$N°$ d'ordre : 2914

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Cyril AGRAFEUIL**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

****

IDÉAUX FERMÉS DE CERTAINES ALGÈBRES DE BEURLING ET APPLICATION AUX OPÉRATEURS ENSEMBLES D'UNICITÉ

****

Soutenue le vendredi 10 décembre 2004

Après avis de:

F. LUST-PIQUARD	Professeur, Université de Cergy-Pontoise	**Rapporteurs**
H. QUEFFELEC	Professeur, Université Lille 1	

Devant la commission d'examen formée de :

G. GODEFROY	Directeur de Recherche CNRS, Université Paris 6	**Président**
R. DEVILLE	Professeur, Université Bordeaux 1	**Rapporteur**
J. ESTERLE	Professeur, Université Bordeaux 1	**Examinateurs**
F. LUST-PIQUARD	Professeur, Université de Cergy-Pontoise	
H. QUEFFELEC	Professeur, Université Lille 1	
M. ZARRABI	Maître de conférences-HDR, Université Bordeaux 1	

- 2004 -

Je tiens à remercier le jury pour avoir récompensé ce travail. Tout d'abord Françoise Lust-Piquard et Hervé Queffélec, d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Ainsi que Robert Deville, Jean Esterle et Gilles Godefroy, qui ont eu la gentillesse de bien vouloir faire partie de ce jury. J'en profite pour remercier une seconde fois Jean Esterle de m'avoir permis d'exposer mes résultats durant les journées du GDR.

Mais ce travail n'aurait jamais vu le jour sans le concours et le soutien de certaines personnes.

Toute ma reconnaissance va en premier lieu à Mohamed Zarrabi, mon directeur, qui a été à la fois le réalisateur et le metteur en scène. Il a su se montrer d'une rare disponibilité, durant ces quatre années de "tournage". Je tiens à le remercier pour sa patience, sa gentillesse et tout le temps qu'il m'a consacré.

Un grand merci aux producteurs, qui m'ont fait confiance dans cette aventure.

Je voudrais également remercier l'IMB et le LaBAG pour les décors, les accessoires et les éclairages. En particulier Etienne Matheron, aussi doué pour l'organisation du groupe de travail que piètre footballeur, pour m'avoir permis d'y exposer mon travail.

Je n'oublie pas les acteurs de ce travail, qui jouent également un rôle très important dans ma vie. Je pense à mes parents et mes amis : Sylvain, Séb, Thierry, Roland, Chacha, Françoise, pour ne citer qu'eux. La palme revenant à poupoune, ma starlette à moi.

Idéaux fermés de certaines algèbres de Beurling et application aux opérateurs
Ensembles d'unicité

Cyril Agrafeuil

thèse

18 mars 2005

Table des matières

Introduction

Nous allons commencer par exposer les thèmes abordés durant la thèse et donner le plan de ce mémoire. Nous allons ensuite détailler chaque partie, en présentant les travaux déjà effectués dans les domaines abordés et qui ont motivé ce travail, et en énonçant de façon plus précise les résultats que nous avons obtenus.

De façon générale, ce travail touche aux domaines de l'analyse fonctionnelle et harmonique, et de la théorie des opérateurs. On peut le diviser en deux parties.

Dans une première partie, nous nous intéressons à des opérateurs inversibles dont le spectre est inclus dans le cercle unité $\mathbb{T}$. Nous obtenons des résultats concernant certaines propriétés de croissance des normes $\|T^{-n}\|$ $(n \geq 0)$ pour des opérateurs T dont le spectre est dénombrable ou vérifie certaines conditions géométriques. Pour obtenir ces résultats, nous sommes amenés à travailler dans les espaces de fonctions

$$A_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \text{ continue sur } \mathbb{T} : \ \|f\|_\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \Big\},$$

où $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels positifs, et $\widehat{f}(n)$ désigne le $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f. Si la suite $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids (c'est-à-dire si elle vérifie $\omega(n) \geq 1$ et $\omega(m+n) \leq \omega(m)\omega(n)$ pour tout m, n dans $\mathbb{Z}$), $A_\omega(\mathbb{T})$ muni de la norme $\| \, \|_\omega$ est une algèbre de Banach. Nous obtenons la caractérisation de certains idéaux fermés de $A_\omega(\mathbb{T})$ pour une famille de poids.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à certains fermés de $\mathbb{T}$ qui seront (ou non) des ensembles d'unicité pour les espaces

$$A^+_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) : \ \widehat{f}(n) = 0 \quad (n < 0) \Big\},$$

où $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels strictement positifs. Un fermé E de $\mathbb{T}$ étant d'unicité pour un espace X de fonctions continues sur $\mathbb{T}$, si la seule fonction dans X s'annulant sur E est la fonction nulle. Plus précisément, nous étudions le lien qu'il y a entre le fait que des fermés de $\mathbb{T}$ satisfont une condition géométrique donnée et le fait qu'ils soient ou non des ensembles d'unicité pour $A^+_\omega(\mathbb{T})$.

Introduction à la première partie

M. Zarrabi a montré (théorème 3.1 de [40]) que toute contraction T (c'est-à-dire un opérateur tel que $\|T\| \leq 1$) à spectre dénombrable inclus dans $\mathbb{T}$ et vérifiant la condition

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \|T^{-n}\|}{\sqrt{n}} = 0, \tag{1}$$

était en réalité une isométrie, c'est-à-dire vérifiait $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$. Il a montré également que l'hypothèse de dénombrabilité était indispensable. En effet, si E est un fermé de $\mathbb{T}$ non dénombrable, on peut construire une contraction T dont le spectre est inclus dans E, qui vérifie (1), mais telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^{-n}\| = +\infty$. Ces résultats découlent de l'étude de la structure des idéaux fermés des algèbres $A_\omega(\mathbb{T})$ introduites plus haut. En effet, si T est une contraction sur un espace de Banach X vérifiant (1), on peut définir le morphisme d'algèbre Φ de $A_\omega(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{L}(X)$, l'algèbre des opérateurs continus sur X, par

$$\Phi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) T^n,$$

pour le poids ω défini par $\omega(n) = \|T^n\|\,(n \in \mathbb{Z})$. Soit E un fermé dénombrable de $\mathbb{T}$ et ω un poids tel que $\omega(n) = 1\,(n \geq 0)$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log \omega(n)}{\sqrt{n}} = 0$. Le seul idéal fermé I de $A(\mathbb{T})$ dont l'ensemble des zéros communs à tous ses éléments est E, est précisément l'idéal de toutes les fonctions qui s'annulent sur E (voir [39]). Ces deux résultats ont été à la base de cette thèse. En effet, on s'est alors demandé si on pouvait obtenir des résultats similaires pour des opérateurs qui ne sont plus seulement des contractions, mais des opérateurs "à croissance polynômiale", c'est-à-dire vérifiant $\|T^n\| = O(n^s)\,(n \geq 0)$ pour un réel s positif. Pour cela, nous avons eu besoin d'étudier les idéaux fermés des algèbres $A_\omega(\mathbb{T})$ introduites plus haut, pour une famille de poids ω plus large. Soit s un réel positif, on note $[s]$ sa partie entière. Soit ω un poids qui vérifie les conditions de régularité suivantes :

$$\begin{cases} \omega(n) = (1+n)^s & (n \geq 0) \\ \text{la suite } \left(\dfrac{\omega(-n)}{(1+n)^s}\right)_{n\geq 0} \text{ est croissante,} \end{cases} \tag{W_s}$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \omega(n)}{\sqrt{n}} = 0. \tag{A}$$

Dans ce cas, nous avons $A_\omega(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T})$, où $\mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T})$ désigne l'espace des fonctions $[s]$ fois continûment dérivables sur $\mathbb{T}$. Si I est un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$, on note

$$h^k(I) = \Big\{ z \in \mathbb{T} :\ f(z) = \ldots = f^{(k)}(z) = 0 \quad (f \in I) \Big\} \quad \big(k \in \{0, \ldots, [s]\}\big),$$

Nous montrons alors le résultat suivant :

Théorème A : *Soit* $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ *un poids vérifiant les conditions* (W_s) *et* (A)*. Soit* I *un idéal fermé de* $A_\omega(\mathbb{T})$ *tel que* $h^0(I)$ *est au plus dénombrable. Alors*

$$I = \Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) : \; f^{(j)} = 0 \text{ sur } h^j(I) \quad (0 \le j \le [s]) \Big\}.$$

Dans le cas $s = 0$, nous retrouvons ainsi le résultat mentionné plus haut. Avant d'énoncer le résultat que nous obtenons alors concernant les opérateurs, nous avons besoin de quelques notations. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$ et t, s deux réels positifs. On désignera par $P(s,t,E)$ la propriété suivante : tout opérateur T sur un espace de Banach dont le spectre est inclus dans E et qui vérifie les conditions :

$$\begin{aligned} &\big\|T^n\big\| = O(n^s) \; (n \to +\infty) \\ \text{et} \quad &\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \|T^{-n}\|}{\sqrt{n}} = 0, \end{aligned}$$

vérifie également la propriété plus forte

$$\big\|T^{-n}\big\| = O(n^t) \, (n \to +\infty).$$

Le résultat de M. Zarrabi que nous avons mentionné plus haut et concernant les contractions peut s'énoncer ainsi : un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la propriété $P(0,0,E)$ si et seulement si E est dénombrable. On dira qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la condition de Carleson si

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{d(e^{it},E)} \mathrm{d}t < +\infty, \tag{C}$$

et qu'il vérifie la condition (ATW) s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\frac{1}{|L|} \int_L \log^+ \frac{1}{d(e^{it},E)} \mathrm{d}t \le C_1 \log \frac{1}{|L|} + C_2 \,, \quad \text{pour tout arc } L \text{ de } \mathbb{T}, \tag{ATW}$$

où $|L|$ désigne la longueur de l'arc L, et $d(e^{it},E)$ la distance de e^{it} à E. Nous reviendrons plus tard sur les conditions (C) et (ATW). Nous montrons

Théorème B : *Soit* E *un fermé dénombrable de* $\mathbb{T}$*, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) E *vérifie la condition* (ATW)*.*

(ii) E *vérifie la condition* (C) *et pour tout réel* $s \ge 0$*, il existe un réel* t *tel que la propriété* $P(s,t,E)$ *est vérifiée.*

Nous montrons ensuite que si E n'est pas dénombrable, alors la propriété $P(0,t,E)$ n'est vérifiée pour aucun réel $t \ge 0$. Dans le cas particulier où le poids ω est défini par $\omega(n) = (1+n)^s$ $(n \in \mathbb{Z})$, pour un certain réel positif s, l'algèbre $\big(A_\omega(\mathbb{T}), \| \, \|_\omega\big)$ sera notée $\big(A_s(\mathbb{T}), \| \, \|_s\big)$.

On remarque que $A_0(\mathbb{T}) = A(\mathbb{T})$ n'est rien d'autre que l'algèbre de Wiener. On posera également

$$A_s^+(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in A_s(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0 \quad (n < 0) \Big\}.$$

Nous déduisons également du théorème A une caractérisation de certains idéaux fermés de $A_s^+(\mathbb{T})$. Pour $f \in A_s^+(\mathbb{T})$, on note $S(f)$ son facteur intérieur et on pose

$$Z_+^k(f) = \Big\{ z \in \overline{\mathbb{D}} : f(z) = \ldots = f^{(k)}(z) = 0 \Big\} \quad \big(k \in \{0, \ldots, [s]\}\big).$$

Si I est un idéal fermé de $A_s^+(\mathbb{T})$, on note S_I son facteur intérieur, c'est-à-dire le plus grand diviseur intérieur commun à tous les éléments de I non nuls (voir [21] p.85), et on pose $h_+^k(I) = \bigcap_{f \in I} Z_+^k(f)$. On notera $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans $\mathbb{D}$ et si $E_{[s]} \subset \ldots \subset E_0$ sont des fermés de $\mathbb{T}$ et S une fonction intérieure, on définit

$$I\big(S;\, E_0, \ldots, E_{[s]}\big) = \Big\{ f \in A_s^+(\mathbb{T}) : S \big| S(f),\, E_0 \subset Z_+^0(f) \cap \mathbb{T}, \ldots, E_{[s]} \subset Z_+^{[s]}(f) \cap \mathbb{T} \Big\},$$

où $S\big|S(f)$ signifie que S divise $S(f)$, c'est-à-dire que $\dfrac{S(f)}{S}$ est dans $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$. Nous montrons

Théorème C : *Soit I un idéal fermé de $A_s^+(\mathbb{T})$ sans facteur intérieur (c'est-à-dire $S_I = 1$) tel que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable, alors*

$$I = I\big(1;\, h_+^0(I) \cap \mathbb{T}, \ldots, h_+^{[s]}(I) \cap \mathbb{T}\big).$$

Notons que les idéaux fermés I de $A^+(\mathbb{T}) = \big(A_0(\mathbb{T})\big)^+$ ont déjà été étudiés par le passé, même si, contrairement à d'autres algèbres de fonctions que nous verrons plus tard, on n'a pas de caractérisation complète. J. P. Kahane dans [23] a étudié le cas où $h_+^0(I)$ est fini, et C. Bennett et J. E. Gilbert dans [6] le cas où $h_+^0(I)$ est dénombrable. Ils ont montré que si I est un idéal fermé de $A^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable, alors $I = I\big(S_I;\, h_+^0(I) \cap \mathbb{T}\big)$. C. Bennett et J. E. Gilbert ont également conjecturé dans [6] que tout idéal fermé I de $A^+(\mathbb{T})$ pouvait s'écrire

$$I = I^A \cap S_I \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}), \tag{2}$$

où I^A est l'idéal fermé engendré par I dans $A(\mathbb{T})$. Mais J. Esterle a construit dans [14] un idéal fermé I de $A^+(\mathbb{T})$ tel que $I \neq I^A \cap S_I \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, démontrant ainsi que la conjecture de C. Bennett et J. E. Gilbert est fausse.

Soit ω un poids, on définit l'idéal fermé

$$I_\omega(E) = \Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f_{|E} = 0 \Big\},$$

et l'idéal $J_\omega(E)$ comme la fermeture dans $A_\omega(\mathbb{T})$ pour la norme $\|\,\|_\omega$ de l'ensemble

$$\Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) : \operatorname{Supp} f \cap E = \emptyset \Big\},$$

où Supp f est le support de la fonction f. On dit qu'une fonction f est de synthèse spectrale pour E dans $A_\omega(\mathbb{T})$ si $f \in J_\omega(E)$, et que E de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$ si

$$J_\omega(E) = I_\omega(E).$$

Soit $\xi \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$, on note E_ξ le parfait symétrique associé à ξ, défini par

$$E_\xi = \Big\{ \exp\big(2i\pi(1-\xi)\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n \xi^{n-1}\big) : \epsilon_n = 0 \text{ ou } 1 \quad (n \geq 1) \Big\},$$

Lorsque $\xi = \dfrac{1}{3}$, il s'agit du Cantor triadique. J. Esterle, E. Strouse et F. Zouakia dans [18] ont montré que si I est un idéal fermé de $A^+(\mathbb{T})$ tel que $h^0_+(I) \subset E_{\frac{1}{q}}$ pour $q \geq 3$ un entier, alors on avait (2). D'autre part, C. S. Herz a donné dans [19] un critère qui permet de montrer que $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A(\mathbb{T})$ (voir aussi [22]). J. Esterle a utilisé ces résultats et montré dans [14] que $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$ pour tous les poids ω tels que $\omega(n) = 1\,(n \geq 0)$ et $\log \omega(-n) = O\big(n^\beta\big)$ pour un certain $\beta < \dfrac{\log q - \log 2}{2\log q - \log 2}$. Il en a déduit le résultat suivant concernant les contractions à spectre inclus dans $E_{\frac{1}{q}}$ ([14]) : Soit T une contraction sur un espace de Banach dont le spectre est inclus dans $E_{\frac{1}{q}}$ et telle que $\sup\limits_{n\geq 1} \dfrac{\log \big\|T^{-n}\big\|}{n^\beta} < +\infty$ pour un certain $\beta < \dfrac{\log q - \log 2}{2\log q - \log 2}$, alors T satisfait $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \big\|T^n\big\| < +\infty$. Là encore, nous avons essayé de généraliser ces résultats pour obtenir des résultats concernant des opérateurs "à croissance polynômiale" et à spectre inclus dans $E_{\frac{1}{q}}$ (pour $q \geq 3$ un entier). Nous généralisons le critère de C. S. Herz et montrons que

Théorème D : *Soit $q \geq 3$ un entier et s un réel positif. Alors $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_s(\mathbb{T})$.*

Malheureusement, nous n'avons pas réussi à montrer que tout idéal fermé I de $A^+_s(\mathbb{T})$ pouvait s'écrire $I = I^{A_s} \cap S_I\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, où I^{A_s} est l'idéal fermé engendré par I dans $A_s(\mathbb{T})$. Ce résultat aurait permis de caractériser les idéaux fermés I de $A^+_s(\mathbb{T})$ tels que $h^0_+(I) = E_{\frac{1}{q}}$ et de généraliser le résultat de J. Esterle cité ci-dessus aux opérateurs T tels que $Sp\,T \subset E_{\frac{1}{q}}$ et $\big\|T^n\big\| = O(n^s)$, pour un certain $s \geq 0$. Cependant, nous avons utilisé d'autres résultats existant sur la structure des idéaux fermés d'autres algèbres de fonctions continues sur $\mathbb{T}$ pour obtenir des résultats concernant certaines propriétés de croissance des normes $\|T^{-n}\|\,(n \geq 0)$ pour des opérateurs T dont le spectre est un K-ensemble. On dira qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ est un K-ensemble s'il existe une constante C positive telle que

$$\sup_{z\in L} d(z, E) \geq c|L|, \quad \text{pour tout arc } L \text{ de } \mathbb{T}, \tag{K}$$

où $|L|$ désigne la longueur de l'arc L. Soit E un K-ensemble, on pose

$$\delta(E) = \sup\Big\{\delta \geq 0 : \int_0^{2\pi} \frac{1}{d(e^{it}, E)^{\delta}} \mathrm{d}t < +\infty\Big\}.$$

Nous montrons alors le résultat suivant :

Théorème E : *Soit E un K-ensemble et s un entier positif. Alors, tout opérateur T sur un espace de Banach dont le spectre est inclus dans E et qui satisfait*

$$\begin{aligned} &\|T^n\| = O\big(n^s\big),\ n \to +\infty \\ \textit{et}\quad &\|T^{-n}\| = O\big(e^{n^{\beta}}\big),\ n \to +\infty \textit{ pour un certain } \beta < \frac{\delta(E)}{1+\delta(E)}, \end{aligned}$$

satisfait également la propriété plus forte

$$\|T^{-n}\| = O\big(n^{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}\big),\ n \to +\infty, \tag{3}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Pour $\xi \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$, on pose $b(\xi) = \dfrac{\log\frac{1}{\xi} - \log 2}{2\log\frac{1}{\xi} - \log 2}$. On obtient (comme conséquence du théorème E) que si le spectre de T est inclus dans E_ξ, $\|T^n\| = O\big(n^s\big)$, $n \to +\infty$ et $\|T^{-n}\| = O\big(e^{n^{\beta}}\big)$, $n \to +\infty$ pour un certain $\beta < b(\xi)$, alors T satisfait (3). Enfin, nous déduisons également du théorème D et du théorème E un résultat de synthèse spectrale dans les algèbres $A_\omega(\mathbb{T})$. Soit s un réel positif et ω un poids tel que $\omega(n) = (1+n)^s$ $(n \geq 0)$ et $\log\omega(-n) = O\big(n^{\beta}\big)$ pour un certain $\beta < b\big(\frac{1}{q}\big)$. On ne sait pas si $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$. Cependant, on montre

Théorème F : *Soit s un réel positif et $q \geq 3$ un entier. Soit ω un poids tel que $\omega(n) = (1+n)^s$ $(n \geq 0)$ et $\log\omega(-n) = O\big(n^{\beta}\big)$ pour un certain $\beta < b\big(\frac{1}{q}\big)$. Si $f \in A_\omega(\mathbb{T}) \cap A_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$, pour un certain $\tilde{s} > s + \frac{1}{2}$ et si $f = 0$ sur $E_{\frac{1}{q}}$, alors f est de synthèse spectrale pour $E_{\frac{1}{q}}$ dans $A_\omega(\mathbb{T})$.*

Introduction à la seconde partie

On note $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note

$$\mathcal{A}^p(\mathbb{D}) = \mathcal{A}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^p(\mathbb{T}).$$

Soit X un sous-espace de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$. On dira qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ est ZX s'il existe une fonction f dans X non nulle et qui s'annule sur E. Lorsque E n'est pas ZX, on dira que E est un ensemble d'unicité pour X (voir [9]). Si $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs, on notera

$$A^+_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \, \|f\|_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\, \omega(n) < +\infty \Big\}.$$

Dans le chapitre 1 de cette section, nous nous intéressons à des ensembles de Carleson qui sont d'unicité pour $A^+_\omega(\mathbb{T})$ pour une famille de poids particulière. On rappelle qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la condition de Carleson si

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{d(e^{it}, E)} \mathrm{d}t < +\infty. \qquad (C)$$

Depuis L. Carleson ([9]), les ensembles d'unicité de nombreux espaces de fonctions ont été étudiés. Notamment, L. Carleson a montré dans [9] que E vérifie la condition de Carleson si et seulement si E est $Z\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$, ceci pour n'importe quel entier p strictement positif. B. A. Taylor et D. L. Williams ont amélioré ce résultat et montré dans [35] que si E est un ensemble de Carleson, il existe une fonction extérieure dans $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ qui s'annule avec toutes ses dérivées sur E. On notera Ω l'ensemble des suites $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\geq 0}$ de réels strictement positifs telles que pour tout $k \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\omega(n)}{n^k} = +\infty$. On a $\mathcal{A}^\infty = \bigcup\limits_{\omega\in\Omega} A^+_\omega(\mathbb{T})$. A. Atzmon s'est alors légitimement demandé dans [5] s'il existait une suite ω dans Ω telle que chaque ensemble de Carleson soit $ZA^+_\omega(\mathbb{T})$. On répond négativement à cette interrogation. Plus précisément, on montre

Théorème G : *Soit ω dans Ω. Alors, il existe un ensemble de Carleson qui est d'unicité pour $A^+_\omega(\mathbb{T})$.*

Enfin, dans le chapitre 6, nous regardons le lien qui peut exister entre les ensembles d'unicité pour certaines algèbres $A^+_\omega(\mathbb{T})$ et la dimension de Hausdorff de ces ensembles. Soit $\alpha \in (0,1]$ et E un fermé de $\mathbb{T}$. Soit $r > 0$. On considère des recouvrements au plus dénombrables de E par des arcs $\big(\Delta_j\big)_{j\geq 0}$ de longueur inférieure ou égale à r. Et on note $K_r(E)$ la borne inférieure sur ces recouvrements $\big(\Delta_j\big)_{j\geq 0}$, des quantités $\sum\limits_{j\geq 0} |\Delta_j|^\alpha$. $K_r(E)$ croît lorsque r décroît. On définit alors la α-mesure (de Hausdorff) de E, que l'on note $H_\alpha(E)$, par

$$H_\alpha(E) = \lim_{r\to 0} K_r(E).$$

Il existe un unique réel $dim_H(E)$ tel que $H_\alpha(E) = 0$ si $\alpha > dim_H(E)$, et $H_\alpha(E) = +\infty$ si $\alpha < dim_H(E)$. $dim_H(E)$ s'appelle la dimension de Hausdorff de E. Soit $\xi \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$. Par exemple, le parfait symétrique E_ξ est de dimension de Hausdorff $dim_H(E_\xi) = \alpha(\xi) = \dfrac{\log 2}{\log \frac{1}{\xi}}$, et $0 < dim_H(E_\xi) < +\infty$. On pourra consulter [24] pour plus de détails concernant ces notions. Soit $\alpha \in \big(0,1\big)$ et $C > 0$ une constante. On note $\omega_{\alpha,C}$ la suite définie par

$$\omega_{\alpha,C}(n) = e^{Cn^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}} \quad (n \geq 0).$$

Les ensembles d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$ ont été beaucoup étudiés par le passé. Les résultats sont souvent énoncés dans les classes de Gevrey $A_{M,Q}(\alpha)$, où M et Q sont des constantes positives et $A_{M,Q}(\alpha)$ l'espace des fonctions F dans $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$\left|F^{(n)}(z)\right| \leq MQ^n n!\, n^{\frac{1}{\alpha}n} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Grâce au lemme 6.2.1, les résultats évoqués ci-dessus se transposent dans les algèbres de fonctions $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$, on note (C_α) la condition

$$\int_0^{2\pi} d(e^{it}, E)^{-\alpha}\mathrm{d}t = +\infty \tag{C_α}$$

pour un certain $\alpha \in (0,1)$. L. Carleson a montré dans [9] (théorème 2) que si E vérifie la condition ($\mathrm{C}_{1-\alpha}$), alors E est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$ (pour n'importe quelle constante $C > 0$). D'autres résultats sur ce sujet ont été établis par A. M. Chollet dans [10], par S. V. Khruschev dans [27] et par E. M. Dyn'kin et S. V. Khruschev dans [11].

Nous donnons une condition suffisante pour qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ soit d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$ (pour une certaine constante $C > 0$), en terme de α-mesure. Nous montrons

Théorème H : *Soit $\alpha \in (0,1)$ et E un fermé de $\mathbb{T}$ tel que $H_\alpha(E) > 0$. Soit $C > 0$ et $\omega_{\alpha,C}$ la suite définie par*

$$\omega_{\alpha,C}(n) = e^{Cn^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}} \quad (n \geq 0).$$

Alors E est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$.

Puis, nous montrons que la réciproque n'est pas vraie et que la α-mesure ne mesure pas convenablement le fait qu'un fermé E soit ou non un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. Nous avons en effet le résultat suivant :

Théorème I : *Soit $\alpha \in (0,1)$ et $0 < \beta < \alpha$. Pour $C > 0$, on définit $\omega_{\alpha,C}$ par*

$$\omega_{\alpha,C}(n) = e^{Cn^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}} \quad (n \geq 0).$$

1) Il existe $C > 0$ et un fermé E_1 de $\mathbb{T}$ qui n'est pas d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$ et tel que $H_\beta(E_1) > 0$.
2) Il existe un fermé E_2 de $\mathbb{T}$ tel que $H_\beta(E_2) > 0$ et tel que pour tout $C > 0$, E_2 est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. De plus, E_2 satisfait $H_\alpha(E_2) = 0$.

Première partie

Idéaux fermés de certaines algèbres de Beurling et opérateurs

Chapitre 1

Idéaux fermés I de $A_\omega(\mathbb{T})$ tels que $h^0(I)$ est dénombrable

Nous allons dans ce chapitre caractériser les idéaux fermés I de $A_\omega(\mathbb{T})$ tels que $h^0(I)$ est dénombrable, dans le cas où le poids ω satisfait les conditions ($\mathrm{W_s}$) et (A).

1.1 Notations et rappels

On note $\mathbb{T}$ le cercle unité et $\mathbb{D}$ le disque unité. Pour un entier $p \geq 0$, on note $\mathcal{C}^p(\mathbb{T})$ l'algèbre des fonctions p fois continûment dérivables sur $\mathbb{T}$, et on pose $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) = \bigcap\limits_{p\geq 0} \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$. Si $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels strictement positifs, on définit $A_\omega(\mathbb{T})$ par

$$A_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) : \left\| f \right\|_\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\, \omega(n) < +\infty \Big\},$$

où $\widehat{f}(n)$ désigne le $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f. On rappelle que pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{T}$, ses coefficients de Fourier sont donnés par la formule

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} \mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$A_\omega(\mathbb{T})$ muni de la norme $\| \, \|_\omega$ est un espace de Banach.

Définition 1.1.1. *On dit qu'une suite $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels est un poids si*
(i) $\omega(n) \geq 1$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$.
(ii) $\omega(m+n) \leq \omega(m)\, \omega(n)$ pour tout m, n dans $\mathbb{Z}$.

