

N° d'ordre : 2544

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Karen BARRAILH épouse LAURIOUX

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées

ETUDE MATHÉMATIQUES ET NUMÉRIQUE DE MODÈLES
DE PROPAGATION ISSUS DE L'OPTIQUE NON LINÉAIRE

Soutenue le : 17 septembre 2002

Après avis des rapporteurs :

Mme B. Bidégaray Chargée de recherches CNRS, Grenoble
M. F. Castella Professeur, Université de Rennes I

Devant la Commission d'examen formée de :

M.	R. Abgrall	Professeur, Université Bordeaux I	Président
M.	G. Gallice	Ingénieur, CEA-CESTA	Rapporteur
Mme	B. Bidégaray	Chargée de recherches CNRS, Grenoble	Examineurs
M.	F. Castella	Professeur, Université de Rennes I	
M.	T. Colin	Professeur, Université Bordeaux I	
M.	O. Morice	Ingénieur, CEA-CESTA	

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier M. ABGRALL de m'avoir proposer un sujet de stage de DEA au CEA/CESTA sans lequel je n'aurais probablement pas eu l'opportunité de faire cette thèse et de m'avoir co-encadré durant ces années de recherche.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à MME. BIDÉGARAY et M. CASTELLA pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse. Leurs nombreuses remarques, recommandations et conseils m'ayant permis d'améliorer mon manuscrit.

Je remercie également M. MORICE d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse et d'avoir donné tout au long de ses trois années un avis critique sur son avancement.

Ce travail n'aurait bien sûr pu se faire sans une ambiance conviviale et le soutien de personnes que je veux également associer à ces remerciements.

- *Tout d'abords le service SIS (Savants Interdits de Sortie) où j'ai passé ces trois années. Citons pour GANA (Groupe d'Assemblage des Neurons Actives), NICOLAS (le petit dernier), LAURENT (notre DDVvove), AGNÈS (Bradacieréputêtrerraccourcix), MARC (Envoyé spécial du JDD), NICOLE. C (petit scarabé deviendra grand), MICHEL ("chouchou" pour les intimes), MARINA (notre nouvelle venue), THIERRY (notre sous-chef préféré), BRUNO (incontournable), KATHERINE (la seconde maman d'éric), EVELYNE (Accrochéotéléfonfix), MURIEL (Y a le telephon qui son et y a jamais person qui y répond), DAVID (Le grand truc qui dépasse), ALAIN (dit "chérie-chérie") et enfin FRÉDÉRIC (je mappelle Oleph...), pour leur présence et leurs conseils et les envahisseurs de GEC (Groupe d'Echange de Capacités) au café du matin, sans les nommer DIDIER (équipé en vidéo comme un pro pour éviter de ce rendre MIRÓ) et FRANÇOIS (fourniseur de galettes des rois officiel).*

- *Je n'oublie pas non plus notre secrétariat avec NICOLE. D et nos repas au Moulin, ainsi que le secrétariat du MAB (Mathématiciens Asservis Biologiquement) avec F. Doche et les délicieux moments de saisie informatique des justificatifs de retour de missions.*

- *La section de VVD (Vedi Vini D), avec nos deux géos préférés XAVIER et SÉBASTIEN et pour les petits scarabés les plus fidèles, les deux NICOLAS, JÉRÔME, THOMAS, THIERRY, FRÉDÉRIC, CORINNE, ...*

- *Les autres doctorants qui ont souffert avec moi durant ces trois années, VIRGINIE (pour nos conversations), ERIC (mon palois préféré), RAPHAËL (toujours de bonne humeur), RODOLPHE (alias dartagnan) et la petite dernière GÉRALDINE qui prend ma place auprès de Gégé.*

Je n'oublie pas bien sûr ceux sans qui se travail n'aurait pas vu le jour, je veux nommer M. T. Colin et M. G. Gallice mes deux encadrants. Je les remercie pour la confiance qu'ils m'ont accordé, le temps, les conseils et la bonne humeur qu'ils ont apporté à cette thèse. Que

ce soit en partageant le même bureau ou en rendez-vous entre deux pots ou deux conférences, leur soutien m'a permis de mener à bien ce projet. Je leur souhaite bon courage dans leurs futures recherches dans le domaine passionnant de l'optique non linéaire et comme je le dis toujours,

"Si ça roule, c'est carré!"

Je remercie également mes parents pour leur confiance et leur soutien tout au long de ces années.

Enfin, ces remerciements ne pourraient être complets sans un grand merci à CHRISTOPHE qui a été auprès de moi pendant ces trois années de thèse pour écouter la priscilla que je suis et me rendre le vie plus belle.

Pour conclure cette longue liste de remerciements (c'est pire que pour la remise des César), je remercie chaleureusement toutes les personnes que j'ai oubliées et qui se reconnaîtrons.

A loulou
A mes grands-parents

Table des matières

Introduction	2
Notations	8
I - Chapitre I : Obtention de l'équation de Schrödinger avec prise en compte des aberrations temporelles	11
1 Première Partie : Obtention des différents modèles	17
2 Deuxième Partie : Comparaison numérique des différents modèles.	63
II - Chapitre II : Existence, unicité et stabilité pour la solution de l'équation singulière	83
III- Chapitre III : Une étude générale en optique diffractive, appliquée aux lasers à spectre large et aux impulsions ultra-courtes.	110
IV- Chapitre IV : Résultats numériques obtenus avec les différents modèles décrits aux Chapitres I et III.	164

Conclusion et Perspectives	209
Annexes	213
A - Annexe 1, Les transformées de Fourier continues et discrètes	214
B - Annexe 2, Les réseaux	216
C - Annexe 3, Obtention des modèles asymptotiques dans le cadre de l'optique diffractive	222
Table des figures	230
Bibliographie	231

Introduction

Ce travail de thèse a été réalisé au CEA-CESTA ⁽¹⁾ en collaboration avec l'université Bordeaux I. Il s'inscrit dans le cadre du programme de simulation pour le LMJ ⁽²⁾ qui doit aboutir vers l'année 2010 à la livraison d'une installation LASER ⁽³⁾ multifaisceaux capable de développer l'énergie colossale de 1.8 mégajoule ($1.8 \cdot 10^6$ J) en un temps très bref. Avant de présenter la motivation de cette étude, nous allons effectuer ci-dessous un bref rappel historique sur le laser et les modèles de propagation existants.

1 Historique

Il a fallu attendre 1959 et T.H. Maiman ("Hughes Research Laboratories") pour voir apparaître le premier oscillateur à rubis et 1960 avec A. Javan ("Bell Telephone Laboratories") pour le premier laser à gaz. A partir de là, avec les premières observations de P.A. Franken [23] montrant que la propagation d'un faisceau laser intense peut être perturbée par les propriétés non linéaires du milieu qu'il traverse, on a vu naître au travers des lasers un nouveau domaine de la physique, celui de l'optique non linéaire. Depuis, le laser a fait l'objet de nombreuses recherches tant sur le plan physique que mathématique. Il a trouvé sa place dans le milieu industriel où on l'utilise pour découper, sonder, tester ... Et la liste n'est pas exhaustive. Le laser a également donné lieu à un grand nombre d'applications dans le domaine de la recherche. Il est principalement utilisé comme une sonde, pour analyser les matériaux. Une autre de ses applications est de transporter l'information via des fibres optiques. On l'utilise aussi comme une puissante source énergétique afin de déposer de l'énergie de manière précise et ponctuelle sous forme lumineuse.

D'un point de vue mathématique, les études permettant de rendre compte des interactions laser-matière observées expérimentalement sont apparues. Tout d'abord, ce furent les travaux de J. Ginibre et G. Velo ([24, 25, 26]) sur les équations de Schrödinger non linéaires utilisées pour modéliser la propagation d'un laser. Puis à partir des années 80, apparurent de nombreuses études mathématiques rigoureuses en optique pour des approximations de type optique géométrique non linéaire (voir la bibliographie de [36]). Dans la suite, nous rappellerons brièvement les différents modèles de propagation existants et les travaux menés sur ces modèles. La liste des modèles présentés n'est bien sûr pas exhaustive.

⁽¹⁾CEA-CESTA : Commissariat à l'Énergie Atomique - Centre d'Études Scientifiques et Techniques d'Aquitaine

⁽²⁾Laser MégaJoule

⁽³⁾Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

2 Les différents modèles de propagation

Pour modéliser la propagation d'une onde laser et ainsi rendre compte des interactions laser-matière, plusieurs approches du problème ont été proposées depuis les années 60.

La première approche est une approche microscopique et quantique. Elle est basée sur les modèles de Maxwell-Bloch qui permettent de décrire l'interaction d'un champ électromagnétique avec un milieu électronique ([12], [47]). Le milieu est ainsi représenté par un certain nombre de niveaux d'excitation électronique, au moins trois pour avoir des modèles physiquement pertinents (voir [13], [8], [9], [49], [55]). Pour des études plus théoriques de ce modèle, nous renvoyons aux travaux de [20] pour les modèles à deux niveaux et aux travaux de [38] pour des modèles à plusieurs niveaux.

La seconde approche possible est une approche macroscopique. Elle consiste à résoudre les équations de Maxwell couplées à des équations non linéaires. Comme modèle, nous pouvons citer le modèle de Maxwell-Lorentz ([10], [46]), le modèle de Maxwell instantané ([22], [20]) ou encore le modèle de Maxwell-Debye ([7], [6], [29], [30]). Ces modèles permettent notamment de modéliser le doublement de fréquence ou encore l'autofocalisation ([14], [15]). Cependant, ces modèles nécessitent un maillage fin et sont souvent très coûteux. Ainsi, une approche asymptotique est souvent envisagée pour pallier ces contraintes.

L'approche asymptotique peut s'appliquer à tous les modèles macroscopiques cités ci-dessus. D'un point de vue théorique, la dérivation de ces modèles a fait l'objet d'un certain nombre de publications. Dans le cadre de l'optique géométrique, nous pouvons citer les travaux de [39] montrant la stabilité de la solution et les travaux généralisant l'étude aux fonctions presque-périodiques de ([34], [35], [28], [50], [19]). Dans le cadre de l'optique diffractive, on peut citer les travaux de ([40], [41], [37], [20], [21]).

3 Motivation de l'étude

Les travaux présentés dans cette thèse se situent plus particulièrement dans le cadre de l'approche asymptotique.

La propagation d'un faisceau laser dans un milieu diélectrique est usuellement modélisée par l'équation de Schrödinger non linéaire standard

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L} \Delta_{\perp} \mathcal{E} + \sigma_L \partial_{tt}^2 \mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl} \omega_L^2}{2c^2 k_L} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (1)$$

Dans cette équation, \mathcal{E} désigne l'enveloppe complexe du champ électrique normalisé en unité d'intensité; le champ réel \mathbf{E} (solution des équations de Maxwell) est donné par

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \left(\sqrt{\frac{1}{2nc\epsilon_0}} \mathcal{E}(x, y, t; z - v_g t) e^{i(\omega_L t - k_L z)} + c.c. \right). \quad (2)$$

La direction de propagation principale du faisceau z est donc privilégiée. Elle est utilisée comme variable d'évolution. La quantité k_L représente le nombre d'onde associé à la fréquence centrale ω_L , la quantité $v_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k=k_L}$ représente la vitesse de groupe, la quantité $\sigma_L = \frac{-1}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=\omega_L}$ désigne la dispersion des vitesses de groupe, le nombre n représente l'indice du milieu et γ_{nl} est l'indice non linéaire.

Afin de vérifier le modèle de Schrödinger standard (1), le champ électrique \mathcal{E} doit satisfaire les conditions d'approximation d'enveloppe lentement variable donnée par

$$\partial_t \mathcal{E} \ll \omega_L \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \partial_z \mathcal{E} \ll k_L \mathcal{E}.$$

Pour notre étude, on s'intéresse plus particulièrement à des impulsions à spectre "étalé". En d'autres termes, on s'intéresse à des cas où $\partial_t \mathcal{E}$ reste petit devant $\omega_L \mathcal{E}$ mais moins qu'habituellement si bien que l'on ne peut pas forcément négliger $\partial_t \mathcal{E}$ devant $\omega_L \mathcal{E}$. Pour simuler la propagation de ce type d'impulsion, on utilise actuellement au CEA/CESTA le code de calcul MIRÓ. La propagation du faisceau en mode spectre large y est modélisée à l'aide du modèle de Schrödinger non linéaire standard (1). Le mode spectre large revient alors à discrétiser l'enveloppe du champ \mathcal{E} avec un grand nombre de pas de temps, ainsi la largeur spectrale du faisceau est implicitement incluse dans la dépendance temporelle de \mathcal{E} (le spectre est d'autant plus large que \mathcal{E} fluctue rapidement).

Cependant, cette technique de modélisation numérique s'est avérée insuffisante pour certaines simulations que nous présenterons au chapitre I. De ce fait, pour prendre en compte ces impulsions à spectre "étalé", on développe, dans cette thèse, un nouveau modèle de Schrödinger non linéaire modifié. La prise en compte des impulsions à spectre "étalé" et la dérivation des modèles qui permettent de les propager sont données selon deux approches différentes. La première concerne des impulsions à spectre légèrement "étalé" autour de la fréquence centrale et la seconde concerne des impulsions à spectre réellement "étalé".

4 Première Approche : chapitre I et II

Le chapitre I est principalement dédié dans une première partie à l'obtention des différents modèles asymptotiques, que ce soit le modèle de Schrödinger non linéaire standard ou le modèle de Schrödinger non linéaire modifié. L'obtention de ce dernier fait l'objet de deux approches, une première dérivation formelle décrite au paragraphe 1.4 et une dérivation plus systématique décrite au paragraphe 1.5. La dérivation systématique du modèle est basée sur l'équation singulière.

Dans la seconde partie du chapitre I, on réalise une comparaison numérique des différents modèles asymptotiques obtenus précédemment. Ces comparaisons sont obtenues à partir d'un code développé durant ma thèse. Plus précisément, nous montrons que le modèle de Schrödinger modifié est plus adapté que le modèle de Schrödinger standard, dans le cas

d'impulsion à spectre "étalé", pour un milieu linéaire. Dans le cas d'un milieu non linéaire, nous discutons également du choix du terme non linéaire pour l'équation de Schrödinger modifiée. Plus précisément, on considère soit le terme d'effet Kerr habituel, soit le terme obtenu lors de la dérivation du modèle. Ainsi, nous obtenons, que pour des impulsions de l'ordre de la nanoseconde, le terme d'effet Kerr est suffisant, et, que pour des durées d'impulsion plus courtes (quelques picosecondes ou quelques femtosecondes), le terme obtenu lors de la dérivation semble plus approprié.

Pour compléter l'étude de ce modèle de Schrödinger non linéaire modifié, obtenu par une dérivation systématique, nous établissons au chapitre II un résultat d'existence et d'unicité ainsi que plusieurs résultats de stabilité des solutions asymptotiques. En particulier, nous montrons que l'erreur commise est plus faible que celle obtenue pour le modèle de Schrödinger non linéaire standard.

5 Seconde Approche : chapitre III

L'obtention du modèle de Schrödinger usuel repose sur l'hypothèse suivante : le spectre en temps du champ électrique est fortement localisé autour de la fréquence centrale ω_L . On parle dans ce cas de spectre discret. Puisque nous cherchons à nous affranchir de cette condition, nous considérons des impulsions pour lesquelles le champ électrique est sous forme de deux composantes, la première est à spectre discret comme précédemment. La seconde composante est supposée avoir un spectre "étalé", *i.e.* non localisé autour d'une fréquence particulière, nous parlons alors de spectre continu ou spectre large.

Dans le cadre de la première approche, on supposait que l'impulsion était parfaitement décrite par (2) et nous ne faisons plus l'approximation $\partial_t \mathcal{E} \ll \omega_L \mathcal{E}$. Ici, nous considérons une impulsion possédant un spectre réellement "étalé". Pour cela, on décompose l'impulsion en une oscillation du type (2) qui porte la partie à spectre discret et une oscillation à spectre continu (voir [40] et la proposition 3.1.2 pour une définition précise). Nous obtenons également que le fait de considérer une impulsion à spectre uniquement continu, permet de modéliser des impulsions ultra-courtes. Pour ce type d'impulsions, nous montrons que les effets non linéaires sont négligeables pour les régimes considérés.

Pour le phénomène de spectre "étalé", nous obtenons un modèle asymptotique constitué d'une équation de Schrödinger standard pour la partie à spectre discret et d'une équation de Schrödinger linéaire pour la partie à spectre continu. On montre que celle-ci possède le même terme de diffraction que celui obtenu avec la première méthode. Cette dernière équation est linéaire car, lors de la simplification des termes non linéaires, on obtient que les effets non linéaires sont négligeables pour les interactions spectre continu-spectre continu et également pour les interactions spectre discret-spectre continu. Dans le cadre de l'optique diffractive dispersive, nous obtenons ainsi un système de deux équations découplées. Pour conclure ce chapitre, nous présentons également les modèles asymptotiques pour les cas non-dispersif et faiblement dispersif avant d'appliquer nos résultats au modèle de Maxwell-Lorentz

anharmonique.

6 Comparaisons numériques : chapitre IV

Ce chapitre est dédié aux différentes comparaisons numériques réalisées avec les modèles obtenus précédemment et le code développé durant ma thèse.

Dans un premier temps, nous illustrons numériquement les résultats du chapitre III. En particulier, nous montrons que les effets non linéaires sont négligeables pour une impulsion à spectre purement continu. Pour obtenir ce résultat, on ne considère pas le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique, qui est trop coûteux en espace mémoire et en temps de calcul, mais un modèle simplifié possédant toutes les propriétés données au chapitre III. Ainsi, on montre effectivement que les effets non linéaires diminuent lorsque la taille du spectre de l'impulsion initiale augmente. Cependant, l'erreur commise entre la solution du système non linéaire et celle du système linéaire est relativement grande pour un spectre très "étalé". On peut donc se méfier sérieusement de l'utilité pratique de ce type d'approximation.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au phénomène de spectre large. Pour traiter ce phénomène, nous regardons des solutions dans le cadre de l'optique géométrique. A partir du modèle simplifié, nous présentons le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du chapitre III en décomposant l'impulsion en une partie à spectre discret et une partie à spectre continu. Nous obtenons ainsi un système de deux équations de Schrödinger, l'une standard avec effet Kerr pour la partie à spectre discret et l'autre linéaire pour la partie à spectre continu. Nous pouvons alors comparer numériquement les solutions du modèle asymptotique avec celles du système de départ pour différentes valeurs du petit paramètre ε (paramètre définit page 24 lors de l'adimensionnement des modèles). Nous commençons par vérifier que pour une impulsion uniquement à spectre discret, on retrouve bien les solutions du modèle de départ. Dans ce cas, on montre que l'erreur commise entre les solutions des deux modèles est d'ordre ε , ce qui est conforme au résultat du théorème 3.2.2 introduit au chapitre III. Nous regardons ensuite le cas d'une impulsion à spectre purement continu. Nous montrons alors que les erreurs entre les solutions des deux modèles sont relativement importantes. En particulier, pour ce type d'impulsion, on obtient une erreur entre les deux modèles correcte en linéaire et pas très bonne en non linéaire. Enfin, nous présentons le cas d'une impulsion ayant à la fois une partie à spectre discret et une partie à spectre continu. Nous obtenons alors des erreurs entre les solutions des deux modèles, d'ordre supérieur à ε pour $\varepsilon = 10^{-2}$ et d'ordre ε pour $\varepsilon = 10^{-3}$. En effet, les erreurs dues à la partie à spectre continu se répercutent. On peut donc dire que dans le cadre de l'optique géométrique, pour des régimes faiblement non linéaires, la décomposition spectre discret-spectre continu n'est pas très satisfaisante.

Pour finir cette étude, toujours dans le cadre de l'optique géométrique, nous donnons le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du chapitre I à partir de l'équation singulière. Comme précédemment, nous comparons numériquement les solutions du modèle

asymptotique avec celles du système de départ pour différentes valeurs du paramètre ε . Nous commençons par mesurer l'erreur commise entre les deux modèles pour une impulsion classique à spectre discret. Nous montrons alors que cette erreur est plus faible que celle obtenue entre le modèle de départ et le modèle de Schrödinger classique avec effet Kerr. En effet, le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du chapitre I nécessite moins d'approximations, il est donc plus précis que le modèle de Schrödinger classique avec effet Kerr. Nous montrons également pour ce type d'impulsion que si l'on ne considère plus une impulsion initiale de taille 1 mais de taille ε , on obtient une erreur entre les solutions du modèle de départ et celles du modèle asymptotique modifié plus faible que précédemment ce qui corrobore les résultats énoncés au chapitre II, théorème 2.5.2. Enfin, nous regardons le cas d'une impulsion à spectre légèrement "étalé". Nous montrons que l'erreur commise entre les solutions du modèle de départ et celles du modèle asymptotique modifié est de taille ε . Ainsi, le modèle de Schrödinger non linéaire modifié, pour ce type d'impulsion à spectre légèrement "étalé", semble numériquement satisfaisant.

Notations

λ_L longueur d'onde,

ω_L pulsation fondamentale du laser,

$\vec{K} = (k_x, k_y, k_L)^T$ vecteur d'onde associé à la pulsation fondamentale,

v_g vitesse de groupe,

$\sigma = 3.10^{-26} s^2.m^{-1}$ dispersion des vitesses de groupe,

n_L indice du milieu,

$\mu_0 = 1.2566.10^{-6} H.m^{-1}$ perméabilité magnétique du vide,

$\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12} F.m^{-1}$ permittivité du vide,

$c = 2.997925.10^8 m.s^{-1}$ vitesse de la lumière dans le vide,

Ω_a fréquence de résonance du matériau,

τ_a temps d'amortissement,

γ_a coefficient de couplage,

γ_{nl} indice non linéaire,

D diamètre de l'impulsion,

T durée de l'impulsion,

R, L longueurs caractéristiques spatiales transverses et longitudinale du faisceau,

ε paramètre d'adimensionnement.

E champ électrique,

B champ magnétique,

P polarisation.

Les symboles $\hat{\cdot}$ et \mathcal{F} désigneront de manière équivalente les transformées de Fourier usuelles.

Chapitre I

Obtention de l'équation de Schrödinger avec prise en compte des aberrations temporelles

Problématique

Première partie : Obtention des différents modèles

- 1.1 Modèles et lois d'échelles
 - 1.1.1 Définition des grandeurs physiques et du modèle de Maxwell
 - 1.1.2 Différents modèles phénoménologiques non linéaires
 - 1.1.3 Adimensionnement des modèles de Maxwell-Lorentz et des données initiales
 - 1.1.4 Obtention de l'équation de Schrödinger non linéaire standard
- 1.2 Les outils mathématiques
 - 1.2.1 Formulation générale
 - 1.2.2 Les modèles asymptotiques classiques
- 1.3 Les réseaux de diffraction dans une optique "Pétawatt "
- 1.4 Obtention formelle de l'équation de Schrödinger modifiée non linéaire
 - 1.4.1 Equations d'évolution du champ
 - 1.4.2 Adimensionnement
 - 1.4.3 Développement limité et identification terme à terme
 - 1.4.4 Passage dans un référentiel en mouvement unique
- 1.5 Obtention systématique de l'équation de Schrödinger modifiée non linéaire
 - 1.5.1 Cadre théorique
 - 1.5.2 Application des résultats au modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

Deuxième partie : Comparaison numérique des différents modèles

- 2.1 Comparaison numérique du modèle de Schrödinger classique avec le modèle de Schrödinger modifié pour le cas d'un milieu linéaire
 - 2.1.1 Problématique
 - 2.1.2 Définition des données initiales
 - 2.1.3 Méthode et résultats numériques
- 2.2 Choix de l'expression du terme non linéaire pour l'équation de Schrödinger modifiée
 - 2.2.1 Comparaison des solutions des deux modèles dans le cadre d'une application LMJ
 - 2.2.2 Comparaison des solutions des deux modèles dans le cadre "Pétawatt " ou pour des impulsions ultra-courtes
- 2.3 Comparaison des modèles de Schrödinger standard et modifié, en non linéaire
 - 2.3.1 Comparaison des solutions des deux modèles dans le cadre d'une application LMJ
 - 2.3.2 Comparaison des solutions des deux modèles pour des impulsions courtes

Conclusion

Problématique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus précisément à des impulsions courtes, de l'ordre de la picoseconde. En effet, les impulsions picosecondes et l'éclairement intense ouvrent des perspectives nouvelles pour les travaux du CEA tels que le diagnostic des plasmas denses, le laser X, ...

Par une technologie de compression de l'impulsion, il est possible d'obtenir à partir d'un des faisceaux LMJ de très fortes puissances, plusieurs Pétawatts ou dizaines de Pétawatts. Le laser Pétawatt permet ainsi de générer une impulsion picoseconde qui est étirée à l'aide de réseaux de diffraction pour obtenir une impulsion de plusieurs nanosecondes que l'on peut ensuite amplifier avant de la recomprimer en fin de chaîne en obtenant une puissance de plusieurs Pétawatts. Pour modéliser la propagation d'une telle impulsion, l'équation (1) s'est avérée insuffisante pour restituer les effets induits à la traversée de certains dispositifs (compresseurs et étireurs utilisant des réseaux) [43]. En effet, afin de restituer les imperfections apparaissant lors de la recompression d'une impulsion courte, par exemple dans le cas où les réseaux ne sont pas idéalement alignés, ou dans le cas où l'étirement n'est pas effectué avec un système de réseaux étireur identiques au système de réseaux compresseur, il est nécessaire de prendre en compte dans le calcul du déphasage induit par ces réseaux des termes de phase spectraux d'ordre élevé (3 et plus) dans l'équation (1). Plus précisément, on ne peut plus faire l'hypothèse $\partial_t \mathcal{E} \ll \omega_L \mathcal{E}$.

La problématique de ce chapitre est donc de montrer comment tenir compte des termes de phase d'ordre élevé dans le calcul du déphasage induit par la paire de réseaux et de montrer comment ces termes apparaissent et modifient l'équation de Schrödinger non linéaire standard (1).

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans une première partie, nous présentons les différents modèles de base et les différents modèles asymptotiques que nous utilisons dans la seconde partie pour les comparaisons numériques réalisées avec le code développé durant ma thèse.

Première partie : Obtention des différents modèles

Pour débiter cette partie, nous définissons les modèles phénoménologiques non linéaires, modèles de Maxwell-Lorentz instantané ou anharmonique, que nous utilisons par la suite pour obtenir les modèles asymptotiques. Nous introduisons également les grandeurs physiques que nous considérons et les adimensionnements qui en découlent. Pour compléter ce premier paragraphe, nous dérivons le modèle de Schrödinger non linéaire standard (1) obtenu à partir des modèles de base. Nous montrons alors l'équivalence asymptotique des modèles : on obtient la même équation d'enveloppe et la même relation de dispersion que l'on considère l'un ou l'autre des modèles phénoménologiques.

Dans le paragraphe suivant, nous mettons en place le cadre mathématique dans lequel nous allons étudier le modèle de Schrödinger non linéaire modifié. Nous introduisons plus

précisément des outils tels que la relation de dispersion, la variété caractéristique, la condition de polarisation, l'optique géométrique et l'optique diffractive.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, en dérivant le modèle de Schrödinger modifié non linéaire, nous détaillons dans un troisième paragraphe le cadre physique qui nous a permis de voir que le modèle de Schrödinger non linéaire standard est insuffisant. Pour cela, on considère la propagation d'impulsions courtes à travers une paire de réseaux. En détaillant très succinctement comment s'écrit le terme de déphasage induit par la paire de réseaux au passage de l'impulsion, nous montrons numériquement que le modèle standard (1) est insuffisant. Ainsi, pour ce type d'impulsion, dont la durée est de l'ordre de la picoseconde, il est nécessaire d'introduire les termes de phase spectraux d'ordre élevé supplémentaires dans le terme de déphasage induit par la paire de réseaux. Ces termes, dits "termes d'aberrations temporelles", induisent une modification du modèle de Schrödinger non linéaire standard (1).

Dans les deux derniers paragraphes de cette partie, nous présentons la dérivation du modèle de Schrödinger modifié non linéaire selon deux approches. Une première approche formelle, détaillée dans le paragraphe 1.4, basée sur les résultats de [44]. Par cette approche, à partir du système de Maxwell-Lorentz pour un milieu centrosymétrique, on obtient l'équation de Schrödinger non linéaire modifiée avec prise en compte des aberrations temporelles s'écrivant sous la forme

$$-i\partial_z\mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t + 2\sigma\partial_{tt}^2 + \dots}\Delta_{\perp}\mathcal{E} + \sigma\partial_{tt}^2\mathcal{E} + \dots + \frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t + \sigma\partial_t^2 + \dots)}(|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}) = 0. \quad (1.1)$$

La partie linéaire de cette équation a été implémentée dans le code de calcul MIRÓ au CEA/CESTA.

Enfin dans le dernier paragraphe 1.5 de cette partie, nous présentons la seconde approche permettant d'obtenir le même modèle de Schrödinger non linéaire modifié (1.1). Cette approche permet une dérivation systématique du modèle basée sur une équation singulière.

Après avoir obtenu les modèles de Schrödinger standard, linéaire et non linéaire, ainsi que les modèles de Schrödinger modifiés, linéaire et non linéaire, nous définissons leur domaine de validité.

Deuxième partie : Comparaison numérique des différents modèles.

Dans un premier temps, nous comparons les différents modèles linéaires. Ainsi, nous avons mesuré et justifié l'importance de l'introduction des termes de phase d'ordre élevé dans un cas spectre large. Pour cela, nous comparons la partie linéaire de l'équation (1) avec celle de l'équation (1.1). Pour simplifier les calculs, nous nous sommes limités au cas $\sigma = 0$. La

comparaison a été réalisée pour une durée d'impulsion de $T = 10^{-12}s$, correspondant aux applications du laser "Pétawatt" du CEA/CESTA, en faisant varier le diamètre de l'impulsion de $D = 10^{-2}m$ à $D = 10^{-3}m$.

Pour cette durée d'impulsion, nous montrons que si le diamètre de l'impulsion diminue, l'écart entre les solutions des modèles augmente, ce qui justifie l'introduction des termes d'aberrations temporelles. Nous montrons également que pour un diamètre d'impulsion fixé à $D = 10^{-2}m$, la variation de la durée d'impulsion ($T = 10^{-12}s$ à $T = 10^{-14}s$) a peu d'influence. Ainsi, pour des impulsions courtes voire ultra-courtes, l'introduction des termes de phase d'ordre élevé est justifiée. Après avoir comparé les différents modèles linéaires et avoir montré que le modèle modifié avait un intérêt pour les impulsions qui nous intéressent, nous comparons les modèles non linéaires.

Dans un premier temps, nous voulons savoir si le fait de prendre comme terme non linéaire le terme d'effet Kerr habituel associé au modèle de Schrödinger modifié pour la partie linéaire, n'est pas suffisant. En d'autres termes, nous voulons comparer l'effet du terme d'effet Kerr par rapport à celui du terme non linéaire obtenu dans le développement et ainsi voir lequel est le mieux adapté. Pour cela, nous faisons varier la durée de l'impulsion de $T = 10^{-9}s$ (durée d'impulsion des applications LMJ) à $T = 10^{-13}s$ (durée pour les impulsions courtes). Nous montrons alors que dans le cadre des applications LMJ, le fait de prendre l'effet Kerr comme terme non linéaire dans le cas spectre "étalé" est suffisant, et que dans le cadre des applications "Pétawatt" et des impulsions ultra-courtes, le terme non linéaire obtenu par le développement semble plus adapté.

Dans un deuxième temps, nous comparons le modèle de Schrödinger standard avec effet Kerr et le modèle de Schrödinger modifié avec le terme non linéaire obtenu par le développement. Comme précédemment, nous faisons varier la durée de l'impulsion de $T = 10^{-9}s$ (durée d'impulsion des applications LMJ) à $T = 10^{-13}s$ (durée pour les impulsions courtes). Nous montrons alors que pour des impulsions LMJ, le modèle standard semblait suffisant. Par contre pour des durées plus courtes, le modèle modifié non linéaire est bien meilleur.

Première partie

Obtention des différents modèles.

1.1 Modèles et lois d'échelles

1.1.1 Définition des grandeurs physiques et du modèle de Maxwell

Les grandeurs physiques décrivant une onde laser sont sa longueur d'onde λ_L , (de façon équivalente sa fréquence centrale $\omega_L = \frac{2\pi c}{\lambda_L}$), sa durée T et son diamètre D .

Nous distinguons trois classes d'impulsions (voir page 67) :

- les impulsions classiques dont la durée est de l'ordre de la nanoseconde $T \sim 10^{-9}s$,
- les impulsions courtes dont la durée est de l'ordre de la picoseconde $T \sim 10^{-12}s$,
- les impulsions ultra-courtes dont la durée est de l'ordre de la dizaine de femtosecondes $T \sim 10^{-14}s$.

Le diamètre des impulsions considérées varie quant à lui de $D = 10^{-2}m$ à $D = 10^{-3}m$.

Pour modéliser de telles impulsions, on est amené à utiliser des équations simples qui permettent de décrire le comportement des champs électrique et magnétique. Ces équations sont déduites de manière rigoureuse à partir des équations de Maxwell par des développements asymptotiques [20]. L'évolution du champ électrique \mathbf{E} et du champ magnétique \mathbf{B} est décrite par les équations de Maxwell couplées à une réponse du milieu par la polarisation \mathbf{P}

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{B} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{P}, \\ \partial_t \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \text{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \text{div} \mathbf{P}, \\ \text{div} \mathbf{B} = 0. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Comme les deux dernières équations du système ci-dessus sont toujours satisfaites si elles le sont à $t = 0$, nous les omettrons par la suite.

Pour fermer le modèle (1.2), on doit alors exprimer le vecteur polarisation \mathbf{P} en fonction du champ électrique \mathbf{E} dans le matériau, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$.

1.1.2 Différents modèles phénoménologiques non linéaires

a. Généralités

Afin d'étudier la propagation d'une impulsion dans un milieu diélectrique quelconque, on doit développer, à chaque instant, la polarisation \mathbf{P} en fonction du champ électrique \mathbf{E} dans le matériau [45], [16], [10]. Ce développement se met sous la forme

$$\mathbf{P}(\mathbf{E})(t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{E})(t) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{E})(t) + \mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{E})(t) + \dots \quad (1.3)$$

Dans la plupart des applications (génération de seconde harmonique, effet Kerr, ...), les trois premiers ordres du développement suffisent. Ainsi, nous pouvons écrire la $j^{\text{ième}}$

composante du vecteur polarisation \mathbf{P} , pour faire apparaître les différentes susceptibilités du milieu, sous la forme

$$\mathbf{P}_j(\mathbf{E})(t) = \mathbf{P}_j^{(1)}(\mathbf{E})(t) + \mathbf{P}_j^{(2)}(\mathbf{E})(t) + \mathbf{P}_j^{(3)}(\mathbf{E})(t),$$

avec

$$\mathbf{P}_j^{(1)}(\mathbf{E})(t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_l \chi_{jl}^{(1)}(t - \tau) \mathbf{E}_l(\tau) d\tau := \sum_l \chi_{jl}^{(1)} * \mathbf{E}(t),$$

$$\mathbf{P}_j^{(2)}(\mathbf{E})(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{lm} \chi_{jlm}^{(2)}(t - \tau_1, t - \tau_2) \mathbf{E}_l(\tau_1) \mathbf{E}_m(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 := \chi^{(2)}(\mathbf{E}, \mathbf{E})(t),$$

$$\mathbf{P}_j^{(3)}(\mathbf{E})(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{lmp} \chi_{jlm}^{(3)}(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \mathbf{E}_l(\tau_1) \mathbf{E}_m(\tau_2) \mathbf{E}_p(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 := \chi^{(3)}(\mathbf{E}, \mathbf{E}, \mathbf{E})(t).$$

Notons que le symbole $*$ représente le produit de convolution usuel et l'opérateur $\chi^{(1)}$ la susceptibilité linéaire du milieu pour la polarisation du premier ordre. Les parties réelles et imaginaires de cet opérateur sont reliées à la propagation et à l'absorption de l'onde électromagnétique dans le milieu. Les polarisations d'ordre deux et trois font quant à elles apparaître les différentes susceptibilités non linéaires du milieu. L'opérateur bilinéaire $\chi^{(2)}$ représente la susceptibilité non linéaire d'ordre deux et est responsable de la génération d'harmonique deux et de la rectification optique. Enfin, l'opérateur trilinéaire $\chi^{(3)}$ représente la susceptibilité non linéaire d'ordre trois et est responsable de la génération d'harmonique trois, de l'effet Kerr et de l'autofocalisation.

Ainsi, l'équation (1.3) permet de décrire les différents types d'interactions avec le milieu :

- les interactions linéaires décrites à l'aide de l'expression $\mathbf{P}_{\mathbf{L}}(\mathbf{E})(t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{E})(t)$ qui font apparaître la relation de dispersion, les notions de vitesse de groupe et de dispersion,
- et les interactions non linéaires décrites à l'aide de l'expression $\mathbf{P}_{\mathbf{NL}}(\mathbf{E})(t) = \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{E})(t) + \mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{E})(t)$.

Pour cette partie non linéaire, on ne garde que le premier terme non nul du développement. Ainsi, grâce aux symétries présentes dans les matériaux, on peut simplifier cette composante en distinguant deux types de milieux :

- les milieux non centrosymétriques, pour lesquels l'opérateur $\chi^{(2)}$ est non nul. Ainsi dans le développement, la polarisation non linéaire $\mathbf{P}^{(2)}$ est le premier terme non nul et on considère généralement que toutes les interactions non linéaires du milieu sont portées par l'expression $\mathbf{P}_{\mathbf{NL}}(\mathbf{E})(t) = \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{E})(t)$,

- les milieux centrosymétriques, pour lesquels l'opérateur $\chi^{(2)}$ est nul. Ainsi, toutes les interactions non linéaires du milieu sont portées par l'expression $\mathbf{P}_{\mathbf{NL}}(\mathbf{E})(t) = \mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{E})(t)$.

Tout au long de cette thèse, on considère qu'on se place dans *un milieu centrosymétrique, isotrope et homogène*, mais la plupart de nos résultats s'appliquent aux cas non centrosymétriques. Par conséquent, pour notre étude, la polarisation \mathbf{P} s'écrit, à chaque instant, en fonction du champ électrique \mathbf{E} dans le matériau, sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{E})(t) &= \mathbf{P}_L(\mathbf{E})(t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{E})(t), \\ &= \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{E})(t) + \mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{E})(t).\end{aligned}\quad (1.4)$$

Il reste à définir précisément les opérateurs $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(3)}$. Une façon de faire est de modéliser ces termes à l'aide du modèle de l'oscillateur anharmonique. Lors de l'obtention de ce modèle, nous verrons également apparaître la relation liant les opérateurs $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(3)}$.

b. Le modèle de l'oscillateur anharmonique

La réponse du milieu \mathbf{P} au champ \mathbf{E} traduit le mouvement des électrons autour de leur position d'équilibre. Le déplacement, dans des milieux centrosymétriques, est modélisé [16] (1.4.36) à l'aide de l'équation suivante

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{r} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{r} + \Omega_a^2 \mathbf{r} - \beta(\mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{r}}) \mathbf{r} = \frac{-e \mathbf{E}}{m}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\mathbf{E})(t) = -N e \mathbf{r}(t), \quad (1.5)$$

avec $-e$ la charge de l'électron, m la masse, N le nombre de densité de l'atome, Ω_a représente la fréquence de résonance du milieu qui est loin de la fréquence centrale ω_L du laser. Le coefficient β est un terme de couplage et τ_a représente le temps d'amortissement.

Nous cherchons, pour des milieux centrosymétrique, une solution de l'équation (1.5) sous la forme

$$\mathbf{r}(t) = \mu \mathbf{r}^{(1)}(t) + \mu^3 \mathbf{r}^{(3)}(t) + O(\mu^4),$$

où μ est un petit paramètre caractérisant la taille de la perturbation. On note que pour ce type de milieux, seul les exposants impairs de μ sont pris en compte. En effet, dans ce cas, l'opérateur $\chi^{(2)}$ est nul. Comme cet opérateur est associé à la fonction $t \mapsto \mathbf{r}^{(2)}(t)$, on voit bien seulement apparaître les ordres impairs de la fonction $t \mapsto \mathbf{r}^{(i)}(t)$. Notons également que pour ce type de milieu, Ω_a et τ_a sont des scalaires.

On injecte la forme de la solution dans l'équation (1.5) et on écrit l'équation suivant les puissances de μ . Le système que l'on obtient se met alors sous la forme

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 \mathbf{r}^{(1)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{r}^{(1)} + \Omega_a^2 \mathbf{r}^{(1)} &= \frac{-e \mathbf{E}}{m}, \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{r}^{(3)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{r}^{(3)} + \Omega_a^2 \mathbf{r}^{(3)} - \beta(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{r}}^{(1)}) \mathbf{r}^{(1)} &= 0. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant la relation entre le déplacement \mathbf{r} des électrons et la polarisation \mathbf{P} qui

est donnée par l'expression (1.5), le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique s'écrit

$$(MLA) \begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{B} & = -\mu_0 \partial_t (\mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(3)}), \\ \partial_t \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{E} & = 0, \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}^{(1)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}^{(1)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}^{(1)} & = \gamma_a \mathbf{E}, \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}^{(3)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}^{(3)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}^{(3)} & = \beta |\mathbf{P}^{(1)}|^2 \mathbf{P}^{(1)}, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\text{avec } \gamma_a = \frac{Ne^2}{m}.$$

On peut alors expliciter avec ce modèle les opérateurs $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(3)}$.

i. Avec la troisième équation du système (1.6), on peut exprimer l'opérateur $\chi^{(1)}$. En effet, en prenant la transformée de Fourier en temps de cette équation, on obtient

$$\hat{\mathbf{P}}^{(1)}(\omega) = \frac{\gamma_a}{\Omega_a^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau_a}} \hat{\mathbf{E}}(\omega) = \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\omega),$$

et si on revient dans l'espace direct, on a $\mathbf{P}^{(1)}(t) = (\chi^{(1)} \star \mathbf{E})(t)$.

ii. De même, avec la dernière équation du système (1.6), on peut exprimer l'opérateur $\chi^{(3)}$. Pour cela, on prend la transformée de Fourier en temps (notée \mathcal{F}_t) de cette équation

$$\hat{\mathbf{P}}^{(3)}(\omega) = \frac{\beta}{\Omega_a^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau_a}} \mathcal{F}_t(|\mathbf{P}^{(1)}|^2 \mathbf{P}^{(1)})(\omega).$$

On note $\hat{\mathbf{P}}_j^{(3)}$ la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\hat{\mathbf{P}}^{(3)}$, ainsi l'équation précédente se réécrit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_j^{(3)}(\omega) &= \frac{\beta}{\gamma_a} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) (\mathcal{F}_t(|\mathbf{P}^{(1)}|^2) \star \hat{\mathbf{P}}_j^{(1)})(\omega) \\ &= \frac{\beta}{\gamma_a} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \int_{\omega_1} \mathcal{F}_t(|\mathbf{P}^{(1)}|^2)(\omega_1) \hat{\mathbf{P}}_j^{(1)}(\omega - \omega_1) d\omega_1, \\ &= \frac{\beta}{\gamma_a} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \int_{\omega_1} \left(\sum_m \widehat{\mathbf{P}_m^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{P}}_m^{(1)}} \right)(\omega_1) \hat{\mathbf{P}}_j^{(1)}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \\ &= \frac{\beta}{\gamma_a} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \int_{\omega_1} \left(\sum_m \hat{\mathbf{P}}_m^{(1)} \star \hat{\mathbf{P}}_m^{(1)} \right)(\omega_1) \hat{\mathbf{P}}_j^{(1)}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \\ &= \frac{\beta}{\gamma_a} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \int_{\omega_1} \int_{\omega_2} \sum_m \hat{\mathbf{P}}_m^{(1)}(\omega_2) \hat{\mathbf{P}}_m^{(1)}(\omega_1 - \omega_2) \hat{\mathbf{P}}_j^{(1)}(\omega - \omega_1) d\omega_2 d\omega_1. \end{aligned}$$

Enfin, pour exprimer complètement $\hat{\mathbf{P}}_j^{(3)}$ en fonction de $\hat{\mathbf{E}}$ dans l'expression ci-dessus, on utilise la relation précédente liant $\hat{\mathbf{P}}^{(1)}$ à $\hat{\mathbf{E}}$. L'équation précédente se met alors sous la forme

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_j^{(3)}(\omega) &= \frac{\beta}{\gamma_a} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \int_{\omega_1} \int_{\omega_2} \sum_m \hat{\chi}^{(1)}(\omega_2) \hat{\mathbf{E}}_m(\omega_2) \hat{\chi}^{(1)}(\omega_1 - \omega_2) \hat{\mathbf{E}}_m(\omega_1 - \omega_2) \hat{\chi}^{(1)}(\omega - \omega_1) \hat{\mathbf{E}}_j(\omega - \omega_1) d\omega_2 d\omega_1, \\ &= \frac{\beta}{\gamma_a} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \int_{\omega_1} \int_{\omega_2} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_2) \hat{\chi}^{(1)}(\omega_1 - \omega_2) \hat{\chi}^{(1)}(\omega - \omega_1) \sum_m \hat{\mathbf{E}}_m(\omega_2) \hat{\mathbf{E}}_m(\omega_1 - \omega_2) \hat{\mathbf{E}}_j(\omega - \omega_1) d\omega_2 d\omega_1.\end{aligned}$$

Ainsi, la transformée de Fourier de la $j^{\text{ième}}$ composante de la polarisation non linéaire d'ordre trois, s'écrit

$$\hat{\mathbf{P}}_j^{(3)}(\omega) = \int_{\omega_1} \int_{\omega_2} \hat{\chi}^{(3)}(\omega, \omega_2, \omega_1 - \omega_2, \omega - \omega_1) \sum_m \hat{\mathbf{E}}_m(\omega_2) \hat{\mathbf{E}}_m(\omega_1 - \omega_2) \hat{\mathbf{E}}_j(\omega - \omega_1) d\omega_2 d\omega_1. \quad (1.7)$$

De plus, nous pouvons exhiber la relation liant le tenseur de susceptibilité linéaire $\hat{\chi}^{(1)}$ avec le tenseur de susceptibilité non linéaire $\hat{\chi}^{(3)}$. Cette relation est donnée par

$$\hat{\chi}^{(3)}(\omega, \omega_2, \omega_1 - \omega_2, \omega - \omega_1) = \frac{\beta}{\gamma_a} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \hat{\chi}^{(1)}(\omega_2) \hat{\chi}^{(1)}(\omega_1 - \omega_2) \hat{\chi}^{(1)}(\omega - \omega_1). \quad (1.8)$$

iii. Notons enfin que le système (1.6) est semi-linéaire et qu'il n'est pas difficile de résoudre le problème de Cauchy local en temps. Ainsi, ce modèle est celui utilisé afin d'étudier le cadre théorique des nouveaux modèles de propagation que nous présentons dans les chapitres II et III. Pour une présentation synthétique des différents modèles de Maxwell-Lorentz non linéaires, nous présentons ci-dessous un système de Maxwell-Lorentz quasi-linéaire.

c. Le modèle de réponse non linéaire instantanée

Pour le modèle de réponse instantané, on suppose que l'opérateur $\chi^{(3)}$ est cette fois-ci local en temps. La réponse non linéaire de la polarisation au champ \mathbf{E} [20], [22] est alors donnée par la relation suivante

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{E}) = \gamma_{nl} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}, \quad \gamma_{nl} \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Les équations de Maxwell-Lorentz, pour une réponse non linéaire instantanée, s'écrivent

$$(MLI) \begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{B} & = -\mu_0 \partial_t \mathbf{P}_L - \mu_0 \gamma_{nl} \partial_t (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}), \\ \partial_t \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{E} & = 0, \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}_L + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}_L + \Omega_a^2 \mathbf{P}_L & = \gamma_a \mathbf{E}. \end{cases} \quad (1.10)$$

La dernière équation du système (1.10) permet d'obtenir l'expression exacte de l'opérateur $\chi^{(1)}$ qui est équivalente à celle obtenue avec le système (1.6). Notons également que ce

système est quasi-linéaire, voir [29], [18] pour son étude.

Dans le paragraphe qui suit, nous donnons l'ensemble des grandeurs caractéristiques du problème. On se place dans le cadre d'un milieu infiniment long, ainsi nous ne présentons aucune échelle spatiale caractéristique de la géométrie du milieu, seuls les paramètres physiques associés à la polarisation linéaire et à la polarisation non linéaire définissent des échelles de temps et de champ.

1.1.3 Adimensionnement des modèles de Maxwell-Lorentz et des données initiales

On introduit les grandeurs caractéristiques suivantes

- R est la longueur caractéristique des variations spatiales transverses. Cette grandeur est indépendante de la direction transverse considérée,
- T est la durée de l'impulsion,
- $L = cT$ est la longueur de l'impulsion.

A partir de ces grandeurs, on peut définir différents types de faisceaux [20]

- Cas des "boulets de lumière". Ce sont des impulsions suffisamment brèves et focalisées de telle sorte que le diamètre de l'impulsion est du même ordre de grandeur que leur longueur : $R \simeq L$,
- Cas des "cigares de lumière". Ce sont des impulsions dont la longueur du train d'onde est grande devant le diamètre du faisceau : $R \ll L$.

Notons enfin, que l'on choisit z comme direction de propagation laser. Voyons maintenant comment ces grandeurs interviennent sur les modèles de Maxwell-Lorentz instantané et anharmonique.

a. Adimensionnement des modèles

Pour rendre sans dimension les modèles de Maxwell-Lorentz instantané et anharmonique, nous utilisons les grandeurs caractéristiques définies ci-dessus. De même, nous rendons sans dimension les champs électromagnétiques et la polarisation en fonction du module du champ électrique initial \mathbf{E}_0 . Nous verrons plus en détail dans le paragraphe 1.1.3.b comment s'écrit ce champ initial en fonction de l'adimensionnement.

On commence par regarder l'adimensionnement des variables spatio-temporelles et des champs dans le cas des boulets de lumière. L'adimensionnement se présente alors sous la forme

$$\begin{aligned} x &= Lx'; & z &= Lz'; & t &= Tt'; \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \mathbf{E}'; & \mathbf{B} &= \mathbf{E}_0 \mathbf{B}'/c; \\ \mathbf{P}_L &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \mathbf{P}'_L; & \mathbf{P}^{(1)} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \mathbf{P}'^{(1)}; \\ \mathbf{P}_{NL} &= \mathbf{E}_0^3 \mathbf{P}'_{NL}; & \mathbf{P}^{(3)} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \mathbf{P}'^{(3)}. \end{aligned}$$

Le système de Maxwell-Lorentz instantané (1.10) adimensionné se réécrit

$$(MLI) \begin{cases} \partial_t' \mathbf{E}' - \mathbf{rot}' \mathbf{B}' & = -\partial_t' \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} - \frac{\gamma_{nl} |\mathbf{E}_0|^2}{\varepsilon_0} \partial_t' \mathbf{P}'_{\mathbf{NL}}, \\ \partial_t' \mathbf{B}' + \mathbf{rot}' \mathbf{E}' & = 0, \\ \partial_t'^2 \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} + \frac{T}{\tau_a} \partial_t' \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} + \Omega_a^2 T^2 \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} & = \gamma_a T^2 \mathbf{E}', \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}'_{\mathbf{NL}} = |\mathbf{E}'|^2 \mathbf{E}'$.

Le système de Maxwell-Lorentz anharmonique (1.6) adimensionné s'écrit quant à lui

$$(MLA) \begin{cases} \partial_t' \mathbf{E}' - \mathbf{rot}' \mathbf{B}' & = -\partial_t' \mathbf{P}'^{(1)} - \partial_t' \mathbf{P}'^{(3)}, \\ \partial_t' \mathbf{B}' + \mathbf{rot}' \mathbf{E}' & = 0, \\ \partial_t'^2 \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{T}{\tau_a} \partial_t' \mathbf{P}'^{(1)} + \Omega_a^2 T^2 \mathbf{P}'^{(1)} & = \gamma_a T^2 \mathbf{E}', \\ \partial_t'^2 \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{T}{\tau_a} \partial_t' \mathbf{P}'^{(3)} + \Omega_a^2 T^2 \mathbf{P}'^{(3)} & = \beta T^2 |\mathbf{E}_0|^2 \varepsilon_0^2 |\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}. \end{cases}$$

Ainsi, en introduisant les constantes de proportionnalité η_a , γ , τ et β telles que $\Omega_a = \eta_a \omega_L$, $\gamma_a = \gamma \omega_L^2$, $\tau_a = \frac{\tau}{\omega_L}$ et $\beta = \frac{\gamma_{nl}}{T^2 \varepsilon_0^3}$, les systèmes précédents se réécrivent

pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané

$$(MLI) \begin{cases} \partial_t' \mathbf{E}' - \mathbf{rot}' \mathbf{B}' & = -\partial_t' \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} - \frac{\gamma_{nl} |\mathbf{E}_0|^2}{\varepsilon_0} \partial_t' \mathbf{P}'_{\mathbf{NL}}, \\ \partial_t' \mathbf{B}' + \mathbf{rot}' \mathbf{E}' & = 0, \\ \partial_t'^2 \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} + \frac{T \omega_L}{\tau} \partial_t' \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} + \eta_a^2 T^2 \omega_L^2 \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} & = \gamma T^2 \omega_L^2 \mathbf{E}', \end{cases}$$

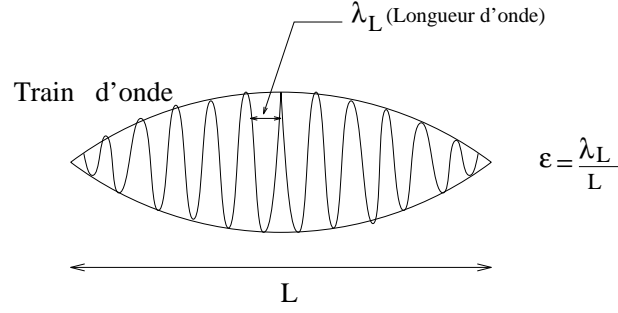
avec $\mathbf{P}'_{\mathbf{NL}} = |\mathbf{E}'|^2 \mathbf{E}'$,

et pour le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

$$(MLA) \begin{cases} \partial_t' \mathbf{E}' - \mathbf{rot}' \mathbf{B}' & = -\partial_t' \mathbf{P}'^{(1)} - \partial_t' \mathbf{P}'^{(3)}, \\ \partial_t' \mathbf{B}' + \mathbf{rot}' \mathbf{E}' & = 0, \\ \partial_t'^2 \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{T \omega_L}{\tau} \partial_t' \mathbf{P}'^{(1)} + \eta_a^2 T^2 \omega_L^2 \mathbf{P}'^{(1)} & = \gamma T^2 \omega_L^2 \mathbf{E}', \\ \partial_t'^2 \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{T \omega_L}{\tau} \partial_t' \mathbf{P}'^{(3)} + \eta_a^2 T^2 \omega_L^2 \mathbf{P}'^{(3)} & = \frac{\gamma_{nl} |\mathbf{E}_0|^2}{\varepsilon_0} |\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}. \end{cases}$$

On peut ainsi définir le petit paramètre ε tel que $\varepsilon = \frac{1}{\omega_L T}$. Il décrit de façon quantitative les approximations d'enveloppe $\partial_t \mathcal{E} \ll \omega_L \mathcal{E}$ et $\partial_z \mathcal{E} \ll k_L \mathcal{E}$. Le terme $\frac{1}{\varepsilon}$ représente le nombre d'arches qui forment l'impulsion.

Afin de prendre en compte les effets non linéaires dans les développements asymptotiques que nous faisons, nous devons relier l'intensité du champ électrique au paramètre ε . Pour


 FIG. 1.1 – Correspondance entre ε et l'impulsion initiale.

cela, on pose $\varepsilon^p = \frac{\gamma_{nl} |\mathbf{E}_0|^2}{\varepsilon_0}$ où p est un réel (éventuellement négatif!). Le régime asymptotique dans lequel on se place sera alors dicté par la valeur de p . Ainsi, on verra que $p = 0$ correspond à l'optique géométrique tandis que $p = 1/2$ correspond à l'optique diffractive.

Les modèles de Maxwell-Lorentz adimensionnés se mettent alors sous la forme suivante,

- pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané

$$(MLI) \begin{cases} \partial_{t'} \mathbf{E}' - \text{rot}' \mathbf{B}' & = -\partial_{t'} \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} - \varepsilon^p \partial_{t'} \mathbf{P}'_{\text{NL}}, \\ \partial_{t'} \mathbf{B}' + \text{rot}' \mathbf{E}' & = 0, \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'_{\mathbf{L}} & = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}', \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}'_{\text{NL}} = |\mathbf{E}'|^2 \mathbf{E}'$,

- et pour le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

$$(MLA) \begin{cases} \partial_{t'} \mathbf{E}' - \text{rot}' \mathbf{B}' & = -\partial_{t'} \mathbf{P}'^{(1)} - \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(3)}, \\ \partial_{t'} \mathbf{B}' + \text{rot}' \mathbf{E}' & = 0, \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'^{(1)} & = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}', \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'^{(3)} & = \varepsilon^p |\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}. \end{cases}$$

Considérons maintenant le cas des cigares de lumière. L'adimensionnement se met sous la forme

$$\begin{aligned} x &= Rx'; & z &= Lz'; & t &= Tt'; \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \mathbf{E}'; & \mathbf{B} &= \mathbf{E}_0 \mathbf{B}' / c; \\ \mathbf{P}_{\mathbf{L}} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \mathbf{P}'_{\mathbf{L}}; & \mathbf{P}^{(1)} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \mathbf{P}'^{(1)}; \\ \mathbf{P}_{\text{NL}} &= \mathbf{E}_0^3 \mathbf{P}'_{\text{NL}}; & \mathbf{P}^{(3)} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \mathbf{P}'^{(3)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on introduit le nouveau petit paramètre ε' tel que $\varepsilon' = R/L$. Dans la pratique, la valeur de ε' est proche de $\sqrt{\varepsilon}$ et il est usuel pour le développement de considérer $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}$.

Après avoir rendu sans dimension les modèles de Maxwell-Lorentz instantané et anharmonique, on présente rapidement les conditions initiales.

b. Les conditions initiales

Comme pour l'adimensionnement des modèles de Maxwell-Lorentz, on distingue le cas des boulets de lumière et des cigares. De manière générale, la donnée initiale liée à la propagation d'un faisceau laser de pulsation ω_L et de vecteur d'onde $\vec{k}_L = (0, 0, k_L)^T$ se met sous la forme

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}_L, \mathbf{P}_{NL})|_{t=0}(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z)e^{ik_L z} + c.c., \text{ avec } \mathbf{A}(x, y, z) = |\mathbf{E}_0|e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Sur cette donnée initiale, on applique les différents adimensionnements. Pour les cas des boulets de lumière, la donnée initiale rendue sans dimension se présente sous la forme

$$(\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{P}'_L, \mathbf{P}'_{NL})|_{t'=0}(x', y', z') = \mathbf{A}'(x', y', z')e^{i\tilde{k}_L \frac{z'}{\varepsilon}} + c.c.,$$

et pour les cigares de lumière, la donnée initiale rendue sans dimension se présente sous la forme

$$(\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{P}'_L, \mathbf{P}'_{NL})|_{t'=0}\left(\frac{x'}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{y'}{\sqrt{\varepsilon}}, z'\right) = \mathbf{A}'\left(\frac{x'}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{y'}{\sqrt{\varepsilon}}, z'\right)e^{i\tilde{k}_L \frac{z'}{\varepsilon}} + c.c.,$$

avec $\tilde{k}_L = \varepsilon L k_L$ et \mathbf{A}' de taille 1 puisqu'on l'a rendu sans dimension par rapport à $|\mathbf{E}_0|$. Dans le paragraphe suivant, on résume les modèles sans dimension présentés ci-dessus.

c. Les modèles sans dimension instantané et anharmonique et leurs données initiales

Nous montrons dans ce paragraphe que l'on peut alternativement considérer une donnée initiale de taille un avec un coefficient devant le terme non linéaire ou bien un coefficient de taille un devant le terme non linéaire avec une donnée initiale de taille ε^p avec p à déterminer. Rappelons alors l'écriture des modèles sans dimension et de leurs données initiales, pour le cas des boulets de lumière, présentés ci-dessus

- pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané

$$(MLI) \begin{cases} \partial_{t'} \mathbf{E}' - \mathbf{rot}' \mathbf{B}' & = -\partial_{t'} \mathbf{P}'_L - \varepsilon^{2p} \partial_{t'} \mathbf{P}'_{NL}, \\ \partial_{t'} \mathbf{B}' + \mathbf{rot}' \mathbf{E}' & = 0, \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'_L + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'_L + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'_L & = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}', \\ (\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{P}'_L, \mathbf{P}'_{NL})|_{t'=0}(x', y', z') & = \mathbf{A}'(x', y', z')e^{i\tilde{k}_L \frac{z'}{\varepsilon}} + c.c., \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}'_{\text{NL}} = |\mathbf{E}'|^2 \mathbf{E}'$,

- et pour le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

$$(MLA) \left\{ \begin{array}{l} \partial_{t'} \mathbf{E}' - \text{rot}' \mathbf{B}' = -\partial_{t'} \mathbf{P}'^{(1)} - \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(3)}, \\ \partial_{t'} \mathbf{B}' + \text{rot}' \mathbf{E}' = 0, \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'^{(1)} = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}', \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'^{(3)} = \varepsilon^{2p} |\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}, \\ (\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{P}'_{\text{L}}, \mathbf{P}'_{\text{NL}})|_{t'=0}(x', y', z') = \mathbf{A}'(x', y', z') e^{i\tilde{k}_L \frac{z'}{\varepsilon}} + c.c. \end{array} \right.$$

Les deux modèles précédents sont équivalents aux modèles suivants,

- pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané

$$(MLI) \left\{ \begin{array}{l} \partial_{t'} \mathbf{E}' - \text{rot}' \mathbf{B}' = -\partial_{t'} \mathbf{P}'_{\text{L}} - \partial_{t'} \mathbf{P}'_{\text{NL}}, \\ \partial_{t'} \mathbf{B}' + \text{rot}' \mathbf{E}' = 0, \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'_{\text{L}} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'_{\text{L}} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'_{\text{L}} = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}', \\ (\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{P}'_{\text{L}}, \mathbf{P}'_{\text{NL}})|_{t'=0}(x', y', z') = \varepsilon^p \mathbf{A}'(x', y', z') e^{i\tilde{k}_L \frac{z'}{\varepsilon}} + c.c. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

avec $\mathbf{P}'_{\text{NL}} = |\mathbf{E}'|^2 \mathbf{E}'$,

- et pour le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

$$(MLA) \left\{ \begin{array}{l} \partial_{t'} \mathbf{E}' - \text{rot}' \mathbf{B}' = -\partial_{t'} \mathbf{P}'^{(1)} - \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(3)}, \\ \partial_{t'} \mathbf{B}' + \text{rot}' \mathbf{E}' = 0, \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'^{(1)} = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}', \\ \partial_{t'}^2 \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'^{(3)} = |\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}, \\ (\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{P}'_{\text{L}}, \mathbf{P}'_{\text{NL}})|_{t'=0}(x', y', z') = \varepsilon^p \mathbf{A}'(x', y', z') e^{i\tilde{k}_L \frac{z'}{\varepsilon}} + c.c. \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Nous utiliserons plutôt par la suite la seconde formulation des modèles qui tient compte de la taille de la solution dans la condition initiale. Avant de décrire la méthode qui permet d'obtenir l'équation de Schrödinger standard, soit à partir du modèle de Maxwell-Lorentz instantané (1.11), soit à partir du modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique (1.12), nous simplifions ces modèles en les réécrivant sous la forme de systèmes d'ordre 2. Ces simplifications nous permettent d'obtenir plus facilement le modèle de Schrödinger standard.

d. Autre formulation des modèles instantané et anharmonique

Pour cela, on reprend le modèle de Maxwell suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{B} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{P}, \\ \partial_t \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{E} = 0. \end{cases}$$

En dérivant par rapport au temps la première équation (équation de Ampère) et en prenant le rotationnel de la seconde (équation de Faraday), on obtient l'équation des ondes sur \mathbf{E} donnée par

$$-\frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \mathbf{E} + \Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \partial_{tt}^2 \mathbf{P}. \quad (1.13)$$

A partir de cette équation des ondes, on décompose la polarisation \mathbf{P} en une partie linéaire et une partie non linéaire. Dans un premier temps, on considère que la partie non linéaire est décrite par le modèle de réponse non linéaire instantanée (1.9). Ainsi, on obtient le modèle de Maxwell-Lorentz instantané suivant

$$(MLI) \begin{cases} -\frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \mathbf{E} + \Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \partial_{tt}^2 \mathbf{P}_L + \mu_0 \partial_{tt}^2 \mathbf{P}_{NL}, \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}_L + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}_L + \Omega_a^2 \mathbf{P}_L = \gamma_a \mathbf{E}, \end{cases} \quad (1.14)$$

avec $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{E}) = \gamma_{nl} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}$, $\gamma_{nl} \in \mathbb{R}$.

On considère ensuite que la partie non linéaire de la polarisation est décrite par le modèle de réponse de l'oscillateur anharmonique (1.6). Comme précédemment, on peut alors écrire le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

$$(MLA) \begin{cases} -\frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \mathbf{E} + \Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \partial_{tt}^2 (\mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(3)}), \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}^{(1)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}^{(1)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}^{(1)} = \gamma_a \mathbf{E}, \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}^{(3)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}^{(3)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}^{(3)} = \beta |\mathbf{P}^{(1)}|^2 \mathbf{P}^{(1)}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour finir, sous forme sans dimension, ces modèles s'écrivent,

- pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané

$$(MLI) \begin{cases} -\partial_{t't'}^2 \mathbf{E}' + \Delta_{\perp} \mathbf{E}' + \partial_{z'}^2 \mathbf{E}' - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}') = \partial_{t't'}^2 \mathbf{P}'_L + \partial_{t't'}^2 \mathbf{P}'_{NL}, \\ \partial_{t't'}^2 \mathbf{P}'_L + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'_L + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'_L = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}', \end{cases} \quad (1.16)$$

avec $\mathbf{P}'_{NL} = |\mathbf{E}'|^2 \mathbf{E}'$,

- et pour le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

$$(MLA) \begin{cases} -\partial_{t't'}^2 \mathbf{E}' + \Delta_{\perp} \mathbf{E}' + \partial_{z'}^2 \mathbf{E}' - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}') = \partial_{t't'}^2 (\mathbf{P}'^{(1)} + \mathbf{P}'^{(3)}), \\ \partial_{t't'}^2 \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'^{(1)} = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}', \\ \partial_{t't'}^2 \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_{t'} \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}'^{(3)} = |\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}, \end{cases} \quad (1.17)$$

avec $\Delta_{\perp} = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$.

Pour simplifier les écritures, on omet par la suite tous les primes dans les modèles et les termes sources.

Les deux modèles de Maxwell-Lorentz que l'on vient d'obtenir, (1.16) et (1.17), décrivent parfaitement l'évolution couplée des champs électromagnétiques et de la réponse du milieu. Une première approche numérique est donc d'implémenter ces modèles afin de décrire la propagation d'un faisceau laser dans un milieu non linéaire. Seulement, la résolution de ces modèles nécessite une discrétisation fine en temps et en espace (typiquement inférieure respectivement à la période d'oscillation optique et à la longueur d'onde) qui induit des coûts importants à la fois en temps de calcul et en espace mémoire. Pour ces raisons, on préfère modéliser la propagation d'une onde laser à l'aide du modèle de Schrödinger non linéaire standard qui découle du système (1.16) ou du système (1.17). Ce modèle permet de prendre un maillage plus grossier et de ne plus avoir à tenir compte des échelles rapides liées aux oscillations.

Afin de compléter cette première partie sur les modèles de base et les données initiales, nous allons dans le paragraphe suivant décrire de manière succincte l'obtention du modèle de Schrödinger non linéaire Kerr à partir des modèles de Maxwell-Lorentz instantané et anharmonique. Nous montrons plus particulièrement que l'on obtient la même équation d'enveloppe et la même relation de dispersion, indifféremment à partir de l'un ou l'autre des modèles de Maxwell-Lorentz.

1.1.4 Obtention de l'équation de Schrödinger non linéaire standard

Nous rappelons ici la dérivation de l'équation de Schrödinger en considérant le champ propagé quasiment comme une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_L \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{k}_L = (0, 0, k_L)^T$ et quasiment monochromatique de fréquence centrale ω_L . La première condition amène à considérer une direction de propagation principale z . Physiquement, si Δk désigne la dispersion des vecteurs d'onde du faisceau et $\Delta\omega$ la largeur spectrale du faisceau, on a

$$\Delta k \ll k_L \quad \text{et} \quad \Delta\omega \ll \omega_L.$$

L'obtention de l'équation de Schrödinger non linéaire standard revient à écrire une approximation d'enveloppe sur le système (1.16) ou le système (1.17) en considérant des impulsions à spectre étroit. Enfin, dans cette partie, nous montrons que l'on peut obtenir l'équation de Schrödinger non linéaire en partant indifféremment du modèle de Maxwell-Lorentz instantané (MLI) ou du modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique (MLA).

a. Obtention du modèle de Schrödinger à partir du modèle de Maxwell-Lorentz instantané

Nous rappelons que le modèle de Maxwell-Lorentz instantané se met sous la forme

$$(MLI) \begin{cases} -\frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) = \mu_0\partial_{tt}^2\mathbf{P}_L + \mu_0\partial_{tt}^2\mathbf{P}_{NL}, \\ \partial_{tt}^2\mathbf{P}_L + \frac{1}{\tau_a}\partial_t\mathbf{P}_L + \Omega_a^2\mathbf{P}_L = \gamma_a\mathbf{E}, \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{E})(t) = \gamma_{nl}(|\mathbf{E}|^2\mathbf{E})(t)$, $\gamma_{nl} \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution du système (MLI) ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathcal{E}(x, y, z, t)e^{i(k_L z - \omega_L t)} + c.c., \\ \mathbf{P}_L(x, y, z, t) &= \mathcal{P}_L(x, y, z, t)e^{i(k_L z - \omega_L t)} + c.c. \end{aligned}$$

De plus, on fait l'approximation d'enveloppe suivante $\partial_{tt}^2\mathcal{E} \ll \omega_L^2\mathcal{E}$, $\partial_{zz}^2\mathcal{E} \ll k_L^2\mathcal{E}$, $\partial_{xx}^2\mathcal{E} \ll k_L\partial_x\mathcal{E}$ et $\partial_{yy}^2\mathcal{E} \ll k_L\partial_y\mathcal{E}$. On peut maintenant simplifier le système (MLI) en injectant la solution dans le système et en exprimant avec la seconde équation la relation entre \mathcal{P}_L et \mathcal{E} qui s'écrit

$$\mathcal{P}_L = \varepsilon_0\chi^{(1)}(\omega_L)\mathcal{E} \quad \text{avec} \quad \chi^{(1)}(\omega_L) = \frac{\gamma_a}{\Omega_a^2 - \omega_L^2 - \frac{i\omega_L}{\tau_a}}.$$

Avant d'écrire l'équation vérifiée par \mathcal{E} à l'aide de la première équation du système (MLI) et de la relation ci-dessus, nous devons préciser que le champ \mathcal{E} possède deux composantes transverses $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y)^T$ et une composante longitudinale \mathcal{E}_z . Nous traitons de manière découplée l'équation satisfaite par les composantes transverses et l'équation vérifiée par la composante longitudinale. Ainsi, nous montrons que le champ \mathcal{E} est polarisé suivant les directions transverses et donc que la composante longitudinale du champ est nulle au premier ordre.

On commence par considérer l'équation vérifiée par les composantes transverses, elle s'écrit

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\omega_L^2}{c^2} + \frac{2i\omega_L}{c^2}\partial_t - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2 + \Delta_{\perp} - k_L^2 - 2ik_L\partial_z + \partial_{zz}^2 \right] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} \\ &= \left[-\frac{\omega_L^2}{c^2}\chi^{(1)}(\omega_L) - \frac{2i\omega_L}{c^2}\chi^{(1)}(\omega_L)\partial_t - \frac{2i\omega_L}{c^2}\chi^{(1)'}(\omega_L) \right] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} + \frac{\omega_L^2\gamma_{nl}}{c^2} \begin{pmatrix} (|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2)\mathcal{E}_x \\ (|\mathcal{E}_y|^2 + |\mathcal{E}_x|^2)\mathcal{E}_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Grâce à l'approximation lentement variable faite ci-dessus, on peut négliger les termes $-\frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2$ et ∂_{zz}^2 . De plus, pour que $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y)^T$ soit solutions de l'équation précédente, elles doivent vérifier la condition suivante

$$\left[\frac{\omega_L^2}{c^2} - k_L^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2}\chi^{(1)} \right] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} = 0.$$

Cette relation donne **la relation de dispersion**

$$c^2k_L^2 = n^2(\omega_L)\omega_L^2, \quad (1.18)$$

où $n(\omega_L)$ est l'indice de réfraction du milieu lié à la fréquence centrale ω_L , définie par $n^2(\omega_L) = 1 + \chi^{(1)}(\omega_L)$.

Après toutes ces simplifications, on obtient l'équation de Schrödinger non linéaire

$$[-2ik_L(\partial_z + k'(\omega_L)\partial_t) + \Delta_\perp] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} + \frac{\omega_L^2 \gamma_{nl}}{c^2} \begin{pmatrix} (|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2)\mathcal{E}_x \\ (|\mathcal{E}_y|^2 + |\mathcal{E}_x|^2)\mathcal{E}_y \end{pmatrix} = 0,$$

avec $k'(\omega_L)$ la vitesse de groupe. On se place pour finir dans le référentiel de transport à la vitesse de groupe et en notant $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y)^T$, on obtient l'équation de Schrödinger satisfaite par les composantes transverses du champ qui se met sous la forme

$$-2ik_L \partial_z \mathcal{E} + \Delta_\perp \mathcal{E} + \frac{\omega_L^2 \gamma_{nl}}{c^2} (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0.$$

Voyons maintenant ce qui se passe pour la composante longitudinale du champ. Elle vérifie l'équation

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\omega_L^2}{c^2} + \frac{2i\omega_L}{c^2} \partial_t - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 + \Delta_\perp - k_L^2 - 2ik_L \partial_z + \partial_{zz}^2 + k_L^2 + 2ik_L \partial_z \right] \mathcal{E}_z \\ & = \left[-\frac{\omega_L^2}{c^2} \chi^{(1)}(\omega_L) - \frac{2i\omega_L}{c^2} \chi^{(1)}(\omega_L) \partial_t - \frac{2i\omega_L}{c^2} \chi^{(1)'}(\omega_L) \right] \mathcal{E}_z + \frac{\omega_L^2 \gamma_{nl}}{c^2} |\mathcal{E}_z|^2 \mathcal{E}_z = 0, \end{aligned}$$

ainsi pour que \mathcal{E}_z soit solution de cette équation, il faut que cette composante satisfasse la condition

$$\left[\frac{\omega_L^2}{c^2} - k_L^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} \chi^{(1)} + k_L^2 \right] \mathcal{E}_z = 0 \implies \left[\frac{\omega_L^2}{c^2} + \frac{\omega_L^2}{c^2} \chi^{(1)} \right] \mathcal{E}_z = 0,$$

et en utilisant la relation de dispersion précédente (1.18), le terme entre crochets donne

$$\omega_L^2 + \frac{\omega_L^2}{\varepsilon_0} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_L) = \omega_L^2 n^2(\omega_L) = k_L^2 \neq 0.$$

On en déduit ainsi que la composante longitudinale du champ \mathcal{E} est nulle. L'équation de Schrödinger non linéaire obtenue à partir du modèle de Maxwell-Lorentz instantané s'écrit alors

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L} \Delta_\perp \mathcal{E} + \frac{\omega_L^2 \gamma_{nl}}{2c^2 k_L} (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0. \quad (1.19)$$

Voyons maintenant comment on peut obtenir cette même équation de Schrödinger non linéaire standard (1.19) à partir du système de Maxwell-Lorentz anharmonique (MLA).

b. Obtention du modèle de Schrödinger à partir du modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

Nous rappelons que le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique se met sous la forme

$$(MLA) \begin{cases} -\frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) = \mu_0\partial_{tt}^2(\mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(3)}), \\ \partial_{tt}^2\mathbf{P}^{(1)} + \frac{1}{\tau_a}\partial_t\mathbf{P}^{(1)} + \Omega_a^2\mathbf{P}^{(1)} = \gamma_a\mathbf{E}, \\ \partial_{tt}^2\mathbf{P}^{(3)} + \frac{1}{\tau_a}\partial_t\mathbf{P}^{(3)} + \Omega_a^2\mathbf{P}^{(3)} = \beta|\mathbf{P}^{(1)}|^2\mathbf{P}^{(1)}. \end{cases}$$

On cherche une solution du système (MLI) ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathcal{E}(x, y, z, t)e^{i(k_L z - \omega_L t)} + c.c., \\ \mathbf{P}^{(1)}(x, y, z, t) &= \mathcal{P}^{(1)}(x, y, z, t)e^{i(k_L z - \omega_L t)} + c.c., \\ \mathbf{P}^{(3)}(x, y, z, t) &= \mathcal{P}^{(3)}(x, y, z, t)e^{i(k_L z - \omega_L t)} + c.c. \end{aligned}$$

De plus, on fait la même approximation que pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané, $\partial_{tt}^2\mathcal{E} \ll \omega_L^2\mathcal{E}$, $\partial_{zz}^2\mathcal{E} \ll k_L^2\mathcal{E}$, $\partial_{xx}^2\mathcal{E} \ll k_L\partial_x\mathcal{E}$ et $\partial_{yy}^2\mathcal{E} \ll k_L\partial_y\mathcal{E}$. On peut maintenant simplifier le système (MLA) en injectant la solution dans le système et en exprimant avec la seconde équation la relation entre $\mathcal{P}^{(1)}$ et \mathcal{E} qui s'écrit

$$\mathcal{P}^{(1)} = \varepsilon_0\chi^{(1)}(\omega_L)\mathcal{E} \quad \text{avec} \quad \chi^{(1)}(\omega_L) = \frac{\gamma_a}{\Omega_a^2 - \omega_L^2 - \frac{i\omega_L}{\tau_a}},$$

de même en utilisant la troisième équation du système (MLA), on peut exprimer $\mathcal{P}^{(3)}$ en fonction de $\mathcal{P}^{(1)}$ et donc de \mathcal{E} avec la relation précédente, ce qui donne

$$\mathcal{P}^{(3)} = \frac{\beta}{\gamma_a}\chi^{(1)}(\omega_L)|\mathcal{P}^{(1)}|^2\mathcal{P}^{(1)} = \varepsilon_0\frac{\beta}{\gamma_a}\chi^{(1)}(\omega_L)\chi^{(1)}(\omega_L)\chi^{(1)}(-\omega_L)\chi^{(1)}(\omega_L)|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}.$$

On peut encore simplifier l'expression de $\mathcal{P}^{(3)}$ en fonction de \mathcal{E} , en utilisant la relation (1.8) qui définit la susceptibilité non linéaire $\chi^{(3)}$ en fonction de la susceptibilité linéaire $\chi^{(1)}$, $\mathcal{P}^{(3)}$ se réécrit alors

$$\mathcal{P}^{(3)} = \varepsilon_0\chi^{(3)}(\omega_L, \omega_L, -\omega_L, \omega_L)|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}.$$

Nous pouvons maintenant écrire l'équation vérifiée par \mathcal{E} . Comme pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané, on peut montrer facilement que la composante longitudinale du champ est nulle, ainsi on ne regarde que les composantes transverses du champ. En injectant la solution \mathcal{E} dans la première équation du système (MLA) et en utilisant les relations sur $\mathcal{P}^{(1)}$ et $\mathcal{P}^{(3)}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\omega_L^2}{c^2} + \frac{2i\omega_L}{c^2}\partial_t - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2 + \Delta_{\perp} - k_L^2 - 2ik_L\partial_z + \partial_{zz}^2 \right] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} \\ &= \left[-\frac{\omega_L^2}{c^2}\chi^{(1)}(\omega_L) - \frac{2i\omega_L}{c^2}\chi^{(1)}(\omega_L)\partial_t - \frac{2i\omega_L}{c^2}\chi^{(1)'}(\omega_L) \right] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\omega_L^2}{c^2}\chi^{(3)}(\omega_L, \omega_L, -\omega_L, \omega_L) \begin{pmatrix} (|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2)\mathcal{E}_x \\ (|\mathcal{E}_y|^2 + |\mathcal{E}_x|^2)\mathcal{E}_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Grâce à l'approximation lentement variable faite ci-dessus, on peut négliger les termes $-\frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2$ et ∂_{zz}^2 . De plus, pour que le vecteur $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y)^T$ soit solution de l'équation précédente,

il doit vérifier la même condition que pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané, qui s'écrit

$$\left[\frac{\omega_L^2}{c^2} - k_L^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} \chi^{(1)} \right] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} = 0,$$

et ainsi la même **la relation de dispersion** que pour le modèle de Maxwell-Lorentz instantané, qui s'écrit

$$c^2 k_L^2 = n^2(\omega_L) \omega_L^2.$$

Après toutes ces simplifications, on obtient l'équation de Schrödinger non linéaire

$$[-2ik_L(\partial_z + k'(\omega_L)\partial_t) + \Delta_\perp] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} + \frac{\omega_L^2}{c^2} \chi^{(3)}(\omega_L, \omega_L, -\omega_L, \omega_L) \begin{pmatrix} (|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2)\mathcal{E}_x \\ (|\mathcal{E}_y|^2 + |\mathcal{E}_x|^2)\mathcal{E}_y \end{pmatrix} = 0,$$

avec $k'(\omega_L)$ la vitesse de groupe. On se place pour finir dans le référentiel de transport à la vitesse de groupe et en notant $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y)^T$, on obtient l'équation de Schrödinger satisfaite par les composantes transverses du champ qui se met sous la forme

$$-2ik_L \partial_z \mathcal{E} + \Delta_\perp \mathcal{E} + \frac{\omega_L^2}{c^2} \chi^{(3)}(\omega_L, \omega_L, -\omega_L, \omega_L) (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0.$$

En posant $\chi^{(3)}(\omega_L, \omega_L, -\omega_L, \omega_L) = \gamma_{nl}$, on constate qu'asymptotiquement les deux modèles instantané et anharmonique sont équivalents jusqu'à l'ordre trois et donc on peut utiliser l'un ou l'autre pour modéliser l'effet Kerr.

Remarque 1.1.1. *L'approche développée ici pour obtenir le modèle de Schrödinger standard est une approche formelle. Ce n'est pas la seule possible. On peut citer par exemple l'approche de type C. Sulem et P-L. Sulem [52] qui rendent sans dimension toutes les variables de la même manière avant d'écrire un développement asymptotique. Pour une dérivation plus rigoureuse, on renvoie aux travaux de J-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch [33], [37], [21] ou de P. Donnat [20] qui dérive le modèle à partir du problème aux limites pour le système de Maxwell-Lorentz.*

c. Résumé et perspectives.

