

N° d'ordre : 3036

# THÈSE

PRÉSENTÉE À  
**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1**

ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

Par **Cécile BARON**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

Spécialité : MÉCANIQUE

---

**LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE PEANO DU MATRICANT POUR  
L'ÉTUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES ÉLASTIQUES EN MILIEUX  
À PROPRIÉTÉS CONTINÛMENT VARIABLES**

---

Directeur de Thèse : M. Marc DESCHAMPS, Université Bordeaux 1

Co-encadrant : M. Olivier PONCELET, Université Bordeaux 1

Soutenue le : 7 octobre 2005

Après avis de : M<sup>me</sup> Catherine POTEL, Professeur, Université du Maine

Rapporteurs

M. Philippe COTE, Directeur de Recherche, LCPC Nantes

Devant la commission d'examen formée de :

M. Jean-Rodolphe PUIGGALI, Professeur, Université Bordeaux 1

Président

M<sup>me</sup> Catherine POTEL, Professeur, Université du Maine

MM. Philippe COTE, Directeur de Recherche, LCPC Nantes

Marc DESCHAMPS, Directeur de Recherche CNRS, Université Bordeaux 1

Michel PANET, Ingénieur EDF R&D, Moret /Loing

Daniel ROYER, Professeur, Université Paris 7

Invité :

M. Olivier PONCELET, Chargé de Recherche CNRS, Université Bordeaux 1



Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique Physique (UMR CNRS 5469) de l'Université Bordeaux 1. Je tiens à exprimer ma gratitude au Professeur Didier Desjardins pour m'avoir accueillie dans son laboratoire.

Je remercie très sincèrement Marc Deschamps. En acceptant de diriger cette thèse au sein de son équipe (Propagation Acoustique Ultrasons Laser), il m'a offert l'opportunité de découvrir, en toute liberté, le métier de chercheur et ses multiples facettes.

Je suis très reconnaissante au Professeur Catherine Potel et à Philippe Côte, Directeur de Recherche au LCPC, d'avoir accepté de rapporter sur mon mémoire en pleine période estivale. Leur lecture attentive, les remarques et les conseils qu'ils ont exprimés ont été très constructifs et ont guidé la finalisation de cette thèse.

Le professeur Jean-Rodolphe Puiggali m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. La présence du Professeur Daniel Royer a été pour moi un privilège, je tiens à lui exprimer mes très respectueux remerciements. Michel Panet a également participé à ce jury, qu'il sache combien je lui suis reconnaissante pour son soutien depuis le début de mon stage de DEA et combien j'ai apprécié nos échanges scientifiques (ou autres).

Le déroulement de ces trois années doit énormément à Olivier Poncelet qui a encadré cette thèse. Présent dès la première heure, il a partagé ses connaissances et ses compétences, il m'a communiqué une curiosité et une ouverture d'esprit tant sur le plan scientifique qu'humain. Nos discussions sont la clé de voûte de ce travail. Je lui dois également le bon usage du point-virgule et autres signes de ponctuation. Merci !

Cette thèse prend toute sa saveur grâce à Alexander Shuvalov. Sasha a participé à l'encadrement de ce travail avec toute la générosité et la patience qui le caractérisent. Sa rigueur mathématique, son amour du mot juste, son abnégation (et ses espadrilles) ont influencé ces trois années. Nos conversations russo-anglo-françaises resteront gravées dans ma mémoire.

Je poursuivrai par les apports non officiels mais néanmoins de première importance qu'ont été le dévouement de Cathy, Béatrice et Céline, l'œil bionique de Christophe qui n'a toujours pas réussi à me dégoûter du métier de maître de conf', l'accueil de Jean-Marie dans son antre, l'amitié et la complicité des étudiants et membres du laboratoire : merci à Toto pour la causticité de ses remarques, merci à Constantin pour sa curiosité linguistique, merci à Marie, Guigui et Hinde qui poursuivent leur chemin dans des contrées plus ou moins lointaines, merci à Matthieu d'avoir été mon coach de remise en forme, merci à Mathieu, Clément et Bertrand d'avoir été mes compagnons de piscine, merci à Thomas, Jérémy, Marion, Anis, Ludovic pour les sessions « repas-mots-fléchés-horoscope », merci à KK,

Jérôme, Thum et Rayray d'avoir été de très dévoués partenaires de coinche et de questionnement existentiel.

Un merci particulier pour Xebax qui m'a fait la surprise d'assister à ma soutenance (tu es formidable !). Merci aussi à Steph, avec qui j'ai pu partager mes doutes et mes rêves depuis bientôt six ans.

Je termine avec les quatre personnes les plus importantes pour moi qui se reconnaîtront... « merci » devient un mot trop petit pour exprimer « ça ».

*« C'est du déséquilibre que naît le mouvement... »*



# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I. De la méthode de Thomson et Haskell à la série de Peano</b>	<b>5</b>
<hr/>	
<b>INTRODUCTION</b>	<b>9</b>
<b>I.1. Interactions ondes/interface</b>	<b>10</b>
<b>I.2. Les ondes dans les milieux stratifiés</b>	<b>10</b>
<b>I.2.1. La méthode de Thomson et Haskell</b>	<b>10</b>
<b>I.2.2. Améliorations et méthodes dérivées</b>	<b>12</b>
<i>I.2.2.1. L'opérateur Delta</i>	<i>13</i>
<i>I.2.2.2. Méthode de la matrice globale</i>	<i>14</i>
<i>I.2.2.3. Méthode de la matrice de réflexion</i>	<i>15</i>
<i>I.2.2.4. Méthode des matrices de raideur et méthode des matrices d'impédance de surface</i>	<i>16</i>
<b>I.3. Les ondes dans les milieux continûment stratifiés</b>	<b>19</b>
<b>CONCLUSION</b>	<b>20</b>
<b>II. Propagation des ondes en milieux hétérogènes</b>	<b>21</b>
<hr/>	
<b>INTRODUCTION</b>	<b>27</b>

<b>II.1. Propagation d'ondes dans un milieu élastique</b>	<b>27</b>
II.1.1. Tenseur des déformations	28
II.1.2. Tenseur des contraintes	29
II.1.3. Loi de comportement : relation contraintes/déformations	30
II.1.4. Équations de l'élastodynamique	31
<b>II.2. Équation d'onde</b>	<b>32</b>
II.2.1. Équations différentielles du second ordre	32
II.2.1.1. Milieux homogènes	33
II.2.1.2. Milieux hétérogènes	34
II.2.2. Système différentiel du premier ordre	34
II.2.2.1. La matrice du système	36
II.2.2.2. Le formalisme de Stroh et ses différents paramétrages	37
CONCLUSION	38
<b>III. Expression et calcul d'une solution à l'équation d'onde en milieu hétérogène</b>	<b>39</b>
<hr/>	
INTRODUCTION	43
<b>III.1. Le matricant, une matrice de propagation</b>	<b>44</b>
III.1.1. Matricant et propagateur	45
<b>III.2. Méthodes de construction de la solution</b>	<b>46</b>
III.2.1. L'intégration numérique directe	46
III.2.1.1. La méthode d'Euler	46
III.2.1.2. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	47



<b>III.2.2. Modélisation et expressions analytiques</b>	<b>47</b>
<i>III.2.2.1. Milieux homogènes</i>	47
<i>III.2.2.2. Milieux hétérogènes</i>	49
a) Thomson-Haskell et les milieux multicouches	50
• Matrice de transfert et matricant	50
• Obtention « classique » de la matrice de transfert	51
• Méthode de Thomson et Haskell pour des milieux à propriétés continûment variables	53
b) L'intégrale multiplicative de Volterra et la série de Peano	54
• Définitions	54
• Construction de la série de Peano	55
<b>III.3. Évaluation de la série de Peano</b>	<b>57</b>
III.3.1. Convergence de la série de Peano	57
III.3.2. Une évaluation facilitée par un paramétrage approprié	59
<b>III.4. Évaluation de l'erreur et comparaison des méthodes</b>	<b>61</b>
III.4.1. Estimation de l'erreur de troncature	61
III.4.2. Comparaison de deux méthodes : Runge-Kutta d'ordre 4 et la série de Peano	64
<b>CONCLUSION</b>	<b>66</b>
<b>IV. Mise en œuvre du développement en série de Peano</b>	<b>67</b>
<hr/>	
<b>INTRODUCTION</b>	<b>71</b>
<b>IV.1. Réponse modale de la plaque</b>	<b>72</b>
IV.1.1. Conditions aux limites et courbes de dispersion	72
<i>IV.1.1.1. L'onde de Rayleigh</i>	73

IV.1.2. Champ de contraintes et déplacements dans une plaque libre-libre	77
IV.2. Coefficients de réflexion et de transmission	78
IV.3. Développements asymptotiques	81
IV.3.1. Développements asymptotiques des modes de Lamb fondamentaux pour une plaque libre	82
IV.3.2. Développements asymptotiques des coefficients de réflexion et de transmission	85
IV.4. Influence du caractère hétérogène du milieu sur les courbes de dispersion	87
IV.4.1. Limites asymptotiques des modes P-SV : onde de Rayleigh et chenaux acoustiques	87
IV.4.1.1. Profil linéaire : deux limites asymptotiques	89
IV.4.1.2. Canal acoustique : trois limites asymptotiques	91
IV.4.2. Vecteur d'informations analytique : les développements asymptotiques des modes fondamentaux à basse fréquence	93
IV.5. Sensibilité des coefficients de réflexion et de transmission au caractère hétérogène du milieu	95
IV.5.1. Vecteur d'informations analytique : les développements asymptotiques des coefficients de réflexion (module et phase)	97
CONCLUSION	99
V. Quelques exemples d'applications	101
<hr/>	
INTRODUCTION	105

V.1. Inversion de paramètres caractéristiques du profil d'hétérogénéité : développements asymptotiques des coefficients de réflexion/transmission	106
V.2. Une étude expérimentale basée sur la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh	110
V.2.1. Détermination des propriétés du béton sain et de celles du béton dégradé aux interfaces	110
V.2.1.1. Béton sain	112
V.2.1.2. Béton dégradé	114
V.2.2. Mesure des propriétés de dispersion de l'onde de Rayleigh	115
V.2.3. Informations sur le profil d'hétérogénéité	118
V.2.3.1. Comparaison des courbes de dispersion de l'onde de Rayleigh : expérimental contre simulation	118
V.2.3.2. Étude de l'influence des différents paramètres sur la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh	122
a) Valeur du gradient au point de plus forte pente	122
b) Localisation du point de plus forte pente $x_{30}$	123
c) Variation de propriétés de surface relativement à celles du substrat : $(f_d - f_0) / f_d$	124
V.2.3.3. Informations supplémentaires par l'étude des coefficients de réflexion à l'interface eau/surface dégradée	125
a) Valeur du gradient au point de plus forte pente	125
b) Localisation du point de plus forte pente $x_{30}$	126
CONCLUSION	127
Conclusion générale et perspectives	129
Bibliographie	131

<b>Annexe A : Estimation de l'erreur globale dans l'évaluation numérique de la série de Peano</b>	<b>137</b>
<b>Annexe B : Théorie des perturbations appliquée à la recherche du spectre d'une matrice carrée</b>	<b>141</b>
<b>Annexe C : Profil d'hétérogénéité de la plaque de micro-béton</b>	<b>145</b>

## Introduction générale

*La réalité est complexe. La modélisation des phénomènes physiques est la clé de voûte de la recherche scientifique. La démarche nécessite la connaissance et la maîtrise des théories et techniques antérieures, leur remise en cause, afin d'améliorer l'existant ou de créer des modèles nouveaux. Le dépassement des paradigmes est le moteur des grandes avancées scientifiques. Copernic fut un des premiers à imposer cette notion, en établissant le paradigme héliocentrique au lieu du paradigme géocentrique de Ptolémée. Même dynamique dans l'élaboration du paradigme de la relativité d'Einstein, qui introduisit une nouvelle façon de voir et de concevoir les phénomènes physiques, sans pour autant discréditer la mécanique newtonienne. L'analyse d'un problème et les résultats obtenus sont intrinsèquement liés à un paradigme.*

Le travail présenté ici est d'une envergure beaucoup plus modeste mais s'inscrit dans la même recherche d'un modèle plus adapté au problème soulevé.

L'étude de l'élastodynamique dans les milieux à propriétés caractéristiques (célérités longitudinale et transversale, coefficients d'élasticité, masse volumique etc.) continûment variables constitue un enjeu important. En géophysique tout d'abord, puisque la croûte terrestre, les océans et l'atmosphère peuvent être considérés comme des milieux continûment hétérogènes. C'est d'ailleurs dans le domaine de la géophysique qu'ont été élaborées les premières méthodes décrivant la propagation d'ondes dans de tels milieux. Dans l'industrie ensuite, puisque des procédés innovants de fabrication de matériaux génèrent et utilisent la variation continue de certaines propriétés mécaniques. Dans le but de caractériser ces milieux, on procède à l'étude de la propagation d'ondes élastiques. Les premiers travaux réalisés (**Rayleigh**, 1885; **Love**, 1911; **Lamb**, 1917) concernent les ondes sismiques et l'interprétation de séismogrammes, et donnent lieu à de grandes avancées dans l'élaboration du modèle de la Terre. Dans les années cinquante et soixante, le perfectionnement des outils de mesures et l'avènement des ordinateurs, donnent un nouvel élan. Des méthodes numériques de résolution des équations d'onde en milieux hétérogènes sont développées (**Thomson**, 1950; **Haskell**, 1953; **Knopoff**, 1964; **Dunkin**, 1965; **Kennett & Kerry**, 1979), elles s'appliquent à des milieux modélisés par un empilement de couches homogènes, les propriétés caractéristiques variant par saut. Les conditions de continuité aux interfaces et la prise en compte des conditions aux limites permettent le calcul d'une solution globale valable sur tout le multicouche.

Dans le cadre de l'étude des matériaux continûment hétérogènes, l'application de ces techniques implique une modélisation des profils de propriétés continus par des fonctions constantes par morceaux. Il s'agit donc de traiter un problème approché pour lequel on connaît une méthode d'obtention de la solution exacte. Cependant, l'approximation se faisant très en amont du processus de résolution des équations d'onde, la validité des résultats obtenus et leur précision sont difficiles à évaluer. De plus, dans le cas de profils à variations rapides, la modélisation sous forme de fonctions constantes par morceaux peut se révéler problématique et dans le cas où elles nécessitent un nombre de couches très important, les méthodes « multicouches » sont d'une efficacité limitée. Pour tenter de palier ce type d'inconvénients, on cherche à conserver l'authenticité du problème, c'est-à-dire le caractère continu des variations des propriétés mécaniques. En conséquence, il s'agit de trouver une mise en équation générale adaptée, pour laquelle on connaîtra une solution analytique exacte dont l'évaluation, dans la plupart des cas, ne pourra s'effectuer que numériquement. C'est le principe de l'approche basée sur le développement en série de Peano du matricant. Les équations d'onde sont écrites sous la forme d'un système matriciel d'équations différentielles ordinaires à coefficients non constants. Le matricant est la solution matricielle du problème aux valeurs initiales constitué des équations d'onde et de la donnée d'un état de référence. L'expression du matricant sous la forme du développement en série de Peano fournit une expression analytique exacte de la solution qui sera évaluée de façon approchée (troncature de la série, quadrature d'intégrales).

L'objectif de ce travail est de démontrer qu'une telle méthode peut être implémentée sans générer des temps de calculs prohibitifs et qu'elle fournit des résultats exploitables dans la caractérisation des matériaux hétérogènes et de leur profil de variation de propriétés, tout en respectant « l'authenticité du problème ». L'intérêt se situe dans la généralité du processus de résolution des équations d'ondes, puisque aucune hypothèse restrictive sur la nature des milieux étudiés n'est formulée (sinon celles issues de la thermodynamique des milieux continus). Cette approche est adaptée au traitement de l'anisotropie, des matériaux piézo-électriques, aux géométries planes ou cylindriques. De plus, la série de Peano offre des possibilités intéressantes tant sur le plan numérique qu'analytique avec le calcul de développements asymptotiques.

Les cinq chapitres de ce mémoire développent les différents aspects évoqués ci-avant en soulignant la potentialité de la méthode du développement en série de Peano pour l'étude de la propagation d'ondes élastiques en milieux à propriétés continûment variables.

Le Chapitre 1 est consacré à une revue des méthodes élaborées et développées pour des milieux hétérogènes multicouches. Les limitations et avantages de chacune d'elles sont évoqués pour souligner l'intérêt que peut présenter le développement en série de Peano du

matricant dans l'étude de l'interaction des ondes élastiques avec un milieu à propriétés continûment variables. La mise en équation sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires impliquant le formalisme de Stroh, retenu pour exprimer les équations d'onde dans ces milieux sont présentés au Chapitre 2 à partir des lois de l'élastodynamique qui y sont rappelées. Le Chapitre 3 décrit en détail le matricant, solution matricielle des équations d'onde et ses liens avec des solutions approchées connues (par intégration numérique de type Runge-Kutta, par stratification du milieu via la méthode de Thomson-Haskell). On introduit son écriture sous la forme d'une série d'intégrales multiples de matrices : la série de Peano. Les différents calculs qui peuvent être menés à partir de la série de Peano font l'objet du Chapitre 4. Dans ce chapitre, on étudie un modèle de plaque continûment hétérogène. On aborde l'analyse modale de la plaque en imposant des conditions aux limites particulières à ses deux interfaces ; on obtient ainsi les courbes de dispersion et les champs de déplacements et de contraintes correspondant aux différents modes présents dans la plaque. La réaction de la structure à une sollicitation extérieure de type onde incidente est également étudiée au travers des spectres fréquentiels des coefficients de réflexion et de transmission. L'ensemble de ces résultats se révèlent être des indicateurs du caractère continûment hétérogène du milieu, exploitables dans l'identification et la quantification des paramètres définissant le profil de variation et les valeurs des propriétés mécaniques. Enfin le Chapitre 5, illustre les analyses précédentes à l'aide de deux exemples concrets d'application de la méthode. Dans le dernier exemple traité, les résultats numériques obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux.

*Mais une question demeure : « est-il préférable de rechercher la solution exacte d'un problème approché ou la solution approchée d'un problème exact ? ». La réponse pourrait bien être dans toute sa scientificité : « ça dépend... ».*





# I. De la méthode de Thomson et Haskell à la série de Peano

## RÉSUMÉ

*Les milieux à hétérogénéité unidirectionnelle suscitent l'intérêt dans de nombreux domaines : de la géophysique au contrôle non destructif en passant par le biomédical. C'est pourquoi l'évaluation de ces milieux par l'étude de la propagation d'ondes élastiques homogènes ou inhomogènes a donné lieu à de nombreux travaux de recherche. Ainsi dès les années cinquante, apparaît une méthode de résolution des équations d'onde dans les milieux multicouches isotropes non absorbants : la méthode de Thomson et Haskell. Cette méthode constituera une base à partir de laquelle seront développées des méthodes dérivées ou alternatives — opérateur Delta, matrice globale, matrice de réflexion, matrice de raideur, matrice d'impédance de surface — permettant d'étendre le domaine d'application aux milieux multicouches anisotropes et absorbants et de palier les problèmes d'instabilités numériques. Cependant l'application de ces méthodes à des milieux à propriétés continûment variables soulèvent des points délicats de validité et de précision liés à la modélisation multicouche du milieu continûment hétérogène.*



## SOMMAIRE

<b>I.1. Interactions ondes/interface</b>	<b>10</b>
<b>I.2. Les ondes dans les milieux stratifiés</b>	<b>10</b>
<b>I.2.1. La méthode de Thomson et Haskell</b>	<b>10</b>
<b>I.2.2. Améliorations et méthodes dérivées</b>	<b>12</b>
<i>I.2.2.1. L'opérateur Delta</i>	<i>13</i>
<i>I.2.2.2. Méthode de la matrice globale</i>	<i>14</i>
<i>I.2.2.3. Méthode de la matrice de réflexion</i>	<i>15</i>
<i>I.2.2.4. Méthode des matrices de raideur et méthode des matrices d'impédance de surface</i>	<i>16</i>
<b>I.3. Les ondes dans les milieux continûment stratifiés</b>	<b>19</b>



## INTRODUCTION

Historiquement, la propagation d'ondes élastiques dans les milieux hétérogènes selon une direction particulière de l'espace a tout d'abord intéressé les géophysiciens (**Thomson**, 1950; **Haskell**, 1953; **Chapman**, 1976; **Aki & Richard**, 1980; **Kennett**, 1983). En effet les milieux naturels, la Terre, les océans, sont des milieux à propriétés variables selon la profondeur. Les profils de propriétés sont, selon l'échelle d'observation à laquelle on se place ou selon les caractéristiques auxquelles on s'intéresse, continus — c'est le cas de la salinité, la pression et la température de l'eau qui varient en fonction de la profondeur dans les océans — ou discontinus — comme la croûte terrestre lorsqu'on étudie les strates géologiques qui la constituent. La propagation des ondes sismiques, l'analyse des sismogrammes, la prédiction des tremblements de terre, le comportement des ondes radio dans l'atmosphère, la détection sous-marine ont motivé ces recherches. Actuellement l'utilisation de matériaux industriels à gradients de propriétés fonctionnels (FGM<sup>1</sup>), l'étude des assemblages de matériaux par soudage ou collage, les films minces, la caractérisation de l'os sont autant de domaines vecteurs d'innovation qui permettent de développer ou d'appliquer des méthodes de résolution des équations d'ondes en milieux à hétérogénéité unidirectionnelle. Les progrès réalisés ces cinquante dernières années reposent sur l'interconnexion de trois facteurs : une meilleure qualité des données quantitatives fournies par des outils de mesure toujours plus performants ; une modélisation mathématique des phénomènes physiques plus proche de la réalité ; et la capacité calculatoire grandissante des ordinateurs. Dans ce chapitre, nous retraçons une partie de l'historique de l'étude des milieux à hétérogénéité unidirectionnelle et nous présentons les principales méthodes mises au point et utilisées aujourd'hui. Ces méthodes s'appuient toutes sur une écriture matricielle du problème et s'appliquent à des milieux stratifiés (naturellement ou artificiellement). La modélisation d'un milieu sous forme d'un empilement de couches homogènes permet d'utiliser des résultats connus sur la propagation d'ondes en milieux à propriétés caractéristiques constantes. La méthode développée par Thomson et Haskell (**Thomson**, 1950; **Haskell**, 1953) dans les années cinquante est la plus connue. Malheureusement, dans le cas de milieux anisotropes pour lesquels la mise en équation peut devenir très complexe (couplage des ondes polarisées verticalement avec celles polarisées horizontalement, systèmes de plus grande dimension) et en présence d'ondes évanescentes, cette méthode est insatisfaisante. Apparaissent alors des méthodes dérivées qui généralisent, éliminent les instabilités numériques et améliorent les temps de calculs. Mais l'efficacité de ces méthodes est restreinte dans le cas des milieux à propriétés

---

<sup>1</sup> Functionally Graded Materials

continûment variables. Les raisons de ces limitations seront présentées par la suite (évaluation de l'erreur, domaine de validité, lourdeur du calcul,...).

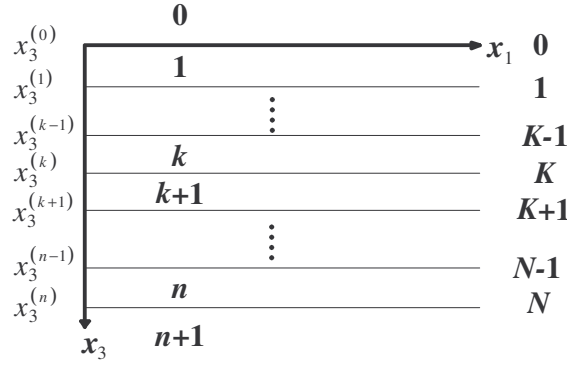
## **I.1. Interactions ondes/interface**

Les premiers travaux établissant une théorie de propagation des ondes élastiques au sein d'un milieu à interfaces sont ceux de Lord Rayleigh (1842-1919) en 1885. Dans son article, Rayleigh définit une variété d'ondes sismiques se propageant à la surface libre d'un espace semi-infini. En 1911, Love (1863-1940) décrit la propagation d'ondes de cisaillement dans la croûte terrestre. Ces ondes existent dans un milieu formé d'une couche sur un substrat semi-infini de densités et de rigidités différentes. Leur amplitude décroît exponentiellement avec la profondeur de la couche. Face aux nombreuses questions posées par la sismologie moderne concernant le comportement des ondes et vibrations en interaction avec les strates terrestres, Lamb (1849-1934) tente, en 1917, d'apporter des éléments de réponse en traitant le problème de la propagation d'ondes élastiques dans une plaque d'épaisseur finie placée dans le vide (**Lamb**, 1917). Il considère les ondes longitudinale et transversale couplées et polarisées dans un plan perpendiculaire aux interfaces. Il identifie deux types de modes susceptibles de se propager dans la plaque : des modes symétriques et des modes antisymétriques, que l'on appelle communément « ondes de Lamb ». Une généralisation de l'étude des interactions des ondes avec une interface est donnée par Stoneley (1894-1976) en 1924 qui décrit dans (**Stoneley**, 1924) le comportement des ondes se propageant à l'interface entre deux milieux semi-infinis.

## **I.2. Les ondes dans les milieux stratifiés**

### **I.2.1. La méthode de Thomson et Haskell**

La propagation d'ondes élastiques planes en milieux stratifiés, homogènes par morceaux, a tout d'abord été étudiée pour une configuration particulière, alternant une couche constituée d'un fluide parfait avec une couche solide (**Lindsay**, 1939). Aucune force tangentielle ne peut être transmise via la couche liquide, les contraintes de cisaillement sont donc nulles aux interfaces fluide/solide, le problème se ramène alors à celui d'une plaque solide immergée dans un fluide (**Smyth & Lindsay**, 1944), et la résolution ne nécessite aucun formalisme particulier. La première mise en équation de la propagation d'ondes élastiques dans un milieu formé d'un empilement d'un nombre arbitraire  $n$  de couches solides à faces parallèles est donnée par Thomson en 1950 dans (**Thomson**, 1950).



**Figure 1.1 :** Géométrie du multicouche. On considère  $n$  couches surmontant et surmontées d'un substrat semi-infini.

Il introduit la *matrice de transfert* d'une couche (notée ici  $\mathbf{A}_k$ ) qui décrit les déplacements et les contraintes normales d'une face (supérieure ou inférieure) en fonction de ceux de l'autre face (inférieure ou supérieure).

$$\boldsymbol{\eta}_k(x_3^{(k)}) = \mathbf{A}_k \boldsymbol{\eta}_k(x_3^{(k-1)}), \quad (\text{I.1})$$

avec le vecteur d'état  $\boldsymbol{\eta}_k = (u_i, \sigma_{i3})_k^T$  et  $\mathbf{A}_k$  la matrice de transfert relative à la couche  $k$ .

La continuité des déplacements et des contraintes normales à chaque interface du multicouche,  $\boldsymbol{\eta}_k(x_3^{(k)}) = \boldsymbol{\eta}_{k+1}(x_3^{(k)})$ , conduit à l'obtention d'une matrice de transfert globale régissant le comportement des ondes élastiques au sein du système complet de  $n$  couches :

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}(x_3^{(n)}) = \mathbf{A}_{globale} \boldsymbol{\eta}_0(x_3^{(0)}), \quad (\text{I.2})$$

avec

$$\mathbf{A}_{globale} = \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_1. \quad (\text{I.3})$$

En imposant des conditions aux limites appropriées, il est alors possible d'écrire les solutions modales ou les réponses de la structure à une excitation. Dans le cas où au moins l'un des deux milieux semi-infinis qui encadrent le multicouche n'est pas le vide il est intéressant d'exprimer les conditions aux limites entre le multicouche et le ou les milieux semi-infinis à partir des amplitudes des ondes présentes dans ce ou ces substrats. En décomposant les champs de déplacements sous la forme d'une somme d'ondes montantes  $a_w^-$  (propagation dans le sens des  $x_3$  négatifs) et descendantes  $a_w^+$  (propagation dans le sens des  $x_3$  positifs), on utilise deux relations matricielles : la première entre le vecteur d'état  $\boldsymbol{\eta}_0$  et les amplitudes des ondes montantes et descendantes dans la couche 0 et la

deuxième entre  $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$  et les amplitudes des ondes montantes et descendantes de la couche  $n + 1$  (Figure 1.1). On obtient alors la relation

$$\begin{pmatrix} a_w^+ \\ a_w^- \end{pmatrix}_{n+1} = [\mathbf{D}_{n+1}(x_3^{(n)})]^{-1} \mathbf{A}_{globale} [\mathbf{D}_0(x_3^{(0)})] \begin{pmatrix} a_w^+ \\ a_w^- \end{pmatrix}_0, \quad (\text{I.4})$$

avec  $w = L, T_1, T_2$  représentant respectivement les ondes (quasi)longitudinales et les deux ondes (quasi)transversales. Les matrices  $\mathbf{D}_{n+1}(x_3^{(n)})$  et  $\mathbf{D}_0(x_3^{(0)})$  sont définies par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}(x_3^{(k)}) = \mathbf{D}_{k+1}(x_3^{(k)}) \begin{pmatrix} a_w^+ \\ a_w^- \end{pmatrix}_{k+1}, \quad (\text{I.5})$$

et représentent les matrices de conversion des amplitudes des ondes partielles dans la couche  $k + 1$  en vecteur d'état à la profondeur  $x_3^{(k)}$

Ainsi les coefficients de réflexion et de transmission aux interfaces entre le multicouche et les milieux semi-infinis s'expriment facilement.

En 1953, Haskell reprend l'étude de Thomson en y apportant une légère rectification. La méthode ainsi décrite est aujourd'hui connue et utilisée sous le nom de *méthode de Thomson-Haskell*.

### I.2.2. Améliorations et méthodes dérivées

À partir de cette date et au cours des années soixante, la modélisation de la propagation des ondes dans les milieux multicouches est largement améliorée par la capacité calculatoire grandissante des ordinateurs. Le champ principal d'investigation et d'application reste les études sismologiques. Les premiers travaux effectués sur la base de la méthode de Thomson et Haskell concernent les milieux constitués de couches élastiques et isotropes (**Fahmy & Adler, 1973**). Or très rapidement dans l'étude des phénomènes géophysiques des facteurs tels que l'anisotropie du milieu, son absorption et l'existence de modes évanescents obligent les chercheurs à aller plus loin.

L'extension de la méthode à l'anisotropie générale est réalisée dans les années 80 par Fryer et Frazer (**Fryer & Frazer, 1984**) et par Nayfeh (**Nayfeh, 1991**). Cette extension ne nécessite pas de remaniement structurel fondamental de la méthode de Thomson et Haskell. La matrice de transfert peut être obtenue dans le cas isotrope et anisotrope via deux approches :



- la plus courante est sous la forme d'équations différentielles d'ordre deux qui amènent à la résolution de l'équation de Christoffel et l'obtention des polarisations des solutions en terme d'ondes partielles (Nayfeh, 1995) ;
- la deuxième est le formalisme de Stroh<sup>2</sup> (Fahmy & Adler, 1973; Aki & Richard, 1980).

Nous reviendrons sur ces formalismes dans le Chapitre 2.

Il reste cependant deux facteurs géologiques importants qui ne sont pas pris en compte dans la théorie de Thomson et Haskell : l'un inhérent à la nature du milieu de propagation, la structure terrestre est un milieu absorbant ; l'autre à la structure des ondes qui s'y propagent, des modes évanescents se propagent dans les couches rocheuses. Ces modes soit perdent de l'énergie au cours de leur propagation, soit ont une amplitude exponentiellement variable perpendiculairement à la propagation. L'expression mathématique d'un tel phénomène est l'apparition d'un facteur exponentiel réel dans l'écriture des champs. Ce facteur est obtenu par l'introduction d'une fréquence ou d'un nombre d'onde complexe. Mais l'apparition d'une exponentielle croissante dans l'expression des solutions génère des instabilités numériques. Le mécanisme de calcul provoquant ces instabilités a été révélé et décrit par Dunkin en 1965. Le calcul des solutions modales ou des réponses à des excitations passe par des multiplications de type

$$(a - b)e^{2\alpha f d}, \quad (\text{I.6})$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $f$  représente la fréquence,  $d$  l'épaisseur totale du multicouche, et la soustraction  $(a - b)$  exprime un sous-déterminant  $2 \times 2$  de la matrice de transfert globale. Les termes  $a$  et  $b$  sont théoriquement strictement égaux mais l'évaluation numérique de leur soustraction n'est pas nulle. Or pour des grandes fréquences ou des épaisseurs importantes, le terme en exponentielle amplifie les erreurs d'arrondis (Dunkin, 1965; Lévesque & Piché, 1992). Ainsi un terme n'ayant en principe aucun rôle dans le calcul de la solution, influence le résultat numérique et génère des instabilités.

### I.2.2.1. L'opérateur Delta

Une première alternative de calcul est donc proposée par Dunkin. Il introduit un opérateur connu sous le nom d'*opérateur Delta* qui, à chaque matrice de transfert  $\mathbf{A}_k$  relative à une couche  $k$  fait correspondre une matrice  $\mathbf{A}_k^\Delta$  construite à partir des sous-déterminants  $2 \times 2$  de  $\mathbf{A}_k$  :

---

<sup>2</sup> Dans la littérature anglo-saxonne , les termes de « sextic formalism » ou « state-vector formalism » sont associés au formalisme de Stroh.

$$\left(\mathbf{A}_k^\Delta\right)_{ij} = \mathbf{A}_k|_{rs}^{pq} = \left(\mathbf{A}_k\right)_{pr} \left(\mathbf{A}_k\right)_{qs} - \left(\mathbf{A}_k\right)_{ps} \left(\mathbf{A}_k\right)_{qr}, \quad (\text{I.7})$$

avec  $pq$  ou  $rs = 12, 13, 14, 23, 24$  et  $34$  pour  $i$  ou  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  et  $6$  respectivement. Dunkin démontre qu'à l'aide de cet opérateur on évite toute évaluation du type (I.6) ce qui améliore grandement la stabilité des calculs. Cependant Lévesque et Piché notent en 1992 que la méthode de l'opérateur Delta s'avère moins efficace dans l'évaluation du coefficient de transmission que dans celle du coefficient de réflexion et recommande une grande prudence d'utilisation. La méthode de Dunkin, développée pour des milieux isotropes est généralisée aux milieux à anisotropie générale par Michel Castaings au cours de sa thèse (Castaings, 1993; Castaings & Hosten, 1994).

### I.2.2.2. Méthode de la matrice globale

Dans l'introduction de son article, Dunkin fait référence aux travaux de Knopoff qui en 1964, développe une nouvelle formulation du problème : *la méthode de la matrice globale* (Knopoff, 1964). L'idée centrale est de raisonner non plus en terme de couches mais en terme d'interfaces. La méthode est reprise et améliorée par Schmidt et Jensen (1985) et Pialucha (1992) notamment.

On se place à l'interface  $K$  séparant les couches  $k$  et  $k + 1$  (Figure 1.1). On considère les ondes partielles montantes et descendantes se propageant dans les couches situées de part et d'autre de l'interface. En reprenant la relation (I.5), la continuité des déplacements et des contraintes normales donne les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\eta}_k \left(x_3^{(k)}\right) = \mathbf{D}_k \left(x_3^{(k)}\right) \begin{pmatrix} a_w^+ \\ a_w^- \end{pmatrix}_k = \mathbf{D}_{k+1} \left(x_3^{(k)}\right) \begin{pmatrix} a_w^+ \\ a_w^- \end{pmatrix}_{k+1} = \boldsymbol{\eta}_{k+1} \left(x_3^{(k)}\right). \quad (\text{I.8})$$

En posant  $\mathbf{V}_k = \begin{pmatrix} a_w^+ & a_w^- \end{pmatrix}_k^T$ , (I.8) se réécrit sous la forme :

$$\mathbf{D}_k \left(x_3^{(k)}\right) \mathbf{V}_k - \mathbf{D}_{k+1} \left(x_3^{(k)}\right) \mathbf{V}_{k+1} = \mathbf{0}. \quad (\text{I.9})$$

Ici,  $\mathbf{0}$  est le vecteur nul<sup>3</sup> de dimension six. En procédant de même à chaque interface, on construit une matrice globale du système sous la forme :

<sup>3</sup> On considère ici qu'il n'y a pas de source dans le multicouche.

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{D}_{k-1}^{K-1} & \mathbf{D}_k^{K-1} & \mathbf{0}_{(6 \times 6)} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0}_{(6 \times 6)} & \mathbf{D}_k^K & \mathbf{D}_{k+1}^K & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{V}_{k-1} \\ \mathbf{V}_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{0}_{(6)} \\ \mathbf{0}_{(6)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (\text{I.10})$$

avec  $\mathbf{D}_k^{K-1} = \mathbf{D}_k(x_3^{(k-1)})$ .

Cette formulation est robuste et stable (Lowe, 1995). En effet lorsque des ondes hétérogènes (à nombre d'onde complexe) apparaissent dans des couches épaisses ou à haute fréquence, leur contribution est conséquente à une seule des deux interfaces de la couche et nulle à l'autre interface. Pour la méthode de Thomson et Haskell cette condition de découplage des deux interfaces d'une même couche est contenue dans l'annulation de sous-déterminant de la matrice de transfert globale. Elle est donc conditionnée par l'évaluation numérique de termes de type (I.6), source d'instabilité. Dans le schéma présenté par Knopoff, le découplage est inscrit dans la mise en équation elle-même garantissant une bonne prise en compte des ondes évanescents. Cependant, la matrice ainsi construite peut prendre une dimension très grande dans le cas d'un important nombre de couches, ce qui allonge considérablement le temps de calcul.

### I.2.2.3. Méthode de la matrice de réflexion

Une autre approche largement utilisée dans le domaine de la sismologie est proposée et développée par Kennett à partir de 1974. Cette méthode repose sur l'utilisation des matrices de réflexion et de transmission. Elle est appelée *méthode de réverbération* (reverberation method) ou *méthode de la matrice de réflexion* (reflection matrix method). Le principe présenté dans (Kennett & Kerry, 1979; Kennett, 1983) consiste en un schéma récursif de construction des matrices de réflexion et de transmission globales à partir des matrices obtenues pour chaque interface.

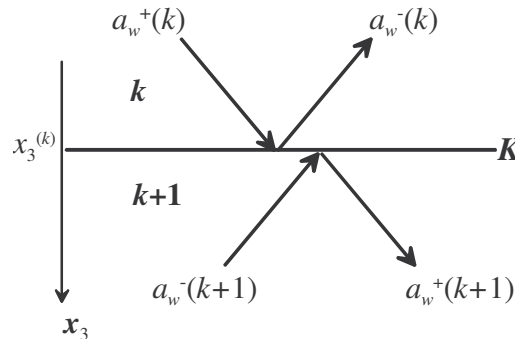


Figure 1.2 : Configuration à l'interface.

On note  $\mathbf{V}_k^+ = (a_L^+(k) \ a_{T_1}^+(k) \ a_{T_2}^+(k))^T$  le vecteur désignant les amplitudes des ondes se propageant dans le sens des  $x_3$  positifs dans la couche  $k$  (Figure 1.2). Pour l'interface  $K$ , on définit donc deux matrices de réflexion et deux matrices de transmission :

- ✓ on considère l'onde incidente descendante de vecteur d'amplitude  $\mathbf{V}_k^+$  se propageant dans la couche  $k$  qui en interaction avec l'interface  $K$  génère dans la couche  $k$  une onde réfléchie montante associée à  $\mathbf{V}_k^-$  et dans la couche  $k+1$  une onde transmise descendante associée à  $\mathbf{V}_{k+1}^+$  :

$$\mathbf{V}_k^- = \mathbf{R}_K^+ \mathbf{V}_k^+; \mathbf{V}_{k+1}^+ = \mathbf{T}_K^+ \mathbf{V}_k^+; \quad (\text{I.11})$$

- ✓ on considère l'onde incidente montante  $\mathbf{V}_{k+1}^-$  se propageant dans la couche  $k+1$  :

$$\mathbf{V}_{k+1}^+ = \mathbf{R}_K^- \mathbf{V}_{k+1}^-; \mathbf{V}_k^- = \mathbf{T}_K^- \mathbf{V}_{k+1}^-. \quad (\text{I.12})$$

Si on note  $\mathbf{R}_{\Sigma k}^+$  et  $\mathbf{T}_{\Sigma k}^+$  (respectivement  $\mathbf{R}_{\Sigma k}^-$  et  $\mathbf{T}_{\Sigma k}^-$ ), les matrices de réflexion et de transmission globales des  $k$  premières couches issue d'une onde incidente se propageant dans le sens des  $x_3$  positifs (respectivement négatifs), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Sigma k+1}^+ &= \mathbf{R}_{\Sigma k}^+ + \mathbf{T}_{\Sigma k}^- \mathbf{R}_{K+1}^+ \left[ \mathbf{I} - \mathbf{R}_{\Sigma k}^- \mathbf{R}_{K+1}^+ \right]^{-1} \mathbf{T}_{\Sigma k}^-, \\ \mathbf{T}_{\Sigma k+1}^+ &= \mathbf{T}_{K+1}^+ \left[ \mathbf{I} - \mathbf{R}_{\Sigma k}^- \mathbf{R}_{K+1}^+ \right]^{-1} \mathbf{T}_{\Sigma k}^-, \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

respectivement

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Sigma k+1}^- &= \mathbf{R}_{\Sigma k}^- + \mathbf{T}_{K+1}^+ \mathbf{R}_{\Sigma k}^- \left[ \mathbf{I} - \mathbf{R}_{K+1}^+ \mathbf{R}_{\Sigma k}^- \right]^{-1} \mathbf{T}_{K+1}^-, \\ \mathbf{T}_{\Sigma k+1}^- &= \mathbf{T}_{\Sigma k}^- \left[ \mathbf{I} - \mathbf{R}_{K+1}^+ \mathbf{R}_{\Sigma k}^- \right]^{-1} \mathbf{T}_{K+1}^-. \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

La matrice de transfert globale s'exprime à partir des matrices de réflexion et de transmission globales (Kennett & Kerry, 1979). Le processus est robuste et stable, cependant son implémentation numérique est lourde et compliquée. D'abord développée pour des milieux isotropes, la méthode de la matrice de réflexion est généralisée à l'anisotropie générale par Fryer et Frazer (Fryer & Frazer, 1984).

