^{**} = \epsilon^d + \frac{(\pi^{**})^2 - (\pi^R)^2}{2(a^R)^2} \\ \alpha_1^* = \alpha_1^L - z \left(1 - \frac{\rho^*}{\rho^L} \right) [\alpha_1^L - (b_1^L)^2 y_1^L] \\ \alpha_1^{**} = \alpha_1^R - z \left(1 - \frac{\rho^{**}}{\rho^R} \right) [\alpha_1^R - (b_1^R)^2 y_1^R] \\ \frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{\rho^L} + \frac{u^* - u^L}{a^L}, \quad \frac{1}{\rho^{**}} = \frac{1}{\rho^R} + \frac{u^R - u^*}{a^R} \end{array} \right. \quad (3.50)$$

où $z = 1$ pour le modèle de Kapila et $z = 0$ pour le modèle de Massoni. Les discontinuités sont aux valeurs $u^L - a^L/\rho^L$, u^* et $u^R + a^R/\rho^R$.

La preuve de ce résultat est omise. En effet, comme les équations de masse, quantité de mouvement, énergie et pression de relaxation de mélange du système de relaxation multifluide (3.44) sont les mêmes que pour le système de relaxation d'Euler (A.17), la démonstration de l'unicité et de l'existence de la solution est identique. La détermination des constantes composant la solution s'effectue à l'aide des invariants de Riemann donnés dans le tableau (3.45).

Proposition 10 *La solution (3.50) du système de relaxation satisfait les relations de saut de Rankine Hugoniot associées aux équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie du système.*

Démonstration :

Les relations (3.50) que vérifient les constantes ρ^* , ρ^{**} , u^* , π^* , ϵ^* et ϵ^{**} sont identiques à celles de la solution du système de relaxation pour les équation d'Euler (A.22). Comme les équations de conservation du système de Kapila (masse, quantité de mouvement, énergie) sont identiques à celles des équations d'Euler, les relations de saut de Rankine Hugoniot sont vérifiées (cf. proposition 23).

Remarque :

D'après le corollaire 2 donné en annexe, les quantités explicitées (3.50) suivent les relations (A.13), (A.11), (A.16) et (A.14) que vérifie la solution du solveur HLLC pour les équations d'Euler.

Proposition 11 *Le système à l'équilibre associé au système de relaxation (3.44) est for-*

mellement donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1) + u\partial_x(\alpha_1) + z\beta_1\partial_x(u) = z\lambda \frac{\alpha_1\alpha_2(\rho c^2)^3}{\rho_1 c_1^2 \rho_2 c_2^2} \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\rho_2 c_2^2} - \frac{\gamma_1 + 1}{\rho_1 c_1^2} \right) [\partial_x(u)]^2, \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = \lambda\partial_x \left[\left(\frac{a^2}{\rho} - \rho c^2 \right) \partial_x(u) \right], \\ \partial_t(E) + \partial_x((E + p)u) = \lambda\partial_x \left[\left(\frac{a^2}{\rho} - \rho c^2 \right) u\partial_x(u) \right], \end{array} \right. \quad (3.51)$$

où $z = 1$ pour le modèle de Kapila et $z = 0$ pour le modèle de Massoni.

Démonstration :

Le système à l'équilibre s'obtient en considérant l'asymptotique du système de relaxation lorsque la pression de relaxation et le paramètre b_1 tendent vers l'équilibre. Ces variables s'écrivent à l'aide de développements de Chapman Enskog :

$$\pi = p + \lambda\pi^\lambda + O(\lambda^2), \quad b_1^2 = \left(\frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)^2 + \lambda b_1^\lambda + O(\lambda^2). \quad (3.52)$$

En utilisant l'équation de fraction volumique du système (3.44), nous obtenons l'équation suivante :

$$\partial_t(\alpha_1) + u\partial_x(\alpha_1) + \beta_1\partial_x(u) = z\lambda y_1 b_1^\lambda \partial_x(u), \quad (3.53)$$

et l'équation du terme b_1^2 donne à l'ordre 0 vis à vis du paramètre λ :

$$b_1^\lambda = - [\partial_t(r^2) + u\partial_x(r^2)] \quad (3.54)$$

Afin d'évaluer plus précisément le terme b_1^λ , l'écriture $r^2 = \frac{\rho c^2}{\rho_1 c_1^2} \frac{\alpha_1}{y_1}$ est utilisée. En considérant la loi d'état 'Stiffened gas', les différentielles des vitesses du son s'expriment de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\rho c^2) = (\rho c^2)^2 \left[\left(\frac{\alpha_1 \gamma_1}{(\rho_1 c_1^2)^2} + \frac{\alpha_2 \gamma_2}{(\rho_2 c_2^2)^2} \right) d(p) - \left(\frac{1}{\rho_1 c_1^2} - \frac{1}{\rho_2 c_2^2} \right) d(\alpha_1) \right], \\ d\left(\frac{1}{\rho_1 c_1^2} \right) = -\frac{\gamma_1}{(\rho_1 c_1^2)^2} d(p), \end{array} \right. \quad (3.55)$$

et permettent d'obtenir la différentielle de r^2 :

$$d(r^2) = \frac{(\rho c^2)^2}{y_1 \rho_1 c_1^2 \rho_2 c_2^2} d(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 \rho c^2}{y_1^2 \rho_1 c_1^2} d(y_1) - \frac{(\rho c^2)^2 \alpha_1 \alpha_2}{y_1 \rho_1 c_1^2 \rho_2 c_2^2} \left(\frac{\gamma_1}{\rho_1 c_1^2} - \frac{\gamma_2}{\rho_2 c_2^2} \right) d(p). \quad (3.56)$$

L'évaluation de la forme différentielle donne la valeur de b_1^λ :

$$b_1^\lambda = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\rho c^2)^3}{y_1 \rho_1 c_1^2 \rho_2 c_2^2} \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\rho_2 c_2^2} - \frac{\gamma_1 + 1}{\rho_1 c_1^2} \right) \partial_x(u). \quad (3.57)$$

Les termes présents au second membre des équations de quantité de mouvement et d'énergie du système à l'équilibre s'obtiennent à partir du développement asymptotique de la pression de relaxation π . La démarche est la même que pour les équations d'Euler (A.50) et n'est pas détaillée ici.

Proposition 12 *Il existe une matrice \mathbf{A}_R diagonalisable à valeurs propres réelles telle que la solution du système de relaxation (3.50) soit la solution du système linéaire :*

$$\partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \pi \end{pmatrix} + \mathbf{A}_R \partial_x \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \pi \end{pmatrix} = 0, \quad (3.58)$$

où $\mathbf{W} = (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho u, E)^T$ est le vecteur des variables conservatives.

Démonstration :

Les états constants qui composent la solution se déduisent des formules (3.50) et sont donnés par :

$$\mathbf{W}^L = \begin{pmatrix} \alpha_1^L \\ \alpha_1^L \rho_1^L \\ \alpha_2^L \rho_2^L \\ \rho^L u^L \\ E^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_1^* \rho_1^* \\ \alpha_2^* \rho_2^* \\ \rho^* u^* \\ E^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^{**} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{**} \\ \alpha_1^{**} \rho_1^{**} \\ \alpha_2^{**} \rho_2^{**} \\ \rho^{**} u^* \\ E^{**} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^R = \begin{pmatrix} \alpha_1^R \\ \alpha_1^R \rho_1^R \\ \alpha_2^R \rho_2^R \\ \rho^R u^R \\ E^R \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Un calcul simple permet de montrer que les sauts de la solution sont colinéaires à des vecteurs non nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^* \\ \pi^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{W}^L \\ p^L \end{pmatrix} = (\rho^* - \rho^L) \mathbf{r}_1, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{**} \\ \pi^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{W}^* \\ \pi^* \end{pmatrix} = (\alpha_1^{**} - \alpha_1^*) \mathbf{r}_2 + (\alpha_1^{**} \rho_1^{**} - \alpha_1^* \rho_1^*) \mathbf{r}_3 + (\alpha_2^{**} \rho_2^{**} - \alpha_2^* \rho_2^*) \mathbf{r}_4 + (E^{**} - E^*) \mathbf{r}_5, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}^R \\ p^R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{**} \\ \pi^* \end{pmatrix} = (\rho^L - \rho^{**}) \mathbf{r}_6, \end{array} \right. \quad (3.60)$$

où :

$$r_1 = \begin{pmatrix} Z_1^L \\ y_1^L \\ y_2^L \\ \lambda^L \\ J^L \\ \Delta^L \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ u^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

$$r_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_6 = \begin{pmatrix} Z_1^R \\ y_1^R \\ y_2^R \\ \lambda^R \\ J^R \\ \Delta^R \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Les constantes explicitées dans les vecteurs r_i sont données (A.39) et nous avons introduit :

$$\begin{cases} Z_1^L = z \frac{\alpha_1^L - (b_1^L)^2 y_1^L}{\rho^L}, \\ Z_1^R = z \frac{\alpha_1^R - (b_1^R)^2 y_1^R}{\rho^R}. \end{cases} \quad (3.63)$$

Soit \mathbf{P} la matrice dont les colonnes sont les vecteurs r_i . Le déterminant de cette matrice vaut :

$$|\mathbf{P}| = (u^* - \lambda^g) \Delta^d + (\lambda^d - u^*) \Delta^g > 0. \quad (3.64)$$

La positivité du déterminant est assurée en considérant les inégalités $\lambda^g < u^* < \lambda^d$, $\Delta^d > 0$ et $\Delta^g > 0$. La matrice \mathbf{P} est donc inversible. Les vecteurs ligne qui composent son inverse s'écrivent :

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ u^* \Delta^d \\ u^* \Delta^d \\ -\Delta^d \\ 0 \\ 0 \\ \delta^d \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} |\mathbf{P}| \\ d_2 u^* \\ d_2 u^* \\ -d_2 \\ 0 \\ 0 \\ -(Z_1^d \delta^g + Z_1^g \delta^d) \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ (\Delta^d \delta^g - \Delta^g \delta^d) + u^* d_3 \\ u^* d_3 \\ -d_3 \\ 0 \\ 0 \\ -(y_1^g \delta^d + y_1^d \delta^g), \end{pmatrix}$$

$$l_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_4 u^* \\ -u^* d_3 + \lambda^d \Delta^g - \lambda^g \Delta^d \\ -d_4 \\ 0 \\ 0 \\ u^* (y_1^d - y_1^g) + \lambda^g y_2^d - \lambda^d y_2^g \end{pmatrix}, \quad l_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_6 u^* \\ d_6 u^* \\ d_6 \\ 0 \\ \Delta^d \delta^g + \Delta^g \delta^d \\ J^d \delta^g - J^g \delta^d \end{pmatrix}, \quad l_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -u^* \Delta^g \\ -u^* \Delta^g \\ \Delta^g \\ 0 \\ 0 \\ \delta^d \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{cases} \delta^g = u^* - \lambda^g, \\ \delta^g = \lambda^d - u^*, \\ d_2 = Z_1^d \Delta^g - Z_1^g \Delta^d, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d_3 = \Delta^g y_1^d - \Delta^d y_1^g, \\ d_4 = \Delta^g y_2^d - \Delta^d y_2^g, \\ d_5 = \Delta^g v^d - \Delta^d v^g, \\ d_6 = \Delta^g J^d - \Delta^d J^g. \end{cases} \quad (3.65)$$

Soit Λ la matrice diagonale contenant la vitesse de propagation des ondes :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^d \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

La matrice $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ satisfait les critères énoncés dans la proposition 12.

3.2.3 Limite incompressible

Le comportement des systèmes multifluides est étudié lorsque le nombre de Mach tend vers 0. Ce nombre a été introduit lors de l'adimensionnement des systèmes (voir annexe D). Il met en évidence le rapport entre les échelles de temps liées aux vitesses de la convection des fluides u et de leur mouvement à l'échelle microscopique c . Le nombre de Mach, qui sera désormais noté M , est donné par la relation :

$$M = \frac{|u|}{c}.$$

Deux régimes d'écoulements peuvent être identifiés lorsque le nombre de Mach est faible. Le premier régime dénommé 'acoustique' correspond à la limite lorsque la compressibilité des fluides est grande si bien que le modèle asymptotique est restreint à la caractérisation du comportement des ondes acoustiques dans l'écoulement. Le second régime porte sur un écoulement dont les effets acoustiques sont quasi absents. Dans ce cas, bien que les vitesses de convection des fluides soient très faibles en regard de la vitesse de propagation des ondes acoustiques, ils déterminent l'écoulement. Notre étude porte sur cette limite. Ce régime d'écoulement sera analysé pour les modèles réduits sans les termes de tension de surface et de viscosité dynamique. Bien que les notations resteront inchangées, le système sera écrit à l'aide de variables adimensionnées ($\alpha_k, \alpha_k \rho_k, u, p$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + u\partial_x(\alpha_k) + z\alpha_k \left(1 - \frac{\rho c^2}{\rho_k c_k^2}\right) \partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + u\partial_x(\alpha_k \rho_k) + \alpha_k \rho_k \partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(u) + u\partial_x(u) + \frac{1}{\rho M a^2} \partial_x(p) = 0, \\ \partial_t(p) + u\partial_x(p) + \rho c^2 \partial_x(u) = 0. \end{array} \right. \quad (3.67)$$

La jacobienne du système s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & 0 & z\alpha_k \left(1 - \frac{\rho c}{\rho_k c_k}\right) & 0 \\ 0 & u & \alpha_k \rho_k & 0 \\ 0 & 0 & u & \frac{1}{\rho \tau^2} \\ 0 & 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est toujours diagonalisable. Elle admet les valeurs propres réelles $(u - c/Ma, u, u + c/Ma)$. Son conditionnement vérifie l'inégalité :

$$\text{Cond}(\mathbf{A}) \geq \left(\frac{c}{|u|Ma} + 1 \right).$$

Ainsi par passage à la limite lorsque le nombre de Mach tend vers 0, nous obtenons :

$$\lim_{M \rightarrow 0} \text{Cond}(\mathbf{A}) = +\infty.$$

Lorsque le nombre de Mach tend vers 0, le conditionnement de la matrice devient mauvais. Dans ce cas, les schémas numériques reposant sur une linéarisation de la jacobienne présentent certains défauts. Les approximations qui interviennent lors de l'approximation par linéarisation et les erreurs de calculs provenant de l'incertitude des machines de calcul vont engendrer de larges erreurs lors de l'évaluation de la solution approchée et ainsi fausser le résultat. Afin de pallier ce comportement, l'analyse est poursuivie en considérant les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{cases} \alpha_k = \alpha_k^0 + M\alpha_k^1 + M^2\alpha_k^2, \\ \rho_k = \rho_k^0 + M\rho_k^1 + M^2\rho_k^2, \\ u = u^0 + Mu^1 + M^2u^2, \\ p = p^0 + Mp^1 + M^2p^2. \end{cases}$$

L'utilisation de ces développements asymptotiques dans le système (3.67) conduit aux ordres $\frac{1}{M^2}$ et $\frac{1}{M}$ respectivement :

$$\partial_x(p^0) = 0, \quad \partial_x(p^1) = 0.$$

Le système asymptotique à l'ordre 1 revêt, quand à lui, la forme :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_k^0) + u^0 \partial_x(\alpha_k^0) + \alpha_k^0 \left(1 - \frac{\rho^0(c^0)^2}{\rho_k^0(c_k^0)^2} \right) \partial_x(u^0) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k^0 \rho_k^0) + u^0 \partial_x(\alpha_k^0 \rho_k^0) + \alpha_k^0 \rho_k^0 \partial_x(u^0) = 0, \\ \partial_t(u^0) + u^0 \partial_x(u^0) + \partial_x(p^2) = 0, \\ \partial_t(p^0) + \rho^0(c^0)^2 \partial_x(u^0) = 0. \end{cases} \quad (3.68)$$

Dans le cas de régimes faible Mach incompressibles, il convient de supposer que la pression prend la forme $p = p^0(t) + M^2 p^2(x, t)$. De plus, nous supposons qu'il existe un ouvert du domaine (situé à l'infini) tel que $\partial_t(p) = 0$. La prise en considération de ces remarques conduit au système 'incompressible' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k^0) + u^0 \partial_x(\alpha_k^0) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k^0 \rho_k^0) + u^0 \partial_x(\alpha_k^0 \rho_k^0) = 0, \\ \partial_t(u^0) + \partial_x(p^2) = 0, \\ \partial_x(u^0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.69)$$

Le système d'ordre 1 (3.68) ne fait intervenir que les termes d'ordre 0 du développement asymptotique des variables α_k , ρ_k et u . En revanche, pour la pression, deux échelles sont utilisées : les termes d'ordre 0 pour les dérivées en temps et les termes d'ordre 2 pour les dérivées en espace. Ceci s'explique par le fait que l'échelle d'évolution en temps de la pression est toujours liée à l'échelle des ondes acoustiques τ . Dans nos régimes, bien que les phénomènes acoustiques soient très faibles, les erreurs qu'ils vont engendrer auront leurs dérivées spatiales d'ordre 0 et entacheront d'erreurs la solution. Il est donc nécessaire de construire un filtre afin de préserver la solution. Celui-ci doit contrôler l'effet des termes d'ordre 1 et 2 du développement asymptotique de la pression. Ainsi, nous introduisons la notion de pression préconditionnée. Celle-ci sera notée p_M et devra vérifier :

$$\partial_t(p) = M^2 \partial_t(p_M), \quad \partial_x(p) = \partial_x(p_M).$$

Ces équations permettent d'obtenir le système préconditionné suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + u \partial_x(\alpha_k) + \alpha_k \left(1 - \frac{\rho c^2}{\rho_k c_k^2} \right) \partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + u \partial_x(\alpha_k \rho_k) + \alpha_k \rho_k \partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(u) + u \partial_x(u) + \frac{1}{\rho M^2} \partial_x(p_M) = 0, \\ \partial_t(p_M) + M^2 u \partial_x(p_M) + M^2 \rho c^2 \partial_x(u) = 0. \end{array} \right. \quad (3.70)$$

La matrice jacobienne de ce système est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & 0 & \alpha_k \left(1 - \frac{\rho c}{\rho_k c_k} \right) & 0 \\ 0 & u & \alpha_k \rho_k & 0 \\ 0 & 0 & u & \frac{1}{\rho M^2} \\ 0 & 0 & M^2 \rho c^2 & M^2 u \end{pmatrix}.$$

Elle est diagonalisable dans R . Ces valeurs propres sont réelles et données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(M^2 + 1)u - \sqrt{(M^2 - 1)^2 u^2 + 4c^2}}{2}, \\ u, \\ \frac{(M^2 + 1)u + \sqrt{(M^2 - 1)^2 u^2 + 4c^2}}{2}. \end{array} \right.$$

Son conditionnement suit l'inégalité :

$$\text{Cond}(\mathbf{A}) < (M^2 + 1) + \sqrt{(M^2 - 1)^2 + 4 \left(\frac{c}{u}\right)^2},$$

et donc en passant à la limite lorsque le nombre de Mach tend vers 0 :

$$\lim_{M \rightarrow 0} \text{Cond}(\mathbf{A}) \leq 1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{c}{u}\right)^2}.$$

Le conditionnement de la matrice restera donc borné lorsque le nombre de Mach tend vers 0 et les défauts du système initial (3.67) sont ainsi corrigés. Écrit à l'aide de variables non adimensionnées, le système préconditionné devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + u\partial_x(\alpha_k) + \alpha_k \left(1 - \frac{\rho c^2}{\rho_k c_k^2}\right) \partial_x(u) = 0 \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + u\partial_x(\alpha_k \rho_k) + \alpha_k \rho_k \partial_x(u) = 0 \\ \partial_t(u) + u\partial_x(u) + \frac{1}{\rho} \partial_x(p_M) = 0 \\ \partial_t(p_M) + M^2 u \partial_x(p_M) + M^2 \rho c^2 \partial_x(u) = 0 \end{array} \right. \quad (3.71)$$

Avec ces variables, les valeurs propres s'écrivent :

$$\frac{(M^2 + 1)u \mp \sqrt{(M^2 - 1)^2 u^2 + 4M^2 c^2}}{2}, \quad u.$$

Afin de construire un solveur de relaxation préconditionné, l'équation de pression va être linéarisée. Pour cela, la dérivée totale de la pression sera inchangée et les autres termes de l'équation seront linéarisés de la manière suivante :

$$\partial_t(\pi) + u\partial_x(\pi) + \frac{a^R - a^L}{\rho} \partial_x(\pi) + \frac{a^R a^L}{\rho} \partial_x(u) = 0,$$

où a^L et a^R sont deux réels positifs qui doivent vérifier les égalités

$$\frac{a^R a^L}{\rho} = M^2 \rho c^2, \quad \frac{a^R - a^L}{\rho} = (M^2 - 1)u,$$

et $-a^L$ et a^R sont donc les racines du polynôme du second degré :

$$P_a = x^2 + (M^2 - 1)ux - M^2 \rho c^2.$$

La résolution de ce polynôme conduit aux valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^R = \frac{\rho}{2} \left((M^2 - 1)u + \sqrt{(M^2 - 1)^2 u^2 + 4c^2 M^2} \right), \\ a^L = \frac{\rho}{2} \left(-(M^2 - 1)u + \sqrt{(M^2 - 1)^2 u^2 + 4c^2 M^2} \right). \end{array} \right. \quad (3.72)$$

La proposition suivante explicite le système de relaxation préconditionné et la solution du problème de Riemann pour des conditions initiales droite et gauche admissibles :

Proposition 13 *Le système de relaxation associé au modèle asymptotique preconditionné pour les régimes dont le nombre de Mach est faible, est le suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + u\partial_x(\alpha_k) + (\alpha_k - y_k(b_k)^2) \partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(E) + \partial_x((E + \pi)u) = 0, \\ \partial_t(\pi) + \left(u + \frac{a^R - a^L}{\rho}\right) \partial_x(\pi) + \frac{a^L a^R}{\rho} \partial_x(u) = \frac{1}{\lambda}(p - \pi), \\ \partial_t((b_k)^2) + u\partial_x((b_k)^2) = \frac{1}{\lambda}(r - (b_k)^2), \end{array} \right. \quad (3.73)$$

où les réels positifs a^R et a^L sont tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^R = \frac{\rho^R}{2} \left((M^2 - 1)u^R + \sqrt{(M^2 - 1)^2 u^R + 4(c^R)^2 M^2} \right) + \delta^R, \\ a^L = \frac{\rho^L}{2} \left((M^2 - 1)u^L - \sqrt{(M^2 - 1)^2 u^L + 4(c^L)^2 M^2} \right) + \delta^L, \end{array} \right. \quad (3.74)$$

avec δ^R et δ^L des petits réels positifs. Le système est linéairement dégénéré et lorsque les conditions (A.21) sont vérifiées, la solution de ce système est donnée en (3.49).

Démonstration :

La jacobienne du système exprimée à l'aide des variables $(\alpha_k, \alpha_k \rho_k, u, \epsilon, \pi, b_k)$ est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & 0 & z(\alpha_k - y_k(b_k)^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \alpha_k \rho_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{\rho} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{a^R a^L} & 0 & u + \frac{a^R - a^L}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont $u - a^L/\rho$, u et $u + a^R/\rho$. En considérant les valeurs (3.74), leurs expressions sont très proches des valeurs propres du système preconditionné (3.71) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u + \frac{a^R}{\rho^R} = \frac{[(M^2 + 1)u^R + \sqrt{(M^2 + 1)^2 u^R + 4(c^R)^2 M^2}]}{2}, \\ u - \frac{a^L}{\rho^L} = \frac{[(M^2 + 1)u^L - \sqrt{(M^2 + 1)^2 u^L + 4(c^L)^2 M^2}]}{2}. \end{array} \right.$$

Les vecteurs propres associés sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 r_{u-a^L/\rho} &= \begin{pmatrix} \rho z(\alpha_k - y_k(b_k)^2) \\ \alpha_k \rho_k \rho \\ -a^L \\ \pi \\ (a^L)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u+a^R/\rho} &= \begin{pmatrix} \rho z(\alpha_k - y_k(b_k)^2) \\ \alpha_k \rho_k \rho \\ a^R \\ \pi \\ (a^R)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 r_{u,1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u,2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u,3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r_{u,4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Ces derniers permettent de montrer que le système est linéairement dégénéré. Les invariants de Riemann associés à chaque onde sont donnés dans le tableau suivant :

onde	Invariants de Riemann						
$\lambda_{u \pm a^L/\rho}$	$u - \frac{a^L}{\rho}$	$\pi + a^L u$	$\pi^2 - 2(a^L)^2 \epsilon$	y_1	y_2	b_1^2	$\frac{\alpha_1 - b_1^2 y_1}{\rho}$
λ_u	u			π			
$\lambda_{u \pm a^R/\rho}$	$u + \frac{a^R}{\rho}$	$\pi - a^R u$	$\pi^2 - 2(a^R)^2 \epsilon$	y_1	y_2	b_1^2	$\frac{\alpha_1 - b_1^2 y_1}{\rho}$

Les invariants de Riemann sont identiques à ceux du système non préconditionné (3.45). Il en résulte que l'expression de la solution et les critères assurant sa positivité restent inchangés.

Proposition 14 *Le système de relaxation préconditionné (3.73) admet formellement, lorsque la pression de relaxation π tend vers la pression p , le système à l'équilibre :*

$$\partial_t(\mathbf{W}) + \partial_x(\mathbf{F}) + \mathbf{B}\partial_x(\mathbf{V}) = \lambda\partial_x(\mathbf{C}\partial_x\mathbf{W}),$$

où \mathbf{W} , \mathbf{F} , \mathbf{V} et \mathbf{B} sont définis (2.84). La matrice dissipative du système prend la forme :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a^R - a^L}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \alpha_k} & u(au - b) & -(2au - b) & 2a \\ -u \frac{a^R - a^L}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \alpha_k} & u^2(au - b) & -u(2au - b) & 2au \end{pmatrix},$$

où les constantes a et b sont données par :

$$a = \frac{\Gamma(a^R - a^L)}{2\rho}, \quad b = \frac{a^R a^L}{\rho^2} - c^2.$$

La stabilité sous caractéristique de Whitham est atteinte lorsque l'inégalité suivante est satisfaite :

$$a^L a^R > \rho^2 c^2.$$

Démonstration :

Le développement de Chapman Enskog de la pression de relaxation par rapport à la pression thermodynamique : $\pi = p + \lambda \pi^\lambda + O(\lambda^2)$ permet d'obtenir :

$$\pi^\lambda = - \left(\frac{a^R a^L}{\rho} - \rho c^2 \right) \partial_x(u) - \frac{a^R - a^L}{\rho} \partial_x(p).$$

Exprimée en variables conservatives, l'expression de ce terme prend la forme :

$$\pi^\lambda = - \frac{a^R - a^L}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \alpha_k} \partial_x(\alpha_k) + u (au - b) \partial_x(\alpha_k \rho_k) - (2au - b) \partial_x(\rho u) + 2a \partial_x(E).$$

Ainsi l'utilisation du développement asymptotique dans le système de relaxation préconditionné (3.73) conduit au système à l'équilibre défini dans la proposition. Sa stabilité est assurée en exigeant la positivité des valeurs propres de la matrice dissipative : 0 et $\frac{a^L a^R}{\rho^2} - c^2$.

Remarquons que le système de relaxation n'est à priori pas stable lorsque les réels a^L et a^R sont choisis suivant (3.74). En effet, le filtre mis en place sur l'équation de pression impose de considérer des données initiales 'bien préparées' afin que les solutions associées gardent un nombre de Mach faible. Si cela n'est pas le cas, le schéma numérique ne sera pas stable.

3.2.4 Généralisation des schémas de relaxation

Cette section porte sur l'extension formelle des solveurs de type relaxation pour les systèmes non conservatifs. A partir de l'implémentation du schéma de relaxation, plusieurs formulations de ce schéma sont dérivées. En particulier, nous retrouvons le schéma de relaxation écrit dans le formalisme donné par Gallice [29, 43]. Nous montrerons ensuite son lien avec les solveurs 'équilibre'. Ce travail est motivé par la détermination d'une technique plus générale pour la mise au point de solveurs de relaxation.

Soit $\mathcal{V}_{i+1/2}^R$ la solution exacte d'un système de relaxation (3.29 ou 3.44) pour les données initiales gauche \mathbf{W}_i et droite \mathbf{W}_{i+1} . Celle-ci est constante par morceaux et constituée de m discontinuités. Le saut à la i^{eme} discontinuité sera noté $(\delta \mathbf{W})_i$. Commençons par introduire le schéma numérique de Godunov associé au solveur de relaxation :

$$\Delta x \mathbf{W}_i^{n+1} = \Delta t \left(\int_0^{\Delta x/2\Delta t} \mathcal{V}_{i-1/2}^R(\xi_{i-1/2}) d\xi + \int_{-\Delta x/2\Delta t}^0 \mathcal{V}_{i+1/2}^R(\xi_{i+1/2}) d\xi \right).$$

Cette égalité se reformule de la manière suivante :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\int_0^{\Delta x/2\Delta t} (\mathcal{V}_{i-1/2}^R(\xi) - \mathbf{W}_i^n) d\xi + \int_{-\Delta x/2\Delta t}^0 (\mathcal{V}_{i+1/2}^R(\xi) - \mathbf{W}_i^n) d\xi \right). \quad (3.76)$$

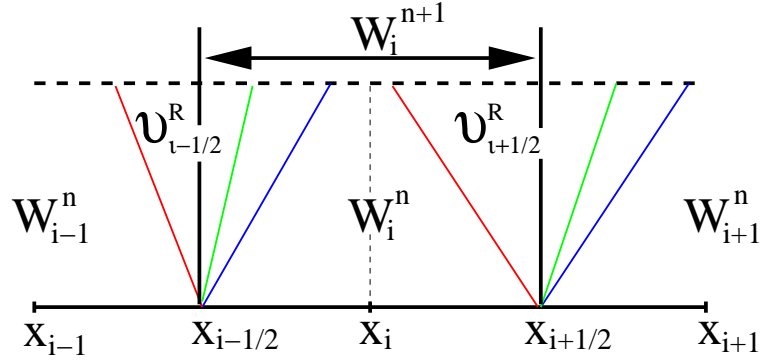


FIG. 3.1 – Implémentation d'un solveur de Godunov

Pour chaque interface, il est alors possible de définir les fluctuations :

$$\begin{cases} \psi_{i-1/2}^+ = \sum_k (\lambda_k^+ \delta \mathbf{W}_k)_{i-1/2} = - \int_{\xi=0}^{+\infty} (\mathcal{V}_{i-1/2}^R - \mathbf{W}_i^n) d\xi, \\ \psi_{i+1/2}^- = \sum_k (\lambda_k^- \delta \mathbf{W}_k)_{i+1/2} = - \int_{\xi=-\infty}^0 (\mathcal{V}_{i+1/2}^R - \mathbf{W}_i^n) d\xi. \end{cases} \quad (3.77)$$

Ces dernières vérifient donc les relations :

$$\begin{cases} \psi_{i+1/2}^+ + \psi_{i+1/2}^- = \sum_k (\lambda_k \delta \mathbf{W}_k)_{i+1/2}, \\ \psi_{i+1/2}^+ - \psi_{i+1/2}^- = \sum_k (|\lambda_k| \delta \mathbf{W}_k)_{i+1/2}. \end{cases} \quad (3.78)$$

Le schéma numérique (3.76) se réécrit alors sous la forme :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\psi_{i+1/2}^- - \psi_{i-1/2}^+). \quad (3.79)$$

Nous montrons maintenant que les solveurs de relaxation développés sont 'consistants' au sens de Gallice [43]. Ceci nous permettra d'isoler les contributions des opérateurs discrets conservatifs et non conservatifs induits par les solveurs de relaxation.

Proposition 15 *Pour les solveurs de relaxation proposés précédemment (3.29) et (3.44), il existe une matrice $\bar{\mathbf{B}}$ telle que la relation suivante soit vérifiée :*

$$\psi_{i+1/2}^- + \psi_{i-1/2}^+ = \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i + (\bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{V})_{i+1/2}. \quad (3.80)$$

Ces solveurs de relaxation seront dits consistants.

Démonstration :

La preuve n'est effectuée que pour le solveur de relaxation associé au modèle asymptotique (3.44). Pour celui-ci, un calcul simple permet de montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{f} \end{array} \right) - \left(u - \frac{a}{\rho} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{w} \end{array} \right) \text{ est invariant pour l'onde } u - \frac{a}{\rho}, \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{f} \end{array} \right) - u \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{w} \end{array} \right) \text{ est invariant pour l'onde } u, \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{f} \end{array} \right) - \left(u + \frac{a}{\rho} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{w} \end{array} \right) \text{ est invariant pour l'onde } u + \frac{a}{\rho}. \end{array} \right.$$

Ainsi, les équations conservatives du système vérifient les conditions de Rankine Hugoniot et la solution du système satisfait :

$$\sum_k \lambda_k \delta \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{w} \end{array} \right)_k = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{f}^R \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{f}^L \end{array} \right).$$

De ce fait, l'ensemble des variables de la solution obéit à l'équation :

$$\sum_k \lambda_k \delta \mathbf{W}_k = \Delta \mathbf{F} + \bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{V},$$

où les contributions non conservatives sont données par :

$$\bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{V} = \left(\begin{array}{c} \left(u^L - \frac{a^L}{\rho^L} \right) (\alpha_k^* - \alpha_k^L) + u^* (\alpha_k^{**} - \alpha_k^*) + \left(u^R + \frac{a^R}{\rho^R} \right) (\alpha_k^R - \alpha_k^{**}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right).$$

En utilisant (3.50), l'expression de u^* conduit aux deux égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* - u^L = \frac{a^R}{a^R + a^L} (u^R - u^L) - \frac{1}{a^R + a^L} (\pi^R - \pi^L), \\ u^R - u^* = \frac{a^L}{a^R + a^L} (u^R - u^L) + \frac{1}{a^R + a^L} (\pi^R - \pi^L). \end{array} \right.$$

Elles permettent de déduire aisément l'expression de la matrice des contributions non conservatives :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{u} & 0 & \bar{Z} & \frac{(b_k^L)^2 y_k^L - (b_k^R)^2 y_k^R}{a^R + a^L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (3.81)$$

où $Z = \alpha_k - (b_k^R) y_k$ et les opérateurs $x \rightarrow \bar{x}$ et $x \rightarrow \underline{x}$ sont définis de la manière suivante :

$$\bar{x} = \frac{a^R x^R + a^L x^L}{a^R + a^L}, \quad \underline{x} = \frac{a^R x^R + a^L x^L}{a^R + a^L}.$$

La propriété 15 permet, à l'aide de la matrice $\overline{\mathbf{B}}$, d'isoler les contributions conservative et non conservative propres à chaque fluctuation. Le flux numérique conservatif sera noté $\mathbf{F}_{i+1/2}$. Il est peut être obtenu à l'aide de trois relations différentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_i + \psi_{i+1/2}^- - \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{V})_{i+1/2}, \\ \mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1} + \psi_{i+1/2}^+ + \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{V})_{i+1/2}, \\ \mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - \sum_k |\lambda_k| \delta\mathbf{W}_k \right). \end{array} \right. \quad (3.82)$$

Ainsi, le schéma numérique se réécrit :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((\mathbf{B}\Delta\mathbf{V})_{i+1/2}^n + (\mathbf{B}\Delta\mathbf{V})_{i-1/2}^n \right). \quad (3.83)$$

Cette formulation permet une extension facile des schémas numériques à l'ordre élevé en espace. Des méthodes d'implicitation basées sur une linéarisation peuvent être déduites de (3.83). De plus, une généralisation des schémas de relaxation peut être considérée. Un choix de matrice $\overline{\mathbf{B}}$ et de viscosité numérique $\sum |\lambda_k| \delta\mathbf{W}_k$ engendre de nouveaux solveurs [42].

Remarque :

Lorsque les solveurs considérés sont tels qu'il existe une matrice $\overline{\mathbf{A}}$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \delta\mathbf{W}_k = \overline{\mathbf{A}}\Delta\mathbf{W}, \quad (3.84)$$

(c'est le cas pour le solveur de relaxation lorsque la projection n'est pas considérée, voir la proposition 12) alors le flux numérique conservatif prend la forme :

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - (|\overline{\mathbf{A}}|\Delta\mathbf{W})_{i+1/2} \right).$$

Remarque :

Lorsqu'il existe une matrice de Roe \mathbf{A}^* pour la partie conservative des systèmes, la matrice $\overline{\mathbf{B}}$ peut être calculée à partir de la relation :

$$(\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^*)\Delta\mathbf{W} = \overline{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{V}.$$

Nous montrons maintenant que les solveurs de relaxation rejoignent le formalisme de solveurs équilibre précédemment introduits. Pour cela, les solveurs équilibre peuvent aussi être reformulées de manière à vérifier la définition de solveurs consistants (15). Comme la méthode d'hyper consistante repose sur une extension des méthodes de type Godunov pour les systèmes conservatifs, le solveur de Riemann sous-jacent n'est pas explicitement développé. Les matrices présentes dans l'expression du schéma numérique ne peuvent être déterminées à partir des remarques précédentes. Dans le cas du solveur équilibre associé au modèle asymptotique, nous avons :

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \xi^{-c} \begin{pmatrix} r_{u-c}^\alpha \\ R_{u-c} \end{pmatrix} - \xi^u \begin{pmatrix} r_u^\alpha \\ R_u \end{pmatrix} - \xi^{+c} \begin{pmatrix} r_{u+c}^\alpha \\ R_{u+c} \end{pmatrix} \right],$$

où R_{u-c} , R_u et R_{u+c} sont donnés (3.22) et :

$$r_{u-c}^\alpha = \frac{-\bar{u}M^*}{2(c^*)^2(\bar{u}-c^*)} \frac{\bar{\alpha}_1}{\underline{\rho}}, \quad r_u^\alpha = \left[1 + \frac{M^*}{(c^*)^2} \frac{\bar{\alpha}_1}{\underline{\rho}} \right], \quad r_{u+c}^\alpha = \frac{-\bar{u}M^*}{2(c^*)^2(\bar{u}+c^*)} \frac{\bar{\alpha}_1}{\underline{\rho}}.$$

La matrice $\bar{\mathbf{B}}$ permettant d'exprimer les termes non conservatifs est la suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Nous venons de montrer que la notion de solveur de relaxation et de solveur 'équilibre' introduits au cours de ce chapitre vérifient la notion de 'solveur consistant' proposée par Gallice [43]. Les schémas numériques ont été formulés de manière à isoler une partie conservative comportant l'ensemble des termes de viscosités et une autre partie relative aux contributions centrées des opérateurs non conservatifs. De plus, la proposition (15) permet de généraliser la construction de solveur de relaxation.

3.3 Méthode d'ordre élevée

Dans notre étude, l'approximation numérique des systèmes à l'ordre 2 en espace est basée sur la méthode MUSCL proposée par Van Leer [71] (voir aussi [17]). La difficulté majeure repose ici sur la non conservation des systèmes traités. Ensuite, une approche d'ordre élevée en temps est exposée incluant les schémas de Runge Kutta et le schéma prédicteur correcteur.

3.3.1 Ordre 2 en espace

Construction d'une solution approchée affine par morceaux

Le schéma MUSCL repose sur une reconstruction linéaire par morceaux de la solution approchée. Elle sera notée $\tilde{\mathbf{V}}^h(x, t^n)$ et s'écrira sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{V}}^h(x, t^n) = \mathbf{W}_i^n + (\nabla \mathbf{W})_{iR}^n (x - x_i) & \text{si } x \in (x_{i-1/2}, x_i), \\ \tilde{\mathbf{V}}^h(x, t^n) = \mathbf{W}_i^n + (\nabla \mathbf{W})_{iL}^n (x - x_i) & \text{si } x \in (x_i, x_{i+1/2}), \end{cases} \quad (3.86)$$

où $(\nabla \mathbf{W})_{iL}^n$ et $(\nabla \mathbf{W})_{iR}^n$ sont une évaluation des gradients respectivement à gauche et à droite de la cellule I_i . La technique MUSCL sera dite conservative lorsque :

$$\forall i, \forall n \quad (\nabla \mathbf{W})_{iL}^n = (\nabla \mathbf{W})_{iR}^n. \quad (3.87)$$

Afin de déterminer ces gradients, les dérivées des variables sont évaluées aux points d'interface $x_{i+1/2}$ et au centre x_i des cellules :

$$(\nabla \mathbf{W})_{i+1/2}^n = \frac{\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n}{\Delta x}, \quad (\nabla \mathbf{W})_i^n = \frac{(\nabla \mathbf{W})_{i-1/2}^n + (\nabla \mathbf{W})_{i+1/2}^n}{2}. \quad (3.88)$$

Pour chaque cellule de calcul I_i , les gradients sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} (\nabla \mathbf{W})_{iR}^n = \text{limiteur}((\nabla \mathbf{W})_{i+1/2}^n, (\nabla \mathbf{W})_i^n), \\ (\nabla \mathbf{W})_{iL}^n = \text{limiteur}((\nabla \mathbf{W})_{i-1/2}^n, (\nabla \mathbf{W})_i^n), \end{cases} \quad (3.89)$$

où des exemples de fonctions limiteurs sont donnés en annexe C. Les gradients, ainsi définis, permettent de construire les états qui composent la solution approchée \mathcal{V}^h à gauche et à droite de chaque cellule de calcul I_i :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{iL}^n = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta x}{2} (\nabla \mathbf{W})_{iL}^n, \\ \mathbf{W}_{iR}^n = \mathbf{W}_i^n + \frac{\Delta x}{2} (\nabla \mathbf{W})_{iR}^n. \end{cases} \quad (3.90)$$

Afin de détailler l'implémentation de la technique MUSCL, chaque cellule de calcul I_i doit être décomposée en trois sous-cellules qui seront notées I_{iL} , I_{i*} et I_{iR} . Afin de simplifier la présentation, les sous-domaines seront supposés de taille égale :

$$I_{iL} = (x_{i-1/2}, x_{i-1/6}], \quad I_{i*} = (x_{i-1/6}, x_{i+1/6}], \quad I_{iR} = (x_{i+1/6}, x_{i+1/2}], \quad (3.91)$$

où $x_{i+1/6} = \left(i + \frac{1}{6}\right) \Delta x$. Ces notations induisent la considération d'une nouvelle solution approchée \mathcal{V}^{h2} constante par morceaux dont la définition est associée aux sous-cellules :

$$\mathcal{V}^{h2}(x, t^n) = \begin{cases} \mathbf{W}_{iL}^n & \text{si } x \in I_{iL}, \\ \mathbf{W}_{i*}^n & \text{si } x \in I_{i*}, \\ \mathbf{W}_{iR}^n & \text{si } x \in I_{iR}, \end{cases} \quad (3.92)$$

où \mathbf{W}_{i*}^n est un état fantôme défini de manière à ce que la propriété de conservation de la solution approchée soit satisfaite sur chaque cellule :

$$\int_{I_i} \mathcal{V}^h(x, t^n) dx = \int_{I_i} \mathcal{V}^{h2}(x, t^n) dx. \quad (3.93)$$

L'état fantôme se déduit donc de la relation :

$$\mathbf{W}_i^n = \frac{\mathbf{W}_{iL}^n + \mathbf{W}_{i*}^n + \mathbf{W}_{iR}^n}{3}. \quad (3.94)$$

Le reste de cette section porte sur l'implémentation de la technique MUSCL pour les schémas numériques résolvant des systèmes non conservatifs. Pour cela, nous considérons des schémas numériques s'écrivant sous la forme 3.83. En utilisant la décomposition en sous cellules, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_{iL}^{n+1} = \mathbf{W}_{iL}^n - \frac{3\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i-1/6}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n \right) - \frac{3\Delta t}{2\Delta x} \left((\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i-1/6}^n + (\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i-1/2}^n \right), \\ \mathbf{W}_{i*}^{n+1} = \mathbf{W}_{i*}^n - \frac{3\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/6}^n - \mathbf{F}_{i-1/6}^n \right) - \frac{3\Delta t}{2\Delta x} \left((\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i+1/6}^n + (\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i-1/6}^n \right), \\ \mathbf{W}_{iR}^{n+1} = \mathbf{W}_{iR}^n - \frac{3\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i+1/6}^n \right) - \frac{3\Delta t}{2\Delta x} \left((\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i+1/2}^n + (\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i+1/6}^n \right). \end{array} \right. \quad (3.95)$$

La solution approchée $\mathcal{V}^h(x, t^n)$ est obtenue en utilisant l'opérateur de projection (3.93) :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{n+1} &= \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i+1/2}^n + 2(\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i+1/6}^n + 2(\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i-1/6}^n + (\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i-1/2}^n \right). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Comme dans le cas conservatif, les flux numériques conservatifs aux interfaces $x = x_{i-1/6}$ et $x = x_{i+1/6}$ se sont annulés deux à deux. En revanche, ce n'est pas le cas pour les contributions non conservatives $(\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i+1/6}$ et $(\overline{\mathbf{B}\Delta\mathbf{V}})_{i-1/6}$ qui se sont ajoutées. En théorie, les problèmes de Riemann en ces interfaces doivent donc être traités. En pratique, ce ne doit pas être le cas car l'implémentation de la solution approchée ne doit pas utiliser le sous-maillage. Afin de mieux identifier la contribution des termes non conservatifs, l'équation précédente est réécrite en utilisant des relations intégrales :

$$\begin{aligned} \Delta x (\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/3}} (\mathcal{V}_{i-1/2} - \mathbf{W}_{iL}^n) dx + \int_{x_{i+1/3}}^{x_{i+1/2}} (\mathcal{V}_{i+1/2} - \mathbf{W}_{iR}^n) dx \\ &\quad + \mathbf{F}_{iR}^n - \mathbf{F}_{iL}^n + \mathbf{B}_{i+1/6} (\mathbf{V}_{iR}^n - \mathbf{V}_{i*}^n) + \mathbf{B}_{i-1/6} (\mathbf{V}_{i*}^n - \mathbf{V}_{iL}^n). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Dans un souci de consistance, le bilan des termes non conservatifs est approché de manière à retrouver l'implémentation d'ordre 1 lorsque les gradients sont nuls. Il vient :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\psi_{i+1/2}^- - \psi_{i-1/2}^-), \quad (3.98)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{i+1/2}^- = \mathbf{F}_{iR}^n + \mathbf{B}(\mathbf{W}_i^n) \mathbf{W}_{iR}^n + \int_{x_{i+1/3}}^{x_{i+1/2}} (\mathcal{V}_{i+1/2} - \mathbf{W}_{iR}^n) dx, \\ \psi_{i-1/2}^+ = \mathbf{F}_{iL}^n + \mathbf{B}(\mathbf{W}_i^n) \mathbf{W}_{iL}^n + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/3}} (\mathcal{V}_{i-1/2} - \mathbf{W}_{iL}^n) dx. \end{array} \right. \quad (3.99)$$

Cette relation ne fait plus intervenir l'état 'fantôme' \mathbf{W}_{i*}^n . Lorsque le système devient conservatif, l'implémentation (B.3) est retrouvée.