On vient de voir qu'à partir du modèle de Maxwell-Lorentz instantané

$$(MLI) \begin{cases} -\frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \mathbf{E} + \Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \partial_{tt}^2 \mathbf{P}_L + \mu_0 \gamma_{nl} \partial_{tt}^2 (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}), \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}_L + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}_L + \Omega_a^2 \mathbf{P}_L = \gamma_a \mathbf{E}, \end{cases}$$

ou à partir du modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

$$(MLA) \begin{cases} -\frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \mathbf{E} + \Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \partial_{tt}^2 (\mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(3)}), \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}^{(1)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}^{(1)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}^{(1)} = \gamma_a \mathbf{E}, \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}^{(3)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}^{(3)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}^{(3)} = \beta |\mathbf{P}^{(1)}|^2 \mathbf{P}^{(1)}, \end{cases}$$

les coefficients β et γ_{nl} étant donné en fonction de la physique du problème, on peut obtenir à l'aide des relations suivantes, donnant en particulier le lien entre ces deux coefficients,

$$\gamma_{nl} = \frac{\beta}{\left(\Omega_a^2 - \omega_L^2 - \frac{i\omega_L}{\tau_a}\right)^4}, \quad \chi^{(1)}(\omega_L) = \frac{\gamma_a}{\Omega_a^2 - \omega_L^2 - \frac{i\omega_L}{\tau_a}}$$

et $\chi^{(3)}(\omega_L, \omega_L, -\omega_L, \omega_L) = \gamma_{nl}$,

le même modèle asymptotiquement de Schrödinger non linéaire, donné par

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L} \Delta_{\perp} \mathcal{E} + \frac{\omega_L^2 \gamma_{nl}}{2c^2 k_L} (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0.$$

Ainsi, on a établi le modèle de Schrödinger non linéaire dans le cadre de l'approximation lentement variable. Une justification rigoureuse de ces modèles asymptotiques, obtenus à partir du modèle de Maxwell-Lorentz instantané et du modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique, est donnée dans [20]. Nous allons maintenant essayer de voir ce qui se passe lorsque ce modèle se trouve en limite de validité, c'est-à-dire par exemple lorsque l'approximation d'enveloppe lentement variable $\partial_t \mathcal{E} \ll \omega_L \mathcal{E}$ n'est pas complètement satisfaite. On peut considérer des cas où $\partial_t \mathcal{E}$ reste petit devant $\omega_L \mathcal{E}$ mais moins qu'usuellement, si bien que l'on ne peut plus négliger $\partial_t \mathcal{E}$ devant $\omega_L \mathcal{E}$ dans le modèle de Schrödinger. Nous allons présenter par la suite différentes solutions à ce problème grâce à un modèle de Schrödinger non linéaire modifié. Avant de rentrer dans le détail de la dérivation de ce nouveau modèle, nous allons définir le cadre mathématique dans lequel nous allons nous placer.

1.2 Les outils mathématiques

Afin de pouvoir obtenir le modèle de Schrödinger non linéaire modifié, nous avons besoin de définir un cadre mathématique propre. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1.2.1 Formulation générale

Nous disposons de deux systèmes de Maxwell-Lorentz pour modéliser l'effet Kerr. Cependant, le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique possède l'avantage théorique d'être semi-linéaire alors que le modèle de Maxwell-Lorentz instantané est quasi-linéaire ce qui pose de nombreux problèmes théoriques notamment pour les études d'existence et de stabilité. Pour simplifier les écritures et ne pas alourdir ce paragraphe, nous choisissons donc d'établir le cadre mathématique à partir du modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique sans dimension dans le cas des boulets de lumière. Seules les échelles sont modifiées dans le cas des cigares de lumière.

Le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique sans dimension se présente sous la forme

$$(MLA) \begin{cases} \partial_t \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{B} & = -\partial_t (\mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(3)}), \\ \partial_t \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{E} & = 0, \\ \partial_t^2 \mathbf{P}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_t \mathbf{P}^{(1)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}^{(1)} & = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \mathbf{E}, \\ \partial_t^2 \mathbf{P}^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon \tau} \partial_t \mathbf{P}^{(3)} + \frac{\eta_a^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}^{(3)} & = |\mathbf{P}^{(1)}|^2 \mathbf{P}^{(1)}, \end{cases} \quad (1.20)$$

On pose $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(3)}$. On néglige le terme d'amortissement ainsi que les termes non linéaires faisant intervenir $\mathbf{P}^{(3)}$ et on pose $\mathbf{Q} = \varepsilon \partial_t \mathbf{P}$. De plus, on symétrise le système en posant $\mathbf{P}' = \eta_a / \sqrt{\gamma} \mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} / \sqrt{\gamma}$ et nous omettons les primes pour obtenir le modèle suivant

$$(MLA) \begin{cases} \partial_t \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{B} + \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \mathbf{Q} & = 0, \\ \partial_t \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{E} & = 0, \\ \partial_t \mathbf{P} - \frac{\eta_a}{\varepsilon} \mathbf{Q} & = 0, \\ \partial_t \mathbf{Q} - \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt{\gamma} \mathbf{E} - \eta_a \mathbf{P}) - \gamma^{3/2} |\mathbf{P}|^2 \mathbf{P} & = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons alors voir ce système sous la forme d'un système hyperbolique, symétrique semi-linéaire normalisé, donné par

$$\begin{cases} L^\varepsilon(\partial) \mathbf{u} = f(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}|_{t=0}(X) = \mathbf{u}^0(X), \end{cases} \quad (1.21)$$

où \mathbf{u} prend ses valeurs dans \mathbb{R}^n , $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et

$$\mathbf{u} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{Q})^T \in \mathbb{R}^{12},$$

D'une manière générale, nous étudions des non linéarités du type de celles définies dans l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.2.1. *Il existe une application q -linéaire symétrique F telle que*

$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n, \forall \delta > 0, f(\delta \mathbf{u}) = \delta^q F(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u})$.
 Pour le système de Maxwell-Lorentz la non linéarité f est d'ordre trois et se lit

$$f(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (0, 0, 0, \gamma^{\frac{3}{2}} |\mathbf{P}|^2 \mathbf{P})^T. \quad (1.22)$$

Remarque 1.2.1. Le fait que l'application F associée à f ne soit pas trilinéaire comme dans l'hypothèse 1.2.1 (elle est semi linéaire en une de ses variables) n'est pas important. En effet, en considérant $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \in \mathbb{C}^{2d}$ nous nous ramenons à ce cas.

Pour finir, notons que l'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ est un opérateur hyperbolique symétrique satisfaisant l'hypothèse suivante

Hypothèse 1.2.2. *Le système (1.21) est symétrique hyperbolique. Plus précisément l'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ s'écrit*

$$L^\varepsilon(\partial) = \partial_t + A(\partial_X) + \frac{L_0}{\varepsilon}, \text{ où } A(\partial_X) = \sum_{j=1, \dots, d} A_j \partial_{x_j},$$

les matrices A_j étant réelles symétriques et la matrice L_0 est anti-symétrique réelle.

Plus précisément, pour le système de Maxwell-Lorentz anharmonique, l'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ s'écrit $L^\varepsilon(\partial) = \partial_t + A(\partial_X) + \frac{L_0}{\varepsilon}$ avec

$$A(\partial_X) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{rot} & 0 & 0 \\ \mathbf{rot} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\gamma} Id \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_a Id \\ -\sqrt{\gamma} Id & 0 & \eta_a Id & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons précisé dans la première partie, on peut distinguer deux types d'interactions avec le milieu, les interactions linéaires et non linéaires. Dans le paragraphe qui suit, nous allons écrire formellement les modèles asymptotiques que l'on obtient habituellement pour ces différentes interactions.

1.2.2 Les modèles asymptotiques classiques

a. Interactions linéaires et solution onde plane

Pour décrire les interactions linéaires à partir du système général

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + A(\partial_X) \mathbf{u} + \frac{L_0}{\varepsilon} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0}(X) = \mathbf{u}^0(X), \end{cases} \quad (1.23)$$

on est amené à chercher une solution approchée de ce système sous la forme d'une onde plane s'écrivant

$$\mathbf{u}(t, X) = \mathcal{U}(t, X) e^{i \frac{\tilde{k}_L z - \tilde{\omega}_L t}{\varepsilon}} + c.c.$$

Par la suite, pour simplifier les notations, on omet les tildes dans les expressions. Pour que cette onde plane soit solution du système linéaire (1.23), il faut qu'elle vérifie les deux points suivants.

- Premier point : elle doit tout d'abord satisfaire **la relation de dispersion** qui s'écrit

$$\det(-i\omega_L Id + iA(K) + L_0) = 0.$$

L'ensemble des points satisfaisant cette relation de dispersion sont portés par la variété caractéristique \mathcal{C}_L définie par

Définition 1.2.1. i. On appelle variété caractéristique \mathcal{C}_L associée à l'opérateur $\mathcal{L}(\partial_t, \partial_X) = \partial_t + A(\partial_X) + L_0$ l'ensemble

$$\mathcal{C}_L = \{(\omega, K) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \det(-i\omega Id + iA(K) + L_0) = 0\}.$$

ii. On note $\Pi(\omega, K)$ le projecteur orthogonal sur $\ker(\mathcal{L}(-i\omega, iK))$.

Pour le système de Maxwell-Lorentz anharmonique, la variété caractéristique \mathcal{C}_L associée au symbole $\mathcal{L}(\partial_t, \partial_X)$ est donnée par l'équation algébrique suivante

$$\omega^2(\omega^2 - 1 - \gamma)[(\omega^2 - \eta_a^2)(\omega^2 - |K|^2) - \gamma\omega^2] = 0,$$

de plus, comme cette variété caractéristique \mathcal{C}_L est invariante par rotation, on choisit de prendre $\vec{K} = (0, 0, k_L)^T$. On peut alors représenter, par la courbe ci-dessous, en dimension 1 d'espace \mathcal{C}_L ,

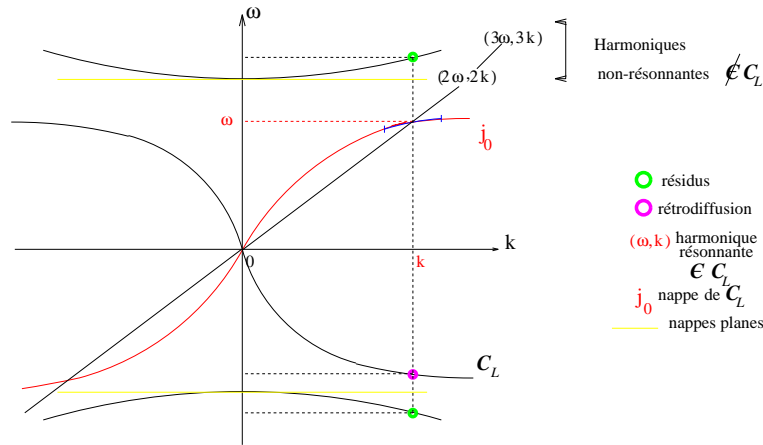


FIG. 1.2 – Variété caractéristique pour le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique pour le cas où $\eta_a = 1$.

Grâce à l'hyperbolicité du système linéaire (1.23), on sait que l'équation algébrique qui définit \mathcal{C}_L i.e $\det(-i\omega Id + iA(K) + L_0) = 0$, n'a que des racines réelles. On peut ainsi paramétrer \mathcal{C}_L par $K \in \mathbb{R}^d$ au moyen d'un nombre fini de fonctions $\omega_i(K) = \lambda_i(K, 0)$. On appelle points singuliers de la variété algébrique \mathcal{C}_L , les points où la multiplicité des racines du polynôme en ω change, c'est donc l'ensemble des points où les graphes des

différentes fonctions ω_i se coupent. Pour le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique linéaire, la variété caractéristique qui lui est associée possède trois points singuliers, tous d'abscisse $k = 0$ et d'ordonnée $0; \pm\sqrt{1+\gamma}$. Ces points sont isolés et tous localisés sur la droite $\mathbb{R}_\omega \times \{0\}_{\mathbb{R}^d}$. Cette variété comporte également 7 nappes dont seulement trois s'annulent en 0 qui s'écrivent

$$\begin{aligned}\omega_1(k) &= 0, \\ \omega_2^\pm(k) &:= \pm\omega_2(k) := \pm\frac{1}{2} \left(\sqrt{\eta_a^2 + \gamma + k^2 + 2k\eta_a} - \sqrt{\eta_a^2 + \gamma + k^2 - 2k\eta_a} \right).\end{aligned}$$

Les quatre autres nappes sont de la forme

$$\begin{aligned}\omega_3^\pm(k) &:= \pm\omega_3(k) := \pm\sqrt{1+\gamma}, \\ \omega_4^\pm(k) &:= \pm\omega_4(k) := \pm\frac{1}{2} \left(\sqrt{\eta_a^2 + \gamma + k^2 + 2k\eta_a} + \sqrt{\eta_a^2 + \gamma + k^2 - 2k\eta_a} \right).\end{aligned}$$

De plus, si $(-\omega_L, k_L)$ est sur une nappe de \mathcal{C}_L *i.e.* si $(\omega_L^2 - \eta_a^2)(\omega_L^2 - k_L^2) - \gamma\omega_L^2 = 0$, alors la vitesse de groupe est donnée par l'expression

$$\omega'(k_L) = \frac{k_L}{\omega_L} \frac{\omega_L^2 - \eta_a^2}{(\omega_L^2 - k_L^2) + (\omega_L^2 - \eta_a^2) - \gamma}, \quad (1.24)$$

tandis que le facteur de dispersion $\omega''(k_L)$ se lit

$$\omega''(k_L) = \omega'(k_L) \frac{\omega_L - \omega'(k_L)}{\omega_L k_L} - 4 \frac{\omega_L \omega'(k_L)^2}{k_L} \frac{\omega_L \omega'(k_L) - k_L}{\omega_L^2 - \eta_a^2}. \quad (1.25)$$

- Deuxième point : pour que l'onde plane soit solution du système linéaire (1.23), elle doit également vérifier la condition de polarisation suivante

$$\Pi(\omega_L, K) \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

Cette condition est équivalente aux conditions suivantes sur le profil $\mathcal{U} = (\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{Q})^T$

$$\mathcal{E} \perp \vec{K}, \quad \omega_L \mathcal{B} = -\vec{K} \wedge \mathcal{E}, \quad \mathcal{P} = \frac{\sqrt{\gamma}\eta_a}{\eta_a^2 - \omega_L^2} \mathcal{E}, \quad \mathcal{Q} = \frac{-i\omega_L}{\eta_a} \mathcal{P}.$$

Comme on a choisi de prendre le vecteur \vec{K} uniquement non nul pour la direction z , la première relation sur \mathcal{E} , nous permet de dire que ce vecteur est orienté suivant les directions transverses et que sa composante longitudinale est nulle. De plus, les relations précédentes, nous permettent de déduire toutes les composantes de \mathcal{U} de la seule connaissance de \mathcal{E} .

On vient ainsi de voir que dans le cas linéaire de propagation d'une onde plane, pour que cette dernière soit solution du système formel (1.23), son enveloppe doit satisfaire la relation de dispersion et la condition de polarisation. Dans notre étude, nous sommes plus particulièrement intéressés par la prise en compte de phénomènes faiblement non linéaires. Pour cela, on ne peut plus considérer une onde plane mais un paquet d'onde. Nous allons étudier l'évolution de ce paquet d'onde sur des temps $O(1)$ et sur des temps longs. Cela donne

lieu à l'établissement de deux régimes distincts : l'optique géométrique et l'optique diffractive.

b. Optique géométrique, optique diffractive

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler comment les effets non linéaires se couplent aux effets de propagation. Pour cela, nous allons tout d'abord mettre en évidence les deux régimes de propagation linéaires qui nous concernent (l'optique géométrique et l'optique diffractive), puis le couplage avec le non linéaire.

b.1 Les régimes linéaires.

- L'optique géométrique.

Le premier régime linéaire qui nous intéresse permet d'observer la propagation d'onde sur des temps $O(1)$. Pour cela, on considère une condition initiale de la forme

$$\mathbf{u}|_{t=0}(X) = \mathbf{u}^0(X) e^{i \frac{k_L}{\varepsilon} z} + c.c.$$

Pour obtenir le modèle linéaire valide sur cette échelle de temps, on est amené à chercher une solution approchée du système linéaire (1.23) de la forme

$$\mathbf{u}(t, X) = \mathcal{U}^\varepsilon(t, X, \theta) \Big|_{\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}}$$

où $\mathcal{U}^\varepsilon(t, X, \theta)$ est périodique en θ . En injectant ce profil \mathcal{U}^ε dans le système (1.23), on obtient l'équation singulière linéaire suivante

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + A(\partial_X) \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A_3 \partial_\theta + L_0) \mathcal{U}^\varepsilon = 0. \quad (1.26)$$

A l'aide de cette équation singulière, on montre en particulier que si \mathcal{U}^ε est solution de cette équation alors \mathbf{u} définie par $\mathbf{u}(t, X) = \mathcal{U}^\varepsilon(t, X, \theta) \Big|_{\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}}$ est solution du système linéaire (1.23), voir [22], [33].

Pour obtenir le modèle asymptotique linéaire dérivant du système (1.23), on écrit le profil \mathcal{U}^ε sous la forme

$$\mathcal{U}^\varepsilon(t, X, \theta) = \mathcal{U}(t, X) e^{i\theta} + c.c.$$

Le but de l'optique géométrique est de trouver l'équation qui permet de déterminer le profil \mathcal{U} . A l'aide d'un développement asymptotique de type WKB (Wentzel Kramers Brillouin) et en utilisant les approximations d'enveloppe, [20], [33], on aboutit à une équation de transport linéaire de la forme

$$\partial_t \mathcal{U} + \omega'(k_L) \partial_z \mathcal{U} = 0, \quad (1.27)$$

avec $\omega'(k_L)$ la vitesse de groupe définie précédemment par (1.24). Notons que le profil \mathcal{U} satisfait également la relation de dispersion et la condition de polarisation définies ci-dessus. Cette approximation est bonne pour des temps en $O(1)$ et mauvaise pour des temps longs. Introduisons donc le cadre de l'optique diffractive.

- L'optique diffractive.

Dans le cadre de l'optique diffractive, on veut observer des solutions en temps longs. Pour ce faire, on considère des conditions initiales définies comme dans le cadre de l'optique géométrique ci-dessus. Comme pour l'optique géométrique, on cherche une solution approchée du système linéaire (1.23). Cette solution approchée dépendant des mêmes variables que celles de l'optique géométrique, on y rajoute simplement l'échelle lente $O(\varepsilon)$ pour les phénomènes diffractifs. On se place également dans le référentiel de transport à la vitesse de groupe. On cherche alors cette solution sous la forme

$$\mathbf{u}(t, X) = \varepsilon^p \mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z - \omega'(k_L)t, \theta) \Big|_{\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}}$$

où $\mathcal{U}^\varepsilon(\tau, x, y, z - \omega'(k_L)t, \theta)$ est périodique en θ . Pour obtenir le modèle de Schrödinger linéaire, on réécrit le profil \mathcal{U}^ε sous la forme

$$\mathcal{U}^\varepsilon(\tau, x, y, z - \omega'(k_L)t, \theta) = \mathcal{U}(\tau, x, y, z - \omega'(k_L)t) e^{i\theta} + c.c.$$

Le but de l'optique diffractive est de trouver l'équation qui permet de déterminer le profil \mathcal{U} . A l'aide d'un développement de type WKB (Wentzel Kramers Brillouin), [37], [42], on aboutit à l'équation de Schrödinger linéaire suivante

$$i\partial_\tau \mathcal{U} + \frac{\omega'(k_L)}{2k_L} \Delta_\perp \mathcal{U} + \frac{\omega''(k_L)}{2} \partial_z^2 \mathcal{U} = 0. \quad (1.28)$$

avec $\omega''(k_L)$ la dispersion des vitesses de groupe définie précédemment par (1.25).

Voyons maintenant l'influence des effets non linéaires sur ces régimes.

b.2 Influence des effets non linéaires.

Dans ce paragraphe, nous allons analyser quelle est l'influence des interactions non linéaires sur les régimes décrits précédemment. Représentons schématiquement un système non linéaire, avec une non linéarité de degré q , sous la forme $y' = y^q$.

La question que l'on se pose est la suivante : " Sur quelle échelle de temps une solution de taille ε^p subira-t-elle les effets non linéaires ? ". Notons alors T cette échelle de temps, le système $y' = y^q$ donne par conséquent $\frac{\varepsilon^p}{T} = \varepsilon^{qp}$, autrement dit $T = \varepsilon^{(1-q)p}$.

b.3 Optique géométrique et diffractive non linéaire.

Pour que les effets non linéaires se manifestent dans le régime de l'optique géométrique, il faut que l'échelle de temps T défini précédemment soit de taille 1 et donc que $p = 0$. De

même, pour que les effets non linéaires se manifestent dans le régime de l'optique diffractive, il faut que l'échelle de temps T soit telle que $T = 1/\varepsilon$ et donc que $p = 1/q - 1$. Par exemple pour une non linéarité cubique $q = 3$, on a $p = 1/2$.

Nous pouvons maintenant écrire les deux modèles asymptotiques non linéaires que l'on obtient pour les deux régimes.

- L'optique géométrique non linéaire.

On considère alors une condition initiale, de taille 1, de la forme

$$\mathbf{u}|_{t=0}(X) = \mathbf{u}^0(X) e^{i \frac{k_L}{\varepsilon} z} + c.c.$$

Pour obtenir le modèle non linéaire valide sur cette échelle de temps, on est amené à chercher une solution approchée du système non linéaire (1.21) de la forme

$$\mathbf{u}(t, X) = \mathcal{U}^\varepsilon(t, X, \theta) \Big|_{\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}}$$

où $\mathcal{U}^\varepsilon(t, X, \theta)$ est périodique en θ . En injectant ce profil \mathcal{U}^ε dans le système (1.21), on obtient l'équation singulière non linéaire suivante

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + A(\partial_X) \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A_3 \partial_\theta + L_0) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon). \quad (1.29)$$

Pour obtenir le modèle asymptotique non linéaire dérivant du système (1.21), on écrit le profil \mathcal{U}^ε sous la forme

$$\mathcal{U}^\varepsilon(t, X, \theta) = \mathcal{U}(t, X) e^{i\theta} + c.c.$$

Le but de l'optique géométrique est de trouver l'équation qui permet de déterminer le profil \mathcal{U} . A l'aide d'un développement de type WKB (Wentzel Kramers Brillouin), [20], [33], on aboutit à une équation de transport non linéaire de la forme

$$\partial_t \mathcal{U} + \omega'(k_L) \partial_z \mathcal{U} + \frac{2i}{\omega_L} |\mathcal{U}|^2 \mathcal{U} = 0, \quad (1.30)$$

Cette approximation est bonne pour des temps en $O(1)$ et n'est pas correcte pour des temps longs. Introduisons donc le cadre de l'optique diffractive.

- L'optique diffractive.

Dans le cadre de l'optique diffractive, on veut observer des solutions en temps longs. Pour se faire, on considère des conditions initiales de la forme

$$\mathbf{u}|_{t=0}(X) = \varepsilon^{1/2} \mathbf{u}^0(X) e^{i \frac{k_L}{\varepsilon} z} + c.c.$$

On cherche une solution approchée du système non linéaire (1.21) de la forme

$$\mathbf{u}(t, X) = \varepsilon^{1/2} \mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z - \omega'(k_L)t, \theta) \Big|_{\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}},$$

où $\mathcal{U}^\varepsilon(\tau, x, y, z - \omega'(k_L)t, \theta)$ est périodique en θ . Pour obtenir le modèle de Schrödinger non linéaire, on réécrit le profil \mathcal{U}^ε sous la forme

$$\mathcal{U}^\varepsilon(\tau, x, y, z - \omega'(k_L)t, \theta) = \mathcal{U}(\tau, x, y, z - \omega'(k_L)t) e^{i\theta} + c.c.$$

Le but de l'optique diffractive est de trouver l'équation qui permet de déterminer le profil \mathcal{U} . A l'aide d'un développement de type WKB (Wentzel Kramers Brillouin), [37], [42], on aboutit à l'équation de Schrödinger non linéaire suivante

$$-i\partial_\tau \mathcal{U} + \frac{\omega'(k_L)}{2k_L} \Delta_\perp \mathcal{U} + \frac{\omega''(k_L)}{2} \partial_z^2 \mathcal{U} + \frac{Cste}{\omega_L} |\mathcal{U}|^2 \mathcal{U} = 0. \quad (1.31)$$

Remarque 1.2.2. *Dans la pratique, on ne choisit pas a priori de prendre $p = 0$ ou $p = 1/2$. Le choix du régime non linéaire dans lequel il faut se placer pour voir apparaître les effets non linéaires en même temps que les effets de propagation est lié à la valeur de p au travers de l'expression $\varepsilon^p = \frac{\gamma_{nl} |\mathbf{E}_0|^2}{\varepsilon_0}$. Ainsi la valeur de p (et donc de l'échelle de temps sur laquelle le développement sera fait, en d'autres termes le choix du régime non linéaire), dépend du coefficient d'interaction non linéaire γ_{nl} et de l'intensité initiale du champ électrique $|\mathbf{E}_0|^2$.*

Les deux régimes présentés ici, optique géométrique avec (1.30) et optique diffractive avec (1.31) sont actuellement présents dans le code de calcul MIRÓ utilisé au CEA/CESTA pour modéliser la propagation d'une impulsion laser. Ce qui nous intéresse dans cette thèse est d'apporter des solutions lorsque ces modèles sont en limite de validité. Par exemple, lorsque l'impulsion possède une très forte amplitude ou encore pour des régimes faiblement non linéaires quand on étale le spectre de l'impulsion en violant l'approximation $\Delta\omega \ll \omega_L$. Nous nous intéressons ici plus précisément au deuxième problème qui concerne l'étalement du spectre de l'impulsion. Avant de donner les solutions que nous proposons, nous allons voir dans le cas de la propagation d'un faisceau à travers un réseau de diffraction comment le fait d'étaler le spectre de l'impulsion engendre des erreurs si on utilise le modèle de Schrödinger non linéaire standard (1.31).

1.3 Les réseaux de diffraction dans une optique Pétawatt

Dans le cadre de la propagation d'un faisceau dans une chaîne de puissance de type "Pétawatt", on considère des durées d'impulsion initiale de l'ordre de la picoseconde ($T = 10^{-12}s$). Malheureusement, ce type d'impulsions courtes ne peut pas être facilement amplifié en énergie. En effet les amplificateurs de puissance actuels (par exemple le verre dopé au néodyme) ne peuvent amplifier en énergie que des impulsions dont la durée optimale est aux alentours de quelques nanosecondes ($T = 10^{-9}s$). Pour pouvoir amplifier ces impulsions courtes, il est donc essentiel de les allonger temporellement. Pour cela, on utilise le fait que ces impulsions courtes possèdent une largeur spectrale grande. On les allonge alors temporellement en utilisant des systèmes dispersifs qui permettent d'ajouter à l'impulsion un terme de phase dépendant de la fréquence. Les systèmes dispersifs mis au point pour allonger et comprimer les impulsions courtes utilisent des paires de réseaux droits en réflexion. Un réseau est un composant qui disperse angulairement les différentes longueurs d'onde. Ainsi, dans la chaîne de puissance "Pétawatt", on trouve en début de chaîne une première paire de réseaux droits parallèles pour allonger l'impulsion et en fin de chaîne une seconde paire de réseaux identique à la première pour recomprimer l'impulsion.

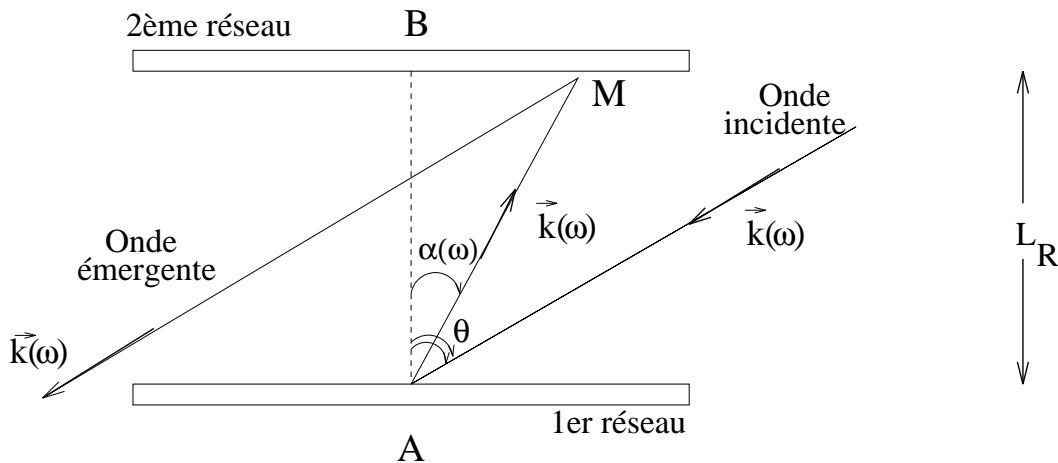


FIG. 1.3 – Définition du déphasage par une paire de réseaux parallèles.

Idéalement, la paire de réseaux applique au faisceau un déphasage dépendant quadratiquement de la fréquence ω et proportionnel à la distance entre les réseaux que l'on note L_R , déphasage que l'on peut écrire (annexe II : Les réseaux)

$$\varphi(\omega) = T_1\omega + \frac{1}{2}\omega^2 T_2, \quad (1.32)$$

où ω désigne l'écart à la fréquence centrale ω_L et les coefficients T_i sont donnés par

$$T_1 = \frac{L_R}{c} \left[\frac{1 + \sin(\theta) \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right], \quad (1.33)$$

$$T_2 = -L_R \frac{N^2 \lambda_L^3}{2\pi c} \left[\frac{1}{\cos^3(\alpha)} \right]. \quad (1.34)$$

Pour un réseau en réflexion, $\lambda_L = \frac{2\pi c}{\omega_L}$ est la longueur d'onde du laser dans le vide, N est le nombre de traits du réseau par unité de longueur, θ est l'angle d'incidence du faisceau et α est l'angle de diffraction sur le réseau pour l'ordre considéré. Le terme T_1 traduit uniquement un décalage temporel (délai de propagation), le terme T_2 (déphasage quadratique) est à l'origine de l'allongement ou de la compression.

Malheureusement, dans la pratique, le déphasage apporté par la paire de réseaux contient aussi des termes en ω^3 et d'ordre supérieur. En fait, dans le cas où les systèmes allongeur et compresseur sont exactement symétriques, les termes d'ordre trois se compensent. Ce sont des défauts d'alignement (angles d'attaque différents, ...) qui empêchent cette compensation et qui font apparaître ces termes (dits "d'aberrations temporelles"). Ils sont nocifs car ils empêchent une recompression parfaite du faisceau en fin de chaîne. En particulier ils font apparaître une pré-impulsion ou une post-impulsion qui peut être gênante dans les expériences d'interaction entre le laser et la matière. Ainsi, on est obligé de considérer un déphasage de la forme

$$\varphi(\omega) = T_1\omega + \frac{1}{2}\omega^2 T_2 + \frac{1}{3!}\omega^3 T_3 + \dots \quad (1.35)$$

avec

$$T_3 = 3L_R \frac{N^2 \lambda_L^4}{4\pi^2 c^3} \left[\frac{1 + \sin(\theta) \sin(\alpha)}{\cos^5(\alpha)} \right].$$

La nécessité de conserver le terme T_3 dans le déphasage induit par la paire de réseaux permet de retrouver en fin de chaîne une impulsion aussi courte qu'en entrée.

Pour voir apparaître ces post-impulsions, nous avons construit, à l'aide du code de calcul MIRÓ une chaîne composée d'une paire de réseaux. Cette chaîne simule la recompression d'une impulsion en fin d'une chaîne de type "Pétawatt". Le faisceau initial est obtenu en allongeant une impulsion ($\mathcal{E}_{entrée} = \mathcal{E}_0 e^{-t^2/4a}$) de durée $500 fs$ dans une fibre optique de longueur $50 cm$, d'indice 1.5, et de dispersion des vitesses de groupe $\sigma_L = -8.1092710^{-26} s^2.m^{-1}$. La longueur d'onde fondamentale de l'impulsion est de $1.053 \mu m$. Les réseaux comportant $802.7 traits.m^{-1}$ sont attaqués avec un angle incident de 25° . La distance L_R entre les deux réseaux (supposé sous vide) est de $45.3 cm$.

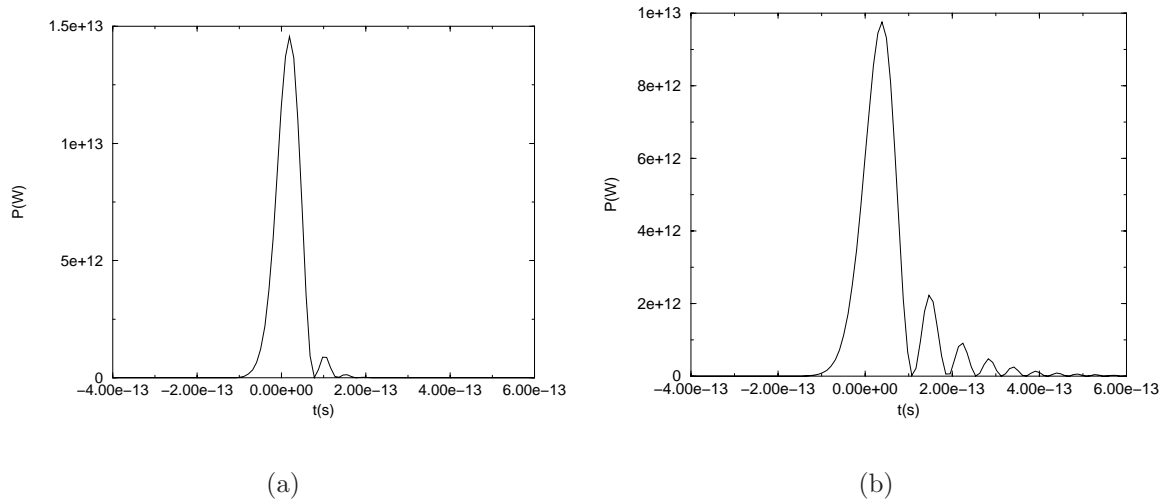


FIG. 1.4 – Recompression d'une impulsion. (a) A l'aide l'équation de Schrödinger linéaire standard (1.36); (b) A l'aide l'équation de Schrödinger linéaire modifiée (1.37).

La figure de gauche 1.4.(a) représente la recompression de l'impulsion par le modèle de Schrödinger linéaire classique,

$$-i\partial_z\mathcal{E} + \frac{1}{2k_L}\Delta_{\perp}\mathcal{E} = 0. \quad (1.36)$$

Pour obtenir cette courbe 1.4.(a) à partir de ce modèle, on considère que le déphasage induit par la paire de réseaux est de la forme (1.32), le terme T_3 est absent, ainsi, on ne voit pas apparaître les post-impulsions qui sont pourtant utiles si on continue à propager l'impulsion. La figure de droite 1.4.(b) par contre, qui a été obtenue avec le modèle de Schrödinger linéaire modifié,

$$-i\partial_z\mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t}\Delta_{\perp}\mathcal{E} = 0, \quad (1.37)$$

tient compte du terme T_3 , au travers du terme de déphasage (1.35). Notons qu'avec les calculs de l'annexe 2 (pages 218 et 222), on peut relier ce terme T_3 au terme de vitesse de groupe v_g apparaissant dans l'équation de Schrödinger (1.37), technique réutilisée dans le paragraphe suivant (équations (1.40) et (1.41)). On voit alors clairement les post-impulsions. En effet, dans le calcul MIRÓ, réalisé avec le modèle (1.36), le calcul n'est exact que pour la longueur d'onde fondamentale λ_L . Pour les autres composantes du spectre, on a fait l'approximation suivante

$$\Delta k \ll k_L \quad \text{et} \quad \Delta\omega \ll \omega_L,$$

qui nous a permis d'obtenir l'équation de Schrödinger linéaire standard (1.19). En faisant ces approximations, on ne tient pas compte des autres longueurs d'ondes qui sont proches de la longueur d'onde fondamentale λ_L . Ces autres longueurs d'ondes induisent pourtant une dispersion des directions de la diffraction que l'on peut relier au terme T_3 dans le déphasage induit par les réseaux. Pour tenir compte de cet effet de dispersion de la diffraction, il faut

donc plutôt considérer le modèle (1.37) et ne plus faire l'approximation $\Delta\omega \ll \omega_L$.

De plus, pour le cas test que nous présentons ci-dessus, et plus particulièrement pour l'impulsion initiale $\mathcal{E}_{entrée} = \mathcal{E}_0 e^{-t^2/4a}$, nous sommes capables de donner la forme temporelle de l'impulsion recomprimée en fonction de T_3 et d'une fonction d'Airy. Cette forme temporelle s'écrit

$$\mathcal{E}_{sortie} = \left(\frac{2}{T_3}\right)^{1/3} 2 \sqrt{a\pi} \mathcal{E}_0 \exp\left[\frac{-2a}{T_3}\left(t - \frac{4a^2}{3T_3}\right)\right] Ai\left[\left(\frac{-2a}{T_3}\right)^{1/3}\left(t - \frac{2a^2}{T_3}\right)\right],$$

où nous rappelons que la fonction d'Airy Ai est définie par

$$Ai((3a)^{1/3}x) = \frac{(3a)^{1/3}}{\pi} \int_0^\infty \cos(at^3 + xt) dt.$$

Si on représente cette forme temporelle, on recolle exactement avec la courbe de droite 1.4.(b) obtenue avec le modèle de Schrödinger linéaire modifié (1.37). Ainsi, on justifie bien l'introduction du nouveau terme de diffraction dans le modèle de Schrödinger modifié.

Dans la partie suivante, on va voir comment à partir du modèle de Maxwell-Lorentz, on obtient formellement l'équation de Schrödinger modifiée non linéaire (1.1) qui tient compte de la dispersion de la diffraction.

1.4 Obtention formelle de l'équation de Schrödinger modifiée non linéaire

On présente ci-dessous la solution proposée dans [44] pour tenir compte sur le modèle de Schrödinger de l'étalement du spectre de l'impulsion. Dans ce cas, on ne fait plus l'approximation d'enveloppe lentement variable *i.e.* on ne néglige plus $\partial_t \mathcal{E}$ devant $\omega_L \mathcal{E}$. Le modèle de Maxwell-Lorentz se présente sous la forme

$$(MLA) \begin{cases} -\frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \mathbf{E} + \Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) & = \mu_0 \partial_{tt}^2 (\mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(3)}), \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}^{(1)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}^{(1)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}^{(1)} & = \gamma_a \mathbf{E}, \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}^{(3)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}^{(3)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}^{(3)} & = \beta |\mathbf{P}^{(1)}|^2 \mathbf{P}^{(1)}. \end{cases}$$

Comme on cherche des solutions réelles, on rends sans dimension le champ et la polarisation de la manière suivante

$$\mathbf{E} = E^* \mathbf{E}' \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = P^* \mathbf{P}'.$$

Le système ci-dessus se réécrit sous la forme

$$(MLA) \begin{cases} -\frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \mathbf{E}' + \Delta \mathbf{E}' - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}') & = \mu_0 \partial_{tt}^2 (\mathbf{P}'^{(1)} + \mathbf{P}'^{(3)}), \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}'^{(1)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}'^{(1)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}'^{(1)} & = \gamma_a \mathbf{E}', \\ \partial_{tt}^2 \mathbf{P}'^{(3)} + \frac{1}{\tau_a} \partial_t \mathbf{P}'^{(3)} + \Omega_a^2 \mathbf{P}'^{(3)} & = \beta (E^*)^2 |\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Pour établir les équations permettant de modéliser ces impulsions, on effectue préalablement une transformée de Fourier du champ par rapport à la variable temporelle qui permet de tenir compte de la largeur spectrale de l'impulsion

$$\widehat{\mathbf{E}}'(z, x, y, \varpi) = \int_{\mathbb{R}_t} \mathbf{E}'(z, x, y, t) e^{-i\varpi t} dt. \quad (1.39)$$

Nous supposons par la suite que les fréquences sont réparties autour de la fréquence centrale notée ω_L et nous notons $\omega = \varpi - \omega_L$.

On suppose ensuite que le champ spectral se décompose sous la forme

$$\widehat{\mathbf{E}}'(z, x, y, \varpi) = (\widehat{\mathcal{E}}'_\perp(z, x, y, \varpi) + \widehat{\mathcal{E}}'_z(z, x, y, \varpi) \mathbf{u}_z) e^{-i\kappa(\varpi)z} + c.c. \quad (1.40)$$

La fonction $\kappa(\varpi)$ représentant le vecteur d'onde associé à la fréquence ϖ . Par ailleurs, la fonction $\kappa(\varpi)$ s'écrit sous la forme

$$\kappa(\varpi) = k_L \kappa_1(\omega) = k_L \left(1 + \rho \frac{\omega}{\omega_L} + f\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right) \right). \quad (1.41)$$

où n représente l'indice de réfraction du milieu à la fréquence ω_L , le paramètre ρ vaut $\rho = \frac{c}{nv_g}$, v_g étant la vitesse de groupe et la fonction f contient le reste du développement. Voyons ce que l'on obtient sur le système de Maxwell-Lorentz.

1.4.1 Equations d'évolution du champ

Dans un premier temps, on prend la transformée de Fourier en temps (1.39) du système (1.38), ainsi

$$(MLA) \begin{cases} \frac{\varpi^2}{c^2} \widehat{\mathbf{E}}' + \Delta \widehat{\mathbf{E}}' - \nabla(\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}') & = -\mu_0 \varpi^2 (\widehat{\mathbf{P}}'^{(1)} + \widehat{\mathbf{P}}'^{(3)}), \\ -\varpi^2 \widehat{\mathbf{P}}'^{(1)} + \frac{i\varpi}{\tau_a} \widehat{\mathbf{P}}'^{(1)} + \Omega_a^2 \widehat{\mathbf{P}}'^{(1)} & = \gamma_a \widehat{\mathbf{E}}', \\ -\varpi^2 \widehat{\mathbf{P}}'^{(3)} + \frac{i\varpi}{\tau_a} \widehat{\mathbf{P}}'^{(3)} + \Omega_a^2 \widehat{\mathbf{P}}'^{(3)} & = \beta(E^*)^2 \mathcal{F}(|\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}), \end{cases} \quad (1.42)$$

\mathcal{F} désignant ici la transformée de Fourier suivant la variable temporelle.

Avec la seconde équation de (1.42), on établit que la réponse du milieu est connue à l'ordre 1,

$$\widehat{\mathbf{P}}'^{(1)}(\varpi) = \frac{\gamma_a}{\Omega_a^2 + \frac{i\varpi}{\tau_a} - \varpi^2} \widehat{\mathbf{E}}'(\varpi) = \varepsilon_0 \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi) \widehat{\mathbf{E}}'(\varpi), \quad (1.43)$$

et avec la troisième équation de (1.42), on établit que la réponse du milieu est connue à l'ordre 3 et donc à tous les ordres qui nous intéressent ici,

$$\widehat{\mathbf{P}}'^{(3)}(\varpi) = \frac{\beta(E^*)^2}{\Omega_a^2 + \frac{i\varpi}{\tau_a} - \varpi^2} \mathcal{F}(|\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)})(\varpi). \quad (1.44)$$

Pour connaître les équations d'évolution du champ, on exprime dans la première équation du système (1.42) les polarisations $\widehat{\mathbf{P}}'^{(1)}$ et $\widehat{\mathbf{P}}'^{(3)}$ à l'aide des relations (1.43) et (1.44). On obtient alors

$$\Delta \widehat{\mathbf{E}}' - \nabla(\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}') = -\frac{\varpi^2}{c^2} \widehat{\mathbf{E}}' - \varpi^2 \mu_0 \widehat{\mathbf{P}}'^{(1)} - \varpi^2 \mu_0 \widehat{\mathbf{P}}'^{(3)},$$

ou encore

$$\Delta \widehat{\mathbf{E}}' - \nabla(\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}') = -\frac{\varpi^2}{c^2} (1 + \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi)) \widehat{\mathbf{E}}' - \varpi^2 \mu_0 \frac{\beta(E^*)^2}{\Omega_a^2 + \frac{i\varpi}{\tau_a} - \varpi^2} \mathcal{F}(|\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}), \quad (1.45)$$

avec

$$\begin{aligned} & \frac{\beta(E^*)^2}{\Omega_a^2 + \frac{i\varpi}{\tau_a} - \varpi^2} \mathcal{F}(|\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\varpi_1}} \int_{\mathbb{R}_{\varpi_2}} \frac{\beta(E^*)^2}{\Omega_a^2 + \frac{i\varpi}{\tau_a} - \varpi^2} \sum_{rsg} \widehat{\mathbf{P}}'_r{}^{(1)}(\varpi_2) \widehat{\mathbf{P}}'_s{}^{(1)}(\varpi_1 - \varpi_2) \widehat{\mathbf{P}}'_g{}^{(1)}(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\varpi_1}} \int_{\mathbb{R}_{\varpi_2}} \frac{\beta(E^*)^2}{\Omega_a^2 + \frac{i\varpi}{\tau_a} - \varpi^2} \sum_{rsg} \widehat{\mathbf{P}}'_r{}^{(1)}(\varpi_2) \overline{\widehat{\mathbf{P}}'_s{}^{(1)}}(\varpi_2 - \varpi_1) \widehat{\mathbf{P}}'_g{}^{(1)}(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2 \\ &= \frac{\beta(E^*)^2 \varepsilon_0}{\gamma_a} \int_{\mathbb{R}_{\varpi_1}} \int_{\mathbb{R}_{\varpi_2}} \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi) \sum_{rsg} \widehat{\mathbf{P}}'_r{}^{(1)}(\varpi_2) \overline{\widehat{\mathbf{P}}'_s{}^{(1)}}(\varpi_2 - \varpi_1) \widehat{\mathbf{P}}'_g{}^{(1)}(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2. \end{aligned}$$

On utilise également la relation (1.43) qui exprime $\widehat{\mathbf{P}}'^{(1)}$ en fonction de $\widehat{\mathbf{E}}'$, donc

$$\begin{aligned} & \frac{\beta(E^*)^2}{\Omega_a^2 + \frac{i\varpi}{\tau_a} - \varpi^2} \mathcal{F}(|\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}) \\ &= \frac{\beta(E^*)^2 \varepsilon_0^4}{\gamma_a} \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi) \sum_{rsg} \widehat{\chi}_r^{(1)}(\varpi_2) \widehat{\mathbf{E}}'_r(\varpi_2) \widehat{\chi}_s^{(1)}(\varpi_2 - \varpi_1) \overline{\widehat{\mathbf{E}}}'_s(\varpi_2 - \varpi_1) \widehat{\chi}_g^{(1)}(\varpi - \varpi_1) \\ & \quad \times \widehat{\mathbf{E}}'_g(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2, \\ &= \frac{\beta(E^*)^2 \varepsilon_0^4}{\gamma_a} \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \sum_{rsg} \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi) \widehat{\chi}_r^{(1)}(\varpi_2) \widehat{\chi}_s^{(1)}(\varpi_2 - \varpi_1) \widehat{\chi}_g^{(1)}(\varpi - \varpi_1) \widehat{\mathbf{E}}'_r(\varpi_2) \overline{\widehat{\mathbf{E}}}'_s(\varpi_2 - \varpi_1) \\ & \quad \times \widehat{\mathbf{E}}'_g(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2. \end{aligned}$$

Enfin, on utilise la relation liant la susceptibilité linéaire $\widehat{\chi}^{(1)}$ à la susceptibilité d'ordre trois $\widehat{\chi}^{(3)}$ qui est donnée par (1.8), ainsi en notant $\mathcal{F}(|\mathbf{P}'^{(1)}|^2 \mathbf{P}'^{(1)}) = \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\beta(E^*)^2}{\Omega_a^2 + \frac{i\varpi}{\tau_a} - \varpi^2} \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}')) \\ &= (E^*)^2 \varepsilon_0^4 \int \int \sum_{rsg} \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1) \widehat{\mathbf{E}}'_r(\varpi_2) \overline{\widehat{\mathbf{E}}}'_s(\varpi_2 - \varpi_1) \widehat{\mathbf{E}}'_g(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2. \end{aligned}$$

On injecte ensuite le changement de variables (1.40) dans l'équation (1.45) et on sépare les polarisations longitudinale et transverse pour aboutir au système d'équations suivant

$$\begin{aligned} (\partial_{zz}^2 \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - 2i\kappa(\varpi) \partial_z \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \kappa^2(\varpi) \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \nabla_\perp (\nabla_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \partial_z \widehat{\mathcal{E}}'_z - i\kappa(\varpi) \widehat{\mathcal{E}}'_z)) e^{-i\kappa(\varpi)z} = \\ - \frac{\varpi^2}{c^2} (1 + \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi)) \widehat{\mathcal{E}}'_\perp e^{-i\kappa(\varpi)z} - \frac{\varpi^2 \varepsilon_0^3 (E^*)^2}{c^2} \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))_\perp, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_z - \partial_z \nabla_\perp \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + i\kappa(\varpi) \nabla_\perp \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp) e^{-i\kappa(\varpi)z} = - \frac{\varpi^2}{c^2} (1 + \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi)) \widehat{\mathcal{E}}'_z e^{-i\kappa(\varpi)z} \\ - \frac{\varpi^2 \varepsilon_0^3 (E^*)^2}{c^2} \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))_z, \end{aligned}$$

ou, après simplifications,

$$\begin{aligned} \partial_{zz}^2 \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - 2i\kappa(\varpi) \partial_z \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \kappa^2(\varpi) \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \nabla_\perp (\nabla_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \partial_z \widehat{\mathcal{E}}'_z - i\kappa(\varpi) \widehat{\mathcal{E}}'_z) = \\ - \frac{\varpi^2}{c^2} (1 + \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi)) \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \frac{\varpi^2 \varepsilon_0^3 (E^*)^2}{c^2} \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))_\perp e^{i\kappa(\varpi)z}, \end{aligned}$$

et

$$\Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_z - \partial_z \nabla_\perp \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + i\kappa(\varpi) \nabla_\perp \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp = - \frac{\varpi^2}{c^2} (1 + \widehat{\chi}^{(1)}(\varpi)) \widehat{\mathcal{E}}'_z - \frac{\varpi^2 \varepsilon_0^3 (E^*)^2}{c^2} \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))_z e^{i\kappa(\varpi)z}.$$

On va maintenant rendre sans dimension ces équations pour faire apparaître la relation de dispersion, la condition de polarisation et le modèle de Schrödinger non linéaire modifié.

1.4.2 Adimensionnement

On introduit le petit paramètre ε et les nouvelles variables d'adimensionnement suivantes

$$\varepsilon = \frac{1}{k_L L} = \frac{c}{n\omega_L L},$$

$$x = LX; \quad z = \frac{L}{\varepsilon} Z; \quad \omega = \omega_L \Omega,$$

où L représente la longueur caractéristique du faisceau. Les équations rendues sans dimension précédentes s'écrivent sous la forme

$$\varepsilon^2 \partial_{ZZ}^2 \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - 2i\kappa_1 \partial_Z \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \frac{1}{\varepsilon^2} \kappa_1^2 \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \nabla_\perp (\nabla_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \varepsilon \partial_Z \widehat{\mathcal{E}}'_z - \frac{i}{\varepsilon} \kappa_1 \widehat{\mathcal{E}}'_z) =$$

$$-\frac{1}{n^2 \varepsilon^2} (1 + \Omega)^2 (1 + \widehat{\chi}^A (1 + \Omega)) \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \frac{\varepsilon_0^3 (E^*)^2}{n^2 \varepsilon^2} (1 + \Omega)^2 \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))_\perp e^{i\kappa(\omega_L(1+\Omega))z},$$

et

$$\Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_z - \varepsilon \partial_Z \nabla_\perp \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \frac{i}{\varepsilon} \kappa_1 \nabla_\perp \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp = -\frac{1}{n^2 \varepsilon^2} (1 + \Omega)^2 (1 + \widehat{\chi}^A (1 + \Omega)) \widehat{\mathcal{E}}'_z$$

$$- \frac{\varepsilon_0^3 (E^*)^2}{n^2 \varepsilon^2} (1 + \Omega)^2 \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))_z e^{i\kappa(\omega_L(1+\Omega))z},$$

avec $\widehat{\chi}^A(1 + \Omega) = \widehat{\chi}^1(\omega_L + \omega)$. On veut également que les effets non linéaires et diffractifs apparaissent au même ordre, donc on pose $E^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0^{3/2}}$. Ainsi, les équations précédentes se réécrivent

$$\varepsilon^2 \partial_{ZZ}^2 \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - 2i\kappa_1 \partial_Z \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \frac{1}{\varepsilon^2} \kappa_1^2 \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \nabla_\perp (\nabla_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \varepsilon \partial_Z \widehat{\mathcal{E}}'_z - \frac{i}{\varepsilon} \kappa_1 \widehat{\mathcal{E}}'_z) =$$

$$-\frac{1}{n^2 \varepsilon^2} (1 + \Omega)^2 (1 + \widehat{\chi}^A (1 + \Omega)) \widehat{\mathcal{E}}'_\perp - \frac{1}{n^2} (1 + \Omega)^2 \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))_\perp e^{i\kappa(\omega_L(1+\Omega))z}, \quad (1.46)$$

et

$$\Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_z - \varepsilon \partial_Z \nabla_\perp \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp + \frac{i}{\varepsilon} \kappa_1 \nabla_\perp \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp = -\frac{1}{n^2 \varepsilon^2} (1 + \Omega)^2 (1 + \widehat{\chi}^A (1 + \Omega)) \widehat{\mathcal{E}}'_z$$

$$- \frac{1}{n^2} (1 + \Omega)^2 \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'))_z e^{i\kappa(\omega_L(1+\Omega))z}. \quad (1.47)$$

A l'aide d'un développement limité et en identifiant les termes du même ordre, on va obtenir le modèle de Schrödinger sur le champ $\mathcal{E}'_\perp^{(0)}$.

1.4.3 Développement limité et identification terme à terme

Les champs transverses et longitudinaux se développent sous la forme

$$\widehat{\mathcal{E}}'_\perp = \widehat{\mathcal{E}}'^{(0)}_\perp + \varepsilon^2 \widehat{\mathcal{E}}'^{(2)}_\perp + \dots$$

$$\widehat{\mathcal{E}}'_z = \varepsilon \widehat{\mathcal{E}}'^{(1)}_z + \varepsilon^3 \widehat{\mathcal{E}}'^{(3)}_z + \dots$$

Au premier ordre du développement, pour les termes en $\frac{1}{\varepsilon^2}$, nous obtenons avec l'équation (1.46) l'expression

$$\kappa_1^2 = \frac{1}{n^2}(1 + \Omega)^2(1 + \widehat{\chi}^A(1 + \Omega)).$$

On peut en extraire l'expression de l'indice et de la vitesse de groupe par une identification terme-à-terme en Ω

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \widehat{\chi}^A(1), \\ \rho &= \frac{c}{nv_g} = 1 + \frac{1}{2n^2} \frac{d\widehat{\chi}^A}{d\Omega}(1). \end{aligned}$$

Au deuxième ordre du développement, pour les termes en $\frac{1}{\varepsilon}$, on exprime $\widehat{\mathcal{E}}'_z{}^{(1)}$ en fonction de $\nabla \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp{}^{(0)}$ dans l'équation (1.47)

$$\widehat{\mathcal{E}}'_z{}^{(1)} = -i \frac{\nabla \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp{}^{(0)}}{\kappa_1} = -i \frac{\nabla \cdot \widehat{\mathcal{E}}'_\perp{}^{(0)}}{1 + \rho\Omega + f(\Omega)}.$$

On reprend l'équation (1.46) en utilisant les relations obtenues au premier ordre et au second ordre du développement, l'équation de Schrödinger s'écrit alors

$$-2i\kappa_1 \partial_z \widehat{\mathcal{E}}'_\perp{}^{(0)} + \Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp{}^{(0)} = -\frac{1}{n^2}(1 + \Omega)^2 \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'_\perp{}^{(0)})) e^{i\kappa(\omega_L(1+\Omega)z)}.$$

En revenant dans les variables de départ (z, x, y, ϖ) , l'équation de Schrödinger modifiée dans le domaine spectral se met sous la forme

$$-2i\kappa(\varpi) \partial_z \widehat{\mathcal{E}}'_\perp{}^{(0)} + \Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}'_\perp{}^{(0)} + \frac{\varpi^2}{c^2} (E^*)^2 \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}'_\perp{}^{(0)})) e^{i\kappa(\varpi)z} = 0.$$

On revient avec le champ de départ, $\widehat{\mathbf{E}}'_\perp{}^{(0)} = \frac{\widehat{\mathbf{E}}_\perp{}^{(0)}}{E^*}$,

$$-2i\kappa(\varpi) \partial_z \widehat{\mathcal{E}}_\perp{}^{(0)} + \Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}_\perp{}^{(0)} + \frac{\varpi^2}{c^2} \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}_\perp{}^{(0)})) e^{i\kappa(\varpi)z} = 0.$$

Pour simplifier les écritures, on notera $\widehat{\mathcal{E}}_\perp{}^{(0)} = \widehat{\mathcal{E}}_\perp$ et $\mathbf{E}_\perp{}^{(0)} = \mathbf{E}_\perp$.

D'où l'équation de propagation

$$-2i\kappa(\varpi) \partial_z \widehat{\mathcal{E}}_\perp + \Delta_\perp \widehat{\mathcal{E}}_\perp + \frac{\varpi^2}{c^2} \mathcal{F}(NL(\mathbf{E}_\perp)) e^{i\kappa(\varpi)z} = 0. \quad (1.48)$$

Tous les calculs réalisés jusqu'à présent, l'ont été en se plaçant dans un référentiel propre pour chaque fréquence. Nous allons ici nous ramener à un référentiel unique pour toutes les fréquences qui va faire apparaître la dispersion des vitesses de groupe σ .

1.4.4 Passage dans un référentiel en mouvement unique

Avant de revenir dans un référentiel en mouvement unique, nous allons préciser l'expression du terme non linéaire $\mathcal{F}(NL(\mathbf{E}_\perp))$.

On reprend l'équation (1.48) en explicitant la terme non linéaire

$$-2i\kappa(\varpi)\partial_z\widehat{\mathcal{E}}_\perp + \Delta_\perp\widehat{\mathcal{E}}_\perp + \frac{\varpi^2}{c^2}\mathcal{F}(NL(\mathbf{E}_\perp))e^{i\kappa(\varpi)z} = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} -2i\kappa(\varpi)\partial_z\widehat{\mathcal{E}}_\perp + \Delta_\perp\widehat{\mathcal{E}}_\perp + \frac{\varpi^2}{c^2} \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \sum_{rsg} \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1) \widehat{\mathbf{E}}_r^{(1)}(\varpi_2) \\ \overline{\widehat{\mathbf{E}}_s}^{(1)}(\varpi_2 - \varpi_1) \widehat{\mathbf{E}}_g^{(1)}(\varpi - \varpi_1) e^{i\kappa(\varpi)z} d\varpi_1 d\varpi_2 = 0. \end{aligned}$$

On utilise de nouveau le changement de variable (1.40)

$$\begin{aligned} -2i\kappa(\varpi)\partial_z\widehat{\mathcal{E}}_\perp + \Delta_\perp\widehat{\mathcal{E}}_\perp + \frac{\varpi^2}{c^2} \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \sum_{rsg} \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1) \widehat{\mathcal{E}}_r(\varpi_2) \\ \overline{\widehat{\mathcal{E}}_s}(\varpi_2 - \varpi_1) \widehat{\mathcal{E}}_g(\varpi - \varpi_1) e^{-i(\kappa(\varpi_2) - \kappa(\varpi_2 - \varpi_1) + \kappa(\varpi - \varpi_1) - \kappa(\varpi))z} d\varpi_1 d\varpi_2 = 0. \end{aligned}$$

Enfin, on remplace les $\kappa(\varpi_i)$ par leur expression pour simplifier l'exponentielle ci-dessus

$$\begin{aligned} -2i\kappa(\varpi)\partial_z\widehat{\mathcal{E}}_\perp + \Delta_\perp\widehat{\mathcal{E}}_\perp + \frac{\varpi^2}{c^2} \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \sum_{rsg} \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1) \widehat{\mathcal{E}}_r(\varpi_2) \\ \overline{\widehat{\mathcal{E}}_s}(\varpi_2 - \varpi_1) \widehat{\mathcal{E}}_g(\varpi - \varpi_1) e^{-ik_L(f(\frac{\omega_2}{\omega_L}) - f(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_L}) + f(\frac{\omega - \omega_1}{\omega_L}) - f(\frac{\omega}{\omega_L}))z} d\varpi_1 d\varpi_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Ainsi, pour revenir dans un référentiel en mouvement unique pour chaque fréquence, on effectue le changement de variable suivant

$$\widehat{\mathcal{E}}_\perp(z, x, y, \varpi) = \widehat{\mathcal{E}}'_\perp(z, x, y, \varpi) e^{ik_L f(\frac{\omega}{\omega_L})z}.$$

L'équation (1.49) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 & (-2i\kappa(\varpi)\partial_z\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + 2\kappa(\varpi)k_L f\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + \Delta_{\perp}\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp})e^{ik_L f\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)z} \\
 = & -\frac{\varpi^2}{c^2} \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \sum_{rsg} \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1) \widehat{\mathcal{E}}''_r(\varpi_2) \overline{\widehat{\mathcal{E}}''_s(\varpi_2 - \varpi_1)} \widehat{\mathcal{E}}''_g(\varpi - \varpi_1) \\
 & e^{-ik_L(f\left(\frac{\omega_2}{\omega_L}\right) - f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_L}\right) + f\left(\frac{\omega - \omega_1}{\omega_L}\right) - f\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right))z} \\
 & e^{ik_L(f\left(\frac{\omega_2}{\omega_L}\right) - f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_L}\right) + f\left(\frac{\omega - \omega_1}{\omega_L}\right))z} d\varpi_1 d\varpi_2.
 \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit après simplification

$$\begin{aligned}
 & -2i\kappa(\varpi)\partial_z\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + 2\kappa(\varpi)k_L f\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + \Delta_{\perp}\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + \frac{\varpi^2}{c^2} \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \\
 & \sum_{rsg} \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1) \widehat{\mathcal{E}}''_r(\varpi_2) \overline{\widehat{\mathcal{E}}''_s(\varpi_2 - \varpi_1)} \widehat{\mathcal{E}}''_g(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2 = 0,
 \end{aligned}$$

avec $k_L f\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right) = -\sigma\omega^2 + o(\omega^2)$. Dans le cas où f n'est définie qu'à l'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned}
 & -i\partial_z\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} - \sigma\omega^2\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + \frac{1}{2\kappa(\varpi)}\Delta_{\perp}\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + \frac{\varpi^2}{2c^2\kappa(\varpi)} \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \sum_{rsg} \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1) \\
 & \widehat{\mathcal{E}}''_r(\varpi_2) \overline{\widehat{\mathcal{E}}''_s(\varpi_2 - \varpi_1)} \widehat{\mathcal{E}}''_g(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2 = 0.
 \end{aligned}$$

De plus, $\varpi = \omega + \omega_L$ et $\kappa(\varpi) = k_L + \frac{\omega}{v_g} - \sigma\omega^2$, donc

$$\begin{aligned}
 & -i\partial_z\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} - \sigma\omega^2\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + \frac{1}{2k_L + \frac{2\omega}{v_g} - 2\sigma\omega^2}\Delta_{\perp}\widehat{\mathcal{E}}''_{\perp} + \frac{(\omega^2 + 2\omega\omega_L + \omega_L^2)}{2c^2(k_L + \frac{\omega}{v_g} - \sigma\omega^2)} \\
 & \int_{\mathbb{R}\varpi_1} \int_{\mathbb{R}\varpi_2} \sum_{rsg} \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1) \widehat{\mathcal{E}}''_r(\varpi_2) \overline{\widehat{\mathcal{E}}''_s(\varpi_2 - \varpi_1)} \widehat{\mathcal{E}}''_g(\varpi - \varpi_1) d\varpi_1 d\varpi_2 = 0.
 \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier inverse en temps et en notant (cas particulier du modèle instantané) $\gamma_{nl} = \widehat{\chi}_{rsg}^{(3)}(\varpi, \varpi_2 - \varpi_1, \varpi - \varpi_1)$, on obtient

$$-i\partial_z\mathcal{E}''_{\perp} + \frac{\Delta_{\perp}\mathcal{E}''_{\perp}}{2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t + 2\sigma\partial_{tt}^2} + \sigma\partial_{tt}^2\mathcal{E}''_{\perp} + \gamma_{nl} \frac{(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t + \sigma\partial_{tt}^2)} (|\mathcal{E}''_{\perp}|^2\mathcal{E}''_{\perp}) = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, on prendra $\mathcal{E}''_{\perp} = \mathcal{E}$, d'où l'équation de Schrödinger non linéaire modifiée

$$-i\partial_z\mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t + 2\sigma\partial_{tt}^2}\Delta_{\perp}\mathcal{E} + \sigma\partial_{tt}^2\mathcal{E} + \gamma_{nl}\frac{(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t + \sigma\partial_{tt}^2)}(|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}) = 0. \quad (1.50)$$

Remarque 1.4.1. *On peut constater la présence de dérivées en temps au dénominateur. Ceci ne pose pas de problème car cette équation est résolue à l'aide de transformées de Fourier en temps. Notons également, que le domaine spectral utilisé est tel que le symbole $2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t + 2\sigma\partial_{tt}^2$ ne s'annule pas.*

L'objet de la partie suivante est de proposer une dérivation systématique de l'équation (1.50) dans le cadre d'un milieu non linéaire centrosymétrique.

1.5 Obtention systématique de l'équation de Schrödinger modifiée non linéaire

Pour prendre en compte les effets non linéaires avec l'équation (1.50), on considère actuellement dans le code de calcul MIRÓ que ces effets non linéaires peuvent être décrits à l'aide du terme " effet Kerr " habituel. Pour pouvoir prendre l'effet Kerr comme terme non linéaire, on considère que ces effets non linéaires sont faibles et bien représentés par ce terme. L'équation de Schrödinger modifiée non linéaire s'écrit alors

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g} \partial_t + 2\sigma \partial_t^2} \Delta_{\perp} \mathcal{E} + \sigma \partial_{tt}^2 \mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl} \omega_L^2}{2c^2 k_L} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (1.51)$$

Dans le paragraphe 1.5.1, nous présentons une obtention systématique d'équation de Schrödinger modifiée non linéaire à partir de systèmes hyperboliques, symétriques, semi-linéaires de la forme (1.21), en donnant le terme non linéaire que l'on obtiendrait sans faire d'hypothèse. Et dans le paragraphe 1.5.2, nous appliquons notre méthode au modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique (1.6).

1.5.1 Cadre théorique

Pour obtenir ce modèle de Schrödinger modifié non linéaire, on considère que l'évolution du comportement des champs électrique et magnétique couplée à une réponse du milieu est parfaitement décrite par des systèmes semi-linéaires, hyperboliques, sans dimension s'écrivant sous la forme

$$\begin{cases} L^{\varepsilon}(\partial) \mathbf{u} = f(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}|_{t=0}(X, z) = \mathbf{u}^0(X, z), \end{cases}$$

où \mathbf{u} prend ses valeurs dans \mathbb{R}^n , et $(X, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$. L'opérateur $L^{\varepsilon}(\partial)$ qui est hyperbolique symétrique vérifie l'hypothèse suivante

Hypothèse 1.5.1. *Le système (1.21) est symétrique hyperbolique. Plus précisément l'opérateur $L^{\varepsilon}(\partial)$ s'écrit*

$$L^{\varepsilon}(\partial) = \partial_t + A(\partial_X) + A_3 \partial_z + \frac{L_0}{\varepsilon}, \quad \text{avec } A(\partial_X) = A_1 \partial_{x_1} + A_2 \partial_{x_2},$$

où les matrices $(A_j)_{j=1,2,3}$ sont réelles symétriques et la matrice L_0 anti-symétrique réelle.

Enfin, nous étudions ici des non linéarités du type de celles définies dans l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.5.2. *Il existe une application q -linéaire symétrique F telle que*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n, \forall \delta > 0, f(\delta \mathbf{u}) = \delta^q F(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}).$$

Remarque 1.5.1. Dans la pratique, on considère plutôt des non linéarités d'ordre 2 ou 3. L'application présentée dans le second paragraphe de cette partie, possède une non linéarité d'ordre 3.

On considère pour notre étude, un faisceau laser de fréquence ω_L et de vecteur d'onde $\vec{K} = (0, 0, k_L)^T$. Ainsi, on prend une condition initiale, dans le cas des cigares de lumière, de la forme

$$\mathbf{u}|_{t=0}(X, z) = \varepsilon^p \left(\mathbf{u}^0\left(\frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, z\right) e^{ik_L \frac{z}{\varepsilon}} + c.c. \right), \quad (1.52)$$

le facteur ε^p définit la taille de la solution.

On cherche une solution approchée \mathcal{U}^ε de la solution exacte \mathbf{u} du système (1.21) en introduisant une nouvelle variable θ qui permet de décrire la phase de la solution. Plus précisément, nous cherchons une solution approchée du système non linéaire hyperbolique (1.21) de la forme

$$\mathbf{u}(t, X, z) = \mathcal{U}^\varepsilon\left(t, \frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, z, \theta\right) \Big|_{\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}}, \quad (1.53)$$

où $\mathcal{U}^\varepsilon\left(t, \frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, z, \theta\right)$ est périodique par rapport à la variable θ et régulière. On a alors la représentation

$$\mathcal{U}^\varepsilon\left(t, \frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, z, \theta\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_\alpha^\varepsilon\left(t, \frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, z\right) e^{i\alpha\theta}. \quad (1.54)$$

Remarque 1.5.2. On peut remarquer que les variables transverses $X \in \mathbb{R}^{d-1}$ sont sur des échelles en $O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ et que la variable longitudinale z est sur une échelle en $O(1)$. En effet, on considère ici des impulsions dont le diamètre est petit devant la longueur. Cependant, toute l'étude présentée dans ce paragraphe est identique pour le cas des boulets de lumière où les variables transverses et longitudinale sont sur une échelle en $O(1)$.

En injectant cette solution approchée (1.53) dans le système non linéaire (1.21), on obtient que \mathcal{U}^ε satisfait l'équation singulière suivante

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A(\partial_X) \mathcal{U}^\varepsilon + A_3 \partial_z \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A_3 \partial_\theta + L_0) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon). \quad (1.55)$$

Remarque 1.5.3. On montre dans le chapitre suivant que si \mathcal{U}^ε est solution de l'équation singulière (1.55) alors \mathbf{u} définie par la relation (1.53) satisfait le système non linéaire (1.21).

Remarque 1.5.4. Notons aussi que l'équation singulière définie ci-dessus l'est pour tout t , pour tout X, z et pour $\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}$. Afin de définir complètement le profil \mathcal{U}^ε , on impose que ce profil satisfasse l'équation singulière (1.55) pour tout θ .

Contrairement à l'obtention du modèle de Schrödinger classique (1.31) décrit au paragraphe 1.2.2.b.3, on obtient ici le modèle de Schrödinger modifié non linéaire, en faisant le moins d'approximations possibles à partir de l'équation singulière.

On veut tout d'abord diagonaliser le système d'équations singulières (1.55). Pour cela, on réécrit ce système comme suit

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(-\omega_L \partial_\theta + A_3(k_L \partial_\theta + \varepsilon \partial_z) + A(\sqrt{\varepsilon} \partial_X) + L_0 \right) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon).$$

On en prend la transformée de Fourier suivant les variables X, z, θ dont on note respectivement $\zeta_{d-1} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\zeta_1 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{Z}$ les variables de Fourier duales. L'équation précédente se met sous la forme

$$\partial_t \widehat{\mathcal{U}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(-i\omega_L l + iA_3(k_L l + \varepsilon \zeta_1) + iA(\sqrt{\varepsilon} \zeta_{d-1}) + L_0 \right) \widehat{\mathcal{U}}^\varepsilon = \widehat{f(\mathcal{U}^\varepsilon)}.$$

On va maintenant pouvoir diagonaliser la famille de matrices $iA_3(\eta) + iA(\nu_{d-1}) + L_0$, avec $\eta = k_L l + \varepsilon \zeta_1 \in \mathbb{R}$ et $\nu_{d-1} = \sqrt{\varepsilon} \zeta_{d-1} \in \mathbb{R}^{d-1}$. On note $\lambda_j(\eta, \nu_{d-1})$, $j \in \{1, \dots, m\}$ les valeurs propres associées à cette famille de matrices et $\widehat{\Pi}_j(\eta, \nu_{d-1})$, $j \in \{1, \dots, m\}$ les projecteurs propres associés. On a alors la relation

$$iA_3(\eta) + iA(\nu_{d-1}) + L_0 = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}} \lambda_j(\eta, \nu_{d-1}) \widehat{\Pi}_j(\eta, \nu_{d-1}).$$

En particulier, on désigne par $j_0 \in \{1, \dots, m\}$, la nappe de la variété caractéristique \mathcal{C}_L telle que $(\omega_L, k_L) \in j_0$ et $\omega_L = \lambda_{j_0}(k_L, 0)$. De plus, la multiplicité de la valeur propre $(\eta, \nu_{d-1}) \mapsto \lambda_{j_0}(\eta, \nu_{d-1})$ est supposée constante au voisinage de $(k_L, 0)$.

Avant d'écrire l'équation que l'on obtient en tenant compte de la diagonalisation de la famille de matrice, on introduit les notations suivantes.

Notations. On note $D_\theta = \frac{\partial_\theta}{i}$, $D_z = \frac{\partial_z}{i}$ et $D_X = \frac{\partial_X}{i}$.

On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \sum_{j \in \{1, \dots, m\}} \lambda_j(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \Pi_j(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \right) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon),$$

avec $\mathcal{U}^\varepsilon = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}} \Pi_j(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{U}^\varepsilon$.

Pour pouvoir diagonaliser le système d'équations précédent, on choisit $j_1 \in \{1, \dots, m\}$ et on lui applique le projecteur propre $\Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X)$. Le système d'équations s'écrit alors comme un système de m -équations non linéaires couplées de la forme

$$\begin{aligned} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \left(-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \right) \right] \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{U}^\varepsilon \\ = \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) f(\mathcal{U}^\varepsilon), \quad j_1 \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Dans le cadre de notre étude, nous considérons des régimes faiblement non linéaires. Le fait d'étaler le spectre de notre impulsion ne perturbe donc que la partie linéaire du modèle, on va donc chercher à rester exact en linéaire et le moins mauvais possible en non linéaire. Pour cela, on ne garde qu'une nappe de la variété caractéristique, celle sur laquelle se trouve (ω_L, k_L) . On note j_0 cette nappe, voir figure 1.2. On peut ainsi définir \mathcal{V}^ε comme étant la solution sur cette nappe de l'équation suivante

$$\begin{cases} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X)) \right] \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{V}^\varepsilon \\ \quad = \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon), \\ \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{V}^\varepsilon = \mathcal{V}^\varepsilon, \\ \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{V}^\varepsilon = 0, \quad j_1 \neq j_0. \end{cases}$$

Notons que si $f = 0$, alors $\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{V}^\varepsilon$ et $\mathcal{U}^\varepsilon(t = 0) = \mathcal{V}^\varepsilon(t = 0)$, la partie linéaire est alors exacte. De plus, on montre dans le second chapitre de cette thèse, que pour des régimes faiblement non linéaires, on a une estimation d'erreur plus faible que celle obtenue avec le modèle de Schrödinger habituel.

Pour finir l'obtention de notre modèle, on rappelle que \mathcal{V}^ε se met sous la forme (1.54),

$$\mathcal{V}^\varepsilon(t, \frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, z, \theta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon(t, \frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, z) e^{i\alpha\theta}.$$

En particulier, on ne veut ici considérer que les harmoniques résonnantes. Ainsi, on veut garder les α tels que $\alpha \in R$, avec $R = \{\alpha \in \mathbb{Z}, (\alpha\omega_L, \alpha k_L) \in \mathcal{C}_L\}$. Pour simplifier, on suppose $R = \{-1, +1\}$. Ainsi, on note \mathcal{W}^ε la solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X)) \right] \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{W}^\varepsilon \\ \quad = \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) [Q_1(f(\mathcal{W}^\varepsilon))], \\ \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{W}^\varepsilon = \mathcal{W}^\varepsilon, \end{cases}$$

où

$$Q_1(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} g(t, \frac{X}{\varepsilon}, z, \theta) d\theta.$$

La composante de Fourier numéro (-1) est donnée par $\overline{\mathcal{W}^\varepsilon}$. De nouveau, si $f = 0$, alors aucune harmonique autre que -1 et $+1$ n'est créée et donc $\mathcal{V}^\varepsilon = \mathcal{W}^\varepsilon e^{i\theta} + c.c$, ainsi le modèle est exact. De même, nous montrons que l'estimation d'erreur est plus faible que dans le cas Schrödinger habituel.

Afin d'établir le lien avec le modèle linéaire (1.50), on fait apparaître le terme de vitesse de groupe $(\frac{\partial \lambda_{j_0}}{\partial k})|_{k=k_L} = \lambda'_{j_0}(k_L, 0)$ dans l'équation sur \mathcal{W}^ε . Elle se met alors sous la forme

$$\begin{cases} (\partial_t + \lambda'_{j_0}(k_L, 0)\partial_z) \mathcal{W}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X)) \mathcal{W}^\varepsilon \\ \quad - \lambda'_{j_0}(k_L, 0)\partial_z \mathcal{W}^\varepsilon = \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) [Q_1(f(\mathcal{W}^\varepsilon))], \\ \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{W}^\varepsilon = \mathcal{W}^\varepsilon. \end{cases}$$

Pour finir, on se place dans le référentiel en mouvement à la vitesse de groupe. Pour cela, on effectue le changement de variable suivant

$$\begin{cases} t' = t + \frac{1}{\lambda'_{j_0}(k_L, 0)} z, \\ z' = z. \end{cases}$$

Ainsi, en omettant les primes, l'équation sur \mathcal{W}^ε se réécrit

$$\begin{cases} \partial_z \mathcal{W}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) - \varepsilon \lambda'_{j_0}(k_L, 0) \partial_z) \mathcal{W}^\varepsilon \\ \quad = \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) [Q_1(f(\mathcal{W}^\varepsilon))], \\ \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) \mathcal{W}^\varepsilon = \mathcal{W}^\varepsilon. \end{cases} \quad (1.56)$$

Afin de montrer que le terme $(-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) - \varepsilon \lambda'_{j_0}(k_L, 0) \partial_z)$ est bien le même terme de diffraction que pour l'équation (1.50) et que le terme non linéaire $\Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) [Q_1(f(\mathcal{W}^\varepsilon))]$ est plus compliqué que le terme d'effet Kerr, on applique ces résultats au modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique (1.6).

Notons finalement que l'équation (1.56) n'est pas raide. En effet lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, l'expression $\frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon \zeta_1, \sqrt{\varepsilon} \zeta_{d-1}) - \varepsilon \lambda'_{j_0}(k_L, 0) i \zeta_1) = O(1)$, $\forall \zeta_1, \zeta_{d-1}$ est bornée.

1.5.2 Application des résultats au modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique

On a vu dans la partie "Les outils mathématiques" 1.2.1, que le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique (1.6) se met sous la forme du système (1.21).

On cherche une solution approchée de ce système sous la forme

$$\mathbf{u}(t, X, z) = \mathcal{U}^\varepsilon\left(t, \frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, z, \theta\right) \Big|_{\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}}, \quad X \in \mathbb{R}^2,$$

ainsi, on obtient l'équation singulière suivante

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A(\partial_X) \mathcal{U}^\varepsilon + A_3 \partial_z \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A_3 \partial_\theta + L_0) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon).$$

On commence par chercher la valeur de $\omega_L(k_L) = \lambda_{j_0}(k_L, 0)$ pour notre système. Pour cela, on regarde comment s'écrit la relation de dispersion qui est obtenue en calculant $\det(-i\omega_L + ik_L A_3 + L_0) = 0$. Cette relation est de la forme

$$(k_L^2 - \omega_L^2)(\eta_a^2 - \omega_L^2) - \omega_L^2 \gamma = 0.$$

On pose $S = \omega_L^2$. Alors l'équation précédente se réécrit

$$S^2 - (\eta_a^2 + \gamma + k_L^2)S + k_L^2 \eta_a^2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont données par

$$S_{\pm} = \frac{(\eta_a^2 + \gamma + k_L^2) \pm \sqrt{(\eta_a^2 + \gamma + k_L^2)^2 - 4k_L^2\eta_a^2}}{2},$$

Ainsi, on peut donner la valeur de $\lambda_{j_0}(k_L, 0)$, qui s'écrit

$$\lambda_{j_0}^{\pm}(k_L, 0) := \pm\omega_L(k_L) = \pm\sqrt{\frac{(\eta_a^2 + \gamma + k_L^2) \pm \sqrt{(\eta_a^2 + \gamma + k_L^2)^2 - 4k_L^2\eta_a^2}}{2}}. \quad (1.57)$$

On va maintenant pouvoir réappliquer les résultats précédents. On commence par reformuler l'équation singulière sous la forme

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(-\omega_L \partial_\theta + A_3(k_L \partial_\theta + \varepsilon \partial_z) + A(\sqrt{\varepsilon} \partial_X) + L_0 \right) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon),$$

la transformée de Fourier de cette équation suivants les variables θ, X, z s'écrit

$$\partial_t \widehat{\mathcal{U}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(-i\omega_L l + iA_3(k_L l + \varepsilon \zeta_1) + iA(\sqrt{\varepsilon} \zeta_{d-1}) + L_0 \right) \widehat{\mathcal{U}}^\varepsilon = \widehat{f(\mathcal{U}^\varepsilon)}.$$

On peut ainsi diagonaliser la famille de matrices $iA_3(\eta) + iA(\nu_{d-1}) + L_0$, avec $\eta = \tilde{k}_L l + \varepsilon \zeta_1$ et $\nu_{d-1} = \sqrt{\varepsilon} \zeta_{d-1}$, $d = 3$. Les valeurs propres associées à cette famille de matrices sont de la forme

$$\lambda_j(\eta, \nu_{d-1}) = \pm \left(\frac{(\eta_a^2 + \gamma + (|\eta|^2 + |\nu_{d-1}|^2)^2)}{2} \pm \frac{\sqrt{(\eta_a^2 + \gamma + (|\eta|^2 + |\nu_{d-1}|^2)^2)^2 - 4(|\eta|^2 + |\nu_{d-1}|^2)^2 \eta_a^2}}{2} \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (1.58)$$

On peut maintenant choisir $j_1 \in \{1, \dots, 4\}$ pour diagonaliser l'équation singulière. On se place ensuite sur la nappe j_0 ou se trouve (ω_L, k_L) . On distingue plus particulièrement les harmoniques $+1$ et -1 , ainsi en faisant également apparaître la vitesse de groupe, on aboutit à l'équation (1.56).

On regarde maintenant de plus près le terme $\frac{1}{\varepsilon} \left(-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) - \varepsilon \mathcal{X}'_{j_0}(k_L, 0) \partial_z \right)$. On montre que l'on retrouve bien le terme de diffraction donné dans la partie (1.4). Pour cela, on considère les valeurs propres $\lambda_{j_0}(k_L, 0)$ et $\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X)$ de la forme

$$\lambda_{j_0}(k_L, 0) = \sqrt{\frac{(\eta_a^2 + \gamma + k_L^2) + \sqrt{(\eta_a^2 + \gamma + k_L^2)^2 - 4k_L^2\eta_a^2}}{2}},$$

et

$$\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) = \left(\frac{(\eta_a^2 + \gamma + (|k_L + \varepsilon D_z|^2 + |\sqrt{\varepsilon} D_X|^2)^2)}{2} + \frac{\sqrt{(\eta_a^2 + \gamma + (|k_L + \varepsilon D_z|^2 + |\sqrt{\varepsilon} D_X|^2)^2)^2 - 4(|k_L + \varepsilon D_z|^2 + |\sqrt{\varepsilon} D_X|^2)^2 \eta_a^2}}{2} \right)^{1/2}.$$

on utilise également l'expression de $\lambda'_{j_0}(k_L, 0)$ donnée par (1.24).

