

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Sylvie ALAYRANGUES

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Informatique

Modèles et Invariants Topologiques en Imagerie Numérique

Soutenue le : 08 juillet 2005

Après avis de :

MM. Gilles BERTRAND, Professeur **Rapporteurs**
Rémy MALGOUYRES, Professeur

Devant la commission d'examen formée de :

MM. Robert Cori, Professeur **Président**
Jacques-Olivier Lachaud, Maître de Conférence **Rapporteur**
Achille Braquelaire, Professeur **Examineurs**
Pascal Lienhardt, Professeur
Gilles Bertrand, Professeur
Rémy Malgouyres, Professeur

A la mémoire de Pierre-Yves, mon presque grand-frère

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier Robert Cori d'avoir bien voulu présider mon jury mais aussi de m'avoir accueillie dans son bureau durant ces deux dernières années, et de m'avoir ainsi fourni des conditions de travail privilégiées.

Je remercie aussi Gilles Bertrand et Rémy Malgouyres pour le temps qu'ils ont bien voulu accorder à la relecture du présent mémoire et pour leurs remarques constructives et encourageantes.

Je suis très reconnaissante envers Pascal Lienhardt non seulement pour sa participation à mon jury en tant qu'examineur mais aussi pour la collaboration amicale et professionnelle que nous avons pu construire.

Je veux aussi remercier Achille Braquelaire de m'avoir accueillie dans son équipe et d'avoir fait confiance à Jacques-Olivier Lachaud pour encadrer efficacement mon travail.

Je remercie, bien entendu, plus particulièrement Jacques-Olivier pour sa constante présence durant ces années, ses conseils judicieux et les nombreux échanges qui m'ont souvent éclairée.

La préparation d'un doctorat est aussi l'occasion d'endosser le rôle d'enseignant. Et mes remerciements vont à tous les membres des équipes pédagogiques au sein desquelles j'ai fait mes premières armes, particulièrement à Gwenola Thomas, Stefka Gueorguieva, Philippe Duchon, Akka Zemhari, Myriam Desainte-Catherine et Isabelle Dutour qui m'ont montré tout l'engagement exigé par cette profession et m'ont fait partager leur passion pour ce métier.

Je tiens aussi à témoigner toute ma gratitude envers le personnel administratif du LaBRI, toujours disponible et chaleureux. Je pense notamment à Philippe Biais, Jean-Louis Lassartesses et Cathy Roubineau dont l'aide m'a été précieuse à maintes reprises.

Ces deux dernières années ont aussi été égayées par la bonne humeur et la gentillesse de Rose-Marie, la fée du logis du 3^{ème} étage.

Une thèse est l'occasion de nombreuses rencontres et de nouvelles amitiés. Merci d'abord à ceux qui ont partagé cette aventure depuis le début (ou presque) et plus particulièrement merci à Manue, Afif, Aymeric, Bertrand C., Pascal A., Pascal G., Pierre H., Yon, et Yvan pour tous les bons moments vécus ensemble. Merci aussi à ceux rencontrés en cours de route notamment à David et Benjamin pour le coaching de ma soutenance, mais aussi à Claire, Pascal D., Bertrand K., François, Julien, Olivier, Nico, Maxime, Nicolas, Jérémie, Bilel, Jocelyn, Matthias, Fanny, Florian L., Florian I., Isabelle, Marcien, Pierre V., Fabrice, Pierre F. qui ont tous contribué à rendre mon séjour au LaBRI très agréable. Merci aussi à Xavier pour une collaboration fructueuse. Enfin merci aux membres du laboratoire SIC de Poitiers dont j'ai su plusieurs fois apprécier l'hospitalité, et plus particulièrement merci à Sam, et à Laurent avec qui j'ai eu beau-

coup de plaisir à travailler.

Je veux bien sûr aussi remercier tous les amis qui étaient là avant et qui sont restés malgré des emplois du temps souvent incompatibles.

Enfin, ce travail n'aurait pu aboutir sans l'affection de ma famille et plus particulièrement de mes parents, de ma tante Francette et de mon mari qui m'ont toujours soutenue et supportée (dans tous les sens du terme).

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Motivations : topologie et imagerie numérique	1
1.1.1	Structuration d'images en régions	1
1.1.2	Continuité / Connexité	2
1.1.3	Bord d'un objet	3
1.1.4	Invariants topologiques	5
1.2	Organisation du mémoire	7
1.3	Contributions	8
2	Topologie des images	11
2.1	Topologie classique	12
2.1.1	Taxonomies	12
2.1.2	Caractérisations et comparaisons de topologies	13
	Invariants sur un espace quelconque	14
	Invariants sur un espace muni d'une décomposition cellulaire	19
2.1.3	Un espace topologique particulier : la variété	21
2.1.4	Topologie classique et applications en imagerie	22
2.2	Problématique des images : passage au discret	23
2.2.1	Construction d'une topologie au niveau élémentaire de l'image	23
2.2.2	Construction d'une topologie relative à une partition de l'image	25
2.2.3	Bilan	26
2.3	Approche graphe pour des images construites sur \mathbb{Z}^n	33
2.3.1	Définitions	33
	Image discrète sur \mathbb{Z}^n	33
	Exemples classiques	34
2.3.2	Structuration d'images en régions	34
2.3.3	Connexité	37
	Définition	37
	Exemples classiques	37
	Topologie classique sur \mathbb{Z}^n	39
2.3.4	Surfaces et bords d'objets	39
	Surfaces de spels	41
	Surface de paires de spels	43
	Extraction de surfaces	46
2.3.5	Invariants topologiques	46
	Groupe fondamental	46

	Points simples et algorithmes d'amincissement homotopique	50
	Caractéristiques d'Euler	52
2.4	Approche cellulaire pour des images construites sur \mathbb{Z}^n	53
2.4.1	Définitions	54
2.4.2	Structuration d'images en régions	56
2.4.3	Connexité	59
2.4.4	Surfaces et bords d'objets	60
2.4.5	Invariants topologiques	61
2.5	Généralisation et abstraction de l'approche graphe	61
2.5.1	Définitions	62
2.5.2	Structuration d'images en régions	63
2.5.3	Connexité	63
2.5.4	Surfaces et bords d'objets	64
2.5.5	Invariants topologiques	65
2.6	Généralisation et abstraction de l'approche cellulaire	66
2.6.1	Définitions	66
2.6.2	Structuration d'images en régions	69
	Subdivisions sans multi-incidence	70
	Subdivisions avec multi-incidence	72
2.6.3	Connexité	78
2.6.4	Surfaces et bords d'objets	79
2.6.5	Invariants topologiques	85
2.7	Bilan	86
3	Présentation des modèles topologiques étudiés	91
3.1	Ordres	92
3.1.1	Définitions et notations	92
3.1.2	Topologie associée	95
3.1.3	Adjacences entre spels	96
3.1.4	n -surfaces et ordres frontières	97
3.1.5	Points simples et notions d'homotopie	99
3.1.6	Invariants liés à la décomposition cellulaire	99
3.2	Espaces discrets de Dominguez <i>et al.</i>	100
3.2.1	Définitions et notations	100
3.2.2	Topologie associée	103
3.2.3	Adjacences entre spels	103
3.2.4	Surfaces	104
3.2.5	Homotopie	105
3.2.6	Invariants liés à la décomposition cellulaire	105
3.3	Cartes généralisées	106
3.3.1	Définitions et notations	106
3.3.2	Propriétés et opérateurs topologiques	108
3.4	Bilan	111

4	Comparaison des modèles topologiques	113
4.1	Complexes et ordres	114
4.1.1	Liens entre ces modèles	115
	Complexes et ordres quelconques	117
	Complexes et ordres simpliciaux	121
	Complexes et ordres à support	124
4.1.2	Connexité de spels	127
	Cohésion maximale sur les ordres	127
	Propriétés des complexes à support	133
	Correspondance des notions de noyau d'un ordre à support et de support d'un complexe à support	136
	Fonctions d'éclairage sur les complexes et les ordres à support	138
4.2	Cartes et ordres via graphes d'incidence	142
4.2.1	n - G -cartes simpliciales	143
4.2.2	Graphes d'incidence	149
	Généralités	149
	Graphe d'incidence et ordre	151
	Graphe d'incidence et complexe simplicial numéroté	154
	Graphe d'incidence et carte généralisée	154
	Graphe d'incidence de surface	156
4.2.3	Fil conducteur de la preuve de l'équivalence entre un sous-ensemble des n - G -cartes et les n -surfaces	161
	n -surface et graphe d'incidence de surface	161
	n - G -carte simpliciale connexe fermée et graphe d'incidence de surface . . .	162
	Organisation de la preuve	163
4.2.4	Preuve de l'équivalence entre un sous-ensemble des n - G -cartes et les n - surfaces	164
	Equivalence entre les n -surfaces et les graphes d'incidence de surface . . .	164
	Equivalence entre les n - G -cartes simpliciales connexes fermées et les graphes d'incidence de surface	168
	Equivalence entre n - G -cartes simpliciales connexes fermées et n -surfaces .	180
4.3	Conclusion et perspectives	183
5	Calcul d'invariants topologiques : les groupes d'homologie	187
5.1	Théorie de l'homologie	188
5.1.1	Définition des groupes d'homologie	189
	Construction intuitive	189
	Définition formelle	192
5.1.2	Décomposition d'un groupe d'homologie : forme normale de Smith	192
	Forme normale de Smith d'un homomorphisme de groupes	193
	Décomposition des groupes abéliens de type fini	193
	Lien entre forme normale de Smith et décomposition des groupes d'homologie	194
5.1.3	Obtention des générateurs des groupes d'homologie	198
5.2	Calcul effectif des groupes d'homologie	200
5.2.1	Approches algorithmiques	200
5.2.2	Approches matricielles	203
	Algorithme classique de mise en forme de Smith	203

Optimisations	203
Algorithme de Dumas <i>et al.</i>	205
5.2.3 Bilan	208
5.3 Homologie et générateurs "modulo"	208
5.3.1 Description de l'algorithme	208
5.3.2 Premières expérimentations	209
5.4 Conclusion et perspectives	211
6 Conclusion et perspectives	215
6.1 Résumé et contributions	215
6.2 Perspectives	218
A Topologie générale	225
A.1 Notions de topologie générale	225
A.1.1 Définitions d'un espace topologique	225
A.1.2 Différents types de topologie	228
A.2 Caractérisations et comparaisons de topologies	230
A.2.1 Invariants sur un espace quelconque	233
A.2.2 Invariants sur un espace muni d'une décomposition cellulaire	241
A.3 Un espace topologique particulier : la variété	243
B Subdivisions de l'espace et maillages	247
B.1 Subdivisions de l'espace	247
B.2 Graphe d'adjacence	249
C Topologie des subdivisions cellulaires	253
C.1 Subdivisions cellulaires	253
C.2 Topologie cellulaire	254
C.2.1 Notions préliminaires	254
C.2.2 Construction d'une topologie d'Alexandroff	256
C.3 Approximation combinatoire des variétés	257
D Rappels de théorie des groupes	261
D.1 Bases	261
D.2 Groupes abéliens	262
E Manipulation de matrices : algorithme classique de mise en forme de Smith	263
E.1 Généralités	263
E.2 Algorithme de mise en forme normale de Smith	265
E.2.1 Etape 1	265
E.2.2 Etape 2	267
E.2.3 Etape 3	267

Chapitre 1

Introduction

L'imagerie numérique représente actuellement un enjeu technologique majeur dans des domaines variés tels que l'imagerie biomédicale, la vision par ordinateur, la modélisation et la simulation, la transmission et la compression. . . Dans toutes ces applications, il est primordial de disposer d'une représentation d'images adaptée. Il existe une grande variété de telles structures dépendant principalement du type d'information que l'on souhaite exprimer. Les travaux les plus nombreux concernent la structuration d'images de petite dimension ($2D$, $3D$, éventuellement $4D$) construites sur une grille régulière. Cependant, les résultats ainsi obtenus sont difficilement extensibles à des supports d'image moins spécifiques, autrement dit des subdivisions quelconques en nD . D'autres modèles ont été développés pour proposer des solutions sur des espaces plus généraux mais néanmoins contraints. Et, il n'existe pas, à ce jour, de cadre théorique satisfaisant permettant d'englober ces diverses approches et de fournir des outils de manipulation d'images génériques. Ce manque implique que, pour chaque application nécessitant le recours à un nouveau modèle de représentation d'images, la plupart des algorithmes doivent être entièrement recréés. Nous avons, dans cette thèse, essayé d'œuvrer dans le sens d'une unification des modèles développés, par le biais de constructions de liens entre certains d'entre eux. Nous nous sommes aussi penchés sur la définition d'outils génériques. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux structures utilisées pour représenter la topologie des images. Nous justifions ce choix dans la première partie de cette introduction avant de présenter l'organisation du manuscrit et de résumer les différentes contributions de cette thèse.

1.1 Motivations : topologie et imagerie numérique

Nombre de questions intervenant en imagerie numérique, aussi bien en analyse qu'en modélisation, sont liées, plus ou moins explicitement, à des notions topologiques. Répondre à ces questions implique donc d'identifier les propriétés topologiques mises en jeu et surtout de déterminer comment transférer des notions définies sur des espaces continus vers les espaces discrets associés aux images. Nous introduisons ci-dessous quelques enjeux incontournables en analyse et modélisation, les notions topologiques qui les sous-tendent et les difficultés rencontrées pour les traduire en terme de discret.

1.1.1 Structuration d'images en régions

Une image est généralement définie comme un couple (S, I) où S est un ensemble structuré appelé support ou domaine (en général une grille régulière) et I est une fonction qui associe à

chaque élément de S une quantité (e.g. une couleur). Cependant, de nombreuses applications (segmentation, modélisation géométrique, construction de pyramides d'images...) ne peuvent pas se contenter de cette représentation et exigent de pouvoir manipuler non pas les éléments de base de l'image (pixels) mais des agrégats de ces éléments. Une image sera alors associée à une ou plusieurs structures décrivant les sous-ensembles construits sur ses éléments et les liens qui les unissent.

Ce sont essentiellement des critères topologiques qui permettent d'exprimer les relations entre ensembles d'éléments (e.g. adjacence de région). En outre, l'observation de propriétés topologiques est aussi souvent à l'origine de la construction même des assemblages.

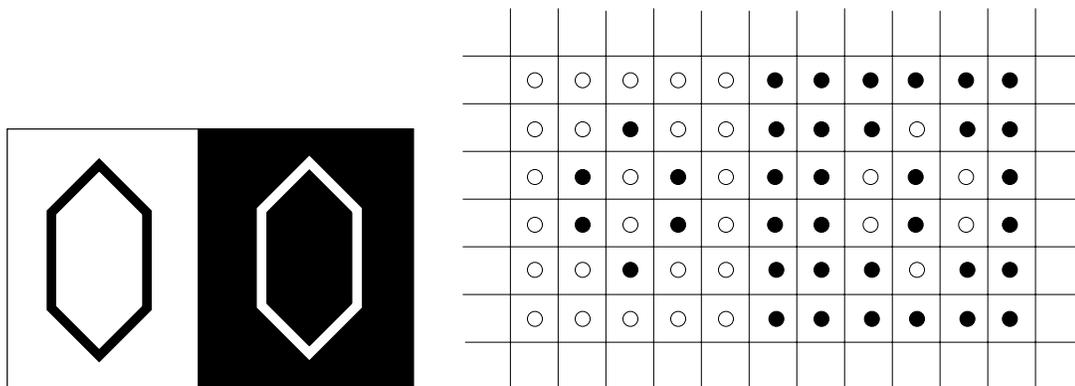
Ainsi, une image est parfois décrite par une partition de l'espace sous-jacent. La structure correspondante représente alors les régions de l'image et les relations d'adjacence entre ces régions. Lorsque l'image est étiquetée, autrement dit lorsqu'un label est associé à chacun de ses éléments, son découpage peut, par exemple, être réalisé par extraction de ses composantes connexes (principe classiquement utilisé pour des algorithmes de segmentation).

La construction de pyramides d'images peut, elle aussi, être conditionnée par des propriétés topologiques. Les pyramides d'images permettent de disposer de plusieurs représentations d'une même image à différents niveaux de résolution. L'idée sous-jacente est que certains algorithmes peuvent produire d'aussi bons résultats sur une version simplifiée de l'image (judicieusement construite) que sur l'image initiale avec un coût calculatoire bien moindre. Le nœud du problème consiste ici à bâtir chacun des niveaux de la pyramide de façon appropriée. La construction de certaines pyramides, notamment utilisées pour des algorithmes de segmentation d'images, peut ainsi être contrainte par le respect de propriétés topologiques (connexité).

1.1.2 Continuité / Connexité

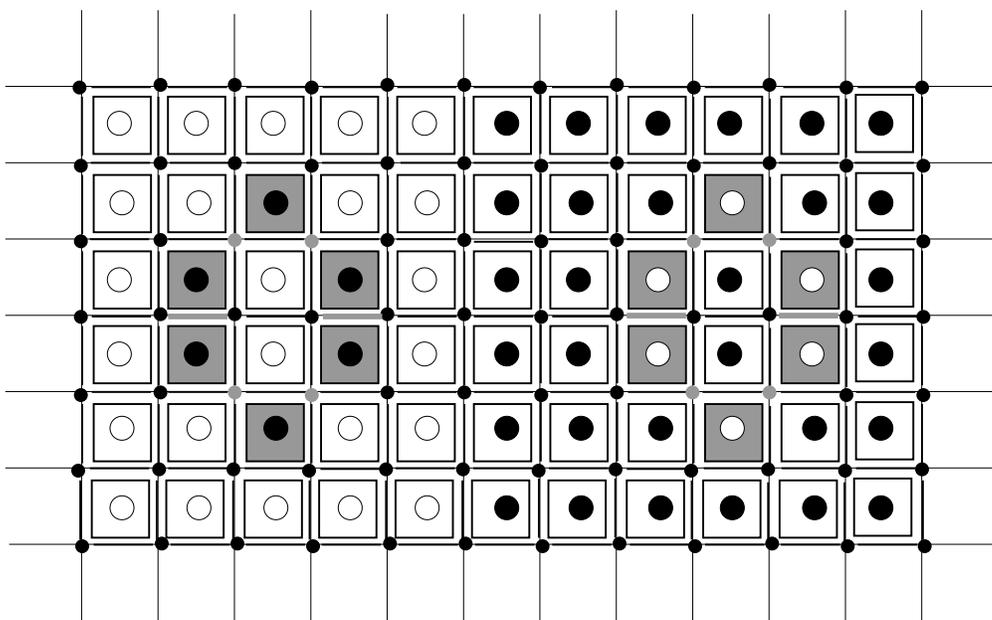
L'analyse d'images vise d'abord à extraire les différents objets contenus dans une image. Intuitivement, un objet correspond à une région continue de l'image caractérisée, par exemple, par une couleur. Cette notion de "continuité de région" est le pendant de la propriété topologique dite de *connexité* (Déf. A.10 page 233). Pour transférer cette notion dans le domaine discret, il est courant d'introduire une notion d'adjacence entre les éléments de l'image dont la clôture transitive définira la connexité. On peut déjà noter qu'une telle méthode consiste en réalité à définir une connexité par arcs (plus restrictive que la connexité générale de topologie classique). La figure 1.1 illustre les difficultés inhérentes à la définition d'une telle connexité discrète dès la dimension 2. La figure 1.1-a montre en effet deux courbes fermées continues : une noire sur fond blanc et une blanche sur fond noir. Ces courbes séparent sans ambiguïté leur intérieur de leur extérieur. La figure 1.1-b représente une possible discrétisation de ces courbes. Pour que l'ensemble de pixels noirs à gauche et l'ensemble de pixels blancs à droite constituent chacun une courbe fermée, à l'instar de leurs analogues continus, il n'existe qu'un choix d'adjacence. Deux éléments de l'image sont adjacents s'ils partagent une arête ou un sommet. Une telle définition n'est cependant pas satisfaisante car si les courbes sont bien définies, elles ne possèdent plus la propriété de séparation de leurs analogues continus. Les pixels blancs à droite (resp. les pixels noirs à gauche) constituent une seule composante connexe et ne sont donc pas séparés en deux composantes par la courbe noire (resp. blanche). La solution habituellement envisagée consiste à utiliser une connexité différente pour les pixels noirs et les pixels blancs. Cependant une telle méthode permet de ne reconnaître qu'une des deux courbes. En effet, si deux pixels noirs sont dits adjacents lorsqu'ils partagent une arête ou un sommet et si deux pixels blancs sont dits adjacents lorsqu'ils ont une arête en commun, alors que l'ensemble des pixels blancs à droite

sera vu comme 4 composantes connexes et non comme une courbe fermée. Une autre solution, plus coûteuse en terme de mémoire, consiste à réaliser un sur-échantillonnage de l'image qui introduit entre les éléments de l'image des éléments de dimensions inférieures permettant de les connecter. Toute la difficulté réside alors dans le choix d'une méthode définissant la connexité à l'aide de ces éléments additionnels.



(a) Image composée de deux courbes fermées

(b) Image équivalente au niveau pixel

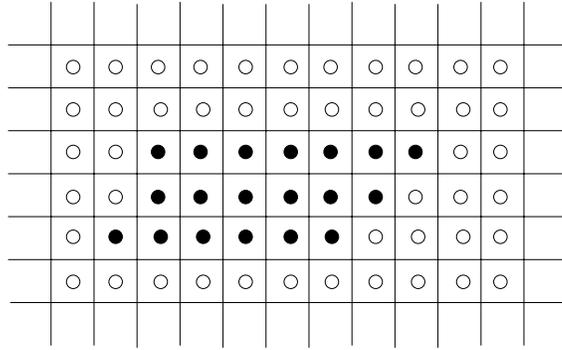


(c) Image sur-échantillonnée : des éléments intermédiaires (en gris) sont utilisés pour définir la connexité des pixels gris

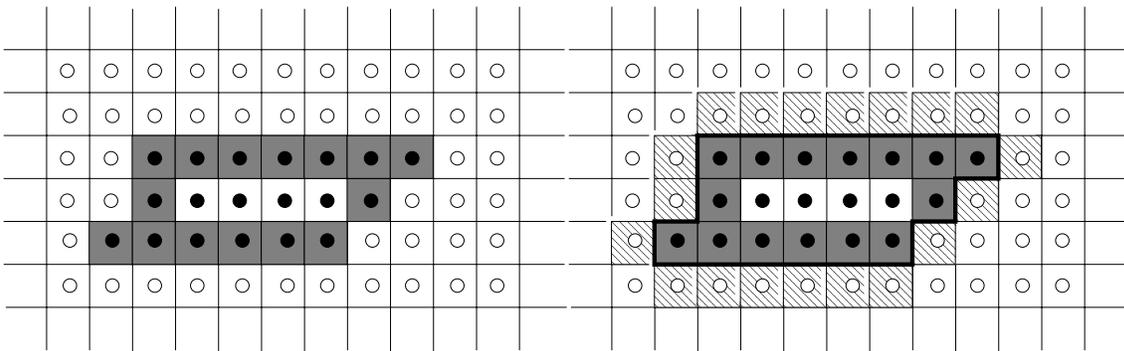
FIG. 1.1 – Difficultés inhérentes à la définition d'une connexité discrète.

1.1.3 Bord d'un objet

En analyse aussi bien qu'en modélisation, il est courant de vouloir définir un objet à l'aide de son bord. En effet, une telle représentation est bien moins coûteuse d'un point de vue mémoire que celle consistant à stocker tous les éléments de l'objet. En topologie classique, le bord d'un

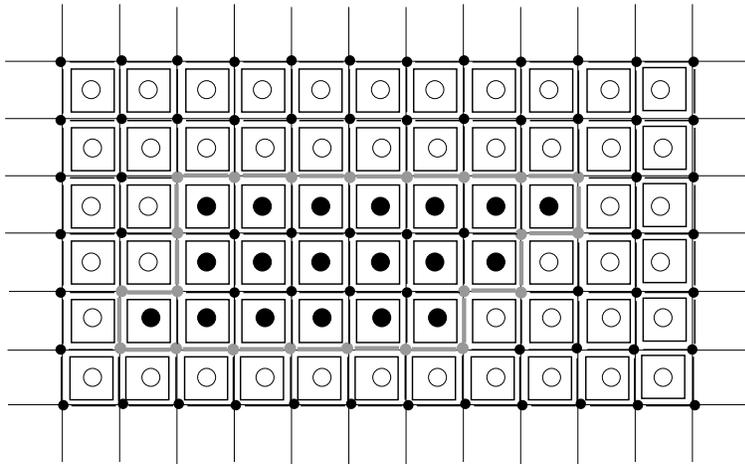


(a) Objet discret $2D$ composé de pixels noirs, dont on veut déterminer le bord



(b) Frontière composée de pixels de l'objet

(c) Frontière composée de couple de pixels (un gris et un rayé partageant une arête)



(d) Image sur-échantillonnée : frontière composée d'éléments intermédiaires (en gris)

FIG. 1.2 – Exemple de définitions de surfaces en $2D$.

espace correspond à l'adhérence de cet espace privée de lui-même. D'un point de vue plus pratique, le bord d'un objet consiste en une *courbe fermée* s'il est de dimension 2 et en une *variété topologique* (Section A.3 page 243) s'il est de dimension supérieure. Intuitivement, la dimension du bord d'un objet est inférieure d'une unité à la dimension de l'objet. Cependant, il n'existe a priori pas de notion de dimension sur les ensembles discrets classiquement associés aux images. Ceux-ci sont, en effet, généralement composés d'un type unique d'élément (pixel en $2D$, voxel en $3D$, spel ou xel en nD). Comment définir alors la surface des objets ? Plusieurs possibilités pour représenter des éléments de surfaces apparaissent sur la figure 1.2. Une fois que l'on a défini la nature des éléments qui vont composer une surface (spel, paire de spels...), se pose le problème de la définition de la surface elle-même. Il s'agit de définir un ensemble d'éléments de surface qui sépare sans ambiguïtés un objet du reste de l'image, autrement dit, qui vérifie une version discrète du théorème de topologie classique dit de Jordan-Brouwer (Th. A.31 page 244).

1.1.4 Invariants topologiques

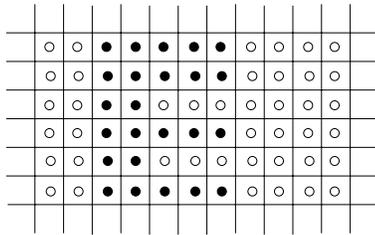
La topologie s'avère aussi précieuse pour des applications de reconnaissance de formes. Deux images représentant un même objet ou des objets d'une même famille peuvent présenter des différences géométriques (échelles ou proportions différentes, déformations provenant par exemple du procédé d'acquisition utilisé) mais la plupart du temps elles respectent la topologie des objets (Fig. 1.3). Il faut toutefois remarquer que la préservation des propriétés topologiques lors d'un processus de discrétisation est un sujet de recherche à part entière [47, 48, 90, 134, 187].

Le problème consiste alors à comparer la topologie de différents objets discrets. Dans la topologie classique, il existe différents niveaux de comparaisons qui sont détaillés dans la section A.2 et dont la traduction et l'utilisation dans le domaine discret sont loin d'être triviales. En outre, il est toujours plus facile de vérifier si deux objets sont topologiquement différents que de prouver qu'ils sont topologiquement semblables. Les outils utilisés en topologie classique sont appelés invariants topologiques car ils possèdent la même valeur sur des objets topologiquement équivalents.

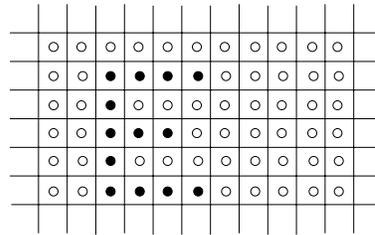
Parmi eux, certains, comme la *constante d'Euler* ou les *groupes d'homologie* et de *cohomologie*, reposent sur une décomposition cellulaire de l'espace et nécessitent l'ajout d'informations sur l'espace discret représentant l'image pour pouvoir être utilisés.

D'autres permettent d'obtenir une version simplifiée d'un objet tout en préservant sa topologie. Cette idée a été reprise dans le cadre des images et a conduit à la définition de processus d'amincissement et de squelettisation d'objets par retraits séquentiels ou parallèles de points. La principale difficulté consiste à caractériser les points que l'on peut effectivement enlever à l'objet sans modifier la topologie de l'image. Généralement, on ne parvient à préserver qu'une propriété moins forte : le type d'homotopie. Aussi les procédés d'amincissement et de squelettisation ne peuvent-ils généralement pas se contenter de l'information topologique et doivent-ils prendre en compte la géométrie des objets afin d'obtenir des résultats exploitables. Pour une application de reconnaissance de caractères par exemple, les lettres "E" et "F" sont homotopiquement équivalentes (elles sont même homotopiquement équivalentes à un point) et ne peuvent être distinguées que par le nombre de lignes horizontales qui les composent.

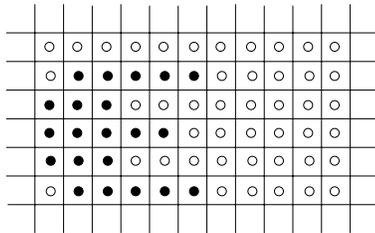
Dans des applications de modélisation ou des applications mettant en œuvre des modèles déformables, il est aussi crucial de pouvoir contrôler la topologie. En effet, ce type d'applications construit ou déforme des objets qui doivent pouvoir "exister" dans un espace de dimension donnée (généralement $3D$). Formellement, on dit qu'ils doivent être *plongeables* dans l'espace

(a) Différentes versions de la lettre E 

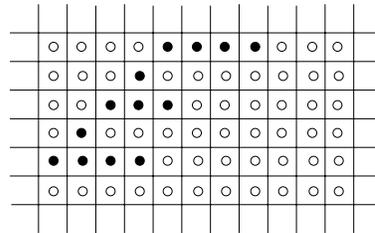
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 1.3 – Différentes images représentant la lettre E possédant des géométries différentes mais la même topologie.

choisi. Un tore peut ainsi être construit dans un espace de dimension 3 tandis qu'une bouteille de Klein n'"existe" pas dans un espace de dimension 3 et ne peut être plongée que dans un espace de dimension supérieure ou égale à 4. Pour déterminer si un objet est plongeable dans un espace de dimension donné, il suffit parfois de regarder un invariant topologique particulier : *les groupes d'homologie*.

Enfin, pour conclure, on peut remarquer que les invariants définis en topologie classique ont des pouvoirs d'expression différents (cf Fig. 1.4). Ainsi, outre les difficultés inhérentes à leur transcription sur des espaces associés à des images, on se trouve aussi confronté au problème de mesurer leur efficacité de discrimination dans le cadre particulier des applications d'imagerie visées.

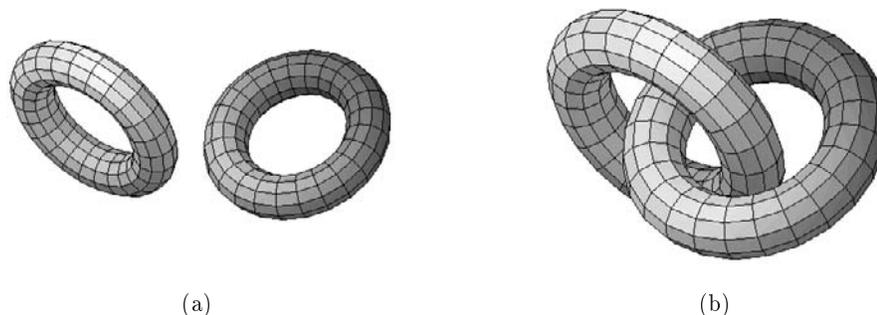


FIG. 1.4 – Exemple de deux subdivisions qui peuvent être différenciées via leurs groupes d'homotopie mais pas via leurs groupes d'homologie.

1.2 Organisation du mémoire

Au travers de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la fois aux structures topologiques utilisées pour représenter des images et aux outils topologiques qui pouvaient leur être adjoints.

Le deuxième chapitre présente un tour d'horizon des différentes structures proposées dans la littérature pour représenter la topologie d'images, ainsi que des notions et algorithmes qui leur ont été associés. Quoique assez complète, cette étude préliminaire ne prétend pas être exhaustive. Elle montre cependant qu'il existe deux principales manières de structurer une image, l'une à l'aide d'un graphe d'adjacence, l'autre via un modèle cellulaire. Elle permet de souligner que l'approche graphe fournit un cadre de travail acceptable en basses dimensions et lorsque les images sont explicitement construites sur une grille régulière, mais que leur extension à des images plus génériques (en terme de type de support et de dimension) est difficilement réalisable. Elle met aussi en évidence la variété des modèles développés dans le cadre cellulaire, et leur plus grande généralité. Cependant, chacune de ces structures a été développée dans un cadre précis et si la philosophie les sous-tendant est la même, elles présentent de nombreuses différences, tant au niveau de leur définition, que des outils topologiques qui leur ont été explicitement associés.

Cette apparente diversité au sein de ces modèles cellulaires nous a amenés à nous interroger sur les liens qui pouvaient exister entre eux. Nous nous sommes plus précisément intéressés aux modèles qui paraissaient les plus généraux (en terme de dimension et de types d'objets représentés). Ce choix se justifie aisément dans la mesure où la plupart des modèles plus spécialisés apparaissent comme des cas particuliers de ces modèles généraux. Nous nous sommes de plus

penchés sur des modèles utilisés dans des contextes différents (analyse, modélisation...), munis d'outils topologiques complémentaires (notions de connexité, algorithmes de squelettisation, opérateurs de construction...) et liés à des mécanismes de définition à première vue éloignés (récur­sifs, constructifs...). Le troisième chapitre de ce mémoire décrit plus précisément les modèles cellulaires étudiés : les ordres introduits par Bertrand *et al.*, les complexes cellulaires utilisés par Dominguez *et al.* et les cartes généralisées proposées par Lienhardt. Il permet de mettre en avant leurs spécificités et les outils topologiques dont ils ont été équipés.

Le quatrième chapitre constitue la première contribution de cette thèse. Il montre comment les modèles décrits dans le chapitre précédent peuvent être mis en relation. La première partie vise à combler un des manques constatés lors de l'étude des modèles cellulaires. En effet, peu d'entre eux ont été munis d'outils permettant de traduire et d'explicitier différentes connexités entre éléments d'une image. De plus, les rares qui en ont été dotés possèdent des propriétés géométriques contraignantes. Nous expliquons ici comment caractériser de manière purement combinatoire un sous-ensemble des ordres et un sous-ensemble des complexes cellulaires équivalents et compatibles avec les notions de connexité proposées sur les complexes polyédriques par Dominguez *et al.* La deuxième partie du chapitre se consacre à l'étude des ordres et des cartes généralisées, modèles très différents à première vue. Elle définit une sous-classe des cartes généralisées et prouve via la définition d'une structure intermédiaire, qu'elle est équivalente à une sous-classe des ordres déjà existante (les n -surfaces). Les méthodes de conversion entre modèles sont, en outre, formellement explicitées.

Le cinquième chapitre s'intéresse, quant à lui, à un invariant topologique particulièrement adapté aux modèles de représentation cellulaire : les groupes d'homologie. Ces groupes permettent, entre autres, de détecter les trous d'un objet en n'importe quelle dimension. En outre, contrairement à d'autres invariants, ils sont calculables et comparables. Ils ont, jusqu'à présent, été assez peu utilisés dans le cadre de l'imagerie numérique. Nous commençons donc par expliquer l'intuition qui se cache derrière la construction de ces invariants avant d'en donner la définition formelle. Nous présentons ensuite les difficultés inhérentes au calcul effectif de ces groupes (complexités en temps et en mémoire élevées) et les principales solutions déjà envisagées. Puis nous proposons une nouvelle méthode de calcul qui combine les avantages de deux méthodes existantes. Elle permet, en effet, d'obtenir une caractérisation de ces groupes, autorisant ainsi une comparaison aisée de différents objets selon leurs groupes d'homologie, et de déterminer par la même occasion un sous-ensemble d'éléments entourant chaque trou d'un objet (en n'importe quelle dimension).

Nous concluons ce mémoire par un bilan des travaux réalisés et une description des perspectives qu'ils nous ont ouvertes.¹

1.3 Contributions

Nous résumons ici les différentes contributions de cette thèse.

1 Comparaisons de modèles

- Ordres et complexes :
 - Formalisation du lien entre les ordres et les complexes (Section 4.1.1 page 117),
 - Caractérisation combinatoire d'une sous-classe des complexes, les *complexes à support* (Déf. 4.7 page 125), et d'une sous-classe des ordres, les *ordres à support* (Déf. 4.8 page 125), particulièrement adaptées à la représentation des images au niveau pixel,

¹On trouvera en annexe différents rappels qui peuvent s'avérer utiles pour la compréhension du manuscrit.

- Correspondance entre un sous-ensemble d'un ordre à support, son *noyau*, et un sous-ensemble d'un complexe à support, le *support de ses n -cellules* (Thé. 4.25 page 138), correspondance intéressante dans la mesure où les mécanismes mis en œuvre dans leurs définitions sont très différents (constructive pour le premier, par caractérisation locale pour le second),
- Justification de la validité des notions de fonctions d'éclairage définies par Dominguez *et al.* sur les complexes à support (Lemme 4.27 page 141) et ordres à support (Lemme 4.28 page 141).
- Extension de la notion de fonctions d'éclairage aux complexes à support (Déf. 4.29 page 141) et définition d'une famille de fonctions analogue sur les ordres à support (Déf. 4.30 page 141) permettant d'y construire différentes notions de connexité.
- Cartes et Ordres (collaboration avec Pascal Lienhardt (SIC, Poitiers) et Xavier Daragon (A2SI, Marne la Vallée):
 - Caractérisation minimale des *cartes simpliciales*, autrement dit des cartes associées à des complexes simpliciaux (Thé. 4.34 page 146),
 - Caractérisation combinatoire via la définition des *graphes d'incidence de surface* (Déf. 4.44 page 157) des subdivisions associées aux n - G -cartes simpliciales fermées connexes et aux n -surfaces,
 - Définition de méthodes de conversion n -surface/ n - G -carte simpliciale connexe fermée et n - G -carte simpliciale connexe fermée/ n -surface (Thé. 4.62 page 181) et preuve que les n -surfaces et les n - G -cartes simpliciales fermées connexes représentent exactement les mêmes objets (Thé. 4.63 page 181). Cette équivalence est importante, dans le sens où les définitions de ces deux modèles sont extrêmement différentes : elles ne s'appuient ni sur le même procédé (récursif pour les n -surface, constructif pour les cartes), ni sur les mêmes briques de bases (ensemble d'éléments hétérogènes pour les n -surface, homogènes pour les cartes).
- 2 Invariants topologiques, les groupes d'homologie :
 Conception, en collaboration avec Samuel Peltier et Laurent Fuchs (SIC, Poitiers), d'un algorithme "hybride" de calcul des groupes d'homologie d'une subdivision (Section 5.3).

Chapitre 2

Topologie des images

Le terme *topologie* a été introduit par Listing [142] au *XIX^{ème}* siècle, il signifie étymologiquement “*étude des lieux*”¹. Il s’agit en fait de ce qu’Euler, puis Riemann et Poincaré après lui, nommaient *Analysis situs*. Pour une première définition, laissons la parole à celui qui lui a donné son nom :

“By topology we mean the doctrine of the modal features of objects, or of the laws of connection, of relative position and of succession of points, lines, surfaces, bodies and their parts, or aggregates in space, always without regard to matters of measure or quantity.” Listing.

La topologie s’intéresse donc aux propriétés structurelles d’objets en mettant de côté leurs mesures et leur forme exacte. Deux objets sont ainsi dits topologiquement équivalents si l’on peut passer indifféremment de l’un à l’autre par une transformation continue (appelée *homéomorphisme*). La topologie permet aussi d’étudier les relations entre différents objets (positions relatives, inclusion...)

La notion de base en topologie est le *voisinage*. Une topologie peut être définie sur un ensemble d’éléments dès lors qu’en chaque élément de cet ensemble, on est capable de définir une notion de voisinage vérifiant certains axiomes.

Comme nous l’avons déjà évoqué en introduction, la topologie joue un rôle essentiel dans tous les domaines liés à l’imagerie. En analyse, par exemple, on souhaite pouvoir distinguer les différentes régions d’une image, et obtenir leurs relations d’adjacence. A cette fin, il est nécessaire de définir la notion de *connexité* qui n’est rien d’autre qu’une propriété topologique. On désire souvent déterminer et parfois aussi parcourir le bord des objets présents dans une image. On a donc besoin de définir une notion de *surface*, notion qui a déjà été définie en topologie classique. Certaines applications requièrent en outre de caractériser un objet par une structure topologique équivalente plus simple. On parle alors d’*amincissement homotopique*. Dans un autre ordre d’idée, on aimerait pouvoir comparer différents objets d’un point de vue purement topologique. Il peut arriver, par exemple, qu’un objet présent dans plusieurs images capturées à des instants différents, ait subi des déformations élastiques au cours du temps. Il peut ainsi avoir perdu sa forme et les mesures qui le caractérisaient mais avoir gardé sa topologie. On cherche donc à associer à un objet un ensemble de propriétés qui ne dépendent que de sa topologie. On les nomme tout simplement *invariants topologiques*. En modélisation, il est courant de définir un objet à l’aide d’une structure topologique à laquelle sont adjointes des informations géométriques. Un objet peut ainsi être topologiquement défini par une subdivision

¹du grec *τοπος* : lieu et *λογος* : discours raisonné.

de ses bords, c'est à dire par un ensemble de cellules reliées par des relations d'incidence. Le plongement géométrique est alors réalisé par l'association d'une forme à chacune des cellules. L'existence d'un tel plongement dans un espace de dimension donné peut, pour certains objets (notamment des surfaces fermées), être reliée à une propriété purement topologique liée aux groupes d'homologie.

Dans cette partie, nous commençons tout d'abord par rappeler les notions essentielles de topologie générale que l'on souhaite pouvoir utiliser sur des images². Puis nous évoquons les difficultés inhérentes à la traduction de telles notions sur des espaces discrets et les démarches classiquement utilisées. Nous montrons qu'il existe principalement deux manières de structurer une image, l'une fondée sur la notion de graphe, l'autre sur celle de structure cellulaire. Nous présentons les travaux associés à chacune de ces approches d'abord dans le cadre des images construites sur \mathbb{Z}^n (images régulières) puis nous expliquons comment se généralisent ces approches.

Pour faciliter une lecture comparative, chacune des quatre sections correspondantes est décomposée suivant le même schéma construit à partir des point-clés mis en exergue en introduction. Dans chacune d'elles, nous commençons par définir le modèle sous-jacent, puis voyons comment il peut être utilisé pour structurer une image en régions. Nous évoquons ensuite les notions de connexité, de surface et bord d'objets puis décrivons les autres invariants topologiques qui peuvent leur être associés.

Nous concluons ce chapitre par un bilan de cette étude.

Nous mentionnons dans ce chapitre, un grand nombre de modèles utilisés pour représenter des images. Une série de tableaux récapitulatifs donnent une vue synthétique des caractéristiques principales de ces structures. Les tableaux 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 décrivent respectivement les modèles "graphes", utilisés pour représenter une image au niveau pixel, puis au niveau région et les modèles "cellulaires" associés eux aussi au niveau pixel, puis région. Les tableaux 2.5 et 2.6 rassemblent pour différentes familles de modèles les notions topologiques qui leur ont été associées. Ces tableaux se trouvent sur les pages 28 à 32.

2.1 Topologie classique

Définir une topologie sur un ensemble consiste classiquement à y caractériser une famille de sous-ensembles, appelés *ouverts*, vérifiant certains axiomes (cf Déf. A.1 page 225). Plus proche de son sens étymologique, il existe une manière équivalente d'associer une topologie à un ensemble en se fondant sur la notion de voisinage (cf Thé. A.5 page 227). Un ensemble muni d'une famille d'ouverts est appelé *espace topologique*.

2.1.1 Taxonomies

Il existe différents types de topologie. Plusieurs classifications ont été proposées afin de rendre compte de cette variété. Nous évoquerons ici deux de ces approches, auxquelles il est souvent fait référence lorsque l'on souhaite associer une topologie à une image. La première s'intéresse à la densité des ouverts dans l'espace considéré. L'espace est, dans ce cas, caractérisé par ses propriétés de *séparation*. Il s'agit de comparer les familles de voisinages de tout couple de points, et de regarder comment les ouverts qu'elles contiennent séparent les deux points. Les *axiomes de séparation* permettent de formaliser cette classification. Un espace est alors dit \mathcal{T}_i -séparé s'il

²Des rappels plus formels de topologie générale se trouvent dans l'annexe A.

vérifie le $i^{\text{ème}}$ axiome de séparation \mathcal{T}_i . Ces axiomes sont définis hiérarchiquement de sorte qu'un espace \mathcal{T}_i -séparé soit \mathcal{T}_j -séparé pour tout $j < i$.

La topologie naturelle sur la grille \mathbb{Z}^2 , pour laquelle tout singleton est un ouvert, est de type \mathcal{T}_2 : étant donnés deux éléments de l'espace, P et Q , il existe au moins un voisinage de l'un et un voisinage de l'autre qui sont disjoints : $\{P\}$ et $\{Q\}$. La topologie d'un COTS (Connected Ordered Topological Space) défini par Khalimsky [110] est $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}$, si le COTS contient plus de trois éléments : tout singleton de l'espace est soit ouvert, soit fermé. La topologie d'un produit cartésien de plusieurs COTS est \mathcal{T}_0 : pour tout couple de points, il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre. La topologie induite sur un complexe cellulaire est, elle aussi, \mathcal{T}_0 .

La seconde se fonde sur les propriétés de l'ensemble sur lequel est construite la topologie. On parle ainsi de *topologie algébrique* lorsque l'ensemble considéré peut être muni de structures algébriques (groupe, anneau...). La *topologie combinatoire* [9] est une restriction de la topologie algébrique aux objets combinatoires, et la *PL-topologie* [40] concerne des objets encore plus spécifiques : les surfaces triangulées. Dans un autre ordre d'idée, la *topologie différentielle* [35] travaille sur des variétés (cf Déf. A.30) différentiables, autrement dit C^∞ . Une notion semble-t-il plus récente est celle de *topologie combinatoire différentielle* [78, 79] qui s'intéresse aux objets combinatoires différentiables. Enfin, les espaces métriques sont des espaces possédant une notion de distance. La *topologie métrique* est la topologie qui découle naturellement de la distance définie sur l'espace. Les espaces métriques les plus utilisés sont construits sur une métrique euclidienne. Les métriques riemaniennes sont aussi parfois employées [192].

De nombreuses autres topologies pourraient être citées ici mais nous nous sommes volontairement limités aux plus significatives du point de vue de la manipulation des images. Le schéma A.1 page 231 en annexe A récapitule les topologies citées ci-dessus et met en évidence les liens qui les unissent.

Ainsi, dans la plupart des applications s'appuyant sur des outils topologiques, il est possible d'enrichir l'information topologique initiale de propriétés liées à la nature de l'ensemble considéré. Ces informations additionnelles permettent d'améliorer l'analyse de cet ensemble.

2.1.2 Caractérisations et comparaisons de topologies

La topologie d'un espace contient l'ensemble de ses propriétés invariantes après une déformation continue. Elle permet de fournir une caractérisation de l'espace considéré. Il est souvent nécessaire de pouvoir différencier des espaces selon des critères purement topologiques. Aussi, la notion essentielle est-elle l'équivalence topologique entre deux ensembles munis d'une famille d'ouverts.

Cependant, l'équivalence stricte entre deux espaces topologiques, appelée *homéomorphisme* (cf Déf. A.8 page 232), est extrêmement difficile à prouver. On se contente souvent d'étudier des propriétés, appelées *invariants topologiques*, qui ne caractérisent que partiellement la structure topologique d'un ensemble. De telles propriétés sont généralement définies dans le cadre de la *topologie algébrique*. Elles nécessitent parfois de se placer dans le cadre encore plus restreint de la *topologie combinatoire*, en imposant l'utilisation d'une décomposition cellulaire de l'espace.

Les invariants topologiques peuvent parfois s'avérer suffisants pour décrire la topologie d'objets. Ainsi la connaissance de la caractéristique d'Euler et de l'orientabilité d'une surface fermée (variété fermée de dimension 2 cf Section 2.1.3 page 21) suffit à caractériser sa topologie. Les

groupes d'homologie locaux permettent quant à eux de caractériser les variétés fermées de dimension inférieure ou égale à 3. Il semble aussi que les groupes d'homotopie puissent renseigner sur la topologie de certaines variétés fermées en n'importe quelle dimension. Il s'agit de la conjecture de Poincaré étendue : "Toute n-variété fermée qui est homotopiquement équivalente à la n-sphère est homéomorphe à la n-sphère". Elle a été prouvée pour tout n différent de 3. Une preuve pour ce dernier cas a été proposée par Grigori Perelman en 2003 et est toujours en phase de vérification.

Nous présentons brièvement ici les invariants les plus couramment employés. Il existe plusieurs moyens de classer ces propriétés. On peut, par exemple, les classer suivant leur puissance de représentation. Certains permettent en effet de caractériser plus finement la topologie que d'autres.

Le schéma 2.1 page 15 montre la hiérarchie des invariants algébriques que nous étudions ici. Voici en outre quelques exemples d'objets qui sont identiques du point de vue d'un invariant mais différents du point de vue d'un invariant "supérieur" :

- *Les graphes X et Y (Fig. 2.2(a)) sont homotopes mais non homéomorphes, de même un disque et un point, ou un ruban de Möbius (Fig. 2.3) et un cercle,*
- *L'objet composé de 2 cercles (sphère de dimension 1 : S^1) et d'une sphère de dimension 2 dont on a identifié un point ("wedge sum" de 2 cercles et d'une 2-sphère) homéomorphe à l'objet gauche de la figure 2.2(b), dénoté par $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ possède la même homologie que le tore à droite de la figure 2.2(b), noté par $S^1 \times S^1$. Ces deux objets ne sont cependant pas homotopes.*
- *Les objets B et C (Fig. 2.2(c)) ont la même caractéristique d'Euler mais ni les mêmes nombres de Betti, ni les mêmes groupes d'homologie. B est notamment connexe sans trou, tandis que C possède deux composantes connexes et un trou,*
- *Le plan projectif complexe³ dénoté par $\mathbb{C}P^2$ et l'espace $S^2 \vee S^4$ (une 2-sphère et une 4-sphère collées en un point) ont même cohomologie mais pas le même type d'homotopie.*

On peut aussi différencier les invariants selon le type de topologie (algébrique, différentielle...) que leur définition requiert.

Nous avons aussi choisi de classer les invariants en deux familles. Nous distinguons ceux qui peuvent être étudiés sur des espaces quelconques (éventuellement munis d'une topologie algébrique) de ceux qui se fondent sur une décomposition cellulaire de l'espace associé. Nous verrons par la suite que cette distinction se retrouve dans les deux principales approches utilisées pour construire une topologie sur des images.

Invariants sur un espace quelconque

Parmi ces propriétés, on s'intéressera plus particulièrement aux notions de *connexité*, de *dimension* et d'*homotopie*.

Il est naturel de commencer par se demander si un espace topologique est "d'un seul tenant" ou bien composé de plusieurs parties. Les notions de *connexité* (Déf. A.10 page 233) et de *composantes connexes* (Déf. A.11 page 233) formalisent cette question. Les invariants topologiques algébriques que nous verrons ultérieurement permettront, entre autres, de détecter dans des

³Le plan projectif complexe consiste en l'ensemble des classes d'équivalence $[a, b, c]$ des triplets ordonnés (a, b, c) de $\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ pour la relation d'équivalence $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ si $(a, b, c) = (\lambda a', \lambda b', \lambda c')$ pour un nombre complexe non nul λ .

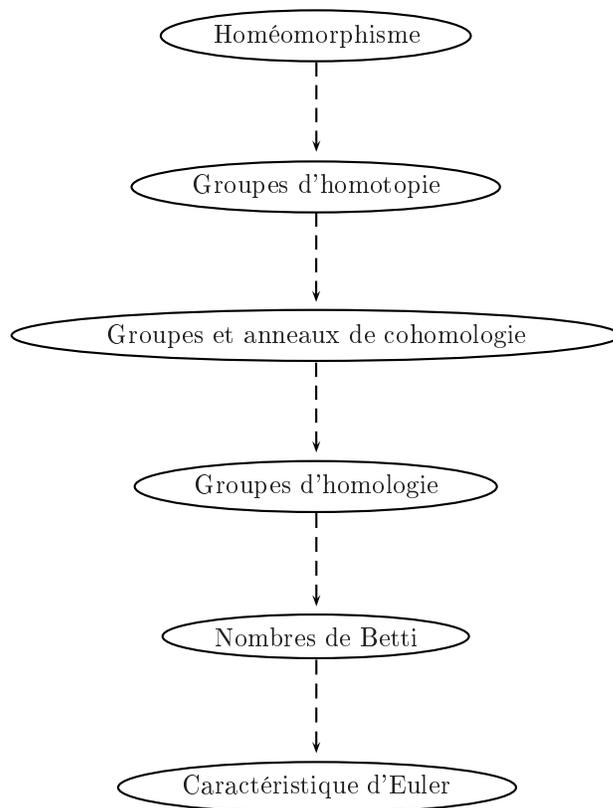
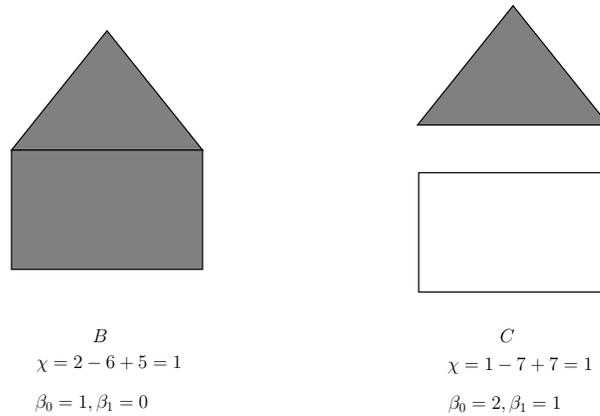
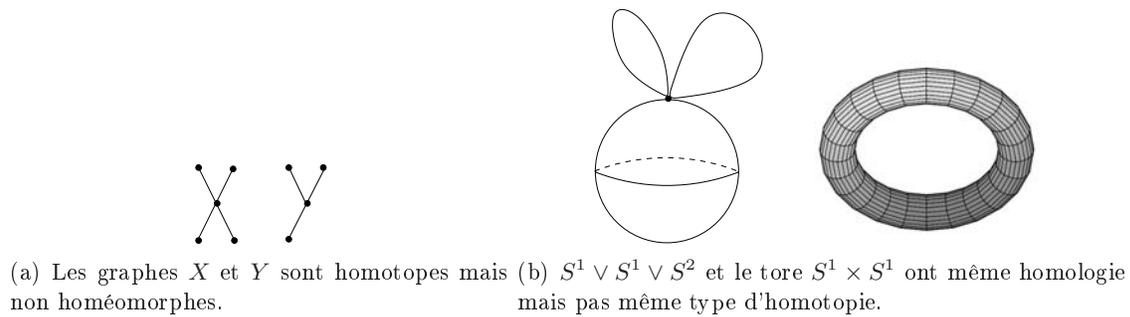


FIG. 2.1 – Puissance de comparaison des invariants topologiques (algébriques) du haut en bas par ordre décroissant.



(c) Les objets B et C ont la même caractéristique d'Euler (1) mais ni les mêmes nombres de Betti, ni les mêmes groupes d'homologie.

FIG. 2.2 – Comparaisons de la puissance de représentation des invariants topologiques algébriques.



FIG. 2.3 – Ruban de Möbius

espaces topologiques des "coupures" plus subtiles, qui ne partagent pas un espace en plusieurs parties mais y créent des "trous".

La figure 2.4 montre des exemples de sous-espaces de \mathbb{R}^2 connexes (B et C) et non connexes ($B \cup C$)

On peut noter que deux composantes connexes qui partagent un élément sont confondues. Ainsi l'ensemble des composantes connexes d'un espace topologique en réalise une partition. Il

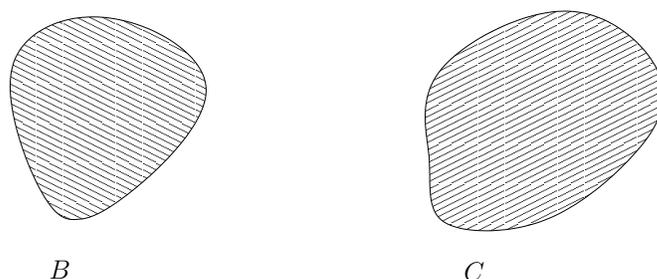


FIG. 2.4 – L'espace topologique associé à B est connexe, l'espace topologique associé à l'ensemble $B \cup C$ n'est pas connexe.

existe, en outre, une autre notion de connexité, dite *connexité par arcs* ou *connexité par chemins* (Déf. A.13 page 236), qui est, en général, plus restreinte que la notion de connexité classique (Thé. A.14 page 236), mais s'avère équivalente sur certaines structures topologiques particulières.

Il existe plusieurs notions de *dimension* en topologie. La notion de dimension plus courante est sans doute celle introduite par Lebesgue, connue sous le nom de *dimension de recouvrement* ou *dimension topologique*. Elle généralise la notion de dimension euclidienne à des espaces quelconques (Déf. A.18 page 237).

L'invariant topologique que nous évoquons maintenant a été introduit par Poincaré pour pallier certains défauts d'autres invariants, les groupes d'homologie, qu'il avait précédemment définis pour caractériser la topologie d'espaces possédant une subdivision cellulaire. Ce sont aussi des groupes, appelés *groupes d'homotopie*. A tout espace topologique, il est possible d'associer une suite de groupes d'homotopie. Le plus utilisé est le groupe d'homotopie de dimension 1 ou *groupe fondamental* (Déf. A.21 page 238). Il repose sur les différentes manières de construire et déformer de manière continue des courbes fermées sur un espace topologique. Il se fonde sur la définition d'une relation d'équivalence, dite *équivalence homotopique*. On dira que deux courbes (ou deux chemins) sont homotopiquement équivalentes s'il existe une déformation continue qui envoie l'une sur l'autre (cf Fig. 2.5). De même on dira qu'une courbe fermée est homotopiquement équivalente à 0 s'il existe une déformation continue qui envoie cette courbe sur un point. Le groupe fondamental d'un espace connexe par arcs est défini comme le groupe des classes d'équivalence pour la relation d'homotopie des courbes fermées enracinées en un point. La définition des groupes d'homotopie de dimensions supérieures est similaire si ce n'est qu'elle nécessite la définition de la notion de "courbe fermée" en n'importe quelle dimension (Déf. A.22 page 238).

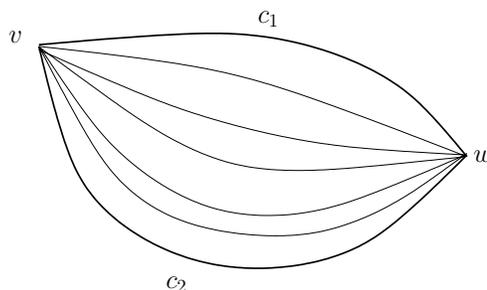


FIG. 2.5 – Les chemins c_1 et c_2 sont homotopes dans \mathbb{R}^2

- Tous les chemins enracinés en un point d'un disque sont équivalents pour la relation d'homotopie à un point. Le groupe fondamental du disque est donc isomorphe au groupe trivial 0 .
- Les chemins enracinés en un point de la surface d'un tore sont homotopes soit à un des deux cercles mis en valeur sur la figure 2.6, soit à une combinaison de ces deux cercles, soit à un point. Le groupe fondamental du tore est donc isomorphe au groupe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

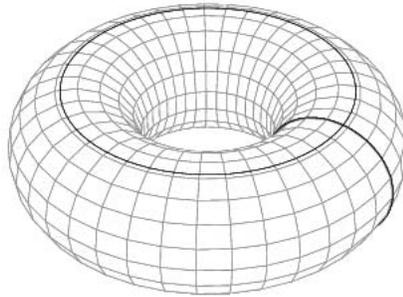


FIG. 2.6 – Mise en évidence des générateurs du groupe fondamental du tore.

Ces groupes bien que contenant plus d'informations que les groupes d'homologie sont rarement utilisés en pratique parce qu'ils sont très difficiles à calculer effectivement et surtout à comparer.

Cependant, la notion d'homotopie permet de définir d'autres notions particulièrement utiles. Il est ainsi parfois possible de comparer deux espaces selon leur *type d'homotopie* (Déf. A.23 page 239). Intuitivement deux espaces ont le même type d'homotopie si chacun d'eux peut être continûment déformé en l'autre. Certains espaces particuliers ont le même type d'homotopie qu'un point, autrement dit ils peuvent être continûment déformés jusqu'à être réduits à un point. Ces espaces sont qualifiés de *contractiles* et font partie d'une classe d'espace plus large, les espaces *simplement connexes*. Sur de tels espaces tout chemin fermé peut être continûment déformé en un point.

- L'espace \mathbb{R}^n a le même type d'homotopie qu'un point.
- L'espace $\mathbb{R}^n - \{0\}$ a le même type d'homotopie que la sphère S^{n-1} .
- La figure 2.7 montre deux sous-espaces du plan euclidien, l'un simplement connexe, l'autre pas.
- \mathbb{R}^2 est simplement connexe, tandis que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ne l'est pas. Et pour tout $n > 2$, \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^n privé de l'origine sont simplement connexes.
- La sphère S^n est simplement connexe si et seulement si $n \geq 2$

Autrement dit un espace simplement connexe est un espace connexe par arcs dont le groupe fondamental est trivial (i.e. ne contient que l'identité). Il existe des espaces simplement connexes mais non contractiles. L'exemple le plus connu en est la sphère de dimension supérieure ou égale à 2.

Tous les espaces ne sont pas contractiles mais ils peuvent parfois se réduire à un sous-espace plus petit possédant le même type d'homotopie. Il s'agit en quelque sorte de "projeter" un

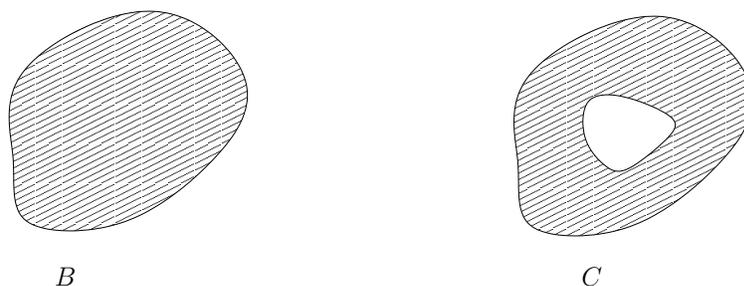


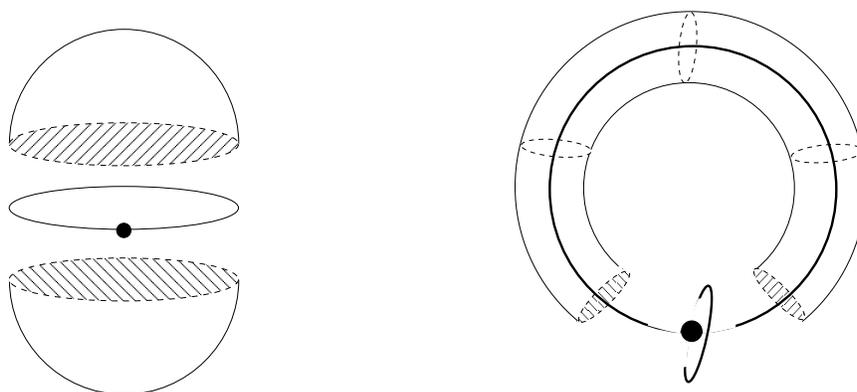
FIG. 2.7 – Le sous-espace B est simplement connexe, tandis que C ne l'est pas.

espace sur un sous-espace approprié. Or en topologie, l'équivalent de la projection s'appelle une rétraction et le sous-espace obtenu un rétracte. Cependant, un rétracte n'a pas forcément le même type d'homotopie que l'espace originel. Pour garantir que cette propriété ne se perd pas, il faut contraindre la rétraction à suivre certaines règles. On parle alors de *rétracte par déformation* (Déf. A.26 page 240). L'intérêt d'une telle opération est de pouvoir disposer d'un objet plus simple de topologie très proche de celle de l'objet initial.

La sphère S^{n-1} est un rétracte par déformation de \mathbb{R}^n privé de son origine.

Invariants sur un espace muni d'une décomposition cellulaire

Nous nous intéressons maintenant à des invariants, issus de la topologie algébrique, exigeant de pouvoir réaliser une décomposition cellulaire de l'espace (Fig. 2.8). Nous allons les présenter succinctement, en insistant plus particulièrement sur leur pouvoir de représentation.



(a) Décomposition cellulaire de la sphère S^2 .

(b) Décomposition cellulaire du tore.

FIG. 2.8 – Exemple de décomposition cellulaire de deux objets simples.

Là, non plus, il ne s'agit pas de dresser une liste exhaustive de tous les invariants algébriques mais plutôt de présenter ceux qui peuvent s'avérer utiles dans le cadre de l'imagerie numérique. Nous évoquerons donc ici la caractéristique d'Euler, les groupes d'homologie, les groupes et anneaux de cohomologie. Il est à noter qu'ils ont été, historiquement, inventés à peu près dans cet ordre, du plus faible au plus fiable. En effet, dès lors qu'un invariant ne parvenait pas

à différencier deux objets topologiques non homéomorphes, on cherchait un nouvel invariant capable de le faire.

La *caractéristique d'Euler* n'est pas à proprement parler un invariant algébrique mais elle peut être reliée au rang des groupes d'homologie comme nous le verrons plus loin. Elle a d'abord été introduite sur les polyèdres. Elle est alors égale au nombre de faces moins le nombre d'arêtes plus le nombre de sommets. Elle a ensuite été étendue à des objets⁴ de dimension n qui peuvent être définis par agglomération d'un nombre fini d'éléments de dimension k , ou k -cellules pour k allant de 0 à n (Déf. A.28 page 241). On peut montrer que la valeur de la caractéristique d'Euler reste la même quelle que soit la décomposition cellulaire choisie pour l'objet. Elle caractérise donc bien l'objet.

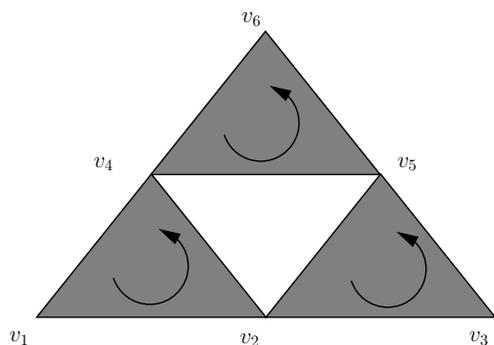
Les *groupes d'homologie* sont une autre catégorie d'invariants topologiques qui permettent de mettre en évidence les "trous" d'un espace topologique. A un espace topologique est associée une suite de groupes d'homologie $\{H_k\}$ pour k supérieur ou égal à 0. H_0 renseigne sur les composantes connexes de l'espace, tandis que H_k , $k > 0$ caractérise ses "trous k -dimensionnels". Ces groupes seront formellement définis dans le chapitre 5 page 187. On peut juste noter ici qu'ils nécessitent la définition d'un groupe C_k , appelé groupe des k -chaînes, pour chaque dimension k présente dans la subdivision cellulaire. Chacun de ces groupes permet de définir la structure des éléments d'une dimension donnée. Un élément de C_k est une chaîne de dimension k , autrement dit une combinaison linéaire d'éléments de dimension k de l'espace avec des coefficients pris dans un groupe abélien. Une base naturelle d'un tel groupe est constituée de l'ensemble des éléments k -dimensionnels de l'espace. On associe à ces groupes une suite de morphismes $\{\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}\}$ qui précisent la notion de bord entre les éléments dont les dimensions diffèrent de 1. Ces morphismes doivent refléter la propriété suivante : *le bord d'un bord est nul*. Autrement, dit $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. On peut remarquer qu'il existe différents types d'homologie, chacun lié au choix du groupe abélien dans lequel sont pris les coefficients des chaînes. Les groupes de coefficients les plus utilisés sont les groupes \mathbb{Z} (groupe des entiers) et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (groupes des classes d'équivalence des entiers pour la relation *modulo* p). Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est particulièrement utilisé lorsque les cellules de la subdivision ne peuvent pas être munies d'une orientation.

La figure 2.9 représente, par exemple, un objet composé de 3 faces, 9 arêtes et 6 sommets. Il ne possède qu'une composante connexe : son groupe d'homologie de dimension 0 est donc isomorphe à \mathbb{Z} . Il existe un trou de dimension 1, délimité par les arêtes $[v_2, v_4]$, $[v_4, v_5]$ et $[v_5, v_2]$ et aucun trou 2-dimensionnel. les groupes H_1 et H_2 sont ainsi respectivement isomorphes à \mathbb{Z} et au groupe trivial.

On se contente de remarquer ici qu'il existe une relation entre le groupe fondamental π_1 et le groupe d'homologie de dimension 1, H_1 . Ces deux groupes étudient des boucles de dimension 1. La différence essentielle est que deux cycles orientés différemment appartiennent à la même classe d'homologie mais généralement pas à la même classe d'homotopie. Le groupe d'homologie de dimension 1 n'est rien d'autre que l'abélianisation du groupe fondamental (cf Hatcher [96] page 166).

On appelle $n^{\text{ème}}$ nombre de Betti et on note β^n le rang du groupe d'homologie de dimension n . β^0 indique le nombre de composantes connexes de l'espace tandis que β^n , $n > 0$ compte le nombre de "trous n -dimensionnels" de l'espace topologique. Les nombres de Betti sont des invariants topologiques moins forts que les groupes d'homologie. On peut prouver que la caractéristique d'Euler χ peut être reliée aux nombres de Betti de la manière suivante : $\chi = \sum_{r=0}^n (-1)^r \beta^r$.

⁴Il s'agit de la classe des complexes cellulaires que nous reverrons plus loin.

FIG. 2.9 – Décomposition cellulaire d'un sous-espace de \mathbb{R}^2 .

Ainsi les nombres de Betti associés à l'espace de la figure 2.9 sont : $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$. Le calcul classique de la caractéristique d'Euler donne : $\chi = 3 - 9 + 6 = 0$. Cette valeur coïncide bien avec celle donnée par le calcul en fonction des nombres de Betti : $\chi = 1 - 1 + 0 = 0$. Un autre exemple de nombres de Betti associés à un objet cellulaire est donné sur la figure 2.2(c) page 16.

Il existe aussi un invariant topologique qui n'est autre que le dual des groupes d'homologie. Il s'agit des *groupes de cohomologie*. Ils permettent aussi de caractériser les trous (plus précisément les "co-trous") d'un espace. Cependant, leur structure algébrique est plus complète que celle des groupes d'homologie. Il est, en effet, possible de leur adjoindre un produit : le *cup product* qui leur donne une structure d'anneau.

2.1.3 Un espace topologique particulier : la variété

Historiquement, les topologues se sont toujours particulièrement intéressés aux espaces topologiques qui ressemblaient, du moins localement, à un espace de référence. Les *variétés* (Déf. A.30 page 243) sont de tels espaces qui ont la propriété d'être localement équivalents à un espace euclidien. Plus prosaïquement, une variété lorsqu'elle est connexe, fermée et contenue dans un espace euclidien de dimension juste supérieure, possède une propriété particulièrement intéressante. Elle sépare, en effet, l'espace qui la contient en deux parties, dont l'une est finie. Autrement dit, elle permet de définir des objets au sein d'un espace topologique. Il s'agit en quelque sorte d'une extension de la notion de courbe fermée définie dans des espaces $2D$ pour des espaces de dimensions supérieures. Une courbe fermée dans un espace $2D$ peut ainsi être vue comme une variété de dimension 1.

La sphère de dimension n est bien sûr une variété topologique de même que le tore, et la bouteille de Klein (Fig. 2.10), par exemple.

Une 2-variété fermée connexe dans l'espace euclidien E^3 est communément appelée une *surface*. Le théorème de Jordan dit qu'une surface sépare E^3 en deux composantes connexes dont l'une est finie. Ce théorème s'étend dans les dimensions supérieures. Il est alors connu sous le nom de théorème de Jordan-Brouwer (Thé. A.31 page 244).

Une variété fermée et connexe de dimension $n - 1$ plongée dans E^n est généralement appelée une *hyper-surface*.

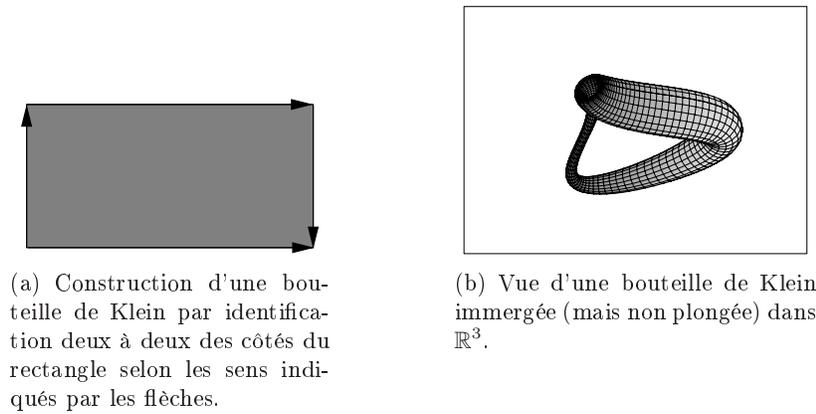


FIG. 2.10 – Bouteille de Klein.

Pour pouvoir différencier l'intérieur de l'extérieur d'une hyper-surface, on cherche généralement à attribuer une orientation à l'hyper-surface. En effet, il est possible de montrer que toute $(n - 1)$ -variété plongeable dans E^n est *orientable*⁵. Il existe plusieurs manières de définir une telle orientation sur une variété fermée de dimension n , l'une d'elles s'appuie sur le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homologie (cf Déf. A.32 page 244).

Définir un analogue discret à cette notion de variété fermée orientable est un des Graal de l'imagerie. En effet, de tels espaces topologiques permettraient de caractériser des objets d'une image simplement à l'aide de leurs bords. On verra que, dans la pratique, on doit souvent se contenter de définitions moins restrictives de bords d'objets mais qui respectent néanmoins un analogue discret du théorème de Jordan-Brouwer.

2.1.4 Topologie classique et applications en imagerie

Le tableau ci-dessous indique quelques utilisations possibles dans le contexte de l'imagerie numérique des principales notions topologiques décrites dans cette section.

⁵Le théorème, dit de *dualité d'Alexander*, permet de prouver que toute variété fermée de dimension $n - 1$ non-orientable n'est pas plongeable dans \mathbb{R}^n .

Usage	Propriété topologique	Exemples d'applications
Définition d'objets	Connexité (définition région) Variété (définition contours)	Segmentation, Modélisation, Construction de pyramides d'images...
Comparaison d'objets	Groupes d'homotopie Groupes et anneaux de cohomologie Groupes d'homologie Caractéristique d'Euler	Caractérisation d'objets, Reconnaissance de formes...
Simplification d'objets	Rétracte par déformation Plus généralement, transformation préservant un invariant	Squelettisation, Construction de pyramides d'images, Modélisation...
Agrégation d'éléments de l'image	Tout invariant topologique ⁶	Segmentation, Modélisation, Partition d'une image, Construction de pyramides d'images...

2.2 Problématique des images : passage au discret

Les notions de topologie que nous venons de voir ne peuvent être utilisées telles quelles pour la compréhension et la manipulation des images. En effet, pour pouvoir être traitées par un ordinateur, les images doivent être définies comme des ensembles discrets⁷. Or l'outil essentiel de la topologie est la continuité. Le nœud du problème réside donc dans la définition d'une notion de continuité cohérente sur les ensembles discrets utilisés pour représenter des images.

Nous allons évoquer ici les différentes façons d'associer une structure topologique à une image, d'abord au niveau pixel (autrement dit au niveau des particules élémentaires de l'image), puis au niveau régions (autrement dit, lorsqu'on veut travailler sur une partition de l'image).

2.2.1 Construction d'une topologie au niveau élémentaire de l'image

Il existe différentes façon d'aborder la question. Classiquement, on considère quatre types d'approches : *graphe*, *topologie combinatoire*, *axiomatique*, *analogue continu*. Elles ne s'excluent généralement pas l'une l'autre et s'avèrent souvent complémentaires.

L'approche *graphe*, proposée à l'origine par Rosenfeld *et al.* [175, 176, 177, 116] dans le cadre des images régulières en $2D$ et $3D$ puis généralisée par Herman dans [100], consiste à munir l'espace discret d'une relation de voisinage entre ses points, d'où découlent immédiatement les notions de chemin, et de connexité par arcs. Il est alors aussi possible de définir une notion d'homotopie.

L'approche *topologie combinatoire*, abordée notamment par Kovalevsky dans [124], contraint l'ensemble discret employé à posséder la structure d'un complexe cellulaire. Nous reviendrons sur la notion de complexe ultérieurement. Il nous suffit de dire pour le moment qu'une telle structure permet, comme pour la théorie des graphes, de définir des voisinages entre les éléments

⁶Le regroupement d'éléments de l'image est réalisé de sorte qu'un des invariants est une valeur fixée, par exemple une seule composante connexe, un groupe d'homotopie trivial...

⁷Un ensemble discret est un ensemble qui contient un nombre dénombrable d'éléments.

de l'image mais possède en outre la faculté de mettre naturellement en évidence plusieurs notions de voisinage. Il est alors possible de définir différentes connexités par arcs, selon l'application désirée. En outre, la structure d'un complexe cellulaire est de nature algébrique, ce qui permet d'y construire les invariants topologiques algébriques dont nous avons parlé précédemment.

L'approche *axiomatique*, suivie par Khalimsky dans [110], se fonde sur la définition classique des espaces topologiques; on définit sur l'ensemble discret une famille de sous-ensembles que l'on appelle ouverts et qui doivent satisfaire à des axiomes préalablement choisis. Ces axiomes doivent être les plus proches possibles des axiomes utilisés en topologie générale.

L'approche *analogue continu*, utilisée entre autres par Dominguez *et al.* dans [63], cherche à plonger l'ensemble discret dans un espace continu, généralement un espace métrique, souvent euclidien, de sorte que les notions de topologie discrète de l'ensemble peuvent être déduites des notions de topologie générale de l'espace continu. La justification de cette approche repose sur le fait qu'une image est souvent obtenue par discrétisation d'un espace continu (généralement euclidien). Le problème réside alors dans la mise en évidence d'un processus approprié de plongement, autrement dit un plongement qui soit le plus proche possible de l'inverse de la discrétisation utilisée.

Comme nous le verrons par la suite, ces différentes approches sont souvent utilisées en complément les unes des autres et il n'est pas vraiment possible de classer les modèles utilisés selon le type d'approche adopté.

Cependant, si l'on regarde exclusivement la structure des ensembles destinés à représenter les images, on se rend compte que deux principales philosophies émergent, qui correspondent grosso modo aux deux premières approches mentionnées. Si l'on appelle *spels* les éléments essentiels d'une image,⁸ les deux manières de structurer l'ensemble discret correspondant sont les suivantes :

- i). ajout d'une relation d'adjacence entre les spels
- ii). ajout d'éléments intermédiaires de différentes natures entre les spels qui caractérisent différents types d'adjacence.

Il est maintenant important de préciser quelques points de vocabulaire. En effet, le terme *topologie discrète* est malencontreusement employé dans différents contextes pour définir des concepts partiellement voire totalement différents. Dans la topologie classique, il a d'abord été utilisé pour nommer une topologie particulière pour laquelle tout sous-ensemble d'un espace est ouvert. Mais il est aussi employé comme deuxième nom de la topologie d'Alexandroff (cf définition A.6 page 227). En fait dans le cas des topologies \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , les deux notions coïncident. Mais ce n'est pas le cas pour les topologies \mathcal{T}_0 . Dans le cadre des images, il sert parfois à traduire le terme *digital topology* introduit par Rosenfeld [177]. Enfin, il est aussi utilisé dans le sens très général de topologie d'un espace discret.

En ce qui nous concerne, nous parlerons de *topologie digitale* lorsqu'il s'agira de la topologie définie par Rosenfeld, et le terme *topologie discrète* sera précisé lorsque le contexte ne lèvera pas lui-même l'ambiguïté.

Cependant on peut d'ores et déjà dire que la topologie discrète dans le premier sens que lui a donné la topologie générale ne nous sera guère utile. En effet, avec une telle topologie, tout point d'un espace discret est ouvert, ce qui implique que l'espace comporte autant de composantes connexes que d'éléments. Il est alors impossible de définir des surfaces de Jordan et par voie de conséquence des objets discrets sur une telle topologie.

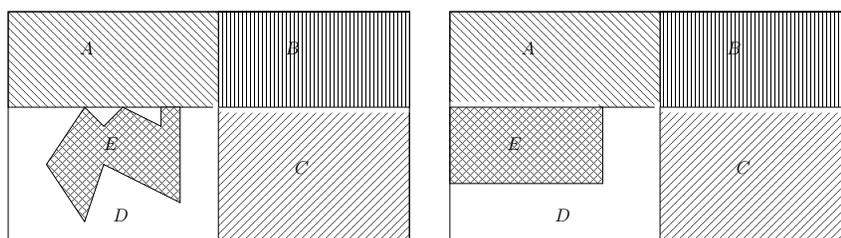
⁸les éléments d'une image sont parfois aussi appelés *xels*.

2.2.2 Construction d'une topologie relative à une partition de l'image

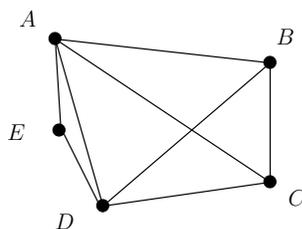
La plupart du temps une image décrivant des données de dimension n est la discrétisation d'un espace continu, souvent un espace euclidien, de dimension n . Les deux principales méthodes utilisées pour définir la structure d'une image partitionnée en régions trouvent leur origine dans les deux façons de découper un tel espace pour le discrétiser.

La première manière de discrétiser un tel espace consiste à le partitionner en plusieurs régions homogènes du point de vue de la dimension. L'espace discret est alors construit de la manière suivante. On associe à chaque région de l'image un élément de l'espace discret ou *spel*. Puis pour garder l'organisation interne de l'espace continu, on ajoute une relation binaire entre les éléments discrets qui reflète les relations de voisinage entre régions. La première manière de structurer une image discrète est une abstraction de cette construction. Elle revient à ajouter simplement une relation d'adjacence entre les spels d'un espace discret. Cette méthode permet de définir un certain nombre de notions topologiques même si la plupart des modèles ne peuvent être associés à une topologie au sens général du terme. Ce modèle est isomorphe à un graphe dont les sommets sont les spels de l'image et les arêtes la relation d'adjacence entre ces éléments.

L'inconvénient de cette approche réside dans son impossibilité à distinguer différents types d'adjacence entre régions. Elle représentera, par exemple, de manière similaire deux régions qui sont ponctuellement adjacentes et deux régions qui possèdent une frontière complexe. Elle ne saura pas non plus distinguer deux régions dont la frontière est d'un seul tenant de deux régions séparées par une frontière possédant plusieurs composantes connexes (Fig 2.11).



(a) 2 partitions en régions d'un même espace : à gauche la région D n'est pas connexe et la frontière entre A et E non plus contrairement à la figure de droite.



(b) Unique graphe d'adjacence représentant les deux partitions en régions ci-dessus.

FIG. 2.11 – Limitations de la représentation par graphe d'adjacence.

La deuxième approche a voulu pallier ces limitations en ajoutant des informations supplémentaires. Elle correspond à une division cellulaire d'un espace continu. Au lieu de ne considérer que des régions de même dimension dans l'image, on découpe celle-ci à l'aide d'éléments de

dimensions 0 à n . Ainsi pour chaque région de dimension maximale de l'espace, on définit explicitement ses bords de dimension k pour k allant de 0 à $n-1$. Les régions sont alors généralement définies comme des polyèdres de différentes dimensions. Un tel modèle permet de différencier plusieurs types de voisinage, suivant la dimension des éléments intermédiaires mis en jeu. On peut en effet distinguer deux régions réunies par un élément de dimension 0 de deux régions adjacentes selon un élément de dimension $k > 0$. L'abstraction de cette approche est isomorphe à un *graphe orienté*. Les nœuds de profondeur n représentent les spels et les nœuds intermédiaires ainsi que les arêtes servent à préciser le type de liaison qui les unit (Fig. 2.12). Une topologie d'Alexandroff se définit naturellement sur de tels modèles. On parle aussi parfois de topologie cellulaire.

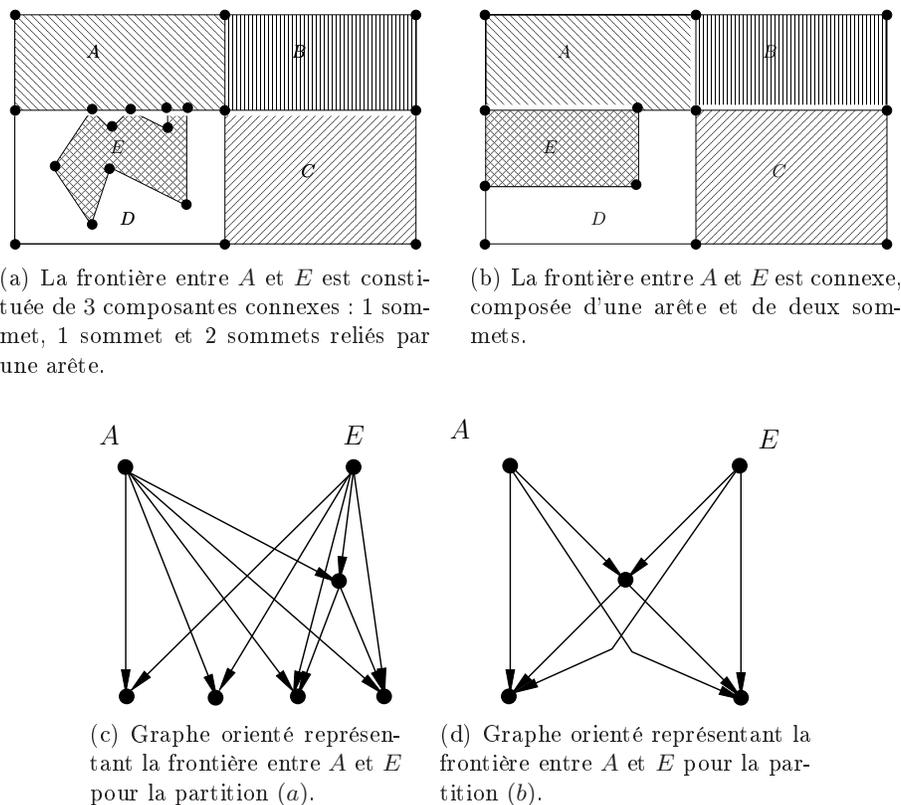


FIG. 2.12 – Représentations cellulaires des partitions en régions de la figure 2.11 : elles permettent de mettre en évidence les particularités des frontières entre régions.

2.2.3 Bilan

Que ce soit pour représenter une image à un niveau pixel ou à un niveau région, les deux mêmes approches, graphe ou cellulaire, sont utilisées. Les sections suivantes visent à comparer l'adéquation de ces deux approches avec l'étude et la manipulation d'images.

Les images sont la plupart du temps définies sur un espace discret associé à \mathbb{Z}^n . Nous commençons donc dans un premier temps par expliquer comment les deux approches mentionnées ici ont été exploitées dans ce cadre particulier. Nous définissons dans les deux cas l'espace discret associé à une image au niveau pixel puis au niveau région et décrivons ensuite les caractéristiques

topologiques spécifiques que l'on peut définir sur ces modèles. La même démarche est adoptée pour examiner ces deux approches dans le cadre d'images associées à un espace discret moins contraint.

TAB. 2.1: Modèles suivant l'approche graphe : représentation niveau pixels

Modèle	Sous-classe	Dim	Utilisation		Géométrie
			Analyse	Modélisation	
espace discret de Herman	espace discret de Herman [100]	nD	X		
	graphe de Jordan [2, 100]	nD	X		
	espace discret 1-sim-plement connexe [99, 100]	nD	X		
	carré : Z^2 Rosenfeld <i>et al.</i> [116]	$2D$	X		X
maillage	hexagonal : Z^2 [95, 61, 100]	$2D$	X		X
	cubique : Z^3 [116]	$3D$	X		X
	body centered cubic (BCC) Grid [121, 100]	$3D$	X		X
	face centered cubic (FCC) Grid [194, 100]	$3D$	X		X
	espace discret d'Evako [76]	nD	X		
espace discret normal [75]	nD		X		

TAB. 2.2: Modèles suivant l'approche graphes : représentation niveau régions

Modèle	Sous-classe	Dim	Utilisation		Géométrie
			Analyse	Modélisation	
graphe d'adjacence de régions	graphe d'adjacence de régions [45]	nD	X	X	
	diagramme de Voronoï - triangulation de Delaunay [45]	nD	X	X	X
Graphes duaux [144]		$2D$	X		

TAB. 2.3: Modèles suivant l'approche cellulaire au niveau pixels

Modèle	Sous-classe	Dim	Utilisation		Géométrie
			Analyse	Modélisation	
grille de Khalimsky [110]		nD	X		X
	ordres [19]	nD	X		
ordres	H_n [22]	nD	X		X
	n -surface [22]	nD	X		
complexe cellulaire abstrait	complexe polyédrique	nD	X	X	X

TAB. 2.4: Modèles suivant l'approche cellulaire au niveau régions

Modèle	Sous-classe	Dim	Utilisation		Géométrie
			Analyse	Modélisation	
graphe d'incidence [70]		nD		X	
complexe cellulaire abstrait	complexe cellulaire abstrait [124]	nD	X	X	
	complexe cartésien [120]	nD	X	X	X
	complexe simplicial abstrait	nD	X	X	X
	complexe simplicial	nD	X	X	X
	complexe polyédrique	nD	X	X	X
	n -variété cubique faible [108]	nD	X		X
	n -pseudo-variété cubique [108]	nD	X		X
	variété stellaire [138]	nD	X	X	X
	complexe de blocs [126]	nD	X		
	pseudo-variété [9]	nD	X	X	X
complexe cellulaire d'Alexandrov	complexe cellulaire d'Alexandrov [9]	nD	X	X	
	α -complexe [9]	nD	X	X	
CW -complexe cell-tuples [36]		nD		X	X
		nD		X	
ensembles simpliciaux	ensembles simpliciaux [160]	nD		X	
	ensembles semi-simpliciaux	nD		X	
	ensembles semi-simpliciaux numérotés [141]	nD		X	
	quasi-variétés simpliciales [141]	nD		X	
	quasi-variétés cellulaires [141]	nD			X
	ensembles simpliciaux [81]	nD			X
ensembles simpliciaux	ensembles cubiques [81]	nD		X	
		nD		X	

suite à la page suivante

Modèle	Sous-classe	Dim	Utilisation		Géométrie
			Analyse	Modélisation	
cartes combinatoires	n -cartes [140]	nD	X	X	
	cartes généralisées [140]	nD		X	
	hypercarte [46, 66]	nD		X	
	chaînes de cartes [74]	nD		X	
	carte topologique GE [31, 34, 59]	$2D/3D$	X	X	X
	carte topologique HLE [31, 49, 50]	$2D/3D$	X	X	X
	XP -cartes [118, 119]	$2D/3D$		X	
	GEO -cartes [161]	$2D/3D$		X	X

TAB. 2.5: Notions topologiques définies sur les modèles. Un "?" signifie que la question n'a pas (encore) été étudiée.

Modèle	Notions définies			
	Connexité	Surface / Courbe de Jordan	Homotopie de chemins	Points simples
espace discret	X	X		
maillage	X	X	X	X
grille de khalimsky	X	X	?	?
ordres	X	X	X	X
espace digital	X	X	?	?
complexe cellulaire	X	X	X	X
cartes	X	X		

TAB. 2.6: Invariants topologiques algébriques définis sur les modèles. Un "?" signifie que la question n'a pas (encore) été étudiée.

Modèle	Invariants topologiques			
	constante d'Euler	groupe d'homologie	groupe de cohomologie	groupe d'homotopie
espace discret				
maillage	X			X
grille de khalimsky	?	?	?	?
ordres	?	?	?	?
espace digital	?	?	?	?
complexe cellulaire	X	X	X	X
cartes	X	?	?	?

2.3 Approche graphe pour des images construites sur \mathbb{Z}^n

Une image construite sur \mathbb{Z}^n est classiquement une image dont chaque élément est représenté par un point de \mathbb{Z}^n . Nous commençons par expliquer différentes méthodes utilisées pour munir l'ensemble \mathbb{Z}^n d'une structure de graphe appropriée. Puis nous montrons les limites rencontrées lorsque l'on souhaite structurer une telle image en régions en gardant l'approche graphe. Il s'agit ensuite d'y définir les notions topologiques essentielles. La notion de connexité semble la plus naturelle à définir en premier lieu. La connexité est ici vue comme la clôture transitive de relations d'adjacence construites sur \mathbb{Z}^n . Nous verrons que les connexités ainsi définies ne sont pas forcément reliées à une topologie au sens classique. On s'intéresse ensuite à la caractérisation de surfaces sur de tels espaces. La principale difficulté pour atteindre cet objectif réside dans le fait que l'approche graphe ne permet pas de définir explicitement des objets de dimension $(n - 1)$ sur \mathbb{Z}^n . Nous verrons que deux approches différentes ont été mises en place pour contourner ce problème. Nous nous penchons ensuite sur les autres invariants topologiques pouvant être associés à \mathbb{Z}^n muni d'une structure de graphe. Les notions relatives à l'homotopie ont déjà été définies sur des graphes. Elles peuvent donc être exploitées dans ce cadre particulier. Nous verrons cependant que pour être utiles elles devront être adaptées et prendre en compte des propriétés de l'analogie continue de \mathbb{Z}^n . La plupart des autres invariants mentionnés précédemment nécessitent une décomposition cellulaire et ne peuvent donc a priori pas être transférés dans ce cadre. Nous verrons cependant qu'en se basant sur certains analogues continus, il a été possible, sur \mathbb{Z}^2 , de définir de manière discrète une caractéristique d'Euler ne dépendant que du choix des adjacences choisies. Cependant, ce résultat peut être considéré comme marginal dans le sens où il semble difficile de l'étendre dans les dimensions supérieures.

2.3.1 Définitions

Image discrète sur \mathbb{Z}^n

Associer une représentation discrète construite sur \mathbb{Z}^n à une image consiste à discrétiser celle-ci en régions élémentaires puis à associer à chacune de ces régions un point de \mathbb{Z}^n . Pour structurer cet ensemble discret, on utilisera une relation d'adjacence entre éléments qui rendra compte de la relation d'adjacence entre ces régions élémentaires. Le support de l'image étant connexe, \mathbb{Z}^n sera lui aussi connexe pour la relation d'adjacence choisie. On appelle cette adjacence, une *proto-adjacence*, et \mathbb{Z}^n muni de cette proto-adjacence est qualifié d'*espace discret*. On suit en cela le formalisme de Herman qui sera précisé page 62. Une image binaire discrète est alors tout simplement définie comme un espace discret muni d'une fonction associant à tout élément de l'espace la valeur 0 ou la valeur 1. Rosenfeld *et al.* ont été les précurseurs de cette approche graphe. Et les images discrètes sur \mathbb{Z}^n constituent une généralisation des images binaires qu'ils ont définies sur \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 .

On se place ici au niveau des particules élémentaires de l'image : pixel (en $2D$), voxel (en $3D$), spel (en nD). On verra par la suite (section 2.3.2) comment s'étend cette approche graphe lorsqu'on considère non plus les éléments de l'image mais des agrégats de ces éléments, autrement dit une partition plus évoluée de l'espace sur lequel est construit l'image.

Les régions élémentaires de l'image ont traditionnellement ici toutes la même forme et leur réunion constitue un pavage, la plupart du temps régulier, de l'espace (cf Annexe B page 247). Classiquement, ces régions sont carrées ou hexagonales en $2D$. Elles deviennent généralement des cubes en $3D$. On utilise aussi parfois dans cette dimension des pavages semi-réguliers l'octaèdre tronqué et le dodécaèdre rhombique (Fig. B.2 page 248). Pour les dimensions supérieures, on se

limite à un pavage de l'espace avec des cubes de dimension n .

Exemples classiques

L'espace \mathbb{Z}^n correspondant à un découpage du support de l'image en n -cubes est naturellement muni de la relation de proto-adjacence, notée ω_n qui, si on nomme x_i la $i^{\text{ème}}$ coordonnée d'un élément x de \mathbb{Z}^n , se formalise par :

$$(c, d) \in \omega_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |c_k - d_k| = 1$$

ω_2 correspond à la notion de 4-adjacence classiquement définie sur \mathbb{Z}^2 (Fig. 2.13(a)) et ω_3 à la 6-adjacence de \mathbb{Z}^3 (Fig. 2.14). L'espace discret (\mathbb{Z}^n, ω_n) est souvent simplement noté \mathbb{Z}^n .

Comme nous l'avons dit, un autre espace discret parfois utilisé en $2D$ s'appuie sur le pavage hexagonal. L'espace discret (\mathbb{Z}^2, β_2) (Fig. 2.13(b)), dont la proto-adjacence β_2 est définie ci-dessous, simule un tel pavage :

$$(c, d) \in \beta_2 \Leftrightarrow c \neq d, |c_1 - d_1| < 1, |c_2 - d_2| < 1 \text{ et } (c_1 - d_1) \neq (d_2 - c_2)$$

Enfin les grilles *BCC* et *FCC* correspondant respectivement à une partition d'un espace $3D$ au moyen d'octaèdres tronqués et de dodécaèdres rhombiques (Fig. 2.15) peuvent être représentées respectivement par les espaces discrets [100] $(\mathbb{Z}_B^\phi, \beta_B^\phi)$ et $(\mathbb{Z}_F^\phi, \beta_F^\phi)$ où \mathbb{Z}_B^ϕ et \mathbb{Z}_F^ϕ sont des sous-ensembles de \mathbb{Z}^3 définis pour tout ϕ nombre réel positif par $\mathbb{Z}_B^\phi = \{(\phi x, \phi y, \phi z) \in \mathbb{Z}^3, x \equiv y \equiv z \pmod{2}\}$ et $\mathbb{Z}_F^\phi = \{(\phi x, \phi y, \phi z) \in \mathbb{Z}^3, x + y + z \equiv 0 \pmod{2}\}$. Les proto-adjacences β_B^ϕ et β_F^ϕ correspondent respectivement à une 8- et à une 12- adjacence et sont données par :

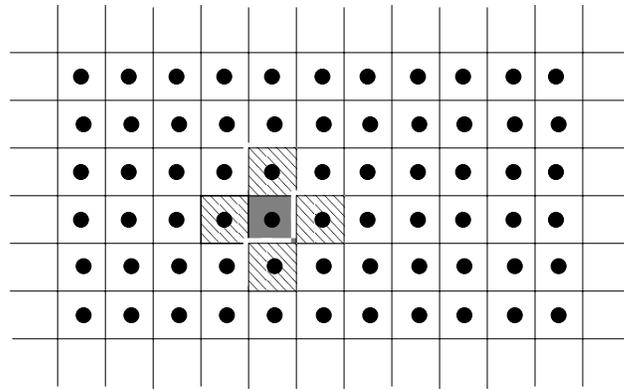
$$\begin{aligned} (c, d) \in \beta_B^\phi &\Leftrightarrow \|c - d\| = \phi\sqrt{3} \\ (c, d) \in \beta_F^\phi &\Leftrightarrow \|c - d\| = \phi\sqrt{2} \end{aligned}$$

On peut noter que ces deux adjacences sont isotropes.

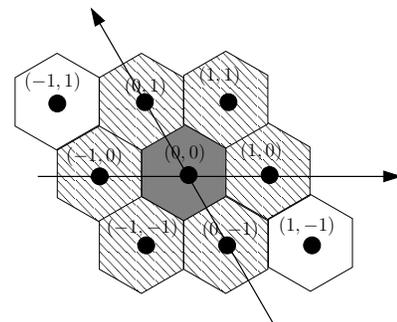
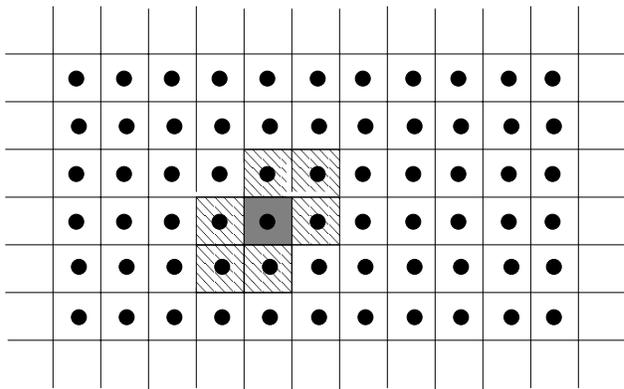
2.3.2 Structuration d'images en régions

Structurer une image en régions consiste à réaliser une partition de l'ensemble des spels de l'image. Différents processus permettent d'obtenir un tel résultat. Ils ne sont pas à proprement parler spécifiques à l'utilisation de la grille \mathbb{Z}^n mais c'est dans ce cadre qu'ils ont été le plus utilisés. L'approche graphe classique conduit à associer un sommet du graphe à chaque région et une arête entre deux régions adjacentes. Il s'agit d'une représentation par *graphe d'adjacence de région* (*Region Adjacency Graph* ou *RAG*) [176]. Si cette structure est aisément utilisable en n'importe quelle dimension, elle présente de nombreux inconvénients. Elle ne permet pas de distinguer une relation d'adjacence d'une relation d'inclusion de régions. Elle est aussi incapable de rendre compte d'une adjacence multiple entre deux régions (Fig. 2.16). Une telle structure n'a pas non plus la faculté de caractériser une partition de l'image puisque deux partitions non isomorphes peuvent être représentées par le même graphe.

Un modèle plus évolué a été créé en $2D$ pour pallier certaines de ces limitations. Connue sous le nom de *graphes duaux* [128, 144], il s'agit de représenter la partition à l'aide de deux graphes, l'un est une version étendue d'un RAG, l'autre est son dual. Le RAG étendu est simplement



(a) ω_2 -adjacence : les éléments hachurés sont ω_2 -adjacents à l'élément grisé.



(b) β_2 -adjacence : les éléments hachurés sont β_2 -adjacents à l'élément grisé. A droite représentation du pavage hexagonal correspondant.

FIG. 2.13 – Représentation de différentes relations de proto-adjacences sur \mathbb{Z}^2 . Un élément de \mathbb{Z}^2 (point) est souvent représenté par le carré unité centré sur lui.

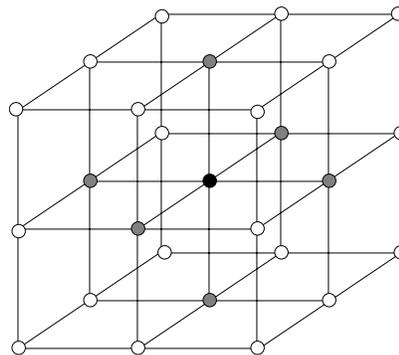


FIG. 2.14 – Représentation de la proto-adjacence ω_3 sur \mathbb{Z}^3 : les spels grisés sont les ω_3 -voisins du spel noir.

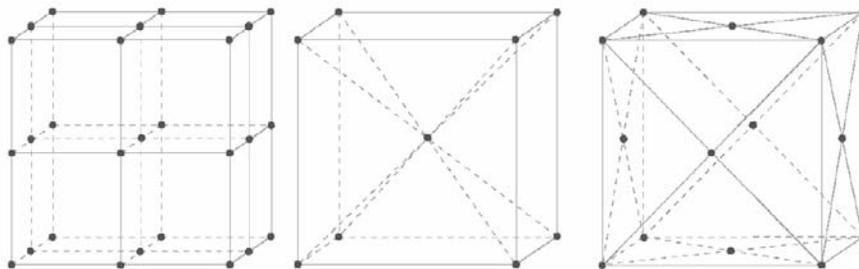


FIG. 2.15 – De gauche à droite : configuration des points d'un maillage cubique, d'une grille *BCC* et d'une grille *FCC*.

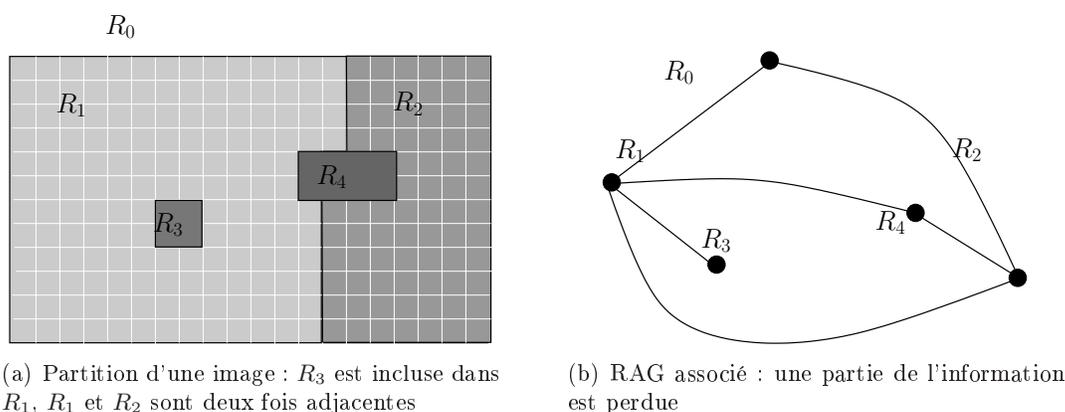


FIG. 2.16 – Partition d'une image et graphe d'adjacence de régions correspondant

un multi-graphe ce qui permet de mémoriser les multiples adjacences entre régions. Il peut aussi éventuellement contenir des boucles pour traduire des relations d'inclusion. Ces boucles proviennent du fait que le graphe primal et son dual doivent tous deux être connexes. De ce fait, dans le dual, une arête fictive relie la région incluse à la région la contenant. Cette arête devient, dans le primal, une boucle enracinée au sommet correspondant à la région contenant et entourant le sommet représentant la région incluse (Fig. 2.17). On voit tout de suite plusieurs problèmes intrinsèques à ce modèle : les arêtes n'ont pas toutes la même signification (réelle ou fictive), les graphes utilisés doivent être planaires et on doit être capable d'exploiter les propriétés géométriques du graphe, pour pouvoir détecter une inclusion de régions. En outre, il paraît difficile d'étendre cette définition en dimension supérieure à 2. Enfin, des modifications de la subdivision doivent être répercutées sur les deux graphes, ce qui en fait un modèle plus coûteux à manipuler que le RAG.

Cependant ce modèle permet de représenter plus d'informations que les RAG et s'est avéré intéressant pour construire et manipuler des pyramides d'images $2D$. La construction d'un niveau se fait à partir du niveau précédent par des mécanismes de contraction et suppression d'arêtes dans les deux graphes [128].

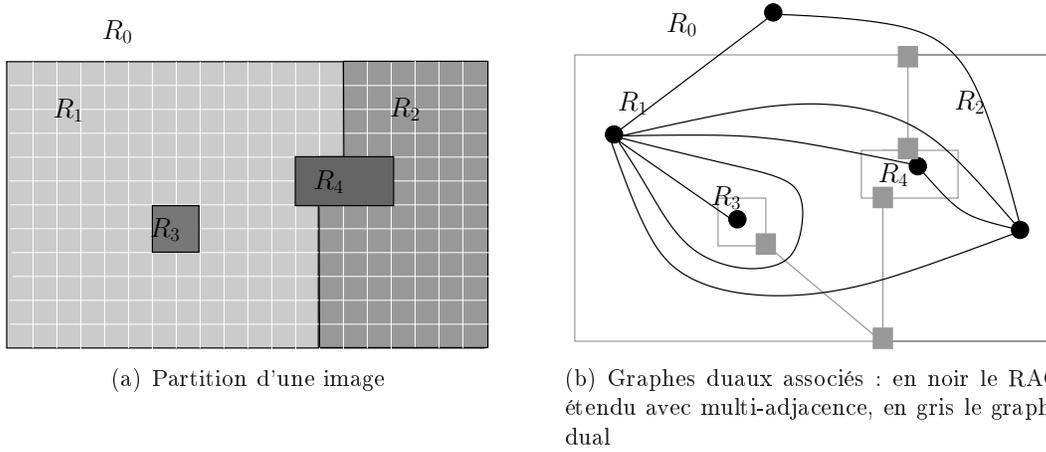


FIG. 2.17 – Partition d'une image et graphes associés

2.3.3 Connexité

Définition

Par définition, tout espace discret construit sur \mathbb{Z}^n est connexe pour la relation de proto-adjacence choisie. Cependant nous verrons par la suite qu'il est souvent nécessaire de manipuler d'autres notions de connexité sur ces espaces. Ces connexités sont définies à partir de relations binaires symétriques, appelées *spel-adjacences*. La connexité associée à une spel-adjacence donnée correspond tout simplement à la clôture transitive de cette spel-adjacence.

Exemples classiques

Pour l'espace discret (\mathbb{Z}^n, ω_n) , outre ω_n , les spel-adjacences les plus utilisées sont :

– α_n :

$$(c, d) \in \alpha_n \Leftrightarrow c \neq d \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\}, |c_k - d_k| \leq 1$$

– δ_n :

$$(c, d) \in \delta_n \Leftrightarrow (c, d) \in \alpha_n \text{ et } \sum_{k=1}^n |c_k - d_k| \leq 2$$

$\alpha_2 = \delta_2$ correspond à la 8-adjacence classiquement définie sur \mathbb{Z}^2 (Fig. 2.18), α_3 à la 26-adjacence et δ_3 à la 18-adjacence définies sur \mathbb{Z}^3 . α_n et δ_n définissent bien des spel-adjacences valides sur (\mathbb{Z}^n, ω_n) , puisqu'elles contiennent toutes deux ω_n .

De la même manière, on peut définir les spel-adjacences γ_B^ϕ et γ_F^ϕ sur les grilles *BCC* et *FCC* représentées par $(\mathbb{Z}_B^\phi, \beta_B^\phi)$ et $(\mathbb{Z}_F^\phi, \beta_F^\phi)$. Elles correspondent respectivement à une 14-adjacence et à une 18-adjacence.

$$(c, d) \in \gamma_B^\phi \Leftrightarrow \begin{cases} \|c - d\| = \phi\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ \exists i \in \{0, \dots, 2\}, |c_i - d_i| = 2\phi \text{ et } \forall j \neq i, c_j = d_j \end{cases}$$

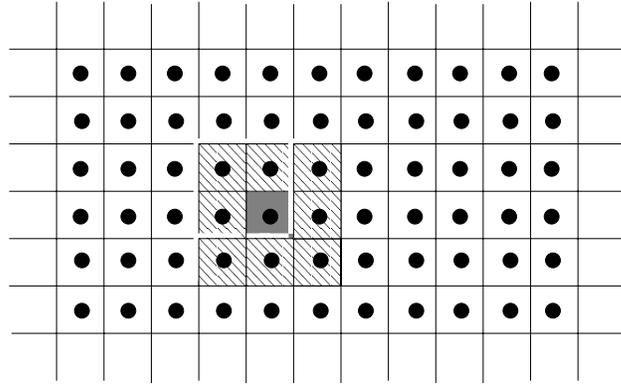


FIG. 2.18 – α_2 -adjacence : les éléments hachurés sont α_2 -adjacents à l'élément grisé.

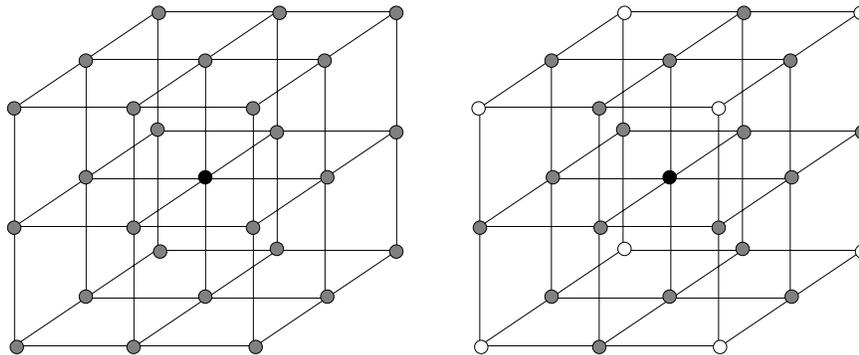


FIG. 2.19 – Représentation de l' α_3 - et de la δ_3 -adjacence sur \mathbb{Z}^3 : les spels gris sont les α_3 -voisins (à gauche), les δ_3 -voisins (à droite) du spel noir.

$$(c, d) \in \gamma_F^\phi \Leftrightarrow \begin{cases} \|c - d\| = \phi\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ \exists i \in \{0, \dots, 2\}, |c_i - d_i| = 2\phi \text{ et } \forall j \neq i, c_j = d_j \end{cases}$$

Topologie classique sur \mathbb{Z}^n

Il est donc possible de construire diverses notions de connexité sur un espace discret construit sur \mathbb{Z}^n . Cependant il nous faut remarquer que ces notions de connexité discrète ne sont pas toujours compatibles avec la définition d'une topologie au sens classique. Autrement dit, rien ne garantit que l'on peut construire une famille d'ouverts sur l'espace discret \mathbb{Z}^n dont la connexité induite correspondra précisément soit à la connexité induite par la proto-adjacence, soit à une autre notion de connexité cohérente avec la structure de l'espace.

