

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Guillaume BORDES**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

SOMMES D'ENSEMBLES DE PETITE DENSITÉ SUPÉRIEURE

Soutenue le 12 décembre 2005 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

Après avis de :

L. HABSIEGER Directeur de Recherches, Institut Camille Jordan Lyon I
F. HENNECART Professeur, Université Jean Monnet à Saint-Etienne

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

L. HABSIEGER Directeur de Recherches, Institut Camille Jordan
J-M. DESHOILLERS Professeur, Université Bordeaux 1
Y. BILU Professeur, Université Bordeaux I
F. HENNECART Professeur, Université Jean Monnet
A. PLAGNE Chercheur à l'École Polytechnique

**Président
Rapporteur
Examineurs**

REMERCIEMENTS

A mon directeur de thèse **Yuri Bilu**. Tu m'as proposé un sujet passionnant, ta disponibilité et ton immense culture mathématique m'ont aidé à l'appréhender. Jamais je ne te serai assez reconnaissant pour cela.

A **François Hennecart** pour m'avoir initié à la théorie additive et m'avoir donné le goût des questions de nombres. Que tu aies accepté de te joindre à ce jury fut un réel plaisir.

A **Alain Plagne** qui m'a également fait découvrir avec passion cette branche des mathématiques et a accepté de prendre part à ce jury.

A **Laurent Habsieger** pour avoir accepté d'être président de ce jury. La précision de tes remarques a plus que participé à la qualité de ma rédaction.

A **Jean-Marc Deshouillers** pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury. Que vous ayez apprécié ma soutenance fut pour moi une grande fierté.

A **Renling Jin** avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger quelques mots, par mail ou lors de sa venue dans notre laboratoire. La lecture de ses articles est à l'origine de mon sujet de recherche et l'utilisation de ses derniers résultats m'a permis de faire des avancées majeures.

Aux **Thésards et Collègues** de travail de l'Université. Si la recherche fut souvent une activité solitaire, les échanges extra-mathématiques ont été autant de moments de plaisir et de détente.

A **Véronique Saint-Martin** pour sa gentillesse et son dévouement de chaque instant en particulier lors de l'organisation du pot de thèse.

A **mes instituteurs** qui m'ont fait le plaisir d'être là le jour de la fin de mes études. Je leur suis plus que reconnaissant de m'avoir fait autant aimé l'école.

A **mes parents, ma famille et mes amis** qui ont fait le déplacement pour assister à ma soutenance. C'est avec émotion que j'ai exposé mon travail devant eux. Ils ont été un soutien sans faille tout au long de mes recherches. Je les en remercie infiniment.

A **Thomas** qui a entendu parler de théorie additive des nombres quelques jours avant de venir au monde. Il m'a fait lui aussi l'honneur d'être présent.

A **Virginie** et **Roland** pour la patience dont ils ont su faire preuve pendant la préparation de cette thèse.

A tous ceux que je n'ai pas oubliés mais pour lesquels la page est trop petite pour contenir les noms.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Problèmes inverses en théorie additive des nombres	7
1.2	Notations et problématique	9
1.3	Les principaux résultats	13
1.4	Plan de la thèse	18
2	Structure de A lorsque $\gamma < \frac{11}{6}\alpha$	21
2.1	Résultats généraux en théorie additive	21
2.1.1	Une borne inférieure pour $\bar{d}(A + A)$	21
2.1.2	Quelques lemmes additifs	22
2.1.3	Les homomorphismes de Freiman	23
2.1.4	Quelques résultats en théorie additive multidimensionnelle	25
2.2	Transposition du problème	26
2.2.1	Dans le cadre fini	26

2.2.2	Dans le cadre bidimensionnel	27
2.3	Le cas non archimédien	29
2.3.1	Les droites sont consécutives	31
2.3.2	Les droites sont bien remplies	37
2.4	Le cas archimédien	42
3	Structure de A lorsque $\gamma < \frac{5}{3}\alpha$	43
3.1	Transposition du problème dans le cadre multidimensionnel	43
3.2	Le cas non archimédien	45
3.3	Le cas archimédien	50
4	Les améliorations dues aux résultats de Jin	55
4.1	Que se passe-t-il lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$?	55
4.2	Le théorème est vrai quand $\alpha > \alpha_0$	58
4.2.1	Le Théorème de Jin pour les ensembles finis	58
4.2.2	Preuve du Théorème 1.22	59
4.3	La conjecture de Freiman	60

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problèmes inverses en théorie additive des nombres

Afin de parler de théorie additive des nombres, il est essentiel de présenter la définition suivante :

Notations 1.1. Soit $(E, +)$ un semi-groupe, soient X et Y deux sous-ensembles de E , alors

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

En théorie additive des nombres, E sera le plus souvent l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} mais, par extension, ce pourra être \mathbb{Z}^2 , $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou tout autre groupe abélien. On peut citer immédiatement quelques problèmes célèbres en théorie additive des nombres dont certains ne sont à ce jour pas résolus.

Théorème 1.2 (Green, 2003). Soit $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. On dit que A est *sum-free* si

$$(A + A) \cap A = \emptyset.$$

Soit SF_n l'ensemble des sous-ensembles *sum-free* de $\{1, 2, \dots, n\}$. Alors

$$|SF_n| = O\left(2^{\frac{n}{2}}\right).$$

La preuve de ce résultat, connu sous le nom de conjecture de Cameron-Erdős, peut être trouvée dans [Gr] ou dans [Bo1].

Conjecture 1.3 (Goldbach). *Soit P l'ensemble des nombres premiers. Alors*

$$P + P = 2\mathbb{N} \setminus \{0, 2\}.$$

On distingue essentiellement deux types de problèmes en théorie additive : les problèmes *directs* et les problèmes *inverses*. Les problèmes directs consistent, étant données des informations sur deux ensembles A et B dans \mathbb{N} , à trouver la taille, la structure et parfois la nature de l'ensemble-somme $A + B$. Le résultat de ce type le plus élémentaire est sans doute le suivant :

Théorème 1.4. *Soit A un ensemble fini d'entiers positifs ou nuls. Alors $|A + A| \geq 2|A| - 1$.*

Démonstration. Notons $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ avec $a_i < a_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$. Alors $A + A$ contient les $2n - 1$ éléments

$$a_1 + a_1 < a_1 + a_2 < a_2 + a_2 < \dots < a_{n-1} + a_{n-1} < a_{n-1} + a_n < a_n + a_n.$$

□

Dans cette thèse, nous allons traiter un problème inverse en théorie additive des nombres. Il s'agit, étant données des informations sur l'ensemble-somme $A + B$, de déterminer la taille, la structure des ensembles de départ A et B . Cette notion a été introduite et étudiée à partir du milieu du XXème siècle et s'appuie sur la philosophie suivante. Donnons-nous un moyen de mesurer la taille des ensembles que nous considérons, nous noterons $t(A)$ la taille d'un ensemble A . Lorsque A est un ensemble fini, on pourra prendre $t(A) = |A|$; lorsque A est infini, on introduira la notion de densité. Un problème direct consiste à trouver, sous certaines conditions, la valeur minimale de $t(A + B)$ en fonction de $t(A)$ et $t(B)$. L'idée est la suivante : lorsque $t(A + B)$ est très proche de sa valeur minimale, alors A et B doivent avoir une structure bien particulière. Ceci peut être illustré par le résultat suivant :

Théorème 1.5. *Soit A un ensemble fini d'entiers positifs ou nuls. Si on a l'égalité*

$$|A + A| = 2|A| - 1,$$

alors A est en progression arithmétique.

Démonstration. Reprenons la preuve du Théorème 1.4. Si $|A + A| = 2n - 1$, alors, pour tout $1 \leq i \leq n - 2$, l'élément $a_i + a_{i+2}$ est déjà dans la liste des éléments distincts de $A + A$:

$$a_1 + a_1 < a_1 + a_2 < a_2 + a_2 < \dots < a_{n-1} + a_{n-1} < a_{n-1} + a_n < a_n + a_n.$$

Puisque $a_i + a_{i+1} < a_i + a_{i+2} < a_{i+1} + a_{i+2}$, on doit nécessairement avoir $2a_{i+1} = a_i + a_{i+2}$ et ainsi, a_i, a_{i+1} et a_{i+2} sont en progression arithmétique. Ceci montre que A est en progression arithmétique. □

D'autres théorèmes, plus élaborés, seront utilisés dans la suite. En général, plus la taille de $A + B$ s'éloigne de sa valeur minimale, moins la structure de A et B peut être connue de façon précise. On peut citer le fameux Théorème $3k - 4$ de Freiman qui est l'exemple type de genre de problème :

Théorème 1.6 ($3k - 4$ de Freiman). *Soit A un ensemble fini d'entiers positifs ou nuls. On suppose $|A| \geq 3$. Si*

$$|A + A| \leq 3|A| - 4,$$

alors A est un sous-ensemble d'une progression arithmétique de cardinal $|A + A| - |A| + 1$.

1.2 Notations et problématique

Dans cette thèse, nous allons considérer des ensembles infinis d'entiers naturels. Pour pouvoir aborder des problèmes inverses, il faut se donner un moyen de mesurer la taille de ces ensembles infinis.

Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls. Pour $y > x > 0$, on note

$$A(x) := |A \cap [0; x]| \quad \text{et} \quad A(x, y) := |A \cap [x; y]|.$$

On définit alors la densité asymptotique inférieure $\underline{d}(A)$ et la densité asymptotique supérieure $\overline{d}(A)$ par

$$\underline{d}(A) := \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}, \quad \overline{d}(A) := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}.$$

Exemple 1.7. Soit N un entier naturel strictement positif. Soit K un sous-ensemble de $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ avec $|K| = k$. Soit A l'ensemble des entiers naturels positifs dont le reste de la division euclidienne par N appartient à K . Alors $\underline{d}(A) = \overline{d}(A) = k/N$. On dit que A est l'union de k classes résiduelles \pmod{N} .

Exemple 1.8. Soit α un nombre réel positif tel que $0 < \alpha < 1$. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'entiers positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \infty.$$

Considérons l'ensemble

$$A = \mathbb{N} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} [(1 - \alpha)T_n; T_n].$$

Alors $\underline{d}(A) = 0$ et $\overline{d}(A) = \alpha$.

Les problèmes inverses associés à la densité asymptotique inférieure ont été étudiés très tôt par M. Kneser (voir [Kn] et [H-R]).

Il a obtenu en particulier le résultat suivant dont la formulation provient de [Bi1] :

Théorème 1.9 (Kneser). *Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $\underline{d}(A) > 0$. Supposons qu'on ait*

$$\underline{d}(A + A) \leq \sigma \underline{d}(A),$$

avec $\sigma < 2$. Alors il existe un entier $N > 0$ et $K \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ tels que, si on note

$$K' := \{x \in \mathbb{N} \mid x \pmod{N} \in K\},$$

on a :

1. $A \subseteq K'$,
2. $(A + A) \setminus (K' + K') \cup (K' + K') \setminus (A + A)$ est fini,
3. $|K + K| = 2|K| - 1$.

Remarque 1.10. Le Théorème de Kneser donne dans ce cas la structure de A lorsque

$$\underline{d}(A + A) < 2\underline{d}(A).$$

A est *approximativement* l'union de $|K|$ classes résiduelles \pmod{N} . En effet, il suffit de remarquer que

$$\underline{d}(A) \geq \frac{1}{2}\underline{d}(A + A) = \frac{1}{2}\underline{d}(K' + K') = \frac{|K + K|}{2N} = \underline{d}(K') - \frac{1}{2N}.$$

L'ensemble A est donc un *gros* sous-ensemble de K' . On dira que A est de type Kneser.

Ce théorème ne peut s'étendre au cas $\underline{d}(A + A) = 2\underline{d}(A)$ qui reste un problème ouvert. On peut citer l'exemple suivant, tiré de [Bi1] :

Exemple 1.11. Soit η un nombre irrationnel et $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. On définit

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n\eta \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right] \pmod{1}\}.$$

Alors $\underline{d}(A + A) = 2\underline{d}(A)$. La preuve est basée sur l'équirépartition de la suite $(n\eta)_{n \in \mathbb{N}} \pmod{1}$.

Nous allons essayer de donner un analogue du Théorème 1.9 dans le cas où on mesure les ensembles par leur densité asymptotique supérieure. De plus, nous supposerons que $0 \in A$ et que $\text{pgcd}(A) = 1$. Si ce n'est pas le cas, il n'est pas difficile de s'y ramener en appliquant une translation puis une dilatation à l'ensemble A . Ces transformations ne modifient pas la structure de A . On notera $\alpha = \overline{d}(A)$ et $\gamma = \overline{d}(A + A)$. Citons d'abord les résultats suivants, qui seront démontrés dans la thèse (Lemme 2.1, Lemme 4.1 et Remarque 4.3), et qui déterminent la taille minimale de l'ensemble-somme $A + A$ en fonction de la taille de A .

Lemme 1.12. *Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que*

$$0 \in A \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(A) = 1. \quad (1.1)$$

Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, alors $\gamma \geq \frac{3}{2}\alpha$.

Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, alors $\gamma \geq \frac{1+\alpha}{2}$.

Remarque 1.13. – Sous les hypothèses (1.1) du Lemme 1.12, le Théorème de Kneser permet également de montrer que $\underline{d}(A + A) \geq \min(\frac{3}{2}\underline{d}(A), 1)$. En effet, supposons qu'on ait

$$\underline{d}(A + A) < \frac{3}{2}\underline{d}(A). \quad (1.2)$$

Alors

$$\underline{d}(A + A) = \frac{2|K| - 1}{N} < \frac{3}{2}\underline{d}(A) \leq \frac{3|K|}{2N}, \quad (1.3)$$

et donc $|K| < 2$. Or, $|K| = 1$ et $0 \in A$ impliquent que A est inclus dans une progression arithmétique de raison N ce qui, si $N > 1$, contredit $\text{pgcd}(A) = 1$. On a donc $N = 1$ et ainsi, d'après (1.3), $\underline{d}(A + A) = 1$.

– Il n'y a pas de borne supérieure autre que 1 pour $\overline{d}(A + A)$. Par exemple, si on considère l'ensemble

$$A = \{0, 1, 2, \dots, k\} \cup k\mathbb{N},$$

pour un entier k positif suffisamment grand, on peut avoir $\overline{d}(A) = 1/k$ aussi petit qu'on le souhaite et $A + A = \mathbb{N}$.

L'exemple suivant montre que le Lemme 1.12 est optimal et, également, qu'on ne pourra pas obtenir un résultat similaire à celui de Kneser dans le cas de la densité supérieure.

Exemple 1.14. Soit α un nombre réel positif tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'entiers positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \infty.$$

Alors l'ensemble

$$A = \mathbb{N} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} [(1 - \alpha)T_n; T_n].$$

vérifie $\overline{d}(A) = \alpha$ et $\overline{d}(A + A) = \frac{3}{2}\alpha$. Avec les mêmes notations, si $\alpha \geq 1/2$, alors $\overline{d}(A + A) = \frac{1+\alpha}{2}$. Voir Figure 1.1.

Cet ensemble n'est pas du type des ensembles résultant du Théorème de Kneser 1.9, on dit que c'est un ensemble *lacunaire*. En fait, on peut comprendre pourquoi la démonstration de Kneser ne se transpose pas au cas de la densité supérieure. Dans sa preuve, Kneser utilise de nombreuses fois la propriété suivante : pour des ensembles A et B disjoints, on a $\underline{d}(A \cup B) \geq \underline{d}(A) + \underline{d}(B)$. Ceci devient faux (on a même l'inégalité contraire) dans le cas de la densité supérieure.