On peut maintenant exprimer avec les relations ci-dessus, le terme de diffraction qui apparaît dans l'équation. On le réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) - \varepsilon \lambda'_{j_0}(k_L, 0) \partial_z \right) \\ &= \frac{i}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X)^2 - \lambda_{j_0}(k_L, 0)^2}{\lambda_{j_0}(k_L, 0) + \lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X)} \right) - \lambda'_{j_0}(k_L, 0) \partial_z. \end{aligned}$$

On commence par regarder le terme qui se trouve au dénominateur dans la parenthèse. Il s'écrit alors en développant par rapport à ε ,

$$\lambda_{j_0}(k_L, 0) + \lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) = 2\omega_L + 2i\omega'(k_L)\varepsilon\partial_z + 2\omega''(k_L)\varepsilon^2\partial_z^2 + \dots$$

On fait de même avec le numérateur qui s'écrit

$$\frac{i}{\varepsilon} (\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X)^2 - \lambda_{j_0}(k_L, 0)^2) = i\omega_L\omega'(k_L)\partial_z + \frac{i(\omega_L + \gamma - \eta_a^2 + 3k_L^2)}{\omega_L} \varepsilon\partial_z^2 + i\varepsilon\Delta_\perp + \dots$$

On regroupe l'expression du numérateur, du dénominateur et celle de la vitesse de groupe (1.24), pour obtenir l'expression suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \left(-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) - \varepsilon \lambda'_{j_0}(k_L, 0) \partial_z \right) &= \frac{i\varepsilon}{2\omega_L + 2i\omega'(k_L)\varepsilon\partial_z + 2\omega''(k_L)\varepsilon^2\partial_z^2} \Delta_\perp \\ &+ \left(\frac{i\varepsilon(\omega_L + \gamma - \eta_a^2 + 3k_L^2)}{\omega_L(2(\omega_L + 2i\omega'(k_L)\varepsilon\partial_z + 2\omega''(k_L)\varepsilon^2\partial_z^2))} - 2i\omega'(k_L)^2\varepsilon \right) \partial_z^2 + \dots \end{aligned}$$

Pour finir, on se place dans le référentiel de transport à la vitesse de groupe en faisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} t' = t + \frac{1}{\lambda'_{j_0}(k_L, 0)} z, \\ \varepsilon z' = z. \end{cases}$$

L'équation se réécrit alors

$$\begin{aligned} -i\partial_z \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{2(k(\omega_L) + ik'(\omega_L)\varepsilon\partial_t + k''(\omega_L)\varepsilon^2\partial_{tt}^2 + \dots)} \Delta_\perp \mathcal{U}^\varepsilon - \frac{k''(\omega_L)}{2} \partial_{tt}^2 \mathcal{U}^\varepsilon \\ = \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \sqrt{\varepsilon} D_X) f(\mathcal{U}^\varepsilon) \end{aligned}$$

Pour la première composante du vecteur \mathcal{U}^ε , on peut écrire l'équation de Schrödinger modifiée non linéaire, en revenant dans les variables (z, x, y, t) , sous la forme

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g} \partial_t + 2\sigma\partial_{tt}^2 + \dots} \Delta_\perp \mathcal{E} + \sigma\partial_{tt}^2 \mathcal{E} + \dots + \frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g} \partial_t + \sigma\partial_{tt}^2 + \dots)} (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0.$$

En tronquant cette équation à l'ordre deux, on retrouve bien l'équation (1.50) obtenue avec l'approche formelle décrite au paragraphe (1.4). Cette équation s'écrit

$$-i\partial_z\mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t + 2\sigma\partial_{tt}^2}\Delta_\perp\mathcal{E} + \sigma\partial_{tt}^2\mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t + \sigma\partial_{tt}^2)}(|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}) = 0. \quad (1.59)$$

Elle possède le bon terme de diffraction qui tient compte des aberrations temporelles et un terme non linéaire plus compliqué que le terme d'effet Kerr habituel. Celui-ci étant traité numériquement à l'aide de transformées de Fourier en temps et comme une perturbation du terme d'effet Kerr non linéaire.

Remarque 1.5.5. *Bref retour sur la notion de nappe.*

Si $K \in \mathbb{R}$, la notion de nappe peut être globalement bien définie même si pour cela, on doit prolonger les fonctions de façon régulière à travers les points singuliers.

En revanche, si $K \in \mathbb{R}^d$, c'est beaucoup moins clair. On fera donc l'hypothèse suivante : la variété caractéristique \mathcal{C}_L peut être paramétrée globalement par un certain nombre de fonctions λ_j pouvant avoir un nombre fini de points singuliers.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous allons donc comparer numériquement les différents modèles de Schrödinger, en régime linéaire ou non. Notons également que la justification rigoureuse du modèle (1.56) sera présentée au chapitre II.

Deuxième partie

Comparaison numérique des différents modèles.

2.1 Comparaison numérique du modèle de Schrödinger classique avec le modèle de Schrödinger modifié, pour le cas d'un milieu linéaire

2.1.1 Problématique

Dans ce paragraphe, nous comparons numériquement en 1D transverse, dans le cas linéaire, les solutions du modèle de Schrödinger standard qui s'écrit

$$-i\partial_z \mathcal{V} + \frac{1}{2k_L} \Delta_{\perp} \mathcal{V} = 0,$$

avec les solutions du modèle de Schrödinger modifié suivant

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g} \partial_t + 2\sigma \partial_{tt}^2} \Delta_{\perp} \mathcal{E} = 0.$$

Nous imposons de plus pour cette étude que $\sigma = 0$. Nous montrons alors que le modèle de Schrödinger modifié linéaire est plus adapté que le modèle de Schrödinger standard si on augmente le spectre de l'impulsion initiale *i.e.* si on diminue la durée de l'impulsion (figure 1.5).

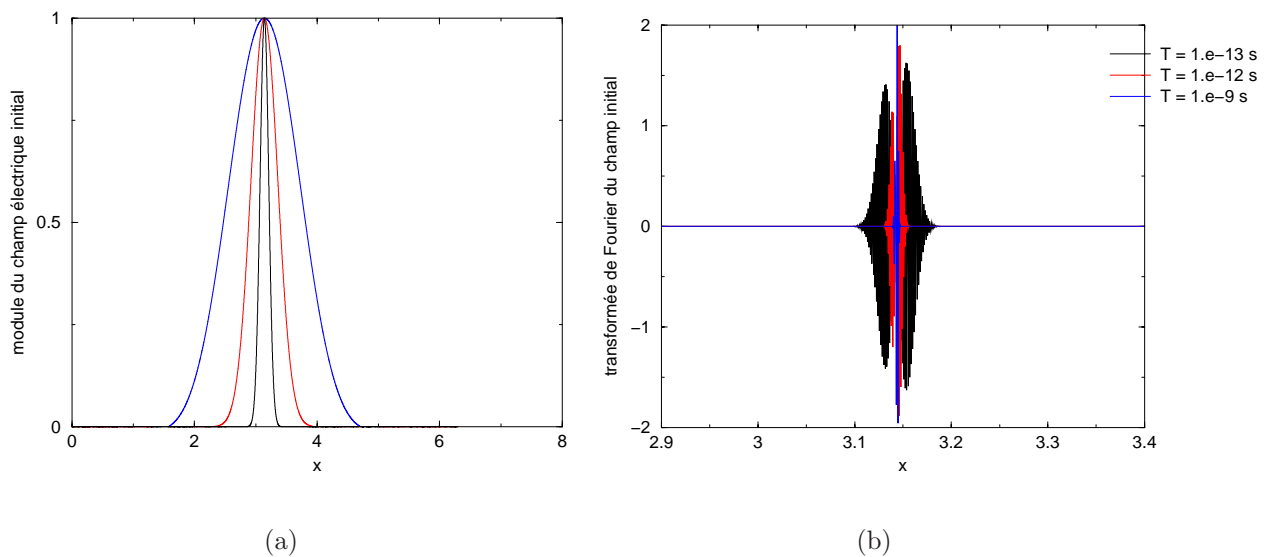


FIG. 1.5 – (a) Impulsions initiales en fonction de leur durée; (b) Spectres respectifs des impulsions initiales.

Ainsi, on mesure l'écart introduit par la prise en compte des aberrations temporelles en comparant les solutions des équations ci-dessus avec et sans la vitesse de groupe.

Pour cela, on calcule

$$\text{écart} := \frac{\|\mathcal{E} - \mathcal{V}\|_{L^2}}{\sup(\|\mathcal{E}\|_{L^2}, \|\mathcal{V}\|_{L^2})}.$$

On compare cet écart au petit paramètre ε qui a servi lors de l'approximation d'enveloppe réalisée sur le système de Maxwell-Lorentz anharmonique. Cette approximation induit une erreur entre les solutions du système de Maxwell-Lorentz anharmonique et celles du modèle asymptotique de Schrödinger standard. Cette erreur est de l'ordre de $C\varepsilon$, avec C une constante [20].

On montre alors que si l'écart entre les solutions des deux modèles de Schrödinger linéaires, standard et modifié, est inférieur à ε . On commet une erreur plus faible que celle commise entre la solution du système de Maxwell-Lorentz anharmonique et celle du modèle de Schrödinger standard. Dans ce cas, le modèle de Schrödinger standard est suffisant. Par contre, si l'écart entre les solutions des deux modèles de Schrödinger linéaires, standard et modifié, est plus grande que ε alors le modèle le plus précis est préférable, autrement dit le modèle de Schrödinger linéaire modifié. On peut maintenant définir le type de données initiales que l'on va regarder.

2.1.2 Définition des données initiales

On note $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ la solution du système de Maxwell-Lorentz et $\mathcal{E}(x, y, z, t)$, $\mathcal{V}(x, y, z, t)$ les enveloppes des champs solutions des équations de Schrödinger linéaires modifiée et standard.

Les conditions initiales \mathcal{E}_0 et \mathcal{V}_0 , s'écrivent sous la forme spatio-temporelle suivante

$$\mathcal{E}_0(t, x, y) = \mathcal{V}_0(t, x, y) = f(t)g(x, y).$$

La forme spatiale $g(x, y)$ est définie de la façon suivante

$$g(x, y) = e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}, \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_0 = \frac{D}{2} \left(\frac{2}{\log 2}\right)^{1/2},$$

$D :=$ diamètre pris à mi-hauteur de l'intensité.

La forme temporelle $f(t)$ est définie quant à elle par

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \quad \text{avec } T := \text{durée de l'impulsion à mi-hauteur de l'intensité},$$

$$\lambda = 2\pi T \varepsilon c = 1.053 \mu m := \text{la longueur d'onde centrale du laser},$$

$$\tau = \frac{T}{2(\log 2)^{1/2}}.$$

Les champs ainsi créés sont corrigés par rapport à l'énergie qui a été fixée en donnée ou de l'intensité maximum que l'on veut au départ. Par la suite, on sera amené à faire varier le diamètre de l'impulsion D entre $10^{-2}m$ et $10^{-3}m$ et la durée de l'impulsion T entre $10^{-9}s$ et $10^{-14}s$. Notons également que pour simplifier le problème, on se place en une dimension d'espace transverse.

2.1.3 Méthode et résultats numériques

a. Méthode Numérique

Pour discrétiser la partie temporelle de l'équation de Schrödinger linéaire modifiée, on utilise une transformée de Fourier, (annexe I). Pour discrétiser la partie spatiale transverse des équations de Schrödinger standard et modifiée, on dispose de deux méthodes, soit à base de différences finies, soit à base de transformées de Fourier.

Maillage. On considère ici des champs dépendant des variables (z, x, t) . On note j l'indice de discrétisation suivant la variable x , p l'indice de discrétisation suivant la variable t et n l'indice de discrétisation suivant la variable z . On prend $z \in [0, z_{max}]$, $t \in [t_{min}, t_{max}]$ et $x \in [x_{min}, x_{max}]$. Le coefficient p_{max} représente le nombre de pas de temps, j_{max} le nombre de pas en x , et n_{max} la longueur de propagation.

On prend, dans un premier temps, la transformée de Fourier en temps de l'équation de Schrödinger linéaire modifiée, ce qui donne

$$-2i(k_L + \frac{\omega(p)}{v_g})\partial_z \widehat{E}_p + \partial_{xx}^2 \widehat{E}_p = 0, \text{ avec } \omega(p) = \frac{2\pi(p-1)}{k_{max}dt} \text{ pour } p = 1, \dots, k_{max}. \quad (2.60)$$

On réécrit cette première équation sous la forme suivante

$$-2i\kappa(\omega)\partial_z \widehat{E}_p + \partial_{xx}^2 \widehat{E}_p = 0,$$

Pour ce qui est de la discrétisation spatiale transverse, on propose deux méthodes

- Soit par une transformée de Fourier suivant x et l'intégration en z est alors exacte mode de Fourier par mode de Fourier. La solution du point $(n+1)$ s'écrit alors

$$\widehat{E}_{p,j}^{n+1} = \widehat{E}_{p,j}^n e^{-i \frac{\xi_j^2}{2\kappa(\omega)} dz}, \text{ avec } \xi_j = \frac{2\pi(j-1)}{j_{max}dx} \text{ pour } j = 1, \dots, j_{max}$$

- Soit par une méthode de différences finies en x suivie par un schéma de type Crank-Nicolson en z . L'équation (2.60) peut alors s'écrire sous la forme du système suivant

$$A\widehat{E}_p^{n+1} = B\widehat{E}_p^n$$

avec A et B deux matrices tridiagonales symétriques.

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha + 1 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 2\alpha + 1 & -\alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 2\alpha + 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2\alpha + 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & -2\alpha + 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & -2\alpha + 1 \end{pmatrix}$$

et $\alpha = \frac{dz}{4i\kappa(\omega)dx^2}$. Pour trouver \widehat{E}_p^{n+1} , il faut inverser la matrice A . Pour cela, on utilise la méthode LU.

Pour des questions de rapidité de convergence qui seront importante en non linéaire, on utilise plutôt la méthode des transformées de Fourier suivant x pour nos cas tests. De plus, cette méthode est plus performante lorsque l'on veut se placer en deux dimensions d'espace.

b. Résultats Numériques

Dans un premier temps, pour une durée d'impulsion fixée de l'ordre de quelques picosecondes $T = 10^{-12}s$, on fait varier le diamètre de l'impulsion de $D = 10^{-2}m$ à $D = 10^{-3}m$ pour voir l'influence du terme de vitesse de groupe v_g . Tous les résultats présentés dans les planches suivantes sont des résultats convergés en maillage.

Résultats obtenus en faisant varier le diamètre de l'impulsion de $D = 10^{-2}m$ à $D = 10^{-3}m$ pour une durée d'impulsion de $T = 2 \cdot 10^{-12}s$. Dans ce cas, $\varepsilon = 0.28 \cdot 10^{-3}$.

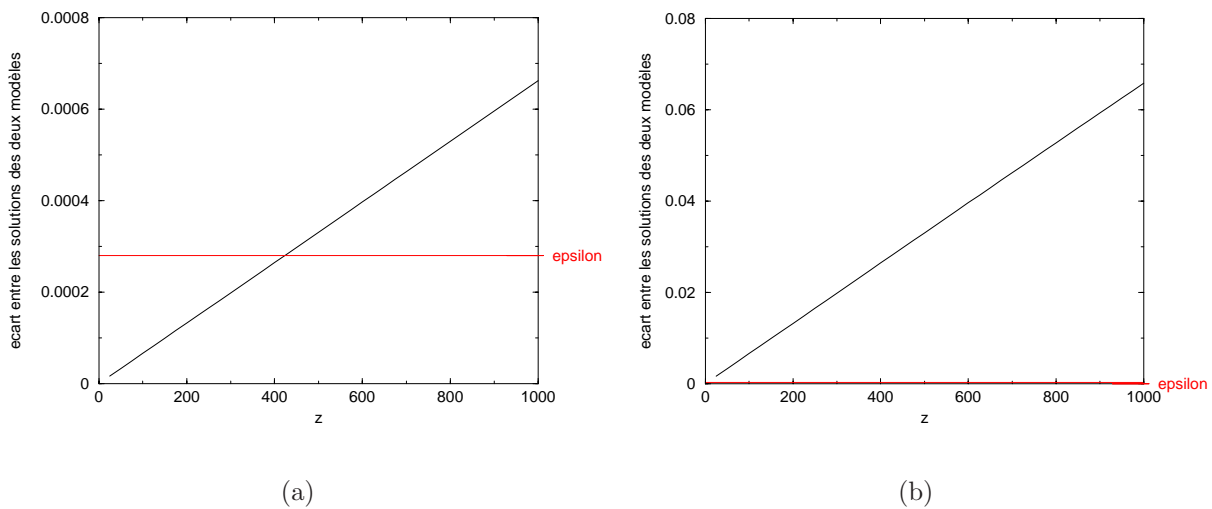


FIG. 1.6 – (a) Ecart entre les solutions des deux modèles avec un diamètre de $10^{-2}m$; (b) Ecart entre les solutions des deux modèles avec un diamètre de $10^{-3}m$.

On constate que pour une durée d'impulsion fixée, si le diamètre de l'impulsion *diminue* alors l'écart entre les solutions des deux modèles de Schrödinger *augmente* ce qui induit le fait qu'il est nécessaire d'introduire les termes de phase d'ordre élevé (*i.e.* v_g).

Dans un deuxième temps, on fixe cette fois-ci le diamètre de l'impulsion $D = 10^{-2}m$ et on fait varier la durée de l'impulsion de $T = 10^{-12}s$ à $T = 10^{-14}s$.

Résultats obtenus en faisant varier la durée d'impulsion de $T = 2 \cdot 10^{-12} s$ à $T = 2 \cdot 10^{-14} s$ pour un diamètre de $D = 10^{-2} m$.

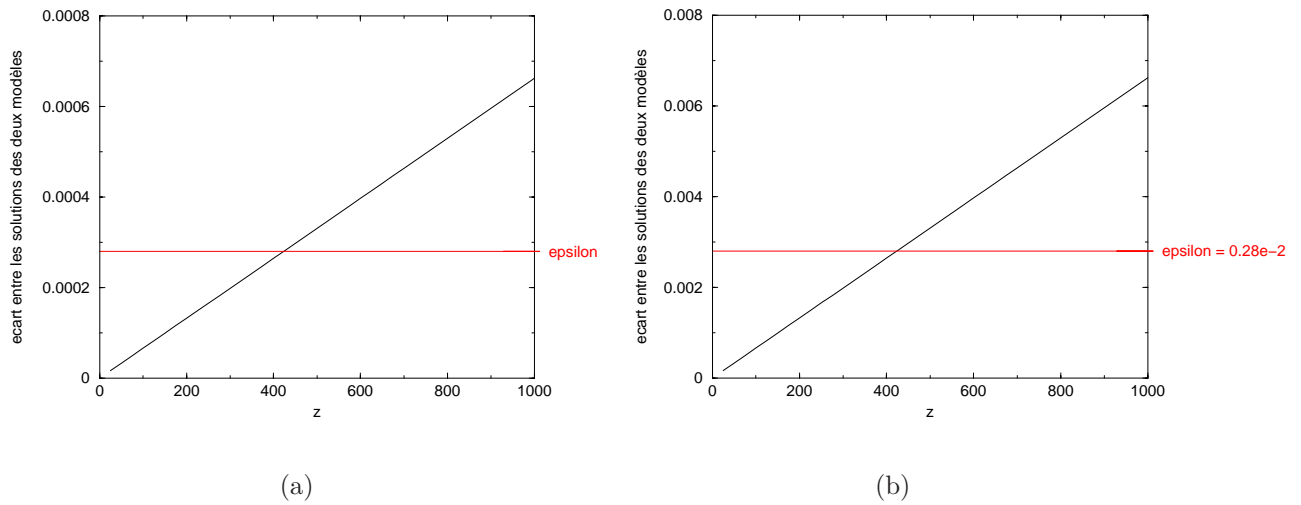


FIG. 1.7 – (a) Ecart entre les solutions des deux modèles pour une durée d'impulsion de $2 \cdot 10^{-12} s$; (b) Ecart entre les solutions des deux modèles pour une durée d'impulsion de $2 \cdot 10^{-13} s$.

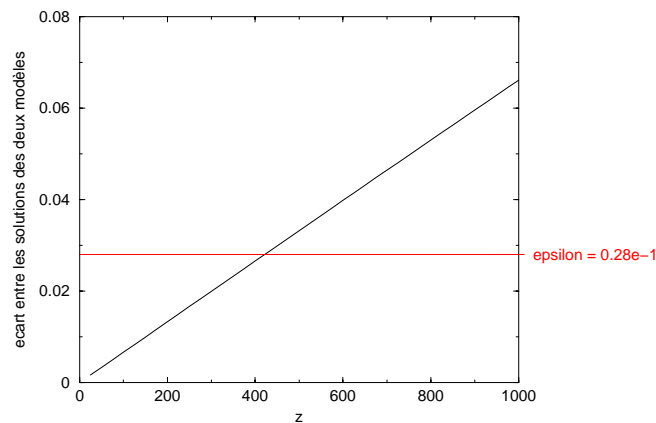


FIG. 1.8 – Ecart entre les solutions des deux modèles pour une durée d'impulsion de $2 \cdot 10^{-14} s$.

On constate que

- Pour un diamètre fixé, si on fait varier la durée de l'impulsion, l'écart entre les solutions reste toujours d'ordre ε tant que $L \ll D$, il a donc peu d'influence.
- On remarque aussi que le paramètre ε augmente quand la durée d'impulsion diminue. Dans le cas d'une impulsion ultra-courte, $T = 10^{-14} s$ (figure 1.8), il serait alors intéressant de mesurer exactement l'erreur commise entre la solution du système de Maxwell-Lorentz et son asymptotique.

2.2 Choix de l'expression du terme non linéaire pour l'équation de Schrödinger modifiée

Dans cette partie, nous allons mettre en évidence le fait, que pour les durées d'impulsion qui intéressent le CEA/CESTA dans le cadre des applications LMJ (durées d'impulsions de l'ordre de $T = 10^{-9}s$), prendre le terme d'effet Kerr habituel comme effet non linéaire pour l'équation de Schrödinger modifiée est suffisant.

Par contre, nous montrons que lorsque la durée d'impulsion augmente, typiquement $T = 10^{-12}s$ pour le laser "Pétawatt" où $T = 10^{-13}s$ pour les impulsions ultra-courtes, le choix du terme non linéaire se pose réellement.

Le but de ces comparaisons numériques est également de justifier les approximations d'erreur que l'on obtient dans les théorèmes du chapitre II (théorème 2.4.1).

Pour aboutir à ces conclusions, nous nous restreignons au cas où la dispersion des vitesses de groupe est nulle ($\sigma = 0$), on tient alors seulement compte de la vitesse de groupe v_g en comparant les deux équations suivantes

- *Equation de Schrödinger avec le terme d'effet Kerr*

$$-i\partial_z \mathcal{V} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t} \partial_{xx}^2 \mathcal{V} + \gamma_{nl} \frac{\omega_L^2}{2c^2 k_L} |\mathcal{V}|^2 \mathcal{V} = 0, \quad (2.61)$$

- *Equation de Schrödinger avec prise en compte de v_g au niveau du terme non linéaire*

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t} \partial_{xx}^2 \mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t)} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (2.62)$$

Nous initialisons les champs \mathcal{V}_0 et \mathcal{E}_0 de la même manière que pour le cas linéaire précédent.

Méthode numérique

Pour résoudre les équations précédentes, on utilise une méthode à pas fractionnaires. Dans un premier temps, on résout, sur un demi pas en z , les parties linéaires des équations ci-dessus comme dans le paragraphe précédent. Puis on résout le non linéaire, comme décrit ci-après, sur un pas en z et on finit par résoudre les parties linéaires sur le demi pas en z restant.

Pour l'équation (2.61), prendre en compte le terme non linéaire revient à résoudre

$$-i\partial_z \mathcal{V} + \gamma_{nl} \frac{\omega_L^2}{2c^2 k_L} |\mathcal{V}|^2 \mathcal{V} = 0,$$

ce qui revient à avoir

$$\mathcal{V}_{p,j}^{n+1/2} = \mathcal{V}_{p,j}^n e^{-i \frac{\gamma_{nl} \omega_L^2 dz}{2c^2 k_L} (|\mathcal{V}|^2)_{p,j}^n}.$$

Pour ce qui est de l'équation (2.62), prendre en compte le terme non linéaire revient à résoudre

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t)} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons considérer que le terme non linéaire ci-dessus est une perturbation du terme non linéaire d'effet Kerr classique. Ainsi, l'équation ci-dessus peut se réécrire

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \left(\frac{\gamma_{nl}\omega_L^2}{2c^2k_L} + \frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t)} - \frac{\gamma_{nl}\omega_L^2}{2c^2k_L} \right) (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0.$$

La résolution de cette équation se fait en trois étapes

- Première étape, résolution du terme d'effet Kerr usuel

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl}\omega_L^2}{2c^2k_L} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0,$$

ce qui implique

$$\mathcal{E}_{p,j}^{n+1/4} = \mathcal{E}_{p,j}^n e^{-i \frac{\gamma_{nl}\omega_L^2 (dz/2)}{2c^2k_L} (|\mathcal{E}|^2)_{p,j}^n}.$$

- Deuxième étape, résolution de

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \left(\frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t)} - \frac{\gamma_{nl}\omega_L^2}{2c^2k_L} \right) (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0.$$

Le fait de considérer cette expression comme une perturbation du terme d'effet Kerr est valide car ce terme est petit devant celui de l'effet Kerr. On commence par prendre la transformée de Fourier en temps de cette dernière équation

$$-i\partial_z \widehat{\mathcal{E}}_{p,j} + \left(\frac{\gamma_{nl}(\omega_L + \omega)^2}{2c^2(k_L + \frac{\omega}{v_g})} - \frac{\gamma_{nl}\omega_L^2}{2c^2k_L} \right) (\widehat{|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}})_{p,j} = 0.$$

On obtient alors

$$\widehat{\mathcal{E}}_{p,j}^{n+2/4} = \widehat{\mathcal{E}}_{p,j}^{n+1/4} - \left[i dz \left(\frac{\gamma_{nl}(\omega_L + \omega)^2}{2c^2(k_L + \frac{\omega}{v_g})} - \frac{\gamma_{nl}\omega_L^2}{2c^2k_L} \right) (\widehat{|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}})_{p,j}^{n+1/4} \right].$$

On peut effectivement utiliser l'étape ci-dessus car le terme entre crochet est petit devant celui de l'effet Kerr. On termine cette étape en prenant la transformée de Fourier inverse en temps.

- Troisième étape, résolution de

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl}\omega_L^2}{2c^2k_L} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0.$$

soit

$$\mathcal{E}_{p,j}^{n+3/4} = \mathcal{E}_{p,j}^{n+2/4} e^{-i \frac{\gamma_{nl}(dz/2)\omega_L^2}{2c^2k_L} (|\mathcal{E}|^2)_{p,j}^{n+2/4}}.$$

Enfin, pour obtenir la solution de l'équation (2.62) au point $(n+1)$, on résout la partie linéaire comme pour le paragraphe précédent.

2.2.1 Comparaison des solutions des deux modèles dans le cadre d'une application LMJ

Pour réaliser la comparaison des solutions des équations (2.61) et (2.62), on se place sur une distance de propagation de 10cm avec $\gamma_{nl} = 2.97 \cdot 10^{-20} \text{m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$ et une durée d'impulsion $T = 2\text{ps}$. Les simulations sont réalisées avec le domaine de calcul suivant $x \in [-25\text{cm}; 25\text{cm}]$ et $t \in [0; 4 \cdot 10^{-8}]$. Les comparaisons sont présentées pour différentes valeurs de l'intensité maximum du champ initial (intensités prises à différents endroits de la chaîne LMJ, et notamment avant les KDP). Afin de vérifier que les effets non linéaires sont importants, pour une intensité du champ initial donnée, on présente sur la colonne de gauche l'écart entre les solutions de l'équation (2.61) linéaire et non linéaire avec le terme d'effet Kerr. Ainsi nous pouvons savoir si les effets non linéaires sont ou non visibles pour l'intensité initiale considérées. Et sur la colonne de droite, nous représentons l'écart obtenu entre la solution de l'équation (2.61) non linéaire avec le terme d'effet Kerr et celle de l'équation (2.62) non linéaire avec le terme du développement. Tous ces résultats sont des résultats convergés en maillage et dont le petit paramètre ε vaut $0.28 \cdot 10^{-6}$.

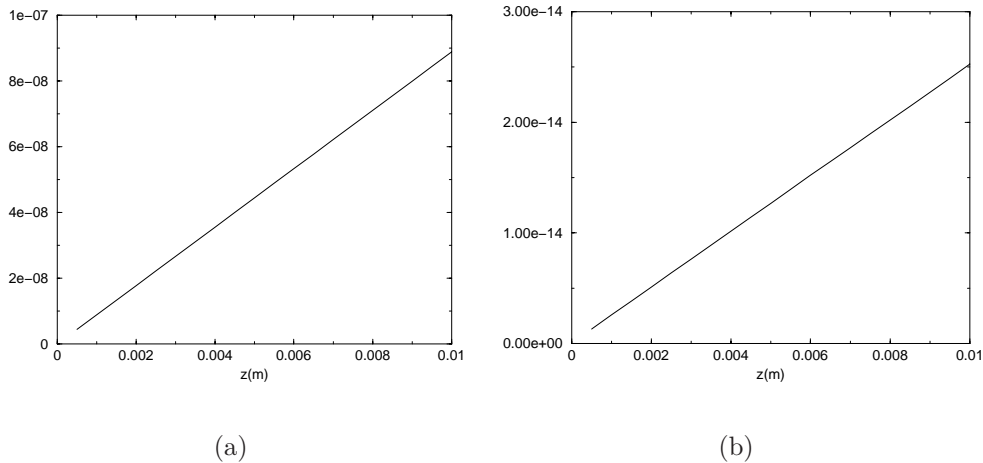


FIG. 1.9 – Intensité maximum du champ initial de $8.68 \cdot 10^7 \text{W} \cdot (\text{m}^2)^{-1}$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

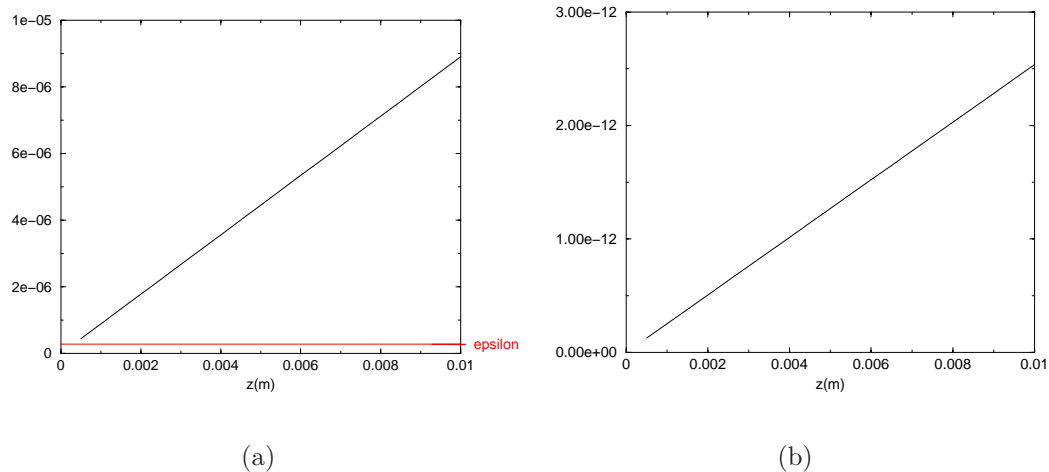


FIG. 1.10 – Intensité maximum du champ initial de $8.7 \cdot 10^9 W.(m^2)^{-1}$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

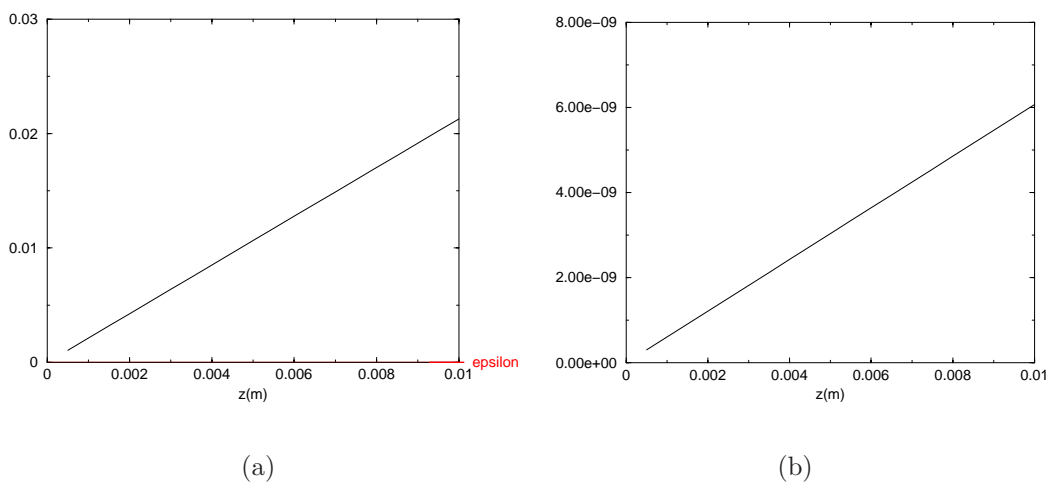


FIG. 1.11 – Intensité maximum du champ initial de $2.08 \cdot 10^{13} W.(m^2)^{-1}$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

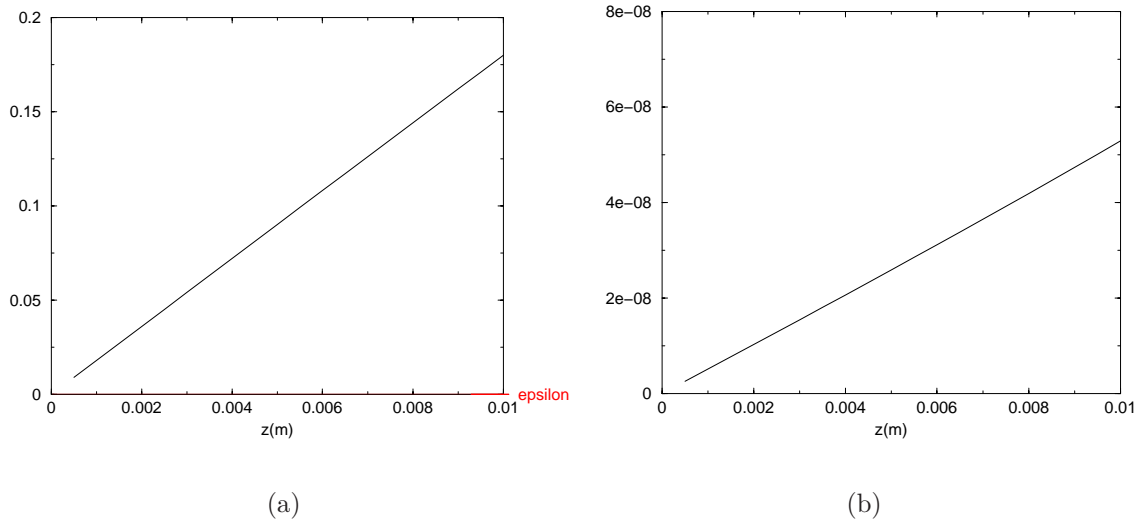


FIG. 1.12 – Intensité maximum du champ initial de $1.76 \cdot 10^{14} W \cdot (m^2)^{-1}$. (a) Présence des effets non linéaires; (b) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

Pour les applications du LMJ, avec les résultats précédents, prendre le terme d'effet Kerr comme terme non linéaire suffit amplement. En effet, on constate que pour une intensité maximum du champ initial de $2.08 \cdot 10^{13}$ (figure 1.11, qui est l'intensité du champ avant l'entrée dans le KDP tripleur de fréquence dans la chaîne de puissance LMJ), l'écart mesuré entre, la solution prenant comme terme non linéaire le terme d'effet Kerr et celle prenant comme terme non linéaire celui ayant v_g , reste inférieur à ϵ . Ainsi, on commet une erreur plus faible que celle obtenue entre la solution du système de Maxwell-Lorentz et celle de son asymptotique.

2.2.2 Comparaison des solutions des deux modèles dans le cadre "Pétawatt " ou pour des impulsions ultra-courtes

Pour réaliser la comparaison des solutions des équations (2.61) et (2.62), on se place sur une distance de propagation de $0.01m$ avec $\gamma_{nl} = 2.97 \cdot 10^{-20} m^2 \cdot W^{-1}$ et des durées d'impulsion allant de $T = 2 \cdot 10^{-12}s$ à $T = 2 \cdot 10^{-13}s$. Pour ce qui est du domaine de calcul, pour la variable transverse x , on prend le même intervalle que précédemment et pour le temps, on prend $t \in [0; 4 \cdot 10^{-11}]$ pour $T = 2 \cdot 10^{-12}s$ et $t \in [0; 4 \cdot 10^{-12}]$ pour $T = 2 \cdot 10^{-13}s$. Tous les résultats sont des résultats convergés en maillage, mais contrairement aux cas précédents, on ne fixe plus l'intensité maximum du champ initial mais son énergie. Comme précédemment, les courbes de gauche représentent l'écart entre la solution du système linéaire et celle avec le terme d'effet Kerr, et les courbes de droite représentent l'écart entre la solution du système non linéaire avec effet Kerr (2.61) et celle avec le terme du développement (2.62).

Résultats obtenus pour une durée d'impulsion de $T = 2 \cdot 10^{-12} s$, le petit paramètre ε valant $0.28 \cdot 10^{-3}$

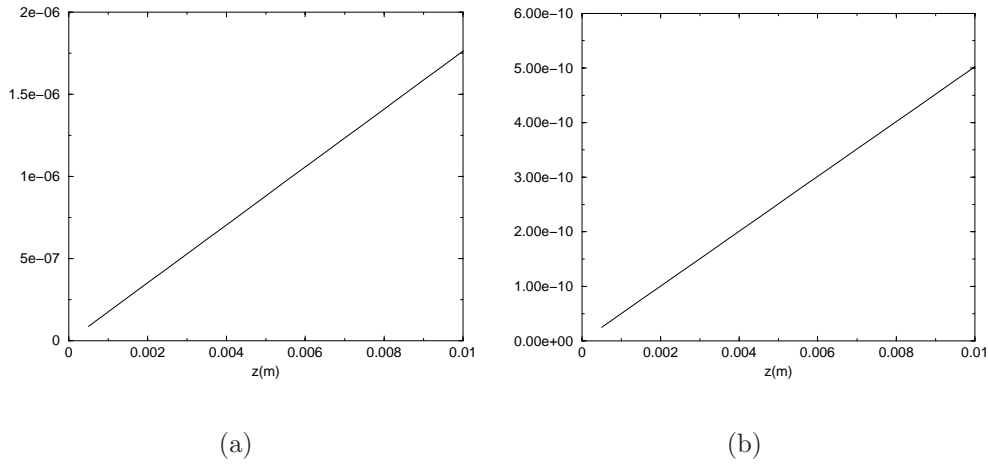


FIG. 1.13 – Energie du champ initial de $3.81 \cdot 10^{-4} J$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

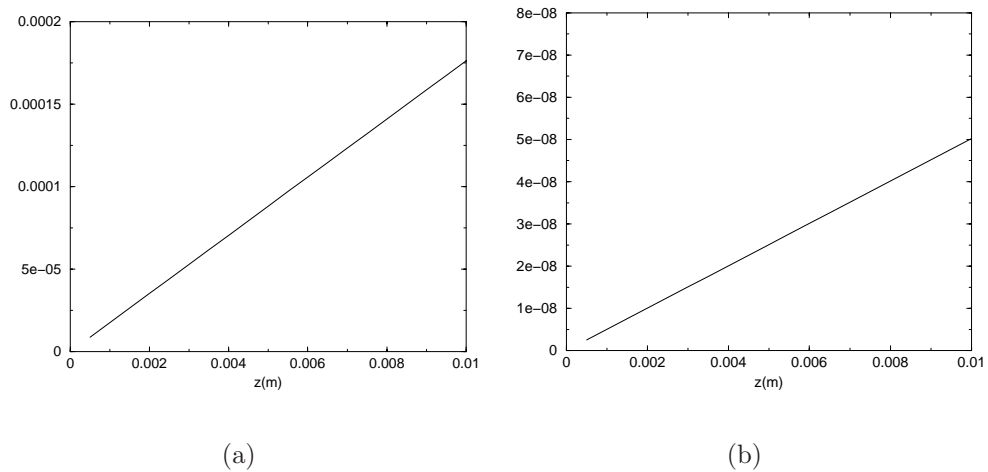


FIG. 1.14 – Energie du champ initial de $3.81 \cdot 10^{-2} J$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

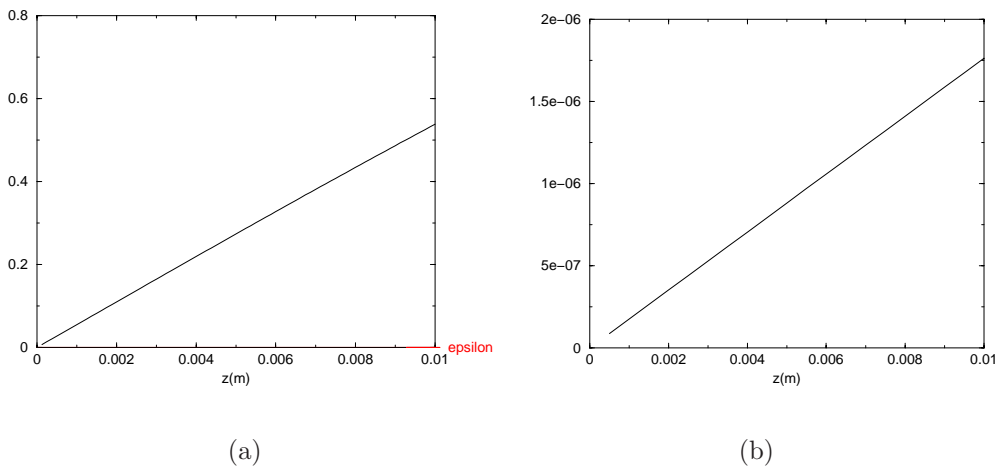


FIG. 1.15 – Energie du champ initial de $1.19 \cdot 10^2 J$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Écart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

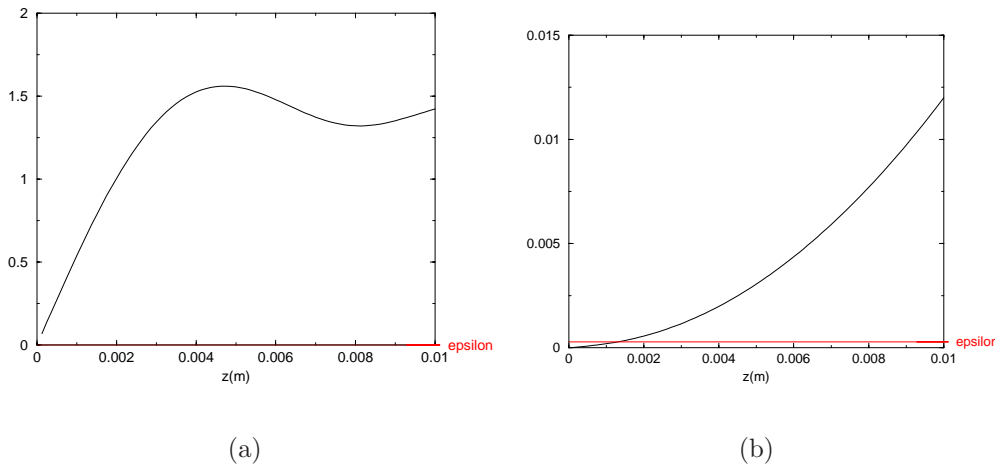


FIG. 1.16 – Energie du champ initial de $1.19 \cdot 10^3 J$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Écart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

On constate, (figures 1.15 et 1.16 de gauche), que les effets non linéaires deviennent importants pour une énergie initiale du champ de l'ordre de $1.19 \cdot 10^2 J$ à $1.19 \cdot 10^3 J$. Pour des énergies plus faibles (figures 1.13 et 1.14), les effets non linéaires ne sont pas visibles, la comparaison de nos modèles non linéaires n'est donc pas nécessaire. Lorsque les effets non linéaires sont visibles, on note que l'écart entre la solution de l'équation de Schrödinger modifiée avec le terme d'effet Kerr (2.61) et celle avec le terme non linéaire obtenu avec le développement (2.62) augmente. On montre ainsi que pour ce type d'impulsions (de l'ordre de quelques nanosecondes), le terme non linéaire obtenu avec le développement semble mieux adapté que le terme non linéaire effet Kerr (figures 1.15 et 1.16 de droite). On va maintenant essayer de voir si cette tendance se confirme si on considère une durée d'impulsion plus

courte, $T = 2 \cdot 10^{-13} \text{ s}$.

Résultats obtenus pour une durée d'impulsion de $T = 2 \cdot 10^{-13} \text{ s}$, le petit paramètre ε valant $0.28 \cdot 10^{-2}$

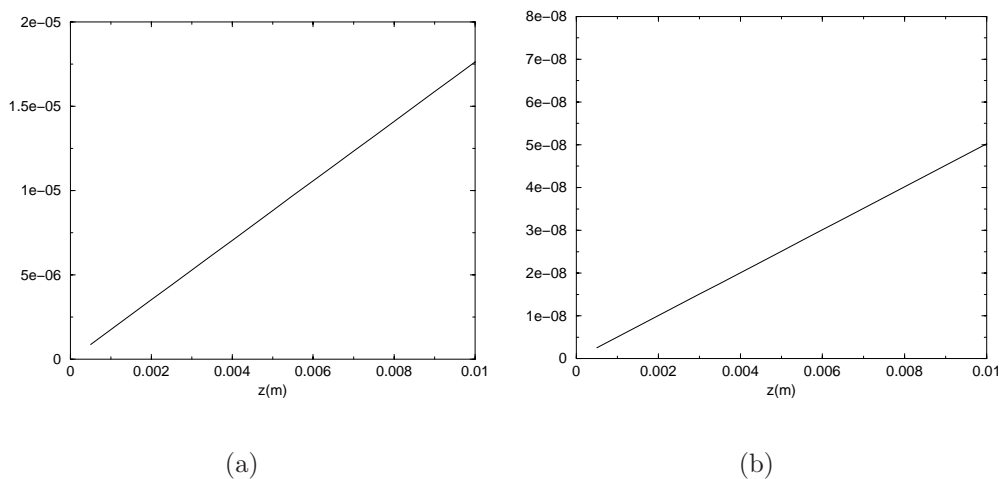


FIG. 1.17 – Energie du champ initial de $3.81 \cdot 10^{-4} \text{ J}$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

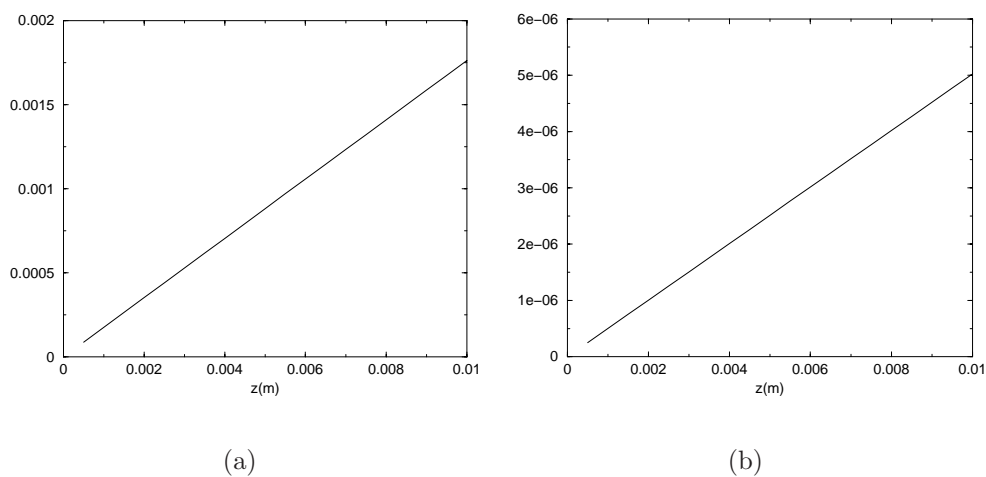


FIG. 1.18 – Energie du champ initial de $3.81 \cdot 10^{-2} \text{ J}$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

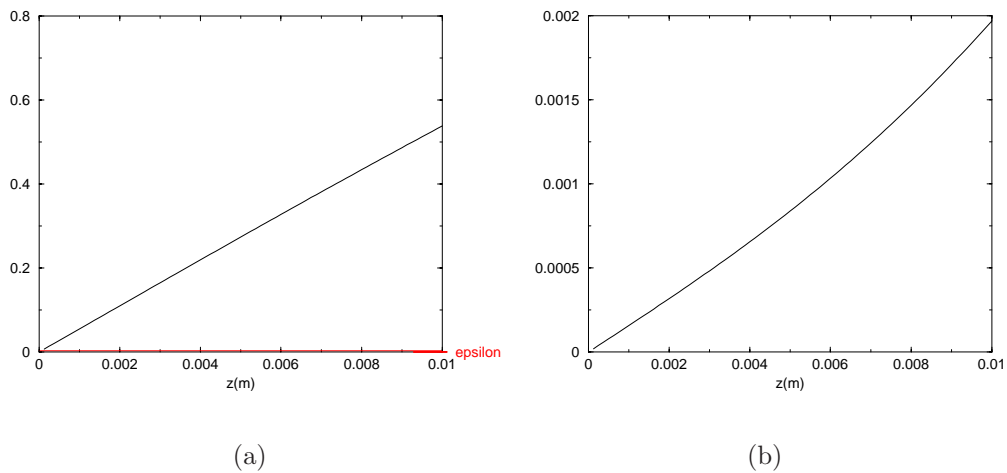


FIG. 1.19 – Energie du champ initial de $1.19 \cdot 10^1 J$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Écart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

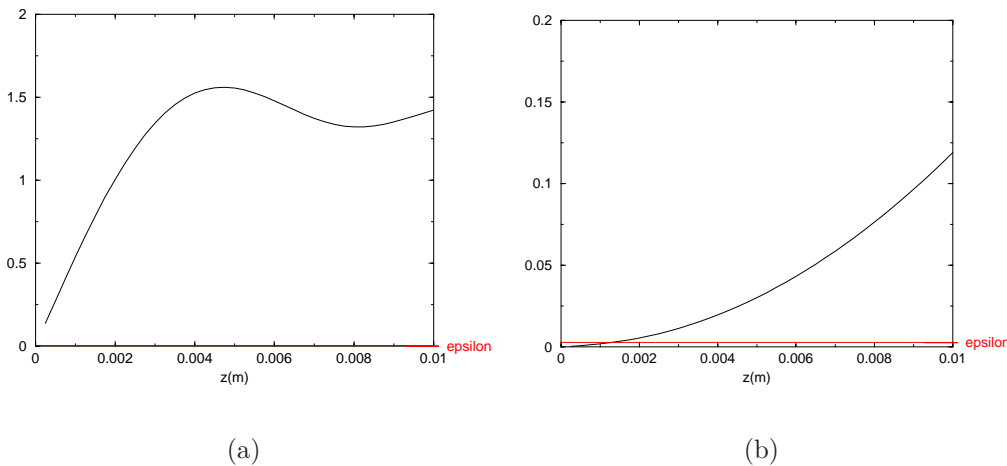


FIG. 1.20 – Energie du champ initial de $1.19 \cdot 10^2 J$. (a) Présence des effets non linéaires ; (b) Écart entre les deux modèles non linéaires (2.61) et (2.62).

Effectivement, pour des énergies initiales du champ de $1.19 \cdot 10^1 J$ à $1.19 \cdot 10^2 J$, les effets non linéaires sont visibles (figures 1.19 et 1.20 de gauche). On remarque alors que l'écart entre la solution du modèle avec le terme d'effet Kerr (2.61) et la solution du modèle (2.62) avec le bon terme du développement augmente (figures 1.19 et 1.20 de droite). Ainsi pour des durées d'impulsion de quelques picosecondes à quelques femtosecondes, choisir le terme non linéaire obtenu par le développement semble plus adapté que de prendre le terme d'effet Kerr pour le modèle de Schrödinger non linéaire modifié. Pour terminer ces comparaisons des modèles non linéaires, il reste à comparer le modèle de Schrödinger standard avec le terme d'effet Kerr avec le modèle de Schrödinger modifié ayant comme terme non linéaire le terme obtenu lors du développement. Ceci est l'objet de la partie qui suit.

2.3 Comparaison des modèles de Schrödinger standard et modifié, en non linéaire

Dans cette dernière partie, nous allons comparer quantitativement les modèles de Schrödinger modifié et standard non linéaires. Le terme non linéaire pour le modèle standard est le terme d'effet Kerr et pour le modèle modifié, on prend le terme obtenu avec le développement. Nous allons ainsi essayer de retrouver les résultats obtenus dans le cas d'un milieu linéaire, à savoir que le modèle de Schrödinger non linéaire modifié est plus adapté que le modèle de Schrödinger standard pour des impulsions courtes ($T = 10^{-12}s$, $T = 10^{-13}s$). Pour ce qui est des impulsions de quelques nanosecondes ($T = 10^{-9}s$), nous allons voir que le terme d'effet Kerr est suffisant ce qui corrobore les résultats obtenus au paragraphe précédent. Pour aboutir à ces conclusions, nous nous restreignons comme précédemment au cas où $\sigma = 0$, en comparant les deux équations suivantes

- *Equation de Schrödinger standard avec le terme d'effet Kerr*

$$-i\partial_z \mathcal{V} + \frac{1}{2k_L} \partial_{xx}^2 \mathcal{V} + \frac{\gamma_{nl}\omega_L^2}{2c^2 k_L} |\mathcal{V}|^2 \mathcal{V} = 0, \quad (2.63)$$

- *Equation de Schrödinger avec prise en compte de v_g au niveau du terme non linéaire*

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g} \partial_t} \partial_{xx}^2 \mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g} \partial_t)} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (2.64)$$

Nous initialisons les champs \mathcal{V}_0 et \mathcal{E}_0 de la même manière que pour le cas linéaire précédent. Les méthodes de résolution numérique sont les mêmes que précédemment. On va commencer par regarder les erreurs obtenues pour des impulsions de quelques nanosecondes.

2.3.1 Comparaison des solutions des deux modèles dans le cadre d'une application LMJ

Pour réaliser la comparaison des solutions des équations (2.63) et (2.64), on se place sur une distance de propagation de $10cm$ avec $\gamma_{nl} = 2.97 \cdot 10^{-20} m^2.W^{-1}$ et une durée d'impulsion $T = 2 \cdot 10^{-9}s$. Les simulations sont réalisées avec le domaine de calcul suivant $x \in [-25cm; 25cm]$ et $t \in [0; 4 \cdot 10^{-8}]$. Les comparaisons sont présentées pour différentes valeurs de l'intensité maximum du champ initial (intensités prises à différents endroits de la chaîne LMJ, et notamment avant les KDP). On reprend les mêmes intensités que précédemment. Tous les résultats suivants sont des résultats convergés en maillage et dont le petit paramètre ε vaut $0.28 \cdot 10^{-6}$. Nous montrons alors que pour les applications du LMJ, prendre le modèle standard avec effet Kerr comme terme non linéaire suffit. En effet, on constate que pour une intensité de $2.08 \cdot 10^{13}$, où l'on a des effets non linéaires (voir paragraphe précédent figure 1.11 de gauche), l'écart entre la solution du modèle standard et celle du modèle modifié est toujours inférieure à ε (figures 1.21 et 1.22).

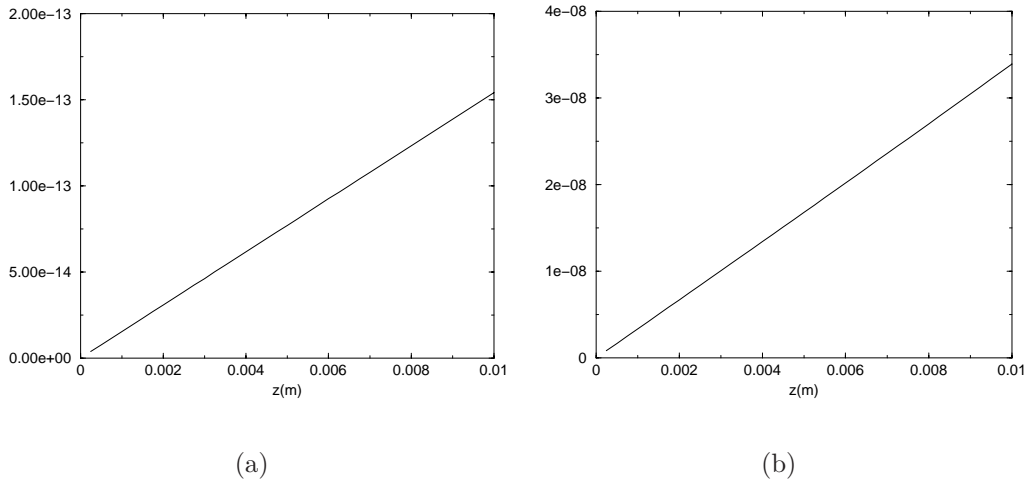


FIG. 1.21 – Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.63) et (2.64). (a) Intensité maximum du champ initial $8.7 \cdot 10^9 W.(m^2)^{-1}$; (b) Intensité maximum du champ initial $2.08 \cdot 10^{13} W.(m^2)^{-1}$.

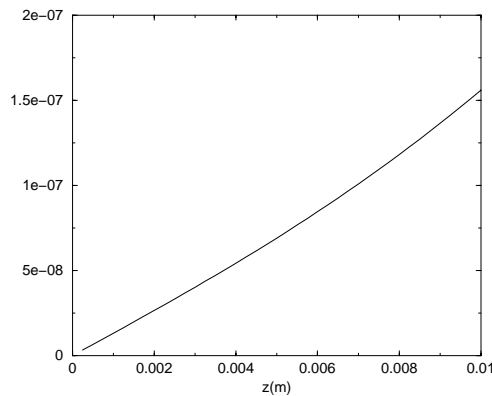


FIG. 1.22 – Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.63) et (2.64), pour une intensité maximum du champ initial de $1.76 \cdot 10^{14} W.(m^2)^{-1}$.

Voyons maintenant, les comparaisons pour des impulsions plus courtes.

2.3.2 Comparaison des solutions des deux modèles pour des impulsions courtes

Pour réaliser la comparaison des solutions des équations (2.63) et (2.64), on se place sur une distance de propagation de 10cm avec $\gamma_{nl} = 2.97 \cdot 10^{-20} m^2.W^{-1}$ et des durées d'impulsion allant de $T = 2 \cdot 10^{-12} s$ à $T = 2 \cdot 10^{-13} s$. Pour ce qui est du domaine de calcul, pour la variable transverse x , on prend le même intervalle que précédemment et pour le temps, on prend $t \in [0; 4 \cdot 10^{-11}]$ pour $T = 2 \cdot 10^{-12} s$ et $t \in [0; 4 \cdot 10^{-12}]$ pour $T = 2 \cdot 10^{-13} s$. Tous les résultats

sont des résultats convergés en maillage, mais contrairement aux cas précédents, on ne fixe plus l'intensité maximum du champ initial mais son énergie.

Résultats obtenus pour une durée d'impulsion de $T = 2 \cdot 10^{-12} s$, le petit paramètre ε valant $0.28 \cdot 10^{-3}$

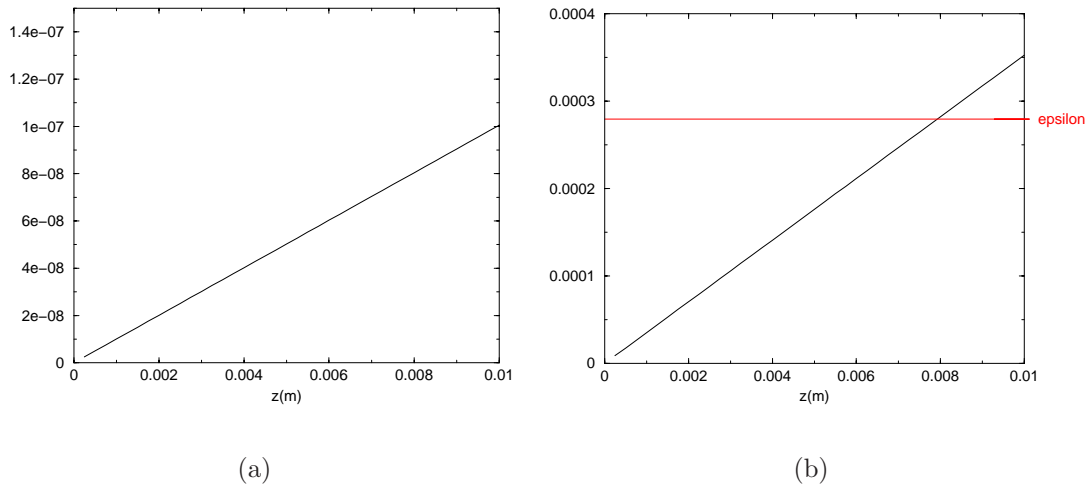


FIG. 1.23 – Energie du champ initial $3.81 \cdot 10^{-2} J$. (a) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.63) et (2.64); (a) Ecart entre les deux modèles linéaires (2.63) et (2.64).

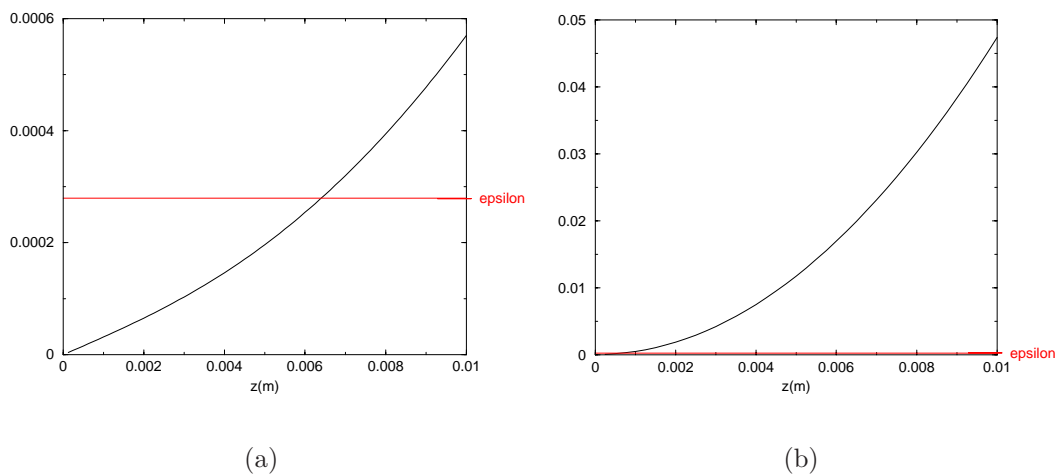


FIG. 1.24 – Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.63) et (2.64). (a) Energie du champ initial $1.19 \cdot 10^2 J$; (b) Energie du champ initial $1.19 \cdot 10^3 J$.

Résultats obtenus pour une durée d'impulsion de $T = 2 \cdot 10^{-13} s$, le petit paramètre ε valant $0.28 \cdot 10^{-2}$

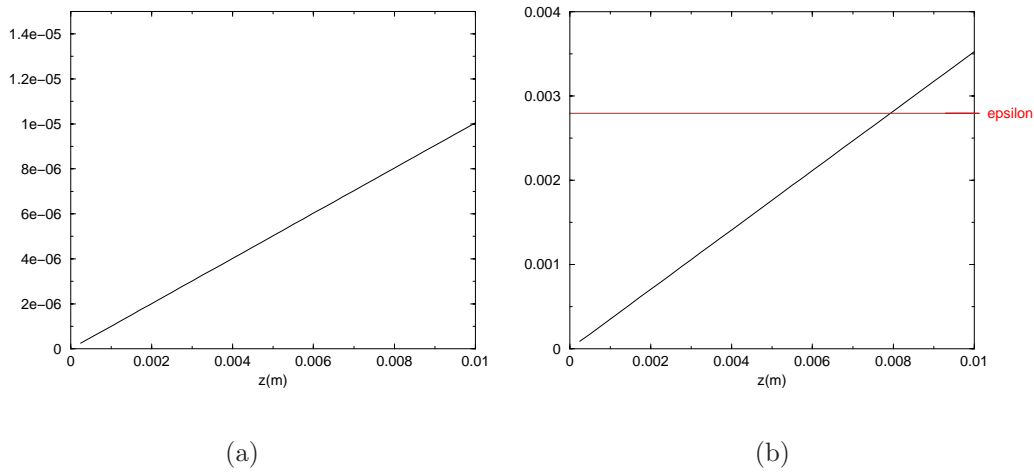


FIG. 1.25 – Energie du champ initial $3.81 \cdot 10^{-2} J$. (a) Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.63) et (2.64); (a) Ecart entre les deux modèles linéaires (2.63) et (2.64).

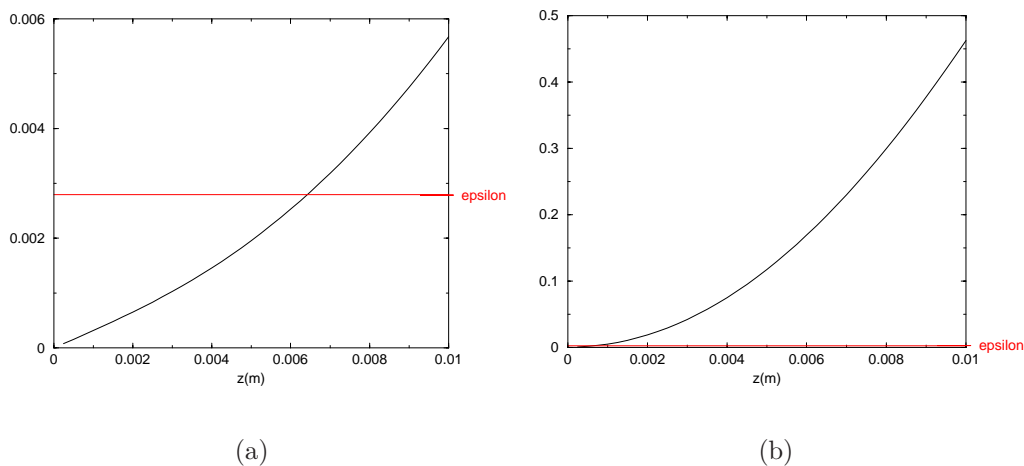


FIG. 1.26 – Ecart entre les deux modèles non linéaires (2.63) et (2.64). (a) Energie du champ initial $1.19 \cdot 10^1 J$; (b) Energie du champ initial $1.19 \cdot 10^2 J$.

Que ce soit pour une durée d'impulsion de $T = 10^{-12} s$ où de $T = 10^{-13} s$, pour une énergie de $3.81 \cdot 10^{-2}$ (figures 1.23 et fig.1.25, à gauche), les effets non linéaires étant très peu présents (paragraphe précédent figures 1.14 et 1.18, à gauche), le choix de l'un où l'autre modèle en non linéaire est indifférent. Par contre, si on regarde l'écart entre les solutions des deux modèles en linéaires (figures 1.23 et 1.25, à droite), on retrouve les résultats du paragraphe 2.1.3, à savoir que le modèle de Schrödinger modifié est plus approprié. Résultats qui se confirment (figures 1.24 et 1.26) en non linéaires, quand ces derniers deviennent importants (voir paragraphe précédent figures 1.15, 1.16, 1.19, 1.20, à gauche).

Conclusion

Ce premier chapitre a permis d'obtenir un modèle asymptotique dont, à la fois le terme de diffraction et le terme non linéaire ne sont pas usuels, et qui permet de considérer des impulsions pour lesquelles l'approximation d'enveloppe n'est pas satisfaite.

Après avoir présenté brièvement les modèles macroscopiques que nous avons considéré ainsi que le cadre mathématique dans lequel nous avons évolué, nous avons pu donner le modèle de Schrödinger modifié. Pour cela, deux méthodes ont été présentées.

Une première méthode formelle préalablement introduite par [44]. Elle permet, à l'aide d'une transformée de Fourier en temps et en décomposant le champ spectral en une composante longitudinale et une composante transverse, d'obtenir notre modèle. Cependant, cette approche ne correspond pas à un cadre théorique rigoureux. Afin, de pouvoir obtenir notre modèle asymptotique modifié de manière systématique et dans un bon cadre théorique, nous avons proposé la seconde approche. En partant de systèmes hyperboliques non linéaires, on fait apparaître une équation singulière pour la solution approchée. A partir de ce système d'équations, on obtient le modèle de Schrödinger non linéaire modifié en diagonalisant le système et en considérant uniquement les harmoniques résonnantes. Cette approche présente l'avantage d'être systématique et de nécessiter le moins d'approximations possibles. La partie théorique de cette approche, existence et unicité de solutions, théorème de stabilité fera l'objet du chapitre suivant.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons réalisé un certain nombre de comparaisons numériques en codant les différents modèles asymptotiques obtenus précédemment. Nous avons tout d'abord comparé les modèles linéaires de Schrödinger standard et modifié. Nous avons ainsi pu montrer que pour le cadre qui nous intéresse, le terme de diffraction dans le modèle modifié est bien celui qu'il faut prendre.

Nous avons ensuite étendu nos comparaisons aux milieux non linéaires. Nous voulions savoir comment choisir le terme non linéaire, le terme d'effet Kerr ou le terme obtenu par le développement, pour le modèle de Schrödinger modifié. Nous avons alors montré que pour des impulsions de l'ordre de quelques nanosecondes, le terme d'effet Kerr était suffisant. Par contre, pour des impulsions plus courtes, de l'ordre de quelques picosecondes, le terme obtenu par le développement semble plus approprié.

Nous avons ensuite comparé le modèle de Schrödinger standard avec le terme d'effet Kerr et le modèle de Schrödinger modifié avec le terme non linéaire obtenu par le développement pour les mêmes durées d'impulsion que précédemment. Nous avons alors montré que le terme d'effet Kerr et le modèle standard était suffisant pour des impulsions de quelques nanosecondes mais pour des impulsions plus courtes, le modèle modifié était plus adapté.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier de manière théorique le modèle de Schrödinger non linéaire modifié que nous venons d'introduire.

Chapitre II

Existence, unicité et stabilité pour la solution de l'équation singulière

Travail réalisé en collaboration avec T. Colin ⁽¹⁾ et G. Gallice ⁽²⁾, soumis pour publication.

Sommaire

Problématique

2.1 Généralités

2.2 Résolution du problème de Cauchy

2.3 Reformulation de l'équation singulière

2.4 Estimation d'erreur

2.4.1 Raisonnement grossier

2.4.2 Stabilité

2.5 Amélioration de l'approximation pour les harmoniques résonnantes

2.5.1 Raisonnement grossier

2.5.2 Stabilité

Conclusion

⁽¹⁾MAB, Université Bordeaux I, 351 cours de la libération, 33 405 Talence Cedex, Thierry.Colin@math.u-bordeaux.fr

⁽²⁾CEA/CESTA, BP 2, 33 114 Le Barp, gallice@bordeaux.cea.fr

Problématique

Nous avons vu dans le chapitre précédent (paragraphe 1.3), que pour des impulsions à spectre légèrement “étalé”, l’équation de Schrödinger non linéaire standard

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L} \Delta_{\perp} \mathcal{E} + \sigma_L \partial_{tt}^2 \mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl} \omega_L^2}{2c^2 k_L} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0,$$

est insuffisante. Pour pallier cette insuffisance et prendre en compte les termes d’aberrations temporelles dans le modèle de Schrödinger non linéaire, nous avons donné, par une approche formelle (paragraphe 1.4) et une approche systématique (paragraphe 1.5), le modèle de Schrödinger non linéaire modifié suivant

$$-i\partial_z \mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g} \partial_t + 2\sigma \partial_{tt}^2 + \dots} \Delta_{\perp} \mathcal{E} + \sigma \partial_{tt}^2 \mathcal{E} + \dots + \frac{\gamma_{nl} (\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2 (k_L - \frac{i}{v_g} \partial_t + \sigma \partial_{tt}^2 + \dots)} (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0.$$

Dans ce chapitre, nous allons compléter la partie théorique de l’approche systématique développée précédemment pour obtenir le nouveau modèle. Dans un premier temps, nous rappellerons le cadre théorique dans lequel nous nous plaçons pour obtenir le modèle asymptotique. En particulier, nous réécrivons l’équation singulière (1.55) qui permet cette dérivation.

Dans un deuxième temps, nous obtiendrons un théorème d’existence et d’unicité de la solution pour cette équation singulière. Plus précisément, nous montrerons que si l’équation singulière (1.55) admet une solution unique alors la solution du modèle de départ (1.21) existe et est unique.

Enfin dans la dernière partie de ce chapitre, nous allons réappliquer les méthodes employées au paragraphe 1.5.1, sur l’équation singulière, pour obtenir le modèle de Schrödinger modifié non linéaire. Ainsi, après avoir diagonalisé l’équation singulière, nous pourrions écrire le premier théorème de stabilité. Pour obtenir ces estimations d’erreur, nous procéderons en deux étapes. Une première étape basée sur un raisonnement grossier permettra d’avoir les ordres de grandeur des estimations. Le théorème de stabilité ainsi que sa démonstration feront quant à eux l’objet de la seconde étape. En particulier, on montrera que l’estimation d’erreur, obtenue pour des régimes faiblement non linéaires, est plus faible que celle obtenue avec le modèle de Schrödinger habituel.

Pour conclure ce chapitre, on présentera une amélioration de cette approximation. Nous pourrions ainsi obtenir une estimation d’erreur qui ne portera que sur les harmoniques résonnantes qui nous intéressent. Comme précédemment, nous commencerons par une étude grossière qui permettra d’obtenir les ordres de grandeur des estimations. Nous pourrions ensuite écrire le second théorème de stabilité du chapitre. En particulier, nous verrons que les erreurs obtenues sont les mêmes que celles du premier théorème de stabilité. Nous finirons cette amélioration en simplifiant le terme non linéaire et en donnant l’estimation d’erreur obtenue après simplification.

2.1 Généralités

Reprécisons d'abord brièvement le cadre théorique considéré. On part de systèmes semi-linéaires, hyperboliques, sans dimension (1.21) s'écrivant sous la forme

$$\begin{cases} L^\varepsilon(\partial)\mathbf{u} = f(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}|_{t=0}(X, z) = \mathbf{u}^0(X, z), \end{cases}$$

où \mathbf{u} prend ses valeurs dans \mathbb{R}^n et $(X, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, avec $d = 1$ où 2 . De plus, $L^\varepsilon(\partial)$ est un opérateur hyperbolique symétrique satisfaisant l'hypothèse suivante

Hypothèse 2.1.1. *Le système (1.21) est symétrique hyperbolique. Plus précisément l'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ s'écrit*

$$L^\varepsilon(\partial) = \partial_t + A(\partial_X) + A_3\partial_z + \frac{L_0}{\varepsilon}, \quad \text{avec} \quad A(\partial_X) = A_1\partial_{x_1} + A_2\partial_{x_2},$$

les matrices $(A_j)_{j=1, \dots, 3}$ sont réelles symétriques et la matrice L_0 est anti-symétrique réelle.

Nous étudions ici des non linéarités du type de celles définies dans l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.1.2. *Il existe une application q -linéaire symétrique F telle que*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n, \forall \delta > 0, f(\delta \mathbf{u}) = \delta^q F(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}).$$

On considère pour notre étude, un faisceau laser de fréquence ω_L et de vecteur d'onde $\vec{K} = (0, 0, k_L)^T$. Ainsi, on prend une condition initiale de la forme

$$\mathbf{u}|_{t=0}(X, z) = \varepsilon^p \left(\mathbf{u}^0(X, z) e^{ik_L \frac{z}{\varepsilon}} + c.c. \right). \quad (2.1)$$

le facteur ε^p définit la taille de la solution.

On cherche une solution approchée \mathcal{U}^ε de la solution exacte \mathbf{u} du système non linéaire (1.21) de la forme

$$\mathbf{u}(t, X, z) = \mathcal{U}^\varepsilon(t, X, z, \theta) \Big|_{\theta = \frac{(k_L z - \omega_L t)}{\varepsilon}}, \quad (2.2)$$

où $\mathcal{U}^\varepsilon(t, X, z, \theta)$ est périodique par rapport à la variable θ et régulière. On a alors la représentation suivante

$$\mathcal{U}^\varepsilon(t, X, z, \theta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_\alpha^\varepsilon(t, X, z) e^{i\alpha\theta}.$$

Remarque 2.1.1. *Dans la première partie du chapitre I, lors de l'obtention du modèle de Schrödinger non linéaire modifié, on considérait des impulsions dont le diamètre était petit devant la longueur. Ainsi les variables transverses $X \in \mathbb{R}^{d-1}$ étaient définies sur des échelles en $O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ et la variable longitudinale z sur une échelle en $O(1)$. Dans ce chapitre, pour simplifier les écritures, on considère toutes les variables spatiales sur une échelle en $O(1)$. En prenant, les échelles du chapitre I, on aboutit aux mêmes résultats d'existence et d'unicité de la solution et au même type d'estimations d'erreur.*

En injectant cette solution approchée (2.2) dans le système de départ (1.21), on écrit une équation appelée **équation singulière**

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + A(\partial_X) \mathcal{U}^\varepsilon + A_3 \partial_z \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A_3 \partial_\theta + L_0) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon), \\ \mathcal{U}^\varepsilon|_{t=0}(t, X, z, \theta) = \mathcal{U}^{\varepsilon,0}(X, z, \theta) = \varepsilon^p (\mathbf{u}^0(X, z) e^{i\theta} + c.c.). \end{cases} \quad (2.3)$$

Remarque 2.1.2. Notons que l'équation singulière définie ci-dessus l'est pour tout t , pour tout X, z et pour $\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}$. Afin de définir complètement le profil \mathcal{U}^ε , on impose que ce profil satisfasse l'équation singulière (2.3) pour tout θ .

Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer que l'unique solution $H^s, s > 1$ du problème de Cauchy (1.21) avec comme condition initiale (2.1) peut s'écrire à l'aide des profils \mathcal{U}^ε définis dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$ et vérifiant (2.3), avec \mathbb{T}_θ le tore de dimension 1.

2.2 Résolution du problème de Cauchy

Le théorème suivant montre que si \mathcal{U}^ε est solution de (2.3) dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$ avec comme condition initiale (2.1), alors \mathbf{u} définie par (2.2) est solution du problème de Cauchy (1.21) dans H^s .

Théorème 2.2.1. Soit $R > 0, s > 1$ et $\mathcal{U}^{\varepsilon,0}$ dans $H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n$ avec $\|\mathcal{U}^{\varepsilon,0}\|_{H^s} \leq R$. Il existe un réel positif $T > 0$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} L^\varepsilon(\partial) \mathbf{u} = f(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(t, X, z)|_{t=0} = \mathcal{U}^{\varepsilon,0}(X, z, \theta), \end{cases}$$

a une unique solution \mathbf{u} dans $\mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^d)^n \cap \mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))$.

De plus, \mathbf{u} peut s'écrire sous la forme $\mathbf{u}(t, X, z) := \mathcal{U}^\varepsilon(t, X, z, \theta) \Big|_{\theta = \frac{k_L z - \omega_L t}{\varepsilon}}$, où

$\mathcal{U}^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$ est déterminé de manière unique par l'équation singulière

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + (A(\partial_X) + A_3 \partial_z) \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A_3 \partial_\theta + L_0) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon), \\ \mathcal{U}^\varepsilon|_{t=0} = \mathcal{U}^{\varepsilon,0}, \end{cases}$$

et sa norme dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$ est uniformément bornée en ε .

Preuve.

La preuve de ce théorème étant semblable à celle de la preuve du théorème d'existence de [42], nous nous bornerons à en donner les étapes principales. On montre tout d'abord que l'existence de \mathbf{u} est assurée par l'existence d'un profil \mathcal{U}^ε satisfaisant (2.3). L'existence de \mathcal{U}^ε est obtenu de manière classique par itérations de Picard à partir de l'estimation suivante pour le problème linéaire.

Lemme 2.2.1. Soit $\mathcal{V}^0 \in H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n$ et $\mathcal{W} \in \mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$. Le problème linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{V} + (A(\partial_X) + A_3 \partial_z) \mathcal{V} + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A_3 \partial_\theta + L_0) \mathcal{V} = \mathcal{W}, \\ \mathcal{V}|_{t=0} = \mathcal{V}^0, \end{cases}$$

a une unique solution dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_X^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$. De plus, on a

$$\|\mathcal{V}\|_{X_T} \leq \|\mathcal{V}^0\|_{X_T} + T \|\mathcal{W}\|_{X_T},$$

avec $X_T = L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$.

L'existence de \mathbf{u} étant ainsi établie, l'unicité est prouvée par des arguments classiques. □

Pour pouvoir travailler sur l'équation singulière (2.3), on reformule cette dernière et on en prend la transformée de Fourier suivant les variables X, z, θ . Pour finir, on diagonalise ce système d'équations pour pouvoir obtenir les estimations d'erreurs.

2.3 Reformulation de l'équation singulière

On reprend l'équation singulière (2.3) que l'on écrit sous la forme

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + A_3(k_L \partial_\theta + \varepsilon \partial_z) + A(\varepsilon \partial_X) + L_0) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon).$$

On en prend la transformée de Fourier suivant les variables X, z, θ dont respectivement $\zeta_{d-1} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\zeta_1 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{Z}$ sont les variables de Fourier duales. L'équation précédente se met alors sous la forme

$$\partial_t \widehat{\mathcal{U}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-i\omega_L l + iA_3(k_L l + \varepsilon \zeta_1) + iA(\varepsilon \zeta_{d-1}) + L_0) \widehat{\mathcal{U}}^\varepsilon = \widehat{f(\mathcal{U}^\varepsilon)}.$$

On va maintenant pouvoir diagonaliser la famille de matrices $iA_3(\eta) + iA(\nu_{d-1}) + L_0$, avec $\eta = k_L l + \varepsilon \zeta_1 \in \mathbb{R}$ et $\nu_{d-1} = \varepsilon \zeta_{d-1} \in \mathbb{R}^{d-1}$. On note $\lambda_j(\eta, \nu_{d-1})$, $j \in \{1, \dots, m\}$ les valeurs propres associées à cette famille de matrices et $\widehat{\Pi}_j(\eta, \nu_{d-1})$, $j \in \{1, \dots, m\}$ les projecteurs propres associés. On a alors la relation

$$iA_3(\eta) + iA(\nu_{d-1}) + L_0 = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}} \lambda_j(\eta, \nu_{d-1}) \widehat{\Pi}_j(\eta, \nu_{d-1}).$$

En particulier, on désigne par $j_0 \in \{1, \dots, m\}$, la nappe de la variété caractéristique \mathcal{C}_L telle que $(-\omega_L, k_L) \in j_0$ et $\omega_L(k_L) = \lambda_{j_0}(k_L, 0)$. De plus, la multiplicité de la valeur propre $(\eta, \nu_{d-1}) \mapsto \lambda_{j_0}(\eta, \nu_{d-1})$ est supposée constante au voisinage de $(k_L, 0)$.

Avant d'écrire l'équation singulière, obtenue, dans l'espace direct, en tenant compte de la diagonalisation précédente, on introduit les notations et l'hypothèse suivantes.

Notations. On note $D_\theta = \frac{\partial_\theta}{i}$, $D_z = \frac{\partial_z}{i}$ et $D_x = \frac{\partial_x}{i}$.