Le théorème ci-dessous formalise les propriétés que doit vérifier une spel-adjacence sur \mathbb{Z}^n pour garantir une cohésion satisfaisante entre spels de l'image (points i) et ii)) ainsi que celle caractérisant sa faculté à induire une topologie au sens classique du terme (point iii)). On appellera une topologie construite via une telle spel-adjacence une *topologie adéquate*.

Théorème 2.1 (Topologie adéquate associée à \mathbb{Z}^n (adapté de [69, 114])) Une spel-adjacence ρ_n , définie sur \mathbb{Z}^n , induit une topologie adéquate sur \mathbb{Z}^n si et seulement si :

- i). $\omega_n \subseteq \rho_n \subseteq \alpha_n$,
- ii). $\forall x \in \mathbb{Z}^n, \{x\} \cup \{y / (x, y) \in \rho_n\}$ est ω_n -connexe,
- iii). et il existe une topologie \mathcal{O} sur \mathbb{Z}^n , telle que les composantes ρ_n -connexes de \mathbb{Z}^n soient précisément ses composantes connexes pour la topologie \mathcal{O} .

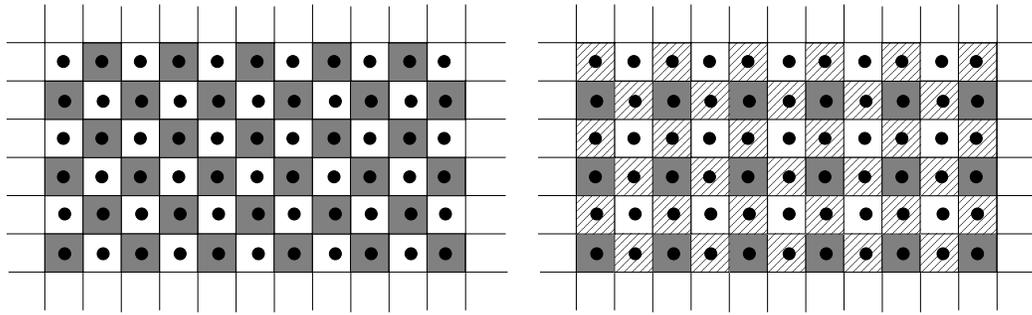
Dans le cas de \mathbb{Z}^2 , une topologie adéquate induite par une spel-adjacence sera telle que tout sous-ensemble ω_2 -connexe soit (topologiquement) connexe et que tout sous-ensemble non α_2 -connexe ne soit pas (topologiquement) connexe. Il a été montré qu'il n'existe, sur \mathbb{Z}^2 , que 2 telles topologies [69, 114]. L'une d'elles, introduite par Marcus *et al.* [159], utilisée par Rosenfeld dans [177], est telle que ses composantes connexes correspondent exactement aux composantes ω_2 -connexes (Fig. 2.20(a)).

Nous reviendrons sur la deuxième topologie possible dans la section 2.4. Contentons nous de dire ici qu'elle s'avère homéomorphe à la topologie cellulaire associée au plan par Alexandre et Hopf [8] aussi bien qu'à celle associée à la grille par Khalimsky [110] et à celle définie par Kovalevsky [124] (Fig 2.20(b)).

On peut aussi noter qu'il n'existe aucune topologie sur \mathbb{Z}^2 dont les composantes connexes coïncident avec les composantes α_2 -connexes. Les topologies pouvant être ainsi construites sur \mathbb{Z}^3 et \mathbb{Z}^4 ont été étudiées respectivement dans [69, 114] et [114].

2.3.4 Surfaces et bords d'objets

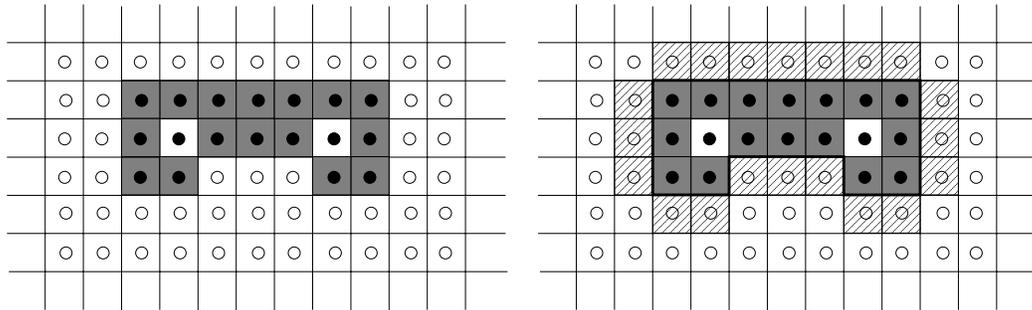
Historiquement, l'expression d'un théorème de Jordan a d'abord été réalisée sur des images $2D$ en définissant la notion de *courbes fermées*. Puis, diverses études ont tenté d'étendre ces résultats d'abord en $3D$ en caractérisant des surfaces $2D$, puis en dimension quelconque. Par la suite, nous emploierons le terme général de surface pour désigner indifféremment une courbe fermée dans un espace $2D$ et une surface de dimension $n - 1$ dans un espace de dimension n ($n > 2$).



(a) Topologie de Marcus sur \mathbb{Z}^2 : le plus petit ouvert contenant un point de \mathbb{Z}^2 est soit lui-même ouvert (point dans case grisée), soit l'union de lui-même et de son 4-voisinage (point dans case blanche).
 (b) Topologie cellulaire sur \mathbb{Z}^2 : le plus petit ouvert contenant un point de \mathbb{Z}^2 est soit lui-même ouvert (point dans case grisée), soit l'union de lui-même et de son 8-voisinage (point dans case blanche), soit lui-même et l'union de ses voisins grisés (point dans une case hachurée).

FIG. 2.20 – Topologies sur \mathbb{Z}^2 .

Il existe essentiellement deux approches pour définir des surfaces sur des images représentées par des graphes. Elles découlent des deux manières différentes de définir les éléments constituant une surface. La première associe un élément de surface à un spel donné (Fig. 2.21(a)). Une surface est alors un objet particulier de l'image caractérisé par des propriétés de finesse et de séparation [80, 116, 155, 164]. L'avantage de cette méthode repose sur le fait que la surface obtenue étant un objet comme un autre, il est possible de lui appliquer directement des algorithmes définis sur les objets d'une image, par exemple un procédé d'amincissement homotopique. La seconde consiste à définir chacun de ces éléments comme un couple de spels (Fig. 2.21(b)), souvent appelé *surfel* pour *surface element* ou *bel* pour *boundary element*, l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur de la surface [97, 98, 100, 132, 178, 196]. Une orientation peut ainsi être aisément associée à la surface dès lors que l'on exige que chaque couple de spels soit orienté.



(a) Frontière représentée par un ensemble de spels (grisés).
 (b) Frontière représentée par des paires de spels (1 grisé / 1 rayé partageant un côté).

FIG. 2.21 – Deux façons de représenter la frontière entre un ensemble de pixels blancs et un ensemble de pixels noirs.

Ces deux approches se heurtent à une difficulté commune. Les surfaces qu'elles visent à définir doivent permettre de séparer sans ambiguïté l'espace discret en deux composantes connexes

distinctes. Or, même dans des cas apparemment simples, peut apparaître sur certains espaces discrets ce que l'on nomme le *paradoxe de la connexité* (Fig. 2.22). Ce paradoxe provient de l'impossibilité de l'approche graphe à rendre complètement compte de l'information d'adjacence dans l'espace continu associé. Par exemple, deux pixels 8-adjacents dans \mathbb{Z}^2 pourront aussi bien représenter deux carrés de \mathbb{R}^2 partageant une arête ou partageant une face. Autrement dit différents types d'adjacence dans l'espace continu seront rassemblés en une unique relation d'adjacence dans \mathbb{Z}^2 . Pour éviter ce problème, il faudrait un découpage de l'espace continu où l'adjacence de régions est équivalente à une adjacence de faces. Un pavage hexagonal répond bien à ses exigences puisque deux régions adjacentes par un sommet le sont aussi par une arête. Cependant, les pavages carrés peuvent difficilement être écartés. Ils sont, en effet, en adéquation avec les dispositifs d'affichage des images, également avec certains types de capteurs. Ils présentent en outre des propriétés intéressantes telles que la récursivité (cf Annexe B page 247).

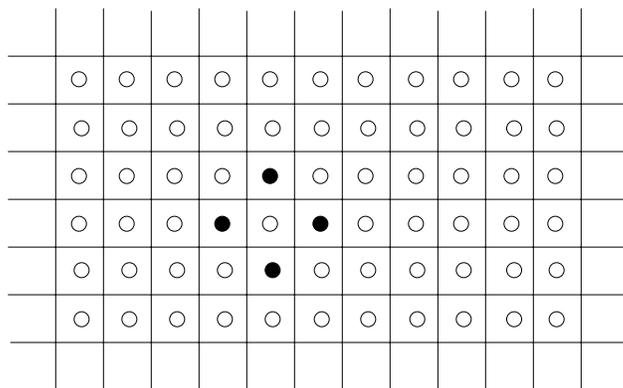


FIG. 2.22 – Paradoxe de connexité : si on choisit la 4-connexité pour les spels noirs et blancs, la courbe noire n'est pas connexe et pourtant sépare l'ensemble des spels blancs en deux composantes connexes, si on choisit la 8-connexité, les spels noirs forment une courbe fermée mais celle-ci ne sépare pas l'ensemble des spels blancs en deux composantes connexes.

Surfaces de spels

Lorsque l'on considère des *surfaces de spels*, la notion de frontière n'est pas intrinséquement définie et toute la question consiste à construire un sous-ensemble de spels qui satisfasse la propriété de séparation d'une surface et qui soit en même temps un objet fin.

Définition 2.2 (Surface de spels) *Une surface de spels est un objet fin et séparant de l'image.*

Les travaux visant à caractériser de telles surfaces doivent donc répondre à la double question : "Qu'est-ce qu'un objet fin et qu'est-ce qu'un objet séparant?". On sent bien que les réponses à ces interrogations dépendent fortement des notions de connexité définies à la fois sur l'objet et sur le fond. De fait, la plupart des définitions proposées sont valides pour des paires de spel-adjacences particulières. On pressent aussi que pour certaines paires d'adjacence, il sera impossible, à cause du paradoxe de connexité, de définir une notion de surface adéquate.

Dans les cas particuliers de \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 , il est nécessaire, afin de contourner le paradoxe de la connexité, d'utiliser deux spel-adjacences et par voie de conséquence deux connexités diffé-

rentes pour les objets et le fond de l'image. Pour \mathbb{Z}^2 , il a été prouvé que tout chemin fermé 4-connexe (resp. 8-connexe) sépare \mathbb{Z}^2 en deux composantes 8-connexes (resp. 4-connexes) [116]. Pour l'espace \mathbb{Z}^3 , la définition de surfaces se complique. Différentes notions ont été envisagées. Morgenthaler *et al.* [164] proposent par exemple une définition de surfaces 6-connexes ou 26-connexes séparant l'espace en deux composantes respectivement 26- et 6-connexes. Malgouyres [155] définit des surfaces 18-connexes qui partitionnent l'espace en deux composantes 6-connexes. Dans les deux cas, ces surfaces sont définies à l'aide de propriétés locales. Les surfaces de Morgenthaler *et al.* sont, par exemple, définies comme des ensembles 6-connexes (resp. 26-connexes) composés de points particuliers dits de 6-surface (resp. 26-surface) orientables. La caractérisation de ces points de 6-surface (resp. 26-surface) se fonde sur l'observation de l'intersection de leur 26-voisinage strict⁹ avec l'ensemble des éléments de la surface et avec l'ensemble des éléments hors de la surface tandis que leur éventuelle orientabilité découle d'une propriété de l'intersection de leur 124-voisinage avec le complémentaire de la surface. Des exemples de points de surfaces au sens de Morgenthaler sont donnés sur la figure 2.23(a).

La définition de surface de Malgouyres [155] se fonde quant à elle sur une généralisation de la notion de courbe fermée simple. En effet, un point d'une 18-surface au sens de Malgouyres possède un 26-voisinage strict dont l'intersection avec la surface est une courbe fermée généralisée pour la 18-adjacence. Cette notion de courbe fermée généralisée est une extension naturelle de la notion de courbe fermée (Fig. 2.23(b)).

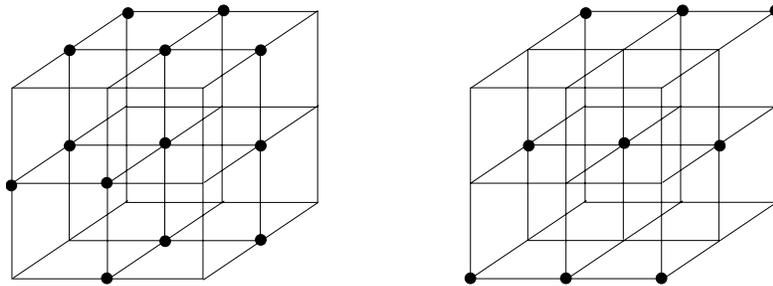
Bertrand et Malgouyres ont utilisé des notions d'homotopie pour caractériser ce qu'ils appellent des *surfaces fortes* [21, 25] (Fig. 2.23(c)). Leur définition est valable pour les adjacences classiques définies sur \mathbb{Z}^3 . Mais, une caractérisation locale complète de ces surfaces n'a été proposée que pour la 26-adjacence [158]. D'autre part, on peut noter que cette classe de surfaces englobe les 26-surfaces de Morgenthaler fermées et les 18-surfaces de Malgouyres fermées.

Cependant, étant donné un objet dans une image construite sur \mathbb{Z}^3 , rien ne dit qu'il existe une surface de Morgenthaler, une surface de Malgouyres ou une surface forte qui permette de représenter son bord. De plus, il a été prouvé par Malgouyres [154] que la classe des sous-ensembles de \mathbb{Z}^3 , 26-connexes possédant les propriétés de séparabilité et de finesse¹⁰ ne peut être caractérisée à l'aide de propriétés purement locales. On ne peut donc espérer caractériser localement que des sous-ensembles de ces surfaces séparantes et fines.

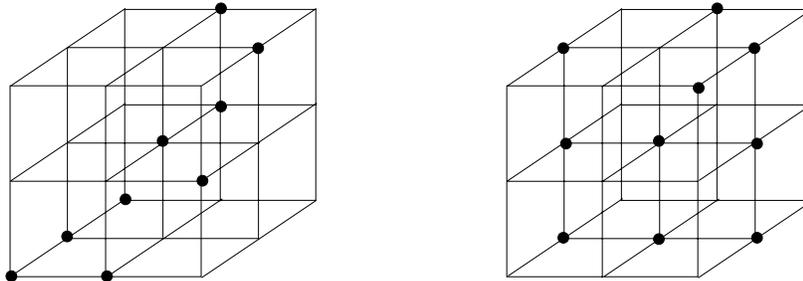
La généralisation de ces définitions en dimensions supérieures ou sur d'autres types d'espaces discrets semble difficilement réalisable. Cependant, Malandain propose dans [152] une notion de surface valable pour \mathbb{Z}^n lorsqu'on considère l' ω_n -adjacence pour le fond et l' α_n -adjacence pour l'objet. Cette définition de surface repose sur la même philosophie que celle de Morgenthaler. Elle est en effet fondée sur les propriétés du voisinage des points dans l'objet et dans le fond. Dans un autre ordre d'idées, on peut noter que la notion de courbe fermée a été étendue en dimension n par Thürmer [193]. Il est donc envisageable d'étendre la définition de Malgouyres de surface dans \mathbb{Z}^3 , fondée sur les courbes fermées, dans des dimensions supérieures, la difficulté étant de déterminer des paires d'adjacences adéquates.

⁹Le n -voisinage strict d'un point consiste exactement en l'ensemble des points qui lui sont n -adjacents. Autrement dit, un point n'appartient pas à son voisinage strict.

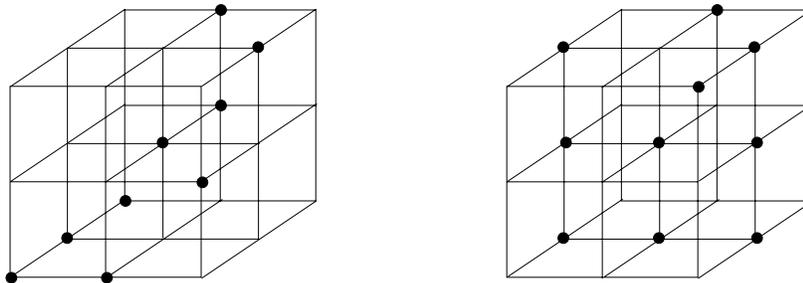
¹⁰Un sous-ensemble 26-connexe de \mathbb{Z}^3 est dit séparant s'il partage \mathbb{Z}^3 en exactement 2 composantes 6-connexes. Il est dit fin si chacun de ses points est 6-adjacent aux deux composantes connexes de son complémentaire dans \mathbb{Z}^3 .



(a) Surfaces de Morgenthaler : exemples de configuration d'un point de 6-surface (gauche) et d'un point de 26-surface (droite).



(b) Surfaces de Malgouyres : exemples de configuration d'un point de 18-surface.



(c) Surfaces fortes : exemples de configuration d'un point de 26-surface ou 18-surface (gauche) et d'un point de 18-surface (droite).

FIG. 2.23 – Exemples de configuration de points de surfaces classiques.

Surface de paires de spels

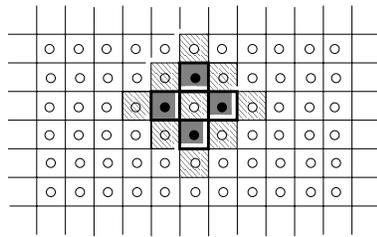
La deuxième approche consiste à considérer des surfaces de paires de spels. Ici le terme "surface" n'a pas tout à fait le même sens que précédemment. On appelle, en effet, *surface* dans un espace discret (V, π) tout sous-ensemble non vide de π . Un élément d'une surface, autrement dit une paire de spels, est appelée *surfel*. Une surface ainsi définie ne possède pas forcément de propriété de séparation. On va donc s'intéresser à des surfaces particulières, dites *surfaces de Jordan*.

Définition 2.3 (Surface de Jordan) *Une surface S sur un espace discret est une surface de Jordan si elle sépare l'espace discret en deux sous-ensembles connexes distincts et si aucun de ses sous-ensembles propres ne vérifie cette propriété.*

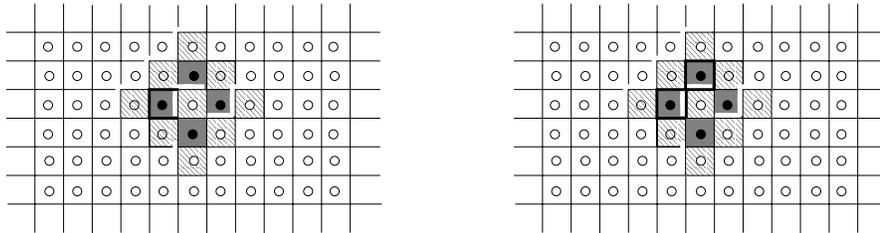
En outre, contrairement à la première approche, l'utilisation de surfaces de paires de spels induit naturellement une notion de frontière entre un objet et le fond de l'image : il s'agit de l'ensemble des surfels (c, d) , où c est un spel de l'objet et d un spel du fond adjacent à c selon la proto-adjacence. Or, lorsque l'ensemble de surfels considéré est une frontière entre un objet et le fond de l'image, la deuxième propriété requise pour qu'une surface soit une surface de Jordan est implicite. Il reste donc à déterminer les conditions selon lesquelles la frontière induite sépare l'espace discret (indépendamment de la valeur éventuellement attribuée aux spels de l'image) en deux sous-ensembles "connexes" distincts (Fig. 2.24).

Définition 2.4 (Frontière de Jordan) *Une frontière entre un objet et le fond de l'image est une frontière de Jordan si elle sépare l'espace discret en deux sous-ensembles connexes distincts.*

Pour caractériser une telle frontière de Jordan, il est possible de jouer sur 3 facteurs : la définition de l'espace discret, la construction de l'image discrète, la ou les notion(s) de connexité.



(a) Image construite sur \mathbb{Z}^2



(b) Cas où la proto-adjacence est ω_2 (4 composantes noires et 2 composantes blanches ω_2 -connexes). La frontière matérialisée par un trait épais entre une composante noire et une composante blanche ω_2 -connexes n'est pas une surface : elle ne sépare pas l'espace discret sous-jacent en deux composantes ω_2 connexes.

(c) Cas où la proto-adjacence est β_2 (2 composantes noires et 1 composante blanche β_2 -connexes). La frontière matérialisée par un trait épais entre une composante noire et une composante blanche β_2 -connexes est une surface : elle sépare l'espace discret sous-jacent en deux composantes β_2 -connexes.

FIG. 2.24 – Expression du paradoxe de connexité en terme de surfaces de paires de spels

On peut d'abord chercher à n'utiliser que des espaces discrets construits sur \mathbb{Z}^n sur lesquels la connexité induite par la proto-adjacence est non ambiguë, c'est par exemple le cas de l'espace (\mathbb{Z}^2, β_2) défini page 34. On peut aussi choisir de manipuler des espaces plus généraux et tenter d'y définir une spel-adjacence appropriée. C'est le cas lorsque l'on considère l'espace (\mathbb{Z}^2, ω_2) et la spel-adjacence β_2 (Fig. 2.25). Cependant, ces deux choix sont très restrictifs et excluent de la classe des surfaces nombre d'objets qui semblent intuitivement en être.

Etant donné un espace discret, on peut aussi se contraindre à n'y construire que des images pour lesquelles la connexité induite par la proto-adjacence n'engendre pas de paradoxes. Cette

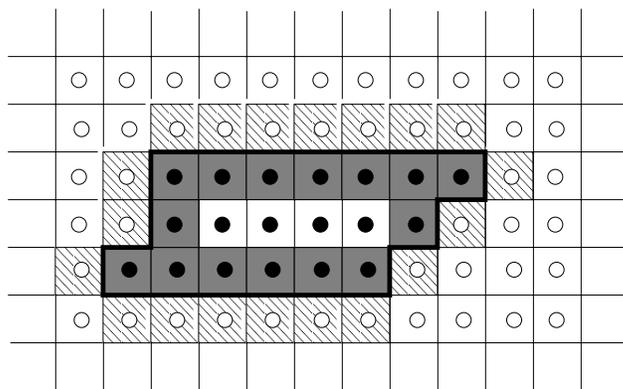


FIG. 2.25 – Image construite sur (\mathbb{Z}^2, ω_2) sur laquelle la frontière, matérialisée par un trait épais sépare bien la composante β_2 -connexe de spels noirs et la composante β_2 -connexe de spels blancs.

voie a été empruntée par Latecki *et al.* pour construire des *images bien composées* sur \mathbb{Z}^2 [135] et sur \mathbb{Z}^3 [133]. Dans de telles images, des configurations critiques (Fig. 2.26) sont évitées et les composantes connexes induites par α_2 et ω_2 dans \mathbb{Z}^2 et par α_3 , δ_3 et ω_3 dans \mathbb{Z}^3 sont équivalentes. La caractérisation de ces images se fait localement et il semble possible de réaliser des modifications locales pour transformer une image quelconque sur \mathbb{Z}^3 en image bien composée. Cependant, rien ne dit que ces transformations, si elles sont trop nombreuses, ne risquent pas de dénaturer l'image.

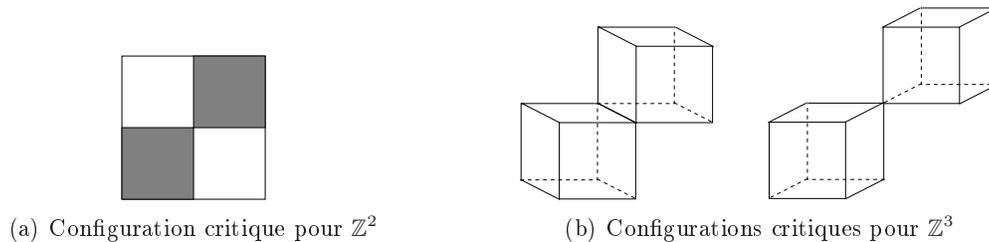


FIG. 2.26 – Une image est dite bien composée si elle évite les configurations ci-dessus (modulo les réflexions et les rotations en $3D$).

Une autre piste, très couramment employée, consiste à ne pas se contenter d'une seule notion de connexité mais à en définir deux, une pour le fond de l'image et une pour les objets, qui correspondent simplement à deux notions de spel-adjacences. Les travaux dans ce sens sont très nombreux. Cette idée avait déjà été utilisée dans le cadre de surfaces de spels mais ce sont les études réalisées dans le contexte des surfaces de paires de spels qui ont permis de formaliser différentes méthodes de recherche de paires de spel-adjacences adéquates. Nous reviendrons sur ce point dans la section 2.5.4 car ces méthodes sont définies indépendamment de l'espace discret considéré.

Enfin, il peut être intéressant dans cette approche de se poser la question du type de connexité de la surface définie par des paires de spels. Outre le fait de renseigner sur la nature de la surface, cette information peut permettre de considérer une surface comme un espace discret (S, σ) où σ est une relation d'adjacence entre surfels et ainsi de pouvoir lui appliquer les résultats existant

sur les espaces discrets [100, 132, 196].

Extraction de surfaces

La plupart des surfaces définies précédemment peuvent être extraites d'une image à l'aide d'algorithmes adaptés [100, 130, 131, 143, 196]. Une méthode couramment employée consiste à réaliser un suivi de la surface. Un tel algorithme consiste à parcourir tous les éléments de la surface de proche en proche, en partant d'un élément de surface donné. Sur des espaces discrets particuliers il est possible de réaliser ce suivi avec la seule connaissance des adjacences choisies pour l'objet et pour le fond [100]. Pour des espaces plus généraux, la connaissance et l'utilisation d'une adjacence de bords peuvent s'avérer nécessaires [196].

D'autres méthodes de reconstruction de surfaces existent qui s'appuient sur le plongement de l'image dans un espace euclidien. Elles extraient de l'image des surfaces triangulées construites sur un ensemble de points possédant une même caractéristique. On parle alors de reconstruction d'iso-surfaces. Des iso-surfaces de dimension 2 peuvent notamment être obtenues par l'algorithme du Marching-Cube [150] et ses nombreuses variantes¹¹ [88].

Lachaud *et al.* ont exposé dans [132] comment il était possible de relier la notion d'iso-surface à celle de surface discrète, en proposant une méthode locale de reconstruction d'une iso-surface à partir d'une surface discrète. L'iso-surface ainsi obtenue est un analogue continu particulier de la surface discrète initiale.

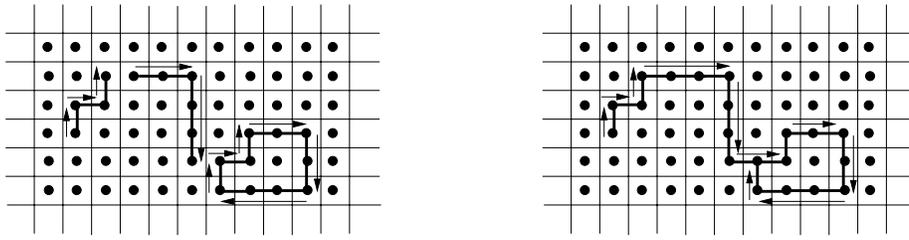
2.3.5 Invariants topologiques

Les invariants topologiques auxquels on a accès via une simple approche graphe sont peu nombreux. Outre la connexité qui a fait l'objet d'une étude particulière, on ne dispose a priori que de notions relatives à l'homotopie. Celles-ci peuvent intervenir principalement dans deux types d'applications : la reconnaissance et comparaison de formes, et la simplification d'objets. Dans le premier cas, on cherche à caractériser une forme par son groupe fondamental [28, 112, 157], dans le deuxième on souhaite définir des opérations sur un objet qui le transforment en un objet homotopiquement équivalent. A cette fin sont définis les notions de points simples [18, 23, 85, 86, 113, 116, 153, 175], ainsi que des algorithmes d'amincissement et de squelettisation [61, 116, 148, 149]. Cette deuxième approche peut tout à fait servir de prélude au calcul du groupe fondamental qui sera plus simple à obtenir sur un objet réduit. Nous présentons donc d'abord successivement ces deux aspects. Nous verrons ensuite qu'il est possible, contre toute attente, d'obtenir une définition purement discrète de la caractéristique d'Euler, en utilisant des analogues continus des images construites sur \mathbb{Z}^2 . Cette caractéristique ne dépend que des connexités choisies pour le fond et l'objet.

Groupe fondamental

L'information contenue dans le groupe fondamental d'un objet bien que plus complète que celle détenue par le premier groupe d'homologie est à la fois difficile à manipuler informatiquement et à exploiter.

¹¹L'algorithme original du Marching-Cube conduisait à des incohérences topologiques, qui ont été corrigées dans ses variantes.



(a) Trois chemins : de gauche à droite c_1 , c_2 et c_3 . c_1 et c_2 sont des chemins ouverts tandis que c_3 est fermé. Une extrémité de c_1 est ω_2 -adjacente à une extrémité de c_2 et une extrémité de c_2 est ω_2 -adjacente à un élément de c_3 .

(b) Concaténation des 3 chemins : $c_1 * c_2 * c_3$.

FIG. 2.27 – Chemins sur (\mathbb{Z}^2, ω_2) .

Pour construire un tel groupe, il est nécessaire de pouvoir définir trois notions, celle de lacet ou chemin fermé, celle de lacet homotope à 0 et celle de déformation continue.

La notion de chemin (fermé) correspond bien entendu à la notion classique de ρ -chemin (fermé), pour une adjacence donnée. Deux chemins c et c' tels que l'extrémité de c est identique ou ρ -adjacente à l'origine de c' peuvent être concaténés. Le chemin résultant de la concaténation de c et c' se note $c * c'$.

Le chemin inverse du chemin $c = (v_0, \dots, v_p)$ est le chemin (v_p, \dots, v_0) et se note c^{-1} . D'autre part, deux chemins d et d' sont dits égaux à une transformation élémentaire près s'il existe d_1, d_2, c et c' tels que $d = d_1 * c * d_2$, $d' = d_1 * c' * d_2$ et $c * c'^{-1}$ soit homotope à 0 (Fig. 2.28). On dit qu'un chemin d est homotope à 0 s'il est un *aller-retour* (*back-and-forth*) autrement dit s'il existe un chemin c tel que $d = c * c^{-1}$. Enfin, on dit que deux chemins sont homotopiquement équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par des transformations élémentaires. Cet ensemble de transformations élémentaires est le pendant discret d'une déformation continue.

Cependant, la définition de chemin homotope à 0 sur un graphe se révèle trop réductrice et inappropriée dans le cadre des images. En effet, avec une telle définition, dans l'espace (\mathbb{Z}^2, π) , le chemin fermé $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ tels que $v_0 = (i, j)$, $v_1 = (i+1, j)$, $v_2 = (i+1, j+1)$, $v_3 = (i+1, j)$ n'est pas homotope à 0. Or si on considère le plongement qui associe à chaque élément de \mathbb{Z}^2 un pixel de l'image, l'analogue continu du chemin $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ est lui bien homotope à 0 (Fig. 2.29). Les travaux menés notamment par Kong [112] et Malgouyres [156, 157] cherchent à déterminer pour \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 un groupe de chemins fermés homotopes à 0 plus approprié. Les caractérisations proposées dépendent bien entendu du type de connexité choisie. Le groupe de chemins fermés homotopes à 0 dans \mathbb{Z}^2 , induit par la définition de Kong, contient, outre les allers-retours, l'ensemble des chemins fermés contenus dans un carré 2×2 de 4 points. En 3D, la définition proposée par Malgouyres tient compte des adjacences choisies pour le fond et l'objet. Pour les paires $(26, 6)$, $(26, 18)$, $(18, 26)$, $(18, 6)$, $(6, 18)$, le groupe de chemins fermés homotopes à 0 contient les allers-retours et les chemins¹² fermés contenus dans un cube $2 \times 2 \times 2$ de 8 points (Fig. 2.30). Pour la paire $(6, 26)$, le groupe contient les allers-retours et chemins fermés dans un carré 2×2 de 4 points.

Une autre approche a été proposée par Boxer [27, 28, 29]. Il s'agit de fournir une notion

¹²chemins au sens de l'adjacence choisie pour l'objet.

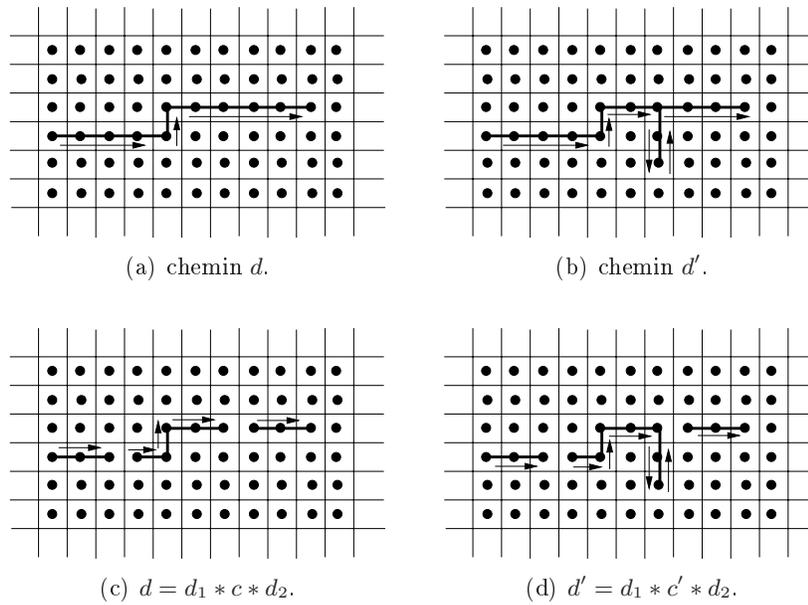


FIG. 2.28 – Deux chemins égaux à une transformation élémentaire près : $c * c'^{-1}$ est un aller-retour.

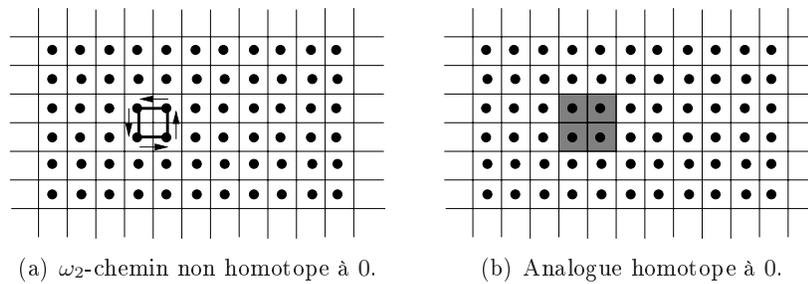


FIG. 2.29 – Exemple d'un chemin discret non homotope à 0 mais dont l'analogie continu est lui homotope à 0.

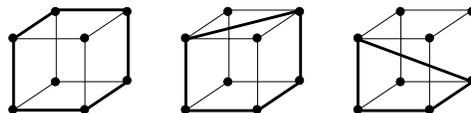


FIG. 2.30 – De gauche à droite, exemples de chemins fermés homotopes à 0 respectivement pour les paires d'adjacences (6, 18), (18, 26) (ou (18, 6)), et (26, 6) (ou (26, 18)).

de déformation continue la plus proche possible de celle existant dans les espaces continus. Ainsi est définie la notion de *fonction discrètement continue* (*digitally continuous functions*) sur laquelle peuvent se construire une homotopie et des notions de rétractions homotopiques. Cependant, si cette méthode fournit les mêmes résultats que les précédentes pour les espaces \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 respectivement munis de la 4- et de la 6-adjacence, les résultats diffèrent pour d'autres adjacences. Ainsi le groupe fondamental de la 8-courbe fermée définie par $(v'_0, v'_1, v'_2, v'_3, v'_0)$ avec $v'_0 = (i, j)$, $v'_1 = (i+1, j-1)$, $v'_2 = (i+2, j)$, $v'_3 = (i+1, j+1)$ est trivial selon Boxer et isomorphe à \mathbb{Z} selon Kong (Fig. 2.31). Cette dernière interprétation correspond mieux à l'analogie continu d'une telle courbe sur l'espace euclidien \mathbb{R}^2 .

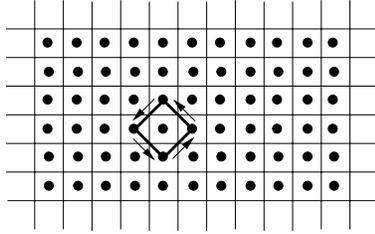


FIG. 2.31 – Chemin discret homotope à 0 selon l'approximation de Boxer et homotope à \mathbb{Z} selon Kong.

La difficulté pour manipuler et comparer de tels groupes réside dans l'obtention d'une représentation de ces groupes utilisable par les ordinateurs. Malgouyres propose dans [157] de représenter ces groupes par un ensemble de mots appelés *générateurs* S et de *relations* r . Il s'agit là d'une approche classique en topologie combinatoire [188]. A tout groupe G , on peut associer au moins une structure $\langle S; r \rangle$, appelée *présentation* de G et telle que si G est un groupe dont la loi interne est notée additivement, tout élément de G peut être obtenu par addition de certains de ses générateurs. Les éléments neutres du groupe sont alors déterminés par l'ensemble des relations. Formellement, étant donnée une présentation de G , G est isomorphe au groupe libre engendré par l'ensemble des générateurs quotienté par l'ensemble des relations. Autrement dit, G est isomorphe au groupe formé par les classes d'équivalences construites sur l'ensemble des générateurs pour l'ensemble des relations.

Le groupe classique $(\mathbb{Z}, +)$ peut ainsi être représenté par $\langle a; - \rangle$, puisque $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe libre engendré par un seul élément.
 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ peut être associé à la présentation $\langle a; a + a = e \rangle$, e étant l'élément neutre. En effet, le groupe libre engendré par a quotienté par la relation $a + a = e$ est composé de deux classes d'équivalence : $\bar{a} = \{\dots, a - 2ka, \dots, a - 2a, a, a + 2a, \dots, a + 2ka, \dots\}$ et $\bar{e} = \{\dots, e - 2ka, e - 2a, e, e + 2a, \dots, e + 2ka, \dots\}$. Et, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, qui a pour éléments les 2 classes d'équivalence : $\bar{1} = \{2p + 1, p \in \mathbb{Z}\}$ et $\bar{0} = \{2p, p \in \mathbb{Z}\}$, est donc bien isomorphe au groupe libre engendré par a quotienté par la relation $a + a = e$.
De même le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sera associé à la représentation $\langle a; na = e \rangle$.

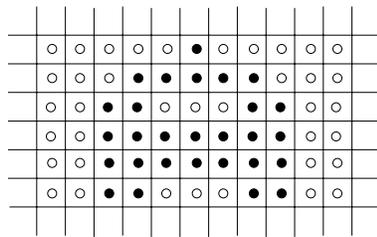
Malgouyres propose dans [157] une manière de calculer une présentation du groupe fondamental d'un objet n -connexe X dans \mathbb{Z}^3 où n est une des adjacences classiques définies sur \mathbb{Z}^3 .

Néanmoins, plusieurs problèmes se posent. Un même groupe peut tout d'abord être associé à plusieurs présentations. Et il n'existe pas de méthode générale pour déterminer la plus compacte. Malgouyres propose dans le cas de \mathbb{Z}^3 un processus de simplification de la présentation obtenue par son procédé. Cette simplification garantit certaines propriétés, notamment sur les relations dont la longueur est alors inférieure ou égale à 8. L'autre inconvénient d'une telle représentation repose sur l'impossibilité de déterminer si deux présentations sont isomorphes. Ce problème est en effet indécidable dans le cas général. Ainsi, cette méthode ne permet donc généralement pas de conclure sur l'isomorphisme de groupes fondamentaux. Enfin, étant donné un mot, et une présentation, la question : "est-ce que ce mot est égal à 1 dans cette présentation ?" est, elle aussi, indécidable dans le cas général (*word problem*). Dans le cadre des groupes fondamentaux, les mots de la présentation représentent des courbes fermées de l'espace. Il n'est donc pas possible avec une telle représentation de déterminer dans le cas général si deux courbes fermées sont homotopiquement équivalentes. L'avenir de ces travaux repose donc sur l'espoir que dans certains cas particuliers, intéressants du point de vue de l'imagerie numérique, ces problèmes deviennent décidables.

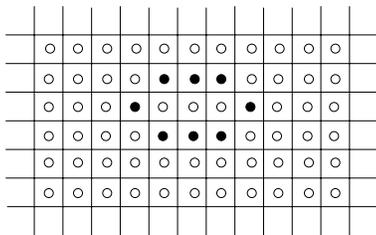
Points simples et algorithmes d'amincissement homotopique

Un certain nombre d'applications ne nécessite pas la connaissance du groupe fondamental d'un objet mais cherche à mettre en évidence des transformations qui simplifient un objet sans changer son type d'homotopie. Comme le travail se fait dans des espaces discrets, la méthode privilégiée consiste à déterminer un ensemble de points qu'il est possible d'enlever à l'objet pour les rajouter au fond de l'image sans changer la topologie ni de l'objet, ni du fond. Ces points sont appelés *points simples*. La définition formelle de ces points implique notamment des isomorphismes de groupes fondamentaux et ne peut être utilisée telle quelle algorithmiquement. Aussi est-il nécessaire d'obtenir une caractérisation locale de tels points. Cependant, une telle caractérisation s'avère dépendante de l'espace continu représenté par l'espace discret et du plongement qui les lie. Plusieurs ont été proposées pour $\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3$ et \mathbb{Z}^4 considérés comme discrétisations des espaces $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ et \mathbb{R}^4 . Chaque élément de \mathbb{Z}^n , pour $n = 2, 3$ ou 4 représente respectivement le n -cube unité de \mathbb{R}^n centré sur lui. Toutes ces caractérisations examinent le voisinage d'un spel appartenant à un objet pour déterminer s'il peut être enlevé sans préjudice topologique. Elles mettent en évidence des propriétés à la fois sur le voisinage du spel dans l'objet et sur le voisinage du spel dans le fond de l'image qui garantissent que tout spel les vérifiant est bien un point simple [18, 23, 113, 116, 153, 175]. Certaines se fondent essentiellement sur des notions de connexité (différentes sur le voisinage du spel dans l'objet et sur son voisinage dans le fond), d'autres font intervenir des paramètres additionnels, tels la caractéristique d'Euler, pour détecter la présence de trous dans le voisinage du spel considéré. La preuve que les propriétés obtenues caractérisent bien des points simples s'appuie sur les représentations continues associées.

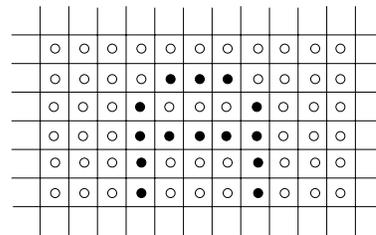
De nombreux algorithmes ont été définis pour exploiter ses notions de points simples et réaliser des amincissements homotopiques. Il existe plusieurs sortes d'amincissements homotopiques. Certains cherchent à extraire le noyau homotopique de l'objet. Ils ne se préoccupent pas de préserver des renseignements sur la forme de l'objet mais cherchent seulement à représenter son information homotopique. On parle alors de *shrinking* (Fig. 2.32(b)). D'autres en revanche se soucient de la conservation d'une information de forme géométrique. Ils ne poussent pas le processus d'amincissement à son terme, s'imposent de suivre des stratégies adaptées et s'arrêtent lorsqu'ils rencontrent certaines configurations prédéterminées. On parle alors de *thinning* (Fig. 2.32(c)) et pour certaines configurations particulières, de *squelettisation* (ou *skeletonisation*).



(a) Image discrète représentant un "A" épais et utilisant la 8-adjacence pour l'objet noir et la 4-adjacence pour le fond blanc



(b) shrinking de l'objet : la topologie est préservée mais le "A" n'est plus reconnaissable



(c) thinning de l'objet : la topologie est préservée et le "A" est toujours visible

FIG. 2.32 – Exemple de la différence entre un processus de shrinking et un processus de thinning

La conception de tels algorithmes doit se faire avec précaution. En effet, si la définition des points simples permet d'écrire aisément des algorithmes séquentiels, capables d'enlever les points les uns après les autres sans changer la topologie de l'objet, la plupart ne sont pas directement compatibles avec une suppression de ces points en parallèle. Un exemple classique consiste en un ruban de largeur 2 pixels. La plupart des définitions de point simple classe chacun des points de ce ruban dans la classe des points simples. Un algorithme qui enlèverait en une seule passe tous les points simples ferait ainsi tout simplement disparaître l'intégralité du ruban. Les suppressions parallèles étant cependant plus intéressantes pour la complexité en temps, des stratégies de suppression partiellement parallèles ont été mises en place pour pallier cette difficulté.

Plusieurs approches ont été envisagées. La stratégie la plus communément employée en $2D$ se fonde sur une approche directionnelle. Les points du bord de l'objet sont répartis en 4 classes : "Nord", "Sud", "Est", "Ouest". Un point appartient à une classe c si son voisin immédiat selon la direction c est dans le complémentaire de l'objet. A chaque itération, on ne détruit que les points simples appartenant à une même classe directionnelle. Les itérations utilisent alternativement les 4 directions, de façon à obtenir un processus le plus symétrique possible. Il a été prouvé que ce procédé garantit la conservation de la topologie de l'objet excepté dans le cas où une composante connexe n'est composée que de deux éléments et peut alors être détruite. Un algorithme fondé sur cette stratégie doit ainsi seulement vérifier l'apparition de ce cas particulier et le traiter séparément. Cette approche s'avère inapplicable en $3D$, en effet, même en tenant compte des 6 directions naturelles, il existe de nombreuses configurations pour lesquelles la topologie peut être modifiée.

Bertrand propose dans [18] et [20] deux définitions de points simples, les points dits P -simple et P^x -simple qui sont adaptés aux processus d'amincissement parallèle en $3D$, et permettent de concevoir des algorithmes directionnels d'amincissement en $3D$ [148, 149].

Un ensemble P est dit P -simple s'il est uniquement composé de points P -simples. Cette

notion d'ensemble P -simple est fortement reliée à la notion d'*ensembles non simples minimaux* (en anglais *minimal non simple sets*, ou *mns sets*). Un ensemble est dit *simple* si l'élimination parallèle de tous ses points préserve la topologie du reste de l'objet. Un ensemble non simple minimal est un ensemble qui n'est pas simple et dont tout sous-ensemble propre est simple. La caractérisation de tels ensembles permet de vérifier la validité d'algorithmes d'amincissement. En effet, un tel algorithme ne doit détruire aucun de ces ensembles s'il veut bien préserver la topologie de l'image. Il a été prouvé qu'un sous-ensemble P est P -simple si et seulement s'il ne contient aucun ensemble *mns*. De manière plus générale, l'étude et la caractérisation des ensembles non simples minimaux a été réalisée par Ronse [174] sur \mathbb{Z}^2 pour les couples de connexités (4, 8) et (8, 4), par Hall [95] pour la grille hexagonale et la (6, 6)-connexité, par Ma [151] pour \mathbb{Z}^3 muni de la (6, 26), (26, 6), (18, 6) ou (6, 18)-connexité et par Kong et Gau pour la grille *FCC* [84] équipée de la (12, 12), (12, 18) et (18, 12)-connexité ainsi que pour \mathbb{Z}^4 avec la (80, 8)-connexité [85, 86] et la (8, 80)-connexité [87]. Les algorithmes de *thinning* utilisent les stratégies présentées précédemment mais nécessitent d'autres outils pour garantir la conservation d'une information de nature géométrique. En $2D$, a été introduite la notion de point terminal, qui est un point adjacent à un seul autre point de l'objet. Un tel point, même s'il est simple ne pourra pas être enlevé de l'objet pour garantir que les branches significatives de l'objet sont conservées. La notion de point terminal est étendue en $3D$ avec la notion de connexité appropriée.

Caractéristiques d'Euler

A priori la caractéristique d'Euler nécessite la connaissance d'une décomposition cellulaire de l'espace associé. Nous allons voir comment dans le cas de \mathbb{Z}^2 , on a pu obtenir une version purement discrète de cette caractéristique, qui ne dépend que de la paire d'adjacences choisies pour le fond et l'objet.

Le calcul de cette caractéristique part du principe que la paire d'adjacences associée à \mathbb{Z}^2 induit un plongement particulier de l'objet dans \mathbb{R}^2 (Fig. 2.33). Ainsi, la valeur obtenue représentera la caractéristique d'Euler de cet analogue continu et ne correspondra pas forcément à celle d'un analogue défini différemment.

Il existe, par exemple, deux méthodes classiques pour associer un analogue continu à une image discrète construite sur (\mathbb{Z}^n, ω_n) , autrement dit pour réaliser un plongement de \mathbb{Z}^n dans \mathbb{R}^n . L'analogue d'un objet \mathcal{O} de \mathbb{Z}^n dans \mathbb{R}^n peut notamment être défini comme l'union des m -cubes de \mathbb{R}^n pour $m = 0$ à n dont les 2^m coins sont adjacents dans \mathcal{O} . En deux dimensions, l'analogue d'un objet \mathcal{O} peut ainsi être construit comme l'union de l'ensemble des points de \mathcal{O} , des segments dont les extrémités sont des points adjacents de \mathcal{O} et des carrés unités dont les 4 coins sont dans \mathcal{O} [116]. Cet analogue est naturellement associé au choix de la 4-adjacence pour l'objet et de la 8-adjacence pour le fond de l'image (Fig 2.33(b)). L'autre analogue classiquement associé à un objet discret \mathcal{O} de \mathbb{Z}^n consiste en l'ensemble des k -simplexes de \mathbb{R}^n pour k allant de 0 à n dont les $k + 1$ sommets sont adjacents dans \mathcal{O} . En deux dimensions, un tel analogue est composé de sommets, arêtes et triangles et découle naturellement du choix de la 8-adjacence pour l'objet et de la 4-adjacence pour le fond (Fig 2.33(c)).¹³

En se fondant implicitement sur ces analogues, Gray [93] a ainsi été capable de donner une définition purement discrète de la constante d'Euler W (resp. Z) associée à un objet construit sur une image binaire associée à \mathbb{Z}^2 et munie de la paire de spel-adjacences (8, 4) (resp. (4, 8)) :

¹³On peut noter au passage qu'il existe une troisième façon d'associer un analogue continu à un espace \mathbb{Z}^n . Elle consiste à associer à chaque spel le n -cube de \mathbb{R}^n centré sur lui. Cette méthode a notamment été utilisée par Latecki [133] et une grande partie des schémas illustrant cette section s'en servent implicitement.

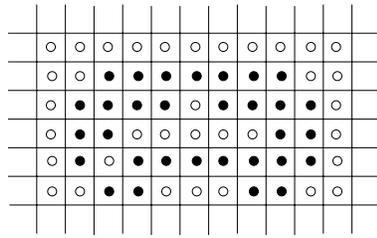
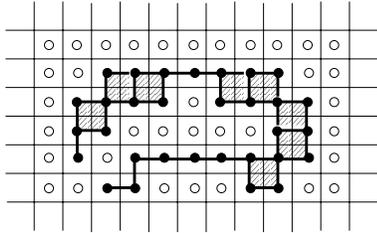
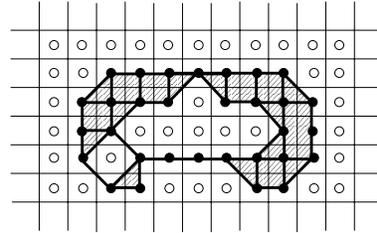
(a) Image discrète sur \mathbb{Z}^2 (b) 4-connexité pour les pixels noirs,
8-connexité pour les pixels blancs(c) 8-connexité pour les pixels noirs,
4-connexité pour les pixels blancs

FIG. 2.33 – Deux analogues continus associés à une seule image discrète

$$4W = n(Q_1) - n(Q_3) - 2n(Q_D)$$

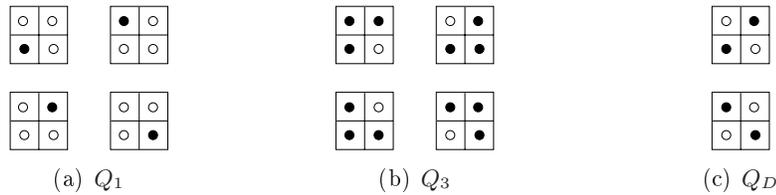
$$4Z = n(Q_1) - n(Q_3) + 2n(Q_D)$$

où $n(Q_i)$ (Fig. 2.34) représente le nombre de sous-ensembles de \mathbb{Z}^2 de la forme $\{(k, j), (k + 1, j), (k + 1, j + 1), (k, j + 1)\}$ dont exactement i spels ont pour valeur 1 et où $n(Q_D)$ représente le nombre de sous-ensembles de \mathbb{Z}^2 de la forme $\{(k, j), (k + 1, j), (k + 1, j + 1), (k, j + 1)\}$ où soit (k, j) et $(k + 1, j + 1)$ ont pour valeur 1, et $(k + 1, j), (k, j + 1)$ 0 soit $(k + 1, j)$ et $(k, j + 1)$ ont pour valeur 1 et (k, j) et $(k + 1, j + 1)$ 0.

Si on calcule $n(Q_1)$, $n(Q_3)$ et $n(Q_D)$ pour l'image représentée sur la figure 2.33(a), on obtient : $n(Q_1) = 12$, $n(Q_3) = 12$ et $n(Q_D) = 2$. Si on recense maintenant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de l'analogue (8, 4) visualisé sur la figure 2.33(b), on obtient respectivement 31, 51 et 19. On vérifie alors aisément que $W = -1$ calcule bien la constante d'Euler de l'analogue (8, 4) : $\chi = 31 - 51 + 19 = -1$. Si on regarde maintenant l'analogue (4, 8) apparaissant sur la figure 2.33(c), les nombres de sommets, d'arêtes et de faces s'élèvent respectivement à 31, 38 et 8. La constante d'Euler associée est ainsi égale à $31 - 38 + 8 = 1$, et correspond bien à la valeur de Z .

2.4 Approche cellulaire pour des images construites sur \mathbb{Z}^n

Cette section vise à décrire les outils topologiques spécifiques aux décompositions cellulaires associées à \mathbb{Z}^n . Les notions pouvant s'appliquer à des images construites sur des espaces discrets quelconques seront décrites dans la section 2.6.

FIG. 2.34 – Configurations Q_1 , Q_3 , Q_D

Associer une structure cellulaire à une image bâtie sur \mathbb{Z}^n est, dans le principe, équivalent à réaliser un sur-échantillonnage de l'image et à considérer le modèle obtenu comme composé d'éléments hétérogènes. Certains de ses éléments représentant les spels de l'image, les autres servant à exprimer les relations entre eux. Nous allons voir comment une telle information cellulaire peut être construite. Nous examinerons ensuite les possibilités existantes pour représenter avec une approche cellulaire des agrégats de spels de \mathbb{Z}^n . Puis nous évoquerons différents travaux visant à construire différentes notions de connexité entre les spels de l'image. Ils consistent à mettre au point des politiques permettant de choisir les liens adéquats parmi les éléments rajoutés à l'image. Nous décrirons ensuite comment il est ici possible de construire des notions de surface, soit en pratiquant des analogies avec le continu, soit en se plaçant dans un cadre purement discret. Nous aborderons ensuite quelques travaux relatifs à d'autres invariants topologiques.

2.4.1 Définitions

Comme nous l'avons précédemment évoqué, une image $2D$ (resp. $3D$) est souvent associée à un pavage carré (resp. cubique) de l'espace. Cette définition s'étend bien évidemment en nD où une image est le résultat d'un pavage de l'espace avec des n -cubes. L'espace discret sous-jacent est construit sur \mathbb{Z}^n . Une décomposition cubique de l'espace \mathbb{R}^n découle naturellement de ce modèle de représentation d'images. Elle est associée à un complexe cubique. Le complexe classiquement associé à \mathbb{R}^n est appelé *complexe cartésien* [122, 126, 202, 203] et est défini de la manière suivante :

Définition 2.5 (Complexe cartésien) *Pour tout $k \leq 1$, I_k représente l'ensemble $\{0, 1, \dots, k\}$. Les 0-cellules de I_k sont ses singletons, les 1-cellules sont les sous-ensembles de la forme $\{j, j+1\}$ pour $0 \leq j < k$.*

Un complexe cartésien de dimension n , \mathbb{C}^n , consiste en un ensemble de points $I_{k_1} \times \dots \times I_{k_n}$ associé à tous les sous-ensembles, appelés cellules discrètes, de la forme $D = D_1 \times \dots \times D_n$ où chaque D_i est une cellule de I_{k_i} . La dimension d'une cellule D est la somme des dimensions des cellules D_i . Une cellule de dimension m est appelée m -cellule.

Une m -cellule D^m est dite m -face d'une p -cellule D^p , $m \leq p$, notée $D^m \leq D^p$, si $D^m \subseteq D^p$

Un tel complexe est naturellement muni d'une topologie cellulaire (cf page 254). Il existe a priori deux manières de construire un tel complexe sur une image discrète. On peut considérer que chaque spel de l'image est représenté soit par une n -cellule (Fig. 2.35(a)), soit par une 0-cellule (Fig. 2.35(b)). Dans le premier cas, un ensemble discret de spels est associé au sous-complexe composé des n -cellules correspondant aux spels et de toutes leurs k -faces pour k allant de 0 à $n-1$. Dans le deuxième cas, il est représenté par le sous-complexe composé de l'ensemble des k -cellules, pour k allant de 0 à n , dont toutes les 0-faces sont associées à des spels de l'image.

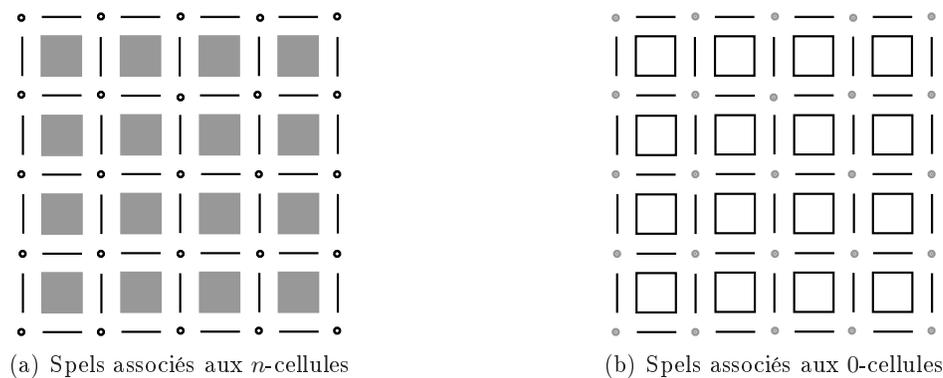
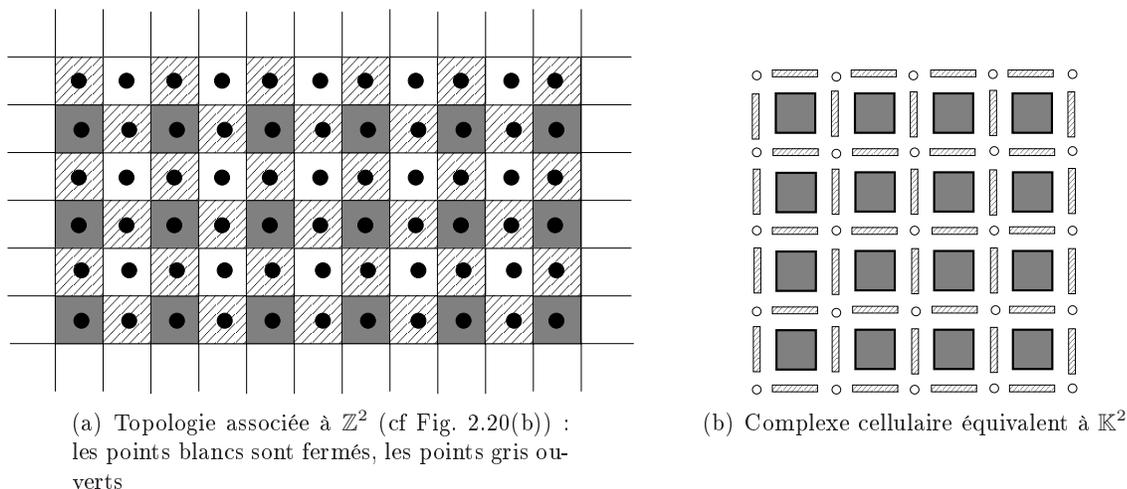


FIG. 2.35 – Associations d'un complexe cubique à une image discrète

Plusieurs modèles équivalents visent à associer implicitement ou explicitement un complexe cubique à une image discrète. Leur principale différence provient de leur manière de rajouter une information d'ordre cellulaire sur l'espace discret sous-jacent \mathbb{Z}^n . Deux approches sont possibles, soit adjoindre une information à chaque élément de \mathbb{Z}^n pour pouvoir lui associer une cellule du complexe cubique, soit construire explicitement un complexe en travaillant sur des sous-ensembles particuliers de \mathbb{Z}^n .

La première approche a été proposée par Khalimsky [110]. Contrairement aux méthodes orientées graphe, \mathbb{Z}^n est ici considéré comme un ensemble d'éléments hétérogènes. Ici les spels de l'image sont représentés par un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n . On appelle \mathbb{K}^n l'espace \mathbb{Z}^n muni de la topologie de Khalimsky (Fig. 2.36). \mathbb{K}^n n'est autre que \mathbb{Z} muni d'une topologie de *COTS* (*Connected Ordered Topological Space*) : un point de \mathbb{Z} sur deux est un ouvert, l'autre un fermé. On définit généralement les ouverts comme les points de coordonnée impaire, et les fermés comme les points de coordonnée paire. L'espace \mathbb{K}^n est le produit cartésien de n COTS \mathbb{K} . La topologie de chaque point de \mathbb{K}^n est donc déterminée par l'ensemble des parités de ses coordonnées.

FIG. 2.36 – Topologie de Khalimsky sur \mathbb{Z}^2 et complexe cubique associé

Il a été prouvé que la topologie de \mathbb{K}^n est équivalente à la topologie de \mathbb{C}^n [115, 130]. Il est ainsi possible d'identifier des points de \mathbb{K}^n avec des cellules de \mathbb{C}^n . Ainsi, les points dont toutes les coordonnées sont impaires représentent les n -cubes (ouverts) de \mathbb{C}^n , c'est-à-dire les spels de l'image, tandis que les points dont toutes les coordonnées sont paires sont associés aux 0-cellules (fermées) de \mathbb{C}^n . Les points possédant k coordonnées impaires et $n - k$ coordonnées paires sont alors vus comme les k -cellules de \mathbb{C}^n . Autrement dit les points de \mathbb{Z}^n munis de la topologie de Khalimsky peuvent être répartis en $(n + 1)$ classes, chacune associée avec l'ensemble des cellules de \mathbb{C}^n d'une dimension donnée. Une telle approche revient à travailler sur une image discrète déjà sur-échantillonnée, dont on a doublé la résolution dans chaque dimension. Et le lien entre la grille de Khalimsky et les complexes cartésiens permet d'obtenir un codage compact et pratique des cellules de ce dernier [130, 131].

Bertrand *et al.* utilisent la deuxième approche pour étudier la topologie de \mathbb{Z}^n mais ils abordent la question sous l'angle des ordres. Ils associent à \mathbb{Z}^n l'ordre induit par \mathbb{C}^n : $|H^n| = (H^n = \mathbb{C}^n, \supseteq)$ (Fig. 2.37). Ils en déduisent par exemple différents types d'adjacence entre les éléments de \mathbb{Z}^n . Deux éléments de \mathbb{Z}^n sont dits m -adjacents s'ils appartiennent à un même m -cube. Ils utilisent parfois aussi l'ordre $|{}^*H^n|$ qui correspond à l'ordre associé au complexe \mathbb{C}^n translaté de sorte que les n -cubes soient centrés sur les éléments de \mathbb{Z}^n . Ces deux ordres équivalents correspondent aux deux manières d'interpréter les spels de l'image, soit comme des 0-cellules, soit comme des n -cellules.

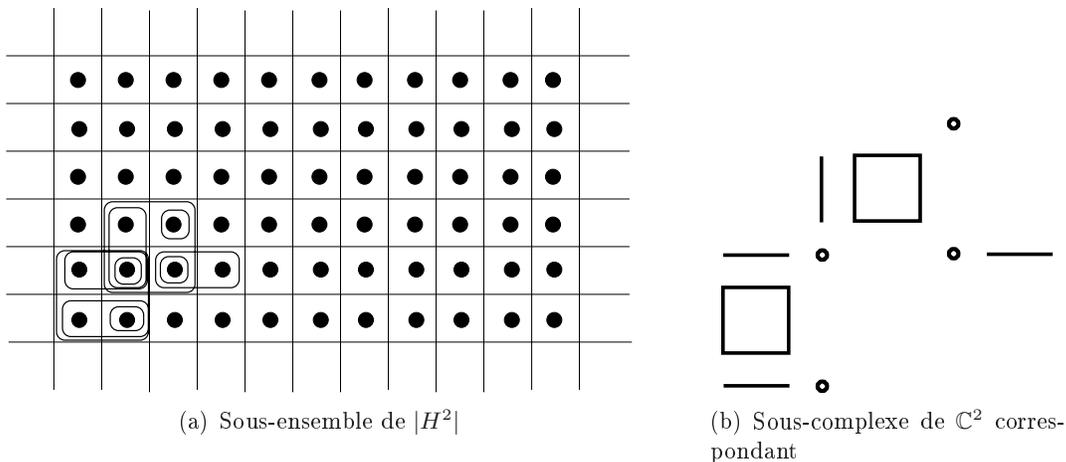


FIG. 2.37 – Correspondance entre l'ordre $|H^2|$ et le complexe \mathbb{C}^2

2.4.2 Structuration d'images en régions

Dans le cadre de l'analyse d'images, on cherche souvent à représenter une image segmentée, autrement dit dont les spels ont été regroupés selon un critère d'homogénéité. Il est alors nécessaire pour permettre l'extraction de frontières, de surfaces et autres caractéristiques de l'image de conserver après ce processus de segmentation une subdivision cellulaire de l'espace. Dans le cas des subdivisions cubiques, le processus de segmentation regroupe des cubes de dimension maximale et doit être capable de définir l'ensemble des k -faces existant entre les groupes de cellules agglomérées.

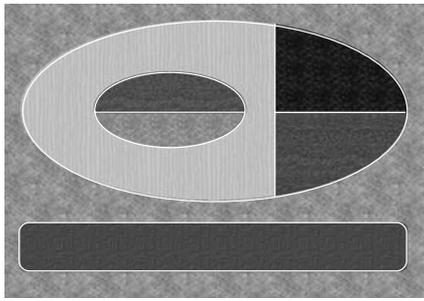
En 2D et 3D des modèles spécialisés à base de cartes ont été développés qui fournissent une

représentation topologique et géométrique adaptée aux images segmentées. Ainsi, l'approche exploitée, notamment par Braquelaire *et al.* [32], en $2D$, s'appuie sur la notion de carte topologique planaire [195]. Une telle carte, souvent appelée simplement *carte planaire*, est une partition du plan euclidien en régions simplement connexes (Déf A.24 page 239). Elle contient un ensemble fini de sommets V , un ensemble fini de courbes de Jordan ouvertes dont les extrémités sont dans V et un ensemble fini de régions simplement connexes dont les frontières sont des unions d'éléments de V et E . Une telle subdivision est composée d'un nombre fini de régions bornées, appelées *faces finies* de la carte et d'une région non bornée, sa *face infinie*. On peut noter que le résultat d'une segmentation sur une image ne fournit pas a priori de régions simplement connexes (Fig. 2.38(a)). Si on considère maintenant le *graphe de frontière associé* (Fig. 2.38(b)), on remarque cependant qu'une carte topologique peut être associée à toute composante connexe de ce graphe. Autrement dit, pour représenter une telle partition, on disposera de plusieurs cartes qui seront reliées par une *relation d'inclusion*. Une des qualités de la carte topologique repose sur sa faculté à être codée efficacement par une paire $\langle \sigma, \alpha \rangle$ de permutations définies sur un ensemble d'éléments appelés *brins*. Chaque brin peut être vu comme une demi-arête de la carte topologique. Cette représentation à l'aide de brins et de permutations est appelée *carte combinatoire* [73, 46] (Fig. 2.38(c)). A partir de certaines combinaisons des permutations définissant une carte combinatoire, on peut aisément retrouver les sommets, arcs et régions constituant la carte planaire. Pour pouvoir associer une telle structure à une image segmentée, il est alors nécessaire de faire apparaître sur celle-ci les arêtes et les sommets constituant les bords des régions. L'approche utilisée, appelée *interpixels*, revient tout simplement à doter l'image segmentée d'une structure cellulaire. Les 2-cellules ne sont pas ici des pixels mais des régions 4-connexes de pixels. Il suffit alors de rajouter comme dans la figure 2.38(e), les arêtes et les sommets appropriés pour définir la subdivision cellulaire associée.

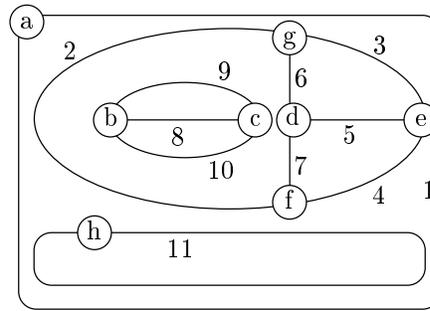
L'avantage d'une telle structure par rapport aux notions de graphes d'adjacence de régions et de graphes duaux évoqués dans la section précédente, est qu'elle permet de coder toute l'information contenue dans ces graphes de manière implicite. Les modifications de la carte, correspondant par exemple à des fusions ou des divisions de régions, seront ainsi moins coûteuses à réaliser que dans le cas des graphes duaux. Et, contrairement aux applications qui manipulent directement ces graphes duaux, on ne risque pas d'incohérence entre les deux graphes. En outre, ce modèle stocke aussi naturellement l'ordre des arêtes autour d'un sommet, des régions autour d'une arête, ou des régions autour d'une autre région.

Ainsi, les cartes combinatoires sont plus efficaces que les graphes duaux, à la fois grâce à une structure plus compacte et à une information topologique plus riche. Ces constatations ont amené à utiliser ce modèle dans le cadre des pyramides d'images. Les transformations permettant de passer d'un niveau à l'autre de la pyramide suivent le même principe que celles développées dans le cadre des graphes duaux, tout en tirant parti des différents avantages des cartes par rapport aux graphes.

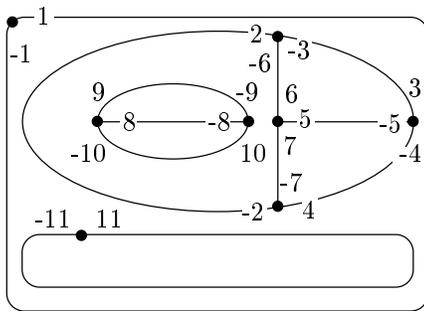
Il existe principalement deux modèles construits sur de telles cartes et utilisés pour représenter des images segmentées. Les *cartes topologiques GE* ont été développées par Braquelaire *et al.* [62, 34, 59] et les *cartes topologiques HLE* introduites par Damiand *et al.* [49, 50]. Leur différence réside principalement dans l'interprétation géométrique, autrement dit le plongement associé à ces cartes. Les versions $3D$ de ces modèles sont comparées dans [31]. Ces deux types de cartes sont aussi parfois appelés *cartes discrètes*. Un exemple d'objet $3D$ et de sa représentation à l'aide de chacun de ces modèles est donné à titre d'illustration dans la figure 2.39.



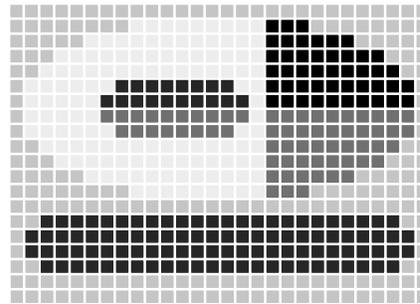
(a) Image continue segmentée et les frontières de ses régions



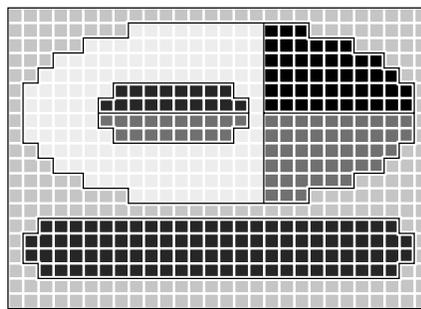
(b) Graphe de frontière associé



(c) Représentation de ce graphe par une carte combinatoire



(d) Image discrète segmentée avec la même topologie



(e) Représentation de la géométrie de ses régions avec des contours interpixels

FIG. 2.38 – Représentation de la topologie et de la géométrie d'une image segmentée

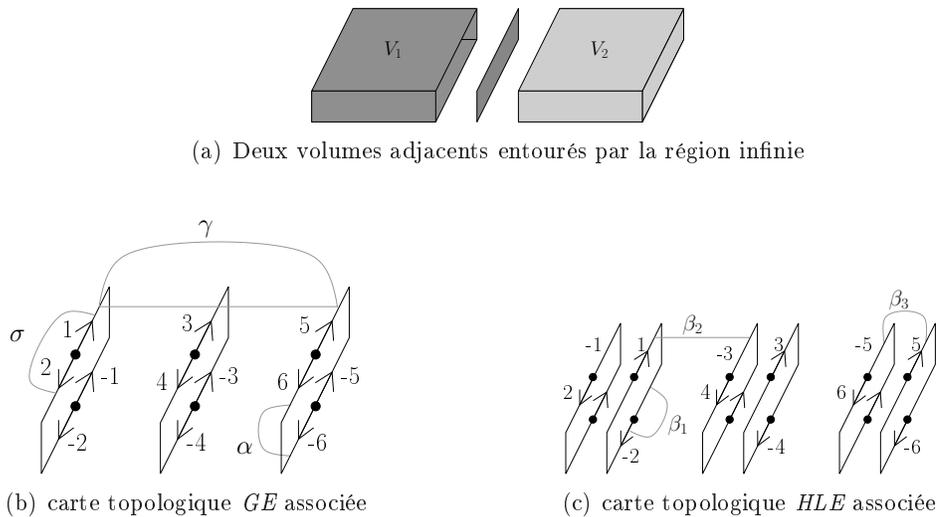


FIG. 2.39 – Les éléments topologiques de cette subdivision $3D$ sont : 3 volumes, 6 faces, 2 arêtes et 2 sommets

2.4.3 Connexité

On considère généralement que les cellules de dimension maximale représentent les spels de l'image, mais le raisonnement est similaire lorsque les spels sont associés aux cellules de dimension minimale. Les connexités définies sur une subdivision cellulaire représentant une image doivent permettre de distinguer divers objets de spels de manière non ambiguë, autrement dit d'identifier, pour tout sous-ensemble de cellules maximales, l'ensemble des faces qui servent à les connecter. Il s'agit de préciser la notion de connexité entre cellules maximales, ce qui revient à attribuer à tout ensemble de cellules maximales un ensemble de cellules de dimensions inférieures caractérisant sa connexité.

Il existe deux principales approches pour définir ce type de connexité. On peut rajouter une information sur le complexe qui sélectionne, pour une cellule [124] ou pour un ensemble de cellules [13], les cellules de dimensions inférieures qui vont être utilisées pour les connecter. Une autre possibilité consiste à extraire du complexe des sous-complexes dont chacun correspond à une composante connexe [22].

Lorsqu'on travaille avec des images construites sur \mathbb{Z}^n , on manipule des complexes cartésiens ou une structure équivalente. Les caractéristiques géométriques induites sur ces complexes permettent de définir des règles d'élection de faces valables pour toutes les cellules de la subdivision.

Ainsi, Kovalevsky propose dans [124] d'avoir recours à des *règles d'appartenance globales* (*global face membership*), autrement dit il suggère de toujours sélectionner pour chaque cellule maximale de l'image un même sous-ensemble de faces qui fera partie de toute composante connexe contenant cette cellule. Il prend pour exemple le complexe associé à la classique subdivision carrée de l'espace \mathbb{R}^2 . Pour chaque 2-cellule, il garde une 0-cellule : son coin gauche et deux 1-cellules : l'horizontale du haut et la verticale de gauche (Fig. 2.40(a)). Cette connexité correspond à la 6-connexité sur \mathbb{Z}^2 . Deux autres exemples classiques de telles règles exploitent la valeur des spels. Il s'agit de la *règle du marquage maximum* qui attribue une k -cellule à la n -cellule de son étoile qui possède la valeur la plus grande (Fig. 2.40(b)) et de son opposée la *règle du marquage minimum* (Fig. 2.40(c)). Si la globalité de ces règles d'appartenance rend les

connexités plus faciles à coder, elle ne permet pas de capturer toutes les connexités possibles. Elle est, par exemple incapable d'obtenir des connexités équivalentes aux couples de connexité généralement définis sur \mathbb{Z}^n .

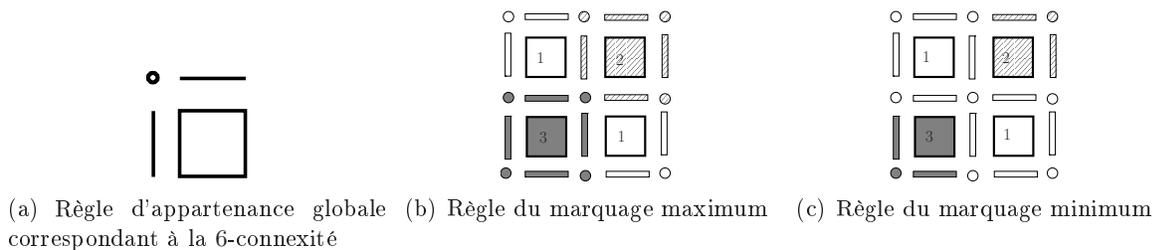


FIG. 2.40 – Différentes règles d'appartenance proposées par Kovalevsky

Une autre approche a été envisagée par Dominguez *et al.* dans [13]. Elle a été définie sur des complexes polyédriques et peut donc s'appliquer sur les complexes cartésiens. Les faces à sélectionner sont déterminées à l'aide de fonctions, appelées *fonctions d'éclairage (faible)* (*weak lighting functions*)¹⁴. Pour être valide, une telle fonction doit vérifier un ensemble de propriétés minimales. Et toute fonction vérifiant ces propriétés permet de définir des notions de connexité correctes. Pour un ensemble de cellules maximales donné, cette fonction "éclaire" toutes les cellules concourant à sa connexité. Ainsi il est possible de construire des fonctions permettant de retrouver sur un complexe carré ($2D$) et sur un complexe cubique ($3D$), les couples de connexités classiques et de les étendre naturellement dans les dimensions supérieures.

Enfin, Bertrand *et al.* ont recours dans [22] à des outils de morphologie mathématique. Ils travaillent en terme d'ordre. Et leur méthode revient à extraire d'un ordre donné, un sous-ordre adéquat engendré par un ensemble d'éléments correspondant à un ensemble de spels. Ils utilisent les *transformations tout ou rien* (*hit or miss transformations*) pour construire des sous-ordres correspondant à des connexités différentes. Ils appliquent cette méthode à l'ordre H^2 associé à \mathbb{Z}^2 et montrent que les deux connexités obtenues correspondant respectivement à la 4-connectivité et à la 8-connectivité de l'objet extrait. Ce processus s'étend pour obtenir des connexités équivalentes à ω_n et α_n sur \mathbb{Z}^n , mais ne semble cependant pas capable d'extraire d'autres couples de connexité sur H^n .

2.4.4 Surfaces et bords d'objets

Il existe principalement deux approches pour définir une surface sur un complexe associé à \mathbb{Z}^n .

La première s'appuie sur l'utilisation d'un analogue continu de l'image. Elle a été notamment exploitée par Dominguez *et al.* [12, 13]. Ils utilisent un modèle de représentation multi-niveaux dont nous reparlerons plus en détail dans le chapitre 3. Le premier niveau correspond au complexe représentant l'image, le dernier représente l'analogue continu de ce complexe construit à partir de la connexité choisie. Un objet sur le complexe sera une surface si son pendant continu est une variété. On peut noter que la plupart des surfaces définies via l'approche graphe sont des cas particuliers de surfaces construites sur ces complexes. Cette définition est cependant assez difficile à exploiter puisqu'elle ne fournit pas directement de caractérisation des surfaces dans

¹⁴Nous y reviendrons plus en détail dans les chapitres 3 et 4.

l'espace discret¹⁵. D'autres définitions de surfaces propres aux subdivisions cubiques ont aussi été proposées en $3D$ par Khachan *et al.* [109, 108]. Elles exploitent les propriétés de ces subdivisions. Elles se fondent aussi sur l'analogie continu d'un ensemble de voxels (cubes de dimension 3) induit par les relations de $(6, 26)$ ou $(26, 6)$ connexités. Il s'agit des *n -variétés cubiques faibles* (*cubical n -weakmanifold*) et des *n -pseudo-variétés cubiques* (*cubical n -pseudomanifold*).

L'autre approche consiste à aborder la question de façon purement discrète. Elle a entre autres été adoptée par Bertrand *et al.* [22]. Leur modèle se fonde comme précédemment sur les ordres. Un sous-ordre de H^3 est associé à \mathbb{Z}^3 . Ce sous-ordre dépend du choix de la connexité et est obtenu, comme dit précédemment, par une transformation morphologique. La notion de surface fermée sur un tel sous-ordre est définie de manière récursive et ne nécessite pas d'autre information que celle contenue dans le sous-ordre lui-même. On verra ultérieurement qu'elle constitue un cas particulier des n -surfaces définissables sur des ordres quelconques (Déf. 3.9 page 97). Deux types de surfaces peuvent ainsi être définis, qui correspondent aux deux notions de connexités obtenues via les opérations "tout ou rien". A partir de leur définition récursive, Bertrand *et al.* ont été capables d'extraire toutes les configurations locales pouvant apparaître dans de telles surfaces. Ils ont, en outre, montré l'équivalence entre leur surfaces et celles de Morgenthaler *et al.* [164] construites sur des adjacences équivalentes. Enfin, ils ont étendu ces travaux pour des surfaces sur \mathbb{Z}^4 .

2.4.5 Invariants topologiques

La plupart des invariants topologiques associés à des images construites sur \mathbb{Z}^n via une approche cellulaire ne sont pas spécifiques au choix de \mathbb{Z}^n et leur définition reste valable sur des structures cellulaires plus générales. Nous les évoquerons donc dans la section 2.6.5.

On mentionnera seulement ici les travaux liés à la construction d'une théorie de l'homologie adaptée aux complexes cartésiens. En outre, la plupart des travaux réalisés considèrent des cellules sans orientation ce qui contraint à utiliser le groupe de coefficient $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour construire le groupe de chaînes associé à ce complexe. En effet, l'utilisation de ce groupe empêche l'apparition de facteurs négatifs devant les cellules. Et de tels facteurs ne sont pas appropriés dans le cadre des complexes cartésiens non orientés puisqu'ils indiquent qu'on considère l'orientation inverse de l'orientation associée à la cellule. Une construction des groupes d'homologie associés à une image construite sur \mathbb{Z}^3 a été proposée par González-Díaz *et al.* dans [92]. Leur étude permet, en outre, d'obtenir les groupes de cohomologie et un autre invariant plus fort lié à l'anneau de cohomologie. Une autre étude des groupes d'homologie sur des grilles cubiques a été réalisée dans [104]. Une approche différente permettant aussi d'étudier l'homologie sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ a aussi été proposée par Webster [201] dans le cadre des espaces de Khalimsky.

2.5 Généralisation et abstraction de l'approche graphe

Nous étudions ici l'abstraction de l'approche graphe vue dans le cas de \mathbb{Z}^n . Il s'agit de cerner l'information intrinsèquement contenue par ce type de structure sans l'apport de données extérieures. L'idée est d'évaluer concrètement la puissance de représentation de la structure graphe afin de déterminer si l'utilisation de cette approche avec d'autres espaces discrets que \mathbb{Z}^n pourra s'avérer réellement efficace ou demandera de redéfinir systématiquement les propriétés topologiques en fonction des caractéristiques propres de l'espace. On peut déjà pressentir la

¹⁵Nous reviendrons sur le sujet dans la section 3.2.4 page 104.

réponse en remarquant que la plupart des notions topologiques définies via cette approche sur \mathbb{Z}^n étaient fortement dépendantes des propriétés de \mathbb{Z}^n .

Les travaux dont nous parlons ici ont été principalement menés par Herman [97, 98, 2, 99, 100, 101]. Nous définissons tout d'abord l'abstraction de l'espace (\mathbb{Z}^n, ω_n) . Puis, nous évoquons la représentation d'agrégats de spels. Nous montrons ensuite qu'il est possible de mettre en évidence des propriétés vérifiées par les spel-adjacences qui garantissent une "bonne" connexité des spels. Nous évoquons ensuite les différents moyens de définir des surfaces. Sans renseignement additionnel, la première méthode mentionnée dans le cas de \mathbb{Z}^n (surface de spels) donne peu de résultats. Mais nous expliquons comment une des pistes proposées par la deuxième méthode (surface de spels) peut être formalisée dans ce contexte très général. Nous concluons en soulignant que peu d'invariants topologiques peuvent être efficacement construits via une telle approche sans ajout d'information supplémentaire.

2.5.1 Définitions

La manière la plus générale de définir une structure topologique de type graphe pour une image est très certainement celle de Herman dans [97, 98, 100]. Il ne présuppose en effet rien sur la géométrie des spels.

Les images discrètes au sens de Herman sont construites sur un espace discret qui constitue une abstraction de l'espace discret (\mathbb{Z}^n, ω_n) et des notions de maillage et de graphe d'adjacence de régions.

Avant de parler précisément des images de Herman, nous rappelons d'abord quelques définitions. Etant donné un ensemble quelconque M et une relation binaire sur cet ensemble ρ , on dit que la suite $c^0, c^1, \dots, c^{p-1}, c^p$ est un ρ -chemin sur M si $(c^{i-1}, c^i) \in \rho$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Si $c = c^0$ et $d = c^p$, on dit alors que c et d sont ρ -connectés dans M . Si $c = d$, on dit que le chemin est fermé. Si la relation de ρ -connexité est une relation d'équivalence sur M , alors elle permet de définir des composantes ρ -connexes sur M . Si M en possède une seule, on dit qu'il est ρ -connexe. Si ρ est symétrique alors la ρ -connexité est une relation d'équivalence (il s'agit là d'une condition suffisante mais pas nécessaire).

Soit \mathcal{L} l'ensemble des lettres de l'alphabet et $\rho_{\mathcal{L}}$ la relation "lettres côte à côte dans l'alphabet", $\rho_{\mathcal{L}}$ est symétrique, M est bien évidemment $\rho_{\mathcal{L}}$ -connexe. Et $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ est un $\rho_{\mathcal{L}}$ -chemin contrairement à $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}$.

La seule contrainte que doit vérifier l'espace discret sous-jacent à l'image est d'être connexe pour une certaine relation de voisinage.

Définition 2.6 (Espace discret) *Un espace discret est une paire (V, π) , où V est un ensemble quelconque non vide et π une relation binaire symétrique sur V telle que V est π -connexe.*

π est appelé proto-adjacence ou pré-adjacence.

L'ensemble des lettres de l'alphabet \mathcal{L} muni de la relation $\rho_{\mathcal{L}}$ est un espace discret au sens de Herman

Un espace discret peut tout à fait être vu comme un graphe non orienté connexe dont les sommets sont les éléments de V et les arêtes les couples de sommets π -adjacents. La notion de chemin sur le graphe correspond tout simplement à la notion de π -chemin sur l'espace discret.

Une image discrète (au sens de Herman) se construit sur un tel espace.

Définition 2.7 (Image discrète) Une image discrète sur un espace discret (V, π) est un triplet (V, π, f) où f est une application dont le domaine est V .

Dans les travaux de Herman, les images considérées sont des images binaires, c'est-à-dire que f a pour ensemble image $\{0, 1\}$. Pour simplifier, on appellera respectivement 0-spels et 1-spels les spels auxquels la fonction f associe respectivement 0 et 1. En outre, l'étude se restreint souvent à des images finies c'est-à-dire telles que le sous-ensemble des 1-spels est fini.

Les images construites sur \mathbb{Z}^n évoquées précédemment sont des cas particuliers d'images de Herman.

2.5.2 Structuration d'images en régions

De même que pour les images bâties sur \mathbb{Z}^n , on peut utiliser des graphes d'adjacence de régions pour structurer une image construite sur un espace discret (V, π) . Les régions correspondront ici à des sous-ensembles de V et deux régions seront adjacentes lorsqu'un élément de l'une sera adjacent à un élément de l'autre. Bien sûr cette représentation souffre des mêmes limitations que sur \mathbb{Z}^n . On peut cependant remarquer qu'un tel graphe d'adjacence constitue lui-même un espace de Herman et associé avec une fonction attribuant un label à chacun de ses éléments, il est précisément une image au sens de Herman. Ce cadre fournit donc un cadre homogène à la description d'une image à la fois au niveau pixel et au niveau région.

L'utilisation des graphes duaux dans le contexte de ces espace ne s'avérera approprié que si l'ensemble V contient des éléments dotés d'une dimension et tels que cette dimension soit au plus 2.

2.5.3 Connexité

Par définition, tout espace discret au sens de Herman est associé à une relation binaire pour laquelle il est connexe. Cependant, comme nous l'avons vu dans le cas de \mathbb{Z}^n , il peut être nécessaire de manipuler d'autres notions de connexité sur un espace discret. Pour cela, on définit d'abord la notion de *spel-adjacence* sur (V, π) . Il s'agit tout simplement d'une relation binaire symétrique ρ sur V telle que $\pi \subseteq \rho$. La propriété de symétrie d'une spel-adjacence garantit que la notion de connexité associée à cette adjacence est bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des spels. Ainsi, étant donnée une spel-adjacence ρ sur un espace discret (V, π) , il est possible de partitionner V en composantes ρ -connexes.

Les adjacences définies classiquement sur (\mathbb{Z}^n, ω_n) , $(\mathbb{Z}_B^\phi, \beta_B^\phi)$ et $(\mathbb{Z}_F^\phi, \beta_F^\phi)$ rappelées dans la section 2.3.3 page 37 sont bien des spel-adjacences au sens de Herman.

Les spel-adjacences les plus souvent considérées possèdent, en outre, d'autres propriétés qui garantissent une plus grande cohésion entre des spels adjacents de l'espace discret [100]. On peut considérer cet ensemble d'adjacences comme des adjacences spécialisées. Parmi elles se trouve entre autres la *spel-adjacence serrée* (en anglais *tight spel-adjacency*). Pour la définir, il est nécessaire d'introduire la notion de *suite de spels ρ -serrée*. Une suite de spels entre deux spels c et d est dite ρ -serrée si tout élément de la suite est soit ρ -adjacent à c , soit ρ -adjacent à d . Une relation de spel-adjacence ρ est alors dite "serrée", si pour toute paire de spels ρ -adjacents, (c, d) , il existe un π -chemin ρ -serré reliant c à d .

Cette restriction est somme toute assez logique. En effet, si une spel-adjacence ρ n'est pas serrée, alors il va exister au moins deux éléments c et d reliés par une ρ -adjacence et tels que tout π -chemin allant de l'un à l'autre contient au moins un spel intermédiaire qui n'est ρ -adjacent ni

à c , ni à d . Autrement dit, la relation d'adjacence ρ "saute par-dessus" des spels entre c et d , ce qui paraît peu approprié pour une relation d'adjacence.

Il existe une autre catégorie de spel-adjacences, qui est un cas particulier de la spel-adjacence serrée. Il s'agit de la *spel-adjacence très serrée* (ou *very tight spel-adjacency*). Une relation de spel-adjacence ρ est dite "très serrée" si pour toute paire de spels ρ -adjacents, (c, d) , il existe un π -chemin reliant l'un à l'autre et tel que tout spel du chemin est ρ -adjacent à c .

Les spel-adjacences α_n et δ_n définies sur l'espace discret \mathbb{Z}^n sont elles-mêmes des spel-adjacences très serrées.

Enfin, une dernière catégorie de spel-adjacence a été utilisée par Latecki dans [133]. On pourrait la nommer *spel-adjacence vraiment très serrée*, puisque pour toute paire de spels (c, d) reliés par une telle spel-adjacence ρ , il existe un π -chemin entre c et d tel que tout élément de ce chemin est à la fois ρ -adjacent à c et à d .

Dans le cas de l'espace discret \mathbb{Z}^n , on définit aussi la notion de *spel-adjacence locale* qui n'est autre qu'une spel-adjacence contenant ω_n et contenue dans α_n [100].

Il faut là encore noter qu'il n'est pas toujours possible de définir une topologie au sens classique du terme sur de tels espaces discrets. Autrement dit, étant donné un espace (V, π) , on n'est pas toujours capable de définir une famille d'ouverts \mathcal{O} dont la connexité induite (cf Déf. A.10 page 233) coïncide soit avec la π -connexité, soit avec une autre notion de connexité cohérente avec la structure de l'espace.

Dans le cas de \mathbb{Z}^n , nous avons vu, via le théorème 2.1 comment déterminer si une spel-adjacence définissait une topologie adéquate. Ce théorème peut être maintenant reformulé en utilisant la terminologie proposée par Herman.

Théorème 2.8 (Topologie adéquate associée à \mathbb{Z}^n) *Une spel-adjacence ρ_n , définie sur \mathbb{Z}^n , induit une topologie adéquate sur \mathbb{Z}^n si et seulement si :*

- i). ρ_n est locale et très serrée
- ii). et il existe une topologie \mathcal{O} sur \mathbb{Z}^n , telle que les composantes ρ_n -connexes de \mathbb{Z}^n soient précisément ses composantes connexes pour la topologie \mathcal{O} .

2.5.4 Surfaces et bords d'objets

Comme dans le cas des surfaces définies sur les images discrètes construites sur \mathbb{Z}^n , il existe deux manières de définir une surface sur un espace discret (V, π) :

- i). comme un ensemble de spels, fin et séparant,
- ii). comme un ensemble de paires de spels ou surfels.

Comme nous l'avons vu précédemment, la notion de frontière entre objets n'est pas intrinsèquement définie par la première approche, et toute la question consiste à construire un sous-ensemble de spels qui satisfasse la propriété de séparation d'une surface et qui soit en même temps un objet fin. Cette approche n'est généralement utilisée que sur l'espace discret \mathbb{Z}^n , car elle peut dans ce cas exploiter des propriétés géométriques implicites des régions de l'image. Et les définitions proposées sont fortement dépendantes des spel-adjacences utilisées. Une tentative de généralisation a été faite par Herman dans [100] pour des espaces discrets quelconques mais le sous-ensemble de spels qu'il caractérise, et appelle *variété de spels*, ne possède pas toujours la propriété de Jordan. En fait, le complémentaire d'une variété de spels dans l'espace discret est composé d'au plus deux composantes connexes pour la proto-adjacence mais dans de nombreux cas, il n'est en réalité composé que d'une seule composante connexe.

Comme nous l'avons vu dans le cas d'un espace discret construit sur \mathbb{Z}^n , la deuxième approche, contrairement à la première, induit naturellement une notion de frontière entre un objet et le fond de l'image : il s'agit de l'ensemble des couples de spels (c, d) où c est un spel de l'objet et d un spel du fond adjacent à c selon la proto-adjacence. On peut là aussi jouer sur les 3 facteurs déjà mentionnés pour définir des surfaces appropriées : la définition de l'espace discret, la construction de l'image discrète, la ou les notion(s) de connexité. Les deux premières pistes n'ayant pas été exploitées en dehors des espaces construits sur \mathbb{Z}^n , nous n'évoquons ici que la troisième. L'idée d'utiliser différentes connexités n'est pas neuve mais le contexte des espaces discrets de Herman a permis de formaliser différentes méthodes de recherche de paires de spel-adjacences adéquates.

Herman suggère notamment de ne considérer que des paires de spel-adjacences serrées et propose dans [98, 100] une classification de telles paires $\{\kappa, \lambda\}$, pour des images binaires, en *paire de Jordan forte*, *paire de Jordan* et *paire de Jordan faible*. Une paire de spel-adjacences est dite paire de Jordan forte si dans toute image (finie ou pas) construite sur l'espace discret, toute frontière (finie ou pas) entre un objet κ -connexe (resp. λ -connexe) et le fond λ -connexe (resp. κ -connexe) est une surface de Jordan. La paire de Jordan ne garantit cette propriété que pour les frontières finies, et la paire de Jordan faible seulement pour les frontières finies sur des images finies. Dans le cas de (\mathbb{Z}^n, ω_n) , par exemple, $\{\delta_n, \omega_n\}$ est une paire de Jordan forte.

Le problème peut alors être envisagé de deux manières :

- i). étant donné un espace discret, choisir de "bonnes paires" de spel-adjacences évitant le paradoxe de la connexité,
- ii). caractériser des espaces discrets tels que toute paire de spel-adjacences vérifiant éventuellement une ou plusieurs propriétés additionnelles soit une "bonne paire" d'adjacence.

Dans le premier cas (i), il est bien sûr possible de tenter une approche directe, c'est-à-dire considérer une paire d'adjacences sur un espace discret et déterminer si elle satisfait une des définitions de paires de Jordan. Cette méthode paraît plutôt hasardeuse dans le cas général mais sur un espace particulier comme \mathbb{Z}^n , elle peut commencer à fournir une partie des réponses. D'autre part, si elle fournit au moins une paire adéquate, il est ensuite possible d'utiliser des outils et théorèmes pour en déduire d'autres [100]. En effet, si l'on connaît une paire satisfaisant une des trois définitions de Herman, il est parfois possible d'en déduire d'autres paires adéquates sur le même espace discret ou sur un espace discret construit sur les mêmes éléments mais possédant une proto-adjacence différente. D'autres paires peuvent aussi être déduites en considérant des informations additionnelles sur l'espace discret, principalement son plongement éventuel dans un espace continu [132].

La deuxième piste (ii) a notamment été exploitée par Herman [2, 99, 100]. Il a ainsi décrit des espaces discrets, les *graphes de Jordan*, pour lesquels toute paire de spel-adjacences serrées est une paire de Jordan, et d'autres espaces, les *graphes de Jordan forts* et les *espaces discrets 1-simplement connexes*, pour lesquels toute paire de spel-adjacences serrées est une paire de Jordan forte. La figure 2.41 montre un graphe de Jordan qui n'est pas construit sur l'espace discret \mathbb{Z}^n .

2.5.5 Invariants topologiques

Sur un espace discret quelconque, on ne dispose a priori que de l'information d'adjacence entre spels.

Pour construire un groupe fondamental, on a vu (section 2.3.5 page 46) qu'on avait essentiellement besoin de définir trois notions, celle de lacet ou chemin fermé, celle de lacet homotope

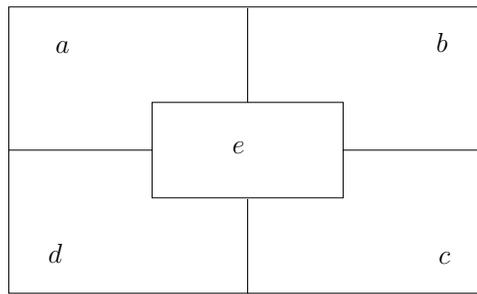


FIG. 2.41 – Exemple d'un graphe de Jordan fort fini : les spels sont les 5 régions de l'image. Deux spels sont proto-adjacents s'ils partagent une arête.

à 0 et celle de déformation continue. De telles notions peuvent tout à fait être définies sur un graphe quelconque [157] et donc sur un espace discret (V, π) . Cependant, on peut supposer que comme pour les images construites sur \mathbb{Z}^n , on sera obligé d'utiliser au cas par cas des propriétés additionnelles des espaces considérés pour obtenir des définitions cohérentes avec l'image associée.

2.6 Généralisation et abstraction de l'approche cellulaire

Cette approche rentre dans le cadre de la topologie combinatoire. Ainsi, les recherches dans ce sens peuvent s'appuyer sur les travaux déjà effectués en topologie combinatoire qui fournissent à la fois un cadre théorique et un ensemble de définitions d'invariants topologiques.

Les subdivisions cellulaires ont été formellement introduites dans le contexte de l'analyse d'images par Kovalevsky [123, 124] pour pallier les insuffisances des représentations par graphes d'adjacence. Il s'agit d'une abstraction de la décomposition cellulaire du plan proposée par Alexandroff et Hopf dans [8].

Nous allons commencer par voir qu'il existe plusieurs manières d'associer une structure cellulaire à une image, selon notamment que l'on exprime ou non la dimension des éléments de la subdivision. Nous décrirons ensuite les modèles développés pour représenter des subdivisions d'espaces, autrement dit structurer l'image en régions. Nous verrons qu'ils sont classables en deux grandes catégories, certains capables de rendre compte de la présence de multi-incidence dans la subdivision, d'autres non. Nous constaterons aussi qu'il existe une grande variété de définitions de tels modèles, même si le principe de représentation cellulaire sous-jacent est commun à tous. Nous aborderons ensuite le problème de la définition de diverses connexités dans de tels espaces. Puis nous nous pencherons sur la définition de structures dédiées à la représentation de subdivisions de surfaces. Au passage, nous verrons que certaines d'entre elles peuvent aussi bien être utilisées pour représenter la subdivision de n'importe quel espace euclidien. Enfin, nous évoquerons les invariants topologiques qui peuvent être adjoints à ces structures.

Le tableau 2.7 page 88 rassemble les modèles de représentation cellulaire que nous évoquons dans la suite de cette section et met en évidence certaines propriétés associées.

2.6.1 Définitions

Très informellement, on peut dire qu'une structure cellulaire est composée d'un ensemble d'éléments reliés par des relations hiérarchiques ("face de", "plus petit", "inclus dans"...).

Nous avons vu que l'approche cellulaire sur \mathbb{Z}^n revenait principalement à ajouter à \mathbb{Z}^n soit une structure cellulaire, soit une structure d'ordre, dans les deux cas "cubique". Ces deux approches peuvent naturellement s'étendre à des espaces discrets quelconques. Le principe commun à ces deux modèles consiste à associer un sous-ensemble d'éléments particuliers aux spels de l'image, les autres éléments servant à exprimer la nature des liens entre les spels.

La notion de *complexe cellulaire abstrait* (ou *abstract cellular complex*) a été introduite par Kovalevsky [124]. Les complexes cartésiens en sont un cas particulier.

Définition 2.9 (Complexe cellulaire abstrait [124]) *Un complexe cellulaire abstrait $C = (E, <, \dim)$ est un ensemble E d'éléments abstraits muni d'une relation binaire antisymétrique, irréflexive, transitive $< \subset E \times E$, appelée relation de bord (ou de face) et d'une fonction dimension $\dim : E \rightarrow I$, de E dans un ensemble I d'entiers positifs ou nuls telle que $\forall (e, e') \in E \times E$ tels que $e < e'$, $\dim(e) < \dim(e')$.*

Soit un ensemble fini de points, F . L'ensemble des parties de F , $\mathcal{P}(F)$, muni de la relation d'inclusion \subset et d'une fonction dimension qui associe à tout élément de $\mathcal{P}(F)$ son cardinal est un complexe cellulaire abstrait.

Un complexe cellulaire abstrait est dit *fini* si l'ensemble des cellules le composant est fini. Un complexe dont la fonction dimension ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs est dit *de dimension finie*¹⁶. On parle alors de complexe cellulaire abstrait de dimension n où n est la plus grande valeur que peut prendre la fonction dimension associée. S'il représente une subdivision homogène, c'est-à-dire dont toute cellule est face d'une cellule maximum, un complexe est dit *pur* [9] (Fig. 2.42). Si une subdivision homogène est telle que toute n -cellule soit reliée à toute autre n -cellule par un n -chemin ne contenant que des n -cellules et des $(n - 1)$ -cellules, son complexe associé est qualifié de *fortement connexe* [9, 124] (Fig. 2.42).

Les propriétés d'homogénéité et de forte connexité sont couramment vérifiées sur des complexes associés à des images où les n -cellules représentent les spels de l'image et les cellules de dimensions inférieures les liens qui unissent ces spels. En effet, dans une telle optique, des cellules non incidentes à une cellule maximale n'apportent rien à la compréhension de l'image. Et la propriété de forte connexité garantit juste que l'ensemble des spels constituant l'image est connexe par faces maximales dans le cas de Kovalevsky. En fait, cette propriété est tout à fait similaire à la propriété de connexité exigée par Herman sur ses espaces discrets et garantit l'existence d'une relation de proto-adjacence (cf définition 2.6 page 62) entre les spels pour laquelle l'ensemble des spels est connexe.

Un niveau d'abstraction supplémentaire a été proposé par Bertrand *et al.* dans [19, 22]. En effet, le modèle qu'il propose oublie la notion de dimension associée aux éléments pour ne se concentrer que sur les éléments eux-mêmes et la relation qui les lie. Ce modèle est tout simplement appelé un *ordre*. Il est une généralisation de l'ordre $|H^n|$ utilisé avec \mathbb{Z}^n .

Définition 2.10 (Ordre [19]) *Un ordre $|X|$ est une paire (X, α) où X est un ensemble et α une relation binaire, réflexive, antisymétrique et transitive sur X .*

Soit un ensemble fini de points, F . L'ensemble des parties de F , $\mathcal{P}(F)$, muni de la relation d'inclusion \subseteq est un ordre.

¹⁶Rien n'empêche un complexe abstrait de dimension finie de posséder un nombre infini d'éléments.

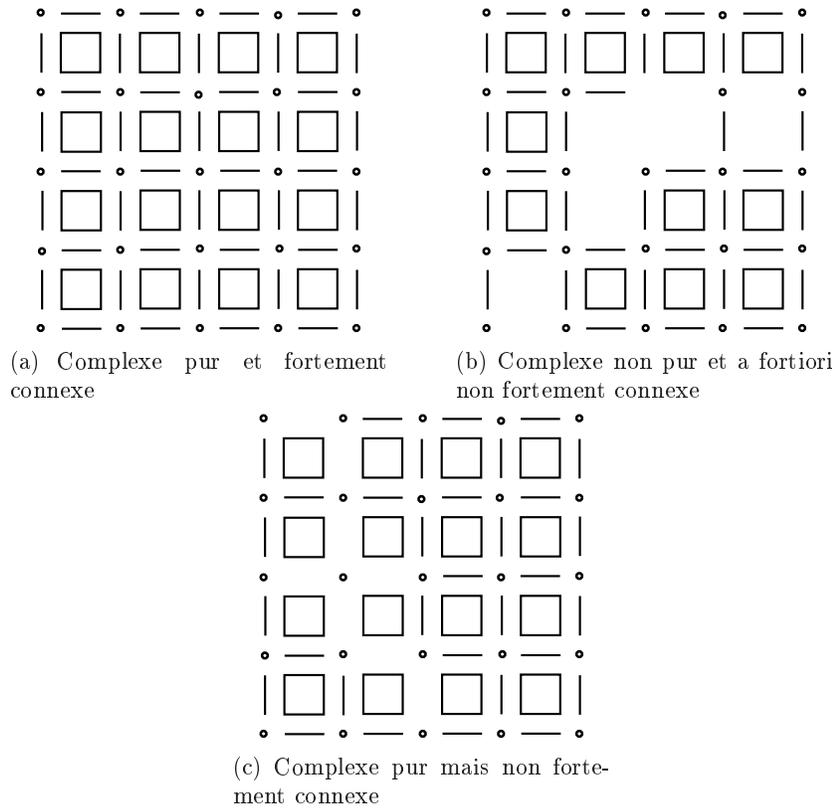


FIG. 2.42 – Propriétés d'homogénéité et de forte connexité des complexes

Nous reviendrons sur les liens entre ordre et complexes dans les chapitres suivants. On peut juste d'ores et déjà noter qu'étant donné un complexe cellulaire abstrait $(E, <, dim)$, la paire (E, \leq) , où \leq est déduite de $<$ en lui rajoutant la propriété de réflexivité, est bien un ordre.

On remarque aussi que la notion d'ordre est équivalente à la notion de *graphe orienté acyclique* (ou *DAG* pour Directed Acyclic Graph). Par la suite, tout ordre sera d'ailleurs représenté par un DAG. Pour simplifier la représentation, on exploitera la propriété de transitivité de la relation d'ordre en ne faisant apparaître que les liens directs entre éléments.

L'ensemble $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, muni de la relation α définie ci-dessous est un ordre :

- $\alpha(x_i) = \{x_i\}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$
- $\alpha(x_i) = \{x_i, x_1\}$ pour $i \in \{3, 4, 5\}$
- $\alpha(x_i) = \{x_i, x_2\}$ pour $i \in \{6, 7\}$
- $\alpha(x_8) = \{x_8, x_0, x_3, x_1\}$
- $\alpha(x_9) = \{x_9, x_3, x_1, x_4\}$
- $\alpha(x_{10}) = \{x_4, x_1, x_5, x_6, x_2, x_7\}$

Cet ordre est représenté sur la figure 2.43.

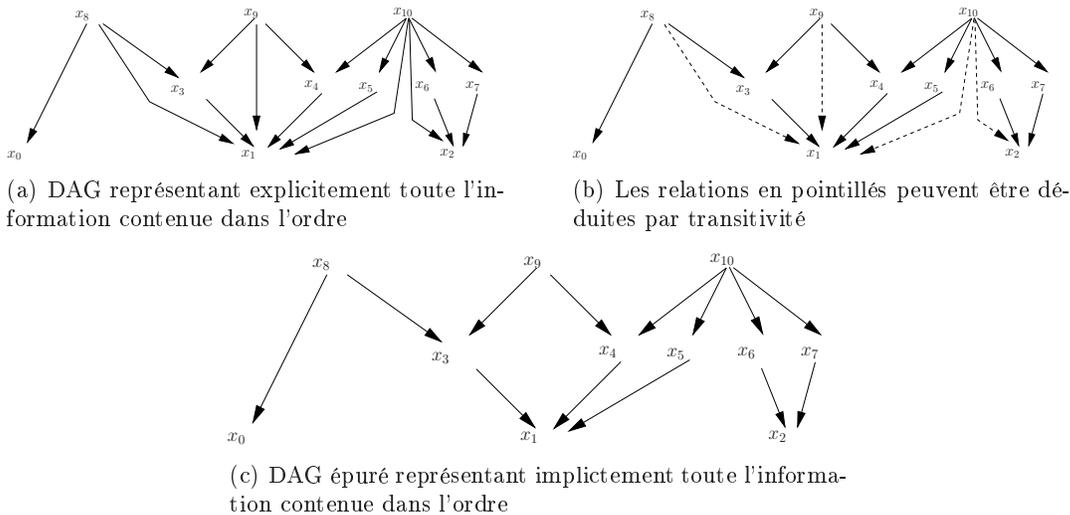


FIG. 2.43 – Représentation d'un ordre par un DAG

On peut noter que ces deux modèles peuvent tout à fait être utilisés pour structurer une image en régions, tant que la subdivision que l'on veut représenter ne contient pas de multi-incidence (autrement dit des cellules plusieurs fois incidentes à une même cellule).

2.6.2 Structuration d'images en régions

Lorsqu'on manipule des modèles cellulaires pour représenter la subdivision d'une image en régions, on est naturellement amené à distinguer deux types de partitions : celles qui contiennent des incidences multiples et celles qui en sont dépourvues. Certains modèles sont, en effet, incapables de rendre compte d'une incidence multiple.

D'un point de vue théorique, cette limitation ne pose pas de problème car il est toujours possible de raffiner n'importe quelle subdivision pour obtenir une subdivision sans multi-incidence

[96]. D'un point de vue pratique par contre, les conséquences peuvent être désastreuses puisque le raffinement d'une subdivision augmente la quantité d'informations à traiter lorsque l'on veut y réaliser des opérations. De plus, il faut contraindre la subdivision à rester sans multi-incidence quels que soient les opérateurs appliqués. Cette dernière restriction est particulièrement contraignante. Ainsi, manipuler un objet représenté par une subdivision sans multi-incidence accroît généralement le coût en mémoire et en temps des traitements ainsi que la complexité des algorithmes auxquels il est soumis.