3.3.2 Ordre 2 en temps

Soit \mathcal{V}^h une solution approchée constante par morceaux. L'étape d'évolution de la solution de l'instant t^n à l'instant t^{n+1} peut être amélioré en la décomposant en plusieurs étapes élémentaires. Plusieurs types de méthodes existent. Seules les méthodes de

type Runge Kutta et prédicteur correcteur du second ordre ont été considérées. Celles-ci décomposent l'évolution en temps en une étape de prédiction et une étape de correction. La prédiction de la solution sera notée $\mathbf{W}_i^{n+\frac{1}{2}}$ et implémentée suivant la relation :

$$\mathbf{W}_i^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta_1 \left(\boldsymbol{\psi}_{i+1/2}^{n,+} - \boldsymbol{\psi}_{i-1/2}^{n,-} \right), \quad (3.100)$$

où θ_1 est un réel positif. Les fluctuations peuvent éventuellement être estimées à l'ordre deux en espace avec la technique MUSCL présentée précédemment. Ensuite, la solution approchée à l'instant $t = t^{n+1}$ est évaluée :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\theta_2 \left(\boldsymbol{\psi}_{i+1/2}^{n+1/2,+} - \boldsymbol{\psi}_{i-1/2}^{n+1/2,-} \right) + \theta_3 \left(\boldsymbol{\psi}_{i+1/2}^{n,+} - \boldsymbol{\psi}_{i-1/2}^{n,-} \right) \right], \quad (3.101)$$

où θ_2 et θ_3 sont des réels positifs.

Deux schémas numériques peuvent s'écrire à l'aide de ce formalisme. Ils ne diffèrent que par le choix des réels θ_1 , θ_2 et θ_3 :

- Le schéma de Runge Kutta s'obtient en fixant :

$$\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = 1, \quad \theta_3 = 0, \quad (3.102)$$

- Le schéma prédicteur correcteur de défauts est donné par :

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}, \quad \theta_3 = \frac{1}{2}, \quad (3.103)$$

3.4 Conclusion

Les méthodes numériques considérées dans la thèse sont de type volume finis. Dans ce contexte, le développement de schémas numériques se ramène à la résolution approchée de problèmes de Riemann monodimensionnels. La difficulté majeure, dans notre contexte, est liée aux termes non conservatifs présents dans les systèmes et dont la définition est ambiguë [41].

Nous avons proposé deux stratégies de construction de schémas numériques pour des équations non conservatives modélisant les écoulements compressibles multiphasiques. La première est basée sur des solveurs de type équilibre. Le principe est de construire un schéma numérique pour lesquels les opérateurs discrets conservatif et non conservatifs sont isolés et préservent certaines propriétés d'équilibre de l'écoulement [1]. La technique que nous avons présentée généralise les travaux [1, 75, 10].

La seconde stratégie repose sur les solveurs de relaxation de type Suliciu [96]. Ces solveurs permettent d'approcher les solutions de systèmes fortement non linéaires et non conservatifs. Pour cela, nous avons proposé des systèmes du premier ordre avec perturbation singulière dont les solutions tendent formellement vers les solutions des systèmes initiaux lorsque les conditions de stabilité sous caractéristique de Whitham sont satisfaites.

Les solveurs équilibre et de relaxation ont finalement été comparés à l'aide de l'écriture proposée par Gallice [43]. Elle permet leur généralisation pour d'autres systèmes non conservatifs pour lesquels la construction d'un système de relaxation linéairement dégénéré est, par exemple, impossible.

Le comportement des systèmes multifluides a ensuite été étudié dans les régimes incompressibles. En tenant compte de la faible valeur du nombre de Mach, nous avons montré l'importance de caractériser indépendamment les phénomènes liés aux ondes matérielles et acoustiques à l'aide d'un filtre. Nous avons alors développé un solveur de relaxation justifiant les techniques de préconditionnement de Turkel [98].

Chapitre 4

Résultats numériques monodimensionnels.

Nous effectuons ici la validation des schémas numériques définis dans le chapitre précédent. Un premier ensemble d'expériences numériques [82] est réalisé dans le but de confronter les schémas numériques et de caractériser le cadre physique le mieux adapté à chacun des modèles mathématiques (2.9) et (2.82). Les deux tests suivants [60] sont des tubes à choc entre fluides purs. Bien qu'elles n'utilisent que la loi des gaz parfaits, ces expériences présentent des difficultés numériques en raison de leurs rapports de densité et de pression très élevés.

4.1 Validation élémentaire des schémas numériques et comparaison des modèles

4.1.1 Tube à choc entre fluides purs

Nous considérons un domaine 1D de dimension $[0, 1]$ avec des conditions aux bords de type Neumann. Une membrane est placée en $x = 0.5m$ qui sépare deux domaines. La partie gauche contient de l'eau de densité $\rho_{eau} = 1000kg.m^{-3}$, de vitesse nulle $u^L = 0m.s^{-1}$ et de pression $p^L = 10^5 Pa$. La partie droite est remplie d'air de densité $\rho_{air} = 250kg.m^{-3}$, de vitesse nulle $u^R = 0m.s^{-1}$ et de pression $p^R = 10^9 Pa$. A l'instant $t = 0s$, la membrane est rompue et l'évolution des fluides est étudiée.

Les propriétés thermodynamiques des fluides sont approchées à l'aide de la loi de type *Stiffened gaz* dont les constantes pour l'air et l'eau sont groupées dans le tableau suivant :

	<i>air</i>	<i>eau</i>
γ	1.4	4.4
P^∞	0	$6.0 \cdot 10^8$
ρ_0	50	$1.0 \cdot 10^3$
P_0	$1.0 \cdot 10^5$	$1.0 \cdot 10^5$
ϵ_0	$2.0 \cdot 10^5$	$6.17 \cdot 10^2$
T_0	300	220
C_v	$1.0 \cdot 10^3$	$4.18 \cdot 10^3$

(4.1)

Comme les modèles numériques ne peuvent traiter les fluides purs, les fractions volumiques des espèces minoritaires sont fixées à $\alpha_k^{min} = 1 \cdot 10^{-8}$ et ensuite $\alpha_k^{min} = 1 \cdot 10^{-2}$ afin de caractériser l'influence de ce paramètre. Les figures 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4 présentent les résultats de fraction volumique, de densité de mélange, de vitesse et de pression à l'instant $t = 1.4 \cdot 10^{-4} s$.

Les figures 4.1 et 4.3 montrent les calculs réalisés avec les modèles prenant en compte les termes de compaction (2.61). Les résultats sont obtenus en utilisant le modèle de base avec le solveur de relaxation (croix bleues) et HLL (carrés rouges) et le modèle réduit avec le solveur de relaxation (carrés bleu). Les courbes montrent un choc ($x \approx 0.2$), d'une discontinuité de contact ($x \approx 0.5$) et d'une détente ($x \approx 0.8$). Lorsque la fraction volumique du fluide résiduel est fixée à $\alpha_k^{min} = 1 \cdot 10^{-8}$. Les courbes sont en très bon accord avec la solution exacte (ligne rouge). Lorsque $\alpha_k^{min} = 1 \cdot 10^{-2}$, les résultats diffèrent légèrement de la solution exacte : la vitesse du choc est sensiblement sous estimée et la vitesse du contact sur estimée. De plus, remarquons que la courbe de fraction volumique présente une détente et une discontinuité de contact mise en évidence par la présence d'un faible plateau allant de $x \approx 0.2$ à $x \approx 0.4$. En pratique, plus les fractions volumiques résiduelles seront initialisées proches de 0 plus ce plateau sera faible (voir figure 4.1).

Les figures 4.2 et 4.4 montrent les calculs réalisés avec le modèle complet sans terme de compaction avec le solveur de relaxation (croix vertes) et HLL (cercles jaunes). Pour le modèle réduit simplifié, le solveur de relaxation (triangles rouges) et de Roe (triangles verts) ont été utilisés. Les résultats obtenus par les différents modèles et schémas sont de bonnes approximations de la solution exacte (ligne rouge) lorsque les fractions volumiques résiduelles sont fixées à $\alpha_k^{min} = 1 \cdot 10^{-8}$. Lorsque $\alpha_k^{min} = 1 \cdot 10^{-2}$, les résultats présentent des légères différences vis à vis de la solution exacte (la vitesse du choc est sensiblement sous estimée et la vitesse du contact sur estimée). L'absence de terme de compaction influe peu sur les résultats de calcul puisque les courbes obtenues 4.4 sont très proches de celles de la figure 4.3. La principale différence réside dans le fait que sans terme de compaction, la fraction volumique reste monotone. Plus les fractions volumiques des espèces minoritaires seront faibles, moins les termes de compaction auront d'effet sur les résultats et plus les résultats seront proches. En effet les courbes 4.1 et 4.2 sont très similaires.

Dans la suite du document, certaines expériences numériques utilisant des fluides purs ne pourront être réalisées avec une fraction volumique résiduelles de l'ordre de $\alpha_k^{min} = 1 \cdot 10^{-8}$. Les courbes présentées 4.3 et 4.4 montrent que même si les fractions volumiques résiduelles ne peuvent être initialisées très proches de 0, les résultats obtenus ne diffèrent que légèrement de la solution exacte (vitesse de propagation des ondes sensiblement modifiées) et respectent le comportement global du fluide. Les résultats obtenus, dans ce contexte, permettront de retrouver les caractéristiques physiques de l'écoulement sans pour autant être identiques en tout point à la solution.

4.1.2 Tube à choc pour des fluides non purs

Nous réalisons une expérience de tube à choc entre fluides non purs. Le domaine utilisé est le même que précédemment. La différence réside dans le fait que de part et d'autre de la membrane, les fluides sont mélangés. Plusieurs configurations géométriques peuvent être considérées. Les fluides peuvent être repartis en couches horizontales très minces ou alors dispersés sous forme de microbulles uniformément réparties.

En faisant l'hypothèse que cette expérience se ramène à un problème monodimension-

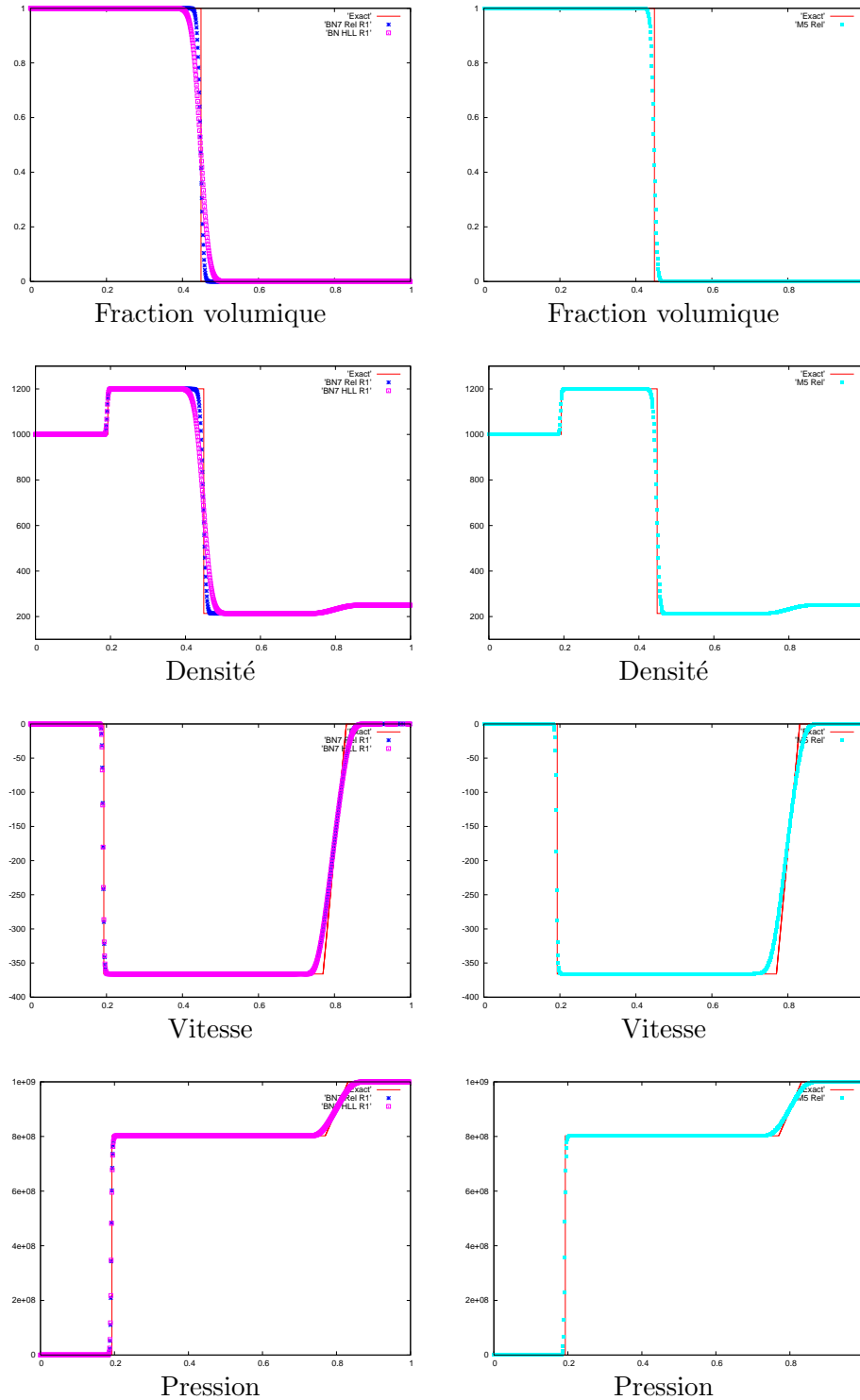


FIG. 4.1 – Tube à choc air/eau à $t = 1.4 \cdot 10^{-4} s$ avec effet de compaction. Données initiales : si $x > 0.5$: $\rho = 250$, $u = 0$, $P = 10^9$, $\gamma = 1.4$ et $P^\infty = 0$ et si $x < 0.5$: $\rho = 1000$, $u = 0$, $P = 10^5$, $\gamma = 4.4$ $P^\infty = 6 \cdot 10^8$. Pour l'espèce minoritaire, nous fixons $\alpha_k = 1 \cdot 10^{-8}$. Les courbes sont obtenues avec le modèle de base (croix bleu : solveur de relaxation, carré rouge : solveur HLL) et le modèle réduit (carré bleu : solveur de relaxation). La ligne rouge indique la solution exacte.

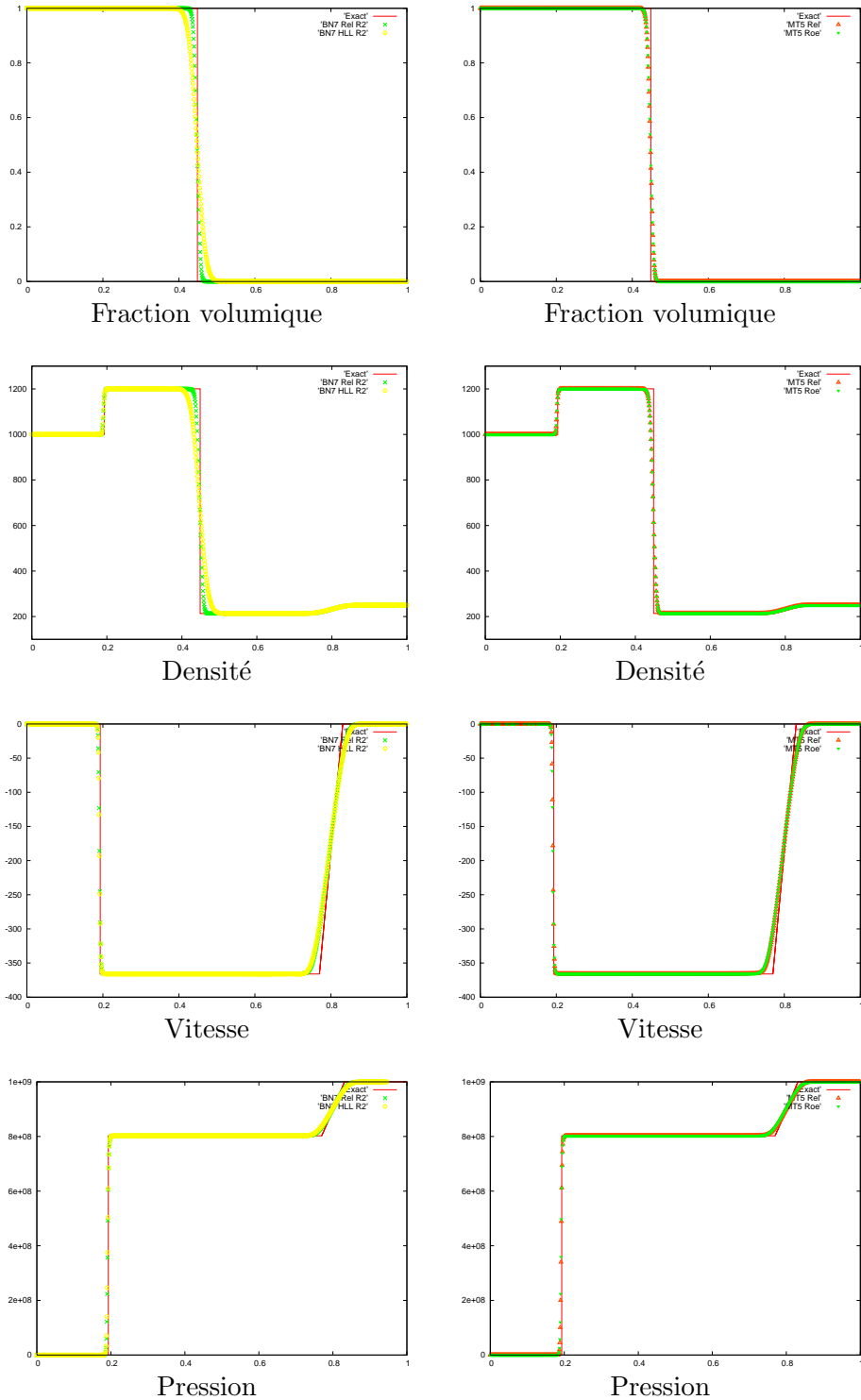


FIG. 4.2 – Tube à choc air/eau à $t = 1.4 \cdot 10^{-4} s$ sans effet de compaction. Données initiales : si $x > 0.5$: $\rho = 250$, $u = 0$, $P = 10^9$, $\gamma = 1.4$ et $P^\infty = 0$ et si $x < 0.5$: $\rho = 1000$, $u = 0$, $P = 10^5$, $\gamma = 4.4$ $P^\infty = 6 \cdot 10^8$. Pour l'espèce minoritaire, nous fixons $\alpha_k = 1 \cdot 10^{-8}$. Les courbes sont obtenues avec le modèle de base (croix verte : solveur de relaxation, cercle jaune : solveur HLL) et le modèle réduit (triangle rouge : solveur de relaxation, triangle vert : solveur de Roe). La ligne rouge indique la solution exacte.

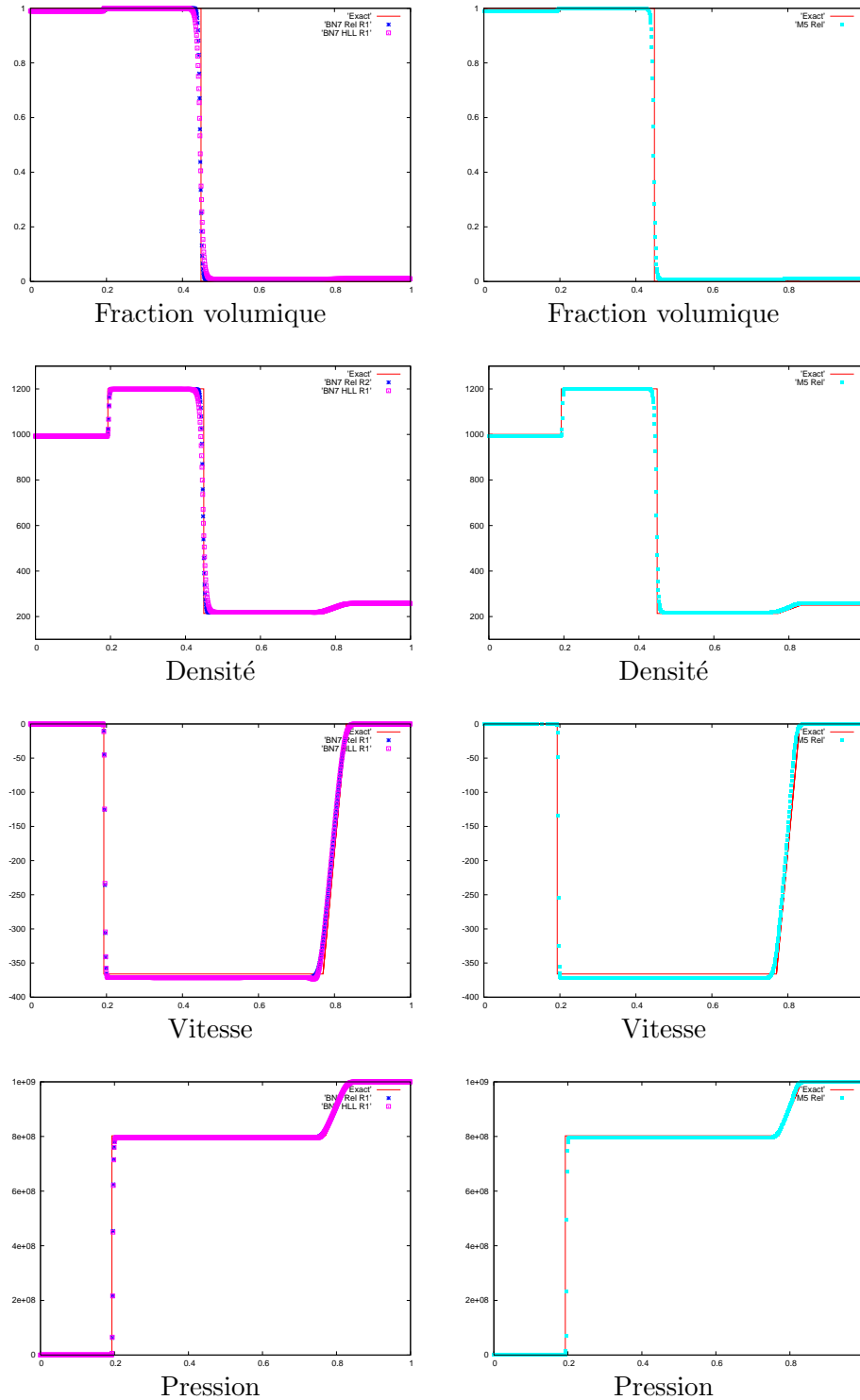


FIG. 4.3 – Tube à choc air/eau à $t = 1.4 \cdot 10^{-4} s$ avec effet de compaction. Données initiales : si $x > 0.5$: $\rho = 250$, $u = 0$, $P = 10^9$, $\gamma = 1.4$ et $P^\infty = 0$ et si $x < 0.5$: $\rho = 1000$, $u = 0$, $P = 10^5$, $\gamma = 4.4$ $P^\infty = 6 \cdot 10^8$. Pour l'espèce minoritaire, nous fixons $\alpha_k = 1 \cdot 10^{-2}$. Les courbes sont obtenues avec le modèle de base (croix bleu : solveur de relaxation, carré rouge : solveur HLL) et le modèle réduit (carré bleu : solveur de relaxation). La ligne rouge indique la solution exacte.

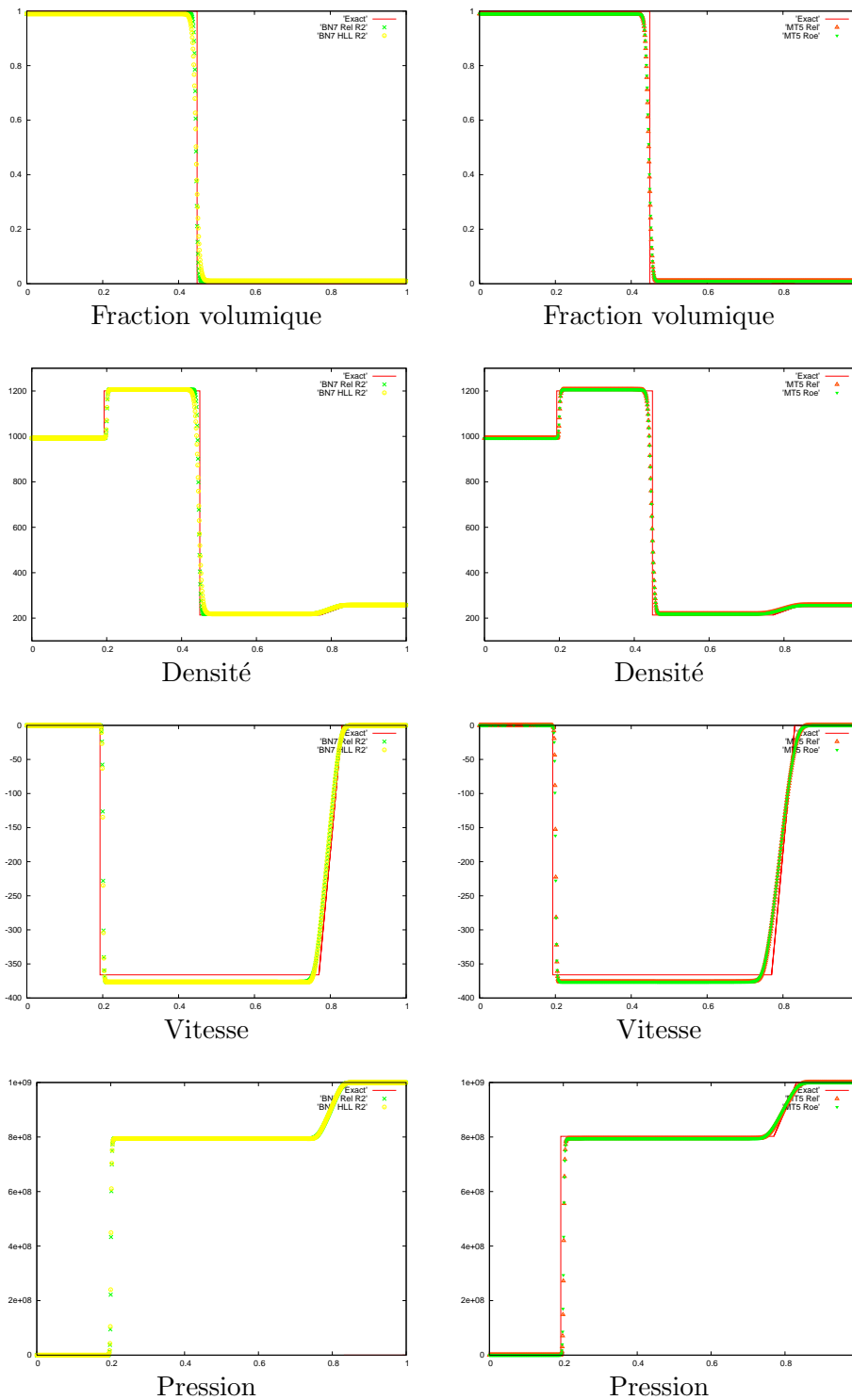


FIG. 4.4 – Tube à choc air/eau à $t = 1.4 \cdot 10^{-4} s$ sans effet de compaction. Données initiales : si $x > 0.5$: $\rho = 250$, $u = 0$, $P = 10^9$, $\gamma = 1.4$ et $P^\infty = 0$ et si $x < 0.5$: $\rho = 1000$, $u = 0$, $P = 10^5$, $\gamma = 4.4$ $P^\infty = 6 \cdot 10^8$. Pour l'espèce minoritaire, nous fixons $\alpha_k = 1 \cdot 10^{-2}$. Les courbes sont obtenues avec le modèle de base (croix verte : solveur de relaxation, cercle jaune : solveur HLL) et le modèle réduit (triangle rouge : solveur de relaxation, triangle vert : solveur de Roe). La ligne rouge indique la solution exacte.

nel, nous la reproduisons en utilisant les conditions initiales $\alpha_1 = 0.5$, $\rho_1 = 1000 \text{kg.m}^{-3}$, $\rho_2 = 1 \text{kg.m}^{-3}$, $u = 0 \text{m.s}^{-1}$ et $p = 10^5 \text{Pa}$ si $x < 0.5$, $p = 10^8 \text{Pa}$ si $x > 0.5$. Les résultats obtenus à l'instant $t = 3.16 \cdot 10^{-4} \text{s}$ sont disposés sur les figures 4.5 et 4.6.

La figure 4.5 montre les courbes obtenues en prenant en compte les termes de compaction. Le modèle de base est utilisé avec le solveur de relaxation (courbe bleue) et HLL (courbe rouge) et le modèle réduit avec le solveur de relaxation (courbe verte). Les densités, vitesses et pressions obtenues par les différents modèles sont fort semblables. En revanche, les courbes de fractions volumiques sont toutes différentes. La présence d'un choc et d'une détente impose une compression de l'air à gauche et une décompaction à droite de la discontinuité de contact. Les différences entre les résultats de fraction volumique s'expliquent par le fait que le modèle de base traite les effets de compaction à l'aide d'un terme source non hyperbolique approché par une technique de splitting. L'évolution de α_1 étant liée au différentiel de pression, les résultats obtenus par le solveur de relaxation sont a priori plus corrects puisque ce dernier traite toutes les ondes du modèle de base. Pour le modèle simplifié, le terme de compaction est directement résolu au sein de la partie hyperbolique du système. Ceci explique les différences observées sur la fraction volumique.

La figure 4.6 montre les calculs réalisés avec le modèle complet sans terme de compaction avec les solveurs de relaxation (courbe bleue) et HLL (rouge). Pour le modèle réduit simplifié, les solveurs de relaxation (orange) et de Roe (violet) sont utilisés. Les résultats de cette figure sont tous très proches. Cependant, la fraction volumique reste égale à 0.5. Les termes de compaction ont ici une importance capitale. Au passage d'une onde de choc ou de détente, certains fluides doivent se détendre ou se comprimer afin d'obtenir l'équilibre des pressions. Les termes de compaction sont donc essentiels lorsque la géométrie ou l'échelle induite par le maillage ne permettent pas d'isoler les fluides.

4.2 Validation pour des tubes à chocs forts

Nous reproduisons les cas tests numériques 1-C et 2-C proposés par Hu et Khoo [60]. Le reste des expériences est présenté dans l'annexe F. Ceux-ci comprennent des tubes à choc entre fluides purs pour lesquels les rapports de densités et de pression sont très forts. En revanche, la seule loi d'état considérée est la loi des gaz parfaits. Comme nos méthodes numériques ne peuvent traiter des fluides purs, les fractions volumiques des espèces qui devraient être absentes seront fixées à $1.0 \cdot 10^{-8}$. Le tableau (4.2) regroupe les conditions initiales et temps finaux des expériences.

1 - C	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (1, 0, 500, 1.4) & \text{si } x < 0.8 \\ (10, 0, 0.2, 1.667) & \text{si } x > 0.8 \end{cases}$	$t = 0.02$	(4.2)
2 - C	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (0.384, 27.077, 100, 1.667) & \text{si } x < 0.6 \\ (100, 0, 1, 3.0) & \text{si } x > 0.6 \end{cases}$	$t = 0.03$	

Ces expériences sont réalisées dans un domaine de longueur $[0,1]$ discrétisé avec 200 et 2000 points. Les conditions limites sont de type Neumann. Les calculs sont réalisés en utilisant les modèles réduits avec les solveurs de relaxation et acoustique, le modèle réduit simplifié avec les solveurs de relaxation et de Roe. Concernant le modèle de base, nous utiliserons les solveurs de relaxation et HLL incluant les deux processus de relaxation aux interfaces donnés dans la sous section 2.2.3.

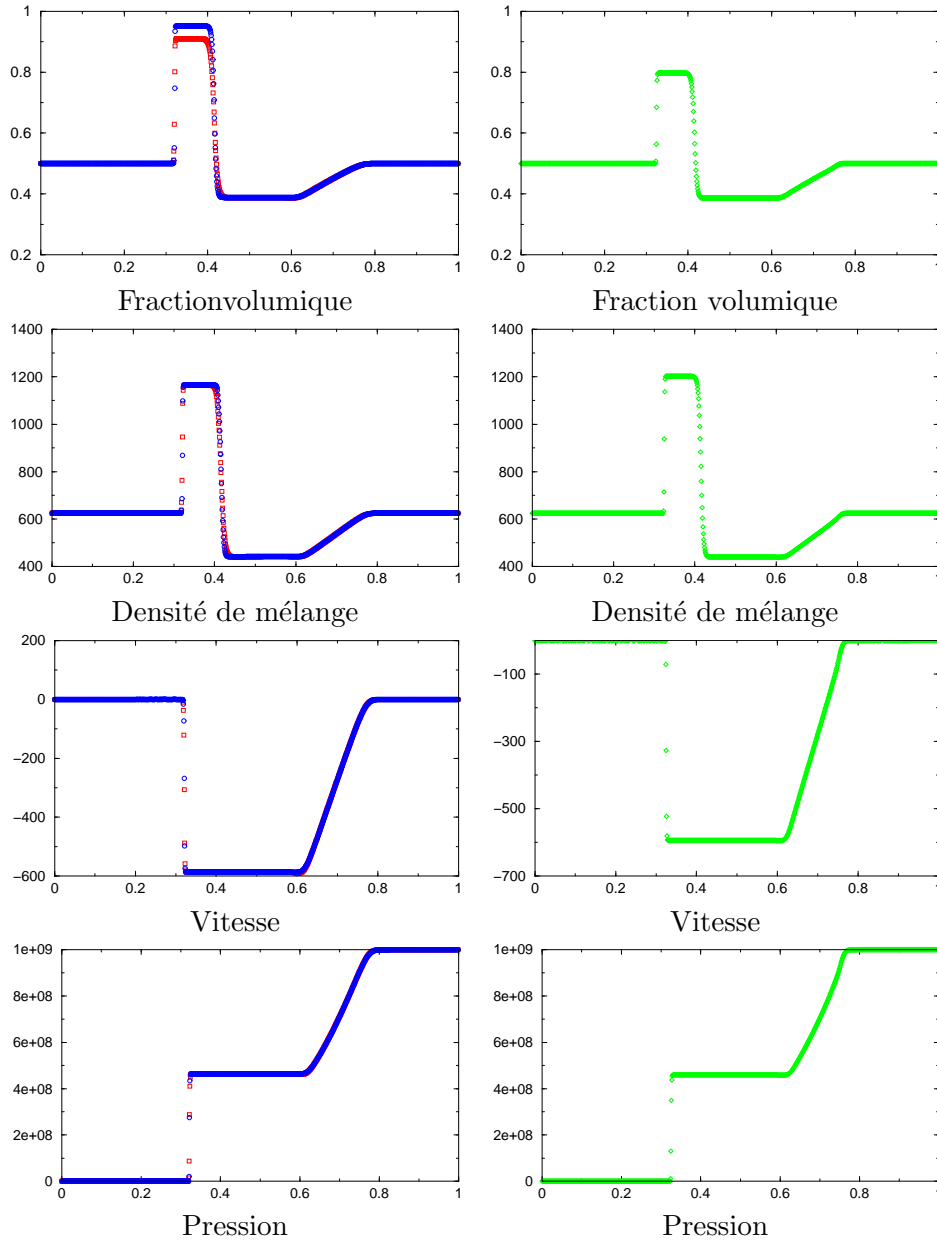


FIG. 4.5 – Tube à choc pour un mélange air/eau à $t = 3.2 \cdot 10^{-4} s$ sans effet de compaction. Le domaine de longueur 1m est discrétisé avec 1000 points. Les données initiales sont $\alpha_1 = 0.5$ $\rho_1 = 1000 kg.m^{-3}$, $\rho_2 = 1 kg.m^{-3}$, $u = 0 m.s^{-1}$ et $p = 10^5 Pa$ si $x < 0.5$, $p = 10^8 Pa$ si $x > 0.5$. $\gamma_1 = 4.4$ $P_1^\infty = 6 \cdot 10^8$ $\gamma_2 = 1.4$ $P_2^\infty = 0$. Les courbes sont obtenues avec le modèle de base (cercle bleu : solveur de relaxation, carré rouge : solveur HLL) et le modèle réduit (diamant vert : solveur de relaxation)

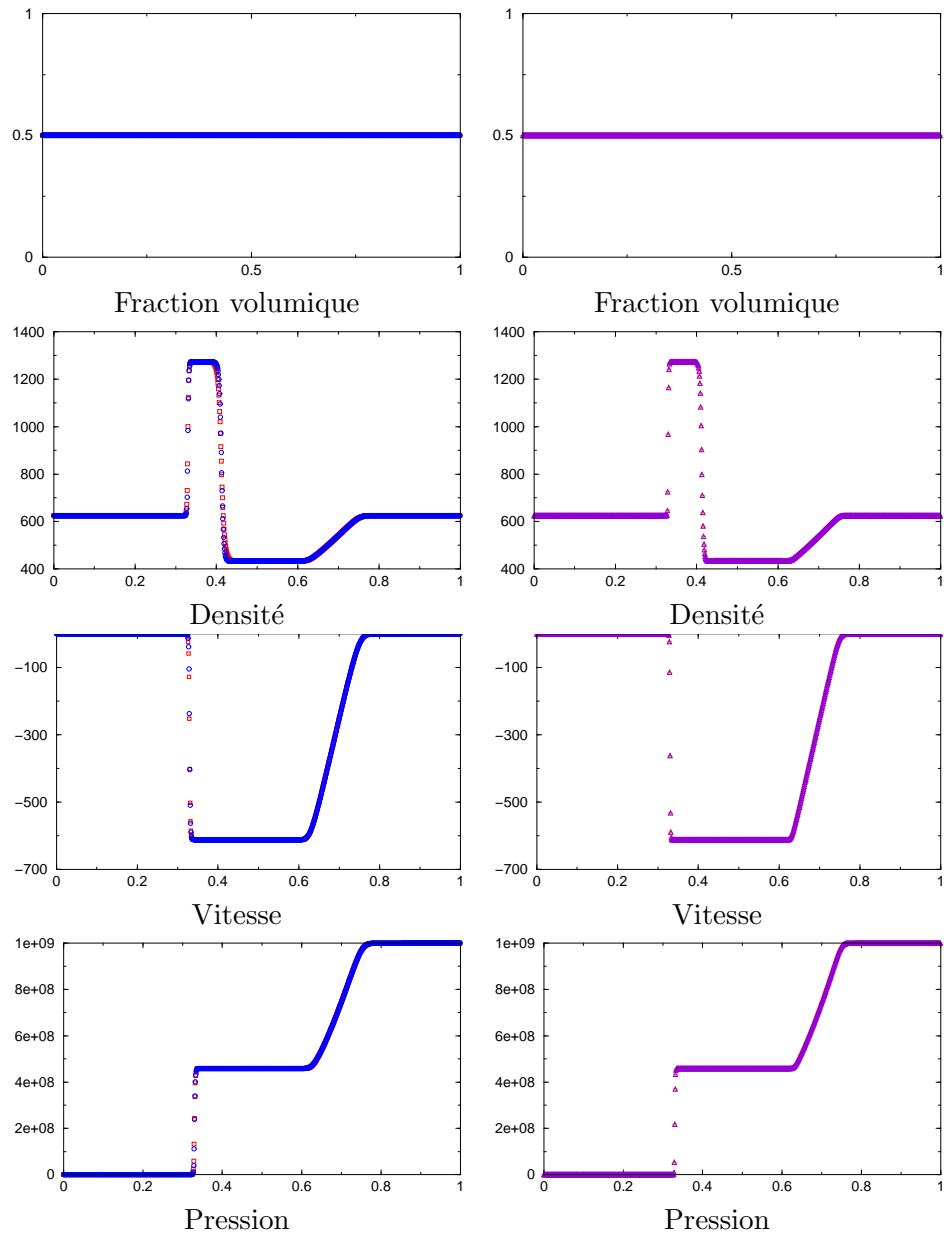


FIG. 4.6 – Tube à choc pour un mélange air/eau à $t = 3.2 \cdot 10^{-4} s$ sans effet de compaction. Le domaine de longueur 1m est discrétisé avec 1000 points. Les données initiales sont $\alpha_1 = 0.5$ $\rho_1 = 1000 kg.m^{-3}$, $\rho_2 = 1 kg.m^{-3}$, $u = 0 m.s^{-1}$ et $p = 10^5 Pa$ si $x < 0.5$, $p = 10^8 Pa$ si $x > 0.5$. $\gamma_1 = 4.4$ $P_1^\infty = 6 \cdot 10^8$ $\gamma_2 = 1.4$ $P_2^\infty = 0$. Les courbes sont obtenues avec le modèle de base (cercle bleu : solveur de relaxation, carré rouge : solveur HLL) et le modèle réduit simplifié (plus orange : solveur de relaxation, triangle violet : solveur de Roe)

Pour ces deux expériences, nous commentons les résultats :

- Cas 1-C : La solution est composée d'une détente, d'une discontinuité de contact et d'un choc. Les courbes obtenues avec les modèles réduits et les schémas numériques associés donnent des bonnes approximations de la solution exactes. Lorsque 200 points sont utilisés, nous notons un manque de définition de la densité dans la zone située entre la discontinuité de contact et le choc. Concernant les modèles complets avec termes de compaction, les résultats sont légèrement plus diffusés. En effet, les termes de compaction semblent apporter beaucoup de viscosité numérique. Cela a pour effet de lisser le choc ($x \approx 0.9$) et de le faire interagir avec le 'bord' du domaine. Lorsque les effets de compaction sont négligés, les résultats sont de bonne qualité. Pour le schéma HLL, la diffusion numérique est plus importante que pour le schéma de relaxation.
- Cas 2-C : La solution est composée d'un choc, d'une discontinuité de contact et d'un choc. Les résultats obtenus avec les modèles réduits et les schémas de relaxation et Roe donnent de bonnes approximations de la solution exacte. Avec un maillage grossier, la vitesse du choc est légèrement surestimée. En revanche, le solveur acoustique fournit une solution fautive. Le premier choc ne se propage pas. Pour le modèle complet, les solutions dépendent des procédures de relaxation. Lorsque les effets de compaction sont pris en compte, les ondes de contact et de chocs ne sont pas bien résolues. Le processus de relaxation apporte de la diffusion numérique qui altère les résultats. Lorsque les effets de compaction sont négligés, les résultats sont de meilleure qualité, en particulier lorsque le solveur de relaxation est utilisé.

4.3 Conclusion

Les termes de compaction ont une importance capitale lors de certaines expériences. En effet, lorsque l'écoulement est composé d'un mélange le passage d'une onde de choc ou de détente impose une compaction ou décompaction des phases. De plus, les deux expériences de Hu et Khoo présentées et celles figurant dans l'annexe F ont montré que les modèles réduits permettent toujours d'obtenir des résultats de bonne qualité même avec des maillages grossiers. Pour certaines applications, le solveur acoustique n'a pas toujours fourni de bonnes solutions (cas 2-C). Pour les modèles complets, les termes de compaction posent quant à eux un certain nombre de problèmes. En effet, deux comportements s'opposent, les schémas numériques résolvant la partie de propagation des systèmes tendent à faire évoluer indépendamment les vitesses et pressions des fluides alors que les termes de relaxation tendent à les équilibrer. Dans certaines applications, ce phénomène gêne à l'obtention de la solution sur des maillages grossiers. De plus, pour le modèle de base, le nombre important d'équations influe sur la durée du calcul.

Le solveur de relaxation associé au modèle réduit (2.82) a toujours conduit à des résultats très satisfaisants. Il sera utilisé en priorité dans la suite du document.