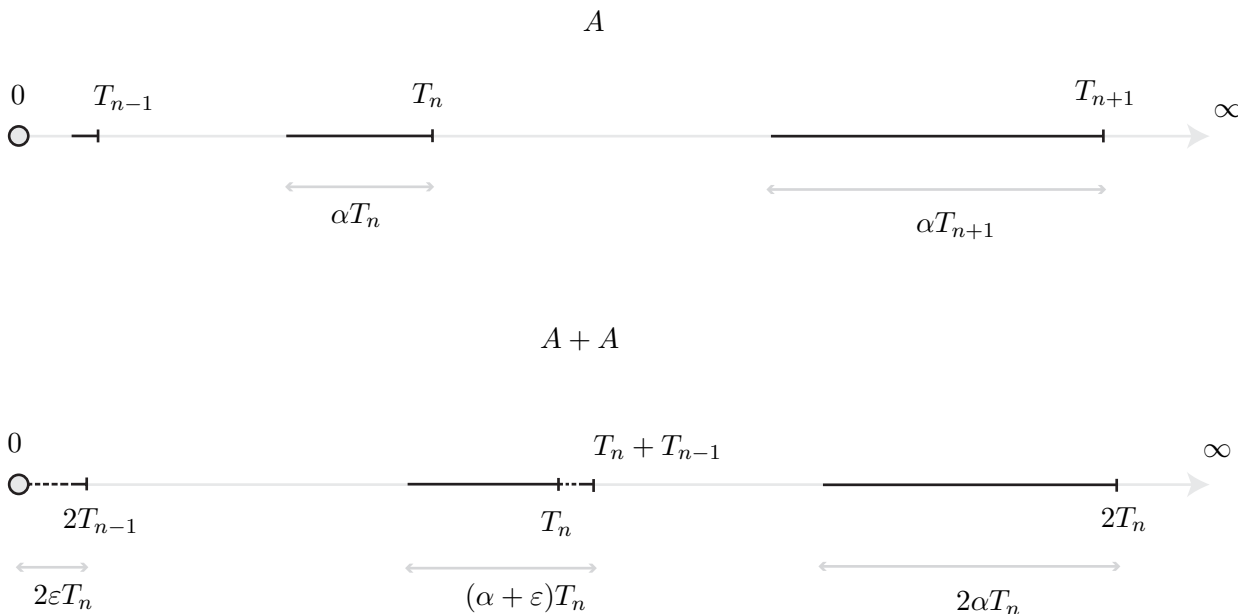


FIG. 1.1 – Exemple d'ensemble lacunaire de densité supérieure α

Même si le cas $\alpha > 1/2$ sera abordé dans la dernière partie, nous traiterons essentiellement le cas $\alpha < 1/2$. Le problème peut donc être posé ainsi :

Question 1.15. *Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. Quelle est la structure de A lorsque $\bar{d}(A + A) = \sigma \bar{d}(A)$ où σ est un nombre réel proche de $3/2$?*

Remarque 1.16. On peut déjà noter qu'on ne pourra avoir la structure exacte de l'ensemble A . En effet, imaginez un ensemble A tel que l'ensemble-somme $A + A$ soit petit, disons $\gamma = \frac{3}{2}\alpha$. Si on enlève quelques éléments à A (et même une infinité) de manière à ce qu'on ait toujours $\bar{d}(A) = \alpha$, on aura toujours $\bar{d}(A + A) = \frac{3}{2}\bar{d}(A)$. Ce type de variations est inévitable lorsqu'on mesure les objets avec des densités asymptotiques.

1.3 Les principaux résultats

On rappelle que $\alpha = \bar{d}(A)$ et que $\gamma = \bar{d}(A + A) = \sigma\alpha$ avec $\sigma \geq 3/2$. La réponse à la question posée dans la section précédente sera toujours deux types d'ensembles : des ensembles du type de ceux obtenus dans le Théorème de Kneser (cas non archimédien) et des ensembles lacunaires (cas archimédien). Dans le théorème suivant, on traite le cas $\sigma < 11/6$ pour des ensembles de petite densité supérieure, à savoir $\alpha < \alpha_0$ pour une constante absolue α_0 .

Théorème 1.17. *Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. On note $\alpha := \bar{d}(A)$ et $\gamma := \bar{d}(A + A)$. Supposons fixés $\frac{3}{2} \leq \sigma < \frac{11}{6}$ et $2 \leq s \leq 5$ l'entier positif vérifiant*

$$2 - \frac{1}{s} \leq \sigma < 2 - \frac{1}{s+1}.$$

Alors il existe $\alpha_0 \in]0; \frac{1}{2}[$ une constante absolue telle que, si $0 < \alpha < \alpha_0$ et

$$\gamma = \sigma\alpha, \tag{1.4}$$

on est dans un des deux cas suivants.

1. Cas non archimédien : il existe $N \in \mathbb{N}$ et $2 \leq r \leq s$ tels que A est un sous-ensemble d'une union de r classes résiduelles \pmod{N} dont la projection dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est en progression arithmétique. De plus,

$$\alpha \geq \frac{r-1}{2N(\sigma-1)}.$$

2. Cas archimédien : il existe $2 \leq r \leq s$, une constante $C_1(\sigma)$ dépendant seulement de σ , une suite croissante d'entiers $(y_j)_{j \geq 1}$ et des suites

$$0 \leq h_j^0 \leq g_j^1 \leq h_j^1 \leq g_j^2 \leq \dots \leq h_j^{r-2} \leq g_j^{r-1} \leq y_j$$

vérifiant

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A(y_j)}{y_j} = \alpha,$$

et, pour tout $j \geq 1$,

$$A(h_j^i, g_j^{i+1}) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} (h_j^i - g_j^i) \leq C_1(\sigma) |A(y_j)|,$$

où $g_j^0 := 0$ et $h_j^{r-1} := y_j$.

Le résultat obtenu dans le cas archimédien est très peu précis. On verra dans la preuve qu'on se heurte à des difficultés techniques car les ensembles mis en jeu sont d'une structure très complexe. Ce théorème est un premier pas vers un Théorème de Kneser pour la densité supérieure. On peut également voir qu'il ne saurait lui non plus être étendu au cas $\sigma = 2$ comme le montre l'Exemple 1.11.

Le résultat obtenu dans le cas non archimédien n'est pas optimal comme on va le voir dans le théorème suivant. En effet, pour $\sigma < 5/3$, on va obtenir une structure bien plus fine de l'ensemble A .

Théorème 1.18. *Il existe une constante absolue α_0 telle qu'on ait le résultat suivant. Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. Posons $\alpha = \overline{d}(A)$ et $\gamma = \overline{d}(A + A)$. Supposons $0 < \alpha = \overline{d}(A) < \alpha_0$ et*

$$\gamma = \sigma\alpha,$$

où $3/2 \leq \sigma < 5/3$. Alors on est dans un des deux cas suivants.

1. Cas non archimédien : il existe deux entiers positifs N et t avec $\text{pgcd}(N, t) = 1$ tels que

$$A \subseteq \{0, t\} + \mathbb{N}N,$$

et

$$\alpha \geq \frac{6}{(4\sigma - 3)N}.$$

2. Cas archimédien : il existe une suite croissante d'entiers $(y_j)_{j \geq 1}$ avec

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A(y_j)}{y_j} = \alpha,$$

et deux suites $(b_j)_{j \geq 1}$ et $(t_j)_{j \geq 1}$ avec $0 \leq b_j \leq t_j \leq y_j$ telles que, si on définit

$$\lambda_j := \frac{b_j}{y_j - t_j}$$

et

$$r_j := \frac{A(t_j, y_j)}{y_j - t_j + 1},$$

alors $A(b_j, t_j) = 0$ pour tout $j \geq 1$ et

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} r_j = r$$

avec

$$\lambda \leq \frac{2\sigma - 3}{2\sigma - 2} \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \alpha \right)^{-1}$$

et

$$r \geq \left(\frac{1}{2\sigma - 2} + \lambda \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \alpha \right) \right).$$

Remarque 1.19. – On ne peut pas étendre le Théorème 1.18 au cas $\overline{d}(A + A) = \frac{5}{3}\overline{d}(A)$. Il suffit de considérer l'ensemble $A := \mathbb{N}N \cup (1 + 2\mathbb{N}N)$ qui vérifie cette condition mais aussi $\alpha = \frac{3}{2N}$. En posant $\sigma = \frac{5}{3}$ dans le Théorème 1.18, on aurait obtenu $\alpha \geq \frac{18}{11N}$ ce qui est impossible car $\frac{18}{11N} > \frac{3}{2N} = \alpha$.

- On peut regarder ce qu'on obtient dans le cas extrême $\sigma = \frac{3}{2}$. Dans le cas non archimédien, cela donne $\alpha \geq \frac{2}{N}$, et A a la même densité supérieure que l'union des deux classes résiduelles qui le contient. C'est un ensemble de type Kneser. Dans le cas archimédien, on trouve $\lambda = 0$ et donc $r = 1$. L'ensemble A est donc un ensemble lacunaire, du type de celui rencontré dans l'Exemple 1.14. Lorsque σ s'écarte un peu de sa valeur minimale, on comprend que l'ensemble A possède une structure proche de celles qui viennent d'être décrites.

L'exemple suivant montre que la borne inférieure obtenue dans le cas non archimédien du Théorème 1.18 ne peut être améliorée.

Exemple 1.20. Fixons $\frac{3}{2} \leq \sigma < \frac{5}{3}$. Soient $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'entiers positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \infty$$

et

$$E := \mathbb{N} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} [(1 - \alpha')T_n; T_n],$$

où $\alpha' = \frac{3}{4\sigma - 3}$. Soient N un entier positif choisi suffisamment grand et

$$A := N.E \cup (1 + N.E).$$

On peut vérifier que

$$\alpha = \frac{6}{(4\sigma - 3)N} < \alpha_0.$$

De plus,

$$\gamma = 3 \frac{1 + \alpha'}{2N} = \frac{6\sigma}{(4\sigma - 3)N}.$$

Remarque 1.21. En comparant les conclusions des deux théorèmes, on peut noter que le dernier est vraiment bien plus précis. D'abord il donne une vraie structure d'ensemble lacunaire dans le cas archimédien. Enfin, dans le cas non archimédien et par exemple pour $\sigma = \frac{3}{2}$, il donne $\alpha \geq \frac{2}{N}$ au lieu de $\alpha \geq \frac{1}{N}$.

Le résultat suivant est une extension du Théorème 1.18. Il donne la structure de A lorsque α prend n'importe quelle valeur inférieure à $1/2$. En contrepartie, on doit se restreindre à de plus petites valeurs de σ . Malheureusement, on ne connaît pas de manière explicite l'étendue de son champ d'application. En effet, il est valable pour $\sigma < 3/2 + \varepsilon/2$ pour une valeur de ε qui est inférieure à $1/3$ mais qui n'est pas connue explicitement (voir Figure 1.2).

Théorème 1.22. *Il existe une constante absolue $0 < \varepsilon \leq 1/3$ telle qu'on ait le résultat suivant. Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. Posons $\alpha = \bar{d}(A)$ et $\gamma = \bar{d}(A + A)$. Pour tout $0 \leq \delta < \varepsilon$, supposons $0 < \alpha = \bar{d}(A) < \frac{1}{2(1+\delta)}$ et*

$$\gamma = \sigma\alpha,$$

où $\sigma = \frac{3}{2} + \frac{\delta}{2}$. Alors on est dans un des deux cas suivants.

1. Cas non archimédien : il existe deux entiers positifs N et t avec $\text{pgcd}(N, t) = 1$ tels que

$$A \subseteq \{0, t\} + NN,$$

et

$$\alpha \geq \frac{6}{(4\sigma - 3)N}.$$

2. Cas archimédien : il existe une suite croissante d'entiers $(y_j)_{j \geq 1}$ avec

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A(y_j)}{y_j} = \alpha,$$

et deux suites $(b_j)_{j \geq 1}$ et $(t_j)_{j \geq 1}$ avec $0 \leq b_j \leq t_j \leq y_j$ telles que, si on définit

$$\lambda_j := \frac{b_j}{y_j - t_j}$$

et

$$r_j := \frac{A(t_j, y_j)}{y_j - t_j + 1},$$

alors $A(b_j, t_j) = 0$ pour tout $j \geq 1$ et

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} r_j = r$$

avec

$$\lambda \leq \frac{2\sigma - 3}{2\sigma - 2} \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \alpha \right)^{-1}$$

et

$$r \geq \left(\frac{1}{2\sigma - 2} + \lambda \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \alpha \right) \right).$$

1.4 Plan de la thèse

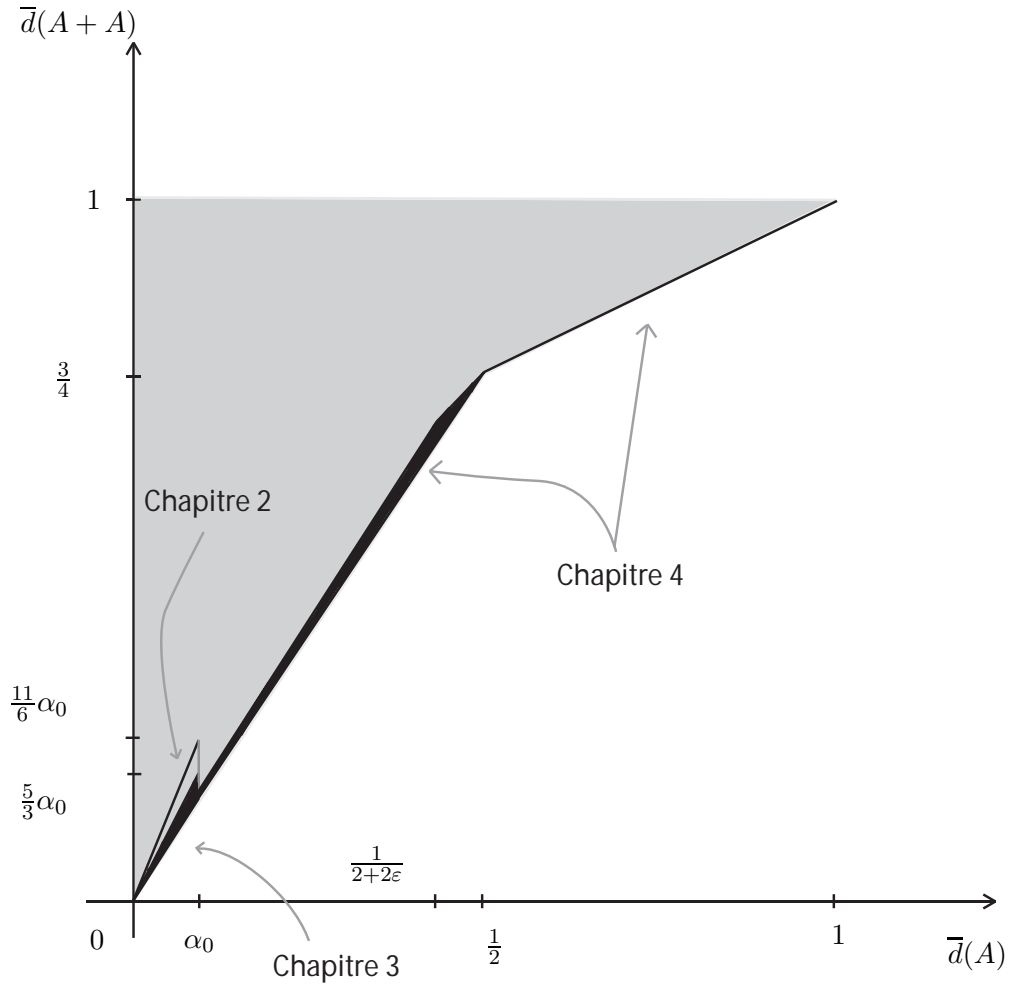


FIG. 1.2 – Synthèse des différents cas étudiés

Dans la première partie de la thèse, on démontre le Théorème 1.17 mais on fournit également tous les outils de théorie additive des nombres nécessaires à la démonstration des autres résultats. Certaines notations sont rappelées dans les parties suivantes mais les répétitions de preuves seront évitées. Dans la deuxième partie, on démontre le Théorème 1.18. Cette partie, à laquelle il faudrait adjoindre les résultats de base énoncés dans la partie précédente, constitue un article publié dans *Acta Arithmetica* (voir [Bo2]). Dans la dernière

partie est traité le cas des ensembles A tels que $\bar{d}(A) > 1/2$. On y démontre ensuite le Théorème 1.22.