Ces contraintes sont particulièrement inadaptées aux besoins de la modélisation géométrique, sans compter que des incidences multiples peuvent aussi apparaître lors de certains processus de segmentation.

Il existe un grand nombre de modèles permettant de représenter des subdivisions sans ou avec multi-incidence, à différents degrés d'abstraction.

Subdivisions sans multi-incidence

Les complexes cellulaires abstraits et les ordres évoqués précédemment en font partie, si on considère qu'au lieu de représenter les spels de l'image, les éléments "maximaux" de ces deux modèles sont associés à des régions de l'image. Dans les deux cas, aucune hypothèse n'est imposée sur la nature géométrique des cellules de la subdivision considérée. Une autre représentation a, elle aussi, été employée pour représenter de telles subdivisions, il s'agit des *graphes d'incidence*, notamment utilisés par Edelsbrunner en géométrie algorithmique [70].

Définition 2.11 (Graphe d'incidence [36]) *Le graphe d'incidence induit par une partition cellulaire homogène de dimension n est défini comme un graphe orienté dont les nœuds correspondent aux cellules de la partition et où chaque arc orienté connecte une i -cellule à une $(i-1)$ -cellule incidente. Chaque nœud d'un tel graphe est étiqueté par la dimension de la cellule correspondante.*

On note I_i l'ensemble des indices des i -cellules de la partition cellulaire. Un graphe d'incidence de dimension n peut ainsi être noté $IG_C = (C, \prec)$ où $C = \bigcup_{i=0}^{i=n} (\bigcup_{\beta \in I_i} c_\beta^i)$ est l'ensemble des cellules de la partition et \prec est la relation d'incidence entre les $(i-1)$ -cellules et les i -cellules, $i \in \{1, \dots, n\}$.

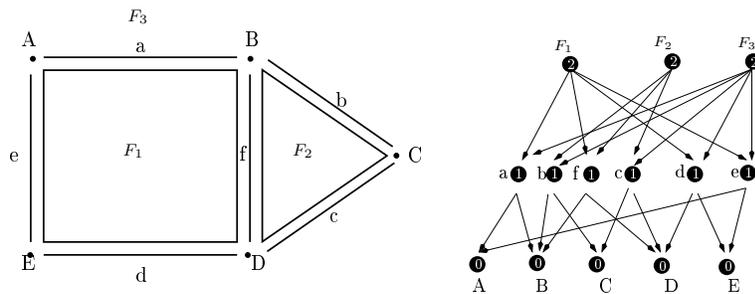


FIG. 2.44 – Subdivision du plan \mathbb{R}^2 et graphe d'incidence associé

Un graphe d'incidence *fini* est un graphe d'incidence tel que C est un ensemble fini de cellules. Il représente alors une subdivision finie d'un espace topologique. La condition d'homogénéité n'est a priori pas nécessaire pour construire un graphe à partir d'une subdivision, mais, en

pratique, lorsqu'on parle de graphe d'incidence, elle est généralement implicite. C'est pourquoi nous l'incluons ici dans la définition de graphe d'incidence.

Un autre type de complexe abstrait joue un rôle important. Il s'agit du *complexe simplicial abstrait* (*abstract simplicial complex*)¹⁷. La triangulation de Delaunay en est un cas particulier.

Définition 2.12 (Complexe simplicial abstrait [26]) *Un complexe simplicial abstrait $\Delta = (V, \Delta)$ est un ensemble de sommets V muni d'une famille Δ de sous-ensembles finis non vides de V , appelés simplexes tels que $\emptyset \neq \sigma \subseteq \tau \in \Delta$ implique $\sigma \in \Delta$.*

La dimension d'un simplexe σ dans Δ , $\dim_{\Delta}(\sigma)$, est égale à son cardinal -1 .

Cette structure est particulièrement intéressante dans la mesure où un tel complexe peut être associé à toute subdivision finie sans multi-incidence. Etant donné un complexe cellulaire abstrait $(E, <, \dim)$ de dimension n , on peut en effet associer à E la famille C de tous ses sous-ensembles de la forme $\{c^{i_0}, c^{i_1}, \dots, c^{i_p}\}$, pour $p \in \{0, \dots, n\}$, où c^{i_j} est une cellule de dimension i_j et tel que $c^{i_0} < c^{i_1} < \dots < c^{i_p}$. Par construction, (E, C) est bien un complexe simplicial abstrait.

D'autre part, étant donné un complexe simplicial abstrait $\Delta = (V, \Delta)$, la paire (Δ, \subseteq) est un ordre et le triplet $(\Delta, \subset, \dim_{\Delta})$ est un cas particulier de complexe cellulaire abstrait.

Un complexe simplicial abstrait régulièrement utilisé est le complexe de dimension n , noté Δ^n , composé d'un seul n -simplexe et de toutes ses faces dans toutes les dimensions inférieures à n .

Les *applications simpliciales* [9, 77] sont les outils appropriés pour manipuler ces complexes simpliciaux : ce sont des applications entre les ensembles de sommets de deux complexes simpliciaux telles que tout simplexe du premier complexe est envoyé sur un simplexe du deuxième. On parle d'*isomorphisme simplicial* lorsque l'application simpliciale est bijective. Lorsque les complexes simpliciaux considérés ont une dimension finie n , il a été prouvé qu'ils sont plongeables dans \mathbb{R}^{2n+1} [9]. Et dans ce cas, une application simpliciale entre eux s'étend naturellement en une application continue entre leurs plongements¹⁸ [165].

Il existe d'autres modèles cellulaires qui proposent des subdivisions particulières d'un espace euclidien. L'un d'eux est construit sur des cellules qui sont des polyèdres. Un *polyèdre* est classiquement défini comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces (fermés ou ouverts)¹⁹. Lorsque cette intersection est bornée, on parle de *polytope* ou de *domaine polyédrique convexe* [9] (Fig. 2.45). Les complexes polyédriques sont alors définis comme des complexes cellulaires abstraits particuliers dont chaque cellule est un polyèdre. Il existe néanmoins plusieurs définitions de complexe polyédrique. La plus générale [39] ne garantit pas qu'un tel complexe est plongeable dans un espace euclidien. Cependant, lorsqu'on parle de complexe polyédrique dans le domaine de l'imagerie numérique, on entend habituellement une définition plus restrictive :

Définition 2.13 (complexe polyédrique) *Un complexe polyédrique est une famille Π de polytopes de \mathbb{R}^n telle que toute face d'un polytope de Π appartient aussi à Π ²⁰ et que l'intersection de deux polytopes est soit vide, soit une face de chacun d'eux.*

¹⁷La notation employée ici est celle de [96].

¹⁸L'expression "application simpliciale" fait parfois aussi référence à l'application continue entre les plongements [165].

¹⁹Un polyèdre est nécessairement convexe.

²⁰Un complexe vérifiant cette propriété est parfois dit *non restreint* [9].

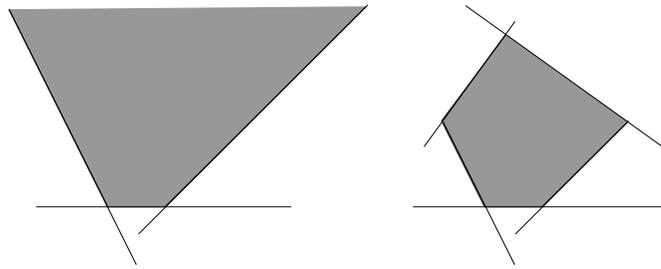


FIG. 2.45 – Exemple d’un polyèdre non borné (à gauche) et d’un polytope (à droite)

Un tel complexe polyédrique est de dimension au plus n , et plongeable dans \mathbb{R}^n . Le *complexe cubique*²¹ que nous avons évoqué précédemment est particulièrement utilisé en imagerie. Un autre cas particulier de complexe polyédrique est le *complexe simplicial non restreint de \mathbb{R}^n* (appelé *triangulation* par Alexandrov [9]) où les cellules sont tout simplement des simplexes de \mathbb{R}^n . Un simplexe de dimension k dans \mathbb{R}^n est défini comme l’*enveloppe convexe* de $k+1$ points de \mathbb{R}^n linéairement indépendants. Un tel complexe simplicial est un cas particulier d’un complexe simplicial abstrait. En effet, ce dernier n’est pas forcément plongeable dans un espace euclidien de même dimension. Il a cependant été prouvé qu’un complexe simplicial abstrait de dimension n était toujours plongeable dans un espace euclidien de dimension $2n+1$. On appelle *réalisation géométrique* d’un complexe simplicial abstrait, un complexe simplicial d’un espace euclidien qui lui est simplicialement isomorphe.

Subdivisions avec multi-incidence

Il existe plusieurs modèles assez génériques permettant de représenter une subdivision avec multi-incidence. Nous présentons brièvement deux approches. Le *complexe cellulaire* (ou *cell complex*) et son dérivé le *a-complexe* ont été formalisés par Alexandrov [9]. Ces deux modèles n’ont pas été explicitement utilisés dans le cadre de l’image mais ils constituent des généralisations naturelles des complexes cellulaires abstraits lorsque l’on souhaite représenter une subdivision contenant de la multi-incidence. L’*ensemble simplicial a*, quant à lui, été décrit par May [160] et a été généralisé par la notion d’*ensemble simplloïdal* utilisé entre autres par Fuchs [81]. Aucun modèle n’a, a priori, été défini qui permette d’englober à lui seul ces deux types de structures. Les différences principales se situent tout d’abord au niveau des cellules. Aucune contrainte n’est imposée sur la nature de ces dernières dans la définition de complexe cellulaire tandis qu’elles vérifient certaines propriétés dans les ensembles simpliciaux ou simplloïdaux. Les incidences ne sont pas non plus représentées de la même manière et les ensembles simpliciaux procurent en outre une notion de dégénérescence. Enfin, il a été prouvé que tout ensemble simplicial possédait une *réalisation géométrique* sous la forme d’un *CW-complexe* [160] (cf définition 2.18 page 77), tandis que rien ne garantit qu’un complexe cellulaire ait une réalisation géométrique.

Nous commençons par définir la notion de complexe cellulaire d’Alexandrov.

Définition 2.14 (Complexe cellulaire d’Alexandrov [9]) Soit \mathcal{R} un ensemble d’éléments appelés cellules. On dit que \mathcal{R} est un complexe cellulaire d’Alexandrov s’il satisfait aux conditions suivantes :

²¹L’adjectif "cubique" ne se limite pas ici à des objets 3D mais à des objets dont les cellules sont des n -cubes, pour un n quelconque.

- i). A toute cellule est associé un entier positif ou nul appelé dimension de la cellule,
- ii). A toute cellule de dimension r (r -cellule) t^r est associée une unique r -cellule, $-t^r \in \mathcal{R}$ telle que

$$-(-t^r) = t^r$$

les cellules t^r et $-t^r$ sont dites opposées,

- iii). A toute paire de cellules constituée dans l'ordre d'une r -cellule et d'une $(r-1)$ -cellule est associé un entier noté $(t^r : t^{r-1})$ appelé le nombre d'incidence des cellules t^r et t^{r-1} ,
- iv). Pour toute r -cellule t^r , l'ensemble des t^{r-1} telles que $(t^r : t^{r-1}) \neq 0$ est fini,
- v). Les nombres d'incidence satisfont la condition suivante :

$$(-t^r : t^{r-1}) = (t^r : -t^{r-1}) = -(t^r : t^{r-1})$$

L'ensemble $(t^2, t^1, t^0, -t^2, -t^1, -t^0)$ tel que t^2, t^1 et t^0 aient respectivement les dimensions 2, 1 et 0, et muni des relations d'incidence : $(t^2 : t^1) = 1$ et $(t^1 : t^0) = 1$ est un complexe cellulaire.

L'ensemble de cellules orientées $(F, a, v, -F, -a, -v)$ tel que $\pm F, \pm a, \pm v$ aient respectivement les dimensions 2, 1 et 0 et muni des relations d'incidences $(F : a) = 2$ et $(a : v) = 0$ est complexe cellulaire.

La décomposition du tore représentée figure 2.46 est, elle aussi, un complexe cellulaire. Les relations d'incidences induites sont $(a_1 : v_1) = 1$, $(a_1 : v_2) = -1$, $(F_1 : a_2) = (F_1 : a_3) = -1$, $(F_1 : a_5) = (F_1 : a_7) = 1 \dots$ Les autres incidences se définissent de manière similaire.

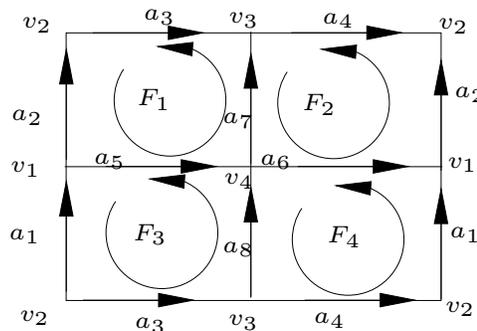


FIG. 2.46 – Exemple d'un complexe cellulaire représentant un tore

Cette définition se présente comme une extension de la notion de complexe cellulaire abstrait aux subdivisions possédant potentiellement de la multi-incidence, si ce n'est qu'elle impose via le point iv que la subdivision soit localement finie. La relation binaire d'incidence est remplacée par un nombre qui permet d'exprimer les éventuelles multi-incidences.

Les subdivisions cellulaires utilisées sont en réalité dérivées d'une sous-classe de complexes cellulaires d'Alexandrov, appelés a -complexes [9]. Nous verrons par la suite que les propriétés additionnelles qui caractérisent les a -complexes sont nécessaires et suffisantes pour pouvoir y construire une théorie de l'homologie.

Définition 2.15 (a-complexe [9]) Un a-complexe est un complexe cellulaire d'Alexandrov \mathcal{R} satisfaisant la proposition suivante. Quelles que soient t^r et t^{r-2} deux cellules quelconques de dimension respectivement r et $r-2$, alors :

$$\sum_{t_i^{r-1} \in \mathcal{R}} (t^r : t_i^{r-1})(t_i^{r-1} : t^{r-2}) = 0$$

Le premier exemple de complexe cellulaire précédemment donné n'est pas un a-complexe : la somme est égale à 1 et non à 0. Les deux autres exemples de complexes cellulaires sont, quant à eux, des a-complexes.

L'ensemble simplicial [160], appelé aussi *complexe semi-simplicial* [60] est un modèle prisé notamment en modélisation (Fig. 2.48). Dans sa version la plus générale, il permet de représenter de possibles dégénérescences (Fig. 2.47).

Définition 2.16 (Ensemble simplicial [160]) Un ensemble simplicial S consiste en une suite d'ensembles disjoints $K = \{K_n, n \geq 0\}$ et une collection d'applications pour chaque dimension $n : d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$, et $s_i : K_n \rightarrow K_{n+1}$, $0 \leq i \leq n$ qui satisfont les égalités suivantes :

- i). $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ pour $i < j$
- ii). $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ pour $i \leq j$
- iii). $d_i s_j = s_{j-1} d_i$ pour $i < j$
- iv). $d_j s_j = d_{j+1} s_j = \text{identité}$
- v). $d_i s_j = s_j d_{i-1}$ pour $i > j + 1$

Les éléments de K_n sont appelés *n-simplexes*. d_i et s_i sont respectivement appelés opérateur de face et opérateur de dégénérescence

L'opérateur de dégénérescence autorise la contraction d'une cellule sur une cellule de dimension juste inférieure (Fig. 2.47). Il est représenté par une application qui à une cellule associe la cellule de dimension juste supérieure qui s'est éventuellement contractée sur elle.

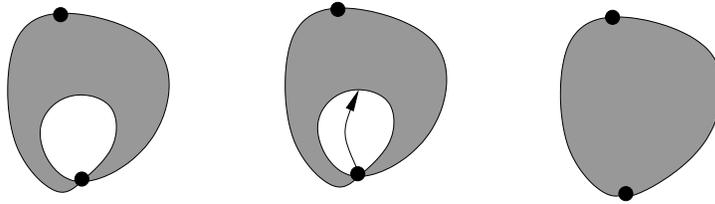
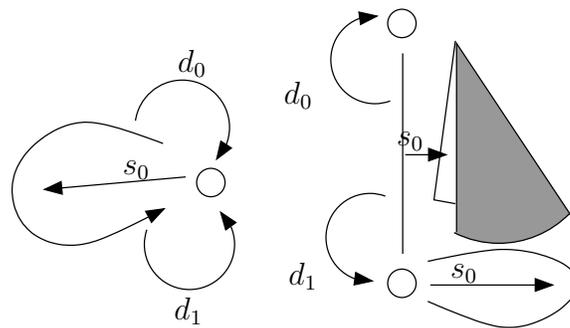


FIG. 2.47 – Exemple d'une dégénérescence

En modélisation, les modèles considérés se fondent généralement sur un *ensemble semi-simplicial* qui est un ensemble simplicial sur lequel n'est défini aucun opérateur de dégénérescence (Fig. 2.49). Autrement dit, leur définition se résume à :

Définition 2.17 (Ensemble semi-simplicial [163]) Un ensemble semi-simplicial S consiste en une suite d'ensembles disjoints $K = \{K_n, n \geq 0\}$ et une collection d'applications pour chaque dimension $n : d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$, qui satisfont l'égalité suivante :

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \text{ pour } i < j$$



(a) Ensemble simplicial dont la réalisation géométrique est un point
 (b) Ensemble simplicial dont la réalisation géométrique est une arête

FIG. 2.48 – Exemples d'ensembles simpliciaux

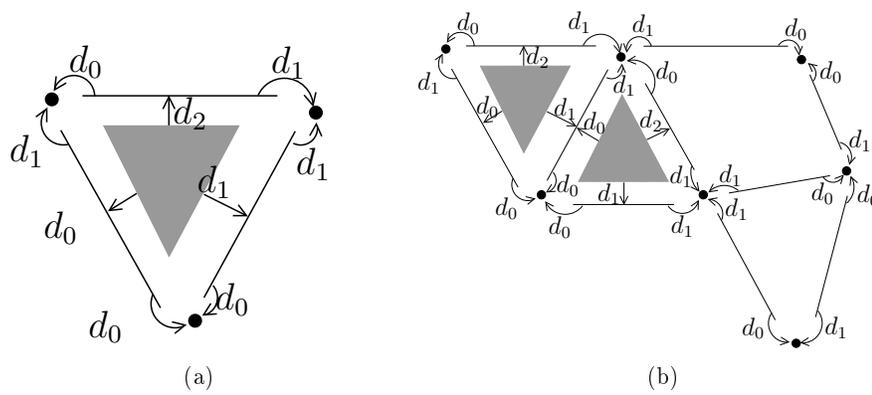


FIG. 2.49 – Exemples d'ensembles semi-simpliciaux

Par abus de langage, on appelle parfois de tels ensembles des ensembles simpliciaux. On les trouve aussi sous le nom de Δ -ensembles [163]. Ils sont en quelque sorte le pendant des complexes simpliciaux abstraits pour les subdivisions avec multi-incidence.

Il existe plusieurs modèles intéressants dérivés des ensembles semi-simpliciaux. L'un d'eux a été utilisé dans [141] sous le nom d'ensemble simplicial non dégénéré. Ce nom peut prêter à confusion car il ne désigne pas, comme on pourrait le croire, un ensemble simplicial sans opérateurs de dégénérescence ou ensemble semi-simplicial. Il caractérise, en réalité, les ensembles semi-simpliciaux tels que le bord de tout i -simplexe contienne exactement $(i+1)$ 0-simplexes distincts. Par la suite, nous les appellerons *ensembles semi-simpliciaux non dégénérés*. Un autre modèle dérivé dont nous aurons besoin ultérieurement est l'*ensemble semi-simplicial numéroté de dimension n* (Fig. 2.50). Il s'agit d'un ensemble semi-simplicial non dégénéré de dimension n muni d'une application supplémentaire, notée ν , qui associe à chaque sommet un entier entre 0 et n . L'application ν est telle que les $i+1$ sommets de tout i -simplexe maximal sont numérotés entre 0 et i . Un ensemble semi-simplicial non dégénéré peut ne pas être numéroté. Cependant ce modèle n'est théoriquement pas trop restrictif car un tel ensemble peut toujours être obtenu à partir de tout ensemble semi-simplicial non dégénéré par subdivision barycentrique [141].

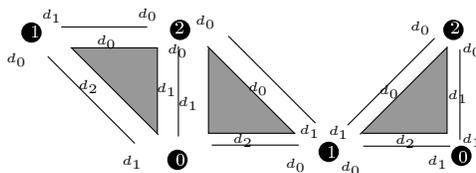


FIG. 2.50 – Exemple d'un ensemble semi-simplicial numéroté

Plusieurs variations des ensembles (semi-)simpliciaux ont été proposées qui permettent de travailler avec des cellules autres que des simplexes. Un de ces modèles utilise des cellules "cubiques", on parle alors d'*ensemble cubique* [81]. Les *ensembles simptoïdaux* [81], quant à eux, sont une généralisation des ensembles (semi-)simpliciaux et des ensembles cubiques puisque les cellules qu'ils manipulent sont des *simptoïdes* c'est-à-dire des cellules définies comme produits de simplexes (Fig. 2.51). La définition des opérateurs de face, bien que réalisée dans le même esprit que celle des opérateurs des ensembles (semi-)simpliciaux, est alors plus compliquée à mettre en œuvre (double indiçage). Et les ensembles simptoïdaux ne sont a priori pas munis d'opérateurs de dégénérescence.

Enfin, certains modèles rajoutent des contraintes topologiques sur les cellules. Le modèle le plus connu est le *CW-complexe*²² introduit par Whitehead (Fig. 2.52). Il peut être vu comme une généralisation des complexes simpliciaux guidée par la théorie de l'homotopie [204]. Une cellule d'un *CW-complexe* est, en effet, homéomorphe à une cellule d'un complexe simplicial. Un *CW-complexe* est un espace X qui peut être construit de manière hiérarchique à partir d'une collection de points X^0 et de disques de diverses dimensions supérieures ou égales à 1. Des disques de dimension 1 sont d'abord attachés selon leurs bords aux éléments de X^0 . Cet ensemble de disques attachés à X^0 est noté X^1 . La construction de l'espace se poursuit pas à pas de la même manière, en incrémentant la dimension à chaque pas, autrement dit en attachant à chaque étape un ensemble de disques de dimension k selon leur bord aux objets de X^{k-1} . La formalisation de cette notion se trouve entre autres dans [160]

²²*CW* signifie *closure-finite weak topology*.

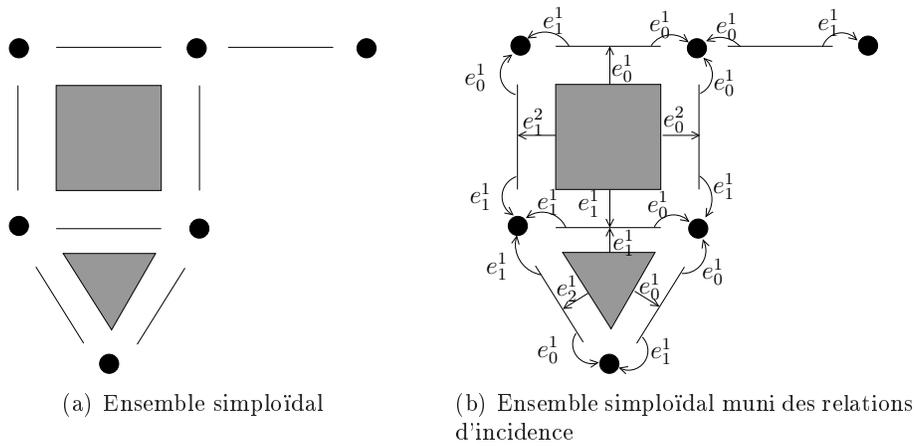


FIG. 2.51 – Exemple d'un ensemble simloïdal sans et avec ses relations d'incidence

Définition 2.18 (CW-complexe) Une décomposition cellulaire X , parfois aussi appelée complexe cellulaire²³, est un espace de Hausdorff correspondant à l'union de cellules ouvertes disjointes telle que pour toute cellule e^m , il existe une application continue f de la boule fermée \mathbb{D}^m dans la clôture de e^m , dénotée par \bar{e}^m , vérifiant :

- i). $f|_{\mathbb{D}^m - \mathbb{S}^{m-1}}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{D}^m - \mathbb{S}^{m-1}$ sur e^m .
- ii). $f(\mathbb{S}^{m-1})$ est contenu dans l'ensemble des cellules de dimensions inférieures à m

Un sous-complexe Y de X est une union de cellules de X telle que si $e^n \subset Y$ alors $\bar{e}^n \subseteq Y$

Un CW-complexe X est une décomposition cellulaire telle que :

- i). la clôture de toute cellule est contenue dans un sous-complexe fini (closure-finite)
- ii). un sous-ensemble de X est fermé si son intersection avec la clôture de toute cellule est fermée (weak topology)

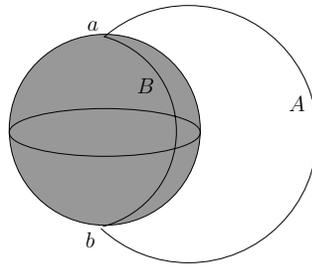


FIG. 2.52 – Exemple d'un CW-complexe possédant deux 0-cellules a et b , deux 1-cellules A et B et une 2-cellule : la 2-sphère

Ces complexes et les ensembles simpliciaux dont ils sont une réalisation géométrique ont notamment été utilisés par Desbarats et Gueorguieva pour de la modélisation d'objets solides et pour la reconstruction de frontières d'objets discrets [60].

²³Il ne s'agit pas des complexes cellulaires définis par Alexandrov [9].

S'agissant des complexes, on trouve parfois l'expression *complexe régulier*. Cependant, cette expression est trompeuse car elle ne désigne pas toujours le même type de complexe. Dans [57], elle est synonyme de complexe pur tandis que dans [74], elle désigne un complexe fortement connexe. Enfin elle représente un cas particulier de *CW-complexe* dans [26].

Un autre modèle contraignant aussi la topologie des cellules a été introduit par Kovalevsky [124, 125, 182] : il s'agit du *complexe de blocs* (Fig. 2.53). Un tel complexe est construit à partir d'un complexe cellulaire abstrait en regroupant ses cellules en "blocs de cellules", chacun topologiquement équivalent à une boule ouverte.

Définition 2.19 (Complexe de blocs) Soit M une subdivision d'un complexe cellulaire abstrait A en sous-ensembles S_i^k telle que les S_i^0 soient des 0-cellules de A et les S_i^k , $k > 0$, soient chacun homéomorphes à une boule ouverte de dimension k . Soient BR la relation binaire de face et Dim la fonction dimension induites sur M par A . Le triplet $B(A) = (M, BR, Dim)$ est appelé complexe de blocs de A et les sous-ensembles S_i^k sont nommés blocs k -dimensionnels ou k -blocs.

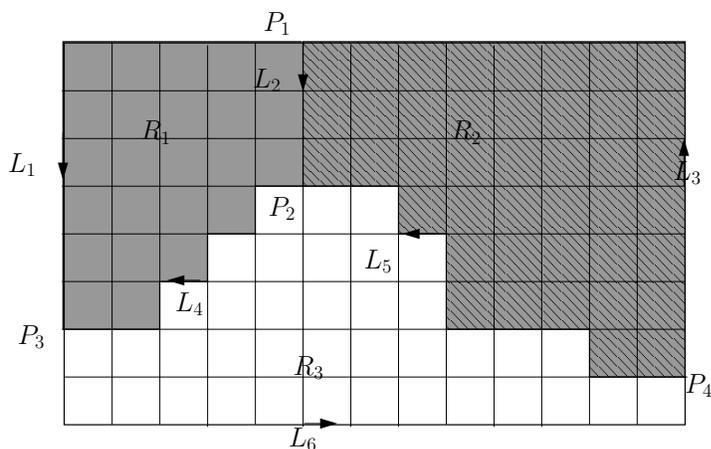


FIG. 2.53 – Complexe de blocs composé de trois 0-cellules, six 1-cellules, et trois 2-cellules

Lorsque la fusion de cellules est opérée sur un complexe cellulaire abstrait, il peut apparaître de la multi-incidence. Cette information ne peut pas être mémorisée par la structure de complexe de blocs telle quelle. Pour ne pas la perdre, Kovalevsky propose d'associer à un tel complexe de blocs une *structure d'incidence* [127]. Précalculée avant la fusion des cellules, elle contient d'abord les relations d'incidence entre cellules puis est mise à jour lors de la création des blocs. Elle permet alors de stocker les éventuelles multi-incidences. Un modèle dérivé du complexe de blocs est le *complexe de blocs propres* (*proper block complex*) dont le bord de chaque k -cellule est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^{k-1} (Fig. 2.54).

La manipulation des complexes de blocs est réalisée en $2D$ et $3D$ par des listes de cellules adaptées [124, 127].

2.6.3 Connexité

Comme indiqué dans l'annexe C page 253, on peut construire sur toute structure cellulaire une topologie et ainsi une notion de connexité. Cette connexité coïncide avec la connexité par chemins naturellement définie sur ces structures.

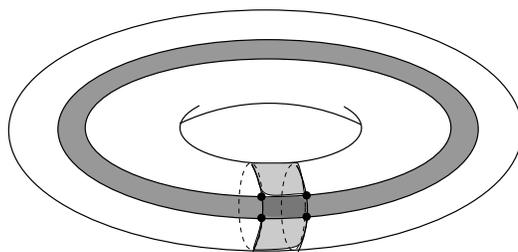


FIG. 2.54 – Complexe de blocs propres représentant la surface d'un tore

Lorsqu'on utilise une structure cellulaire pour représenter une image, on associe les spels de l'image à l'ensemble des éléments "maximaux" et seule la connexité de ces éléments nous intéresse. La connexité définie classiquement sur les objets cellulaires constitue une sorte de connexité maximale entre spels. Mais certaines applications, plus particulièrement réalisées au niveau pixel, (comme dans le cas de \mathbb{Z}^2) peuvent nécessiter l'emploi de différentes notions de connexité. La présence d'éléments intermédiaires de différentes natures peut permettre de caractériser plusieurs notions d'adjacence.

Pour définir de telles connexités, les deux approches classiques consistent soit à rajouter une information sur le complexe qui permet de sélectionner les cellules de dimensions inférieures utilisées pour réaliser les connexions, soit à trouver un procédé pour extraire directement les composantes connexes désirées. Les seules connexités ainsi définies sont celles déjà évoquées dans le cadre des structures cellulaires associées à \mathbb{Z}^n .

2.6.4 Surfaces et bords d'objets

Il existe une très grande variété de modèles cellulaires dédiés à la représentation de surfaces. Leur but est de définir des objets qui vérifient la propriété de Jordan lorsque la surface représentée est fermée. Les espaces discrétisés via une approche cellulaire ressemblent plus à l'espace continu initial que les espaces obtenus via une approche graphe. L'idée première repose sur l'espoir de pouvoir définir sur ces espaces cellulaires un analogue "cellulaire" ou "combinatoire" de la notion de variété topologique. Cette approche consiste à manipuler des objets qui ressemblent à des variétés. En pratique, on s'intéresse plus prosaïquement à une classe d'objets plus large sur lesquels on autorise des dissemblances locales avec un espace euclidien, notamment des singularités, tant que la propriété de séparation de Jordan-Brouwer reste vérifiée. Nous ne présentons ici que des modèles de surface assez généraux, c'est-à-dire utilisables en n'importe quelle dimension. D'autres modèles existent qui représentent des surfaces de dimensions 2 et 3. On trouvera une comparaison de certains de ces modèles dans [140], d'autres sont aussi décrits dans [60].

La plupart des structures utilisées pour décrire des surfaces se fondent de près ou de loin sur des décompositions simpliciales, même si ce n'est pas toujours évident à première vue (modèles à base de cartes combinatoires, de cell-tuples).

Les recherches pour définir des surfaces vont principalement dans deux sens : mettre en évidence des sous-familles de variétés entièrement caractérisables de manière combinatoire, ou définir des classes d'objets cellulaires vérifiant la propriété de Jordan-Brouwer.

En ce qui concerne la représentation combinatoire des variétés topologiques, on se heurte dès la dimension 4 à un problème. En effet, à partir de cette dimension, il existe des variétés topo-

logiques non triangulables²⁴. On doit donc abandonner l'idée de représenter toutes les variétés de manière combinatoire.

Théorème 2.20 (Représentation combinatoire des variétés topologiques) *Il existe des variétés topologiques de dimension supérieure ou égale à 4 non représentables de manière combinatoire*

Néanmoins, des modèles combinatoires ont été développés pour représenter des sous-classes de variétés²⁵. Ils se fondent sur des notions de topologie linéaire par morceaux. Ainsi ont été définies les *PL*-variétés (cf Déf. C.8 page 258), puis les *variétés combinatoires* (Déf. C.9 page 258) qui sont simplement d'une abstraction des *PL*-variétés. De manière similaire, on peut définir des *variétés polyédriques (polyhedral manifolds)*. Les *PL*-variétés, les variétés combinatoires et les variétés polyédriques sont par défaut fermées c'est-à-dire sans bords. Mais des définitions de variétés ouvertes peuvent être aisément déduites.

Cependant, l'ensemble de ces notions ne sont pas facilement exploitables car elles ne donnent aucun moyen concret pour construire ou reconnaître de telles variétés.

Une autre classe de variétés a été proposée pour résoudre ce problème. Il s'agit des *variétés stellaires* [138]. Ces variétés sont homéomorphes aux *PL*-variétés en dimension inférieure ou égale à 3. Autrement dit, elles sont aussi homéomorphes aux variétés topologiques en dimension inférieure ou égale à 3. Elles sont définies à l'aide de *boules stellaires* et de *sphères stellaires*. Dans les définitions de ces objets stellaires, les homéomorphismes linéaires par morceaux utilisés pour caractériser les *PL*-boules et les *PL*-sphères sont remplacés par des *opérations stellaires*. Celles-ci sont des opérations locales faciles à mettre en œuvre sur les complexes simpliciaux. Elles sont principalement de deux types : les *subdivisions stellaires* (en anglais *stellar subdivisions*) et les *soudures stellaires* (en anglais *stellar welds*) (Fig. 2.55(a) et 2.55(b)). On parle de *mouvement bistellaire* (en anglais *bistellar move*) lorsqu'on a une composition d'une subdivision et d'une soudure stellaires [197] (Fig. 2.55(c)). En dimensions 2 et 3 de telles opérations sont parfois utilisées pour simplifier des surfaces triangulées car elles ne changent pas leur topologie [55].

Définition 2.21 (Variété stellaire) *Deux complexes simpliciaux sont des équivalents stellaires, s'ils peuvent être obtenus l'un de l'autre par un ensemble fini d'opérations stellaires.*

Une n -boule stellaire est un complexe simplicial B^n qui est un équivalent stellaire de Δ^n . Une n -sphère stellaire est un complexe simplicial S^n qui est un équivalent stellaire du bord de Δ^{n+1} .

Une variété stellaire est un complexe simplicial M tel que pour tout sommet v de M , le lien de v dans M soit une $(n - 1)$ -boule stellaire ou une $(n - 1)$ -sphère stellaire.

Cependant, comme dit précédemment, on peut s'intéresser à une classe plus large d'objets. Les *pseudo-variétés* [9] (Fig. 2.56) et certaines sous-classes qui en dérivent vérifient une propriété de Jordan-Brouwer et sont ainsi souvent utilisées pour définir des surfaces. Les modèles décrits ci-dessous permettent de représenter aussi bien des subdivisions de surfaces, que des subdivisions d'un espace euclidien (qui sont des cas particuliers de pseudo-variétés).

Définition 2.22 (pseudo-variété) *Un complexe simplicial fortement connexe de dimension n , K^n , est une pseudo-variété si tout $(n - 1)$ -simplexe de K^n est face d'exactly deux n -simplices de K^n*

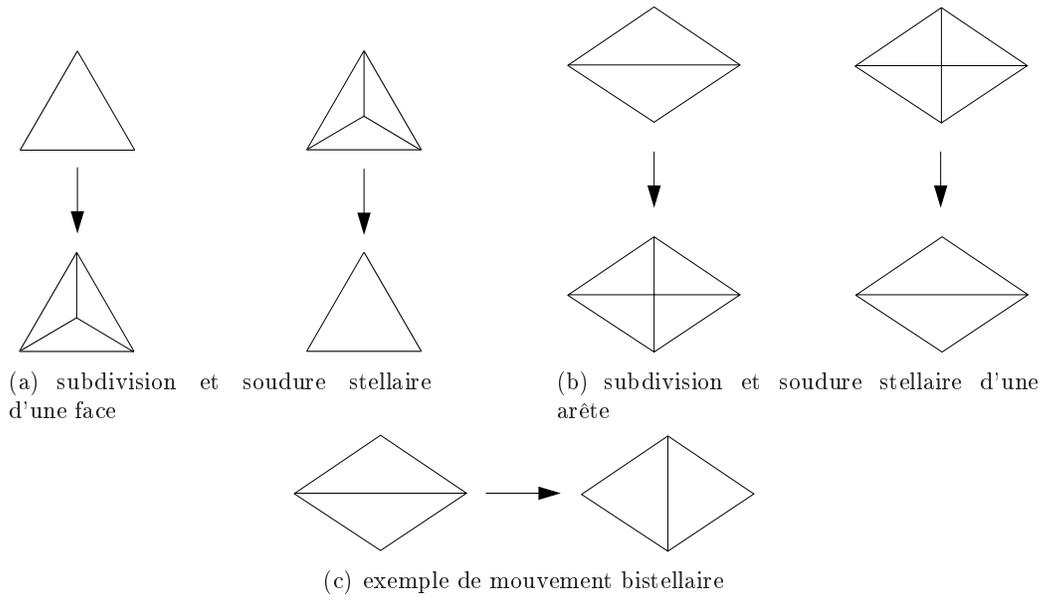


FIG. 2.55 – Opérations stellaires

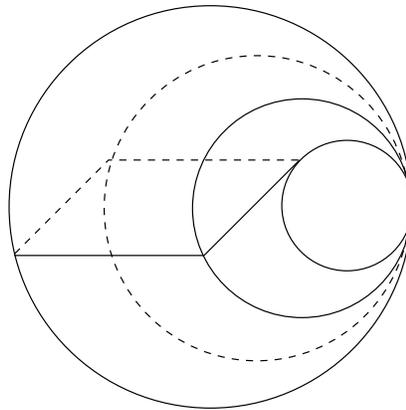


FIG. 2.56 – Exemple d'une pseudo-variété

Plus généralement, on dit qu'un espace est une pseudo-variété s'il admet une triangulation qui possède les propriétés des pseudo-variétés précédemment définies.

Une structure utilisée en modélisation se fonde sur un dérivé d'une pseudo-variété appelé *quasi-variété cellulaire*. Une quasi-variété cellulaire se définit comme une pseudo-variété dont la triangulation est une *quasi-variété simpliciale* [141] (Fig. 2.57).

Définition 2.23 (quasi-variété simpliciale) Une quasi-variété simpliciale de dimension n est un ensemble semi-simplicial numéroté qui peut se construire en :

- créant un ensemble semi-simplicial numéroté de dimension n vide,
- ajoutant des n -simplexes fermés,
- identifiant des $(n-1)$ -simplexes fermés de sorte qu'au plus deux n -simplexes appartiennent à l'étoile de chaque $(n-1)$ -simplexe.

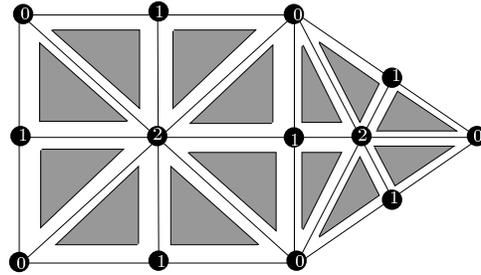


FIG. 2.57 – Exemple d'une quasi-variété simpliciale avec bord

De cette définition constructive des quasi-variétés simpliciales découle une définition constructive des quasi-variétés cellulaires [141] bien utile pour la modélisation d'objets. Ces quasi-variétés permettent de représenter des surfaces fermées ou non, orientables ou non. D'autre part, ces objets peuvent être représentés à l'aide d'un modèle combinatoire, les *cartes généralisées* ou *n - G -cartes*, qui ont l'avantage à la fois de s'exprimer plus simplement et de pouvoir être munis assez aisément d'opérations de construction et de déformation. Ce modèle a été introduit par Lienhardt [139] qui a aussi prouvé son équivalence avec les quasi-variétés cellulaires [141]. Ces cartes constituent une extension des cartes combinatoires associées aux cartes planaires, précédemment évoquées.

Définition 2.24 (n - G -carte) Une n - G -carte pour $n \geq 0$ est un $(n+2)$ -uplet $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tel que :

- D est un ensemble fini de brins,
- les α_i , $i \in \{0, \dots, n\}$ sont des permutations sur D telles que :
 - $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, α_i est une involution²⁶
 - Si D est l'ensemble vide, α_i n'est pas défini.
- $\forall i, j$ tels que $0 \leq i < i + 2 \leq j \leq n$, $\alpha_i \alpha_j$ est une involution

Une (-1) - G -carte est définie par $G = (D)$, où D est un ensemble fini de brins.

Les n - G -cartes peuvent représenter des quasi-variétés cellulaires, avec ou sans bord, orientables ou non.

²⁴Un exemple d'une 4-variété non triangulable se trouve par exemple dans [56].

²⁵Les définitions de ces sous-classes de variétés se trouvent en annexe C page 257.

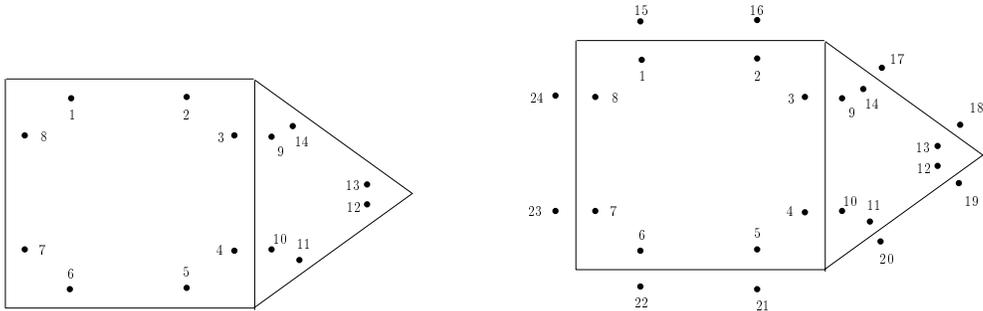
²⁶Une permutation π de domaine l'ensemble D est une involution si $\pi \circ \pi = \text{identity of } D$.

La 2- G -carte de la figure 2.58(a) représente une quasi-variété avec bord (Fig. 2.57) et est composée de 14 brins (numérotés de 1 à 14) et les involutions α_0, α_1 et α_2 sont définies par :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \{(1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 10)\ (11\ 12)\ (13\ 14)\}, \\ \alpha_1 &= \{(1\ 8)\ (2\ 3)\ (4\ 5)\ (6\ 7)\ (9\ 14)\ (10\ 11)\ (12\ 13)\}, \\ \alpha_2 &= \{(3\ 9)\ (4\ 10)\} \end{aligned}$$

La 2- G -carte de la figure 2.58(b) représente une quasi-variété sans bord et est composée de 24 brins (numérotés de 1 à 24) et les involutions α_0, α_1 et α_2 sont définies par :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \{(1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 10)\ (11\ 12)\ (13\ 14)\ (15\ 16)\ (17\ 18)\ (19\ 20)\ (21\ 22)\ (23\ 24)\}, \\ \alpha_1 &= \{(1\ 8)\ (2\ 3)\ (4\ 5)\ (6\ 7)\ (9\ 14)\ (10\ 11)\ (12\ 13)\ (15\ 24)\ (16\ 17)\ (18\ 19)\ (20\ 21)\ (22\ 23)\}, \\ \alpha_2 &= \{(1\ 15)\ (2\ 16)\ (3\ 9)\ (4\ 10)\ (5\ 21)\ (6\ 22)\ (7\ 23)\ (8\ 24)\ (11\ 20)\ (12\ 19)\ (13\ 18)\ (14\ 17)\} \end{aligned}$$



(a) 2- G -carte associée à la quasi-variété simpliciale de la figure 2.57

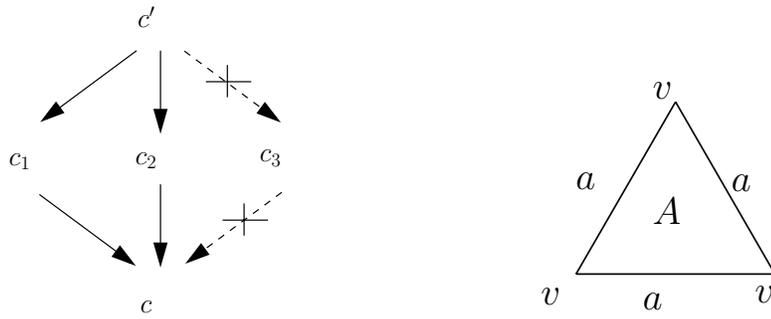
(b) 2- G -carte associée à une quasi-variété cellulaire sans bord

FIG. 2.58 – Exemples de 2- G -cartes

Construit à partir de ce modèle, il en existe un autre dont les cellules sont des quasi-variétés cellulaires, il s'agit des chaînes de cartes [74].

Un autre modèle de carte un peu plus spécialisé, les n -cartes sont, quant à elles, dédiées à la représentation de quasi-variétés cellulaires sans bords orientables [140, 141]. La définition des n -cartes [139] est très proche de celle des n - G -cartes. Mais elle ne nécessite que n permutations dont seulement $n - 1$ sont des involutions.

Définition 2.25 (n -carte) Soit $n \geq 0$. Une n -carte est un $(n + 1)$ -uplet : $C = (D, \beta_1, \dots, \beta_n)$ tel que :



(a) Graphe d'incidence permettant de visualiser la propriété de switch. Si $\dim(c) = n$ et $\dim(c') = n + 2$, il ne peut y avoir que deux $(n + 1)$ -cellules (c_1 et c_2) entre c et c'

(b) Objet ne vérifiant pas la propriété de switch. En identifiant les 3 arêtes du triangle, il ne reste plus qu'une cellule entre le sommet x et la 2-cellule A

FIG. 2.59 – Illustration de la propriété de switch

- i). D est un ensemble fini de brins,
- ii). β_1 est une permutation sur D ,
- iii). $\forall i \in \{2, \dots, n\}$, β_i est une involution sur D ,
- iv). $\forall i, j$ tels que $1 \leq i < i + 2 \leq n$, $\beta_i \beta_j$ est une involution.

Enfin, un modèle plus général, les n -hypercartes ou n - h -cartes a été introduit par Dufourd [66]. Il s'agit d'une extension des hypercartes présentées par Cori [46]. Elle généralise les modèles de cartes précédemment décrits puisque les $n + 1$ permutations qui la définissent n'ont pas besoin d'être des involutions. Ces modèles à base de cartes combinatoires ont la faculté de pouvoir intégrer des informations de multi-incidence. Notons que la notion de carte combinatoire a d'abord été introduite en mathématiques afin de décrire des subdivisions de surfaces polyédriques [73, 83, 199].

Brisson s'est, quant à lui, intéressé aux n -variétés subdivisées [36]. Il s'agit tout simplement de l'ensemble des CW -complexes dont l'espace sous-jacent est une n -variété fermée. Un tel objet est noté (M, C) où M est une n -variété et où C constitue l'ensemble des cellules de la subdivision associée. Il a été montré toujours par Brisson [36] que C est caractérisé par la propriété suivante, dite *propriété de switch* (Fig. 2.59): étant données deux cellules c et c' telles que c soit une face de c' et que sa dimension $\dim(c)$ soit inférieure de deux unités à $\dim(c')$ alors il existe exactement deux cellules de dimension $\dim(c) + 1$ entre c et c' . De tels objets sont alors manipulés par l'intermédiaire d'une structure de données compacte qui permet de représenter la topologie des n -variétés subdivisées. Ce modèle s'appelle *structure cell-tuple* (en anglais *cell-tuple structure*). Il se fonde sur l'utilisation de cell-tuples auxquels sont adjoints $(n + 1)$ opérateurs, switch_k , pour k compris entre 0 et n , qui traduisent la propriété caractéristique de ces objets. Nous reviendrons plus en détail sur la définition de ces opérateurs dans les chapitres suivants.

Définition 2.26 (Structure cell-tuple) *Etant donnée une n -variété subdivisée, (M, C) , tout $(n + 1)$ -uplet $(c_{\beta_0}^0, \dots, c_{\beta_n}^n)$ de cellules de C tel que $c_{\beta_0}^0 \prec \dots \prec c_{\beta_n}^n$ est appelé cell-tuple. L'ensemble des cell-tuples associés à (M, C) est noté $T_{(M, C)}$.*

La structure cell-tuple $T_{(M, C)}$ est la paire $(T_{(M, C)}, \{\text{switch}_k\}_{0 \leq k \leq n})$.

Nous finissons ce tour d'horizon des représentations de subdivisions cellulaires de surfaces, en mentionnant les n -surfaces définies sur les ordres [22]. Il s'agit d'une sous-classe des ordres définie récursivement de sorte que le "voisinage" de tout élément d'une n -surface soit une $(n-1)$ -surface. Nous reviendrons sur ce modèle dans le chapitre 3 (Déf. 3.9 page 97) et caractériserons le type de surfaces qu'il permet de représenter (chap. 3 et 4).

2.6.5 Invariants topologiques

Les structures cellulaires sont a priori plutôt bien appropriées à la définition d'un grand nombre d'invariants topologiques, puisqu'elles possèdent une structure combinatoire compatible avec la définition de la plupart d'entre eux. Ce n'est donc pas l'existence de ces invariants qui pose problème mais plutôt l'obtention, sur chaque modèle, d'une définition efficace et adaptée aux applications d'imagerie numérique. Nous présentons ici les travaux effectués dans ce sens.

Tous les modèles que nous avons évoqués ont été munis d'une caractéristique d'Euler qui est un invariant simple à calculer sur toute décomposition cellulaire.

En outre, la topologie induite sur des subdivisions cellulaires permet aussi de définir la notion de fonction continue (cf Th. C.5 page 257). Cette définition peut s'étendre et il est alors tout à fait possible de construire des "homotopies discrètes" de fonctions [14, 15, 16, 19], autrement dit des déformations continues entre fonctions. La définition d'homotopie de fonctions permet entre autres à Bertrand [19] d'adapter sur les ordres les notions de *rétracte*, *rétracte par déformation* et *espace contractile*. Il est ensuite possible d'y définir différentes notions de point simple, fondées sur l'observation du type d'homotopie de son voisinage. Ces définitions présentent l'avantage de ne pas dépendre de la nature de l'espace sous-jacent, puisque l'ordre est le niveau d'abstraction le plus élevé des représentations cellulaires sans multi-incidence. Dominguez *et al.* se sont quant à eux servis des définitions d'homotopie de fonctions pour construire des homotopies de lacets et proposer une définition de groupes d'homotopie discrets [14, 15, 16] sur des complexes polyédriques. Cependant, nous avons déjà vu que le groupe d'homotopie fournit une information peu exploitable et leurs travaux ne proposent pas une utilisation effective de ces groupes.

La théorie de l'homologie commence à intéresser les communautés travaillant dans le cadre de l'imagerie numérique. Cependant, assez peu de travaux ont encore vu le jour dans ce domaine et les algorithmes développés se sont principalement cantonnés à des espaces particuliers et de petites dimensions (complexe simplicial ou grille, en $2D$ ou $3D$). Nous expliquerons plus précisément les tenants et les aboutissants de l'utilisation de l'homologie dans le chapitre 5. En réalité, la plupart des modèles évoqués ci-dessus, sont compatibles avec une théorie de l'homologie. Quelques pré-requis permettant de construire une théorie de l'homologie ont été évoqués page 20. Ainsi, pour définir un groupe d'homologie sur un espace de dimension n , il faut tout d'abord pouvoir y construire des chaînes de dimension k ou k -chaînes, pour k allant de 0 à n . De telles chaînes sont naturellement définies sur une subdivision cellulaire comme une somme algébrique de k -cellules chacune accompagnée d'un coefficient multiplicateur appartenant à un groupe abélien (souvent \mathbb{Z} ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) appelé groupe des coefficients. On peut montrer que cet ensemble de k -chaînes constitue un groupe relativement au groupe des coefficients. Un ensemble d'opérateurs bord entre ces groupes des chaînes se déduit naturellement des relations d'incidence définissant la subdivision cellulaire. Mais pour construire une théorie de l'homologie il est nécessaire que cet ensemble d'opérateurs soit en adéquation avec la propriété suivante : *le bord d'un bord est nul*.

On peut prouver que cette assertion est vérifiée pour l'ensemble de a -complexes [9] et des

ensembles semi-simpliciaux [167], ainsi que pour les complexes cubiques non restreints [104] et simpliciaux non restreints [9]. Les définitions de complexe cellulaire abstrait et de complexe cellulaire d'Alexandrov sont par contre trop générales pour garantir qu'une théorie de l'homologie puisse y être construite.

2.7 Bilan

Nous avons, dans ce premier chapitre, rappelé les notions topologiques potentiellement utiles en imagerie puis nous avons présenté les principales approches suivies pour représenter l'information topologique contenue dans les images. Notre idée était de comparer les puissances de représentation et d'abstraction de l'approche graphe et de l'approche cellulaire dans le cadre de l'imagerie numérique, et de déterminer les besoins existant en termes d'unification de ces modèles et d'outils topologiques.

On peut tirer plusieurs conclusions de cette étude. Tout d'abord, l'approche graphe a certainement été la plus étudiée dans le cadre des images construites sur la grille. Dans ce contexte, lorsqu'on souhaite réaliser des manipulations au niveau pixel et qu'on se limite à de petites dimensions, elle propose des solutions souvent efficaces, car locales et dédiées. Mais ses atouts constituent aussi son principal handicap. En effet, son efficacité est très intimement liée à la structure même de \mathbb{Z}^n , notamment sa régularité, et aux analogues continus qui lui sont classiquement associés. Par exemple, le choix d'une paire d'adjacences dans un tel espace induit implicitement une interprétation géométrique. Aussi, toutes les notions topologiques définies devront-elles être entièrement repensées si l'on change d'espace discret sous-jacent. En outre, la plupart des caractéristiques topologiques proposées dépendent de paires d'adjacences particulières, et ne sont valables que sur \mathbb{Z}^2 , \mathbb{Z}^3 , parfois \mathbb{Z}^4 . Étendre ces notions en dimensions supérieures ne peut être réalisé de manière automatique, et demande systématiquement une étude dédiée, fonction de la dimension et des notions d'adjacence choisies. Et il suffit de regarder le pouvoir de représentation des espaces discrets de Herman pour comprendre qu'on ne peut pas espérer obtenir des outils génériques via une telle approche. Ce type de structure doit donc être utilisé avec parcimonie sur des espaces discrets bien particuliers.

Les structures cellulaires ont, quant à elles, un coût mémoire plus élevé que les structures de graphes. En effet, elles sont équivalentes à un sur-échantillonnage de l'image et outre les spels de l'image, elles stockent tout un ensemble d'éléments intermédiaires. En contrepartie, elles permettent de mémoriser une information plus précise sur la nature des liaisons entre spels. Il s'agit alors de déterminer pour quels types d'applications et d'images, le coût supplémentaire occasionné par l'utilisation d'un modèle cellulaire est rentabilisé. Ajouter une information cellulaire sur \mathbb{Z}^2 n'est certainement pas judicieux, lorsqu'on s'intéresse à des manipulations au niveau pixel. Par contre, dès que l'on souhaite travailler avec le résultat d'une segmentation, l'approche graphe s'avère insuffisante puisqu'elle est incapable de représenter des adjacences multiples. Au niveau généricité, les modèles cellulaires sont bien plus performants que les structures de graphe. Mais ils ne parviennent toutefois pas à fournir un cadre unifié de manipulation d'images. En effet, comme nous l'avons vu, il existe de nombreux modèles cellulaires assez génériques mais très différents en terme de définition structurelle et d'outils topologiques associés. Certains modèles spécifiques ont déjà été reliés à des modèles plus généraux. Un complexe polyédrique est naturellement un cas particulier de complexe cellulaire abstrait, les cartes combinatoires discrètes constituent un sous-ensemble des cartes généralisées... Cependant, on est encore loin de disposer d'un cadre unifié et parmi les structures les plus génériques, il manque encore des ponts. Autrement dit, il n'est pas toujours évident de déterminer si deux structures peuvent décrire

exactement les mêmes objets, si l'une caractérise une classe d'objets plus restreinte que l'autre, si les deux classes d'objets représentés sont disjointes ou au contraire ont une intersection non vide. Ainsi, des outils topologiques développés sur un de ces modèles ne seront pas aisément transférables sur un autre. Une des contributions de cette thèse (Chap. 4) consiste à mettre en évidence des liens entre certains de ces modèles (complexes, ordres et cartes généralisées).

On peut aussi noter que la plupart des invariants topologiques effectivement associés aux complexes cellulaires utilisés en imagerie l'ont été le plus souvent dans le cadre des complexes cubiques et parfois polyédriques. Peu de notions de connexité ont été proposées dans ce cadre et celles qui ont été définies sont dédiées à des complexes particuliers. Ce manque provient certainement du fait que ces modèles sont plus utilisés pour représenter une image au niveau région qu'au niveau pixel et la définition de diverses connexités est surtout utile au niveau pixel. La comparaison que nous avons effectuée entre les ordres et les complexes nous a permis de mettre en évidence des sous-classes de ces deux modèles définies combinatoirement, compatibles avec des notions de connexité analogues à celles définies sur les complexes polyédriques (Chap. 4 section 4.1). Parmi les autres invariants topologiques, les notions d'homotopie ont notamment été explorées dans le cadre des ordres et ont donné lieu à des notions de points simples. Des propositions ont aussi été faites pour la définition de groupes d'homotopie mais l'information contenue dans de tels groupes n'est a priori pas facilement exploitable. L'utilisation des groupes d'homologie en imagerie constitue un domaine de recherche émergent. Ces groupes n'ont jusqu'à présent été étudiés que sur des espaces de petite dimension mais, théoriquement du moins, il peuvent être définis sur de nombreuses structures cellulaires. En outre, la plupart des modèles cellulaires utilisés pour structurer une image satisfont les prérequis à la construction de tels groupes. Ces groupes présentent aussi l'avantage d'être comparables, contrairement aux groupes d'homotopie. Mais un certain nombre de questions se posent quant à leur calcul effectif et à leur pouvoir de discrimination sur des images, d'autant que différents types d'informations peuvent être extraits de ces groupes (simple caractérisation ou ensemble de générateurs). Nous revenons sur ces questions dans le chapitre 5 et proposons une méthode de calcul de ces groupes.

TAB. 2.7: Tableau récapitulatif des structures cellulaires utilisées pour réaliser des partitions d'espace. Un "?" signifie que la question n'a pas (encore) de réponse claire.

Structure cellulaire	Multi-incidence	Cellule	Incidence	Réalisation géométrique	Propriété(s) de la subdivision
Complexe cellulaire abstrait	non	quelconque	relation binaire de face	non	
Ordre	non	quelconque	relation binaire d'ordre	?	
Graphe d'incidence	non	quelconque	clôture transitive d'une relation d'incidence stricte	?	homogène
Complexe simplicial abstrait	non	simplexe	relation d'inclusion	oui	homogène
Complexe cellulaire (Alexandrov)	oui	quelconque	nombre d'incidences	?	
a -complexe	oui	quelconque	nombre d'incidences	?	
ensemble simplicial	oui	simplexe	applications	oui	
ensemble semi-simplicial	oui	simplexe	applications	oui	
ensemble simpleïdal	oui	simpleïdes	applications	oui	
complexe polyédrique	non	polytopes	relation binaire de face	oui	
CW -complexe	oui	homéomorphe à un simplexe	clôture de cellule	oui	
complexe de blocs	non	homéomorphe à une boule ouverte	relation binaire de face	oui	
complexe de blocs	oui	homéomorphe à une boule ouverte	relation binaire de face + structure d'incidence	oui	
PL -variété	non	simplexe	relation d'inclusion	oui	
variété combinatoire	non	simplexe / réalisable en PL -boule	relation d'inclusion	oui	
pseudo-variété	non	simplexe	relation d'inclusion	oui	fortement connexe
quasi-variété simpliciale	oui	simplexe	applications	oui	pseudo-variété

Structure cellulaire	Multi-incidence	Cellule	Incidence	Réalisation géométrique	Propriété(s) de la subdivison
n - G -carte	oui	implicite	implicite	oui	pseudo-variété
n -carte	oui	implicite	implicite	oui	pseudo-variété
cell-tuple / n -variété subdivisée	non	homéomorphe à un simplexe	relation de face	oui	pseudo-variété
n -surface (ordre)	non	quelconque	relation binaire	?	pseudo-variété

Chapitre 3

Présentation des modèles topologiques étudiés

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il existait principalement deux grandes approches pour structurer et manipuler des images. L'approche graphe se fonde sur les éléments de l'image et leurs relations d'adjacence. De nombreux travaux fondés sur ce principe parviennent à définir des notions topologiques (surfaces, points simples...) et proposent, principalement en dimensions deux et trois, une palette d'algorithmes utiles à l'imagerie numérique (suivi et extraction de surfaces, squelettisation...). Cependant, la plupart des algorithmes s'appuyant sur une telle structuration des images requièrent des informations additionnelles (choix d'un plongement...) pour fournir des résultats pertinents. Ils sont, en outre, grandement dépendants de l'application choisie et sont difficilement généralisables en dimensions supérieures. Les modèles existant pour l'approche cellulaire, a priori plus coûteux, contiennent intrinsèquement plus d'information. Sur chacun d'eux ont été définis des propriétés topologiques et des algorithmes dédiés qui ne nécessitent aucune autre connaissance que celles contenues dans le modèle lui-même. En outre, certains parmi eux proposent des définitions et des outils génériques indépendants de la dimension de l'image étudiée.

Ces structures ont pour la plupart été définies et exploitées dans un contexte particulier (analyse d'images, modélisation) et pour des applications données (amincissement homotopique, caractérisation de surfaces, construction topologique d'objets...). Cependant, malgré des différences importantes dans la manière de les définir et des les utiliser, il est parfois possible d'établir des liens entre elles, voire de véritables ponts permettant de passer effectivement de l'une à l'autre. Il devient alors possible d'exploiter les différences de ces modèles pour les enrichir mutuellement.

Nous nous sommes plus précisément intéressés à certains de ces modèles. La plupart ont déjà été évoqués brièvement dans le chapitre précédent. Nous les présentons ici plus en détails (domaine d'application, caractéristiques et outils topologiques associés). La mise en évidence de leurs relations fera l'objet du chapitre 4.

Nous nous sommes penchés à la fois sur des structures permettant de représenter des subdivisions sans multi-incidence et sur des structures autorisant la présence de multi-incidence. Les premières sont généralement dotées d'outils topologiques facilitant l'analyse d'une image (invariants topologiques), tandis que sur les secondes ont été développés, dans le cadre de la modélisation géométrique, des opérateurs topologiques permettant de les construire.

Parmi les modèles permettant de représenter des subdivisions sans multi-incidence, nous nous

sommes plus particulièrement intéressés aux *ordres* de Bertrand *et al.* [19, 22] et aux *espaces discrets* de Dominguez *et al.* [13, 64]. Ils permettent tous deux de représenter des subdivisions de dimension quelconque. Le premier suit une approche purement discrète tandis que le second s'appuie sur un analogue continu. Les notions topologiques définies sur chacun de ces modèles sont complémentaires.

En ce qui concerne les modèles utilisés pour représenter des subdivisions contenant potentiellement de la multi-incidence, nous nous sommes concentrés sur la structure de *carte généralisée* introduite par Lienhardt [139]. Elle présente l'avantage d'englober un certain nombre d'autres structures utilisées en modélisation [140]. En outre, elle peut représenter des subdivisions de n'importe quelle dimension et elle est munie des opérateurs classiques utilisés en modélisation topologique : identification, extrusion, éclatement. . .

Nous décrivons tout d'abord les deux modèles associés aux subdivisions sans multi-incidence, et présentons ensuite celui retenu pour manipuler des subdivisions pouvant contenir de la multi-incidence.

Les trois modèles permettent de représenter des subdivisions de n'importe quelle dimension. Le premier, fondé sur la notion d'ordre, est certainement le plus générique puisqu'il n'impose a priori aucune restriction ni sur la nature des cellules qui le composent, ni sur les propriétés de l'espace subdivisé. Les espaces discrets de Dominguez *et al.* s'appuient, quant à eux, sur des subdivisions dont les cellules sont des polytopes. Les cartes généralisées suivent une approche différente de celle classiquement utilisée pour représenter une subdivision cellulaire. Au lieu de manipuler explicitement des cellules et des relations d'incidence, leur description se fonde sur un seul type d'éléments, appelé *brin*, et la structure de la subdivision est exprimée par un ensemble d'involutions. Les subdivisions qu'elles permettent de représenter sont des cas particuliers de pseudo-variétés.

3.1 Ordres

Les ordres ont été introduits en analyse d'images par Bertrand *et al.* [19, 22]. Ils ont été munis de différentes notions topologiques (points simples, rétracte par déformation [19]. . .) et des algorithmes ont été développés afin de les exploiter (squelettisation [145, 146, 147], épaisseur homotopique [52]. . .). Des définitions de surfaces [22] et de bords d'objets [54] ont en outre été proposées ainsi qu'un algorithme de type "marching-cubes" permettant de les construire [53, 54, 55]. La plupart de ces travaux reposent sur une approche purement discrète.

Représenter une image à l'aide d'un ordre revient généralement à associer aux spels de l'image des éléments particuliers de l'ordre (généralement les plus petits ou les plus grands pour la relation d'ordre). Les autres éléments sont alors utilisés pour exprimer les liens entre les éléments de l'image.

3.1.1 Définitions et notations

Un ordre, noté $|X|$, est défini comme une paire (X, α) où X est un ensemble et α une relation binaire, réflexive, antisymétrique et transitive sur X (Déf. 2.10 page 67). Par la suite, on notera $\beta (= \alpha^{-1})$ l'inverse de α et θ l'union de α et β . Lorsque l'on considère un sous-ensemble S de X , on note $\alpha|_S$ la restriction de α sur cet ensemble, i.e. $\alpha \cap (S \times S)$. En outre, on ne considèrera qu'une famille d'ordres restreinte : les ordres *CF*.

Définition 3.1 (Ordre CF) *Un ordre $|X| = (X, \alpha)$ est dit CF lorsque :*

- i). X est dénombrable (*Countable*)
- ii). $|X|$ est localement fini (*locally Finite*), i.e. $\forall x \in X, \theta(x)$ est fini

Cette restriction n'est pas gênante dans le cadre de l'imagerie numérique puisque le support d'une image satisfait naturellement ces conditions.

Des ensembles particuliers peuvent être associés à chaque élément x d'un ordre $|X|$ (Fig. 3.1).

Définition 3.2 (Ensembles associés à un élément d'un ordre) Soit un ordre $|X| = (X, \alpha)$. A chaque élément x de X sont associés les ensembles suivants, pour $\rho = \alpha$ ou $\rho = \beta$:

- i). sa ρ -adhérence (ρ -adherence), notée $\rho(x) : \rho(x) = \{y \in X; (x, y) \in \rho\}$,
- ii). sa ρ -adhérence stricte (*strict ρ -adherence*), notée $\rho^\square(x) : \rho^\square(x) = \rho(x) \setminus \{x\}$,
- iii). sa ρ -proximité (ρ -closeness), notée par $\rho^\bullet(x) : \rho^\bullet(x) = \{y \in X / y \in \rho^\square(x), \rho^\square(x) \cap \rho^{-1\square}(y) = \emptyset\}$

Comme on le verra dans le chapitre 4, ces notions peuvent être aisément reliées à celles d'étoile et de clôture des cellules d'une subdivision.

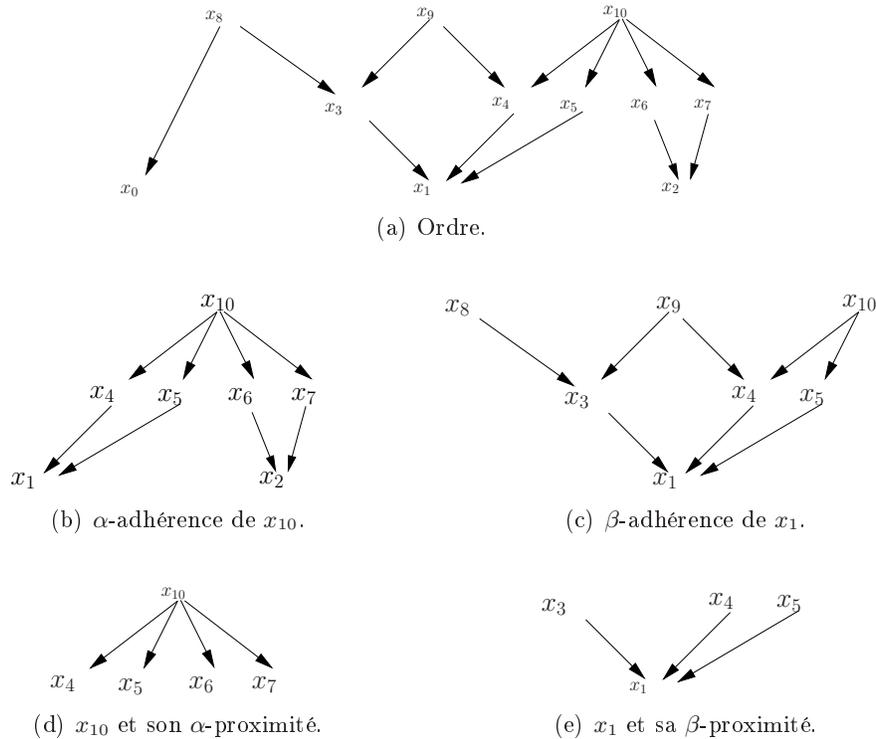


FIG. 3.1 – Exemples d'ensembles associés aux éléments d'un ordre. L'ordre est représenté par le DAG correspondant (cf Sec. 2.6.1 page 69) où la relation α^\square est visualisée par la relation "fils de".

Un élément d'un ordre est dit ρ -terminal si sa ρ -adhérence stricte est vide. Ce sont généralement ces éléments terminaux qui seront utilisés pour représenter les spels de l'image.

On appelle ρ -chaîne tout sous-ensemble de $|X|$ complètement ordonné pour la relation ρ . Dans un ordre CF , toute ρ -chaîne est finie et sa longueur est égale à son nombre d'éléments moins un. Enfin, étant donné deux éléments d'un ordre x_0 et x_k , on appelle θ -chemin entre x_0 et x_k toute suite x_0, x_1, \dots, x_k d'éléments de l'ordre telle que $x_i \in \theta(x_{i-1})$ avec $i = 1, \dots, k$.

Les α -terminaux de l'ordre représenté sur la figure 3.1-a sont les éléments x_0, x_1 et x_2 . Et les β -terminaux sont x_8, x_9, x_{10} . $\{x_8, x_0\}$ est une α -chaîne ainsi que $\{x_9, x_4, x_1\}$. La suite d'éléments $x_0, x_8, x_3, x_9, x_4, x_{10}, x_6$ est un θ -chemin.

On peut aussi noter qu'un complexe simplicial peut être aisément associé à un ordre, on l'appelle *complexe de l'ordre* (en anglais *order complex* [26]) ou *complexe des chaînes* (en anglais *chain complex* [55]). Par la suite, on utilisera l'expression *complexe de l'ordre* pour éviter toute confusion avec les complexes de chaînes manipulés dans la théorie de l'homologie (Chapitre 5).

Définition 3.3 (Complexe de l'ordre) Soit un ordre $|X| = (X, \alpha)$. Le complexe de l'ordre $|X|$, noté $\Delta(|X|)$, est le complexe simplicial abstrait dont les sommets sont les éléments de X et les k -simplexes les k α -chaînes de $|X|$. Les relations d'incidence entre les simplexes correspondent aux relations d'inclusion entre les chaînes.

Un ordre et son complexe associé apparaissent sur la figure 3.2. Réciproquement, comme nous l'avons déjà remarqué section 2.6.1 page 69, on associe aisément un ordre à tout complexe simplicial, voire à tout complexe quel qu'il soit.

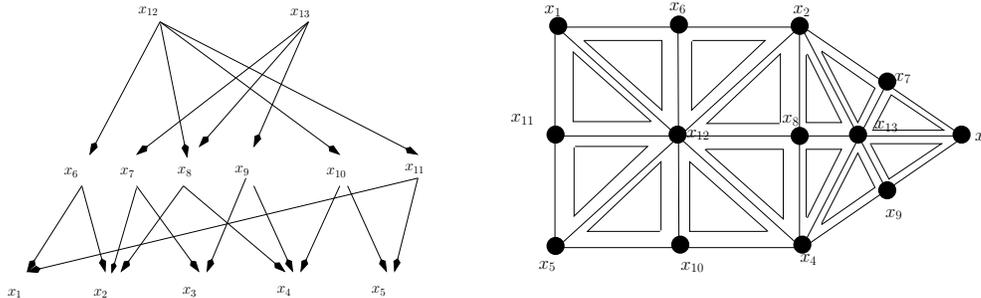


FIG. 3.2 – Exemple d'un ordre et son complexe simplicial associé.

Enfin, même si les éléments d'un ordre ne sont pas, contrairement aux complexes abstraits, explicitement munis d'une dimension, il est toutefois possible de leur associer ce qu'on peut qualifier de dimension implicite, aussi dénommé rang. Il existe deux notions symétriques de rang : l' α -rang et le β -rang.

Définition 3.4 (Rang d'un élément) Etant donné un ordre $|X| = (X, \alpha)$, le ρ -rang d'un élément x , noté $r_\rho(x)$, est égal à la longueur de la ρ -chaîne maximale d'origine x pour $\rho = \alpha$ ou $\rho = \beta$.

Il faut cependant noter que dans un ordre construit à partir d'un complexe quelconque, le rang d'un élément n'est pas forcément égal à la dimension qu'avait la cellule du complexe à laquelle il est associé (Fig. 3.3).

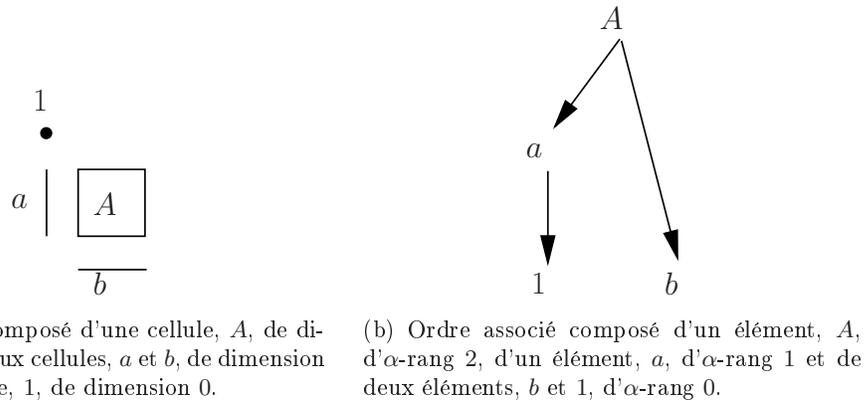


FIG. 3.3 – Exemple d'un complexe $(C, <, dim)$ et de l'ordre $|C| = (C, \alpha = \leq)$ associé pour lesquels les notions de dimension et de rang sont différentes.

En utilisant cette notion de rang, il est possible de partitionner un ordre CF en un nombre fini de sous-ensembles, chacun contenant tous les éléments d'un rang donné. En effet, considérons un ordre et son ρ -rang, pour $\rho = \alpha$ ou $\rho = \beta$. Comme l'ordre est localement fini, il existe un sous-ensemble X_0 de X composé de tous les éléments de ρ -rang égal à 0 (autrement dit des ρ -terminaux) de $|X|$. De plus, tout autre élément de $|X|$ est relié à au moins un ρ -terminal par une ρ -chaîne et les ρ -chaînes entre un élément de X_0 et un autre élément ont une longueur finie. Il existe donc un nombre entier k tel que le ρ -rang de tout élément de $|X|$ soit inférieur ou égal à k .

Définition 3.5 (décomposition d'un ordre) La ρ -décomposition d'un ordre $|X| = (X, \alpha)$, pour $\rho = \alpha$ ou $\rho = \beta$, est la famille $\{X_i\}_{i=0..k}$ définie par :

- i). $X_0 = \{x \in X, \rho^\square(x) = \emptyset\}$,
- ii). $\forall i \in \{1, \dots, k\}, X_i = \{x \in S, S = X \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j, \rho^\square_S(x) = \emptyset\}$,
- iii). $X_k \neq \emptyset$ et $X = \bigcup_{i=0}^{i=k} X_i$.

3.1.2 Topologie associée

Une topologie peut être naturellement construite sur un ordre. On définit d'abord la notion d' α -intérieur d'un sous-ensemble S d'un ordre $|X|$ par : $\star\alpha(S) = \overline{\alpha(S)} = \{x \in S / \beta(x) \subseteq S\}$.

Théorème 3.6 (α -topologie sur un ordre) Soit un ordre $|X| = (X, \alpha)$. Un sous-ensemble S de X est un α -ouvert lorsque $S = \star\alpha(S)$. Similairement, un sous-ensemble S est α -fermé lorsque $S = \alpha(S)$. La famille \mathcal{O}_α des α -ouverts d'un ordre constitue une topologie sur $|X|$.

On peut en effet prouver que la famille \mathcal{O}_α vérifie les axiomes caractérisant une topologie (cf Déf. A.1 page 225).

De manière symétrique, il est possible de construire une topologie fondée sur une famille de β -ouverts¹. On parle alors de β -topologie de l'ordre. Dans les deux cas, il s'agit d'une *topologie d'Alexandroff* (cf Déf A.6 page 227).

¹On peut montrer que la famille des α -ouverts d'un ordre coïncide avec la famille de ses β -fermés.

Soit $S = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{10}\}$ un sous-ensemble de l'ordre 3.1-a. L' α -intérieur de S est : $\star\alpha(S) = \{x_2, x_5, x_6, x_7, x_{10}\}$. x_1 et x_4 n'appartiennent pas à l' α -intérieur de S car leurs β -adhérences, respectivement $\{x_3, x_8, x_9\} \cup S$ et $\{x_4, x_9, x_{10}\}$ ne sont pas incluses dans S . L'ensemble $S' = \{x_2, x_5, x_6, x_7, x_{10}\}$ est égal à son α -intérieur, il s'agit donc d'un α -ouvert.

On peut prouver que la notion de connexité relative à l'une ou l'autre de ces topologies et celle de connexité par chemins sont équivalentes pour les ordres CF . Un ordre représentant le support d'une image est généralement connexe.

La connexité d'un ordre est intimement liée à celle d'un sous-ordre particulier, obtenu à partir de l'ordre originel par suppression d'éléments de l'ordre, appelés points *unipolaires* et points *libres*. Le sous-ordre obtenu est appelé *noyau*, et ses éléments sont les *liens* de l'ordre.

Définition 3.7 (Points unipolaires et libres / lien et noyau) *Un point x d'un ordre $|X| = (X, \alpha)$ est dit ρ -unipolaire, pour $\rho = \alpha$ ou β , lorsque $\rho^\bullet(x)$ contient un seul élément.*

Un point x est dit ρ -libre lorsqu'il est ρ -unipolaire ou qu'il existe une suite d'éléments de l'ordre : $x_0, \dots, x_k = x$ telle que x_0 est ρ -unipolaire et x_i est ρ_i -unipolaire avec $\rho_i = \rho \cap (S_i \times S_i)$ pour $S_i = X \setminus \{x_0, \dots, x_{i-1}\}$, $i = 1..k$.

Un point qui n'est ni ρ -unipolaire, ni ρ -libre est appelé ρ -lien. Et l'ensemble des ρ -liens d'un ordre est appelé le ρ -noyau de l'ordre.

On peut prouver le résultat suivant :

Théorème 3.8 *Un ordre CF est connexe si et seulement si son noyau l'est aussi.*

Les points α -unipolaires de l'ordre représenté sur la figure 3.1-a sont les éléments x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 . L'élément x_9 est quant à lui α -libre. En effet, il est α_0 -unipolaire pour $\alpha_0 = \alpha \cap (X - \{x_3\} \times X - \{x_3\})$. L' α -noyau de cet ordre est constitué de x_0, x_1, x_2, x_8 et x_{10} .

Enfin, on peut montrer que les applications continues d'un ordre sur un autre sont exactement les applications monotones croissantes (en anglais *isotone*), autrement dit les applications qui préservent la relation d'ordre. Ainsi, une application f d'un ordre $|X| = (X, \alpha)$ vers un ordre $|X'| = (X', \alpha')$ est continue si et seulement si $y \in \alpha(x)$ implique $f(y) \in \alpha'(f(x))$.

3.1.3 Adjacences entre spels

Comme dit précédemment, représenter une image à l'aide d'un ordre revient généralement à associer à chaque élément de l'image un élément terminal de l'ordre. Les autres éléments de l'ordre permettent d'exprimer les liens entre les éléments de l'image. Extraire différents objets d'une image consiste donc à définir des composantes connexes d'éléments terminaux, autrement dit à fournir une notion d'adjacence entre ces éléments. Deux éléments terminaux pourraient par exemple être dits adjacents dès lors que l'intersection de leurs adhérences serait non vide. Cette proposition s'avère cependant trop simpliste dans le sens où elle n'exploite pas la structure hiérarchique de l'ordre. On peut cependant considérer cette relation comme une forme d'adjacence maximale dont toute autre adjacence définie sur un ordre devra être un cas particulier.

Ainsi, construire une relation d'adjacence consistera à déterminer, pour tout couple d'éléments terminaux d'un ordre, un sous-ensemble (éventuellement vide) de l'intersection de leurs adhérences qui définira leur lien.

*On pourrait par exemple dire que deux terminaux sont adjacents si l'intersection de leurs adhérences contient un élément de rang 1.
Dans l'ordre représenté sur la figure 3.1, les α -terminaux x_1 et x_2 seraient alors adjacents et x_0 ne serait adjacent ni à x_1 , ni à x_2 .*

Bien sûr, une adjacence ne peut pas être définie à la légère et doit permettre la construction de surfaces de Jordan et autres caractéristiques topologiques utiles. Obtenir une adjacence appropriée sur un ordre quelconque n'est pas aisé et jusqu'à présent des notions d'adjacence n'ont été proposées que sur l'ordre $|H^n| = (H^n, \supseteq)$ construit sur \mathbb{Z}^n (cf section 2.4.1 page 56).

La méthode utilisée permet d'extraire des sous-ordres de $|H^n|$ correspondant à des ensembles de \mathbb{Z}^n connexes pour les spel-adjacences ω_n (cf section 2.3.1 page 34) ou α_n (cf section 2.3.3 page 37), appelées respectivement adjacences indirecte et directe par Bertrand *et al* [22]. Les éléments de \mathbb{Z}^n sont ici associés aux \supseteq -terminaux de $|H^n|$. L'obtention de sous-ordres appropriés est réalisée à l'aide des opérateurs morphologiques dits "du tout ou rien" [184].

La figure 3.4 montre pour un ensemble d'éléments de \mathbb{Z}^n , les éléments de H^n qui sont retenus pour décrire leur 4 et leur 8-adjacences

3.1.4 n -surfaces et ordres frontières

Une notion de surface permettant de définir des bords d'objets a aussi été introduite sur les ordres. Cette définition de surface a été reprise de travaux menés par Evako [76] et s'avère proche d'une notion de variété proposée par Kovalevsky [22].

Définition 3.9 (n -surface) *Soit un ordre CF non vide $|X| = (X, \alpha)$.*

- $|X|$ est une 0-surface lorsque X est composé d'exactly deux éléments x et y tels que $y \notin \alpha(x)$ et $x \notin \alpha(y)$.
- $|X|$ est une n -surface, $n > 0$, lorsque $|X|$ est connexe et pour tout $x \in X$, l'ordre $|\theta^\square(x)|$ est une $(n - 1)$ -surface.

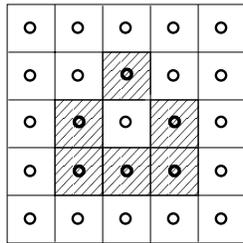
L'ordre $|H^n|$ est ainsi une n -surface. Un autre exemple de 2-surface est donné sur la figure 3.5.

En outre, il a été prouvé [55] que tout complexe simplicial dont l'ordre associé est une n -surface est une pseudo-variété sans bord. Plus généralement, il a été possible d'établir une hiérarchie entre l'ensemble des pseudo-variétés sans bord de dimension n , P_n , l'ensemble des complexes simpliciaux dont l'ordre associé est une n -surface, S_n , et les variétés stellaires de dimension n sans bord, M_n [55].

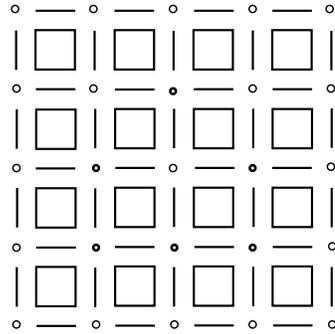
Théorème 3.10 *Lien entre P_n , S_n et M_n*

- i). $M_1 = S_1 = P_1$,
- ii). $M_2 = S_2 \subset P_2$,
- iii). $\forall n > 2, M_n \subset S_n \subset P_n$.

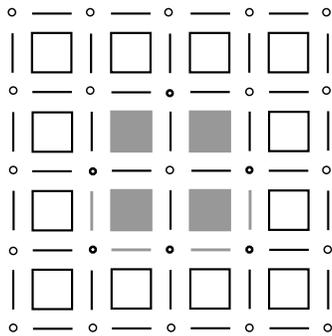
Les ordres frontières proposés par Daragon *et al.* [53, 54, 55] permettent de construire un ordre matérialisant la frontière entre un sous-ensemble d'un ordre et son complémentaire. De plus, lorsque l'ordre est une n -surface, la frontière de n'importe lequel de ses sous-ensembles est une union de $(n - 1)$ -surfaces disjointes. La notion d'ordre frontière n'a cependant été effectivement exploitée que dans le cadre des ordres $|H^n|$ où un algorithme de type "marching-cubes" a été développé pour extraire de telles surfaces.



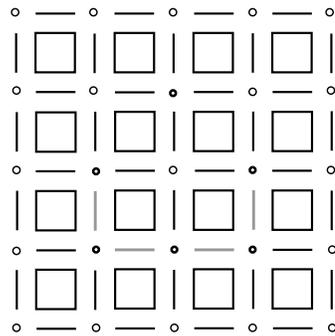
(a) Image dont les pixels noirs forment une seule composante 8-connexes et deux composantes 4-connexes.



(b) Ordre $|H_2|$ associé à l'image représenté par le complexe équivalent C_2 (cf Fig. 2.37 page 56).



(c) Eléments de H^2 (en gris) explicitant les relations de 8-adjacence entre pixels noirs de \mathbb{Z}^2 : 1 composante 8-connexes.



(d) Eléments de H^2 (en gris) explicitant les relations de 4-adjacence entre pixels noirs de \mathbb{Z}^2 : 2 composantes 4-connexes.

FIG. 3.4 – Exemple des sous-ordres associés à un ensemble de pixels noirs et traduisant respectivement les relations de 8- et 4-adjacence.

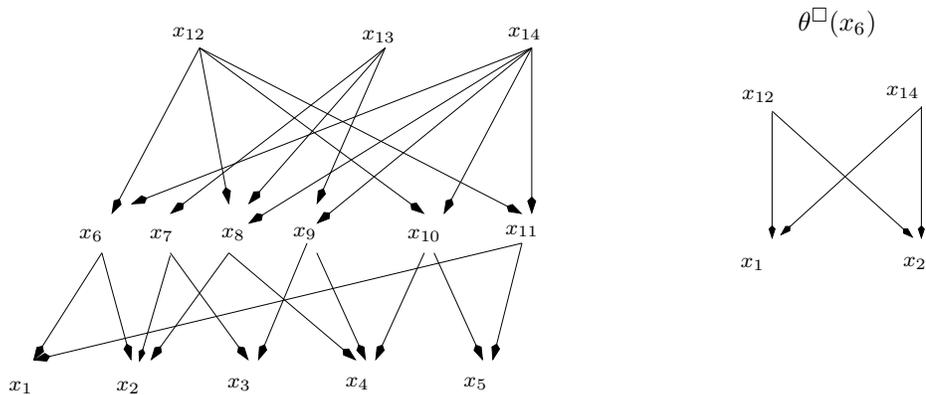


FIG. 3.5 – Exemple d'une 2-surface et du voisinage d'un de ses éléments. Ce voisinage est bien un 1-surface car le voisinage de chacun de ses points est une 0-surface.

3.1.5 Points simples et notions d'homotopie

Pour ces topologies, différentes notions de points "simples", autrement dit de points que l'on peut ôter d'un ordre sans changer sa topologie ont été définies. Les points unipolaires et libres définis précédemment sont des exemples de points simples mais leur retrait ne permet qu'une simplification très superficielle. Aussi des notions plus perfectionnées de points simples ont-elles été définies grâce au développement d'une théorie de l'homotopie et à la construction de rétractes par déformations [19].

L'homotopie de fonctions proposée ici est une version discrète de l'homotopie classiquement définie en topologie générale. Intuitivement une homotopie de fonctions peut se voir comme une fonction qui transforme continûment, en un laps de temps fini, une fonction continue en une autre fonction continue (pour une définition formelle voir Déf. A.19 page 237). Dans cette définition, l'intervalle de temps est généralement représenté par l'intervalle continu $I = [0, 1]$. Pour l'adaptation de cette notion aux ordres, on utilise naturellement un ordre associé à une discrétisation d'un intervalle de temps. Celui-ci est construit sur un ensemble $I_k = \{\{i\}, \{i, i + 1\}; i \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq i < k\}$ pour un entier positif k , avec la relation d'ordre $\supseteq : |I_k| = (I_k, \supseteq)$. La transformation continue permettant de passer d'une fonction continue f à une fonction continue g s'exprime alors comme une suite de fonctions continues intermédiaires entre f et g : une pour chaque pas de temps, autrement dit une pour chaque élément de $|I_k|$. Le passage d'une de ces fonctions à la suivante doit être continu du point de vue des ordres [19]. Formellement, la notion d'homotopie de fonctions dans les ordres se définit alors comme suit.

Définition 3.11 (homotopie de fonctions) *Soit $|X| = (X, \alpha)$ et $|X'| = (X', \alpha')$ deux ordres CF et soit f et g deux fonctions continues de $|X|$ dans $|X'|$. On dit que g est α -homotope à f si $\forall y \in \alpha(x), g(y) \in \alpha'(f(x))$. On dit que f et g sont homotopes s'il existe une homotopie entre elles, autrement dit une suite de fonctions continues de $|X|$ dans $|X'|$, h_0, \dots, h_k avec $h_0 = f$ et $h_p = g$ telles que h_i est α - ou β -homotope à h_{i-1} pour $i \in \{1, \dots, p\}$. On note alors $f \simeq g$*

Les notions d'équivalence homotopique, d'ordre contractile, de rétracte par déformation et de fort rétracte par déformation (selon la terminologie anglo-saxonne cf section A.2.1 page 240) sont définies de la même façon que leur analogue continu en s'appuyant sur l'homotopie de fonctions définie sur les ordres.

Plusieurs notions de points simples ont été proposées en s'appuyant sur ces notions d'homotopie. Dans tous les cas, il s'agit de regarder l'adhérence (α -adhérence ou β -adhérence) des points. Ainsi, un point sera, par exemple, dit α -simple si son α -adhérence stricte est contractile. Une définition, plus simple à exploiter algorithmiquement dans le cadre d'ordres particuliers, a été proposée. Elle se fonde sur une caractérisation récursive de points dits α_n -simples et β_n -simples. Elle est particulièrement appropriée pour les ordres $|H_n|$, $n \leq 3$ mais peut conduire à des erreurs sur des ordres plus généraux. Elle permet l'écriture d'algorithmes enlevant successivement des points α_k - et β_k -simples et autorise la suppression parallèle de tous les points α_k -simples ou β_k -simples pour un k donné.

Les algorithmes développés à partir de ces notions permettent de réaliser de l'amincissement [145, 146, 147] ou de l'épaississement [52] homotopique.

3.1.6 Invariants liés à la décomposition cellulaire

Des invariants spécifiquement liés à une décomposition cellulaire n'ont pas été explicitement définis sur les ordres.

Il existe a priori deux approches pour construire une théorie de l'homologie sur les ordres. On peut, bien sûr, s'intéresser aux groupes d'homologie du complexe simplicial associé à l'ordre. Les propriétés intrinsèques de ce complexe garantissent en effet l'existence d'une théorie de l'homologie.

Cependant, étant donné un ordre $|X| = (X, \alpha)$, on pourrait aussi se pencher sur le complexe $(X, \alpha^\square, \alpha\text{-rang})$. Il faudrait alors déterminer sous quelle(s) condition(s), une théorie de l'homologie peut être construite sur un tel complexe. On peut d'ores et déjà noter que les cellules d'un tel complexe ne possèdent pas d'orientation. Cette absence d'orientation implique de se restreindre à de l'homologie modulo 2 (ces notions seront précisées dans le chapitre 5). Intuitivement, étant données deux cellules, soit il existe une relation d'incidence entre elles, soit il n'en existe pas. L'expression de l'incidence entre deux cellules répond donc à une règle binaire.

3.2 Espaces discrets de Dominguez *et al.*

Les espaces discrets définis et utilisés par Dominguez *et al.* s'intègrent dans une architecture multi-niveaux qui a pour but de proposer et valider les notions de topologie discrète en s'appuyant sur un analogue continu. L'espace discret est construit sur le premier niveau de cette architecture et sa définition conditionne l'efficacité de tout le modèle. Ce premier niveau est, en effet, un complexe particulier, dont les cellules de dimension maximale sont utilisées pour représenter les spels de l'image. Les cellules de dimensions inférieures servent à décrire les liens entre spels. Définir un espace discret sur ce complexe consiste à ajouter une information au complexe pour expliciter les relations d'adjacence entre les cellules maximales. Les autres niveaux du modèle construisent progressivement un analogue continu de l'image considérée en se fondant sur les relations d'adjacence choisies.

Des notions de surfaces et de groupes d'homotopie ont été définis sur de tels espaces mais aucun algorithme n'a été mis en œuvre pour les exploiter.

3.2.1 Définitions et notations

L'architecture du modèle développé par Dominguez *et al.* comporte cinq niveaux (Fig. 3.6). Le premier, *device level*, est un complexe polyédrique de dimension n homogène² et localement fini. Les cellules de dimension n représentent les spels de l'image et les cellules inférieures les liens entre eux. Par la suite, on appellera *objet discret* tout ensemble de n -cellules. L'espace discret proprement dit est construit sur ce complexe en lui ajoutant une information complémentaire, sous forme d'une fonction, qui explicite les relations d'adjacence entre cellules maximales et marque les cellules intermédiaires du complexe impliquées dans ces adjacences.

La construction des quatre niveaux suivants dépend entièrement du choix de la fonction utilisée pour représenter les adjacences. En effet, le premier, *niveau logique* ou *logical level*, est un graphe non orienté représentant les adjacences entre cellules maximales tandis que le deuxième, *niveau conceptuel* ou *conceptual level* est un graphe orienté représentant les relations d'incidence entre les cellules du complexe impliquées dans les relations d'adjacence. L'avant dernier niveau, l'*analogue simplicial* ou *simplicial analogue*, est un complexe simplicial construit sur les chemins maximaux du graphe du niveau précédent. Enfin, le dernier niveau, l'*analogue continu* ou *continuous analogue*, est l'analogue continu du complexe simplicial, autrement dit son polyèdre sous-jacent, sous-ensemble de l'espace euclidien.

²un complexe homogène est un complexe dont chaque cellule est face d'au moins une cellule de dimension maximale.

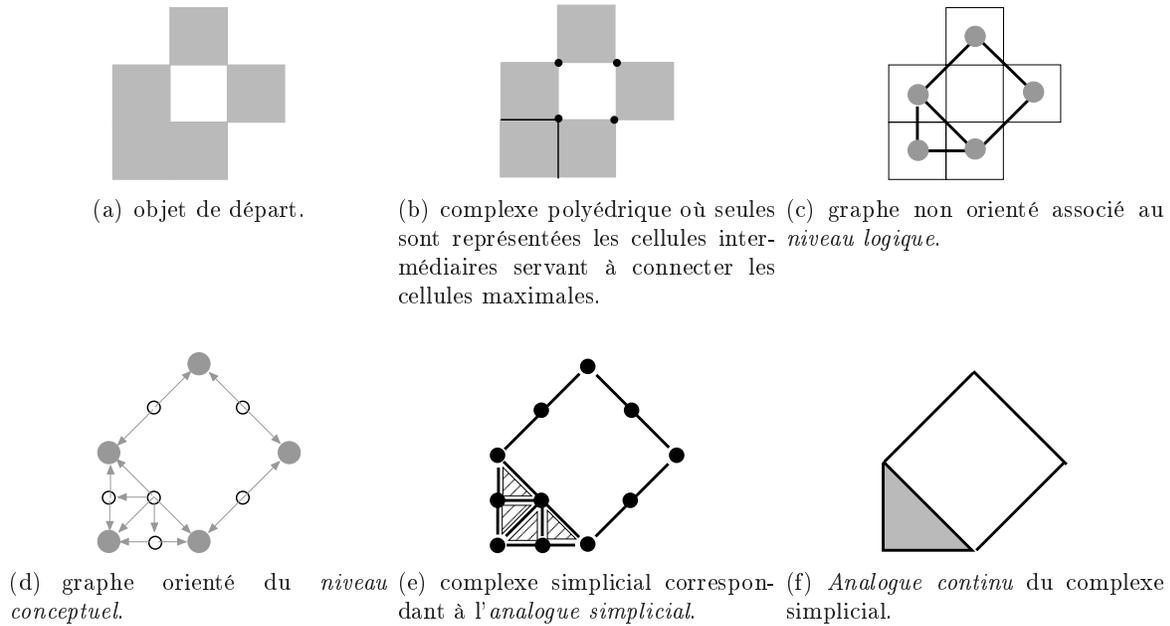


FIG. 3.6 – Différents niveaux de représentation d'un même objet dans l'architecture proposée par Dominguez *et al.*

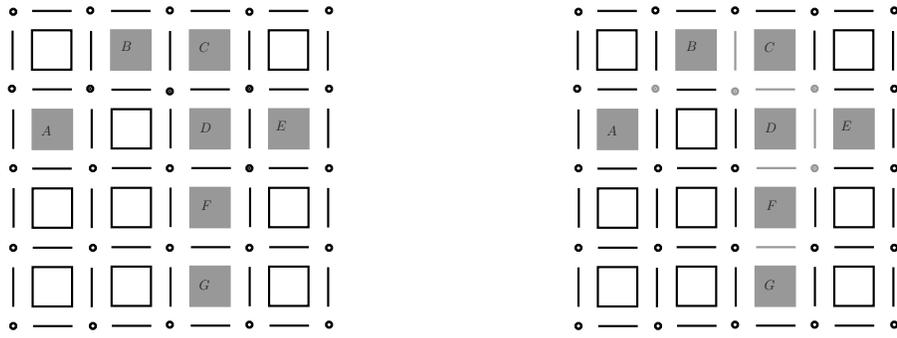
La construction de l'espace discret sur le premier niveau du modèle, et donc la caractérisation des adjacences entre spels de l'image est le point fondamental de cette approche multi-niveaux. L'information ajoutée au complexe polyédrique pour former l'espace discret est la donnée d'une fonction qui associe un label particulier aux cellules qui servent effectivement de lien entre cellules de dimension maximale. Les différents niveaux se déduisent ensuite directement de la définition de l'espace discret. Les fonctions utilisées ont pour nom *fonctions d'éclairage* ou *lighting functions* et doivent satisfaire un certain nombre de propriétés. Nous nous intéressons à une notion plus restreinte de fonctions d'éclairage appelées *fonctions d'éclairage faibles fortement locales* ou *strongly local weak lighting functions*. Avant de les définir, on introduit la notion de *support* d'un ensemble de n -cellules. Le support d'un ensemble de n -cellules dans un complexe peut être vu comme le plus petit sous-complexe contenant ces n -cellules et les cellules intermédiaires les plus grandes connectant deux n -cellules adjacentes (Fig. 3.7).

On rappelle que les notions de clôture et d'étoile combinatoire ont été précédemment introduites page 255. Par la suite, on notera $st_p(e, K)$ l'ensemble des cellules de dimension p appartenant à l'étoile combinatoire de e dans K .

Définition 3.12 (Support d'un ensemble de n -cellules) *Etant donné un complexe K de dimension n , le support d'un ensemble O de n -cellules est l'ensemble de cellules dont la clôture combinatoire est égale à l'intersection de la clôture combinatoire des éléments de $st_n(e, O)$.*

Etant donné un complexe polyédrique K , on note $cell_p(K)$ l'ensemble des p -cellules de K .

Définition 3.13 (Fonction d'éclairage faible fortement locale) *Etant donné un complexe K , un fonction $f : \mathcal{P}(cell_n(K)) \times K \rightarrow \{0, 1\}$ est appelée fonction d'éclairage faible fortement locale sur K si elle vérifie les propriétés suivantes pour tout sous-ensemble de n -cellules, O , et toute cellule e de K .*



(a) Ensemble de n -cellules d'un complexe polyédrique.

(b) Support des n -cellules : par exemple une arête suffit à garantir l'adjacence de B et C , un sommet est nécessaire pour B et D , et un autre sommet pour A et B .

FIG. 3.7 – Exemple d'un ensemble de cellules maximales d'un complexe polyédrique et du support de cet ensemble.

- i). si $e \in O$ alors $f(O, e) = 1$,
- ii). si $e \notin \text{supp}(O)$, $f(O, e) = 0$,
- iii). $f(O, e) \leq f(\text{cell}_n(K), e)$
- iv). $f(O, e) = f(st_n(e, O), e)$

La première propriété de la définition précédente indique que les n -cellules d'un objet sont éclairées. La deuxième exprime le fait qu'une cellule dont la clôture combinatoire n'est pas égale à l'intersection des clôtures combinatoires de deux n -cellules n'est pas utile pour les connecter. Autrement dit pour connecter deux n -cellules on n'utilise que la cellule maximale de leur clôture combinatoire. La troisième impose qu'une cellule intermédiaire éclairée dans un objet soit aussi éclairée dans l'image entière. Enfin, la dernière implique que pour un objet donné, l'éclairage d'une cellule est une propriété locale de l'objet.

De nombreuses fonctions respectant les 4 propriétés ci-dessus peuvent être associées à un complexe et définissent différentes adjacences entre cellules maximales.

Etant donné un complexe polyédrique K homogène localement fini de dimension n , les trois fonctions suivantes sont des fonctions d'éclairage faibles fortement locales.

- $f_{\max}(O, e) = 1$ si et seulement si $e \in \text{supp}(O)$,
- $f_{\min}(O, e) = 1$ si et seulement si $e \in O$ (dans ce cas, l'ensemble de n -cellules est complètement déconnecté)
- $g(O, e) = 1$ si et seulement si $e \in \text{supp}(O)$ et $st_n(e, K) \subseteq O$

La figure 3.8 montre les niveaux de l'architecture associé à un même objet pour les fonctions f_{\max} et g .

Un complexe polyédrique K homogène localement fini et de dimension n , muni d'une fonction d'éclairage f est un *espace discret*, noté (K, f) .

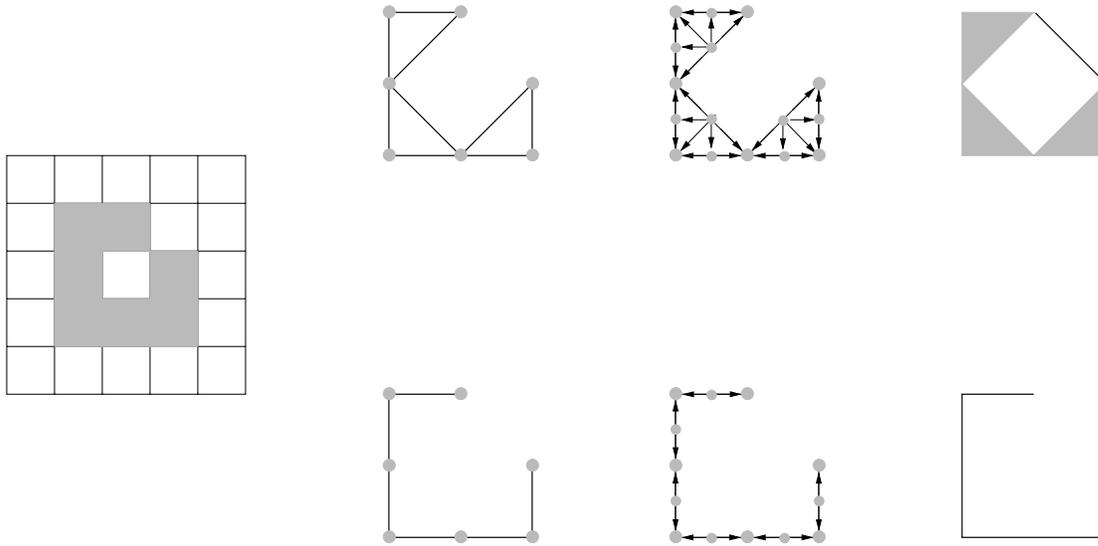


FIG. 3.8 – Un objet à gauche et l’architecture associée avec f_{max} (en haut) et g (en bas).

3.2.2 Topologie associée

La topologie construite sur les espaces de Dominguez *et al.* est la topologie naturellement associée à un complexe cellulaire déjà présentée dans l’annexe C page 253.

3.2.3 Adjacences entre spels

La notion d’adjacence entre spels de l’image, autrement dit entre cellules de dimension maximale de l’espace discret, se déduit directement de la définition de la fonction d’éclairage associée.

Définition 3.14 (Adjacence de n -cellules) Soit O et O' deux objets discrets disjoints dans un espace discret (K, f) . Deux n -cellules distinctes e et e' de O sont dites O' -adjacentes dans O s’il existe une face commune c de e et e' telle que $f(O', c) = 0$ et $f(O \cup O', c) = 1$.

Un O' -chemin dans O de e à e' est une suite finie de n -cellules : e_0, \dots, e_m telle que $e_0 = e$, $e_m = e'$ et e_{i-1} O' -adjacent dans O à e_i pour $i = 1, \dots, m$.

Cette définition permet de construire différentes notions d’adjacence avec la même fonction d’éclairage en utilisant des objets de l’image comme obstacles à l’adjacence. En effet, de manière intuitive, deux cellules d’un objet O sont O' -adjacentes dans O si elles ont une face commune non éclairée dans O' .

Un objet discret O est alors dit O' -connexe lorsque tout couple de n -cellules de O est relié par un O' -chemin dans O . On déduit naturellement de cette définition la notion de composante O' -connexe.

Ainsi, étant donné un objet discret dans un espace discret (K, f) , il est possible de définir toute une famille d’adjacences et donc de connexités. Les deux cas extrêmes, lorsque $O' = \emptyset$ et $O' = cell_n(K) \setminus O$, permettent de définir respectivement la connexité de l’objet lui-même et sa connexité en tant que complémentaire de O' .

Théorème 3.15 (Connexité d'un objet O) *Un objet O d'un espace discret (K, f) est connexe s'il est \emptyset -connexe. De plus, un objet discret est connexe si et seulement si chacun des niveaux dans l'architecture de Dominguez et al. représentant cet objet est connexe.*

Les connexités utilisées sur \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 peuvent être définies en construisant des espaces discrets appropriés sur les complexes C^2 et C^3 . En effet, les couples d'adjacences classiques pour \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions d'éclairage faibles fortement locales sur les complexes C^2 et C^3 . La fonction associée à un couple d'adjacences (m, n) avec m et n appartenant à $\{4, 8\}$ pour \mathbb{Z}^2 et $\{6, 18, 26\}$ pour \mathbb{Z}^3 est notée $f_{m,n}$.

Etant donné un complexe cubique de dimension 3, C^3 , les fonctions suivantes sont des fonctions faibles fortement locales :

- $f_{6,6}(O, e) = 1$ si et seulement si $e \in O$ et $\dim(e) = 3$ ou $e \in \text{supp}(O)$ et $\dim(e) = 2$,
- $f_{6,26}(O, e) = 1$ si et seulement si $st_3(e, C^3) \subseteq O$ avec e cellule de C^3

Comme leur notation l'indique, la première définit une 6-connexité pour les spels de l'objet et une 6-connexité pour les spels du fond, la deuxième une 6-connexité pour l'objet et une 26-connexité pour le fond.

Il est possible de vérifier que les notions de connexité définies ici sur l'espace discret donnent des résultats cohérents une fois transposées sur l'analogie continu de l'image.

3.2.4 Surfaces

La définition de surfaces sur ces espaces discrets est réalisée par analogie avec le continu [12, 13].

Définition 3.16 (n -variété discrète) *Un objet discret M d'un espace discret (K, f) est une surface discrète ou n -variété discrète, si son analogue continu $\mathcal{A}(M)$ est une variété polyédrique fermée.*

Bien entendu, la question de l'obtention d'une caractérisation purement discrète de surfaces se pose. Etant donné un espace discret (K, f) quelconque, il s'agirait de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur le niveau logique associé à un objet pour déterminer s'il est ou non une variété discrète. Cependant, aucune solution n'a jusqu'ici été proposée pour des espaces discrets quelconques et les travaux pour fournir des définitions discrètes de surfaces se sont orientés vers deux directions [12]. Etant donné un espace discret (K_0, f_0) déterminé, on peut chercher à obtenir des conditions nécessaires et suffisantes permettant de dire si un objet discret est une n -variété discrète en regardant sa représentation dans le niveau logique. Cette voie n'a, semble-t-il pas été réellement exploitée et on trouve plus de travaux exploitant la deuxième piste. Etant donnée une classe d'objets discrets \mathcal{C} construits sur un complexe polyédrique homogène localement fini de dimension finie, K_0 , l'idée consiste à construire une fonction d'éclairage f_0 telle que \mathcal{C} soit l'ensemble des n -variétés discrètes dans (K_0, f_0) . Cette deuxième approche a été exploitée d'abord dans [13]. Elle a permis de déterminer les fonctions d'éclairage à associer à C^3 pour que les (n, m) -surfaces définies par Kong *et al.* [117], généralisant les surfaces de Morgenthaler *et al.* [164] soient des 2-variétés discrètes pour m et n dans $\{6, 18, 26\}$ et $(m, n) \notin \{(6, 6), (18, 6), (18, 18)\}$. Elle a aussi été utilisée dans [12] pour définir la fonction d'éclairage permettant de reconnaître dans C^3 les 26-surfaces fortes introduites par Bertrand et Malgouyres

[24, 25, 158]. Plus récemment, dans [43], a été définie une fonction d'éclairage f^U telle que toutes les $(26,6)$ -surfaces pouvant être construites sur \mathbb{Z}^3 soient contenues dans la famille de surfaces discrètes de l'espace discret (C^3, f^U) . Cette famille de surfaces constitue un sur-ensemble des surfaces traditionnellement définies sur \mathbb{Z}^3 . Une caractérisation locale de ces surfaces a été proposée dans [44].

3.2.5 Homotopie

Une notion assez générale de groupe fondamental³ a été proposée sur ces espaces discrets, dont deux cas particuliers définissent le groupe fondamental d'un objet et de son complémentaire dans l'espace. Plus précisément, la définition du groupe fondamental discret prend en compte deux objets de l'espace discret. Ce groupe, noté $\pi_1^d(O/S, e)$, représente l'ensemble des classes d'équivalence pour une relation d'homotopie des boucles enracinées en e dans un objet O qui ne traversent pas l'objet S . S peut être vu comme un obstacle.

Plutôt que de manipuler l'espace discret (K, f) proprement dit, on définit pour tout ensemble S de cellules d'un espace discret (K, f) un sous-complexe contenant les cellules que f éclaire pour l'objet composé de toutes les n -cellules de K et éteint pour l'objet S . Les boucles de tout objet O de K ne traversant pas S sont forcément construites sur cet ensemble de cellules, appelé *corps éclairé de K ombré par S* , noté $Lb(K/S)$.