Si ω est un poids, $A_\omega(\mathbb{T})$ muni de la norme $\| \, \|_\omega$ est une algèbre de Banach. L'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ est régulière (au sens de [25]) si et seulement si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\log \omega(n)}{1+n^2} < +\infty \quad \text{([25], ex.7 p.118).} \tag{1.1}$$

Lorsque l'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ est régulière, elle est normale (voir [25] p.224), ce qui se traduit par la propriété suivante :

Proposition 1.1.1. *Soit ω un poids satisfaisant la condition (1.1). Soient E et F deux fermés disjoints de $\mathbb{T}$. Alors il existe une fonction f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f = 0$ sur E et $f = 1$ sur F.*

Nous nous intéresserons dorénavant qu'à des poids satisfaisant la condition (1.1). Soit ω un poids. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$, on définit l'idéal fermé

$$I_\omega(E) = \Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) : \, f_{|_E} = 0 \Big\},$$

et l'idéal $J_\omega(E)$ comme la fermeture dans $A_\omega(\mathbb{T})$ pour la norme $\| \, \|_\omega$ de l'ensemble

$$\Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) : \, \operatorname{Supp} f \cap E = \emptyset \Big\},$$

où $f_{|_E}$ désigne la restriction de f à E et $\operatorname{Supp} f$ le support de la fonction f. On rappelle que le support d'une fonction est la fermeture de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas. Si I est un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$, on pose $h(I) = \big\{ z \in \mathbb{T} : \, f(z) = 0 \quad (f \in I) \big\}$. Pour tout fermé E de $\mathbb{T}$, on a $h\big(J_\omega(E)\big) = h\big(I_\omega(E)\big) = E$. De plus on a le résultat suivant :

Proposition 1.1.2. ([25], p.224) *Soit ω un poids qui vérifie la condition (1.1). Soit I un idéal fermé tel que $h(I) = E$. On a l'inclusion*

$$J_\omega(E) \subset I \subset I_\omega(E).$$

Définition 1.1.2. *Soit ω un poids et E un fermé de $\mathbb{T}$. On dit qu'une fonction f est de synthèse spectrale pour E dans $A_\omega(\mathbb{T})$ si $f \in J_\omega(E)$, et que E de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$ si*

$$J_\omega(E) = I_\omega(E).$$

Ainsi on voit qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ est de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$ si et seulement si il existe un unique idéal fermé I de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h(I) = E$. Soit ω un poids et p un entier positif tel que $A_\omega(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$. Si I est un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$, on pose

$$h^k(I) = \Big\{ z \in \mathbb{T} : \, f(z) = \ldots = f^{(k)}(z) = 0 \quad (f \in I) \Big\} \quad \big(k \in \{0, \ldots, p\}\big),$$

où, pour tout $z \in \mathbb{T}$, $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\widehat{f}(n) z^{n-1}$ si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) z^n$. Notons que $\big(h^k(I)\big)_{k \geq 0}$ est une suite décroissante de fermés de $\mathbb{T}$ et que $h^0(I) = h(I)$. Soit s un réel positif, on note $[s]$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier vérifiant $[s] \leq s < [s] + 1$. On dira qu'une suite $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifie la condition $(\mathrm{W_s})$ si

$$\begin{cases} \omega(n) = (1+n)^s \qquad (n \geq 0) \\ \text{la suite } \left(\dfrac{\omega(-n)}{(1+n)^s} \right)_{n \geq 0} \text{ est croissante,} \end{cases} \tag{W_s}$$

et qu'il vérifie la condition (A) si

$$\omega(-n) = O\big(e^{\varepsilon\sqrt{n}}\big) \ (n \to +\infty), \ \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \tag{A}$$

Soit $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ un poids vérifiant les conditions ($\mathrm{W_s}$) et (A). On a alors l'inclusion $A_\omega(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T})$, et $A_\omega(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach régulière. Lorsque $s = 0$, les fermés dénombrables de $\mathbb{T}$ sont de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$ (voir [39]). Ainsi, dans ce cas, si I est un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $E = h^0(I)$ est dénombrable, alors $I = \big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f = 0 \text{ sur } E\big\}$. D'autre part, pour s quelconque, A. Atzmon a caractérisé dans [4] les idéaux fermés I de $A_\omega(\mathbb{T})$ tels que $h^0(I)$ est réduit à un singleton. Le but de ce chapitre est de caractériser les idéaux fermés I de $A_\omega(\mathbb{T})$ tels que $h^0(I)$ est dénombrable.

1.2 Idéaux fermés I de $A_\omega(\mathbb{T})$ tels que $h^0(I)$ est dénombrable

On définit une suite de fonctions $\big(e_n\big)_{n\geq 1}$, déjà introduite dans [39], par

$$e_n = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 - \frac{1}{n}} \quad (n \geq 1), \tag{1.2}$$

où α est la fonction $z \mapsto z$.

Lemme 1.2.1. *Soient β un réel tel que $0 \leq \beta < 1$ et j un entier positif. Alors pour tout réel x tel que $0 \leq x < 1$, nous avons l'inégalité suivante :*

$$\sum_{k=j}^{+\infty} (1+k)^\beta x^k \leq \frac{(j+1)^\beta x^j}{1-x} + \frac{x^{j+1}}{(1-x)^{\beta+1}}.$$

Démonstration. Soit x un réel tel que $0 \leq x < 1$, posons

$$f(x) = \sum_{k=j}^{+\infty} (1+k)^\beta x^k - \frac{(j+1)^\beta x^j}{1-x} - \frac{x^{j+1}}{(1-x)^{\beta+1}}.$$

En développant en série les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{\beta+1}}$, on montre que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{k+j},$$

avec $a_1 = (j+2)^\beta - (j+1)^\beta - 1$ et pour $k \geq 2$,

$$a_k = (k+j+1)^\beta - (j+1)^\beta - \frac{(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{(k-1)!}.$$

Il est facile de voir que $a_1 \leq 0$. Pour démontrer ce lemme, il suffit donc de montrer que pour tout $k \geq 2$, $a_k \leq 0$. On commence par remarquer que, pour tout $k \geq 2$, la fonction

$t \mapsto (k+t+1)^\beta - (t+1)^\beta - \dfrac{(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{(k-1)!}$ est décroissante sur $[-1,+\infty)$. Par conséquent, pour tout $k \geq 2$, on a

$$a_k \leq k^\beta - \frac{(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{(k-1)!}. \tag{1.3}$$

Puisque $\beta < 1$, on a $(1+t)^\beta \leq 1+\beta t$, pour tout réel t positif. En utilisant cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{(k-1)!} &= (1+\beta)\Big(1+\frac{\beta}{2}\Big)\dots\Big(1+\frac{\beta}{k-1}\Big)\\ &\geq (1+1)^\beta\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^\beta\dots\Big(1+\frac{1}{k-1}\Big)^\beta = k^\beta.\end{aligned}$$

On déduit alors de cette inégalité et de (1.3) que pour tout $k \geq 2$, $a_k \leq 0$, ce qu'il s'agissait de démontrer. $\square$

Lemme 1.2.2. *Soient $0 \leq \beta < 1$ un réel et $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite vérifiant la condition (W_β). Alors pour toute fonction f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f(1)=0$, on a*

$$\big\|(e_n-1)f\big\|_\omega \leq 3\big\|f\big\|_\omega \tag{1.4}$$

$$\textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\big\|(e_n-1)f\big\|_\omega = 0. \tag{1.5}$$

Démonstration. Soit f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f(1)=0$. En écrivant $f = f - f(1) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(j)(\alpha^j - 1)$, on voit que (1.4) sera démontré si on vérifie que

$$\big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega \leq 3\,\omega(j) \quad (j\in\mathbb{Z}).$$

Soit $n \geq 1$. Un simple calcul montre que

$$e_n = 1 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k\alpha^k,$$

et

$$(e_n-1)(\alpha^j-1) = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k\alpha^{j+k} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k\alpha^k.$$

Supposons que $j \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}(e_n-1)(\alpha^j-1) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{j-1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k\alpha^k + \frac{(\frac{n+1}{n})^j-1}{n+1}\sum_{k=j}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k\alpha^k\\ \text{et } \big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{j-1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k(1+k)^\beta + \frac{(\frac{n+1}{n})^j-1}{n+1}\sum_{k=j}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k(1+k)^\beta.\end{aligned}$$

On déduit alors des inégalités $\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^j - 1 \leq \min\big(1, \dfrac{j}{n}\big)\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^j$ et du lemme 1.2.1 appliqué pour $x = \dfrac{n}{n+1}$, la majoration suivante :

$$\big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{j-1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k(1+k)^\beta + \min\big(1,\frac{j}{n}\big)\Big((j+1)^\beta+(n+1)^\beta\Big) \quad (1.6)$$

En observant maintenant que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{j-1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k(1+k)^\beta \leq (1+j)^\beta$, et en distinguant les cas $j \leq n$ et $j \geq n+1$, on obtient

$$\big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega \leq 3\,(1+j)^\beta = 3\,\omega(j).$$

Supposons maintenant que $j \leq -1$. On a

$$\begin{aligned}
(e_n-1)(\alpha^j-1) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=j}^{-1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{k-j}\alpha^k + \frac{1-(\frac{n}{n+1})^{-j}}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k\alpha^k \\
\text{et } \big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=j}^{-1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{k-j}\omega(k) + \frac{1-(\frac{n}{n+1})^{-j}}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k(1+k)^\beta.
\end{aligned}$$

Avec les mêmes arguments que ceux utilisés précédemment, on obtient

$$\big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=j}^{-1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{k-j}\omega(k) + 2\min\big(1,-\frac{j}{n}\big)(n+1)^\beta \quad (1.7)$$

Grâce aux hypothèses faites sur le poids ω, on a $(1+|j|)^\beta \leq \omega(j)$ et $\omega(k) \leq \omega(j)$ si $j \leq k \leq -1$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
\big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega &\leq \omega(j) + 2(1+|j|)^\beta \\
&\leq 3\,\omega(j).
\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer que pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega \leq 3\,\omega(j),$$

ce qui entraîne (1.4). Pour (1.5), on pose $f_m = \sum_{j=-m}^{+m}\hat{f}(j)(\alpha^j-1)$, de sorte que $\lim_{m\to+\infty}\big\|f - f_m\big\|_\omega = 0$. On a alors en utilisant (1.4)

$$\begin{aligned}
\big\|(e_n-1)f\big\|_\omega &\leq \big\|(e_n-1)f_m\big\|_\omega + \big\|(e_n-1)(f-f_m)\big\|_\omega \\
&\leq \big\|(e_n-1)f_m\big\|_\omega + 3\,\big\|f-f_m\big\|_\omega.
\end{aligned}$$

De (1.6) et (1.7), on déduit que pour $j \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty}\big\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\big\|_\omega = 0$, ce qui entraîne que $\lim_{n\to+\infty}\big\|(e_n-1)f_m\big\|_\omega = 0$. Il est maintenant facile de voir que $\lim_{n\to+\infty}\big\|(e_n-1)f\big\|_\omega = 0$. $\square$

Le lemme suivant va nous permettre d'étendre ce résultat à des suites vérifiant la condition ($\mathrm{W_s}$), pour n'importe quel réel s positif.

Lemme 1.2.3. *Soit $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels positifs telle que :*
(i) les suites $\left(\dfrac{\omega(-n)}{1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{\omega(n)}{1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes.
(ii) $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\omega(n+1)}{\omega(n)} < \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\omega(n+1)}{\omega(n)} < +\infty$.
On note $A = \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\omega(n+1)}{\omega(n)}$ et $B = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\omega(n+1)}{\omega(n)}$, et on définit la suite $\omega_1 = \big(\omega_1(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ par

$$\omega_1(n) = \frac{\omega(n)}{1+|n|} \qquad (n\in\mathbb{Z}).$$

Alors on a les deux propriétés suivantes :
1) On a la double inégalité $A\big\|f'\big\|_{\omega_1} \le \big\|f\big\|_\omega \le \big|\widehat{f}(0)\big|\,\omega(0) + 3B\big\|f'\big\|_{\omega_1}$.
2) Soit f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ qui s'annule au point 1, alors $\dfrac{f}{\alpha-1}$ est dans $A_{\omega_1}(\mathbb{T})$, où $\alpha : z \mapsto z$.

Démonstration. 1) Cela découle immédiatement de la relation $\widehat{f'}(n) = (n+1)\widehat{f}(n+1)$ $(n\in\mathbb{Z})$.
2) Soit f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ qui s'annule au point 1, on écrit $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)(\alpha^n - 1)$, d'où

$$\frac{f}{\alpha-1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{f}(n)\big(\alpha^n + \ldots + \alpha^{-1}\big) + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n)\big(1 + \ldots + \alpha^{n-1}\big).$$

Ainsi

$$\Big\|\frac{f}{\alpha-1}\Big\|_{\omega_1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \big|\widehat{f}(n)\big|\Big(\omega_1(n) + \ldots + \omega_1(-1)\Big) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big|\widehat{f}(n)\big|\Big(\omega_1(0) + \ldots + \omega_1(n-1)\Big). \quad (1.8)$$

Comme les suites $\big(\omega_1(-n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\omega_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes, on déduit de (1.8) que

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{f}{\alpha-1}\Big\|_{\omega_1} &\le \sum_{n=-\infty}^{-1} \big|\widehat{f}(n)\big|\,|n|\,\omega_1(n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big|\widehat{f}(n)\big|\,n\,\omega_1(n) \\ &\le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big|\widehat{f}(n)\big|\,\omega(n) < +\infty.\end{aligned}$$

□

La proposition suivante montre que si le poids ω satisfait la condition ($\mathrm{W_s}$), alors l'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin analytique forte au sens de [6].

Proposition 1.2.4. *Soit $z_0 \in \mathbb{T}$ et ω un poids satisfaisant* ($\mathrm{W_s}$)*. On pose*

$$u_{n,z_0} = \Big(\frac{\alpha - z_0}{\alpha - \big(1+\frac{1}{n}\big)z_0}\Big)^{[s]+1} \qquad (n \geq 1), \tag{1.9}$$

Alors pour toute fonction f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f^{(k)}(z_0) = 0$ pour $0 \leq k \leq [s]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|(u_{n,z_0} - 1)f\big\|_\omega = 0.$$

Démonstration. Dans cette démonstration on posera $p = [s]$ et on notera, pour $0 \leq k \leq p$, $\omega_k = \big(\omega_k(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par

$$\omega_k(n) = \frac{\omega(n)}{(1+|n|)^k}.$$

On remarque que $u_{n,z_0}(z) = u_{n,1}(\overline{z_0}z)$ $(z \in \mathbb{T})$ et que si on pose $g(z) = f(z_0z)$ $(z \in \mathbb{T})$, alors $g^{(k)}(1) = 0$, $0 \leq k \leq [s]$ est équivalent à $f^{(k)}(z_0) = 0$, $0 \leq k \leq [s]$. De plus on a l'égalité

$$\big\|(u_{n,z_0} - 1)f\big\|_\omega = \big\|(u_{n,1} - 1)g\big\|_\omega.$$

Donc, sans perte de généralité, on va supposer que $z_0 = 1$. Pour simplifier les notations, on notera $u_{n,1}$ par u_n. On a $u_n = e_n^{p+1}$ $(n \geq 1)$, où e_n est la fonction définie en (1.2). En utilisant les relations $e_n = n(\alpha-1)(e_n-1)$ et $(\alpha-1)e_n' = -(e_n-1)e_n \quad (n \geq 1)$, on montre facilement par récurrence que pour tout k dans $\{0,\dots,p\}$, on a

$$(u_n - 1)^{(k)} = \frac{(e_n-1)}{(\alpha-1)^k}P_k(e_n) \qquad (n \geq 1), \tag{1.10}$$

où P_k est un polynôme ne dépendant pas de n et de degré inférieur ou égal à $k+p$. Soit maintenant f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f^{(k)}(1) = 0$ pour $0 \leq k \leq [s]$. D'après le lemme 1.2.3, il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \Big\|\big[(u_n-1)f\big]^{(p)}\Big\|_{\omega_p} = 0 \tag{1.11}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \big[\widehat{(u_n-1)f}\big](k) = 0 \qquad \big(0 \leq k \leq p-1\big). \tag{1.12}$$

Les conditions (1.12) se montrent facilement à l'aide du théorème de convergence dominée, il reste donc à montrer (1.11). En utilisant la formule de Leibnitz et l'identité (1.10), on obtient

$$\begin{aligned}\big[(u_n-1)f\big]^{(p)} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(u_n-1)^{(k)}f^{(p-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(e_n-1)\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k}P_k(e_n). \end{aligned}\tag{1.13}$$

Or les hypothèses sur le poids ω nous permettent d'utiliser le lemme 1.2.3 qui nous assure que

$$\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k} \in A_{\omega_p}(\mathbb{T}) \qquad (0 \leq k \leq p).$$

De plus, ω_p vérifie la condition (W_β) avec $\beta = s-p$. On déduit alors du lemme 1.2.2 que si $g \in A_{\omega_p}(\mathbb{T})$ et $g(1)=0$, alors $\left\|e_n g\right\|_{\omega_p} \leq 4\left\|g\right\|_{\omega_p}$ $(n \geq 1)$. Et comme pour tout $k \in \{0,\dots,p\}$, la fonction $\dfrac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k}$ s'annule en 1, on peut alors trouver une constante $C>0$ indépendante de n et de k telle que

$$\left\|(e_n-1)\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k}P_k(e_n)\right\|_{\omega_p} \leq C\left\|(e_n-1)\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k}\right\|_{\omega_p}. \tag{1.14}$$

De plus, toujours d'après le lemme 1.2.2,

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|(e_n-1)\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k}\right\|_{\omega_p} = 0 \qquad (0 \leq k \leq p).$$

Par conséquent, on déduit alors de (1.13) et (1.14) que

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\left[(u_n-1)f\right]^{(p)}\right\|_{\omega_p} = 0.$$

□

Nous faisons une remarque élémentaire qui fait l'objet du lemme suivant :

Lemme 1.2.5. *Soit s un réel positif et ω un poids vérifiant la condition $(\mathrm{W_s})$. Soit $z_0 \in \mathbb{T}$, p un entier tel que $0 \leq p \leq [s]$, et $f \in A_\omega(\mathbb{T})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f(z_0) = \ldots = f^{(p)}(z_0) = 0$.

(ii) $f \in \overline{(\alpha-z_0)^{p+1}A_\omega(\mathbb{T})}^{\|\ \|_\omega}$.

Démonstration. *(i)* ⇒ *(ii)*. Soit $f \in A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f(z_0) = \ldots = f^{(p)}(z_0) = 0$. On peut écrire

$$\begin{aligned} f &= f - f(z_0) - f'(z_0)(\alpha-z_0) - \ldots - \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}(\alpha-z_0)^p \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)\Big(\alpha^n - z_0^n - nz_0^{n-1}(\alpha-z_0) - \ldots - \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!}z_0^{n-p}(\alpha-z_0)^p\Big). \end{aligned}$$

On pose alors

$$f_m = \sum_{n=-m}^{+m}\widehat{f}(n)\Big(\alpha^n - z_0^n - nz_0^{n-1}(\alpha-z_0) - \ldots - \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!}z_0^{n-p}(\alpha-z_0)^p\Big).$$

Pour chaque n, $\alpha^n - z_0^n - nz_0^{n-1}(\alpha-z_0) - \ldots - \dfrac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!}z_0^{n-p}(\alpha-z_0)^p \in (\alpha-z_0)^{p+1}A_\omega(\mathbb{T})$, ce qui entraîne que $f_m \in (\alpha-z_0)^{p+1}A_\omega(\mathbb{T})$. D'autre part, il est facile

de voir que $\big(f_m\big)_{m\geq 1}$ converge pour la norme $\|\ \|_\omega$ vers $f - f(z_0) - f'(z_0)(\alpha - z_0) - \ldots - \dfrac{f^{(p)}(z_0)}{p!}(\alpha - z_0)^p = f$.
L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ découle immédiatement du fait qu'une fonction $f \in (\alpha - z_0)^{p+1}A_\omega(\mathbb{T})$ satisfait $f(z_0) = \ldots = f^{(p)}(z_0) = 0$, et du fait que pour $0 \leq k \leq p$, les fonctionnelles $f \mapsto f^{(k)}(z_0)$ sont continues de $A_\omega(\mathbb{T})$ dans $\mathbb{C}$. $\square$

Nous avons le résultat suivant qui est dû à A. Atzmon (deuxième partie de la proposition 6 de [4]) et que l'on peut énoncer sous la forme suivante :

Proposition 1.2.6. ([4]) *Soit ω un poids vérifiant les conditions (W_s) et (A). Soit I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h^0(I) = \{z_0\}$. Alors il existe j dans $\{0, \ldots, [s]\}$ tel que $I = \big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f(z_0) = \cdots = f^{(j)}(z_0) = 0\big\}$.*

Démonstration. Soit I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h^0(I) = \{z_0\}$. Pour simplifier les écritures, on suppose que $z_0 = 1$. On note

$$\pi_\omega : A_\omega(\mathbb{T}) \longrightarrow A_\omega(\mathbb{T})/I$$

la surjection canonique. Soit T l'opérateur défini sur $A_\omega(\mathbb{T})/I$ par

$$T : \pi_\omega(f) \longmapsto \pi_\omega(\alpha)\pi_\omega(f),$$

où $\alpha : z \mapsto z$. Pour tout n dans $\mathbb{Z}$, on a $\|T^n\| \leq \omega(n)$. On a donc

$$\begin{aligned} &\|T^n\| = o\big((1+n)^{[s]+1}\big) \ (n \to +\infty) \\ &\|T^{-n}\| = O\big(e^{\varepsilon\sqrt{n}}\big) \ (n \to +\infty), \ \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

De plus, le spectre de T est égal à $\{1\}$. D'après le théorème 1 de [4] (voir aussi le théorème 5.1 de [41]), on a $(T - Id)^{[s]+1} = 0$, où Id désigne l'opérateur identité sur $A_\omega(\mathbb{T})/I$. Soit j le plus petit entier positif tel que $(T - Id)^{j+1} = 0$. On pose $I_j = \big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f(z_0) = \cdots = f^{(j)}(z_0) = 0\big\}$. Nous allons montrer que $I = I_j$. On a $(\pi_\omega(\alpha) - 1)^{j+1} = 0$ et $(\pi_\omega(\alpha) - 1)^j \neq 0$. Ceci montre que $(\alpha - 1)^{j+1} \in I$ et que les $(\pi_\omega(\alpha) - 1)^k\,(0 \leq k \leq j)$ sont linéairement indépendants. En effet, supposons que

$$a_0 + a_1(\pi_\omega(\alpha) - 1) + \ldots + a_j(\pi_\omega(\alpha) - 1)^j = 0. \tag{1.15}$$

On multiplie cette égalité par $(\pi_\omega(\alpha) - 1)^j$ et on obtient $a_0(\pi_\omega(\alpha) - 1)^j = 0$, puis $a_0 = 0$. L'égalité (1.15) devient alors

$$a_1(\pi_\omega(\alpha) - 1) + \ldots + a_j(\pi_\omega(\alpha) - 1)^j = 0.$$

On multiplie cette dernière par $(\pi_\omega(\alpha) - 1)^{j-1}$ et on obtient $a_1 = 0$. On réitère alors le procédé pour montrer finalement que $a_0 = a_1 = \ldots = a_j = 0$. On a vu que $(\alpha - 1)^{j+1} \in I$. Par conséquent on a $\overline{(\alpha - 1)^{j+1}A_\omega(\mathbb{T})}^{\|\ \|_\omega} \subset I$, et donc $I_j \subset I$ d'après le lemme 1.2.5. Soit maintenant $f \in I$, on pose

$$g = f - f(1) - \frac{f'(1)}{1!}(\alpha - 1) - \ldots - \frac{f^{(j)}(1)}{j!}(\alpha - 1)^j. \tag{1.16}$$

Il est facile de voir que $g \in I_j$, et donc que $g \in I$. Ainsi $\pi_\omega(g) = 0$. Comme $f \in I$, et donc $\pi_\omega(f) = 0$, on déduit de (1.16) que

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(\pi_\omega(\alpha) - 1) + \ldots + \frac{f^{(j)}(1)}{j!}(\pi_\omega(\alpha) - 1)^j = 0.$$

Les $(\pi_\omega(\alpha) - 1)^k$ $(0 \leq k \leq j)$ étant linéairement indépendants, on en déduit que

$$f(1) = f'(1) = \ldots = f^{(j)}(1) = 0,$$

ce qui prouve que $f \in I_j$. Finalement on a $I = I_j$, ce qu'il fallait démontrer. □

Les propositions 1.2.4 et 1.2.6 permettent de montrer que $A_\omega(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin forte. Rappelons d'abord cette notion, introduite dans [6] dans un cadre plus général. Soit ω un poids vérifiant la condition (W_s). On dit que $A_\omega(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin si pour toute fonction f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f(1) = \ldots = f^{([s])}(1) = 0$, il existe une suite $\big(\tau_n\big)_{n\geq 1}$ d'éléments de $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que
(i) Pour tout $n \geq 1$, $\tau_n = 0$ sur un voisinage de 1.
(ii) $\lim_{n\to+\infty} \big\|(\tau_n - 1)f\big\|_\omega = 0$.
Et on dira que $A_\omega(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin forte si la suite $\big(\tau_n\big)_{n\geq 1}$ peut être choisie indépendamment de f. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 1.2.7. *Soit s un réel positif, et ω un poids vérifiant les conditions (W_s) et (A). Alors l'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin forte.*

Démonstration. On déduit de la proposition 1.2.6 et de la proposition 1.1.2 que

$$J_\omega(\{1\}) = \Big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) :\ f(1) = \cdots = f^{([s])}(1) = 0\Big\}. \tag{1.17}$$

Considérons la suite $\big(u_n\big)_{n\geq 1}$ définie en (1.9). Pour tout $n \geq 1$, $u_n \in \big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) :\ f(1) = \cdots = f^{([s])}(1) = 0\big\}$. Compte-tenu de (1.17), il existe donc une suite $\big(\tau_n\big)_{n\geq 1}$ déléments de $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que
(i) Pour tout $n \geq 1$, $\tau_n = 0$ sur un voisinage de 1.
(ii) $\big\|u_n - \tau_n\big\|_\omega \leq \dfrac{1}{n}$.
Il est alors clair que pour toute fonction $f \in A_\omega(\mathbb{T})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \big\|(\tau_n - 1)f\big\|_\omega = 0$, ce qui prouve, avec (i), que $A_\omega(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin forte. □

Avant d'établir le résultat principal de ce chapitre, nous avons encore besoin d'un lemme et de la notation suivante : si f est dans $A_\omega(\mathbb{T})$, et I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$, on pose

$$I(f) = \Big\{g \in A_\omega(\mathbb{T}) :\ fg \in I\Big\}.$$

Observons que $I(f)$ est un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $I \subset I(f)$, et par conséquent satisfait $h^0(I(f)) \subset h^0(I)$. On a le résultat suivant :

Lemme 1.2.8. *Soit ω un poids vérifiant (W_s) et (A), et I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h^0(I)$ possède un point isolé z_0. Soit $k = \max\big\{j \in \{0,\dots,[s]\} : z_0 \in h^j(I)\big\}$. Alors il existe g dans I de la forme $g = (\alpha - z_0)^{k+1}\psi$, avec $\psi \in A_\omega(\mathbb{T})$ et $\psi(z_0) \neq 0$.*

Démonstration. Le point z_0 étant isolé dans $h^0(I)$ et l'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ étant régulière, il existe $\psi \in A_\omega(\mathbb{T})$ telle que

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{sur un voisinage de } z_0 \\ 0 & \text{sur un voisinage de } h^0(I)\backslash\{z_0\} \end{cases}.$$

La fonction $(1-\psi)\psi$ s'annule sur un voisinage de $h^0(I)$. L'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ étant régulière, on déduit de la proposition 1.1.2 que $1-\psi \in I(\psi)$. Ceci prouve que $h^0\big(I(\psi)\big) \subset \{z_0\}$. Puisque $\psi \notin I$, on a $I(\psi) \neq A_\omega(\mathbb{T})$, et donc $h^0\big(I(\psi)\big) = \{z_0\}$. Par conséquent, comme ω vérifie les conditions ($\mathrm{W_s}$) et (A), on déduit de la proposition 1.2.6 qu'il existe un entier γ, $0 \leq \gamma \leq [s]$, tel que

$$I(\psi) = \Big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f(z_0) = \cdots = f^{(\gamma)}(z_0) = 0\Big\}.$$

Comme $I \subset I(\psi)$, on a $\gamma \leq k$. D'autre part $(\alpha - z_0)^{\gamma+1}$ appartient à $I(\psi)$, et donc la fonction $g = (\alpha - z_0)^{\gamma+1}\psi$ appartient à I. Comme, par définition de k, on a $g^{(i)}(z_0) = 0$ pour tout $i \in \{0,\dots,k\}$ et que $\psi(z_0) \neq 0$, on a $\gamma \geq k$. Donc $\gamma = k$, et la fonction g ainsi définie convient. □

Théorème 1.2.9. *Soit ω un poids vérifiant ($\mathrm{W_s}$) et (A), et I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h^0(I)$ est dénombrable. Alors*

$$I = \Big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f^{(j)} = 0 \textit{ sur } h^j(I) \quad (0 \leq j \leq [s])\Big\}.$$

Démonstration. Soit I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h^0(I)$ est dénombrable, notons $J = \Big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f^{(j)} = 0 \text{ sur } h^j(I) \quad (0 \leq j \leq [s])\Big\}$. L'inclusion $I \subset J$ étant évidente, il reste à montrer l'autre. Soit $f \in J$, nous allons montrer que $I(f) = A_\omega(\mathbb{T})$. Soit $z_0 \in h^0(I)\backslash h^{[s]}(I)$ et $k \in \{0,\dots,[s]-1\}$ tel que $z_0 \in h^k(I)\backslash h^{k+1}(I)$. On déduit du lemme 1.2.5 que $J \subset \overline{(\alpha - z_0)^{k+1}A_\omega(\mathbb{T})}^{\|\,\|_\omega}$, et donc il existe une suite $(f_m)_{m\geq 0}$ de fonctions de la forme $f_m = (\alpha - z_0)^{k+1}\phi_m$, avec $\phi_m \in A_\omega(\mathbb{T})$, telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} \big\|f - f_m\big\|_\omega = 0$. De plus, comme $z_0 \notin h^{[s]}(I)$, le point z_0 est nécessairement isolé dans $h^0(I)$. Donc d'après le lemme 1.2.8, il existe g dans I qui s'écrit $g = (\alpha - z_0)^{k+1}\psi$ avec $\psi \in A_\omega(\mathbb{T})$ et $\psi(z_0) \neq 0$. Posons alors

$$\Psi_m = \phi_m g = f_m\psi \quad (m \geq 0).$$

On a pour tout entier $m \geq 0$, $\Psi_m \in I$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} \big\|\Psi_m - f\psi\big\|_\omega = 0$. Comme I est fermé, on a donc $f\psi \in I$, c'est-à-dire $\psi \in I(f)$. Par conséquent, $z_0 \notin h^0\big(I(f)\big)$ (car $\psi(z_0) \neq 0$). Finalement, on en déduit dans un premier temps que

$$h^0\big(I(f)\big) \subset h^{[s]}(I). \tag{1.18}$$

Supposons que $h^0\big(I(f)\big) \neq \emptyset$, alors $h^0\big(I(f)\big)$ admet un point isolé ξ_0. L'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ étant régulière, il existe une fonction Φ telle que

$$\Phi = \begin{cases} 1 & \text{sur un voisinage de } \xi_0 \\ 0 & \text{sur un voisinage de } h^0\big(I(f)\big)\backslash\{\xi_0\} \end{cases}.$$

On pose $L_\Phi = \big\{h \in A_\omega(\mathbb{T}) :\ h\Phi \in I(f)\big\}$, l'idéal de division de $I(f)$ par Φ. On a $1-\Phi \in L_\Phi$, et donc $h^0\big(L_\Phi\big) \subset \{\xi_0\}$. Comme ω vérifie les conditions (A) et ($\mathrm{W_s}$), on déduit de la proposition 1.2.6 qu'il existe γ dans $\{0,\dots,[s]\}$ tel que $\Big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) :\ f(\xi_0) = \dots = f^{(\gamma)}(\xi_0) = 0\Big\} \subset L_\Phi$. Par conséquent la suite $\big(u_{n,\xi_0}\big)_{n\geq 1}$ définie en (1.9) appartient à L_Φ. Donc, pour tout $n \geq 1$, $u_{n,\xi_0}\Phi \in I(f)$, soit $u_{n,\xi_0}\Phi f \in I$. D'après l'inclusion $h^0\big(I(f)\big) \subset h^{[s]}(I)$ établie en (1.18), on a $f^{(k)}(\xi_0) = 0$ pour $0 \leq k \leq [s]$. Et comme le poids ω vérifie la condition ($\mathrm{W_s}$), on déduit de la proposition 1.2.4 que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big\|(u_{n,\xi_0}-1)f\big\|_\omega = 0$. Puisque $u_{n,\xi_0}\Phi f \in I\ (n \geq 1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \big\|u_{n,\xi_0}\Phi f - \Phi f\big\|_\omega = 0$, on a $\Phi f \in I$, ce qui contredit le fait que $\xi_0 \in h^0\big(I(f)\big)$. Finalement on a montré que $h^0\big(I(f)\big) = \emptyset$, et donc $I(f) = A_\omega(\mathbb{T})$, ce qui signifie exactement que $f \in I$. $\square$

Remarques :

1) Soit ω un poids vérifiant ($\mathrm{W_s}$) et (A). Le théorème 1.2.9 montre en particulier que si E est un fermé dénombrable de $\mathbb{T}$, on a

$$J_\omega(E) = \Big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) :\ f(E) = 0, \dots, f^{([s])}(E) = 0\Big\}.$$

En d'autres termes, une fonction f est de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$ pour E si et seulement si $f^{(k)}_{|E} = 0$ $(0 \leq k \leq [s])$.