La Figure 1.2 montre de manière synthétique les champs d'application des différents théorèmes. Rappelons que la constante α_0 est bien plus petite que ne pourrait le laisser penser cette représentation et que la constante ε est malheureusement inconnue. La partie grise représente les positions possibles du couple $(\bar{d}(A); \bar{d}(A+A))$ sous les hypothèses $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. Les parties noircies représentent les zones dans lesquelles peuvent être appliqués les différents résultats présentés dans cette thèse.

Chapitre 2

Structure de A lorsque

$$\bar{d}(A + A) < \frac{11}{6} \bar{d}(A)$$

2.1 Résultats généraux en théorie additive

2.1.1 Une borne inférieure pour $\bar{d}(A + A)$

Lemme 2.1. *Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. On suppose $\alpha < \frac{1}{2}$. Alors $\gamma \geq \frac{3}{2}\alpha$.*

On peut facilement déduire le Lemme 2.1 du théorème suivant dont on peut trouver la preuve dans [Na] p. 23.

Théorème 2.2. *Soit $k \geq 3$ un entier. Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ un ensemble d'entiers positifs ou nuls tels que*

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1},$$

$$\text{pgcd}(A) = 1.$$

Si $a_{k-1} \geq 2k - 3$, alors $|A + A| \geq 3k - 3$.

Preuve du Lemme 2.1. Puisque $\bar{d}(A) = \alpha$, il existe une suite croissante d'entiers $(y_j)_{j \geq 1}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, si on définit $A_j := A \cap [0; y_j]$ et si on choisit j suffisamment grand, on a

$$\alpha - \varepsilon < \frac{|A_j|}{y_j} < \alpha + \varepsilon,$$

$$\text{pgcd}(A_j) = 1.$$

Dans la suite de la preuve, on pourra supposer $y_j \in A_j$.

Sous l'hypothèse $\alpha < \frac{1}{2}$ et pour ε suffisamment petit, on peut observer que A_j satisfait les hypothèses du Théorème 2.2. Alors,

$$|A_j + A_j| \geq 3|A_j| - 3,$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{(A + A)(2y_j)}{2y_j} &\geq \frac{|A_j + A_j|}{2y_j} \\ &\geq \frac{3|A_j|}{2y_j} - \frac{3}{2y_j} \\ &\geq \frac{3}{2}\alpha - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à considérer la suite $(A + A)(2y_j)$ pour obtenir $\bar{d}(A + A) \geq \frac{3}{2}\alpha$ et conclure la preuve. \square

Dans la section suivante, nous allons exposer quelques résultats généraux en théorie additive des nombres. Ils seront utilisés dans les démonstrations des Théorèmes 1.17 et 1.18. Les preuves de ces résultats font appel à des outils élémentaires et constituent une excellente (et parfois difficile!) entrée en matière pour la théorie additive des nombres.

2.1.2 Quelques lemmes additifs

Nous commencerons par trois résultats essentiels dont les preuves peuvent être trouvées dans [Na] p. 6, p. 28 et p. 21.

Théorème 2.3. *Soit A un ensemble fini d'entiers positifs ou nuls. Alors $|A + A| \geq 2|A| - 1$. Si on a l'égalité $|A + A| = 2|A| - 1$, alors A est en progression arithmétique.*

Théorème 2.4. Soit $k \geq 3$ un entier. Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ un ensemble d'entiers positifs ou nuls tels que

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1}.$$

Si $a_{k-1} \leq 2k - 3$, alors $|A + A| \geq k + a_{k-1}$.

Théorème 2.5 ($3k - 4$ de Freiman). Soit A un ensemble fini d'entiers positifs ou nuls. On suppose $|A| \geq 3$. Si

$$|A + A| \leq 3|A| - 4,$$

alors A est un sous-ensemble d'une progression arithmétique de cardinal $|A + A| - |A| + 1$.

Le Théorème 2.4 a été généralisé à des ensembles distincts par Freiman puis par V.F. Lev et P.Y. Smeliansky dans [L-S] et amélioré par Y.V. Stanchescu dans [St1]. Nous utiliserons dans la suite la version suivante :

Théorème 2.6 (Freiman). Soient A et B deux ensembles finis d'entiers positifs ou nuls tels que $0 \in A \cap B$. On note par $l(A) := \max(A) - \min(A)$ la longueur de A . Si

$$\max(l(A), l(B)) \leq |A| + |B| - 3,$$

alors

$$|A + B| \geq \max(|A| + l(B), |B| + l(A)).$$

2.1.3 Les homomorphismes de Freiman

A présent, définissons quelques notions fondamentales introduites par Freiman dans [Fr1].

Définition 2.7. Soient A et B deux groupes abéliens et $K \subset A$, $L \subset B$. Une application $\varphi : K \rightarrow L$ est appelée *homomorphisme de Freiman* ou *F_2 -homomorphisme* si, pour tout $(x, y, x', y') \in K^4$, on a

$$x + y = x' + y' \Rightarrow \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x') + \varphi(y').$$

Un F_2 -homomorphisme φ est appelé *F_2 -isomorphisme* si il est inversible et si φ^{-1} est aussi un F_2 -homomorphisme.

Remarque 2.8. Dans la suite, on utilisera des transformations affines dans \mathbb{Z}^2 qui, quand elles sont inversibles, sont clairement des F_2 -isomorphismes. On peut citer les translations, les symétries par rapport aux droites horizontales ou verticales mais également ce qu'on appellera les *isomorphismes de torsion d'ordre l* , définis par

$$\begin{aligned} \Psi_l : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (u, v) &\mapsto (u + lv, v). \end{aligned}$$

La proposition suivante est claire :

Proposition 2.9. *Un F_2 -isomorphisme $\varphi : K \rightarrow L$ induit une application bijective $K + K \rightarrow L + L$.*

Démonstration. Soient x et y deux éléments de K et φ un F_2 -isomorphisme de K dans L . On associe à $X = x + y \in K + K$ l'élément $Y = \varphi(x) + \varphi(y) \in L + L$. Ceci ne dépend pas du choix de x et y car φ est un F_2 -homomorphisme. Cette application est clairement surjective car φ est inversible. Enfin, elle est injective car φ^{-1} est aussi un F_2 -homomorphisme. \square

Remarque 2.10. De la même manière, on peut définir la notion de F_i -homomorphisme pour n'importe quel entier positif i . On dit que $\varphi : K \rightarrow L$ est un F_i -homomorphisme si, pour tout $(x_1, \dots, x_i, x'_1, \dots, x'_i) \in K^{2i}$,

$$x_1 + \dots + x_i = x'_1 + \dots + x'_i \Rightarrow \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_i) = \varphi(x'_1) + \dots + \varphi(x'_i).$$

On peut remarquer qu'un F_i -homomorphisme est aussi un F_2 -homomorphisme pour tout $i \geq 2$.

Définition 2.11 (Ruzsa). Un sous-ensemble P d'un groupe abélien est appelé *progression arithmétique généralisée* de dimension m s'il peut être écrit

$$\begin{aligned} P &= P(x_0 ; x_1, \dots, x_m ; b_1, \dots, b_m) \\ &= \{x_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m ; \beta_i = 0, \dots, b_i - 1, i = 1, \dots, m\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

où x_0, \dots, x_m sont des éléments du groupe et b_1, \dots, b_m sont des entiers positifs.

On dit que P est une F_2 -progression si l'application

$$\begin{aligned} \theta : \{0, \dots, b_1 - 1\} \times \dots \times \{0, \dots, b_m - 1\} &\subset \mathbb{Z}^m \rightarrow P \\ (\beta_1, \dots, \beta_m) &\mapsto x_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m \end{aligned}$$

est un F_2 -isomorphisme.

Nous utiliserons de manière essentielle le théorème fondamental suivant, dû à G. Freiman (voir [Fr1]) et dont on peut trouver une preuve dans [Bi2]. La version suivante est extraite de [Bi1] :

Théorème 2.12 (Freiman). *Soit σ un nombre réel positif. Soit A un ensemble fini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $|A| > k(\sigma)$ où k est une constante fixée dépendant seulement de σ . Si*

$$|A + A| \leq \sigma|A|,$$

alors A est un sous-ensemble d'une F_2 -progression

$$P = P(0 ; x_1, \dots, x_m ; b_1, \dots, b_m)$$

de dimension $m \leq \lfloor \sigma - 1 \rfloor$ et dont le cardinal est majoré : $|P| \leq C_1(\sigma)|A|$.

De plus, si $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m$, on a

$$i > \lfloor \log_2 \sigma \rfloor \Rightarrow b_i \leq C_2(\sigma).$$

Ici, $C_1(\sigma)$ et $C_2(\sigma)$ sont des constantes dépendant seulement de σ .

2.1.4 Quelques résultats en théorie additive multidimensionnelle

Dans cette section, nous allons citer deux résultats importants en théorie additive multidimensionnelle. Ici, A est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 . Le résultat suivant est dû à Stanchesu.

Théorème 2.13. *Soit A un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 . Soit $s \geq 2$ un entier, alors il existe une constante $C(s)$ dépendant seulement de s telle qu'on ait le résultat suivant : si $|A| > C(s)$ et si*

$$|A + A| < \left(4 - \frac{2}{s+1}\right) |A| - (2s + 1),$$

alors il existe s droites parallèles qui recouvrent l'ensemble A .

Démonstration. Voir [St2].

□

Théorème 2.14 (Freiman). *Soit $A \subset \mathbb{Z}^2$ un ensemble contenant au moins 12 éléments et non contenu dans une unique droite. Supposons que*

$$|A + A| < \frac{10}{3}|A| - 5.$$

Alors A est contenu dans un ensemble F_2 -isomorphe à

$$A^0 = \{(0, 0), (0, 1), \dots, (0, l_1 - 1)\} \cup \{(1, 0), (1, 1), \dots, (1, l_2 - 1)\},$$

avec $l_1, l_2 \geq 1$ et $l_1 + l_2 = |A + A| - 2|A| + 3$.

Démonstration. Voir [Fr1] p. 28. □

2.2 Transposition du problème

Bien que la preuve soit très technique, la stratégie mise en oeuvre est relativement simple. D'abord, nous allons, par troncature, transposer le problème *infini* dans le cadre des ensembles *finis*. A ces ensembles finis, nous appliquerons le Théorème 2.12 pour obtenir leur structure. On verra dans la suite que le Théorème 2.12 sera utilisé avec $\sigma < 4$ et donc mettra en jeu des progressions arithmétiques de dimension au plus 2. Il sera donc naturel d'utiliser des résultats additifs dans \mathbb{Z}^2 comme ceux vus dans la section précédente pour affiner la structure des ensembles tronqués. Enfin, nous utiliserons des arguments de nature asymptotique pour retrouver la structure de A tout entier.

2.2.1 Dans le cadre fini

Rappelons qu'on considère dans ce problème un ensemble infini A d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. On a également défini $\alpha = \overline{d}(A) < 1/2$, $\gamma = \overline{d}(A + A) < \frac{11}{6}\alpha$ et $\sigma = \gamma/\alpha$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir $y_1 \in \mathbb{N}$ assez grand ainsi qu'une suite strictement croissante d'entiers positifs $(y_j)_{j \geq 1}$ telle que les deux relations suivantes soient vérifiées pour tout j :

$$(A + A)(2y_j) \leq (\gamma + \varepsilon) \times 2y_j,$$

$$(\alpha - \varepsilon)y_j \leq A(y_j) \leq (\alpha + \varepsilon)y_j.$$

On utilisera la notation suivante :

$$A_j := \{a \in A, a \leq y_j\}.$$

On pourra également supposer dans toute la suite que $y_j \in A$.

Dans la suite, toutes les notations seront liées au choix de la suite $(y_j)_{j \geq 1}$. Tout changement de cette suite (extraction d'une sous-suite par exemple) modifiera naturellement les ensembles A_j et tout ce qui leur est lié. On notera par $O(\varepsilon)$ toute fonction de ε majorée par $C\varepsilon$ où C est une constante absolue dépendant seulement de l'ensemble A .

À présent, nous allons déterminer la structure des ensembles A_j .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{|A_j + A_j|}{|A_j|} &= \frac{|A_j + A_j|}{2y_j} \times 2 \times \frac{y_j}{|A_j|} \\ &\leq \frac{(A + A)(2y_j)}{2y_j} \times 2 \times \frac{y_j}{|A_j|} \\ &\leq 2 \times \frac{\gamma + \varepsilon}{\alpha - \varepsilon} \\ &\leq (2\sigma + \varepsilon') < 4, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $\varepsilon' = O(\varepsilon)$.

2.2.2 Dans le cadre bidimensionnel

Ainsi, pour ε suffisamment petit, nous pouvons appliquer le théorème fondamental de Freiman 2.12 aux ensembles A_j . Par un calcul élémentaire, nous obtenons $m \leq 2$ et $b_2 \leq C_2(\sigma)$. Avant toute chose, nous allons exclure le cas où A_j est un sous-ensemble d'une progression arithmétique de dimension $m = 1$ pour une infinité de valeurs de j .

Supposons que ce soit le cas. Alors, pour j suffisamment grand, $A_j \subseteq P_j$ où P_j est une progression arithmétique de raison 1 (si on veut $\text{pgcd}(A) = 1$) et de premier terme 0. Alors, on a, par 2.12 et puisque $\{0, y_j\} \subseteq P_j$:

$$|P_j| \geq y_j + 1, \quad (2.3)$$

$$|P_j| \leq C_1(\sigma)|A_j|. \quad (2.4)$$

En combinant (2.3) et (2.4), on peut obtenir une minoration de α :

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \frac{|A_j|}{y_j} - \varepsilon \\ &\geq \frac{1}{C_1} - \varepsilon \\ &\geq \alpha_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

pour une constante α_0 absolue (rappelons que ε peut être choisi arbitrairement petit).

Ainsi, on peut exclure ce cas sous l'hypothèse $\alpha < \alpha_0$ du théorème 1.17.