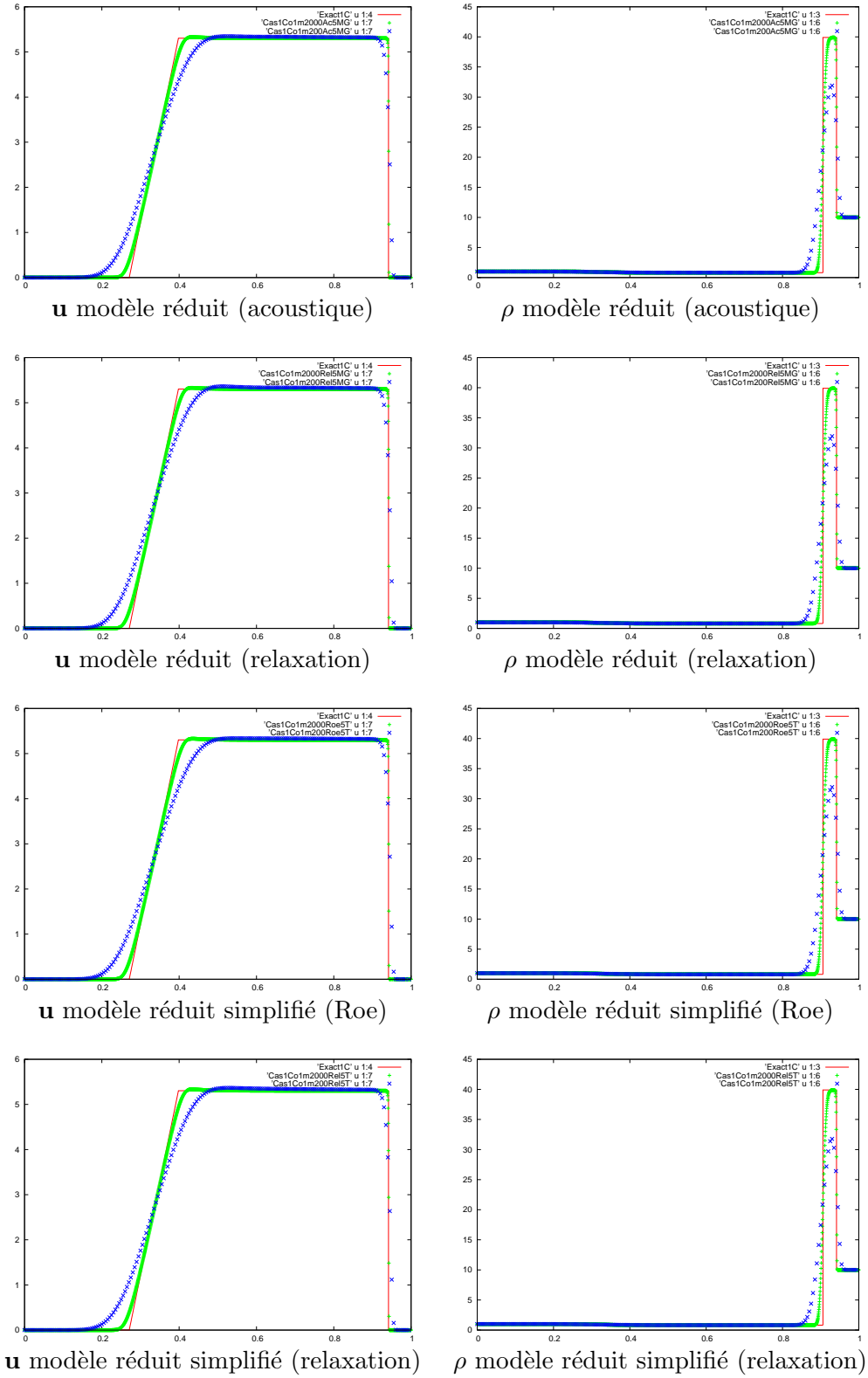


FIG. 4.7 – Tube à choc 1C, modèles réduits, $t = 0.02s$, données initiales : si $x < 0.8$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 500$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.8$ $\rho = 10.0$, $u = 0$, $p = 0.2$, $\gamma = 1.667$

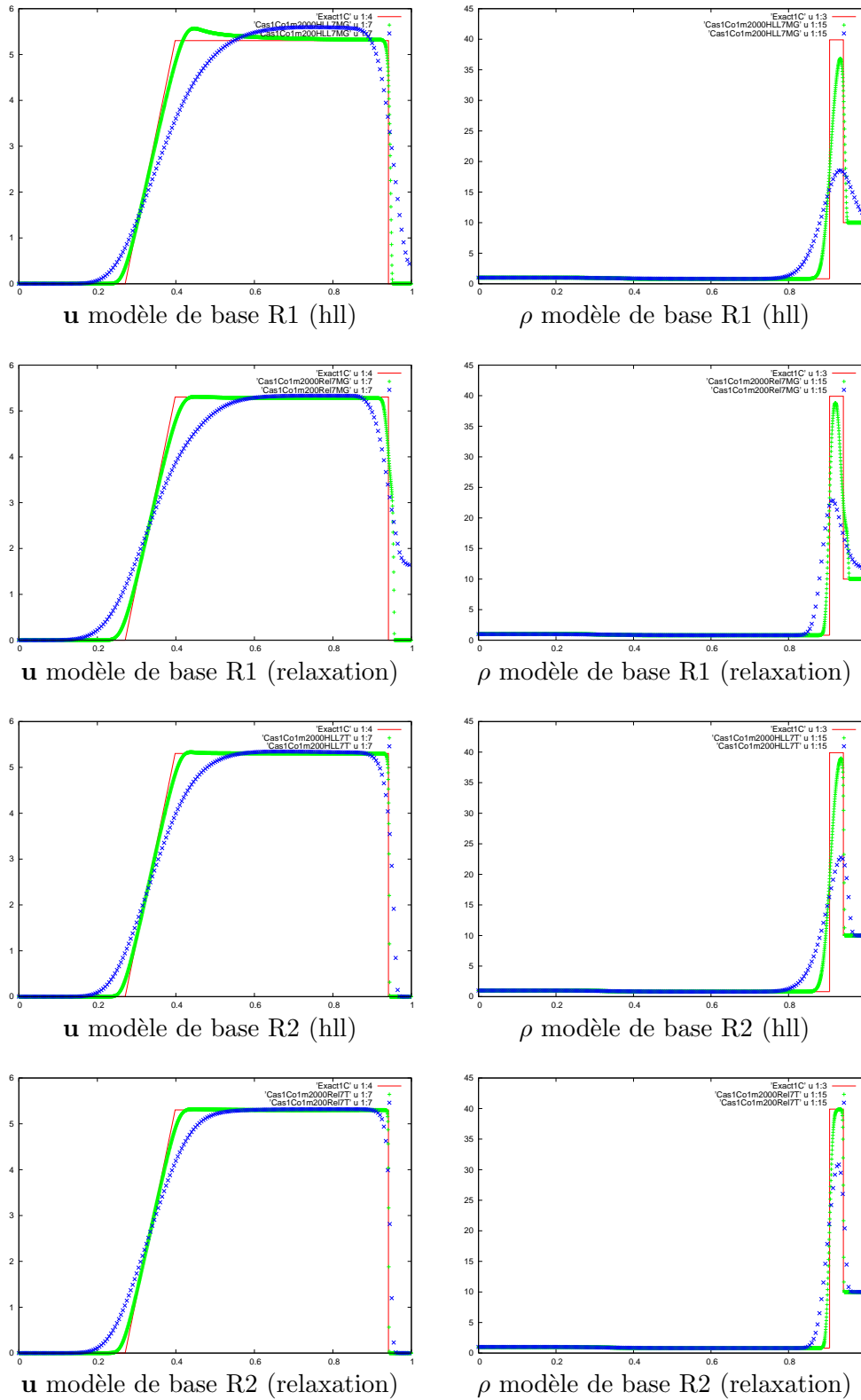


FIG. 4.8 – Tube à choc 1C, modèle de base, $t = 0.02s$, données initiales : si $x < 0.8$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 500$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.8$ $\rho = 10.0$, $u = 0$, $p = 0.2$, $\gamma = 1.667$

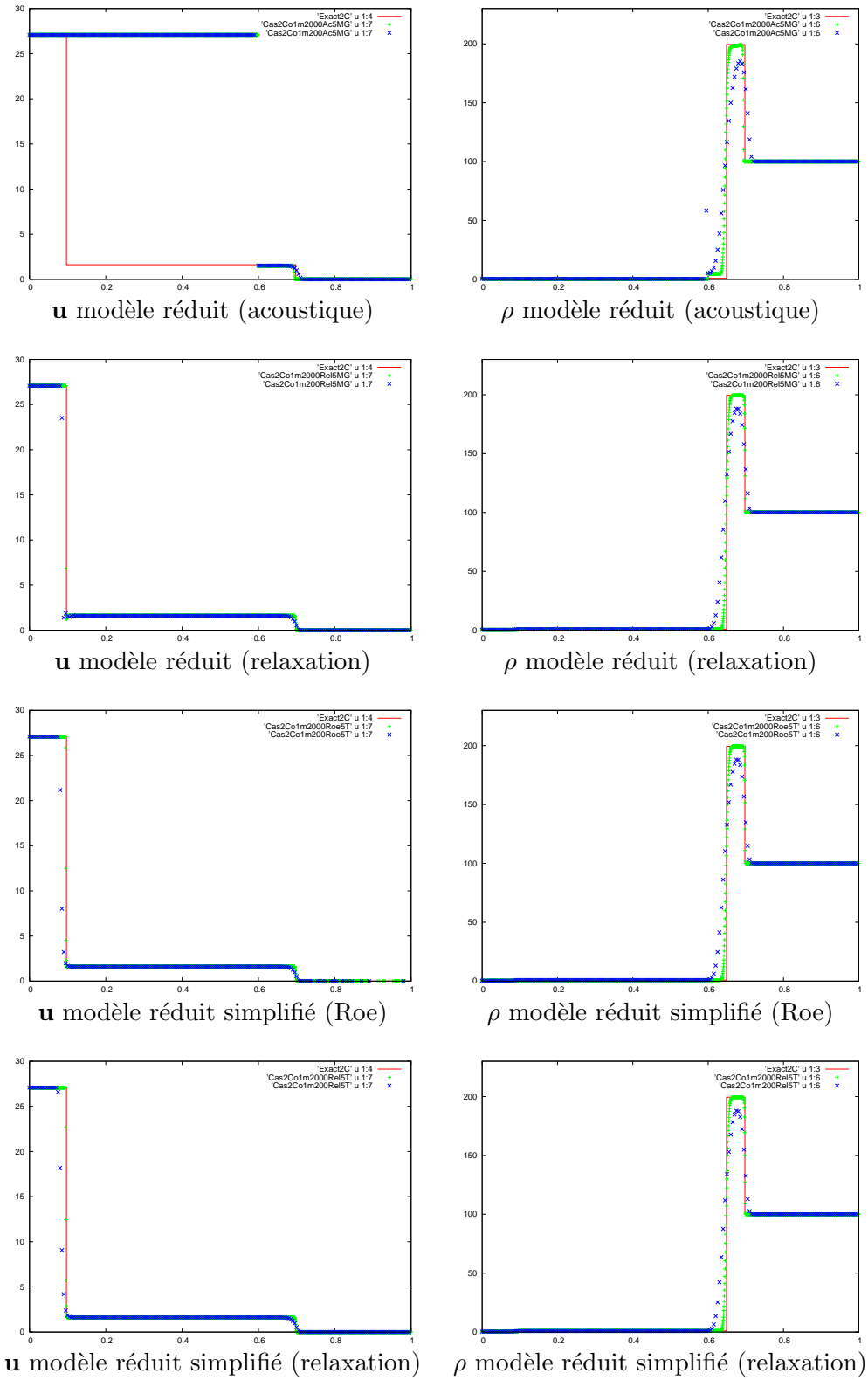


FIG. 4.9 – Tube à choc 2C, modèles réduits, $t = 0.03s$, données initiales : si $x < 0.6$ $\rho = 0.384$, $u = 27.077$, $p = 100$, $\gamma = 1.667$, si $x > 0.6$ $\rho = 100$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 3$

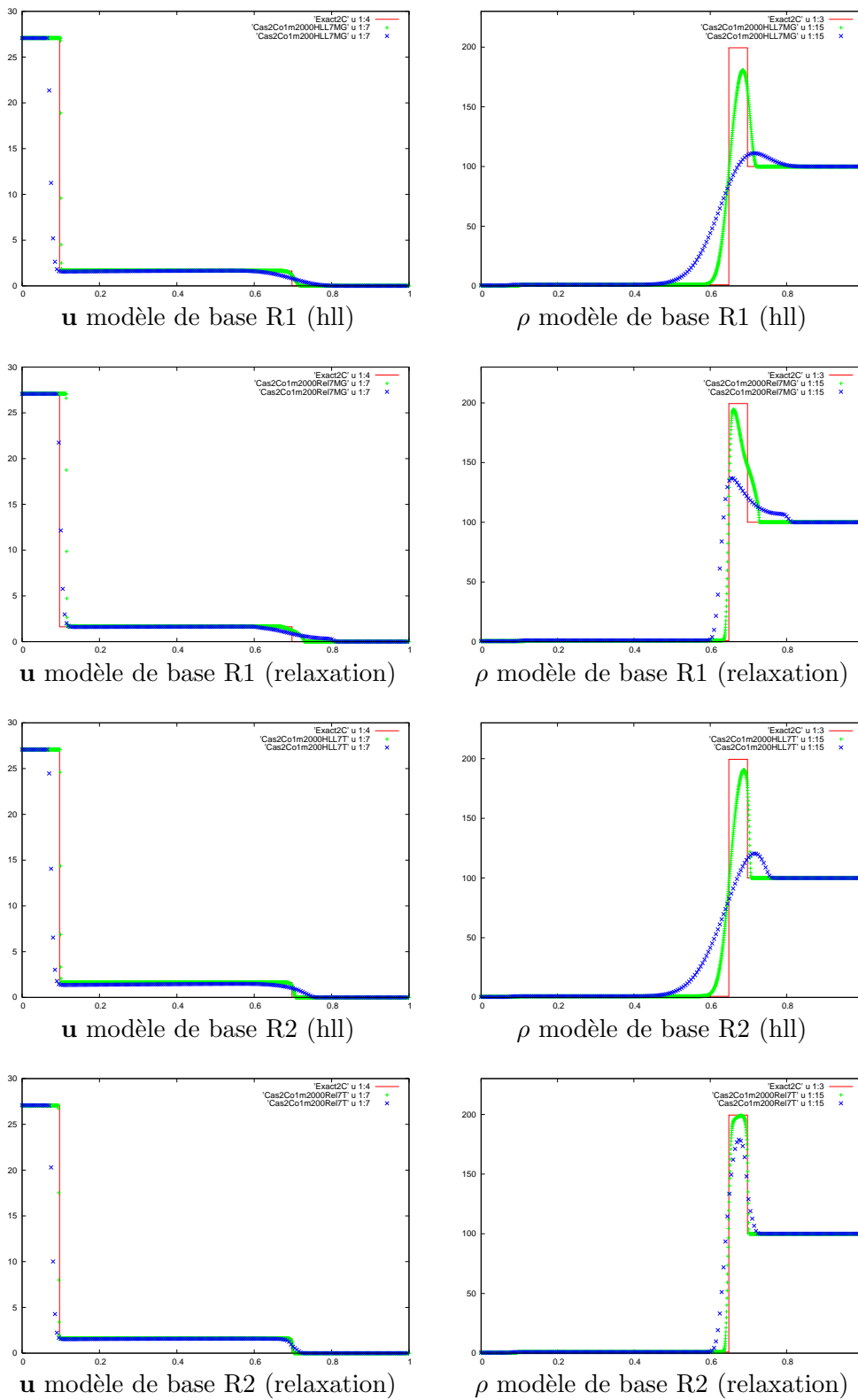


FIG. 4.10 – Tube à choc 2C, modèle de base, $t = 0.03s$, données initiales : si $x < 0.6$ $\rho = 0.384$, $u = 27.077$, $p = 100$, $\gamma = 1.667$, si $x > 0.6$ $\rho = 100$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 3$

Chapitre 5

Approximation numérique multi-D

L'objectif est de développer des méthodes numériques dans un cadre multidimensionnel. Celles-ci s'appuieront sur une approche volumes finis reposant sur un maillage non structuré composé de triangles en dimension 2 et de tétraèdres en dimension 3. Après avoir décrit les outils géométriques et numériques standards, nous aborderons la généralisation des méthodes de relaxation en dimension $d \geq 2$. La principale difficulté repose sur le caractère non conservatif des systèmes (2.63) et (2.82) car, dans ce contexte, les schémas numériques ne peuvent se reformuler en terme de bilan de flux. Nous détaillerons ensuite la mise en oeuvre numérique de la tension de surface en formulation volumique (CSF [28]). Nous proposerons un solveur de relaxation incluant les effets capillaires permettant de réduire fortement l'intensité des courants parasites [62]. En s'appuyant sur les techniques MUSCL, les schémas numériques non conservatifs seront étendus à l'ordre 2 en espace. Enfin, nous présenterons des schémas numériques implicites obtenus par linéarisation.

5.1 Les opérateurs de propagation en dimension 3

Considérons un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Afin de clarifier la présentation, seul le modèle asymptotique sera utilisé dans ce chapitre. En tout point $\mathbf{x} \in \Omega$, les équations de propagation sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_k + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_k + z \beta_k \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{w} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

où les vecteurs sont donnés par :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha_k \rho_k \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \alpha_k \rho_k \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix},$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse et I est le tenseur unité de \mathbb{R}^3 .

Lorsque le domaine Ω et l'écoulement satisfont certaines propriétés, il est possible de réduire l'étude à un problème 2D. La motivation principale est la réduction du coût de calcul. Deux cas seront abordés, l'invariance par translation dans la direction \mathbf{e}_z et l'invariance par rotation autour de l'axe (O, \mathbf{e}_y) où O est l'origine du repère.

Écoulement plan

Définition 5 Le domaine Ω est dit 2D plan dans la direction \mathbf{e}_z lorsqu'il vérifie :

$$\Omega = \Omega_{plan} \times \mathbf{e}_z, \quad \text{avec} \quad \Omega_{plan} = \{(x, y) | \exists z, (x, y, z) \in \Omega\}.$$

L'écoulement sera dit 2D plan lorsque :

$$\forall x, y \in \Omega_{plan}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k(x, y, z_1) = \alpha_k(x, y, z_2), \\ \mathbf{w}(x, y, z_1) = \mathbf{w}(x, y, z_2). \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier d'un écoulement 2D plan, toutes les dérivées par rapport à la variable z sont nulles. Cette variable sera donc ignorée. La vitesse transversale ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z$) est constante dans le temps et n'a aucune influence sur les autres variables. Elle ne sera donc pas calculée.

Écoulement axisymétrique

Définition 6 Le domaine Ω est dit axisymétrique d'axe $(0, \mathbf{e}_x)$ lorsqu'il vérifie :

$$\Omega = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{array} \right) \middle| \left(\begin{array}{c} x \\ r \end{array} \right) \in \Omega_{axi}, \theta \in [0, 2\pi) \right\} \quad \text{avec} \quad \Omega_{axi} = \{(x, r) \in \Omega_x \times [0, L]\}.$$

L'écoulement sera dit axisymétrique si Ω est axisymétrique et si pour tout $(x, r) \in \Omega_{axi}$ et pour tous $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k(M_1) = \alpha_k(M_2) \\ \mathbf{w}(M_1) = \mathbf{w}(M_2) \end{array} \right., \quad M_1 = \left(\begin{array}{c} x \\ r \cos(\theta_1) \\ r \sin(\theta_1) \end{array} \right), \quad M_2 = \left(\begin{array}{c} x \\ r \cos(\theta_2) \\ r \sin(\theta_2) \end{array} \right).$$

Lorsque des méthodes aux différences finies sont utilisées, l'écriture des équations en coordonnées cylindriques permet de formuler le système sans la variable θ et sans les contributions suivant le vecteur \mathbf{e}_θ . En revanche, les expressions des divergences apportent des termes supplémentaires souvent considérés comme des termes source.

Pour les méthodes de type volumes finis, les équations gouvernant les fluides s'obtiennent en utilisant la technique de perturbation de domaine. Cette méthode développée pour des systèmes conservatifs [49, 31] repose sur l'intégration de volumes 3D de faible épaisseur qui sont des sections de tore ($\theta \in [-\delta, \delta]$) d'axe $(0, \mathbf{e}_x)$. Les équations des fluides sont obtenues en faisant tendre le réel δ vers 0. Cette méthode ne peut être directement appliquées aux systèmes conservatifs et demande certaines adaptations. Dans ce travail, nous supposons que les résultats s'étendent naturellement à nos systèmes si bien qu'un écoulement axisymétrique sera gouverné, en tout point $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_k + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_k + z \beta_k \nabla \cdot \mathbf{u} = z \beta_k \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y}{y}, \\ \partial_t \mathbf{w} + \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y}{y}. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Dans tous les cas, la partie principale du modèle se met sous la forme (5.1) et la contribution liée à la géométrie axisymétrique sera notée sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{F}_{axi} = \begin{pmatrix} z\beta_k \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y}{y} \\ \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y}{y} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Ce terme source est singulier lorsque $y = 0$. Cependant les limites des fonctions $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y$ lorsque y tend vers 0 sont nulles :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y = 0.$$

L'utilisation de la règle de l'Hôpital permet de définir la valeur du terme source lorsque $y = 0$ dès lors que les fonctions $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y$ sont dérivables :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y}{y} = \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y)}{\partial y}(0), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y}{y} = \frac{\partial(\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y)}{\partial y}(0).$$

Les méthodes numériques employées pour la discrétisation de ce terme sont présentées dans la suite de document (5.5).

5.2 Décomposition en volumes finis et paramètres géométriques

Le domaine de calcul $\Omega \in \mathbb{R}^d$ est décomposé en éléments τ_k vérifiant $\Omega = \cup \tau_k$. Ces derniers sont obtenus à l'aide d'un mailleur et nous permettent de construire une décomposition cell-vertex du domaine (voir figure 5.1). Celle-ci est constituée de cellules de contrôle C_i centrées au noeud du maillage, ne se superposant pas et vérifiant :

$$\bigcup_{i=1}^{N_s} C_i = \Omega \quad \text{et pour tous } i, j \in \{1..N_s\} \quad \text{tels que } i \neq j, \quad \dot{C}_i \cap \dot{C}_j = \emptyset.$$

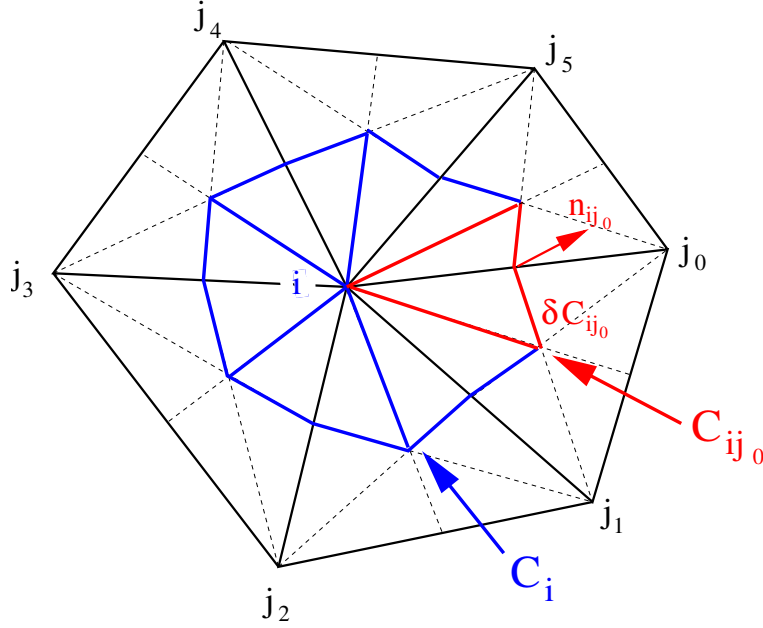
La cellule C_i et son bord sont décomposés en sous-cellules C_{ij} et en bord partiel ∂C_{ij} :

$$C_i = \bigcup_{j \in \nu(i)} C_{ij} \quad \text{et} \quad \partial C_i = \bigcup_{j \in \nu(i)} \partial C_{ij}^+,$$

où $\nu(i)$ est l'ensemble de noeuds voisins de i . Nous noterons a_i le volume de la cellule C_i , a_{ij} le volume de C_{ij} et $\eta_{i,j}$ l'intégrale de la normale unitaire à ∂C_{ij} orientée de la cellule C_i vers la cellule C_j :

$$a_i = \int_{C_i} dx, \quad a_{i,j} = \int_{C_{ij}} dx, \quad \boldsymbol{\eta}_{i,j} = \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n} dx.$$

La décomposition en volumes finis, telle qu'elle a été présentée, est utilisée pour définir une méthode de type Godunov.

FIG. 5.1 – Cellule cell-vertex C_i associée au point i

5.3 Méthode de type Godunov

Le résolution approchée du système (5.1) s'effectue en utilisant une décomposition volumes finis (C_i) du domaine Ω . Le schéma numérique est obtenu en intégrant sur les volumes spatiaux temporels $Q_i = C_i \times J_n$. Il vient :

$$a_i(\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) + \int_{J_n} \int_{\partial C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds dt + \int_{J_n} \int_{C_i} \mathbf{B} \nabla \mathbf{V} dx dt = 0.$$

Le terme non conservatif ne se reformule pas simplement en intégrale sur le bord. Afin de clarifier la présentation, le schéma numérique est exprimé suivant la décomposition en sous-cellules $C_{i,j}$. Pour cela, nous commençons par introduire une moyenne locale de la solution approchée :

$$\mathbf{W}_{i,j} = \frac{1}{a_{i,j}} \int_{C_{i,j}} \mathbf{W} dx \text{ avec } a_i \mathbf{W}_i^{n+1} = \sum_{j \in \nu(i)} a_{i,j} \mathbf{W}_{i,j}^{n+1}.$$

Le schéma numérique associé à l'état $\mathbf{W}_{i,j}$ s'écrit de la manière suivante :

$$a_{i,j} \mathbf{W}_{i,j}^{n+1} - a_{i,j} \mathbf{W}_{i,j}^n + \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \psi_{i,j} \cdot \eta_{i,j} = 0,$$

où la fluctuation $\psi_{i,j} = \psi_{i,j}(\eta_{i,j}, \mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_j^n)$ peut s'exprimer sous les deux formes intégrales :

$$\begin{cases} \psi_{i,j}^n \cdot \eta_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{J_n} \int_{\partial C_{i,j}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{i,j} ds dt + \int_{J_n} \int_{C_{i,j}} \mathbf{B} \nabla \mathbf{V} dx dt \right), \\ \psi_{i,j}^n \cdot \eta_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} \int_{C_{i,j}} [\mathbf{F}_i^n + \mathbf{W}_i^n - \mathcal{V}(t^{n+1}, x)] \cdot \mathbf{n}_{i,j} dx, \end{cases}$$

où $\mathcal{V}(t, x)$ est la solution exacte. Ces deux formulations de ψ_{ij} conduisent à deux classes de schéma numérique. Les schémas équilibre utilisent la première relation. Un solveur conservatif permet de définir le terme $\int_{J_n} \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds dt$ et l'intégrale de l'opérateur non conservatif $\int_{J_n} \int_{C_{ij}} \mathbf{B} \nabla \mathbf{V} dx dt$ se déduit du précédent en utilisant la propriété de consistance 4. Les schémas de relaxation utilisent la deuxième formulation. La solution $\mathcal{V}(t^{n+1}, x)$ est remplacée par une solution approchée obtenue par résolution d'un problème de Riemann non conservatif dans la direction η_{ij} :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_{\mathbf{n}}(\mathcal{F}_{i,j}) + (\mathcal{B}_{i,j}) \partial_{\mathbf{n}}(\mathcal{V}_{i,j}) = 0, \\ \mathbf{W}(t^n, \boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} \mathbf{W}_i^n & \text{si } \boldsymbol{\eta} < 0, \\ \mathbf{W}_j^n & \text{si } \boldsymbol{\eta} > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (5.4)$$

où les vecteurs et la matrice sont donnés par :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_k \rho_k \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_k \rho_k \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{i,j} \\ \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{i,j} + p \mathbf{n}_{i,j} \\ (E + p) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{i,j} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_{i,j} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{i,j} & 0 & z \beta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_k \rho_k \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{i,j} \\ p \end{pmatrix},$$

et \mathbf{n} est la coordonnée associée à la direction $\boldsymbol{\eta}_{i,j}$ d'origine $\mathbf{x}_{i,j} = \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j}{2}$. Le système (5.4), après relaxation de la pression conduit à un système dissipatif qui est résolu exactement. En notant $\mathcal{V}_{i,j}(\xi)$ la solution réduite aux composantes de \mathbf{W} , le flux numérique se reformule :

$$\psi_{i,j} \cdot \eta_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} \int_{C_{i,j}} \left[\mathbf{W}_i^n - \mathcal{V}_{i,j} \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{x})}{\Delta t} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{i,j} dx.$$

La détermination de cette intégrale passe par le calcul d'intersections de polyèdres en 3D ou de polygones en 2D. En pratique, nous utiliserons une évaluation simplifiée :

$$\psi_{i,j} \cdot \eta_{i,j} \approx \frac{|\boldsymbol{\eta}_{i,j}|}{\Delta t} \int_{-\sigma_{i,j}}^0 [\mathbf{W}_i^n - \mathcal{V}_{i,j}(\xi)] \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\xi.$$

En utilisant des calculs similaires au cas monodimensionnel, les fluctuations précédentes s'expriment de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\psi}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} = \mathcal{F}_{i,j} + \frac{1}{2} (\overline{\mathcal{B}\Delta\mathcal{V}})_{i,j} \quad \text{où} \quad \mathcal{F}_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_i + \sum |\lambda_k| (\delta\mathbf{W})_{i,j} \right) \cdot \mathbf{n}_{i,j}, \quad (5.5)$$

et $(\overline{\mathcal{B}\Delta\mathcal{V}})_{i,j}$ se déduit de (3.81) et (3.85). Remarquons que lorsque le système devient conservatif ($\Delta\mathbf{V} = 0$), les flux aux interfaces s'annulent deux à deux ($\boldsymbol{\psi}_{i,j} \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j} + \boldsymbol{\psi}_{j,i} \cdot \boldsymbol{\eta}_{j,i} = 0$) et nous retrouvons un schéma conservatif.

En ce qui concerne les schémas équilibrés, ils s'écrivent, comme dans le cas 1-D, sous la forme :

$$\boldsymbol{\psi}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\phi}_{i,j} \end{pmatrix} + (\mathbf{S}\partial\mathbf{n})_{i,j}^h \mathcal{V} \right],$$

où les opérateurs numériques conservatifs et non conservatifs sont déduits des relations (3.22) et (3.23) en utilisant les états initiaux gauche $\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{n}_{i,j}$ et droit $\mathbf{W}_j \cdot \mathbf{n}_{i,j}$. Notons que dans ce cas, $\boldsymbol{\phi}_{i,j}$ est conservatif même lorsque $\Delta\mathbf{V} = 0$. Le schéma explicite s'écrit donc :

$$a_i(\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) + \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j} = 0.$$

Les méthodes de type Godunov en multi-D se ramènent donc à une combinaison de fluctuations numériques 1-D. Les solveurs de relaxation et équilibre précédemment développés seront donc utilisés pour mener notre étude.

5.4 Formulation numérique et approximation de la tension de surface

La force de tension de surface est modélisée suivant la méthode CSF [28]. Celle-ci reformule les effets capillaires à l'aide de la force volumique :

$$\mathbf{F}_S^v(\mathbf{x}) = -\sigma\kappa(\Phi)\mathbf{n}(\Phi),$$

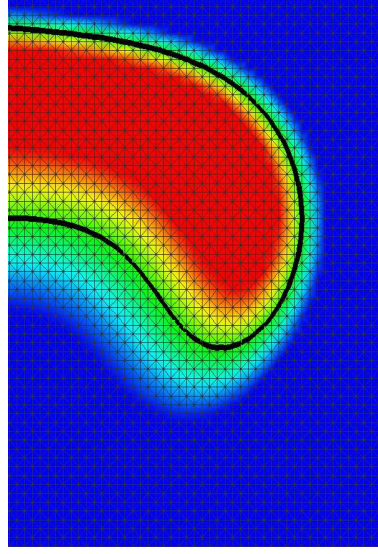
où σ est le coefficient de tension de surface caractérisant la nature des fluides de part et d'autre de l'interface. Nous supposons que Φ est la fonction couleur (2.3) associée au premier fluide. Cette fonction vaut 0 dans le premier fluide, 1 dans l'autre phase et varie de manière monotone au niveau de la surface d'interface.

En pratique, la fonction couleur Φ peut être reconstruite directement à l'aide de variables décrivant les fluides et variant à l'interface (α_k , y_k et ρ par exemple) :

$$\Phi = \frac{f(\alpha_k, y_k, \rho)}{[f(\alpha_k, y_k, \rho)]},$$

où f une fonction de R^3 à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$. Par exemple, ces choix simples peuvent être utilisés :

$$\Phi = y_k, \quad \Phi = \alpha_k, \quad \Phi = \frac{\alpha_k + y_k}{[\alpha_k + y_k]}.$$

FIG. 5.2 – Fonction couleur Φ^p et isosurface $\Phi^p = \Phi_S$

Ces expressions de Φ sont valables tant que les variables utilisées permettent de définir une zone autour de l'interface dont l'épaisseur varie peu. Malheureusement, dans certaines configurations l'épaisseur obtenue, par exemple avec $\Phi = \alpha_k$, varie en fonction de la position sur l'interface (figure 5.2). Pour réduire cet effet indésirable, l'interface est assimilée à une valeur Φ_S de la fonction Φ . Nous définissons alors une fonction H_S , caractéristique de cette surface :

$$H_S(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi > \Phi_S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction couleur modifiée Φ est alors obtenue par régularisation de $H_S(\Phi)$:

$$\Phi(x, t^n) = \int H_S(x, t^n) G(x, y) dx,$$

où G est un noyau régularisant. Afin de garder un formalisme général dans la suite du document, nous supposons :

$$\Phi = \Phi(\mathbf{W}).$$

κ et \mathbf{n} sont respectivement des approximations de la courbure et de la normale dans la zone d'application de la tension de surface. Ils seront définis par :

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right), \quad \mathbf{n} = \nabla \phi. \quad (5.6)$$

Chacun de ces termes est approché à l'aide d'une constante par morceaux obtenue par intégration sur chaque volume de contrôle C_i :

$$\kappa_i = \frac{1}{a_i} \int_{C_i} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right) dx \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_i = \frac{1}{a_i} \int_{C_i} \nabla \Phi dx.$$

La normale moyenne \mathbf{n}_i est évaluée en utilisant une approximation P1 du gradient de la fonction couleur :

$$\mathbf{n}_i = \sum_{\tau \in \tau(i)} \frac{a_\tau}{3a_i} \nabla \Phi|^\tau. \quad (5.7)$$

Comme la courbure s'exprime à l'aide de la divergence de la normale unitaire \mathbf{s} , son intégrale sur chaque cellule C_i se reformule, en utilisant la relation de Green, en une intégrale sur le bord de la cellule. Ainsi la valeur κ_i est approchée de la manière suivante :

$$\kappa_i = \frac{1}{a_i} \int_{C_i} \nabla \cdot (\mathbf{s}) d\mathbf{x} = \frac{1}{a_i} \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\eta} \approx \frac{1}{a_i} \sum_{j \in \nu(i)} \mathbf{s}_{ij} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij},$$

où \mathbf{s}_{ij} est une évaluation de la normale au niveau de l'interface ∂C_{ij} . Nous supposons que cette quantité suit la relation :

$$\mathbf{s}_{ij} = \mu \mathbf{s}_i + (1 - \mu) \mathbf{s}_j,$$

où μ est une fonction définie sur chaque segment et à valeur réelle comprise entre 0 et 1. Lorsque la normale à la surface devient trop faible, la normale unitaire prend des valeurs comportant beaucoup plus d'incertitude. Dans ce cas, si la frontière de la zone de mélange intercepte le segment $[x_i, x_j]$ et que le point x_i est à l'intérieur de cette zone, alors la valeur de \mathbf{n} sera entachée d'erreurs. Il est plus judicieux de choisir μ tel que cette valeur n'intervienne pas dans le calcul :

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbf{n}(\mathbf{x}_i)| > \delta \text{ et } |\mathbf{n}(\mathbf{x}_j)| \leq \delta, \\ 0 & \text{si } |\mathbf{n}(\mathbf{x}_i)| \leq \delta \text{ et } |\mathbf{n}(\mathbf{x}_j)| > \delta, \\ \frac{1}{2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où δ est un petit réel positif. Malgré tout, l'évaluation de la courbure reste mauvaise lorsque Φ est proche de 0 ou 1. De plus, compte tenu de la taille caractéristique h du maillage, les courbures représentables sont bornées. En pratique, deux filtres sont utilisés. Ils sont définis par :

$$R^\epsilon(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi \in [0.1 : 0.9], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$M_\beta^h(\kappa) = \text{sign}(\kappa) \min \left(|\kappa|, \frac{\beta}{h} \right),$$

avec ϵ petit et $\beta = O(1)$ donnés. La courbure modifiée est donnée par :

$$\kappa_i = R^\epsilon(\Phi_i) M_\beta^h(\tilde{\kappa}_i) \quad \text{avec} \quad \tilde{\kappa}_i = \frac{1}{a_i} \sum_j \mathbf{s}_{ij} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}. \quad (5.8)$$

Deux cas particuliers doivent encore être abordés : l'interface en contact avec une paroi et l'approximation des effets capillaires pour un écoulement axisymétrique.

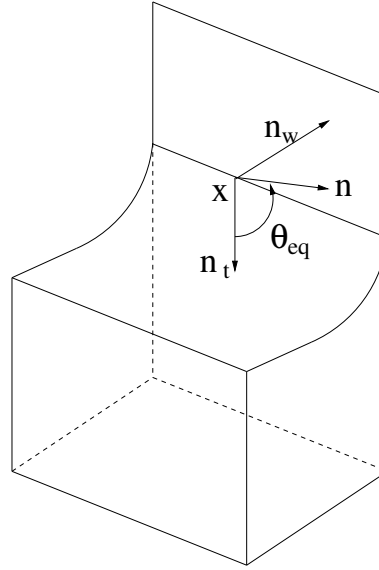


FIG. 5.3 – Angle de mouillage

Interface en contact avec une paroi

Lorsqu'une interface entre deux fluides à l'équilibre est en contact avec une paroi rigide, la surface se courbe de manière à présenter un angle de contact d'équilibre appelé couramment angle de mouillage. Dans un verre, l'interface entre l'eau et l'air n'est pas totalement plane. En effet, près du bord du verre, l'interface se courbe vers le haut et l'angle de contact apparaît. Les valeurs de l'angle de contact sont données par des mesures expérimentales. Elles dépendent des propriétés des deux fluides et de la rugosité et de la géométrie de la paroi. Afin de détailler la modélisation utilisée pour approcher le comportement de l'interface, quelques notations sont introduites et illustrées dans la figure 5.3. Soit \mathbf{x}_w un point appartenant à la paroi et à l'interface. En ce point, nous notons \mathbf{n}_t la normale unitaire tangente à la paroi et normale à la ligne de contact qui joint la paroi et l'interface. \mathbf{n}_w est la normale unitaire au mur dirigée vers l'extérieur du domaine et θ_{eq} dénote l'angle de contact à l'équilibre entre l'interface et la paroi [28].

La normale unitaire à l'interface est évaluée suivant la relation 5.6. Le calcul de la courbure est réalisé en utilisant une normale modifiée qui sera notée $\tilde{\mathbf{n}}$. Soit \mathbf{n}_t la normale unitaire dirigée suivant la projection de la normale à la surface \mathbf{n} sur la paroi. La nouvelle normale $\tilde{\mathbf{n}}$ est obtenue comme la combinaison linéaire des normales unitaires \mathbf{n}_w et \mathbf{n}_t faisant un angle θ_{eq} avec \mathbf{n}_t :

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}_w \cos(\theta_{eq}) + \mathbf{n}_t \sin(\theta_{eq}). \quad (5.9)$$

L'évaluation de la courbure au bord s'effectue en utilisant la relation (5.8) avec la normale unitaire modifiée $\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{n}}/|\tilde{\mathbf{n}}|$.

Dans le cas d'une interface mobile, l'angle de contact statique θ_{eq} doit être remplacé par un angle de contact dynamique θ_{mo} dépendant de la vitesse de l'interface et bien sûr de la rugosité de la paroi. En pratique, ce cas ne sera pas pris en compte car il a peu d'influence sur les résultats.

Géométrie axisymétrique

Dans le cas d'une géométrie axisymétrique d'axe $(0, \mathbf{e}_x)$, il est nécessaire de prendre en compte la contribution liée à l'invariance par rotation autour de cet axe. La force de tension de surface est évaluée à l'aide d'une courbure qui tient compte de la simplification géométrique :

$$\kappa_{axi}^h = \kappa^h + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_x}{x},$$

où κ^h est la courbure évaluée dans le plan $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ suivant la relation (5.8). La normale à la surface reste inchangée puisqu'elle est évaluée à partir du gradient de la fonction couleur.

validation numérique

A titre d'illustration, nous proposons une configuration de 'bulle' pour laquelle la fonction couleur est obtenue à partir de la régularisation de l'interface. Pour cela, un domaine de dimension $[-2.5, 2.5] \times [0, 5]$ est discrétisé à l'aide de deux maillages structuré et non structuré. Le domaine contient une interface en forme d'étoile dont le centre est situé en $(0, 2.5 \cdot 10^{-3})$. La distance de l'interface au centre est $R = 1.7 \cdot 10^{-3} * (1.0 + 0.2 * \cos(8 * \theta))$ où $\theta = \text{Atan}(y/x)$. La figure 5.4 montre pour chaque maillage la position de l'interface (ligne rouge), la fonction couleur et son gradient. La fonction couleur est conforme à la définition 1 et le gradient est correctement évalué.

La figure 5.5 montre le calcul d'une courbure sur deux maillages structuré et non structuré discrétisant un domaine $[-0.0025, 0.0025] \times [0, 0.005]$. La fraction volumique est initialisée à l'aide d'une fonction affine par morceaux, fonction de la distance au point $X_c = (0, 0.0025)$:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |X - X_c|_{L^2} < R_1 = 0.0006, \\ 0 & \text{si } |X - X_c|_{L^2} > R_2 = 0.0021, \\ \frac{|X - X_c|_{L^2} - R_1}{R_2 - R_1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'analyse des résultats s'effectue à l'aide de coupes suivant l'axe $y = 0.0025$ et en les comparant à la courbe $1/x$. Les valeurs obtenues à l'aide du maillage structuré sont alignées sur la courbe $1/x$. Pour le maillage non structuré, les valeurs contiennent plus d'incertitude, et restent tout de même de très bonnes approximations de la courbure.

Formulations des modèles incluant les termes de tension de surface

Les différentes écritures des systèmes incluant les termes de tension de surface sont ici abordées. Ces écritures présentent un intérêt certain pour la mise au point de méthodes numériques. En effet, beaucoup de schémas numériques engendrent des courants parasites altérant la qualité de la solution (par exemple le non respect des contacts stationnaires [85]). Cependant, des schémas numériques construits à partir d'une formulation pertinente du système peuvent remédier à ce comportement. L'écriture la plus commune du système est la suivante :

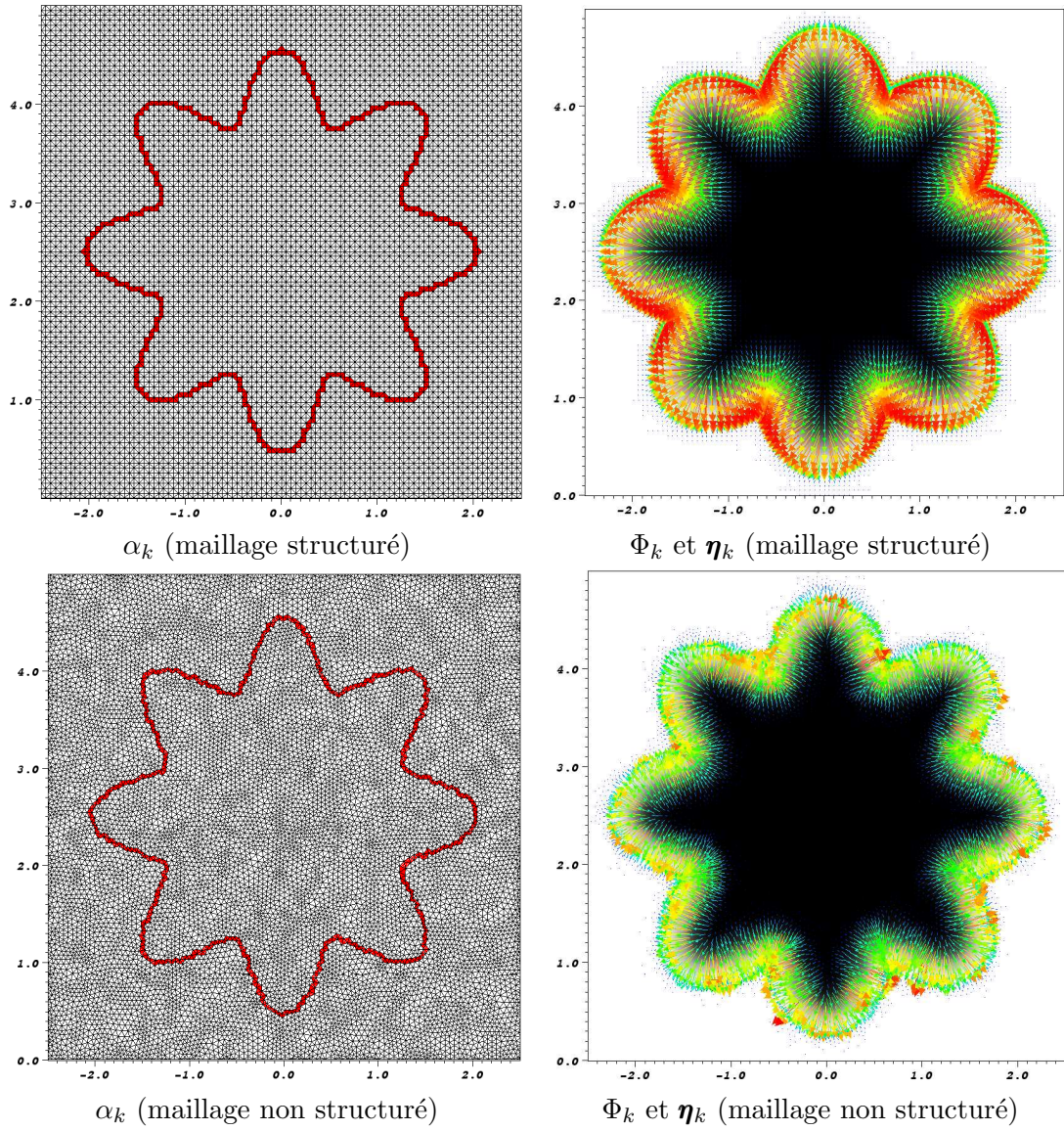


FIG. 5.4 – Calcul de la fonction couleur et de la normale à l'interface pour une interface en forme d'étoile dont la distance au centre $(0, 2.5 \cdot 10^{-3})$ est $R = 1.7 \cdot 10^{-3} * (1.0 + 0.2 * \cos(8 * \theta))$ où $\theta = \text{Atan}(y/x)$.