#### I.2.2.4. Méthode des matrices de raideur et méthode des matrices d'impédance de surface

Depuis quelques années l'intérêt porté aux milieux multicouches s'est étendu au-delà de la sphère géophysique. Le développement des matériaux composites dans la technologie de

pointe a fortement encouragé l'amélioration des méthodes existantes. Ainsi Wang et Rokhlin mettent en place une méthode récursive basée sur la matrice de raideur (**Wang & Rokhlin**, 2001). Pour une couche  $k$  la matrice de raideur  $\mathbf{H}_k$  relie le vecteur des contraintes normales aux deux faces ( $K$  et  $K-1$ ) de la couche aux déplacements de ces deux faces :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{K-1} \\ \boldsymbol{\sigma}_K \end{pmatrix}_k = \mathbf{H}_k \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{K-1} \\ \mathbf{u}_K \end{pmatrix}_k. \quad (\text{I.15})$$

Ils développent un algorithme récursif pour obtenir la matrice de raideur globale d'un multicouche à partir des matrices de raideur de chaque couche. Après initialisation du problème, on pose

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_0 \\ \boldsymbol{\sigma}_K \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\Sigma k} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_K \end{pmatrix}. \quad (\text{I.16})$$

On a

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_K \\ \boldsymbol{\sigma}_{K+1} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{k+1} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_K \\ \mathbf{u}_{K+1} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.17})$$

On décompose les matrices  $\mathbf{H}_{\Sigma k}$  et  $\mathbf{H}_{k+1}$  en quatre sous-blocs matriciels :

$$\mathbf{H}_{\Sigma k} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\Sigma k}^1 & \mathbf{H}_{\Sigma k}^2 \\ \mathbf{H}_{\Sigma k}^3 & \mathbf{H}_{\Sigma k}^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{k+1}^1 & \mathbf{H}_{k+1}^2 \\ \mathbf{H}_{k+1}^3 & \mathbf{H}_{k+1}^4 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.18})$$

et à l'aide de (I.16), on exprime  $\mathbf{u}_K$  et  $\boldsymbol{\sigma}_K$  en fonction de  $\mathbf{u}_0$  et  $\boldsymbol{\sigma}_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_K &= (\mathbf{H}_{\Sigma k}^2)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_0 - (\mathbf{H}_{\Sigma k}^2)^{-1} \mathbf{H}_{\Sigma k}^1 \mathbf{u}_0, \\ \boldsymbol{\sigma}_K &= \mathbf{H}_{\Sigma k}^4 (\mathbf{H}_{\Sigma k}^2)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_0 + \left[ \mathbf{H}_{\Sigma k}^3 - \mathbf{H}_{\Sigma k}^4 (\mathbf{H}_{\Sigma k}^2)^{-1} \mathbf{H}_{\Sigma k}^1 \right] \mathbf{u}_0, \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

et en réinjectant ces expressions dans (I.17) on obtient

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_0 \\ \boldsymbol{\sigma}_{K+1} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\Sigma k+1} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_{K+1} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.20})$$

avec

$$\mathbf{H}_{\Sigma k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\Sigma k}^1 + \mathbf{H}_{\Sigma k}^3 (\mathbf{H}_{k+1}^1 - \mathbf{H}_{\Sigma k}^4)^{-1} \mathbf{H}_{\Sigma k}^2 & -\mathbf{H}_{\Sigma k}^3 (\mathbf{H}_{k+1}^1 - \mathbf{H}_{\Sigma k}^4)^{-1} \mathbf{H}_{k+1}^3 \\ \mathbf{H}_{k+1}^2 (\mathbf{H}_{k+1}^1 - \mathbf{H}_{\Sigma k}^4)^{-1} \mathbf{H}_{\Sigma k}^2 & \mathbf{H}_{k+1}^4 - \mathbf{H}_{k+1}^2 (\mathbf{H}_{k+1}^1 - \mathbf{H}_{\Sigma k}^4)^{-1} \mathbf{H}_{k+1}^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.21})$$

Sur un schéma strictement identique, Hosten et Castaings développent la méthode des matrices d'impédance de surface (**Hosten & Castaings, 2003**). La matrice d'impédance de surface  $\mathbf{Z}_K$  relative à l'interface  $K$  relie le vecteur contraintes contenant les contraintes normales à l'interface  $K$  aux vitesses des particules à cette interface :

$$\boldsymbol{\sigma}_K = \mathbf{Z}_K \mathbf{V}_K. \quad (\text{I.22})$$

L'originalité de la méthode consiste à construire deux matrices d'impédances de surface à l'interface  $K$  : l'une en partant de l'interface 0 avec la condition  $\boldsymbol{\sigma}_0 = 0$  ou  $\mathbf{u}_0 = 0$  et en « descendant » (sens des  $x_3$  positifs), l'autre en partant de l'interface  $N$  avec  $\boldsymbol{\sigma}_N = 0$  ou  $\mathbf{u}_N = 0$  et en « remontant » (sens des  $x_3$  négatifs). On calcule donc la matrice d'impédance de surface  $\mathbf{Z}_K^+$ , relative à la portion du milieu comprise au dessus de l'interface  $K$ , à partir de  $\mathbf{Z}_0^+$ , et  $\mathbf{Z}_K^-$  relative à la portion du milieu en-dessous de cette interface, à partir de  $\mathbf{Z}_N^-$ . Le schéma récursif de construction est similaire à celui des matrices de raideur (**Rokhlin & Wang, 2002**) et fait intervenir soit la matrice de transfert de Thomson et Haskell, soit la matrice d'impédance de couche définie par la relation (I.15) où les déplacements sont remplacés par les vitesses. Ainsi pour  $K$  arbitraire mais fixé, on obtient deux évaluations de la matrice d'impédance de surface. La continuité des déplacements ( $\mathbf{V}_K^+ = \mathbf{V}_K^-$ ) et des contraintes normales ( $\boldsymbol{\sigma}_K^+ = \boldsymbol{\sigma}_K^-$ ) à chaque interface appliquée à (I.22) pour  $\mathbf{Z}_K = \mathbf{Z}_K^+$  et  $\mathbf{Z}_K = \mathbf{Z}_K^-$  fournit le relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_K = \mathbf{Z}_K^+ \mathbf{V}_K = \mathbf{Z}_K^- \mathbf{V}_K. \quad (\text{I.23})$$

On obtient ainsi une relation de dispersion, valable pour n'importe quelle interface  $K$ , sous la forme :

$$\det(\mathbf{Z}_K^+ - \mathbf{Z}_K^-) = 0. \quad (\text{I.24})$$

Les méthodes de matrices de raideur et de matrices d'impédance de surface sont stables même dans le cas où des ondes évanescentes se propagent dans une couche épaisse ou à haute fréquence. L'avantage de la seconde est de réduire le nombre d'opérations et d'impliquer des matrices de taille plus petite, notamment grâce à la prise en compte directe dans l'algorithme des conditions aux limites. Le temps de calcul est donc plus court. D'autre part la possibilité de choisir les deux interfaces auxquelles seront fixées les

conditions aux limites parmi les  $N + 1$  interfaces du multicouche, permet une meilleure gestion du phénomène de chenal acoustique.

### I.3. Les ondes dans les milieux continûment stratifiés

Certains milieux naturels, les océans, l'atmosphère, la croûte terrestre peuvent être des milieux à stratification continue. C'est-à-dire que leurs propriétés caractéristiques varient de façon continue selon la verticale alors que les variations suivies dans le plan horizontal sont négligeables. Les premiers travaux sur le sujet concernent le coefficient de réflexion pour divers types d'hétérogénéités dans l'atmosphère. Epstein, en 1930, présente les coefficients de réflexion obtenus pour une couche continûment hétérogène symétrique ou antisymétrique pour laquelle il existe des fonctions spéciales solutions de l'équation d'onde mise sous la forme d'une équation différentielle du second degré (**Brekhovskikh & Godin**, 1990). Au début des années cinquante la résolution d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients non constants intéresse à la fois la géophysique et la mécanique quantique (équation de Schrödinger). La résolution analytique exacte n'est possible que pour des formes particulières de coefficients variables (**Brekhovskikh**, 1980). On cherche donc à approcher les solutions le mieux possible. En 1954, Bailey présente une rapide étude comparative de différentes fonctions spéciales permettant d'approcher les solutions de l'équation d'onde. Il donne une nouvelle méthode d'approximation du coefficient de réflexion à l'interface entre un milieu semi-infini homogène et une couche continûment hétérogène (**Bailey**, 1954). Très récemment, en 1984 au Japon, apparaissent les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials). Leur utilisation stratégique dans les domaines de la mécanique spatiale et de la biomécanique notamment, en font des sujets de recherche de premier plan. La question de la modélisation de tels milieux devient prépondérante. Aujourd'hui, l'évolution des calculateurs aidant, l'approche la plus couramment répandue est celle consistant à remplacer les fonctions continues des profils par des fonctions constantes par morceaux (**Aki & Richard**, 1980). Ainsi on se ramène à des milieux multicouches, et on applique les méthodes décrites au paragraphe précédent. D'un point de vue théorique, plus le nombre de couches est grand, plus le résultat obtenu doit être précis. La solution exacte ne pourrait être obtenue que pour un nombre infini de couches. D'un point de vue numérique, l'accroissement du nombre de couches reste consistant jusqu'à un nombre de couches critique au-delà duquel les erreurs d'arrondis commises sur chaque couche s'accumulent et contrebalancent la diminution de l'erreur liée à l'approximation de la solution (**Rokhlin & Wang**, 2003). On soulève ici un point délicat qui est celui de l'évaluation de l'erreur commise et la détermination d'un domaine de validité des résultats. Cette démarche consiste à exprimer une solution exacte d'un

problème approché, qui sera ensuite évaluée numériquement, cette évaluation générant des erreurs d'arrondis.

### CONCLUSION

Au fil des années, les milieux hétérogènes n'ont cessé de susciter l'intérêt des chercheurs dans différents domaines, de la géophysique à l'industrie. Les formalismes et les méthodes ont évolué et progressé pour approcher au plus près la réalité. Cet écart à la réalité reste l'enjeu majeur. L'étude des milieux à propriétés continûment variables par la propagation d'ondes élastiques soulève de nombreuses questions. Comment conserver l'authenticité du problème ? Peut-on exprimer analytiquement des solutions à l'équation d'onde dans des milieux à propriétés continûment variables ? Ces solutions, si elles existent, sont-elles praticables (implémentation numérique, temps de calcul...) ? Le développement en série de Peano des solutions matricielles aux équations d'ondes, est une voie qui peut répondre à ces interrogations et qui complète les nombreuses études déjà réalisées dans le domaine.



## II. Propagation des ondes en milieux hétérogènes

### RÉSUMÉ

*La mise en équation de la propagation d'ondes en milieux élastiques repose sur le respect des lois de l'élastodynamique couplées à la loi de comportement du matériau. La forme la plus classique des équations d'onde est celle d'équations différentielles du second ordre. Pour les milieux homogènes, elles aboutissent au problème aux valeurs propres sous la forme de l'équation de Christoffel. Pour les milieux continûment hétérogènes, les équations différentielles du second ordre sont à coefficients non constants (dépendance spatiale liée à l'hétérogénéité unidirectionnelle). Les solutions analytiques ne sont connues que pour un nombre limité de profils particuliers pour lesquels les équations d'onde sont résolues à l'aide de fonctions spéciales (Hankel, Airy etc.). Afin de développer une méthode de résolution en milieux continûment hétérogènes plus générale, les équations différentielles du second ordre seront réécrites sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires utilisant le formalisme de Stroh.*



## SOMMAIRE

<b>II.1. Propagation d'ondes dans un milieu élastique</b>	<b>27</b>
II.1.1. Tenseur des déformations	28
II.1.2. Tenseur des contraintes	29
II.1.3. Loi de comportement : relation contraintes/déformations	30
II.1.4. Équations de l'élastodynamique	31
<b>II.2. Équation d'onde</b>	<b>32</b>
II.2.1. Équations différentielles du second ordre	32
II.2.1.1. <i>Milieux homogènes</i>	33
II.2.1.2. <i>Milieux hétérogènes</i>	34
II.2.2. Système différentiel du premier ordre	34
II.2.2.1. <i>La matrice du système</i>	36
II.2.2.2. <i>Le formalisme de Stroh et ses différents paramétrages</i>	37



## Symboles

$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  : repère cartésien ;

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  : champ de déplacement particulaire ;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  : tenseur des déformations d'ordre 2 ;

$\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes d'ordre 2 ;

$C_{ijkl}$  : tenseur d'élasticité d'ordre 4 ;

$\lambda$  : coefficient de dilatation, constante de Lamé ;

$\mu$  : coefficient de cisaillement, constante de Lamé ;

$\rho$  : masse volumique ;

$\Gamma_{ij}$  : matrice de Christoffel ;

$f$  : fréquence ;

$\omega = 2\pi f$  : fréquence angulaire ;

$s_1 (= 1/v_1)$  : lentesse horizontale (selon l'axe  $\mathbf{x}_1$ ), inverse de la composante horizontale de la vitesse de phase ;

$k_1 = \omega s_1$  : nombre d'onde horizontal ;

$\boldsymbol{\eta}(x_3) = (u_i(x_3), \tau_i(x_3))_{1 \leq i \leq 3}^T$  : vecteur d'état fonction des déplacements et des contraintes ;

$\mathbf{N}$  : matrice de Stroh pour l'élastostatique ;

$\mathbf{Q}$  : matrice du système d'équations différentielles ordinaires pour l'élastodynamique.



## INTRODUCTION

Après ce tour d'horizon historique du traitement de l'hétérogénéité unidirectionnelle en interaction avec des ondes élastiques, nous présentons ici le formalisme retenu pour mener notre étude sur les milieux à propriétés continûment variables. De manière générale, la méthode de résolution en ondes planes reposant sur l'équation de Christoffel n'est pas applicable dans le cas de ces milieux, il faut donc avoir recours à une autre formulation du problème. L'équation d'onde est mise sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires. Cette écriture est valable pour les milieux homogènes : les coefficients sont alors constants. Pour les milieux à hétérogénéité unidirectionnelle, les coefficients sont fonction de la position selon la direction d'hétérogénéité. Plusieurs configurations sont décrites :

- des milieux continûment hétérogènes pour lesquels les profils de variation des propriétés caractéristiques sont des fonctions continues (c'est le cas qui nous importe le plus dans cet exposé) ;
- un empilement de couches continûment hétérogènes, les profils sont alors des fonctions continues par morceaux ;
- un milieu stratifié, les variations de propriétés sont représentées par des fonctions constantes par morceaux.

Un des avantages de la mise en équation sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires est justement sa généralité et sa grande adaptabilité puisque aucune hypothèse restrictive n'est posée avant son écriture. Ce qui permet alors d'envisager l'implémentation d'une méthode qui pourra être utilisée dans des cas de figures divers et variés, et représentatifs de la pluralité des phénomènes rencontrés. Dans ce chapitre, les définitions de quelques termes usuels de la mécanique des milieux continus sont rappelées et la formulation matricielle de l'équation d'onde en milieux continûment hétérogènes est développée. Enfin une présentation du formalisme de Stroh sur lequel repose le développement de la méthode retenue dans notre étude est donnée.

### II.1. Propagation d'ondes dans un milieu élastique

Dans le cas général de la mise en vibration des particules d'un milieu élastique, la propagation d'ondes est gouvernée par la *théorie de l'élasticité* fondée par Cauchy et Poisson au début du XIX<sup>e</sup> siècle. Nous rappelons ici les notions utilisées dans le cadre de cette théorie pour une description lagrangienne des phénomènes.

La théorie de l'élasticité s'applique à l'étude de corps mécaniques considérés comme milieux continus (on s'intéresse aux phénomènes macroscopiques). Sous l'action de forces extérieures, ces corps subissent des déformations, les particules du milieu sont déplacées

de leur point d'équilibre créant ainsi des forces internes. Ce sont ces forces entre particules, combinées à leur inertie, qui conduisent à la mise en vibration du milieu et à l'existence d'ondes acoustiques.

Dans toute la suite, nous utiliserons un système de coordonnées cartésien orthonormé  $(x_1, x_2, x_3)$ .

### II.1.1. Tenseur des déformations

On emploiera le terme de *déplacement*, considéré comme fonction vectorielle de l'espace et du temps et noté  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Soit une particule occupant une position initiale repérée par le vecteur  $\mathbf{x}$  à un instant  $t_0$  et déplacée en  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ . La quantité  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  décrit le champ de déplacement. La connaissance du déplacement subi par chaque point du milieu permet de déterminer la déformation globale du milieu. Ainsi, considérons une deuxième particule au voisinage de  $\mathbf{x}$ , repérée par la position  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ . Le déplacement subi par cette deuxième particule sera  $\mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ . La distance séparant les deux particules avant déformation est donc<sup>4</sup> :

$$dl = |d\mathbf{x}| = \sqrt{dx_i^2}, \quad (\text{II.1})$$

où les  $dx_i$  sont les coordonnées du vecteur  $d\mathbf{x}$ .

Après déformation, la distance entre les deux particules devient :

$$dl' = |\mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x})|. \quad (\text{II.2})$$

Or  $|d\mathbf{x}|$  peut toujours être choisi de telle sorte que l'on puisse utiliser le premier ordre d'approximation de  $\mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$  pour l'évaluer :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + d\mathbf{u}, \quad (\text{II.3})$$

avec

$$d\mathbf{u} = (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (\text{II.4})$$

Cette égalité peut-être réécrite sous la forme

$$d\mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u} \wedge d\mathbf{x}). \quad (\text{II.5})$$

---

<sup>4</sup> On utilise la convention de sommation implicite des indices dite convention d'Einstein pour alléger les notations.



Le carré de la distance entre les deux particules après déformation s'écrit alors

$$dl'^2 = dl^2 + 2d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{u} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}. \quad (\text{II.6})$$

En notation indicielle, (II.6) s'écrit :

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k \\ &= dl^2 + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j dx_i + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_j dx_i, \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

qui conduit à l'expression suivante :

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{II.8})$$

où le tenseur  $\varepsilon_{ij}$  est appelé *tenseur des déformations* et est défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right). \quad (\text{II.9})$$

Ce tenseur d'ordre deux est symétrique par définition.

L'hypothèse de petites perturbations regroupant le couple d'hypothèses « petits déplacements » et « petites déformations » est retenue dans cette étude. Le dernier terme de l'expression est du second ordre et est donc négligeable devant les autres. On obtient ainsi l'expression linéarisée des déformations qui sera utilisée par la suite :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{II.10})$$

Les termes non diagonaux quantifient les angles de glissement lors d'un cisaillement tandis que les termes diagonaux représentent les allongements subis selon les différentes directions.

### II.1.2. Tenseur des contraintes

On introduit les notions de *traction* et de *tenseur des contraintes* afin d'analyser la sollicitation mécanique (les forces internes exercées entre particules) en tout point d'un matériau indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance. Le vecteur traction  $\boldsymbol{\tau}$  est défini comme la densité surfacique de force sur une facette d'orientation  $\mathbf{n}$ ,

c'est-à-dire le rapport de la force infinitésimale  $d\mathbf{F}$  sur la surface élémentaire  $dS$  de la facette sur laquelle  $d\mathbf{F}$  s'exerce. Il quantifie les efforts de contact des particules d'un côté de la surface sur les particules situées de l'autre côté de cette même surface :

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (\text{II.11})$$

Le vecteur traction est composé d'un effort normal, parallèle à  $\mathbf{n}$  et de deux efforts tangentiels, dans le plan de la facette.

Afin d'exprimer l'ensemble des contraintes engendrées par un champ de force sur un élément de volume, on utilise un tenseur d'ordre deux, le *tenseur des contraintes* :

$$\sigma_{ij} = \lim_{dS_j \rightarrow 0} \left( \frac{dF_i}{dS_j} \right), \quad (\text{II.12})$$

où  $dS_j$  est l'élément de surface élémentaire de normale  $\mathbf{x}_j$ , et  $\sigma_{ij}$  représente la composante selon  $\mathbf{x}_i$  de la force s'exerçant sur la surface de normale  $\mathbf{x}_j$ . En vertu de l'équilibre des moments des forces exercées sur l'élément de volume, ce tenseur est symétrique.

### II.1.3. Loi de comportement : relation contraintes/déformations

Les variations de contraintes et de déformations induites par les efforts appliqués au milieu sont liées par une loi caractéristique du milieu appelée *loi de comportement* ou *loi constitutive du milieu*. Un milieu est dit élastique lorsqu'il possède un état d'équilibre naturel auquel il revient immédiatement après disparition des sollicitations extérieures. Robert Hooke (1635-1703) fut l'un des premiers à mettre en évidence expérimentalement la relation existant entre contraintes et déformations. La généralisation mathématique de ses travaux, menée notamment par Augustin Cauchy (1789-1857) nous révèle que, toujours dans l'hypothèse des petites perturbations, les composantes du tenseur des contraintes sont une combinaison linéaire de toutes les composantes du tenseur des déformations. C'est la *loi de Hooke* :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (\text{II.13})$$

Le tenseur des raideurs élastiques appelé tenseur d'élasticité et noté  $C_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre quatre vérifiant :  $C_{ijkl} = C_{jikl}$  (car  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) ;  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$  (car  $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ ) ; et  $C_{ijkl} = C_{klij}$  (loi thermodynamique) (Aki & Richard, 1980). Compte tenu des symétries de  $C_{ijkl}$ , la relation (II.13) s'écrit aussi :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (\text{II.14})$$

Ceci nous permet également d'utiliser une notation abrégée pour le tenseur des rigidités (Auld, 1973) :

$$\begin{aligned} C_{IJ} &\equiv C_{ijkl}, \\ \sigma_I &= C_{IJ} \varepsilon_J, \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

avec

$ij$	$11$	$22$	$33$	$23, 32$	$13, 31$	$12, 21$
$I$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$

**Tableau 2.1.** Notation abrégée, correspondance d'indices.

Le tenseur des rigidités représente donc la signature mécanique du milieu étudié. Dans le cas le plus général il contient vingt et une composantes indépendantes. Lorsque des symétries cristallines interviennent, ce nombre peut être ramené à deux : ces deux composantes sont alors connues sous le nom de *constantes de Lamé*, et notées  $\lambda$  et  $\mu$  où  $\lambda$  représente le coefficient de dilatation, (résistance du matériau au changement de volume à forme constante) et  $\mu$  est le coefficient de cisaillement, (résistance au changement de forme à volume constant). Dans ce cas les propriétés élastiques du matériau sont indépendantes du choix des axes de référence : le matériau est dit isotrope. Pour un tel matériau la loi de Hooke s'écrit

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{II.16})$$

### II.1.4. Équations de l'élastodynamique

Dans un milieu élastique tel que défini ci-avant, la perturbation acoustique susceptible de se propager est gouvernée par deux équations fondamentales : la loi de comportement que nous venons de voir ; et l'équation du mouvement résultant de la loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule ( $\mathbf{F} = m \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ ) et linéarisée pour des petits déplacements :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $\mathbf{F}$  la résultante des forces volumiques extérieures (incorporant les sources). Dans toute la suite on considèrera que les différents paramètres mis en jeu dans le système (II.17), peuvent dépendre du vecteur position  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ . Les propriétés du milieu sont supposées indépendantes des variables horizontales ( $x_1$  et  $x_2$ ) et du temps  $t$ . On considère donc les champs harmoniques en  $x_1$  et  $x_2$  et en  $t$ , se propageant dans le plan  $(x_1, x_2)$ . L'hétérogénéité est unidirectionnelle selon l'axe  $x_3$ . Si on considère le cas général tridimensionnel, on recherche les champs de déplacement et de traction sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{A}(x_3) \exp i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t). \quad (\text{II.18})$$

La fréquence angulaire est notée  $\omega$ , et,  $k_1$  et  $k_2$  sont les nombres d'ondes selon  $x_1$  et  $x_2$ . En recherchant des solutions harmoniques en  $x_1$  et  $x_2$ , on fixe implicitement un plan sagittal dans lequel les ondes se propagent. En utilisant un nouveau système de coordonnées lié au plan de propagation, on peut réécrire le tenseur d'élasticité dans ce système et reformuler le problème en deux dimensions selon  $(x_1, x_3)$ ;  $x_2$  étant désormais l'axe orthogonal au plan sagittal. Cela permet de réduire le nombre de variables, ce qui rend souvent la manipulation des équations plus simple, mais peut également rendre l'écriture du tenseur  $C_{ijkl}$  plus complexe. Dans la suite on s'intéressera donc au cas des ondes guidées se propageant dans un seul plan à la fois. Les champs recherchés ont alors la forme suivante :

$$\mathbf{f}(x_1, x_3, t) = \mathbf{A}(x_3) \exp i(k_1 x_1 - \omega t). \quad (\text{II.19})$$

## II.2. Équation d'onde

Il s'agit à présent de décrire la propagation de la perturbation acoustique définie en (II.19), au sein du milieu élastique étudié. Les équations d'onde peuvent être formulées de façons différentes.

### II.2.1. Équations différentielles du second ordre

On se place dans le cas général tridimensionnel. En supposant que les forces extérieures appliquées au solide sont nulles (pas de terme source), on peut réécrire le système (II.17), en injectant l'expression du tenseur  $\sigma_{ij}$ , et obtenir l'équation d'onde sous la forme d'une équation différentielle du second ordre pour le champ de déplacement :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (\text{II.20})$$

L'équation (II.20) est un système de trois équations à trois inconnues (les trois composantes du déplacement) à coefficients éventuellement non constants car potentiellement dépendants de  $\mathbf{x}$  (on suppose une indépendance en temps). Ces équations sont des équations différentielles d'ordre deux. Pour un tel système il y a six solutions élémentaires.

### II.2.1.1. Milieux homogènes

Dans le cas d'un matériau homogène, les caractéristiques du milieu ne dépendent pas de l'espace, et le dernier terme de (II.20) disparaît. L'indépendance spatio-temporelle des caractéristiques du milieu, et donc des coefficients des équations différentielles (II.20), autorise la recherche de solutions sous la forme d'ondes planes harmoniques :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A\mathbf{P} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad (\text{II.21})$$

où  $A$  est un scalaire spécifiant l'amplitude de l'onde et  $\mathbf{P}$  est le vecteur polarisation. Il s'agit d'ondes planes se propageant selon la direction  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ . En injectant la forme (II.21) dans (II.17) les équations de propagation se mettent sous la forme d'un problème classique aux valeurs propres, l'équation de Christoffel :

$$(\Gamma_{il} - \rho V^2 \delta_{il}) P_l = 0, \quad (\text{II.22})$$

dans lequel apparaît la vitesse de propagation de la phase  $V (= \omega/|\mathbf{k}|)$ .

Les éléments  $\Gamma_{ij}$  sont les composantes de la *matrice de Christoffel* :

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k, \quad (\text{II.23})$$

exprimées en fonction du tenseur d'élasticité du matériau et des composantes du vecteur  $\mathbf{n}$ . Compte-tenu des propriétés du tenseur  $C_{ijkl}$ , la matrice de Christoffel est symétrique, ses valeurs propres sont donc réelles et ses vecteurs propres orthogonaux deux à deux pour une direction de propagation  $\mathbf{n}$  fixée. Il existe alors trois types d'ondes associés, susceptibles de se propager dans une direction  $\mathbf{n}$  avec trois vitesses et trois polarisations. Dans le cas des milieux isotropes homogènes les trois modes sont dits « purs » : le mode longitudinal polarisé parallèlement à la direction de propagation, et deux modes transversaux dont les polarisations sont orthogonales à la direction de propagation et orthogonales entre elles. Dans le cas des milieux anisotropes il est possible de rencontrer

des modes purs lorsque  $\mathbf{n}$  coïncide avec un axe de symétrie du milieu ou lorsque  $\mathbf{n}$  se trouve dans un plan de symétrie (par exemple, pour un matériau de symétrie monoclinique, il existe un mode transversal pur polarisé orthogonalement au plan de symétrie, lorsque  $\mathbf{n}$  est situé dans ce plan). L'équation d'onde se réduit alors au polynôme caractéristique de Christoffel :

$$\left| \Gamma_{ij} - \rho V^2 \delta_{ij} \right| = 0 \quad (\text{II.24})$$

qui permet de déterminer les vitesses des différents modes qui sont les valeurs propres de la matrice de Christoffel. Les polarisations correspondantes sont obtenues par le calcul des vecteurs propres de (II.22).

### II.2.1.2. Milieux hétérogènes

Lorsque les propriétés du milieu dépendent des variables d'espace, l'équation (II.20) est un système de trois équations différentielles du second ordre à coefficients non constants pour le champ de déplacement, dans lequel interviennent les dérivées spatiales des coefficients d'élasticité. Ce type d'équation peut être résolu analytiquement dans le cas de profils d'hétérogénéité particuliers pour lesquels les solutions s'expriment à l'aide de fonctions spéciales de type Hankel, Bessel, Whittaker, Airy (**Maugin**, 1983; **Brekhovskikh & Godin**, 1990; **Robins**, 1991; **Vlasie-Belloncle & Rousseau**, 2003). Bien que limités en nombre, ces cas particuliers jouent un rôle majeur dans la modélisation des problèmes physiques réels et dans l'estimation du domaine de validité de nombreuses méthodes d'approximation (**Bailey**, 1954). Cependant, cette mise en équation n'est guère adaptée à la généralisation de la résolution.

## II.2.2. Système différentiel du premier ordre

Le système (II.17) est un système de neuf équations à neuf inconnues : les trois composantes du déplacement et les six composantes indépendantes du tenseur symétrique des contraintes. Or la mise en équation (II.20) montre l'existence de six solutions linéairement indépendantes. On peut donc se ramener à un système de rang six. Il s'agit de choisir parmi les neuf inconnues, les six fonctions « utiles ».

On considère un milieu élastique dont les interfaces (si elles existent) sont horizontales dans le plan  $(x_1, x_2)$ . Les propriétés du matériau sont constantes au cours du temps et dans tout plan parallèle à  $(x_1, x_2)$  ; elles varient uniquement selon  $x_3$ . On se place donc dans le domaine de Fourier pour les variables  $x_1, x_2$  et  $t$ . Les opérateurs différentiels sur ces variables deviennent dans l'espace des transformées :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow ik_1, \frac{\partial}{\partial x_2} \rightarrow ik_2 \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega. \quad (\text{II.25})$$

Le système (II.17) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho(x_3)\omega^2 u_i(x_3) = ik_1\sigma_{i1}(x_3) + ik_2\sigma_{i2}(x_3) + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_3}(x_3), \\ \sigma_{ij}(x_3) = ik_1C_{ijk1}u_k(x_3) + ik_2C_{ijk2}u_k(x_3) + C_{ijk3}(x_3)\frac{\partial u_k}{\partial x_3}(x_3). \end{array} \right. \quad (\text{II.26})$$

La dépendance spatiale des fonctions due au caractère hétérogène du matériau ne sera plus mentionnée par la suite afin d'alléger les écritures.

Les expressions des contraintes  $\sigma_{i1}$  et  $\sigma_{i2}$  peuvent être extraites de la deuxième équation du système (II.26)

$$\sigma_{i1} = ik_1C_{ik1}u_k + ik_2C_{ik2}u_k + C_{ik3}\frac{\partial u_k}{\partial x_3}, \quad (\text{II.27})$$

$$\sigma_{i2} = ik_1C_{i2k1}u_k + ik_2C_{i2k2}u_k + C_{i2k3}\frac{\partial u_k}{\partial x_3}, \quad (\text{II.28})$$

et réinjectées dans la première relation. On élimine ainsi trois inconnues :  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$ . L'expression restante issue de la deuxième ligne du système (II.26) (pour  $j = 3$ )

$$\sigma_{i3} = ik_1C_{i3k1}u_k + ik_2C_{i3k2}u_k + C_{i3k3}\frac{\partial u_k}{\partial x_3}, \quad (\text{II.29})$$

établit l'écriture de la dérivée selon  $x_3$  du déplacement en fonction des composantes du déplacement  $u_i$  et du vecteur traction  $\sigma_{i3}$ . Le système (II.26) est donc ramené à un système de six équations à six inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = -(C_{\cdot 3 \cdot 3})_{ij}^{-1} [ik_1C_{j3k1} + ik_2C_{j3k2}]u_k + (C_{\cdot 3 \cdot 3})_{ij}^{-1}\sigma_{j3}, \\ \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = -\rho\omega^2 u_i + \\ \quad + (k_1^2C_{i1j1} + k_2^2C_{i2j2} + k_1k_2(C_{i1j2} + C_{i2j1}))u_j - \\ \quad - (ik_1C_{i1j3} + ik_2C_{i2j3})\frac{\partial u_j}{\partial x_3}. \end{array} \right. \quad (\text{II.30})$$

$(C_{\cdot 3 \cdot 3})_{ij}^{-1}$  représente la matrice de dimension trois vérifiant

$$(C_{\cdot 3 \cdot 3})_{ij}^{-1} C_{j3k3} = \delta_{ik}. \quad (\text{II.31})$$

On pose  $A_{ij} = C_{i1j1}$ ,  $B_{ij} = C_{i2j2}$ ,  $F_{ij} = C_{i3j3}$ ,  $D_{ij} = C_{i1j2} + C_{i2j1}$ ,  $L_{ij} = k_1 C_{i3j1} + k_2 C_{i3j2}$  et  $K_{ij}$  telle que  $K_{ik} F_{kj} = F_{ik} K_{kj} = \delta_{ij}$ .<sup>5</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = -iK_{ij}L_{jk}u_k + K_{ij}\sigma_{j3}, \\ \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = (-\rho\omega^2\delta_{ij} + k_1^2A_{ij} + k_2^2B_{ij} + k_1k_2D_{ij} - L_{ki}K_{kl}L_{lj})u_j - iL_{ki}K_{kj}\sigma_{j3}. \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

### II.2.2.1. La matrice du système

À partir du système (II.32), on définit un vecteur d'état  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(x_3)$  de dimension six :

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = (u_i(x_3), \tau_i(x_3))_{1 \leq i \leq 3}^T, \quad (\text{II.33})$$

exprimé à partir des trois composantes du déplacement  $u_i$  et des trois composantes de traction  $\tau_i = \sigma_{i3}$ , et la matrice  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x_3)$  de dimension six :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -i\mathbf{F}^{-1}\mathbf{L} & \mathbf{F}^{-1} \\ \mathbf{S} & -i\mathbf{L}^T\mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.34})$$

avec  $\mathbf{S} = k_1^2\mathbf{A} + k_2^2\mathbf{B} + k_1k_2\mathbf{D} - \mathbf{L}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{L} - \rho\omega^2\mathbf{I}_3$ ,  $\mathbf{I}_3$  étant la matrice identité de dimension trois. La matrice  $\mathbf{Q}$  s'exprime en fonction des propriétés du matériau via le tenseur d'élasticité, la masse volumique, les nombres d'onde horizontaux  $k_1$  et  $k_2$  et la fréquence angulaire  $\omega$ . Elle contient donc toutes les informations concernant le milieu (en particulier le profil d'hétérogénéité) et les paramètres acoustiques liés à l'analyse de Fourier.

Le système (II.17) s'écrit donc sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre à coefficients non constants de rang six (**Gilbert & Backus**, 1966; **Aki & Richard**, 1980) :

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dx_3}(x_3) = \mathbf{Q}(x_3)\boldsymbol{\eta}(x_3), \quad (\text{II.35})$$

où  $\boldsymbol{\eta}$  est le vecteur d'état précédemment identifié et  $\mathbf{Q}$  est la matrice (fonction de  $x_3$ ) de dimension six appelée matrice du système.

<sup>5</sup> La symétrie du tenseur des rigidités donne  $(k_1C_{i1j3} + k_2C_{i2j3}) = (k_1C_{i3j1} + k_2C_{i3j2})^T$



Les autres contraintes  $\sigma_{i\alpha}$  (avec  $\alpha = 1, 2$  et  $i \neq 3$ ) s'expriment en fonction des six composantes du vecteur d'état  $\boldsymbol{\eta}(x_3)$  :

$$\sigma_{i\alpha} = ik_1 \left[ C_{i\alpha j1} + C_{i\alpha k3} (C_{\cdot 3 \cdot 3})_{kl}^{-1} C_{l3j1} \right] u_j + C_{i\alpha k3} (C_{\cdot 3 \cdot 3})_{kj}^{-1} \sigma_{j3}. \quad (\text{II.36})$$

À noter que dans le cas où le plan sagittal coïncide avec le plan  $(x_1, x_3)$ , les expressions se simplifient puisque les dérivées selon  $x_2$  sont nulles ( $k_2 = 0$ ). Soit :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -ik_1 (C_{\cdot 3 \cdot 3})_{ik}^{-1} C_{k3j1} & (C_{\cdot 3 \cdot 3})_{ij}^{-1} \\ k_1^2 \left[ C_{i1j1} - C_{i1k3} (C_{\cdot 3 \cdot 3})_{kl}^{-1} C_{l3j1} \right] - \rho\omega^2 \delta_{ij} & -ik_1 C_{i1k3} (C_{\cdot 3 \cdot 3})_{kj}^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{II.37})$$

En comparant (II.35) avec la mise en équation (II.20), on a abaissé l'ordre de l'équation différentielle (de deux à un), en augmentant le nombre d'inconnues (de trois à six).

### II.2.2.2. Le formalisme de Stroh et ses différents paramétrages

En 1958 et 1962, Stroh développe un formalisme élégant et très puissant pour traiter un certains nombres de problèmes bidimensionnels en élastostatique (Stroh, 1962). L'extension à l'élastodynamique a été réalisée par la suite (Lothe & Barnett, 1976; Chadwick & Smith, 1977; Ting, 1996). Le formalisme de Stroh peut être vu comme une formulation Hamiltonienne du problème de propagation d'onde (Barnett, 2000). Ce formalisme permet d'utiliser différents paramétrages (Shuvalov & al., 2004), et ainsi de donner plus de flexibilité à la résolution. La matrice de Stroh notée  $\mathbf{N}$  est définie par (on retrouve le type d'écriture présent dans (II.34)) :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = -(nn)^{-1}(nm), \quad \mathbf{N}_2 = -(nn)^{-1}, \quad \mathbf{N}_3 = (mm) - (mn)(nn)^{-1}(nm), \quad (\text{II.38})$$

où  $(ab) \equiv a_i C_{ijkl} b_l$ , avec  $\mathbf{a}, \mathbf{b} = \mathbf{n}$  ou  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{n}$  étant les vecteurs unitaires portés par les axes  $x_1$  et  $x_3$ .

En considérant différents vecteurs d'état exprimés en fonction des paramètres acoustiques tels que la fréquence angulaire  $\omega$ , le nombre d'onde  $k_1$ , la vitesse de phase  $v_1$  ou la lenteur horizontale  $s_1 (= 1/v_1)$ , on obtient différents paramétrages liés aux différentes écritures possibles des champs de déplacement et traction :

✓  $\exp ik_1 (x_1 - v_1 t)$  : formulation de Lothe et Barnett (Lothe & Barnett, 1976),

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(x_3) \\ ik_1^{-1}\boldsymbol{\tau}(x_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}(k_1, v_1) = ik_1 \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 - \rho v_1^2 \mathbf{I}_3 & \mathbf{N}_1^T \end{pmatrix} \quad (\text{II.39})$$

- ✓  $\exp i\omega(s_1 x_1 - t)$  : formulation dite de Thomson et Haskell (**Thomson**, 1950; **Haskell**, 1953),

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = \begin{pmatrix} i\omega \mathbf{u}(x_3) \\ \boldsymbol{\tau}(x_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}(\omega, s_1) = i\omega \begin{pmatrix} s_1 \mathbf{N}_1 & -\mathbf{N}_2 \\ -s_1^2 \mathbf{N}_3 + \rho \mathbf{I}_3 & s_1 \mathbf{N}_1^T \end{pmatrix} \quad (\text{II.40})$$

- ✓  $\exp i(k_1 x_1 - \omega t)$  : formulation de Ingebrigtsen et Tonning (Ingebrigtsen & Tonning, 1969),

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(x_3) \\ i\boldsymbol{\tau}(x_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}(\omega, k_1) = i \begin{pmatrix} k_1 \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ k_1 \mathbf{N}_3 - \rho \omega^2 \mathbf{I}_3 & k_1 \mathbf{N}_1^T \end{pmatrix}. \quad (\text{II.41})$$

## CONCLUSION

Il est donc possible de formuler l'équation d'onde en milieux hétérogènes qu'ils soient multicouches ou continûment variables. L'équation (II.35) régit le comportement des ondes de façon globale et sans aucune hypothèse préalable concernant le milieu de propagation. Il s'agit donc d'une mise en équation générale pour laquelle on cherchera un panel de méthodes de résolution adaptées à chaque cas d'étude. De plus le formalisme de Stroh et les différents paramétrages possibles augmentent l'adaptabilité de l'écriture du problème. La propagation d'ondes en milieux hétérogènes trouve donc ici un outil d'analyse puissant à condition que la résolution de l'équation d'onde sous la forme (II.35) soit accessible analytiquement et praticable numériquement. Le développement en série de Peano du matricant (solution matricielle fondamentale au système (II.35)) répond à ces critères.