Remarque 2.15. La valeur de C_1 - dont on peut trouver une estimation dans [Bi2] - implique une très petite valeur de la borne α_0 . Le cas où A est *a priori* inclus dans une progression de dimension 1 ($\alpha > \alpha_0$) sera partiellement traité dans le dernier chapitre. On verra que la question reste ouverte dans la plupart des cas.

Ainsi, pour une infinité d'entiers j , A_j est un sous-ensemble d'une progression arithmétique de dimension $m = 2$. Par extraction d'une sous-suite, nous pouvons supposer que c'est le cas pour tous les ensembles A_j . Pour le moment, nous avons obtenu, pour tout $j \geq 1$,

$$A_j \subseteq P_j = P(0 ; d_{1,j}, d_{2,j} ; b_{1,j}, b_{2,j}),$$

où $|P_j| \leq C_1|A_j|$ et la suite $(b_{2,j})_{j \geq 1}$ est bornée.

Puisque $A \subseteq \mathbb{N}$, $d_{1,j}$ doit être positif pour une infinité de valeurs de j (que l'on extrait). En fait, il existe un F_2 -isomorphisme que l'on notera $\varphi_j : \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{N}$ qui permet d'identifier A_j à $\varphi_j^{-1}(A_j)$, un sous-ensemble d'un rectangle de \mathbb{Z}^2 . On peut aussi supposer, en composant

si nécessaire φ avec une symétrie d'axe horizontal, que les nombres $d_{2,j}$ sont des entiers positifs pour une infinité de valeurs de j (que l'on extrait).

Lemme 2.16. *La suite $(d_{1,j})_{j \geq 1}$ est bornée.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors, il existe un indice j tel que $A(d_{1,j}) > \max_j(b_{2,j}) + 1$ et, par conséquent, deux éléments a et b de $A \cap [0, d_{1,j}[$ tels que $\varphi_j^{-1}(a)$ et $\varphi_j^{-1}(b)$ sont sur la même droite horizontale. Par définition d'un homomorphisme de Freiman, on doit avoir $|b - a| = kd_{1,j}$ où k est un entier positif. C'est impossible avec $|b - a| < d_{1,j}$. \square

Puisque la suite $(d_{1,j})_{j \geq 1}$ est bornée, il existe un entier positif N tel que $d_{1,j} = N$ pour une infinité de valeurs de j . Choisissons le plus grand N à vérifier cette propriété et, en extrayant à nouveau une sous-suite, supposons que $d_{1,j} = N$ pour tout j .

Ainsi, pour tout j , chaque ensemble A_j est inclus dans une union de classes résiduelles mod N . Le nombre de ces classes est bornée. Puisque les A_j forment une suite croissante, A est lui-même inclus dans une union de classes résiduelles mod N .

2.3 Le cas non archimédien

Dans cette section, on supposera

$$N > 1.$$

On peut montrer que, dans ce cas, la suite $(d_{2,j})_{j \geq 1}$ est aussi bornée.

Lemme 2.17. *La suite $(d_{2,j})_{j \geq 1}$ est bornée.*

Démonstration. Nous avons vu que A est inclus dans un certain nombre r de classes résiduelles mod N (au moins deux puisque $\text{pgcd}(A) = 1$). Ces classes résiduelles sont représentées, via le F_2 -isomorphisme φ_j^{-1} , par des droites horizontales de \mathbb{Z}^2 . On peut extraire de la suite $(y_j)_{j \geq 1}$ une sous-suite de telle sorte que les droites horizontales représentant chacune des classes soient toujours dans le même ordre. Notons alors $(a_{i,j}, b_{i,j}) = \varphi_j^{-1}(c_i)$ les coordonnées du point associé au plus petit terme c_i de chaque classe, pour $1 \leq i \leq r$ ($b_{i,j} < b_{i+1,j}$). S'il existe i tel que, pour une infinité de valeurs de j , on ait $a_{i,j} \leq a_{i+1,j}$, alors, par définition d'un homomorphisme de Freiman, on a $d_{2,j} \leq kN + ld_{2,j} = c_{i+1} - c_i$ où k et l sont des entiers positifs.

Si, au contraire, $a_{i,j} > a_{i+1,j}$ pour tout i , on peut appliquer à $\varphi_j^{-1}(A_j)$ un homomorphisme de torsion d'ordre suffisamment grand (voir Remarque 2.8) pour être dans les conditions du premier cas sans changer les conclusions du Théorème 2.12. \square

Ainsi, quitte à extraire à nouveau une sous-suite, on peut supposer que $d_{2,j} = d$ pour tout $j \geq 1$. On choisira d maximal.

Pour tout $j \geq 1$, il existe donc un F_2 -isomorphisme φ_j qui envoie un sous-ensemble d'un rectangle $R_j \subseteq \mathbb{Z}^2$ sur A_j tel que, pour tout point $(u, v) \in R_j$, on a

$$\varphi(u, v) - \varphi(u - 1, v) = N,$$

$$\varphi(u, v) - \varphi(u, v - 1) = d.$$

De plus, nous avons déjà observé que la hauteur du rectangle R_j est bornée. Quitte à composer φ_j avec une translation, on peut supposer que, pour tout j , on a $\varphi_j^{-1}(0) = (0, 0)$. Ainsi, si $j < k$, on a $A_j \subseteq A_k$ et les F_2 -isomorphismes φ_j^{-1} and φ_k^{-1} coïncident sur A_j . Ainsi, on peut définir un F_2 -isomorphisme φ^{-1} (et donc φ !) tel que $\varphi^{-1}|_{A_j} \equiv \varphi_j^{-1}$. Cet isomorphisme envoie A sur un sous-ensemble d'une demi-bande R de \mathbb{Z}^2 que l'on peut expliciter :

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid u \geq u_0, v = v^0, v^0 + 1, \dots, v^0 + r - 1\}.$$

On peut supposer que les *frontières* $v = v^0$ et $v = v^0 + r - 1$ contiennent au moins un élément de A (sinon, on peut les soustraire de R).

C'est le moment d'appliquer le Théorème 2.13 de Stanchescu à tous les $\varphi^{-1}(A_j)$ qui vérifient les mêmes propriétés additives que A_j , c'est-à-dire, pour j suffisamment grand :

$$|\varphi^{-1}(A_j) + \varphi^{-1}(A_j)| < \left(4 - \frac{2}{s+1}\right) |\varphi^{-1}(A_j)| - (2s+1).$$

D'après l'inégalité 2.2 et l'hypothèse (1.4) du Théorème 1.17, on peut choisir au plus $s = 5$ dans la relation ci-dessus.

Ainsi, il existe $t \leq 5$ droites parallèles qui couvrent $\varphi^{-1}(A_j)$. Puisque les ensembles $\varphi^{-1}(A_j)$ forment une suite croissante d'ensembles, on peut affirmer qu'il existe t droites parallèles qui couvrent $\varphi^{-1}(A)$. Elles sont nécessairement horizontales, sinon leur intersection avec la demi-bande R serait finie et aurait pour conséquence la finitude de $\varphi^{-1}(A)$ et donc de A .

On peut noter par v_1, \dots, v_t les ordonnées de ces droites horizontales. On a ainsi $v_1 = v^0$ et $v_t = v^0 + r - 1$. On peut, quitte à translater, supposer $v_1 = 0$. Par maximalité de d , on peut supposer $\text{pgcd}(v_1, v_2, \dots, v_t) = 1$.

La fin de la démonstration va se faire en deux temps. Dans le paragraphe suivant, nous montrerons que les t droites sont consécutives, autrement dit que leurs ordonnées sont en progression arithmétique (ou encore $r = t$). Ensuite, nous nous attacherons à prouver que $\varphi^{-1}(A)$ est un *gros* sous-ensemble de cette union de droites horizontales.

2.3.1 Les droites sont consécutives

Lemme 2.18. *Pour tout $v^0 \leq j \leq v^0 + r - 1$, la droite $\{(u, v) \mid v = j\}$ intersecte $\varphi^{-1}(A)$ en au moins un point.*

Démonstration. Si $t = 2$, le résultat est immédiat car $\text{pgcd}(0, v_1) = 1$. Supposons donc $t \in \{3, 4, 5\}$. Soit $D_{i,j}$ l'ensemble suivant :

$$D_{i,j} := \{(u, v) \in \varphi^{-1}(A_j) \mid v = i\}.$$

On sait que $\varphi^{-1}(A)$ est recouvert par 3, 4 ou 5 droites horizontales. Dans la suite de la preuve, nous allons distinguer les trois cas et, dans chacun des cas, prouver que si le Lemme 2.18 est faux, on a

$$\left| \bigcup_{i=v_1}^{v_t} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_t} D_{i,j} \right| \geq \beta \left(\sum_{i=v_1}^{v_t} |D_{i,j}| \right) - C, \quad (2.6)$$

où C est une constante absolue et β un nombre réel strictement supérieur à $\frac{11}{3}$. En faisant tendre j vers ∞ , on voit que cela contredit l'hypothèse (1.4) du Théorème 1.17.

1. Supposons que $\varphi^{-1}(A)$ est recouvert par trois droites horizontales d'ordonnées respectives v_1 , v_2 et v_3 .

On peut supposer $v_1 = 0$, $\text{pgcd}(v_1, v_2, v_3) = 1$ et, en supposant que le Lemme 2.18 soit faux,

$$v_1 + v_3 \neq 2v_2.$$

Alors, pour tout $j \geq 1$, les ensembles $D_{a,j} + D_{b,j}$ correspondant aux valeurs suivantes du couple (a, b) sont deux à deux disjoints :

$$(a, b) \in E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_3)\}.$$

En effet, si $a + b \neq a' + b'$, alors $D_{a,j} + D_{b,j}$ et $D_{a',j} + D_{b',j}$ sont disjoints.

Nous allons obtenir la contradiction (2.6) avec $C = 6$ et $\beta = 4$ en utilisant le Théorème 2.3.

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=v_1}^{v_3} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_3} D_{i,j} \right| &\geq \sum_{(a,b) \in E} |D_{a,j} + D_{b,j}| \\ &\geq \sum_{(a,b) \in E} |D_{a,j}| + |D_{b,j}| - 1 \\ &= 4 \left(\sum_{i=v_1}^{v_3} |D_{i,j}| \right) - 6. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2. Supposons maintenant que $\varphi^{-1}(A)$ est recouvert par quatre droites d'ordonnées respectives v_1 , v_2 , v_3 et v_4 . On a toujours $v_1 = 0$ et $\text{pgcd}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 1$.

Supposons le Lemme 2.18 faux. Alors, les ordonnées v_i ne sont pas en progression arithmétique.

On peut supposer - sans perdre de généralité - que v_1 , v_2 et v_3 ne sont pas en progression arithmétique. Alors, pour tout $j \geq 1$, les ensembles $D_{a,j} + D_{b,j}$ correspondant aux valeurs suivantes du couple (a, b) sont deux à deux disjoints :

$$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_4)\}. \quad (2.8)$$

Si on peut ajouter à cette liste l'un des couples (v_1, v_4) et (v_2, v_4) , alors on obtient la contradiction (2.6) avec $\beta = 4$ et $C = 9$ en utilisant comme dans le cas précédent le Théorème 2.3 (même calcul que (2.7)). Dans le cas contraire, c'est-à-dire si ces deux couples appartiennent déjà à E , alors on doit avoir $v_2 + v_4 = 2v_3$. Ainsi, (v_2, v_3, v_4) est en progression arithmétique, disons de raison c . Puisque (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas en progression arithmétique, on ne peut avoir $v_1 + v_4 = v_2 + v_3$. On a donc $v_1 + v_4 = 2v_2$ et donc $v_2 + 2c = 2v_2$. On a donc $v_2 = 2c$ et les ordonnées des droites horizontales

sont $(0, 2c, 3c, 4c)$. Puisque $\text{pgcd}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 1$, on doit avoir $c = 1$. On dira que A est de *type* $(0, 2, 3, 4)$.

Il reste à travailler sur cette liste d'ordonnées $(0, 2, 3, 4)$ pour exhiber des sous-ensembles de $\varphi^{-1}(A) + \varphi^{-1}(A)$ disjoints. En effet, à chaque ensemble E analogue à (2.8), on peut associer une inégalité en utilisant le Théorème 2.3. Par exemple, à l'ensemble suivant

$$E_1 := \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\},$$

on peut associer la relation

$$\left| \bigcup_{i=v_1}^{v_4} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_4} D_{i,j} \right| \geq R_1 := 4|D_{v_1,j}| + 4|D_{v_2,j}| + 5|D_{v_3,j}| + 3|D_{v_4,j}| - 8.$$

On a une nouvelle fois exploité le fait que les ensembles $D_{a,j} + D_{b,j}$ sont deux à deux disjoints pour $(a, b) \in E_1$. Considérons maintenant les ensembles :

$$E_2 := \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\},$$

$$E_3 := \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}.$$

On obtient par le même procédé les relations suivantes

$$\left| \bigcup_{i=v_1}^{v_4} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_4} D_{i,j} \right| \geq R_2 := 5|D_{v_1,j}| + 3|D_{v_2,j}| + 3|D_{v_3,j}| + 5|D_{v_4,j}| - 8,$$

$$\left| \bigcup_{i=v_1}^{v_4} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_4} D_{i,j} \right| \geq R_3 := 4|D_{v_1,j}| + 5|D_{v_2,j}| + 3|D_{v_3,j}| + 4|D_{v_4,j}| - 8.$$

On va alors pouvoir combiner astucieusement ces différentes relations.

$$\frac{1}{9}(4R_1 + 3R_2 + 2R_3) \geq \frac{35}{9} \left(\sum_{i=v_1}^{v_t} |D_{i,j}| \right) - 8,$$

On obtient bien la contradiction (2.6) avec $\beta = \frac{35}{9}$ et $C = 8$.

3. On suppose maintenant que $\varphi^{-1}(A)$ est recouvert par cinq droites horizontales d'ordonnées respectives v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 avec $v_1 = 0$ et $\text{pgcd}(v_i) = 1$.

Comme nous l'avons fait dans le cas précédent, nous allons supposer le Lemme 2.18 faux et classifier les différents types possibles pour A . On pourra décrire les ensembles E associés et en déduire des relations du type de (2.6).

Soient $Y := (v_1, v_2, v_3)$ et $Z := (v_2, v_3, v_4, v_5)$. Nous distinguerons trois cas selon que Y et Z sont ou non en progression arithmétique. En effet, Y et Z ne peuvent être

simultanément en progression arithmétique par hypothèse (on suppose le Lemme 2.18 faux).

▷ Supposons que, ni Y ni Z ne soient en progression arithmétique. Alors, on va pouvoir utiliser les études des cas précédents. On obtient la relation suivante :

$$\left| \bigcup_{i=v_2}^{v_5} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_2}^{v_5} D_{i,j} \right| \geq \frac{35}{9} \left(\sum_{i=v_2}^{v_5} |D_{i,j}| \right) - 8.$$

On a également

$$|D_{v_1,j} + D_{v_1,j}| + |D_{v_1,j} + D_{v_2,j}| + |D_{v_1,j} + D_{v_3,j}| \geq 4|D_{v_1,j}| - 3.$$

De plus, les ensembles-sommes utilisés pour obtenir les deux relations sont disjoints deux à deux. En effet, pour obtenir la première relation, on utilise les ensembles $D_{v_i,j} + D_{v_k,j}$ avec $i, k \geq 2$ et on a par hypothèse $v_1 + v_3 \neq 2v_2$.