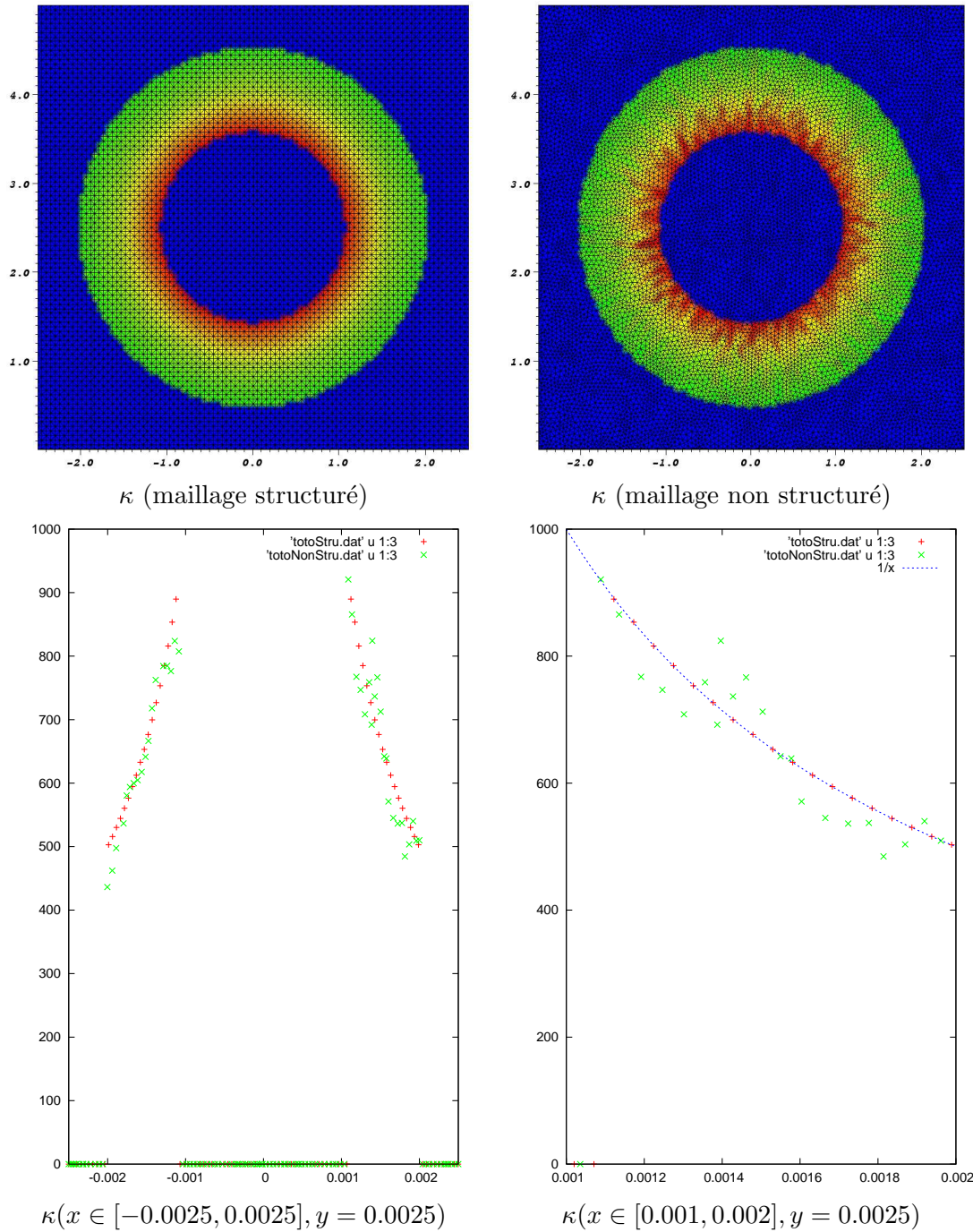


FIG. 5.5 – Calcul de la courbure pour des maillages structuré et non structuré. La fraction volumique vaut 1 dans le cercle de centre $X_c = (0, 0.0025)$ de rayon $R_1 = 0.0006$ et à 0 à l'extérieur du cercle de rayon $R_2 = 0.0021$. Entre les deux cercles, la fraction volumique est une fonction linéaire de la distance au centre du domaine.

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_k + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_k + z \beta_k \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{w} + \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{S}, \end{cases}$$

où le terme source est donné par :

$$\mathbf{S} = -\sigma \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \nabla \phi \\ \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \end{pmatrix}.$$

La discrétisation de ce terme est délicate. Il comporte le produit du gradient de la fonction couleur et de la divergence de la fonction $(\nabla \phi / |\nabla \phi|)$. Ce terme est complètement non linéaire et non hyperbolique.

Une formulation conservative du système existe [85]. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_k) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\alpha_k) + z \beta_k \nabla \cdot (\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI - \sigma \left(|\nabla \phi| I - \frac{\nabla \phi \otimes \nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right) = 0, \\ \partial_t(E + \sigma |\nabla \phi|) + \nabla \cdot \left((E + p + \sigma |\nabla \phi|) \mathbf{u} - \sigma \left(|\nabla \phi| I - \frac{\nabla \phi \otimes \nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \cdot \mathbf{u} \right) = 0. \end{cases}$$

En utilisant une technique de linéarisation adéquate pour les termes de tension de surface, le système peut être rendu hyperbolique [85]. Il est alors possible de mettre au point un solveur de Riemann conservatif incluant les effets de tension de surface [85]. Cette technique permet de réduire notablement les courants parasites, de préserver exactement les contacts stationnaires, et de reproduire un grand nombre d'expériences. La suite de cette section porte sur la technique de décomposition d'opérateurs et une résolution basée sur le système de relaxation.

Splitting d'opérateur

Afin d'appliquer la technique de splitting d'opérateur, nous supposons que les phénomènes de propagation d'ondes acoustiques et matérielles sont découplés des effets capillaires. La partie du système traitant les effets de tension de surface est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho \mathbf{u}) = -\sigma \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \nabla \phi, \\ \partial_t(\rho e) = -\sigma \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \mathbf{u} \cdot \nabla \phi. \end{cases}$$

L'intégration de ces équations, sur l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$ et sur la cellule C_i , donne :

$$\begin{cases} \frac{(\rho \mathbf{u})_i^{n+1} - (\rho \mathbf{u})_i^n}{\Delta t} = -\sigma \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \nabla \phi \, d\mathbf{x}, \\ \frac{(\rho e)_i^{n+1} - (\rho e)_i^n}{\Delta t} = -\sigma \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x}. \end{cases}$$

Compte tenu de la difficulté de cette formulation, les termes présents dans les intégrales seront évalués de manière indépendante. La normale et la courbure sont approchées à l'aide de fonctions constantes par morceaux dont les valeurs sur chaque cellule C_i sont notées \mathbf{n}_i et κ_i et détaillées (5.7, 5.8). La discrétisation des termes de tension de surface est la suivante :

$$\mathbf{S}_i^n = -\sigma \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_i \mathbf{n}_i \\ \kappa_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i \end{pmatrix}.$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est une évaluation de la vitesse au point M_i . Dans le cadre d'une formulation explicite il convient de fixer $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_i^n$. Un schéma numérique semi-implicite ($\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1})/2$) permet d'assurer la positivité de l'énergie interne de mélange.

Stabilité de la discontinuité de contact

Ce paragraphe montre le comportement du schéma numérique incluant le splitting d'opérateur lors d'une discontinuité de contact stationnaire avec une interface soumise à la tension de surface. Pour cela, nous considérons que l'interface est située en $x_{i+1/2}$ et que les valeurs, de part et d'autre de cette interface, sont données par :

$$\mathbf{W}_{i-1}^n = \mathbf{W}_i^n = \begin{pmatrix} \alpha_k^L \\ \alpha_k^L \rho_k \\ 0 \\ E^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_{i+1}^n = \begin{pmatrix} \alpha_k^R \\ \alpha_k^R \rho_k \\ 0 \\ E^R \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

où les énergies E^L et E^R sont telles que le différentiel de pression est positif et respecte la loi de Laplace :

$$p^R - p^L = \sigma \kappa (\alpha_k^R - \alpha_k^L) > 0. \quad (5.11)$$

Considérons l'exemple d'un schéma de relaxation pour le modèle asymptotique simplifié (2.82). Les approximations des valeurs des ondes seront notées s_1 et s_3 . La solution \mathcal{V}^h du problème de Riemann associé à l'interface $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{i-1/2}$ est constituée des constantes :

$$\begin{cases} (\alpha_k \rho_k)^* = (\alpha_k \rho_k)^L \frac{-s_1}{u^* - s_1}, & (\alpha_k \rho_k)^{**} = (\alpha_k \rho_k)^R \frac{s_3}{s_3 - u^*}, \\ u^* = \frac{\sigma \kappa (\alpha_k^R - \alpha_k^L)}{\rho^R s_3 - \rho^L s_1}, & \pi^* = \frac{1}{2} [\pi^R + \pi^L + u^* (\rho^R s_3 - \rho^L s_1)], \\ E^* = \frac{-E^L s_1 - \pi^* u^*}{u^* - s_1}, & E^{**} = \frac{E^R s_3 + \pi^* u^*}{s_3 - u^*}. \end{cases}$$

En remarquant que la vitesse u^* est strictement positive, la solution à la date t^{n+1} , après propagation et prise en compte de la force de tension de surface, s'écrit :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}^L + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{S} - s_1(\mathbf{W}^* - \mathbf{W}^L)).$$

Celle-ci se reformule de la manière suivante :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}^L + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{u^* - s_1} \begin{pmatrix} -zu^* [\alpha_1^L - (b_1^L)^2 u_1^L] \\ -u^* \alpha_k^L \rho_k^L \\ -u^* s_1 \rho^L + \sigma \kappa (\Phi_i^R - \Phi_i^L) \\ -u^* (E^L + \pi^*) + \sigma \kappa u^L (\Phi^R - \Phi^L) \end{pmatrix}.$$

Les discontinuités de contact stationnaires modélisant une interface soumise à la tension de surface et respectant la loi de Laplace ne sont pas préservées. De plus, aucun autre équilibre ne sera jamais atteint puisque dès lors que σ et κ sont non nuls, il n'existe pas d'états \mathbf{W}^L et \mathbf{W}^R avec $u^R = u^L = 0$ et $\Phi^R \neq \Phi^L$ tels que la solution du problème de Riemann vérifie $u^* = 0$. En pratique, la solution numérique oscille autour de la position d'équilibre.

Système de relaxation incluant la tension de surface

Le système incluant les termes liés à la tension de surface (5.4) est approché à l'aide d'un système hyperbolique du premier ordre. Pour cela, la courbure sera supposée localement constante. La solution exacte sera exhibée et nous montrerons que le schéma numérique respecte exactement les discontinuités de contact soumises aux effets capillaires.

Pour les modèles réduits incluant les termes de tension de surface de la méthode CSF, nous proposons le système de relaxation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1) + u\partial_x(\alpha_1) + \alpha_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}(b_1)^2\right) \partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) + \sigma \kappa \partial_x(\phi) = 0, \\ \partial_t(E) + \partial_x[(E + \pi)u] + \sigma \kappa u \partial_x(\phi) = 0, \\ \partial_t(\pi) + u\partial_x(\pi) + \frac{a^2}{\rho} \partial_x(u) = \frac{1}{\lambda}(p - \pi), \\ \partial_t(\phi) + u\partial_x(\phi) = 0. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Proposition 16 *Le système (5.12) est inconditionnellement hyperbolique et toutes ses ondes sont linéairement dégénérées. Sa solution exacte est constante par morceaux. Elle s'écrit sous la forme (3.49) avec :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{a^R u^R + a^L u^L}{a^L + a^R} - \frac{\pi^R - \pi^L + \sigma \kappa (\phi^R - \phi^L)}{a^L + a^R}, \\ \pi^* = \pi^L - a^L (u^* - u^L), \quad \pi^{**} = \pi^R - a^R (u^R - u^*), \\ \frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{\rho^L} + \frac{u^* - u^L}{a^L}, \quad \frac{1}{\rho^{**}} = \frac{1}{\rho^R} + \frac{u^R - u^*}{a^R}, \\ \epsilon^* = \epsilon^L + \frac{(\pi^*)^2 - (\pi^L)^2}{2(a^L)^2}, \quad \epsilon^{**} = \epsilon^R + \frac{(\pi^{**})^2 - (\pi^R)^2}{2(a^R)^2}, \\ \alpha_k^* = \alpha_k^L - z \left(1 - \frac{\rho^*}{\rho^L} \right) [\alpha_k^L - (b_k^L)^2 y_k^L], \\ \alpha_k^{**} = \alpha_k^R - z \left(1 - \frac{\rho^{**}}{\rho^R} \right) [\alpha_k^R - (b_k^R)^2 y_k^R]. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Démonstration :

Après avoir calculé la jacobienne du système et en avoir explicité les vecteurs propres, il est facile de montrer que le système est inconditionnellement hyperbolique et linéairement dégénéré. Les invariants de Riemann associés à chaque onde sont les suivants :

$\lambda_{u \pm a/\rho}$	$u \pm \frac{a}{\rho}$	$\pi \mp au$	$\pi^2 - 2a^2 \epsilon$	y_1	y_2	a	b_1^2	I_7
λ_u	u			$\pi + \sigma \kappa \phi$				

(5.14)

Un calcul simple permet de montrer que les constantes données (5.13) constituent la solution exacte.

Proposition 17 *Le schéma numérique (3.26) induit par le système de relaxation (5.12) résout de manière exacte les discontinuités de contact soumises aux forces capillaires.*

Démonstration :

Considérons une discontinuité de contact mobile sous les conditions définies par (5.10). Les états composant la solution à l'instant t^n sont :

$$\mathbf{W}_{i-1}^n = \mathbf{W}_i^n = \begin{pmatrix} \alpha_k^L \\ \alpha_k^L \rho_k \\ \bar{u} \\ E^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_{i+1}^n = \begin{pmatrix} \alpha_k^R \\ \alpha_k^R \rho_k \\ \bar{u} \\ E^R \end{pmatrix},$$

où E^L et E^R sont tels que le différentiel de pression respecte la loi de Laplace (5.11). La solution exacte du système de relaxation est, dans ce cas, donnée par :

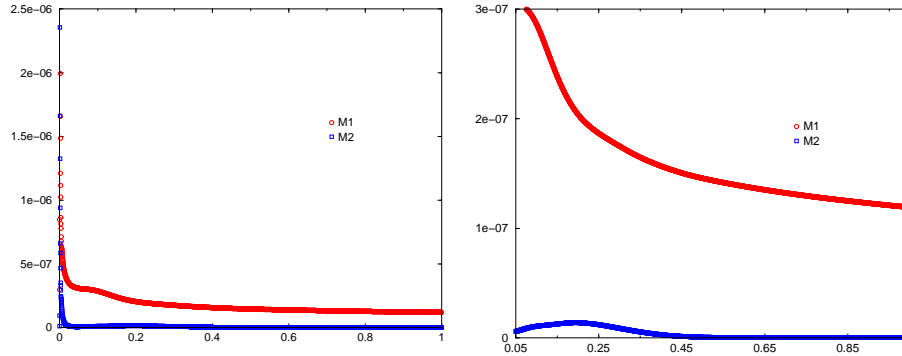


FIG. 5.6 – Intensités du champ de vitesse ($\int_{\Omega} |\mathbf{u}|_2(x, t) dx$) en fonction du temps $t \in [0, 1]$. La courbe $M1$ est obtenue à l'aide de la méthode de *splitting* et la courbe $M2$ à l'aide du schéma de relaxation. Le domaine est $0.1m \times 0.1m$, discrétisé avec 40×40 points. Au temps $t = 0s$, le centre de la bulle est $(0.5, 0.5)$ et son rayon est $0.03m$, à l'intérieur $\rho = 100kg.m^{-3}$, $p = 10300Pa$ et à l'extérieur $\rho = 1000kg.m^{-3}$, $p = 10000Pa$. Dans tout le domaine $u = 0m.s^{-1}$, $\sigma = 0.09uSI$, $g = 0m.s^{-2}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \bar{u}, \\ \pi^* = \pi^L, \quad \pi^{**} = \pi^R, \\ \alpha_k^* = \alpha_k^L, \quad \alpha_k^{**} = \alpha_k^R, \\ \rho_k^* = \rho_k^L, \quad \rho_k^{**} = \rho_k^R, \\ \epsilon^* = \epsilon^L, \quad \epsilon^{**} = \epsilon^R. \end{array} \right.$$

Le schéma numérique préserve donc exactement les discontinuités de contact.

Les méthodes basées sur une décomposition d'opérateurs et sur le solveur de relaxation sont utilisées pour simuler une bulle au repos soumise au effet de tension de surface. Le but est de mettre en évidence l'apparition des courants parasites. Le domaine de dimension $[0, 0.1] \times [0, 0.1]$ est discrétisé avec 40×40 points. Une bulle contenant un fluide à la densité $\rho = 100kg.m^{-3}$ et à la pression $p = 10300Pa$ est centrée en $(0.5, 0.5)$. Son rayon est $0.03m$. Cette bulle est plongée dans un deuxième fluide de densité $\rho = 1000kg.m^{-3}$ et de pression $p = 10000Pa$. Le coefficient de tension de surface est fixé à $\sigma = 0.09uSI$. La gravité est supposée nulle $g = 0m.s^{-2}$. La bulle décrite est dans une position d'équilibre et vérifie la loi de Laplace. Nous reproduisons cette expérience avec la méthode de *splitting* et avec la méthode de relaxation pendant une durée de $1s$. Les courbes 5.6 montrent l'évolution de l'intensité champ de vitesse dans le domaine. La méthode basée sur le solveur de relaxation (M2) génère beaucoup moins de courants parasites que la méthode de *splitting* (M1).

5.5 Approximation en formulation axisymétrique

Plusieurs stratégies existent pour la prise en compte des termes axisymétriques. Nous présentons les deux méthodes les plus courantes. Ces méthodes sont utilisées pour la résolution du modèle (5.2).

La première méthode traite les points hors de l'axe de symétrie (O, \mathbf{e}_y) indépendamment de ceux situés sur cette axe. Pour les points de coordonnées (x, y) tels que $x \neq 0$, le terme source suivant est ajouté :

$$(\mathbf{F}_{axi})(\mathbf{x}_i, t^n) = \left(\begin{array}{c} \frac{z\beta_k \mathbf{u}_i^n \cdot \mathbf{e}_x}{x_i} \\ \frac{\mathbf{F}_i^n \cdot \mathbf{e}_x}{x_i} \end{array} \right).$$

Pour les points $y = 0$, la règle de l'Hôpital est utilisée. La contribution prend donc la forme :

$$(\mathbf{F}_{axi})(\mathbf{x}_i(y=0), t^n) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial (z\beta_k \mathbf{u}_i^n \cdot \mathbf{e}_x)}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial (\mathbf{F}_i^n \cdot \mathbf{e}_x)}{\partial x}(0) \end{array} \right),$$

où les dérivés sont calculés à l'aide des relations de gradient (5.15). Afin d'améliorer le calcul au niveau de l'axe, des mailles fictives peuvent être ajoutées. Celles-ci n'ont pas besoin d'être définies explicitement dans le code de calcul. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle suppose que le flux est dérivable au niveau de l'axe de symétrie.

La seconde méthode prend en compte le terme source de la manière suivante :

$$(\mathbf{F}_{axi})(\mathbf{x}_i(y=0), t^n) = \left(\begin{array}{c} \frac{z\beta_k \mathbf{u}_i^n \cdot \mathbf{e}_x}{r} \\ \frac{\mathbf{F}_i^n \cdot \mathbf{e}_x}{r} \end{array} \right),$$

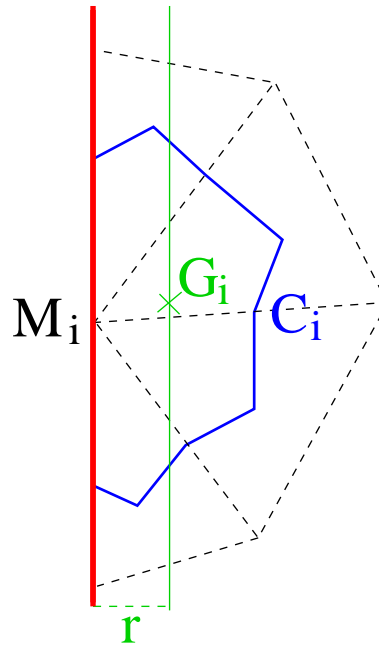
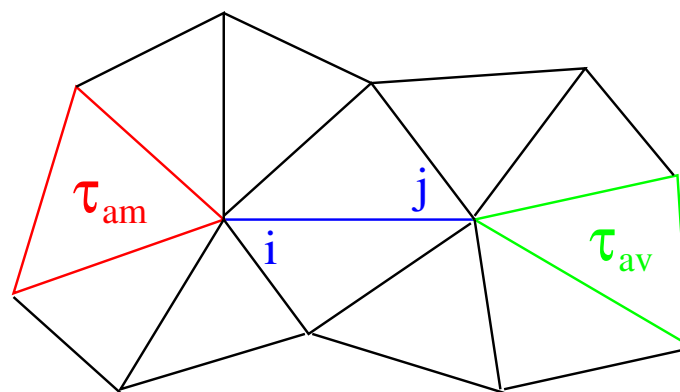
où r est la distance à l'axe du centre gravité G_i de la cellule C_i . Ainsi, r n'est jamais nul (voir figure 5.7). En raison de la simplicité de sa mise en oeuvre, cette méthode est utilisée dans le logiciel Fluidbox.

5.6 Extension MUSCL

Soit $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_i)_{i=1..N_s}$ une solution constante par morceaux définie sur le maillage (τ) . L'extension à l'ordre 2 en espace repose sur une reconstruction affine par morceaux. Celle-ci peut être globale avec un gradient moyen évalué sur C_i ou locale avec un gradient local sur la sous-cellule $C_{i,j}$. Le gradient global est défini par :

$$\nabla \mathbf{W}_i = \frac{\sum_{\tau_i \in \tau(i)} |\tau_i| \nabla \mathbf{W}|^\tau}{\sum_{\tau_i \in \tau(i)} |\tau_i|}, \quad (5.15)$$

où $\nabla \mathbf{W}|^\tau$ est le gradient P1 de \mathbf{W} sur l'élément τ et $\tau(i)$ est l'ensemble des éléments voisins de i .

FIG. 5.7 – Centre de gravité de la cellule C_i et distance r à l'axe de symétrieFIG. 5.8 – triangles amont et aval au segment $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]$

Les gradients locaux sont définis par :

$$\nabla \mathbf{W}_{i,j} = \theta \nabla \mathbf{W}_{i,j} + (1 - \theta) \nabla \mathbf{W}|_{\tau_{i,j}},$$

où $\tau_{i,j}$ et $\tau_{j,i}$ sont les triangles amont et aval (figure 5.8) du segment $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]$ et le gradient $\nabla \mathbf{W}_{i,j}$ est donné par :

$$\nabla \mathbf{W}_{i,j} = \frac{\mathbf{W}_j - \mathbf{W}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i).$$

Ces gradients permettent de définir les états $\mathbf{W}_{i,j}$ et $\mathbf{W}_{j,i}$, au voisinage de l'interface, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{i,j} = \mathbf{W}_i + \nabla \tilde{\mathbf{W}}_{i,j} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \\ \mathbf{W}_{j,i} = \mathbf{W}_j - \nabla \tilde{\mathbf{W}}_{j,i} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \end{cases}$$

où $\nabla \tilde{\mathbf{W}}_{i,j}$ et $\nabla \tilde{\mathbf{W}}_{j,i}$ sont les gradients limités. Dans le cas de gradient globaux, ils sont obtenus à l'aide de la relation :

$$\begin{cases} \nabla \tilde{\mathbf{W}}_{i,j} = \text{Limiteur} ((\nabla \mathbf{W})_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}, (\nabla \mathbf{W})_j \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}), \\ \nabla \tilde{\mathbf{W}}_{j,i} = \text{Limiteur} ((\nabla \mathbf{W})_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{ji}, (\nabla \mathbf{W})_j \cdot \boldsymbol{\eta}_{ji}), \end{cases} \quad (5.16)$$

et dans le cas de gradients locaux :

$$\begin{cases} \nabla \tilde{\mathbf{W}}_{i,j} = \text{Limiteur} ((\nabla \mathbf{W})_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j}, \nabla \mathbf{W}|_{\tau_{i,j}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j}), \\ \nabla \tilde{\mathbf{W}}_{j,i} = \text{Limiteur} ((\nabla \mathbf{W})_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{j,i}, \nabla \mathbf{W}|_{\tau_{j,i}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{j,i}), \end{cases} \quad (5.17)$$

où la fonction *Limiteur* est définie dans l'annexe C.

Deux méthodes de reconstruction à l'ordre 2 en espace de la solution ont été présentées. La première, basée sur un gradient global n'accroît que modérément la précision en raison de l'opérateur de moyenne. La seconde remédie à ce problème en privilégiant la direction de la normale $\boldsymbol{\eta}_{ij}$ par le biais du choix des triangles amont et aval.

Nous présentons maintenant l'extension des méthodes volumes finis à l'ordre deux en espace. Pour cela, considérons une cellule de calcul C_i centrée au point de coordonnées \mathbf{x}_i . Dans un souci de clarté, la géométrie de cette cellule est simplifiée (voir figure 5.9). Les cellules élémentaires $C_{i,j}$ seront approchées par des triangles d'aires $a_{i,j}$ et de manière à ce que les interfaces $\partial C_{i,j}$ soient planes et aient pour longueurs $|\boldsymbol{\eta}_{i,j}|$ et pour normales $\boldsymbol{\eta}_{i,j}$. Ces simplifications n'altèrent en aucun cas les méthodes employées et les résultats qui en découlent.

La cellule C_i est décomposée en sous-cellule (voir figure 5.10). Le point de coordonnées \mathbf{x}_i sera noté M_i et les sommets de la cellule $M_{i,j}$ où $j \in \nu(i)$. $m_{i,j}$ dénotera le point sur le segment $[M_i, M_{i,j}]$ équidistant de M_i et $M_{i,j}$. La cellule intérieure C_i^* sera définie comme le polygone ayant pour sommets $m_{i,j}$ avec $j \in \nu(i)$. Les cellules périphériques $C_{i,j}^*$ seront les quadrilatères de sommets $m_{i,j}$, $M_{i,j}$, $M_{i,k}$, $m_{i,k}$ où $k, l \in \nu(i)$ sont tels que M_i , M_j , M_k soient dans le sens trigonométriques. Par construction, les cellules qui viennent d'être définies sont disjointes deux à deux :

$$\forall j \in \nu(i), \quad C_i^* \cap C_{i,j}^* = \emptyset \quad \text{et} \quad \forall j, k \in \nu(i), \quad j \neq k, \quad C_{i,j}^* \cap C_{i,k}^* = \emptyset,$$

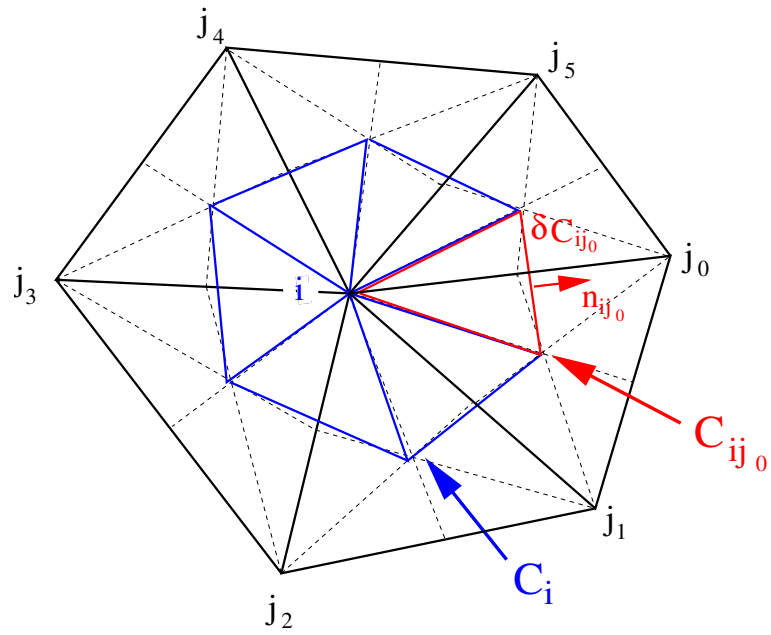


FIG. 5.9 – Cellule cell-vertex simplifiée

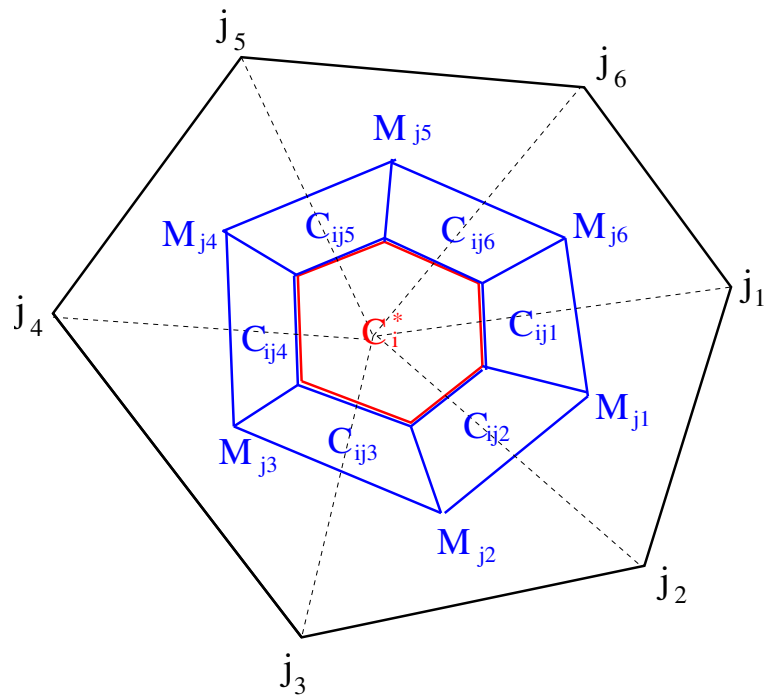


FIG. 5.10 – Division de la cellule cell-vertex C_i

et leur union recouvre exactement la cellule C_i :

$$C_i = C_i^* \cup \left(\bigcup_{j \in \nu(i)} C_{i,j}^* \right).$$

Pour chaque sous-cellule $C_{i,j}^*$, nous noterons respectivement $\eta_{i,j}^g, \eta_{i,j}^d, \eta_{i,j}^e, \eta_{i,j}^i$ les normales extérieures aux frontières $[m_{i,j}, M_{i,j}]$, $[m_{i,k}, M_{i,k}]$, $[M_{i,j}, M_{i,k}]$, $[m_{i,j}, m_{i,k}]$. Les relations suivantes seront donc vérifiées :

$$\eta_{i,j}^d = -\eta_{i,k}^g, \quad \eta_{i,j}^e = \eta_{i,j},$$

et $\eta_{i,j}^*$ ($= -\eta_{i,j}^i$) est associée à la normale au segment $[m_{i,j}, m_{i,k}]$ dirigée vers l'extérieur de la cellule C_i^* .

Les précisions géométriques considérées s'accompagneront de la définition de la solution approchée \mathcal{V}^{h2} , constante par morceaux :

$$\mathcal{V}^{h2}(x, t^n) = \sum_{i=1}^{N_s} \left[\mathbf{W}_{i^*}^n \hat{\chi}_{C_i^*} + \sum_{j \in \nu(i)} \mathbf{W}_{i,j}^n \hat{\chi}_{C_{i,j}^*} \right],$$

où $\hat{\chi}_C$ est la fonction caractéristique de la cellule C . Les états $\mathbf{W}_{i,j}^n$ sont définis par la reconstruction linéaire (5.16) ou (5.17) et l'état $\mathbf{W}_{i^*}^n$ est tel que l'état moyen sur la cellule C_i soit préservé :

$$|C_i| \mathbf{W}_i^n = |C_i^*| \mathbf{W}_{i^*}^n + \sum_{j \in \nu(i)} |C_{i,j}^*| \mathbf{W}_{i,j}^n.$$

La solution approchée est évaluée à l'instant $t = t^{n+1}$ en déterminant les états $\mathbf{W}_{i^*}^{n+1}$ et $\mathbf{W}_{i,j}^{n+1}$:

$$\begin{cases} |C_i^*| \mathbf{W}_{i^*}^{n+1} = |C_i^*| \mathbf{W}_{i^*}^n - \Delta t \sum_{j \in \nu(i)} \boldsymbol{\psi}_{i,j}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j}^*, \\ |C_{i,j}^*| \mathbf{W}_{i,j}^{n+1} = |C_{i,j}^*| \mathbf{W}_{i,j}^n - \Delta t \left(\boldsymbol{\psi}_{i,j}^e \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j}^e + \boldsymbol{\psi}_{i,j}^g \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j}^g + \boldsymbol{\psi}_{i,j}^i \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j}^i + \boldsymbol{\psi}_{i,j}^d \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j}^d \right), \quad \forall j \in \nu(i). \end{cases}$$

L'état \mathbf{W}_i^{n+1} est obtenu en sommant ces relations. Son expression est simplifiée en utilisant la relation (5.5). Les contributions des parties conservatives s'annulent deux à deux sur les frontières intérieures à la cellule C_i . Il vient :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in \nu(i)} \left[\boldsymbol{\psi}_{i,j}^n \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j} + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^d| (\overline{\mathcal{B}\Delta\mathcal{V}})_{i,j}^d + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^*| (\overline{\mathcal{B}\Delta\mathcal{V}})_{i,j}^* \right], \quad (5.18)$$

où $(\overline{\mathcal{B}\Delta\mathcal{V}})_{i,j}^d$ et $(\overline{\mathcal{B}\Delta\mathcal{V}})_{i,j}^*$ doivent théoriquement être obtenus en considérant les problèmes de Riemann aux interfaces $\partial C_{i,j}^*$ et $\partial C_{i,j}^d$ avec les données initiales $(\mathbf{W}_{i,j}, \mathbf{W}_{i,k})$ et $(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i,j}^*)$. Cependant, dans le cadre de la technique MUSCL, les problèmes de Riemann internes à la cellule C_i ne doivent pas être résolus. De ce fait, les contributions non conservatives seront approchées de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathcal{B}}\Delta\mathcal{V})_{i,j}^* &\approx (\mathcal{B}_i^n \Delta\mathcal{V})_{i,j}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^n \cdot \mathbf{n}_{i,j}^* & 0 & z(\beta_k)_i^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} (\alpha_k)_{i,j}^n \\ (\alpha_k \rho_k)_{i,j}^n \\ \mathbf{u}_{i,j}^n \cdot \mathbf{n}_{i,j}^* \\ p_{i,j}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\alpha_k)_{i^*}^n \\ (\alpha_k \rho_k)_{i^*}^n \\ \mathbf{u}_{i^*}^n \cdot \mathbf{n}_{i,j}^* \\ p_{i^*}^n \end{pmatrix} \right], \\
(\overline{\mathcal{B}}\Delta\mathcal{V})_{i,j}^d &\approx (\mathcal{B}_i^n \Delta\mathcal{V})_{i,j}^d = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^n \cdot \mathbf{n}_{i,j}^d & 0 & z(\beta_k)_i^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} (\alpha_k)_{i,k}^n \\ (\alpha_k \rho_k)_{i,k}^n \\ \mathbf{u}_{i,k}^n \cdot \mathbf{n}_{i,j}^d \\ p_{i,k}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\alpha_k)_{i,j}^n \\ (\alpha_k \rho_k)_{i,j}^n \\ \mathbf{u}_{i,j}^n \cdot \mathbf{n}_{i,j}^d \\ p_{i,j}^n \end{pmatrix} \right],
\end{aligned}$$

où l'indice k est tel que les points M_i , M_j et M_k soient dans le sens trigonométrique. A l'aide de cette simplification, le bilan des opérateurs non conservatifs présents dans la relation (5.18) devient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in \nu(i)} \left[|\boldsymbol{\eta}_{i,j}^d| (\overline{\mathcal{B}}\Delta\mathcal{V})_{i,j}^d + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^*| (\overline{\mathcal{B}}\Delta\mathcal{V})_{i,j}^* \right] \approx \\
&\sum_{j \in \nu(i)} |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^*| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i^*}^n)_{i,j}^* + \sum_{j \in \nu(i)} \left[|\boldsymbol{\eta}_{i,j}^d| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{i,j}^d + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^i| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{i,j}^i + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^g| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{i,j}^g \right],
\end{aligned} \tag{5.19}$$

où nous avons introduit les notations :

$$(\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{l,m}^x = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^n \cdot \mathbf{n}_{l,m}^x & 0 & z(\beta_k)_i^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_k)_{i,j}^n \\ (\alpha_k \rho_k)_{i,j}^n \\ \mathbf{u}_{i,j}^n \cdot \mathbf{n}_{l,m}^x \\ p_{i,j}^n \end{pmatrix}.$$

En utilisant deux relations de divergence, nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{j \in \nu(i)} |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^*| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i^*}^n)_{i,j}^* = 0, \\ |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^d| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{i,j}^d + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^i| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{i,j}^i + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^g| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{i,j}^g = |\boldsymbol{\eta}_{i,j}| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{i,j}. \end{cases}$$

De ce fait, la relation (5.19) s'écrit sous la forme suivante :

$$\sum_{j \in \nu(i)} \left[|\boldsymbol{\eta}_{i,j}^d| (\overline{\mathcal{B}}\Delta\mathcal{V})_{i,j}^d + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}^*| (\overline{\mathcal{B}}\Delta\mathcal{V})_{i,j}^* \right] \approx \sum_{j \in \nu(i)} |\boldsymbol{\eta}_{i,j}| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{i,j}^n)_{i,j}.$$

L'état \mathbf{W}_i^{n+1} , moyennant cette approximation, s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in \nu(i)} \left[\boldsymbol{\psi}_{i,j}^n \cdot \boldsymbol{\eta}_{i,j} + |\boldsymbol{\eta}_{i,j}| (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{ij}^n)_{ij} \right].$$

En pratique, nous utiliserons la relation :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in \nu(i)} |\boldsymbol{\eta}_{i,j}| \left(\mathcal{F}_{i,j}(\mathbf{W}_{i,j}^n) + (\mathcal{B}_i^n \mathcal{V}_{ij}^n)_{ij} + \int_{-\infty}^0 (\mathcal{V}_{ij}^e(\xi) - \mathbf{W}_{ij}^n) \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\xi \right). \quad (5.20)$$

où \mathcal{V}_{ij}^e est la solution du problème de Riemann pour les conditions initiales $\mathbf{W}_{i,j}^n$ et $\mathbf{W}_{j,i}^n$. L'approximation qui a été faite sur les contributions non conservatives n'affecte pas la partie dissipative des schémas numériques. Leur stabilité est donc préservée.

5.7 Schémas implicites

Dans cette section, nous proposons une formulation implicite pour les schémas numériques précédemment développés. Dans un premier temps, nous rappelons l'écriture des schémas explicites :

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{a_i} \sum_{j \in \nu(i)} \boldsymbol{\phi}_{ij}^n \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\phi}_{ij}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{C_{ij}} (\mathbf{W}_i^n - \mathcal{V}_{ij}(\boldsymbol{\eta})) d\boldsymbol{\eta} \quad (5.21)$$

Ces schémas numériques possèdent une limitation CFL, due à l'expression des fluctuations $\boldsymbol{\phi}_{ij}$. Ces dernières sont des fonctions explicites des états \mathbf{W}_i^n et \mathbf{W}_j^n et donc ne peuvent approcher les échanges au niveau des interfaces entre les cellules de calcul que sur des temps courts. Afin de palier à cette limitation, nous considérons alors un schéma numérique s'écrivant formellement :

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{a_i} \sum_{j \in \nu(i)} \boldsymbol{\phi}_{ij}^{n+1} \quad (5.22)$$

où les fluctuations $\boldsymbol{\phi}_{ij}^{n+1}$ sont désormais des fonctions des inconnues \mathbf{W}_i^{n+1} et \mathbf{W}_j^{n+1} . En raison des expressions complexes intervenant dans les expressions, nous considérons la linéarisation suivante :

$$\boldsymbol{\phi}_{ij}^{n+1} = \boldsymbol{\phi}_{ij}^n + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ij}}{\partial \mathbf{W}_i} \right)^n (\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ij}}{\partial \mathbf{W}_j} \right)^n (\mathbf{W}_j^{n+1} - \mathbf{W}_j^n) \quad (5.23)$$

L'utilisation de cette linéarisation permet d'obtenir la formulation implicite très utilisée :

$$\left(\frac{a_i}{\Delta t} I_d + \sum_{j \in \nu(i)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ij}}{\partial \mathbf{W}_i} \right)^n \right) (\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) + \sum_{j \in \nu(i)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ij}}{\partial \mathbf{W}_j} \right)^n (\mathbf{W}_j^{n+1} - \mathbf{W}_j^n) = - \sum_{j \in \nu(i)} \boldsymbol{\phi}_{ij}^n \quad (5.24)$$

L'évaluation des matrices $\left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{ij}}{\partial \mathbf{W}_i} \right)^n$ est maintenant abordée. Pour cela, les fluctuations $\boldsymbol{\phi}_{ij}$ sont reformulées de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\phi}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(\mathbf{W}_j) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_i) + \bar{\mathbf{B}}_{ij}(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) + \sum_{k=1}^m |\lambda_k| (\delta \mathbf{W})_k \right] \quad (5.25)$$

En dérivant par rapport à l'état \mathbf{W}_i , il vient :

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \mathbf{W}_i} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W}_i)}{\partial \mathbf{W}_i} - \bar{\mathbf{B}}_{ij} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \mathbf{W}_i} + \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_{ij}}{\partial \mathbf{W}_i} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) + \sum_{k=1}^m |\lambda_k| \frac{\partial (\delta \mathbf{W})_k}{\partial \mathbf{W}_i} \quad (5.26)$$

La dérivation des parties convectives et dissipatives est effectuée indépendamment. Remarquons que seules les termes non linéaires, nécessaires à la stabilité du schéma, ne seront pas dérivés du fait de leurs singularités. Les matrices issues de cette linéarisation sont non symétriques à *pattern* symétrique.

Le système linéaire issu de la formulation implicite (5.24) est résolu soit, à l'aide de méthodes itératives classiques : Jacobi, Gauss Seidel, Gmres, soit à l'aide d'un solveur direct basé sur une factorisation LU [57].

5.8 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons abordé l'approximation d'écoulements multidimensionnels. Après avoir défini une décomposition en volumes finis du domaine, les schémas numériques usuels reposant sur une décomposition de flux ont été adaptés aux cas de systèmes non conservatifs. La discrétisation des opérateurs mathématiques, issus de la modélisation CSF des effets capillaires, a ensuite été étudiée. Pour cela, nous avons mis au point une stratégie permettant la construction de fonctions couleur et assurant une bonne évaluation de la courbure et de la normale à la surface d'interface. En utilisant le formalisme du solveur de relaxation, ces opérateurs ont ensuite été pris en compte sans être découplés des opérateurs de propagation des systèmes. Cette technique permet une résolution exacte des interfaces soumises aux effets capillaires et une réduction importante des courants parasites [62]. La précision des schémas numériques a été améliorée en adaptant une technique de type MUSCL [71] à nos systèmes non conservatifs. Nous avons enfin proposé une formulation implicite basée sur une linéarisation.

Chapitre 6

Résultats numériques multidimensionnels et calcul parallèle

Dans ce chapitre, nous proposons la réalisation d'expériences multidimensionnelles. Après avoir introduit les techniques de calcul parallèle par passage de message, nous réaliserons, en utilisant les caractéristiques données dans [53], la remontée d'une bulle d'air dans l'eau. Plusieurs maillages seront utilisés et les résultats associés permettront de caractériser la résolution nécessaire pour l'obtention de simulations numériques de bonne qualité. Nous aborderons ensuite deux problèmes pour lesquels les effets acoustiques sont dominants : les expériences d'interaction choc bulle expérimentalement réalisées par Haas et Sturtevant [54]. Les résultats, obtenus à l'aide d'un calcul utilisant 11.5 millions d'inconnues et réparti sur 64 processeurs, seront en bon accord avec les données expérimentales. Dans le contexte de régimes faible Mach, nous considérerons l'expérience proposée par Périgaud et Saurel dans [85]. Une goutte d'eau initialement accrochée sur la paroi supérieure du domaine, se rompt et chute sous l'effet de la gravité. Le comportement de la goutte est conditionné par le rapport entre les effets de tension de surface et les effets de gravité. En utilisant les techniques de préconditionnement pour les régimes faible Mach et les techniques d'implicitation, nous montrerons que cette expérience peut être reproduite tout en préservant les tailles caractéristiques de l'expérience. La dernière simulation numérique porte sur une remontée de bulle en dimension trois. Elle montre les possibilités de résolution dans le contexte industriel.

6.1 Calcul Parallèle

La réalisation d'expériences numériques en dimension 2 ou 3 demande une résolution fine de l'écoulement. La qualité des résultats peut être améliorée en soit en proposant des modèles et des schémas numériques plus précis et moins coûteux, soit en augmentant le nombre d'inconnues servant à la résolution du problème. Nous considérons ici le dernier point. Des maillages comportant un grand nombre d'éléments sont donc utilisés. Dans ce cas, des problèmes de performance des codes surviennent : la gestion de la mémoire est plus délicate et peut entraîner une baisse très importante de la performance du logiciel (si la mémoire swap n'est pas suffisante), les calculs devant être réalisés sont très impor-

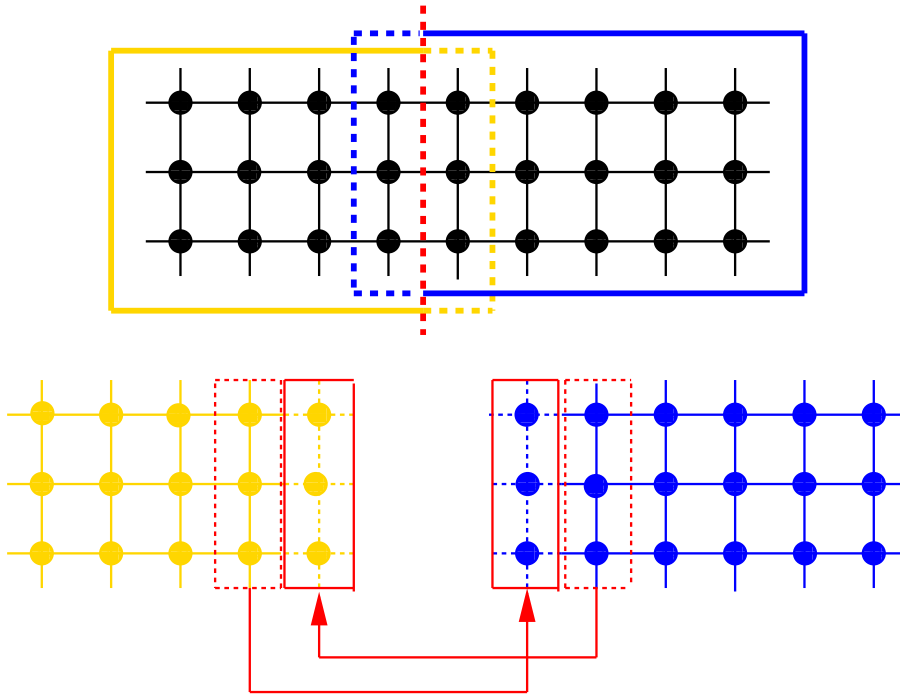


FIG. 6.1 – Illustration d’une décomposition de domaine en 2 sous-domaines (jaune et bleu). Les traits pointillés indiquent les zones d’*overlap*. Les flèches rouges montrent les informations échangées entre les processeurs

tants et le critère CFL lié à la taille des éléments est plus contraignant. L’efficacité des méthodes numériques peut être améliorée à l’aide de technique de calcul parallèle par *message passing* MPI. Celle-ci repose sur le *partitionnement de domaine* : une décomposition du graphe du maillage initial en graphes secondaires équilibrés les uns par rapport aux autres est réalisée. Des sous-domaines sont alors reconstruits à partir de la décomposition de graphe. Les calculs sont alors repartis sur plusieurs processeurs suivant la décomposition de domaine considérée. Ces calculs nécessitent des échanges d’informations entre les processeurs. Pour cela, les sous-domaines présentent des zones d’*overlap*. Les informations relatives à ces zones seront échangées, assurant ainsi la transmission des données entre les sous-domaines. Remarquons que les algorithmes de décomposition de domaine tentent également de minimiser les échanges d’informations entre les processeurs, donc la taille des zones d’*overlap*. L’efficacité du code est ainsi améliorée. La figure 6.1 illustre la technique de décomposition de domaine.