2) Notons que dans certaines algèbres de Banach, la structure des idéaux fermés est semblable à celle des idéaux dans le théorème 1.2.9. Considérons, pour un entier p positif, $\mathcal{C}^p([0,1])$ l'algèbre des fonctions p continûment dérivables sur $[0,1]$. H . Whitney a montré dans [38] que I est un idéal fermé de $\mathcal{C}^p([0,1])$ si et seulement si il existe des fermés $E_p \subset \ldots \subset E_0$ tels que

$$I = \Big\{f \in \mathcal{C}^p([0,1]) :\ f^{(k)} = 0 \text{ sur } E_k \quad (0 \leq k \leq p)\Big\}.$$

Chapitre 2

Le Cantor triadique est de synthèse spectrale dans $A_s(\mathbb{T})$

2.1 Introduction

Dans le cas particulier où le poids ω est défini par $\omega(n) = (1 + |n|)^s$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, avec s un réel positif, on note $\big(A_s(\mathbb{T}), \| \|_s\big)$ l'algèbre $\big(A_\omega(\mathbb{T}), \| \|_\omega\big)$. On remarque que $A_0(\mathbb{T}) = A(\mathbb{T})$ n'est rien d'autre que l'algèbre de Wiener. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$. On note également $I_s(E)$ et $J_s(E)$ les idéaux $I_\omega(E)$ et $J_\omega(E)$ définis au chapitre précédent. Soit $\xi \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$. On définit le parfait symétrique associé à ξ, noté E_ξ, par

$$E_\xi = \Big\{ \exp\big(2i\pi(1-\xi)\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n \xi^{n-1}\big) : \epsilon_n = 0 \text{ ou } 1 \quad (n \geq 1)\Big\}.$$

Pour $\xi = \dfrac{1}{3}$, c'est le Cantor triadique. Soit $q \geq 3$ un entier. C. S. Herz donne ([19]) un critère qui permet de montrer que $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale (definition 1.1.2) dans l'algèbre de Wiener $A(\mathbb{T})$ (voir aussi [22]). On montre, en étendant ce critère, que $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_s(\mathbb{T})$, pour tout entier positif s. Comme on l'a vu au chapitre 1, ce résultat signifie que si I est un idéal fermé de $A_s(\mathbb{T})$ tel que $h(I) = E_{\frac{1}{q}}$, alors $I = I_s(E_{\frac{1}{q}})$. Notons que l'on obtient dans le chapitre 4 un résultat sur les fonctions qui vérifient la synthèse spectrale pour $E_{\frac{1}{q}}$ dans les algèbres $A_\omega(\mathbb{T})$ pour des poids plus généraux. On rappelle que $[s]$ désigne la partie entière de s. On montre que l'on peut approcher n'importe quelle fonction f de $A_s(\mathbb{T})$ par une suite de fonctions $(f_N)_{N\geq 2}$ dans $A_s(\mathbb{T})$ qui sont polynômiales par morceaux et telles que $f_N^{(j)}$ interpole $f^{(j)}$ aux points $e^{\frac{2ik\pi}{N}}$, pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ et $j \in \{0, \ldots, [s]\}$. Les fonctions f_N sont de la forme

$$f_N(e^{it}) = \sum_{j=0}^{[s]} \sum_{k=0}^{N-1} P_{j,\frac{2\pi}{N}}\big(t - \frac{2k\pi}{N}\big) f^{(j)}\big(e^{\frac{2ik\pi}{N}}\big), \tag{2.1}$$

où $P_{j,\varepsilon}$ (pour $j \in \{0, \dots, [s]\}$ et $0 < \varepsilon \leq \pi$) est une fonction 2π-périodique donnée sur $[-\pi, \pi]$ par la formule

$$P_{j,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{(\varepsilon - t)^{[s]+1}}{j!\, \varepsilon^{[s]+1}} t^j \displaystyle\sum_{k=0}^{[s]-j} \binom{[s]+k}{k} \varepsilon^{-k} t^k & \text{pour } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{pour } t \in [\varepsilon, \pi] \end{cases},$$

et $P_{j,\varepsilon}(t) = (-1)^j P_{j,\varepsilon}(-t)$, for $t \in [-\pi, 0]$.

2.2 Quelques lemmes préliminaires

Nous aurons besoin de formules de combinatoire qui font l'objet des trois lemmes suivants. Soient n et k des entiers, on rappelle que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\, k!}$ si $0 \leq k \leq n$ et que, par convention, $\binom{n}{k} = 0$ sinon. On conviendra également qu'une somme "$\sum_{k=n}^{m}$" est nulle si $m < n$.

Lemme 2.2.1. *Nous avons les formules suivantes :*
1) Pour tous entiers positifs p, J et k tels que $0 \leq k \leq p$,

$$\sum_{j=k}^{p} (-1)^{p+j} \binom{p-k}{p-j} \binom{j+p-J}{p} = \binom{k+p-J}{k}. \tag{2.2}$$

2) Pour tous entiers positifs p, A et j tels que $0 \leq j \leq p$,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{k}{A} \binom{p-k}{p-j} = \binom{p+1}{j-A}. \tag{2.3}$$

3) Soient p, k et J des entiers positifs, et posons

$$S(p,k,J) = \sum_{j=0}^{J} (-1)^j \binom{J}{j} \binom{k+p-j}{p}.$$

Alors

$$S(p,k,J) = \begin{cases} \dbinom{k+p-J}{k} & si \quad 0 \leq J \leq p \\ 0 & si \quad p+1 \leq J \leq p+k \\ (-1)^{p+1} \displaystyle\sum_{j=k+p+1}^{J} (-1)^j \binom{J}{j} \binom{j-k-1}{p} & si \quad p+k+1 \leq J \end{cases}. \tag{2.4}$$

Démonstration. 1) Posons $f(k,J)=\sum_{j=k}^{p}(-1)^{p+j}\binom{p-k}{p-j}\binom{j+p-J}{p}$. En utilisant le fait que $\binom{p-k-1}{p-j}=\binom{p-k}{p-j+1}-\binom{p-k-1}{p-j+1}$ pour $j\geq k+1$, on obtient

$$f(k+1,J+1) \;=\; f(k+1,J)-f(k,J) \quad \big(k\in\{0,\ldots,p-1\}\big). \tag{2.5}$$

On voit facilement que (2.2) est vérifiée pour $k=p$, et on montre, en utilisant (2.5) et une récurrence sur k, qu'elle est vérifiée pour tout $k\in\{0,\ldots,p\}$ et tout J.
2) Posons $g(j,p)=\sum_{k=0}^{p}\binom{k}{A}\binom{p-k}{p-j}$. On vérifie facilement que

$$\begin{cases} g(0,p) &=& \binom{0}{A} \;=\; \binom{p+1}{-A} \\ g(p,p) &=& \sum_{k=0}^{p}\binom{k}{A} \;=\; \binom{p+1}{p-A} \\ g(j,p) &=& g(j-1,p-1)+g(j,p-1), \quad \big(p\geq 1,\ j\in\{1,\ldots,p-1\}\big)\end{cases}. \tag{2.6}$$

Le résultat découle alors de (2.6) en faisant une récurrence sur p.
3) Soient p, k et J des entiers positifs, on pose

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{J}(-1)^j\binom{J}{j}x^{k+p-j}.$$

D'une part, un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}\frac{Q^{(p)}(1)}{p!} &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{J}{j}\binom{k+p-j}{p}+(-1)^p\sum_{j=k+p+1}^{J}(-1)^j\binom{J}{j}\binom{j-k-1}{p} \\ &= \sum_{j=0}^{J}(-1)^j\binom{J}{j}\binom{k+p-j}{p}+(-1)^p\sum_{j=k+p+1}^{J}(-1)^j\binom{J}{j}\binom{j-k-1}{p},\end{aligned} \tag{2.7}$$

en tenant compte des conventions faites plus haut. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Q(x) &= (-1)^J x^{k+p-J}\sum_{j=0}^{J}(-1)^{J-j}\binom{J}{j}x^{J-j} \\ &= (-1)^J\big(1-x\big)^J x^{k+p-J},\end{aligned}$$

et on montre facilement, en utilisant la formule de Leibnitz, que

$$\frac{Q^{(p)}(1)}{p!} \;=\; \binom{k+p-J}{k}. \tag{2.8}$$

On déduit de (2.7) et de (2.8) que

$$S(p,k,J) \;=\; \binom{k+p-J}{k} - (-1)^p \sum_{j=k+p+1}^{J} (-1)^j \binom{J}{j}\binom{j-k-1}{p}. \tag{2.9}$$

Le résultat découle alors de cette égalité, en tenant compte des conventions faites avant le lemme 2.2.1. □

Lemme 2.2.2. *Soient p, j et J des entiers positifs tels que $0 \leq J \leq 2p+1$ et $0 \leq j \leq p$. Posons*

$$c(j,J) = \sum_{\nu=0}^{J} (-1)^\nu \binom{J}{\nu} (2p+1-\nu)!\,\nu! \sum_{k=p-\nu}^{p} \binom{p+k-j}{p}\binom{k}{p-\nu}.$$

Alors

$$c(j,J) = (-1)^p\, J!\,(2p+1-J)! \sum_{k=p-J}^{p} (-1)^k \binom{p+k-j}{p}\binom{p+1}{2p+1-J-k}. \tag{2.10}$$

De plus, si $p+1 \leq J \leq 2p-j$, alors $c(j,J) = 0$.

Démonstration. Un calcul immédiat montre que, pour tout $k \geq \max(0, p-J)$ et $0 \leq \nu \leq 2p+1$,

$$(2p+1-\nu)!\,\nu! \binom{J}{\nu}\binom{k}{p-\nu} = \frac{J!\,k!\,(p+1)!}{(J+k-p)!}\binom{2p+1-\nu}{p+1}\binom{k+J-p}{\nu+k-p},$$

de sorte que

$$c(j,J) = J!\,(p{+}1)! \sum_{k=\max(0,p-J)}^{p} \binom{p+k-j}{p} \frac{k!}{(J+k-p)!} \sum_{\nu=p-k}^{J} (-1)^\nu \binom{2p+1-\nu}{p+1}\binom{k+J-p}{\nu+k-p}.$$

En effectuant le changement de variable $\nu \mapsto k-p+\nu$ dans la seconde somme, on obtient

$$c(j,J) = J!\,(p+1)! \sum_{k=\max(0,p-J)}^{p} \binom{p+k-j}{p} \frac{k!}{(J+k-p)!} (-1)^{k-p} S(p+1,k,k+J-p),$$

où $S(p+1,k,k+J-p)$ est définie dans le lemme 2.2.1. Et toujours d'après ce lemme, comme $0 \leq J \leq 2p+1$, on a $S(p+1,k,k+J-p) = \binom{2p+1-J}{k}$. Donc

$$c(j,J) = (-1)^p J!\,(p+1)! \sum_{k=\max(0,p-J)}^{p} (-1)^k \binom{p+k-j}{p}\binom{2p+1-J}{k} \frac{k!}{(J+k-p)!},$$

Puis, pour tout $k \geq \max(0, p-J)$, on a l'identité suivante :

$$(p+1)! \binom{2p+1-J}{k} \frac{k!}{(J+k-p)!} = (2p+1-J)! \binom{p+1}{2p+1-J-k},$$

de sorte que

$$c(j,J) = (-1)^p \, J! \, (2p+1-J)! \sum_{k=p-J}^{p} (-1)^k \binom{p+k-j}{p} \binom{p+1}{2p+1-J-k},$$

ce qui prouve la première partie du lemme. Maintenant si $p+1 \leq J \leq 2p-j$, un calcul immédiat montre que

$$\binom{p+k-j}{p} \binom{p+1}{2p+1-k-J} = \frac{p+1}{2p+1-j-J} \binom{p+k-j}{2p-j-J} \binom{2p+1-j-J}{2p+1-J-k},$$

de sorte que pour $p+1 \leq J \leq 2p-j$,

$$c(j,J) = (-1)^p \frac{(p+1)\, J! \, (2p+1-J)!}{2p+1-j-J} \sum_{k=p-J}^{p} (-1)^k \binom{p+k-j}{2p-j-J} \binom{2p+1-j-J}{2p+1-J-k}.$$

En effectuant le changement de variable $k \mapsto 2p+1-J-k$, on obtient, pour $p+1 \leq J \leq 2p-j$,

$$c(j,J) = (-1)^{p+1+J} \frac{(p+1)\, J! \, (2p+1-J)!}{2p+1-j-J} S(2p-j-J, p+1, 2p+1-j-J).$$

Et d'après le lemme 2.2.1, $S(2p-j-J, p+1, 2p+1-j-J) = 0$. □

Lemme 2.2.3. *Soient p, A et J des entiers positifs. Posons*

$$T(p,A,J) = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{A} \sum_{j=0}^{J} (-1)^j \binom{J}{j} \binom{k+p-j}{p}.$$

Alors

$$T(p,A,J) = \begin{cases} (-1)^p \displaystyle\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p+1}{j-A} \binom{j+p-J}{p} & \textit{si} \quad 0 \leq J \leq p \\ 0 & \textit{si} \quad p+1 \leq J \leq p+A \\ (-1)^{p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{k}{A} \sum_{j=k+p+1}^{J} (-1)^j \binom{J}{j} \binom{j-k-1}{p} & \textit{si} \quad p+A+1 \leq J \end{cases}.$$

Démonstration. Soient p, A et J des entiers positifs. On déduit du lemme 2.2.1 (plus précisèment de la formule (2.9) obtenue au cours de la preuve) que

$$T(p,A,J) = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{A} \binom{k+p-J}{k} + (-1)^{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{A} \sum_{j=k+p+1}^{J} (-1)^j \binom{J}{j} \binom{j-k-1}{p}. \quad (2.11)$$

Maintenant, la formule (2.2) du lemme 2.2.1 montre que

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{k}{A}\binom{k+p-J}{k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{k}{A}\sum_{j=k}^{p}(-1)^{p+j}\binom{p-k}{p-j}\binom{j+p-J}{p}.$$

On intervertit alors les deux sommes et on uitilise la formule (2.3) du lemme 2.2.1 pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{k}{A}\binom{k+p-J}{k} = (-1)^p\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p+1}{j-A}\binom{j+p-J}{p}.$$

On reporte cette expression dans (2.11) et le résultat en découle immédiatement, en tenant compte une fois de plus des conventions faites. □

Lemme 2.2.4. *Soient p, j et ν des entiers positifs tels que $\nu \geq p+1$ et $j \leq p$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose*

$$\begin{aligned} A_{j,\nu}(z) &= \sum_{k=\nu-p-1}^{p}\binom{p+k-j}{p}\times \\ &\times \left[(-1)^{\nu-p-1+k}\big(1+(-1)^{j+\nu+1}\big)\binom{p+1}{\nu-k} - \binom{k}{\nu-p-1}\big(e^{-z}+(-1)^{j+\nu+1}e^{z}\big)\right], \end{aligned}$$

puis on définit les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi_\nu(z) &= \sum_{j=0}^{p}\frac{z^j}{j!}A_{j,\nu}(z) \quad (z\in\mathbb{C}) \\ \textit{et}\quad \Gamma_j(z) &= \sum_{\nu=p+1}^{2p+1}\nu!\,z^{-\nu-1}A_{j,\nu}(z) \quad (z\in\mathbb{C}^*). \end{aligned}$$

1) La fonction $x \mapsto A_{j,\nu}(ix)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2) La fonction $z \mapsto z^{-\nu-1}\Psi_\nu(z)$ est bornée sur tout voisinage borné de 0.
3) La fonction $z \mapsto z^j\Gamma_j(z)$ est bornée sur tout voisinage borné de 0.

Démonstration. 1) C'est immédiat.

2) Puisque Ψ_ν est entière, il suffit de montrer que ses coefficients de Taylor $\dfrac{\Psi_\nu^{(J)}(0)}{J!}$ sont nuls si $0 \leq J \leq \nu$. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} \Psi_\nu(z) &= \sum_{j=0}^{p}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=\nu-p-1}^{p}(-1)^{\nu-p-1+k}\big(1+(-1)^{j+\nu+1}\big)\binom{p+k-j}{p}\binom{p+1}{\nu-k} \\ &- \sum_{j=0}^{p}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=\nu-p-1}^{p}\binom{p+k-j}{p}\binom{k}{\nu-p-1}\big(e^{-z}+(-1)^{j+\nu+1}e^{z}\big). \end{aligned}$$

On obtient alors facilement

$$\begin{aligned}\Psi_\nu^{(J)}(0) &= \sum_{k=\nu-p-1}^{p} (-1)^{\nu-p-1+k}\big(1+(-1)^{J+\nu+1}\big)\binom{p+k-J}{p}\binom{p+1}{\nu-k} \\ &- \big((-1)^J+(-1)^{\nu+1}\big)T(p,\nu-p-1,J), \end{aligned}\tag{2.12}$$

où $T(p,\nu-p-1,J)$ est défini dans le lemme 2.2.3. D'après ce lemme, si $0\le J\le p$, on a

$$\sum_{k=\nu-p-1}^{p}\binom{p+k-J}{p}(-1)^{p+k}\binom{p+1}{\nu-k} = T(p,\nu-p-1,J).$$

On déduit donc de (2.12) que si $0\le J\le p$, alors $\Psi_\nu^{(J)}(0)=0$. Puis, on remarque que si $p+1\le J$, on a alors $\binom{p+k-J}{p}=0$ pour tout $k\le p$. De plus si $p+1\le J\le \nu-1$, on a $T(p,\nu-p-1,J)=0$ d'après le lemme 2.2.3. On déduit donc de ces observations et de (2.12) que

$$\Psi_\nu^{(J)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0\le J\le \nu-1 \\ -\big((-1)^J+(-1)^{\nu+1}\big)T(p,\nu-p-1,J) & \text{si} \quad \nu\le J \end{cases}. \tag{2.13}$$

En particulier, si $J\le\nu$, alors $\Psi_\nu^{(J)}(0)=0$.
3) Posons $\gamma_j(z)=z^{2p+2}\Gamma_j(z)$. La fonction γ_j est entière. Pour montrer 3), il suffit donc de montrer que ses coefficients de Taylor $\dfrac{\gamma_j^{(J)}(0)}{J!}$ sont nuls si $0\le J\le 2p+1-j$. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned}\gamma_j(z) &= \sum_{\nu=p+1}^{2p+1}\nu!\,z^{2p+1-\nu}\sum_{k=\nu-p-1}^{p}(-1)^{\nu-p-1+k}\big(1+(-1)^{j+\nu+1}\big)\binom{p+k-j}{p}\binom{p+1}{\nu-k} \\ &- \sum_{\nu=p+1}^{2p+1}\nu!\,z^{2p+1-\nu}\sum_{k=\nu-p-1}^{p}\binom{p+k-j}{p}\binom{k}{\nu-p-1}\big(e^{-z}+(-1)^{j+\nu+1}e^{z}\big). \\ &= \sum_{\nu=0}^{p}(2p+1-\nu)!\,z^{\nu}\sum_{k=p-\nu}^{p}(-1)^{p-\nu+k}\big(1+(-1)^{j-\nu}\big)\binom{p+k-j}{p}\binom{p+1}{2p+1-\nu-k} \\ &- \sum_{\nu=0}^{p}(2p+1-\nu)!\,z^{\nu}\sum_{k=p-\nu}^{p}\binom{p+k-j}{p}\binom{k}{p-\nu}\big(e^{-z}+(-1)^{j-\nu}e^{z}\big).\end{aligned}$$

Si $0\le J\le p$, on a

$$\begin{aligned}\gamma_j^{(J)}(0) &= J!\,(2p+1-J)!\sum_{k=p-J}^{p}(-1)^{p-J+k}\big(1+(-1)^{j-J}\big)\binom{p+k-j}{p}\binom{p+1}{2p+1-J-k} \\ &- \big((-1)^J+(-1)^j\big)\,c(j,J),\end{aligned}$$

et si $J \geq p+1$, on a seulement

$$\gamma_j^{(J)}(0) = -\big((-1)^J + (-1)^j\big)\, c(j,J), \tag{2.14}$$

où $c(j,J)$ est défini dans le lemme 2.2.2. Puis on déduit de ce lemme que $\gamma_j^{(J)}(0) = 0$ pour tout $0 \leq J \leq 2p - j$. Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que $(-1)^J + (-1)^j = 0$ quand $J = 2p + 1 - j$, de sorte que $\gamma_j^{(2p+1-j)}(0) = 0$. $\square$

2.3 $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_s(\mathbb{T})$

Lemme 2.3.1. *Il existe une constante positive K telle que pour tout entier $N \geq 2$,*

$$\|f_N\|_s \leq K \|f\|_s, \quad \big(f \in A_s(\mathbb{T})\big).$$

Démonstration. Il est facile de voir qu'il suffit de montrer cette inégalité pour $f(e^{it}) = e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Dans un premier temps, calculons les coefficients de Fourier de chaque $P_{j,\varepsilon}$. Pour cela, posons

$$g_r(t) = \begin{cases} (t-\varepsilon)^{[s]+1} t^r & \text{si} \quad t \in [0,\varepsilon] \\ 0 & \text{if} \quad t \in [-\pi,\pi] \backslash [0,\varepsilon] \end{cases} \quad \big(r \in \{0,\ldots,[s]\}\big), \tag{2.15}$$

de sorte que

$$P_{j,\varepsilon}(t) = \frac{(-1)^{[s]+1}}{j!\, \varepsilon^{[s]+1}} \sum_{k=0}^{[s]-j} \binom{[s]+k}{k} \varepsilon^{-k} g_{j+k}(t) \quad \big(t \in [0,\varepsilon]\big). \tag{2.16}$$

Une intégration par parties montre que pour tout m dans $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} \widehat{g_r}(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} g_r(t) e^{-imt} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{2[s]+1} \frac{1}{(im)^{\nu+1}} \Big(g_r^{(\nu)}(0) - g_r^{(\nu)}(\varepsilon) e^{-im\varepsilon} \Big). \end{aligned}$$

Et un calcul immédiat montre que

$$\begin{aligned} g_r^{(\nu)}(0) &= \binom{[s]+1}{\nu - r} \nu!\, (-\varepsilon)^{r-(\nu-[s]-1)} \\ \text{et } \ g_r^{(\nu)}(\varepsilon) &= \binom{r}{\nu-[s]-1} \nu!\, \varepsilon^{r-(\nu-[s]-1)}. \end{aligned}$$

Soit m dans $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. On a

$$\widehat{g_r}(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=r}^{[s]+1+r} \frac{\nu!}{(im)^{\nu+1}} \varepsilon^{r-(\nu-[s]-1)} \left[(-1)^{\nu-[s]-1+r} \binom{[s]+1}{\nu-r} - \binom{r}{\nu-[s]-1} e^{-im\varepsilon} \right].$$

Comme $P_{j,\varepsilon}(-t) = (-1)^j P_{j,\varepsilon}(t)$ $\big(t \in [0,\varepsilon]\big)$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{P_{j,\varepsilon}}(m) &= \frac{(-1)^{[s]+1}}{j!\,\varepsilon^{[s]+1}} \sum_{k=0}^{[s]-j} \binom{[s]+k}{k} \varepsilon^{-k} \Big(\widehat{g_{j+k}}(m) + (-1)^j \widehat{g_{j+k}}(-m)\Big) \\
&= \frac{(-1)^{[s]+1}}{2\pi j!\,\varepsilon^{[s]+1}} \sum_{k=0}^{[s]-j} \binom{[s]+k}{k} \varepsilon^{-k} \sum_{\nu=j+k}^{[s]+1+j+k} \frac{\nu!}{(im)^{\nu+1}} \varepsilon^{j+k-(\nu-[s]-1)} \times \\
&\quad \times \Bigg[(-1)^{\nu-[s]-1+j+k}\Big(1+(-1)^{j+\nu+1}\Big)\binom{[s]+1}{\nu-j-k} - \binom{j+k}{\nu-[s]-1}\Big(e^{-im\varepsilon} + (-1)^{j+\nu+1} e^{im\varepsilon}\Big)\Bigg].
\end{aligned}$$

En intervertissant les deux sommes et en effectuant le changement de variable $k \mapsto k-j$, on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{P_{j,\varepsilon}}(m) &= \frac{(-1)^{[s]+1}}{2\pi j!} \sum_{\nu=j}^{2[s]+1} \frac{\nu!}{(im)^{\nu+1}} \varepsilon^{j-\nu} \sum_{k=\nu-[s]-1}^{\min([s],\nu)} \binom{[s]+k-j}{[s]} \times \\
&\quad \times \Bigg[(-1)^{\nu-[s]-1+k}\Big(1+(-1)^{j+\nu+1}\Big)\binom{[s]+1}{\nu-k} - \binom{k}{\nu-[s]-1}\Big(e^{-im\varepsilon} + (-1)^{j+\nu+1} e^{im\varepsilon}\Big)\Bigg].
\end{aligned}$$

On remarque alors que chaque terme de la première somme est nul si $\nu \in \{j, \ldots, [s]\}$. En effet, si $j \le \nu \le [s]$, alors $\binom{k}{\nu-[s]-1} = 0$. De plus, pour $\nu = j$, $\Big(1+(-1)^{j+\nu+1}\Big) = 0$. Et si $j+1 \le \nu \le [s]$, on montre, en effectuant le changement de variable $k \mapsto \nu - k$ et en utilisant la formule (2.4) du lemme 2.2.1, que $\displaystyle\sum_{k=\nu-[s]-1}^{\nu} (-1)^k \binom{[s]+1}{\nu-k}\binom{[s]+k-j}{[s]} =$ $(-1)^\nu S([s], \nu-j, [s]+1) = 0$. Donc, si $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{P_{j,\varepsilon}}(m) &= \frac{(-1)^{[s]+1}}{2\pi j!} \sum_{\nu=[s]+1}^{2[s]+1} \frac{\nu!}{(im)^{\nu+1}} \varepsilon^{j-\nu} \sum_{k=\nu-[s]-1}^{[s]} \binom{[s]+k-j}{[s]} \times \\
&\quad \times \Bigg[(-1)^{\nu-[s]-1+k}\Big(1+(-1)^{j+\nu+1}\Big)\binom{[s]+1}{\nu-k} - \binom{k}{\nu-[s]-1}\Big(e^{-im\varepsilon} + (-1)^{j+\nu+1} e^{im\varepsilon}\Big)\Bigg]
\end{aligned}$$

(on aurait pu également invoquer le fait que $P_{j,\varepsilon}$ est $\mathcal{C}^{[s]+1}$ par morceaux pour justifier qu'il n'y ait pas de terme en $m^{-\nu-1}$ dans $\widehat{P_{j,\varepsilon}}(m)$) quand $\nu \le [s]$).

Pour $N \ge 2$ et $j \in \{0, \ldots, [s]\}$, on pose $D_N^{(j)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f^{(j)}\big(e^{\frac{2ik\pi}{N}}\big)\delta_{\frac{2k\pi}{N}}$, où δ_a désigne la masse de Dirac au point a. Pour $f(e^{it}) = e^{int}$, nous avons donc

$$\widehat{D_N^{(j)}}(m) = \begin{cases} \dfrac{N}{2\pi}(in)^j & \text{if} \quad m = n + \beta N \quad (\beta \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Donc si $m = n + \beta N \quad (\beta \in \mathbb{Z})$ et $m \neq 0$, on déduit de (2.1) que

$$\begin{aligned}\widehat{f_N}(m) &= 2\pi \sum_{j=0}^{[s]} \widehat{D_N^{(j)}}(m)\widehat{P_{j,\frac{2\pi}{N}}}(m) \\ &= (-1)^{[s]+1} \sum_{j=0}^{[s]} \frac{1}{j!}\Big(\frac{2in\pi}{N}\Big)^j \sum_{\nu=[s]+1}^{2[s]+1} \nu!\,\Big(\frac{2im\pi}{N}\Big)^{-\nu-1} A_{j,\nu}\Big(\frac{2im\pi}{N}\Big), \quad (2.17)\end{aligned}$$

où $A_{j,\nu}$ est la fonction associée à $p = [s]$ définie dans le lemme 2.2.4. Nous allons distinguer deux cas :

1er cas : $N \geq 2|n|$.