En sommant ces deux relations, on obtient la contradiction (2.6) avec $\beta = \frac{35}{9}$ et $C = 11$.

▷ Supposons que $Z = (v_2, v_3, v_4, v_5)$ est en progression arithmétique. Les droites horizontales ont donc pour ordonnées respectives $0, d, d+c, d+2c$ et $d+3c$ où d et c sont des entiers positifs distincts. Pour tout $j \geq 1$, les ensembles $D_{a,j} + D_{b,j}$ correspondant aux valeurs suivantes du couple (a, b) sont deux à deux disjoints :

$$(a, b) \in E = \{(0, 0), (0, d), (0, d+c), (d, d), (d, d+c), (d+c, d+c), \\ (d+c, d+2c), (d+2c, d+2c), (d+2c, d+3c), (d+3c, d+3c)\}.$$

Si on peut rajouter le couple $(0, d+3c)$ à cette liste, on obtient alors, en procédant comme en (2.7), la contradiction (2.6) avec $\beta = 4$ et $C = 11$.

Si on ne peut pas, c'est que $d+3c = d+d$ ou $d+3c = 2d+c$ ou $d+3c = 2d+2c$. Le dernier cas implique $d=c$ qui est exclu. Le premier cas implique $d=3c$ et donc un ensemble A du type $(0, 3, 4, 5, 6)$. Le deuxième cas implique $d=2c$ et donc un ensemble A du type $(0, 2, 3, 4, 5)$.

Si A est du type $(0, 3, 4, 5, 6)$, alors, pour tout $j \geq 1$, les ensembles $D_{a,j} + D_{b,j}$ correspondant aux valeurs suivantes du couple (a, b) sont deux à deux disjoints :

$$(a, b) \in E = \{(0, 0), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (3, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}.$$

En procédant à nouveau comme dans (2.7), on obtient la contradiction (2.6) avec $\beta = 4$ et $C = 11$.

Reste le cas où A est du type $(0, 2, 3, 4, 5)$. Dans ce cas, pour tout $j \geq 1$, les ensembles $D_{a,j} + D_{b,j}$ correspondant aux valeurs suivantes du couple (a, b) sont deux à deux disjoints :

$$(a, b) \in E_1 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\}.$$

En utilisant à nouveau le Théorème 2.3, on obtient

$$\left| \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} \right| \geq R_1 := 4|D_{0,j}| + 4|D_{2,j}| + 5|D_{3,j}| + 4|D_{4,j}| + 3|D_{5,j}| - 10.$$

On peut faire exactement le même raisonnement avec les ensembles suivants :

$$E_2 := \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (0, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\},$$

$$E_3 := \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\},$$

$$E_4 := \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (0, 5), (3, 3), (2, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\}.$$

On obtient trois nouvelles relations :

$$\left| \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} \right| \geq R_2 := 5|D_{0,j}| + 3|D_{2,j}| + 4|D_{3,j}| + 4|D_{4,j}| + 4|D_{5,j}| - 10,$$

$$\left| \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} \right| \geq R_3 := 4|D_{0,j}| + 5|D_{2,j}| + 3|D_{3,j}| + 5|D_{4,j}| + 3|D_{5,j}| - 10,$$

$$\left| \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} \right| \geq R_4 := 5|D_{0,j}| + 4|D_{2,j}| + 3|D_{3,j}| + 3|D_{4,j}| + 5|D_{5,j}| - 10.$$

Pour obtenir la contradiction (2.6) avec $\beta = \frac{27}{7}$ et $C = 10$, il suffit d'écrire une moyenne pondérée des R_k avec des poids bien choisis :

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} + \bigcup_{i=v_1}^{v_5} D_{i,j} \right| &\geq \frac{1}{7}(2R_1 + 2R_2 + R_3 + 2R_4) \\ &\geq \frac{32}{7}|D_{0,j}| + \frac{27}{7}|D_{2,j}| + \frac{27}{7}|D_{3,j}| + \frac{27}{7}|D_{4,j}| + \frac{27}{7}|D_{5,j}| - 10 \\ &\geq \frac{27}{7} \left(\sum_{i=v_1}^{v_5} |D_{i,j}| \right) - 10. \end{aligned}$$

▷ Le dernier cas à étudier est celui où $Y = (v_1, v_2, v_3)$ est un triplet en progression arithmétique. On supposera que (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas en progression arithmétique,

sinon on pourrait par symétrie se ramener au cas précédent. Les droites horizontales ont donc pour ordonnées respectives $0, c, 2c, 2c + d, 2c + d + e$ avec c, d et e des nombres entiers positifs vérifiant $c \neq d$. Dans ce cas, pour tout $j \geq 1$, les ensembles $D_{a,j} + D_{b,j}$ correspondant aux valeurs suivantes du couple (a, b) sont deux à deux disjoints :

$$(a, b) \in E = \{(0, 0), (0, c), (c, c), (c, 2c), (2c, 2c), (2c, 2c + d), \\ (2c + d, 2c + d), (2c + d, 2c + d + e), (2c + d + e, 2c + d + e)\}.$$

– Supposons qu'on ne puisse pas ajouter $(0, 2c + d)$ à cette liste. Cela signifie que $2c + d$ appartient à $\{3c, 4c\}$. $2c + d = 3c$ est impossible avec $c \neq d$ donc $2c + d = 4c$ et ainsi, $d = 2c$. Les ordonnées des droites horizontales sont donc $0, c, 2c, 4c$ et $4c + e$.

◊ *Premier cas* : Supposons alors qu'on ne puisse pas rajouter à E le couple $(0, v_5 = 4c + e)$. Cela signifie que $4c + e$ appartient à $\{5c, 6c, 8c\}$. Si $4c + e = 5c$, A est du type $(0, 1, 2, 4, 5)$. Si $4c + e = 6c$, A est du type $(0, 1, 2, 4, 6)$. Si $4c + e = 8c$, A est du type $(0, 1, 2, 4, 8)$.

◊ *Second cas* : Supposons au contraire qu'on puisse rajouter à E le couple $(0, v_5 = 4c + e)$. Il ne reste plus qu'à utiliser le Théorème 2.3 comme dans (2.7) pour obtenir la contradiction (2.6) avec $\beta = 4$ et $C = 10$.

– Supposons qu'on puisse ajouter à E le couple $(0, 2c + d)$.

◊ *Premier cas* : Supposons également qu'on ne puisse y ajouter aucun couple dont un des éléments est $v_5 = 2c + d + e$. On ne peut alors ajouter le couple $(2c, v_5 = 2c + d + e)$ ce qui signifie que $4c + d + e = 4c + 2d$ ce qui implique $d = e$. Les ordonnées des droites horizontales sont alors $0, c, 2c, 2c + d$ et $2c + 2d$. On ne peut non plus ajouter le couple $(c, v_5 = 2c + 2d)$. Cela signifie que $3c + 2d$ appartient à $\{4c, 4c + d\}$. L'égalité $3c + 2d = 4c + d$ implique $c = d$ et donc A serait du type $(0, 1, 2, 3, 4)$ ce qui est exclu. On doit donc avoir $3c + 2d = 4c$ d'où $c = 2d$ et A est du type $(0, 2, 4, 5, 6)$.

◊ *Second cas* : Si on peut ajouter à E un couple contenant l'élément $v_5 = 2c + d + e$. Alors, il ne reste plus qu'à utiliser le Théorème 2.3 comme dans (2.7) pour obtenir la contradiction (2.6) avec $\beta = 4$ et $C = 11$.

Il ne reste plus qu'à conclure lorsque A est d'un des types suivants : $(0, 1, 2, 4, 5)$, $(0, 1, 2, 4, 6)$, $(0, 1, 2, 4, 8)$ et $(0, 2, 4, 5, 6)$.

Dans les quatre cas, il s'agira d'exhiber un ensemble E de couples (a, b) tels que les ensembles $D_{a,j} + D_{b,j}$ correspondants soient deux à deux disjoints. En utilisant le Théorème 2.3 comme en (2.7), on obtiendra la contradiction (2.6) avec $\beta = 4$ et $C \in \{10, 11\}$.

Si A est du type $(0, 1, 2, 4, 5)$, on considère

$$E = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (0, 5), (2, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\}.$$

Si A est du type $(0, 1, 2, 4, 6)$, on considère

$$E = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (1, 4), (2, 4), (1, 6), (4, 4), (4, 6), (6, 6)\}.$$

Si A est du type $(0, 1, 2, 4, 8)$, on considère

$$E = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (1, 4), (2, 4), (4, 4), (1, 8), (4, 8), (8, 8)\}.$$

Si A est du type $(0, 2, 4, 5, 6)$, on considère

$$E = \{(0, 0), (0, 2), (2, 2), (0, 5), (2, 4), (2, 5), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}.$$

□

Nous avons donc montré $r = t$, c'est-à-dire que $\varphi^{-1}(A)$ est recouvert par 2, 3, 4 ou 5 droites horizontales dont les ordonnées respectives sont des nombres entiers consécutifs, chacune de ces droites contenant des éléments de $\varphi^{-1}(A)$.

Il reste enfin à mesurer la *densité relative* de $\varphi^{-1}(A)$ dans ces r droites. C'est l'objet de la section suivante.

2.3.2 Les droites sont bien remplies

Nous allons démontrer puis utiliser le théorème suivant :

Théorème 2.19. *Soit r un entier positif. Soit B un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 inclus dans*

$$K := \bigcup_{i=0}^{r-1} \{(u, v) \mid v = i, u \geq 0\},$$

et tel que chacune de ces demi-droites horizontales contiennent au moins un point de B . On suppose également

$$|B + B| \leq (4 - \varepsilon)|B| - C$$

où ε et C sont des constantes fixées. On choisira B suffisamment grand, à savoir $|B| > k_{\varepsilon, r, C}$ où $k_{\varepsilon, r, C}$ est une constante dépendant uniquement de ε , r et C .

On note q_i le plus grand diviseur commun des différences $a-b$ où $(a; i), (b; i) \in \{(u, v) \mid v = i\}$ et on note $q := \text{pgcd}(q_0, \dots, q_{r-1})$.

On notera p l'abscisse maximale d'un point de A . On pourra supposer, quitte à faire une permutation entre les lignes, qu'au moins un point d'abscisse p a une ordonnée $v_p < r - 1$.

Enfin, on notera u_1 l'abscisse minimale d'un point de $\{(u, v) \mid v = v_p + 1\}$, u_2 l'abscisse minimale d'un point de $\{(u, v) \mid v = r - 1\}$ et u_0 l'abscisse minimale d'un point de $\{(u, v) \mid v = 0\}$.

Si $q = 1$, alors

$$u_2 - u_0 + (r - 1)(p - u_1) < |B + B| - 2|B| + C'_{C, \varepsilon, r},$$

où C' est une constante dépendant seulement de C , ε et r .

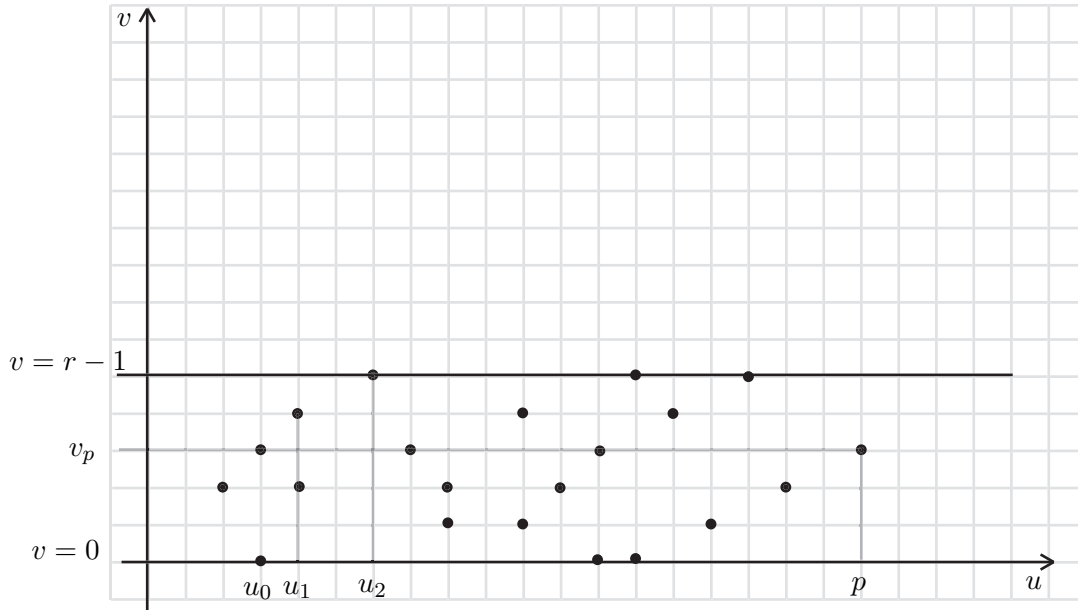


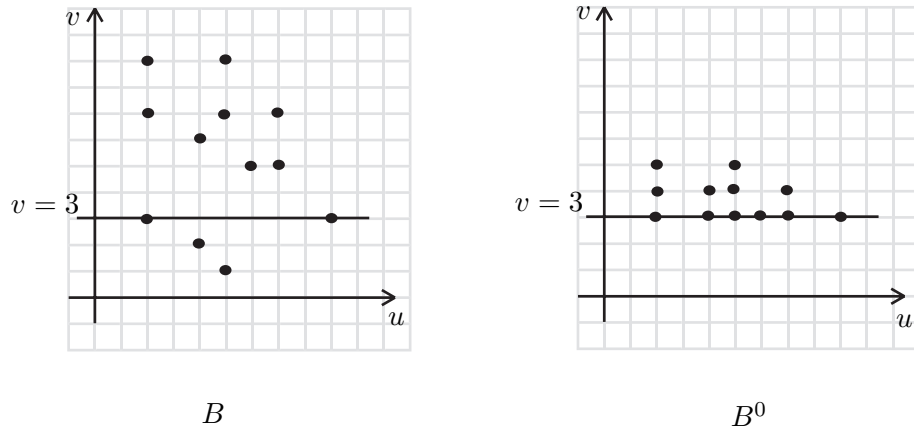
FIG. 2.1 – Notations du Théorème 2.19

Afin de prouver ce théorème, il est nécessaire d'étudier une transformation introduite par Freiman dans [Fr1] p. 27. Dans la suite, nous l'utiliserons seulement dans le cas particulier du plan.

Définition 2.20. Soit B un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2 = \{(u, v), u \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}\}$. Soit i un entier. Soit D la droite horizontale d'équation $v = i$. Soit s_u le nombre d'éléments de B d'abscisse u . Alors, on appelle *projection cumulée de B sur D* et on note par B^0 l'ensemble

$$B^0 := \{(u, v) \mid u \in \mathbb{Z}, i \leq v \leq i - 1 + s_u\}.$$

Si $s_u \leq 1$ pour tout u , c'est la projection orthogonale usuelle. La Figure 2.2 illustre cette définition.

FIG. 2.2 – Projection cumulée sur la droite horizontale $v = 3$

Avec les notations de cette définition, Freiman a démontré dans [Fr1] la relation

$$|B^0 + B^0| \leq |B + B|. \quad (2.9)$$

Preuve du Théorème 2.19. On ne va pas appliquer directement cette dernière inégalité à l'ensemble B mais à un ensemble qui lui est F_2 -isomorphe. D'abord, quitte à appliquer une translation verticale, on peut supposer $v_p = 0$. Ensuite, nous allons appliquer à B un isomorphisme de torsion Ψ_l d'ordre l (voir Remarque 2.8).