Hypothèse 2.3.1. *Il existe m fonctions continues telles que $\lambda_j(K, 0) = \omega_j(K)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, définissant un paramétrage global de \mathcal{C}_L .*

On peut alors réécrire l'équation singulière sous la forme

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \sum_{j \in \{1, \dots, m\}} \lambda_j(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \Pi_j(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \right) \mathcal{U}^\varepsilon = f(\mathcal{U}^\varepsilon),$$

$$\text{avec } \mathcal{U}^\varepsilon = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}} \Pi_j(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{U}^\varepsilon.$$

Pour pouvoir diagonaliser le système d'équations ci-dessus, on choisit $j_1 \in \{1, \dots, m\}$ et on applique le projecteur propre $\Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$. Le système d'équations s'écrit alors comme un système de m -équations non linéaires couplées de la forme

$$\begin{aligned} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \left(-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \right) \right] \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{U}^\varepsilon \\ = \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{U}^\varepsilon), \quad j_1 \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dans le cadre de notre étude, nous considérons des régimes faiblement non linéaires. Le fait d'étaler le spectre de notre impulsion ne perturbe donc que la partie linéaire du modèle, on va donc chercher à rester exact en linéaire et le moins mauvais possible en non linéaire. Pour cela, on ne garde qu'une nappe de la variété caractéristique, celle sur laquelle se trouve (ω_L, k_L) . On note j_0 cette nappe, voir figure 1.2. On peut ainsi définir \mathcal{V}^ε comme étant la solution sur cette nappe du système d'équations suivant

$$\begin{cases} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \left(-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \right) \right] \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}^\varepsilon \\ \quad = \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon), \\ \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}^\varepsilon = \mathcal{V}^\varepsilon, \\ \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}^\varepsilon = 0, \quad j_1 \neq j_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Notons que si $f = 0$ et $\mathcal{U}^\varepsilon(t = 0) = \mathcal{V}^\varepsilon(t = 0)$ alors $\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{V}^\varepsilon$, ainsi l'approximation est exacte pour la partie linéaire. De plus, on va montrer dans le paragraphe suivant, que pour des régimes faiblement non linéaires, on a une estimation d'erreur plus faible que celle obtenue avec le modèle de Schrödinger habituel. Enfin, remarquons que le projecteur propre $\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$ est différent du projecteur habituel $\Pi_{j_0}(k_L D_\theta, 0)$ et que c'est cela qui permet d'étaler légèrement le spectre.

2.4 Estimation d'erreur

On veut maintenant mesurer l'erreur commise entre la solution \mathcal{U}^ε vérifiant l'équation diagonalisée (2.4) et la solution \mathcal{V}^ε vérifiant l'équation diagonalisée (2.5). Avant de mesurer cette erreur, on introduit la notation suivante

Notation. On désigne toujours par la suite par C les différentes constantes qui peuvent varier d'une ligne à l'autre.

Pour estimer notre erreur, on définit l'écart entre les deux solutions \mathcal{U}^ε et \mathcal{V}^ε comme étant

$$\mathcal{W}^\varepsilon = \mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{V}^\varepsilon.$$

La solution $\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{W}^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$, vérifie alors les équations suivantes

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon}(-\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)(\mathcal{V}^\varepsilon + \mathcal{W}^\varepsilon) \\ = \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)f(\mathcal{W}^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon), \quad \forall j_1 \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

On distingue alors la nappe j_0 des autres nappes. On obtient ainsi les équations suivantes

- pour $j_1 \neq j_0$, comme $\Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)\mathcal{V}^\varepsilon = 0$ l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon}(-\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)\mathcal{W}^\varepsilon \\ = \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)f(\mathcal{W}^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.6)$$

- pour $j_1 = j_0$, on utilise le fait que la solution \mathcal{V}^ε satisfait l'équation (2.5) donc on obtient

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon}(-\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)\mathcal{W}^\varepsilon \\ = \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)[f(\mathcal{W}^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon) - f(\mathcal{V}^\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nous imposons également des données initiales sur \mathcal{U}^ε et \mathcal{V}^ε de taille ε^p . Nous allons donc chercher des solutions de taille ε^p et nous posons $\mathcal{U}^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{U}}^\varepsilon$, $\mathcal{V}^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon$ et $\mathcal{W}^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon$. Les équations (2.6) et (2.7) se réécrivent, en utilisant l'hypothèse (2.1.2) sur l'homogénéité de la non linéarité f ,

- pour $j_1 \neq j_0$,

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon}(-\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)\tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon \\ = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)f(\tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.8)$$

- pour $j_1 = j_0$,

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon}(-\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)\tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon \\ = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)[f(\tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon) - f(\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Avant de donner le théorème de stabilité, nous allons voir de manière heuristique quels sont les ordres de grandeur des estimations d'erreurs.

2.4.1 Raisonnement heuristique

Comme précédemment, nous allons distinguer les cas où $j_1 = j_0$ et $j_1 \neq j_0$.

Cas où $j_1 \neq j_0$.

Puisque (ω_L, k_L) est sur la nappe j_0 , on a $\lambda_{j_1}(\eta, \xi) \neq \pm\omega_L(k_L), \forall \eta, \xi$. Ainsi, une estimation de $\Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon$ est obtenue à partir de l'équation (2.8) par inversion elliptique.

Pour simplifier les écritures, on notera $\beta_{j_1} = -\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$, l'équation (2.8) se réécrit alors

$$\left(\partial_t + \frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon} \right) \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon).$$

Au premier ordre en ε , cette équation donne

$$\Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon = \varepsilon \beta_{j_1}^{-1} \left[\varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon) \right],$$

où le symbole β_{j_1} est minoré strictement car $j_1 \neq j_0$, donc on trouve

$$\Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon = O(\varepsilon^{p(q-1)+1}). \quad (2.10)$$

Cas où $j_1 = j_0$

En reprenant l'équation (2.9) pour $j_1 = j_0$, on peut estimer de manière heuristique que

$$\left| \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon \right|_{X_T} = O(\varepsilon^{2p(q-1)+1}). \quad (2.11)$$

Voyons le raisonnement qui nous permet d'avancer cette estimation. On reprend l'équation (2.9), en notant $\beta_{j_0} = -\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$, alors

$$\left(\partial_t + \frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} \right) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f(\tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon) - f(\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon) \right].$$

Le second membre de cette équation, grâce à une formulation de Taylor, peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f(\tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon) - f(\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon) \right] \simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon.$$

Or

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon &= \sum_{j_1 \in \{1, \dots, m\}} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon \\ &= \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon + \sum_{j_1 \neq j_0} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{W}}^\varepsilon, \end{aligned}$$

on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} \right) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon &\simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{V}^\varepsilon) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \\ &+ \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{V}^\varepsilon) \sum_{j_1 \neq j_0} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon. \end{aligned}$$

On vient également de voir que $\forall j_1 \neq j_0, \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon = O(\varepsilon^{p(q-1)+1})$, donc

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} \right) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon &\simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{V}^\varepsilon) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \\ &+ \varepsilon^{2p(q-1)+1} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{V}^\varepsilon). \end{aligned}$$

On multiplie l'équation ci-dessus par $\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon$ et on intègre en espace par rapport aux variables θ, X, z , pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \int \int \partial_t \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta &= \int \int \int \left[\varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{V}^\varepsilon) \right. \\ &\left. \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 + \varepsilon^{2p(q-1)+1} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{V}^\varepsilon) \right. \\ &\left. \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right] dX dz d\theta, \end{aligned}$$

que l'on réécrit

$$\begin{aligned} &\int \int \int \partial_t \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\leq \int \int \int \varepsilon^{p(q-1)} C_1 \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &+ \int \int \int C_2 \varepsilon^{2p(q-1)+1} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon dX dz d\theta, \end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant le fait que $\int ab \leq \left(\int a \right)^{1/2} \left(\int b \right)^{1/2}$

$$\begin{aligned} &\int \int \int \partial_t \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\leq \int \int \int \varepsilon^{p(q-1)} C_1 \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &+ \left(\int \int \int \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon dX dz d\theta \right)^{1/2} \left(\int \int \int C_2 \varepsilon^{2p(q-1)+1} dX dz d\theta \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Enfin, on utilise l'inégalité $ab \leq (1/2)(a^2 + b^2)$, pour obtenir l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} &\int \int \int \partial_t \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\leq \int \int \int \varepsilon^{p(q-1)} C_1 \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &+ \frac{1}{2} \int \int \int \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta + C_3 \left[\varepsilon^{2p(q-1)+1} \right]^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $y = \int \int \int \left(\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta$, on aboutit à

$$y' - (\varepsilon^{p(q-1)} C_1 + \frac{1}{2})y \leq C_3 [\varepsilon^{2p(q-1)+1}]^2,$$

d'où

$$y \leq \int_0^t e^{(\varepsilon^{p(q-1)} C_1 + \frac{1}{2})(t-s)} C_3 [\varepsilon^{2p(q-1)+1}]^2 ds,$$

en d'autres termes

$$y(t) \leq Ct [\varepsilon^{2p(q-1)+1}]^2, \quad \forall t \in [0, T],$$

donc

$$\left| \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right|_{X_T} \leq Ct \varepsilon^{2p(q-1)+1}, \quad \forall t \in [0, T].$$

On obtient bien

$$\left| \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{W}^\varepsilon \right|_{X_T} = \frac{1}{\varepsilon^p} \left| \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) (\mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{V}^\varepsilon) \right|_{X_T} = O(\varepsilon^{2p(q-1)+1}). \quad (2.12)$$

Remarque 2.4.1. *On a ainsi obtenu à l'aide d'un raisonnement heuristique une idée des ordres de grandeur des estimations d'erreurs. En particulier, on voit bien que lorsque l'on se place dans un cadre faiblement non linéaire $p \neq 0$, l'estimation d'erreur obtenue par rapport à celle de l'optique géométrique ordinaire est améliorée.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de stabilité.

2.4.2 Stabilité

Pour écrire le théorème principal de ce chapitre, on a besoin de l'hypothèse suivante

Hypothèse 2.4.1. *On suppose que $\{n \in \mathbb{Z}, \exists j \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } \lambda_j(nk_L, 0) = n\omega_L\} = \{+1, -1\}$ et que $\lambda_j(k_L, 0) = \omega_L$ si et seulement si $j = j_0$.*

Remarque 2.4.2. *Cette hypothèse 2.4.1 peut être relaxée en une hypothèse de finitude qui s'écrit $\{n \in \mathbb{Z}, \exists j \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } \lambda_j(nk_L, 0) = n\omega_L\} < +\infty$, comme dans [21]*

Grâce au raisonnement précédent et à l'hypothèse 2.4.1, on peut maintenant écrire le théorème fondamental suivant

Théorème 2.4.1. *Supposons l'hypothèse 2.4.1 vérifiée. Soient \mathcal{U}^ε et \mathcal{V}^ε dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta^n))$. Supposons de plus que \mathcal{V}^ε vérifie (2.7) et $\Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}^\varepsilon = \mathcal{V}^\varepsilon$ et que \mathcal{U}^ε est solution de l'équation (2.4). Alors*

$$\frac{1}{\varepsilon^p} \left| \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) (\mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{V}^\varepsilon) \right|_{X_T} = O(\varepsilon^{2p(q-1)+1})T,$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon^p} \left| \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{U}^\varepsilon \right|_{X_T} = O(\varepsilon^{p(q-1)+1})T, \quad \forall j_1 \neq j_0,$$

avec $X_T = L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta^n))$.

Preuve.

Soit \mathcal{W}^ε défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^\varepsilon &= \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{W}^\varepsilon + \sum_{j_1 \neq j_0} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{W}^\varepsilon \\ &:= \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1}.\end{aligned}$$

Comme \mathcal{W}^ε se met bien sous la forme $\mathcal{W}^\varepsilon = \mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{V}^\varepsilon$ et que l'hypothèse 2.4.1 est vérifiée, alors \mathcal{W}^ε est dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$ et satisfait (2.8) et (2.9).

La démonstration du théorème précédent revient à prouver que a et b_{j_1} sont bornés. Pour cela, on réécrit, en dissociant la nappe j_0 des autres, les équations (2.8) et (2.9)

- pour $j_1 \neq j_0$,

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1} \\ = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1}),\end{aligned}\quad (2.13)$$

- pour $j_1 = j_0$,

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \varepsilon^{2p(q-1)+1} a = \varepsilon^{p(q-1)} \\ \times \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right],\end{aligned}\quad (2.14)$$

que l'on réécrit

- pour $j_1 \neq j_0$,

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) b_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \\ f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1}),\end{aligned}\quad (2.15)$$

- pour $j_1 = j_0$,

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) a = \frac{1}{\varepsilon^{p(q-1)+1}} \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \\ \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right].\end{aligned}\quad (2.16)$$

Montrons d'abord que a , solution de (2.16), est borné

Par une formule de Taylor, le second membre de l'équation (2.16) se met sous la forme

$$\begin{aligned} & \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right] \\ &= \int_0^1 f'(\mathcal{V}^\varepsilon + \sigma(\varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1})) \left(\varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Or f est une application telle que $f(u) = F(u, \dots, u)$ avec F q -linéaire symétrique, $q > 1$, donc la norme du terme ci-dessus peut s'estimer de la façon suivante

$$\begin{aligned} & \left| \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right] \right|_{X_T} \leq C_4 \\ & \left(|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + \varepsilon^{2p(q-1)+1}|a|_{X_T} + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}|b_{j_1}|_{X_T} \right)^{q-1} \left(\varepsilon^{2p(q-1)+1}|a|_{X_T} + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}|b_{j_1}|_{X_T} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

car X_T est une algèbre. On obtient alors en écrivant une formule de Duhamel pour (2.16),

$$\begin{aligned} |a|_{X_T} &\leq \frac{C_4}{\varepsilon^{p(q-1)+1}} \int_0^T \left(|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + \varepsilon^{2p(q-1)+1}|a|_{X_T} + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}|b_{j_1}|_{X_T} \right)^{q-1} \\ &\quad \times \left(\varepsilon^{2p(q-1)+1}|a|_{X_T} + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}|b_{j_1}|_{X_T} \right) dt, \end{aligned}$$

ce qui donne après simplifications

$$\begin{aligned} |a|_{X_T} &\leq C_4 \int_0^T \left(|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + \varepsilon^{2p(q-1)+1}|a|_{X_T} + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}|b_{j_1}|_{X_T} \right)^{q-1} \\ &\quad \times \left(\varepsilon^{p(q-1)}|a|_{X_T} + \sum_{j_1 \neq j_0} |b_{j_1}|_{X_T} \right) dt. \end{aligned}$$

En rappelant que, $|b|_{X_T} = \sum_{j_1 \neq j_0} |b_{j_1}|_{X_T}$, on obtient alors

$$|a|_{X_T} \leq C_4 T (|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^{q-1} (|a|_{X_T} + |b|_{X_T}).$$

D'où le résultat pour le terme a

$$|a|_{X_T} \leq C_4 T (|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^q. \quad (2.18)$$

On a ainsi borné la première composante de \mathcal{W}^ε au travers du terme a , il reste donc à regarder le terme b .

Montrons maintenant que b , solution de (2.15), est borné

Rappelons que l'équation (2.15) pour $j_1 \neq j_0$ s'écrit

$$\left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) b_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}).$$

On réécrit le terme non linéaire sous la forme

$$f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}) = f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) + f(\mathcal{V}^\varepsilon),$$

et on regroupe certains termes sous la forme

$$\begin{aligned} & \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}) \\ &= \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right] \\ &+ \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon). \end{aligned}$$

Le but de ce qui suit est de quantifier précisément l'inversion elliptique décrite dans le raisonnement heuristique. On pose ainsi $\beta_{j_1} = -\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$ et $\beta_{j_0} = -\lambda_{j_0}(k_L, 0)D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$, pour simplifier les expressions et appliquer la méthode de S. Schochet [50]. La norme X_T de b_{j_1} pour l'équation (2.30) se met alors sous la forme

$$b_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}) ds,$$

puisque la donnée initiale sur b_{j_1} est nulle. On peut réécrire avec la nouvelle expression du terme non linéaire, l'équation ci-dessus

$$b_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left\{ e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1}a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1}b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right] + e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right\} ds,$$

dont la norme X_T s'écrit

$$\begin{aligned}
 |b_{j_1}|_{X_T} \leq & \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \right. \\
 & \times \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right] ds \Big|_{X_T} \\
 & + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon) ds \right|_{X_T}.
 \end{aligned}$$

On note par la suite

$$\begin{aligned}
 c_{j_1} = & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \\
 & \times \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right] ds,
 \end{aligned}$$

et

$$d_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon) ds,$$

ainsi $|b_{j_1}|_{X_T} \leq |c_{j_1}|_{X_T} + |d_{j_1}|_{X_T}$. On regarde maintenant comment majorer les termes c_{j_1} et d_{j_1} , pour obtenir la majoration sur b_{j_1} .

Pour la partie c_{j_1} , on reprend la même technique que celle utilisée pour montrer que a était borné, on obtient alors

$$|c_{j_1}|_{X_T} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left| \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f(\mathcal{V}^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{j_1 \neq j_0} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_{j_1}) - f(\mathcal{V}^\varepsilon) \right] \right|_{X_T} ds,$$

donc en appliquant (2.17), on a

$$|c_{j_1}|_{X_T} \leq C_5 T (|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^q. \quad (2.19)$$

Il ne reste donc plus qu'à majorer d_{j_1} . Pour cela, on pose

$$\mathcal{M}^\varepsilon = \exp\left(\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} t\right) \mathcal{V}^\varepsilon.$$

Comme \mathcal{V}^ε est solution de l'équation

$$\left(\partial_t + \frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} \right) \mathcal{V}^\varepsilon = \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon),$$

on obtient

$$\partial_t \mathcal{M}^\varepsilon = \exp\left(\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} t\right) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} t\right) \mathcal{M}^\varepsilon\right).$$

On décompose également, suivant les basses et les hautes fréquences, \mathcal{M}^ε sous la forme

$$\mathcal{M}^\varepsilon = \mathcal{M}^\varepsilon \mathbb{1}_{\{|\partial_X, \partial_z| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}} + \mathcal{M}^\varepsilon \mathbb{1}_{\{|\partial_X, \partial_z| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}} = \mathcal{M}_1^\varepsilon + \mathcal{M}_2^\varepsilon.$$

Le terme $|d_{j_1}|_{X_T}$ se réécrit alors

$$|d_{j_1}|_{X_T} = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) [\mathcal{M}_1^\varepsilon + \mathcal{M}_2^\varepsilon]\right) ds \right|_{X_T},$$

que l'on réécrit

$$|d_{j_1}|_{X_T} = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) [\mathcal{M}_1^\varepsilon + \mathcal{M}_2^\varepsilon]\right) - f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) \mathcal{M}_1^\varepsilon\right) + f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) \mathcal{M}_1^\varepsilon\right) \right] ds \right|_{X_T}.$$

On regroupe maintenant les termes non linéaires

$$|d_{j_1}|_{X_T} \leq \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) \mathcal{M}_1^\varepsilon\right) ds \right|_{X_T} + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) [\mathcal{M}_1^\varepsilon + \mathcal{M}_2^\varepsilon]\right) - f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) \mathcal{M}_1^\varepsilon\right) \right] ds \right|_{X_T}.$$

On introduit alors les notations suivantes

$$e_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) \mathcal{M}_1^\varepsilon\right) ds,$$

et

$$f_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) [\mathcal{M}_1^\varepsilon + \mathcal{M}_2^\varepsilon]\right) - f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s\right) \mathcal{M}_1^\varepsilon\right) \right] ds.$$

Donc $|d_{j_1}|_{X_T} \leq |e_{j_1}|_{X_T} + |f_{j_1}|_{X_T}$.

Et si on reprend ce que l'on a montré jusqu'à présent, on a

$$|b_{j_1}|_{X_T} \leq |c_{j_1}|_{X_T} + |d_{j_1}|_{X_T}, \leq C_5 T (|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^q + |e_{j_1}|_{X_T} + |f_{j_1}|_{X_T}.$$

Regardons de plus près le terme f_{j_1} , par une formule de Taylor, on obtient

$$f_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left(\int_0^1 f' \left(\exp \left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s \right) [\mathcal{M}_1^\varepsilon + \sigma \mathcal{M}_2^\varepsilon] \right) \times \exp \left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s \right) \mathcal{M}_2^\varepsilon d\sigma \right) ds,$$

ce qui donne

$$|f_{j_1}|_{X_T} \leq \frac{1}{\varepsilon} T C_6 (|\mathcal{M}_1^\varepsilon|_{X_T} + |\mathcal{M}_2^\varepsilon|_{X_T})^{q-1} |\mathcal{M}_2^\varepsilon|_{X_T},$$

Or

$$|\mathcal{M}_1^\varepsilon|_{X_T} = \left| \mathcal{V}^\varepsilon \mathbf{1}_{\{(|\partial_X, \partial_z|) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}} \right|_{X_T} \quad \text{et} \quad |\mathcal{M}_2^\varepsilon|_{X_T} = \left| \mathcal{V}^\varepsilon \mathbf{1}_{\{(|\partial_X, \partial_z|) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}} \right|_{X_T}.$$

Donc, pour tout p entier positif,

$$\forall \sigma, \quad \left| \mathcal{V}^\varepsilon \mathbf{1}_{\{(|\partial_X, \partial_z|) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}} \right|_{H^\sigma} \leq C \varepsilon |\mathcal{V}^\varepsilon|_{H^\sigma} \quad \text{et} \quad \left| \mathcal{V}^\varepsilon \mathbf{1}_{\{(|\partial_X, \partial_z|) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}} \right|_{H^\sigma} \leq C \varepsilon^p |\mathcal{V}^\varepsilon|_{H^{\sigma+2p}}.$$

On prend $p = 1$ et on trouve $|\mathcal{M}_1^\varepsilon|_{X_T} \leq C \varepsilon$ et $|\mathcal{M}_2^\varepsilon|_{X_T} \leq C \varepsilon$, ainsi

$$|f_{j_1}|_{X_T} \leq C_7 T, \quad C_7 \text{ dépend de } |\mathcal{V}^\varepsilon|_{H^\sigma}$$

Voyons maintenant comment majorer le terme e_{j_1} . On a

$$e_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\beta_{j_1}}{\varepsilon}(t-s)} \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f \left(\exp \left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s \right) \mathcal{M}_1^\varepsilon \right) ds,$$

On en prend la transformée de Fourier suivant les variables X, z, θ , que l'on note \mathcal{F} ,

$$\hat{e}_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} (-i l \lambda_{j_0}(k_L, 0) + i \lambda_{j_1}(l k_L + \varepsilon \xi_z, \varepsilon \xi_x))(t-s)} \times \mathcal{F} \left(\Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f \left(e^{-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s} \mathcal{M}_1^\varepsilon \right) \right) ds,$$

Notons que l'optique géométrique standard appliquée à \mathcal{V}^ε , conformément à l'hypothèse 2.4.1 qui ne conserve que les harmoniques résonnantes $+1$ et -1 , implique que \mathcal{V}^ε peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{V}^\varepsilon \Big|_{\mathbf{1}_{\{(|\partial_X, \partial_z|) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}}} = \mathcal{V}_1^\varepsilon(t, X, z, \theta) = \mathcal{M}_1^\varepsilon(t, X, z, \theta) = \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(t, X, z) e^{i\theta} + c.c + O(\varepsilon),$$

ainsi, \hat{e}_{j_1} se réécrit

$$\hat{e}_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(-il\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_1}(lk_L n + \varepsilon\xi_z, \varepsilon\xi_x))(t-s)} \times \mathcal{F} \left[\Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f \left(\exp \left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} s \right) (\tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon e^{i\theta} + c.c + O(\varepsilon)) \right) \right] ds.$$

De plus, on sait qu'il existe une application q -linéaire symétrique F telle que $f(\delta u) = \delta^q F(u, \dots, u)$, on peut donc écrire \hat{e}_{j_1} de la forme

$$\hat{e}_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(-il\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_1}(lk_L + \varepsilon\xi_z, \varepsilon\xi_x))(t-s)} \int_{\eta_1} \dots \int_{\eta_{q-1}} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{r=1}^q -i\delta_r \lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(\delta_r k_L + \varepsilon\eta_0, \varepsilon\eta_r) \right) s} F(\tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)) d\eta_1 \dots d\eta_{q-1} ds,$$

avec $\sum_{r=1}^q \eta_r = \xi_x$, $\eta_0 = \xi_z$, $\delta_r = \pm 1$ et $\sum_{r=1}^q \delta_r = l$, donc

$$\hat{e}_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(-il\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_1}(lk_L + \varepsilon\xi_z, \varepsilon\xi_x))t} \int_0^t \int_{\eta_1} \dots \int_{\eta_{q-1}} e^{-\frac{1}{\varepsilon} val(l)s} \times F(\tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)) d\eta_1 \dots d\eta_{q-1} ds,$$

avec $val(l) = il\lambda_{j_0}(k_L, 0) - i\lambda_{j_1}(lk_L + \varepsilon\xi_z, \varepsilon\xi_x) - \sum_{r=1}^q [i\delta_r \lambda_{j_0}(k_L, 0) - i\lambda_{j_0}(\delta_r k_L + \varepsilon\eta_0, \varepsilon\eta_r)]$.

On fait une intégration par partie en temps, en prenant

$$\begin{cases} u = F(\tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)), \\ v' = e^{-\frac{1}{\varepsilon} val(l)s}, \end{cases} \implies \begin{cases} u' = F(\partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)) + \dots + F(\tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)), \\ v = \frac{-\varepsilon}{val(l)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} val(l)s}, \end{cases}$$

ainsi $\int uv' = [uv] - \int u'v$, s'écrit pour \hat{e}_{j_1}

$$\hat{e}_{j_1} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(-il\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_1}(lk_L + \varepsilon\xi_z, \varepsilon\xi_x))t} \int_0^t \int_{\eta_1} \dots \int_{\eta_{q-1}} \frac{-\varepsilon}{val(l)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} val(l)s} \times \left(F(\partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)) + \dots \right) d\eta_1 \dots d\eta_{q-1} ds,$$

donc

$$\begin{aligned} |\hat{e}_{j_1}| &\leq C_8 \int_0^t \int_{\eta_1} \dots \int_{\eta_{q-1}} \left| \frac{-\varepsilon}{val(l)} \left[F(\partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)) + \dots \right] \right| d\eta_1 \dots d\eta_{q-1} ds, \\ &\leq C_8 \int_0^t \int_{\eta_1} \dots \int_{\eta_{q-1}} \left| \frac{-\varepsilon}{val(l)} \right| \left| \left[F(\partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)) + \dots \right] \right| d\eta_1 \dots d\eta_{q-1} ds. \end{aligned}$$

Notons également que le support de $\widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_r)$ pour $r = 1, \dots, q$ est contenu dans $\{|\eta_r| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}$, donc si ε est suffisamment petit alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{-\varepsilon}{\text{val}(l, r)} \right| &= \left| \frac{-\varepsilon}{i l \lambda_{j_0}(k_L, 0) - i \lambda_{j_1}(l k_L + \varepsilon \xi_z, \varepsilon \xi_x) - \sum_{r=1}^q i \delta_r \lambda_{j_0}(k_L, 0) - i \lambda_{j_0}(\delta_r k_L + \varepsilon \eta_0, \varepsilon \eta_r)} \right|, \\ &\leq \left| \frac{2}{i l \lambda_{j_0}(k_L, 0) - i \lambda_{j_1}(l k_L + \varepsilon \xi_z, \varepsilon \xi_x)} \right|, \quad \text{car} \quad \sum_{r=1}^q \delta_r = l, \quad \text{et} \quad \sum_{r=1}^q \eta_r = \xi_x, \\ &\leq C_9 \quad \text{grâce à 2.4.1.} \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} |e_{j_1}| &\leq C_{10} \int_0^t \int_{\eta_1} \dots \int_{\eta_{q-1}} \left| F(\partial_t \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1), \dots, \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q)) \right| d\eta_1 \dots d\eta_{q-1} ds, \\ &\leq C_{10} \int_0^t \int_{\eta_1} \dots \int_{\eta_{q-1}} \left| \partial_t \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1) \right| \dots \left| \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q) \right| d\eta_1 \dots d\eta_{q-1} ds, \\ &\leq C_{10} \int_0^t \left(\left| \partial_t \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1) \right| \star \dots \star \left| \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_q) \right| \right) ds, \end{aligned}$$

où \star représente le produit de convolution usuel. Par conséquent, on obtient

$$|e_{j_1}| \leq C_{10} \int_0^t \left| \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon \right|_{X_T}^{q-1} \left| \partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon \right|_{X_T} ds = C_{10} T \left| \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon \right|_{X_T}^{q-1} \left| \partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon \right|_{X_T}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}^{-1} \left(\left| \partial_t \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1) \right| \star \left| \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_2) \right| \right) \right|_{X_T} &= \left[\int (1 + |\xi^2|)^s \left(\left| \partial_t \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1) \right| \star \left| \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_2) \right| \right)^2 d\xi \right]^{1/2}, \\ &\leq \left| \mathcal{F}^{-1} \left(\left| \partial_t \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1) \right| \right) \right|_{X_T} \left| \mathcal{F}^{-1} \left(\left| \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_2) \right| \right) \right|_{X_T}, \\ &\leq C^* \left| \mathcal{F}^{-1} \left(\left| \partial_t \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_1) \right| \right) \right|_{X_T} \left| \mathcal{F}^{-1} \left(\left| \widehat{\mathcal{V}}_1^\varepsilon(\eta_2) \right| \right) \right|_{X_T}, \\ &\leq C^* \left| \partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon \right|_{X_T} \left| \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon \right|_{X_T}. \end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{M}_1^\varepsilon = \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon e^{i\theta} + c.c + O(\varepsilon)$ et

$$\partial_t \mathcal{M}_1^\varepsilon = \exp\left(\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} t\right) \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f\left(\exp\left(-\frac{\beta_{j_0}}{\varepsilon} t\right) \mathcal{M}_1^\varepsilon\right).$$

Ainsi, on obtient $\left| \partial_t \tilde{\mathcal{V}}_1^\varepsilon \right|_{X_T} \leq C_{10} |\mathcal{M}_1^\varepsilon|_{X_T}^q$. Finalement, on a le résultat suivant

$$|d_{j_1}|_{X_T} \leq |e_{j_1}|_{X_T} + |f_{j_1}|_{X_T} \leq C_{10} T |\mathcal{M}_1^\varepsilon|_{X_T}^{2q-1} + C_6 T |\mathcal{M}_2^\varepsilon|_{X_T}^q \leq C_{11} T |\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T}^{2q-1}.$$

En regroupant les différents termes, on obtient

$$|b_{j_1}|_{X_T} \leq |c_{j_1}|_{X_T} + |d_{j_1}|_{X_T} \leq C_5 T (|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^q + C_{11} T |\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T}^{2q-1},$$

et donc

$$|b_{j_1}|_{X_T} \leq C_{12} T [(|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^q + (|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^{2q-1}] \quad (2.20)$$

Avec l'estimation (2.18), on avait obtenu

$$|a|_{X_T} \leq C_4 T (|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^q.$$

Donc

$$|a|_{X_T} + \sum_{j_1 \neq j_0} |b_{j_1}|_{X_T} \leq C_{13} T [(|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^q + (|\mathcal{V}^\varepsilon|_{X_T} + |a|_{X_T} + |b|_{X_T})^{2q-1}].$$

Si on prend T suffisamment petit, on obtient une borne pour a et b dans X_T d'où le théorème. □

2.5 Amélioration de l'approximation pour les harmoniques résonnantes

Dans ce paragraphe, on propose une amélioration de l'estimation d'erreur obtenue sur \mathcal{V}^ε . En effet, on n'a pas encore utilisé le fait que $\mathcal{V}^\varepsilon(t, X, z, \theta)$ est périodique par rapport à θ et peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{V}^\varepsilon(t, X, z, \theta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon(t, X, z) e^{i\alpha\theta}. \quad (2.21)$$

Reprenons l'équation (2.5) vérifiée par la solution \mathcal{V}^ε définie pour la nappe $j_1 = j_0$. Cette équation singulière est de la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{V}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\lambda_{j_0}(k_L, 0) D_\theta + \lambda_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \mathcal{V}^\varepsilon = \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}^\varepsilon), \\ \Pi_{j_0}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}^\varepsilon = \mathcal{V}^\varepsilon, \\ \Pi_{j_1}(k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}^\varepsilon = 0, \quad j_1 \neq j_0. \end{cases}$$

Ainsi le système vérifié par $\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon, \forall \alpha \in \mathbb{Z}$ s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(\alpha k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon = \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon), \\ \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon = \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon, \\ \Pi_{j_1}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon = 0, \quad j_1 \neq j_0. \end{cases} \quad (2.22)$$

En particulier, on ne veut ici considérer que les harmoniques résonnantes. Ainsi, on veut garder les α tels que $\alpha \in R$, avec $R = \{\alpha \in \mathbb{Z}, (-\alpha\omega_L, \alpha k_L) \in \mathcal{C}_L\}$. Pour simplifier, on suppose $R = \{-1, +1\}$. Ainsi, on note $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ la composante de Fourier liée à $e^{i\theta}$. La composante liée à $e^{-i\theta}$ est la conjuguée précédente que l'on note $\overline{\mathcal{H}_1^\varepsilon}$, car on cherche des solutions réelles. La composante $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ est alors solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right] \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{H}_1^\varepsilon \\ \quad = \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) [Q_1(f(\mathcal{H}_1^\varepsilon))], \\ \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{H}_1^\varepsilon = \mathcal{H}_1^\varepsilon, \end{cases} \quad (2.23)$$

où

$$Q_\alpha(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha\theta} g(t, X, z, \theta) d\theta.$$

On montre que l'on obtient la même estimation d'erreur que précédemment qui est donc plus faible que celle obtenue avec le modèle de Schrödinger habituel qui est en $O(\varepsilon)$. Rappelons également que le terme source associé à la solution $\mathcal{H}_1^\varepsilon(t, X, z, \theta)$ est de taille ε^p et que l'application f est q -linéaire symétrique. On note par la suite $\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon$ le terme $\frac{1}{\varepsilon^p} \mathcal{H}_1^\varepsilon(t, X, z, \theta)$, et l'équation ci-dessus se réécrit

$$\begin{aligned} & \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right] \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon \\ & = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \left[Q_1(f(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon)) \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donc en regardant l'équation vérifiée par $(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon - \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon)$ et en utilisant (2.21), on peut obtenir une estimation d'erreur pour l'harmonique $\{\pm(\tilde{\omega}_L, \tilde{k}_L)\}$ et les autres (par exemple $\{\pm(2\tilde{\omega}_L, 2\tilde{k}_L)\}, \pm\{(3\tilde{\omega}_L, 3\tilde{k}_L)\} \dots$).

On définit l'écart entre $\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon$ et $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ comme étant $\mathcal{F}^\varepsilon = \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon - \mathcal{H}_1^\varepsilon$.

La solution $\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon = \mathcal{F}^\varepsilon + \mathcal{H}_1^\varepsilon$, vérifie alors le système suivant

$$\begin{aligned} & \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(\alpha k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(\alpha k_L D_\theta + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right] \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) (\mathcal{F}^\varepsilon + \mathcal{H}_1^\varepsilon) \\ & = \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f(\mathcal{F}^\varepsilon + \mathcal{H}_1^\varepsilon). \end{aligned}$$

On distingue dans cette équation, le cas $\alpha = 1$ et le cas $\alpha \neq 1$. Nous imposons également des données initiales sur $\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon$ et $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ de taille ε^p . Nous allons donc chercher des solutions de taille ε^p et nous posons $\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{V}}_\alpha^\varepsilon$, $\mathcal{H}_1^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon$ et $\mathcal{F}^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon$. On obtient ainsi en considérant des applications f q -linéaires

- pour $\alpha \neq 1$, comme $\Pi_{j_0}(\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon = 0$, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 1} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(\alpha k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right] \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \\ & = \varepsilon^{p(q-1)} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 1} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_\alpha(f(\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

- pour $\alpha = 1$, on utilise le fait que la solution $\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon$ satisfait l'équation (2.24) donc on obtient

$$\begin{aligned} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right] \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \\ = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) - f(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

On commence par une estimation heuristique des ordres de grandeur des estimations d'erreurs.

2.5.1 Raisonnement heuristique

Pour cela, on distingue les harmoniques résonnantes des autres.

Cas où $\alpha \neq 1$.

Dans ce cas, on considère des harmoniques telles que $\forall \alpha \neq 1, \lambda_{j_0}(\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \neq \omega_L$. On peut donc trouver $\forall \alpha \neq 1, \Pi_{j_0}(\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon$ dans l'équation (2.25) par inversion elliptique. Pour simplifier les écritures, on note par la suite $\beta_\alpha = -i\lambda_{j_0}(\alpha k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$, l'équation (2.25) s'écrit alors

$$\left(\partial_t + \frac{\beta_\alpha}{\varepsilon} \right) \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_\alpha (f(\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon)), \quad \forall \alpha \neq 1.$$

Au premier ordre en ε , cette équation donne

$$\Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon = \varepsilon \beta_\alpha^{-1} \left[\varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_\alpha (f(\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon)) \right], \quad \forall \alpha \neq 1,$$

où le symbole β_α est minoré strictement car $\alpha \neq 1$, donc on trouve

$$\Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon = O(\varepsilon^{p(q-1)+1}), \quad \forall \alpha \neq 1.$$

Cas où $\alpha = 1$.

Pour simplifier les calculs, on note $\beta_1 = -i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$, ainsi l'équation (2.26) se réécrit

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{\beta_1}{\varepsilon} \right) \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \\ \times Q_1 \left[f(\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) - f(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Grâce à une formule de Taylor, le second membre peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) - f(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \right] \simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon.$$

Or

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \\ &= \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon + \sum_{\alpha \neq 1} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon,\end{aligned}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \frac{\beta_1}{\varepsilon}\right) \Pi_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon &\simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \\ &\quad + \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \sum_{\alpha \neq 1} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon.\end{aligned}$$

On vient également de voir que $\forall \alpha \neq 1, \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon = O(\varepsilon^{p(q-1)+1})$, donc

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \frac{\beta_1}{\varepsilon}\right) \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon &\simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \\ &\quad + \varepsilon^{2p(q-1)+1} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon).\end{aligned}$$

On multiplie l'équation ci-dessus par $\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon$ et on intègre en espace suivant les variables X, z, θ , pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int \int \int \partial_t \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\leq \int \int \int \varepsilon^{p(q-1)} C_1 \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\quad + \int \int \int \varepsilon^{2p(q-1)+1} C_2 \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon dX dz d\theta,\end{aligned}$$

que l'on réécrit, grâce à la relation $\int ab \leq \left(\int a\right)^{1/2} \left(\int b\right)^{1/2}$

$$\begin{aligned}&\int \int \int \partial_t \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\leq \int \int \int \varepsilon^{p(q-1)} C_1 \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\quad + \left(\int \int \int \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon dX dz d\theta \right)^{1/2} \left(\int \int \int \varepsilon^{2p(q-1)+1} C_2 dX dz d\theta \right)^{1/2},\end{aligned}$$

D'où l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}&\int \int \int \partial_t \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\leq \int \int \int \varepsilon^{p(q-1)} C_1 \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \int \int \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta + C_3 [\varepsilon^{2p(q-1)+1}]^2.\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $y = \int \int \int \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta$, on obtient

$$y' - \left(\varepsilon^{p(q-1)} C_1 + \frac{1}{2} \right) y \leq C_3 [\varepsilon^{2p(q-1)+1}]^2,$$

d'où

$$y \leq \int_0^t e^{\left(\varepsilon^{p(q-1)} C_1 + \frac{1}{2} \right) (t-s)} C_3 [\varepsilon^{2p(q-1)+1}]^2 ds,$$

donc

$$y(t) \leq Ct [\varepsilon^{2pq-p+1}]^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ainsi, l'estimation d'erreur est donnée par

$$\frac{1}{\varepsilon^p} |\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) (\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon - \mathcal{H}_1^\varepsilon)|_{X_T} = O(\varepsilon^{2p(q-1)+1})t. \quad (2.27)$$

2.5.2 Stabilité

On peut donc énoncer le théorème suivant

Théorème 2.5.1. *Soient $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ et $\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon$ dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$, respectivement solutions de (2.23) et de (2.22). Alors*

$$\frac{1}{\varepsilon^p} |\Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon|_{X_T} = O(\varepsilon^{p(q-1)+1}), \quad \forall \alpha \neq \pm 1,$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon^p} |\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) (\mathcal{V}_\alpha^\varepsilon - \mathcal{H}_1^\varepsilon)|_{X_T} = O(\varepsilon^{2p(q-1)+1}), \quad \text{pour } \alpha = 1,$$

avec $X_T = L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$.

Preuve.

Soit \mathcal{F}^ε défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\varepsilon &= \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{F}^\varepsilon + \sum_{\alpha \neq 1} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{F}^\varepsilon \\ &:= \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{\alpha \neq 1} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_\alpha. \end{aligned}$$

Comme \mathcal{F}^ε peut se mettre sous la forme $\mathcal{F}^\varepsilon = \mathcal{V}_\alpha^\varepsilon - \mathcal{H}_1^\varepsilon$ et que l'hypothèse 2.4.1 est satisfaite, alors \mathcal{F}^ε est dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$ et vérifie (2.25) et (2.26).

La démonstration du théorème précédent revient à prouver que a et b_α sont bornés. Pour cela, on réécrit, en dissociant l'harmonique $\alpha = 1$ des autres, les équations (2.25) et (2.26) sous la forme

- pour $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(\alpha k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \varepsilon^{p(q-1)+1} b_\alpha \\ & = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_\alpha \left(f(\mathcal{H}_1^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{\alpha \neq 1} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_\alpha) \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

- pour $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) \varepsilon^{2p(q-1)+1} a = \varepsilon^{p(q-1)} \\ & \times \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\mathcal{H}_1^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{\alpha \neq 1} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_\alpha) - f(\mathcal{H}_1^\varepsilon) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

que l'on réécrit

- pour $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(\alpha k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) b_\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_{j_0}(i\alpha k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \\ & Q_\alpha \left(f(\mathcal{H}_1^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{\alpha \neq 1} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_\alpha) \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

- pour $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right) a = \frac{1}{\varepsilon^{p(q-1)+1}} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \\ & Q_1 \left[f(\mathcal{H}_1^\varepsilon + \varepsilon^{2p(q-1)+1} a + \sum_{\alpha \neq 1} \varepsilon^{p(q-1)+1} b_\alpha) - f(\mathcal{H}_1^\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pour montrer que a et b_α sont bornés, on réapplique le même raisonnement que pour la démonstration du théorème 2.4.1.

□

2.5.3 Simplification de la non linéarité

Le terme non linéaire reste encore très complexe pour être discrétisé tel quel. On propose donc de le simplifier et de donner l'estimation d'erreur ainsi obtenue après simplification. En pratique, au lieu de calculer la solution $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ de (2.23), on va plutôt calculer la solution $\mathcal{H}_{1s}^\varepsilon$ de l'équation suivante

$$\begin{cases} \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)) \right] \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{H}_{1s}^\varepsilon \\ \quad = \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 [f(\Pi_{j_0}(ik_L, 0) \mathcal{H}_{1s}^\varepsilon)], \\ \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{H}_{1s}^\varepsilon = \mathcal{H}_{1s}^\varepsilon. \end{cases} \quad (2.32)$$

Pour estimer l'erreur commise en faisant cette approximation, on définit l'écart entre les deux solutions $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ et $\mathcal{H}_{1s}^\varepsilon$ comme étant

$$\mathcal{T}^\varepsilon = \mathcal{H}_1^\varepsilon - \mathcal{H}_{1s}^\varepsilon.$$

Cet écart \mathcal{T}^ε vérifie l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \left(-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \right) \right] \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{T}^\varepsilon \\ & = \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \mathcal{H}_1^\varepsilon) - f(\Pi_{j_0}(ik_L, 0) \mathcal{H}_{1s}^\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Puisque nous imposons des données initiales sur $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ et $\mathcal{H}_{1s}^\varepsilon$ de taille ε^p , nous cherchons des solutions également de cette taille et nous posons $\mathcal{H}_1^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon$, $\mathcal{H}_{1s}^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon$ et $\mathcal{T}^\varepsilon = \varepsilon^p \tilde{\mathcal{T}}^\varepsilon$. L'équation précédente se réécrit, en notant que l'application f est q -linéaire, sous la forme

$$\begin{aligned} & \left[\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \left(-i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \right) \right] \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{T}}^\varepsilon \\ & = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) - f(\Pi_{j_0}(ik_L, 0) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

On réécrit cette dernière équation, avec $\beta_1 = -i\lambda_{j_0}(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}(k_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X)$, sous la forme

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + \frac{\beta_1}{\varepsilon} \right) \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{T}}^\varepsilon \\ & = \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) - f(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) \right] \\ & \quad + \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) - f(\Pi_{j_0}(ik_L, 0) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant le raisonnement heuristique permettant d'estimer l'ordre de grandeur de l'erreur. Pour cela, on considère le second membre de l'équation ci-dessus. Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) - f(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) \right] \\ & \simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{T}}^\varepsilon, \end{aligned}$$

et pour le second terme, on obtient

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) Q_1 \left[f(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) - f(\Pi_{j_0}(ik_L, 0) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) \right] \\ & \simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\Pi_{j_0}(ik_L, 0) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) (\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) - \Pi_{j_0}(ik_L, 0)) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon. \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier suivant z et X du terme $(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) - \Pi_{j_0}(ik_L, 0)) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon$, on aboutit à

$$(\Pi_{j_0}(ik_L + i\varepsilon\zeta_1, i\varepsilon\zeta_{d-1}) - \Pi_{j_0}(ik_L, 0)) \widehat{\tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon} \simeq \varepsilon\zeta_1 \Pi'_{j_0}(ik_L, 0) \widehat{\tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon} + O(\varepsilon^2).$$

En résumé, on a

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + \frac{\beta_1}{\varepsilon} \right) \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{T}^\varepsilon \\ & \simeq \varepsilon^{p(q-1)} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{\mathcal{H}}_1^\varepsilon) \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{T}^\varepsilon \\ & \quad + \varepsilon^{p(q-1)+1} \Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) f'(\Pi_{j_0}(ik_L, 0) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon) D_z \Pi_{j_0}(ik_L, 0) \tilde{\mathcal{H}}_{1s}^\varepsilon \end{aligned}$$

On multiplie cette équation par $\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{T}^\varepsilon$ et on intègre en espace suivant les variables z, X, θ . En posant comme précédemment (paragraphe 2.5.1),

$$y = \int \int \int \left(\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) \tilde{T}^\varepsilon \right)^2 dX dz d\theta, \text{ on obtient ainsi } y(t) \leq Ct[\varepsilon^{p(q-1)+1}]^2, \forall t \in [0, T].$$

L'écart obtenu entre les deux solutions est finalement donné par

$$\frac{1}{\varepsilon^p} |\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) (\mathcal{H}_1^\varepsilon - \mathcal{H}_{1s}^\varepsilon)|_{X_T} = O(\varepsilon^{p(q-1)+1}).$$

On peut donc énoncer le théorème de stabilité suivant

Théorème 2.5.2. *Soient $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ et $\mathcal{H}_{1s}^\varepsilon$ dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$, respectivement solutions de (2.23) et de (2.32). Alors*

$$\frac{1}{\varepsilon^p} |\Pi_{j_0}(ik_L + \varepsilon D_z, \varepsilon D_X) (\mathcal{H}_1^\varepsilon - \mathcal{H}_{1s}^\varepsilon)|_{X_T} = O(\varepsilon^{p(q-1)+1}).$$

avec $X_T = L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}_{(X,z)}^d \times \mathbb{T}_\theta)^n)$.

La démonstration de ce théorème se fait de la même manière que pour le théorème 2.5.1.

Conclusion

Avec une approche originale basée sur une équation singulière (introduite par J.-L. Joly, G. Métiver et J. Rauch), on obtient un modèle asymptotique non linéaire nouveau qui permet d'étendre l'étude de la propagation d'onde possédant un spectre légèrement "étalé".

Plus précisément, nous avons, dans ce chapitre, écrit un théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation singulière et donc de la solution du système de départ.

Nous obtenons également deux théorèmes de stabilité qui, dans le cas de régimes faiblement non linéaires, ont permis d'écrire des estimations d'erreurs plus faibles que celle obtenues en optique géométrique classique.

Dans le chapitre qui suit, nous proposons la seconde approche de cette thèse qui va permettre de modéliser les impulsions à spectre réellement "étalé". Cette approche est basée sur la décomposition de l'impulsion initiale et non plus sur le raffinement du modèle de Schrödinger standard.

Chapitre III

Une étude générale en optique diffractive, appliquée aux lasers à spectre large et aux impulsions ultra-courtes.

Travail effectué en collaboration avec D. Lannes ⁽¹⁾, à paraître dans *SIAM Journal of Math. Analysis*.

⁽¹⁾MAB, Université Bordeaux I et CNRS UMR 5466, 351 cours de la libération, 33 405 Talence Cedex, lannes@math.u-bordeaux.fr

Sommaire

Problématique

3.1 Généralités

- 3.1.1 Les espaces
- 3.1.2 Résolution du problème de Cauchy
- 3.1.3 Méthode générale
- 3.1.4 Outils mathématiques
- 3.1.5 Organisation des prochains paragraphes

3.2 Etude du cas dispersif

- 3.2.1 Détail des différentes étapes du développement asymptotique en l'absence de basses fréquences
- 3.2.2 Simplification des équations de profil
- 3.2.3 Analyse des non linéarités
- 3.2.4 Résolution des équations de profil en l'absence de basses fréquences
- 3.2.5 Stabilité en absence de basses fréquences
- 3.2.6 Stabilité dans le cas général

3.3 Etude du cas nondispersif

- 3.3.1 Obtention des équations de profil
- 3.3.2 Résolution des équations de profil
- 3.3.3 Validité de l'approximation

3.4 Etude du cas faiblement dispersif

3.5 Applications

- 3.5.1 Laser à spectre large
- 3.5.2 Impulsions ultra-courtes

Conclusion

Problématique

Les équations de Maxwell et la plupart des systèmes physiques rencontrés en optique peuvent s'écrire sous la forme générale

$$\begin{cases} L^\varepsilon(\partial)\mathbf{u}^\varepsilon + f(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0}(x, y, z) = \mathbf{u}_\varepsilon^0(x, y, z), \end{cases} \quad (3.1)$$

où \mathbf{u}^ε prend ses valeurs dans \mathbb{R}^{d+1} . L'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ est hyperbolique symétrique de la forme

$$L^\varepsilon(\partial) = A_0\partial_t + A_1\partial_x + A_2\partial_y + A_3\partial_z + \frac{L_0}{\varepsilon},$$

les matrices A_i est symétriques et la matrice L_0 est anti-symétrique.

Pour étudier la propagation diffractive d'un faisceau laser de fréquence ω_L et de nombre d'onde $\vec{K} = (0, 0, k_L)$, on cherche généralement des solutions approchées u^ε de \mathbf{u}^ε sous la forme d'oscillations

$$u^\varepsilon(t, x, y, z) = \varepsilon^p(\mathcal{U}_0(\varepsilon t, t, x, y, z)e^{i(\tilde{\omega}_L t - \vec{k}_L z)/\varepsilon} + c.c.), \quad (3.2)$$

le facteur d'amplitude ε^p est choisi de manière à ce que les effets non linéaires et diffractifs aient lieu simultanément. Le principe de l'optique diffractive (cf. [21] par exemple) est alors de trouver des équations permettant de déterminer le *profil* \mathcal{U}_0 .

L'objectif de ce chapitre est d'introduire un cadre général permettant d'étudier deux cas physiques qui ne peuvent pas être correctement modélisés par des oscillations de type (3.2). Il s'agit des phénomènes de *spectre large* et d'*impulsions ultra-courtes*. Nous proposons dans ce chapitre une approche complètement différente de celle introduite au chapitre I (paragraphe 1.5) qui considérait une oscillation du type (3.2) et le fait que $\partial_t \mathcal{E}$ n'est plus négligeable devant $\omega_L \mathcal{E}$, mais reste tout de même petit. On propose ici de considérer une impulsion possédant un spectre réellement "étalé" se décomposant en une oscillation du type (3.2) qui porte le spectre discret et une oscillation à spectre continu, décrite ci-après qui contient le reste du spectre de l'impulsion. Voyons comment pour les phénomènes de spectre large et d'impulsions ultra-courtes, cette hypothèse de décomposition d'impulsion se présente.

• Spectre large

Le spectre oscillant d'une oscillation classique de type (3.2) est parfaitement localisé en deux points $\{\pm(\omega_L, \vec{K})\}$. Expérimentalement, une telle localisation n'est jamais réalisée; le spectre oscillant est en réalité concentré autour de $\{\pm(\omega_L, \vec{K})\}$ mais n'est pas réduit à ces deux points. Généralement, ces variations du spectre sont prises en compte au niveau de l'amplitude \mathcal{U}_0 . Cependant, modifier \mathcal{U}_0 permet seulement de regarder le spectre de u^ε autour de $\{\pm(\omega_L, \vec{K})\}$ à l'ordre $O(\varepsilon)$. Nous voulons décrire des fonctions ayant un spectre de taille $O(1)$ et donc ne pouvant être modélisées par des oscillations classiques de type (3.2). Une obtention formelle mais non rigoureuse pour les lasers à spectre large à été obtenue dans

[44]. Ici, pour surmonter la non localisation du spectre, une solution approchée de (3.1) est donnée sous la forme

$$u^\varepsilon(t, x, y, z) = \varepsilon^p(\mathcal{U}_{0,I,1}(\varepsilon t, t, x, y, z)e^{i(\omega_L t - k_L z)/\varepsilon} + c.c) + \varepsilon^p \mathcal{U}_{0,II}(\varepsilon t, t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}),$$

où $\mathcal{U}_{0,II}$ est un *profil à spectre purement continu* dans un sens qui sera défini par la suite. Pour l’instant, nous pouvons nous contenter de supposer que le profil $\mathcal{U}_{0,II}$ est régulier et est à décroissance rapide suivant les variables $(t/\varepsilon, z/\varepsilon)$.

Considérons un modèle d’équations de Maxwell non linéaires (système (M) au paragraphe 3.5), nous allons montrer que l’amplitude $\mathcal{E}_{0,I,1}$ de la composante oscillante du champ électrique vérifie l’équation de Schrödinger non linéaire ordinaire

$$\partial_\tau \mathcal{E}_{0,I,1} + i \frac{\omega'(k_L)}{2k_L} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{E}_{0,I,1} + i \frac{\omega''(k_L)}{2} \partial_z^2 \mathcal{E}_{0,I,1} = \text{Cste} |\mathcal{E}_{0,I,1}|^2 \mathcal{E}_{0,I,1},$$

tandis que le terme correctif $\mathcal{E}_{0,II}$ vérifie une équation linéaire,

$$\partial_\tau \partial_{z_0} \mathcal{E}_{0,II} - \frac{\omega'(D_{z_0})}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{E}_{0,II} - \frac{D_{z_0} \omega''(D_{z_0})}{2} \partial_z^2 \mathcal{E}_{0,II} = 0.$$

Le principal intérêt de cette dernière équation est que toutes les non linéarités que nous obtenons par le développement asymptotique peuvent être négligées, rendant cette équation linéaire quand elle devrait être *a priori* non linéaire. Ceci est la principale conséquence de l’étude générale que nous présentons ci-après.

• **Impulsions ultra-courtes**

Chercher une solution approchée sous la forme (3.2) suppose implicitement que le profil \mathcal{U}_0 varie peu à l’échelle d’une oscillation. Ceci est vérifié pour la plupart des lasers car la durée d’impulsion est grande devant la longueur d’onde, mais ce n’est plus le cas pour les impulsions ultra-courtes (figure 3.1) obtenues par certains lasers récents.

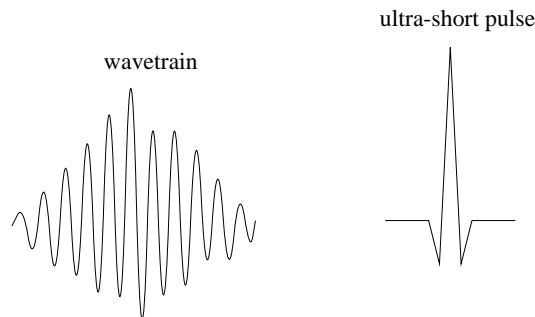


FIG. 3.1 – Exemples d’un train d’onde et d’une impulsion ultra-courte

Pour ce qui est de l'étude des impulsions ultra-courtes en optique géométrique, nous renvoyons à [3]. Pour les échelles de temps diffractives, la plupart des études connues ont été écrites par D. Alterman et J. Rauch [1] [4] [2]. Pour le cas non-dispersif, ces auteurs montrent de manière rigoureuse, en utilisant les techniques asymptotiques, que l'approximation de Schrödinger utilisée pour les trains d'onde doit être remplacée par une autre approximation pour les impulsions ultra-courtes (avec $v_g \vec{e}_z$ la vitesse de groupe),

$$2\partial_{z_0}\partial_\tau\mathcal{V} = v_g(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{V} + \partial_{z_0}f(\mathcal{V}). \quad (3.3)$$

Un des intérêts des travaux [1] et [4] est de considérer des impulsions de moyennes non nulles, comme c'était le cas dans des travaux plus anciens comme [53] et [54]. Nous utilisons ici la technique *de seuil-limite infrarouge* introduit par D. Alterman pour obtenir cette généralité. En dehors de cela, notre approche est complètement différente car elle est basée sur les oscillations à spectre purement continu.

Notre méthode présente principalement trois atouts. Le premier d'entre eux est que cette méthode permet de généraliser les méthodes usuelles de l'optique diffractive [21] [37] [40], ainsi les impulsions ultra-courtes n'apparaissent plus comme un cas pathologique et les impulsions "*mixtes*" comme les lasers à spectre large peuvent être traitées sans plus de difficultés. Le second atout de cette méthode se trouve dans l'étude des non linéarités, on montre que la plupart d'entre elles peuvent être éliminées car leur influence est négligeable. Enfin, notre méthode nous permet d'étudier des modèles dispersifs qui sont physiquement pertinents. Plus précisément, une solution approchée pour les impulsions ultra-courtes est prise sous la forme

$$u^\varepsilon(t, x, y, z) = \varepsilon^p \mathcal{U}_{0,II}(\varepsilon t, t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}),$$

où $\mathcal{U}_{0,II}$ est un profil dont le spectre oscillant est purement continu. En effet, l'impulsion est ici trop courte pour qu'une oscillation sinusoïdale puisse apparaître. Dans le cas non dispersif, on retrouve bien sûr que $\mathcal{U}_{0,II}$ doit vérifier l'équation de D. Alterman et J. Rauch (3.3). Le cas dispersif est quant à lui à la fois plus simple et plus compliqué car si les non linéarités de (3.3) peuvent être négligées, la vitesse de groupe $v_g \vec{e}_z$ dépend alors de la fréquence.

3.1 Généralités

3.1.1 Les espaces

Nous cherchons une solution approchée de (3.1) pour des échelles de temps diffractives. Ainsi, trois échelles de variables, par rapport au petit paramètre ε , interviendront donc dans cette étude

- l'échelle rapide $O(\frac{1}{\varepsilon})$ relative aux phénomènes oscillatoires,
- l'échelle intermédiaire $O(1)$ de l'optique géométrique,
- l'échelle lente $O(\varepsilon)$ caractéristique des phénomènes diffractifs.

Afin d'identifier clairement les variations des fonctions considérées selon ces trois échelles, nous les exprimerons comme dans [21] à l'aide de fonctions auxiliaires appelées *profils*. Nous cherchons ainsi des solutions exactes de (3.1) sous la forme

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x, y, z) = \varepsilon^p \mathbf{U}^\varepsilon(\varepsilon t, t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}).$$

Comme précédemment, le facteur d'amplitude ε^p est choisi de manière à observer simultanément les effets non linéaires et diffractifs. Avant d'introduire les espaces associés aux profils $\mathcal{V}(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0)$ que nous utilisons pour exprimer les solutions exactes et approchées de (3.1), introduisons quelques notations.

Notations. Par la suite, nous notons $\theta := (\omega_L t_0 - k_L z_0)$ la variable de phase. Nous désignons par $\xi = (\omega, \kappa)$ et par $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ les variables duales de Fourier respectivement suivant (t_0, z_0) et (x, y, z) . La lettre s désigne toujours un réel positif $s > 3/2$.

Nous désignons aussi par \mathcal{F} et par $\widehat{\cdot}$ les transformées de Fourier suivant les variables (t_0, z_0) et (x, y, z) . Enfin, dans tout ce qui suit, on désigne toujours par la lettre C les constantes.

L'espace choisi pour les profils doit contenir les oscillations à spectre ponctuel du type $U(\tau, t, x, y, z)e^{i\theta}$ et des oscillations à spectre continu. Les espaces utilisés ici permettent donc de généraliser les échelles diffractives introduites dans [42] pour modéliser l'effet Raman.

Définition 3.1.1. i. Nous notons A_0^s l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_{x,y,z}^3 \times \mathbb{R}_{t_0,z_0}^2$ à valeurs dans \mathbb{C}^n et dont la transformée de Fourier par rapport à (t_0, z_0) est dans l'ensemble $\mathcal{BV}(\mathbb{R}_\xi^2, (H^s(\mathbb{R}_{x,y,z}^3))^n)$ des mesures boréliennes définies sur \mathbb{R}_ξ^2 à valeurs dans $(H^s(\mathbb{R}_{x,y,z}^3))^n$ et à variation bornée. De plus,

$$\|\mathcal{V}\|_{A_0^s} := |\mathcal{FV}|_{\mathcal{BV}}, \quad \forall \mathcal{V} \in A_0^s.$$

ii. Nous notons $E_{\tau^*}^s$ les fonctions définies sur $[0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{x,y,z}^3 \times \mathbb{R}_{t_0,z_0}^2$ à valeurs dans \mathbb{C}^n et dont la transformée de Fourier par rapport à (t_0, z_0) est dans $\mathcal{C}([0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t, \mathcal{BV}(\mathbb{R}_\xi^2, (H^s(\mathbb{R}_{x,y,z}^3))^n))$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$\|\mathcal{V}(t)\|_{E_{\tau^*}^s} := \sup_{0 \leq \tau \leq \tau^*} |\mathcal{FV}(\tau, t)|_{\mathcal{BV}}, \quad \forall \mathcal{V} \in E_{\tau^*}^s.$$

iii. Nous notons $A_{\tau^*}^s$ le sous-espace de $E_{\tau^*}^s$ composé des fonctions de $E_{\tau^*}^s$ bornées sur $[0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t$, et on dotera cet espace de la norme

$$\|\mathcal{V}\|_{A_{\tau^*}^s} := \sup_{0 \leq \tau \leq \tau^*} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathcal{F}\mathcal{V}(\tau, t)|_{\mathcal{BV}} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathcal{V}(t)\|_{E_{\tau^*}^s}, \quad \forall \mathcal{V} \in A_{\tau^*}^s.$$

iv. Nous notons $B_{\tau^*}^s$ le sous-espace de $A_{\tau^*}^s$ composé des fonctions de $A_{\tau^*}^s$ qui ne dépendent pas de t .

La notion classique de spectre oscillant d'une fonction (presque)-périodique [32] peut alors se généraliser comme suit.

Définition 3.1.2. Si $\mathcal{V} \in E_{\tau^*}^s$, alors pour tout $(\tau, t) \in [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t$, le spectre oscillant $\text{Sp } \mathcal{V}(\tau, t)$ de $\mathcal{V}(\tau, t)$ est le support de la transformée de Fourier $\mathcal{F}\mathcal{V}(\tau, t)$.

On définit également le spectre de \mathcal{V} comme $\text{Sp } \mathcal{V} = \bigcup_{(\tau, t) \in [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t} \text{Sp } \mathcal{V}(\tau, t)$.

La proposition suivante [42] résume les principales propriétés de ces espaces fonctionnels.

Proposition 3.1.1. i. Les deux espaces normés $(A_0^s, \|\cdot\|_{A_0^s})$, $(A_{\tau^*}^s, \|\cdot\|_{A_{\tau^*}^s})$ sont complets.

ii. Toute application J -linéaire G définie sur $(\mathbb{C}^n)^J$ à valeurs dans \mathbb{C}^n , se prolonge en une application J -linéaire continue définie sur A_0^s (resp. $A_{\tau^*}^s$) et à valeurs dans A_0^s (resp. $A_{\tau^*}^s$). De plus, il existe une constante $l > 0$ telle que pour tout J -uplet $(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_J) \in A_0^s$ (resp. $A_{\tau^*}^s$), on a

$$\|G(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_J)\| \leq l \|\mathcal{V}_1\| \dots \|\mathcal{V}_J\|,$$

$\|\cdot\|$ désignant la norme de A_0^s (resp. $A_{\tau^*}^s$).

iii. Soit $\mathcal{V} \in A_0^s$ (resp. $A_{\tau^*}^s$). Alors la fonction \mathcal{V} est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^5)^n$ (resp. $\mathcal{C}([0, \tau^*] \times \mathbb{R}^6)^n$). De plus, \mathcal{V} est bornée et il existe un nombre positif l' tel que

$$\|\mathcal{V}\|_{\infty} \leq l' \|\mathcal{V}\|_{A_0^s} \quad (\text{resp.} \quad \|\mathcal{V}\|_{\infty} \leq l' \|\mathcal{V}\|_{A_{\tau^*}^s}).$$

iv. Soit $\mathcal{V} \in A_0^s$ (resp. $A_{\tau^*}^s$). Alors la fonction v^ε définie sur \mathbb{R}^3 (resp. $[0, \tau^*/\varepsilon] \times \mathbb{R}^3$) par $v^\varepsilon(x, y, z) = \mathcal{V}(x, y, z, 0, \frac{z}{\varepsilon})$ (resp. $v^\varepsilon(t, x, y, z) = \mathcal{V}(\varepsilon t, t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon})$) est dans $L^2(\mathbb{R}^3)^n$ (resp. $\mathcal{C}([0, \frac{\tau^*}{\varepsilon}], L^2(\mathbb{R}^3)^n)$). On a de plus

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathcal{V}\|_{A_0^s} \quad (\text{resp.} \quad \sup_{0 \leq t \leq \frac{\tau^*}{\varepsilon}} \|v^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathcal{V}\|_{A_{\tau^*}^s}).$$

Exemples.

1. Les oscillations à spectre ponctuel du type $U(\tau, t, x, y, z)e^{i\theta}$ avec $U \in \mathcal{C}([0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^3)^n)$, sont dans $E_{\tau^*}^s$. En effet, en prenant la transformée de Fourier en (t_0, z_0) , on obtient

$$\mathcal{F}(Ue^{i\theta}) = U\delta_{(\omega_L, -k_L)},$$

qui est bien dans $\mathcal{C}([0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t, \mathcal{BV}(\mathbb{R}_\xi^2, H^s(\mathbb{R}_{x,y,z}^3)^n))$.

2. Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^2 et α une fonction L^1 définie sur M et à valeurs dans $\mathcal{C}([0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^3)^n)$. Alors la fonction densité [42] définie par

$$\mathcal{V}(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) = \int_M e^{i(t_0, z_0) \cdot (\omega, \kappa)} \alpha(\omega, \kappa)(\tau, t, x, y, z) \sigma(d\omega, d\kappa),$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur M est dans $E_{\tau^*}^s$ et son spectre oscillant est dans M .

3.1.2 Résolution du problème de Cauchy

Nous rappelons que (3.1) s'écrit

$$\begin{cases} L^\varepsilon(\partial)\mathbf{u}^\varepsilon + f(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0}(x, y, z) = \mathbf{u}_\varepsilon^0(x, y, z). \end{cases}$$

Nous précisons maintenant les hypothèses que nous faisons sur $L^\varepsilon(\partial)$.

Hypothèse 3.1.1. *Le système (3.1) est symétrique hyperbolique. Plus précisément l'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ s'écrit*

$$L^\varepsilon(\partial) = A_0\partial_t + A_1\partial_x + A_2\partial_y + A_3\partial_z + \frac{L_0}{\varepsilon},$$

où les $(A_i)_{i=1,2,3}$ sont des matrices réelles hermitiennes et A_0 est définie positive. Par ailleurs, le système (3.1) est conservatif au sens où $(L_0)^* = -L_0$.

Remarque 3.1.1. *Grâce à l'hypothèse faite sur A_0 , nous pouvons prendre comme nouvelle fonction inconnue $A_0(0)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}^\varepsilon$. Si l'on multiplie les équations de (3.1) par $A_0(0)^{-\frac{1}{2}}$, le système résultant satisfait les mêmes hypothèses que le système (3.1) et vérifie de plus $A_0(0) = Id$. Dans toute la suite, on prend toujours $A_0 = Id$.*

Nous étudions ici des non linéarités du type de celles définies dans l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.1.2. *Il existe une application trilinéaire F telle que $\forall u \in \mathbb{C}^n$, $f(u) = F(u, u, u)$.*

Remarque 3.1.2. *On considère ici des non linéarités d'ordre 3 pour simplifier les calculs et se placer dans le cadre des applications présentées au dernier paragraphe de ce chapitre. Il serait possible d'étendre l'étude qui va suivre à des non linéarités d'ordre supérieur.*

Les conditions initiales pour (3.1) doivent être suffisamment générales pour pouvoir modéliser à la fois les phénomènes de spectre large et d'impulsions ultra-courtes évoqués dans l'introduction. Les espaces définis dans le paragraphe précédent nous permettent une telle généralité et nous considérons des conditions initiales de la forme

$$\mathbf{u}_\varepsilon^0 = \varepsilon^p \mathbf{U}^0(x, y, z, 0, \frac{z}{\varepsilon}), \quad (3.4)$$

avec $\mathbf{U}^0 \in A_0^s$.

Choix de la taille des solutions. Le choix de p est dicté [21] par l'ordre de la non linéarité, $p = 1/2$. Avec ce choix, les effets non linéaires et diffractifs apparaissent en même temps.

L'objet du théorème qui suit est de prouver que l'unique solution H^s du problème de Cauchy (3.1) avec condition initiale (3.4) peut s'écrire à l'aide de profils dans $B_{\tau^*}^s$.

Théorème 3.1.1. *Soit $R > 0$ et \mathbf{U}^0 dans A_0^s tel que $\|\mathbf{U}^0\|_{A_0^s} \leq R$. Il existe un réel positif $\tau_1^* > 0$, qui dépend de R mais pas de ε , tel que pour tout $\varepsilon > 0$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} L^\varepsilon(\partial)\mathbf{u}^\varepsilon + f(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0} = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{U}^0(x, y, z, 0, \frac{z}{\varepsilon}), \end{cases}$$

a une solution unique \mathbf{u}^ε dans $C([0, \frac{\tau_1^*}{\varepsilon}] \times \mathbb{R}^3)^n \cap C([0, \frac{\tau_1^*}{\varepsilon}], H^s(\mathbb{R}^3)^n)$.

De plus, \mathbf{u}^ε peut s'écrire sous la forme $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x, y, z) := \sqrt{\varepsilon}\mathbf{U}^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon})$, où $\mathbf{U}^\varepsilon \in B_{\tau_1^*}^s$ est déterminé de manière unique par l'équation singulière

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{U}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}(A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + A_3 \partial_z) \mathbf{U}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}(\partial_{t_0} + A_3 \partial_{z_0} + L_0) \mathbf{U}^\varepsilon + f(\mathbf{U}^\varepsilon) = 0, \\ \mathbf{U}^\varepsilon|_{\tau=0} = \mathbf{U}^0, \end{cases} \quad (3.5)$$

et pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, \mathbf{U}^ε vérifie $\|\mathbf{U}^\varepsilon\|_{B_{\tau_1^*}^s} \leq 2R$.

Preuve.

La preuve de ce théorème étant semblable à celle de la preuve du théorème d'existence de [42], nous nous bornerons à en donner les étapes principales. On montre tout d'abord que l'existence de \mathbf{u}^ε est assurée par l'existence d'un profil \mathbf{U}^ε satisfaisant (3.5). L'existence de \mathbf{U}^ε est obtenu de manière classique par itérations de Picard à partir de l'estimation suivante pour le problème linéaire.

Lemme 3.1.1. Soit $\mathcal{V}^0 \in A_0^s$ et $\mathcal{W} \in B_{\tau_1^*}^s$. Le problème linéaire

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathcal{V} + \varepsilon^{-1}(A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + A_3 \partial_z) \mathcal{V} + \varepsilon^{-2}(\partial_{t_0} + A_3 \partial_{z_0} + L_0) \mathcal{V} = \mathcal{W}, \\ \mathcal{V}|_{\tau=0} = \mathcal{V}^0, \end{cases}$$

a une unique solution dans $B_{\tau_1^*}^s$. De plus, on a

$$\|\mathcal{V}\|_{B_{\tau_1^*}^s} \leq \|\mathcal{V}^0\|_{A_0^s} + \tau_1^* \|\mathcal{W}\|_{B_{\tau_1^*}^s}.$$

L'existence de \mathbf{u}^ε étant ainsi établie, l'unicité est prouvée par des arguments classiques de type L^2 . □

3.1.3 Méthode générale

Nous voulons trouver une solution approchée u^ε de la solution exacte \mathbf{u}^ε du problème (3.1) à l'aide des outils de l'optique diffractive. Nous cherchons ainsi une solution approchée u^ε sous la forme

$$u^\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t, t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}), \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon \mathcal{U}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{U}_2, \quad (3.6)$$

et $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in E_{\tau^*}^s$.

Le développement de $L^\varepsilon(\partial)u^\varepsilon + f(u^\varepsilon)$ suivant les puissances de ε , donne

$$L^\varepsilon(\partial)u^\varepsilon + f(u^\varepsilon) = \sum_{j=-1}^7 \varepsilon^{\frac{1}{2}+j} \mathcal{R}_j(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) \Big|_{\tau=\varepsilon t, t_0=\frac{t}{\varepsilon}, z_0=\frac{z}{\varepsilon}}, \quad (3.7)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{-1}(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) &= i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_0, \\ \mathcal{R}_0(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) &= i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_1 + L_1(\partial)\mathcal{U}_0, \\ \mathcal{R}_1(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) &= i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_2 + L_1(\partial)\mathcal{U}_1 + \partial_\tau \mathcal{U}_0 + f(\mathcal{U}_0), \\ \mathcal{R}_2(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) &= L_1(\partial)\mathcal{U}_2 + \partial_\tau \mathcal{U}_1 + \langle f(\mathcal{U}^\varepsilon) \rangle_{\frac{1}{2}+2}, \\ \mathcal{R}_3(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) &= \partial_\tau \mathcal{U}_2 + \langle f(\mathcal{U}^\varepsilon) \rangle_{\frac{1}{2}+3}, \\ \mathcal{R}_{j \geq 4}(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) &= \langle f(\mathcal{U}^\varepsilon) \rangle_{\frac{1}{2}+j}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec les notations

$$\mathcal{L}(D_{t_0, z_0}) = D_{t_0} + A_3 D_{z_0} + \frac{L_0}{i}, \quad L_1(\partial) := \partial_t + A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + A_3 \partial_z := \partial_t + A(\partial_{x, y, z}),$$

tant que $\langle f(\mathcal{U}^\varepsilon) \rangle_k$ représente le coefficient du monôme ε^k dans le développement suivant les puissances de ε de $f(\mathcal{U}^\varepsilon)$.

La stratégie de l'optique diffractive revient à chercher $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et \mathcal{U}_2 afin d'annuler les profils $\mathcal{R}_m(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0), m = -1, 0, 1$. On montre alors que la fonction associée u^ε donnée par (3.6) est bien une approximation de la solution de (3.1), et on donne un théorème de stabilité.

3.1.4 Outils mathématiques

Les définitions suivantes introduisent quelques concepts de l'optique diffractive.

Définition 3.1.3. i. On appelle variété caractéristique associée à l'opérateur \mathcal{L} l'ensemble

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{(\omega, \kappa) \in \mathbb{R}^2, \det(\mathcal{L}(\omega, \kappa)) = \det(\omega Id + \kappa A_3 + L_0/i) = 0\};$$

ii. On note $\pi(\omega, \kappa)$ le projecteur orthogonal sur $\ker(\mathcal{L}(\omega, \kappa))$ et $\mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa)$ l'inverse partiel de $\mathcal{L}(\omega, \kappa)$ défini sur $Im(\mathcal{L}(\omega, \kappa))$ par

$$\mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa)\pi(\omega, \kappa) = 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa)\mathcal{L}(\omega, \kappa) = Id - \pi(\omega, \kappa);$$

iii. Au voisinage de tout point lisse $(\underline{\omega}, \underline{\kappa})$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, nous désignons par $\omega(\kappa)$ un paramétrage local de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Le lemme suivant exprime les conditions de résolubilité d'une équation linéaire à l'aide des outils introduits dans la définition précédente.

Lemme 3.1.2. Soit $a, b \in \mathbb{C}^n$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes

- i.** $\mathcal{L}(\omega, \kappa)a = b$,
- ii.** $\pi(\omega, \kappa)b = 0$ et $(Id - \pi(\omega, \kappa))a = \mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa)b$.

Nous voulons généraliser ce lemme de résolubilité algébrique aux équations de la forme $\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{V} = \mathcal{W}$, où \mathcal{V} et \mathcal{W} sont dans $E_{\tau^*}^s$. Pour cela, comme dans [42], nous introduisons d'abord la notion de \mathcal{L}^{-1} -régularité.

Définition 3.1.4. Soit $\mathcal{V} \in E_{\tau^*}^s$, notons $\mu(\tau, t) := \mathcal{F}\mathcal{V}(\tau, t)$. On dira que \mathcal{V} est \mathcal{L}^{-1} -régulière si pour tout $(\tau, t) \in [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t$, \mathcal{L}^{-1} est $\mu(\tau, t)$ -intégrable.

Nous pouvons dès lors, généraliser le lemme 3.1.2 de la manière suivante

Lemme 3.1.3. Soit \mathcal{V} et \mathcal{W} dans $E_{\tau^*}^s$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- i.** $\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{V} = \mathcal{W}$,
- ii.** $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{W} = 0$, \mathcal{W} est \mathcal{L}^{-1} -régulier et $(Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\mathcal{V} = \mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})\mathcal{W}$.

Remarque 3.1.3. La condition de \mathcal{L}^{-1} -régularité ne peut être satisfaite pour le problème physique que nous regardons ici. En effet, l'application $(\omega, \kappa) \mapsto \mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa)$ n'est pas bornée au voisinage de l'origine. Quand on exclut les basses fréquences, comme dans beaucoup d'applications en optique, \mathcal{L}^{-1} reste bornée pour les fréquences considérées, et la condition de \mathcal{L}^{-1} -régularité est facilement satisfaite. Mais quand on tient compte des basses fréquences, comme c'est le cas ici, \mathcal{L}^{-1} explose et la condition de \mathcal{L}^{-1} -régularité n'est en général pas satisfaite. Dans ce cas, nous utilisons des outils similaires à ceux introduits par D.Alterman [1].

Par ailleurs, il est aussi intéressant de pouvoir décomposer n'importe quel profil de $E_{\tau^*}^s$ en une partie à spectre discret (sinusoïdale) et une partie à spectre purement continu. Ceci est assuré par la proposition suivante.

Proposition 3.1.2. *Soit $\mathcal{V} \in A_0^s$ (resp. $E_{\tau^*}^s$). Alors on peut écrire de manière unique le profil \mathcal{V} sous la forme $\mathcal{V} = \mathcal{V}_I + \mathcal{V}_{II}$, avec $\mathcal{V}_I, \mathcal{V}_{II} \in A_0^s$ (resp. $E_{\tau^*}^s$) tels que*

i. *le spectre de \mathcal{V}_I est discret (resp. le spectre de $\mathcal{V}_I(\tau, t, \cdot)$ est discret pour tout $(\tau, t) \in [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t$),*

ii. *le spectre de \mathcal{V}_{II} est purement continu au sens où tout point de \mathbb{R}^2 est de mesure nulle pour $\mathcal{F}\mathcal{V}_{II}$ (resp. $\mathcal{F}\mathcal{V}_{II}(\tau, t, \cdot)$ pour tout $(\tau, t) \in [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t$).*

Preuve.

Dans un premier temps, nous allons montrer l'existence de la décomposition d'un profil $\mathcal{V} \in E_{\tau^*}^s$ en une composante à spectre discret et une composante à spectre purement continu.

On note

$$\mu(\tau, t) := \mathcal{F}\mathcal{V}(\tau, t), \quad \forall (\tau, t) \in [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t,$$

et $S_{\tau, T}$ l'ensemble des points de mesure non nulle pour $\mu(\tau, T)$

$$S_{\tau, t} = \{p \in \mathbb{R}^2, \mu(\tau, t)(\{p\}) \neq 0\}.$$

Nous décomposons alors $\mu(\tau, t)$ sous la forme

$$\mu(\tau, t) = \mathbb{1}_{S_{\tau, t}}\mu(\tau, t) + (1 - \mathbb{1}_{S_{\tau, t}})\mu(\tau, t),$$

et la proposition est prouvée si on montre que $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{S_{\tau, t}}\mu(\tau, t))$ et $\mathcal{F}^{-1}[(1 - \mathbb{1}_{S_{\tau, t}})\mu(\tau, t)]$ sont dans $E_{\tau^*}^s$. En effet, il suffit alors de poser pour tout (τ, t) ,

$$\mathcal{V}_I(\tau, t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{S_{\tau, t}}\mu(\tau, t)) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{II}(\tau, t) = \mathcal{F}^{-1}[(1 - \mathbb{1}_{S_{\tau, t}})\mu(\tau, t)].$$

Il est clair que pour tout $(\tau, t) \in [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t$, les mesures $(\mathbb{1}_{S_{\tau, t}}\mu(\tau, t))$ et $[(1 - \mathbb{1}_{S_{\tau, t}})\mu(\tau, t)]$ sont dans $\mathcal{BV}(\mathbb{R}_\xi^2, H^s(\mathbb{R}^3)^n)$. La principale difficulté réside dans la preuve de la dépendance continue en (τ, t) de ces deux mesures. Comme l'application $(\tau, t) \mapsto \mu(\tau, t)$ est continue par hypothèse, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t &\longrightarrow \mathcal{BV}(\mathbb{R}_\xi^2, H^s(\mathbb{R}^3)^n), \\ (\tau, t) &\longmapsto \mathbb{1}_{S_{\tau, t}}\mu(\tau, t), \end{aligned}$$

est continue, *i.e.* que $\mathbb{1}_{S_{\tau, t}}\mu(\tau, t) - \mathbb{1}_{S_{\tau', t'}}\mu(\tau', t')$ tend vers zéro dans $\mathcal{BV}(\mathbb{R}_\xi^2, H^s(\mathbb{R}^3)^n)$ quand (τ', t') tend vers (τ, t) . On a

$$\mathbb{1}_{S_{\tau, t}}\mu(\tau, t) - \mathbb{1}_{S_{\tau', t'}}\mu(\tau', t') = (\mathbb{1}_{S_{\tau, t}} - \mathbb{1}_{S_{\tau', t'}})\mu(\tau, t) + \mathbb{1}_{S_{\tau', t'}}(\mu(\tau, t) - \mu(\tau', t')).$$

Le second terme du membre de droite tend vers zéro quand (τ', t') tend vers (τ, t) grâce à la continuité de l'application $(\tau, t) \mapsto \mu(\tau, t)$. Par ailleurs le premier terme du membre de droite s'écrit

$$(\mathbb{1}_{S_{\tau,t}} - \mathbb{1}_{S_{\tau',t'}})\mu(\tau, t) = \mathbb{1}_{S_{\tau,t} \setminus S_{\tau',t'}}\mu(\tau, t) - \mathbb{1}_{S_{\tau',t'} \setminus S_{\tau,t}}\mu(\tau, t).$$

Or $\mathbb{1}_{S_{\tau',t'} \setminus S_{\tau,t}}\mu(\tau, t) = 0$ puisque si $p \in S_{\tau',t'} \setminus S_{\tau,t}$ alors $\mu(\tau, t)(\{p\}) = 0$. D'un autre côté, on a $\mathbb{1}_{S_{\tau,t} \setminus S_{\tau',t'}}(\{p\}) \rightarrow 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^2$ quand $(\tau', t') \rightarrow (\tau, t)$. En effet, pour tout $p \in S_{\tau,t}$, $\mu(\tau, t)(\{p\}) \neq 0$. Par continuité de l'application $(\tau, t) \mapsto \mu(\tau, t)$, on a $\mu(\tau', t')(\{p\}) \rightarrow \mu(\tau, t)(\{p\})$ dans $H^s(\mathbb{R}^3)^n$ quand $(\tau', t') \rightarrow (\tau, t)$. Par conséquent, $\mu(\tau', t')(\{p\}) \neq 0$ si (τ', t') est assez proche de (τ, t) . En d'autres termes, $p \in S_{\tau',t'}$, et donc $p \notin S_{\tau,t} \setminus S_{\tau',t'}$. La preuve de la dépendance continue en temps est ainsi terminée par un argument de convergence dominée.