En intervertissant les deux sommes dans (2.17) et en observant que $e^{\frac{2im\pi}{N}} = e^{\frac{2in\pi}{N}}$, on obtient

$$\widehat{f_N}(m) = (-1)^{[s]+1} \sum_{\nu=[s]+1}^{2[s]+1} \nu!\,\Big(\frac{2im\pi}{N}\Big)^{-\nu-1} \Psi_\nu\big(\frac{2in\pi}{N}\big), \qquad (2.18)$$

où Ψ_ν est la fonction associée à $p = [s]$ définie dans le lemme 2.2.4. On déduit de ce lemme qu'il existe une constante positive $K_0(\nu)$ (indépendante de n et de N) telle que

$$\Big|\Psi_\nu\big(\frac{2in\pi}{N}\big)\Big| \leq K_0(\nu)\,\Big|\Big(\frac{2in\pi}{N}\Big)^{\nu+1}\Big| \quad (N \geq 2).$$

On déduit donc de (2.18) que

$$\big|\widehat{f_N}(m)\big| \leq K_0 \sum_{\nu=[s]+1}^{2[s]+1} \nu!\,\Big(\frac{|n|}{|m|}\Big)^{\nu+1}, \qquad (2.19)$$

où $K_0 = \max\limits_{[s]+1\leq\nu\leq 2[s]+1} K_0(\nu)$. Si $m = n + \beta N\,(\beta \in \mathbb{Z})$, on a $|m| \geq \big|2|\beta| - 1\big||n|$. Il existe donc une constante positive K_1 (indépendante de n et de N) telle que

$$\begin{aligned}\big|\widehat{f_N}(m)\big|(1+|m|)^s &\leq K_1 \sum_{\nu=[s]+1}^{2[s]+1} \frac{1}{\big|2|\beta|-1\big|^{\nu+1-s}}|n|^s \\ &\leq ([s]+1)K_1 \frac{1}{\big|2|\beta|-1\big|^{[s]+2-s}}|n|^s. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

2ème cas : $N \leq 2|n|$.

Dans ce cas, on écrit

$$\widehat{f_N}(m) = (-1)^{[s]+1} \sum_{j=0}^{[s]} \frac{1}{j!}\Big(\frac{2in\pi}{N}\Big)^j \Gamma_j\big(\frac{2im\pi}{N}\big), \qquad (2.21)$$

où Γ_j est la fonction associée à $p = [s]$ définie dans le lemme 2.2.4.
Si $|m| < N$, on déduit de ce lemme qu'il existe une constante positive $K_2(j)$ (indépendante de n et de N) telle que

$$\Big|\Gamma_j\big(\frac{2im\pi}{N}\big)\Big| \leq K_2(j)\left|\Big(\frac{2im\pi}{N}\Big)^{-j}\right| \quad (N \geq 2).$$

On déduit donc de (2.21) que

$$\big|\widehat{f_N}(m)\big| \leq K_2\sum_{j=0}^{[s]}\frac{1}{j!}\Big(\frac{|n|}{|m|}\Big)^j,$$

où $K_2 = \max\limits_{0\leq j\leq [s]} K_2(j)$. Comme $|m| \leq 2|n|$, il existe une constante positive K_3 (indépendante de n et de N) telle que, si $m = n + \beta N$ ($\beta \in \mathbb{Z}$) et $m \neq 0$, on a

$$\big|\widehat{f_N}(m)\big|(1+|m|)^s \quad \leq \quad K_3|n|^s. \tag{2.22}$$

Il sera utile pour la suite de remarquer qu'il n'existe au plus que deux entiers m de la forme $m = n + \beta N$ avec $|m| < N$.
Si $|m| \geq N$, il est facile de voir (en utilisant 1) du lemme 2.2.4) qu'il existe une constante positive $K_2'(j)$ (indépendante de n et de N) telle que

$$\Big|\Gamma_j\big(\frac{2im\pi}{N}\big)\Big| \leq K_2'(j)\left|\Big(\frac{2im\pi}{N}\Big)^{-[s]-2}\right| \quad (N \geq 2).$$

En utilisant des arguments similaires et le fait que $N \leq 2|n|$, on montre qu'il existe une constante positive K_3' (indépendante de n et de N) telle que

$$\big|\widehat{f_N}(m)\big|(1+|m|)^s \quad \leq \quad K_3'\Big(\frac{N}{|m|}\Big)^{[s]+2-s}|n|^s \;=\; K_3'\frac{1}{\big|\frac{n}{N}+\beta\big|^{[s]+2-s}}|n|^s.$$

En remarquant que dans ce cas $\big|\dfrac{n}{N}+\beta\big| = \dfrac{|m|}{N} \geq 1$, la somme $\displaystyle\sum_\beta \frac{1}{\big|\frac{n}{N}+\beta\big|^{[s]+2-s}}$ peut être majorée indépendamment de n et de N. Nous avons plus précisèment

$$\sum_{\beta:\,|n+\beta N|\geq N} \widehat{f_N}(n+\beta N)\big|(1+|n+\beta N|)^s \quad \leq \quad 2K_3'\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{[s]+2-s}}\Big)|n|^s \tag{2.23}$$

Considérons maintenant le cas $m = 0$. On a

$$\widehat{g_r}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\varepsilon (t-\varepsilon)^{[s]+1}t^r\mathrm{d}t,$$

où la fonction g_r est définie en (2.15). Par intégration par parties, on obtient

$$\widehat{g_r}(0) = \frac{(-1)^{[s]+1}}{2\pi([s]+2)}\binom{[s]+r+2}{[s]+2}^{-1}\varepsilon^{[s]+r+2}.$$

Comme $P_{j,\varepsilon}(-t) = (-1)^j P_{j,\varepsilon}(t)$ $\big(t \in [0,\varepsilon]\big)$, on a, grâce à (2.16),

$$\begin{aligned}\widehat{P_{j,\varepsilon}}(m) &= \frac{(-1)^{[s]+1}}{j!\,\varepsilon^{[s]+1}} \sum_{k=0}^{[s]-j} \binom{[s]+k}{k} \varepsilon^{-k}\big(1+(-1)^j\big)\widehat{g_{j+k}}(0) \\ &= \frac{\big(1+(-1)^j\big)\varepsilon^{j+1}}{2\pi([s]+2)j!} \sum_{k=0}^{[s]-j} \binom{[s]+k}{k} \binom{[s]+j+k+2}{[s]+2}^{-1}.\end{aligned}$$

Comme dans le cas $m \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{f_N}(0) &= 2\pi \sum_{j=0}^{[s]} \widehat{D_N^{(j)}}(0)\widehat{P_{j,\frac{2\pi}{N}}}(0) \\ &= \frac{1}{[s]+2} \sum_{j=0}^{[s]} \frac{\big(1+(-1)^j\big)}{j!} \Big(\frac{2in\pi}{N}\Big)^j \sum_{k=0}^{[s]-j} \binom{[s]+k}{k} \binom{[s]+j+k+2}{[s]+2}^{-1} \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante positive K_4 (indépendante de n et de N) telle que

$$\big|\widehat{f_N}(0)\big| \leq K_4(1+|n|)^{[s]}. \qquad (2.25)$$

Finalement, on déduit de (2.20), (2.22), (2.23) et (2.25) qu'il existe une constante positive K (indépendante de n) telle que pour tout entier $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}\big\|f_N\big\|_s &= \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \big|\widehat{f_N}(n+\beta N)\big|(1+|n+\beta N|)^s \\ &\leq K(1+|n|)^s = K\big\|f\big\|_s,\end{aligned}$$

pour $f(e^{it}) = e^{int}$. Cette inégalité est encore vraie pour n'importe quel polynôme trigonométrique, puis par densité, pour toute fonction f dans $A_s(\mathbb{T})$. □

Proposition 2.3.2. *Soit f dans $A_s(\mathbb{T})$, on a*

$$\lim_{N\to+\infty} \big\|f - f_N\big\|_s = 0,$$

où la suite $\big(f_N\big)_{N\geq 2}$ est définie en (2.1).

Démonstration. Dans un premier temps, on montre ce résultat pour $f(e^{it}) = e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Si $n = 0$, on déduit de (2.19) et (2.24) que pour tout entier $N \geq 2$, $f_N = 1$, de sorte que $f_N = f$. Nous supposerons dorénavant que $n \neq 0$. Soit $N \geq 2|n|$ fixé et $m = n + \beta N$ $(\beta \in \mathbb{Z})$. Si $\beta \neq 0$, alors $|m| \geq \big(|\beta| - \dfrac{1}{2}\big)N$ (grâce au fait que $N \geq 2|n|$). On déduit donc de (2.19) qu'il existe une constante positive C_1 (indépendante de N) telle que

$$\begin{aligned}\big|\widehat{f_N}(m)\big|(1+|m|)^s &\leq \frac{C_1}{|m|^{[s]+2-s}} \\ &\leq \frac{C_1}{\big(|\beta|-\frac{1}{2}\big)^{[s]+2-s} N^{[s]+2-s}}. \qquad (2.26)\end{aligned}$$

Et si $\beta = 0$, alors $m = n$, et par (2.18), on a

$$\widehat{f_N}(n) \quad = \quad (-1)^{[s]+1} \sum_{\nu=[s]+1}^{2[s]+1} \nu! \Big(\frac{2in\pi}{N}\Big)^{-\nu-1} \Psi_\nu\big(\frac{2in\pi}{N}\big). \tag{2.27}$$

D'après la formule (2.13) démontrée dans le lemme 2.2.4, la série de Taylor de Ψ_ν est donnée par

$$\Psi_\nu\big(\frac{2in\pi}{N}\big) \quad = \quad \sum_{\substack{J=\nu+1 \\ j+\nu \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{2(-1)^\nu}{J!} T([s], \nu - [s] - 1, J) \Big(\frac{2in\pi}{N}\Big)^J,$$

En distinguant le terme $J = \nu + 1$ dans cette expression de Ψ_ν, on obtient

$$\Big(\frac{2in\pi}{N}\Big)^{-\nu-1} \Psi_\nu\big(\frac{2in\pi}{N}\big) \quad = \quad \frac{2(-1)^\nu}{(\nu+1)!} T([s], \nu - [s] - 1, \nu + 1) + \Theta_\nu\big(\frac{2in\pi}{N}\big), \tag{2.28}$$

en posant

$$\Theta_\nu(z) = \sum_{\substack{J=\nu+3 \\ j+\nu \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{2(-1)^\nu}{J!} T([s], \nu - [s] - 1, J) z^{J-\nu-1}.$$

D'après le lemme 2.2.3, on a

$$\begin{aligned} T([s], \nu - [s] - 1, \nu + 1) \quad &= \quad (-1)^{[s]+1} \sum_{k=0}^{[s]} \binom{k}{\nu - [s] - 1} \sum_{j=k+[s]+1}^{\nu+1} (-1)^j \binom{\nu+1}{j} \binom{j-k-1}{[s]} \\ &= \quad (-1)^{[s]+1} \sum_{k=\nu-[s]-1}^{\min([s], \nu-[s])} \binom{k}{\nu - [s] - 1} \sum_{j=k+[s]+1}^{\nu+1} (-1)^j \binom{\nu+1}{j} \binom{j-k-1}{[s]}. \end{aligned}$$

En observant que la somme " $\displaystyle\sum_{k=\nu-[s]-1}^{\min([s],\nu-[s])}$ " devient " $\displaystyle\sum_{k=\nu-[s]-1}^{\nu-[s]}$ " si $[s] + 1 \le \nu \le 2[s]$, on obtient, après un calcul immédiat,

$$T([s], \nu - [s] - 1, \nu + 1) = \begin{cases} 0 & \text{if } [s] + 1 \le \nu \le 2[s] \\ (-1)^{[s]}([s] + 1) & \text{if } \nu = 2[s] + 1 \end{cases} . \tag{2.29}$$

Compte-tenu de (2.28) and (2.29), on déduit de (2.27) que

$$\widehat{f_N}(n) \quad = \quad 1 + (-1)^{[s]+1} \sum_{\nu=[s]+1}^{2[s]+1} \nu!\, \Theta_\nu\big(\frac{2in\pi}{N}\big).$$

Maintenant, la fonction $z \mapsto \dfrac{\theta_\nu(z)}{z^2}$ est bornée dans $\big\{z \in \mathbb{C} :\ |z| \le \pi\big\}$. Il existe donc une constante positive C_2 (indépendante de N) telle que

$$\big|\widehat{f_N}(n) - 1\big|(1 + |n|)^s \quad \le \quad \frac{C_2}{N^2}. \tag{2.30}$$

Comme $\widehat{f}(m) = 1$ si $m = n$ et $\widehat{f}(m) = 0$ sinon, on déduit de (2.26) et de (2.30) qu'il existe une constante positive C telle que

$$\|f_N - f\|_s \leq \frac{C}{N^{[s]+2-s}},$$

et donc

$$\lim_{N \to +\infty} \|f_N - f\|_s = 0.$$

Considérons maintenant le cas général : soit f dans $A_s(\mathbb{T})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $M_0 > 0$ tel que $\|f - g\|_s \leq \varepsilon$, où $g = \sum_{m=-M_0}^{M_0} \widehat{f}(m)e^{imt}$. En utilisant ce qui précède, il existe $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $\|g - g_N\|_s \leq \varepsilon$. Pour $N \geq N_0$, on déduit du lemme 2.3.1 que

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_s &\leq \|f - g\|_s + \|g - g_N\|_s + \|g_N - f_N\|_s \\ &\leq (1 + K)\|f - g\|_s + \|g - g_N\|_s \\ &\leq (2 + K)\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{N \to +\infty} \|f - f_N\|_s = 0.$$

□

Lemme 2.3.3. *Soit s un réel positif, et ω un poids vérifiant les conditions (W_s) et (A). Soit E un fermé de $\mathbb{T}$ qui est réunion finie d'arcs fermés non réduits à un point. Alors E est de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Supposons d'abord que E est un arc fermé de $\mathbb{T}$ non réduit à un point et d'extrémités ξ_1 et ξ_2. Soit $f \in A_\omega(\mathbb{T})$ une fonction qui s'annule sur E. Il s'agit de montrer que f est de synthèse spectrale pour E dans $A_\omega(\mathbb{T})$. Comme E n'est pas réduit à un point, f s'annule avec toutes ses dérivées sur E, et donc en paticulier aux points ξ_1 et ξ_2. D'après la proposition 1.2.7, $A_\omega(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin forte. Il existe donc deux suites $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ et $(\tau_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $A_\omega(\mathbb{T})$ telles que

(i) Pour tout $n \geq 1$, $\sigma_n = 0$ sur un voisinage de ξ_1 et $\tau_n = 0$ sur un voisinage de ξ_2.

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \|(\sigma_n - 1)f\|_\omega = \lim_{n \to +\infty} \|(\tau_n - 1)f\|_\omega = 0$.

Soit χ une fonction de $A_\omega(\mathbb{T})$ qui vaut 1 sur un voisinage de ξ_1 et qui est nulle sur un voisinage de ξ_2 (une telle fonction existe puisque l'algèbre $A_s(\mathbb{T})$ est régulière et que $\xi_1 \neq \xi_2$). Pour tout $n \geq 1$, posons $f_n = \sigma_n \chi f + \tau_n(1 - \chi)f$. Alors pour tout $n \geq 1$, f_n s'annule sur un voisinage de E et $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\omega = 0$, ce qui prouve que f est de synthèse spectrale pour E dans $A_\omega(\mathbb{T})$.

Supposons maintenant que $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$, où les E_i sont des arcs fermés de $\mathbb{T}$ non réduits à un point et deux à deux disjoints. Soit $(U_i)_{1\leq i\leq k}$ un recouvrement de $\mathbb{T}$ par des ouverts tel que pour chaque i, $E_i \subset U_i$ et $E_i \cap U_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Puisque l'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ est régulière, il existe une partition de l'unité $\big(\phi_i\big)_{1\leq i\leq k}$ subordonnée à $\big(U_i\big)_{1\leq i\leq k}$ (voir [25], p.221). Autrement dit, chaque ϕ_i est une fonction de $A_\omega(\mathbb{T})$ à support dans U_i, et on a $1 = \phi_1 + \ldots + \phi_k$. Soit f une fonction dans $A_\omega(\mathbb{T})$ qui s'annule sur E. D'après ce qui précède, pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$, il existe une suite de fonctions $\big(f_{i,n}\big)_{n\geq 0}$ dans $A_\omega(\mathbb{T})$ qui s'annulent sur un voisinage de E_i et telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|f_{i,n} - f\big\|_\omega = 0.$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose $f_n = \phi_1 f_{1,n} + \ldots + \phi_k f_{k,n}$. Les fonctions f_n s'annulent sur un voisinage de E et la suite $\big(f_n\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\phi_1 f + \ldots + \phi_k f = f$ pour la norme $\|\;\|_\omega$. Par conséquent, f est de synthèse spectrale pour E dans $A_s(\mathbb{T})$. $\square$

Voici le principal résultat de cette section :

Théorème 2.3.4. *Soit s un réel positif et $q \geq 3$ un entier. Le parfait symétrique $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_s(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Soit $f \in I_s(E_{\frac{1}{q}})$, on doit montrer que $f \in J_s(E_{\frac{1}{q}})$. Comme $E_{\frac{1}{q}}$ est parfait, on observe que f s'annule, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur à $[s]$, sur $E_{\frac{1}{q}}$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$F_n = \bigcup_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n \in \{0,1\}^n} L_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n},$$

où $L_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ est l'arc fermé $\Big\{e^{2i\pi t} \,:\, t \in \Big[(q-1)\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k q^{-k}, (q-1)\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k q^{-k} + q^{-n}\Big]\Big\}$. On a $E_{\frac{1}{q}} = \bigcap_{n\geq 1} F_n$ (voir chapitre I de [24] pour plus de détails). Pour $n \geq 1$, les fonctions f_{q^n} et f coïcident, ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre inférieur à $[s]$, sur les extrémités des arcs $L_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ de F_n. Puis, comme $E_{\frac{1}{q}}$ est parfait, pour tout $0 \leq k \leq [s]$, $f^{(k)}$ s'annule sur ces extrémités. Donc par construction, les fonctions f_{q^n} s'annulent sur les arcs $L_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$, et donc sur F_n. D'après le lemme 2.3.3, F_n est de synthèse spectrale dans $A_s(\mathbb{T})$. Par conséquent, chaque fonction f_{q^n} est dans $J_s(E_{\frac{1}{q}})$. Comme $J_s(E_{\frac{1}{q}})$ est fermé dans $A_s(\mathbb{T})$, on déduit de la proposition 2.3.2 que $f \in J_s(E_{\frac{1}{q}})$. $\square$

Chapitre 3

Idéaux fermés de $A_s^+(\mathbb{T})$ et de $\Lambda_s^+(\mathbb{T})$

3.1 Notations et rappels

On note $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions holomorphes et bornées dans $\mathbb{D}$. On rappelle que toute fonction f de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ se factorise de façon unique sous la forme $f = S(f)E(f)$, où $S(f)$ est une fonction intérieure et $E(f)$ une fonction extérieure. $S(f)$ s'écrit $S(f) = cBJ$, où c est un complexe de module 1, B un produit de Blaschke formé avec les zéros de f à l'intérieur du disque, et J une fonction singulière associée à une mesure positive singulière μ :

$$J(z) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{d}\mu(t)\Big\} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

La fonction extérieure $E(f)$ associée à f s'écrit $E(f) = \exp\Big\{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\big|f(e^{it})\big|\mathrm{d}t\Big\}$.
Soit X un espace de fonctions tel que $X \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, on pose

$$X^+ = \Big\{ f \in X :\ \widehat{f}(n) = 0 \quad (n < 0)\Big\},$$

qui est donc l'ensemble des fonctions de X qui admettent un prolongement holomorphe à l'intérieur du disque. Soit p un entier positif tel que $X \subset \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$. Pour $f \in X^+$, on pose

$$Z_+^k(f) = \Big\{ z \in \overline{\mathbb{D}} :\ f(z) = \ldots = f^{(k)}(z) = 0\Big\} \quad \big(k \in \{0, \ldots, p\}\big).$$

Si I est une partie non vide de X^+, on note S_I son facteur intérieur, c'est-à-dire le plus grand diviseur intérieur commun à tous les éléments de I non nuls (voir [21] p.85), et on pose $h_+^k(I) = \displaystyle\bigcap_{f \in I} Z_+^k(f)$. Si $E_p \subset \ldots \subset E_0$ sont des fermés de $\mathbb{T}$ et S une fonction intérieure, on définit

$$I\big(S;\, E_0, \ldots, E_p\big) = \Big\{ f \in X^+ :\ S\big|S(f),\ f(E_0) = 0, \ldots, f^{(p)}(E_p) = 0\Big\},$$

où $S\big|S(f)$ signifie que S divise $S(f)$, c'est-à-dire que $\dfrac{S(f)}{S}$ est dans $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$.

Pour plusieurs algèbres de Banach X, les idéaux fermés de X^+ sont de la forme $I = I\big(S_I;\, E_0, \dots, E_p\big)$ (voir [33], [28] et [34]). Dans la section 3.2, nous rappelons ces résultats bien connus, dont on se servira dans le chapitre suivant. Dans la section 3.3, on s'intéresse aux idéaux fermés de $A_s^+(\mathbb{T}) = \big(A_s(\mathbb{T})\big)^+$, où $A_s(\mathbb{T})$ est l'algèbre de Banach définie dans le chapitre 2. On a peu de résultats à ce sujet. On citera le résultat énoncé dans [6] qui permet de caractériser les idéaux fermés I de $A_s^+(\mathbb{T})$ tels que $h_+^0(I)$ est fini. On obtient ensuite un résultat partiel qui donne la structure des idéaux fermés I de $A_s^+(\mathbb{T})$ sans facteur intérieur et tels que $h_+^0(I)$ est dénombrable.

3.2 Idéaux fermés de $\lambda_s^+(\mathbb{T})$

Comme nous le verrons dans la section 3.3, on ne connaît pas la caractérisation des idéaux fermés I de $A_s^+(\mathbb{T})$ lorsque $h_+^0(I)$ est inclus dans un parfait symétrique E_ξ, pour $\xi \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$. Pour avoir les résultats que nous obtenons dans le chapitre 4 concernant les opérateurs à spectre inclus dans E_ξ (notamment), nous utilisons des résultats déjà connus et concernant les idéaux fermés des algèbres $\Lambda_s^+(\mathbb{T})$ définies ci-dessous.

On note $\mathcal{A}^0(\mathbb{D}) = \mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note

$$\mathcal{A}^p(\mathbb{D}) = \mathcal{A}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^p(\mathbb{T}).$$

Autrement dit pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a $\mathcal{A}^p(\mathbb{D}) = \big(\mathcal{C}^p(\mathbb{T})\big)^+$. Soit s un réel positif. On définit

$$\Lambda_s(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T}) : \sup_{z,z' \in \mathbb{T}} \frac{\big|f^{([s])}(z) - f^{([s])}(z')\big|}{|z - z'|^{s-[s]}} < +\infty \Big\}.$$

$\Lambda_s(\mathbb{T})$ muni de la norme $\big\|f\big\|_{\Lambda_s} = \big\|f\big\|_{\mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T})} + \sup\limits_{z,z' \in \mathbb{T}} \dfrac{\big|f^{([s])}(z) - f^{([s])}(z')\big|}{|z - z'|^{s-[s]}}$ est une algèbre de Banach. On définit également la sous-algèbre

$$\lambda_s(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T}) : \big|f^{([s])}(z) - f^{([s])}(z')\big| = o\big(|z - z'|^{s-[s]}\big),\ |z - z'| \to 0 \Big\},$$

que l'on munit de la même norme. On notera également $\Lambda_s^+(\mathbb{T}) = \big(\Lambda_s(\mathbb{T})\big)^+$ et $\lambda_s^+(\mathbb{T}) = \big(\lambda_s(\mathbb{T})\big)^+$. On remarque que si s est un entier positif, $\Lambda_s(\mathbb{T}) = \lambda_s(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^s(\mathbb{T})$ et $\Lambda_s^+(\mathbb{T}) = \lambda_s^+(\mathbb{T}) = \mathcal{A}^s(\mathbb{D})$. Pour des commodités d'écriture, on posera également $\Lambda_\infty(\mathbb{T}) = \lambda_\infty(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ et $\Lambda_\infty^+(\mathbb{T}) = \lambda_\infty^+(\mathbb{T}) = \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$

Tous les idéaux fermés de $\lambda_s^+(\mathbb{T})$ (pour $s \in [0, +\infty]$) ont déjà été caractérisés. Quand $s = 0$, la caractérisation a été obtenue par W. Rudin dans [33], quand s est un entier strictement positif, par B. I. Korenblyum dans [28], et quand $s = +\infty$ par B. A. Taylor et D. L. Williams dans [35]. Enfin, quand $0 < s < 1$, elle est due à A. L. Matheson dans [30], et dans tous les autres cas, à F. A. Shamoyan dans [34]. Ils ont montré le résultat suivant :

Proposition 3.2.1. ([33], [28], [30], [34] et [35]) *Soient $s \in [0, +\infty]$ et I un idéal fermé de $\lambda_s^+(\mathbb{T})$. Si $s \in [0, +\infty)$, alors*

$$I = I\big(S_I;\, h_+^0(I) \cap \mathbb{T}, \ldots, h_+^{[s]}(I) \cap \mathbb{T}\big).$$

Et si $s = +\infty$,

$$I = \Big\{f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D}) :\, S_I \big| S(f),\, E_k \subset Z_+^k(f) \cap \mathbb{T} \quad (k \geq 0)\Big\}.$$

3.3 Idéaux fermés de $A_s^+(\mathbb{T})$

Dans le cas où $s = 0$, les idéaux fermés de $A^+(\mathbb{T}) = \big(A_0(\mathbb{T})\big)^+$ ont déjà été étudiés par le passé, même si leur caractérisation n'est pas complète, contrairement au cas d'autres algèbres de fonctions vues ci-dessus. J. P. Kahane dans [23] a étudié le cas où $h_+^0(I)$ est fini, et C. Bennett et J. E. Gilbert dans [6] le cas où $h_+^0(I)$ est dénombrable. Ils ont montré que si I est un idéal fermé de $A^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable, alors

$$I = I\big(S_I;\, h_+^0(I) \cap \mathbb{T}\big)$$

C. Bennett et J. E. Gilbert ont également conjecturé dans [6] que tout idéal fermé I de $A^+(\mathbb{T})$ pouvait s'écrire

$$I = I^A \cap S_I \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}), \tag{3.1}$$

où I^A est l'idéal fermé engendré par I dans $A(\mathbb{T})$. Mais J. Esterle a construit un idéal fermé I de $A^+(\mathbb{T})$ tel que $I \neq I^A \cap S_I \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, démontrant ainsi que la conjecture de C. Bennett et J. E. Gilbert est fausse. D'autre part, J. Esterle, E. Strouse et F. Zouakia dans [18] ont montré que si I est un idéal fermé de $A^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I) \subset E_{\frac{1}{q}}$ pour $q \geq 3$ un entier, alors on avait (3.1). Nous nous intéressons maintenant aux idéaux fermés de $A_s^+(\mathbb{T})$ pour s un réel positif quelconque. Le résultat que nous connaissons à ce sujet est le théorème B énoncé dans [6], et qui nous permet de caractériser les idéaux fermés I de $A_s^+(\mathbb{T})$ tels que $h_+^0(I)$ est fini.

Proposition 3.3.1. *Soient s un réel positif et I un idéal fermé de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est fini. Alors on a*

$$I = I\big(S_I;\, h_+^0(I) \cap \mathbb{T}, \ldots, h_+^{[s]}(I) \cap \mathbb{T}\big).$$

Démonstration. Puisque l'algèbre $A_s(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin analytique forte (proposition 1.2.4), le théorème B de [6] nous assure que tout idéal fermé I de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est fini, est de la forme

$$I = I^{A_s} \cap S_I \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}),$$

où I^{A_s} est l'idéal fermé de $A_s(\mathbb{T})$ engendré par I. On a $I^{A_s} = \bigcup_{n \geq 0} \overline{\alpha^{-n} I}^{A_s(\mathbb{T})}$ et $h^k(I^{A_s}) = h_+^k(I) \cap \mathbb{T}$, $0 \leq k \leq [s]$. Par conséquent, compte-tenu du théorème 1.2.9, I est de la forme

$$I = I\big(S_I;\, h_+^0(I) \cap \mathbb{T}, \ldots, h_+^{[s]}(I) \cap \mathbb{T}\big).$$

$\square$

Soit I un idéal fermé non réduit à $\{0\}$ de $A_s^+(\mathbb{T})$, on note

$$\pi_s^+ : A_s^+(\mathbb{T}) \longrightarrow A_s^+(\mathbb{T})/I$$

la surjection canonique. On rappelle que S_I désigne le facteur intérieur de I. On notera également μ_I la mesure singulière associée à S_I. Nous nous intéressons maintenant au cas dénombrable.

On dit qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la condition de Carleson si

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{d(e^{it}, E)} \mathrm{d}t < +\infty. \tag{C}$$

Pour E un fermé de $\mathbb{T}$, on notera souvent $\big(I_n\big)_{n\geq 0}$ la suite des arcs complémentaires de E. Cela signifie que $\mathbb{T}\backslash E = \bigcup\limits_{n\geq 0} I_n$, avec I_n des arcs ouverts deux à deux disjoints. Il est bien connu (voir [9]) qu'un ensemble E vérifie la condition de Carleson (C) si et seulement si

$$|E| = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |I_n| \log \frac{1}{|I_n|} < +\infty,$$

où $|E|$ est la mesure de Lebesgue de E et $\big(I_n\big)_{n\geq 0}$ la suite des arcs complémentaires de E. L. Carleson a montré dans [9] le résultat suivant :

Proposition 3.3.2. [9] Soit $s > 0$ et E un fermé de $\mathbb{T}$. E vérifie la condition de Carleson (C) si et seulement s'il existe une fonction f dans $\Lambda_s^+(\mathbb{T})\backslash\{0\}$ qui s'annule sur E.

Plus précisèment, lorsque E vérifie la condition (C), L. Carleson construit une fonction extérieure non nulle dans $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ et qui s'annule exactement sur E. B. A. Taylor et D. L. Williams ont amélioré ce résultat et montré dans [35] le résultat suivant :

Proposition 3.3.3. ([35]) *Si E est un ensemble de Carleson, il existe une fonction extérieure non nulle dans $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ qui s'annule avec toutes ses dérivées sur E.*

Si I est un idéal fermé de $A_s^+(\mathbb{T})$ (respectivement $f \in A_s^+(\mathbb{T})$), on note μ_I (respectivement $\mu(f)$) la mesure singulière associée à S_I (respectivement à $S(f)$). Le lemme suivant a été établi dans [18] (lemme 1.3) dans le cas $s = 0$. Le cas $s > 0$ s'obtient exactement de la même façon.