On peut choisir l maximal tel que $\Psi_l(B)$ ait 2 points sur une même droite verticale et pas plus de 2 points sur n'importe quelle autre droite verticale. Ainsi, pour tout $j > l$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $|\Psi_j(B) \cap \{u = i\}| \leq 1$. On peut noter que

$$l \geq p - u_1.$$

Conservons les notations usuelles et notons B^0 la projection cumulée de $\Psi_l(B)$ sur la

droite horizontale $\{v = 0\}$. B^0 est constituée de deux parties :

- B_1^0 qui contient entre 1 et r points sur la droite $\{v = 1\}$, disons $|B_1^0| = c$,
- B_0^0 incluse dans $\{v = 0\}$, et qui contient au moins les points

$$(u_0 - lb; 0) \quad \text{et} \quad (u_2 + l(r - 1 - b); 0),$$

où $-b$ est la plus petite ordonnée d'un point de B . De plus, par définition de q , B_0^0 ne peut être une progression arithmétique de raison supérieure à 1.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} |B^0 + B^0| &= |B_0^0 + B_0^0| + |B_0^0 + B_1^0| + |B_1^0 + B_1^0| \\ &\geq |B_0^0 + B_0^0| + |B_0^0| + 2c - 1 \\ &\geq |B_0^0 + B_0^0| + |B| + c - 1. \end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser la relation 2.9, ce qui donne

$$|B^0 + B^0| \leq |B + B|,$$

et donc

$$|B_0^0 + B_0^0| \leq |B + B| - |B| - c + 1.$$

D'après les hypothèses sur A , on obtient finalement

$$|B_0^0 + B_0^0| \leq (3 - \varepsilon)|B_0^0| + (2 - \varepsilon)c + 1.$$

Puisque $|B|$ est suffisamment grand, on peut appliquer le classique Théorème 3k-4 de Freiman (2.4) à B_0^0 . Ainsi, on peut conclure :

$$u_2 - u_0 + l(r - 1) \leq |B_0^0 + B_0^0| - 2|B_0^0| + 1 \leq |B + B| - 2|B| + C',$$

qui est la conclusion du Théorème 2.19, en rappelant que $l \geq (p - u_1)$.

□

Afin d'utiliser le Théorème 2.19 sur les ensembles $\varphi^{-1}(A_j)$, on doit d'abord vérifier l'hypothèse concernant q .

On note $Q_{i,j}$ le plus grand diviseur commun des différences $\varphi(a) - \varphi(b)$ avec $a, b \in D_{i,j}$ et on définit $Q_j := \text{pgcd}(Q_{v_0}, \dots, Q_{v_0+r-1})$. La suite d'entiers $(Q_j)_{j \geq 1}$ est décroissante, on peut donc - quitte à extraire une sous-suite - la supposer constante, égale à Q . Par maximalité du choix de N , on doit avoir $Q = N$. Ainsi, on peut choisir la suite A_j de manière à ce que les ensembles $\varphi^{-1}(A_j)$ vérifient les hypothèses du Théorème 2.19.

Il reste maintenant à appliquer ce Théorème 2.19, en remarquant que les valeurs u_0 , u_1 et u_2 sont fixées, donc sont $o(p_j)$ (i.e. $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{u_i}{p_j} = 0$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$) où p_j est l'abscisse maximale d'un point de $\varphi^{-1}(A_j)$. Il suffit de supposer j suffisamment grand pour obtenir

$$o(p_j) + (r-1)(p_j - o(p_j)) < |A_j + A_j| - 2|A_j| + C', \quad (2.10)$$

où C' est une constante qui ne dépend pas de j .

Puisque $y_j \in A_j$ et $\varphi^{-1}(A_j)$ est un sous-ensemble d'une demi-bande de hauteur bornée, on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{Np_j}{y_j} = 1. \quad (2.11)$$

En combinant les relations (2.10) et (2.11), on déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe j_0 tel que, pour tout $j \geq j_0$:

$$-\varepsilon + (r-1)(1-\varepsilon)\frac{y_j}{N} \leq 2(\gamma + \varepsilon)y_j - 2(\alpha - \varepsilon)y_j \leq 2y_j(\sigma - 1)\alpha,$$

et donc ce qu'il fallait démontrer :

$$\alpha \geq \frac{r-1}{2N(\sigma-1)}.$$

2.4 Le cas archimédien

Dans ce cas, on suppose

$$N = 1.$$

On peut montrer que, dans ce cas, la suite $(d_{2,j})_{j \geq 1}$ ne peut être bornée. En effet, on pourrait alors faire comme dans le cas non-archimédien et trouver un F_2 -isomorphisme commun entre tous les A_j et une partie d'une demi-bande de \mathbb{Z}^2 . Ceci est impossible car, avec $N = 1$, en supposant j assez grand, des éléments de A auraient une image dans \mathbb{Z}^2 sur différentes droites horizontales, ce qui contredit la définition d'un F_2 -isomorphisme.

Ainsi, les conclusions du Théorème 1.17 dans le cas archimédien viennent immédiatement de la structure bidimensionnelle des ensembles $\varphi_j^{-1}(A_j)$ et de la définition d'un F_2 -isomorphisme.

Remarque 2.21. La structure donnée ici est bien moins fine que celle obtenue dans le cas non archimédien. On ne peut pas utiliser le Théorème 2.19 car on n'a aucun contrôle sur $d_{2,j}$. Il n'y a donc aucun contrôle sur les paramètres u_0 , u_1 et u_2 dans le Théorème 2.19.

Dans la partie suivante, on verra que des informations supplémentaires sur la structure bidimensionnelle de chaque $\varphi_j^{-1}(A_j)$ nous permettront d'obtenir une structure très précise pour A , même dans le cas archimédien.

Chapitre 3

Structure de A lorsque

$$\bar{d}(A + A) < \frac{5}{3} \bar{d}(A)$$

Cette situation est un cas particulier du cas général étudié dans la première partie. Nous utiliserons donc les mêmes notations ainsi que certains résultats. On rappelle par exemple que, pour une infinité de valeurs de j , l'ensemble $A_j = A \cap [0, y_j]$ est un sous-ensemble d'une progression arithmétique de dimension $m = 2$. Quitte à extraire une sous-suite de $(y_j)_{j \geq 1}$, on peut supposer que c'est le cas pour tous les ensembles A_j .

3.1 Transposition du problème dans le cadre multidimensionnel

Ainsi, pour tout $j \geq 1$, il existe un F_2 -isomorphisme φ_j entre un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 et A_j . Par la Proposition 2.9, $\varphi^{-1}(A_j)$ a les mêmes propriétés additives que A_j , en particulier l'inégalité (2.2) :

$$|\varphi^{-1}(A_j) + \varphi^{-1}(A_j)| \leq (2\sigma + \varepsilon') |\varphi^{-1}(A_j)|,$$

où ε' peut être choisi arbitrairement petit.

C'est maintenant qu'on peut utiliser l'hypothèse $\sigma < 5/3$ et appliquer le Théorème 2.14 à $\varphi_j^{-1}(A_j)$. En composant les isomorphismes, on obtient que, pour tout $j \geq 1$, il existe un F_2 -isomorphisme $\varphi_j : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $A_j \subseteq \varphi_j(A_j^0)$ où $A_j^0 = \{(0, 0), (0, 1), \dots, (0, l_{1,j} - 1)\} \cup \{(1, 0), (1, 1), \dots, (1, l_{2,j} - 1)\}$.

Même s'il ne s'agit pas du même F_2 -isomorphisme, on le note à nouveau φ_j pour ne pas accumuler de notations superflues.

Quitte à composer ces isomorphismes avec des applications affines adéquates, on peut supposer que $\varphi_j((0, 0)) \in A_j$ et $\varphi_j((1, 0)) \in A_j$. De plus, on a $l_{1,j} + l_{2,j} = |A_j + A_j| - 2|A_j| + 3$.

On note par $d_{1,j}$ et $d_{2,j}$ respectivement les différences $\varphi_j((1, 0)) - \varphi_j((0, 0))$ et $\varphi_j((0, 1)) - \varphi_j((0, 0))$. Alors, on peut donner explicitement les F_2 -isomorphismes

$$\begin{aligned} \varphi_j : \mathbb{Z} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto a_j + xd_{1,j} + yd_{2,j}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $a_j = \varphi_j((0, 0))$.

Puisque $A \subseteq \mathbb{N}$, le nombre $d_{1,j}$ doit être positif pour une infinité de valeurs de j , que l'on peut extraire. On peut aussi supposer, quitte à composer φ_j avec une symétrie d'axe horizontal, que les nombres $d_{2,j}$ sont des entiers positifs.

Lemme 3.1. *La suite $(d_{1,j})_{j \geq 1}$ est bornée.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors, il existe un indice j tel que $A(d_{1,j}) > 3$ et, par conséquent, deux éléments a et b de $A \cap [0, d_{1,j}[$ tels que $\varphi_j^{-1}(a)$ et $\varphi_j^{-1}(b)$ sont sur la même droite horizontale. Par définition d'un homomorphisme de Freiman (voir (3.1)), on doit avoir $|b - a| = kd_{1,j}$ où k est un entier positif. C'est impossible avec $|b - a| < d_{1,j}$. \square

Puisque la suite $(d_{1,j})_{j \geq 1}$ est bornée, il existe un entier positif N tel que $d_{1,j} = N$ pour une infinité de valeurs de j . Choisissons le plus grand N vérifiant cette propriété. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $d_{1,j} = N$ pour tout j .

Montrons maintenant un lemme qui sera utile dans la suite de la preuve :

Lemme 3.2. *Pour $i \in \{0, 1\}$, notons $M_{i,j}$ le maximum de $A_{i,j} := A_j \cap \varphi_j(\{(u, v) \mid v = i\})$. Alors $(M_{i,j})_{j \geq 1}$ ne peut être bornée.*

Démonstration. Supposons par exemple que $M_{1,j}$ soit bornée par M_1 . Alors, puisque A est infini, $M_{0,j}$ n'est pas bornée. Etudions alors la suite $\left(\frac{|A_j + A_j|}{y_j}\right)_{j \geq 1}$. On a $|A_j + A_j| = |A_{1,j} + A_{1,j}| + |A_{0,j} + A_{0,j}| + |A_{0,j} + A_{1,j}|$ et donc, puisque $A_{1,j}$ est borné,

$$(A + A)(y_j) \geq 2|A_{0,j}| - C,$$

où C est une constante absolue ne dépendant que de M_1 . Or, on a également

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|A_{0,j}|}{y_j} = \alpha,$$

donc cela donne $\bar{d}(A + A) \geq 2\bar{d}(A)$ ce qui contredit l'hypothèse principale du Théorème 1.18. \square

3.2 Le cas non archimédien

Dans ce cas, on suppose

$$N > 1.$$

On va montrer que, dans ce cas, la suite $(d_{2,j})_{j \geq 1}$ peut être supposée constante.

Lemme 3.3. *Il existe un entier positif t et une suite $(y_j)_{j \geq 1}$ tels que $d_{2,j} = t$ pour tout $j \geq 1$.*

Démonstration. Chaque ensemble A_j est inclus dans deux classes résiduelles mod N . Puisque ces ensembles vérifient $A_j \subseteq A_k$ pour $j < k$, l'ensemble A tout entier est inclus dans deux classes résiduelles. Si on note t le plus petit terme de A non congru à 0 mod N , on peut choisir, pour chaque $j \geq 1$, le F_2 -isomorphisme φ_j tel que $\varphi_j((0, 0)) = 0$ et $\varphi_j((1, 0)) = t$. \square

Ainsi, on peut supposer que $d_{2,j} = t$ pour tout $j \geq 1$ et on peut exhiber un F_2 -isomorphisme φ entre \mathbb{Z}^2 et \mathbb{N} tel que $\varphi|_{A_j} = \varphi_j$.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto xN + yt. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $\text{pgcd}(A) = 1$, on doit avoir $\text{pgcd}(t, N) = 1$ et A est inclus dans deux classes résiduelles mod N que l'on peut noter B et C :

$$B = \{a \in A ; a \equiv 0 \pmod{N}\}, \quad C = \{a \in A ; a \equiv t \pmod{N}\}.$$

On définit alors $B_j := B \cap [0; y_j]$ et $C_j := C \cap [0; y_j]$ et on peut supposer, en prenant y_1 suffisamment grand, que ces ensembles sont non vides. On définit $t_0 := \min(C)$. De plus, on définit $b_j := \max(B_j)$ et $c_j := \max(C_j)$. On peut supposer que $b_j = y_j$, en remplaçant si nécessaire A par $A - t_0$ et en extrayant si nécessaire une sous-suite de $(y_j)_{j \geq 1}$.

Montrons le résultat suivant.

Lemme 3.4. *Il existe une suite $(y_j)_{j \geq 1}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a, pour j suffisamment grand,*

$$|A_j| \geq \frac{1}{(2\sigma - 2 + \varepsilon)N} (b_j + c_j).$$

Démonstration. Rappelons que t_0 est le plus petit élément de A non divisible par N . On définit $S_j := b_j + c_j - t_0 + 2$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a, en utilisant le Théorème 2.14,

$$\begin{aligned} \frac{S_j}{N} &\leq |A_j + A_j| - 2|A_j| + 3 \\ &\leq (2\sigma - 2 + \varepsilon')|A_j| + 3 \\ &\leq (2\sigma - 2 + \varepsilon'')|A_j|, \end{aligned}$$

où $\varepsilon' = O(\varepsilon)$ et $\varepsilon'' = O(\varepsilon)$. Il suffit de choisir j suffisamment grand pour obtenir le résultat. \square

On notera encore $(y_j)_{j \geq 1}$ la suite d'entiers qui satisfait le lemme précédent.

Maintenant, nous allons raffiner les derniers résultats. On définit

$$X_j := \frac{c_j}{b_j},$$

et

$$\lambda_j := \frac{N|A_j|}{b_j + c_j}.$$

Lemme 3.5. *Il existe une suite $(y_j)_{j \geq 1}$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} X_j = 1$.*

Démonstration. Nous utiliserons seulement la définition de la densité asymptotique supérieure de A . Pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'inégalité suivante est vérifiée pour tout j suffisamment grand :

$$\frac{A(c_j)}{c_j} \leq \frac{A(b_j)}{b_j} + \varepsilon.$$

De plus, on a

$$A(c_j) \geq A(b_j) - \frac{b_j - c_j}{N}.$$

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$N\varepsilon + \frac{\lambda_j(b_j + c_j)}{b_j} \geq \frac{\lambda_j(b_j + c_j)}{c_j} - \frac{b_j}{c_j} + 1.$$

Ceci induit l'inégalité polynomiale suivante :

$$\lambda_j X_j^2 - (1 - N\varepsilon)X_j - (\lambda_j - 1) \geq 0. \quad (3.2)$$

Il ne reste qu'à déterminer le discriminant et les racines du terme de gauche dans (3.2). On obtient

$$\Delta = (2\lambda_j - 1)^2 + \varepsilon(N^2\varepsilon - 2N).$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 3.4 pour minorer λ_j , on voit que les racines $X_j' < X_j''$ vérifient

$$X_j' = \frac{1}{2\lambda_j}(1 - N\varepsilon - \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{\lambda_j} - 1 + O(\varepsilon),$$

$$X_j'' = \frac{1}{2\lambda_j}(1 - N\varepsilon + \sqrt{\Delta}) = 1 - O(\varepsilon).$$

Clairement, $X_j < \frac{1}{\lambda_j} - 1 + O(\varepsilon)$ est impossible puisque la borne inférieure pour λ_j obtenue dans le Lemme 3.4 impliquerait

$$X_j \leq \frac{1}{\lambda_j} - 1 + O(\varepsilon) \leq 2\sigma - 3 + O(\varepsilon) < \frac{1}{3}$$

pour ε suffisamment petit, et donc

$$\frac{(A + A)(b_j + t_0)}{b_j + t_0} \geq \frac{|B_j| + |B_j| + |C_j + C_j|}{b_j + t_0} \geq 2\alpha - O(\varepsilon),$$

ce qui contredit l'hypothèse principale du Théorème 1.18.