6.2 Validation : convergence en maillage

Considérons un domaine $[-0.8\text{ m}, 0.8\text{ m}] \times [0\text{ m}, 2\text{ m}]$ contenant une bulle d’air ($\rho = 1\text{ kg.m}^{-3}$, $u = 0\text{ m.s}^{-1}$, $p = 10^5\text{ Pa}$, $\gamma = 1.4$, $p^\infty = 0\text{ Pa}$) de centre $x_c = 0\text{ m}$, $y_c = 0.3\text{ m}$ et de rayon $R = 0.2\text{ m}$. Le reste du domaine est occupé par de l’eau ($\rho = 1000\text{ kg.m}^{-3}$, $u = 0\text{ m.s}^{-1}$, $p = 10^5\text{ Pa}$, $\gamma = 4.4$, $p^\infty = 610^8\text{ Pa}$). L’ensemble des fluides est supposé au repos à l’instant initial. La gravité est fixée à $g = 9.81\text{ m.s}^{-2}$. Les forces de tension de

surface et de viscosités ne sont pas considérées ici.

En raison de la symétrie de cette expérience, les calculs seront effectués sur le demi-domaine $[0\text{ m}, 0.8\text{ m}] \times [0\text{ m}, 2\text{ m}]$. A l'occasion de la visualisation, les résultats seront symétrisés. Nous effectuons cette expérience sur les maillages contenant 41×101 , 81×201 , 121×301 , 131×401 , 201×501 et 401×1001 points.

Dans le cas d'une géométrie 2-D plan (figure 6.2), la bulle remonte sous l'effet d'une surpression à sa base. Comme cette surpression agit dans les parties de la bulle ayant une forte section, le centre de la bulle remonte plus vite que ces extrémités formant ainsi deux filets de fluide. Une fois que la bulle a acquis une certaine vitesse, les filets sont happés vers l'intérieur du domaine, tournent sur eux même et se rompent formant ainsi deux petites bulles.

Pour la géométrie axisymétrique (figure 6.3), la bulle remonte sous les mêmes effets que précédemment. Cependant, dans ce contexte, la surpression est si forte que la bulle prend la forme d'un tore.

Ces deux expériences montrent que pour un calcul d'ordre un, il est nécessaire de considérer un maillage comportant au moins 121×301 afin d'obtenir une résolution correcte. Cette analyse nous permet de déterminer les maillages nécessaires à la reproduction d'expériences.

6.3 Interaction choc bulle

Nous proposons deux simulations numériques d'interaction choc bulle pour lesquelles les expériences ont préalablement été menées par Hass et Sturtevant [54] et ensuite reproduites numériquement par [88].

Le domaine de l'expérience est un rectangle de dimension $L_x = 0.3\text{ m}$ et $L_y = 0.1\text{ m}$. Il comporte en $(0.05, 0.05)$ une bulle 2D en équilibre, de rayon est égal à 0.035 m . Le reste du domaine contient un gaz parfait au repos ($\rho_r = 1.0\text{ kg.m}^{-3}$, $u_r = 0\text{ m.s}^{-1}$, $v_r = 0\text{ m.s}^{-1}$, $p_r = 1.0\text{ Pa}$, $\gamma = 1.4$). Un choc, se déplaçant de la gauche vers la droite du domaine, est situé, à l'instant initial en $x = 0\text{ m}$. Il est caractérisé par le nombre de Mach $M_S = 1.22$ ($\rho_{shock} = 3.4\text{ kg.m}^{-3}$, $u_{shock} = 2.14\text{ m.s}^{-1}$, $v_{shock} = 0\text{ m.s}^{-1}$, $p_{shock} = 7.48\text{ Pa}$). Deux simulations sont considérées. Dans la première simulation (figure 6.6), la bulle contient de l'hélium ($\gamma = 1.6$) avec la densité initiale $\rho_{He} = 0.138\text{ kg.m}^{-3}$. Dans la deuxième expérience (figure 6.7), la bulle contient le réfrigérant R22 (voir [54]) ayant pour densité initiale $\rho_{R22} = 3.154\text{ kg.m}^{-3}$.

L'expérience est reproduite à l'aide d'un schéma numérique d'ordre un, explicite et non préconditionné pour le faible Mach. Il est basé sur le solveur de relaxation associé au modèle asymptotique [66]. Le domaine est discrétisé avec 2401×801 points. Le problème comporte donc environ 11.5 millions d'inconnues. Le maillage a été partitionné à l'aide du logiciel MeTis en 64 sous-domaines (voir figure 6.4). Ces expériences ont été réalisées sur la machine decryphon (cluster power 5 sous AIX) en un temps d'environ $t = 9.70 \cdot 10^3\text{ s}$.

Dans les deux cas, les résultats numériques s'accordent avec les résultats expérimentaux réalisés par Haas et Sturtevant [54]. La figure 6.5 montre une comparaison des résultats numériques obtenus avec des expériences physiques ayant des caractéristiques physiques similaires. On remarque un comportement très similaire pour les bulles d'hélium. Rappelons que comme la bulle d'hélium est plus légère, elle agit comme un milieu convergent pour les ondes acoustiques. Pour le réfrigérant R22, comme la bulle est plus lourde, elle est un mi-

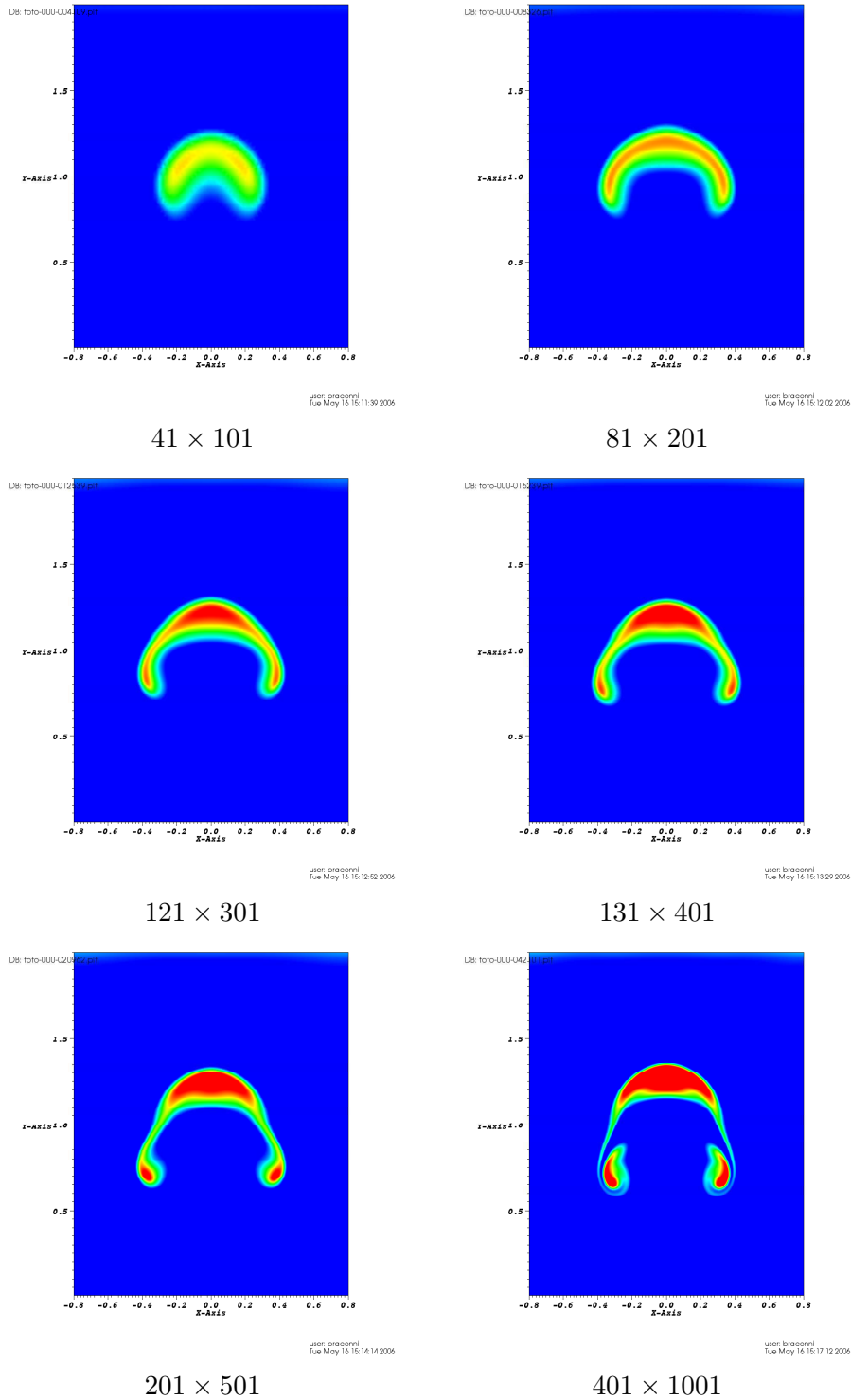


FIG. 6.2 – Montée de bulle à $t = 0.4s$ pour une géométrie 2D plan dans un domaine $[0, 0.8] \times [0, 2]$ discrétisé avec 41×101 , 81×201 , 121×301 , 131×401 , 201×501 et 401×1001 . A l'instant $t = 0$ la bulle est en $\mathbf{x}_c = (0, 0.3)$ et a un rayon $R = 0.2 m$. Elle contient de l'air $\rho = 1 kg.m^{-3}$, $\gamma = 1.4 P^\infty = 0$, le reste du domaine contient de l'eau $\rho = 1000 kg.m^{-3}$, $\gamma = 4.4 P^\infty = 610^8$. Dans tout le domaine $u = 0 m.s^{-1}$, $p = 10^5 Pa$ $g = 9.81$.

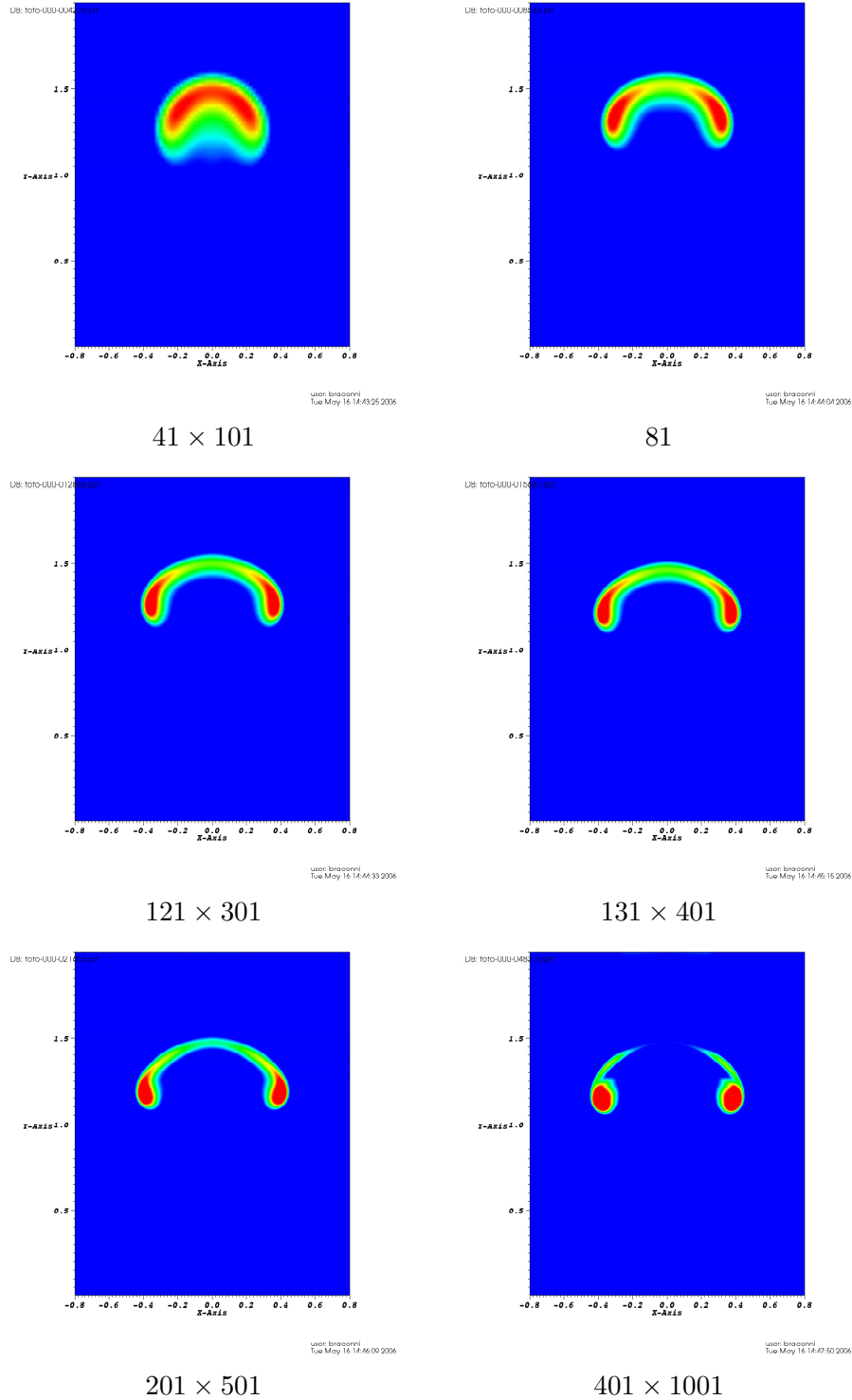


FIG. 6.3 – Montée de bulle à $t = 0.4s$ pour une géométrie 2D axisymétrique dans un domaine $[0, 0.8] \times [0, 2]$ discrétisé avec 41×101 , 81×201 , 121×301 , 131×401 , 201×501 et 401×1001 . A l'instant $t = 0$ la bulle est en $\mathbf{x}_c = (0, 0.3)$ et a un rayon $R = 0.2m$. Elle contient de l'air $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, $\gamma = 1.4$ $P^\infty = 0$, le reste du domaine contient de l'eau $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $\gamma = 4.4$ $P^\infty = 610^8$. Dans tout le domaine $u = 0 \text{ m.s}^{-1}$, $p = 10^5 \text{ Pa}$ $g = 9.81$.

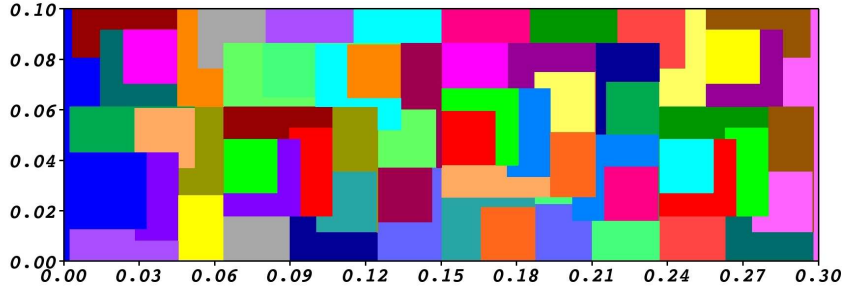


FIG. 6.4 – Décomposition du domaine de l'interaction choc bulle en 64 sous-domaines

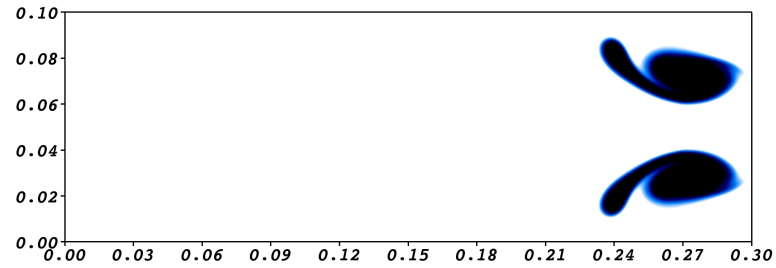
lieu divergent. La simulation numérique est comparée à une expérience utilisant une bulle de Krypton (milieu divergent). Bien que ces deux expériences aient des caractéristiques physiques assez éloignées, les bulles présentent des comportements similaires. En particulier, elles prennent une forme de croissant de lune. L'ensemble des résultats numériques est présenté dans les figures 6.6 et 6.7.

6.4 Chute d'une bulle en 2D

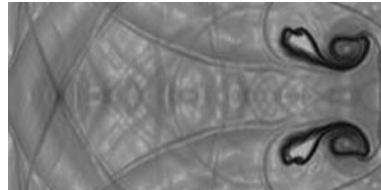
Cette expérience reprend sensiblement les mêmes caractéristiques physiques données par [85]. Afin de réduire les temps nécessaires pour la simulation, Périgaud et Saurel ont effectué un adimensionnement et ont considéré une expérience dont les paramètres physiques sont différents mais qui permettent de préserver les caractéristiques physiques de l'écoulement. Le but est de s'affranchir des critères CFL très contraignants et par la même occasion de rendre l'échelle de temps caractéristique des ondes matérielles du même ordre que l'échelle de temps caractéristique de l'évolution de ondes acoustiques. En pratique, les tailles des bulles sont ramenées à l'ordre de grandeur du mètre et les valeurs de gravité et de tension de surface sont recalculées suivant un adimensionnement.

Dans notre contexte, les techniques de préconditionnement pour les régimes faible Mach et les techniques d'implicitation vont permettre de traiter cette expérience avec ses caractéristiques physiques propres. Nous supposons que cette expérience est invariante par rotation et réalisons cette expérience en dimension deux avec la prise en compte de la géométrie axisymétrique. Nous considérons donc un domaine $[0, 0.025m] \times [0, 0.1m]$ discrétisé à l'aide de 101×401 points. Une goutte d'eau est initialement positionnée au niveau de la paroi supérieure du domaine. Elle a une forme de demi-sphère de rayon $0.006m$ et son centre est positionnée en $(0.0, 0.1)$. La partie inférieure du domaine contient une couche d'eau de hauteur $0.01m$. La gravité est fixée à $g = -10 \text{ m.s}^{-2}$ et la tension de surface à $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$. Le reste du domaine contient de l'air ($\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, $\gamma = 1.4$, $u = 0 \text{ m.s}^{-1}$, $p^\infty = 0 \text{ Pa}$, $p = 10^5 \text{ Pa}$). L'angle de contact de mouillage entre l'eau et l'air est 25. La viscosité pour l'eau est fixée à $\mu = 0.001 \text{ Pa.s}$ et à $\mu = 0.018 \text{ Pa.s}$ pour l'air.

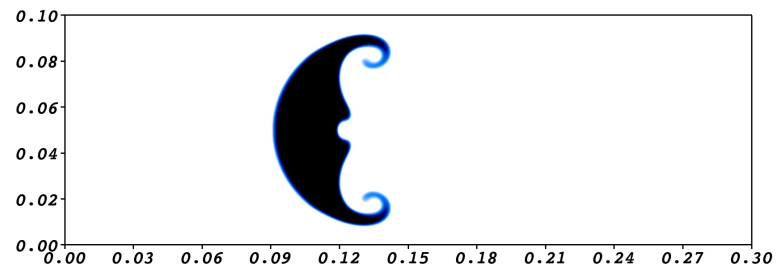
Cette expérience est reproduite en utilisant le modèle réduit avec le schéma de relaxation sous sa formulation implicite et préconditionnée pour les régimes faible Mach. Le calcul est réalisé à l'ordre 2 en espace. Le calcul prend en compte les effets de gravité,



Interaction choc bulle : Hélium



Interaction choc bulle : Hélium



Interaction choc bulle : R22



Interaction choc bulle : Krypton

FIG. 6.5 – Comparaison des résultats numériques d'interactions choc bulle avec des expériences physiques présentant des caractéristiques physiques similaires. Les expériences physiques ont été réalisées au laboratoire IUSTI et sont présentées sur internet (<http://iusti.polytech.univ-mrs.fr/smash/media/tac/>).

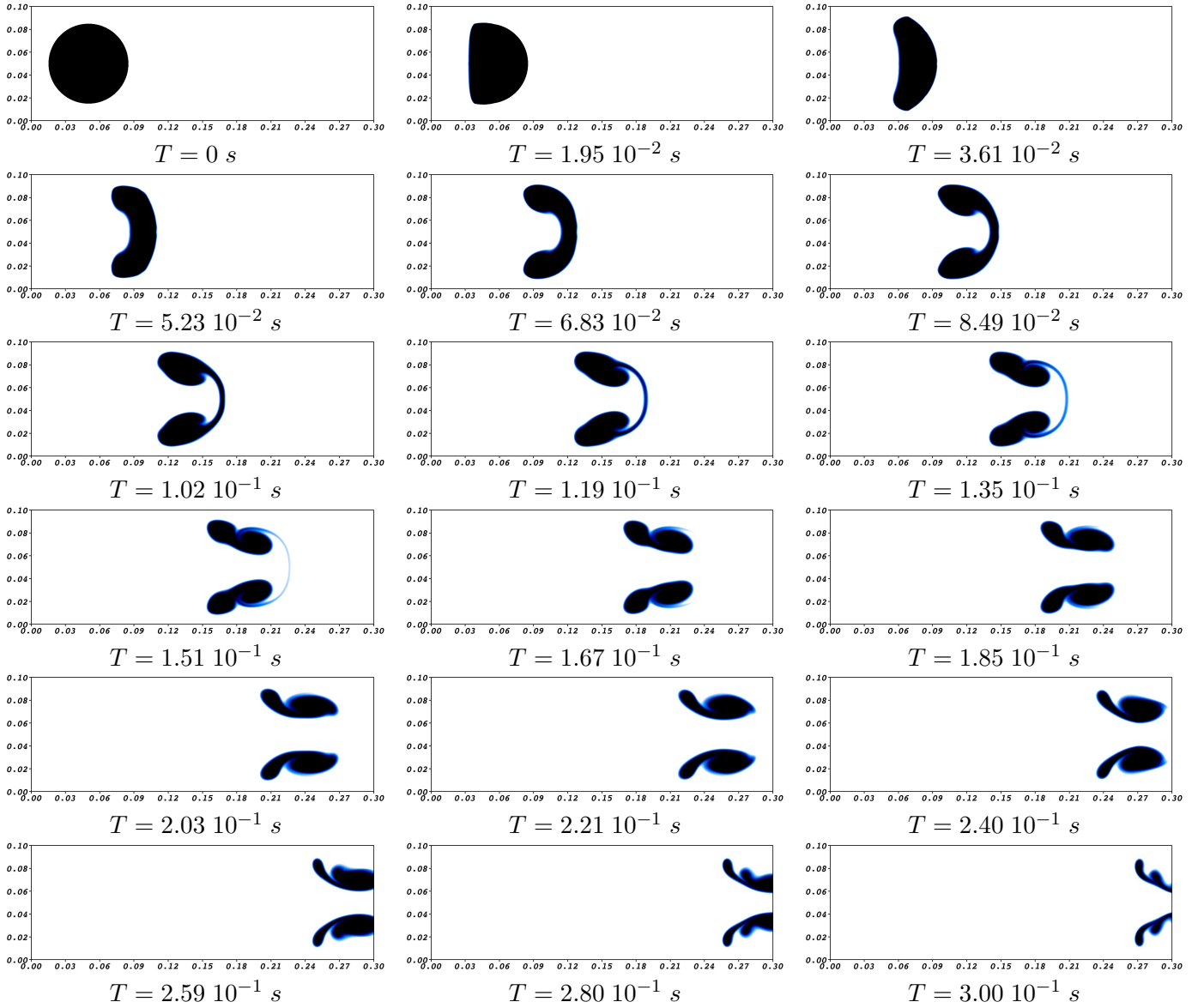


FIG. 6.6 – Fraction volumique pour une interaction choc bulle. Elle est située en $(0.05, 0.05)$, a un rayon de 0.035 m et contient de l'hélium $\rho_{He} = 0.138\text{ kg.m}^{-3}$, $\gamma = 1.6$. Le milieu l'entourant est un gaz parfait $\rho_r = 1.0\text{ kg.m}^{-3}$, $p_r = 1.0\text{ Pa}$, $\gamma = 1.4$. Un choc de Mach $M_S = 1.22$ est positionné en $x = 0\text{ m}$ à $t = 0\text{ s}$ traverse le domaine.

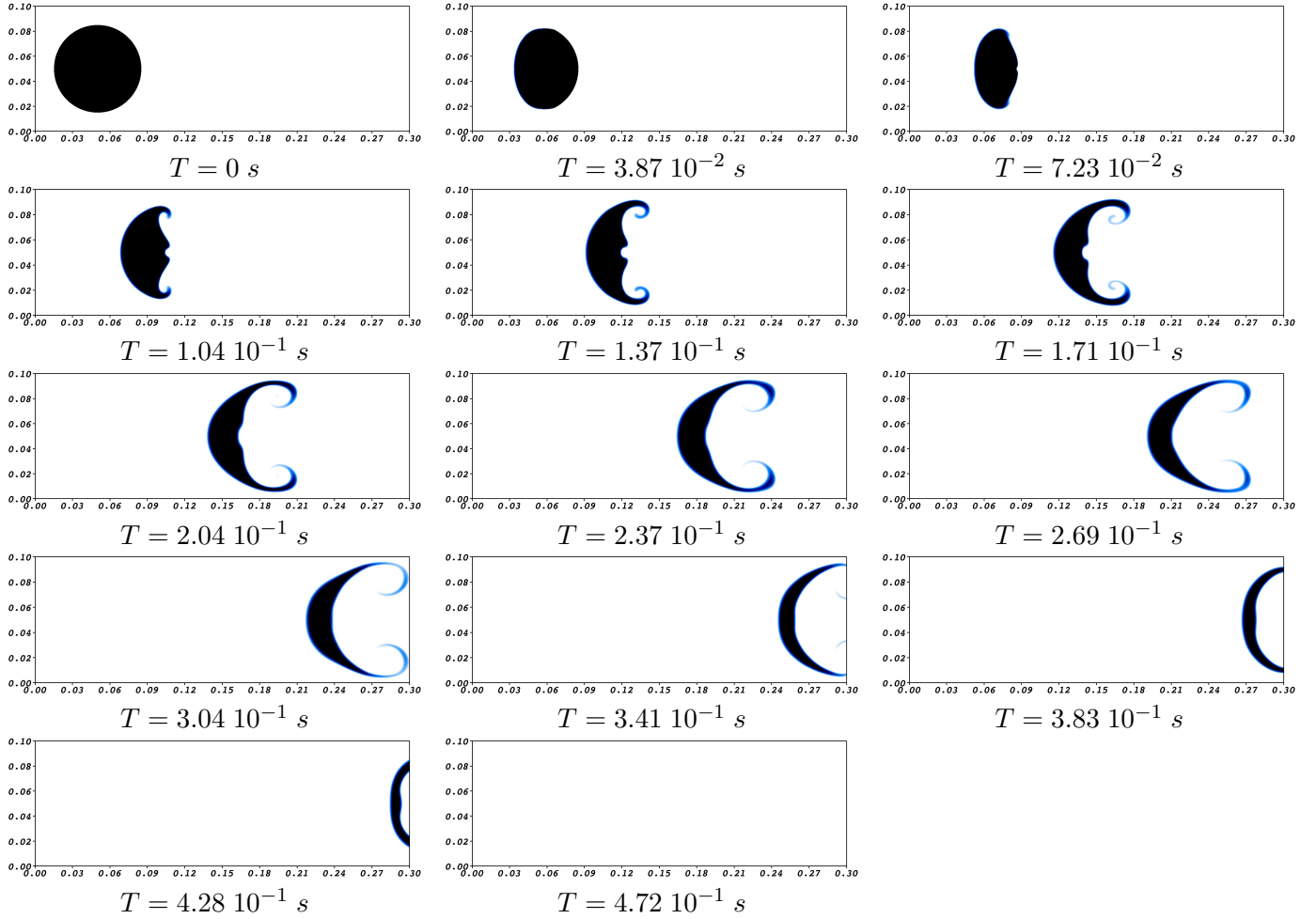


FIG. 6.7 – Fraction volumique pour une interaction choc bulle. Elle est située en $(0.05, 0.05)$, a un rayon de 0.035 m et contient le réfrigérant R22 $\rho_{R22} = 3.154\text{ kg.m}^{-3}$, $\gamma = 1.25$. Le milieu l’entourant est un gaz parfait $\rho_r = 1.0\text{ kg.m}^{-3}$, $p_r = 1.0\text{ Pa}$, $\gamma = 1.4$. Un choc de Mach $M_S = 1.22$ qui est positionné en $x = 0\text{ m}$ à $t = 0\text{ s}$ traverse le domaine.

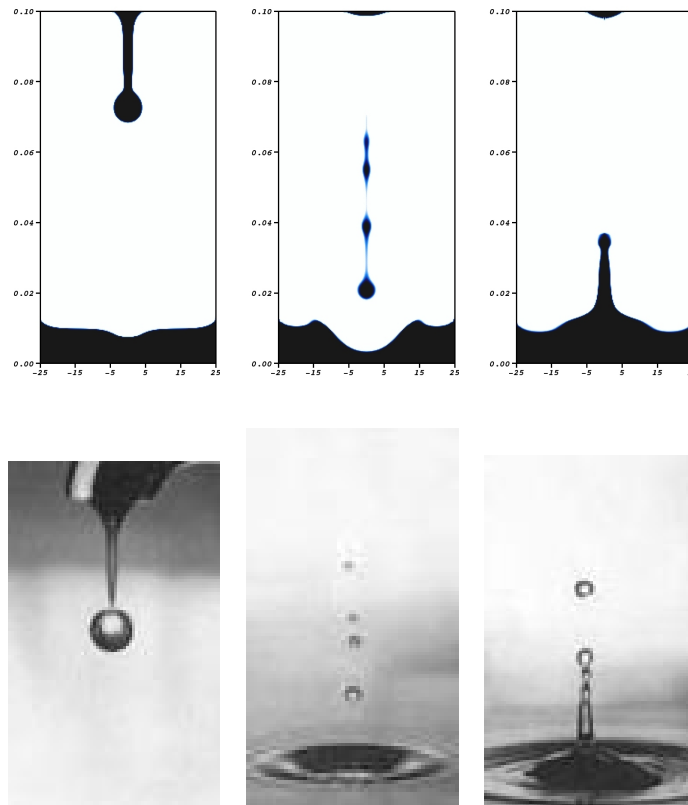


FIG. 6.8 – Comparaison d’une simulation numérique de chute d’une goutte d’eau avec une expérience physique ayant des caractéristiques similaires.

de tension de surface et de viscosité et les simplifications liées à la géométrie axisymétrique. La figure 6.9 montre les résultats obtenus.

Comme les forces de gravité sont supérieures aux forces de tension de surface, la bulle se détache de la paroi supérieure et forme un jet de liquide. La quantité de liquide qui tombe dépend de la valeur de la tension de surface. Plus la tension de surface sera grande, plus la quantité de liquide restant accrochée à la partie supérieure sera importante et plus le jet de liquide aura une forme proche d’une sphère. Le jet de liquide se scinde en 4 petites bulles qui impactent la surface du liquide contenu à la base du domaine. Nous observons ensuite la propagation d’ondes de surface qui viennent se réfléchir sur les parois du domaine et, ensuite, se rejoindre au niveau de l’axe central du domaine formant ainsi un jet vertical. La figure 6.8 permet de comparer les résultats obtenus avec des photos de chute de goutte dont les caractéristiques physiques sont du même ordre de grandeur. Les résultats obtenus respectent bien la physique de l’écoulement.

6.5 Montée d’une bulle en dimension trois

Les développements effectués permettent de traiter les écoulements tridimensionnels. A titre d’illustration, nous réalisons une expérience de remontée de bulle. Cette expérience reprend les caractéristiques données (6.2). Nous les rappelons.

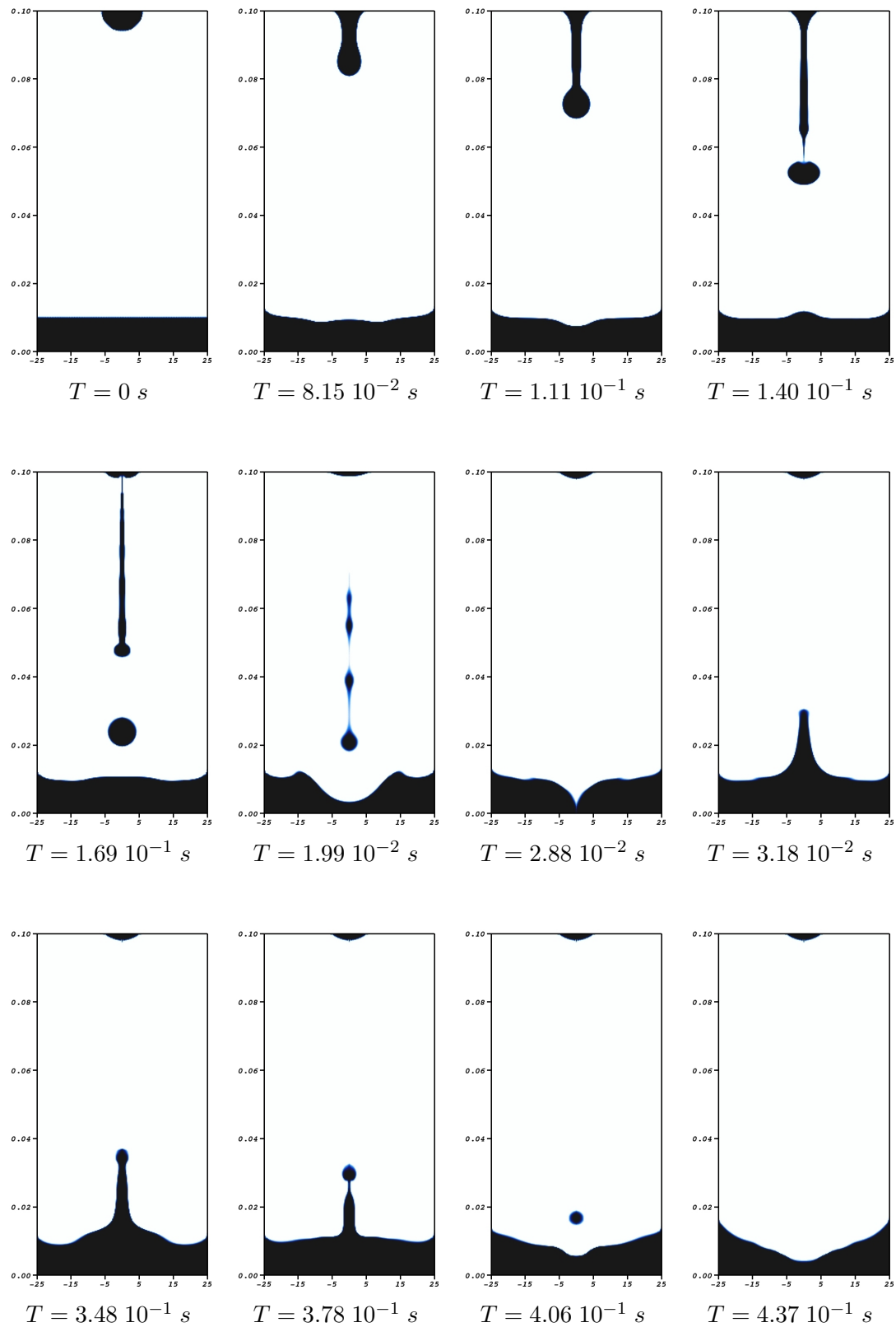


FIG. 6.9 – Chute d'une goutte d'eau.

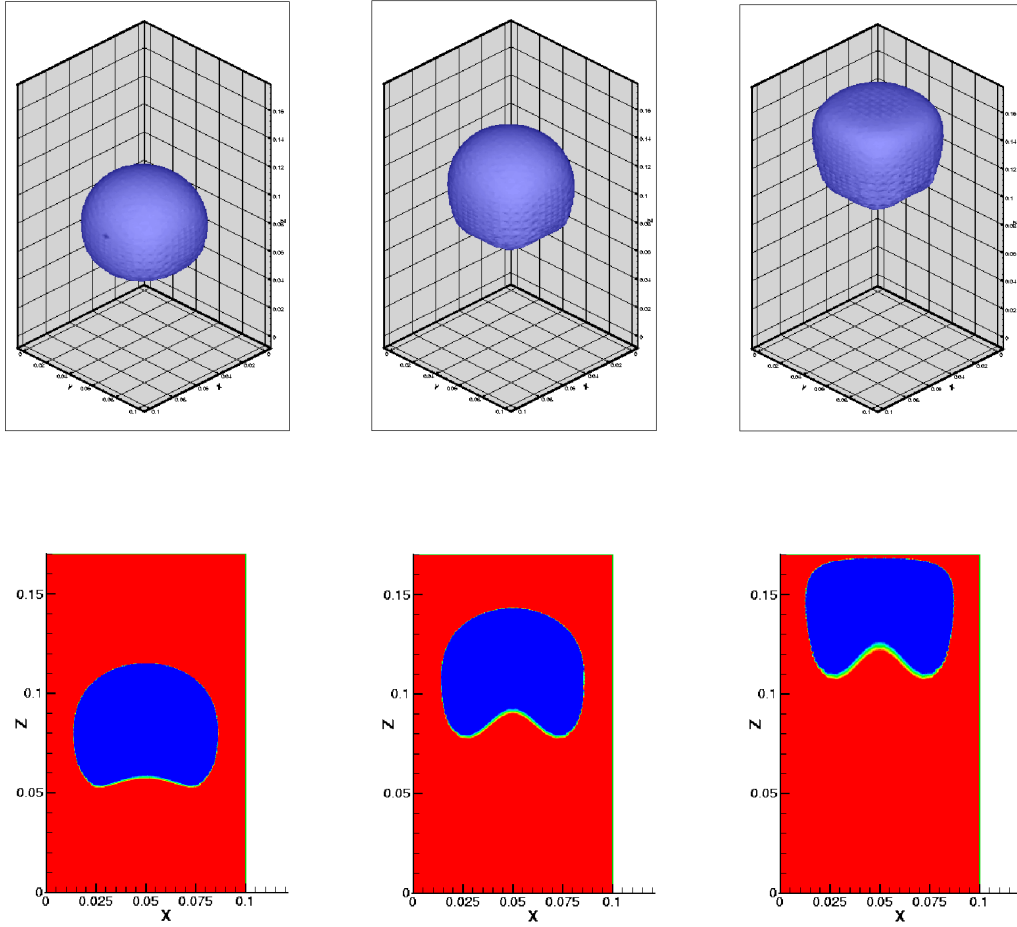


FIG. 6.10 – Montée de bulle en dimension trois

Le domaine est un pavé droit $[0 \text{ m}, 1.6 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 1.6 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 2 \text{ m}]$ contenant une bulle d'air ($\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, $u = 0 \text{ m.s}^{-1}$, $p = 10^5 \text{ Pa}$, $\gamma = 1.4$, $p^\infty = 0 \text{ Pa}$) de centre $x_c = 0 \text{ m}$, $y_c = 0.3 \text{ m}$ et de rayon $R = 0.2 \text{ m}$. Le reste du domaine est occupé par de l'eau ($\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $u = 0 \text{ m.s}^{-1}$, $p = 10^5 \text{ Pa}$, $\gamma = 4.4$, $p^\infty = 610^8 \text{ Pa}$). L'ensemble des fluides est supposé au repos à l'instant initial. La gravité est fixée à $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$. Le coefficient de tension de surface est $\sigma = 0.0073 \text{ N.m}^{-2}$ et la viscosité dynamique est de $1.85 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$ pour l'air et de $1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$ pour l'eau.

Cette expérience est reproduite à l'aide d'un schéma numérique pour le modèle asymptotique (2.82), basé sur le schéma de relaxation (3.44). Le domaine est discrétisé à l'aide de $25 \times 25 \times 50$ points.

La figure 6.10 est en bon accord avec les résultats montrés lors de la convergence en maillage. Cependant, à l'heure actuelle, les possibilités de résolution en dimension reste encore limitées. La reproduction d'expérience est possible mais coûteuse.

6.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons proposé certaines expériences numériques. Elles illustrent les régimes et contextes physiques variés pouvant être traités : faiblement ou fortement compressibles, acoustique ou incompressible, avec ou sans effets capillaires. En particulier, l'utilisation des techniques de calcul parallèle par décomposition de domaine a permis de réaliser des expériences avec une grande précision (11.5 millions d'inconnues et 64 processeurs). A l'aide des techniques de préconditionnement et d'implicitation, nous avons reproduit la chute d'une goutte d'eau sans modifier les tailles caractéristiques de l'expérience. Notre étude montre que, compte tenu de l'évolution des moyens informatiques au cours de ces dernières années, les méthodes d'interfaces diffuses peuvent à présent être envisagées pour la résolution de problèmes industriels complexes.

Conclusion et perspectives

Le travail réalisé traite de la simulation numérique d'écoulements multiphasiques pour des fluides compressibles, non miscibles séparés par des interfaces et soumis aux effets capillaires. Les fluides considérés peuvent présenter des comportements thermodynamiques très différents : fortement ou faiblement compressibles. Cette thèse apporte un certain nombre d'éléments nouveaux sur le développement de méthodes pouvant traiter ce type d'écoulement.

Nous avons considéré des méthodes d'interfaces diffuses, et plus particulièrement celles basées sur le modèle mathématique de Baer Nunziato [12]. Ce dernier a été enrichi en vue de traiter des écoulements multifluides avec effets capillaires. Notre travail s'est appuyé sur une formulation volumique de la tension de surface (CSF [28]). Dans ce contexte, de nouvelles relations de fermeture ont été développées pour les variables interfaciales. Elles permettent de caractériser mathématiquement la surface d'interface séparant les fluides au moyen d'une discontinuité de contact au travers de laquelle la loi de Laplace est vérifiée. Ce modèle, trop coûteux, a fait l'objet d'une dérivation. Le modèle asymptotique obtenu [66, 75] comporte cinq équations en une dimension d'espace. Il est inconditionnellement hyperbolique et entropique.

Les méthodes numériques considérées dans la thèse sont de type volumes finis, définis à l'aide de maillages non structurés. Le développement de schémas numériques peut alors se ramener à la résolution approchée de problème de Riemann monodimensionnel. La difficulté majeure, dans notre contexte, est liée aux termes non conservatifs présents dans les systèmes et dont la définition est ambiguë [41]. En s'appuyant sur les travaux [1, 75, 10], nous avons tout d'abord proposé une généralisation des solveurs équilibre pour tout solveur de type Godunov. Le principe est de construire un schéma numérique pour lequel les opérateurs discrets conservatif et non conservatifs sont isolés et préservent certaines propriétés d'équilibre de l'écoulement.

Nous avons ensuite considéré des solveurs de relaxation. Ils permettent de traiter directement les systèmes non conservatifs en fournissant une régularisation implicite des termes non conservatifs. Ces solveurs nécessitent la définition d'un système du premier ordre avec perturbation singulière dont la solution approche, dans un certain sens, la solution du système initial. Nous avons également montré la stabilité des solveurs de relaxation en exhibant des conditions sous caractéristique de Whitham.

Les solveurs équilibre et de relaxation ont finalement été comparés à l'aide de l'écriture proposée par Gallice dans [43]. Celle-ci permet une généralisation de ces solveurs pour d'autres systèmes non conservatifs où, par exemple, la construction d'un système de relaxation linéairement dégénéré est a priori impossible. Les schémas développés ont été validés à l'aide d'expériences numériques inspirées des travaux de Papin [82] et Hu et Khoo [60].

Le comportement des systèmes multifluides a ensuite été étudié dans les régimes incompressibles. En tenant compte de la faible valeur du nombre de Mach, nous avons montré l'importance de caractériser indépendamment les phénomènes liés aux ondes matérielles et acoustiques à l'aide de filtre. A cet effet, nous avons développé un solveur de relaxation justifiant les techniques de préconditionnement de Turkel. Le formalisme développé est plus général et ouvre une voie dans la construction de schémas numériques pour des systèmes d'équations où la technique proposée par Turkel n'est pas directement applicable.

Les effets capillaires ont été modélisés à l'aide de la méthode CSF. Celle-ci reformule les effets de tension de surface à l'aide d'une force volumique en utilisant une régularisation de la fonction Dirac de l'interface. Nous avons développé des schémas numériques incluant les effets capillaires et éliminant les problèmes liés aux courants parasites [62]. Notre approche est basée sur un solveur de relaxation résolvant l'ensemble des opérateurs différentiels présents dans les modèles. Des preuves mathématiques et expérimentales ont montré que notre solveur résout exactement les discontinuités de contact soumises à la tension de surface.

Une formulation implicite des schémas numériques associés aux solveurs de relaxation a été proposée. Elle est basée sur la linéarisation d'une écriture sous forme intégrale de schéma pour laquelle les contributions convectives et dissipatives sont isolées. Cette méthode présente l'avantage de permettre une plus forte prise en compte de la non linéarité des problèmes puisque seules les singularités présentes dans les termes dissipatifs ne seront pas dérivées.

Quelques simulations numériques ont été menées. Elles ont utilisées, pour la plupart, une approche parallèle basée sur l'échange de messages et la décomposition. Citons l'exemple de deux expériences d'interaction choc bulle de Haas et Sturtevant [54] qui ont été réalisées avec une résolution très fine (12 millions d'inconnues) et à l'aide de 64 processeurs. La chute d'une goutte d'eau a également été considérée. Le comportement de cette expérience est grandement déterminé par le rapport entre les effets de la tension de surface et de la gravité. L'utilisation des techniques de préconditionnement pour les régimes faible Mach a permis de reproduire cette expérience avec une grande précision et sans en modifier les caractéristiques physiques. Ces expériences numériques montrent que, compte tenu de la puissance des moyens de calculs actuels, les méthodes d'interface diffuse peuvent être utilisées dans un contexte industriel.

A l'issue de ce travail, certaines perspectives peuvent être envisagées. Elles sont de natures physique, mathématique et informatique et de difficultés très diverses.

- Le logiciel, dans sa version actuelle, peut être utilisé pour résoudre un grand nombre d'expériences, même à caractère industriel. A ce jour, seules quelques expériences ont été reproduites : interaction choc bulle, chute d'une goutte, montée de bulle. Certaines [39] demandent un grand investissement en temps pour être réalisées. Des travaux futurs pourraient être dédiés à ce sujet.
- Les techniques développées à l'heure actuelle peuvent être facilement adaptées au traitement d'une physique plus complexe. En particulier, en utilisant les travaux de LeMetayer [73], les méthodes permettant les changements de phases pourraient facilement être intégrées à nos développements.
- Des justifications mathématiques complémentaires n'ont pu être apportées en raison d'un manque de temps. En particulier, nous aurions pu montrer l'existence d'inégalités d'entropie pour les systèmes de relaxation que nous avons développés.