Lemme 3.3.4. ([18]) *Soit I un idéal fermé non nul de $A_s^+(\mathbb{T})$. Il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'élements de I telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|\mu(f_n) - \mu_I\big\| = 0.$$

Le lemme suivant a été établi par A. Atzmon dans la preuve de la proposition 8 de [4] dans le cas où $I = \Big\{f \in A_s^+(\mathbb{T}) : f_{|_E} = 0\Big\}$. Nous l'établissons ici pour tout idéal fermé I sans facteur intérieur.

Lemme 3.3.5. *Soient s un réel positif et I un idéal fermé non réduit à $\{0\}$ de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $S_I = 1$. Alors*

$$\left\|\pi_s^+(\alpha)^{-n}\right\| = O\big(e^{\varepsilon\sqrt{n}}\big)\ (n \to +\infty),\quad \textit{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Démonstration. Soit T l'opérateur défini sur $A_s^+(\mathbb{T})/I$ par

$$T:\ \pi_s^+(f) \longmapsto \pi_s^+(\alpha)\pi_s^+(f),$$

où $\alpha:\ z \mapsto z$. Il s'agit de montrer que $\left\|T^{-n}\right\| = O\big(e^{\varepsilon\sqrt{n}}\big)\ (n \to +\infty)$, pour tout $\varepsilon > 0$. T est un opérateur continu dont le spectre SpT est égal à $h_0^+(I)$. On notera Φ la résolvante de T, qui est la fonction analytique dans $\mathbb{C}\backslash SpT$ définie par $\Phi(z) = (z-T)^{-1}$. D'après le lemme 2 de [4], il suffit de montrer que $\left\|\Phi(z)\right\| = O\big(e^{\frac{\varepsilon}{1-|z|}}\big)\ (|z| \to 1^-)$, pour tout $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $(\alpha - z)^{-1} \in A_s(\mathbb{T})$ et

$$\left\|(\alpha - z)^{-1}\right\|_s \leq C(1-|z|)^{-([s]+2)}. \tag{3.2}$$

Soit $f \in I$ non nulle. La fonction $\Psi_z = \dfrac{f - f(z)}{\alpha - z}$ est dans $A_s^+(\mathbb{T})$ et on a

$$\begin{aligned}\left\|\Psi_z\right\|_s &\leq \left\|f - f(z)\right\|_s\left\|(\alpha - z)^{-1}\right\|_s\\ &\leq 2C\left\|f\right\|_s(1-|z|)^{-([s]+2)}\end{aligned}$$

Comme $f \in I$, on a $f(T) = 0$ et par conséquent, $-f(z)\Phi(z) = \Psi_z(T)$. D'où

$$\begin{aligned}\left\|f(z)\Phi(z)\right\| &= \left\|\Psi_z(T)\right\|\\ &\leq \left\|\Psi_z\right\|_s \leq 2C\left\|f\right\|_s(1-|z|)^{-([s]+2)}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Notons $\nu(f)$ la partie discrète de la mesure singulière associée à la partie singulière de f. On déduit alors de (3.3) et du lemme 5 de [4] que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\|f(z)\Phi(z)\right\| = O\Big(e^{\frac{\|\nu(f)\|+\varepsilon}{1-|z|}}\Big)\quad (|z| \to 1^-),$$

où $\|\nu(f)\|$ désigne la variation totale de la mesure $\nu(f)$. On déduit alors du lemme 3.3.4 qu'il existe une fonction f dans I non nulle telle que $\|\nu(f)\| \leq \varepsilon$, ce qui achève cette démonstration. □

Nous n'avons pas réussi à prouver que tout idéal fermé I de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable peut s'écrire

$$I = I^{A_s} \cap S_I\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}), \tag{3.4}$$

où I^{A_s} est l'idéal fermé de $A_s(\mathbb{T})$ engendré par I. L'égalité (3.4) aurait permis de caractériser tous les idéaux fermés I de $A_s^+(\mathbb{T})$ tels que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable. Cependant, nous obtenons le résultat suivant concernant les idéaux fermés sans facteur intérieur :

Théorème 3.3.6. *Soit s un réel positif. Soit I un idéal fermé de $A_s^+(\mathbb{T})$ sans facteur intérieur (c'est-à-dire tel que $S_I = 1$) et tel que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable. Alors*

$$I = I\big(1; h_+^0(I) \cap \mathbb{T}, \dots, h_+^{[s]}(I) \cap \mathbb{T}\big). \tag{3.5}$$

Démonstration. Soit I un idéal fermé sans facteur intérieur de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable. On déduit du lemme 3.3.5 que

$$\big\|\pi_s^+(\alpha)^{-n}\big\| = O\big(e^{\varepsilon\sqrt{n}}\big)\ (n \to +\infty), \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

On considère alors le poids ω défini par

$$\begin{cases} \omega(n) = (1+n)^s & (n \geq 0) \\ \omega(-n) = (1+n)^s \sup\limits_{0<k\leq n} \big\|\pi_s^+(\alpha)^{-k}\big\| & (n > 0), \end{cases}$$

et on définit l'application continue $\theta : A_\omega(\mathbb{T}) \longrightarrow A_s^+(\mathbb{T})/I$ par

$$\theta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\pi_s^+(\alpha)^n.$$

On a $\theta_{|_{A_s^+(\mathbb{T})}} = \pi_s^+$, et donc

$$\operatorname{Ker}\theta \cap A_s^+(\mathbb{T}) = I.$$

Si I^{A_ω} désigne l'idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ engendré par I, on a $I^{A_\omega} = \overline{\bigcup\limits_{n\geq 0} \alpha^{-n} I}^{A_\omega(\mathbb{T})}$. Or il est facile de voir que pour tout $n \geq 0$, $\alpha^{-n} I \subset \operatorname{Ker}\theta$, et donc

$$I^{A_\omega} \cap A_s^+(\mathbb{T}) \subset \operatorname{Ker}\theta \cap A_s^+(\mathbb{T}) = I.$$

L'autre inclusion étant évidente, on a donc

$$I = I^{A_\omega} \cap A_s^+(\mathbb{T}). \tag{3.6}$$

Puisque $S_I = 1$, on a pour tout $0 \leq k \leq [s]$, $h_+^k(I) \subset \mathbb{T}$. Il est également facile de voir que pour tout $0 \leq k \leq [s]$, $h^k\big(I^{A_\omega}\big) = h_+^k(I)$. Par conséquent, on déduit du théorème 1.2.9 et de (3.6) que

$$I = I\big(1; h_+^0(I), \dots, h_+^{[s]}(I)\big),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Nous ne savons pas non plus si tout idéal fermé I de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est inclus dans le Cantor triadique vérifie (3.4), et n'avons pas obtenu la caractérisation des idéaux fermés I de $A_s^+(\mathbb{T})$ dans le cas où $h_+^0(I)$ est inclus dans le Cantor triadique.

Chapitre 4

Opérateurs

Soit T un opérateur continu sur un espace de Banach complexe X. On note $Sp\,T$ son spectre, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes c tels que $T-cI$ n'est pas inversible, I désignant l'opérateur identité sur X. On note également $r(T)$ son rayon spectral, il est donné par la formule $r(T) = \limsup_{n\to+\infty} \left\|T^n\right\|^{1/n}$. On rappelle que $Sp\,T$ est un compact non vide inclus dans le disque fermé $\overline{D(0, r(T))}$. Si T est inversible, on notera T^{-1} son inverse, qui est lui aussi un opérateur continu. Le spectre de T est dans ce cas inclus dans la couronne

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \; r(T^{-1})^{-1} \leq |z| \leq r(T)\right\}.$$

Ce chapitre regroupe les résultats que nous avons obtenus concernant certaines propriétés de croissance des normes $\|T^{-n}\|\,(n \geq 0)$ pour des opérateurs T à spectre inclus dans $\mathbb{T}$. La première section est dédiée aux opérateurs à spectre dénombrable et utilise largement le chapitre 1 et l'étude des algèbres $A_\omega(\mathbb{T})$. Dans la section 5.2, nous étudions le cas des opérateurs dont le spectre est un K-ensemble.

4.1 Opérateurs à spectre dénombrable

4.1.1 Notations

On munit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ de sa topologie d'espace de Fréchet usuelle définie par les normes $\left(\rho_\nu\right)_{\nu\in\mathbb{R}^+}$ définies par

$$\rho_\nu(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right|(1+|n|)^\nu.$$

Soit E un fermé du cercle unité, on définit

$$I_\infty(E) = \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) : \; f^{(i)}_{|_E} = 0 \quad (i \geq 0)\right\},$$

et on pose $I^+_\infty(E) = I_\infty(E) \cap \mathcal{A}^\infty$.
Le dual de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ est $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$, l'ensemble des distributions sur $\mathbb{T}$. On associe à chaque distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ une suite de coefficients de Fourier $\left(\widehat{T}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, où pour tout entier

n, $\hat{T}(n) = \langle \alpha^{-n}, T \rangle$ (avec $\alpha : z \mapsto z$), qui vérifient $|\hat{T}(n)| = O(|n|^m)$ pour un certain entier $m \geq 0$. La dualité entre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ est donnée par la formule

$$\langle f, T \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\widehat{T}(-n) \qquad \big(f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}), T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})\big).$$

$I_\infty(E)^\perp$ $\big($resp. $I_\infty^+(E)^\perp\big)$ désigne l'ensemble des distributions s'annulant sur $I_\infty(E)$ $\big($resp. sur $I_\infty^+(E)\big)$. De même $\big(\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})\big)^\perp$ est l'ensemble des distributions s'annulant sur $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$, c'est-à-dire les distributions à coefficients négatifs nuls.

Dans le cas particulier où le poids ω est défini par $\omega(n) = (1+n)^s$ et $\omega(-n) = (1+n)^t$ pour tout $n \geq 0$, avec t et s deux réels, on notera $\big(A_{s,t}(\mathbb{T}), \| \|_{s,t}\big)$ l'algèbre $\big(A_\omega(\mathbb{T}), \| \|_\omega\big)$. Nous supposerons dorénavant que $t \geq s$, de sorte que $A_{s,t}(\mathbb{T})$ satisfait les conditions ($\mathrm{W_s}$) et (A), définies dans le chapitre 1. Si E est un fermé de $\mathbb{T}$, on notera

$$I_{s,t}(E) = \Big\{ f \in A_{s,t}(\mathbb{T}) : f_{|E} = \ldots = f_{|E}^{([s])} = 0 \Big\},$$

et $I_s^+(E) = I_{s,t}(E) \cap A_s^+(\mathbb{T})$. On remarque que $I_s^+(E) = I\big(1; E, \ldots, E\big)$ avec les notations introduites dans le chapitre précédent. On identifiera le dual de $A_{s,t}(\mathbb{T})$ (que l'on note $\big(A_{s,t}(\mathbb{T})\big)'$) au sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ formé des distributions T telles que $\sup\limits_{n \leq 0} \dfrac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} + \sup\limits_{n>0} \dfrac{|\hat{T}(n)|}{(1+n)^t} < +\infty$. $I_{s,t}(E)^\perp$ $\big($resp. $I_s^+(E)^\perp\big)$ désigne l'ensemble des éléments de $\big(A_{s,t}(\mathbb{T})\big)'$ s'annulant sur $I_{s,t}(E)$ $\big($resp. sur $I_s^+(E)\big)$. De même $A_s^+(\mathbb{T})^\perp$ est l'ensemble des éléments de $\big(A_{s,t}(\mathbb{T})\big)'$ s'annulant sur $A_s^+(\mathbb{T})$, c'est-à-dire les éléments de $\big(A_{s,t}(\mathbb{T})\big)'$ à coefficients négatifs nuls.

Définition 4.1.1. *Soit X un espace de fonctions tel que $X \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Soit p le plus grand élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que $X \subset \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$. On dira qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ est un ensemble d'interpolation pour X si pour toute fonction f dans X, il existe une fonction g dans X^+ telle que*

$$f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z) \quad \big(z \in E, 0 \leq k \leq p\big).$$

On rappelle également qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la condition de Carleson (C) si

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{d(e^{it}, E)} \mathrm{d}t < +\infty, \tag{C}$$

et qu'il vérifie la condition (ATW) s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\frac{1}{|L|} \int_L \log^+ \frac{1}{d(e^{it}, E)} \mathrm{d}t \leq C_1 \log \frac{1}{|L|} + C_2\,, \quad \text{pour tout arc } L \text{ de } \mathbb{T}, \tag{ATW}$$

où $|L|$ désigne la longueur de l'arc L, et $d(e^{it}, E)$ la distance de e^{it} à E. Cette condition géométrique (ATW) caractérise les ensembles d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$. C'est un résultat établi par H. Alexander, B. A. Taylor et D. L. Williams dans [3] et que nous énonçons sous forme de proposition :

Proposition 4.1.1. ([3]) *Un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la condition (ATW) si et seulement si E est un ensemble d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$.*

Soit E un fermé de $\mathbb{T}$ et t, s deux réels positifs. On désignera par $P(s,t,E)$ la propriété suivante : tout opérateur T sur un espace de Banach tel que $\mathrm{Sp\,T} \subset \mathrm{E}$ et qui vérifie les conditions :

$$\|T^n\| = O(n^s) \ (n \to +\infty) \tag{4.1}$$

$$\|T^{-n}\| = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \ (n \to +\infty), \ \text{ pour tout } \varepsilon > 0, \tag{4.2}$$

vérifie également la propriété plus forte

$$\|T^{-n}\| = O(n^t)\,(n \to +\infty). \tag{4.3}$$

M. Zarrabi a montré dans [40] (théorème 3.1 et remarque 2.a) qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la propriété $P(0,0,E)$ si et seulement si E est dénombrable. Le but de cette section est d'étudier la propriété $P(s,t,E)$ pour n'importe quel réel $s \geq 0$. Plus précisèment, nous obtenons le résultat suivant :
Soit E un fermé dénombrable du cercle unité $\mathbb{T}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) E vérifie la condition (ATW).
(ii) E vérifie la condition (C) et pour tout $s \geq 0$, il existe $t \geq s$ tel que la propriété $P(s,t,E)$ soit vérifiée.
Celui-ci sera démontré dans la sous-section 4.1.3. Au préalable, nous aurons besoin de résultats concernant les ensembles d'interpolation et qui font l'objet de la sous-section 4.1.2. Nous y donnons des caractésations à l'aide des espaces duaux des ensembles d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$, puis des ensembles d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$, pour $s \leq t$ des réels positifs. Puis nous faisons le lien entre ces ensembles d'interpolation.

4.1.2 Ensemble d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ et pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$

Nous commençons par la caractérisation suivante des ensembles d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$:

Proposition 4.1.2. *Soit E un fermé du cercle unité, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) E est un ensemble d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$.
(ii) $I_\infty^+(E)^\perp = I_\infty(E)^\perp + \big(\mathcal{A}^\infty\big)^\perp$.
(iii) Pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ et $t \geq 0$ tels que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^t} \leq C \sup_{n\leq 0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} \qquad \Big(T \in I_\infty(E)^\perp\Big).$$

Démonstration. L'équivalence $(i) \iff (ii)$ a été établie dans [3] (proposition 2.1). On va achever la preuve en prouvant que $(i) \iff (iii)$. On sait que E est d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ si et seulement si l'injection canonique

$$i \,:\, \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})/I_\infty^+(E) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})/I_\infty(E)$$

est surjective. Puis en utilisant la proposition 4, IV.30 de [7] qui caractérise les surjections entre espaces de Fréchet, on déduit que E est d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ si et seulement si pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ et $t \geq 0$ tels que pour tout T dans $I_\infty(E)^\perp$

$$\Big(|\langle f, T\rangle| \leq \rho_s(f)\,, \quad f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})/I_\infty^+(E)\Big) \implies \Big(|\langle f, T\rangle| \leq C\rho_t(f)\,, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})/I_\infty(E)\Big),$$

c'est-à-dire si et seulement si pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ et $t \geq 0$ tels que

$$\Big(\sup_{n\leq 0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} \leq 1\,, \quad T \in I_\infty(E)^\perp\Big) \implies \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^t} \leq C,$$

ce qui est clairement équivalent à (iii). □

On a également un résultat analogue concernant les ensembles d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$ $(t \geq s)$. La démonstration est similaire à celle de la proposition 4.1.2.

Proposition 4.1.3. *Soit E un fermé du cercle unité et s, t deux réels positifs tels que $t \geq s$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) E est un ensemble d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$.

(ii) $I_s^+(E)^\perp = I_{s,t}(E)^\perp + A_s^+(\mathbb{T})^\perp$.

(iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{n>0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^t} + \sup_{n\leq 0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} \leq C \sup_{n\leq 0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} \qquad \Big(T \in I_{s,t}(E)^\perp\Big).$$

On est maintenant en mesure d'énoncer un résultat qui fait le lien entre les ensembles d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ et les ensembles d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$ $(t \geq s)$.

Théorème 4.1.4. *Soit E un fermé du cercle unité $\mathbb{T}$.*

1) On suppose que E est d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$. Alors pour tout $s \geq 0$, il existe $t \geq s$ tel que E soit d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$.

2) Réciproquement, on suppose que E est dénombrable et que pour tout $s \geq 0$, il existe $t \geq s$ tel que E soit d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$. Alors E est d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$.

Démonstration. 1) Cette assertion découle directement des caractérisations (iii) des propositions 4.1.2 et 4.1.3 puisque $I_{s,t}(E)^\perp$ s'injecte dans $I_\infty(E)^\perp$.
2) Supposons que E vérifie les hypothèses de l'assertion 2), on va montrer que E satisfait la propriété (iii) de la proposition 4.1.2. Soit s un réel strictement positif, il existe $t \geq s$ tel que E soit d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$. Donc d'après la proposition 4.1.3, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout élément de $I_{s,t}(E)^\perp$,

$$\sup_{n>0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^t} \leq C \sup_{n\leq 0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^s}. \tag{4.4}$$

Soit alors T un élément de $I_\infty(E)^\perp$. Si $\sup_{n\leq 0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} = +\infty$, alors T vérifie trivialement (4.4). Supposons donc que $\sup_{n\leq 0} \frac{|\hat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} < +\infty$. Il existe alors $t' \geq t$ tel que T soit dans $\big(A_{s,t'}(\mathbb{T})\big)'$. Notons K la fermeture de $I_\infty(E)$ dans $A_{s,t'}(\mathbb{T})$. On vérifie facilement que K est un idéal fermé de $A_{s,t'}(\mathbb{T})$ tel que $h(K) \subset E$, et ainsi d'après le théorème 1.2.9, $I_{s,t'}(E) \subset K$. L'inclusion inverse étant acquise, on a finalement $K = I_{s,t'}(E)$. Et comme T est dans $I_\infty(E)^\perp$, T appartient à $I_{s,t'}(E)^\perp$ par continuité de T sur $A_{s,t'}(\mathbb{T})$. Mais puisque E est d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$, les inclusions naturelles

$$A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E) \subset A_{s,t'}(\mathbb{T})/I_{s,t'}(E) \subset A_{s,t}(\mathbb{T})/I_{s,t}(E),$$

sont en réalité des égalités. Par conséquent leurs duaux sont égaux et donc $T \in I_{s,t}(E)^\perp$. Ainsi T vérifie la propriété (4.4), ce qui achève la démonstration. $\square$

4.1.3 Opérateurs dont le spectre est dénombrable

Nous avons la proposition suivante qui fait le lien entre les ensembles d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$ et la propriété $P(s,t,E)$.

Proposition 4.1.5. *Soit E un fermé du cercle unité, s et t deux réels positifs tels que $t \geq s$.*

1) On suppose que E est dénombrable et d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$, alors E vérifie la propriété $P(s,t,E)$.

2) Réciproquement, si E vérifie la condition de Carleson (C) et la propriété $P(s,t,E)$, alors E est d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$.

Démonstration. 1) Soit E un fermé dénombrable et d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$. Soit T un opérateur inversible sur un espace de Banach X vérifiant les conditions (4.1) et (4.2) et tel que $Sp\,T \subset E$. On définit alors le poids ω par

$$\begin{cases} \omega(n) = (1+n)^s & (n \geq 0) \\ \omega(-n) = (1+n)^s \sup\limits_{0<k\leq n} \left\|T^{-k}\right\| & (n > 0). \end{cases}$$

Notons que le poids ω satisfait les conditions ($\mathrm{W_s}$) et (A). On peut définir un homomorphisme borné Φ de $A_\omega(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{L}(X)$ par

$$\Phi(f) = f(T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) T^n \qquad \big(f \in A_\omega(\mathbb{T})\big).$$

$ker\,\Phi$ est un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$. Puisque $A_\omega(\mathbb{T})$ est régulière, on a $h(ker\,\Phi) = Sp\,T \subset E$ (voir [17], théorème 2.5), et donc $\Big\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f_{|E} = \cdots = f^{([s])}_{|E} = 0\Big\} \subset ker\,\Phi$ d'après le théorème 1.2.9. On utilise alors des méthodes similaires à celles utilisées dans [40] pour la preuve du théorème 2.6. On pose $\Psi = \Phi_{|_{A_s^+(\mathbb{T})}}$, on a

$$I_s^+(E) \subset ker\,\Phi \cap A_s^+(\mathbb{T}) = ker\,\Psi.$$

Par conséquent Ψ se factorise en un homomorphisme $\tilde{\Psi}$ de $A_s^+/I_s^+(E)$ dans $\mathcal{L}(X)$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_{s,t}(\mathbb{T}) \arrow[d, "\pi_{s,t}"'] & A_s^+(\mathbb{T}) \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_s^+"'] & \mathcal{L}(X) \\
A_{s,t}(\mathbb{T})/I_{s,t}(E) & A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E) \arrow[l, "\tilde{\imath}"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\Psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\pi_{s,t}$ (resp. π_s^+) est la surjection canonique de $A_{s,t}(\mathbb{T})$ sur $A_{s,t}(\mathbb{T})/I_{s,t}(E)$ $\big($resp. de $A_s^+(\mathbb{T})$ sur $A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E)\big)$, et i (resp. $\tilde{\imath}$) est l'injection canonique de $A_s^+(\mathbb{T})$ dans $A_{s,t}(\mathbb{T})$ $\big($resp. de $A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E)$ dans $A_{s,t}(\mathbb{T})/I_{s,t}(E)$ $\big)$. Mais puisque E est d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$, $\tilde{\imath}$ est en réalité une bijection et on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} T^{-n} &= \tilde{\Psi}\Big(\big[\pi_s^+(\alpha^n)\big]^{-1}\Big) \\ &= \tilde{\Psi} \circ \tilde{\imath}^{\,-1}\big(\pi_{s,t}(\alpha^{-n})\big). \end{aligned}$$

Comme Ψ est bornée, $\tilde{\Psi}$ est aussi bornée. Par ailleurs $\tilde{\imath}$ est un isomorphisme bicontinu et par conséquent on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \big\|T^{-n}\big\| &= \big\|\tilde{\Psi} \circ \tilde{\imath}^{\,-1}\big(\pi_{s,t}(\alpha^{-n})\big)\big\| \\ &\leq \big\|\tilde{\Psi} \circ \tilde{\imath}^{\,-1}\big\|\big\|\pi_{s,t}(\alpha^{-n})\big\| \\ &\leq \big\|\tilde{\Psi} \circ \tilde{\imath}^{\,-1}\big\|(1+n)^t, \end{aligned}$$

ce qui prouve que T vérifie la propriété (4.3).
2) Pour la réciproque, on considère l'opérateur T défini sur $A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E)$ par

$$T \,:\, \pi_s^+(f) \longmapsto \pi_s^+(\alpha f) \qquad \big(f \in A_s^+(\mathbb{T})\big),$$

où π_s^+ est la surjection canonique de $A_s^+(\mathbb{T})$ sur $A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E)$. On a $\big\|T^n\big\| = O\big(n^s\big)$ $(n \to +\infty)$. Or, puisque E est de Carleson, $I_s^+(E)$ est non réduit à $\{0\}$ (voir [9] ou [35]). De plus, $I_s^+(E)$ est sans facteur intérieur, donc en utilisant le lemme 3.3.5, on obtient l'évaluation

$$\big\|T^{-n}\big\| = O\big(e^{\varepsilon\sqrt{n}}\big) \ (n \to +\infty), \ \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \tag{4.5}$$

Et puisque $Sp\,T = Sp\,\pi_s^+(\alpha) = E$, on a

$$\big\|T^{-n}\big\| = \big\|\pi_s^+(\alpha)^{-n}\big\| = O\big(n^t\big)\,(n \to +\infty).$$

Soit $f \in A_{s,t}(\mathbb{T})$. La série $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\pi_s^+(\alpha)^n$ converge et définit un élément $\pi_s^+(g)$ de $A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E)$. On a $f^{(k)}_{|_E} = g^{(k)}_{|_E}$, pour $0 \leq k \leq [s]$, ce qui montre que E est un ensemble d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$. $\square$

Le résultat suivant, annoncé dans l'introduction, est alors une conséquence directe du théorème 4.1.4 et de la proposition 4.1.5.

Théorème 4.1.6. *Soit E un fermé dénombrable du cercle unité $\mathbb{T}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) E vérifie la condition (ATW).
(ii) E vérifie la condition (C) et pour tout $s \geq 0$, il existe $t \geq s$ tel que la propriété $P(s,t,E)$ soit vérifiée.

Nous allons conclure en montrant que les hypothèses du théorème sont optimales. Soit E un ensemble fermé du cercle unité et μ une mesure à support dans E. Soit J_μ la fonction singulière associée à μ, à savoir

$$J_\mu(z) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{d}\mu(t)\Big\} \qquad (|z|<1).$$

On pose $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \ominus J_\mu \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, où $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ désigne l'espace de Hardy usuel. On note $P_{\mathcal{H}_0}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_0$ et $\alpha : z \mapsto z$. On définit alors l'opérateur T_μ sur $\mathcal{H}_0$ par

$$T_\mu(f) = P_{\mathcal{H}_0}(\alpha f) \qquad (f \in \mathcal{H}_0). \tag{4.6}$$

D'après la proposition 5.1 p.117 de [31], on a $Sp\, T_\mu = \operatorname{Supp}\mu \subset E$.
Si on remplace la condition "pour tout $\varepsilon > 0$" dans la propriété $P(s,t,E)$ par une condition à ε fixé, alors la propriété $P(0,t,\{1\})$ n'est vérifiée pour aucun réel $t \geq 0$. En effet, soient $\varepsilon_0 > 0$, $\mu = 2\pi\varepsilon_0^2\,\delta_1$ (où δ_1 est la mesure de Dirac en 1) et $T_1 = T_\mu$ l'opérateur défini en (4.6). T_1 est un opérateur non unitaire tel que $Sp\, T_1 = \{1\}$ qui vérifie (ATW) et (C), et

$$\|T_1^{-n}\| = O(e^{4\varepsilon_0\sqrt{n}}) \ (n \to +\infty)$$

(voir [40] pour plus de détails). Le théorème 6.4 de [15] nous montre alors que $T_1^{-n} = O(n^t)\,(n \to +\infty)$ n'est satisfait pour aucun réel $t \geq 0$.
Nous allons maintenant montrer que l'hypothèse de dénombrabilité de E dans le théorème 4.1.6 est essentielle. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.7. *Tout fermé non dénombrable et de mesure nulle du cercle unité contient un ensemble parfait qui vérifie la condition de Carleson (C).*

Démonstration. Soit S un fermé non dénombrable et de mesure nulle du cercle unité. Sans perte de géneralité, on peut supposer que $1 \notin S$. On écrit alors $S = \{e^{it} : t \in E\}$, où E est un fermé de $\mathbb{R}$ inclus dans $]0, 2\pi[$, et on se ramène ainsi à la droite réelle. Soit P la partie parfaite de E. On pose

$$P_0 = \Big\{x \in P : \exists\,\varepsilon > 0 \ \text{ tel que }]x-\varepsilon, x[\cap P = \emptyset \text{ ou }]x, x+\varepsilon[\cap P = \emptyset\Big\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des points de P qui sont limites d'un seul côté d'une suite de points de P. Montrons dans un premier temps que P_0 est au plus dénombrable. On pose pour cela

$$Q_n = \Big\{x \in P_0 : \Big]x - \frac{1}{n}, x\Big[\cap P = \emptyset \text{ ou } \Big]x, x+\frac{1}{n}\Big[\cap P = \emptyset\Big\} \quad (n \geq 1).$$

Il est clair que $P_0 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q_n$ et que chaque Q_n est fini. Par conséquent P_0 est au plus dénombrable.
Soient a_0 et b_0 deux points de $P\backslash P_0$ tels que $a_0 < b_0$ et $\left|a_0 - b_0\right| \le 1$, on pose $I_0 = [a_0, b_0]$. A la première étape, on retire de I_0 un intervalle ouvert $J_1^{(1)}$ dont les extrémités sont dans $P\backslash P_0$, de sorte qu'il reste deux intervalles fermés $I_1^{(1)}$ et $I_2^{(1)}$ qui soient non vides, non réduits à un singleton et de longueur inférieure à $\frac{1}{3}(b_0 - a_0)$ (un tel choix est possible car P_0 est au plus dénombrable). On note F_1 l'ensemble constitué des deux intervalles fermés $I_1^{(1)}$ et $I_2^{(1)}$. Le fait que les extrémités de ces deux intervalles soient dans $P\backslash P_0$ permet de réitérer le procédé sur chacun d'eux.
Ainsi à l'issu de la n$^{\text{ième}}$ étape, on obtient un ensemble fermé F_n constitué de 2^n intervalles fermés de longueur inférieure à $\frac{1}{3^n}(b_0 - a_0)$, en ayant retiré de nouveau 2^{n-1} intervalles ouverts $J_k^{(n)}$ $(1 \le k \le 2^{n-1})$ à extrémités dans $P\backslash P_0$. On pose alors

$$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n.$$

F est clairement un ensemble parfait contenu dans P. Il reste à vérifier que F satisfait la condition de Carleson (C). On a $I_0\backslash F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_k^{(n)}$. Comme F est de mesure nulle, il satisfait la condition de Carleson si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left|J_k^{(n)}\right| \log \frac{1}{\left|J_k^{(n)}\right|} < +\infty. \tag{4.7}$$

Or chaque intervalle $J_k^{(n)}$ est de longueur inférieure à $\frac{1}{3^{n-1}}(b_0 - a_0)$. Comme la fonction $x \mapsto x \log \frac{1}{x}$ est croissante sur $[0, e^{-1}]$, pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |J_k^{(n)}| \log \frac{1}{|J_k^{(n)}|} &\le 2^{n-1} \frac{b_0 - a_0}{3^{n-1}} \log \frac{3^{n-1}}{b_0 - a_0} \\ &\le (b_0 - a_0)\big((n-1)\log 3 - \log(b_0 - a_0)\big)\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1}, \end{aligned}$$

et par conséquent (4.7) a bien lieu. □

Proposition 4.1.8. *Soit E un ensemble fermé non dénombrable du cercle unité, alors la propriété $P(0, t, E)$ n'est vérifiée pour aucun réel $t \ge 0$.*

Démonstration. Soit E un ensemble fermé non dénombrable du cercle unité. D'après le lemme 4.7, E contient un ensemble parfait F qui vérifie la condition de Carleson. Soit alors μ une mesure continue à support inclu dans F et T_μ l'opérateur défini en (4.6). T_μ

est une contraction dont le spectre est inclus dans F, et on montre en utilisant le lemme 2 de [4] que

$$\left\|T_\mu^{-n}\right\| = O\left(e^{\varepsilon\sqrt{n}}\right)(n \to +\infty), \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Maintenant on conclut par des arguments bien connus (voir [40]) que $\lim_{n\to+\infty} \left\|T_\mu^{-n}\right\| = +\infty$, et donc que T_μ n'est pas unitaire. Puis on déduit du théorème 6.4 de [15] que $T_\mu^{-n} = O(n^t)\,(n \to +\infty)$ n'est satisfait pour aucun réel $t \geq 0$. $\square$

4.2 Opérateurs dont le spectre est un K-ensemble

4.2.1 Introduction

On rappelle que, si s est un réel positif,

$$\Lambda_s(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T}) : \sup_{z,z'\in\mathbb{T}} \frac{\left|f^{([s])}(z) - f^{([s])}(z')\right|}{|z-z'|^{s-[s]}} < +\infty \right\}.$$

$\Lambda_s(\mathbb{T})$ muni de la norme $\left\|f\right\|_{\Lambda_s} = \left\|f\right\|_{\mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T})} + \sup_{z,z'\in\mathbb{T}} \frac{\left|f^{([s])}(z) - f^{([s])}(z')\right|}{|z-z'|^{s-[s]}}$ est une algèbre de Banach. On définit également la sous-algèbre

$$\lambda_s(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T}) : \left|f^{([s])}(z) - f^{([s])}(z')\right| = o\left(|z-z'|^{s-[s]}\right),\ |z-z'| \to 0 \right\},$$

que l'on munit de la même norme.