Ainsi, $X_j \geq 1 - O(\varepsilon)$ ce qui est la conclusion du lemme.

□

A présent, on peut combiner les résultats des deux précédents lemmes et appliquer les Théorèmes 2.4 et 2.6 aux ensembles

$$B'_j := \frac{1}{N}B_j$$

et

$$C'_j := \frac{1}{N}(C_j - t).$$

On a

$$|A_j| \geq \frac{1}{(2\sigma - 2 - \varepsilon)N}(b_j + c_j).$$

Notons que, pour ε suffisamment petit, puisque $\sigma < \frac{5}{3}$, on a

$$\frac{1}{2\sigma - 2 - \varepsilon} > \frac{3}{4}.$$

Fixons $\delta > 0$ tel que

$$|A_j| \geq \left(\frac{3}{4} + \delta\right) \frac{(b_j + c_j)}{N}.$$

Grâce au Lemme 3.5, on obtient

$$|A_j| \geq \left(\frac{3}{4} + \delta\right) \frac{(2 - \varepsilon')y_j}{N}$$

pour ε' arbitrairement petit. Ainsi, il existe une constante positive δ' telle que, pour j suffisamment grand,

$$|A_j| \geq \left(\frac{3}{2} + \delta'\right) \frac{y_j}{N}.$$

Il s'ensuit

$$|B'_j| = |B_j| = |A_j| - |C_j| \geq |A_j| - \frac{y_j}{N} \geq \left(\frac{1}{2} + \delta'\right) \frac{y_j}{N} \geq \left(\frac{1}{2} + \delta'\right) \max(B'_j).$$

Alors on peut appliquer le Théorème 2.4 à B'_j . On peut faire la même chose avec C'_j . De plus, on a

$$|B'_j| + |C'_j| = |A_j| \geq \left(\frac{3}{2} + \delta'\right) \frac{y_j}{N},$$

donc on peut appliquer également le Théorème 2.6.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|B_j| \geq |C_j|$. Pour j suffisamment grand, on a donc

$$\begin{aligned}
|A_j + A_j| &= |B_j + B_j| + |B_j + C_j| + |C_j + C_j| \\
&= |B'_j + B'_j| + |B'_j + C'_j| + |C'_j + C'_j| \\
&\geq |B'_j| + \frac{y_j}{N} + (1 - \varepsilon') \frac{y_j}{N} + |B'_j| + (1 - \varepsilon') \frac{y_j}{N} + |C'_j| \\
&= 2|B_j| + |C_j| + (3 - 2\varepsilon') \frac{y_j}{N}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ici, ε' est arbitrairement petit, par le Lemme 3.5.

Maintenant, on a aussi, pour j suffisamment grand

$$|A_j + A_j| \leq (2\sigma + \varepsilon')|A_j|. \tag{3.4}$$

Puisque $|B_j| \geq |C_j|$, l'inégalité (3.3) implique

$$|A_j + A_j| \geq \frac{3}{2}|B_j| + \frac{3}{2}|C_j| + (3 - 2\varepsilon') \frac{y_j}{N} = \frac{3}{2}|A_j| + (3 - 2\varepsilon') \frac{y_j}{N}.$$

En combinant cela avec (3.4), on obtient

$$|A_j| \geq \frac{6 - 4\varepsilon'}{4\sigma - 3 + 2\varepsilon'} \frac{y_j}{N}.$$

Il ne reste qu'à diviser par y_j et à faire tendre j vers l'infini, on obtient

$$\alpha \geq \frac{6 - 4\varepsilon'}{4\sigma - 3 + 2\varepsilon'} \frac{1}{N}.$$

Puisque ε' est arbitraire, ceci prouve l'inégalité requise du Théorème 1.18 :

$$\bar{d}(A) \geq \frac{6}{(4\sigma - 3)N}.$$

3.3 Le cas archimédien

Dans ce cas, on suppose

$$N = 1.$$

On peut montrer que, dans ce cas, la suite $(d_{2,j})_{j \geq 1}$ ne peut être bornée. Supposons le contraire, on peut alors extraire une sous-suite de $(y_j)_{j \geq 1}$ telle que $d_{2,j} = t$ pour tout j et faire comme dans le cas non archimédien, c'est-à-dire trouver un F_2 -isomorphisme commun entre tout A_j et un sous-ensemble de deux droites horizontales de \mathbb{Z}^2 .

Cet isomorphisme peut être écrit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto x + ty. \end{aligned}$$

Ceci est impossible car, pour j suffisamment grand, on aurait un élément de $A \cap \varphi(\{y = 0\})$ plus grand que t (rappelons que d'après le Lemme 3.2, le plus grand élément de chaque $A_j \cap \varphi(\{(u, v) \mid v = i\})$ n'est pas majoré pour $i \in \{0, 1\}$). Ainsi, t aurait deux images inverses par φ (une sur chaque droite), ce qui contredit la définition d'un F_2 -isomorphisme.

Ainsi, on peut choisir $(y_j)_{j \geq 1}$ et $t_j := d_{2,j}$ tels que $(t_j)_{j \geq 1}$ soit une suite strictement croissante. Par conséquent, comme dans le cas non archimédien, on peut avoir $\varphi_j((0, 0)) = 0$, $\varphi_j((1, 0)) = 1$, $\varphi_j((1, 0)) = t_j$ et

$$\begin{aligned} \varphi_j : \mathbb{Z} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto x + yt_j. \end{aligned}$$

On peut appliquer le Théorème 2.14 aux ensembles $\varphi^{-1}(A_j)$.

Ainsi, on peut inclure A_j dans un ensemble A_j^0 qui est l'union de deux progressions arithmétiques B_j^0 et C_j^0 (de raison $N = 1$ ici). On note $b_j := l_{1,j} = |B_j^0|$ et $l_{2,j} = |C_j^0|$ les nombres d'éléments respectifs de ces deux progressions, où $0 \in B_j^0$ et $y_j \in C_j^0$. En effet, ces deux éléments ne peuvent être dans la même progression : dans ce cas, A serait inclus dans une seule progression de dimension 1, disons B_j^0 . Ce cas a déjà été exclu par la relation $\alpha < \alpha_0$. Ces nombres d'éléments étant supposés minimaux, nous avons $y_j - t_j = l_{2,j}$ et $\max(B_j^0) = l_{1,j}$.

Lemme 3.6. *Il existe une suite $(y_j)_{j \geq 1}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j_0 \geq 1$ tel que, pour tout $j \geq j_0$, on a*

$$|A_j| \geq \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \varepsilon \right) (l_{1,j} + l_{2,j}).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.14 pour j suffisamment grand :

$$\begin{aligned} l_{1,j} + l_{2,j} &\leq |A_j + A_j| - 2|A_j| + 3 \\ &\leq (2\sigma - 2 + \varepsilon')|A_j| + 3 \\ &\leq (2\sigma - 2 + \varepsilon'')|A_j|, \end{aligned}$$

où ε' est arbitrairement petit et $\varepsilon'' = O(\varepsilon')$. □

On notera encore $(y_j)_{j \geq 1}$ la suite d'entiers qui satisfait le Lemme 3.6.

Si $b_j \geq t_j$, alors $l_{1,j} + l_{2,j} \geq y_j$ et, par le Lemme 3.6 et le champ des valeurs prises par σ , on a $|A_j| \geq \frac{3}{4}y_j$ ce qui est incompatible avec $\alpha < \frac{1}{2}$. Ainsi, on a $b_j < t_j$, et donc

$$A(b_j, t_j) = 0. \tag{3.5}$$

Maintenant, on définit $B_j := A \cap [0; b_j]$ et $C_j := A \cap [t_j; y_j]$ avec $b_j < t_j$.

Le quotient $X_j := \frac{|B_j|}{b_j}$ ne peut pas être trop grand, sinon, on obtiendrait, en considérant les ensembles $A(b_j)$, une trop grande valeur pour α . Clairement, on a :

$$X := \limsup_{j \rightarrow \infty} X_j \leq \alpha. \tag{3.6}$$

Montrons à présent dans quelle mesure b_j doit être nécessairement petit devant $l_{2,j}$.

Lemme 3.7. *Si on définit*

$$\lambda_j := \frac{b_j}{l_{2,j}},$$

on a

$$\lambda := \limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda_j \leq \frac{2\sigma - 3}{2\sigma - 2} \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - X \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Démonstration. On utilise le Lemme 3.6, en notant que :

$$|A_j| = |B_j| + |C_j| = X_j \lambda_j l_{2,j} + |C_j|.$$

On obtient, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour j suffisamment grand :

$$X_j \lambda_j l_{2,j} + |C_j| \geq \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \varepsilon \right) (\lambda_j + 1) l_{2,j},$$

et ainsi,

$$|C_j| \geq l_{2,j} \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \varepsilon + \lambda_j \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \varepsilon - X_j \right) \right). \quad (3.8)$$

Or, on sait que $|C_j| \leq l_{2,j}$ donc on obtient la majoration

$$\lambda_j \leq \left(\frac{2\sigma - 3}{2\sigma - 2} + \varepsilon \right) \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \varepsilon - X_j \right)^{-1}.$$

Il reste à rappeler que $X \leq \alpha$ pour obtenir

$$\lambda \leq \frac{2\sigma - 3}{2\sigma - 2} \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \alpha \right)^{-1}.$$

□

Prenons maintenant comme nouvelle suite $(y_j)_{j \geq 1}$ la sous-suite telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda$. Il suffit de regarder à nouveau la relation (3.8) pour obtenir

$$r_j = \frac{|C_j|}{l_{2,j}} \geq \left(\frac{1}{2\sigma - 2} + \lambda \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - X \right) \right)$$

pour une infinité de valeurs de j .

Enfin, une dernière extraction de sous-suite nous permet de supposer que la suite bornée $(r_j)_{j \geq 1}$ admet une limite r telle que

$$r \geq \left(\frac{1}{2\sigma - 2} + \lambda \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \alpha \right) \right). \quad (3.9)$$

La combinaison des résultats (3.5), (3.6), (3.7) et (3.9) conclut la preuve du cas archimédien du Théorème 1.18.

Remarque 3.8. Dans le cas $\sigma < 5/3$, nous avons utilisé des résultats structurels bidimensionnels concernant des ensembles couverts par deux lignes. Si on veut développer ces arguments pour de plus grandes valeurs de σ , il faut développer des théorèmes concernant plus de deux droites. Ce type de travail peut être trouvé par exemple dans [St2] dans le cas d'ensembles couverts par trois droites.

Chapitre 4

Les améliorations dues aux résultats de Jin

4.1 Que se passe-t-il lorsque $\bar{d}(A) > \frac{1}{2}$?

Dans ce cas, on a une autre borne inférieure pour $\bar{d}(A + A)$.

Lemme 4.1. *Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. On suppose $\alpha > \frac{1}{2}$. Alors $\gamma \geq \frac{1+\alpha}{2}$.*

La preuve est identique à celle du Lemme 2.1 et s'appuie sur le Théorème 2.4, cité dans la première partie et rappelé ci-dessous, dont on peut trouver la preuve dans [Na] p. 21.

Théorème 4.2. *Soit $k \geq 3$ un entier. Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ un ensemble d'entiers positifs ou nuls tels que*

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1}.$$

Si $a_{k-1} \leq 2k - 3$, alors $|A + A| \geq k + a_{k-1}$.

Preuve du Lemme 4.1. Puisque $\bar{d}(A) = \alpha$, il existe une suite croissante d'entiers $(y_j)_{j \geq 1}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, si on définit $A_j := A \cap [0; y_j]$ et si on choisit j assez grand, on a

$$\alpha - \varepsilon < \frac{|A_j|}{y_j} < \alpha + \varepsilon,$$
$$\text{pgcd}(A_j) = 1.$$

Dans la suite de la preuve, on supposera $y_j \in A_j$.

Sous l'hypothèse $\alpha > \frac{1}{2}$ et pour ε suffisamment petit, on peut observer que A_j satisfait les hypothèses du Théorème 2.4. Alors,

$$|A_j + A_j| \geq |A_j| + y_j,$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{(A + A)(2y_j)}{2y_j} &\geq \frac{|A_j + A_j|}{2y_j} \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{|A_j|}{2y_j} \\ &\geq \frac{1 + \alpha}{2} - \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à considérer la suite $(A + A)(2y_j)$ pour obtenir $\bar{d}(A + A) \geq \frac{1+\alpha}{2}$ et conclure la preuve. \square

Remarque 4.3. Dans le cas d'un ensemble A infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$ vérifiant $\bar{d}(A) = 1/2$, on a toujours $\bar{d}(A + A) \geq 3/4$. Pour s'en convaincre, il suffit de suivre à nouveau la preuve de l'un ou l'autre des Lemmes 2.1 et 4.1. Pour une infinité d'entiers j , les ensembles A_j utilisés dans les preuves vérifient les hypothèses d'un des Théorèmes 2.4 et 2.2. Dans un cas comme dans l'autre, on obtient le même résultat pour $\bar{d}(A + A)$. On a en effet $3/4 = 3/2 \times 1/2 = \frac{1+1/2}{2}$. La structure de A lorsque $\bar{d}(A) = 1/2$ et $\bar{d}(A + A) = 3/4$ est décrite dans le Théorème 1.22.

Le théorème suivant donne la structure de A lorsque $\bar{d}(A + A)$ atteint la borne inférieure déterminée dans le Lemme 4.1.

Théorème 4.4. *Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. On note $\alpha = \bar{d}(A)$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(h_n)}{h_n} = \alpha.$$

Si on a $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\bar{d}(A + A) = \frac{1+\alpha}{2}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(A + A)(h_n)}{h_n} = \alpha.$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, Jin utilise le langage de l'analyse non-standard. La preuve proposée ici, basée sur les mêmes idées, est écrite dans un langage standard.

– Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(A + A)(h_n + 1, 2h_n)}{h_n} = 1.$$

Puisque $0 \in A$, on a déjà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(A + A)(h_n)}{h_n} \geq \alpha. \quad (4.1)$$

Par addition des deux quantités, on obtient

$$\bar{d}(A + A) \geq \frac{1 + \alpha}{2}. \quad (4.2)$$

D'après les hypothèses du Théorème 4.4, on a l'égalité dans (4.2) et donc dans (4.1), ce qu'on voulait.