### III. Expression et calcul d'une solution à l'équation d'onde en milieu hétérogène

#### RÉSUMÉ

*Les équations d'onde en milieux continûment hétérogènes mises sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients non constants, peuvent être résolues par des méthodes d'intégration numérique de type Runge-Kutta ou en passant par les méthodes développées pour les multicouches de type Thomson-Haskell. Les solutions sont construites via des schémas itératifs. Mais le système possède une solution, le matricant, dont on connaît une expression analytique exacte qui permet de conserver l'authenticité du problème. Son utilisation concrète est rendue possible par le développement en série de Peano du matricant qui, associé au formalisme de Stroh, fournit une expression exploitable analytiquement et numériquement.*



## SOMMAIRE

<b>III.1. Le matricant, une matrice de propagation</b>	<b>44</b>
<b>III.1.1. Matricant et propogateur</b>	<b>45</b>
<b>III.2. Méthodes de construction de la solution</b>	<b>46</b>
<b>III.2.1. L'intégration numérique directe</b>	<b>46</b>
<i>III.2.1.1. La méthode d'Euler</i>	<i>46</i>
<i>III.2.1.2. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4</i>	<i>47</i>
<b>III.2.2. Modélisation et expressions analytiques</b>	<b>47</b>
<i>III.2.2.1. Milieux homogènes</i>	<i>47</i>
<i>III.2.2.2. Milieux hétérogènes</i>	<i>49</i>
<b>a) Thomson-Haskell et les milieux multicouches</b>	<b>50</b>
• Matrice de transfert et matricant	50
• Obtention « classique » de la matrice de transfert	51
• Méthode de Thomson et Haskell pour des milieux à propriétés continûment variables	53
<b>b) L'intégrale multiplicative de Volterra et la série de Peano</b>	<b>54</b>
• Définitions	54
• Construction de la série de Peano	55

<b>III.3. Évaluation de la série de Peano</b>	<b>57</b>
III.3.1. Convergence de la série de Peano	57
III.3.2. Une évaluation facilitée par un paramétrage approprié	59
<b>III.4. Évaluation de l'erreur et comparaison des méthodes</b>	<b>61</b>
III.4.1. Estimation de l'erreur de troncature	61
III.4.2. Comparaison de deux méthodes : Runge-Kutta d'ordre 4 et la série de Peano	64

## INTRODUCTION

En milieu hétérogène, une des méthodes de résolution de l'équation d'onde les plus connues et les plus utilisées est la méthode développée par Thomson et Haskell dans les années cinquante (**Thomson**, 1950; **Haskell**, 1953). Cette méthode et ses dérivées sont très employées par les géophysiciens et pour des applications de contrôle non destructif. La démarche repose sur une configuration multicouche. Un milieu dont les propriétés caractéristiques (célérités ou coefficients d'élasticité et masse volumique) varient selon une direction de l'espace choisie verticale, est représenté par un empilement de couches horizontales homogènes. Dans le cas d'un milieu stratifié, la formulation du problème est exacte. Dans le cas d'une variation continue des propriétés, le profil continu est remplacé par une fonction de la variable verticale constante par morceaux; le problème original est alors altéré avant même de passer à la résolution mathématique. L'imposition de l'hypothèse « multicouche » dans le cas de milieux continûment hétérogènes est à l'origine d'une approximation du problème lui-même. Ce problème approché est par la suite résolu de façon exacte par la méthode de Thomson et Haskell ou par une de ses méthodes dérivées, mais il est alors difficile d'évaluer l'erreur commise et la validité de la solution ainsi obtenue.

Mais le principe de la recherche d'une matrice de transfert peut se situer dans un cadre théorique plus vaste qui permet d'adapter la méthode de résolution à la configuration du problème étudié. La solution de (II.35) présentée dans ce chapitre sous le nom de matricant<sup>6</sup> est décrite par Pease (**Pease**, 1965). Ce dernier précise en 1965 que l'implémentation du matricant sous forme de développement en série de Peano (**Peano**, 1888) est difficile, justifiant ainsi sa portée limitée d'un point de vue applicatif<sup>7</sup>. Les progrès effectués au niveau de la puissance calculatoire des ordinateurs au cours des quarante dernières années, ainsi qu'une mise en œuvre de programmation adéquate, rend aujourd'hui possible l'exploitation d'un tel outil de calcul mathématique.

Au Chapitre 2 nous avons utilisé une démarche très répandue dans la résolution d'équations différentielles ordinaires qui consiste à réécrire une équation différentielle d'ordre deux en un système d'équations différentielles couplées d'ordre un (**Press & al.**, 1997). Cependant, le point crucial reste la donnée de conditions « initiales », c'est-à-dire la

---

<sup>6</sup> Le terme « matricant » est issu de la littérature anglo-saxonne **F. R. Gantmacher**, 1959, *The Theory of Matrices*, Wiley Interscience, **M. C. Pease**, 1965, *Methods of Matrix Algebra*, Academic Press. et sera retenu dans la suite du chapitre. On trouve également le terme « matricant » **A. Dymnikov & R. Hellborg**, 1993, *A Matrix Theory of the Motion of an Ellipsoidal Bunch in a Beam Control System with a Rectilinear Optical Axis and with Space Charge*, IEEE, 3618-3620.

<sup>7</sup> « We hasten to add that the solution, although a general one, has only a limited range of practical application because of the difficulty of computing it .» in (Pease, 1965) p. 172.

description des fonctions inconnues dans un état de référence. C'est cette information qui conditionne la résolution du problème et l'obtention de la solution. Le problème complet s'écrit donc de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\eta}(x_3)}{dx_3} = \mathbf{Q}(x_3)\boldsymbol{\eta}(x_3), \\ \boldsymbol{\eta}(x_3^{(0)}) = \boldsymbol{\eta}_0. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Le premier résultat fondamental est issu du théorème de Picard-Lindelöf qui assure l'existence et l'unicité de la solution au système (III.1).

Nous présentons ici, la solution générale à ce système. Puis nous décrivons les méthodes d'obtention et d'évaluation de la solution selon le problème à traiter.

### III.1. Le matricant, une matrice de propagation

En supposant que la matrice  $\mathbf{Q}$  est raisonnablement conditionnée c'est-à-dire que chacune de ses composantes est bornée sur un intervalle d'étude fini et intégrable au sens de Riemann<sup>8,9</sup> (**Gantmacher**, 1959), il existe un système de  $n$  solutions linéairement indépendantes à l'équation (III.1),  $n$  étant la dimension de la matrice  $\mathbf{Q}$  (**Pease**, 1965).

Soit un ensemble de  $n$  solutions indépendantes au système (III.1) et  $\boldsymbol{\eta}_i(x_3)$ , le  $i$ -ième vecteur de cet ensemble ( $i = 1, \dots, n$ ). On considère alors la matrice  $\boldsymbol{\Omega}(x_3)$ , appelée matrice fondamentale dont la  $i$ -ième colonne est le vecteur  $\boldsymbol{\eta}_i(x_3)$ . Elle satisfait donc l'équation (III.1) au sens matriciel. Tous les autres jeux de solutions linéairement indépendantes, autrement dit toutes les autres matrices fondamentales, s'obtiennent à partir de la multiplication de  $\boldsymbol{\Omega}$  par une matrice  $\mathbf{C}$  non singulière constante quelconque ( $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{C}$ ). La matrice  $\mathbf{C}$  peut être vue comme une matrice de changement de base pour la représentation des solutions linéairement indépendantes. La signification physique des vecteurs colonnes de la matrice fondamentale, c'est-à-dire la dimension physique de chacune de leurs composantes, est essentielle pour pouvoir exprimer les conditions aux limites du problème considéré et les relations de continuité des champs sous la forme d'un système de type (III.1). Parmi l'infinité des matrices fondamentales, il existe une unique matrice solution qui rend possible la prise en compte d'un état de référence physique des vecteurs  $\boldsymbol{\eta}_i(x_3)$  en un point  $x_3^{(0)}$  quelconque appartenant au milieu. Cette matrice est définie de façon unique à travers toutes les matrices  $\mathbf{X}(x_3)$  par :

<sup>8</sup> Remarque : en élastodynamique ces deux conditions sont toujours vérifiées.

<sup>9</sup> Définition de l'intégrabilité au sens de Riemann (Bass, J., 1964. Cours de Mathématiques, Paris, Masson et Cie, p.140).



$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{X}(x_3) \mathbf{X}^{-1}(x_3^{(0)}). \quad (\text{III.2})$$

Ainsi le matricant peut être déterminé à partir de n'importe quel jeu de  $n$  solutions linéairement indépendantes (**Gilbert & Backus**, 1966; **Kennett**, 1983). Cette définition impose la relation suivante :

$$\mathbf{M}(x_3^{(0)}, x_3^{(0)}) = \mathbf{I}, \quad (\text{III.3})$$

$\mathbf{I}$  étant la matrice identité de dimension  $n$ . La matrice  $\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)})$  est le *matricant* du système défini à partir de  $\mathbf{Q}$  et  $x_3^{(0)}$ .

Le matricant peut être vu comme un propagateur, puisqu'il relie deux vecteurs d'état exprimés en deux positions :

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = \mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) \boldsymbol{\eta}(x_3^{(0)}). \quad (\text{III.4})$$

Ainsi à partir de la connaissance d'un état de référence en un point quelconque du milieu, la connaissance du matricant permet de déduire les déplacements et les contraintes s'appliquant en chaque point de ce milieu. Conséquence directe de sa définition, le matricant satisfait également la « relation de Chasles »<sup>10</sup> suivante :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{M}(x_3, x_3') \mathbf{M}(x_3', x_3^{(0)}). \quad (\text{III.5})$$

Cette égalité illustre l'aspect « effets cumulatifs » du propagateur qui vient de la notion de matrices de transfert. L'impact de l'état de référence sur le point  $x_3$ , peut s'exprimer à partir d'un point intermédiaire  $x_3'$  quelconque. Cette propriété est très intéressante puisqu'elle permet de découper le domaine d'étude en sous-intervalles pour lesquels on peut calculer les matricants locaux, et de reconstruire de proche en proche le matricant global.

### III.1.1. Matricant et propagateur

Afin de définir correctement les notions abordées dans ce chapitre, il est important de revenir sur cette distinction terminologique. Le terme de propagateur, équivalent de la matrice de transfert, est très largement utilisé dans le cadre de l'étude de la propagation

---

<sup>10</sup> Kennett utilise le terme de « *chain rule* » dans **B. L. N. Kennett**, 1983, Seismic wave propagation in stratified media, Cambridge University Press. (p. 42-43).

dans des matériaux multicouches. Dans le cas d'un milieu homogène, c'est-à-dire pour une matrice  $\mathbf{Q}(x_3)$  constante ( $\mathbf{Q}(x_3) = \mathbf{Q}$ ), la relation (III.4) prend la forme suivante :

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = \exp\left[(x_3 - x_3^{(0)})\mathbf{Q}\right]\boldsymbol{\eta}(x_3^{(0)}). \quad (\text{III.6})$$

Pour de nombreux auteurs (**Aki & Richard**, 1980; **Kennett**, 1983), le propagateur est une généralisation de (III.6) lorsque la matrice  $\mathbf{Q}$  n'est pas nécessairement constante. Kennett précise que dans le cadre de la théorie générale des matrices, le terme de propagateur est remplacé par celui de matricant (**Frazer & al.**, 1938; **Gantmacher**, 1959; **Pease**, 1965).

Par la suite, le terme « matricant » sera conservé pour désigner  $\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)})$  en tant que fonction de  $x_3$  et le terme « propagateur » sera réservé pour désigner une évaluation du matricant  $\mathbf{M}(x_3^{(k)}, x_3^{(0)})$  sur un quelconque intervalle fixé  $[x_3^{(0)}, x_3^{(k)}]$ , ce qui reste cohérent avec l'utilisation qui en est faite dans le cadre des milieux multicouches.

## III.2. Méthodes de construction de la solution

Plusieurs méthodes de construction du matricant sont possibles.

### III.2.1. L'intégration numérique directe

Cette classe de problématique est très classique en analyse numérique. Dans la plupart des problèmes aux valeurs initiales issus de la physique, un des schémas les plus efficaces et offrant le meilleur compromis entre la précision du résultat et le temps de calcul est la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (dérivée de la méthode d'Euler ou Euler-Cauchy). Cette méthode repose sur le développement en série de Taylor de la fonction différenciée. Ses principaux avantages sont la facilité de programmation, la stabilité de la solution et la modification simple du pas. De plus, la connaissance de l'état initial suffit pour intégrer l'équation différentielle. Mais certaines configurations nécessitent un pas d'intégration très petit qui engendre un coût important en terme de temps de calcul. De plus il est difficile d'estimer l'erreur locale.

#### III.2.1.1. La méthode d'Euler

L'idée est de remplacer le problème théorique (III.1) par le problème discrétisé suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\eta}^{(k)} + h\mathbf{Q}(x_3^{(k)})\boldsymbol{\eta}^{(k)}, \\ x_3^{(k)} &= x_3^{(0)} + kh. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Lorsque la solution est connue au rang  $k$ , c'est-à-dire en  $x_3^{(k)}$ , on infère la solution au rang  $k + 1$ , en  $x_3^{(k+1)}$ . Cette méthode n'utilise l'information fournie par le calcul de la dérivée qu'en un point de l'intervalle correspondant à la borne inférieure. Elle n'est généralement pas pratiquée car elle est peu précise et instable.

### III.2.1.2. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Sur le même principe, en s'appuyant sur le développement en série de Taylor de la fonction différentiée, la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre est la plus couramment utilisée.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{k}_1 = \mathbf{Q}(x_3^{(i)})\boldsymbol{\eta}_i \quad \text{avec } \boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}(x_3^{(i)}) \\
 \mathbf{k}_2 = \mathbf{Q}(x_3^{(i)} + h/2)(\boldsymbol{\eta}_i + (h/2)\mathbf{k}_1) \\
 \mathbf{k}_3 = \mathbf{Q}(x_3^{(i)} + h/2)(\boldsymbol{\eta}_i + (h/2)\mathbf{k}_2) \\
 \mathbf{k}_4 = \mathbf{Q}(x_3^{(i)} + h)(\boldsymbol{\eta}_i + h\mathbf{k}_3) \\
 \boldsymbol{\eta}_{i+1} = \boldsymbol{\eta}_i + (h/6)(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)
 \end{array} \tag{III.8}$$

L'erreur commise est  $e = O(h^4)$ ,  $h$  étant le pas d'intégration (Press & al., 1997). L'expression de la solution ainsi obtenue est approchée. En se donnant six vecteurs solutions en  $x_3^{(0)}$ , de la forme

$$(\boldsymbol{\eta}_\alpha)_j = \delta_{\alpha j},$$

et en appliquant six fois l'algorithme, on reconstruit les six vecteurs colonnes du matricant  $\mathbf{M}$ .

## III.2.2. Modélisation et expressions analytiques

On adopte une approche analytique. La solution est recherchée sous la forme d'une expression mathématique exacte dont le contexte de validité dépend des hypothèses nécessaires à l'obtention de cette solution.

### III.2.2.1. Milieux homogènes

La matrice du système est constante :  $\mathbf{Q}(x_3) = \mathbf{Q}$ . Le système (III.1) est un système différentiel ordinaire à coefficients constants dont la solution est (Roseau, 1976; Aki & Richard, 1980) :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \exp\left[(x_3 - x_3^{(0)})\mathbf{Q}\right]. \quad (\text{III.9})$$

La dépendance des vecteurs d'état solutions est connue, puisqu'on recherche alors des solutions sous la forme d'ondes planes et harmoniques selon  $x_3$ , ce qui revient à utiliser les propriétés spectrales de  $\mathbf{M}$ . Ainsi les solutions partielles peuvent s'écrire :

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha(x_3) = \mathbf{v}_\alpha \exp(ik_{3\alpha}x_3), \quad (\text{III.10})$$

où  $k_{3\alpha}$  correspond à la composante verticale du nombre d'onde relatif à l'onde plane  $\alpha$  ( $\alpha = 1\dots 6$ ).

En reprenant l'équation (III.1) et en injectant (III.10), on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{Q} - ik_{3\alpha}\mathbf{I})\mathbf{v}_\alpha = 0. \quad (\text{III.11})$$

Les expressions  $ik_{3\alpha}$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{Q}$  et les vecteurs  $\mathbf{v}_\alpha$  les vecteurs propres de  $\mathbf{Q}$ . On en déduit donc les expressions des valeurs propres  $\lambda_\alpha$  et des vecteurs propres  $\mathbf{X}_\alpha$  du matricant :

$$\lambda_\alpha = \exp(ik_{3\alpha}(x_3 - x_3^{(0)})) \text{ et } \mathbf{X}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha. \quad (\text{III.12})$$

Dans le cas d'un matériau homogène, l'évaluation du matricant exprimé sous forme d'exponentielle de matrice peut être obtenue de différentes façons :

- ✓ via la décomposition spectrale de la matrice du système (III.12). La connaissance des valeurs propres et des vecteurs propres ( $\lambda_\alpha, \mathbf{v}_\alpha$ ) est nécessaire :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{P} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6) \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{III.13})$$

avec  $\mathbf{P} = (\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2 \ \mathbf{X}_3 \ \mathbf{X}_4 \ \mathbf{X}_5 \ \mathbf{X}_6)^T$  ;

- ✓ via la formule de Sylvester (Aki & Richard, 1980). Seule la connaissance des valeurs propres est nécessaire, c'est-à-dire qu'il suffit de connaître les racines de l'équation de Christoffel. Le calcul parfois lourd des vecteurs propres  $\mathbf{X}_\alpha$  est contourné :

$$F(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n F(\lambda_k) \frac{\prod_{r \neq k} (\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})}{\prod_{r \neq k} (\lambda_k - \lambda_r)}, \quad (\text{III.14})$$

où  $F$  est une fonction quelconque qui correspondra dans notre cas à la fonction exponentielle et les  $\lambda_k$  sont les  $n$  valeurs propres distinctes de la matrice carrée  $\mathbf{A}$  ;

- ✓ via le développement de l'exponentielle sous forme de série (la connaissance de  $\mathbf{Q}$  suffit). Cette méthode est très générale, aucune hypothèse restrictive particulière n'est requise, le calcul peut être un peu plus long mais il est valable pour toutes les configurations :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (x_3 - x_3^{(0)})^n \mathbf{Q}^n. \quad (\text{III.15})$$

### III.2.2.2. Milieux hétérogènes

En considérant la décomposition spectrale de  $\mathbf{Q}(x_3)$  dans un cas général, on a :

$$\mathbf{Q}(x_3) = \mathbf{P}(x_3) \mathbf{\Lambda}(x_3) \mathbf{P}^{-1}(x_3), \quad (\text{III.16})$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice formée des vecteurs propres ordonnés en colonnes et  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice diagonale des valeurs propres. En considérant une matrice fondamentale  $\mathbf{\Omega}$  solution matricielle du système (III.1), et en injectant (III.16) dans l'équation de (III.1), on obtient :

$$\frac{d\mathbf{\Omega}(x_3)}{dx_3} = \mathbf{P}(x_3) \mathbf{\Lambda}(x_3) \mathbf{P}^{-1}(x_3) \mathbf{\Omega}(x_3). \quad (\text{III.17})$$

On multiplie chaque membre par  $\mathbf{P}^{-1}(x_3)$  à gauche :

$$\mathbf{P}^{-1}(x_3) \frac{d\mathbf{\Omega}(x_3)}{dx_3} = \mathbf{\Lambda}(x_3) \mathbf{P}^{-1}(x_3) \mathbf{\Omega}(x_3). \quad (\text{III.18})$$

En utilisant la formule de dérivation d'un produit, l'expression (III.18) se réécrit :

$$\frac{d[\mathbf{P}^{-1}(x_3) \mathbf{\Omega}(x_3)]}{dx_3} - \mathbf{\Lambda}(x_3) [\mathbf{P}^{-1}(x_3) \mathbf{\Omega}(x_3)] = \frac{d\mathbf{P}^{-1}(x_3)}{dx_3} \mathbf{\Omega}(x_3). \quad (\text{III.19})$$

Lorsque les vecteurs propres de  $\mathbf{Q}(x_3)$  sont indépendants de  $x_3$ , le second membre de l'égalité (III.19) est nul ; l'équation (III.19) devient :

$$\frac{d[\mathbf{P}^{-1} \mathbf{\Omega}(x_3)]}{dx_3} - \mathbf{\Lambda}(x_3) [\mathbf{P}^{-1} \mathbf{\Omega}(x_3)] = \mathbf{0}. \quad (\text{III.20})$$

Il s'agit donc de résoudre un système d'équations différentielles scalaires, découplées (car  $\Lambda$  est diagonale) dont les inconnues sont rassemblées dans la matrice  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Omega}(x_3)$ . On accède ainsi à l'expression de la matrice  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\mathbf{\Omega}(x_3) = \mathbf{P} \exp \left[ \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \Lambda(\xi) d\xi \right]. \quad (\text{III.21})$$

Afin d'obtenir l'expression du matricant, on utilise la propriété (III.2) :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{\Omega}(x_3) \mathbf{\Omega}^{-1}(x_3^{(0)}) = \mathbf{P} \exp \left[ \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \Lambda(\xi) d\xi \right] \mathbf{P}^{-1}. \quad (3.22)$$

Dans le cas des milieux homogènes ( $\Lambda(x_3) = \Lambda$ ), on retrouve les résultats obtenus au paragraphe III.2.2.1.

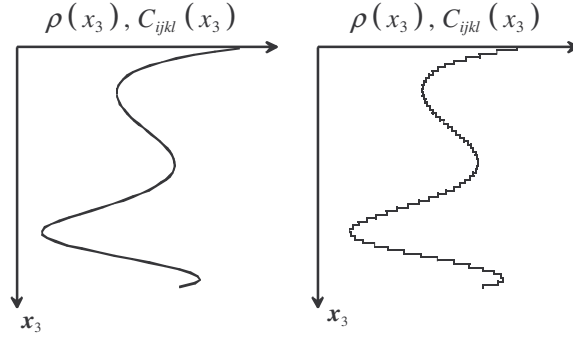
À notre connaissance, dans le cas de la propagation en milieux hétérogènes, il n'est pas possible de trouver une matrice  $\mathbf{Q}(x_3)$  représentative d'un milieu réel dont les vecteurs propres seraient constants (indépendants de  $x_3$ ). Les vecteurs propres seront donc a priori toujours dépendants de  $x_3$ . Et la résolution de l'équation (III.19) ne peut pas se faire via la décomposition spectrale de  $\mathbf{Q}(x_3)$ . L'expression de  $\mathbf{Q}(x_3)$  est spécifique au point  $x_3$  considéré, or le matricant  $\mathbf{M}$  solution de (III.1) et (III.3) prend en compte les variations de propriétés entre  $x_3$  et  $x_3^{(0)}$  dans leur globalité, le spectre de  $\mathbf{Q}$  en un point  $x_3$  particulier ne peut donc pas mener à l'obtention du matricant.

Deux approches sont envisagées pour l'évaluation du matricant, chacune étant plus spécifiquement adaptée à une configuration particulière du problème étudié.

**a) Thomson-Haskell et les milieux multicouches**

- Matrice de transfert et matricant

Cette méthode s'applique dans l'étude de milieux pris sous forme d'empilement de couches homogènes. Dans la configuration de l'étude choisie jusqu'ici, les couches sont horizontales. Le milieu hétérogène est naturellement ou artificiellement stratifié. Dans le deuxième cas les profils continus d'hétérogénéité seront remplacés par des fonctions constantes par morceaux.



**Figure 3.1.** Modélisation d'un milieu continûment hétérogène en multicouche.

L'intervalle d'étude  $[x_3^{(0)}, x_3]$  est divisé en  $n$  segments notés  $\Delta_k$

$$\Delta_k = [x_3^{(k-1)}, x_3^{(k)}], \quad (\text{III.23})$$

dont la longueur peut être variable. On suppose que les propriétés du matériau sont constantes sur chacun de ces  $n$  sous-intervalles pour lesquels on définit  $n$  sous-systèmes à résoudre. La méthode de Thomson-Haskell consiste à calculer une matrice de transfert  $\mathbf{A}_k$  pour chaque couche  $k$  permettant de relier le vecteur déplacements/contraintes  $\boldsymbol{\eta}_k$  évalué au niveau de l'interface supérieure de la couche à celui de l'interface inférieure :

$$\boldsymbol{\eta}_k(x_3^{(k)}) = \mathbf{A}_k \boldsymbol{\eta}_k(x_3^{(k-1)}) \quad (\text{III.24})$$

Soit  $\mathbf{Q}^{(k)}$  la matrice du système de la « couche  $k$  ». Cette matrice est constante en  $x_3$ . Sur chacun des segments  $\Delta_k$ , on résout un système différentiel ordinaire du premier ordre à coefficients constants dont on a déjà donné la solution au paragraphe précédent (§ III.2.2.1). On obtient donc l'expression des matricants  $\mathbf{M}(x_3^{(k)}, x_3^{(k-1)})$  sur  $\Delta_k$  :

$$\mathbf{M}(x_3^{(k)}, x_3^{(k-1)}) = \exp[\Delta_k \mathbf{Q}^{(k)}]. \quad (\text{III.25})$$

En utilisant la propriété (III.5), on obtient le matricant global du multicouche :

$$\mathbf{M}^{(n)}(x_3, x_3^{(0)}) = \prod_{k=1}^n \mathbf{M}(x_3^{(k)}, x_3^{(k-1)}). \quad (\text{III.26})$$

Cette méthode décrite dans (Thomson, 1950; Haskell, 1953) est aussi connue sous le nom de « méthode des matrices de transfert ». Nous développons ici quelques points de la méthode dont le principe général a été présenté au § I.2.1.

- Obtention « classique » de la matrice de transfert

Dans le cadre usuel de la méthode de Thomson et Haskell, le calcul de la matrice de transfert globale est mené de façon différente à ce qui a été présenté jusqu'ici. On considère les phénomènes de réflexion et de transmission qui s'opèrent à l'intérieur de chaque couche. Ceci amène à considérer la propagation de deux catégories d'ondes planes élastiques à l'intérieur de chaque couche : les ondes montantes qui se propagent selon les  $x_3$  négatifs et les ondes descendantes qui se propagent selon les  $x_3$  positifs. Les lois de Snell-Descartes étant satisfaites, on exprime le champs de ces ondes sous la forme d'un produit d'un facteur commun et d'un terme propre à chacune des ondes mises en jeu :

$$\mathbf{u}_w(t, x_1, x_3) = a_w \mathbf{P}_w \exp(ik_{3w}x_3), \quad (\text{III.27})$$

avec  $w = L, T_1$  ou  $T_2$ ,  $\mathbf{P}_w$  étant le vecteur polarisation de l'onde de type  $w$  et  $k_{3w}$  son nombre d'onde.

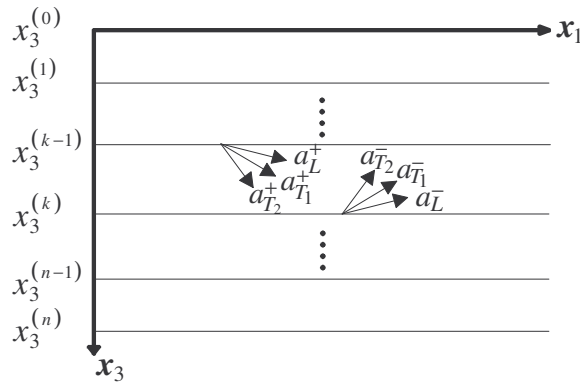


Figure 3.2. Ondes montantes et descendantes dans la couche  $k$ .

On rassemble dans un vecteur  $\mathbf{V}_k$  à six composantes l'ensemble des amplitudes des ondes montantes (-) et descendantes (+) susceptibles de se propager dans la couche  $k$  :

$$\mathbf{V}_k = (a_L^+ \ a_{T_1}^+ \ a_{T_2}^+ \ a_L^- \ a_{T_1}^- \ a_{T_2}^-). \quad (\text{III.28})$$

Pour chaque catégorie, on a une onde longitudinale ( $a_L$ ) et deux ondes (quasi) transversales ( $a_{T_1}, a_{T_2}$ ) polarisées (quasi) dans le plan de propagation et (quasi) perpendiculairement au plan de propagation. Ce vecteur d'amplitude est lié au vecteur de déplacements/contraintes relatif à la couche  $k$  par la relation

$$\boldsymbol{\eta}_k(x_3) = \mathbf{R}_k(x_3) \mathbf{V}_k \text{ avec } x_3^{(k-1)} \leq x_3 \leq x_3^{(k)}, \quad (\text{III.29})$$

où la matrice  $\mathbf{R}$  est obtenue en exprimant les composantes du déplacement comme somme des contributions des six ondes susceptibles de se propager dans la couche  $k$  :



$$u_j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_j = \sum_{w=L,T_1,T_2} \left( a_w^+ (\mathbf{P}_w^+ \cdot \mathbf{n}_j) e^{ik_3^+ x_3} + a_w^- (\mathbf{P}_w^- \cdot \mathbf{n}_j) e^{ik_3^- x_3} \right), \quad (\text{III.30})$$

où  $\mathbf{n}_j$  est le vecteur directeur de l'axe  $x_j$ . Puis en utilisant la loi de Hooke on obtient les composantes des contraintes en fonction des amplitudes (**Castaings**, 1993). On applique la relation (III.29) à la couche  $k$  en  $x_3 = x_3^{(k-1)}$

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{R}_k^{-1} (x_3^{(k-1)}) \boldsymbol{\eta}_k (x_3^{(k-1)}), \quad (\text{III.31})$$

et en injectant (III.31) dans l'équation (III.29), on obtient en  $x_3 = x_3^{(k)}$ ,

$$\boldsymbol{\eta}_k (x_3^{(k)}) = \mathbf{R}_k (x_3^{(k)}) \mathbf{R}_k^{-1} (x_3^{(k-1)}) \boldsymbol{\eta}_k (x_3^{(k-1)}). \quad (\text{III.32})$$

On récupère ainsi l'expression de la matrice de transfert  $\mathbf{A}_k$  :

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{R} (x_3^{(k)}) \mathbf{R}_k^{-1} (x_3^{(k-1)}). \quad (\text{III.33})$$

Dans cette démarche il est nécessaire de calculer les polarisations des différentes ondes planes élastiques susceptibles de se propager dans chacune des couches. Les calculs peuvent être très longs notamment dans le cas d'un nombre de couches élevé et de symétries matérielles défavorables à la simplification des calculs des lenteurs verticales et des polarisations.

Dans le cas des milieux périodiques, des méthodes basées sur la matrice de transfert et les ondes de Floquet sont également développées (**Kenneth**, 1982; **Braga & Herrmann**, 1991; **Potel & Belleval**, 1993). Généralement les structures composites utilisées dans le domaine industriel rentrent dans cette catégorie, d'où un fort intérêt pour cette méthode dans le domaine applicatif et le développement au cours des dernières années, de méthodes dérivées comme la méthode de l'opérateur Delta (**Dunkin**, 1965), visant à améliorer notamment la stabilité de la méthode de Thomson et Haskell.

- Méthode de Thomson et Haskell pour des milieux à propriétés continûment variables

Dans le cas d'une stratification réelle du milieu, les solutions obtenues par la méthode de Thomson-Haskell sont exactes et relativement simples à obtenir. Lorsqu'il s'agit de traiter un milieu continûment variable, la méthode de Thomson et Haskell nous donne une solution approchée du problème, la solution exacte serait la limite du produit (III.26) lorsque le nombre de couches tend vers l'infini. On remplace les profils de propriétés continus par des fonctions constantes par morceaux. Par cette démarche, l'authenticité du problème est perdue avant même tout calcul et cette modélisation implique des choix

délicats sur le nombre de couches à considérer et la répartition des interfaces. Ces facteurs ont des répercussions directes sur le degré de précision et la validité des solutions ainsi obtenues.

**b) L'intégrale multiplicative de Volterra et la série de Peano**

• Définitions

L'intégrale multiplicative<sup>11</sup> de Volterra (**Gantmacher**, 1959; **Pease**, 1965), appelée aussi produit continu est au produit ce que l'intégrale est à la somme. C'est-à-dire un passage à la limite d'une succession d'opérations (en l'occurrence une série de multiplications). On reprend l'idée précédente de subdivision de l'intervalle d'étude, en faisant tendre le nombre de sous-intervalles vers l'infini :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(k)}) = \exp(\mathbf{Q}^{(n)}\Delta_n) \exp(\mathbf{Q}^{(n-1)}\Delta_{n-1}) \dots \exp(\mathbf{Q}^{(1)}\Delta_1) + o(\Delta). \quad (\text{III.34})$$

Or, quel que soit  $k$ , entier naturel,  $\Delta_k \rightarrow 0$ , sur un intervalle infiniment petit on peut utiliser le développement en série de l'exponentielle à l'ordre un :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = [\mathbf{I} + \mathbf{Q}^{(n)}\Delta_n][\mathbf{I} + \mathbf{Q}^{(n-1)}\Delta_{n-1}] \dots [\mathbf{I} + \mathbf{Q}^{(1)}\Delta_1] + o(\Delta); \quad (\text{III.35})$$

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \lim_{\Delta_k \rightarrow 0} \prod_k [\mathbf{I} + \mathbf{Q}^{(k)}\Delta_k]. \quad (\text{III.36})$$

Le terme  $\prod_k [\mathbf{I} + \mathbf{Q}^{(k)}\Delta_k]$  est appelé le *produit intégral* et la limite pour  $\Delta_k \rightarrow 0$  de ce produit intégral est appelée l'*intégrale multiplicative*<sup>12</sup>.

Une nouvelle représentation du matricant est donc donnée sous la forme de l'intégrale multiplicative de Volterra notée  $\widehat{\int}$  :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \widehat{\int}_{x_3^{(0)}}^{x_3} (\mathbf{I} + \mathbf{Q}(\xi) d\xi). \quad (\text{III.37})$$

Le lien entre l'intégrale multiplicative de Volterra et le développement en série de Peano du matricant est donné par l'égalité suivante (**Gill**, 1992) :

$$\prod_{k=n}^1 (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^{(k)}\Delta_k) = \mathbf{I} + \sum_{m=1}^n \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_m} \mathbf{Q}^{(k_m)} \dots \mathbf{Q}^{(k_2)} \mathbf{Q}^{(k_1)} \Delta_{k_m} \dots \Delta_{k_2} \Delta_{k_1}. \quad (\text{III.38})$$

<sup>11</sup> L'intégrale multiplicative fut introduite par Volterra en 1887. Sur cette base Volterra développa une série de calculs infinitésimaux pour les fonctions matricielles.

<sup>12</sup> Les termes *produit intégral* et *intégrale multiplicative* sont définis d'après **F. R. Gantmacher**, 1959, The Theory of Matrices, Wiley Interscience. (p.132).

Si l'on opère un passage à la limite sur cette égalité on obtient :

$$\widehat{\int_{x_3^{(0)}}^{x_3} (\mathbf{I} + \mathbf{Q}(\xi) d\xi)} = \mathbf{I} + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) d\xi + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) d\xi \int_{x_3^{(0)}}^{\xi} \mathbf{Q}(\xi_1) d\xi_1 + \dots \quad (\text{III.39})$$

On exprime ainsi l'intégrale multiplicative sous la forme d'une somme répétée d'intégrales. C'est la série de Peano (Giuseppe, 1858-1932) (**Peano**, 1888). Pour une matrice  $\mathbf{Q}$  constante, l'expression (III.39) nous ramène au développement en série de la fonction exponentielle, on retrouve bien (III.9). Il est intéressant de remarquer également que lorsque la matrice  $\mathbf{Q}$  est dépendante de  $x_3$  et que les valeurs de  $\mathbf{Q}$  commutent entre elles pour des valeurs différentes de  $x_3$ , c'est-à-dire :

$$\forall (\alpha, \beta) \in [a, b]^2, [\mathbf{Q}(\alpha), \mathbf{Q}(\beta)] = \mathbf{Q}(\alpha)\mathbf{Q}(\beta) - \mathbf{Q}(\beta)\mathbf{Q}(\alpha) = 0, \quad (\text{III.40})$$

alors

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \exp\left(\int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) d\xi\right). \quad (\text{III.41})$$

En effet si  $\mathbf{Q}(x_3)$  commute avec elle-même, on a l'égalité suivante :

$$\exp[\mathbf{Q}(\alpha)]\exp[\mathbf{Q}(\beta)] = \exp[\mathbf{Q}(\alpha) + \mathbf{Q}(\beta)]. \quad (\text{III.42})$$

Ainsi, la forme (III.41) se déduit directement du passage à la limite de l'expression (III.34) (**Peano**, 1888; **Gantmacher**, 1959; **Pease**, 1965).

À présent, détaillons la construction de la série de Peano.

- Construction de la série de Peano

On construit une suite à partir de la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{I}, \\ \frac{d\mathbf{M}_k}{dx_3} &= \mathbf{Q}(x_3)\mathbf{M}_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

qui peut s'écrire<sup>13</sup>

<sup>13</sup> C'est cette relation qui sera utilisée pour l'implémentation numérique.

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{I} + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) \mathbf{M}_{k-1} d\xi. \quad (\text{III.44})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{M}_1 &= \mathbf{I} + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) d\xi, \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{I} + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) d\xi + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) \int_{x_3^{(0)}}^{\xi} \mathbf{Q}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

On vérifie aisément que

$$\mathbf{M}_\infty(x_3, x_3^{(0)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}_k(x_3, x_3^{(0)})$$

est solution de (III.1). Il s'agit donc de l'expression du matricant sous la forme d'une série (infinie) d'intégrales multiples de la matrice du système

Cette construction de la solution est également appelée *méthode des itérations successives de Picard* (Émile, 1856-1941) (**Picard**, 1899; **Gantmacher**, 1959; **Mickhlin**, 1964; **Roseau**, 1976; **Archibald**, 1996).

On voit ici que la démarche est radicalement différente de la méthode de Thomson et Haskell. La série de Peano tend vers la solution par sommation de termes correctifs, mais la solution quelle que soit sa précision est toujours calculée sur l'intervalle d'étude complet alors que la solution de Thomson et Haskell est issue d'une succession de multiplications de matrices obtenues de proche en proche depuis le point de référence jusqu'au point final. La démarche de Thomson et Haskell est analogue à la définition de l'intégrale multiplicative de Volterra. Lorsqu'on reprend l'équation (III.35), on retrouve l'idée de diviser l'intervalle d'étude en plusieurs sous-intervalles pour chacun desquels on exprime une solution, puis on construit le matricant global par multiplications successives, de proche en proche. Si les intervalles sont suffisamment petits pour que le développement du matricant local  $\mathbf{M}(x_3^{(k)}, x_3^{(k-1)})$  à l'ordre un soit une approximation correcte de l'exponentielle solution du problème de Thomson et Haskell au sein d'une couche, le calcul du produit intégral est alors équivalent au calcul de Thomson et Haskell (**Gilbert & Backus**, 1966).

À ce stade nous avons l'expression d'une solution analytique exacte de l'équation. Rappelons que jusque-là, dans le cas de la construction de la série de Peano, aucune

approximation ou hypothèse restrictive n'a été utilisée, il s'agit de la solution des équations d'onde dans le cas général, milieu homogène ou hétérogène, continu ou stratifié. Mais comment évaluer cette série efficacement et correctement? Les méthodes d'évaluation peuvent être adaptées au mieux selon le problème traité.

### III.3. Évaluation de la série de Peano

On reprend ici l'expression (III.39). Il s'agit d'une série (infinie) qui correspond au développement du produit continu (III.37). Un choix approprié de paramétrage facilite l'évaluation analytique (développements asymptotiques) ou numérique de la série de Peano.

#### III.3.1. Convergence de la série de Peano

Une propriété importante de cette série est qu'elle est toujours convergente lorsque  $\mathbf{Q}(x_3)$  est bornée sur l'intervalle d'étude.

##### Démonstration

H1 : On suppose que les composantes de la matrice  $\mathbf{Q}$  sont des fonctions continues<sup>14</sup> en  $x_3$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On définit la fonction  $\text{mod } \mathbf{v}$  où  $\mathbf{v}$  est un vecteur dépendant de  $x_3$  de dimension  $n$  :

$$\text{mod } \mathbf{v}(x_3) = \sqrt{\sum_{p=1}^n v_p(x_3)^2} . \quad (\text{III.46})$$

Pour  $\mathbf{A}$  une matrice carrée de dimension  $n$  on définit

$$\text{mod } \mathbf{A} = \max_{\mathbf{x}} \frac{\text{mod } \mathbf{A}\mathbf{x}}{\text{mod } \mathbf{x}} , \quad (\text{III.47})$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur quelconque.

D'après H1 et (III.47),  $\text{mod } \mathbf{Q}$  est une fonction continue de la variable  $x_3$ . Une fonction continue sur un intervalle fermé est bornée. On note

$$m = \max_{x_3 \in [a, b]} \text{mod } \mathbf{Q} \quad (\text{III.48})$$

---

<sup>14</sup> L'hypothèse d'une fonction bornée est suffisante. Si la fonction est continue par morceaux et bornée sur l'intervalle fermé de l'étude, on divisera l'intervalle d'étude en sous-intervalles afin d'isoler les points de discontinuité. On traitera chaque sous-intervalle indépendamment et on utilisera la propriété (III.5) pour construire le matricant global.