L'existence de la décomposition pour un profil de $E_{\tau^*}^s$, et *a fortiori* pour un profil de A_0^s est donc prouvée. La preuve de l'unicité de la décomposition ne soulève quant à elle aucune difficultés.

Notation. Par la suite, pour tout profil \mathcal{V} dans A_0^s ou $E_{\tau^*}^s$, nous désignerons par \mathcal{V}_I la partie à spectre discret et par \mathcal{V}_{II} la partie à spectre purement continu. □

3.1.5 Organisation des prochains paragraphes

Par la suite, nous proposons d'étudier les systèmes hyperboliques non linéaires de la forme (3.1) dans trois cas : le cas dispersif, le cas non-dispersif et le cas faiblement dispersif.

Le premier cas présenté au paragraphe 3.2 est le cas de systèmes hyperboliques non linéaires dispersifs. On commence par dériver les équations de profil (§ 3.2.1) sous l'hypothèse simplificatrice d'absence de basses fréquences (fréquences infrarouges). En effet, on a besoin de cette hypothèse en introduisant la notion de *filtre seuil limite infrarouge* (définition 3.2.1) proposée par D. Alterman pour résoudre le dernier ordre du développement asymptotique pour la partie à spectre continu. Nous donnons ensuite (§ 3.2.2) une simplification ces équations de profil en introduisant les notions de vitesse de groupe et de dispersion de vitesse de groupe (proposition 3.2.1). Pour terminer l'obtention des équations de profil, nous présentons (§ 3.2.3) une analyse pointue des non linéarités. En particulier, on montre que la plupart de ces non linéarités s'annulent. Grâce au lemme 3.2.2, on prouve qu'il n'y a pas d'interactions spectre continu - spectre continu, ni d'interactions spectre continu - spectre discret. On obtient ainsi un modèle constitué d'une équation de Schrödinger standard avec effet Kerr pour la partie à spectre discret (3.33) et d'une équation de Schrödinger linéaire pour la partie à spectre continu (3.32). Nous pouvons maintenant donner un théorème d'existence et d'unicité (proposition 3.2.2, § 3.2.4) des solutions de ce modèle en l'absence de basses fréquences. De même, le fait que la solution approchée associée aux profils obtenus précédemment ((3.33) et (3.32)) converge vers la solution exacte de (3.1) est prouvée à l'aide du théorème 3.2.1 (§ 3.2.5). Pour conclure l'étude du cas de systèmes hyperboliques non linéaires dispersifs, il

reste à énoncer le théorème de stabilité avec présence des basses fréquences. Ceci est l'objet du théorème 3.2.2 (§ 3.2.6) qui généralise le théorème 3.2.1.

Nous étudions ensuite le cas de systèmes hyperboliques non linéaires non-dispersifs (§ 3.3). Comme les méthodes sont les mêmes que dans le cas dispersif, on ne détaille pas les démonstrations. Cependant, la principale différence entre les deux cas est assez importante pour lui consacrer un paragraphe. En effet, on montre que *les interactions non linéaires entre composantes à spectre purement continu peuvent être observées dans le cas non dispersif*, alors que dans le cas dispersif elles sont négligeables (lemme 3.3.1, § 3.3.1). On obtient alors un modèle constitué d'une équation de Schrödinger standard avec effet Kerr pour la partie à spectre discret (3.60) et d'une équation de Schrödinger non linéaire pour la partie à spectre continu (3.61). On donne également un théorème d'existence et d'unicité (proposition 3.3.1, § 3.3.2) des solutions de ce modèle et un théorème de stabilité (théorème 3.3.1, § 3.3.3).

Pour palier le fossé entre le cas de systèmes hyperboliques non linéaires dispersifs et le cas de systèmes hyperboliques non linéaires non-dispersifs, on propose aussi de regarder le cas de systèmes hyperboliques non linéaires faiblement dispersifs (§ 3.4). Ce cas donne un modèle présentant une équation de Schrödinger semi-linéaire pour la partie à spectre continu (3.64).

Finalement, on conclut ce chapitre, en proposant deux exemples physiques ayant servi de guide à cette étude (§ 3.5). Ces exemples sont les lasers à spectre large (§ 3.5.1) et les impulsions ultra-courtes (§ 3.5.2). En particulier, on utilise les résultats précédents pour simplifier les équations de profil et proposer ainsi différents modèles obtenus à partir du système de Maxwell-Lorentz anharmonique.

3.2 Etude du cas dispersif

Dans toute cette partie, nous considérons des problèmes du type (3.1) dispersifs. Plus précisément, nous nous placerons dans le cadre de l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.2.1. *On a $\{0, \pm(\omega_L, -k_L)\} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, mais pour tout $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, le point $j(\omega_L, -k_L)$ n'est pas dans $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$. Nous considérons également que $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ (figure 3.2) est une union de courbes lisses qui ne sont jamais ni parallèles, ni asymptotes, ni tangentes et qui ont une intersection seulement suivant l'axe vertical ($O\omega$).*

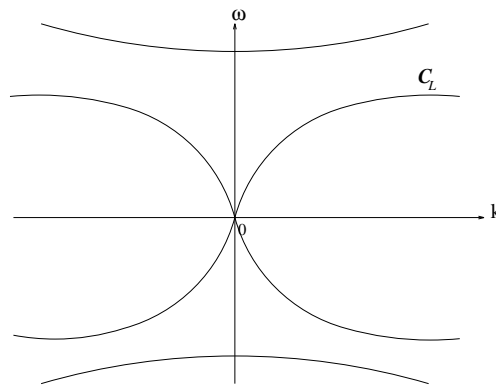


FIG. 3.2 – Exemple de variété caractéristique pour le système de Maxwell-Lorentz

Remarque 3.2.1. *Les différents modèles non linéaires dont la linéarisation donne les équations de Maxwell-Lorentz (voir les applications du paragraphe 3.5) ne satisfont pas exactement l'hypothèse précédente. En effet, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ contient trois lignes horizontales qui sont a fortiori parallèles. De plus, deux de ces lignes sont aussi tangentes aux nappes courbes de la variété caractéristique. Cependant, ceci n'est pas important car les lignes horizontales sont exclues grâce à la condition de divergence nulle que l'on a pour ces systèmes. Ainsi, le modèle de Maxwell-Lorentz, et ses versions non linéaires, rentrent dans l'hypothèse précédente.*

3.2.1 Détail des différentes étapes du développement asymptotique en l'absence de basses fréquences

Conformément à la remarque 3.1.3, les basses fréquences rendent l'analyse plus difficile en raison de l'absence de la \mathcal{L}^{-1} -régularité. Ainsi, dans cette partie, nous nous focalisons sur des profils \mathcal{U}_0 dont le spectre est en dehors de la bande $\{(\omega, \kappa), |\kappa| \leq \delta\}$. Plus précisément, nous supposons que la composante à spectre purement continu du terme principal \mathcal{U}_0 vérifie l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.2.2. *Le spectre $\text{Sp } \mathcal{U}_{0,II}$ de la composante à spectre continu de \mathcal{U}_0 est dans l'ensemble $\{(\omega, \kappa) \in \mathbb{R}^2, |\kappa| > \delta\}$, où $\delta > 0$.*

Le lemme suivant fait le lien entre l'absence de basses fréquences et la \mathcal{L}^{-1} -régularité.

Lemme 3.2.1. *Soit \mathcal{V}_{II} un profil de $E_{\tau^*}^s$ tel que $\text{Sp}\mathcal{V}_{II} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$. Si de plus $\text{Sp}\mathcal{V}_{II} \subset \{(\omega, \kappa) \in \mathbb{R}^2, |\kappa| > \delta\}$ alors \mathcal{V}_{II} est \mathcal{L}^{-1} -régulière, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{V}_{II}(t)\|_{E_{\tau^*}^s} \leq \frac{C}{\delta} \|\mathcal{V}_{II}(t)\|_{E_{\tau^*}^s}.$$

En particulier, si $\mathcal{V} \in A_{\tau^*}^s$, on a

$$\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{V}_{II}\|_{A_{\tau^*}^s} \leq \frac{C}{\delta} \|\mathcal{V}_{II}\|_{A_{\tau^*}^s}.$$

Preuve.

Pour tout $(\omega, \kappa) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa)$ s'écrit

$$\mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa) = \sum_{j, \omega_j(\kappa) \neq \omega} \frac{1}{\omega - \omega_j(\kappa)} \pi(\omega_j(\kappa), \kappa),$$

où les ω_j sont des paramétrisations des différentes nappes de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$. Si $(\omega, \kappa) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, i.e. si il existe j_0 tel que $(\omega, \kappa) = (\omega_{j_0}(\kappa), \kappa)$ alors

$$\mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa) = \mathcal{L}^{-1}(\omega_{j_0}(\kappa), \kappa) = \sum_{j \neq j_0} \frac{1}{\omega_{j_0}(\kappa) - \omega_j(\kappa)} \pi(\omega_j(\kappa), \kappa). \quad (3.9)$$

Dire que \mathcal{V}_{II} est \mathcal{L}^{-1} -régulière implique que pour tout $(\tau, t) \in [0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t$, $\mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa)$ est intégrable pour $\mu(\tau, t) := \mathcal{F}\mathcal{V}_{II}(\tau, t)$. Comme, on a supposé que $\text{Sp}\mathcal{V}_{II} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, on doit montrer que l'expression donnée par (3.9) est intégrable pour $\mu(\tau, t)$.

Comme on l'a supposé dans l'hypothèse 3.2.1, les différentes nappes de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ne sont pas asymptotiques, (3.9) est donc bornée pour les grands $|\kappa|$. Les seuls points où cette expression n'est pas bornée sont ceux dont les différentes nappes se croisent. Grâce à l'hypothèse 3.2.1, ces points sont tous sur l'axe (Ow) .

Nous considérons maintenant ce qui arrive au voisinage de tels points. Soient j et j_0 tels que $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \omega_{j_0}(\kappa) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \omega_j(\kappa) = \omega_0$. Près de 0, on a

$$\frac{1}{\omega_{j_0}(\kappa) - \omega_j(\kappa)} = \frac{1}{(\omega_{j_0}(\kappa) - \omega_0) - (\omega_j(\kappa) - \omega_0)} \sim \frac{1}{\kappa(v_0 - v)},$$

où $v_0 = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \omega'_{j_0}(\kappa)$ et $v = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \omega'_j(\kappa)$. On sait que $v_0 - v \neq 0$, tant que l'Hypothèse 3.2.1 est vérifiée, et ainsi assure que deux nappes différentes ne sont jamais tangentes. Ainsi, l'expression donnée par (3.9) peut être bornée pour $|\kappa| > \delta$ par C/δ , qui donne la \mathcal{L}^{-1} -régularité pour \mathcal{V}_{II} et l'estimation du lemme.

□

Annulation de \mathcal{R}_{-1}

Annuler le terme en $\varepsilon^{-1/2}$ dans le développement (3.7) revient à résoudre $\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_0 = 0$, ce qui est équivalent grâce au lemme 3.1.2 à la condition de polarisation

$$\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0.$$

De plus, d'après la proposition 3.1.2, on peut décomposer \mathcal{U}_0 sous la forme $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{0,I} + \mathcal{U}_{0,II}$ où $\mathcal{U}_{0,I}$ est à spectre discret et $\mathcal{U}_{0,II}$ est à spectre purement continu. En cherchant $\mathcal{U}_{0,I}$ sous la forme $\mathcal{U}_{0,I,1}(\tau, t, x, y, z)e^{i\theta} + c.c$, la condition de polarisation $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0$ se décompose en

$$\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} = \mathcal{U}_{0,I,1} \quad \text{et} \quad \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II}. \quad (3.10)$$

Remarque 3.2.2. La notation *c.c* utilisée précédemment représente le complexe conjugué de l'expression précédente. Comme nous nous intéressons à des solutions à valeurs réelles de (3.1) et (3.5), nous supposons toujours que dans le développement de Fourier des composantes à spectres discrets, on a $\mathcal{U}_{j,I,k} = \overline{\mathcal{U}_{j,I,-k}}$.

Annulation de \mathcal{R}_0

Annuler le terme en $\varepsilon^{1/2}$ dans le développement (3.7) revient à résoudre $i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_1 + L_1(\partial)\mathcal{U}_0 = 0$. Comme nous l'avons fait pour \mathcal{U}_0 , nous pouvons écrire \mathcal{U}_1 sous la forme $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{1,I} + \mathcal{U}_{1,II}$ avec $\mathcal{U}_{1,I}$ à spectre discret et $\mathcal{U}_{1,II}$ à spectre purement continu. En cherchant $\mathcal{U}_{1,I}$ sous la forme $\mathcal{U}_{1,I,1}(\tau, t, x, y, z)e^{i\theta} + c.c$, l'équation $\mathcal{R}_0 = 0$ se décompose alors en

$$\begin{cases} i\mathcal{L}(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{1,I,1} + L_1(\partial)\mathcal{U}_{0,I,1} = 0, \\ i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II} + L_1(\partial)\mathcal{U}_{0,II} = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Compte tenu de la condition de polarisation (3.10) et du lemme 3.1.2, la première équation de (3.11) est équivalente à

$$\begin{cases} \pi(\omega_L, -k_L)L_1(\partial)\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} = 0, \\ (Id - \pi(\omega_L, -k_L))\mathcal{U}_{1,I,1} = i\mathcal{L}^{-1}(\omega_L, -k_L)A(\partial_{x,y,z})\mathcal{U}_{0,I,1}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Comme l'hypothèse 3.2.2 et le lemme 3.2.1 assurent que $A(\partial_{x,y,z})\mathcal{U}_{0,II}$ est \mathcal{L}^{-1} -régulière, on sait grâce au lemme 3.1.3 que la seconde équation de (3.11) s'écrit

$$\begin{cases} \pi(D_{t_0, z_0})L_1(\partial)\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ (Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\mathcal{U}_{1,II} = i\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})A(\partial_{x,y,z})\mathcal{U}_{0,II}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Remarque 3.2.3. A ce stade, seule la composante $(Id - \pi(\omega_L, -k_L))\mathcal{U}_{1,I,1}$ est déterminée. Nous pouvons donc choisir d'imposer la nullité de la composante restante

$$\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{1,I,1} = 0. \quad (3.14)$$

On ne peut pas faire la même chose pour $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ car cette composante va jouer un rôle important dans la résolution des équations de profil.

Annulation de \mathcal{R}_1

Annuler le terme en $\varepsilon^{3/2}$ dans le développement (3.7) revient à résoudre $i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_2 + L_1(\partial)\mathcal{U}_1 + \partial_\tau\mathcal{U}_0 + f(\mathcal{U}_0) = 0$, que nous pouvons décomposer comme précédemment avec la proposition 3.1.2 en une partie à spectre discret

$$-i\mathcal{L}(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{2,I} = L_1(\partial)\mathcal{U}_{1,I} + \partial_\tau\mathcal{U}_{0,I} + f(\mathcal{U}_0)_I, \quad (3.15)$$

et une partie à spectre purement continu

$$-i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{2,II} = L_1(\partial)\mathcal{U}_{1,II} + \partial_\tau\mathcal{U}_{0,II} + f(\mathcal{U}_0)_{II}. \quad (3.16)$$

La non linéarité $f(\mathcal{U}_0)_I$ qui intervient dans (3.15) est donnée par $f(\mathcal{U}_0)_I = f(\mathcal{U}_{0,I})$, qui est un polynôme trigonométrique que l'on note

$$f(\mathcal{U}_{0,I}) = f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}})e^{i\theta} + f(\mathcal{U}_{0,I,1})e^{3i\theta} + \text{c.c.} \quad (3.17)$$

Comme la troisième harmonique est créée par la non linéarité, on doit chercher $\mathcal{U}_{2,I}$ sous la forme

$$\mathcal{U}_{2,I}(\tau, t, x, y, z, \theta) = \mathcal{U}_{2,I,1}(\tau, t, x, y, z)e^{i\theta} + \mathcal{U}_{2,I,3}(\tau, t, x, y, z)e^{3i\theta} + \text{c.c.}$$

D'après l'hypothèse 3.2.1, la composante $\mathcal{U}_{2,I,3}$ est obtenue par inversion elliptique puisque $\mathcal{L}(3\omega_L, -3k_L)$ est alors inversible

$$\mathcal{U}_{2,I,3} = \mathcal{L}(3\omega_L, -3k_L)^{-1}f(\mathcal{U}_{0,I,1}). \quad (3.18)$$

La composante restante $\mathcal{U}_{2,I,1}$ vérifie

$$i\mathcal{L}(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{2,I,1} + L_1(\partial)\mathcal{U}_{1,I,1} + \partial_\tau\mathcal{U}_{0,I,1} + f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = 0,$$

et grâce au lemme 3.1.2, on obtient

$$\begin{cases} \pi(\omega_L, -k_L)(L_1(\partial)\mathcal{U}_{1,I,1} + \partial_\tau\mathcal{U}_{0,I,1} + f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}})) = 0, \\ (Id - \pi(\omega_L, -k_L))\mathcal{U}_{2,I,1} = i\mathcal{L}^{-1}(\omega_L, -k_L)(L_1(\partial)\mathcal{U}_{1,I,1} + \partial_\tau\mathcal{U}_{0,I,1} + f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}})). \end{cases}$$

En utilisant la condition de polarisation (3.10) et les équations (3.12) et (3.14), la première équation du système ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_\tau\mathcal{U}_{0,I,1} + i\pi(\omega_L, -k_L)A(\partial_{x,y,z})\mathcal{L}^{-1}(\omega_L, -k_L)A(\partial_{x,y,z})\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} \\ + \pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

alors que la seconde équation permet de donner $(Id - \pi(\omega_L, -k_L))\mathcal{U}_{2,I,1}$ en fonction de $\mathcal{U}_{0,I,1}$

$$\begin{aligned} (Id - \pi(\omega_L, -k_L))\mathcal{U}_{2,I,1} = i\mathcal{L}^{-1}(\omega_L, -k_L)(iL_1(\partial)\mathcal{L}^{-1}(\omega_L, -k_L)A(\partial_{x,y,z})\mathcal{U}_{0,I,1} \\ + f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}})). \end{aligned} \quad (3.20)$$

On a vu dans le sous-paragraphe 3.2.1, que l'analyse des composantes à spectre discret et continu est formellement la même, ce qui n'est plus le cas ici. Ceci est dû au fait que l'hypothèse 3.2.2 ne peut pas assurer que le membre de droite de l'équation (3.16) soit \mathcal{L}^{-1} -régulé.

Donc le lemme 3.1.3 ne peut pas être utilisé pour résoudre cette équation. A cause de cette difficulté, on ne peut pas en général trouver \mathcal{U}_2 dans $E_{\tau^*}^s$ tel que $\mathcal{R}_1 = 0$. Cependant, on peut choisir un $\mathcal{U}_2 \in E_{\tau^*}^s$ de telle façon que \mathcal{R}_1 soit vraiment petit. Dans un premier temps, nous introduisons la notion de *filtre de seuil-limite infrarouge* proposée par D. Alterman. Ce filtre permet de rendre \mathcal{R}_1 suffisamment petit.

Définition 3.2.1. Soit ψ une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(\kappa) = 1$ pour $|\kappa| > 1$ et $\psi(\kappa) = 0$ sinon. Pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, $\psi^\delta(\kappa)$ est défini par $\psi^\delta(\kappa) = \psi(\frac{\kappa}{\delta})$, où $\delta > 0$ est le même que pour l'Hypothèse 3.2.2.

Remarque 3.2.4. La fonction ψ introduite ci-dessus n'est pas lisse alors que le filtre de D.Alterman l'est. Tout au long de notre travail, ce choix permet d'alléger un peu les équations. En particulier, nous avons l'équivalence $Sp \mathcal{V} \subset \{(\omega, \kappa) \in \mathbb{R}^2, |\kappa| > \delta\} \iff \psi^\delta(D_{z_0})\mathcal{V} = \mathcal{V}$.

Comme aucune condition n'a été trouvée, à ce stade, pour simplifier $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1, II}$, on peut imposer une condition d'absence de basses fréquences pour cette composante, et plus précisément choisir $\mathcal{U}_{1, II}$ tel que

$$\psi^\delta(D_{z_0})\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1, II} = \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1, II}. \quad (3.21)$$

Au lieu de résoudre l'équation (3.16), on résout alors l'équation approchée (3.16) $_\delta$ définie par

$$-i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{2, II} = L_1(\partial)\mathcal{U}_{1, II} + \partial_\tau\mathcal{U}_{0, II} + \psi^\delta(D_{z_0})f(\mathcal{U}_0)_{II}.$$

En utilisant l'équation (3.13), l'équation précédente se lit

$$\begin{aligned} -i\mathcal{L}(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{2, II} &= iL_1(\partial)\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})A(\partial_{x, y, z})\mathcal{U}_{0, II} + L_1(\partial)\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1, II} \\ &\quad + \partial_\tau\mathcal{U}_{0, II} + \psi^\delta(D_{z_0})f(\mathcal{U}_0)_{II}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Grâce à la présence du filtre ψ^δ , à l'équation (3.21) et à l'hypothèse 3.2.2, le membre de droite de cette équation est \mathcal{L}^{-1} -régulier, donc (3.22) est équivalente à

$$\begin{aligned} \partial_\tau\mathcal{U}_{0, II} &+ i\pi(D_{t_0, z_0})A(\partial_{x, y, z})\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})A(\partial_{x, y, z})\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0, II} \\ &+ \pi(D_{t_0, z_0})L_1(\partial)\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1, II} \\ &+ \pi(D_{t_0, z_0})\psi^\delta(D_{z_0})[f(\mathcal{U}_0)]_{II} = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

et

$$\begin{aligned} (Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\mathcal{U}_{2, II} &= -\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})L_1(\partial)\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})A(\partial_{x, y, z})\mathcal{U}_{0, II} \\ &\quad + i\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})A(\partial_{x, y, z})\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1, II} \\ &\quad + i\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})\psi^\delta(D_{z_0})f(\mathcal{U}_0)_{II}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Remarque 3.2.5. i. Comme on l'a vu ci-dessus, l'équation $\mathcal{R}_1 = 0$ n'est pas exactement résolue. Si l'on peut trouver $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et \mathcal{U}_2 solutions des équations (3.10), (3.12)-(3.14), (3.18), (3.19)-(3.20), (3.21) et (3.23)-(3.24), on a alors $\mathcal{R}_{-1} = \mathcal{R}_0 = 0$, mais seulement

$$\mathcal{R}_1 = (1 - \psi^\delta(D_{z_0}))f(\mathcal{U}_0)_{II}. \quad (3.25)$$

Nous verrons par la suite que ce terme tend vers zero quand $\delta \rightarrow 0$.

ii. Seules les composantes $(Id - \pi(\omega_L, -k_L))\mathcal{U}_{2,I,1}$ et $(Id - \pi(D_{t_0,z_0}))\mathcal{U}_{2,II}$ de $\mathcal{U}_{2,I,1}$ et de $\mathcal{U}_{2,II}$ sont obtenues. On choisit donc de prendre

$$\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{2,I,1} = 0 \text{ et } \pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{2,II} = 0. \quad (3.26)$$

3.2.2 Simplification des équations de profil

D'après ce qui précède, on sait que

$$\mathcal{U}_0(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) = \mathcal{U}_{0,I,1}(\tau, t, x, y, z)e^{i\theta} + c.c + \mathcal{U}_{0,II}(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0),$$

avec

$$\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} = \mathcal{U}_{0,I,1} \quad \text{et} \quad \pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II}. \quad (3.27)$$

De plus $\mathcal{U}_{0,I,1}$ doit vérifier

$$\begin{cases} \pi(\omega_L, -k_L)L_1(\partial)\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} = 0, \\ \partial_\tau\mathcal{U}_{0,I,1} + i\pi(\omega_L, -k_L)A(\partial_{x,y,z})\mathcal{L}^{-1}(\omega_L, -k_L)A(\partial_{x,y,z})\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} \\ \quad + \pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

et la partie à spectre purement continu $\mathcal{U}_{0,II}$ doit vérifier

$$\begin{cases} \pi(D_{t_0,z_0})L_1(\partial)\pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_\tau\mathcal{U}_{0,II} + i\pi(D_{t_0,z_0})A(\partial_{x,y,z})\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0,z_0})A(\partial_{x,y,z})\pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{0,II} \\ \quad + \pi(D_{t_0,z_0})L_1(\partial)\pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{1,II} + \pi(D_{t_0,z_0})\psi^\delta(D_{z_0})[f(\mathcal{U}_0)]_{II} = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

où nous rappelons que $\pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ doit vérifier la condition d'absence de basses fréquences (3.21). Avant de simplifier ces systèmes, nous introduisons un nouveau symbole \mathcal{M} .

Définition 3.2.2. Nous notons $\mathcal{M}(\omega, K)$ le symbole défini pour tout $(\omega, K) \in \mathbb{R}^{1+3}$ par

$$\mathcal{M}(\omega, K) = \omega Id + K_1 A_1 + K_2 A_2 + K_3 A_3 + \frac{L_0}{i},$$

où $K = (K_1, K_2, K_3)$. Nous définissons également le projecteur $\pi_{\mathcal{M}}(\omega, K)$ sur $\ker(\mathcal{M}(\omega, K))$ et désignons par $C_{\mathcal{M}}$ la variété caractéristique associée à \mathcal{M} , i.e. l'ensemble des points (ω, K) pour lesquels $\mathcal{M}(\omega, K)$ n'est pas inversible.

Nous faisons également l'hypothèse suivante, valable pour les systèmes de Maxwell dans les milieux isotropes.

Hypothèse 3.2.3. $C_{\mathcal{M}}$ est axi-symétrique autour de $(O\omega)$.

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *En supposant que l'hypothèse 3.2.3 est vérifiée et en supposant que $\{(\omega_L, -k_L)\}$ est un point lisse de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, on a*

i. $\pi(\omega_L, -k_L)L_1(\partial)\pi(\omega_L, -k_L) = \pi(\omega_L, -k_L)(\partial_t + \omega'(k_L)\partial_z),$

ii. $\pi(\omega_L, -k_L)A(\partial_{x,y,z})\mathcal{L}^{-1}(\omega_L, -k_L)A(\partial_{x,y,z})\pi(\omega_L, -k_L) = \frac{\omega'(k_L)}{2k_L}\pi(\omega_L, -k_L)(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{\omega''(k_L)}{2}\pi(\omega_L, -k_L)\partial_z^2,$

iii. *Si \mathcal{V}_{II} est un profil à spectre purement continu, alors on a*
 $\pi(D_{t_0, z_0})L_1(\partial)\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{V}_{II} = \pi(D_{t_0, z_0})(\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{V}_{II},$

iv. *Si de plus $A(\partial_{x,y,z})\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{V}_{II}$ est \mathcal{L}^{-1} - régulière, alors*
 $\pi(D_{t_0, z_0})A(\partial_{x,y,z})\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0})A(\partial_{x,y,z})\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{V}_{II} = \frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}\pi(D_{t_0, z_0})(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{V}_{II} + \frac{\omega''(D_{z_0})}{2}\pi(D_{t_0, z_0})\partial_z^2\mathcal{V}_{II}.$

Preuve.

Si $(\underline{\omega}, \underline{K})$ est un point lisse de $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$, alors on peut définir un paramétrage local $\omega_{\mathcal{M}}(K)$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ au voisinage de $(\underline{\omega}, \underline{K})$. On sait [21] que,

$$\pi_{\mathcal{M}}(\underline{\omega}, \underline{K})A_j\pi_{\mathcal{M}}(\underline{\omega}, \underline{K}) = -\partial_j\omega_{\mathcal{M}}(\underline{K})\pi_{\mathcal{M}}(\underline{\omega}, \underline{K}), \quad j = 1, 2, 3.$$

Puisque $(\omega_L, -k_L) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, il est facile de voir que $(\omega_L, (0, 0, -k_L)) \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ et comme $(\omega_L, -k_L)$ est un point lisse de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ alors $(\omega_L, (0, 0, -k_L))$ est un point lisse de $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ grâce à l'hypothèse de symétrie 3.2.3 faite sur $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$. D'après cette même hypothèse, on peut écrire un paramétrage local sous la forme $\omega_{\mathcal{M}}(K) = \omega(|K|)$ où l'on rappelle que $\omega(\cdot)$ désigne un paramétrage local de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ au voisinage de $(\omega_L, -k_L)$.

En prenant $\underline{K} = (0, 0, -k_L)$, on a donc

$$\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, (0, 0, -k_L))A_j\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, (0, 0, -k_L)) = -\frac{K_j}{k_L}\omega'(k_L).$$

Comme $\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = 0$, $\underline{K}_3 = -k_L$ et $\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, (0, 0, -k_L)) = \pi(\omega_L, -k_L)$, alors

$$\begin{aligned} \pi(\omega_L, -k_L)A_1\pi(\omega_L, -k_L) &= 0, \\ \pi(\omega_L, -k_L)A_2\pi(\omega_L, -k_L) &= 0, \\ \pi(\omega_L, -k_L)A_3\pi(\omega_L, -k_L) &= \omega'(k_L), \end{aligned}$$

ce qui prouve le point i.

La même démonstration montre que $\pi(\omega, \kappa)A_1\pi(\omega, \kappa) = \pi(\omega, \kappa)A_2\pi(\omega, \kappa) = 0$ et $\pi(\omega, \kappa)A_3\pi(\omega, \kappa) = -\omega'(\kappa)$ pour tout (ω, κ) point lisse de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$. Comme on sait par l'hypothèse 3.2.1 que l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ est discret, ainsi \mathcal{V}_{II} est de mesure nulle pour \mathcal{FV}_{II} (car son spectre est purement continu), on en conclut que

$$\begin{aligned}\pi(D_{t_0, z_0})A_1\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{V}_{II} &= 0, \\ \pi(D_{t_0, z_0})A_2\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{V}_{II} &= 0,\end{aligned}$$

et que $\pi(D_{t_0, z_0})A_3\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{V}_{II} = -\omega'(D_{z_0})\mathcal{V}_{II}$, ce qui montre le point **iii**.

Pour le point **ii**, on note toujours $\underline{K} = (0, 0, -k_L)$. On sait d'après [21] que

$$\begin{aligned}\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K})A_i\mathcal{M}^{-1}(\omega_L, \underline{K})A_j\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}) &= \frac{1}{2}\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K})\partial_{ij}^2\omega_{\mathcal{M}}(\underline{K}), \\ &= \frac{1}{2}\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K})\left(-\frac{K_i K_j}{|\underline{K}|^3}\omega'(|\underline{K}|) + \frac{K_i K_j}{|\underline{K}|^2}\omega''(|\underline{K}|)\right) \\ &+ \frac{\delta_{ij}}{|\underline{K}|}\omega'(|\underline{K}|),\end{aligned}$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Comme $\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = 0$, on a

$$\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K})A_1\mathcal{M}^{-1}(\omega_L, \underline{K})A_2\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}) = \pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K})A_2\mathcal{M}^{-1}(\omega_L, \underline{K})A_1\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}) = 0,$$

et comme $\underline{K}_3 = -k_L$,

$$\begin{aligned}\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K})A_1\mathcal{M}^{-1}(\omega_L, \underline{K})A_1\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}) &= \pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K})A_2\mathcal{M}^{-1}(\omega_L, \underline{K})A_2\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}), \\ &= \frac{\omega'(k_L)}{2k_L}\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}).\end{aligned}$$

et

$$\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K})A_3\mathcal{M}^{-1}(\omega_L, \underline{K})A_3\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}) = \frac{\omega''(k_L)}{2}\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}).$$

Comme $\pi_{\mathcal{M}}(\omega_L, \underline{K}) = \pi(\omega_L, -k_L)$ et $\mathcal{M}^{-1}(\omega_L, \underline{K}) = \mathcal{L}^{-1}(\omega_L, -k_L)$, on a le point **ii**. Pour le point **iv**, on procède comme pour **iii**.

□

D'après la proposition 3.2.1, et les systèmes (3.28) et (3.29), le profil principal $\mathcal{U}_0(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) = \mathcal{U}_{0,I,1}(\tau, t, x, y, z)e^{i\theta} + c.c. + \mathcal{U}_{0,II}(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0)$ s'obtient en résolvant

$$\begin{cases} \pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} = \mathcal{U}_{0,I,1}, \\ (\partial_t + \omega'(k_L)\partial_z)\mathcal{U}_{0,I,1} = 0, \\ \partial_\tau\mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega'(k_L)}{2k_L}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega''(k_L)}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,I,1} \\ \quad + \pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

et

$$\begin{cases} \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II}, \\ (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II} + (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\pi(D_{z_0})\mathcal{U}_{1,II} + i\frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} \\ + i\frac{\omega''(D_{z_0})}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,II} + \psi^\delta(D_{z_0})\pi(D_{t_0, z_0})[f(\mathcal{U}_0)]_{II} = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Remarque 3.2.6. i. La notation $\frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}$ est ambiguë car on peut penser que le multiplicateur de Fourier ne dépend pas de D_{t_0} . En fait, pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, il existe plusieurs ω_j tels que $(\omega_j, \kappa) \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$. Dans les variables de Fourier, $\omega'(D_{z_0})$ se lit $\mathcal{F}\omega'(D_{z_0})(\omega, \kappa) = \omega'_j(\kappa)$, où l'indice j est tel que $(\omega_j, \kappa) = (\omega, \kappa)$ et ainsi dépend de ω . Notons aussi que ce multiplicateur de Fourier est le même que celui qui apparaît dans la communication de O. Morice [44].

ii. En général, $\frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}$ n'est pas un multiplicateur de Fourier dans $E_{\tau^*}^s$. Cependant, il est bien défini ici tant que $\mathcal{U}_{0,II}$ satisfait l'hypothèse 3.2.2.

3.2.3 Analyse des non linéarités

Avant d'essayer de résoudre les équations de profil ci-dessus, nous allons les simplifier un peu. En particulier, nous allons simplifier le terme non linéaire $[f(\mathcal{U}_0)]_{II}$ qui apparaît dans (3.31). Dans ce paragraphe, nous allons donner et démontrer un résultat très important " la non linéarité $[f(\mathcal{U}_0)]_{II}$ est en fait linéaire " .

Nous rappelons qu'il existe une application trilinéaire F telle que $F(u, u, u) = f(u)$, pour tout $u \in \mathbb{C}^n$. La non linéarité $[f(\mathcal{U}_0)]_{II}$ qui apparaît sur l'équation d'évolution de $\mathcal{U}_{0,II}$ se lit alors

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{U}_{0,I} + \mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,I} + \mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,I} + \mathcal{U}_{0,II})_{II} = F(\mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,II}) \\ & + F(\mathcal{U}_{0,I}, \mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,II}) + F(\mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,I}, \mathcal{U}_{0,II}) + F(\mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,I}) \\ & + (F(\mathcal{U}_{0,I,1}, \mathcal{U}_{0,I,1}, \mathcal{U}_{0,II}) + F(\mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,I,1}, \mathcal{U}_{0,I,1}) + F(\mathcal{U}_{0,I,1}, \mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,I,1}))e^{2i\theta} \\ & + (F(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}) + F(\mathcal{U}_{0,II}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) + F(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}))e^{-2i\theta} \\ & + F(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}) + F(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,I,1}, \mathcal{U}_{0,II}) + F(\mathcal{U}_{0,I,1}, \mathcal{U}_{0,II}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) \\ & + F(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,I,1}) + F(\mathcal{U}_{0,II}, \mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) + F(\mathcal{U}_{0,II}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,I,1}). \end{aligned}$$

Si cette expression est très lourde, on peut cependant la simplifier puisque le rôle des composantes à spectre purement continu dans la non linéarité est très peu souvent effectif. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.2.2. *Supposons que l'hypothèse 3.2.1 est vérifiée. Soit $\mathcal{V}_{II} \in E_{\tau^*}^s$ un profil à spectre purement continu tel que $\text{Sp } \mathcal{V}_{II} \subset \mathcal{C}_\mathcal{L}$. Prenons aussi $a, b \in \mathbb{C}^n$. On a alors*

- i. $\pi(D_{t_0, z_0})F(\mathcal{V}_{II}, \mathcal{V}_{II}, \mathcal{V}_{II}) = 0$;
- ii. $\pi(D_{t_0, z_0})F(ae^{i\theta}, \mathcal{V}_{II}, \mathcal{V}_{II}) = \pi(D_{t_0, z_0})F(ae^{-i\theta}, \mathcal{V}_{II}, \mathcal{V}_{II}) = 0$;
- iii. $\pi(D_{t_0, z_0})F(ae^{i\theta}, be^{i\theta}, \mathcal{V}_{II}) = \pi(D_{t_0, z_0})F(ae^{-i\theta}, be^{-i\theta}, \mathcal{V}_{II}) = 0$.

Preuve.

Soit $\mathcal{V}_{II} \in E_{\tau^*}^s$ défini comme dans le Lemme ci-dessus. Pour (τ, t) fixés, notons $\mu := \mathcal{F}\mathcal{V}_{II}(\tau, t)$ et $v(\mu)$ la variation totale de μ .

D'après la propriété de Radon-Nykodim, on peut alors écrire pour tout ensemble borélien E de \mathbb{R}^2 ,

$$\mu(E) = \int_E r_\mu(\xi) v(\mu)(d\xi),$$

où r_μ est une fonction vectorielle à valeur dans $H^s(\mathbb{R}^3)^n$ et telle que $\|r_\mu\|_{H^s} = 1$ pour $v(\mu)$ -presque tout ξ .

Si l'on note $\nu := \mathcal{F}(\pi(D_{t_0, z_0})F(\mathcal{V}_{II}, \mathcal{V}_{II}, \mathcal{V}_{II}))$, le point **i.** du lemme est obtenu si l'on montre que $\nu = 0$, i.e. $v(\nu)(\mathbb{R}^2) = 0$. Or on a

$$v(\nu)(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \|\pi(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)F(r_\mu(\xi_1), r_\mu(\xi_2), r_\mu(\xi_3))\|_{H^s(\mathbb{R}^3)^n} \\ \times v(\mu)(d\xi_1)v(\mu)(d\xi_2)v(\mu)(d\xi_3).$$

Puisque $\text{Sp } \mathcal{V}_{II} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, on peut prendre $r_\mu(\xi) = 0$ si $\xi \notin \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$. Ainsi,

$$v(\nu)(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \|\pi(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)F(r_\mu(\xi_1), r_\mu(\xi_2), r_\mu(\xi_3))\|_{H^s(\mathbb{R}^3)^n} \\ \times v(\mu)(d\xi_1)v(\mu)(d\xi_2)v(\mu)(d\xi_3), \\ = \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \left[\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \|\pi(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)F(r_\mu(\xi_1), r_\mu(\xi_2), r_\mu(\xi_3))\|_{H^s(\mathbb{R}^3)^n} v(\mu)(d\xi_3) \right] \\ \times v(\mu)(d\xi_1)v(\mu)(d\xi_2).$$

Avant de continuer, nous pouvons remarquer que si $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$ alors l'ensemble des $\xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ tels que $\xi_1 + \xi_2 + \xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ est discret. En effet ([11],[5]), on sait que l'ensemble des $\xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ tels que $\xi_1 + \xi_2 + \xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ est ou bien une nappe de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, ou bien une sous-variété algébrique de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ de dimension strictement inférieure. Comme $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ est une variété algébrique de dimension 1, l'ensemble des $\xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ tel que $\xi_1 + \xi_2 + \xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ est donc ou bien une nappe de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, ou bien un ensemble discret. Le premier cas est exclu par l'hypothèse 3.2.1 car on aurait alors deux nappes de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ parallèles. On peut donc conclure que l'ensemble des points $\xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ tel que $\xi_1 + \xi_2 + \xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ est discret si $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$.

Comme on a supposé que $v(\mu)(\{\xi\}) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^2$, on en déduit que

$$\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \|\pi(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)F(r_\mu(\xi_1), r_\mu(\xi_2), r_\mu(\xi_3))\|_{H^s(\mathbb{R}^3)^n} v(\mu)(d\xi_3) = 0,$$

lorsque $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$. Par conséquent, on a

$$v(\nu)(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \|\pi(\xi_3)F(r_\mu(\xi_1), r_\mu(-\xi_1), r_\mu(\xi_3))\|_{H^s(\mathbb{R}^3)^n} v(\mu)(\{-\xi_1\}) v(\mu)(d\xi_1) v(\mu)(d\xi_3).$$

Comme $v(\mu)(\{\xi\}) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^2$, la quantité précédente est nulle et on a donc $v(\nu)(\mathbb{R}^2) = 0$, ce qui termine la preuve du point **i**.

Pour le point **ii.**, on note $\lambda := \mathcal{F}(\pi(D_{t_0, z_0})F(ae^{i\theta}, \mathcal{V}_{II}, \mathcal{V}_{II}))$. On a alors

$$v(\lambda)(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}} \|\pi((\omega_L, -k_L) + \xi_1 + \xi_2)F(a, r_\mu(\xi_1), r_\mu(\xi_2))\|_{H^s(\mathbb{R}^3)^n} v(\mu)(d\xi_1) v(\mu)(d\xi_2).$$

On montre comme pour le point **i**. que cette quantité est nulle, ce qui donne le point **ii**.

Le point **iii.** est une conséquence directe de l'hypothèse 3.2.1, et plus précisément du fait que deux nappes différentes de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ne sont jamais parallèles.

□

D'après les résultats du lemme 3.2.2, de nombreux termes s'annulent quand on applique l'opérateur $\pi(D_{t_0, z_0})$ sur la non-linéarité $[f(\mathcal{U}_0)]_{II}$. On obtient ainsi $\pi(D_{t_0, z_0})[f(\mathcal{U}_0)]_{II} = \pi(D_{t_0, z_0})F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II})$, où la fonction symétrisée F^S de F est définie par $F^S(a, b, c) = F(a, b, c) + F(a, c, b) + F(b, a, c) + F(b, c, a) + F(c, a, b) + F(c, b, a)$ pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}^n$.

L'équation d'évolution pour le profil $\mathcal{U}_{0,II}$ s'écrit alors

$$\begin{cases} \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II}, \\ (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial\tau\mathcal{U}_{0,II} + (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{1,II} + i\frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} + i\frac{\omega''(D_{z_0})}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,II} \\ \quad + \psi^\delta(D_{z_0})\pi(D_{t_0, z_0})F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}) = 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

et est donc couplée avec l'équation d'évolution trouvée pour l'amplitude $\mathcal{U}_{0,I,1}$,

$$\begin{cases} \pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} = \mathcal{U}_{0,I,1}, \\ (\partial_t + \omega'(k_L)\partial_z)\mathcal{U}_{0,I,1} = 0, \\ \partial\tau\mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega'(k_L)}{2k_L}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega''(k_L)}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,I,1} \\ \quad + \pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Remarque 3.2.7. *On peut noter que l'équation d'évolution pour le mode oscillant est l'équation de Schrödinger non linéaire ordinaire. L'équation d'évolution sur le profil $\mathcal{U}_{0,II}$ est linéaire mais couplée avec $\mathcal{U}_{0,I,1}$. Il reste maintenant à montrer que ce couplage est négligeable. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.*

3.2.4 Résolution des équations de profil en l'absence de basses fréquences

Si le système (3.33) est facile à résoudre en utilisant les itérations de Picard standard [21], ce n'est plus le cas pour le système (3.32) dans lequel on traite la composante à spectre purement continu \mathcal{U}_0 . En effet, " l'équation de transport " $(\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0$, n'est pas toujours compatible avec la dernière équation de (3.32). En particulier, on peut remarquer qu'il n'est pas possible de prendre $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ nul comme pour la composante à spectre discret car le terme $F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II})$ rend la dernière équation du système (3.32) incompatible avec l'équation de transport $(\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0$. En fait, comme l'ont montré [37] et [40] dans le cas où la vitesse de groupe varie, un bon choix de $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ permet de résoudre le système (3.32). En s'inspirant des méthodes et des arguments de [37] et de [40] (*i.e.* les interactions entre composantes se déplaçant à des vitesses de groupe différentes n'ont pas d'effet sur le profil principal), on peut donc décomposer (3.32) comme suit

$$\begin{cases} \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II}, \\ (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II} + i\frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} + i\frac{\omega''(D_{z_0})}{2}\partial_z^2 \mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{1,II} = -\psi^\delta(D_{z_0})\pi(D_{t_0, z_0})F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}). \end{cases} \quad (3.34)$$

On peut maintenant écrire le résultat de résolution des équations de profil, sous l'hypothèse où \mathbf{U}_{II}^0 n'a pas de basses fréquences.

Proposition 3.2.2. *Soient $\sigma \geq s$ et $R > 0$ tel que $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_I^0 + \mathbf{U}_{II}^0 \in A_0^\sigma$ et $\|\mathbf{U}^0\|_{A_0^\sigma} \leq R$. Supposons de plus que $\mathbf{U}_I^0 = \mathbf{U}_{I,1}^0 e^{i\theta} + c.c.$, et*

$$\pi(\omega_L, -k_L)\mathbf{U}_{I,1}^0 = \mathbf{U}_{I,1}^0 \quad , \quad \pi(D_{t_0, z_0})\mathbf{U}_{II}^0 = \mathbf{U}_{II}^0,$$

et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\text{Sp } \mathbf{U}_{II}^0 \subset \{(\omega, \kappa), |\kappa| > \delta\}$.

Alors il existe $\tau_2^* > 0$, qui dépend de R mais pas de ε ni de δ , tel qu'il existe

i. un unique $\mathcal{U}_{0,I,1} = \pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} \in \mathcal{C}_b([0, \tau_2^*] \times \mathbb{R}_t, H^\sigma(\mathbb{R}^3)^n)$ solution de

$$\begin{cases} (\partial_t + \omega'(k_L)\partial_z)\mathcal{U}_{0,I,1} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega'(k_L)}{2k_L}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega''(k_L)}{2}\partial_z^2 \mathcal{U}_{0,I,1} \\ \quad + \pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = 0, \\ \mathcal{U}_{0,I,1}|_{\tau=t=0} = \mathbf{U}_{I,1}^0, \end{cases} \quad (3.35)$$

ii. un unique $\mathcal{U}_{0,II} = \pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{0,II} \in A_{\tau_2^*}^\sigma$ solution de

$$\begin{cases} (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II} + i\frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} + i\frac{\omega''(D_{z_0})}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \mathcal{U}_{0,II}|_{\tau=t=0} = \mathbf{U}_{II}^0. \end{cases} \quad (3.36)$$

iii. et un unique $\mathcal{U}_{1,II} \in E_{\tau_2^*}^\sigma$ solution de

$$\begin{cases} (Id - \pi(D_{t_0,z_0}))\mathcal{U}_{1,II} = i\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0,z_0})A(\partial_{x,y,z})\mathcal{U}_{0,II}, \\ \psi^\delta(D_{z_0})\pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{1,II} = \pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{1,II}, \\ (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\pi(D_{t_0,z_0})\mathcal{U}_{1,II} = -\psi^\delta(D_{z_0})\pi(D_{t_0,z_0})F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}), \\ \mathcal{U}_{1,II}|_{\tau=t=0} = 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

De plus, $\mathcal{U}_{0,II}$ vérifie l'hypothèse 3.2.2 avec le même δ que ci-dessus, et on a $\|\mathcal{U}_0\|_{A_{\tau_2^*}^\sigma} \leq 2R$.

Preuve.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du système (3.35) ne pose pas de problème et se fait à l'aide d'itérations de Picard classiques [21]. Comme $\mathcal{U}_{0,I,1}$ est solution de l'équation de transport $(\partial_t + \omega'(k_L)\partial_z)\mathcal{U}_{0,I,1} = 0$, on doit avoir

$$\mathcal{U}_{0,I,1}(\tau, t, x, y, z) = \mathcal{U}_{0,I,1}(\tau, z - \omega'(k_L)t, x, y). \quad (3.38)$$

Ainsi, l'équation de Schrödinger que $\mathcal{U}_{0,I,1}$ satisfait implique pour $\mathcal{U}_{0,I,1}$

$$\partial_\tau \mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega'(k_L)}{2k_L}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega''(k_L)}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,I,1} + \pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = 0. \quad (3.39)$$

L'existence et l'unicité de telle solution $\mathcal{U}_{0,I,1} \in \mathcal{C}([0, \tau_2^*], H^\sigma(\mathbb{R}^3)^n)$ est obtenue par itérations de Picard standard et donc on a montré le point **i.** du théorème.

Pour montrer le point **ii.**, on introduit $\lambda := \mathcal{F}\mathcal{U}_{0,II}$ et $\lambda_0 := \mathcal{F}\mathbf{U}_{II}^0$. Il existe une unique solution au sens des distributions de (3.36) donnée par

$$\widehat{\lambda}(\tau, t) = e^{-i\tau\left(\frac{\omega'(\kappa)}{2\kappa}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{\omega''(\kappa)}{2}\eta_3^2\right)} e^{it\omega'(\kappa)\eta_3}\widehat{\lambda}_0, \quad (3.40)$$

où $\widehat{\cdot}$ représente la transformée de Fourier selon les variables (x, y, z) et la mesure $\widehat{\lambda}$ est définie pour tout ensemble borélien E de \mathbb{R}^2 par $\widehat{\lambda}(E) = \widehat{\lambda}(E)$. La distribution λ définie précédemment est dans $\mathcal{C}_b([0, \tau_2^*] \times \mathbb{R}_t, \mathcal{BV}(\mathbb{R}_\xi^2, H^\sigma(\mathbb{R}^3)^n))$ ce qui a été montré dans le théorème 4 de [42], ainsi le point **ii.** du théorème est prouvé.

Avec l'expression explicite (3.40) et l'hypothèse de restriction sur \mathbf{U}_{II}^0 , nous savons que $\mathcal{U}_{0,II}$ vérifie l'hypothèse 3.2.2 et on a $\|\mathcal{U}_{0,II}\|_{A_{\tau_2^*}^\sigma} \leq R$.

Avant de résoudre la dernière équation, notons que $\pi(D_{t_0, z_0})F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}) \in A_{\tau_2^*}^\sigma$, ce qui se voit en appliquant les résultats précédents et la proposition 3.1.1. On note μ la transformée de Fourier de ce profil et $\nu := \mathcal{F}\mathcal{U}_{1,II}$. La dernière équation du système (3.37) a une unique solution au sens des distributions qui s'écrit

$$\widehat{\nu}(\tau, t) = - \int_0^t e^{i(t-u)\omega'(\kappa)} \eta_3 \psi^\delta(\kappa) \widehat{\mu}(\tau, u) du. \quad (3.41)$$

Ici encore, on peut montrer que ν est dans $\mathcal{C}([0, \tau_2^*] \times \mathbb{R}_t, \mathcal{BV}(\mathbb{R}_\kappa^2, H^\sigma(\mathbb{R}^3)^n))$, tel que $\mathcal{U}_{1,II} \in E_{\tau_2^*}^\sigma$. Avec cette expression, il est aussi facile de voir que $\text{Sp } \mathcal{U}_{1,II} \subset \{(\omega, \kappa), |\kappa| > \delta\}$, ainsi la première équation de (3.37) est satisfaite. □

Remarque 3.2.8. i. *Nous avons résolu les équations de profil dans $E_{\tau_2^*}^\sigma$ pour $\sigma \geq s$ et pas uniquement dans $E_{\tau_2^*}^s$. En effet, pour que le terme de reste \mathcal{R}^ε soit dans $E_{\tau_2^*}^s$, \mathcal{U}_0 doit être dans $E_{\tau_2^*}^{s+4}$, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.*

ii. *Les profils restants $(Id - \pi(\omega_L, -k_L))\mathcal{U}_{1,I,1}$, $(Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\mathcal{U}_{1,II}$ et \mathcal{U}_2 sont obtenus avec la proposition précédente et les équations (3.12), (3.13), (3.20), (3.24) et (3.26).*

3.2.5 Stabilité en absence de basses fréquences

Nous montrons dans cette partie que la solution de l'optique diffractive fournit une bonne approximation de la solution exacte (3.1), pourvu que les basses fréquences soient absentes. Pour cela, nous montrons que le reste associé à la solution approchée est petit et que la solution approchée reste proche de la solution exacte \mathbf{u}^ε de (3.1).

Supposons \mathcal{U}_0 et $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ donnés par la proposition 3.2.2 et la condition initiale \mathbf{U}^0 sans fréquences plus basses que $\delta > 0$. Le profil $\mathcal{U}_{0,II}$ satisfait l'hypothèse 3.2.2, $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ vérifie l'équation (3.21) et $\mathcal{U}_{2,I}$, $\mathcal{U}_{2,II}$ sont obtenus à partir des résultats du sous-paragraphe 3.2.1. Avant de montrer que $\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1 + \varepsilon^2\mathcal{U}_2$ est une bonne approximation de l'équation singulière (3.5) au sens où le résidu reste petit, nous avons besoin des estimations des profils \mathcal{U}_j , $j = 0, 1, 2$ et du terme de reste \mathcal{R}_j , $j \geq 2$.

Lemme 3.2.3. *Soient $\sigma \geq s + 4$, $\sigma' \geq s$ et $\delta \in (0, 1)$ et supposons $\mathcal{U}_0 \in A_{\tau_2^*}^\sigma$ et $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II} \in E_{\tau_2^*}^\sigma$ donnés par la proposition 3.2.2. Prenons $\mathcal{U}_{1,I}$, $(Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\mathcal{U}_{1,II}$ et \mathcal{U}_2 comme dans le sous-paragraphe 3.2.1. Alors*

i. *Les deux composantes $\mathcal{U}_{1,I}$ et $\mathcal{U}_{1,II}$ de \mathcal{U}_1 sont contrôlées comme suit*

$$\|\mathcal{U}_{1,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}} \leq C \|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'+1}}, \quad \|(Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\mathcal{U}_{1,II}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}} \leq \frac{C}{\delta} \|\mathcal{U}_{0,II}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'+1}},$$

et

$$\|\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}(t)\|_{E_{\tau_2^*}^{\sigma'}} \leq Ct \|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}}^2 \|\mathcal{U}_{0,II}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

ii. La composante à spectre discret $\mathcal{U}_{2,I}$ de \mathcal{U}_2 est contrôlée comme suit

$$\|\mathcal{U}_{2,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}} \leq C(\|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'+2}} + \|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}}^3),$$

tant que $\mathcal{U}_{2,II}$ satisfait

$$\|\mathcal{U}_{2,II}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}} \leq \frac{C}{\delta} \left(\frac{1}{\delta} \|\mathcal{U}_{0,II}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'+2}} + \|\mathcal{U}_0\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}}^3 + t \|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'+1}}^2 \|\mathcal{U}_{0,II}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'+1}} \right).$$

iii. Des estimations brutales des profils $\mathcal{R}_{j \geq 2}$ sont données par

$$\|\mathcal{R}_{j,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'}} \leq h_1(\|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'+4}}) \quad \text{et} \quad \|\mathcal{R}_{j,II}(t)\|_{E_{\tau_2^*}^{\sigma'}} \leq \frac{t}{\delta^6} h_2(\|\mathcal{U}_0\|_{A_{\tau_2^*}^{\sigma'+4}}), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où h_1 et h_2 sont des fonctions régulières positives définies dans \mathbb{R}^+ et indépendantes de $\delta \in (0, 1)$ et de $t \in \mathbb{R}$.

Preuve.

L'estimation de $\mathcal{U}_{1,I}$ est facile à déduire des équations (3.12) et (3.14), alors que le lemme 3.2.1 et les équations (3.13) et (3.21) donnent l'estimation de $(Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\mathcal{U}_{1,II}$. L'estimation de $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ est une conséquence de (3.41).

Les modes ± 3 de $\mathcal{U}_{2,I}$ sont contrôlés en utilisant l'équation (3.18) ainsi que les propriétés algébriques de $A_{\tau_2^*}^{\sigma'}$. Le contrôle des modes ± 1 est une conséquence des équations (3.20) et (3.26). Les équations (3.24) et (3.26) permettent elles d'estimer $\mathcal{U}_{2,II}$.

Les estimations des profils \mathcal{R}_j découlent directement des formulations explicites de ces profils donnés par (3.8), du lemme 3.2.1 et des équations vérifiées par $\mathcal{U}_{1 \leq j \leq 3}$ et des estimations précédentes.

□

Proposition 3.2.3. Soient $\sigma \geq s+4$, $\delta \in (0, 1)$ et supposons \mathcal{U}_0 et $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ donnés par la proposition 3.2.2. Prenons $\mathcal{U}_{1,I}$, $(Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\mathcal{U}_{1,II}$ et \mathcal{U}_2 comme dans le sous-paragraphe 3.2.1 et $\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1 + \varepsilon^2\mathcal{U}_2 \in E_{\tau_2^*}^{s+2} \subset E_{\tau_2^*}^s$.

Alors le profil $\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon$ défini par $\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon(\tau, x, y, z, t_0, z_0) = \mathcal{U}^\varepsilon(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}, x, y, z, t_0, z_0)$ est dans $B_{\tau_2^*}^{s+2}$. De plus, $\|\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^{s+2}}$ est uniformément borné en $\varepsilon \in (0, 1)$.

Si δ est assez petit, le profil $\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon$ est une solution approchée de l'équation singulière (3.5). Plus précisément, pour chaque $\mu > 0$, il existe $\delta(\mu) > 0$ tel que si $0 < \delta < \delta(\mu)$, $\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon$ satisfait

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\partial_\tau \underline{\mathcal{U}}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}(A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + A_3 \partial_z) \underline{\mathcal{U}}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}(\partial_{t_0} + A_3 \partial_{z_0} + L_0) \underline{\mathcal{U}}^\varepsilon + f(\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon)\|_{B_{\tau_2^*}^s} < \mu/3.$$

Preuve.

On définit pour $j = 1, 2, 3$, $\underline{\mathcal{U}}_j^\varepsilon(\tau, x, y, z, t_0, z_0) = \mathcal{U}_j(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}, x, y, z, t_0, z_0)$. On a $\underline{\mathcal{U}}_0^\varepsilon \in B_{\tau_2^*}^{s+2}$ car $\mathcal{U}_0 \in A_{\tau_2^*}^{s+2}$. De même $\underline{\mathcal{U}}_{1,II}^\varepsilon$ et $(Id - \pi(D_{t_0, z_0}))\underline{\mathcal{U}}_{1,II}^\varepsilon$ sont dans $B_{\tau_2^*}^{s+2}$. Leur norme dans cet espace est uniformément bornée en $\varepsilon \in (0, 1)$. Par contre comme $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II} \notin A_{\tau_2^*}^{s+2}$, on ne peut pas appliquer le même raisonnement pour cette composante. Cependant, le point **i.** du lemme 3.2.3 assure que $\varepsilon\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\varepsilon\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}(t)\|_{E_{\tau_2^*}^{s+2}} \leq \varepsilon t \|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{s+2}}^2 \|\mathcal{U}_{0,II}\|_{A_{\tau_2^*}^{s+2}},$$

et on a aussi

$$\|\pi(D_{t_0, z_0})\underline{\mathcal{U}}_{1,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^{s+2}} \leq \sup_{t \in [0, \frac{\tau_2^*}{\varepsilon}]} \|\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}(t)\|_{E_{\tau_2^*}^{s+2}}.$$

On en conclut donc que

$$\|\varepsilon\pi(D_{t_0, z_0})\underline{\mathcal{U}}_{1,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^{s+2}} \leq \tau_2^* \|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^{s+2}}^2 \|\mathcal{U}_{0,II}\|_{A_{\tau_2^*}^{s+2}}.$$

Ainsi $\varepsilon\pi(D_{t_0, z_0})\underline{\mathcal{U}}_{1,II}^\varepsilon$ est dans $B_{\tau_2^*}^{s+2}$ et est uniformément borné suivant $\varepsilon \in (0, 1)$. On peut écrire la même chose pour $\underline{\mathcal{U}}_{2,II}^\varepsilon$, ce qui prouve que $\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon$ est dans $B_{\tau_2^*}^{s+2}$ et uniformément borné.

Nous rappelons que

$$\partial_\tau \underline{\mathcal{U}}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}(A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + A_3 \partial_z) \underline{\mathcal{U}}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}(\partial_{t_0} + A_3 \partial_{z_0} + L_0) \underline{\mathcal{U}}^\varepsilon + f(\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon) = \sum_{j=-1}^7 \varepsilon^{j-1} \underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon,$$

où les profils $\underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon$ sont définis comme $\underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon(\tau, x, y, z, t_0, z_0) = \mathcal{R}_j(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}, x, y, z, t_0, z_0)$ avec \mathcal{R}_j donné par (3.8). Grâce aux résultats du sous-paragraphe précédent, nous savons que $\underline{\mathcal{R}}_{-1}^\varepsilon = \underline{\mathcal{R}}_0^\varepsilon = 0$, et que $\underline{\mathcal{R}}_1^\varepsilon = (1 - \psi^\delta(D_{z_0}))F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}}_{0,I,1}, \mathcal{U}_{0,II})$. Donc,

$$\|\underline{\mathcal{R}}_1^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^s} \leq \|\mathcal{U}_{0,I}\|_{A_{\tau_2^*}^s}^2 \|(1 - \psi^\delta(D_{z_0}))\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^s}.$$

Le lemme suivant montre que ce dernier terme tend vers zéro quand $\delta \rightarrow 0$, uniformément en $\varepsilon \in (0, 1)$.

Lemme 3.2.4. *Soient $\sigma \geq s$ et $\mathcal{U}_{0,II} \in A_{\tau_2^*}^\sigma$ un profil à spectre purement continu donné par la proposition 3.2.2 et $\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon \in B_{\tau_2^*}^\sigma$ définie par $\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon(\tau, x, y, z, t_0, z_0) = \mathcal{U}_{0,II}(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}, x, y, z, t_0, z_0)$. Alors $(1 - \psi^\delta(D_{z_0}))\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon \rightarrow 0$ dans $B_{\tau_2^*}^\sigma$ quand $\delta \rightarrow 0$, uniformément en $\varepsilon \in (0, 1)$.*

Preuve.

Soient $\lambda^\varepsilon := \mathcal{F}\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon \in C([0, \tau_2^*], \mathcal{BV}(\mathbb{R}_\xi^2, H^\sigma(\mathbb{R}_{x,y,z}^3)^n))$ et $\lambda_0 := \mathcal{F}\mathcal{U}_{0,II}$. Grâce à l'expression (3.40), on a

$$\widehat{\lambda}^\varepsilon(\tau) = e^{-i\tau(\frac{\omega'(\kappa)}{2\kappa}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{\omega''(\kappa)}{2}\eta_3^2)} e^{i\frac{\tau}{\varepsilon}\omega'(\kappa)\eta_3} \widehat{\lambda}_0.$$

On sait aussi avec la propriété de Radon-Nykodim qu'il existe une fonction vectorielle r_0 à valeurs dans H^σ telle que $\|r_0(\xi)\| = 1$ $v(\lambda_0)$ -presque partout en $\xi = (\omega, \kappa)$ et telle que pour tout ensemble borélien $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$\lambda_0(E) = \int_E r_0(\xi) v(\lambda_0)(d\xi),$$

où $v(\lambda_0)$ désigne la variation totale de λ_0 . Ainsi,

$$\widehat{\lambda}^\varepsilon(\tau)(E) = \int_E e^{-i\tau\left(\frac{\omega'(\kappa)}{2\kappa}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{\omega''(\kappa)}{2}\eta_3^2\right)} e^{i\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\omega'(\kappa)\eta_3\right)} \widehat{r_0(\xi)} v(\lambda_0)(d\xi), \quad (3.42)$$

et donc aussi

$$(1 - \psi^\delta(\kappa)) \widehat{\lambda}^\varepsilon(\tau)(E) = \int_E (1 - \psi^\delta(\kappa)) e^{-i\tau\left(\frac{\omega'(\kappa)}{2\kappa}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{\omega''(\kappa)}{2}\eta_3^2\right)} e^{i\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\omega'(\kappa)\eta_3\right)} \widehat{r_0(\xi)} v(\lambda_0)(d\xi),$$

par conséquent

$$\|(1 - \psi^\delta(D_{z_0})) \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^s} = \sup_{\tau \in [0, \tau_2^*]} |(1 - \psi^\delta(\kappa)) \widehat{\lambda}^\varepsilon|_{\mathcal{BV}} \leq \int_E (1 - \psi^\delta(\kappa)) v(\lambda_0)(d\xi),$$

et ainsi on montre que cette dernière expression tend vers zéro quand $\delta \rightarrow 0$, uniformément en $\varepsilon \in (0, 1)$, comme conséquence du théorème de convergence dominée.

□

Nous allons maintenant nous intéresser au terme de reste $\varepsilon^{j-1} \underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon$ pour $j \geq 2$. En utilisant le point **iii.** du lemme 3.2.3 et les mêmes techniques que celles utilisées précédemment pour montrer que $\varepsilon \pi(D_{t_0, z_0}) \underline{\mathcal{U}}_{1,II}^\varepsilon$ est uniformément borné dans $B_{\tau_2^*}^{s+2}$, on peut montrer que $\varepsilon \underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon$ est uniformément borné dans $B_{\tau_2^*}^s$ en $\varepsilon \in (0, 1)$. Ainsi, si $j \geq 3$, les termes de résidu $\varepsilon^{j-1} \underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon$ tendent vers 0 dans $B_{\tau_2^*}^s$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (et $\delta > 0$ fixé).

Le seul terme qu'il reste à traiter est donc $\varepsilon \underline{\mathcal{R}}_2^\varepsilon$. En fait, seulement sa composante à spectre purement continu a besoin d'attention, car jusqu'ici nous savons seulement qu'elle est uniformément bornée dans $B_{\tau_2^*}^s$. Nous rappelons que $\mathcal{R}_{2,II}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2,II} &= -L_1(\partial) \mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0}) A(\partial_{x,y,z}) \mathcal{U}_{0,II} + L_1(\partial) \mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0}) \psi^\delta(D_{z_0}) f(\mathcal{U}_0)_{II} \\ &+ iL_1(\partial) \mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0}) A(\partial_{x,y,z}) \pi(D_{t_0, z_0}) \mathcal{U}_{1,II} + i\mathcal{L}^{-1}(D_{t_0, z_0}) A(\partial_{x,y,z}) \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II} \\ &+ \partial_\tau \pi(D_{t_0, z_0}) \mathcal{U}_{1,II} + (f'(\mathcal{U}_0)(\mathcal{U}_1))_{II}. \end{aligned}$$

Dans cette expression, tous les termes qui n'impliquent pas $\pi(D_{t_0, z_0}) \mathcal{U}_{1,II}$ sont dans $A_{\tau_2^*}^s$ et leur contribution pour $\varepsilon \underline{\mathcal{R}}_2^\varepsilon$ est donc dans $B_{\tau_2^*}^s$. Ainsi les seuls problèmes possibles viennent des termes qui impliquent $\pi(D_{t_0, z_0}) \mathcal{U}_{1,II}$. Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.5. Soient $\sigma \geq s+4$ et $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1, II} \in E_{\tau_2^*}^\sigma$ donné par la proposition 3.2.2. Alors on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|\underline{\mathcal{U}}_{1, II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^\sigma} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|\partial_\tau \underline{\mathcal{U}}_{1, II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^{\sigma-2}} = 0.$$

Preuve du lemme.

Pour tout $\tau \in [0, \tau_2^*]$, soit $\nu^\varepsilon(\tau) := \mathcal{F}\underline{\mathcal{U}}_{1, II}^\varepsilon(\tau)$. Grâce à l'équation (3.41), on a

$$\widehat{\nu}^\varepsilon(\tau) = - \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} e^{-\left(\frac{\tau}{\varepsilon} - t\right)\omega'(\kappa)\eta_3} \psi^\delta(\kappa) \widehat{\mu}(\tau, t) dt. \quad (3.43)$$

où, pour tout (τ, t) , $\mu(\tau, t)$ est défini par $\mu(\tau, t) := \mathcal{F}(F^S(\mathcal{U}_{0, I, 1}, \overline{\mathcal{U}}_{0, I, 1}, \mathcal{U}_{0, II})(\tau, t))$. Nous rappelons aussi que $\widehat{\cdot}$ représente la transformée de Fourier suivant les variables (x, y, z) .

Comme pour l'équation (3.42), on peut écrire $\lambda(\tau, t) := \mathcal{F}\mathcal{U}_{0, II}(\tau, t)$ sous la forme

$$\widehat{\lambda}(\tau, t) = \int_E e^{-i\tau\left(\frac{\omega'(\kappa)}{2\kappa}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{\omega''(\kappa)}{2}\eta_3^2\right)} e^{it\omega'(\kappa)\eta_3} \widehat{r_0(\xi)} v(\lambda_0)(d\xi),$$

pour tout ensemble borélien $E \subset \mathbb{R}^2$.

Ainsi, $\widehat{\mu}(\tau, t)(E) \in H^\sigma(\mathbb{R}^3)$ est donné, pour tout ensemble borélien $E \subset \mathbb{R}^2$ et $\eta \in \mathbb{R}^3$, par

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\tau, t)(E)(\eta) &= \int_E \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} F^S \left(\widehat{\mathcal{U}}_{0, I, 1}(\eta - \eta'), \widehat{\mathcal{U}}_{0, I, 1}(\eta'' - \eta'), e^{-i\tau\left(\frac{\omega'(\kappa)}{2\kappa}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{\omega''(\kappa)}{2}\eta_3^2\right)} \right. \\ &\quad \left. e^{it\omega'(\kappa)\eta_3} \widehat{r_0(\xi)}(\eta') \right) d\eta' d\eta'' v(\lambda_0)(d\xi). \end{aligned}$$

En combinant cette équation à l'équation (3.43), on obtient

$$\begin{aligned} |\widehat{\nu}^\varepsilon(\tau)|_{\mathcal{BV}} &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left\| \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \int_0^{\tau/\varepsilon} F^S \left(\widehat{\mathcal{U}}_{0, I, 1}(\cdot - \eta'), \widehat{\mathcal{U}}_{0, I, 1}(\eta'' - \eta'), e^{-i\tau\left(\frac{\omega'(\kappa)}{2\kappa}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{\omega''(\kappa)}{2}\eta_3^2\right)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e^{it\omega'(\kappa)\eta_3} \widehat{r_0(\xi)}(\eta') \right) dt d\eta' d\eta'' \right\|_{\mathcal{F}(H^\sigma)} v(\lambda_0)(d\xi), \\ &:= \int_{\mathbb{R}^2} G^\varepsilon(\xi) v(\lambda_0)(d\xi). \end{aligned}$$

La famille $\varepsilon G^\varepsilon(\xi)$ peut être bornée par une constante (et cette constante est $v(\lambda_0)$ -intégrable). Grâce au lemme 6 de [40], nous savons aussi que $\varepsilon G^\varepsilon(\xi) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, du fait que $\omega'(\kappa) \neq \omega'(k_L)$. Il n'y a égalité que pour $\kappa = k_L$ et comme $v(\lambda_0)(\{k_L\}) = 0$, nous pouvons avoir $\varepsilon G^\varepsilon(\xi) \rightarrow 0$, $v(\lambda_0)$ -presque partout, et ainsi, on obtient la première partie du lemme avec le théorème de convergence dominée. La seconde partie du lemme peut être obtenue avec les mêmes techniques.

□

D'après le lemme ci-dessus, il est clair que $\varepsilon \underline{\mathcal{R}}_2^\varepsilon = o(1)$, ce qui termine la démonstration de la proposition.

□

Nous savons que u^ε est bien une solution de (3.1), mais nous n'avons pas encore établi que la différence $\mathbf{u}^\varepsilon - u^\varepsilon$ reste petite. C'est ce qu'assure le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Supposons que la variété caractéristique \mathcal{C}_L vérifie les hypothèses 3.2.1 et 3.2.3. Soit $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_I^0 + \mathbf{U}_{II}^0 \in A_0^{s+4}$ tel que $\mathbf{U}_I^0 = \mathbf{U}_{I,1}^0 e^{i\theta} + c.c$ et supposons de plus que*

$$\pi(\omega_L, -k_L) \mathbf{U}_{I,1}^0 = \mathbf{U}_{I,1}^0 \quad \text{et} \quad \pi(D_{t_0, z_0}) \mathbf{U}_{II}^0 = \mathbf{U}_{II}^0,$$

et que $\text{Sp } \mathbf{U}_{II}^0 \subset \{(\omega, \kappa), |\kappa| > \delta\}$ pour un $\delta > 0$ donné.

Alors pour $0 < \tau^* \leq \inf(\tau_1^*, \tau_2^*)$, on obtient les résultats suivant

i. *Le profil $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{0,I} + \mathcal{U}_{0,II}$ donné par la proposition 3.2.2 satisfait l'hypothèse 3.2.2 et son profil associé $\underline{\mathcal{U}}_0^\varepsilon \in B_{\tau^*}^s$ approche l'équation singulière (3.5) au sens où pour tout $\mu > 0$, il existe $\delta(\mu) > 0$ tel que si $0 < \delta < \delta(\mu)$, alors*

$$\|\mathbf{U}_I^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}_{0,I}^\varepsilon\|_{B_{\tau^*}^s} = O(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{U}_{II}^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau^*}^s} < \frac{\mu}{3},$$

où on a décomposé le profil \mathbf{U}^ε de la solution exacte \mathbf{u}^ε , donnée par le théorème 3.1.1, en $\mathbf{U}^\varepsilon = \mathbf{U}_I^\varepsilon + \mathbf{U}_{II}^\varepsilon$.

ii. *On a également la stabilité de la solution approchée définie par \mathcal{U}_0 ,*

$$\|\mathbf{u}_I^\varepsilon - u_{0,I}^\varepsilon\| = O(\varepsilon^{3/2}) \quad \text{et} \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathbf{u}_{II}^\varepsilon - u_{0,II}^\varepsilon\| < \frac{\mu}{3},$$

où la norme peut être prise soit dans $\mathcal{C}([0, \tau^*/\varepsilon] \times \mathbb{R}^3)^n$ où dans $\mathcal{C}([0, \tau^*/\varepsilon], L^2(\mathbb{R}^3)^n)$.

Notations. On a utilisé dans ce théorème les notations suivantes

$$\mathbf{u}_I^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{U}_I^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z, t/\varepsilon, z/\varepsilon), \quad u_{0,I}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \underline{\mathcal{U}}_{0,I}^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z, t/\varepsilon, z/\varepsilon),$$

et de la même manière

$$\mathbf{u}_{II}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{U}_{II}^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z, t/\varepsilon, z/\varepsilon), \quad u_{0,II}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z, t/\varepsilon, z/\varepsilon).$$

Preuve.

i. Comme $\underline{\mathcal{R}}_{-1}^\varepsilon = \underline{\mathcal{R}}_0^\varepsilon = 0$, l'erreur commise sur le profil exact est définie par le profil $\mathcal{W}^\varepsilon = \mathbf{U}^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}^\varepsilon$ et satisfait

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathcal{W}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}(A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + A_3 \partial_z) \mathcal{W}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}(\partial_{t_0} + A_3 \partial_{z_0} + L_0) \mathcal{W}^\varepsilon \\ = f(\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon) - f(\mathbf{U}^\varepsilon) + \underline{\mathcal{R}}_1^\varepsilon + \sum_{j=2}^7 \varepsilon^{j-1} \underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon, \end{aligned}$$

Grâce au théorème de Taylor, il existe une fonction régulière G telle que $f(\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon) - f(\mathbf{U}^\varepsilon) = G(\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon, \mathbf{U}^\varepsilon) \mathcal{W}^\varepsilon$. Le profil \mathcal{W}^ε satisfait donc

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathcal{W}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}(A_1 \partial_X + A_2 \partial_Y + A_3 \partial_Z) \mathcal{W}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}(\partial_{t_0} + A_3 \partial_{z_0} + L_0) \mathcal{W}^\varepsilon - G(\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon, \mathbf{U}^\varepsilon) \mathcal{W}^\varepsilon \\ = \underline{\mathcal{R}}_1^\varepsilon + \sum_{j=2}^7 \varepsilon^{j-1} \underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.44)$$

Soit $R > 0$ tel que $\|\mathbf{U}^0\|_{A_{\tau^*}^{s+4}} \leq R$. Nous rappelons que τ_1^* et τ_2^* sont respectivement choisis dans le théorème 3.1.1 et la proposition 3.2.2, de telle façon que $\|\mathbf{U}^\varepsilon\|_{A_{\tau_1^*}^s} \leq 2R$ et $\|\mathcal{U}_0\|_{A_{\tau_2^*}^{s+4}} \leq 2R$ et ainsi $\|\underline{\mathcal{U}}_0^\varepsilon\|_{B_{\tau_2^*}^{s+4}} \leq 2R$. Comme $\tau^* \leq \inf(\tau_1^*, \tau_2^*)$, on peut remplacer $\tau_{1,2}^*$ par τ^* dans ces inégalités. Ainsi, on peut déduire du lemme 3.2.3 que

$$\|\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon\|_{B_{\tau^*}^s} \leq CR(R^2 + \varepsilon(1 + \frac{1+R^2}{\delta})) + \varepsilon^2(1+R^2)(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}).$$

Donc

$$\|G(\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon, \mathbf{U}^\varepsilon)\|_{B_{\tau^*}^s} \leq h(R(R^2 + \varepsilon(1 + \frac{1+R^2}{\delta})) + \varepsilon^2(1+R^2)(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2})), R),$$

où $h(.,.)$ est une fonction régulière positive qui ne dépend pas de R , de δ ni de ε . Par un argument de type Gronwall, on peut donc déduire de (3.44) que

$$\|\mathcal{W}^\varepsilon\|_{B_{\tau^*}^s} \leq \tau^* (\|\underline{\mathcal{R}}_1^\varepsilon\|_{B_{\tau^*}^s} + \sum_{j=2}^7 \varepsilon^{j-1} \|\underline{\mathcal{R}}_j^\varepsilon\|_{B_{\tau^*}^s}) e^{h(R(R^2 + \varepsilon(1 + \frac{1+R^2}{\delta})) + \varepsilon^2(1+R^2)(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2})), R) \tau^*}. \quad (3.45)$$

Il est maintenant facile de déduire de l'équation (3.45), du point **iii** du lemme 3.2.3 et de la proposition 3.2.3 que $\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon = \underline{\mathcal{U}}_0^\varepsilon + \varepsilon \underline{\mathcal{U}}_1^\varepsilon + \varepsilon^2 \underline{\mathcal{U}}_2^\varepsilon$ satisfait la propriété asymptotique du point **i** du théorème. Ce point sera établi si on remplace $\underline{\mathcal{U}}^\varepsilon$ par $\underline{\mathcal{U}}_0^\varepsilon$. C'est clairement le cas (conséquence des lemmes 3.2.3 et 3.2.5), car $\varepsilon \underline{\mathcal{U}}_1^\varepsilon + \varepsilon^2 \underline{\mathcal{U}}_2^\varepsilon$ tend vers 0 dans $B_{\tau^*}^s$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

En prenant la composante à spectre discret de (3.44), on obtient les équations habituelles de l'optique diffractive (en particulier, $\mathcal{R}_{1,I} = 0$) ainsi les techniques de [21] [33] [40] peuvent être utilisées pour obtenir une meilleure estimation $O(\varepsilon)$ du terme d'erreur.

ii. Ce point est une conséquence directe du point **i** et des résultats d'injection de la proposition 3.1.1.

□

3.2.6 Stabilité dans le cas général

Dans cette partie, on considère le cas général, *i.e.* nous rajoutons les basses fréquences. On considère donc des conditions initiales avec le profil $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_I^0 + \mathbf{U}_{II}^0 \in A_0^{s+4}$ sans faire d'hypothèse sur le spectre de \mathbf{U}_{II}^0 . Les méthodes d'Alterman [1] sont utilisées pour relaxer cette hypothèse. Nous introduisons dans un premier temps les notations suivantes.

Notations. On désigne par $\mathbf{U}_{II}^{0,\delta}$ et par $\mathbf{U}^{0,\delta}$ les profils "filtrés" suivants

$$\mathbf{U}_{II}^{0,\delta} = \psi^\delta(D_{z_0})\mathbf{U}_{II}^0 \text{ et } \mathbf{U}^{0,\delta} = \mathbf{U}_I^0 + \mathbf{U}_{II}^{0,\delta}, \quad (3.46)$$

où $0 < \delta < 1$.

La solution exacte de (3.1) avec comme condition initiale $\sqrt{\varepsilon}\mathbf{U}^{0,\delta}(x, y, z, 0, \frac{z}{\varepsilon})$, donnée par le théorème 3.1.1, est désignée par $\mathbf{u}^{\varepsilon,\delta}$ et le profil associé par $\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}$. On a donc $\mathbf{u}^{\varepsilon,\delta}(t, x, y, z) = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}(\varepsilon t, x, y, z, t/\varepsilon, z/\varepsilon)$. Le théorème de convergence dominée montre que $\mathbf{U}_{II}^{0,\delta} \rightarrow \mathbf{U}_{II}^0$ dans A_0^s . On a aussi convergence de la solution exacte de (3.1) associée à ces conditions initiales, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.2.4. *Soit $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_I^0 + \mathbf{U}_{II}^0 \in A_0^s$ et $\mathbf{U}^{0,\delta} = \mathbf{U}_I^0 + \psi^\delta(D_{z_0})\mathbf{U}_{II}^0$. Alors il existe $\tau_1^* > 0$, indépendant de ε et de δ , tel que les solutions exactes \mathbf{U}^ε et $\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}$ de l'équation singulière (3.5) avec conditions initiales \mathbf{U}^0 et $\mathbf{U}^{0,\delta}$ existent respectivement dans $B_{\tau_1^*}^s$. De plus, on a*

$$\mathbf{U}^\varepsilon - \mathbf{U}^{\varepsilon,\delta} \rightarrow 0 \text{ dans } B_{\tau_1^*}^s \text{ quand } \delta \rightarrow 0,$$

uniformément en $\varepsilon \in (0, 1)$.

Preuve.

Il est facile de voir que $\|\mathbf{U}^{0,\delta}\|_{B_{\tau_1^*}^s} \leq \|\mathbf{U}^0\|_{B_{\tau_1^*}^s}$. Donc, si R est tel que $\|\mathbf{U}^0\|_{B_{\tau_1^*}^s} \leq R$, on a $\|\mathbf{U}^{0,\delta}\|_{B_{\tau_1^*}^s} \leq R$. Ainsi, le théorème 3.1.1 implique que le profil $\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}$ de $\mathbf{u}^{\varepsilon,\delta}$ existe sur l'intervalle $[0, \tau_1^*]$, qui lui même existe et dépend seulement de R . De plus, sur $[0, \tau_1^*]$, la différence $\mathbf{W}^\delta = \mathbf{U}^\varepsilon - \mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}$ satisfait

$$\partial_\tau \mathbf{W}^\delta + \varepsilon^{-1}(A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + A_3 \partial_z) \mathbf{W}^\delta + \varepsilon^{-2}(\partial_{t_0} + A_3 \partial_{z_0} + L_0) \mathbf{W}^\delta = G(\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}, \mathbf{U}^\varepsilon) \mathbf{W}^\delta,$$

où comme pour (3.44), G est une fonction régulière vérifiant

$$G(\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}, \mathbf{U}^\varepsilon) \mathbf{W}^\delta = f(\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}) - f(\mathbf{U}^\varepsilon).$$

Comme pour la démonstration du théorème 3.2.1, on obtient

$$\|G(\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}, \mathbf{U}^\varepsilon)\|_{B_{\tau_1^*}^s} \leq h(R, R),$$

où $h(., .)$ est une fonction régulière positive et indépendante de δ et de ε . Par un argument de type Gronwall, cela donne

$$\|\mathbf{W}^\delta\|_{B_{\tau_1^*}^s} \leq \|\mathbf{W}^{0,\delta}\|_{A_0^s} e^{h(R,R)\tau_1^*},$$

donc le résultat désiré est une conséquence du théorème de convergence dominée.