- Le dernier point concerne les écoulements à faible Mach, où dans ce domaine, beaucoup d'efforts doivent encore être fournis afin d'améliorer l'analyse des méthodes actuelles. En mettant au point un solveur de relaxation découplant les temps caractéristiques des ondes acoustiques et matérielles, nous avons pu exhiber la condition de stabilité des schémas de type Turkel. D'une part, le formalisme du schéma de relaxation pourrait être considéré dans d'autres contextes physiques où deux échelles cohabitent. D'autre part, un effort doit être fourni concernant l'étude de la stabilité des schémas et en particulier vis à vis des conditions initiales. L'objectif est de faciliter la réalisation d'expériences numériques en améliorant la stabilité des méthodes. Citons pour finir la possibilité d'une comparaison avec les méthodes *dual time stepping*. Le but serait de valider nos méthodes et encore une fois, si cela est possible, d'améliorer leur efficacité.

Bibliographie

- [1] R. Abgrall, How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : a quasi conservative approach. *Journal of Computational Physics*, **125**, 150–160, (1996)
- [2] R. Abgrall, E. Daniel, R. Saurel, O. Le Metayer, B. Nkonga, J. Massoni, Modélisation des phénomènes de transfert thermique et transfert de masse associés au remplissage de réservoirs cryogéniques. Cemracs.
- [3] R. Abgrall, L. Hallo, M. Papin, Etude d'un schéma numérique 1-D pour la simulation d'écoulements diphasiques. Technical report, CEA/CESTA - Laboratoire de Mathématique Appliquées de Bordeaux, 2002.
- [4] R. Abgrall, S. T. Munkejord, M. Papin, Investigation of interfacial pressure closure for isothermal bifluid models. 2005. soumis.
- [5] R. Abgrall, R. Saurel, A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, **150**, 425–467, (1999)
- [6] R. Abgrall, R. Saurel, Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, **186**, 361–396, (2003)
- [7] N. Adrianov, Analytical and numerical investigation of two-phase flows. Phd thesis, Der Fakultat fur Mathematik, 2003
- [8] N. Adrianov, R. Saurel, G. Warnecke, A simple method for compressible multiphase mixtures and interfaces. *Journal of Numerical Methods in Fluids*, **41**(2), 109–131, (2003).
- [9] T. Alazard, Low Mach number limit of the full Navier-Stokes equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **180**(1),1–73, (2006).
- [10] G. Allaire, S. Clerc, S. Kokh, A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. *Journal of Computational Physics*, **181**, 557–616, (2002)
- [11] P. Aussillous, D. Quéré, Bubbles creeping in a viscous liquid along a slightly inclined plane. *Europhys. Lett.*, **59**(3), 370–376, (2002)
- [12] M.R. Baer, J.W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flows* **12** (1986) 861-889
- [13] P. Bagnerini, F. Coquel, C. Migneron, S. Rouy, Un principe de relaxation sur le taux de vide dans les modèles diphasiques moyennés. *Matapli*, **162**, 43–58, (2002).
- [14] M. Baudin, C. Berthon, F. Cocquel, R. Masson. Q. H. Tran, A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law. *Numer. Math.*, **99**, 411–440, (2005)

- [15] N. Bedjaoui, L. Sainsaulieu, Analysis of non hyperbolic system modeling stratified flows. The effects of viscosity and relaxation. Meth. in Applied Science, 1995.
- [16] C. Berthon, Inégalités d'entropie pour un schéma de relaxation. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **340**, 63–68, (2005)
- [17] C. Berthon, Stability of the MUSCL schemes for the Euler equations, Comm. Meth. Sci., **3**, 133–158, (2005)
- [18] C. Berthon, Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes, J. Comput. Phys., **218**, 495–509, (2006).
- [19] C. Berthon, Simulations numériques de quelques problèmes hyperboliques, Rapport d'habilitation à diriger des recherches, Université de Bordeaux 1, (2006)
- [20] C. Berthon, B. Braconnier, B. Nkonka, Numerical approximation of a degenerated non-conservative multifluid model : relaxation scheme. International Journal for Numerical methods in fluids, **48**(1), 85–90, (2005)
- [21] C. Berthon, M. Breuss, M. O. Titeux. A relaxation scheme for pressureless gas dynamics Num. Method Partial Diff. Equations, **22**, 484–505, (2006).
- [22] C. Berthon, F. Coquel, Travelling wave solutions of a convective diffusive system with first and second order terms in nonconservation form. Hyperbolic problems : theory, numerics, applications, **129**, Birkhauser, Basel, 47–54, (1999).
- [23] C. Berthon, B. Nkonga, Multifluid numerical approximations based on a multipressure formulation. Computers and Fluids, **36**, 467–479
- [24] C. Berthon, B. Nkonga, Numerical model of a compressible multi-fluid fluctuating flow, Inter. J. finite volumes, **2**(2), (2005)
- [25] F. Bouchut, An introduction to finite volume methods for hyperbolic systems of conservation laws with source. Livre CEA-EDF-INRIA Ecoulements peu profonds à la surface libre, 2002.
- [26] F. Bouchut, Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources. Frontiers in Mathematics series, Birkhauser, (2004).
- [27] F. Bouchut, B. Braconnier, F. Coquel, B. Nkonga, M. Papin, M. Postel, N. Seguin, Q. H. Tran, SIPIPE - Simulation of slug flows in pipelines. CEMRACS 2003.
- [28] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach, A Continuum Method for Modeling Surface Tension. Journal of Computational Physics, **100**, 335–354, (1992)
- [29] P. Cargo, G. Gallice, Roe matrices for ideal MHD and systematic construction of Roe Matrices for systems of conservation laws. Journal of Computational Physics, **136**, 446–466, (1997)
- [30] F. Caro, Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur, Rapport de thèse, Ecole polytechnique, (2004)
- [31] R. Carpentier, Le schéma $\beta\gamma$ en axisymétrique. Technical report, INRIA, 1999.
- [32] C. Chalons, Bilans d'entropie discrets dans l'approximation numérique des chocs non classiques. Application aux équations de Navier-Stokes multi-pression 2D et quelques systèmes visco-capillaires. Rapport de thèse, Ecole polytechnique (Paris, France), 2002.
- [33] G. Q. Chen, C. D. Levermore, T. P. Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxations terms and entropy, Comm. Pure Appl. Math., **47**, 787–830, (1995)

- [34] A. Chinnayya, Construction de modèles et de méthodes numériques pour les écoulements multiphasiques à phases compressibles. Application à la simulation des ondes de détonation dans les matériaux hautement énergétiques. PhD thesis, Université de Provence, 2002.
- [35] A. Chinnayya, E. Daniel, R. Saurel, G. Baudin, C. Le Gallic, A new concept for the modeling of detonation waves in multiphase mixtures. In 12th International Detonation Symposium, San Diego, USA, Aout 2002.
- [36] F. Coquel, T. Gallouet, J.M. Hérard, N. Seguin, Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **334**, 927–932, (2002)
- [37] F. Coquel, B. Perthame, Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **35**, 2223–2249, (1998)
- [38] E. Daniel, R. Saurel, M. Larini, J.C. Loraud, A multiphase formulation for two-phase flows. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, **4**, 269–280, (1994)
- [39] L. Duchemin, Quelques problèmes fortement non linéaires de surface libre et leur résolution numérique. Rapport de thèse, Université d’Aix-Marseille 2, (2001)
- [40] D. A. Drew, S. L. Passman, Theory of multicomponent fluids. In *Applied Mathematics Sciences*, volume 135. Springer, 1998.
- [41] P. Le Floch, G. Dalmaso, F. Murat, Definition and weak stability of non-conservative products. *J. Math. Pures Appl.*, **74**, 483–548, (1995).
- [42] G. Gallice, Schéma de Roe généralisés : positivité et entropie. Technical report, CEA/CESTA - Laboratoire de Mathématiques Appliqués de Bordeaux, 2000.
- [43] G. Gallice, Approximation numérique de systèmes hyperboliques non-linéaires conservatifs ou non-conservatifs. Habilitation à diriger des recherches, Université de Bordeaux 1, (2002)
- [44] T. Gallouet, J. M. Hérard, N. Seguin, Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Math. Models and Methods in Applied Sciences*, **14**(5), 663–700, (2004).
- [45] E. Godlewski, P. A. Raviart, Hyperbolic systems of conservation laws. Collection *Mathématiques et Applications de la SMAI*, Ellipses, Paris (1991)
- [46] E. Godlewski, P. A. Raviart, Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. *Applied Mathematical Sciences*, **118**, Springer, (1996).
- [47] S. K. Godunov, A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sb.*, **47**, 357–393, (1959)
- [48] S. K. Godunov, Lois de conservation et intégrales d’énergie des équations hyperboliques. In P. A. Raviart, C. Carasso, D. Serre, editors, *Nonlinear hyperbolic problems*, volume 1270 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 135–149, (1987)
- [49] A. Goudjo, J. A. Desideri, Un schéma de volume-finis décentré pour la résolution des équations d’Euler en axisymétrie. Rapport de recherche INRIA 1005, (1989).
- [50] B. Graille, Modélisation de mélanges gazeux ionisés dissipatifs. PhD thesis, Ecole polytechnique, 2004.

- [51] D. Gueyffier, J. Li, A. Nadim, R. Scardovelli, S. Zaleski, Volume-Of-Fluid Interface tracking with Smoothed Surface Stress Methods for Three-Dimensional Flows, *Journal of Computational Physics*, **152**, 423–456, (1999).
- [52] H. Guillard, A. Murrone, A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *J. Comput. Phys.*, **202**(2), 664–698, (2005).
- [53] H. Guillard, A. Murrone, On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit. 2. Godunov type schmes. *Comput. Fluids*, **33**(4), 655–675, (2004).
- [54] J. F. Haas, B. Sturtevant, Interaction of a weak shock wave with cylindrical and spherical gas inhomogeneities, *J. Fluid Mech.*, **181**, 41–76, (1987)
- [55] A. Harten, P.D. Lax, B. Van Leer, On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM*, **25**(1), 33–61, (1983)
- [56] B. T. Hayes, P.G LeFloch, Non-classical schocks and kinetic relations : stricly hyperbolic systems, *SIAM J. Math. Anal.*, **139**, 1–56, (1997).
- [57] P. Hénon, P. Ramet, J. Roman, PaStiX : A High-Performance Parallel Direct Solver for Sparse Symmetric Definite Systems. *Parallel Computing*, **28**(2),301–321, (2002).
- [58] C.W. Hirt, B. D. Nichols, Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.* **39**, 201-255, (1981).
- [59] T. Y. Hou, P. Le Floch, Why non-conservative schemes converge to the wrong solution : Error analysis. *Mathematics of Computation*, **62**(206),497–53, (1994).
- [60] X. Y. Hu, B. C. Khoo, An interface interaction method for compressible multifluids. *Journal of Computational Physics*, **198**, 35–64, (2004).
- [61] D. Jamet, O. Lebaigue, N. Courtis, J. M. Delhayé, The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid-vapor flows with phase change. *Journal of Computational Physics*, **169**, 3002–3024, (2001).
- [62] D. Jamet, D. Torres, J.U. Brackbill, On the Theory and Computation of Surface Tension : The Elimination of Parasitic Currents through Energy Conservation in the Second-Gradient Method. *Journal of Computational Physics*, **182**, 262–276, (2002).
- [63] S. Jin, H. Liu, Diffusion limit of a hyperbolic system with relaxation. *Methods Appl. Anal.*, **5**(3), 317–334, (1998).
- [64] S. Jin, H. Liu, A diffusive subcharacteristic condition for hyperbolic systems with diffusive relaxation. *Transp. Theory Stat. Phys.*, **29**(3-5), 583–593, (2000). s
- [65] S. Jin, Z. P. Xin : The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.* **48**, 235–278, (1995).
- [66] A.K. Kapila, R. Menikoff, D.S. Stewart : Two-Phase Modeling of Deflagration to Detonation Transition in Granular Materials : Reduced Equations. *Physics of Fluids*, **13**, 3002–3024, (2001).
- [67] S. Karni, A multicomponent flow calculation by a consistant primitive algorithm. *Journal of Computational Physics*, **112**, 31–43, (1994).
- [68] M. H. Lallemand, R. Saurel, Pressure relaxation procedures for multiphase compressible flows. Technical Report 4038, INRIA, 2000.
- [69] L. Landau, E. Lifschitz, 'Physique Théorique, Mécanique des Fluides', volume tome 6, Mir edition, 1989.

- [70] P. D. Lax, B. Wendroff, Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**, 217–237, (1960).
- [71] B. van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method, *J. Comput. Phys.*, **32**, 101–136, (1979).
- [72] P.G. LeFloch, Entropy weak solutions to non-linear hyperbolic systems under non conservation form, *Comm. Part. Diff. Equa.*, **13**, 669–727, (1988).
- [73] O. Le Metayer, Modélisation et résolution de la propagation de fronts perméables. Applications aux fronts d’évaporation et de détotation. Rapport de thèse, Université de Provence, Aix-Marseille 1, (2003).
- [74] T.P. Liu : Hyperbolic conservation laws with relaxation. *Comm. Math. Phys.*, **108**, 153–175, (1987).
- [75] J. Massoni, R. Saurel, B. Nkonga and R. Abgrall : Proposition de méthodes et modèles eulériens pour les problèmes à interfaces entre fluides compressibles en présence de transfert de chaleur. *Journal of Heat and Mass Transfer*, **45**, No. 6, 1287–1307, (2001).
- [76] A. Murrone, Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach. PhD thesis, U. Aix-Marseille 1, 2003.
- [77] B. Nkonga, On the conservative and accurate CFD approximations for moving meshes and moving boundaries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **190**, 1801–1825, (2000)
- [78] B. Nkonga, Implicit linearity preserving type scheme for moving meshes, computer and mathematics with applications. *Comput. and Math. with Applications*, **39**, 201–220, (2000)
- [79] B. Nkonga, R. Abgrall, R. Saurel, Efficient numerical approximation of compressible multi-material flow for unstructured meshes, *Computers Fluids*, **32**(4), 571–605, (2003).
- [80] B. Nkonga, P. Charrier, Generalized parcel method for dispersed spray and message passing strategy on unstructured meshes. *Parrallel Computing*, **28**, 369–398, (2002)
- [81] S. Osher, J. Sethian, Front propagating with curvature dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.*, **78**, 12–49, (1988).
- [82] M. Papin, Contributions à la modélisation d’écoulements hypersoniques particuliers. Rapport de thèse, Université de Bordeaux 1, (2005).
- [83] M. Papin, Etude d’un schéma numérique 1-D pour la simulation d’écoulements diphasiques. Rapport de stage MATMECA/DEA MACS, Université de Bordeaux 1, 2002.
- [84] M. Papin, L. Hallo, Construction d’un solveur analytique pour la résolution de problèmes de Riemann bifluides 1D application à l’extension aux problèmes de Riemann complexes du modèle DEM. Technical Report LRC-04-02, CEA/CESTA- Laboratoire de Mathématiques Appliqués de Bordeaux, 2004
- [85] G. Perigaud, R. Saurel : A compressible flow model with capillary effects. *Journal of Computational Physics*, **209**, 139–178, (2005).
- [86] S. Popinet, S. Zaleski, A front tracking algorithm for accurate representation of surface tension, *Int. Journ. for Num. Meth. in Fluids*, **30**, 775–793, (1999)
- [87] S. Popinet, S. Zaleski, Bubble collapse near a solid boundary : a numerical study of the influence of viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*, **464**, 137–163, (1999)

- [88] J. Quirk, S. Karni, On the dynamics of a shock-bubble interaction. *J. Fluid Mech.*, **318**, 129–163, (1996)
- [89] P. A. Raviart, L. Sainsulieu, A nonconservative hyperbolic system modelling spray dynamics. Part 1. Solution of the Riemann problem. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **5**(3), 297–333, (1995).
- [90] R. Saurel, R. Abgrall, A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, **21**(3), 1115–1145, (1999).
- [91] R. Saurel, S. Gavriluk, F. Renaud, A multiphase model with internal degrees of freedom : Application to shock-bubble interaction. *J. Fluid Mech.* **21**(3), 1115–1145, (1999).
- [92] R. Saurel, O. Le Metayer, A multiphase model for compressible flows with interface, shocks, detonation waves and cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, **431**, 239–271, (2001)
- [93] N. Seguin, Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques, PhD thesis, Université de Provence, Aix-Marseille 1, 2002
- [94] D. Serre, *Systèmes de Lois de Conservation*, Diderot, Paris, (1996).
- [95] H.B. Stewart, B. Wendroff, Two-phase flow : Models and methods. *J. Comput. Phys.*, **56**, 363–409, (1984).
- [96] I. Suliciu, Energy estimates in rate-type thermo-viscoplasticity. *Int. J. Plast.*, **14**, No. 1-3, 227–224, (1998).
- [97] E. F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag, Second Edition, June (1999)
- [98] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J. Comput. Phys.*, **72**, 277–298, (1987).
- [99] S. O. Unverdi, G. Tryggvason, A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows, *Journal of Computational Physics*, **100** (1), 25–37, (1992).
- [100] J. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, New-York, (1974).

Annexe A

Rappels et définitions dans le cas de systèmes conservatifs

Les principales propriétés des solveurs de Riemann conservatifs sont rappelées. Pour cela, nous considérons des problèmes de Riemann s'écrivant sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\mathbf{W}) + \partial_x(\mathbf{F}) = 0 \\ \mathbf{W}(t = 0, x < 0) = \mathbf{W}^L \\ \mathbf{W}(t = 0, x > 0) = \mathbf{W}^R \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\xi \partial_\xi(\mathbf{W}) + \partial_\xi(\mathbf{F}) = 0 \\ \mathbf{W}(\xi = -\infty) = \mathbf{W}^L \\ \mathbf{W}(\xi = +\infty) = \mathbf{W}^R \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

La résolution exacte de ce type de problème de Riemann conservatif est difficile à cause de la non linéarité dans le flux \mathbf{F} . Comme certaines ondes du système sont vraiment non linéaires, la résolution passera par la recherche de l'intersection de courbes d'Hugoniot utilisant une méthode du point fixe. En pratique, cette technique est coûteuse et ne sera pas abordée dans cette thèse. Seuls des solveurs approchés seront étudiés.

Pour les solveurs approchés du problème (A.1), les notions de consistance avec les lois de conservation et avec la loi d'entropie sont définies de la manière suivante :

Définition 7 Soit \mathcal{V}^h une solution approchée du problème de Riemann (A.1). On dit que \mathcal{V}^h est consistant avec la forme intégrale de la loi de conservation (A.1) si et seulement si l'égalité suivante est vérifiée pour τ suffisamment petit :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathcal{V}^h \left(\frac{x}{\tau}, \mathbf{W}^L, \mathbf{W}^R \right) dx = \frac{\Delta x}{2} (\mathbf{W}^L + \mathbf{W}^R) - \tau \Delta \mathbf{F} \quad (\text{A.2})$$

où $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}^R - \mathbf{F}^L = \mathbf{F}(\mathbf{W}^R) - \mathbf{F}(\mathbf{W}^L)$

Définition 8 On dit que \mathcal{V}^h est consistant avec la forme intégrale de l'inégalité d'entropie (3.2) si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée pour τ suffisamment petit :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \eta \left(\mathcal{V}^h \left(\frac{x}{\tau}, \mathbf{W}^L, \mathbf{W}^R \right) \right) dx \leq \frac{\Delta x}{2} (\eta(\mathbf{W}^L) + \eta(\mathbf{W}^R)) - \tau \Delta [q(\mathbf{W})] \quad (\text{A.3})$$

Dans notre étude, seuls des solveurs de Riemann donnant des solutions constantes par morceaux seront considérées. Une nouvelle propriété de consistance est définie afin d'assurer la conservation de la solution. La classe de solveur engendrée est recouverte par la définition (7).

Définition 9 Soit \mathcal{V}^h une solution approchée constante par morceaux du problème de Riemann (3.5). On dit que \mathcal{V}^h vérifie la propriété de consistance continue lorsque pour tous réels ξ_1 et ξ_2 tels que $\xi_1 < \xi_2$, l'égalité suivante est vraie :

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathcal{V}^h(\xi) d\xi = \xi_2 \mathcal{V}^h(\xi_2) - \xi_1 \mathcal{V}^h(\xi_1) - \mathbf{F} [\mathcal{V}^h(\xi_2)] + \mathbf{F} [\mathcal{V}^h(\xi_1)] \quad (\text{A.4})$$

On notera m le nombre de discontinuité de la solution approchée, λ_k ($k = \{1 \dots m\}$) les valeurs de ξ où elle est discontinue et $(\delta \mathcal{V}^h)_k$ son saut.

Proposition 18 Le flux d'une solution approchée satisfaisant la propriété de consistance continue (9) s'écrit en $\xi = 0$:

$$\mathbf{F} [\mathcal{V}^h(\xi = 0)] = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}(\mathbf{W}_g) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_d) - \sum_k |\lambda_k| (\delta \mathcal{V}^h)_k \right) \quad (\text{A.5})$$

Démonstration :

La relation de consistance continue appliquée en $\xi_1 = -2\lambda_1$ et $\xi_2 = 0$ puis en $\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = 2\lambda_m$ conduit aux égalités :

$$\begin{cases} \sum_k \lambda_k^- (\delta \mathcal{V}^h)_k = \mathbf{F} [\mathcal{V}^h(0)] - \mathbf{F}(\mathbf{W}_g) \\ \sum_k \lambda_k^+ (\delta \mathcal{V}^h)_k = \mathbf{F}(\mathbf{W}_d) - \mathbf{F} [\mathcal{V}^h(0)] \end{cases}$$

où nous avons introduit les opérateurs :

$$x^- = \frac{x - |x|}{2}, \quad x^+ = \frac{x + |x|}{2}$$

La preuve finale est obtenue en effectuant la demi-somme des deux égalités précédentes.

Afin d'introduire les définitions de solveur et de schéma de type Godunov, la solution approchée du problème de Riemann (A.1) pour la variable $\xi = (x - x_{i+1/2})/(t - t^n)$ et pour les conditions initiales gauche $\mathbf{W}^L = \mathbf{W}_i^n$ et droite $\mathbf{W}^R = \mathbf{W}_{i+1}^n$ sera notée $\mathcal{V}_{i+1/2}^h$.

Définition 10 Si le solveur de Riemann \mathcal{V}^h est consistant avec la forme intégrale de la loi de conservation, alors le schéma :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \mathcal{V}_{i-1/2}^h(x, t^{n+1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathcal{V}_{i+1/2}^h(x, t^{n+1}) dx \right) \quad (\text{A.6})$$

est appelé schéma de type Godunov. On dira que \mathcal{V}^h est un solveur de type Godunov.

Si le solveur de Riemann est consistant avec l'inégalité d'entropie, alors le schéma (3.2) est appelé schéma de type Godunov entropique. On dira que \mathcal{V}^h est un solveur de type Godunov entropique.

Un calcul simple permet de montrer que les schémas de type Godunov s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i,i+1}^n - \phi_{i,i-1}^n) \\ \phi_{i,i+1}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} (\mathcal{V}_{i+1/2}^n(x, t^{n+1}) - \mathbf{W}_i^n) dx \\ \phi_{i,i-1}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} (\mathcal{V}_{i-1/2}^n(x, t^{n+1}) - \mathbf{W}_i^n) dx \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Corollaire 1 Pour les solveurs vérifiant la propriété de consistance continue (9), les schémas de type Godunov s'écrivent :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) \quad (\text{A.8})$$

où $\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \mathbf{F} [\mathcal{V}_{i+1/2}^h(0)]$ est donné par la relation (18).

Nous abordons maintenant une comparaison des solveurs acoustique, HLLC et de relaxation.

Comparaison et propriétés du schéma de relaxation pour les équations d'Euler

le schéma HLLC

Proposition 19 Soient s_1 , s_2 et s_3 trois réels approchant respectivement les valeurs propres $u - c$, u et $u + c$. On suppose que ces réels vérifient :

$$\begin{cases} s_1 < s_2 < s_3 \\ s_1 < \frac{\rho^R u^R (u^R - s_3) - \rho^L u^L (u^L - s_1) + p^R - p^L}{\rho^R (u^R - s_3) - \rho^L (u^L - s_1)} < s_3 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

alors il existe une unique solution approchée constante par morceaux :

$$(\mathbf{W}^h, \Pi^h) = \begin{cases} (\mathbf{W}^L, \pi^L) = (\rho^L, \rho^L u^L, E^L, p^L) & \text{si } \xi \in]-\infty, s_1] \\ (\mathbf{W}^*, \pi^*) = (\rho^*, \rho^* u^*, E^*, \pi^*) & \text{si } \xi \in]s_1, s_2] \\ (\mathbf{W}^{**}, \pi^*) = (\rho^{**}, \rho^{**} u^*, E^{**}, \pi^*) & \text{si } \xi \in]s_2, s_3] \\ (\mathbf{W}^R, \pi^R) = (\rho^R, \rho^R u^R, E^R, p^R) & \text{si } \xi \in]s_3, +\infty[\end{cases} \quad (\text{A.10})$$

satisfaisant les relations de saut de Rankine Hugoniot.

Démonstration :

- Nous établissons les conditions nécessaires. Supposons que la solution (\mathbf{W}^h, Π^h) existe. La relation de saut pour la densité au niveau de la discontinuité de contact impose $s_2 = u^*$. Ensuite, la conservation de la masse et de la quantité de mouvement au travers des trois discontinuités donne :

$$\begin{cases} (\rho^* - \rho^L)s_1 + (\rho^{**} - \rho^*)u^* + (\rho^R - \rho^{**})s_3 = \rho^R u^R - \rho^L u^L \\ (\rho^* u^* - \rho^L u^L)s_1 + (\rho^{**} - \rho^*)(u^*)^2 + (\rho^R u^R - \rho^{**} u^*)s_3 = \rho^R (u^R)^2 - \rho^L (u^L)^2 \end{cases}$$

La vitesse u^* est obtenue en combinant les deux équations précédentes de manière à faire disparaître les inconnues de densités ρ^* et ρ^{**} . Il vient :

$$u^* = \frac{\rho^R u^R (u^R - s_3) - \rho^L u^L (u^L - s_1) + p^R - p^L}{\rho^R (u^R - s_3) - \rho^L (u^L - s_1)} \quad (\text{A.11})$$

La valeur de la pression π^* est déterminée à l'aide des relations de saut à travers l'onde $u + c$ pour la masse et la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} s_3(\rho^R - \rho^{**}) = \rho^R u^R - \rho^{**} u^* \\ s_3(\rho^R u^R - \rho^{**} u^*) = \rho^R (u^R)^2 - \rho^{**} (u^*)^2 + p^R - \pi^* \end{cases}$$

La résolution de ce système en la variable π^* donne :

$$\pi^* = p^R + \rho^R (u^R - u^*)(u^R - s_3) \quad (\text{A.12})$$

Les relations de saut pour la conservation de la masse pour les ondes $u - c$ et $u + c$ fournissent les densités :

$$\rho^* = \rho^L \frac{u^L - s_1}{u^* - s_1}, \quad \rho^{**} = \rho^R \frac{u^R - s_3}{u^* - s_3} \quad (\text{A.13})$$

La même démarche pour l'équation d'énergie du fluide conduit à :

$$E^* = \frac{E^L (u^L - s_1) + p^L u^L - \pi^* u^*}{u^* - s_1}, \quad E^{**} = \frac{E^R (u^R - s_3) + p^R u^R - \pi^* u^*}{u^* - s_3} \quad (\text{A.14})$$

En supposant l'existence d'une solution (\mathbf{W}^h, Π^h) , toutes les inconnues qui la composent ont pu être définies de manière unique.

- Nous montrons que la solution définie précédemment satisfait toutes les conditions nécessaires : toutes les relations de saut doivent être vérifiées. Comme la vitesse $s_2 = u^*$ et la pression sont conservées à la discontinuité de contact, toutes les conditions de Rankine Hugoniot pour cette onde sont satisfaites. Par construction, les constantes ρ^* , ρ^{**} , E^* et E^{**} permettent de vérifier les relations de saut. Il faut montrer que la valeur de la pression obtenue à partir des relations de saut pour l'onde $u - c$:

$$\pi^* = p^L + \rho^L (u^L - u^*)(u^L - s_1) \quad (\text{A.15})$$

est compatible avec la relation (A.12). Le calcul de la différence entre ces deux expressions de π^* prouve leur égalité. Pour la mise en oeuvre numérique, il sera préférable d'utiliser une relation centrée pour la pression :

$$\pi^* = \frac{1}{2} (p^R + p^L + \rho^R(u^R - u^*)(u^R - s_3) + \rho^L(u^L - u^*)(u^L - s_1)) \quad (\text{A.16})$$

Schéma de relaxation

Proposition 20 *Pour les équations d'Euler, on définit le système de relaxation :*

$$\begin{cases} \partial_t(\mathbf{W}) + \partial_x(\mathbf{F}(\mathbf{W}, \pi)) = 0 \\ \partial_t(\pi) + u\partial_x(\pi) + \frac{a^2}{\rho}\partial_x(u) = 0 \\ \partial_t(a) + u\partial_x(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

avec : $\mathbf{W} = (\rho, \rho u, E)^T$ et $\mathbf{F}(\mathbf{W}, \pi) = (\rho u, \rho u^2 + \pi, (E + \pi)u)^T$. Le problème de Riemann associé à ce système est constitué des conditions initiales :

$$\begin{cases} (\mathbf{W}, \pi, a) = (\mathbf{W}_g, p_g, \rho_g c_g + \delta^2) & \text{pour } t = 0 \text{ et } x < 0 \\ (\mathbf{W}, \pi, a) = (\mathbf{W}_d, p_d, \rho_d c_d + \delta^2) & \text{pour } t = 0 \text{ et } x > 0 \end{cases}$$

avec δ est un petit réel. Toutes les ondes de ce système sont linéairement dégénérées.

Démonstration :

La matrice jacobienne associée au système de relaxation exprimée en fonction des variables non conservatives $(\rho, u, \epsilon, \pi, a)$ est :

$$A_R = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{\rho} & u & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho^2}{a^2} & 0 & u & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{a} & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Cette matrice admet les valeurs propres $u - \frac{a}{\rho}$, u , $u + \frac{a}{\rho}$. Les vecteurs propres à droite associés sont :

$$r_{u-a/\rho} = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ -a \\ \pi \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix}, r_{u,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r_{u,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r_{u,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r_{u+a/\rho} = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ a \\ \pi \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Les invariants de Riemann associés à chacune des ondes sont donnés dans le tableau qui suit :

$u + \frac{a}{\rho}$	a	$u + \frac{a}{\rho}$	$\pi - au$	$\pi^2 - 2a^2\epsilon$
u	u	π		
$u - \frac{a}{\rho}$	a	$u - \frac{a}{\rho}$	$\pi + au$	$\pi^2 - 2a^2\epsilon$

(A.20)

Tous les champs sont linéairement dégénérés. Si il existe une solution à ce système, elle sera constante par morceaux et les invariants de Riemann seront conservés pour chacune des discontinuités.

Proposition 21 Soient a^{L*1} , a^{R*1} , a^{L*2} et a^{R*2} des réels donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{L*1} = \max(-\rho^L \Delta u, 0) \\ a^{R*1} = \max(-\rho^R \Delta u, 0) \\ a^{L*2} = \sqrt{\max(0, \rho^L \Delta p - a^{R*1}(a^{L*1} + \rho^L \Delta u))} \\ a^{R*2} = \sqrt{\max(0, -\rho^R \Delta p - a^{L*1}(a^{R*1} + \rho^R \Delta u))} \end{array} \right.$$

Lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^L > \max(a^{L*1}, a^{L*2}) \\ a^R > \max(a^{R*1}, a^{R*2}) \end{array} \right. \quad (A.21)$$

Le système de relaxation (A.17) admet une unique solution constante par morceaux composée des quatre états constants :

$$\mathbf{W}^L = \begin{pmatrix} \rho^L \\ u^L \\ \epsilon^L \\ \pi^L \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \epsilon^* \\ \pi^* \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^{**} = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \epsilon^{**} \\ \pi^* \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^R = \begin{pmatrix} \rho^R \\ u^R \\ \epsilon^R \\ \pi^R \\ a^R \end{pmatrix} \quad (A.22)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{a^R u^R + a^L u^L}{a^L + a^R} + \frac{\pi^L - \pi^R}{a^L + a^R} \\ \pi^* = \frac{a^L p^R + a^R p^L}{a^L + a^R} + \frac{a^L a^R (u^L - u^R)}{a^L + a^R} \\ \epsilon^* = \epsilon^L + \frac{(\pi^*)^2 - (p^L)^2}{2(a^L)^2}, \quad \epsilon^{**} = \epsilon^R + \frac{(\pi^{**})^2 - (p^R)^2}{2(a^R)^2} \\ \frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{\rho^L} + \frac{u^* - u^L}{a^L}, \quad \frac{1}{\rho^{**}} = \frac{1}{\rho^R} + \frac{u^R - u^*}{a^R} \end{array} \right. \quad (A.23)$$

Les discontinuités de la solution sont aux valeurs $u^L - a^L/\rho^L$, u^* et $u^R + a^R/\rho^R$.

Démonstration :

Afin de résoudre le problème de Riemann, il faut classer les ondes. Le système admet quatre ondes distinctes. Notons par ordre ξ croissant les états constants qui composent la solution : \mathbf{W}^L , \mathbf{W}^* , \mathbf{W}^{**} , \mathbf{W}^R . Nous considérons tous les cas de permutation d'onde :

- Supposons $\lambda_{u-a/\rho} < \lambda_{u+a/\rho} < \lambda_u$, alors :

$$\mathbf{W}^L = \begin{pmatrix} \rho^L \\ u^L \\ \epsilon^L \\ \pi^L \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \epsilon^* \\ \pi^* \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^{**} = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^R \\ \epsilon^{**} \\ \pi^R \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^R = \begin{pmatrix} \rho^R \\ u^R \\ \epsilon^R \\ \pi^R \\ a^R \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

et donc : $\lambda_{u+a/\rho} = u^R + a^L/\rho^{**} < \lambda_u = u^R$. C'est impossible car a^L et ρ^{**} sont positifs.

- Supposons $\lambda_{u+a/\rho} < \lambda_{u-a/\rho} < \lambda_u$, alors :

$$\mathbf{W}^L = \begin{pmatrix} \rho^L \\ u^L \\ \epsilon^L \\ \pi^L \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \epsilon^* \\ \pi^* \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^{**} = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^R \\ \epsilon^{**} \\ \pi^R \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^R = \begin{pmatrix} \rho^R \\ u^R \\ \epsilon^R \\ \pi^R \\ a^R \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

et donc : $\lambda_{u+a/\rho} = u^L + a^L/\rho^L = u^* + a^L/\rho^*$ et $\lambda_{u-a/\rho} = u^* - a^L/\rho^* = u^R - a^L/\rho^{**}$.

Donc, nous avons : $u^* + a^L/\rho^* < u^* - a^L/\rho^*$. Cas impossible

- Supposons $\lambda_u < \lambda_{u-a/\rho} < \lambda_{u+a/\rho}$, alors :

$$\mathbf{W}^L = \begin{pmatrix} \rho^L \\ u^L \\ \epsilon^L \\ \pi^L \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^L \\ \epsilon^* \\ \pi^L \\ a^R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^{**} = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \epsilon^{**} \\ \pi^* \\ a^R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^R = \begin{pmatrix} \rho^R \\ u^R \\ \epsilon^R \\ \pi^R \\ a^R \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

et donc : $\lambda_u = u^L < \lambda_{u-a/\rho} = u^L - a^R/\rho^*$. C'est impossible car a^R et ρ^* sont positifs.

- Supposons $\lambda_u < \lambda_{u+a/\rho} < \lambda_{u-a/\rho}$, alors :

$$\mathbf{W}^L = \begin{pmatrix} \rho^L \\ u^L \\ \epsilon^L \\ \pi^L \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^L \\ \epsilon^* \\ \pi^L \\ a^R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^{**} = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \epsilon^{**} \\ \pi^* \\ a^R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^R = \begin{pmatrix} \rho^R \\ u^R \\ \epsilon^R \\ \pi^R \\ a^R \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

et donc : $\lambda_{u+a/\rho} = u^L + a^R/\rho^* = u^* + a^R/\rho^{**}$ $\lambda_{u-a/\rho} = u^* - a^R/\rho^* = u^* + a^R/\rho^R$ et donc :

$$u^* + a^R/\rho^{**} < u^* - a^R/\rho^* \quad (\text{A.28})$$

C'est impossible.

– Supposons $\lambda_{u+a/\rho} < \lambda_u < \lambda_{u-a/\rho}$, alors :

$$\mathbf{W}^L = \begin{pmatrix} \rho^L \\ u^L \\ \epsilon^L \\ \pi^L \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \epsilon^* \\ \pi^* \\ a^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^{**} = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \epsilon^{**} \\ \pi^* \\ a^R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^R = \begin{pmatrix} \rho^R \\ u^R \\ \epsilon^R \\ \pi^R \\ a^R \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

et donc : $\lambda_{u+a/\rho} = u^L + a^L/\rho^L = u^* + a^R/\rho^*$ $\lambda_u = u^*$ et donc nous avons :

$$u^* + a^R/\rho^* < u^* \quad (\text{A.30})$$

C'est impossible car a^R et ρ^* sont positifs.

– Supposons $\lambda_{u-a/\rho} < \lambda_u < \lambda_{u+a/\rho}$. Dans ce cas, il n'y a pas d'incohérence évidente. Le calcul de la solution, donnée en (A.22), s'effectue en utilisant la conservation des invariants de Riemann à la traversée de chaque discontinuité.

Il faut montrer que la solution (A.22) est consistante avec l'ordre des ondes supposé. Leur valeur est donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_{u-a/\rho} = u_g - a_g/\rho_g \\ \lambda_u = u^* = \frac{a^R u^R + a^L u^L}{a^L + a^R} + \frac{\pi^L - \pi^R}{a^L + a^R} \\ \lambda_{u+a/\rho} = u_d + a_d/\rho_d \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

La condition imposée par l'ordre des discontinuités conduit aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} f_1(a^L, a^R) = \frac{a^L(a^R + a^L)}{\rho^L} + a^R \Delta u - \Delta p > 0 \\ f_2(a^L, a^R) = \frac{a^R(a^R + a^L)}{\rho^R} + a^L \Delta u + \Delta p > 0 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

où $\Delta u = u^R - u^L$ et $\Delta p = p^R - p^L$. Afin d'étudier ce problème, nous calculons les dérivées partielles des fonctions f_1 et f_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial a^L} = \frac{2a^L + a^R}{\rho^L} > 0, & \frac{\partial f_1}{\partial a^R} = \frac{a^L}{\rho^L} + \Delta u \\ \frac{\partial f_2}{\partial a^L} = \frac{a^R}{\rho^R} + \Delta u, & \frac{\partial f_2}{\partial a^R} = \frac{a^L + 2a^R}{\rho^R} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

Compte tenu de l'inégalité (A.21), toutes les dérivées partielles sont positives. Dans le but d'obtenir une condition facile à mettre en oeuvre, les fonctions $\rho^L f_1$ et $\rho^R f_2$ sont minorées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \rho^L f_1(a^L, a^R) > (a^L)^2 + a^{R*1}(a^{L*1} + \rho^L \Delta u) - \rho^L \Delta p \\ \rho^R f_2(a^L, a^R) > (a^R)^2 + a^{L*1}(a^{R*1} + \rho^R \Delta u) + \rho^R \Delta p \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

Leur positivité est assurée en considérant les inégalités (A.21).

Proposition 22 *Les densités ρ^* et ρ^{**} de la solution du système de relaxation (A.23) sont positives.*

Démonstration :

En utilisant les relations (A.23), on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^x} = \frac{1}{\rho^L} + \frac{u^* - u_1^L}{a^L} = \frac{u^* - (u^L - a^L/\rho^L)}{a^L} = \frac{\lambda_u - \lambda_{u-a/\rho}}{a^L} > 0 \\ \frac{1}{\rho^y} = \frac{1}{\rho^R} + \frac{u_1^R - u_1^x}{a^R} = \frac{(u^R + a^R/\rho^R) + u^*}{a^R} = \frac{\lambda_{u+a/\rho} - \lambda_u}{a^R} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

Proposition 23 *La solution du système de relaxation (A.23) vérifie les relations de Rankine Hugoniot.*

Démonstration :

Un calcul simple permet de montrer que

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}, \pi) - (u \pm a/\rho)\mathbf{W} = \begin{cases} \mp a \\ \pi \mp au \\ \pi u \mp a \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) \end{cases}$$

sont des invariants de Riemann pour les ondes $u \pm a/\rho$ respectivement et

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}, \pi) - u\mathbf{W} = \begin{cases} 0 \\ \pi \\ \pi u \end{cases}$$

sont des invariants de Riemann pour l'onde de contact u^* . Ainsi, toutes les relations de saut sont respectées.

Corollaire 2 *Lorsque les hypothèses (A.21) sont vérifiées, et que*

$$\begin{cases} s_1 = u_g - \frac{a_g}{\rho_g} \\ s_2 = u^* = \frac{a^R u^R + a^L u^L}{a^L + a^R} + \frac{\pi^L - \pi^R}{a^L + a^R} \\ s_3 = u_d + \frac{a_d}{\rho_d} \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

la solution du système de relaxation est égale à la solution du schéma HLLC.

Proposition 24 *Il existe une matrice A_R diagonalisable à valeurs propres réelles telle que la solution du schéma HLLC (ou relaxation) soit aussi solution du problème linéaire suivant :*

$$\partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \pi \\ a \end{pmatrix} + A_R \partial_x \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \pi \\ a \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.37})$$

Démonstration :

Un calcul simple permet de montrer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^* \\ \pi^* \\ a^L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{W}^L \\ p^L \\ a^L \end{pmatrix} = (\rho^* - \rho^L) \mathbf{r}_1 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{**} \\ \pi^{**} \\ a^R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{W}^* \\ \pi^* \\ a^L \end{pmatrix} = (\rho^{**} - \rho^*) \mathbf{r}_2 + (\rho^{**} \epsilon^{**} - \rho^* \epsilon^*) \mathbf{r}_3 + (a^R - a^L) \mathbf{r}_4 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}^R \\ p^R \\ a^R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{**} \\ \pi^{**} \\ a^R \end{pmatrix} = (\rho^L - \rho^{**}) \mathbf{r}_5 \end{array} \right. \quad (\text{A.38})$$

Afin de clarifier l'expression des vecteurs (\mathbf{r}_i) , nous introduisons les notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} J^L = H^L + u^*(s_1 - u^L), \quad \Delta^L = (u^* - s_1)(u^L - s_1) \\ J^R = H^R + u^*(s_3 - u^R), \quad \Delta^R = (u^* - s_3)(u^R - s_3) \end{array} \right. \quad (\text{A.39})$$

Il vient :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ J^L \\ \Delta^L \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u^* \\ (u^*)^2/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ s_3 \\ J^R \\ \Delta^R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Ces vecteurs constituent les vecteurs propres à droite de la matrice \mathbf{A}_R . Ils permettent de définir la matrice :

$$\mathbf{P} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5) \quad (\text{A.41})$$

Cette matrice est inversible. Son déterminant vaut :

$$\det(\mathbf{P}) = (u^* - s_1)\Delta_d + (s_3 - u^*)\Delta_g > 0 \quad (\text{A.42})$$

L'inverse \mathbf{P}^{-1} va contenir les vecteurs propres à gauche de \mathbf{A}_R :

$$(\mathbf{P}^{-1})^T = \frac{1}{\det(\mathbf{P})} (\mathbf{l}_1^T, \mathbf{l}_2^T, \mathbf{l}_3^T, \mathbf{l}_4^T, \mathbf{l}_5^T) \quad (\text{A.43})$$

où :

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} u^* \Delta_d \\ -\Delta_d \\ 0 \\ s_3 - u^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} s_3 \Delta_g - s_1 \Delta_d \\ \Delta_d - \Delta_g \\ 0 \\ s_1 - s_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} -u^* \Delta_g \\ \Delta_g \\ 0 \\ u^* - s_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} u^* \left[\Delta_g \left(J_d - \frac{s_3 u^*}{2} \right) - \Delta_d \left(J_d - \frac{s_1 u^*}{2} \right) \right] \\ \Delta_d \left(J_d - \frac{(u^*)^2}{2} \right) - \Delta_g \left(J_d - \frac{(u^*)^2}{2} \right) \\ \text{Det}(P) \\ J_d(u^* - s_1) - J_g(s_3 - u^*) + (s_3 - s_1) \frac{(u^*)^2}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

La matrice Λ contenant la vitesse de propagation des sauts est définie de la manière suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

La solution du système de relaxation est donc la solution d'un système linéaire dont la matrice est donnée par :

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{A.47})$$

Proposition 25 *Lorsque les hypothèses de la proposition (A.21) sont vérifiées, la stabilité sous caractéristique de Whitham est assurée lorsque les réels a^L et a^R satisfont :*

$$a^L > \rho^L c^L, \quad a^R > \rho^R c^R \quad (\text{A.48})$$

Démonstration :

La preuve s'effectue en considérant un développement de type Chapman Enskog de la pression de relaxation autour de la pression hydrodynamique :

$$\pi = p + \lambda \pi^\lambda \quad (\text{A.49})$$

La prise en considération de ce développement permet d'obtenir, à partir du système (A.17), un système à l'équilibre qui se met sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = \partial_x \left(\left[\frac{a^2}{\rho} - \rho c^2 \right] \partial_x u \right) \\ \partial_t(E) + \partial_x((E + p)u) = \partial_x \left(u \left[\frac{a^2}{\rho} - \rho c^2 \right] \partial_x u \right) \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

La stabilité de ce schéma s'effectue en assurant le caractère dissipatif du second membre (A.50). L'inégalité suivante doit être satisfaite :

$$a > \rho c \quad (\text{A.51})$$

Solveur acoustique

Les équations d'Euler en variables entropiques (S, u, p) donnent :

$$\begin{cases} \partial_t(S) + u\partial_x(S) = 0 \\ \partial_t(u) + u\partial_x(u) + \frac{1}{\rho}\partial_x(p) = 0 \\ \partial_t(p) + u\partial_x(p) + \rho c^2\partial_x(u) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

L'analyse mathématique du système montre qu'il admet les valeurs propres $u - c$, u , $u + c$. Les vecteurs propres à droite associés sont :

$$r_{u-c} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -\rho c^2 \end{pmatrix}, \quad r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u+c} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ \rho c^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.53})$$

Comme l'onde de contact, linéairement dégénérée, admet les invariants de Riemann u et p , nous cherchons une solution approchée constante par morceaux pour laquelle ces quantités seront conservées à la discontinuité de contact. De plus, en prenant en compte la conservation des entropies au travers les ondes $u \pm c$, les états constants qui composent la solution approchée sont de la forme :

$$\mathbf{V}_A^g = \begin{pmatrix} S^L \\ u^L \\ p^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_A^* = \begin{pmatrix} S^L \\ u^* \\ \pi^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_A^{**} = \begin{pmatrix} S^R \\ u^* \\ \pi^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_A^d = \begin{pmatrix} S^R \\ u^R \\ p^R \end{pmatrix} \quad (\text{A.54})$$

Pour déterminer les deux inconnues u^* et p^* , le système est linéarisé en figeant les vecteurs propres à droite du système :

$$\begin{cases} \tilde{r}_{u-c} = (0, c^L, -\rho^L c^L)^T \\ \tilde{r}_{u+c} = (0, c^R, \rho^R c^R)^T \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

Les vecteurs propres à gauche associés à cette linéarisation sont :

$$\begin{cases} \tilde{l}_{u-c} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2c^L}, -\frac{1}{2\rho^L c^L}\right)^T \\ \tilde{l}_{u+c} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2c^R}, \frac{1}{2\rho^R c^R}\right)^T \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

Ainsi, les constantes qui composent la solution sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_A^* = \mathbf{V}_A^g + [(\tilde{l}_{u-c})^T \cdot (\mathbf{V}_A^d - \mathbf{V}_A^g)] \tilde{r}_{u-c} \\ \mathbf{V}_A^{**} = \mathbf{V}_A^d - [(\tilde{l}_{u+c})^T \cdot (\mathbf{V}_A^d - \mathbf{V}_A^g)] \tilde{r}_{u+c} \end{cases} \quad (\text{A.57})$$

A partir de ces relations, nous obtenons aisément les valeurs de p^* et de u^* :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\rho^R c^R u^R + \rho^L c^L u^L - p^R + p^L}{\rho^R c^R + \rho^L c^L} \\ \pi^* = \frac{\rho^R c^R p^R + \rho^R c^R p^R + \rho^L c^L \rho^R c^R (u^L - u^R)}{\rho^R c^R + \rho^L c^L} \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

Remarquons que ces deux valeurs sont identiques à celles des schémas de relaxation (A.23) et HLLC (A.11, A.16) lorsque :

$$\begin{cases} s_1 = u^g - c^g \\ s_3 = u^d + c^d \end{cases} \quad \begin{cases} a^L = \rho^L c^L \\ a^R = \rho^R c^R \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

Les densités sont obtenues en projetant les variables entropiques à l'aide de la loi d'état. En utilisant la loi des gaz parfaits, il vient :

$$\rho^{*A} = \rho^L \left(\frac{\Pi^*}{p^L} \right), \quad \rho^{**A} = \rho^R \left(\frac{\Pi^*}{p^R} \right) \quad (\text{A.60})$$

Nous comparons maintenant les valeurs des densités pour les deux schémas en utilisant les relations (A.59, A.13, A.16, A.23) et la loi des gaz parfaits. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\rho^{*A} - \rho^*}{\rho^L} = \left(1 + \gamma \frac{u^L - u^*}{c^L} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - \left(1 + \frac{u^L - u^*}{u^* - u^L + c^L} \right) \\ \frac{\rho^{**A} - \rho^{**}}{\rho^R} = \left(1 + \gamma \frac{u^* - u^R}{c^R} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - \left(1 + \frac{u^* - u^R}{c^R + u^R - u^*} \right) \end{cases} \quad (\text{A.61})$$

Remarque :

En supposant que le nombre de Mach : $Ma = \frac{u}{c}$ est faible, un développement limité peut être considéré :

$$\frac{\rho^{*A} - \rho^*}{\rho^L} = O(Ma^2), \quad \frac{\rho^{**A} - \rho^{**}}{\rho^R} = O(Ma^2) \quad (\text{A.62})$$

Le schéma acoustique n'est donc pas totalement identique au schéma de relaxation (HLLC). Il ne satisfait donc pas les relations de saut de Rankine Hugoniot. En revanche, lorsque le nombre de Mach tend vers 0, l'écart entre les solutions approchées tend vers 0.