On a donc

$$\text{mod} \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(x_3) dx_3 \leq \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \text{mod} \mathbf{Q}(x_3) dx_3 \leq m(x_3 - x_3^{(0)}), \quad (\text{III.49})$$

$$\begin{aligned} \text{mod} \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) d\xi \int_{x_3^{(0)}}^{\xi} \mathbf{Q}(\xi_1) d\xi_1 &\leq \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \text{mod} \mathbf{Q}(\xi) d\xi \int_{x_3^{(0)}}^{\xi} \text{mod} \mathbf{Q}(\xi_1) d\xi_1 \\ &\leq m^2 \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} (\xi - x_3^{(0)}) d\xi = \frac{m^2}{2} (x_3 - x_3^{(0)})^2, \quad (\text{III.50}) \end{aligned}$$

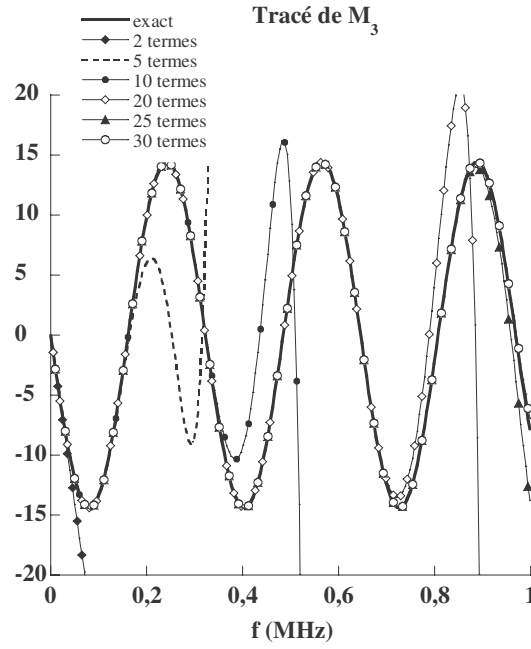
...

$$\text{mod} \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) d\xi \cdots \int_{x_3^{(0)}}^{\xi_{n-1}} \mathbf{Q}(\xi_{n-1}) d\xi_{n-1} \leq \frac{m^n}{n!} (x_3 - x_3^{(0)})^n. \quad (\text{III.51})$$

La série de terme général  $u_n = m^n \Delta^n / n!$  est convergente. Le terme général de la série (III.39) est majoré par le terme général d'une série convergente, la série de Peano est donc uniformément convergente.

Comme nous l'avons déjà souligné dans le cadre de la méthode de Thomson et Haskell, le point critique de l'évaluation est le passage à la limite à l'infini qui n'est guère praticable. Pour la méthode de Thomson et Haskell il s'agit de choisir un nombre  $n$  de couches suffisamment grand pour approcher correctement le matricant. Dans le cas de la série de Peano, il faut déterminer l'ordre de troncature (voir Figure 3.3). Nous insisterons encore sur le fait que les matrices de transfert construisent le matricant de proche en proche alors que les premiers termes de la série de Peano nous donne déjà une évaluation de la solution globale, rendue de plus en plus fine et précise lorsqu'on augmente le nombre de termes de la série; d'où le nom de *méthode des approximations successives* déjà évoqué.

Afin d'illustrer l'évolution de l'évaluation de la solution en fonction du nombre de termes retenus dans la série de Peano, on présente des résultats numériques obtenus dans le cas d'un milieu homogène pour lequel la solution exacte est connue et calculable analytiquement. Il s'agit de représenter le comportement de la sous-matrice inférieure gauche du matricant, notée  $\mathbf{M}_3$ , en fonction de la fréquence. Les ondes considérées ici sont des ondes SH pour lesquelles le matricant est de dimension deux (cf. paragraphe suivant) et  $\mathbf{M}_3$  se réduit à un scalaire. Les ondes se propagent à incidence normale dans un milieu homogène et isotrope dont les propriétés caractéristiques sont les suivantes :  $\rho = 4,46 \text{ g/cm}^3$ ,  $C_L = 6,06 \text{ mm}/\mu\text{s}$  et  $C_T = 3,23 \text{ mm}/\mu\text{s}$ .



**Figure 3.3.** Tracé de  $M_3$  ( sous matrice inférieure gauche du matricant, scalaire dans le cas des ondes SH) pour  $k_1 = 0$ , en fonction de la fréquence pour différents ordres de troncature de la série de Peano.

Remarque : le matricant est calculé en utilisant la propriété (III.5). Le « nombre de termes » correspond au nombre de termes (**I** compris) du développement en série de Peano de chacun des deux facteurs. Cette correspondance sera utilisée par la suite.

Quel que soit l'ordre de troncature, la série fournit une solution valide sur un certain intervalle de fréquence. Le nombre de termes à retenir peut donc être défini en fonction du domaine fréquentiel de l'étude. On note la convergence plutôt rapide de la série vers la solution exacte.

### III.3.2. Une évaluation facilitée par un paramétrage approprié

L'évaluation numérique tout comme l'obtention de développements asymptotiques de la série de Peano (cf. § IV.3), est grandement facilitée par les paramétrages (II.39) et (II.40) En effet, la série devient alors une série de puissances de  $k_1$  et  $\omega$ .

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{I} + (ik_1) \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{N}(\xi) d\xi + (ik_1)^2 \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{N}(\xi) d\xi \int_{x_3^{(0)}}^{\xi} \mathbf{N}(\xi_1) d\xi_1 + (ik_1)^3 \dots \quad (\text{III.52})$$

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{I} + (i\omega) \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{N}(\xi) d\xi + (i\omega)^2 \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{N}(\xi) d\xi \int_{x_3^{(0)}}^{\xi} \mathbf{N}(\xi_1) d\xi_1 + (i\omega)^3 \dots \quad (\text{III.53})$$

Et sous une écriture plus condensée :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_{(n)}(v_1, x_3) \left[ ik_1 (x_3 - x_3^{(0)}) \right]^n ; \quad (\text{III.54})$$

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{S}_{(n)}(s_1, x_3) \left[ i\omega (x_3 - x_3^{(0)}) \right]^n . \quad (\text{III.55})$$

Les coefficients de la série (III.54) sont des polynômes matriciels (de degré fini) de la variables  $v_1$  et sont indépendants du nombre d'onde  $k_1$ . Les coefficients de la série (III.55) sont des polynômes matriciels (de degré fini) de la variable  $s_1$  et sont indépendants de la fréquence  $\omega$ .

Pour les milieux orthotropes ou de symétrie plus élevée, en considérant le plan de propagation  $(x_1, x_3)$  comme étant un plan principal, les ondes P-SV issues du couplage entre les modes longitudinaux  $L$  et les modes verticalement transversaux  $T_1$  (ondes de pression et cisaillement polarisées dans le plan de propagation) sont découplées des ondes SH, modes transversaux horizontaux  $T_2$  (ondes de cisaillement polarisées selon l'axe  $x_2$ ). On présente ici le paramétrage dit de Thomson et Haskell (II.40) pour ces deux types d'ondes:

– ondes SH – système  $2 \times 2$

$$\mathbf{Q}(x_3) = i\omega \begin{pmatrix} 0 & 1/C_{44}(x_3) \\ \rho(x_3) - s_1^2 C_{66}(x_3) & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}(x_3) = \begin{pmatrix} i\omega u_2 \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} ; \quad (\text{III.56})$$

– ondes P-SV - système  $4 \times 4$

$$\mathbf{Q}(x_3) = i\omega \begin{pmatrix} 0 & -s_1 & 1/C_{55}(x_3) & 0 \\ -\frac{C_{13}(x_3)}{C_{33}(x_3)} s_1 & 0 & 0 & 1/C_{33}(x_3) \\ \rho(x_3) - s_1^2 \zeta(x_3) & 0 & 0 & -\frac{C_{13}(x_3)}{C_{33}(x_3)} s_1 \\ 0 & \rho(x_3) & -s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.57})$$

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = \begin{pmatrix} i\omega u_1 \\ i\omega u_3 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

$$\zeta(x_3) = C_{11}(x_3) - \frac{C_{13}^2(x_3)}{C_{33}(x_3)}.$$

Sur ces deux sous-systèmes on pourra aisément vérifier la mise en forme polynomiale du matricant.



La forme polynomiale présente deux avantages : l'un numérique; l'autre analytique.

✓ Avantage numérique :

Lors de l'évaluation de la série de Peano, le calcul relatif aux coefficients matriciels pourra être réalisé indépendamment de la fréquence et être réutilisé pour des évaluations du matricant à différentes valeurs de  $\omega$ . Cette remarque implique un gain de temps de calcul non négligeable.

✓ Avantage analytique :

Le calcul de développements asymptotiques à basses fréquences revient à ne retenir que les premiers termes de la série (en supposant le polynôme ordonné selon les degrés croissants de  $\omega$ ).

### III.4. Évaluation de l'erreur et comparaison des méthodes

Comme cela a été souligné en introduction, l'estimation de l'erreur commise lorsqu'on utilise la modélisation multicouche de la méthode de Thomson et Haskell pour un milieu à propriétés continûment variables est un point délicat. L'écriture du matricant sous la forme de la série de Peano est une solution exacte du problème exact. L'approximation de la solution est due à deux facteurs : la troncature de la série et la méthode d'intégration des coefficients des polynômes. Dans un cas général, l'obtention de critères de précision conjuguant ces deux facteurs est extrêmement compliquée. En annexe, le calcul de l'erreur globale est présenté dans le cas de fonctions contractantes<sup>15</sup> (Annexe A). On considèrera qu'en pratique les intégrales sont suffisamment bien calculées (méthodes d'intégration d'ordre élevé) pour que les erreurs de quadrature des intégrales soient d'un impact inférieur à celui de l'ordre de troncature de la série.

#### III.4.1. Estimation de l'erreur de troncature

On choisira la norme 2 subordonnée<sup>16</sup> à la norme vectorielle euclidienne et définie comme suit :

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^* \mathbf{A})}. \quad (\text{III.58})$$

---

<sup>15</sup> Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est une fonction de  $I$  sur  $\mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est lipchitzienne de rapport  $k$  si, pour tout  $(x, y)$  de  $I$ :  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ . La fonction est dite contractante pour  $k < 1$ .

<sup>16</sup> Une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle est définie par  $\|\mathbf{A}\| = \sup_x \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ .

$\mathbf{A}$  est une matrice carrée, et  $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$  est la matrice adjointe de  $\mathbf{A}$  (la transposée de la matrice conjuguée). L'expression  $\rho(\mathbf{A})$  représente le rayon spectral de la matrice :

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i|. \quad (\text{III.59})$$

On pose

$$\left(\hat{\mathbf{Q}}\right)_{ij} = \sup_{x_3 \in [a,b]} (q_{ij}(x_3)). \quad (\text{III.60})$$

Ainsi  $\hat{\mathbf{Q}}$  ne dépend pas de  $x_3$ . En reprenant l'expression du matricant sous forme de série de Peano (III.39), on peut écrire

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^{(0)}) \leq \mathbf{I} + (x_3 - x_3^{(0)})\hat{\mathbf{Q}} + \dots + \frac{(x_3 - x_3^{(0)})^k \hat{\mathbf{Q}}^k}{k!} + \dots = e^{(x_3 - x_3^{(0)})\hat{\mathbf{Q}}} \quad (\text{III.61})$$

L'erreur commise en tronquant la série au rang  $n$  peut être évaluée :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x_3) &= \left\| e^{(x_3 - x_3^{(0)})\hat{\mathbf{Q}}} - \sum_{k=0}^n \frac{\left((x_3 - x_3^{(0)})\hat{\mathbf{Q}}\right)^k}{k!} \right\| \\ &= \left\| \frac{\left((x_3 - x_3^{(0)})\hat{\mathbf{Q}}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \left( \mathbf{I} + \frac{(x_3 - x_3^{(0)})\hat{\mathbf{Q}}}{(n+2)} + \frac{\left((x_3 - x_3^{(0)})\hat{\mathbf{Q}}\right)^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \right\|, \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

qu'on peut majorer par :

$$\varepsilon_n(x_3) \leq \left\| \frac{\left(x_3 - x_3^{(0)}\right)^{n+1} \hat{\mathbf{Q}}^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x_3 - x_3^{(0)}\right)^k \hat{\mathbf{Q}}^k}{(n+2)^k} \right\|. \quad (\text{III.63})$$

Or,

$$\exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \frac{|x_3 - x_3^{(0)}|}{n+2} \|\hat{\mathbf{Q}}\| < 1,^{17} \quad (\text{III.64})$$

on a alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_3 - x_3^{(0)})^k \hat{\mathbf{Q}}^k}{(n+2)^k} = \left( \mathbf{I} - \frac{(x_3 - x_3^{(0)}) \hat{\mathbf{Q}}}{n+2} \right)^{-1} \quad (\text{III.65})$$

Ainsi,

$$\varepsilon_n(x_3) \leq \frac{|(x_3 - x_3^{(0)})^{n+1}|}{(n+1)!} \|\hat{\mathbf{Q}}^{n+1}\| \left\| \left( \mathbf{I} - \frac{(x_3 - x_3^{(0)}) \hat{\mathbf{Q}}}{n+2} \right)^{-1} \right\|. \quad (\text{III.66})$$

**Théorème :**

Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée (ici  $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^* \mathbf{A})}$ ), et  $\mathbf{B}$  une matrice vérifiant

$$\|\mathbf{B}\|_2 < 1. \quad (\text{III.67})$$

Alors la matrice  $(\mathbf{I} + \mathbf{B})$  est inversible, et

$$\|(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{B}\|_2}. \quad (\text{III.68})$$

Démonstration

$(\mathbf{I} + \mathbf{B})$  étant inversible on peut écrire

$$(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}, \quad (\text{III.69})$$

d'où

<sup>17</sup> Dans le cas où  $\|\hat{\mathbf{Q}}\|$  est grande,  $n_0$  peut être très grand. Il est alors intéressant de diviser l'intervalle  $[x_3^{(0)}, x_3]$  en sous-intervalles qui atténueraient le poids de  $\|\hat{\mathbf{Q}}\|$ . Le nombre de coefficients à calculer serait le même mais leur complexité serait moindre.

$$\left\|(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}\right\|_2 \leq 1 + \|\mathbf{B}\|_2 \left\|(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}\right\|_2. \quad (\text{III.70})$$

ce qui conduit à (III.68).

Donc d'après (III.68)

$$\varepsilon_n(x_3) \leq \frac{\left| \left( x_3 - x_3^{(0)} \right)^{n+1} \right|}{(n+1)!} \frac{\|\hat{\mathbf{Q}}^{n+1}\|}{1 - \frac{\left( x_3 - x_3^{(0)} \right) \|\hat{\mathbf{Q}}\|}{n+2}} \quad (\text{III.71})$$

On a donc ici une majoration de l'erreur commise lorsqu'on tronque la série au  $n$ -ième terme.

On peut également utiliser la décomposition spectrale de  $\hat{\mathbf{Q}}$  :

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{P}, \quad (\text{III.72})$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale et  $\mathbf{P}$  une matrice constituée des vecteurs propres de  $\hat{\mathbf{Q}}$  arrangés en colonnes (matrice de passage). Ainsi

$$\|\mathbf{Q}^{n+1}\| \leq \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\mathbf{D}\|^{n+1}, \quad (\text{III.73})$$

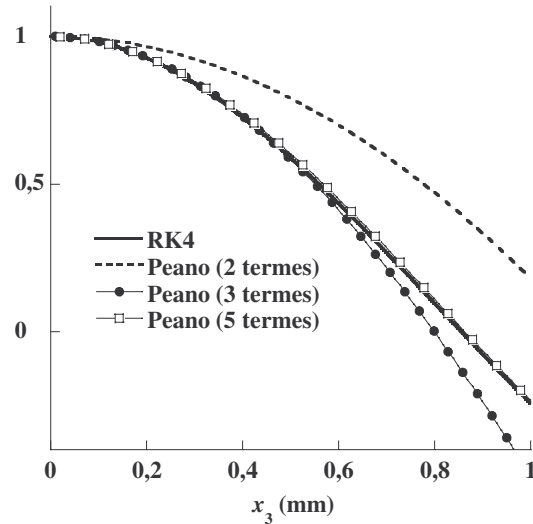
ce qui facilite l'évaluation du majorant de l'erreur commise au rang  $n$ .

Ce type de démarche fournit bien souvent un majorant très au-delà du comportement réel du système étudié, mais cette estimation peut s'avérer utile pour tester le domaine de validité de l'approximation.

### III.4.2. Comparaison de deux méthodes : Runge-Kutta d'ordre 4 et la série de Peano

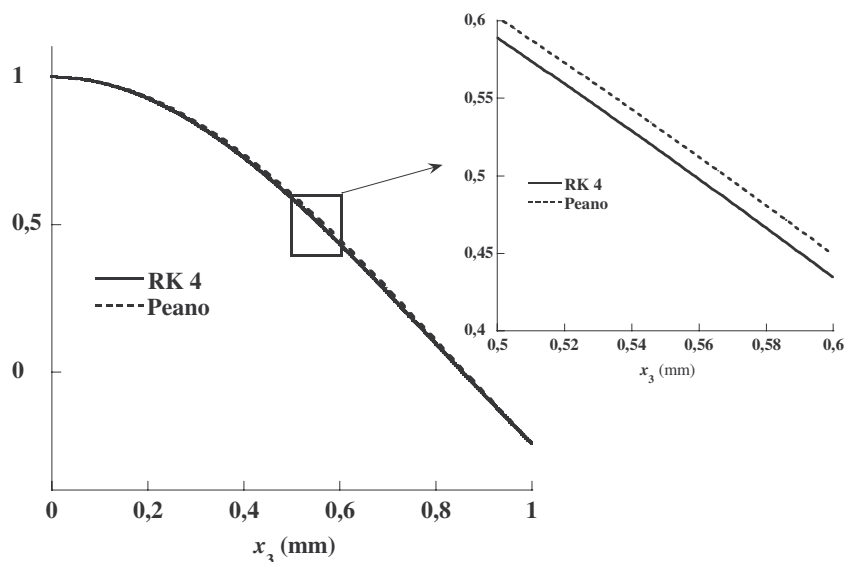
Les résultats obtenus par le calcul du matricant sous forme de développement en série de Peano sont comparés avec la méthode d'intégration numérique du système différentiel de Runge-Kutta. Les deux méthodes ont été implémentées et testées pour un profil de célérités linéaire. L'épaisseur de la zone hétérogène supposée isotrope est de 1 mm. Le matricant est calculé pour une lenteur horizontale  $s_1 = 0 \mu\text{s}/\text{mm}$  (incidence normale) et une fréquence  $f = 1 \text{ MHz}$ , donné par (III.57) pour des ondes P-SV. La méthode numérique d'intégration utilisée est la méthode de Simpson à partir de 100 échantillons équidistants.

Pour la méthode de Runge-Kutta le pas est choisi à  $h = 0,001$ . On trace l'évolution du terme du matricant situé sur la première ligne et la première colonne  $M_{11}(x_3, 0)$ , en fonction de  $x_3$ .



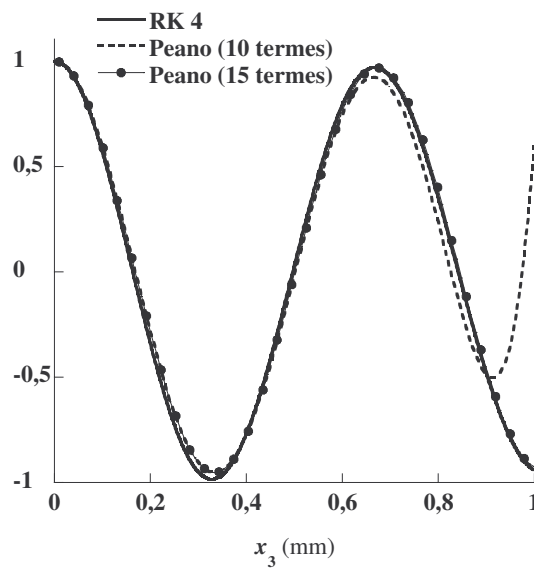
**Figure 3.4.** Influence de l'ordre de troncature de la série de Peano. Résultats comparés avec le résultat obtenu par la méthode de Runge-Kutta 4.

On constate sur la Figure 3.4 qu'il suffit de retenir cinq termes dans le développement en série de Peano pour obtenir des résultats comparables avec la méthode de Runge-Kutta 4 dans la fenêtre de calcul choisie. Le temps de calcul pour ces deux méthodes et dans cette configuration est bien inférieur à la minute.



**Figure 3.5.** Comparaison des deux méthodes sur le calcul du terme  $M_{11}$  du matricant pour un profil des célérités linéaire ( $s_1 = 0 \mu\text{s}/\text{mm}^3$ ,  $f = 1 \text{ MHz}$ ).

Si on augmente la fréquence  $f = 5$  MHz, le nombre de termes à retenir dans la série de Peano est évidemment plus élevé.



**Figure 3.6.** Comparaison de RK 4 avec la série de Peano pour ( $s_1 = 0 \mu\text{s}/\text{mm}^3$ ,  $f = 5$  MHz).

## CONCLUSION

Le développement en série de Peano du matricant est une écriture de la solution analytique exacte des équations d'onde en milieux hétérogènes. C'est également un schéma récursif de construction de la solution qui facilite son implémentation numérique. L'expression sous forme de série (infinie) soulève évidemment des questions de précision des résultats obtenus, mais quel que soit le nombre de termes retenus dans la série, la solution, plus ou moins précise, est toujours une solution globale sur l'ensemble de l'intervalle d'étude. Cette remarque souligne un nouveau point de dissimilitude entre le développement en série de Peano du matricant et les méthodes de type Thomson et Haskell pour lesquelles on procède au raccordement de solutions locales. De plus la comparaison avec une méthode classique d'intégration directe d'équations du type (III.1), Runge-Kutta 4, montre que le développement en série de Peano est efficace. Les atouts supplémentaires de cette méthode sont son adaptabilité due notamment aux différents paramétrages possibles du problème et son écriture polynomiale qui facilite l'obtention des développements asymptotiques. Elle représente donc un excellent outil pour obtenir des informations sur le comportement des ondes élastiques se propageant dans les milieux hétérogènes.

## IV. Mise en œuvre du développement en série de Peano

### RÉSUMÉ

*Les équations d'onde en milieux à propriétés continûment variables peuvent être résolues à l'aide du développement en série de Peano du matricant. Un modèle de plaque hétérogène est retenue et étudié. On analysera à la fois le comportement modal de cette plaque et sa réaction à une excitation extérieure de type onde incidente. Ces différentes configurations seront définies par des conditions aux limites appliquées à chacune des deux interfaces de la plaque. Le tracé des courbes de dispersion ou des champs de déplacements et de contraintes, tout comme le spectre fréquentiel des coefficients de réflexion et de transmission, se révèlent être de bons indicateurs du caractère hétérogène du milieu. De plus, le développement en série de Peano associé au formalisme de Stroh facilite le calcul des développements asymptotiques basses fréquences qui constituent des vecteurs d'informations de première importance pour la caractérisation des milieux continûment hétérogènes. Quelques cas précis illustrent la potentialité de la méthode.*





## SOMMAIRE

<b>IV.1. Réponse modale de la plaque</b>	<b>72</b>
<b>IV.1.1. Conditions aux limites et courbes de dispersion</b>	<b>72</b>
<i>IV.1.1.1. L'onde de Rayleigh</i>	<i>73</i>
<b>IV.1.2. Champ de contrainte et déplacements dans une plaque libre-libre</b>	<b>77</b>
<b>IV.2. Coefficients de réflexion et de transmission</b>	<b>78</b>
<b>IV.3. Développements asymptotiques</b>	<b>81</b>
<b>IV.3.1. Développements asymptotiques des modes de Lamb fondamentaux pour une plaque libre</b>	<b>82</b>
<b>IV.3.2. Développements asymptotiques des coefficients de réflexion et de transmission</b>	<b>85</b>
<b>IV.4. Influence du caractère hétérogène du milieu sur les courbes de dispersion</b>	<b>87</b>
<b>IV.4.1. Limites asymptotiques des modes P-SV : onde de Rayleigh et chenaux acoustiques</b>	<b>87</b>
<i>IV.4.1.1. Profil linéaire : deux limites asymptotiques</i>	<i>89</i>
<i>IV.4.1.2. Chenal acoustique : trois limites asymptotiques</i>	<i>91</i>
<b>IV.4.2. Vecteur d'informations analytique : les développements asymptotiques des modes fondamentaux à basse fréquence</b>	<b>93</b>
<b>IV.5. Sensibilité des coefficients de réflexion et de transmission au caractère hétérogène du milieu</b>	<b>95</b>
<b>IV.5.1. Vecteur d'informations analytique : les développements asymptotiques des coefficients de réflexion (module et phase)</b>	<b>97</b>



## INTRODUCTION

On se propose d'exposer dans ce chapitre la façon dont le développement en série de Peano du matricant s'insère dans l'étude du comportement d'une plaque hétérogène en interaction avec des ondes élastiques. Les propriétés caractéristiques de cette plaque sont supposées continûment variables ou continûment variables par morceaux selon une direction de l'espace qui est choisie verticale et correspond à l'épaisseur de la structure. On s'intéresse aux réponses modales de la plaque : on tracera alors les courbes de dispersion (évolution de la vitesse de phase des ondes modales en fonction de la fréquence) et les champs de déplacements et contraintes relatifs aux modes propres de la plaque. On cherche également à obtenir la réponse de la plaque à une excitation extérieure : on étudie alors les coefficients de réflexion et de transmission (module et phase) d'une onde plane incidente qui traverse la couche hétérogène. La forme particulière du développement en série de Peano du matricant (III.53) incite à l'étude des développements asymptotiques basses fréquences à la fois des courbes de dispersion des modes fondamentaux<sup>18</sup> et des coefficients de réflexion et de transmission. On considère donc une plaque d'épaisseur  $d$  (selon  $x_3$ ), supposée infinie selon les deux autres directions de l'espace. L'origine des axes est choisie sur la face supérieure de la plaque ( $x_3 = 0$ ).

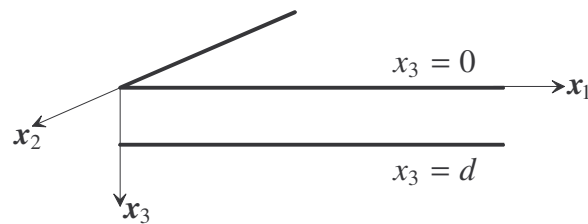


Figure 4.1 : Repère associé à la plaque hétérogène.

Il est important de souligner que la prise en compte d'une anisotropie quelconque est parfaitement intégrée au formalisme utilisé et à la méthode mise en œuvre. Les étapes du processus de calcul sont strictement les mêmes, seules changent les valeurs des composantes de la matrice du système. C'est une différence importante avec les techniques utilisant la décomposition spectrale qui reposent sur le calcul des polarisations et des lenteurs des ondes partielles dans chacune des couches, et pour lesquelles l'anisotropie génère une complexification du problème (Mal, 1988; Nayfeh, 1991). En effet pour pouvoir appliquer les conditions de continuité aux interfaces, il est nécessaire d'établir une correspondance entre le repère propre de chaque couche et le repère de représentation des propriétés élastiques du matériau, ce qui entraîne des calculs lourds qui peuvent devenir impraticables lorsque le nombre de couches est grand. Pour ce qui concerne les résultats

<sup>18</sup> Il s'agit des modes propagatifs de la plaque existant jusqu'à la fréquence nulle (au nombre de trois dans une structure élastique plane dans le vide).

obtenus par le développement en série de Peano du matricant présentés dans ce chapitre, l'anisotropie générale ne nécessitant pas de changements de méthode, nous avons choisi de détailler les calculs pour des cas simplifiés et plus lisibles (milieux isotropes, découplage des modes polarisés horizontalement de ceux polarisés verticalement lorsqu'un plan de symétrie locale horizontal existe).

## IV.1. Réponse modale de la plaque

### IV.1.1. Conditions aux limites et courbes de dispersion

Le matricant a été défini de façon à rendre possible la prise en compte des conditions aux limites :

$$\begin{pmatrix} u_i(d) \\ \sigma_{i3}(d) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(d,0) \begin{pmatrix} u_i(0) \\ \sigma_{i3}(0) \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1})$$

Quel que soit le cas considéré, le matricant peut être décomposé par blocs de même dimension que nous noterons de la façon suivante :

$$\mathbf{M}(d,0) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(d,0) & \mathbf{M}_2(d,0) \\ \mathbf{M}_3(d,0) & \mathbf{M}_4(d,0) \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.2})$$

La relation (IV.1) fournit l'équation de dispersion relative aux différentes grandes familles de conditions aux limites imposées à chaque interface de la plaque :

- ✓ libre : traction nulle ;
- ✓ encastrée : déplacement nul.

Chaque combinaison de conditions aux limites correspond à l'annulation du déterminant d'un des blocs définis en (IV.2). Pour une plaque :

- ✓ libre-libre  $\equiv \sigma_{i3}(0) = \sigma_{i3}(d) = 0 : \det \mathbf{M}_3(d,0) = 0$ ,
- ✓ libre-encastrée  $\equiv \sigma_{i3}(0) = u_i(d) = 0 : \det \mathbf{M}_1(d,0) = 0$ ,
- ✓ encastrée-libre  $\equiv u_i(0) = \sigma_{i3}(d) = 0 : \det \mathbf{M}_4(d,0) = 0$ ,
- ✓ encastrée-encastrée  $\equiv u_i(0) = u_i(d) = 0 : \det \mathbf{M}_2(d,0) = 0$ .

En reprenant les trois formulations possibles du problème présentées au paragraphe II.2.2.2, on distingue deux cas :

- ✓ Les deux premiers paramétrages en  $(k_1, v_1)$  et  $(\omega, s_1)$  (respectivement) permettent de factoriser la matrice du système  $\mathbf{Q}$  par  $(ik_1)$  et  $(i\omega)$  (respectivement), le développement en série de Peano prend alors la forme d'une série (somme d'une infinité de termes) de polynômes matriciels (de degré fini). Chaque coefficient des puissances successives du premier paramètre est un polynôme matriciel du second paramètre. La résolution de l'équation de dispersion revient à rechercher les zéros du polynôme issu de la troncature de la série de Peano.
- ✓ En revanche, le dernier paramétrage en  $(k_1, \omega)$ , ne donne pas de factorisation directe. En effet, pour ce paramétrage, contrairement aux deux cas cités avant, la série de Peano se met sous la forme d'une série (infinie) de série (infinie). Les coefficients des puissances successives du premier paramètre sont des séries du second paramètre. Cela rend la manipulation de la série de Peano beaucoup plus difficile et génère des problèmes numériques (programmation informatique) et analytiques (développements asymptotiques).

Pour mener les calculs, le paramétrage (II.40) est retenu.

Chaque bloc est une série en fréquence de polynômes matriciels de degré fini (III.53). Il est donc judicieux de rechercher les zéros du polynôme en  $\omega$ , issu de la troncature de la série, pour une lenteur horizontale fixée. Ces valeurs correspondent aux fréquences propres de la structure. Les coefficients du polynôme exprimés sous la forme d'intégrales multiples de matrices indépendantes de la fréquence sont calculés. L'intégration pourra être analytique si la forme des composantes de la matrice  $\mathbf{Q}$ , fonctions de  $x_3$  le permet, ou numérique. On obtient donc pour une lenteur horizontale donnée, une série de couples  $(\omega, s_1)$  qui correspondent aux différents modes susceptibles de se propager dans la plaque. On peut ainsi reconstituer les courbes de dispersion des différentes ondes présentes dans la plaque, c'est-à-dire tracer l'évolution de la lenteur  $s_1$  ou de la vitesse  $v_1$  en fonction de la fréquence  $f$  ou du nombre d'onde  $k_1$ .

#### IV.1.1.1. *L'onde de Rayleigh*

Comme cela a été évoqué dans le Chapitre 1 l'onde de Rayleigh est une onde guidée de surface qui apparaît à l'interface entre un milieu semi-infini et le vide. Elle apparaît comme le résultat du couplage des ondes longitudinales P et des ondes transversales verticales SV lorsque les symétries cristallographiques du milieu selon la direction de propagation considérée permettent de séparer les familles de modes en deux catégories : polarisés horizontalement ou polarisés verticalement. Pour un milieu homogène et isotrope, cette onde est polarisée elliptiquement dans le plan sagittal, les composantes du déplacement incluses dans le plan sagittal décroissent de façon exponentielle avec la profondeur et sont

déphasées de  $\pi/2$ . La présence de l'onde provoque une perturbation ressentie jusqu'à une profondeur de l'ordre de la longueur d'onde. La vitesse de phase de l'onde de Rayleigh dans un milieu isotrope est légèrement inférieure à celle des ondes de cisaillement. Elle s'obtient en résolvant l'équation de Rayleigh (Achenbach, 1973) :

$$\sqrt{2\alpha X - 1}\sqrt{2X - 1} + (1 - X)^2 = 0, \quad (\text{IV.3})$$

où

$$X = 2 \frac{C_R^2}{C_T^2} \text{ et } \alpha = \frac{C_T^2}{C_L^2}, \quad (\text{IV.4})$$

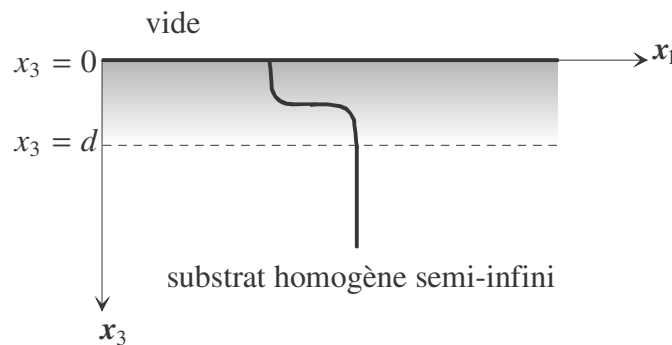
avec  $C_R$  la vitesse de phase de l'onde de Rayleigh,  $C_T$  la vitesse de phase des ondes transversales et  $C_L$  celle des ondes longitudinales. Viktorov en donne une expression approchée (Viktorov, 1970) :

$$C_R \approx \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}},$$

$$C_R \approx \frac{0,718 - \left(\frac{C_T}{C_L}\right)^2}{0,75 - \left(\frac{C_T}{C_L}\right)^2} C_T. \quad (\text{IV.5})$$

$E$  est le module d'Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

L'onde de Rayleigh est ici étudiée pour une couche hétérogène sur un substrat homogène, l'ensemble étant surmonté du vide.



**Figure 4.2.** Couche à variation de propriétés sur un substrat homogène, surmontée du vide.

L'onde de Rayleigh est la perturbation qui se propage à la surface de la structure, dont le champ décroît dans le substrat de façon exponentielle ou quasi-exponentielle avec la

profondeur. Le paramétrage utilisé est celui décrit par (II.40). Afin d'obtenir les courbes de dispersion, on écrit les conditions aux limites ( $x_3 = 0$ ) et les conditions de continuité ( $x_3 = d$ ) des déplacements et des contraintes normales aux deux interfaces :

- ✓ Conditions aux limites à l'interface vide/couche hétérogène :  $\sigma_{i3}(0)_{(i=1,2,3)} = 0$ ,

$$\boldsymbol{\eta}(x_3 = 0) = \begin{pmatrix} i\omega \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

- ✓ Conditions de continuité du vecteur d'état  $\boldsymbol{\eta}(x_3 = d)$  à l'interface couche hétérogène/substrat homogène

$$\boldsymbol{\eta}^{\text{couche hétérogène}}(d) = \boldsymbol{\eta}^{\text{substrat}}(d), \quad (\text{IV.7})$$

or

$$\boldsymbol{\eta}^{\text{couche hétérogène}}(d) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(d, 0) & \mathbf{M}_2(d, 0) \\ \mathbf{M}_3(d, 0) & \mathbf{M}_4(d, 0) \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta}(0), \quad (\text{IV.8})$$

et d'après (IV.6), on obtient :

$$\boldsymbol{\eta}^{\text{couche hétérogène}}(d) = i\omega \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(d, 0) \\ \mathbf{M}_3(d, 0) \end{pmatrix} \mathbf{u}(0). \quad (\text{IV.9})$$

Le paramétrage (III.55), retenu pour l'expression du matricant est en  $(\omega, s_1)$ .

On suppose que l'onde de Rayleigh est polarisée dans le plan sagittal de symétrie  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$ .

On considère donc le vecteur d'état suivant :

$$\boldsymbol{\eta}(x_3; s_1, \omega) = \begin{pmatrix} i\omega u_1(x_3) \\ i\omega u_3(x_3) \\ \sigma_{13}(x_3) \\ \sigma_{33}(x_3) \end{pmatrix} e^{i\omega(s_1 x_1 - t)}. \quad (\text{IV.10})$$

Le but étant la prise en compte des variations continues de propriétés, nous développerons uniquement le cas d'une couche hétérogène localement isotrope sur un substrat homogène isotrope. Le schéma de calcul pour un milieu anisotrope serait identique mais des systèmes de taille plus grande seraient mis en jeu et seraient plus lourds à expliciter.

Dans le substrat isotrope et homogène, la forme des fonctions de déplacements est connue :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A\mathbf{P} \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (\text{IV.11})$$

Le champ dans le substrat est le résultat de la superposition d'une onde longitudinale P dont les vecteurs d'onde et polarisation sont colinéaires

$$\mathbf{k}_L = \omega \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_{3L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_L = C_L \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_{3L} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.12})$$

et d'une onde transversale verticale SV dont les vecteurs d'onde et polarisation sont perpendiculaires

$$\mathbf{k}_T = \omega \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_{3T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_T = C_T \begin{pmatrix} -s_{3T} \\ 0 \\ s_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.13})$$

On choisit un sens de  $\mathbf{P}_T$  correspondant au signe '+'. Comme nous le soulignerons par la suite ce choix n'a pas d'incidence sur le calcul.

Les équations de dispersion des ondes planes dans le substrat sont les suivantes :

$$1/C_{L,T}^2 = s_1^2 + s_{3L,T}^2. \quad (\text{IV.14})$$

On note  $A_L$  et  $A_T$  les amplitudes des déplacements relatifs aux ondes longitudinales et transversales. Ainsi en reprenant l'expression (IV.11) et en passant dans le domaine de Fourier (II.25), on obtient pour  $\boldsymbol{\eta}^{\text{substrat}}(d)$  :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_L s_1 - \alpha_T s_{3T} \\ u_3 &= \alpha_L s_{3L} + \alpha_T s_1 \\ \sigma_{13} &= i\omega\mu \left[ 2\alpha_L s_1 s_{3L} + \alpha_T (s_1^2 - s_{3T}^2) \right] \\ \sigma_{33} &= i\omega\lambda (\alpha_L s_1^2 - \alpha_T s_{3T} s_1) + i\omega(\lambda + 2\mu) (\alpha_L s_{3L}^2 + \alpha_T s_1 s_{3T}) \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

avec  $\alpha_{L,T} = A_{L,T} C_{L,T} \exp(i\omega s_{3L,T} d)$ .

En utilisant (IV.9) et (IV.15) pour appliquer (IV.7), on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_3(0) \\ \alpha_L \\ \alpha_T \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\text{IV.16})$$



avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & -s_1 & s_{3T} \\ & -s_{3L} & -s_1 \\ \mathbf{M}_3 & -2\mu s_1 s_{3L} & -\mu(s_1^2 - s_{3T}^2) \\ -\lambda(1/C_L^2) - 2\mu s_{3L}^2 & & -2\mu s_1 s_{3T} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.17})$$

Les solutions non triviales de l'équation (IV.16) sont obtenues pour

$$\det \mathbf{A}(\omega, s_1) = 0. \quad (\text{IV.18})$$

Rappelons que l'écriture (III.53) qui découle du paramétrage (II.40), exprime les deux matrices blocs  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_3$  sous la forme de polynômes en  $\omega$  dont les coefficients dépendent de la lenteur horizontale  $s_1$ . La résolution de (IV.18) donne donc les couples  $(\omega, s_1)$  qui définissent la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh.

Remarque : Le choix du sens du vecteur polarisation  $\mathbf{P}_T$  n'a pas d'incidence sur le calcul puisqu'il change le signe de la dernière colonne de la matrice  $\mathbf{A}$  et transforme (IV.18) en

$$-\det \mathbf{A} = 0. \quad (\text{IV.19})$$

Nous verrons à l'aide d'exemples dans le Chapitre 5 que l'étude du comportement dispersif de l'onde de Rayleigh est un vecteur d'information intéressant dans la caractérisation d'un profil continu de propriétés.

### IV.1.2. Champ de contraintes et déplacements dans une plaque libre-libre

L'analyse modale de la plaque passe également par l'étude des champs de contraintes et de déplacements.

Pour chaque couple  $(\omega, s_1)$  correspondant à un point de la courbe de dispersion d'un des modes présents dans la plaque, et après détermination de  $\mathbf{u}(0)$  défini à une amplitude près par :

$$\mathbf{u}(0) \in \{\mathbf{v} \mid \mathbf{M}_3(d, 0)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \quad (\text{IV.20})$$

on exprime à l'aide de l'équation (III.4), les champs de contraintes et de déplacements en fonction de  $x_3$  :

$$\mathbf{u}(x_3) = \mathbf{M}_1(x_3, 0)\mathbf{u}(0) \text{ et } \boldsymbol{\tau}(x_3) = \mathbf{M}_3(x_3, 0)\mathbf{u}(0). \quad (\text{IV.21})$$

Pour les autres cas de conditions aux limites, la même démarche est utilisée :

- ✓ libre-encastree :  $\mathbf{u}(0) \in \{\mathbf{v} \mid \mathbf{M}_1(d, 0)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$  ;
- ✓ encastree-libre :  $\boldsymbol{\tau}(0) \in \{\mathbf{v} \mid \mathbf{M}_4(d, 0)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$  avec  $\tau_i = \sigma_{i3}$  ;
- ✓ encastree-encastree :  $\boldsymbol{\tau}(0) \in \{\mathbf{v} \mid \mathbf{M}_2(d, 0)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ .

L'obtention des modes n'utilise que l'évaluation du matricant sur l'intégralité de la couche  $\mathbf{M}(d, 0)$ . En revanche le tracé des champs de déplacements et de contraintes au sein de la plaque nécessite bien évidemment la connaissance du matricant pour toutes les valeurs de  $x_3 \in [0, d]$ . Dans le cas de matrices  $\mathbf{Q}(x_3)$  non intégrables analytiquement, il aura donc été utile de stocker au préalable les valeurs  $\mathbf{M}(x_3^{(k)}, 0)$  calculées en chaque point  $x_3^{(k)}$  de l'intervalle  $[0, d]$  échantillonné pour l'intégration numérique.