□

Nous allons maintenant étudier la convergence des solutions approchées. Si on prend $\mathbf{U}^{0,\delta}$ comme condition initiale, tous les résultats des paragraphes 3.2.1-3.2.5 restent valables. En particulier, on peut construire un profil approché $\underline{\mathcal{U}}^{\varepsilon,\delta} = \underline{\mathcal{U}}_0^{\varepsilon,\delta} + \varepsilon \underline{\mathcal{U}}_1^{\varepsilon,\delta} + \varepsilon^2 \underline{\mathcal{U}}_2^{\varepsilon,\delta}$ de $\mathbf{U}^{\varepsilon,\delta}$. Le terme principal $\underline{\mathcal{U}}_0^{\varepsilon,\delta}$ vérifie

$$\underline{\mathcal{U}}_0^{\varepsilon,\delta}(\tau, x, y, z, t_0, z_0) = \mathcal{U}_0^\delta(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}, x, y, z, t_0, z_0),$$

avec $\mathcal{U}_0^\delta = \mathcal{U}_{0,I} + \mathcal{U}_{0,II}^\delta$. La composante à spectre discret $\mathcal{U}_{0,I}$ (qui ne dépend pas de δ) est donnée comme précédemment par le système (3.35), alors que $\mathcal{U}_{0,II}^\delta = \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II}^\delta$ est obtenu en résolvant

$$\begin{cases} (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II}^\delta = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II}^\delta + i \frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}^2} (\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II}^\delta + i \frac{\omega''(D_{z_0})}{2} \partial_z^2 \mathcal{U}_{0,II}^\delta = 0, \\ \mathcal{U}_{0,II}^\delta|_{\tau=t=0} = \mathbf{U}_{II}^{0,\delta}. \end{cases} \quad (3.47)$$

La proposition suivante montre que quand $\delta \rightarrow 0$, le profil $\mathcal{U}_{0,II}^\delta$ tend vers le profil $\mathcal{U}_{0,II}$, obtenu formellement en prenant $\delta = 0$ dans (3.47).

Proposition 3.2.5. *Soient $\sigma \geq s$ et $R > 0$ tel que $\mathbf{U}_{II}^0 \in A_0^\sigma$ et $\|\mathbf{U}_{II}^0\|_{A_0^\sigma} \leq R$. Supposons de plus que $\pi(D_{t_0, z_0})\mathbf{U}_{II}^0 = \mathbf{U}_{II}^0$. Alors il existe τ_2^* tel que la solution $\mathcal{U}_{0,II}^\delta$ de (3.47) existe dans $A_{\tau_2^*}^\sigma$ pour tout $0 < \delta < 1$ et tel que le système limite*

$$\begin{cases} (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_\tau \partial_{z_0} \mathcal{U}_{0,II} - \frac{\omega'(D_{z_0})}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} - \frac{D_{z_0} \omega''(D_{z_0})}{2} \partial_z^2 \mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \mathcal{U}_{0,II}|_{\tau=t=0} = \mathbf{U}_{II}^0. \end{cases} \quad (3.48)$$

admet une solution unique dans $A_{\tau_2^*}^\sigma$. De plus, $\mathcal{U}_{0,II}^\delta \rightarrow \mathcal{U}_{0,II}$ dans $A_{\tau_2^*}^\sigma$ quand $\delta \rightarrow 0$.

Preuve.

Les résultats de cette proposition s'obtiennent facilement avec l'expression explicite de $\mathcal{U}_{0,II}^\delta$ donnée par (3.40) et le théorème de convergence dominée.

□

Remarque 3.2.9. Comme $\omega'(\kappa)$ est une fonction paire et $\omega''(\kappa)$ une fonction impaire de (ω, κ) , les multiplicateurs de Fourier $\omega'(D_{z_0})$ et $\omega''(D_{z_0})$ transforment des fonctions réelles suivant les variables (t_0, z_0) en des fonctions réelles.

Nous sommes maintenant prêts à énoncer notre principal théorème.

Théorème 3.2.2. *Supposons que la variété caractéristique $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ vérifie les hypothèses 3.2.1 et 3.2.3. Soit $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_I^0 + \mathbf{U}_{II}^0 \in A_0^{s+4}$ tel que $\mathbf{U}_I^0 = \mathbf{U}_{I,1}^0 e^{i\theta} + c.c$ et supposons de plus que*

$$\pi(\omega_L, -k_L)\mathbf{U}_{I,1}^0 = \mathbf{U}_{I,1}^0 \quad \text{et} \quad \pi(D_{t_0, z_0})\mathbf{U}_{II}^0 = \mathbf{U}_{II}^0,$$

Alors pour tout $\tau_3^* = \min\{\tau_1^*, \tau_2^*\}$ on a

i. La solution exacte \mathbf{u}^ε de (3.1) existe sur $[0, \frac{\tau_3^*}{\varepsilon}]$ et s'écrit $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x, y, z) = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{U}^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon})$, avec $\mathbf{U}^\varepsilon = \mathbf{U}_I^\varepsilon + \mathbf{U}_{II}^\varepsilon \in B_{\tau_3^*}^{s+4}$,

ii. $\mathcal{U}_{0,I,1}$ est définie dans $\mathcal{C}_b([0, \tau_3^*], H^{s+4}(\mathbb{R}^3)^n)$ comme l'unique solution de (3.35),

iii. $\mathcal{U}_{0,II}$ est définie dans $A_{\tau_3^*}^{s+4}$ comme l'unique solution de (3.48),

iv. Le profil $\underline{\mathcal{U}}_0^\varepsilon \in B_{\tau_3^*}^s$ associé à $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{0,I} + \mathcal{U}_{0,II} \in A_{\tau_3^*}^s$ avec $\mathcal{U}_{0,I} = \mathcal{U}_{0,I,1} e^{i\theta} + c.c$, approche l'équation singulière (3.5) au sens où

$$\|\mathbf{U}_I^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}_{0,I}^\varepsilon\|_{B_{\tau_3^*}^s} = O(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{U}_{II}^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_3^*}^s} = o(1), \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

v. On a aussi stabilité de la solution approchée u_0^ε définie par \mathcal{U}_0 ,

$$\|\mathbf{u}_I^\varepsilon - u_{0,I}^\varepsilon\| = O(\varepsilon^{3/2}) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}_{II}^\varepsilon - u_{0,II}^\varepsilon\| = o(\sqrt{\varepsilon}), \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

où la norme peut être choisie aussi bien dans $\mathcal{C}([0, \tau_3^*/\varepsilon] \times \mathbb{R}^3)^n$ que dans $\mathcal{C}([0, \tau_3^*/\varepsilon], L^2(\mathbb{R}^3)^n)$.

Notation. On a utilisé les mêmes notations \mathbf{u}_I^ε , $\mathbf{u}_{II}^\varepsilon$, $u_{0,I}^\varepsilon$ et $u_{0,II}^\varepsilon$ que pour le théorème 3.2.1.

Preuve.

i.-iii. Les trois premiers points résultent du théorème 3.1.1 et des propositions 3.2.2 et 3.2.5.

iv. La convergence de la composante à spectre discret est exactement la même que celle du théorème 3.2.1 car l'hypothèse d'absence de basses fréquences n'affecte que les composantes à spectre purement continu. Ains, Nous voulons montrer que $\mathbf{U}_{II}^\varepsilon \rightarrow \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon$ dans $B_{\tau_3^*}^s$, i.e. que pour tout $\mu > 0$, il existe $\varepsilon^* > 0$, tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\|\mathbf{U}_{II}^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_3^*}^s} < \mu$. On peut alors écrire

$$\|\mathbf{U}_{II}^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_3^*}^s} \leq \|\mathbf{U}_{II}^\varepsilon - \mathbf{U}_{II}^{\varepsilon, \delta}\|_{B_{\tau_3^*}^s} + \|\mathbf{U}_{II}^{\varepsilon, \delta} - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^{\varepsilon, \delta}\|_{B_{\tau_3^*}^s} + \|\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^{\varepsilon, \delta} - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_3^*}^s}, \quad (3.49)$$

où $\delta > 0$ et $\mathbf{U}_{II}^{\varepsilon, \delta}$ et $\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^{\varepsilon, \delta}$ sont définis comme au début de ce paragraphe. Grâce aux propositions 3.2.4 et 3.2.5, nous savons que pour $\delta \leq \delta^*$ suffisamment petit et pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, on a

$$\|\mathbf{U}_{II}^\varepsilon - \mathbf{U}_{II}^{\varepsilon, \delta}\|_{B_{\tau_3^*}^s} < \frac{\mu}{3}, \quad \text{et} \quad \|\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^{\varepsilon, \delta} - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_3^*}^s} \leq \|\mathcal{U}_{0,II}^\delta - \mathcal{U}_{0,II}\|_{A_{\tau_3^*}^s} < \frac{\mu}{3}. \quad (3.50)$$

De plus, le profil $\underline{\mathcal{U}}_{0,II}^{\varepsilon,\delta}$ satisfait toutes les hypothèses requises pour appliquer le théorème 3.2.1. Donc, en prenant $0 < \delta < \inf(\delta^*, \delta(\mu))$, nous savons que pour ε suffisamment petit,

$$\|\mathbf{U}_{II}^{\varepsilon,\delta} - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^{\varepsilon,\delta}\|_{B_{\tau_3^*}^s} < \frac{\mu}{3}. \quad (3.51)$$

Les inégalités (3.49)-(3.51) donnent donc

$$\|\mathbf{U}_{II}^{\varepsilon} - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^{\varepsilon}\|_{B_{\tau_3^*}^s} < \mu,$$

ce qui démontre le résultat.

v. Ce point est une conséquence directe du point **iv.** et des propriétés d'injection de la proposition 3.1.1.

□

3.3 Etude du cas non-dispersif

Dans le paragraphe précédent 3.2, on a considéré des systèmes dispersifs. Si la plupart des applications physiques rentrent dans cette classe, les systèmes non-dispersifs sont aussi physiquement pertinents. Les impulsions ultra-courtes, par exemple, sont souvent modélisées dans ce contexte. Mais il y a aussi des raisons mathématiques qui font que l'on étudie dans ce paragraphe des systèmes non-dispersifs : on a vu dans le paragraphe précédent que les interactions entre oscillations à spectre purement continu n'étaient pas possibles. La preuve de ce résultat est reliée aux propriétés dispersives de la variété caractéristique. Nous allons montrer dans ce paragraphe que quand ces propriétés ne sont plus valides, on peut observer des non linéarités sur la composante à spectre purement continu. En effet, dans le cadre non dispersif, la variété caractéristique $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ est homogène (figure 3.3, par exemple pour un système de Maxwell-Lorentz en 1 D).

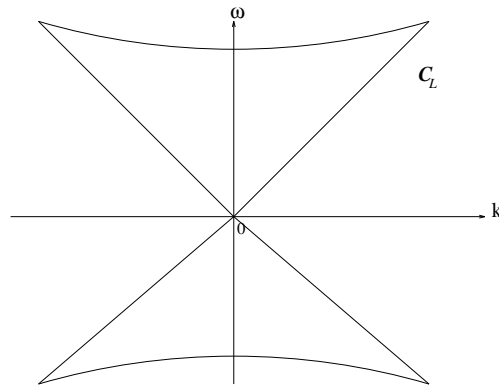


FIG. 3.3 – Variété caractéristique pour le système de Maxwell-Lorentz

Ainsi les systèmes que nous étudions maintenant s'écrivent

$$\begin{cases} L(\partial)\mathbf{u}^\varepsilon + f(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0}(x, y, z) = \mathbf{u}_\varepsilon^0(x, y, z), \end{cases}$$

avec $L(\partial) = A_0\partial_t + A_1\partial_x + A_2\partial_y + A_3\partial_z$. Nous considérons ainsi des problèmes du type (3.1) pour lesquels $L_0 = 0$. Comme nous l'avons dit dans le sous-paragraphe 3.1.2, nous pouvons nous ramener au cas $A_0 = Id$.

Le symbole $\mathcal{L}(\omega, \kappa)$ qui s'écrit alors $\mathcal{L}(\omega, \kappa) = \omega Id + A_3\kappa$ est ainsi homogène de degré 1 en (ω, κ) , et l'hypothèse 3.2.1 n'est donc jamais vérifiée. Cependant, sans faire d'hypothèse supplémentaire sur $L(\partial)$, nous connaissons certaines propriétés de la variété caractéristique $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$. Comme $\mathcal{L}(\omega, \kappa)$ est de degré 1, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ est une réunion de droites passant par l'origine. De plus si (ω, κ) et (ω', κ') sont sur une même droite de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, alors on a $\pi(\omega, \kappa) = \pi(\omega', \kappa')$.

Dans toute cette partie, nous utiliserons les notations suivantes.

Notations. Nous désignons par D_1, \dots, D_N l'ensemble des droites telles que $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = D_1 \cup \dots \cup D_N$. Nous noterons $-v_j$ la pente de la droite D_j . Si $(\omega, \kappa) \in D_j$, alors on notera $\pi_j = \pi(\omega, \kappa)$ et $\mathcal{L}_j^{-1} = \mathcal{L}^{-1}(\omega, \kappa)$. Quitte à renuméroter les droites, nous supposons que $(\omega_L, -k_L) \in D_1$.

Comme le cas non-dispersif ne soulève pas de nouvelle difficulté par rapport au cas dispersif, nous omettons les démonstrations des résultats que nous donnons dans cette partie.

3.3.1 Obtention des équations de profil

Comme dans la partie 3.2, nous cherchons une solution approchée de la forme

$$u^\varepsilon(t, x, y, z) = \sqrt{\varepsilon} \mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t, t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}),$$

où le profil \mathcal{U}^ε s'écrit lui-même comme un développement en puissances de ε

$$\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon \mathcal{U}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{U}_2, \text{ avec } \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in E_{\tau^*}^s.$$

Grâce à la proposition 3.1.2, nous décomposons ces trois profils en une composante à spectre discret et une composante à spectre purement continu

$$\mathcal{U}_l = \mathcal{U}_{l,I} + \mathcal{U}_{l,II}, \quad l = 0, 1, 2.$$

Nous rappelons que les profils indexés par I sont toujours à spectre discret et que les profils indexés par II sont à spectre purement continu.

L'analyse des composantes à spectre discret diffère légèrement de celle que nous avons menée dans le cas dispersif. En effet, les harmoniques supérieures créées par les non-linéarités sont non-caractéristiques dans le cas dispersif et ne jouent pas un rôle très important puisqu'elles ne sont pas propagées. Ici, pour le cas non dispersif, toutes les harmoniques supérieures sont caractéristiques et nous sommes contraints de chercher $\mathcal{U}_{0,I}, \mathcal{U}_{1,I}$ et $\mathcal{U}_{2,I}$ sous la forme de fonctions périodiques. Les effets de rectification, *i.e.* la création d'un champ moyen par interaction non linéaire de la composante oscillante, rendent cette analyse plus difficile [37],[40]. Cependant, comme toutes les non linéarités que nous regardons ici sont d'ordre 3, toutes les harmoniques que nous allons considérer sont impaires [21], ainsi les effets de rectification n'apparaîtront pas ici. Les profils $\mathcal{U}_{0,I}, \mathcal{U}_{1,I}$ et $\mathcal{U}_{2,I}$ sont alors cherchés sous la forme

$$\mathcal{U}_{l,I}(\tau, t, x, y, z, \theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{l,I,2j+1}(\tau, t, x, y, z) e^{i(2j+1)\theta}, \quad l = 0, 1, 2.$$

Afin que les profils soient bien dans $E_{\tau^*}^s$, nous devons avoir convergence normale des harmoniques, et c'est pour cela que nous introduisons les espaces suivants.

Définition 3.3.1. Nous notons D_0^s (resp. $D_{\tau^*}^s$) l'ensemble des suites de profils $(\mathcal{V}_{2j+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ avec $\mathcal{V}_{2j+1} \in H^s(\mathbb{R}^3)^n$ (resp. $\mathcal{C}_b([0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^3)^n)$) telles que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathcal{V}_{2j+1}\| < \infty,$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme dans $H^s(\mathbb{R}^3)$ (resp. $\mathcal{C}_b([0, \tau^*] \times \mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^3)^n)$). Nous notons $\|\cdot\|_{D_0^s}$ (resp. $\|\cdot\|_{D_{\tau^*}^s}$) la norme associée à l'espace D_0^s (resp. $D_{\tau^*}^s$).

L'annulation de $\mathcal{R}_{-1,I}$ conduit alors aux conditions de polarisation

$$\pi_1 \mathcal{U}_{0,I,2j+1} = \mathcal{U}_{0,I,2j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (3.52)$$

Comme en 3.2.1, on peut montrer grâce au lemme 3.1.2 que l'annulation de $\mathcal{R}_{0,I}$ est équivalente à

$$\begin{cases} \pi_1 L_1(\partial) \pi_1 \mathcal{U}_{0,I,2j+1} = 0, \\ (Id - \pi_1) \mathcal{U}_{1,I,2j+1} = \frac{i}{2j+1} \mathcal{L}_1^{-1} A(\partial_{x,y,z}) \mathcal{U}_{0,I,2j+1}. \end{cases} \quad (3.53)$$

Comme nous l'avons fait pour le cas dispersif, nous imposons que

$$\pi_1 \mathcal{U}_{1,I,2j+1} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (3.54)$$

C'est dans l'annulation de $\mathcal{R}_{1,I}$ qu'apparaît clairement la nécessité de prendre des profils périodiques. En effet, dans le cas dispersif, toutes les harmoniques autres que $\pm\theta$ étaient trouvées par inversion elliptique, ce qui n'est plus possible maintenant puisque ces harmoniques sont caractéristiques. Comme toutes les harmoniques présentes sont impaires, la non linéarité $f(\mathcal{U}_0)_I$ peut s'écrire sous la forme

$$f(\mathcal{U}_0)_I = \Lambda(\mathcal{U}_{0,I,\cdot}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Lambda_{2j+1}(\mathcal{U}_{0,I,\cdot}) e^{i(2j+1)\theta}, \quad (3.55)$$

et annuler $\mathcal{R}_{1,I}$ est équivalent à

$$i(2j+1) \mathcal{L}(\tilde{\omega}_l, -\tilde{k}_l) \mathcal{U}_{2,I,2j+1} + L_1(\partial) \mathcal{U}_{1,I,2j+1} + \partial_\tau \mathcal{U}_{0,I,2j+1} + \Lambda_{2j+1}(\mathcal{U}_{0,I,\cdot}) = 0.$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, cette équation se décompose grâce au lemme 3.1.2 et aux équations (3.52)-(3.54) en

$$\begin{aligned} (Id - \pi_1) \mathcal{U}_{2,I,2j+1} &= -\frac{1}{(2j+1)^2} \mathcal{L}_1^{-1} L_1(\partial) \mathcal{L}_1^{-1} A(\partial_{x,y,z}) \mathcal{U}_{0,I,2j+1} \\ &\quad + \frac{i}{2j+1} \mathcal{L}_1^{-1} (\partial_\tau \mathcal{U}_{0,I,2j+1} + \Lambda_{2j+1}(\mathcal{U}_{0,I,\cdot})), \end{aligned}$$

et

$$\partial_\tau \mathcal{U}_{0,I,2j+1} + i \pi_1 A(\partial_{x,y,z}) \mathcal{L}_1^{-1} A(\partial_{x,y,z}) \pi_1 \mathcal{U}_{0,I,2j+1} + \pi_1 \Lambda_{2j+1}(\mathcal{U}_{0,I,\cdot}) = 0.$$

Sous l'hypothèse 3.2.3, on peut faire les mêmes simplifications que dans la section 3.2.1 à l'aide des équations (3.52)-(3.54) et de la proposition 3.2.1. On trouve ainsi le profil $\mathcal{U}_{0,I,\cdot}$ en résolvant

$$\begin{cases} \pi_1 \mathcal{U}_{0,I,\cdot} = \mathcal{U}_{0,I,\cdot}, \\ (\partial_t + v_1 \partial_z) \mathcal{U}_{0,I,\cdot} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,I,\cdot} + i \frac{v_1}{2k_l} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{U}_{0,I,\cdot} + \pi_1 \Lambda(\mathcal{U}_{0,I,\cdot}) = 0, \end{cases} \quad (3.56)$$

dans $D_{\tau^*}^s$.

Tant que l'étude des non linéarités n'a pas été faite, l'analyse des composantes à spectre purement continu est strictement identique à celle faite dans le cas dispersif. En supposant que la composante à spectre continu $\mathcal{U}_{0,II}$ de \mathcal{U}_0 vérifie l'hypothèse 3.2.2 (absence de basses fréquences), on trouve comme dans le paragraphe 3.2 que $\mathcal{U}_{0,II}$ doit satisfaire

$$\begin{cases} \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II}, \\ (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II} + (\partial_t - \omega'(D_{z_0})\partial_z)\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II} + i\frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} \\ + \psi^\delta(D_{z_0})\pi(D_{t_0, z_0})[f(\mathcal{U}_0)]_{II} = 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

où ψ^δ est la fonction de troncature introduite dans la définition 3.2.1.

Nous pouvons cependant simplifier ces équations dans le cas non-dispersif, en décomposant $\mathcal{U}_{0,II}$ sous la forme

$$\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II,1} + \dots + \mathcal{U}_{0,II,N},$$

de manière à ce que le spectre de $\mathcal{U}_{0,II,j}$ soit inclus dans D_j pour tout $j = 1, \dots, N$. Les équations (3.57) s'écrivent alors pour $j = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \pi_j \mathcal{U}_{0,II,j} = \mathcal{U}_{0,II,j}, \\ (\partial_t + v_j \partial_z)\mathcal{U}_{0,II,j} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II,j} + (\partial_t + v_j \partial_z)\pi_j \mathcal{U}_{1,II,j} - i\frac{v_j}{2D_{z_0}}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II,j} + \pi_j \psi^\delta(D_{z_0})[f(\mathcal{U}_0)]_{II,j} = 0, \end{cases}$$

où on rappelle que $-v_j$ désigne la pente de la droite D_j .

Nous allons maintenant étudier la non linéarité $\pi_j[f(\mathcal{U}_0)]_{II,j}$ qui apparaît dans l'équation de profil précédente. Avec le même type d'arguments que pour la preuve du lemme 3.2.2, on obtient le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Soient $\mathcal{V}_{II,j} \in A_{\tau^*}^s, j = 1 \dots N, N$ profils avec un spectre purement continu et tels que $Sp \mathcal{V}_{II,j} \subset D_j$. Prenons aussi $a, b \in \mathbb{C}^n$. Alors on a*

- i. $\pi_j F(\mathcal{V}_{II,k}, \mathcal{V}_{II,l}, \mathcal{V}_{II,m}) = 0$, à moins que $j = k = l = m$,
- ii. $\pi_j F(ae^{ik\theta}, \mathcal{V}_{II,l}, \mathcal{V}_{II,m}) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ à moins que $j = k = l = m = 1$,
- iii. $\pi_j F(ae^{ik\theta}, be^{il\theta}, \mathcal{V}_{II,m}) = 0, \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$ à moins que $k + l = 0$ et $j = m$.

Remarque 3.3.1. *La principale différence entre le cas dispersif et le cas non-dispersif est que l'on peut avoir des interactions entre oscillations à spectre continu dans le cas non-dispersif. Ainsi le lemme précédent montre que pour voir apparaître de telles interactions, les oscillations doivent avoir leur support sur une même ligne de la variété caractéristique. Donc, les équations d'évolution des modes $\mathcal{U}_{0,II,j}$ peuvent être non linéaires.*

Grâce au lemme 3.3.1, la non linéarité $\pi_j[f(\mathcal{U}_0)]_{II,j}$ peut s'écrire sous la forme

$$\pi_1[f(\mathcal{U}_0)]_{II,1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi_1 F^S(\mathcal{U}_{0,I,2k+1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,2k+1}}, \mathcal{U}_{0,II,1}) + \pi_1 f'(\mathcal{U}_{0,II,1})(\mathcal{U}_{0,I,1}) + \pi_1 f(\mathcal{U}_{0,II,1}),$$

et, quand $j \geq 2$,

$$\pi_j[f(\mathcal{U}_0)]_{II,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi_j F^S(\mathcal{U}_{0,I,2k+1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,2k+1}}, \mathcal{U}_{0,II,j}) + \pi_j f(\mathcal{U}_{0,II,j}),$$

3.3.2 Résolution des équations de profil

Comme pour la section 3.2.4, le choix de $\pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II}$ est crucial pour la stabilité des équations de profil. En utilisant des techniques similaires à celles de [37] et [40], on décompose en temps long les équations d'évolution des profils $\mathcal{U}_{0,II,j}$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \mathcal{U}_{0,II,1} = \mathcal{U}_{0,II,1}, \\ (\partial_t + v_1 \partial_z) \mathcal{U}_{0,II,1} = 0, \\ (\partial_t + v_1 \partial_z) \mathcal{U}_{1,II,1} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II,1} - i \frac{v_1}{2D_{z_0}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{U}_{0,II,1} + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} F^S(\mathcal{U}_{0,I,2k+1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,2k+1}}, \mathcal{U}_{0,II,1}) \\ \quad + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) f'(\mathcal{U}_{0,II,1})(\mathcal{U}_{0,I,1}) + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) f(\mathcal{U}_{0,II,1}) = 0, \end{array} \right. \quad (3.58)$$

et pour tout $j \geq 2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_j \mathcal{U}_{0,II,j} = \mathcal{U}_{0,II,j}, \\ (\partial_t + v_j \partial_z) \mathcal{U}_{0,II,j} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II,j} - i \frac{v_j}{2D_{z_0}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{U}_{0,II,j} + \pi_j \psi^\delta(D_{z_0}) f(\mathcal{U}_{0,II,j}) = 0, \\ (\partial_t + v_j \partial_z) \pi_j \mathcal{U}_{1,II,j} = -\psi^\delta(D_{z_0}) \pi_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} F^S(\mathcal{U}_{0,I,2k+1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,2k+1}}, \mathcal{U}_{0,II,1}). \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Ces équations de profil peuvent être résolues. Cependant, on se restreint nous même au cas où $\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II,1}$, *i.e.* où le spectre de $\mathcal{U}_{0,II}$ est inclus dans D_1 . Le cas général est techniquement plus pénible et moins pertinent pour les deux applications considérées dans le dernier paragraphe.

Proposition 3.3.1. *Soient $\sigma \geq s$ et $R > 0$ tel que $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_I^0 + \mathbf{U}_{II,1}^0 \in A_0^\sigma$ et $\|\mathbf{U}^0\|_{A_0^\sigma} \leq R$. Supposons de plus que $\mathbf{U}_I^0 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{I,2j+1}^0 e^{i(2j+1)\theta}$ avec $\mathbf{U}_{I,\cdot}^0 \in D_0^\sigma$. Supposons enfin que*

$$\pi_1 \mathbf{U}_{I,1,\cdot}^0 = \mathbf{U}_{I,1,\cdot}^0, \quad \text{Sp} \mathbf{U}_{II,1}^0 \subset D_1 \quad \text{et} \quad \pi_1 \mathbf{U}_{II,1}^0 = \mathbf{U}_{II,1}^0.$$

Alors il existe $\tau_2^ > 0$, qui dépend seulement de R , tel qu'il existe*

i. un unique $\mathcal{U}_{0,I,.} = \pi_1 \mathcal{U}_{0,I,.} \in D_{\tau_2^*}^\sigma$ solution de

$$\begin{cases} (\partial_t + v_1 \partial_z) \mathcal{U}_{0,I,.} = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,I,.} + i \frac{v_1}{2k_L} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{U}_{0,I,.} + \pi_1 \Lambda(\mathcal{U}_{0,I,.}) = 0, \\ \mathcal{U}_{0,I,.}|_{\tau=t=0} = \mathbf{U}_{I,.}^0, \end{cases} \quad (3.60)$$

où $\Lambda(\mathcal{U}_{0,I,.})$ est donné par (3.55),

ii. un unique $\mathcal{U}_{0,II,1}^\delta = \pi_1 \mathcal{U}_{0,II,1}^\delta \in A_{\tau_2^*}^\sigma$ solution de

$$\begin{cases} (\partial_t + v_1 \partial_z) \mathcal{U}_{0,II,1}^\delta = 0, \\ \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II,1}^\delta - i \frac{v_1}{2D_{z_0}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{U}_{0,II,1}^\delta + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} F^S(\mathcal{U}_{0,I,2k+1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,2k+1}}, \mathcal{U}_{0,II,1}^\delta) \\ \quad + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) f'(\mathcal{U}_{0,II,1}^\delta)(\mathcal{U}_{0,I,1}) + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) f(\mathcal{U}_{0,II,1}^\delta) = 0, \\ \mathcal{U}_{0,II,1}^\delta|_{\tau=t=0} = \psi^\delta(D_{z_0}) \mathbf{U}_{II,1}^0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Preuve.

La première équation du système (3.60) est automatiquement résolue en cherchant $\mathcal{U}_{0,I,.}$ sous la forme $\mathcal{U}_{0,I,2j+1}(\tau, t, x, y, z) = \mathbf{U}_{0,I,2j+1}(\tau, z - v_1 t, x, y)$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Le système (3.60) se réduit alors au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{U}_{0,I,.} + i \frac{v_1}{2k_L} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathbf{U}_{0,I,.} + \pi_1 \Lambda(\mathbf{U}_{0,I,.}) = 0, \\ \mathbf{U}_{0,I,.}|_{\tau=0} = \mathbf{U}_{I,.}^0, \end{cases}$$

qui est facilement résolu avec des itérations de Picard dans $\mathcal{C}([0, \tau_2^*], D_\sigma^0)$ car sa partie linéaire définit un groupe unitaire sur D_σ^0 , qui est une algèbre de Banach.

Pour la composante à spectre purement continu, nous ne pouvons pas donner une expression explicite de la solution comme pour la proposition 3.2.2 car nous devons tenir compte des non linéarités. Cependant, la présence des non linéarités est contrebalancée par la forme simple de l'équation de transport (nous avons ici un groupe commun de vitesses pour chaque fréquence). Afin que $\mathcal{U}_{0,II,1}^\delta$ vérifie cette équation de transport, on la choisit sous la forme

$$\mathcal{U}_{0,II,1}^\delta(\tau, t, x, y, z, t_0, z_0) = \mathbf{U}_{0,II,1}^\delta(\tau, z - v_1 t, x, y, t_0, z_0),$$

ainsi le système (3.61) revient au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{U}_{0,II,1}^\delta - i \frac{v_1}{2D_{z_0}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathbf{U}_{0,II,1}^\delta + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} F^S(\mathbf{U}_{0,I,2k+1}, \overline{\mathbf{U}_{0,I,2k+1}}, \mathbf{U}_{0,II,1}^\delta) \\ \quad + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) f'(\mathbf{U}_{0,II,1}^\delta)(\mathbf{U}_{0,I,1}) + \pi_1 \psi^\delta(D_{z_0}) f(\mathbf{U}_{0,II,1}^\delta) = 0, \\ \mathbf{U}_{0,II,1}^\delta|_{\tau=0} = \psi^\delta(D_{z_0}) \mathbf{U}_{II,1}^0, \end{cases}$$

Ce problème de Cauchy se résout dans $B_{\tau_2^*}^\sigma$ par des itérations de Picard, en utilisant des estimations similaires à celles du lemme 3.1.1.

□

Remarque 3.3.2. i. La proposition 3.3.1 donnant \mathcal{U}_0 , le système (3.58) se résout donc en choisissant $\pi_1 \mathcal{U}_{1,II,1} = 0$.

ii. Les résultats de la proposition 3.3.1 sont aussi satisfaits pour $\delta = 0$, i.e. il existe une unique solution $\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II,1} = \pi_1 \mathcal{U}_{0,II,1}$ telle que

$$\begin{cases} (\partial_t + v_1 \partial_z) \mathcal{U}_{0,II,1} = 0, \\ \partial_\tau \partial_{z_0} \mathcal{U}_{0,II,1} + \frac{v_1}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{U}_{0,II,1} + \pi_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \partial_{z_0} F^S(\mathcal{U}_{0,I,2k+1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,2k+1}}, \mathcal{U}_{0,II,1}) \\ \quad + \pi_1 \partial_{z_0} f'(\mathcal{U}_{0,II,1})(\mathcal{U}_{0,I,1}) + \pi_1 \partial_{z_0} f(\mathcal{U}_{0,II,1}) = 0, \\ \mathcal{U}_{0,II,1}|_{\tau=t=0} = \mathbf{U}_{II,1}^0. \end{cases} \quad (3.62)$$

et la propriété de convergence de la proposition 3.2.5 peut facilement être étendue au cas présent.

3.3.3 Validité de l'approximation

Nous voulons montrer que la solution approchée

$$u^\varepsilon(t, x, y, z) = \sqrt{\varepsilon} \mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t, t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}),$$

avec $\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon \mathcal{U}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{U}_2$, définit bien une bonne approximation de la solution exacte de (3.1). Comme dans le second paragraphe, la preuve ne peut pas être directe car la présence des basses fréquences et la condition de \mathcal{L}^{-1} -régularité n'est pas compatibles. Mais on peut copier le raisonnement du second paragraphe, qui introduit le seuil-limite infrarouge de D. Alterman [1], pour obtenir le théorème de stabilité. Avant de donner ce théorème, nous rappelons que pour tout profil $\mathcal{V} \in A_{\tau^*}^\sigma$, on lui associe le profil $\underline{\mathcal{V}}^\varepsilon$ défini par

$$\underline{\mathcal{V}}^\varepsilon(\tau, x, y, z, t_0, z_0) := \mathcal{V}(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}, x, y, z, t_0, z_0).$$

Théorème 3.3.1. Supposons que la variété caractéristique $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ vérifie l'hypothèse 3.2.3. Soit $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_I^0 + \mathbf{U}_{II,1}^0 \in A_0^{s+4}$ tel que $\mathbf{U}_I^0 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{I,2j+1}^0 e^{i(2j+1)\theta}$, avec $\mathbf{U}_{I,\cdot}^0 \in D_0^{s+4}$ et supposons de plus

$$\pi_1 \mathbf{U}_{I,\cdot}^0 = \mathbf{U}_{I,\cdot}^0, \quad \text{Sp} \mathbf{U}_{II,1}^0 \subset D_1 \quad \text{et} \quad \pi_1 \mathbf{U}_{II,1}^0 = \mathbf{U}_{II,1}^0.$$

Alors pour tout $\tau_3^* = \min\{\tau_1^*, \tau_2^*\}$, on a les résultats suivants

i. La solution exacte \mathbf{u}^ε de (3.1) existe dans $[0, \tau_3^*/\varepsilon]$ et s'écrit $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x, y, z) = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{U}^\varepsilon(\varepsilon t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon})$, avec $\mathbf{U}^\varepsilon = \mathbf{U}_I^\varepsilon + \mathbf{U}_{II}^\varepsilon \in B_{\tau_3^*}^{s+4}$,

ii. $\mathcal{U}_{0,I,\cdot}$ est définie dans $D_{\tau_3^*}^{s+4}$ comme l'unique solution de (3.60),

iii. $\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II,1}$ est définie dans $A_{\tau_3^*}^{s+4}$ comme l'unique solution de (3.62),

iv. Le profil $\underline{\mathcal{U}}_0^\varepsilon \in B_{\tau_3^*}^\sigma$ associé à $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{0,I} + \mathcal{U}_{0,II} \in A_{\tau_3^*}^\sigma$, avec $\mathcal{U}_{0,I} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{0,I,2j+1} e^{i(2j+1)\theta}$,
 approche l'équation singulière (3.5) dans le sens où

$$\|\mathbf{U}_I^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}_{0,I}^\varepsilon\|_{B_{\tau_3^*}^s} = O(\varepsilon), \text{ et } \|\mathbf{U}_{II}^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}_{0,II}^\varepsilon\|_{B_{\tau_3^*}^s} = o(1),$$

v. On a aussi stabilité de la solution approchée u_0^ε définie par \mathcal{U}_0 ,

$$\|\mathbf{u}_I^\varepsilon - u_{0,I}^\varepsilon\| = O(\varepsilon^{3/2}), \text{ et } \|\mathbf{u}_{II}^\varepsilon - u_{0,II}^\varepsilon\| = o(\sqrt{\varepsilon}),$$

où la norme peut être prise aussi bien dans $C([0, \tau_3^*/\varepsilon] \times \mathbb{R}^3)$ que dans $C([0, \tau_3^*/\varepsilon], L^2(\mathbb{R}^3)^n)$.

3.4 Etude du cas faiblement dispersif

Comme nous l'avons vu dans les sous-paragraphes précédents, le comportement de la solution approchée est complètement différent dans le cas dispersif et le cas non-dispersif. Dans le sous-paragraphe 3.2, l'évolution du mode spectre continu n'est pas couplé au mode spectre discret, et est linéaire; et dans le sous-paragraphe 3.3, il est couplé et non linéaire. Ainsi, l'estimation en $o(1)$ du théorème 3.2.2 est quelque peu critique pour les systèmes faiblement dispersifs. On propose dans ce sous-paragraphe quelques indications pour améliorer ce résultat.

En utilisant la méthode BKW (Brillouin, Kramers et Wentzel), il est équivalent de résoudre (3.31) ou l'équation suivante

$$\begin{cases} \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II}, \\ (\partial_t + \omega'(k_L)\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_\tau\mathcal{U}_{0,II} + i\frac{\omega'(D_{z_0})}{2D_{z_0}}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} + i\frac{\omega''(D_{z_0})}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,II} + \frac{-\omega'(k_L) - \omega'(D_{z_0})}{\varepsilon}\partial_z\mathcal{U}_{0,II} \\ = 6\pi(D_{t_0, z_0})F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}), \end{cases} \quad (3.63)$$

Les non linéarités ont été simplifiées avec les résultats que l'on a obtenus aux lemmes 3.2.2 et 3.3.1, et le fait que ici $\pi_1(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{1,II} = 0$.

En général, le multiplicateur de Fourier $\frac{-\omega'(k_L) - \omega'(D_{z_0})}{\varepsilon}$ est de taille $O(1/\varepsilon)$ et se résout avec le système (3.31) qui est plus pertinent que le système (3.63). Cependant, si le modèle considéré est faiblement dispersif dans le sens où l'on peut choisir ω'_0 de telle sorte que $\frac{-\omega'(k_L) - \omega'(D_{z_0})}{\varepsilon} = O(1)$, le système (3.63) devient plus intéressant car les équations de transport sont les mêmes pour toutes les fréquences, comme dans le cas non-dispersif. Comme il est raisonnable de supposer que de tels systèmes faiblement dispersifs satisfont aussi $\omega''(D_{z_0}) = O(\varepsilon)$, le système (3.63) est équivalent en terme de raisonnement à

$$\begin{cases} \pi(D_{t_0, z_0})\mathcal{U}_{0,II} = \mathcal{U}_{0,II}, \\ (\partial_t + \omega'(k_L)\partial_z)\mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_\tau\partial_{z_0}\mathcal{U}_{0,II} + \frac{\omega'(D_{z_0})}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} + \frac{-\omega'(k_L) - \omega'(D_{z_0})}{\varepsilon}\partial_z\partial_{z_0}\mathcal{U}_{0,II} \\ = 6\pi(D_{t_0, z_0})\partial_{z_0}F^S(\mathcal{U}_{0,I,1}, \overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}, \mathcal{U}_{0,II}), \end{cases} \quad (3.64)$$

où on a dérivé la dernière équation du système (3.63) par rapport à z_0 .

Donc, dans le cas faiblement dispersif, on peut obtenir des équations de profil sur $\mathcal{U}_{0,II}$ qui sont linéaires mais couplées avec l'évolution du mode à spectre discret $\mathcal{U}_{0,I,1}$. Le système (3.64) donne ainsi un modèle intermédiaire entre le cas dispersif du sous-paragraphe 3.2 et le cas non-dispersif du sous-paragraphe 3.3, et permet de combler partiellement le fossé entre ces deux situations.

3.5 Applications

3.5.1 Lasers à spectre large

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous voulons étudier des effets dus au fait que certains lasers ont des fréquences et des vecteurs d'onde qui débordent un peu autour de la valeur théorique pour une taille plus grande que $O(\varepsilon)$ (typiquement $O(1)$). Afin de modéliser ces phénomènes, nous avons ajouté à l'oscillation théorique (sinusoïdale) un terme correctif à spectre purement continu. Pour d'écrire l'évolution du champ electro-magnétique, nous utilisons les équations de Maxwell couplées à une réponse du milieu par la polarisation \mathbf{P} qui suit une équation de type oscillateur anharmonique [45]. Une fois adimensionné [20] et en omettant les équations de divergence nulle, le système s'écrit

$$(M) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{rot} \mathbf{B}^\varepsilon + \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \mathbf{Q} & = 0, \\ \partial_t \mathbf{B} + \mathbf{rot} \mathbf{E}^\varepsilon & = 0, \\ \partial_t \mathbf{P} - \frac{\eta_a}{\varepsilon} \mathbf{Q} & = 0, \\ \partial_t \mathbf{Q} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon} (\sqrt{\gamma} \mathbf{E} - \eta_a \mathbf{P}) - \gamma^{\frac{3}{2}} |\mathbf{P}|^2 \mathbf{P} & = 0. \end{cases}$$

Le système (M) se met bien sous la forme (3.1), comme on a déjà pu le voir au chapitre I, sous-paragraphe 1.2.1,

$$L^\varepsilon(\partial) \mathbf{u}^\varepsilon + f(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0,$$

avec

$$\mathbf{u}^\varepsilon = (\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{Q})^T \in \mathbb{C}^{12},$$

et la non linéarité f est d'ordre trois et se lit

$$f(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (0, 0, 0, \gamma^{\frac{3}{2}} |\mathbf{P}|^2 \mathbf{P})^T. \quad (3.65)$$

Remarque 3.5.1. *Le fait que l'application F associée à f ne soit pas trilinéaire comme dans l'hypothèse 3.1.2 (comme elle est semi linéaire en une de ses variables) n'est pas important. En effet, en considérant $\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = (\mathbf{u}^\varepsilon, \overline{\mathbf{u}}^\varepsilon) \in \mathbb{C}^{24}$ nous nous ramenons à ce cas.*

L'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ s'écrit $L^\varepsilon(\partial) = \partial_t + \partial_x A_1 + \partial_y A_2 + \partial_z A_3 + \frac{L_0}{\varepsilon}$ avec

$$\partial_x A_1 + \partial_y A_2 + \partial_z A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{rot} & 0 & 0 \\ \mathbf{rot} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\gamma} Id \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_a Id \\ -\sqrt{\gamma} Id & 0 & \eta_a Id & 0 \end{pmatrix}.$$

La variété caractéristique $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ associée au symbole $\mathcal{L}(\omega, \kappa) = \omega Id + \kappa A_3 + \frac{L_0}{i}$ est définie par l'équation algébrique

$$\omega^2(\omega^2 - 1 - \gamma)[(\omega^2 - \eta_a^2)(\omega^2 - |\kappa|^2) - \gamma\omega^2]^2 = 0.$$

Cette variété caractéristique compte 3 points singuliers, tous d'abscisse $\kappa = 0$ et d'ordonnée $0, \pm\sqrt{1+\gamma}$. Si $(\omega_L, -k_L)$ est sur une nappe courbe de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, *i.e.* si $(\omega_L^2 - \eta_a^2)(\omega_L^2 - k_L^2) - \gamma\omega_L^2 = 0$, alors la vitesse de groupe $\omega'(k_L)$ est donnée par l'équation (1.24) du chapitre I (paragraphe 1.2.2), tandis que le facteur de dispersion $\omega''(k_L)$ est donné par l'équation (1.25) du chapitre I (paragraphe 1.2.2). On remarque que $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ comporte trois nappes planes, et donc parallèles, qui ne satisfont pas exactement l'hypothèse 3.2.1. Cependant, la nappe nulle est exclue grâce aux conditions de divergence nulle du champ electro-magnétique, et on peut montrer sans difficulté que l'analyse de la non linéarité faite dans le paragraphe 3.2.3 dans le cadre de l'hypothèse 3.2.1 n'est pas altérée.

Nous considérons une condition initiale de la forme

$$\mathbf{u}_{\varepsilon}^0(x, y, z) = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{U}^0(x, y, z, 0, \frac{z}{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon}(\mathbf{E}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{P}^0, \mathbf{Q}^0)(x, y, z, 0, \frac{z}{\varepsilon}),$$

où \mathbf{U}^0 est de la forme $\mathbf{U}^0(x, y, z, t_0, z_0) = \mathbf{U}_{I,1}^0(x, y, z)e^{i\theta} + c.c + \mathbf{U}_{II}^0(x, y, z, t_0, z_0)$, la composante \mathbf{U}_{II}^0 étant à spectre purement continu. Comme nous l'avons dit précédemment, $\mathbf{U}_{I,1}^0$ modélise un "laser idéal", *i.e.* un laser parfaitement localisé en $(\omega_L, -k_L)$ et \mathbf{U}_{II}^0 correspond à la limitation expérimentale. De plus, on impose que ces conditions initiales soient polarisées

$$\pi(\omega_L, -k_L)\mathbf{U}_{I,1}^0 = \mathbf{U}_{I,1}^0 \quad \text{et} \quad \pi(D_{t_0, z_0})\mathbf{U}_{II}^0 = \mathbf{U}_{II}^0.$$

La solution de l'optique diffractive s'écrit

$$u^{\varepsilon}(t, x, y, z) = \sqrt{\varepsilon}\mathcal{U}_{0,I,1}(\varepsilon t, t, x, y, z)e^{i(\omega_L t - k_L z)/\varepsilon} + c.c \\ + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{U}_{0,II}(\varepsilon t, t, x, y, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}).$$

D'après les résultats du paragraphe 2, le profil $\mathcal{U}_{0,I,1}$ est solution de

$$\partial_{\tau}\mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega'(k_L)}{2k_L}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,I,1} + i\frac{\omega''(k_L)}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,I,1} + \pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = 0,$$

avec ici

$$f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = (0, 0, 0, \gamma^{\frac{3}{2}}(2|\vec{\mathcal{P}}_{0,I,1}|^2\vec{\mathcal{P}}_{0,I,1} + (\vec{\mathcal{P}}_{0,I,1}\cdot\vec{\mathcal{P}}_{0,I,1})\vec{\mathcal{P}}_{I,\infty})^T,$$

et $\omega'(k_L)$ et $\omega''(k_L)$ sont donnés respectivement par (1.24) et (1.25).

Comme nous considérons des ondes qui se propagent dans la direction (Oz) avec un nombre d'onde $\vec{K} = (0, 0, k_L)$, le champ électrique doit être polarisé dans le plan (Oxy) . On peut même se ramener au cas où le champ électrique est polarisé selon la direction (Ox) *i.e.* $\vec{\mathcal{E}}_{0,I,1} = (\mathcal{E}_{0,I,1}, 0, 0)^T$. Comme $\pi(\omega_L, -k_L)\mathcal{U}_{0,I,1} = \mathcal{U}_{0,I,1}$, on a alors $\vec{\mathcal{P}}_{0,I,1} = \eta_a\chi(\omega_L)\vec{\mathcal{E}}_{0,I,1}$, où la susceptibilité électrique $\chi(\omega_L)$ est donnée par

$$\chi(\omega_L) = \frac{\sqrt{\gamma}}{(\eta_a^2 - \omega_L^2)}.$$

La non linéarité s'écrit alors

$$f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = (0, 0, 0, (3\gamma^{\frac{3}{2}}\eta_a^3\chi(\omega_L)^3|\vec{\mathcal{E}}_{0,I,1}|^2\vec{\mathcal{E}}_{0,I,1}, 0, 0))^T.$$

Le seul élément qui nous manque encore pour obtenir l'équation d'évolution sur $\mathcal{E}_{0,I,1}$ est le calcul de la non linéarité $\pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}})$. Pour tout vecteur $a = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{C}^3$, on a

$$\pi(\omega_L, -k_L) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = -\frac{i\omega_L\sqrt{\gamma}}{(\eta_a^2 - \omega_L^2)} \begin{pmatrix} \frac{a_1}{N^2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

avec

$$\begin{aligned} N^2 &= 1 + \frac{k_L^2}{\omega_L^2} + \eta_a^2\chi^2(\omega_L) + \omega_L^2\chi^2(\omega_L), \\ &= \sqrt{\gamma}\left(\frac{k_L^2 + \omega_L^2}{k_L^2 - \omega_L^2} + \frac{\eta_a^2 + \omega_L^2}{\eta_a^2 - \omega_L^2}\right)\chi(\omega_L), \\ &:= \sqrt{\gamma}\beta(\omega_L, k_L)\chi(\omega_L). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\pi(\omega_L, -k_L)f'(\mathcal{U}_{0,I,1})(\overline{\mathcal{U}_{0,I,1}}) = -3i\gamma\eta_a^3\frac{\omega_L}{\beta(\omega_L, k_L)}\chi(\omega_L)^3(|\mathcal{E}_{0,I,1}|^2\mathcal{E}_{0,I,1}, \dots),$$

et l'équation d'évolution sur $\mathcal{E}_{0,I,1}$ est donnée par

$$\partial_\tau\mathcal{E}_{0,I,1} + \frac{i\omega'(k_L)}{2k_L}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{E}_{0,I,1} + \frac{i\omega''(k_L)}{2}\partial_z^2\mathcal{E}_{0,I,1} = -3i\gamma\eta_a^3\frac{\omega_L}{\beta(\omega_L, k_L)}\chi(\omega_L)^3|\mathcal{E}_{0,I,1}|^2\mathcal{E}_{0,I,1}.$$

Pour la partie à spectre purement continu, le profil est solution de

$$\partial_\tau\partial_{z_0}\mathcal{U}_{0,II} - \frac{\omega'(D_{z_0})}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{U}_{0,II} - \frac{D_{z_0}\omega''(D_{z_0})}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,II} = 0.$$

En supposant comme précédemment que $\mathcal{E}_{0,II}$ est polarisé suivant (Ox) , *i.e.* $\vec{\mathcal{E}}_{0,II} = (\mathcal{E}_{0,II}, 0, 0)^T$, on obtient

$$\partial_\tau\partial_{z_0}\mathcal{E}_{0,II} - \frac{\omega'(D_{z_0})}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\mathcal{E}_{0,II} - \frac{D_{z_0}\omega''(D_{z_0})}{2}\partial_z^2\mathcal{E}_{0,II} = 0.$$

Remarque 3.5.2. i. *Un développement direct de cette dernière équation sans l'aide des résultats obtenus sur les termes non linéaires dans les paragraphes précédents, mènerait à une équation non linéaire. Il n'était pas évident a priori que toutes les non linéarités allaient être négligeables.*

ii. Grâce aux résultats du sous-paragraphe 3.4, on trouve, dans le cas faiblement dispersif, l'équation suivante pour $\mathcal{E}_{0,II}$,

$$\begin{aligned} \partial_\tau \partial_{z_0} \mathcal{E}_{0,II} + \frac{\omega'(D_{z_0})}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{E}_{0,II} + \frac{-\omega'(k_L) - \omega'(D_{z_0})}{\varepsilon} \partial_z \partial_{z_0} \mathcal{E}_{0,II} \\ = 6i\eta_a^3 \gamma \chi(\omega_L)^2 \frac{D_{z_0} \chi(D_{z_0})}{\beta(D_{t_0}, D_{z_0})} |\mathcal{E}_{0,I,1}|^2 \mathcal{E}_{0,II}, \end{aligned}$$

qui est linéaire mais couplée avec $\mathcal{E}_{0,I,1}$. Nous rappelons que faiblement dispersif veut dire que $\frac{-\omega'(k_L) - \omega'(D_{z_0})}{\varepsilon} = O(1)$, et que nous pouvons résoudre simultanément l'équation $(\partial_t + \omega'(k_L) \partial_z) \mathcal{E}_{0,II} = 0$ et la dernière équation du système (3.64).

3.5.2 Impulsions ultra-courtes

La seconde application que nous voulons étudier ici concerne les impulsions ultra-courtes. Généralement, la longueur d'impulsion d'un laser est assez longue pour contenir plusieurs oscillations ainsi le phénomène considéré peut être décrit par la seule connaissance de l'équation d'évolution de l'enveloppe des ces oscillations. Pour les impulsions ultra-courtes, ceci n'est plus vrai (voir figure 3.1 page 113) car on a moins d'une oscillation. Les profils utilisés pour modéliser ces phénomènes sont donc uniquement des profils à spectre purement continu, la composante à spectre discret n'ayant pas le temps d'apparaître. Plus précisément, nous considérons une condition initiale de (M) de la forme

$$\mathbf{u}_\varepsilon^0 = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{U}^0(x, y, z, 0, \frac{z}{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon} ((\mathbf{E}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{P}^0, \mathbf{Q}^0)(x, y, z, 0, \frac{z}{\varepsilon})),$$

où $\mathbf{U}^0 \in A_0^s$ est à spectre purement continu. On impose de plus que la condition initiale soit polarisée

$$\pi(D_{t_0, z_0}) \mathbf{U}^0 = \mathbf{U}^0.$$

Conformément aux résultats du paragraphe 3.2, le profil $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{0,II}$ de la solution approchée est obtenu en résolvant

$$\partial_\tau \partial_{z_0} \mathcal{U}_0 - \frac{\omega'(D_{z_0})}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{U}_0 - \frac{D_{z_0} \omega''(D_{z_0})}{2} \partial_z^2 \mathcal{U}_0 = 0,$$

En prenant le même modèle (M) que dans le sous-paragraphe précédent, et en utilisant les mêmes notations, on obtient l'équation d'évolution suivante pour la composante non nulle du champ électrique \mathcal{E}_0 ,

$$\partial_\tau \partial_{z_0} \mathcal{E}_0 - \frac{\omega'(D_{z_0})}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{E}_0 - \frac{D_{z_0} \omega''(D_{z_0})}{2} \partial_z^2 \mathcal{E}_0 = 0,$$

avec ω' et ω'' donnés respectivement par (1.24) et (1.25).

Remarque 3.5.3. Ici encore, le fait que l'on obtienne une équation linéaire n'était pas évident. Nous insistons aussi sur le fait que cette étude nous a permis d'obtenir cette équation dans le cas dispersif physique.

Dans le cas non-dispersif, la contribution non linéaire n'est plus nulle. En supposant que le spectre de $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{0,II}$ est localisé sur la ligne D_1 de \mathcal{C}_L comme pour $(\omega_L, -k_L)$, on obtient

$$\partial_\tau \partial_{z_0} \mathcal{U}_0 + \frac{v_1}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathcal{U}_0 + \pi_1 \partial_{z_0} f(\mathcal{U}_0) = 0,$$

où $-v_1$ est la pente de la droite D_1 . Cette équation est celle de D. Alterman et J. Rauch [1], [3].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une généralisation des outils de l'optique diffractive en considérant des phénomènes non triviaux tels que les impulsions ultra-courtes et les impulsions à spectre large. Cette généralisation, complètement différente de l'approche du chapitre I (paragraphe 1.5.1), est basée sur l'introduction de l'espace des oscillations à spectre continu qui est plus large que les espaces usuels des fonctions périodiques et presque-périodiques.

A partir de systèmes hyperboliques non linéaires, nous avons, en décomposant l'impulsion en une partie à spectre large et une partie à spectre continu, obtenu les modèles asymptotiques dans les cas dispersif, non-dispersif et faiblement dispersif.

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la simplification des non linéarités. Nous avons ainsi montré une différence entre le modèle asymptotique obtenu en dispersif et celui obtenu en non-dispersif. En effet, dans le cas dispersif, lors du développement nous avons montré que les effets non linéaires pour la partie à spectre purement continu pouvaient être négligés ainsi que les interactions non linéaires croisées entre impulsions à spectre discret et continu. On obtient alors une équation de Schrödinger avec effet Kerr pour la partie à spectre discret qui est complètement découplée de l'équation de Schrödinger linéaire obtenue pour la partie à spectre purement continu. Pour le cas non-dispersif, les effets non linéaires pour la partie à spectre purement continu sont toujours négligeables, mais les interactions non linéaires croisées entre impulsions à spectre discret et continu doivent être prises en compte. Ainsi, on obtient une équation de Schrödinger avec effet Kerr pour la partie à spectre discret et une équation de Schrödinger avec les interactions non linéaires croisées pour la partie à spectre purement continu.

Enfin, nous avons également montré que nous pouvions, à l'aide des impulsions à spectre purement continu, modéliser les impulsions ultra-courtes. Dans le cas non-dispersif, nous montrons que nous retrouvons bien les résultats de D. Altermann et J. Rauch.

Pour conclure ce chapitre, nous avons appliqué nos résultats au modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique. Dans le chapitre suivant, nous ferons de même sur un modèle simplifié possédant les bonnes propriétés (dispersif, non linéaire et conservant la norme L^2). Nous pourrons alors, dans le cas de l'optique géométrique, comparer les solutions du modèle simplifié avec celles du modèle asymptotique et valider l'approche de décomposition de l'impulsion en une partie à spectre continu et une partie à spectre discret.

Chapitre IV

Résultats numériques obtenus avec les différents modèles décrits aux Chapitres I et III

Sommaire

Problématique

4.1 Impulsions ultra-courtes et effets non linéaires

4.1.1 Méthode de résolution numérique

4.1.2 Résultats numériques

4.2 Optique géométrique

4.2.1 Modèle asymptotique obtenu par décomposition de la donnée initiale

a. Développement asymptotique

b. Méthode numérique mise en place pour résoudre le modèle asymptotique

c. Résultats numériques

4.2.2 Obtention de l'équation de transport modifiée non linéaire

a. Méthode de résolution numérique

b. Résultats numériques

Conclusion

Problématique

Nous avons obtenu aux chapitres I et III, de nouveaux modèles de Schrödinger qui permettent de prendre en compte les phénomènes de spectre large et d'impulsions ultra-courtes. Nous voulons dans ce chapitre établir numériquement leur domaine de validité et ainsi essayer de vérifier quantitativement les différents théorèmes de convergence établis précédemment.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au phénomène d'impulsions ultra-courtes. Nous allons essayer d'illustrer numériquement le résultat obtenu avec le théorème 3.2.2. En d'autres termes, nous allons montrer que lorsque l'on considère une impulsion à spectre continu, les effets non linéaires sont bien négligeables. Pour obtenir ce résultat, on ne résout pas le modèle de Maxwell-Lorentz anharmonique, qui est trop coûteux en espace mémoire et en temps de calcul. On préfère résoudre un modèle simplifié qui possède toutes les propriétés données au chapitre III, un $\chi^{(1)}$ dispersif, un $\chi^{(3)}$ non linéaire et conservant la norme L^2 . Ainsi, en augmentant la taille du spectre de l'impulsion au travers d'un paramètre μ , on diminue effectivement les effets non linéaires. Mais cette diminution n'est pas très importante. Les résultats que l'on propose ici donnent au mieux une erreur relative entre les modèles linéaires et non linéaires de $2 \cdot 10^{-2}$ pour un spectre très "étalé". On peut donc se méfier sérieusement de l'utilité pratique de ce type d'approximation.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au phénomène de spectre réellement "étalé". Pour traiter ce phénomène, nous regardons des solutions dans le cadre de l'optique géométrique. A partir du système simplifié, nous présentons le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du chapitre III en décomposant l'impulsion initiale en une partie à spectre discret et une partie à spectre continu. Nous obtenons ainsi un système de deux équations de Schrödinger, l'une standard avec effet Kerr pour la partie à spectre discret et l'autre linéaire pour la partie à spectre continu. Nous pouvons alors comparer numériquement les solutions du modèle asymptotique avec celles du système de départ pour différentes valeurs du paramètre ε .

Nous commençons par vérifier que pour une impulsion uniquement à spectre discret, on retrouve bien les solutions du modèle de départ. Dans ce cas, on montre que l'erreur commise entre les solutions des deux modèles est d'ordre ε , ce qui est conforme au résultat du théorème 3.2.2 introduit au chapitre III.

Nous regardons ensuite le cas d'une impulsion à spectre purement continu. Nous montrons ainsi que les écarts entre les solutions des deux modèles sont non négligeables. Ainsi, pour ce type d'impulsion, l'écart entre les deux modèles n'est pas très bon en non linéaire et correct en linéaire.

Enfin, nous présentons le cas d'une impulsion ayant à la fois une partie à spectre discret et une partie à spectre continu. Nous obtiendrons alors des erreurs entre les solutions des deux modèles, d'ordre supérieur à ε pour $\varepsilon = 10^{-2}$ et d'ordre ε pour $\varepsilon = 10^{-3}$. En effet, les erreurs dues à la partie à spectre continu se répercutent. On peut donc dire que dans le cadre de l'optique géométrique, pour des régimes faiblement non linéaires, la décomposition spectre discret-spectre continu n'est pas très satisfaisante.

Toujours dans le cadre de l'optique géométrique, nous donnons le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du chapitre I à partir de l'équation singulière. Comme précé-

demment, nous comparons numériquement les solutions du modèle asymptotique avec celles du système de départ pour différentes valeurs du paramètre ε .

Nous commençons par mesurer l'erreur commise entre les deux modèles pour une impulsion classique à spectre discret. Nous montrons alors que cette erreur est plus faible que celle obtenue entre le modèle de départ et le modèle de Schrödinger classique avec effet Kerr. En effet, le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du chapitre I nécessite moins d'approximation, il est donc plus précis que le modèle de Schrödinger classique avec effet Kerr. Nous montrons également pour ce type d'impulsion que si l'on ne considère plus une impulsion initiale de taille 1 mais de taille ε , on obtient une erreur entre les solutions du système de départ et celles du modèle asymptotique non linéaire modifié plus faible que précédemment ce qui corrobore les résultats énoncés au chapitre II théorème 2.5.2.

Enfin, nous regardons le cas d'une impulsion à spectre légèrement "étalé". Nous montrons que l'erreur commise entre les solutions du système de départ et celles du modèle asymptotique non linéaire modifié est de taille ε . Ainsi, le modèle de Schrödinger non linéaire modifié, pour ce type d'impulsion à spectre légèrement "étalé", semble numériquement satisfaisant.

4.1 Impulsions ultra-courtes et effets non linéaires

Dans cette partie, nous nous intéressons de plus près au phénomène d'impulsions ultra-courtes et plus particulièrement au fait que les effets non linéaires sont négligeables lorsque l'impulsion est à spectre purement continu. Présentons rapidement le système simplifié que nous considérons.

Ce système, rendu sans dimension à l'aide du petit paramètre ε , se met sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{v}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}^\varepsilon = (|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{v}^\varepsilon, \\ \partial_t \mathbf{v}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon = -(|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{u}^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce modèle simplifié est bien du type (3.1)

$$L^\varepsilon(\partial) \mathbf{h}^\varepsilon + f(\mathbf{h}^\varepsilon) = 0,$$

avec

$$\mathbf{h}^\varepsilon = (\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)^T \in \mathbb{C}^4,$$

et la non linéarité f d'ordre trois s'écrit

$$f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = ((|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{v}^\varepsilon, -(|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{u}^\varepsilon)^T. \quad (4.2)$$

L'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ est donné par $L^\varepsilon(\partial) = \partial_t + A(\partial_z) + \frac{L_0}{\varepsilon}$, avec

$$A(\partial_z) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est bien symétrique et la matrice L_0 anti-symétrique. Avec ce modèle simplifié non linéaire, on montre que les effets non linéaires sont négligeables si l'on considère une condition initiale à spectre purement continu. Pour obtenir ce résultat, on mesure l'écart obtenu entre la solution du système linéaire et celle du système non linéaire. Cet écart est mesuré à ε fixé. On montre ainsi que l'écart entre les deux solutions diminue lorsque l'on augmente le spectre de l'impulsion initiale à l'aide d'un paramètre noté μ .

Domaine de calcul. On prend $z \in [0, 2]$ et $t \in [0, 0.5]$. On désigne par n_{max} le nombre de pas d'espace et p_{max} le nombre de pas de temps.

Forme de la condition initiale. On choisit d'écrire la condition initiale de la manière suivante $\mathbf{u}^{\varepsilon,0}(z) = \mathbf{v}^{\varepsilon,0}(z) = e^{-(z-1)^2} * \mu$. Elle est centrée sur le domaine de calcul.

Nous mesurons l'écart entre les solutions des différents systèmes (linéaire et non linéaire) en prenant la valeur 10^{-2} pour le paramètre ε , ce qui correspond à des durées d'impulsions de l'ordre de $10^{-13}s$, $10^{-14}s$ pour un diamètre de l'ordre de $10^{-2}m$.

4.1.1 Méthode de résolution numérique

On utilise une méthode à pas fractionnaire d'ordre deux : sur un premier demi pas de temps, on résout le système linéaire, puis on résout, sur un pas de temps, le terme non linéaire à l'aide d'un schéma d'ordre deux qui conserve la norme L^2 et enfin on résout, sur un demi pas de temps, le système linéaire. Commençons donc par la résolution du système linéaire sur un demi pas de temps, ce système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{v}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}^\varepsilon = 0, \\ \partial_t \mathbf{v}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Rappelons que n représente l'indice de discrétisation suivant la variable z et p est l'indice de discrétisation suivant la variable t . La résolution du système linéaire ci-dessus s'effectue à l'aide d'une transformée de Fourier suivant la variable spatiale z , dont on note la variable duale dans l'espace de Fourier κ .

En posant $\mathbf{h}^\varepsilon = (\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)^T$, on est donc amené à résoudre

$$\partial_t \widehat{\mathbf{h}}_n^\varepsilon + \mathcal{A}^\varepsilon(\kappa_n, \varepsilon) \widehat{\mathbf{h}}_n^\varepsilon = 0, \quad \text{avec } \mathcal{A}^\varepsilon(\kappa_n, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & i \kappa_n - \frac{1}{\varepsilon} \\ i \kappa_n + \frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}.$$

On exprime les valeurs propres vp de cette matrice de la manière suivante

$$(vp)_\pm = \pm i v_1, \quad \text{avec } v_1 = \sqrt{\kappa_n^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}}.$$

On définit également les projecteurs orthogonaux Π_+ et Π_- par

$$\Pi_+ = \frac{\mathcal{A}^\varepsilon - (v_1)_- Id}{(v_1)_+ - (v_1)_-} \quad \text{et} \quad \Pi_- = \frac{\mathcal{A}^\varepsilon - (v_1)_+ Id}{(v_1)_- - (v_1)_+}.$$

Ainsi, la solution au temps $(p + 1/3)$ se présente sous la forme

$$\widehat{\mathbf{h}}_n^{\varepsilon, p+1/3} = \widehat{\mathbf{h}}_n^{\varepsilon, p} \left[\Pi_+ \exp\left(-i \frac{dt}{2} v_1\right) + \Pi_- \exp\left(i \frac{dt}{2} v_1\right) \right].$$

Regardons de plus près le terme $\left[\Pi_+ \exp\left(-i \frac{dt}{2} v_1\right) + \Pi_- \exp\left(i \frac{dt}{2} v_1\right) \right]$, on obtient

- Pour les termes diagonaux,

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\exp\left(-i \frac{dt}{2} v_1\right) + \exp\left(i \frac{dt}{2} v_1\right) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{dt}{2} v_1\right),$$

- et pour les termes extra-diagonaux,

$$\frac{1}{2v_1} \mathcal{A}^\varepsilon \left[\exp\left(-i\frac{dt}{2}v_1\right) - \exp\left(i\frac{dt}{2}v_1\right) \right] = -\frac{1}{v_1} \mathcal{A}^\varepsilon \sin\left(\frac{dt}{2}v_1\right).$$

En résumé, on aboutit au schéma suivant

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{u}}_n^{\varepsilon,p+1/3} &= \mathcal{C}_1^\varepsilon \widehat{\mathbf{u}}_n^{\varepsilon,p} + \mathcal{C}_2^\varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_n^{\varepsilon,p}, \\ \widehat{\mathbf{v}}_n^{\varepsilon,p+1/3} &= \mathcal{C}_3^\varepsilon \widehat{\mathbf{u}}_n^{\varepsilon,p} + \mathcal{C}_4^\varepsilon \widehat{\mathbf{v}}_n^{\varepsilon,p}, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{C}^\varepsilon = \begin{pmatrix} C_1^\varepsilon & C_2^\varepsilon \\ C_3^\varepsilon & C_4^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{dt}{2}v_1\right) & -\frac{1}{v_1} \sin\left(\frac{dt}{2}v_1\right)\left(i\kappa_n - \frac{1}{\varepsilon}\right) \\ -\frac{1}{v_1} \sin\left(\frac{dt}{2}v_1\right)\left(i\kappa_n + \frac{1}{\varepsilon}\right) & \cos\left(\frac{dt}{2}v_1\right) \end{pmatrix}.$$

On revient ensuite dans l'espace direct en effectuant une transformée de Fourier inverse suivant la variable z de la solution à l'instant $(p+1/3)$. Passons maintenant à la partie non linéaire du système. Cette partie du système est résolue sur un pas de temps et se met sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon - (|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{v}^\varepsilon = 0, \\ \partial_t \mathbf{v}^\varepsilon + (|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{u}^\varepsilon = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

On pose

$$\zeta = |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2.$$

Le schéma discrétisé est alors

$$\begin{cases} \mathbf{u}_n^{\varepsilon,p+2/3} = \mathbf{u}_n^{\varepsilon,p+1/3} \cos(\zeta dt) + \mathbf{v}_n^{\varepsilon,p+1/3} \sin(\zeta dt), \\ \mathbf{v}_n^{\varepsilon,p+2/3} = \mathbf{v}_n^{\varepsilon,p+1/3} \cos(\zeta dt) - \mathbf{u}_n^{\varepsilon,p+1/3} \sin(\zeta dt). \end{cases}$$

On a bien un schéma d'ordre deux qui conserve la norme L^2 car c'est la résolution exacte du système (4.4). Pour terminer l'intégration du système (4.1), on résout une fois de plus le système linéaire sur un demi pas de temps pour obtenir les solutions à l'instant $(p+1)$.

4.1.2 Résultats numériques

Avant de décrire les résultats obtenus dans les planches suivantes, nous introduisons la notation suivante.

Notation. Nous désignons par **ulin** et **vlin** les solutions du système linéaire (4.3) et par **u** et **v** les solutions du système non linéaire (4.1).

La planche de résultats, page 171, présente les formes temporelles (courbes de gauche) et spectrales (courbes de droite) des conditions initiales pour les différentes valeurs du paramètre μ considérées. Ces valeurs sont $\mu = 10^{+2}$, $\mu = 10^{+4}$ et $\mu = 10^{+5}$. En abscisse, on représente l'axe des z et en ordonnée les champs.

Les planches suivantes (pages 172, 173 et 174) présentent les résultats obtenus avec le modèle simplifié en linéaire et en non linéaire pour les différentes conditions initiales. Pour les quatre courbes supérieures de chaque planche (pages 172, 173 et 174), en abscisse on a représenté l'axe des z sur son domaine de définition et en ordonnée les champs considérés. Pour les deux courbes de fin de planches (pages 172, 173 et 174), on a représenté en abscisse le numéro de l'itérations en temps et en ordonnée l'écart relatif entre les solutions du système linéaire et non linéaire. Tous les résultats présentés sont des résultats convergés en maillage au sens où pour p_{max} et n_{max} fixés, on mesure l'erreur relative entre la solution obtenue avec ce maillage et celle obtenue en multipliant p_{max} et n_{max} par deux. Si cette erreur est supérieur à ε , on renouvelle l'opération jusqu'à convergence. Dans tous les cas, l'erreur relative est donnée par la formulation suivante

$$E_{rel}(u, v) = \frac{\|u - v\|_{L^2}}{\sup(\|u\|_{L^2}, \|v\|_{L^2})}. \quad (4.5)$$

La conclusion de ces résultats est que si l'on augmente la taille du spectre de l'impulsion au travers du paramètre μ , alors les effets non linéaires diminuent, ce qui corrobore les estimations d'erreur obtenues au chapitre III, théorème 3.2.2. Mais cette diminution n'est pas très importante. Les résultats que l'on propose ici donnent au mieux une erreur relative entre les modèles linéaires et non linéaires de $2 \cdot 10^{-2}$ pour un spectre très "étalé". Ces résultats sont en adéquation avec l'estimation d'erreur du théorème 3.2.2, pour la partie à spectre continu qui n'est qu'en $o(1)$. On peut donc se méfier sérieusement de l'efficacité pratique de ce type d'approximation à spectre purement continu qui donne un modèle asymptotique linéaire pour des impulsions ultra-courtes.

Forme des conditions initiales (courbes de gauche) et de leur spectre dans l'espace de Fourier (courbes de droite), en fonction de la valeur du petit paramètre μ .

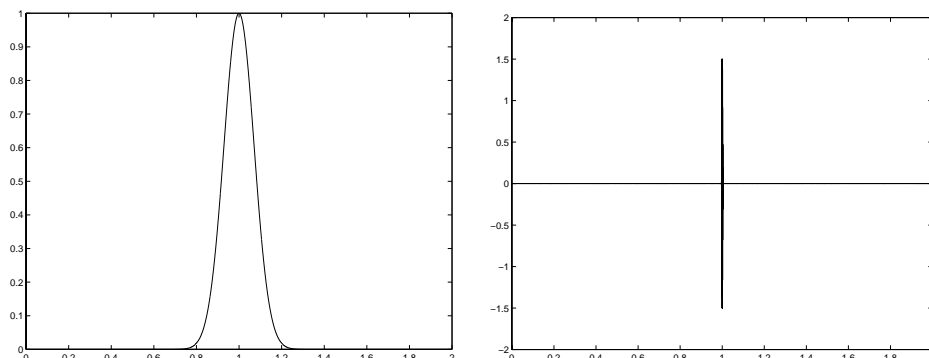


FIG. 4.1 – Donnée initiale gaussienne pour $\mu = 10^{+2}$.

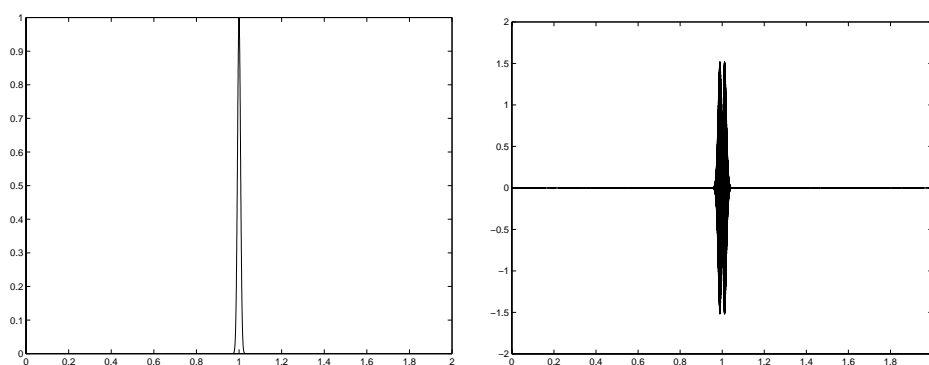


FIG. 4.2 – Donnée initiale gaussienne pour $\mu = 10^{+4}$.

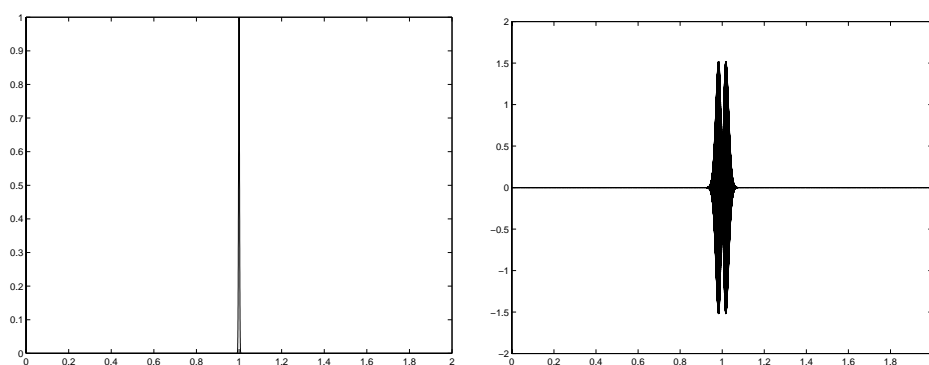


FIG. 4.3 – Donnée initiale gaussienne pour $\mu = 10^{+5}$.

Résultats pour $\varepsilon = 10^{-2}$, $\mu = 10^{+2}$, $n_{max} = 8192$ et $p_{max} = 8000$

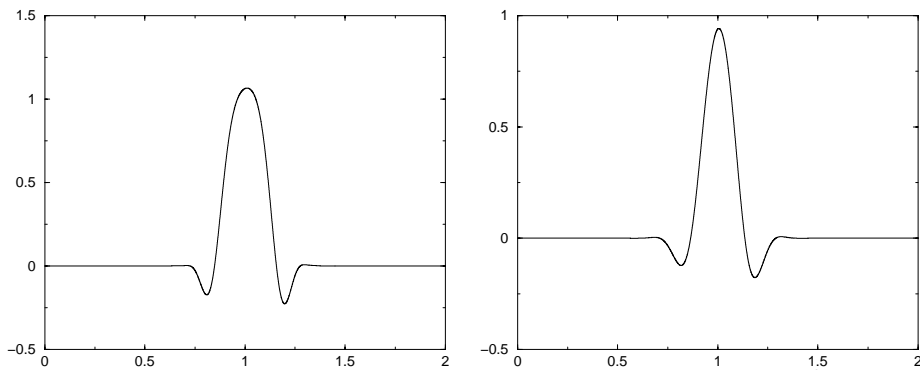


FIG. 4.4 – u et $ulin$ au temps $T = 0.5$ pour $\mu = 10^{+2}$.

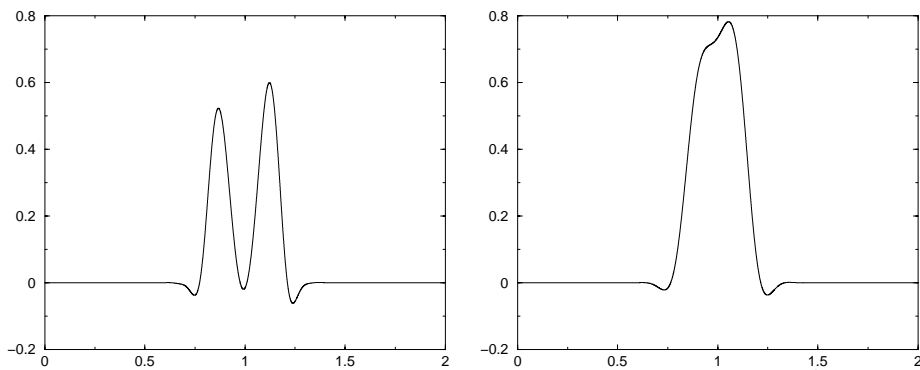


FIG. 4.5 – v et $vlin$ au temps $T = 0.5$ pour $\mu = 10^{+2}$.

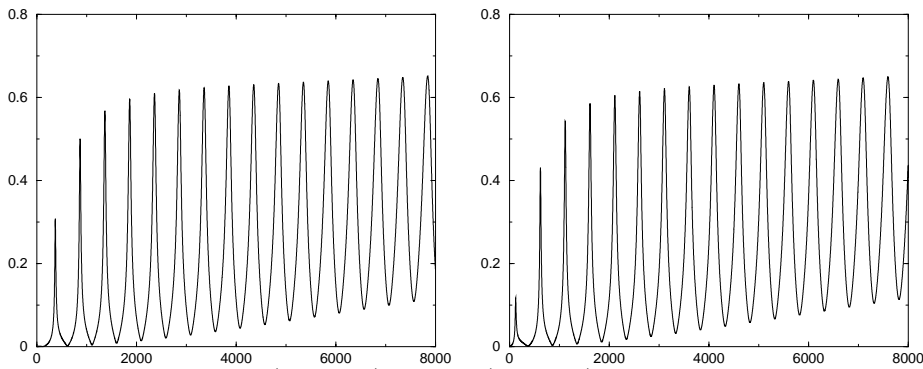


FIG. 4.6 – Erreurs relatives $E_{rel}(u, ulin)$ et $E_{rel}(v, vlin)$ en fonction du numéro de l'itération en temps pour $\mu = 10^{+2}$.

Résultats pour $\varepsilon = 10^{-2}$, $\mu = 10^{+4}$, $n_{max} = 32768$ et $p_{max} = 32000$.

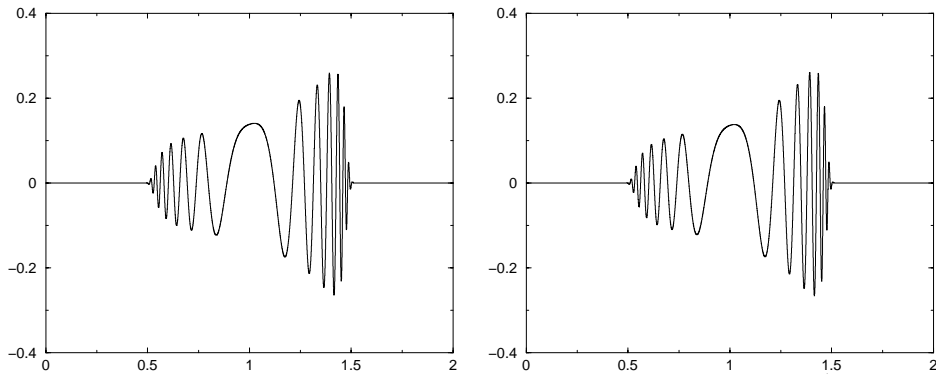


FIG. 4.7 – u et $ulin$ au temps $T = 0.5$ pour $\mu = 10^{+4}$.

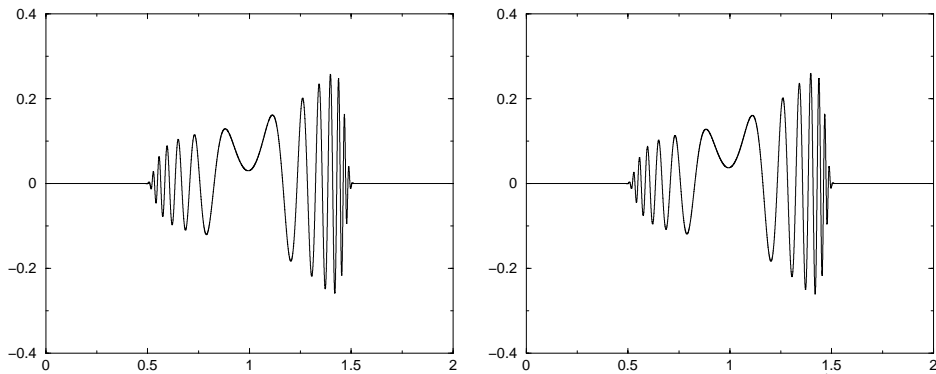


FIG. 4.8 – v et $vlín$ au temps $T = 0.5$ pour $\mu = 10^{+4}$.