– Supposons maintenant qu'il existe une suite extraite de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (que l'on notera à nouveau (h_n)) et une suite d'ensembles $B_n \subseteq \{h_n + 1, \dots, 2h_n\}$ de cardinal b_n tels que

$$B_n \cap (A + A) = \emptyset$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{h_n} = b > 0.$$

Pour tout entier n , notons x_n l'entier tel que $h_n + x_n$ soit le plus petit élément de B_n . $h_n + x_n$ n'est pas un élément de $A + A$ donc au moins un des éléments de $\{h_n - i, x_n + i\}$ n'appartient pas à A , pour tout $0 \leq i \leq \lfloor \frac{h_n - x_n}{2} \rfloor$. Ainsi,

$$\frac{A(x_n, h_n)}{h_n - x_n + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Pour avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(h_n)}{h_n} = \alpha > \frac{1}{2},$$

on doit donc avoir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(x_n)}{x_n} > \alpha,$$

ce qui contredit la définition de $\alpha = \bar{d}(A)$.

□

La conclusion de ce théorème semble ne pas donner la structure précise de l'ensemble A . Elle donne en fait une information sur $A + A$. Pourtant, cela permet de bien comprendre la répartition des éléments de A . En effet, dans $(A + A)(h_n)$, il n'y a essentiellement que les éléments issus de la somme de A avec le singleton $\{0\}$. Toutes les autres sommes $x + y$ avec $x, y \in A$ sont dans $[h_n + 1; 2h_n]$ qui, de surcroît, vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(A+A)(h_n+1, 2h_n)}{h_n} = 1$. Ainsi, on peut conclure que la plupart des éléments de A appartiennent au segment $[h_n/2; h_n]$. En revanche, on ne peut espérer obtenir un résultat identique au cas archimédien des Théorèmes 1.18 et 1.22, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.5. Soit

$$A = \mathbb{N} \cap \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\left[\frac{1}{4}2^{2^n}; \frac{3}{8}2^{2^n} \right] \cup \left[\frac{1}{2}2^{2^n}; 2^{2^n} \right] \right).$$

On a $\bar{d}(A) = 5/8$ et $\bar{d}(A + A) = 13/16 = \frac{1+\bar{d}(A)}{2}$. On peut observer que $A \cap [0; 2^{2^n}]$ n'est pas essentiellement concentré dans un intervalle $[a_n; 2^{2^n}]$ de longueur proche de $\frac{5}{8}2^{2^n}$.

4.2 Le théorème est vrai pour des ensembles de plus grande densité supérieure

Un résultat récent de R. Jin concernant les ensembles finis va nous permettre de prouver un analogue du Théorème 1.18 pour des ensembles de plus grande densité supérieure.

4.2.1 Le Théorème de Jin pour les ensembles finis

Dans les preuves des Théorèmes 1.17 et 1.18, l'outil principal est le Théorème fondamental de Freiman 2.12. Il donne la structure d'un ensemble A lorsque on a $|A + A| < 4|A|$. Le Théorème 4.6 suivant donne une structure plus fine de A lorsque $|A + A| \leq (3 + \varepsilon)|A|$ où $\varepsilon < \frac{1}{3}$ est une constante fixée.

Pour respecter les notations de Jin, on rappelle qu'une bi-progression arithmétique est l'union de deux progressions arithmétiques de même raison.

Théorème 4.6 (Jin). *Il existe un nombre réel positif $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$ et un nombre entier positif K tels que si A est un ensemble fini d'entiers positifs ou nuls vérifiant $|A| \geq K$ et*

$$|A + A| = (3 + \delta)|A| - 3$$

avec $0 \leq \delta < \varepsilon$, alors A est soit un sous-ensemble d'une progression arithmétique de cardinal au plus $2|A + A| - 4|A| + 5$, soit un sous-ensemble d'une bi-progression arithmétique de cardinal au plus $|A + A| - 2|A| + 3$.

Démonstration. La preuve de ce théorème utilise le langage de l'analyse non standard et peut être trouvée dans [Jin3]. \square

On peut citer ici les deux exemples de Jin qui prouvent que les résultats du Théorème 4.6 sont optimaux.

Exemple 4.7. Soit $A = [0; k - 3] \cup \{k + 10, 2k + 20\}$ avec $k \geq 15$. Alors $|A| = k$ et $|A + A| = 3k + 8$. La plus petite progression arithmétique contenant A a pour cardinal $2k + 21$ et A n'est pas un sous-ensemble d'une bi-progression arithmétique de cardinal $k + 11$.

Exemple 4.8. Soit $A = [0; k - 3] \cup \{3k, 3k + 12\}$ avec $k \geq 14$. Alors $|A| = k$ et $|A + A| = 3k + 8$. La plus petite bi-progression arithmétique contenant A a pour cardinal $k + 11$ et A n'est pas un sous-ensemble d'une progression arithmétique de cardinal $2k + 21$.

4.2.2 Preuve du Théorème 1.22

Pour prouver le Théorème 1.22, il suffit de suivre la démonstration du Théorème 1.18 en appliquant aux ensembles A_j le Théorème 4.6 en lieu et place des Théorèmes 2.12 et 2.14.

Sous réserve d'exclure le cas où A_j est inclus dans une progression arithmétique, on voit que les conclusions des Théorèmes 2.14 et 4.6 sont identiques. Il reste donc à démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.9. *L'ensemble A_j ne peut être un sous-ensemble d'une progression arithmétique de cardinal $2|A_j + A_j| - 4|A_j| + 5$ pour une infinité de valeurs de j .*

Démonstration. Rappelons que, sous les hypothèses du Théorème 1.22, les ensembles A_j vérifient

$$|A_j + A_j| \leq (3 + \delta + \varepsilon')|A_j|$$

où ε' est arbitrairement petit (voir (2.2)). Alors, le nombre réel ε choisi pour démontrer le Théorème 1.22 étant le même que celui intervenant dans le Théorème 4.6, on peut appliquer ce dernier à $|A_j|$. Supposons donc que, pour une infinité d'entiers j , les ensembles $A_j = A(y_j)$ soient inclus dans une progression arithmétique de cardinal au plus $2|A_j + A_j| - 4|A_j| + 5 = (2 + 2\delta + \varepsilon')|A_j| - 5$. Cette progression arithmétique contient 0 et y_j qui sont des éléments de A_j . De plus, elle est de raison 1 sinon, on ne pourrait avoir $\text{pgcd}(A_j) = 1$. Cette progression

est donc l'intervalle $[0; y_j]$ tout entier. La contradiction va alors venir de la définition de la densité supérieure de A . En considérant la suite $A(y_j)/y_j$, on obtient

$$\bar{d}(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|A_j|}{y_j} \geq \frac{1}{2 + 2\delta + \varepsilon''},$$

où ε'' peut être choisi arbitrairement petit. Ceci est exclu par l'hypothèse $\alpha < \frac{1}{2+2\delta}$ du Théorème 1.22. \square

Remarque 4.10. On ne connaît pas la valeur de ε mais on sait qu'elle ne peut excéder $1/3$. Ainsi, si le Théorème 1.22 permet de considérer des ensembles de densité supérieure $\alpha > \alpha_0$, il ne couvre pas un spectre aussi large de valeurs de σ que le Théorème 1.18.

Les cas pour lesquels les différents théorèmes s'appliquent sont décrits par la Figure 1.2. Montrons pourquoi la zone où le Théorème 1.22 s'applique est délimitée par deux droites. Il suffit de remarquer que, dans cette représentation, les points de coordonnées

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \sigma\alpha) = \left(\frac{1}{2 + 2\delta}, \frac{3 + \delta}{2(2 + 2\delta)} \right)$$

sont alignés pour $0 \leq \delta < \varepsilon$. Ils appartiennent à la droite d'équation $\gamma = \alpha + \frac{1}{4}$. Chacun de ces points est alors relié à l'origine pour former l'ensemble des points du plan où le Théorème 1.22 s'applique.

4.3 La conjecture de Freiman

Dans ce dernier paragraphe, nous allons donner l'énoncé d'une conjecture due à Freiman (voir [Fr2]) qui permettrait d'unifier et de généraliser les Théorèmes 1.18 et 1.22.

Conjecture 4.11 (Freiman). *Il existe un entier positif K tel que si A est un ensemble fini d'entiers positifs ou nuls vérifiant $|A| \geq K$ et*

$$|A + A| = (3 + \delta)|A| - 5$$

avec $0 \leq \delta < \frac{1}{3}$, alors A est soit un sous-ensemble d'une progression arithmétique de cardinal au plus $2|A + A| - 4|A| + 5$, soit un sous-ensemble d'une bi-progression arithmétique de cardinal au plus $|A + A| - 2|A| + 3$.

Cette conjecture généraliserait le Théorème 4.6 en autorisant le paramètre δ à prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0; 1/3]$. On obtiendrait donc un énoncé analogue à celui du Théorème 1.22.

Conjecture 4.12. Soit A un ensemble infini d'entiers positifs ou nuls tel que $0 \in A$ et $\text{pgcd}(A) = 1$. Posons $\alpha = \overline{d}(A)$ et $\gamma = \overline{d}(A + A)$. Pour tout $0 \leq \delta < 1/3$, supposons $0 < \alpha = \overline{d}(A) < \frac{1}{2(1+\delta)}$ et

$$\gamma = \sigma\alpha,$$

où $\sigma = 3/2 + \frac{\delta}{2}$. Alors on est dans un des deux cas suivants.

1. Cas non archimédien : il existe deux entiers positifs N et t avec $\text{pgcd}(N, t) = 1$ tels que

$$A \subseteq \{0, t\} + NN,$$

et

$$\alpha \geq \frac{6}{(4\sigma - 3)N}.$$

2. Cas archimédien : il existe une suite croissante d'entiers $(y_j)_{j \geq 1}$ avec

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A(y_j)}{y_j} = \alpha,$$

et deux suites $(b_j)_{j \geq 1}$ et $(t_j)_{j \geq 1}$ avec $0 \leq b_j \leq t_j \leq y_j$ telles que, si on définit

$$\lambda_j := \frac{b_j}{y_j - t_j}$$

et

$$r_j := \frac{A(t_j, y_j)}{y_j - t_j + 1},$$

alors $A(b_j, t_j) = 0$ pour tout $j \geq 1$ et

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} r_j = r$$

avec

$$\lambda \leq \frac{2\sigma - 3}{2\sigma - 2} \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \alpha \right)^{-1}$$

et

$$r \geq \left(\frac{1}{2\sigma - 2} + \lambda \left(\frac{1}{2\sigma - 2} - \alpha \right) \right).$$

Remarque 4.13. – Ce théorème permet donc de généraliser le Théorème 1.18 puisque les ensembles A considérés peuvent avoir une densité supérieure α vérifiant $\alpha < 3/8$ et non plus $\alpha < \alpha_0$. On obtient la borne $3/8$ en calculant $\frac{1}{2+2\delta}$ pour $\delta = 1/3$.

- Si on considère la Figure 1.2, la Conjecture 4.12 permet de prolonger les droites $\gamma = \frac{5}{3}\alpha$ et $\gamma = \alpha + \frac{1}{4}$ jusqu'au point $(\alpha = \frac{3}{8}, \gamma = \frac{5}{8})$.

Bibliographie

- [Bi1] Y. BILU *Addition of sets of integers of positive density*. Journal of Number Theory **64** p. 233-275 (1997)
- [Bi2] Y. BILU *Structure of sets with small sumset*. Astérisque **258** p. 77-108 (1999)
- [Bi3] Y. BILU *Addition of integer sequences and subsets of real tori*. Number Theory in Progress. Proceedings of the International Conference on Number Theory in Honor of Andrzej Schinzel in 1997. Walter de Gruyter, Berlin/New York (1999)
- [Bo1] G. BORDES *Autour de la conjecture de Cameron et Erdős*. Mémoire de DEA de Maths Pures, Université de Bordeaux 1 (2003)
- [Bo2] G. BORDES *Sum-sets of small upper density*. Acta Arithmetica **119** p. 187-200 (2005)
- [Fr1] G.A. FREIMAN *Foundations of a structural theory of set addition*. Translations of Mathematical Monographs **37** (1973)
- [Fr2] G.A. FREIMAN *Structure theory of set addition II. Results and problems*. Bolyai Society Mathematical Studies, 11. Paul Erdős and his mathematics I, Budapest, p. 243-260 (2002)
- [Gr] B. GREEN *The Cameron-Erdős Conjecture*. Bull. London Math. Soc. **36** p. 769-778 (2004)
- [H-R] H. HALBERSTAM AND K.F. ROTH *Sequences*. 2ème édition, Springer-Verlag, New-York/Berlin (1983)
- [Jin1] R. JIN *Inverse problem for upper asymptotic density*. Transactions of the American Mathematical Society **355** vol. 1 p. 57-78 (2002)
- [Jin2] R. JIN *Solution to the Inverse Problem for Upper Asymptotic Density*. A paraître au Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik.
<http://math.cofc.edu/faculty/jin/research/publication.html>
- [Jin3] R. JIN *Freiman's Inverse Problem with Small Doubling Property*. Soumis pour publication.
<http://math.cofc.edu/faculty/jin/research/publication.html>

- [Jin4] R. JIN *Nonstandard Methods for Additive and Combinatoric Number Theory - A Survey*. Preprint.
<http://math.cofc.edu/faculty/jin/research/publication.html>
- [Kn] M. KNESER *Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen*. *Math. Z.* **58** p. 459-484 (1953).
- [L-S] V.F. LEV AND P.Y. SMELIANSKY *On addition of two distinct sets of integers*. *Acta Arithmetica* **70** p. 85-91(1995)
- [Na] M.B. NATHANSON *Additive number theory. Inverse problems and the geometry of sumsets*. Graduate Texts in Mathematics **165** (1996)
- [St1] Y. STANCHESCU *On addition of two distinct sets of integers*. *Acta Arithmetica* **75** p. 191-194 (1996)
- [St2] Y. STANCHESCU *Multidimensional Inverse Additive Problems*. Thèse soutenue à l'Université de Tel-Aviv (1998)

Résumé

Cette thèse traite d'un problème inverse en théorie additive des nombres : quelle est la structure d'un ensemble infini A d'entiers qui vérifie $\bar{d}(A + A) < \sigma \bar{d}(A)$ pour différentes valeurs de σ ? Dans une première partie est abordé le cas d'ensembles A de petite densité supérieure avec $\sigma < 11/6$. Dans une seconde partie, la restriction à $\sigma < 5/3$ permet d'obtenir des résultats plus précis et dans certains cas optimaux. Dans une troisième partie, on étend ces résultats à des ensembles de plus grande densité supérieure (jusqu'à $\bar{d}(A) \leq 1/2$) mais avec $\sigma < 3/2 + \delta$ où $\delta < \varepsilon \leq 1/6$.

Mots-clés : Problème inverse, densité asymptotique supérieure, théorie additive.

Abstract

This thesis deals with an inverse problem in additive number theory : what is the structure of an infinite set A of non-negative integers with the small doubling property $\bar{d}(A + A) < \sigma \bar{d}(A)$ for various values of σ ? In the first part, we give results about sets with small upper density and $\sigma < 11/6$. In the second part, those results are improved under the hypothesis $\sigma < 5/3$. In the third part, we generalize those last results for sets with larger upper density (up to $\bar{d}(A) \leq 1/2$) but with the restriction $\sigma < 3/2 + \delta$ where $\delta < \varepsilon \leq 1/6$.

Keywords : Inverse problem, upper asymptotic density, additive number theory.