## IV.2. Coefficients de réflexion et de transmission

On s'intéresse à présent au comportement d'une couche hétérogène en réponse à une excitation extérieure.

Comme cela a déjà été souligné, la résolution du problème inverse, c'est-à-dire la caractérisation complète des profils d'hétérogénéité et la détermination des propriétés d'un milieu continûment variable est très délicate. Cependant, les coefficients de réflexion et de transmission sont de bons indicateurs de l'hétérogénéité du matériau. Le spectre fréquentiel de ces coefficients fournit des informations importantes sur les différents paramètres qui caractérisent le profil d'hétérogénéité (valeurs extrémales, zone de plus forte variation, épaisseur...). De plus ce sont en général, des données expérimentales facilement accessibles.

On considère la couche de la Figure 4.1. Ici elle est encastree entre deux demi-espaces homogènes :

- ✓  $x_3 \leq 0$  : milieu 1 ;
- ✓  $x_3 \geq d$  : milieu 2.

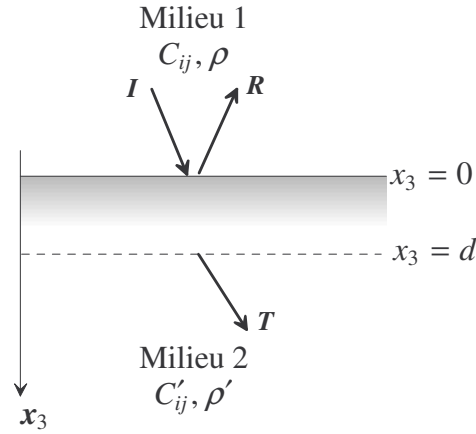


Figure 4.3. Couche hétérogène entre deux substrats homogènes.

La continuité des déplacements et des composantes de traction à chaque interface donne :

$$\boldsymbol{\eta}_1(x_3 = 0) = \boldsymbol{\eta}_\ell(x_3 = 0), \quad \boldsymbol{\eta}_\ell(x_3 = d) = \boldsymbol{\eta}_2(x_3 = d). \quad (\text{IV.22})$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\eta}$  est un vecteur d'état défini en (II.33). L'indice  $\ell$  fait référence à la couche hétérogène et les indices 1 et 2 respectivement aux milieux 1 et 2.

En injectant ces égalités dans l'équation (III.4), on obtient :

$$\boldsymbol{\eta}_2(x_3 = d; \omega, s_1) = \mathbf{M}(d, 0; \omega, s_1) \boldsymbol{\eta}_1(x_3 = 0; \omega, s_1). \quad (\text{IV.23})$$

$\boldsymbol{\eta}_1$  correspond à la somme des contributions de l'onde incidente et des ondes réfléchies se propageant dans le milieu 1 et  $\boldsymbol{\eta}_2$  représente la contribution des ondes transmises dans le milieu 2 après traversée de la plaque. Leurs expressions peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\eta}_1(0) = \boldsymbol{\Xi}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\eta}_2(d) = \boldsymbol{\Xi}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.24})$$

où  $\boldsymbol{\Xi}_1$  et  $\boldsymbol{\Xi}_2$  sont deux matrices de dimension six représentant les trois modes montants et les trois modes descendants susceptibles de se propager dans les milieux 1 et 2,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$  sont deux vecteurs de dimension trois représentant les amplitudes des ondes réfléchies dans le milieu 1 et transmises au milieu 2 et  $\boldsymbol{\delta}_i$  représente le mode incident dans le milieu 1  $\boldsymbol{\delta}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$ ,  $\boldsymbol{\delta}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$  et  $\boldsymbol{\delta}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$ . En injectant les relations (IV.24) dans (IV.23), on obtient

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.25})$$

où  $\mathbf{B} = [\mathbf{M}(d, 0) \mathbf{\Xi}_1]^{-1} \mathbf{\Xi}_2$  est une matrice de dimension six, que l'on décompose en quatre blocs de dimension trois :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.26})$$

En supposant que  $\det \mathbf{B}_1 \neq 0$ , ce qui correspond à une onde incidente d'amplitude non nulle, on obtient les expressions des vecteurs des coefficients de réflexion et de transmission des différents modes :

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{\delta}_i \text{ et } \mathbf{T} = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{\delta}_i. \quad (\text{IV.27})$$

Dans la suite, on ne présentera des résultats que dans les cas des ondes P à incidence normale<sup>19</sup> ou des ondes SH en incidence oblique se propageant dans des milieux isotropes. De plus cela correspond tout à fait à des configurations expérimentales réalisables. Dans notre cas, en adoptant le paramétrage de Stroh (II.40),

$$\boldsymbol{\eta}_{1,2}(x_3) = (i\omega u_3(x_3), \sigma_{33}(x_3))_{1,2}^T \text{ pour les ondes P à incidence normale,}$$

et

$$\boldsymbol{\eta}_{1,2}(x_3) = (i\omega u_2(x_3), \sigma_{23}(x_3))_{1,2}^T \text{ pour les ondes SH à incidence oblique.}$$

Il s'agit alors de résoudre le type de système suivant :

$$\begin{pmatrix} i\omega & 1 & 0 & 0 \\ -i\omega\zeta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & P_1 & P_2 & -i\omega e^{i\omega s_3' d} \\ 0 & P_3 & P_4 & -i\omega\zeta_2 e^{i\omega s_3' d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega \\ i\omega\zeta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.28})$$

avec  $s_3' = 1/c_{L2}$ ,  $\zeta_{1,2} = Z_{1,2}$  où  $Z_1 = \rho_1 c_{L1}$  et  $Z_2 = \rho_2 c_{L2}$  pour les ondes P à incidence normale ; et  $s_3' = \sqrt{1/c_{T2}^2 - s_1^2}$  ;  $\zeta_1 = Z_1 \sqrt{1 - c_{T1}^2 s_1^2}$  et  $\zeta_2 = Z_2 \sqrt{1 - c_{T2}^2 s_1^2}$ , avec  $Z_1 = \rho_1 c_{T1}$  et  $Z_2 = \rho_2 c_{T2}$  pour les ondes SH.

$Z_1$  et  $Z_2$  sont les impédances des milieux 1 et 2 pour les ondes P ou SH et les  $P_i$  ( $i = 1$  à 4) sont des composantes du matricant paramétré selon (II.40) avec

<sup>19</sup> A incidence normale  $s_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{22}(d,0) & M_{24}(d,0) \\ M_{42}(d,0) & M_{44}(d,0) \end{pmatrix} \text{ pour les ondes P,} \quad (\text{IV.29})$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}(d,0) & M_{12}(d,0) \\ M_{21}(d,0) & M_{22}(d,0) \end{pmatrix} \text{ pour les ondes SH.} \quad (\text{IV.30})$$

Les deux premières lignes des équations matricielles (IV.29) et (IV.30) expriment la continuité du déplacement et de la contrainte considérés à l'interface  $x_3 = 0$ , tandis que les deux dernières concernent la continuité de ces mêmes grandeurs en  $x_3 = d$ . Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les amplitudes des champs de vitesse à l'intérieur de la couche en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = d$  et les coefficients  $R$  et  $T$  sont les coefficients complexes de réflexion et de transmission en vitesse ( $\mathbf{v} = i\omega\mathbf{u}$ ). La résolution du système (IV.28) fournit les expressions de  $R$  et  $T$  suivantes :

$$R = \frac{P_3 + P_4\zeta_1 - P_1\zeta_2 - P_2\zeta_1\zeta_2}{P_3 - P_4\zeta_1 - P_1\zeta_2 + P_2\zeta_1\zeta_2}; \quad (\text{IV.31})$$

$$T = \frac{2\zeta_1(P_2P_3 - P_1P_4)e^{(-i\omega s_3'd)}}{P_3 - P_1\zeta_2 - P_4\zeta_1 + P_2\zeta_1\zeta_2}. \quad (\text{IV.32})$$

Rappelons que les  $P_i$  peuvent être écrits sous la forme de polynômes en fréquence et en lenteur. Le développement asymptotique à basse fréquence et autour de l'incidence normale du module et de la phase de ces expressions analytiques est d'obtention relativement simple.

### IV.3. Développements asymptotiques

La forme polynomiale que prend la série de Peano dans (III.53), incite aux développements asymptotiques. En effet à basse fréquence, il suffit de ne retenir que les deux ou trois premiers termes pour connaître les tendances (ex : ordonnée et pente à l'origine) des courbes de dispersion ou des coefficients de réflexion et de transmission. Ces informations peuvent être obtenues rapidement sans avoir à mettre en œuvre des calculs lourds.

### IV.3.1. Développements asymptotiques des modes de Lamb fondamentaux pour une plaque libre

On se place dans la cas d'une plaque d'épaisseur  $d$ , orthotrope, continûment hétérogène, dans le vide (conditions aux limites libre-libre).

On utilise l'écriture (II.39) de la matrice du système (Shuvalov & al., 2004) qui facilite l'étude des vibrations à basse fréquence décrites par les modes propagatifs débutant à  $(\omega, k_1) = (0, 0)$  ou  $(k_1, v_1) = (0, V)$  avec  $V \in \mathbb{R}^+$ . Ces modes sont les modes fondamentaux du spectre de dispersion et sont au nombre de trois. Pour les autres modes des développements similaires sont possibles aux fréquences de coupure, mais certaines données nécessaires (les valeurs de ces fréquences de coupure) ne sont pas accessibles analytiquement pour un profil d'hétérogénéité quelconque.

La troncature de la structure polynomiale du matricant à l'ordre 1 fournit le développement à l'ordre zéro de  $v_1 = F(k_1)$ , valeur de la vitesse de phase des modes fondamentaux à  $\omega = k_1 = 0$ .

Pour obtenir l'ordre suivant du développement de  $v_1 = F(k_1)$ , on applique la méthode des perturbations<sup>20</sup> pour une matrice symétrique (Shuvalov, 2000) jusqu'à l'ordre 3. Le terme de perturbation est  $k_1 d$  qui vérifie  $|k_1 d| \ll 1$  pour les basses fréquences ou les couches minces. Dans le cas considéré, plaque libre-libre, on cherche à vérifier  $\det \mathbf{M}_3(d, 0) = 0$ . Or, d'après (III.52), la sous-matrice  $\mathbf{M}_3$  se factorise par  $(ik_1 d)$ , le déterminant se factorise donc par  $(ik_1 d)^p$ ,  $p$  étant la dimension de la matrice ( $p = 2$  pour les ondes P-SV et  $p = 1$  pour les ondes SH). Pour accéder à l'ordre  $n$  du développement du déterminant de  $\mathbf{M}_3(d, 0)$ , il faut aller jusqu'à l'ordre  $n + 1$  du développement de la série de Peano.

La recherche des zéros de

$$\det \mathbf{M}_3(d, 0) = \det \left[ (ik_1 d) \mathbf{P}_3^{(1)}(v_1) + (ik_1 d)^2 \mathbf{P}_3^{(2)}(v_1) + (ik_1 d)^3 \mathbf{P}_3^{(3)}(v_1) \right] \quad (\text{IV.33})$$

devient donc :

$$\det \left( \langle \mathbf{N}_3 \rangle - \langle \rho \rangle v_1^2 \mathbf{I}_3 + (ik_1 d) \mathbf{P}_3^{(2)}(v_1) + (ik_1 d)^2 \mathbf{P}_3^{(3)}(v_1) \right) = 0 \quad (\text{IV.34})$$

où  $\langle \dots \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d \dots dx_3$ . Les  $\mathbf{P}_3^{(m=2 \text{ ou } 3)}$  sont les matrices définies dans (III.53) :

<sup>20</sup> Voir Annexe B

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3^{(2)}(v_1) &= \frac{1}{d^2} \int_0^d \int_0^d \mathbf{N}_3(v_1, \xi) \mathbf{N}_1(\xi_1) + \mathbf{N}_1^T(\xi) \mathbf{N}_3(v_1, \xi_1) d\xi d\xi_1; \\ \mathbf{P}_3^{(3)}(v_1) &= \frac{1}{d^2} \int_0^d \int_0^d \int_0^d \mathbf{N}_3(v_1, \xi) \mathbf{N}_1(\xi_1) \mathbf{N}_1(\xi_2) + \mathbf{N}_1^T(\xi) \mathbf{N}_3(v_1, \xi_1) \mathbf{N}_1(\xi_2) + \\ &\quad + \mathbf{N}_3(v_1, \xi) \mathbf{N}_2(\xi_1) \mathbf{N}_3(v_1, \xi_2) + \mathbf{N}_1^T(\xi) \mathbf{N}_1^T(\xi_1) \mathbf{N}_3(v_1, \xi_2) d\xi d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

en notant  $\mathbf{N}_3(v_1, \xi) = (\mathbf{N}_3(\xi) - \rho(\xi) v_1^2 \mathbf{I}_3)$ .

L'équation (IV.34) peut être résolue pour les différents ordres d'approximation. À l'ordre 0 en  $k_1 d$  (en ne retenant qu'un seul terme de la série de Peano), on a

$$\det(\langle \mathbf{N}_3 \rangle - \langle \rho \rangle v_1^2 \mathbf{I}_3) = 0. \quad (\text{IV.36})$$

Le formalisme de Stroh définit  $\mathbf{N}_3$  comme étant une matrice semi-positive<sup>21</sup>. Les valeurs propres de  $\langle \mathbf{N}_3 \rangle$  fournissent donc les valeurs des vitesses  $v_{0\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) des trois modes fondamentaux lorsque  $k_1 d \rightarrow 0$ . La théorie du formalisme de Stroh (**Ting**, 1996; **Shuvalov**, 2000) indique que la matrice  $\mathbf{N}_3(x_3)$ , et par conséquent  $\langle \mathbf{N}_3 \rangle$ , possèdent une valeur propre nulle.

✓ pour le mode de flexion ( $\alpha = 1$ ) :

$$v_{01} = 0 ; \quad (\text{IV.37})$$

✓ pour les deux autres modes fondamentaux (habituellement notés  $S_0$  et  $SH_0$  lorsque le plan médian est plan de symétrie) ( $\alpha \neq 1$ ) :

$$v_{0\alpha} = \sqrt{\lambda_\alpha / \langle \rho \rangle}. \quad (\text{IV.38})$$

Les  $\lambda_\alpha$  sont les valeurs propres de  $\langle \mathbf{N}_3 \rangle$ <sup>22</sup>. Les polarisations de ces modes sont données par les vecteurs propres correspondants :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_3 \rangle \mathbf{n} &= 0, \quad [\langle \mathbf{N}_3 \rangle - \lambda_\alpha \mathbf{I}] \mathbf{e}_\alpha = 0, \\ \lambda_\alpha > 0, \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 2, 3). \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

On peut poursuivre le développement à l'ordre suivant. D'après (IV.35) et (IV.39), en utilisant la propriété suivante  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{u}$  et en rappelant que la matrice  $\mathbf{N}_3(x_3)$ , et donc  $\langle \mathbf{N}_3 \rangle$  sont symétriques, le premier ordre de perturbation (cf. Annexe B), terme imaginaire pur s'annule (**Shuvalov**, 2000).

<sup>21</sup> Ses valeurs propres sont positives ou nulles.

<sup>22</sup> Les valeurs propres de  $\langle \mathbf{N}_3 \rangle$  ne sont pas la moyenne des valeurs propres de  $\mathbf{N}_3(x_3)$ .

$$ik_1 \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{P}_3^{(2)}(v_{0\alpha}) \mathbf{e}_\alpha = 0 \quad (\text{IV.40})$$

On prend en compte le deuxième terme de perturbation (correspondant au troisième terme du développement en série de Peano) et on obtient le premier coefficient de dispersion non nul des modes fondamentaux pour un matériau totalement anisotrope (cf. Annexe B) :

$$\langle \rho \rangle v_1^2 = (k_1 d)^2 \left[ \sum_{\alpha=2,3} \frac{1}{\lambda_\alpha} (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{P}_3^{(2)}(0) \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3^{(2)}(0) \mathbf{e}_\alpha) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3^{(3)}(0) \mathbf{n} \right]; \quad (\text{IV.41})$$

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle v_\alpha^2 = & \lambda_\alpha - (k_1 d)^2 \left[ \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{P}_3^{(3)}(v_{0\alpha}) \mathbf{e}_\alpha + \right. \\ & + \frac{1}{\lambda_\alpha} (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{P}_3^{(2)}(v_{0\alpha}) \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3^{(2)}(v_{0\alpha}) \mathbf{e}_\alpha) + \\ & \left. + \frac{1}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{P}_3^{(2)}(v_{0\alpha}) \mathbf{e}_\beta) (\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{P}_3^{(2)}(v_{0\alpha}) \mathbf{e}_\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Nous donnons ici les résultats pour une plaque orthotrope avec un plan de symétrie parallèle aux interfaces et un autre correspondant au plan sagittal ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3$ ).

- ✓ Mode fondamental de flexion ( $A_0$ ),

$$\langle \rho \rangle v_1^2 = \frac{k_1^2}{d^2 \langle \zeta \rangle} \left\{ \int_0^d \zeta(\xi) \int_0^\xi (\xi - \xi_1)^2 \zeta(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right\}, \quad (\text{IV.43})$$

$$\zeta(\xi) = C_{11}(\xi) - \frac{C_{13}^2(\xi)}{C_{33}(\xi)}.$$

- ✓ Modes fondamentaux ( $S_0$  et  $SH_0$ ):

- mode  $S_0$  :

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle v_1^2 = & \langle \zeta \rangle - \\ & - \frac{k_1^2}{d} \left\{ \int_0^d C(\xi) \left[ \int_0^\xi (\xi - \xi_1) D_-(\xi_1) d\xi_1 - \int_\xi^d (\xi - \xi_1) B(\xi_1) d\xi_1 \right] d\xi + \right. \\ & + \int_0^d \frac{1}{C_{55}(\xi)} \left[ \int_0^\xi B(\xi_1) d\xi_1 \right]^2 d\xi + \frac{d \langle \zeta \rangle}{4} \left[ \int_0^d C(\xi) d\xi \right]^2 - \\ & \left. - \frac{1}{\langle \zeta \rangle d} \left[ \int_0^d \xi D_+(\xi) d\xi \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$



$$C(\xi) = \frac{C_{13}(\xi)}{C_{33}(\xi)}, B(\xi) = \zeta(\xi) - \langle \zeta \rangle \frac{\rho(\xi)}{\langle \rho \rangle} \text{ et } D_{\pm}(\xi) = B(\xi) \pm \langle \zeta \rangle C(\xi).$$

○ mode SH<sub>0</sub> ,

$$\langle \rho \rangle = \langle C_{66} \rangle - \frac{k_1^2}{d} \int_0^d \frac{1}{C_{44}(\xi)} \left[ \int_0^{\xi} \Delta(\xi_1) d\xi_1 \right]^2 d\xi, \quad (\text{IV.45})$$

$$\text{avec } \Delta(\xi) = C_{66}(\xi) - \langle C_{66} \rangle \frac{\rho(\xi)}{\langle \rho \rangle}.$$

Les développements asymptotiques donnent les tendances des courbes de dispersion des modes fondamentaux à basse fréquence. L'expression analytique exacte peut livrer des éléments d'interprétation physique des phénomènes et ainsi fournir des informations sur le matériau étudié. Notamment la connaissance de  $v_1$  à  $k_1 = \omega = 0$  pour S<sub>0</sub> et SH<sub>0</sub> fournit  $\langle C_{11} - C_{13}^2/C_{33} \rangle$  et  $\langle C_{66} \rangle$ . Pour les ordres suivants, l'analyse des informations est plus délicate et nécessite des développements plus profonds.

### IV.3.2. Développements asymptotiques des coefficients de réflexion et de transmission

Le contexte du calcul est celui évoqué au paragraphe IV.2 : une couche hétérogène est surmontée d'un demi-espace isotrope et homogène caractérisé par son impédance  $Z_1$  et repose sur un deuxième demi-espace isotrope et homogène d'impédance  $Z_2$ . Les coefficients (IV.31) et (IV.32) s'écrivent sous la forme d'une fraction rationnelle en fréquence faisant intervenir des termes du matricant de la couche. Ils peuvent donc être exprimés sous forme d'un développement de Taylor en fréquence :

$$R(\omega, s_1) = \sum_{k=0}^{\infty} (i\omega d)^k R_{(k)}(s_1) \text{ et } T(\omega, s_1) = \sum_{k=0}^{\infty} (i\omega d)^k T_{(k)}(s_1). \quad (\text{IV.46})$$

Remarquons que, compte tenu de la structure du développement en série du matricant (III.55), alternance réel pur/imaginaire pur,  $R_{(0)}$  est réel pur, alors que le premier terme correctif de  $R_{(0)}$ ,  $(R_{(1)})$ , est imaginaire pur et n'affecte donc que la phase lorsque  $R_{(0)} \neq 0$  (**Brekhovskikh & Godin, 1990**).

Pour le module des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde SH ou d'une onde P en incidence normale ( $s_1 = 0$ ), cela nous donne :

$$|R|^2 = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 - 4Z_1Z_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} (\omega d)^{2n} ; \quad (\text{IV.47})$$

$$|T|^2 = 4 \frac{(Z_1Z_2)}{(Z_1 + Z_2)^2} + 4Z_1Z_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} (\omega d)^{2n} . \quad (\text{IV.48})$$

Le coefficient  $q_2$  du premier ordre de dispersion des modules de réflexion et de transmission s'écrit :

$$q_2 = \frac{-1}{d^2 (Z_1 + Z_2)^2} \left\{ (Z_1Z_2 \langle \tau_\ell \rangle - \langle \gamma_\ell \rangle)^2 + \right. \\ \left. + 2(Z_1 - Z_2) \left[ Z_1 \int_0^d \gamma_\ell(\xi) \int_0^\xi \tau_\ell(\xi_1) d\xi_1 d\xi - Z_2 \int_0^d \tau_\ell(\xi) \int_0^\xi \gamma_\ell(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right] \right\} \quad (\text{IV.49})$$

où  $\langle \dots \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d \dots d\xi$ .

En sommant terme à terme (IV.47) et (IV.48) on remarque que

$$|R|^2 + |T|^2 = 1, \quad (\text{IV.50})$$

indépendamment de la fréquence. Cette relation illustre la loi de conservation de l'énergie.

✓ Pour une onde SH :

$$\gamma_\ell(\xi) = \rho_\ell(\xi) - s_1^2 (C_{66}(\xi))_\ell \text{ et } \tau_\ell(\xi) = \frac{1}{C_{44}(\xi)}, \quad (\text{IV.51})$$

composantes de la matrice du système (III.56).

✓ Pour une onde P à incidence normale :

$$\gamma_\ell(\xi) = \rho_\ell(\xi) - s_1^2 \left( C_{11}(\xi) - \frac{C_{13}^2(\xi)}{C_{33}(\xi)} \right)_\ell = \rho_\ell(\xi) \text{ et } \tau_\ell(\xi) = \frac{1}{C_{55}(\xi)}, \quad (\text{IV.52})$$

composantes de la matrice du système (III.57).

On remarque que lorsque les deux substrats sont identiques ( $Z_1 = Z_2$ ), le deuxième terme dans l'accolade du membre de droite de (IV.49) disparaît. Seule la moyenne des fonctions caractéristiques intervient dans l'expression de  $q_2$ . On peut considérer que le premier ordre de variation est, dans ce cas, sensible uniquement à la moyenne des propriétés du

matériau sur l'épaisseur totale de la zone hétérogène, et non à la répartition spatiale de ces propriétés au sein de la zone (**Brekhovskikh & Godin, 1990**).

Nous donnons ici les expressions des premiers termes du développement de la phase du coefficient de réflexion  $\varphi_R$  et de transmission  $\varphi_T$ , toujours dans le cas d'une onde scalaire.

$$\varphi_R = \begin{cases} \omega d \frac{2Z_1}{Z_1^2 - Z_2^2} (Z_2^2 \langle \tau_\ell \rangle - \langle \gamma_\ell \rangle) & \text{deux substrats différents } Z_1 \neq Z_2, \\ \frac{\pi}{2} + \omega d \left\{ \frac{Z_s}{Z_s^2 \langle \tau_\ell \rangle - \langle \gamma_\ell \rangle} \int_0^d \int_0^\xi (\gamma_\ell(\xi)_\ell(\xi_1) - \tau_\ell(\xi) \gamma_\ell(\xi_1)) d\xi d\xi_1 \right. \\ \left. - \frac{Z_s^2 \langle \tau_\ell \rangle - \langle \gamma_\ell \rangle}{2Z_s} \right\} & \text{deux substrats identiques } Z_1=Z_2=Z_s, \end{cases} \quad (\text{IV.53})$$

$$\varphi_T = -\omega d \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} (Z_1 Z_2 \langle \tau_\ell \rangle + \langle \gamma_\ell \rangle).$$

Dans le développement d'une méthode de caractérisation des matériaux, une première étape est bien sûr la résolution du problème direct, le profil des propriétés caractéristiques du matériau étant connu, on étudie les courbes de dispersion et les coefficients de réflexion et de transmission de la couche hétérogène. Les résultats ainsi obtenus sont sensibles aux différents paramètres qui définissent l'hétérogénéité. En faisant varier ces paramètres et en analysant les modifications générées sur le comportement du matériau, des relations caractéristiques peuvent être identifiées et/ou des abaques construites, dégagant des points spécifiques qui guideront la résolution du problème inverse. Dans les quelques exemples qui suivent, le lien entre l'hétérogénéité et la propagation des ondes élastiques est mis en évidence et analysé.

#### IV.4. Influence du caractère hétérogène du milieu sur les courbes de dispersion

##### IV.4.1. Limites asymptotiques des modes P-SV : onde de Rayleigh et chenaux acoustiques

Les informations concernant le comportement élastique d'un milieu peuvent être obtenues de différentes façons. On s'intéresse tout d'abord à l'analyse modale d'une plaque libre/libre, continûment hétérogène. L'anisotropie étudiée ne sera pas supérieure à celle d'un milieu orthotrope dont le plan sagittal  $(x_1, x_3)$  est plan de symétrie. Les ondes

polarisées verticalement, P-SV, sont donc découplées de celles polarisées horizontalement, SH.

Dans le cas d'une plaque homogène, les deux modes fondamentaux des ondes de Lamb (P-SV) deviennent très peu dispersifs à haute fréquence et leur énergie est confinée aux interfaces. À la limite, ils forment une onde de surface, l'onde de Rayleigh qui se propage à une vitesse  $C_R$ , légèrement inférieure à la célérité des ondes transversales  $C_T$ . La vitesse de phase des modes d'ordre plus élevés (ceux incluant systématiquement des ondes partielles de volume) tend vers la valeur de la célérité des ondes transversales. D'une façon générale, il a été démontré que les courbes de dispersion d'une plaque libre/libre ne peuvent s'intersecter (Solie & Auld, 1973; Alshits & Maugin, 2005) que lorsque les deux modes sont parfaitement découplés (par exemple les courbes de dispersion des modes SH coupent celles des modes P-SV et les modes symétriques de Lamb peuvent intersecter les modes antisymétriques).

Dans le cas de plaques hétérogènes étudié ici, il n'y a donc pas d'intersection possible entre les courbes de dispersion des différents modes. Trois célérités peuvent être identifiées comme limites potentielles à fréquence infinie : les deux célérités de Rayleigh  $C_{R0}$  et  $C_{Rd}$  et le minimum global de célérité des ondes transversales  $C_{T\min}$ . Or la célérité du premier mode fondamental (qui devient un mode de flexion à fréquence infinie, associé à  $A_0$ ) tend vers zéro à fréquence nulle, sa limite asymptotique à fréquence infinie ( $f \rightarrow +\infty$ ) correspond donc à la plus petite célérité identifiée au sein de la plaque. Les modes d'ordre plus élevés, ne se propageant pas à fréquence nulle, ont une limite asymptotique à fréquence infinie correspondant à  $C_{T\min}$ . Le deuxième mode fondamental a une valeur finie de célérité à fréquence nulle ; sa limite asymptotique à  $f \rightarrow +\infty$ , contrairement aux cas précédents, ne peut être déterminée avant de connaître les caractéristiques du profil.

Pour une plaque hétérogène plusieurs cas peuvent se présenter. Le profil est supposé asymétrique, on considère donc une plaque susceptible de propager deux ondes de Rayleigh de célérités différentes  $C_{R0} \neq C_{Rd}$ , correspondant aux caractéristiques des interfaces. En effet l'onde de Rayleigh a une profondeur de pénétration fonction de la longueur d'onde. À très haute fréquence, les phénomènes générés à chaque interface ont tendance à se découpler, deux ondes de type Rayleigh peuvent exister au sein de la plaque. Les limites à haute fréquence des vitesses des différents modes propagatifs sont analysées.

#### ✓ Cas n° 1 : trois limites asymptotiques

Lorsque  $C_{R0}$  et  $C_{Rd}$  sont inférieures à la célérité des ondes transversales minimale dans l'épaisseur de plaque  $C_{T\min}$ , la célérité du mode fondamental de flexion tend à haute fréquence vers la plus petite des deux valeurs  $\min\{C_{R0}, C_{Rd}\}$ , celle du deuxième mode fondamental tend vers la plus grande des deux vitesses de Rayleigh et les modes d'ordre

plus élevé tendent asymptotiquement vers la vitesse des ondes transversales minimale  $C_{T \min}$ .

✓ Cas n° 2 : deux limites asymptotiques

Si l'une des deux valeurs de vitesses de Rayleigh est supérieure à  $C_{T \min}$ , le premier mode fondamental tend toujours vers la plus petite des deux vitesses de Rayleigh et le deuxième mode fondamental, tout comme les modes d'ordre plus élevé tend vers la vitesse des ondes transversales la plus faible au sein de la plaque.

✓ Cas n° 3 : une limite asymptotique

Si la vitesse des ondes transversales atteint une valeur inférieure aux deux valeurs des vitesses de Rayleigh, tous les modes tendent à haute fréquence vers  $C_{T \min}$ .

#### IV.4.1.1. Profil linéaire : deux limites asymptotiques

Lorsqu'on coule du titane, il peut se former une couche d'impuretés due à l'interaction du métal en fusion avec le revêtement ou le creuset, cette couche est appelée couche «  $\alpha$ -case » du fait de l'augmentation du domaine  $\alpha$  du diagramme de phase TiX (X=Si, Al...) suite aux réactions chimiques dues à la présence d'impuretés (**Bernard**, 2000). Ce procédé est un cas où un milieu à propriétés continûment variables apparaît.

	$C_L$ (mm/ $\mu$ s)	$C_T$ (mm/ $\mu$ s)	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	$C_R$ (mm/ $\mu$ s)
Titane $x_3 = 0$	6,06	3,23	4,46	2,99
$\alpha$ -case $x_3 = d$	6,66	3,553	4,46	3,296

Tableau 4.1. Propriétés caractéristiques du Titane et de l' $\alpha$ -case.

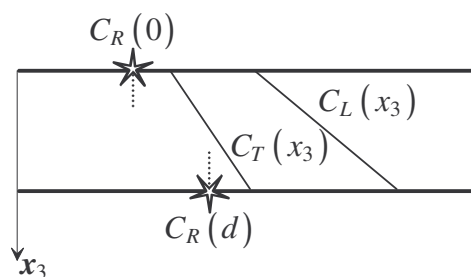
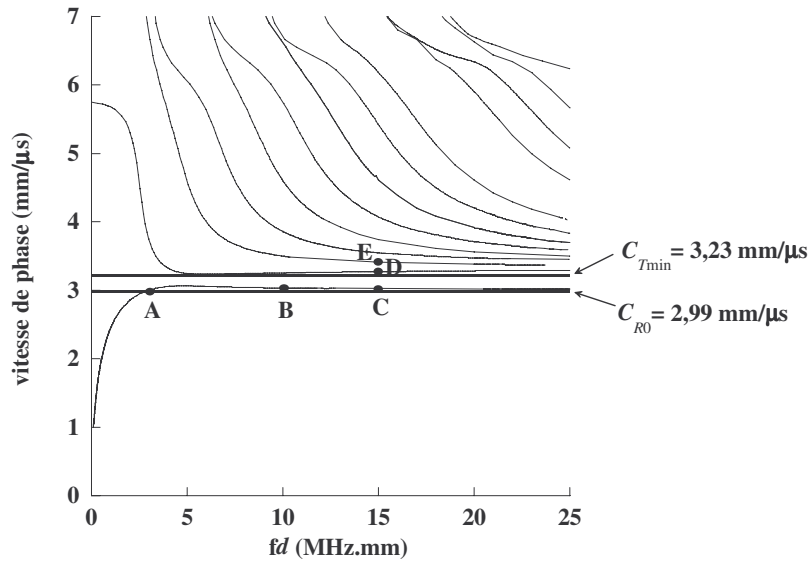


Figure 4.4. Profil de propriétés.

Le choix arbitraire d'un profil linéaire suivant l'épaisseur est adopté pour représenter les variations de propriétés au sein de la zone de transition entre les deux composés en présence. On suppose également que le milieu reste localement isotrope.

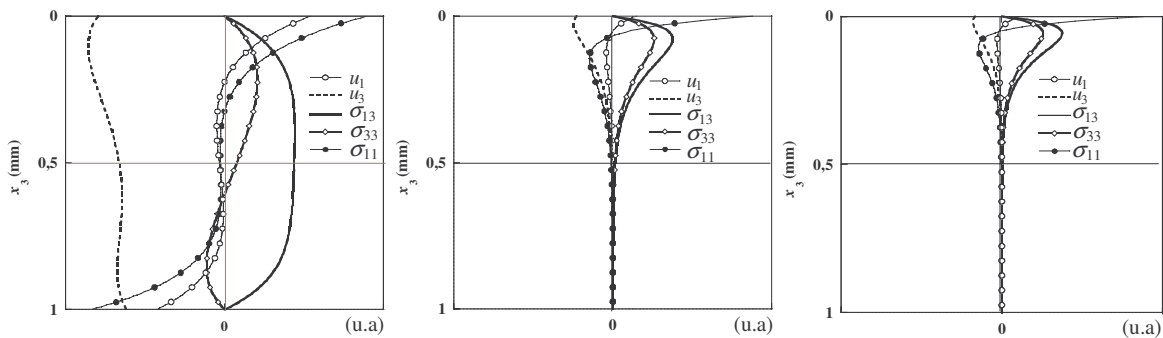
À partir des développements présentés au paragraphe IV.1.1, les courbes de dispersion suivantes sont obtenues (**Baron & al., 2003; Poncelet & al., 2003**):



**Figure 4.5.** Courbes de dispersion pour un profil linéaire.

La situation étudiée ici correspond donc au cas n° 2, des courbes de dispersion présentant deux limites asymptotiques à haute fréquence. Les modes présents à fréquence nulle appelés modes fondamentaux ont deux limites distinctes lorsque  $f \rightarrow \infty$ . Le premier mode fondamental débutant au point  $(fd, v_1) = (0, 0)$  (équivalent du mode  $A_0$  en milieu homogène) tend vers la vitesse de l'onde de Rayleigh susceptible de se propager à l'interface  $x_3 = 0$ , interface pour laquelle la célérité de l'onde de Rayleigh  $C_{R0}$  est inférieure à  $C_{T\min} = C_{T0}$  (Tableau 4.1).

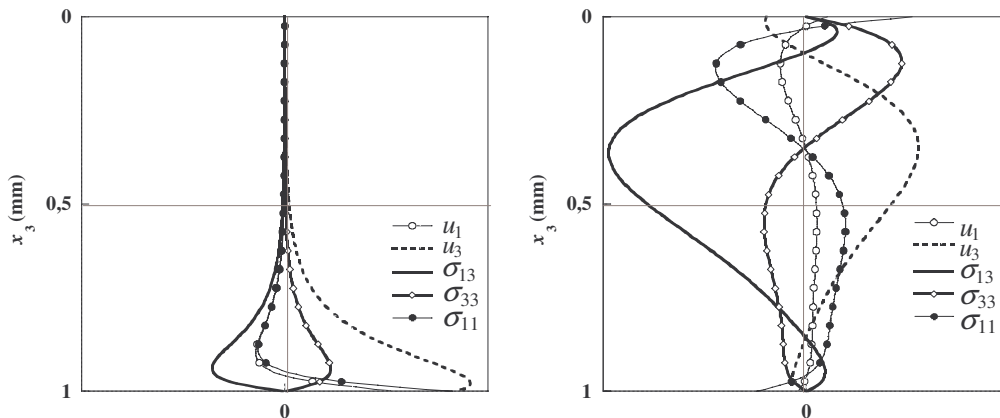
Les champs de déplacements et contraintes sont localisés à cette interface (Figure 4.6).



**Figure 4.6.** Évolution des champs de déplacements et contraintes du premier mode fondamental au sein de la plaque pour les points repérés par les couples  $(fd, v_1)$  : A (2,9, 2,99), B (10,6, 3,03) et C (15, 3,02).

La limite asymptotique des autres modes est la plus petite des vitesses des ondes transversales au sein de la plaque :  $C_T(0) = C_{T\min} < C_R(d)$ . Dans l'intervalle de fréquence de la Figure 4.5, le deuxième mode fondamental atteint un plateau à  $C_{Rd}$ , or

$C_{Rd}$  n'est pas une limite asymptotique, c'est-à-dire que lorsque  $f \rightarrow \infty$ , aucune onde guidée ne se transforme en onde de surface attachée à l'interface  $x_3 = d$ . En revanche pour une plage de fréquence finie, le deuxième mode fondamental possède toutes les caractéristiques d'une onde de type onde de Rayleigh (confinement de l'énergie à l'interface et décroissance rapide avec la distance à cette interface), tendance illustrée par l'évolution des champs de déplacements et de contraintes au point D (Figure 4.7). Mais la distance de pénétration ne pourra pas tendre vers zéro, puisqu'à partir d'une fréquence  $f_p$ , le mode quitte le plateau pour tendre vers  $C_{T\min}$ . L'énergie est alors à nouveau répartie sur toute la plaque avec une concentration plus importante à l'interface  $x_3 = 0$ . C'est ce qu'on observe au point E pour le premier mode de volume (Figure 4.7) et qui pourrait être observé au-delà de 25 MHz.mm pour le deuxième mode fondamental. Malheureusement pour des produits « fréquences, épaisseur » supérieurs à 25 MHz.mm, des instabilités numériques rendent l'évaluation des courbes de dispersion difficile. Il est possible de mettre en place des techniques dérivées déjà invoquées pour l'amélioration de la méthode de Thomson et Haskell, cependant, le caractère hétérogène du matériau soulève de nouveaux points délicats dans la résolution du problème.



**Figure 4.7.** Évolution des champs de déplacements et contraintes au sein de la plaque pour les points repérés par les couples  $(fd, v_1)$  : D(15, 3,27) et E(15, 3,41).

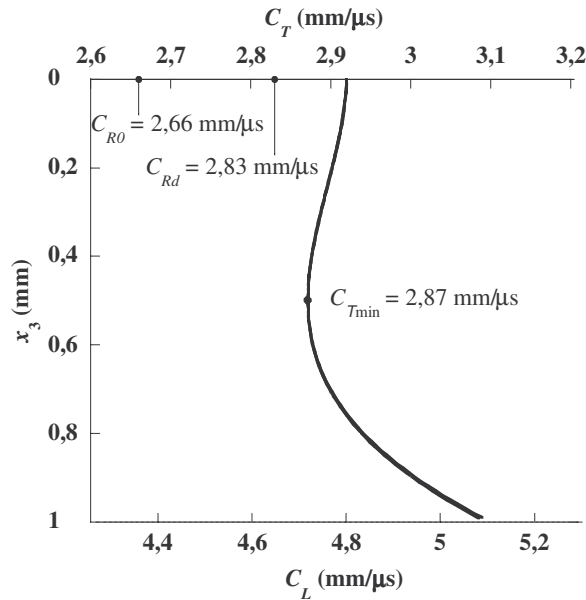
#### IV.4.1.2. Chenal acoustique : trois limites asymptotiques

Le profil de propriétés présenté ici ne concerne que les célérités. La densité est choisie constante ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ). Il s'agit d'un profil créé pour la simulation. Il présente des vitesses différentes aux deux interfaces.

Le Tableau 4.1 donne les valeurs des célérités caractéristiques du matériau à chaque interface. Le profil de variation de ces propriétés est représenté sur la Figure 4.8.

	$C_L$ (mm/ $\mu$ s)	$C_T$ (mm/ $\mu$ s)	$C_R$ (mm/ $\mu$ s)
interface $x_3 = 0$	4,8	2,92	2,663
interface $x_3 = d$	5,1	3,1	2,828

**Tableau 4.2.** Valeurs des célérités aux interfaces.



**Figure 4.8.** Profils des célérités,  $d = 1$  mm .

Ce profil présente également un minimum de célérités au milieu de la plaque. Les lois de Snell-Descartes démontrent que la présence d'un minimum de célérités crée une zone de propagation privilégiée appelée chenal acoustique (**Brekhovskikh**, 1980). Les ondes sont piégées dans une sorte de guide interne axé sur ce minimum. Elles s'y propagent sans ou avec une très faible perte d'énergie, les ondes basses fréquences parcourent ainsi de grandes distances. Le phénomène a été découvert pendant la seconde guerre mondiale, en étudiant la propagation du son dû à une explosion dans l'Océan et ce chenal océanique a été baptisé chenal SOFAR (SOund of Fixing And Ranging).