En topologie générale, un chemin peut être vu intuitivement comme une fonction continue qui à tout élément d'un intervalle de temps associe une position dans l'espace considéré (pour une définition plus précise voir page 237). L'espace sur lequel sont construits les chemins est ici défini comme le corps éclairé d'un objet ombré par un autre. Et pour obtenir une définition homogène, l'intervalle de temps est discrétisé sous la forme d'un corps éclairé particulier [14, 15, 17]. Un chemin est alors défini comme une suite de cellules qui alterne à chaque pas de temps une n -cellule et une cellule de dimension inférieure. Le chemin, construit sur un corps éclairé ombré par un obstacle donné, ne traverse pas l'objet choisi comme obstacle. Deux chemins sont dits homotopes si l'on peut passer de l'un à l'autre par des transformations discrètes utilisant des pixels adjacents.

Le groupe fondamental est alors classiquement défini comme l'ensemble des classes d'équivalence des boucles enracinées en un point pour la relation d'homotopie (cf Def A.21 page 238). Cette notion de groupe fondamental est compatible avec une version discrète du théorème de Seifert-Van Kampen [14, 15, 16, 17].

La notion de chemin peut s'étendre assez aisément en dimensions supérieures et permettre ainsi la définition des groupes d'homotopie de dimension supérieure à 1.

3.2.6 Invariants liés à la décomposition cellulaire

Aucune étude relative au calcul des invariants propres à une décomposition cellulaire sur ce type d'espace discret n'a été publiée. La caractéristique d'Euler peut s'obtenir aisément à partir du complexe polyédrique sur lequel est bâti l'espace discret. Pour ce qui est du calcul des groupes d'homologie, il est sans doute possible d'étendre des résultats obtenus sur des complexes polyédriques particuliers. Lorsque le complexe polyédrique est un complexe cubique, il est ainsi possible d'y construire une théorie de l'homologie [104]. Une étude de l'homologie des ensembles simplodaux est actuellement à l'étude [169].

³La définition du groupe fondamental en topologie générale est donnée page 238.

3.3 Cartes généralisées

Comme dit en introduction, les cartes généralisées ne manipulent pas explicitement les cellules et les relations d'incidence. Elles sont construites sur un seul type d'éléments, les *brins*. La structure de la subdivision est matérialisée par un ensemble d'involutions sur ces brins. Lienhardt a prouvé dans [141] que ce modèle était équivalent aux quasi-variétés cellulaires qui représentent les subdivisions en termes de cellules et de relations d'incidence. Plus précisément, les n - G -cartes peuvent représenter des quasi-variétés cellulaires, avec ou sans bord, orientables ou non.

3.3.1 Définitions et notations

Nous rappelons ici la définition de *carte généralisée* :

Définition 3.17 (n - G -carte) Une n - G -carte pour $n \geq 0$ est un $(n+2)$ -uplet $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tel que :

- D est un ensemble fini de brins,
- les α_i , $i \in \{0, \dots, n\}$ sont des permutations sur D telles que :
 - $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, α_i est une involution
 - Si D est l'ensemble vide, α_i n'est pas défini.
 - $\forall i, j$ tels que $0 \leq i < i + 2 \leq j \leq n$, $\alpha_i \alpha_j$ est une involution

Une (-1) - G -carte est définie par $G = (D)$, où D est un ensemble fini de brins.

Une subdivision de \mathbb{R}^2 et la 2- G -carte associée apparaissent sur la figure 3.9.

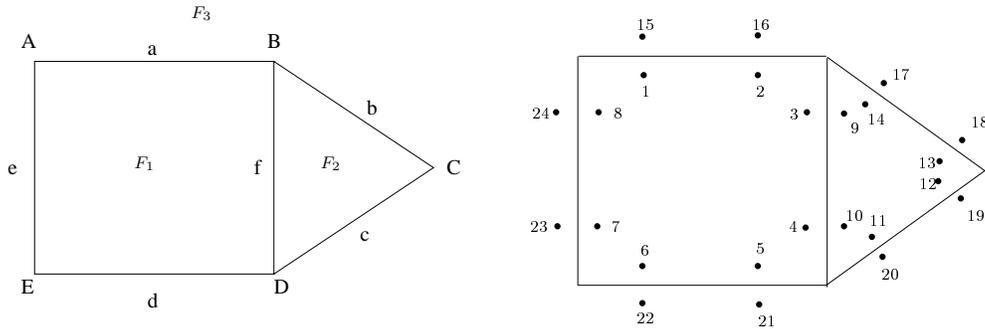


FIG. 3.9 – Subdivision de \mathbb{R}^2 et 2- G -carte associée, $G = (D, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, avec $D = \{1, \dots, 24\}$.

Une carte généralisée définit une subdivision de manière implicite. Et il est bien entendu possible à partir de la définition d'une n - G -carte de retrouver l'ensemble des cellules de la subdivision qu'elle représente ainsi que les relations d'incidence qui les relient. Toute cellule de la subdivision est en effet associée à un sous-ensemble particulier de brins de D . Pour exprimer formellement cette relation, nous rappelons la notion d'*orbite*.

Définition 3.18 (orbite) Soit $\Phi = \{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ un ensemble de permutations sur un ensemble d'éléments D . On note $\langle \Phi \rangle = \langle \pi_0, \dots, \pi_n \rangle$ le groupe de permutations de D engendré par Φ .

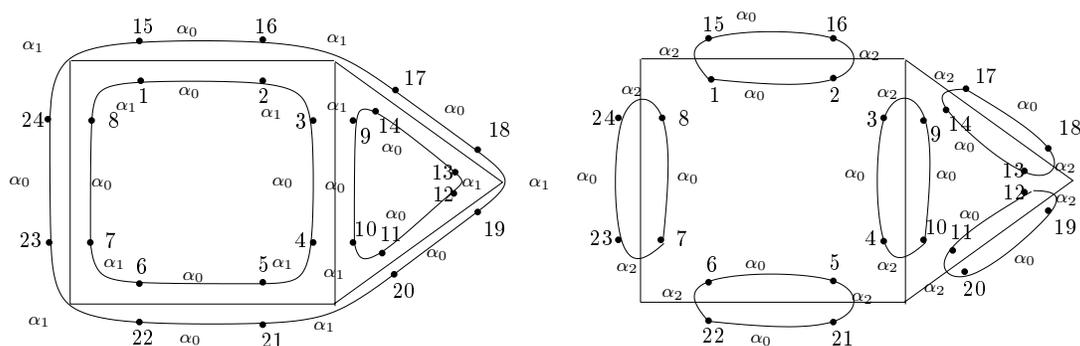
L'orbite d'un élément d de D relative au groupe $\langle \Phi \rangle$, notée $\langle \Phi \rangle (d)$ est l'ensemble $\{\phi(d), \phi \in \langle \Phi \rangle\}$

De manière informelle, on peut dire que l'orbite d'un élément d relative à un groupe de permutations, $\langle \Phi \rangle$, est composée de l'ensemble des éléments qui sont images de d par une composition de permutations appartenant à Φ . Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\langle \pi \rangle_N (d)$ l'orbite $\langle \pi_0, \dots, \pi_n \rangle (d)$ avec $N = \{0, \dots, n\}$. Plus généralement, étant donné un ensemble de permutations, l'orbite relative à un sous-groupe de ces permutations est noté par $\langle \pi \rangle$ indexé par l'ensemble des indices des permutations impliquées.

Les cellules de la subdivision associée à la n - G -carte, $(D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, sont alors déterminées par les orbites des brins de D . Des exemples d'orbites et les cellules qu'elles représentent apparaissent sur la figure 3.10.

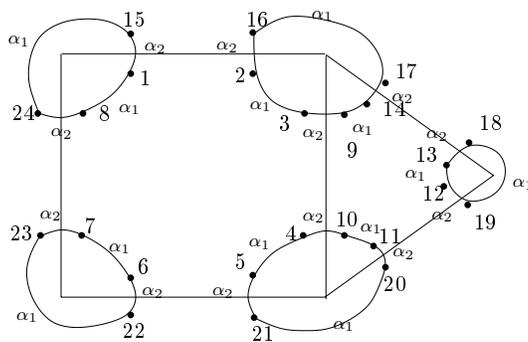
Définition 3.19 (i -cellule) *Etant donnée une n - G -carte, $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, chaque i -cellule de la subdivision correspondante est donnée par $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}} (d)$ où d est un brin incident à cette i -cellule.*

Par la suite, on notera l'ensemble des i -cellules associées à la n - G -carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $\{\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}\}_D$. Par souci d'homogénéité on notera $\{\langle \alpha \rangle_{N-I}\}_D$ l'ensemble des orbites distinctes de D de la forme $\langle \alpha \rangle_{N-I} (d)$.



(a) $\langle \alpha_0 \alpha_1 \rangle$ orbites / 2-cellules de la 2- G -carte
 $\langle \alpha_0 \alpha_1 \rangle (15) \Leftrightarrow F_3$
 $\langle \alpha_0 \alpha_1 \rangle (9) \Leftrightarrow F_2$
 $\langle \alpha_0 \alpha_1 \rangle (1) \Leftrightarrow F_1$.

(b) $\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle$ orbites / 1-cellules de la 2- G -carte
 $\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle (1) \Leftrightarrow a$, $\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle (13) \Leftrightarrow b$
 $\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle (11) \Leftrightarrow c$, $\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle (5) \Leftrightarrow d$
 $\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle (7) \Leftrightarrow e$, $\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle (3) \Leftrightarrow f$.



(c) $\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle$ orbites / 0-cellules de la 2- G -carte
 $\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle (1) \Leftrightarrow A$, $\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle (2) \Leftrightarrow B$
 $\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle (12) \Leftrightarrow C$, $\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle (4) \Leftrightarrow D$
 $\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle (6) \Leftrightarrow E$.

FIG. 3.10 – Décomposition cellulaire associée à la carte de la figure 3.9.

L'ensemble des i -cellules réalise une partition des brins d'une n - G -map, pour tout i entre 0 et n . Les relations d'incidence entre les cellules de la subdivision peuvent être aisément obtenues. Une cellule $c^j = \langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d)$ est face d'une cellule $c^i = \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d)$, lorsque $j \leq i$ et $\langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \neq \emptyset$ [140]. Deux telles cellules sont dites consécutives lorsque $i = j + 1$.

Nous présentons ci-dessous deux propriétés caractérisant des n - G -cartes particulières.

- i). *fermeture* : $\forall i \in N = \{0, \dots, n\}$, α_i est sans point fixe⁴
- ii). *connexité* : tout brin peut être atteint à partir de n'importe quel autre brin par applications successives d'un nombre fini d'involutions, i.e. $\forall d \in D$, $\langle \alpha \rangle_N(d) = D$

Lorsqu'une carte est fermée, la subdivision associée est fermée, autrement dit sans bord. De même les composantes connexes d'une carte correspondent aux composantes connexes de la subdivision représentée. La carte à droite de la figure 3.9 est fermée et connexe.

La subdivision associée à une carte généralisée est une quasi-variété cellulaire, autrement dit une pseudo-variété dont la triangulation est une quasi-variété simpliciale [141]. Une quasi-variété simpliciale est définie comme un ensemble semi-simplicial non dégénéré numéroté (cf section 2.6.2 page 76) qui peut être obtenu de manière constructive.

On sera, par la suite, amené à s'intéresser à la triangulation de la subdivision représentée par une n - G -carte.

Théorème 3.20 (Ensemble semi-simplicial numéroté associé à une n - G -carte) Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte. L'ensemble semi-simplicial associé à G est tel que :

- i). tout k -simplexe, $k \in \{0, \dots, n\}$, est associé à une orbite $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$ où $I = \{k_0, \dots, k_i\}$ est un sous-ensemble de N composé de $k + 1$ éléments distincts,
- ii). d_0 n'est pas défini sur l'ensemble des cellules de dimension 0 et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
 - si $j \in \{0, \dots, i\}$, d_j associe à toute cellule de dimension i associée à $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$, la cellule de dimension $i - 1$ associée à $\langle \alpha \rangle_{N-\{I-\{k_j\}\}}(d)$.
 - si $j \in \{i + 1, \dots, n\}$, d_j n'est pas défini

Dans un tel ensemble semi-simplicial, tout 0-simplexe numéroté par i correspond ainsi à une orbite de la forme $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d)$, autrement dit à une i -cellule de la subdivision. En outre, un i -simplexe, s^i , est face d'un j -simplexe, s^j , $j > i$, s'il existe un brin d tel que s^i et s^j soient respectivement associés à $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$ et $\langle \alpha \rangle_{N-J}(d)$ avec $I \subset J$.

3.3.2 Propriétés et opérateurs topologiques

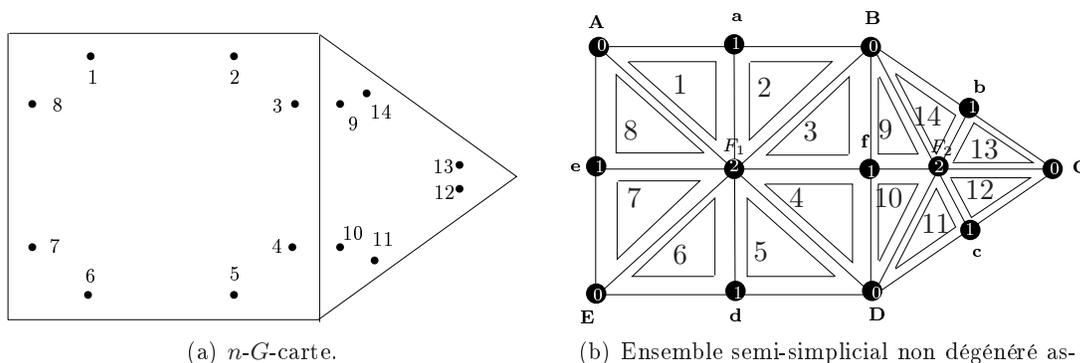
Des propriétés classiques ont été définies sur les cartes généralisées. Une notion de *carte duale* a par exemple été proposée qui traduit la notion de subdivision duale.⁵

Définition 3.21 (Carte duale) Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte. La carte $G^* = (D, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)$ est la carte duale de G .

D'autre part, les cartes sont capables de représenter des subdivisions orientables et non orientables. Une définition d'*orientabilité* sur les cartes a été fournie qui coïncide avec la notion

⁴ α_i est sans point fixe lorsque $\forall d \in D$, $\alpha_i(d) \neq d$.

⁵Le dual d'une subdivision d'un espace de dimension n est une subdivision du même espace obtenue en remplaçant chaque k -cellule par une $(n - k)$ -cellule.



(a) n - G -carte. (b) Ensemble semi-simplicial non dégénéré associé. La numérotation des triangles indique les brins auxquels ils correspondent. Le sommet A correspond à l'orbite $\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle (1) = \{1, 8\}$, le sommet a à l'orbite $\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle (1) = \{1, 2\}$ l'arête entre a et A représente $\langle \alpha_2 \rangle (1) = \{1\} \dots$

FIG. 3.11 – Carte généralisée et ensemble semi-simplicial non dégénéré associé.

d'orientabilité relative à la subdivision associée. La propriété d'orientabilité d'une carte peut être établie à l'aide de la n -carte des orientations. La notion de n -carte a été rappelée dans la définition 2.25 page 83.

Définition 3.22 (n -carte des orientations) Soit $n \geq 1$ et $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte. La n -carte $OG = (D, \alpha_0 \alpha_1, \alpha_0 \alpha_2, \dots, \alpha_0 \alpha_n)$ est appelée n -carte des orientations de G . Par extension si $n = -1$, ou $n = 0$, $OG = (D)$.

Soit $d \in D$, la composante connexe $\langle \alpha_0 \alpha_1, \alpha_0 \alpha_2, \dots, \alpha_0 \alpha_n \rangle (d)$ est une composante orientée de G .

On définit alors l'orientabilité d'une carte fermée G par rapport au nombre de composantes connexes de OG .

Définition 3.23 (Orientabilité d'une carte fermée) Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte fermée, $n \geq 0$. On dit que G est orientable (resp. non orientable) si et seulement si son n -carte d'orientations comporte exactement 2 composantes connexes (resp. 1 composante connexe).

On peut prouver que cette définition de l'orientabilité coïncide avec celle de la notion d'orientabilité de l'ensemble semi-simplicial associé.

Théorème 3.24 (Orientabilité d'une carte fermée et de la quasi-variété cellulaire associée) Soit G un n - G -carte et S sa quasi-variété cellulaire associée.

G est orientable si et seulement si S est orientable.

Enfin, une caractéristique d'Euler a aussi été associée à toute n - G -carte.

Définition 3.25 (Caractéristique d'Euler) Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte, $n \geq 0$. La Caractéristique d'Euler de G est définie comme la somme alternée du nombre d'orbites distinctes construites sur i involutions pour i de n à 0 :

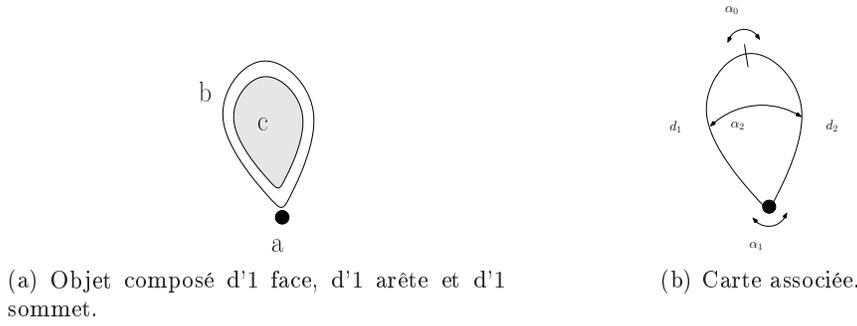


FIG. 3.12 – Exemple d'un objet cellulaire et de la n - G -carte associée dont les caractéristiques d'Euler n'ont pas la même valeur.

$$\begin{aligned}
c(G) &= \sum_{i=0, \dots, n} \text{card}(\{\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}\}_D) \\
&\quad - \sum_{0 \leq i < j \leq n} \text{card}(\{\langle \alpha \rangle_{N-\{i, j\}}\}_D) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + (-1)^{n-1} \sum_{i=0, \dots, n} \text{card}(\{\langle \alpha_i \rangle\}) \\
&\quad + (-1)^n \text{card}(D)
\end{aligned}$$

La valeur de la caractéristique d'Euler d'une n - G -carte est identique à celle de l'ensemble semi-simpliciale associé. Cependant si on considère la caractéristique d'Euler de la subdivision cellulaire correspondante, elle sera égale à $cc(G) = \sum_{i=0, \dots, n} (-1)^i \text{card}(\{\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}\}_D)$. Et dans le cas général $cc(G)$ sera différent de $c(G)$.

Considérons l'objet et la carte correspondante sur la figure 3.12.

La caractéristique d'Euler de l'objet est évidemment égale à $1 - 1 + 1 = 1$.

La caractéristique d'Euler de la carte est égale à :

$$\begin{aligned}
cc(G) &= \text{card}(\{\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle\}_D) + \text{card}(\{\langle \alpha_0 \alpha_2 \rangle\}_D) + \text{card}(\{\langle \alpha_0 \alpha_1 \rangle\}_D) \\
&\quad - \text{card}(\{\langle \alpha_0 \rangle\}_D) - \text{card}(\{\langle \alpha_1 \rangle\}_D) - \text{card}(\{\langle \alpha_2 \rangle\}_D) \\
&\quad + \text{card}(D)
\end{aligned}$$

$$d'où \quad cc(G) = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 2 = 2$$

Pour les 2- G -cartes d'autres invariants topologiques ont été définis : le nombre de frontières, le facteur d'orientabilité, et le genre [141]. Ils permettent d'obtenir une classification des 2- G -cartes pour lesquelles α_2 est sans point fixe, tout à fait similaire à celle des surfaces topologiques.

Il a été prouvé que toute n - G -carte peut être obtenue en utilisant une séquence d'opérations élémentaires de *création* et de *couture* [141]. D'autres opérations topologiques d'*extrusion*, d'*éclatement*, de *chanfreinage* ont aussi été définies [74] augmentant ainsi la maniabilité des cartes. Enfin, des opérateurs de *suppression* et de *contraction* permettant de simplifier des cartes afin de les exploiter dans le cadre de la multi-résolution ont été développés par Damiand et Lienhardt [51].

3.4 Bilan

Nous avons décrit dans ce chapitre trois modèles permettant de représenter des subdivisions de l'espace. L'intérêt de ces modèles réside à la fois dans leur généralité et dans leur complémentarité.

La plupart des structures évoquées dans le Chapitre 1 peuvent être vues comme des cas particuliers de l'un ou l'autre de ces trois modèles. En effet, toute subdivision cellulaire est aussi un ordre et de nombreuses subdivisions effectivement utilisées sont construites à partir de cellules polyédriques. D'autre part, les cartes généralisées englobent nombre de structures exploitées en modélisation.

Etablir un pont entre les ordres et les espaces discrets de Dominguez permettrait d'enrichir les deux modèles :

- en définissant sur les ordres des notions de connexité s'inspirant des fonctions d'éclairage,
- en comparant les notions d'homotopie sur les ordres (homotopie de fonctions, rétracte, points simples) et sur les espaces discrets de Dominguez (homotopie de chemins, groupe fondamental, théorème de Seifert-Van Kampen),
- en munissant les espaces discrets de Dominguez d'outils algorithmiques,
- en comparant les notions de surfaces propres à chaque modèle.

Il paraît plus ardu de construire un lien entre les ordres et les cartes généralisées. Nous verrons dans le chapitre 4 comment il est possible de relier un sous-ensemble des ordres à un sous-ensemble des cartes généralisées. Un tel lien peut, par exemple, permettre d'utiliser une structure d'ordre et une structure de carte généralisée dans une même chaîne de traitements (analyse d'une image suivie d'une modélisation). On peut ainsi envisager d'exploiter les outils topologiques d'analyse développés sur les ordres pour extraire un objet d'une image et reconstruire le modèle obtenu grâce aux méthodes définies sur les cartes généralisées.

Chapitre 4

Comparaison des modèles topologiques

Comparer diverses structures utilisées pour représenter la topologie des images, mettre en relief leurs ressemblances et leurs spécificités s'avèrent essentiels pour plusieurs raisons. Une telle étude peut tout d'abord permettre de créer des ponts entre ces modèles et ainsi de naviguer d'un modèle à l'autre selon les besoins de l'application souhaitée. On peut aussi espérer que la mise en commun de ces études pourra, à terme, conduire à unifier la plupart des structures utilisées au sein d'un cadre de travail plus général. La possibilité de transférer des résultats théoriques et des algorithmes pratiques d'un modèle à l'autre est une conséquence plus immédiate de telles recherches, dès lors que les liens entre modèles sont traduits par des processus explicites de conversion. En outre, tous ces modèles ne sont pas équivalents, et il est capital de pouvoir déterminer pour chacun d'eux la classe d'objets qu'il est capable de représenter. Différentes études ont d'ores et déjà été menées dans cette direction. Brisson a notamment comparé les "Quad-edge", "facet-edge" et "cell-tuples" dans [36], tandis que Lienhardt a étudié les liens entre ces mêmes modèles et différentes structures utilisées en modélisation géométrique, comme les cartes de dimensions n (généralisées ou non) [140]. Un travail similaire a été réalisé par Brun et Kropatsch [37] pour étudier la relation entre les graphes duaux et les cartes combinatoires. Et deux modèles de cartes discrètes utilisés dans des applications de segmentation d'images 3D ont été comparés par Braquelaire *et al.* dans [31].

Notre étude se situe dans la lignée de ces travaux. Nous nous intéressons ici à la comparaison des modèles de représentation d'images décrits dans le chapitre précédent.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, il existe une certaine ressemblance entre les ordres et les complexes cellulaires. Cependant, alors qu'il est possible de définir diverses notions d'adjacence entre spels sur les complexes en utilisant des techniques variées, il semble beaucoup plus difficile de réaliser ce même travail sur les ordres. A notre connaissance, seul l'ordre très particulier H^n , qui correspond à la grille régulière, a été équipé de telles notions. Pour être tout à fait exact, seules des adjacences équivalentes à ω_n et α_n ont pu être construites sur H^n . Elles ont été obtenues grâce à l'utilisation des opérateurs morphologiques "tout ou rien". Notre premier travail a consisté à formaliser les liens entre ordres et complexes, dans l'espoir d'être ensuite capables de définir des notions de connexité plus variées sur les ordres. Nous en avons profité pour caractériser le sous-ensemble des ordres dont le complexe cellulaire associé est un complexe simplicial abstrait. Nous avons ensuite exploité les relations existant entre les ordres et les complexes pour déterminer dans quelle mesure il était possible de transférer différentes notions de connexité proposées sur les complexes vers les ordres. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux notions de fonctions d'éclairage proposées par Dominguez *et al.* qui autorisent la définition de multiples notions d'adjacence. Ces fonctions étaient à l'origine

définies sur des complexes polyédriques homogènes et localement finis, mais nous avons remarqué que leur validité n'était pas tributaire des propriétés géométriques de tels complexes mais plutôt de propriétés combinatoires implicites. Nous définissons donc une sous-classe des complexes cellulaires abstraits, caractérisés par cet ensemble de propriétés combinatoires, compatibles avec la définition de telles fonctions. Nous en déduisons une sous-classe des ordres sur lesquels des fonctions analogues peuvent être construites et montrons comment y construire explicitement des fonctions d'éclairage [6, 7]. Il s'agit là d'une application directe de la comparaison des modèles ordre et complexe. Cette étude fait l'objet de la première section de ce chapitre.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la comparaison des ordres et des cartes généralisées [5, 4]. Cette recherche a été réalisée en collaboration avec Pascal Lienhardt (laboratoire SIC, Poitiers) et Xavier Daragon (laboratoire A2SI, ESIEE, Marne la Vallée). Plusieurs difficultés ont jalonné ce travail. Tout d'abord, les ordres représentent un ensemble d'objets trop vaste pour pouvoir être associés sans restriction à des cartes. Il a ainsi fallu déterminer un sous-ensemble des ordres adéquat. Nous nous sommes plus précisément concentrés sur une classe d'ordre existante, celle des n -surfaces, qui semblait un candidat prometteur. En effet, les n -surfaces constituent un sous-ensemble des pseudo-variétés (cf Thé. 3.10), comme le sont les subdivisions associées aux cartes généralisées (cf page 108). En outre, on peut vérifier immédiatement qu'une 0-surface est isomorphe à une quasi-variété cellulaire de dimension 0 représentée par une 0- G -carte. Enfin, il existe une définition récursive des variétés quasi-cellulaires de dimension n associées aux n - G -cartes [141], qui, sans être à première vue équivalente à celle des n -surfaces, semble comporter certaines similitudes. D'autre part, si, comme nous l'avons dit précédemment, un ordre quelconque ne peut pas être représenté par une carte, la réciproque est elle aussi vraie. En effet, les cartes permettent, contrairement aux ordres, de représenter des subdivisions comportant potentiellement de la multi-incidence. La deuxième difficulté a donc consisté à déterminer la sous-classe des cartes généralisées exemptes de toute multi-incidence. Nous avons commencé par nous appuyer sur une caractérisation de telles cartes proposée dans [140] avant de nous rendre compte qu'elle était insuffisante. Nous avons donc été amenés à en proposer une nouvelle dont nous avons prouvé qu'elle était nécessaire et suffisante. Les deux derniers obstacles rencontrés pour réaliser ce lien entre ces modèles est venu des deux principales différences intervenant dans la définition des n -surfaces et dans celle des n - G -cartes. En premier lieu, les briques de base de ces deux modèles n'ont pas la même signification du point de vue de la subdivision. Dans le cas des ordres, les éléments représentent directement les cellules de la subdivision, tandis que les brins des cartes sont associés à des sous-ensembles bien particuliers de ces cellules. D'autre part, les structures mêmes des définitions s'avèrent très différentes. Les n -surfaces utilisent une approche récursive tandis que les n - G -cartes suivent une voie constructive. Ces deux problèmes ont été résolus en utilisant un troisième modèle comme passerelle entre les n -surfaces et les n - G -cartes. La deuxième section présente ainsi le raisonnement qui a conduit à établir l'équivalence entre une sous-famille des cartes généralisées et les n -surfaces.

La dernière section dresse le bilan de ce travail et en présente quelques perspectives.

4.1 Complexes et ordres

Dans cette section, nous exposons différents liens entre les complexes et les ordres. Nous proposons également des nouvelles classes d'ordres et de complexes, définies de façon purement combinatoire, sur lesquelles il est possible de définir différentes connexités à l'aide de fonctions d'éclairage similaires à celles proposées par Dominguez *et al.* sur les complexes polyédriques. Le résultat principal, qui garantit la possibilité de définir de telles fonctions, s'exprime dans le

théorème 4.25 page 138.

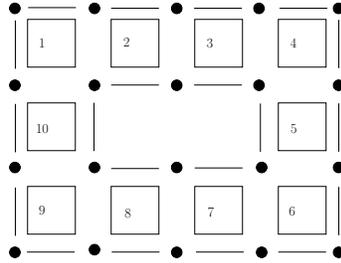
4.1.1 Liens entre ces modèles

Il existe différents liens entre complexes cellulaires abstraits et ordres. Nous formalisons d'abord ce lien dans le cas général. Nous définissons précisément des fonctions qui permettent de construire un ordre ou son dual à partir d'un complexe et réciproquement deux complexes à partir d'un ordre. Nous nous intéressons ensuite à des classes de complexes et d'ordres plus restreintes. En effet, la notion de complexe cellulaire abstrait est, la plupart du temps, trop générale pour pouvoir être exploitée en imagerie numérique. Elle n'exploite pas des propriétés souvent présentes dans le support des images. Ainsi, en modélisation on utilise des complexes cellulaires plongeables dans un espace euclidien, dont font partie les complexes simpliciaux abstraits. Nous proposons donc d'abord une caractérisation des ordres dont les complexes associés sont des complexes simpliciaux abstraits.

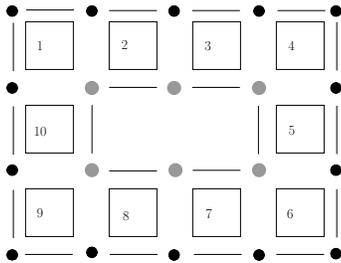
D'autre part, les modèles utilisés en analyse sont, quant à eux, souvent construits sur des complexes polyédriques particuliers. Cependant, il est irréaliste de tenter de déterminer le sous-ensemble des ordres dont le complexe cellulaire associé est un complexe polyédrique. L'information dont on dispose sur les ordres est en effet de nature purement combinatoire et non géométrique. Nous nous contenterons donc de considérer une sous-classe des ordres et des complexes cellulaires abstraits possédant une propriété combinatoire utile pour représenter des images en analyse. Elle garantit que la connexité de tout groupe d'éléments de l'image partageant un ensemble non vide d'éléments intermédiaires "incidentes" est caractérisable de manière non ambiguë par un unique élément intermédiaire. En quelque sorte, la cohésion maximale d'un ensemble d'éléments de l'image associée à une telle structure peut être définie par un ensemble unique d'éléments intermédiaires. L'utilité de cette propriété est illustrée sur la figure 4.1 pour un complexe carré. Le complexe de la figure 4.1(a) ne satisfait pas les conditions requises. En effet, les deux 2-cellules numérotées 1 et 2 possèdent, par exemple, des cellules incidentes communes (2 sommets), mais parmi elles, aucune n'est plus qualifiée que l'autre pour décrire la liaison de ces deux cellules. Il en découle une ambiguïté si l'on veut décrire la connexité de ces deux cellules à l'aide d'un seul élément intermédiaire. Lequel des deux sommets choisir ? Les figures 4.1(b) et 4.1(c) montrent deux exemples (parmi d'autres) d'ensembles de cellules intermédiaires pouvant être utilisés pour décrire la cohésion maximale de l'ensemble. La figure 4.1(d) est, au contraire, un exemple d'un complexe possédant de bonnes propriétés. Les deux 2-cellules numérotées 1 et 2 possèdent là aussi des cellules incidentes communes (2 sommets et 1 arête), mais maintenant leur connexité peut être, sans équivoque, représentée par l'arête. En effet, elle caractérise complètement la liaison puisque sa clôture contient précisément toutes les cellules intermédiaires entre 1 et 2.

Nous allons donc introduire une nouvelle catégorie d'ordres et de complexes, respectivement appelés *ordres à support* et *complexes à support*.¹

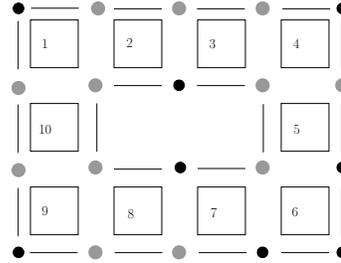
¹Dans [7, 6], ces ordres et complexes étaient qualifiés de *fortement normaux* en référence à des travaux de Saha et Rosenfeld [179, 180] mais il s'est avéré que les deux propriétés n'étaient pas équivalentes d'où le choix d'un nouveau terme plus approprié. En effet, comme nous le verrons ultérieurement, la propriété caractérisant cette famille d'ordres et de complexes permet de définir, comme sur les espaces discrets de Dominguez *et al.* la notion de support entre éléments de l'image.



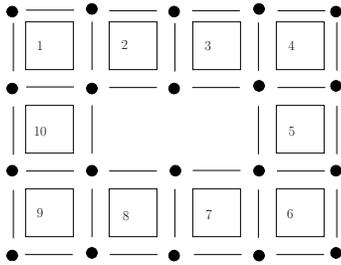
(a) Complexe carré ne permettant pas de définir la cohésion maximale entre cellules de manière non ambiguë.



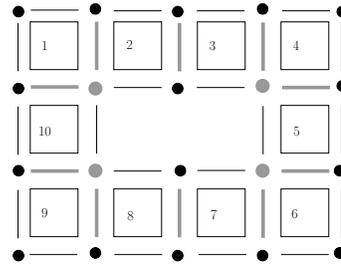
(b) Ensemble de cellules intermédiaires définissant cette cohésion maximale.



(c) Autre ensemble de cellules intermédiaires définissant aussi cette cohésion maximale.



(d) Complexe carré compatible avec la définition d'une cohésion maximale.



(e) Ensemble unique de cellules caractérisant la cohésion maximale.

FIG. 4.1 – Illustration sur deux complexes carrés des notions de cohésion maximale.

Complexes et ordres quelconques

Comme nous l'avons dit précédemment, il est possible à partir de tout complexe de construire un ordre particulier, que nous appellerons par la suite "ordre associé à un complexe cellulaire abstrait".

Définition 4.1 (Construction de l'ordre associé à un complexe cellulaire abstrait) L'ordre $|X| = (X, \alpha)$ associé au complexe cellulaire abstrait $C = (E, <, dim)$ est défini par :

- i). $X = E$,
- ii). $\alpha = \{(x, y) / y < x\} \cup \{(x, x) \in X\}$.

Par la suite, on notera $\psi_{C \rightarrow X}$ l'application qui construit l'ordre associé à un complexe cellulaire. $\psi_{C \rightarrow X}$ est un isomorphisme d'ordres entre $(E, <)$ et (X, α^\square) . Dans un ordre ainsi obtenu, les α -terminaux correspondent à l'ensemble des cellules du complexe qui n'ont aucune face dans les dimensions inférieures. Ainsi, l'ensemble des α -terminaux contient bien sûr les images des 0-cellules du complexe mais il comporte aussi les cellules de dimensions supérieures dont la clôture combinatoire stricte est vide (cf Fig. 4.2).

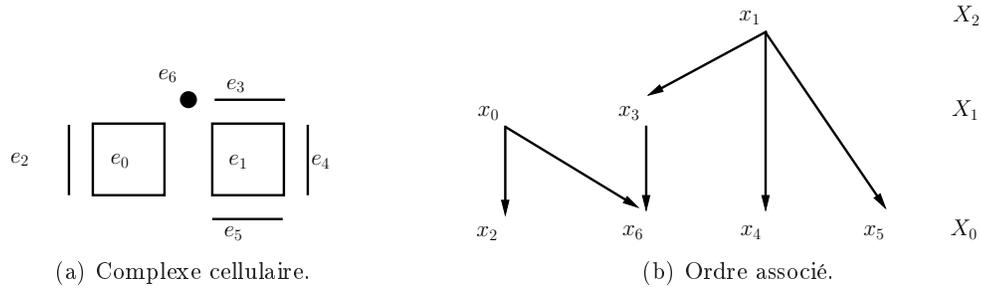


FIG. 4.2 – Un complexe et son ordre associé.

De la même manière, il est possible d'associer à un complexe l'ordre dual de l'ordre précédemment défini.

Définition 4.2 (Construction de l'ordre dual associé à un complexe cellulaire abstrait) L'ordre dual $|X| = (X, \alpha)$ associé au complexe cellulaire abstrait $C = (E, <, dim)$ est défini par :

- i). $X = E$
- ii). $\alpha = \{(x, y) / x < y\} \cup \{(x, x) \in X\}$

La construction permettant d'obtenir l'ordre dual d'un complexe sera représentée par une application notée $\psi_{C \rightarrow X}^*$ qui réalise un isomorphisme d'ordres entre $(E, <)$ et (X, α^\square) . Dans l'ordre dual ainsi construit, les α -terminaux correspondent à l'ensemble des cellules du complexe qui ne sont face d'aucune cellule de dimension supérieure (cf Fig. 4.3).

La notion de dimension n'est, a priori, pas conservée par cette transformation. Réaliser une construction inverse s'avère plus compliqué puisque les éléments d'un ordre ne possèdent pas de dimension explicite. Cependant comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 3, il est possible d'associer à tout élément d'un ordre CF , deux entiers positifs ou nuls respectivement connus sous le nom d' α -rang et de β -rang. On peut considérer ces deux entiers comme deux notions

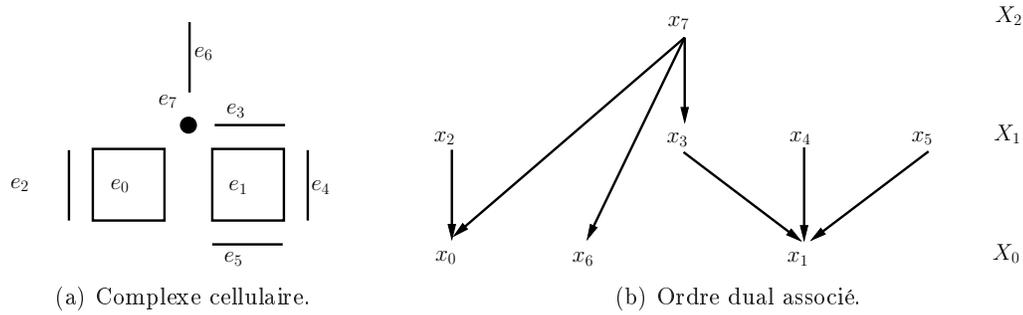


FIG. 4.3 – Un complexe et son ordre dual associé.

implicites de dimension , qu'on nommera α -dimension et β -dimension. Par souci d'homogénéité, on les notera \dim_α et \dim_β .

Sur l'ordre représenté sur la figure 4.2(b), l'ensemble des éléments de \dim_α égale à 0 est l'ensemble $\{x_2, x_6, x_4, x_5\}$, l'ensemble des éléments de \dim_α égale à 1 est $\{x_0, x_3\}$ et l'unique élément de \dim_α égale à 2 est x_1 . Si on regarde maintenant la β -dimension : les éléments de x_0 et x_1 ont pour β -dimension 0, x_2, x_3, x_4 et x_5 ont pour β -dimension 1 et x_6 a pour β -dimension 2.

Le même raisonnement sur l'ordre de la figure 4.3(b) donne :

- x_0, x_6, x_1 de \dim_α 0 ; x_2, x_3, x_4, x_5 de \dim_α 1 ; x_7 de \dim_α 2.
- x_2, x_4, x_5, x_7 de \dim_β 0 ; x_0, x_3, x_6 de \dim_β 1 ; x_1 de \dim_β 2.

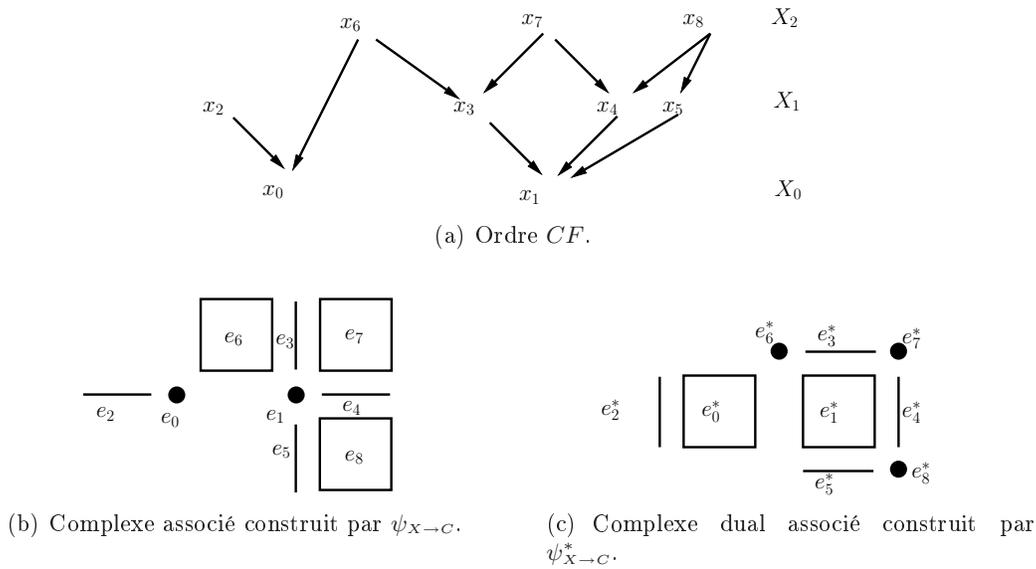
Par la suite, nous appellerons "complexe cellulaire associé à un ordre" ou, pour simplifier, "complexe associé à un ordre", le complexe cellulaire construit à partir de la dimension \dim_α (Fig. 4.4(b)). La construction d'un tel complexe peut s'exprimer de la manière suivante.

Définition 4.3 (Construction du complexe cellulaire associé à un ordre) *Le complexe cellulaire abstrait $C = (E, <, dim)$ associé à l'ordre $CF, |X| = (X, \alpha)$, est défini par :*

- i). $E = X$,
- ii). $\forall (e, e') \in E \times E, e < e' \Leftrightarrow e \in \alpha^\square(e')$,
- iii). $\forall e \in E, dim(e) = dim_\alpha(e)$.

La construction du complexe cellulaire associé à un ordre sera représentée par l'application $\psi_{X \rightarrow C}$, qui constitue un isomorphisme d'ordres entre (X, α^\square) et $(E, <)$. Dans un tel complexe, les faces d'une cellule e sont précisément les images par $\psi_{X \rightarrow C}$ des éléments de l' α -adhérence stricte de $\psi_{X \rightarrow C}^{-1}(e)$. D'autre part, les cellules de dimension 0 sont les images des α -terminaux de l'ordre et les cellules de dimension maximale forment un sous-ensemble des images des β -terminaux. Les autres β -terminaux de l'ordre ont pour image des cellules dont l'étoile stricte est vide, autrement dit qui ne sont face d'aucune cellule de dimension supérieure.

On souhaite par la suite établir un lien entre les ordres et des complexes s'inspirant des espaces discrets de Dominguez. Or, dans ces espaces, les spels de l'image sont représentés par les cellules de dimension maximale du complexe. D'autre part, du point de vue des ordres, on a l'habitude d'associer les spels de l'image à des éléments terminaux de l'ordre. On préférera donc utiliser le complexe dual du complexe précédemment construit pour lequel les cellules

FIG. 4.4 – Un ordre CF ainsi que le complexe et le complexe dual associés.

de dimension maximale sont précisément les images des α -terminaux de l'ordre. Ce complexe présente en outre l'avantage d'être pur. Autrement dit toute cellule est face d'une cellule de dimension maximale. Cette propriété convient tout à fait à l'interprétation que l'on peut avoir des complexes utilisés pour représenter des images. Les cellules qui ne sont pas de dimension maximale ne servent qu'à traduire les connexions entre spels, autrement dit entre cellules de dimensions maximales. La présence de cellules pendantes dans le complexe n'est donc d'aucun intérêt. La construction du "complexe cellulaire abstrait dual associé à un ordre" ou "complexe dual associé à un ordre" (Fig. 4.4(c)) est formellement décrite ci-dessous.

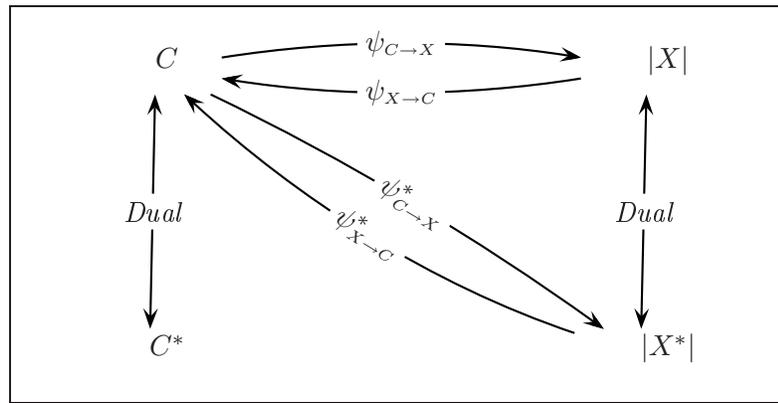
Définition 4.4 (Construction du complexe cellulaire abstrait dual associé à un ordre)

Le complexe cellulaire abstrait dual $C^* = (E^*, <^*, \dim^*)$ associé à l'ordre CF , de rang borné, $|X| = (X, \alpha)$ est défini par :

- i). $E^* = X$,
- ii). $\forall (e, e') \in E^* \times E^*, e <^* e' \Leftrightarrow e' \in \alpha^\square(e)$
- iii). $\forall e \in E^*, \dim(e) = \dim_\alpha^*(e)$ avec $\dim_\alpha^* = \max_{x \in X} \{\mathbf{dim}_\alpha(x)\} - \mathbf{dim}_\alpha$.

La construction du complexe cellulaire dual d'un ordre sera représentée par une application notée $\psi_{X \rightarrow C}^*$. Celle-ci réalise un isomorphisme d'ordres entre (X, β^\square) et $(E^*, <^*)$. Le recours au maximum des α -rangs des éléments de X est légal dès lors que l'on considère des ordres de rang borné. Par la suite, les ordres CF considérés seront implicitement de rang borné. Dans ce complexe, les cellules de dimension maximale sont bien les images par $\psi_{X \rightarrow C}^*$ des α -terminaux de l'ordre et les cellules servant à les relier sont les images des éléments appartenant aux β -adhérences strictes des α -terminaux.

La schéma ci-dessous synthétise les constructions précédemment définies.



Le complexe cellulaire abstrait dual d'un ordre (X, α) est la plupart du temps différent du complexe cellulaire abstrait de l'ordre dual (X, β) . En effet, la fonction de dimension dim_{α}^* est généralement différente de la fonction dim_{β} (Fig. 4.5).

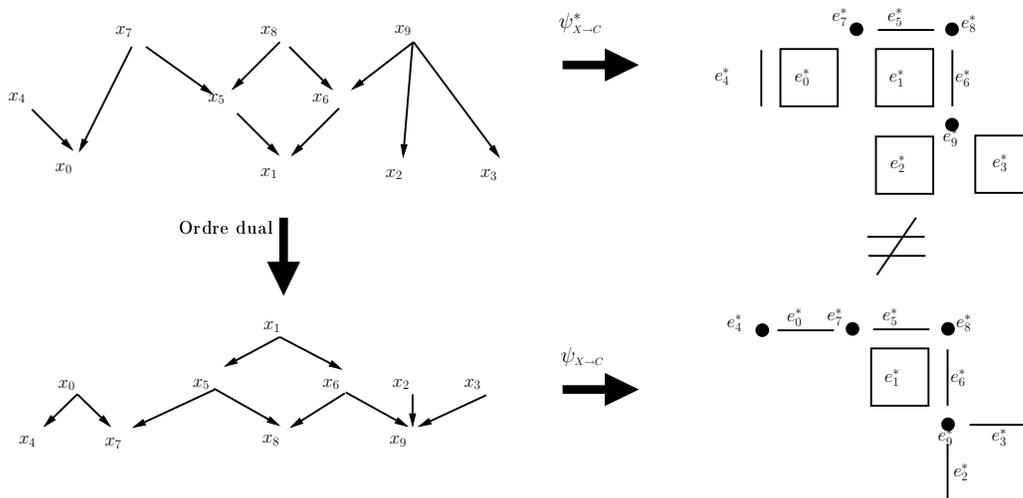


FIG. 4.5 – Différence entre le complexe dual associé à un ordre et le complexe associé à l'ordre dual.

On peut remarquer, en utilisant une notation informelle, qu'un complexe, C , de dimension n vérifie $\psi_{X \rightarrow C}(\psi_{X \rightarrow C}^{-1}(C)) = C$ (resp. $\psi_{X \rightarrow C}^*(\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(C)) = C$) si et seulement si il vérifie la propriété suivante : toute i -cellule de C ($i \in \{0, \dots, n\}$) possède au moins une k -face pour tout k dans $\{0, \dots, i - 1\}$ (resp. est face d'au moins une k -cellule pour tout k dans $\{i + 1, \dots, n\}$). Il existe alors une relation entre la dimension implicite associée à un ordre construit sur un tel complexe et la dimension explicitement définie sur le complexe. Pour un ordre construit sur un complexe C tel que $\psi_{X \rightarrow C}(\psi_{X \rightarrow C}^{-1}(C)) = C$ (resp. $\psi_{X \rightarrow C}^*(\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(C)) = C$), la $\psi_{C \rightarrow X}$ -image d'une i -cellule est un élément de rang i (resp. $n - i$).

Il existe un lien fort entre les différentes notions topologiques définies sur un ordre et celles définies sur les complexes associés. L'image par $\psi_{X \rightarrow C}$ de l' α -adhérence (stricte) d'un sous-ensemble S d'un ordre est la clôture combinatoire (stricte) de $\psi_{X \rightarrow C}(S)$. De même, l'image par $\psi_{X \rightarrow C}^*$ de l' α -adhérence (stricte) d'un sous-ensemble S d'un ordre est l'étoile combinatoire (stricte) de $\psi_{X \rightarrow C}^*(S)$. Ces relations sont résumées dans le tableau 4.1. Un exemple de cette correspondance apparaît sur la figure 4.6.

$ X = (X, \alpha)$	(C, \prec, \dim)	(C^*, \prec^*, \dim^*)
$\alpha^\square(x)$	$cl(\psi_{X \rightarrow C}(x)) \setminus \{\psi_{X \rightarrow C}(x)\}$	$st(\psi_{X \rightarrow C}^*(x)) \setminus \{\psi_{X \rightarrow C}^*(x)\}$
$\alpha(x)$	$cl(\psi_{X \rightarrow C}(x))$	$st(\psi_{X \rightarrow C}^*(x))$
$\beta^\square(x)$	$st(\psi_{X \rightarrow C}(x)) \setminus \{\psi_{X \rightarrow C}(x)\}$	$cl(\psi_{X \rightarrow C}^*(x)) \setminus \{\psi_{X \rightarrow C}^*(x)\}$
$\beta(x)$	$st(\psi_{X \rightarrow C}(x))$	$cl(\psi_{X \rightarrow C}^*(x))$

TAB. 4.1 – Liens entre les notions définies sur les ordres et sur les complexes

Cette correspondance implique que les α -ouverts d'un ordre (cf section 3.1.2 page 95) ont pour image les ouverts du complexe associé et les fermés du complexe dual associé (Fig. 4.7) et les α -fermés ont pour image les fermés du complexe associé et les ouverts du complexe dual (Fig. 4.8).

Ainsi, si on note \mathcal{O}_C la topologie classiquement associée à un complexe C , les applications $\psi_{X \rightarrow C}$ et $\psi_{X \rightarrow C}^*$ sont des homéomorphismes respectivement de $(|X|, \mathcal{O}_\alpha)$ vers (C, \mathcal{O}_C) et de $(|X|, \mathcal{O}_\beta)$ vers (C^*, \mathcal{O}_{C^*}) .

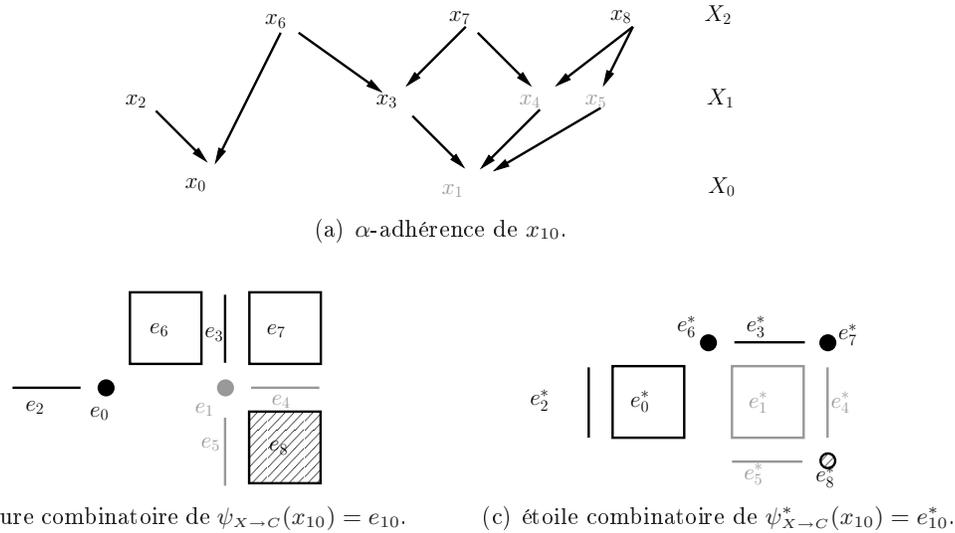


FIG. 4.6 – Correspondance entre la notion d' α -adhérence et les notions de clôture et d'étoile combinatoires des complexes associés.

Complexes et ordres simpliciaux

Nous avons déjà vu qu'on associe classiquement un complexe simplicial abstrait à un ordre (cf Déf. 3.3 page 94). Cependant, cette construction n'a rien de commun avec les deux évoquées ci-dessus. La question que nous nous posons ici est un peu différente. Nous souhaitons déterminer les propriétés que doit vérifier un ordre, afin que le complexe construit à partir de cette ordre à l'aide de l'application $\psi_{X \rightarrow C}$ (resp. $\psi_{X \rightarrow C}^*$) soit un complexe simplicial abstrait (cf Fig. 4.9). Nous

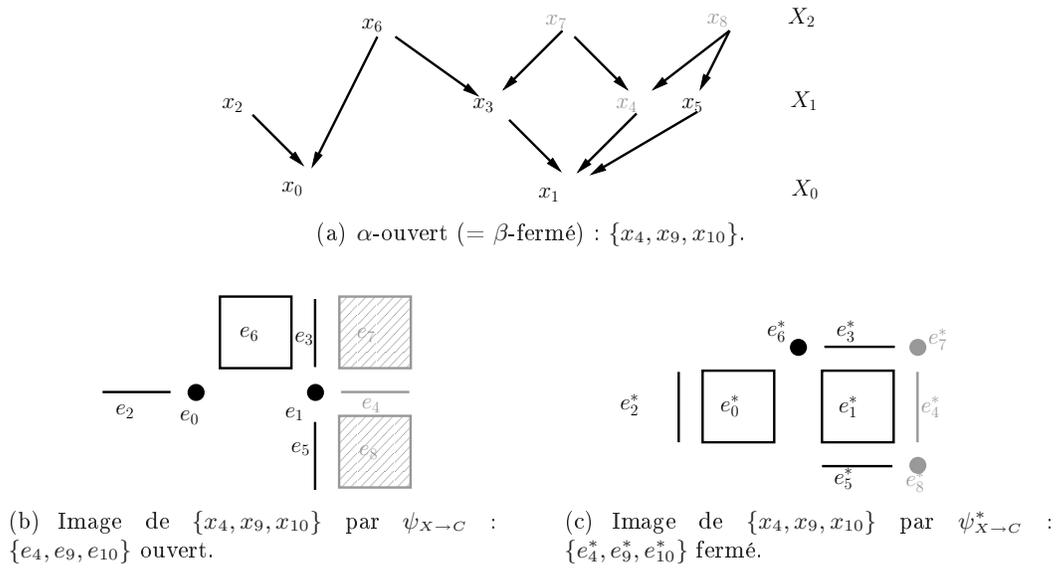


FIG. 4.7 – α -ouvert d'un ordre et ses images dans les complexes associés.

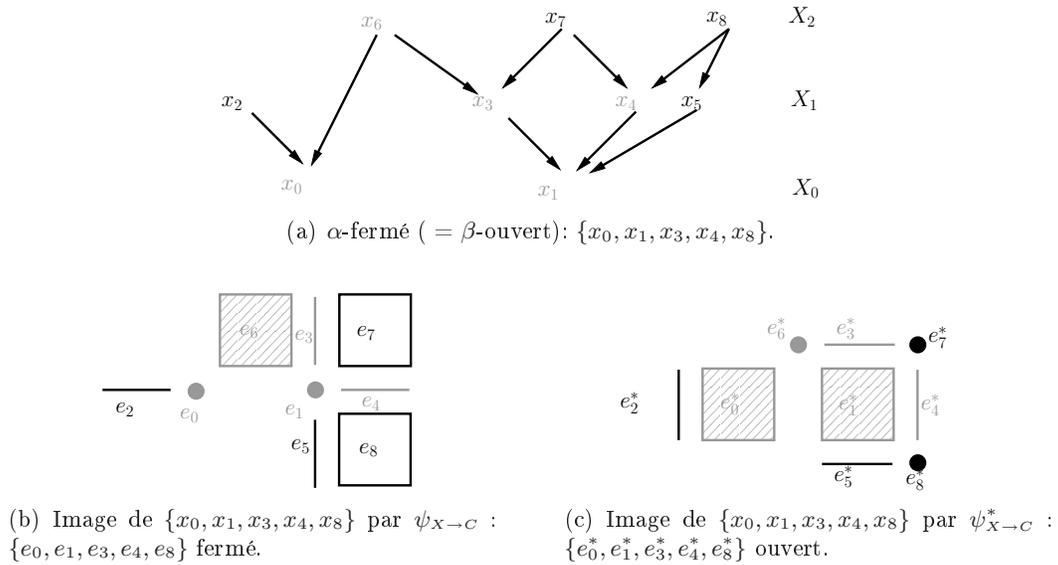


FIG. 4.8 – α -fermé d'un ordre et ses images dans les complexes associés.

appellerons les ordres vérifiant cette propriété des ordres α -simpliciaux (resp. β -simpliciaux).

Théorème 4.5 (Caractérisation des ordres α -simpliciaux) *Un ordre CF est α -simplicial si et seulement si son α -décomposition est telle que²:*

$$\forall i \geq 0, \forall x, x', x \neq x', \in X_i, \quad \alpha(x) \cap X_0 \neq \alpha(x') \cap X_0 \quad (4.1)$$

$$\forall i \geq 0, \forall x \in X_i, \forall j \in \{0, \dots, i\}, \quad \text{card}(\alpha(x) \cap X_j) = \binom{i+1}{j+1} \quad (4.2)$$

(i.e. deux simplexes différents n'ont pas les mêmes sommets et tout i -simplexe possède $\binom{i+1}{j+1}$ j -faces, $j \in [0, i]$)

Preuve : Soit un ordre CF , $|X| = (X, \alpha)$.

- i). Si $|X|$ est α -simplicial, alors l'équation 4.1 est avérée puisque deux simplexes de même taille ne peuvent pas partager exactement les mêmes faces. L'équation 4.2 est, elle-aussi, vérifiée puisque tout i -simplexe du complexe simplicial possède exactement $\binom{i+1}{j+1}$ j -faces, pour tout $j \in [0, i]$.
- ii). Maintenant, si $|X|$ vérifie 4.1 et 4.2. Soit $C = (E, <, \dim)$, le complexe cellulaire abstrait construit à partir de $|X|$ par $\psi_{X \rightarrow C}$. On veut montrer que C est un complexe simplicial abstrait (cf Def 2.12 page 71). Pour cela, on montre que toute i -cellule possède $(i+1)$ sommets et que tous les j -simplexes ($j \in \{0, \dots, i\}$) que l'on peut construire sur cet ensemble de sommets (en tout $\binom{i+1}{j+1}$) appartiennent aussi à C .

Soit x un élément de X_i , $i \geq 0$. $\text{card}(\alpha(x) \cap X_0) = \binom{i+1}{1} = i+1$, et $\psi_{X \rightarrow C}$ est un isomorphisme d'ordres de (X, α^\square) dans $(E, <)$. Donc $\psi_{X \rightarrow C}(x)$ est une i -cellule possédant exactement $(i+1)$ sommets : les $(i+1)$ éléments de $\psi_{X \rightarrow C}(\alpha(x) \cap X_0)$.

Par définition de $\psi_{X \rightarrow C}$, l'ensemble des j -faces ($j < i$) de $\psi_{X \rightarrow C}(x)$ dans C est l'image par $\psi_{X \rightarrow C}$ de l'ensemble $\alpha(x) \cap X_j$. Ainsi par l'équation 4.2, on sait que $\psi_{X \rightarrow C}(x)$ possède $\binom{i+1}{j+1}$ faces. Par transitivité de α , on sait que chacune de ces j -faces est construite sur le sous-ensemble de $(j+1)$ éléments contenu dans $\psi_{X \rightarrow C}(\alpha(x) \cap X_0)$. Or par l'équation 4.1, on sait que deux telles j -faces ne peuvent pas posséder exactement les mêmes sommets. Donc l'ensemble des j -faces de $\psi_{X \rightarrow C}(x)$ est bien l'ensemble des $\binom{i+1}{j+1}$ j -simplexes construits sur $\psi_{X \rightarrow C}(\alpha(x) \cap X_0)$. □

Nous venons de caractériser les ordres dont le complexe associé est un complexe simplicial abstrait. De manière symétrique, on peut aussi caractériser les ordres dont le complexe dual associé est un complexe simplicial abstrait. On les appellera ordres β -simpliciaux (Fig. 4.9(b)).

Théorème 4.6 (Caractérisation des ordres β -simpliciaux) *Un ordre CF est β -simplicial si et seulement s'il est de rang borné et si son α -décomposition est telle que :*

$$\forall i \geq 0, \forall x, x' \in X_i, \quad \alpha(x) \cap X_n \neq \alpha(x') \cap X_n \quad (4.3)$$

$$\forall i \in [0, n], \forall x \in X_i, \forall j \in \{i, \dots, n\}, \quad \text{card}(\beta(x) \cap X_j) = \binom{n-i+1}{n-j+1} \quad (4.4)$$

avec $n = \max_{x \in X} \{\dim_\alpha(x)\}$

Preuve : La preuve est similaire à la précédente. □

² $\binom{p}{k}$ est le nombre de sous-ensembles non ordonnés à k éléments contenus dans un ensemble à p éléments.

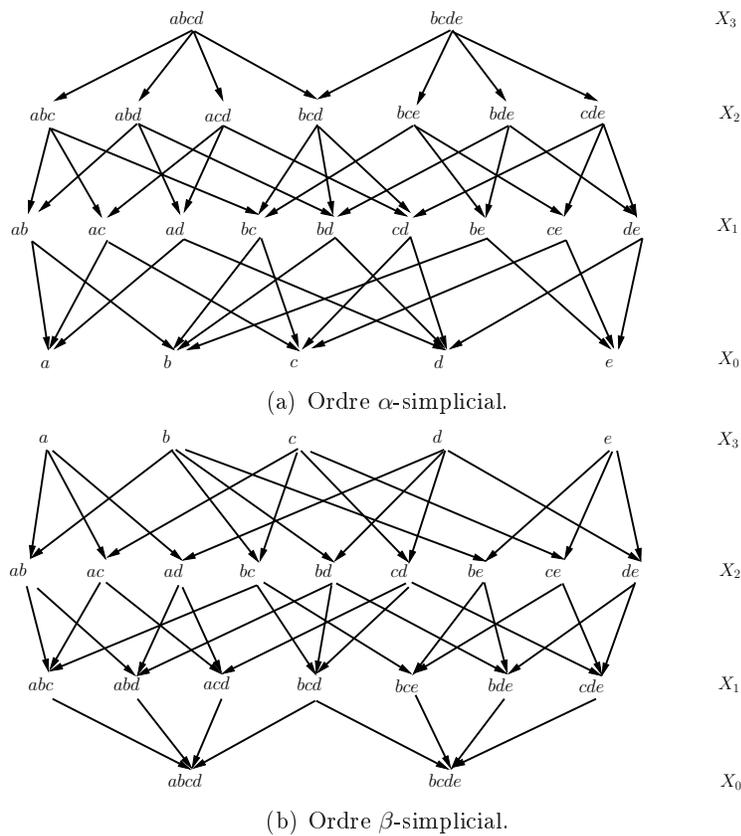


FIG. 4.9 – Exemple d'un ordre α -simplicial et de son dual qui est β -simplicial, les étiquettes des éléments de chacun des ordres mettent en évidence leurs propriétés simpliciales.

Complexes et ordres à support

Comme dit précédemment, nous avons introduit ces sous-familles de complexes et d'ordres pour permettre de définir sans ambiguïté une adjacence maximale unique entre les éléments de l'image représentée. Nous verrons plus loin que cette notion est au centre des définitions de connexité proposées par Dominguez *et al.* que nous souhaitons transférer sur les ordres. L'idée sous-tendant le choix de ces sous-familles d'ordres et de complexes est la suivante : sur une image associée à un tel ordre ou à un tel complexe, un sous-ensemble d'éléments côte à côte de l'image sera soit déconnecté, soit relié à l'aide d'un élément principal et d'un sous-ensemble de ses faces. Autrement dit pour définir la cohésion maximale des spels de l'image, on aura besoin de ne retenir que les éléments principaux de tout sous-ensemble d'éléments de l'image.

L'ordre et le complexe représentés sur la figure 4.10(a) ne sont pas "à support" puisque l'adjacence maximale entre les deux éléments de l'image, indicés par 0 et 1, peut indifféremment s'exprimer en utilisant l'élément indicé par 2 ou l'élément indicé par 3. Il existe donc deux manières équivalentes de définir cette adjacence maximale et aucun moyen simple de choisir l'une plutôt que l'autre. Le même problème se pose sur la figure 4.10(b). Sur les figures 4.11(a) et 4.11(b), en revanche, il existe un élément intermédiaire principal, indicé par 4, entre les éléments 0 et 1. On peut ainsi utiliser cet élément pour définir une adjacence maximale unique entre les éléments 0 et 1. De même on choisira l'élément e_2^ pour exprimer la connexité de e_0^* et e_1^* dans les figures 4.11(c), 4.11(d).*

Nous allons maintenant définir formellement ces deux familles de complexes et d'ordres. Puis nous montrerons que le complexe dual d'un ordre à support est lui aussi "à support".

Définition 4.7 (Complexe à support) *Un complexe C est dit à support lorsque :*

- i). il est localement fini et de dimension finie n ,*
- ii). pour toute cellule e de C , l'ensemble des cellules maximales³ contenant e dans leur clôture combinatoire est fini*

$$st_{max}(e, C) = \{e' \in st(e, C), st(e', C) \setminus \{e'\} = \emptyset\} \text{ fini}$$

- iii). l'intersection des clôtures combinatoires des cellules de $st_{max}(e, C)$ est soit vide, soit la clôture combinatoire d'une cellule de C :*

$$\forall e \in C, \bigcap_{f \in st_{max}(e, C)} cl(f) = \emptyset \text{ ou } cl(e') \text{ avec } e' \in C$$

Définition 4.8 (Ordre à support) *Un ordre est dit à support lorsqu'il est CF de rang borné et que l'intersection des β -adhérences des éléments de tout sous-ensemble de X_0 est soit vide, soit égale à la β -adhérence d'un élément x de X .*

$$\forall Y \subset X_0, \bigcap_{y \in Y} \beta(y) = \emptyset \text{ ou } \exists! x \in X, \bigcap_{y \in Y} \beta(y) = \beta(x)$$

Nous souhaitons montrer que le complexe dual d'un ordre à support est lui aussi à support. Comme un complexe dual associé à un ordre est pur par construction, nous commençons par donner une caractérisation plus simple des complexes à support purs. Cette caractérisation se déduit immédiatement de la définition de complexe à support en traduisant tout simplement le fait que l'ensemble des cellules maximales appartenant à l'étoile d'un élément est précisément dans le cas d'un n -complexe pur l'ensemble des n -cellules de cette étoile.

Lemme 4.9 *Un n -complexe pur, C , est un complexe à support si et seulement si pour toute cellule $e \in C$, l'ensemble $st_n(e, C)$ est fini et si l'intersection des clôtures combinatoires de ses éléments est la clôture combinatoire d'une cellule de C .*

Nous utilisons cette caractérisation pour montrer le théorème suivant :

³Une cellule est dite maximale dans un complexe si elle n'est face d'aucune autre cellule du complexe.

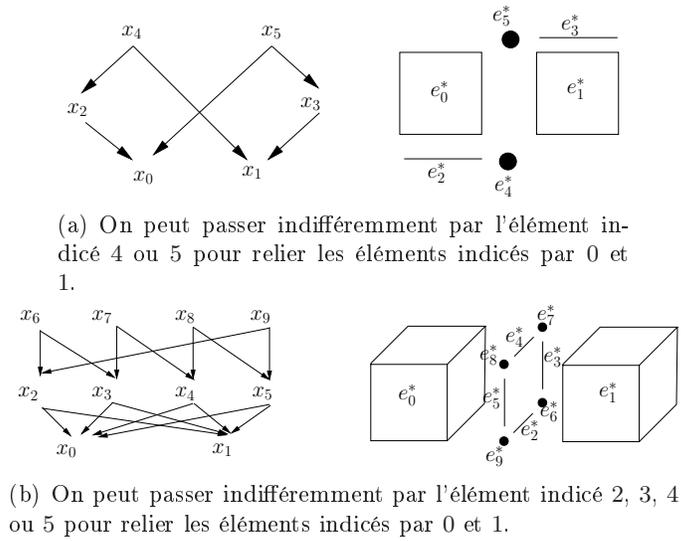


FIG. 4.10 – Exemples d'ordres et de complexes qui ne sont pas "à support".

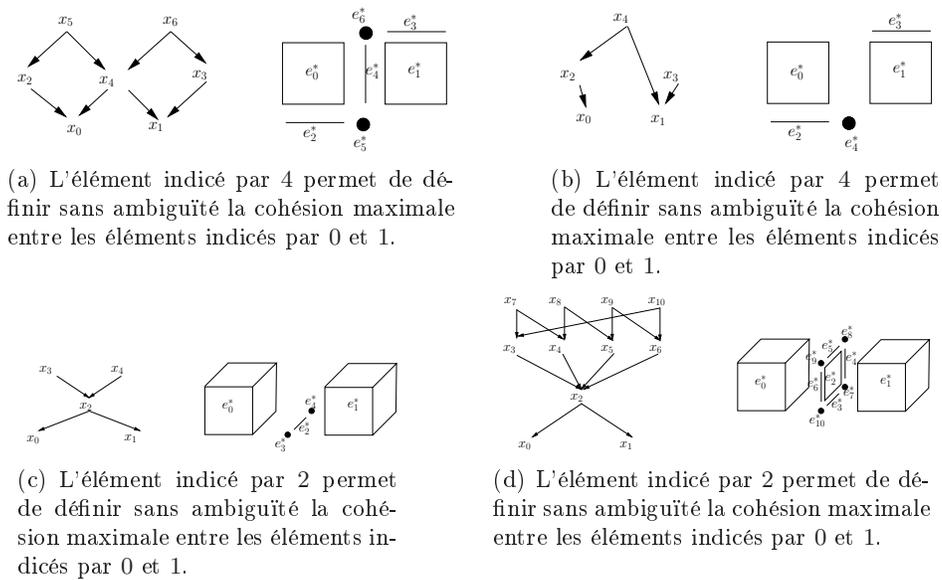


FIG. 4.11 – Exemples d'ordres et de complexes "à support".

Théorème 4.10 (Ordre à support et complexe dual associé) *Le complexe cellulaire dual associé à un ordre à support est un complexe à support*

Preuve : Soit $|X| = (X, \alpha)$ un ordre à support et $C^* = (E^*, <^*)$ son complexe dual associé par $\psi_{X \rightarrow C}^*$.

$|X|$ est CF, et $\psi_{X \rightarrow C}^*$ est un isomorphisme d'ordres entre (X, α^\square) et $(E^*, <^*)$, donc l'étoile de toute cellule de E est finie.

Pour toute cellule e de C^* , $\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e)$ appartient à X . Or $|X|$ est un ordre à support donc

– soit $\bigcap_{x_0 \in \alpha(\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e)) \cap X_0} \{\beta(x_0)\} = \emptyset$,

– soit il existe un unique x' dans X tel que $\beta(x') = \bigcap_{x_0 \in \alpha(\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e)) \cap X_0} \{\beta(x_0)\}$.

Du point de vue de C^* , en utilisant les correspondances résumées dans les tableau 4.1, on a donc :

– soit $\bigcap_{e_n \in st(e, C^*) \cap \psi_{X \rightarrow C}^*(X_0)} \{cl(e_n)\} = \emptyset$,

– soit il existe $e' = \psi_{X \rightarrow C}^*(x')$ dans C tel que $cl(e') = \bigcap_{e_n \in st(e, C^*) \cap \psi_{X \rightarrow C}^*(X_0)} \{cl(e_n)\}$.

Or, par construction, C^* est pur donc par le Lemme 4.9, cette propriété suffit à dire que C^* est un complexe à support. \square

4.1.2 Connexité de spels

Nous commençons par montrer que tous les éléments d'un ordre ne sont pas nécessaires pour définir la cohésion maximale de ses spels. Nous démontrons ensuite un ensemble de propriétés des complexes à support, puis nous les utilisons pour montrer la correspondance entre le noyau d'un ordre à support et le support du complexe dual associé. Nous expliquons enfin pourquoi la notion de fonctions d'éclairage définie sur les complexes polyédriques est naturellement extensible aux complexes à support et comment il est possible de construire une famille de fonctions analogue sur les ordres à support.

Cohésion maximale sur les ordres

Comme dit précédemment, l'approche fondée sur les ordres associe les α -terminaux aux spels de l'image, les autres éléments de l'ordre explicitant les liens entre spels. Extraire de ces éléments intermédiaires les éléments nécessaires pour définir une connexité entre spels repose sur des observations locales. Nous nous intéressons donc plus particulièrement à l' α -proximité (cf Def. 3.2 page 93) de chaque élément de l'ordre. L' α -proximité d'un élément x d'un ordre $|X|$ contient précisément le sous-ensemble d'éléments de X reliés à x par une unique α -chaîne de longueur 1. La représentation des ordres par un graphe acyclique orienté met en évidence les éléments de l' α -proximité d'un élément x puisqu'ils sont représentés par les fils directs du nœud associé à x .

Sur la figure 4.12(a) page 128, on peut voir, par exemple, que l' α -proximité de x_2 contient seulement x_0 . Celle de x_8 est, quant à elle, composée de x_0 et x_3 .

L' α -adhérence stricte d'un élément x peut s'exprimer récursivement en utilisant les α -adhérences des éléments de l' α -proximité de x .

Lemme 4.11 (Expression récursive de l' α -adhérence stricte)

$$\alpha^\square(x) = \bigcup_{x_i \in \alpha^\bullet(x)} (\{x_i\} \cup \alpha^\square(x_i)).$$

Preuve : La preuve se fait en deux temps :

– α est transitive donc pour tout i tel que $x_i \in \alpha^\bullet(x) \subseteq \alpha^\square(x)$, $\alpha(x_i) \subseteq \alpha^\square(x)$, i.e.

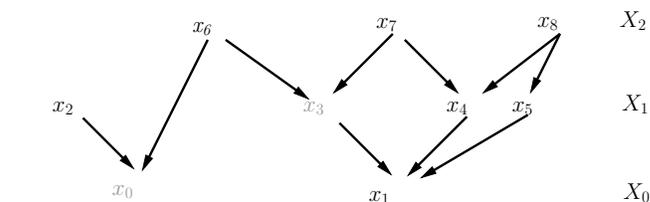
$$\bigcup_{x_i \in \alpha^\bullet(x)} \alpha(x_i) \subseteq \alpha^\square(x).$$

– Soit $x' \in \alpha(x)$. L'ordre est localement fini, donc il existe un ensemble fini d' α -chaînes finies entre x et x' . Si cet ensemble contient une seule α -chaîne de longueur 1, alors $x' \in \alpha^\bullet(x)$. Sinon, soit l une des plus longues chaînes entre x et x' , et x_1 le premier successeur de x dans l , on a $x' \in \alpha(x_1)$. Si $x_1 \notin \alpha^\bullet(x)$, alors il existe une α -chaîne l' entre x et x_1 dont la longueur est plus grande que 1. Soit l'' l' α -chaîne entre x_1 et x' déduite de l (i.e. l privé de x). L' α -chaîne $l' \cup l''$ relie x à x' et est plus longue que l , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. Donc x_1 appartient à $\alpha^\bullet(x)$.

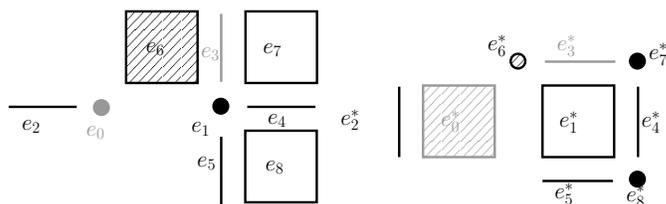
$$\forall x' \in \alpha^\square(x), \exists x_i \in \alpha^\bullet(x) / x' \in \alpha(x_i)$$

$$\text{i.e. } \alpha^\square(x) \subseteq \bigcup_{x_i \in \alpha^\bullet(x)} \alpha(x_i).$$

□



(a) α -proximité de $x_6 : \{x_0, x_3\}$.



(b) Image de l' α -proximité de x_6 par $\psi_{X \rightarrow C} : \{e_0, e_3\}$. (c) Image de l' α -proximité de x_6 par $\psi_{X \rightarrow C}^* : \{e_0^*, e_3^*\}$.

FIG. 4.12 – Images de la notion de proximité sur un ordre par $\psi_{X \rightarrow C}$ et $\psi_{X \rightarrow C}^*$.

L'image de $\alpha^\bullet(x)$ par $\psi_{X \rightarrow C}$ est le plus petit sous-ensemble de la clôture combinatoire stricte de $\psi_{X \rightarrow C}(x)$ dont la clôture combinatoire est égale à la clôture combinatoire stricte de $\psi_{X \rightarrow C}(x)$. Autrement dit, il s'agit du plus petit sous-ensemble de cellules qui permet de déterminer de manière unique la clôture combinatoire stricte de $\psi_{X \rightarrow C}(x)$ (cf Fig. 4.12(b)). Symétriquement, l'image de $\alpha^\bullet(x)$ par $\psi_{X \rightarrow C}^*$ est le plus petit sous-ensemble de l'étoile stricte de $\psi_{X \rightarrow C}^*(x)$ dont l'étoile est égale à l'étoile de $\psi_{X \rightarrow C}^*(x)$. Autrement dit, il s'agit du plus petit sous-ensemble de cellules qui permet de déterminer de manière unique l'étoile combinatoire stricte de $\psi_{X \rightarrow C}^*(x)$ (cf Fig. 4.12(c)).

Sur la figure 4.12(b), la clôture combinatoire de l'ensemble de cellules $\{e_0, e_3\}$ est l'ensemble $\{e_0, e_3, e_1\}$ qui est précisément la clôture combinatoire stricte de e_8 .
 Sur la figure 4.12(c), l'étoile combinatoire de l'ensemble de cellules $\{e_0^*, e_3^*\}$ est l'ensemble $\{e_0^*, e_3^*, e_1^*\}$ qui est précisément l'étoile combinatoire stricte de e_8^* .

Nous avons rappelé dans le chapitre 3 que les éléments d'un ordre pouvaient être séparés en deux catégories : les α -libres (dont les α -unipolaires) et les α -liens (Def. 3.7 page 96).

Pour faciliter l'écriture des lemmes et des démonstrations, nous appellerons, par la suite, point 0- α -libre un point α -unipolaire et point k - α -libre un point α -unipolaire dans le sous-ordre obtenu par destruction des points j - α -libres pour $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Par définition, pour tout point α -libre, il existe un k tel que le point soit k - α -libre. Symétriquement, nous appellerons k - α -lien un élément de l'ordre qui n'est j - α -libre pour aucun $j \leq k$.

Le théorème 3.8 page 96 dit que tout sous-ordre d'un ordre connexe, obtenu par suppression de points unipolaires et libres, reste connexe. Plus précisément, nous allons montrer que la suppression de tels éléments ne déconnecte pas tout couple de points α -terminaux appartenant à leur α -adhérence.

Les lemmes suivants visent à démontrer que l'incidence d'un élément libre d'un ordre est caractérisée essentiellement par un lien associé. Cette propriété peut s'exprimer de la manière suivante :

Propriété 4.12 *Tout élément α -libre d'un ordre contient dans son α -adhérence un seul α -lien dominant (au sens où s'il existe d'autres α -liens dans cette α -adhérence, ils sont dans l' α -adhérence du premier lien)*

Cette propriété est prouvée par les lemmes 4.13 à 4.15.

Nous montrons d'abord comment il est possible de décomposer l' α -adhérence d'un élément α -unipolaire (Lemme 4.13) puis d'un élément α -libre (Lemme 4.14).

Lemme 4.13 *Soit $|X|$ un ordre CF. L' α -adhérence stricte de tout élément α -unipolaire de $|X|$ peut être décomposée en l'union de l' α -adhérence d'un élément qui n'est pas α -unipolaire et d'un ensemble éventuellement vide d'éléments α -unipolaires.*

Preuve : Soit x un élément α -unipolaire de $|X| = (X, \alpha)$, alors $\exists! x_1$, $\alpha^\bullet(x) = \{x_1\}$ et $\alpha^\square(x) = \alpha(x_1)$ (par le lemme 4.11) .

Si x_1 n'est pas α -unipolaire, le lemme est bien vérifié.

Sinon comme x_1 est α -unipolaire, $\exists! x_2$, $\alpha^\bullet(x_1) = \{x_2\}$ et $\alpha^\square(x_1) = \alpha(x_2)$. Ainsi, $\alpha^\square(x) = \{x_1\} \cup \alpha(x_2)$. Si x_2 n'est pas unipolaire, le lemme est vérifié, sinon on itère le processus. Comme l'ordre est CF, tout élément contient au moins un α -terminal dans son α -adhérence et cette α -adhérence est finie. Il existe alors un ensemble fini $\{x_j\}_{j=1..p}$ de points α -unipolaires et un élément x' non α -unipolaire tel que

$$\alpha^\square(x) = \bigcup_{j \in \{1, \dots, p\}} \{x_j\} \cup \alpha(x')$$

□

Ce lemme se généralise pour fournir une décomposition de l' α -adhérence d'un élément α -libre.

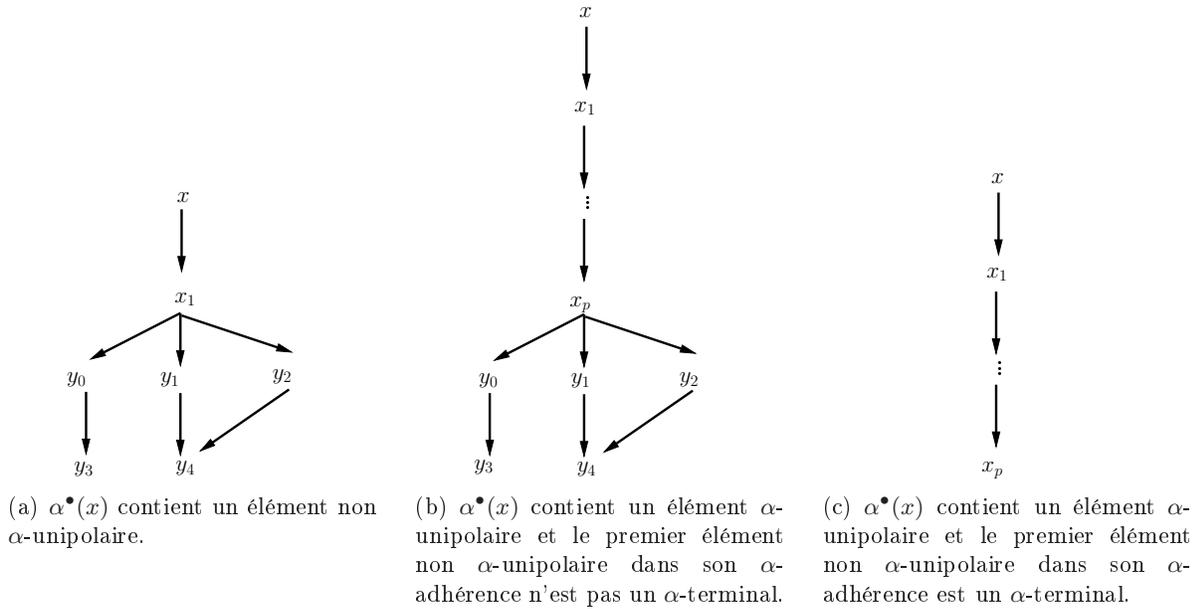


FIG. 4.13 – Configurations possibles pour la décomposition de l' α -adhérence d'un point α -unipolaire x .

Lemme 4.14 *Soit $|X|$ un ordre CF. L' α -adhérence stricte de tout élément k - α -libre de $|X|$ peut être décomposée en l'union de l' α -adhérence d'un k - α -lien et d'un ensemble éventuellement vide d'éléments j - α -libres pour $j \in \{0, \dots, k\}$.*

La figure 4.14 illustre ce lemme.

Preuve : La preuve se fait par récurrence :

- i). Si x est un élément 0- α -libre, autrement dit α -unipolaire de $|X|$, le lemme 4.13 permet directement de conclure.
- ii). Supposons le lemme vrai pour tout élément q - α -libre avec $l \in \{0, \dots, p-1\}$. Soit x^p un élément p - α -libre. On appelle $|Y_p|$ le sous-ordre de $|X|$ obtenu après avoir retiré tous les éléments q - α -libres pour $q \in \{0, \dots, p-1\}$ de $|X|$. Par définition, x^p est unipolaire pour la restriction de α à $Y_p : \alpha|_{Y_p}$. Par le lemme 4.13, la stricte $\alpha|_{Y_p}$ -adhérence de x^p peut donc se décomposer comme suit :

$$\alpha|_{Y_p}^\square(x^p) = \bigcup_j \{x_j^p\} \cup \alpha|_{Y_p} \{x'^p\} \quad (4.5)$$

où les x_j^p sont des éléments $\alpha|_{Y_p}$ -unipolaires (autrement dit des éléments p - α -libres dans $|X|$) et où x'^p n'est pas $\alpha|_{Y_p}$ -unipolaire (autrement dit x'^p est un p - α -lien).

Nous allons maintenant exprimer l' α -adhérence stricte de x^p dans X . A cette fin, nous regardons d'abord son α -proximité. Comme x^p n'est pas α -unipolaire, elle doit contenir au moins deux éléments. Et, comme x^p est p - α -libre, il ne peut y avoir, parmi ces " α -adhérents", au plus qu'un seul $(p-1)$ - α -lien. Donc l' α -proximité de x^p dans X contient un ensemble non vide de points q - α -libres pour $q \in \{0, \dots, p-1\}$ et au plus un $(p-1)$ - α -lien.

$$\alpha^\bullet(x^p) = \bigcup_{q \in \{0, \dots, p-1\}, k} \{x_k^q\}$$

ou

$$\alpha^\bullet(x^p) = \bigcup_{q \in \{0, \dots, p-1\}, k} \{x_k^q\} \cup \{y\}$$

avec $\forall q \in \{0, \dots, p-1\}, x_k^q$ q - α -libre et y $(p-1)$ - α -lien.

La propriété 4.11 nous indique que l' α -adhérence stricte d'un élément de l'ordre est égale à l'union des α -adhérences des éléments de son α -proximité. Or l'hypothèse de récurrence nous permet de décomposer l' α -adhérence stricte de tout élément q - α -libre, $q \in \{0, \dots, p-1\}$ en l'union d'un ensemble d'éléments r - α -libres ($r < q$) et de l' α -adhérence d'un q - α -lien. De plus, si ce q - α -lien est s - α -libre pour un s dans $\{j+1, \dots, p-1\}$, son α -adhérence peut aussi se décomposer de la même manière. En itérant ce processus tant que l'hypothèse de récurrence le permet, on peut dire que l' α -adhérence d'un élément q - α -libre ($q \in \{0, \dots, p-1\}$) est égale à l'union d'un ensemble d'éléments r - α -libres ($r \in \{0, \dots, p-1\}$) et de l' α -adhérence d'un $(p-1)$ - α -lien.

$$\alpha^\square(x_k^q) = \bigcup_{r \in \{0, \dots, p-1\}, j} \{x_j^r\} \cup \alpha(y_{q,k})$$

avec $\forall r \in \{0, \dots, p-1\}, x_j^r$ r - α -libre et $y_{p,r}$ non r - α -libre pour tout $r \in \{0, \dots, p-1\}$. Ainsi par la propriété 4.11, on peut décomposer l' α -adhérence stricte de x^p en l'union d'un ensemble de points r - α -libres pour $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et des α -adhérences de $(p-1)$ - α -liens.

$$\alpha^\square(x^p) = \bigcup_{r \in \{0, \dots, p-1\}, j} \{x_j^r\} \cup \bigcup_l \alpha(y_l) \quad (4.6)$$

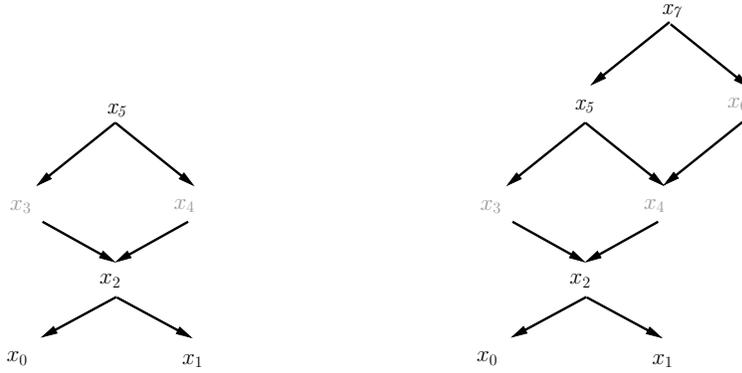
avec $\forall r \in \{0, \dots, p-1\}, x_j^r$ r - α -libre et $\forall l, y_l$ $(p-1)$ - α -lien.

$\forall l, y_l \in Y_p \cap \alpha^\square(x^p) = \alpha_{|Y_p}^\square(x^p)$. En outre, les x_j^r sont r - α -libres et par définition de Y_p ne lui appartiennent pas. On a donc, $\alpha_{|Y_p}^\square(x^p) = \bigcup_{l \in N_p} \alpha(y_l)$, et l'équation 4.6 devient :

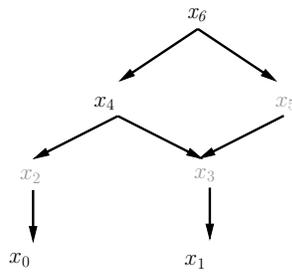
$$\alpha^\square(x^p) = \bigcup_{r \in \{0, \dots, p-1\}, j} \{x_j^r\} \cup \alpha_{|Y_p}^\square(x^p) \quad (4.7)$$

$$\stackrel{\text{Eq. 4.5}}{=} \bigcup_{r \in \{0, \dots, p-1\}, j} \{x_j^r\} \bigcup_i \{x_i^p\} \cup \alpha_{|Y_p} \{x'^p\} \quad (4.8)$$

L'équation 4.8 est bien de la forme souhaitée : l' α -adhérence stricte de x^p est constituée d'un ensemble d'éléments i - α -libres pour $i \in \{0, \dots, p\}$ et de l' α -adhérence d'un p - α -lien.



(a) x_3 et x_4 sont α -unipolaires, x_5 est 1- α -libre (b) x_3 , x_4 et x_6 sont α -unipolaires, x_5 et x_7 et son α -adhérence stricte est égale à $\{x_3\} \cup \{x_4\} \cup \alpha(x_2)$ avec x_2 un α -lien.



(c) x_2 , x_3 et x_5 sont α -unipolaires, x_6 est 1- α -libre et l' α -adhérence de x_6 est égale à $\{x_5\} \cup \alpha(x_4)$ avec x_4 un α -lien.

FIG. 4.14 – Exemples d' α -adhérences de points α -libres. Elles sont décomposables en un ensemble de points α -libres et l' α -adhérence d'un α -lien. Sur ces trois exemples, si on enlève les points α -libres il reste toujours un élément pour connecter les α -terminaux présents dans chacune des α -adhérences.

□

On peut alors déduire la forme générale de l' α -adhérence stricte d'un élément α -libre dans un ordre CF .

Lemme 4.15 *Soit $|X|$ un ordre CF . L' α -adhérence stricte de tout élément α -unipolaire ou α -libre de $|X|$ peut être décomposée en l'union de l' α -adhérence d'un α -lien et d'un ensemble éventuellement vide d'éléments α -unipolaires et α -libres.*

Preuve : L'ordre étant CF , il existe un entier k tel que tout point α -unipolaire ou α -libre de l'ordre est j - α -libre pour un $j \leq k$. Soit x un point j - α -libre, son α -adhérence stricte peut se décomposer en l'union de l' α -adhérence d'un j - α -lien et d'un ensemble de points i - α -libres pour $i \in \{0, \dots, j\}$. Si le j - α -lien est lui même l - α -libre pour un $l > j$, son α -adhérence peut à son tour se décomposer de la même manière. Comme l'ensemble des entiers $\{p_i\}$ tel qu'il existe un élément de l'ordre p_i - α -libre est borné par k , on peut exécuter cette décomposition récursive un nombre fini de fois. Le processus s'arrête alors lorsque l' α -adhérence

stricte de x est égale à l'union de l' α -adhérence d'un k - α -lien, autrement dit d'un α -lien, et d'un ensemble fini d'éléments p_i - α -libre pour des p_i dans $\{0, \dots, k\}$, autrement dit un ensemble d'éléments α -unipolaires et α -libres. \square

Le lemme qui suit indique que l'enlèvement d'un point α -libre ne déconnecte pas deux points α -terminaux.

Lemme 4.16 *Soit $|X|$ un ordre CF. Si $x \in X$ est α -unipolaire ou α -libre alors il existe un α -lien, $x' \in \alpha^\square(x)$, tel que $\alpha(x) \cap X_0 = \alpha(x') \cap X_0$*

Preuve : *Soit un élément x , α -unipolaire ou α -libre, dans un ordre CF, $|X|$. Du lemme 4.15, on déduit que l' α -adhérence de x est égale à l'union d'un ensemble d'éléments α -unipolaires et α -libres et de l' α -adhérence d'un α -lien x' . Comme les α -terminaux ne peuvent pas être α -unipolaires ou α -libres, les α -terminaux de $\alpha(x)$ sont les mêmes que ceux contenus dans $\alpha(x')$. \square*

Ce lemme est illustré par la figure 4.14 : les deux α -terminaux x_0 et x_1 , appartenant à l' α -adhérence de x_5 (Fig. 4.14(a)), x_7 (Fig. 4.14(b)), x_6 (Fig. 4.14(c)), sont les α -terminaux d'un α -lien de leurs adhérences respectives : x_2 (Fig. 4.14(a)), x_2 (Fig. 4.14(b)), x_4 (Fig. 4.14(c))

Ce dernier lemme prouve que les points α -libres d'un ordre ne sont pas indispensables pour définir la connexité entre les points α -terminaux. La connexité de ces éléments peut en effet s'exprimer à l'aide des seuls α -liens. Autrement dit, l'expression de la cohésion maximale des spels ne requiert que la présence des α -liens.

Propriétés des complexes à support

On souhaiterait pouvoir définir différents types de connexités sur un ordre. Dans le cadre des complexes polyédriques ont été proposées les fonctions d'éclairage qui permettent par exemple de définir les classiques paires d'adjacences sur des complexes cubiques en 2 et 3 dimensions [13]. La définition de telles fonctions est tributaire de l'existence pour tout ensemble de cellules maximales, appelé objet, d'un sous-ensemble de cellules appelé *support* de l'objet. Un exemple apparaît sur la figure 4.15(a).

Définition 4.17 (Support d'un objet) *Soit C un complexe localement fini, et O un sous-ensemble des n -cellules de C , $cell_n(C)$. On appelle support de O l'ensemble :*

$$supp(O) = \{e \in C, cl(e) = \bigcap \{cl(e_n), e_n \in st_n(e, cl(O))\}$$

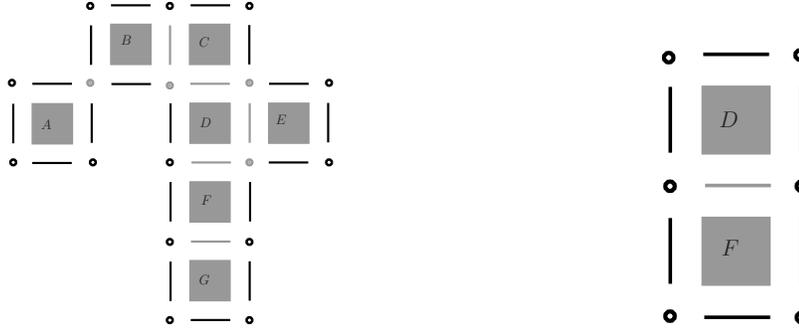
Nous pouvons ici remarquer que la caractérisation des complexes à support garantit que, sur un tel complexe, le support de tout ensemble de n -cellules partageant au moins une face de dimension inférieure est non vide. En outre, tout complexe polyédrique localement fini s'avère être un complexe à support. Nous étudions dans cette section certaines propriétés du support des cellules maximales d'un complexe à support.

Le premier lemme exprime juste le fait que l'appartenance d'une cellule au support de l'ensemble des n -cellules d'un complexe à support est une propriété locale. Il est illustré sur la figure 4.15.

Lemme 4.18 Soit C un complexe pur à support et e une cellule de C . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i). $e \in \text{supp}(\text{cell}_n(C))$
- ii). $e \in \text{supp}(st_n(e, C))$

Preuve : Ce lemme découle directement de la définition de la notion de support car $st_n(e, cl(st_n(e, C))) = st_n(e, cl(\text{cell}_n(C)))$. □



(a) Support des 2-cellules A, B, C, D, E, F, G matérialisé en gris.

(b) L'arête entre D et F qui appartient au support de l'ensemble de cellules A, B, C, D, E, F, G est aussi un élément du support de l'objet $\{D, F\}$ qui est précisément l'ensemble des n -cellules de l'étoile de cette arête dans le complexe.

FIG. 4.15 – Support d'un ensemble de 2-cellules et illustration du caractère local de l'appartenance d'une cellule au support d'un objet.

Le lemme ci-dessous montre qu'on peut faire correspondre à toute cellule non essentielle d'un complexe à support un unique élément du support des cellules maximales du complexe.

Sur la figure 4.15(a) page 134, on peut vérifier que toute cellule n'appartenant pas au support est face d'exactly un élément du support possédant les mêmes n -cellules dans son étoile combinatoire. Ainsi une arête n'appartenant pas au support est face d'exactly une 2-cellule, et un sommet extérieur au support est soit face d'une arête du support, soit d'une 2-cellule.

Lemme 4.19 Soit C un complexe à support de dimension n . Toute cellule de C qui n'appartient pas à $\text{supp}(\text{cell}_n(C))$ est face d'exactly une cellule de $\text{supp}(\text{cell}_n(C))$ telle que leurs étoiles combinatoires contiennent précisément les mêmes n -cellules de $\text{cell}_n(C)$.

$$\forall e \notin \text{supp}(\text{cell}_n(C)), \exists ! e' \in \text{supp}(\text{cell}_n(C)) \text{ telle que } e < e', st_n(e, C) = st_n(e', C)$$

Preuve : Soit e une cellule d'un complexe à support C n'appartenant pas à $\text{supp}(\text{cell}_n(C))$. Comme le complexe est à support, il existe une unique k -cellule, e' telle que $cl(e') = \bigcap \{cl(e_n), e_n \in st_n(e, C)\}$.

Si e' était une face de e alors on aurait $cl(e') \subseteq cl(e)$ et comme $cl(e) \subseteq \bigcap \{cl(e_n), e_n \in st_n(e, C)\}$. On aurait forcément $cl(e') = cl(e)$ et donc $e' = e$. Une telle configuration n'est pas possible, sinon e appartiendrait au support de $cell_n(C)$.

Donc e est une face propre de e' .

Et e' est bien un élément du support de $cell_n(C)$. En effet, $e < e'$ entraîne $st_n(e', C) \subseteq st_n(e, C)$. Et $cl(e') = \bigcap \{cl(e_n), e_n \in st_n(e, C)\}$ implique $e' \in cl(e_n)$ pour tout e_n dans $st_n(e, C)$, autrement dit $st_n(e, C) \subseteq st_n(e', C)$. D'où finalement $st_n(e, C) = st_n(e', C)$.

□

Le lemme suivant s'intéresse à la constitution de l'étoile des éléments n'appartenant pas au support de l'ensemble des n -cellules d'un complexe C .

Lemme 4.20 *Soit C un complexe à support de dimension n . L'étoile stricte de toute cellule de C qui n'appartient pas à $supp(cell_n(C))$ est composée d'un ensemble éventuellement vide de cellules n'appartenant pas à $supp(cell_n(C))$ et de l'étoile d'un élément de $supp(cell_n(C))$.*

Preuve : Soit e une cellule d'un complexe à support C n'appartenant pas à $supp(cell_n(C))$.

D'après le lemme 4.19, il existe une unique cellule, e_s , de $supp(cell_n(C))$ telle que $e < e_s$ et $st_n(e, C) = st_n(e_s, C)$. Bien évidemment $st(e_s) \subset st(e)$. Nous allons montrer que tout élément de l'étoile de e' qui appartient au support de $cell_n(C)$ appartient forcément à l'étoile de e_s .

Soit $e' \in st(e)$. $st_n(e') \subseteq st_n(e, C) = st_n(e_s, C)$. Si $e' \in supp(cell_n(C))$, alors $cl(e') = \bigcap \{cl(e_n), e_n \in st_n(e', C)\} \subseteq \bigcap \{cl(e_n), e_n \in st_n(e_s, C)\} = cl(e_s)$. D'où $e_s < e'$ et $e' \in st(e_s)$.

Ainsi, l'étoile de e est bien composée d'un ensemble éventuellement vide d'élément n'appartenant pas au support de $cell_n(C)$ et de l'étoile d'un élément du support de $cell_n(C)$. □

Par la suite, on appelle *face proche* d'une cellule e , une cellule e' telle que $e' < e$ et qu'il n'y ait pas de cellules intermédiaires entre e et e' . Formellement, il s'agit d'une face propre telle que $cl(e) \setminus \{e\} \cap st(e') \setminus \{e'\} = \emptyset$. Cette notion est le pendant de la notion d' α -proximité sur les ordres : l'image par $\psi_{x \rightarrow C}^*$ de l' α -proximité d'un élément x d'un ordre est exactement l'ensemble des éléments de l'étoile de $\psi_{x \rightarrow C}^*(x)$ dont il est une face proche.

On définit maintenant la notion de cellule non essentielle d'un complexe. Et on montre que l'image d'une telle cellule par $\psi_{x \rightarrow C}^{-1}$ est un élément α -unipolaire ou α -libre.

Définition 4.21 (cellule non essentielle) *Soit C un complexe à support de dimension n . Une cellule C est appelée cellule non essentielle de rang 0 lorsqu'elle est face proche d'une seule cellule de $supp(cell_n(C))$ et cellule non essentielle de rang k lorsqu'elle est face proche d'une seule cellule de $supp(cell_n(C))$ dans un complexe déduit de C par enlèvement de cellules non essentielles de rang j , $j \in \{0, \dots, k-1\}$.*

Une cellule de C pour laquelle il existe un entier k tel qu'elle soit non essentielle de rang k est dite cellule non essentielle.

Sur la figure 4.16(a), le support des 2-cellules e_0^* et e_1^* est l'ensemble $\{e_0^*, e_1^*, e_2^*\}$. Les cellules e_3^* , e_4^* , e_5^* et e_6^* n'appartiennent pas au support mais sont toutes faces proches de e_2^* . Elles sont donc non essentielles de rang 0. Les faces e_7^* , e_8^* , e_9^* et e_{10}^* ne sont pas non plus des éléments du support. Et dans le complexe déduit de 4.16(a) en ôtant e_3^* , e_4^* , e_5^* et e_6^* , représenté sur la figure 4.16(b), les cellules e_7^* , e_8^* , e_9^* et e_{10}^* sont faces proches d'un élément du support. Elles sont donc non essentielles de rang 1 dans le complexe 4.16(a).

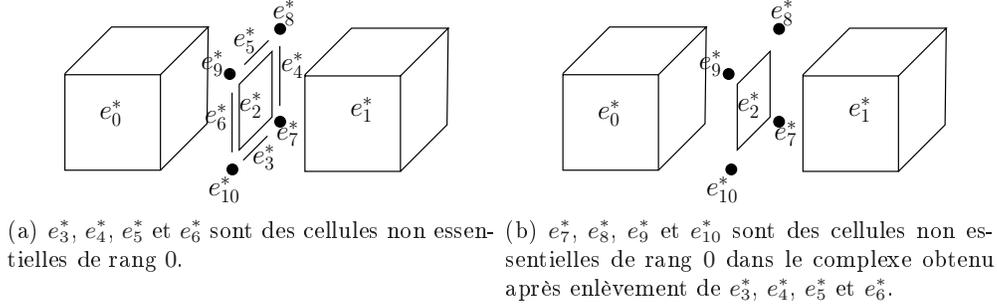


FIG. 4.16 – Exemple de cellules non essentielles de rang 0 (e_3^* , e_4^* , e_5^* et e_6^*) et de rang 1 (e_7^* , e_8^* , e_9^* et e_{10}^*).

Correspondance des notions de noyau d'un ordre à support et de support d'un complexe à support

Le lemme ci-dessous montre que les images des éléments α -libres d'un ordre dans le complexe dual sont des cellules n'appartenant pas au support des n -cellules du complexe (Fig. 4.17).

Lemme 4.22 Soit $|X|$ un ordre à support et C^* son complexe dual. Si x est α -unipolaire ou α -libre, alors $\psi_{X \rightarrow C}^*(x) \notin \text{supp}(\text{cell}_n(C^*))$.

Preuve : Soit $|X|$ un ordre à support et x un élément α -unipolaire ou α -libre de $|X|$. D'après le lemme 4.16, il existe un α -lien $x' \in \alpha^\square(x)$ tel que $\alpha(x') \cap X_0 = \alpha(x) \cap X_0 = S_0$.

$\forall y_i \in S_0$, $x \in \beta(y_i)$ et $x' \in \beta(y_i)$, autrement dit $\{x, x'\} \subseteq \bigcap \{\beta(y_i), y_i \in S_0\}$. Ainsi, $\{\psi_{X \rightarrow C}^*(x), \psi_{X \rightarrow C}^*(x')\} \subseteq \bigcap \{cl(e_i), e_i \in \psi_{X \rightarrow C}^*(S_0)\}$ et $\psi_{X \rightarrow C}^*(x)$ est une face propre de $\psi_{X \rightarrow C}^*(x')$. Donc $cl(\psi_{X \rightarrow C}^*(x)) \neq \bigcap \{cl(e_i), e_i \in \psi_{X \rightarrow C}^*(S_0)\}$, i.e. $\psi_{X \rightarrow C}^*(x)$ n'appartient pas à $\text{supp}(\psi_{X \rightarrow C}^*(S_0))$. Et par le lemme 4.18, $\psi_{X \rightarrow C}^*(x)$ n'appartient ainsi pas à $\text{supp}(\text{cell}_n(C^*))$.

□

Réciproquement, le lemme suivant montre qu'une cellule non essentielle d'un complexe associé à un ordre est l'image d'un élément α -libre de l'ordre.

Lemme 4.23 Soit $|X| = (X, \alpha)$ un ordre à support et C^* son complexe dual associé. Si e est une cellule non essentielle de C^* , alors $\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e)$ est un élément α -unipolaire ou α -libre de l'ordre.

Preuve : Si e est un élément non essentiel de rang 0 alors il n'est face proche d'aucune cellule hors du support et il est face proche d'une unique cellule du support. Autrement dit, $\alpha^\bullet(\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e))$ ne contient qu'un élément et $\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e)$ est α -unipolaire.

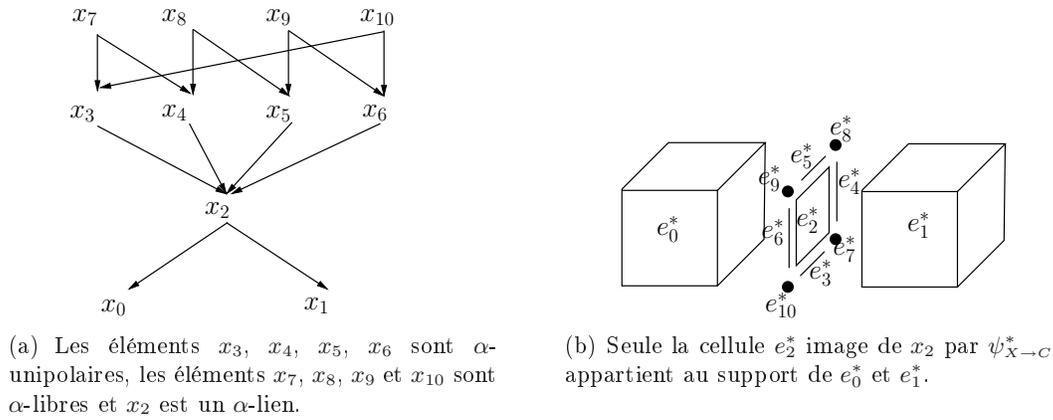


FIG. 4.17 – Seules les cellules qui sont images par $\psi_{X \rightarrow C}^*$ d'éléments non α -unipolaires ou non α -libres de l'ordre peuvent appartenir au support de l'ensemble des n -cellules du complexe.

On suppose que pour tout k strictement inférieur à un p donné, tout point non essentiel de rang k , e_k , est tel que $\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e_k)$ α -libre dans $|X|$. Soit e_p un élément non essentiel de rang p . e_p est non essentiel de rang 0 dans le complexe déduit de C^* par enlèvement de points non essentiels de rang k , $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Autrement dit, en transposant sur $|X|$, $\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e_p)$ est $\alpha_{|X'|}$ -unipolaire avec $|X'|$ déduit de $|X|$ par enlèvement de points α -libres. Donc $\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}(e_p)$ est bien lui aussi α -libre. \square

On peut noter que l'image par $\psi_{X \rightarrow C}^{*-1}$ d'une cellule non essentielle de rang k est j - α -libre pour un $j \leq k$.

Le lemme ci-dessous permet d'obtenir une caractérisation récursive des cellules n'appartenant pas au support de l'ensemble des n -cellules d'un complexe, en montrant que les cellules n'appartenant pas à ce support sont des cellules non essentielles du complexe.

Lemme 4.24 *Soit C un complexe à support de dimension n . Les cellules n'appartenant pas au support de $cell_n(C)$ sont des cellules non essentielles du complexe.*

Preuve : Soit e une cellule n'appartenant pas à $supp(cell_n(C))$. D'après le lemme 4.20, il existe une unique cellule $e_s \in supp(cell_n(C))$ telle que $st(e) \setminus \{e\}$ est égale à l'union de $st(e_s)$ et d'un ensemble éventuellement fini d'éléments n'appartenant pas à $supp(cell_n(C))$.

Soit k le nombre maximal de cellules intermédiaires consécutives entre e et un élément du support. Ce nombre existe puisque C est localement fini. On va montrer par récurrence que e est non essentiel de rang k .

Si e est un cellule maximale de C n'appartenant pas à $supp(cell_n(C))$, autrement dit s'il n'existe aucune cellule e' de $C \setminus supp(cell_n(C))$ telle que $e < e'$. Alors $k = 0$, et e est face proche d'une seule cellule de $supp(cell_n(C))$: e_s . e est ainsi une cellule non essentielle de rang 0.