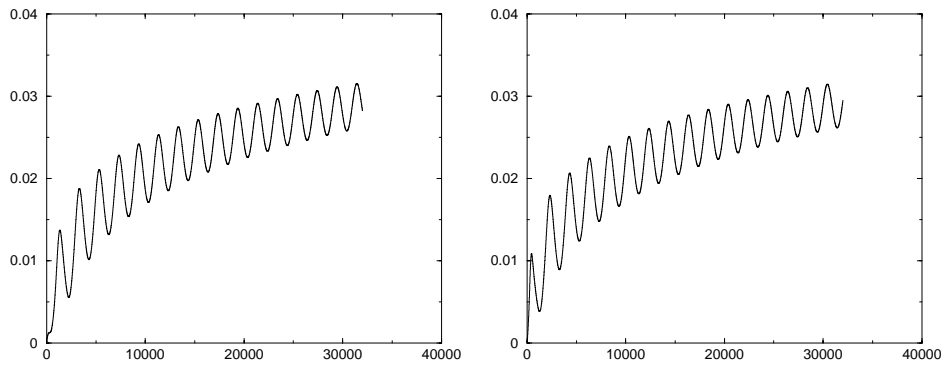


FIG. 4.9 – Erreurs relatives $E_{rel}(u, ulin)$ et $E_{rel}(v, vlin)$ en fonction du numéro de l'itération en temps pour $\mu = 10^{+4}$.

Résultats pour $\varepsilon = 10^{-2}$, $\mu = 10^{+5}$, $n_{max} = 65536$ et $p_{max} = 64000$.

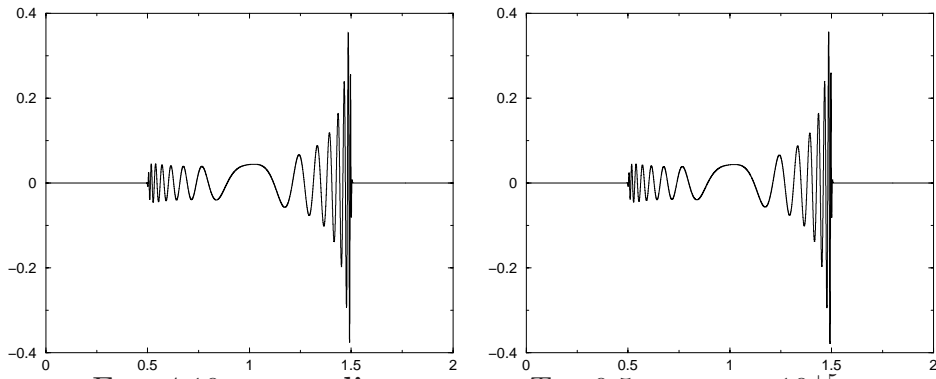


FIG. 4.10 – u et $ulin$ au temps $T = 0.5$ pour $\mu = 10^{+5}$.

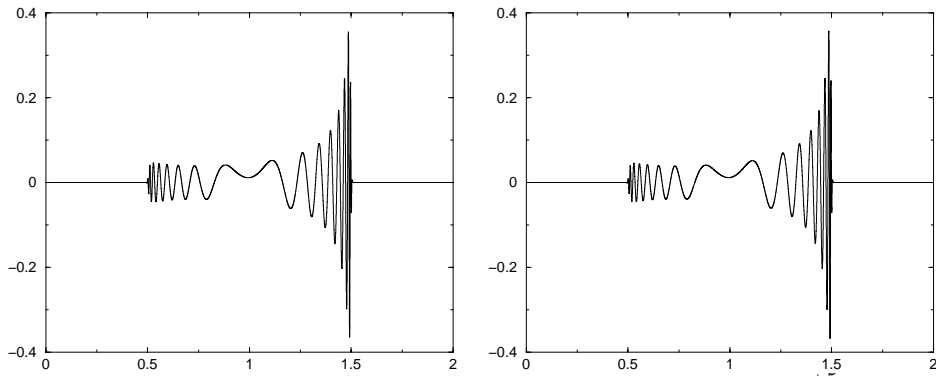


FIG. 4.11 – v et $vlin$ au temps $T = 0.5$ pour $\mu = 10^{+5}$.

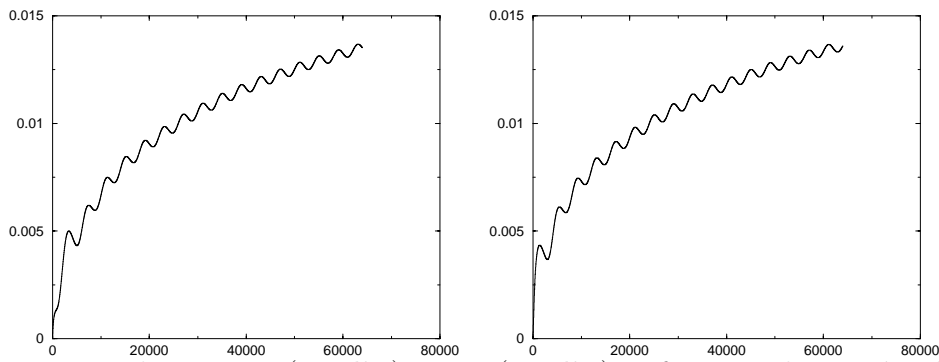


FIG. 4.12 – Erreurs relatives $E_{rel}(u, ulin)$ et $E_{rel}(v, vlin)$ en fonction du numéro de l'itération en temps pour $\mu = 10^{+5}$.

4.2 Optique géométrique

Avant de comparer numériquement et quantitativement les solutions des différents modèles asymptotiques obtenus dans les chapitres I et III avec les solutions du modèle simplifié, nous allons écrire la dérivation des différents modèles asymptotiques. On commence cette partie en rappelant l'obtention du modèle asymptotique obtenu à partir des résultats du chapitre III en décomposant la condition initiale en une partie à spectre discret et une partie à spectre continu. Nous verrons ensuite l'obtention du modèle asymptotique correspondant au chapitre I qui découle de l'équation singulière.

4.2.1 Modèle asymptotique obtenu par décomposition de la donnée initiale

Dans ce paragraphe, on présente le modèle asymptotique obtenu en décomposant une condition initiale en une partie à spectre discret et une partie à spectre continu. Cette décomposition mène à la résolution d'un système constitué d'une équation de transport non linéaire standard pour la partie à spectre discret et d'une équation de transport linéaire, contenant le nouveau terme de diffraction, pour la partie à spectre continu. On montre que ce système donne des solutions comparables à celles du modèle simplifié initial. Notons également que tous les résultats théoriques obtenus dans le chapitre III en optique diffractive sont valides pour le cadre de l'optique géométrique. En particulier, le fait que pour une condition initiale à spectre continu, les effets non linéaires peuvent être négligés. On se sert de cet argument pour simplifier le développement asymptotique pour la partie à spectre continu. Reprenons le modèle simplifié non linéaire, sans dimension (4.1),

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{v}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}^\varepsilon = (|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{v}^\varepsilon, \\ \partial_t \mathbf{v}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon = -(|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{u}^\varepsilon. \end{cases}$$

Par la suite, on désigne par \mathbf{h}^ε le vecteur $(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)^T$. On considère également des conditions initiales de la forme

$$\mathbf{h}_{t=0}^\varepsilon(z) = \mathbf{h}^{\varepsilon,0}(z, 0, \frac{z}{\varepsilon}) = (\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)(z, 0, \frac{z}{\varepsilon}),$$

avec $\mathbf{h}^{\varepsilon,0}(z, 0, \frac{z}{\varepsilon})$ donnée par

$$\mathbf{h}^{\varepsilon,0}(z, 0, \frac{z}{\varepsilon}) = \mathbf{h}_I^{\varepsilon,0}(z) e^{ik_L \frac{z}{\varepsilon}} + c.c + \mathbf{h}_{II}^{\varepsilon,0}(z, 0, \frac{z}{\varepsilon}),$$

la composante $\mathbf{h}_{II}^{\varepsilon,0}$ ayant un spectre purement continu et la composante $\mathbf{h}_I^{\varepsilon,0}$ correspondant à une impulsion dont la fréquence centrale vaut ω_L et le vecteur d'onde associé vaut $\vec{K} = (0, 0, k_L)^T$. Dans le cadre de l'optique géométrique, on est amené à chercher une solution approchée h^ε de la solution exacte \mathbf{h}^ε de la forme

$$h^\varepsilon(t, z) = \mathcal{H}^\varepsilon(t, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}) \text{ avec } \mathcal{H}^\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1.$$

On rappelle également que la solution approchée se décompose de manière unique (proposition 3.1.2 du chapitre III)

- en une partie à spectre discret $\left(\mathcal{H}_I^\varepsilon(t, z)e^{i\theta} + c.c.\right)$ avec $\theta = \left(k_L \frac{z}{\varepsilon} - \omega_L \frac{t}{\varepsilon}\right)$,
- et une partie à spectre purement continu $\mathcal{H}_{II}^\varepsilon(t, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon})$.

Notations. On note par la suite $z_0 = \frac{z}{\varepsilon}$ et $t_0 = \frac{t}{\varepsilon}$.

a. Développement asymptotique

On commence par reprendre les résultats obtenus au chapitre III pour les termes non linéaires (lemme 3.2.2). Ces résultats montrent que les effets non linéaires sont négligeables pour la partie à spectre continu et surtout le fait que les effets non linéaires couplés entre la partie à spectre discret et la partie à spectre continu ne sont pas visibles. On peut ainsi traiter, par la suite, de manière découplée l'obtention de l'équation de transport non linéaire standard pour la partie à spectre discret et l'obtention de l'équation de transport linéaire pour la partie à spectre continu. Ainsi, on commence par rappeler l'obtention de l'équation de transport non linéaire standard pour la partie à spectre discret.

Premier ordre du développement pour la partie à spectre discret

On est amené à résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} -i\omega_L \mathcal{U}_{0,I} + (ik_L - 1)\mathcal{V}_{0,I} = 0, \\ -i\omega_L \mathcal{V}_{0,I} + (ik_L + 1)\mathcal{U}_{0,I} = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système doit être nul pour avoir des solutions non triviales. Ainsi, on obtient la *relation de dispersion* suivante

$$\omega_L^2 = 1 + k_L^2, \implies \omega_L = \pm \sqrt{1 + k_L^2}. \quad (4.6)$$

La **condition de polarisation** est alors

$$\mathcal{V}_{0,I} = \frac{(k_L - i)}{\omega_L} \mathcal{U}_{0,I}. \quad (4.7)$$

Deuxième ordre du développement pour la partie à spectre discret

On résout le système suivant

$$\begin{cases} -i\omega_L \mathcal{U}_{1,I} + (ik_L - 1)\mathcal{V}_{1,I} + \partial_t \mathcal{U}_{0,I} + \partial_z \mathcal{V}_{0,I} = (|\mathcal{U}_{0,I}|^2 + |\mathcal{V}_{0,I}|^2)\mathcal{V}_{0,I}, \\ -i\omega_L \mathcal{V}_{1,I} + (ik_L + 1)\mathcal{U}_{1,I} + \partial_t \mathcal{V}_{0,I} + \partial_z \mathcal{U}_{0,I} = -(|\mathcal{U}_{0,I}|^2 + |\mathcal{V}_{0,I}|^2)\mathcal{U}_{0,I}. \end{cases}$$

Avec la seconde équation, on exprime $\mathcal{V}_{1,I}$ en fonction de $\mathcal{U}_{1,I}$, $\mathcal{V}_{0,I}$ et $\mathcal{U}_{0,I}$,

$$\mathcal{V}_{1,I} = \frac{k_L - i}{\omega_L} \mathcal{U}_{1,I} - \frac{i}{\omega_L} \partial_t \mathcal{V}_{0,I} - \frac{i}{\omega_L} \partial_z \mathcal{U}_{0,I} - \frac{i}{\omega_L} (|\mathcal{U}_{0,I}|^2 + |\mathcal{V}_{0,I}|^2) \mathcal{U}_{0,I},$$

donc en injectant cette relation dans la première équation du système ci-dessus, et en utilisant les relations (4.6) et (4.7), on aboutit à l'équation non linéaire de **transport à la vitesse de groupe** suivante

$$\partial_t \mathcal{U}_{0,I} + \omega'(k_L) \partial_z \mathcal{U}_{0,I} + \frac{4i}{\omega_L} |\mathcal{U}_{0,I}|^2 \mathcal{U}_{0,I} = 0, \quad \text{avec } \omega'(k_L) = \frac{k_L}{\omega_L}. \quad (4.8)$$

Voyons maintenant comment s'écrit l'équation de transport linéaire avec le nouveau terme de diffraction pour la partie à spectre continu.

Premier ordre du développement pour la partie à spectre purement continu

On résout le système linéaire qui suit

$$\begin{cases} \partial_{t_0} \mathcal{U}_{0,II} + (\partial_{z_0} - 1) \mathcal{V}_{0,II} = 0, \\ \partial_{t_0} \mathcal{V}_{0,II} + (\partial_{z_0} + 1) \mathcal{U}_{0,II} = 0. \end{cases}$$

Avec la première équation, on exprime $\mathcal{U}_{0,II}$ en fonction de $\mathcal{V}_{0,II}$ et avec la seconde équation, on exprime $\mathcal{V}_{0,II}$ en fonction de $\mathcal{U}_{0,II}$, ce qui donne

$$\partial_{t_0} \mathcal{U}_{0,II} = -(\partial_{z_0} - 1) \mathcal{V}_{0,II}, \quad (4.9)$$

et

$$\partial_{t_0} \mathcal{V}_{0,II} = -(\partial_{z_0} + 1) \mathcal{U}_{0,II}. \quad (4.10)$$

Ces deux expressions, nous donnent **les conditions de polarisation** pour la partie à spectre continu. On injecte ensuite la relation (4.10) dans la première équation du système, ce qui donne

$$(\partial_{t_0}^2 + 1 - \partial_{z_0}^2) \mathcal{U}_{0,II} = 0. \quad (4.11)$$

On en déduit alors **la relation de dispersion**, qui traduit le fait que le déterminant du système linéaire écrit au premier ordre soit nul,

$$\partial_{t_0} = \pm i \sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}. \quad (4.12)$$

Ainsi, on obtient

$$\mathcal{U}_{0,II}(t, z, t_0, z_0) = \mathcal{U}_{0,II}^+(t, z, 0, z_0) e^{i \sqrt{1 - \partial_{z_0}^2} t_0} + \mathcal{U}_{0,II}^-(t, z, 0, z_0) e^{-i \sqrt{1 - \partial_{z_0}^2} t_0}. \quad (4.13)$$

Deuxième ordre du développement pour la partie à spectre purement continu

On résout le système suivant

$$\begin{cases} \partial_{t_0} \mathcal{U}_{1,II} + (\partial_{z_0} - 1) \mathcal{V}_{1,II} + \partial_t \mathcal{U}_{0,II} + \partial_z \mathcal{V}_{0,II} = (|\mathcal{U}_{0,II}|^2 + |\mathcal{V}_{0,II}|^2) \mathcal{V}_{0,II}, \\ \partial_{t_0} \mathcal{V}_{1,II} + (\partial_{z_0} + 1) \mathcal{U}_{1,II} + \partial_t \mathcal{V}_{0,II} + \partial_z \mathcal{U}_{0,II} = -(|\mathcal{U}_{0,II}|^2 + |\mathcal{V}_{0,II}|^2) \mathcal{U}_{0,II}. \end{cases}$$

Comme on a pu le démontrer dans le chapitre précédent, les effets non linéaires sont négligeables lorsque l'on prend une condition initiale à spectre purement continu. On peut ainsi considérer uniquement la partie linéaire du système ci-dessus pour obtenir le modèle asymptotique

$$\begin{cases} \partial_{t_0} \mathcal{U}_{1,II} + (\partial_{z_0} - 1) \mathcal{V}_{1,II} + \partial_t \mathcal{U}_{0,II} + \partial_z \mathcal{V}_{0,II} = 0, \\ \partial_{t_0} \mathcal{V}_{1,II} + (\partial_{z_0} + 1) \mathcal{U}_{1,II} + \partial_t \mathcal{V}_{0,II} + \partial_z \mathcal{U}_{0,II} = 0. \end{cases}$$

Grâce à la seconde équation, on exprime $\mathcal{V}_{1,II}$ en fonction de $\mathcal{U}_{1,II}$, $\mathcal{V}_{0,II}$ et $\mathcal{U}_{0,II}$,

$$\mathcal{V}_{1,II} = -\partial_{t_0}^{-1} (\partial_{z_0} + 1) \mathcal{U}_{1,II} - \partial_{t_0}^{-1} \partial_t \mathcal{V}_{0,II} - \partial_{t_0}^{-1} \partial_z \mathcal{U}_{0,II},$$

donc en injectant cette relation dans la première équation du système ci-dessus et en utilisant les relations (4.10) et (4.11), on obtient une **équation de transport linéaire** pour la partie à spectre continu

$$\partial_{t_0} \partial_t \mathcal{U}_{0,II} - \partial_{z_0} \partial_z \mathcal{U}_{0,II} = 0. \quad (4.14)$$

Le modèle asymptotique, tenant compte de la décomposition de la condition initiale en une partie à spectre continu et une partie à spectre discret, pour l'optique géométrique se met donc sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}_{0,I} + \frac{k_L}{\omega_L} \partial_z \mathcal{U}_{0,I} + \frac{4i}{\omega_L} |\mathcal{U}_{0,I}|^2 \mathcal{U}_{0,I} = 0, \\ \partial_{t_0} \partial_t \mathcal{U}_{0,II} - \partial_{z_0} \partial_z \mathcal{U}_{0,II} = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

On va maintenant présenter la résolution numérique et les cas tests réalisés sur ce modèle.

b. Méthode numérique mise en place pour résoudre le modèle asymptotique

On commence par introduire les notations suivantes.

Notations. On note par la suite $\mathbf{u}^0(z)$ et $\mathbf{v}^0(z)$, les conditions initiales pour le modèle simplifié non linéaire (4.1), $\mathcal{U}_I^{0,+}(z, 0, z_0)$, la condition initiale pour la partie à spectre discret du modèle asymptotique, et enfin, $\mathcal{U}_{II}^{0,+}(z, 0, z_0)$ et $\mathcal{U}_{II}^{0,-}(z, 0, z_0)$ représentent les conditions initiales pour la partie à spectre continu du modèle asymptotique. De plus, on désigne par T_{fin} le temps final.

Rappelons également que n représente l'indice de discrétisation suivant la variable z et p est l'indice de discrétisation suivant la variable t .

Résolution de l'équation de transport avec effet Kerr pour la partie à spectre discret

On est amené à résoudre l'équation suivante

$$\partial_t \mathcal{U}_{0,I} + \frac{k_L}{\omega_L} \partial_z \mathcal{U}_{0,I} + \frac{4i}{\omega_L} |\mathcal{U}_{0,I}|^2 \mathcal{U}_{0,I} = 0,$$

sachant que $\omega_L = \pm \sqrt{1 + k_L^2}$. Pour résoudre cette équation, on doit considérer le cas où $\omega_L = \sqrt{1 + k_L^2}$, dont on note l'inconnue $\mathcal{U}_{0,I}^+$ et le cas où $\omega_L = -\sqrt{1 + k_L^2}$, dont on note l'inconnue $\mathcal{U}_{0,I}^-$. On ne considère ici que le cas où $\omega_L = \sqrt{1 + k_L^2}$, en choisissant de polariser les conditions initiales du modèle simplifié non linéaire à l'aide de l'équation (4.7), ainsi

$$\mathbf{v}^{0,+}(z) = \frac{k_L - i}{\sqrt{1 + k_L^2}} \mathbf{u}^{0,+}(z) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^{0,-}(z) = \frac{k_L + i}{\sqrt{1 + k_L^2}} \mathbf{u}^{0,-}(z).$$

L'équation de transport avec effet Kerr se réécrit alors

$$\partial_t \mathcal{U}_{0,I}^+ + \frac{k_L}{\sqrt{1 + k_L^2}} \partial_z \mathcal{U}_{0,I}^+ + \frac{4i}{\sqrt{1 + k_L^2}} |\mathcal{U}_{0,I}^+|^2 \mathcal{U}_{0,I}^+ = 0.$$

La méthode numérique pour résoudre cette équation va s'articuler ainsi : on commence par résoudre l'équation linéaire sur un demi pas de temps, puis on résout la partie non linéaire sur un pas de temps et enfin on résout la partie linéaire sur un demi pas de temps. Pour résoudre l'équation linéaire, on va utiliser une transformée de Fourier suivant la variable z dont on note la variable duale dans l'espace de Fourier κ . On résout alors

$$\partial_t \widehat{\mathcal{U}}_{0,I,n}^+ + \frac{i\kappa_n k_L}{\sqrt{1 + k_L^2}} \widehat{\mathcal{U}}_{0,I,n}^+ = 0,$$

donc

$$(\widehat{\mathcal{U}}_{0,I,n}^+)^{p+1/3} = (\widehat{\mathcal{U}}_{0,I,n}^+)^p e^{-i \frac{k_L \kappa_n (dt/2)}{\sqrt{1 + k_L^2}}}.$$

La partie non linéaire se résout de manière analytique (sans approximation), car l'équation à résoudre conserve $|\mathcal{U}_{0,I}^+|^2$. On a alors

$$\partial_t \mathcal{U}_{0,I}^+ + \frac{4i}{\sqrt{1 + k_L^2}} |\mathcal{U}_{0,I}^+|^2 \mathcal{U}_{0,I}^+ = 0,$$

et on obtient,

$$(\mathcal{U}_{0,I,n}^+)^{p+2/3} = (\mathcal{U}_{0,I,n}^+)^{p+1/3} e^{-i \frac{4(|\mathcal{U}_{0,I,n}^+|^2)^{p+1/3} dt}{\sqrt{1 + k_L^2}}}.$$

Pour obtenir la solution à l'instant $(p + 1)$, on résout la partie linéaire sur un demi pas de temps. Pour cette équation de transport avec effet Kerr, on peut aussi tout simplement

considérer la solution analytique qui s'écrit

$$(\mathcal{U}_{0,I,n}^+)^{p+1} = \mathbf{u}_+^{\varepsilon,0} \left(z_n - \frac{k_L}{\sqrt{1+k_L^2}} T_{fin} \right) \exp \left(-i4 \left| \mathbf{u}_+^{\varepsilon,0} \left(z_n - \frac{k_L}{\sqrt{1+k_L^2}} T_{fin} \right) \right|^2 \frac{T_{fin}}{\sqrt{1+k_L^2}} \right). \quad (4.16)$$

Pour comparer cette solution, (par calcul ou analytique), avec la solution du modèle simplifié non linéaire, il ne reste plus qu'à la reconstruire. Pour cela, on multiplie cette solution par $e^{i\theta}$ et on ajoute son conjugué. En rappelant que θ vaut dans ce cas $\theta = \left(k_L \frac{z}{\varepsilon} - \omega_L \frac{T_{fin}}{\varepsilon} \right)$.

Résolution de l'équation de transport linéaire pour la partie à spectre continu

On veut résoudre l'équation suivante

$$\partial_t \mathcal{U}_{0,II} - \partial_{z_0} \partial_{t_0}^{-1} \partial_z \mathcal{U}_{0,II} = 0 \quad \text{avec} \quad \partial_{t_0} = \pm i \sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}.$$

Comme pour la partie à spectre discret, on note $\mathcal{U}_{0,II}^+$ la partie du champ correspondant à l'opérateur $\partial_{t_0} = \sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}$ et $\mathcal{U}_{0,II}^-$ la partie du champ correspondant à l'opérateur $\partial_{t_0} = -\sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}$. En revanche, on ne choisit plus de polariser les conditions initiales du modèle simplifié non linéaire, mais on résout l'équation de transport linéaire ci-dessus dans les deux directions. Pour pouvoir résoudre cette équation, il faut que les conditions initiales $\mathcal{U}_{II}^{0,+}$ et $\mathcal{U}_{II}^{0,-}$ vérifient les conditions de polarisations (4.9) et (4.10). Pour cela, on sait que

$$\mathbf{u}^0 = \mathcal{U}_{II}^{0,+} + \mathcal{U}_{II}^{0,-}, \quad \mathbf{v}^0 = \mathcal{V}_{II}^{0,+} + \mathcal{V}_{II}^{0,-} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^0.$$

Ainsi, avec les relations précédentes et les conditions de polarisation (4.9) et (4.10), on obtient

$$\mathcal{U}_{II}^{0,+}(z, 0, z_0) = \left(\frac{\partial_{z_0} - 1}{2i\sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{u}^0(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_{II}^{0,-}(z, 0, z_0) = \left(\frac{-\partial_{z_0} + 1}{2i\sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{u}^0(z).$$

Pour résoudre la partie à spectre continu de l'asymptotique, on est amené à résoudre les deux systèmes suivant

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}_{0,II}^+(t, z, 0, z_0) + \frac{i\partial_{z_0}}{\sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}} \partial_z \mathcal{U}_{0,II}^+(t, z, z_0) = 0, \\ \mathcal{U}_{II}^{0,+}(z, 0, z_0) = \left(\frac{\partial_{z_0} - 1}{2i\sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{u}^0(z), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}_{0,II}^-(t, z, 0, z_0) - \frac{i\partial_{z_0}}{\sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}} \partial_z \mathcal{U}_{0,II}^-(t, z, z_0) = 0, \\ \mathcal{U}_{II}^{0,-}(z, 0, z_0) = \left(\frac{-\partial_{z_0} + 1}{2i\sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{u}^0(z). \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations, on commence par prendre la transformée de Fourier suivant la variable z_0 , dont on note la variable duale dans l'espace de Fourier κ_0 et m l'indice de discrétisation, ainsi on obtient

$$\partial_t \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m}^+ - \frac{(\kappa_0)_m}{\sqrt{1 + (\kappa_0)_m^2}} \partial_z \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m}^+ = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m}^- + \frac{(\kappa_0)_m}{\sqrt{1 + (\kappa_0)_m^2}} \partial_z \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m}^- = 0.$$

On prend ensuite la transformée de Fourier suivant la variable z ,

$$\partial_t \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m,n}^+ - \frac{i(\kappa_0)_m(\kappa)_n}{\sqrt{1 + (\kappa_0)_m^2}} \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m,n}^+ = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m,n}^- + \frac{i(\kappa_0)_m(\kappa)_n}{\sqrt{1 + (\kappa_0)_m^2}} \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m,n}^- = 0.$$

Ainsi, au temps final T_{fin} , on obtient

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m,n}^+)^{p+1} &= (\widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m,n}^+)^p \exp\left(\frac{i(\kappa)_n(\kappa_0)_m}{\sqrt{1 + (\kappa_0)_m^2}} T_{fin}\right), \\ \text{et} \\ (\widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m,n}^-)^{p+1} &= (\widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m,n}^-)^p \exp\left(\frac{-i(\kappa)_n(\kappa_0)_m}{\sqrt{1 + (\kappa_0)_m^2}} T_{fin}\right). \end{aligned}$$

On prend ensuite la transformée de Fourier inverse suivant la variable z , et on reconstruit la solution à l'instant final T_{fin} qui dépend des solutions obtenues dans les deux directions d'après l'équation (4.13)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m}(T_{fin}, z, \frac{T_{fin}}{\varepsilon}, (\kappa_0)_m) &= \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m}^+(T_{fin}, z, 0, (\kappa_0)_m) \exp\left(i\sqrt{1 + (\kappa_0)_m^2} \frac{T_{fin}}{\varepsilon}\right) \\ &+ \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m}^-(T_{fin}, z, 0, (\kappa_0)_m) \exp\left(-i\sqrt{1 + (\kappa_0)_m^2} \frac{T_{fin}}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Pour pouvoir ajouter cette solution à spectre continu à celle de la partie à spectre discret et visualiser le résultat, il faut obtenir une solution finale qui ne dépende plus que de la variable z . Pour cela, on fait subir à la solution de la partie à spectre continu, une transformée de Fourier inverse en z_0 , mais au lieu de la prendre aux points z_0 , on se place aux points $\frac{z}{\varepsilon}$, ainsi

$$\mathcal{U}_{0,II}(T_{fin}, z) = \sum_{(\kappa_0)_m} \widehat{\mathcal{U}}_{0,II,m}(T_{fin}, z, \frac{T_{fin}}{\varepsilon}, (\kappa_0)_m) \exp\left(i(\kappa_0)_m \frac{z}{\varepsilon}\right).$$

c. Résultats numériques

Nous allons réaliser un certain nombre de comparaisons. Dans un premier temps, on compare la solution du modèle simplifié non linéaire avec celle de l'asymptotique en considérant que la condition initiale n'est composée que d'une partie à spectre discret. Nous faisons ensuite les mêmes comparaisons en considérant que la condition initiale n'est composée que d'une partie à spectre continu. Enfin, nous présentons le cas général d'une condition initiale possédant à la fois une partie à spectre continu et une partie à spectre discret.

Notations. Comme pour le premier paragraphe de ce chapitre, on désigne par \mathbf{u} et \mathbf{v} les solutions du modèle simplifié non linéaire (4.1) et par \mathbf{ulin} et \mathbf{vlin} les solutions du modèle

simplifié linéaire (4.3). On désigne par \mathcal{U}_I et $\mathcal{U}lin_I$, respectivement les solutions non linéaires et linéaires du modèle asymptotique (4.8) pour la partie à spectre discret. On désigne par \mathcal{U}_{II} la solution linéaire du modèle asymptotique (4.14) pour la partie à spectre continu. Enfin, on désigne par \mathcal{U} et $\mathcal{U}lin$, respectivement les solutions non linéaires et linéaires du modèle asymptotique (4.15) pour une impulsion ayant une partie à spectre discret et une partie à spectre continu.

Tous les résultats présentés dans les planches suivantes sont des résultats convergés.

On va tout d'abord, à l'aide des deux planches suivantes (pages 183 et 184), illustrer le fait que le modèle de Schrödinger avec effet Kerr pour la partie à spectre discret redonne bien les mêmes solutions linéaires et non linéaires que le modèle simplifié de départ pour $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$. Comme condition initiale, on a pris

$$\mathbf{u}_d(z) = e^{-20(z-1)^2} e^{ik_L z/\varepsilon} + e^{-20(z-1)^2} e^{-ik_L z/\varepsilon}.$$

Dans les quatre planches suivantes (pages 185, 186, 187 et 188), on s'intéresse uniquement aux impulsions composées d'une partie à spectre purement continu. Ainsi, on propose deux conditions initiales possibles

$$\mathbf{u}_{c1}(z) = e^{-20(z-1)^2} e^{i \cos(z/\varepsilon)}, \text{ ou } \mathbf{u}_{c2}(z) = \frac{1}{4} e^{-20(z-1)^2} e^{i \cos(z/\varepsilon)} e^{ik_L z/\varepsilon} + c.c.$$

On retrouve le résultat du paragraphe précédent, à savoir que les solutions du modèle simplifié et celles du modèle asymptotique linéaire sont comparables lorsque les effets non linéaires sont négligeables. Cependant, l'écart relatif mesuré entre les solutions des deux modèles est moyennement satisfaisant. Nous rappelons que l'écart relatif est donné par la formulation suivante pour tout champ g et h , on a

$$E_{rel}(g, h) = \frac{\|g - h\|_{L^2}}{\sup(\|g\|_{L^2}, \|h\|_{L^2})}. \quad (4.17)$$

Enfin, nous considérons des impulsions ayant à la fois une partie spectre discret et une partie spectre continu. Pour une condition initiale à spectre continu \mathbf{u}_{c1} (pages 189 et 190), nous montrons que la solution linéaire du modèle simplifié et celle de l'asymptotique sont comparables mais que les solutions non linéaires ne le sont pas. Nous faisons ensuite cette comparaison pour une condition initiale à spectre continu \mathbf{u}_{c2} (pages 191 et 192), nous montrons alors que les solutions du modèle simplifié non linéaire et celles de l'asymptotique sont comparables.

Remarque 4.2.1. *Pour les planches (pages 185, 186 et 187), on visualise les conditions initiales pour le système de départ et pour le modèle asymptotique. Ce sont bien les mêmes. On voulait vérifier ici que la méthode utilisée pour reconstruire la condition initiale de l'asymptotique, qui est un $\mathcal{U}_{II}^0(z, z_0)$, sous la forme $\mathcal{U}_{II}^0(z)$ redonne bien la condition initiale du système de départ $\mathbf{u}_0(z)$.*

Comparaison des solutions linéaires et non linéaires, du système et de l'asymptotique pour une impulsion à spectre discret au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$

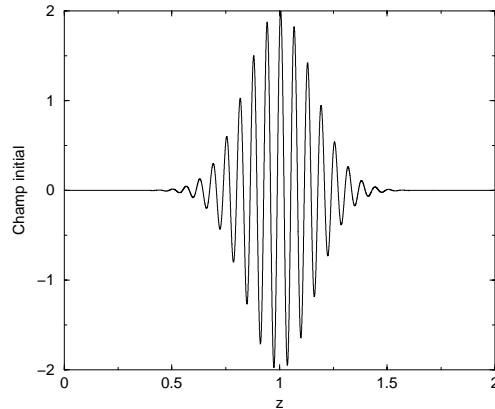


FIG. 4.13 – Condition initiale \mathbf{u}_d pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.99879, \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.98988.$$

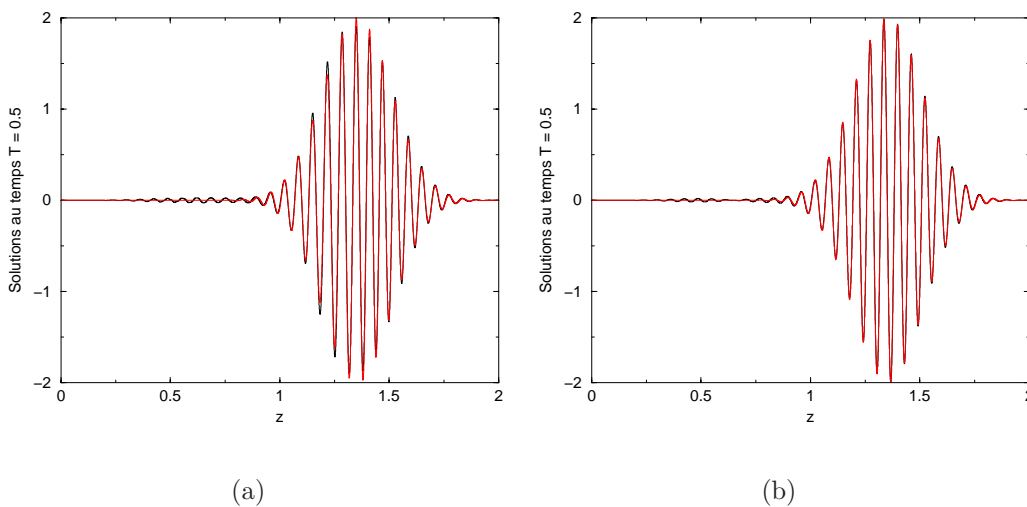


FIG. 4.14 – Donnée initiale \mathbf{u}_d , $\varepsilon = 10^{-2}$. (a) Comparaison des solutions non linéaires \mathbf{u} et \mathcal{U}_I ; (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{u}_{lin} et \mathcal{U}_{lin_I} . En noir, \mathbf{u} et \mathbf{u}_{lin} , en rouge \mathcal{U}_I et \mathcal{U}_{lin_I} .

Ecarts obtenus entre les solutions du système et de l'asymptotique, en non linéaires et en linéaires

$$E_{rel}(\mathcal{U}_I, \mathbf{u}) = 0.46889 \cdot 10^{-1}, \quad E_{rel}(\mathcal{U}_{lin_I}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.33451 \cdot 10^{-1}.$$

On obtient des erreurs entre les solutions des deux modèles de taille ε , ce qui est conforme au résultat du théorème 3.2.2.

Comparaison des solutions linéaires et non linéaires, du système et de l'asymptotique pour une impulsion à spectre discret au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$

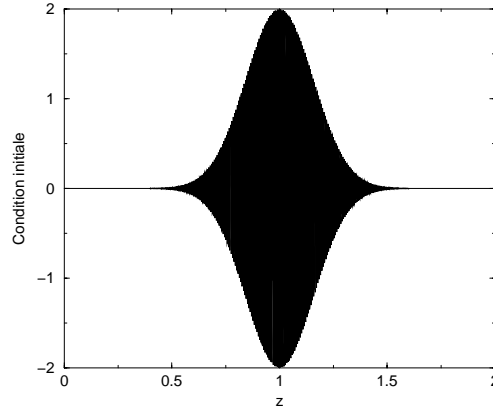


FIG. 4.15 – Condition initiale \mathbf{u}_d pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

Ecart relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 1.0061, \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 1.0052.$$

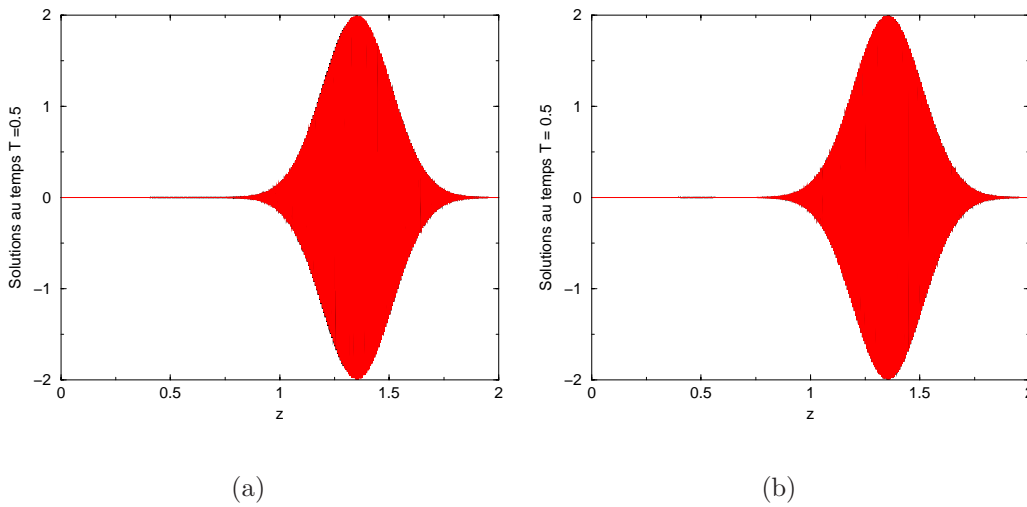


FIG. 4.16 – Donnée initiale \mathbf{u}_d , $\varepsilon = 10^{-3}$. (a) Comparaison des solutions non linéaires \mathbf{u} et \mathcal{U}_I ; (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{u}_{lin} et \mathcal{U}_{lin_I} . En noir, \mathbf{u} et \mathbf{u}_{lin} , en rouge \mathcal{U}_I et \mathcal{U}_{lin_I} .

Ecart obtenu entre les solutions du système et de l'asymptotique, en non linéaires et en linéaires

$$E_{rel}(\mathcal{U}_I, \mathbf{u}) = 0.44395 \cdot 10^{-2}, \quad E_{rel}(\mathcal{U}_{lin_I}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.34186 \cdot 10^{-2}.$$

On obtient des erreurs entre les solutions des deux modèles de taille ε , ce qui est conforme au résultat du théorème 3.2.2.

Comparaison des solutions du système et de l'asymptotique pour une impulsion à spectre continu (\mathbf{u}_{c1}) au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$

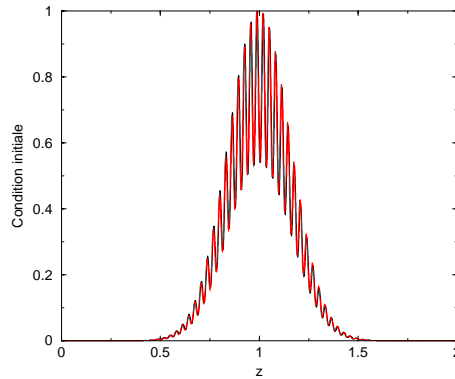


FIG. 4.17 – Condition initiale \mathbf{u}_{c1} pour $\varepsilon = 10^{-2}$, en noir celle du système et en rouge celle de l'asymptotique

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.50994; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.1944.$$

On constate que les effets non linéaires ont un rôle dans ce cas.

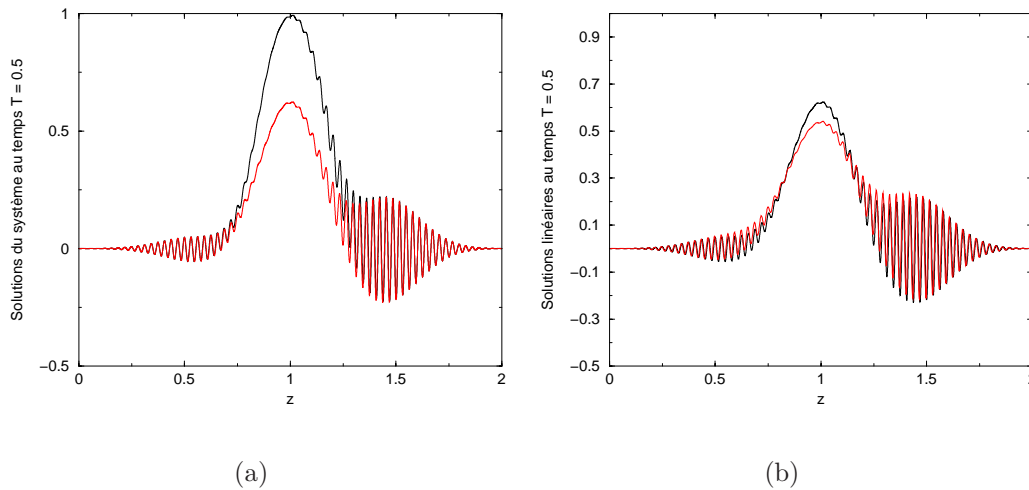


FIG. 4.18 – Donnée initiale \mathbf{u}_{c1} , $\varepsilon = 10^{-2}$. (a) Comparaison des solutions du système \mathbf{u} (en noir) et \mathbf{u}_{lin} (en rouge); (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{u}_{lin} (en noir) et \mathcal{U}_{II} (en rouge).

Ecarts obtenus entre les solutions du système et celles de l'asymptotique

$$E_{rel}(\mathcal{U}_{II}, \mathbf{u}) = 0.2134; \quad E_{rel}(\mathcal{U}_{II}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.119 \cdot 10^{-1}.$$

Les écarts s'observent clairement. L'approximation n'est pas très bonne en non linéaire et correcte en linéaire.

Comparaison des solutions du système et de l'asymptotique pour une impulsion à spectre continu (\mathbf{u}_{c1}) au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$

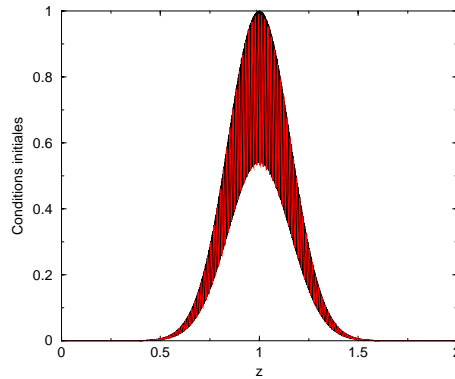


FIG. 4.19 – Condition initiale \mathbf{u}_{c1} pour $\varepsilon = 10^{-3}$, en noir celle du système et en rouge celle de l'asymptotique.

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.473826; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.51321.$$

Les effets non linéaires sont encore bien présents.

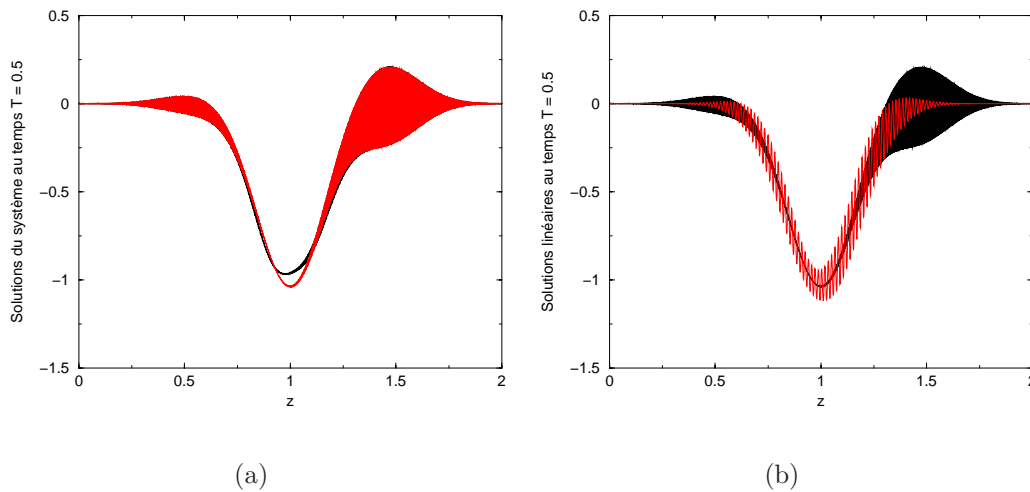


FIG. 4.20 – Donnée initiale \mathbf{u}_{c1} , $\varepsilon = 10^{-3}$. (a) Comparaison des solutions du système \mathbf{u} (en noir) et \mathbf{u}_{lin} (en rouge); (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{u}_{lin} (en noir) et \mathcal{U}_{II} (en rouge).

Ecarts obtenus entre les solutions du système et celles de l'asymptotique

$$E_{rel}(\mathcal{U}_{II}, \mathbf{u}) = 0.51466; \quad E_{rel}(\mathcal{U}_{II}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.14589 \cdot 10^{-2}.$$

Les écarts s'observent clairement. L'approximation n'est pas très bonne en non linéaire et correcte en linéaire.

Comparaison des solutions du système et de l'asymptotique pour une impulsion à spectre continu (\mathbf{u}_{c2}) au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$

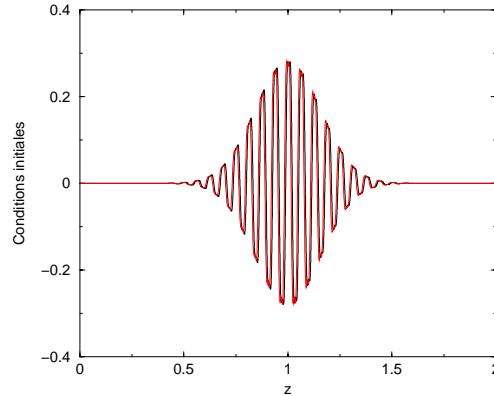


FIG. 4.21 – Condition initiale \mathbf{u}_{c2} pour $\varepsilon = 10^{-2}$, en noir celle du système et en rouge celle de l'asymptotique.

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{ulin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{vlin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.57284 \cdot 10^{-1}; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{ulin}) = 0.67805 \cdot 10^{-1}.$$

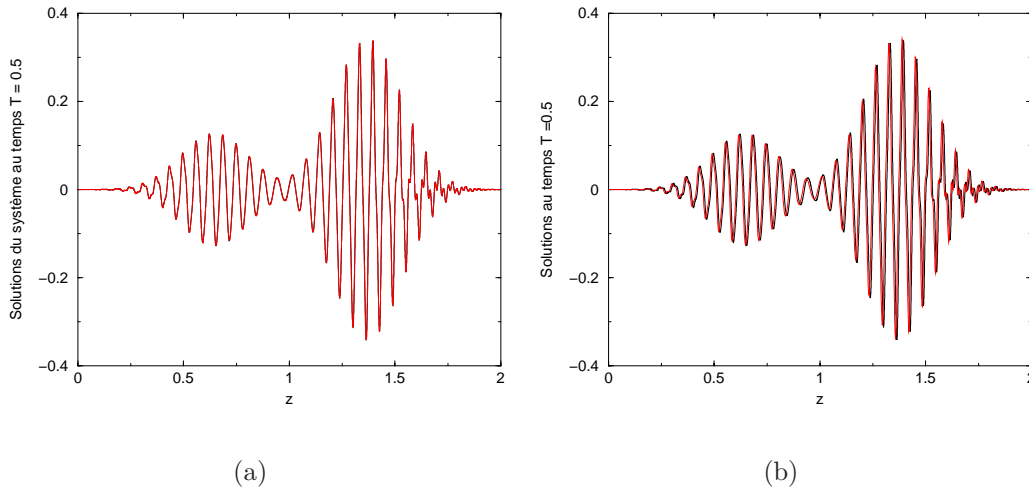


FIG. 4.22 – Donnée initiale \mathbf{u}_{c2} , $\varepsilon = 10^{-2}$. (a) Comparaison des solutions du système \mathbf{u} (en noir) et \mathbf{ulin} (en rouge); (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{ulin} (en noir) et \mathcal{U}_{II} (en rouge).

Ecarts obtenus entre la solution linéaire du système et celles de l'asymptotique

$$E_{rel}(\mathcal{U}_{II}, \mathbf{u}) = 0.75418 \cdot 10^{-1}; \quad E_{rel}(\mathcal{U}_{II}, \mathbf{ulin}) = 0.7613 \cdot 10^{-1}.$$

On obtient dans ce cas des erreurs identiques entre le linéaire et le non linéaire. Cependant cette erreur est quand même encore assez élevée, 7%.

Comparaison des solutions du système et de l'asymptotique pour une impulsion à spectre continu (\mathbf{u}_{c2}) au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$

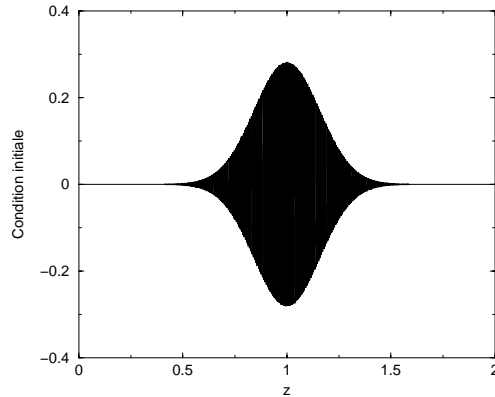


FIG. 4.23 – Condition initiale \mathbf{u}_{c2} pour $\varepsilon = 10^{-3}$, en noir celle du système et en rouge celle de l'asymptotique.

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.56136 \cdot 10^{-1}; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.34157 \cdot 10^{-1}.$$

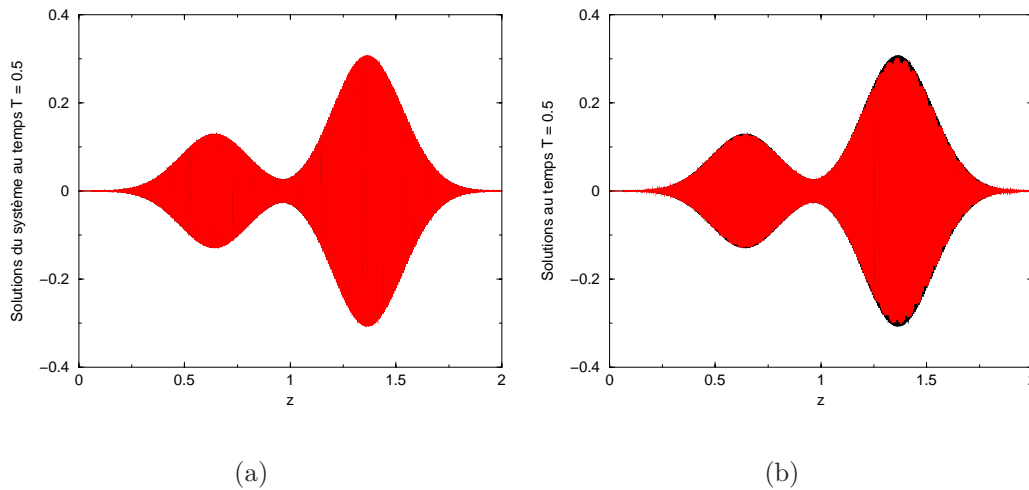


FIG. 4.24 – Donnée initiale \mathbf{u}_{c2} , $\varepsilon = 10^{-3}$. (a) Comparaison des solutions du système \mathbf{u} (en noir) et \mathbf{u}_{lin} (en rouge); (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{u}_{lin} (en noir) et \mathcal{U}_{II} (en rouge).

Ecarts obtenus entre la solution linéaire du système et celles de l'asymptotique

$$E_{rel}(\mathcal{U}_{II}, \mathbf{u}) = 0.35721 \cdot 10^{-2}; \quad E_{rel}(\mathcal{U}_{II}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.1564 \cdot 10^{-2}.$$

On obtient dans ce cas des erreurs identiques entre le linéaire et le non linéaire.

Comparaison des solutions du système et de l'asymptotique pour une impulsion avec un spectre discret et un spectre continu (u_{c1}) au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

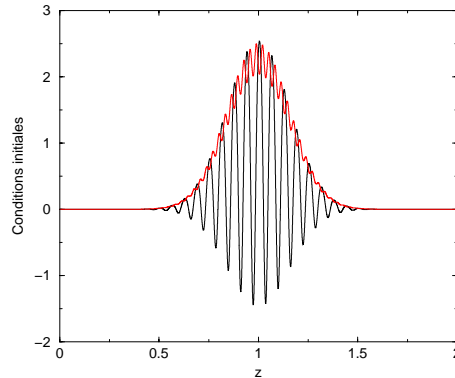


FIG. 4.25 – Condition initiale, en noir celle du système et en rouge celle de l'asymptotique.

Ecart entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{ulin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{vlin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 1.3997; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{ulin}) = 1.3388.$$

Les effets non linéaires ont un rôle important.

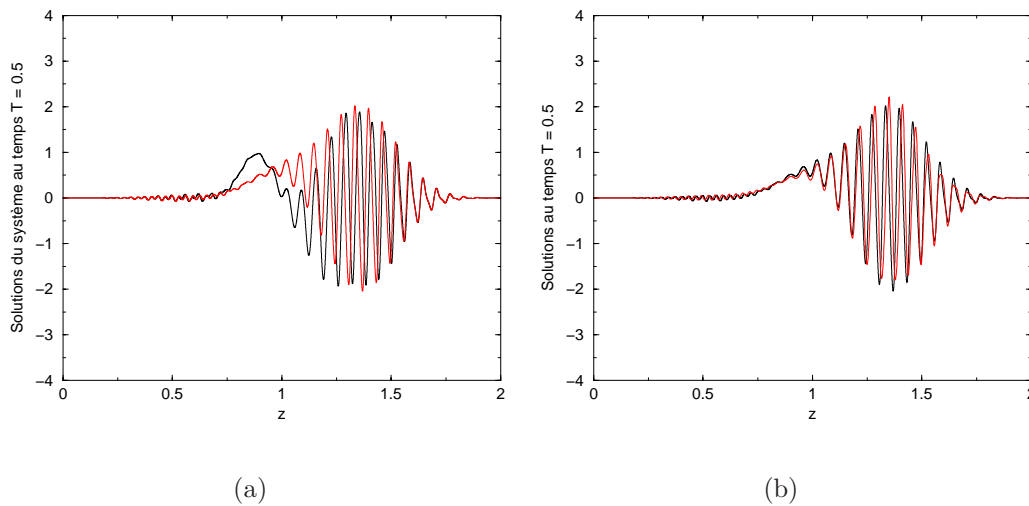


FIG. 4.26 – Donnée initiale $\varepsilon = 10^{-2}$. (a) Comparaison des solutions du système \mathbf{u} (en noir) et \mathbf{ulin} (en rouge); (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{ulin} (en noir) et $\mathcal{U}lin$ (en rouge).

Ecart obtenu entre les solutions du système et celles de l'asymptotique

$$E_{rel}(\mathcal{U}, \mathbf{u}) = 1.4139; \quad E_{rel}(\mathcal{U}lin, \mathbf{ulin}) = 0.7517 \cdot 10^{-1}.$$

On retrouve l'erreur obtenue pour le cas spectre continu seul.

Comparaison des solutions du système et de l'asymptotique pour une impulsion avec un spectre discret et un spectre continu (u_{c1}) au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$

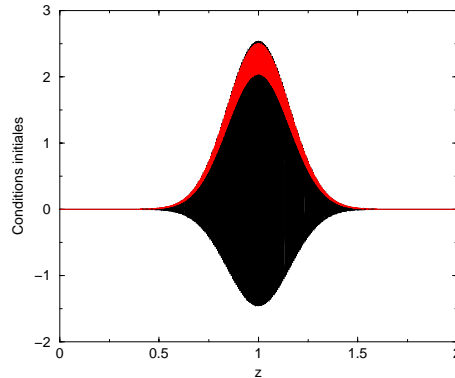


FIG. 4.27 – Condition initiale, en noir celle du système et en rouge celle de l'asymptotique.

Ecart relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 1.4175; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 1.3822.$$

Les effets non linéaires ont un rôle important.

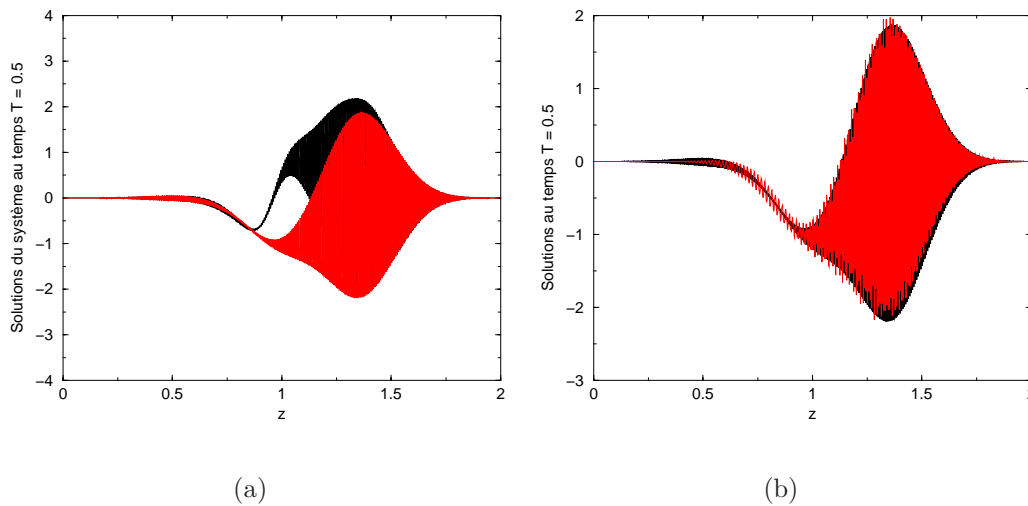


FIG. 4.28 – Donnée initiale $\varepsilon = 10^{-3}$. (a) Comparaison des solutions du système \mathbf{u} (en noir) et \mathbf{u}_{lin} (en rouge); (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{u}_{lin} (en noir) et \mathcal{U}_{lin} (en rouge).

Ecart obtenu entre les solutions du système et celles de l'asymptotique

$$E_{rel}(\mathcal{U}, \mathbf{u}) = 1.3859; \quad E_{rel}(\mathcal{U}_{lin}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.3721 \cdot 10^{-1}.$$

On retrouve l'erreur obtenue pour le cas spectre continu seul.

Comparaison des solutions du système et de l'asymptotique pour une impulsion avec un spectre discret et un spectre continu (u_{c2}) au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

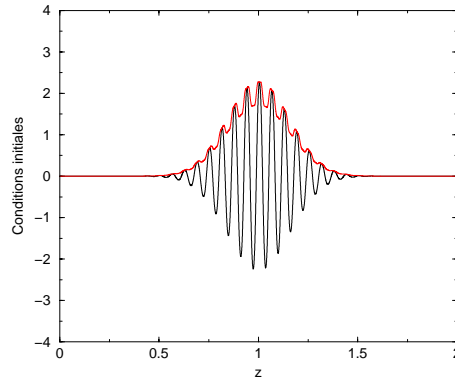


FIG. 4.29 – Condition initiale, en noir celle du système et en rouge celle de l'asymptotique.

Écarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{ulin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{vlin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 1.2508; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{ulin}) = 1.2386.$$

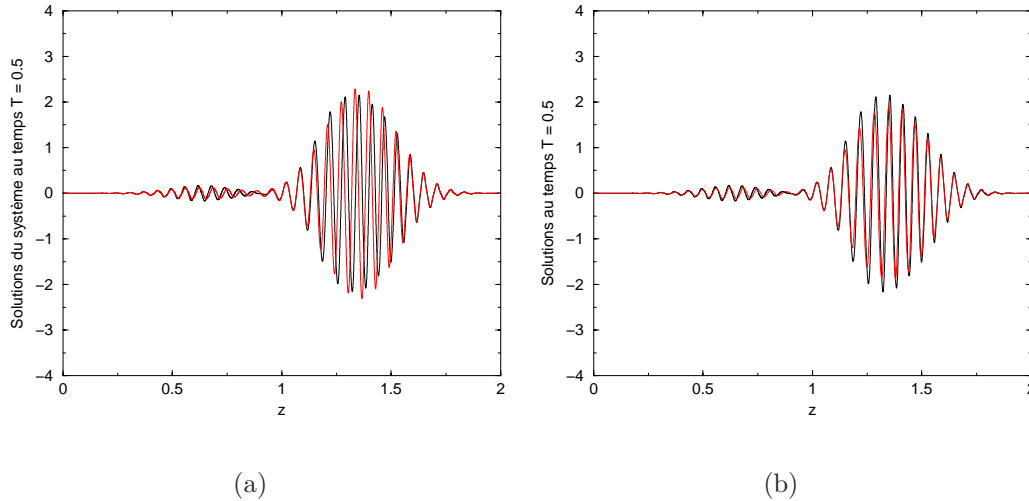


FIG. 4.30 – Donnée initiale $\varepsilon = 10^{-2}$. (a) Comparaison des solutions du système \mathbf{u} (en noir) et \mathbf{ulin} (en rouge); (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{ulin} (en noir) et $\mathcal{U}lin$ (en rouge).

Écarts obtenus entre les solutions du système et celles de l'asymptotique

$$E_{rel}(\mathcal{U}, \mathbf{u}) = 0.5702 \cdot 10^{-1}; \quad E_{rel}(\mathcal{U}lin, \mathbf{ulin}) = 0.5481 \cdot 10^{-1}.$$

On obtient des erreurs de taille ε pour le linéaire et le non linéaire. Cependant, cette erreur est encore assez élevée, 5%.

Comparaison des solutions du système et de l'asymptotique pour une impulsion avec un spectre discret et un spectre continu (u_{c2}) au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

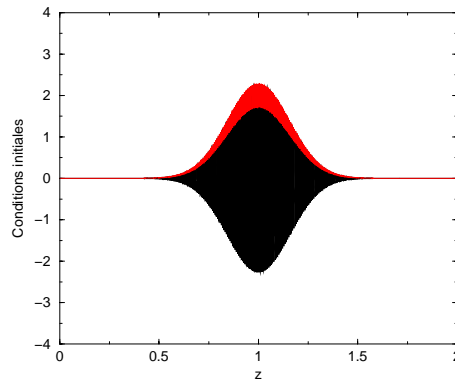


FIG. 4.31 – Condition initiale, en noir celle du système et en rouge celle de l'asymptotique.

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 1.2612; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 1.2456.$$

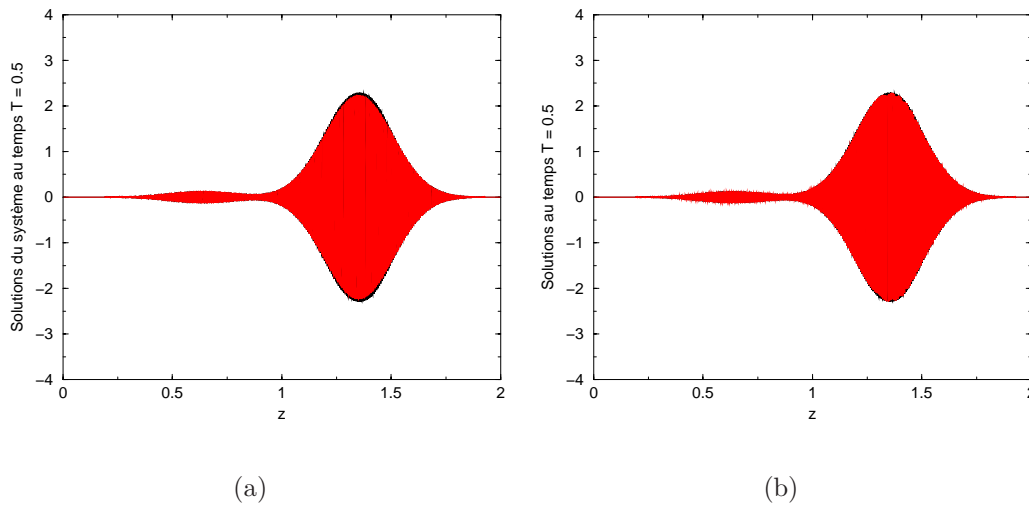


FIG. 4.32 – Donnée initiale $\varepsilon = 10^{-3}$. (a) Comparaison des solutions du système \mathbf{u} (en noir) et \mathbf{u}_{lin} (en rouge) ; (b) Comparaison des solutions linéaires \mathbf{u}_{lin} (en noir) et \mathcal{U}_{lin} (en rouge).

Ecarts obtenus entre les solutions du système et celles de l'asymptotique

$$E_{rel}(\mathcal{U}, \mathbf{u}) = 0.2814 \cdot 10^{-2}; \quad E_{rel}(\mathcal{U}_{lin}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.14024 \cdot 10^{-2}.$$

On obtient des erreurs de taille ε pour le linéaire et le non linéaire.

Avec les planches, pages 191 et 192, on a illustré numériquement la décomposition proposée au chapitre III. On peut dire que dans le cadre de l'optique géométrique, pour des régimes faiblement non linéaires, la décomposition spectre discret-spectre continu n'est pas très satisfaisante, ce qui peut se justifier par l'estimation d'erreur obtenue au chapitre III, théorème ?? qui n'est qu'en $o(1)$ pour la partie à spectre continu. Voyons maintenant comment s'écrit le modèle asymptotique si on ne décompose plus la condition initiale en une partie à spectre discret et une partie à spectre continu, mais que l'on raffine uniquement le modèle usuel.

4.2.2 Obtention de l'équation de transport modifiée non linéaire

Dans cette partie, on applique les résultats établis dans la première partie du chapitre I sur le système modèle simplifié non linéaire (4.1). Ainsi, on obtient une équation de transport non linéaire possédant un nouveau terme de transport et un terme non linéaire plus compliqué que le terme d'effet Kerr habituel. Reprenons le système simplifié non linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{v}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}^\varepsilon = (|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{v}^\varepsilon, \\ \partial_t \mathbf{v}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon = -(|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{u}^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.18)$$

Ce modèle simplifié est bien du type (1.21)

$$L^\varepsilon(\partial) \mathbf{h}^\varepsilon = f(\mathbf{h}^\varepsilon),$$

avec

$$\mathbf{h}^\varepsilon = (\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)^T \in \mathbb{C}^4,$$

et la non linéarité f d'ordre trois s'écrit

$$f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = ((|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{v}^\varepsilon, -(|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{u}^\varepsilon)^T.$$

L'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ est donné par $L^\varepsilon(\partial) = \partial_t + A(\partial_z) + \frac{L_0}{\varepsilon}$, avec

$$A(\partial_z) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution approchée h^ε de la solution exacte \mathbf{h}^ε de la forme

$$h^\varepsilon(t, z) = \mathcal{H}^\varepsilon(t, z, \theta) \Big|_{\theta = \frac{(k_L z - \omega_L t)}{\varepsilon}},$$

ainsi, en injectant cette solution approchée dans le système (4.18), on obtient l'équation singulière suivante

$$\partial_t \mathcal{H}^\varepsilon + A(\partial_z) \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A(\partial_\theta) + L_0) \mathcal{H}^\varepsilon = f(\mathcal{H}^\varepsilon).$$

On commence par chercher la valeur propre $\lambda_{j_0}^\pm(k_L, 0) = \pm\omega_L(k_L)$ pour notre système. Pour cela, on regarde comment s'écrit la relation de dispersion qui est obtenue en calculant $\det(-i\omega_L Id + ik_L A + L_0) = 0$. Cette relation est de la forme

$$\omega_L^2 - k_L^2 - 1 = 0.$$

Ainsi, la valeur propre $\lambda_{j_0}^\pm(k_L, 0)$ s'écrit

$$\lambda_{j_0}^\pm(k_L, 0) := \pm\omega(k_L) = \pm\sqrt{1 + k_L^2}. \quad (4.19)$$

On peut maintenant appliquer les résultats obtenus au chapitre I, paragraphe (1.5.2). On commence par reformuler l'équation singulière sous la forme

$$\partial_t \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-\omega_L \partial_\theta + A(k_L \partial_\theta + \varepsilon \partial_z) + L_0) \mathcal{H}^\varepsilon = f(\mathcal{H}^\varepsilon).$$

La transformée de Fourier de cette équation suivant les variables (θ, z) , dont les variables duales sont $l \in \mathbb{Z}$ et $\zeta_1 \in \mathbb{R}$, s'écrit

$$\partial_t \widehat{\mathcal{H}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-i\omega_L l + iA(k_L l + \varepsilon \zeta_1) + L_0) \widehat{\mathcal{H}}^\varepsilon = \widehat{f(\mathcal{H}^\varepsilon)}.$$

On peut ainsi diagonaliser la famille de matrices $iA(k_L l + \varepsilon \zeta_1) + L_0$. Les valeurs propres associées à cette famille de matrices sont de la forme

$$\lambda_j^\pm(k_L l + \varepsilon \zeta_1, 0) = \pm\sqrt{1 + (k_L l + \varepsilon \zeta_1)^2}, \quad j = 1, 2, \quad (4.20)$$

et les projecteurs propres s'écrivent

$$\widehat{\Pi}_j^\pm(k_L l + \varepsilon \zeta_1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 & \frac{ik_L l + i\varepsilon \zeta_1 - 1}{\sqrt{1 + (k_L l + \varepsilon \zeta_1)^2}} \\ \frac{ik_L l + i\varepsilon \zeta_1 + 1}{\sqrt{1 + (k_L l + \varepsilon \zeta_1)^2}} & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

L'équation diagonalisée se réécrit, par exemple pour les valeurs propres positives,

$$\partial_\tau \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (-i\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0)) \mathcal{H}^\varepsilon = \Pi_{j_0}^+(ik_L + \varepsilon D_z) f(\mathcal{H}^\varepsilon).$$

Regardons de plus près le terme $(-i\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0))$. On a

$$i(-\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + \lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0)) = i \left(\frac{\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0)^2 - \lambda_{j_0}^+(k_L, 0)^2}{\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + \lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0)} \right),$$

avec

$$\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0)^2 - \lambda_{j_0}^+(k_L, 0)^2 = -2ik_L \varepsilon \partial_z - \varepsilon^2 \partial_z^2,$$

et

$$\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + \lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0) = \sqrt{1 + k_L^2} + \sqrt{1 - (ik_L + \varepsilon D_z)^2},$$

donc

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(-i\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z) \right) = \frac{2k_L \partial_z - i\varepsilon^2 \partial_z^2}{\sqrt{1 + k_L^2} + \sqrt{1 - (ik_L + \varepsilon D_z)^2}}.$$

L'équation diagonalisée précédente s'écrit alors

$$\partial_t \mathcal{H}^\varepsilon + \left(\frac{2k_L \partial_z - i\varepsilon \partial_z^2}{\sqrt{1 + k_L^2} + \sqrt{1 - (ik_L + \varepsilon D_z)^2}} \right) \mathcal{H}^\varepsilon = \Pi_{j_0}^+(ik_L + \varepsilon D_z) f(\mathcal{H}^\varepsilon),$$

Le terme non linéaire $\Pi_{j_0}^+(ik_L + \varepsilon D_z) f(\mathcal{H}^\varepsilon)$ étant difficile à implémenter numériquement, nous l'avons remplacé par le terme d'effet Kerr standard. Ainsi, l'équation de transport non linéaire modifiée que l'on résout a la forme

$$\partial_t u^\varepsilon + \left(\frac{2k_L \partial_z - i\varepsilon \partial_z^2}{\sqrt{1 + k_L^2} + \sqrt{1 - (ik_L + \varepsilon D_z)^2}} \right) u^\varepsilon + \frac{4i}{\omega_L} |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon = 0. \quad (4.22)$$

Nous pouvons maintenant présenter le schéma numérique que nous allons considérer.

a. Méthode de résolution numérique

Pour résoudre l'équation ci-dessus (4.22), on utilise une transformée de Fourier suivant la variable z dont la variable duale dans l'espace de Fourier est κ et l'indice de discrétisation n .

Maillage. On ne considère ici que des champs dépendant des variables (z, t) . On note p l'indice de discrétisation suivant la variable t et n est l'indice de discrétisation suivant la variable z .

On commence par résoudre la partie linéaire de l'équation (4.22) sur un demi pas de temps. Pour cela, on prend la transformée de Fourier suivant la variable z , dont on note la variable duale dans l'espace de Fourier κ . On résout alors

$$\partial_t \widehat{u}_n^\varepsilon + \frac{i}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - (ik_L + i\varepsilon \kappa_n)^2} - \sqrt{1 + k_L^2} \right) \widehat{u}_n^\varepsilon = 0,$$

donc

$$(\widehat{u}_n^\varepsilon)^{p+1/3} = (\widehat{u}_n^\varepsilon)^p \exp \left(-\frac{i}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - (ik_L + i\varepsilon \kappa_n)^2} - \sqrt{1 + k_L^2} \right) \frac{dt}{2} \right).$$

La résolution du terme non linéaire de (4.22) revient à considérer l'équation suivante

$$\partial_t u^\varepsilon + \frac{4i}{\omega_L} |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon = 0.$$

ce qui implique

$$(u^\varepsilon)_n^{p+2/3} = (u^\varepsilon)_n^{p+1/3} e^{-i \frac{4dt}{\omega_L} (|u^\varepsilon|^2)_n^{p+1/3}}.$$

Enfin, pour obtenir la solution de l'équation (4.22) à l'instant $(p + 1)$, on résout la partie linéaire comme précédemment.

b. Résultats numériques

Nous allons dans cette partie réaliser les mêmes cas tests que pour le modèle asymptotique obtenu avec les résultats du chapitre III. En d'autres termes, nous allons commencer par prendre une impulsion ayant uniquement un spectre discret, puis une impulsion ayant un spectre légèrement "étalé".

Notations. On désigne toujours par \mathbf{u} et \mathbf{v} les solutions du modèle simplifié non linéaire (4.1) et par \mathbf{ulin} et \mathbf{vlin} les solutions du modèle simplifié linéaire (4.3). De même, u^ε désigne la solution du modèle asymptotique non linéaire modifié (4.22) et u_{lin}^ε celle du modèle asymptotique linéaire modifié (4.22). Enfin, u_{kerr} désigne la solution du modèle asymptotique non linéaire standard (4.8) et $ulin_{kerr}$ celle du modèle asymptotique linéaire standard.

Cas d'une impulsion à spectre étroit

Pour obtenir le modèle asymptotique non linéaire, on doit satisfaire la condition de polarisation

$$\Pi_{j_0}^+(ik_L + \varepsilon D_z) \begin{pmatrix} u^\varepsilon \\ v^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^\varepsilon \\ v^\varepsilon \end{pmatrix},$$

et donc

$$v^\varepsilon = \frac{\varepsilon D_z + ik_L + 1}{i\sqrt{1 - |ik_L + \varepsilon D_z|^2}} u^\varepsilon.$$

Ainsi, comme pour la résolution de l'équation de Schrödinger avec effet Kerr, on choisit de résoudre le modèle de Schrödinger non linéaire modifié en polarisant les conditions initiales du modèle simplifié non linéaire avec la relation ci-dessus définie entre v^ε et u^ε . On obtient alors

$$\mathbf{u}^{0,+}(z) = e^{-20(z-1)^2}, \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0(z) &= \mathbf{u}^{0,+}(z) e^{ik_L z/\varepsilon} + \overline{\mathbf{u}^{0,+}(z)} e^{-ik_L z/\varepsilon} \quad \text{et} \\ \mathbf{v}^{0,+}(z) &= \frac{\varepsilon D_z + ik_L + 1}{i\sqrt{1 - |ik_L + \varepsilon D_z|^2}} \mathbf{u}^{0,+}(z), \quad \mathbf{v}^0(z) = \mathbf{v}^{0,+}(z) e^{ik_L z/\varepsilon} + \overline{\mathbf{v}^{0,+}(z)} e^{-ik_L z/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Remarque. On n'a pas exactement polarisé les conditions initiales du modèle de départ comme page 179. En effet, on ne considère pas ici que $\mathbf{u}^{0,+}(z)$ s'écrit sous la forme

$$\mathbf{u}^{0,+}(z) = e^{-20(z-1)^2} e^{ik_L \frac{z}{\varepsilon}}, \tag{4.24}$$

avant d'appliquer la condition de polarisation pour exprimer $\mathbf{v}^{0,+}(z)$. En fait, si on applique le projecteur $\Pi_{j_0}^+(ik_L + \varepsilon D_z)$ sur le vecteur $(\mathbf{u}^{0,+}(z), \mathbf{v}^{0,+}(z))^T$ avec $\mathbf{u}^{0,+}(z)$ donné par (4.24), on aboutit à des interactions entre le terme $e^{ik_L z/\varepsilon}$ et la dérivée en z qui apparaît dans la condition de polarisation. Ces interactions engendrent (figure 4.33) l'apparition de l'onde se propageant à la vitesse de groupe opposée, ce que l'on veut éviter.

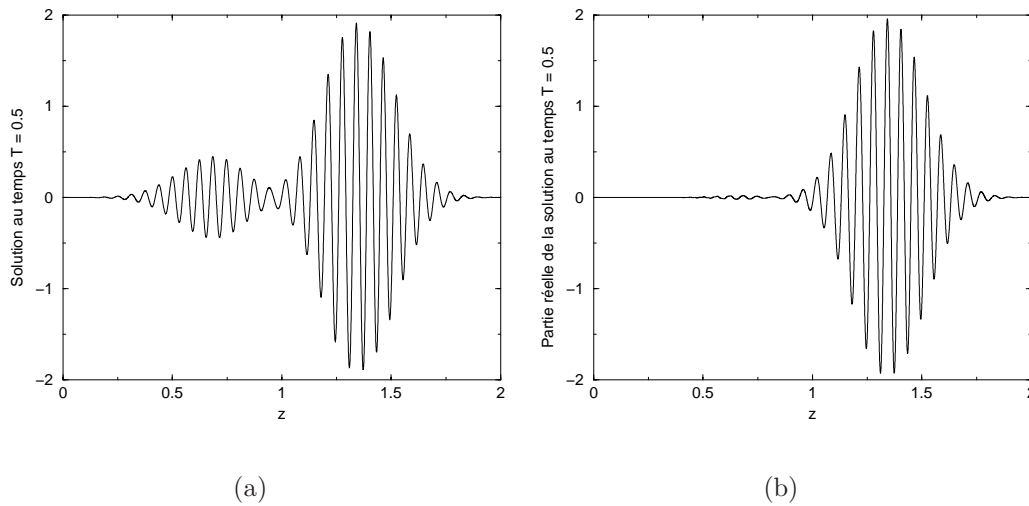


FIG. 4.33 – (a) Donnée initiale $\mathbf{u}^{0,+}$ de la forme (4.24) ; (b) Donnée initiale $\mathbf{u}^{0,+}$ de la forme (4.23).

Voyons les résultats obtenus pour différentes valeurs du paramètre ε . On compare dans les planches suivantes (pages 199 et 200), les solutions du modèle de départ non linéaire avec les solutions du modèle asymptotique non linéaire modifié. On montre alors que les erreurs obtenues sont de taille ε ce qui corrobore les résultats du théorème 2.5.2.

On remarque également que l'erreur commise (pages 199 et 200) entre la solution du modèle de départ non linéaire et celle du modèle asymptotique non linéaire modifié est plus petite que celle obtenue entre la solution du modèle de départ non linéaire et celle du modèle asymptotique standard avec effet Kerr.

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.173411 \cdot 10^{-1}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 0.408020 \cdot 10^{-1}.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-3}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.176354 \cdot 10^{-2}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 0.390359 \cdot 10^{-2}.$$

Le modèle asymptotique non linéaire modifié est plus précis car il a nécessité moins d'approximation lors de sa dérivation. Notons également, que les erreurs obtenues entre les deux modèles de Schrödinger non linéaires modifié et standard sont comparables à celles obtenues au chapitre I (figures 1.24 et 1.26 de droite).

Erreur relative obtenue entre les modèles asymptotiques non linéaires modifié et standard, pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, u_{kerr}) = 0.234609 \cdot 10^{-1}.$$

Erreur relative obtenue entre les modèles asymptotiques non linéaires modifié et standard, pour $\varepsilon = 10^{-3}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, u_{kerr}) = 0.206458 \cdot 10^{-1}.$$

On note enfin que si l'on considère, dans un deuxième temps, non plus une condition initiale de taille 1 mais de taille ε , alors l'erreur commise entre la solution du modèle de départ non linéaire et celle du modèle asymptotique non linéaire modifié est négligeable. Alors que l'erreur commise entre la solution du modèle de départ non linéaire et celle du modèle asymptotique non linéaire standard est d'ordre ε .

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.704432 \cdot 10^{-6}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 0.30699 \cdot 10^{-1}.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-3}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.43179 \cdot 10^{-8}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 0.306255 \cdot 10^{-2}.$$

Les estimations d'erreurs obtenues pour le modèle asymptotique non linéaire modifié corroborent le résultat obtenu au chapitre II avec le théorème 2.5.2, en prenant $p = 1$ et $q = 3$.

Comparaison des solutions du système et de celles de l'asymptotique modifiée pour une impulsion à spectre discret au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$

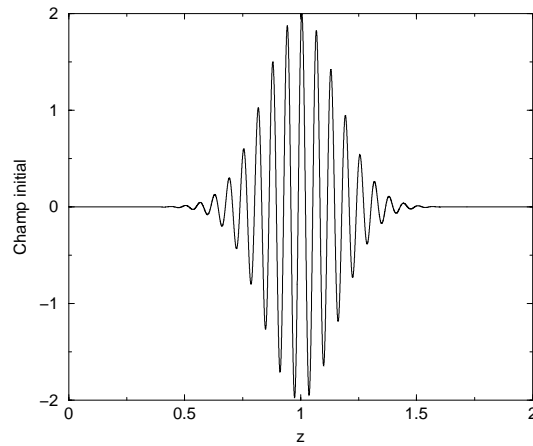


FIG. 4.34 – Condition initiale \mathbf{u}^0 pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.52494, \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.51921.$$

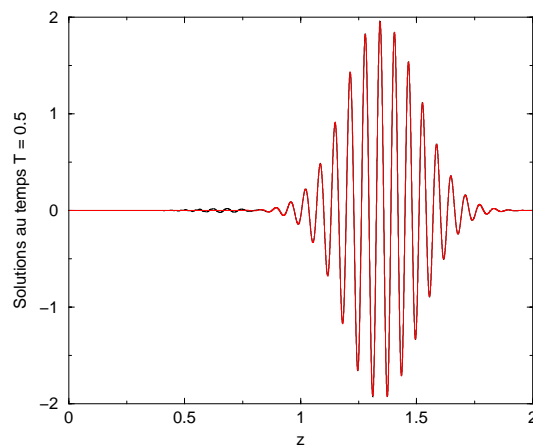


FIG. 4.35 – Comparaison des solutions non linéaires du modèle de départ (en noir) et de l'asymptotique (en rouge).

Ecart obtenu entre la solution non linéaire du système et celle de l'asymptotique

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.173411 \cdot 10^{-1}.$$

On obtient des erreurs entre les solutions des deux modèles de taille ε , ce qui est conforme au résultat du théorème 2.5.2 (avec $p = 0$ et $q = 3$).