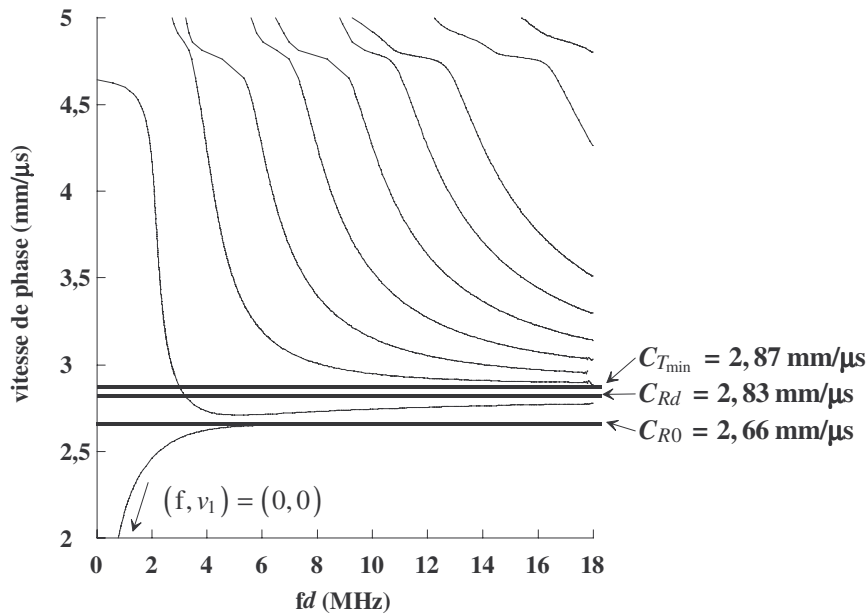


Figure 4.9. Courbes de dispersion.

Le profil de vitesse présente un minimum local au milieu de la plaque. On remarque que lorsque la vitesse des ondes approche la valeur minimale de la vitesse longitudinale ( $C_L = 4,72 \text{ mm}/\mu\text{s}$ ), les courbes de dispersion forment un plateau, les modes sont peu dispersifs. C'est l'illustration d'un phénomène de localisation de l'énergie de l'onde guidée dans une portion de la plaque : c'est ce qu'on appelle le chenal acoustique. Concernant la limite asymptotique des modes fondamentaux, on retrouve les remarques formulées pour le cas n° 1.

#### IV.4.2. Vecteur d'informations analytique : les développements asymptotiques des modes fondamentaux à basse fréquence

L'objectif est de vérifier que les développements asymptotiques fournissent des informations exploitables dans la caractérisation de matériaux continûment variables. Sans définir quantitativement les propriétés, ils permettent de dégager des tendances et d'orienter l'étude à partir de paramètres qualitatifs ainsi identifiés.

Dans l'exemple présenté, les profils ont été construits pour la simulation (Shuvalov & al., 2005). Le but est de vérifier le domaine de validité des approximations par la méthode du développement en série du matricant sur des profils compliqués et arbitraires (à base de fonctions exponentielles, de fonctions gaussiennes, de paliers et de sauts). Le milieu est, de plus, anisotrope. La Figure 4.10 représente les profils de variation pour les constantes anisotropes et la masse volumique du milieu.

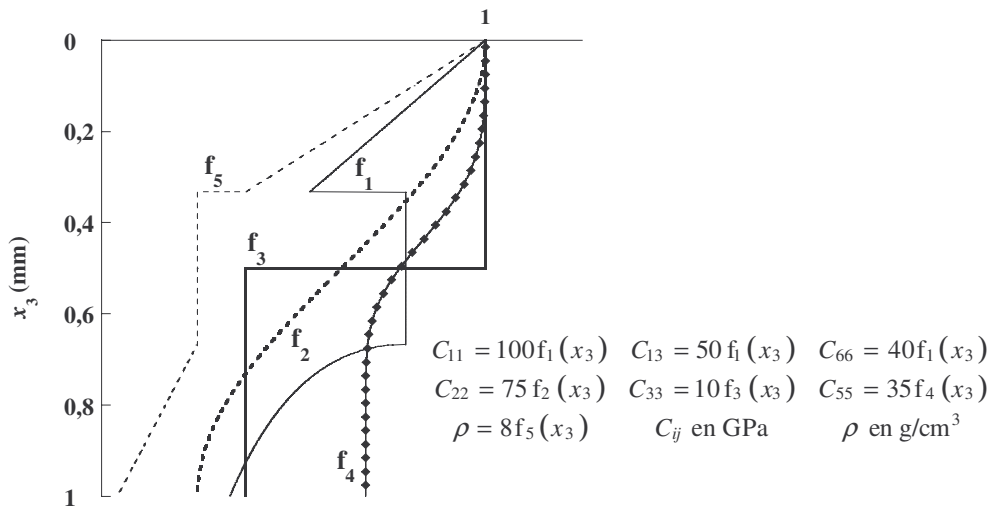


Figure 4.10. Fonctions de profils,  $d = 1$  mm .

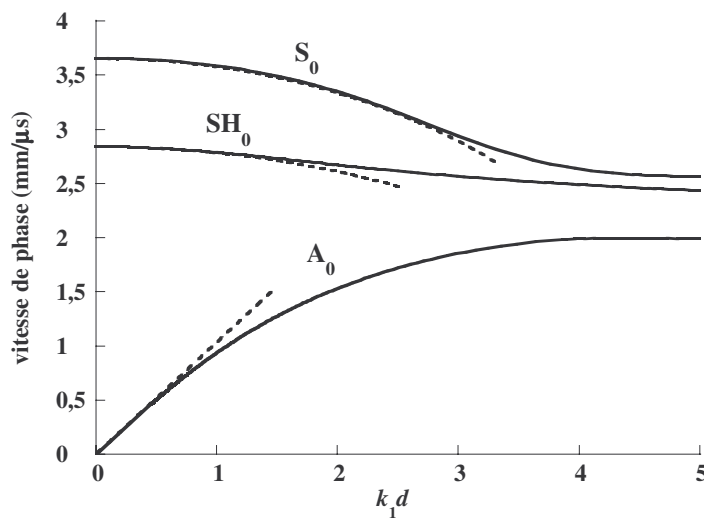


Figure 4.11. Développements asymptotiques des modes fondamentaux pour des profils numériques.

En trait pointillé, on trace les développements asymptotiques, (IV.43), (IV.44) et (IV.45). En trait plein sont représentées les courbes de dispersion des modes fondamentaux calculées par la série de Peano tronquée à un ordre élevé (50 termes — cf. remarque p. 59). On remarque que le premier coefficient de dispersion du développement de chaque mode fondamental, restitue une description pertinente sur un domaine fréquentiel significatif. Pour le mode équivalent du mode de flexion noté  $A_0$ , l'approximation linéaire est valide jusqu'à  $k_1 d = 1$  soit un produit  $fd$  d'environ 0,15 MHz.mm. Pour les deux autres modes l'approximation est quadratique et son domaine de validité est donc plus large, jusqu'à  $k_1 d = 2$  pour  $SH_0$  soit un produit  $fd$  d'environ 0,42 MHz.mm et jusqu'à  $k_1 d = 3$  pour  $S_0$  soit un produit  $fd$  d'environ 1,5 MHz.mm. Les expressions (IV.44) et (IV.45) des développements asymptotiques basses fréquences des modes  $S_0$  et  $SH_0$ , font intervenir les termes  $\langle C_{11} - C_{13}^2 / C_{33} \rangle$  et  $\langle C_{66} \rangle$  qui fournissent des informations de moyenne sur le

profil de la plaque sans nous renseigner sur le profil lui-même. Par contre pour  $A_0$ , la pente issue du calcul d'une intégrale (qui n'est pas une moyenne), ne fournit pas d'information sur les propriétés du matériau. En revanche, elle nous renseigne sur son caractère hétérogène. En effet, pour une plaque homogène, la pente à l'origine du mode de flexion vaut  $1/\sqrt{12\langle\rho\rangle}$  de la valeur de  $\sqrt{\langle C_{11} - C_{13}^2/C_{33}\rangle}$ , ce qui n'est plus le cas lorsque les propriétés du milieu varient avec l'épaisseur de la plaque.

#### IV.5. Sensibilité des coefficients de réflexion et de transmission au caractère hétérogène du milieu

On envisage l'étude d'un milieu tri-couche par caractérisation au contact. La couche supérieure est constituée d'un matériau homogène isotrope transverse avec un axe de symétrie vertical (isotropie azimutale (**Crampin**, 1989)), la couche intermédiaire hétérogène isotrope transverse est une zone de transition des propriétés caractéristiques entre la couche supérieure et le milieu semi-infini homogène et isotrope transverse. Ce genre de configuration peut être obtenu à partir d'une plaque de micro-béton épaisse, dégradée chimiquement. La dégradation s'initie en surface et progresse vers le cœur de la plaque générant un profil de propriétés supposé en tangente hyperbolique. On analyse ici, l'influence de la valeur du gradient de propriétés.

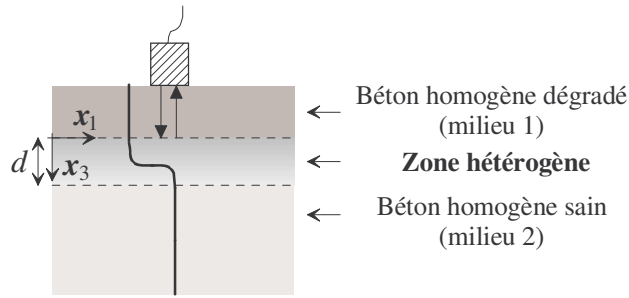
Les tenseurs d'élasticité des deux milieux homogènes sont les suivants (**Panet & al.**, 2002) :

$$\begin{pmatrix} 21,2 & 1,5 & 2,4 & & & \\ 1,5 & 21,4 & 1,5 & & & \\ 2,4 & 1,5 & 21,2 & & & \\ & & & 9,4 & & \\ & & & & 9,4 & \\ & & & & & 9,4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 45,4 & 10 & 11,4 & & & \\ 10 & 43,5 & 10 & & & \\ 11,4 & 10 & 45,4 & & & \\ & & & 15,6 & & \\ & & & & 17 & \\ & & & & & 15,6 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.54})$$

béton homogène dégradé (GPa)                      béton homogène sain (GPa)

Le béton dégradé a une masse volumique  $\rho_1 = 1,85 \text{ g/cm}^3$  et le béton sain a une masse volumique de  $\rho_2 = 2,16 \text{ g/cm}^3$ .

On envoie une onde longitudinale P à l'aide d'un transducteur au contact sur la surface dégradée, et on étudie le module du coefficient de réflexion de la zone de transition en fonction de la fréquence. Pour analyser correctement les signaux, la zone de transition doit être isolée théoriquement c'est-à-dire que l'épaisseur du milieu 1 doit être suffisamment grande devant la longueur d'onde.

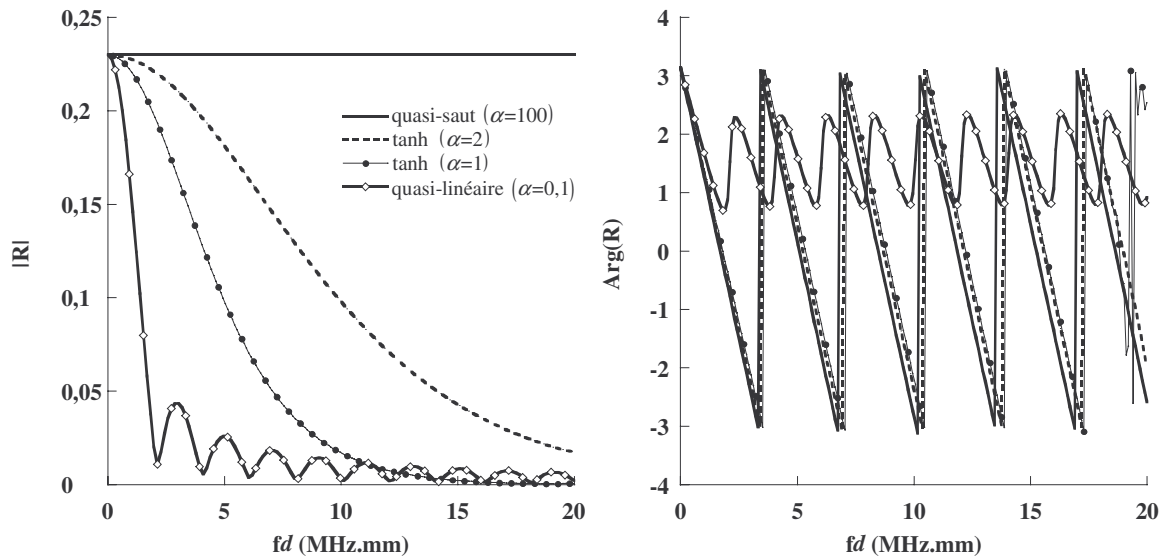


**Figure 4.12.** Dispositif d'étude du coefficient de réflexion à l'interface béton homogène dégradé/zone hétérogène.

On suppose que le profil d'hétérogénéité de la zone de transition a la forme suivante pour toutes les propriétés (coefficients d'élasticité et masse volumique) :

$$f(x_3) = \frac{f(0) + f(d)}{2} + \frac{f(0) - f(d)}{2 \tanh(\alpha d / 2)} \tanh[\alpha(x_3 - d/2)], \quad (\text{IV.55})$$

où  $\alpha$  est un réel positif auquel on attribue différentes valeurs afin de modifier l'allure du profil d'hétérogénéité.



**Figure 4.13.** Module et phase (rad) du coefficient de réflexion d'un béton dégradé.

On voit très clairement l'influence du profil d'hétérogénéité sur la réponse en réflexion. Pour un profil en « marche d'escalier » (trait plein épais), le coefficient de réflexion est indépendant de la fréquence et correspond au rapport des impédances des deux milieux homogènes de part et d'autre du saut de propriétés, soit :

$$|R| = \left| \frac{\sqrt{\rho_1 C_{11}^{\text{milieu 1}}} - \sqrt{\rho_2 C_{11}^{\text{milieu 2}}}}{\sqrt{\rho_1 C_{11}^{\text{milieu 1}}} + \sqrt{\rho_2 C_{11}^{\text{milieu 2}}}} \right| = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right| \approx 0,225. \quad (\text{IV.56})$$

Cette valeur est le point de départ à fréquence nulle du module du coefficient de réflexion quel que soit le profil d'hétérogénéité. Lorsque  $fd \rightarrow 0$ , le comportement en réflexion/transmission de l'onde n'est pas affecté par l'existence d'une zone de transition hétérogène dont l'épaisseur est faible en comparaison de la longueur d'onde ( $d/\lambda \rightarrow 0$ ). Seule la rupture d'impédance entre les deux milieux homogènes extérieurs intervient.

Lorsque la fréquence augmente, la longueur d'onde diminue et les variations continues des propriétés, « vues » comme abruptes à fréquence nulle deviennent de plus en plus faibles à l'échelle de la longueur d'onde. La transition est de plus en plus molle jusqu'à ne plus influencer le comportement de l'onde qui passe progressivement d'un milieu à l'autre sans être affectée lorsque  $fd \rightarrow \infty$  ( $\lambda/d \rightarrow 0$ ). Le module du coefficient de réflexion tend alors vers 0. Les oscillations qui apparaissent pour le dernier profil correspondent à des régimes d'interférence au sein de la couche. Dans le cas des profils à fort gradient, les oscillations existent mais à des fréquences plus hautes, suffisamment hautes pour que les variations de propriétés rapportées à la longueur d'onde ne génèrent que des coefficients de réflexion de module très faible et donc peu ou pas visibles. En revanche, lorsque le gradient s'affaiblit, la zone de transition au sein de la couche hétérogène augmente. Les oscillations apparaissent plus tôt dans le spectre, à des fréquences correspondant à une longueur d'onde suffisamment grande pour que le comportement de l'onde soit affecté par le profil et que l'influence sur le module du coefficient de réflexion soit visible. Lorsque la fréquence augmente, la visibilité des oscillations de  $|R|$  dépend d'une compétition entre la forme du gradient de propriétés (abrupt ou mou) et le rapport entre la longueur d'onde et l'épaisseur de transition de la zone hétérogène.

#### **IV.5.1. Vecteur d'informations analytique : les développements asymptotiques des coefficients de réflexion (module et phase)**

La configuration envisagée à présent, est celle d'une étude en immersion d'une couche hétérogène localement isotrope sur un substrat semi-infini isotrope. Le profil est continu à l'interface couche/substrat. Le tracé du spectre fréquentiel du coefficient de réflexion à l'interface eau/couche hétérogène est étudié pour une onde longitudinale se propageant dans l'eau. On calcule les développements asymptotiques du module et de la phase du coefficient de réflexion afin de vérifier la pertinence des informations fournies sur l'hétérogénéité.

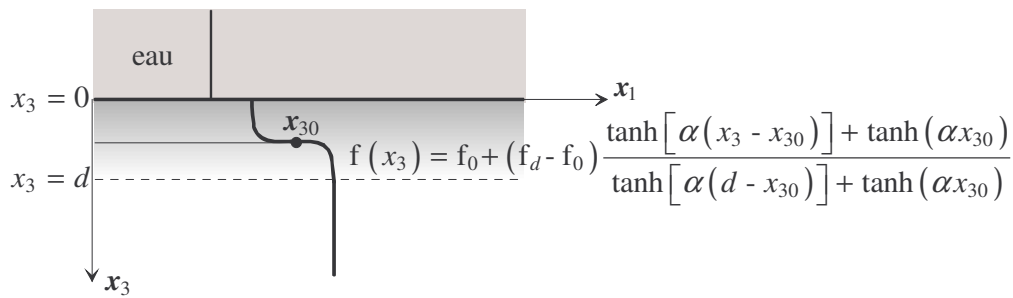


Figure 4.14. Profil de propriétés.

On reprend les propriétés (IV.54) des bétons sain et dégradé données au paragraphe précédent. La matrice d'élasticité du béton dégradé est relative à l'interface  $x_3 = 0$  avec une masse volumique  $\rho_0 = 1,85 \text{ g/cm}^3$  et celle du béton sain se rapporte au substrat  $x_3 \geq d$  avec une masse volumique  $\rho_d = 2,16 \text{ g/cm}^3$ . L'eau est un fluide homogène de masse volumique  $\rho_{eau} = 1 \text{ g/cm}^3$  pour lequel la célérité des ondes est estimée à  $1,5 \text{ mm}/\mu\text{s}$ . Le coefficient  $\alpha$  permettant de définir le profil de propriétés est égal à 1. Comme on le voit sur la Figure 4.15, à fréquence nulle, le module du coefficient de réflexion correspond au rapport d'impédance eau/substrat homogène. L'onde ne « voit » pas la couche hétérogène. À haute fréquence le module tend vers le rapport d'impédance eau/couche hétérogène ( $x_3 = 0$ ), la variation à l'intérieur de la couche paraît alors continue et trop faible à l'échelle de la longueur d'onde pour générer une contribution notable sur le module de réflexion.

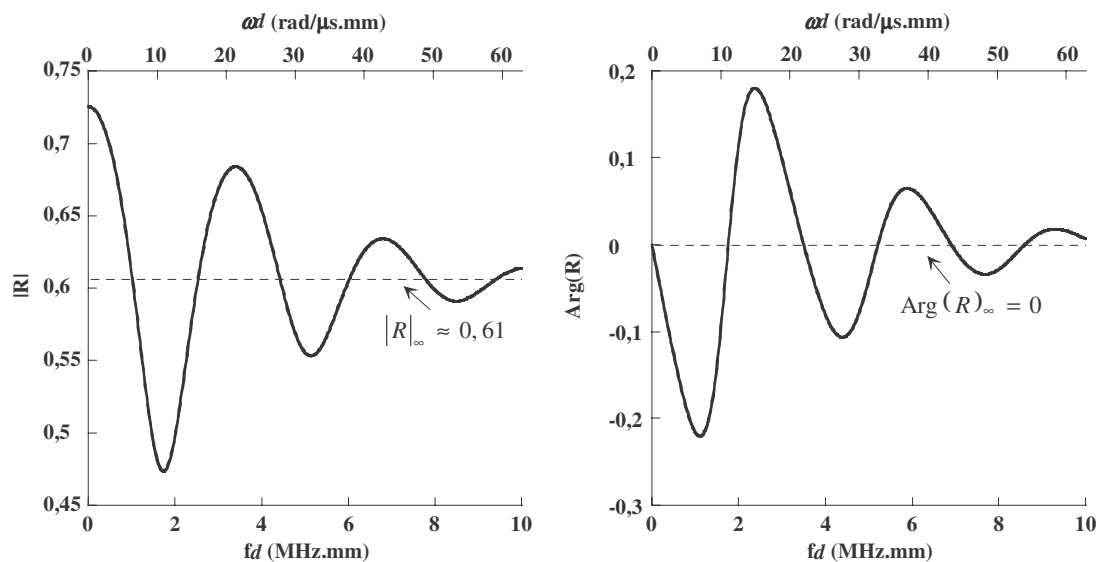


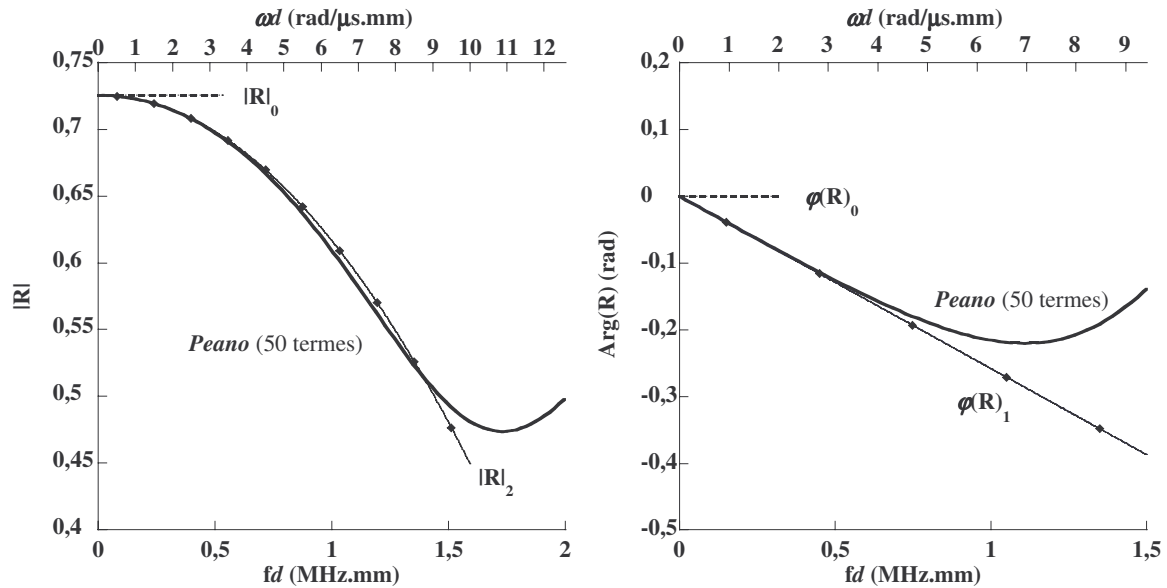
Figure 4.15. Évolution du module et de la phase (rad) du coefficient de réflexion à l'interface ( $x_3 = 0$ ) en fonction du produit fréquence-épaisseur.

Le développement asymptotique pour les deux premiers ordres donne :

$$|R|_0 = |R_{(0)}| = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right| = \left| \frac{1,5 - 9,9}{1,5 + 9,9} \right| \approx 0,73, \quad (\text{IV.57})$$

$$|R|_2 = \sqrt{\left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 - 4Z_1Z_2q_2(\omega d)^2}.$$

On compare les premiers ordres des développements asymptotiques avec les courbes obtenues par le calcul de la série de Peano tronquée à 50 termes (cf. remarque p. 59).



**Figure 4.16.** Comparaison du développement asymptotique avec le module et la phase du coefficient de réflexion obtenus à partir de résultat exact (série de Peano avec 50 termes).

L'ordre deux pour le module et l'ordre un pour la phase suffisent pour l'obtention des informations dépendantes du profil (comme l'ordonnée et la pente à l'origine) sur le comportement à basse fréquences du coefficient de réflexion. Un exemple plus concret mettant en évidence l'intérêt méthodologique que présente les développements asymptotiques est décrit dans le chapitre suivant.

## CONCLUSION

L'expression du matricant sous la forme du développement en série de Peano est donc parfaitement adaptée à l'étude de la plaque. La factorisation de la matrice du système dans les paramétrages du formalisme de Stroh génère une écriture polynomiale de la série de Peano qui facilite la résolution des équations obtenues aussi bien dans le cadre d'une étude modale d'une plaque que dans le cadre de l'étude de la réponse d'une plaque à une excitation extérieure (coefficients de réflexion et de transmission). Enfin, et c'est là un des atouts de la méthode qui a déjà été souligné, les développements asymptotiques découlent

directement de cette écriture sous forme de polynôme. L'ensemble des données rendues accessibles par le développement en série de Peano du matricant constitue donc une base d'informations importante dans la caractérisation des matériaux continûment hétérogènes.



## V. Quelques exemples d'applications

### RÉSUMÉ

*Le but ultime est la caractérisation d'un matériau continûment hétérogène, c'est-à-dire la possibilité d'inverser le problème. Au travers de deux exemples applicatifs, on montre que le développement en série de Peano et les différents résultats obtenus (courbes de dispersion, coefficients de réflexion/transmission, développements asymptotiques) fournissent des informations exploitables pour définir certains paramètres caractéristiques du milieu et des profils d'hétérogénéité.*



## SOMMAIRE

<b>V.1. Inversion de paramètres caractéristiques du profil d'hétérogénéité : développements asymptotiques des coefficients de réflexion/transmission</b>	<b>106</b>
<b>V.2. Une étude expérimentale basée sur la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh</b>	<b>110</b>
<b>V.2.1. Détermination des propriétés du béton sain et de celles du béton dégradé aux interfaces</b>	<b>110</b>
<i>V.2.1.1. Béton sain</i>	<i>112</i>
<i>V.2.1.2. Béton dégradé</i>	<i>114</i>
<b>V.2.2. Mesure des propriétés de dispersion de l'onde de Rayleigh</b>	<b>115</b>
<b>V.2.3. Informations sur le profil d'hétérogénéité</b>	<b>118</b>
<i>V.2.3.1. Comparaison des courbes de dispersion de l'onde de Rayleigh : expérimental contre simulation</i>	<i>118</i>
<i>V.2.3.2. Étude de l'influence des différents paramètres sur la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh</i>	<i>122</i>
a) Valeur du gradient au point de plus forte pente	122
b) Localisation du point de plus forte pente $x_{30}$	123
c) Variation de propriétés de surface relativement à celles du substrat : $(f_d - f_0) / f_d$	124
<i>V.2.3.3. Informations supplémentaires par l'étude des coefficients de réflexion à l'interface eau/surface dégradée</i>	<i>125</i>
a) Valeur du gradient au point de plus forte pente	125
b) Localisation du point de plus forte pente $x_{30}$	126



## INTRODUCTION

L'objectif des travaux présentés ici est la caractérisation de matériaux, en particulier des matériaux continûment hétérogènes. Il s'agit donc, à partir de propriétés de dispersion, ou de réflexion/transmission de remonter aux propriétés continûment variables du matériau; ou bien de déterminer des valeurs caractéristiques à défaut de trouver la forme du profil de variation.

Il faut souligner que l'identification des profils d'hétérogénéité et des propriétés du matériau est très délicate. Les données telles que la dispersion d'ondes guidées ou des spectres fréquentiels des coefficients de réflexion et de transmission suffisent en théorie à définir le matériau puisque le jeu de courbes de dispersion et les coefficients de réflexion/transmission sont définis de façon unique par les propriétés caractéristiques et leurs variations au sein du matériau. Mais expérimentalement, il est difficile d'obtenir précisément toutes les informations nécessaires, c'est pourquoi la caractérisation est souvent incomplète. Cependant, dans le cas où certaines informations concernant la nature du milieu sont accessibles (procédés industriels de fabrication contrôlés ou connaissances acquises via d'autres dispositifs expérimentaux), la propagation d'ondes peut participer à déterminer des paramètres caractéristiques des profils. Dans certains cas, comme on le verra pour l'étude de l'onde de Rayleigh, les indicateurs d'hétérogénéité peuvent être très simples : l'onde de Rayleigh non dispersive pour des structures homogènes devient dispersive dans un milieu hétérogène. Mais bien souvent la variation continue de propriétés n'entraîne qu'une modification de la dépendance de certains paramètres : les coefficients de réflexion et de transmission varient déjà en fonction de la fréquence pour les structures homogènes, il s'agit donc de dégager les évolutions de cette dépendance liées à l'hétérogénéité.

Il est important de préciser que la bonne connaissance du profil d'hétérogénéité d'un matériau réel est rare, l'inversion à partir de données expérimentales n'est donc pas triviale. C'est pourquoi, la plupart des résultats présentés concernent des matériaux virtuels, créés numériquement. Cependant, grâce à une collaboration avec le département *Matériaux et Mécanique des Composants* d'EDF, une plaque de micro béton à propriétés continûment variables a été analysée expérimentalement et a fourni des résultats satisfaisants. Dans ce chapitre, l'impact des paramètres d'hétérogénéité sur les courbes de dispersion ou les coefficients de réflexion/transmission est mis en évidence dans le cadre d'exemples concrets. Le domaine de validité des développements asymptotiques est identifié et leur rôle dans l'identification des paramètres d'hétérogénéité souligné.

## V.1. Inversion de paramètres caractéristiques du profil d'hétérogénéité : développements asymptotiques des coefficients de réflexion/transmission

Il s'agit de montrer que les développements asymptotiques sont des vecteurs d'informations importants dans l'évaluation de l'hétérogénéité des matériaux. À partir d'un profil connu, on trace le module et la phase des coefficients de réflexion et de transmission d'une plaque telle que décrite Figure 4.12. À l'aide des développements asymptotiques présentés au Chapitre 4 (§ IV.3) et des éléments d'information obtenus à partir du tracé des courbes, on cherche à remonter à des paramètres caractéristiques du profil d'hétérogénéité. Lors du collage à chaud de deux matériaux identiques, une zone de transition peut se former. La variation de propriétés de cette zone est symétrique par rapport à sa mi-épaisseur et linéaire. On suppose qu'elle ne concerne pas la densité du matériau qui reste constante, seules les célérités des ondes longitudinales et transversales sont affectées. Dans le cadre de la propagation des ondes SH à incidence normale analysée ici, le profil d'hétérogénéité ne s'applique qu'au module de cisaillement. On considère, pour notre exemple, une couche hétérogène continue d'épaisseur  $d = 1$  mm entre deux couches de Titane homogènes isotropes identiques dont on connaît les propriétés caractéristiques.

### Propriétés du Titane

- ✓  $\rho$  la masse volumique :  $\rho = 4,46 \text{ g/cm}^3$  ;
- ✓  $\mu$  le module de cisaillement :  $\mu = 46,53 \text{ GPa}$  ;
- ✓  $Z$  l'impédance commune aux deux milieux extérieurs pour les ondes SH :  
 $Z = \sqrt{\rho\mu}$ .

### Propriétés de la couche hétérogène à mi épaisseur

- ✓  $\rho$  la masse volumique :  $\rho = 4,46 \text{ g/cm}^3$  ;
- ✓  $\mu$  le module de cisaillement :  $\mu = 56,3 \text{ GPa}$  ;

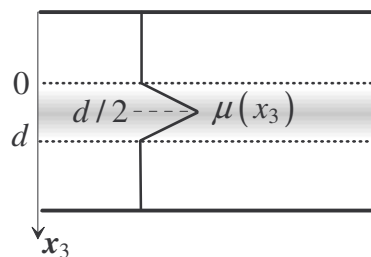


Figure 5.1. Profil du module de cisaillement.

Les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde SH à incidence normale pour la configuration décrite Figure 4.12, obtenus par le calcul de la série de Peano tronquée (50 termes — cf. remarque p. 59) sont tracés en fonction de la fréquence.

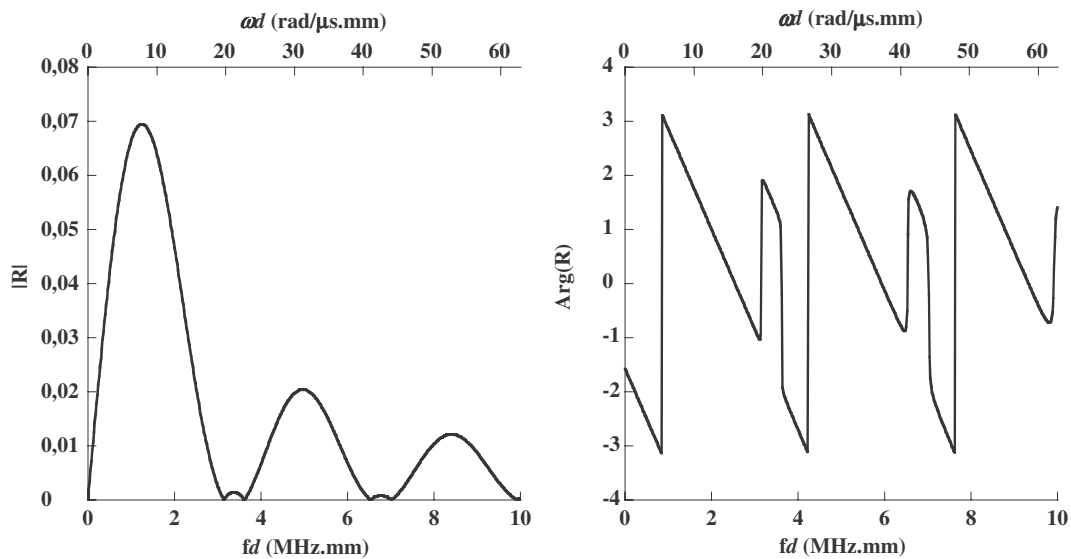


Figure 5.2. Module et phase (rad) du coefficient de réflexion.

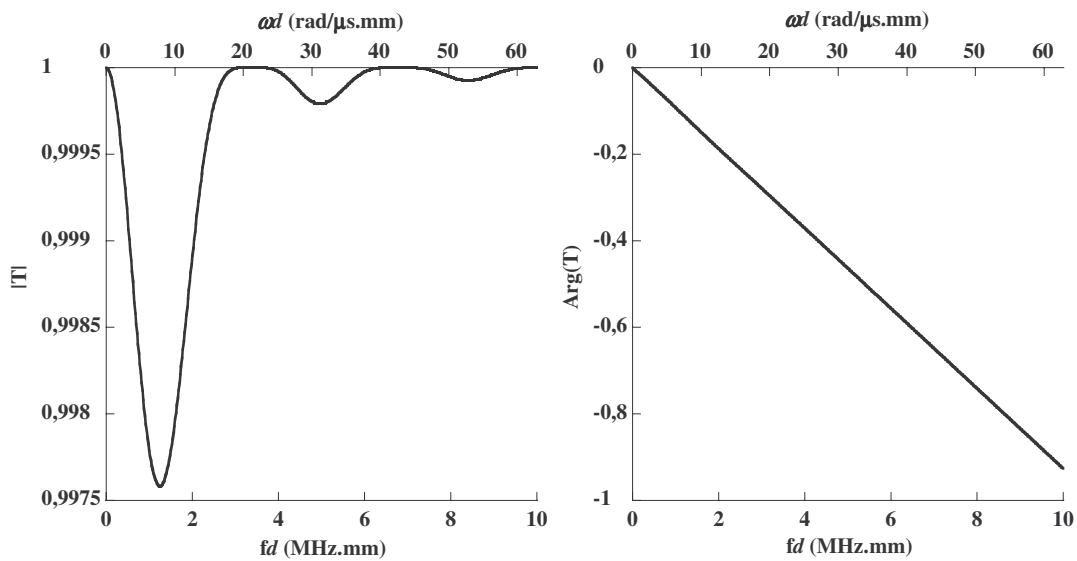
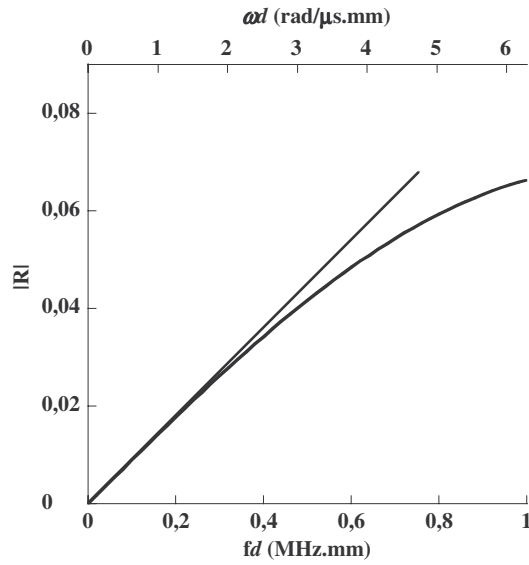


Figure 5.3. Module et phase (rad) du coefficient de transmission.

Le fait que les deux matériaux qui encadrent la couche hétérogène soient identiques, entraîne un module du coefficient de réflexion nul lorsque  $fd \rightarrow 0$ . Ainsi le premier terme de dispersion du développement asymptotique du module du coefficient de réflexion n'est plus quadratique mais linéaire. Or la partie linéaire du tracé (Figure 5.2) est suffisamment importante pour que la pente à l'origine puisse être mesurée de façon fiable. De plus le passage d'une quantité d'une valeur nulle ou quasi nulle à une valeur non nulle est plus

facilement détectable. Les variations de  $|R|$  à basse fréquence, sont plus facilement mesurables que les variations de  $|T|$  qui sont beaucoup plus faibles relativement à la valeur à l'origine. En ce qui concerne la phase, l'expression du développement asymptotique de la phase du coefficient de transmission est plus facilement exploitable dans le cas de deux substrats identiques. On va donc utiliser le tracé du module du coefficient de réflexion et celui de la phase du coefficient de transmission pour obtenir des informations complémentaires sur le profil de propriétés.

La pente à l'origine obtenue pour le module du coefficient de réflexion est mesurée sur la courbe de la Figure 5.2 :



**Figure 5.4.** Tracé de la pente à l'origine du module du coefficient de réflexion tracé en fonction du produit fréquence-épaisseur.

Or, le développement asymptotique du module du coefficient de réflexion (IV.57) nous donne le coefficient directeur de la pente à l'origine  $p_R$  :

$$p_R = 4\pi Z d \sqrt{-q_2} \approx 0,09. \quad (\text{V.1})$$

On obtient une première équation à partir de l'expression de  $q_2$  donnée par (IV.49) :

$$\pm 4\pi Z d \left[ \frac{1}{4Z^2 d} (Z^2 \langle \tau_\ell \rangle - \rho) \right] \approx 0,09, \quad (\text{V.2})$$

avec

$$\langle \tau_\ell \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{1}{\mu(x_3)} dx_3. \quad (\text{V.3})$$



On note  $\mu_M$  la valeur prise par le coefficient de cisaillement en  $x_3 = d/2$ . Ainsi (V.2) se simplifie en

$$\pm\pi \left[ Z \frac{1}{\mu_M - \mu} \ln \left( \frac{\mu_M}{\mu} \right) - \frac{\rho}{Z} \right] \approx 0,09. \quad (\text{V.4})$$

On utilise également le développement asymptotique de la phase du coefficient de transmission. La pente à l'origine mesurée sur la Figure 5.3 est  $p_T \approx -0,93$ . Or l'expression du développement asymptotique permet d'écrire :

$$2\pi d (Z^2 \langle \tau_\ell \rangle + \rho) \approx 0,93(180/\pi), \quad (\text{V.5})$$

soit,

$$2\pi^2 d \left[ Z^2 \frac{1}{\mu_M - \mu} \ln \left( \frac{\mu_M}{\mu} \right) + \rho \right] \approx 167,4. \quad (\text{V.6})$$

D'après (V.4) on obtient

$$\frac{1}{\mu_M - \mu} \ln \left( \frac{\mu_M}{\mu} \right) \approx \mp \frac{0,09}{\pi Z} + \frac{\rho}{Z^2}, \quad (\text{V.7})$$

et d'après (V.6) et (V.7)

$$d \approx \frac{167,4}{2\pi^2 \left[ -\frac{0,09}{\pi} Z + 2\rho \right]} \quad \text{ou} \quad d \approx \frac{167,4}{2\pi^2 \left[ \frac{0,09}{\pi} Z + 2\rho \right]}, \quad (\text{V.8})$$

$d \approx 1 \text{ mm}$  ou  $d \approx 0,91 \text{ mm}$ .

et (V.7) nous permet de remonter à  $\mu_M$  :

$$\mu_M \approx 56,3 \text{ GPa} \quad \text{ou} \quad \mu_M \approx 38,95 \text{ GPa}. \quad (\text{V.9})$$

Les développements asymptotiques des coefficients de réflexion et transmission nous fournissent donc des éléments pertinents de caractérisation du matériau même si l'indétermination du résultat (V.9) peut poser problème. Ces informations sont à recouper avec les connaissances a priori du comportement, par exemple un durcissement lors du collage à chaud, ou des données expérimentales. L'apport des développements asymptotiques est notamment de pouvoir juger de l'intérêt que peuvent présenter certaines expérimentations à partir de calculs analytiques *relativement* simples et d'orienter ainsi les

travaux d'évaluation du matériau continûment hétérogène. À terme cette approche peut participer à l'acte d'inversion de paramètres caractéristiques du profil.

## V.2. Une étude expérimentale basée sur la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh

Dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique Physique et EDF R&D, nous avons procédé à l'étude expérimentale et numérique d'une plaque de micro béton isotrope à propriétés continûment variables. L'objet de cette étude se présente donc sous la forme d'un bloc parallélépipédique dont les dimensions sont précisées dans la Figure 5.5.