On suppose la propriété vraie pour tout k strictement inférieur à un entier p . Si maintenant p est le nombre maximal de cellules intermédiaires consécutives entre e et un élément du support. Quel que soit $e' \in st(e)$ tel que $e' \notin supp(cell_n(C))$, le nombre de cellules entre e' et un élément du support est forcément strictement inférieur à p . Sinon, il y aurait une

suite de cellules intermédiaires consécutives entre e et un élément du support contenant plus de p éléments, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, par l'hypothèse de récurrence, pour tout $e' \in st(e)$ tel que $e' \notin \text{supp}(\text{cell}_n(C))$, il existe un k entre 0 et $p - 1$ tel que e' est une cellule non essentielle de rang k . Dans le complexe C' obtenu par enlèvement de toutes les cellules de $st(e) \setminus \{e\}$ qui n'appartiennent pas à $\text{supp}(\text{cell}_n(C))$, e devient donc une cellule maximale n'appartenant pas au support. e est donc face proche d'une seule cellule du support. e est donc une cellule non essentielle de rang k . \square

Nous pouvons maintenant prouver notre résultat principal : l'application $\psi_{X \rightarrow C}^*$ transforme l' α -noyau de tout ordre à support en le support des n -cellules de son complexe dual.

Théorème 4.25 (α -noyau et support) *Soit $|X| = (X, \alpha)$ un ordre à support et soit C^* le complexe dual associé.*

$$x \text{ } \alpha\text{-libre dans l'ordre } |X| \Leftrightarrow \psi_{X \rightarrow C}^*(x) \notin \text{supp}(\text{cell}_n(C^*))$$

Preuve : *La preuve se fait en deux étapes :*

- \Rightarrow X est un ordre à support donc d'après le lemme 4.22, pour tout élément x de X α -unipolaire ou α -libre, $\psi_{X \rightarrow C}^*(x) \notin \text{supp}(\text{cell}_n(C^*))$.
- \Leftarrow Soit e une cellule de C^* telle que $e \notin \text{supp}(\text{cell}_n(C^*))$. D'après le lemme 4.24, e est une cellule non essentielle du complexe. Et d'après le lemme 4.23, $\psi_{X \rightarrow C}^{-1}(e)$ est α -libre ou α -unipolaire dans $|X|$.

\square

De cette correspondance, on peut déduire immédiatement une caractérisation locale des éléments du noyau d'un ordre en traduisant simplement la notion de support des n -cellules d'un complexe (Déf. 4.17 page 133) en terme d'ordre via la table 4.1 page 121 qui établit les liens entre les notions définies sur les complexes et les ordres.

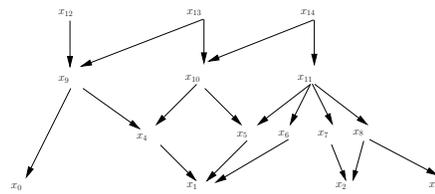
Théorème 4.26 (Caractérisation des éléments du noyau d'un ordre) *Soit $|X| = (X, \alpha)$ un ordre à support, un élément x de $|X|$ appartient au noyau de X si et seulement si :*

$$\bigcap_{y \in X_0 \cap \alpha(x)} \beta(y) = \beta(x)$$

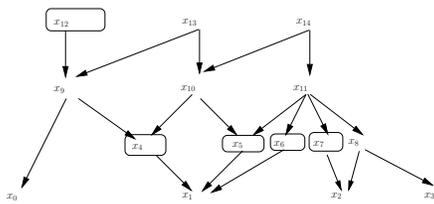
Les figures 4.18 et 4.19 illustrent cette équivalence. La figure 4.18 rappelle le processus classique de construction d'un ordre par enlèvement de points α -libres tandis que la figure 4.19 montre comment on peut localement vérifier qu'un élément de l'ordre est un élément de son noyau.

Fonctions d'éclairage sur les complexes et les ordres à support

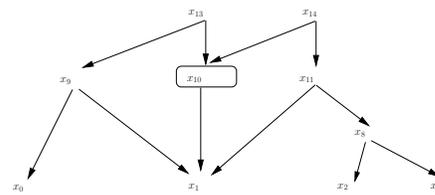
Il ne reste plus pour pouvoir utiliser la notion de fonction d'éclairage sur les complexes et ordres à support qu'à montrer que tout objet, dont les éléments ont une cohésion maximale, possède un support non vide. Ce lemme garantit que la définition de fonction d'éclairage faible fortement locale rappelée page 101 peut être utilisée sur les complexes à support, puisque tout sous-ensemble de n -cellules connecté par au moins une cellule de dimension inférieure possède un support non vide.



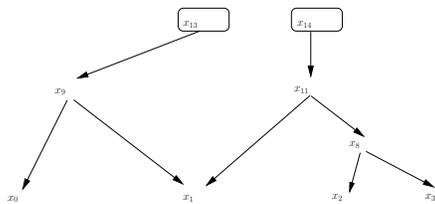
(a) Ordre à support $|X|$.



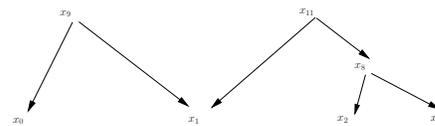
(b) α -unipolaires de $|X|$: x_4, x_5, x_6, x_{12} .



(c) $|X|$ privé de ses α -unipolaires. x_{10} est 1- α -libre dans $|X|$.



(d) $|X|$ privé de ses α -unipolaires et de son élément 1- α -libre. x_{13} et x_{14} sont 2- α -libres dans $|X|$.



(e) $|X|$ privé de ses α -unipolaires et de ses α -libres. Aucun élément ne peut plus être enlevé : le noyau de $|X|$ est donc composé de $x_0, x_1, x_2, x_3, x_8, x_9, x_{11}$.

FIG. 4.18 – Construction traditionnelle du noyau d'un ordre.

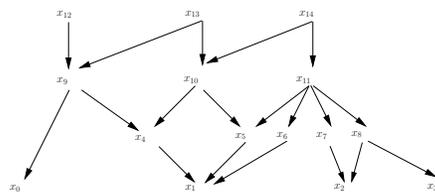
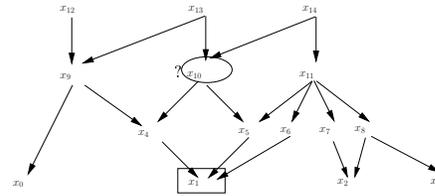
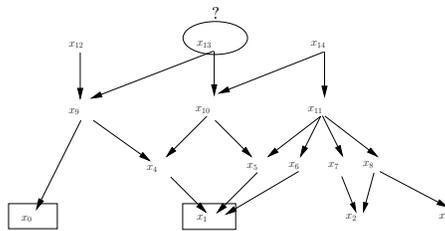
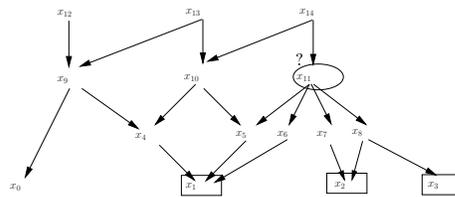
(a) Ordre à support $|X|$.(b) Est-ce que x_{10} appartient au noyau de $|X|$? L' α -adhérence de x_{10} ne contient qu'un seul α -terminal donc il n'appartient pas au noyau(c) Est-ce que x_{13} appartient au noyau de $|X|$? L' α -adhérence de x_{13} contient deux α -terminaux x_0 et x_1 mais $\beta^\square(x_0) \cap \beta^\square(x_1) = \beta^\square(x_9)$ donc x_{13} n'appartient pas au noyau mais x_9 si.(d) Est-ce que x_{11} appartient au noyau de $|X|$? L' α -adhérence de x_{11} contient trois α -terminaux x_1 , x_2 et x_3 et $\beta^\square(x_1) \cap \beta^\square(x_2) \cap \beta^\square(x_3) = \beta^\square(x_{11})$ donc x_{11} appartient au noyau.

FIG. 4.19 – Caractérisation locale des éléments du noyau grâce à la correspondance avec la notion de support

Lemme 4.27 *Soit C un complexe pur à support et e une cellule de C , alors le sous-complexe de C composé des cellules de $cl(st_n(e, C))$ est lui aussi pur et à support.*

Preuve : *La preuve est immédiate. On appelle C' le complexe construit sur les cellules de $cl(st_n(e, C))$. Soit une cellule quelconque e_1 dans C' . e_1 appartient aussi à C et comme C est à support, il existe une cellule $e'_1 \in C$ telle que $cl(e'_1) = \bigcap \{cl(e_n), e_n \in st_n(e_1, C)\}$ et $st_n(e'_1, C') = st_n(e_1, C)$. Comme par définition de C' , $st_n(e_1, C) = st_n(e_1, C')$, on a alors $st_n(e'_1, C') = st_n(e_1, C')$. Ainsi, $cl(e'_1) = \bigcap \{cl(e_n), e_n \in st_n(e_1, C')\}$ et C' est bien un complexe pur à support. \square*

On peut prouver un résultat similaire sur les ordres à support :

Lemme 4.28 *Soit $|X| = (X, \alpha)$ un ordre à support et x un élément de X , alors le sous-ordre de $|X|$ composé des éléments de $\beta(\alpha(x) \cap X_0)$ est lui aussi pur et à support.*

Preuve : *La preuve est similaire à la précédente. \square*

La notion de fonctions d'éclairage proposée par Dominguez *et al.* peut dans un premier temps s'étendre naturellement aux complexes à support.

Définition 4.29 (Fonction d'éclairage faible fortement locale sur un complexe à support)

Etant donné un complexe à support C , une fonction $f : \mathcal{P}(cell_n(C)) \times C \rightarrow \{0, 1\}$ est appelée fonction d'éclairage faible fortement locale sur C si elle vérifie les propriétés suivantes pour tout sous-ensemble de n -cellules, O , et toute cellule e de C .

- i). si $e \in O$ alors $f(O, e) = 1$,*
- ii). si $e \notin supp(O)$, $f(O, e) = 0$,*
- iii). $f(O, e) \leq f(cell_n(C), e)$*
- iv). $f(O, e) = f(st_n(e, O), e)$*

Et on peut aussi définir un analogue des fonctions d'éclairage sur les ordres à support.

Définition 4.30 (fonctions d'éclairage faibles fortement locales sur un ordre à support)

Soit $|X|$ un ordre à support, une fonction $\phi : \mathcal{P}(X_0) \times X \rightarrow \{0, 1\}$ est appelée fonction d'éclairage faible fortement locale, si elle vérifie les propriétés suivantes pour tout sous-ensemble d' α -terminaux, S_0 et tout élément x de X :

- i). $\phi(S_0, x) = 1$ si $x \in X_0$,*
- ii). $\phi(S_0, x) = 0$ si $x \notin \alpha\text{-noyau}(\beta(S_0))$,*
- iii). $\phi(S_0, x) \leq \phi(X_0, x)$,*
- iv). $\phi(S_0, x) = \phi(\alpha(x) \cap S_0, x)$.*

L'équivalence entre ces fonctions définies sur les ordres et les fonctions traditionnellement définies sur les complexes se prouve naturellement.

Théorème 4.31 (Fonctions d'éclairage sur les ordres et les complexes) *Etant donné un*

ordre à support $|X|$, l'application f définie sur son complexe dual C^ par : $\forall x \in X \forall S_0 \subseteq X_0$, $f(\psi(S_0), \psi(x)) = \phi(S_0, x)$ est une fonction d'éclairage faible fortement locale sur C^* .*

Preuve : Les propriétés i), iii) et iv) de la définition 3.13 (page 101) des fonctions d'éclairage faibles fortement locales sur un complexe sont aisément vérifiées. La propriété ii) est une conséquence du théorème 4.25 et du lemme 4.27. \square

On peut donc par exemple définir, sur les ordres, les fonctions suivantes qui sont le pendant de certaines fonctions d'éclairage définies sur les complexes de Dominguez et al. rappelées pages 3.2.1 et 3.2.3 :

- $\phi_{max}(S_0, x) = 1$ si et seulement si $x \in \text{noyau}(|\beta(S_0)|)$,
- $\phi_{min}(S_0, x) = 1$ si et seulement si $x \in S_0$ (dans ce cas, l'ensemble de α -terminaux est complètement déconnecté)
- $g(S_0, x) = 1$ si et seulement si $x \in \text{noyau}(|\beta(S_0)|)$ et $\alpha(x) \cap X_0 \subseteq S_0$
- sur $|H^3|$, $\phi_{6,6}(S_0, x) = 1$, si et seulement si $x \in S_0$ ou $x \in \text{noyau}(|\beta(S_0)|)$ et $3 - \dim_\alpha(x) = 2$

4.2 Cartes et ordres via graphes d'incidence

Dans cette section, nous cherchons à montrer qu'il existe un sous-ensemble des cartes généralisées qui représente exactement les mêmes objets qu'un sous-ensemble connu des ordres, les n -surfaces. L'intérêt d'une telle comparaison est multiple. Elle permet tout d'abord de relier un modèle utilisé en analyse à un modèle développé dans le cadre de la modélisation. Ce lien étant explicitement défini par des fonctions de conversion entre modèles, il sera tout à fait possible de les intégrer dans une même application. En outre, les deux modèles dont nous allons prouver l'équivalence ont des définitions très différentes, l'une constructive, l'autre récursive. Leur mise en parallèle permet donc de posséder une meilleure connaissance de leur structure interne et pourra donner lieu à des transferts de définitions et propriétés de l'un à l'autre.

Pour réaliser ce lien, nous utilisons un modèle intermédiaire. En effet, les deux modèles étant définis très différemment, nous nous sommes appuyés sur le seul point commun que nous leur connaissions au départ, à savoir leur faculté à représenter une subdivision cellulaire. Nous avons ainsi choisi comme passerelle un graphe d'incidence qui reflète les propriétés combinatoires des subdivisions représentées.

Les ordres et les graphes d'incidence ne caractérisent complètement que des subdivisions sans multi-incidence, tandis que les cartes généralisées autorisent la présence de multi-incidence. Nous commençons donc par caractériser le sous-ensemble des cartes généralisées auquel sont associées des subdivisions sans multi-incidence. Nous les appellerons des n -*G*-cartes simpliciales.

Nous proposons ensuite une définition combinatoire d'un sous-ensemble de graphes d'incidence, les *graphes d'incidence de surface*, qui serviront de lien entre les n -*G*-cartes simpliciales et les n -surfaces. Notre définition s'inspire des propriétés des *graphes d'incidence augmentés* proposés par Brisson pour représenter des d -variétés subdivisés [36]. En effet, il a été prouvé que de telles variétés pouvaient être associées à des cartes généralisées. Cependant, comme il n'existait pas de définition purement combinatoire des graphes d'incidence représentant ces subdivisions, nous avons été amenés à déterminer l'ensemble minimal de propriétés combinatoires que doit vérifier un graphe d'incidence pour pouvoir être associé à une carte généralisée.

Une fois notre cadre de travail posé, nous abordons la preuve proprement dite. Nous commençons par en donner le fil conducteur puis prouvons effectivement l'équivalence des n -surfaces et des cartes simpliciales.

4.2.1 n - G -cartes simpliciales

Comme remarqué en préambule, les ordres et les graphes d'incidence ne permettent de représenter de manière non ambiguë que les subdivisions sans multi-incidence. On rappelle que l'on parle de multi-incidence lorsqu'une cellule est plusieurs fois incidente à une même cellule de dimension supérieure. Un premier exemple illustrant les limitations de la représentation de subdivisions par des graphes d'incidence apparaît sur la figure 4.21 (La figure 4.20 explique le processus de construction de l'objet représenté sur la figure 4.21(b)). Un exemple un peu plus subtil apparaît sur la figure 4.22. En effet, dans le premier exemple un même graphe d'incidence représente deux objets différents tandis que dans le deuxième, la seule différence entre les deux subdivisions concernées repose sur l'ordonnancement d'un ensemble d'arêtes autour d'un sommet.

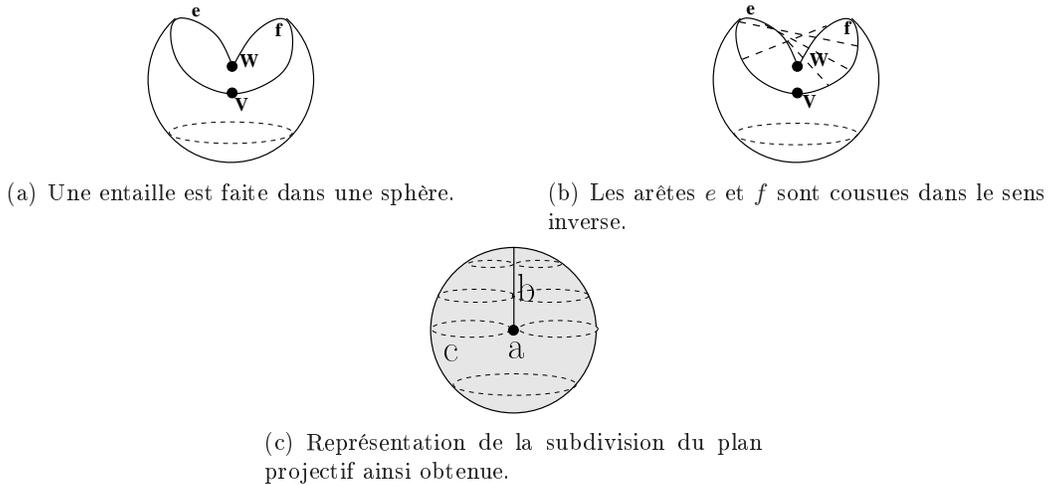


FIG. 4.20 – Processus de construction de la subdivision du plan projectif contenant 1 sommet, 1 arête et 1 face.

Compte tenu des propriétés intrinsèques des subdivisions représentées par des ordres, nous devons donc restreindre notre étude à des cartes généralisées limitées aux subdivisions sans multi-incidence. Or on peut remarquer une dualité entre la multi-incidence d'une subdivision représentée par une carte généralisée et l'identification de cellules de l'ensemble semi-simplicial associé.⁴ Pour mémoire, on parle d'identification de cellules lorsque deux cellules distinctes partagent le même bord. Or du point de vue des cartes, les cellules de la subdivision sont associées aux orbites de la forme $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}$ (d), orbites qui correspondent exactement aux 0-simplexes autrement dit aux sommets de l'ensemble semi-simplicial numéroté associé : précisément $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}$ (d) est un sommet numéroté i . On peut alors pressentir que les multi-incidences dans la subdivision correspondront à des identifications dans l'ensemble semi-simplicial associé. En effet, s'il existe plusieurs k -simplexes construits sur un même ensemble de $(k + 1)$ 0-simplexes dans l'ensemble semi-simplicial, alors on imagine bien qu'il existera plusieurs manières de relier l'ensemble des cellules correspondantes dans la subdivision associée, chacune correspondant à un des k -simplexes.

⁴La définition des cellules de la subdivision représentée par une carte généralisée, Déf. 3.19, se trouve page 107, le théorème 3.20 exprimant le lien entre une carte généralisée et son ensemble semi-simplicial associé est page 108.

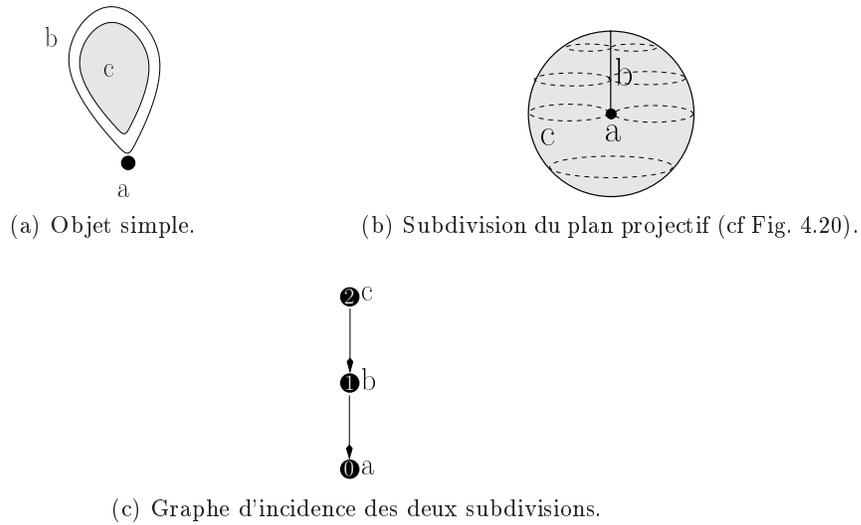


FIG. 4.21 – Deux objets différents possédant le même graphe d'incidence : dans les deux cas, le couple sommet-arête (a, b) est doublement incident à la face c .

Ainsi, nous nous restreignons par la suite à des cartes dont l'ensemble semi-simplicial associé ne comporte aucune identification et constitue donc un complexe simplicial. Cette limitation peut sembler contraignante. En réalité, elle est tout à fait acceptable en vertu de la propriété suivante : toute n - G -carte peut être transformée en une n - G -carte simpliciale par raffinements successifs. En effet, un complexe simplicial peut être obtenu à partir de tout ensemble semi-simplicial par subdivisions barycentriques [96]. Et comme ces subdivisions sont barycentriques, il est possible de numéroter les sommets du complexe simplicial ainsi obtenu [141].

Définition 4.32 (n - G -carte simpliciale) Une n - G -carte est dite simpliciale lorsque l'ensemble semi-simplicial associé est un complexe simplicial.

Il existe une caractérisation "classique" des n - G -cartes simpliciales, qui traduit juste en termes d'orbites le fait qu'il n'existe qu'un seul k -simplexe entre $k + 1$ sommets distincts.

Théorème 4.33 (Caractérisation "classique" d'une carte simpliciale) Une n - G -carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est simpliciale si et seulement si :

$$\forall d \in D, \forall I \subseteq N, \langle \alpha \rangle_{N-I}(d) = \bigcap_{i \in I} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \quad (4.9)$$

Avec une telle caractérisation, vérifier si une n - G -carte est simpliciale ou non demande un grand nombre de tests. Nous proposons ci-dessous une caractérisation plus simple, dont nous allons prouver qu'elle est équivalente. Elle indique que pour montrer le caractère simplicial d'une n - G -carte, il suffit de vérifier qu'il existe exactement une arête entre deux sommets distincts (simplicité pour les cellules de dimension minimale) et une n -cellule entre $n + 1$ sommets distincts (simplicité pour les cellules de dimension maximale). L'absence d'identifications dans les dimensions intermédiaires découle alors des propriétés de la carte. Nous montrerons à l'aide d'exemples que chacune des deux propriétés mentionnées dans le théorème ci-dessous sont indépendantes (l'une peut être vérifiée mais pas l'autre). Ainsi, il ne peut pas exister de caractérisation des n - G -cartes simpliciales plus simple en terme d'orbites.

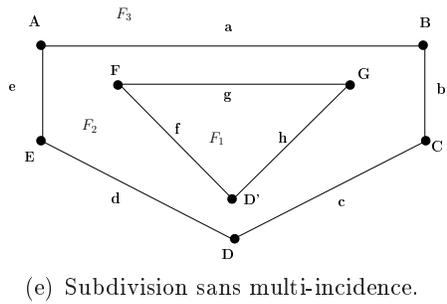
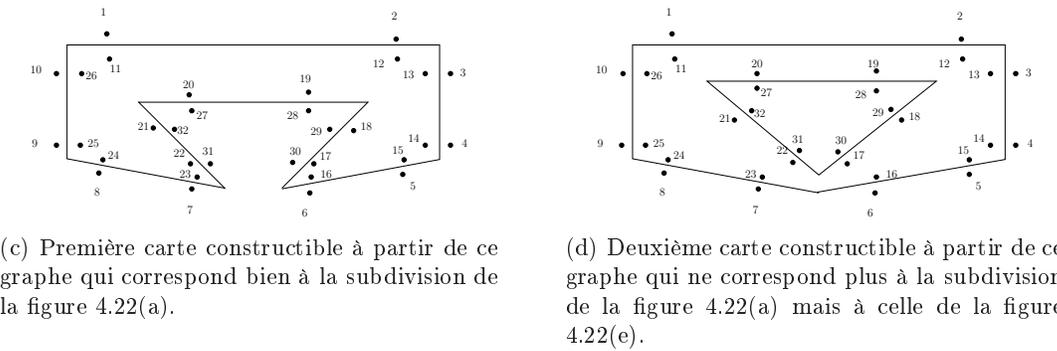
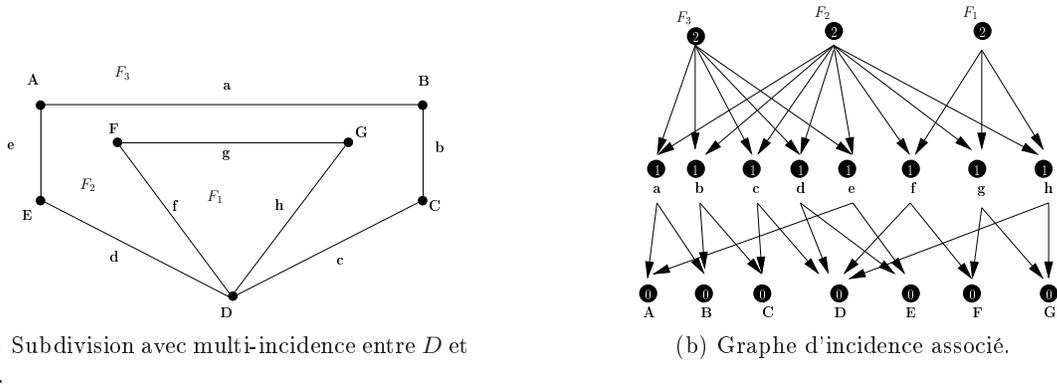


FIG. 4.22 – Exemple d'une multi-incidence qui induit une ambiguïté dans le graphe d'incidence : deux cartes sont susceptibles d'être obtenues à partir du graphe d'incidence (le processus de construction sera décrit ultérieurement). Une des cartes représente une subdivision qui ne correspond pas à ce graphe d'incidence (le sommet D a été "séparé" en deux sommets D et D' .)

Théorème 4.34 (Caractérisation minimale d'une n - G -carte simpliciale) Une n - G -carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est simpliciale si et seulement si :

$$\forall d \in D, \bigcap_{i \in N} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) = \{d\} \quad (4.10)$$

$$\forall i, j \in N, \forall d \in D, \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \bigcap \langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d) = \langle \alpha \rangle_{N-\{i,j\}}(d) \quad (4.11)$$

Les conditions 4.10 et 4.11 sont respectivement appelées simplicité maximale et simplicité minimale.

Preuve : Etant donnée une n - G -carte, on va prouver l'équivalence entre (4.9) et (4.10 et 4.11).

- i). (4.9) \Rightarrow (4.10 et 4.11) : est évident ((4.10) et (4.11) sont des cas particuliers de (4.9)),
- ii). (4.10 et 4.11) \Rightarrow (4.9) : est montré par récurrence.

Pour démontrer ii), on remarque tout d'abord que la propriété suivante est vraie dans tous les cas.

$$\forall d \in D, \forall I \subseteq N, \langle \alpha \rangle_{N-I}(d) \subset \bigcap_{i \in I} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \quad (4.12)$$

La condition suffisante (4.9) est donc équivalente à la condition suivante :

$$\forall d \in D, \forall I \subseteq N, \langle \alpha \rangle_{N-I}(d) \supset \bigcap_{i \in I} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \quad (4.13)$$

Il reste donc à prouver l'implication : (4.10 et 4.11) \Rightarrow (4.13). On procède par récurrence sur le cardinal de I .

La propriété est vraie pour $\text{card}(I) = 2$ par l'hypothèse (4.11). On la suppose vraie jusqu'à $\text{card}(I) = k$, qu'en est-il pour $\text{card}(I) = k + 1$?

Soit $I \subseteq N$, avec $I = \{i_0, \dots, i_k\}$,

Soit $d, d' \in D$ tel que $d' \in \bigcap_{i \in I} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d)$, a-t'on $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$?

Avant de rentrer dans les détails de la preuve, en voici le fil conducteur :

Avec l'hypothèse de récurrence sur le cardinal, d' appartient à la fois à :

$\langle \alpha \rangle_{N-\{i_0, \dots, i_{k-1}\}}(d)$ et $\langle \alpha \rangle_{N-\{i_1, \dots, i_k\}}(d)$.

Ensuite en explicitant ces deux appartenances (4.18, 4.19 et 4.20), on définit un d'' qui appartient à $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$ Il suffit alors de montrer que d' appartient à $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d'')$, puisque $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d'') = \langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$. On réécrit alors l'égalité 4.20 pour l'exprimer en fonction de d'' (Eq. 4.21) et obtenir ainsi deux expressions de d' en fonction de d'' .

La suite de la démonstration consiste à prouver que la deuxième expression (égalité droite de l'équation 4.21) : $d' = d'' \alpha_{j_m} \dots \alpha_{j_1} \alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_q} \alpha_{l_{q+1}} \dots \alpha_{l_r}$ peut se simplifier en $d' = d'' \alpha_{l_{q+1}} \dots \alpha_{l_r}$ ce qui suffit à prouver que d' appartient à $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$ puisque, par construction, tous ces α_i (i entre l_{q+1} et l_r) ont des indices n'appartenant pas à I (donc d' appartient à $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d'') = \langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$)

Pour réaliser cette simplification, on modifie l'équation 4.21 afin d'obtenir une égalité telle que d'un côté toutes les permutations aient des indices $> i_{k-1}$ et de l'autre côté des indices $< i_{k-1}$ (Eq. 4.22). Cette disposition permet d'utiliser l'hypothèse contenue dans l'équation 4.10, et de montrer que l'équation 4.22 peut se simplifier (Eq. 4.24). L'expression de d'' ainsi obtenue permet de simplifier l'équation 4.21 comme dit précédemment.

$d' \in \bigcap_{i \in I} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d)$, donc a fortiori

$$d' \in \bigcap_{i \in I - \{i_k\}} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) = \bigcap_{i \in \{i_0, \dots, i_{k-1}\}} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \quad (4.14)$$

et

$$d' \in \bigcap_{i \in I - \{i_0\}} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) = \bigcap_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \quad (4.15)$$

Comme $\text{card}(\{i_0, \dots, i_{k-1}\}) = \text{card}(\{i_1, \dots, i_k\}) = k$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence et dire ainsi que :

$$d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i_0, \dots, i_{k-1}\}}(d) \quad (4.16)$$

et

$$d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k\}}(d) \quad (4.17)$$

Avant de poursuivre, on rappelle que l'on peut permuter deux involutions dès lors que leurs indices diffèrent d'au moins deux. Ainsi toute composition d'involutions dans laquelle une ou plusieurs involutions sont absentes peut être réordonnée comme suit :

$$(4.16) \Rightarrow d' = d \underbrace{\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_m}}_{\substack{j_r < i_{k-1} \\ \text{et} \\ j_r \notin \{i_0, \dots, i_{k-1}\}}} \underbrace{\alpha_{j_{m+1}} \cdots \alpha_{j_p}}_{j_r > i_{k-1}} \quad (4.18)$$

$$(4.17) \Rightarrow d' = d \underbrace{\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_q}}_{\substack{l_r < i_{k-1} \\ \text{et} \\ l_r \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}}} \underbrace{\alpha_{l_{q+1}} \cdots \alpha_{l_r}}_{\substack{l_r > i_{k-1} \\ \text{et} \\ l_r \neq i_k}} \quad (4.19)$$

Les équations 4.18 et 4.19 impliquent que :

$$(d' =) d \underbrace{\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_m}}_{\substack{j_r < i_{k-1} \\ \text{et} \\ j_r \notin \{i_0, \dots, i_{k-1}\}}} \underbrace{\alpha_{j_{m+1}} \cdots \alpha_{j_p}}_{j_r > i_{k-1}} = d \underbrace{\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_q}}_{\substack{l_r < i_{k-1} \\ \text{et} \\ l_r \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}}} \underbrace{\alpha_{l_{q+1}} \cdots \alpha_{l_r}}_{\substack{l_r > i_{k-1} \\ \text{et} \\ l_r \neq i_k}} \quad (4.20)$$

On pose $d'' = d \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_m}$. Comme les $j_1 \cdots j_m$ n'appartiennent pas à I , $d'' \in \langle \alpha \rangle_{N-I}(d)$. En faisant apparaître d'' des deux côtés de l'équation 4.20, celle-ci devient :

$$(d' =) d'' \underbrace{\alpha_{j_{m+1}} \cdots \alpha_{j_p}}_{j_r > i_{k-1}} = \underbrace{d'' \alpha_{j_m} \cdots \alpha_{j_1}}_{\substack{=d \\ \text{et} \\ j_r < i_{k-1} \text{ et } j_r \notin \{i_0, \dots, i_{k-1}\}}} \underbrace{\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_q}}_{\substack{l_r < i_{k-1} \\ \text{et} \\ l_r \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}}} \underbrace{\alpha_{l_{q+1}} \cdots \alpha_{l_r}}_{\substack{l_r > i_{k-1} \\ \text{et} \\ l_r \neq i_k}} \quad (4.21)$$

L'équation 4.21 est équivalente à :

$$d'' \underbrace{\alpha_{j_{m+1}} \cdots \alpha_{j_p}}_{j_r > i_{k-1}} \underbrace{\alpha_{l_r} \cdots \alpha_{l_{q+1}}}_{l_r > i_{k-1}} = d'' \underbrace{\alpha_{j_m} \cdots \alpha_{j_1}}_{j_r < i_{k-1}} \underbrace{\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_q}}_{l_r < i_{k-1}} \quad (4.22)$$

et
 $l_r \neq i_k$

et
 $j_r \notin \{i_0, \dots, i_{k-1}\}$ $l_r \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$

On pose d^3 égal à $d'' \underbrace{\alpha_{j_{m+1}} \cdots \alpha_{j_p}}_{j_r > i_{k-1}} \underbrace{\alpha_{l_r} \cdots \alpha_{l_{q+1}}}_{l_r > i_{k-1}}$.

et
 $l_r \neq i_k$

Par définition, $d^3 \in \langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}$ (d'') pour tout $j \leq i_{k-1}$. L'équation 4.22 implique aussi que $d^3 \in \langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}$ (d'') pour tout $j \geq i_{k-1}$. Donc $d^3 \in \bigcap_{i \in N} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}$ (d''). D'où par l'hypothèse 4.10, $d^3 = d''$.

D'où par définition de d^3 et par l'équation (4.22),

$$d'' = d'' \underbrace{\alpha_{j_m} \cdots \alpha_{j_1}}_{j_r < i_{k-1}} \underbrace{\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_q}}_{l_r < i_{k-1}} \quad (4.23)$$

et
 $j_r \notin \{i_0, \dots, i_{k-1}\}$ $l_r \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$

Et en remplaçant $d'' \alpha_{j_m} \cdots \alpha_{j_1} \alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_q}$ par d'' (Eq. 4.23) dans la partie droite de l'équation 4.21, on obtient :

$$d' = d'' \underbrace{\alpha_{l_{q+1}} \cdots \alpha_{l_r}}_{l_r > i_{k-1}} \quad (4.24)$$

et
 $l_r \neq i_k$

Finalement $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-I} (d'') = \langle \alpha \rangle_{N-I} (d)$. □

On remarque que la condition de simplicité maximale empêche l'apparition de multi-incidence du type de la figure 4.21 tandis que la condition de simplicité minimale interdit celle apparaissant sur la figure 4.22. En outre, on peut vérifier que si la condition de simplicité maximale n'est pas vérifiée sur la figure 4.21, celle de simplicité minimale l'est bien. Le deuxième exemple montre quant à lui que la condition de simplicité maximale ne suffit pas pour éviter tout type de multi-incidence, contrairement à ce qui avait été pressenti dans [140]. En effet, la carte correspondant à la figure 4.22 vérifie l'équation 4.10 mais pas 4.11.

La figure 4.23 montre les cartes associées aux subdivisions 4.21(a), 4.21(b) et 4.22 et permet de vérifier les remarques précédentes.

i). Pour la carte 4.23(a), on note que $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \{(d_1, d_2)\}$.

Ainsi, $\langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(d_1) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d_1) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{2\}}(d_1) = \{d_1, d_2\} \neq \{d_1\}$ et l'équation 4.10 n'est pas vérifiée.

Par contre, la carte respecte bien la condition de l'équation 4.11 : $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d_p) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d_p) = \{d_1, d_2\} = \langle \alpha \rangle_{N-\{i,j\}}(d_p)$ pour tout i et j dans $\{0, 1, 2\}$, avec $i \neq j$ et tout p dans $\{1, 2\}$.

ii). Pour la carte 4.23(b), $\alpha_0 = \{(d_1, d_2), (d_3, d_4)\}$, $\alpha_1 = \{(d_1, d_3), (d_2, d_4)\}$ et $\alpha_2 = \{(d_3, d_2), (d_1, d_4)\}$.

Ainsi $\langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(d_1) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d_1) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{2\}}(d_1) = \{d_1, d_2, d_3, d_4\} \neq \{d_1\}$ et l'équation 4.10 n'est pas vérifiée.

Mais l'équation 4.11 l'est : $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d_p) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d_p) = \{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \langle \alpha \rangle_{N-\{i,j\}}(d_p)$ pour tout i et j dans $\{0, 1, 2\}$, avec $i \neq j$ et tout p dans $\{1, 2, 3, 4\}$.

iii). Pour la carte 4.23(c), on se concentre sur une petite portion de la carte et plus précisément sur le brin 23.

$\langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(23) = \{22, 23, 30, 31, 16, 17, 6, 7\}$ et

$\langle \alpha \rangle_{N-\{2\}}(23) = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$

donc $\langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(23) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{2\}}(23) = \{22, 23, 16, 17\}$.

Mais $\langle \alpha \rangle_{N-\{0,2\}}(23) = \{22, 23\}$ et la condition exprimée par l'équation 4.11 n'est pas remplie.

On regarde maintenant $\langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(23) = \{23, 24, 7, 8\}$ et on a bien $\langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(23) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(23) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{2\}}(23) = \{23\}$. Et de la même manière on peut vérifier que la propriété 4.10 est vérifiée pour tout brin de la carte.

4.2.2 Graphes d'incidence

Les graphes d'incidence sont utilisés pour représenter des subdivisions d'espaces ne comportant pas de multi-incidence. Nous rappelons tout d'abord les notions classiques relatives aux graphes d'incidence. Nous explicitons ensuite les liens entre ordres et graphes d'incidence, et introduisons quelques notations. Nous expliquons ensuite comment associer un complexe simplicial numéroté à un graphe d'incidence, puis comment construire un graphe d'incidence à partir d'une n - G -carte. Cette section se termine par l'introduction de la notion de *graphe d'incidence de surface* qui sera effectivement utilisée pour comparer les n -surfaces et les n - G -cartes.

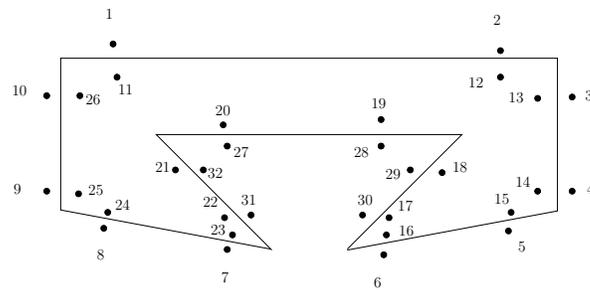
Généralités

Nous rappelons d'abord la définition classique des graphes d'incidence.

Définition 4.35 (Graphe d'incidence [36]) *Le graphe d'incidence induit par une partition cellulaire homogène de dimension n est défini comme un graphe orienté dont les nœuds correspondent aux cellules de la partition et où chaque arc orienté connecte une i -cellule à une $(i-1)$ -cellule incidente. Chaque nœud d'un tel graphe est étiqueté par la dimension de la cellule correspondante.*



(a) Carte associée à l'objet de la figure 4.21(a). (b) Carte associée au plan projectif de la figure 4.21(b).



(c) Carte associée à la subdivision de la figure 4.22(a).

FIG. 4.23 – Cartes associées aux subdivisions avec multi-incidence montrées précédemment. Les cartes 4.23(a) et 4.23(b) sont représentées en utilisant des demi-arêtes pour représenter les brins. Pour simplifier la représentation de la carte associée à la troisième subdivision, les brins sont ici représentés par des points et leurs relations se déduisent du dessin de la subdivision.

On note I_i l'ensemble des indices des i -cellules de la partition cellulaire. Un graphe d'incidence de dimension n peut ainsi être noté $IG_C = (C, \prec)$ où $C = \bigcup_{i=0}^{i=n} (\bigcup_{\beta \in I_i} c_\beta^i)$ est l'ensemble des cellules de la partition et \prec est la relation d'incidence entre les $(i-1)$ -cellules et les i -cellules, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Par la suite, nous considérerons seulement des graphes d'incidence finis, autrement dit tels que C est fini. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous noterons une i -cellule du graphe, c^i . La définition du graphe se fonde sur la notion d'incidence entre cellules dont les dimensions diffèrent de 1. Cette relation est notée \prec . On notera classiquement $c \leq c'$ s'il existe entre c et c' une suite éventuellement vide de cellules reliées deux à deux par la relation \prec . Si c est une face propre de c' autrement dit $c \leq c'$ et $c \neq c'$, on utilisera la notation $c < c'$. Dans une telle subdivision, tout chemin de cellules consécutives entre deux cellules c et c' contient le même nombre d'éléments. Et la dimension d'une cellule c' telle que $c < c'$ sera toujours égale à la dimension de c à laquelle on ajoute le nombre de cellules intermédiaires entre c et c' plus un.

Par commodité, on rajoute souvent à un graphe d'incidence de dimension n deux cellules fictives c^{-1} et c^{n+1} telles que c^{-1} est face de toutes les 0-cellules de IG_C et toutes les n -cellules de IG_C sont faces de c^{n+1} . Un graphe muni de telles cellules est appelé *graphe d'incidence étendu*. Il est noté $IG_C^* = (C^*, \prec)$ où $C^* = C \cup \{c^{-1}, c^{n+1}\}$. Nous aurons recours à cet artifice afin de pouvoir définir un certain opérateur uniformément sur toutes les cellules du graphe.

Graphe d'incidence et ordre

Il existe une relation évidente entre les graphes d'incidence et les ordres qui, bien que proche de celle entre complexes et ordres, est quelque peu différente. En effet, si le complexe associé à un ordre connexe est toujours connexe, un graphe d'incidence représentant un ordre connexe pourra lui être déconnecté (cf Fig. 4.24).

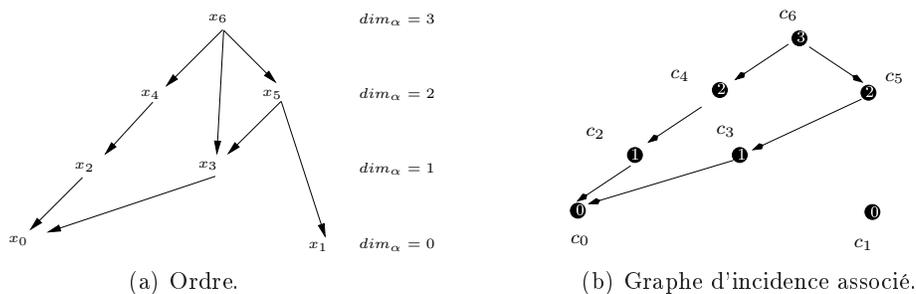


FIG. 4.24 – Un ordre et son graphe d'incidence associé pour lesquels la relation α sur X est différente de la relation \leq entre les cellules du graphe. Par exemple, $x_1 \in \alpha(x_5)$ tandis que son image c_1 n'est pas face de c_5 .

On peut formaliser les liens entre graphes d'incidence et ordres de la même manière que ceux entre complexes et ordres. Nous nous restreignons ici aux constructions qui font correspondre les α -terminaux aux 0-cellules du graphe d'incidence. On pourrait de manière similaire définir des constructions duales. De plus, on note que les ordres construits à partir d'un tel graphe vérifient la propriété suivante : ils sont d' α -dimension finie (n) et chacun de leurs éléments appartient à l' α -adhérence d'un élément d' α -dimension maximale. Pour simplifier, on appellera

un ordre vérifiant cette propriété, un *ordre α -homogène*. Cette propriété additionnelle provient de la nature homogène⁵ des subdivisions associées aux graphes d'incidence (Déf. 4.35).

Définition 4.36 (Construction de l'ordre α -homogène associé à un graphe d'incidence)

L'ordre $|X| = (X, \alpha)$ associé au graphe d'incidence $IG_C = (C, \prec)$ est défini par :

- i). $X = C$,
- ii). $\forall (x, x') \in X \times X$, tel que $x \leq x'$, $x \in \alpha(x')$.

Cette construction peut être représentée par l'application $\psi_{IG \rightarrow X}$ qui réalise un isomorphisme d'ordres entre (C, \leq) et (X, α) . On peut noter que cette construction ne garantit pas que l' α -dimension induite sur l'ordre corresponde exactement à l'étiquetage des cellules dans le graphe (cf Fig. 4.25).

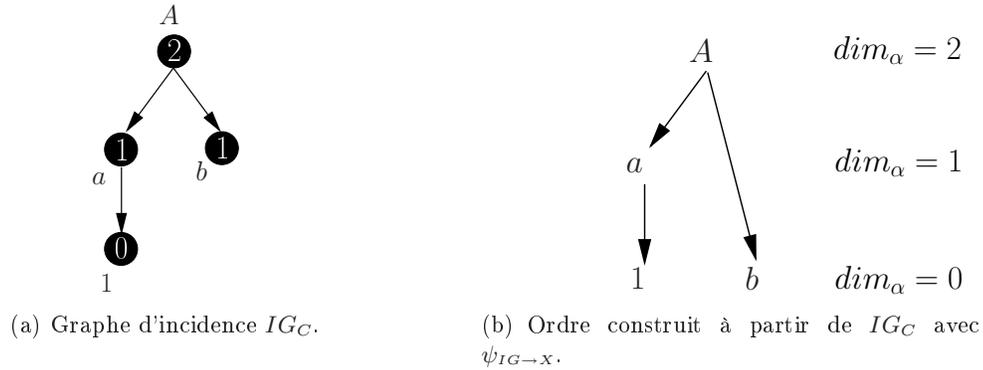


FIG. 4.25 – La dimension implicite associée aux éléments de l'ordre est différente de la dimension des cellules correspondantes dans le graphe d'incidence.

Définition 4.37 (Construction du graphe d'incidence associé à un ordre α -homogène)

Le graphe d'incidence $IG_C = (C, \prec)$ associé à l'ordre α -homogène $|X| = (X, \alpha)$ est défini par :

- i). $C = X$,
- ii). $\forall (c, c') \in C \times C$ tel que $c' \in \alpha(c)$ et $\dim_\alpha(c') = \dim_\alpha(c) - 1$, $c' \prec c$.

Cette construction peut être représentée par l'application $\psi_{X \rightarrow IG}$ qui réalise une bijection entre X et C . La déconnection éventuelle du graphe d'incidence associé à un ordre connexe provient de ce que la relation \leq déduite de la relation \prec sur un graphe d'incidence ne correspond pas nécessairement à la relation α sur l'ordre d'origine. En effet, lorsque dans un graphe d'incidence deux cellules sont reliées sans intermédiaire, leurs dimensions diffèrent forcément de 1, tandis que dans un ordre les α -dimensions de deux éléments reliés sans intermédiaire peuvent posséder un écart plus grand que 1 (cf Fig. 4.24). La notion de lien sans intermédiaire dans un ordre est exprimée par la notion de ρ -proximité entre deux éléments ($\rho = \alpha$ ou $\rho = \beta$). Il suffit de rajouter une condition sur l' α -dimension des éléments de l' α -proximité des éléments d'un ordre pour que $\psi_{X \rightarrow IG}$ soit un isomorphisme d'ordres entre (C, \leq) et (X, α) .

⁵toute cellule d'une subdivision homogène de dimension n est face d'au moins une n -cellule.

Théorème 4.38 (Isomorphisme entre un ordre et le graphe d'incidence associé)

L'application $\psi_{X \rightarrow IG}$ construisant un graphe d'incidence $IG_C = (C, \prec)$ à partir d'un ordre α -homogène $|X| = (X, \alpha)$ est un isomorphisme d'ordres entre (X, α) et (C, \leq) si et seulement si :

$$\forall x \in X, \alpha^\bullet(x) = \{x' \in \alpha(x), \dim_\alpha(x') = \dim_\alpha(x) - 1\}$$

Un ordre α -homogène vérifiant cette propriété et son graphe d'incidence associé sont dits équivalents

Nous nous intéresserons par la suite à un sous-ensemble des ordres, appelés n -surfaces (cf Déf. 3.9 page 97). Le lemme ci-dessous dit qu'une n -surface et son graphe d'incidence associé sont équivalents.

Lemme 4.39 Soit $|X| = (X, \alpha)$ une n -surface, $|X|$ est un ordre α -homogène et est isomorphe à son graphe d'incidence associé.

Preuve : La propriété d' α -homogénéité a été prouvée par Daragon et al. dans [55] (Corollary 5 page 10) qui dit que tout élément d'une n -surface possède dans sa θ -adhérence au moins un élément d' α -dimension n .

La propriété concernant les dimensions des éléments de $\alpha^\bullet(x)$ se déduit quant à elle d'une autre propriété elle aussi prouvée dans [55] (Property 4 page 10). Elle dit qu'étant donné un élément x de rang p , l'ordre induit sur $\alpha^\square(x)$ est une $(p-1)$ -surface et celui induit sur $\beta^\square(x)$ est une $(n-p-1)$ -surface. Ainsi un élément x' de $\alpha^\bullet(x)$ appartient à la $(p-1)$ -surface, $\alpha^\square(x)$, donc (Corollary 5) sa $\theta_{|\alpha^\square(x)}$ -adhérence contient au moins un élément d' α -dimension $p-1$. Or comme $x' \in \alpha^\bullet(x)$, sa $\beta_{|\alpha^\square(x)}^\square$ -adhérence est vide et sa $\theta_{\alpha^\square(x)}$ -adhérence correspond à son $\alpha_{\alpha^\square(x)}$ -adhérence. Autrement dit, elle est l'élément de rang maximal de sa θ -adhérence. Donc son α -dimension est égale à $p-1$. \square

Par la suite, lorsque nous manipulerons des graphes d'incidence, nous utiliserons pour simplifier les notations associés aux ordres. Etant donnée une cellule c d'un graphe d'incidence, on notera $\theta^\square(c)$ l'ensemble $\{c' \in C, c' < c\} \cup \{c' \in C, c' > c\}$. Et on appellera *chemin* sur un graphe d'incidence, toute suite de cellules $c_{\beta_0}, c_{\beta_1}, \dots, c_{\beta_n}$ telle que $c_{\beta_{k+1}} \in \theta^\square(c_{\beta_k})$. Comme un ordre, un graphe d'incidence est connexe si et seulement si il est connexe par chemins. Autrement dit la connexité d'un graphe d'incidence est équivalente à sa θ^\square -connexité.

En outre, si IG_C est un graphe d'incidence de dimension n , la relation d'incidence \prec induit, pour toute cellule c de C , une relation d'incidence locale \prec_c sur $\theta^\square(c)$. $(\theta^\square(c), \prec_c)$ est alors un graphe d'incidence de dimension $n-1$ avec un étiquetage induit par celui de IG_C . Plus précisément, si c est une k -cellule de C , toute j -cellule de $C \cap \theta^\square(c)$ est aussi une j -cellule de $(\theta^\square(c), \prec_c)$ pour $j < k$ et une $(j-1)$ -cellule de C pour $j > k$. Pour simplifier et éviter les confusions, on nommera toujours une cellule en fonction de sa dimension dans le graphe d'incidence IG_C et non en fonction de sa dimension dans un des sous-graphes $\theta^\square(c)$. Ainsi, pour toute cellule c de C , l'ensemble $\theta^\square(c)$ sera noté $\{c^j \in C, c^j < c \text{ ou } c^j > c\}$. En outre, on note que les relations \prec_c et \prec coïncident sur tout couple de $\theta^\square(c)$, (c^j, c^{j+1}) tel que $j < k-1$ ou $j > k+1$. Elles diffèrent seulement sur les couples (c^{k-1}, c^{k+1}) qui ne sont pas liés par \prec sur C mais le sont par \prec_c sur $\theta^\square(c)$. La propriété 4.40 formalise ce propos. Elle est illustrée par la figure 4.26. La propriété 4.41 est l'extension naturelle de la propriété 4.40.

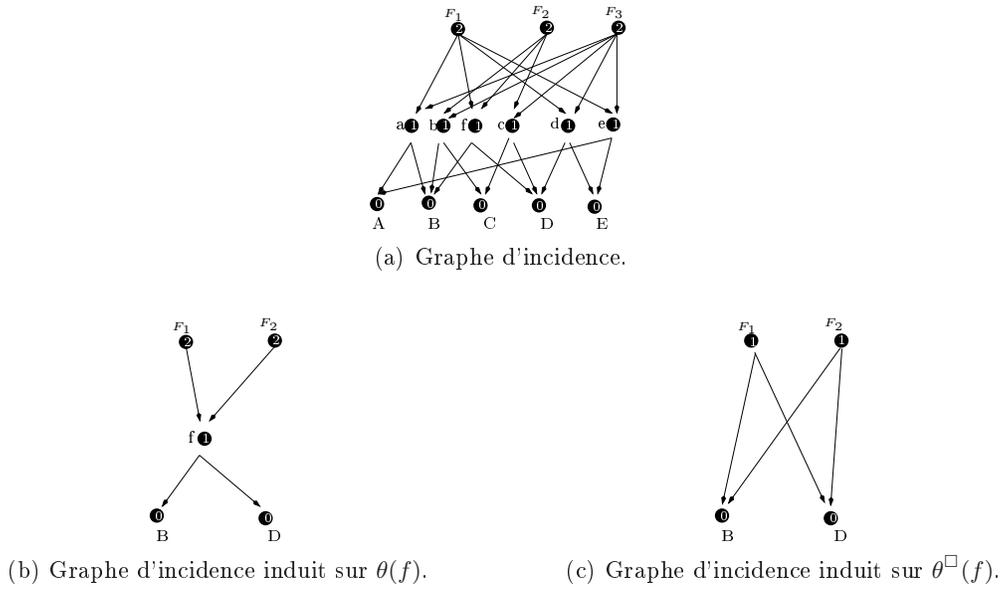


FIG. 4.26 – Sous-graphes d'incidence.

Propriété 4.40 Soit IG_C un graphe d'incidence de dimension n , et c un élément de C . $(\theta^\square(c), \prec_c)$ est un graphe d'incidence de dimension $n - 1$ et, si on note $\theta_{|\theta^\square(c)}$ la restriction de θ au sous-graphe d'incidence construit sur les éléments de $\theta^\square(c)$, on a :

$$\forall c \in C, \forall c' \in \theta^\square(c), \theta_{|\theta^\square(c)}^\square(c') = \theta^\square(c') \cap \theta^\square(c)$$

Propriété 4.41 Soit $IG_C = (C, \prec)$ un graphe d'incidence de dimension n . Soit $\{c^{i_j}\}_{j \in \{0, \dots, p\}}$ un ensemble totalement ordonné par la relation $<$ (clôture transitive de \prec), alors \prec induit, sur $C' = \bigcap_{j \in \{0, \dots, p\}} \theta^\square(c^{i_j})$, une relation $\prec_{C'}$ telle que $(C', \prec_{C'})$ est un graphe d'incidence de dimension $(n - (p + 1))$ et :

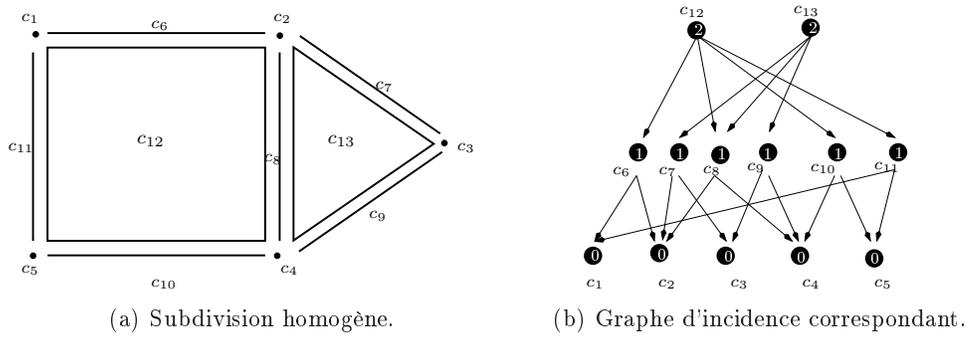
$$\forall c \in C', \theta_{|C'}^\square(c) = C' \cap \theta^\square(c)$$

Graphe d'incidence et complexe simplicial numéroté

De même que l'on peut associer un complexe simplicial à un ordre et un ensemble semi-simplicial numéroté à une carte généralisée, on peut associer un complexe simplicial abstrait numéroté à tout graphe d'incidence. Il est relié à la subdivision barycentrique de la subdivision cellulaire correspondante. L'ensemble des sommets du complexe simplicial est exactement l'ensemble des cellules du graphe d'incidence, chaque sommet étant étiqueté par la dimension de la cellule correspondante. Les k -simplexes correspondent aux chaînes de $k + 1$ cellules consécutives (cf Fig. 4.27).

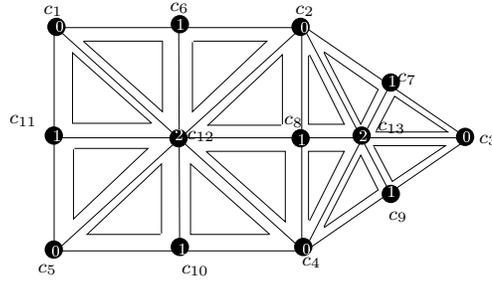
Graphe d'incidence et carte généralisée

Il n'est bien sûr pas possible de construire une carte généralisée à partir d'un graphe d'incidence quelconque. Par contre, il est possible de construire à partir de toute carte généralisée



(a) Subdivision homogène.

(b) Graphe d'incidence correspondant.



(c) Complexe simplicial numéroté associé.

FIG. 4.27 – Complexe simplicial numéroté associé à un graphe d'incidence.

le graphe d'incidence représentant la subdivision associée. Un exemple est donné sur la figure 4.28, où le graphe d'incidence de la figure 4.28(c) est le graphe associé à la carte représentée sur la figure 4.28(b).

Définition 4.42 (Construction du graphe d'incidence associé à une n - G -carte) *Le graphe d'incidence $IG_C = (C, \prec)$ associé à la n - G -carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est défini par l'application $\psi_{nGC \rightarrow IG}$ telle que*

- i). $\forall i \in N, \forall o^i \in \{\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}\}_D, \exists ! \psi_{nGC \rightarrow IG}(o^i) \in C$ et il est tel que $\psi_{nGC \rightarrow IG}(o^i)$ est étiqueté par i .*
- ii). $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \forall o^i \in \{\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}\}_D$ et $\forall o^{i+1} \in \{\langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}\}_D$ tels qu'il existe $d \in D \cap o^i \cap o^{i+1}$, alors $\psi_{nGC \rightarrow IG}(o^i) \prec \psi_{nGC \rightarrow IG}(o^{i+1})$*

Il existe un lien immédiat entre les brins de la n - G -carte et les $(n+1)$ -uplets de cellules du graphe d'incidence associé (cf Fig. 4.28). Il provient des propriétés intrinsèques de la subdivision associée à une n - G -carte. Par construction, tout cellule appartient à au moins un $(n+1)$ -uplet de cellules. Et un brin d définit un unique $(n+1)$ -uplet de cellules (c^0, c^1, \dots, c^n) dont chaque cellule est construite sur une orbite de d (cf Déf. 3.19 page 107). On appelle (c^0, c^1, \dots, c^n) le $(n+1)$ -uplet de cellules associé à d . La condition de simplicité maximale intervenant dans la caractérisation des cartes simpliciales (Thé 4.34 page 146) est la condition nécessaire et suffisante à rajouter sur une carte pour que la réciproque soit vraie, autrement dit qu'un $(n+1)$ -uplet soit associé à un unique brin.

La figure 4.28 illustre le lien entre les brins d'une n - G -carte et les $(n + 1)$ -uplets du graphe d'incidence associé.
 Les brins 1, 2, 23 et 21 sont ainsi respectivement associés aux 3-uplets (A, a, F_1) , (B, a, F_1) , (E, e, F_3) et (D, d, F_3) .

Lemme 4.43 *Il existe une bijection entre les brins d'une n - G -carte vérifiant la propriété de simplicité maximale et les $(n + 1)$ -uplets du graphe d'incidence associé.*

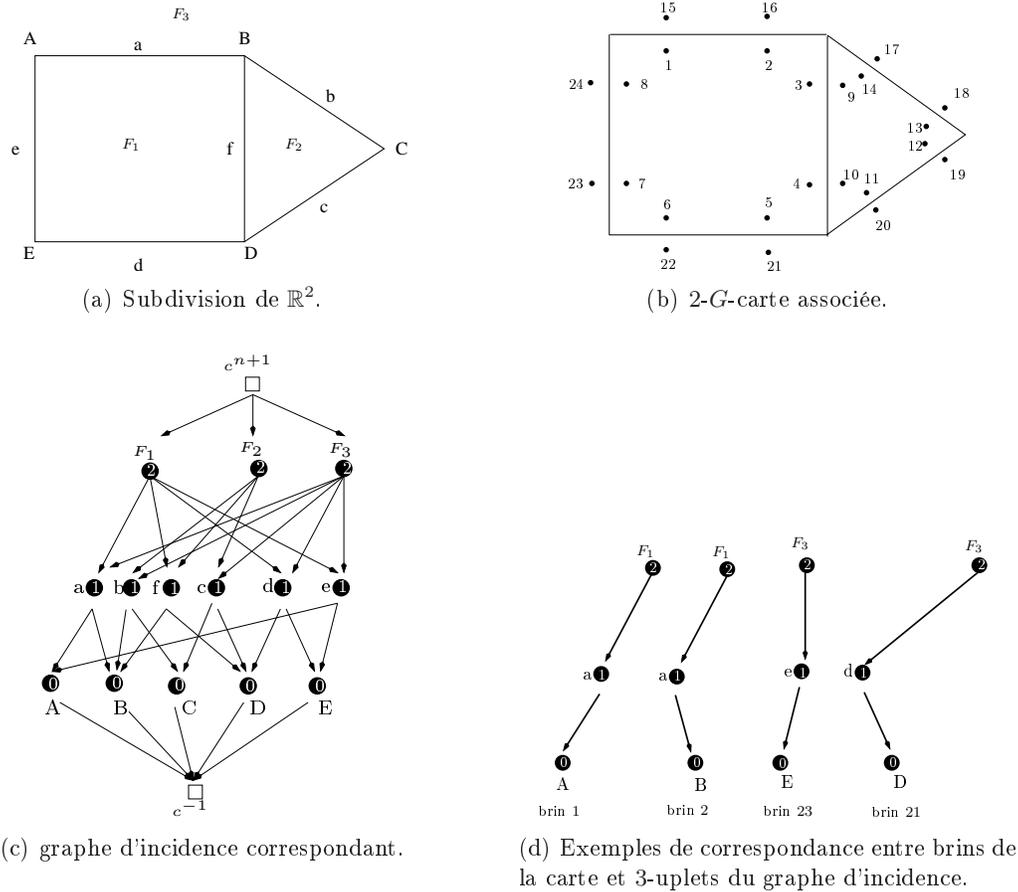


FIG. 4.28 – Illustration de la correspondance entre les brins d'une n - G -carte et les $(n + 1)$ -uplets du graphe d'incidence associé.

Graphe d'incidence de surface

Les graphes d'incidence auxquels nous allons nous intéresser par la suite rassemblent les propriétés combinatoires essentielles des graphes d'incidence augmentés associés aux d -variétés connexes de Brisson [36]. L'intérêt de ces variétés est double. D'abord, elles sont construites comme des subdivisions ne comportant pas de multi-incidence. En outre, les propriétés qui les caractérisent garantissent leur "représentabilité" à l'aide de cartes généralisées.

Nous commençons par poser la définition de la classe de graphes d'incidence à laquelle nous allons nous restreindre. Nous relierons ensuite ses propriétés avec des propriétés plus ou moins

explicités des graphes d'incidence augmentés. Certaines peuvent paraître incongrues au premier abord (notamment iii) et iv)) et leur lien avec les cartes et les n -surfaces peut sembler obscur. Le tableau 4.2 page 161 a pour vocation de faire ressortir la relation entre chacune de ces propriétés et une caractéristique d'au moins un de ces deux modèles. Il est aussi l'occasion de raffiner un peu plus la catégorie de cartes à laquelle on doit se restreindre.

Nous appellerons à partir de maintenant toute suite de $k+1$ cellules consécutives d'une subdivision ou d'un graphe d'incidence un $(k+1)$ -uplet de cellules. Il pourra être noté indifféremment $c^0 \prec c^1 \prec \dots \prec c^k$ ou (c^0, c^1, \dots, c^k) .

Définition 4.44 (Graphe d'incidence de surface) *Un graphe d'incidence étendu de dimension n , $IG_C^* = (C^* = C \cup \{c^{-1}, c^{n+1}\}, \prec)$, est un graphe d'incidence de surface lorsque :*

- i). $n > 0 \Rightarrow (C, \prec)$ connexe⁷
- ii). toute i -cellule de C appartient à au moins un $(n+1)$ -uplet de cellules de $C : (c^0, \dots, c^n)$,
- iii). $\forall (c^{i-1}, c^i, c^{i+1}) \in C^* \times C \times C^*$, $c^{i-1} \prec c^i \prec c^{i+1}$, $\exists ! c'^i \in C$, $c'^i \neq c^i$, $c^{i-1} \prec c'^i \prec c^{i+1}$
(propriété **switch**)
 (c^{i-1}, c^i, c^{i+1}) et (c^{i-1}, c'^i, c^{i+1}) sont appelés **switch** IG_C^* -triplets
- iv). l'intersection des θ^\square -adhérences des cellules de tout sous-ensemble, O , non vide totalement ordonné de C pour la relation \prec (privé des deux cellules fictives), est⁶ :
 - (a) vide si $\text{card}(O) = n+1$,
 - (b) composée de deux cellules de même dimension si $\text{card}(O) = n$,
 - (c) connexe⁷ si $\text{card}(O) \leq n-1$.

On peut noter que comme O est non vide par définition, le cas iv)b ne peut se produire que pour $n > 0$ et le cas iv)c pour $n > 1$.

L'analyse des d -variétés effectuée par Brisson montre explicitement (Lemme 3 page 401 de [36]) que toute cellule d'un tel objet appartient à au moins un $(d+1)$ -uplet de cellules (propriété ii) des graphes d'incidence de surface). Elle prouve en outre (Corollaire 1 page 402 de [36]) que pour tout couple de cellules de dimension $k-1$ et $k+1$, (c^{k-1}, c^{k+1}) , telles que $c^{k-1} \prec c^{k+1}$, il existe exactement deux k -cellules distinctes qui sont toutes deux faces de c^{k+1} et ont c^{k-1} comme face (propriété iii) des graphes d'incidence de surface). La dernière propriété n'est pas explicite dans l'étude de Brisson mais peut se déduire du Théorème 1 page 403 et du Corollaire 3 page 406).

⁶Le point iv)a est en fait vrai pour tout graphe d'incidence.

⁷les cellules fictives ne rentrent pas en ligne de compte dans l'examen de la connexité d'un graphe d'incidence puisqu'elles introduisent par construction une connexité artificielle.

La figure 4.29 montre un exemple de partition de \mathbb{R}^2 dont le graphe d'incidence associé est un graphe d'incidence de surface. La subdivision cellulaire est composée de trois 2-cellules F_1 , F_2 , F_3 (F_3 étant une face infinie), six 1-cellules a, b, c, d, e, f et cinq 0-cellules 1, 2, 3, 4, 5. On peut vérifier que les différentes propriétés des graphes d'incidence de surface sont avérées. La première est immédiatement visible sur le dessin du graphe d'incidence : toute cellule appartient à au moins une chaîne de 3 cellules consécutives. La propriété **switch** est un peu plus fastidieuse à vérifier : la figure 4.29(c) la met en évidence sur un exemple. Les triplets (B, b, F_2) et (B, f, F_2) sont des **switch** IG_C^* -triplets. Concernant la troisième propriété, on voit facilement que la θ -adhérence stricte de chacun des éléments du graphe est connexe. On considère maintenant les intersections de θ -adhérences de deux cellules de C en relation par $<$. On observe que pour ce graphe chacune d'entre elles est exactement composée de deux éléments distincts de C . Enfin l'intersection des θ -adhérences strictes de trois éléments de dimensions différentes ne contient aucun élément de C .

Un exemple de graphe d'incidence vérifiant les deux premières propriétés des graphes d'incidence de surface mais pas la troisième est présenté sur la figure 4.30. Un exemple de graphe d'incidence ne vérifiant pas la propriété de **switch** est visualisé sur la figure 4.31.

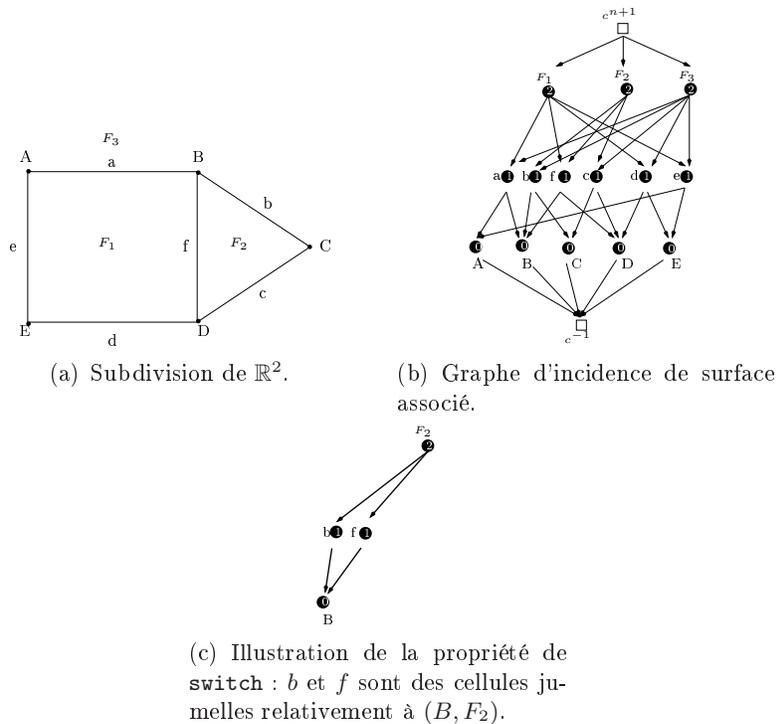


FIG. 4.29 – Exemple d'un graphe d'incidence de surface.

On peut noter que la propriété ii) garantit que l' α -dimension induite sur l'ordre obtenu par $\psi_{IG \rightarrow X}$ correspond à l'étiquetage des cellules du graphe d'incidence.

D'autre part, la propriété **switch** a permis à Brisson de définir sur ses subdivisions un opé-

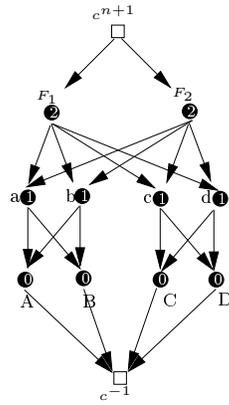


FIG. 4.30 – Exemple d’un graphe d’incidence qui n’est pas un graphe d’incidence de surface. Il vérifie les propriétés ii) et iii) mais pas iv). La θ -adhérence stricte de A par exemple n’est pas connexe.

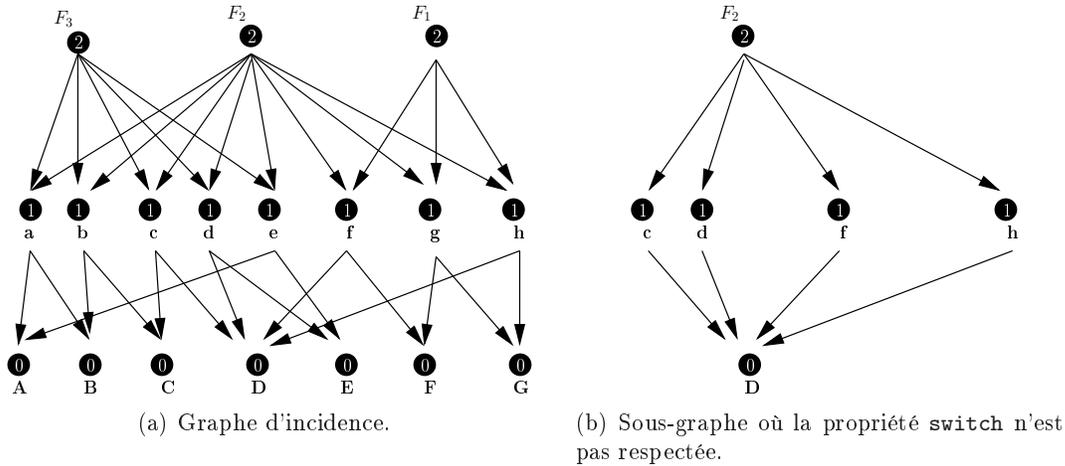


FIG. 4.31 – Exemple d’un graphe d’incidence (a) qui ne possède pas la propriété de **switch**. En effet, il existe 4 1-cellules : c, d, f et h entre la 0-cellule D et la 2-cellule F_2 (b).

rateur qui, à tout triplet de cellules consécutives, associe une unique cellule. La même propriété étant vérifiée sur les graphes d’incidence de surface, un opérateur identique peut y être construit :

Définition 4.45 (Opérateur switch) *Etant donné un graphe d’incidence de surface, l’opérateur **switch** est défini de la manière suivante :*

Pour tout triplet de cellules consécutives (c^{i-1}, c^i, c^{i+1}) ,

$$\text{switch}(c^{i-1}, c^i, c^{i+1}) = c'^i$$

avec $c^{i-1} \prec c^i \prec c^{i+1}$ et $c'^i \neq c^i$.

La cellule c'^i est appelée la jumelle de c^i relativement à (c^{i-1}, c^{i+1}) dans la subdivision ou (c^{i-1}, c^{i+1}) -jumelle de c^i

Bien entendu, lorsque $\text{switch}(c^{i-1}, c^i, c^{i+1}) = c'^i$ alors $\text{switch}(c^{i-1}, c'^i, c^{i+1}) = c^i$. De plus, grâce aux cellules fictives c^{-1} et c^{n+1} ajoutées au graphe, cet opérateur est bien défini pour tout i dans $\{0, \dots, n\}$.

Enfin, on peut remarquer que la définition de graphe d'incidence de surface de dimension 0 peut s'exprimer beaucoup plus simplement.

Corollaire 4.46 (Graphe d'incidence de surface de dimension 0) *Un graphe d'incidence étendu de dimension 0, $IG_C^* = (C^* = C \cup \{c^{-1}, c^1\}, \prec)$, est un graphe d'incidence de surface si et seulement si :*

$$C \text{ est composé de deux 0-cellules distinctes } c^0 \text{ et } c'^0$$

Preuve : On montre d'abord qu'un graphe ainsi caractérisé est bien un graphe d'incidence de surface. Puisqu'on considère un graphe de dimension 0, la condition i) ne s'applique pas. La propriété ii) est immédiate car c^0 appartient au 1-uplet $\{c^0\}$ et c'^0 au 1-uplet $\{c'^0\}$. Le point iii) se vérifie tout aussi aisément. Il existe, en effet, précisément deux triplets dans le graphe étendu : (c^{-1}, c^0, c^1) et (c^{-1}, c'^0, c^1) qui sont par construction des $\text{switch } IG_C^*$ -triplets. De même, l'item iv) est avéré puisque les seuls sous-ensembles non vides totalement ordonnés de C sont les ensembles $\{c^0\}$ et $\{c'^0\}$. Leur cardinal est égal à 1, et l'intersection des θ^\square -adhérences de leurs éléments se réduit respectivement à $\theta^\square(c^0)$ et $\theta^\square(c'^0)$ qui ne contiennent aucune cellule de C .

On prouve maintenant qu'un graphe d'incidence de surface de dimension 0 est composé d'exactly deux 0-cellules. Soit IG_C^* un graphe d'incidence de surface tel que C contienne seulement des 0-cellules. c^{-1} et c^1 sont les deux cellules fictives de C^* . C contient au moins deux 0-cellules : c^0 et c'^0 , telles que c^0 et c'^0 soient (c^{-1}, c^1) -jumelles dans IG_C^* . Si C contient une autre 0-cellule, c''^0 alors c''^0 est face de c^1 et possède c^{-1} comme face, ce qui est en contradiction avec la définition des graphes d'incidence de surface pour lesquels il existe en tout et pour tout deux telles cellules. Un graphe d'incidence de surface de dimension 0 contient donc en tout et pour tout deux 0-cellules. \square

Prop	Carte généralisée simpliciale	n -surface
i)	+ connexité	connexe
ii)	en relation avec la définition des cellules	par construction (peut être déduit du lemme 4.39)
iii)	en relation avec les involutions α_i / + fermeture (pas de point fixe dans le <i>switch</i> Déf. 4.45)	?
iv)	?	en relation avec la construction récursive des n -surfaces (X n -surface, $\theta^\square(x)$ $(n-1)$ -surface, $\theta_{\theta^\square(x)}^\square(x)$ $(n-2)$ -surface ...) et le fait qu'une n -surface est, soit connexe ($n > 0$), soit composée de deux cellules ($n = 0$)

TAB. 4.2 – Lien entre les différents points présents dans la définition des graphes d'incidence de surface et certaines caractéristiques des cartes et des n -surfaces. En gras sont notées des propriétés à rajouter aux cartes étudiées. Les points d'interrogation correspondent aux liens les moins intuitifs

4.2.3 Fil conducteur de la preuve de l'équivalence entre un sous-ensemble des n - G -cartes et les n -surfaces

Avant de détailler la démonstration, nous décrivons ici le fil conducteur de la preuve. Les graphes d'incidence de surface sont utilisés comme un pont entre les n - G -cartes simpliciales connexes fermées et les n -surfaces. Nous expliquons d'abord les principales idées sous-tendant la démonstration de l'équivalence des graphes d'incidence de surfaces de dimension n et des n -surfaces. Nous envisageons ensuite comment prouver le lien entre les n - G -cartes et les graphes d'incidence de surface.

n -surface et graphe d'incidence de surface

La figure 4.32 montre un graphe d'incidence de surface et la n -surface équivalente.

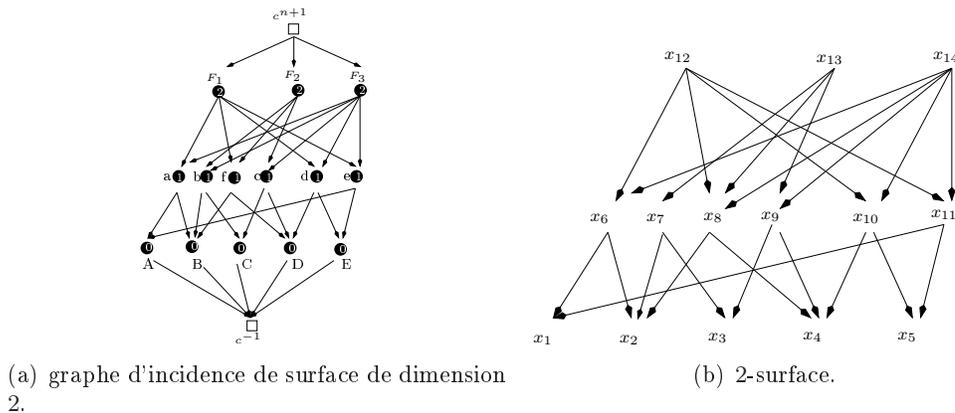


FIG. 4.32 – Graphe d'incidence de surface de dimension 2 et 2-surface équivalents.

La preuve est réalisée par induction sur la dimension n . On prouve que pour tout n , un graphe d'incidence de surface de dimension n est une n -surface et réciproquement.

L'équivalence est claire pour $n = 0$ (cf Fig. 4.33)

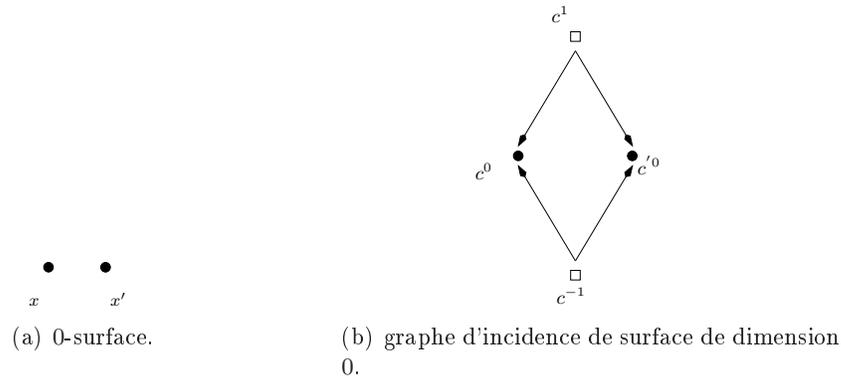


FIG. 4.33 – Equivalence entre 0-surface et graphe d'incidence de surface de dimension 0.

Pour $n > 0$, on prouve que tout sous-graphe construit sur la θ -adhérence stricte de n'importe quel élément d'un graphe d'incidence de surface est lui aussi un graphe d'incidence de surface. On montre ensuite qu'un graphe d'incidence étendu qui est localement partout un graphe d'incidence de surface est aussi globalement un graphe d'incidence de surface. Autrement dit, un graphe d'incidence étendu IG_C^* tel que tout sous-graphe construit sur la θ -adhérence stricte de n'importe lequel de ses éléments est un graphe d'incidence de surface est, lui-même, un graphe d'incidence de surface. Ainsi, un graphe d'incidence de surface de dimension n peut être défini récursivement. Il s'agit simplement d'un graphe d'incidence étendu tel que tout sous-graphe construit sur la stricte θ -adhérence de n'importe lequel de ses éléments est un graphe d'incidence de surface de dimension $(n - 1)$.

Comme les graphes d'incidence de surface de dimension n et les n -surfaces sont équivalents pour $n = 0$ et qu'ils sont bâtis via la même récurrence pour tout $n > 0$, ils sont donc équivalents pour tout n .

n - G -carte simpliciale connexe fermée et graphe d'incidence de surface

Une n - G -carte simpliciale connexe fermée et le graphe d'incidence de surface équivalent sont dessinés sur la figure 4.34.

Nous allons d'abord prouver que le graphe d'incidence associé à toute n - G -carte simpliciale connexe fermée est un graphe d'incidence de surface. Un tel graphe vérifie déjà une partie de la définition puisque chacune de ses cellules appartient à au moins un $(n + 1)$ -uplet de cellules. Il faut donc montrer que les $(n + 1)$ -involutions définies sur une carte induisent un opérateur **switch** sur le graphe d'incidence. Ces involutions sont en effet des involutions sur les brins de la carte et induisent donc $(n + 1)$ involutions sur les $(n + 1)$ -uplets du graphe d'incidence associé. Et nous verrons alors comment la propriété de simplicité maximale entrant dans la caractérisation des cartes simpliciales (Thé 4.34 page 146) permet de montrer que ces involutions induisent une propriété de **switch** sur les $(n + 1)$ -uplets. Il faut ensuite vérifier la propriété relative à l'intersection des θ^\square -adhérences de tout sous-ensemble totalement ordonné de cellules de C .

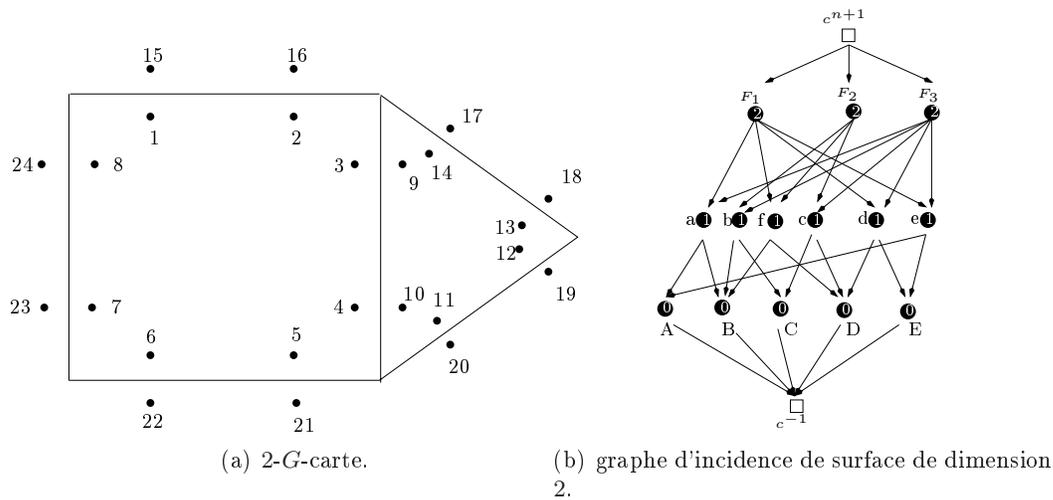
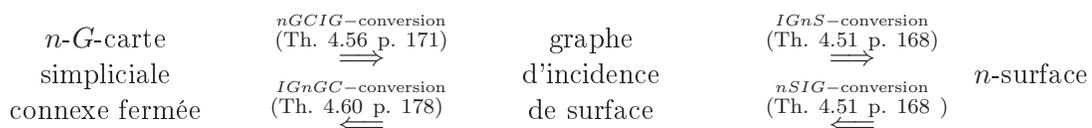


FIG. 4.34 – Une 2- G -carte et une graphe d'incidence de surface équivalents.

A cette fin, on utilise la propriété de simplicité minimale de la carte, pour montrer que si l'intersection est non vide et contient plus de deux éléments, il est possible de relier deux cellules quelconques de l'intersection par un chemin du graphe qui reste dans l'intersection. On démontre pour cela une sorte de connexité entre $(n + 1)$ -uplets contenant un nombre fini de cellules prédéterminées.

La réciproque a déjà été partiellement prouvée par Brisson [36]. Nous commençons par prouver que l'opérateur `switch` défini sur un graphe d'incidence de surface de dimension n induit $(n + 1)$ -involutions sans point fixe sur les $(n + 1)$ -uplets de cellules du graphe. Nous montrons ensuite que ces involutions permutent lorsqu'il existe une différence d'au moins 2 entre leurs indices. Le $(n + 2)$ -uplet constitué de l'ensemble des $(n + 1)$ -uplets de cellule du graphe d'incidence de surface, et des $(n + 1)$ involutions est ainsi une n - G -carte fermée respectant la propriété de simplicité maximale (Thé. 4.34). On utilise ensuite la caractérisation récursive des graphes d'incidence de surface pour montrer qu'il est possible de passer de tout $(n + 1)$ -uplet contenant un ensemble de k -cellules déterminés ($k \in \{0, \dots, n + 1\}$) à n'importe quel autre $(n + 1)$ -uplet contenant les mêmes cellules en utilisant une composition d'involutions dont les indices sont différents des dimensions des cellules fixées. Ceci traduit tout simplement le caractère simplicial de la carte obtenue.

Organisation de la preuve



Une dernière partie utilise ces deux équivalences pour montrer que les n - G -cartes simpliciales connexes fermées et les n -surfaces représentent exactement les mêmes objets.

4.2.4 Preuve de l'équivalence entre un sous-ensemble des n - G -cartes et les n -surfaces

On montre d'abord que les graphes d'incidence de surface de dimension n et les n -surfaces sont équivalents. On prouve ensuite l'équivalence entre les n - G -cartes simpliciales connexes fermées et les graphes d'incidence de surface. On déduit finalement de ces deux équivalences le lien entre les n - G -cartes simpliciales connexes fermées et les n -surfaces.

Équivalence entre les n -surfaces et les graphes d'incidence de surface

On démontre maintenant deux lemmes qui, ensemble, fournissent une définition récursive des graphes d'incidence de surface de dimension n .

Le lemme suivant exprime le fait qu'étant donné un graphe d'incidence de surface tout sous-graphe de la forme $\theta^\square(c)$ avec $c \in C$ est aussi un graphe d'incidence de surface. Une illustration de ce lemme se trouve sur la figure 4.35.

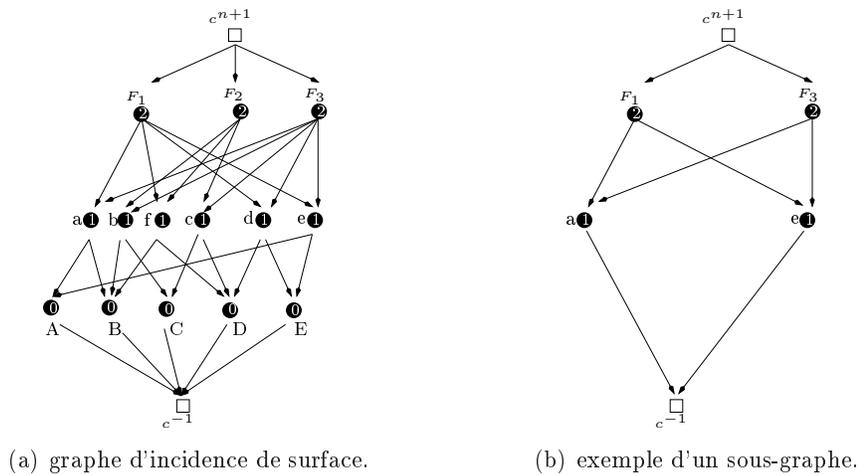


FIG. 4.35 – Un graphe d'incidence de surface de dimension 2 (a) et un de ses sous-graphes, construit sur $\theta^\square(A)$, qui est un graphe d'incidence de surface de dimension 1 (b).

Lemme 4.47 Soit IG_C^* un graphe d'incidence de surface de dimension $n \geq 1$, alors $\forall c \in C$, $\theta^\square(c)$ est un graphe d'incidence de surface de dimension $(n - 1)$

Preuve : Soit c^i une i -cellule de C , $i \in \{0, \dots, n\}$. On considère $(\theta^\square(c^i), \prec_{c^i})$ qui est bien entendu un graphe d'incidence de dimension $n - 1$. On doit prouver que $\theta^\square(c^i)$ est aussi un graphe de surface. On règle d'abord le cas $n = 1$ puis on s'occupe des graphes de dimension strictement supérieure à 1 :

$n = 1$:

$(\theta^\square(c^i), \prec_{c^i})$ est ici un graphe de dimension 0. De plus, par la propriété iv)b des graphes d'incidence de surface, $\theta^\square(c^i)$ est exactement composé de deux cellules de même dimension, donc $\theta^\square(c^i)$ contient précisément deux cellules de dimension 0 et constitue ainsi un graphe d'incidence de surface de dimension 0 (Corollaire 4.46).

$n > 1$:

- i). La dimension de IG_C^* est égale à n , $n > 1$. La propriété iv)c des graphes de surface, indique que $(\theta^\square(c^i), \prec_{c^i})$ est connexe.
- ii). De même toute cellule c^j de $\theta^\square(c^i)$ étant une cellule de C , elle appartient à un $(n+1)$ -uplet de cellules dans $C : (c^0, \dots, c^j, \dots, c^n)$. c^i appartient aussi à au moins un $(n+1)$ -uplet de cellules de $C : (c^0, \dots, c^{i-1}, c^i, c^{i+1}, \dots, c^n)$. Si $c^j < c^i$, il existe un suite de cellule $c''^{j+1} \prec c''^{j+2} \prec \dots \prec c''^{i-1}$ telles que $c^j \prec c''^{j+1}$ et $c''^{i-1} \prec c^i$ alors c^j appartient au $(n+1)$ -uplet : $(c^0, \dots, c^{j-1}, c^j, c''^{j+1}, \dots, c''^{i-1}, c^i, c^{i+1}, \dots, c^n)$. Et c^j appartient ainsi au n -uplet $(c^0, \dots, c^{j-1}, c^j, c''^{j+1}, \dots, c''^{i-1}, c^{i+1}, \dots, c^n)$ de $\theta^\square(c^i)$. Le raisonnement est identique pour $c^i < c^j$.
- iii). On montre maintenant que tout θ^\square -triplet est un **switch** θ^\square -triplet.
Comme $\theta^\square(c^i) = \{c^j \in C, c^j < c^i \text{ ou } c^i < c^j\}$, les $\theta^\square(c^i)$ -triplets de cellules consécutives ont une des formes suivantes :
– (c^{j-1}, c^j, c^{j+1}) avec $j+1 \leq i-1$ ou $j-1 \geq i+1$,
– $(c^{i-2}, c^{i-1}, c^{i+1})$
– $(c^{i-1}, c^{i+1}, c^{i+2})$.
Toutes les $\theta^\square(c^i)$ -triplets de cellules consécutives (c^{j-1}, c^j, c^{j+1}) , pour $j+1 \leq i-1$ ou $j-1 \geq i+1$ sont des **switch** IG_C^* -triplets et vérifient donc la propriété iii) des graphes d'incidence de surface. Il reste à prouver que cette propriété reste vraie sur les $\theta^\square(c^i)$ -triplets de cellules consécutives restant. Or il existe une bijection entre l'ensemble constitué de ces $\theta^\square(c^i)$ -triplets de cellules consécutives et l'ensemble des **switch** IG_C^* -quadruplets contenant c^i en seconde et troisième position.
Considérons par exemple $(c^{i-2}, c^{i-1}, c^i, c^{i+1})$ qui est un **switch** IG_C^* -quadruplet et qui correspond au $\theta^\square(c^i)$ -triplet $(c^{i-2}, c^{i-1}, c^{i+1})$.
Comme (c^{i-2}, c^{i-1}, c^i) est un **switch** IG_C^* -triplet, il existe une unique c'^{i-1} qui soit la (c^{i-2}, c^i) -jumelle de c^{i-1} dans IG_C^* .
 $(c^{i-2}, c'^{i-1}, c^i, c^{i+1})$ est ainsi l'unique **switch** IG_C^* -quadruplet qui diffère de $(c^{i-2}, c^{i-1}, c^i, c^{i+1})$ seulement sur la $(i-1)$ -cellule. c'^{i-1} appartient aussi à $\theta^\square(c^i)$.
Donc c'^{i-1} est la (c^{i-2}, c^i) -jumelle de c^{i-1} dans $\theta^\square(c^i)$. On utilise le même argument pour les triplets de la forme $(c^{i-1}, c^{i+1}, c^{i+2})$, ce qui permet de conclure cette partie de la preuve.
- iv). L'intersection des $\theta^\square_{|\theta^\square(c^i)}$ -adhérences d'un ensemble d'éléments O_i de $\theta^\square(c^i)$ est égale à l'intersection des θ^\square -adhérences de ces éléments dans C avec $\theta^\square(c^i)$ (cf Prop. 4.40). Or IG_C^* est un graphe de surface de dimension $n > 1$, donc d'après la propriété iv) de tels graphes,
 $(\bigcap_{c \in O_i} \theta^\square(c)) \cap \theta^\square(c^i)$ est :
– vide si $\text{card}(O_i) + 1 = n + 1$, i.e. $\text{card}(O_i) = n$
– composée de deux cellules de même dimension si $\text{card}(O_i) + 1 = n$, i.e. $\text{card}(O_i) = n - 1$
– connexe si $\text{card}(O_i) + 1 \leq n - 1$, i.e. $\text{card}(O_i) \leq n - 2$
La propriété iv) est donc bien vérifiée pour le graphe $(\theta^\square(c^i), \prec_{c^i})$ dont la dimension est égale à $(n - 1)$.

□

Un opérateur *switch* peut ainsi être construit sur chaque sous-graphe :

Corollaire 4.48 Soit IG_C^* un graphe d'incidence de surface et son opérateur **switch** associé. Alors $\forall c^i \in C^*$, l'opérateur \mathbf{switch}_{c^i} induit sur $\theta^\square(c^i)$ est tel que :

- $\forall (c^{j-1}, c^j, c^{j+1})$, tels que $j+1 \leq i-1$ et $j-1 \geq i+1$,
 $\mathbf{switch}_{c^i}(c^{j-1}, c^j, c^{j+1}) = c'^j$, avec $c'^j = \mathbf{switch}(c^{j-1}, c^j, c^{j+1})$
- $\forall (c^{i-2}, c^{i-1}, c^{i+1})$,
 $\mathbf{switch}_{c^i}(c^{i-2}, c^{i-1}, c^{i+1}) = c'^{i-1}$, avec $c'^{i-1} = \mathbf{switch}(c^{i-2}, c^{i-1}, c^i)$,
- $\forall (c^{i-1}, c^{i+1}, c^{i+2})$,
 $\mathbf{switch}_{c^i}(c^{i-1}, c^{i+1}, c^{i+2}) = c'^{i+1}$, avec $c'^{i+1} = \mathbf{switch}(c^i, c^{i+1}, c^{i+2})$.

Le prochain lemme montre qu'un graphe d'incidence étendu IG_C^* de dimension au moins 1 qui est localement partout un graphe d'incidence de surface est lui-même un graphe d'incidence de surface.

Lemme 4.49 Soit IG_C^* un graphe d'incidence étendu connexe de dimension $n \geq 1$, tel que $\forall c \in C$, $\theta^\square(c)$ est un graphe d'incidence de surface de dimension $n-1$ alors IG_C^* est aussi un graphe d'incidence de surface.

Preuve : On va prouver que IG_C^* vérifie bien les 4 propriétés caractérisant un graphe d'incidence de surface :

- i). Par hypothèse, le graphe d'incidence est connexe,
- ii). Soit une cellule c^i de C . On va prouver qu'il existe au moins un $(n+1)$ -uplet de cellules de C contenant c^i . $\theta^\square(c^i)$ est un graphe d'incidence de surface de dimension $n-1$. Soit c^j une cellule de $\theta^\square(c^i)$, il existe donc au moins un n -uplet de cellules dans $\theta^\square(c^i)$ contenant c^j . Si $j < i$, ce n -uplet est de la forme $(c^0, \dots, c^j, \dots, c^{i-1}, c^{i+1}, \dots, c^n)$. Comme c^{i-1} et c^{i+1} appartiennent à $\theta^\square(c^i)$, $c^{i-1} \prec c^i \prec c^{i+1}$ dans C . Et $(c^0, \dots, c^j, \dots, c^{i-1}, c^i, c^{i+1}, \dots, c^n)$ est un $(n+1)$ -uplet de cellules de C contenant c^i . Le raisonnement est similaire si $j > i$.
- iii). Soit (c^{i-1}, c^i, c^{i+1}) un IG_C^* -triplet de cellules consécutives. On doit prouver qu'il existe un unique $c'^i \in C$, tel que (c^{i-1}, c'^i, c^{i+1}) soit aussi un **switch** IG_C^* -triplet. On remarque d'abord qu'au moins une des deux cellules c^{i-1} , c^{i+1} n'est pas une cellule fictive et appartient donc à C puisque IG_C^* est de dimension au moins 1. On suppose par la suite que $c^{i-1} \neq c^{-1}$ (le raisonnement serait identique si on supposait $c^{i+1} \neq c^{n+1}$).

Nous prouvons d'abord qu'il existe au moins une telle cellule c'^i , puis nous montrons par l'absurde qu'il ne peut en exister aucune autre.

- (a) $c^{i-1} \neq c^{-1}$ implique par hypothèse que $\theta^\square(c^{i-1})$ est un graphe d'incidence de surface. Soit c^{i-2} une cellule de $\theta^\square(c^{i-1})$ (éventuellement c^{-1}) telle que (c^{i-2}, c^i, c^{i+1}) soit un **switch** $\theta^\square(c^{i-1})$ -triplet. Il existe donc une unique $c'^i \in \theta^\square(c^{i-1})$, $c'^i \neq c^i$, telle que (c^{i-2}, c'^i, c^{i+1}) soit un **switch** $\theta^\square(c^{i-1})$ -triplet. Ceci implique alors que (c^{i-1}, c'^i, c^{i+1}) est un IG_C^* -triplet de cellules consécutives.
- (b) S'il existe une troisième cellule c''^i tel $(c^{i-1}, c''^i, c^{i+1})$ soit aussi un IG_C^* -triplet. Alors c''^i appartient aussi à $\theta^\square(c^{i-1})$. Et $(c^{i-2}, c''^i, c^{i+1})$ est un **switch** $\theta^\square(c^{i-1})$ -triplet, mais il existe déjà deux tels triplets ce qui est en contradiction avec les propriétés de $\theta^\square(c^{i-1})$.

- iv). On traite ici deux cas séparément :

- n = 1** Les ensembles totalement ordonnés non vides de IG_C^* contiennent soit 1 soit 2 éléments. On considère d'abord un ensemble ordonné contenant 2 éléments, nécessairement une 0-cellule et une 1-cellule. L'intersection de leurs θ^\square -adhérence est vide dans C puisqu'une telle intersection ne pourrait contenir que des cellules de dimensions strictement inférieures à 0 et strictement supérieures à 1. La propriété iv)a des graphes de surface est vérifiée. De plus, pour toute cellule c de C , $\theta^\square(c)$ est un graphe d'incidence de surface de dimension 0 et contient donc exactement deux éléments de même dimension. Et la propriété iv)b des graphes de surface est avérée. Enfin le cas iv)c ne peut pas se produire pour un graphe de dimension 1.
- n > 1** Pour toute cellule c de C , $\theta^\square(c)$ est ici un graphe d'incidence de surface de dimension au moins 1 (puisque $n > 1$) et est donc connexe. Soit un ensemble totalement ordonné d'éléments de C : $\{c^i\}_{i \in I}$, avec $I \subset \{0, \dots, n\}$, $\text{card}(I) \geq 2$, tels que $\bigcap_{i \in I} \theta^\square(c^i) \neq \emptyset$. Soit un $j \in I$, $\bigcap_{i \in I \setminus \{j\}} (\theta^\square(c^i) \cap \theta^\square(c^j)) = \bigcap_{i \in I} \theta^\square(c^i)$. Or d'après la propriété 4.40, $\forall i \in I \setminus \{j\}$, $\theta^\square(c^i) \cap \theta^\square(c^j) = \theta_{|\theta^\square(c^j)}^\square(c^i)$. Autrement dit $\bigcap_{i \in I} \theta^\square(c^i) = \bigcap_{i \in I \setminus \{j\}} \theta_{|\theta^\square(c^j)}^\square(c^i)$. Et puisque $\theta^\square(c^j)$ est un graphe d'incidence de surface, l'intersection possède bien la propriété voulue. □

Ces deux lemmes conduisent au théorème suivant qui donne une caractérisation récursive des graphes d'incidence de surface de dimension n :

Théorème 4.50 (Caractérisation récursive des graphes d'incidence de surface) Soit $IG_C^* = (C^*, \prec)$ un graphe d'incidence étendu de dimension n , alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i). IG_C^* est un graphe d'incidence de surface non vide,
- ii). IG_C^* est tel que :
 - si $n = 0$, C contient exactement deux 0-cellules, c^0 et c'^0 telles que c^0 et c'^0 soient (c^{-1}, c^{n+1}) -jumelles dans IG_C^*
 - si $n > 0$, C est tel que pour tout $c \in C$, $\theta^\square(c)$ est un graphe d'incidence de surface de dimension $n - 1$.

Preuve : Nous allons prouver que i) \Leftrightarrow ii) pour tout n . La preuve est d'abord réalisée pour $n = 0$ puis pour $n > 0$

n = 0 : provient directement du corollaire 4.46.

n > 0 :

\Rightarrow Soit IG_C^* un graphe d'incidence de surface de dimension n . $\forall c \in C_n$, $\theta^\square(c)$ est par le lemme 4.47 un graphe d'incidence de surface de dimension $n - 1$.

\Leftarrow Soit IG_C^* un graphe d'incidence étendu de dimension n remplissant les conditions de ii). Pour tout $c \in C_n$, $\theta^\square(c)$ est un graphe d'incidence de surface de dimension $n - 1$. Comme la dimension de IG_C^* est, par hypothèse, strictement supérieure à 0, alors il est via le lemme 4.49 un graphe d'incidence de surface. □

Cette caractérisation récursive identique à la définition des n -surfaces conduit immédiatement au théorème ci-dessous :

Théorème 4.51 (Equivalence entre les graphes d'incidence de surface de dimension n et les n -surfaces) Soit $IG_C = (C, \prec)$ un graphe d'incidence et $|X| = (X, \alpha)$ un ordre

- i). $IG_C^* = (C \cup \{c^{-1}, c^{n+1}\}, \prec)$ est un graphe d'incidence de surface \Rightarrow son ordre associé est une n -surface,
- ii). $|X| = (X, \alpha)$ est une n -surface \Rightarrow son graphe d'incidence associé est un graphe d'incidence de surface.

Lorsqu'un graphe d'incidence est un graphe d'incidence de surface, $\psi_{IG \rightarrow X}$ est appelée une *IGNS-conversion*. Et lorsqu'un ordre est une n -surface, $\psi_{X \rightarrow IG}$ est nommée *nSIG-conversion*.

Comme les graphes d'incidence de surface et les n -surfaces sont équivalents, il est possible d'exprimer un lien entre l'opérateur **switch** sur les graphes d'incidence de surface et les relations α et β sur la n -surface équivalente.

Corollaire 4.52 Soit $IG_C^* = (C^*, \prec)$ un graphe d'incidence de surface et $|X| = (X, \alpha)$ une n -surface équivalente. Si on note X^* , l'ensemble X auquel sont ajoutés deux éléments additionnels y et y' tels que $\forall x \in X, y \in \alpha(x)$ and $x \in \alpha(y')$. Soit $\psi_{IG \rightarrow X}^*$ la bijection de C^* sur X^* alors :

$$\forall (c^{i-1}, c^i, c^{i+1}), \text{switch } IG_C^* \text{-triplet,}$$

$$\text{switch}(c^{i-1}, c^i, c^{i+1}) = \psi_{IG \rightarrow X}^{*-1}(\alpha^\square(\psi_{IG \rightarrow X}^*(c^{i+1})) \cap \beta^\square(\psi_{IG \rightarrow X}^*(c^{i-1})) \setminus \{\psi_{IG \rightarrow X}^*(c^i)\})$$

Equivalence entre les n - G -cartes simpliciales connexes fermées et les graphes d'incidence de surface

On montre d'abord que le graphe d'incidence construit par l'application $\psi_{nGC \rightarrow IG}$ à partir d'une carte simpliciale connexe fermée est un graphe d'incidence de surface. On prouve ensuite que l'on peut définir une application $\psi_{IG \rightarrow nGC}$ permettant de construire une carte simpliciale connexe fermée à partir d'un graphe d'incidence de surface.

Afin de prouver que le graphe d'incidence associé à une n - G -carte simpliciale connexe fermée est un graphe d'incidence de surface, il est nécessaire de mettre en évidence quelques propriétés particulières des orbites définies sur les n - G -cartes. Les preuves sont essentiellement fondées sur des manipulations de permutations. Il s'agit plus précisément de réaliser des arrangements adéquats d'involutions α en s'appuyant principalement sur la propriété de commutativité des α s dont les indices diffèrent d'au moins deux. Les lemmes préliminaires (Lemmes 4.53, 4.54, et 4.55) ne requièrent quasiment aucune propriété particulière sur les cartes, seul le premier nécessite que la carte soit fermée (Lemme 4.53). La condition de "simplicialité" de la carte n'intervient que dans le théorème 4.56.

Les deux premiers lemmes que nous introduisons doivent être interprétés sur l'ensemble semi-simplicial numéroté associé à la n - G -carte, tandis que le dernier est plutôt relié à la subdivision cellulaire représentée.

Le premier lemme dit que pour toute n - G -carte fermée vérifiant la propriété de simplicité maximale (cf Eq. 4.10 du théorème 4.34), trois 0-simplexes étiquetés par des numéros consécutifs et reliés à un même brin appartiennent à un unique 2-simplexe⁸

⁸On peut noter que cette propriété est nécessairement vérifiée par une n - G -carte simpliciale. On montre ici qu'en fait, elle ne dépend pas de la propriété de simplicité minimale. Du point de vue du résultat final, cette démonstration est superflue mais il s'agit ici de bien mettre en évidence le rôle joué par chacune des différentes propriétés des n - G -cartes simpliciales connexes fermées dans l'obtention du résultat, autrement dit de bien voir où intervient chacune des hypothèses.

Lemme 4.53 Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte fermée vérifiant la propriété de simplicité maximale. Soit d un brin de D et $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}(d) = \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d)$$

Preuve : La preuve est réalisée en deux étapes :

- ▷ Soit $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d)$, il existe un nombre fini de permutations β_0, \dots, β_h telles que $\forall k \in \{0, \dots, h\}$, $\beta_k \neq \alpha_{i-1}$, $\beta_k \neq \alpha_i$, $\beta_k \neq \alpha_{i+1}$ et $d' = d\beta_0 \dots \beta_h$. d' appartient donc à $\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}(d)$.
- ◁ Soit $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}(d)$. On désire prouver qu'il existe une composition d'involutions permettant de passer de d à d' et qui ne contient ni α_{i-1} , ni α_i , ni α_{i+1} .

Comm $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1\}}(d)$, il existe un nombre fini d'involutions parmi les α_k , $k \in N-\{i-1\}$, telles que d' soit l'image de d par une composition de ces involutions. Comme il existe une différence d'au moins deux entre les indices des involutions inférieurs à $i-1$ et supérieurs à $i-1$, on peut réarranger la composition de ces involutions de la manière suivante :

$$d' = d \underbrace{\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_m}}_{j_r < i-1} \underbrace{\alpha_{j_{m+1}} \dots \alpha_{j_p}}_{i-1 < j_r} \quad (4.25)$$

De même comme $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d)$ et $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}(d)$, on a aussi :

$$d' = d \underbrace{\alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_s}}_{l_r < i} \underbrace{\alpha_{l_{s+1}} \dots \alpha_{l_q}}_{i < l_r} \quad (4.26)$$

$$d' = d \underbrace{\alpha_{k_1} \dots \alpha_{k_t}}_{k_r < i+1} \underbrace{\alpha_{k_{t+1}} \dots \alpha_{k_v}}_{i+1 < k_r} \quad (4.27)$$

$$\text{Soit } d'' = d \underbrace{\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_m}}_{j_r < i-1}$$

On remplace d par $d'' \alpha_{j_m} \dots \alpha_{j_1}$ dans l'équation 4.26 et on obtient alors :

$$d' = d'' \underbrace{\alpha_{j_m} \dots \alpha_{j_1}}_{j_r < i-1} \underbrace{\alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_s}}_{l_r < i} \underbrace{\alpha_{l_{s+1}} \dots \alpha_{l_q}}_{i < l_r} \quad (4.28)$$

Par l'équation 4.25, d' est égal à $d'' \alpha_{j_{m+1}} \dots \alpha_{j_p}$ et par l'équation 4.28 d' est aussi égal à $d'' \alpha_{j_m} \dots \alpha_{j_1} \alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_s} \alpha_{l_{s+1}} \dots \alpha_{l_q}$.

En multipliant les deux côtés de l'équation 4.28 par $\alpha_{l_q} \dots \alpha_{l_{s+1}}$ et en substituant d' par $d'' \alpha_{j_{m+1}} \dots \alpha_{j_p}$ on obtient :

$$d^3 = d'' \underbrace{\alpha_{j_{m+1}} \dots \alpha_{j_p}}_{i-1 < j_r} \underbrace{\alpha_{l_q} \dots \alpha_{l_{s+1}}}_{i < l_r} = d'' \underbrace{\alpha_{j_m} \dots \alpha_{j_1}}_{j_r < i-1} \underbrace{\alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_s}}_{l_r < i}$$

La première partie de l'égalité implique que $d^3 \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i'\}}(d'')$ pour tout $i' \leq i-1$, tandis que la seconde signifie que $d^3 \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i'\}}(d'')$ pour tout $i' \geq i$. La propriété de simplicité maximale implique que $d^3 = d''$. Et la seconde partie de l'égalité conduit donc à $d'' = d'' \underbrace{\alpha_{j_m} \dots \alpha_{j_1}}_{j_r < i} \underbrace{\alpha_{l_1} \dots \alpha_{l_s}}_{l_r < i}$

L'équation 4.28 devient alors :

$$d' = d'' \underbrace{\alpha_{l_{s+1}} \cdots \alpha_{l_q}}_{i < l_r} \quad (4.29)$$

On remplace maintenant d par $d'' \alpha_{j_m} \cdots \alpha_{j_1}$ dans l'équation 4.27 :

$$d' = d'' \underbrace{\alpha_{j_m} \cdots \alpha_{j_1}}_{j_r < i-1} \underbrace{\alpha_{k_1} \cdots \alpha_{k_t}}_{k_r < i+1} \underbrace{\alpha_{k_{t+1}} \cdots \alpha_{k_v}}_{i+1 < k_r} \quad (4.30)$$

En substituant dans 4.30 d' par sa valeur dans 4.29 et en multipliant de part et d'autre par $\alpha_{k_v} \cdots \alpha_{k_{t+1}}$, on obtient :

$$d^A = d'' \underbrace{\alpha_{l_{s+1}} \cdots \alpha_{l_q}}_{i < l_r} \underbrace{\alpha_{k_v} \cdots \alpha_{k_{t+1}}}_{i+1 < k_r} = d'' \underbrace{\alpha_{j_m} \cdots \alpha_{j_1}}_{j_r < i-1} \underbrace{\alpha_{k_1} \cdots \alpha_{k_t}}_{k_r < i+1}$$

La première égalité implique que $d^A \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i'\}}$ (d'') pour tout $i' \leq i$, la seconde indique que $d^A \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i'\}}$ (d'') pour tout $i' \geq i+1$. La propriété de simplicité maximale entraîne alors $d^A = d''$. Autrement dit, $d'' = d'' \alpha_{j_m} \cdots \alpha_{j_1} \alpha_{k_1} \cdots \alpha_{k_t}$. En remplaçant la partie droite de la précédente équation par d'' dans 4.30, on a alors :

$$d' = d'' \underbrace{\alpha_{k_{t+1}} \cdots \alpha_{k_v}}_{i+1 < k_r} \quad (4.31)$$

Ainsi d' appartient à $\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}$ (d''). Or par définition, $d'' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d)$, ce qui signifie que $\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d'') = \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d)$. Et finalement d' appartient bien à $\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d)$. \square

Le deuxième lemme indique que pour toute n - G -carte, un 1-simplexe entre deux 0-simplexes numérotés $i-1$ et $i+1$ appartient à au plus deux 2-simplexes.