Comparaison des solutions du système et de celles de l'asymptotique modifiée pour une impulsion à spectre discret au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$

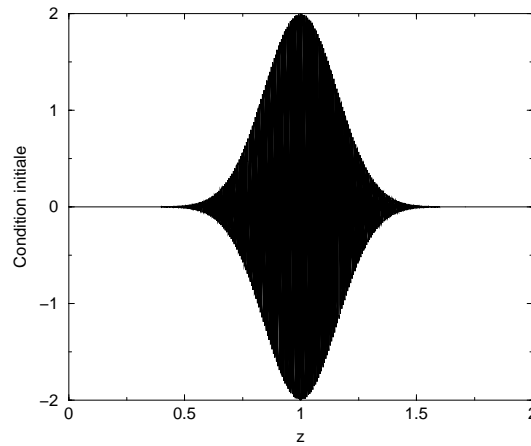


FIG. 4.36 – Condition initiale \mathbf{u}^0 pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.52819, \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.52759.$$

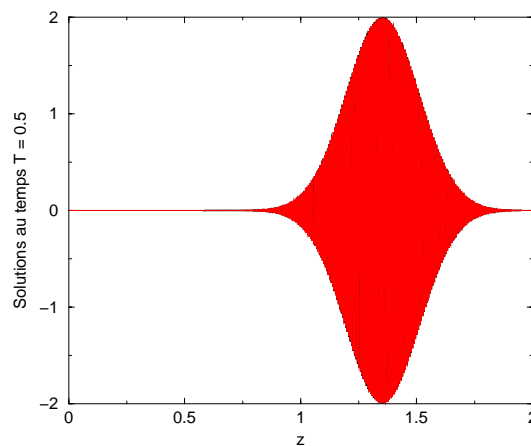


FIG. 4.37 – Comparaison des solutions non linéaires du modèle de départ (en noir) et de l'asymptotique (en rouge).

Écart obtenu entre la solution non linéaire du système et celle de l'asymptotique

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.176354 \cdot 10^{-2}.$$

On obtient des erreurs entre les solutions des deux modèles de taille ε , ce qui est conforme au résultat du théorème 2.5.2 (avec $p = 0$ et $q = 3$).

Cas d'impulsions à spectre "étalé"

Nous regardons maintenant le cas d'impulsions dont le spectre est étalé à travers deux cas tests. Le premier ayant un spectre "étalé" en introduisant un paramètre ς_0 . Cette impulsion est de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{0,+}(z) &= e^{-50(z-1)^2} e^{i \cos(z/\varsigma_0)}, & \mathbf{v}^{0,+}(z) &= \frac{\varepsilon D_z + ik_L + 1}{i\sqrt{1 - (ik_L + \varepsilon D_z)^2}} \mathbf{u}^{0,+}(z), \\ \mathbf{u}^0(z) &= \mathbf{u}^{0,+}(z) e^{ik_L z/\varepsilon} + c.c., & \mathbf{v}^0(z) &= \mathbf{v}^{0,+}(z) e^{ik_L z/\varepsilon} + c.c. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Comme précédemment, on regarde l'erreur commise entre les solutions du modèle de départ et celles du modèle asymptotique non linéaire modifié pour différentes valeurs du paramètre ε . Le paramètre ς_0 introduit ci-dessus étant un peu plus grand que le paramètre ε , il permet d'étaler le spectre de l'impulsion tout en restant dans le domaine de validité du modèle asymptotique, c'est-à-dire pour une impulsion à spectre légèrement étalé autour de sa fréquence centrale.

On obtient alors, pour les différentes valeurs de ε et $\varsigma_0 = 0.7$, des erreurs entre les solutions du modèle de départ non linéaire et celles du modèle asymptotique non linéaire modifié de taille ε (pages 202 et 203) qui confirment le résultat obtenu au théorème 2.4.1, chapitre II, pour $p = 0$ et $q = 3$. Notons également que les écarts obtenus entre les solutions du modèle de départ non linéaire et celles du modèle asymptotique non linéaire standard sont plus importantes que celles obtenues avec le modèle asymptotique non linéaire modifié. Le modèle asymptotique non linéaire standard est moins précis et donc moins pertinent pour ce type d'impulsions à spectre légèrement "étalé".

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.226305 \cdot 10^{-1}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 0.108769.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-3}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.242449 \cdot 10^{-2}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 0.1004210^{-1}.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles linéaires pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u_{lin}^\varepsilon, \mathbf{ulin}) = 0.60051 \cdot 10^{-9}, \quad E_{rel}(ulin_{kerr}, \mathbf{ulin}) = 0.825241 \cdot 10^{-1}.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles linéaires pour $\varepsilon = 10^{-3}$

$$E_{rel}(u_{lin}^\varepsilon, \mathbf{ulin}) = 0.29649 \cdot 10^{-9}, \quad E_{rel}(ulin_{kerr}, \mathbf{ulin}) = 0.798304 \cdot 10^{-2}.$$

Comparaison des solutions du système et de celles de l'asymptotique modifiée pour une impulsion à spectre étalé au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$

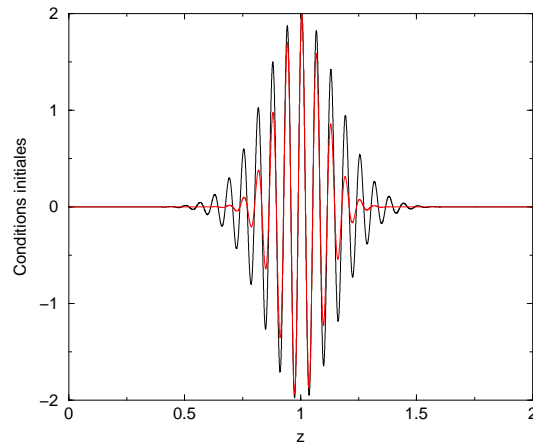


FIG. 4.38 – Donnée initiale (4.23) en noir et en rouge donnée initiale étalée (4.25).

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.51778, \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.51235,$$

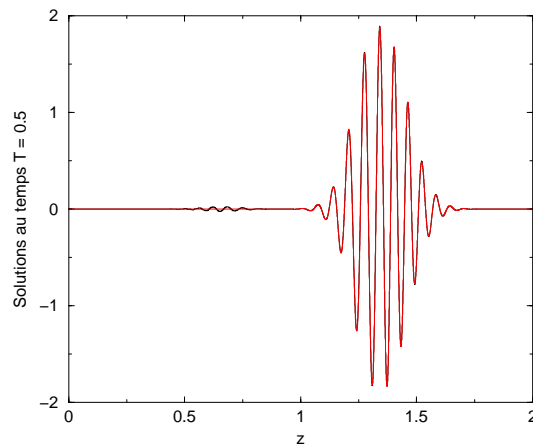


FIG. 4.39 – Comparaison des solutions non linéaires du modèle de départ (en noir) et de l'asymptotique (en rouge).

Ecart obtenu entre la solution non linéaire du système et celle de l'asymptotique

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.252758 \cdot 10^{-1}.$$

On obtient bien une erreur de taille ε .

Comparaison des solutions du système et de celles de l'asymptotique modifiée pour une impulsion à spectre étalé au temps $T = 0.5$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$

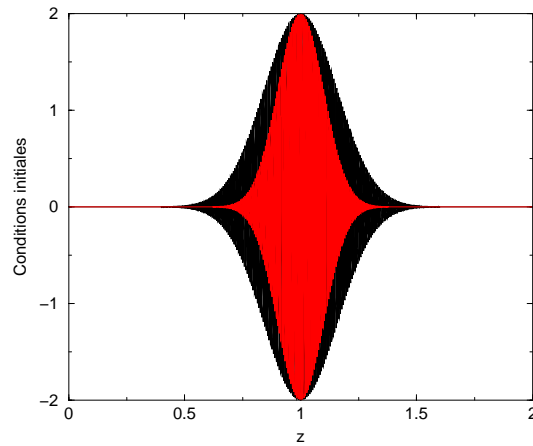


FIG. 4.40 – Donnée initiale (4.23) en noir et en rouge donnée initiale étalée (4.25).

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{lin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{lin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.52751, \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.52691,$$

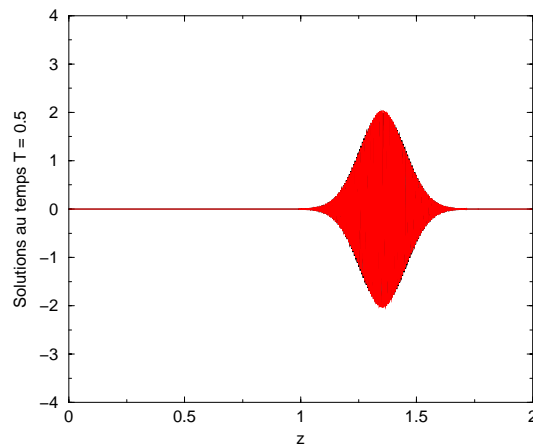


FIG. 4.41 – Comparaison des solutions non linéaires du modèle de départ (en noir) et de l'asymptotique (en rouge).

Ecart obtenu entre la solution non linéaire du système et celle de l'asymptotique

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.266940 \cdot 10^{-2}.$$

On obtient bien une erreur de taille ε .

Comparaison des enveloppes des solutions de l'asymptotique modifiée et de celles de l'asymptotique standard pour une impulsion à spectre étalé au temps $T = 0.5$

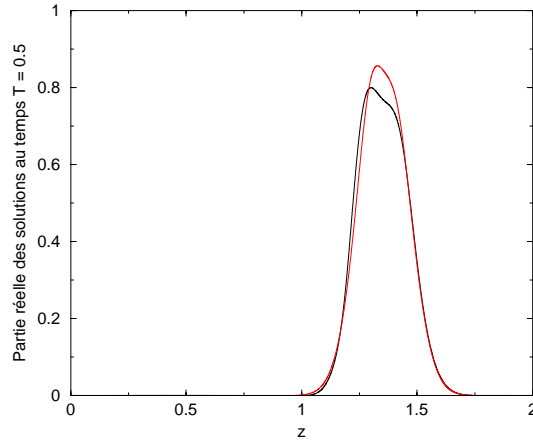


FIG. 4.42 – Comparaison des solutions de l'asymptotique, non linéaire modifiée (en noir) et non linéaire standard (en rouge), pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

Ecart relatif entre les solutions

$$E_{rel}(u_{kerr}, u^\varepsilon) = 0.114853.$$

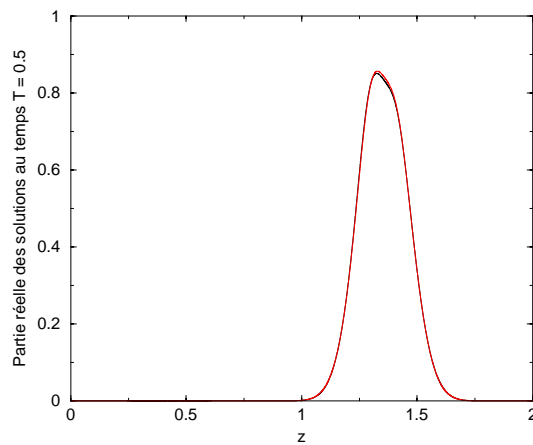


FIG. 4.43 – Comparaison des solutions de l'asymptotique, non linéaire modifiée (en noir) et non linéaire standard (en rouge), pour $\varepsilon = 10^{-3}$

Ecart relatif entre les solutions

$$E_{rel}(u_{kerr}, u^\varepsilon) = 0.107760 \cdot 10^{-1}.$$

Pour le cas $\varepsilon = 10^{-2}$, on voit clairement apparaître l'erreur entre les deux modèles modifié et standard.

Pour terminer cette étude à spectre " étalé ", nous proposons un second cas test en utilisant la condition initiale à spectre étroit précédente (page 196) en modifiant le coefficient μ qui se trouve dans l'exponentielle et ainsi piquer l'impulsion. Les conditions initiales sont ainsi de la forme

$$\mathbf{u}^{0,+}(z) = e^{-60(z-1)^2}, \quad \mathbf{v}^{0,+}(z) = \frac{\varepsilon D_z + ik_L + 1}{i\sqrt{1 - (ik_L + \varepsilon D_z)^2}} \mathbf{u}^{0,+}(z),$$

$$\mathbf{u}^0(z) = \mathbf{u}^{0,+}(z) e^{ik_L \frac{z}{\varepsilon}} + c.c., \quad \mathbf{v}^0(z) = \mathbf{v}^{0,+}(z) e^{ik_L \frac{z}{\varepsilon}} + c.c.$$

Comme précédemment, on montre que le modèle de Schrödinger modifié est plus précis que le modèle de Schrödinger standard. De même, on obtient des erreurs de taille ε entre le modèle de départ et le modèle de Schrödinger modifié. Ces erreurs relatives sont les suivantes,

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.2360051 \cdot 10^{-1}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 0.113695.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-3}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.258734 \cdot 10^{-2}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 0.1076640 \cdot 10^{-1}.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles linéaires pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u_{lin}^\varepsilon, \mathbf{u}_{lin}) = 0.239066 \cdot 10^{-10}, \quad E_{rel}(u_{lin_{kerr}}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.922979 \cdot 10^{-1}.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles linéaires pour $\varepsilon = 10^{-3}$

$$E_{rel}(u_{lin}^\varepsilon, \mathbf{u}_{lin}) = 0.558292 \cdot 10^{-11}, \quad E_{rel}(u_{lin_{kerr}}, \mathbf{u}_{lin}) = 0.918607 \cdot 10^{-2}.$$

Comparaison du modèle asymptotique issu des résultats du chapitre III avec celui issu des résultats du chapitre I

Si on veut comparer le modèle asymptotique issu des résultats du chapitre III avec celui issu des résultats du chapitre I, il faut réellement étaler le spectre de l'impulsion initiale. On réalise cet étalement du spectre, soit en choisissant $\varsigma_0 \simeq \varepsilon$, soit en choisissant μ de l'ordre de 10^{+5} pour $\varepsilon = 10^{-2}$, dans les cas tests ci-dessus.

En prenant, $\varsigma_0 \simeq \varepsilon$, on montre numériquement que le modèle obtenu avec les résultats du chapitre III (4.15) est plus approprié le modèle obtenu avec les résultats du chapitre I (4.22). En effet, dans ce cas, la condition initiale ne se met pas sous la forme théorique proposée au chapitre I pour appliquer les résultats de dérivation systématique. La décomposition proposée au chapitre III est alors plus appropriée. Par contre, en prenant le coefficient μ devant l'exponentielle de l'ordre de 10^{+5} pour $\varepsilon = 10^{-2}$, le modèle obtenu avec les résultats du chapitre I (4.22) est correct et le modèle de Schrödinger standard est mauvais.

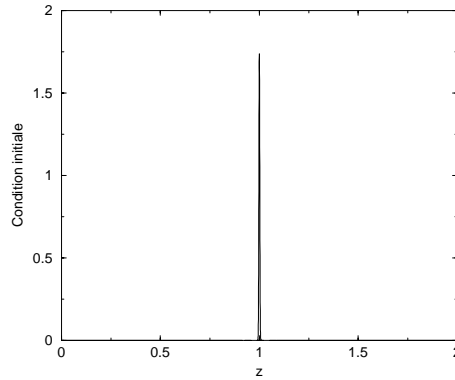


FIG. 4.44 – Condition initiale $\mathbf{u}^{0,+}(z) = e^{-10^5(z-1)^2}$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

Ecarts relatifs entre les solutions du système linéaire et non linéaire

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{ulin}\|_{L_2} + \|\mathbf{v} - \mathbf{vlin}\|_{L_2})}{\|\mathbf{u}\|_{L_2} + \|\mathbf{v}\|_{L_2}} = 0.159801 \cdot 10^{-1}; \quad E_{rel}(\mathbf{u}, \mathbf{ulin}) = 0.161524 \cdot 10^{-1}.$$

On retrouve bien les écarts entre les solutions du système linéaire et celles du non linéaire du même ordre qu'à la figure 4.12, page 174.

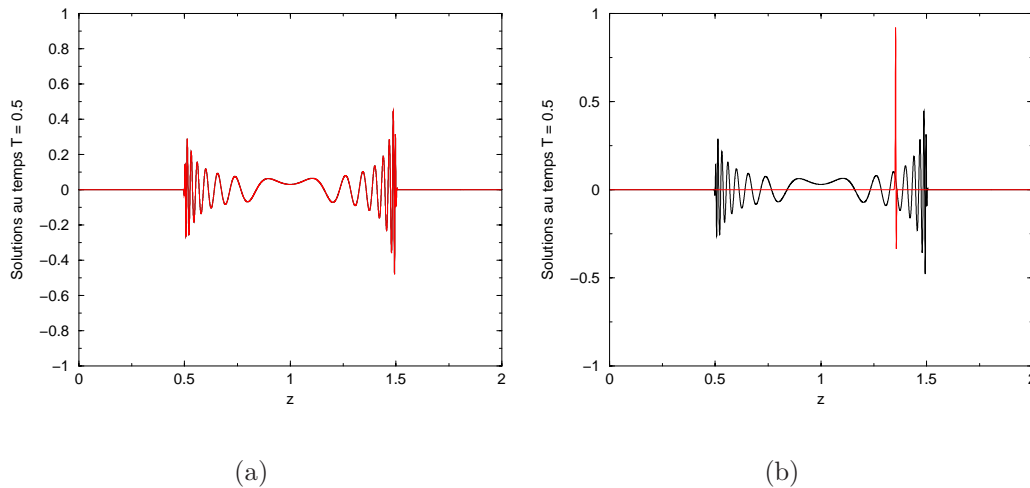


FIG. 4.45 – Donnée initiale $\varepsilon = 10^{-2}$. (a) Comparaison des solutions non linéaires \mathbf{u} (en noir) et u^ε (en rouge) ; (b) Comparaison des solutions non linéaires \mathbf{u} (en noir) et u_{kerr} (en rouge).

Erreurs relatives obtenues entre les modèles non linéaires pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u^\varepsilon, \mathbf{u}) = 0.384397 \cdot 10^{-2}, \quad E_{rel}(u_{kerr}, \mathbf{u}) = 1.097570.$$

Erreurs relatives obtenues entre les modèles linéaires pour $\varepsilon = 10^{-2}$

$$E_{rel}(u_{lin}^\varepsilon, \mathbf{ulin}) = 0.140924 \cdot 10^{-11}, \quad E_{rel}(ulin_{kerr}, \mathbf{ulin}) = 1.086726.$$

On constate que le modèle de Schrödinger modifié est plus approprié que le le modèle de Schrödinger standard, que ce soit en linéaire ou en non linéaire. On retrouve bien les résultats obtenus dans le premier paragraphe de ce chapitre, page 174.

Conclusion

Dans une première partie, nous avons considéré des impulsions ultra-courtes en supposant qu'elles pouvaient être modélisées à l'aide d'une impulsion à spectre continu uniquement. Pour des régimes faiblement non linéaires, nous avons illustré numériquement le résultat énoncé au chapitre II, lorsque les effets non linéaires sont négligeables. En effet, on constate alors que l'on se rapproche de la solution linéaire du modèle simplifié lorsque le spectre de l'impulsion devient de plus en plus large. Cependant les résultats que l'on propose donnent au mieux une erreur relative entre les modèles linéaires et non linéaires de $2 \cdot 10^{-2}$ pour un spectre très "étalé". On peut donc se méfier sérieusement de l'utilité pratique de ce type d'approximation à spectre continu menant à un modèle asymptotique linéaire pour des impulsions ultra-courtes.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons tout d'abord voulu illustrer numériquement la décomposition proposée au chapitre III dans le cadre de l'optique géométrique en exhibant le système composé d'une équation de Schrödinger standard avec effet Kerr pour la partie à spectre discret et une équation de Schrödinger linéaire pour la partie à spectre continu.

Pour une impulsion à spectre discret uniquement, on retrouve bien les solutions du modèle de départ et on a montré que l'erreur commise entre les solutions des deux modèles est d'ordre ε (pages 183 et 184), ce qui est conforme au résultat du théorème 3.2.2 introduit au chapitre III.

Pour une impulsion à spectre purement continu, nous avons obtenu des écarts entre les solutions des deux modèles notables (pages 185 et 186), ainsi pour ce type d'impulsion, cette approximation, n'est pas très bonne en non linéaire et correcte en linéaire.

Enfin, pour une impulsion ayant à la fois une partie à spectre discret et une partie à spectre continu, nous avons obtenu des erreurs entre les solutions des deux modèles d'ordre ε (pages 191 et 192). Cependant les erreurs dues à la partie à spectre continu se répercutent ici, on peut donc dire que dans le cadre de l'optique géométrique et pour des régimes faiblement non linéaires, la décomposition spectre discret, spectre continu n'est pas très satisfaisante.

Pour finir cette étude numérique, nous avons exhibé le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du chapitre I à partir de l'équation singulière.

Nous avons tout d'abord mesuré l'erreur commise entre les deux modèles pour une impulsion classique à spectre discret. Nous avons montré que cette erreur est meilleure (pages 199 et 200) que celle obtenue entre le modèle de départ et le modèle de Schrödinger classique avec effet Kerr. En effet, le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du Chapitre I (4.22) nécessite moins approximation, il est donc plus précis que le modèle de Schrödinger classique avec effet Kerr.

Nous avons également montré, pour ce type d'impulsion, que si l'on ne considère plus une impulsion initiale de taille 1 mais de taille ε , on obtient une erreur entre les solutions du modèle de départ et celles du modèle asymptotique modifié meilleure que précédemment ce qui corrobore les résultats énoncés au chapitre II théorème 2.5.2.

Enfin, nous avons regardé le cas d'une impulsion à spectre légèrement "étalé". Nous avons

ainsi montré que l'erreur commise entre les deux modèles est de taille ε (pages 202 et 203). Ainsi, le modèle de Schrödinger non linéaire modifié, pour des impulsions à spectre légèrement "étalé" ou réellement très "étalé" (page ??), est numériquement performant ainsi que le schéma numérique mis en place.

Nous proposons également en annexe (223), la dérivation des modèles asymptotiques obtenus à partir du modèle simplifié à l'aide de la décomposition du chapitre III et à partir d'une équation singulière et des résultats du chapitre I. Nous laissons les comparaisons numériques de ces modèles pour une étude ultérieure.

Conclusion et Perspectives

Les impulsions picosecondes et l'éclairement intense ouvrent des perspectives nouvelles pour les travaux du CEA tels que le diagnostic des plasmas denses, le laser X, ...

Par une technologie de compression de l'impulsion, il est possible d'obtenir à partir d'un des faisceaux LMJ de très fortes puissances, plusieurs Pétawatts ou dizaines de Pétawatts. Le laser Pétawatt permet de générer une impulsion picoseconde que l'on veut ensuite amplifier pour obtenir la puissance souhaitée. Pour amplifier cette impulsion, on dispose à l'heure actuelle d'amplificateurs de puissance (par exemple le verre dopé au néodyme) qui ne peuvent amplifier en énergie que des impulsions dont la durée optimale est aux alentours de quelques nanosecondes ($T = 10^{-9}s$). Ainsi, pour pouvoir amplifier les impulsions picosecondes émises par le laser Pétawatt, il est essentiel de les allonger temporellement. Pour cela, on utilise le fait que ces impulsions courtes possèdent une largeur spectrale grande. On les allonge alors temporellement en utilisant des paires de réseaux qui dispersent angulairement les différentes longueurs d'onde. On recomprime alors en fin de chaîne l'impulsion à l'aide d'une paire de réseaux identiques à la première.

On a vu au chapitre I (paragraphe 1.3) que l'équation de Schrödinger standard (1) ne permet pas de restituer correctement les effets induits au passage de l'impulsion dans les réseaux de diffraction lors de l'allongement ou de la compression de l'impulsion. En effet, au passage de ces composants, on se trouve dans le cadre spectre "étalé". L'impulsion n'est plus alors réduite dans l'espace de Fourier en temps à un Dirac à la fréquence centrale ω_L mais possède un spectre légèrement plus large. Pour pouvoir modéliser ces impulsions à spectre "étalé" (et ainsi prendre en compte les effets induits au passage des réseaux de diffraction), on a mis en évidence dans cette thèse, par deux approches différentes, un nouveau modèle de Schrödinger non linéaire.

1. Première approche permettant l'obtention du modèle de Schrödinger non linéaire modifié

On a vu au chapitre I que prendre en compte les effets induits au passage des réseaux de diffraction correspondait au cas où l'approximation d'enveloppe $\partial_t \mathcal{E} \ll \omega_L \mathcal{E}$ n'était plus satisfaite. Ainsi, on cherche une impulsion initiale de la forme

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, t; z - v_g t) e^{i(\omega_L t - k_L z)} + c.c., \quad (26)$$

et ne satisfaisant plus l'approximation d'enveloppe $\partial_t \mathcal{E} \ll \omega_L \mathcal{E}$. Ainsi, par une dérivation systématique (paragraphe 1.5), on obtient le modèle de Schrödinger non linéaire modifié

suivant

$$-i\partial_z\mathcal{E} + \frac{1}{2k_L - \frac{2i}{v_g}\partial_t + 2\sigma\partial_{tt}^2}\Delta_{\perp}\mathcal{E} + \sigma\partial_{tt}^2\mathcal{E} + \frac{\gamma_{nl}(\omega_L - i\partial_t)^2}{2c^2(k_L - \frac{i}{v_g}\partial_t + \sigma\partial_{tt}^2)}(|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}) = 0.$$

L'approche proposée au chapitre I a permis de définir un cadre théorique rigoureux menant à la dérivation de notre modèle. Cette dérivation systématique est basée sur une équation singulière qui nécessite de faire le moins d'approximations possible. Pour valider notre modèle, nous l'avons par la suite comparé au modèle de Schrödinger standard avec effet Kerr. En particulier, dans le cas d'un milieu linéaire, nous montrons que le modèle de Schrödinger modifié est meilleur pour les durées d'impulsions qui nous occupent ici (de quelques picosecondes à quelques femtosecondes). Nous avons également considéré le cas d'un milieu non linéaire. Cette étude nous a permis de discuter le choix du terme non linéaire devant apparaître dans le modèle de Schrödinger modifié, soit le terme d'effet Kerr habituel, soit le terme obtenu lors de la dérivation. On a montré que le terme d'effet Kerr est suffisant pour des impulsions de quelques nanosecondes mais que pour des impulsions plus courtes, le terme obtenu lors de la dérivation semble plus approprié. Pour finir ce chapitre, nous avons comparé le modèle de Schrödinger avec effet Kerr au modèle de Schrödinger modifié possédant le terme non linéaire obtenu lors de la dérivation. Nous avons ainsi retrouvé les résultats précédents, à savoir que le modèle de Schrödinger modifié possédant le terme non linéaire calculé par le développement est plus adapté que le modèle de Schrödinger avec effet Kerr pour des impulsions courtes.

Enfin, pour conclure cette première approche, nous avons étudié d'un point de vue théorique (chapitre II) ce nouveau modèle Schrödinger non linéaire modifié. Nous avons tout d'abord établi un théorème d'existence et d'unicité de la solution puis des théorèmes de stabilité. En particulier, nous avons obtenu une estimation d'erreur meilleure que celle obtenue avec le modèle de Schrödinger non linéaire standard.

La méthode qui vient d'être proposée permet de modéliser la propagation d'impulsions dont le spectre dans l'espace de Fourier en temps n'est plus un Dirac à la fréquence centrale ω_L . En effet, le spectre n'est plus légèrement "étalé" autour d'une fréquence centrale, mais est un spectre vraiment large. Dans ce cas, on introduit la notion de spectre continu.

2. Seconde approche permettant l'obtention de modèles de types spectre discret, spectre continu

L'obtention du modèle de Schrödinger usuel repose sur l'hypothèse que le spectre en temps du champ électrique est fortement localisé autour de la fréquence fondamentale ω_L . On parle dans ce cas de spectre discret. Puisque nous cherchons à nous affranchir de cette condition, nous avons considéré des impulsions pour lesquelles le champ électrique est sous forme de deux composantes, la première étant à spectre discret comme précédemment. La seconde composante est supposée avoir un spectre "étalé" *i.e.* non localisé autour d'une fréquence particulière, nous parlons alors de spectre continu ou spectre large. Cette approche a permis une généralisation des outils de l'optique diffractive en étudiant des impulsions à spectre large

et ultra-courtes. A partir de systèmes hyperboliques symétriques non linéaires, on a obtenu dans le cas dispersif, un modèle composé de deux équations de Schrödinger découplées. La première équation régit l'évolution de la partie à spectre discret qui est l'équation de Schrödinger avec effet Kerr. La seconde équation de Schrödinger linéaire pour la partie à spectre purement continu possède le même terme de diffraction que celui obtenu par la première approche. Cette dernière équation est linéaire car, lors de la simplification des termes non linéaires, on a montré que les effets non linéaires étaient négligeables pour les interactions (spectre continu / spectre continu) et également pour les interactions (spectre discret / spectre continu). On a aussi obtenu nos modèles asymptotiques dans le cas faiblement dispersif et non-dispersif.

Lors de la dérivation de notre modèle, nous nous sommes également rendus compte que le fait de considérer une impulsion avec uniquement une partie à spectre continu, nous permettait de décrire l'évolution d'impulsions ultra-courtes (quelques femtosecondes). Pour le cas dispersif, on montre alors que la propagation de l'impulsion est régie par une équation linéaire et pour le cas non-dispersif, on retrouve les résultats énoncés par D. Altermann et J. Rauch [4].

3. Efficacité numérique des modèles précédents

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous présentons un certain nombre de comparaisons numériques entre les modèles asymptotiques obtenus à l'aide des deux approches ci-dessus.

Nous regardons tout d'abord de près le modèle obtenu avec la seconde approche. Une première comparaison numérique permet d'illustrer le fait que les interactions non linéaires étaient bien négligeables pour une impulsion à spectre continu. Les résultats présentés montrent que si l'on augmente la taille du spectre de l'impulsion (page 171), alors les effets non linéaires diminuent (pages 172, 173 et 174). Mais cette diminution n'est pas très importante. Les résultats que l'on propose au chapitre IV donnent au mieux une erreur relative entre les modèles linéaires et non linéaires de $2 \cdot 10^{-2}$ pour un spectre très "étalé". On peut donc se méfier sérieusement de l'efficacité pratique de ce type d'approximation à spectre continu menant à un modèle asymptotique linéaire pour des impulsions ultra-courtes.

Nous avons ensuite, dans le cadre de l'optique géométrique, tenté de justifier la décomposition proposée dans la seconde approche. Pour cela, nous avons comparé les solutions du modèle asymptotique complet (discret + continu) avec les solutions du modèle de départ. Lorsque l'impulsion initiale ne possède qu'une partie à spectre discret, on obtient une erreur entre les solutions des deux modèles d'ordre ε (pages 183 et 184), ce qui est conforme au résultat du théorème 3.2.2.

Lorsque l'impulsion initiale ne possède qu'une partie à spectre continu, on montre pour une forme de condition initiale que les erreurs obtenues entre les deux modèles sont identiques en linéaire et non linéaire. Cependant cette erreur est quand même encore assez élevée (pages 185, 186, 187 et 188). La notion de spectre continu s'avère difficilement utilisable dans la pratique.

Enfin, lorsque l'impulsion initiale possède une partie à spectre continu et une partie à spectre discret, on retrouve les erreurs obtenues pour le cas spectre continu seul (pages 191 et 192). La

décomposition de l'impulsion en une partie à spectre discret et une partie à spectre continu ne semble numériquement pas très satisfaisante.

Pour finir cette étude, nous avons exhibé le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du chapitre I à partir de l'équation singulière.

Nous avons tout d'abord mesuré l'erreur commise entre les deux modèles pour une impulsion classique à spectre discret. Nous avons montré que cette erreur est plus faible (pages 199 et 200) que celle obtenue entre le modèle de départ et le modèle de Schrödinger classique avec effet Kerr. En effet, le modèle asymptotique obtenu au travers des résultats du Chapitre I (4.22) nécessite moins d'approximation, il est donc plus précis que le modèle de Schrödinger classique avec effet Kerr.

Nous avons ensuite montré, pour ce type d'impulsion, que si l'on ne considère plus une impulsion initiale de taille 1 mais de taille ε , on obtient une erreur entre les solutions du modèle de départ et celles du modèle asymptotique modifié meilleure que précédemment ce qui corrobore les résultats énoncés au chapitre II théorème 2.5.2.

Enfin, nous avons regardé le cas d'une impulsion à spectre "étalé". Nous avons ainsi montré que l'erreur commise entre les deux modèles est de taille ε (pages 202 et 203). Ainsi, le modèle de Schrödinger non linéaire modifié, pour ce type d'impulsion à spectre "étalé" ou réellement très "étalé" (page ??), est numériquement performant ainsi que le schéma numérique mis en place.

Nous avons également présenté les modèles asymptotiques dans le cadre de l'optique diffractive. Les comparaisons numériques sont laissées pour une prochaine étude.

Une des extensions possibles à cette étude concerne la modélisation des interactions laser-plasma. En effet, il est possible de dériver le modèle asymptotique en utilisant une méthode similaire à celle décrite lors de la première approche à partir de l'équation singulière. Cette réflexion fait actuellement l'objet d'une thèse, débutée en janvier 2002 au CEA-CESTA sous la direction de T. Colin et G. Gallice.

Annexes

Sommaire

A. Annexe 1, Les transformées de Fourier continues et discrètes

- A.1 Les transformées de Fourier continues
- A.2 Les transformées de Fourier discrètes

B. Annexe 2, Systèmes dispersifs à réseaux

- B.1 Définition du déphasage introduit par un système dispersif
- B.2 Etude vectorielle du déphasage
- B.3 Déphasage apporté par une paire de réseaux parallèles
- B.4 Calcul de la dispersion angulaire $\alpha(\omega)$ apportée par un système dispersif
 - B.4.1 Cas d'un système quelconque
 - B.4.2 B.4.2 Cas de deux réseaux parallèles

C. Annexe 3, Obtention des modèles asymptotiques dans le cadre de l'optique diffractive

- C.1 Modèle asymptotique obtenu par décomposition de la donnée initiale
 - C.2 Obtention de l'équation de Schrödinger modifié non linéaire
-

A. Annexe 1, Les transformées de Fourier continues et discrètes

Nous allons ici faire un bref rappel sur les transformées de Fourier continues et leur lien avec les transformées de Fourier discrètes. Pour plus de détails, se reporter à [51], [27].

A.3 Les transformées de Fourier continues

Soit u une fonction définie sur \mathbb{R} telle que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier continue $\widehat{u}(\omega)$ est donnée par

$$\widehat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} u(t) dt.$$

Sa transformée de Fourier inverse continue $u(t)$ est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \widehat{u}(\omega) d\omega.$$

Une propriété importante, est la relation de Parseval donnée ci-dessous par

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\omega)|^2 d\omega.$$

Ainsi, la norme L^2 de la fonction est la même que celle de sa transformée de Fourier

$$\|u\|_{L^2} = \|\widehat{u}\|_{L^2}.$$

A.4 Les transformées de Fourier discrètes

Entre les transformées de Fourier discrètes et continues, il existe une connection que nous allons détailler ci-après [31]. Reprenons la transformée de Fourier continue d'une fonction u ,

$$\widehat{u}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\omega t} u(t) dt.$$

On commence par faire l'approximation suivante

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\omega) &\simeq \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2i\pi\omega t} dt \\ &= \int_0^T u(t - T/2) e^{-2i\pi\omega(t-T/2)} dt \\ &= e^{i\pi\omega T} \int_0^T u(t - T/2) e^{-2i\pi\omega t} dt. \end{aligned}$$

On approche ensuite l'intégrale par la méthode des rectangles, où M est le nombre de points de discrétisation et $h = \frac{T}{M}$, ainsi, on obtient

$$\widehat{u}(\omega) \simeq e^{i\pi\omega T} h \sum_{p=0}^{M-1} e^{-2i\pi\omega ph} u(ph - T/2).$$

Enfin, en notant $\omega = \frac{j}{T}$ pour $j = 0, \dots, M-1$, on aboutit à

$$\widehat{u}\left(\frac{j}{T}\right) \simeq e^{i\pi j} h \sum_{p=0}^{M-1} e^{-2i\pi jp/M} u(ph - T/2) = (-1)^j h \sum_{p=0}^{M-1} e^{-2i\pi jp/M} u_p^h,$$

où le vecteur $u^h = (u(-T/2), \dots, u((M-1)h - T/2))$. On a alors obtenu une bonne approximation de la transformée de Fourier continue, en posant $n = p + 1$, $m = j + 1$ et $u_p^h = u_n$, alors pour $m = 1, \dots, M$, on a

$$\widehat{u}\left(\frac{m-1}{T}\right) \simeq -(-1)^m h \widehat{u}_m = -(-1)^m h \sum_{n=1}^M e^{-2\pi i(m-1)(n-1)/M} u_n.$$

En résumé, la transformée de Fourier discrète de la fonction u se note

$$\widehat{u}_m = \sum_{n=1}^M e^{-2\pi i(m-1)(n-1)/M} u_n, \quad \text{pour } m = 1, \dots, M,$$

et la transformée de Fourier inverse discrète se note

$$u_n = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M e^{2\pi i(m-1)(n-1)/M} \widehat{u}_m \quad \text{pour } n = 1, \dots, M.$$

Pour calculer numériquement ces transformées de Fourier discrètes, on peut utiliser des procédures prédéfinies comme par exemple celles de la bibliothèque IMSL [31]. On peut aussi utiliser des algorithmes tels que celui de Burrus et Parks [17] qui est actuellement implémenté dans le code de calcul MIRÒ au CEA/CESTA.

B. Annexe 2, Systèmes dispersifs à réseaux

On veut ici montrer comment sont calculés les termes de phase d'ordre élevé qui interviennent dans le calcul du déphasage induit par un système dispersif à réseaux [48].

B.1 Définition du déphasage introduit par un système dispersif

Les impulsions que nous considérons ici sont des impulsions courtes voire ultra-courtes dont les durées vont de la picosecondes à quelques femtosecondes. On ne peut pas facilement amplifier de telles impulsions avec les milieux amplificateurs existants actuellement. C'est pourquoi, on utilise en début de chaîne un système dispersif à réseaux pour étirer l'impulsion avant amplification et un autre système dispersif à réseau pour recomprimer l'impulsion en fin de chaîne. L'objectif est donc de calculer de manière simple le terme de phase apporté par ce système dispersif composé de deux réseaux parallèles.

Le principe de fonctionnement de ces systèmes est le suivant : le premier réseau disperse les fréquences (1), le second réseau parallèle au premier rattrape cette dispersion (2). On effectue un double passage dans l'ensemble (3) pour obtenir une impulsion allongée homogène en sortie (4).

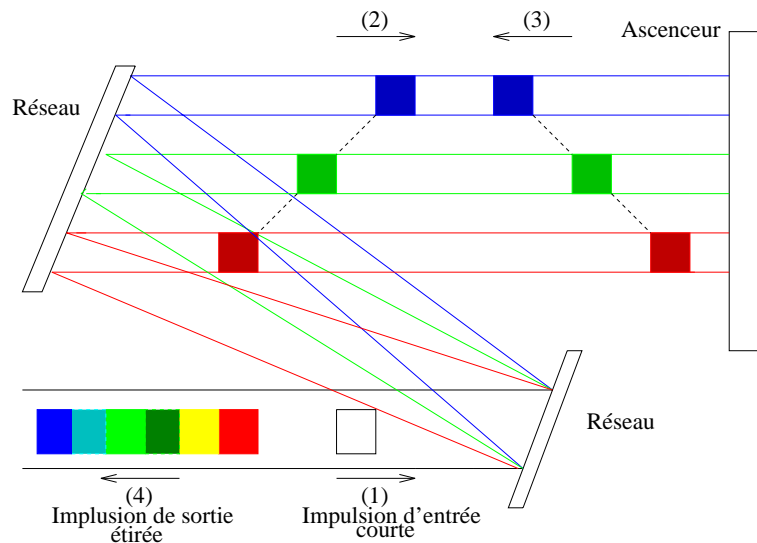


FIG. B.1 – Système dispersif à réseaux.

On peut présenter l'effet de ce système dispersif à réseaux (figure B.1) sur une impulsion à spectre large en considérant des composantes spectrales monochromatiques. Ces composantes entrent en même temps dans le système, mais parcourent des chemins différents. Elles acquièrent alors un retard et ainsi toutes les composantes se retrouvent réparties en temps en sortie du système.

Considérons une onde plane de champ $\widehat{\mathcal{E}}(0, \omega, x, y)$ se propageant sur une distance z . Une variation de sa phase φ avec une pulsation ω entraîne une modification de sa forme temporelle $\mathcal{E}(z, t, x, y)$ décrite par

$$\mathcal{E}(z, t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{E}}(0, \omega, x, y) e^{-i\varphi(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (\text{B.27})$$

Le terme de déphasage lié à la propagation de l'onde plane dans le système du point O au point M alors est définie par

$$\varphi(\omega) = \vec{k}(\omega) \cdot \vec{OM} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \vec{u}(\omega) \cdot \vec{OM},$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire dans la direction du vecteur d'onde \vec{k} .

B.2 Etude vectorielle du déphasage

Pour étudier le déphasage, on a besoin de connaître les différents domaine du système, schéma suivant,

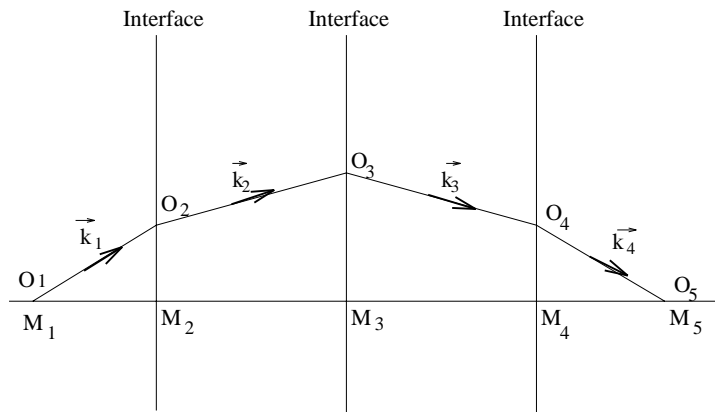


FIG. B.2 – Schéma du système dispersif, composé de quatre domaines.

Les quatre domaines sont séparés les uns des autres par des interfaces. Pour calculer la phase apportée lors de la propagation, on choisit une étude vectorielle de M_1 à M_5 . Le déphasage consiste alors à déterminer le vecteur d'onde pour chaque pulsation, dans chaque espace

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega}{c} \sum_{i=1}^4 n_i(\omega) \vec{u}_i(\omega) M_i \vec{M}_{i+1}. \quad (\text{B.28})$$

B.3 Déphasage induit par une paire de réseaux parallèles

Le point A est choisi comme étant le point d'incidence sur le premier réseau et le point B de sorte que la distance AB soit la distance entre les deux réseaux, notée L_R .

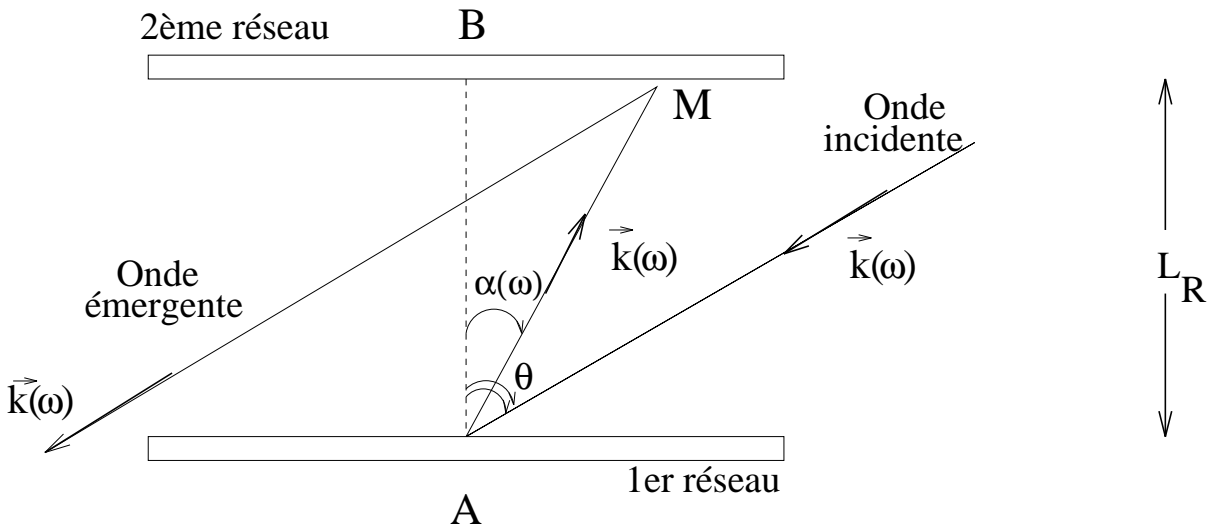


FIG. B.3 – Définition du déphasage par un système de deux réseaux parallèles.

Avec l'équation (B.28), le déphasage entre les deux réseaux s'écrit alors

$$\varphi(\alpha) = \vec{k}(\alpha) \vec{AB} = \frac{\omega}{c} L_R \cos \alpha(\omega).$$

Il ne dépend que de la loi de dispersion des réseaux, donnée par

$$\sin(\theta) - \nu \sin(\alpha(\omega)) = pN\lambda,$$

où θ est l'angle incident, α est l'angle de diffraction, N est le nombre de traits du réseau par unité de longueur, p est l'ordre de la diffraction et ν valant ± 1 selon que l'on considère un réseau en réflexion ($\nu = -1$) ou un réseau en transmission ($\nu = 1$).

B.4 Calcul de la dispersion angulaire $\alpha(\omega)$ apportée par un système dispersif

B.4.1 Cas d'un système quelconque

Soit un système quelconque dispersant angulairement les différentes longueurs d'onde d'une impulsion suivant une loi $\alpha(\omega)$ décrite par

$$\alpha(\omega) = \alpha(\omega_L) + \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L (\omega - \omega_L) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{d^2\omega}\right)_L (\omega - \omega_L)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\alpha}{d^3\omega}\right)_L (\omega - \omega_L)^3 + \dots$$

Les indices L correspondent aux valeurs calculées pour l'impulsion ω_L .

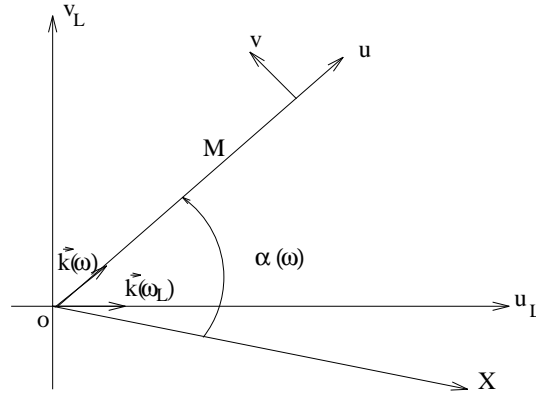


FIG. B.4 – Evolution du vecteur d'onde après le passage dans le système dispersif.

Le déphasage apporté par le système entre le point O et un point quelconque M de l'espace s'écrit

$$\phi(\omega) = \vec{k} \cdot \vec{OM} = \frac{\omega}{c} \vec{u} \cdot \vec{r}, \quad \text{avec} \quad \vec{OM} = \vec{r}.$$

De plus, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont liés par les relations

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{u}}{d\omega}\right) = \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) \vec{v}, \\ \left(\frac{d\vec{v}}{d\omega}\right) = -\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) \vec{u}. \end{cases}$$

Ainsi, on peut calculer les différentes dérivées du déphasage induit par le système dispersif.

- Premier ordre

$$\left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_L = \frac{1}{c} \vec{u}_L \cdot \vec{r} + \frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L \vec{v}_L \cdot \vec{r}, \quad (\text{B.29})$$

- Deuxième ordre

$$\left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2}\right)_L = -\frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^2 \vec{u}_L \cdot \vec{r} + \left[\frac{2}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L + \frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)_L\right] \vec{v}_L \cdot \vec{r}, \quad (\text{B.30})$$

- Troisième ordre

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3\phi}{d\omega^3}\right)_L &= -\frac{3}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L \left[\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L + \omega_L \left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)_L\right] \vec{u}_L \cdot \vec{r} \\ &+ \left[-\frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^3 + \frac{3}{c} \left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)_L + \frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d^3\alpha}{d\omega^3}\right)_L\right] \vec{v}_L \cdot \vec{r}, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

- Quatrième ordre

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^4\phi}{d\omega^4}\right)_L &= \left[-\frac{12}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L \left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)_L - \frac{3\omega_L}{c} \left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)_L^2 - \frac{4\omega_L}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L \left(\frac{d^3\alpha}{d\omega^3}\right)_L + \frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^4\right] \vec{u}_L \cdot \vec{r} \\ &+ \left[-\frac{4}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^3 - \frac{6\omega_L}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L \left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)_L + \frac{4}{c} \left(\frac{d^3\alpha}{d\omega^3}\right)_L + \frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d^4\alpha}{d\omega^4}\right)_L\right] \vec{v}_L \cdot \vec{r}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

B.4.2 Cas de deux réseaux parallèles

Considérons maintenant notre système dispersif constitué de deux réseaux parallèles, dont la loi d'évolution est donnée par

$$\sin(\theta) - \nu \sin \alpha(\omega) = \frac{2\pi c N}{\omega} = N\lambda,$$

où θ est l'angle incident et α l'angle de diffraction.

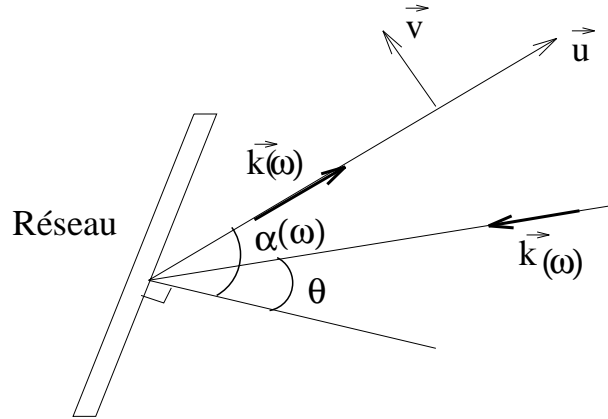


FIG. B.5 – Schéma d'entrée d'un système à réseaux compresseur, angle d'incidence θ et angle de réfraction α .

La loi de dispersion est décrite par

$$\begin{cases} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L = -\frac{\nu 2\pi c N}{\omega_L^2 \cos \alpha_L}, \\ \left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)_L = \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^2 \tan \alpha_L - 2\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L \frac{\cos \alpha_L}{\omega_L}, \\ \left(\frac{d^3\alpha}{d\omega^3}\right)_L = \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^3 (3 \tan^2 \alpha_L - 1) - \frac{6}{\omega} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^2 \tan \alpha_L + \frac{6}{\omega_L^2} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L, \end{cases}$$

ainsi, on peut adapter les équations (B.29) à (B.32) de la manière suivante.

- Premier ordre

$$\left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_L = \frac{1}{c} \vec{u}_L \cdot \vec{r} + \nu \frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L \vec{v}_L \cdot \vec{r},$$

- Deuxième ordre

$$\left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2}\right)_L = -\frac{\omega_L}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^2 \vec{u}_L \cdot \vec{r} + \nu \frac{\omega_L \tan \alpha}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^2 \vec{v}_L \cdot \vec{r},$$

- Troisième ordre

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3\phi}{d\omega^3}\right)_L &= \frac{3}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L \left[\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L - \omega_L \tan \alpha \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^2 \right] \vec{u}_L \cdot \vec{r} \\ &+ \nu \left[\frac{3 \tan \alpha}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^2 + \frac{3\omega_L \tan^2 \alpha}{c} \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_L^3 \right] \vec{v}_L \cdot \vec{r}. \end{aligned}$$

En connaissant les différentes dérivées pour le déphasage, on a

$$\varphi(\omega) = \vec{k}(\alpha(\omega)) \vec{AB} = \frac{\omega}{c} L_R \cos(\alpha(\omega)).$$

En remarquant de plus que

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = L_R \cos(\alpha), \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \vec{r} = L_R \sin(\alpha).$$

Cette phase devient, en utilisant un développement autour de la fréquence fondamentale ω_L ,

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_L) + \phi(\Omega), \quad \text{où} \quad \phi(\Omega) = T_1 \Omega + \frac{T_2}{2} \Omega^2 + \frac{T_3}{6} \Omega^3 + \frac{T_4}{24} \Omega^4 + \dots \quad \text{et} \quad \Omega = \omega - \omega_L. \quad (\text{B.33})$$

Tous ces termes décrivent un système parfait de deux réseaux parallèles, les coefficients T_i étant donnés par les formules suivantes.

- Le décalage temporel (délai de propagation)

$$T_1 = \left(\frac{d\phi}{d\omega} \right) = \frac{L_R}{c} \left[\frac{1 + \sin(\theta) \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right],$$

- Le terme quadratique (à l'origine de l'étirement ou de la compression)

$$T_2 = \left(\frac{d^2\phi}{d^2\omega} \right) = -L_R \frac{N^2 \lambda_L^3}{2\pi c^2} \frac{1}{\cos^3(\alpha)},$$

- Le troisième ordre

$$T_3 = \left(\frac{d^3\phi}{d^3\omega} \right) = 3L_R \frac{N^2 \lambda_L^4}{4\pi^2 c^3} \left[\frac{1 + \sin(\theta) \sin(\alpha)}{\cos^5(\alpha)} \right],$$

- Le quatrième ordre

$$T_4 = \left(\frac{d^4\phi}{d^4\omega} \right) = 3L_R \frac{N^2 \lambda_L^5}{8\pi^3 c^4} \left[\frac{\cos^2(\theta) \cos^2(\alpha) - 5(1 + \sin(\theta) \sin(\alpha))^2}{\cos^7(\alpha)} \right].$$

Remarque 1. • *Le terme de phase est directement proportionnel à la distance L_R que l'on introduit entre les réseaux. Il est donc possible d'adapter le terme de phase uniquement en modifiant l'écart entre les réseaux.*

• *Le terme de phase du second ordre T_2 est de signe négatif, ce type de dispositif est donc appelé "système dispersif négatif". Il est possible d'introduire un terme positif en modifiant le signe de la distance L_R entre les deux réseaux. Les systèmes dispersifs négatifs sont plus souvent utilisés pour étirer une impulsion laser courte, alors qu'on utilise un système dispersif positif symétrique pour les recomprimer.*

C. Annexe 3, Obtention des modèles asymptotiques dans le cadre de l'optique diffractive

Comme dans le cadre de l'optique géométrique, nous pouvons comparer la solution du modèle simplifié avec la solution des différents modèles asymptotiques obtenus avec les résultats des chapitres I et III. En revanche, nous voulons ici regarder des solutions en temps long. Nous allons commencer ce paragraphe en rappelant l'obtention du modèle asymptotique en décomposant la condition initiale en une partie à spectre discret et une partie à spectre continu. Nous verrons ensuite l'obtention du modèle asymptotique correspondant au Chapitre I qui découle de l'équation singulière.

C.1 Modèle asymptotique obtenu par décomposition de la donnée initiale

Reprenons le modèle simplifié non linéaire, sans dimension introduit au chapitre IV,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{v}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}^\varepsilon = (|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{v}^\varepsilon, \\ \partial_t \mathbf{v}^\varepsilon + \partial_z \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon = -(|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2) \mathbf{u}^\varepsilon. \end{cases}$$

Par la suite, on désigne par \mathbf{h}^ε le vecteur $(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)^T$. On considère également des conditions initiales de la forme

$$\mathbf{h}_{t=0}^\varepsilon(z) = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{h}^{\varepsilon,0}(z, 0, \frac{z}{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon} (\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)(z, 0, \frac{z}{\varepsilon}),$$

avec $\mathbf{h}^{\varepsilon,0}(z, 0, \frac{z}{\varepsilon})$ donnée par

$$\mathbf{h}^{\varepsilon,0}(z, 0, \frac{z}{\varepsilon}) = \mathbf{h}_I^{\varepsilon,0}(z) e^{ik_L \frac{z}{\varepsilon}} + c.c + \mathbf{h}_{II}^{\varepsilon,0}(z, 0, \frac{z}{\varepsilon}),$$

la composante $\mathbf{h}_{II}^{\varepsilon,0}$ ayant un spectre purement continu et la composante $\mathbf{h}_I^{\varepsilon,0}$ correspondant à une impulsion dont la fréquence centrale vaut ω_L et le vecteur d'onde associé vaut $\vec{K} = (0, 0, k_L)^T$. Le fait de prendre un terme source de taille $\sqrt{\varepsilon}$ indique que l'on obtient au à l'ordre deux du développement les effets non linéaires et diffractifs au même temps. Dans le cadre de l'optique diffractive, on est amené à chercher une solution approchée h^ε de la solution exacte \mathbf{h}^ε de la forme

$$h^\varepsilon(t, z) = \mathcal{H}^\varepsilon(\varepsilon t, t, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}) \text{ avec } \mathcal{H}^\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2.$$

On rappelle également que la solution approchée se décompose de manière unique (proposition 3.1.2 du chapitre III)

- en une partie à spectre discret $(\mathcal{H}_I^\varepsilon(\varepsilon t, t, z) e^{i\theta} + c.c)$ avec $\theta = \left(k_L \frac{z}{\varepsilon} - \omega_L \frac{t}{\varepsilon} \right)$,

- et une partie à spectre purement continu $\mathcal{H}_{II}^\varepsilon(\varepsilon t, t, z, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon})$.

Notations. On note par la suite $z_0 = \frac{z}{\varepsilon}$, $t_0 = \frac{t}{\varepsilon}$ et $\tau = \varepsilon t$.

C.1.a. Développement asymptotique

Comme dans le cadre de l'optique géométrique, on peut totalement découpler l'obtention de l'équation de Schrödinger standard avec effet Kerr pour la partie à spectre discret de l'obtention de l'équation de Schrödinger linéaire pour la partie à spectre continu. Les deux premiers ordres du développement, pour la partie à spectre discret et pour la partie à spectre continu, sont identiques à ceux obtenus dans le cadre de l'optique géométrique. Cependant, les effets non linéaires n'apparaissent qu'à l'ordre suivant en optique diffractive. En résumé, on obtient

Pour la partie à spectre discret

La relation de dispersion s'écrit

$$\omega_L^2 = 1 + k_L^2, \implies \omega_L = \pm \sqrt{1 + k_L^2}. \quad (\text{C.34})$$

D'où la condition de polarisation donnée par

$$\mathcal{V}_{0,I} = \frac{(k_L - i)}{\omega_L} \mathcal{U}_{0,I}. \quad (\text{C.35})$$

Ainsi que l'équation de transport à la vitesse de groupe suivante

$$\partial_t \mathcal{U}_{0,I} + \omega'(k_L) \partial_z \mathcal{U}_{0,I} = 0, \quad \text{avec } \omega'(k_L) = \frac{k_L}{\omega_L}. \quad (\text{C.36})$$

Pour la partie à spectre purement continu

“La relation de dispersion” s'écrit

$$\partial_{t_0} = \pm i \sqrt{1 - \partial_{z_0}^2}, \quad (\text{C.37})$$

et

$$\mathcal{U}_{0,II}(\tau, t, z, t_0, z_0) = \mathcal{U}_{0,II}^+(\tau, t, z, 0, z_0) e^{i \sqrt{1 - \partial_{z_0}^2} t_0} + \mathcal{U}_{0,II}^-(\tau, t, z, 0, z_0) e^{-i \sqrt{1 - \partial_{z_0}^2} t_0}. \quad (\text{C.38})$$

D'où les “conditions de polarisation” données par

$$\partial_{t_0} \mathcal{U}_{0,II} = -(\partial_{z_0} - 1) \mathcal{V}_{0,II}, \quad (\text{C.39})$$

et

$$\partial_{t_0} \mathcal{V}_{0,II} = -(\partial_{z_0} + 1) \mathcal{U}_{0,II}. \quad (\text{C.40})$$

Et "l'équation de transport à la vitesse de groupe" s'écrit

$$\partial_{t_0} \partial_t \mathcal{U}_{0,II} - \partial_{z_0} \partial_z \mathcal{U}_{0,II} = 0. \quad (\text{C.41})$$

Voyons maintenant l'obtention du dernier ordre du développement pour les deux parties.

Dernier ordre du développement pour la partie à spectre discret

On résout le système suivant

$$\begin{cases} -i\omega_L \mathcal{U}_{2,I} + (ik_L - 1) \mathcal{V}_{2,I} + \partial_t \mathcal{U}_{1,I} + \partial_z \mathcal{V}_{1,I} + \partial_\tau \mathcal{U}_{0,I} = (|\mathcal{U}_{0,I}|^2 + |\mathcal{V}_{0,I}|^2) \mathcal{V}_{0,I}, \\ -i\omega_L \mathcal{V}_{2,I} + (ik_L + 1) \mathcal{U}_{2,I} + \partial_t \mathcal{V}_{1,I} + \partial_z \mathcal{U}_{1,I} + \partial_\tau \mathcal{V}_{0,I} = -(|\mathcal{U}_{0,I}|^2 + |\mathcal{V}_{0,I}|^2) \mathcal{U}_{0,I}. \end{cases}$$

Avec la seconde équation, on exprime $\mathcal{V}_{2,I}$ en fonction de $\mathcal{U}_{2,I}$, $\mathcal{V}_{1,I}$, $\mathcal{U}_{1,I}$, $\mathcal{V}_{0,I}$ et $\mathcal{U}_{0,I}$,

$$\mathcal{V}_{2,I} = \frac{(k_L - i)}{\omega_L} \mathcal{U}_{2,I} - \frac{i}{\omega_L} \partial_t \mathcal{V}_{1,I} - \frac{i}{\omega_L} \partial_z \mathcal{U}_{1,I} - \frac{i}{\omega_L} \partial_\tau \mathcal{V}_{0,I} - \frac{i}{\omega_L} (|\mathcal{U}_{0,I}|^2 + |\mathcal{V}_{0,I}|^2) \mathcal{U}_{0,I},$$

donc en injectant cette relation dans la première équation du système ci-dessus et en utilisant les relations (C.35) et (C.36), on aboutit à l'équation de Schrödinger standard avec effet Kerr, qui s'écrit comme suit

$$-i\partial_\tau \mathcal{U}_{0,I} + \frac{1}{2\omega_L} \partial_z^2 \mathcal{U}_{0,I} + \frac{4}{\omega_L} |\mathcal{U}_{0,I}|^2 \mathcal{U}_{0,I} = 0.$$

Voyons maintenant comment s'écrit l'équation de Schrödinger linéaire avec le nouveau terme de diffraction pour la partie à spectre continu.

Dernier ordre du développement pour la partie à spectre purement continu

On résout le système suivant

$$\begin{cases} \partial_{t_0} \mathcal{U}_{2,II} + (\partial_{z_0} - 1) \mathcal{V}_{2,II} + \partial_t \mathcal{U}_{1,II} + \partial_z \mathcal{V}_{1,II} + \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II} = (|\mathcal{U}_{0,II}|^2 + |\mathcal{V}_{0,II}|^2) \mathcal{V}_{0,II}, \\ \partial_{t_0} \mathcal{V}_{2,II} + (\partial_{z_0} + 1) \mathcal{U}_{2,II} + \partial_t \mathcal{V}_{1,II} + \partial_z \mathcal{U}_{1,II} + \partial_\tau \mathcal{V}_{0,II} = -(|\mathcal{U}_{0,II}|^2 + |\mathcal{V}_{0,II}|^2) \mathcal{U}_{0,II}. \end{cases}$$

Comme on a montré dans le chapitre précédent que les effets non linéaires sont négligeables lorsque l'on prend une condition initiale à spectre continu, on peut considérer uniquement la partie linéaire du système ci-dessus pour obtenir le modèle asymptotique

$$\begin{cases} \partial_{t_0} \mathcal{U}_{2,II} + (\partial_{z_0} - 1) \mathcal{V}_{2,II} + \partial_t \mathcal{U}_{1,II} + \partial_z \mathcal{V}_{1,II} + \partial_\tau \mathcal{U}_{0,II} = 0, \\ \partial_{t_0} \mathcal{V}_{2,II} + (\partial_{z_0} + 1) \mathcal{U}_{2,II} + \partial_t \mathcal{V}_{1,II} + \partial_z \mathcal{U}_{1,II} + \partial_\tau \mathcal{V}_{0,II} = 0. \end{cases}$$

Grâce à la seconde équation, on exprime $\mathcal{V}_{2,II}$ en fonction de $\mathcal{V}_{1,II}$, $\mathcal{U}_{2,II}$, $\mathcal{U}_{1,II}$ et de $\mathcal{V}_{0,II}$,

$$\mathcal{V}_{2,II} = -\partial_{t_0}^{-1}(\partial_{z_0} + 1)\mathcal{U}_{2,II} - \partial_{t_0}^{-1}\partial_t\mathcal{V}_{1,II} - \partial_{t_0}^{-1}\partial_z\mathcal{U}_{1,II} - \partial_{t_0}^{-1}\partial_\tau\mathcal{V}_{0,II},$$

donc en injectant cette relation dans la première équation du système précédent et en utilisant les relations (C.40) et (C.41), on obtient une équation de Schrödinger linéaire pour la partie à spectre continu

$$\partial_{t_0}\partial_\tau\mathcal{U}_{0,II} + \frac{1}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,II} = 0.$$

Le modèle asymptotique pour l'optique diffractive se met donc sous la forme

$$\begin{cases} -i\partial_\tau\mathcal{U}_{0,I} + \frac{1}{2\omega_L}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,I} + \frac{4}{\omega_L}|\mathcal{U}_{0,I}|^2\mathcal{U}_{0,I} = 0, \\ \partial_{t_0}\partial_\tau\mathcal{U}_{0,II} + \frac{1}{2}\partial_z^2\mathcal{U}_{0,II} = 0. \end{cases} \quad (\text{C.42})$$

Voyons maintenant comment s'écrit le modèle asymptotique si on ne décompose plus la condition initiale en une partie à spectre discret et une partie à spectre continu, mais que l'on raffine simplement le modèle asymptotique standard.

C.2 Obtention de l'équation de Schrödinger modifiée non linéaire

Dans cette partie, on applique les résultats établis dans la première partie du chapitre I sur le modèle simplifié non linéaire (4.1). Ainsi, on obtient une équation de Schrödinger non linéaire possédant le nouveau terme de diffraction sans décomposer la condition initiale en une partie à spectre continu et une partie à spectre discret. Reprenons le système simplifié non linéaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t\mathbf{u}^\varepsilon + \partial_z\mathbf{v}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{v}^\varepsilon = (|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2)\mathbf{v}^\varepsilon, \\ \partial_t\mathbf{v}^\varepsilon + \partial_z\mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{u}^\varepsilon = -(|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2)\mathbf{u}^\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{C.43})$$

Ce modèle simplifié est bien du type (1.21)

$$L^\varepsilon(\partial)\mathbf{h}^\varepsilon = f(\mathbf{h}^\varepsilon),$$

avec

$$\mathbf{h}^\varepsilon = (\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)^T \in \mathbb{C}^4,$$

et la non linéarité f d'ordre trois s'écrit

$$f(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = ((|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2)\mathbf{v}^\varepsilon, -(|\mathbf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathbf{v}^\varepsilon|^2)\mathbf{u}^\varepsilon)^T. \quad (\text{C.44})$$

L'opérateur $L^\varepsilon(\partial)$ est donné par $L^\varepsilon(\partial) = \partial_t + A(\partial_z) + \frac{L_0}{\varepsilon}$, avec

$$A(\partial_z) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution approchée h^ε de la solution exacte \mathbf{h}^ε de la forme

$$h^\varepsilon(t, z) = \mathcal{H}^\varepsilon(\varepsilon t, t, z, \theta) \Big|_{\theta = \frac{(k_L z - \omega_L t)}{\varepsilon}},$$

ainsi, en injectant cette solution approchée dans le système (4.1), on obtient l'équation singulière suivante

$$\partial_\tau \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (\partial_t \mathcal{H}^\varepsilon + A(\partial_z) \mathcal{H}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} (-\omega_L \partial_\theta + k_L A(\partial_\theta) + L_0) \mathcal{H}^\varepsilon = f(\mathcal{H}^\varepsilon).$$

On commence par chercher la valeur propre $\lambda_{j_0}^\pm(k_L, 0) = \pm\omega_L(k_L)$ pour notre système. Pour cela, on regarde comment s'écrit la relation de dispersion qui est obtenue en calculant $\det(-i\omega_L Id + ik_L A + L_0) = 0$. Cette relation est de la forme

$$\omega_L^2 - k_L^2 - 1 = 0,$$

ainsi, on obtient l'expression de $\lambda_{j_0}^\pm(k_L, 0)$ sous la forme

$$\lambda_{j_0}^\pm(k_L, 0) := \pm\omega(k_L) = \pm\sqrt{1 + k_L^2}. \quad (\text{C.45})$$

On va maintenant pouvoir appliquer les résultats obtenus au Chapitre I, paragraphe (1.5.2). On commence par reformuler l'équation singulière sous la forme

$$\partial_\tau \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \partial_t \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (-\omega_L \partial_\theta + A(k_L \partial_\theta + \varepsilon \partial_z) + L_0) \mathcal{H}^\varepsilon = f(\mathcal{H}^\varepsilon).$$

La transformée de Fourier de cette équation suivant les variables (θ, z) , dont les variables duales sont respectivement $l \in \mathbb{Z}$ et $\zeta_1 \in \mathbb{R}$, s'écrit

$$\partial_\tau \widehat{\mathcal{H}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \partial_t \widehat{\mathcal{H}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (-i\omega_L l + iA(k_L l + \varepsilon \zeta_1) + L_0) \widehat{\mathcal{H}}^\varepsilon = \widehat{f(\mathcal{H}^\varepsilon)}.$$

On peut ainsi diagonaliser la famille de matrices $iA(k_L l + \varepsilon \zeta_1) + L_0$. Les valeurs propres associées à cette famille de matrices sont de la forme

$$\lambda_j^\pm(k_L l + \varepsilon \zeta_1, 0) = \pm\sqrt{1 + (k_L l + \varepsilon \zeta_1)^2}, \quad j = 1, 2, \quad (\text{C.46})$$

et les projecteurs propres s'écrivent

$$\widehat{\Pi}_j^\pm(k_L l + \varepsilon \zeta_1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 & \frac{ik_L l + i\varepsilon \zeta_1 - 1}{\sqrt{1 + (k_L l + \varepsilon \zeta_1)^2}} \\ \frac{ik_L l + i\varepsilon \zeta_1 + 1}{\sqrt{1 + (k_L l + \varepsilon \zeta_1)^2}} & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.47})$$

L'équation diagonalisée se réécrit, par exemple pour les valeurs propres positives,

$$\partial_\tau \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \partial_t \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (-i\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0)) \mathcal{H}^\varepsilon = \Pi_{j_0}^+(ik_L + \varepsilon D_z) f(\mathcal{H}^\varepsilon).$$

Regardons de plus près le terme $(-i\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0))$. On a

$$-i\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0) = i \left(\frac{\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0)^2 - \lambda_{j_0}^+(k_L, 0)^2}{\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + \lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z)} \right),$$

avec

$$\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z, 0)^2 - \lambda_{j_0}^+(k_L, 0)^2 = -2ik_L\varepsilon\partial_z - \varepsilon^2\partial_z^2,$$

et

$$\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + \lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z) = \sqrt{1 + k_L^2} + \sqrt{1 - |ik_L + \varepsilon D_z|^2},$$

donc

$$-i\lambda_{j_0}^+(k_L, 0) + i\lambda_{j_0}^+(k_L + \varepsilon D_z) = \frac{2k_L\varepsilon\partial_z - i\varepsilon^2\partial_z^2}{\sqrt{1 + k_L^2} + \sqrt{1 - |ik_L + \varepsilon D_z|^2}}.$$

L'équation s'écrit alors en faisant intervenir la vitesse de groupe $\lambda'_{j_0}(k_L, 0) = \frac{k_L}{\omega_L}$,

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(\partial_t \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{k_L}{\omega_L} \partial_z \mathcal{H}^\varepsilon \right) + \left(\frac{2k_L\varepsilon\partial_z - i\varepsilon^2\partial_z^2}{\sqrt{1 + k_L^2} + \sqrt{1 - |ik_L + \varepsilon D_z|^2}} - \frac{k_L}{\omega_L} \partial_z \right) \mathcal{H}^\varepsilon \\ = \Pi_{j_0}^+(ik_L + \varepsilon D_z) f(\mathcal{H}^\varepsilon), \end{aligned}$$

ce qui donne pour la partie linéaire, en mettant tout au même dénominateur,

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(\partial_t \mathcal{H}^\varepsilon + \frac{k_L}{\omega_L} \partial_z \mathcal{H}^\varepsilon \right) + \left(\frac{i(1 - \varepsilon \frac{k_L^2}{\omega_L^2})\partial_z^2}{\sqrt{1 + k_L^2} + \sqrt{1 - |ik_L + \varepsilon D_z|^2}} \right) \mathcal{H}^\varepsilon \\ = \Pi_{j_0}^+(ik_L + \varepsilon D_z) f(\mathcal{H}^\varepsilon). \end{aligned} \tag{C.48}$$

Les comparaisons numériques des solutions des différents modèles asymptotiques (C.42) et (C.48) avec les solutions du modèle de départ feront l'objet d'études ultérieures.

Table des figures

Bibliographie

- [1] D. Alterman. *Diffraction Nonlinear Geometric Optics for Short Pulses*. PhD thesis, University of Michigan, 1999.
- [2] D. Alterman and J. Rauch. Diffraction Short Pulse Asymptotics for Nonlinear Wave Equations. *Physics Letters A*, 264(5) :pp.390–395, 2000.
- [3] D. Alterman and J. Rauch. Nonlinear Geometric Optics for Short Pulses. *à paraître dans Journal of Differential Equations*, 2000.
- [4] D. Alterman and J. Rauch. The Linear Diffraction Pulse Equation. *à paraître dans Method and Applications of Analysis*, 2000.
- [5] R. Benedetti and J.-J. Risler. *Real Algebraic and Semi-algebraic Sets*. Actuelles Mathématiques, Hermann, 1990.
- [6] C. Besse and B. Bidégaray. Numerical Study of Self-focusing Solutions to the Schrödinger-Debye System. *Math. Modelling and Numerical Analysis*, 35(1) :pp.35–55, 2001.
- [7] B. Bidégaray. The Cauchy Problem for Schrödinger-Debye Equations. *Math. Models Methods Appl. Sci*, 10(3) :pp.307–315, 2000.
- [8] B. Bidégaray, A. Bourgeade, and D. Reigner. Introducing Physical Relaxation Terms in Bloch Equations. *J. Comput. Phys*, 170(2) :pp.603–613, 2001.
- [9] B. Bidégaray, A. Bourgeade, D. Reigner, and R. Ziolkowski. Multi-level Maxwell-Bloch Simulations. In *Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, juillet 2000.
- [10] N. Bloembergen. *Nonlinear Optics*. Harvard University, The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC, 1965.
- [11] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Géométrie Algébrique Réelle*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, 1987.
- [12] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, 1959.
- [13] A. Bourgeade, B. Bidégaray, P. Degond, D. Reigner, and R. Ziolkowski. Numerical Approach to Study the Propagation of a Laser Beam Through Materials (from Non-linear Schrödinger Equations to Maxwell-Bloch Equations). In *First European Symposium on Applied Kinetic Theory*, mai 1998.
- [14] A. Bourgeade and E. Freysz. Simultaneous Resolution of Second-, Third-, and Fourth-harmonic Generation using the Full-wave Vector Maxwell Equations. In *Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO)*, mai 1999.
- [15] A. Bourgeade and E. Freysz. Computational Modeling of Second-harmonic Generation by Solution of Full-wave Vector Maxwell Equations. *JOSA B*, 17(2), 2000.

- [16] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, INC, 1992.
- [17] Burrus and Parks. *DFT/FFT and Convolution Algorithms*, volume 3. R.G.Nelson, 1991.
- [18] S. Capponi and G. Gallice. Equations de Maxwell Non-linéaires. rapport interne, CEA/CESTA, 1998.
- [19] T. Colin and D. Lannes. Long-wave Short-wave Resonant for Nonlinear Geometric Optics. *Duke Math. J.*, 107(2) :pp.351–419, 2001.
- [20] P. Donnat. Quelques Contributions en Optique Non-linéaire. thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1994.
- [21] P. Donnat, J-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Diffractive Nonlinear Optics. In *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles*, Palaiseau, 1995-1996. Ecole polytechnique.
- [22] P. Donnat and J. Rauch. Dispersive Nonlinear Geometric Optics. *J.Math.Phys*, 38(3) :pp.1484–1523, 1997.
- [23] P.A. Franken, A.E. Hill, C.W. Peters, and G. Weinreich. Generation of Optical Harmonics. *Physical Review Letters*, 7(4) :pp.118–119, 1961.
- [24] J. Ginibre and G. Velo. On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations. *Ann.Inst.Henri Poincaré*, Part III(A 28) :pp.287–316, 1978.
- [25] J. Ginibre and G. Velo. On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations. *J.Funct.Anal*, Part I, II(32) :pp.1–71, 1979.
- [26] J. Ginibre and G. Velo. Sur une Equation de Schrödinger Non Linéaire avec Interaction non Locale. *Séminaire du collège de France, PDE and applications*, Pitman, 1981.
- [27] I.M. Guelfand and G.E. Chilov. *Les Distributions, Tome I*. Dunod, 1972.
- [28] O. Gues. Développements Asymptotiques de Solutions Exactes de Systèmes Hyperboliques Quasi-linéaires. *Asymptotic Anal.*, 6 :pp.241–269, 1993.
- [29] P. Huynh. Etude Théorique et Numérique de Modèles de Kerr. thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1999.
- [30] P. Huynh, M. Sesques, F. Delaurens, and B. Hanouzet. Propagation d'un Pulse Optique dans un Milieu Non Linéaire. *Rapport interne CEA-CESTA*, 1997.
- [31] IMSL. *Fortran Subroutines for Mathematical Applications*, volume 2. Visual numerics, INC, 1994.
- [32] J.-L. Joly. Sur la Propagation des Oscillations par un Système Hyperbolique Semi-linéaire en Dimension 1 D'espace. *C.R. Acad. Sc. Paris*, pages pp.669–672, 1983.
- [33] J.-L. Joly, G. Métivier, and J.Rauch. Resonant one Dimensional Nonlinear Geometric Optics. *J. of Funct. Anal.*, 114 :pp.106–231, 1993.
- [34] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Remarques sur l'Optique Géométrique Non linéaire Multidimensionnelle. *Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, exposé No 1*, 1991.
- [35] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Coherent and Focusing Multidimensionnal Non-linear Geometric Optics. *Ann.Sci.Ecole Norm.Sup*, 28(1) :pp.51–113, 1995.

- [36] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Several Recent Results in Nonlinear Geometric Optics. In *Partial differential equations and mathematical physics, Copenhagen, 1995*.
- [37] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Diffractive Nonlinear Geometric Optics with Rectification. *Indiana Univ. Math. J.*, 47 :pp.1167–1242, 1998.
- [38] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Transparent Nonlinear Geometric Optics and Maxwell-Bloch Equations. *Rapport MAB, No 99017*, 1999.
- [39] J.-L. Joly and J. Rauch. Justification of Multidimensionnal Nonlinear Geometric Optics. *Trans.Amer.Math.Soc*, 330 :pp.599–625, 1992.
- [40] D. Lannes. Dispersive Effects for Nonlinear Geometrical Optics with Rectification. *Asymptotic Analysis*, 18 :pp.111–146, 1998.
- [41] D. Lannes. Quelques Phénomènes d’Interaction d’Ondes en Optique Non-linéaire. thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1999.
- [42] D. Lannes. Nonlinear Geometrical Optics for Oscillatory Wave Trains with Continuous Oscillatory Spectrum. *Advances in Differential Equations*, 6 :pp.731–768, 2001.
- [43] O. Morice. Développement MIRÓ pour le Péttawatt. rapport interne, CEA/CESTA, 1998.
- [44] O. Morice. Equation de Schrödinger Modifiée. rapport interne, CEA/CESTA, 2001.
- [45] A. Newell and J. Moloney. *Nonlinear Optics*. Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1992.
- [46] A. Owyong. *The Origin of the Nonlinear Refractive Indices of Liquids and Glasses*. PhD thesis, California Institute of Technology Pasadena, Scientific Report Nb 12, 1971.
- [47] R. Pantell and H. Puthoff. *Fundamentals of Quantum Electronics*. J.Wiley and Sons Inc., New York et Electronique quantique en vue des applications, dunod edition, 1973.
- [48] F. Raoult. Etude de Nouvelles Configurations de Conversion de Fréquence ” Spectre Large ” pour les Lasers de Puissance. thèse de doctorat, Sciences Physiques, Université Paris VI, 1999.
- [49] D. Reigner. Couplage des Equations de Maxwell avec les Equations de Bloch pour la Propagation d’une Onde Electromagnétique. thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2000.
- [50] S. Schochet. Fast Singular Limits of Hyperbolic Partial Differential Equations. *J.Diff.Eq.*, 114 :pp.474–512, 1994.
- [51] J.C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadsworth and Books/Cole Advanced Books and Software, 1989.
- [52] C. Sulem and P.-L. Sulem. *The Nonlinear Schrödinger Equation, Self-focusing and Wave Collapse*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [53] A. Yoshikawa. Solutions Containing a Large Parameter of a Quasi-linear Hyperbolic System of Equations and their Nonlinear Geometric Optics Approximation. *Trans. A.M.S.*, 340 :pp.103.126, 1993.
- [54] A. Yoshikawa. Asymptotic Expansions of the Solutions to a Class of Quasi-linear Hyperbolic Initial Value Problems. *J. Math. Soc. Japan*, 47 :pp.227–252, 1995.
- [55] R. Ziolkowski and J. Judkins. Full-wave Vector Maxwell Equations Modeling of Self-focusing of Ultra-short Optical Pulses in a Nonlinear Kerr Medium Exhibiting a Finite Response Time. *J.Opt.Soc.Amer B*, 10 :pp.186–198, 1993.

Résumé

Cette thèse se situe dans le cadre de la simulation numérique d'impulsions laser intenses. Afin d'améliorer la précision des modèles, nous introduisons, par deux approches, des équations de type Schrödinger non linéaires modifiées pour tenir compte de l'étalement du spectre de l'impulsion. La première approche, basée sur une équation singulière, permet d'affiner le modèle de Schrödinger standard. Pour le nouveau modèle, on établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution ainsi que des résultats de stabilité. La seconde approche, basée sur la décomposition du spectre de l'impulsion initiale en une partie discrète et une partie continue, a permis d'obtenir un système d'équations de Schrödinger découplées, l'équation pour la partie à spectre continu étant uniquement linéaire. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ainsi que des résultats de stabilité sont aussi établis dans ce cas. Une comparaison numérique des différents modèles est également proposée.

Mots Clés

Ooptique Géométrique et Diffractive, Equation Singulière, Equation de Schrödinger non linéaire, Spectre Large, Impulsion Ultra-courtes, Oscillation à Spectre Continu.

Abstract

The aim of this thesis is to perform numerical simulations of intense laser pulses. In order to improve the accuracy of the models and to account for large-spectrum pulses, we introduce modified nonlinear Schrödinger equations by means of two different approaches. The first approach is based on a singular equation and leads to a refinement of the classical nonlinear Schrödinger model. Theoretical results, such as the existence, the uniqueness and the stability of the solution, have been established for the modified nonlinear model. The second approach is based on the splitting of the spectrum of the initial pulse into a discrete and a continuous component. The resulting system consists in decoupled Schrödinger equations for both components. Moreover, the equation for the continuous component is linear. Once more, the existence, the uniqueness and the stability of the solution have been addressed in this case. The numerical comparison of the different models is presented as a conclusion.

Keywords

Geometric and Diffractive Optics, Singular Equation, Nonlinear Schrödinger Equation, Large Spectrum, Short Pulse, Continuous Oscillatory Spectrum.