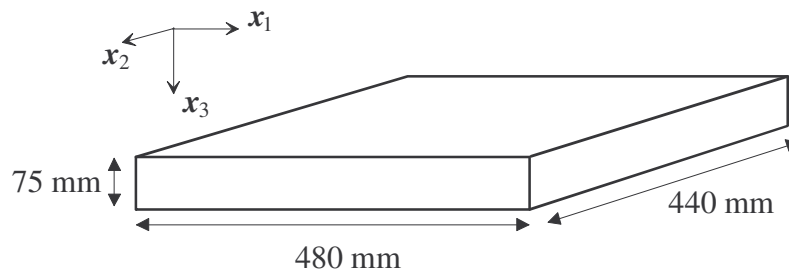
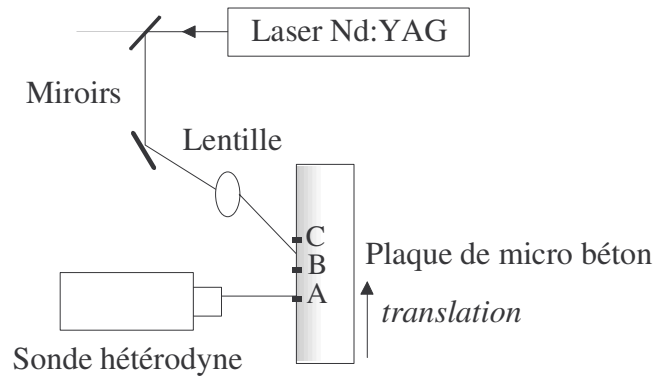


Figure 5.5. Plaque de micro-béton à propriétés continûment variables.

Ce bloc a été dégradé par une attaque chimique au nitrate d'ammonium sur une de ses surfaces les plus grandes ( $x_1, x_2$ ). Cette dégradation a augmenté la porosité du béton de façon graduelle selon l'axe  $x_3$  sur une épaisseur d'environ 8,5 mm. Les propriétés acoustiques du béton (célérités longitudinale et transversale et la masse volumique) varient donc continûment en fonction de  $x_3$  depuis la surface pour retrouver les propriétés du béton sain en profondeur, celles de la surface opposée. Le profil de dégradation est approximativement connu après analyse au Microscope Électronique à Balayage (Annexe B).

### V.2.1. Détermination des propriétés du béton sain et de celles du béton dégradé aux interfaces

Pour cela on utilise un dispositif de génération d'ondes ultrasonores (dont l'onde de Rayleigh) par impact laser, illustré dans la Figure 5.6.



**Figure 5.6.** Dispositif expérimental de mesure au Laser.

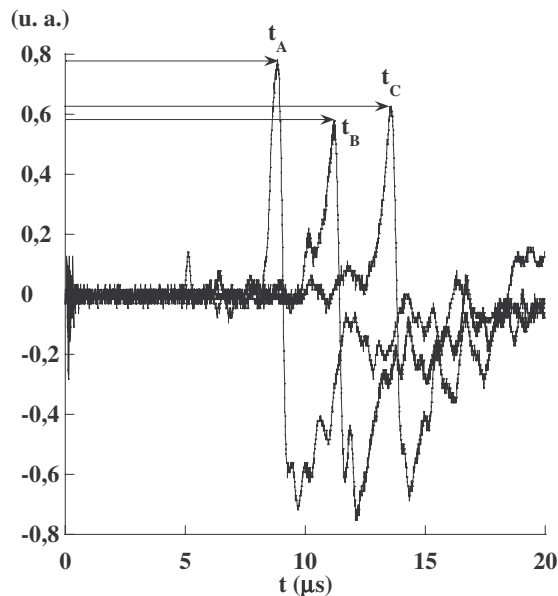
Le principe de génération est le suivant : des impulsions laser impactent la plaque de béton sur une des surfaces (saine ou dégradée); l'absorption des ondes électromagnétiques dans le matériau (celui-ci ne doit être ni transparent, ni trop réfléchissant) se traduit par une élévation de la température au voisinage de l'interface (jusqu'à quelques centaines de degrés Kelvin); par effet thermo-élastique, cet accroissement soudain de température provoque une déformation ultra-brève qui génère des ondes acoustiques dans le solide. À l'échelle des longueurs d'ondes acoustiques ainsi générées (de l'ordre du millimètre dans l'échantillon considéré), le diamètre du faisceau laser est très faible (inférieur à 0,1 mm), l'étendue de la source peut dès lors être considérée comme ponctuelle. Selon l'intensité de l'impulsion lumineuse on distingue deux régimes de génération d'ondes :

- ✓ Le régime thermo-élastique pour lequel l'état de surface n'est pas modifié. L'échauffement provoque une dilatation locale qui engendre des forces essentiellement parallèles à la surface impactée.
- ✓ Le régime d'ablation pour lequel il y a vaporisation de la matière et transfert de la quantité de mouvement qui engendre des forces essentiellement normales à la surface impactée. C'est dans cette configuration qu'ont été effectuées les mesures présentées.

La détection se fait via une sonde interférométrique hétérodyne qui mesure le déplacement mécanique normal à la surface par la modulation de la phase d'un faisceau sonde. (**Royer & Dieulesaint**, 1999). Comparée aux méthodes classiques de mesure des champs acoustiques, la détection optique de déplacements mécaniques présente les avantages de réaliser à grande distance l'examen local d'une surface, sans contact mécanique perturbateur et avec une large bande passante.

Les temps d'arrivée des différentes ondes sont relevés à partir des signaux temporels du déplacement de l'interface. La translation horizontale du point d'impact du laser le long de l'interface, fournit pour chaque onde une série de signaux temporels (A, B, C etc.). La détection est faite sur la même surface que l'excitation, le phénomène le plus visible est

donc celui de l'onde de Rayleigh. À l'aide de ce repère et dans de bonnes conditions expérimentales il est également possible de détecter, dans les signaux acquis, les pics relatifs aux ondes longitudinales rasantes (les plus rapides).



**Figure 5.7.** Exemples de signaux temporels acquis du côté dégradé en trois points : A choisi comme référence, B distant de A de 5 mm et C distant de A de 10 mm.

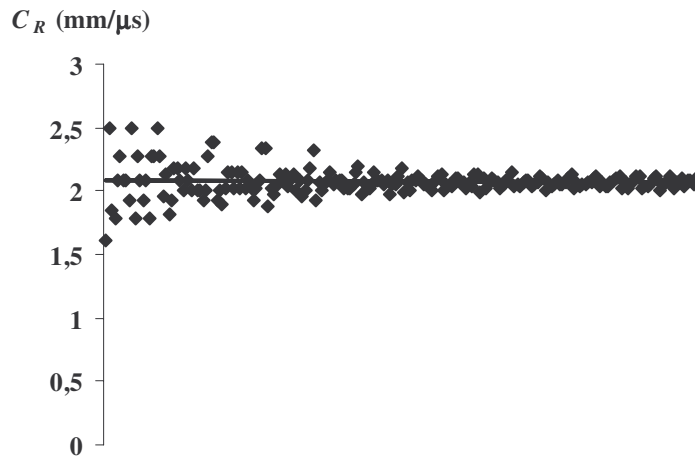
Pour chaque point, on mesure le temps d'arrivée du pic de plus forte amplitude, représentant le temps d'arrivée de l'onde de Rayleigh. À l'aide de mesures différentielles, on déduit sa vitesse de propagation.

$$C = \frac{t_B - t_A}{x_B - x_A} = \frac{t_C - t_B}{x_C - x_B} = \frac{t_A - t_C}{x_A - x_C}.$$

### V.2.1.1. Béton sain

On déclenche un cycle de mesures de 21 points d'impact sur une distance de 5 mm. On obtient ainsi  $210 (= C_{21}^2)$ <sup>23</sup> évaluations de la vitesse de l'onde de Rayleigh.

<sup>23</sup>  $C_n^k$  nombre de combinaisons de  $k$  éléments parmi  $n$ .  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

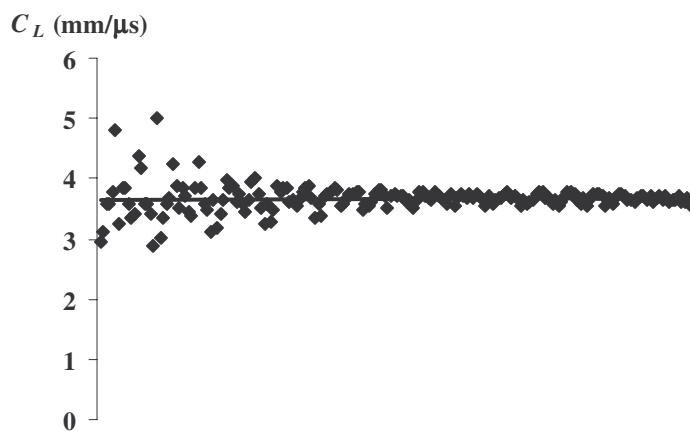


**Figure 5.8.** Évaluations de la vitesse de l'onde de Rayleigh à l'interface saine et moyenne sur l'ensemble des données.

La moyenne arithmétique de l'ensemble des valeurs mesurées, repérée par la ligne en trait continu sur la Figure 5.8, donne :

$$C_R \approx 2,07 \text{ mm}/\mu\text{s} . \quad (\text{V.10})$$

On procède de même pour évaluer la vitesse longitudinale.



**Figure 5.9.** Évaluations de la vitesse des ondes longitudinales à l'interface saine et moyenne sur l'ensemble des données.

La vitesse longitudinale est évaluée à

$$C_L \approx 3,67 \text{ mm}/\mu\text{s} . \quad (\text{V.11})$$

Connaissant la vitesse de l'onde de Rayleigh et la vitesse des ondes longitudinales, et en supposant que le béton est isotrope dans sa partie saine, il est possible d'évaluer la vitesse des ondes transversales en utilisant l'équation de Rayleigh (IV.3) :

$$C_T \approx 2,28 \text{ mm}/\mu\text{s}. \quad (\text{V.12})$$

Propriétés du béton sain identifiées :

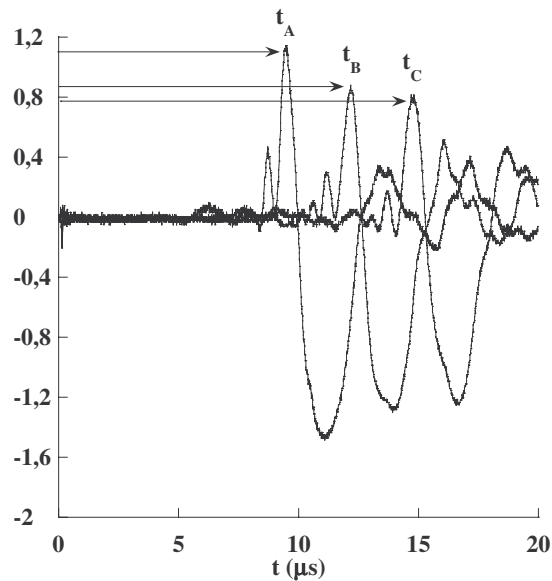
Masse volumique :  $\rho = 2,07 \text{ g/cm}^3$  (valeur donnée par le Lerm via Michel Panet).

Vitesse longitudinale :  $C_L = 3,67 \text{ mm}/\mu\text{s}$

Vitesse transversale :  $C_T = 2,28 \text{ mm}/\mu\text{s}$

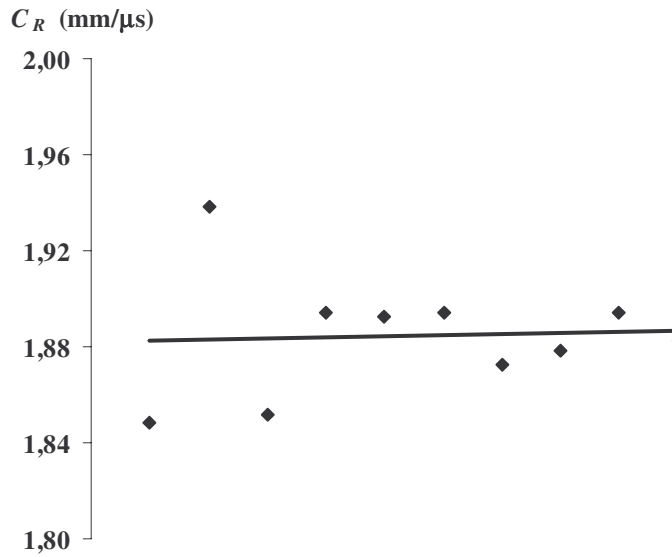
### V.2.1.2. Béton dégradé

Les mesures effectuées sur le côté dégradé de la plaque reposent sur le même principe. Ceci n'est possible qu'en supposant que l'onde de Rayleigh est très peu dispersive (la dispersion étant liée au caractère hétérogène de l'échantillon). Le laser est une méthode haute fréquence impliquant une profondeur de pénétration faible, les propriétés n'évoluent donc pas beaucoup à l'échelle de la longueur d'onde (on peut supposer la dispersion de l'onde de Rayleigh négligeable pour cette technique et l'échantillon considéré). Cependant la qualité de l'état de surface et l'augmentation de la porosité due à l'attaque chimique rendent l'acquisition des signaux plus difficile.



**Figure 5.10.** Signaux temporels obtenus du côté dégradé (A, 0mm), (B, 5mm) et (C, 10mm).

Un cycle de 5 points d'impact sur 20 mm est lancé, nous permettant d'obtenir 10 ( $= C_5^2$ ) évaluations de la vitesse de l'onde de Rayleigh pour cette interface.



**Figure 5.11.** Évaluations de la vitesse de Rayleigh à l'interface dégradée et moyenne sur l'ensemble des données.

À partir de ces résultats, la vitesse de l'onde de Rayleigh se propageant à l'interface dégradée est évaluée à :

$$C_R \approx 1,88 \text{ mm}/\mu\text{s}. \quad (\text{V.13})$$

Concernant la mesure des vitesses des ondes longitudinales et des ondes transversales, nous n'avons pas pu obtenir de résultats suffisamment fiables et précis pour la surface dégradée de la plaque.

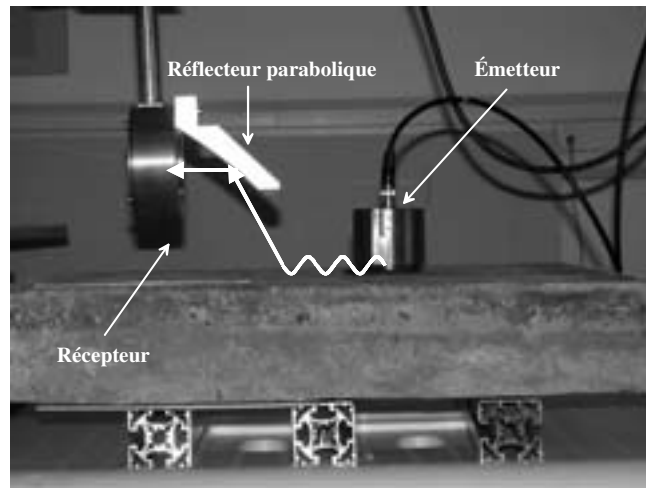
La technique de génération par impulsion Laser et détection par interférométrie optique, ne fournit aucune information relative à la dispersion de l'onde de Rayleigh, phénomène caractéristique de l'hétérogénéité de la structure. La recherche de données complémentaires s'oriente vers une technique d'ondes guidées à fréquence variable.

### V.2.2. Mesure des propriétés de dispersion de l'onde de Rayleigh<sup>24</sup>

Le tracé des courbes de dispersion de l'onde de Rayleigh relative aux deux interfaces de la plaque est obtenu à l'aide du dispositif expérimental montré en Figure 5.12, et du logiciel de post-traitement Propag<sup>25</sup>.

<sup>24</sup> Cette étude a été menée avec l'aide de Michel Castaings, Christine Biateau et Ludovic Moreau du groupe Ultrasons Matériaux du Laboratoire de Mécanique Physique.

<sup>25</sup> Logiciel interne au laboratoire développé par le groupe Ultrasons Matériaux.

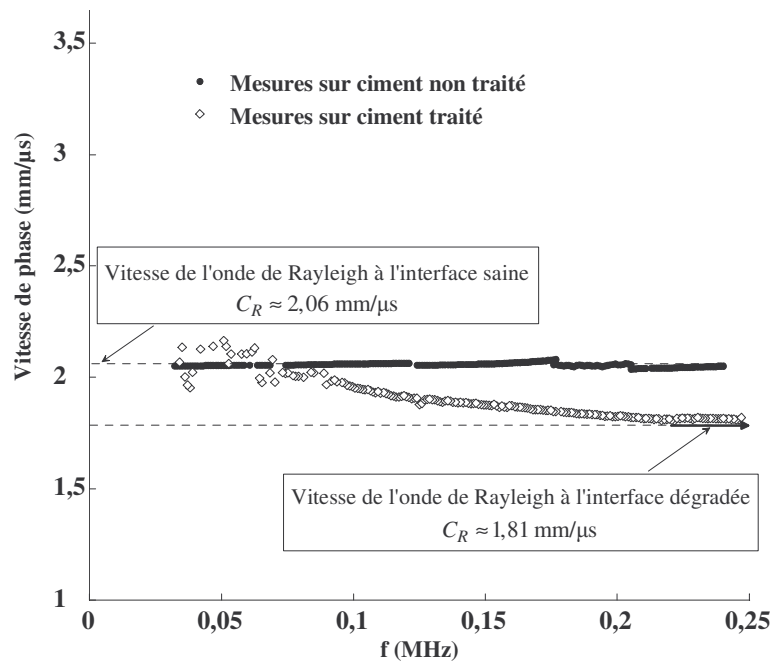


**Figure 5.12.** Dispositif expérimental de mesure de la dispersion de l'onde de Rayleigh.

Au moyen d'un transducteur piézoélectrique au contact (couplé à l'échantillon par un gel) on génère, en plus des ondes de volume dans l'échantillon, des ondes guidées (notamment l'onde de Rayleigh) qui se propagent dans toutes les directions le long de la surface et rayonnent une partie de leur énergie dans l'air. Le récepteur à couplage par air capte, grâce à un réflecteur parabolique qui augmente l'angle d'ouverture, l'ensemble des modes générés via leur partie rayonnée. Le récepteur est mobile parallèlement à la surface sur une distance d'environ 100 mm. On procède à l'acquisition de signaux temporels pour chaque position du récepteur  $x_i$ . On obtient donc, à travers l'échantillonnage, une matrice de points  $s(t; x_i)$ , traitée à l'aide de la technique dite « fréquence-nombre d'onde » avec pour but l'étude de la dispersion des ondes guidées (Sachse & Pao, 1977; Alleyne & Cawley, 1991). Cette technique consiste en l'application d'une double transformée de Fourier pour passer du domaine physique temps/espace  $s(t; x_i)$  au domaine spectral fréquence/nombre d'onde  $S(\omega; k_i)$ . On recherche alors les amplitudes maximales du spectre bidimensionnel ainsi calculé, qui sont censées correspondre aux différents modes guidés se propageant dans le milieu inspecté et permettre de reconstituer les courbes de dispersion  $\omega(k)$ . Les courbes  $v(f)$  s'en déduisent directement.

Les courbes expérimentales du spectre de dispersion de l'onde de Rayleigh mesurées par cette technique sont présentées en Figure 5.13.





**Figure 5.13.** Courbes de dispersion de l'onde de Rayleigh pour chaque face de l'échantillon de béton dégradé.

La vitesse de phase de l'onde de Rayleigh du côté sain de la plaque est constante. L'onde est non dispersive. C'est une observation classique des milieux homogènes, la vitesse de l'onde de phase de Rayleigh est en effet parfaitement définie par l'équation de Rayleigh (IV.3).

En revanche la célérité de l'onde de Rayleigh à l'interface dégradée varie en fonction de la fréquence, ce qui est une preuve irréfutable du caractère hétérogène de cette partie de l'échantillon. En dessous de 75 kHz, les mesures sont moins fiables, car effectuées en deçà du domaine fréquentiel utile de l'appareillage; de plus à des fréquences aussi basses, on ne peut affirmer que l'onde de Rayleigh n'interagit pas avec l'autre interface pour devenir une onde de type onde de Lamb. Pour autant, à fréquence faible, ce qui correspond à une grande longueur d'onde, la vitesse de phase de l'onde de Rayleigh correspond à celle observée à l'interface saine et le comportement de l'onde est défini par les propriétés du substrat. Lorsque la fréquence augmente, ce qui correspond à une diminution de la longueur d'onde et à une profondeur de pénétration plus faible, l'hétérogénéité de surface joue un rôle de plus en plus important sur le comportement dispersif de l'onde de Rayleigh, jusqu'à atteindre un plateau correspondant à la vitesse de Rayleigh d'un matériau homogène possédant les propriétés mécaniques de la surface endommagée.

Les valeurs de célérité des ondes de Rayleigh à chaque interface estimées par cette méthode semblent prendre les valeurs suivantes :

$$C_{Rsain} \approx 2,06 \text{ mm}/\mu\text{s} \text{ et } C_{Rdégradé} \approx 1,81 \text{ mm}/\mu\text{s} .$$

Les résultats obtenus ici sont en bon accord avec les mesures effectuées par impact laser. L'écart entre les mesures n'est que de 0,5% du côté sain,

$$\Delta C_{Rsain} = \frac{2,07 - 2,06}{2,07} \times 100 = 0,48 \%, \quad (\text{V.14})$$

et de 3,7% du côté dégradé,

$$\Delta C_{Rdégradé} = \frac{1,88 - 1,81}{1,88} \times 100 = 3,72 \%. \quad (\text{V.15})$$

Il faut se rappeler tout de même que les mesures laser n'intègrent absolument pas l'aspect dispersif de l'onde de Rayleigh. La fréquence centrale du signal relatif à l'onde de Rayleigh étant d'environ 0,5 MHz, on se situe déjà bien au-delà de la zone dispersive identifiée expérimentalement par la manipulation aérienne. Rétrospectivement, on s'aperçoit que la dispersion n'influence donc pas les mesures laser. Les expériences décrites ci-avant permettent d'envisager une problématique inverse pour un milieu continûment hétérogène. Pour l'instant, un certain nombre de paramètres relatifs à l'hétérogénéité du milieu sont identifiables. Cependant le traitement de ces informations et les conclusions à tirer sont encore difficiles à établir de façon systématique. Il est délicat de mener des études expérimentales pour le problème direct sur des matériaux continûment hétérogènes car il est très difficile d'identifier le profil d'hétérogénéité. Seuls quelques éléments autorisent la pose d'un cadre et limitent le champ des possibles. C'est ce que nous nous proposons d'étudier à présent.

### V.2.3. Informations sur le profil d'hétérogénéité

#### V.2.3.1. Comparaison des courbes de dispersion de l'onde de Rayleigh : expérimental contre simulation

Le tracé des courbes de dispersion de l'onde de Rayleigh obtenu expérimentalement (Figure 5.13), est comparé avec celui issu du calcul numérique utilisant le développement en série de Peano du matricant présenté au chapitre précédent (§ IV.1.1.1).

Le calcul de la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh à l'interface dégradée est effectué en utilisant les paramètres suivants correspondant aux mesures laser et aux mesures de porosité présentées en Annexe C:

✓ Béton sain

Masse volumique :  $\rho = 2,07 \text{ g/cm}^3$ ;

vitesse longitudinale :  $C_L = 3,67 \text{ mm}/\mu\text{s}$  ;

vitesse transversale :  $C_T = 2,28 \text{ mm}/\mu\text{s}$  .

✓ Béton dégradé

Masse volumique :  $\rho = 1,5 \text{ g}/\text{cm}^3$  ;

vitesse longitudinale :  $C_L = 2,93 \text{ mm}/\mu\text{s}$  ;

vitesse transversale :  $C_T = 2,05 \text{ mm}/\mu\text{s}$  .

Le profil d'hétérogénéité est supposé en tangente hyperbolique et s'applique à toutes les propriétés caractéristiques (célérités et masse volumique) :

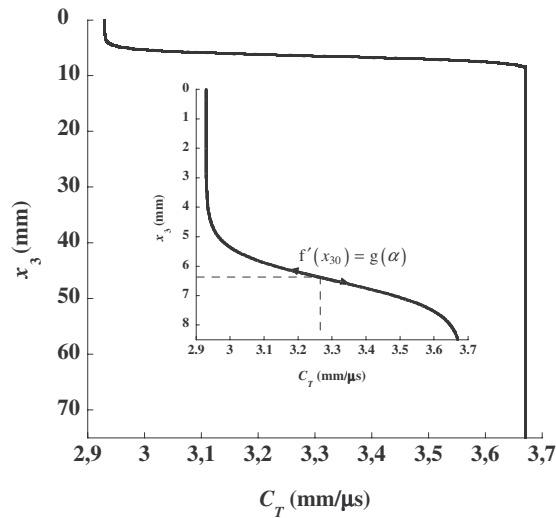
$$f(x_3) = f_0 + (f_d - f_0) \frac{\tanh(\alpha(x_3 - x_{30})) - \tanh(-\alpha x_{30})}{\tanh(\alpha(d - x_{30})) - \tanh(-\alpha x_{30})}, \quad (\text{V.16})$$

où  $f_0$  et  $f_d$  sont les valeurs prises par la fonction aux interfaces  $x_3 = 0$  et  $x_3 = d$  . La profondeur  $x_{30} \in [0, d]$  est la localisation de l'hétérogénéité « maximale » (point de plus forte pente), et  $\alpha$  est un paramètre lié à la pente du profil en  $x_{30}$  :

$$f'(x_{30}) = g(\alpha) = \frac{f_d - f_0}{\tanh[\alpha(d - x_{30})] - \tanh(-\alpha x_{30})} \alpha. \quad (\text{V.17})$$

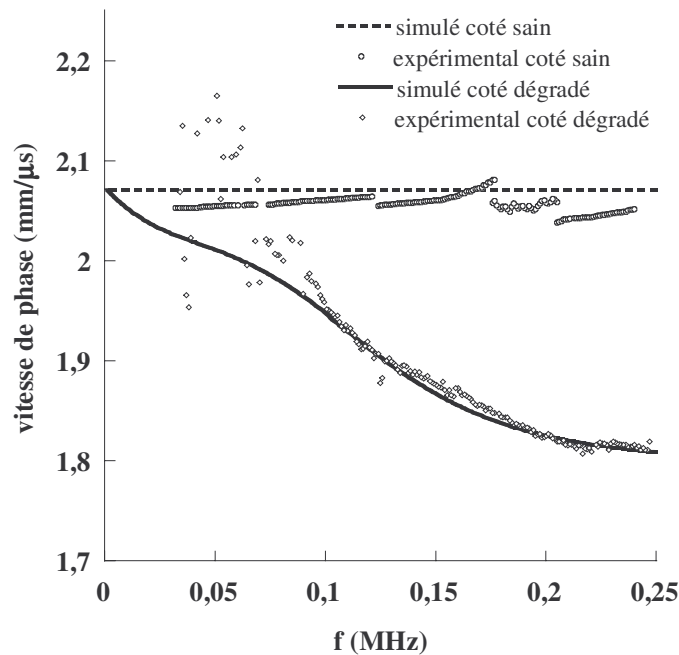
Le choix de cette forme de profil reflète certaines tendances cohérentes avec le processus d'attaque chimique : deux zones proches des interfaces à variation lente et une zone de transition rapide. Dans le cadre de l'étude des films minces, les profils de propriétés sont dictés par les lois de la diffusion atomique (**Richardson & al.**, 2000). Dans notre cas, l'évolution suivie par la dégradation est plus difficile à déterminer puisqu'il y a altération du matériau (augmentation de la porosité). Le but étant de refléter les tendances de variations et d'identifier les paramètres qui influencent le comportement des ondes dans le matériau.

Le traitement d'un problème inverse par minimisation numérique n'a pas encore été envisagé. L'objectif, ici, est de déterminer les valeurs des différents paramètres définissant le profil. Cette recherche est une recherche « à tâtons » guidée par les connaissances a priori du matériau et de la dégradation subie. Il s'agit d'obtenir des courbes de dispersion théoriques qui suivent les tendances d'évolution des courbes expérimentales. Après quelques tentatives et ajustements, on retient la configuration suivante :  $x_{30} = 6,5 \text{ mm}$  pour une épaisseur dégradée totale  $d$  de  $8,5 \text{ mm}$  et un coefficient  $\alpha$  égal à 1.



**Figure 5.14.** Profil de la célérité des ondes transversales au sein de la plaque.

Sur la Figure 5.15, on observe un accord satisfaisant entre les points expérimentaux obtenus à l'aide du dispositif de la Figure 5.12 et les courbes de dispersion théoriques calculées à partir des données citées ci-dessus.



**Figure 5.15.** Comparaison résultats expérimentaux et simulation numérique pour les courbes de dispersion de l'onde de Rayleigh de chaque côté de l'échantillon de béton dégradé.

La dérive observée sur les plus hautes fréquences pour la courbe de dispersion obtenue expérimentalement du coté sain, est probablement dû à un mauvais alignement du transducteur avec la surface inspectée, réglage difficile à obtenir sur un échantillon imparfaitement lisse et parallélépipédique.

Pour la simulation, on utilise la configuration d'une couche hétérogène sur un milieu semi-infini (Figure 4.2). Cette approximation est valide tant que la profondeur de pénétration de l'onde de Rayleigh reste inférieure à l'épaisseur de plaque. Ainsi l'onde de Rayleigh n'interfère pas avec la 2<sup>nd</sup>e interface de la plaque de béton et le modèle du demi-espace garde un sens expérimental. Pour les milieux homogènes la profondeur de pénétration est de l'ordre de la longueur d'onde horizontale  $\lambda$  (Royer & Dieulesaint, 1999). Dans le cas des milieux hétérogènes, la profondeur de pénétration est difficile à définir analytiquement (évaluation numérique possible). Pour qu'il n'y ait pas d'interaction de l'onde de Rayleigh avec la seconde interface et en supposant que la profondeur de pénétration reste de l'ordre de la longueur d'onde horizontale en milieux hétérogènes, on retiendra le critère suivant :

$$\lambda \leq \frac{h_{plaque}}{2} \approx 37 \text{ mm} , \quad (\text{V.18})$$

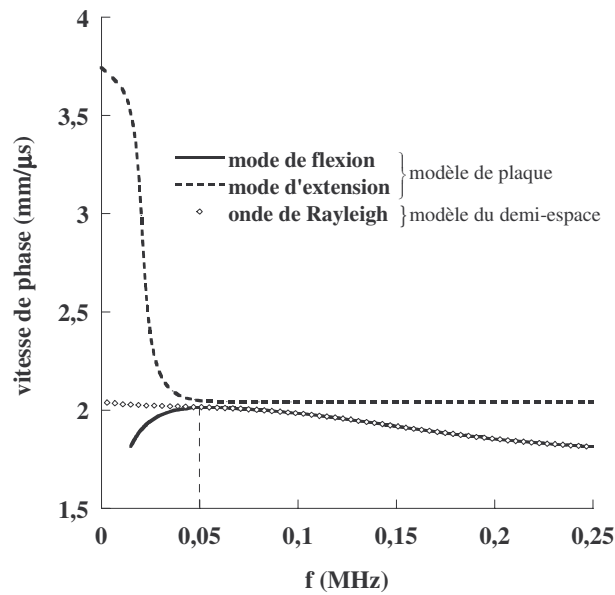
le facteur  $\frac{1}{2}$  fixe un critère plus sévère pour s'assurer que la perturbation générée par l'onde de Rayleigh n'impacte que la partie supérieure de la plaque ( $0 \leq x_3 \leq h_{plaque}/2$ ).

Or, en considérant une valeur moyenne de  $C_R \approx 2 \text{ mm}/\mu\text{s}$ , on a :

$$f = \frac{C_R}{\lambda} \geq \frac{2}{37} \approx 0,054 \text{ MHz} . \quad (\text{V.19})$$

En procédant à la comparaison du modèle du demi-espace (couche hétérogène sur un substrat homogène semi-infini) avec celui de la plaque (couche hétérogène sur une plaque homogène d'épaisseur finie), on constate que sur la plage de fréquence définie par (V.19), la courbe de dispersion du mode de flexion se propageant dans une plaque se conduit de façon analogue à l'onde de Rayleigh dans le milieu semi-infini. Or l'étude de l'onde de Rayleigh est beaucoup plus intéressante pour la caractérisation sur site des structures EDF de type tours aéroréfrigérantes des centrales nucléaires car elle ne nécessite l'accès qu'à un côté de la structure.

On identifie sur la Figure 5.16, la zone de validité du modèle du demi-espace, retenu pour notre étude, pour représenter le cas réel.



**Figure 5.16.** Identification du domaine fréquentiel de validité du modèle du demi-espace comparativement au cas de la plaque d'épaisseur finie.

Pour des fréquences inférieures à 0,05 MHz, on observe l'effet lié au modèle de la plaque (structure d'épaisseur finie). Au-delà de cette fréquence le mode de flexion dans la plaque a un comportement dispersif identique à celui de l'onde Rayleigh dans le demi-espace.

### V.2.3.2. Étude de l'influence des différents paramètres sur la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh

L'impact qualitatif et quantitatif des différents paramètres sur la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh est analysé.

#### a) Valeur du gradient au point de plus forte pente

On considère toujours un profil en tangente hyperbolique, les propriétés saines et dégradées sont celles utilisées précédemment mais le point de plus forte pente  $x_{30}$  est situé à mi-épaisseur ( $x_{30} = d/2$ ), l'épaisseur  $d$  étant estimée à 8,5 mm.

On fait varier le coefficient  $\alpha$  lié à la pente du profil en  $x_{30}$  (V.17).

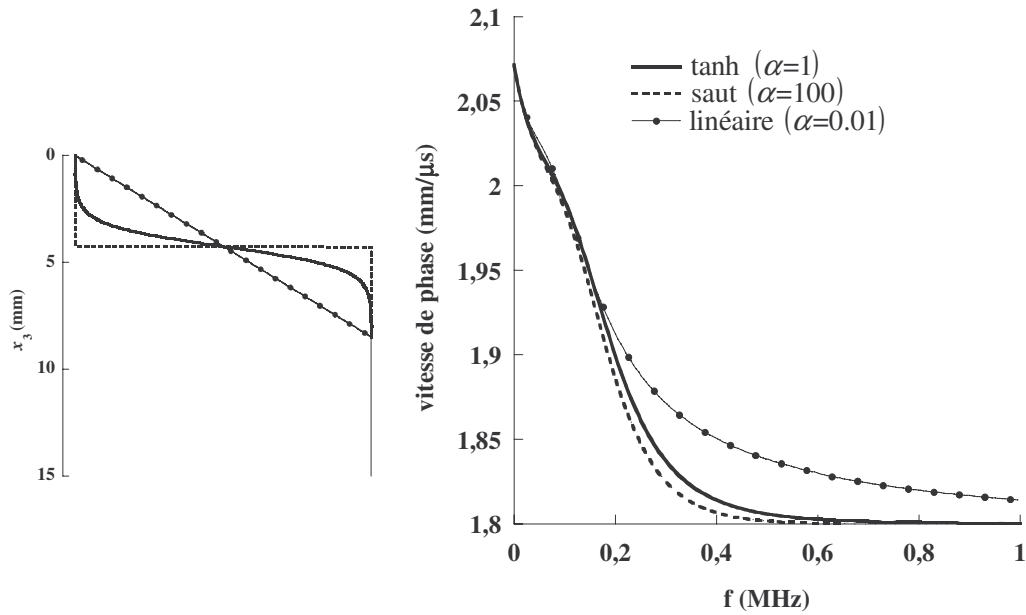


Figure 5.17. Influence du coefficient  $\alpha$ .

La courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh est sensible à la forme du profil, surtout lorsque les variations des propriétés aux bords de la zone hétérogène sont très différentes. On observe par exemple que l'écart entre la courbe de dispersion relative au quasi-saut et celle relative à la tangente hyperbolique est faible. Or dans les deux cas le profil de propriétés présente des tangentes verticales en  $x_{30} = 0$  et  $x_{30} = d$ .

**b) Localisation du point de plus forte pente  $x_{30}$**

L'épaisseur  $d$  de la couche hétérogène est de 8,5 mm et le coefficient  $\alpha$  est pris égal à 1.

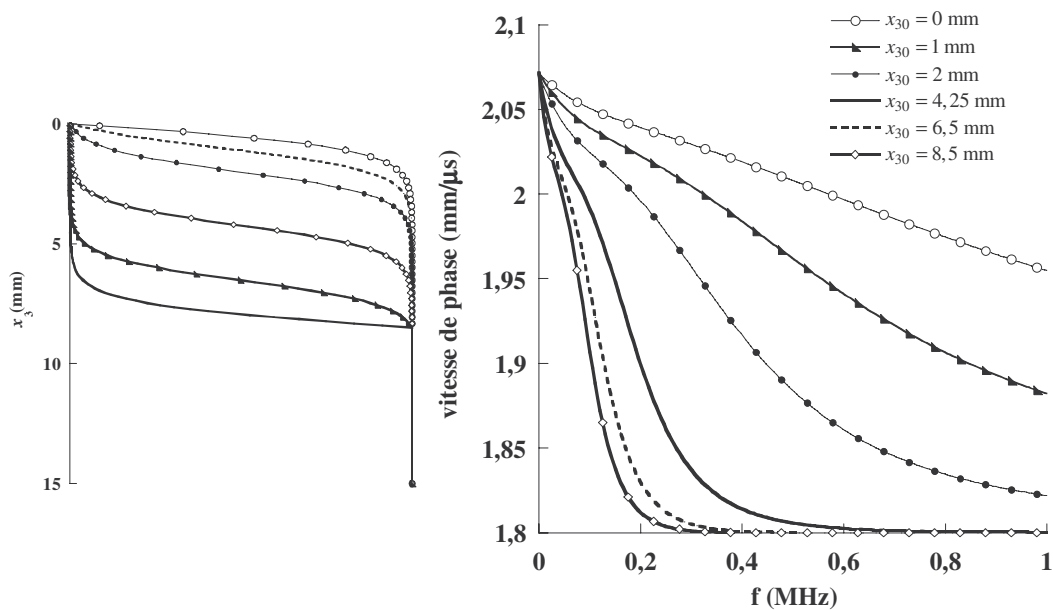


Figure 5.18. Influence de la position de  $x_{30}$ .

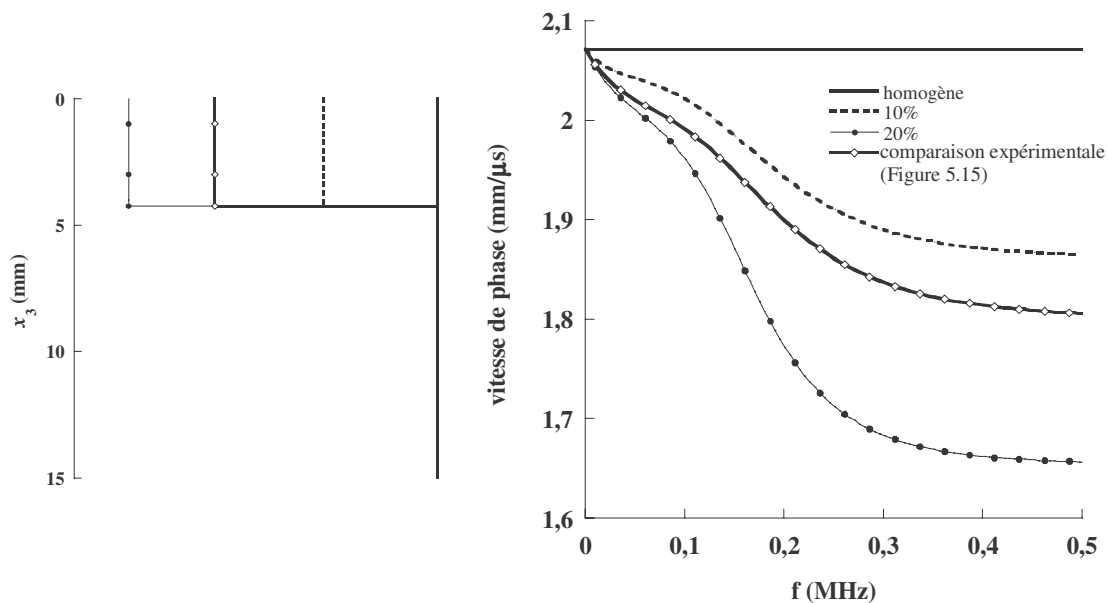
Plus les propriétés du substrat sont approchées « rapidement », rendant l'épaisseur effective de transition plus faible, plus il faut monter en fréquence pour atteindre la vitesse de l'onde de Rayleigh correspondant aux propriétés du béton endommagé. La sensibilité du comportement dispersif de l'onde de Rayleigh est grande surtout lorsque le point de plus forte pente est situé dans la moitié supérieure de la couche hétérogène ( $x_{30} \leq d/2$ ). L'étude de la dispersion de l'onde de Rayleigh est également un bon vecteur d'information pour localiser le point de plus forte pente : en supposant connus  $d$  et  $\alpha$ , on peut discriminer les différentes valeurs de  $x_{30}$ .

c) **Variation de propriétés de surface relativement à celles du substrat :**  
 $(f_d - f_0) / f_d$

On se place dans le cas d'un profil avec un saut de propriétés correspondant à une configuration du type couche homogène d'épaisseur  $d/2 = 4,25$  mm sur un substrat semi-infini homogène. On fixe les propriétés du béton sain :

- masse volumique :  $\rho = 2,07$  g/cm<sup>3</sup>,
- vitesse longitudinale :  $C_L = 3,67$  mm/ $\mu$ s,
- vitesse transversale :  $C_T = 2,28$  mm/ $\mu$ s,

et on fait varier les propriétés de la couche relativement à ces valeurs.



**Figure 5.19.** Influence du pourcentage de variation des propriétés du matériau dégradé relativement au matériau sain.

Les propriétés du matériau endommagé définissent la vitesse de l'onde de Rayleigh à haute fréquence. Plus la variation est importante plus l'onde de Rayleigh est dispersive et l'écart est grand entre la vitesse de phase à fréquence nulle et la valeur limite lorsque la fréquence



tend vers l'infini. L'évolution de la vitesse de l'onde de Rayleigh en fonction de la fréquence est donc un bon indicateur du taux de variation des propriétés.