Annexe B

Rappel sur l'implémentation à l'ordre 2 de schémas conservatifs

Pour les systèmes conservatifs, l'implémentation de la solution approchée $\mathcal{V}^{\mathbf{h}2}$ est standard. Elle repose sur une méthode de type de Godunov associée au sous-maillage défini précédemment. Elle se met sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_{iL}^{n+1} = \mathbf{W}_{iL}^n - \frac{3\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i-1/6}^n - \phi_{i-1/2}^n) \\ \mathbf{W}_{i*}^{n+1} = \mathbf{W}_{i*}^n - \frac{3\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1/6}^n - \phi_{i-1/6}^n) \\ \mathbf{W}_{iR}^{n+1} = \mathbf{W}_{iR}^n - \frac{3\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i+1/6}^n) \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

où les flux numériques sont évalués en utilisant les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i-1/2}^n = \phi(\mathbf{W}_{i-1R}^n, \mathbf{W}_{iL}^n) \\ \phi_{i-1/6}^n = \phi(\mathbf{W}_{iL}^n, \mathbf{W}_{i*}^n) \\ \phi_{i+1/6}^n = \phi(\mathbf{W}_{i*}^n, \mathbf{W}_{iR}^n) \\ \phi_{i+1/2}^n = \phi(\mathbf{W}_{iR}^n, \mathbf{W}_{i+1L}^n) \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

L'utilisation de la projection sur chaque cellule I_i (3.93) permet de déduire les états qui composent la solution constante par morceaux $\mathcal{V}^{\mathbf{h}}$. Un calcul simple donne le résultat suivant :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{3\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n) \quad (\text{B.3})$$

Cette expression ne demande pas la connaissance des flux numériques $\phi_{i-1/6}^n$ et $\phi_{i+1/6}^n$. Les problèmes de Riemann aux interfaces $x = x_{i-1/6}$ et $x = x_{i+1/6}$ ne seront donc pas traités. De plus, l'implémentation (B.3) est indépendante du sous-maillage. En revanche, les critères CFL resteront liés au sous-maillage.

Annexe C

Limiteurs de pentes

Les limiteurs sont des fonctions qui permettent de contrôler la valeur des pentes. En effet, lors de la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de type Godunov d'ordre deux présentent des oscillations si de telles fonctions ne sont pas utilisées. Malgré l'absence de preuves pour les systèmes non linéaires, ces fonctions sont très employées en pratique. Les fonctions les plus courantes sont les limiteurs Minmod, Van Albada Van Leer et Superbee :

$$\text{Minmod} \quad \phi_1(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } ab \leq 0 \\ \frac{a}{|a|} \min(|a|, |b|) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Van Albada Van Leer} \quad \phi_2(a, b) = \frac{a(b^2 + \delta) + b(a^2 + \delta)}{a^2 + b^2 + 2\delta}$$

$$\text{Superbee} \quad \phi_3(a, b) = \phi_1(a, 2b)$$

où δ est un petit réel positif.

Annexe D

Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle de nos systèmes est très importante. Elle va mettre en évidence différents régimes d'écoulements et pour chacun d'entre eux, les termes qui prédominent le comportement des fluides seront identifiés. L'analyse sera effectuée sur le modèle de base. Les résultats obtenus pourront facilement être étendus aux modèles réduits. Le modèle traité s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_k) + u_I \partial_x(\alpha_k) = 0 \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0 \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k) = -\sigma \kappa \partial_x(\Phi) + \alpha_k \rho_k g + \partial_x(\mu \partial_x u_k) \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k e_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k H_k u_k) = -u_k \sigma \kappa \partial_x(\Phi) + \alpha_k \rho_k g + \partial_x(\mu u_k \partial_x u_k) \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

Pour chaque variable X , une grandeur de référence X_{ref} est introduite. Celle-ci permet de quantifier le domaine de variation la grandeur X à l'aide de la variable sans dimension $\tilde{X} = X/X_{ref}$. Pour les variables du système, les notations suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{t_{ref}}, & \tilde{x} &= \frac{x}{x_{ref}}, & \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_{ref}}, & \tilde{u} &= \frac{u}{u_{ref}} \\ \tilde{p} &= \frac{p}{p_{ref}}, & \tilde{\kappa} &= \frac{\kappa}{\kappa_{ref}}, & \tilde{g} &= \frac{g}{g_{ref}}, & \tilde{e} &= \frac{e}{e_{ref}} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La fraction volumique et la fonction couleur restent inchangées car elles sont sans dimension. De part leur nature physique, certaines grandeurs de référence introduites précédemment sont liées. Ces dernières sont directement en rapport avec les échelles de temps et d'espace et par conséquent sont régies par les équations suivantes :

$$u_{ref} = \frac{x_{ref}}{t_{ref}}, \quad \kappa_{ref} = \frac{1}{x_{ref}}, \quad g_{ref} = \frac{x_{ref}}{t_{ref}^2}, \quad e_{ref} = \frac{x_{ref}^2}{t_{ref}^2} \quad (\text{D.3})$$

La constante de tension de surface σ et le coefficient de viscosité μ sont indépendants des autres grandeurs physiques. La pression de référence est reliée aux propriétés acoustiques des fluides si bien qu'elle est régie par la relation :

$$p_{ref} = \rho_{ref} c_{ref}^2 \quad (D.4)$$

où c_{ref} est la vitesse de référence de propagation des ondes acoustiques. Cette vitesse est indépendante de la vitesse u_{ref} qui correspond à la vitesse d'évolution des ondes matérielles. Le système précédent peut être formulé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\tilde{t}}(\alpha_k) + \tilde{u}_I \partial_{\tilde{x}}(\alpha_k) = 0 \\ \partial_{\tilde{t}}(\alpha_k \tilde{\rho}_k) + \partial_{\tilde{x}}(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{u}_k) = 0 \\ \partial_{\tilde{t}}(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{u}_k) + \partial_{\tilde{x}}(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{u}_k^2) + \frac{1}{Ma^2} \partial_{\tilde{x}}(\alpha_k \tilde{p}_k) = -\frac{1}{Bo} \tilde{\kappa} \partial_{\tilde{x}}(\Phi) + \alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{g} + \frac{1}{Re} \partial_{\tilde{x}}^2(\tilde{u}_k) \\ \partial_{\tilde{t}}(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{e}_k) + \partial_{\tilde{x}}(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{e}_k \tilde{u}_k) + \frac{1}{Ma^2} \partial_{\tilde{x}}(\alpha_k \tilde{p}_k \tilde{u}_k) = -\frac{1}{Bo} \tilde{\kappa} \tilde{u}_k \partial_{\tilde{x}}(\Phi) + \alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{u}_k \tilde{g} + \frac{1}{Re} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{u}_k \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_k) \end{array} \right. \quad (D.5)$$

où trois nombres sans dimension ont été introduits.

Le premier est le nombre de Mach. Il est donné par la relation :

$$Ma = \frac{u_{ref}}{c_{ref}} \quad (D.6)$$

Il représente le rapport entre les effets des ondes acoustiques (chocs ou détentes) et matérielles (discontinuités de contact). Lorsque le nombre de Mach est faible, deux comportements sont identifiables : le régime acoustique se réduit à la caractérisation de la propagation d'ondes de pression dans des fluides alors considérés incompressibles, et le régime faible Mach pour lequel les ondes de pression sont de faible amplitude et les ondes matérielles, lentes, guident l'écoulement.

Le nombre de Bond est défini de la manière suivante :

$$Bo = \frac{\rho_{ref} x_{ref}^3}{\sigma t_{ref}^2} \quad (D.7)$$

Ce nombre détermine dans quelle mesure les effets de tension de surface seront importants pour l'évolution de la solution. Lorsque le nombre de Bond sera petit, le coefficient de tension de surface σ sera grand et les effets de tension de surface seront prédominants. Avec un nombre de Bond grand, la tension de surface aura peu d'effet sur le calcul et pourra être négligée.

Le dernier nombre introduit est le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho_{ref} x_{ref}^2}{t_{ref} \mu_k} \quad (D.8)$$

Ce nombre est fonction du coefficient de viscosité du fluide μ_k . C'est ce dernier qui va déterminer l'importance des effets de viscosité dans l'évolution de la solution. Lorsqu'il sera élevé, les effets de viscosité seront négligés.

Annexe E

Solveurs pour les systèmes multifluides

E.1 Solveur à 3 états pour le modèle asymptotique

Le schéma HLL est utilisé pour permettre la discrétisation de l'opérateur de propagation conservatif du modèle asymptotique. Comme celui-ci a déjà été présenté, seules les modifications vis à vis du paragraphe 3.1.1 sont abordées. Les trois états constants qui composent la solution sont notés :

$$\mathbf{w}^L = \begin{pmatrix} \alpha_1^L \rho_1^L \\ \alpha_2^L \rho_2^L \\ \rho^L u^L \\ E^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} (\alpha_1 \rho_1)^* \\ (\alpha_2 \rho_2)^* \\ \rho^* u^* \\ E^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^R = \begin{pmatrix} \alpha_1^R \rho_1^R \\ \alpha_2^R \rho_2^R \\ \rho^R u^R \\ E^R \end{pmatrix}$$

Les deux valeurs $\xi = \lambda^L$ et $\xi = \lambda^R$ pour lesquelles la solution est discontinue sont approchées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \lambda^L = \min(u^L - c^L, u^R - c^R) \\ \lambda^R = \max(u^L + c^L, u^R + c^R) \end{cases}$$

Ainsi l'état \mathbf{w}^* et le flux conservatif \mathbf{f}^* sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{f}^L - \mathbf{f}^R + \lambda^R \mathbf{w}^R - \lambda^L \mathbf{w}^L}{\lambda^R - \lambda^L} \\ \mathbf{f}^* = \frac{\lambda^R \mathbf{f}^L - \lambda^L \mathbf{f}^R - \lambda^R \lambda^L (\mathbf{w}^R - \mathbf{w}^L)}{\lambda^R - \lambda^L} \end{cases}$$

Le flux numérique conservatif du schéma HLL s'écrit donc pour les modèles réduits :

$$\phi^* = \frac{(\lambda^R)^+ \mathbf{f}^L - (\lambda^L)^- \mathbf{f}^R - (\lambda^R)^+ (\lambda^L)^- (\mathbf{w}^R - \mathbf{w}^L)}{(\lambda^R)^+ - (\lambda^L)^-} \quad (\text{E.1})$$

E.2 Solveur acoustique pour le modèle asymptotique

Afin de déterminer le flux conservatif associé au schéma acoustique, le modèle asymptotique est écrit à l'aide des variables entropiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(y_1) + u\partial_x(y_1) = 0 \\ \partial_t(S_1) + u\partial_x(S_1) = 0 \\ \partial_t(S_2) + u\partial_x(S_2) = 0 \\ \partial_t(u) + u\partial_x(u) + \frac{1}{\rho}\partial_x(p) = 0 \\ \partial_t(p) + u\partial_x(p) + \rho c^2\partial_x(u) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.2})$$

Ce système admet les valeurs propres $u - c$, u , $u + c$ et les vecteurs propres à droite associés sont :

$$r_{u-c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ -\rho c^2 \end{pmatrix}, \quad r_{u,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{u+c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ \rho c^2 \end{pmatrix}$$

L'onde u est linéairement dégénérée puisqu'elle admet les invariants de Riemann u et p . Ces variables seront donc constantes au niveau de la discontinuité de contact. Par conséquent, nous supposons que les états qui constituent la solution approchée s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{V}_A^g = \begin{pmatrix} y_1^L \\ S_1^L \\ S_2^L \\ u^L \\ p^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_A^* = \begin{pmatrix} y_1^L \\ S_1^L \\ S_2^L \\ u^* \\ p^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_A^{**} = \begin{pmatrix} y_1^R \\ S_1^R \\ S_2^R \\ u^* \\ p^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_A^d = \begin{pmatrix} y_1^R \\ S_1^R \\ S_2^R \\ u^R \\ p^R \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les deux inconnues u^* et p^* , le système est linéarisé en fixant les vecteurs propres à droite et en effectuant l'approximation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_{u-c} = (0, 0, 0, c^L, -\rho^L c^L)^T \\ \tilde{r}_{u+c} = (0, 0, 0, c^R, \rho^R c^R)^T \end{array} \right.$$

Les vecteurs propres à gauche associés à cette linéarisation sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{l}_{u-c} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2c^L}, -\frac{1}{2\rho^L c^L}\right)^T \\ \tilde{l}_{u+c} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2c^R}, \frac{1}{2\rho^R c^R}\right)^T \end{array} \right.$$

Les états constants qui composent la solution sont régis par :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_A^* = \mathbf{V}_A^L + [(\tilde{l}_{u-c})^T \cdot (\mathbf{V}_A^R - \mathbf{V}_A^L)] \tilde{r}_{u-c} \\ \mathbf{V}_A^{**} = \mathbf{V}_A^R - [(\tilde{l}_{u+c})^T \cdot (\mathbf{V}_A^R - \mathbf{V}_A^L)] \tilde{r}_{u+c} \end{cases}$$

A partir de ces relations, nous pouvons déduire les valeurs de la pression p^* et de la vitesse u^* :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\rho^R c^R u^R + \rho^L c^L u^L - p^R + p^L}{\rho^R c^R + \rho^L c^L} \\ p^* = \frac{\rho^R c^R p^R + \rho^L c^L p^L + \rho^R c^R \rho^L c^L (u^L - u^R)}{\rho^R c^R + \rho^L c^L} \end{cases}$$

Ces états permettent de déterminer les états constants en variables conservatives $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^*(\mathbf{V}_A^*)$ et $\mathbf{w}^{**} = \mathbf{w}^{**}(\mathbf{V}_A^{**})$ en utilisant la loi d'état choisie. Le flux numérique conservatif est donné par les relations suivantes :

$$\phi^* = \begin{cases} \mathbf{f}^L & \text{si } \rho^L c^L > 0 \\ \mathbf{f}(\mathbf{w}^*) & \text{si } \rho^L c^L < 0 < u^* \\ \mathbf{f}(\mathbf{w}^{**}) & \text{si } u^* < 0 < \rho^R c^R \\ \mathbf{f}^R & \text{si } \rho^R c^R < 0 \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

Ce schéma ne satisfait pas les relations de Rankine Hugoniot et la propriété de consistance 9 n'est donc pas vérifiée.

E.3 Matrice de Roe pour le modèle de base

$$\mathbf{A}_k^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_k p_k^\infty & \frac{\gamma_k - 3}{2} \bar{u}_k^2 & (3 - \gamma_k) \bar{u}_k & (\gamma_k - 1) \\ -\gamma_k p_k^\infty \bar{u}_k & \left(\frac{(\gamma_k - 1) \bar{u}_k^2}{2} - \bar{H}_k \right) \bar{u}_k & \bar{H}_k - (\gamma_k - 1) \bar{u}_k^2 & \gamma_k \bar{u}_k \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{cases} \bar{u}_k = \frac{\sqrt{(\alpha_k \rho_k)^L} u_k^L + \sqrt{(\alpha_k \rho_k)^R} u_k^R}{\sqrt{(\alpha_k \rho_k)^L} + \sqrt{(\alpha_k \rho_k)^R}} \\ \bar{H}_k = \frac{\sqrt{(\alpha_k \rho_k)^L} H_k^L + \sqrt{(\alpha_k \rho_k)^R} H_k^R}{\sqrt{(\alpha_k \rho_k)^L} + \sqrt{(\alpha_k \rho_k)^R}} \end{cases}$$

vecteurs propres à droites :

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_k^2 - u_k^2}{\gamma_k p_k^\infty} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{u}_k - c_k^* & 0 & \bar{u}_k & \bar{u}_k + c_k^* \\ \bar{H}_k - c_k^* \bar{u}_k & H_k - u_k^2 & \frac{\bar{u}_k^2}{2} & \bar{H}_k + c_k^* \bar{u}_k \end{pmatrix}$$

avec :

$$(c_k^*)^2 = (\gamma_k - 1) \left(\bar{H}_k - \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right)$$

$$(\mathbf{P}^*)^{-1} = \frac{1}{2(c_k^*)^2} \begin{pmatrix} \frac{c_k^* \gamma_k p_k^\infty}{\bar{u}_k - c_k^*} & \frac{(\gamma_k - 1) \bar{u}_k^2}{2} + c_k^* \bar{u}_k & -c_k^* - \bar{u}_k (\gamma_k - 1) & (\gamma_k - 1) \\ \frac{2\gamma_k p_k^\infty (c_k^*)^2}{(c_k^*)^2 - \bar{u}_k^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_k^*)^2 - \bar{u}_k^2 (\gamma_k - 1) & 2\bar{u}_k (\gamma_k - 1) & -2(\gamma_k - 1) \\ -\frac{c_k^* \gamma_k p_k^\infty}{\bar{u}_k + c_k^*} & \frac{(\gamma_k - 1) \bar{u}_k^2}{2} - c_k^* \bar{u}_k & c_k^* - \bar{u}_k (\gamma_k - 1) & (\gamma_k - 1) \end{pmatrix}$$

où $\Gamma = \gamma - 1$. On note Λ^* la matrice diagonale contenant les valeurs propres de \mathbf{A}^* :

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} \bar{u}_k - c_k^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u}_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}_k + c_k^* \end{pmatrix}$$

Pour le schéma de Roe, le flux numérique conservatif ϕ^* est régi par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^R \end{pmatrix} - \mathbf{P}^* \varphi(\Lambda_k^*) (\mathbf{P}^*)^{-1} (\mathbf{W}_d - \mathbf{W}_g) \right] \quad (\text{E.4})$$

où $\varphi(x) = |x|$. Un calcul algébrique permet de montrer que :

$$\phi^* = \frac{1}{2} [\mathbf{f}^R + \mathbf{f}^L - |\bar{u}_k - c_k^*| R_{u_k - c_k} - |\bar{u}_k| R_{u_k} - |\bar{u}_k + c_k^*| R_{u_k + c_k}] \quad (\text{E.5})$$

où :

$$R_{u_k - c_k} = \frac{1}{2(c_k^*)^2} \left(\frac{\bar{u}_k \gamma_k p_k^\infty}{\bar{u}_k - c_k^*} \Delta(\alpha_k) + \Delta(\alpha_k p_k) - \underline{\alpha_k \rho_k} c_k^* \Delta(u_k) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{u}_k - c_k^* \\ \bar{H}_k - c_k^* \bar{u}_k \end{pmatrix}$$

$$R_{u_k} = \left(\Delta(\alpha_k \rho_k) - \frac{\Delta[\alpha_k (p_k + \gamma_k p_k^\infty)]}{(c_k^*)^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{u}_k \\ \bar{u}_k^2/2 \end{pmatrix}$$

$$R_{u_k+c_k} = \frac{1}{2(c_k^*)^2} \left(\frac{\bar{u}_k \gamma_k \rho_k^\infty}{\bar{u}_k + c_k^*} \Delta(\alpha_k) + \Delta(\alpha_k p_k) + \frac{\alpha_k \rho_k c_k^*}{\bar{u}_k + c_k^*} \Delta(u_k) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{u}_k + c_k^* \\ \bar{H}_k + c_k^* \bar{u}_k \end{pmatrix}$$

Annexe F

Validations numériques des schémas 1D

Nous reproduisons l'ensemble des cas tests numériques proposés dans [60]. Ceux-ci comprennent des tubes à choc entre fluides purs pour lesquels les rapports de densité et de pression sont très forts. En revanche, la seule loi d'état considérée est la loi des gaz parfaits. Comme nos méthodes numériques ne peuvent traiter des fluides purs, les fractions volumiques des espèces qui devraient être absentes seront fixées à $1.0e-8$. Le tableau (F.1) regroupe les conditions initiales et temps finaux des expériences.

1 - A	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (1, 0, 1, 1.4) & \text{si } x < 0.5 \\ (0.125, 0, 0.1, 1.667) & \text{si } x > 0.5 \end{cases}$	$t = 0.15$
1 - B	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (1, 0, 500, 1.4) & \text{si } x < 0.5 \\ (1, 0, 0.2, 1.667) & \text{si } x > 0.5 \end{cases}$	$t = 0.015$
1 - C	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (1, 0, 500, 1.4) & \text{si } x < 0.8 \\ (10, 0, 0.2, 1.667) & \text{si } x > 0.8 \end{cases}$	$t = 0.02$
1 - D	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (1, 0, 500, 1.4) & \text{si } x < 0.75 \\ (30, 0, 0.2, 2.0) & \text{si } x > 0.75 \end{cases}$	$t = 0.02$
2 - A	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (3.984, 27.355, 1000, 1.667) & \text{si } x < 0.2 \\ (0.01, 0, 1, 1.4) & \text{si } x > 0.2 \end{cases}$	$t = 0.01$
2 - B	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (0.384, 27.077, 100, 1.667) & \text{si } x < 0.6 \\ (10, 0, 1, 1.4) & \text{si } x > 0.6 \end{cases}$	$t = 0.04$
2 - C	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (0.384, 27.077, 100, 1.667) & \text{si } x < 0.6 \\ (100, 0, 1, 3.0) & \text{si } x > 0.6 \end{cases}$	$t = 0.03$
2 - D	$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} (1, 0, 1000, 1.4) & \text{si } x < 0.1 \\ (1, 0, 0.01, 1.4) & \text{si } 0.1 < x < 0.9 \\ (1, 0, 100, 1.4) & \text{si } x > 0.9 \end{cases}$	$t = 0.038$

(F.1)

Toutes ces expériences sont réalisées dans un domaine de longueur $[0,1]$ discrétisé avec 200 et 2000 points (sauf 400 et 2000 points pour le cas 2-D). Les conditions limites sont de type Neumann à l'exception du dernier cas présentant deux bords réfléchissants. Les calculs sont réalisés en utilisant les modèles réduits avec les schémas de relaxation et acoustique, le modèle réduit simplifié avec les schémas de relaxation et de Roe. Concernant le modèle

de base, nous utiliserons les schémas de relaxation et HLL avec les deux relaxations de pression abordées dans le chapitre 1.

Pour chaque expérience, nous commentons les résultats :

- Cas 1-A : Les courbes obtenues par les différents modèles et schémas numériques sont très proches. Pour les modèles simplifiés, la solution est de bonne qualité même avec très peu de points. Pour les modèles complets, les résultats comportent beaucoup plus d'incertitude en raison de la diffusion numérique apportée par les termes de relaxation. Lorsque les termes de compaction ne sont pas pris en compte, la solution est beaucoup moins correcte sur le maillage grossier puisque le processus de relaxation des pressions force le schéma de relaxation à capter des ondes qui n'existent pas.
- Cas 1-B : Les résultats donnés par les modèles réduits sont très bons. Pour le modèle de base, un léger manque de définition est observable. En effet, la valeur de densité située entre la discontinuité de contact et le choc (entre $[0.6, 0.8]$) n'est pas très prise en compte.
- Cas 1-C : Aucun défaut n'est présent pour les courbes obtenues par les modèles réduits. Concernant les modèles complets avec termes de compaction, les résultats sont légèrement plus diffusés. En effet, les termes de compaction semblent apporter beaucoup de viscosité numérique. Cela a pour effet de lisser le choc ($x \approx 0.9$) et le faire interagir avec le 'bord' du domaine.
- Cas 1-D : Les résultats obtenus avec le modèle de base sont plus diffusés que pour les modèles réduits. Le schéma de relaxation résolvant le modèle de base avec terme de compaction approche l'onde située en $x \approx 0.85$ en une onde composée d'une détente et d'un choc. Ce phénomène est lié au processus de relaxation de vitesse et de pression qui impose cet équilibre au schéma.
- Cas 2-A : Tous les résultats obtenus avec la maillage grossier ne reproduisent pas suffisamment la discontinuité de contact située en $x = 0.75$. Pour le modèle de base avec terme de compaction, le plateau obtenu avec les schémas HLL et relaxation surestime le saut du choc ainsi que sa vitesse. Sans les termes de compaction, la solution est complètement lissée pour le schéma HLL et fautive avec le schéma de relaxation. La procédure de relaxation associée conduit vers un mauvais équilibre de pression dans ce cas.
- Cas 2-B : Le schéma acoustique ne donne pas de résultats corrects. Pour le modèle de base, les termes de compaction lissent la solution et pour le schéma de relaxation, la solution entre en contact avec le bord du domaine.
- Cas 2-C : Le schéma acoustique fournit une solution fautive. Les autres résultats sont corrects pour les maillages fins.
- Cas 2-D : Ce test ne présente aucune difficulté puisqu'il est monofluide. Les schémas numériques mis en place dégénèrent en schémas conservatifs et les termes de compaction ne jouent plus aucun rôle puisque l'égalité des pressions est permanente. Les résultats obtenus sont donc de très bonne qualité.

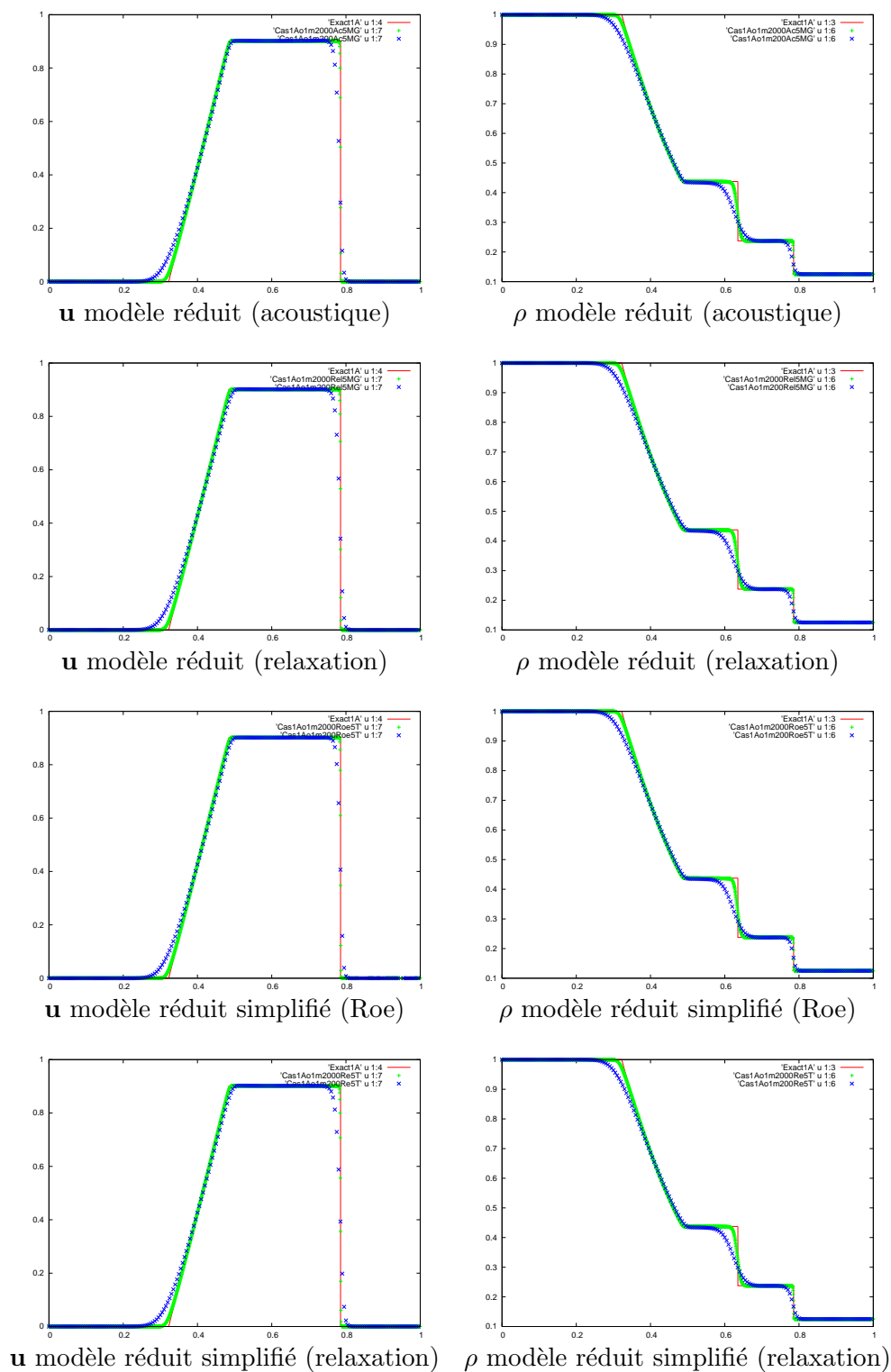


FIG. F.1 – Tube à choc 1A, modèles réduits, $t = 0.15s$, données initiales : si $x < 0.5$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.5$ $\rho = 0.125$, $u = 0$, $p = 0.1$, $\gamma = 1.667$

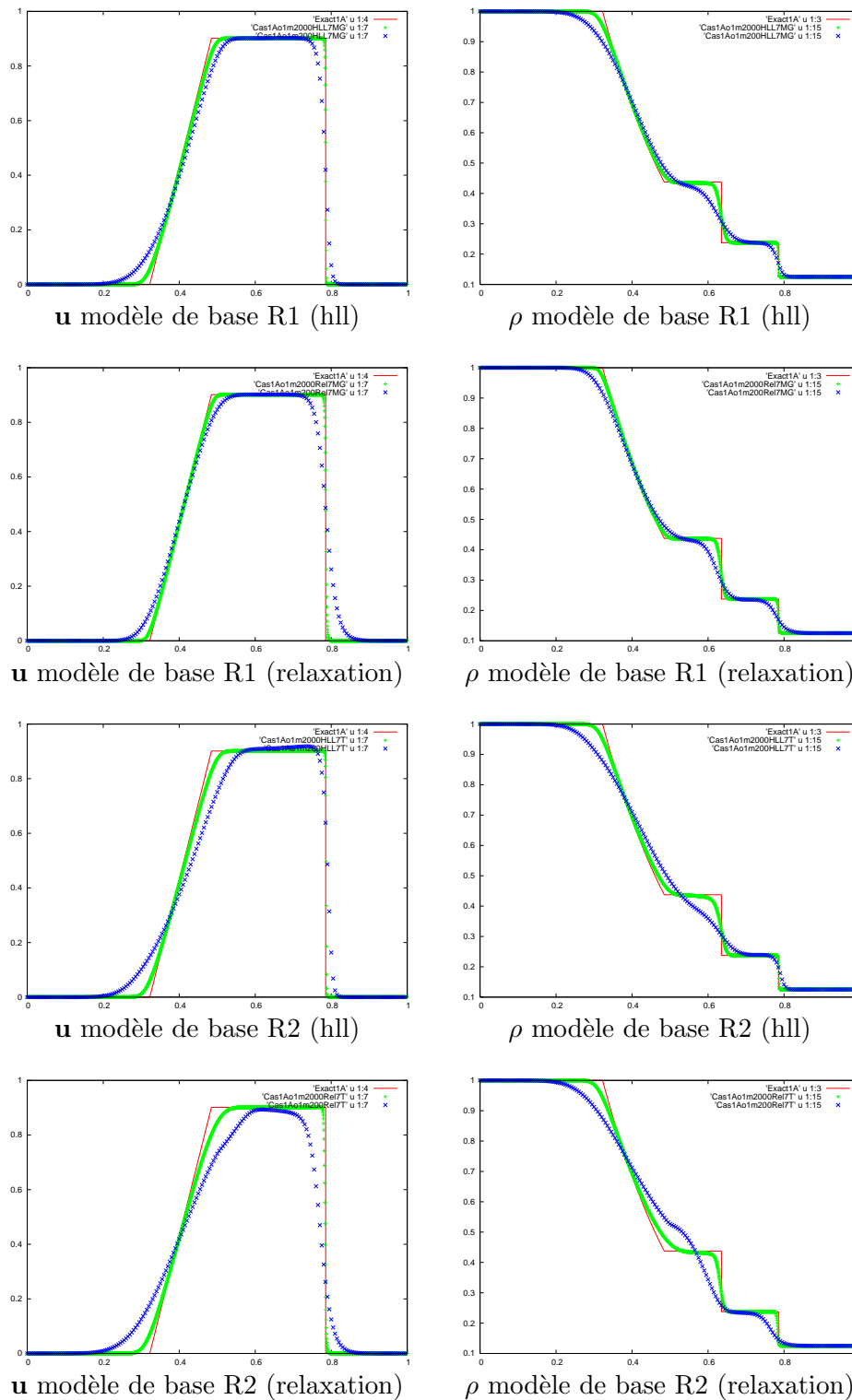


FIG. F.2 – Tube à choc 1A, modèle de base, $t = 0.15s$, données initiales : si $x < 0.5$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.5$ $\rho = 0.125$, $u = 0$, $p = 0.1$, $\gamma = 1.667$

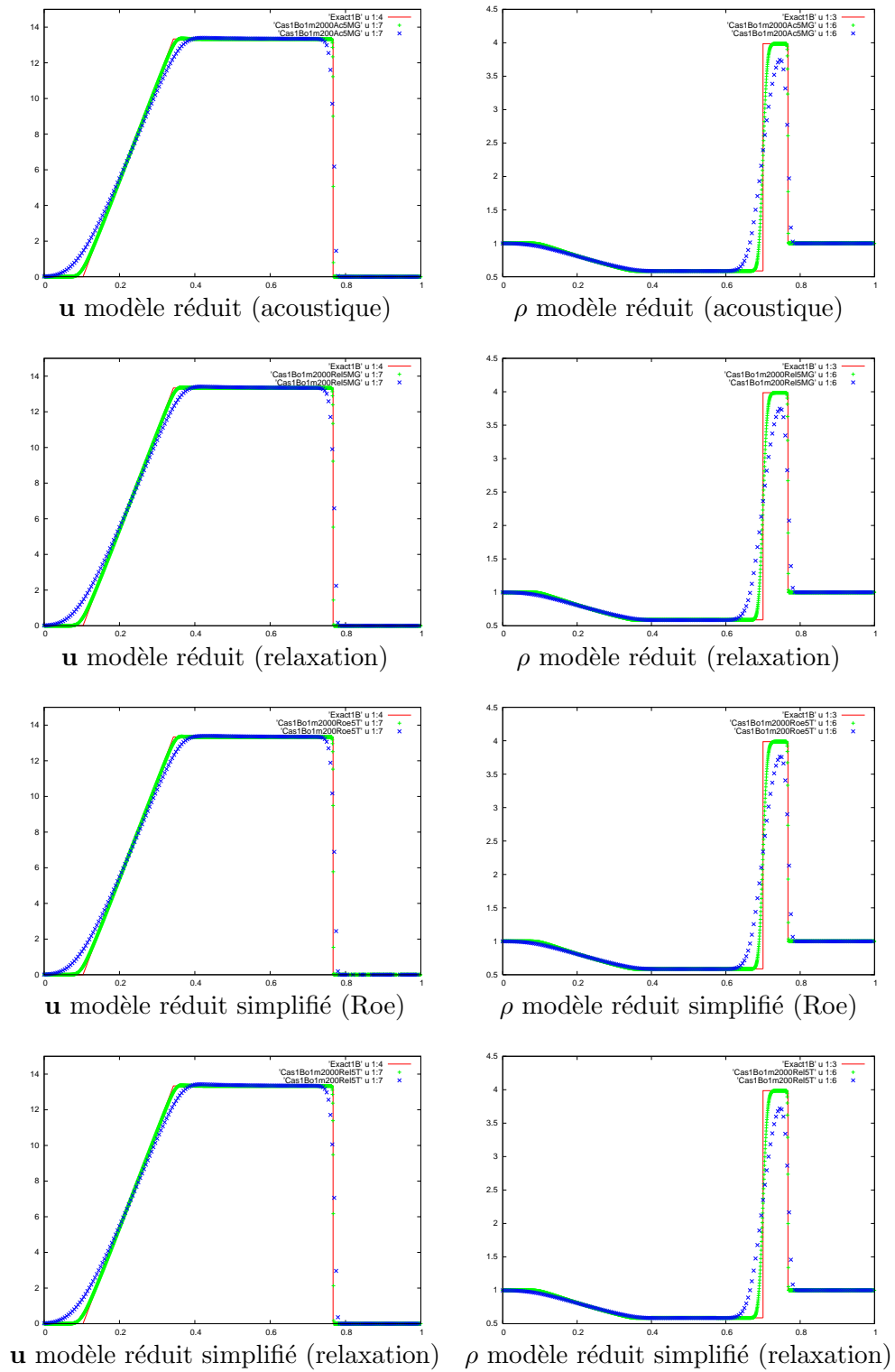


FIG. F.3 – Tube à choc 1B, modèles réduits, $t = 0.015s$, données initiales : si $x < 0.5$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 500$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.5$ $\rho = 1.0$, $u = 0$, $p = 0.2$, $\gamma = 1.667$

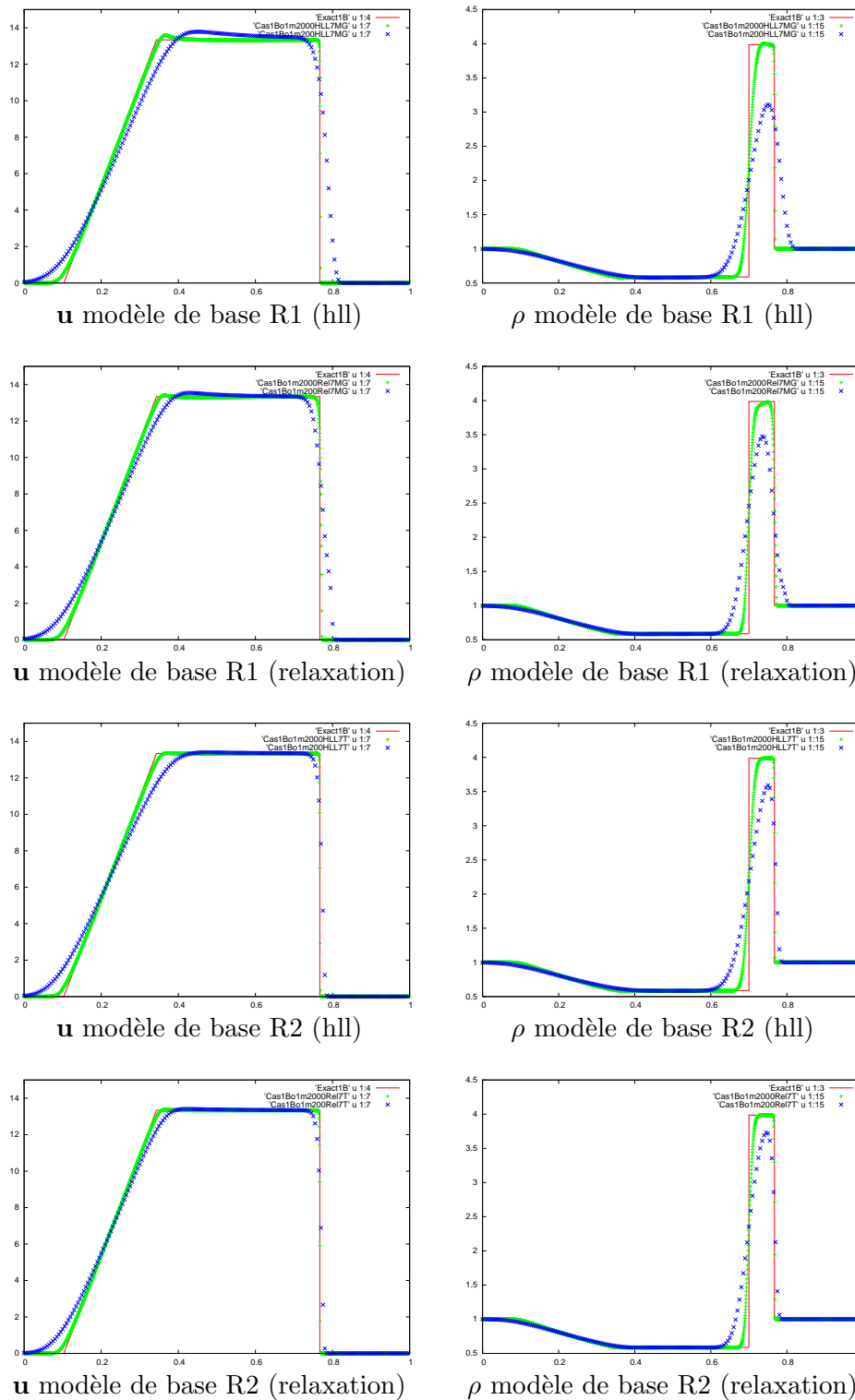


FIG. F.4 – Tube à choc 1B, modèle de base, $t = 0.015s$, données initiales : si $x < 0.5$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 500$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.5$ $\rho = 1.0$, $u = 0$, $p = 0.2$, $\gamma = 1.667$