Nous aurons besoin dans la sous-section 4.2.2 de la caractérisation des ensembles d'interpolation pour $\Lambda_s(\mathbb{T})$. Ces caractérisations sont déjà connues et différentes selon les valeurs de s. W. Rudin a montré dans [32] qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ est d'interpolation pour $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ si et seulement si E est de mesure de Lebesgue nulle. Dans le cas $s > 0$, le fait que E est de mesure nulle n'est plus suffisant. Comme nous allons le voir, l'ensemble E doit également vérifier certaines conditions géométriques.

Définition 4.2.1. *On dira qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ est un K-ensemble (ou qu'il vérifie la condition (K)) s'il existe une constante c positive telle que*

$$\sup_{z\in L} d(z,E) \geq c|L|, \quad \textit{pour tout arc } L \textit{ de } \mathbb{T}, \tag{K}$$

où $|L|$ désigne la longueur de l'arc L.

Cette condition apparaît dans un article de A. M. Kotocigov ([29]). Nous avons le résultat suivant, qui a été prouvé par E. M. Dyn'kin dans [12].

Lemme 4.2.1. *Soit E un fermé $\mathbb{T}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) E est un K-ensemble.
(ii) Il existe $\delta \in (0,1)$ et une constante positive C_δ telle que pour tout arc L de $\mathbb{T}$,

$$\int_L \frac{1}{d(e^{it},E)^\delta}\,\mathrm{d}t \leq C_\delta |L|^{1-\delta}.$$

Démonstration. L'implication $(i) \implies (ii)$ a été prouvée par E. M. Dyn'kin dans [12] (section 5, corollary). Et l'implication $(ii) \implies (i)$ est triviale. □

Grâce à ce lemme, il est facile de voir que si E est un K-ensemble alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout arc L de $\mathbb{T}$,

$$\frac{1}{|L|}\int_L \log^+ \frac{1}{d(e^{it}, E)}\mathrm{d}t \leq \log\frac{1}{|L|} + C.$$

Cette dernière condition correspond à la condition (ATW) avec $C_1 = 1$. Ceci montre en particulier que la condition (ATW) est plus faible que la condition (K).

La condition (K) caractérise les ensembles d'interpolations pour les espaces $\Lambda_s(\mathbb{T})$ $(s > 0)$. Ce résultat est du à J. Bruna dans [8] dans le cas où s est un entier strictement positif, et à E. M. Dyn'kin dans [12] dans le cas où s est un réel strictement positif non entier. Nous aurons besoin de cette caractérisation dans la sous-section 4.2.2, et nous l'énonçons ci-dessous sous forme de théorème.

Théorème 4.2.2. ([8], [12]) *Un fermé E de $\mathbb{T}$ est un K-ensemble si et seulement si, pour tout $s > 0$, c'est un ensemble d'interpolation pour $\Lambda_s(\mathbb{T})$.*

Notons dans le cas où $s = +\infty$, la condition (ATW) caractérise les ensembles d'interpolation pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ (voir [3] et proposition 4.1.1).

Soit E un K-ensemble, on pose

$$\delta(E) = \sup\Big\{\delta \geq 0 : \int_0^{2\pi} \frac{1}{d(e^{it}, E)^\delta}\mathrm{d}t < +\infty\Big\}.$$

On a $\delta(E) \geq \dfrac{\log\frac{1}{1-c}}{\log\frac{2}{1-c}}$ (voir [12] section 5, preuve du lemme 2 et corollaire), où c est la constante qui apparaît dans la définition d'un K-ensemble. Le principal résultat de cette section est le suivant (théorème 4.2.5) :
Soit E un K-ensemble et s un entier positif. Le résultat principal de cette section montre que tout opérateur T sur un espace de Banach dont le spectre est inclus dans E et qui satisfait

$$\begin{aligned} &\|T^n\| = O(n^s),\ n \to +\infty \\ \text{et}\quad &\|T^{-n}\| = O(e^{n^\beta}),\ n \to +\infty \text{ pour un certain } \beta < \frac{\delta(E)}{1+\delta(E)}, \end{aligned}$$

satisfait également la propriété plus forte

$$\|T^{-n}\| = O(n^{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}),\ n \to +\infty, \tag{4.8}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Pour $\xi \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$, on note E_ξ le parfait symétrique associé ξ. On pose également $b(\xi) = \dfrac{\log\frac{1}{\xi} - \log 2}{2\log\frac{1}{\xi} - \log 2}$. On obtient (comme conséquence du théorème 4.2.5) que si

le spectre de T est inclus dans E_ξ, $\|T^n\| = O(n^s)$, $n \to +\infty$ et $\|T^{-n}\| = O(e^{n^\beta})$, $n \to +\infty$ pour un certain $\beta < b(\xi)$, alors T satisfait (4.8).
Ces résultats ont été motivés par des résultats obtenus par J. Esterle dans [14]. Il a montré que si T est une contraction sur un espace de Banach (respectivement sur un espace de Hilbert) dont le spectre est inclus dans $E_{\frac{1}{q}}$ (respectivement dans E_ξ) et tel que $\|T^{-n}\| = O(e^{n^\beta})$, $n \to +\infty$ pour un certain $\beta < b(\frac{1}{q})$ (respectivement $\beta < b(\xi)$), alors $\sup_{n\geq 0} \|T^{-n}\| < +\infty$ (respectivement T est une isométrie). Ici q est un entier supérieur ou égal à 3.
Enfin, nous déduisons également du théorème 4.2.5 et du théorème 2.3.4 un résultat de synthèse spectrale dans les algèbres $A_\omega(\mathbb{T})$. Soit s un réel positif et $q \geq 0$ un entier. Soit ω un poids tel que $\omega(n) = (1+n)^s$ $(n \geq 0)$ et $\log \omega(-n) = O(n^\beta)$ pour un certain $\beta < b(\frac{1}{q})$. On ne sait pas si $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$. Cependant, on montre que si $f \in A_\omega(\mathbb{T}) \cap A_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$, pour un certain $\tilde{s} > s + \dfrac{1}{2}$ et si $f = 0$ sur $E_{\frac{1}{q}}$, alors f est de synthèse spectrale pour $E_{\frac{1}{q}}$ dans $A_\omega(\mathbb{T})$.

4.2.2 Opérateurs dont le spectre est un K-ensemble

Nous avons le résultat suivant, dont la preuve est basée sur l'inégalité de Bernstein (voir [22], p.13).

Lemme 4.2.3. *Soit s un réel positif. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons l'injection continue suivante :*

$$\Lambda_{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}) \hookrightarrow A_s(\mathbb{T}).$$

Démonstration. Pour $s = 0$, c'est un résultat dû à Bernstein (voir [22], p.13). Le cas général est obtenu avec les mêmes arguments. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\tilde{s} = s + \frac{1}{2} + \varepsilon$. Soit $f \in \Lambda_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$. Pour $h > 0$, on pose

$$P(h) = \int_0^{2\pi} \left| f^{([\tilde{s}])}(e^{i(t-h)}) - f^{([\tilde{s}])}(e^{i(t+h)}) \right|^2 \mathrm{d}t.$$

On déduit de la formule de Parseval que

$$P(h) = 8\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{f^{([\tilde{s}])}}(n) \right|^2 \sin^2(nh). \tag{4.9}$$

Soit j_0 le plus petit entier tel que $[\tilde{s}] < 2^{j_0}$ et soit $j \geq j_0$. Il découle de la relation $\widehat{f^{([\tilde{s}])}}(n) = \Big(\prod_{k=1}^{[\tilde{s}]} (n+k) \Big) \widehat{f}(n + [\tilde{s}])$ $(n \in \mathbb{Z})$ et de (4.9) qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de f telle que

$$P(h) \;\geq\; \frac{4}{C_1^2} \sum_{|n|=2^j}^{2^{j+1}-1} \left| \widehat{f}(n + [\tilde{s}]) \right|^2 (1+|n|)^{2[\tilde{s}]} \sin^2(nh). \tag{4.10}$$

On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\sum_{|n|=2^j}^{2^{j+1}-1} \big|\widehat{f}(n+[\tilde{s}])\big|(1+|n|)^s \le \Big(\sum_{|n|=2^j}^{2^{j+1}-1} \big|\widehat{f}(n+[\tilde{s}])\big|^2(1+|n|)^{2[\tilde{s}]}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} (1+|n|)^{2s-2[\tilde{s}]}\Big)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.11)$$

On pose $h = \dfrac{\pi}{3.2^j}$. Pour tout entier n tel que $2^j \le |n| \le 2^{j+1}-1$, on a $\dfrac{\pi}{3} \le |nh| \le \dfrac{2\pi}{3}$, et donc $\sin^2(nh) \ge \dfrac{1}{4}$. On déduit donc de (4.10) que

$$\Big(\sum_{|n|=2^j}^{2^{j+1}-1} \big|\widehat{f}(n+[\tilde{s}])\big|^2(1+|n|)^{2[\tilde{s}]}\Big)^{\frac{1}{2}} \le C_1 P\big(\frac{\pi}{3.2^j}\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Puis, comme $f \in \Lambda_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$, on a

$$P\big(\frac{\pi}{3\,2^j}\big)^{\frac{1}{2}} \le (2\pi)^{\frac{1}{2}} \big\|f\big\|_{\Lambda_{\tilde{s}}} \big(\frac{2\pi}{3.2^j}\big)^{\tilde{s}-[\tilde{s}]},$$

de sorte que

$$\Big(\sum_{|n|=2^j}^{2^{j+1}-1} \big|\widehat{f}(n+[\tilde{s}])\big|^2(1+|n|)^{2[\tilde{s}]}\Big)^{\frac{1}{2}} \le C_1(2\pi)^{\frac{1}{2}} \big\|f\big\|_{\Lambda_{\tilde{s}}} \big(\frac{2\pi}{3.2^j}\big)^{\tilde{s}-[\tilde{s}]}. \quad (4.12)$$

De plus, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\Big(\sum_{|n|=2^j}^{2^{j+1}-1} (1+|n|)^{2s-2[\tilde{s}]}\Big)^{\frac{1}{2}} \le C_2 2^{j\left(s-[\tilde{s}]+\frac{1}{2}\right)}. \quad (4.13)$$

Finalement, on déduit de (4.11) et des inégalités (4.12) et (4.13) qu'il existe une constante $C_3 > 0$ indépendante de f telle que pour tout $j \ge j_0$,

$$\sum_{|n|=2^j}^{2^{j+1}-1} \big|\widehat{f}(n+[\tilde{s}])\big|(1+|n|)^s \le 2^{j\left(s-\tilde{s}+\frac{1}{2}\right)} C_3 \big\|f\big\|_{\Lambda_{\tilde{s}}} = 2^{-\varepsilon j} C_3 \big\|f\big\|_{\Lambda_{\tilde{s}}}.$$

En sommant sur $j \ge 0$ ces inégalités, on obtient

$$\sum_{|n|\ge 2^{j_0}} \big|\widehat{f}(n+[\tilde{s}])\big|(1+|n|)^s \le \frac{C_3}{1-2^{-\varepsilon}} \big\|f\big\|_{\Lambda_{\tilde{s}}}.$$

D'autre part, on a $\big|\widehat{f}(n)\big| \le \big\|f\big\|_{\Lambda_{\tilde{s}}}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc, puisque j_0 est indépendant de f, il existe une constante $K > 0$ (indépendante de f) telle que

$$\big\|f\big\|_s \le K \big\|f\big\|_{\Lambda_{\tilde{s}}}$$

□

Avant de donner le résultat principal de cette section, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.4. *Soit E un fermé de $\mathbb{T}$ pour lequel il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{d(e^{it}, E)^\delta} \mathrm{d}t < +\infty.$$

Soit $\beta < \dfrac{\delta}{1+\delta}$ et T un opérateur inversible sur un espace de Banach dont le spectre est inclus dans E et qui satisfait

$$\begin{aligned} & \|T^n\| = O(n^s),\ n \to +\infty \quad (\textit{ pour un certain réel positif } s) \\ \textit{et} \quad & \|T^{-n}\| = O(e^{n^\beta}),\ n \to +\infty, \end{aligned}$$

Alors il existe une fonction extérieure $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ qui s'annule exactement sur E et telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) T^n = 0$.

Démonstration. Soit ω le poids défini par $\omega(n) = \|T^n\|\,(n \in \mathbb{Z})$. Soit Φ le morphisme continu de $A_\omega(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{L}(X)$ défini par

$$\Phi(f) = f(T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) T^n \qquad \big(f \in A_\omega(\mathbb{T})\big).$$

Puisque l'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ est régulière, on a $\big\{z \in \mathbb{T} : f(z) = 0 \quad (f \in ker\,\Phi)\big\} \subset E$ (voir [17], Theorem 2.5), et donc $J_\omega(E) \subset \mathrm{Ker}\ \Phi$. Le résultat découle alors des lemmes 7.1 et 7.2 de [14]. □

Théorème 4.2.5. *Soit E un K-ensemble et s un entier positif. Alors, tout opérateur T sur un espace de Banach dont le spectre est inclus dans E et qui satisfait*

$$\begin{aligned} & \|T^n\| = O(n^s),\ n \to +\infty \\ \textit{et} \quad & \|T^{-n}\| = O(e^{n^\beta}),\ n \to +\infty \ \textit{pour un certain } \beta < \frac{\delta(E)}{1+\delta(E)}, \end{aligned}$$

satisfait également la propriété plus forte

$$\|T^{-n}\| = O(n^{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}),\ n \to +\infty,$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $\tilde{s} = s + \frac{1}{2} + \varepsilon$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\tilde{s}$ n'est pas un entier. Soit t un réel tel que $s + \frac{1}{2} < t < \tilde{s}$ et $[t] = [\tilde{s}]$. D'après le lemme 4.2.3, on peut définir un homomorphisme continu Φ de $\lambda_t^+(\mathbb{T}) = \big(\lambda_t(\mathbb{T})\big)^+$ dans $\mathcal{L}(X)$ par

$$\Phi(f) = f(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) T^n \qquad \big(f \in \lambda_t^+(\mathbb{T})\big).$$

Soit $I = ker\,\Phi$, I est un idéal fermé de $\lambda_t^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I) \subset E$. On déduit alors de la proposition 3.2.1 que

$$I = I\big(S_I;\, h_+^0(I) \cap \mathbb{T}, \ldots, h_+^{[t]}(I) \cap \mathbb{T}\big).$$

Comme $\beta < \dfrac{\delta(E)}{1+\delta(E)}$, il existe $0 < \delta < \delta(E)$ tel que $\beta < \dfrac{\delta}{1+\delta}$. On a, par définition de $\delta(E)$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{d(e^{it}, E)^{\delta}} \mathrm{d}t < +\infty$. Donc on déduit du lemme 4.2.4 qu'il existe une fonction extérieure $f \in \mathcal{A}^{\infty}(\mathbb{D})$ qui s'annule exactement sur E et telle que $f \in I$. Ainsi $S_I = 1$. Si on note

$$N_t(E) = \big\{f \in \Lambda_t(\mathbb{T}) :\, f_{|E} = \ldots = f_{|E}^{([t])} = 0\big\},$$

et $N_t^+(E) = N_t(E) \cap \Lambda_t^+(\mathbb{T})$, on a finalement $N_t^+(E) \cap \lambda_t(\mathbb{T}) \subset I$. Maintenant, comme $\Lambda_{\tilde{s}}^+(\mathbb{T}) \subset \lambda_t^+(\mathbb{T})$, on peut définir un homomorphisme continu Ψ de $\Lambda_{\tilde{s}}^+(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{L}(X)$ par $\Psi = \Phi_{|_{\Lambda_{\tilde{s}}^+(\mathbb{T})}}$. En utilisant ce qui précède, on a

$$N_{\tilde{s}}^+(E) \subset \mathrm{Ker}\ \Psi.$$

Il existe donc un homomorphisme continu $\tilde{\Psi}$ de $\Lambda_{\tilde{s}}^+(\mathbb{T})/N_{\tilde{s}}^+(E)$ dans $\mathcal{L}(X)$ tel que $\Psi = \tilde{\Psi} \circ \pi_{\tilde{s}}^+$, où $\pi_{\tilde{s}}^+$ désigne la surjection canonique de $\Lambda_{\tilde{s}}^+(\mathbb{T})$ sur $\Lambda_{\tilde{s}}^+(\mathbb{T})/N_{\tilde{s}}^+(E)$. Comme E est un K-ensemble, c'est un ensemble d'interpolation pour $\Lambda_{\tilde{s}}^+(\mathbb{T})$ (théorème 4.2.2), de sorte que l'injection canonique i de $\Lambda_{\tilde{s}}^+(\mathbb{T})/N_{\tilde{s}}^+(E)$ dans $\Lambda_{\tilde{s}}(\mathbb{T})/N_{\tilde{s}}(E)$ est surjective. On a, pour $n \geq 0$,

$$T^{-n} = \tilde{\Psi} \circ i^{-1} \circ \pi_{\tilde{s}}(\alpha^{-n}),$$

où $\pi_{\tilde{s}}$ désigne la surjection canonique de $\Lambda_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$ sur $\Lambda_{\tilde{s}}(\mathbb{T})/N_{\tilde{s}}(E)$ et $\alpha\ :\ z \to z$. On a donc, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \big\|T^{-n}\big\| &\leq \big\|\tilde{\Psi} \circ i^{-1}\big\|\big\|\pi_{\tilde{s}}(\alpha^{-n})\big\|_{\Lambda_{\tilde{s}}} \\ &\leq \big\|\tilde{\Psi} \circ i^{-1}\big\|(1+n)^{\tilde{s}}, \end{aligned}$$

ce qui achève cette démonstration. □

On donne alors deux corollaires immédiats de ce théorème. Le premier concerne les opérateurs dont le spectre est inclus dans le parfait symétrique E_ξ, $\xi \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$. On pose $b(\xi) = \dfrac{\log\frac{1}{\xi} - \log 2}{2\log\frac{1}{\xi} - \log 2}$.

Corollaire 4.2.6. *Soit $\xi \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ et s un entier positif. Alors, tout opérateur T sur un espace de Banach dont le spectre est inclus dans E_ξ et qui satisfait*

$$\begin{aligned} &\big\|T^n\big\| = O\big(n^s\big),\ n \to +\infty \\ \textit{et}\quad &\big\|T^{-n}\big\| = O\big(e^{n^\beta}\big),\ n \to +\infty \textit{ pour un certain } \beta < b(\xi), \end{aligned}$$

satisfait également la propriété plus forte

$$\|T^{-n}\| = O\big(n^{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}\big),\ n \to +\infty,$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. On note $\alpha(\xi) = \dfrac{\log 2}{\log \frac{1}{\xi}}$. Il est bien connu que le parfait symétrique E_ξ satisfait la propriété suivante : pour tout $\delta < 1-\alpha(\xi)$, il existe une constante $K_\delta > 0$ telle que, pour tout arc L de $\mathbb{T}$, $\displaystyle\int_L d(e^{it}, E_\xi)^{-\delta} \mathrm{d}t < K_\delta |L|^{1-\delta}$ (une démonstration de ce résultat sera donnée dans le chapitre 6, lemme 6.2.6). Par conséquent, on déduit du lemme 4.2.1 que E_ξ est un K-ensemble. Le résultat découle alors immédiatement du théorème 4.2.5. □

Nous obtenons également un autre résultat, qui généralise le théorème 4.1 de [13]. En effet, la condition "$\|T^{-n}\| = O\big(e^{n^\beta}\big),\ n \to +\infty$" qui apparaît dans le corollaire suivant est plus faible que celle dont les auteurs de [13] ont besoin pour montrer leur résultat.

Corollaire 4.2.7. *Soit E un K-ensemble et s un entier positif. Alors, il existe une constante $\beta > 0$ telle que tout opérateur T sur un espace de Banach dont le spectre est inclus dans E et qui satisfait*

$$\begin{aligned} &\|T^{n}\| = O\big(n^{s}\big),\ n \to +\infty \\ \textit{et}\quad &\|T^{-n}\| = O\big(e^{n^\beta}\big),\ n \to +\infty, \end{aligned}$$

satisfait également la propriété plus forte

$$\|T^{-n}\| = O\big(n^{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}\big),\ n \to +\infty,$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Comme E est un K-ensemble, on déduit du lemme 4.2.1 que $\delta(E) > 0$. Le résultat découle alors immédiatement du théorème 4.2.5, en prenant $\beta < \dfrac{\delta(E)}{1+\delta(E)}$. □

Pour finir, on donne un résultat de synthèse spectrale qui est une conséquence du corollaire 4.2.6 et du théorème 2.3.4.

Théorème 4.2.8. *Soit s un réel positif et $q \geq 3$ un entier. Soit ω un poids tel que $\omega(n) = (1+n)^s$ $(n \geq 0)$ et $\log\omega(-n) = O\big(n^\beta\big)$ pour un certain $\beta < b\big(\dfrac{1}{q}\big)$. Soit $\tilde{s} > s + \dfrac{1}{2}$. Si $f \in A_\omega(\mathbb{T}) \cap A_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$ et si $f = 0$ sur $E_{\frac{1}{q}}$, alors f est de synthèse spectrale pour $E_{\frac{1}{q}}$ dans $A_\omega(\mathbb{T})$.*

Démonstration. On note π_ω la surjection canonique de $A_\omega(\mathbb{T})$ sur $A_\omega(\mathbb{T})/J_\omega(E_{\frac{1}{q}})$, et par T l'opérateur de multiplication par $\pi_\omega(\alpha)$ sur $A_\omega(\mathbb{T})/J_\omega(E_{\frac{1}{q}})$. Il est facile de voir que T satisfait les hypothèses du corollaire 4.2.6, et donc on déduit de celui-ci que $\|T^{-n}\| =$

$\|\pi_\omega(\alpha)^{-n}\| = O(n^{\tilde{s}})$, $n \to +\infty$. On peut alors définir un homomorphisme continu Θ de $A_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$ dans $A_\omega(\mathbb{T})/J_\omega(E_{\frac{1}{q}})$ par

$$\Theta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\pi_\omega(\alpha)^n \qquad \big(f \in A_{\tilde{s}}(\mathbb{T})\big).$$

$ker\,\Theta$ est un idéal fermé $A_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$ qui contient $J_{\tilde{s}}(E_{\frac{1}{q}})$. De plus, on déduit du théorème 2.3.4 que $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_{\tilde{s}}(\mathbb{T})$. On a donc $I_{\tilde{s}}(E_{\frac{1}{q}}) = J_{\tilde{s}}(E_{\frac{1}{q}}) \subset ker\,\Theta$. Maintenant si $f \in A_\omega(\mathbb{T}) \cap I_{\tilde{s}}(E_{\frac{1}{q}})$, on a $\pi_\omega(f) = \Theta(f) = 0$, ce qui prouve que $f \in J_\omega(E_{\frac{1}{q}})$ et achève cette démonstration. $\square$

Notons que J. Esterle a montré dans [14] que $E_{\frac{1}{q}}$ est de synthèse spectrale dans $A_\omega(\mathbb{T})$ pour tous les poids ω tels que $\omega(n) = 1\,(n \geq 0)$ et $\log\omega(-n) = O(n^\beta)$ pour un certain $\beta < b(\frac{1}{q})$.

Remarques :
1) D'autres résultats concernant des opérateurs à spectre satsifaisant la condition de Carleson sont obtenus dans [26].
2) Quand $\xi = \dfrac{1}{q}$, la constante $b(\xi) = \dfrac{\log 2 + \log\xi}{\log 2 + 2\log\xi}$ dans le corollaire 4.2.6 est la meilleure aux vues de [16] où les auteurs construisent une contraction T telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \log\|T^{-n}\| = +\infty$, $Sp\,T \subset E_{\frac{1}{q}}$ et $\log\|T^{-n}\| = O(n^{b(q)})$. D'après le théorème 6.4 de [15], T ne satisfait $\|T^{-n}\| = O(n^s)$ pour aucun réel $s \geq 0$.

Deuxième partie

Ensembles d'unicité

Chapitre 5

Un ensemble de Carleson d'unicité pour $A^+_\omega(\mathbb{T})$ lorsque $\omega \in \Omega$

5.1 Définitions

On rappelle que $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ désigne l'espace des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. Nous commençons par définir la notion d'ensemble d'unicité pour un espace, introduite par L. Carleson dans [9].

Définition 5.1.1. *Soit X un sous-espace de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$. On dira qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ est ZX s'il existe une fonction f dans X non nulle et qui s'annule sur E. Lorsque E n'est pas ZX, on dira que E est un ensemble d'unicité pour X.*

On rappelle qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la condition de Carleson si

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{d(e^{it}, E)} dt < +\infty. \tag{C}$$

Soit $0 < s < 1$, nous avons vu dans le chapitre 3 que les assertions suivantes sont équivalentes ([9], [35]) :
(i) E vérifie la condition de Carleson (C).
(ii) E est $Z\Lambda^+_s(\mathbb{T})$.
(iii) E est $Z\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$.

On notera Ω l'ensemble des suites $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\geq 0}$ de réels strictement positifs telles que pour tout $k \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\omega(n)}{n^k} = +\infty$. On notera

$$A^+_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \|f\|_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\,\omega(n) < +\infty \Big\}.$$

Avec les notations introduites dans le chapitre 3, $A^+_\omega(\mathbb{T})$ est l'espace $\big(A_{\tilde\omega}(\mathbb{T})\big)^+$, où $\tilde\omega = \big(\tilde\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est n'importe quelle suite de réels telle que $\tilde\omega(n) = \omega(n)$ si $n \geq 0$. On commence par la remarque élémentaire suivante :

Remarque 5.1.1. *On a* $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D}) = \bigcup_{\omega\in\Omega} A^+_\omega(\mathbb{T})$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$, alors la suite ω définie par

$$\omega(n) = \frac{1}{\max\left(\left|\widehat{f}(n)\right|, e^{-n}\right)(|n|+1)^2} \; (n \in \mathbb{Z})$$

appartient à Ω et $f \in A^+_\omega(\mathbb{T})$. Cela prouve que $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D}) \subset \bigcup_{\omega\in\Omega} A^+_\omega(\mathbb{T})$. L'autre inclusion est claire. □

A. Atzmon s'est alors légitimement demandé dans [5] s'il existe une suite ω dans Ω telle que chaque ensemble de Carleson soit $ZA^+_\omega(\mathbb{T})$. On répond négativement à cette interrogation. Plus précisément, étant donnée une suite ω dans Ω, on exhibe un ensemble de Carleson E tel que la seule fonction dans $A^+_\omega(\mathbb{T})$ qui s'annule sur E, est la fonction nulle.

5.2 Un ensemble de Carleson qui est d'unicité pour $A^+_\omega(\mathbb{T})$ lorsque $\omega \in \Omega$

Définition 5.2.1. *Soit E un fermé non vide de $\mathbb{T}$ et λ une fonction positive sur $[0, +\infty)$. On dit que E est un ensemble λ-Carleson si*

$$\int_0^{2\pi} \lambda\Big(\log^+ \frac{1}{d(e^{it}, E)}\Big)\mathrm{d}t < +\infty.$$

Si $\lambda(x) = x\,(x \geq 0)$, on reconnaît les ensembles de Carleson déjà définis.