Lemme 4.54 Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte. Soit d un brin de D et $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i+1\}}(d) = \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d) \cup \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d\alpha_i)$$

Preuve : Par construction, $\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d) \cup \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d\alpha_i) \subset \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i+1\}}(d)$.

Il reste à prouver que $\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i+1\}}(d) \subset \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d) \cup \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d\alpha_i)$. Soit $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i+1\}}(d)$. Il existe alors un nombre fini d'involutions parmi les α_k , $k \in N - \{i-1, i+1\}$, telles que d' est l'image de d par une composition de ces involutions. Comme il existe une différence d'au moins deux entre les indices des involutions inférieurs à $i-1$ et supérieurs à $i+1$, on peut réarranger la composition de ces involutions :

$$d' = d \underbrace{\alpha_{j_{m+1}} \cdots \alpha_{j_{p-1}}}_{i-1 < j_r < i+1} \underbrace{\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_m}}_{j_r < i-1} \underbrace{\alpha_{j_p} \cdots \alpha_{j_l}}_{j_r > i+1}$$

$\forall k \in \{m+1, \dots, p-1\}, j_k = i$, et comme α_i est une involution on a donc :

$$\begin{aligned} \text{soit } d' &= d \underbrace{\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_m}}_{j_r < i-1} \underbrace{\alpha_{j_p} \cdots \alpha_{j_l}}_{j_r > i+1} \\ \text{soit } d' &= (d\alpha_i) \underbrace{\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_m}}_{j_r < i-1} \underbrace{\alpha_{j_p} \cdots \alpha_{j_l}}_{j_r > i+1} \end{aligned}$$

Ainsi, soit $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d)$ soit $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d\alpha_i)$. \square

Le troisième lemme montre que toute 1-cellule de la subdivision cellulaire associée à une n - G -carte a au plus deux 0-faces et que toute $(n-1)$ -cellule est face d'au plus deux n -cellules.

Lemme 4.55 Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte et d, d' deux brins de D .

- i). $\langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d) = (\langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(d)) \cup (\langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(d\alpha_0))$
- ii). $\langle \alpha \rangle_{N-\{n-1\}}(d) = (\langle \alpha \rangle_{N-\{n-1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{n\}}(d)) \cup (\langle \alpha \rangle_{N-\{n-1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{n\}}(d\alpha_n))$

Preuve : i). \Leftarrow est immédiat. Il reste donc à prouver \Rightarrow . Soit $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d)$. Il existe alors un nombre fini d'involutions parmi les $\alpha_k, k \in N - \{i\}$, telles que d' soit l'image de d par une composition de ces involutions. Comme il existe une différence d'au moins deux entre les indices des involutions inférieurs à 1 et supérieurs à 1, on peut réarranger la composition d'involutions de sorte que :

$$d' = d \underbrace{\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_s}}_{l_r < 1} \underbrace{\alpha_{l_{s+1}} \cdots \alpha_{l_q}}_{1 < l_r} \quad (4.32)$$

Autrement dit, $l_r = 0$ pour $r \in \{1, \dots, s\}$. Comme α_0 est une involution, on a soit $d' = d\alpha_0 \underbrace{\alpha_{l_{s+1}} \cdots \alpha_{l_q}}_{1 < l_r}$ soit $d' = d \underbrace{\alpha_{l_{s+1}} \cdots \alpha_{l_q}}_{1 < l_r}$. Autrement dit, $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(d)$ ou $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(d\alpha_0)$.

ii). La preuve est similaire. \square

Nous pouvons maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 4.56 (Construction d'un graphe d'incidence de surface à partir d'une carte simpliciale connexe fermée) Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte simpliciale connexe fermée. Le graphe d'incidence construit par $\psi_{nGC \rightarrow IG}$ à partir de G est un graphe d'incidence de surface.

On parle de n GCIG-conversion.

Preuve : Une 0- G -carte connexe comporte exactement deux brins reliés par α_0 . La subdivision associée est donc composée de deux 0-cellules déconnectées, son graphe d'incidence associé est donc un graphe d'incidence de surface (cf Corollaire 4.46). Il reste donc à prouver le théorème lorsque la dimension de la carte est strictement supérieure à 0.

- i). La subdivision associée à toute carte connexe de dimension supérieure à 0 est, par définition, connexe.
- ii). De plus comme nous l'avons déjà précédemment évoqué toute cellule du graphe d'incidence représentant la subdivision associée à une carte appartient à au moins un $(n + 1)$ -uplet de cellules.
- iii). On doit prouver que le graphe d'incidence associé à G a la propriété requise pour y construire un opérateur **switch**. Cette propriété peut s'exprimer de manière équivalente sur les $(n + 1)$ -uplets de cellule du graphe en tenant compte de la présence des deux cellules fictives c^{-1} et c^{n+1} [36]. Pour tout couple de cellules (c^{i-1}, c^{i+1}) , il doit exister exactement deux cellules distinctes c^i et c'^i telle que tous les $(n + 1)$ -uplets de cellules contenant c^{i-1} et c^{i+1} contiennent aussi soit c^i , soit c'^i . De plus, comme il existe une bijection entre l'ensemble des brins d'une n - G -carte vérifiant la propriété de simplicité maximale et l'ensemble des $(n + 1)$ -uplets de cellules du graphe d'incidence associé (Lemme 4.43 page 156), on peut réaliser la démonstration de manière équivalente sur les brins ou les $(n + 1)$ -uplets de cellules.

Etant donnée deux cellules c^{i-1} et c^{i+1} , on choisit un des $(n + 1)$ -uplets de cellules les contenant et on appelle d l'unique brin de la carte associé à ce $(n + 1)$ -uplet de cellules. Par définition des cellules de la subdivision associée (Déf. 3.19), le brin $d\alpha_i$ correspond aussi à un $(n + 1)$ -uplet de cellules contenant à la fois c^{i-1} et c^{i+1} . Et comme la n - G -carte considérée est fermée, et vérifie la propriété de simplicité maximale, la i -cellule associée à d , $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d)$ et différente de la i -cellule associée à $d\alpha_i$, $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d\alpha_i)$. Il existe donc au moins deux i -cellules distinctes entre c^{i-1} et c^{i+1} . Il reste donc à prouver qu'il n'en existe pas d'autre. On traduit cette condition en terme d'orbites de brins.

- (a) Si $i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall d' \in D$, tel que $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1\}}(d)$ et $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}(d) \Rightarrow$ soit $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d)$, soit $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d\alpha_i)$,
- (b) $\forall d' \in D$, $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{1\}}(d) \Rightarrow d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(d)$ ou $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{0\}}(d\alpha_0)$,
- (c) $\forall d' \in D$, $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{n-1\}}(d) \Rightarrow d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{n\}}(d)$ ou $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{n\}}(d\alpha_n)$.

Les deux derniers points viennent directement du Lemme 4.55. On prouve donc le premier point.

$$\begin{array}{l}
 d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}(d) \\
 \begin{array}{l}
 \text{simplicité minimale} \\
 \iff \\
 \text{Lemme 4.54} \\
 \iff \\
 \text{Lemme 4.53} \\
 \iff
 \end{array}
 d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i+1\}}(d) \\
 d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d) \cup \langle \alpha \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(d\alpha_i) \\
 d' \in (\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}(d)) \\
 \cup (\langle \alpha \rangle_{N-\{i-1\}}(d\alpha_i) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d\alpha_i) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{i+1\}}(d\alpha_i))
 \end{array}$$

Autrement dit, $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d)$ ou $d' \in \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d\alpha_i)$.

- iv). Pour prouver le dernier point, considérons un ensemble de cellules de C de dimensions toutes différentes : $c^{i_0} < c^{i_1} < \dots < c^{i_p}$ (bien sûr $p \leq n$). On note $I = \{i_0, \dots, i_p\}$. Si l'intersection de leurs θ^\square -adhérences est non vide, cela signifie que $p < n$.

Soit deux cellules e^k et e^l appartenant à cette intersection. Il existe au moins un $(n+1)$ -uplet contenant $c^{i_0}, c^{i_1}, \dots, c^{i_p}$ et e^k et un $(n+1)$ -uplet contenant $c^{i_0}, c^{i_1}, \dots, c^{i_p}$ et e^l .

Soit d_e et $d_{e'}$ deux brins correspondant à de tels $(n+1)$ -uplets contenant respectivement e^k et e^l .

Pour tout $i \in I$, $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d_e) = \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d_{e'})$

Comme la carte est simpliciale :

$$\langle \alpha \rangle_{N-I}(d_e) = \bigcap_{i \in I} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d_e)$$

et

$$\langle \alpha \rangle_{N-I}(d_{e'}) = \bigcap_{i \in I} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d_{e'})$$

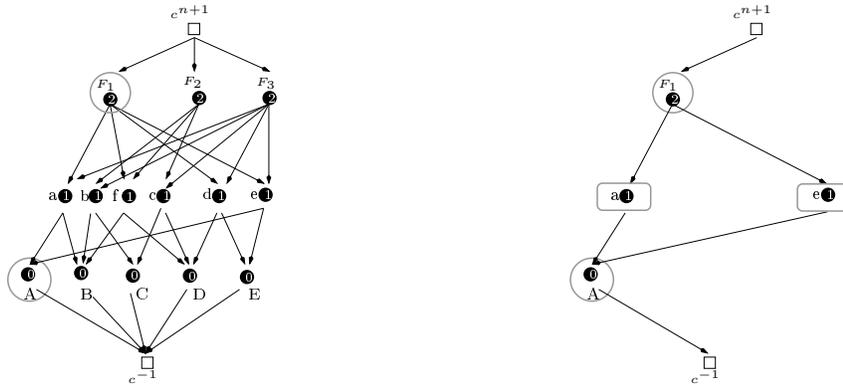
On a ainsi $\langle \alpha \rangle_{N-I}(d_e) = \langle \alpha \rangle_{N-I}(d_{e'})$. Il existe donc une composition d'involutions dont les indices n'appartiennent pas à I permettant de passer de d_e à $d_{e'}$. Autrement dit, il existe $J \in N-I$, $J \neq \emptyset$ tel que $d_e \in \langle \alpha \rangle_J(d_{e'})$.

Si $\text{card}(I) = n$, alors J contient un unique élément j , tel que $d_e = \langle \alpha \rangle_{\{j\}}(d_{e'})$. Autrement dit, comme $d_e \neq d_{e'}$, $d_e = d_{e'}\alpha_j$. Et l'intersection des θ^\square -adhérences contient exactement deux éléments de même dimension j déconnectés : $\langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d_e)$ et $\langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d_{e'})$.

La figure 4.36 page 174 illustre ce cas sur un graphe d'incidence de dimension 2 associé à la 2- G -carte de la figure 4.34. $\text{card}(I)$ est ici égal à 2, autrement dit on étudie l'intersection de deux θ^\square -adhérences via un ensemble de 3-uplets passant par deux cellules fixées (ici A et F_1). Il n'existe que deux brins passant par ces deux cellules qui sont reliés par α_1 (Fig. 4.36(a)). L'intersection des deux θ^\square -adhérences est l'ensemble composé des deux 1-cellules de ces brins, a et e .

Si $\text{card}(I) < n$, du point de vue des $(n+1)$ -uplets du graphe, cela signifie qu'il existe une suite finie de $(n+1)$ -uplets chacun différant d'une cellule par rapport au précédent permettant de passer du $(n+1)$ -uplet associé à d_e au $(n+1)$ -uplet associé à $d_{e'}$. On appelle y_0, \dots, y_m cette suite de cellules. Tous les y_k appartiennent à l'intersection des θ^\square -adhérences des c^i , $i \in I$. Alors $e^k, y_0, \dots, y_m, e^l$ constitue un chemin connexe entièrement contenu dans cette intersection. e^k et e^l sont donc connectés dans cette intersection.

La figure 4.37 page 176 met ce raisonnement en pratique sur le graphe d'incidence de dimension 2 représentant la subdivision de la figure 4.34. On considère ici le cas où $\text{card}(I) = 1$ et on étudie une θ^\square -adhérence donc un ensemble de 3-uplets contenant une cellule déterminée (ici B , Fig. 4.37(b)). On choisit deux éléments a et F_2 dans $\theta^\square(B)$ (4.37(c)) puis on associe un brin à chacun (4.37(d) et 4.37(e)). Les figures 4.37(f) et 4.37(g) mettent en évidence des brins intermédiaires qui permettent de passer de l'un à l'autre en utilisant une involution à chaque étape. La figure 4.37(h) montre le chemin ainsi construit entre a et F_2 : $a, F_1 = y_0, f = y_1, F_2$.



(a) Graphe d'incidence de surface dont on regarde les 3-uplets passant par A et F_1 .

(b) Exactement deux 3-uplets passent par A et F_1 : AaF_1 et AeF_1 . Les brins associés sont reliés par α_1 . $\theta^\square(A) \cap \theta^\square(F_1) = \{a, e\}$: deux cellules distinctes de même dimension

FIG. 4.36 – Illustration de la partie (iv) de la preuve du théorème 4.56 pour un graphe de dimension 2 quand on fixe 2 cellules.

□

On montre maintenant qu'il est possible de construire une n - G -carte à partir d'un graphe d'incidence de surface. Le premier lemme dit que l'opérateur **switch** induit $(n + 1)$ involutions sur les $(n + 1)$ -uplets de cellules du graphe d'incidence.

Lemme 4.57 *Soit un graphe d'incidence de surface IG_C^* . L'opérateur **switch** associé induit $(n + 1)$ involutions sans point fixe \mathbf{switch}_i , $i \in \{0, \dots, n\}$ sur l'ensemble des $(n + 1)$ -uplets de cellules de C , $(c^0, \dots, c^i, \dots, c^n)$. Ces involutions sont définies par :*

$$\mathbf{switch}_i((c^0, \dots, c^{i-1}, c^i, c^{i+1}, \dots, c^n)) = (c^0, \dots, c^{i-1}, c'^i, c^{i+1}, \dots, c^n)$$

$$\text{où } c'^i = \mathbf{switch}(c^{i-1}, c^i, c^{i+1})$$

Preuve : Pour toute paire de cellules $(c^{i-1}, c^{i+1}) \in C^* \times C^*$, telles que $c^{i-1} < c^{i+1}$, on note c^i et c'^i les (c^{i-1}, c^{i+1}) -jumelles dans C . Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a, par définition de l'opérateur **switch** :

$$\begin{aligned} & \mathbf{switch}_i(\mathbf{switch}_i((c^0, \dots, c^{i-1}, c^i, c^{i+1}, \dots, c^n))) \\ &= \mathbf{switch}_i((c^0, \dots, c^{i-1}, c'^i, c^{i+1}, \dots, c^n)) \\ &= (c^0, \dots, c^{i-1}, c^i, c^{i+1}, \dots, c^n) \end{aligned}$$

$\forall i \in \{0, \dots, n\}$, \mathbf{switch}_i est donc une involution sans point fixe.

□

On peut ici noter que l'ensemble des opérateurs \mathbf{switch}_i , $i \in \{0, \dots, n\}$, associé à un graphe d'incidence de surface de dimension n , induit n opérateurs **switch** sur un sous-graphe de la

forme $(\theta^\square(c^j), \prec_{c^j})$. Par souci de clarté, on indicera les opérateurs de ce sous-graphe par leur indice dans le graphe d'origine : $\{\mathbf{switch}_k\}_{k \in \{0, \dots, n\} \setminus \{j\}}$. D'autre part, la propriété 4.40 et la caractérisation récursive des graphes d'incidence de surface, garantit que tout sous-graphe induit sur un ensemble non vide de la forme $\bigcap_{i \in I} \theta^\square(c^i)$ est aussi un graphe d'incidence de surface. Et de la même manière, il existe un ensemble d'opérateurs \mathbf{switch} associé. On les identifiera aussi via leurs indices d'origine : $\{\mathbf{switch}_k\}_{k \in \{0, \dots, n\} \setminus I}$.

Avant d'exprimer la construction d'une n - G -carte simpliciale à partir d'un graphe d'incidence de surface, il est nécessaire de montrer deux propriétés sur les graphes d'incidence de surface. La première est un corollaire du théorème 4.50 page 167. Elle dit que l'intersection des θ^\square -adhérences de cellules appartenant à un même $(n + 1)$ -uplet de cellules est soit vide, soit un graphe d'incidence de surface.

Lemme 4.58 *Soit IG_C^* un graphe d'incidence de surface, de dimension $n \geq 1$, et $\{c^{i_j}\}_{j \in \{0, \dots, p\}}$, $p \leq n$, un sous-ensemble de cellules de C totalement ordonné pour la relation $<$. Soit $C' = \bigcap_{j \in \{0, \dots, p\}} \theta^\square(c^{i_j})$. Si C' n'est pas vide alors le graphe d'incidence induit sur C' est un graphe d'incidence de surface de dimension $n - (p + 1)$.*

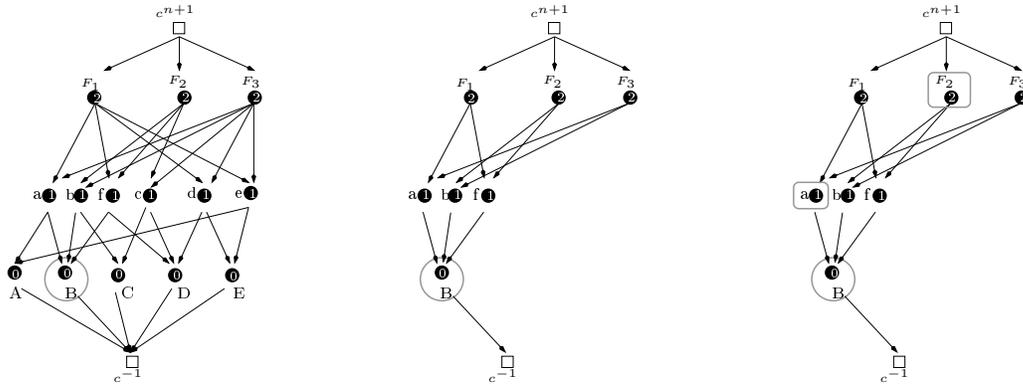
Preuve : On note I l'ensemble des indices des cellules choisies. Si I est de cardinal 1 alors par le lemme 4.47, $C_I = \theta^\square(c^i)$ est bien un graphe d'incidence de surface de dimension $n - 1$. Si la propriété est vraie pour tout I de cardinal inférieur ou égal à k , qu'en est-il lorsque $\text{card}(I) = k + 1$?

$I = \{i_0, \dots, i_k\}$ et on appelle I' l'ensemble $\{i_0, \dots, i_{k-1}\}$. Par l'hypothèse de récurrence, le graphe d'incidence induit sur $C_{I'}$ est un graphe d'incidence de surface de dimension $n - k$. D'autre part, comme $c^{i_0} < \dots < c^{i_{k-1}} < c^{i_k}$, $c^{i_k} \in C_{I'}$. Et par définition, $C_I = C_{I'} \cap \theta^\square(c^{i_k})$. Donc par la propriété 4.41, $C_I = \theta^\square_{|C_{I'}}(c^{i_k})$. Ainsi le graphe d'incidence construit sur C_I est, par le lemme 4.47, un graphe d'incidence de surface. Sa dimension est égale à celle du graphe associé à $C_{I'}$ moins 1, autrement dit $n - k - 1$.

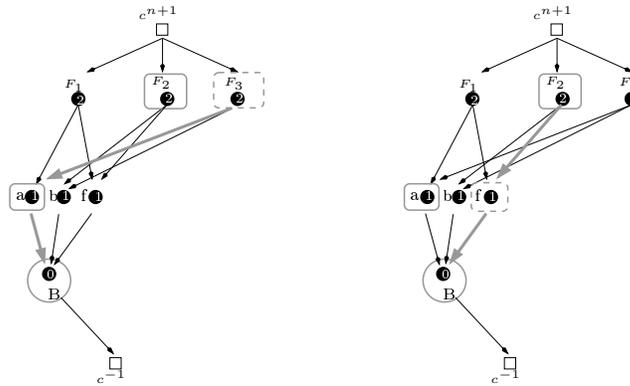
□

La deuxième propriété requise exprime une sorte de connexité par \mathbf{switch} entre les $(n + 1)$ -uplets d'un graphe d'incidence de surface dont on a fixé un nombre fini de cellules.

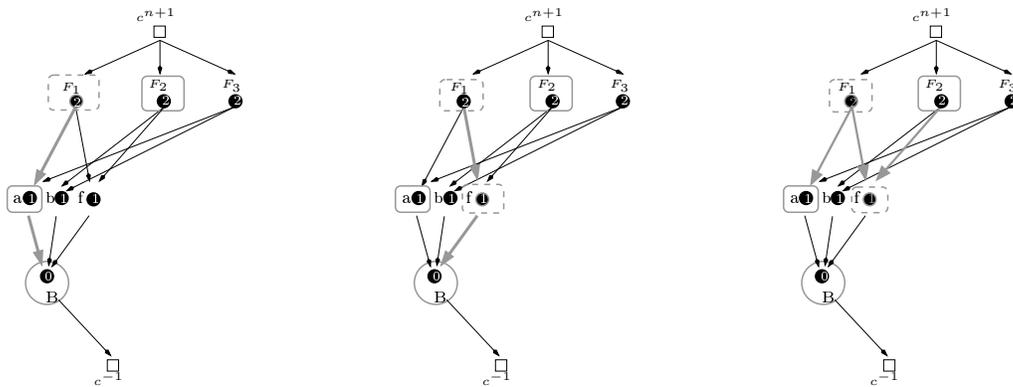
Lemme 4.59 *Soit IG_C^* un graphe d'incidence de surface. Soit $\{c^{i_j}\}_{j \in \{0, \dots, p\}}$ un sous-ensemble de cellules de C totalement ordonné pour la relation $<$. Tout $(n + 1)$ -uplet contenant ces $(p + 1)$ cellules peut être obtenu à partir de n'importe quel autre $(n + 1)$ -uplet du graphe d'incidence contenant lui aussi ces $(p + 1)$ cellules par composition d'un ensemble, éventuellement vide, d'opérateurs \mathbf{switch}_i , $i \notin \{i_0, \dots, i_p\}$.*



(a) Graphe d'incidence de surface : (b) Exactement six 3-uplets passent (c) On choisit deux éléments a et F_2 par B : $BaF_1, BaF_3, BbF_2, BbF_3, BfF_1$ et BfF_2 .



(d) On associe par exemple à (B, a) le brin d_a correspondant à BaF_3 (e) On associe par exemple à (B, F_2) le brin d_{F_2} correspondant à BfF_2



(f) Le brin associé à BaF_1 est l'image de d_a par α_2 (g) Le brin associé à BfF_1 est l'image de BaF_1 par α_1 et a pour éléments F_1 et $f : a, F_1, f, F_2$ est image d_{F_2} par α_2 . (h) Les y_k de la preuve sont ici les un chemin connexe

FIG. 4.37 – Illustration de la partie (iv) de la preuve du théorème 4.56 pour un graphe de dimension 2 quand on fixe 1 cellule.

Preuve : On appelle U_p l'ensemble des $(n+1)$ -uplets de IG_C^* contenant les cellules $\{c^{ij}\}_{j \in \{0, \dots, p\}}$.

Si $p = n$, U_p ne contient qu'un élément et le lemme est vérifié.

Si $p = n - 1$, comme IG_C^* est un graphe d'incidence de surface, U_p possède exactement 2 éléments, reliés par $switch_{i_n}$.

Pour $p < n - 1$, on va procéder par récurrence sur la dimension du graphe d'incidence de surface. On considère des graphes de dimension ≥ 1 . En effet, le cas des graphes de dimension 0 est réglé par la remarque sur le cas $p = n$.

Si IG_C^* est de dimension 1, $p < n - 1 = 0$, on s'intéresse donc à U_0 . On considère ainsi deux 2-uplets qui n'ont aucune cellule en commun : (c^0, c^1) et (c'^0, c'^1) . Comme IG_C^* est connexe, il existe un θ -chemin entre c^1 et c^0 , qui alterne des 0- et des 1-cellules : y_0 (0-cellule), y_1, \dots, y_{k-1}, y_k (1-cellule). (cf Fig. 4.38). On peut donc passer de (c^0, c^1) à (c'^0, c'^1) par le "chemin" de 2-uplets : $(c^0, c^1), (y_0, c^1), (y_0, y_1), \dots, (y_{l-1}, y_l), (c'^0, y_l), (c'^0, c'^1)$. Par définition de la propriété **switch** et des opérateurs **switch_i** induits sur les 2-uplets, on note que chacun de ces 2-uplets est l'image de son prédécesseur par **switch₀** ou **switch₁**. Le lemme est donc vérifié pour les graphes d'incidence de surface de dimension 1.

La figure 4.38 page 178 illustre ce propos. Elle présente un graphe d'incidence de surface de dimension 1. Si on considère les deux 2-uplets : (c^0, c^1) et (c'^0, c'^1) , on peut passer de l'un à l'autre en alternant des **switch₀** et des **switch₁** :

$$\begin{aligned} (c^0, c^1) \xrightarrow{\text{switch}_0} (y_0, c^1) \xrightarrow{\text{switch}_1} (y_0, y_1) \xrightarrow{\text{switch}_0} (y_2, y_1) \xrightarrow{\text{switch}_1} (y_2, y_3) \xrightarrow{\text{switch}_0} (y_4, y_3) \\ (y_4, y_3) \xrightarrow{\text{switch}_1} (y_4, c'^1) \xrightarrow{\text{switch}_0} (c'^0, c'^1) \end{aligned}$$

On suppose qu'il est vérifié pour les graphes de dimension $n \leq k$. Qu'en est-il pour un graphe de dimension $n = k + 1$? On rappelle qu'on est ici dans le cas $p < n - 1$, autrement dit $p < k$. On considère deux $(n + 1)$ -uplets de U_p . Comme $n = k + 1$, il s'agit de deux $(k + 2)$ -uplets contenant, par définition de U_p , les $(p + 1)$ cellules $\{c^{ij}\}_{j \in \{0, \dots, p\}}$. On appelle respectivement $\{e^{ij}\}_{j \in \{p+1, \dots, k+1\}}$ et $\{e'^{ij}\}_{j \in \{p+1, \dots, k+1\}}$ les deux ensembles de $(k - p + 1)$ cellules complétant ces $(k + 2)$ -uplets.

On considère le sous-graphe construit sur $\bigcap_{j \in \{0, \dots, p\}} \theta^\square(c^{ij})$. Le lemme 4.58 nous dit qu'il s'agit d'un graphe d'incidence de surface de dimension $k + 1 - (p + 1) = k - p$. Comme $p < k$, $k - p > 0$ et le graphe est de dimension au moins 1. De plus, comme il s'agit d'un sous-graphe de IG_C^* , il est de dimension au plus k . $(e^{ip+1}, \dots, e^{ik+1})$ et $(e'^{ip+1}, \dots, e'^{ik+1})$ sont des $(k - p + 1)$ -uplets de ce graphe d'incidence. Comme la dimension du graphe est inférieure ou égale à k , l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il est possible de passer de l'un à l'autre en utilisant les opérateurs **switch_{i_j}** pour $i_j \in \{i_{p+1}, \dots, i_{k+1}\}$. Il est donc possible dans le graphe de passer d'un $(k + 1)$ -uplet à l'autre en utilisant une composition d'applications **switch_i** avec $i \notin \{i_0, \dots, i_p\}$.

Le processus décrit ci-dessus apparaît sur un exemple via la figure 4.39 page 179. Etant donné un graphe d'incidence de surface de dimension 2, on s'intéresse à l'ensemble des 3-uplets pour lesquels on a fixé une cellule, B . On choisit deux ces 3-uplets, BaF_1 et BfF_3 (Fig. 4.39(a) et 4.39(b)). On se place ensuite dans le graphe construit sur $\theta^\square(B)$. aF_1 et fF_3 sont des 2-uplets de ce graphe et par l'hypothèse de récurrence, on peut passer de l'un à l'autre par une série de **switch** qui correspondent aux **switch**₁ et **switch**₂ dans le graphe initial : $aF_1, fF_1, fF_2, bF_2, bF_3$. On a ainsi dans le graphe de départ :

$$BaF_1 \xrightarrow{\text{switch}_1} BfF_1 \xrightarrow{\text{switch}_2} BfF_2 \xrightarrow{\text{switch}_1} BbF_2 \xrightarrow{\text{switch}_2} BbF_3$$

□

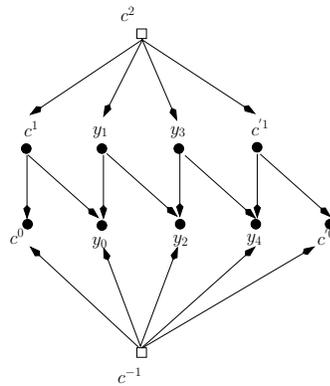


FIG. 4.38 – Exemple d'un graphe d'incidence de surface de dimension 1, pour lequel on peut passer de c^1 à c^0 par le chemin y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 . On peut passer du 2-uplet (c^0, c^1) au 2-uplet (c^0, c^1) en alternant des **switch** _{i} par la séquence suivante : **switch**₀, **switch**₁, **switch**₀, **switch**₁, **switch**₀, **switch**₁, **switch**₀.

On peut maintenant exploiter ces opérateurs pour formaliser la construction d'une n - G -carte simpliciale connexe fermée à partir d'un graphe d'incidence de surface.

Théorème 4.60 (Construction d'une n - G -carte simpliciale connexe fermée à partir d'un graphe d'incidence de surface) Soit IG_C^* un graphe d'incidence de surface et son opérateur **switch** associé. On définit :

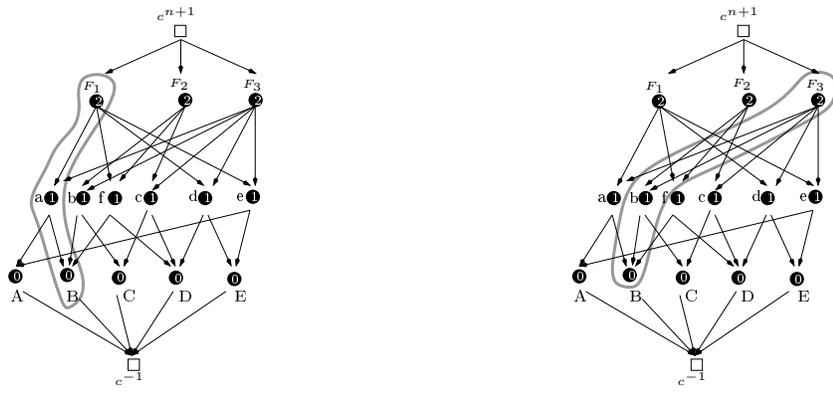
- $D = \{(c_{\beta_0}^0, \dots, c_{\beta_n}^n), c^{-1} \prec c_{\beta_0}^0 \prec c_{\beta_1}^1 \prec \dots \prec c_{\beta_n}^n \prec c^{n+1}\}$
- $\alpha_i, i \in \{0, \dots, n\}$ tel que

$$(c_{\beta_0}^0, \dots, c_{\beta_{i-1}}^{i-1}, c_{\beta_i}^i, c_{\beta_{i+1}}^{i+1}, \dots, c_{\beta_n}^n) \xrightarrow{\alpha_i} (c_{\beta_0}^0, \dots, c_{\beta_{i-1}}^{i-1}, c_{\beta'_i}^i, c_{\beta_{i+1}}^{i+1}, \dots, c_{\beta_n}^n)$$

avec $c_{\beta'_i}^i = \text{switch}(c_{\beta_{i-1}}^{i-1}, c_{\beta_i}^i, c_{\beta_{i+1}}^{i+1})$

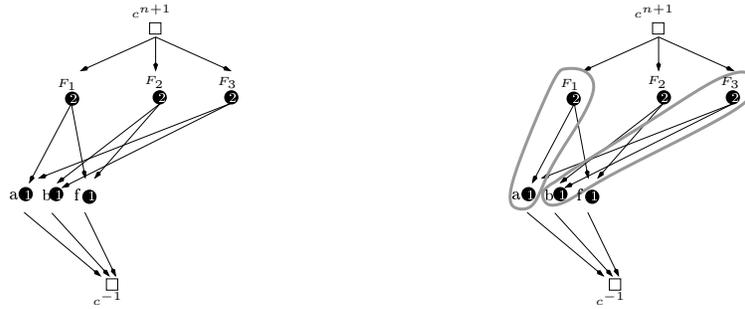
Le $(n + 2)$ -uplet $(D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ ainsi défini est une carte simpliciale connexe fermée.

On parle alors de $IGNGC$ -conversion.



(a) On considère le 3-uplet : $BaF_2 \dots$

(b) \dots puis le 3-uplet : BbF_3 .



(c) On se place dans le graphe d'incidence de surface $\theta^\square(B)$.

(d) L'hypothèse de récurrence dit qu'il existe un chemin de 2-uplets entre aF_1 et bF_3 , ici par exemple : $aF_1, fF_1, fF_2, bF_2, bF_3$.

FIG. 4.39 – Illustration d'une partie de la preuve du lemme 4.59 pour un graphe de dimension 2. On peut passer du 3-uplet BaF_1 au 3-uplet BbF_3 ($BaF_1, BfF_1, BfF_2, BbF_2, BbF_3$) en utilisant une combinaison de $\text{switch}_1\text{switch}_2$.

Preuve : La preuve est décomposée en 4 parties. On prouve d'abord que α_i est une involution sans point fixe, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. On montre ensuite que $\forall 0 \leq i < i + 2 \leq j \leq n$, $\alpha_i \alpha_j$ est une involution. Ces deux premières étapes montrent que $(D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est une n - G -carte fermée. La troisième étape vise à montrer qu'elle vérifie la propriété de simplicité maximale. La quatrième termine la preuve en montrant qu'elle possède aussi la propriété de simplicité minimale.

- i). fermeture : Par construction, $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \alpha_i = \text{switch}_i$, comme défini dans le Lemme 4.57. Ainsi, $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \alpha_i$ est une involution sans point fixe,
- ii). commutativité : Il s'agit de prouver que $\alpha_i \alpha_j$ est aussi une involution pour $i < j - 1$ ou $i > j + 1$. Ceci est équivalent à prouver que $\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i$ puisque α_i et α_j sont des involutions. La condition sur la distance entre i et j garantit qu' α_i ne modifiera aucune des $c_{\beta_{j-1}}^{j-1}, c_{\beta_j}^j, c_{\beta_{j+1}}^{j+1}$ et qu' α_j ne changera pas non plus les cellules $c_{\beta_{i-1}}^{i-1}, c_{\beta_i}^i, c_{\beta_{i+1}}^{i+1}$. Ceci implique bien que $\alpha_i \alpha_j$ est bien égal à $\alpha_j \alpha_i$.
- iii). simplicité maximale : On prouve que :

$$\forall d \in D, \bigcap_{i=0}^{i=n} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) = \{d\}$$

Soit $d = (c^0, \dots, c^n)$ et $d' = (c'^0, \dots, c'^n)$ deux éléments de D tels que :

$$d' \in \bigcap_{i=0}^{i=n} \langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \quad (4.33)$$

D'après l'équation 4.33, pour tout $j \in N$, d et d' appartiennent tous deux à $\langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d)$, autrement dit d et d' coïncident sur leur j^{th} terme. Autrement dit, $c^j = c'^j$ pour tout $j \in N$ et donc $d = d'$.

- iv). simplicité minimale : Etant données deux cellules de dimensions i et j , c^i et c^j , et d un brin associé à un $(n+1)$ -uplet contenant c^i et c^j . D'après le lemme 4.59, tous les $(n+1)$ -uplets passant par c^i et c^j sont reliés par une composition d'involutions switch_k avec $k \notin \{i, j\}$. Autrement dit, en terme d'involutions sur les cartes : $\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}(d) \cap \langle \alpha \rangle_{N-\{j\}}(d) = \langle \alpha \rangle_{N-\{i,j\}}(d)$.

□

Equivalence entre n - G -cartes simpliciales connexes fermées et n -surfaces

Les résultats précédents, exprimés par les théorèmes 4.51 page 168, 4.56 page 171 et 4.60 page 178, conduisent à l'équivalence suivante :

Théorème 4.61 (Equivalence entre les n - G -cartes simpliciales connexes fermées et les n -surfaces) Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte et $|X| = (X, \alpha)$ un ordre tel qu'il existe un isomorphisme entre leurs graphes d'incidence associés. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i). G est une n - G -carte simpliciale connexe fermée,
- ii). $|X|$ est une n -surface

Preuve : La preuve est quasiment immédiate :

i) \Rightarrow ii)

Si G est une n - G -carte simpliciale connexe fermée, alors le graphe d'incidence obtenu par $\psi_{nGC \rightarrow IG}$ est un graphe d'incidence de surface (Thé. 4.56). Et l'ordre obtenu à partir de ce graphe d'incidence par $\psi_{IG \rightarrow X}$ est une n -surface (Thé. 4.51).

ii) \Rightarrow i)

Si $|X|$ est une n -surface, alors le graphe d'incidence obtenu par $\psi_{X \rightarrow IG}$ est un graphe d'incidence de surface (Thé. 4.51). Et la carte construite à partir de ce graphe d'incidence par $IGNGC$ -conversion est bien une n - G -carte simpliciale connexe fermée (Thé. 4.60).

□

Si C_G est l'ensemble des cellules de la subdivision représentée par une n - G -carte simpliciale G et \leq_G la relation d'incidence entre ces cellules, alors (C_G, \leq_G) est la n -surface associée à G , la dimension des cellules étant oubliée. Réciproquement, si $D_{|X|}$ est l'ensemble

des $(n + 1)$ α -chaînes d'une n -surface $|X|$, alors $(D_{|X|}, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est la n - G -carte simpliciale connexe fermée associée à $|X|$, où pour tout $d = (x^0, \dots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \dots, x^n) \in D_{|X|}$, $d\alpha_i = (x^0, \dots, x^{i-1}, x'^i, x^{i+1}, \dots, x^n)$ avec $x'^i = (\alpha^\square(x^{i+1}) \cap \beta^\square(x^{i-1})) \setminus \{x^i\}$ lorsque $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $x'^0 = \alpha^\square(x^1) \setminus \{x^0\}$ et $x'^n = \beta^\square(x^{n-1}) \setminus \{x^n\}$.

Théorème 4.62 Soit $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n - G -carte et $|X| = (X, \alpha)$ un ordre alors :

- i). G est une n - G -carte simpliciale connexe fermée \Rightarrow l'ordre associé est une n -surface,
- ii). $|X|$ est une n -surface \Rightarrow la n - G -carte associée est une carte simpliciale connexe fermée.

On parle alors respectivement de $nGCnS$ -conversion et d'une $nSnGC$ -conversion.

n - G -carte simpliciale connexe fermée G	$nGCIG$ -conversion $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ $IGnGC$ -conversion $\xleftarrow{\hspace{1cm}}$	Graphe d'incidence de surface IG_C^*
D	\rightarrow \leftarrow	$(n + 1)$ -uplets de cellules
\prec_G	\leftrightarrow	\prec
α_i	\leftrightarrow	switch_i
Graphe d'incidence de surface IG_C^*	$IGnS$ -conversion $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ $nSIG$ -conversion $\xleftarrow{\hspace{1cm}}$	n -surface $ X $
C^*	$\psi_{IG \rightarrow X}$ $\psi_{X \rightarrow IG}$	$X \cup \{y, y'\}$
\leq	\leftrightarrow	α
switch (c^{i-1}, c^i, c^{i+1})	\leftrightarrow	$\alpha^\square(\phi(c^{i+1})) \cap \beta^\square(\phi(c^{i-1})) \setminus \{\phi(c^i)\}$

↓

n - G -carte simpliciale connexe fermée G	$nGCnS$ -conversion $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ $nSnGC$ -conversion $\xleftarrow{\hspace{1cm}}$	n -surface $ X $
D	\rightarrow \leftarrow	$(n + 1)$ α -chaînes
\leq_G	\leftrightarrow	α
$d\alpha_i$	\leftrightarrow	$(x^0(d), \dots, x^{i-1}(d), x'^i, x^{i+1}(d), \dots, x^n(d))$ avec $x'^i = \alpha^\square(x^{i+1}(d)) \cap \beta^\square(x^{i-1}(d)) \setminus \{x^i(d)\}$

Pour être complet, il nous reste à montrer le théorème suivant :

Théorème 4.63 ($nGCnS$ -conversion et $nSnGC$ -conversion) Une $nGCnS$ -conversion et une $nSnGC$ -conversion sont l'inverse l'une de l'autre à isomorphisme près.

Preuve : La preuve est réalisée en 2 étapes :

- i). Soit $|X| = (X, \alpha)$ une n -surface et $|X'| = (X', \alpha')$ l'image de $|X|$ par une $nSnGC$ -conversion suivie d'une $nGCnS$ -conversion. Par construction, $|X'|$ est aussi une n -surface. On appelle $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ la n - G -carte simpliciale connexe fermée intermédiaire.

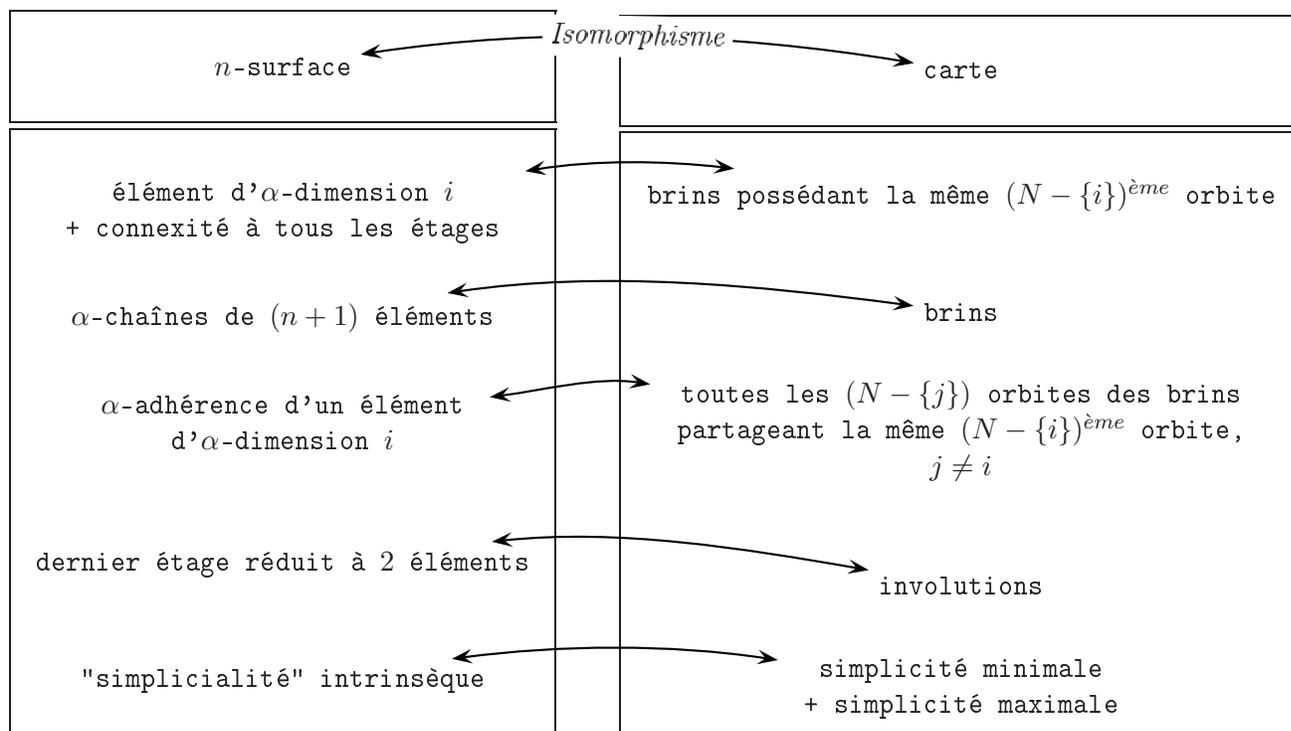
Il suffit en fait de montrer qu'il existe une bijection entre X et X' . Il existe en effet par construction un morphisme naturel entre (X, α^\square) et (X', α'^\square) .

Soit x un élément de $|X|$, on note C_x l'ensemble des $(n+1)$ α -chaînes de $|X|$ contenant x . Il existe une bijection entre X et l'ensemble $\{C_x, x \in X\}$. D'après le lemme 4.59, tout élément de C_x peut être obtenu à partir de n'importe quel autre élément de C_x par combinaison d'involutions \mathbf{switch}_i , avec i différent de $\dim_\alpha(x)$. Autrement dit, soit $c_1 \in C_x$, il existe d_1 image de c_1 dans D tel que l'image de C_x dans G soit égale à l'orbite $\langle \alpha \rangle_{N-\{\dim_\alpha(x)\}}(d_1)$. D'autre part, si $\langle \alpha \rangle_{N-\{\dim_\alpha(x)\}}(d_1) \neq \langle \alpha \rangle_{N-\{\dim_\alpha(x)\}}(d_2)$, alors les antécédents de d_1 et d_2 , respectivement c_1 et c_2 ne sont pas connectés par une composition de \mathbf{switch}_i , $i \neq \dim_\alpha(x)$. Autrement dit, c_2 n'appartient pas à C_x . Ainsi l'ensemble $\{C_x, x \in X\}$ est en bijection avec l'ensemble $\{\langle \alpha \rangle_{N-\{i\}}\}_D, i \in \{0, \dots, n\}$. Par construction de X' , on obtient finalement que $\{C_x, x \in X\}$ est en bijection avec $\{C_x, x \in X'\}$. Et ainsi X et X' sont en bijection.

- ii). Pour conclure, il suffit ici de remarquer que le graphe d'incidence d'une carte simpliciale connexe fermée la définit de manière unique à isomorphisme près. Or la n -surface intermédiaire entre deux n - G -cartes simpliciales connexes fermées est par construction isomorphe au graphe d'incidence de la n - G -carte initiale. Donc les deux n - G -cartes sont isomorphes.

□

En conclusion, on peut dire que les n -surfaces et les n - G -cartes simpliciales connexes fermées représentent très exactement les mêmes objets.



4.3 Conclusion et perspectives

Dans cette partie, nous nous sommes principalement attachés à la construction de liens entre différents modèles : ordres, complexes et cartes. En chemin, nous avons aussi été amenés à nous intéresser à certains graphes d'incidence.

Cette étude nous a tout d'abord conduits à définir et caractériser de manière purement combinatoire des sous-classes de certains de ces modèles qui peuvent s'avérer utiles en imagerie :

- les ordres à support,
- les complexes à support,
- les graphes d'incidence de surface,
- les cartes simpliciales

Pour ce dernier modèle, nous avons réussi à fournir une caractérisation minimale en terme d'orbites.

L'ensemble des résultats obtenus permet tout d'abord d'affiner nos connaissances sur la structure interne de ces modèles cellulaires. Les deux axes explorés nous ont, en effet, conduits à prouver l'existence d'équivalences entre des objets ou des parties d'objets qui étaient originellement définis de façon très différente. Nous avons ainsi pu grâce à l'isomorphisme d'ordres existant entre ordres et complexes à support montrer une correspondance entre des sous-ensembles bien particuliers de ces deux modèles, respectivement le noyau et le support. Cette relation est particulièrement intéressante dans la mesure où les philosophies sous-tendant les constructions de ces deux sous-ensembles ne sont pas semblables. Le noyau d'un ordre est obtenu par enlèvement de points, tandis que le support est déterminé en observant des propriétés locales du complexe. Autrement dit, la définition du noyau est constructive tandis que celle du support se fonde sur

une caractérisation locale. Ainsi, extraire le noyau d'un ordre ou le support d'un complexe sera avantageusement réalisé en exploitant la définition originelle du noyau tandis que déterminer si un élément donné appartient au noyau d'un ordre ou au support d'un complexe s'appuiera de préférence sur la caractérisation classique du support. L'étude suivante, centrée sur les n -surfaces et les cartes généralisées nous a, elle-aussi, permis de montrer une équivalence entre deux modèles définis via des procédés différents (récursif vs constructif) et, de plus, utilisés dans des contextes applicatifs éloignés (analyse vs modélisation). Cette équivalence constitue une avancée particulièrement significative puisqu'elle nous dit que ces deux structures représentent très exactement les mêmes classes d'objets. Une conséquence agréable en est que nous savons maintenant que les n -surfaces admettent une réalisation géométrique sous forme d'un CW -complexe. On peut ainsi remplacer le "?" sur la ligne relative aux n -surfaces dans le tableau récapitulatif des structures cellulaires (Tab. 2.7 page 89) par un oui.

En outre, tous les liens évoqués ont été exprimés via des fonctions de conversion explicites, grâce auxquelles il est maintenant théoriquement possible de passer d'une représentation à l'autre sans difficulté. Cette faculté pourra bien sûr être exploitée au sein d'applications, en les rendant capables de manipuler indifféremment plusieurs modèles. On peut, par exemple, imaginer une chaîne de traitements qui utilise des ordres et des n -surfaces pour une partie d'analyse et des cartes généralisées pour un processus de reconstruction. De plus, des mécanismes de preuves sont implicitement associés aux définitions de ces structures (preuves récursives sur les n -surfaces, constructives sur les cartes...). L'équivalence de structures permet de choisir le procédé le plus approprié en fonction du type de résultat à démontrer.

Dans un autre ordre d'idée, nous avons vu dans le chapitre 2 que les modèles cellulaires pouvaient permettre de structurer une image à la fois au niveau spel, et au niveau région. L'étude relative aux ordres et complexes réalisée ici est clairement orientée spel. En effet, le lien établi a permis de caractériser une famille de fonctions associant à une image construite sur une telle structure, différentes connexités de spels. Et, il nous faut remarquer que si la sous-classe des objets à support vérifie des propriétés propices à la structuration d'une image au niveau spel, elle est, en général, impropre à une représentation région. En effet, de telles structures ne peuvent pas représenter des subdivisions contenant des adjacences multiples ou des inclusions de régions maximales (Fig. 4.40). On peut aussi noter que les n -surfaces ne sont pas nécessairement des ordres à support. Il suffit de considérer l'ordre très simple de la figure 4.41(a). Il correspond intuitivement à une boucle fermée constituée de deux 1-cellules (Fig. 4.41(b)). De même la 2-surface que nous avons pris en exemple tout au long de ce chapitre ne vérifie pas la propriété des ordres à support (Fig. 4.42). La création d'un pont entre les n -surfaces et les n - G -cartes s'inscrit quant à elle dans le cadre des approches régions. Les deux modèles sont, en effet, dédiés à la structuration d'images en régions.

Nous abordons maintenant quelques points en lien avec ces travaux que nous aimerions aborder ou approfondir :

- Notre tout premier objectif consiste à simplifier la preuve relative à la comparaison des n -surfaces et des n - G -cartes. Nous pressentons, en effet, que la propriété *switch* des graphes d'incidence de surface est en réalité incluse dans la propriété relative aux intersections des θ^\square -adhérences. Plus précisément, ce dernier point semble directement induire une famille d'opérateurs *switch* _{i} sur les $(n + 1)$ -uplets du graphe. La définition de ces graphes peut donc très probablement être simplifiée ainsi que les preuves.
- Nous avons caractérisé une classe de graphes d'incidence qui est très clairement une sous-classe des graphes d'incidence représentant les objets étudiés par Brisson. Et nous nous demandons maintenant s'ils ne correspondent pas exactement aux mêmes objets. Autrement

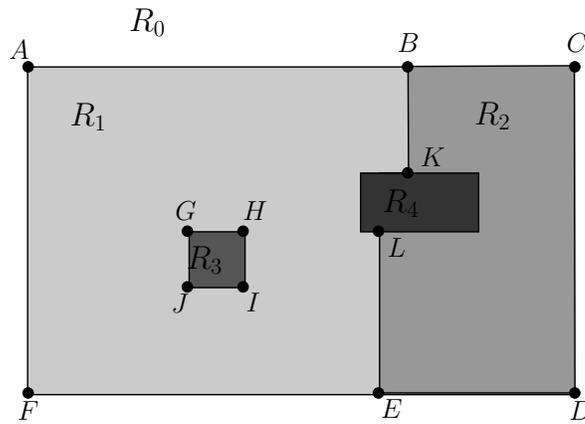
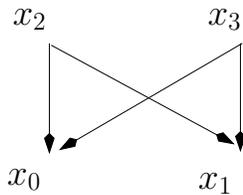
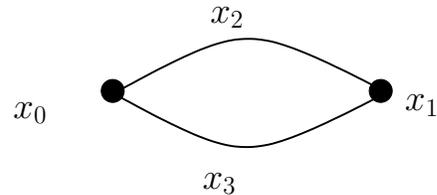


FIG. 4.40 – Les 2-cellules R_1 et R_2 possèdent deux 1-cellules dans l'intersection de leurs clôtures : BK et EL . Les 2-cellules R_1 et R_3 sont reliées par 4 1-cellules : GH , HI , IJ et JK .



(a) 1-surface non à support : les deux 1-cellules x_2 et x_3 partagent deux sommets x_0 et x_1



(b) Complexe de dimension 1 correspondant à cette 1-surface

FIG. 4.41 – Exemple d'une 1-surface qui n'est pas à support et de son interprétation en terme de complexe

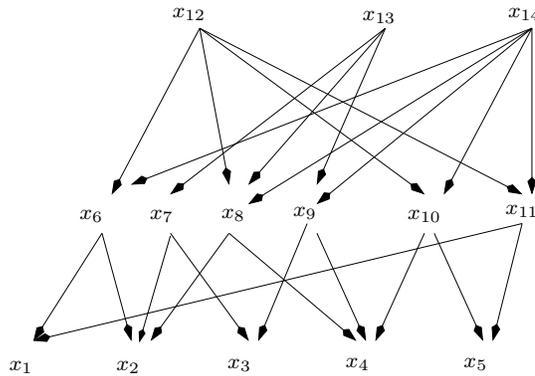


FIG. 4.42 – 2-surface non à support : les 2-cellules F_1 et F_2 , ainsi que les 2-cellules F_1 et F_3 partagent plusieurs 1-faces

dit, nous souhaiterions déterminer si les d -variétés subdivisées de Brisson [36] représentent ou non les mêmes objets que les n -surfaces et les n - G -cartes simpliciales connexes fermées.

- Nous aimerions aussi étendre ces travaux en étudiant, par exemple, le rapport entre les

ordres et les chaînes de cartes [74], objets cellulaires dont chaque cellule peut être représentée par une carte généralisée.

- Nous avons montré qu'il existait des n -surfaces qui n'étaient pas des ordres à support. D'un autre côté, $|H^n|$ qui est clairement un ordre à support est aussi une n -surface [55]. Nous aimerions étudier plus avant le lien entre les ordres à support et les n -surfaces, et éventuellement déterminer des propriétés des ordres frontières [54] construits sur ces ordres à support. De tels travaux pourraient peut-être amener à la conception d'algorithmes d'extraction de n -surfaces sur des ordres plus généraux que H^3 .
- Les liens que nous avons exprimés ne demandent maintenant qu'à être exploités. Dans un premier temps, il peut s'agir de comparer les notions topologiques définies simultanément sur plusieurs d'entre eux (par exemple les définitions de déformations homotopiques sur les ordres et sur les complexes) puis d'équiper les modèles d'outils qu'ils ne possèdent pas encore mais qui ont été définis sur un modèle équivalent (notion d'orientabilité définie sur les cartes mais inconnue sur les n -surfaces). La réalisation d'applications manipulant effectivement différents types de structures est un projet à plus long terme dans la mesure où il implique de nombreuses collaborations pour mettre en commun les applications déjà existantes.

Chapitre 5

Calcul d'invariants topologiques : les groupes d'homologie

Nous avons étudié dans les chapitres précédents différents modèles de représentation d'images qui permettent de décrire la topologie des subdivisions et objets considérés. De nombreuses applications relatives à la manipulation des images s'appuient sur de tels modèles et nécessitent de pouvoir caractériser ou du moins préserver la topologie des objets les constituant. Ainsi, des algorithmes de classification ou d'indexation fondés sur des critères topologiques ont été développés dans le cadre de l'analyse d'images. Certaines propriétés topologiques peuvent aussi être employées comme descripteurs d'objets [10] et être ensuite exploitées dans des applications de reconnaissance de formes. On peut aussi souhaiter simplifier des objets tout en préservant leurs propriétés topologiques. Les algorithmes d'amincissement et de squelettisation sont des cas particuliers de telles transformations. Certaines applications demandent parfois de réaliser l'interpolation d'une image en garantissant à tout moment la conservation de sa topologie [198]. En modélisation, le respect de contraintes topologiques est essentiel pour garantir la validité des opérations appliquées sur les objets. Ces quelques exemples montrent bien que la comparaison d'objets d'un point de vue topologique est cruciale dans bien des applications de manipulation d'images.

La comparaison d'espaces est aussi un enjeu majeur de la topologie classique. La notion d'équivalence topologique de deux ensembles, ou homéomorphisme (cf Déf. A.8 page 232), est extrêmement difficile à vérifier. Des outils ont été proposés, dans le cadre de la topologie algébrique, qui permettent de caractériser différents niveaux de ressemblance topologique. On les appelle *invariants topologiques*. Il s'agit simplement de certaines propriétés préservées par homéomorphisme.

De nombreux travaux se sont déjà penchés sur la possibilité de définir des invariants topologiques sur les structures utilisées pour représenter des images. Les groupes d'homotopie (cf page 237), parmi lesquels le groupe fondamental, contiennent une grande part de l'information topologique d'un objet. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la définition du groupe fondamental sur différents espaces classiquement associés à des images [16, 28, 112, 157, 172]. Cependant la comparaison de ces groupes est fortement liée à des problèmes indécidables (*word problem* [157]). Le calcul de la caractéristique d'Euler des objets d'une image a donné lieu à l'écriture de différents algorithmes (dont certains sont présentés dans [116]). Cependant, cet invariant ne contient qu'une information très limitée sur la topologie de l'objet considéré.

Nous nous sommes intéressés à un autre invariant, les groupes d'homologie. Ils contiennent

en effet plus d'informations que la caractéristique d'Euler et s'ils sont moins puissants que les groupes d'homotopie, ils sont à la fois calculables et aisément comparables. De manière informelle, on peut dire qu'ils permettent de caractériser les trous d'un objet dans toutes les dimensions. Chaque groupe peut être caractérisé par un nombre fini d'entiers et deux tels groupes sont isomorphes s'ils ont la même dimension et sont associés aux mêmes entiers. Plusieurs études ont déjà été menées sur ces invariants dans le contexte de l'imagerie, notamment par Delfinado et Edelsbrunner [58] par González-Díaz et Real [92]. Néanmoins, les algorithmes proposés ne sont valides que dans un cadre très restreint (images de petites dimensions, subdivision simpliciale...) et l'information obtenue ne permet pas forcément de caractériser complètement les groupes.

L'étude d'un tel invariant dans le cadre de l'imagerie numérique amène à examiner diverses questions. Il s'agit d'abord de déterminer si les structures nécessaires pour le définir sont compatibles avec les modèles topologiques de représentation d'images, ou du moins avec certains d'entre eux. Il est aussi nécessaire d'explorer les techniques déjà proposées dans le cadre de la topologie classique pour obtenir les informations contenues dans ces groupes, afin de vérifier si elles sont conciliables avec les contraintes inhérentes à la programmation effective d'algorithmes (complexité en temps et en mémoire). Enfin, il faut encore estimer la puissance de représentation de cet invariant dans le cadre très particulier de l'imagerie numérique et déterminer les applications pour lesquelles il est le plus adapté.

Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, le premier problème est assez aisément résolu et la plupart des modèles cellulaires utilisés pour représenter des images permettent la construction de groupes d'homologie.¹ La question du calcul effectif de l'information contenue dans ces groupes s'avère beaucoup plus difficile à résoudre et constitue encore en topologie algébrique un sujet actif de recherche. En effet, l'algorithme classique d'obtention de ces groupes met en jeu une réduction matricielle coûteuse à la fois en temps de calculs et en mémoire. En outre, le choix de la méthode dépend du type d'information que l'on souhaite extraire de ces groupes, soit une simple caractérisation, soit une famille de générateurs. Nous décrirons dans la suite de ce chapitre une méthode hybride [168] combinant différentes optimisations, que nous avons mise au point en collaboration avec Samuel Peltier et Laurent Fuchs (laboratoire SIC, Poitiers). Cette technique permet d'obtenir à la fois les entiers caractérisant les groupes et une famille de "pseudo-générateurs" pour chacun d'eux. A l'heure actuelle, nous réfléchissons à diverses applications pouvant exploiter les connaissances fournies par le calcul des groupes d'homologie. Leur mise en œuvre constituera un prolongement naturel de ce travail.

Ce chapitre s'organise comme suit. La première section rappelle les notions nécessaires à la compréhension de la théorie de l'homologie. La deuxième explique la méthode théorique d'obtention de ces groupes. La troisième met en perspective différentes mises en pratique de ce calcul. La quatrième contient la description de la méthode proposée qui combine l'obtention de l'ensemble d'entiers ainsi que d'une famille de pseudo-générateurs de chacun des groupes calculés. Nous concluons en décrivant quelques-unes des perspectives de cette étude.

5.1 Théorie de l'homologie

Nous présentons ici les grandes lignes de la théorie de l'homologie. Nous commençons par en donner une explication intuitive, illustrée sur des exemples simples, avant de poser la définition formelle. Nous rappelons ensuite comment il est possible à partir d'une réduction matricielle

¹La définition d'un groupe d'homologie se fait relativement à un objet cellulaire mais aussi à un groupe abélien, appelé groupe des coefficients. On verra que certaines structures requièrent l'utilisation de groupes de coefficients particuliers, tandis que d'autres sont compatibles avec l'emploi de n'importe quel groupe abélien.

d'obtenir une caractérisation des groupes d'homologie. Nous concluons en décrivant une méthode permettant d'extraire une famille de générateurs de ces groupes à partir de calculs matriciels légèrement différents des précédents.

5.1.1 Définition des groupes d'homologie

Les groupes d'homologie servent principalement à caractériser les "trous" d'un espace. Plus précisément, un groupe est défini pour chaque dimension présente dans l'image afin de détecter précisément les trous en chaque dimension. Le groupe H_0 décrit le nombre de composantes connexes de l'espace considéré [171], son rang β_0 est en effet égal au nombre de composantes connexes. Le groupe H_1 caractérise les trous de dimension 1. Plus intuitivement, son rang β_1 représente le nombre maximal de "coupes complètes" que l'on peut réaliser à travers l'objet sans le déconnecter [136]. Pour bien voir la signification de l'expression "coupe complète", il suffit d'imaginer un couteau traversant de part en part un objet. Dans le cas d'une sphère ce nombre est égal à 0 : toute coupe complète sépare la sphère en deux. Pour un tore "creux", ce nombre est égal à 2 (cf Fig. 5.1). Le rang β_2 du groupe H_2 compte, quant à lui, le nombre de cavités bordées par une frontière de dimension 2. Ainsi pour une sphère pleine β_2 sera égal à 0 et il vaudra 1 pour une sphère creuse.



FIG. 5.1 – Deux coupes complètes au travers d'un tore creux peuvent ne pas le déconnecter, trois coupes le déconnectent forcément

Comprendre la signification de H_k , pour $k \geq 3$, devient plus complexe, la notion de trou de dimension k étant en effet difficilement concevable et représentable. Nous commençons ici par montrer comment l'algèbre permet de définir de tels trous et comment il est alors possible de construire un groupe d'homologie en dimension quelconque. Nous rappelons ensuite la définition formelle de ces groupes.

Construction intuitive

A un espace topologique, on souhaite associer une famille de groupes $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, telle que chacun de ces groupes permette de décrire les "trous k -dimensionnels" de l'espace. Il est donc nécessaire de pouvoir distinguer des éléments de différentes dimensions dans l'espace. Ainsi, calculer les groupes d'homologie d'un espace topologique de dimension n nécessite, en premier lieu, de disposer d'une décomposition cellulaire du dit espace en cellules de dimensions 0 à n . A chacune de ces cellules est associée une orientation (cf Fig. 5.2). Il faut ensuite préciser la notion de "trou k -dimensionnel". Informellement, un tel trou est défini comme un ensemble de k -cellules entourant une cavité fermée de dimension $k + 1$. Les groupes d'homologie d'indices strictement supérieurs à n sont donc triviaux.

La notion de trou k -dimensionnel peut se définir de façon purement algébrique. Etant donné un espace X et une décomposition cellulaire associée, on considère l'ensemble des cellules de

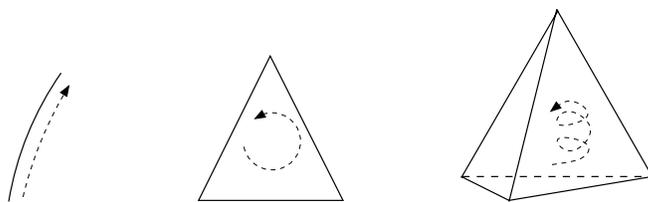


FIG. 5.2 – Quelques exemples d'orientations de simplexes

dimension k de la décomposition et on note $C_k(X)$ le groupe algébrique libre construit sur ces cellules. Ce groupe est appelé *groupe des k -chaînes*. La base naturelle de ce groupe est, bien entendu, composée de l'ensemble des k -cellules. Une k -chaîne est alors définie comme une somme algébrique de k -cellules. Une telle somme est purement formelle et n'admet pas toujours une interprétation géométrique. Pour être tout à fait exact, il faut ajouter qu'il est en réalité possible de construire plusieurs groupes de chaînes sur un même ensemble de k -cellules. Si on considère un groupe abélien G , le groupe de $C_k(X; G)$ est le groupe de chaînes construites sur les k -cellules de X à coefficients dans G . Les k -chaînes sont alors simplement des sommes de k -cellules telle que chaque cellule apparaissant dans la somme est précédée d'un coefficient multiplicateur appartenant à G . Les groupes de coefficients les plus largement utilisés sont les groupes \mathbb{Z} et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Sur la figure 5.3(a), une base de $C_0(X)$ est formée de x et y , et une base de $C_1(X)$ est constituée de a , b , c et d . Une 1-chaîne (à coefficients dans \mathbb{Z}) est, par exemple, $a + 2b + 3c$. Cette somme ne possède pas ici d'interprétation géométrique évidente. La somme $a + (-1)b$, par contre, peut être interprétée comme une boucle enracinée en y .
 Sur la figure 5.3(b), une base de $C_2(X)$ est composée des cellules A et B .

Il faut ensuite définir une notion de bord. Le bord d'une cellule de dimension k est défini à l'aide d'un ensemble de cellules de dimension $k-1$. Pour exprimer cette relation, on construit une application entre $C_k(X)$ et $C_{k-1}(X)$, appelée *opérateur bord*, qui à tout ensemble de k -cellules associe une somme algébrique de $(k-1)$ -cellules. Cette application est un homomorphisme de groupe, généralement noté ∂_k . Les matrices utilisées pour représenter ces homomorphismes sont appelées *matrices d'incidence*. On explicite généralement cet homomorphisme sur les éléments de la base naturelle de $C_k(X)$, le bord de toute chaîne peut ensuite être directement déduit par linéarité. Une k -chaîne est appelée k -bord, s'il existe une $(k+1)$ -chaîne dont elle est l'image par ∂_{k+1} . L'ensemble des k -bords constitue un sous-groupe de C_k et est dénoté par B_k . B_k est très exactement le sous-groupe $\text{Im } \partial_{k+1}$.

Un opérateur bord naturel entre les groupes de chaînes $C_1(X)$ et $C_0(X)$ des figures 5.3(a) et 5.3(b) sera défini par : $\partial_1(a) = x - y$, $\partial_1(b) = x - y$, $\partial_1(c) = x - y$, et $\partial_1(d) = x - y$.
 Le bord de la chaîne $a - b$, $\partial_1(a - b)$, est alors égal à $\partial_1(a) - \partial_1(b) = 0$, et le bord de $a + b$ est lui égal à $2x - 2y$.
 L'opérateur bord naturellement défini entre $C_2(X)$ et $C_1(X)$ sur l'objet représenté par la figure 5.3(b) est : $\partial_2(A) = a - b$ et $\partial_2(B) = c - d$.
 Sur la figure 5.3(b), $a - b + c - d$ est un 1-bord, il est bord de la 2-chaîne $A + B$.

On définit ensuite la notion de k -cycle. Un k -cycle est une k -chaîne dont le bord est nul, autrement dit une sorte d'enveloppe fermée de dimension k . Un tel k -cycle définit un trou k -dimensionnel s'il n'est pas un k -bord, autrement dit si l'enveloppe fermée qu'il constitue ne contient pas un objet de dimension $k + 1$. L'ensemble des k -cycles forme un sous-groupe de C_k . On le note généralement Z_k (de l'allemand *Zyklus*). Par construction, $Z_k = \text{Ker } \partial_k$.

*Sur les figures 5.3(a) et 5.3(b), $a - b$ est un cycle, ainsi que $b - c$, $c - d$, $a - d$, $a - b + c - d \dots$
 Sur la figure 5.3(a), $a - b$ n'est le bord d'aucune 2-chaîne, et définit donc un trou de dimension 1. Sur la figure 5.3(b), en revanche, $a - b$ constitue le bord de la 2-chaîne A .*

Etant donné une subdivision cellulaire, on peut noter qu'il peut exister plusieurs k -cycles qui ne sont pas des bords entourant (de plus ou moins près) un même k -trou. Comme l'on cherche à caractériser chaque trou de dimension k , il s'agit alors d'organiser l'ensemble de ces k -cycles en différentes classes, chacune associée à un k -trou différent. De manière plus formelle, on constate que deux k -cycles encercleront le même k -trou si leur différence est un k -bord. Deux tels cycles z_1^k et z_2^k seront alors dit *homologiquement équivalents*. Et on écrira $z_1^k \simeq z_2^k$ pour signifier qu'il existe z^{k+1} et z^k tel que $z_1^k - z_2^k = z^k$ avec $z^k = \partial_{k+1} z^{k+1}$. Il faut noter que cette égalité requiert implicitement que z^k soit un cycle. De manière générale, on impose que tout k -bord soit un k -cycle, afin que les classes d'équivalence définies par la relation d'*équivalence homologique* soient précisément les éléments du groupe quotient Z_k/B_k . Autrement dit, on impose que $\partial_k \partial_{k-1}$ soit trivial pour tout $k > 0$.

Le $k^{\text{ème}}$ groupe d'homologie est alors naturellement défini comme ce groupe quotient Z_k/B_k qui contient l'information relative aux k -trous présents dans l'espace considéré.

*Sur la figure 5.3(b), les cycles $b - c$, $a - c$, $d - b$, $a - d \dots$ définissent le même trou (précisément délimité par les arêtes b et c).
 Et, on a bien, par exemple, $a - c = a - b + b - c = \partial_2(A) + (b - c)$, autrement dit $a - c \simeq b - c$.*

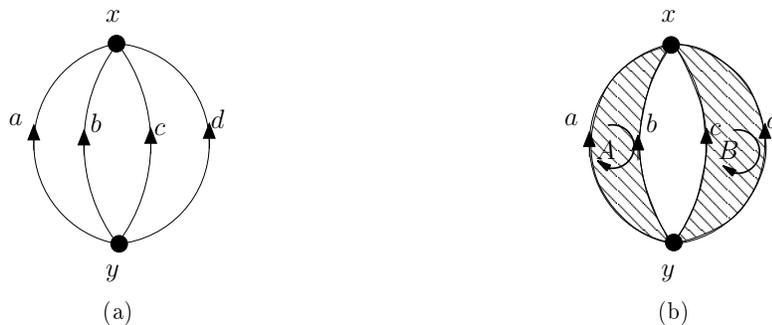


FIG. 5.3 – Exemples d'objets cellulaires simples contenant un ou plusieurs 1-trous

Pour résumer, la définition d'un ensemble de groupes d'homologie sur un espace topologique requiert l'existence :

- i). d'une décomposition cellulaire sur cet espace, afin de disposer d'un groupe de chaînes dans chaque dimension,

- ii). d'un opérateur bord pour chaque dimension présente dans le complexe, tel que $\partial_k \partial_{k-1} = 0$.
Par abus de langage, on note souvent $\partial \partial = 0$.

On peut prouver qu'un ensemble d'opérateurs bords satisfaisant cette propriété peut être associé à la plupart des subdivisions cellulaires utilisées pour représenter des images. Ainsi les complexes simpliciaux abstraits [9], les complexes cubiques [104, 162, 200] ou plus généralement les α -complexes [9], dans le cadre des subdivisions cellulaires ne présentant pas d'identifications, possèdent cette propriété. Les ensembles simpliciaux et semi-simpliciaux, dans le contexte des subdivisions contenant éventuellement des identifications, vérifient aussi cette condition [160, 167].

Définition formelle

Plus généralement, on est capable de construire une théorie de l'homologie dès lors que l'on dispose de ce qu'on appelle un *complexe de chaînes* :

Définition 5.1 (Complexe de chaînes) *Un complexe de chaînes $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ est une suite*

$$\dots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \dots \longrightarrow$$

de groupes abéliens C_p (groupe des p -chaînes) et d'homomorphismes ∂_p tels que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Le $p^{\text{ème}}$ groupe d'homologie se définit alors comme précédemment en s'appuyant sur les sous-groupes $\text{Ker } \partial_p$ et $\text{Im } \partial_{p+1}$.

Définition 5.2 (Groupes d'homologie) *Etant donné un complexe de chaînes $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$, le $p^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de \mathcal{C} est défini par :*

$$H_p(\mathcal{C}) = Z_p(\mathcal{C})/B_p(\mathcal{C})$$

où $Z_p(\mathcal{C}) = \text{Ker } \partial_p$ et $B_p(\mathcal{C}) = \text{Im } \partial_{p+1}$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on omettra le nom du complexe des chaînes dans la notation des groupes.

Par la suite, on ne considère que des complexes de chaînes pour lesquels C_p est un groupe fini quel que soit p . Ainsi, tous les groupes d'homologie associés, $H_p(\mathcal{C})$, sont de type fini (cf Déf. D.6 page 262). De plus, chacun des homomorphismes ∂_p peut alors être représenté dans des bases particulières par une matrice en forme normale de Smith (cf Thé. 5.3 page 193). La section suivante montre comment exploiter cette forme normale pour extraire l'information contenue dans les groupes d'homologie.

5.1.2 Décomposition d'un groupe d'homologie : forme normale de Smith

Nous expliquons d'abord ce qu'est la *forme normale de Smith* d'un homomorphisme de groupe. Nous rappelons ensuite le *théorème fondamental des groupes abéliens de type fini* qui indique que ces groupes sont caractérisables par un ensemble fini d'entiers. Nous montrons enfin comment on relie classiquement les formes normales de Smith des *opérateurs bords* d'un complexe de chaînes à la caractérisation de ses groupes d'homologie.

Forme normale de Smith d'un homomorphisme de groupes

On peut montrer [165, 166, 185] que tout homomorphisme de groupes peut être représenté dans des bases particulières par une matrice dont les seuls éléments non nuls sont situés sur la diagonale d'une sous-matrice carrée située dans le coin supérieur gauche de la matrice. En outre, ces éléments non nuls possèdent une propriété particulière : l'élément situé sur la ligne i est un diviseur de l'élément positionné sur la ligne $i + 1$ (et par transitivité de tout élément non nul appartenant à une ligne d'indice strictement supérieur).

Théorème 5.3 (Forme normale de Smith) *Soient deux groupes abéliens libres G et G' de rang, respectivement n et m et une application $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes. Alors il existe une base de G et une base de G' telles que la matrice représentant f dans ces bases ait la forme :*

$$G' \left[\begin{array}{cc|c} & & G \\ b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \\ \hline & & 0 \\ & & 0 \end{array} \right]$$

avec $b_i \geq 1$ et $b_1 | b_2 | \dots | b_l$.

Cette forme est appelée forme normale de Smith de l'homomorphisme f et les b_j supérieurs à 1 sont appelés les facteurs invariants de f .

Décomposition des groupes abéliens de type fini

Les notions essentielles de théorie des groupes apparaissant dans le théorème suivant sont rappelées en annexe D page 261.

Ce théorème explique comment décomposer tout groupe abélien de type fini en une somme particulière de sous-groupes :

Théorème 5.4 (Théorème fondamental des groupes abéliens de type fini) *Soit G un groupe abélien de type fini, et T son sous-groupe de torsion.*

i). *Il existe un sous-groupe abélien libre F de G de rang fini β tel que*

$$G = F \oplus T$$

ii). *Il existe un ensemble fini de sous-groupes cycliques finis T_1, \dots, T_k où T_i est d'ordre $t_i > 1$, tels que $t_i | t_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq k$ et*

$$T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$$

iii). *Les nombres β, t_1, \dots, t_k sont caractérisés de manière unique par G .*

β est appelé nombre de Betti de G et les nombres t_1, \dots, t_k sont connus sous le nom de coefficients de torsion. Ce théorème implique que tout groupe abélien G de type fini est isomorphe à la somme directe des groupes :

$$G \simeq \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}^{\beta} \oplus \mathbb{Z}/t_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/t_k\mathbb{Z}$$

La sous-somme $\mathbb{Z}/t_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/t_k\mathbb{Z}$ est naturellement appelée *décomposition cyclique* de G .

Lien entre forme normale de Smith et décomposition des groupes d'homologie

Etant donné un complexe des chaînes $C = \{(C_p, \partial_p)\}$, nous allons rappeler ici comment montrer que les *facteurs invariants* de ∂_{k+1} sont précisément les *coefficients de torsion* de H_k . En outre, si on appelle \mathbf{D}_p et \mathbf{D}_{p+1} les matrices en forme normale de Smith représentant respectivement ∂_p et ∂_{p+1} , on va expliquer pourquoi le nombre de Betti de H_p peut être obtenu en soustrayant le nombre de colonnes nulles de \mathcal{D}_p au nombre de lignes non nulles de \mathcal{D}_{p+1} . Ces rappels se fondent principalement sur le livre de Munkres [165].

Dans cette section, sont présentées les principales preuves qui permettent d'obtenir le résultat souhaité et montrent bien comment il est possible de raisonner sur ces groupes. Les résultats principaux apparaissent dans les théorèmes 5.10 et 5.12 page 197 qui sont des conséquences presque directes du lemme 5.9 page 196.

Pour bien comprendre comment décomposer un groupe d'homologie, on s'intéresse tout d'abord au groupe de cycles correspondants. On peut en effet montrer qu'il existe différents types de cycles. Certains sont bords d'une chaîne de dimension supérieure. D'autres ne le sont pas mais il existe une chaîne égale à k fois un tel cycle ($k > 1$) qui est bord d'une chaîne de dimension supérieure. D'autres enfin, même s'ils sont additionnés plusieurs fois, ne sont jamais bords.

Plus concrètement, la deuxième catégorie de cycles correspond à la présence de torsions dans le complexe de chaînes considéré. Il est difficile de concevoir la notion de torsion, car de telles configurations ne peuvent pas apparaître dans des objets plongeables en 2 et 3 dimensions. Historiquement d'ailleurs, Poincaré qui fut le premier à introduire cette notion d'homologie, ne considéra en premier lieu que les informations fournies par la partie libre avant de se rendre compte qu'il était nécessaire d'introduire les torsions pour compléter la description des trous [188]. Un exemple classique dans lequel peuvent apparaître de tels cycles est la bouteille de Klein² (Fig. 5.4).

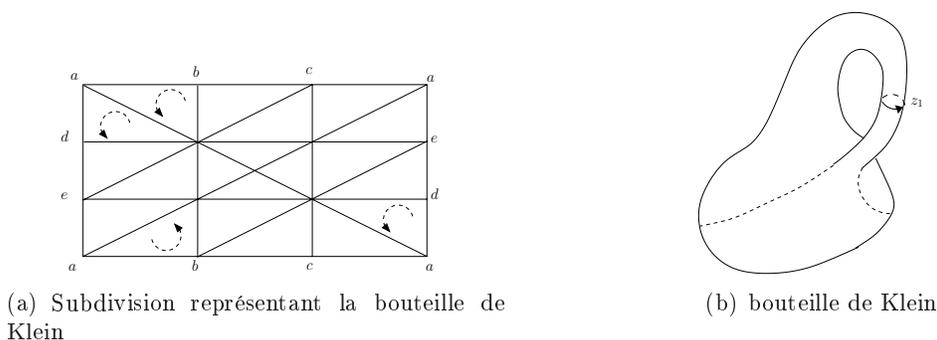


FIG. 5.4 – Bouteille de Klein : on peut montrer que le cycle $z_1 = [a, d] + [d, e] + [e, a]$ n'est le bord d'aucune 2-chaîne mais que $2z_1$ est le bord de la 2-chaîne composée de tous les 2-simplexes orientés comme sur la figure [165]

²La bouteille de Klein est une surface étudiée en 1882 par Klein dont on ne peut distinguer l'intérieur de l'extérieur. Son nom original "Kleinsche Fläche" (surface de Klein) a été (malencontreusement ou "humoristiquement") traduit par "bouteille de Klein" (Kleinsche Fläsche), même si comme remarqué par Brahy *et al.* dans [30], elle ne peut pas contenir de Bordeaux.

Par la suite, on notera 0_p l'élément neutre du groupe C_p .

On commence par définir un sous-groupe d'un groupe de chaînes, appelé groupe des *bords faibles* puis on montre qu'il contient précisément les cycles de la première et de la deuxième catégorie.

Définition 5.5 (Bords faibles) *L'ensemble*

$$W_p = \{c_p \in C_p / \exists \lambda \in \mathbb{Z}^*, \lambda c_p \in B_p\}$$

qui est un sous-groupe de C_p est appelé groupe des bords faibles.

Par la suite, on appellera *bord faible strict*, tout bord faible qui n'est pas un bord.

Lemme 5.6 $B_p \subset W_p \subset Z_p \subset C_p$

Preuve : *La troisième inclusion provient directement de la définition de Z_p .*

La première est aussi immédiate : pour tout élément $c_p \in B_p$, il existe $\lambda = 1$ tel que $\lambda c_p \in B_p$.

La deuxième provient de l'absence de torsion dans C_p . W_p est donc lui aussi sans torsion en tant que sous-groupe de C_p . Autrement dit, $\forall \lambda \neq 0, \forall c_p \neq 0_p, \lambda c_p \neq 0_p$. Par définition de $W_p, \forall c_p \neq 0_p \in W_p, \exists \lambda \neq 0 \lambda c_p \in B_p$. Comme $\partial_p \partial p + 1 = 0_{p-1}$, on a $\partial_p(\lambda c_p) = 0_{p-1}$ avec $\lambda c_p \neq 0_p$. Ainsi $\lambda \partial_p(c_p) = 0_{p-1}$ ce qui permet d'affirmer que c_p appartient à Z_p . \square

Le théorème suivant montre comment décomposer Z_p en une somme directe dont l'un des facteurs est W_p .

Théorème 5.7 (Décomposition de Z_p) *W_p est un facteur direct dans Z_p , autrement dit, il existe un sous-groupe V_p de Z_p tel que :*

$$Z_p = V_p \oplus W_p$$

Preuve : *On commence par rappeler que $H_p = Z_p/B_p$ peut aussi s'écrire comme la somme directe $F_p \oplus T_p$ où F_p est un sous-groupe libre de H_p et T_p un sous-groupe de torsion (cf Thé. 5.4-i) page 193).*

Soit q la projection de Z_p sur H_p/T_p . Cette projection peut être vue comme la composition de 2 projections q_1 et $q_2 : q = q_2 \circ q_1$ telles que :

$$\begin{array}{ccccc} & q_1 & & q_2 & \\ Z_p & \longrightarrow & H_p = Z_p/B_p & \longrightarrow & H_p/T_p \\ c_p & \longmapsto & \overline{c_p} & \longmapsto & \tilde{c}_p \end{array}$$

On considère maintenant le noyau de la projection q .

$$\text{Ker}(q) = \{c_p \in Z_p, q(c_p) = 0\}$$

$\overline{c_p}$ est la classe d'équivalence de c_p dans H_p . On a ainsi $\forall c_p \in \text{Ker}(q), \overline{c_p} \subseteq T_p$. Comme T_p est un groupe de torsion, $\overline{c_p}$ est un élément d'ordre fini dans H_p (cf Déf. D.7 page 262). Il

existe alors un entier $\lambda \neq 0$, tel que $\lambda \overline{c_p} = \overline{0_p} = B_p$. Autrement dit, il existe $b_p \in B_p$ tel que $\lambda c_p = b_p$.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(q) &= \{c_p \in Z_p, \exists \lambda \neq 0, \lambda c_p \in B_p\} \\ &= W_p \end{aligned}$$

Le noyau de cette projection est donc le sous-groupe W_p . Et par le théorème D.10, on obtient $Z_p/W_p \simeq H_p/T_p$.

H_p/T_p est de type fini et sans torsion. Il est donc libre en vertu du théorème D.11 (page 262). Z_p/W_p est donc lui aussi libre. Le théorème D.8 page 262 implique alors que $Z_p = Z_p/W_p \oplus W_p$. W_p est ainsi un facteur direct dans Z_p . \square

On dispose maintenant d'une décomposition de Z_p en la somme directe $V_p \oplus W_p$ où $V_p \simeq Z_p/W_p$. Le principal avantage de cette définition est que l'un des facteurs directs (W_p) contient B_p . On a donc d'après le théorème D.9 :

Corollaire 5.8

$$\begin{aligned} H_p &= Z_p/B_p = (V_p \oplus W_p)/B_p \simeq V_p \oplus W_p/B_p \\ &\simeq Z_p/W_p \oplus W_p/B_p \end{aligned}$$

où Z_p/W_p est un groupe libre et W_p/B_p un groupe de torsion.

Les classes d'équivalence de la partie libre de H_p sont donc construites sur les cycles qui ne sont pas des bords faibles, tandis que les classes d'équivalence de sa partie de torsion contiennent les bords faibles qui ne sont pas des bords.

Cette décomposition de H_p permet d'exploiter l'information contenue dans les formes normales de Smith des homomorphismes ∂_p et ∂_{p+1} pour déterminer le nombre de Betti et les coefficients de torsion de H_p .

Lemme 5.9 Soit $(e_1^p, \dots, e_{n_p}^p)$ et $(e_1^{p-1}, \dots, e_{n_{p-1}}^{p-1})$ des bases respectives de C_p et C_{p-1} telles que ∂_p soit représentée dans ces bases par \mathbf{D}_p :

$$\mathbf{D}_p = \left[\begin{array}{ccc|ccc} e_1^p & \cdots & e_{l_p}^p & e_{l_p+1}^p & \cdots & e_{n_p}^p \\ b_1^p & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & b_{l_p}^p & & 0 & \\ \hline & & & & 0 & \\ & & & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} e_1^{p-1} \\ \vdots \\ e_{l_p}^{p-1} \\ e_{l_p+1}^{p-1} \\ \vdots \\ e_{n_{p-1}}^{p-1} \end{array}$$

où $\forall i \in \{1, \dots, l_p\}$, $b_i^p \neq 0$ et $b_1^p | b_2^p | \dots | b_{l_p}^p$.

Avec ces notations, on a :

- i). $(e_{l_p+1}^p, \dots, e_{n_p}^p)$ base de Z_p
- ii). $(b_1^p e_1^{p-1}, \dots, b_{l_p}^p e_{l_p}^{p-1})$ base de B_{p-1}

iii). $(e_1^{p-1}, \dots, e_{l_p}^{p-1})$ base de W_{p-1}

Preuve : On considère un élément c_p de C_p et son image par ∂_p :

$$c_p = \sum_{i=1}^{n_p} a_i e_i^p \text{ et } \partial_p(c_p) = \sum_{i=1}^{l_p} b_i^p a_i e_i^{p-1}$$

i) provient de l'équivalence :

$$\partial_p(c_p) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, l_p\}, a_i = 0$$

Une base de Z_p est donc $(e_{l_p+1}^p, \dots, e_n^p)$.

Pour prouver ii), on remarque que $\forall c_{p-1} \in B_{p-1}, \exists c_p \in C_p, \partial_p(c_p) = c_{p-1}$. Il existe donc $\{a_i\}_{i \in \{1, \dots, l_p\}}$, tels que

$$c_{p-1} = \sum_{i=1}^{l_p} a_i b_i^p e_i^{p-1}$$

Et comme $\forall i \in \{1, \dots, l_p\}, b_i^p \neq 0, \{b_i^p e_i^{p-1}\}_{i \in \{1, \dots, l_p\}}$ est une base de B_{p-1} .

Enfin, on regarde W_{p-1} pour prouver iii).

$$W_{p-1} = \{c_{p-1} \in C_{p-1} / \exists \lambda \neq 0, \lambda c_{p-1} \in B_{p-1}\}$$

Par ii), on sait que $\forall i \in \{1, \dots, l_p\}, b_i^p e_i^{p-1} \in B_{p-1}$. Ceci implique que $\{e_i^{p-1}\}_{i \in \{1, \dots, l_p\}} \subset W_{p-1}$. Soit maintenant $c_{p-1} = \sum_{i=1}^{n_{p-1}} a'_i e_i^{p-1}$ un élément de W_{p-1} . $\exists \lambda \neq 0, \exists c_p \in C_p, \lambda c_{p-1} = \partial_p(c_p) \in B_{p-1}$. En développant cette expression, on obtient :

$$\lambda \sum_{i=1}^{n_{p-1}} a'_i e_i^{p-1} = \sum_{i=1}^{l_p} a_i b_i^p e_i^{p-1}$$

en supposant que $c_p = \sum_{i=1}^{n_p} a_i e_i^p$. Cette égalité se traduit par n_{p-1} égalités sur les coefficients des e_i^{p-1} qui impliquent que $\forall i \in \{l_p + 1, \dots, n_{p-1}\}, a'_i = 0$. Autrement dit, $\{e_i^{p-1}\}_{i \in \{1, \dots, l_p\}}$ est un ensemble fini de générateurs de W_{p-1} . De plus, comme ces éléments appartiennent à la base de Z_p , ils sont indépendants. Et $\{e_i^{p-1}\}_{i \in \{1, \dots, l_p\}}$ constitue ainsi une base de W_{p-1} . \square

Tout ceci conduit au théorème fondamental suivant qui permet d'obtenir le nombre de Betti d'un groupe d'homologie à partir des homomorphismes ∂_p et ∂_{p-1} .

Théorème 5.10 (nombre de Betti de $H_p(\mathcal{C})$) Soit $H_p(\mathcal{C})$ le $p^{\text{ème}}$ groupe d'homologie du groupe de chaînes \mathcal{C} . Soit n_p le rang de $C_p(\mathcal{C})$ et l_p le rang de ∂_p . Le nombre de Betti de $H_p(\mathcal{C})$, β_p , est tel que :

$$\beta_p = n_p - l_p - l_{p+1}$$

Preuve : $H_p = Z_p/W_p \oplus W_p/B_p$. Le groupe Z_p/W_p est libre (cf corollaire 5.8). Par définition, son rang est le nombre de Betti de H_p . Il est égal à $\text{rang}(Z_p) - \text{rang}(W_p)$ ce qui conduit, via le lemme 5.9, à $\beta_p = (n_p - l_p) - l_{p+1}$. \square

Définition 5.11 (Nombres de Betti d'un complexe de chaînes) *Le $p^{\text{ème}}$ nombre de Betti d'un complexe de chaînes \mathcal{C} , noté $\beta_p(\mathcal{C})$, est défini comme le nombre de Betti du $p^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de \mathcal{C} .*

On s'intéresse maintenant aux coefficients de torsion des groupes d'homologie.

Théorème 5.12 (Coefficients de torsion de $H_p(\mathcal{C})$) *Soit $H_p(\mathcal{C})$ le $p^{\text{ème}}$ groupe d'homologie du complexe de chaînes \mathcal{C} . Soit \mathbf{D}_{p+1} la matrice en forme normale de Smith représentant ∂_{p+1} . Soit $\{b_i^{p+1}\}_{i=1}^{l_{p+1}}$ l'ensemble des éléments non nuls de \mathbf{D}_{p+1} . T_p , le sous-groupe de torsion de H_p , est tel que :*

$$T_p \simeq \mathbb{Z}/b_1^{p+1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/b_{l_{p+1}}^{p+1}\mathbb{Z}$$

Preuve : $H_p = Z_p/W_p \oplus T_p$, où $T_p = W_p/B_p$. On note $\langle e_i^p \rangle$ le sous-groupe de C_p généré par e_i^p . D'après le lemme 5.9, on a $W_p = \langle e_1^p \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_{l_{p+1}}^p \rangle$ et $B_p = \langle b_1^{p+1}e_1^p \rangle \oplus \cdots \oplus \langle b_{l_{p+1}}^{p+1}e_{l_{p+1}}^p \rangle$. En appliquant le théorème D.9, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{W_p}{B_p} &\simeq \frac{\langle e_1^p \rangle}{\langle b_1^{p+1}e_1^p \rangle} \oplus \cdots \oplus \frac{\langle e_{l_{p+1}}^p \rangle}{\langle b_{l_{p+1}}^{p+1}e_{l_{p+1}}^p \rangle} \\ &\simeq \mathbb{Z}/b_1^{p+1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/b_{l_{p+1}}^{p+1}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Les facteurs invariants de ∂_{p+1} sont donc les coefficients de torsion de H_p . □

5.1.3 Obtention des générateurs des groupes d'homologie

L'obtention des générateurs des groupes d'homologie est un problème qui a été bien moins étudié que le calcul de la décomposition cyclique des groupes d'homologie. Cairns, cependant, a prouvé dans [41] qu'il est possible de représenter les homomorphismes de bords par des matrices dans une forme normale proche de celle de Smith telles qu'une unique base de chaque groupe C^p soit utilisée pour les matrices associées à ∂_{p+1} et ∂_p . A partir de cette forme matricielle des opérateurs bords, il est possible de déduire une famille de générateurs des groupes d'homologie.

Le théorème fondamental démontré par Cairns s'exprime de la façon suivante :

Théorème 5.13 *Soit un complexe de chaînes \mathcal{C} , il est possible de choisir simultanément des bases pour chaque groupe C_p telle que chaque matrice d'incidence puisse s'écrire sous la forme normale :*

$$\left[\begin{array}{c|ccc} & & \lambda_\gamma & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \lambda_0 \\ \hline & 0 & & & 0 \end{array} \right]$$

avec $\lambda_0 | \lambda_1 | \cdots | \lambda_\gamma$

Cette forme normale n'est pas très différente de la forme normale de Smith et peut s'obtenir facilement à partir de cette dernière.

La table 5.1 représente la forme normale de Smith modifiée de l'opérateur bord ∂_{p+1} , sur laquelle il est possible de lire à la fois les coefficients de torsion, le nombre de Betti et une famille de générateurs du groupe d'homologie H_p . Par la suite, on notera cette matrice N_{p+1} .

La partie libre du groupe H_p va être générée par les p -cycles qui ne sont pas des bords faibles, autrement dit en examinant N_p et N_{p+1} , par l'ensemble $\{b_1^p, \dots, b_{\beta_p}^p\}$. En effet, chacune de ces p -chaînes a pour image 0_{p-1} par ∂_p , puisqu'elle correspond à une colonne à 0 dans N_p . De plus, ni elle ni aucun de ses multiples n'a d'antécédent pour l'opérateur ∂_{p+1} puisque la ligne qui lui est associée dans N_{p+1} est uniquement constituée de 0.

La partie de torsion sera, quant à elle, générée par les cycles qui sont des bords faibles mais pas des bords. Là encore, il suffit de regarder N_p et N_{p+1} pour voir qu'il s'agit de la famille $\{a_1^p, \dots, a_{\rho_p}^p\}$. En effet, chacun de ses éléments est un k -cycle (colonne nulle dans N_p) et nécessite d'être multiplié par un entier strictement supérieur à 1 pour être un k -bord, c'est à dire pour posséder un antécédent dans N_{p+1} . On peut noter qu'en réalité, il suffit, ici, de regarder N_{p+1} : puisque les $a_i, i \in \{1, \dots, \rho_p\}$, sont des p -bords faibles, ils sont forcément des p -cycles.

$(p+1) - \text{Cycles}$				$\text{Antécédents des Bords Faibles}$								
a_1^{p+1}	\dots	$a_{\gamma_{p+1}}^{p+1}$	b_1^{p+1}	\dots	$b_{\beta_{p+1}}^{p+1}$	c_1^{p+1}	\dots	$c_{\rho_p}^{p+1}$	$c_{\rho_{p+1}}^{p+1}$	\dots	$c_{\gamma_p}^{p+1}$	
a_1^p						$\lambda_{\gamma_p}^p$		0				<i>Bords Faibles Stricts</i>
\vdots	0		0			\ddots				0		
$a_{\rho_p}^p$						0		$\lambda_{\gamma_p - \rho_p + 1}^p$				
$a_{\rho_{p+1}}^p$									1		0	<i>Bords</i>
\vdots	0		0			0				\ddots		
$a_{\gamma_p}^p$									0		1	
b_1^p											0	<i>Cycles qui ne sont pas des Bords Faibles</i>
\vdots	0		0			0					0	
$b_{\beta_p}^p$												
c_1^p											0	
\vdots	0		0			0					0	
$c_{\gamma_{p-1}}^p$												

TAB. 5.1 – Forme normale de Smith modifiée de l'homomorphisme de bord ∂_{p+1} .

Agoston a exploité les travaux de Cairns et a conçu un algorithme calculant ces formes matricielles, capable de mémoriser au fur et à mesure les divers changement de bases au sein de matrices de passage [1].

Cet algorithme repose sur le calcul successif de toutes les matrices N_p d'un complexe de chaînes pour p allant de 0 à l'indice du groupe d'homologie maximal souhaité. Chaque homomorphisme est successivement exprimé dans 4 paires de bases, excepté le premier et le dernier qui ne nécessitent l'emploi que de 3 paires de bases. Par la suite, on note \mathcal{K}^p la base naturelle de C^p . Le processus utilisé pour obtenir la matrice en forme de Smith modifiée de ∂_{p+1} est décrit ci-dessous. On suppose d'abord que la forme de Smith modifiée de ∂_p a déjà été calculée. Et on note $\mathcal{L}^p = U_p^{-1}\mathcal{K}^p$ et Γ^{p-1} les bases de C^p et C^{p-1} associées à cette forme. Le calcul de N^{p+1} est réalisé en 4 étapes :

1. On exprime ∂_{p+1} dans les bases canoniques \mathcal{K}^{p+1} et \mathcal{K}^p par la matrice d'incidence E_{p+1} .

2. On construit la matrice $E'_{p+1} = U_p^{-1}E_{p+1}$. Cette matrice représente ∂_{p+1} relativement aux bases \mathcal{K}^{p+1} et \mathcal{L}^p .
3. On calcule la forme normale de Smith modifiée N_{p+1} de ∂_{p+1} à partir de $E'_{p+1} : N_{p+1} = V_p E'_{p+1} U_{p+1}$. Cette matrice représente ∂_{p+1} dans les bases $\mathcal{L}^{p+1} = U_{p+1} \mathcal{K}^{p+1}$ et $\Gamma^p = V_p \mathcal{L}^p$.
4. A cet instant, la base de C_p utilisée pour N_p et N_{p+1} n'est pas la même. On multiplie donc N_p à droite par V_p^{-1} . Et on peut prouver [1, 167] que la matrice obtenue, qui représente ∂_p dans les bases Γ^p et Γ^{p-1} , est toujours en forme normale de Smith modifiée.

En pratique, le dernier calcul n'est pas effectué. En effet, il laisse la matrice N^p inchangée et l'information nécessaire pour construire les nouvelles bases est tout entière contenue dans les matrices de passage. A la fin du calcul, toutes les matrices N_p représentent les homomorphismes ∂_p relativement aux bases Γ^p telles que : $\Gamma^0 = V_0 \mathcal{K}^0$, $\Gamma^1 = U_1 V_1^{-1} \mathcal{K}^1$, \dots , $\Gamma^{n-1} = U_{n-1} V_{n-1}^{-1} \mathcal{K}^{n-1}$, $\Gamma^n = U_n \mathcal{K}^n$.

Cette procédure est résumée dans le tableau 5.2 dans lequel les paires de bases utilisées à chaque étape sont mises en évidence.

Etape	Bases $\llbracket \cdot \rrbracket$ et Matrice de ∂_p	Bases $\llbracket \cdot \rrbracket$ et Matrice de ∂_{p+1}
0. Entrée provenant de l'itération p	$[(V_{p-1} U_{p-1}^{-1})^{-1} \mathcal{K}^{p-1}] \llbracket [U_p \mathcal{K}^p] \rrbracket$ (mSNF) $N_p = V_{p-1} U_{p-1}^{-1} E_p U_p$	
1. Matrice d'incidence of ∂_{p+1}		$[\mathcal{K}^p] \llbracket [\mathcal{K}^{p+1}] \rrbracket$ (incidence) E_{p+1}
2. Multiplie à gauche E_{p+1} par U_p^{-1}		$[(U_p^{-1})^{-1} \mathcal{K}^p] \llbracket [\mathcal{K}^{p+1}] \rrbracket$ $E'_{p+1} = U_p^{-1} E_{p+1}$
3. Calcule la mSNF N_{p+1} de ∂_{p+1} à partir de E'_{p+1}		$[(V_p U_p^{-1})^{-1} \mathcal{K}^p] \llbracket [U_{p+1} \mathcal{K}^{p+1}] \rrbracket$ (mSNF) $N_{p+1} = V_p U_p^{-1} E_{p+1} U_{p+1}$
4. Multiplie à droite N_p par V_p^{-1}	$[(V_{p-1} U_{p-1}^{-1})^{-1} \mathcal{K}^{p-1}] \llbracket [U_p V_p^{-1} \mathcal{K}^p] \rrbracket$ $N_p V_p^{-1}$ (identique à N_p)	

TAB. 5.2 – Expression des homomorphismes de bords : mSNF dénote la forme normale de Smith modifiée.

5.2 Calcul effectif des groupes d'homologie

Il existe différentes méthodes de calculs de l'information homologique. Certaines approches que l'on pourrait qualifier de purement algorithmiques visent à retrouver cette information en manipulant directement les k -chaînes des subdivisions étudiées. D'autres s'intéressent aux matrices d'incidence en "oubliant" leur origine et cherchent à en extraire l'information homologique.

Il faut noter que le problème est différent si l'on souhaite seulement calculer les nombres de Betti et les coefficients de torsion des groupes d'homologie ou si l'on souhaite en outre obtenir des familles de générateurs. La première question a été, semble-t-il, plus étudiée que la seconde. Et si certaines méthodes algorithmiques permettent d'obtenir des familles de générateurs, aucune méthode matricielle, exceptée celle proposée par Agoston, ne s'est penchée sur l'obtention des générateurs.

5.2.1 Approches algorithmiques

Nous évoquons dans le cadre des approches algorithmiques trois travaux qui correspondent en réalité à deux approches différentes.

Avant d'expliquer le principe de ces méthodes, on peut tout d'abord noter qu'aucun des algorithmes mentionnés ici n'est complètement générique. Leurs domaines et conditions d'application sont résumés et comparés dans le tableau 5.3.

La première méthode, développée par Delfinado et Edelsbrunner [58] s'appuie sur un algorithme incrémental. Restreinte aux complexes simpliciaux plongeables dans \mathbb{R}^3 , elle consiste à travailler sur une *filtration* du complexe considéré. Il s'agit d'une suite finie de complexes simpliciaux telle que chaque complexe est un sous-complexe propre de son successeur dans la suite et que le dernier complexe de la suite est le complexe simplicial total étudié. Plus précisément la suite considérée possède en outre la propriété que deux complexes successifs diffèrent exactement d'un simplexe. Et le premier élément de la filtration ne contient qu'un simplexe. L'algorithme proposé vise à calculer les nombres de Betti du complexe. Ces derniers suffisent en effet à caractériser les groupes d'homologie recherchés puisque les objets considérés sont plongeables dans \mathbb{R}^3 et ne contiennent donc pas de torsion. L'algorithme est, à première vue, très simple. On note d la dimension maximale du complexe (forcément inférieure ou égale à 3). On appelle \mathcal{K}_i le $i^{\text{ème}}$ complexe de la filtration, égal à l'ensemble de simplexes $\{\sigma_1, \dots, \sigma_i\}$. Le complexe entier correspond à \mathcal{K}_m , et le nombre de Betti du complexe en dimension k est noté b_k . L'algorithme s'écrit :

```

Pour  $l = 0$  à  $d$  faire
   $b_l \leftarrow 0$ 
Pour  $i = 1$  à  $m$  faire
   $k \leftarrow \dim \sigma_i$ 
  si  $\sigma_i$  appartient à un  $k$ -cycle de  $\mathcal{K}_i$  alors  $b_k \leftarrow b_k + 1$  sinon  $b_{k-1} \leftarrow b_{k-1} - 1^3$ 

```

La validité de cet algorithme est prouvée dans [58]. Le problème qui se pose pour que la méthode soit utilisable consiste à exprimer algorithmiquement la condition "*appartient à un k -cycle*". En pratique, Delfinado et Edelsbrunner ont proposé des caractérisations pour les 0-cycles, les 1-cycles et les $(d - 1)$ -cycles où d représente toujours la dimension du complexe. Autrement dit, l'algorithme n'est complet que pour des complexes de dimension inférieure ou égale à 3. Dès la dimension 4, il n'existe a priori pas de moyen simple de tester si un simplexe appartient à un 2-cycle.

Cet algorithme a été mis au point pour être exploité en modélisation solide et calculer les nombres de Betti d' α -shapes [71, 72]. Sa complexité pour des complexes de dimension 3 est en $O(n\alpha(n))$ où α est l'inverse de la fonction d'Ackermann et n le nombre de simplexes de l'objet. Le coût de stockage est en $O(n)$.

Cette approche est équivalente à construire le complexe dont on souhaite calculer l'homologie simplexe après simplexe et à calculer au fur et à mesure ses nombres de Betti. Bien sûr la construction doit respecter certaines règles, la principale étant qu'on ne peut ajouter un simplexe que si toutes ses faces appartiennent déjà au complexe.

La deuxième approche suit un procédé inverse. L'idée consiste à simplifier le complexe étudié en ôtant séquentiellement certaines cellules bien choisies, afin que le complexe obtenu possède la même homologie que le complexe initial. Les deux méthodes basées sur cette approche, que nous citons ici, s'intéressent à des groupes de chaînes dont les groupes de coefficients sont des anneaux commutatifs ce qui garantit l'absence de torsion dans les groupes. Cependant, même si les philosophies de ces deux procédés sont très proches, ils présentent quand même certaines différences.

³comme un sommet est toujours un 0-cycle, on n'essaiera jamais d'accéder à la variable (indéfinie) b_{-1} .

Le procédé proposé par González-Díaz et Real dans [92] est défini uniquement sur des complexes simpliciaux de dimension 3. Après chaque simplification, l'objet obtenu est toujours un complexe simplicial. L'équivalence entre l'homologie du complexe initial et du complexe obtenu est garantie par la construction explicite d'une *contraction de chaînes*. La méthode de réduction se fonde sur deux étapes de simplification différentes. La première réduit le complexe à l'aide de "contractions" simpliciales (simplicial collapses), procédé classique qui consiste à enlever séquentiellement des couples de cellules, dont l'une est maximale dans le complexe et l'autre est une des ses faces libres de dimension juste inférieure.⁴ La deuxième étape est de nature plus algébrique. Elle se fonde comme dans l'approche précédente sur une filtration du complexe considéré mais aussi sur une filtration du complexe réduit. Elle détermine pour chaque simplexe σ_i appartenant au $i^{\text{ème}}$ complexe de la filtration du complexe original s'il doit appartenir au complexe réduit. La décision se fonde sur l'observation du bord de σ_i dans le $(i - 1)^{\text{ème}}$ complexe de la filtration du complexe réduit. A la fin de l'algorithme, on obtient non seulement les nombres de Betti mais aussi un ensemble de générateurs des groupes d'homologie. Cet algorithme a été effectivement utilisé sur des complexes simpliciaux construits sur des images discrètes basées sur une grille *BCC*. Dans l'article, le processus est détaillé pour le groupe de coefficient $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ même s'il est précisé, en introduction, que la méthode resterait valide pour tout ensemble de coefficients qui serait un anneau commutatif.

La méthode de Kaczyński, Ślusarek, et Mrozek [105] n'impose rien sur la nature du complexe cellulaire sur lequel est construit le complexe de chaînes. De plus, si le complexe de chaînes est, au départ, construit sur un complexe simplicial, rien ne garantit qu'à tout moment de la réduction, les cellules manipulées resteront des simplexes (c'est même rarement le cas). En effet, à chaque réduction deux chaînes de cellules sont ôtées et les opérateurs bords sont modifiés de sorte qu'une 2-cellule peut par exemple se retrouver avec quatre 1-faces. Contrairement à la méthode précédente, la simplification suit ici toujours le même schéma. A chaque étape, on enlève deux chaînes a et b telles que a est de dimension juste inférieure à b et qu'il existe un élément de l'anneau de coefficients λ non nul et une chaîne r de même dimension que a telle que $\partial b = \lambda a + r$. La validité et la terminaison de l'algorithme sont prouvées dans [105]. La complexité n'a pas été exprimée dans le cas général mais lorsque le groupe des coefficients est un corps, elle est au pire en $O(n^3)$ opérations arithmétiques où n est le maximum des rangs des groupes de chaînes. Pour certains cas très spécifiques, elle peut être encore améliorée.

Auteurs	Type de subdivision	Dim	Groupe de coefficients	Famille de générateurs	Torsions	Image
Delfinado et Edelsbrunner [58]	Complexe simplicial	$2D/3D$	\mathbb{Z}	non	non	α -shapes
González-díaz et Real [92]	Complexe simplicial	$3D$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	oui	non	grille <i>BCC</i>
Kaczyński, Ślusarek, et Mrozek [105]	Complexe de chaînes quelconque	nD	Anneau / Corps		non	

TAB. 5.3 – Comparatif de 3 méthodes algorithmiques

⁴Une face libre d'un simplexe est un simplexe qui n'est face d'aucun autre simplexe.

Pour résumer, deux approches que l'on pourrait respectivement qualifier de constructive et destructive permettent de calculer algorithmiquement les groupes d'homologie d'un complexe de chaînes. La première n'a été utilisée que dans des cas très particuliers, tandis que la deuxième semble pouvoir s'adapter à des objets plus généraux. Cependant, aucune d'elles ne prend en compte la notion de torsion et élude le problème soit en restant en petite dimension, soit en travaillant sur des groupes de coefficients particuliers. Enfin, il semble que la dernière méthode mentionnée soit équivalente à une réduction matricielle.⁵

5.2.2 Approches matricielles

Il existe un algorithme classique de mise en forme normale de Smith que nous présentons en premier lieu. Cependant, cet algorithme présente plusieurs inconvénients (complexités en temps et en mémoire élevées). De nombreux travaux ont été réalisés pour pallier ces défauts. Nous évoquons les différents types d'optimisation proposés et détaillons plus précisément l'algorithme sur lequel nous nous sommes appuyés par la suite qui a été proposé par Dumas *et al* [67].

Algorithme classique de mise en forme de Smith

L'*algorithme de réduction* que nous décrivons brièvement ici permet d'obtenir la forme normale de Smith d'un homomorphisme.

On considère deux groupes abéliens libres de rangs n et m , G et G' et un homomorphisme de f de G vers G' . On note $\mathbf{F} = (f_{ij})$ la matrice représentant f dans deux bases arbitraires de G et G' . L'algorithme que nous décrivons ci-dessous vise à obtenir la forme normale de Smith de f , autrement dit de calculer une matrice équivalente à \mathbf{F} qui soit en forme normale de Smith. Pour atteindre ce but, on peut appliquer des opérations élémentaires appropriées sur les lignes et les colonnes de la matrice.