On voit ici que l'étude du comportement dispersif de l'onde de Rayleigh dans un milieu hétérogène est vecteur d'informations. Cependant, si la localisation de l'hétérogénéité ( $x_{30}$ ) est possible ainsi qu'une bonne approximation des taux de variation de différentes fonctions, il est en revanche plus difficile de conclure sur une forme de profil (courbes très proches pour un profil échelon et un profil en tangente hyperbolique).

Afin de compléter cette étude, on s'intéresse aux coefficients de réflexion/transmission à l'interface eau/surface dégradée, autre source d'informations mesurables correspondant à des dispositifs expérimentaux classiques (pulse-écho).

### V.2.3.3. Informations supplémentaires par l'étude des coefficients de réflexion à l'interface eau/surface dégradée

On reprend les équations du paragraphe IV.2 ,en considérant une onde incidente normale à l'interface ( $s_1 = 0$ ). Le tracé des coefficients de réflexion (et de transmission) en fonction de la fréquence est sensible aux différents paramètres du profil évoqués précédemment :

#### a) Valeur du gradient au point de plus forte pente

On reprend les données de l'étude menée sur la dispersion de l'onde de Rayleigh :  $x_{30} = d/2$  avec  $d = 8,5$  mm et le coefficient  $\alpha$  varie de façon à passer d'un profil linéaire ( $\alpha = 0,01$ ) à un saut de propriétés ( $\alpha = 100$ ).

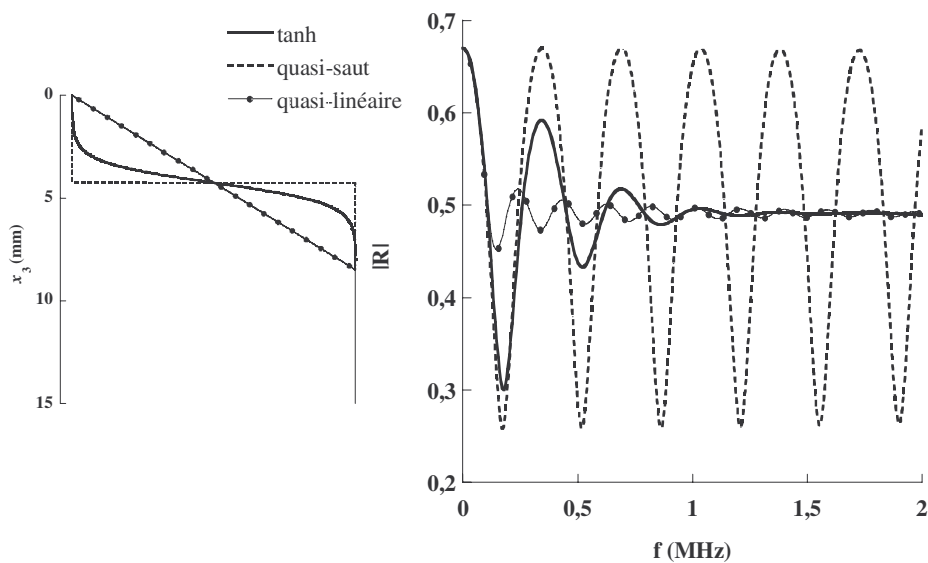
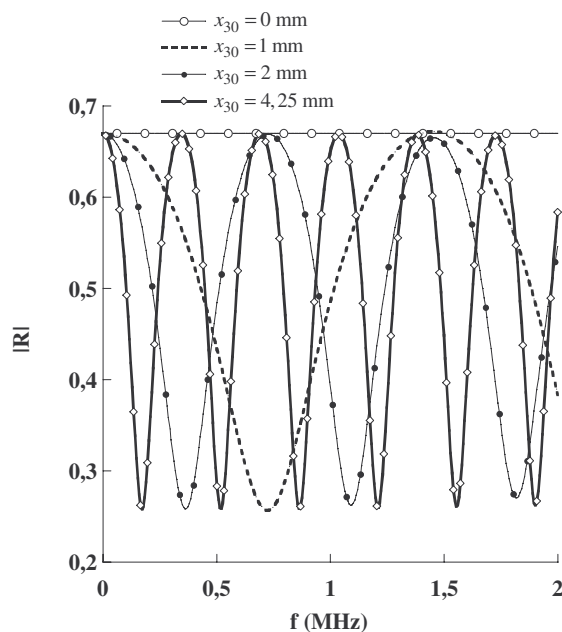


Figure 5.20. Influence du coefficient  $\alpha$  sur le module du coefficient de réflexion.

La discrimination de la forme du profil est difficilement réalisable à partir du comportement dispersif de l'onde de Rayleigh (Figure 5.17), en revanche le spectre fréquentiel du coefficient de réflexion est sensible à la forme du profil et les écarts entre les courbes relatives aux différentes valeurs de  $\alpha$  sont a priori mesurables expérimentalement

**b) Localisation du point de plus forte pente  $x_{30}$**

On considère ici un profil de type échelon, c'est-à-dire un profil comportant un saut de propriétés et correspondant donc à la configuration d'une couche homogène d'épaisseur  $x_{30}$  sur un substrat semi-infini homogène.



**Figure 5.21.** Influence de la position de  $x_{30}$  sur le module du coefficient de réflexion.

L'évolution du module du coefficient de réflexion en fonction de la fréquence est sensible à la position de la transition entre la couche et le substrat. Les oscillations de  $|R|$  sont dues au caractère résonant de la couche, donc directement corrélées à son épaisseur représentée ici par le paramètre  $x_{30}$ . On peut ainsi estimer l'épaisseur de la couche.

Le coefficient de réflexion en incidence normale d'une onde plane sur la plaque hétérogène est, de façon générale, plus sensible que la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh à la forme même du profil. L'onde de Rayleigh est une onde de surface se propageant perpendiculairement à la direction d'hétérogénéité, la décroissance verticale du champ est très rapide (exponentielle ou quasi-exponentielle), il n'y a pas de contribution de volume et donc pas d'interférence verticale avec l'hétérogénéité. En revanche, l'étude du coefficient de réflexion est très riche en informations. Dans un contexte expérimental, on envoie une impulsion incidente, l'onde se propage parallèlement à la direction de variation des

propriétés et interfère avec le profil. L'écho sera d'amplitude d'autant plus grande que le gradient est fort. De plus, le contenu fréquentiel de l'onde réfléchie est lui aussi lié à la zone de transition (filtre passe-bas).

## CONCLUSION

La prise en compte de la continuité des variations de propriétés, rendue possible par l'utilisation du développement en série de Peano, ne s'avère pas toujours utile. Dans le cas de la courbe de dispersion de l'onde de Rayleigh, il peut parfois être difficile de discriminer deux formes de profils. Nous avons vu que le saut de propriétés avait quasiment le même impact sur la dispersion de l'onde de Rayleigh qu'un profil continu en tangente hyperbolique. Le but recherché étant une meilleure approche des cas physiques réels, les résultats sur le coefficient de réflexion justifient tout à fait l'utilisation du développement de Peano.



## Conclusion générale et perspectives

Le développement en série de Peano du matricant est donc une méthode générale de résolution des équations d'onde en milieux à propriétés continûment variables. La connaissance de ces milieux, bien qu'ayant fait l'objet de nombreuses explorations, reste approximative. Les informations concernant l'hétérogénéité continue de matériaux réels sont difficiles d'accès et pas toujours contrôlables lors des procédés de fabrication. À l'aide de cette technique, une solution analytique exacte au problème authentique (conservation de la continuité des profils de propriétés) est calculée. L'objectif étant de modéliser au plus près les problèmes physiques réels, le développement en série de Peano constitue une avancée par rapport aux méthodes développées pour les multicouches et appliquées, moyennant une approximation du problème, aux milieux continûment variables. Les erreurs commises lors de l'évaluation numérique de la solution de Peano — erreur de troncature de la série et erreur de quadrature d'intégrales — sont contrôlables et quantifiables. La résolution du problème direct est donc maîtrisée. La potentialité de la méthode a été testée dans des cas synthétiques pour lesquels les profils d'hétérogénéité étaient tortueux et à variations rapides. Même dans ces configurations, la méthode fournit de bons résultats. L'apport d'informations des développements asymptotiques a été ici clairement démontré. Ils permettent d'obtenir rapidement des tendances de courbes caractéristiques de certains paramètres d'hétérogénéité. Les coefficients de réflexion et de transmission sont également sensible au caractère continu des variations de propriétés et justifie l'utilisation du développement en série de Peano du matricant. Il est donc possible de remonter à certaines caractéristiques de l'hétérogénéité continue, ou du moins de dégager certaines tendances et d'éliminer certaines hypothèses. Ce travail de pré-évaluation est très important dans la résolution du problème inverse, car il oriente la poursuite des investigations et permet de mieux cibler le contexte expérimental à mettre en place afin d'obtenir des informations complémentaires.

Un des avantages principaux de la méthode développée dans ce mémoire est sa généralité. En effet le processus de résolution reste strictement identique quel que soit le contexte d'étude : anisotropie générale, viscoélasticité, piézo-électricité, modèle à géométrie cylindrique. Même si l'investissement calculatoire lié à l'écriture en série du matricant est important, il peut être réinjecté dans de nombreuses configurations et pour l'obtention de divers résultats. Cependant les calculs à très haute fréquence génèrent des limites numériques (instabilités) qui peuvent être repoussées en augmentant le nombre de termes à retenir dans la série de Peano, la contrepartie étant un temps de calcul plus long. Il y a

toutefois des limites inévitables. Par exemple en milieux homogènes, lorsqu'on considère le développement en série de l'exponentielle de matrice

$$e^{\mathbf{Q}} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \frac{1}{2!} \mathbf{Q}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \mathbf{Q}^n + \dots$$

des instabilités peuvent apparaître dans le cas où  $n$  est très grand et que les composantes de  $\mathbf{Q}^n$  sont très grandes ou très petites. Il faut alors avoir recours à des variantes pour réécrire le système et contourner les problèmes d'instabilités mais le caractère continûment hétérogène du matériau peut mettre en défaut ces méthodes dérivées mises au point pour les milieux multicouches.

## Bibliographie

- J. D. Achenbach**, 1973, Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland Publishing Company.
- K. Aki & P. G. Richard**, 1980, Quantitative Seismology, Theory and Methods, Freeman and Co.
- D. Alleyne & P. Cawley**, 1991, *A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals*, Journal of Acoustical Society of America, **89**, 1159-1168.
- V. I. Alshits & G. A. Maugin**, 2005, *Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded and stratified plate*, Wave Motion, **41**, 357-394.
- T. Archibald**, 1996, *From Attraction Theory to Existence Proofs: The Evolution of Potential-Theoretic Methods in the Study of Boundary-value Problems, 1860-1890*, Revue d'histoire des mathématiques, **2**, 67-93.
- B. A. Auld**, 1973, Acoustic Fields and Waves in solids, Wiley Interscience.
- V. A. Bailey**, 1954, *Reflection of waves by an inhomogeneous medium*, The Physical Review, **96**, 865-868.
- D. M. Barnett**, 2000, *Bulk, surface, and interfacial waves in anisotropic linear elastic solids*, International Journal of Solids and Structures, **37**, 45-54.
- C. Baron, O. Poncelet, A. L. Shuvalov & M. Deschamps**, 2003, *Calculation of the velocity spectrum of the vertically inhomogeneous plates by using series expansion of the matricant*, Proceedings of the World Congress on Ultrasonics, France, 605-608.
- A. Bernard**, 2000, *Ondes de plaques guidées: approche temporelle et spatiale*, Thèse de l'Université de Bordeaux 1.
- A. M. B. Braga & G. Herrmann**, 1991, *Floquet waves in anisotropic periodically layered composites*, Journal of Acoustical Society of America, **91**, 1211-1227.
- L. M. Brekhovskikh**, 1980, Waves in layered media, Academic Press.
- L. M. Brekhovskikh & O. A. Godin**, 1990, Acoustics of Layered Media, Springer-Verlag.
- M. Castaings**, 1993, *Propagation ultrasonore dans les milieux stratifiés plans constitués de matériaux absorbants et orthotropes*, Thèse de l'Université de Bordeaux 1.
- M. Castaings & B. Hosten**, 1994, *Delta operator technique to improve the Thomson-Haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plates*, Journal of the Acoustical Society of America, **95**, 1931-1941.
- P. Chadwick & G. D. Smith**, 1977, *Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic media*, Advances in Applied Mechanics, **17**, 303-376.

- C. H. Chapman**, 1976, *Exact and approximate generalized ray theory in vertically inhomogeneous media*, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **46**, 201-233.
- S. Crampin**, 1989, *Suggestions for consistent terminology for seismic anisotropy*, Geophysical Prospecting, **37**, 753-770.
- J. Dunkin**, 1965, *Computation of modal solution in layered, elastic media at high frequencies*, Bulletin of the Seismological Society of America, **55**, 335-358.
- A. Dymnikov & R. Hellborg**, 1993, *A Matrix Theory of the Motion of an Ellipsoidal Bunch in a Beam Control System with a Rectilinear Optical Axis and with Space Charge*, IEEE, 3618-3620.
- A. H. Fahmy & E. L. Adler**, 1973, *Propagation of acoustic surface waves in multilayers: a matrix description*, Applied Physics Letters, **22**, 495-497.
- R. A. Frazer, W. J. Duncan & A. R. Collar**, 1938, Elementary Matrices, Cambridge University Press.
- G. J. Fryer & L. N. Frazer**, 1984, *Seismic waves in stratified anisotropic media*, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **78**, 691-710.
- F. R. Gantmacher**, 1959, The Theory of Matrices, Wiley Interscience.
- F. Gilbert & G. E. Backus**, 1966, *Propagator matrices in elastic wave and vibration problems*, Geophysics, **31**, 326-332.
- R. D. Gill**, 1992, *Lectures on Survival Analysis*, Ecole d'été de probabilités de Saint Flour XXII, France,
- N. A. Haskell**, 1953, *The dispersion of surface waves on multilayered media*, Bulletin of the Seismological Society of America, **43**, 377-393.
- B. Hosten & M. Castaings**, 2003, *Surface impedance matrices to model the propagation in multilayered media*, Ultrasonics, **41**, 501-507.
- K. A. Ingebrigtsen & A. Tønning**, 1969, *Elastic Surface Waves in Crystals*, Physical Review, **184**, 942-951.
- E. G. Kenneth**, 1982, *A propagator matrix method for periodically stratified media*, Journal of Acoustical Society of America, **73**, 137-142.
- B. L. N. Kennett**, 1983, Seismic wave propagation in stratified media, Cambridge University Press.
- B. L. N. Kennett & N. J. Kerry**, 1979, *Seismic waves in a stratified half space*, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **57**, 557-583.
- L. Knopoff**, 1964, *A matrix method for elastic wave problems*, Bulletin of the Seismological Society of America, **54**, 431-438.
- H. Lamb**, 1917, *On waves in an elastic plate*, Proceedings of the Royal Society of London A., **93**, 114-128.



- D. Lévesque & L. Piché**, 1992, *A robust transfer matrix simulation for ultrasonic response of multilayered absorbing media*, Journal of Acoustical Society of America, **92**, 452-467.
- R. B. Lindsay**, 1939, *Filtration of oblique elastic waves in stratified media*, Journal of Acoustical Society of America, **11**, 178-183.
- J. Lothe & D. M. Barnett**, 1976, *On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-space with free surface*, Journal of Applied Physics, **47**, 428-433.
- A. E. H. Love**, 1911, Some Problems in Geodynamics, Cambridge University Press.
- M. J. S. Lowe**, 1995, *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, **42**, 525-542.
- A. K. Mal**, 1988, *Wave propagation in layered composite laminates under periodic surface loads*, Wave Motion, **10**, 257-266.
- G. A. Maugin**, 1983, *Elastic surface waves with transverse horizontal polarization*, Advances in Applied Mechanics, **23**, 373-434.
- S. G. Mickhlin**, 1964, Integral Equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology, Pergamon press.
- A. H. Nayfeh**, 1991, *The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media*, Journal of the Acoustical Society of America, **89**, 1521-1531.
- A. H. Nayfeh**, 1995, Wave propagation in layered anisotropic media, North Holland.
- M. Panet, C. Cheng, M. Deschamps, O. Poncelet & B. Audoin**, 2002, *Microconcrete ageing ultrasonic identification*, Cement and Concrete Research, **32**, 1831-1838.
- G. Peano**, 1888, *Intégration par séries des équations différentielles linéaires*, Mathematische Annalen, **32**, 450-456.
- M. C. Pease**, 1965, Methods of Matrix Algebra, Academic Press.
- T. P. Pialucha**, 1992, *The reflection coefficient from interface layers in NDT of adhesive joints*, Thèse de l'Université de Londres (Imperial College of Science, Technology and Medicine).
- E. Picard**, 1899, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximation successives*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **6**, 145-210.
- O. Poncelet, C. Baron, A. L. Shuvalov & M. Deschamps**, 2003, *Propagation d'ondes élastiques en milieu hétérogène transverse: application aux ondes guidées dans une plaque*, GDR n° 2501 Etude de la propagation ultrasonore en milieux non-homogènes en vue du contrôle non destructif, France,
- C. Potel & J.-F. d. Belleval**, 1993, *Acoustic propagation in anisotropic periodically multilayered media: A method to solve numerical instabilities*, Journal of Applied Physics, **74**, 2208-2215.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannery**, 1997, Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing, Cambridge University Press.

- J. W. S. Rayleigh**, 1885, *On wave propagating along the plane surface of an elastic solid*, Proceedings of the London Mathematical Society., **17**,
- C. J. K. Richardson, M. J. Ehrlich & J. W. Wagner**, 2000, *Measurements of nanometer scale interface diffusion between tungsten and nobium thin films using high frequency laser based ultrasound*, Journal of Acoustical Society of America, **107**, 1987-1993.
- A. J. Robins**, 1991, *Reflection of a plane wave from a fluid layer with continuously varying density and sound speed*, Journal of Acoustical Society of America, **89**, 1686-1696.
- S. I. Rokhlin & L. Wang**, 2002, *Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media: Stiffness matrix method*, Journal of the Acoustical Society of America, **112**, 822-834.
- S. I. Rokhlin & L. Wang**, 2003, *Characterization of layered media by ultrasonic waves: modeling and experiment*, Proceedings of World Congress on Ultrasonics, Paris, 983-990.
- M. Roseau**, 1976, Équations Différentielles, Masson.
- D. Royer & E. Dieulesaint**, 1999, Ondes élastiques dans les solides - Tome 2: Génération. Interaction acousto-optique. Applications, Masson.
- W. Sachse & Y.-H. Pao**, 1977, *On the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids*, Journal of Applied Physics, **48**, 4320-4327.
- H. Schmidt & F. B. Jensen**, 1985, *Efficient numerical solution technique for wave propagation in horizontally stratified environments*, Computers and Mathematics with applications, **11**, 699-715.
- A. L. Shuvalov**, 2000, *On the theory of wave propagation in anisotropic plated*, Proceedings of the Royal Society of London A., **456**, 2197-2222.
- A. L. Shuvalov, O. Poncelet & M. Deschamps**, 2004, *General formalism for plane guided waves in transversely inhomogeneous anisotropic plates*, Wave Motion, **40**, 413-426.
- A. L. Shuvalov, O. Poncelet, M. Deschamps & C. Baron**, 2005, *Long-wavelength dispersion of acoustic waves in transversely inhomogeneous anisotropic plates*, Wave Motion, **42**, 367-382.
- J. B. Smyth & R. B. Lindsay**, 1944, *Supersonic transmission at oblique incidence through a solid plate in water*, Journal of Acoustical Society of America, **16**, 20-25.
- L. P. Solie & B. A. Auld**, 1973, *Elastic waves in free anisotropic plates*, Journal of Acoustical Society of America, **54**, 50-65.
- R. Stoneley**, 1924, *Elastic waves at the surface of separation of two solids*, Proceedings of the Royal Society of London., **106**, 416-428.
- A. N. Stroh**, 1962, *Steady state problems in anisotropic elasticity*, Journal of Mathematics and Physics, **41**, 77-103.
- W. T. Thomson**, 1950, *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium*, Journal of Applied Physics, **21**, 89-93.
- T. C. T. Ting**, 1996, Anisotropic elasticity, Oxford University Press.

**I. A. Viktorov**, 1970, Rayleigh and Lamb waves, Plenum Press.

**V. Vlasie-Belloncle & M. Rousseau**, 2003, *Effect of a velocity gradient on the guided modes of a structure*, Proceedings of the 5th World Congress on Ultrasonics, Paris,

**L. Wang & S. I. Rokhlin**, 2001, *Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media*, Ultrasonics, **39**, 413-424.



## Annexe A : Estimation de l'erreur globale dans l'évaluation numérique de la série de Peano

On considère le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\eta}(x_3)}{dx_3} = \mathbf{Q}(x_3)\boldsymbol{\eta}(x_3), \\ \boldsymbol{\eta}(x_3^{(0)}) = \boldsymbol{\eta}_0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La solution  $\boldsymbol{\eta}(x_3)$  peut être exprimée par :

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}(x_3)) = \boldsymbol{\eta}_0 + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi)\boldsymbol{\eta}(\xi)d\xi. \quad (\text{A.2})$$

Il s'agit donc de déterminer un point fixe de la fonction F.

On crée une suite définie par la relation

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}(x_3) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_n(x_3)), \quad (\text{A.3})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\eta}_n(x_3) = \boldsymbol{\eta}(x_3). \quad (\text{A.4})$$

En réinjectant successivement l'expression de  $\boldsymbol{\eta}_k(x_3)$  dans  $\boldsymbol{\eta}_{k+1}(x_3)$  et après passage à la limite ( $n \rightarrow +\infty$ ) on obtient

$$\boldsymbol{\eta}(x_3) = \left[ \mathbf{I} + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi)d\xi + \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi)d\xi \int_{x_3^{(0)}}^{\xi} \mathbf{Q}(\xi_1)d\xi_1 + \dots \right] \boldsymbol{\eta}_0. \quad (\text{A.5})$$

On récupère ainsi le matricant développé en série de Peano définie à partir de l'analyse de Volterra. L'erreur commise lors de l'évaluation numérique de cette série est constituée d'une erreur liée à l'évaluation numérique des intégrales et d'une erreur de troncature de la série. Afin d'évaluer l'erreur globale commise, on se place dans l'hypothèse que la fonction F définie en (A.2) est contractante :

« Soit F est une fonction de E sur E, on dit que F est lipchitzienne de rapport  $k$  si, pour tout  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  de E :

$$|F(\mathbf{X}) - F(\mathbf{Y})| \leq k |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|. \quad (\text{A.6})$$

La fonction est dite contractante pour  $k < 1$ . »

On introduit la norme vectorielle  $|\cdot|$  définie pour un vecteur  $\mathbf{V}(x_3)$  de dimension  $n$  sur un intervalle d'étude  $[0, d]$  :

$$|\mathbf{V}(x_3)|_{[0,d]} = \max_{x_3 \in [0,d]} \left[ \max_{1 \leq i \leq n} |V_i(x_3)| \right]. \quad (\text{A.7})$$

Sur un modèle identique on construit la norme matricielle  $\|\cdot\|$  définie pour une matrice carrée  $\mathbf{A}(x_3)$  de dimension  $n$  et un intervalle d'étude  $[0, d]$

$$\|\mathbf{A}(x_3)\|_{[0,d]} = \max_{x_3 \in [0,d]} \left[ \max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{ij}(x_3)| \right]. \quad (\text{A.8})$$

L'hypothèse de fonction contractante se traduit donc par :

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{X}(\xi)) - F(\mathbf{Y}(\xi))|_{[0,d]} &= \left| \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) [\mathbf{X}(\xi) - \mathbf{Y}(\xi)] d\xi \right|_{[0,d]} \\ &\leq \|\mathbf{Q}(x_3)\|_{[0,d]} \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} |\mathbf{X}(\xi) - \mathbf{Y}(\xi)|_{[0,d]} d\xi \\ &\leq d \|\mathbf{Q}(x_3)\|_{[0,d]} |\mathbf{X}(\xi) - \mathbf{Y}(\xi)|_{[0,d]} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

La fonction  $F$  est donc contractante pour

$$k = d \|\mathbf{Q}(x_3)\|_{[0,d]} < 1.$$

Cette condition est toujours remplie à condition de prendre un intervalle d'étude assez petit.

✓ Erreur de troncature

La série de Peano est une série uniformément convergente (cf. § III.3.1).

On évalue tout d'abord l'erreur commise en tronquant la série et en ne conservant que les  $n$  premiers termes, considérant que les intégrales sont calculées de façon exacte :

$$\boldsymbol{\eta}_\infty - \boldsymbol{\eta}_n = \sum_{p=n}^{\infty} (\boldsymbol{\eta}_{p+1} - \boldsymbol{\eta}_p). \quad (\text{A.10})$$

Or  $\boldsymbol{\eta}_{p+1} = F(\boldsymbol{\eta}_p)$  et d'après l'hypothèse (A.6) retenue pour  $F$ , on a :

$$|\boldsymbol{\eta}_{p+1} - \boldsymbol{\eta}_p| \leq k |\boldsymbol{\eta}_p - \boldsymbol{\eta}_{p-1}|. \quad (\text{A.11})$$

En appliquant cette relation de récursivité, on obtient :

$$|\boldsymbol{\eta}_\infty - \boldsymbol{\eta}_n| \leq \sum_{p=n}^{\infty} k^p |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_0|. \quad (\text{A.12})$$

F étant contractante,  $k < 1$  et l'erreur de troncature est estimée à l'aide de la majoration suivante :

$$|\boldsymbol{\eta}_\infty - \boldsymbol{\eta}_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_0|. \quad (\text{A.13})$$

#### ✓ Erreur d'intégration numérique

On cherche à estimer à présent l'erreur due à la méthode d'intégration numérique commise lors de l'évaluation de la série tronquée au  $n$ -ième terme. On note  $F^a$  la fonction approchée correspondant au schéma d'intégration numérique utilisé et  $\boldsymbol{\eta}^a$  l'évaluation approchée du vecteur solution :

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\eta}_n - \boldsymbol{\eta}_n^a| &= F(\boldsymbol{\eta}_{n-1}) - F^a(\boldsymbol{\eta}_{n-1}) + F^a(\boldsymbol{\eta}_{n-1}) - F^a(\boldsymbol{\eta}_{n-1}^a) \\ &\leq C_{n-1} \text{Err}_a + k |\boldsymbol{\eta}_{n-1} - \boldsymbol{\eta}_{n-1}^a| \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

où  $C_{n-1}$  est un majorant de  $\boldsymbol{\eta}_{n-1}$  et  $\text{Err}_a$  est l'erreur commise sur une intégrale simple lors de l'application de la méthode d'intégration numérique.

En posant  $u_n = |\boldsymbol{\eta}_n - \boldsymbol{\eta}_n^a|$ , on écrit la relation de récurrence suivante :

$$u_n \leq C_{n-1} \text{Err}_a + k u_{n-1}. \quad (\text{A.15})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &\leq C_{n-1} \text{Err}_a + k (C_{n-2} \text{Err}_a + k (C_{n-3} \text{Err}_a + k (\dots + k u_0))) \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} (C_i) \text{Err}_a \sum_{i=0}^{n-1} k^i + k^n u_0. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Or,  $u_0 = |\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}_0^a| = 0$  et  $k < 1$  d'où

$$|\boldsymbol{\eta}_n - \boldsymbol{\eta}_n^a| \leq \frac{C_{\max} \text{Err}_a}{1-k}. \quad (\text{A.17})$$

#### ✓ Erreur globale

On peut alors estimer l'erreur globale commise lors de l'évaluation numérique de la série de Peano :

$$|\eta_\infty - \eta_n^a| \leq |\eta_\infty - \eta_n| + |\eta_n - \eta_n^a| = \frac{k^n}{1-k} |\eta_1 - \eta_0| + \frac{C_{\max} \text{Err}_a}{1-k}. \quad (\text{A.18})$$



## Annexe B : Théorie des perturbations appliquée à la recherche du spectre d'une matrice carrée

Soit une matrice  $\mathbf{R}$  carrée de dimension  $n$ . Soient le vecteur  $\mathbf{e}_k$  et le scalaire  $\lambda_k$  vérifiant  $\mathbf{R}\mathbf{e}_k = \lambda_k\mathbf{e}_k$ . On introduit un terme perturbatif et on exprime :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(0)} + \varepsilon\mathbf{R}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{R}^{(2)}; \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k^{(0)} + \varepsilon\mathbf{e}_k^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{e}_k^{(2)}; \quad (\text{B.2})$$

$$\lambda_k = \lambda_k^{(0)} + \varepsilon\lambda_k^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_k^{(2)}. \quad (\text{B.3})$$

$\mathbf{R}^{(0)}$  est une matrice symétrique et les vecteurs  $\mathbf{e}_k^{(0)}$  vérifient  $\mathbf{e}_k^{(0)} \cdot \mathbf{e}_k^{(0)} = 1$ .

On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^{(0)} + \varepsilon\mathbf{R}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{R}^{(2)})(\mathbf{e}_k^{(0)} + \varepsilon\mathbf{e}_k^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{e}_k^{(2)}) &= \\ &= (\lambda_k^{(0)} + \varepsilon\lambda_k^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_k^{(2)})(\mathbf{e}_k^{(0)} + \varepsilon\mathbf{e}_k^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{e}_k^{(2)}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

On considère le cas où la matrice  $\mathbf{R}^{(0)}$  est diagonalisable et possède  $n$  vecteurs propres  $\mathbf{e}_{0k}$  linéairement indépendants, formant une base de l'espace vectoriel. On peut donc exprimer :

$$\mathbf{e}_k^{(1)} = \sum_{i=1}^n a_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)}, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{e}_k^{(2)} = \sum_{i=1}^n b_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)}. \quad (\text{B.6})$$

On développe (B.4) et on obtient pour les différents ordres de perturbation :

✓ à l'ordre 0

$$\mathbf{R}^{(0)}\mathbf{e}_k^{(0)} = \lambda_k^{(0)}\mathbf{e}_k^{(0)}. \quad (\text{B.7})$$

✓ à l'ordre 1

$$\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)} + \mathbf{R}^{(0)}\mathbf{e}_k^{(1)} = \lambda_k^{(0)}\mathbf{e}_k^{(1)} + \lambda_k^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)}. \quad (\text{B.8})$$

on injecte (B.5)

$$\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)} + \mathbf{R}^{(0)}\sum_{i=1}^n a_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)} = \lambda_k^{(0)}\sum_{i=1}^n a_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)} + \lambda_k^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)} ; \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)} + \sum_{i=1}^n a_{ki}\lambda_i^{(0)}\mathbf{e}_i^{(0)} = \lambda_k^{(0)}\sum_{i=1}^n a_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)} + \lambda_k^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)}. \quad (\text{B.10})$$

On multiplie à gauche par  $\mathbf{e}_\ell^{(0)}$

$$\mathbf{e}_\ell^{(0)}\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)} + \mathbf{e}_\ell^{(0)}\sum_{i=1}^n a_{ki}\lambda_i^{(0)}\mathbf{e}_i^{(0)} = \lambda_k^{(0)}\mathbf{e}_\ell^{(0)}\sum_{i=1}^n a_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)} + \mathbf{e}_\ell^{(0)}\lambda_k^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)}. \quad (\text{B.11})$$

Or les vecteurs  $\mathbf{e}_k^{(0)}$  sont deux à deux perpendiculaires, on obtient donc

$$\mathbf{e}_\ell^{(0)}\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)} + a_{k\ell}\lambda_\ell^{(0)} = \lambda_k^{(0)}a_{k\ell} + \lambda_k^{(1)}\delta_{\ell k}. \quad (\text{B.12})$$

Pour  $\ell = k$ , l'égalité (B.12) devient

$$\mathbf{e}_k^{(0)}\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)} = \lambda_k^{(1)}. \quad (\text{B.13})$$

Pour  $\ell \neq k$  on obtient l'expression des  $a_{k\ell}$  :

$$a_{k\ell} = \frac{\mathbf{e}_\ell^{(0)}\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{e}_k^{(0)}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_\ell^{(0)}}, \quad (\text{B.14})$$

ce qui définit  $\mathbf{e}_k^{(1)}$ .

✓ à l'ordre 2

$$\mathbf{R}^{(0)}\mathbf{e}_k^{(2)} + \mathbf{R}^{(1)}\mathbf{e}_k^{(1)} + \mathbf{R}^{(2)}\mathbf{e}_k^{(0)} = \lambda_k^{(0)}\mathbf{e}_k^{(2)} + \lambda_k^{(1)}\mathbf{e}_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}\mathbf{e}_k^{(0)}. \quad (\text{B.15})$$

On injecte (B.5) et (B.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(0)}\sum_{i=1}^n b_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)} + \mathbf{R}^{(1)}\sum_{i=1}^n a_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)} + \mathbf{R}^{(2)}\mathbf{e}_k^{(0)} &= \\ &= \lambda_k^{(0)}\sum_{i=1}^n b_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)} + \lambda_k^{(1)}\sum_{i=1}^n a_{ki}\mathbf{e}_i^{(0)} + \lambda_k^{(2)}\mathbf{e}_k^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Afin d'utiliser (B.14), on réécrit (B.16) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{(0)} \sum_{i=1}^n b_{ki} \mathbf{e}_i^{(0)} + \mathbf{R}^{(1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki} \mathbf{e}_i^{(0)} + a_{kk} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)} + \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{e}_k^{(0)} &= \\
&= \lambda_k^{(0)} \sum_{i=1}^n b_{ki} \mathbf{e}_i^{(0)} + \lambda_k^{(1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki} \mathbf{e}_i^{(0)} + a_{kk} \lambda_k^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)} + \lambda_k^{(2)} \mathbf{e}_k^{(0)}.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Or en multipliant à gauche chaque membre de l'égalité (B.13) par  $\mathbf{e}_{0k}$  on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)} = \lambda^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)}. \tag{B.18}$$

Ainsi l'équation (B.17) se simplifie et en multipliant à gauche chaque membre par  $\mathbf{e}_{0\ell}$

$$\begin{aligned}
b_{k\ell} \lambda_\ell^{(0)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki} \mathbf{e}_\ell^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_i^{(0)} + \mathbf{e}_\ell^{(0)} \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{e}_k^{(0)} &= \\
&= \lambda_k^{(0)} b_{k\ell} + \lambda_k^{(1)} a_{k\ell} + \lambda_k^{(2)} \delta_{k\ell}.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Et d'après (B.13) et (B.14)

$$\begin{aligned}
b_{k\ell} \lambda_\ell^{(0)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\mathbf{e}_i^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \mathbf{e}_\ell^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_i^{(0)} + \mathbf{e}_\ell^{(0)} \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{e}_k^{(0)} &= \\
&= \lambda_k^{(0)} b_{k\ell} + \mathbf{e}_k^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)} \frac{\mathbf{e}_\ell^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_\ell^{(0)}} + \lambda_k^{(2)} \delta_{k\ell};
\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$b_{k\ell} (\lambda_\ell^{(0)} - \lambda_k^{(0)}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\mathbf{e}_i^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \mathbf{e}_\ell^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_i^{(0)} + \mathbf{e}_\ell^{(0)} \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{e}_k^{(0)} = \lambda_k^{(2)} \delta_{k\ell}. \tag{B.21}$$

pour  $\ell = k$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\mathbf{e}_i^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(0)}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \mathbf{e}_k^{(0)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{e}_i^{(0)} + \mathbf{e}_k^{(0)} \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{e}_k^{(0)} = \lambda_k^{(2)}. \tag{B.22}$$



## Annexe C : Profil d'hétérogénéité de la plaque de micro-béton

La plaque de micro béton fournie par EDF a été réalisée par le LERM<sup>26</sup>. Il s'agit d'une plaque à base de granulats fins à dégradation superficielle par lixiviation contrôlée visant une épaisseur de dégradation de 10 mm environ. La composition minéralogique est donnée dans le Tableau C. 1

Ciment CEM I 52.5 PM ES	Sable siliceux (filler < 160 µm)	Eau	Eau/Ciment	Sable/Ciment
674 kg/m <sup>3</sup>	1011 kg/m <sup>3</sup>	397 l/ m <sup>3</sup>	0,59	1,5

**Tableau C. 1.** Composition minéralogique de l'échantillon de micro béton

La dégradation est obtenue en huit semaines par exposition de la plus grande surface à une solution agressive de nitrate d'ammonium à 6 mol/l, pH voisin de 5. L'examen au microscope électronique à balayage sur échantillons polis, montre que la matrice de la zone dégradée se caractérise par une augmentation de la porosité capillaire. L'image obtenue à partir d'électrons rétrodiffusés montre que la variation de masse atomique augmente progressivement sur une épaisseur de 8,5 mm environ depuis la surface dégradée vers le cœur du matériau. Enfin la cartographie élémentaire de la zone dégradée met en évidence une décalcification importante à la surface.

### Analyse de la porosité

Les informations obtenues par M. Panet (EDF R&D et Past LMP) auprès de A. Ammouche du LERM sont les suivantes :

Sur les 6 premiers millimètres depuis la surface endommagée la porosité moyenne est de 44% ; entre 6 et 11 mm de 38% ; pour atteindre les 30% du matériau sain au-delà de 11 mm de profondeur. Ces informations ont été quantifiées par traitement d'images à un agrandissement 750X.

Ramenées au calcul de la variation de densité au sein de la plaque, ces informations nous donnent :

- ✓ une densité moyenne de 1,65 g/cm<sup>3</sup> sur les 6 premiers millimètres depuis la surface endommagée,
- ✓ une densité moyenne de 1,83 g/cm<sup>3</sup> entre 6 et 11 mm de profondeur,

<sup>26</sup> Laboratoire d'Etudes et de Recherche sur les Matériaux - contact@lerm.fr

- ✓ une densité de  $2,07 \text{ g/cm}^3$  au delà de 11 mm, densité correspondant au béton non dégradé.

Ces valeurs sont cohérentes avec les résultats obtenus en comparant les courbes de dispersion de l'onde de Rayleigh obtenues expérimentalement avec l'aide de M. Castaings et les résultats numériques. La densité à la surface est estimée par cette méthode à  $1,5 \text{ g/cm}^3$ . De plus le point de plus forte pente localisé à une profondeur de 6,5 mm de la surface endommagée semble également en accord avec les mesures de porosité.

**Résumé :** *Les milieux à propriétés continûment variables selon une direction particulière de l'espace intéressent les géophysiciens depuis plus de cinquante ans. La croûte terrestre, les océans et l'atmosphère sont des milieux naturels continûment hétérogènes. Mais on rencontre également ce type de configuration, variation continue des propriétés caractéristiques des matériaux, pour de nombreux produits industriels. Le contrôle et l'évaluation de ces matériaux représentent donc un enjeu important.*

*Le schéma classique de résolution des équations d'ondes en milieux à hétérogénéité unidirectionnelle repose sur un modèle multicouche, la stratification du milieu étudié pouvant être naturelle, les propriétés sont des fonctions constantes par morceaux, ou artificielle, les propriétés sont des fonctions continues que l'on discrétise. Cette approche est alors connue sous le nom de méthode de Thomson-Haskell. Dans le cas des milieux continûment variables, on calcule une solution exacte à un problème approché ce qui suscite de nombreuses interrogations quant à la précision et à la validité des solutions obtenues.*

*Dans ce travail, le problème est abordé sous un angle différent offrant ainsi de nouvelles perspectives d'approche des milieux hétérogènes. Afin de conserver l'authenticité du problème, nous proposons d'utiliser une méthode basée sur le développement en série de Peano du matricant, forme explicite de la solution analytique exacte des équations d'ondes mises sous la forme d'un système différentiel ordinaire du premier ordre à coefficients non-constants, pour des profils quelconques de propriétés. Les développements analytiques et numériques de cette écriture appliquée à des problèmes de conditions aux limites ont fourni une méthode robuste pour l'analyse des phénomènes acoustiques (courbes de dispersion, spectre fréquentiel du coefficient de réflexion etc.). Des résultats prometteurs quant à la détection du caractère hétérogène et à la quantification de certains paramètres caractéristiques de l'hétérogénéité ont été obtenus.*

**Mots-clés :** hétérogénéité unidirectionnelle, milieux continûment variables, ondes élastiques, matricant, développement en série de Peano, développements grandes longueurs d'onde.

**Summary :** *Modelling elastic media with material properties, continuously varying in the lateral direction, has a long historical record in geophysics. The mantle crust, the oceans and the atmosphere are media with natural heterogeneity. Moreover, the continuous variation of the elastic properties often occurs in industrial materials. Characterization of such materials is of great importance.*

*The classical scheme to solve the wave equation in media with one-dimensional heterogeneity relies on a multilayered model. The properties are piecewise constant functions for both naturally stratified media and the discretization model of continuously varying media. This approach is known as the Thomson-Haskell method. For continuously heterogeneous media, this method, via discretization, deals with an approximate problem, thus raising some questions about the accuracy and the validity of the obtained solution.*

*In this work, the point is to tackle the problem of wave propagation in heterogeneous media in a different way. To keep the authenticity of the problem, we employ the method based on the Peano series expansion of the matricant. For an arbitrary heterogeneity profile, the Peano series expresses the exact analytical solution of the wave equation written as a first-order ordinary differential system with variable coefficients. The analytical and numerical treatment of the Peano series of the matricant provides a robust method for analysing acoustic phenomena in plates and waveguides. It is hoped to be useful in various areas dealing with ultrasonic characterization of heterogeneous materials.*

**Keywords :** one-dimensional heterogeneity, continuously varying materials, elastic waves, Peano expansion of the matricant, long-wavelength asymptotics developments.