Nous aurons besoin de la proposition suivante. Sa démonstration utilise un argument utilisé par L. Carleson dans [9], et par B. A. Taylor et D. L. Williams dans [37].

Proposition 5.2.1. *Soit λ une fonction positive sur $[0, +\infty)$ qui est deux fois dérivable avec $\lambda'' > 0$ sur $[0, +\infty)$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$. On définit une suite ω par $\omega(0) = 1$ et $\omega(n) = e^{\lambda(\log n)}$ pour $n \geq 1$. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$. On suppose qu'il existe une fonction F dans $A^+_\omega(\mathbb{T})$ non nulle et qui s'annule avec toutes ses dérivées sur E. Alors E est un ensemble λ-Carleson.*

Démonstration. Soit F une fonction dans $A^+_\omega(\mathbb{T})$ non nulle et qui s'annule avec toutes ses dérivées sur E. En utilisant la formule de Taylor, on obtient, pour tout $n \geq 0$,

$$\left|F(z)\right| \leq \frac{d(z,E)^n}{n!}\left\|F^{(n)}\right\|_\infty \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}}),$$

où, pour $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\left\|g\right\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{T}} |g(z)|$. Maintenant, un simple calcul (voir preuve du lemme 6.2.1 1) pour plus de détails) montre que

$$\left\|F^{(n)}\right\|_\infty \;\leq\; \sup_{k\geq n} \frac{k!}{(k-n)!\,\omega(k)}\left\|F\right\|_\omega,$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|F\|_\omega = 1$, de sorte que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|F(z)| &\leq \frac{d(z,E)^n}{n!} \sup_{k\geq n} \frac{k!}{(k-n)!\,\omega(k)} \\
&\leq d(z,E)^n \sup_{k\geq n} \frac{k^n}{\omega(k)} \\
&\leq d(z,E)^n \exp\big\{ \sup_{t\geq 0} \big(nt - \lambda(t)\big)\big\} \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}}). \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Les conditions satisfaites par λ impliquent que λ' croît strictement et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda'(x) = +\infty$. Ainsi λ' admet une fonction inverse λ'^{-1} définie sur $[\lambda'(0), +\infty)$. Il est alors facile de voir que, pour tout $n \geq \lambda'(0)$, on a

$$\sup_{t\geq 0} \big(nt - \lambda(t)\big) = n\lambda'^{-1}(n) - \lambda\big(\lambda'^{-1}(n)\big).$$

On déduit donc de (5.1) que pour tout $n \geq \max\big(\lambda'(0), 1\big)$,

$$-\log\big|F(e^{i\theta})\big| \geq n \log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)} - n\lambda'^{-1}(n) + \lambda\big(\lambda'^{-1}(n)\big). \qquad (5.2)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lambda(x)}{x} = +\infty$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \geq \delta$, on a $\lambda'(x) \geq 1 + \max\big(\lambda'(0), 1\big)$ et $\lambda(x) - x \geq \frac{1}{2}\lambda(x)$. Soit $e^{i\theta}$ tel que $d(e^{i\theta}, E) \leq e^{-\delta}$. On pose $n = \Big[\lambda'\Big(\log \dfrac{1}{d(e^{i\theta},E)}\Big)\Big]$, où, pour tout réel x, $[x]$ désigne sa partie entière. En remarquant que la fonction $x \mapsto -x\lambda'^{-1}(x) + \lambda\big(\lambda'^{-1}(x)\big)$ est décroissante et que $n \leq \lambda'\Big(\log \dfrac{1}{d(e^{i\theta},E)}\Big)$, on obtient

$$\begin{aligned}
-n\lambda'^{-1}(n) + \lambda\big(\lambda'^{-1}(n)\big) &\geq -\log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)}\, \lambda'\Big(\log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)}\Big) + \lambda\Big(\log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)}\Big) \\
&\geq -(n+1) \log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)} + \lambda\Big(\log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)}\Big).
\end{aligned}$$

On déduit donc de (5.2) que si $d(e^{i\theta}, E) \leq e^{-\delta}$, alors

$$\begin{aligned}
-\log\big|F(e^{i\theta})\big| &\geq \lambda\Big(\log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)}\Big) - \log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)} \\
&\geq \frac{1}{2}\lambda\Big(\log \frac{1}{d(e^{i\theta},E)}\Big).
\end{aligned}$$

Comme $z \mapsto -\log\big|F(z)\big|$ est intégrable sur $\mathbb{T}$, E est un ensemble λ-Carleson. $\square$

Nous avons besoin des trois lemmes suivants :

Lemme 5.2.2. *Soit λ une fonction positive sur $[0,+\infty)$ et croissante sur $[A,+\infty)$ pour un certain $A \geq 0$. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$. Soit $\big(I_n\big)_{n\geq 0}$ la suite des arcs complémentaires de E, et notons $|I_n|$ la longueur de l'arc I_n. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |I_n|\lambda\Big(\log^+ \frac{1}{|I_n|}\Big) = +\infty$, alors E n'est pas un ensemble λ-Carleson.*

Démonstration. Il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|I_n| \leq e^{-A}$. Soit $n \geq n_0$, pour tout $e^{it} \in I_n$, on a $d(e^{it}, E) \leq |I_n|$. Et puisque λ est croissante sur $[A,+\infty)$, on a

$$\lambda\Big(\log \frac{1}{d(e^{it},E)}\Big) \geq \lambda\Big(\log \frac{1}{|I_n|}\Big).$$

Donc, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \lambda\Big(\log^+ \frac{1}{d(e^{it},E)}\Big)\mathrm{d}t &= \int_{I_n} \lambda\Big(\log \frac{1}{d(e^{it},E)}\Big)\mathrm{d}t \\ &\geq |I_n|\lambda\Big(\log \frac{1}{|I_n|}\Big). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pour conclure, il suffit alors d'utiliser (5.3) et de remarquer que

$$\int_0^{2\pi} \lambda\Big(\log^+ \frac{1}{d(e^{it},E)}\Big)\mathrm{d}t \geq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{I_n} \lambda\Big(\log^+ \frac{1}{d(e^{it},E)}\Big)\mathrm{d}t,$$

et que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} |I_n|\lambda\Big(\log \frac{1}{|I_n|}\Big) = +\infty.$ □

Lemme 5.2.3. *Soit F une fonction positive sur $[0,+\infty)$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$ et $\inf\limits_{x\geq 0} F(x) > 0$. Alors, il existe une fonction positive λ sur $[0,+\infty)$ telle que :*

(i) λ *est indéfiniment dérivable sur* $[0,+\infty)$ *et* $\lambda'' > 0$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$.

(iii) $\lambda \leq F$ *sur* $[0,+\infty)$.

Démonstration. Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = \inf\limits_{t\geq x} F(t)$. G est une fonction positive et croissante telle que $G \leq F$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que F est croissante. Soit m le plus grand minorant convexe de F. Il est clair que m est une fonction positive et croissante. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$, pour tout $M > 0$, il existe $a > 0$ tel que $F(x) \geq M(x-a)$ pour tout $x \geq 0$. Par définition de m, on a $m(x) \geq M(x-a)$ pour tout $x \geq 0$. Cela prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{m(x)}{x} = +\infty$. Maintenant, soit χ une fonction positive et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, dont le support est inclus dans

$[0,1]$ et telle que $\displaystyle\int_0^1 \chi(t)\mathrm{d}t = 1$. On prolonge m en une fonction croissante et convexe sur $\mathbb{R}$ en posant $m(x) = m(0)$ si $x \leq 0$. Et on définit une fonction μ sur $\mathbb{R}$ par

$$\mu(x) = \int_0^1 m(x-t)\chi(t)\mathrm{d}t.$$

Il est clair que μ est une fonction positive et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque m est croissante, on a, pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mu(x) &\leq m(x)\int_0^1 \chi(t)\mathrm{d}t = m(x) \\ \text{et} \quad \mu(x) &\geq m(x-1)\int_0^1 \chi(t)\mathrm{d}t = m(x-1), \end{aligned}$$

de sorte que $\mu \leq m \leq F$ sur $[0,+\infty)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mu(x)}{x} = +\infty$. De plus, m est convexe, et donc μ aussi. En particulier, on a $\mu'' \geq 0$. Notons $c = \displaystyle\inf_{x\geq 0} F(x)$, et posons, pour $x \geq 0$, $\lambda(x) = \dfrac{1}{2}\mu(x) + \dfrac{c}{2}e^{-x}$. Il est alors clair que λ satisfait les conditions(i)-(iii) du lemme. $\square$

Lemme 5.2.4. *Soit λ une fonction positive et convexe sur $[0,+\infty)$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$. Alors, il existe un ensemble parfait inclus dans $\mathbb{T}$ qui est un ensemble de Carleson, mais pas un ensemble λ-Carleson.*

Démonstration. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$, on peut trouver une suite $\big(a'_k\big)_{k\geq 1}$ de réels dans l'intervalle $(0, e^{-1})$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} & a'_k \log\frac{1}{a'_k} \leq \frac{1}{k^2} \\ \text{et} \quad & \lambda\Big(\log\frac{1}{a'_k}\Big) \geq k\log\frac{1}{a'_k}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Pour tout $k \geq 1$, soit n_k un entier positif tel que

$$\frac{1}{k^2} \leq n_k\, a'_k \log\frac{1}{a'_k} \leq \frac{2}{k^2}. \tag{5.5}$$

On définit $\big(a_n\big)_{n\geq 1}$ par

$$\begin{aligned} & a_n = a'_k \quad \text{si} \quad 1 \leq n \leq n_1 \\ \text{et} \quad & a_n = a'_k \quad \text{si} \quad n_1 + \ldots + n_{k-1} + 1 \leq n \leq n_1 + \ldots + n_k \quad (k \geq 2). \end{aligned}$$

Grâce à (5.4) et (5.5), la suite $\big(a_n\big)_{n\geq 1}$ satisfait

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \log\frac{1}{a_n} < +\infty \\ \text{et} \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda\Big(\log\frac{1}{a_n}\Big) = +\infty. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Maintenant, puisque la fonction $x \mapsto x \log \dfrac{1}{x}$ est bijective sur $(0, e^{-1})$, il existe, pour tout $n \geq 1$, un réel positif $b_n \in (0, e^{-1})$ tel que

$$a_n \log \frac{1}{a_n} = 2^{n-1} b_n \log \frac{1}{b_n}.$$

Ainsi, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} b_n \log \frac{1}{b_n} < +\infty. \tag{5.7}$$

De plus, on a

$$2^{n-1} b_n \lambda\Big(\log \frac{1}{b_n}\Big) = a_n \log \frac{1}{a_n} \Big(\log \frac{1}{b_n}\Big)^{-1} \lambda\Big(\log \frac{1}{b_n}\Big) \tag{5.8}$$

Puisque λ est convexe, la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda(x) - \lambda(0)}{x}$ est croissante. Ainsi, puisque pour tout $n \geq 1$, $b_n \leq a_n$, on a

$$\begin{aligned}
\Big(\log \frac{1}{b_n}\Big)^{-1} \lambda\Big(\log \frac{1}{b_n}\Big) &\geq \Big(\log \frac{1}{a_n}\Big)^{-1} \Big(\lambda\Big(\log \frac{1}{a_n}\Big) - \lambda(0)\Big) + \Big(\log \frac{1}{b_n}\Big)^{-1} \lambda(0) \\
&\geq \Big(\log \frac{1}{a_n}\Big)^{-1} \Big(\lambda\Big(\log \frac{1}{a_n}\Big) - \lambda(0)\Big)
\end{aligned}$$

On déduit donc de (5.8) que

$$\begin{aligned}
2^{n-1} b_n \lambda\Big(\log \frac{1}{b_n}\Big) &\geq a_n \lambda\Big(\log \frac{1}{a_n}\Big) - a_n \lambda(0) \\
&\geq a_n \lambda\Big(\log \frac{1}{a_n}\Big) - \lambda(0) a_n \log \frac{1}{a_n}.
\end{aligned}$$

On déduit de cette inégalité et de (5.6) que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} b_n \lambda\Big(\log \frac{1}{b_n}\Big) = +\infty. \tag{5.9}$$

La condition (5.7) implique que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} 2^{n-1} b_n$ converge. On peut alors changer un nombre fini de termes de la suite $\big(b_n\big)_{n \geq 1}$ pour que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} b_n = 2\pi. \tag{5.10}$$

Nous allons construire un parfait symétrique à rapport non constant comme ceci. On pose $F_0 = [0, 2\pi]$. On retire du milieu de F_0 un intervalle ouvert de longueur b_1. Il reste alors deux intervalles fermés de longueur $\dfrac{1}{2}(2\pi - b_1)$. Puis, on enlève, au milieu de ces deux intervalles restant, un intervalle ouvert de longueur b_2. Et ainsi de suite. Après la n$^{\text{ème}}$ étape, il reste un intervalle fermé F_n, qui est l'union de 2^n intervalles fermés de longueur $\dfrac{1}{2^n}(2\pi - \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1}b_k)$. On pose alors $F = \bigcap\limits_{n\geq 0} F_n$. F est un parfait symétrique à rapport non constant, et les arcs complémentaires de F consistent en une union sur $n \geq 1$ de 2^{n-1} intervalles ouverts de longueur b_n (voir [24] pour d'autres détails). On pose

$$E = \Big\{ e^{it} \in \mathbb{T} : t \in F \Big\}.$$

Il découle de (5.10) que E est de mesure de Lebesgue nulle et puis de (5.7) que E est un ensemble de Carleson. De plus, comme λ convexe et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda(x) = +\infty$, λ est croissante sur $[A, +\infty)$, pour A suffisamment grand. Donc d'après le lemme 5.2.2 et l'égalité (5.9), E n'est pas un ensemble λ-Carleson. $\square$

On peut alors donner le principal résultat de ce chapitre.

Théorème 5.2.5. *Soit ω dans Ω. Alors, il existe un ensemble de Carleson qui est d'unicité pour $A^+_\omega(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\omega(n) > 1$ pour tout $n \geq 0$. On prolonge ω en une fonction continue sur $[0, +\infty)$, linéaire sur chaque intervalle $[n, n+1]$ $(n \geq 0)$, et on pose $F(x) = \log\big(\omega(e^x)\big)$. On a $\inf\limits_{x\geq 0} F(x) > 0$, et puisque $\omega \in \Omega$, F satisfait $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$. Donc d'après le lemme 5.2.3, il existe une fonction λ positive sur $[0, +\infty)$ et qui satisfait les conditions (i)-(iii) du lemme 5.2.3. On applique alors le lemme 5.2.4 qui nous fournit un parfait E de $\mathbb{T}$ qui est un ensemble de Carleson, mais pas un ensemble λ-Carleson. Comme $e^{\lambda(\log n)} \leq \omega(n)$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$A^+_\omega(\mathbb{T}) \subset A^+_{\omega'}(\mathbb{T}),$$

où $\omega'(0) = 1$ et $\omega'(n) = e^{\lambda(\log n)}$ si $n \geq 1$. Maintenant, soit F une fonction de $A^+_\omega(\mathbb{T})$ qui s'annule sur E. Alors $F \in A^+_{\omega'}(\mathbb{T})$, et puisque E est parfait, elle s'annule avec toutes ses dérivées sur E. Comme E n'est pas un ensemble λ-Carleson, il découle de la proposition 5.2.1 que F identiquement nulle. Cela signifie exactement que E n'est pas $ZA^+_\omega(\mathbb{T})$. $\square$

Soit $c > 0$, on définit $\omega_c = \big(\omega_c(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ par

$$\omega_c(n) = e^{c|n|^{\frac{1}{2}}} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Soit E un fermé de $\mathbb{T}$. Soit ω une suite de réels. On note $A_{\omega_c}(E)$, $A^+_\omega(E)$ et $\mathcal{A}^\infty(E)$ les espaces constitués des restrictions à E des fonctions respectivement dans $A_{\omega_c}(\mathbb{T})$, $A^+_\omega(\mathbb{T})$ et $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$. A. Atzmon a montré dans [5] (Theorem 2) que si E est un ensemble de Carleson, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $A_{\omega_c}(E) \subset \mathcal{A}^\infty(E)$. Il découle de la proposition

5.2.6 établie ci-dessous que ce résultat ne peut pas être amélioré dans le sens suivant : pour tout $\omega \in \Omega$, il existe un ensemble de Carleson E tel que pour tout $c > 0$, on a

$$A_{\omega_c}(E) \not\subset A^+_\omega(E).$$

Proposition 5.2.6. *Soit $\omega \in \Omega$, il existe un ensemble de Carleson E tel que*

$$z^{-1}_{|E} \notin A^+_\omega(E). \tag{5.11}$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$. On prétend que l'on peut construire une suite τ dans Ω telle que pour tout $n \geq 0$, $\tau(n) \leq \omega(n)$ et

$$\sup_{n\geq 0} \frac{\tau(n+1)}{\tau(n)} \leq 2. \tag{5.12}$$

On peut construire une telle suite comme suit. Soit $\tilde{\omega}$ la suite définie par $\tilde{\omega}(n) = \inf\limits_{m\geq n} \omega(m)$. Il est facile de voir que $\tilde{\omega}$ est une suite croissante de Ω telle que $\tilde{\omega} \leq \omega$. On définit la suite τ par

$$\begin{array}{rcl} \tau(0) & = & \tilde{\omega}(0) \\ \tau(n) & = & \min\big(2\tau(n-1), \tilde{\omega}(n)\big) \quad (n \geq 1). \end{array}$$

Il est clair que pour tout $n \geq 0$, $\tau(n) \leq \tilde{\omega}(n) \leq \omega(n)$, et que τ satisfait (5.12). Puis, une récurrence sur n montre que

$$\tau(n) = \min\big\{2^k \tilde{\omega}(n-k) : 0 \leq k \leq n\big\}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$, il existe un entier k_n, $0 \leq k_n \leq n$, tel que

$$\tau(n) = 2^{k_n} \tilde{\omega}(n - k_n).$$

En distinguant le cas $k_n \leq \left[\dfrac{n}{2}\right]$ du cas $k_n > \left[\dfrac{n}{2}\right]$, on obtient

$$\tau(n) \geq \min\Big(\tilde{\omega}\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big]\Big), 2^{[\frac{n}{2}]}\tilde{\omega}(0)\Big).$$

On déduit alors de cette inégalité que $\tau \in \Omega$. D'après le théorème 5.2.5, il existe un ensemble de Carleson E qui est d'unicité pour $A^+_\tau(\mathbb{T})$. Comme $A^+_\omega(\mathbb{T}) \subset A^+_\tau(\mathbb{T})$, il suffit de montrer que $z^{-1}_{|E} \notin A^+_\tau(E)$ pour montrer (5.11). Supposons que $z^{-1}_{|E} \in A^+_\tau(E)$. Alors, il existe $F \in A^+_\tau(\mathbb{T})$ telle que $\dfrac{1}{z} = F(z)$ pour tout $z \in E$. Par conséquent, $z \mapsto 1 - zF(z)$ est une fonction non nulle et qui s'annule sur E, et grâce à (5.12), elle appartient à $A^+_\tau(\mathbb{T})$. Ceci est alors en contradiction avec le fait que E est un ensemble d'unicité pour $A^+_\tau(\mathbb{T})$, et achève cette démonstration. $\square$

Chapitre 6

Ensembles d'unicité pour certaines algèbres $A^+_\omega(\mathbb{T})$

6.1 Introduction

Soit $\alpha \in [0,1]$ et E un fermé de $\mathbb{T}$. Soit $r > 0$. On considère des recouvrements au plus dénombrables de E par des arcs $\big(\Delta_j\big)_{j\geq 0}$ de longueur inférieure ou égale à r. Et on note $K_r(E)$ la borne inférieure sur ces recouvrements $\big(\Delta_j\big)_{j\geq 0}$, des quantités $\sum\limits_{j\geq 0} |\Delta_j|^\alpha$. $K_r(E)$ croît lorsque r décroît. On définit alors la α-mesure (de Hausdorff) de E, que l'on note $H_\alpha(E)$, par

$$H_\alpha(E) = \lim_{r\to 0} K_r(E).$$

Il existe un réel $dim_H(E)$ tel que $H_\alpha(E) = 0$ si $\alpha > dim_H(E)$, et $H_\alpha(E) = +\infty$ si $\alpha < dim_H(E)$. $dim_H(E)$ s'appelle la dimension de Hausdorff de E. Soit $\xi \in \big(0, \dfrac{1}{2}\big)$. Le parfait symétrique E_ξ est de dimension de Hausdorff $dim_H(E_\xi) = \dfrac{\log 2}{\log \frac{1}{\xi}}$, et on a $0 < dim_H(E_\xi) < +\infty$ (voir [24] p.26). On pourra consulter [24] pour plus de détails concernant ceci. Soit $\alpha \in \big(0,1\big)$ et $C > 0$ une constante. On note $\omega_{\alpha,C}$ la suite définie par

$$\omega_{\alpha,C}(n) = e^{Cn^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}}.$$

Nous montrons que si E est un fermé de $\mathbb{T}$ tel que $H_\alpha(E) > 0$ (pour $\alpha \in \big(0,1\big)$), alors E est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. Puis, nous montrons que ce résultat est optimal et que la α-mesure ne mesure pas convenablement le fait qu'un fermé E soit ou non un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$.

Les ensembles d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$ ont été beaucoup étudiés par le passé. Les résultats sont souvent énoncés dans les classes de Gevrey $A_{M,Q}(\alpha)$, où M et Q sont des constantes positives et $A_{M,Q}(\alpha)$ l'espace des fonctions F dans $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ telles que pour tout

$n \geq 0$,

$$\left|F^{(n)}(z)\right| \leq MQ^n n!\, n^{\frac{1}{\alpha}n} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Grâce au lemme 6.2.1, les résultats évoqués ci-dessus se transposent dans les algèbres de fonctions $A_\omega^+(\mathbb{T})$. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$ et $\alpha \in (0,1)$, on note (C_α) la condition

$$\int_0^{2\pi} d(e^{it}, E)^{-\alpha}\mathrm{d}t = +\infty \qquad (C_\alpha).$$

L. Carleson a montré dans [9] (théorème 2) que si E est parfait et vérifie la condition $(\mathrm{C}_{1-\alpha})$, alors E est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$ (pour n'importe quelle constante $C > 0$). D'autres auteurs se sont alors intéressés à la réciproque. A.-M. Chollet a montré dans [10] que s'il existe une constante $C > 0$ telle que E est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\frac{2\alpha}{1+\alpha},C}}(\mathbb{T})$, alors E vérifie la condition $(\mathrm{C}_{1-\alpha})$. D'autres résultats sur ce sujet ont été établis par S. V. Khruschev dans [27] et par E. M. Dyn'kin et S. V. Khruschev dans [11].

6.2 Ensembles d'unicité pour certaines algèbres $A_\omega^+(\mathbb{T})$

Nous avons le lemme suivant qui fait le lien entre les algèbres $A_\omega^+(\mathbb{T})$ et les classes de Gevrey $A_{M,Q}(\alpha)$.

Lemme 6.2.1. *Soit* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.
1) Soit $C > 0$. *On définit* ω *par*

$$\omega(n) = e^{Cn^\alpha} \quad (n \geq 0).$$

Si $F \in A_\omega^+(\mathbb{T})$, *alors* $F \in A_{M,Q}\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)$ *pour une certaine constante* $M > 0$ *et* $Q = e^{\frac{1}{\alpha}\left(\log\frac{1}{C\alpha} - (1-\alpha)\right)}$.
2) Soient M *et* Q *des constantes positives et* $F \in A_{M,Q}\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)$. *Alors* $F \in A_\omega^+(\mathbb{T})$, *où* ω *est défini par*

$$\omega(n) = e^{Cn^\alpha} \quad (n \geq 0),$$

avec $C < \dfrac{1}{\alpha Q^\alpha e^{1-\alpha}}$.

Démonstration. Il existe des constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que pour tout $n \geq 1$,

$$K_1\sqrt{n}e^{-n}n^n \leq n! \leq K_2\sqrt{n}e^{-n}n^n. \tag{6.1}$$

1) Pour tout $n \geq 1$, on a $F^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{k!}{(k-n)!}\widehat{F}(k)z^{k-n}$ $(z \in \mathbb{D})$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\left\|F^{(n)}\right\|_\infty &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!\,\omega(k)}\left|\widehat{F}(k)\right|\omega(k) \\
&\leq \left\|F\right\|_\omega \sup_{k\geq n} \frac{k!}{(k-n)!\,\omega(k)} \\
&\leq n!\left\|F\right\|_\omega \sup_{k\geq n} \frac{k!}{(k-n)!\,n!\,\omega(k)}.
\end{aligned}$$

On déduit alors de (6.1) qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\|F^{(n)}\|_\infty \leq Kn! \, \|F\|_\omega \sup_{k \geq n} e^{f_n(k)} = Kn! \, \|F\|_\omega e^{\sup_{k\geq n} f_n(k)}, \tag{6.2}$$

où, pour $x \geq n$, $f_n(x) = x \log x - (x-n)\log(x-n) - n\log n - Cx^\alpha$. On a, pour tout $x > n$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{x-n}^{x} \big(\log t + 1 - \log n - C\frac{x^\alpha}{n}\big)\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{x-n}^{x} h_n(t)\mathrm{d}t \\ &\leq n \sup_{t>0} h_n(t), \end{aligned} \tag{6.3}$$

où, pour $t > 0$, $h_n(t) = \log t + 1 - \log n - C\dfrac{t^\alpha}{n}$. On a, pour tout $t > 0$, $h_n'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\alpha C}{n} t^{\alpha-1}$ et

$$h_n'(t) = 0 \iff t = \Big(\frac{n}{\alpha C}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

De plus,

$$\sup_{t>0} h_n(t) = h_n\bigg(\Big(\frac{n}{\alpha C}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\bigg) = \frac{1}{\alpha}\log\frac{n}{\alpha C} + 1 - \log n - \frac{1}{\alpha}. \tag{6.4}$$

On déduit alors de (6.2), (6.3) et (6.4) qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|F^{(n)}\|_\infty \leq M\Big(e^{\frac{1}{\alpha}\big(\log\frac{1}{C\alpha} - (1-\alpha)\big)}\Big)^n n! \, n^{\frac{1-\alpha}{\alpha}n},$$

ce qui prouve 1).
2) Soit $n \geq 1$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$\frac{n!}{(n-k)!}\widehat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F^{(k)}(e^{i\theta})e^{-i(n-k)\theta}\mathrm{d}\theta.$$

Donc pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$\big|\widehat{F}(n)\big| \leq M\frac{(n-k)!\,k!}{n!}Q^k k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}k}$$

On déduit de (6.1) qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\big|\widehat{F}(n)\big| \leq K\sqrt{n}\inf_{0\leq k\leq n} e^{f_n(k)} = K\sqrt{n}\, e^{\inf_{0\leq k\leq n} f_n(k)}, \tag{6.5}$$

où, pour $0 \leq x \leq n$, $f_n(x) = x\log x + (n-x)\log(n-x) - n\log n + x\log Q + \frac{1-\alpha}{\alpha}x\log x$. On a, pour tout $0 < x < n$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{\alpha}\log x - \log(n-x) + \log Q + \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$. Une simple étude de fonction permet de montrer que f_n' est strictement croissante sur l'intervalle $]0,n[$ et qu'elle s'y annule une seule fois en un point x_n. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_n'(x_n) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha}\log x_n - \log\Big(n - x_n\Big) + \log Q + \frac{1-\alpha}{\alpha} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_n = \Big(\frac{n - x_n}{Qe^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\Big)^{\alpha}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, $\inf\limits_{0\leq x\leq n} f_n(x) = f_n(x_n)$. Comme $\alpha < 1$, on déduit de (6.6) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 0$. En observant que $(1-x)^\alpha = 1 - O(x)\,(x \to 0)$, on déduit de (6.6) que, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = \Big(\frac{n}{Qe^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\Big)^{\alpha}\Big(1 + O\big(\frac{x_n}{n}\big)\Big).$$

On en déduit d'abord que $x_n \sim \Big(\frac{n}{Qe^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\Big)^{\alpha}$ $(n \to +\infty)$, puis, comme $\alpha \in \big(0, \frac{1}{2}\big]$, que

$$\begin{aligned} x_n &= \Big(\frac{n}{Qe^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\Big)^{\alpha} + O(n^{2\alpha-1}),\ n \to +\infty \\ &= \Big(\frac{n}{Qe^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\Big)^{\alpha} + O(1),\ n \to +\infty. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Pour tout $n \geq 1$, on note alors $k_n = [x_n]$, $[x_n]$ désignant la partie entière de x_n. On a $\inf\limits_{0\leq k\leq n} f_n(k) \leq f_n(k_n)$. On a également

$$f_n(k_n) = k_n\Big(\frac{1}{\alpha}\log k_n - \log(n-k_n) + \log Q\Big) + n\log(n-k_n) - n\log n \tag{6.8}$$

Comme la fonction $x \to \frac{1}{\alpha}\log x - \log(n-x) + \log Q$ est croissante sur $]0,n[$, on déduit de (6.8) et de (6.6)que

$$\begin{aligned} f_n(k_n) &\leq k_n\Big(\frac{1}{\alpha}\log x_n - \log(n-x_n) + \log Q\Big) + n\log(n-k_n) - n\log n \\ &= -\frac{1-\alpha}{\alpha}k_n + n\log(n-k_n) - n\log n \\ &= -\frac{1}{\alpha}k_n + k_n + n\log\Big(1 - \frac{k_n}{n}\Big) \\ &= -\frac{1}{\alpha}k_n + O\Big(\frac{k_n^2}{n}\Big),\ n \to +\infty \end{aligned} \tag{6.9}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et que $k_n = [x(n)]$, on a $k_n \sim x_n$, $n \to +\infty$. Par conséquent, on déduit de (6.9) et de (6.7) que

$$f_n(k_n) \leq -\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{n}{Qe^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\Big)^{\alpha} + O(1),\ n \to +\infty \tag{6.10}$$

On déduit donc de (6.5) et de (6.10) qu'il existe une constante $M > 0$ such that

$$\left|\widehat{F}(n)\right| \leq M\sqrt{n}e^{-\frac{1}{\alpha Q^\alpha e^{1-\alpha}}n^\alpha}$$

ce qui prouve 2). $\square$

Pour E un fermé de $\mathbb{T}$, on notera souvent $\left(I_n\right)_{n\geq 0}$ la suite des arcs complémentaires de E. Cela signifie que $\mathbb{T}\backslash E = \bigcup\limits_{n\geq 0} I_n$, avec I_n des arcs ouverts deux à deux disjoints. La proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un fermé E vérifie la condition (C_α). Elle s'inspire des résultats obtenus par L. Carleson dans [9] dans le cas des ensembles vérifiant la condition de Carleson.