L'algorithme classique de mise en forme de Smith est décrit en détail dans l'annexe E. On se contente ici d'une description rapide.

Principe de l'algorithme de réduction en forme normale de Smith :

- i). Calculer une matrice équivalence dont la valeur minimale est la plus petite possible,*
- ii). Déplacer en échangeant les lignes et colonnes voulues cette valeur minimale dans le coin haut gauche de la matrice et en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes s'arranger pour que toutes les autres valeurs de la première ligne et de la première colonne aient pour valeur 0,*
- iii). Appliquer les deux étapes précédentes à la matrice déduite de la précédente après enlèvement de la première ligne et de la première colonne, jusqu'à ce qu'une telle matrice n'existe pas ou qu'elle soit pleine de 0s. L'une de ces conditions d'arrêt est atteinte en un nombre fini d'itérations (au plus $\min(m,n)$ itérations).*

Optimisations

La méthode classique de mise en forme normale de Smith souffre de plusieurs inconvénients. Outre une complexité en temps élevée, elle peut faire apparaître au cours du calcul de grands

⁵Samuel Peltier (SIC, Poitiers) travaille actuellement sur la question et un rapport résumant ses travaux devrait être prochainement disponible.

entiers, même si la matrice d'origine est relativement simple. Ce problème, inhérent à la manipulation de matrices d'entiers, provient de l'utilisation de l'algorithme d'Euclide lors de la réduction. Hafner *et al.* dans [94] ont ainsi montré l'exemple d'une matrice d'entiers 20×20 , dont tous les éléments ont des valeurs comprises entre 0 et 10 et telle que, durant la réduction, apparaît une valeur supérieure à 10^{500} .

Le problème de la mise en forme normale de Smith de matrices d'entiers a été largement étudié souvent indépendamment du calcul des groupes d'homologie, et la plupart du temps sur des matrices carrées. Les améliorations peuvent viser soit à réduire la complexité du calcul, soit à minimiser la place mémoire requise, certaines s'attaquent à ces deux points simultanément.

Les méthodes matricielles visant à obtenir la forme normale de Smith d'un homomorphisme peuvent être classées, d'un point de vue algorithmique, en deux principales catégories : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. Ces dernières se montrent particulièrement efficaces dès lors que la matrice d'origine est creuse, elles sont quasiment équivalentes aux méthodes déterministes pour des matrices pleines. Cependant, elles ne permettent pas de garder trace des changements de bases permettant d'obtenir une telle forme et elles ne pourront donc pas être utilisées dès lors que l'on souhaitera obtenir des familles de générateurs des groupes d'homologie. Les méthodes déterministes cherchent quant à elles à optimiser les calculs en passant par des formes normales intermédiaires particulières (forme triangulaire, [67], forme de Hermite [107], matrice bidiagonale [189]...).

La méthode couramment employée afin de réduire le coût mémoire consiste à effectuer tout ou partie des calculs modulo un entier particulièrement bien choisi [67, 189]. En effet, on peut prouver que l'on obtiendra la même forme de Smith avec ou sans modulo, si ce dernier est pris "assez grand". La difficulté réside donc dans le choix d'un tel entier. Storjohann a prouvé dans [189] qu'on peut le prendre égal au double d'un multiple positif du produit des facteurs invariants de la matrice. Le problème est que l'on ne connaît pas ces facteurs invariants puisque le but de l'algorithme est justement de les calculer. On sait néanmoins que leur produit est égal au déterminant de la plus grande sous-matrice dont le déterminant est non nul. Cependant, le calcul du déterminant d'une matrice est lui aussi complexe. C'est pourquoi, une solution parfois adoptée consiste à mettre d'abord la matrice dans une forme intermédiaire sur laquelle son déterminant est aisément calculable (e.g. forme triangulaire) puis à effectuer le reste du calcul avec le modulo ainsi obtenu [67].

Les améliorations en terme de calculs et de mémoire mentionnées jusqu'à présent sont le fruit d'études sur des matrices quelconques, ne représentant pas forcément des homomorphismes de bord dans un complexe de chaînes. Dans le contexte plus particulier de la recherche des groupes d'homologie, on peut imaginer que la construction des matrices d'incidence peut être un facteur d'accélération des calculs. Cette idée a été exploitée par Dumas *et al.* [67], dans le cadre des complexes simpliciaux.

La table 5.4 référence quelques-uns de ces travaux, en précisant pour chacun le type d'algorithme mis en œuvre. Les complexités⁶ de la plupart de ces algorithmes pour une matrice carrée A , $n \times n$, sont de la forme $\tilde{O}(n^{e_1}(\log||A||)^{e_2})$ en terme d'opérations et $\tilde{O}(n^{f_1}(\log||A||)^{f_2})$, en terme d'espace mémoire requis (bits). Les paramètres intervenant dans ces complexité sont bornés de la manière suivante : e_2 et f_2 sont petits (e.g. ≤ 3), e_1 est compris entre 3 et $\theta + 1$ (où θ caractérise la complexité de l'opération de multiplication de deux matrices $n \times n$ utilisée : $O(n^\theta)$) et f_1 est compris entre 2 et 3. Une étude plus précise de ces complexités peut être trouvée dans [190]. Seul le dernier algorithme cité a été écrit spécialement pour caractériser des groupes

⁶La complexité exprimée ici ne tient pas compte d'éventuels facteurs constants ou logarithmiques, c'est pourquoi elle est notée \tilde{O} [106, 190].

d'homologie.

Auteurs	Type d'algorithme
Kannan et Bachem [107]	déterministe
Iliopoulos [102, 103]	déterministe
Hafner et McCurley [94]	déterministe
Giesbrecht [89]	Las Vegas
Giesbrecht [89]	Monte Carlo
Storjohann [189]	déterministe
Storjohann [191]	déterministe
Storjohann [190]	déterministe
Eberly, Giesbrecht, et Villard [68]	Monte Carlo
Dumas, Heckenbach, Saunders, Welker [67]	Déterministe
...	

TAB. 5.4 – Quelques algorithmes de mise en forme de Smith optimisés

Algorithme de Dumas *et al.*

L'algorithme de Dumas est utilisé pour calculer les nombres de Betti et les coefficients de torsion des groupes d'homologie des complexes simpliciaux non restreints. Ils ne s'intéressent pas à l'obtention des générateurs. Les spécificités de ces objets sont utilisés lors de la construction des matrices d'incidence, pour obtenir une matrice dont les lignes soient rangées par indice de pivot croissant. L'algorithme de réduction proprement dit ne dépend pas de leurs propriétés et peut être appliqué sur toute matrice dont les lignes ont été au préalable triées par indice de pivot croissant.

Les améliorations proposées par Dumas sont de plusieurs sortes. La première concerne la construction et le stockage des matrices d'incidence : il exploite le caractère creux de ces matrices, et tire parti des propriétés des complexes considérés pour obtenir naturellement une matrice dont les lignes sont rangées selon le critère voulu. La deuxième vise à réduire le nombre d'opérations coûteuses. En premier lieu, elle consiste à diminuer autant que possible la taille de la matrice afin de ne garder qu'une sous-matrice significative. En effet, toute l'information homologique est contenue dans la sous-matrice carrée dans le coin haut gauche de la matrice mise en forme de Smith. Les lignes et colonnes en dehors de cette zone sont toutes à 0. Elle consiste aussi à ne pas calculer la forme de Smith de la matrice entière mais de déduire son nombre de Betti et ses facteurs invariants d'une matrice triangulaire appropriée équivalente la matrice originale. La troisième cherche à réduire la valeur des entiers apparaissant dans le calcul. Elle se fonde sur un résultat de Storjohann qui garantit que toutes les opérations peuvent être effectuées modulo une certaine valeur, sans que cela change la matrice finale.

- *Construction et stockage des matrices*

Les matrices d'incidence sont stockées ligne par ligne. De plus comme elles sont creuses, seuls les éléments non nuls sont stockés avec pour chacun l'indice de la colonne à laquelle il appartient.

Les propriétés des complexes simpliciaux non restreints sont utilisés pour construire les matrices d'incidence. Un complexe simplicial non restreint est entièrement caractérisé par ses simplexes maximaux. Mais construire chaque matrice D_p requiert de connaître expli-

citement l'ensemble des p - et des $(p - 1)$ -simplexes du complexe. L'idée consiste alors à générer les p et $(p - 1)$ -faces des simplexes maximaux du complexe et de les ordonner dans l'ordre lexicographique. Pendant ce processus, un même simplexe peut apparaître plusieurs fois lorsqu'il est face de plus d'un simplexe maximal. Chaque duplicata est retiré dès que possible pour éviter de gaspiller de la mémoire.

Par exemple, si le complexe simplicial est de dimension 2 et contient les simplexes maximaux : $abc, abg, acd, ade, aef, afg$, la liste ordonnée des 1-simplexes correspondant sera : $\{ab, ac, ad, ae, af, ag, bc, bg, cd, de, ef, fg\}$.

D'autre part, l'ensemble des p -simplexes est utilisé à la fois pour le calcul de H_p et de H_{p+1} . On calcule alors les groupes d'homologie séquentiellement en commençant par H_0 et en terminant par H_n , où n est la dimension du complexe simplicial. Ainsi, on ne génère qu'une seule fois l'ensemble de p -simplexes et on le garde en mémoire uniquement pour effectuer le calcul de H_p et H_{p+1} .

La convention usuelle consiste à associer les lignes de la matrice aux $(p - 1)$ -simplexes et les colonnes aux p -simplexes. Les opérations sont ici réalisées sur la transposée de la matrice. Pour construire la matrice d'incidence, on recherche pour chaque p -simplexe, les indices de ses $(p - 1)$ -faces dans l'ensemble contenant les $(p - 1)$ -simplexes du complexe. A chaque face trouvée, un nouvel élément est ajouté à la matrice : l'indice de colonne associé est l'index de la $(p - 1)$ -face et sa valeur est 1 si elle est face directe, -1 sinon. Comme les ensembles de p -simplexes et $(p - 1)$ -simplexes sont ordonnés suivant l'ordre lexicographique, ce processus permet d'obtenir séquentiellement les éléments non nuls de chaque ligne par ordre d'indice de colonne croissant. En outre, la matrice obtenue est telle que ses lignes sont bien rangées par ordre d'indice de pivot croissant. Autrement dit, si $r(i)$ représente l'indice de la colonne contenant le premier élément non nul de la ligne i , $r(i)$ est monotone croissant. Cette propriété permet notamment d'obtenir une borne supérieure pour le rang de la matrice et peut contribuer à simplifier le processus de réduction.

La matrice ci-dessous est la matrice d'incidence associée à l'opérateur ∂_2 défini sur le complexe simplicial de la figure 5.5.

	ab	ac	ad	ae	af	ag	bc	bg	cd	de	ef	fg
abc	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
abg	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0
acd	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
ade	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
aef	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	0
afg	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1

- *Réduction en forme de Smith*

La construction de la matrice d'incidence précédemment décrite permet de créer une ligne à la fois. Ainsi, la matrice totale n'a pas besoin d'être entièrement calculée en une fois, ce qui est particulièrement intéressant lorsque celle-ci est trop volumineuse pour pouvoir être stockée en mémoire.

Le calcul de la forme normale de Smith est décomposé en plusieurs étapes. L'idée sous-jacente consiste à traiter autant de lignes que possible avec des opérations simples, et de n'utiliser des algorithmes plus élaborés et coûteux que lorsque c'est vraiment indispensable. En outre, durant les deux premières étapes, seules des opérations lignes sont exécutées, et on tire ainsi partie du stockage ligne de la matrice. Comme précédemment, on note $r(i)$ l'indice de la colonne du premier élément non nul de la ligne i . Autrement dit, $r(i)$ est

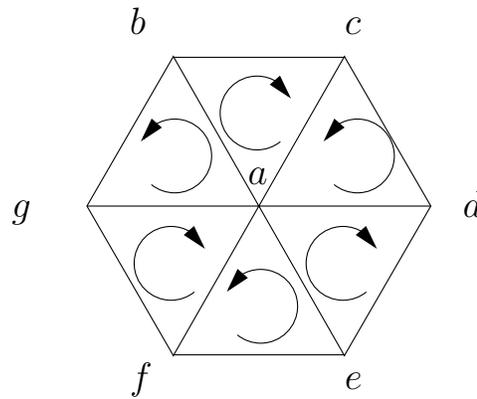


FIG. 5.5 – Complexe simplicial orienté

l'indice du pivot de la ligne i . On notera $pv(i)$ la valeur de ce pivot.

La première étape de l'algorithme consiste à modifier la matrice afin d'obtenir un nombre maximum de lignes avec des $r(i)$ distincts, et une valeur de pivot égale à 1. A cette fin, on utilise simplement des opérations lignes élémentaires sur les lignes de la matrice. Trois situations peuvent se produire après modification d'une ligne :

- 1) La ligne est uniquement composée de 0s et est immédiatement retirée de la matrice
- 2) La ligne est dans la forme voulue et est donc mémorisée telle quelle
- 3) La ligne possède une valeur de pivot différente de 1. Elle est alors mise de côté et son traitement est différé jusqu'à l'étape suivante où des opérations plus complexes seront mises en œuvre.

Pendant la deuxième étape, les lignes dans la configuration 3) sont traitées afin d'obtenir une matrice entièrement triangulaire. Comme leur pivot est différent de 1, il est parfois nécessaire d'utiliser l'algorithme d'Euclide étendu qui permet de calculer le plus grand diviseur commun de deux entiers. Cette situation survient lorsque l'on doit traiter deux lignes i et j , telles que $r_i = r_j$, $pv(i)$ ne divise pas $pv(j)$ et $pv(j)$ ne divise pas $pv(i)$. Après avoir été ainsi traitée, une ligne peut posséder une valeur de pivot égale ou supérieure à 1. Et à la fin de cette étape, la matrice est en forme triangulaire, avec la plupart de ses pivots égaux à 1 et quelques-uns supérieurs à 1.

Enfin, quatrième étape, pour obtenir les nombres de Betti et les coefficients de torsion des groupes d'homologie du complexe simplicial, il suffit, pour chaque matrice obtenue après la dernière étape, de compter et mémoriser le nombre de lignes dont le pivot est égal à 1 et d'appliquer l'algorithme de Munkres sur les lignes de la matrice qui ont des valeurs de pivot différentes de 1. Il s'agit ici de la partie la plus coûteuse de l'algorithme qui nécessite à la fois des opérations ligne et colonne.

- *Utilisation d'un modulo pour limiter les valeurs intermédiaires*

Le calcul de la forme normale de Smith d'une matrice entière requiert des opérations mathématiques qui peuvent provoquer l'apparition de grandes valeurs intermédiaires. Il a été prouvé par Storjohann que le calcul peut être réalisé modulo une valeur adéquate pour éviter de devoir manipuler de trop grands entiers.

Plus précisément, il faut choisir un modulo égal à deux fois la valeur d'un multiple positif du produit des facteurs invariants de la matrice. Un modulo approprié est donc le double de la valeur absolue du déterminant de la plus grande sous-matrice de déterminant non nul.

A la fin de la troisième étape de l'algorithme, le déterminant de la matrice peut être aisément calculé puisque la matrice est sous forme triangulaire. Dans ce cas, il est en effet égal au produit de toutes les valeurs pivots.

5.2.3 Bilan

On a vu qu'il existait deux principales approches pour calculer effectivement les groupes d'homologie d'un objet. La première, algorithmique, doit se plier à certaines restrictions et les méthodes proposées dans ce cadre sont notamment incapables de prendre en compte les torsions éventuelles d'un objet. La deuxième, matricielle, souffre d'une complexité élevée en temps et en mémoire et si différentes améliorations ont été proposées pour obtenir la forme normale de Smith de matrices, la plupart ne s'intéresse pas aux groupes d'homologie à proprement parler et aucune ne s'est confrontée au problème de l'optimisation de l'obtention de familles de générateurs des groupes d'homologie.

5.3 Homologie et générateurs "modulo"

Nous avons précédemment vu que la seule méthode générale, donc matricielle, proposée pour calculer à la fois la caractérisation des groupes d'homologie et des familles de générateurs de ces groupes est celle proposée par Agoston. Comme elle s'appuie sur une mise en forme normale de Smith, elle souffre des mêmes défauts, complexité en temps et en mémoire élevée.

La méthode détaillée ici vise à proposer un algorithme matriciel permettant d'obtenir les nombres de Betti et les facteurs invariants des groupes d'homologie recherchés ainsi que des familles de pseudo-générateurs qui, du moins sur nos premières expérimentations, fournissent une description satisfaisante des trous de l'objet.

Nous décrivons d'abord l'algorithme proposé puis donnons les résultats de nos premières expérimentations.

5.3.1 Description de l'algorithme

Pour concevoir un tel algorithme matriciel, nous avons choisi de reprendre un algorithme de mise en forme normale de Smith déjà optimisé et de l'adapter pour en déduire des générateurs. Comme nous l'avons vu, il existe une grande variété de tels algorithmes. Nous avons dû d'emblée éliminer les algorithmes probabilistes, même si leurs performances sur des matrices creuses étaient intéressantes du point de vue des matrices d'incidence. En effet, ils n'ont pas la capacité de fournir les matrices de passage dont nous avons besoin.

Nous avons finalement porté notre choix sur l'algorithme de Dumas, qui, s'il n'est pas le plus optimisé du point de vue de la complexité en terme d'opérations, présente l'avantage d'avoir été développé dans le but de calculer des groupes d'homologie et de tenir compte des propriétés des objets sur lesquels porte le calcul pour construire les matrices d'incidence. Nous souhaitons en effet étudier par la suite l'impact de la construction de la matrice sur l'efficacité de l'algorithme.

Nous avons donc combiné la méthode de Dumas avec le calcul des générateurs proposé par Agoston. De manière plus précise, nous fournissons à l'algorithme de réduction une matrice dont les lignes sont rangées par ordre d'indice de pivot croissant, soit obtenue à partir d'un complexe simplicial par la méthode proposée par Dumas, soit calculée à partir d'un ensemble simplicial puis triée. Nous suivons ensuite le même principe que Dumas pour obtenir une matrice en forme triangulaire, si ce n'est que nous conservons en mémoire l'ensemble de la matrice, tandis que lui

ne mémorisait ni les lignes pleines de 0s ni les lignes de pivot 1. En effet, pour ces dernières, seul leur nombre est nécessaire pour calculer par la suite le nombre de Betti qui dépend du rang de la matrice. Une fois la forme triangulaire obtenue, nous déduisons, comme lui, le modulo adéquat. Puis, nous finissons de calculer la forme normale de Smith modifiée pour la matrice entière en fonction de ce modulo. L'algorithme original de Dumas ne calculait effectivement que la forme normale de Smith de la sous-matrice composée des lignes de pivot plus grand que 1, seule susceptible de contenir des torsions. Durant tout le processus, nous conservons contrairement à Dumas l'ensemble des opérations effectuées via des matrices de passage. Ainsi, une fois la forme de Smith modifiée, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode d'Agoston et de déduire une famille de "générateurs". On parlera de préférence de "générateurs modulo" dans le sens où une partie des calculs a été effectuée avec un modulo. La question qui se pose alors naturellement est de savoir s'il existe un lien entre les générateurs classiques et les générateurs modulo. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous exposerons les perspectives de ce travail.

Les principales étapes de l'algorithme sont décrites ci-dessous et les différences avec la méthode de Dumas sont mises en évidence :

- 1 (Préparation de la matrice pour l'algorithme de Dumas) : *les lignes de la matrice sont rangées par ordre d'indice de pivot croissant,*
- 2 (Proche de Dumas - seule différence : on garde en mémoire la matrice entière, Dumas "oubliait" les lignes nulles) : *la matrice est mise en forme normale de Smith avec autant de pivots valant 1 que possible en :*
 - *première passe : seules des opérations lignes élémentaires sont appliquées,*
 - *deuxième passe : toutes les lignes sont réduites en utilisant leur gcd*
 - *la matrice est maintenant en forme triangulaire : on en déduit le déterminant de la plus grande sous-matrice de déterminant non nul, qui est aussi égal au produit des facteurs invariants*
 - *tous les calculs ultérieurs seront effectués modulo deux fois la valeur absolue de ce déterminant*
- 3 Différent de Dumas : *Des opérations lignes et colonnes élémentaires sont effectuées sur la sous-matrice contenant des lignes non nulles pour calculer la forme de Smith modifiée de Cairns.*

5.3.2 Premières expérimentations

Ces expérimentations ont été réalisées par Samuel Peltier et Laurent Fuchs, en se fondant sur les calculs modulo mentionnés précédemment. Il s'agissait de déterminer, expérimentalement pour commencer, si les générateurs modulo possédaient une signification proche des générateurs classiques.

Nous avons choisi comme première validation de cette approche des formes classiquement utilisées lorsque l'on cherche à tester des invariants topologiques. Nous présentons ici seulement les générateurs de surfaces, car les 2-cycles sur des volumes sont difficilement lisibles sur des images $2D$. La figure 5.6 montre le résultat de ces premiers essais sur un tore, une bande de Moebius, une bouteille de Klein, et un objet un peu plus complexe composé d'un cylindre plein et de deux tores. Le tore comporte deux trous de dimension 1, son groupe d'homologie H_1 est donc isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Les deux générateurs modulo obtenus après calculs correspondent aux générateurs classiques du premier groupe d'homologie du tore. La bande de Moebius, homotope à un cercle, a son premier groupe d'homologie isomorphe à \mathbb{Z} . Le générateur modulo calculé par

notre méthode correspond là encore au générateur classique de H_1 . La bouteille de Klein est un exemple plus complexe puisqu'elle comporte une torsion. H_1 est ici isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Là encore on obtient des générateurs modulo de la partie libre et de la partie de torsion qui sont aussi des générateurs classiques. Le dernier exemple représente un objet composé, sans torsion, et les générateurs modulo obtenus sont tout à fait satisfaisants.

Sur ces exemples, il semble que les générateurs modulo coïncident avec des générateurs classiques. Bien sûr, il s'agit d'un éventail restreint et nous n'espérons pas une correspondance aussi parfaite dans tous les cas. Nous pensons cependant qu'il est sans doute possible d'établir un lien formel entre les générateurs modulo et les générateurs classiques.

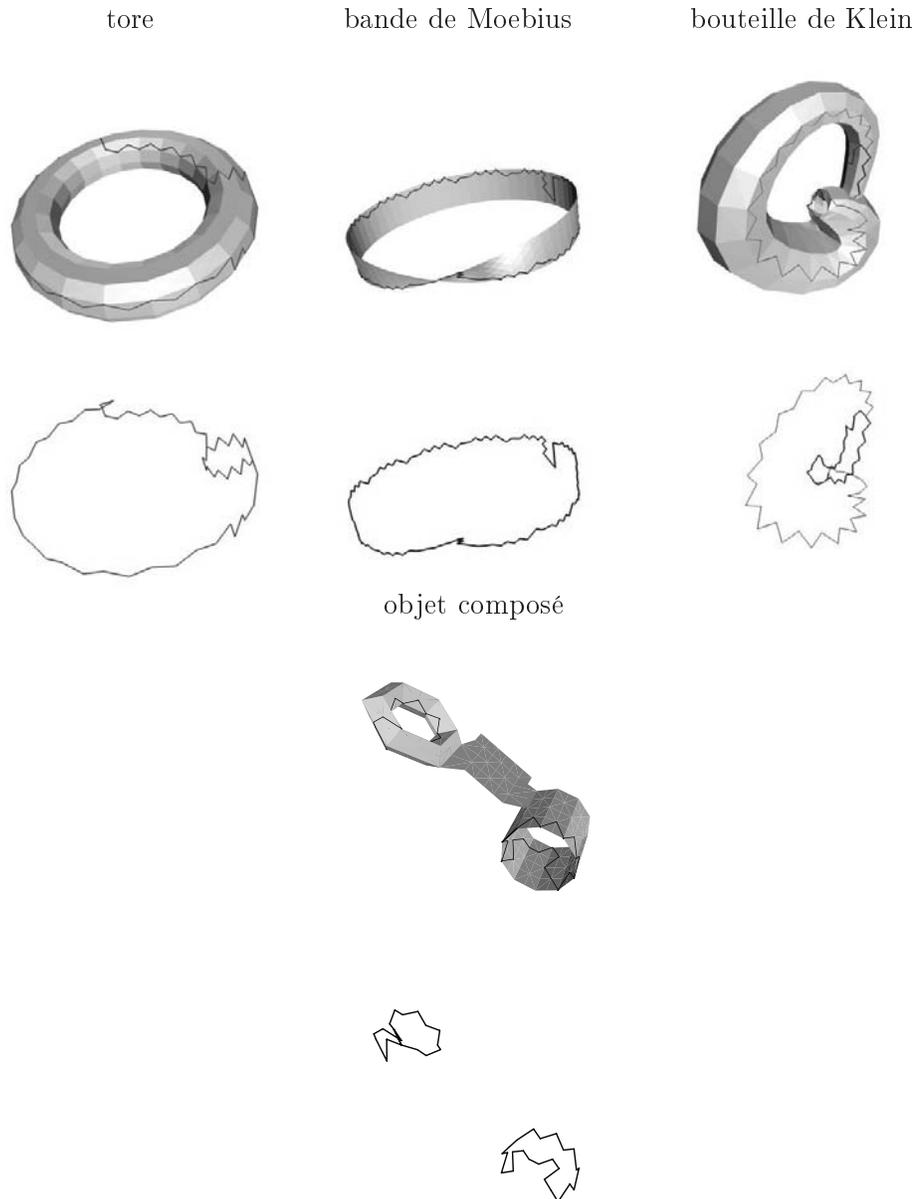


FIG. 5.6 – Exemples de générateurs modulo de H_1

Pour pouvoir enrichir et réaliser des tests à plus grande échelle, j'ai commencé à concevoir une plate-forme de tests plus générique⁷. Elle a pour vocation de favoriser des comparaisons entre différents paramètres intervenant lors du calcul de l'homologie afin d'évaluer l'importance relative de chacun et de pouvoir réaliser des améliorations à différents niveaux. A l'heure actuelle, elle permet de calculer les groupes d'homologie de complexes simpliciaux non restreints avec deux types de matrice différents. On peut, au choix, calculer le nombre de Betti et les coefficients de torsion d'un groupe donné, suivant la méthode classique, suivant la méthode de Dumas, ou en réalisant les opérations modulo une valeur fixée par l'utilisateur. On peut, en outre, obtenir l'ensemble des groupes associés à un objet simplicial, ainsi que leurs générateurs. Ce calcul peut se faire classiquement par la méthode d'Agoston ou en utilisant notre méthode pour obtenir des générateurs modulo.

De plus, cette plate-forme a été conçue et modularisée de sorte qu'il est tout à fait possible :

- d'intégrer d'autres types de matrice (pleine, creuse, stockée par ligne...),
- de fournir différentes méthodes de calcul des matrices d'incidence pour un type d'objet donné,
- de rajouter des types objets (ensemble semi-simplicial, complexe cubique...),
- de comparer différents algorithmes de mise en forme de Smith.

La prochaine étape consiste à y intégrer effectivement la gestion des ensembles semi-simpliciaux qui autorisent la présence de multi-incidence dans les objets représentés et permettent ainsi de représenter un objet en utilisant moins de cellules qu'un complexe simplicial.

5.4 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une nouvelle approche pour fournir en même temps qu'une caractérisation des groupes d'homologie, une famille de chaînes qui sont des "générateurs modulo". Il s'agit d'un premier pas vers le développement et l'intégration d'outils homologiques génériques en imagerie numérique.

Nos efforts vont maintenant se porter dans deux directions. Nous pensons tout d'abord qu'il nous faut, en premier lieu, compléter l'étude de l'obtention des générateurs des groupes d'homologie. Certaines questions restent en effet, à ce jour, sans réponse. Voici quelques-uns des problèmes que nous souhaitons aborder :

- Les matrices d'incidence que nous manipulons effectivement, sont très creuses et ne contiennent généralement que les valeurs 0, 1 et -1 . Nous aimerions posséder une mesure du taux de remplissage de ces matrices durant le processus de réduction, et être en mesure de déterminer dans quel cas un algorithme classique provoque l'apparition de grands entiers. Nous souhaitons pour cela nous appuyer sur des expérimentations à plus grande échelle. En outre, nous disposons pour la première question d'une étude de Donald et Chang [65] sur la complexité du calcul du type d'homologie d'une triangulation qui s'intéresse au caractère creux des matrices manipulées et pourra certainement servir de point de départ.
- L'algorithme de Dumas sur lequel nous nous sommes appuyés propose une construction particulière des matrices d'incidence dans le cadre des complexes simpliciaux pour fournir en entrée de l'algorithme une matrice dont la forme permet des économies de calculs. D'autre part, la méthode algorithmique de Kaczyński *et al.*, semble dans certains cas

⁷Elle est réalisée en C++, la technologie objet étant un outil pratique pour réaliser des programmes génériques via l'utilisation d'interfaces.

plus efficace que les méthodes matricielles de mise en forme de Smith alors qu'elle paraît tout à fait équivalente à des manipulations matricielles. On peut donc supposer que le gain de complexité observé provient de l'ordre de traitement des chaînes et on peut se demander si en conditionnant la matrice d'incidence de manière appropriée, on ne pourrait pas améliorer la complexité de la mise en forme de Smith. De manière générale, la question est de savoir s'il existe des moyens pour construire les matrices d'incidence de sorte que les calculs ultérieurs soient moins coûteux, ou s'il existe un ordre à appliquer aux calculs pour optimiser l'algorithme. Une étude plus poussée de l'algorithmique de Kaczyński *et al.* constituera vraisemblablement la première étape de ce travail,

- Notre algorithme fournit des "générateurs modulo". Sur les premières expérimentations effectuées, ces générateurs ressemblent aux générateurs classiques. Et nous aimerions déterminer dans quelle mesure il est possible de relier des générateurs classiques et des générateurs modulo. Plus précisément, nous nous demandons si, étant donné un générateur modulo, il existe un générateur classique construit sur les mêmes éléments de la base naturelle du groupe des chaînes avec éventuellement des coefficients différents. Une première piste envisagée consiste à traduire ce problème sous forme de systèmes d'équations, et de déterminer si ces systèmes d'équations admettent une solution.
- Dans le même ordre d'idées, il pourrait être intéressant de parvenir à construire des générateurs minimaux des trous d'un objet, autrement dit, des générateurs qui collent vraiment au trou. Deux pistes peuvent être envisagées, soit tenter d'obtenir un algorithme de réduction produisant de tels générateurs, soit se contenter après réduction d'un générateur non minimal et le réduire par des opérations sur les chaînes qui pourraient s'apparenter à des algorithmes de type modèle déformable.
- Enfin, un certain nombre d'applications que nous envisageons impliqueraient le calcul de groupes d'homologie locaux (autrement dit des groupes d'homologie d'un voisinage d'un point). On peut supposer que les calculs en seront simplifiés et il serait bon d'estimer les complexités dans ce cas. De plus, si les coûts inhérents s'avèrent malgré tout trop élevés, la localité des calculs mis en œuvre peut permettre d'envisager la parallélisation de l'algorithme. A priori, il s'agit ici d'effectuer le même ensemble d'opérations sur des données différentes. On choisira alors vraisemblablement une parallélisation suivant le modèle *SPMD* (*Single Program Multiple Data*). De plus, la localité des calculs peut permettre de travailler en mémoire distribuée sans augmenter les communications de manière significative, tout en simplifiant l'accès aux données.⁸

La deuxième direction que nous souhaitons aussi explorer est celle qui nous avait en premier amenés à nous intéresser aux groupes d'homologie, à savoir déterminer comment exploiter l'information topologique contenue dans ces groupes dans un contexte image. Nous donnons ici quelques idées d'applications, où le pouvoir de représentation des groupes d'homologie pourrait être exploité.

- Pour certaines applications d'analyse d'images (squelettisation, par exemple), on souhaite pouvoir caractériser sur des objets, des points dont l'enlèvement ne modifie pas la topologie (ni de l'objet, ni du fond). Différentes caractérisations de tels points ont été proposées, notamment sur les grilles \mathbb{Z}^2 , \mathbb{Z}^3 et \mathbb{Z}^4 . Cependant ces caractérisations dépendent à la fois du choix de la grille comme structure de l'image, de la dimension des objets étudiés et des adjacences considérées. Il n'existe pas de définition unifiée de point simple sur \mathbb{Z}^n . Peut-

⁸Il s'agit là de principes similaires à ceux mis en pratique lors de mon DEA [3], dont le but était de proposer une méthode pour paralléliser un algorithme de modèles déformables [129]. La parallélisation devrait ici s'avérer plus simple, car dans le cas de l'algorithme de modèles déformables, les calculs n'étaient que partiellement locaux.

être pourrait-on utiliser les groupes d'homologie du voisinage d'un point pour obtenir une information, même partielle, sur sa "simplicité".

- De nombreuses applications ont recours à des représentations multi-résolutions d'images. On peut imaginer développer une telle méthode qui tiendrait compte de la topologie des images considérées et garantirait une certaine ressemblance topologique (en terme de groupes d'homologie éventuellement locaux) entre deux niveaux successifs de la représentation.
- Certains algorithmes de modèle déformable nécessitent une initialisation qui n'est pas toujours facile à effectuer. Nos générateurs modulo pourraient éventuellement être utilisés lors d'une phase d'initialisation d'un tel processus.
- Enfin, si les groupes d'homologie contiennent moins d'informations que d'autres invariants topologiques, on sait que jusqu'en dimension 3 les groupes d'homologie locaux permettent de caractériser complètement les variétés [9]. Cette propriété peut sans doute être exploitée lors de l'analyse d'images de petites dimensions.

Nous comptons sur la plate-forme de tests que nous développons pour fournir, dans un premier temps, une palette de résultats expérimentaux qui pourront confirmer ou infirmer certaines de nos intuitions et nous indiquer les voies les plus prometteuses à suivre.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Résumé et contributions

Quantité de modèles ont été développés indépendamment pour représenter la topologie des images. Des outils plus ou moins spécifiques à chacun ont été proposés. Et il est finalement assez naturel de se demander si cette apparente diversité, d'objets et d'algorithmes, n'est pas un leurre. Autrement dit, ces modèles sont-ils vraiment si différents ? Ne serait-il pas possible de construire un cadre général englobant l'ensemble de ces structures et notions topologiques et permettant de les situer les unes par rapport aux autres ? Un tel cadre pourrait notamment être à même de fournir une palette de structures et d'outils à différents niveaux de généralité qu'il serait possible de spécialiser suivant les besoins des applications. Ainsi l'approche ascendante (bottom-up) généralement utilisée en image (résolution d'un problème en $2D$, puis en $3D$, ...) pourrait être complétée par une approche descendante (top-down).

Nous ne prétendons bien sûr pas fournir ici une réponse à ces questions ni un tel cadre de travail "clé en main". Ce sont néanmoins ces interrogations qui ont sous-tendu l'ensemble des recherches présentées dans ce manuscrit.

On peut dégager trois grands axes dans cette thèse. Le premier a été le point de départ des deux autres, puisqu'il s'est agi de réaliser une étude comparative (non exhaustive) des modèles et outils topologiques utilisés en imagerie. Le deuxième constitue, à la suite d'autres travaux, une réponse partielle à la première question posée puisqu'il a consisté à établir des liens entre des structures existantes et plus précisément à montrer que certaines d'entre elles étaient parfaitement équivalentes. Le troisième ne s'est, quant à lui, pas orienté vers les structures mais vers les outils. Il s'est plus précisément tourné vers un ensemble de groupes, les groupes d'homologie, qui présentent l'avantage de pouvoir être construits sur de nombreux modèles utilisés pour structurer des images et répondent ainsi potentiellement à notre souci de généralité. Un algorithme original de calcul de ces groupes, combinant des propriétés d'algorithmes précédents, a été proposé.

Nous nous sommes tout d'abord interrogés sur les notions de topologie classique qu'il est souhaitable de pouvoir définir sur des images. Les concepts de connexité et de surface (variété) sont les premiers à intervenir puisqu'ils permettent de formaliser la notion de composantes ou objets d'une image. Divers invariants topologiques viennent enrichir le tableau. Il s'agit notamment de la caractéristique d'Euler, des relations d'équivalence homotopique et d'équivalence (co)homologique. Ces outils permettent à la fois de caractériser plus précisément la topologie des composantes d'une image mais aussi de concevoir des transformations qui laissent tout ou partie de ces propriétés topologiques inchangées. On se heurte, néanmoins, à de nombreuses

difficultés dès lors que l'on souhaite exploiter ces notions dans le cadre de l'imagerie. Il s'agit d'abord de transférer des notions définies dans des espaces continus sur des espaces discrets. Et même lorsqu'on parvient à obtenir des caractérisations discrètes jugées satisfaisantes, il faut encore pouvoir les exploiter algorithmiquement. Les groupes d'homotopie ont montré là leur limite puisque s'il est possible d'en construire une représentation, informatiquement manipulable, leur utilisation effective, autrement dit leur comparaison est intrinsèquement reliée à un problème indécidable.

Dans le cadre de l'image, ces invariants peuvent être exploités à deux échelles différentes : au niveau des spels ou au niveau d'agrégats de spels (ou régions). Ce sont précisément les notions de connexité et de surface qui permettent souvent de passer d'une image structurée au niveau spel à une image structurée au niveau région. Il est alors clair que la définition de ces notions et leur validité seront cruciales au niveau spel. La caractérisation des autres invariants sera, en revanche, privilégiée au niveau région. La raison en est simple : le modèle représentant une image structurée en régions contient moins d'éléments et les calculs effectués seront donc moins coûteux.

Nous nous sommes ensuite plus précisément penchés sur les modèles employés pour représenter des images. L'idée consistait à la fois à évaluer et comparer les puissances de représentation et d'abstraction de ces modèles, à dégager leurs caractéristiques principales mais aussi à déterminer leur compatibilité avec les invariants topologiques mentionnés précédemment. Deux grandes méthodes de structuration d'images se sont dégagées. La première, "orientée graphe", mémorise uniquement les éléments de l'image (spels) et leurs relations d'adjacence. La seconde, "orientée cellulaire", est équivalente à un sur-échantillonnage de l'image. Elle ne se contente pas de simples relations binaires pour représenter les liens entre éléments de l'image, mais introduit des éléments intermédiaires pour caractériser ces liens. Ces deux approches ont été utilisées à la fois pour structurer des images au niveau spel et au niveau région. Il apparaît que la première approche permet de définir et manipuler efficacement certains outils topologiques dès lors qu'elle est utilisée au niveau spel sur la grille \mathbb{Z}^n et pour des dimensions petites (de préférence 2 ou 3). Seule, elle n'est cependant pas assez riche pour s'avérer efficace, ni au niveau région (quel que soit le support de l'image considérée), ni au niveau spel pour des images construites sur un support discret quelconque. La deuxième approche, plus générique, a été introduite pour pallier les insuffisances de la première. De fait, elle a été plus utilisée au niveau région. Et malgré le surcoût mémoire qu'elle impose, elle s'est vite avérée incontournable pour représenter de manière efficace des agrégats de spels dès la dimension 2.

Les structures cellulaires ont jusqu'à présent été peu employées pour représenter une image au niveau spel. Les rares utilisées étaient très spécifiques (complexes cubiques / polyédriques). Et, aucune notion de connexité de spels n'avait encore été proposée sur des modèles plus généraux. Dans un autre ordre d'idée, on peut aussi noter que cette approche a donné lieu à la construction d'une large palette de structures. Le besoin d'unification est donc ici particulièrement important. Des travaux antérieurs s'étaient déjà intéressés à la mise en évidence de liens entre certaines d'entre elles.

Notre première contribution se situe dans la lignée de ces recherches. Nous avons, en effet, explicitement construit des liens entre différents modèles et mis en évidence des sous-classes particulièrement intéressantes. Nous nous sommes initialement focalisés sur trois structures : ordres, complexes et cartes. Nous avons aussi été amenés à nous intéresser aux graphes d'incidence. Notre but était double : construire des ponts entre ces diverses structures et commencer à les exploiter. Afin d'atteindre l'un ou l'autre de ces objectifs, nous avons dû caractériser une sous-classe de chacun de ces modèles. Nous les avons respectivement appelés, ordres à support,

complexes à support, graphes d'incidence de surface et cartes simpliciales. Nous nous sommes aussi appuyés sur une famille d'ordres précédemment définie : les n -surfaces.

Il est assez aisé de construire un pont explicite entre les complexes et les ordres. Nous avons donc commencé par formaliser ce lien. Puis nous l'avons exploité pour montrer une correspondance entre un sous-ensemble d'un ordre à support (son noyau) et un sous-ensemble du complexe à support associé (son support). L'intérêt de cette relation est double. Tout d'abord, elle met sur un même plan deux sous-ensembles caractérisés de manière très différente (constructive pour le noyau, locale pour le support). Ensuite, elle a permis de définir différentes connexités sur ces classes d'ordres et de complexes, au moyen d'une famille de fonctions qui généralise une approche précédemment restreinte aux complexes polyédriques. Cette contribution est plus particulièrement orientée spels et comble partiellement un manque constaté, en proposant ces notions de connexité sur des structures définies de façon purement combinatoires. Nous nous sommes ensuite concentrés sur les ordres et les cartes généralisées¹. Le problème était, dès le départ, plus complexe. Les ordres représentaient clairement un ensemble d'objets trop vaste pour pouvoir être associés sans restriction à des cartes. Mais réciproquement, les cartes permettaient, contrairement aux ordres, de représenter des subdivisions comportant des incidences multiples. Il a donc fallu caractériser l'intersection entre l'ensemble des ordres et celui des cartes. Les deux candidats les plus prometteurs étaient les n -surfaces pour les ordres, et les "cartes simpliciales" pour les cartes généralisées. Nous avons proposé une caractérisation minimale pour cette dernière classe d'objets. Une autre difficulté est alors apparue : les définitions de ces modèles sont profondément différentes. Les dissemblances sont présentes à la fois au niveau de leurs "briques de base" (éléments hétérogènes : cellules vs éléments homogènes : brins) et au niveau du processus de définition (récursif vs constructif). Nous avons surmonté cette difficulté en utilisant un troisième modèle comme intermédiaire : les graphes d'incidence de surface. Nous avons commencé par fournir une caractérisation combinatoire de cette classe d'objets. Nous avons ensuite utilisé deux techniques de preuve pour montrer d'abord l'équivalence entre les n -surfaces et les graphes d'incidence de surface (preuve récursive) puis l'équivalence entre les graphes d'incidence de surface et les n - G -cartes simpliciales connexes fermées (preuve constructive). Nous en avons déduit l'équivalence recherchée. Une conséquence immédiate de ce lien fort est l'existence d'un plongement géométrique des n -surfaces sous forme de CW -complexes.

Les modèles que nous venons d'envisager sont, comme la plupart des modèles cellulaires utilisés dans le contexte de l'image, compatibles avec la construction de groupes d'homologie. Ces groupes sont particulièrement intéressants. Ils contiennent en effet plus d'informations que la caractéristique d'Euler et s'ils sont moins puissants que les groupes d'homotopie, ils sont à la fois théoriquement calculables et aisément comparables. De manière informelle, on peut dire qu'ils permettent de caractériser les trous d'un objet dans toutes les dimensions. Chaque groupe peut être caractérisé par un nombre fini d'entiers et deux tels groupes sont isomorphes s'ils ont la même dimension et sont associés aux mêmes entiers. En outre, un calcul plus poussé permet d'extraire des familles de générateurs de ces groupes, grâce auxquels il est possible de matérialiser les trous de toutes dimensions sur un objet. Plusieurs études avaient déjà été menées sur ces invariants dans le contexte de l'imagerie. Néanmoins, les algorithmes proposés n'étaient valides que dans un cadre très restreint (images de petites dimensions, subdivision simpliciale...) et l'information obtenue ne permettait pas forcément de caractériser complètement les groupes. L'utilisation de ces groupes dans des applications orientées image en est à ses balbutiements, et ce principalement pour deux raisons. Le pouvoir de discrimination de ces groupes dans ce

¹Travail réalisé en collaboration avec Pascal Lienhardt (SIC, université de Poitiers) et Xavier Daragon (A2SI, université de Marne La Vallée)

contexte est encore mal cerné et l'algorithme théorique les calculant souffre d'une complexité en temps et en mémoire très élevée. Ce dernier point explique notamment pourquoi les recherches déjà réalisées se sont cantonnées à des calculs sur des objets de petite taille. Une fois les notions relatives à la théorie de l'homologie assimilées nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux techniques de calcul de ces groupes. Nous voulions obtenir à la fois une caractérisation de ces groupes, via le calcul de leurs nombres de Betti et de leurs coefficients de torsion mais aussi, déterminer pour chacun d'eux un représentant "physique", afin de pouvoir par exemple visualiser ou "manipuler" les trous d'un objet. Nous nous sommes plus précisément concentrés sur les méthodes matricielles, seules à même de traiter des objets de n'importe quelle dimension. Certaines optimisations avaient déjà été proposées dans ce contexte qui permettaient notamment de réduire la complexité des calculs en terme de mémoire via l'utilisation d'un modulo approprié. Cependant, ces algorithmes améliorés ne fournissaient pas le moyen d'obtenir des générateurs de ces groupes. Nous avons donc conçu un modèle hybride permettant à la fois d'exploiter les optimisations apportées et de caractériser un ensemble de "représentants" des trous². Il ne s'agit pas, à proprement parler, de générateurs des groupes d'homologie mais plutôt de "générateurs modulo". Nos premières expériences semblent cependant confirmer qu'ils contiennent bien une information suffisante pour caractériser les trous des objets.

6.2 Perspectives

Ces travaux nous ont ouvert des perspectives dans plusieurs directions. Toujours dans l'idée de concevoir à terme un cadre de travail unifié englobant les diverses structures et outils topologiques développés en imagerie, il serait certainement bon de poursuivre l'inventaire des modèles et notions déjà définies et de déterminer plus précisément pour chacune des propriétés topologiques et chacun des algorithmes associés les hypothèses minimales requises. Une telle comparaison permettrait bien sûr d'affiner nos perceptions des relations entre ces modèles. L'idéal consisterait à fournir à l'ensemble des chercheurs de la communauté un outil permettant à la fois de visualiser les informations pertinentes sur les structures déjà étudiées, et de rassembler les algorithmes et applications développées dans chaque cadre. Pour assurer sa pérennité, un tel outil devrait, en outre, offrir à chacun la possibilité d'ajouter de nouvelles études. Mais il faut bien reconnaître que ce projet est utopique dans le sens où il nécessite d'abord d'obtenir un consensus sur la façon de structurer de telles informations, puis une participation régulière des différents acteurs pour garantir une évolution appropriée.

Plus prosaïquement, nous rappelons maintenant les différents points que nous souhaitons aborder pour prolonger et exploiter les résultats obtenus lors de la construction de liens entre cartes, ordres et complexes.

- Notre tout premier objectif consiste à simplifier la preuve relative à la comparaison des n -surfaces et des n - G -cartes. Nous pressentons, en effet, que la propriété *switch* des graphes d'incidence de surface est en réalité incluse dans la propriété relative aux intersections des θ^\square -adhérences. Plus précisément, ce dernier point semble directement induire une famille d'opérateurs switch_i sur les $(n + 1)$ -uplets du graphe. La définition de ces graphes peut donc très probablement être simplifiée ainsi que les preuves.
- Nous avons caractérisé une classe de graphes d'incidence qui est très clairement une sous-classe des graphes d'incidence représentant les objets étudiés par Brisson. Et nous nous demandons maintenant s'ils ne correspondent pas exactement aux mêmes objets. Autrement

²En collaboration avec Samuel Peltier et Laurent Fuchs (SIC, Université de Poitiers)

dit, nous souhaiterions déterminer si les d -variétés subdivisées de Brisson [36] représentent ou non les mêmes objets que les n -surfaces et les n - G -cartes simpliciales connexes fermées.

- Nous aimerions aussi étendre ces travaux en étudiant le rapport entre les ordres et les chaînes de cartes [74], objets cellulaires dont chaque cellule peut être représentée par une carte généralisée.
- Nous avons montré qu'il existait des n -surfaces qui n'étaient pas des ordres à support. D'un autre côté, $|H^n|$ qui est clairement un ordre à support est aussi une n -surface [55]. Nous aimerions étudier plus avant le lien entre les ordres à support et les n -surfaces, et éventuellement déterminer des propriétés des ordres frontières [54] construits sur ces ordres à support. De tels travaux pourraient peut-être amener à la conception d'algorithmes d'extraction de n -surfaces sur des ordres plus généraux que H^3 .
- Les liens que nous avons exprimés ne demandent maintenant qu'à être exploités. Dans un premier temps, il peut s'agir de comparer les notions topologiques définies simultanément sur plusieurs d'entre eux (par exemple les définitions de déformations homotopiques sur les ordres et sur les complexes) puis d'équiper les modèles d'outils qu'ils ne possèdent pas encore mais qui ont été définis sur un modèle équivalent (notion d'orientabilité définie sur les cartes mais inconnue sur les n -surfaces). La réalisation d'applications manipulant effectivement différents types de structures est un projet à plus long terme dans la mesure où il implique de nombreuses collaborations pour mettre en commun les applications déjà existantes pour réaliser leur intégration au sein d'un même logiciel.

Concernant maintenant la manipulation de groupes d'homologies dans un contexte image, nous sommes bien conscients de n'avoir qu'effleuré le problème. Nos efforts vont principalement se porter dans deux directions. Nous pensons tout d'abord qu'il nous faut, en premier lieu, compléter l'étude de l'obtention des générateurs des groupes d'homologie. Certaines questions restent en effet, à ce jour, sans réponse. Voici quelques-uns des problèmes que nous souhaitons aborder :

- Les matrices d'incidence que nous manipulons effectivement, sont très creuses et ne contiennent généralement que les valeurs 0, 1 et -1 . Nous aimerions posséder une mesure du taux de remplissage de ces matrices durant le processus de réduction, et être en mesure de déterminer dans quel cas un algorithme classique provoque l'apparition de grands entiers. Nous souhaitons pour cela nous appuyer sur des expérimentations à plus grande échelle. En outre, nous disposons pour la première question d'une étude de Donald et Chang [65] sur la complexité du calcul du type d'homologie d'une triangulation qui s'intéresse au caractère creux des matrices manipulées et pourra certainement servir de point de départ.
- L'algorithme de Dumas sur lequel nous nous sommes appuyés propose une construction particulière des matrices d'incidence dans le cadre des complexes simpliciaux pour fournir en entrée de l'algorithme une matrice dont la forme permet des économies de calculs. D'autre part, la méthode algorithmique de Kaczyński *et al.*, semble dans certains cas plus efficace que les méthodes matricielles de mise en forme de Smith alors qu'elle paraît tout à fait équivalente à des manipulations matricielles. On peut donc supposer que le gain de complexité observé provient de l'ordre de traitement des chaînes et on peut se demander si en conditionnant la matrice d'incidence de manière appropriée, on ne pourrait pas améliorer la complexité de la mise en forme de Smith. De manière générale, la question est de savoir s'il existe des moyens pour construire les matrices d'incidence de sorte que les calculs ultérieurs soient moins coûteux, ou s'il existe un ordre à appliquer aux calculs pour optimiser l'algorithme. Une étude plus poussée de l'algorithmique de Kaczyński *et*

- al.* constituera vraisemblablement la première étape de ce travail,
- Notre algorithme fournit des "générateurs modulo". Sur les premières expérimentations effectuées, ces générateurs ressemblent aux générateurs classiques. Et nous aimerions déterminer dans quelle mesure il est possible de relier des générateurs classiques et des générateurs modulo. Plus précisément, nous nous demandons si, étant donné un générateur modulo, il existe un générateur classique construit sur les mêmes éléments de la base naturelle du groupe des chaînes avec éventuellement des coefficients différents. Une première piste envisagée consiste à traduire ce problème sous forme de systèmes d'équations, et de déterminer si ces systèmes d'équations admettent une solution.
 - Dans le même ordre d'idées, il pourrait être intéressant de parvenir à construire des générateurs minimaux des trous d'un objet, autrement dit, des générateurs qui collent vraiment au trou. Deux pistes peuvent être envisagées, soit tenter d'obtenir un algorithme de réduction produisant de tels générateurs, soit se contenter après réduction d'un générateur non minimal et le réduire par des opérations sur les chaînes qui pourraient s'apparenter à des algorithmes de type modèle déformable.
 - Enfin, un certain nombre d'applications que nous envisageons impliqueraient le calcul de groupes d'homologie locaux (autrement dit des groupes d'homologie d'un voisinage d'un point). On peut supposer que les calculs en seront simplifiés et il serait bon d'estimer les complexités dans ce cas. De plus, si les coûts inhérents s'avèrent malgré tout trop élevés, la localité des calculs mis en œuvre peut permettre d'envisager la parallélisation de l'algorithme. A priori, il s'agit ici d'effectuer le même ensemble d'opérations sur des données différentes. On choisira alors vraisemblablement une parallélisation suivant le modèle *SPMD* (*Single Program Multiple Data*). De plus, la localité des calculs peut permettre travailler en mémoire distribuée sans augmenter les communications de manière significative, tout en simplifiant l'accès aux données.³

La deuxième direction que nous souhaitons aussi explorer est celle qui nous avait en premier amenés à nous intéresser aux groupes d'homologie, à savoir déterminer comment exploiter l'information topologique contenue dans ces groupes dans un contexte image. Nous donnons ici quelques idées d'applications, où le pouvoir de représentation des groupes d'homologie pourrait être exploité.

- Pour certaines applications d'analyse d'images (squelettisation, par exemple), on souhaite pouvoir caractériser sur des objets, des points dont l'enlèvement ne modifie pas la topologie (ni de l'objet, ni du fond). Différentes caractérisations de tels points ont été proposées, notamment sur les grilles \mathbb{Z}^2 , \mathbb{Z}^3 et \mathbb{Z}^4 . Cependant ces caractérisations dépendent à la fois du choix de la grille comme structure de l'image, de la dimension des objets étudiés et des adjacences considérées. Il n'existe pas de définition unifiée de point simple sur \mathbb{Z}^n . Peut-être pourrait-on utiliser les groupes d'homologie du voisinage d'un point pour obtenir une information, même partielle, sur sa "simplicité".
- De nombreuses applications ont recours à des représentations multi-résolutions d'images. On peut imaginer développer une telle méthode qui tiendrait compte de la topologie des images considérées et garantirait une certaine ressemblance topologique (en terme de groupes d'homologie éventuellement locaux) entre deux niveaux successifs de la représentation.
- Certains algorithmes de modèle déformable nécessitent une initialisation qui n'est pas

³Il s'agit là de principes similaires à ceux mis en pratique lors de mon DEA [3], dont le but était de proposer une méthode pour paralléliser un algorithme de modèles déformables [129]. La parallélisation devrait ici s'avérer plus simple, car dans le cas de l'algorithme de modèles déformables, les calculs n'étaient que partiellement locaux.

toujours facile à effectuer. Nos générateurs modulo pourraient éventuellement être utilisés lors d'une phase d'initialisation d'un tel processus.

- Enfin, si les groupes d'homologie contiennent moins d'informations que d'autres invariants topologiques, on sait que jusqu'en dimension 3 les groupes d'homologie locaux permettent de caractériser complètement les variétés [9]. Cette propriété peut sans doute être exploitée lors de l'analyse d'images de petites dimensions.

Nous comptons sur la plate-forme de tests que nous développons pour fournir, dans un premier temps, une palette de résultats expérimentaux qui pourront confirmer ou infirmer certaines de nos intuitions et nous indiquer les voies les plus prometteuses à suivre.

Annexes

Annexe A

Topologie générale

Cette annexe contient les définitions formelles des notions de topologie classique que l'on souhaiterait pouvoir retrouver sur des images.

A.1 Notions de topologie générale

Cette section présente tout d'abord les définitions essentielles liées à la topologie générale¹, puis présente un éventail non exhaustif des différents types de topologie existant. Elle se termine sur une présentation des principaux invariants topologiques. De plus amples détails peuvent être trouvés dans [8, 9, 91, 96, 137, 170, 171, 173, 183, 186, 188, 204].

A.1.1 Définitions d'un espace topologique

Définir une topologie sur un ensemble consiste à y caractériser des sous-ensembles particuliers, appelés *ouverts*. On suppose ici connues les notions essentielles relatives à la théorie des ensembles. Par la suite, on utilisera la notation E pour désigner un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ pour désigner l'ensemble des parties de E .

Définition A.1 (Espace topologique (à partir des ouverts)) *Un espace topologique est un ensemble E et une famille \mathcal{O} de $\mathcal{P}(E)$ satisfaisant les axiomes suivants :*

- *Toute union d'ensembles appartenant à \mathcal{O} appartient aussi à \mathcal{O}*
- *Toute intersection finie d'ensembles appartenant à \mathcal{O} appartient aussi à \mathcal{O}*
- *\emptyset et E appartiennent à \mathcal{O}*

Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les ouverts de la topologie.

La famille des ouverts \mathcal{O} est appelée *topologie de E* . Par un abus de langage, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on appelle l'espace topologique (E, \mathcal{O}) tout simplement E .

- *L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la famille de sous-ensembles $\mathcal{O}_A = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ est un espace topologique fini,*
- *L'ensemble des entiers \mathbb{Z} muni de la famille de ses parties : $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ est un espace topologique infini.*

¹aussi nommée *topologie ensembliste* et en anglais *point-set topology*.

Pour simplifier, on définit le plus souvent la topologie d'un ensemble E à l'aide d'un sous-famille \mathcal{B} de ses ouverts, appelée *base des ouverts* telle que tout ouvert de E est une réunion d'éléments de \mathcal{B} .

- $\mathcal{B}_A = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}$ est une base de (A, \mathcal{O}_A)
- $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}} = \emptyset \cup \{\{k\}, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$

Les ensembles complémentaires des ouverts dans E sont appelés *fermés*. Ils forment une famille \mathcal{F} de parties de E . Une définition symétrique d'un espace topologique à l'aide des fermés existe.

Définition A.2 (Espace topologique (à partir des fermés)) *Un espace topologique est un ensemble E et une famille \mathcal{F} de parties de E satisfaisant les axiomes suivants :*

- Toute union finie d'ensembles appartenant à \mathcal{F} appartient aussi à \mathcal{O}
- Toute intersection d'ensembles appartenant à \mathcal{F} appartient aussi à \mathcal{F}
- \emptyset et E appartiennent à \mathcal{F}

Les éléments de \mathcal{F} sont appelés les fermés de la topologie.

Les familles des fermés associées aux espaces topologiques (A, \mathcal{O}_A) et $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ correspondent exactement à leurs familles d'ouverts.

Une notion importante définie en chaque point d'un espace topologique est la notion de voisinage. Elle permet de formaliser l'idée de proximité entre des points, et ainsi de définir des propriétés telles que la connexité.

Définition A.3 (Voisinage) *On appelle voisinage d'un élément e de E pour une topologie \mathcal{O} toute partie de E qui est un ouvert contenant e .*

Le sous-ensemble $\{1, 2, 3\}$ est par exemple un voisinage de l'élément $\{2\}$ pour la topologie précédemment associée à l'ensemble A . $\{1\}$ est un voisinage de 1 pour la même topologie.

On appelle *famille de voisinages* d'un élément e de E , un ensemble de parties de E vérifiant 4 propriétés spécifiques.

Définition A.4 (Famille de voisinages) *Soit E un ensemble et e un élément de E , on appelle famille de voisinages de e dans E , un ensemble de sous-parties de E vérifiant les propriétés suivantes :*

- e appartient à chacun de ses voisinages.
- Tout sur-ensemble d'un voisinage de e est un voisinage de e .
- L'intersection de deux voisinages de e est un voisinage de e .
- Tout voisinage U de e contient un voisinage V de e tel que U soit également un voisinage de chaque point de V .

La famille $\{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ est une famille de voisinages de l'élément 2 de A pour la topologie \mathcal{O}_A

On peut bien sûr vérifier qu'étant donnée une famille d'ouverts sur E , la notion de voisinage déduite de cette topologie est cohérente avec cette définition de famille de voisinages.

Mais plus intéressant encore, étant donnée une famille de voisinages en chaque point de E , il est possible de définir sur E une topologie vérifiant les axiomes de A.1. Cette troisième manière de définir une topologie sur un ensemble, bien que moins souvent employée, s'avère plus proche du sens originel du terme topologie.

Théorème A.5 (Espace topologique (Voisinage)) *Etant donné un ensemble E et en chaque élément e de E , une famille de voisinages $\mathcal{V}(e, E)$, le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ formé de tous les $O \subseteq E$ tels que :*

$$e \in O \Rightarrow O \in \mathcal{V}(e, E)$$

définit une topologie sur E .

La topologie définie sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ à l'aide des ensembles de voisinages ci-dessous est la même que celle définie par la famille d'ouverts \mathcal{O}_A :

- $\mathcal{V}(1, A) = \{\{1\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\mathcal{V}(2, A) = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\mathcal{V}(3, A) = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\mathcal{V}(4, A) = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

Une dernière manière, enfin, de définir une topologie consiste à se fonder sur la notion *pré-topologique* d'adhérence. On définit une adhérence sur un ensemble comme une application qui, à une partie U de E , associe une partie plus grande $U' \supseteq U$ de E et, à l'ensemble vide, associe l'ensemble vide. Si cette application est *idempotente*², et si l'adhérence de l'union de deux parties est égale à l'union de l'adhérence de ces deux parties, alors l'adhérence est dite topologique. Un ensemble E muni d'une telle adhérence est alors un espace topologique dont la famille des ouverts est la famille des sous-ensembles de E qui sont les complémentaires des parties de E invariantes par adhérence.

La topologie induite sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ par l'application d'adhérence a ci-dessous est la même que celle définie par la famille d'ouverts \mathcal{O}_A :

- $a(\{1\}) = \{1\}$
- $a(\{4\}) = \{4\}$
- $a(\{2\}) = a(\{3\}) = a(\{2, 3\}) = \{2, 3\}$
- $a(\{1, 4\}) = \{1, 4\}$
- $a(\{1, 2\}) = a(\{1, 3\}) = a(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 3\}$
- $a(\{2, 4\}) = a(\{3, 4\}) = a(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3, 4\}$
- $a(\{1, 2, 4\}) = a(\{1, 3, 4\}) = a(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$

Il existe enfin un type particulier d'espaces topologiques appelés *espaces d'Alexandroff* ou *espace discrets* dont les ouverts vérifient une contrainte supplémentaire.

Définition A.6 (Espace d'Alexandroff) *Un ensemble E muni d'une topologie \mathcal{O} est appelé espace d'Alexandroff si l'intersection de toute famille d'ouverts³ de \mathcal{O} est aussi un ouvert de \mathcal{O} .*

²une application a est dite *idempotente* si et seulement si $a \circ a = a$.

³autrement dit une intersection finie ou infinie.

On parle aussi de *topologie d’Alexandroff* ou *topologie discrète*. Cette contrainte s’exprime de manière équivalente et symétrique sur les fermés. Une topologie est dite d’Alexandroff si l’union de toute famille de fermés est un fermé. De tels espaces ont la propriété de posséder en chaque point de l’espace un plus petit voisinage (qui est exactement égal à l’intersection de tous les ouverts contenant ce point).

- Tout espace topologique construit sur un ensemble fini est un espace d’Alexandroff,
- L’espace topologique infini $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ est aussi un espace d’Alexandroff,
- L’espace topologique défini sur \mathbb{R} par la famille d’ouverts $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} = \{]a, b[, a, b \in \mathbb{R}\}$ n’est pas un espace d’Alexandroff. En effet les intervalles $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ sont des ouverts pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais leur intersection $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est égale à $\{0\}$ qui n’est pas un ouvert.

Enfin, il est utile de noter que si E est muni d’une topologie \mathcal{O} , il existe une topologie induite sur tout sous-ensemble de E , dont les ouverts sont définis comme l’intersection des ouverts de E avec ce sous-ensemble.

La topologie induite sur $A' = \{1, 2, 3\} \subset A$ par \mathcal{O}_A est la famille $\mathcal{O}_{A'} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

A.1.2 Différents types de topologie

Il existe différents types de topologie et plusieurs classifications ont été proposées pour rendre compte de cette diversité. Nous présentons ici deux points de vue complémentaires. L’un s’attache aux caractéristiques propres de la topologie et se fonde sur ce qu’on nomme les *axiomes de séparation* tandis que le deuxième prend en compte les propriétés de l’espace sur lequel est bâtie cette topologie et s’intéresse ainsi au *type d’espace topologique* considéré

Le premier est dû en partie à Kolmogorov. Il s’agit de caractériser les propriétés dites de séparation des ouverts d’un espace topologique. Intuitivement, il s’agit de décrire la densité des ouverts dans l’espace, autrement dit de définir quels types de sous-ensembles vont être séparés par des ouverts. L’autre consiste à prendre en compte les propriétés particulières de l’ensemble sur lequel est définie la topologie. Ainsi des ensembles munis de certaines propriétés vont posséder une topologie induite et une structure plus riche qui sera utilisée pour les étudier.

Il est important de posséder une connaissance claire des principaux types de topologie, puisque les objets et notions que l’on peut définir sur un ensemble donné muni d’une topologie dépendent essentiellement de la structure de cet ensemble et des propriétés de sa topologie.

Les *axiomes de séparation*⁴ permettent de différencier des espaces topologiques selon la “densité” de leurs ouverts. Ces axiomes sont dénotés par la lettre \mathcal{T} indicé par un nombre⁵. Si \mathcal{T}_i est un axiome de séparation, on dit qu’un espace vérifiant \mathcal{T}_i est \mathcal{T}_i -séparé. On parle aussi d’espace \mathcal{T}_i . La numérotation des axiomes suit la règle suivante : un espace \mathcal{T}_i -séparé est aussi \mathcal{T}_j -séparé pour tout $j < i$. Nous ne citerons ici que les 3 principaux axiomes de séparation.

⁴appelés aussi axiomes de séparation de Tychonoff.

⁵la notation \mathcal{T} vient de l’initial du mot allemand signifiant séparation : *Trennung*.

\mathcal{T}_0	Espace de Kolmogorov	Pour tout couple de points, il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre
\mathcal{T}_1	Espace de Fréchet	Pour tout couple de points, P et Q, il existe au moins un voisinage de P ne contenant pas Q et un voisinage de Q ne contenant pas P
\mathcal{T}_2	Espace de Hausdorff	Pour tout couple de points, il existe un voisinage de l'un et un voisinage de l'autre qui sont disjoints

Les espaces \mathcal{T}_2 sont dits *séparés*.

- *L'exemple le plus simple d'espace topologique est un espace dont la topologie est triviale, autrement dit les seuls ouverts sont l'ensemble vide et l'espace entier. Une telle topologie est parfois aussi appelée topologie grossière et en anglais indiscrete topology. Dans un espace muni d'une telle topologie, il est impossible de distinguer deux éléments à l'aide de leur voisinage. Ainsi, tout espace contenant plus d'un seul élément et dont la topologie est triviale n'est pas \mathcal{T}_0 -séparé. Par conséquent, il n'est pas non plus \mathcal{T}_i -séparé pour tout i supérieur à 0.*
 - *A l'opposé existe aussi une topologie, appelée parfois topologie discrète ou discrete topology (par opposition à la "indiscrete topology"), telle que tout singleton contenant un point de l'espace est un ouvert. Un espace muni d'une telle topologie est un espace de Hausdorff. En effet, chaque point P admet parmi ses voisinages le singleton $\{P\}$. Ainsi étant donnés deux points P et Q, il existe un voisinage de P ($\{P\}$) et un voisinage de Q ($\{Q\}$) qui sont disjoints.*
 - *L'exemple le plus connu d'un espace \mathcal{T}_0 et non \mathcal{T}_1 est l'espace de Sierpinski. Etant donné un ensemble E composé de deux éléments x et y, la topologie de Sierpinski associée est la famille d'ouverts $\{\{x\}, \{x, y\} = E, \emptyset\}$. Etant donné le couple de points $\{x, y\}$, il existe bien un voisinage de x, $\{x\}$ qui ne contient pas y. A l'inverse, tout voisinage de y contient x.*
 - *Une sous-catégorie des espaces de Hausdorff est constituée des espaces métriques. Un espace métrique est un ensemble E sur lequel on a défini une fonction distance $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les 3 propriétés suivantes :*
 - $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$
 - $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = d(y, x)$
 - $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- Etant donné un élément x de E et un nombre réel ϵ , on appelle boule ouverte centrée en x et de rayon ϵ , l'ensemble $\{y \in E, d(x, y) < \epsilon\}$.*
- Un ouvert est alors défini sur un tel espace comme une union quelconque de boules ouvertes dans E. La famille composée de ces ouverts est appelée topologie métrique de E. Un espace métrique E muni de cette topologie est bien un espace de Hausdorff. On peut en effet montrer qu'étant donnés deux points distincts de E, x et y, les boules ouvertes $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$ et $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$ sont disjointes.*
- La topologie classiquement associée à \mathbb{R}^n est la topologie métrique construite sur la distance euclidienne $d_{\mathcal{E}} : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d_{\mathcal{E}}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - y_i)^2}$. Par la suite lorsqu'on parlera de l'espace topologique \mathbb{R}^n , on sous-entendra l'ensemble \mathbb{R}^n muni de la topologie construite sur $d_{\mathcal{E}}$. Et tout sous-ensemble de \mathbb{R}^n sera implicitement associé à la topologie induite sur ce sous-ensemble.*

Les topologies peuvent aussi être différenciées en fonction des propriétés caractérisant les

ensembles sur lesquelles elles sont construites, autrement dit en fonction du *type d'espace topologique* étudié. Les informations supplémentaires associées à ces ensembles permettent d'affiner l'étude de ces espaces topologiques.

Comme on l'a déjà vu, on parle de *topologie générale* ou *topologie ensembliste* lorsqu'on ne connaît, a priori, aucune propriété spécifique de l'ensemble sur lequel elle est construite.

Lorsque cet ensemble peut être équipé de structures de groupe, d'anneau..., on parle de *topologie algébrique*. Cette topologie est aussi connue sous le nom de *rubber-sheet geometry*. Elle est particulièrement adaptée pour étudier la structure de trous dans les objets qui peuvent souvent être représentés par des objets algébriques.

La *topologie combinatoire* [9] est une topologie algébrique particulière dont les sujets d'études sont des objets combinatoires, la plupart du temps des structures cellulaires. La *topologie linéaire par morceaux* ou *PL-topologie* [40] se restreint à une classe d'objets combinatoires, les espaces triangulés. Elle manipule en outre des *applications linéaires par morceaux*.

La *topologie différentielle* [35] travaille avec des objets différentiables, plus précisément des variétés (cf A.30) différentiables et des applications, elles aussi, différentiables, autrement dit C^∞ .

Une topologie, plus récemment introduite, est la *topologie combinatoire différentielle* [78, 79]. Elle vise à étudier des objets définis de manière combinatoire qui ont la propriété d'être différentiables.

Enfin, les espaces métriques sont des espaces qui possèdent une notion de distance. Une topologie naturelle découle directement de la métrique choisie, d'où le nom de *topologie métrique*. Les espaces métriques les plus utilisés sont sans doute ceux qui induisent une *topologie euclidienne* ou une *topologie riemannienne*. Mais il existe une grande variété de métriques conduisant à des espaces topologiques différents. Il est cependant important de noter que tous les espaces munis d'une topologie générale, algébrique, combinatoire ou linéaire par morceaux ne sont pas forcément des espaces métriques.

De nombreuses autres topologies pourraient être citées ici mais nous nous limitons volontairement aux plus significatives du point de vue de la manipulation des images. Le schéma A.1 page 231 récapitule les topologies citées ici et les principaux liens qui les unissent.

Ainsi, dans la plupart des études topologiques, la topologie classique peut être enrichie d'outils spécifiques attachés aux propriétés des ensembles considérés, permettant ainsi une meilleure analyse de ces ensembles.

A.2 Caractérisations et comparaisons de topologies

La principale raison d'être de la topologie réside dans l'étude des propriétés des espaces qui sont invariantes selon une déformation continue.

Il est donc nécessaire de pouvoir différencier des ensembles selon des critères purement topologiques. Aussi, la notion essentielle est-elle l'équivalence topologique entre deux ensembles munis d'une famille d'ouverts.

Cependant, une telle équivalence est extrêmement difficile à prouver et on se contente souvent d'étudier des propriétés qui ne caractérisent que partiellement la structure topologique d'un ensemble. Ces propriétés peuvent être étudiées globalement ou localement. Certaines sont définies sur tout type de topologie. D'autres nécessitent des informations additionnelles. Ainsi, dans le cadre de la topologie algébrique, il est possible de définir des outils spécifiques permettant de distinguer partiellement des espaces topologiques.

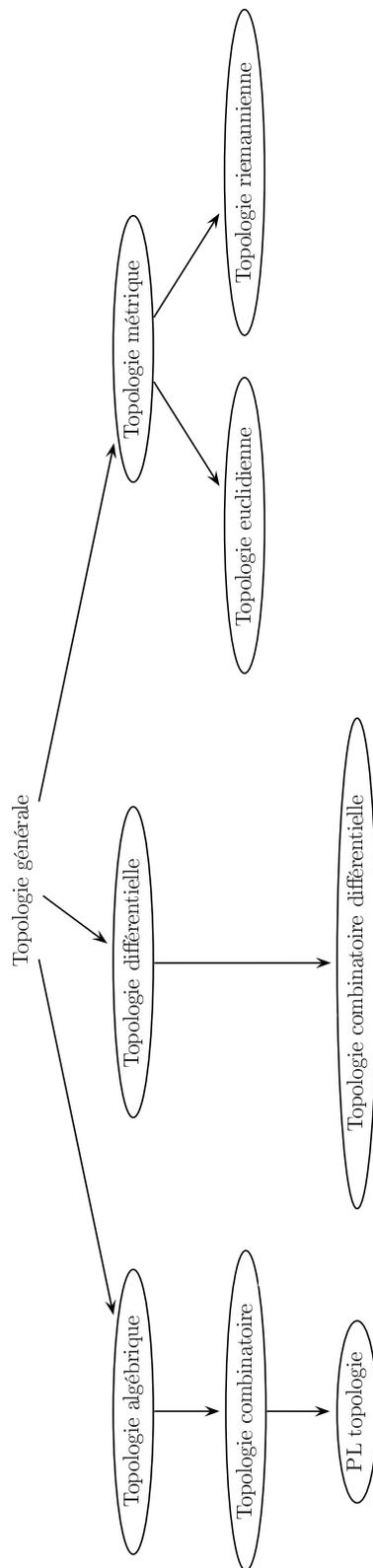


FIG. A.1 – Hiérarchie non exhaustive de différents types de topologie.

Intuitivement, deux espaces sont dits topologiquement équivalents s'il est possible de passer de l'un à l'autre par une déformation continue et vice versa. Il faut donc tout d'abord définir formellement la notion de déformation continue, usuellement appelée *application continue*.

Définition A.7 (Application continue) Une application d'un espace topologique E vers un espace topologique E' associe à tout élément e de E un unique élément de E' , appelé l'image de e .

Elle est dite continue si l'image réciproque de tout ouvert de E' est un ouvert de E .

L'application f de A munie de la topologie \mathcal{O}_A vers A' associée à $\mathcal{O}_{A'}$ définie ci-dessous est continue :

- $f(1) = f(4) = 1$
- $f(2) = 3$
- $f(3) = 2$

On peut alors définir la notion d'*homéomorphisme* qui traduit l'idée de transformation continue dans les deux sens.

Définition A.8 (Homéomorphisme) Un homéomorphisme entre deux espaces topologiques est un isomorphisme continu dont l'inverse est aussi continu.

- L'application f précédemment définie n'est pas un homéomorphisme,
- L'application $g :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \tan^{-1}(x)$ est un homéomorphisme entre $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et \mathbb{R}

Deux espaces seront alors dits topologiquement équivalents s'ils sont *homéomorphes*.

Définition A.9 (Espaces homéomorphes) Deux espaces topologiques sont dit homéomorphes ou topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme entre eux.

- $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et \mathbb{R} sont homéomorphes,
- un disque et un hémisphère sont eux aussi homéomorphes. En effet, si l'on "pose" un hémisphère sur un plan, il suffit de considérer la projection de l'hémisphère sur ce plan pour obtenir un homéomorphisme entre le disque et l'hémisphère.

Dans la plupart des cas, il est très difficile de dire si deux espaces sont homéomorphes. En effet, mettre en évidence une application continue dans les deux sens est loin d'être trivial. Il est souvent possible de définir une application continue d'un espace vers un autre mais l'étude de son inverse et de son éventuelle continuité pose plus de problèmes. Dans le cadre plus restreint de la topologie algébrique, il existe d'autres outils pour étudier l'équivalence de plusieurs espaces. Ils ne garantissent malheureusement pas l'équivalence topologique au sens strict mais permettent plutôt d'établir différents niveaux de ressemblances. On les appelle des *invariants topologiques*.

On ne dresse pas ici une liste exhaustive de toutes les propriétés topologiques qui sont préservées par homéomorphisme. On se contente de présenter celles que l'on souhaite pouvoir reconnaître dans le cadre de la manipulation d'images.

Il existe différentes manières de présenter ces invariants. On peut, par exemple, les classer suivant leur puissance de représentation. Certains permettent en effet de caractériser plus finement la topologie que d'autres. On peut aussi distinguer les invariants qui nécessitent de faire appel à

des structures algébriques supplémentaires (groupes) de ceux qui sont directement définissables sur des ensembles quelconques munis d'une topologie. Une autre possibilité que nous suivons ici consiste à différencier les invariants qui peuvent être étudiés sur des espaces topologiques quelconques (éventuellement munis d'outils algébriques) de ceux qui se fondent sur une décomposition cellulaire de l'espace associé. Nous verrons dans la section suivante que cette distinction se retrouve dans les deux principales approches utilisées pour construire une topologie sur des images.

Le schéma A.2 montre la hiérarchie des invariants algébriques que nous étudions ici. Voici en outre quelques exemples d'objets qui sont identiques du point de vue d'un invariant mais différents du point de vue d'un invariant "supérieur" :

- Les graphes X et Y (Fig. A.3-a) sont homotopes mais non homéomorphes, de même un disque et un point, ou un ruban de Möbius (Fig. A.10) et un cercle,
- L'objet composé de 2 cercles (sphère de dimension 1 : S^1) et d'une sphère de dimension 2 dont on a identifié un point (wedge sum of 2 circles and a 2-sphere) homéomorphe à l'objet de la figure A.3-b, dénoté par $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ possède la même homologie que le tore de la figure A.3-c, noté par $S^1 \times S^1$. Ces deux objets ne sont cependant pas homotopes.
- Les objets B et C ont la même caractéristique d'Euler mais ni les mêmes nombres de Betti, ni les mêmes groupes d'homologie. B est notamment connexe sans trou, tandis que C possède deux composantes connexes et un trou,
- Le plan projectif complexe⁶ dénoté par $\mathbb{C}P^2$ et l'espace $S^2 \vee S^4$ (une 2-sphère et une 4-sphère collées en un point) ont même cohomologie mais pas le même type d'homotopie.

A.2.1 Invariants sur un espace quelconque

Nous nous intéressons ici aux notions de *connexité*, de *dimension* et d'*homotopie*.

Il est naturel de commencer par se demander si un espace topologique est "d'un seul tenant" ou bien composé de plusieurs parties. Les notions de *connexité* et de *composantes connexes* formalisent cette question. Les invariants topologiques algébriques que nous verrons plus loin permettront, entre autres, de détecter dans des espaces topologiques des "coupures" plus subtiles, qui ne partagent pas un espace en plusieurs parties mais y créent des "trous".

Définition A.10 (Connexité) *Un espace topologique est dit connexe s'il n'est pas l'union de deux ouverts disjoints.*

Définition A.11 (Composante connexe) *Soit e un élément d'un espace topologique E , la composante connexe contenant e est l'union de tous les ensembles connexes contenant e et contenus dans E .*

- l'espace topologique précédemment défini sur l'ensemble A n'est pas connexe puisqu'il est égal à l'union de deux ouverts disjoints $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$
- la figure A.4 montre des exemples de sous-espaces de \mathbb{R}^2 connexes (B et C) et non connexe ($B \cup C$)

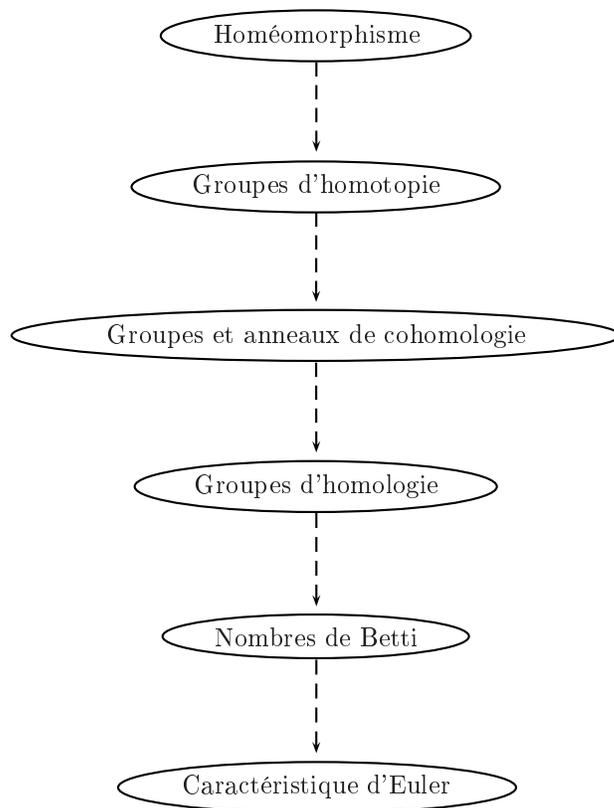
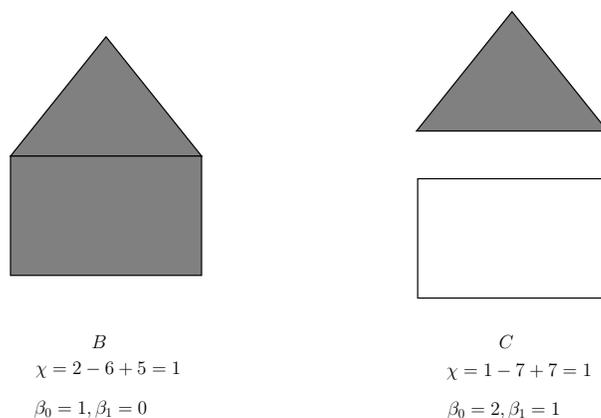
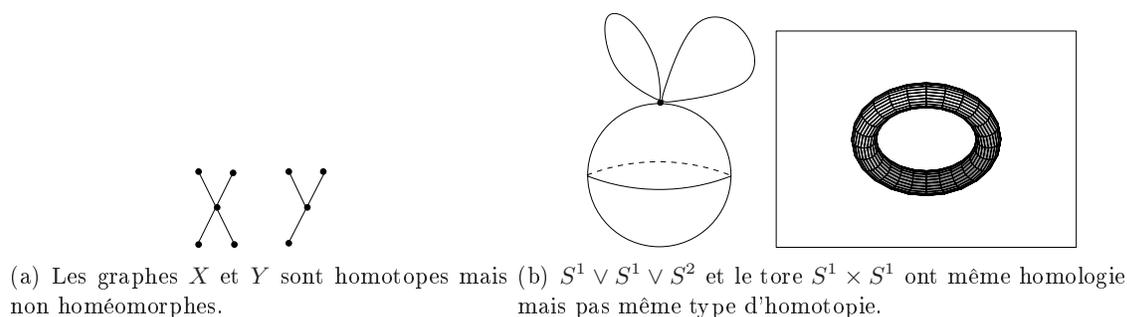


FIG. A.2 – Puissance de comparaison des invariants topologiques (algébriques) du haut en bas par ordre décroissant.



(c) Les objets B et C ont la même caractéristique d'Euler (1) mais ni les mêmes nombres de Betti, ni les mêmes groupes d'homologie.

FIG. A.3 – Comparaisons de la puissance de représentation des invariants topologiques algébriques.

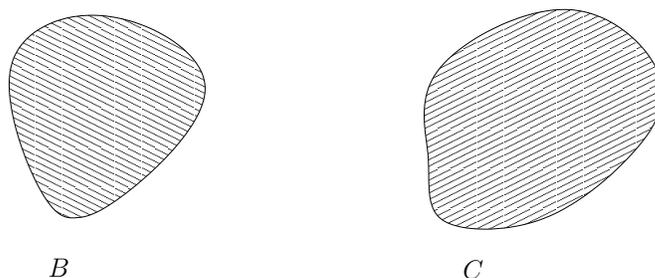


FIG. A.4 – L'espace topologique associé à B est connexe, l'espace topologique associé à l'ensemble $B \cup C$ n'est pas connexe.

Une conséquence immédiate de cette définition est que deux composantes connexes qui ont un élément en commun sont confondues. Ainsi, un espace topologique est défini par l'ensemble

⁶Le plan projectif complexe consiste en l'ensemble des classes d'équivalence $[a, b, c]$ des triplets ordonnés (a, b, c) de $\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ pour la relation d'équivalence $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ si $(a, b, c) = (\lambda a', \lambda b', \lambda c')$ pour un nombre complexe non nul λ .

de ses composantes connexes.

Théorème A.12 (Partitionnement d'un espace topologique) *L'ensemble des composantes connexes d'un espace topologique en constitue une partition.*

L'espace topologique associé à l'ensemble A peut être partitionné en 3 composantes connexes : $\{1\}$, $\{4\}$, et $\{2, 3\}$.

Il existe un autre notion de connexité, la *connexité par arcs* ou *connexité par chemins* qui est, en général, plus restreinte que la notion de connexité. Nous verrons plus tard qu'elle peut lui être équivalente sur les objets et les chemins définis en topologie combinatoire.

Définition A.13 (Connexité par arcs) *Un espace topologique E est dit connexe par arcs si pour tout couple d'éléments de E , e et f , il existe un chemin de e à f autrement dit une application continue de $[0, 1]$ dans E .*

Théorème A.14 (Lien entre connexité et connexité par arcs) *Un espace topologique connexe par arcs est connexe. La réciproque est généralement fausse.*

Le sous-espace de \mathbb{R}^2 défini ci-dessous est connexe mais non connexe par arcs :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = \sin(1/x) \text{ pour } x > 0\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y \in [-1, 1]\}$$

Il existe plusieurs notions de *dimension* en topologie. Nous nous intéressons ici à la notion de dimension introduite par Lebesgue, connue sous le nom de *dimension de recouvrement* ou *dimension topologique*. Elle généralise la notion de dimension euclidienne à des espaces quelconques. Elle nécessite de définir préalablement les notions de *recouvrement*, d'*ordre d'une famille de sous-ensembles*, et de *raffinement*.

Définition A.15 (Recouvrement) *Une famille \mathcal{A} de sous-ensembles de E est un recouvrement si l'union de ses éléments est égale à E . On l'appelle recouvrement ouvert de E si ses éléments sont des ensembles ouverts de E .*

Un recouvrement minimal est un recouvrement tel que si on enlève un de ses éléments, on n'a plus un recouvrement de l'espace.

Définition A.16 (Ordre d'une famille de sous-ensembles) *Une famille \mathcal{A} de sous-ensembles d'un espace E est d'ordre m si un certain point de E est dans m éléments de \mathcal{A} et aucun point de E n'est dans plus de m éléments de \mathcal{A} .*

Définition A.17 (Raffinement) *On dit qu'une famille \mathcal{B} raffine \mathcal{A} ou est un raffinement de \mathcal{A} si chaque élément B de \mathcal{B} est contenu dans au moins un élément de \mathcal{A} .*

La famille $\mathcal{A}_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$ est un recouvrement de l'espace topologique associé à A qui n'est ni ouvert ni minimal. L'ordre de cette famille est 2. La famille $\mathcal{A}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ est un recouvrement minimal non ouvert de A . L'ordre de cette famille est 1. La famille $\mathcal{A}_3 = \{\{1\}, \{4\}, \{2, 3, 4\}\}$ est un recouvrement ouvert minimal de A . L'ordre de cette famille est 2. \mathcal{A}_3 est un raffinement de \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 est un raffinement de \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_3 .

Définition A.18 (Dimension topologique) *Un espace E est dit de dimension finie s'il existe un entier m tel que pour chaque recouvrement ouvert \mathcal{A} de E , il existe un recouvrement ouvert \mathcal{B} de E qui raffine \mathcal{A} et qui est d'ordre au plus $m+1$. La dimension topologique de E est définie comme la plus petite valeur m pour laquelle cette affirmation est vérifiée.*

Ainsi, considérons par exemple l'ensemble des entiers \mathbb{Z} muni de la topologie discrète (tout singleton contenant un point de l'espace est un ouvert). Un recouvrement minimal de \mathbb{Z} est la famille de tous les singletons contenus dans \mathbb{Z} . Il s'agit d'un recouvrement ouvert tel que chaque point de l'ensemble appartient exactement à un élément du recouvrement. La dimension de \mathbb{Z} est donc bien 0.

L'invariant topologique que nous présentons maintenant a été introduit par Poincaré pour pallier certains défauts d'autres invariants, les groupes d'homologie, que nous évoquerons plus loin. Ce sont aussi des groupes, appelés *groupes d'homotopie*. On peut associer une suite de groupes d'homotopie à un espace topologique. Le plus utilisé est le groupe d'homotopie de dimension 1 ou *groupe fondamental*. Il repose sur les différentes manières de construire et déformer de manière continue des courbes fermées sur un espace topologique. Il se fonde sur la définition d'une relation d'équivalence, dite *équivalence homotopique*. On dira que deux courbes fermées sont homotopiquement équivalentes s'il existe une déformation continue qui envoie l'une sur l'autre. De même on dira qu'une courbe fermée est homotopiquement équivalente à 0 s'il existe une déformation continue qui envoie cette courbe sur un point.

Formellement, on définit d'abord la relation d'*homotopie de fonctions*.

Définition A.19 (Homotopie de fonctions) *Soient f_0 et f_1 deux applications continues d'un espace X dans un espace Y . f_0 est dite homotope à f_1 , s'il existe une application continue F du produit $X \times [0, 1]$ dans Y telle que $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$*

Pour tout $t \in I$, on note $f_t : X \rightarrow Y$ l'application $x \mapsto F(x, t)$ et on dit que f_t ou F est une *homotopie* de f_0 à f_1 .

Les chemins sur un espace topologique étant définis comme des fonctions continues de l'intervalle $[0, 1]$ sur l'espace, on peut alors en déduire une notion d'*homotopie de chemins*, qui requiert une condition supplémentaire. Les deux chemins doivent avoir les mêmes extrémités et ces deux points ne doivent être déplacés à aucun moment de la déformation continue qui mène de l'un à l'autre.

Définition A.20 (Homotopie de chemins) *Deux chemins c et c' dans X ayant même origine v et même extrémité w sont homotopes s'il existe une application continue F du produit $X \times [0, 1]$ dans Y telle que $F(x, 0) = c(x)$, $F(x, 1) = c'(x)$ pour tout $x \in X$ et $F(0, t) = c(0)$, $F(1, t) = c'(1)$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins joignant v à w . Le groupe fondamental est alors défini comme le groupe d'équivalence pour la relation d'homotopie des boucles ou lacets enraciné en un point de l'espace, c'est-à-dire des chemins dont l'origine et l'extrémité sont confondues⁷. En outre, il est possible de démontrer que les groupes fondamentaux définis en tout point d'une même composante connexe par arcs de l'espace sont isomorphes.

⁷on parle aussi de courbe fermée.

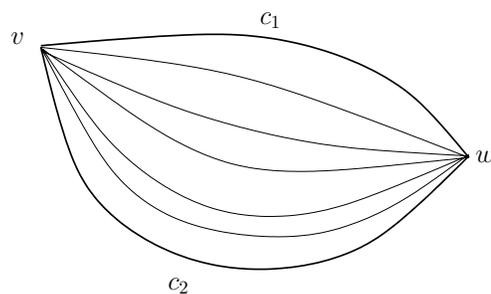


FIG. A.5 – Les chemins c_1 et c_2 sont homotopes dans \mathbb{R}^2 .

Définition A.21 (Groupe fondamental π_1) Le groupe fondamental d'un espace connexe par arcs est défini comme le groupe des classes d'équivalence pour la relation d'homotopie, des lacets enracinés en un point p .

- Tous les chemins enracinés en un point d'un disque sont équivalents pour la relation d'homotopie à un point. Le groupe fondamental du disque est donc isomorphe au groupe trivial 0 .
- Les chemins enracinés en un point de la surface d'un tore sont homotopes soit à un des deux cercles mis en valeur sur la figure A.6, soit à une combinaison de ces deux cercles. Le groupe fondamental du tore est donc isomorphe au groupe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

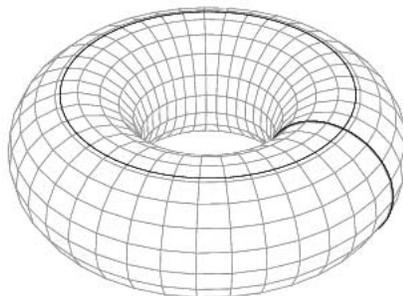


FIG. A.6 – Mise en évidence des générateurs du groupe fondamental du tore.

On peut élargir la notion de chemin dans des dimensions supérieures et ainsi définir les groupes d'homotopie de chemin π_n , $n > 1$.

Définition A.22 (Groupes d'homotopie π_n) Un lacet de dimension n sur un espace topologique X est une application continue du cube n -dimensionnel $I^n = [0, 1]^n$ dans X .

Le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie d'un espace connexe par arcs est défini comme le groupe des classes d'équivalence pour la relation d'homotopie, des lacets de dimension n enracinés en un point p .

Pour $n > 1$, π_n est abélien.

Les groupes fondamentaux d'une sphère de dimension n , $\pi_m(S^n)$ sont triviaux pour $m < n$ et $\pi_n(S^n)$ est isomorphe à \mathbb{Z} .

Ces groupes, bien que contenant plus d'informations que les groupes d'homologie sont rarement utilisés en pratique parce qu'ils sont très difficiles à calculer effectivement.

Cependant, la notion d'homotopie permet de définir d'autres notions particulièrement utiles. Il est ainsi parfois possible de comparer deux espaces selon leur *type d'homotopie*.

Définition A.23 (Type d'homotopie) Deux espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe une application continue $f : X \rightarrow Y$ et une application continue $g : Y \rightarrow X$ telles que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ soient respectivement homotopes aux applications identités de X et de Y .

L'application f (resp. g) est alors appelée une *équivalence homotopique* de X à Y (resp. de Y à X). On dit d'un espace qui a le même type d'homotopie qu'un point qu'il est *contractile*, autrement dit il peut être continûment déformé pour se réduire à un point.

- L'espace \mathbb{R}^n a le même type d'homotopie qu'un point. On peut en effet montrer que si f est l'application constante de \mathbb{R}^n sur $\{0\}$ et si g est l'injection canonique de $\{0\}$ sur \mathbb{R}^n , alors l'application $(x, t) \mapsto tx$ est une homotopie de $g \circ f$ à l'application identité de \mathbb{R}^n
- Il est aussi possible de montrer que l'espace $\mathbb{R}^n - \{0\}$ a le même type d'homotopie que la sphère S^{n-1} .

Les espaces contractiles appartiennent à une classe d'espace plus large : les espaces *simplement connexes*.

Définition A.24 (Espace simplement connexe) Un espace connexe par arcs est dit simplement connexe si toute courbe fermée sur cet espace peut-être continûment déformée en un point tout en restant dans l'espace.

- La figure A.7 montre deux sous-espaces du plan euclidien, l'un simplement connexe, l'autre pas.
- \mathbb{R}^2 est simplement connexe, tandis que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ne l'est pas. Et pour tout $n > 2$, \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^n privé de l'origine sont simplement connexes.
- La sphère S^n est simplement connexe si et seulement si $n \geq 2$

Autrement dit un espace simplement connexe est un espace connexe par arcs dont le groupe fondamental est trivial (i.e. ne contient que l'identité). Il existe des espaces simplement connexes mais non contractiles. L'exemple le plus connu en est la sphère de dimension supérieure ou égale à 2.

Tous les espaces ne sont pas contractiles mais ils peuvent parfois se réduire à un sous-espace plus petit possédant le même type d'homotopie. Il s'agit en quelque sorte de "projeter" un espace sur un sous-espace approprié. Or en topologie, l'équivalent de la projection s'appelle une rétraction et le sous-espace obtenu un rétracte. Cependant, un rétracte n'a pas forcément le même type d'homotopie que l'espace originel. Pour garantir que cette propriété ne se perd pas, il faut contraindre la rétraction à suivre certaines règles. On parle alors de *rétracte par déformation*.

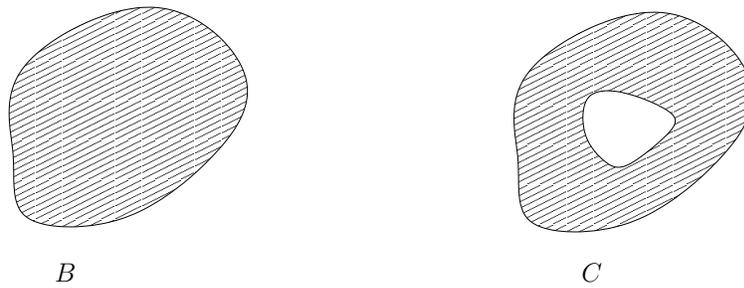


FIG. A.7 – Le sous-espace B est simplement connexe, tandis que C ne l'est pas.

Définition A.25 (Rétracte) *Un sous-espace Y d'un espace X est un rétracte de X s'il existe une application continue r , appelée rétraction de X vers Y telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in Y$*

- *Tout point d'un espace X est un rétracte de X ,*
- *Le sous-espace $\{0, 1\}$ n'est pas un rétracte de l'espace $[0, 1]$, car il ne peut exister d'application continue d'un espace connexe vers un espace non connexe.*

Par définition d'une rétraction, il est toujours possible de réduire un espace à un de ses points. Or si l'espace n'est pas connexe par arcs, il n'y a aucune chance qu'il ait le même type d'homotopie qu'un point. Cette constatation confirme que l'opération de rétraction non contrainte ne préserve pas le type d'homotopie.

Définition A.26 (Rétracte par déformation) *Un sous-espace Y d'un espace X est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction r de X sur Y et une application continue $H : X \times I \rightarrow X$ telles que :*

- i). $H(x, 0) = x$ pour tout $x \in X$,*
- ii). $H(x, 1) = r(x) \in Y$ pour tout $x \in X$,*
- iii). $H(x, t) = x$ pour tout $x \in Y$ et $t \in I$*

Nous avons donc ici un cas particulier d'homotopie, pour lequel la valeur de f_t est indépendante du temps sur un sous-espace donné.

La définition de *rétracte par déformation* adoptée par les anglo-saxons est quelque peu différente. Ils qualifient en effet de rétracte par déformation tout rétracte obtenu par une rétraction qui, vue comme une application de X dans X , est homotope à l'identité sur X . Autrement dit, ils n'imposent que les conditions (i) et (ii). Lorsque la condition (iii) est rajoutée, ils parlent alors de *fort rétracte par déformation* ou *strong deformation retract* [204].

La sphère S^{n-1} est un rétracte par déformation de \mathbb{R}^n privé de son origine.

Théorème A.27 (Rétracte par déformation et type d'homotopie) *Un rétracte par déformation Y d'un espace topologique X a le même type d'homotopie que l'espace X .*

A.2.2 Invariants sur un espace muni d'une décomposition cellulaire

Nous nous intéressons maintenant à des invariants, issus de la topologie algébrique, nécessitant de pouvoir réaliser une décomposition cellulaire de l'espace. Nous allons les présenter succinctement, en insistant plus particulièrement sur leur pouvoir de représentation. Là, non plus, il ne s'agit pas de dresser une liste exhaustive de tous les invariants algébriques mais plutôt de présenter ceux qui peuvent s'avérer utiles dans le cadre de l'imagerie numérique. Nous évoquerons donc ici la caractéristique d'Euler, les groupes d'homologie, les groupes et anneaux de cohomologie. Il est à noter qu'ils ont été, historiquement, inventés à peu près dans cet ordre, du plus faible au plus fiable. En effet, dès lors qu'un invariant ne parvenait pas à différencier deux objets topologiques non homéomorphes, on cherchait un nouvel invariant capable de le faire.

La *caractéristique d'Euler* n'est pas à proprement parler un invariant algébrique mais elle peut être reliée au rang des groupes d'homologie comme nous le verrons plus loin. Elle a d'abord été introduite sur les polyèdres. Elle est alors égale au nombre de faces moins le nombre d'arêtes plus le nombre de sommets. Elle a ensuite été étendue à des objets⁸ de dimension n qui peuvent être définis par agglomération d'un nombre fini d'éléments de dimension k , ou k -cellules pour k allant de 0 à n . On peut montrer que la valeur de la caractéristique d'Euler reste la même quelle que soit la décomposition cellulaire choisie pour l'objet. Elle caractérise donc bien l'objet.

Définition A.28 (caractéristique d'Euler (étendue)) Soit O un objet topologique de dimension n et ρ^r le nombre de r -cellules de O pour $r \in \{0, \dots, n\}$. La caractéristique d'Euler de O , notée $\chi(O)$, est définie par :

$$\chi(O) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \rho^r$$

- La sphère S^2 peut être décomposée en deux calottes (deux 2-cellules), un segment fermé (une 1-cellule) et un point (une 0-cellule) (cf Fig. A.8-a). Sa caractéristique d'Euler est ainsi égale à $\chi_{S^2} = 2 - 1 + 1 = 2$.
- Le tore peut se décomposer en une face unique (une 2-cellule), deux segments (deux 1-cellule) et un point (une 0-cellule) (cf Fig. A.8-b). Sa caractéristique d'Euler est ainsi égale à $\chi_T = 1 - 2 + 1 = 0$

Les *groupes d'homologie* sont une autre catégorie d'invariants topologiques qui permettent de mettre en évidence les "trous" d'un espace topologique. A un espace topologique est associée une suite de groupes d'homologie $\{H_k\}$ pour k supérieur ou égal à 0. H_0 renseigne sur les composantes connexes de l'espace, tandis que H_k , $k > 0$ caractérise ses "trous k -dimensionnels". Ces groupes sont formellement définis dans le chapitre 5 page 187). On peut juste noter ici qu'ils nécessitent la définition d'un groupe C_k , appelé groupe des k -chaînes, pour chaque dimension k présente dans la subdivision cellulaire. Chacun de ces groupes permet de définir la structure des éléments d'une dimension donnée. Un élément de C_k est une chaîne de dimension k , autrement dit une combinaison linéaire d'éléments de dimension k de l'espace avec des coefficients pris dans un groupe abélien. Une base naturelle d'un tel groupe est constituée de l'ensemble des éléments k -dimensionnels de l'espace. On associe à ces groupes une suite de morphismes $\{\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}\}$ qui précisent la notion de bord entre les éléments dont les dimensions diffèrent de 1. Ces morphismes doivent refléter la propriété suivante : *le bord d'un bord est nul*. Autrement, dit $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. On

⁸Il s'agit de la classe des complexes cellulaires que nous reverrons plus loin.

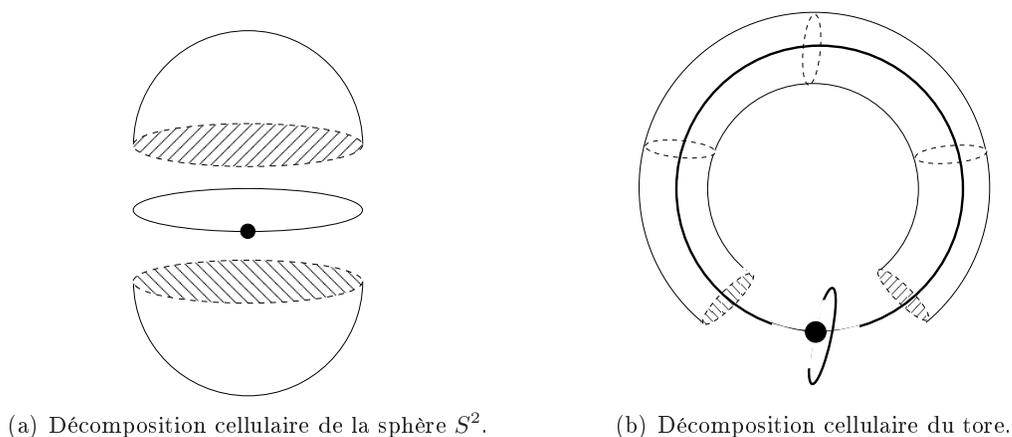
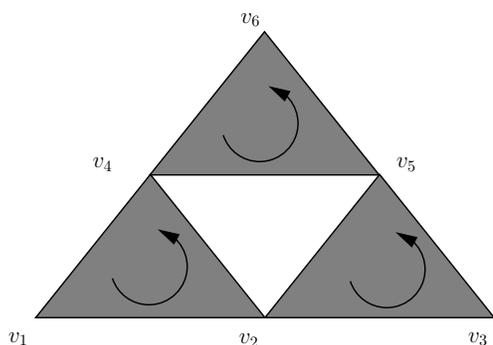


FIG. A.8 – Décomposition cellulaire de deux objets simples.

peut remarquer qu'il existe différents types d'homologie, chacun lié au choix du groupe abélien dans lequel sont pris les coefficients des chaînes. Les groupes de coefficients les plus utilisés sont les groupes \mathbb{Z} (groupe des entiers) et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (groupes des classes d'équivalence des entiers pour la relation *modulo* p). Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est particulièrement utilisé lorsque les cellules de la subdivision ne peuvent pas être munies d'une orientation.

La figure A.9 représente un objet composé de 3 faces, 9 arêtes et 6 sommets. Il ne possède qu'une composante connexe : son groupe d'homologie de dimension 0 est donc isomorphe à \mathbb{Z} . Il existe un trou de dimension 1, délimité par les arêtes $[v_2, v_4]$, $[v_4, v_5]$ et $[v_5, v_2]$ et aucun trou 2-dimensionnel. les groupes H_1 et H_2 sont ainsi respectivement isomorphes à \mathbb{Z} et au groupe trivial.

FIG. A.9 – Décomposition cellulaire d'un sous-espace de \mathbb{R}^2 .

Il existe une relation entre le groupe fondamental π_1 et le groupe d'homologie de dimension 1, H_1 . Ces deux groupes étudient des boucles de dimension 1. La différence essentielle est que deux cycles orientés différemment appartiennent à la même classe d'homologie mais généralement pas à la même classe d'homotopie. Le groupe d'homologie de dimension 1 n'est rien d'autre que l'abélianisation du groupe fondamental (cf Hatcher [96] page 166).

On appelle $n^{\text{ème}}$ nombre de Betti et on note β^n le rang du groupe d'homologie de dimension n . β^0 indique le nombre de composantes connexes de l'espace tandis que β^n , $n > 0$ compte le nombre de "trous n -dimensionnels" de l'espace topologique. Les nombres de Betti sont des invariants topologiques moins forts que les groupes d'homologie. On peut prouver que la caractéristique d'Euler peut être reliée aux nombres de Betti de la manière suivante : $\chi = \sum_{r=0}^n (-1)^r \beta^r$.

Ainsi les nombres de Betti associés à l'espace de la figure A.9 sont : $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$. Le calcul classique de la caractéristique d'Euler donne : $\chi = 3 - 9 + 6 = 0$. Cette valeur coïncide bien avec celle donnée par le calcul en fonction des nombres de Betti : $\chi = 1 - 1 + 0 = 0$. Un autre exemple de nombres de Betti associés à un objet cellulaire est donné sur la figure A.3-c page 235.

Il existe aussi un invariant topologique qui n'est autre que le dual des groupes d'homologie. Il s'agit des *groupes de cohomologie*. Ils permettent aussi de caractériser les trous (plus précisément les "co-trous") d'un espace. Cependant, leur structure algébrique est plus complète que celle des groupes d'homologie. Il est, en effet, possible de leur adjoindre un produit : le *cup product* qui leur donne une structure d'anneau. La définition formelle de ces groupes demanderait ici l'introduction de trop de notions additionnelles. Le lecteur intéressé pourra satisfaire sa curiosité au choix dans [9, 96, 165, 186].

A.3 Un espace topologique particulier : la variété

Historiquement, les topologues se sont toujours particulièrement intéressés aux espaces topologiques qui ressemblaient, du moins localement, à un espace de référence. Les *variétés* sont de tels espaces qui ont la propriété d'être localement équivalents à un espace euclidien. Plus prosaïquement, une variété lorsqu'elle est connexe, fermée et contenue dans un espace euclidien de dimension juste supérieure, possède une propriété particulièrement intéressante. Elle sépare, en effet, l'espace qui la contient en deux parties, dont l'une est finie. Autrement dit, elle permet de définir des objets au sein d'un espace topologique. Il s'agit en quelque sorte d'une extension de la notion de courbe fermée définie dans des espaces $2D$ pour des espaces de dimensions supérieures. Une courbe fermée dans un espace $2D$ peut ainsi être vue comme une variété de dimension 1.

Avant de définir la notion de *variété topologique*, il est nécessaire d'introduire la notion d'*espace compact*. La propriété de compacité est, elle aussi, un invariant topologique.

Définition A.29 (Espace compact) *Un espace E est dit compact si tout recouvrement ouvert de E contient un sous-recouvrement fini⁹.*

- *Tout espace topologique fini est compact,*
- *$[0, 1]$ est compact tandis que $[0, 1[$ ne l'est pas,*
- *La sphère de dimension n , S^n , est compacte pour tout n*

Définition A.30 (Variété topologique) *Une variété topologique¹⁰ de dimension n ou n -variété est un espace topologique de Hausdorff dont chaque élément possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de E^n (espace euclidien de dimension n) ou à la moitié fermée de E^n .*

⁹Il existe une autre définition d'un espace compact qui requiert en outre que l'espace soit séparé.

¹⁰Il existe d'autres définitions de variétés topologiques qui diffèrent sensiblement de celle-là, Alexandrov [9] rajoute ainsi la condition de connexité tandis que Saveliev [181] ne requiert pas que l'espace soit Hausdorff.

L'ensemble des points qui ont un voisinage homéomorphe à un ouvert de E^n est appelé l'intérieur de la variété. Le complément de l'intérieur est appelé le bord, c'est une $(n-1)$ -variété.

Une variété dont le bord est vide est dite fermée si elle est compacte, sinon elle est dite ouverte.

La sphère de dimension n est bien sûr une variété topologique de même que le tore, et la bouteille de Klein par exemple.

Une 2-variété fermée connexe dans E^3 est communément appelée une *surface*. Le théorème de Jordan dit qu'une surface sépare E^3 en deux composantes connexes dont l'une est finie. Ce théorème s'étend dans les dimensions supérieures.

Théorème A.31 (Jordan-Brouwer) *Si \mathcal{M} est une variété fermée et connexe de dimension $n-1$ plongée dans E^n , alors $E^n \setminus \mathcal{M}$ a deux composantes connexes dont l'une est fermée.*

Une variété fermée et connexe de dimension $n-1$ plongée dans E^n est généralement appelée une *hyper-surface*.

Pour pouvoir différencier l'intérieur de l'extérieur d'une hyper-surface, on cherche généralement à attribuer une orientation à l'hyper-surface. En effet, il est possible de montrer que toute $(n-1)$ -variété plongeable dans E^n est *orientable*¹¹. Il existe plusieurs manières de définir la notion d'*orientation* sur des variétés. L'une d'elles utilise un invariant topologique que nous avons déjà évoqué : les groupes d'homologie (cf page 241). Il est tout d'abord possible de montrer que si \mathcal{M} est une variété fermée de dimension n , alors son $n^{\text{ème}}$ groupe d'homologie construit sur le groupe de coefficients \mathbb{Z} est, soit trivial ($\{0\}$), soit isomorphe à \mathbb{Z} . On utilise ce groupe particulier pour détecter l'orientabilité d'une surface et y définir une orientation.

Définition A.32 (orientabilité et orientation d'une variété) *Une variété fermée \mathcal{M} de dimension n est dite orientable si son $n^{\text{ème}}$ groupe d'homologie est isomorphe à \mathbb{Z} .*

Une orientation est définie sur \mathcal{M} par le choix d'un isomorphisme :

$$o : \mathbb{Z} \longrightarrow H_n(\mathcal{M})$$

Une variété orientable munie d'une orientation est dite orientée.

On peut déduire des propriétés de \mathbb{Z} qu'une variété orientable admet exactement deux orientations différentes¹².

Pour une surface de dimension 2, la propriété d'orientation peut s'exprimer plus intuitivement. Une telle surface est en effet orientable si un cercle posé sur elle avec une orientation donnée et déplacé tout autour de la surface revient à sa position initiale avec la même orientation.

Le tore est une variété orientable, tandis que la bouteille de Klein (Fig. A.11) et le ruban de Möbius (Fig. A.10) ne le sont pas.