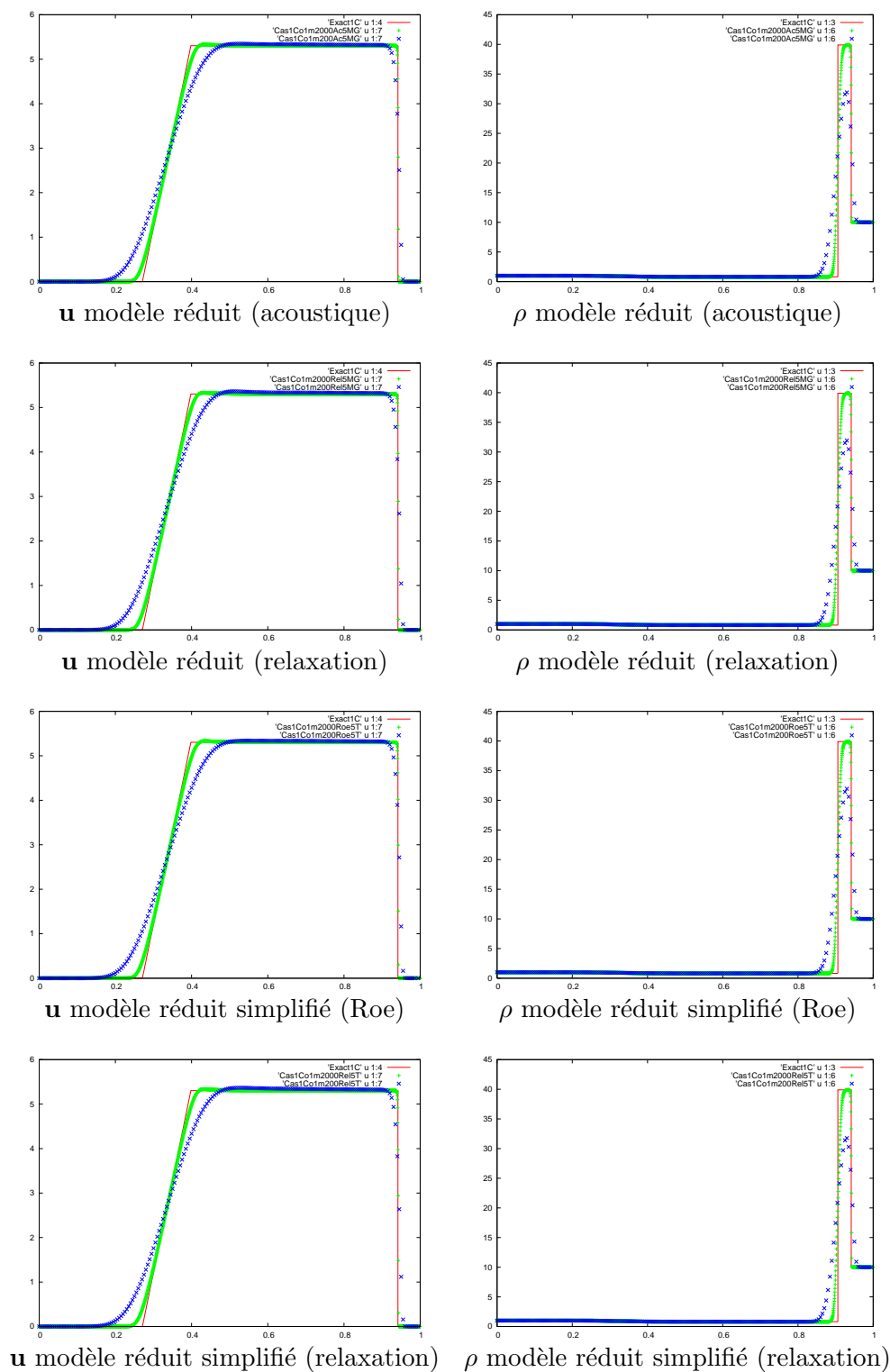


FIG. F.5 – Tube à choc 1C, modèles réduits, $t = 0.02s$, données initiales : si $x < 0.8$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 500$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.8$ $\rho = 10.0$, $u = 0$, $p = 0.2$, $\gamma = 1.667$

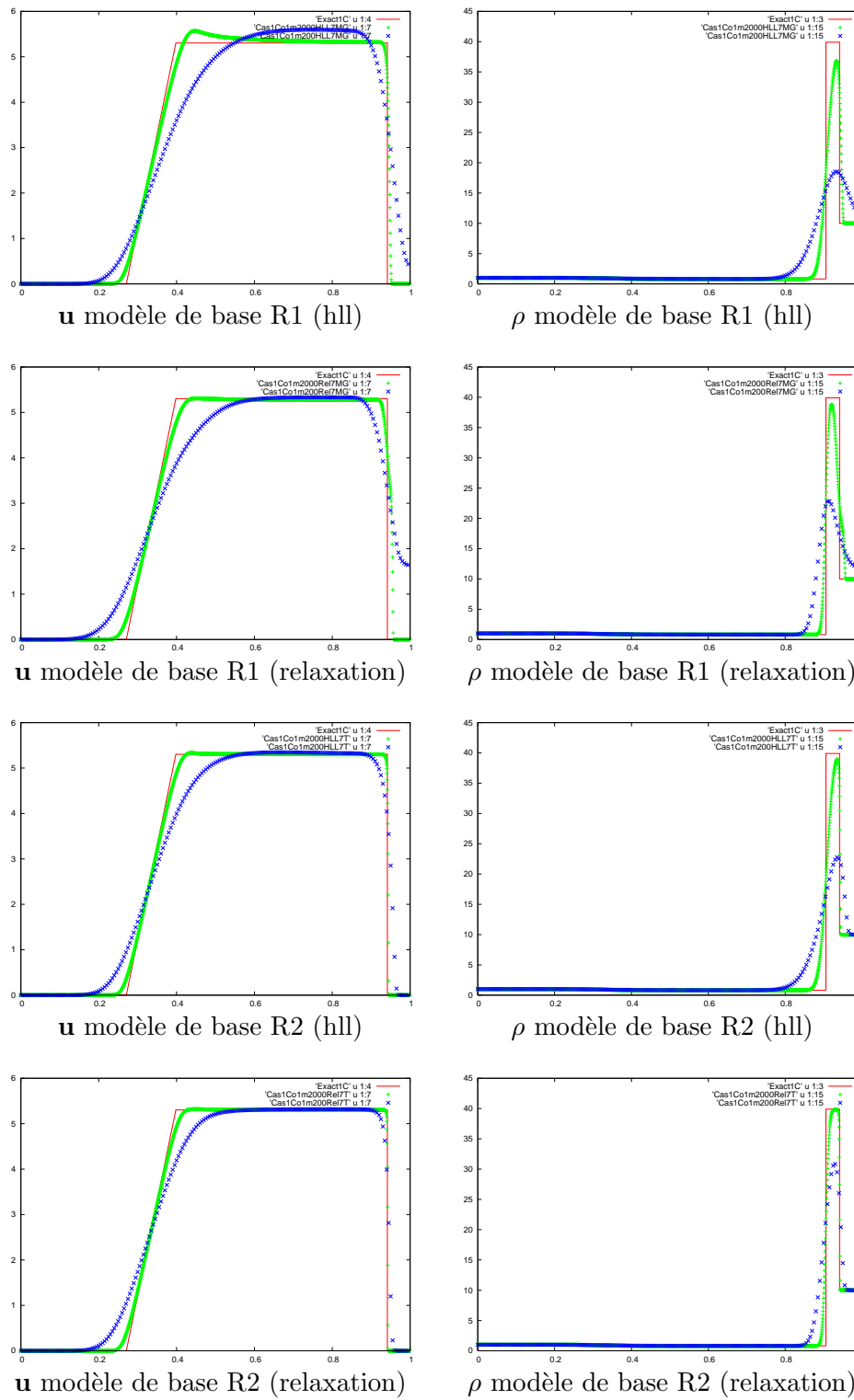


FIG. F.6 – Tube à choc 1C, modèle de base, $t = 0.02s$, données initiales : si $x < 0.8$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 500$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.8$ $\rho = 10.0$, $u = 0$, $p = 0.2$, $\gamma = 1.667$

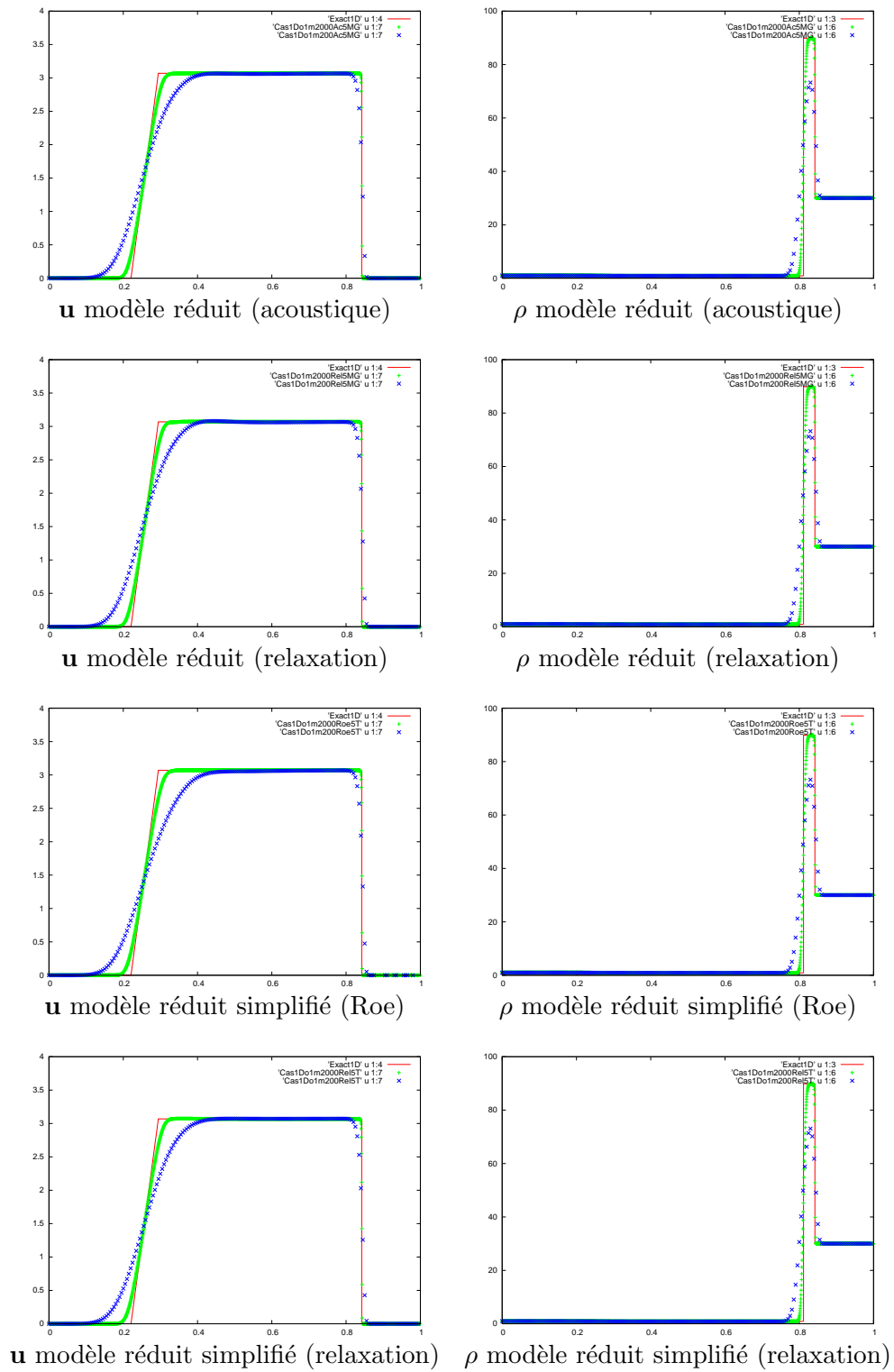


FIG. F.7 – Tube à choc 1D, modèles réduits, $t = 0.02s$, données initiales : si $x < 0.75$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 500$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.75$ $\rho = 30.0$, $u = 0$, $p = 0.2$, $\gamma = 2$

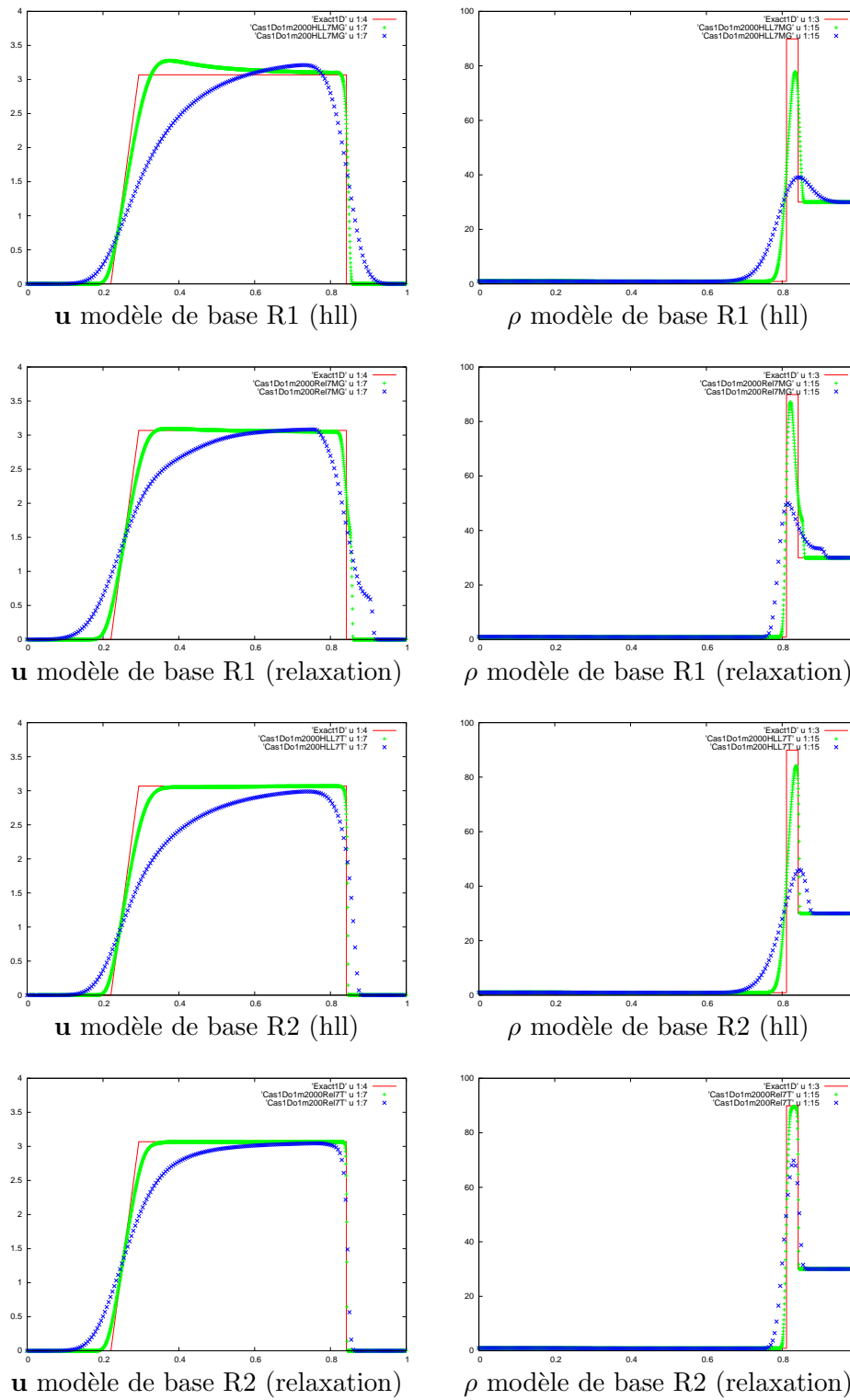


FIG. F.8 – Tube à choc 1D, modèle de base, $t = 0.02s$, données initiales : si $x < 0.75$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 500$, $\gamma = 1.4$, si $x > 0.75$ $\rho = 30.0$, $u = 0$, $p = 0.2$, $\gamma = 2$

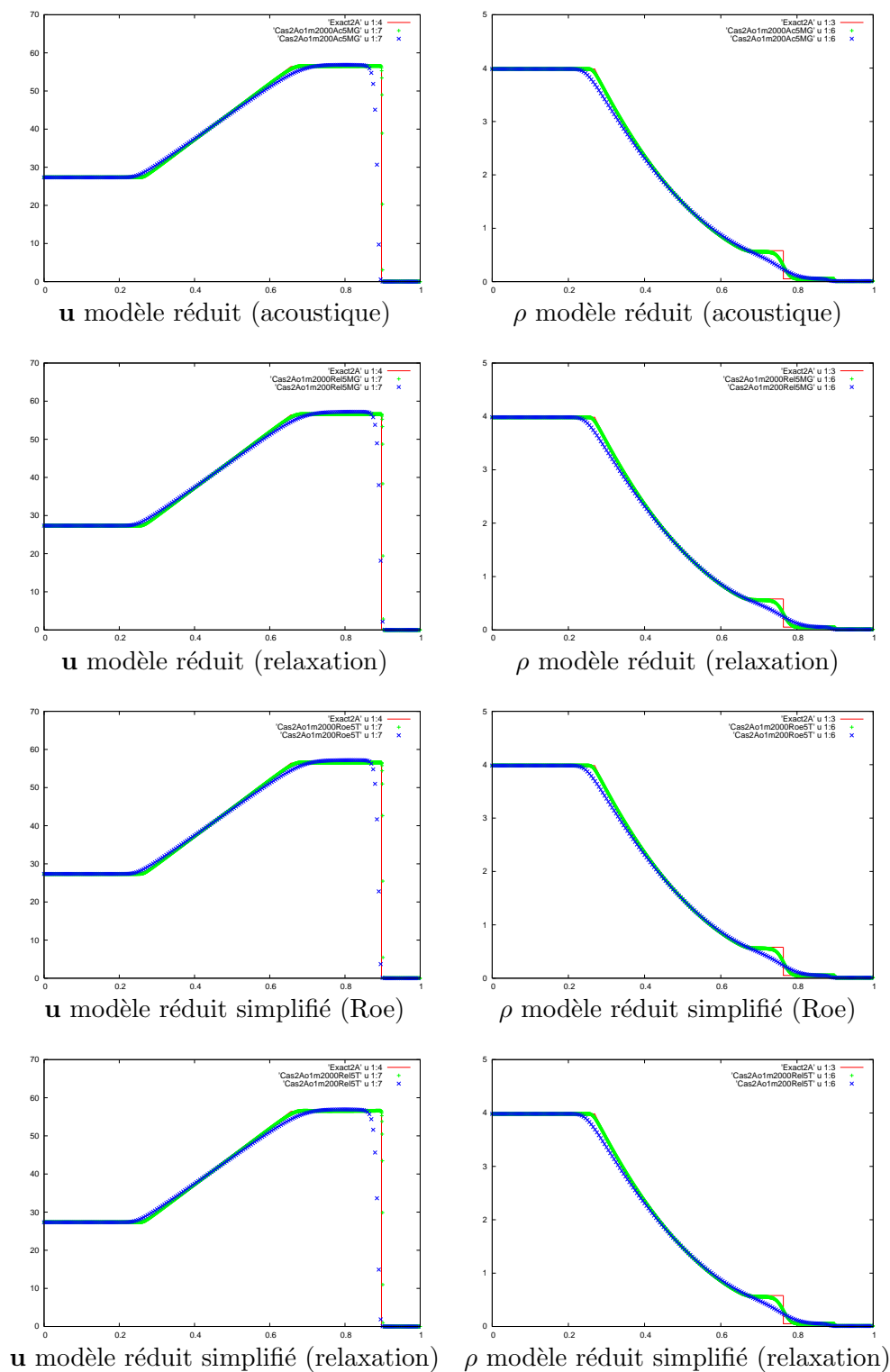


FIG. F.9 – Tube à choc 2A, modèles réduits, $t = 0.01s$, données initiales : si $x < 0.2$ $\rho = 3.984$, $u = 27.355$, $p = 1000$, $\gamma = 1.667$, si $x > 0.2$ $\rho = 0.01$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 1.4$

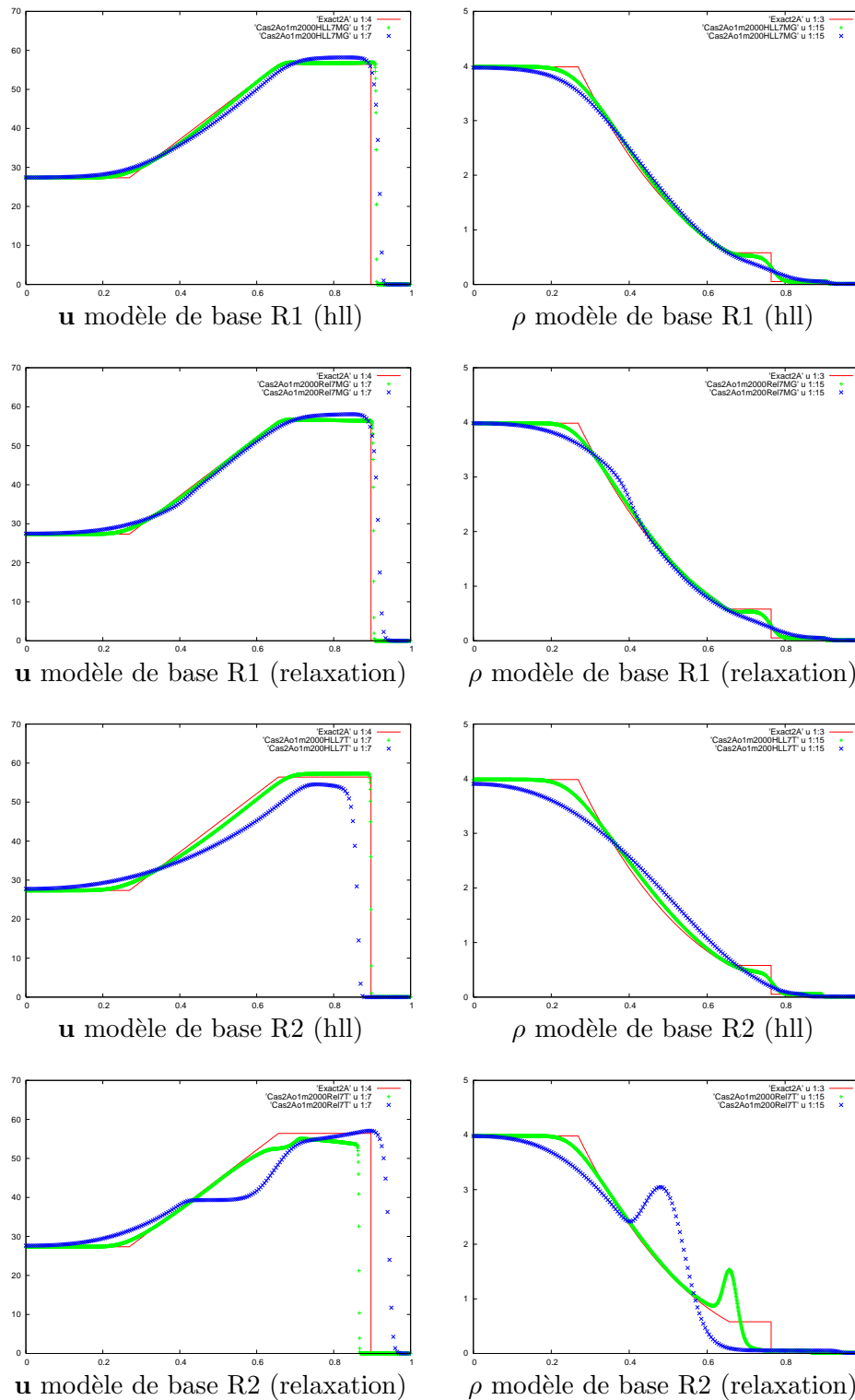


FIG. F.10 – Tube à choc 2A, modèle de base, $t = 0.01s$, données initiales : si $x < 0.2$ $\rho = 3.984$, $u = 27.355$, $p = 1000$, $\gamma = 1.667$, si $x > 0.2$ $\rho = 0.01$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 1.4$

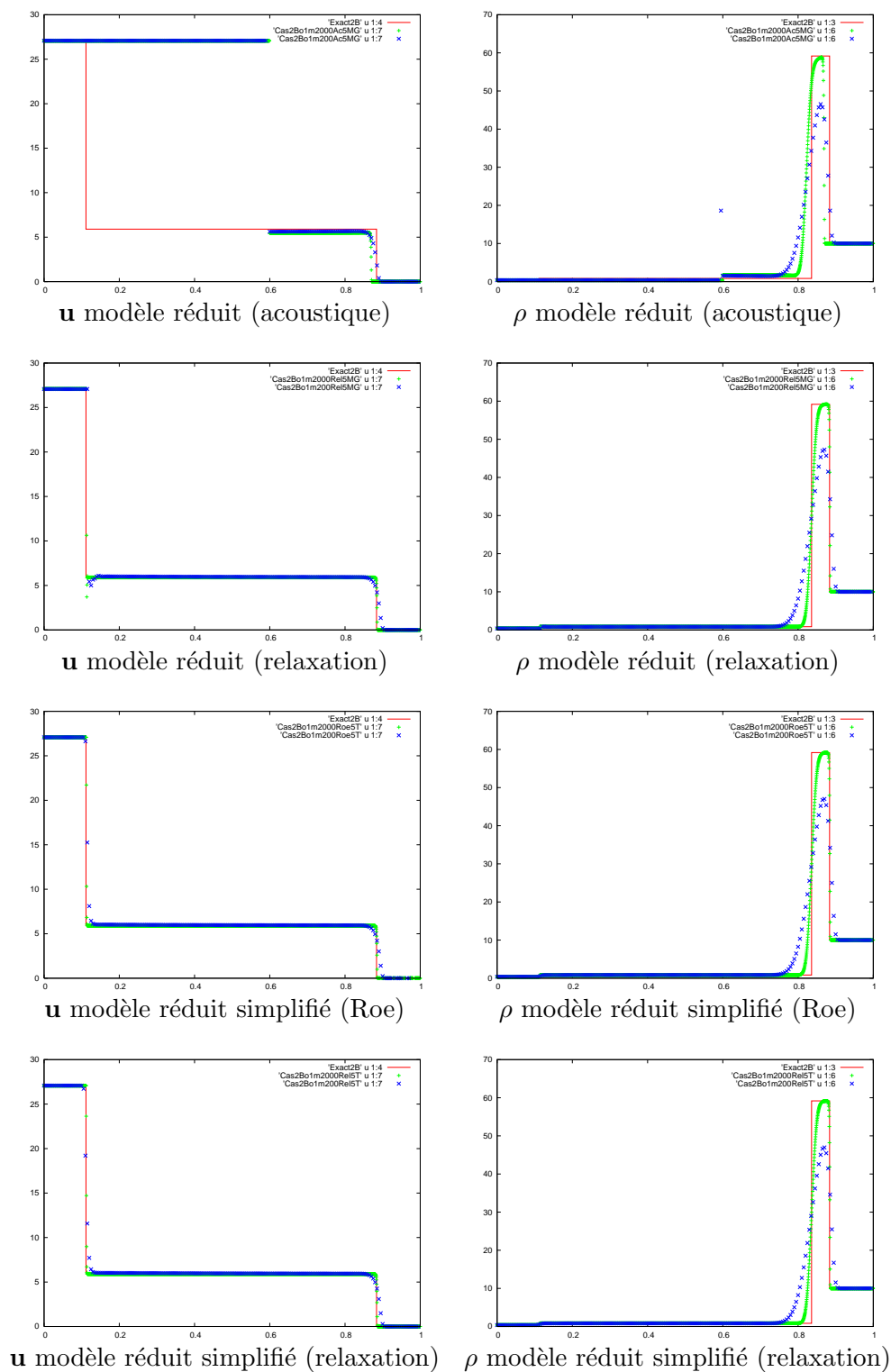


FIG. F.11 – Tube à choc 2B, modèles réduits, $t = 0.04s$, données initiales : si $x < 0.6$ $\rho = 0.384$, $u = 27.077$, $p = 100$, $\gamma = 1.667$, si $x > 0.6$ $\rho = 10$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 1.4$

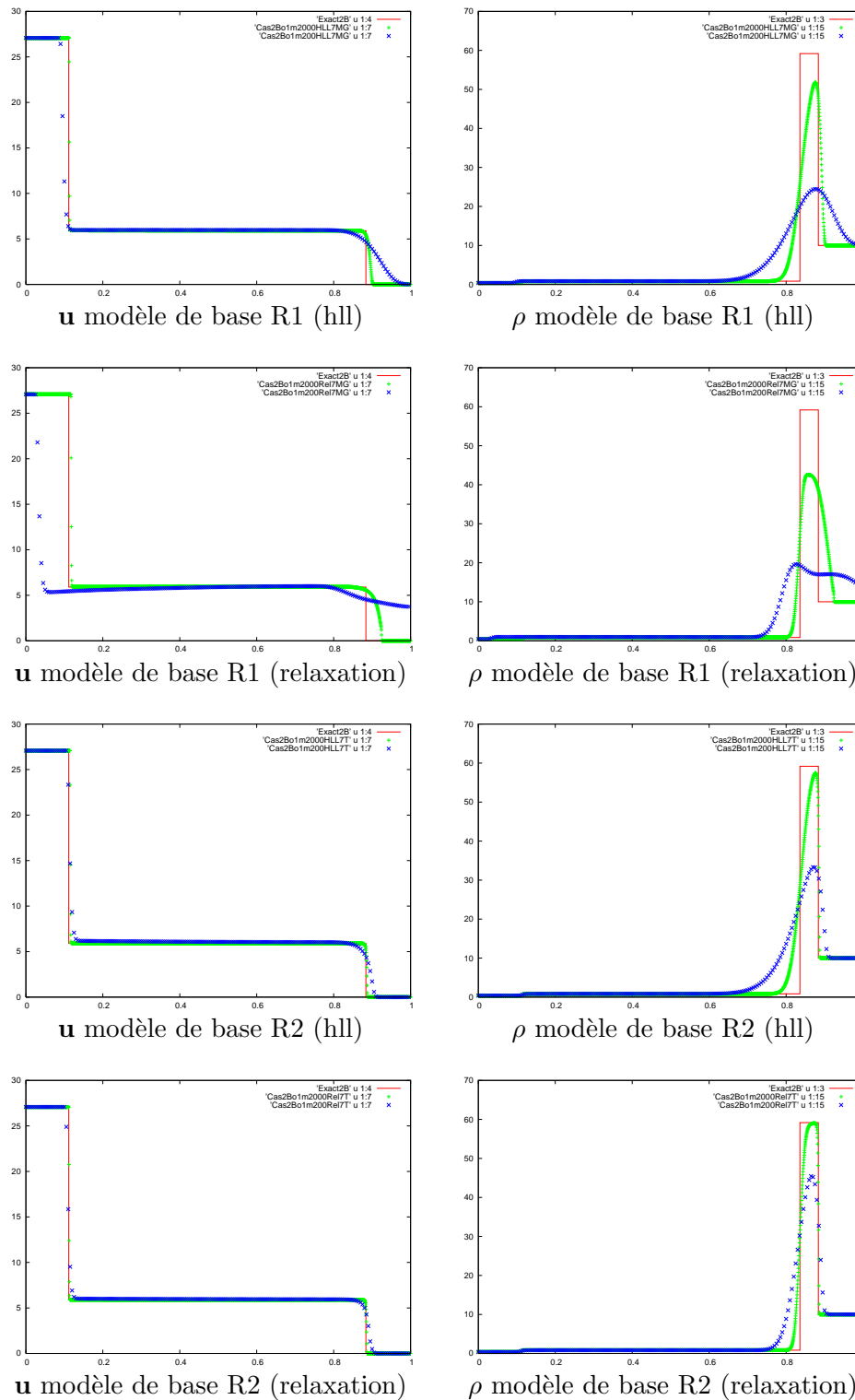


FIG. F.12 – Tube à choc 2B, modèle de base, $t = 0.04s$, données initiales : si $x < 0.6$ $\rho = 0.384$, $u = 27.077$, $p = 100$, $\gamma = 1.667$, si $x > 0.6$ $\rho = 10$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 1.4$

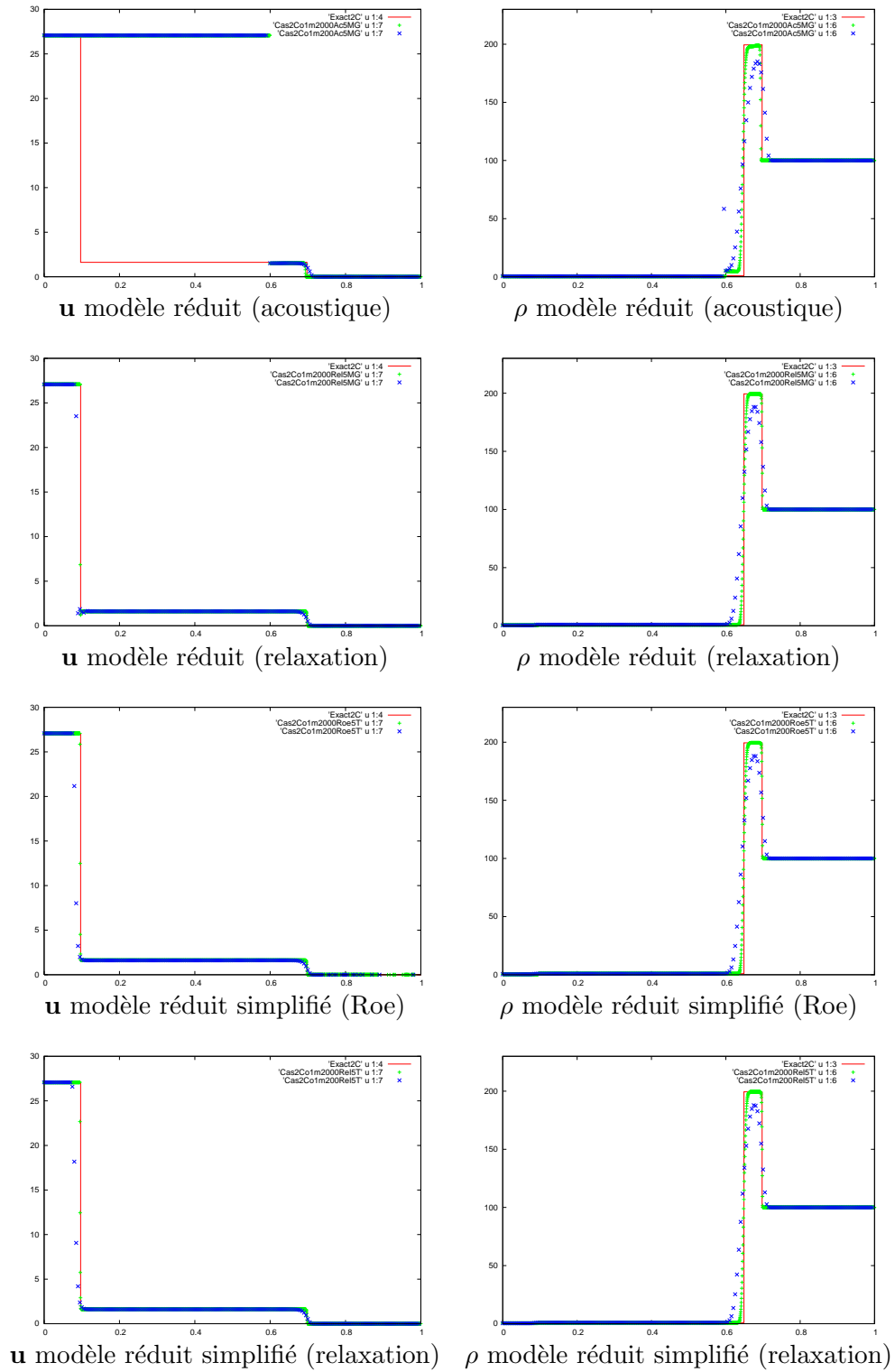


FIG. F.13 – Tube à choc 2C, modèles réduits, $t = 0.03s$, données initiales : si $x < 0.6$ $\rho = 0.384$, $u = 27.077$, $p = 100$, $\gamma = 1.667$, si $x > 0.6$ $\rho = 100$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 3$

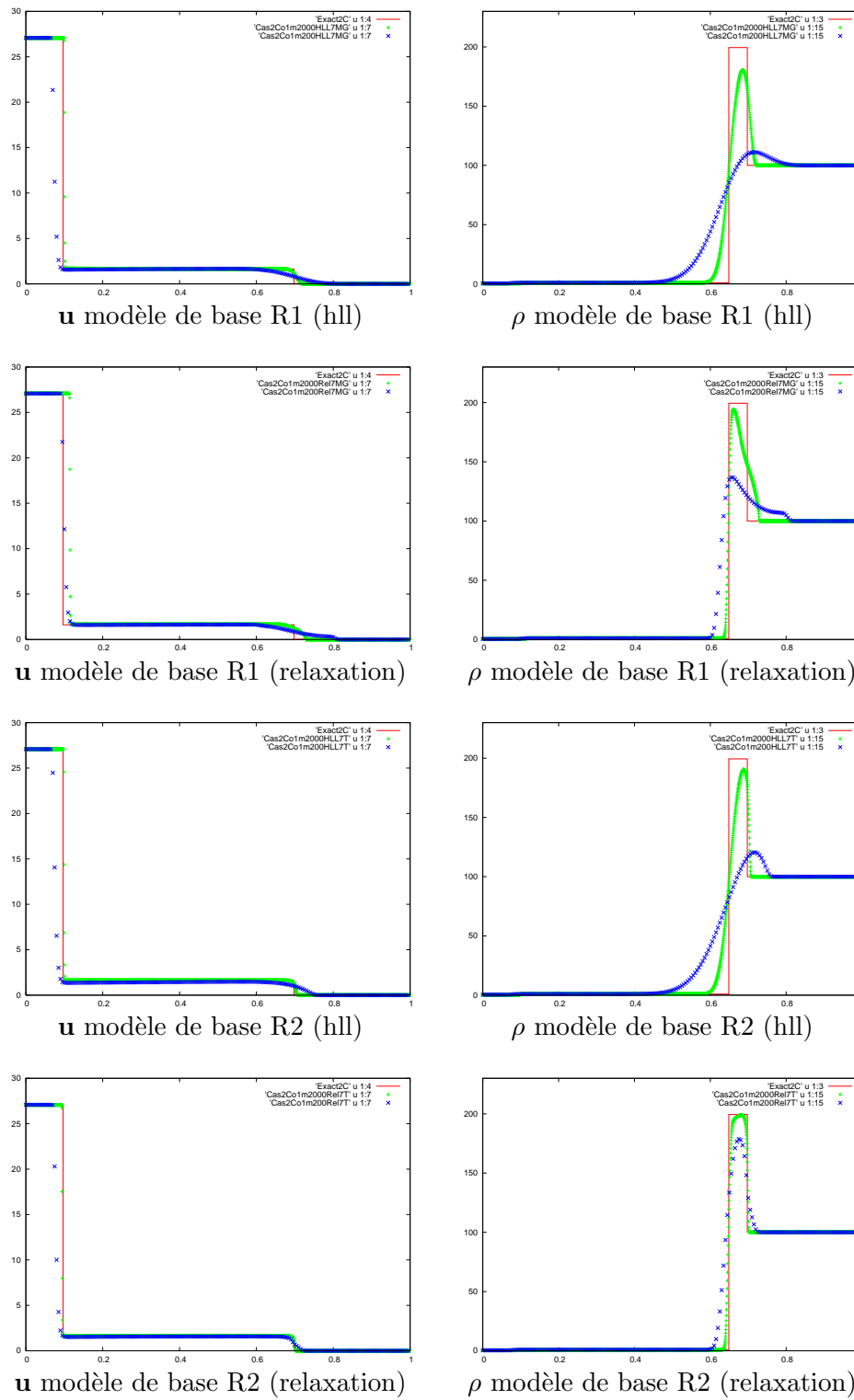


FIG. F.14 – Tube à choc 2C, modèle de base, $t = 0.03s$, données initiales : si $x < 0.6$ $\rho = 0.384$, $u = 27.077$, $p = 100$, $\gamma = 1.667$, si $x > 0.6$ $\rho = 100$, $u = 0$, $p = 1$, $\gamma = 3$

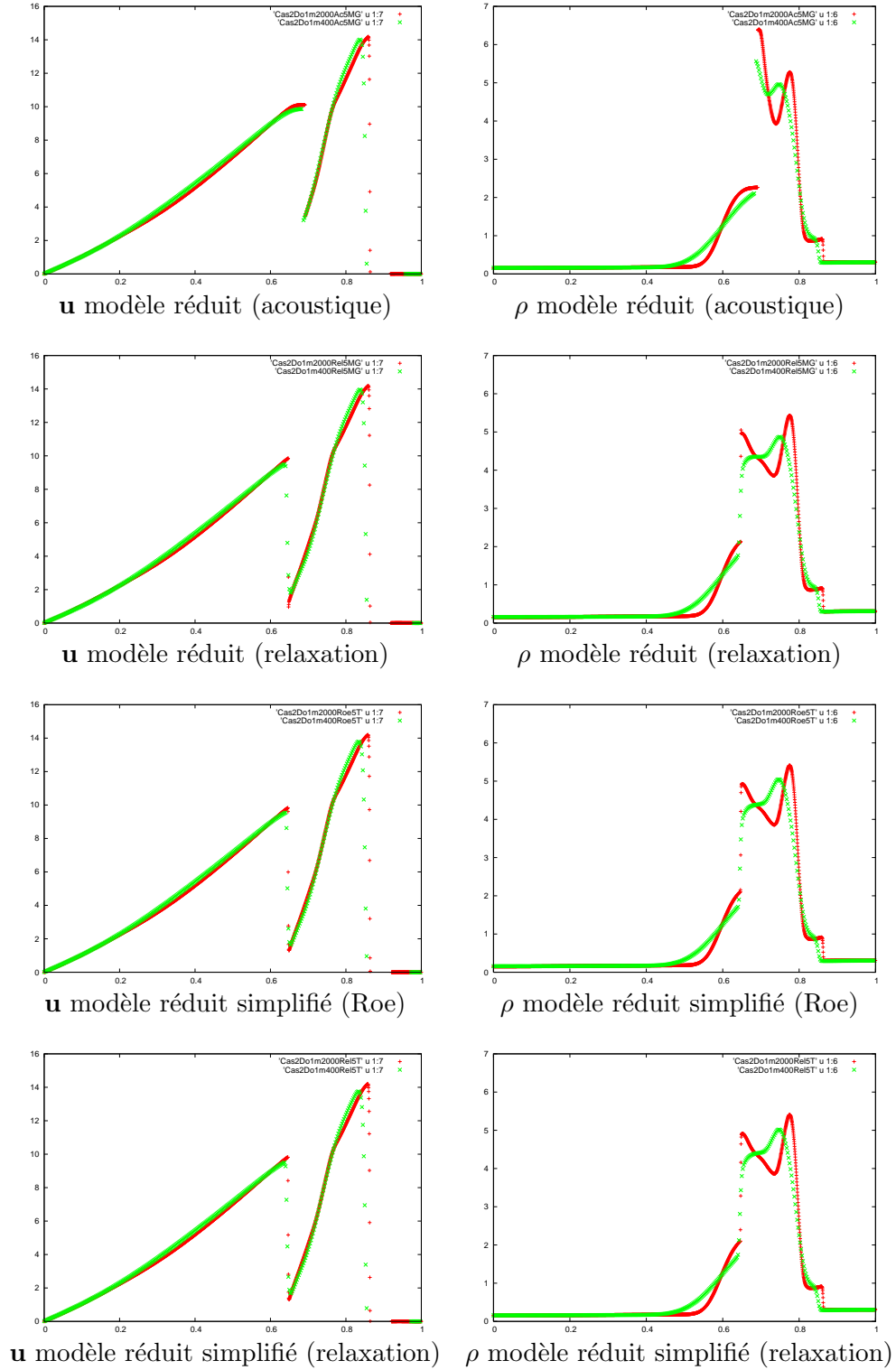


FIG. F.15 – Tube à choc 2D, modèles réduits, bords réfléchissant, $t = 0.038s$, données initiales : si $x < 0.1$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 1000$, $\gamma = 1.4$, si $0.1 < x < 0.9$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 0.01$, $\gamma = 1.4$, et si $x > 0.9$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 100$, $\gamma = 1.4$

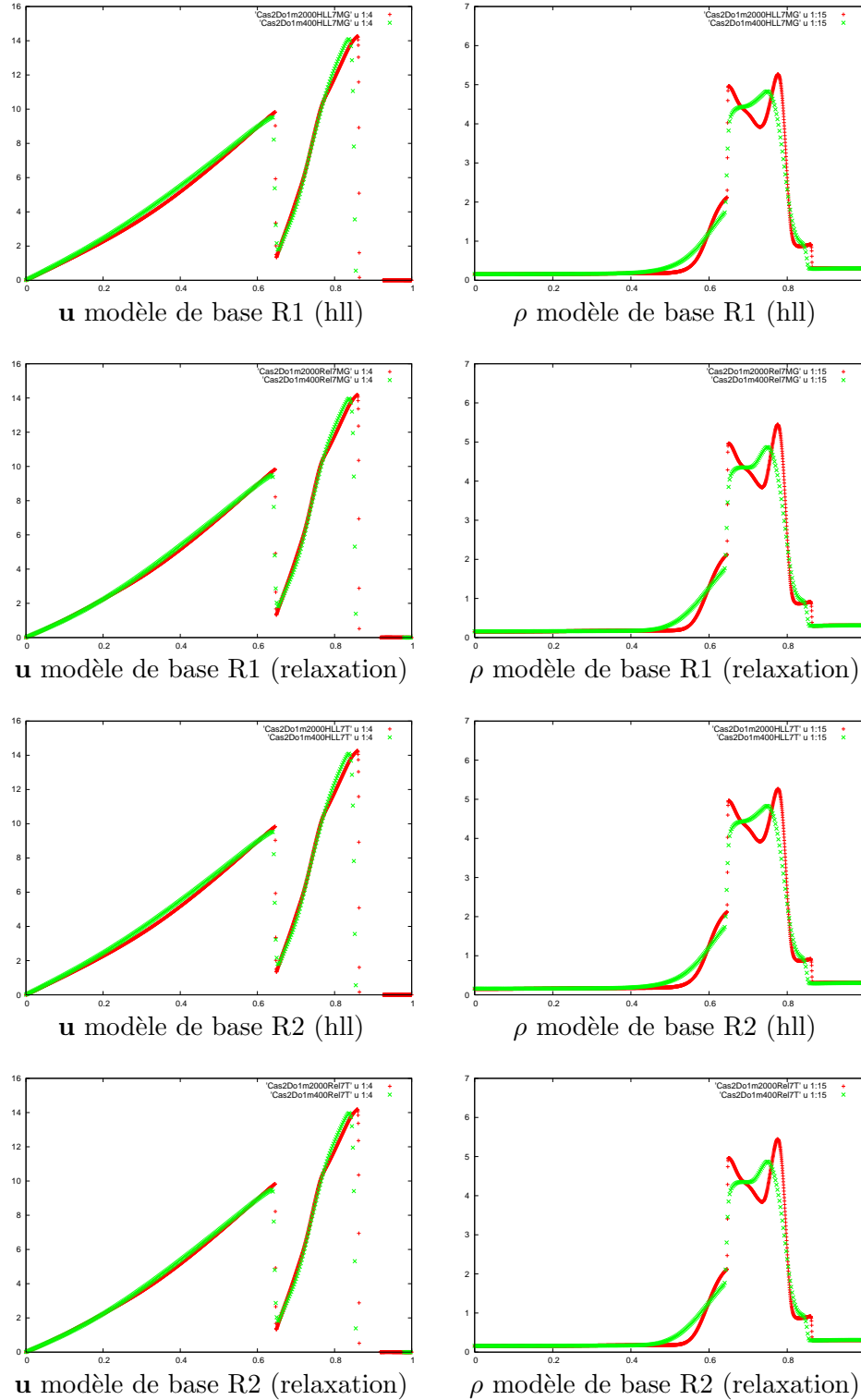


FIG. F.16 – Tube à choc 2D, modèle de base, bords réfléchissant, $t = 0.038s$, données initiales : si $x < 0.1$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 1000$, $\gamma = 1.4$, si $0.1 < x < 0.9$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 0.01$, $\gamma = 1.4$, et si $x > 0.90.1$ $\rho = 1$, $u = 0$, $p = 100$, $\gamma = 1.4$