Proposition 6.2.2. *Soit $\alpha \in (0,1)$ et E un fermé de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue $|E|$ nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d(e^{it}, E)^{-\alpha}\mathrm{d}t < +\infty$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |I_n|^{1-\alpha} < +\infty$, *où $|I_n|$ désigne la longueur de l'arc I_n.*

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\phi(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t < +\infty$, *où* $\phi(t) = \sum\limits_{|I_n|\leq t} |I_n|$ *pour $t \geq 0$.*

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{|E_t|}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t < +\infty$, *où* $E_t = \left\{z \in \mathbb{T} : d(z,E) \leq t\right\}$ *et $|E_t|$ désigne la mesure de Lebesgue de E_t.*

Démonstration. $(i) \iff (ii)$ Pour chaque $n \geq 0$, on note e^{ia_n} et e^{ib_n} les extrémités de l'arc I_n (avec $0 \leq a_n \leq b_n < 2\pi$). Comme $|E| = 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d(e^{it}, E)^{-\alpha}\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_{a_n}^{\frac{a_n+b_n}{2}} (t-a_n)^{-\alpha}\mathrm{d}t + \int_{\frac{a_n+b_n}{2}}^{b_n} (b_n - t)^{-\alpha}\mathrm{d}t\Big)\\ &= \frac{2^\alpha}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}|I_n|^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Ceci montre que $(i) \iff (ii)$.
$(ii) \iff (iii)$ Enumérons les longueurs prises par les arcs I_n en une suite strictement décroissante $\left(t_j\right)_{j\geq 0}$. La fonction ϕ est une fonction en escalier constante sur chaque intervalle $[t_{j+1}, t_j[$ $(j \geq 0)$. Lorsque (ii) ou (iii) sont vérifiées, on montre facilement que

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n^{-\alpha}\phi(t_n) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_0} \frac{\phi(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t &= \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t_{j+1}}^{t_j} \frac{\phi(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\phi(t_{j+1})\int_{t_{j+1}}^{t_j} t^{-\alpha-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(t_{j+1}^{-\alpha}-t_j^{-\alpha}\right)\phi(t_{j+1}) \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\big(\phi(t_j)-\phi(t_{j+1})\big)\,t_j^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha}t_0^{-\alpha}\phi(t_0).
\end{aligned}$$

Or pour tout $j\geq 0$, $\phi(t_j)-\phi(t_{j+1}) = \sum\limits_{I_n\colon |I_n|=t_j} t_j$ et $\phi(t_0)=2\pi$. On a donc

$$\int_0^{t_0} \frac{\phi(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}|I_n|^{1-\alpha} - \frac{2\pi}{\alpha}t_0^{-\alpha}.$$

Ceci montre que $(ii) \iff (iii)$.
$(iii) \iff (iv)$ On a clairement $\phi(t)\leq |E_t|$, pour tout $t\geq 0$, ce qui prouve que $(iv)\Rightarrow(iii)$. D'autre part, pour tout $t\in[0,2\pi]$, on a

$$\begin{aligned}
|E_t| &= \phi(2t) + \sum_{n\geq 2}\ \sum_{I_\nu\colon 2^{n-1}t<|I_\nu|\leq 2^n t} 2t \\
&\leq \phi(2t) + \sum_{n\geq 2}\ \sum_{I_\nu\colon 2^{n-1}t<|I_\nu|\leq 2^n t} \frac{|I_\nu|}{2^{n-2}} \\
&\leq \sum_{n\geq 1\colon 2^{n-1}t\leq 2\pi} \frac{\phi(2^n t)}{2^{n-2}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\phi(2^n t)}{2^{n-2}}\,\chi_{[0,\frac{\pi}{2^{n-2}}]},
\end{aligned}$$

où $\chi_{[a,b]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$. On a donc

$$\int_0^1 \frac{|E_t|}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2^{n-2}}}\frac{\phi(2^n t)}{2^{n-2}t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$$

On effectue alors le changement de variable $t\mapsto 2^{-n}t$ dans le n$^{\text{ième}}$ terme de la somme. On obtient

$$\int_0^1 \frac{|E_t|}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \leq 4\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-n(1-\alpha)}\Big)\int_0^{4\pi}\frac{\phi(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t,$$

ce qui prouve que $(iii)\Rightarrow(iv)$. $\square$

Proposition 6.2.3. *Soit* $\alpha \in (0,1)$ *et* E *un fermé de* $\mathbb{T}$ *tel que* $H_\alpha(E) > 0$. *Alors* E *vérifie la condition* ($\mathrm{C}_{1-\alpha}$).

Démonstration. D'après la proposition précédente, il s'agit de montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{|E_t|}{t^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}t = +\infty. \tag{6.11}$$

Puisque $H_\alpha(E) > 0$, on déduit du lemme p.27 de [24] que $\inf \sum_{j\geq 0} |\Delta_j|^\alpha = m > 0$, où l'infimum porte sur les recouvrements au plus dénombrables $\left(\Delta_j\right)_{j\geq 0}$ de E par des arcs. Soit $t > 0$, E_t est une réunion finie d'arcs $\left(\Delta_j\right)_{0\leq j\leq n(t)}$ tels que $|\Delta_j| \geq 2t$. On a alors

$$\begin{aligned} |E_t| &= \sum_{j=0}^{n(t)} |\Delta_j| = \sum_{j=0}^{n(t)} |\Delta_j|^{1-\alpha}|\Delta_j|^\alpha \\ &\geq (2t)^{1-\alpha}\sum_{j=0}^{n(t)} |\Delta_j|^\alpha \\ &\geq m(2t)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

On déduit alors de (6.12) que la condition (6.11) est réalisée, ce qui achève cette démonstration. □

Nous rappelons le théorème 2 de [9] que nous énonçons sous la forme suivante :

Théorème 6.2.4. ([9]) *Soit* $\alpha \in (0,1)$ *et* E *un parfait de* $\mathbb{T}$ *qui vérifie la condition* ($\mathrm{C}_{1-\alpha}$). *Alors, pour toute constante* $C > 0$, E *est un ensemble d'unicité pour* $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$.

Nous avons alors le théorème suivant, qui est une conséquence de ce résultat et de la proposition 6.2.3 :

Théorème 6.2.5. *Soit* $\alpha \in (0,1)$ *et* E *un fermé de* $\mathbb{T}$ *tel que* $H_\alpha(E) > 0$. *Alors, pour toute constante* $C > 0$, E *est un ensemble d'unicité pour* $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$, *où* $\omega_{\alpha,C}$ *est la suite définie par*

$$\omega_{\alpha,C}(n) = e^{Cn^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}}.$$

Démonstration. E est un fermé de $\mathbb{T}$, donc peut s'écrire comme union disjointe $E = E_1 \cup E_2$, avec E_1 un ensemble parfait et E_2 un ensemble dénombrable (voir [20], theorem 6.66 p.72). On a alors

$$H_\alpha(E) \leq H_\alpha(E_1) + H_\alpha(E_2).$$

Or E_2 étant au plus dénombrable, $H_\alpha(E_2) = 0$, et donc $H_\alpha(E_1) > 0$. D'après la proposition 6.2.3, E_1 vérifie la condition ($\mathrm{C}_{1-\alpha}$). Le théorème 6.2.4 montre alors que E_1 est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. Par conséquent, E est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. □

Nous allons maintenant montrer que la condition $H_\alpha(E) > 0$ n'est pas nécessaire pour que E soit un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. Nous allons voir en effet que lorsque $H_\beta(E) > 0$ pour un certain $\beta < \alpha$, alors E peut être ou non un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$, et les deux éventualités sont possibles.

Soit $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Le parfait symétrique E_ξ est de dimension de Hausdorff $dim_H(E_\xi) = \dfrac{\log 2}{\log \frac{1}{\xi}}$ (voir [24] p.27).

Lemme 6.2.6. *Soit $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Soit $\alpha \geq 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\alpha < 1 - \dfrac{\log 2}{\log \frac{1}{\xi}}$.
(ii) Il existe une constante $K_\alpha > 0$ telle que

$$\int_I d(e^{it}, E_\xi)^{-\alpha} dt \quad \leq \quad K_\alpha |I|^{1-\alpha} \tag{6.13}$$

pour tout arc I de $\mathbb{T}$.

Démonstration. En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve de la proposition 6.2.2 pour montrer $(i) \iff (ii)$, on montre que l'assertion (ii) de ce lemme est équivalente à la suivante :
(ii') Il existe une constante $K_\alpha > 0$ telle que

$$\sum_{I_n \subset I} |I_n|^{1-\alpha} \quad \leq \quad K_\alpha |I|^{1-\alpha} \tag{6.14}$$

pour tout arc I de $\mathbb{T}$, où $(I_n)_{n\geq 0}$ désigne la suite des arcs complémentaires de E. Il s'agit donc de montrer que $(ii') \iff (i)$.
$(i) \Rightarrow (ii')$ Soit $\alpha < 1 - \dfrac{\log 2}{\log \frac{1}{\xi}}$. Comme on va le voir au cours de cette démonstration, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |I_n|^{1-\alpha} < +\infty$. Il suffit donc de montrer (6.14) pour tout arc I de $\mathbb{T}$ tel que $|I| < 2\pi(1-2\xi)$. Soit I un arc de $\mathbb{T}$ et p un entier positif tel que $|I| \in \left[2\pi(1-2\xi)\xi^{p+1}, 2\pi(1-2\xi)\xi^p\right[$. Soit $n \geq p+1$, nous allons montrer que, compte-tenu de la construction de E_ξ, I contient au plus $2^{n-(p+1)}$ arcs complémentaires de longueur $2\pi(1-2\xi)\xi^n$. Nous rappelons cette construction. On pose $F_0 = [0, 1]$. On retire au milieu de F_0 un intervalle ouvert de longueur $1-2\xi$. Il reste alors deux intervalles fermés de longueur ξ. Puis, on enlève, au milieu de ces deux intervalles restant, un intervalle ouvert de longueur $(1-2\xi)\xi$. Et ainsi de suite. Après la m$^{\text{ème}}$ étape, il reste un intervalle fermé F_m qui est obtenu en ayant retiré au milieu de chacun des 2^{m-1} intervalles constituant F_{m-1} un intervalle ouvert de longueur $(1-2\xi)\xi^{m-1}$. F_m est l'union de 2^m intervalles fermés de longueur ξ^m. On pose alors $F = \bigcap\limits_{m\geq 0} F_m$ et les intervalles ouverts retiré à F_0 lors de l'une des étapes de la construction sont appelés les intervalles complémentaires de F. On pose alors $E_\xi = e^{2i\pi F}$ et les arcs complémentaires de

E_ξ sont alors les arcs ouverts de la forme $e^{2i\pi J}$, où J est un intervalle complémentaire de F. En particulier, F_{p+1} est l'union de 2^{p+1} intervalles fermés de longueur ξ^{p+1} distants au minimum d'une longueur égale à $(1-2\xi)\xi^p$ (longueur minimale des intervalles ouverts qui les séparent et qui sont les intervalles retirés aux étapes précédentes). De plus, chacun de ces intervalles fermés contient exactement $2^{n-(p+1)}$ intervalles complémentaires de longueur $(1-2\xi)\xi^n$. Ainsi, si J est un intervalle de $[0,1]$ qui contient strictement plus de $2^{n-(p+1)}$ intervalles complémentaires, alors J contient également un intervalle complémentaire de longueur supérieure ou égale à $(1-2\xi)\xi^p$. Comme $|I| \in \big[2\pi(1-2\xi)\xi^{p+1}, 2\pi(1-2\xi)\xi^p\big[$, il découle de ceci que, si $n \geq p+1$, I contient au plus $2^{n-(p+1)}$ arcs complémentaires de longueur $2\pi(1-2\xi)\xi^n$. De plus, pour tout $n \leq p$, I ne contient aucun arc complémentaire de longueur $(1-2\xi)\xi^n$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{I_n \subset I} |I_n|^{1-\alpha} &\leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} 2^{n-(p+1)}\big[2\pi(1-2\xi)\xi^n\big]^{1-\alpha} \\ &\leq \big[2\pi(1-2\xi)\xi^{p+1}\big]^{1-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n\xi^{n(1-\alpha)} \qquad (6.15)\\ &\leq \frac{1}{1-(2\xi)^{1-\alpha}}|I|^{1-\alpha}. \qquad (6.16)\end{aligned}$$

Ainsi on déduit de (6.16) que (6.14) est satisfait.
$(ii') \Rightarrow (i)$ La famille $(I_n)_{n\geq 0}$ des arcs complémentaires de E est constituée des arcs ouverts que l'on retire à chaque étape de la construction que l'on a explicitée plus haut. $(I_n)_{n\geq 0}$ est donc une réunion sur $n \geq 0$ de 2^n arcs ouverts de longueur $2\pi(1-2\xi)\xi^n$. Par conséquent, on déduit de (ii') que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |I_n|^{1-\alpha} = \Big(2\pi(1-2\xi)\Big)^{1-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n\xi^{(1-\alpha)n} \leq K_\alpha(2\pi)^{1-\alpha},$$

ce qui entraîne que $2\xi^{1-\alpha} < 1$, soit $\alpha < 1 - dim_H(E_\xi)$. □

On a le résultat suivant, qui découle aisément d'un résultat de E. M. Dyn'kin et S. V. Khrushchev.

Théorème 6.2.7. ([11]) *Soit $\alpha \in (0,1)$. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$ tel qu'il existe $C_\alpha > 0$ satisfaisant*

$$\int_I d(e^{it}, E)^{-\alpha} dt \leq C_\alpha |I|^{1-\alpha} \text{ pour tout arc } I \text{ de } \mathbb{T}. \qquad (6.17)$$

Alors il existe une constante $C > 0$ et une fonction F non nulle dans $A^+_{\omega_{1-\alpha,C}}(\mathbb{T})$ qui s'annule sur E.

Démonstration. D'après le théorème 7 de [11], il existe des constantes $M, Q > 0$, un entier $k > 0$ et une fonction F dans $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$\left|F^{(n)}(z)\right| \leq MQ^n n! M_{n+k} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

où
$$M_n = \sup_{r>0} e^{-r^{-\alpha}} r^{-n} = \Big(e^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\Big)^n n^{\frac{n}{\alpha}} \quad (n \geq 0).$$
Il est alors facile de voir qu'il existe des constantes $M', Q' > 0$ telles que, pour tout $n \geq 0$,
$$\big|F^{(n)}(z)\big| \leq M' Q'^n n!\, n^{\frac{1}{\alpha}n} \quad (z \in \mathbb{D}).$$
On conclut alors en utilisant le lemme 6.2.1. □

Nous avons alors le résultat suivant, qui montre que la dimension de Hausdorff d'un ensemble ne suffit pas à décider si cet ensemble est ou n'est pas un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$.

Proposition 6.2.8. *Soit $\alpha \in (0,1)$ et $0 < \beta < \alpha$. Pour $C > 0$, on définit $\omega_{\alpha,C}$ par*
$$\omega_{\alpha,C}(n) = e^{Cn^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}}.$$
1) Il existe $C > 0$ et un fermé E_1 de $\mathbb{T}$ tel que $H_\beta(E_1) > 0$ et pour lequel on peut trouver une fonction F dans $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$ (pour une certaine constante $C > 0$) qui s'annule, avec toutes ses dérivées, sur E_1.
2) Il existe un fermé E_2 de $\mathbb{T}$ tel que $H_\beta(E_2) > 0$ et tel que E_2 est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$, pour tout $C > 0$. De plus, E_2 satisfait $H_\alpha(E_2) = 0$.

Démonstration. 1) Soit $\xi \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ tel que $dim_H(E_\xi) = \beta$. Posons $E_1 = E_\xi$. Alors $H_\beta(E_1) > 0$ (voir [24] p.26). De plus, on déduit du lemme 6.2.6 et du théorème 6.2.7 qu'il existe une constante $C > 0$ et une fonction F dans $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$ non nulle qui s'annule sur E_1.
2) On pose $\delta = 2^{-\frac{1}{\alpha}}$ et on définit la suite $\big(b_n\big)_{n\geq 1}$ par
$$b_n = C\frac{1}{n}\delta^n \quad (n \geq 1),$$
où $C > 0$ est choisie de telle sorte que $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} b_n = 2\pi$. On considère alors le parfait symétrique à rapport non constant G obtenu comme dans la preuve du lemme 5.2.4 à partir de la suite $\big(b_n\big)_{n\geq 1}$. On reprend alors les mêmes notations que dans la preuve de ce lemme. $F_0 = [0, 2\pi]$ et F_n est l'union de 2^n intervalles fermés de longueur l_n avec $l_n = \frac{1}{2^n}(2\pi - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} b_k)$. Si $F = \bigcap_{n\geq 0} F_n$, alors $G = e^{iF}$ et la famille de ses arcs complémentaires est une réunion sur $n \geq 1$ de 2^{n-1} arcs ouverts de longueur b_n. On a alors
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} b_n^\alpha &= C^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} \Big(\frac{1}{n}\delta^n\Big)^\alpha \\ &= \frac{C^\alpha}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n}\Big)^\alpha = +\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent, grâce à la proposition 6.2.2, G vérifie la condition ($\mathrm{C}_{1-\alpha}$). Le théorème 6.2.4 montre alors que G est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. Par conséquent, si on pose $E_2 = E_\xi \cup G$, avec $\dfrac{\log 2}{\log \frac{1}{\xi}} = \beta$, E_2 est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$. On a d'une part $H_\beta(E_2) \geq H_\beta(E_1) > 0$ et d'autre part

$$H_\alpha(E_2) \;\leq\; H_\alpha(E_1) + H_\alpha(G) = H_\alpha(G). \tag{6.18}$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose $G_n = e^{iF_n}$. G_n est donc l'union de 2^n arcs fermés de longueur l_n avec $l_n = \dfrac{1}{2^n}(2\pi - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} b_k)$. Comme pour tout $n \geq 1$, $G \subset G_n$, on a

$$K_r(G) \leq K_r(G_n),$$

ceci pour n'importe quel $r > 0$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} K_{l_n}(G) &\leq K_{l_n}(G_n) \\ &\leq 2^n l_n^\alpha. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{1}{2^n}(2\pi - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} b_k) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{k-1} b_k \\ &= \frac{C}{2^n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{k-1} \frac{\delta^k}{k} \\ &= \frac{C}{2^n} \int_0^\delta \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{k-1} t^{k-1} \mathrm{d}t \\ &= \frac{C}{2^n} \int_0^\delta \frac{(2t)^n}{1-2t} \mathrm{d}t \;=\; C \int_0^\delta \frac{t^n}{1-2t} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} l_n &\leq \frac{C}{1-2\delta} \int_0^\delta t^n \mathrm{d}t \\ &= \frac{C}{1-2\delta} . \frac{\delta^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit de 6.19 que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} K_{l_n}(G) &\leq 2^n \Big(\frac{C}{1-2\delta} . \frac{\delta^n}{n+1} \Big)^\alpha \\ &= \Big(\frac{C}{1-2\delta} \Big)^\alpha \frac{1}{(n+1)^\alpha}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = 0$, on déduit de (6.20) que $H_\alpha(G) = 0$. Finalement, on déduit de (6.18) que $H_\alpha(E_2) = 0$.

□

Nous avons enfin la proposition suivante qui découle immédiatement du théorème 6.2.5 et de la proposition 6.2.8.

Proposition 6.2.9. *Soit $\alpha \in (0,1)$. On a les propriétés suivantes :*
1) Soit E un fermé de $\mathbb{T}$ tel que $dim_H(E) > \alpha$. Alors E est un ensemble d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$, où $\omega_{\alpha,C}$ est défini dans le théorème 6.2.5.
2) Pour tout $0 < \beta < \alpha$, il existe une constante $C > 0$ et un fermé E_1 tel que $dim_H(E_1) = \beta$ et tel que E_1 n'est pas d'unicité pour $A^+_{\omega_{\alpha,C}}(\mathbb{T})$.

Démonstration. 1) Si $dim_H(E) > \alpha$, alors, par définition de la dimension de Hausdorff, on a $H_\alpha(E) = +\infty$. On conclut alors grâce au théorème 6.2.5.
2) Comme pour la preuve du 1) de la proposition 6.2.8, on prend $E_1 = E_\xi$ avec $\xi = 2^{-\frac{1}{\beta}}$. On conclut alors de la même façon à l'aide du théorème 6.2.7 et du lemme 6.2.6.

□

Bibliographie

[1] C. Agrafeuil, *Idéaux fermés de certaines algèbres de Beurling et application aux opérateurs à spectre dénombrable*, à paraître dans Studia Math..

[2] C. Agrafeuil, *On the growth of powers of operators with spectrum contained in Cantor sets*, à paraître dans Indiana Univ. Math. J..

[3] H. Alexander, B. A. Taylor and D. L. Williams, *The interpolating sets for $\mathcal{A}^\infty$*, J. Math. Anal. Appl. **36** (1971), 556-566.

[4] A. Atzmon, *Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces*, Acta Math. **144** (1980), 27-63.

[5] A. Atzmon, *Boundary values of absolutely convergent Taylor series*, Annals of Math. **111** (1980), 231-237.

[6] C. Bennett and J. E. Gilbert, *Homogeneous algebras on the circle : I-Ideals of analytic functions*, Ann. Inst. Fourier, **22** (1972), 1-19.

[7] N. Bourbaki, *"Eléments de mathématique. Espaces vectoriels topologiques ch. 1 à 5"*, Masson, 1981.

[8] J. Bruna, *Les ensembles d'interpolation pour les $\mathfrak{a}^p(\mathbb{D})$*, C. R. Acad. Sci. Paris (A), **290** (1980), 25-27.

[9] L. Carleson, *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle*, Acta. Math. **87** (1952), 325-345.

[10] A.-M. Chollet, *Zéros dans les classes de Gevrey de type analytique*, Bull. Sci. Math., II. Ser. **96** (1972), 65-82.

[11] E. M. Dyn'kin and S. V. Khrushchev, *Interpolation by analytic functions smooth up to the boundary*, J. Soviet. Math. **14** (1980), 1066-1077.

[12] E. M. Dyn'kin, *Free interpolation set for Hölder classes*, Mat. Sbornik, **109** (1979), 107-128.

[13] O. El-Fallah et K. Kellay, *Sous-espaces biinvariants pour certains shifts pondérés*, Ann. Inst. Fourier **48** (1998), no. 5, 1543-1558.

[14] J. Esterle, *Distributions on Kronecker sets, strong forms of uniqueness, and closed ideals of A^+*, J. reine angew. Math. **450** (1994), 43-82.

[15] J. Esterle, *Uniqueness, strong form of uniqueness and negative powers of contractions*, Banach Center Publ. **30** (1994), 1-19.

[16] J. Esterle, M. Rajoelina and M. Zarrabi, *On contractions with spectrum contained in Cantor set*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **117** (1995), 339-343.

[17] J. Esterle, E. Strouse and F. Zouakia, *Theorems of Katznelson-Tzafriri type for contractions*, J. Func. Anal. (2) **94** (1990), 273-287.

[18] J. Esterle, E. Strouse and F. Zouakia, *Closed ideals of A^+ and the Cantor set*, J. reine angew. Math. **94** (1994), 65-79.

[19] C. S. Herz, *Spectral synthesis for the Cantor set*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 42-43.

[20] E. Hewitt and K. Stromberg, *"Real and abstract analysis, a modern treatment of the theory of functions of a real variable"*, Springer Verlag, 1965.

[21] K. Hoffman, *"Banach spaces of analytic functions"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.

[22] J. P. Kahane, *"Séries de Fourier absolument convergentes"*, Erg. Math. **336**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[23] J. P. Kahane, *Idéaux fermés dans certaines algèbres de fonctions analytiques*, Acte Table Ronde Inst. C.N.R.S. Montpellier, Lect. Notes Math. **336**, Springer Verlag (1973), 5-14.

[24] J. P. Kahane, R. Salem, *"Ensembles parfaits et séries trigonométriques"*, Paris, Hermann, 1963.

[25] Y. Katznelson, *"An introduction to harmonic analysis"*, John Wiley ans Sons, 1968.

[26] K. Kellay, *Contractions et hyperdistributions à spectre de Carleson*, J. London Math. Soc. (2) **58** (1998), 185-196.

[27] S. V. Hruscev, *Sets of uniqueness for the Gevrey classes*, Ark. Mat.**15** (1977), 253-304.

[28] B. I. Korenblyum, *Closed ideals in the ring $\mathcal{A}^n$*, J. Func. Anal. Appl. **6** (1972), 203-214.

[29] A. M. Kotocigov, *Interpolation by analytic functions smooth up to the boundary*, Zap. Naucn. Sem. Leningrad Otdel. Math. Inst. Steklov. (LOMI) **30** (1972), 167-169 ; English transl. in J. Soviet. Math. **4** (1975).

[30] A. L. Matheson, *Closed ideals in rings of analytic functions satisfying a Lipschitz condition*, Lect. Notes Math. **604** Springer-Verlag (1976), 67-72.

[31] B. Sz. Nagy and C. Foias, *"Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert"*, Akademiai Kiado, Budapest, 1967.

[32] W. Rudin, *Boundary values of continuous analytic functions*, Proc. of Amer. Math. Soc. **7** (1956), 808-811.

[33] W. Rudin, *The closed ideals in an algebra of analytic functions*, Can. J. Math. **9** (1957), 426-434.

[34] F. A. Shamoyan, *Closed ideals in algebras of functions analytic in the disc and smooth up to its boundary*, Mat. Sbornik **79** (1994), 425-445.

[35] B. A. Taylor and D. L. Williams, *Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values*, Canad. J. Math. **22** (1970), 1266-1283.

[36] B. A. Taylor and D. L. Williams, *Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc*, Mich. Math. J. **18** (1971), 129-139.

[37] B. A. Taylor and D. L. Williams, *Boundary zero sets of $\mathcal{A}^\infty$ functions satisfying growth conditions*, Proc. of Amer. Math. Soc. (1) **35** (1972), 155-160.

[38] H. Whitney, *On ideals of differentiable functions*, Amer. J. Math. **70** (1948), 635-658.

[39] M. Zarrabi, *Synthèse spectrale dans certaines algèbres de Beurling sur le cercle unité*, Bull. Soc. Math. France (2) **118** (1990), 241-249.

[40] M. Zarrabi, *Contractions à spectre dénombrable et propriété d'unicité des fermés dénombrables du cercle unité*, Ann. Inst. Fourier (1) **43** (1993), 251-263.

[41] M. Zarrabi, *Spectral synthesis and applications to $\mathcal{C}_0$-groups*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **60** (1996), 128-142.

Résumé: Dans la première partie, nous nous intéressons à des opérateurs dont le spectre est inclus dans le cercle unité $\mathbb{T}$. Nous obtenons des résultats concernant certaines propriétés de croissance des normes $\|T^{-n}\|\,(n \geq 0)$ pour des opérateurs T dont le spectre est dénombrable ou vérifie certaines conditions géométriques. Pour obtenir ces résultats, nous sommes amenés à travailler dans les espaces de fonctions

$$A_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \text{ continue sur } \mathbb{T} : \; \|f\|_\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \Big\},$$

où $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels strictement positifs, et $\widehat{f}(n)$ désigne le $\text{n}^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f. Lorsque la suite $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids, $\big(A_\omega(\mathbb{T}), \|\,\|_\omega\big)$ est une algèbre de Banach. Nous obtenons alors la caractérisation de certains idéaux fermés de $A_\omega(\mathbb{T})$ pour une famille de poids.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons à des fermés de $\mathbb{T}$ qui sont (ou non) des ensembles d'unicité pour des espaces $A^+_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) \; : \; \widehat{f}(n) = 0 \quad (n < 0) \Big\}$, où $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels strictement positifs. Un fermé E de $\mathbb{T}$ étant d'unicité pour un espace X de fonctions continues sur $\mathbb{T}$, si la seule fonction dans X s'annulant sur E est la fonction nulle. Plus précisément, nous étudions le lien qu'il y a entre le fait qu'un fermé de $\mathbb{T}$ satisfait une condition géométrique donnée et le fait qu'il soit ou non un ensemble d'unicité pour $A^+_\omega(\mathbb{T})$.

Abstract: In the first part, we study operators with spectrum included in the unit circle $\mathbb{T}$. We obtain results concerning growth of $\|T^{-n}\|\,(n \geq 0)$ for operators T with countable spectrum or spectrum satisfying geometric conditions. For this, we need to work in the spaces

$$A_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \text{ continuous on } \mathbb{T} : \; \|f\|_\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \Big\},$$

where $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a sequence of non-negative real numbers, and $\widehat{f}(n)$ denotes the n^{th} Fourier coefficient of f. When $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a weight, $\big(A_\omega(\mathbb{T}), \|\,\|_\omega\big)$ is a Banach algebra. We obtain the characterisation of some closed ideals of $A_\omega(\mathbb{T})$ for a family of weight.

In the second part, we are interested in closed subset of $\mathbb{T}$ which are (or not) sets of uniqueness for $A^+_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) \; : \; \widehat{f}(n) = 0 \quad (n < 0) \Big\}$, where $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a sequence of non-negative real numbers. A closed subset E of $\mathbb{T}$ is said to be a set of uniqueness for X, a space of continuous functions on $\mathbb{T}$, if the zero function is the only function in X that vanishes on X. More precesely, we study the link between the fact that a closed subset of $\mathbb{T}$ satisfies a given geometric condition, and the fact that it is or not a set of uniqueness for $A^+_\omega(\mathbb{T})$.

Mots-clefs: Algèbres de Beurling, opérateurs, idéaux fermés, ensembles d'unicité, ensembles dénombrables, synthèse spectrale, ensembles d'interpolation.