Ce théorème montre une autre utilité des groupes d'homologie. Etant donnée une variété \mathcal{M} de dimension $n-1$ dont le $(n-1)^{\text{ème}}$ groupe d'homologie est trivial, on peut affirmer que \mathcal{M} n'est pas plongeable dans E^n .

¹¹Le théorème, dit de *dualité d'Alexander*, permet de prouver que toute variété fermée de dimension $n-1$ non-orientable n'est pas plongeable dans \mathbb{R}^n .

¹²Il n'existe en effet que deux automorphismes sur \mathbb{Z} .



FIG. A.10 – Ruban de Möbius : une variété non orientable.



(a) Construction d'une bouteille de Klein par identification deux à deux des côtés du rectangle selon les sens indiqués par les flèches.

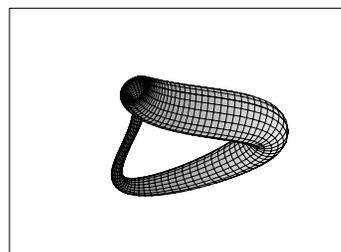
(b) Vue d'une bouteille de Klein immergée (mais non plongée) dans \mathbb{R}^3 .

FIG. A.11 – Bouteille de Klein.

Cette définition de l'orientabilité correspond bien à l'idée que l'on se fait des groupes d'homologie. En effet, le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homologie d'une variété de dimension n mesure le nombre de cavités de dimension n contenues dans cette variété. Or une variété fermée de dimension n plongée dans un espace euclidien de dimension $n + 1$, donc orientable, sépare l'espace en deux parties dont une seule est fermée. La variété possède donc un et un seul trou de dimension n . Il est donc normal que son $n^{\text{ème}}$ groupe d'homologie soit de rang 1 et isomorphe à \mathbb{Z} .

Il est possible d'ajouter des propriétés supplémentaires aux variétés en se plaçant dans des espaces topologiques moins généraux. Ainsi, dans des espaces topologiques différentiables, on définit une variété elle aussi différentiable ou "lisse" (*smooth* en anglais). Intuitivement il s'agit d'une variété sans plis, sans coins. Si en plus, on y rajoute une métrique, on obtient une *variété riemannienne*. On verra aussi qu'il est possible de définir des classes d'objets plus larges que celle des variétés mais vérifiant toujours le théorème de Jordan-Brouwer.

Annexe B

Subdivisions de l'espace et maillages

B.1 Subdivisions de l'espace

Il existe différentes manières de découper un espace en régions. On parle de *recouvrement* (ou *cover* en anglais) lorsque les régions obtenues peuvent éventuellement se recouvrir partiellement et de *partition* lorsque ces régions sont deux à deux disjointes.

Un pavage est une partition de l'espace utilisant toujours la même forme élémentaire ou tesselle. Un pavage est dit régulier lorsque les tesselles sont des polygones convexes réguliers, sinon il est dit irrégulier. Il est possible de construire un nombre illimité de pavages¹ mais certains s'avèrent plus intéressants que d'autres. Nous ne présentons ici que ceux qui sont réellement utilisés dans le cadre de l'imagerie numérique. Le choix de travailler avec un pavage plutôt qu'un autre peut reposer sur plusieurs raisons. Il peut être simplement motivé par le processus d'acquisition utilisé pour créer l'image ; il s'appuie alors sur les caractéristiques du ou des capteurs utilisés, autrement dit sur la géométrie de l'échantillonnage obtenu. Il peut aussi être fonction des applications que l'on veut réaliser et pour lesquelles un pavage possédant des propriétés particulières peut s'avérer plus approprié qu'un autre.

Les pavages considérés sont ainsi généralement construits à partir de briques convexes. En anglais, le terme pavage se traduit généralement par *tiling*², le mot anglais *tessellation* étant réservé aux pavages réalisés à l'aide de polyèdres. Lorsqu'on choisit d'utiliser un pavage régulier, la forme privilégiée est généralement un polyèdre convexe régulier (en anglais, on parle alors de *regular tessellation*). En $2D$, de tels pavages sont au nombre de 3 : carrés, hexagonaux, ou triangulaires (Fig. B.1). Les pavages carrés et triangulaires présentent un avantage intéressant par rapport aux pavages hexagonaux, la propriété dite de *récurtivité*. Il est en effet possible de regrouper les tesselles de ces deux catégories de pavages, en des tesselles de taille plus grande mais de même forme. Cette caractéristique permet de changer facilement d'échelle et de travailler en multirésolution [45]. En $3D$, il n'existe qu'un seul pavage régulier de l'espace : le pavage cubique. Cependant, il existe 4 autres polyèdres non pas réguliers mais semi-réguliers capables de paver l'espace : le prisme hexagonal, le dodécaèdre allongé, le dodécaèdre rhombique et l'octaèdre tronqué. On parle alors de pavages semi-réguliers³ (Fig. B.2).

Dans certains cas, on ne souhaite pas réaliser une partition de l'espace tout entier mais seulement d'une sous-partie. On peut alors construire des assemblages à partir d'autres polyèdres

¹Peu utiles en imagerie, les nombreux pavages de Escher réalisent des partitions originales de sous-espaces du plan avec en moyenne 2 ou 3 formes différentes <http://www.mcescher.com/>.

²Dans [180], le terme *tiling* est utilisé dans le sens plus large de recouvrement.

³Ils ont été mis en évidence par le mathématicien russe Fedorov.

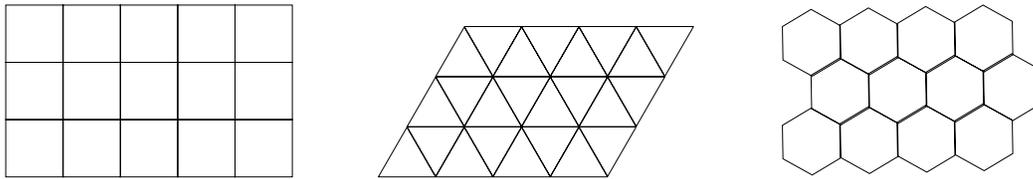
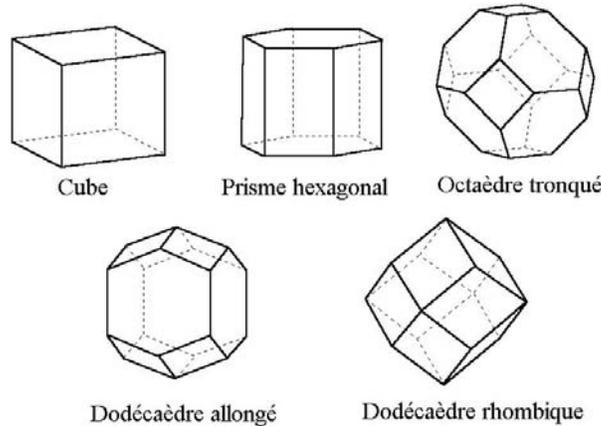


FIG. B.1 – Les 3 pavages réguliers du plan

FIG. B.2 – Eléments de base des pavages réguliers et semi-réguliers de \mathbb{R}^3

réguliers de dimension 3. On utilise principalement le tétraèdre, polyèdre régulier à 4 faces triangulaires.

Les partitions irrégulières, autrement dit utilisant des formes élémentaires différentes, sont essentiellement de deux sortes. La première ne réalise pas la partition de l'espace sur un critère géométrique mais sur un critère d'homogénéité. Elle est généralement le résultat d'un processus de segmentation. Les régions qui forment la partition de l'image sont alors des zones connexes dont tous les éléments possèdent une même caractéristique (Fig B.3).

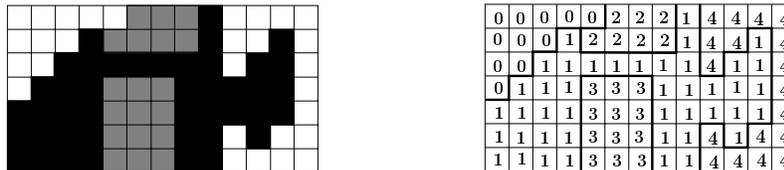


FIG. B.3 – Exemple d'une image en 3 couleurs (gauche), et de son découpage en régions (droite) après attribution à chaque pixel d'un label par segmentation en zones connexes uniformément colorées

La deuxième est construite à partir de germes et d'une notion de distance. Il s'agit du *diagramme de Voronoï*. Les germes sont généralement des points de l'espace. On délimite une région autour de chaque germe telle que tous les points de cette région sont plus proches de ce germe que de tous les autres, par rapport à la distance choisie. Le diagramme de Voronoï est

alors défini par la partition de l'espace en ces régions (Fig. B.4). On peut noter que les pavages réguliers et semi-réguliers mentionnés précédemment sont des cas particuliers de diagramme de Voronoï où le germe est le barycentre du polyèdre convexe régulier ou semi-régulier utilisé pour paver l'espace.

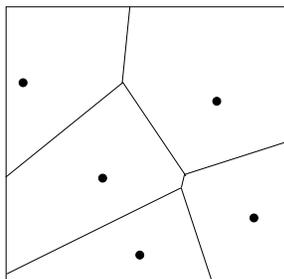


FIG. B.4 – Exemple d'un diagramme de Voronoï d'un sous-espace de \mathbb{R}^2 dans lequel ont été posés 5 germes

B.2 Graphe d'adjacence

A ces partitions de l'espace, on associe naturellement un graphe dont les nœuds représentent les régions de la partition et les arêtes les relations d'adjacence entre ces régions.

Dans le cas des partitions régulières, on appelle ce graphe un *maillage*. Chaque nœud est alors généralement positionné sur le barycentre de la tesselle correspondante. Il existe une dualité entre pavage et maillage. En $2D$, par exemple, le maillage associé à un pavage carré est lui aussi carré, il devient hexagonal pour un pavage triangulaire et triangulaire pour un pavage hexagonal (Fig. B.5). En $3D$, le pavage cubique est bien entendu associé à un maillage cubique. Ce phénomène se répète pour tous les pavages cubiques quelle que soit leur dimension. On utilise aussi les maillages associés à l'octaèdre tronqué [121] et au dodécaèdre rhombique [194], respectivement appelés grille *BCC* (*Body Centered Cubic grid*), et grille *FCC* (*Face Centered Cubic grid*) (Fig. B.6) [42, 82].

Pour les partitions irrégulières, on parle de *graphe d'adjacence de régions* [45] (Fig. 2.11 page 25). Ici les nœuds du graphe ne sont pas liés à un point particulier de la région, sur laquelle on n'a en général aucune information géométrique. Dans le cas particulier du diagramme de Voronoï, par contre, chaque nœud correspond à un germe et le graphe induit est désigné par le terme de *triangulation de Delaunay* (Fig. B.7).

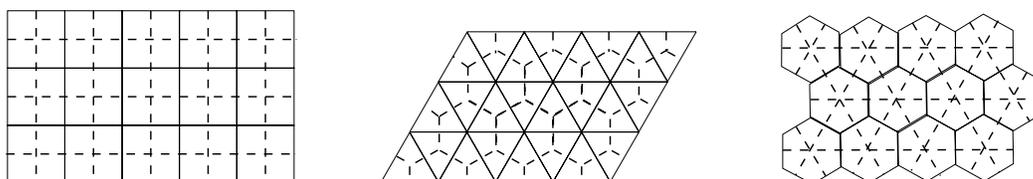


FIG. B.5 – Maillages (en pointillés) associés aux pavages $2D$ réguliers

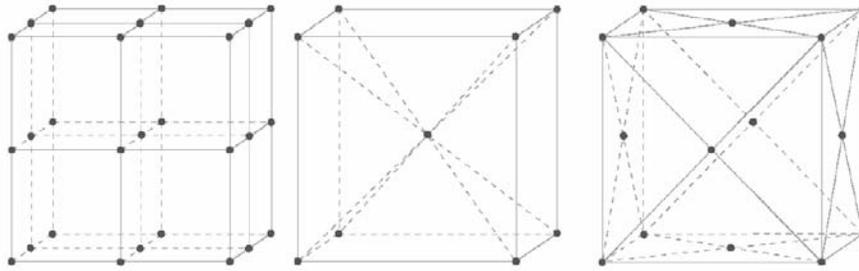


FIG. B.6 – De gauche à droite : configuration des points d'un maillage cubique, d'une grille *BCC* et d'une grille *FCC*

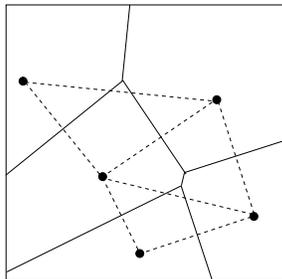


FIG. B.7 – Exemple de la triangulation de Delaunay (en traits pointillés) associée au diagramme de Voronoï (en traits pleins)

On peut remarquer ici que tout graphe associé à la partition d'un espace connexe est bien entendu lui aussi connexe.

Annexe C

Topologie des subdivisions cellulaires

Cette annexe rappelle quelques points de terminologie relatifs aux subdivisions cellulaires ainsi que des rappels sur la topologie de telles subdivisions. Elle dresse aussi un inventaire de différentes tentatives de définition combinatoire de la notion de variété

C.1 Subdivisions cellulaires

Les subdivisions cellulaires décomposent un espace en régions de différentes dimensions (Fig. C.1), appelées *cellules*. La cohésion de cet ensemble est assurée par l'expression de *relations d'incidence* entre cellules de dimensions différentes. Elle est parfois aussi renforcée par l'ajout de *relations de dégénérescence*¹.

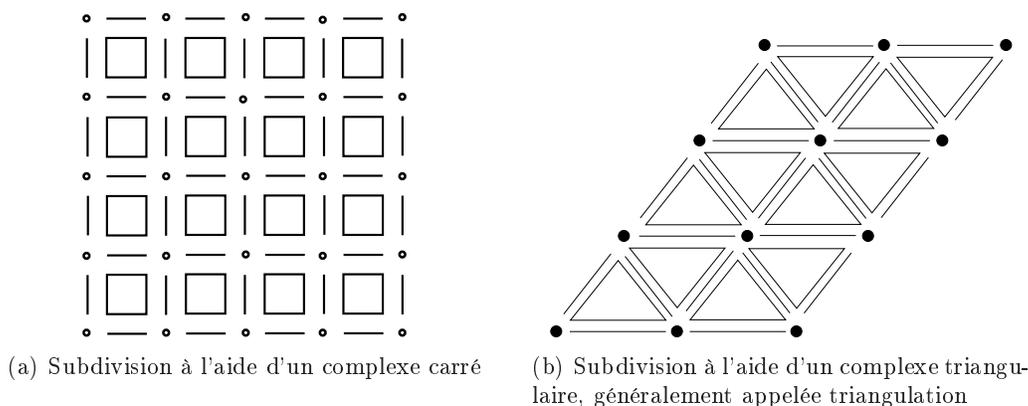


FIG. C.1 – Exemples de subdivisions cellulaires : pour mieux voir tous les éléments, on les représente souvent légèrement éloignés les uns des autres

Cette première définition de subdivision cellulaire est très générale puisqu'elle ne dit notamment rien sur les propriétés topologiques et géométriques des cellules. Elle n'utilise pas non plus les caractéristiques de l'espace sur lequel a été construite la subdivision (espace euclidien, variété...), et ne traduit pas les éventuelles propriétés de la subdivision induites par sa construction (par exemple, toute cellule est face d'au moins une cellule de dimension maximale...).

¹Intuitivement, une dégénérescence consiste en la contraction d'une cellule sur une cellule de dimension inférieure.

Pour construire une topologie sur une telle subdivision, il est nécessaire de connaître au moins la topologie de ses cellules. Et de nombreuses applications nécessitent de prendre en compte des propriétés additionnelles. Une grande variété de modèles cellulaires a ainsi été développée pour décrire des subdivisions dans un contexte particulier. Certains se définissent de manière purement combinatoire tandis que d'autres impliquent l'ajout de contraintes géométriques, en particulier sur les cellules. La spécialisation de ces modèles peut intervenir sur trois points : la géométrie et/ou la topologie des cellules, la nature de l'espace à subdiviser, et les propriétés globales de la subdivision.

Les cellules peuvent être munies de propriétés topologiques parfois assorties de contraintes géométriques. Les topologies le plus souvent imposées sur les cellules sont celles d'une boule ouverte, ou d'un cône ouvert. A défaut une propriété topologique moins forte comme la simple connexité peut être exigée. On peut aussi s'intéresser à des subdivisions dont les cellules ressemblent à des variétés. L'ajout d'informations géométriques permet aussi de considérer des cellules qui ont la forme d'un polyèdre, ou qui satisfont une propriété de convexité.

Les espaces considérés peuvent éventuellement être munis d'une métrique, euclidienne, riemannienne ou autre. Certains sont orientables, d'autres non. Ils peuvent aussi posséder un bord. Enfin, on s'intéresse parfois à des espaces ressemblant à des espaces topologiques particuliers, notamment aux variétés.

Quand à la subdivision, on peut demander qu'elle soit *homogène*, autrement dit que toute cellule soit face d'une cellule de dimension maximale. On peut a contrario autoriser la présence de *cellules pendantes*, c'est-à-dire de cellules qui ne sont pas faces d'une cellule maximale. On exige aussi souvent que toute cellule maximale possède au moins une face dans chacune des dimensions inférieures. On demande parfois à la subdivision d'être *localement finie*, autrement dit telle que chacune de ses cellules possède un voisinage dont l'intersection avec le reste de la subdivision contienne un nombre fini de cellules. On peut autoriser ou non la présence d'identifications, autrement dit de cellules distinctes possédant le même bord. Enfin, on peut permettre ou non la présence de multi-incidence. On parle de multi-incidence lorsqu'une cellule est plusieurs fois incidente à une même cellule de dimension supérieure.

C.2 Topologie cellulaire

C.2.1 Notions préliminaires

Nous nous contentons pour le moment de notre définition informelle d'une subdivision cellulaire : *décomposition d'un espace en cellules de dimensions différentes structurée par une "relation" d'incidence entre cellules de dimensions différentes*. Pour simplifier, si une cellule c est incidente à une cellule c' de la subdivision, on notera $c < c'$. Pour les notions décrites ici, point n'est besoin de savoir si une cellule est simplement incidente ou multi-incidente à une autre. On dit que deux cellules de même dimension sont *adjacentes* s'il existe une cellule de la subdivision incidente aux deux². On appelle *k-chemin* un ensemble ordonné de cellules de dimension k ou k -cellules deux à deux adjacentes (Fig. C.2-a et C.2-b). On appelle *chemin* un ensemble ordonné de cellules tel que deux cellules consécutives de l'ensemble soient toujours liées par une relation d'incidence (Fig. C.2-c). Une subdivision cellulaire est dite *connexe par chemins* ou *connexe par*

²Le terme d'adjacence est parfois employé un peu différemment. Une définition plus restrictive impose que la cellule incidente aux deux cellules de même dimension soit de dimension juste inférieure. Une définition plus large dit que deux cellules de même dimension sont adjacentes s'il existe une cellule incidente aux deux ou si elles sont toutes deux incidentes à une même cellule.

arcs s'il existe un tel chemin entre tout couple de cellules de la subdivision.

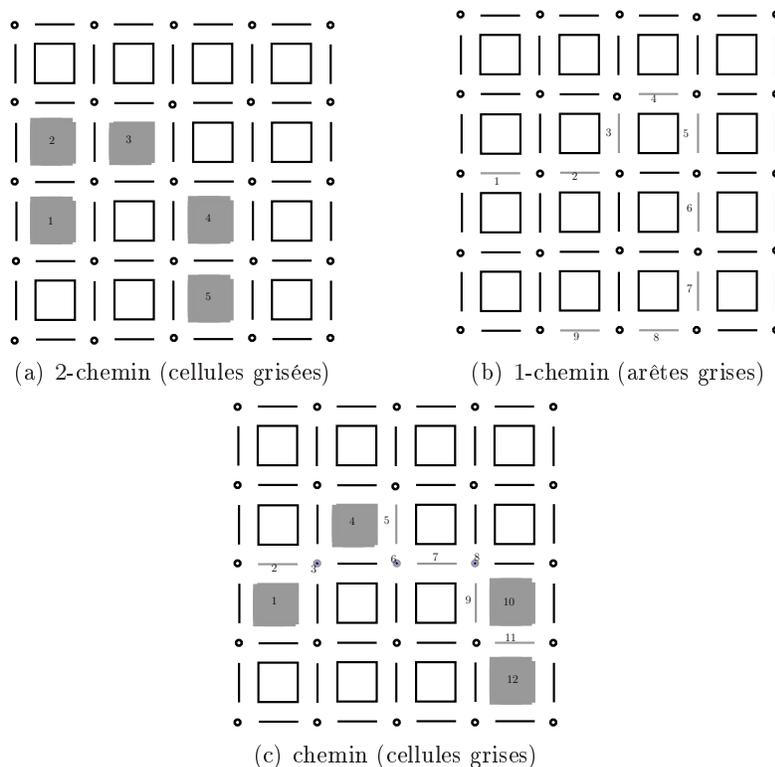


FIG. C.2 – Différentes notions de chemin sur une subdivision cellulaire

Il est possible de démontrer que sur toute décomposition cellulaire ainsi définie peut être construite une topologie d'Alexandroff \mathcal{T}_0 (cf pages 227 et 229). D'autre part, il a aussi été prouvé notamment dans [124] que tout espace topologique d'Alexandroff \mathcal{T}_0 -séparé peut être muni d'une structure cellulaire.

Nous rappelons maintenant quelques notions classiques relatives aux décompositions cellulaires qui vont permettre de construire une topologie. Il s'agit de l'*étoile combinatoire (stricte)* (*(strict) combinatorial star*) d'une cellule dans une subdivision cellulaire (Fig. C.3-a). Nous donnons par la même occasion la définition de la *clôture combinatoire (stricte)* (*(strict) combinatorial closure*) d'une cellule (Fig. C.3-b). Ces deux notions sont en quelque sorte duales l'une de l'autre.

Définition C.1 (Etoile combinatoire (stricte)) L'étoile combinatoire d'une cellule c d'une subdivision S , notée $st(c, S)$ est l'ensemble des cellules auxquelles c est incidente :

$$st(c, S) = \{c' \in C, c \leq c'\}$$

L'étoile combinatoire stricte d'une cellule c est tout simplement l'étoile combinatoire de c privée de c .

Définition C.2 (Clôture combinatoire (stricte)) La clôture combinatoire d'une cellule c d'une subdivision S , notée $cl(c, S)$ est l'ensemble des cellules de S incidentes à c :

$$cl(c, S) = \{c' \in S, c' \leq c\}$$

La clôture combinatoire stricte d'une cellule c est tout simplement la clôture combinatoire de c privée de c .

On note $\bar{st}(c, S)$ l'étoile fermée d'une cellule c dans une subdivision S . Elle correspond à la clôture combinatoire de l'étoile de c dans S . Une autre notion s'avère parfois utile, il s'agit du *lien* d'une cellule qui se définit à partir des notions d'étoile et de clôture combinatoires.

Définition C.3 (lien) Le lien d'une cellule c d'une subdivision S , noté $lk(c, S)$ est l'ensemble des cellules de S qui appartiennent à l'étoile fermée de c privé des cellules appartenant à l'étoile combinatoire de c .

$$lk(c, S) = \bar{st}(c, S) \setminus st(c, S)$$

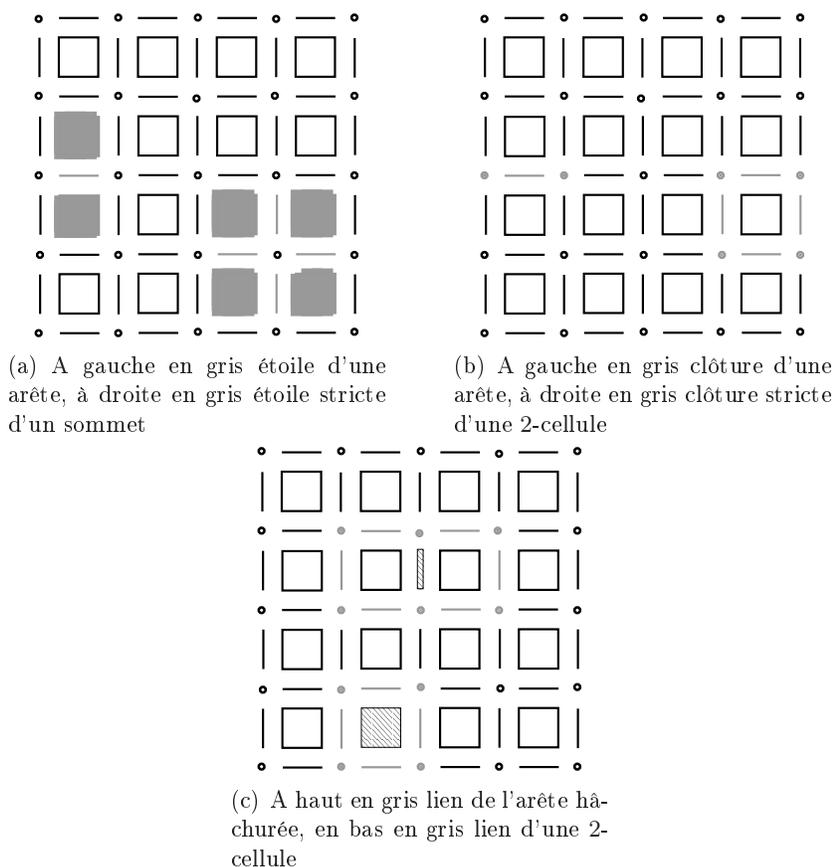


FIG. C.3 – Exemples d'étoiles, de clôtures combinatoires et de liens de cellules dans une subdivision

C.2.2 Construction d'une topologie d'Alexandroff

On peut définir la notion d'*ouvert* sur une décomposition cellulaire de la manière suivante (Fig. C.4-a).

Définition C.4 (Ouvert d'une subdivision cellulaire) Un ouvert d'une subdivision cellulaire S est un ensemble de cellules \mathcal{O} tel que pour toute cellule c de \mathcal{O} , $st(c, S) \subseteq \mathcal{O}$.

On peut aisément montrer que toute cellule appartient à un plus petit ouvert : son étoile combinatoire. Ainsi, munie de cette topologie, une subdivision cellulaire est bien un espace d'Alexandroff. Et, une base d'ouverts de cette topologie est constituée par l'ensemble des étoiles de toutes les cellules de la subdivision. Finalement, cette topologie est bien \mathcal{T}_0 . Etant données deux cellules c et c' , il existe toujours un voisinage de l'une pour cette topologie qui ne contient pas l'autre. En effet, si c et c' sont de même dimension alors c n'appartient pas à l'étoile combinatoire de c' et réciproquement. Si c et c' ont des dimensions différentes, alors soit leurs étoiles combinatoires ont une intersection vide, soit l'un, mettons c , est contenu dans l'étoile de l'autre, c' , et sa propre étoile ne contient donc pas c' .

La notion de *fermé* correspondante s'exprime via la notion clôture. Un fermé est un ensemble de cellules dont la clôture est incluse dans l'ensemble (Fig. C.4-b). On appelle parfois *cellule fermée* la clôture combinatoire d'une cellule.

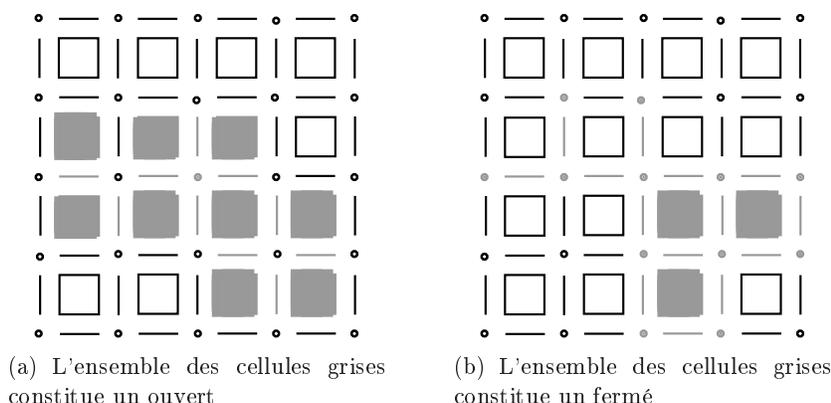


FIG. C.4 – Exemples d'ouverts et de fermés d'une subdivision cellulaire

Cette topologie induit la notion d'application continue suivante entre subdivisions cellulaires :

Théorème C.5 (Application continue sur une subdivision cellulaire) Une application entre deux subdivisions cellulaires est continue si et seulement si elle préserve la relation d'incidence. Autrement dit si les images de deux cellules incidentes dans la première subdivision sont elles-aussi incidentes dans la deuxième subdivision.

Enfin, un des invariants topologiques classiques, la *caractéristique d'Euler*, peut se calculer directement sur une telle subdivision puisque son calcul nécessite exclusivement la connaissance du nombre de k -cellules pour $k = 0$ à n .

C.3 Approximation combinatoire des variétés

En ce qui concerne la représentation combinatoire des variétés topologiques, on se heurte dès la dimension 4 à un problème. En effet, à partir de cette dimension, il existe des variétés topologiques non triangulables³ (Kirby-Siebenmann 1969). On doit donc abandonner l'idée de représenter toutes les variétés de manière combinatoire.

³Un exemple d'une 4-variété non triangulable se trouve par exemple dans [56].

Théorème C.6 (Représentation combinatoire des variétés topologiques) *Il existe des variétés topologiques de dimension supérieure ou égale à 4 non représentables de manière combinatoire*

Cependant, des modèles combinatoires ont été développés pour représenter des sous-classes de variétés. Ils se fondent sur des notions de topologie linéaire par morceaux. Ils restreignent dans un premier temps les variétés représentées à la classe des PL -variétés qui sont des variétés triangulables. Avant de les définir, il est nécessaire d'introduire les notions de PL -boules et de PL -sphères.

Définition C.7 (PL -boule et PL -sphère) *Une PL -boule de dimension n est un complexe simplicial homéomorphe linéairement par morceaux à Δ^n . Une PL -sphère de dimension n est un complexe simplicial homéomorphe linéairement par morceaux au bord de Δ^{n+1}*

Une PL -variété est tout simplement une variété qui ressemble localement à une PL -boule. En dimension inférieure ou égale à 3, toute variété topologique est homéomorphe à une PL -variété. Ce n'est pas le cas pour $n \geq 4$.

Définition C.8 (PL -variété) *Une PL -variété est un complexe simplicial tel que le lien de chacun de ses simplexes est simplicialement isomorphe à une PL -boule.*

La définition de *variété combinatoire* est très proche de celle de PL -variété. Il s'agit d'une abstraction des PL -variétés. Autrement dit, une PL -variété est la réalisation géométrique d'une variété combinatoire.

Définition C.9 (variété combinatoire) *Une variété combinatoire est un complexe simplicial abstrait tel que le lien de chaque simplexe est géométriquement réalisable en une PL -boule.*

De manière similaire, on peut définir des *variétés polyédriques* (*polyhedral manifolds*). Une variété polyédrique est un polyèdre qui admet comme triangulation une variété combinatoire.

Les PL -variétés, les variétés combinatoires et les variétés polyédriques sont par défaut fermées c'est-à-dire sans bords. Pour obtenir des variétés ouvertes, il suffit d'autoriser le lien de chaque simplexe à ressembler soit à une PL -boule, soit à une PL -sphère.

Ces définitions ne sont cependant pas facilement exploitables car elles ne donnent aucun moyen concret pour construire ou reconnaître de telles variétés.

Une autre classe de variétés a été proposée pour pallier cette difficulté. Il s'agit des *variétés stellaires* [138]. Ces variétés sont homéomorphes aux PL -variétés en dimension inférieure ou égale à 3. Autrement dit, elles sont aussi homéomorphes aux variétés topologiques en dimension inférieure ou égale à 3. Elles sont définies à l'aide de *boules stellaires* et de *sphères stellaires*. Dans les définitions de ces objets stellaires, les homéomorphismes linéaires par morceaux utilisés pour caractériser les PL -boules et les PL -sphères sont remplacés par des *opérations stellaires*. Celles-ci sont des opérations locales faciles à mettre en œuvre sur les complexes simpliciaux. Elles sont principalement de deux types : les *subdivisions stellaires* (en anglais *stellar subdivisions*) et les *soudures stellaires* (en anglais *stellar welds*) (Fig. C.5-a et -b). On parle de *mouvement bistellaire* (en anglais *bistellar move*) lorsqu'on a une composition d'une subdivision et d'une soudure stellaires [197] (Fig. C.5-c). En dimensions 2 et 3 de telles opérations sont parfois utilisées pour simplifier des surfaces triangulées car elles ne changent pas leur topologie [55].

Définition C.10 (Variété stellaire) Deux complexes simpliciaux sont des équivalents stellaires, s'ils peuvent être obtenus l'un de l'autre par un ensemble fini d'opérations stellaires.

Une n -boule stellaire est un complexe simplicial B^n qui est un équivalent stellaire de Δ^n . Une n -sphère stellaire est un complexe simplicial S^n qui est un équivalent stellaire du bord de Δ^{n+1} .

Une variété stellaire est un complexe simplicial M tel que pour tout sommet v de M , le lien de v dans M soit une $(n-1)$ -boule stellaire ou une $(n-1)$ -sphère stellaire.

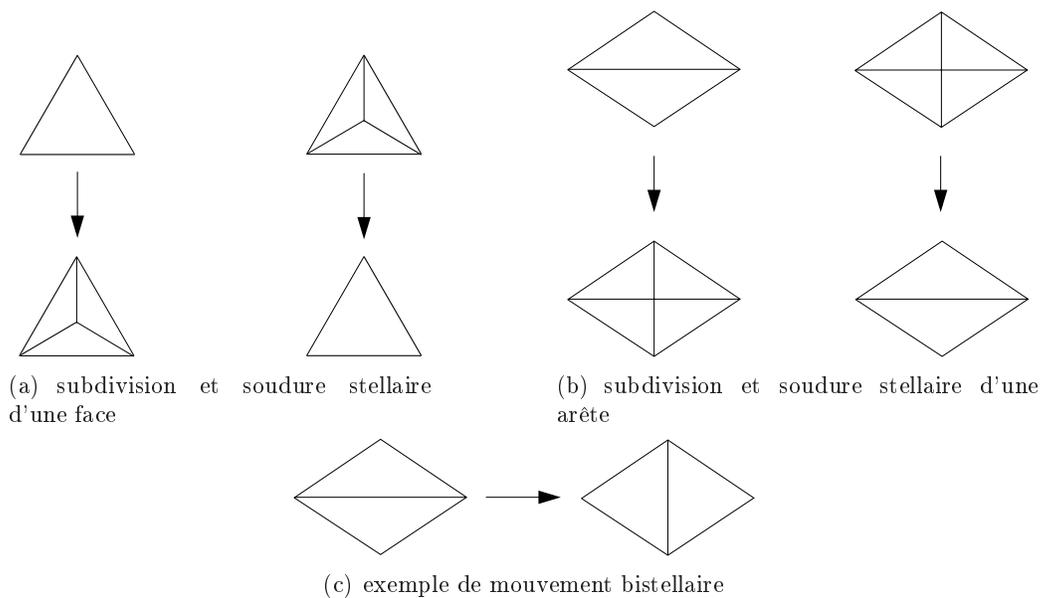


FIG. C.5 – Opérations stellaires

Annexe D

Rappels de théorie des groupes

Cette annexe contient des notions de théorie des groupes, utiles pour bien appréhender le calcul des groupes d'homologie.

Nous rappelons d'abord les notions de base de la théorie des groupes puis nous nous intéressons à des groupes particuliers : les groupes abéliens.

D.1 Bases

On commence par rappeler la définition d'un groupe :

Définition D.1 (Groupe) *Un groupe est un ensemble G , muni d'une loi de composition interne, c'est-à-dire une application de $G \times G \longrightarrow G$, souvent notée par la concaténation $(x, y) \longmapsto x.y$, vérifiant :*

- i). $(x.y).z = x.(y.z)$ (associativité)*
- ii). $\exists 1_G \in G, \forall x \in G, x.1_G = 1_G.x = x$ (1_G élément neutre de G)*
- iii). $\forall x \in G, \exists x' \in G, x.x' = x'.x = 1_G$ (x' , souvent noté x^{-1} , élément inverse de x)*

On manipule souvent des groupes possédant une propriété supplémentaire :

Définition D.2 (Groupe commutatif ou abélien) *Un groupe G est dit commutatif ou abélien si :*

$$\forall (x, y) \in G \times G, x.y = y.x$$

Pour ces groupes, la loi de composition interne est souvent notée additivement, l'élément neutre est alors naturellement noté 0_G et $x^{-1} -x$.

On s'intéresse souvent à des sous-ensembles des éléments d'un groupe, eux aussi munis d'une structure de groupe. On parle de *sous-groupe*.

Définition D.3 (Sous-groupe) *Soit G un groupe, $H \subset G$ est un sous-groupe de G si et seulement si :*

- i). $1_G \in H$,*
- ii). $(x, y) \in H \times H \longrightarrow x.y \in H$,*
- iii). $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.*

On définit des applications particulières entre groupes : les *homomorphismes*.

Définition D.4 (Homomorphisme) Soit G et G' deux groupes. On appelle homomorphisme du groupe G dans le groupe G' une fonction f telle que

$$\forall (x, y) \in G \times G', f(x.y) = f(x).f(y)$$

On peut montrer que si f est un homomorphisme de G dans G' alors $f(1_G) = 1_{G'}$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. On note classiquement $\text{Ker } f$ l'ensemble des éléments de G dont l'image est l'élément neutre de G' , autrement dit le noyau de f et $\text{Im } f$ l'ensemble des éléments de G' image d'un élément de G par f .

D.2 Groupes abéliens

Nous nous concentrons principalement ici sur des *groupes abéliens* autrement dit des groupes commutatifs.

Nous commençons par rappeler quelques définitions.

Définition D.5 (Groupe abélien libre) Un groupe abélien G est libre s'il possède une base, autrement dit s'il existe une famille $\{g_\alpha\}_{\alpha \in J}$ d'éléments de G telle que tout élément g de G puisse s'écrire de manière unique comme une somme finie :

$$g = \sum_{\alpha \in J} n_\alpha g_\alpha$$

où n_α est un entier pour tout α dans J . Le nombre d'éléments de la base de G est appelé rang de G .

Définition D.6 (Groupe de type fini) Soit G un groupe abélien fini. Si tout $g \in G$ peut s'écrire comme une somme finie $g = \sum_{\alpha \in J} n_\alpha g_\alpha$ non nécessairement unique, on dit que la famille $\{g_\alpha\}$ génère G . Si l'ensemble $\{g_\alpha\}$ est fini, G est un groupe de type fini.

Définition D.7 (Sous-groupe de torsion) Soit G un groupe abélien. Un élément g de G est dit d'ordre fini si $ng = 0$ pour un entier positif n . Le sous-ensemble de G qui consiste en l'ensemble des éléments de G d'ordre fini est un sous-groupe T de G . Il est appelé le sous-groupe de torsion de G . Si G ne contient aucun élément d'ordre fini, alors G est dit sans torsion.

Le théorème suivant traite des *groupes quotients*.

Théorème D.8 (Factorisation) Soit G un groupe abélien et F un sous-groupe de G tel que G/F soit libre alors :

$$G = G' \oplus F \text{ avec } G' \simeq G/F$$

Théorème D.9 Soit G un groupe abélien. Si G_1 est un sous-groupe de G , on dit que G_1 est un facteur direct dans G s'il existe un sous-groupe G_2 tel que $G = G_1 \oplus G_2$. De plus, soit H_1 et H_2 des sous-groupes respectifs de G_1 et G_2 , alors la somme $H_1 + H_2$ est directe et :

$$\frac{G}{H_1 \oplus H_2} \simeq \frac{G_1}{H_1} \oplus \frac{G_2}{H_2}$$

Théorème D.10 Soit G et G' deux groupes abéliens et f un homomorphisme surjectif de G sur G' , alors f induit un isomorphisme de $G/\text{Ker}(f)$ sur G' :

$$G/\text{Ker}(f) \simeq G'$$

Théorème D.11 Soit G un groupe abélien et T son sous-groupe de torsion, alors G/T est sans torsion. En outre, si G/T est de type fini, alors G/T est libre.

Annexe E

Manipulation de matrices : algorithme classique de mise en forme de Smith

Cette annexe contient quelques rappels sur les transformations de matrices, et l'algorithme classique de mise en forme normale de Smith d'une matrice.

E.1 Généralités

On rappelle d'abord ici brièvement comment on peut passer d'une matrice représentant un homomorphisme dans une paire de base donnée à une matrice représentant le même homomorphisme dans une paire de bases différente.

Définition E.1 (Matrices équivalentes) *Deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont dites équivalentes si elles représentent le même homomorphisme dans des bases différentes*

Définition E.2 (Opérations ligne et colonne élémentaires) *Il existe 3 opérations élémentaires qui peuvent être appliquées indifféremment sur les lignes ou les colonnes d'une matrice entière représentant un homomorphisme $H : G \longrightarrow G'$ dans les bases $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{a'_i\}_{i=1,\dots,m}$ de G et G' :*

- i). Echanger ligne(i) (resp. colonne(i)) et ligne(k) (resp. colonne(k)) ce qui correspond à échanger a_i et a_k (resp. a'_i et a'_k),*
- ii). Multiplier ligne(i) (resp. colonne(i)) par -1 ce qui correspond à remplacer a_i par $-a_i$ (resp. a'_i par $-a'_i$)*
- iii). Remplacer la ligne (resp. colonne) i par ligne(i) + q * ligne(k) (resp. colonne(i) + q * colonne(k)), ce qui correspond à remplacer a_i par $a_i + q * a_k$ (resp. a'_i par $a'_i + q * a'_k$).*

Théorème E.3 (Matrices équivalentes et opérations élémentaires) *Deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont équivalentes si et seulement si l'une peut être obtenue en appliquant sur l'autre des opérations ligne et colonne élémentaires.*

On s'intéresse maintenant à la valeur minimale d'une matrice qui joue un rôle prépondérant dans l'algorithme de mise en forme normale de Smith.

Définition E.4 (Valeur minimale d'une matrice) Soit f_{kl} un élément de la matrice $\mathbf{F} = (f_{ij})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, tel que

$$|f_{kl}| = \min_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} (|f_{ij}|)$$

alors $|f_{kl}|$ est noté $\alpha(\mathbf{F})$ et est appelé valeur minimale de \mathbf{F} .

Le théorème ci-dessous garantit qu'étant donné une matrice, il est possible de trouver une matrice équivalente dont la valeur minimale est le plus grand diviseur commun de tous les éléments de la matrice. La preuve est rappelée car la réduction classique en forme normale de Smith s'en inspire fortement.

Théorème E.5 (Matrice équivalente avec la plus petite valeur minimale) Soit \mathbf{F} une (n, m) -matrice.

- i). S'il existe un élément de \mathbf{F} tel que le nombre $\alpha(\mathbf{F})$ ne le divise pas, alors il existe une matrice équivalente à \mathbf{F} dont la valeur minimale est plus petite que $\alpha(\mathbf{F})$.
- ii). Inversement, si $\alpha(\mathbf{F})$ divise tous les éléments de la matrice alors il n'existe pas de matrice équivalente à \mathbf{F} avec une plus petite valeur minimale.

Preuve :

- On prouve d'abord (ii). Si $\alpha(\mathbf{F})$ divise tout élément de \mathbf{F} , alors il divisera aussi chaque élément de toute matrice équivalente à \mathbf{F} . Il suffit pour s'en convaincre de regarder les opérations lignes et colonnes élémentaires qui permettent de transformer une matrice en une matrice équivalente. De plus, dans ce cas, ces opérations ne peuvent pas faire diminuer la valeur de $\alpha(\mathbf{F})$. Ceci est évident pour les deux premières opérations décrites dans E.2. C'est encore vrai pour la troisième opération. Remplacer ligne(i) par ligne(i) + q * ligne(k) est équivalent à remplacer chaque élément f_{ij} qui est de la forme $\beta_{ij}\alpha(\mathbf{F})$ par $f_{ij} + q * f_{ik} = (\beta_{ij} + q\beta_{ik})\alpha(\mathbf{F})$. En valeur absolue, le nouvel élément est donc soit égal à 0, soit supérieur ou égal à $\alpha(\mathbf{F})$.
- Maintenant s'il existe un élément de la matrice, f_{ij} , dont $\alpha(\mathbf{F}) = |f_{kl}|$ n'est pas un diviseur. Alors il existe deux entiers q et r avec $0 < |r| < |f_{kl}|$ tels que

$$\frac{f_{ij}}{f_{kl}} = q + \frac{r}{f_{kl}}$$

Autrement dit, $|r| = |f_{ij} - qf_{kl}|$

On considère alors 3 cas :

- f_{ij} appartient à la même colonne que f_{kl} (autrement dit $j = l$), alors on remplace ligne(i) par :

$$\text{ligne}(i) - q * \text{ligne}(k)$$

Le nouvel élément f'_{il} est égal à $f_{il} - q * f_{kl}$ avec $l = j$, il est donc égal à r . Comme $|r| < |f_{kl}|$, la valeur minimale de la nouvelle matrice est donc plus petite que $|f_{kl}| = \alpha(\mathbf{F})$

- f_{ij} appartient à la même ligne que f_{kl} (autrement dit $i = k$), on remplace alors colonne(j) par :

$$\text{colonne}(j) - q * \text{colonne}(l)$$

Et le nouvel élément f'_{ij} est aussi égal à r , ce qui conduit à la même conclusion que précédemment.

- f_{ij} n'appartient ni à la même ligne, ni à la même colonne que f_{kl} . De plus, f_{kl} divise tous les éléments de sa ligne et de sa colonne. Si l'on considère les 4 valeurs suivantes de la matrice :

$$\begin{array}{ccc} f_{kl} & \cdots & f_{kj} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{il} & \cdots & f_{ij} \end{array}$$

Comme f_{kl} divise f_{il} , il existe $\beta \in \mathbb{Z}$, tel que $f_{il} = \beta f_{kl}$. On remplace alors ligne(i) par ligne(i) – β * ligne(k). Les 4 valeurs deviennent :

$$\begin{array}{ccc} f_{kl} & \cdots & f_{kj} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & f_{ij} - \beta f_{kj} \end{array}$$

On remplace alors ligne(k) par ligne(i) + ligne(k) et on se retrouve dans le second cas puisqu'il existe maintenant un élément dans la ligne de f_{kl} dont f_{kl} n'est pas un diviseur.

On considère la suite de matrices construites en utilisant ce processus ainsi que la suite entière de leurs valeurs minimales. Cette suite est monotone décroissante et bornée par 1. Elle a donc une valeur limite ≥ 1 qui est atteinte après un nombre fini d'itérations. Et il n'existe pas d'autres matrices équivalentes avec une valeur minimale inférieure. \square

E.2 Algorithme de mise en forme normale de Smith

Le principe de l'algorithme de réduction est décrit dans le chapitre 5, section 5.2.2. On en donne ici une version détaillée, en montrant que la matrice obtenue est bien en forme normale de Smith. Il s'agit d'une transcription en langage algorithmique du procédé décrit en langage naturel dans [165].

E.2.1 Etape 1

L'étape 1 provient directement de la preuve du théorème E.5. Les opérations lignes et colonnes élémentaires évoquées dans cette preuve sont effectuées sur la matrice pour calculer une matrice équivalente avec la valeur minimale la plus petite possible. Il s'agit d'une boucle qui s'arrête soit quand la valeur minimale trouvée est égale à 1, soit quand la matrice n'a pas été modifiée pendant un tour de boucle. Pour représenter cette dernière condition, on utilise un booléen *smallerValueFound* qui prend la valeur "faux" à chaque début de boucle et est mis à "vrai" seulement si la matrice est modifiée. A chaque itération, on cherche un élément de la matrice qui n'est pas divisible par la valeur minimale de la matrice et on applique la transformation adéquate pour diminuer la valeur minimale.

Function *Compute_equivalent_matrix_with_smallest_minentry* (Matrix **F**) : Matrix **F'**

```

Matrix  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ ;
Compute the minimal entry of  $\mathbf{F}'$  :  $\alpha(\mathbf{F}') = |f_{kl}|$ ;
smallerValueFound = true;
while (( $\alpha(\mathbf{F}') \neq 1$ ) and (smallerValueFound == true )) do{
    smallerValueFound = false;
    /*****/
    /* Case when  $f_{kl}$  does not divide      */
    /* an element of its own column      */
    /*****/
    for each element  $f_{il}$  in the same column as  $f_{kl}$  do{
        if ( $f_{kl}$  does not divide  $f_{il}$ ) then {
            Compute  $r$  and  $q$  such that  $f_{il} = q * f_{kl} + r$ ;
            Replace row( $i$ ) by row( $i$ ) -  $q * \text{row}(k)$ ;
            smallerValueFound = true;
            break;
        }
    }
}
if (smallerValueFound == false) {
    /*****/
    /* Case when  $f_{kl}$  does not divide      */
    /* an element of its own row      */
    /*****/
    for each element  $f_{kj}$  in the same row as  $f_{kl}$  do {
        if ( $f_{kl}$  does not divide  $f_{il}$ ) then {
            Compute  $r$  and  $q$  such that  $f_{il} = q * f_{kl} + r$ ;
            Replace column( $i$ ) by column( $i$ ) -  $q * \text{column}(k)$ ;
            smallerValueFound = true;
            break;
        }
    }
}
if ( smallerValueFound == false ) {
    /*****/
    /* Case when  $f_{kl}$  divides all elements      */
    /* of its own row and its own column      */
    /* but fails to divide another element of the matrix */
    /*****/
    for each element  $f_{ij}$  neither in the same row
    nor in the same column as  $f_{kl}$  do {
        if ( $f_{kl}$  does not divide  $f_{ij}$ ) then {
            Replace row( $i$ ) by row( $i$ ) -  $\frac{f_{il}}{f_{kl}} * \text{row}(k)$ ;
            Replace row( $k$ ) by row( $i$ ) + row( $k$ );
            smallerValueFound = true;
            break;
        }
    }
}
}

```

```

    if (smallerValueFound == true) {
        Recompute the minimal entry of the modified  $\mathbf{F}'$ ;
    }
}

```

A la fin de cette étape, on a la matrice \mathbf{F}' équivalente à \mathbf{F} , dont la valeur minimale est la plus petite possible. En outre, cette valeur minimale divise tous les autres éléments de la matrice obtenue.

E.2.2 Etape 2

Cette étape vise à déplacer la valeur minimale de la matrice dans le coin haut gauche de la matrice et à transformer de nouveau la matrice par des opérations élémentaires pour avoir des 0s sur la première ligne et la première colonne. Avant de commencer, on sait que $\alpha(\mathbf{F}) = |f_{kl}|$, et que n et m sont respectivement le nombre de lignes et le nombre de colonnes de la matrice.

Function *Compute_simplified_form* (Matrix \mathbf{F} , int n , int m , int k , int l) : Matrix \mathbf{F}'

```

Matrix  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ ;
/*****
/* moving the minimal entry in the upper left corner */
*****/
Swap row(1) and row( $k$ );
Swap column(1) and column( $l$ );
/*****
/* putting 0's on the first line and column */
*****/
for  $i = 2$  to  $n$  do {
    Replace row( $i$ ) by row( $i$ ) -  $\frac{f_{i1}}{f_{11}}$  * row(1)
}
for  $j = 2$  to  $m$  do {
    Replace column( $j$ ) by column( $j$ ) -  $\frac{f_{1j}}{f_{11}}$  * column(1)
}

```

A la fin de cette étape, on dispose d'une matrice équivalente à la matrice d'origine qui est dans la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

avec α tel que $|\alpha|$ est la valeur minimale de la matrice résultante et α est un diviseur de tous les éléments non nuls de la matrice.

E.2.3 Etape 3

Les étapes 1 et 2 sont répétées sur des matrices de plus en plus petites. La boucle s'arrête lorsque la matrice à traiter est vide ou plein de 0s. A chaque itération, la matrice obtenue après l'étape 2 est réduite en ignorant sa première colonne et sa première ligne. C'est cette sous-matrice

qui sera traitée lors de l'itération suivante. A chaque passage dans la boucle, la valeur minimale de la matrice obtenue est ajoutée à un vecteur D qui contiendra à la fin toutes les valeurs de la matrice en forme normale de Smith.

```

Function Reduce_matrix_in_SNF (Matrix F) : Vector D
while ((F not empty) and (F not full of 0's)) do {
    F = Compute_equivalent_matrix_with_smallest_minentry(F);
    F = Compute_simplified_form(F,  $n, m, k, l$ );
    Add to  $D$  the value  $f_{11}$ ;
    F = F less its first row and column;
}

```

On visualise ci-dessous le processus de réduction (toute la matrice est affichée à chaque itération même si c'est une sous-matrice qui est réellement manipulée)

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & c_{33} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

$$D = [\alpha_1] \Rightarrow D = [\alpha_1, \alpha_2]$$

$$\dots \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots \Rightarrow D = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p]$$

Le fait que chaque α_i soit un diviseur de tous les $\alpha_j, \forall j > i$ provient directement du processus de réduction de la matrice. A chaque itération, l'élément α_i obtenu est un diviseur de tous les éléments de la sous-matrice, déduite en enlevant les lignes et les colonnes d'indices inférieurs à i . Comme toutes les modifications ultérieures de la matrice n'utilisent que des opérations élémentaires, α_i divisera toujours les éléments non nuls de la matrice situés sur les lignes et colonnes d'indices supérieur à i .

Table des figures

1.1	Difficultés inhérentes à la définition d'une connexité discrète.	3
1.2	Exemple de définitions de surfaces en $2D$	4
1.3	Différentes images représentant la lettre E possédant des géométries différentes mais la même topologie.	6
1.4	Exemple de deux subdivisions qui peuvent être différenciées via leurs groupes d'homotopie mais pas via leurs groupes d'homologie.	7
2.1	Puissance de comparaison des invariants topologiques (algébriques) du haut en bas par ordre décroissant.	15
2.2	Comparaisons de la puissance de représentation des invariants topologiques algébriques.	16
2.3	Ruban de Möbius	16
2.4	L'espace topologique associé à B est connexe, l'espace topologique associé à l'ensemble $B \cup C$ n'est pas connexe.	17
2.5	Les chemins c_1 et c_2 sont homotopes dans \mathbb{R}^2	17
2.6	Mise en évidence des générateurs du groupe fondamental du tore.	18
2.7	Le sous-espace B est simplement connexe, tandis que C ne l'est pas.	19
2.8	Exemple de décomposition cellulaire de deux objets simples.	19
2.9	Décomposition cellulaire d'un sous-espace de \mathbb{R}^2	21
2.10	Bouteille de Klein.	22
2.11	Limitations de la représentation par graphe d'adjacence.	25
2.12	Représentations cellulaires des partitions en régions de la figure 2.11 : elles permettent de mettre en évidence les particularités des frontières entre régions.	26
2.13	Représentation de différentes relations de proto-adjacences sur \mathbb{Z}^2 . Un élément de \mathbb{Z}^2 (point) est souvent représenté par le carré unité centré sur lui.	35
2.14	Représentation de la proto-adjacence ω_3 sur \mathbb{Z}^3 : les spels grisés sont les ω_3 -voisins du spel noir.	35
2.15	De gauche à droite : configuration des points d'un maillage cubique, d'une grille BCC et d'une grille FCC	36
2.16	Partition d'une image et graphe d'adjacence de régions correspondant	36
2.17	Partition d'une image et graphes associés	37
2.18	α_2 -adjacence : les éléments hachurés sont α_2 -adjacents à l'élément grisé.	38
2.19	Représentation de l' α_3 - et de la δ_3 -adjacence sur \mathbb{Z}^3 : les spels gris sont les α_3 -voisins (à gauche), les δ_3 -voisins (à droite) du spel noir.	38
2.20	Topologies sur \mathbb{Z}^2	40
2.21	Deux façons de représenter la frontière entre un ensemble de pixels blancs et un ensemble de pixels noirs.	40

2.22	Paradoxe de connexité : si on choisit la 4-connexité pour les spels noirs et blancs, la courbe noire n'est pas connexe et pourtant sépare l'ensemble des spels blancs en deux composantes connexes, si on choisit la 8-connexité, les spels noirs forment une courbe fermée mais celle-ci ne sépare pas l'ensemble des spels blancs en deux composantes connexes.	41
2.23	Exemples de configuration de points de surfaces classiques.	43
2.24	Expression du paradoxe de connexité en terme de surfaces de paires de spels . . .	44
2.25	Image construite sur (\mathbb{Z}^2, ω_2) sur laquelle la frontière, matérialisée par un trait épais sépare bien la composante β_2 -connexe de spels noirs et la composante β_2 -connexe de spels blancs.	45
2.26	Une image est dite bien composée si elle évite les configurations ci-dessus (modulo les réflexions et les rotations en $3D$).	45
2.27	Chemins sur (\mathbb{Z}^2, ω_2)	47
2.28	Deux chemins égaux à une transformation élémentaire près : $c * c'^{-1}$ est un aller-retour.	48
2.29	Exemple d'un chemin discret non homotope à 0 mais dont l'analogue continu est lui homotope à 0.	48
2.30	De gauche à droite, exemples de chemins fermés homotopes à 0 respectivement pour les paires d'adjacences (6, 18), (18, 26) (ou (18, 6)), et (26, 6) (ou (26, 18)). .	48
2.31	Chemin discret homotope à 0 selon l'approximation de Boxer et homotope à \mathbb{Z} selon Kong.	49
2.32	Exemple de la différence entre un processus de shrinking et un processus de thinning	51
2.33	Deux analogues continus associés à une seule image discrète	53
2.34	Configurations Q_1, Q_3, Q_D	54
2.35	Associations d'un complexe cubique à une image discrète	55
2.36	Topologie de Khalimsky sur \mathbb{Z}^2 et complexe cubique associé	55
2.37	Correspondance entre l'ordre $ H^2 $ et le complexe \mathbb{C}^2	56
2.38	Représentation de la topologie et de la géométrie d'une image segmentée	58
2.39	Les éléments topologiques de cette subdivision $3D$ sont : 3 volumes, 6 faces, 2 arêtes et 2 sommets	59
2.40	Différentes règles d'appartenance proposées par Kovalevsky	60
2.41	Exemple d'un graphe de Jordan fort fini : les spels sont les 5 régions de l'image. Deux spels sont proto-adjacents s'ils partagent une arête.	66
2.42	Propriétés d'homogénéité et de forte connexité des complexes	68
2.43	Représentation d'un ordre par un DAG	69
2.44	Subdivision du plan \mathbb{R}^2 et graphe d'incidence associé	70
2.45	Exemple d'un polyèdre non borné (à gauche) et d'un polytope (à droite)	72
2.46	Exemple d'un complexe cellulaire représentant un tore	73
2.47	Exemple d'une dégénérescence	74
2.48	Exemples d'ensembles simpliciaux	75
2.49	Exemples d'ensembles semi-simpliciaux	75
2.50	Exemple d'un ensemble semi-simplicial numéroté	76
2.51	Exemple d'un ensemble simploldal sans et avec ses relations d'incidence	77
2.52	Exemple d'un CW -complexe possédant deux 0-cellules a et b , deux 1-cellules A et B et une 2-cellule : la 2-sphère	77
2.53	Complexe de blocs composé de trois 0-cellules, six 1-cellules, et trois 2-cellules . .	78
2.54	Complexe de blocs propres représentant la surface d'un tore	79

2.55	Opérations stellaires	81
2.56	Exemple d'une pseudo-variété	81
2.57	Exemple d'une quasi-variété simpliciale avec bord	82
2.58	Exemples de 2- G -cartes	83
2.59	Illustration de la propriété de switch	84
3.1	Exemples d'ensembles associés aux éléments d'un ordre. L'ordre est représenté par le DAG correspondant (cf Sec. 2.6.1 page 69) où la relation α^\square est visualisée par la relation "fils de".	93
3.2	Exemple d'un ordre et son complexe simplicial associé.	94
3.3	Exemple d'un complexe $(C, <, dim)$ et de l'ordre $ C = (C, \alpha = \leq)$ associé pour lesquels les notions de dimension et de rang sont différentes.	95
3.4	Exemple des sous-ordres associés à un ensemble de pixels noirs et traduisant respectivement les relations de 8- et 4-adjacence.	98
3.5	Exemple d'une 2-surface et du voisinage d'un de ses éléments. Ce voisinage est bien un 1-surface car le voisinage de chacun de ses points est une 0-surface.	98
3.6	Différents niveaux de représentation d'un même objet dans l'architecture proposée par Dominguez <i>et al.</i>	101
3.7	Exemple d'un ensemble de cellules maximales d'un complexe polyédrique et du support de cet ensemble.	102
3.8	Un objet à gauche et l'architecture associée avec f_{max} (en haut) et g (en bas).	103
3.9	Subdivision de \mathbb{R}^2 et 2- G -carte associée, $G = (D, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, avec $D = \{1, \dots, 24\}$	106
3.10	Décomposition cellulaire associée à la carte de la figure 3.9.	107
3.11	Carte généralisée et ensemble semi-simplicial non dégénéré associé.	109
3.12	Exemple d'un objet cellulaire et de la n - G -carte associée dont les caractéristiques d'Euler n'ont pas la même valeur.	110
4.1	Illustration sur deux complexes carrés des notions de cohésion maximale.	116
4.2	Un complexe et son ordre associé.	117
4.3	Un complexe et son ordre dual associé.	118
4.4	Un ordre CF ainsi que le complexe et le complexe dual associés.	119
4.5	Différence entre le complexe dual associé à un ordre et le complexe associé à l'ordre dual.	120
4.6	Correspondance entre la notion d' α -adhérence et les notions de clôture et d'étoile combinatoires des complexes associés.	121
4.7	α -ouvert d'un ordre et ses images dans les complexes associés.	122
4.8	α -fermé d'un ordre et ses images dans les complexes associés.	122
4.9	Exemple d'un ordre α -simplicial et de son dual qui est β -simplicial, les étiquettes des éléments de chacun des ordres mettent en évidence leurs propriétés simpliciales.	124
4.10	Exemples d'ordres et de complexes qui ne sont pas "à support".	126
4.11	Exemples d'ordres et de complexes "à support".	126
4.12	Images de la notion de proximité sur un ordre par $\psi_{X \rightarrow C}$ et $\psi_{X \rightarrow C}^*$	128
4.13	Configurations possibles pour la décomposition de l' α -adhérence d'un point α -unipolaire x	130

4.14	Exemples d' α -adhérences de points α -libres. Elles sont décomposables en un ensemble de points α -libres et l' α -adhérence d'un α -lien. Sur ces trois exemples, si on enlève les points α -libres il reste toujours un élément pour connecter les α -terminaux présents dans chacune des α -adhérences.	132
4.15	Support d'un ensemble de 2-cellules et illustration du caractère local de l'appartenance d'une cellule au support d'un objet.	134
4.16	Exemple de cellules non essentielles de rang 0 (e_3^* , e_4^* , e_5^* et e_6^*) et de rang 1 (e_7^* , e_8^* , e_9^* et e_{10}^*).	136
4.17	Seules les cellules qui sont images par ψ_{X-C}^* d'éléments non α -unipolaires ou non α -libres de l'ordre peuvent appartenir au support de l'ensemble des n -cellules du complexe.	137
4.18	Construction traditionnelle du noyau d'un ordre.	139
4.19	Caractérisation locale des éléments du noyau grâce à la correspondance avec la notion de support	140
4.20	Processus de construction de la subdivision du plan projectif contenant 1 sommet, 1 arête et 1 face.	143
4.21	Deux objets différents possédant le même graphe d'incidence : dans les deux cas, le couple sommet-arête (a, b) est doublement incident à la face c	144
4.22	Exemple d'une multi-incidence qui induit une ambiguïté dans le graphe d'incidence : deux cartes sont susceptibles d'être obtenues à partir du graphe d'incidence (le processus de construction sera décrit ultérieurement). Une des cartes représente une subdivision qui ne correspond pas à ce graphe d'incidence (le sommet D a été "séparé" en deux sommets D et D').	145
4.23	Cartes associées aux subdivisions avec multi-incidence montrées précédemment. Les cartes 4.23(a) et 4.23(b) sont représentées en utilisant des demi-arêtes pour représenter les brins. Pour simplifier la représentation de la carte associée à la troisième subdivision, les brins sont ici représentés par des points et leurs relations se déduisent du dessin de la subdivision.	150
4.24	Un ordre et son graphe d'incidence associé pour lesquels la relation α sur X est différente de la relation \leq entre les cellules du graphe. Par exemple, $x_1 \in \alpha(x_5)$ tandis que son image c_1 n'est pas face de c_5	151
4.25	La dimension implicite associée aux éléments de l'ordre est différente de la dimension des cellules correspondantes dans le graphe d'incidence.	152
4.26	Sous-graphes d'incidence.	154
4.27	Complexe simplicial numéroté associé à un graphe d'incidence.	155
4.28	Illustration de la correspondance entre les brins d'une n - G -carte et les $(n + 1)$ -uplets du graphe d'incidence associé.	156
4.29	Exemple d'un graphe d'incidence de surface.	158
4.30	Exemple d'un graphe d'incidence qui n'est pas un graphe d'incidence de surface. Il vérifie les propriétés ii) et iii) mais pas iv). La θ -adhérence stricte de A par exemple n'est pas connexe.	159
4.31	Exemple d'un graphe d'incidence (a) qui ne possède pas la propriété de switch . En effet, il existe 4 1-cellules : c , d , f et h entre la 0-cellule D et la 2-cellule F_2 (b).	159
4.32	Graphe d'incidence de surface de dimension 2 et 2-surface équivalents.	161
4.33	Equivalence entre 0-surface et graphe d'incidence de surface de dimension 0.	162
4.34	Une 2- G -carte et un graphe d'incidence de surface équivalents.	163

4.35	Un graphe d'incidence de surface de dimension 2 (a) et un de ses sous-graphes, construit sur $\theta^{\square}(A)$, qui est un graphe d'incidence de surface de dimension 1 (b).	164
4.36	Illustration de la partie (iv) de la preuve du théorème 4.56 pour un graphe de dimension 2 quand on fixe 2 cellules.	174
4.37	Illustration de la partie (iv) de la preuve du théorème 4.56 pour un graphe de dimension 2 quand on fixe 1 cellule.	176
4.38	Exemple d'un graphe d'incidence de surface de dimension 1, pour lequel on peut passer de c^1 à c'^0 par le chemin y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 . On peut passer du 2-uplet (c^0, c^1) au 2-uplet (c'^0, c'^1) en alternant des switch_i par la séquence suivante : $\text{switch}_0, \text{switch}_1, \text{switch}_0, \text{switch}_1, \text{switch}_0, \text{switch}_1, \text{switch}_0$.	178
4.39	Illustration d'une partie de la preuve du lemme 4.59 pour un graphe de dimension 2. On peut passer du 3-uplet BaF_1 au 3-uplet BbF_3 ($BaF_1, BfF_1, BfF_2, BbF_2, BbF_3$) en utilisant une combinaison de $\text{switch}_1\text{switch}_2$.	179
4.40	Les 2-cellules R_1 et R_2 possèdent deux 1-cellules dans l'intersection de leurs clôtures : BK et EL . Les 2-cellules R_1 et R_3 sont reliées par 4 1-cellules : GH, HI, IJ et JK .	185
4.41	Exemple d'une 1-surface qui n'est pas à support et de son interprétation en terme de complexe	185
4.42	2-surface non à support : les 2-cellules F_1 et F_2 , ainsi que les 2-cellules F_1 et F_3 partagent plusieurs 1-faces	185
5.1	Deux coupes complètes au travers d'un tore creux peuvent ne pas le déconnecter, trois coupes le déconnectent forcément	189
5.2	Quelques exemples d'orientations de simplexes	190
5.3	Exemples d'objets cellulaires simples contenant un ou plusieurs 1-trous	191
5.4	Bouteille de Klein : on peut montrer que le cycle $z_1 = [a, d] + [d, e] + [e, a]$ n'est le bord d'aucune 2-chaîne mais que $2z_1$ est le bord de la 2-chaîne composée de tous les 2-simplexes orientés comme sur la figure [165]	194
5.5	Complexe simplicial orienté	207
5.6	Exemples de générateurs modulo de H_1	210
A.1	Hiérarchie non exhaustive de différents types de topologie.	231
A.2	Puissance de comparaison des invariants topologiques (algébriques) du haut en bas par ordre décroissant.	234
A.3	Comparaisons de la puissance de représentation des invariants topologiques algébriques.	235
A.4	L'espace topologique associé à B est connexe, l'espace topologique associé à l'ensemble $B \cup C$ n'est pas connexe.	235
A.5	Les chemins c_1 et c_2 sont homotopes dans \mathbb{R}^2 .	238
A.6	Mise en évidence des générateurs du groupe fondamental du tore.	238
A.7	Le sous-espace B est simplement connexe, tandis que C ne l'est pas.	240
A.8	Décomposition cellulaire de deux objets simples.	242
A.9	Décomposition cellulaire d'un sous-espace de \mathbb{R}^2 .	242
A.10	Ruban de Möbius : une variété non orientable.	245
A.11	Bouteille de Klein.	245
B.1	Les 3 pavages réguliers du plan	248
B.2	Eléments de base des pavages réguliers et semi-réguliers de \mathbb{R}^3	248

B.3	Exemple d'une image en 3 couleurs (gauche), et de son découpage en régions (droite) après attribution à chaque pixel d'un label par segmentation en zones connexes uniformément colorées	248
B.4	Exemple d'un diagramme de Voronoï d'un sous-espace de \mathbb{R}^2 dans lequel ont été posés 5 germes	249
B.5	Maillages (en pointillés) associés aux pavages $2D$ réguliers	249
B.6	De gauche à droite : configuration des points d'un maillage cubique, d'une grille BCC et d'une grille FCC	250
B.7	Exemple de la triangulation de Delaunay (en traits pointillés) associée au diagramme de Voronoï (en traits pleins)	250
C.1	Exemples de subdivisions cellulaires : pour mieux voir tous les éléments, on les représente souvent légèrement éloignés les uns des autres	253
C.2	Différentes notions de chemin sur une subdivision cellulaire	255
C.3	Exemples d'étoiles, de clôtures combinatoires et de liens de cellules dans une subdivision	256
C.4	Exemples d'ouverts et de fermés d'une subdivision cellulaire	257
C.5	Opérations stellaires	259

Index

- CW*-complexe, 72, **77**, 78, 84
- IGnGC*-conversion, 163, **178**
- IGnS*-conversion, 163, **168**
- PL*-boule, 258
- PL*-sphère, 258
- PL*-topologie, 13, **230**
- PL*-variété, 258
- Δ^n , **71**, 258
- α -adhérence, 93
- α -chaîne, 94
- α -décomposition, 95
- α -libre, 96
- α -lien, 96
- α -noyau, 96
- α -proximité, 93
- α -rang, 94
- α -terminal, 93
- α -topologie, **95**
- α -unipolaire, 96
- β -adhérence, 93
- β -adhérence stricte, 93
- β -chaîne, 94
- β -décomposition, 95
- β -libre, 96
- β -lien, 96
- β -noyau, 96
- β -proximité, 93
- β -rang, 94
- β -terminal, 93
- β -unipolaire, 96
- switch IG_C^* -triplets, **157**
- ρ -chemin, 62
- a -complexe, 85
- i -cellule (n - G -carte), 107
- k -chaîne, 85
- k -chemin, 254
- n - G -carte, **82**, **106**
- n - G -carte simpliciale, **144**, **146**
- n -carte, **83**
- n -pseudo-variété cubique, 61
- n -surface, 85, 97
- n -variété, 84, **243**
- n -variété cubique faible, 61
- n -variété discrète, 104
- n -variétés subdivisées, 84
- $nGCIG$ -conversion, 163, **171**
- $nGCnS$ -conversion, 181, **181**
- $nSIG$ -conversion, 163, **168**
- $nSnGC$ -conversion, 181, **181**
- \mathcal{T}_0 , **229**
- \mathcal{T}_0 , 13
- \mathcal{T}_1 , **229**
- \mathcal{T}_2 , 13, **229**
- $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}$, **13**
- élément d'ordre fini, **262**
- équivalence homotopique, 17, 237
- étoile combinatoire, **255**
- a -complexes, **74**
- adhérence, **227**
- adjacence, 254
- analogue continu, 100
- analogue simplicial, 100
- application simpliciale, 71
- axiomes de séparation, 12, 228
- base d'un groupe, **262**
- bel, **40**, 46
- bords faibles, **195**
- boule stellaire, 80, 258
- bouteille de Klein, 21, 244
- caractéristique d'Euler (étendue), 20, 109, **241**
- carte duale, **108**
- carte généralisée, 82, **106**
- carte topologique GE, 57
- carte topologique HLE, 57
- cell-tuple, **84**

- cellule pendante, 254
- chaîne de cartes, 83
- chemin, 254
- clôture combinatoire, **255**
- coefficients de torsion, 193
- complexe à support, **125**
- complexe cartésien, 54
- complexe cellulaire abstrait, **67**, 86
- complexe cellulaire d'Alexandrov, **72**, 86
- complexe cubique, 54, 72
- complexe cubique non restreint, 86
- complexe de blocs, **78**
- complexe de chaînes, **192**
- complexe de l'ordre, 94
- complexe fortement connexe, **67**, 78
- complexe non restreint, 71
- complexe polyédrique, 71
- complexe pur, **67**, 78
- complexe régulier, 78
- complexe simplicial abstrait, **71**, 258
- complexe simplicial non restreint, 72, 86
- composante connexe, 14, **233**
- conceptual level, 100
- connexe par arcs, 255
- connexe par chemins, 254
- connexité, 14, **233**
- connexité par arcs, 17, 236, **236**
- connexité par chemins, 17, 236
- continuous analogue, 100
- contractile, 18, **239**
- COTS, 55

- device level, 100
- diagramme de Voronoï, 248, 249
- dimension, 14, 17
- dimension de recouvrement, 17, 236
- dimension topologique, 17
- dimension topologique, 237
- domaine polyédrique convexe, 71

- ensemble cubique, 76
- ensemble semi-simplicial, **74**, 86
- ensemble semi-simplicial non dégénéré, 76
- ensemble semi-simplicial numéroté, 76, 82
- ensemble simplicial, **74**
- ensemble simpleïdal, 76
- enveloppe convexe, 72
- espace compact, **243**

- Espace d'Alexandrov, **227**
- espace de Fréchet, 229
- espace de Hausdorff, 229
- espace de Kolmogorov, 229
- espace de Sierpinski, 229
- espace discret (de Herman), **62**
- espace métrique, 229
- espace topologique, 12, **225–227**

- facteur direct, **262**
- facteurs invariants, 193
- famille de voisinages, **226**
- fonction d'éclairage, 101
- fonction d'éclairage faible fortement locale, **101**, 141
- Forme Normale de Smith, 193

- graphe d'adjacence de régions, 34
- graphe d'incidence, **70**, **149**
- graphe d'incidence de surface, **157**
- graphe orienté acyclique, 69
- grille *BCC*, 34, 249
- grille *FCC*, 34, 249
- groupe, **261**
- groupe abélien, **261**
- groupe abélien libre, **262**
- groupe commutatif, **261**
- groupe d'homologie, 20, **192**, 241, 244
- groupe de type fini, **262**
- groupe fondamental, 17, **238**
- groupes d'homotopie, **238**
- groupes quotients, 262

- homéomorphisme, 11, 13, **232**
- homomorphisme, **262**
- homotopie, 14
- homotopie de chemins, **237**
- homotopie de fonctions, 99
- homotopie de fonctions, 237

- image discrète (de Herman), **63**
- incidence, 254
- invariant topologique, 13
- isomorphisme simplicial, 71

- Jordan-Brouwer, 21, **244**

- lien, **256**, 258
- lighting function, 101

- logical level, 100
- loi de composition interne, **261**
- mouvement bistellaire, 80, 258
- multi-incidence, 254
- N, 107
- niveau conceptuel, 100
- niveau logique, 100
- nombre de Betti, **193**
- opérateur **switch**, 159
- orbite, **106**
- ordre, **67**, 85
- ordre α -homogène, **152**
- ordre à support, **125**
- Ordre CF, 92
- orientabilité d'une variété, **244**
- orientation, 244
- ouvert (d'une subdivision cellulaire), **257**
- ouverts, 12, 225
- paire de Jordan, 65
- paire de Jordan faible, 65
- paire de Jordan forte, 65
- polyèdre, 71
- polytope, 71
- pré-adjacence, 62
- propriété **switch**, **157**
- propriété de switch, 84
- proto-adjacence, 62
- pseudo-variété, **80**
- quasi-variété cellulaire, 82
- quasi-variété simpliciale, **82**
- réalisation géométrique, 72
- rétracte, 19, **240**
- rétracte par déformation, 19, **240**
- rétraction, 240
- Raffinement, **236**
- rang d'un groupe, **262**
- recouvrement, **236**
- ruban de Möbius, 14, 233, 244
- simplement connexe, 18, **239**
- simplicial analogue, 100
- soudure stellaire, 80, 258
- sous-groupe de torsion, **262**
- souys-groupe, **261**
- spel-adjacence serrée, 63
- spel-adjacence très serrée, 64
- sphère stellaire, 80, 258
- strongly local weak lighting function, 101, 141
- structure cell-tuple, **84**
- subdivision homogène, 254
- subdivision localement finie, 254
- subdivision stellaire, 80, 258
- suite de spels ρ -serrée, 63
- support, **101**, 133
- surfel, **40**
- topologie, 11
- topologie algébrique, 13, **230**
- topologie combinatoire, 13, 66, **230**
- topologie combinatoire différentielle, 13, **230**
- topologie d'Alexandroff, 228
- topologie de Sierpinski, 229
- topologie différentielle, 13, **230**
- topologie digitale, 24
- topologie discrète, 24, 229
- topologie générale, 230
- topologie grossière, 229
- topologie linéaire par morceaux, 80, **230**, 258
- topologie métrique, 13, **230**
- triangulation, 72
- type d'espace topologique, 228, 230
- type d'homotopie, **239**
- variété, 21
- variété combinatoire, **258**
- variété polyédrique, 80, 258
- variété stellaire, 80, 258
- variété topologique, 79, **243**, 257
- voisinage, 12, **226**

Bibliographie

- [1] M. K. Agoston. *Algebraic Topology, a first course*. Pure and applied mathematics. Marcel Dekker Ed., 1976.
- [2] R. Aharoni, G. T. Herman, and M. Loeb. Jordan graphs. *Graphical Models and Image Processing*, 58(4):345–359, July 1996.
- [3] S. Alayrangues. Parallélisme et modèles déformables en analyse d’images. Master’s thesis, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2000.
- [4] S. Alayrangues, X. Daragon, J.-O. Lachaud, and P. Lienhardt. Equivalence between regular n-g-maps and n-surfaces. In Klette and Zunic [111], pages 122–136.
- [5] S. Alayrangues, X. Daragon, J.-O. Lachaud, and P. Lienhardt. Equivalence des n-g-cartes fermées sans multi-incidence et des n-surfaces. In *Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, GTMG 2004*, 2004.
- [6] S. Alayrangues and J.-O. Lachaud. Equivalence between order and cell complex representations. In H. Wildenauer and W. Kropatsch, editors, *Proc. Computer Vision Winter Workshop (CVWW), Bad Aussee, Austria*, pages 222–233, feb 2002.
- [7] S. Alayrangues and J.-O. Lachaud. Equivalence between order and cell complex representations. Research Report 1272-02, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2002.
- [8] P. Alexandroff and Heinz Hopf. *Topologie*. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935.
- [9] P.S. Alexandrov. *Combinatorial Topology*. DOVER publications, 1960.
- [10] M. Allili, D. Corriveau, and D. Ziou. Morse homology descriptor for shape characterization. In *ICPR (4)*, pages 27–30, 2004.
- [11] Eric Andres, Guillaume Damiand, and Pascal Lienhardt, editors. *Discrete Geometry for Computer Imagery, 12th International Conference, DGCI 2005, Poitiers, France, April 13-15, 2005, Proceedings*, volume 3429 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2005.
- [12] R. Ayala, E. Domínguez, A. R. Francés, and A. Quintero. Weak lighting functions and strong 26-surfaces. *Theor. Comput. Sci.*, 283(1):29–66, 2002.
- [13] R. Ayala, E. Domínguez, A.R. Francés, and A. Quintero. Digital lighting functions. In Springer Verlag, editor, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1347, 1997.
- [14] R. Ayala, E. Domínguez, A.R. Francés, and A. Quintero. Homotopy in digital spaces. In Springer Verlag, editor, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1953 of *LNCS*, 2000.
- [15] R. Ayala, E. Domínguez, A.R. Francés, and A. Quintero. Digital homotopy with obstacles. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 46, 2001.

- [16] R. Ayala, E. Domínguez, A.R. Francés, and A. Quintero. Homotopy in digital spaces. *DAMATH: Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science*, 125, 2003.
- [17] R. Ayala, E. Dominguez, A.R. Frances, and A. Quintero. Digital homotopy with obstacles. *DAMATH: Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science*, 139, 2004.
- [18] G. Bertrand. P-simple points: A solution for parallel thinning. In *5th DGCI*, pages 233–242, 1995.
- [19] G. Bertrand. New notions for discrete topology. In G. Bertrand, M. Couprie, and L. Perrotton, editors, *Proc. of 8th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'99), Marne-la-Vallée, France*, volume 1568 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 218–228. Springer-Verlag, 1999.
- [20] G. Bertrand. Three dimensional parallel thinning algorithms based on p-simple points. In *Actes du Congrès pour le 60^{ème} anniversaire de Denis Richard*, 2002.
- [21] G. Bertrand and M. Couprie. Some structural properties of discrete surfaces. In *Proc. of 7th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'97), Montpellier, France*, volume 1347 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 113–124, 1997.
- [22] G. Bertrand and M. Couprie. A model for digital topology. In G. Bertrand and M. Couprie, editors, *Proc. of 8th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'99), Marne-la-Vallée, France*, volume 1568 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 229–241. Springer-Verlag, 1999.
- [23] G. Bertrand and G. Malandain. A new characterisation of three-dimensional simple points. *Pattern Recognition Letters*, 15:169–175, 1994.
- [24] G. Bertrand and R. Malgouyres. Some topological properties of discrete surfaces. In *Proc. of 6th Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 325–336, 1996.
- [25] G. Bertrand and R. Malgouyres. Local property of strong surfaces. *SPIE Vision Geometry VI.*, 3168:318–327, 1997.
- [26] A. Björner. Topological methods. *Handbook of combinatorics (vol. 2)*, pages 1819–1872, 1995.
- [27] L. Boxer. Digitally continuous functions. *Pattern Recognition Letters*, 15:833–839, 1994.
- [28] L. Boxer. A classical construction for the digital fundamental group. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 10:51–62, 1999.
- [29] L. Boxer. Properties of digital homotopy. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22:19–26, 2005.
- [30] Brahy, Corbeyran, and Braquelaire. *Imago Mundi Tome 1 : Promesses d'Atlantide*. 2003.
- [31] A. Braquelaire, G. Damiand, J.-P. Domenger, and F. Vidil. Comparison and convergence of two topological models for 3d image segmentation. In *Workshop on Graph-Based Representations in Pattern Recognition*, number 2726 in *Lecture Notes in Computer Science*, pages 59–70, York, England, June 2003.
- [32] A. J.-P. Braquelaire. Representing and segmenting 2d images by means of planar maps with discrete embeddings: From model to applications. In Brun and Vento [38], pages 92–121.

- [33] Achille J.-P. Braquelaire, Jacques-Olivier Lachaud, and Anne Vialard, editors. *Discrete Geometry for Computer Imagery, 10th International Conference, DGCI 2002, Bordeaux, France, April 3-5, 2002, Proceedings*, volume 2301 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2002.
- [34] J.-P. Braquelaire and J.-P. Domenger. Representation of region segmented images with discrete maps. Research Report 1127-96, LaBRI, Talence, France, available on <http://www.labri.u-bordeaux.fr/LaBRI/Publications/index.html>, 1996.
- [35] M. G. Brin. Introduction to differential topology, 1994.
- [36] E. Brisson. Representing geometric structures in d dimensions: Topology and order. In *Proceedings of the Fifth Annual Symposium on Computational Geometry (Saarbrücken, FRG, June 5-7, 1989)*, pages 218–227, New York, 1989. ACM, ACM Press.
- [37] L. Brun and W. Kropatsch. Contraction kernels and combinatorial maps. In Jean Michel Jolion, Walter Kropatsch, and Mario Vento, editors, *3rd IAPR-TC15 Workshop on Graph-based Representations in Pattern Recognition*, pages 12–21, Ischia Italy, May 2001. IAPR-TC15, CUEN.
- [38] Luc Brun and Mario Vento, editors. *Graph-Based Representations in Pattern Recognition, 5th IAPR International Workshop, GbRPR 2005, Poitiers, France, April 11-13, 2005, Proceedings*, volume 3434 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2005.
- [39] W. Bruns and Gubeladze J. Polytopes, rings, and k-theory. IN preparation, 2005.
- [40] S. Buoncristiano. *Volume 6: Fragments of geometric topology from the sixties*. Geometry and Topology Monographs. Geometry and Topology Publications, 2003.
- [41] S. S. Cairns. *Introductory Topology*. Ronald Press Company, 1961.
- [42] H. Carr, T. Theußl, and T. Möller. Isosurfaces on optimal regular samples. Technical report, Department of Computing Science, Simon Fraser University, 2003.
- [43] J. C. Ciria, A. De Miguel, E. Domínguez, A. R. Francés, and A. Quintero. A maximum set of (26, 6)-connected digital surfaces. In Klette and Zunic [111], pages 291–306.
- [44] J. C. Ciria, A. de Miguel, E. Domínguez, A. R. Francés, and A. Quintero. Local characterization of a maximum set of digital (26, 6)-surfaces. In Andres et al. [11], pages 161–171.
- [45] J.-P. Coquerez and S. Philipp Ouvrage collectif. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, 1998.
- [46] R. Cori. Un code pour les graphes planaires et ses applications. *Astérisque*, 27, 1975.
- [47] M. Couprie, G. Bertrand, and Y. Kenmochi. Discretization in 2d and 3d orders. In Braquelaire et al. [33], pages 301–312.
- [48] M. Couprie, G. Bertrand, and Y. Kenmochi. Discretization in 2d and 3d orders. *Graphical Models*, 65(1-3):77–91, 2003.
- [49] G. Damiand. *Définition et étude d'un modèle topologique minimal de représentation d'images 2d et 3d*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, décembre 2001.
- [50] G. Damiand, O. Alata, and C. Bihoreau. Using 2d topological map information in a markovian image segmentation. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, number 2886 in *Lecture Notes in Computer Science*, pages 288–297, Naples, Italy, november 2003.
- [51] G. Damiand and P. Lienhardt. Removal and contraction for n-dimensional generalized maps. In Ingela Nyström, Gabriella Sanniti di Baja, and Stina Svensson, editors, *DGCI*, volume 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 408–419. Springer, 2003.

- [52] X. Daragon and M. Couprie. Segmentation topologique du neo-cortex cérébral depuis des données irm. In *procs. congrès RFIA*, volume 3, pages 809–818, 2002.
- [53] X. Daragon, M. Couprie, and G. Bertrand. New "marching-cubes-like" algorithm for alexandrov-khalimsky spaces. In *Proc. of SPIE : Vision Geometry XI*, 2002.
- [54] X. Daragon, M. Couprie, and G. Bertrand. Discrete frontiers. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 236–245. Springer-Verlag, 2003.
- [55] X. Daragon, M. Couprie, and G. Bertrand. Discrete surfaces and frontier orders. Technical report, Institut Gaspard Monge, 2004.
- [56] Michael W. Davis and T. Januszkiewicz. Hyperbolization of polyhedra. *Journal of Differential Geometry*, 34:347–388, 1991.
- [57] L. De Floriani, M. M. Mesmoudi, F. Morando, and E. Puppo. Decomposing non-manifold objects in arbitrary dimensions. *Graph. Models*, 65(1-3):2–22, 2003.
- [58] C. J. A. Delfinado and H. Edelsbrunner. An incremental algorithm for betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere. *Computer Aided Geometric Design*, 12(7):771–784, 1995. ISSN 0167-8396.
- [59] P. Desbarats. *Structuration des images segmentées 3D discrètes*. PhD thesis, Université Bordeaux I, décembre 2001.
- [60] P. Desbarats and S. Gueorguieva. CW complexes: topological mainframe for numerical representations of objects. Research report RR-1291-03, LaBRI, Bordeaux, France, mar 2003.
- [61] E. S. Deutsch. Thinning algorithms on rectangular, hexagonal, and triangular arrays. *Commun. ACM* 15(9), pages 827–837, 1972.
- [62] J.-P. Domenger. *Conception et implémentation du noyau graphique d'un environnement $2D\frac{1}{2}$ d'édition d'images discrètes*. PhD thesis, Université Bordeaux I, avril 1992.
- [63] E. Domínguez, A. R. Francés, and A. Marquéz. A framework for digital topology. In *Proceedings IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 2, pages 65–70, 1993.
- [64] E. Domínguez, A. R. Francés, and A. Marquéz. A framework for digital topology. Technical report, Brown University Computer Science, February 17 1994.
- [65] B. R. Donald and D. R. Chang. On the complexity of computing the homology type of a triangulation. In *FOCS*, pages 650–661, 1991.
- [66] J.-F. Dufourd. Formal specification of topological subdivisions using hypermaps. *Computer-Aided Design*, 23(2):99–116, 1991.
- [67] J.-G. Dumas, F. Heckenbach, B. D. Saunders, and V. Welker. Computing simplicial homology based on efficient smith normal form algorithms. In Michael Joswig and Nobuki Takayama, editors, *Algebra, Geometry, and Software Systems*, pages 177–206. Springer, 2003.
- [68] W. Eberly, M. Giesbrecht, and G. Villard. Computing the determinant and smith form of an integer matrix. In *FOCS*, pages 675–685, 2000.
- [69] U. Eckhardt and L.J. Latecki. Topologies for the digital spaces z^2 and z^3 . *Computer Vision and Image Understanding*, 90:295–312, 2003.

- [70] H. Edelsbrunner. *Algorithms in combinatorial geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 1987.
- [71] H. Edelsbrunner, D. G. Kirkpatrick, and R. Seidel. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(4):551–558, 1983.
- [72] H. Edelsbrunner and E. P. Mücke. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Trans. Graph.*, 13(1):43–72, 1994.
- [73] J. Edmonds. A combinatorial representation for polyhedral surfaces. *Notices Amer. Math. Soc.*, 7:646, 1960.
- [74] H. Elter. *Etude de structures combinatoires pour la représentation de complexes cellulaires*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, September 1994.
- [75] A. V. Evako. Dimension on discrete spaces. *Int. J. Theor. Phys.*, 33:1553–1568, 1994.
- [76] A. V. Evako, R. Kopperman, and Y. V. Mukhin. Dimensional properties of graphs and digital spaces. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 6:109–119, 1996.
- [77] A. T. Fomenko and T. L. Kunii. *Topological Modeling for Visualization*. Springer-Verlag, Tokyo, 1997.
- [78] R. Forman. Combinatorial differential topology and geometry, November 19 1998.
- [79] R. Forman. Some applications of combinatorial differential topology, November 16 2001.
- [80] J. Françon. Discrete Combinatorial Surfaces. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 57(1):20–26, January 1995.
- [81] L. Fuchs and P. Lienhardt. Topological structures and free-form spaces. *Journées de Géométrie Algorithmique*, septembre 1997.
- [82] E. Garduno. *Visualization and extraction of structural components from reconstructed volumes*. PhD thesis, University of Pennsylvania, 2002.
- [83] A. J. Gareth and D. Singerman. Theory of maps on orientable surfaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(37):273–307, 1978.
- [84] C. J. Gau and T. Y. Kong. Minimal nonsimple sets of voxels in binary images on a face-centered cubic grid. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence IJPRAI*, 13(4):485–502, 1999.
- [85] C. J. Gau and T. Y. Kong. 4D minimal non-simple sets. *Lecture Notes in Computer Science*, 2301:81–91, 2002.
- [86] C. J. Gau and T. Y. Kong. Minimal non-simple sets in 4D binary images. *Graphical models*, 65(1–3):112–130, May 2003.
- [87] C. J. Gau and T. Y. Kong. Minimal non-simple sets in 4-dimensional binary images with (8, 80)-adjacency. In Klette and Zunic [111], pages 318–333.
- [88] A. Van Gelder and J. Wilhelms. Topological Considerations in Isosurface Generation. *ACM Transactions on Graphics*, 13(4):337–375, October 1994.
- [89] M. Giesbrecht. Fast computation of the smith normal form of an integer matrix. In *ISSAC*, pages 110–118, 1995.
- [90] A. Giraldo, A.D. Gross, and L. J. Latecki. Digitizations preserving shape. *Pattern Recognition*, 32(3):365–376, 1999.
- [91] C. Godbillon. *Eléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, France, 1971.

- [92] R. González-Díaz and P. Real. On the cohomology of 3d digital images. *Discrete Applied Mathematics*, 147:245–263, april 2005.
- [93] S. Gray. Local properties of binary images in two dimensions. *IEEE Transactions on Computers*, 20(5):551–561, May 1971.
- [94] J. L. Hafner and K. S. McCurley. Asymptotically fast triangularization of matrices over rings. In David Johnson, editor, *Proceedings of the 1st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '90)*, pages 194–200, San Francisco, CA, USA, January 1990. SIAM.
- [95] R.W. Hall. Tests for connectivity preservation for parallel reduction operators. *Topol. Appl.*, 46:199–217, 1992.
- [96] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [97] G. T. Herman. Discrete Multidimensional Jordan Surfaces. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 54(6):507–515, November 1992.
- [98] G. T. Herman. Oriented Surfaces in Digital Spaces. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 55(5):381–396, September 1993.
- [99] G. T. Herman. Finitary 1-simply connected digital spaces. *Graphical Models and Image Processing*, 60(1):46–56, January 1998.
- [100] G. T. Herman. *Geometry of digital spaces*. Birkhäuser, Boston, 1998.
- [101] Gabor T. Herman. An abstract theoretical foundation of the geometry of digital spaces. In Braquelaire et al. [33], pages 279–288.
- [102] C.S. Iliopoulos. Worst-case complexity bounds on algorithms for computing the canonical structure of finite abelian groups and the hermite and smith normal forms of an integer matrix. Research Report CS-RR-049, Department of Computer Science, University of Warwick, Coventry, UK, April 1983.
- [103] C.S. Iliopoulos. Worst-case complexity bounds on algorithms for computing the canonical structure of finite abelian groups and the hermite and smith normal forms of an integer matrix. *SIAM J. Comput.*, 18(4):658–669, 1989.
- [104] T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek. *Computational Homology*, volume 157. Springer, 2004.
- [105] T. Kaczyński, M. Ślusarek, and M. Mrozek. Homology computation by reduction of chain complexes, October 11 1997.
- [106] E. Kaltofen and G. Villard. On the complexity of computing determinants. *Computational Complexity*, 13(3-4):91–130, 2005.
- [107] R. Kannan and A. Bachem. Polynomial algorithms for computing the Smith and Hermite normal forms of an integer matrix. *SIAM Journal on Computing*, 8(4):499–507, November 1979.
- [108] M. Khachan, P. Chenin, and H. Deddi. Digital pseudo-manifolds, digital weak-manifolds and jordan brouwer separation theorem. *Discrete Applied Mathematics*, 125:45–57, 2003.
- [109] Mohammed Khachan, Patrick Chenin, and Hafsa Deddi. Digital -pseudomanifold and -weakmanifold in a binary (+1)-digital image. In Gunilla Borgefors, Ingela Nyström, and Gabriella Sanniti di Baja, editors, *DGCI*, volume 1953 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 37–45. Springer, 2000.

- [110] E. Khalimsky, R. Kopperman, and P. R. Meyer. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications*, 36:1–17, 1990.
- [111] Reinhard Klette and Jovisa D. Zunic, editors. *Combinatorial Image Analysis, 10th International Workshop, IWCIA 2004, Auckland, New Zealand, December 1-3, 2004, Proceedings*, volume 3322 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2004.
- [112] T. Y. Kong. A digital fundamental group. *Computers and Graphics*, 13(2):159–166, 1989.
- [113] T. Y. Kong. Topology-preserving deletion of 1's from 2-, 3- and 4-dimensional binary images. In E. Ahronovitz and C. Fiorio, editors, *Proc. of 7th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'97), Montpellier, France*, volume 1347 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–18. Springer-Verlag, 1997.
- [114] T. Y. Kong. Topological adjacency relations on z^n . *Theoretical Computer Science*, 283:3–28, 2002.
- [115] T. Y. Kong, R. D. Kopperman, and P. R. Meyer. A topological approach to digital topology. *Am. Math. Monthly*, 98:901–917, 1991.
- [116] T. Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital Topology: Introduction and Survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48(3):357–393, December 1989.
- [117] T.Y. Kong and A.W. Roscoe. Continuous Analogs of Axiomatized Digital Surfaces. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 29(1):60–86, January 1985.
- [118] U. Köthe. XPMaps and topological segmentation — A unified approach to finite topologies in the plane. Technical report, University of Hamburg, Department of Informatics, december 2001.
- [119] U. Köthe. XPMaps and topological segmentation — A unified approach to finite topologies in the plane. In *10th conference on Discrete Geometry for Computer Imagery - DGCI 2002*, volume 2301 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 22–33, 2002.
- [120] V. Kovalevsky. A new concept for digital geometry. *Shape in Picture*, pages 37–51, 1994.
- [121] V. Kovalevsky. Discrete topology and contour definition. *Pattern Recognition Letters*, 2:281–288, 1984.
- [122] V. Kovalevsky. On the topology of digital spaces. In *Proceedings of the Seminar "Digital Image Processing"*, pages 1–16, 1986.
- [123] V. Kovalevsky. The topology of cellular complexes as applied to image processing. In *Computer Analysis of Images and Patterns, Proc. II Int. Conference CAIP'87 on Automatic Image Processing*, pages 162–173, 1987.
- [124] V. Kovalevsky. Finite Topology as Applied to Image Analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46(2):141–161, May 1989.
- [125] V. Kovalevsky. Computergestützte untersuchung topologischer eigenschaften mehrdimensionaler räume mit anwendungen zur visualisierung und bildanalyse. Preprint CS-03-00, Universität Rostock, Fachbereich Informatik, 2000.
- [126] V. Kovalevsky. Algorithms and data structures for computer topology. In G. Bertrand, A. Imiya, and R. Klette, editors, *Digital and image geometry*, volume 2243 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 38–58. Springer-Verlag, 2001.
- [127] V. Kovalevsky. Multidimensional cell lists for investigating 3-manifolds. *DAMATH: Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science*, 125, 2003.

- [128] W. G. Kropatsch. Building irregular pyramids by dual graph contraction. *IEE-Proc. Vision, Image and Signal Processing*, 142(6):366–374, dec 1995.
- [129] J.-O. Lachaud. *Extraction de surfaces à partir d'images tridimensionnelles : approche discrète et approche par modèle déformable*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1998. (en français).
- [130] J.-O. Lachaud. Coding cells of multidimensional digital spaces to write generic digital topology and geometry algorithms. Research Report 1283-02, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2002.
- [131] J.-O. Lachaud. Coding cells of digital spaces: a framework to write generic digital topology algorithms. In A. Del Lungo, V. Di Gesù, and A. Kuba, editors, *Proc. Int. Work. Combinatorial Image Analysis (IWCIA'2003)*, Palermo, Italy, volume 12 of *ENDM*. Elsevier, 2003.
- [132] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Continuous analogs of digital boundaries: A topological approach to iso-surfaces. *Graphical Models and Image Processing*, 62:129–164, 2000.
- [133] L. J. Latecki. 3D well-composed pictures. *Graphical Models and Image Processing*, 59(3):164–172, May 1997.
- [134] L. J. Latecki, C. Conrad, and A. D. Gross. Conditions that guarantee a digitization process preserves topology. In Gerhard Sagerer, Stefan Posch, and Franz Kummert, editors, *DAGM-Symposium*, Informatik Aktuell, pages 210–217. Springer, 1995.
- [135] L. J. Latecki, U. Eckhardt, and A. Rosenfeld. Well-composed sets. *CVGIPIU: CVGIP: Image Understanding*, 61, 1995.
- [136] C.-N. Lee, T. Poston, and A. Rosenfeld. Holes and genus of 2D and 3D digital images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Graphical Models and Image Processing*, 55(1):20–47, January 1993.
- [137] S. Lefschetz. *Topology*. Chelsea, New York, 2 edition, 1965.
- [138] W. B. R. Lickorish. Simplicial moves on complexes and manifolds. *Geometry and Topology Monographs*, November 20 1999. Comment: 22 pages. Published copy, also available at <http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/GTMon2/paper16.abs.html>.
- [139] P. Lienhardt. Subdivisions of n-dimensional spaces and n-dimensional generalized maps. In *Proceedings of the fifth annual symposium on Computational geometry*, pages 228–236. ACM Press, 1989.
- [140] P. Lienhardt. Topological models for boundary representation: a comparison with n-dimensional generalized maps. *Computer-Aided Design*, 23(1):59–82, 1991.
- [141] P. Lienhardt. N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds. *Int. Journal on Computational Geometry and Applications*, 4(3):275–324, 1994.
- [142] J.B. Listing. *Vorstudien zur Topologie*. Gottinger Studien, 1847.
- [143] Hsun K. Liu. Two- and three-dimensional boundary detection. *Computer Graphics and Image Processing*, 6(2):123–134, April 1977.
- [144] LLAIC1. *Finding the structure of connected components using dual irregular pyramids*, sep 1995.
- [145] C. Lohou and G. Bertrand. Poset approach to 3d parallel thinning. In *SPIE Vision Geometry VIII*, volume 3811, pages 45–56, 1999.

- [146] C. Lohou and G. Bertrand. New parallel thinning algorithms for 2d grayscale images. In *SPIE Vision Geometry IX*, volume 4117, pages 58–69, 2000.
- [147] C. Lohou and G. Bertrand. Nouvel algorithme de squelettisation parallèle d’images binaires 2d. In *12e congrès RFIA*, volume 1, pages 493–504, 2000.
- [148] C. Lohou and G. Bertrand. A new 3D 12-subiteration thinning algorithm based on P-simple points. In *8th IWCIA*, volume 46, pages 39–58, 2001.
- [149] C. Lohou and G. Bertrand. A new 3D 6-subiteration thinning algorithm based on P-simple points. In *DGCI: International Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery*, 2002.
- [150] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *Computer Graphics*, 21(4):163–169, July 1987.
- [151] C.M. Ma. On topology preservation in 3D thinning. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Image Understanding*, 59(3):328–339, May 1994.
- [152] G. Malandain. On topology in multidimensional discrete spaces. Research Report 2098, INRIA, France, 1993.
- [153] G. Malandain and G. Bertrand. Fast characterization of 3-d simple points. In *11th International Conference on Pattern Recognition*, The Hague, The Netherlands, 1992.
- [154] R. Malgouyres. There is no local characterization of separating and thin objects in z . *Theor. Comput. Sci.*, 163(1&2):303–308, 1996.
- [155] R. Malgouyres. A definition of surfaces of z^3 : a new jordan theorem. *Theoretical Computer Science*, 186:1–41, 1997.
- [156] R. Malgouyres. Homotopy in 2-dimensional digital images. *Theoretical Computer Science*, 230:221–233, 2000.
- [157] R. Malgouyres. Computing the fundamental group in digital spaces. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, IJPRAI*, 15(7):1075–1088, 2001.
- [158] R. Malgouyres and G. Bertrand. Complete local characterization of strong 26-surfaces. *Int. Work. on Par. Im. An.*, pages 192–201, 1997.
- [159] D. Marcus and F. Wyse et al. A special topology for the integers (problem 5712). *American Mathematical Monthly*, 77:85, 1970.
- [160] P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*. von Nostrand, 1967.
- [161] H. Meine and U. Köthe. The geomap: A unified representation for topology and geometry. In Brun and Vento [38], pages 132–141.
- [162] K. Mischaikow, M. Mrozek, and T. Kaczynski. Computing homology. *Homology, Homotopy and Applications*, 5:233–256, 2003.
- [163] J. Møller. From singular chains to alexander duality, 2004. Course notes - <http://www.math.ku.dk/~moller/f04/algtop/algtop.html>.
- [164] D. G. Morgenthaler and A. Rosenfeld. Surfaces in Three-Dimensional Digital Images. *Information and Control*, 51(3):227–247, December 1981.
- [165] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley Publisher Company, 1930.
- [166] M. Newman. *Integral Matrices*, volume 45 of *pure and applied mathematics*. Academic Press, 1972.

- [167] S. Peltier. Calcul de groupes d'homologie. Master's thesis, Laboratoire IRCOM-SIC - Université de Poitiers, 2002.
- [168] S. Peltier, S. Alayrangues, L. Fuchs, and J.-O. Lachaud. Computation of homology groups and generators. In Andres et al. [11], pages 195–205.
- [169] S. Peltier, L. Fuchs, and P. Lienhardt. Etude de l'homologie des ensembles simplodaux. In *Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, GTMG 2004*, 2004.
- [170] J.-P. Petit. *Le Topologicon*. Belin, 1999.
- [171] L. S. Pontryagin. *Foundations of combinatorial topology*. Dover Publications, Inc, New York, 1952.
- [172] S. Rees and L. H. Soicher. An algorithmic approach to fundamental groups and covers of combinatorial cell complexes. *J. Symb. Comput.*, 29(1):59–77, 2000.
- [173] A. Revuz and G. Revuz. *Le cours de l'A.P.M. : III - Eléments de topologie*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 1966.
- [174] C. Ronse. Minimal test patterns for connectivity preservation in parallel thinning algorithms for binary digital images. *Discrete Applied Mathematics*, 21:67–79, 1988.
- [175] A. Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *Journal of the ACM*, 17(1):146–160, January 1970.
- [176] A. Rosenfeld. Adjacency in digital pictures. *Information and Control*, 26(1):24–33, September 1974.
- [177] A. Rosenfeld. Digital topology. *American Mathematical Monthly*, 86(8):621–630, 1979.
- [178] A. Rosenfeld, T.Y. Kong, and A.Y. Wu. Digital Surfaces. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53(4):305–312, July 1991.
- [179] P. K. Saha, T. Y. Kong, and A. Rosenfeld. Strongly normal sets of tiles in n dimensions. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 46, 2001.
- [180] Punam K. Saha and Azriel Rosenfeld. The digital topology of sets of convex voxels. *Graphical models*, 62(5):343–352, September 2000.
- [181] N. Saveliev. *Lectures on the Topology of 3-Manifolds, An Introduction to the Casson Invariant*. De Gruyter Textbooks, 1999.
- [182] H. Schulz, S. Fuchs, and V. Kovalevsky. Analysis and structure representation of the theory of abstract cell complexes applied to digital topology and digital geometry. Technical report, Dresden university, decembre 2003.
- [183] H. Seifert and W. Threlfall. *Lehrbuch der Topologie*. Chelsea Publishing Company, New York, 1934.
- [184] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [185] H. J. Smith. On systems of indeterminate equations and congruences. *Philos. Trans.*, 151:293–326, 1861.
- [186] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Tata McGraw-Hill, Bombay, 1966.
- [187] P. Stelldinger and U. Köthe. Shape preserving digitization of binary images after blurring. In Andres et al. [11], pages 383–391.
- [188] J. Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Number 72 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1993.

- [189] A. Storjohann. Near optimal algorithms for computing Smith normal forms of integer matrices. In Y. N. Lakshman, editor, *Proceedings of the 1996 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 267–274, New York, July 24–26 1996. ACM.
- [190] A. Storjohann. *Algorithms for Matrix Canonical Forms*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, 2000.
- [191] A. Storjohann and T. Mulders. Fast algorithms for linear algebra modulo n . In Gianfranco Bilardi, Giuseppe F. Italiano, Andrea Pietracaprina, and Geppino Pucci, editors, *ESA*, volume 1461 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 139–150. Springer, 1998.
- [192] B. Taton. *Modèle déformable à densité adaptative : application à la segmentation d'images*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2004.
- [193] G. Thürmer. Closed curves in n -dimensional discrete space. *Graphical Models*, 65(1-3):43–60, 2003.
- [194] J. Toriwaki, S. Yokoi, Yonekura; T., and T. Fukumura. Topological properties and topology-preserving transformation of a three-dimensional binary picture. In *Proc. 6th. International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pages 414–419, 1982.
- [195] W.T. Tutte. A census of planar maps. *Canad.J.Math.*, 15:249–271, 1963.
- [196] J. K. Udupa. Multidimensional Digital Boundaries. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 56(4):311–323, July 1994.
- [197] Luiz Velho. Stellar subdivision grammars. In *Proceedings of the Eurographics/ACM SIG-GRAPH symposium on Geometry processing*, pages 188–199. Eurographics Association, 2003.
- [198] J. Vidal, J. Crespo, and V. Maojo. Inclusion relationships and homotopy issues in shape interpolation for binary images. In Andres et al. [11], pages 206–215.
- [199] A. Vince. Combinatorial maps. *Journal of Combinatorial Theory*, 34:1–21, 1983.
- [200] G. Watson, K. Mischaikow, and W. D. Kalies. Cubical approximation and computation of homology. *Conley Index Theory*, 47, 1999.
- [201] J. Webster. Homology of khalimsky space. <http://www.doc.ic.ac.uk/~jw4/>.
- [202] J. Webster. Cell complexes and digital convexity. In G. Bertrand, A. Imiya, and R. Klette, editors, *Digital and image geometry*, volume 2243 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 272–282. Springer-Verlag, 2001.
- [203] J. Webster. Cell complexes, oriented matroids and digital geometry. *Theoretical Computer Science*, 305:491–502, 2003.
- [204] E. W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC, 2002.

Modèles et Invariants Topologiques en Imagerie Numérique

Résumé : Cette thèse s'intéresse aux structures et outils topologiques utilisés en imagerie. Un premier travail a consisté en une étude comparative des principaux modèles et outils associés. Cette synthèse préliminaire a orienté notre recherche dans deux directions. Il s'est d'abord agi de comparer formellement les modèles topologiques cellulaires utilisés pour représenter des images et d'explicitier les liens qui peuvent les unir. Une telle démarche peut en effet permettre de mieux comprendre la structure interne de ces modèles et de les enrichir mutuellement. Deux comparaisons précises ont été réalisées. La première concerne des modèles utilisés dans le cadre d'une représentation d'image au niveau pixel. Elle caractérise de manière purement combinatoire une classe de structures cellulaires compatible avec des notions de connexité, préalablement restreintes aux complexes polyédriques. La deuxième confronte des modèles dédiés à la représentation de surfaces et de subdivisions d'espaces. Elle prouve l'équivalence de deux d'entre elles, qui sont respectivement des sous-classes des ordres et des cartes généralisées, et donne la définition des fonctions de conversion associées. Notre second axe de recherche concerne l'exploitation de l'information topologique contenue dans ces structures. A cette fin, on s'appuie traditionnellement sur des invariants topologiques. Certains ont déjà été envisagés dans ce contexte (caractéristique d'Euler, groupes d'homotopie...). Une autre famille d'invariants, appelés groupes d'homologie, fait l'objet de notre dernière étude. Un algorithme de calcul de ces groupes regroupant diverses améliorations a été proposé et expérimentalement validé.

Discipline : Informatique

Mots-Clefs : topologie, invariants, groupes d'homologie, cartes généralisées, n -surfaces, ordres, graphes d'incidence, complexes cellulaires, imagerie numérique

Topological Models and Invariants in Computer Imagery

Abstract : This thesis deals both with topological models used to represent images and with topological tools that may be developed on them. This work begins with a synthesis of many existing topological models and tools. This study has led our work into two main directions, both relying on cellular representations of images. The first one aims at comparing existing topological models used to structure images. Some of them are indeed strongly related. Moreover, explicit links can be built between them, which can be used to transfer knowledge from one model to another. Two such comparisons have been achieved. The first one deals with models that provide a pixel-based representation of images. It led to the characterization of a family of cellular models consistent with notions of connectedness which were beforehand only defined on polyhedral complexes. The second one concerns structures used to represent surfaces and euclidean space subdivisions. The equivalence of two such models, which are subclasses of orders and generalized maps, has been proved and conversion functions have been exhibited. The second direction deals with topological invariants. Some classical ones have already been considered in this context (Euler characteristic, homotopy groups...). Another family of topological invariants seems to show promising properties but has not yet been really studied in computer imagery. These invariants, called homology groups, are the main matter of this last study. An algorithm computing these groups and taking benefit from several improvements has been proposed and validated by computer experiments.

Discipline : Computer-Science

Keywords : topology, invariants, homology groups, generalized maps, orders, n -surfaces, incidence graphs, cell complexes, computer imagery

LaBRI,
Université Bordeaux 1,
351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex (FRANCE).
